HAL
open science

Dynamique temporelle des oscillateurs paramétriques optiques continus : oscillations multimodes, oscillations en rafales et chaos

Axelle Amon

▶ To cite this version:

Axelle Amon. Dynamique temporelle des oscillateurs paramétriques optiques continus : oscillations multimodes, oscillations en rafales et chaos. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2003. Français. NNT : . tel-00004477

HAL Id: tel-00004477
https://theses.hal.science/tel-00004477

Submitted on 11 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N^0 d'ordre :

Université des Sciences et Technologies de Lille

THÈSE

présentée par

Axelle AMON

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lille 1

Dans la spécialité : Lasers, Molécules et Rayonnement Atmosphérique

DYNAMIQUE TEMPORELLE DES OSCILLATEURS PARAMÉTRIQUES OPTIQUES CONTINUS : OSCILLATIONS MULTIMODES, OSCILLATIONS EN RAFALES ET CHAOS

Soutenue le 25 septembre 2003 devant le jury composé de :

Thomas Erneux	Université Libre de Bruxelles	Rapporteur
Pierre Glorieux	Université de Lille I	Examinateur
Marc Lefranc	Université de Lille I	Directeur de thèse
Agnès Maître	Université Paris VII	Rapporteur
Jaouad Zemmouri	Université de Lille I	Directeur de thèse
Jean-Jacques Zondy	Observatoire de Paris	Examinateur

"It is a capital mistake to theorise before one has data. Insensibly one begins to twist facts to suit theories instead of theories to suit facts."

Sherlock Holmes in *A Scandal in Bohemia*

Arthur Conan Doyle

Remerciements

J'ai effectué ma thèse au laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules dont je remercie le directeur, Jean-Michel Robbe, de m'avoir accueillie pendant ces trois années. Comme tout laboratoire, son fonctionnement repose sur le travail de nombreuses personnes qui ne sont pas citées dans les articles scientifiques et à qui je voudrais exprimer ma gratitude : "l'optique", les secrétariats, les ateliers d'électronique et de mécanique, la reprographie, le magasin et le personnel d'entretien.

Je tiens à remercier plus que tout ceux sans qui ce travail n'aurait pu se faire, l'équipe OPO du laboratoire : Jaouad Zemmouri, Marc Lefranc, Serge Bielawski et Dominique Derozier. Leurs conseils, leur disponibilité et leur soutien ont permis de mener ce projet à terme. Plus particulièrement je voudrais exprimer ma gratitude à Marc pour le temps qu'il m'a consacré, surtout pendant la dernière année de ma thèse (entre autres à relire ce mémoire, mais aussi à m'expliquer la dynamique symbolique ou les outils topologiques appliqués au chaos). Merci à Jaouad qui, malgré la création d'OSYRIS, a toujours été présent lorsque j'ai eu besoin de ses conseils. Je suis d'autre part très reconnaissante à Thomas Erneux et Michel Nizette de m'avoir accueillie plusieurs semaines au Laboratoire d'Optique Nonlinéaire Théorique de l'Université Libre de Bruxelles et de m'avoir expliqué les subtilités d'un développement multi-échelle et de l'utilisation du logiciel AUTO.

Je remercie Agnès Maître, Thomas Erneux, Jean-Jacques Zondy et Pierre Glorieux de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Au cours de ces trois années, j'ai pu avoir des échanges scientifiques extrêmement enrichissants avec de nombreuses personnes à l'intérieur du laboratoire et à l'extérieur lors de conférences ou d'écoles. Je voudrais tout particulièrement citer les pauses café avec Serge Bielawski, les discussions avec Pierre Suret, qui a bien voulu se replonger dans ses souvenirs pour me faire partager sa vision des OPO, Nicolas Joly pour ses nombreux conseils de thésard à thésard et avec qui j'ai partagé la salle de manip pendant deux ans, Jean-Claude Garreau pour ses explications sur la partie quantique des OPO et enfin Andrée De Backer pour nos conversations. Je conserve un excellent souvenir de toutes les discussions que j'ai pu avoir avec Agnès Maître lors de nos différentes rencontres. Je voudrais enfin exprimer ma reconnaissance à tout ceux qui, par leurs discussions et leurs conseils, m'ont aidé pour mes enseignements et ma recherche.

Je n'ai évidemment pas la place ici pour exprimer toute ma gratitude à mon co-bureau préféré pour son soutien moral, ses conseils, les michoko, les cafés et le reste. Son humour et son énergie m'ont permis de surmonter bien des périodes de

découragement. Je remercie aussi Véronique Zehnlé, Bernard Ségard, Thierry Duhoo, Jean-Marie Sauvage, Christophe Szwaj et tout ceux qui “fréquentaient” notre bureau pour m’avoir fréquemment remonter le moral lors des moments difficiles. Merci aussi aux thésards grâce à qui le laboratoire sort de temps en temps de son train-train quotidien (barbecue, bataille de boules de neige, foot...).

Au-delà du travail, je veux remercier de nombreuses personnes, depuis le “groupe des physiciens” : Stéphane Randoux, Pierre Suret, Elise Berrier , Eric Louvergneaux, Cristian Focsa, Andrée De Backer, Bertrand Chazallon, Michaël Ziskind, Hervé Damart... jusqu’aux “matheux de la cave 12 du M3” : Jean-Paul Bonnet, Habiba Kadiri et Pierre-Marie Moyaux en passant par les informaticiens (Vincent Houseaux, Nicolas Jozefowiez...), ceux qui sont partis (Nicolas Joly, Julien Michel, Jean-Christophe Breton, Stéphane Flon), ceux qui viennent d’arriver (Stylian Zanos), et beaucoup d’autres. Grâce à vous tous, entre les parties de billard et quelques pintes de bière, entre les parties de jeu de rôle et les analyses tardives de la dernière séance de cinéma, mes trois années de thèse n’ont pas été uniquement consacrées aux oscillateurs paramétrique optiques, ce qui aurait été dommage. Merci d’abord et surtout pour ces amitiés. Merci d’autre part car grâce à vous, ces années ont été d’une très grande richesse : ce fut un moment de profonde réflexion politique et de nombreux échanges intellectuels, sur le plan scientifique et culturel.

A côté de ces remerciements viennent des excuses à ceux que j’ai par contre peu vu pendant ces trois années bien que Lille ne soit pas si loin de Paris, tout particulièrement ma famille.

Merci enfin à François.

Table des matières

Introduction **13**

1 Généralités **17**
1.1 Principe des oscillateurs paramétriques optiques 18
1.1.1 Génération d'harmoniques 18
1.1.1.a Interaction matière-rayonnement 18
1.1.1.a-i Polarisation du premier ordre 18
1.1.1.a-ii Polarisation du second ordre 20
1.1.1.b Equations de propagation 20
1.1.1.c Accord de phase 21
1.1.1.d Configurations expérimentales 22
1.1.1.d-i Somme de fréquences 22
1.1.1.d-ii Différence de fréquences 22
1.1.1.d-iii Fluorescence paramétrique 23
1.1.2 Cavités 23
1.1.2.a Nécessité d'une cavité 23
1.1.2.b Différentes configurations 24
1.1.2.c Sélection de modes 25
1.1.2.c-i Représentation des peignes 26
1.1.2.c-ii Cluster 27
1.1.2.c-iii Sauts de mode 28
1.2 Modèles dynamiques 30
1.2.1 Modèles champ moyen 30
1.2.1.a Cadre des modèles 30
1.2.1.a-i Approximations 31
1.2.1.a-ii Dérivation quantique du modèle 31
1.2.1.a-iii Validité expérimentale des modèles présentés 32
1.2.1.b Modèle champ-moyen monomode 33
1.2.1.b-i Presentation du modèle 33
1.2.1.b-ii Etude des états stationnaires du modèle . . . 34
1.2.1.c Couplage entre modes transverses 37
1.2.1.c-i Présentation du modèle multimode 37
1.2.1.c-ii Coefficients de couplage 38
1.2.1.c-iii Présentation du modèle bimode 38
1.2.1.c-iv Etude du modèle bimode dégénéré 40

1.2.2 Modèles thermiques 41
1.2.2.a Modèles tenant compte des effets thermiques 41
1.2.2.b Modèle monomode thermique 42
1.2.2.b-i Observations expérimentales 42
1.2.2.b-ii Modélisation 43
1.2.2.c Modèle multimode thermique 45
1.2.2.c-i Observations expérimentales 45
1.2.2.c-ii Modèlisation 46
1.2.3 Modèles spatio-temporels 47
1.2.3.a Dynamique spatio-temporelle 48
1.2.3.b Difficultés expérimentales 48
1.3 Matériel utilisé 49
1.3.1 Le laser de pompe 49
1.3.2 Les cristaux non-linéaires 49
1.3.2.a Le cristal de KTP 49
1.3.2.b Le cristal de $LiNbO_3$ 49
1.3.3 Cavités 50
1.3.3.a Injection de la cavité 50
1.3.3.b Miroirs 50
1.3.4 Détection et acquisition 51
1.3.4.a Détecteurs ponctuels 51
1.3.4.b Barrette CCD 51
1.3.4.c Caméra 51
1.3.4.d Oscilloscope 52
1.3.5 Dispositif expérimental 52

2 Oscillations multimodes transverses 55
2.1 Historique des observations expérimentales d'oscillations rapides 56
2.1.1 Observations expérimentales antérieures 57
2.1.1.a Première observation d'instabilités comportant des oscillations rapides 57
2.1.1.a-i Dispositif expérimental 57
2.1.1.a-ii Observations expérimentales 58
2.1.1.b Observations complémentaires et proposition d'un mécanisme à l'origine des oscillations rapides 59
2.1.1.b-i Dispositif expérimental 59
2.1.1.b-ii Observations expérimentales 60
2.1.1.b-iii Interprétation 61
2.1.2 Nouvelles observations expérimentales 62
2.1.2.a Dispositif expérimental 62
2.1.2.b Observations 63
2.1.3 Rappel du modèle 68
2.2 Mise en évidence de la coexistence de modes transverses 70
2.2.1 Mise en évidence directe de la coexistence de modes transverses 70
2.2.1.a Observation du faisceau transverse à la caméra 70

2.2.1.b Comparaison de l'intensité en deux points du faisceau 72
2.2.1.b-i Comportement multimode du signal sans oscillations rapides 73
2.2.1.b-ii Comportement multimode du signal pendant les oscillations rapides 75
2.2.2 Lien entre l'évolution spatio-temporel d'un champ et les intensités mesurées expérimentalement 77
2.2.2.a Cas de deux détecteurs rapides en deux points différents du faisceau 78
2.2.2.a-i Observation par un détecteur rapide sans focalisation 78
2.2.2.a-ii Comparaison des intensités en deux points du faisceau 79
2.2.2.b Observation en focalisant sur un détecteur rapide . . . 80
2.2.2.c Observation par un détecteur "lent" 80
2.2.2.c-i Barrette CCD 81
2.2.2.c-ii Caméra CCD 81
2.2.3 Observation d'une coupe du profil transverse du faisceau à l'aide d'une barrette CCD 82
2.2.3.a Principe de l'expérience 82
2.2.3.a-i Fonctionnement de la barrette 82
2.2.3.a-ii Observation 83
2.2.3.b Décomposition en valeurs singulières 87
2.2.3.b-i Matrice utilisée pour la décomposition 88
2.2.3.b-ii Principe de la décomposition 89
2.2.3.b-iii Analyse des fichiers 90
2.3 Conditions d'apparition des oscillations multimodes transverses 93
2.3.1 Influence de la taille de la cavité sur l'apparition des oscillations 94
2.3.1.a Recherche expérimentale d'oscillations rapides pour différentes tailles de cavité 94
2.3.1.a-i Dispositif expérimental 94
2.3.1.a-ii Variations fines autour d'une taille de cavité 94
2.3.1.a-iii Exploration de différentes tailles de cavité . . 97
2.3.1.b Modes transverses de la cavité 99
2.3.1.b-i Coïncidences exactes 100
2.3.1.b-ii Ecart aux résonances exactes 104
2.3.1.c Prise en compte de la non-dégénérescence du signal et du complémentaire 106
2.3.2 Exploration numérique 110
2.3.2.a Modèle utilisé 110
2.3.2.b Routine d'intégration 111
2.3.2.c Diagrammes de bifurcation 111
2.3.3 Exploration expérimentale 115
2.3.3.a Oscillations de réquences élevées 115
2.3.3.b Naissance des oscillations thermiques 116

2.3.3.c Effet de balayage de la cavité 118
2.3.3.d Forme des signaux 119

3 Oscillations complexes et chaos 123
3.1 Oscillations en rafales 124
3.1.1 Bursting en biologie 125
3.1.1.a Exemples expérimentaux 125
3.1.1.b Exemple de mécanisme 127
3.1.1.b-i Présentation schématique 127
3.1.1.b-ii Etude d'un modèle 129
3.1.2 Bursting en optique 131
3.1.2.a Cas des lasers à absorbant saturable 131
3.1.2.b Etude expérimentale et théorique de bursting dans un TROPO 132
3.1.2.b-i Observations expérimentales de bursting . . . 132
3.1.2.c Modélisation et simulations numériques 138
3.1.2.c-i Rappel du modèle 138
3.1.2.c-ii Diagramme de bifurcation 139
3.1.2.c-iii Portrait de phase 140
3.1.2.d Etude perturbative 142
3.1.2.d-i Analyse multi-échelles 142
3.1.2.e Comportements plus complexes 145
3.2 Signature de chaos dans une série temporelle expérimentale 146
3.2.1 Observation de régimes irréguliers 148
3.2.1.a Dispositif expérimental 148
3.2.1.b Doublement de période 148
3.2.1.b-i Doublement de période sans oscillations lentes de type thermique 148
3.2.1.b-ii Doublement de période superposé à des oscillations lentes 149
3.2.1.c Bouffée d'oscillations irrégulières 150
3.2.1.c-i Observation expérimentale 150
3.2.1.c-ii Rappel d'un chemin classique vers le chaos : la cascade de doublement de période 152
3.2.1.c-iii Description de la bouffée irrégulière 153
3.2.2 Analyse d'un fichier expérimental 154
3.2.2.a Analyse du fichier par des méthodes classiques 154
3.2.2.a-i Reconstruction de la trajectoire dans l'espace des phases 154
3.2.2.a-ii Section de Poincaré 154
3.2.2.b Analyse topologique 158
3.2.2.b-i Principe de l'approche topologique 158
3.2.2.b-ii Etude d'une orbite de période 9 159
3.2.2.b-iii Variation des paramètres le long de l'orbite . 160
3.3 Origine du chaos 161

3.3.1 Modèle monomode 161
3.3.1.a Possibilité expérimentale d'apparition de la bifurcation de Hopf du modèle monomode 162
3.3.1.a-i Rappel sur les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf 162
3.3.1.a-ii Normalisation des paramètres : intervention des finesses des cavités 163
3.3.1.a-iii Zones d'apparition de la bifurcation 163
3.3.1.b Limitations sur les désaccords du signal liées à la sélection de modes 165
3.3.1.b-i Normalisation 166
3.3.1.b-ii Paramètres accessibles expérimentalement . . 167
3.3.1.c Limites du calcul 168
3.3.2 Modèle multimode transverse 170
3.3.2.a Rappel des diagrammes de bifurcation 170

4 Etude des spectres d'OPO de type II et I, retard à la bifurcation 173
4.1 Coexistence de modes 174
4.1.1 L'OPO comme laser à élargissement homogène 175
4.1.2 Observations expérimentales 177
4.1.2.a Dispositif expérimental 177
4.1.2.b Observations 177
4.1.3 Interprétations théoriques 178
4.1.3.a Stabilisation de l'échange de stabilité par les effets thermiques 181
4.1.3.a-i Modèle multimode thermique 181
4.1.3.a-ii Déformation du portrait de phase pour le modèle complet 182
4.1.3.a-iii Stabilisation dans des simulations numériques 182
4.1.3.b Modèle multimode transverses pour la pompe et le signal 184
4.1.3.b-i Possibilité de projeter la pompe sur plusieurs modes 185
4.1.3.b-ii Conséquences sur le modèle 186
4.1.3.b-iii Simulations numériques 187
4.1.3.c Propositions de validation expérimentale 189
4.2 Dynamique spectrale au voisinage de la dégénérescence 189
4.2.1 Courbe d'accord de phase 190
4.2.1.a Différence entre les OPO de type I et de type II . . . 190
4.2.1.b Dispositif expérimental 190
4.2.1.c Courbe expérimentale de l'accord de phase 191
4.2.2 Dynamique spectrale d'un OPO de type I au voisinage de la dégénérescence 193
4.2.2.a Un dispositif expérimental original 193
4.2.2.b Observations expérimentales 193

4.2.2.c Limites de l'expérience 196
4.3 Retard à la bifurcation 198
4.3.1 Preuves expérimentales 200
4.3.1.a Oscillations monomodes thermiques 201
4.3.1.b Observations expérimentales 201
4.3.1.c Estimation d'un ordre de grandeur du bruit 203
4.3.2 Retard à la bifurcation 205
4.3.2.a Origine du retard à la bifurcation 205
4.3.2.b Prise en compte du bruit dans le modèle monomode . 205
4.3.3 Simulations numériques 206
4.3.3.a Premières approximations 206
4.3.3.b Lois d'échelle 207
4.3.3.c Modèle grossier 208
4.3.3.c-i A faible bruit 209
4.3.3.c-ii A bruit élevé 210

Conclusion **213**

A Calculs d'intensité **217**
A.1 Cas de l'accrochage de fréquences 217
A.2 Cas sans accrochage de fréquence 218

B Développement perturbatif **221**
B.1 Condition de l'étude perturbative 221
B.1.1 Modèle bimode transverse 221
B.1.2 Conditions de l'analyse 221
B.2 Développement multi-échelle 222
B.2.1 Ordre $O(\eta^{-1})$ 223
B.2.2 Ordre $O(1)$ 223
B.2.2.a Equations du système moyenné 224
B.2.2.b Comportement asymptotique 224
B.2.3 Ordre $O(\eta)$ 225
B.2.4 Résultats du développement 225
B.2.4.a Amplitudes 225
B.2.4.b Intensités 225

Bibliographie **232**

Introduction

Les oscillateurs paramétriques optiques (OPO) sont des sources de lumière cohérente largement accordables. Leur utilité est aussi bien liée à cette accordabilité (spectroscopie) qu'aux propriétés quantiques propres au système (génération d'états comprimés, photons jumeaux). D'autre part, en tant que systèmes non-linéaires, les OPO sont susceptibles de présenter une grande variété de phénomènes dynamiques temporels et spatio-temporels. Cependant, peu d'études expérimentales ont été consacrées à cette dynamique et les travaux antérieurs ont montré que les instabilités observées ne correspondent pas nécessairement à celles prévues par la théorie. Ce travail de thèse est donc consacré à l'étude expérimentale et à la modélisation de la dynamique temporelle des OPO.

Le principe d'un OPO repose sur l'interaction paramétrique de trois champs dans un cristal non-linéaire. Un champ de pompe appliqué sur un tel cristal peut générer deux faisceaux cohérents sous-harmoniques (signal et complémentaire) à la condition que les conservations de l'énergie et de l'impulsion soient vérifiées. Le cristal est placé dans une cavité résonante. Nous étudions les instabilités présentés par les champs à la sortie de cette cavité.

L'exposé de nos travaux est découpé en quatre chapitres. Le premier rappelle les caractéristiques du système ainsi que les outils que nous utiliserons dans la suite. Ensuite un chapitre est consacré à la caractérisation expérimentale d'oscillations quasi-sinusoïdales de fréquence de 1MHz à plus de 100MHz présentées par les intensités des champs, et à la validation d'un modèle décrivant ces oscillations. Nous aborderons dans le troisième chapitre l'étude d'oscillations plus complexes observées expérimentalement : des oscillations en rafales et des oscillations irrégulières. Nous montrerons que chacun de ces deux types d'oscillations peut se rattacher à un ensemble plus général d'instabilités observées dans d'autres systèmes : le *bursting* pour les premières et le chaos pour les secondes. Dans un dernier chapitre, nous passerons en revue des travaux qui demanderaient à être approfondis mais indiquent déjà des directions de recherches intéressantes. Ils concernent l'observation de comportements multimodes pour le signal dans le cas d'un OPO de type II, l'observation de la dynamique spectrale près de la dégénérescence pour un OPO de type I et finalement une étude théorique de retard à la bifurcation.

Chapitre 1 : Généralités

Les bases de la conversion de fréquence sont rappelées ainsi que les contraintes imposées par la présence d'une cavité résonante sur les champs. Plusieurs modèles décrivant la dynamique des OPO et que nous utiliserons dans la suite sont présentés. Enfin, nous donnons les caractéristiques du matériel commun à l'ensemble de nos dispositifs expérimentaux.

Chapitre 2 : Oscillations multimodes transverses

Historique

A haut taux de pompage, des oscillations spontanées de 1 à 10MHz des intensités des champs ont été observées antérieurement. Nous avons reproduit ces observations et étendu la plage des fréquences observées à plusieurs centaines de mégaHertz.

Mise en évidence expérimentale du caractère multimode transverse du champ du signal

Nous avons montré expérimentalement que pendant ces oscillations plusieurs modes transverses de la cavité coexistent dans le faisceau du signal. Cela a permis de valider un modèle multimode transverse pressenti pour décrire ces instabilités. Nous avons étudié l'évolution d'une coupe du profil spatial transverse du faisceau d'un des champs émis et montré par une méthode de décomposition que dans la plupart des cas seuls deux modes transverses interagissent dans la cavité.

Conditions d'apparition des oscillations

Une étude expérimentale systématique montre que ces oscillations s'observent dans de nombreuses configurations de cavité, avec des formes et des fréquences très variées. Nous complétons ensuite l'étude numérique du modèle.

Chapitre 3 : Oscillations complexes

Oscillations en rafales

Lorsque ces oscillations dites "rapides" sont couplées à des oscillations plus lentes (de l'ordre de 10kHz) d'origine thermique, la dynamique du système peut être analysée suivant une variable lente et une variable rapide. On peut alors représenter sur un portrait de phase à deux dimensions la dynamique du système. Le mécanisme sous-jacent à ces instabilités est alors identique à celui de certains systèmes biologiques présentant du *bursting* ou oscillations en rafales. Un développement perturbatif multi-échelle du modèle décrivant les oscillations rapides pour les fréquences les plus élevées a permis de trouver des solutions analytiques approchées pour les champs. La fréquence d'oscillation des intensités est alors égale à l'écart en fréquence entre les modes transverses.

Chaos

Comme on pouvait s'y attendre pour un système non-linéaire, l'existence de régimes chaotiques a été prévue théoriquement depuis une quinzaine d'années dans les OPO. Cependant, à notre connaissance, il n'y a eu à ce jour aucune observation expérimentale d'un tel comportement. Nous avons observé expérimentalement des séries temporelles des intensités des champs présentant une évolution irrégulière et suggérant la présence de chaos déterministe dans le système. Cependant, l'impossibilité de contrôler certains paramètres (notamment la température) empêche d'obtenir des séries temporelles suffisamment longues pour utiliser les méthodes classiques de caractérisation du chaos. Des outils fournis par l'analyse topologique permettent de caractériser celui-ci à partir des orbites périodiques du système si celles-ci sont peu déformées lorsque les paramètres varient. Ainsi le calcul de l'entropie topologique d'une unique orbite périodique dans la série temporelle a permis de confirmer la présence de chaos dans cette série.

Origine du chaos

En nous interrogeant sur l'origine du chaos observé, nous étudions la possibilité d'atteindre expérimentalement les zones de paramètres où le modèle dynamique le plus simple prédit l'apparition de chaos. Les désaccords des champs sont souvent considérés comme des paramètres pouvant prendre toutes les valeurs possibles. Or, comme l'OPO choisit spontanément le mode d'émission qui minimisera son seuil, ils explorent en fait une plage de valeur limitée par les contraintes de la sélection de mode de l'OPO. Certaines zones des paramètres ne sont donc pas accessibles expérimentalement. Cela exclut que le régime chaotique observé expérimentalement puisse être expliqué par le premier modèle ayant prévu du chaos dans les OPO.

Chapitre 4 : Etude des spectres d'OPO de type II et I, retard à la bifurcation

Emission de plusieurs fréquences dans un OPO de type II

En état stationnaire, le système est souvent comparé à un laser à élargissement homogène : seul le mode de seuil le plus bas peut être émis même très au-dessus du seuil. Nous avons montré expérimentalement que cela n'est plus vrai pour des taux de pompage élevés : le signal peut alors comporter plusieurs fréquences alors que son intensité est stationnaire. Nous proposons plusieurs explications à cette observation : la stabilisation thermique à un point d'échange de stabilité entre deux modes ou la possibilité d'injection de plusieurs modes transverses du champ de pompe.

Dynamique spectrale près de la dégénérescence dans un OPO de type I

L'accordabilité de l'OPO est obtenue en variant les indices du cristal, soit en changeant l'angle d'incidence de la pompe, soit en changeant la température du cristal. Il existe une situation particulière du système lorsque les champs émis sont de

même polarisation et même fréquence d'oscillation : les deux champs se confondent, le système est dit dégénéré. Nous avons étudié expérimentalement l'approche de cette dégénérescence à l'aide d'un dispositif original permettant de visualiser l'évolution des spectres des champs signal et complémentaire au cours du temps. L'accord de phase est assuré par la variation de la température du cristal. Nous avons pu observer différents comportements dynamiques au voisinage de la dégénérescence. Cependant, cette dynamique est très complexe, notamment à cause de l'amplification du bruit près de la dégénérescence.

Retard à la bifurcation

Un système traversant une bifurcation avec une certaine vitesse peut rester un certain temps sur la même solution pourtant devenue instable, on dit alors qu'il y a retard à la bifurcation. L'étude du retard à la bifurcation présenté par les OPO lors d'oscillations de relaxation autour d'un cycle de bistabilité a permis d'établir des lois d'échelles entre l'amplitude minimale de l'OPO, liée au bruit quantique, et la durée ce retard.

Chapitre 1

Généralités

L'optique non-linéaire est née dans les années 60 avec l'apparition des lasers. Ceux-ci ont permis d'atteindre des densités de puissance de rayonnement lumineux suffisantes pour obtenir des couplages non linéaires entre la matière et le rayonnement. Dans ces conditions, le milieu réemet des champs présentant des composantes en fréquence qui n'étaient pas présentes au départ. C'est dans cette génération de nouvelles longueurs d'onde que repose un des intérêts de l'optique non-linéaire. En effet il reste des zones du spectre électromagnétique où on ne peut obtenir du rayonnement cohérent par effet laser, ou seulement à de faibles puissances : ainsi les diodes laser ont permis d'élargir fortement le spectre d'émission laser, mais il est souvent nécessaire de filtrer le faisceau pour obtenir un rayonnement monomode transverse, ce qui implique de très faibles puissances. L'optique non-linéaire permet de générer des faisceaux de grande finesse spectrale et de puissance élevée dans de nouvelles gammes de fréquences. Dans le cas des OPO, un autre intérêt est d'obtenir des sources largement accordables. En effet, les longueurs d'onde générées dépendant des caractéristiques du cristal où se fait le couplage non-linéaire, la longueur d'onde va pouvoir varier continûment avec l'indice du cristal.

Un autre intérêt de l'optique non linéaire ne vient pas des valeurs des fréquences générées mais de la manière dont elles le sont. Le fait qu'un processus non linéaire soit à l'origine des phénomènes étudiés laisse présager un ensemble de comportements attendus dans les systèmes non linéaires (instabilités, chaos ...). Pour étudier ces phénomènes, un ensemble d'outils sont à notre disposition. L'étude de ces instabilités a un intérêt en soi pour comprendre et comparer à d'autres systèmes les instabilités qui peuvent apparaître. A long terme, la compréhension de ces instabilités pourrait permettre de mieux les contrôler pour stabiliser ces sources. Dans le cas des OPO, leur dynamique a été encore peu étudiée expérimentalement alors que de nombreux travaux théoriques existent sur la dynamique temporelle et spatio-temporelle qu'ils sont susceptibles de présenter.

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux concernant le mélange à trois ondes et plus particulièrement la conversion paramétrique de fréquence. Nous rappelons aussi les contraintes liées à l'existence d'une cavité dans le cas des OPO et les grandes lignes de la sélection de modes dans ce système. Comme nous nous intéressons à la dynamique du système, nous présenterons

dans une deuxième partie les modèles dynamiques qui nous seront utiles par la suite pour décrire nos observations expérimentales. Enfin, nous présenterons brièvement le matériel que nous avons utilisé dans nos expériences.

1.1 Principe des oscillateurs paramétriques optiques

1.1.1 Génération d'harmoniques

Il existe une littérature abondante sur l'optique non-linéaire [Shen, 1984; Butcher et Cotter, 1998; Newell et Moloney, 1992; Zernike et Midwinter, 1973; Boyd, 1992; Bloembergen, 1996] abordant entre autres la polarisation non-linéaire et les différents systèmes optiques de somme et de différence de fréquences. D'autres ouvrages [Byer, 1977; Jou, 1997] sont consacrés exclusivement aux OPO. Nous ne ferons donc dans cette partie que rappeler quelques grandes lignes sur le sujet.

1.1.1.a Interaction matière-rayonnement

Lorsqu'on applique un champ sur un diélectrique, celui-ci répond en se polarisant, c'est à dire par un changement de répartition des charges dans le milieu, le moment dipolaire par unité de volume engendré est appelé polarisation et est noté $\vec{P}$. Si ce champ oscille, comme c'est le cas pour une onde électromagnétique, les électrons du milieu oscillent et rayonnent à leur tour un champ. Selon que l'intensité du champ appliqué est faible ou non, la réponse du milieu est linéaire on non. Dans la nature, les réponses des milieux aux champs optiques sont linéaires. Cependant avec l'avènement des lasers, on peut à présent atteindre des densités de puissance suffisantes pour observer des réponses non-linéaires. L'étude et l'exploitation de ces champs de nouvelles fréquences constituent le sujet de l'optique non-linéaire.

De manière à comprendre les mécanismes de générations de seconde harmonique et de sous-harmonique, nous allons rappeler des résultats classiques sur les polarisations du premier et du second ordre.

1.1.1.a-i Polarisation du premier ordre

Au premier ordre, la polarisation a des composantes aux mêmes fréquences que chaque composante du champ :

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega).\vec{E}(\omega),$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et $\chi^{(1)}$ la susceptibilité diélectrique du milieu, tenseur d'ordre 2.

La permittivité du milieu : $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi^{(1)}(\omega))$ est une matrice diagonalisable et s'écrit dans une base adaptée :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$$

Les racines (éventuellement complexes) des valeurs propres de la matrice donnent pour leur partie réelle les indices de réfraction du cristal suivant ses axes propres et pour leur partie imaginaire les coefficients d'absorption du cristal. Lorsqu'on se place loin des bandes d'absorption du cristal, ce qui est le cas pour les fréquences optiques utilisées dans nos expériences, on pourra négliger l'absorption et considérer que les indices n_i sont des fonctions monotones de ω, en général croissantes.

Si le cristal a une symétrie cubique, toutes les directions sont équivalentes pour les électrons du cristal, et la polarisation est donc la même quelle que soit la polarisation du champ incident. Cela se traduit par des valeurs propres identiques pour toutes les directions : $n_x = n_y = n_z$.

Dans le cas où la symétrie du cristal n'est pas cubique [Yariv et Yeh, 1984; Boyd, 1992], ces valeurs sont différentes. On dit alors que le cristal est *biréfringent*. Cela signifie que la réponse des électrons est différente suivant la direction dans laquelle s'effectue le forçage : l'indice dépend de la polarisation du champ. Il y a alors deux situations : soit les trois valeurs sont différentes le cristal est alors biaxe, soit deux valeurs sont identiques, le système est dit uniaxe. Dans ce dernier cas, on peut donc définir deux indices : l'indice ordinaire (n_o) et l'indice extraordinaire (n_e) :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$$

Deux champs polarisés orthogonalement, l'un ordinairement et l'autre extraordinairement, ne verront donc pas les mêmes indices.

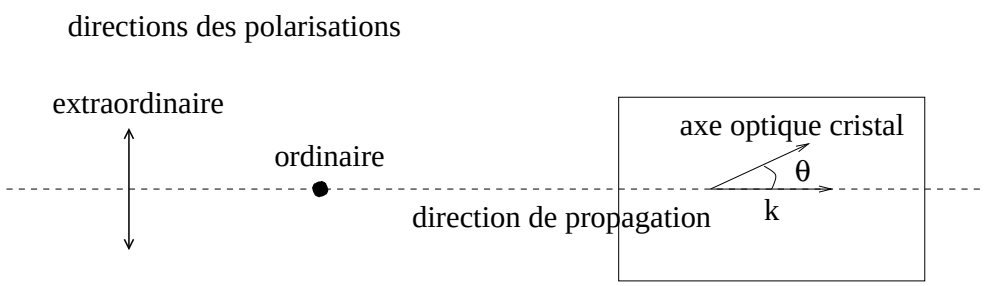


FIG. *1.1: Représentation des polarisations ordinaire et extraordinaire pour une onde dont la direction de propagation a un angle θ avec l'axe optique du cristal.*

En faisant varier l'angle θ (voir figure 1.1) entre l'axe optique du cristal et la direction de propagation d'un champ, on pourra changer continûment l'indice vu par la polarisation extraordinaire tandis que celui vu par la polarisation ordinaire reste constant :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}.$$

Enfin, lorsque θ est non nul, pour une onde extraordinaire, le vecteur d'onde et le vecteur de Poynting ne sont plus colinéaires : il s'agit de la *double réfraction* ou en

anglais “walk-off”. Le vecteur d’onde reste dans la même direction que pour l’onde ordinaire, par contre le vecteur flux d’énergie est dévié.

1.1.1.a-ii Polarisation du second ordre

Quand le champ incident devient suffisamment intense, les électrons du milieu répondent non-linéairement et de nouvelles fréquences sont émises. La polarisation présente alors un terme non-linéaire qui peut être développé en puissances du champ :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= P^{(1)} + P^{NL}, \\ &= \epsilon_0\chi^{(1)}\vec{E} + \epsilon_0\chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \epsilon_0\chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E}\ldots\end{aligned}$$

La susceptibilité non-linéaire d’ordre 2, $\chi^{(2)}$ est un tenseur d’ordre 2 qui est non-nul lorsque le cristal n’est pas centro-symétrique. Dans ce cas, on peut se limiter à l’ordre 2 dans le développement. On a alors :

$$\vec{P}^{(2)}(\omega_3) = \epsilon_0\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) : \vec{E}(\omega_1)\vec{E}(\omega_2), \tag{1.1}$$

où $\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)$ est non-nul uniquement pour $\omega_3 = \omega_1+\omega_2$, étant entendu que les ω_i prennent des valeurs positive ou négative. Cette relation indique que la conservation de l’énergie doit être respectée.

1.1.1.b Equations de propagation

Pour tenir compte du fait que les composantes de nouvelles fréquences de la polarisation agissent comme des termes sources pour le champ, on introduit l’équation (1.1) dans les équations de Maxwell pour un diélectrique non magnétique.

Lorsque l’on se place dans le cadre de l’approximation paraxiale (tous les vecteurs d’onde sont colinéaires à z), les champs s’écrivent :

$$\mathcal{E}_j = \frac{1}{2}(E_j e^{ik_j z - i\omega_j t} + cc),$$

où on a séparé les enveloppes complexes lentement variables E_j des composantes rapides $e^{ik_j z - i\omega_j t}$.

La relation (1.1) se réécrit alors :

$$P_1^{(2)}(\omega_1) = 2d_{eff}E_2E_3e^{-i(k_2+k_3)z}, \tag{1.2a}$$
$$P_2^{(2)}(\omega_2) = 2d_{eff}E_1E_3^*e^{-i(k_1-k_3)z}, \tag{1.2b}$$
$$P_3^{(2)}(\omega_3) = 2d_{eff}E_1E_2^*e^{-i(k_1-k_2)z}, \tag{1.2c}$$

où la notation $2d_{eff}$ permet de tenir compte du “bon” coefficient du tenseur $\chi^{(2)}$ ainsi que des relations de symétrie de ces coefficients.

Si on se place dans l’approximation des enveloppes lentement variables, c’est à dire que les E_j varient peu sur une distance $\frac{2\pi}{k_j}$ et sur un temps $\frac{2\pi}{\omega_j}$, on a alors pour chaque champ :

$$\Delta_\perp E_j + 2ik_n\frac{\partial E_j}{\partial z} = -\frac{\omega_j^2}{\epsilon_0 c^2}P_j^{(2)}e^{ik_j z}. \tag{1.3}$$

Si on remplace à présent $P_j^{(2)}$ par leur valeur en fonction des champs et si on considère des ondes planes ($\Delta_\perp E_j = 0$), on trouve finalement trois équations :

$$\frac{dE_1}{dz} = i\frac{\omega_1 d_{eff}}{n_1 c} E_2 E_3 e^{-i\Delta kz} \tag{1.4a}$$

$$\frac{dE_2}{dz} = i\frac{\omega_2 d_{eff}}{n_2 c} E_1 E_3^* e^{i\Delta kz} \tag{1.4b}$$

$$\frac{dE_3}{dz} = i\frac{\omega_3 d_{eff}}{n_3 c} E_1 E_2^* e^{i\Delta kz} \tag{1.4c}$$

où $\Delta k = k_1 - k_2 - k_3$.

Suivant les conditions initiales en $z = 0$, on trouve différentes situations expérimentales qui sont rapidement rappelés par la suite. L'interaction sera d'autant plus efficace que le terme Δk sera petit. L'*accord de phase* est obtenu pour $\Delta k = 0$.

1.1.1.c Accord de phase

Si on considère que les vecteurs d'ondes sont colinéaires et en tenant compte de la relation $k = \frac{n(\omega)\omega}{c}$, la relation $\Delta k = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} n(\omega_3)\omega_3 &= n(\omega_1)\omega_1 + n(\omega_2)\omega_2 \\ n(\omega_1+\omega_2)(\omega_1+\omega_2) &= n(\omega_1)\omega_1 + n(\omega_2)\omega_2. \end{aligned}$$

Cette relation est en général difficile à vérifier[1]. On va donc utiliser des cristaux biréfringents pour pouvoir réaliser l'accord de phase. On aura ainsi deux fonctions d'indice différentes suivant les polarisations des champs, et l'accord de phase pourra par exemple être obtenu par :

$$n_e(\omega_3)\omega_3 = n_o(\omega_1)\omega_1 + n_o(\omega_2)\omega_2,$$

dans ce cas l'accord de phase est dit de type I, les deux champs de basses fréquences ont la même polarisation.

Une autre possibilité d'accord de phase est donné par :

$$n_e(\omega_3)\omega_3 = n_e(\omega_1)\omega_1 + n_o(\omega_2)\omega_2,$$

dans ce cas l'accord de phase est dit de type II, les deux champs de basses fréquences ont des polarisations orthogonales.

[1]Si on considère que $n(\omega)$ est une fonction strictement croissante de ω, ce qui correspond à la majorité des cristaux pour les fréquences utilisées, alors :

$$\begin{aligned} n(\omega_1+\omega_2) &> \sup(n(\omega_1), n(\omega_2)) \\ n(\omega_1+\omega_2) &> \frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2} n(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2} n(\omega_2) \\ (\omega_1+\omega_2)n(\omega_1+\omega_2) &> \omega_1 n(\omega_1) + \omega_2 n(\omega_2). \end{aligned}$$

On ne peut donc pas vérifier l'accord de phase.

1.1.1.d Configurations expérimentales

Suivant les conditions initiales des équations (1.4), c'est-à-dire suivant si un ou plusieurs champs sont appliqués sur le cristal, et suivant la manière de combiner les fréquences (somme ou différence de fréquences) qui permettra de minimiser l'accord de phase, on obtient différentes configurations expérimentales.

1.1.1.d-i Somme de fréquences

S'il y a deux champs incidents aux fréquences ω_1 et ω_2 et que le champ généré est de fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, il s'agit d'un processus de somme de fréquences. La figure 1.2(b) montre le processus quantique sous-jacent : un photon ω_1 et un photon ω_2 sont détruits et un photon ω_3 est créé. Dans le cas particulier où $\omega_1 = \omega_2$, il s'agit de *génération de seconde harmonique*.

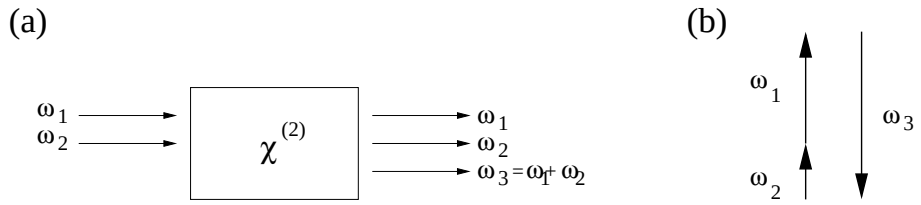


FIG. *1.2: (a) Principe du dispositif de somme de fréquences, (b) représentation quantique du processus.*

1.1.1.d-ii Différence de fréquences

S'il y a deux champs incidents aux fréquences ω_1 et ω_2 et que le champ généré est de fréquence $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, il s'agit d'un processus de différence de fréquences. Dans ce cas, comme on peut le voir sur la figure 1.3(b), pour chaque photon ω_3 créé, on détruit un photon ω_1 mais on crée un photon ω_2. On génère donc aussi du champ à la fréquence ω_2, on appelle donc ce dispositif *amplificateur paramétrique*. La fréquence ω_2 qui est amplifiée est appelée *signal*, la fréquence ω_3 créée est appelée *complémentaire*, la fréquence ω_1 qui est déplétée est appelée *pompe*.

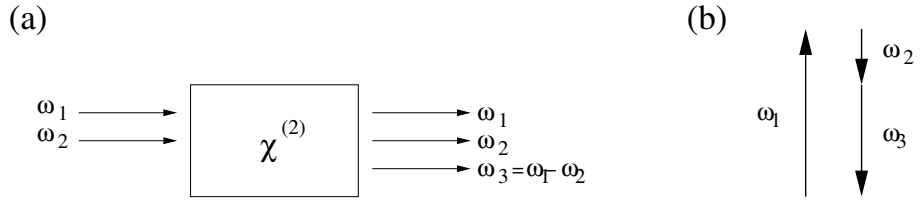


FIG. *1.3: (a) Principe du dispositif de différence de fréquences, (b) représentation quantique du processus.*

1.1.1.d-iii Fluorescence paramétrique

A priori, s'il y a un seul champ incident de fréquence ω_1, on ne peut réaliser que de la génération de seconde harmonique. Cependant, si on considère la présence de bruit à une fréquence inférieure à ω_1, on va pouvoir générer des sous-harmoniques. Aux longueurs d'onde optiques ($< 10\mu m$), le bruit provenant du rayonnement du corps noir est négligeable devant le bruit quantique (voir par exemple [Zernike et Midwinter, 1973]). Le bruit qui permet la génération de sous-harmonique a donc pour origine les fluctuations quantiques du vide. Le champ incident peut alors se coupler à n'importe quelle fréquence pour en générer une nouvelle. L'accord de phase limite le nombre de couples possibles. Un mécanisme d'instabilité comme pour l'oscillateur mécanique et d'amplification du bruit va faire ressortir une gamme de fréquences dans un continuum.

Le processus correspondant à une seule fréquence incidente sur le cristal s'appelle *fluorescence paramétrique*. Cette expérience n'est pas réalisable avec des lasers continus à cause du faible gain pour un unique passage dans le cristal à la puissance actuelle des lasers continus disponibles. L'expérience peut par contre être faite avec des pompes impulsionnelles [Devaux et Lantz, 2000].

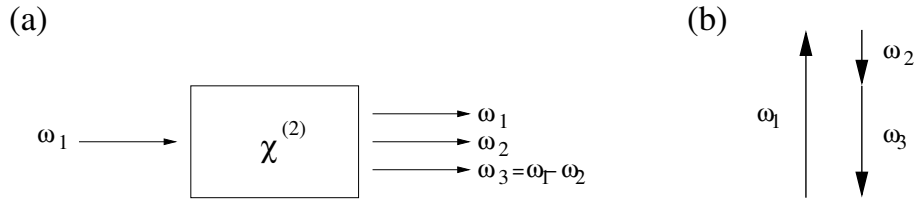


FIG. *1.4: (a) Principe du dispositif de fluorescence paramétrique, (b) représentation quantique du processus.*

1.1.2 Cavités

Après avoir décrit le processus paramétrique se déroulant à l'intérieur du cristal non-linéaire, nous allons présenter quelques caractéristiques des cavités des OPO. D'abord les différentes configurations d'oscillateurs paramétriques optiques vont être rappelées, ensuite les problèmes de selection de modes liés aux désaccords des champs seront présentés.

1.1.2.a Nécessité d'une cavité

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, même en supposant que l'accord de phase est parfait ($\Delta\vec{k} = \vec{0}$), le terme de susceptibilité non-linéaire d'ordre 2 reste très faible malgré les progrès des matériaux depuis les années 60 [Jou, 1997]. Typiquement, pour de bons cristaux, $\chi^{(2)} \sim 10\text{pm.V}^{-1}$. Ce qui donne pour un laser continu de puissance ~75mW focalisé sur $(50\mu m)^2$ et pour un cristal de longueur 1cm un gain de $\sim 1\%$ [Fabre, 2003]. Il faut donc placer le cristal dans une cavité résonante pour un ou plusieurs champs de manière à accumuler l'amplification sur plusieurs passages

et à obtenir ainsi des gains suffisants. On obtient alors un *oscillateur paramétrique optique*. Un seul champ est incident : celui de la pompe. Deux champs vont être générés par l'interaction paramétrique et à partir du bruit quantique : les champs signal et complémentaire. L'oscillation paramétrique est engendrée par un mécanisme d'instabilité et ne parvient donc à émerger du bruit qu'à partir d'une puissance de pompe non-nulle qui est appelée *seuil d'oscillation paramétrique*.

La cavité résonante est formée de deux miroirs réfléchissant un, deux ou trois champs (OPO simplement, doublement ou triplement résonant). Le fait qu'un ou plusieurs champs interagissent plusieurs fois dans le cristal va permettre d'augmenter la longueur d'interaction et donc de diminuer le seuil de l'OPO. Pour atteindre des seuils très bas, on pourra ainsi travailler avec un OPO triplement résonant. Le fait d'abaisser le seuil a deux intérêts : d'abord de pouvoir obtenir de l'oscillation paramétrique avec des sources continues de faible puissance. D'autre part, et c'est surtout ce qui nous intéresse dans cette étude, la plupart des phénomènes dynamiques (instabilités, chaos) apparaissent lorsqu'un système non-linéaire est porté loin de son équilibre. Avec un laser de pompe identique, le système qui aura le seuil le plus bas sera celui que l'on pourra éloigner le plus des régimes où les réponses stationnaires du système sont stables.

Les cavités vont être à l'origine de problèmes de stabilisation du système. En effet, lorsqu'un champ est placé dans une cavité, pour que ses réflexions successives interfèrent constructivement dans le sens de propagation du champ incident, il faut que la fréquence optique du champ soit proche d'une des fréquences de résonance de la cavité. Cette condition n'est pas difficile à réaliser s'il y a un seul champ à faire résonner dans la cavité. Par contre pour deux ou trois champs de fréquences différentes, la situation est tout de suite plus compliquée : comme les peignes de résonances de la cavité sont différents pour les différentes fréquences à cause de la dispersion et de la biréfringence dans le cristal, trouver une taille de la cavité où les résonances de chacun de ces peignes coïncident est difficile. Nos champs seront donc en général désaccordés, c'est à dire décalés par rapport à la fréquence de résonance de la cavité la plus proche. D'autre part une fluctuation des paramètres, en déplaçant ces peignes, va pouvoir rendre un autre mode de fonctionnement plus favorable. Un système doublement ou triplement résonant sera donc particulièrement enclin à changer de mode de fonctionnement au moindre changement de taille de la cavité. Ces dispositifs sont donc très sensibles aux fluctuations mécaniques ou thermiques et difficiles à stabiliser.

1.1.2.b Différentes configurations

Lorsqu'un seul champ est résonant dans la cavité (voir figure 1.5(a)), on appelle le dispositif OPO simplement résonant (SROPO). Les seuils d'oscillations sont alors typiquement de 1 W, ce qui est du même ordre que les puissances actuelles des lasers de pompe continus de grande finesse. Ce dispositif a cependant l'intérêt d'être plus stable que les suivants et peut être accordé continûment.

Lorsque deux champs sont résonants, il existe deux dispositifs : soit le signal et le complémentaire sont résonants (cas de la figure 1.5(b)), soit le signal et la pompe sont

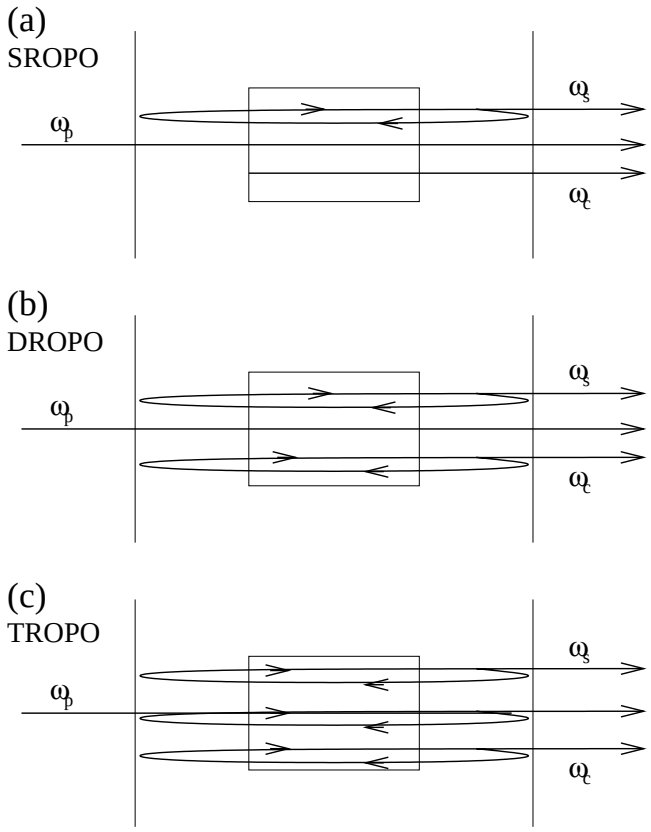


FIG. *1.5: (a) OPO simplement résonant, (b) OPO doublement résonant dans le cas où ce sont le signal et le complémentaire qui résonnent, (c) OPO triplement résonant.*

résonants. L'oscillateur est dit doublement résonant (DROPO). Les seuils sont alors compris entre 10mW et 100 mW, ce qui est beaucoup plus accessible que les seuils du SROPO avec les lasers continus actuellement disponibles. Comme nous l'avons dit précédemment, ce système va être sensible aux fluctuations de la taille de la cavité à cause des conditions de résonance sur les deux champs. D'autre part, la variation d'un unique paramètre (comme la température du cristal par exemple) ne permettra plus d'accorder continûment les longueurs d'ondes générées : à cause des conditions de résonance et du choix spontané des fréquences d'oscillation par l'OPO, le système va présenter des sauts de fréquence plutôt qu'une variation continue.

Enfin, lorsque le signal, le complémentaire et la pompe sont résonants, l'OPO est dit triplement résonant (TROPO). Les seuils sont alors compris entre 1 et 10 mW. C'est cette configuration que nous utiliserons dans la suite. C'est aussi la moins stable puisque c'est celle qui doit vérifier le plus de conditions de résonances.

1.1.2.c Sélection de modes

Lorsque l'OPO est doublement ou triplement résonant, commence à se poser le problème de la sélection de mode. En effet en l'absence de cavité, dans une expérience imaginaire où l'on pourrait faire de la fluorescence paramétrique avec un laser continu,

les faisceaux signal et complémentaire ont une largeur spectrale liée à la tolérance sur l'accord de phase. La cavité va avoir pour effet de discrétiser les fréquences accessibles au signal et au complémentaire et a priori un seul mode, celui de seuil le plus bas sera accessible. En faisant varier l'indice on observe alors des *sauts de modes* au lieu d'une variation continue de la fréquence émise, et ces modes se présentent par groupes appelés *clusters*. Ce problème est traité dans la littérature [Eckardt *et al.*, 1991; Debuisschert *et al.*, 1993; Zernike et Midwinter, 1973] et nous allons en décrire les grandes lignes.

1.1.2.c-i Représentation des peignes

Les modes de résonance d'une cavité se présentent sous la forme d'un peigne. En représentant celui du signal et celui du complémentaire sur des axes décalés et orientés de manière opposée, on obtient la représentation de la figure 1.6 où tous les points situés à la verticale l'un de l'autre vérifient la conservation de l'énergie.

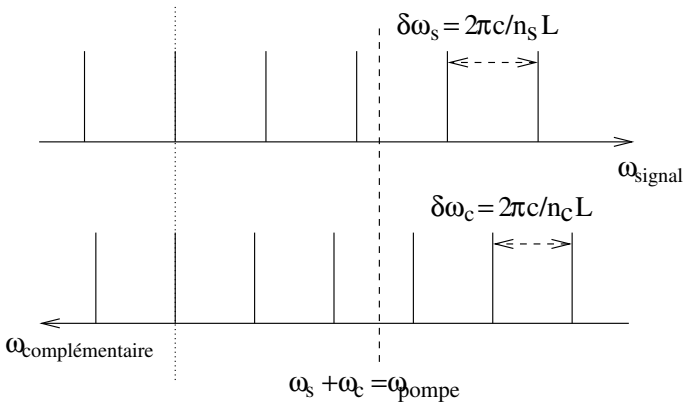


FIG. *1.6: Représentation des peignes de résonance du signal et du complémentaire où tous les couples* (ω_s, ω_c) *situés à la verticale l'un de l'autre vérifient la conservation de l'énergie. La ligne en pointillés longs montre la conservation de l'énergie vérifiée par un couple quelconque de fréquences du signal et du complémentaire. La ligne en petits pointillés indique le couple de fréquence pour lequel les désaccords sont minimisés.*

Notons que dans le cas d'un OPO de type I non dégénéré et dans le cas d'un OPO de type II, même à la dégénérescence, l'intervalle spectral libre n'est pas le même pour le signal et le complémentaire. On notera dans la suite $\delta\omega_s$ et $\delta\omega_c$ ces intervalles spectraux libres. Il existe alors parmi tous les points situés à la verticale l'un de l'autre, un couple de fréquences correspondant à des désaccords minimaux. Ce couple est représenté sur la figure 1.6 par un trait en petits pointillés.

Nous ne tiendrons pas compte dans la suite de l'influence du désaccord de la pompe. Pour l'OPO triplement résonant, la contrainte suplémentaire de résonance de la pompe se traduit par une augmentation du seuil lorsque la pompe est mal accordée. Cependant, à une taille de cavité fixée, le désaccord de la pompe est fixé, le problème de la sélection de mode est alors le même que pour un DROPO sauf que le gain dépend de la taille de la cavité.

Les figures et le mécanisme de sélection de modes qui vont être présentés dans la suite sont issues de la référence [Eckardt *et al.*, 1991] à laquelle on se reportera pour une description théorique et expérimentale plus détaillée de la sélection de mode. Cette référence concerne un DROPO de type I. Cependant, loin de la dégénérescence et pour une finesse de la pompe beaucoup plus faible que celle du signal et du complémentaire, la méthode peut s'appliquer à un TROPO de type II. Pour une description plus détaillée de la selection de mode dans un TROPO de type II on pourra consulter la référence [Debuisschert *et al.*, 1993].

1.1.2.c-ii Cluster

La figure 1.7(a) montre une courbe typique d'accord de phase au voisinage de la dégénérescence dans le cas d'un OPO de type I. Cette courbe est obtenue à partir de la conservation de l'énergie et de l'accord de phase exact lorsqu'on connaît la variation de l'indice en fonction de la température. La figure 1.7(b) montre l'écart en fréquence autorisé autour de cette courbe car l'accord de phase peut ne pas être exact. A priori s'il n'y avait pas de cavité et suffisamment de gain en un seul passage dans le cristal, à une température fixée, toutes les fréquences à l'intérieur de la courbe de gain seraient autorisées. L'existence d'une cavité sur le signal et le complémentaire va avoir pour effet de discrétiser les fréquences accessibles pour l'OPO. Cette discrétisation se fait à deux niveaux : sur la figure 1.7(c) sont représentés les clusters, c'est à dire des groupes de modes de fréquence très proches susceptibles d'osciller. A l'intérieur des clusters, les fréquences d'oscilllation sont aussi discrètes. Lorsqu'on accorde l'OPO, c'est à dire lorsqu'on change la température, celui-ci va changer de cluster de manière à toujours rester le plus près possible de l'accord de phase de phase exact.

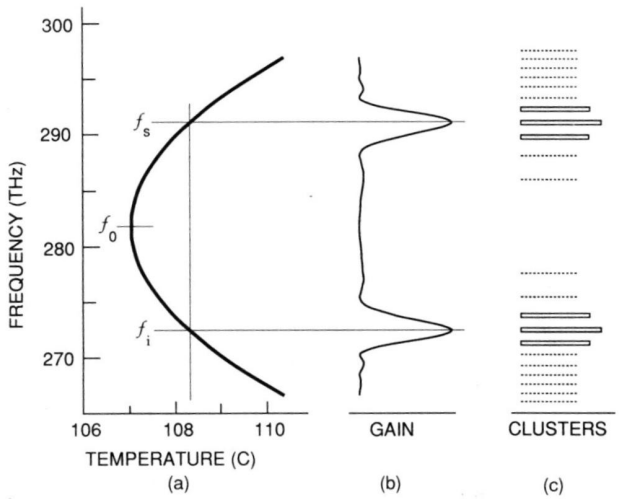


FIG. *1.7: Pour un DROPO de type I, (a) courbe d'accord de phase en fonction de la température, (b) largeur de la courbe de gain liée au déplacement par rapport à la relation d'accord de phase exact, (c) représentation shématique des clusters : groupes de fréquences sur lesquelles l'OPO va osciller [Eckardt et al., 1991].*

1.1.2.c-iii Sauts de mode

A l'intérieur d'un cluster, la longueur d'onde du signal et du complémentaire sont aussi discrétisées à une plus petite échelle. En effet, un cluster rassemble de nombreux couples de résonances. La paire de modes qui va osciller dans la cavité est à priori celle qui a le seuil le plus bas, c'est à dire celle qui minimise les désaccords du signal et du complémentaire et qui est la plus proche de l'accord de phase. Cette dernière condition est assurée par le choix du cluster tandis que la première va générer la structure fine à l'intérieur du cluster.

La partie supérieure de la figure 1.8 décrit comment la somme des désaccords $\Delta\omega = \Delta\omega_s + \Delta\omega_c$ évolue le long du double peigne. A l'intérieur d'un cluster, les sauts de modes se font entre modes adjacents. Le cluster qui sera sélectionné sera celui qui sera le plus proche de l'accord de phase. A l'intérieur d'un cluster, le mode qui va être sélectionné est celui pour lequel $\Delta\omega$ est le plus proche de 0.

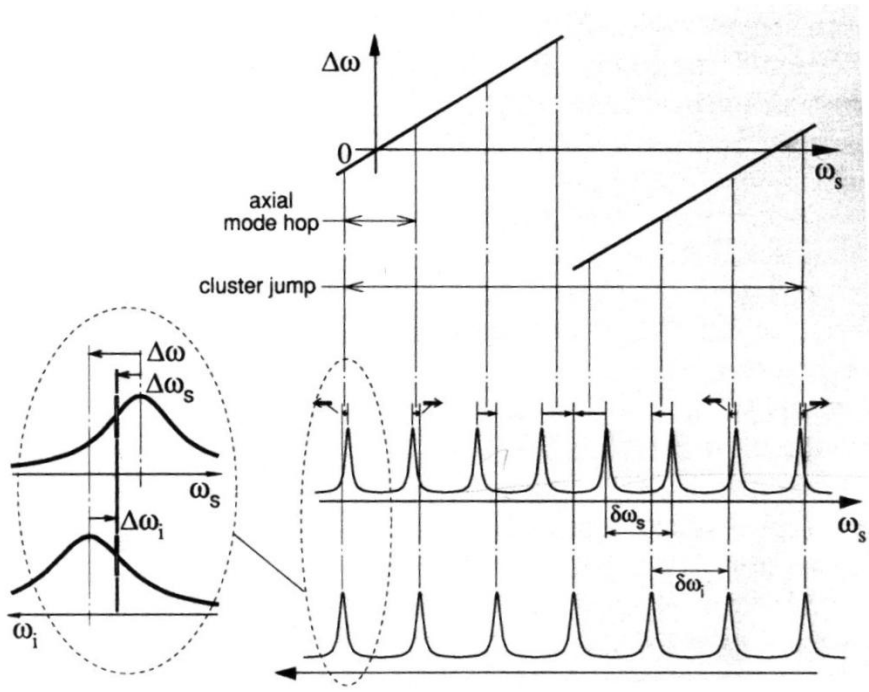


FIG. *1.8: Représentation des deux peignes de résonance dans la partie inférieure de la figure. Représentation dans la partie supérieure des valeurs de $\Delta\omega = \Delta\omega_s + \Delta\omega_c$ en fonction de ω_s. Il existe autant de courbes que de manière d'associer les résonances, chaque courbe correspond à un cluster [Eckardt et al., 1991].*

On sait que les désaccords en état stationnaire sont reliés entre eux par la relation [Eckardt *et al.*, 1991] :

$$\frac{\mathcal{F}_s \Delta\omega_s}{\delta\omega_s} = \frac{\mathcal{F}_c \Delta\omega_c}{\delta\omega_c}. \tag{1.5}$$

Cette relation découle des équations stationnaires mais peut aussi être vue comme la conservation du nombre de photons. En effet cette relation assure que le même

nombre de photons signal et complémentaire est créé à l'intérieur de la cavité à chaque annihilation d'un photon de pompe.

On déduit de l'équation (1.5) et de la définition de $\Delta\omega$ que :

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= (1+\frac{\mathcal{F}_s\delta\omega_c}{\mathcal{F}_c\delta\omega_s})\Delta\omega_s,\\ \Delta\omega &= (1+\frac{\mathcal{F}_c\delta\omega_s}{\mathcal{F}_s\delta\omega_c})\Delta\omega_c.\end{aligned}$$

L'expression des désaccords en fonction de $\Delta\omega$ est alors donnée par :

$$\Delta\omega_s = \frac{\Delta\omega}{1+\frac{\delta\omega_c\mathcal{F}_s}{\delta\omega_s\mathcal{F}_c}} \tag{1.6a}$$

$$\Delta\omega_c = \frac{\Delta\omega}{1+\frac{\delta\omega_s\mathcal{F}_c}{\delta\omega_c\mathcal{F}_s}} \tag{1.6b}$$

Finalement, l'évolution du spectre à la sortie de l'OPO en fonction de la variation d'un paramètre (l'application d'un potentiel statique sur le cristal dans le cas de la figure) est donnée sur la figure 1.9. La fréquence d'oscillation de l'OPO saute de mode en mode jusqu'à ce qu'un nouveau cluster soit plus proche de la fréquence de l'accord de phase.

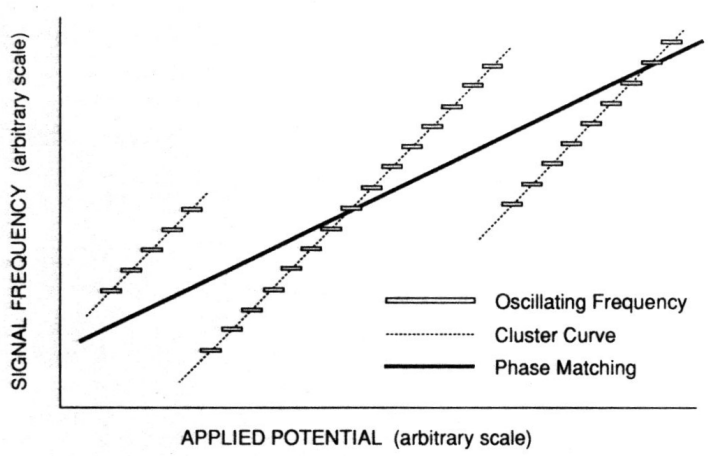


FIG. *1.9: Représentation des fréquences d'oscillation du signal (barres blanches) lorsqu'on fait varier un potentiel appliqué au cristal. La courbe d'accord de phase est représentée en traits pleins et les courbes de cluster en pointillé. La fréquence d'oscillation reste sur un mode tant que celui-ci est le plus favorable, puis il saute sur le mode adjacent qui a le seuil le plus bas. Ces sauts de modes succesifs le long d'un cluster éloignent la fréquence d'oscillation de la courbe d'accord de phase et le gain diminue donc, lorsque celui-ci est devenu trop faible, le système commute sur un nouveau cluster plus proche de la courbe d'accord de phase et donc de gain plus élevé [Eckardt et al., 1991].*

Comme nous l'avons dit précédemment, cette analyse ayant été faite dans le cas d'un DROPO, il manque dans le raisonnement les considérations sur le désaccord de la pompe. En fait ce désaccord peut être pris en compte dans la courbe de gain. La description des clusters et des sauts de mode reste donc valable dans le cas d'un TROPO.

Dans cette partie, nous avons essayé de décrire succintement les principales propriétés statiques des oscillateurs paramétriques optiques ainsi que leur fonctionnement. Nous présentons maintenant différents modèles décrivant la dynamique de ces systèmes.

1.2 Modèles dynamiques

L'oscillateur paramétrique optique repose sur un processus non-linéaire et est donc susceptible de présenter des instabilités. Ses dynamiques temporelle et spatio-temporelle ont été et sont toujours l'objet de nombreuses études théoriques. Cependant, même si le premier OPO continu expérimental date de 1968 [Smith *et al.*, 1968] (trois ans après le premier OPO impulsionnel [Giordmaine et Miller, 1965]), l'évolution lente de la puissance des lasers continus fait que les instabilités dans les OPO continus ont été peu étudiées expérimentalement.

Différents modèles standards permettant de décrire la dynamique des TROPO dans différentes situations vont être rappelés. Nous détaillerons plus particulièrement les modèles que nous utiliserons par la suite. En premier lieu nous présenterons le modèle le plus simple décrivant la dynamique temporelle d'un TROPO : le modèle champ moyen monomode dégénéré [McNeil *et al.*, 1978; Drummond *et al.*, 1980; Lugiato *et al.*, 1988]. Ensuite, nous présenterons un modèle plus complexe tenant compte de la possibilité pour l'OPO d'être multimode transverse [Marte *et al.*, 1997; Schwob *et al.*, 1998; Schwob, 1997].

Enfin nous présenterons les résultats d'études expérimentales d'instabilités dans les OPO et nous verrons que les instabilités observées conduiront les auteurs à ajouter une variable lente dans les modèles précédents pour tenir compte de la variation de la température [Suret *et al.*, 2000, 2001b].

1.2.1 Modèles champ moyen

1.2.1.a Cadre des modèles

Notre modèle décrit un champ de pompe E_p de fréquence imposée ω_p et deux champs signal E_s et complémentaire E_c dont les fréquences d'oscillation sont contraintes par la conservation de l'énergie et l'accord de phase, qui sera considéré comme exact dans la suite.

Comme les expériences sont faites avec des faisceaux gaussiens dans une cavité Fabry-Pérot à miroirs sphériques, les champs sont développés dans une base de modes de la cavité : par exemple la base de Hermite-Gauss [Tarassov, 1985; Siegman, 1986]

constituée des fonctions $u_{pl}(\vec{r}, z)$ qui décrivent la variation spatiale du mode. Les champs complexes s'écrivent alors :

$$E_i(\vec{r}, z, t) = \sum_{p,l} u^i_{pl}(\vec{r}, z) A^i_{pl}(z, t) e^{i(k_i z - \omega_i t)},$$

où $\vec{r}$ est un vecteur à deux dimensions du plan transverse à la direction de propagation du faisceau, z la direction de propagation des faisceaux supposés colinéaires, $A^i_{pl}(z, t)$ est l'enveloppe lentement variable associée à $u^i_{pl}(\vec{r}, z)$ et dans le repère tournant de fréquence ω_i, k_i est le vecteur d'onde donné pour une onde plane par $k_i = \frac{n_i \omega_i}{c}$.

1.2.1.a-i Approximations

Les équations dynamiques qui vont être présentées sont établies dans le cadre de plusieurs approximations. Les deux premières ont été utilisées pour établir les équations de propagation des champs (partie 1.1.1.b). La dernière est liée à l'établissement des équations temporelles des champs à la sortie de la cavité (et donc après plusieurs passages dans le cristal) à partir des équations de propagation.

- L'approximation *paraxiale* correspond au fait que les directions de propagation des porteuses des différents champs sont supposées colinéaires et orientées suivant z.
- L'approximation des *enveloppes lentement variables* [Shen, 1984] suppose que l'enveloppe des champs varie peu sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde du champ et sur un temps de l'ordre de sa période.
- Après un changement de variables adapté permettant d'obtenir des conditions aux limites périodiques sur les enveloppes des champs [Lugiato *et al.*, 1985], celles-ci peuvent alors être décomposées dans une base de Fourier (il existe d'autres méthodes équivalentes que celles-ci pour établir les équations en temps). L'*approximation de champ moyen* consiste à ne retenir que le mode d'ordre 0 dans ce développement. Cette approximation signifie que les enveloppes des champs varient peu sur un passage dans la cavité, donc que le gain et l'absorption sont faibles pour un unique passage dans le cristal.

D'autre part, dans les modèles qui vont suivre, le champ de pompe est toujours considéré comme monomode transverse. Expérimentalement, cela revient à considérer que même si on ne peut adapter parfaitement le faisceau de pompe au mode TEM_{00} de la cavité, c'est celui-ci qui est majoritairement injecté, l'injection dans les autres modes étant trop faible pour pouvoir générer de nouvelles fréquences. Cela signifie aussi que le profil transverse du faisceau de pompe est supposé peu modifié par la génération de sous-harmonique.

1.2.1.a-ii Dérivation quantique du modèle

Il est aussi possible d'établir les équations du modèle à partir d'une description quantique du système [Graham et Haken, 1968; Drummond *et al.*, 1981; Yariv, 1985; Bloembergen, 1996]. Nous en donnons les grandes lignes dans le cas d'un modèle

où on ne considère qu'un seul mode pour le signal et la pompe et où le signal et le complémentaire sont dégénérés. On peut alors écrire l'hamiltonien du système, en fonction des opérateurs création a_i et annihilation a_i^+ des photons pompe et signal. Cet hamiltonien se décompose en un terme sans couplage H_f, un terme d'interaction non-linéaire H_i et un terme lié au pompage H_e [Lugiato *et al.*, 1988] :

$$\begin{aligned} H_f &= \hbar\gamma_p\Delta_p a_p^+ a_p + \hbar\gamma_s\Delta_p a_s^+ a_s \\ H_i &= i\hbar\frac{g}{2}(a_s^{+2}a_p - a_s^2 a_p^+) \\ H_e &= i\hbar\gamma_p\mathcal{E}(a_p^+ - a_p). \end{aligned}$$

Dans H_f on reconnait la différence entre l'énergie associée à un photon : $\hbar\omega_i a_i^+ a_i$ et l'énergie associée à un mode de la cavité. Dans H_i les termes $a_s^{+2}a_p$ correspond à la destruction d'un photon de pompe associée à la création de deux photons signaux et $a_s^2 a_p^+$ à l'opération inverse. Par la suite, et sur les équations issues de modèles semi-classiques, nous utiliserons souvent ce point de vue corpusculaire pour interpréter les termes couplés dans les équations.

Pour obtenir des équations identiques à celles qui seront présentées par la suite, il faut se placer dans l'approximation semi-classique, c'est à dire négliger les fluctuations et les corrélations quantiques. En tenant d'autre part compte d'un terme de perte, on obtient des équations identiques à celle du modèle présenté dans la partie 1.2.1.b.

1.2.1.a-iii Validité expérimentale des modèles présentés

Les deux modèles que nous détaillons ci-dessous sont obtenus dans les approximations mentionnées plus haut (nous les appelerons modèles de champ moyen), pour lesquels, le plus souvent, le signal et le complémentaire sont supposés ne former qu'un seul champ (*modèles dégénérés*). Le premier est un modèle monomode. C'est à partir de ce modèle que des instabilités ont été prévues pour la première fois [McNeil *et al.*, 1978; Drummond *et al.*, 1980]. C'est aussi un modèle tout à fait approprié à la description d'un OPO pompé à faible puissance (voir l'article expérimental [Richy *et al.*, 1995]). Nous présentons ensuite un modèle multimode transverse que nous utiliserons abondamment dans les chapitres 2 et 3. Ce modèle semble plutôt approprier lorsque le taux de pompage est élevé car il existe alors de nombreuses situations où une description monomode de l'OPO n'est plus adaptée. En effet, plusieurs modes transverses du signal et du complémentaire vont pouvoir coexister dans la cavité pourvu que le coefficient de couplage entre ces modes soit suffisant et que leurs résonances soient proches. La validation expérimentale de ce modèle pour des taux de pompage élevé est faite dans cette thèse au chapitre 2.

1.2.1.b Modèle champ-moyen monomode

1.2.1.b-i Presentation du modèle

Lorsque les modes de l'OPO sont supposés découplés, les équations de l'OPO sont de la forme (par exemple [Lugiato *et al.*, 1988]) :

$$\dot{A}_s = -(1+i\Delta_s)A_s + A_c^* A_p \tag{1.7a}$$
$$\dot{A}_c = -(1+i\Delta_c)A_c + A_s^* A_p \tag{1.7b}$$
$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - A_s A_c + E\right], \tag{1.7c}$$

où Δ_s, Δ_c et Δ_p sont les désaccords respectifs des champs signal, complémentaire et pompe, E est le terme de pompage et γ le rapport entre le temps de vie des photons du signal et celui de ceux de la pompe dans la cavité. Dans cette normalisation, les modules au carré des enveloppes $|A_i|^2$ donnent le nombre de photons dans les modes correspondants. Le temps des équations est normalisé au temps de décroissance typique du champ du signal dans la cavité τ_s :

$$\tau_s = \frac{2\mathcal{F}_s[L]}{\pi c},$$

où $\mathcal{F}_s$ est la finesse de la cavité pour le signal, $[L]$ la longueur optique de la cavité pour un simple passage et c la vitesse de la lumière dans le vide. Finalement, le coefficient de couplage de l'interaction paramétrique est normalisé à 1.

En régime stationnaire, on montre que $\Delta_s = \Delta_c$, cette relation correspondant à la conservation du nombre de photons : le processus paramétrique crée le même nombre de photons signal et complémentaire.

Une seule paire signal/complémentaire est présente dans ces équations alors que l'OPO choisit son mode de fonctionnement parmi une infinité de modes car en régime stationnaire seul le mode de seuil le plus bas oscille [Agarwal et Gupta, 1997; Schwob *et al.*, 1998], tous les autres étant nuls. Cette sélection est analogue au fonctionnement d'un laser à élargissement homogène : une fois le seuil du mode le plus bas atteint, le champ de pompe intracavité reste fixé à sa valeur au seuil et les autres modes du signal ne peuvent pas démarrer. Le mode de seuil le plus bas est celui dont le désaccord Δ_s est le plus petit, c'est à dire le plus résonant. Il peut arriver que deux modes aient le même désaccord, cependant cette situation est a priori très rare et est très sensible aux fluctuations [Agarwal et Gupta, 1997; Schwob *et al.*, 1998].

Lorsqu'on considère que le signal et le complémentaire ont même polarisation et même fréquence, ils ne forment plus qu'un seul champ de fréquence $\omega_p/2$ et on obtient le modèle monomode champ-moyen dégénéré :

$$\dot{A}_s = -(1+i\Delta_s)A_s + A_s^* A_p \tag{1.8a}$$
$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - A_s^2 + E\right]. \tag{1.8b}$$

Nous verrons dans la partie 3.1 que compte tenu de l'intrication des champs signal et complémentaire, ils peuvent être décrits asymptotiquement par un champ unique

même dans une situation non-dégénérée et donc que l'utilisation de modèles dégénérés ne restreint pas à priori la généralité des résultats prévus par ces modèles.

1.2.1.b-ii Etude des états stationnaires du modèle

L'étude ci-dessous est issue de la référence [Lugiato *et al.*, 1988]. On cherche les états stationnaires des équations (1.8), qui vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned}(1+i\Delta_s)A_s &= A_s^* A_p \\ (1+i\Delta_p)A_p &= E - A_s^2.\end{aligned}$$

Il existe une solution triviale :

$$A_s = 0, \text{ et } A_p = \frac{E}{1+i\Delta_p}.$$

Cette solution correspond à la situation où l'OPO est éteint, c'est à dire en-dessous du seuil d'émission du signal. La cavité se comporte comme une simple cavité Fabry-Pérot pour la pompe. Cette solution est stable pour $E < (1+\Delta_p^2)(1+\Delta_s^2)$. Au-dessus de cette valeur la solution nulle devient instable, ceci définit le seuil de l'OPO :

$$E_{seuil} = (1+\Delta_p^2)(1+\Delta_s^2).$$

Le système a aussi des solutions non-triviales dont les normes vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}E^2 &= |A_s|^4 + 2(1-\Delta_s\Delta_p)|A_s|^2 + (1+\Delta_s^2)(1+\Delta_p^2) \\ |A_p|^2 &= 1+\Delta_s^2\end{aligned}$$

On voit donc que pour ces solutions, l'intensité du champ de pompe intracavité est fixée à la valeur $1+\Delta_s^2$.

Lorsque $E^2 > (\Delta_p+\Delta_s)^2$, l'équation pour l'intensité du signal peut être résolue dans $\mathbb{R}$ et sa solution s'écrit :

$$|A_s|_\pm^2 = \Delta_s\Delta_p - 1 \pm \sqrt{E^2 - (\Delta_p+\Delta_s)^2}, \tag{1.9}$$

et ne sont bien évidemment définies que lorsque les expressions ci-dessus sont positives. On se retrouve alors face à deux possibilités lorsqu'on fait varier le taux de pompage E pour Δ_p et Δ_s fixés :

- si $\Delta_p\Delta_s < 1$, alors seule la solution $|A_s|_+^2 = \Delta_s\Delta_p - 1 + \sqrt{E^2-(\Delta_p+\Delta_s)^2}$ peut être positive et elle existe pour $E > E_{seuil}$. Cette solution est stable au début de son domaine d'existence. Cette solution est représentée pour $\Delta_p = -1$ et $\Delta_s = 3$ sur la figure 1.10(a).

- si $\Delta_p\Delta_s > 1$, alors les deux solutions $|A_s|^2_+$ et $|A_s|^2_-$ peuvent exister. La solution $|A_s|^2_+$ existe pour $E^2 > (\Delta_p + \Delta_s)^2$, c'est à dire avant la valeur E_{seuil}, et est stable sur tout son domaine d'existence. La solution $|A_s|^2_-$ existe pour $(\Delta_p + \Delta_s)^2 < E^2 < E_{seuil}$ et est instable. Il y a donc coexistence dans cette plage de paramètre entre deux solutions stables : la solution $|A_s|^2_+$ et la solution $|A_s|^2$. Le système est donc bistable : suivant le chemin suivi par le système, celui-ci suivra des branches stables différentes. Cette solution est représentée sur la figure 1.10(b) pour $\Delta_p = 1$ et $\Delta_s = 3$.

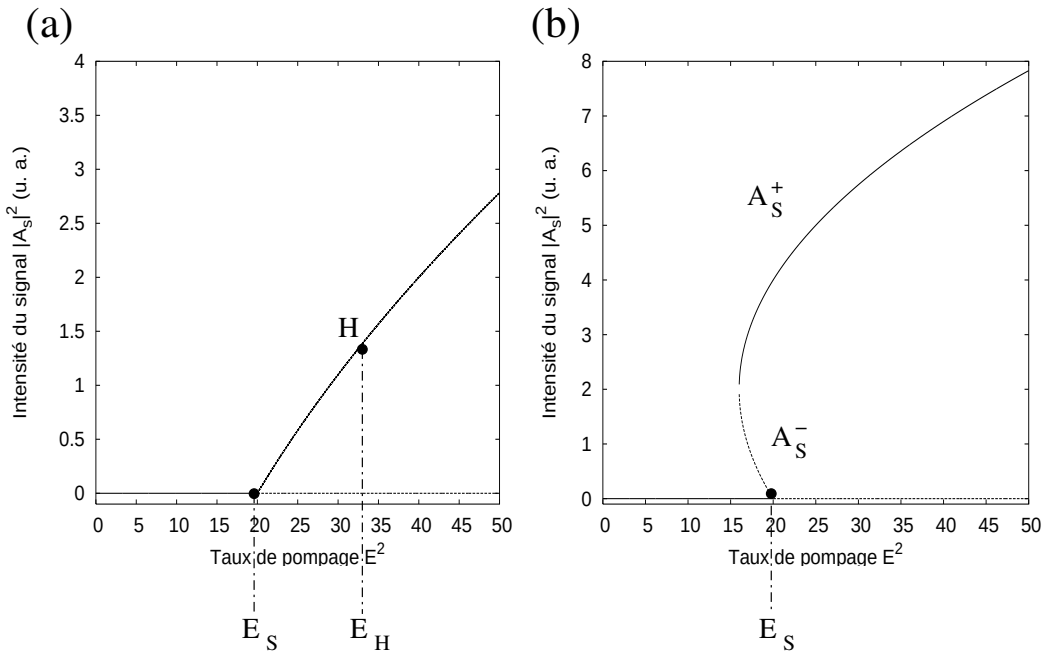


FIG. *1.10: Portrait de phase de l'intensité du champ du signal en fonction du taux de pompage pour (a) $\Delta_p = -1$ et $\Delta_s = 3$ et (b) $\Delta_p = 1$ et $\Delta_s = 3$. Les traits pleins correspondent à des solutions stables, les traits en pointillés à des solutions instables. Le point H correspond à la bifurcation à partir de laquelle la solution stationnaire devient instable et laisse place à une solution périodique. E_s est le seuil d'oscillation pour le rayonnement du signal, E_H le seuil de la bifurcation de Hopf.*

Richy *et al.* [Richy *et al.*, 1995] ont mis en évidence expérimentalement ces deux diagrammes de bifurcation et notamment l'existence de bistabilité montrant ainsi la validité de ce modèle.

Dans le cas où il y a bistabilité, la branche haute reste stable lorsque E augmente. Par contre dans le cas où il n'y a pas bistabilité, c'est à dire lorsque $\Delta_p\Delta_s < 1$, la solution stationnaire devient instable et laisse place à une solution périodique par une bifurcation de Hopf. L'évolution de l'intensité du signal et sa trajectoire dans le plan complexe sont montrés sur la figure 1.11. La solution stable est alors une solution oscillante à une fréquence ω_H fonction des désaccords Δ_p et Δ_s. La borne inférieure

de cette fréquence sur l'ensemble des valeurs des désaccords possibles a été calculée [Suret *et al.*, 2001a] en fonction des temps de vie des photons du signal τ_s et de la pompe τ_p :

$$\omega_H > \frac{1}{\sqrt{\tau_p(\tau_p + \tau_s)}}.$$

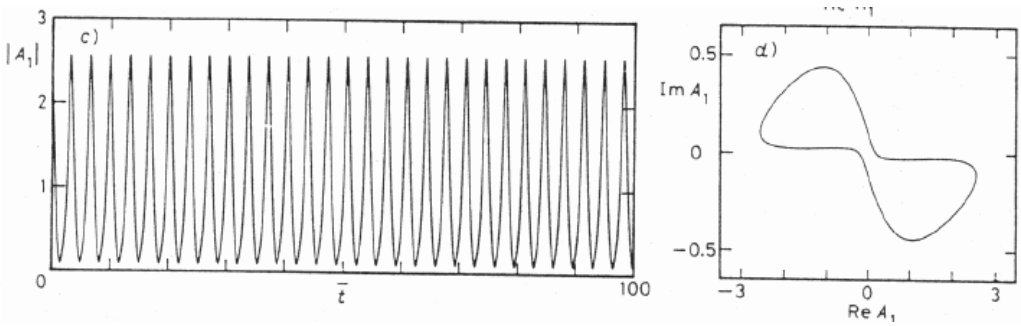


FIG. *1.11: Figure de gauche : intensité du signal au cours du temps juste après la bifurcation de Hopf. Figure de droite : trajectoire du système dans le plan complexe* ($\Re(A_s)$,$\Im(A_s)$)*. Intégration numérique du système* (1.8) *pour* $\Delta_p = -1$, $\Delta_s = 3$, $\gamma = 1$ *et* $|A_s|^2 = 2$ *[Lugiato et al., 1988].*

En augmentant encore E, on parvient à un comportement chaotique par une cascade de doublements de périodes [Lugiato *et al.*, 1988]. La figure 1.12 montre à gauche l'allure de la série temporelle de l'intensité du signal dans la zone chaotique. La figure de droite montre la trajectoire du système dans l'espace des phases. La trajectoire se déplace sur un attracteur étrange de structure fractale.

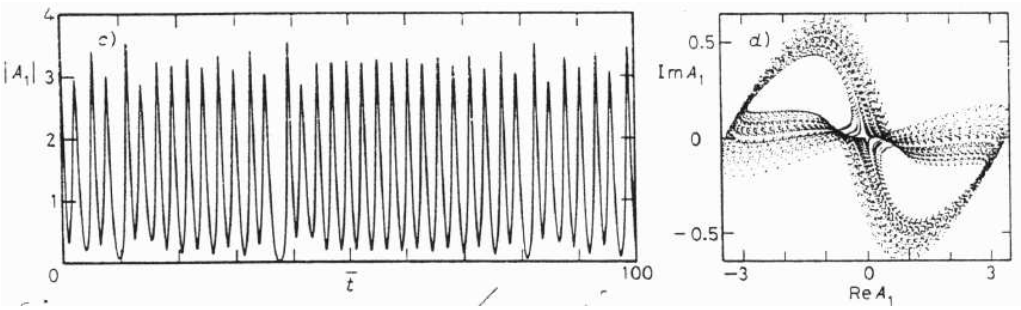


FIG. *1.12: Figure de gauche : intensité du signal au cours du temps dans une zone chaotique. Figure de droite : trajectoire du système dans le plan complexe* ($\Re(A_s)$,$\Im(A_s)$)*. Intégration numérique du système* (1.8) *pour* $\Delta_p = -1$, $\Delta_s = 3$, $\gamma = 1$ *et* $|A_s|^2 = 3$ *[Lugiato et al., 1988].*

1.2.1.c Couplage entre modes transverses

Si en général l'hypothèse monomode décrit correctement le système à faible taux de pompage, on rencontre de plus en plus de situations où ce n'est plus le cas lorsque la puissance de pompe augmente. Dans ces situations, il semble qu'on ne puisse plus négliger la possibilité de couplages entre plusieurs modes. En effet, lorsqu'on augmente la puissance de pompe les résonances de la cavité s'élargissent et peuvent être amenées dans certaines configurations à se recouvrir. Il faut alors tenir compte du couplage entre ces modes de la cavité dans la description des champs.

Ainsi, le modèle qui va être présenté ci-dessous tient compte des couplages entre différents modes transverses. Ce modèle et les résultats qui sont présentés sont issus des références [Schwob *et al.*, 1998; Schwob, 1997; Marte *et al.*, 1997].

1.2.1.c-i Présentation du modèle multimode

On va donc à présent tenir compte de plusieurs modes transverses couplés pour les différents champs. On prend les fréquences de repères tournants adaptés à chaque champ : ω_p, ω_s et ω_c, l'accord de phase est supposé exact. Les champs sont décomposés sur la base des modes de Laguerre-Gauss de la cavité :

$$\begin{aligned}
E_s(\vec{r},z,t) &= \sum_{qm} u^i_{qm}(\vec{r},z)A^s_{qm}(z,t)e^{i(k_s z-\omega_s t)},\\
E_c(\vec{r},z,t) &= \sum_{rn} u^i_{rn}(\vec{r},z)A^c_{rn}(z,t)e^{i(k_c z-\omega_c t)},\\
E_p(\vec{r},z,t) &= \sum_{pl} u^i_{pl}(\vec{r},z)A^p_{pl}(z,t)e^{i(k_p z-\omega_p t)}.
\end{aligned}$$

Lorsqu'on se limite au mode TEM_{00} pour la pompe, les équations couplées sont alors de la forme :

$$\dot{A}^s_{qm} = -(1+i\Delta^s_{qm})A^s_{qm} + \sum_{rn}\chi_{qmrn}A^{c*}_{rn}A^p_{00}, \tag{1.10a}$$

$$\dot{A}^c_{rn} = -(1+i\Delta^c_{rn})A^c_{rn} + \sum_{qm}\chi_{rnqm}A^{s*}_{qm}A^p_{00}, \tag{1.10b}$$

$$\dot{A}^p = \gamma\left[-(1+i\Delta^p_{00})A^p_{00} + \sum_{qmrn}\chi_{qmrn}A^s_{qm}A^c_{rn} + E\right], \tag{1.10c}$$

où les termes de couplage χ_{qmrn} tiennent compte à la fois du couplage non-linéaire $\chi^{(2)}$ lié au cristal, mais aussi du recouvrement entre les structures spatiales des trois champs Λ^{0mn}_{0qr} dans la cavité :

$$\chi_{qmrn} \propto \chi^{(2)}\Lambda^{0mn}_{0qr}(0), \text{ et } \Lambda^{lmn}_{pqr}(z) = \int\int d\vec{r}u^p_{pl}(\vec{r},z)u^{s*}_{qm}(\vec{r},z)u^{c*}_{rn}(\vec{r},z).$$

Ce dernier coefficient est non-nul seulement lorsque $l = m+n$. Comme nous nous sommes restreints à un mode TEM_{00} pour la pompe, nous avons donc la restriction sur l'ordre des modes : $n = -m$.

1.2.1.c-ii Coefficients de couplage

Le processus non-linéaire est d'autant plus efficace que les structures spatiales des champs se recouvrent sur un large volume à l'intérieur du cristal : ce volume de recouvrement donne le volume dans lequel l'interaction paramétrique va pouvoir se produire. L'optimisation de ce recouvrement sur la taille du cristal l_c dans le cas de trois champs TEM_{00} nécessite d'ajuster le paramètre de focalisation [Boyd et Kleinman, 1968] $l_c/2z_R$, où z_R est la distance de Rayleigh fixée par la géométrie de la cavité.

Pour une taille de cristal et pour une géométrie de cavité fixées, le coefficient de couplage va dépendre de l'ordre des modes transverses des champs impliqués dans l'interaction. L'étude de l'évolution de ces coefficients de couplage en fonction des ordres des modes transverses est faite dans les références [Schwob *et al.*, 1998; Schwob, 1997]. La figure 1.13, montre ainsi l'évolution des coefficients de couplage normalisés :

$$C_{qr}^{m} = \frac{\Lambda_{0qr}^{0m-m}(z=0)}{\Lambda_{000}^{000}(z=0)}.$$

De manière générale ce coefficient est maximal d'une part pour $m = 0$, c'est à dire pour un ordre radial peu élevé et d'autre part pour $q = r$ c'est à dire lorsque les structures transverses des champs sont identiques. Si on s'intéresse alors à $C_{qq}^{0}(z = 0)$, celui-ci décroît très lentement quand q augmente. Les couplages entre modes transverses donc sont loin d'être négligeables dans les OPO.

1.2.1.c-iii Présentation du modèle bimode

L'étude va porter sur une situation simple où seuls deux modes coexistent, les autres ayant soit un coefficient de couplage trop faible, soit des désaccords trop élevés pour participer à l'interaction. Le modèle se résume alors à un système d'équations de la forme :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{s1} &= -(1+i\Delta_{s1})A_{s1} + \chi_{11}A_{c1}^{*}A_p + \chi_{12}A_{c2}^{*}A_p, \\
\dot{A}_{c1} &= -(1+i\Delta_{c1})A_{c1} + \chi_{11}A_{s1}^{*}A_p + \chi_{12}A_{s2}^{*}A_p, \\
\dot{A}_{s2} &= -(1+i\Delta_{s2})A_{s2} + \chi_{21}A_{c1}^{*}A_p + \chi_{22}A_{c2}^{*}A_p, \\
\dot{A}_{c2} &= -(1+i\Delta_{c2})A_{c2} + \chi_{21}A_{s1}^{*}A_p + \chi_{22}A_{s2}^{*}A_p, \\
\dot{A}_{p} &= \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - \chi_{11}A_{s1}A_{c1} - \chi_{12}A_{s1}A_{c2}\right. \\
&\quad \left. -\chi_{21}A_{s2}A_{c1} - \chi_{22}A_{s2}A_{c2} + E\right].
\end{aligned}$$

Une représentation en terme de processus photonique permet de bien comprendre la signification des termes croisés dans les équations. La figure 1.14 montre les différentes possibilités de conversion pour un photon de pompe. Celui-ci peut se convertir dans le même mode : $p \to s_1 + c_1$ ou $p \to s_2 + c_2$, ou dans une combinaison des deux modes : $p \to s_1 + c_2$ ou $p \to s_2 + c_1$. En régime stationnaire la conservation de l'énergie impose : $\omega_p = \omega_{s1} + \omega_{c1} = \omega_{s2} + \omega_{c2} = \omega_{s1} + \omega_{c2} = \omega_{s2} + \omega_{c1}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\omega_{s1} &= \omega_{s2}, \\
\omega_{c1} &= \omega_{c2}.
\end{aligned}$$

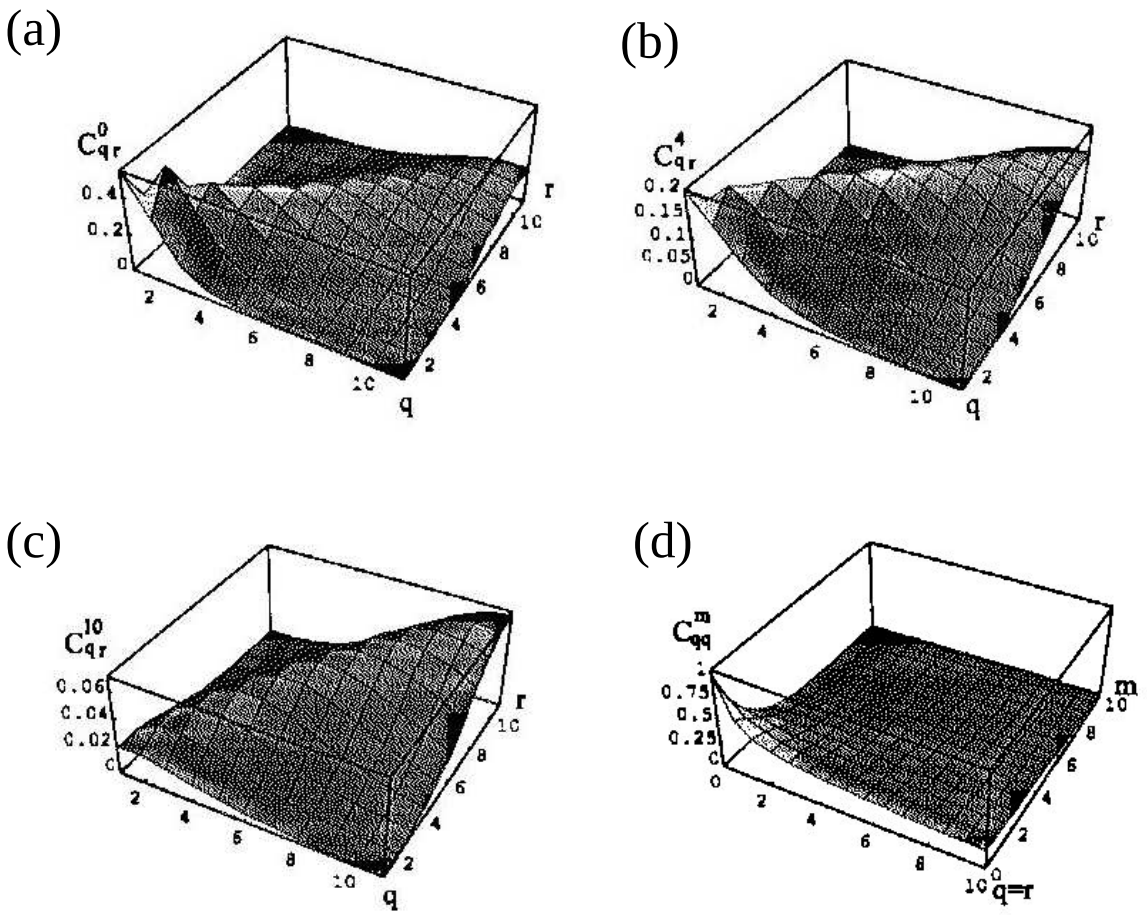


FIG. *1.13: Coefficients de couplage normalisés entre les modes transverses, en fonction de l'ordre de ces modes. Les figures (a), (b) et (c) correspondent à des valeurs de m fixées (respectivement 0, 4 et 10) tandis que q et r varient entre 0 et 10. Pour la figure (c) $q = r$ et m varient entre 0 et 10 [Schwob, 1997].*

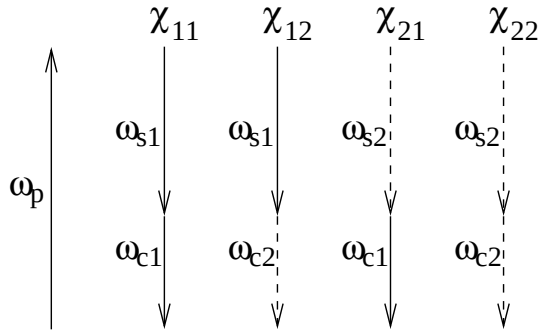


FIG. *1.14: Représentation des canaux de conversion associés aux différents termes de couplage. Les traits pleins ou pointillés correspondent à différentes structures transverses.*

Soulignons le fait que si $\chi_{12} = \chi_{21} = 0$, le système est le même que celui du modèle (1.7). Dans ce cas, on a vu que seul le mode de plus bas seuil peut osciller. Ce sont donc les termes de couplage croisés qui permettront la coexistence de deux modes différents. On remarquera aussi que dans les équations (1.10) les amplitudes $A^s_{qm}(z,t)$ sont toutes relatives au même repère tournant. On ne s'intéresse en effet qu'aux interactions résonantes.

La figure 1.15 montre les courbes de résonance de différents modes participant à l'interaction. La largeur de chaque pic est liée à la finesse de la cavité. Les flèches verticales représentent les fréquences des repères tournants ω_p pour la pompe, ω_s pour le signal et ω_c pour le complémentaire. Les flèches horizontales montrent les désaccords, c'est-à-dire la distance en fréquence entre la fréquence du repère tournant et la fréquence de la résonance la plus proche. Si une seule résonance est proche, les projections sur les autres modes de la cavité seront négligeables, sinon, le champ peut se projeter sur plusieurs modes.

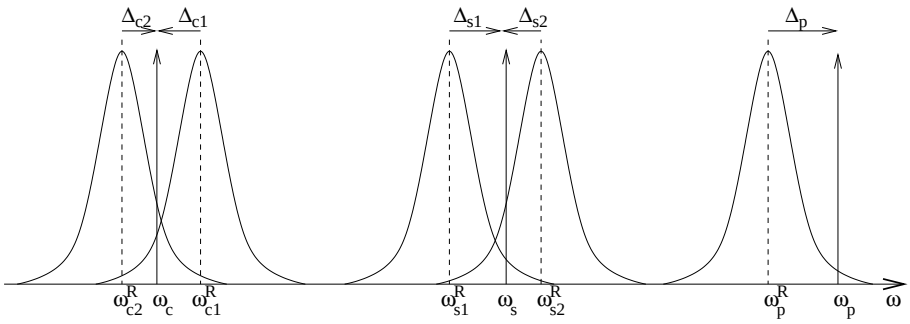


FIG. *1.15: Représentation des courbes de résonance des modes impliqués dans l'interaction dans le cas du modèle bimode non-dégénéré. Les courbes représentent les résonances de la cavité pour le complémentaire (ω^R_{c1} et ω^R_{c2}), le signal (ω^R_{s1} et ω^R_{s2}) et la pompe (ω^R_p). Les repères tournant pour les différents champs sont repérés par des flèches verticales (ω_c, ω_s et ω_p). Les différents désaccords entre les fréquences des repères tournants et les fréquences des résonances de la cavité associées sont indiquées par des flèches horizontales.*

1.2.1.c-iv Etude du modèle bimode dégénéré

Dans le cas particulier où le champ du signal et celui du complémentaire sont confondus (cas dégénéré) et où les couplages croisés sont égaux : $\chi_{12} = \chi_{21}$, il n'y alors plus que trois équations couplées (les normalisations sont celles de [Suret *et al.*, 2001a]) :

$$\dot{A}_1 = -(1+i\Delta_1)A_1 + A_1^* A_p + \chi_{12} A_2^* A_p \tag{1.11a}$$
$$\dot{A}_2 = -(1+i\Delta_2)A_2 + \chi_{12} A_1^* A_p + \chi A_2^* A_p \tag{1.11b}$$
$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - \chi A_1^2 - 2\chi_{12} A_1 A_2 - \chi A_2^2 + E\right], \tag{1.11c}$$

A désaccords nuls, les équations (1.11) ont des solutions analytiques sur lesquelles une étude de stabilité peut être menée. Pour de faibles taux de pompage, les amplitudes des champs signal et complémentaire sont nulles et les solutions du système (1.11) sont :

$$A_1 = A_2 = 0$$
$$A_p = E.$$

Cette solution est stable pour E inférieur à un premier seuil $E_{seuil_1} > 0$. A partir de ce seuil, il existe de nouvelles solutions $(A_1^{\pm}, A_2^{\pm})$ stationnaires et stables correspondant à de l'émission paramétrique multimode. Ces deux solutions ont leurs phases relatives fixées. A partir d'un second seuil $|E_{seuil_2}| > E_{seuil_1}$, de nouvelles paires de solutions apparaissent mais elles sont toujours instables alors que les solutions précédentes restent stables.

Pour les désaccords non-nuls il n'est plus possible de mener une étude analytique. Une étude numérique montre que lorsque les désaccords sont faibles la description précédente reste valable. Lorsque les désaccords augmentent, des solutions oscillantes stables pour les intensités apparaissent.Nous aurons l'occasion de revenir sur ces solutions numériques dans le chapitre 2.

Dans le cas non-dégénéré et à désaccords nuls, il existe un scénario identique d'émission multimode à partir du seuil de démarrage de l'OPO. A désaccords non-nuls, des solutions oscillantes peuvent aussi apparaître.

1.2.2 Modèles thermiques

Lorsqu'on s'intéresse aux observations expérimentales d'instabilités dans les TROPO, on s'aperçoit que seules deux types d'instabilités ont été observées. Le premier concerne des oscillations de fréquences 1 à 10MHz superposées ou non à des fréquences lentes (1 à 10 kHz) [Richy *et al.*, 1995; Suret, 2000; Suret *et al.*, 2001a]. Comme ce type d'oscillation fait l'objet d'une présentation détaillée dans le chapitre 2, nous ne les présentons pas dans ce chapitre.

Le deuxième type d'instabilités qui a été observé expérimentalement dans les TROPO sont des instabilités lentes de fréquence de l'ordre de 1 à 10 kHz [Douillet et Zondy, 1998; Douillet *et al.*, 1999; Suret, 2000]. Compte tenu de leur fréquence lente et de la forme des signaux, elles ne peuvent être liées à des instabilités optiques du type de celles qui ont été présentées dans les modèles précédents. La modélisation de ces instabilités a été faite par Suret *et al.* [Suret *et al.*, 2000, 2001b; Suret, 2000] en introduisant dans les modèles usuels une variable lente représentant les variations de la température. Nous présentons ces modèles thermiques dans le cas d'oscillations spontanées monomode et multimode.

1.2.2.a Modèles tenant compte des effets thermiques

Les effets thermiques ont une influence sur la description statique des OPO. Ainsi, le profil gaussien de la répartition de l'énergie des faisceaux engendre une variation

spatiale de l'indice du cristal ayant pour effet la formation d'une lentille thermique [Tarassov, 1985]. L'effet de cette lentille sur le déplacement de la dégénérescence confocale de la cavité a été étudié expérimentalement [Ducci *et al.*, 2001].

D'autre part, les variations de taille optique de la cavité liées à ces effets thermiques accentuent la difficulté de stabilisation des OPO (notamment les TROPO) en forçant le système à changer régulièrement de mode. Cependant ces variations peuvent aussi s'opposer aux fluctuations mécaniques et stabiliser le système sur un mode [Douillet *et al.*, 1999]. Enfin, ces effets thermiques peuvent donner naissance à des instabilités que nous présentons maintenant. Le mécanisme de ces instabilités thermiques repose sur des cycles de variations de la température qui entraînent le système à basculer périodiquement entre plusieurs modes de fonctionnement.

1.2.2.b Modèle monomode thermique

1.2.2.b-i Observations expérimentales

Le modèle qui va être présenté repose directement sur des observations expérimentales d'oscillations spontanées de fréquence de l'ordre de la dizaine de kiloHertz. Le dispositif expérimental est un OPO triplement résonant constitué d'un cristal de KTP de 7mm coupé pour un accord de phase de type II et placé entre deux miroirs réfléchissants aux longueurs d'onde de la pompe (532nm) et du signal (∼1064nm) avec des finesses respectives de 45 de 550. La taille de la cavité est d'environ 5cm pour des rayons de courbure des miroirs de 3cm. Le seuil est inférieur à 25mW, la puissance de pompe est de 450mW.

La figure 1.16 montre la forme typique d'instabilités présentées par les intensités du signal (a) et de la pompe (b). L'intensité du signal commute entre une valeur nulle et une valeur non-nulle en présentant des fronts abrupts au moment des commutations. L'intensité de la pompe présente aussi des discontinuités en alternant entre deux modes de fonctionnement quasi-linéaires au cours du temps et de pentes positives.

Le point important est que même lorsque le signal est nul l'intensité de la pompe n'est pas constante, comme cela a été mis en évidence sur la figure 1.16 sur la période encadrée par des tirets. Or dans le modèle champ moyen monomode, lorsque le signal est nul, la cavité n'est plus qu'une simple cavité Fabry-Pérot sur la pompe :

$$\dot{A}_p = \gamma \left[-(1 + i\Delta_p) A_p + E \right],$$

dans ce cas, la pompe atteint sa solution stationnaire $\frac{E}{1+i\Delta}$ au bout d'un temps caractéristique de l'ordre du temps de décroissance du champ de la pompe dans la cavité $\sim$ 8ns. Or la pompe évolue sur un temps de l'ordre de 50μs, ce qui signifie qu'un paramètre évolue pendant la durée de l'extinction du signal. Comme le taux de pompage est constant, cela signifie que le désaccord de la pompe et donc la longueur optique de la cavité est en train d'évoluer lentement. Cette variation lente a pour origine les effets thermiques, qui en faisant varier les indices du cristal font varier la longueur optique de la cavité.

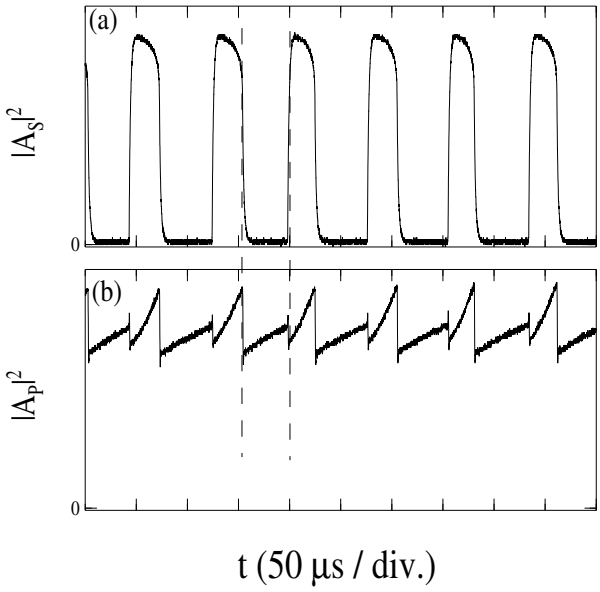


FIG. *1.16: Instabilités spontannées présentées par l'intensité du signal (a) et de la pompe (b) dans un TROPO [Suret, 2000].*

1.2.2.b-ii Modélisation

Pour modéliser cette variation de la taille de la cavité à cause des fluctuations de la température, une variable lente θ est introduite dans le modèle dégénéré. Cette variable est l'écart entre le désaccord du champ pour la cavité froide (en l'absence de champ) Δ_s et celui de la cavité chaude σ_s. Les désaccords des champs s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \sigma_s(\theta) &= \Delta_s - \theta \\ \sigma_p(\theta) &= \Delta_p - \frac{2\theta}{\gamma}. \end{aligned}$$

D'autre part l'équation différentielle sur θ est une équation phénoménologique tenant compte d'un retour de θ à l'équilibre par une décroissance exponentielle, cet équilibre étant déterminé par les absorptions des intensités des champs :

$$\dot{\theta} = \epsilon(-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta|A_s|^2),$$

le facteur $\epsilon \ll 1$ permettant de tenir compte du temps caractéristique d'évolution de la température par rapport aux temps optiques.

Les équations sont donc finalement :

$$\dot{A}_s = -(1 + i(\Delta_s - \theta))A_s + A_s^* A_p, \tag{1.12a}$$

$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1 + i(\Delta_p - \frac{2\theta}{\gamma}))A_p - A_s^2 + E\right], \tag{1.12b}$$

$$\dot{\theta} = \epsilon(-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta|A_s|^2). \tag{1.12c}$$

Un tel modèle permet de reproduire numériquement les observations expérimentales. Les constantes de temps des fronts rapides étant déterminées par les temps optiques tandis que les évolutions lentes sont déterminées par le temps de l'équation thermique.

Le mécanisme des instabilités est alors un cycle d'oscillation de relaxation autour d'un cycle de bistabilité de type Van der Pol. La figure 1.17 montre les portraits de phase de l'intensité du signal (a) et de celle de la pompe (b) en fonction de θ. En traits fins sont représentés les solutions stationnaires des équations (1.12a) et (1.12b) lorsque θ est considéré comme un paramètre, les traits pleins étant des solutions stables et les pointillés des solutions instables.

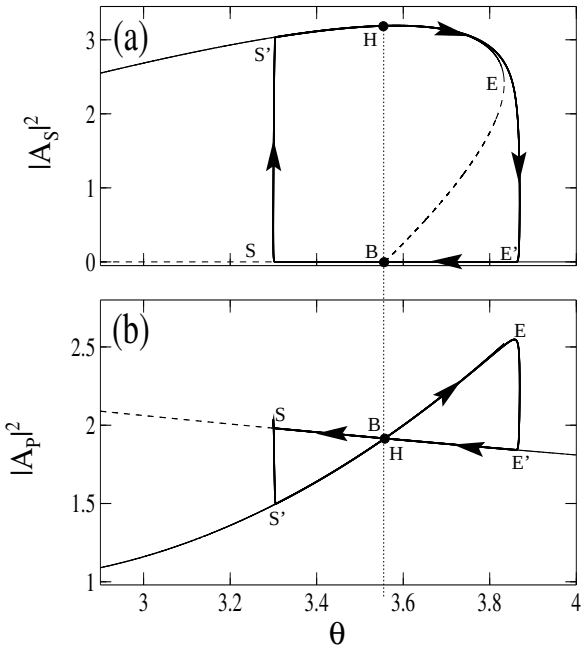


FIG. *1.17: Portrait de phase des régimes oscillants monomodes. En traits fins sont représentés les états stationnaires du signal (a) et de la pompe (b) lorsque θ est considéré comme un paramètre, en trait continu les états stables, en pointillé les états instables. Les traits gras représentent la trajectoire du système pour l'intensité du signal (a) et de la pompe (b) lorsqu'on intègre numériquement les équations* (1.12) *[Suret, 2000].*

En traits gras a été représenté la trajectoire du système lorsque θ n'est plus considéré comme un paramètre mais comme une variable lente. On voit que le système parcourt alors une orbite périodique. Pour l'intensité du signal, sur la figure 1.17(a), lorsque le système est sur la branche haute, l'intensité du signal est non-nulle. Le cristal absorbe une partie de cette intensité, et donc sa température augmente. Le système se déplace alors le long de la résonance dans le sens des températures crois-

santes jusqu'à ce qu'au point tournant où la solution non-nulle devient instable. Le système commute alors sur la nouvelle solution stable accessible : celle d'intensité nulle. Comme il n'y a plus de signal dans la cavité, la température du cristal diminue et le système parcourt l'axe des abscisses dans le sens décroissant, passant par la bifurcation à partir de laquelle la solution nulle devient instable. Le système commute alors à nouveau sur la branche du haut, stable. On notera que le système ne commute pas exactement au point de bifurcation mais avec un certain retard. Nous parlerons de ce retard à la bifurcation dans le chapitre 4.

1.2.2.c Modèle multimode thermique

Le modèle précédent décrit des oscillations spontanées au cours desquelles le signal oscille entre un mode "allumé" et un mode "éteint". D'autres oscillations peuvent être observées correspondant à des oscillations de forme semblable mais entre plusieurs modes "allumés" du signal [Suret, 2000]. Cette partie rappelle les grandes lignes du modèle bimode thermique [Suret *et al.*, 2001b] expliquant le mécanisme de ce type d'oscillations lorsque deux modes sont impliqués.

1.2.2.c-i Observations expérimentales

Le dispositif expérimental est semblable à celui des oscillations monomodes thermiques de la partie précédente. La figure 1.18 montre les comportements typiques des intensités du signal (a) et de la pompe (b) pour un régime bimode thermique. Le signal et la pompe oscillent entre deux régimes de fonctionnement différents correspondants à deux modes longitudinaux différents [Suret *et al.*, 2001b]. Des régimes du même type peuvent être observés entre des modes transverses différents [Suret, 2000]. De telles oscillations peuvent aussi être observées dans un OPO doublement résonant.

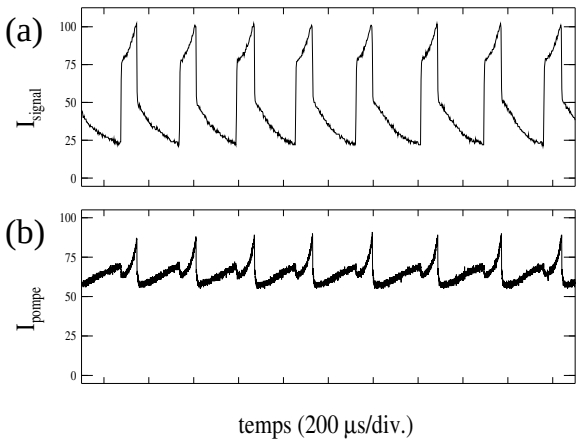


FIG. *1.18: Instabilités spontanées présentées par l'intensité du signal (a) et de la pompe (b) dans un TROPO [Suret, 2000].*

1.2.2.c-ii Modèlisation

Le modèle permettant de décrire ces oscillations reprend les mêmes ingrédients que précédement mais en impliquant deux modes du signal :

$$\dot{A}_1 = -(1 + i(\Delta_1 - \theta))A_1 + A_1^* A_p, \tag{1.13a}$$
$$\dot{A}_2 = -(1 + i(\Delta_2 - \theta))A_2 + A_2^* A_p, \tag{1.13b}$$
$$\dot{A}_p = \gamma \left[-(1 + i(\Delta_p - \frac{2\theta}{\gamma}))A_p - A_1^2 - A_2^2 + E \right], \tag{1.13c}$$
$$\dot{\theta} = \epsilon(-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta(|A_1|^2 + |A_2|^2)). \tag{1.13d}$$

De la même manière que précédemment ce modèle reproduit tout à fait correctement les régimes observés expérimentalement [Suret *et al.*, 2001b]. La figure 1.19 montre en traits fins les solutions stationnaires des deux modes du signal (a) et de la pompe (b) lorsque θ est considéré comme un paramètre, les traits continus étant les états stables et les traits pointillés les états instables. Le point θ^* correspond au point d'échange de stabilité entre les deux modes où $\sigma_1(\theta^*) = -\sigma_2(\theta^*)$. Pour ce point les courbes des états stationnaires de la pompe se croisent correspondant à la situation où les seuils des deux modes sont égaux.

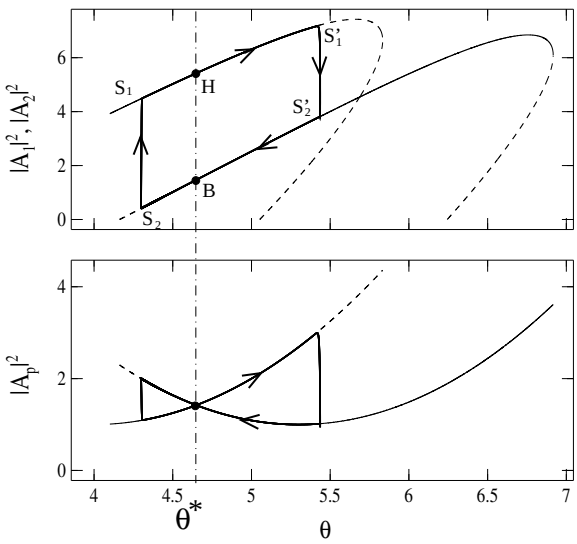


FIG. *1.19: Portrait de phase des régimes oscillants bimodes. En traits fins sont représentés les états stationnaires des deux modes du signal (a) et de la pompe (b) lorsque θ est considéré comme un paramètre, en trait continu les états stables, en pointillé les états instables. Le point θ^* correspond à l'échange de stabilité entre les deux modes. Les traits gras représentent la trajectoire du système pour l'intensité du signal (a) et de la pompe (b) lorsqu'on intègre numériquement les équations* (1.13) *[Suret, 2000].*

Les cycles en traits gras sont les trajectoires parcourues par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente. Le système parcourt une orbite périodique

par un mécanisme semblable à celui qui a été décrit dans le cas monomode. Lorsque le système est sur la branche de plus grande intensité, la température du cristal augmente et le système suit la résonance dans le sens des θ croissants. Lorsque la solution devient instable, le système commute sur un mode d'intensité plus faible, donc la température du cristal décroît et le système parcourt la résonance dans le sens des θ décroissants passant de nouveau le point d'échange de stabilité où le mode d'intensité la plus élevée devient de nouveau stable.

On notera que dans ce cas de figure, le cycle de bistabilité est de largeur nulle, seul le retard à la bifurcation à chaque passage au point d'échange de stabilité permet aux oscillations d'exister.

Nous reviendrons dans la partie 4.1 sur ces régimes bimodes en s'interrogeant sur l'existence d'un point stabilisé thermiquement entre les deux modes.

Ces modèles thermiques montrent que les instabilités observées expérimentalement ne correspondent pas forcément à celles attendues par les études théoriques antérieures. En fait si on calcule à quelles variations de température correspondent les oscillations précédement décrites, on s'aperçoit qu'il suffit d'une variation d'une dizaine de milliKelvins pour engendrer des fluctuations de la taille de la cavité de quelques nanomètres suffisantes à induire des sauts de modes. Pourtant, à priori, des variations aussi faibles de la température auraient pu être considérées comme négligeables en supposant que de petites variations ont de petits effets. En fait on s'aperçoit ici que de petites variations de la température peuvent induire de grands effets tels qu'une modulation de 100% de l'intensité dans le cas des oscillations monomodes.

Nous avons mentionné l'existence de modèles spatio-temporels parmi les études théoriques dont les OPO ont fait l'objet. Nous allons évoquer succintement ces modèles. Cette thèse est consacrée à l'étude de la dynamique temporelle. Si certaines des instabilités que nous présenterons mettent en jeu plusieurs modes transverses, il ne s'agit en aucun cas de dynamique spatio-temporelle au sens où on l'entend en général, c'est-à-dire l'apparition d'une structure transverse ou *pattern* par la sélection d'un ou plusieurs vecteurs d'onde lorsque le système est placé loin de sa solution d'équilibre. Nous essaierons d'évoquer brièvement les difficultés expérimentales rendant difficile l'observation expérimentale de telles structures expérimentalement.

1.2.3 Modèles spatio-temporels

L'apparition de structures stables lorsqu'un système non-linéaire étendu spatialement est porté hors d'équilibre est un sujet qui a donné lieu à de nombreuses études théoriques et expérimentales pour des systèmes variés [Cross et Hohenberg, 1993]. Historiquement, les premières structures ont sans doute été vues dans des expériences d'hydrodynamique, notamment les expériences de Taylor-Couette et Rayleigh-Benard. Pour certaines valeurs de paramètres il est possible d'atteindre des zones de turbulence où le système ne présente plus aucune forme d'ordre spatiale ou temporelle alors que les paramètres sont fixes.

Il est prévu théoriquement que les oscillateurs paramétriques optiques peuvent eux aussi présenter différentes structures spatio-temporelles.

1.2.3.a Dynamique spatio-temporelle

Lorsque l'on tient compte du laplacien transverse dans les équations (1.3), le couplage entre la non-linéarité et la diffraction conduit alors à la formation de patterns [Oppo *et al.*, 1994a,b; Staliunas, 1995; Longhi, 1996a,c; Sánchez-Morcillo *et al.*, 1997]. D'autre part, l'apparition de structures spatiales nécessite la possibilité d'avoir coexistence d'un nombre élevé de modes transverses. Cela signifie pour un OPO que les modes transverses doivent être dégénérés pour les différents champs. La cavité doit donc correspondre à une situation telle que confocale, concentrique ou plan-plan. La plupart des études théoriques sont faites pour une configuration plan-plan.

Peu de travaux théoriques sont consacrés à des OPO dont la cavité est constituée de miroirs sphériques avec des champs de taille finie qui correspondent aux situations expérimentales. Citons notamment [M.Marte *et al.*, 1998] qui prévoit la formation de différents types de patterns pour un OPO triplement résonant dégénéré. D'autre part des structures localisées (*solitons*) ont aussi été prédites [Longhi, 1996b; Trillo *et al.*, 1997; Staliunas et Sánchez-Morcillo, 1997; Longhi, 1998].

1.2.3.b Difficultés expérimentales

Compte tenu de la grande variété des travaux théoriques consacrés à la formation de structures transverses dans les OPO, il est étonnant qu'il n'y ait pas eu de nombreux travaux expérimentaux mettant en évidence l'existence de ces structures. A notre connaissance, les seuls articles décrivant des structures transverses mettant en jeu un nombre de modes élevés et l'apparition de structures transverses sont [Vaupel *et al.*, 1999; Ducci *et al.*, 2001].

Les difficultés expérimentales pour se mettre dans des configurations où des patterns sont susceptibles d'apparaître sont de plusieurs sortes. D'une part, il s'agit de se placer dans une configuration dégénérée pour les modes transverses du signal et du complémentaire telle que confocale. Une telle situation est particulièrement instable, notamment lorsqu'on augmente la puissance de pompe. D'autre part, pour que la cavité soit dégénérée pour les modes du signal *et* du complémentaire dans le cas d'un OPO de type II, il faut construire une cavité à deux bras pour chaque polarisation permettant de régler finement la taille de la cavité pour les deux polarisations indépendamment. Il existe ensuite des difficultés liées à l'absence de contrôle qu'a l'expérimentateur sur les désaccords des champs. Ainsi, les conditions sur les désaccords nécessaires à l'apparition de ces structures ne sont pas forcement réalisable expérimentalement. Nous présentons ainsi dans la partie 3.3 une étude de la possibilité expérimentale de remplir les conditions de la bifurcation de Hopf du modèle monomode en tenant compte de la puissance maximale de pompe disponible et de la limitation des désaccords liée à la sélection de modes dans les OPO. Finalement, un dernier problème est lié à la difficulté de stabiliser les OPO pendant un temps suffisament long pour les temps d'acquisition de la plupart des caméras. Nous rentrons

dans les détails de cette difficulté de pouvoir résoudre à la fois l'espace et le temps dans le chapitre 2.

Pour conclure cette partie, nous avons essayé de donner succintement les outils que nous utilisons dans la suite de l'exposé de nos travaux. Cette description des différents aspects statiques et dynamiques des OPO est forcément partielle et partiale. Pour ne pas alourdir inutilement ce chapitre, certains outils, notamment d'analyse du chaos ne seront rappelés que lors de leur utilisation.

1.3 Matériel utilisé

Après avoir rappelé le contexte théorique de nos travaux, nous présentons le matériel utilisé dans l'ensemble de nos expériences. La plus grande partie de ce matériel est identique à celui de la référence [Suret, 2000].

1.3.1 Le laser de pompe

Le laser de pompe est un laser continu de type "Verdi" de chez Coherent. Le faisceau est garanti par le fabriquant monomode transverse et longitudinal à 532nm polarisé linéairement. La puissance maximale du laser est 5W. Il s'agit d'un laser Nd :YVO_4 doublé.

1.3.2 Les cristaux non-linéaires

1.3.2.a Le cristal de KTP

Nous avons utilisé un cristal de potassium titanyl phosphate taillé pour un accord de phase de type II de section $5 \times 5\text{mm}^2$ et de longueur 15mm. Le cristal est biaxe et coupé à ϕ =23.5° et θ =90°. On obtient ainsi de la génération de seconde harmonique approximativement à fréquence égale pour le signal et le complémentaire ($\sim$ 1.064μm). La pompe est de polarisation extraordinaire. Comme la dégénérescence est de type II le signal et le complémentaire sont de polarisations orthogonales, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire. Les indices vus par chaque champs sont alors [Eckardt *et al.*, 1990; Suret, 2000] :

$$\begin{aligned} n_p &= 1.79, \\ n_e &= 1.75, \\ n_o &= 1.83. \end{aligned}$$

Les coefficients d'aborptions maximums sont : 2%.cm^{-1} à 532nm et 0.05%.cm^{-1} à 1064nm.

1.3.2.b Le cristal de $LiNbO_3$

Nous avons aussi utilisé un cristal d'accord de phase de type I : un niobate de lithium dopé (5%) à l'oxyde de magnesium (MgO :$LiNb0_3$) de section $5 \times 5\text{mm}^2$ et

de longueur 15mm. Le cristal est uniaxe et coupé à 90°, il n'y a donc pas de double refraction. L'accord de phase est non critique et se fait à 107°C [Koslovski *et al.*, 1988], le cristal est donc placé dans un four permettant de contrôler cet accord.

Le four est constitué d'une résistance chauffante bobinée autour du support cylindrique du cristal, permettant d'obtenir une répartition de la température relativement uniforme.

Les indices vus par chaque champ sont

$$n_o = n_e = 2.23$$

à la dégénérescence, la pompe étant polarisée extraordinairement et le signal et le complémentaire étant polarisés ordinairement. Les coefficients d'absorption maximums sont de l'ordre de 2%.cm^{-1} [Dmitriev *et al.*, 1997] à 532nm et ∼0.1%.cm^{-1} à 1064nm.

La relation de dispersion en fonction de la température est de la forme :

$$\begin{aligned} n^2 &= A_1 + \frac{A_2 + B_1(T-T_0)(T+T_0+546)}{\lambda^2 - (A_3 + B_2(T-T_0)(T+T_0+546))^2} \\ &\quad + B_3(T-T_0)(T+T_0+546) - A_4\lambda^2, \end{aligned}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2 et B_3 sont des constantes dépendant du caractère ordinaire et extraordinaire de l'onde et donnés dans la référence [Edwards et Lawrence, 1984], λ est la longueur d'onde dans le vide donnée en microns et T est la température en degrés centigrades.

1.3.3 Cavités

1.3.3.a Injection de la cavité

Le faisceau du laser de pompe est injecté dans la cavité de manière à être le mieux adapté possible au mode TEM$_{00}$ de la cavité grâce à un jeu de deux lentilles formant un téléscope. La possibilité de jouer sur les positions des deux lentilles permet de pouvoir changer à la fois la taille et la position du waist de la pompe dans la cavité.

Pour optimiser l'interaction paramétrique, on utilise le critère de Boyd et Kleinman [Boyd et Kleinman, 1968] donnant une mesure du maximum d'efficacité de conversion pour trois modes TEM$_{00}$ en fonction du waist des faisceaux et de la taille du cristal. Typiquement, l'efficacité est maximale lorsque le rapport $l_c/2z_R$ est de l'ordre de l'unité, où l_c est la longueur du cristal et z_R est la longueur de Rayleigh fixée par la cavité.

Dans nos expériences, on peut estimer la taille du waist à plusieurs dizaines de micromètres. La lentille thermique, particulièrement à puissance de pompe élevée, rend difficile une estimation précise de ce waist.

1.3.3.b Miroirs

Nous n'avons travaillé qu'avec des OPO triplement résonants. Les rayons de courbure des miroirs sont de 5cm. Le miroir de sortie a pour coefficient de réflexion R$_{max}$ à

532 nm et 99% à 1064 nm. Nous avons utilisé deux miroirs d'entrée différents suivant les expériences : un de coefficient de réflexion 94% à 532 nm, l'autre de 90% à 532 nm. Pour ces deux miroirs, le coefficient de réflexion est maximal à 1064 nm.

La position du miroir d'entrée (et donc la taille de la cavité) peut être contrôlée de manière grossière par une vis micrométrique ou de manière plus fine en contrôlant les tensions appliquées à trois cales piezoélectriques placées à trois coins du support du miroir. Enfin les trois cales piezoélectriques peuvent être soumises simultanément à une rampe de tension permettant de balayer la taille de la cavité sur un ou plusieurs intervalles spectraux libres.

1.3.4 Détection et acquisition

1.3.4.a Détecteurs ponctuels

Les intensités des faisceaux infrarouges sont mesurées par des détecteurs Thorlab "rapides" de deux types :

- photodiode InGaAs de temps de montée 5ns pour des longueurs d'onde de 800 à 1800nm. La bande passante calculée à partir des spécifications du constructeur [2] et pour une résistance $R_{charge} = 50\Omega$ est de 145MHz.
- photodiode au Silicium de temps de montée inférieur à 1ns pour des longueurs d'onde de 185 à 1100nm. La bande passante calculée à partir des spécifications du constructeur et pour une résistance $R_{charge} = 50\Omega$ est de 1GHz.

L'intensité de la pompe est mesuréee par un détecteur Thorlab au silicium de bande passante 50MHz (spécification du constructeur) pour des longueurs d'onde de 200 à 1100nm. La faiblesse de l'intensité du signal à la sortie de la cavité explique la faiblesse de certains de nos signaux et le faible rapport signal sur bruit dans la suite.

1.3.4.b Barrette CCD

Nous utilisons pour visualiser des coupes du profil transverse une barette CCD constituée de 256 photodiodes dont le fonctionnement est détaillé dans la partie 2.2.3. Elle permet de visualiser des images du profil transverse à une fréquence de 33kHz.

1.3.4.c Caméra

Pour observer la structure 2D des faisceaux signal ou complémentaire en sortie de la cavité, on utilise une caméra CCD constitué de 752(H)×582(V) pixels. La cadence d'acquisition de la caméra est de 50 images par seconde. Un objectif permet de visualiser une image d'une coupe transverse du faisceau par un écran, mais lorsque la taille du faisceau transverse est adaptée par une lentille et en utilisant des atténuateurs, le faisceau peut être visualisé directement par la matrice de photodiodes.

[2] $f_{BW} = \frac{1}{2\pi R_{charge} C_{diode}}$

1.3.4.d Oscilloscope

La plus grande partie de nos acquisitions se font grâce à un oscilloscope numérique LeCroy 9384AL de fréquence d'acquisition maximale 1GHz.

1.3.5 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental générique de nos travaux est schématisé sur la figure 1.20. Le laser de pompe est donc injecté dans la cavité à l'aide d'un télescope formé de deux lentilles. Un isolateur de Faraday protège le laser de pompe du champ réfléchi par le miroir d'entrée de la cavité de l'OPO. A cause des différents éléments optiques intermédiaires entre le laser de pompe et la cavité de l'OPO, la puissance maximale à l'entrée de la cavité est d'environ 3.5W.

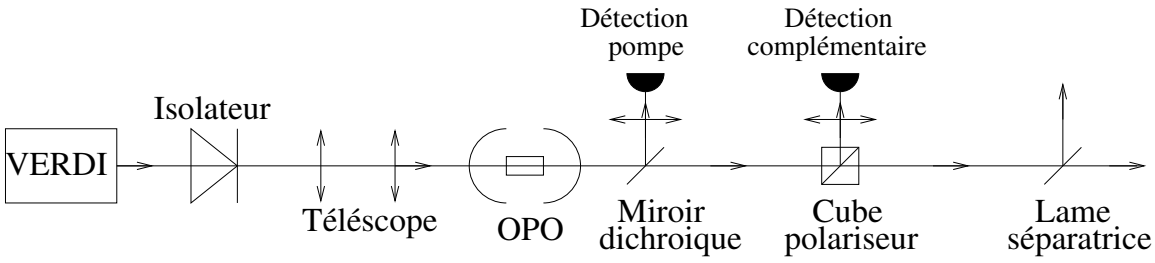


FIG. *1.20: Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé pour la plupart des expériences décrites par la suite. Suivant les grandeurs que l'on désire mesurer sur le signal, différents systèmes de détection pourront être placés de part et d'autre de la lame séparatrice.*

A la sortie de l'OPO, un miroir dichroïque réfléchit la longueur d'onde de la pompe vers un détecteur qui mesure l'intensité du champ de la pompe. Le miroir dichroïque est transparent pour les longueurs d'onde du signal et complémentaire. Un cube polariseur permet de séparer ces deux champs lorsque l'accord de phase est de type II. Le faisceau complémentaire est focalisé sur un détecteur. Le faisceau du signal est divisé par une lame séparatrice. Suivant les grandeurs que l'on désire mesurer, on pourra utiliser différents dispositifs de détection de chaque côté de la lame.

Comme nous utilisons des puissances élevées, la détermination du seuil auquel nous travaillons est problématique. En effet, si on aligne la cavité à faible puissance, on atteint alors des seuils de l'ordre de 10 mW, cependant lorsqu'on augmente la puissance de la pompe, l'alignement n'est plus adapté à cause des effets de lentille thermique. D'autre part, si on optimise l'émission infrarouge à forte puissance, et qu'on diminue ensuite la puissance pour déterminer le seuil d'émission, et on obtient alors des valeurs de seuil de l'ordre de 30 mW, mais ces valeurs ne sont pas représentatives de l'alignement à forte puissance.

Cependant, il est probable que lorsque la cavité est bien alignée à forte puissance, son seuil effectif soit de l'ordre de grandeur du minimum atteignable à faible puissance et donc les seuils pertinents à considérer sont ceux de 10 mW. Par la suite les seuils mentionnés sont les seuils mesurés à faible puissance.

Les configurations expérimentales seront détaillées dans la suite, les dispositifs expérimentaux étant globalement identiques dans les chapitres 2 et 3 ainsi que dans la partie 4.1. Seuls la taille de la cavité et les systèmes de détection changent, les expériences étant faites avec le cristal de KTP. Dans la partie 4.2, les expériences sont faites avec le cristal de niobate de lithium et le dispositif est donc légèrement différent puisqu'on ne peut plus séparer le signal du complémentaire, qui ont alors la même polarisation, par un cube polariseur.

Le but de notre dispositif expérimental est d'être le plus modulable possible en permettant d'explorer facilement différents types de configurations. Comme nous désirons étudier la dynamique propre au système, aucun dispositif actif de stabilisation n'a été utilisé.

Chapitre 2

Oscillations multimodes transverses

Comme tout système non-linéaire, on s'attend à ce que l'OPO présente des instabilités et plus particulièrement des solutions périodiques stables dans certaines zones de paramètres, ce qui est en effet prédit par les modèles champ moyen monomode et multimode. Cependant, dans le chapitre 1, nous avons rappelé que seules deux grandes classes d'instabilités ont été observés dans les quelques travaux expérimentaux antérieurs. Nous avions alors décrit en détail des instabilités opto-thermiques conduisant à des oscillations des intensités des champs pompe et infrarouges de fréquences comprises entre quelques kHz et quelques centaines de kHz. Pour modéliser ces oscillations, il est nécessaire d'introduire une variable thermique en plus des variables optiques dans le modèle.

Nous avions mentionné un autre type d'oscillations de formes quasi-sinusoïdales et de fréquences plus élevées (que nous appelerons donc souvent "oscillations rapides") qui a été observé dans des OPO triplement résonants pour des puissances de pompe élevées. Les fréquences typiques de ces oscillations sont de 1 à 10 MHz dans les travaux antérieurs. Nous avons dans nos travaux étendu cette gamme à des fréquences de l'ordre de la centaine de MHz. Ces instabilités peuvent être observées seules ou superposées aux oscillations opto-thermiques précédemment évoquées.

On serait tenté d'interpréter ces dernières instabilités comme des solutions oscillantes du modèle monomode (cf partie 1.2.1.b) puisque c'est historiquement la première instabilité prédite dans ce système. Cependant, et nous l'expliquerons en détail par la suite, cette hypothèse n'est pas compatible avec les conditions expérimentales des expériences. Ces instabilités ont donc pour origine un autre mécanisme. La forme et la fréquence de ces oscillations excluent une interprétation par le mécanisme opto-thermique. Les périodes mises en jeu étant inférieures ou égales au temps de vie des photons du signal dans la cavité, ces oscillations doivent pouvoir se modéliser uniquement avec des variables optiques. Or le modèle développé par Schwob *et al.* [Schwob *et al.*, 1998] qui tient compte du couplage entre plusieurs modes transverses des champs dans la cavité présente aussi des instabilités à puissance de pompe élevée. Nous avons présenté ce modèle dans la partie 1.2.1.c dans le cas dégénéré, bimode pour le signal et monomode pour la pompe. Suret *et al.* dans la référence [Suret *et al.*, 2001a] se basent sur ce modèle pour reproduire numériquement leurs signaux expérimentaux superposés ou non à des effets thermiques. Bien que l'adéquation entre

les signaux expérimentaux et les simulations numériques soit grande, aucune preuve expérimentale de la validité du modèle utilisé n'est alors donnée.

Bien que le scénario multimode soit le plus vraisemblable, il n'est certainement pas le seul à engendrer des instabilités périodiques dans le système. Il était donc indispensable de mener des expériences complémentaires visant à mettre en évidence la coexistence de plusieurs modes transverses pendant ces oscillations. Par ailleurs une meilleure compréhension du phénomène nécessitait d'identifier les couples de modes transverses le plus souvent impliqués dans ces instabilités. Un autre point important lorsqu'on étudie des instabilités est de connaître l'importance de la plage de paramètres pour laquelle on peut les observer. Du point de vue expérimental, il convient d'explorer les configurations de la cavité pour lesquelles les instabilités apparaissent. Du point de vue théorique, les oscillations rapides auxquelles nous nous intéressons nécessitent la coexistence de deux modes transverses différents pour les champs infrarouges. Or cela ne peut se produire en principe que lorsque les courbes de résonance de la cavité aux fréquences de ces deux modes se recouvrent. Le problème est alors de savoir si les conditions de ces coïncidences sont si strictes que l'apparition du phénomène se limite à quelques configurations très particulières ou si au contraire les détails du mécanisme impliquent qu'il peut se rencontrer fréquemment.

Ce chapitre présente nos réponses à l'ensemble de ces questions. Après avoir brièvement rappelé les travaux antérieurs consacrés à ces instabilités, nous présentons des exemples de régimes que nous avons observés. Nous démontrons alors expérimentalement la coexistence dans la cavité de plusieurs modes transverses du signal en analysant la structure transverse du faisceau, soit de manière élémentaire avec deux détecteurs placés en deux points différents du faisceau transverse, soit de manière plus sophistiquée au moyen d'une section uni-dimensionnelle de ce faisceau réalisée au moyen d'une barrette de détecteurs. Cette dernière méthode permet non seulement d'identifier les modes mais aussi, par une méthode de décomposition, de déterminer le nombre de modes impliqués dans l'interaction. Nous montrons ensuite expérimentalement que ces instabilités apparaissent plus fréquemment que ne le laisse présager la théorie. Nous nous pencherons alors sur les simplifications du modèle, notamment l'hypothèse d'un OPO dégénéré, pour trouver l'origine de cette contradiction. Ayant prouvé la validité du modèle et le fait que ces instabilités se rencontrent à de nombreuses tailles de cavité, nous serons légitimement conduits à une exploration plus poussée du modèle au travers de simulations numériques et à une étude de la variété des formes et fréquences des oscillations que peuvent prendre les signaux expérimentaux.

2.1 Historique des observations expérimentales d'oscillations rapides

Cette partie retrace brièvement les étapes de l'observation et de l'interprétation d'oscillations rapides dans différents OPO triplement résonants. La première observation a été faite par Richy *et al.* [Richy *et al.*, 1995]. Le phénomène a ensuite été

observé par Suret *et al.* [Suret *et al.*, 2001a]. Leur interprétation de ces oscillations rapides repose sur la possibilité de coexistence de plusieurs modes transverses du signal dans la cavité. Aprés avoir rappelé les grandes lignes de ce modèle qui a été développé par Schwob *et al.* [Schwob *et al.*, 1998], et que nous avons présenté dans la partie 1.2.1.c, nous présenterons nos propres observations d'oscillations rapides.

2.1.1 Observations expérimentales antérieures

2.1.1.a Première observation d'instabilités comportant des oscillations rapides

La première observation expérimentale d'oscillations rapides est due à Richy *et al.* [Richy *et al.*, 1995] et a été décrite dans leur étude des phénomènes de bistabilité et de retard à la bifurcation dans un oscillateur paramétrique optique triplement résonant.

Leur travail est consacré en grande partie aux états stationnaires de l'OPO. Le modèle champ-moyen monomode reproduit alors fidèlement les observations expérimentales. Ainsi, en construisant les portraits de phase de l'intensité du signal en fonction de l'intensité de la pompe, les seuls écarts entre leurs résultats expérimentaux et les prévisions théoriques se situent au niveau des bifurcations. Il s'agit d'un phénomène dynamique connu appelé *retard à la bifurcation*[1] lié à la vitesse de balayage du paramètre de contrôle dans les expériences. Nous aurons l'occasion de donner des détails sur cet effet dans la partie 4.3.

Nous présentons leur dispositif expérimental puis l'exemple d'instabilités à haute puissance qu'ils ont observés.

2.1.1.a-i Dispositif expérimental

L'oscillateur paramétrique optique étudié est de type II. Il est constitué d'un cristal de KTP de 1 cm de long dont une des faces est un miroir plan de coefficients de reflexions 99.8% à 1060 nm et 88.5% à 532 nm. Le miroir de sortie, monté sur une cale piezo-électrique, est un miroir sphérique de rayon de courbure 2 cm et de coefficients de reflexion 99.9% à 1060 nm et 530 nm. La taille de la cavité est d'environ 2 cm, soit une configuration proche de semi-confocal. Les coefficients de reflexion des miroirs assurent des finesses de 45 à 530 nm et $\sim$1000 à 1060 nm.

Le laser de pompe est un laser à argon ionisé monomode continu à 528 nm et de puissance maximale 300mW. Une lentille permet de positionner et de régler la taille du waist du faisceau de pompe de manière à injecter majoritairement le mode TEM_{00} de la cavité. Un modulateur acousto-optique contrôle l'intensité de la pompe. Les grandeurs observées sont l'intensité du champ de pompe réfléchie par le miroir d'entrée et l'intensité de la somme des champs des signaux infrarouges transmis par le miroir de sortie.

[1] Lorsqu'on augmente l'intensité de la pompe à partir d'une valeur nulle, le démarrage de l'oscillation infrarouge ne s'effectue pas au point de bifurcation où l'état éteint stable devient instable. Le système suit encore pendant un temps la branche instable. Ce retard à la bifurcation est lié à la vitesse de balayage du paramètre utilisé, ici l'intensité de la pompe.

2.1.1.a-ii Observations expérimentales

Pour une configuration où le seuil est inférieur à 1mW et pour une puissance de pompe de l'ordre de 100mW (c'est à dire à une centaine de fois le seuil) des oscillations spontanées ont été observées. La figure 2.1 issue de la référence [Richy *et al.*, 1995] montre un exemple de ces instabilités. Celles-ci comportent deux fréquences caractéristiques différentes : l'une, basse, est de l'ordre de 20kHz, l'autre, élevée, est voisine de 800kHz. La fréquence lente correspond à des commutations entre plusieurs niveaux moyens d'intensité et rappelle en cela les instabilités opto-thermiques précédemment décrites, tandis que la fréquence élevée caractérise des oscillations rapides au maximum de l'intensité du signal.

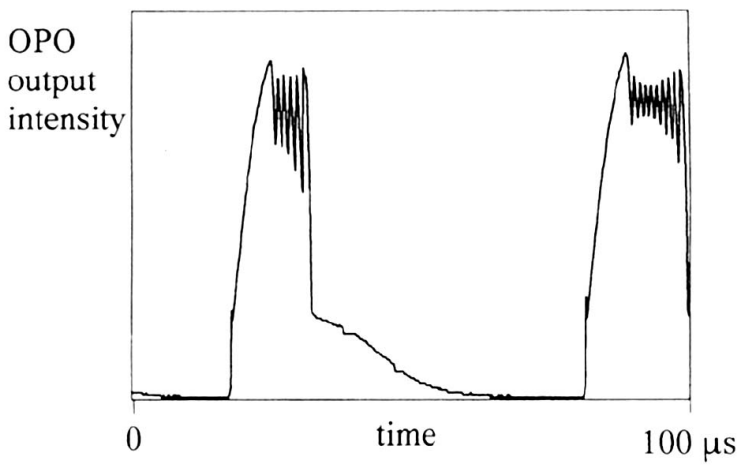


FIG. *2.1: Intensité de la somme des champs infrarouges en fonction du temps pour un TROPO à 100 fois le seuil. Les instabilités sont constituées de deux type d'oscillations : l'une, lente, a une période d'environ 60 µs, l'autre, rapide, a une période de 1.25µs (d'après [Richy et al., 1995]).*

Bien que des solutions oscillantes soient prévues dans le modèle monomode qui reproduit fidèlement le reste des résultats de l'article, celui-ci ne semble pas convenir pour l'interprétation de ces oscillations. En effet dans les conditions expérimentales décrites précédemment, le rapport des finesses implique d'obtenir de grands désaccords sur le signal et sur la pompe pour atteindre les conditions de la bifurcation de Hopf. Or, si l'utilisation d'un OPO semi-monolithique permet d'obtenir des seuils particulièrement bas, inférieur à 1mW pour des désaccords des champs faibles [2], les

[2]On rappelle que dans le modèle champ moyen monomode dégénéré le seuil d'oscillation infrarouge est donné pour les variables réduites par : $E_s^2 = (1 + \Delta_p^2)(1 + \Delta_s^2)$, il est donc minimal pour des désaccords nuls.

seuils augmentent pour des désaccords du signal et de la pompe plus élevés et atteignent alors des valeurs de 40mW. Compte tenu de la puissance du laser utilisé, le taux de pompage est alors d'environ 10 fois le seuil à puissance maximale, ce qui est insuffisant pour atteindre le seuil de la bifurcation de Hopf.

Les auteurs de l'article concluent sur ce point que l'interprétation de ces oscillations nécessite un modèle plus complet que le modèle monomode champ-moyen. Ils suggèrent donc qu'un modèle susceptible d'interpréter ces instabilités devra tenir compte de la possibilité pour l'OPO d'être multimode, des effets liés à la structure transverse des faisceaux ainsi que des effets thermiques.

2.1.1.b Observations complémentaires et proposition d'un mécanisme à l'origine des oscillations rapides

Plus récemment, Suret *et al.* [Suret *et al.*, 2001a] ont observé des oscillations rapides à des fréquences de quelques mégaHertz des intensités des champs pompe, signal et complémentaire dans un OPO triplement résonant pour une puissance de pompe d'une centaine de fois le seuil. Les signaux observés présentent soit une superposition d'une fréquence lente et d'une fréquence rapide comme ceux décrits par Richy *et al.* [Richy *et al.*, 1995], soit seulement des oscillations rapides, ce qui montre que les deux instabilités ont des origines différentes. Les fréquences rapides observées vont de 1 à 5 MHz, les fréquences lentes sont de l'ordre de la dizaine de kHz. Les auteurs interprètent les oscillations rapides comme des instabilités liées au caractère multimode des champs infrarouges dans la cavité, tandis que les oscillations lentes seraient liées à des effets thermiques. Pour modéliser les effets multimodes transverses, ils se réfèrent aux travaux de Schwob *et al.* [Schwob *et al.*, 1998; Schwob, 1997] qui ont proposé et étudié un modèle tenant compte du caractère multimode du signal. Les simulations numériques effectuées à partir de ce modèle reproduisent de manière satisfaisante les observations expérimentales. En particulier, les signaux expérimentaux montrant une superposition d'oscillations rapides sur des oscillations plus lentes sont reproduites en tenant compte d'effets thermiques en plus des effets multimodes transverses.

2.1.1.b-i Dispositif expérimental

L'OPO est constitué d'un cristal de KTP (OPO de type II) de 5x5x15mm placé entre deux miroirs de rayon de courbure 3cm, de coefficients de reflexion 90% à 532 nm et 99.9% à 1064 nm en entrée et 99.9% à 532 nm et 99% à 1064 nm en sortie. Les finesses de la cavité sont alors de 45 à 532 nm et 550 à 1064nm. Le laser de pompe (Nd :YVO_4), continu à 532 nm, a une puissance maximale de 5W. Une lentille permet de placer au centre du cristal le waist du faisceau de pompe, ainsi que d'adapter la taille du waist de manière à injecter majoritairement dans le mode TEM_{00} de la cavité.

La taille de la cavité est d'environ 45mm dans la plupart des expériences, c'est à dire à mi-chemin entre une configuration confocale et une configuration concentrique. Les seuil minimums atteints sont alors de 5 à 8 mW. Les oscillations rapides ont été observées pour des puissances de pompe d'au moins 2 W, c'est à dire à plusieurs cen-

taines de fois le seuil d'oscillation de l'OPO. La puissance de pompe utilisée dans les résultats suivant est de 3.6 W, c'est à dire la puissance maximale disponible en entrée de l'OPO, aprés les pertes dans les différents dispositifs optiques précédent la cavité. Les grandeurs mesurées sont les intensités transmises des champs pompe et signal. Le champ complémentaire est séparé du champ signal par un cube polariseur (l'OPO étant de type II, les deux champs infrarouges sont de polarisations orthogonales) et son intensité a une évolution temporelle identique à celle du signal, il n'apporte donc pas d'information supplémentaire.

2.1.1.b-ii Observations expérimentales

Les figures 2.2 et 2.3 issues de la référence [Suret, 2000] montrent des exemples des instabilitées observées. Dans le cas de la figure 2.2, les intensités du signal (fig. 2.2(a)) et de la pompe (fig. 2.2(c)) sont représentées au cours du temps. Les figures 2.2(b) et 2.2(d) sont des agrandissements des figures précédentes montrant la forme des oscillations. La fréquence commune des oscillations est de 2.5MHz, il n'y a pas d'instabilités lentes modulant le signal.

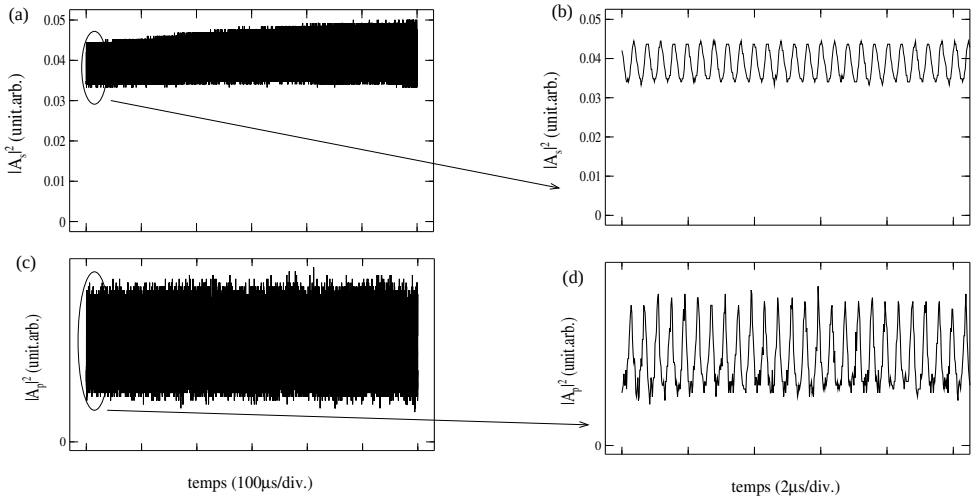


FIG. *2.2: Intensité des champs signal (a) et pompe (b) en fonction du temps pour un TROPO à 100 fois le seuil ; (c) et (d) : agrandissements respectifs du début de la figure (a) et (b). La fréquence commune des oscillations est 2.5MHz (d'après [Suret, 2000]).*

La figure 2.3 montre des oscillations complexes présentant des instabilités à une fréquence lente sur lesquelles se superposent des oscillations rapides. De même que précédemment, les figures 2.3(a) et (b) représentent les évolutions des intensités des champs signal et pompe au cours du temps. Les figures 2.3(c) et (d) en sont des agrandissements montrant la forme des oscillations rapides au sommet des instabilités lentes. La fréquence lente est de 12.5kHz, la fréquence rapide de 1.7MHz.

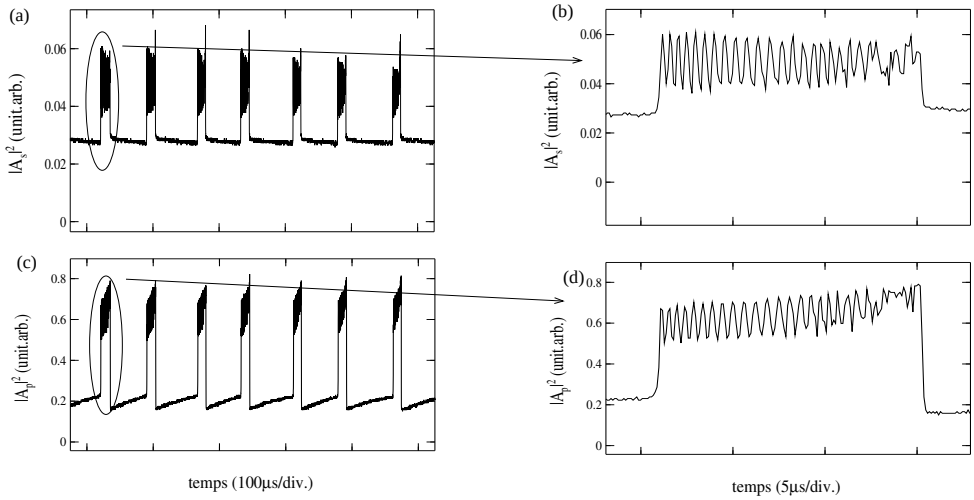


FIG. *2.3: Intensité des champs signal (a) et pompe (b) en fonction du temps pour un TROPO à 100 fois le seuil ; (c) et (d) : agrandissements respectifs du début de la figure (a) et (b). La fréquence des oscillations rapides est 1.7MHz, celle des oscillations lentes 12.5kHz (d'après [Suret, 2000]).*

2.1.1.b-iii Interprétation

De même que pour Richy *et al.* le rapport des finesses des cavités nécessite de grands désaccords des champs pompe et signal pour que soient atteintes les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf du modèle monomode. Les seuils inférieurs à 10 mW évoqués précédemment correspondent aux seuils à désaccords nuls. Même si la puissance de pompe maximale disponible est plus élevée que dans l'expérience précédente, le rapport entre la puissance maximale et la puissance minimale atteinte au seuil à désaccord nul reste du même ordre :

$$\frac{300mW}{1mW} = 300 \text{ à comparer à } \frac{3.6W}{5mW} = 720$$

Nous reviendrons dans la partie 4.2 sur les raisons de cette difficulté à atteindre la bifurcation de Hopf du modèle monomode dans la plupart des configurations expérimentales.

Un autre argument s'ajoute à ce constat rendant peu probable cette bifurcation de Hopf comme origine des oscillations rapides observées. La fréquence de la solution oscillante à la bifurcation peut en effet être calculée analytiquement en fonction des temps de vie des photons dans la cavité et des désaccords des champs [Suret *et al.*, 2001a]. Si on considère l'ensemble de ces fréquences pour tous les désaccords possibles, c'est à dire toutes les valeurs de fréquence qu'on peut obtenir en changeant la taille de la cavité mais pour des conditions de réflexion aux miroirs fixées, la fréquence d'apparition de la bifurcation de Hopf a une borne inférieure de 9.5 MHz pour le jeu de miroirs décrit dans les conditions expérimentales. Les fréquences rapides observées expérimentalement (entre 1 et 10 MHz) sont en général inférieures à cette borne.

Un mécanisme basé sur le couplage entre modes transverses du signal est proposé

comme origine des oscillations rapides. Le modèle à l'origine de ce mécanisme a été établi et étudié par Schwob *et al.* [Schwob *et al.*, 1998] et a été décrit dans la partie 1.2.1.c. Nous allons cependant en rappeler les grandes lignes à la fin de cette partie.

Pour ce qui est des oscillations de basse fréquence, ce sont des instabilités thermiques du même type que celles décrites dans la partie 1.2.2 : elles ont en effet la même forme, une fois moyennées les oscillations rapides, et ont des fréquences du même ordre de grandeur que les fréquences des oscillations d'origine thermique. Leur modélisation sera donc du même type : les désaccords des champs ne peuvent plus être considérés comme des paramètres des équations mais sont des variables lentes du système. Ils peuvent être considérés comme variant linéairement en fonction d'un paramètre θ lié à la température. En ajoutant dans le modèle multimode transverse cette dépendance linéaire ainsi qu'une équation différentielle phénoménologique pour θ, les oscillations complexes présentant une fréquence rapide et une fréquence lente sont reproduites numériquement.

Le cas particulier de la superposition d'oscillations lentes liées aux effets thermiques et d'oscillations rapides liées au couplage entre les champs sera étudié plus en détail dans le chapitre suivant.

2.1.2 Nouvelles observations expérimentales

Peu d'observations expérimentales d'oscillations rapides ayant été décrites dans la littérature, il était important de vérifier la reproductibilité du phénomène. Ce faisant, nous avons observé une très grande variété de signaux comportant ou non une fréquence lente, avec des fréquences rapides du même ordre de grandeur que dans les travaux antérieurs (1 à 20 MHz), mais aussi des fréquences nettement plus élevées, de l'ordre de la centaine de megahertz.

Nous allons donc à présent décrire le dispositif expérimental que nous avons utilisé, qui est très proche de celui de la référence [Suret *et al.*, 2001a] et donner quelques exemples de signaux observés.

2.1.2.a Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental a été décrit partiellement dans la partie 1.3.5. Notre OPO est constitué d'un cristal de KTP coupé pour un accord de phase de type II placé entre deux miroirs sphériques de rayon de courbure 5 cm, réfléchissants pour les longueurs d'onde 532 nm (longueur d'onde de la pompe) et 1064 nm (longueur d'onde approximative du signal et du complémentaire). La taille moyenne de la cavité est de 47 mm pour la plupart des résultats décrits dans ce chapitre, la configuration est donc proche de confocal. Les finesses de la cavité sont de 50 ou 45 pour la pompe suivant les miroirs utilisés et 550 pour le signal et le complémentaire. La puissance de pompe est en général maximale, le problème de la détermination du seuil étant décrit dans la partie 1.3.5. L'intensité du signal est mesurée par une photodiode au silicium de temps de montée rapide (inférieur à 1ns) tandis que celle de la pompe est détectée par une photodiode au silicium de fréquence de coupure 50MHz. Cela explique que nous

n'ayons pas d'observations expérimentales d'oscillations de fréquences supérieures à 100MHz sur l'intensité de la pompe. D'autre part la faible intensité de la pompe à la sortie de la cavité explique qu'en général nos observations de l'intensité de la pompe soient très bruyantes.

2.1.2.b Observations

Pour des puissances de pompe qu'on peut donc estimer supérieures à 300 fois leurs valeurs au seuil, nous avons retrouvé les instabilités décrites précédemment. Nos signaux présentent soit uniquement des oscillations rapides, soit des oscillations lentes de type thermique superposées à des oscillations rapides. Outre des oscillations rapides de fréquences du même ordre que celles des travaux antérieurs (de 1 à 10 MHz), nous avons trouvé des signaux de fréquences nettement plus élevées, plus précisement supérieures à 100 MHz.

La figure 2.4 montre un exemple de l'évolution des intensités de la pompe (fig. 2.4(a)) et du signal (fig. 2.4(c)) dans le cas d'oscillations rapides seules. La fréquence des oscillations est de 5.6MHz. Les figures 2.4(b) et (d) sont des agrandissements des signaux de la pompe et du signal respectivement. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 30 MHz.

Sur cet exemple, les intensités ne présentent des oscillations que sur trois quarts du fichier. Dans le dernier quart, l'intensité est redevenue constante. Le système est passé continûment d'une solution périodique à une solution stationnaire en passant par une bifurcation de Hopf. Cette bifurcation est particulièrement bien visible sur la figure 2.4(c), où on voit les oscillations décroître jusqu'à une amplitude nulle : on en déduit que le système a traversé une bifurcation de Hopf surcritique. L'évolution lente du système est due à des dérives des paramètres notamment sous l'effet des fluctuations de la température qui en modifiant la longueur optique de la cavité, modifient les désaccords : les paramètres du système sont balayés spontanément. Enfin, comme il n'y a aucune discontinuité sur les intensités au cours du temps, on peut supposer qu'il n'y a pas eu de saut de modes. Quelque soit le mécanisme permettant de décrire le comportement des intensités, il peut donc donner des solutions stationnaires ou périodiques. Ainsi si l'interprétation multimode transverse est correcte, le champ du signal est constitué de plusieurs modes transverses sur toute la durée de l'enregistrement, seule la proportion de chacun de ces modes a éventuellement évolué ainsi que les solutions stables accessibles au système : périodique dans un premier temps, puis stationnaire à la fin de l'enregistrement.

Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, nous avons obtenu des fréquences nettement plus élevées que celles observées dans les travaux antérieurs. Nous montrons sur les figures 2.5 et 2.6 des exemples de telles oscillations sur l'intensité du signal. Sur la figure 2.5 la fréquence des oscillations rapides est d'environ 130 MHz, tandis qu'elle est d'environ 200 MHz sur la figure 2.6. Les signaux de fréquences supérieures à 100 MHz sont toujours de très faible amplitude ce qui s'explique par l'effet de filtre passe-bas de la cavité de l'OPO [3] : ce filtre a une fréquence de coupure

[3] Rappelons que nous travaillons avec des OPO continus.

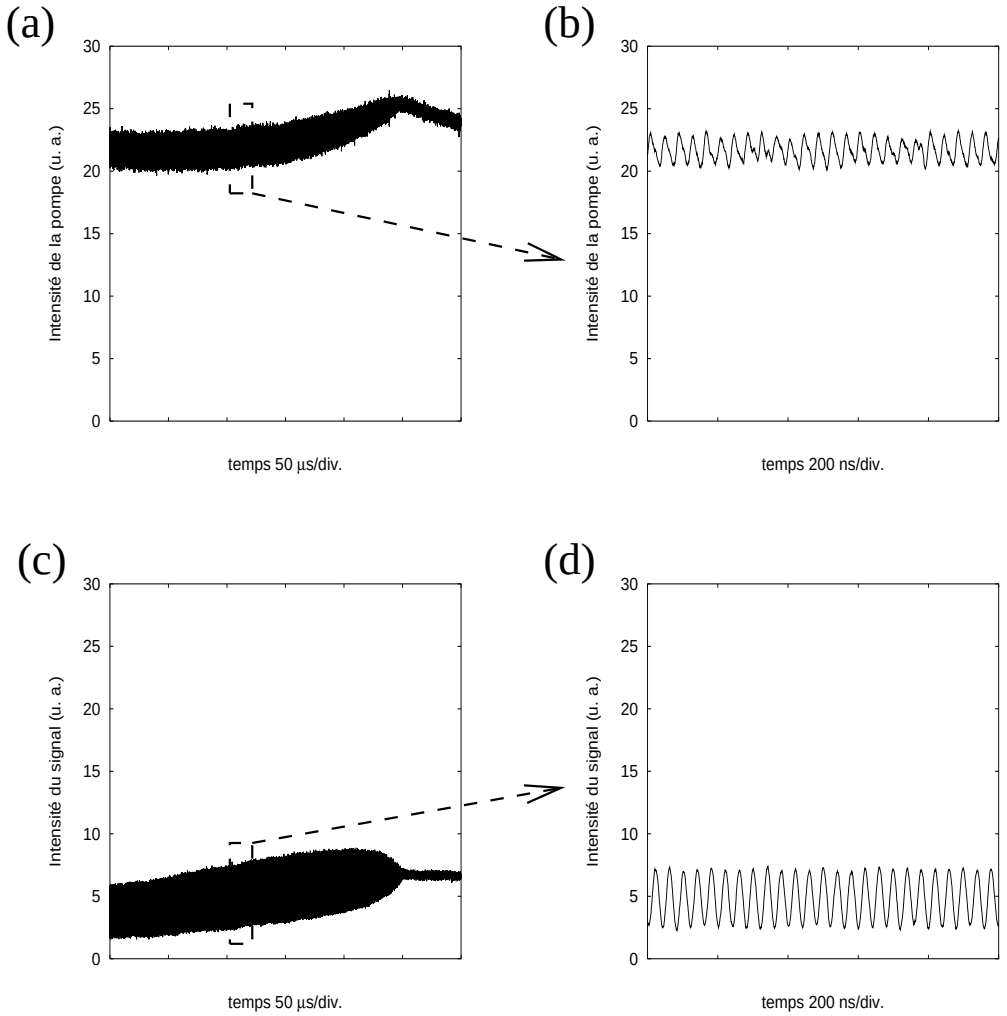


FIG. *2.4: Intensités de la pompe (a) et du signal (c) en fonction du temps. Les figures (b) et (d) sont des agrandissements des signaux de la pompe et du signal respectivement, montrant la forme des oscillationss rapides. La fréquence des oscillations rapides est de 5.6MHz. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 30 MHz.*

correspondant au temps de vie des photons du signal dans la cavité, soit

$$\tau_s = \frac{2\mathcal{F}_s[L]}{\pi c} \simeq 70ns,$$

soit une fréquence de coupure d'environ 5 MHz.

Nous n'avons pas pu estimer de limite supérieure aux fréquences que peuvent prendre les oscillations rapides à cause des limites de notre oscilloscope numérique dont la fréquence de Nyquist est à 500MHz. On peut cependant voir sur la figure 2.6(b) que pour des fréquences de 200 MHz la forme des oscillations commence à souffrir des effets de la digitalisation.

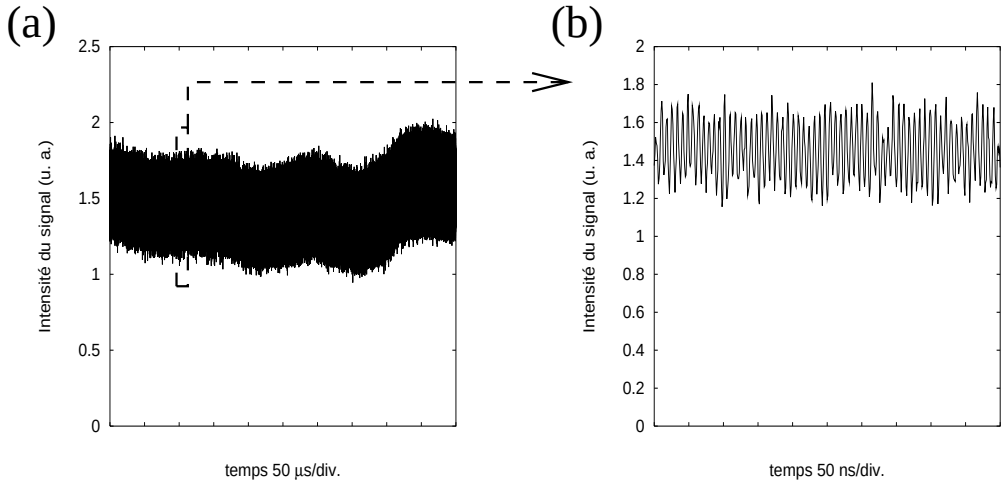


FIG. *2.5: Intensités du signal (a) en fonction du temps. La figure (b) est un agrandissement de la zone encadrée. La fréquence des oscillations est d'environ 130 MHz. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 250 MHz.*

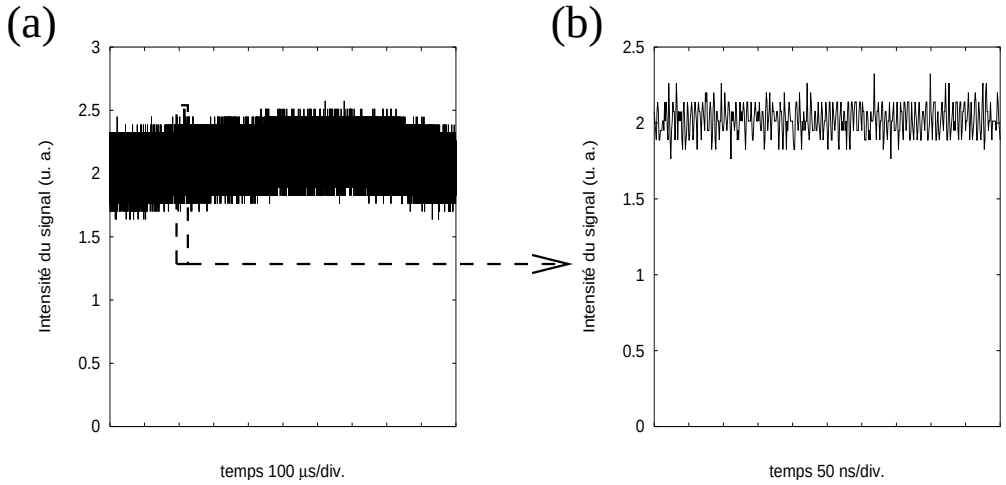


FIG. *2.6: Intensités du signal (a) en fonction du temps. La figure (b) est un agrandissement de la zone encadrée. La fréquence des oscillations est d'environ 200 MHz. Le fichier n'a pas été filtré car le signal observé est à la limite des résolutions horizontale et verticale de l'oscilloscope.*

Nous avons également observé des instabilités présentant à la fois des fréquences lentes d'origine thermique et des fréquences élevées. Nous allons en montrer deux exemples, l'un dont la fréquence rapide reste du même ordre de grandeur que celles des travaux antérieurs, l'autre dont la fréquence rapide atteint la centaine de MHz.

Sur la figure 2.7 les oscillations rapides, de fréquence 23MHz, sont superposées à des oscillations plus lentes de type thermique de fréquence 16kHz. L'intensité de la pompe reste extrêmement bruyante bien que les fichiers aient été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 50 MHz. L'intensité de la pompe est en effet

particulièrement faible à la sortie de la cavité car le miroir de sortie est de coefficient de réflexion maximum à 532 nm.

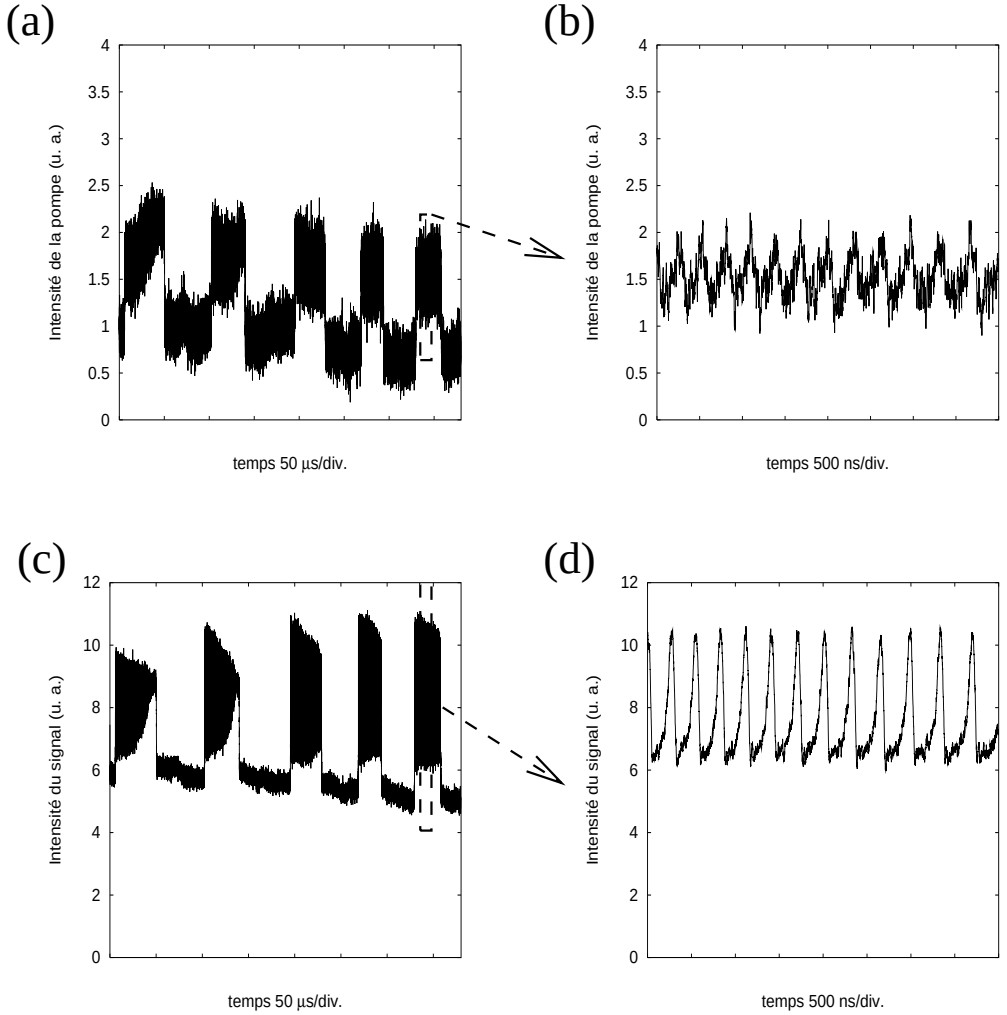


FIG. *2.7: Intensités de la pompe (a) et du signal (c) en fonction du temps. Les figures (b) et (d) sont des agrandissements des signaux de la pompe et du signal respectivement, montrant la forme des oscillations rapides. La fréquence des oscillations rapides est de 23MHz, celle des oscillations lentes de 16kHz. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de 50 MHz.*

On remarquera sur la figure 2.7(c) qu'aucune des intensités ne revient à zéro à la fin des oscillations. Il y a donc alternance entre une solution stationnaire non-nulle et une solution périodique dont l'intensité moyenne est supérieure à la première. Pour les deux premières périodes lentes, on peut voir les oscillations démarrer immédiatement avec une grande amplitude puis leur amplitude décroît jusqu'à s'annuler, le système passe donc par une bifurcation de Hopf surcritique. Le système ne reste alors que peu de temps sur la solution stationnaire d'intensité élevée et commute vers la solution stationnaire d'intensité basse. Pour les trois dernières périodes lentes, les oscillations démarrent aussi à pleine amplitude, mais celle-ci reste à peu près constante jusqu'à la

commutation vers la solution stationnaire d'intensité faible. Le système ne passe plus par une bifurcation de Hopf.

La figure 2.8 montre un autre exemple d'oscillations rapides superposées à des oscillations lentes. C'est un exemple d'oscillations rapides de fréquence de l'ordre de la centaine de mégaHertz, dans ce cas, 130 MHz. Les oscillations lentes ont pour fréquence 7.5 kHz. Le système oscille lentement entre un état où il n'y a pas d'émission infrarouge, et un état où l'intensité oscille autour d'une valeur non-nulle. Les oscillations ne démarrent pas immédiatement lors de la commutation (figure 2.8(c)), mais il s'agit certainement d'un transitoire de type retard à la bifurcation. L'amplitude des oscillations décroissent ensuite, leur enveloppe ayant une forme de parabole avant de commuter vers une intensité nulle, caractéristique d'une bifurcation noeud-col inverse. Nous aurons l'occasion de revenir sur cet exemple dans la première partie du chapitre suivant.

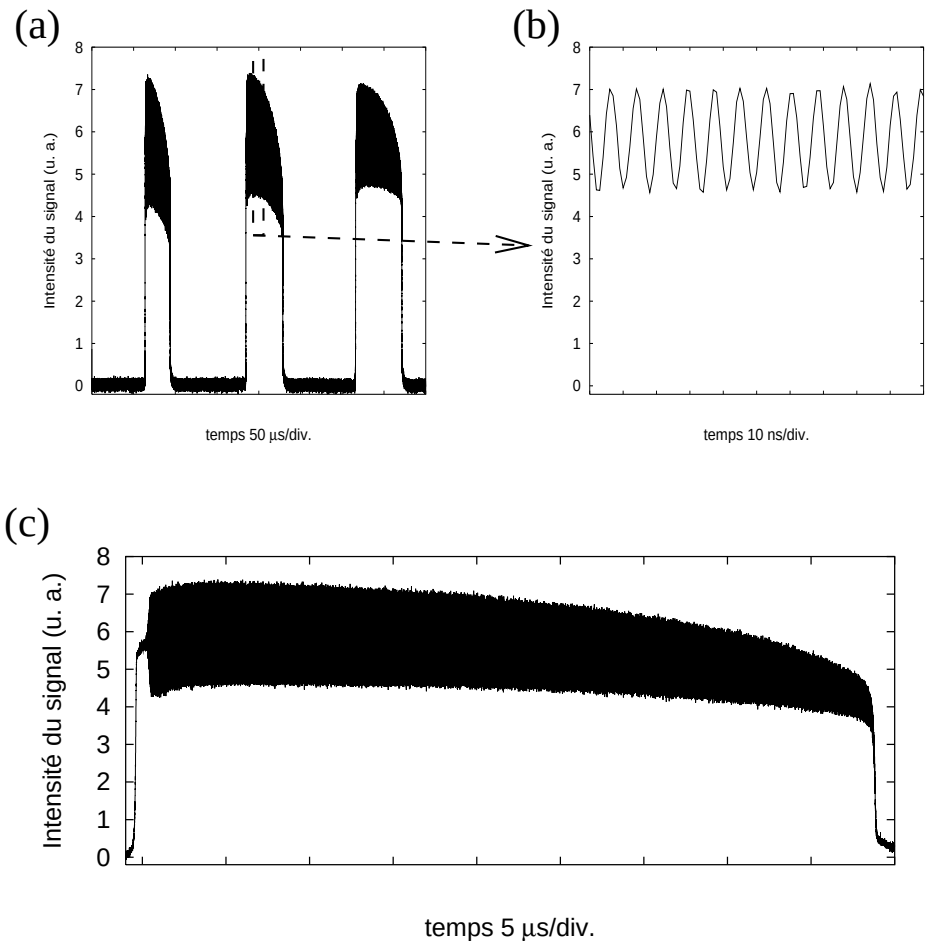


FIG. *2.8: Intensités du signal (a) en fonction du temps. La figure (b) est un agrandissement de la zone encadrée et (c) un agrandissement de la deuxième bouffée d'oscillations. La fréquence des oscillations rapides est d'environ 130 MHz, celle des oscillations lentes de 7.5 kHz. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 250 MHz.*

Ainsi, les résultats expérimentaux antérieurs [Richy *et al.*, 1995; Suret *et al.*, 2001a] ont pu être reproduits, et la recherche systématique de ces oscillations nous a conduit à mettre en évidence de nouvelles fréquences. On notera cependant que les fréquences accessibles aux oscillations rapides semblent se repartir en deux groupes : l'un de 1 à 30 MHz qui inclut les observations antérieures, l'autre supérieur à 100 MHz. Nous n'avons pas observé d'oscillations aux fréquences intermédiaires.

Outre cette diversité dans les fréquences des oscillations observées, leur forme peut aussi beaucoup varier. Nous en donnerons d'autres exemples à la fin de ce chapitre. En effet, avant d'explorer de manière plus détaillée ces comportements, nous allons d'abord valider le modèle utilisé, et donc dans un premier temps faire quelques rappels sur celui-ci.

2.1.3 Rappel du modèle

Nous rappelons les points essentiels du modèle multimode transverse dégénéré (voir partie 1.2.1.c). Un champ dans une cavité peut se décomposer sur une base de modes orthogonaux correspondant chacun à une structure transverse. Cette somme prend la forme :

$$E(\vec{r}, z, t) = \sum_i f_i(\vec{r}) A_i(t) e^{ikz - i\omega t},$$

où les $f_i(\vec{r})$ sont des fonctions décrivant la structure transverse des modes, les $A_i(t)$ sont les enveloppes lentement variables des champs, ω la fréquence du repère tournant et k le vecteur d'onde.

Ce modèle prend en compte le couplage qui peut exister entre plusieurs modes transverses [Schwob *et al.*, 1998]. A priori, l'interaction est résonante lorsque les modes sont quasiment coïncidants, ce qui se produit pour certaines tailles de cavité. La figure 2.9 montre une telle situation. Les deux résonances entourant la fréquence $(\omega_p/2)$ du repère tournant du signal se chevauchent. Ces résonances correspondent à deux modes transverses différents. L'OPO va alors pouvoir générer des champs suivant chacun des modes transverses qu'on notera dans le même repère tournant correspondant à un modèle dégénéré : $E_1(t) = A_1(t)\exp(ik_p z/2 - i\omega_p t/2)$ et $E_2(t) = A_2(t)\exp(ik_p z/2 - i\omega_p t/2)$, le champ de la pompe étant $E_p(t) = A_p(t)\exp(ik_p z - i\omega_p t)$.

Le modèle s'écrit alors [Suret *et al.*, 2001a] :

$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\sigma_p)A_p - A_1^2 - \chi A_2^2 - 2\chi_{12}A_1A_2 + E\right], \tag{2.1}$$

$$\dot{A}_1 = -(1+i\sigma_1)A_1 + A_pA_1^* + \chi_{12}A_pA_2^*, \tag{2.2}$$

$$\dot{A}_2 = -(1+i\sigma_2)A_2 + \chi A_pA_2^* + \chi_{12}A_pA_1^*, \tag{2.3}$$

où σ_p, σ_1 et σ_2 sont les désaccords respectifs des champs A_p, A_1 et A_2 tels qu'ils sont représentés sur la figure 2.9, E le taux de pompage normalisé au seuil, γ le rapport des temps de vie des photons des signaux (supposés avoir les même pertes) et des photons de pompe, l'unité de temps des équations étant le demi temps de vie des photons signaux. Enfin les constantes de couplage sont normalisées à 1 pour la conversion d'un photon du champ A_p en deux photons du champ A_1, χ pour la conversion en deux photons du champ A_2 et χ_{12} pour la conversion en un photon

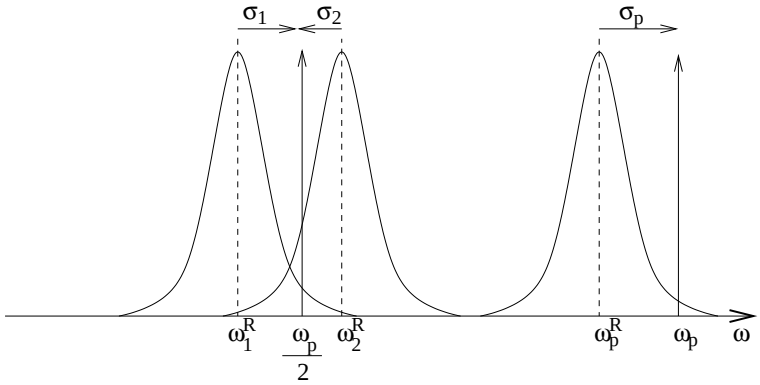


FIG. *2.9: Représentation dans le cas dégénéré des courbes de résonances de la cavité pour les modes du signal (centrées sur ω_1^R et ω_2^R) et de la pompe (centrée sur ω_p^R). Les fléches représentent les fréquences des repères tournant du signal ($\omega_p/2$) et de la pompe (ω_p). Les écarts entre les fréquences des repères tournants et les fréquences des résonances sont les désaccords des champs (respectivement σ_1, σ_2 et σ_p) (d'après [Suret et al., 2001a]).*

du champ A_1 et un du champ A_2, les profils transverses $f_i(\vec{r})$ étant intégrés dans ces coefficients de couplage. Les différents processus de conversion sont schématisés sur la figure 2.10.

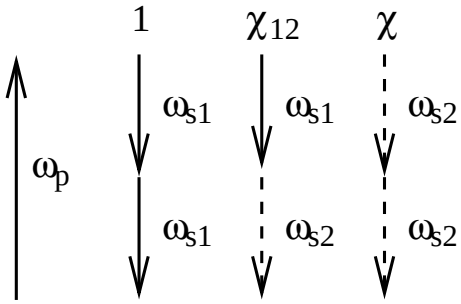


FIG. *2.10: Représentation schématique des possibilités de conversion d'un photon de pompe en photons du signal pouvant appartenir à deux modes transverses différents. Un photon de pompe peut se convertir en deux photons signal du mode 1 ou du mode 2 ou en une combinaison des deux.*

Une étude analytique et numérique détaillée de ce modèle a été faite dans la référence [Schwob *et al.*, 1998] dont nous avons rappelé une partie des résultats dans la partie 1.2.1.c. Pour ce système, d'après les simulations numériques, les solutions sont stationnaires pour un faible taux de pompage. Le signal généré comporte alors des composantes de deux modes transverses différents mais son intensité totale est constante. Pour des taux de pompage plus élevés et des désaccords non-nuls, des solutions périodiques peuvent apparaître.

Les oscillations de fréquences rapides observées expérimentalement pourraient être de telles solutions périodiques. Cela demande cependant à être confirmé en montrant

que pendant ces oscillations le signal est bien multimode transverse. C'est ce que nous allons faire dans la partie suivante.

2.2 Mise en évidence de la coexistence de modes transverses

Le but de cette partie est de prouver expérimentalement que plusieurs modes transverses sont nécessaires à la description du champ du signal lorsque l'intensité de celui-ci présente des oscillations rapides. La nature et le nombre de ces modes transverses pourront être obtenus par des expériences complémentaires.

Pour y parvenir, différents dispositifs de détection sont envisageables. D'abord, l'observation de la structure transverse du faisceau avec une caméra CCD semble une manière simple d'identifier le nombre et la nature des modes transverses mis en jeu dans l'interaction. Cependant les caméras commerciales ont des taux de répétition trop petits par rapport à la durée des instabilités observées pour que les images obtenues ne donnent des informations autres qu'indicatives. A l'autre extrémité d'une échelle classant les systèmes de détection par temps de réponse, on trouve des photodiodes à réponse rapide. Celles que nous utilisons dans nos expériences ont des bandes passantes de 200 MHz ou de 1GHz, nous les qualifierons de "détecteurs rapides" dans la suite. Ils résolvent les oscillations rapides mais ne donnent d'informations qu'en un point du plan transverse. L'utilisation simultanée de plusieurs détecteurs permet de comparer les évolutions temporelles des intensités en des points isolés du faisceau. Si le résultat de telles observations permet d'affirmer qu'il y a plus d'un mode transverse durant les oscillations, elles n'apportent aucune information sur le nombre et le type des modes transverses impliqués dans l'interaction. Finalement, l'utilisation d'une barrette CCD, c'est-à-dire d'une ligne de photodiodes de temps d'intégration intermédiaire entre la caméra et les détecteurs rapides, permettra d'observer l'évolution temporelle d'une coupe du faisceau transverse. Sans résoudre les oscillations comme les détecteurs rapides, elle permet cependant d'observer l'évolution lente de la structure transverse du faisceau durant l'instabilité. Le traitement numérique des observations par une méthode de décomposition en valeurs singulières donnera une indication du nombre de modes transverses impliqués dans l'interaction.

2.2.1 Mise en évidence directe de la coexistence de modes transverses

2.2.1.a Observation du faisceau transverse à la caméra

On pourrait penser que l'enregistrement d'un film du profil transverse du faisceau du signal avec une caméra CCD suffit à prouver la coexistence de plusieurs modes transverses et à les identifier. A partir du dispositif expérimental général décrit dans la partie 2.1.2 (voir figure 1.20), on place d'un côté de la lame séparatrice une caméra CCD et de l'autre on focalise le faisceau sur un détecteur. On peut alors

observer simultanément la structure spatiale du faisceau en champ lointain et l'évolution temporelle de l'intensité du signal. La caméra utilisée dans nos expériences est une caméra vidéo Panasonic, le détecteur rapide est un détecteur Thorlab InGaAs de bande passante 200MHz.

La figure 2.11(a) est un enregistrement de l'évolution de l'intensité du signal pendant 400μs pour une taille de cavité de 37 mm et à plus de cent fois le seuil. L'encart de la figure montre un agrandissement des oscillations présentées par l'intensité. La fréquence de ces oscillations est de 31.5MHz. La figure 2.11(b) est un enregistrement fait simultanément avec la caméra CCD. Cette image est constituée de plusieurs modes transverses et pourrait être la superposition d'un mode TEM_{00} et d'un mode TEM_{01}. Pour des tailles de cavité entre 37mm et 47mm et à plusieurs centaines de fois le seuil, de telles images constituées de plusieurs modes transverses plus ou moins complexes ont été fréquemment observées.

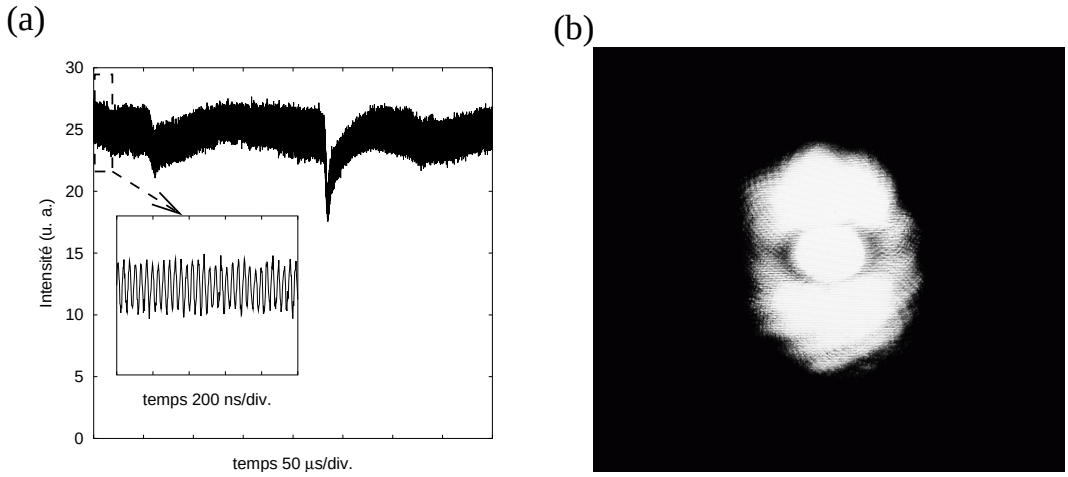


FIG. *2.11: (a) extrait du comportement temporel du signal durant l'enregistrment de la caméra, la fréquence des oscillations rapides est de 31,5MHz (b) image du faisceau transverse en champ lointain visionné avec la caméra CCD montrant une superposition de modes.*

La cadence d'acquisition de la caméra est de 50 images par secondes ce qui correspond à une image toutes les 20ms. Ce temps est à comparer à la période d'oscillation du signal ($\leq$ 32ns) et à la durée totale de l'enregistrement temporel (400μs). L'image que nous voyons à la caméra correspond donc à un moyennage des profils transverses adoptés par le faisceau infrarouge pendant un temps 50 fois plus long que l'évolution présentée sur la figure 2.11(a). Rien ne prouve donc que la structure transverse ne passe pas successivement d'un profil TEM_{00} à un profil TEM_{01} sans que ceux-ci coexistent. En effet on observe déjà un bref saut de mode sur le signal temporel où le profil transverse du faisceau a pu changer. En fait les séquences oscillatoires les plus longues sans saut de mode que nous ayons pu observer sont de l'ordre de 500μs et les enregistrements de durées supérieures présentent toujours de nombreux sauts de modes. La superposition de modes observée à la caméra pourrait donc n'être que la conséquence de sauts entre différents modes de structures transverses différentes pen-

dant son temps d'acquisition. Cela ne prouve pas qu'à un instant donné, par exemple durant les oscillations rapides, le système soit multimode.

La caméra nous donne cependant des informations sur les structures transverses que peut prendre le faisceau autour de la configuration actuelle de l'OPO. La structure transverse du faisceau est entièrement conditionnée par la géométrie de la cavité. Le balayage de la taille de la cavité dû aux variations de température peut conduire le champ à adopter des structures transverses alors que tous les autres paramètres de l'OPO sont fixes, mais en général le nombre de structures possibles est limité. Dans le cas où les structures transverses enregistrées restent simples, il est possible d'identifier les modes transverses autorisés dans notre configuration.

Notons pour finir que nous avons focalisé le faisceau sur un détecteur pour mesurer l'intensité du champ du signal. Dans ce cas (voir partie 2.2.2.b), l'intensité mesurée ne contient pas de termes de battement entre des modes transverses orthogonaux. Ce que nous observons ne peut donc pas être de simples battements entre les fréquences de deux modes transverses différents. D'autre part, l'intervalle spectral libre de notre cavité étant d'environ 2.5GHz et la fréquence de coupure de la cavité étant de 13MHz, des battements entre des modes longitudinaux seraient filtrés par la cavité et ne seraient donc pas observables.

2.2.1.b Comparaison de l'intensité en deux points du faisceau

Comme la caméra ne donne que des informations très partielles à cause de sa lenteur, nous allons utiliser des détecteurs rapides placés en différents points du faisceau transverse. Si la taille de ce faisceau est suffisamment grande par rapport à la surface des détecteurs, nous aurons donc une "caméra" à deux pixels ayant une réponse temporelle rapide.

Le montage est rappelé sur la figure 2.12 : deux détecteurs identiques D1 et D2 (détecteurs Thorlab InGaAs de bande passante 145MHz) sont placés sans focalisation dans le faisceau de chaque côté de la lame séparatrice. On peut ainsi enregistrer simultanément l'évolution temporelle de deux points du faisceau. La surface sensible des détecteurs est de 0.8 mm^2 à comparer à une taille de faisceau de quelques cm^2 au niveau des détecteurs. On pourra donc bien considérer que notre observation est ponctuelle. Les détecteurs sont placés à la même distance de la lame séparatrice. Cela assure que le rapport entre la taille du faisceau et la taille de la surface sensible des détecteurs est identique pour chaque détecteur est identique.

Rappelons que si le champ du signal comporte un seul mode transverse, il s'écrit : $E(t,\vec{r}) = A(t)f(\vec{r})\exp(ikz - i\omega t)$ où $\vec{r}$ est un vecteur déterminant la position dans le plan orthogonal à la direction de propagation, $f(\vec{r})$ une fonction complexe décrivant la distribution spatiale du champ dans le plan transverse et $A(t)$ l'enveloppe lentement variable du mode, ω la fréquence du repère tournant et k le vecteur d'onde. Dans ce cas, les intensités en deux positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ dans le plan transverse sont donnés par :

$$\begin{aligned} I(t,\vec{r}_1) &= |A(t)|^2|f(\vec{r}_1)|^2, \\ \text{et } I(t,\vec{r}_2) &= |A(t)|^2|f(\vec{r}_2)|^2, \end{aligned}$$

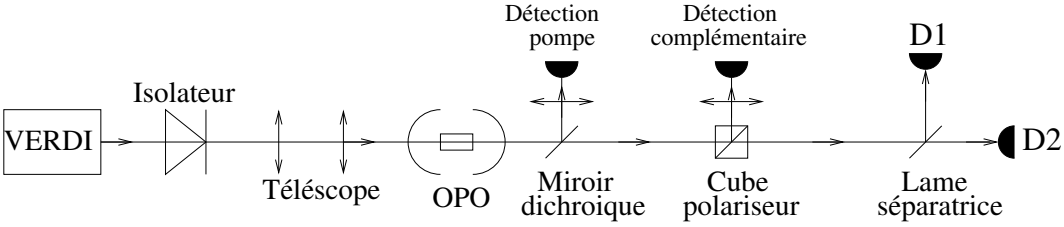


FIG. *2.12: Représentation schématique du dispositif expérimental. A partir du schéma général 1.20 on a rajouté deux détecteurs identiques D1 et D2 sans focalisation en deux points différents du profil transverse du signal.*

et donc les évolutions temporelles du champ en différents points sont proportionnelles entre elles. A contrario, des évolutions non-synchronisées des deux intensités constitueront une signature de la présence de plusieurs modes.

2.2.1.b-i Comportement multimode du signal sans oscillations rapides

Les observations de la figure 2.13 ont été obtenues pour une cavité de taille 42 mm et à intensité de pompe maximale. Les figures 2.13(a) et 2.13(b) correspondent aux intensités vues simultanément par les détecteurs D1 et D2, c'est à dire les évolutions en deux point différents du faisceau transverse du même champ. Les fichiers ne présentent pas d'oscillations rapides. Les données ont été filtrées par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 100MHz.

La figure 2.13(a) montre que l'intensité du signal oscille entre deux modes, un d'intensité basse quasiment constante pendant le temps T2 et un d'intensité plus élevée. Sur la branche haute, pendant le temps T1, l'intensité augmente au cours du temps. Les évolutions lentes de l'intensité de cette figure sont semblables à celles des oscillations thermiques multimodes observées par Suret *et al.* [Suret, 2000; Suret *et al.*, 2001b] et correspondent à des oscillations entretenues par des cycles thermiques entre deux modes.

Sur la figure 2.13(b), l'intensité commute aussi entre plusieurs modes. Pendant l'intervalle de temps T1, l'intensité a à peu près la même valeur que sur la figure 2.13(a) et sa pente est presque identique. Pendant l'intervalle de temps T2, après un bref transitoire, où le système passe de manière éphémère par un troisième mode, l'intensité de la figure 2.13(b) augmente avec une pente importante, alors que celles de la figure 2.13(a) reste constante.

Cependant, pour savoir si les intensités sont proportionnelles dans chaque phase stationnaire, il faut pouvoir les comparer. Comme les unités des intensités sont arbitraires, on peut toujours multiplier ces intensités par une constante. On peut alors choisir le facteur multiplicatif de manière à ce que dans la zone où l'on veut comparer les fichiers, ceux-ci aient au moins un point de coordonnées (temps et intensité) communes. Si les autres points sont confondus au cours du temps, les intensités sont proportionnelles entre elles. Sinon, elles ne le sont pas et le champ est multimode dans la zone considéré.

Nous avons procédé de cette manière pour comparer les fichiers de la figure 2.13.

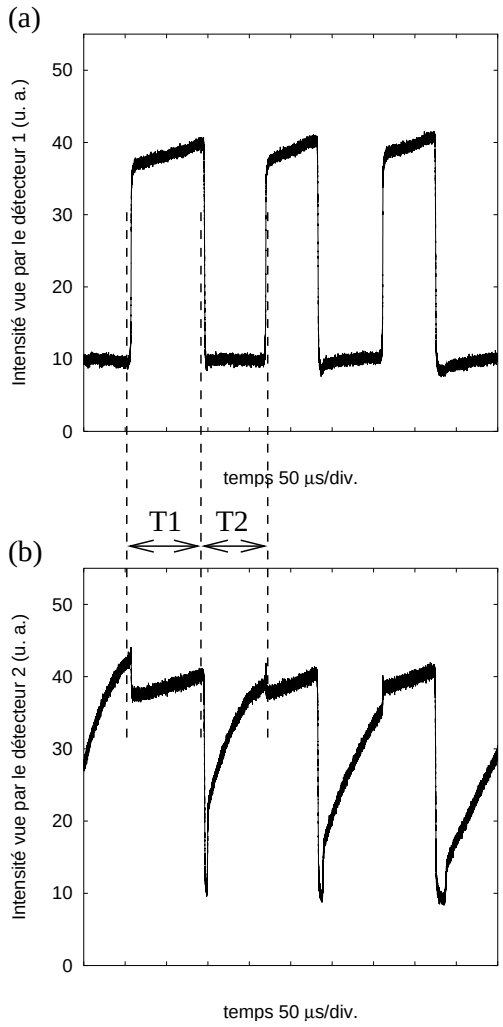


FIG. *2.13: Intensité du champ du signal en fonction du temps en deux points distincts du faisceau transverse. Les figures (a) et (b) correspondent aux signaux délivrés par les deux détecteurs D1 et D2 du montage 2.12. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 100MHz.*

Sur la figure 2.14(a) nous nous sommes interessés aux parties correspondant à l'intervalle de temps T1. On voit qu'en multipliant l'intensité vue par le détecteur D2 par un facteur, on peut confondre les courbes, donc les intensités sont proportionnelles. La figure 2.14(b) concerne les parties des signaux correspondant à l'intervalle de temps T2. On voit que les intensités délivrées par les deux détecteurs ne sont pas proportionnelles entre elles. Comme les deux détecteurs sont identiques, on peut en déduire que pendant cette phase des oscillations périodiques, le champ du signal n'est pas monomode transverse. Nous voyons donc expérimentalement qu'un OPO à fort taux de pompage peut être multimode transverse et avoir une intensité stationnaire au cours du temps. D'autre part les instabilités opto-thermiques peuvent donc entraîner une alternance entre des comportements monomodes et multimodes transverses.

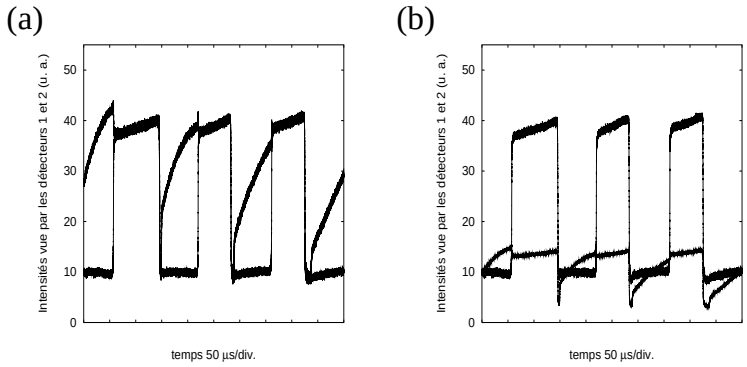


FIG. *2.14: Fichiers de la figure 2.13 montrant les évolutions de l'intensité au cours du temps en deux points différents du faisceau transverse. L'intensité du fichier 2.13(b) est multiplié par deux constantes (figures (a) et (b)) de manière à avoir au moins un point en commun avec l'intensité du fichier 2.13(a) dans les zones stationnaires.*

Nous montrons maintenant que lorsque l'intensité du champ présente des oscillations rapides, plusieurs modes transverses sont également présents sur le signal.

2.2.1.b-ii Comportement multimode du signal pendant les oscillations rapides

Les résultats de la figure 2.15 ont été obtenus dans les mêmes conditions expérimentales que précédement. Les figures 2.15(a) et (b) sont les intensités vues par les deux détecteurs D1 et D2 de la figure 2.12. Les deux intensités présentent des oscillations rapides superposées à des oscillations plus lentes d'origine thermique. Ces fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence 40 MHz. Les oscillations rapides ont une fréquence de 16 MHz, les oscillations lentes ont une fréquence d'environ 7 kHz. La figure 2.15(c) est la superposition d'un agrandissement simultané des deux fichiers non filtrés précédents pendant les oscillations rapides et pendant le même intervalle de temps.

Les évolutions lentes des intensités sur les figures 2.15(a) et (b) semblent être suffisamment différentes pour pouvoir amener aux mêmes conclusions que la partie précédente. On va procéder de la même manière et multiplier l'intensité de la figure 2.15(a) par une constante de manière à faire coïncider au moins un point de chaque série temporelle pendant les intervalles de temps ne présentant pas d'oscillations rapides. Quand on superpose alors les intensités vues par les deux détecteurs, on obtient la figure 2.16. Les intensités se confondant pendant tous les intervalles de temps sans oscillation, les deux intensités sont bien proportionnelles l'une à l'autre dans ces intervalles.

Il faudrait de même ramener les valeurs moyennes des intensités pendant les intervalles de temps où il y a des oscillations à une valeur commune pour savoir si les signaux sont proportionnels entre eux. On voit cependant sur la figure 2.16 que les amplitudes des oscillations des signaux des deux intensités sont presque identiques. Il n'y a donc manifestement pas le même facteur de proportionnalité sur les valeurs

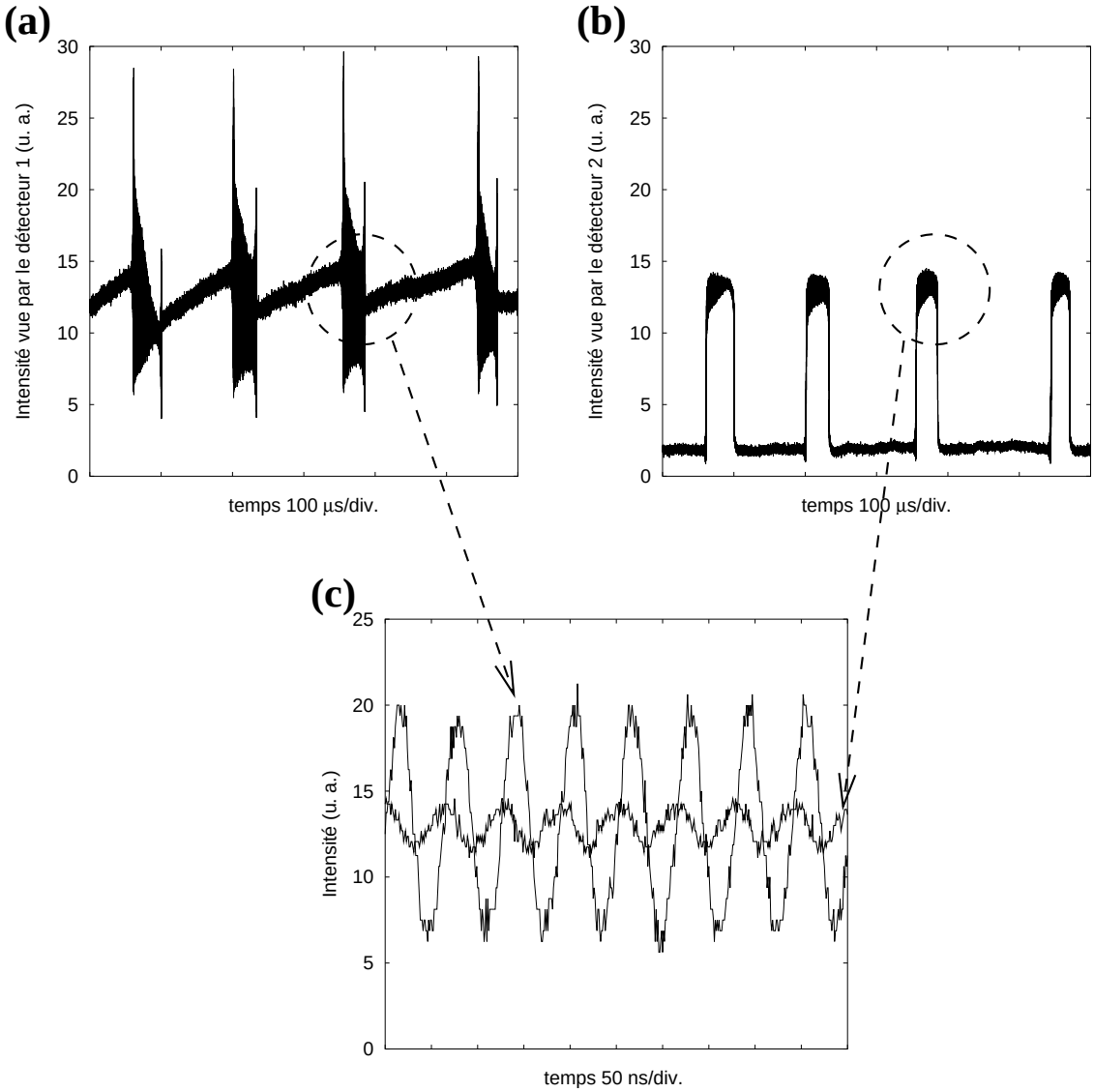


FIG. *2.15: (a) et (b) : Intensités du champ du signal en fonction du temps en deux points différents du faisceau transverse. Les fichiers sont enregistrés simultanément et sont filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 40 MHz ; (c) : agrandissement et superposition des images précédentes pendant les oscillations rapides à partir des fichiers non filtrés.*

moyennes et les amplitudes des oscillations. Donc les traces ne peuvent être proportionnelles pendant les intervalles de temps où les signaux présentent des oscillations rapides. Le signal est donc multimode pendant ces intervalles.

L'exploitation de la figure 2.15(c) va nous permettre de confirmer cette conclusion. Cette figure correspond à la superposition des deux signaux 2.15(a) et (b) durant les oscillations rapides et pendant 500ns. On voit que les signaux obtenus sur les deux détecteurs présentent des oscillations de même fréquence. Elles ont donc bien la même

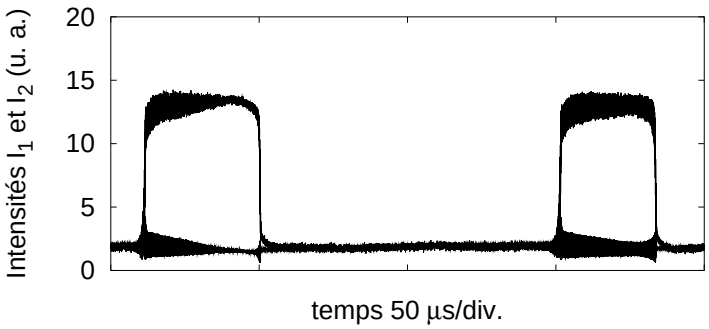


FIG. *2.16: Superposition des intensités vues par les détecteurs D1 et D2 après multiplication d'un des fichiers par un facteur.*

origine. D'autre part, elles présentent un déphasage. Ce déphasage ne peut être lié à un effet de filtrage car les fichiers utilisés pour la superposition n'ont pas été filtrés, ni aux détecteurs car les deux détecteurs sont strictement identiques. D'ailleurs en déplaçant les détecteurs dans le plan transverse à la direction de propagation du faisceau, différents déphasages ont pu être observés. D'autre part, la distance entre les détecteurs et la lame séparatrice étant approximativement la même, le déphasage ne peut être lié à la propagation des champs, qui se fait à la vitesse de la lumière[4].

Si l'origine des oscillations était l'apparition de la solution périodique du modèle monomode présenté dans la partie 1.2.1.b, un seul mode transverse serait présent dans la cavité et tous les points transverses du faisceau devraient évoluer en phase : leurs évolutions temporelles seraient proportionnelles entre elles. Le déphasage observé montre clairement que pendant les oscillations rapides le champ du signal se décompose sur plusieurs modes transverses. La bifurcation de Hopf du modèle monomode n'est donc pas la cause des oscillations rapides.

2.2.2 Lien entre l'évolution spatio-temporel d'un champ et les intensités mesurées expérimentalement

Bien que nous soyons parvenus à une conclusion sur le caractère multimode transverse du champ du signal en nous appuyant sur des observations directes des intensités et des raisonnements physiques simples, donner des interprétations en terme de modes sur des mesures d'intensité n'est pas évidente et il faut revenir plus précisement sur ce qu'on peut extraire de nos observations.

D'autre part, lors de nos expériences, nous avons utilisé différents dispositifs de détection : caméra CCD, barrette CCD, détecteur ponctuel rapide. Chacun de ces dispositifs nous donne des informations différentes sur les coordonnées transverses du faisceau (respectivement 2D, 1D, ponctuelle), mais avec des temps de réponse différents. Nous allons donc examiner plus précisement l'effet de l'intégration temporelle sur la signification de nos observations. Nous reviendrons aussi sur les conséquences

[4]Pour avoir un décalage temporel d'environ 10ns entre les intensités des deux champs à cause de la propagation, il faudrait que la différence entre les distances à parcourir soit d'environ 30cm.

de la focalisation ou non d'un faisceau sur un détecteur.

Nous allons donc dans cette partie nous interroger sur la signification des intensités que nous mesurons. Comme les calculs peuvent être parfois fastidieux, leurs détails se trouvent dans l'annexe A. Nous ne présenterons ici que les résultats. D'autre part, nous avons supposé qu'il n'y a que deux modes transverses impliqués dans le mécanisme. En effet, outre la volonté de simplifier les calculs, nous verrons dans la partie suivante qu'expérimentalement, dans la plupart des cas, seuls deux modes interviennent dans le processus.

Soient deux modes transverses

$$\begin{aligned} E_1(\vec{r},t) &= A_1(t)f_1(\vec{r})e^{ik_1z-i\omega_1t} \text{ et} \\ E_2(\vec{r},t) &= A_2(t)f_2(\vec{r})e^{ik_2z-i\omega_2t} \end{aligned}$$

où les $A_i(t)$ sont les amplitudes lentement variables, les $f_i(\vec{r})$ des fonctions complexes décrivant la distribution spatiale des champs dans le plan transverse, dépendant de la position $\vec{r}$ dans le plan orthogonal à la direction de propagation, et les ω_i les fréquences optiques des champs. L'intensité totale du champ est :

$$\begin{aligned} I(\vec{r},t) &= |f_1(\vec{r})|^2|A_1(t)|^2 + |f_2(\vec{r})|^2|A_2(t)|^2 \\ &+ 2\Re(f_1(\vec{r})f_2^*(\vec{r})A_1(t)A_2^*(t)e^{i(k_1-k_2)z-i(\omega_1-\omega_2)t}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cette intensité est donc celle que l'on observerait à l'aide d'un détecteur parfaitement ponctuel et dont le temps de réponse serait nul. En fait, en supposant $I = |E|^2$ on a déjà effectué un moyennage sur un temps plus grand que les fréquences optiques, sinon les intensités de chaque mode seraient de la forme $|f_i|^2|A_i|^2\cos^2\omega_i t$. La surface d'un détecteur étant toujours finie et son temps de réponse non-nul, l'intensité que nous mesurons est en fait le résultat du moyennage de l'intensité précédente sur la surface du détecteur pour la partie transverse et sur le temps de réponse du détecteur pour la dépendance temporelle. Nous allons donc présenter les résultats de ces intégrations de l'équation (2.4) pour les différents détecteurs que nous utilisons.

2.2.2.a Cas de deux détecteurs rapides en deux points différents du faisceau

2.2.2.a-i Observation par un détecteur rapide sans focalisation

Les détecteurs que nous avons utilisés expérimentalement ont une bande passante de 145MHz. Ils sont donc suffisamment rapides pour résoudre les temps caractéristiques (de 10ns à $1\mu s$) des fréquences dynamiques observées (de 1MHz à 100MHz). On a vu que le rapport de la surface du détecteur sur la taille du faisceau était de l'ordre du centième. On peut donc, en bonne approximation, négliger l'intégration sur le temps et sur la surface du détecteur.

L'intensité observée est donc la même que celle calculée précédemment (eq. (2.4)) dans le cas général. On peut la reformuler de la façon suivante :

$$\begin{aligned} I(t,\vec{r}) &= |f_1(\vec{r})|^2I_1(t) + |f_2(\vec{r})|^2I_2(t) \\ &+ 2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})||A_1(t)||A_2(t)|\cos((\omega_1-\omega_2)t + \Delta\phi(\vec{r},t)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $I_i = |A_i|^2$ et où $\Delta\phi$ est la différence de phase entre les termes complexes $f_1 A_1$ et $f_2 A_2$.

Nous voyons donc que si les fréquences des champs sont différentes, il restera un terme oscillant à la différence de fréquences entre les champs. Nous définirons ce terme comme le terme de *battement*.

2.2.2.a-ii Comparaison des intensités en deux points du faisceau

Dans notre situation expérimentale, nous comparons les valeurs de l'intensité précédente en deux points $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ du plan transverse. Nous allons séparer les cas où les deux modes ont la même fréquence (cas *accroché*) du cas où leurs fréquences sont différentes (cas *non accroché*).

2.2.2.a-ii.1 Cas de l'accrochage de fréquences

Si les modes A_1 et A_2 sont verrouillés en phase, leur différence de phase est constante au cours du temps. Les seuls termes dépendants du temps de l'équation (2.5) sont alors $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $|A_1(t)||A_2(t)|$. Si l'intensité mesurée présente des oscillations, c'est que le système est passé par une bifurcation. On va supposer pour simplifier que l'intensité présente des oscillations sinusoïdales à la fréquence Ω car c'est approximativement le cas de nos observations expérimentales, le cas $\Omega = 0$ correspondant à une intensité stationnaire. Tous les termes $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $|A_1(t)||A_2(t)|$ oscillent alors à la même fréquence Ω puisque ces oscillations naissent de la même instabilité. En deux points $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ du plan transverve, on observe alors :

$$\begin{aligned} I(\vec{r},t) &= A(\vec{r}) + \sqrt{B(\vec{r})^2 + C(\vec{r})^2}\cos(\Omega t + \phi(\vec{r})), \\ I(\vec{r'},t) &= A(\vec{r'}) + \sqrt{B(\vec{r'})^2 + C(\vec{r'})^2}\cos(\Omega t + \phi(\vec{r'})), \end{aligned}$$

où les termes $A(\vec{r})$, $B(\vec{r})$, $C(\vec{r})$ et $\phi(\vec{r})$ sont explicités dans l'annexe A.

On observe donc une différence de phase $\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r'})$ entre les signaux délivrés par des détecteurs placés en des points différents du faisceau. Cette différence de phase dépend de la position des détecteurs.

2.2.2.a-ii.2 Cas sans accrochage de fréquence Si les champs ne sont pas accrochés en fréquence il y a un terme de battement $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$:

$$\begin{aligned} I(\vec{r},t) &= |f_1(\vec{r})|^2 I_1(t) + |f_2(\vec{r})|^2 I_2(t) \\ &\quad +2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})||A_1(t)||A_2(t)|\cos(\Delta\omega t + \Delta\phi(\vec{r})). \end{aligned}$$

Dans ce cas, les intensités en deux points $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} I(\vec{r},t) &= A(\vec{r}) + B(\vec{r})\cos(\Omega t + \phi_B(\vec{r})) + C(\vec{r})\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_C(\vec{r})) \\ &+ D(\vec{r})\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_D(\vec{r})), \\ I(\vec{r'},t) &= A(\vec{r'}) + B(\vec{r'})\cos(\Omega t + \phi_B(\vec{r'})) + C(\vec{r'})\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_C(\vec{r'})) \\ &+ D(\vec{r'})\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_D(\vec{r'})). \end{aligned}$$

On voit donc que la présence d'une fréquence de battement va faire apparaître des bandes latérales dans le spectre de l'intensité. Comme nos signaux sont le plus souvent quasi-sinusoidaux et de fréquence identique en différents points, une de ces fréquences domine. Cela signifie sans doute que la plupart de nos signaux expérimentaux correspondent à des modes accrochés en fréquence, ce qui correspond certainement à un processus de synchronisation d'oscillateurs couplés.

Notons d'autre part que dans le cas particulier $\Omega = \Delta\omega$ dont on verra dans la partie 3.1 qu'il correspond au cas où les fréquences d'oscillation de l'intensité sont grandes (de l'ordre de 100MHz), l'intensité présente alors une seconde harmonique.

Aprés la comparaison de deux intensités ponctuelles, les intensités vues par les autres dispositifs de détection vont être à présent calculées en considérant toujours que l'amplitude du signal peut être écrite comme la somme de deux modes transverses.

2.2.2.b Observation en focalisant sur un détecteur rapide

Lorsqu'on focalise le faisceau sur un détecteur, la taille du faisceau est inférieure à la taille de la surface sensible du détecteur. On doit donc intégrer l'intensité sur le plan transverse à la direction de propagation pour obtenir l'intensité délivrée par le détecteur. Comme la bande passante du détecteur est la même que dans le cas précédent, on néglige l'intégration sur le temps. L'intensité observée est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t) &= \int I(t,\vec{r})d\vec{r}, \\ &= \left(\int |f_1|^2 d\vec{r}\right)|A_1|^2 + \left(\int |f_2|^2 d\vec{r}\right)|A_2|^2 + 2\Re\left(\left(\int f_1 f_2^* d\vec{r}\right) A_1 A_2^* e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\right).\end{aligned}$$

Or les fonctions $f_i(x,y)$ forment une base orthonormée de décomposition des champs, ils vérifient donc :

$$\int f_i f_j^* d\vec{r} = \delta_{ij} \text{ où } \begin{cases} \delta_{ii} & = 1 \\ \delta_{ij} & = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

où $i \neq j$ signifie que les modes transverses sont différents.

Donc si on a bien deux modes transverses différents, on a :

$$\mathcal{I}(t) = |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 = I_1(t) + I_2(t).$$

Ainsi, lorsque l'on focalise un faisceau sur un détecteur, les oscillations observées sont forcement liées à des oscillations des intensités $|A_i(t)|^2$ et ne peuvent pas être dues à des termes de battements.

2.2.2.c Observation par un détecteur "lent"

Outre les photodiodes rapides, on utilise une caméra CCD et une barrette CCD de réponse plus lente. Elles sont constitués d'une matrice de photodiodes qu'on peut considérer individuellement comme ponctuels. L'intensité délivrée par chaque pixel

correspond au cas sans focalisation (pas d'intégration dans le plan transverse). Par contre le temps τ d'intégration du détecteur n'est plus négligeable. On va distinguer le cas de la barrette CCD, dont le temps d'intégration est inférieur ou de l'ordre du temps entre deux sauts de modes, de celui de la caméra dont le temps d'intégration est beaucoup plus grand que celui entre les sauts de modes.

2.2.2.c-i Barrette CCD

On intégre l'équation 2.4 sur le temps $\tau_B \gg 2\pi/\Omega$, où Ω désigne toujours la fréquence d'oscillation de l'intensité :

$$\mathcal{I}(t) = |f_1|^2\mathcal{I}_1 + |f_2|^2\mathcal{I}_2 + 2|f_1||f_2| < |A_1||A_2|\cos((\omega_1-\omega_2)t+\Delta\phi) > \text{, où}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i(t) &= \int_{\tau_B} I_i(s)ds, \\ < |A_1||A_2|\cos((\omega_1-\omega_2)t+\Delta\phi) > &= \int_{\tau_B} |A_1(s)||A_2(s)|\cos((\omega_1-\omega_2)s+\Delta\phi)ds. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on va distinguer deux cas suivant si le terme de battement est nul ou non :

- Dans le cas accroché :

$$\mathcal{I}(t) = |f_1|^2\mathcal{I}_1 + |f_2|^2\mathcal{I}_2 + 2|f_1||f_2|\mathcal{I}_3,$$

  où tous les termes oscillants sont donc moyennés. Seuls resteront les fluctuations lentes des termes $\mathcal{I}_1(t)$, $\mathcal{I}_2(t)$, et $\mathcal{I}_3(t)$ montrant l'évolution de la contribution de chaque mode au champ au cours du temps, à cause par exemple des fluctuations de la taille de la cavité.

- Dans le cas non accroché, le résultat va dépendre de la valeur des fréquences $\Omega - \Delta\omega$ et $\Omega + \Delta\omega$. Si une de ces fréquences est suffisamment lente, elle pourra être observée par les détecteurs. Cela n'a cependant jamais été le cas, donc soit la plupart de nos fichiers sont accrochés en fréquence, soit les nouvelles fréquences sont moyennées par la barrette.

Finalement, l'intensité s'écrit sous la forme de la somme de trois termes variant lentement au cours du temps et montrant l'évolution de la contribution de chaque mode à l'intensité totale délivrée par chaque photodiode :

$$\mathcal{I}(\vec{r},t) = |f_1(\vec{r})|^2\mathcal{I}_1(t) + |f_2(\vec{r})|^2\mathcal{I}_2(t)) + 2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})|\mathcal{I}_3(t).$$

2.2.2.c-ii Caméra CCD

Dans le calcul précédent, nous avons supposé que les différents modes variaient peu durant le temps de l'intégration. Si cela est sans doute vrai pour la barrette sauf lors d'un saut de mode, cela ne l'est plus pour la caméra dont le temps d'intégration est très long devant le temps moyen entre deux sauts de modes. Dans ce cas des

structures transverses différentes et des modes longitudinaux différents peuvent se succéder au cours du temps, et l'expression résultante fait intervenir tous les modes transverses qui ont existé pendant le temps d'intégration.

Pour conclure l'observation par un détecteur trop lent (la caméra) nous donne une superposition des structures transverses que le signal a adoptées au cours du temps. D'autre part, les observations d'intensités non proportionnelles en deux points du profil transverse prouvent la coexistence de plusieurs modes sans permettre leur identification. Une coupe du profil transverse du faisceau par une barrette est un compromis entre ces deux extrêmes que nous allons à présent exploiter. Nous aurons ainsi des informations sur la structure spatiale des faisceaux qu'on ne peut obtenir par des détecteurs ponctuels tout en ayant une résolution temporelle suffisante par rapport au temps moyen entre deux sauts de modes.

2.2.3 Observation d'une coupe du profil transverse du faisceau à l'aide d'une barrette CCD

D'après les résultats de la partie précédente, le champ du signal comporte plusieurs modes transverses pendant les oscillations rapides. Cependant les observations à l'aide de détecteurs ponctuels ne peuvent pas nous donner d'information sur le nombre et la nature des modes qui interviennent. Nous présentons donc les résultats obtenus par l'observation de la structure transverse d'une coupe du faisceau pendant les oscillations rapides avec une barrette CCD.

2.2.3.a Principe de l'expérience

Le dispositif expérimental est toujours globalement le même que précédement et est rappelé sur la figure 2.17. D'un côté de la lame séparatrice, l'intensité du signal est focalisé sur un détecteur rapide identique à ceux de la partie 1.3.5, de l'autre la taille du faisceau est adaptée à l'aide d'une lentille de manière à ce que son diamètre soit de la taille de la barrette CCD qui l'intercepte.

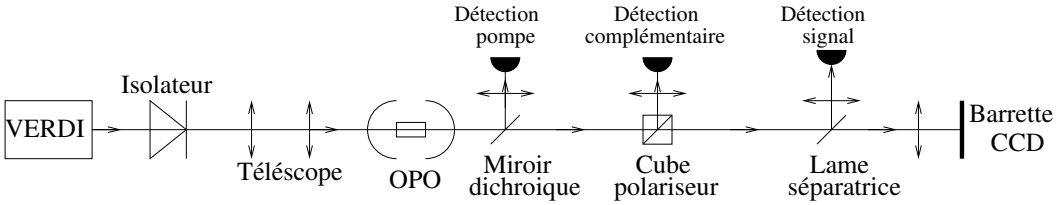


FIG. *2.17: Dispositif expérimental*

2.2.3.a-i Fonctionnement de la barrette

La barrette est constituée d'un alignement de 256 photodiodes ce qui nous permet d'avoir 256 points ou pixels par profil enregistré. Le signal vidéo délivré par la barrette peut être observé sur un oscilloscope.

Il existe différents temps caractéristiques correspondants aux différentes étapes de l'acquisition par la barrette. Pendant un temps τ_B les pixels intègrent l'intensité reçue simultanément, puis les signaux des différents pixels sont transférés successivement. Les valeurs d'intensités correspondant à différentes positions spatiales ayant des temps de transfert différents, elles forment finalement un signal temporel bien qu'elles aient été enregistrées simultanément. Il y a ensuite un temps d'attente avant qu'une nouvelle acquisition puisse se faire. Le signal visualisé à l'oscilloscope est donc formé d'images successives vues par la barrette. La fréquence d'acquisition de ces images est de 33kHz, elle correspond à un temps entre deux images successives de 30μs.

La figure 2.18 montre schématiquement les signaux attendus sur la barrette pour les structures les plus simples. Les modes observés expérimentalement sont en général des modes de Hermite-Gauss [5]. Compte tenu de la courte durée des instabilités observées, il n'a pas été possible de régler la barrette de manière à ce qu'elle soit toujours orthogonale à l'axe de symétrie des modes. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous présenterons nos résultats.

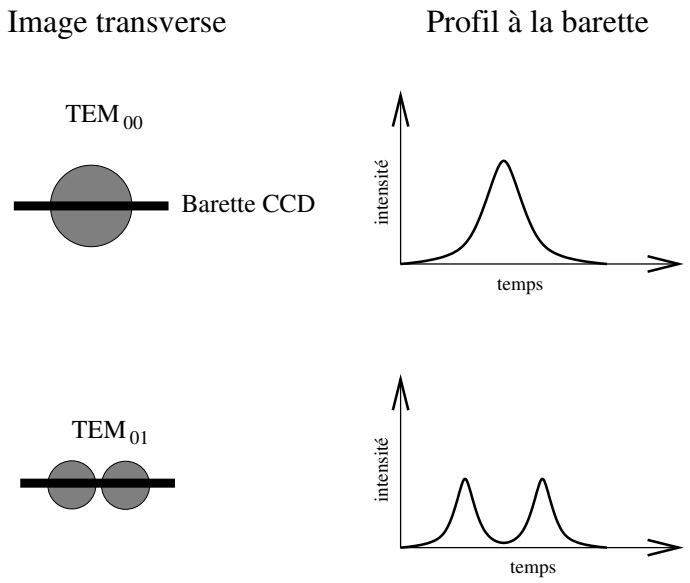


FIG. *2.18: Représentation schématique des profils transverses observés avec la barrette CCD*

2.2.3.a-ii Observation

Un exemple d'observation est présenté sur la figure 2.19(a). Le signal 1 est l'intensité délivrée par le détecteur au cours du temps, le signal 2 est la tension délivrée par la barrette. Ce dernier signal est donc constitué d'une succession d'images au cours du temps. Chaque acquisition de la barrette est délimitée par deux pics de synchronisation négatifs permettant de séparer temporellement les images successives. La figure

[5] On pourrait s'attendre à des modes de Laguerre-Gauss à cause de la symétrie cylindrique du système, cependant le cristal que nous utilisons présente un *walk-off* qui n'est pas compensé et qui brise cette symétrie

2.19(b) montre ainsi un profil formé par les intensités vues par toutes les photodiodes de la barrette simultanément pendant le même laps de temps τ_B.

Après qu'une image a été acquise, il faut un certain temps pour la transférer. Si un saut de mode survient pendant ce temps, il ne sera pas visible sur l'image en cours de transfert mais bien évidemment sur la suivante. Les images sont donc décalées par rapport au signal temporel. Ainsi, sur la figure 2.19(a) entre les lignes pointillés indiquées par les flèches en haut à gauche de la figure, on observe au niveau du saut de mode, c'est à dire de la discontinuité en intensité du signal 1, un décalage entre le saut présenté par l'intensité du signal temporel et le changement de la structure transverse du champ sur le signal de la barrette.

On constate sur la figure 2.19(a)(2) que la structure transverse du faisceau évolue au cours du temps, pendant que le signal temporel (figure 2.19(b)(1)) passe successivement par un saut de mode, un état stationnaire, des oscillations rapides, puis redevient stationnaire. On peut s'interroger sur l'origine de cette évolution sur le signal temporel de l'intensité et le profil transverse du faisceau. Cette question en rejoint une autre : pourquoi n'observe-t-on pas les oscillations durant un temps suffisamment long pour utiliser la caméra ? Rappelons qu'un OPO est sujet à des variations de la longueur optique de sa cavité liées aux fluctuations thermiques du cristal (cf. partie 1.2.2). Cela est accentué dans notre situation par le fait que nous travaillons à des puissances de pompe très élevées : la cavité est constamment balayée thermiquement.

On peut donc interpréter le signal temporel et le profil transverse de la manière suivante : au début l'OPO fonctionne sur un mode longitudinal de forme "TEM_{00}"[6], les variations en température de la cavité le font sauter sur un mode de seuil plus bas. Ce nouveau seuil de fonctionnement correspond à une situation multimode transverse ayant une grande composante "TEM_{01}" et une petite composante "TEM_{00}". L'intensité est cependant constante. La dérive thermique fait évoluer les rapports entre les amplitudes des deux modes et leurs désaccords respectifs jusqu'à atteindre le seuil d'instabilité où apparaît les oscillations rapides. La dérive thermique déplace le système le long de la solution périodique jusqu'à ce qu'il passe à travers une bifurcation de Hopf inverse à partir de laquelle le système redevient stationnaire. Les contributions de chaque mode sont alors inversées : le mode "TEM_{00}" prédomine sur le "TEM_{01}".

Si on regarde de plus près le signal correspondant à une unique image de la barette, on s'attend donc à voir entre les deux pics de synchronisation une courbe représentant les intensités pour les différents pixels de la barette qu'on peut noter sous la forme d'un vecteur $(\mathcal{I}(x_1,t),\ldots,\mathcal{I}(x_n,t))$ où les x_i sont les positions transverses des pixels de la barette. La figure 2.19(c) montre le signal délivré au niveau des pixels. Il présente des transitoires rapides au début de chaque pixel et donnent au signal d'ensemble un aspect agité. Le fait que ces transitoires alternent entre deux tailles est lié au fait que les 256 pixels sont en fait constitués de deux séries de 128 pixels entrelacés et dont les intensités sont alternées dans le signal temporel.

[6]Les guillemets indiquent que les modes ne sont pas clairement identifiés et qu'il s'agit donc d'un abus de langage de les appeler de cette manière.

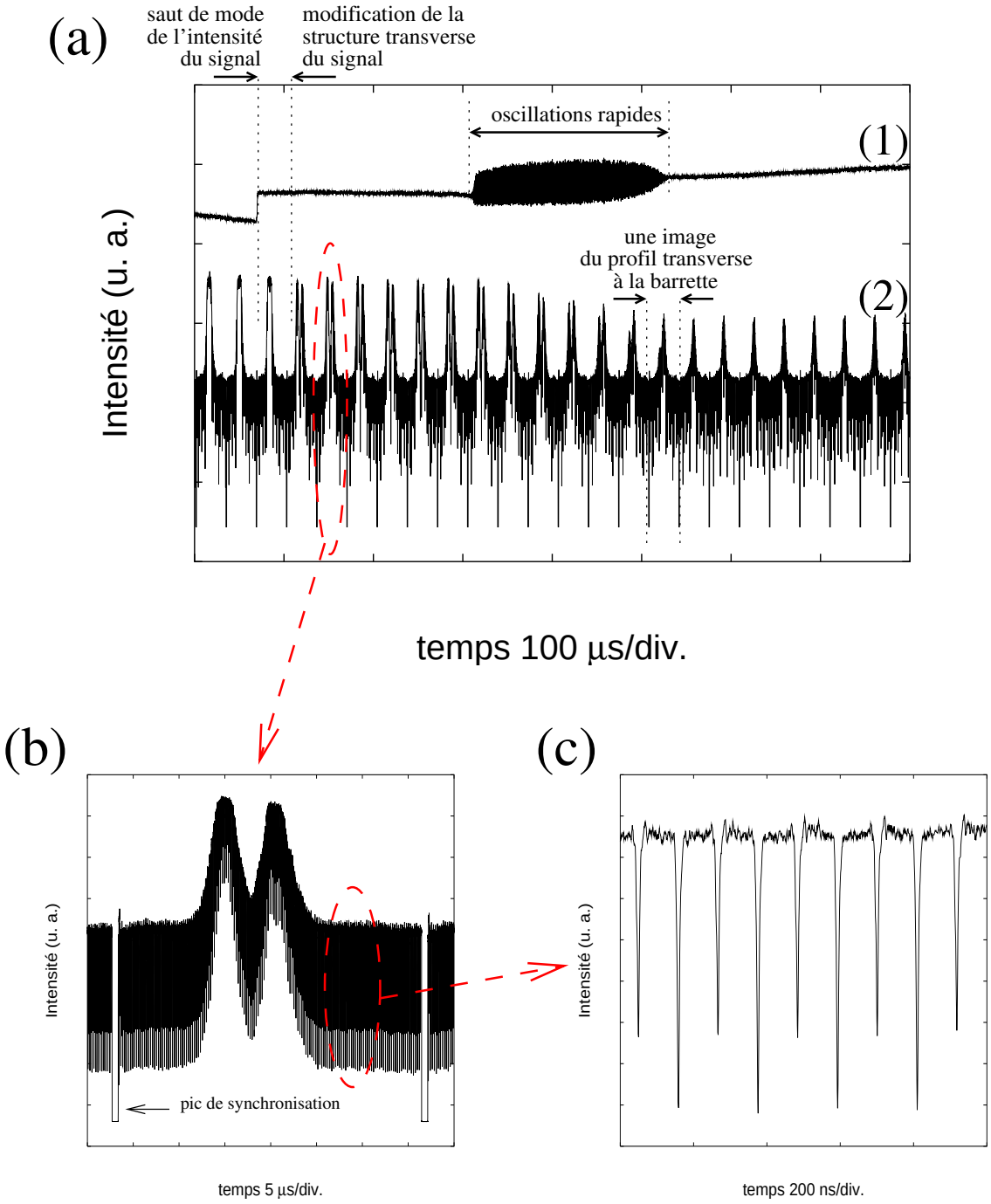


FIG. *2.19: (a) (1) Intensité du signal et (2) signal délivré par la barrette tels qu'ils sont vus à l'oscilloscope, (b) agrandissement d'un profil transverse vu par la barrette correspondant à une image du profil transverse, (c) agrandissement montrant le signal délivré par les pixels de la barrette.*

Le signal délivré par la barrette est traité numériquement de manière à extraire un point par photodiode. On a d'abord filtré le fichier avec un filtre acausal passe-bas de fréquence de coupure 100MHz. La durée d'un pixel est d'environ 108 ns, soit une fréquence de 9MHz. L'effet de mémoire du filtre se fait donc sur environ un dixième de pixel de la barrette, ce qui est tout à fait acceptable. On moyenne ensuite les parties quasiment constantes de chaque pixel de manière à obtenir une valeur de l'intensité par pixel. D'autre part les pics de synchronisation permettent de séparer les images successives et ainsi d'extraire la variable spatiale de la série temporelle.

La figure 2.20(a) montre le résultat de ce traitement du signal video. Les profils successifs sont donc représentés en fonction du temps et de la dimension transverse correspondant à la taille de la barette. On a utilisé uniquement la partie du signal temporelle de la figure 2.19 située après le saut de mode. On observe qu'on évolue progressivement d'une forme avec deux bosses vers une forme n'ayant plus qu'une bosse, il est tentant d'identifier ces formes comme étant respectivement proches d'un mode TEM_{01} et d'un mode TEM_{00}. La nature des modes peut être confirmée par une observation sur une carte de visualisation. D'autre part des observations à la caméra dans la même configuration de la cavité montrent en effet que seuls ces deux modes transverses sont observés. La figure 2.21 montre ces images. On reconnait sur les figures 2.21(a) et (d) respectivement un mode TEM_{00} et un mode TEM_{01}. Les figures 2.21(b) et (c) montrent des images intermédiaires présentant certainement une superposition de ces deux modes.

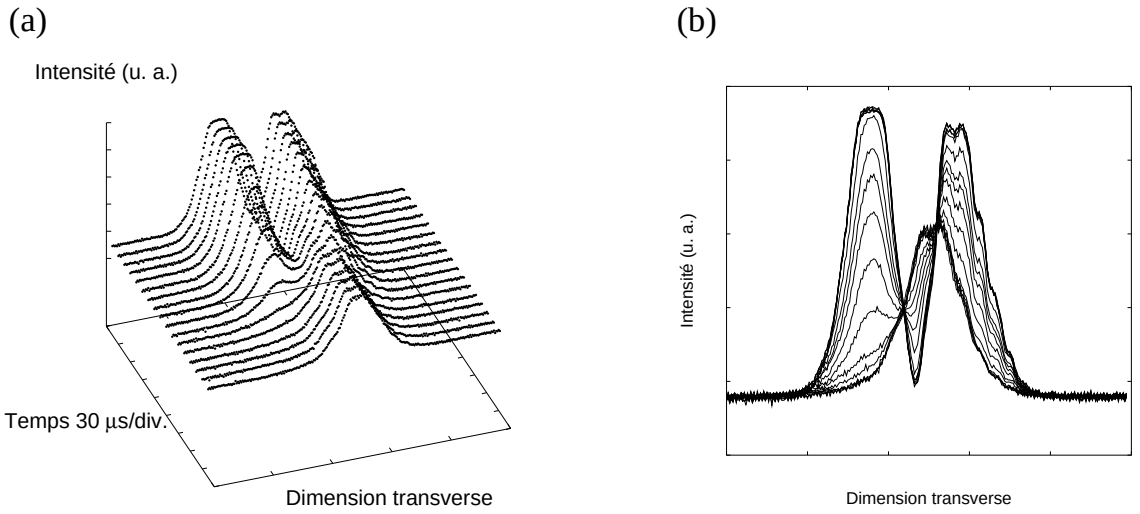


FIG. *2.20: (a)Evolution des profils transverses vus par la barette au cours du temps. (b) Projection de la figure 2.20 suivant la direction temporelle.*

La figure 2.20(b) est une projection de la figure 2.20(a) : les profils transverses sont superposés au cours du temps. Les deux pics du TEM_{01} ne sont pas symétriques, cela est lié au fait que la barrette ne passe pas forcement par le centre de symétrie du mode comme cela a été évoqué auparavant. Pour la même raison le pic du TEM_{00}

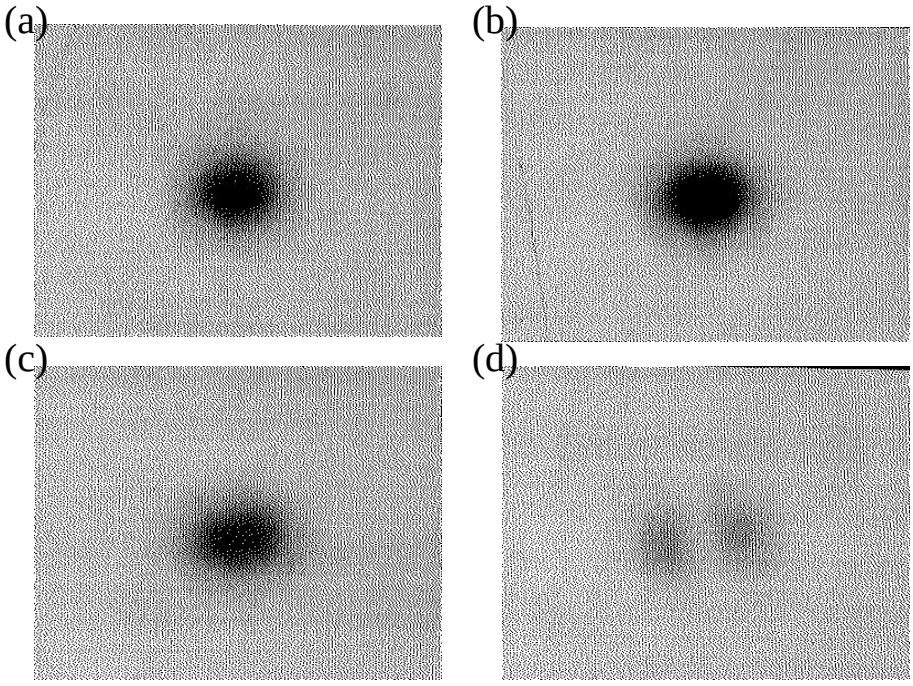


FIG. *2.21: Images prises à la caméra du profil du faisceau*

est décalé par rapport au TEM_{01}. D'autre part, la partie droite des profils présente des paliers qui sont sans doute des franges d'interférence liées à la lame séparatrice de faisceau placée avant la barette. On observe enfin que plusieurs profils intermédiaires pouraient correspondre à une combinaison linéaire des deux modes. C'est ce qu'on va essayer d'éclaircir maintenant.

2.2.3.b Décomposition en valeurs singulières

Chaque profil transverse enregistré entre deux pics de synchronisation est donc un vecteur $B_t = (\mathcal{I}(x_1, t), \ldots, \mathcal{I}(x_n, t))$.

Rappelons que lorsque le champ est monomode, on peut écrire l'intensité du champ sous la forme : $I(\vec{r}, t) = |A(t)|^2 |f(\vec{r})|^2$, où $A(t)$ est l'amplitude lentement variable du champ et $f(\vec{r})$ décrit la structure transverse du champ. Dans ce cas, le vecteur vu par la barrette est :

$$\begin{aligned} B_t &= \left(|A(t)|^2 |f(x_1)|^2, \ldots, |A(t)|^2 |f(x_n)|^2\right), \\ &= |A(t)|^2 \left(|f(x_1)|^2, \ldots, |f(x_n)|^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi, si le champ observé comporte un unique mode transverse, la composante temporelle $|A(t)|^2$ peut être factorisée et tous les profils enregistrés au cours du temps par la barrette sont colinéaires entre eux.

Si le champ comporte deux modes transverses et qu'on suppose que l'intensité s'écrit comme la somme des intensités de chaque mode $I(\vec{r}, t) = |A_1(t)|^2 |f_1(\vec{r})|^2 +$

$|A_2(t)|^2|f_2(\vec{r})|^2$, le vecteur vu par la barrette est :

$$\begin{aligned} B_t &= \left(|A_1(t)|^2|f_1(x_1)|^2 + |A_2(t)|^2|f_2(x_1)|^2, \ldots, |A_1(t)|^2|f_1(x_n)|^2 + |A_2(t)|^2|f_2(x_n)|^2\right), \\ &= |A_1(t)|^2\left(|f_1(x_1)|^2, \ldots, |f_1(x_n)|^2\right) + |A_2(t)|^2\left(|f_2(x_1)|^2, \ldots, |f_2(x_n)|^2\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, tous les profils vus par la barrette au cours du temps peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de deux profils correspondant aux vecteurs $(|f_1(x_1)|^2, \ldots, |f_1(x_n)|^2)$ et $(|f_2(x_1)|^2, \ldots, |f_2(x_n)|^2)$.

De manière générale, les profils vus par la barrette au cours du temps vont pouvoir s'écrire comme des combinaisons linéaires d'un petit nombre N de modes du type :

$$I(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_k(t) g_k(\vec{r}),$$

comme la barrette discrétise le temps et l'espace, on aura en fait une intensité de forme matricielle :

$$I(\vec{r_i}, t_l) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_k(t_l) g_k(\vec{r_i}).$$

Le nombre N de profils $|g_k|$ linéairement indépendants nous donnera le nombre de profils transverses intervenant dans l'interaction.

Nous partons donc à présent des profils observés expérimentalement par la barrette et essayons de savoir combien de profils de base sont nécessaires pour reconstruire une série temporelle observée à la barrette.

2.2.3.b-i Matrice utilisée pour la décomposition

La barrette enregistre donc des vecteurs B_t au cours du temps. L'ensemble de ces vecteurs $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$ forme une matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} \mathcal{I}(x_1, t_1) & \ldots & \mathcal{I}(x_1, t_m) \\ \mathcal{I}(x_2, t_1) & \ldots & \mathcal{I}(x_2, t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{I}(x_n, t_1) & \ldots & \mathcal{I}(x_n, t_m) \end{pmatrix}$$

Si le champ est monomode et donc décrit par une unique structure transverse, tous les B_{t_i} sont proportionnels entre eux et la matrice est de rang 1. Comme la structure transverse évolue visiblement au cours du temps dans notre expérience, la matrice que nous allons analyser est de rang plus élevé.

En déterminant ce rang, on pourra connaître le nombre de profils transverses différents contribuant à l'intensité totale pendant la durée de l'enregistrement. Pour cela on va effectuer une décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition ou SVD en anglais) de la matrice B formée pour ses colonnes des vecteurs décrivant ces profils.

2.2.3.b-ii Principe de la décomposition

La décomposition en valeurs singulières est un algorithme de décomposition de matrice en un produit de trois matrices $B = UWV^T$:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & w_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} & & \\ & V^T & \\ & & \end{pmatrix},$$

où B est la matrice (de dimensions $m \times n$, avec $m \geq n$) que l'on veut décomposer, U est une matrice $m \times n$ orthogonale pour ses colonnes ($U^T U = 1$), V une matrice carrée $n \times n$ orthogonale ($V^T V = V V^T = 1$) et W une matrice diagonale de dimension $n \times n$.

Les vecteurs colonnes de U forment une base d'un sous-espace vectoriel de dimension m de l'espace vectoriel des vecteurs de dimension n. Tous les vecteurs de la matrice B que l'on veut décomposer font partie de ce sous-espace vectoriel et pourront s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de U. Les valeurs w_i donnent une estimation de l'importance de la contribution de chacun des vecteurs de cette base pour la reconstruction de la matrice B.

En effet si on note B_j et U_j les vecteurs constituant respectivement les colonnes de B et U, on a :

$$B_j = \sum_k w_k U_k v_{jk},$$

La reconstruction de la matrice B se fait donc avec les vecteurs $w_k U_k$, et pour les valeurs w_k nulles ou petites, la contribution des vecteurs $w_k U_k$ sera négligeable.

Donnons quelques exemples sur des cas imaginaires :

- le signal est monomode pendant l'acquisition, son profil transverse reste le même, son intensité est constante. Alors il existe un unique vecteur singulier correspondant à une valeur singulière w_1 non-nulle :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \dots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

- le signal présente des oscillations thermiques entre deux modes longitudinaux de même profil transverse [Suret *et al.*, 2001b]. Alors, même s'il y a plusieurs modes optiques, il n'y a qu'un seul profil transverse décrivant ces modes, et donc un seul vecteur singulier. Par contre, si les oscillations thermiques se font entre deux modes de structures transverses différentes, deux profils transverses alternent au cours du temps et il existe donc deux valeurs singulières non-nulles

w_1 et w_2 :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & & & \\ & w_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

2.2.3.b-iii Analyse des fichiers

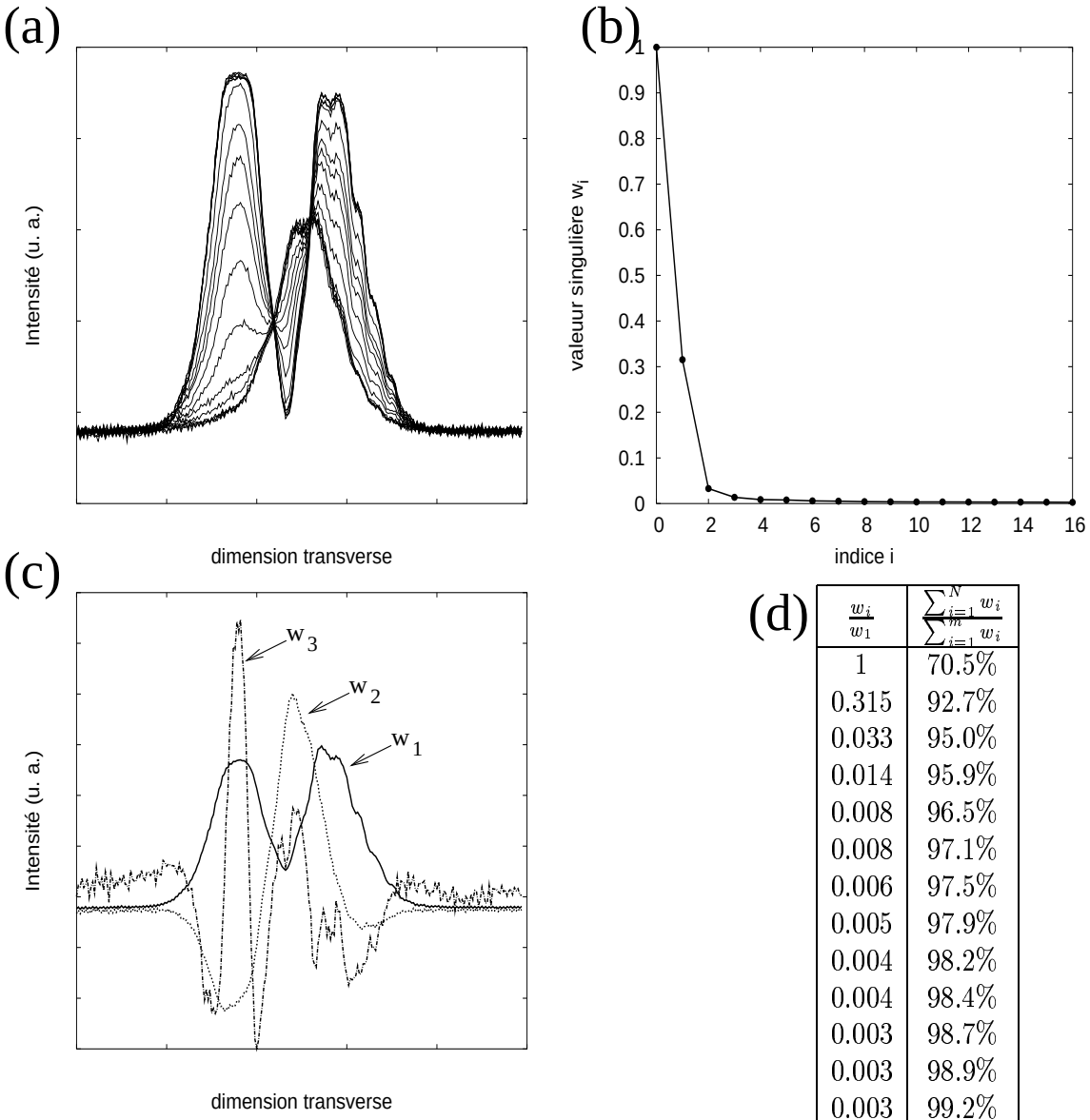
Les résultats de la décomposition du fichier présenté précédemment sont résumés sur la figure 2.22. La figure 2.22(a) rappelle les vecteurs utilisés comme colonnes de la matrice à décomposer, chacun correspondaant à un profil spatial différent. La figure 2.22(b) est une représentation des valeurs singulières issues de la SVD en fonction de leur indice, on constate que ces valeurs décroissent très vite. On voit qu'à partir de la troisième valeur, on va pouvoir considérer les vecteurs U_k comme négligeables dans leur contribution à la matrice B d'origine. La figure 2.22(c) représente les deux vecteurs U_1, U_2 et U_3 obtenus pour les valeurs $w_1/w_1 = 1$, $w_2/w_1 \simeq 0.3$ et $w_3/w_1 \simeq 0.03$. Les deux premiers modes sont à priori ceux qui contribuent le plus aux profils observés expérimentalement. Leurs formes sont différentes de celles attendues pour un mode TEM_{00} et un mode TEM_{01}. En effet, la méthode de décomposition donne des vecteurs orthogonaux correspondant aux données numériques qui sont des intensités et non des amplitudes, or c'est lorsqu'on considère les modes TEM_{mn} en amplitude que ceux-ci sont orthogonaux. Le profil du vecteur U_3 est beaucoup plus bruyant que celui des modes U_1 et U_2 et correspond donc à des contributions à un ordre plus faible que les deux premiers vecteurs. Enfin le tableau 2.22(d) donne d'une part la liste des valeurs singulières normalisées par la plus grande et d'autre part le pourcentage des poids cumulés. On constate qu'à partir de la troisième valeur singulière le pourcentage des poids cumulés évolue lentement.

Pour savoir si on peut en effet considérer que seuls deux modes participent à l'évolution observée expérimentalement, on reconstruit le fichier d'origine en mettant toutes les valeurs w_i pour $i > N$ égales à 0. Les profils approximés $B_j^{(N)}$ sont alors donnés par :

$$B_j^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} w_i U_i v_{ji}.$$

On cherche à quantifier l'erreur faite sur le profil lorsqu'on utilise lles vecteurs $B_j^{(N)}$. On utilise comme mesure de cette erreur la distance entre cette approximation sur N modes et la solution complète. On calcule donc la distance entre un vecteur B_j et le vecteur approximé $B_j^{(N)}$. Si m est le nombre de pixels par profil (ou le nombre de lignes aux vecteurs) et si on note $B_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ les coefficients des vecteurs, l'écart σ_j pour chaque profil est calculé de la manière suivante :

$$\sigma_j^{(N)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}^{(N)} - a_{ij}|^2}{\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2}},$$



(d)

$\frac{w_i}{w_1}$	$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$
1	70.5%
0.315	92.7%
0.033	95.0%
0.014	95.9%
0.008	96.5%
0.008	97.1%
0.006	97.5%
0.005	97.9%
0.004	98.2%
0.004	98.4%
0.003	98.7%
0.003	98.9%
0.003	99.2%
0.003	99.4%
0.003	99.6%
0.003	99.8%
0.003	100%

FIG. *2.22: (a) Vecteurs utilisés pour la matrice à décomposer, (b) représentation graphique des valeurs singulières en fonction de leur indice, (c) vecteurs de base obtenus pour les trois valeurs singulières les plus importantes (traits pleins :* w_1*, tirets :* w_2*, alternance points/tirets :* w_3*), (d) tableau de toutes les valeurs singulières par ordre décroissant, normalisées par la plus grande pour la première colonne et pourcentage des poids cumulés pour la seconde. L'indice* N *désigne les lignes successives du tableau, l'indice* m *désigne le nombre total de lignes.*

cela correspond à une distance nulle si $N = n$, c'est-à-dire quand tous les vecteurs U_i sont utilisés pour la reconstruction et à une distance 1 entre un vecteur et le vecteur nul.

La figure 2.23 montre ces écarts en fonction de l'indice j du vecteur considéré, c'est à dire au cours du temps. Ils ont été calculés pour différentes valeurs N. Sur la figure 2.23(a) on a superposé les écarts pour N =1, 2, 3, 4 et 5. On voit que la courbe de $N = 1$ correspond à des écarts dix fois plus grands que les autres cas. Par contre à partir de N=2 on atteint des écarts de l'ordre 5 à 10%. On constate d'autre part que la convergence de la distance se fait à partir de la quatrième valeur singulière. Mais cela est sans doute plus dû à l'existence de défauts tels que les franges d'interférences mentionnées précédemment qu'à une contribution réelle à la forme générale du profil transverse.

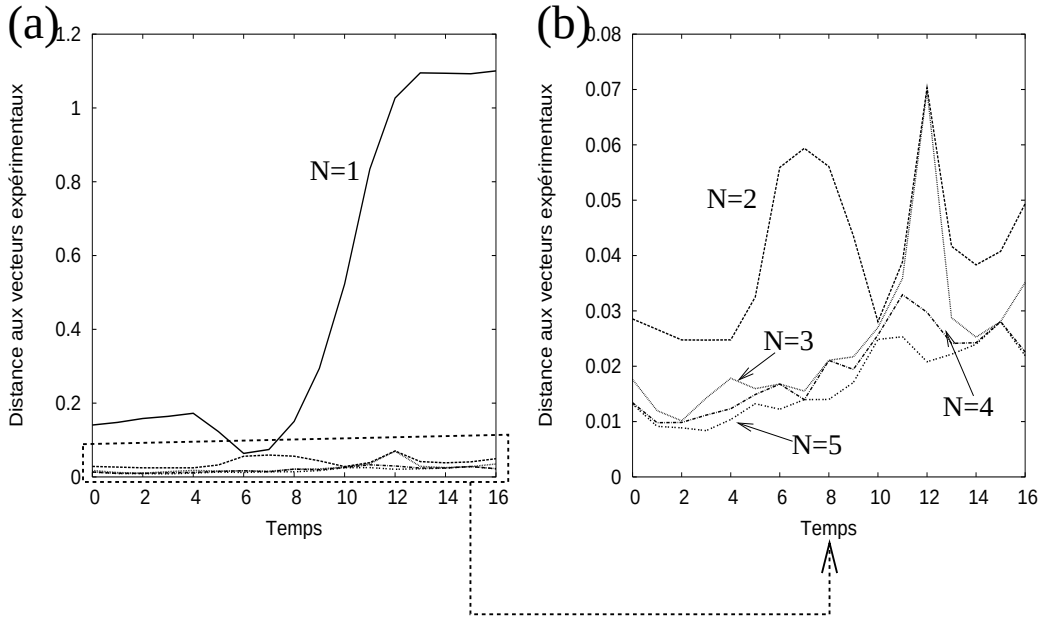


FIG. *2.23: (a) Ecarts aux vecteurs mesurés en fonction de l'indice du vecteur (équivalent au temps) en utilisant les N=1, 2, 3, 4 et 5 premières valeurs singulières, (b) agrandissement de la figure précédente pour les valeurs N=2, 3, 4 et 5.*

Le traitement d'autres fichiers par le même processus, montre que seuls deux modes sont non négligeables dans la plupart des zones présentant des oscillations rapides. En étendant le traitement aux fichiers complets, même en présence de sauts de modes, plus de trois modes sont rarement mis en jeu, ce qui montre que les profils transverses des modes qui interviennent expérimentalement dans la dynamique de l'OPO sont peu nombreux, en général ce sont des modes transverses TEM_{00} et TEM_{01}.

En fait si on se rappelle les résultats de la partie 2.2.2.c sur la calcul de l'intensité vue par la barrette, le fait de pouvoir n'obtenir que deux modes dans la décomposition est étonnant. En effet, l'intensité d'un champ comportant deux modes transverses contient trois termes : un pour chaque structure transverse et un terme croisé lié au déphasage entre les modes. Comme les décompositions par SVD de la

plupart de nos observations expérimentales ne donnent que deux termes pour l'intensité, nous sommes conduits à faire deux hypothèses : ou bien les modes sont en général verrouillés en phase et leur déphasage est nul, le terme croisé s'annulant ; ou bien les modes ne sont pas verrouillés en phase mais la moyenne temporelle du terme de battement est nulle sur le temps d'intégration de la barrette.

En conclusion, nous avons montré dans cette partie que lorsque l'intensité du signal présente des oscillations rapides, le champ est multimode transverse. Cependant seul un faible nombre de modes interviennent (en général deux) et les modes impliqués sont en général sont d'ordre peu élevé. Ceci parait logique si on se souvient que les termes de couplage sont liés au recouvrement entre les modes (voir chapitre 1). Dans ce cas, si la pompe reste TEM_{00}, seuls des modes d'ordre peu élevés auront un coefficient de couplage non négligeable.

Finalement, on voit que le caractère multimode du modèle qui avait été proposé est validé en grande partie par les expériences. Nous avons vu en effet que le champ du signal est multimode pendant les oscillations rapides et contient peu de modes. Nous souleverons dans la partie suivante les limites liées au fait que la description du modèle soit faite par un modèle dégénéré plutôt que non-dégénéré alors que nous travaillons avec un OPO de type II.

Nous allons à présent nous intéresser à la fréquence d'apparition du phénomène lorsqu'on change la taille de la cavité de manière à justifier une étude plus poussée du modèle. En effet, l'hypothèse selon laquelle la description multimode du champ implique une coïncidence des résonances de la cavité est peut-être très contraignante. Dans ce cas, les oscillations rapides pourraient être un phénomène exotique lié à quelques configurations particulières de la cavité qu'il suffit d'éviter pour ne pas voir apparaître ces instabilités.

2.3 Conditions d'apparition des oscillations multimodes transverses

Dans cette partie nous allons montrer que les oscillations rapides caractérisées dans les parties précédentes apparaissent suffisamment fréquemment pour justifier une étude plus détaillée. Dans un premier temps nous essaierons de déterminer si le phénomène est limité à des tailles de cavité bien particulières ou si elles apparaissent pour n'importe quelle taille de cavité. Ensuite nous compléterons les simulations numériques déjà effectuées [Schwob *et al.*, 1998; Suret *et al.*, 2001a] avec le modèle. Nous montrerons notamment l'existence de régimes accrochés ou non et la présence de comportements plus complexes dans certaines gammes de paramètres. Enfin nous présenterons de nouveaux exemples d'observations expérimentales montrant la grande diversité de formes et de fréquences que peuvent prendre les oscillations multimodes transverses.

2.3.1 Influence de la taille de la cavité sur l'apparition des oscillations

Nous cherchons à déterminer expérimentalement quelle est la probabilité d'observer des oscillations rapides lorsqu'on choisit une taille de cavité au hasard et d'autre part si ces observations sont toujours observées lorsqu'on change la taille de la cavité autour d'une position moyenne. Ensuite nous étudierons les conditions sur les résonances des modes de la cavité nécessaires théoriquement pour que l'OPO soit multimode.

2.3.1.a Recherche expérimentale d'oscillations rapides pour différentes tailles de cavité

2.3.1.a-i Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est toujours du même type que celui décrit dans la partie 1.3.5. Le jeu de miroirs utilisés pendant toutes les expériences qui vont suivre donnent une finesse de 50 pour la pompe et de 550 pour le signal. La puissance maximale de pompe est utilisée.

Pour estimer la proportion de configurations pour lesquelles des oscillations rapides peuvent être observées, nous travaillons à deux échelles : d'une part on fait varier la longueur de la cavité finement autour d'une position à l'aide d'une vis micrométrique pour voir si les oscillations rapides persistent dans un grand intervalle autour d'une valeur moyenne. D'autre part, on change la taille de la cavité centimètre par centimètre de manière à estimer la probabilité d'observer des oscillations rapides pour une taille de cavité choisie arbitrairement. Pour chaque taille de la cavité, on balaie manuellement à l'aide de la cale piezo-éléctrique un ou plusieurs intervalles spectraux libres de la pompe de manière à explorer les différents régimes existant à cette taille de la cavité.

2.3.1.a-ii Variations fines autour d'une taille de cavité

Les résultats expérimentaux présentés sur la figure 2.24 montrent les fréquences d'oscillations obtenues en augmentant la taille de la cavité entre des tailles d'environ 45.3mm et 47.3mm. La cavité est modifiée par pas de 200μm, des oscillations rapides sont observées pour certaines de ces tailles. Quatre zones d'oscillations de faible fréquence sont indiquées. Des observations de fréquences beaucoup plus élevées, en dehors de l'échelle du graphique sont mentionnées par des flèches : 190 et 275 MHz à la taille initiale de la cavité ($\simeq$45.3mm) et supérieure à 333 MHz (limite de l'échantillonnage de notre oscilloscope) vers 46.3mm. Aux autres tailles aucune oscillation rapide n'a été observée. Les barres verticales montrent que plusieurs fréquences d'oscillation ont été obtenues pour une même taille approximative de cavité, soit à cause d'une évolution des fréquences d'oscillation par dérive thermique au cours du temps, soit parce que plusieurs fréquences ont été trouvées en changeant finement la taille de la cavité à l'aide de la cale piezo-électrique.

Si pour le moment on met à part les oscillations aux fréquences beaucoup plus

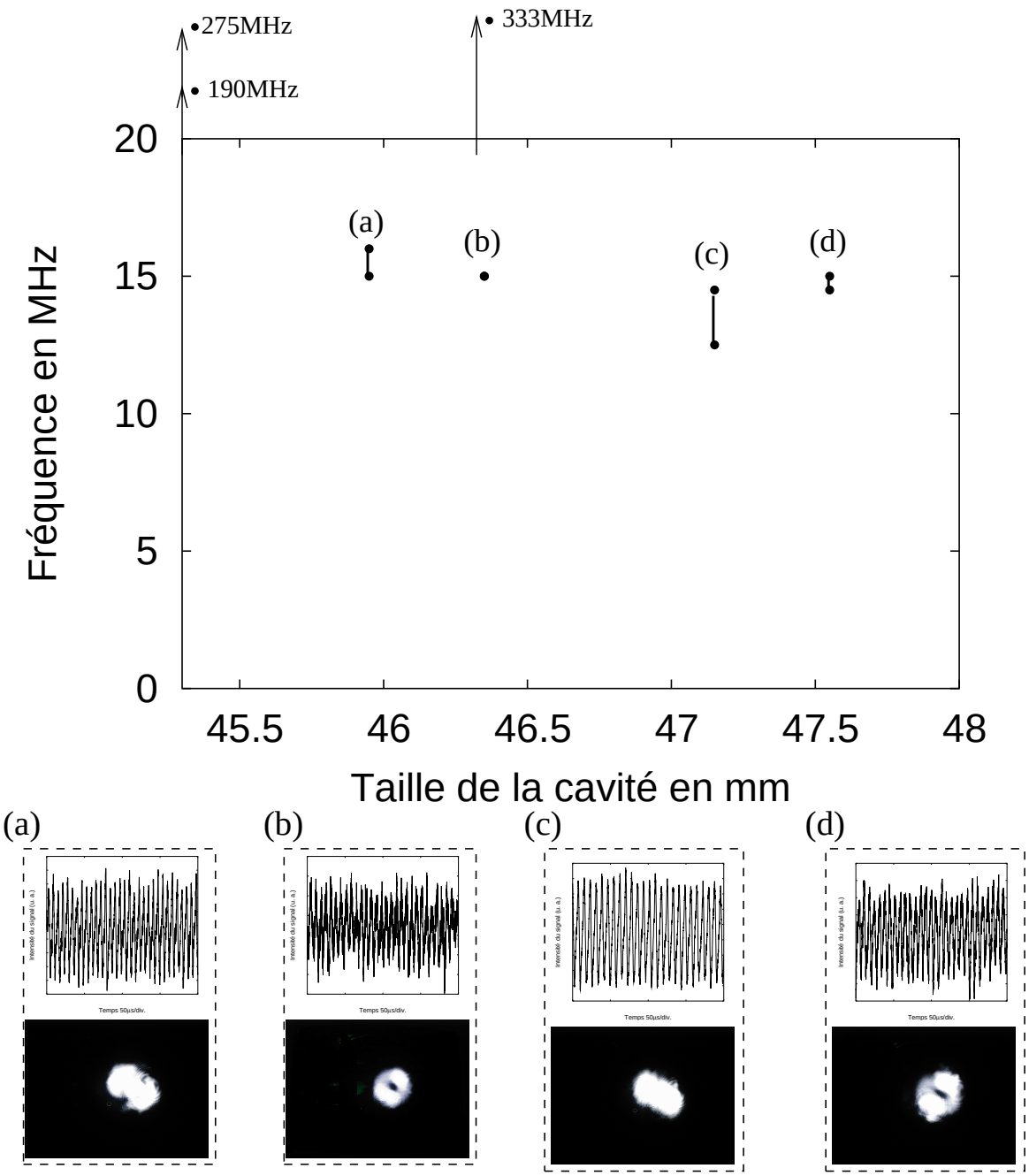


FIG. *2.24: Fréquences des oscillations autour d'une taille de cavité, les figures(a)-(d) montrent les allures des oscillations de l'intensité du signal et des images vues à la caméra pendant ces oscillations. Les traits pleins signifient que différentes fréquences ont été observées entre le minimum et le maximum indiqué. Les flèches verticales indiquent l'observation de fréquences beaucoup plus élevées.*

élevées, les fréquences basses obtenues sont globalement constantes autour de 13MHz. Des comportements oscillatoires typiques associés à des images des profils vus à la caméra pour chacune de ces tailles sont présentées sur les figures 2.24(a)-(d). Tout en sachant que les images montrent l'allure du faisceau transverse sur des temps beaucoup plus longs que le temps moyen des instabilités observées expérimentalement, on peut cependant noter que les modes transverses observés sont d'ordre peu élevé.

Cette expérience a été effectuée à plusieurs reprises en mesurant les fréquences des oscillations à l'aide d'un analyseur de spectre. En diminuant la taille de la cavité par pas de 500μm à partir d'une taille d'environ 47,3mm, cinq points consécutifs de fréquence croissante ont été obtenus de 11.3MHz à 14.3MHz comme le montre la figure 2.25(a).

En diminuant par pas de 200μm à partir de la même taille de cavité que précédemment, des oscillations de fréquence comprise entre 12MHz à 16MHz ont été observées. Ces fréquences sont représentées sur la figure 2.25(b) en fonction de la taille de la cavité. Pour certaines tailles de cavité, plusieurs fréquences ont été observées à la même position. Ces fréquences sont comprises entre les points extrêmes portés sur la figure.

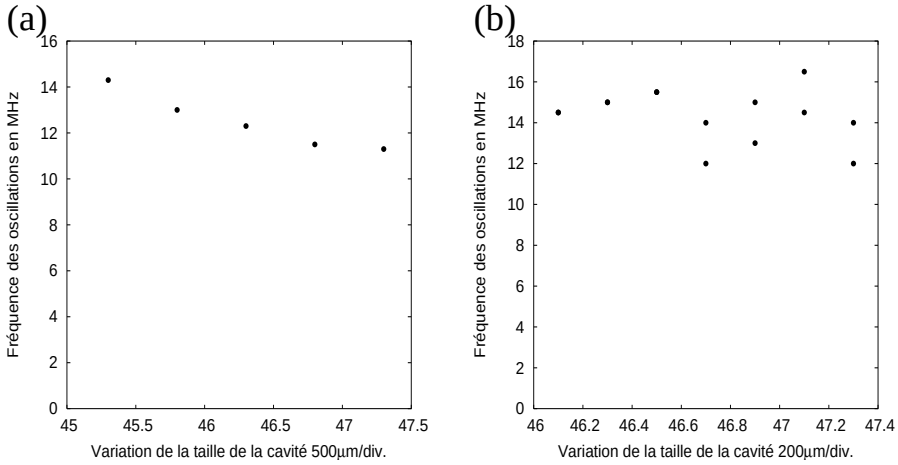


FIG. *2.25: Fréquences des oscillations en MHz en fonction de la taille de la cavité pour différentes mesures, le pas de variation de la taille est de 500μm pour (a) et 200μm pour (b).*

En conclusion de ces expériences, on remarque que les fréquences observées sont en général du même ordre (entre 10 et 16MHz) pour des tailles de cavité entre 46 et 49 mm. La cavité peut être modifiée jusqu'à 2mm à partir de sa position initiale et continuer à présenter le même type d'instabilités. Les effets de lentille thermique sont cependant loin d'être négligeables pour les puissances de pompe utilisées, et la variation de la longueur optique de la cavité n'est pas forcément celle qu'on peut mesurer géométriquement. Cela pose le problème de l'auto-adaptation de la taille de la cavité par les effets thermiques.

D'autre part des oscillations de fréquences très élevées (de 190 à plus de 300MHz) ont été observées parmi des fréquences plus basses. Ces oscillations rapides ont une

fréquence plus de 20 fois supérieure à la fréquence de coupure de la cavité (environ 5MHz). On peut donc se demander si elles ont la même origine physique que les fréquences plus basses. Soulignons de plus que sur l'ensemble des fréquences que nous avons observées, il n'y a pas de continuité entre le groupe des fréquences de 1 à 30MHz qui sont les fréquences observées le plus fréquemment et le groupe de 80 à plus de 300MHz. Il n'y a eu en effet aucune observation expérimentale à des fréquences intermédiaires.

2.3.1.a-iii Exploration de différentes tailles de cavité

La question à présent est de savoir si le phénomène n'apparaît que pour des tailles de cavité autour de 47mm. Nous avons donc mené des expériences en se plaçant à différentes tailles de cavité choisies arbitrairement. Compte tenu du changement important de taille de la cavité, l'injection est modifiée à chaque nouvelle configuration. La cavité est optimisée de manière à obtenir un seuil le plus bas possible, sachant que ce seuil a tendance à augmenter lorsqu'on s'approche de la configuration concentrique [Suret, 2000]. Une fois la taille moyenne fixée, la cavité est explorée finement à l'aide de la cale piezo-électrique sur un ou plusieurs intervalles spectraux libres de la pompe. Les tailles de cavité inférieures à 45 mm n'ont pas été explorées car dans notre dispositif expérimental la taille du support du cristal fixe une limite inférieure à la taille de la cavité (∼35mm). D'autre part nous avons évité les tailles de cavité trop proches de confocal pour lesquelles l'OPO est particulièrement instable lorsqu'on augmente la puissance de la pompe.

Des oscillations de différentes fréquences ont été trouvées à quatre tailles de cavité comprises entre 65mm et 90mm en changeant la taille de la cavité d'environ un centimètre entre deux séries d'enregistrement.

- Pour une taille de la cavité d'environ 89mm et pour un seuil d'environ 50mW, les fréquences des oscillations rapides observées sont comprises entre 175 et 230kHz. Des exemples de comportements sont présentés sur les figures 2.26.

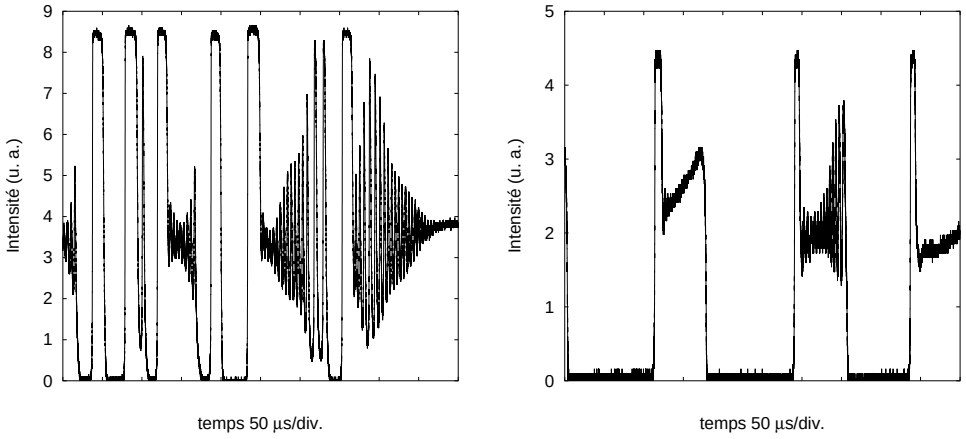


FIG. *2.26: Exemples de comportements oscillatoires des intensités du signal pour une taille moyenne de cavité de 89mm. Les fréquences des oscillations rapides sont comprises entre 175 et 230kHz.*

Compte tenu de la faiblesse des fréquences observées, on peut se demander si l'origine des oscillations n'est pas thermique plutôt que multimode transverse.

- Pour une taille de la cavité d'environ 77mm et pour un seuil d'environ 33mW, les fréquences des oscillations rapides observées sont comprises entre 1.2MHz et 2.7MHz (voir figure 2.27). Ces oscillations correspondent à des oscillations multimodes transverses superposées à des oscillations lentes d'origine thermique.

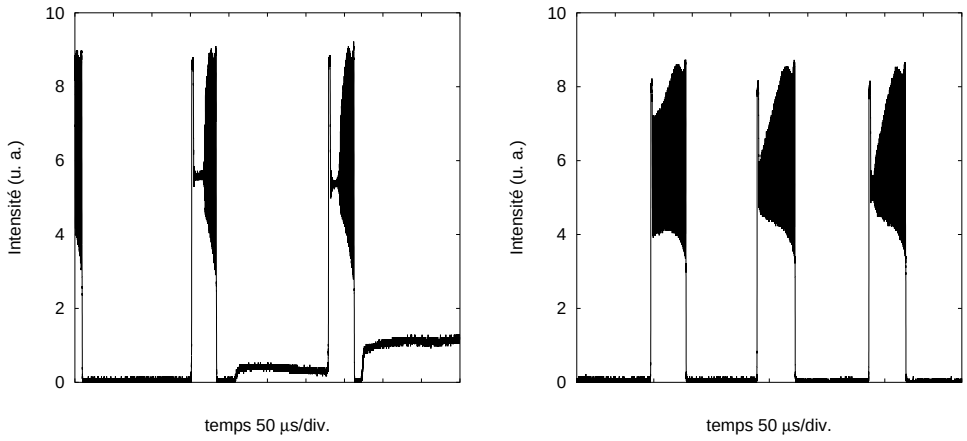


FIG. *2.27: Exemples de comportements oscillatoires pour une taille moyenne de cavité de 77mm. Les fréquences des oscillations rapides sont comprises entre 1.2 et 2.7MHz.*

- Pour une taille de la cavité d'environ 71mm et pour un seuil d'environ 25mW, les fréquences des oscillations rapides observées sont comprises entre 3MHz et 8MHz (voir figure 2.28). De même que précédemment, les oscillations rapides sont superposées à des oscillations thermiques.

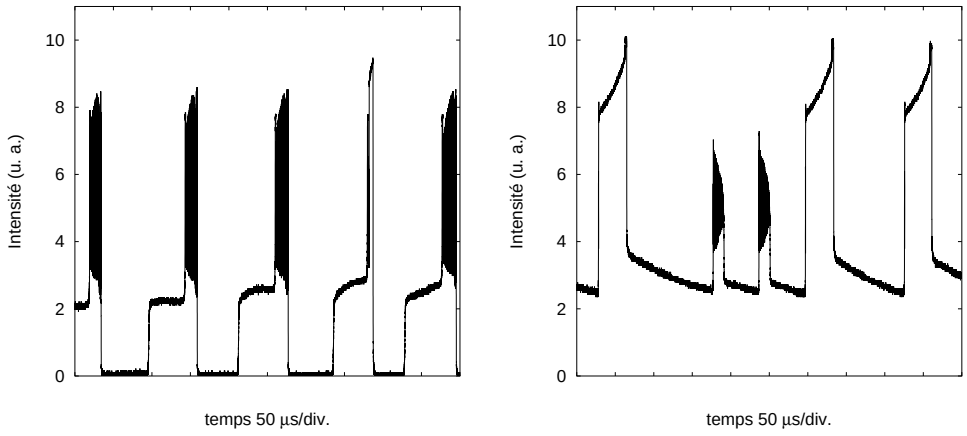


FIG. *2.28: Exemples de comportements oscillatoires pour une taille moyenne de cavité de 70.8mm. Les fréquences des oscillations rapides sont comprises entre 3 et 8MHz.*

- Pour une taille de la cavité d'environ 63mm et pour un seuil d'environ 18mW, les oscillations rapides observées ont des fréquences comprises entre 6MHz et 15MHz (voir figure 2.29). On remarquera notamment dans le premier exemple

l'alternance entre des oscillations multimodes superposées à des oscillations thermiques et des oscillations thermiques ne présentant pas d'oscillations rapides.

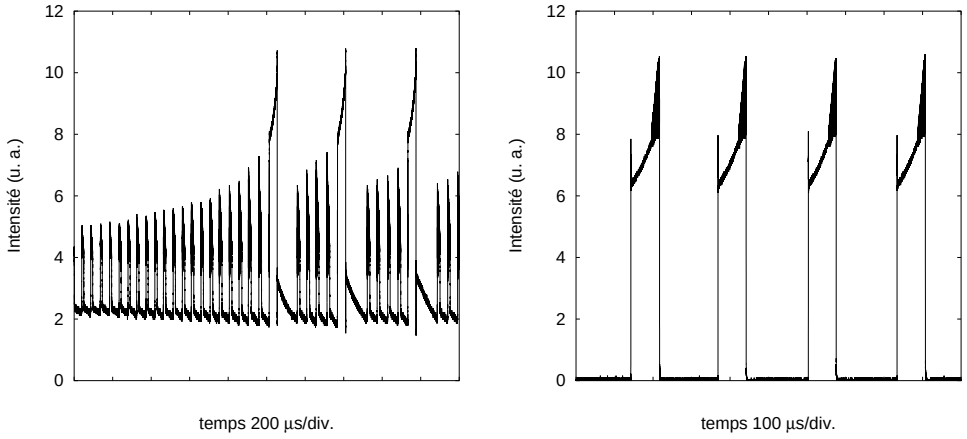


FIG. *2.29: Exemples de comportements oscillatoires pour une taille moyenne de cavité de 62.8mm. Les fréquences des oscillations rapides sont comprises entre 6 et 15MHz.*

On remarquera que sur l'ensemble des tailles de cavité observées, la fréquence des oscillations rapides à tendance à augmenter lorsqu'on diminue la taille de la cavité. Cependant nous n'avons pas suffisament d'exemples d'oscillations rapides pour plus de tailles de cavité pour affirmer que cette évolution est systématique.

Des oscillations rapides peuvent donc être trouvées expérimentalement pour de nombreuses tailles de cavité prises au hasard. D'autre part ces oscillations sont toujours observées lorsqu'on modifie la taille de la cavité autour d'une de ces positions moyennes. On peut donc se demander si théoriquement le modèle prédit en effet l'apparition d'oscillations rapides pour la plupart des tailles de la cavité. A priori le couplage entre modes transverses se produit lorsque les résonances de ces modes se recouvrent [Schwob *et al.*, 1998; Suret *et al.*, 2001a]. De plus les modes d'ordre peu élevé seront ceux qui auront les plus grandes constantes de couplage et nous avons vu qu'ils étaient ceux qui sont observés expérimentalement. Nous allons donc examiner quelles sont les tailles de cavité pour lesquelles il y a coïncidence de modes et comment l'ordre des modes considérés influe sur le nombre de tailles de cavité susceptibles de présenter des oscillations rapides. D'autre part nous essaierons d'évaluer l'influence d'une modification de la taille de la cavité sur la fréquence des oscillations.

2.3.1.b Modes transverses de la cavité

On appelera *coïncidence* de modes transverses une situation où les résonances de plusieurs modes de la cavité se recouvrent. Cette condition, lorsqu'on adopte un raisonnement linéaire, peut s'écrire sous la forme du critère de Rayleigh :

$$|\nu_2 - \nu_1| < \Delta\nu_R,$$

où ν_1 et ν_2 sont les fréquences de résonance de la cavité pour les modes transverses considérés et $\Delta\nu_R$ la largeur des résonances. D'autre part, on appelera *coïncidence*

exacte la situation $\nu_1 = \nu_2$.

La largeur est reliée à la finesse $\mathcal{F}$ de la cavité par :

$$\Delta\nu_R = \frac{\Delta\nu_L}{\mathcal{F}},$$

où $\Delta\nu_L = c/2[L]$ est l'intervalle spectral libre de la cavité avec $[L]$ la longueur optique pour un simple passage et c la vitesse de la lumière dans le vide. On a dans notre configuration expérimentale $L \simeq 47$mm et $\mathcal{F} = 550$, donc :

$$\Delta\nu_R \simeq 5\text{MHz pour } \Delta\nu_L \simeq 2.7\text{GHz}.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué précédemment, les fréquences les plus rapides que nous avons observé (supérieures à 100MHz) sont étonnantes. En effet, comment peut-on observer des instabilités de période plus courte que le temps de vie des photons du signal dans la cavité ? Nous répondrons à cette question dans la partie 3.1.

Nous allons à présent déterminer quelles sont les tailles de la cavité pour lesquelles il y a coïncidence exacte entre des modes transverses suivant l'ordre des modes considérés.

2.3.1.b-i Coïncidences exactes

La distance en fréquence $\Delta\nu_T$ entre les modes transverses est donnée par [Kogelnik et Li, 1966; Siegman, 1986] :

$$\Delta\nu_T = \frac{1}{\pi}\Delta\nu_L \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}), \tag{2.6}$$

où $\Delta\nu_L$ est l'écartement entre les modes longitudinaux et $g_i = \left(1 - \frac{L_e}{R_i}\right)$ où R_i est le rayon de courbure du miroir d'entrée ou de sortie et $L_e = L + (1/n - 1)l_c$ la longueur équivalente de la cavité, L étant la taille géométrique de la cavité, n est l'indice du cristal [7] et l_c la taille du cristal. Pour une cavité symétrique, c'est à dire quand les deux miroirs ont des rayons de courbure opposés, $g_1 g_2 = \left(1 - \frac{L}{R}\right)^2$.

Il existe alors des situations classiques de coïncidence d'un nombre élevé de modes transverses. Ce sont les configurations dégénérées suivantes :

- $R = \infty$: cavité plan-plan, $g_1 g_2 = 1$, $\Delta\nu_T = 0$. Tous les modes transverses sont dégénérés avec le mode longitudinal auquel ils correspondent comme le montre la figure 2.30.
- $L = R$: cavité confocale (les points focaux des miroirs sont confondus), $g_1 g_2 = 0$, $\Delta\nu_T = \frac{\Delta\nu_L}{2}$. La figure 2.31 montre la répartition des modes de résonances de la cavité en fonction de leur fréquence. On a noté pour différents modes longitudinaux d'ordre q les premiers modes transverses (m,n) dégénérés. Les modes d'ordre m+n pairs sont dégénérés entre eux, les modes d'ordre m+n impairs, eux aussi dégénérés s'intercalent au milieu des intervalles spectraux libres.

[7] On utilise dans les calculs qui vont suivre n=1.83 qui correspond à l'indice du signal polarisé ordinairement.

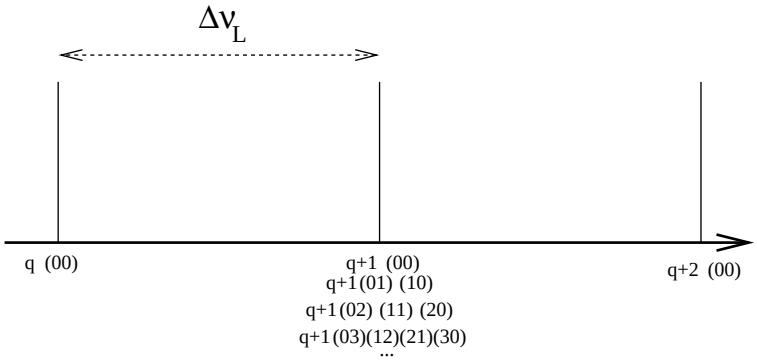


FIG. *2.30: Fréquences de résonance des modes d'une cavité plan-plan.*

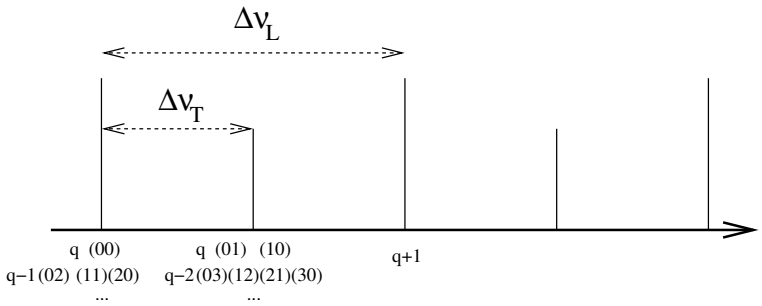


FIG. *2.31: Fréquences de résonance des modes d'une cavité confocale.*

- $L = 2R$: cavité concentrique (les centres des miroirs sont confondus, la cavité forme donc une sphère), $g_1 g_2 = 1$, $\Delta\nu_T = \Delta\nu_L$. Dans ce cas les modes transverses sont tous dégénérés avec un mode TEM_{00} d'ordre supérieur (figure 2.32).

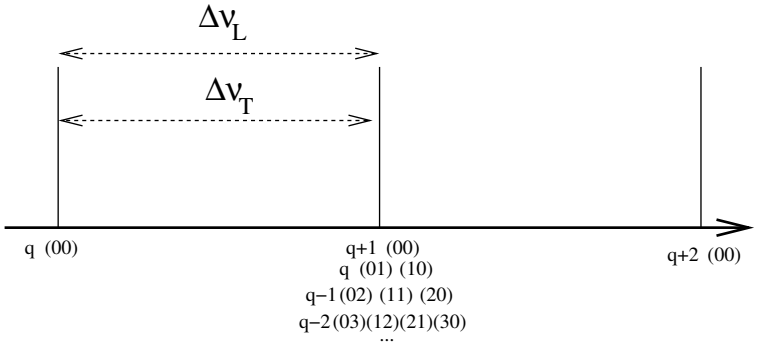


FIG. *2.32: Fréquences de résonance des modes d'une cavité concentrique.*

Les situations précédentes correspondent à des situations classiques de dégénérescence, c'est à dire coïncidence d'un nombre élevé de modes. Pour notre part, nous cherchons des coïncidences mettant en jeu un petit nombre de modes et donc se produisant a priori pour des tailles de cavité quelconques. Nous allons donc chercher quelles autres configurations conduisent à des coïncidences entre des modes transverses.

Les fréquences des résonances des modes de la cavité s'écrivent :

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{1}{\pi}(m+n+1)\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})\right],$$

avec q l'ordre du mode longitudinal et (m,n) caractérisant l'ordre du mode transverse.

Il y a coïncidence entre deux modes lorsqu'il existe deux triplets (q_1, m_1, n_1) et (q_2, m_2, n_2) tels que :

$$q_1 + \frac{m_1+n_1+1}{\pi}\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}) = q_2 + \frac{m_2+n_2+1}{\pi}\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}), \tag{2.7}$$

soit :

$$\begin{aligned} \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}) &= \pi\frac{q_1 - q_2}{m_2 - m_1 + n_2 - n_1}, \\ &= -\pi\frac{\Delta q}{\Delta mn}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\Delta q = q_2 - q_1$ et $\Delta mn = m_2 + n_2 - m_1 - n_1$.

On sait d'autre part que :

$$\begin{aligned} & 0 < \frac{\Delta_T}{\Delta_L} < 1 \\ \text{et} \quad & \Delta q = -\Delta mn\frac{\Delta_T}{\Delta_L} \text{ d'après (2.6) et (2.7)} \\ \text{donc} \quad & -1 < \frac{\Delta q}{\Delta mn} < 0. \end{aligned}$$

On peut donc inverser l'équation (2.8). Les longueurs équivalentes de cavité $L_e(q, m, n)$ correspondant à des coïncidences sont alors données par :

$$\begin{aligned} \pm(1 - \frac{L_e(q,m,n)}{R}) &= \cos(\pi\frac{\Delta q}{\Delta mn}) \\ L_e(q,m,n) &= R\left(1 \pm \cos(\pi\frac{\Delta q}{\Delta mn})\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

où on a noté R le rayon de courbure commun à nos miroirs. L'équation (2.9) donne donc les tailles de la cavité pour lesquelles il y a coïncidence exacte de modes en fonction de l'écart entre les ordres des modes transverses Δmn et l'écart entre les ordres des modes longitudinaux Δq.

A priori, si on considère tous les Δmn entiers et les Δq tels que $|\Delta q| < |\Delta mn|$, les $L_e(q, m, n)$ seront denses sur l'intervalle $[0, 2R]$. On trouvera donc des coïncidences exactes pour toutes les tailles de la cavité. Cependant cela est irréaliste car on sait que seuls des modes d'ordre peu élevé interviennent expérimentalement et ont des couplages suffisamment élevés pour participer à l'interaction.

Si à présent on regarde le nombre de coïncidences pour des valeurs maximales de Δmn [8] limitées aux premiers nombres entiers, on obtient la figure 2.33. Sur cette

[8] On assimile dans la suite la limite supérieure sur l'ordre des modes transverses, c'est-à-dire sur la somme $m + n$, à l'écart maximum autorisé entre deux modes : $\Delta mn = m_2 + n_2 - m_1 - n_1$. En effet, à partir du moment où $m + n$ est limité, le plus grand écart possible sera entre le mode (0,0) et le mode (m_{max},n_{max}), donc $\Delta_{max} = m_{max} + n_{max}$.

figure, on a horizontalement les longueurs de cavité pour lesquelles il y a coïncidence exacte et verticalement la valeur de Δmn maximale autorisée qu'on appelera Δ_{max}. Les Δq parcourent l'intervalle $[-\Delta mn, 0]$.

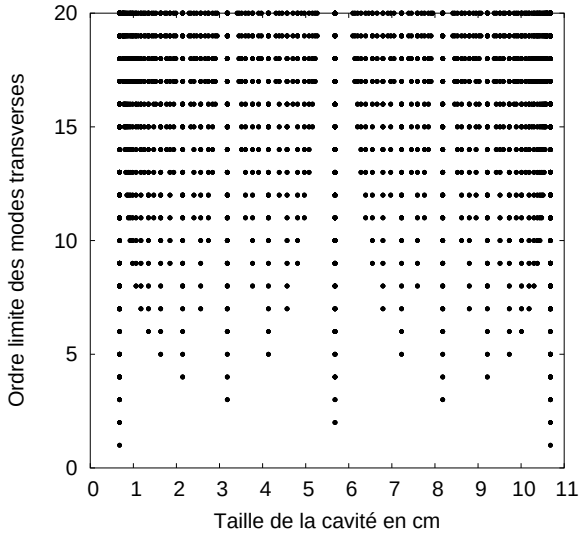


FIG. *2.33: Horizontalement, tailles de la cavité pour lesquelles il y a coïncidence de modes, verticalement, valeur maximale de Δmn autorisée (Δ_{max}). Pour chaque ligne horizontale, les points représentent les coïncidences exactes existant pour les valeurs de Δmn inférieures à Δ_{max}.*

Ainsi, pour chaque ligne horizontale, les points correspondent aux coïncidences exactes pour les différentes valeurs de Δmn inférieures à Δ_{max}. C'est-à-dire les coïncidences possibles entre tous les modes transverses d'ordre $m+n$ inférieur à Δ_{max}. On voit que pour $\Delta_{max} = 1$, seules deux coïncidences sont possibles correspondant à une taille nulle et à une configuration concentrique : cela correspond aux coïncidences des $\mathrm{TEM}_{01,10}$ avec le TEM_{00}. Ce sont les seules coïncidences possibles. Pour $\Delta_{max} = 2$, une nouvelle coïncidence correspondant à la configuration confocale apparaît, il s'agit de celle entre les $\mathrm{TEM}_{02,11,20}$ avec le TEM_{00}. Ainsi chaque fois qu'on incrémente de un la valeur de Δ_{max}, de nouvelles coïncidences apparaissent liées à la prise en compte de nouveaux modes transverses. On a porté sur la figure les longueurs géométriques de la cavité ce qui explique le décalage des coïncidences par rapport à l'intervalle $[0, 2R]$ auquel appartient la longueur équivalente L_e.

On vérifie donc que plus la valeur de l'ordre maximal autorisé est élevée, plus le nombre de tailles de cavité pour lesquelles il y a coïncidence exacte est grand. Le problème est de savoir quelle est la valeur de l'ordre maximal pertinente. En effet si on se base sur les observations expérimentales, pour qu'il existe des coïncidences exactes pour quatre tailles de cavité strictement inclues entre confocal et concentrique (correspondant à nos observations entre 65 et 90mm), il faut considérer un Δ_{max} d'au moins 5, ce qui ne correspond pas aux modes transverses observés expérimentalement. D'autre part des différences aussi élevées entre les ordres des modes transverses

impliquent des coefficients de couplage faible (voir partie 1.2.1.c). Inversement, si on se limite à des ordres transverses petits ($\Delta_{max} = 1$ ou 2), il n'y a aucune coïncidence strictement incluse entre les configurations confocale et concentrique.

Donc, localiser les coïncidences exactes ne suffit pas à interpréter les observations expérimentales. Nous allons donc maintenant nous interroger sur l'intervalle de longueur dans lequel une résonance exerce son influence. On sait en effet expérimentalement que les instabilités continuent d'être observées lorsqu'on change la taille de la cavité jusqu'à 2mm à partir de sa valeur d'origine.

2.3.1.b-ii Ecart aux résonances exactes

Une coïncidence exacte correspond à une différence de fréquence nulle. Dans un voisinage de la coïncidence, la différence de fréquences reste petite. On cherche à savoir si cette fréquence de battement augmente suffisamment lentement avec la taille de la cavité pour interpréter nos observations expérimentales.

La fréquence de battement entre deux modes transverses s'écrit avec les notations de la partie précédente :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2[L]}\left[(q_2 - q_1) + \frac{1}{\pi}(m_2 - m_1 + n_2 - n_1)\arccos(\pm(1 - \frac{L_e}{R}))\right]. \qquad (2.10)$$

Nous allons faire l'hypothèse que le couple de modes transverses réellement impliqué dans l'interaction parmi toutes les couples possibles sera celui qui aura la fréquence de battement la plus petite. C'est-à-dire que le couple de modes qui intervient est celui correspondant aux deux résonances les plus proches sur le peigne des résonances de la cavité. Sans pouvoir affirmer que cette règle est toujours vérifiée, il semble plausible que deux modes transverses espacés par exemple de 15MHz interagissent plus facilement que deux autres espacés de 150MHz. Nous allons donc calculer pour chaque taille de la cavité le plus petit $\Delta\nu$ parmi les fréquences de battement de tous les couples de modes transverses. On notera cette fréquence $\Delta\nu_{min}$. De même que précédemment, nous fixerons des valeurs maximales pour les ordres des modes transverses Δ_{max}. On cherche à savoir si on peut toujours trouver quelle que soit la taille de la cavité un couple de mode de fréquences proches.

On obtient alors des figures du type de celles de la figure 2.34 où on a représenté $\Delta\nu_{min}$ en fonction de la taille de la cavité pour différentes valeurs de Δ_{max}. Sur la figure 2.34(a), on n'autorise que les modes TEM_{00} et $TEM_{01,10}$. A chaque extrémité du graphe, on a les coïncidences correspondant à une taille de cavité nulle et à la configuration concentrique. Pour des petites tailles de cavité [9], la résonance des modes $TEM_{01,10}$ est proche du mode longitudinal du même ordre (dans l'équation (2.10), $q_2 - q_2 = 0$). Au milieu, la discontinuité correspond à l'endroit où la résonance des $TEM_{01,10}$ va être plus proche du mode longitudinal d'ordre suivant et où le couple de modes de fréquence de battement minimum change. Pour des tailles plus grandes,

[9] La forme de la courbe pour les petites valeurs de L est liée à la compétition entre l'évolution de la distance entre les modes transverses et la taille de l'intervalle libre de la cavité lorsque L augmente.

les résonances des modes $TEM_{01,10}$ se rapprochent du mode longitudinal suivant et la fréquence de battement diminue. Finalement, dans la situation concentrique les résonances des modes $TEM_{01,10}$ coïncident avec le mode TEM_{00} d'ordre supérieur (dans l'équation (2.10), $q_2 - q_1 = \pm 1$).

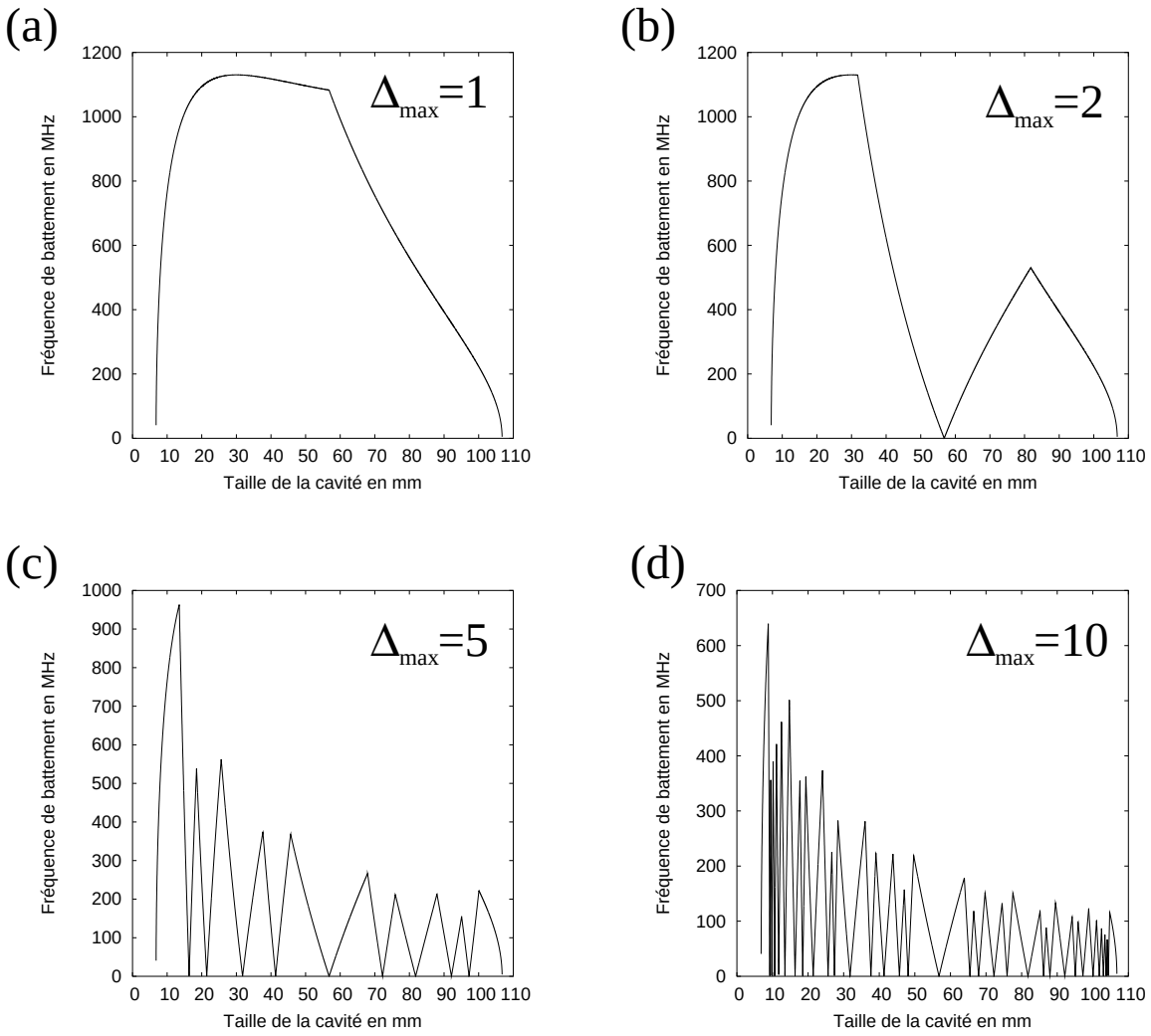


FIG. *2.34: Evolution du minimum de la fréquence de battement en MHz entre les modes transverses en fonction de la taille de la cavité.* Δ_{max} *est la différence d'ordre maximale autorisée entre les modes transverses. Les différentes figures correspondent à un* Δ_{max} *croissant : (a)* $\Delta_{max} = 1$*, (b)* $\Delta_{max} = 2$*, (c)* $\Delta_{max} = 5$*, (d)* $\Delta_{max} = 10$*.*

Les figures 2.34(b), (c) et (d) correspondent au même scénario mais en impliquant des modes transverses d'ordres de plus en plus élevés. Les discontinuités à fréquence non-nulle correspondent à un changement du couple de modes transverses de fréquence de battement la plus basse. Les points de fréquences nulles correspondent aux coïncidences exactes de modes décrites dans la partie précédente. On voit que plus le nombre de modes transverses considérés est grand, plus les discontinuités sont fréquentes. D'autre part la fréquence de battement maximale diminue. Ainsi dans le

cas de la figure 2.34(d), entre les configurations confocale et concentrique, on peut toujours trouver deux modes écartés de moins de 200MHz. On voit donc que pour s'assurer qu'on peut toujours trouver deux modes de fréquences proches, il faut considérer un nombre de modes élevé.

On constate que sur des variations de taille d'un millimètre, l'évolution de la fréquence de battement est très importante. Inversement, si on se fixe le critère de Rayleigh comme écart maximal autorisé à la résonance exacte, c'est à dire 5MHz, on ne peut déplacer la taille de la cavité que d'environ 10μm de part et d'autre de la coïncidence exacte, ce qui ne correspond pas aux observations expérimentales. Si on autorise une fréquence de battement maximale de 30MHz, en supposant que les fréquences rapides observées correspondent à cette fréquence de battement, l'écart en taille autorisé autour d'une coïncidence exacte est d'environ 600μm. De plus les fréquences de battement varient de 0 à 30MHz sur ce déplacement de la taille de la cavité alors que les fréquences qu'on observe expérimentalement sont globalement constantes sur des variations de la taille de la cavité d'environ 2mm.

Il ressort de cette étude qu'il est difficile d'interpréter nos observations expérimentales à l'aide de considérations sur les coïncidences de modes transverses. Il est possible, comme cela a été souligné précédement, que les effets thermiques modifient la variation de la taille optique de la cavité et qu'un effet d'auto-adaptation compense les écarts géométriques qu'on impose à la cavité. Il demeure cependant que nous avons observé des oscillations rapides pour des tailles de cavité prises au hasard, alors que, même en considérant des modes transverses d'ordre élevé (10 par exemple), il n'y a que 11 coïncidences exactes pour des tailles de cavité comprises entre 40mm et 90mm. Nous avions donc une faible probabilité d'être expérimentalement à chaque fois à proximité d'une coïncidence.

Finalement, il se trouve qu'expérimentalement on observe surtout des interactions entre des modes TEM_{00} et TEM_{01} notamment pour des tailles de la cavité d'environ 47mm pour lesquelles nous avons fait la plupart de nos mesures et où le profil transverse a été observé à l'aide de la barette CCD (voir partie 2.2.3). Or une telle taille de la cavité correspond à une situation proche de la configuration confocale, c'est-à-dire une configuration où les modes TEM_{00} et les modes TEM_{01} sont les plus éloignés les uns des autres. Il semble donc qu'il manque quelque chose dans le raisonnement précédent. Nous allons donc à présent voir comment la prise en compte du fait que le signal et le complémentaire ne sont pas dégénérés change le problème de la coïncidence des modes.

2.3.1.c Prise en compte de la non-dégénérescence du signal et du complémentaire

Si on considère les résultats de la partie 2.2.3, les modes impliqués dans l'interaction sont en général des modes TEM_{00} et TEM_{01}. Les expériences ayant été faites pour une taille de cavité d'environ 47mm, ces modes ne sont pas coïncidents sur le peigne des fréquences du signal, ils ont au contraire une fréquence de battement de l'ordre de 1GHz. Cependant, si ces deux modes coexistent, c'est qu'ils sont couplés,

l'OPO étant a priori monomode lorsqu'il n'y a pas de couplages entre les modes. Or lorsque la différence de fréquences entre deux modes est de 1GHz, l'interaction entre ces modes est non résonante. Si le couplage ne peut se faire entre un mode TEM_{00} et un mode TEM_{01} du signal, peut-être peut-il se produire entre un mode TEM_{00} du signal et un mode TEM_{01} du complémentaire. On va donc chercher à savoir si de nouvelles coïncidences peuvent se produire lorsqu'on tient compte de la non dégénéréscence du signal et du complémentaire.

Nous utilisons la représentation des peignes du signal et du complémentaire présentée dans la partie 1.1.2.c. Dans cette représentation les axes des fréquences du signal et du complémentaire sont inversés et les couples de fréquences (ω_s, ω_c) placées à la verticale l'une de l'autre vérifient la conservation de l'énergie. Cette représentation est en général utilisée lorsqu'on étudie le problème de la sélection de modes par l'OPO. Dans ce cas on cherche les situations où les résonances des modes longitudinaux du signal et du complémentaire coïncident verticalement, sachant que lorsque l'OPO n'est pas dégénéré les intervalles spectraux libres du signal et du complémentaire sont différents. Or on peut avoir la même démarche mais en prenant en compte les modes transverses en plus des modes longitudinaux. Par exemple on peut chercher les coïncidences d'un mode TEM_{00} du signal avec un mode TEM_{01} du complémentaire. On s'aperçoit alors, comme le montre la figure 2.35, qu'on a automatiquement la coïncidence du mode TEM_{01} du signal avec le TEM_{00} du complémentaire. En effet, même si les écarts entre les modes transverses $\Delta\nu_T^s$ et $\Delta\nu_T^c$ sont différents pour le signal et le complémentaire, la différence $|\Delta\nu_T^s - \Delta\nu_T^c|$ est en général petit. On a donc automatiquement une "double" coïncidence.

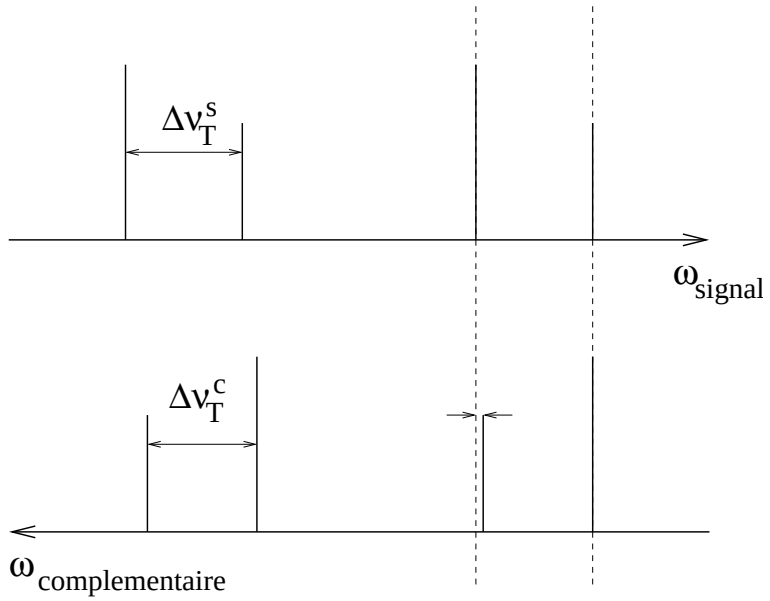


FIG. *2.35: Coïncidence exacte d'un mode TEM_{00} du signal avec un TEM_{01} du complémentaire. On constate que le mode TEM_{01} du signal est alors proche du TEM_{00} du complémentaire.*

Ce type de coïncidences (qu'on appelera par la suite "coïncidences croisées") n'est plus aussi contraint que celles qui ont été exposées dans la partie précédente. En effet, le problème étant de la même nature que la recherche des modes de fonctionnement de l'OPO basée sur les modes longitudinaux, *ces coïncidences sont aussi fréquentes que les tailles de la cavité pour lesquelles l'OPO fonctionne, c'est à dire quasiment toutes les tailles de la cavité.*

D'autre part, la fréquence pertinente à calculer dans cette situation est la différence entre les $\Delta\nu_T$ du signal et du complémentaire liée à la différence de leurs indices. Cet écart devient en effet la nouvelle fréquence de battement de ce type de coïncidences. Cet écart en fréquence est indiqué par deux flèches sur la figure 2.35. Si on calcule cette fréquence en fonction de la taille de la cavité, on obtient la courbe de la figure 2.36. On a utilisé les indices de notre cristal : $n_e = 1.75$ et $n_o = 1.83$ correspondant respectivement aux indices des signaux polarisés extraordinairement et ordinairement.

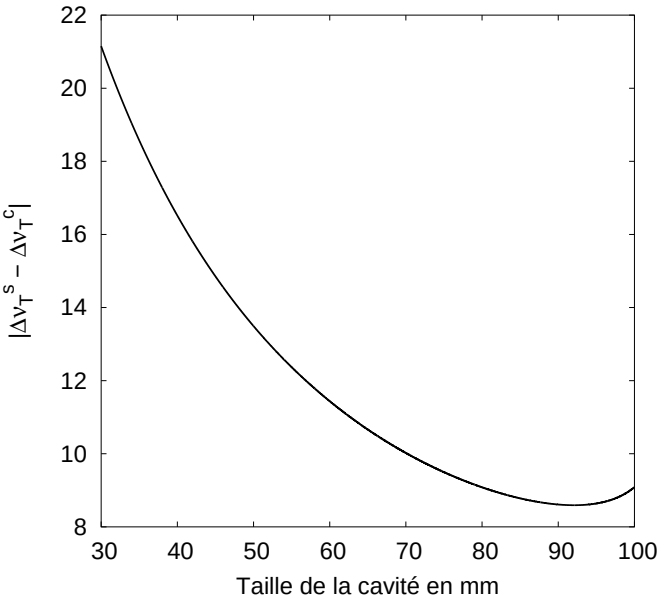


FIG. *2.36: Différence entre les distances en fréquence des modes transverses pour le signal $\Delta\nu_T^s$ et le complémentaire $\Delta\nu_T^c$ en fonction de la taille de la cavité.*

On remarque alors que les écarts en fréquence portés sur le graphique sont du même ordre de grandeur que les fréquences observées expérimentalement. La variation de cet écart est lente par rapport aux variations de la taille de la cavité comme dans les expériences où on varie la taille de la cavité autour d'une valeur moyenne. Enfin l'écart en fréquence diminue lorsqu'on augmente la taille de la cavité, comme nous l'avions observé approximativement expérimentalement.

Cependant on peut se demander pourquoi l'OPO oscille simultanément sur deux modes du signal et deux modes du complémentaire et pas seulement sur un mode TEM_{00} du signal et un mode TEM_{01} du complémentaire par exemple. En continuant notre analogie avec la sélection de mode de l'OPO, on s'attendrait en effet à ce que

seul le couple correspondant aux plus petits désaccords oscille, empêchant l'autre de fonctionner.

Il s'agit sans doute d'une optimisation du recouvrement de la structure transverse des modes, qu'on peut aussi voir comme une manière d'optimiser l'accord de phase. On a alors la conservation de l'énergie vérifiée par les coïncidences de modes de profil transverse différents tandis que les modes de mêmes profils transverses et donc avec le meilleur recouvrement ne vérifient pas la conservation de l'énergie. En terme de processus photonique, on a représenté les possibilités de conversion d'un photon de pompe sur la figure 2.37.Par rapport au cas général (cf. partie 1.2.1.c), on voit que des quatre voies de conversion de la pompe il ne subsiste que les voies croisées. D'autre part on ne vérifie plus les relations $\omega_{s1} = \omega_{s2}$ et $\omega_{c1} = \omega_{c2}$.

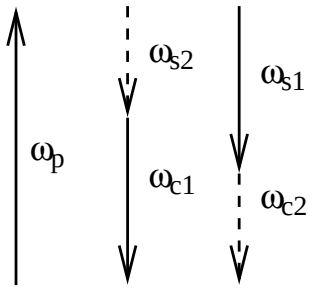


FIG. *2.37: Possibilités de conversion pour un photon de pompe dans le cas où le signal et le complémentaire sont non-dégénérés. Les flèches en trait plein correspondent à des modes TEM_{00} et les flèches en pointillés des modes TEM_{01}.*

Enfin cette interprétation de l'origine de la fréquence des oscillations permettrait d'expliquer le fait qu'on observe deux groupes de fréquences : le premier entre 1 et 30MHz aurait pour origine des coïncidences croisées liées à la non-dégénérescence de l'OPO tandis que les fréquences supérieures à 100MHz correspondraient à des coïncidences de deux modes transverses du signal d'une part et du complémentaire d'autre part [10]. Dans la partie 3.1, nous montrerons en effet que dans le cas des fréquences les plus rapides, la fréquence d'oscillation de l'intensité est bien la fréquence de battement entre les deux modes impliqués dans l'interaction et d'autre part que ce n'est pas cette fréquence de battement qui détermine le seuil d'apparition du fonctionnement multimode mais la moyenne des désaccords des deux modes. Ainsi, des modes très distants peuvent être couplés dans certaines conditions et la fréquence observée expérimentalement est alors la fréquence de battement entre les deux modes. Les couplages menant aux oscillations supérieures à 100MHz correspondraient ainsi par exemple à des couplages d'un mode TEM_{00} et d'un mode TEM_{02} du signal.

Cette interprétation mériterait une étude plus poussée conduisant à une vérification expérimentale. Par exemple une observation à l'aide d'un analyseur de spectre des champs du signal et du complémentaire montrant la coexistence des deux modes transverses pendant les oscillations rapides. Nous présenterons des résultats de ce

[10] Pour la même raison que les coïncidences croisées, si deux résonances du signal se recouvrent, elles se recouvrent aussi pour le complémentaire.

type dans la partie 4.1 qui peuvent s'analyser dans ce sens bien qu'il n'y ait pas d'oscillations rapides des intensités.

Nous avons montré dans cette partie que les oscillations multimodes n'étaient pas un phénomène exotique et si notre interprétation tenant compte de la non-dégénérescence du signal et du complémentaire est valide, ce phénomène est presque aussi fréquent que les situations où l'OPO oscille sur un seul mode.

Nous allons donc à présent revenir sur les simulations numériques du modèle multimode transverse. De telles simulations ont déjà été faites sur le modèle bimode dégénéré [Schwob *et al.*, 1998; Suret *et al.*, 2001a] et non-dégénéré [Schwob *et al.*, 1998] et nous avons décrit dans la partie 1.2.1.c une partie de ces résultats sur les solutions stationnaires du système. Nous allons revenir sur ces simulations, notamment sur l'existence de régimes chaotiques dans ce modèle [Suret *et al.*, 2001a] et sur le problème du verrouillage des fréquences des modes.

2.3.2 Exploration numérique

2.3.2.a Modèle utilisé

Rappelons que le modèle non-dégénéré décrivant les oscillations multimode transverse [Schwob, 1997; Schwob *et al.*, 1998] s'écrit avec les notations de la partie 1.2.1.c :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{s1} &= -(1+i\Delta_{s1})A_{s1} + \chi_{11}A_{c1}^*A_p + \chi_{12}A_{c2}^*A_p \\
\dot{A}_{c1} &= -(1+i\Delta_{c1})A_{c1} + \chi_{11}A_{s1}^*A_p + \chi_{12}A_{s2}^*A_p \\
\dot{A}_{s2} &= -(1+i\Delta_{s2})A_{s2} + \chi_{21}A_{c1}^*A_p + \chi_{22}A_{c2}^*A_p \\
\dot{A}_{c2} &= -(1+i\Delta_{c2})A_{c2} + \chi_{21}A_{s1}^*A_p + \chi_{22}A_{s2}^*A_p \\
\dot{A}_p &= \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - \chi_{11}A_{s1}A_{c1} - \chi_{12}A_{s1}A_{c2}\right. \\
&\quad \left. -\chi_{21}A_{s2}A_{c1} - \chi_{22}A_{s2}A_{c2} + E\right],
\end{aligned}$$

L'exploration numérique de ce modèle est difficile. En effet, on sait que les quatre désaccords des quatre champs du signal ne peuvent être choisis complètement indépendemment les uns des autres. Ils sont reliés par la conservation du nombre de photons de la même manière que le modèle non-dégénéré monomode. Cependant si on cherche par une méthode semblable une relation entre les désaccords pour les états stationnaires et dans le cas $\chi_{12} = \chi_{21}$, on trouve la relation :

$$(1+i\Delta_{s1})|A_{s1}|^2 + (1+i\Delta_{s2})|A_{s2}|^2 = (1+i\Delta_{c1})|A_{c1}|^2 + (1+i\Delta_{c2})|A_{c2}|^2.$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires, on a alors :

$$\begin{cases} I_{s1} + I_{s2} = I_{c1} + I_{c2} \\ \Delta_{s1}I_{s1} + \Delta_{s2}I_{s2} = \Delta_{c1}I_{c1} + \Delta_{c2}I_{c2} \end{cases}$$

où on a noté $I = |A|^2$ les intensités (normalisés au nombre de photon) des champs.

Nous savons donc qu'il existe une relation liant les désaccords et donc qu'on ne peut choisir les quatre désaccords des signaux arbitrairement. Il reste néanmoins a priori trois désaccords indépendants.

Compte tenu de cette incertitude sur les valeurs pertinentes à utiliser dans les simulations et en tenant compte d'autre part qu'à priori la description par un modèle dégénéré a donné de bons résultats dans nos études antérieures, nous travaillerons avec un modèle dégénéré qui a été décrit en détail dans la partie 1.2.1.c :

$$\dot{A}_1 = -(1+i\Delta_1)A_1 + A_1^* A_p + \chi_{12} A_2^* A_p \tag{2.11a}$$
$$\dot{A}_2 = -(1+i\Delta_2)A_2 + \chi_{12} A_1^* A_p + \chi A_2^* A_p \tag{2.11b}$$
$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - \chi A_1^2 - 2\chi_{12} A_1 A_2 - \chi A_2^2 + E\right]. \tag{2.11c}$$

2.3.2.b Routine d'intégration

Les équations du système (2.11) sont intégrées numériquement par une méthode de Runge-Kutta à pas variable d'ordre 8 [Hairer *et al.*, 1993]. Les valeurs des paramètres utilisées sont : $\Delta_p = 0$, $E = 20$, $\chi = .8$, $\chi_{12} = .5$, $\gamma = 8.$. Ces valeurs sont proches de celles utilisées dans les références [Suret, 2000; Suret *et al.*, 2001a]. Le taux de pompage E correspond à une situation à 400 fois le seuil, c'est à dire à un seuil d'environ 9mW si la puissance de pompe maximale est de 3.5W. Le désaccord de la pompe est toujours considéré comme nul. Nous verrons dans la suite que la somme $\Delta_1 + \Delta_2$ est un paramètre important du problème et donc nous varions Δ_1 et Δ_2 en laissent leur somme constante.

2.3.2.c Diagrammes de bifurcation

Nous nous plaçons donc à désaccord de la pompe nul et nous fixons la somme des désaccords des signaux $\Delta_1 + \Delta_2$. Cela revient à fixer la distance entre le barycentre des résonances et la fréquence du repère tournant. Sur la figure 2.38, le milieu des résonances est représenté par une ligne verticale pointillée. La distance entre cette ligne et la fréquence du repère tournant représentée par une flèche verticale est égale à $(\Delta_1 + \Delta_2)/2$ et est fixe dans nos simulations. Lorsqu'on varie les paramètres Δ_1 et Δ_2, les résonances s'écartent donc symétriquement de part et d'autre du barycentre.

On a tracé sur la figure 2.39 les diagrammes de bifurcation du système (2.11) en représentant le maximum de la somme des intensités des signaux $|A_1|^2 + |A_2|^2$ en fonction du désaccord du mode 1 Δ_1 pour différentes valeur de $\Delta_1 + \Delta_2$. La figure (a) correspond à une situation où $\Delta_1 = -\Delta_2$, la fréquence du repère tournant est alors au milieu des deux résonances des deux modes. Dans la zone centrale, autour de 0, la somme des intensités des modes est constante. Par contre lorsque les désaccords augmentent en valeur absolue, une bifurcation se produit à partir de laquelle les solutions se mettent à osciller. L'enveloppe des maxima de ces solutions oscillantes correspondent aux deux branches en haut à gauche et à droite de la figure. On constate que les solutions oscillantes existent encore même lorsque les désaccords deviennent très grands en valeur absolue, nous verrons pourquoi dans la partie 3.1. On retrouve les comportements décrits dans la partie 1.2.1.c [Schwob *et al.*, 1998] : lorsque tous les désaccords sont nuls, l'OPO peut fonctionner sur un régime multimode stationnaire. Cette description est toujours valable pour les petits désaccords.

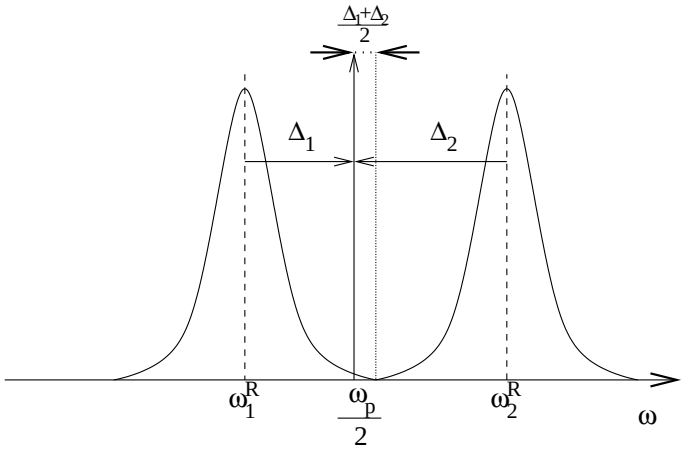


FIG. *2.38: Représentation des résonances de la cavité. Les désaccords des champs sont les distances entre le milieu des résonances ω_i^R et la fréquence du repère tournant $\omega_p/2$ représentée par une flèche verticale. La ligne verticale pointillée représente le milieu des deux résonances : $(\omega_1^R + \omega_2^R)/2$. La distance entre la fréquence du repère tournant et le milieu des résonances est $(\Delta_1 + \Delta_2)/2$.*

Lorsque les désaccords deviennent trop grands, des solutions oscillantes deviennent les solutions stables.

Les figures 2.39(b), (c) et (d) correspondent à des situations où on augmente progressivement la valeur de $\Delta_1 + \Delta_2$. Les résonances ne sont alors plus symétriques par rapport à la fréquence du repère tournant. On voit que pour la figure (b) la situation reste semblable à la figure (a) avec une solution stationnaire centrale encadrée par deux solutions oscillantes. Il y a juste une déformation liée à la dissymétrie des désaccords. Pour les figures (c) et (d) on constate qu'en augmentant la dissymétrie apparaissent des zones où les maximas des solutions remplissent densément l'espace : il s'agit de zones chaotiques. Des solutions chaotiques avaient en effet été trouvées numériquement antérieurement [Suret *et al.*, 2001a].

On s'intéresse à présent plus précisement à la bifurcation entre la solution constante et la solution oscillante dans le cas $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$. La figure 2.40(a) est un agrandissement de la figure 2.39(a) pour des valeurs de Δ_1 comprises entre -10 et 0. On a ici tracé à la fois l'enveloppe des minima et des maxima des intensités. La figure 2.40(b) correspond aux mêmes valeurs des paramètres que la figure (a) sauf pour le taux de pompage qui est plus élevé : $E = 30$. On constate que dans le cas de la figure (b) une nouvelle bifurcation apparaît pour des valeurs de Δ_1 proches de -7 correspondant aussi à une solution oscillante.

Pour comprendre la différence entre ces deux solutions oscillantes, on va tracer dans le plan complexe les amplitudes des champs des deux modes du signal pour des valeurs des paramètres correspondant à chaque solution oscillante. La figure 2.41(a) a été tracée pour une valeur de $\Delta_1 = 7.4$ et correspond à la solution oscillante existant pour les deux valeurs du taux de pompage : c'est à dire la branche de solutions périodiques s'étendant jusqu'aux grands désaccords en valeur absolue. Les deux amplitudes

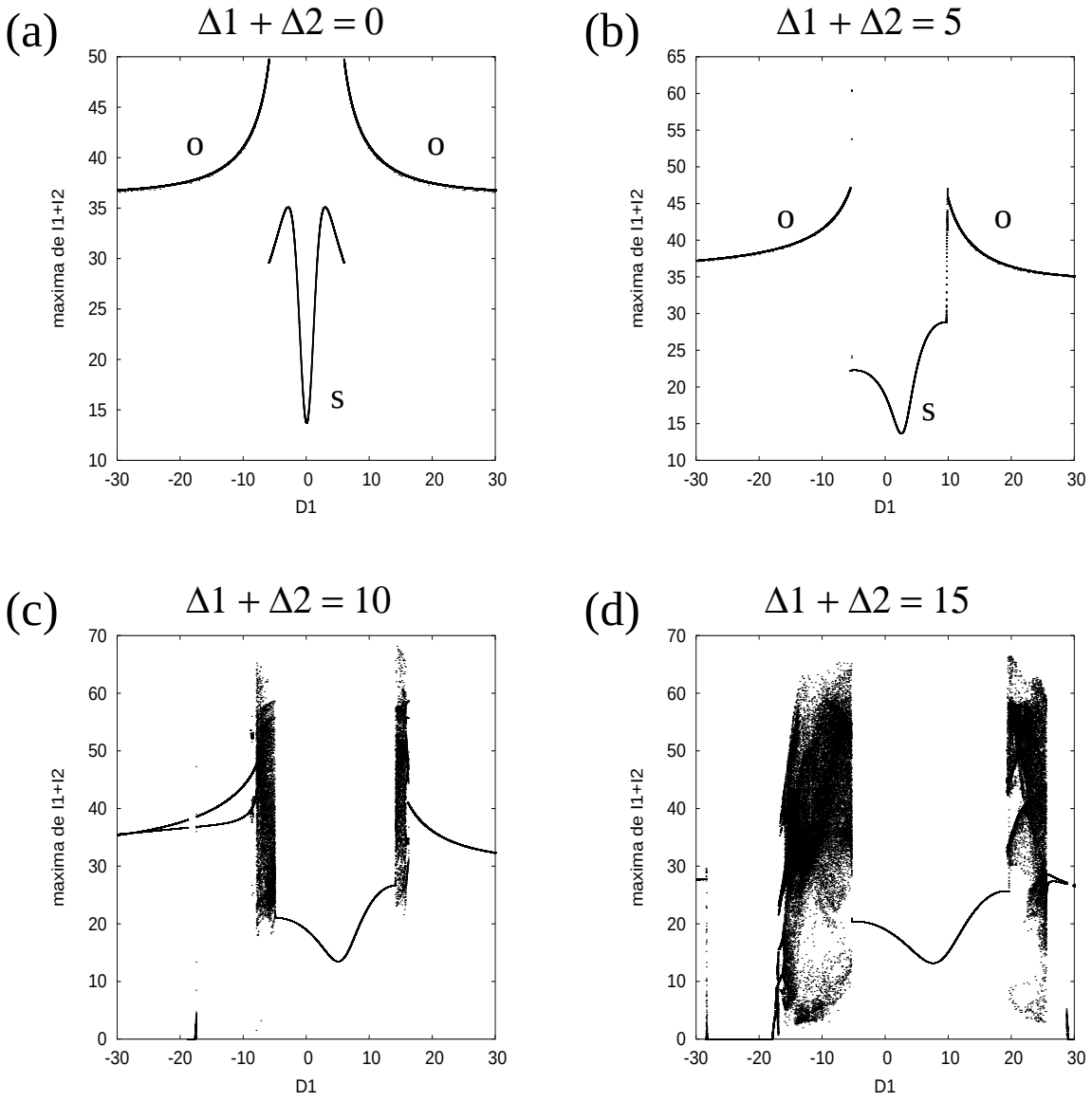


FIG. *2.39: Diagramme de bifurcation des maxima de la somme des intensités des deux modes du signal en fonction du désaccord du mode 1 lorsque la somme des désaccords des deux modes est fixée aux valeurs suivantes : (a)* $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$, *(b)* $\Delta_1 + \Delta_2 = 5$, *(c)* $\Delta_1 + \Delta_2 = 10$, *(d)* $\Delta_1 + \Delta_2 = 15$. *Les lettres s et o indiquent respectivement les solutions stationnaires et oscillantes.*

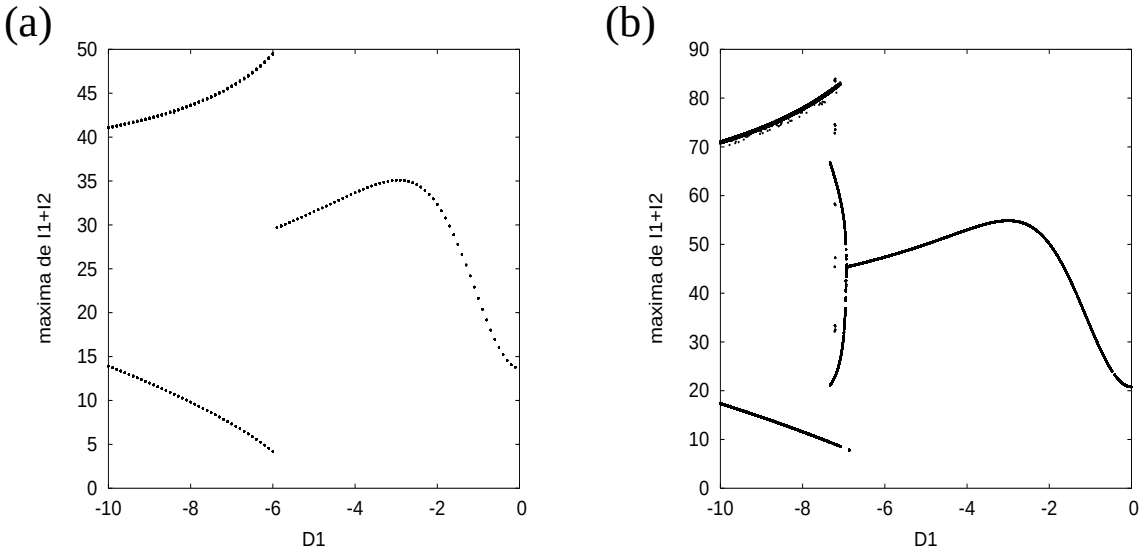


FIG. *2.40: (a) Agrandissement du diagramme de bifurcation de la figure 2.39 pour* Δ_1 *compris entre -10 et 0, rappelons que* $E = 20$*, (b) diagramme de bifurcation pour des valeurs identiques au précédent sauf* $E = 30$*.*

tournent en sens inverse autour de l'origine sur des orbites de forme approximativement rectangulaire. Leur phase relative oscille donc dans le temps : les modes ne sont pas accrochés et ont des fréquences optiques différentes. La figure 2.41(b) correspond à la nouvelle solution issue de la bifurcation qui est apparue pour $E = 30$ et a été tracée pour $\Delta_1 = 7.1$. Dans ce cas la phase relative des champs est fixée : les modes sont accrochés.

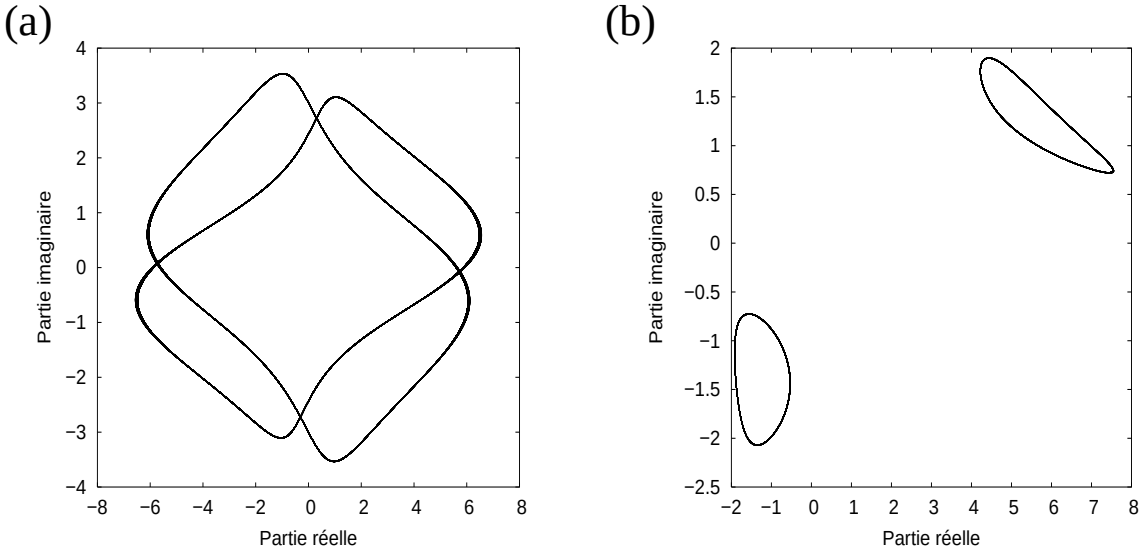


FIG. *2.41: Représentation dans le plan complexe des amplitudes des deux champs pour (a)* $\Delta_1 = 7.4$ *et (b)* $\Delta_2 = 7.1$*.*

Pour certaines valeurs des paramètres, on peut observer de l'intermittence apparement chaotique entre ces deux régimes.

En conclusion de cette partie d'analyse numérique du modèle, nous avons confirmé l'existence de domaines où les intensités des champs ont des comportements chaotiques. D'autre part nous avons montré que selon les valeurs des paramètres, les solutions pouvaient correspondre à des modes accrochés ou non en fréquences.

Pour finir cette partie nous présentons des nouveaux exemples d'observations expérimentales d'oscillations multimodes de manière à montrer la grande richesse en forme et en fréquence de ces instabilités.

2.3.3 Exploration expérimentale

Nous présentons dans cette partie diverses observations expérimentales d'oscillations multimodes, superposées ou non à des instabilités thermiques dont des exemples de formes de signaux des oscillations rapides des intensités qui ne sont plus de simples sinusoïdes. Cette "zoologie" ne se veut pas exhaustive, mais tente de montrer la diversité des comportements que nous avons pu observer expérimentalement.

2.3.3.a Oscillations de réquences élevées

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons observé des oscillations rapides à des fréquences très différentes qu'on peut regrouper en deux catégories : un groupe de fréquences allant de 1 à une trentaine de mégaHertz et un autre pour lesquelles les fréquences sont supérieures à 100MHz. Le premier groupe de fréquences a été observé beaucoup plus fréquemment. C'est aussi dans ce domaine de fréquences que les observations expérimentales antérieures ont été faites [Richy *et al.*, 1995; Suret *et al.*, 2001a]. Les oscillations de fréquences supérieures à 100MHz que nous avons présentées n'ont à notre connaissance jamais été observées auparavant. Nous reviendrons sur la possibilité d'existence de fréquences à plus de 20 fois la fréquence de coupure de la cavité dans le chapitre suivant. Numériquement, des fréquences de cet ordre de grandeur peuvent exister dans la situation où les deux modes sont approximativement symétriques par rapport à la fréquence du repère tournant (cas $\Delta_1 + \Delta_2 \simeq 0$).

Nous donnons deux nouveaux exemples d'oscillations des intensités du signal à ces hautes fréquences. La figure 2.42 montre des oscillations rapides de fréquence environ 130MHz. La faible amplitude des oscillations à ces fréquences explique le mauvais rapport signal sur bruit de la figure. Le système passe par une bifurcation de Hopf surcritique inverse pour t$\simeq$ 380μs. Le fait que les paramètres soient balayés alors que la taille de la cavité est supposée fixe correspond à un balayage par des fluctuations mécaniques ou thermiques de la taille de la cavité. Le système passe alors d'une solution multimode périodique à une solution multimode stationnaire.

Le deuxième exemple d'oscillation rapide de l'intensité du signal est montré sur la figure 2.43. L'intensité présente des oscilllations rapides de fréquence environ 270MHz superposées à des oscillations lentes d'origine thermique de fréquence de l'ordre de 5kHz. La figure 2.43(b) est un agrandissement de la figure (a) sur 200ns. Pour des

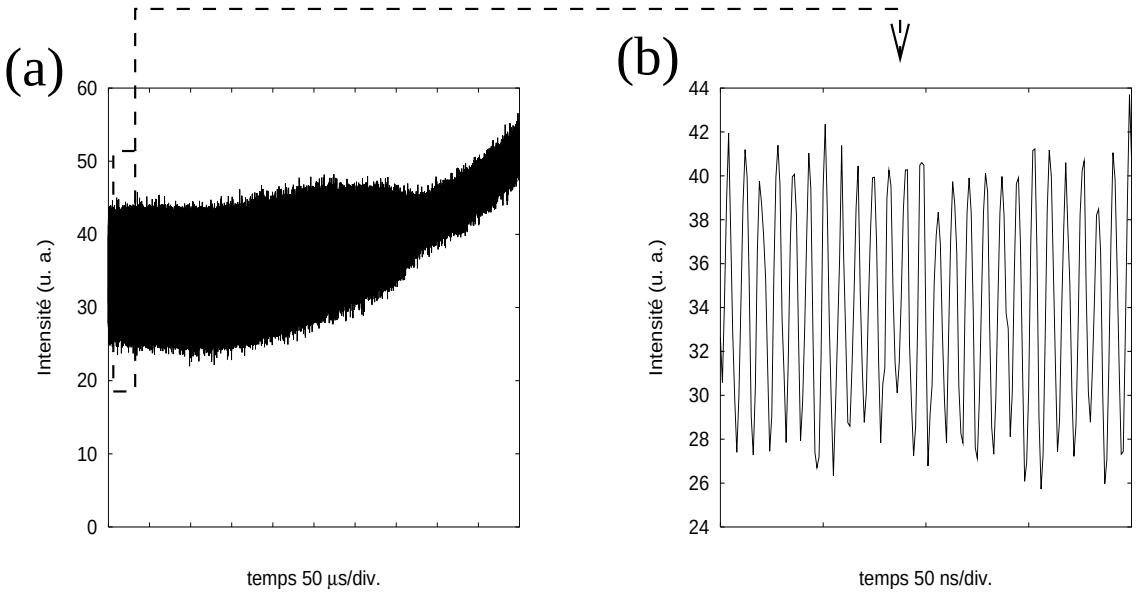


FIG. *2.42: Intensité du signal au cours du temps. La figure (b) est un agrandissement de la figure (a) sur 200ns. La fréquence des oscillations rapides est d'environ 130MHz. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 250 MHz.*

fréquences aussi rapides, on commence à atteindre la limite de la résolution de notre oscilloscope numérique (33MHz).

Les oscillations de fréquence supérieure à 100MHz sont difficiles à observer, d'une part parce que leur amplitude est faible à cause de l'effet de filtrage par la cavité. Celle-ci est un filtre passe-bas de fréquence de coupure 5MHz. D'autre part on arrive rapidement aux limites d'échantillonage de l'oscilloscope.

2.3.3.b Naissance des oscillations thermiques

Les oscillations opto-thermiques que nous avons exposées dans la partie 1.2.2 naissent d'une bifurcation de Hopf [Suret, 2000] qui n'avaient jusqu'ici jamais été observée directement. Nous montrons sur la figure 2.44 un exemple de l'observation expérimentale de cette bifurcation. La fréquence des oscillations varie entre 700kHz loin de la bifurcation et 2.2MHz au niveau de celle-ci. Cette fréquence est relativement élevée pour des oscillations thermiques, cependant la forme des oscillations loin de la bifurcation suggère qu'il s'agit bien de simples oscillations thermiques et non d'oscillations multimodes. Loin de la bifurcation, lorsque les oscillations ont atteint leur plein développement, les oscillations présentent des sauts abrupts entre deux modes du signal. Près de la bifurcation les signaux sont de forme quasi-sinusoïdale.

Nous montrons maintenant un exemple similaire de passage par une bifurcation de Hopf conduisant à l'apparition d'oscillations thermiques, mais cette fois-ci des oscillations rapides sont superposées aux oscillations thermiques.

Les figures 2.45(a) et (c) représentent respectivement les intensités du signal et de la pompe au cours du temps. L'allure générale de l'évolution des intensité rappelle le

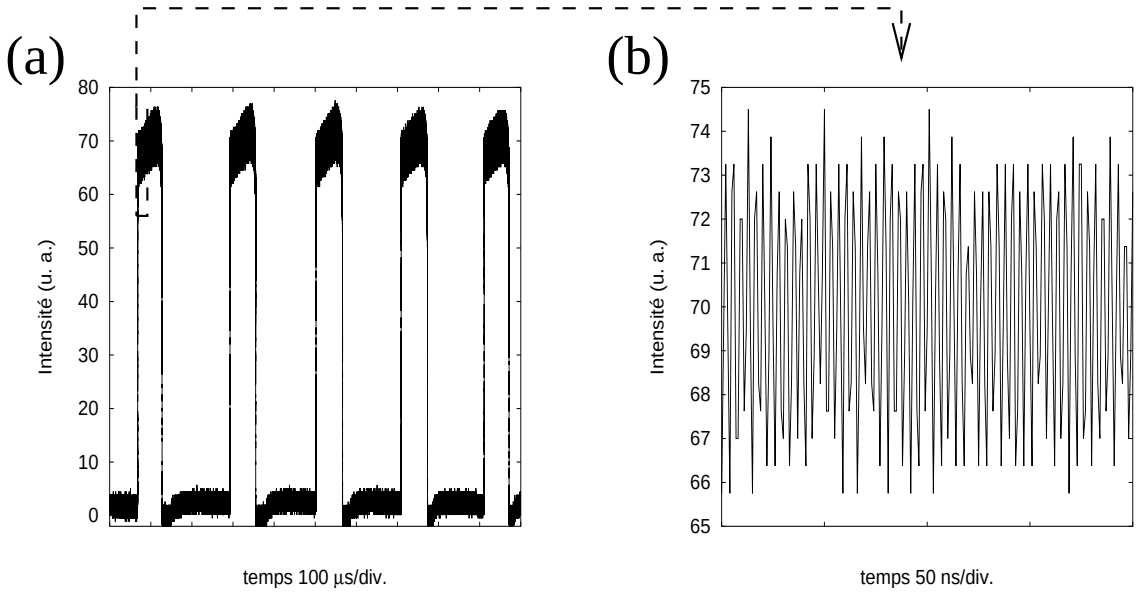


FIG. *2.43: Intensité du signal au cours du temps. La figure (b) est un agrandissement de la figure (a) sur 200ns. La fréquence des oscillations rapides est d'environ 270MHz, celle des oscillations lentes de 5kHz. Le fichier n'a pas été filtré.*

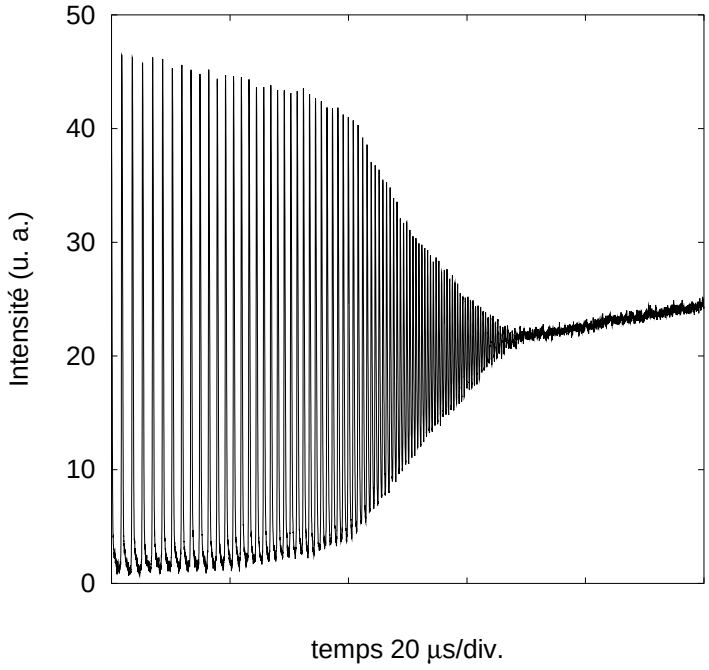


FIG. *2.44: Intensité du signal en fonction du temps. Les oscillations sont d'origine thermique. Elles ont une fréquence comprise entre 700kHz loin de la bifurcation et 2.2MHz au niveau de la bifurcation. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 5MHz.*

cas précédent : le système passe par une bifurcation de Hopf surcritique. Les intensités présentent ensuite des oscillations thermiques de fréquence environ 15kHz. Cependant il ne s'agit pas de simples oscillations thermiques comme dans le cas précédent, les agrandissements (b) et (d) des figures (a) et (c) révèlent que les intensités présentent des oscillations rapides superposées aux oscillations thermiques. La fréquence de ces oscillations est de 6MHz.

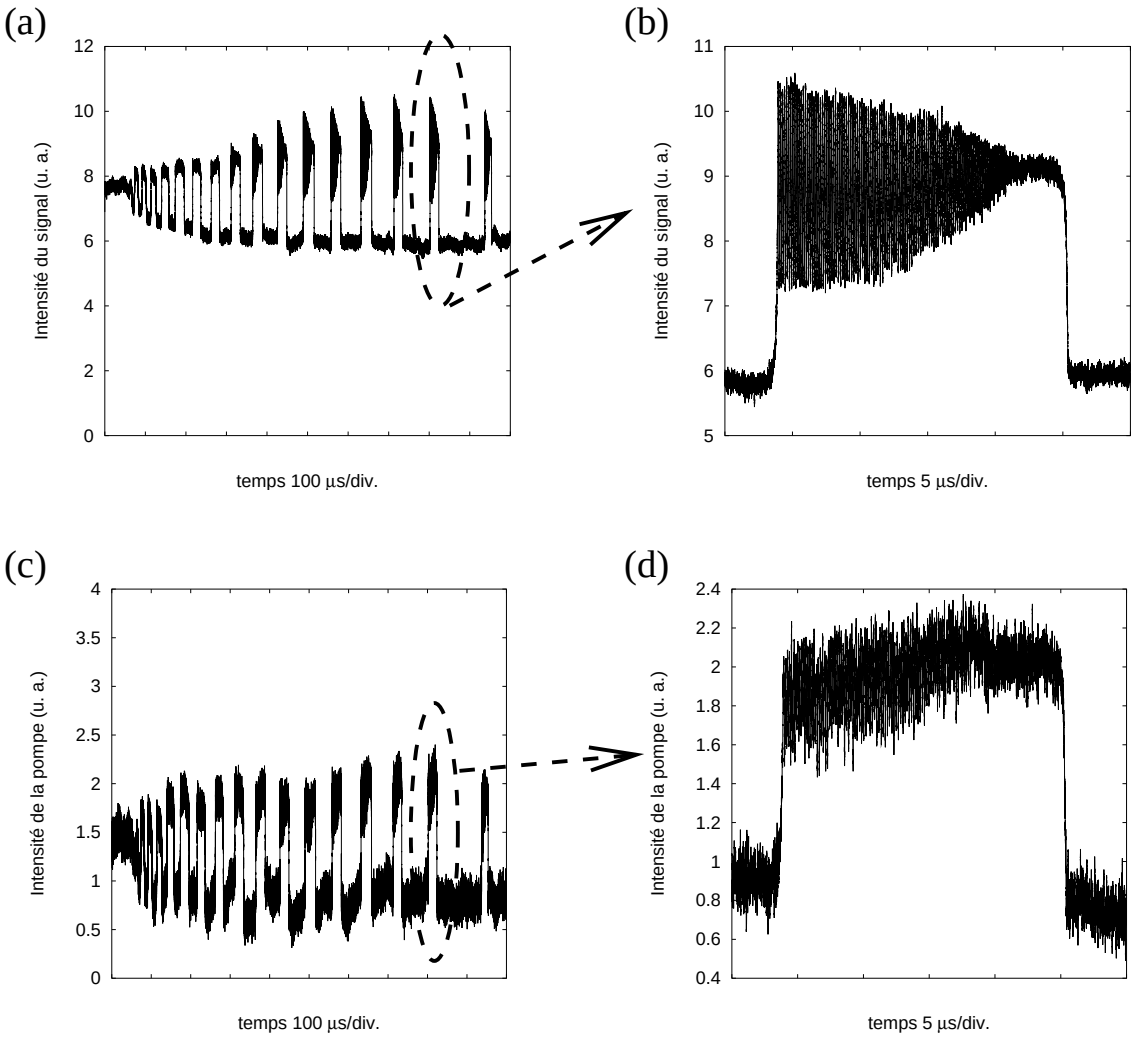


FIG. *2.45: Intensité du signal (a) et de la pompe (c) au cours du temps. Les figures (b) et (d) sont des agrandissements des figures (a) et (c). La fréquence des oscillations thermiques est de 15kHz, celle des oscillations rapides est 6MHz. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 15MHz.*

2.3.3.c Effet de balayage de la cavité

Les effets de balayage de la cavité par des dérives mécaniques ou thermiques permettent d'observer les bifurcations du système comme dans le cas des bifurcations de

Hopf observées précédemment. Elles peuvent aussi conduire à moduler les oscillations rapides comme on peut le voir sur la figure 2.46.

La figure 2.46(a) montre l'intensité du signal au cours du temps. Les figures (b) et (c) sont des agrandissements de différentes zones des oscillations rapides. Dans le cas de la figure (c) l'amplitude des oscillations est presque constante tandis que pour la figure (b) l'amplitude des oscillations est fortement modulée. La fréquence des oscillations est d'environ 11MHz.

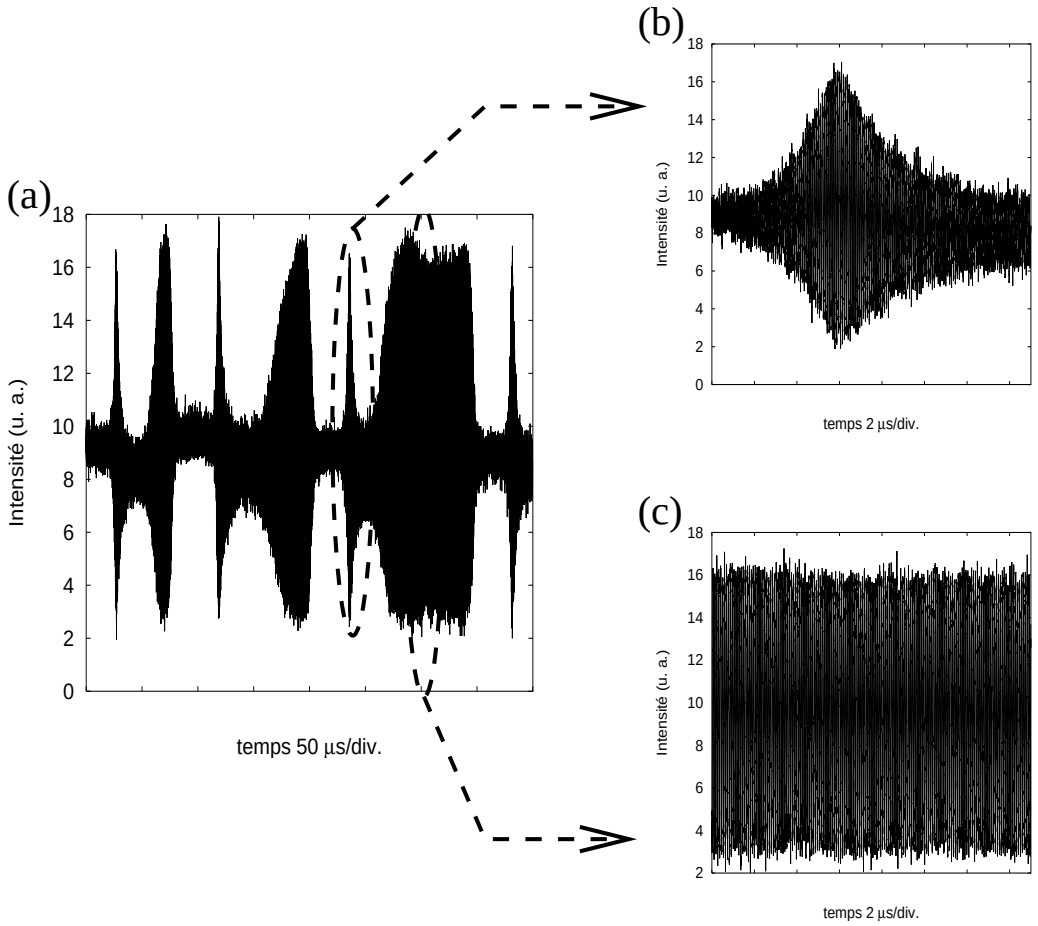


FIG. *2.46: Intensité du signal au cours du temps. Les figures (b) et (c) sont des agrandissements de la figure (a). La fréquence des oscillations rapides est de 11MHz. Le fichier a été filtré par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 100MHz.*

2.3.3.d Forme des signaux

Pour finir, nous présentons un exemple où les oscillations rapides comportent des harmoniques différentes pour les intensités de la pompe et du signal.

Les figures 2.47(a) et (c) montrent respectivement les intensités de la pompe et du signal au cours du temps. Les signaux présentent des oscillations rapides de fréquence environ 14MHz interrompus par des sauts de modes. Lorsqu'on agrandit les oscilllations rapides, on obtient les figures (b) et (d). On constate la présence

d'une seconde harmonique sur les oscillations de l'intensité de la pompe alors que les oscillations du signal sont sinusoïdales.

Ces observations expérimentales concordent avec les simulations numériques qui ont été faites dans les travaux antérieurs [Suret, 2000] à partir du modèle bimode transverse dégénéré. En fait, dans ces simulations, il est fréquent que les formes des signaux, notamment de l'intensité de la pompe, soient plus complexes que des sinusoïdes.

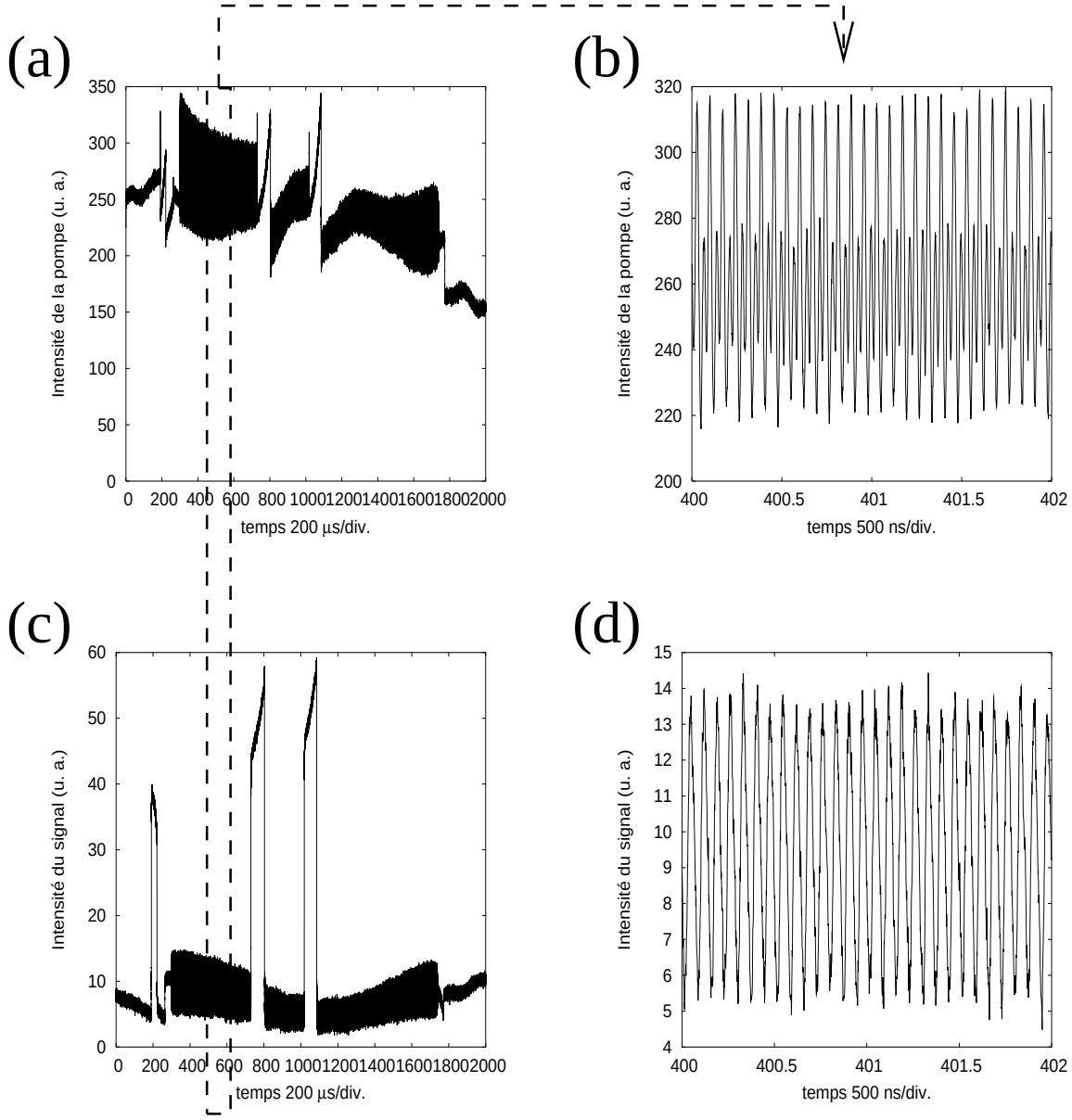


FIG. *2.47: Intensité de la pompe (a) et du signal (c) au cours du temps. Les figures (b) et (d) sont des agrandissements des oscillations rapides. La fréquence de ces oscillations est 14MHz. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 100MHz.*

Nous avons donc montré dans cette partie que les oscillations dites "rapides" dues à l'interaction de plusieurs modes transverses dans la cavité sont loin d'être exotiques. De telles oscillations ont aussi été observées avec une cavité du même type que les observations expérimentales de la partie 2.1.2 mais avec un cristal de niobate de lithium où l'accord est de type I. D'autre part, pour une taille de cavité d'environ 63mm, les oscillations rapides ont pu être observées lorsque la taille de la cavité était balayée par la cale piezoélectrique ce qui suggère que la zone de paramètres où ces oscillations rapides peuvent se produire est grande.

Nous avons exposé à la fin de cette partie les formes variées que peuvent prendre les oscillations rapides. Dans le prochain chapitre, nous allons approfondir le cas de deux formes d'oscillations plus complexes que les simples oscillations sinusoïdales : le cas où les oscillations rapides sont superposées à des oscillations de fréquences plus faibles d'origine thermique d'une part et d'autre part le cas où les oscillations deviennent irrégulières.

Conclusion

Nous avons mené dans ce chapitre une étude détaillée d'oscillations que peut présenter les intensités des champs à la sortie d'un OPO triplement résonant. Ces oscillations avaient été observées précédemment dans différents TROPO à des taux de pompage élevés et pour des fréquences allant de 1 à 10MHz. Nous avons reproduit ces oscillations et montré que bien que la fréquence de coupure de notre cavité soit de l'ordre de 10MHz, on peut observer des oscillations à des fréquences supérieures à 100MHz. Nous avons mis en évidence expérimentalement que ces oscillations mettaient en jeu plusieurs modes transverses. Une étude du profil transverse du faisceau, au moyen d'une décomposition en valeurs singulières, nous a conduits à conclure que ces oscillations impliquent un faible nombre de modes (en général deux) d'ordres transverses peu élevés. D'autre part, alors que ces oscillations semblaient être un phénomène rare, lié à des configurations particulières de la cavité, nous avons montré expérimentalement qu'elles pouvaient être observées à la plupart des tailles de cavité et qu'elles sont robustes aux variations autour de ces tailles. Nous interprétons ces observations apparemment contradictoires avec les hypothèses théoriques du modèle multimode comme la possibilité de couplages croisés entre des modes du signal et du complémentaire de profils transverses différents.

Si cette hypothèse s'avérait exacte, ces couplages conduiraient l'OPO à avoir un comportement multimode fréquemment et à des puissances de pompe relativement faibles. Nous avons pour notre part travaillé à des puissances de pompe élevées pour observer des comportements oscillatoires, cependant une étude à des puissances plus faibles des comportements multimodes *stationnaires* de l'OPO pourrait conduire à remettre en question la vision de l'OPO commme source monomode. Nous reviendrons sur ce sujet dans la partie 4.1. A present nous allons nous intéresser à des régimes dynamiques plus complexes.

Chapitre 3

Oscillations complexes et chaos

Les comportements oscillants qui ont été présentés dans le chapitre précédent sont des comportements simples du point de vue de la dynamique des systèmes non-linéaires. Ces derniers peuvent en général présenter des comportements plus complexes, comme par exemple du chaos déterministe, qui a été observé en hydrodynamique, en chimie, en biologie ou en optique dans les lasers. En fait tout l'intérêt de la dynamique non-linéaire est de développer des outils communs à l'étude de systèmes qui appartiennent à des domaines scientifiquement très différents. En étudiant les mécanismes d'apparition des instabilités, on s'aperçoit qu'on trouve des représentations mettant en évidence l'universalité des comportements observés.

Dans ce cadre nous allons nous intéresser à des comportements dynamiques complexes : oscillations en rafales et chaos déterministe. En ce qui concerne les premières, elles avaient déjà été observées dans les OPO, mais avec une bien moins grande variété de formes et n'avaient pas donné lieu, comme nous allons le faire, à une étude utilisant les outils de la dynamique non-linéaire tels que les portraits de phase ou des développements perturbatifs multi-échelles. Quant aux régimes chaotiques que nous avons observés, ils constituent à notre connaissance le premier exemple expérimental de tels comportements dans un OPO.

On appelle oscillations en rafales des bouffées d'oscillations séparées par des phases d'évolution lente d'un système. On les appelera parfois par la suite par leur nom anglais, *bursting*. De tels comportements ont surtout été étudiés expérimentalement et théoriquement en biologie où ce phénomène s'observe fréquemment dans les neurones. Le mécanisme d'apparition de ces oscillations repose sur l'interaction d'une variable lente et d'une variable rapide dans un même système. La première partie de ce chapitre, après une description du phénomène en biologie, passe en revue des comportements similaires observés dans des systèmes optiques et en particulier dans les OPO. Dans le cas de ces derniers, la variable lente et la variable rapide sont facilement identifiables et l'étude du modèle permet de construire un portrait de phase à deux dimensions rendant particulièrement clair le mécanisme sous-jacent à ces oscillations. Finalement un développement perturbatif permet de dégager des propriétés des régimes multimodes transverses de fréquence élevée.

Des comportements complexes fréquents dans les systèmes non-linéaires sont les régimes chaotiques. Mais alors que du chaos a été prévu dans les OPO depuis plus

de quinze ans, il n'y a encore eu aucune observation expérimentale de ces régimes à notre connaissance. Le fait que de tels comportements n'aient pas encore été observés est probablement lié au fait que les puissances des lasers de pompe disponibles étaient insuffisantes jusqu'à récemment. D'autre part, même s'il existe des sources continues de plusieurs Watts depuis quelques années, les effets thermiques à de telles puissances de pompe rendent difficile le fait de pouvoir travailler à paramètres fixes : la taille de la cavité est alors constamment balayée par la température. Les désaccords des champs ne sont donc plus des paramètres de contrôle des équations qui gouvernent le système, mais des variables lentes de la température.

Nous présentons dans la deuxième partie ce qui est sans doute la première observation d'un régime chaotique déterministe dans un OPO continu. Nous montrons en premier lieu des comportements de doublement de période puis des régimes irréguliers évoquant des comportements chaotiques. Cependant comme le système est balayé en paramètres et que les séries temporelles obtenues expérimentalement sont courtes, nous ne pouvons utiliser les outils classiques de caractérisation du chaos pour analyser nos données expérimentales. C'est l'utilisation d'outils topologiques qui nous permettera de confirmer la présence de chaos dans notre système.

Dans une dernière partie nous nous interrogeons sur l'origine de ce régime chaotique. Nous montrons qu'il ne peut être expliqué par le modèle monomode dégénéré dans nos conditions expérimentales. Notre analyse montre qu'outre les limites liées à la puissance de pompe disponible, toute comparaison entre théorie et expérience doit tenir compte du fait que la sélection de mode réduit la plage des désaccords accessibles pour le signal et le complémentaire.

3.1 Oscillations en rafales

Une des motivations de la présente étude est fournie par les similitudes que l'on peut trouver dans les mécanismes gouvernant la dynamique de deux systèmes à priori très différents : les cellules biologiques et les oscillateurs paramétriques optiques. Nous essayons dans un premier temps de donner un aperçu des études menées sur les oscillations des potentiels membranaires des cellules.

Nous exposons ensuite des exemples d'oscillations ayant la même allure en optique, dans les lasers. Quant aux OPO, ils présentent différents types d'oscillations en rafales. Nous nous intéressons particulièrement au cas où la variable lente est d'origine thermique et la variable rapide liée aux couplages entre des modes transverses. Dans les situations où les oscillations rapides sont de fréquence particulièrement élevée (supérieure à 100MHz), un développement perturbatif multi-échelle est mené sur le modèle.

Ce travail a été fait en collaboration avec T. Erneux et M. Nizette de l'Université Libre de Bruxelles et à donner lieu à la publication d'un article [Amon *et al.*, 2003].

3.1.1 Bursting en biologie

Nous commençons par montrer des exemples de bursting en biologie ainsi qu'un exemple d'étude du mécanisme gouvernant cette dynamique. Le but de cette partie n'est pas de procurer une vision exhaustive de ce phénomène, cependant nous essayons de donner les grandes lignes permettant d'en comprendre l'importance.

3.1.1.a Exemples expérimentaux

La figure 3.1 montre l'activité électrique du neurone R15 de l'*Aplysia*, une des cellules nerveuses les plus étudiées en biologie [Adams et Benson, 1985]. La figure du bas est un agrandissement rendant visible la forme des oscillations. Les signaux présentent des trains de pics (potentiels d'action) séparés par des périodes où le potentiel membranaire évolue lentement.

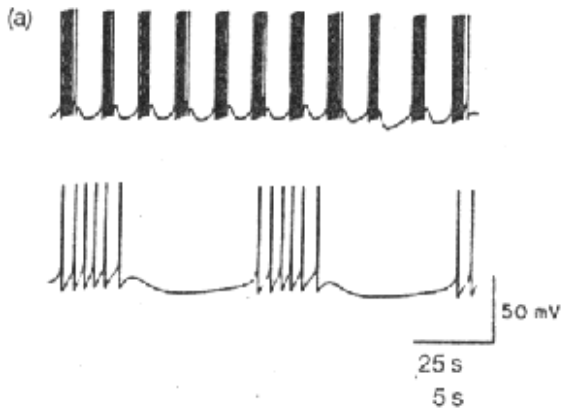


FIG. *3.1: Variation du potentiel de la membrane d'un neurone R15 de l'Aplysia à deux échelles de temps différentes [Goldbeter, 1996].*

Le potentiel membranaire est liée à l'existence de gradients de concentration en ions de part et d'autre de la membrane des cellules. Ces concentrations peuvent varier par des mécanismes de transports actifs et passifs des ions à travers la membrane. Les mécanismes de transport passif sont activés ou désactivés en fonction de la valeur du potentiel membranaire et de l'histoire de la cellule.

Les pics de potentiel de la figure 3.1 sont des *potentiels d'action* [Hammond et Tritsch, 1990; Shechter, 1990] qui correspondent à des variations rapides des concentrations de différents ions par l'ouverture de canaux rendant la membrane perméable à ces ions. Un potentiel d'action permet à une information de se propager le long de la membrane de la cellule. Les phases d'évolution lente du potentiel sont des moments où la membrane est hyperpolarisée et donc inactivée par différents mécanismes. La membrane est alors imperméable à la plupart des ions.

La figure 3.2 montre l'évolution du potentiel membranaire de cellules β du pancréas chez la souris. Cette figure donne l'évolution temporelle simultanée de deux variables différentes : en haut, le potentiel de la membrane de la cellule (V_m) qui

présente des oscillations de type bursting, en bas, la concentration extracellulaire en potassium (V_K) qui ne comporte que les oscillations lentes au cours du temps.

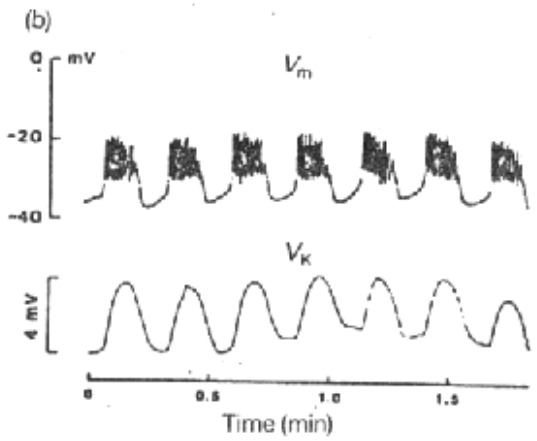


FIG. *3.2: Courbe du haut (V_m) : variations du potentiel de la membrane d'une cellule β du pancréas. Courbe du bas (V_K) : variations de la concentration extacellulaire en potassium [Goldbeter, 1996].*

La figure 3.3 montre d'autres exemples de bursting dans le même système. Les différentes séries temporelles (A, B, C et D) correspondent à des observations faites sur différentes souris préparées dans différentes conditions expérimentales.

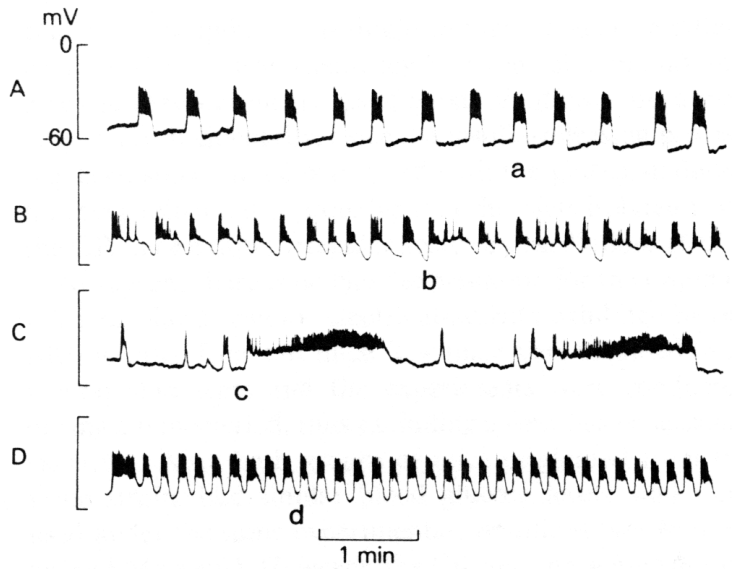


FIG. *3.3: Potentiels membranaires de cellules β du pancréas. Les courbes (A, B, C et D) correspondent à quatre souris préparées dans des conditions différentes [Lebrun et Atwater, 1985].*

Ces différents exemples suggèrent que le mécanisme de bursting fait intervenir une variable lente et une variable rapide dans le système. La variable rapide est à l'origine des variations brusques du potentiel membranaire tandis que la variable lente gouverne les zones où le potentiel évolue lentement. C'est l'interaction de ces deux variables qui va conduire à l'apparition de ces oscillations complexes. Il est donc nécessaire [Goldbeter, 1996] d'avoir plusieurs mécanismes générateurs d'instabilités dans le système ayant des échelles de temps très différentes. Suivant la zone de paramètres où l'on travaille, un seul des mécanismes s'exprime ou les deux coexistent. Dans ce dernier cas on observe du bursting.

3.1.1.b Exemple de mécanisme

3.1.1.b-i Présentation schématique

Un mécanisme particulièrement simple conduisant à des oscillations en rafale dans un système quelconque met en jeu un cycle de bistabilité dont une des branches est une solution périodique.

La figure 3.4(a) montre un exemple d'un diagramme de bifurcation d'une variable rapide (R) qui présente de la bistabilité en fonction d'un paramètre. Le cycle de bistabilité a une forme de S, les traits continus étant des solutions stables, les tirets des solutions instables. Lorsqu'on fait varier le paramètre de contrôle, le système suit des chemins dépendant de son histoire. Si le système est au point A et qu'on augmente le paramètre de contôle, le système parcourt la branche AB puis commute au point B sur la branche basse en C. Par contre, si le système est au point C et qu'on diminue le paramètre de contrôle, le système parcourt la branche basse du cycle jusqu'au point D où il commute sur la branche haute en A.

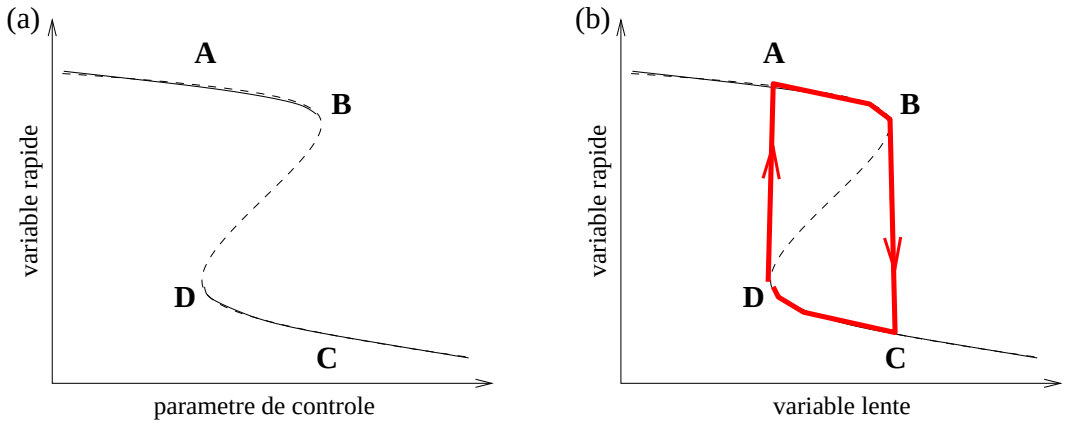


FIG. *3.4: (a) Diagramme de bifurcation d'une variable rapide (R) présentant de la bistabilité en fonction d'un paramètre de contrôle. Les traits continus sont des solutions stables, les traits pointillés des solutions instables. (b) Portrait de phase lorsque le paramètre est une variable lente du système. La variable lente fait alors parcourir périodiquement au système le cycle en traits gras.*

Si le paramètre de l'axe des abscisses est en fait une variable lente (L) du système,

le diagramme devient un portrait de phase et le système peut parcourir spontanément le cycle de bistabilité comme le montre la figure 3.4(b). La variable R présente alors des oscillations lentes au cours du temps correspondant aux commutations périodiques entre les deux branches du cycle de bistabilité.

Supposons qu'une des branches du cycle de bistabilité est une solution périodique, qu'on a représentée sur la figure 3.5 par l'enveloppe des minima et des maxima sur la branche haute. Lorsque le système arrive en A, la variable R se met à osciller rapidement. Comme la variable lente L augmente, l'amplitude des oscillations rapides va diminuer jusqu'à ce que le système passe à travers la bifurcation de Hopf H où la solution stationnaire devient stable. Les oscillations rapides se sont arrêtées, le système atteint la bifurcation noeud-col B et commute sur la branche inférieure du cycle en C. La variable lente L diminue alors et le système parcourt la branche du bas jusqu'à arriver à une nouvelle bifurcation noeud-col en D où il bascule sur la branche supérieure.

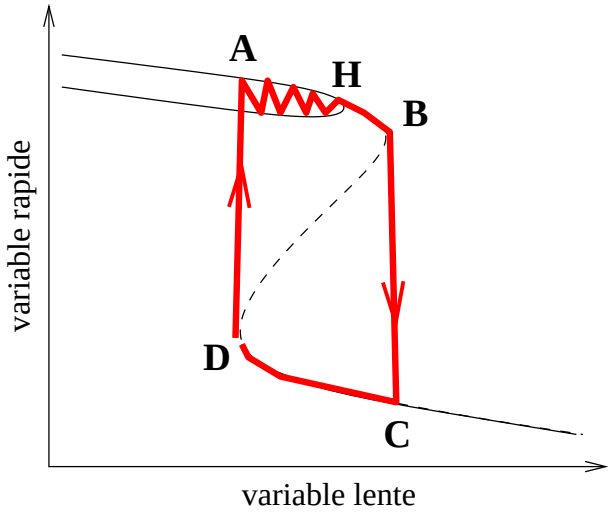


FIG. *3.5: Représentation schématique d'une possibilité de mécanisme de bursting. La variable lente est en abscisse, et la variable rapide en ordonnée. Le système tourne autour du cycle de bistabilité suivant la trajectoire représentée en traits gras. Sur la branche haute, une solution périodique, représentée par l'enveloppe de ses minima et maxima, naît de la bifurcation de Hopf H.*

Il existe bien deux instabilités à l'intérieur du bursting : la première conduit à l'apparition des oscillations rapides sur une des branches du cycle de bistabilité. La seconde est à l'origine des oscillations lentes autour du cycle de bistabilité.

Ce mécanisme ne décrit pas toutes les formes de bursting, qui peuvent être très complexes [Izhikevich, 2000], mais montre de manière simple comment on peut passer d'un comportement oscillatoire simple, les oscillations lentes, vers des oscillations complexes, par l'apparition d'une bifurcation de Hopf et l'émergence d'oscillations rapides.

Lorsqu'il existe un modèle décrivant le système présentant du bursting, on peut étudier le déplacement de la bifurcation de Hopf le long d'une des branches du cycle.

Cette étude est présentée de manière détaillée dans les références [Decroly et Goldbeter, 1987; Goldbeter, 1996], nous proposons ici un rapide résumé de cet exemple.

3.1.1.b-ii Etude d'un modèle

La modélisation des systèmes biologiques par des systèmes d'équations différentielles ordinaires permet de comprendre les mécanismes sous-jacents à la dynamique du système.

Decroly et Goldbeter ont proposé un modèle biochimique reposant sur la régulation autocatalytique d'enzymes allostériques par leur produit de réaction. La chaîne de réaction est présentée sur la figure 3.6. Le substrat est injecté à une vitesse constante v, l'enzyme E_1 catalyse la transformation du substrat en un premier produit lui-même transformé en un produit final par l'enzyme E_2. Le produit final quitte le système à une vitesse proportionnelle à sa concentration $k_s[P_1]$. Il est nécessaire d'avoir trois variables pour avoir une dynamique complexe. La non-linéarité se situe dans le caractère auto-catalytique de la réaction.

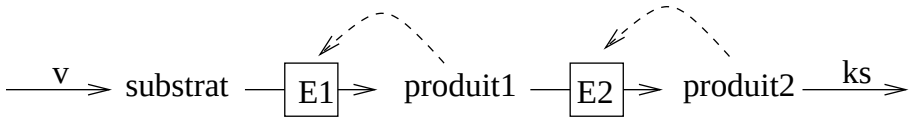


FIG. *3.6: Schéma des réactions d'un modèle biochimique à trois variables (un substrat et deux produits) en série catalysées par des enzymes E_1 et E_2. Le caractére autocatalytique des réactions est représenté par les flèches en pointillées [Decroly et Goldbeter, 1987; Goldbeter, 1996].*

Le système est alors décrit par les équations cinétiques suivantes :

$$\dot{\alpha} = \epsilon(v' - \sigma_1'\phi(\alpha,\beta)) \tag{3.1}$$
$$\dot{\beta} = q_1\sigma_1\phi(\alpha,\beta) - \sigma_2\eta(\beta,\gamma) \tag{3.2}$$
$$\dot{\gamma} = q_2\sigma_2\eta(\beta,\gamma) - k_s\gamma, \tag{3.3}$$

où α, β et γ sont les concentrations respectives en substrat, produit 1 et produit 2 ; ϕ et η sont les fonctions de vitesse cinétique des enzymes E_1 et E_2.

La vitesse d'injection du substrat est $v = \epsilon v'$. Le facteur $\epsilon^{-1} \gg 1$ donne la constante de temps du substrat, qui évolue beaucoup plus lentement que les produits. C'est là qu'est l'origine de la variable lente du système puisqu'on peut considérer α comme un paramètre dans un premier temps et c'est en tenant compte de ses variations lentes qu'on obtiendra les oscillations lentes du système.

Avec ce modèle décrivant la dynamique du système, on peut faire les portraits de phase de β en fonction de α pris comme un paramètre, pour différentes valeurs du paramètre k_s. Ces portraits de phase sont représentés sur la figure 3.7 [Goldbeter, 1996]. On peut alors voir la progression des bifurcations de Hopf associées à ces situations.

On pourra cependant noter que le déplacement de la bifurcation de Hopf, absente sur la figure 3.7(a) et apparaissant sur les diagrammes suivant, va conduire le système

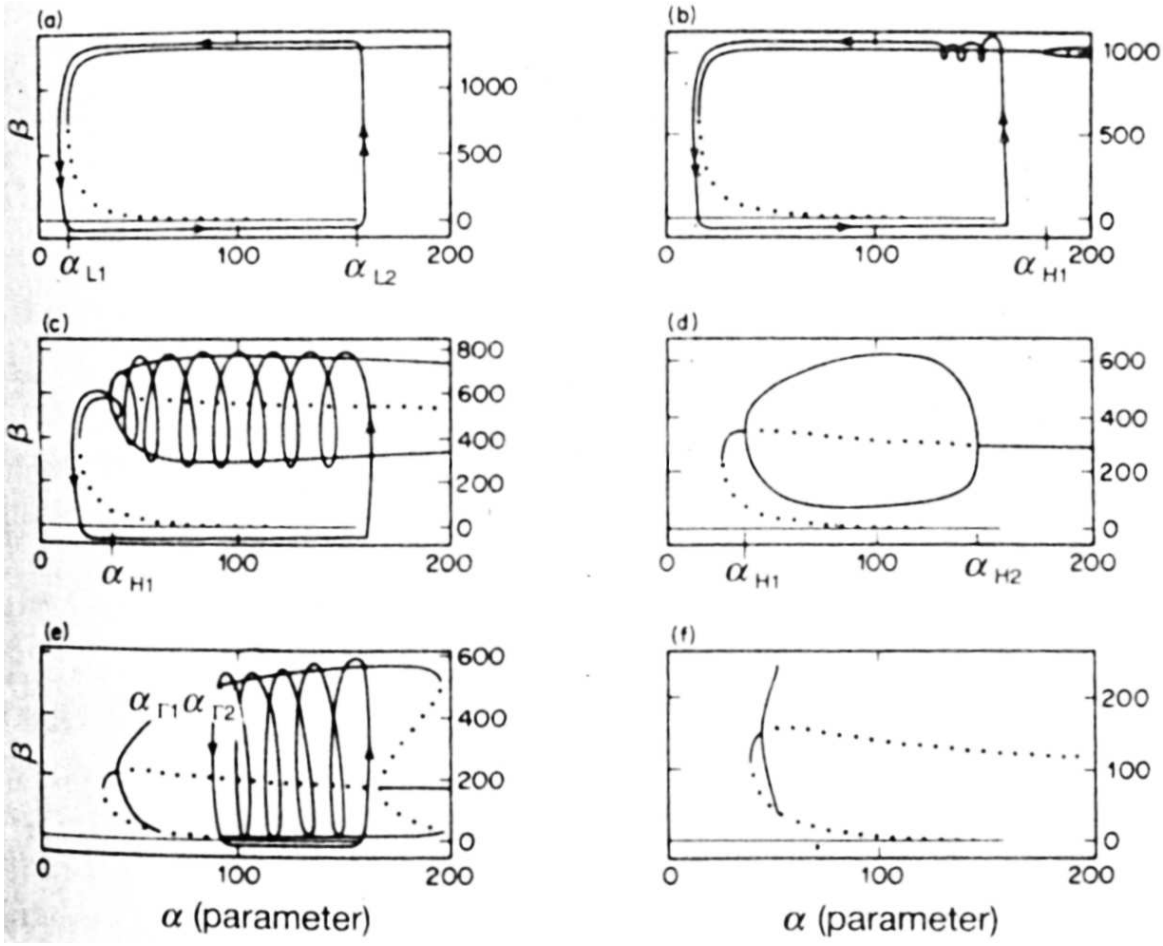


FIG. *3.7: Diagrammes de bifurcation de la concentration β (3.3) en fonction de α, considéré comme un paramètre, pour des valeurs décroissantes de k_s. Dans le cas de solutions périodiques, l'enveloppe des extréma de β est données. Les diagrammes ont été obtenus numériquement par le programme AUTO [Goldbeter, 1996]. Les traits pleins désignent des solutions stables, les pointillés des solutions instables. Les trajectoires fléchées en trait plein montre la trajectoire suivie par le système lorsque α est considéré comme une variable lente.*

à passer d'oscillations simples à des oscillations complexes. On comprend qu'avec le déplacement de la bifurcation de Hopf, des formes très différentes de bursting apparaissent. Lorsque le bursting devient très complexe, un portrait de phase à deux dimensions ne suffit plus à appréhender correctement la dynamique. Il faut avoir recours à d'autres représentations [Izhikevich, 2000], comme par exemple des cartes de premier retour [Goldbeter, 1996].

Ce bref aperçu des travaux expérimentaux et théoriques sur le bursting en biologie conduit à s'interroger sur l'existence de tels phénomènes dans d'autres domaines que la biologie où il est abondamment étudié. Nous montrons donc à présent des exemples d'observations expérimentales en optique.

3.1.2 Bursting en optique

3.1.2.a Cas des lasers à absorbant saturable

En optique, les lasers à absorbant saturable présentent des comportements ayant l'allure d'oscillations en rafale. La figure 3.8 [Tachikawa *et al.*, 1986] est un exemple d'observations expérimentales réalisées avec un laser CO_2 pour différentes valeurs du courant de décharge. Le dispositif expérimental est un laser CO_2 dans la cavité duquel est placé un absorbant saturable conduisant à des impulsions sur l'intensité du laser. Lorsque l'intensité du courant de décharge augmente, des oscillations non-amorties apparaissent sur la décroissance des impulsions donnant aux impulsions des formes suggérant des oscillations en rafales.

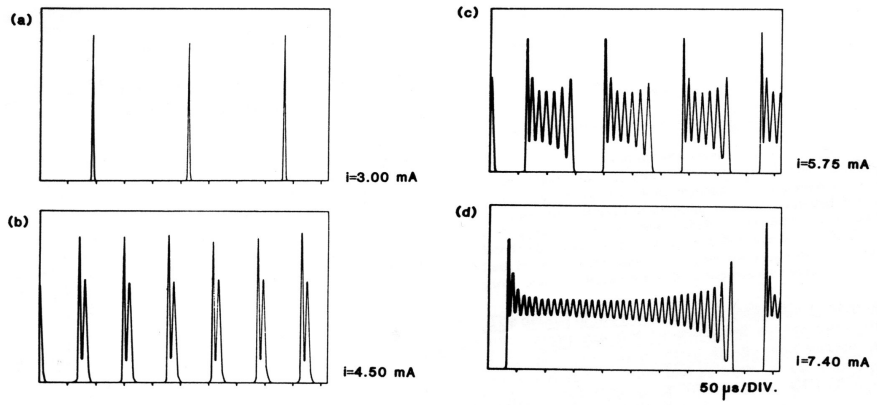


FIG. *3.8: Intensité d'un laser présentant des impulsions Q-switch en fonction de l'intensité du courant de décharge [Tachikawa et al., 1986].*

Dans le cas de cet exemple, la variable rapide (les oscillations non-amorties) n'existe pas séparément de la variable lente (les impulsions Q-switch), il ne s'agit donc pas de l'interaction entre deux mécanismes d'instabilité différents qui donne naissance aux oscillations observées. On ne peut donc pas parler de bursting dans ce cas.

Un autre exemple d'oscillations en rafale dans les lasers CO_2 est donné sur la figure 3.9 [Meucci *et al.*, 2002]. Dans ce cas, un modulateur de pertes est placé à l'intérieur de la cavité du laser CO_2. Une première boucle de rétroaction de l'intensité détectée en sortie entraîne le laser dans un régime chaotique homocline. Une seconde boucle de rétroaction réinjecte l'intensité filtrée par un filtre passe-bas permettant d'obtenir une fréquence lente.

Dans ce cas il existe bien deux mécanismes d'instabilités ayant deux échelles de temps très différentes. Cependant elles sont engendrées artificiellement par la présence de deux boucles de rétroaction.

Nous allons montrer que dans le cas des OPO, les deux échelles de temps sont naturellement présentes dans la dynamique du système.

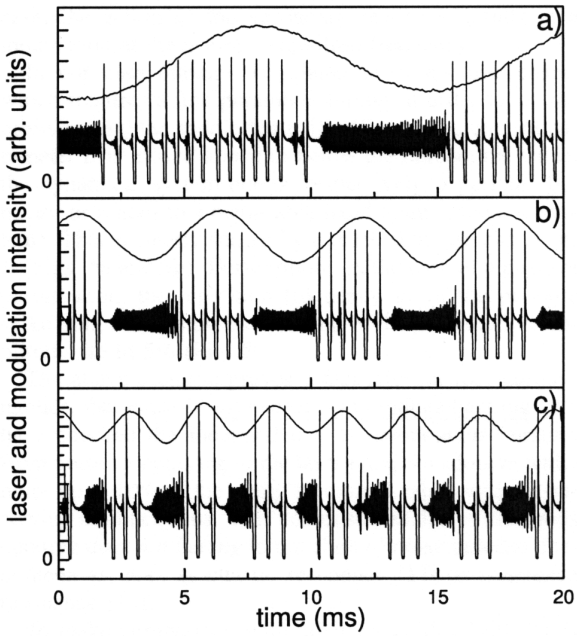


FIG. *3.9: Séries temporelles de l'intensité à la sortie du laser pour trois valeurs différeentes de la fréquence de coupure du filtre passe-bas de la seconde boucle de rétro-action : (a) 100Hz, (b) 300 Hz et (c) 600Hz.*

3.1.2.b Etude expérimentale et théorique de bursting dans un TROPO

Nous avons montré dans le chapitre précédent des régimes de l'OPO où des oscillations rapides de 1 à 200 MHz sont superposées à des oscillations lentes, de l'ordre de la dizaine de kHz. Il s'agit d'un cas particulier d'oscillations multimodes transverses pour lesquelles nous avons montré (chapitre 2) la validité d'un modèle bimode que nous utiliserons dans cette partie pour notre étude théorique. Ces instabilités ont typiquement des formes d'oscillations en rafales. Cependant, l'OPO peut aussi présenter des comportements rappelant le bursting dans d'autres situations dont nous montrerons des exemples.

3.1.2.b-i Observations expérimentales de bursting

3.1.2.b-i.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est identique à celui de la partie 2.1.2. Il s'agit d'un OPO triplement résonant. Le milieu non-linéaire est un cristal de KTP (15mm x 5mm x 5mm) coupé pour un accord de phase de type II. Les miroirs sphériques de rayons de courbure 5 cm, donnent une finesse de 50 pour la pompe et 550 pour le signal et le complémentaire pour la plupart des enregistrements. La taille moyenne de la cavité est de 47mm. Le seuil de l'OPO est environ de ∼30mW et la puissance de pompe à l'entrée de la cavité d'au moins $3.5W$ c'est à dire une centaine de fois le seuil. On se reportera à la partie 2.1.2 sur la raison d'un seuil aussi élevé.

Nous commencerons par quelques exemples de bursting qui à priori ne sont pas

basés sur le mécanisme d'oscillations rapides étudié au chapitre 2. Cependant, leur forte ressemblance aux régimes observés en biologie nous a conduit à les décrire ici.

3.1.2.b-i.2 Bursting de fréquence rapide inférieure à 1MHz

Si on observe la dynamique du système sur une échelle de quelques dizaines de millisecondes, l'OPO est soumis à des fluctuations thermiques et mécaniques. Notamment, des oscillations de l'intensité à une fréquence d'environ 300Hz sont alors toujours observées dont l'origine est certainement mécanique. C'est ces fluctuations qui sont sans doute à l'origine de la variable lente du système.

Les figures 3.10 et 3.11 montrent les oscillations en rafales présentées par l'intensité du signal sur de telles échelles de temps. Les oscillations rapides ont alors les mêmes caractéristiques pour leur forme et leur fréquence que les oscillations d'origine thermique décrites dans la partie 1.2.2 [Suret *et al.*, 2000, 2001b]. Notre but n'étant pas d'étudier en détail ces formes particulières de bursting, nous nous limiterons à une brève description des signaux observés.

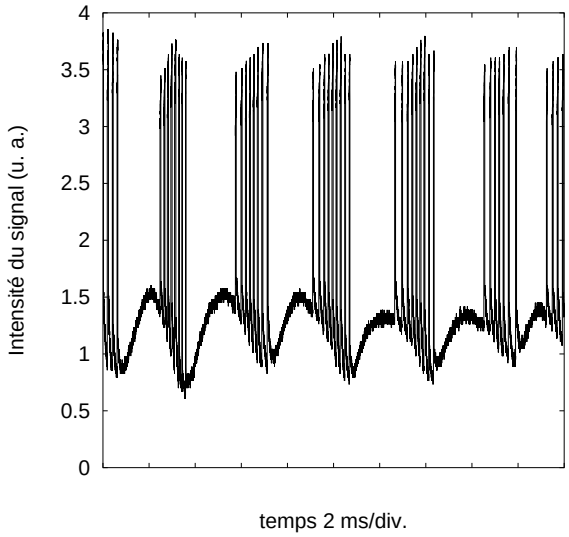


FIG. *3.10: Bouffées d'oscillations thermiques de fréquence 6.7 kHz. La fréquence d'apparition des bouffées est de 300Hz.*

Sur la figure 3.10 on observe des bouffées d'oscillations thermiques de fréquence 6.7 kHz séparées par des phases d'évolution lente du système. La fréquence d'apparition des bouffées est 300Hz. Durant les phases d'évolution lente, le système suit la branche stationnaire d'un mode. Lorsqu'il arrive à proximité d'un changement de mode, il entame des cycles d'oscillation entre ces deux modes. L'amplitude de ces oscillations est à peu prés constante et immédiatement de grande amplitude. On remarquera les similitudes entre ce régime et les oscillations en rafales présentés par les neurones (cf. figure 3.1).

La figure 3.11 présente une forme de bursting plus complexe. On peut décomposer un cycle de burst de fréquence 250Hz en quatre phases :

(a) extinction du signal, la température du cristal diminue,

(b) démarrage du signal sur un mode dont il suit la branche stationnaire tandis que la température augmente,

(c) démarrage d'oscillations de fréquence 500kHz d'amplitude non nulle et dont l'amplitude augmente sans retour à zéro de l'intensité : le système est passé par une bifurcation de Hopf sous-critique.

(d) les oscillations commutent sur une nouvelle fréquence : 90kHz, elles gardent une amplitude constante et reviennent à zero. Elles sont cependant plus irrégulières que les oscillations monomodes thermiques [Suret *et al.*, 2000].

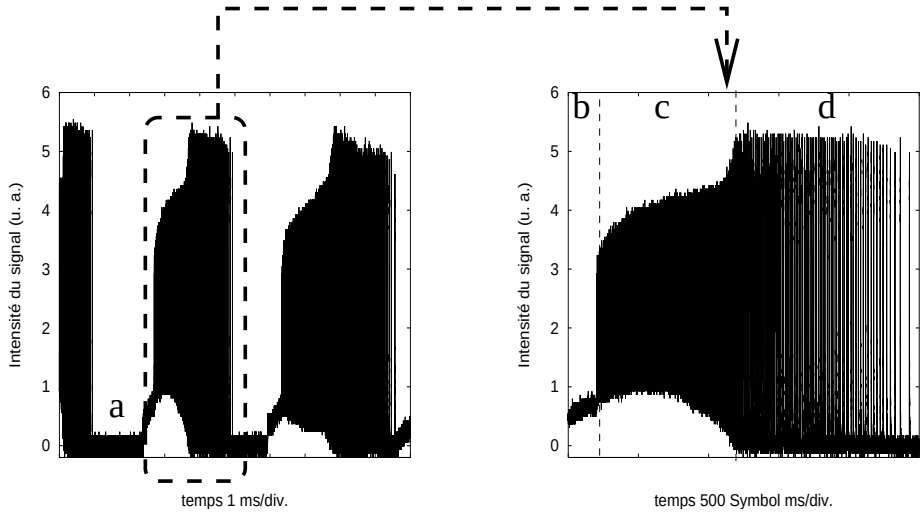


FIG. *3.11: Oscillations complexes d'origine thermique. Le système suit des cycles de quatre phases : extinction, évolution le long d'un mode, démarrage d'oscillations thermiques à une fréquence de 500kHz sans retour de l'intensité à zero, puis oscillation thermiques plus lentes (∼90kHz) avec retour à zero de l'intensité. La fréquence des cycles est de 250Hz*

Si les comportements que nous venons de présenter méritent sans aucun doute l'appellation de bursting, ils semblent faire intervenir uniquement des phénomènes thermiques et mécaniques et se distinguent donc des oscillations multimodes transverses que nous avons étudiées de manière plus approfondie dans le chapitre 2 et auxquelles nous nous restreignons dans la suite. Ces oscillations se caractérisent par des fréquences hautes beaucoup plus élevées.

3.1.2.b-i.3 Bursting dont la fréquence rapide met en jeu des oscillations multimodes transverses

Les formes de bursting observées sont du type de celles de la figure 3.12. Les oscillations lentes d'origine thermique sont de l'ordre de la dizaine de kHz, tandis que les instabilités rapides, engendrées par un couplage de plusieurs modes transverses ont des fréquences entre 1MHz et plus de 200MHz.

On voit sur la figure 3.12 que les effets thermiques font commuter le système entre deux solutions, une d'intensité nulle et l'autre d'intensité non nulle. Lorsque

le système est sur la solution non-nulle, il évolue d'abord lentement puis passe par une bifurcation de Hopf surcritique, car les oscillations, de fréquence environ 1MHz, démarrent avec une amplitude nulle. L'amplitude de celles-ci augmente jusqu'à ce que le système bascule de nouveau sur la solution nulle. La forme de l'enveloppe des oscillations rapides présente une déformation caractéristique appelée "effet canard" juste après la bifurcation de Hopf et avant de prendre une forme paraboloïdale plus usuelle. Cet effet est directement lié à la traversée de la bifurcation avec une vitesse finie.

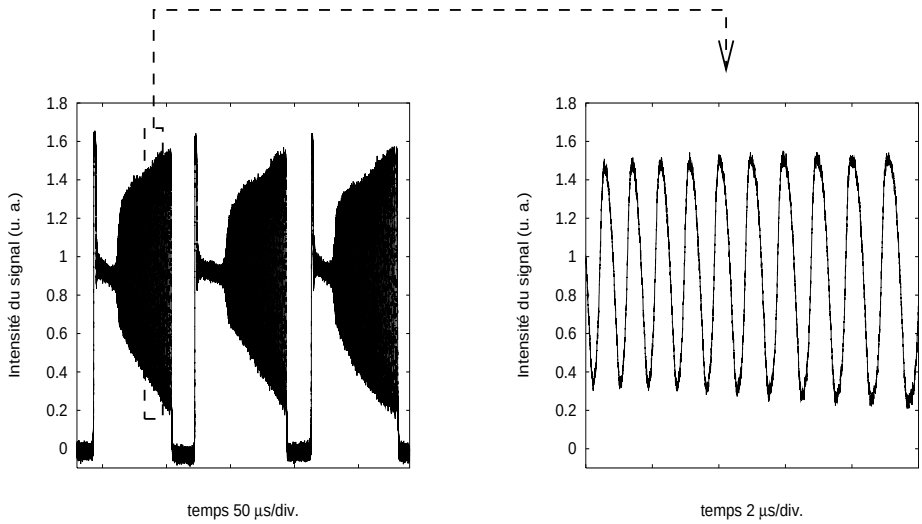


FIG. *3.12: Oscillations en bouffées dans un TROPO à cent fois le seuil. Les oscillations lentes sont de 12kHz, les oscillations rapides de 1MHz.*

Suivant la place de la bifurcation de Hopf, on pourra observer des oscillations rapides tout le long de la branche haute ou des oscillations de pleine amplitude au début, dont l'amplitude diminue jusqu'à atteindre une solution constante en traversant la bifurcation de Hopf en sens inverse. En changeant la taille de la cavité à l'aide de la cale piezo-électrique, on peut observer des formes de bursting variées.

Sur la figure 3.13(a), les bouffées se développent autour d'une intensité constante non-nulle à une fréquence d'environ 8kHz. Les sauts de mode ont une forme triangulaire, liée sans doute à la forme des résonances dans ces conditions de paramètres. Lorsque l'intensité revient à sa valeur constante une bouffée d'oscillation de fréquence environ 2MHz se forme dont la figure 3.13(b) montre un agrandissement.

Sur la figure 3.13(c), les bouffées se forment aussi autour d'une valeur moyenne non-nulle. La fréquence lente est environ 15kHz. Les oscillations rapides apparaissent avec une grande amplitude qui reste constante pendant la durée de la bouffée. Leur fréquence est d'environ 1MHz. Leur forme (figure 3.13(d)) peut conduire à s'interroger sur la possibilité d'une origine thermique, sachant que près de la bifurcation qui leur donne naissance, la fréquence des oscillations thermiques peut atteindre cet ordre de grandeur de fréquence.

Sur la figure 3.13(e), les oscillations se situent sur la branche d'intensité la plus faible. Le système oscille thermiquement entre deux modes à une fréquence d'environ

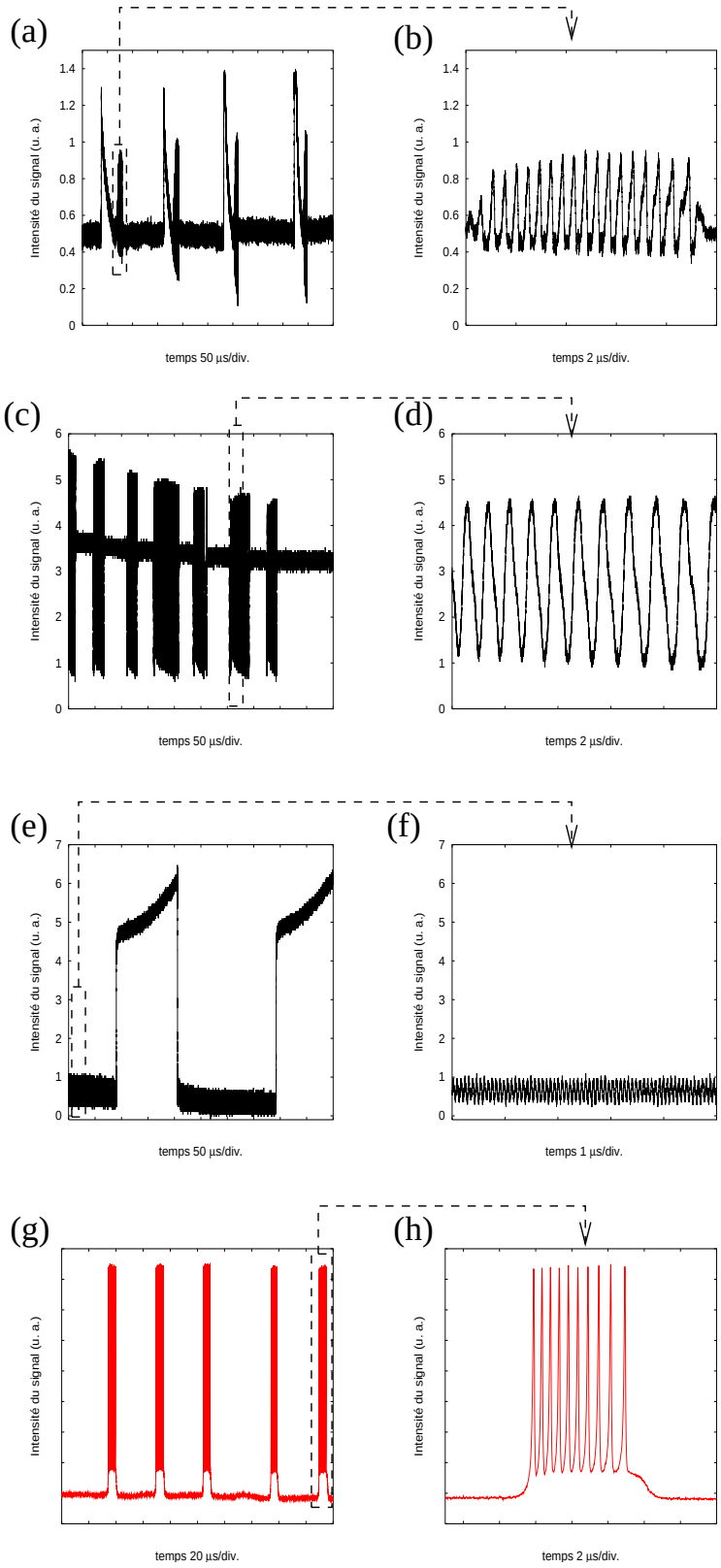


FIG. *3.13: Oscillations en bouffées dans un TROPO à cent fois le seuil. (a) et (b) oscillations lentes 8kHz, oscillations rapides environ 2MHz, (c) et (d) oscillations lentes 15kHz, oscillations rapides environ 1MHz, (e) et (f) oscillations lentes 4kHz, oscillations rapides 14MHz, (g) et (f) oscillations lentes 25kHz, oscillations rapides 1.7MHz.*

4kHz. Ces deux modes sont d'intensité non-nulle et la solution de la branche du bas présente des oscillations de faible amplitude de fréquence 14MHz agrandie sur la figure 3.13(f).

Sur la figure 3.13(g), la fréquence lente est de l'ordre de 25kHz. Le système oscille entre une intensité non nulle presque constante et des oscillations de grandes amplitudes montrées sur la figure 3.13(h). Les oscillations rapides occupent toute la zone où l'intensité a commuté et leur amplitude reste presque constante pendant tout le train de burst.

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, nous avons observé des instabilités rapides de fréquence particulièrement élevées. Nous en rappelons deux exemples sur la figure 3.14. Pour la figure (a), la fréquence rapide est de 270MHz et la fréquence lente de 5kHz. La figure 3.14(c) les oscillations rapides sont d'environ 130MHz, les oscillations lentes de 7.5kHz.

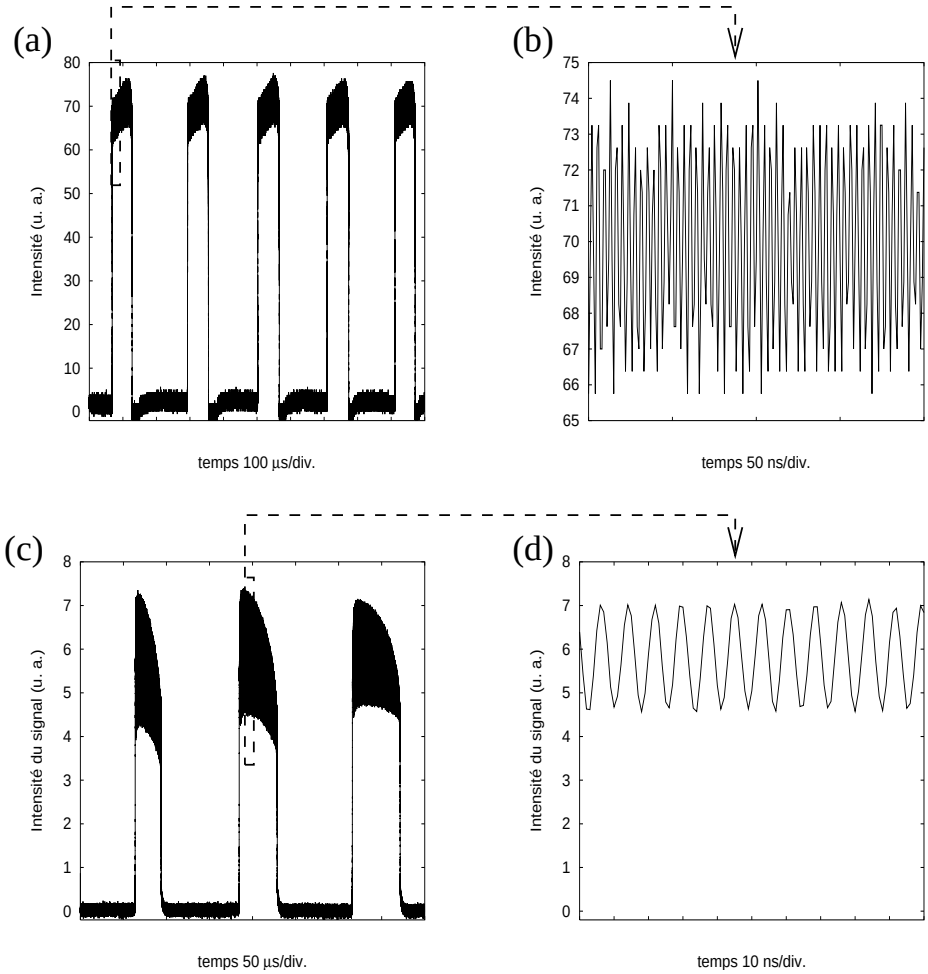


FIG. *3.14: Intensité du signal au cours du temps, (a) et (b) oscillations rapides 270MHz, oscillations lentes 5kHZ, (c) et (d), oscillations rapides 130MHz, oscillations lentes 7.5kHz.*

L'OPO présente donc expérimentalement des formes et des fréquences de bursting très variées. D'autre part il existe un modèle numérique robuste permettant de décrire ces oscillations (voir le chapitre 2). Nous allons donc montrer que l'on peut représenter la dynamique de ce système sur un portrait de phase à deux dimensions décrivant de manière particulièrement claire le mécanisme du bursting.

3.1.2.c Modélisation et simulations numériques

3.1.2.c-i Rappel du modèle

Le modèle utilisé est le modèle multimode transverse dégénéré, où on considère la pompe monomode transverse TEM_{00}. Le signal se décompose sur deux modes transverses différents dont les amplitudes lentement variables sont notées respectivement A_1 et A_2. Le champ total du signal s'écrit :

$$E(\vec{r},t) = f_1(\vec{r})E_1(t) + f_2(\vec{r})E_2(t),$$

où les fonctions $f_i(\vec{r})$ décrivent la structure transverse des champs et où $E_1(t) = A_1(t)\exp(i\omega_p t/2 - k_p z/2)$ et $E_2(t) = A_2(t)\exp(i\omega_p t/2 - k_p z/2)$ décrivent les variations temporelles dans le même repère tournant. Le champ de la pompe s'écrit pour sa partie temporelle : $E_p(t) = A_p(t)\exp(i\omega_p t - k_p z)$. Les amplitudes des champs obéissent alors aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_p &= \gamma\left[-\left(1+i\sigma_p\right)A_p - A_1^2 - \chi A_2^2 - 2\chi_{12}A_1A_2 + E\right], && (3.4a)\\
\dot{A}_1 &= -\left(1+i\sigma_1\right)A_1 + A_pA_1^* + \chi_{12}A_pA_2^*, && (3.4b)\\
\dot{A}_2 &= -\left(1+i\sigma_2\right)A_2 + \chi A_pA_2^* + \chi_{12}A_pA_1^*, && (3.4c)\\
\dot{\theta} &= \epsilon\left(-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta\left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)\right), && (3.4d)
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \Delta_p - \frac{2\theta}{\gamma},\\
\sigma_1 &= \Delta_1 - \theta,\\
\sigma_2 &= \Delta_2 - \theta.
\end{aligned}$$

On a rajouté une variable lente θ décrivant l'écart en désaccord entre la cavité froide et la cavité chaude. L'équation différentielle (3.4) à laquelle obéit θ est phénoménologique [Suret, 2000]. Le paramètre $\epsilon \ll 1$ représente l'échelle de temps lente de variation de la température du système par rapport aux variables optiques. Le premier terme, linéaire, de l'équation (3.4d) représente la diffusion, les termes proportionnels à l'intensité permettent de tenir compte de l'absorption du cristal : les paramètres α et β sont liés aux constantes d'aborption du cristal aux longueurs d'onde respectivement de la pompe et du signal. On considère les variations au premier ordre des désaccords. Si $\Delta_{1,2}$ sont les désaccords des modes du signal de la cavité froide et $\sigma_{1,2}$ les désaccords pour la cavité chaude, θ est défini comme l'écart entre ces deux valeurs.

3.1.2.c-ii Diagramme de bifurcation

Comme θ varie sur des échelles de temps beaucoup plus longues que les variables optiques, on le considère dans un premier temps comme un paramètre de manière à construire un diagramme de bifurcation de l'intensité du signal $I_s = |A_1|^2 + |A_2|^2$ en fonction de θ.

On utilise les paramètres de la référence [Suret *et al.*, 2001a] : $E = 17.5$, $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0.7$, $\chi_{12} = 0.4$, $\Delta_p = 1.5$, $\Delta_1 = 12.5$, $\Delta_2 = 35.5$, $\gamma = 10$. Nous avons déterminé les solutions stationnaires et périodiques dans la plage de valeurs du paramètre θ qui nous intéresse grâce au programme AUTO.

On distingue sur le diagramme de la figure 3.15(a) trois branches de fonctionnement de l'OPO. Les branches extrêmes correspondent à des solutions stationnaires. Ce sont des solutions quasiment monomodes : lorsque les deux modes coexistent, celui qui a le plus grand désaccord en valeur absolue a une intensité très faible devant l'autre. Au milieu, il existe une solution périodique qui est représentée par l'enveloppe grisée des minima et maxima. La figure 3.15(b) est un agrandissement de la figure (a) centrée sur cette solution.

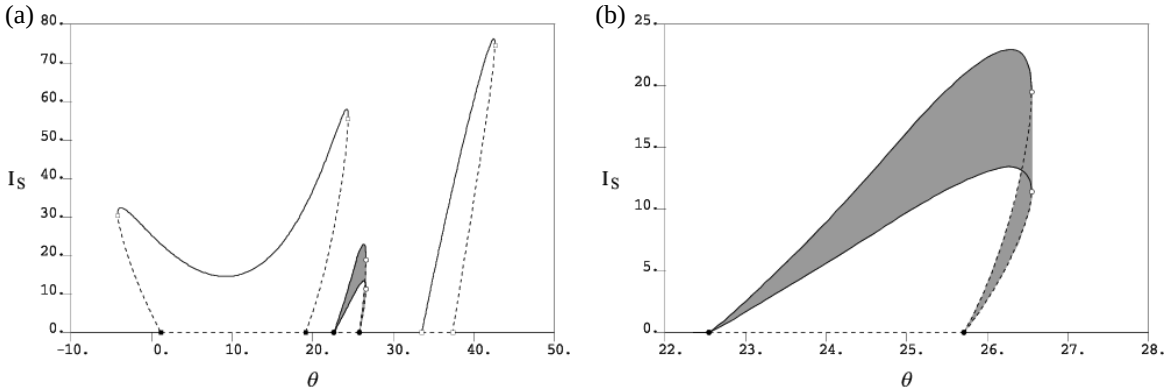


FIG. *3.15: (a)Diagramme de bifurcation de l'intensité totale du signal I_s en fonction de θ considéré comme un paramètre. Les traits continus sont des solutions stationnaires stables, les pointillés les solutions instables, la zone grisée représentent l'enveloppe des minima et maxima d'une solution périodique. (b) Agrandissement de la figure (a) entre les valeurs 22 et 28 du paramètre θ montrant la solution périodique. Une bifurcation de Hopf surcritique pour $\theta \simeq 22.5$ donne naissance à une solution périodique stable. Pour $\theta \simeq 26.5$ le système présente une bifurcation noeud-col. Une branche périodique instable relie cette bifurcation à une bifurcation dee Hopf sous-critique à $\theta \simeq 25.7$.*

La solution périodique émerge d'une solution stationnaire d'intensité nulle dans une bifurcation de Hopf à $\theta \simeq 22.5$. La solution périodique est stable jusqu'à une bifurcation noeud-col pour $\theta \simeq 26.5$. La solution devient alors instable jusqu'à une bifurcation de Hopf sous-critique pour $\theta \simeq 25.7$ où la branche rejoint la solution d'intensité nulle. Il y a coexistence entre les valeurs 25.7 et 26.5 du paramètre θ de deux solutions stables, une solution d'intensité nulle et une solution périodique stable, et donc bistabilité.

3.1.2.c-iii Portrait de phase

On tient compte à présent des variations lentes de θ qui devient une variable, et on intègre alors numériquement le système d'équation différentielle (3.4).

Le résultat des évolutions des intensités de la pompe $I_p = |A_p|^2$ et du signal $I_s = |A_1|^2 + |A_2|^2$ au cours du temps est montré sur la figure 3.16. L'unité de temps est le demi temps de vie du signal ($\simeq$80ns). On observe que les formes de bursting sont bien reproduites particulièrement lorsqu'on les compare aux résultats expérimentaux de la figure 3.14(c). On remarquera tout particulièrement le démarrage du burst avec des oscillations d'amplitude finie et le retour sur la branche basse par une bifurcation noeud-col, scénario identique à celui des résultats expérimentaux.

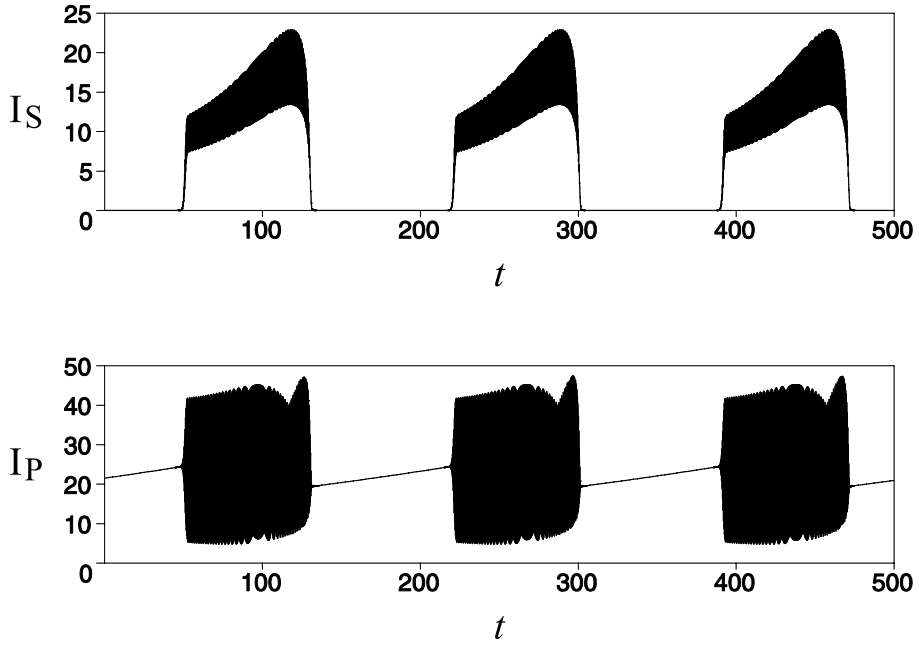


FIG. *3.16: Résultat de l'intégration numérique des équations* (3.4) *pour les valeurs des paramètres :* $E = 17.5$, $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0.7$, $\chi_{12} = 0.4$, $\Delta_p = 1.5$, $\Delta_1 = 12.5$, $\Delta_2 = 35.5$, $\gamma = 10$. *La figure du haut est l'intensité du signal au cours du temps, la figure du bas est l'intensité de la pompe. L'unité de temps est celle du temps de vie du signal* $\simeq$*80ns.*

En superposant les simulations numériques de I_s au diagramme de bifurcation de la figure 3.15(b) précédent, on obtient le portrait de phase du système représenté sur la figure 3.17.

La zone noire correspond aux oscillations rapides de l'intensité. Les flèches indiquent le chemin suivi par le système. On voit que le système suit globalement les branches du diagramme. Lorsque le système est sur la branche périodique, l'intensité du signal est non-nulle, donc la température du cristal augmente et le système se déplace vers la gauche sur le diagramme jusqu'à atteindre la bifurcation noeud-col où il commute sur la branche du bas. Sur cette branche, l'intensité du signal est nulle, donc la température du cristal diminue et le système se déplace vers la gauche sur la solu-

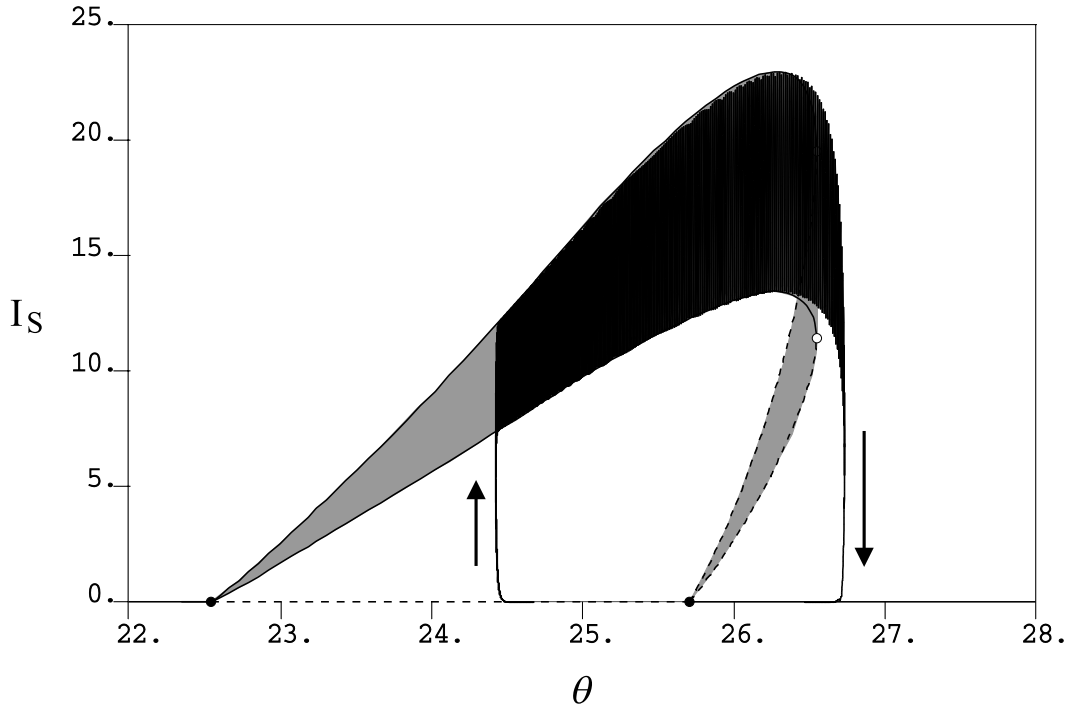


FIG. *3.17: Portrait de phase de l'intensité totale du signal lorsque θ est considéré comme une variable lente. Ce portrait est superposé au diagramme de bifurcation de la figure 3.5(b). Les flèches indiquent la trajectoire suivie par le système autour du cycle de bistabilité. La branche haute du cycle étant une solution périodique, l'intensité du signal présente des oscillations rapides pendant que le système parcourt cette solution.*

tion nulle jusqu'à atteindre la bifurcation à partir de laquelle cette solution devient instable et où le système retourne sur la branche périodique. Sur cette branche, le système dépasse la bifurcation et suit un certain temps la branche instable d'intensité nulle avant de commuter sur la solution périodique. Ce phénomène connu est lié à la traversée d'une bifurcation avec une vitesse non nulle du paramètre, il y a alors retard à la bifurcation. Nous reviendrons sur ce phénomène dans la partie 4.3. De même, en arrivant sur la bifurcation noeud-col, le système commute après la bifurcation pour les mêmes raisons.

Nous retrouvons bien un mécanisme identique à celui décrit en biologie : les variations de la température liée au parmètre θ font parcourir au système le cycle de bistabilité. C'est la variable lente du système. La branche stable d'intensité non nulle étant une solution périodique, le système oscille rapidement lorsqu'il est sur cette branche. L'intensité du signal I_s est donc la variable rapide. Il y a bien deux mécanismes d'instabilités à des échelles de temps différentes : un mécanisme thermique lent entraînant des oscillations de relaxation autour d'un cycle de bistabilité ; un mécanisme d'oscillations rapides lié au couplage entre les modes transverses du signal, dont le temps caractéristique est a priori celui du temps de vie du signal.

Cependant les fréquences les plus rapides des oscillations observées (>100MHz) sont bien supérieures à l'inverse du temps de vie du signal, et leur existence est donc étonnante. Nous allons expliquer l'existence de ces oscillations grâce à une analyse perturbative.

3.1.2.d Etude perturbative

3.1.2.d-i Analyse multi-échelles

3.1.2.d-i.1 Conditions de l'analyse

On va supposer que la fréquence des oscillations rapides est liée à la fréquence de battement $|\sigma_1 - \sigma_2|$ entre les deux modes transverses impliqués dans l'interaction. On va donc se placer dans des conditions où $|\sigma_1|$ et $|\sigma_2|$ sont grands et à l'origine de la variable rapide, tandis que le temps des équations, c'est à dire le temps de vie des photons du signal dans la cavité, sera le temps lent.

La figure 3.18 schématise la situation dans laquelle on va se placer. On y a représenté les deux résonances correspondant aux deux modes transverses par des courbes en cloche centrées sur les valeurs ω_1^R et ω_2^R des fréquences de résonance. La fréquence du repère tournant adapté dans le cas d'un modèle dégénéré est $\omega_{p/2}$. On introduit deux nouveaux paramètres : $\Delta\sigma_s = \omega_2^R - \omega_1^R = \sigma_2 - \sigma_1$ est la fréquence de battement entre les deux modes transverses considérés ; $\sigma_s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ est la moyenne des désaccords, c'est-à-dire l'écart entre le barycentre des résonances et la fréquence du repère tournant.

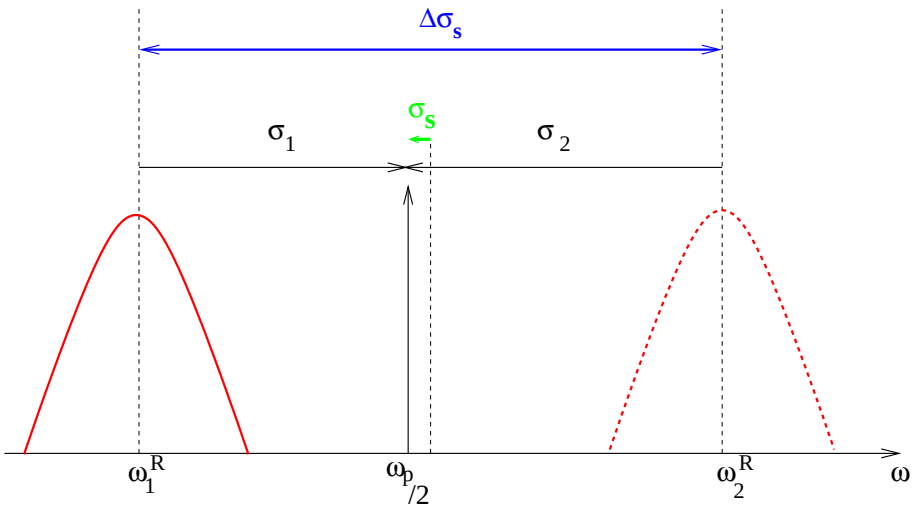


FIG. *3.18: Représentation des paramètres intervenant dans notre développement : ω_1^R et ω_2^R sont les fréquences de résonance des deux modes transverses, $\omega_p/2$ la fréquence du repère tournant, σ_1 et σ_2 les désaccords des deux champs, $\Delta\sigma_s$ la fréquence de battement entre les deux modes transverses et σ_s la moyenne des désaccords.*

On se place donc dans des conditions où $|\sigma_1|$ et $|\sigma_2|$ sont grands devant $|\sigma_p|$ et $|\sigma_1 + \sigma_2|$. Plus précisément, on considère $\sigma_1, \sigma_2 = O(\eta^{-1})$ et $\sigma_p, \sigma_s = O(1)$ où η est

un petit paramètre. On voit sur les équations 3.4 que les amplitudes se comportent grossièrement en $e^{-i\sigma_j t}$. Comme le temps des équations est $O(1)$, les amplitudes vont tourner rapidement, dépendant ainsi d'une variable rapide

$$s \equiv \eta^{-1} t \text{ avec } \sigma_j = \eta^{-1}\delta_j,$$

où les δ_j sont des fonctions $O(1)$ de θ. Dans le domaine de θ qui nous intéresse, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ est $O(1)$. On cherche des solutions de la forme :

$$A_p = A_{p0}(s,t) + \eta A_{p1}(s,t) + \dots \quad (3.5)$$
$$A_j = A_{j0}(s,t) + \eta A_{j1}(s,t) + \dots \quad (3.6)$$

où s est la variable de temps rapide et t la variable de temps lente. On suppose que ces deux temps sont indépendants, c'est à dire que les variables se comportent indépendamment à ces deux échelles, on a alors :

$$A'_p = \eta^{-1} A_{ps} + A_{pt}$$
$$A'_j = \eta^{-1} A_{js} + A_{jt}$$

où les indices s et t indiquent les dérivées partielles par rapport à s et t.

3.1.2.d-i.2 Développement multi-échelles

Le but est alors de développer les équations 3.4 en fonction de ces deux temps. On ne s'occupe pas de θ dans notre calcul. Les détails du calcul sont présentés dans l'annexe B.

Le calcul fait apparaître des variables moyennées B_p et B_j sur le temps rapide, les A_{p0} et A_{j0} étant les solutions à l'ordre dominant.

$$B_p(t) = A_{p0}(t),$$
$$B_j(t) = A_{j0}(t)\exp(i\delta_j s).$$

Ces variables moyennées obéissent aux équations :

$$B'_p = \gamma[-(1+i\sigma_p)B_p - 2\chi_{12}B_1B_2\exp(-2i\sigma_s t) + E],$$
$$B'_1 = -B_1 + \chi_{12}B_pB_2^*\exp(2i\sigma_s t),$$
$$B'_2 = -B_2 + \chi_{12}B_pB_1^*\exp(2i\sigma_s t).$$

Si on opère le changement de variable suivant :

$$B_p = a_p,$$
$$B_1 = a_1\exp(i\sigma_s t),$$
$$B_2 = a_2\exp(i\sigma_s t),$$

qui correspond à changer de repère tournant pour les variables B_1 et B_2. On obtient :

$$\begin{aligned} a_p' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)a_p - 2\chi_{12}a_1a_2 + E], \\ a_1' &= -(1+i\sigma_s)a_1 + \chi_{12}a_pa_2^*, \\ a_2' &= -(1+i\sigma_s)a_2 + \chi_{12}a_pa_1^*. \end{aligned}$$

Ces équations sont analogues à celles d'un TROPO non-dégénéré où a_1 serait le signal et a_2 le complémentaire. Les équations des trois champs sont dans trois repères tournants différents, alors que pour un TROPO dégénéré le repère tournant obligatoire pour le signal est $\omega_p/2$. En fait le couplage entre les modes transverses autorise des fréquences différentes de $\omega_p/2$ pour a_1 et a_2 pourvu que la conservation de l'énergie soit respectée : $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$. Cela correspond à une situation où les fréquences des champs ne sont pas accrochées. En fait dans cette situation un mode transverse joue le rôle du signal et l'autre mode transverse celui du complémentaire.

On peut montrer (voir annexe B) qu'asymptotiquement et pour les nouvelles variables $a_s = \sqrt{a_1a_2}$ (où la racine est à prendre au sens complexe) et $\phi = \arg(a_1a_2^*)$ on a les équations :

$$\begin{aligned} a_p' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)a_p - 2\chi_{12}a_s^2 + E] \\ a_s' &= -(1+i\sigma_s)a_s + \chi_{12}a_pa_s^* \\ \phi' &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve alors avec les deux premières équations le modèle d'un TROPO dégénéré dont la dynamique a déjà été étudiée dans le chapitre 1. On remarquera que la fréquence de battement n'intervient pas dans ces équations : seule la moyenne des désaccords σ_s intervient. Le fonctionnement multimode de l'OPO, une fois les oscillations rapides moyennées, a donc les mêmes propriétés que le cas monomode, notamment son seuil est donné par :

$$E_{th} = \frac{\sqrt{(1+\sigma_s)^2(1+\sigma_p)^2}}{\chi_{12}}.$$

Notons que ce calcul du seuil est exact même s'il est issu des premiers termes du développement perturbatif. En effet le seuil marque le passage d'une solution nulle à une solution non nulle, or il faut que la solution à l'ordre le plus bas soit non nulle pour que le développement complet le soit.

Comme le seuil ne dépend pas de la fréquence de battement $\Delta\sigma$, il peut donc être bas même lorsque les deux modes transverses sont très éloignés. En fait on se retrouve dans une situation où *il existe de nouvelles résonances, virtuelles, autour du barycentre des résonances des deux modes.*

Lorsqu'on poursuit le développement au premier ordre en η, on obtient les termes oscillants de la somme des intensités :

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = F_0(t) + [F_1(t)e^{i(\sigma_2-\sigma_1)t} + c.c.],$$

où les fonctions $F_i(t)$ varient sur une échelle de temps lente.

La fréquence d'oscillation de l'intensité est donc donnée au premier ordre par $|\sigma_2 - \sigma_1|$, la fréquence de battement entre les deux modes transverses. Ainsi la fréquence des oscillations les plus rapides donne l'écart entre les résonances des modes transverses impliqués dans l'interaction, et ces modes de fonctionnement peuvent exister car leur seuil ne dépend pas de cette fréquence de battement.

Pour donner un ordre de grandeur, une fréquence d'oscillation de 300 MHz correspond à un écart entre les modes de 60 fois la largeur d'un mode. Si la fréquence du repère tournant se trouve à peu près au centre des deux résonances, il y a un écart d'environ 150MHz entre le centre de la résonance et la fréquence du repère tournant. Un tel écart, en fonctionnement monomode et en considérant le désaccord de la pompe nul, conduirait à un seuil de l'ordre de 60 dans notre normalisation. Par contre en fonctionnement multimode si $\sigma_s \simeq 0$, le seuil est de l'ordre de $1/\chi_{12}$, soit 2.5 avec la valeur utilisée dans les simulations numériques. Cette observation fournit une raison de plus pour laquelle les régions multimodes peuvent être observées beaucoup plus fréquemment que l'on pourrait s'y attendre.

Une autre conséquence du développement perturbatif qui vient d'être mené est la démonstration de l'équivalence entre le modèle monomode non-dégénéré et le modèle monomode non-dégénéré aux temps longs. Une variable de champ unique peut décrire le signal et le complémentaire. Réciproquement, dans le cas du modèle bimode dégénéré, le fait de pouvoir réduire le système à des équations monomodes montre que les photons correspondants aux deux modes transverses sont intriqués.

3.1.2.e Comportements plus complexes

Nous avons jusqu'ici passé en revue des régimes expérimentaux dans lesquels les oscillations rapides sont quasi sinusoïdales et régulières. Cependant, pour des tailles de cavité d'environ 60mm, donc pour une cavité un peu plus grande que la configuration confocale, nous avons pu observer des comportements oscillatoires plus complexes superposés ou non à des oscillations thermiques. Nous donnons donc pour conclure cette partie deux exemples d'oscillations en rafales "complexes".

La figure 3.19(a) montre un exemple de trains de bursting séparés par des sauts de modes ne présentant pas d'oscillations rapides. Lorsqu'on agrandit un des bursts (figure 3.19(b)), on s'aperçoit que les oscillations rapides présentent une zone de doublement de période. La fréquence lente est d'environ 13kHz, la fréquence rapide est de 3MHz.

La figure 3.20(a) montre un comportement encore plus complexe : outre le fait que la figure (a) présente le basculement d'un type de bursting à un autre type, les figures (b) et (c) révèlent que les oscillations complexes des bursts sont irrégulières. Pour la séquence de bursts de petite taille la fréquence lente est 20kHz et la fréquence rapide 5MHz. Pour la seconde séquence, la fréquence lente est 7kHz et la fréquence lente 9MHz.

Ainsi, nous avons étudié dans cette partie des comportements oscillatoires relativement complexes puisqu'ils mettaient en jeu deux variables de temps très différentes. Nous allons à présent nous intéresser à des oscillations irrégulières.

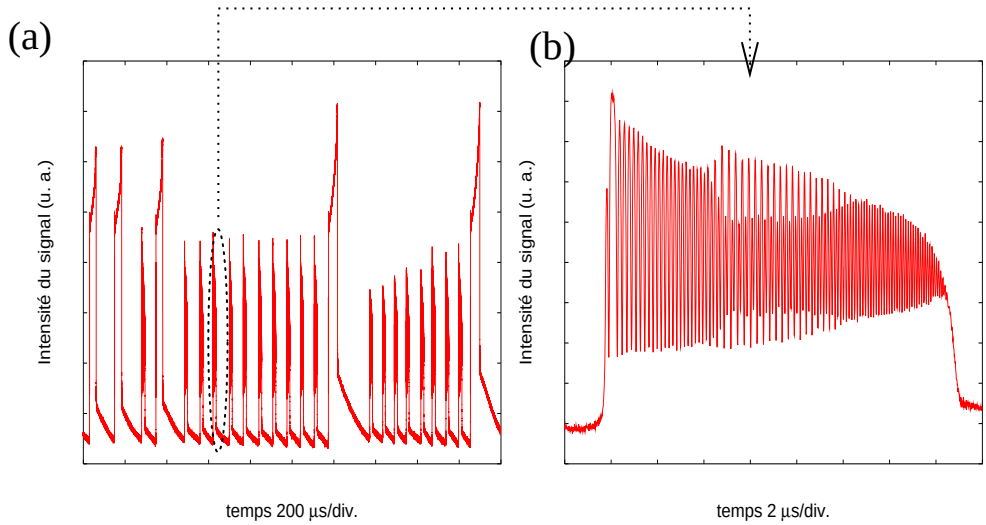


FIG. *3.19: Intensité du signal au cours du temps. La figure (b) est un agrandissement d'un des bursts de la figure (a) montrant la présence de doublement de période pendant les oscillations rapides. Celles-ci ont une fréquence d'environ 3MHz, la fréquence basse étant d'environ 13kHz.*

3.2 Signature de chaos dans une série temporelle expérimentale

Dans la partie précédente, la complexité des oscillations de type bursting a pour origine la présence de deux mécanismes distincts d'instabilité dans le système dont les temps caractéristiques sont très différents. Chaque instabilité existe isolément et chacune conduit le système à décrire un cycle limite dans l'espace des phases. L'interaction de ces deux mécanismes donne naissance aux oscillations en rafale. Cependant, dans un système non-linéaire, on s'attend en général à observer une autre classe de comportements complexes dans certaines gammes de paramètres : du *chaos déterministe*. Dans ce cas, la trajectoire du système parcourt une structure fractale appelée *attracteur étrange* contenant une infinité d'orbites périodiques instables. Un tel régime se caractérise par son imprévisibilité : deux conditions initiales très proches engendrent des trajectoires très différentes.

Le chaos temporel déterministe caractérise un système dont tous les paramètres sont fixés mais dont le comportement est cependant irrégulier au cours du temps. Le système, bien que gouverné par des équations déterministes, est fortement sensible aux conditions initiales et sa trajectoire dans l'espace des phases est imprédictible même si elle reste localisée sur l'attracteur étrange. De tels comportements ont été observés dans de nombreux systèmes non linéaires et ont été prédits théoriquement dans l'OPO triplement résonant (cf. partie 1.2) il y a une quinzaine d'années. Cependant, à notre connaissance, il n'y a eu à ce jour aucune observation expérimentale de chaos dans un TROPO.

Un ensemble d'outils mathématiques a été développé pour caractériser et quantifier les comportements chaotiques (par exemple les exposants de Lyapounov ou les

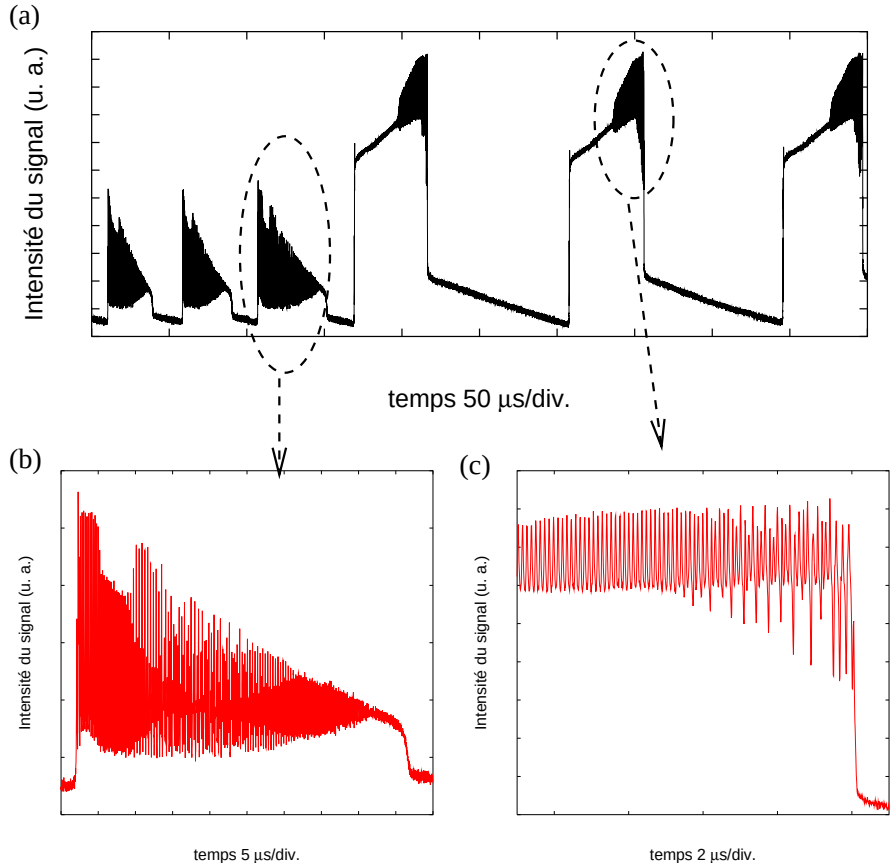


FIG. *3.20: Intensité du signal au cours du temps présentant deux formes de bursting différentes. Les figures (b) et (c) sont des agrandissements de chaque type de burst. Les oscillations rapides présentent un comportement irrégulier.Les fréquences lentes sont comprises entre 20 et 7kHz, les fréquences rapides entre 5 et 7MHz.*

dimensions fractales), mais ces outils supposent d'obtenir de longues séries temporelles (idéalement des séries infinies) à paramètres fixes. Or dans de nombreuses situations expérimentales, les paramètres dérivent trop rapidement pour que l'on puisse savoir si l'irrégularité de la série temporelle vient du balayage du paramètre qui conduit le système à explorer successivement différentes orbites, ou si la complexité vient du caractère chaotique du système dans la zone de paramètres explorés. Ainsi, dans le cas de l'OPO, nous avons vu que dans de nombreuses configurations la longueur optique de la cavité était constamment balayée par la température, imposant de considérer les désaccords des champs non plus comme des paramètres mais comme des variables lentes du système. Comme des comportements chaotiques s'observent généralement pour des puissances de pompe élevées, car c'est là que le système est fortement non linéaire, on ne peut s'affranchir de ce balayage en diminuant la puissance de pompe.

Dans cette partie nous allons présenter des comportements temporels irréguliers que nous avons pu observer expérimentalement à plusieurs centaines de fois le seuil. L'utilisation de méthodes classiques d'analyse de la dynamique du système suggère que le système passe par un régime de chaos déterministe durant le balayage des

paramètres mais la série temporelle est trop courte et la vitesse de balayage trop rapide pour pouvoir affirmer que le système est chaotique. Nous utiliserons alors des outils topologiques permettant, à l'aide de l'analyse d'une unique orbite périodique et bien que les paramètres du systèmes fluctuent, de prouver que le système est passé par un régime chaotique.

Un article basé sur une partie de ces résultats a été soumis récemment [Amon et Lefranc, 2003].

3.2.1 Observation de régimes irréguliers

3.2.1.a Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est semblable à celui de la partie précédente ainsi que celui du chapitre 2. L'OPO est constitué d'un cristal de KTP ($5 \times 5 \times 15\text{mm}^3$, accord de phase de type II) placé entre deux miroirs résonants pour le champ pompe (532nm) avec une finesse de 50 et pour les champs signal et complémentaire (1064nm) avec une finesse de 550. La taille de la cavité est comprise entre 57 et 63 mm, donc proche confocal pour nos miroirs de rayon de courbure 5 cm. L'OPO est pompé à plusieurs centaines de fois le seuil, le seuil étant d'environ 18 mW [1]. Les comportements temporels des intensités de la pompe, du signal et du complémentaire sont identiques.

3.2.1.b Doublement de période

3.2.1.b-i Doublement de période sans oscillations lentes de type thermique

Pour ces tailles de cavité et à puissance de pompe maximale, on a pu observer de simples oscillations rapides superposées ou non à des oscillations lentes d'origine thermique dont on a montré des exemples dans la partie 2.3.1.a-iii parmi d'autres comportements semblables observés à d'autres tailles de cavité. Cependant, dans cette configuration particulière, des oscillations plus complexes, présentant notamment du doublement de période, ont pu être observées elles aussi superposées ou non à des oscillations d'origine thermique. La figure 3.21 montre un exemple d'un tel comportement. Cette figure représente l'intensité du signal au cours du temps. La série temporelle est issue d'un fichier plus long où l'intensité comporte majoritairement de simples oscillations de fréquence environ 3MHz. Bien que le fichier ne présente pas d'oscillations lentes périodiques liées à la température, les paramètres du système sont visiblement balayés.

Le fichier présente à partir d'oscillations simples, une bifurcation conduisant à un doublement de période. Le système présente du doublement de période sur une zone d'environ $80\mu s$ puis traverse une bifurcation inverse de doublement de période. L'intensité revient alors à un régime d'oscillations simples de manière symétrique à son entrée dans le régime de doublement de période. Le reste du fichier comporte en grande partie des oscillations de fréquence 3MHz régulières. On peut donc supposer

[1] Puissance minimale à partir de laquelle on observe de l'émission infrarouge. Pour l'estimation du seuil réel de l'OPO à forte puissance, se reporter à la partie 1.3.5.

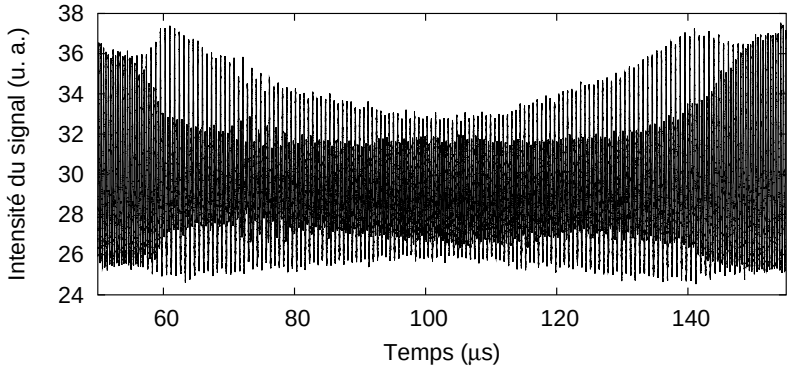


FIG. *3.21: Intensité du signal en fonction du temps. Extrait d'un fichier où le signal comporte majoritairement de simples oscillations rapides de fréquence 3MHz. La partie du fichier montrée sur la figure présente une bifurcation vers du doublement de période puis une bifurcation inverse revenant vers une simple périodicité. La durée de la zone de doublement de période est d'environ* $80\mu s$.

qu'au moins un paramètre du système varie lentement, ainsi la taille de la cavité peut être balayée soit par la température, soit par des fluctuations mécaniques. Il peut alors y avoir deux scénarios : soit la vitesse du balayage diminue puis s'inverse, on parcourt alors une bifurcation vers un doublement de période dans un sens puis dans le sens inverse. Soit le paramètre est balayé toujours dans le même sens mais le diagramme de bifurcation présente une "bulle" de doublement de période : la bifurcation de doublement de période se referme en une bifurcation inverse où la solution périodique simple redevient stable.

3.2.1.b-ii Doublement de période superposé à des oscillations lentes

La figure 3.22(a) montre un comportement de type bursting semblable à ceux vus dans la partie précédente. Cependant si on agrandit les oscillations rapides (figure 3.22(b)), on constate que les oscillations ne sont plus régulières mais présentent du doublement de période, qui commence immédiatement lors de la commutation vers les oscillations rapides puis passent par une bifurcation inverse pour reprendre une périodicité simple. Cela n'est pas étonnant dans ce fichier, car on sait dans le cas du bursting que les désaccords sont balayés par la température.

Ces deux exemples montrent des comportements pour les oscillationss rapides plus complexes que ceux vus précédemment. On voit aussi que dans tous les cas, les fichiers sont balayés en paramètres que ce soit par des variations de la température ou des dérives mécaniques. D'autre part, le fait d'observer du doublement de période suggère la présence de régimes chaotiques à proximité de cette zone de paramètres.

Des comportements plus irréguliers que du doublement de période peuvent en effet être observés, superposés ou non à des oscillations thermiques. Dans ce dernier cas (voir figure 3.20) les désaccords sont balayés très rapidement et les zones où la série est irrégulière sont très courtes ($\sim 30\mu s$). Il est alors difficile d'identifier le comportement observé. Par contre, lorsqu'il n'y a pas d'oscillations de type bursting,

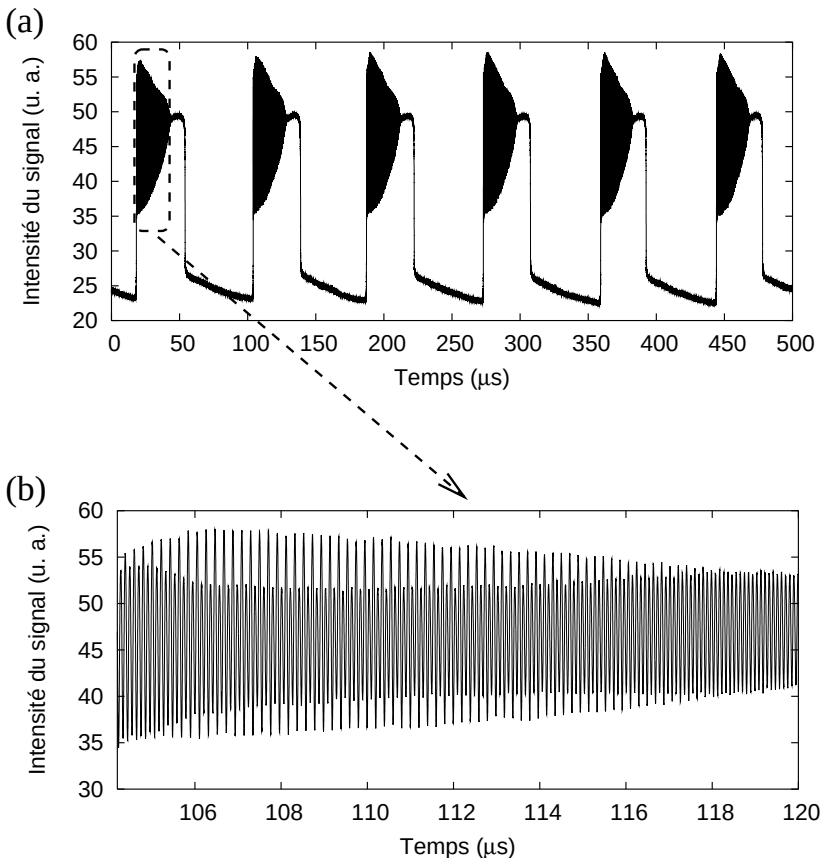


FIG. *3.22: Intensité du signal au cours du temps.(a) Oscillations de type bursting, la composante lente liée aux effets thermiques a une fréquence d'oscillation de 12 kHz. (b) Agrandissement des oscillations rapides : les oscillations passent par une bifurcation de doublement de période inverse. La fréquence des oscillations simples est de 10.5 MHz. Tous les bursts successifs présentent la même bifurcation de doublement de période vers une périodicité simple puis une bifurcation de Hopf surcritique inverse conduisant à une intensité constante avant que le système ne commute vers la branche d'intensité basse où l'intensité ne présente pas d'instabilité.*

une étude plus détaillée peut être menée car la durée de la zone irrégulière est plus longue ($\sim 80\mu s$). C'est ce que nous faisons dans la section suivante.

3.2.1.c Bouffée d'oscillations irrégulières

3.2.1.c-i Observation expérimentale

La figure 3.23(a) montre une bouffée d'oscillations irrégulières dans une série temporelle présentant majoritairement des oscillations périodiques de fréquence environ 3 MHz. La partie de la figure 3.23(a) délimitée par des barres verticales est agrandie dans les figures successives (b)–(e). La durée totale de la bouffée est de $80\mu s$. L'évolution des formes des signaux pendant cette bouffée montre clairement que le système est balayé en paramètres.

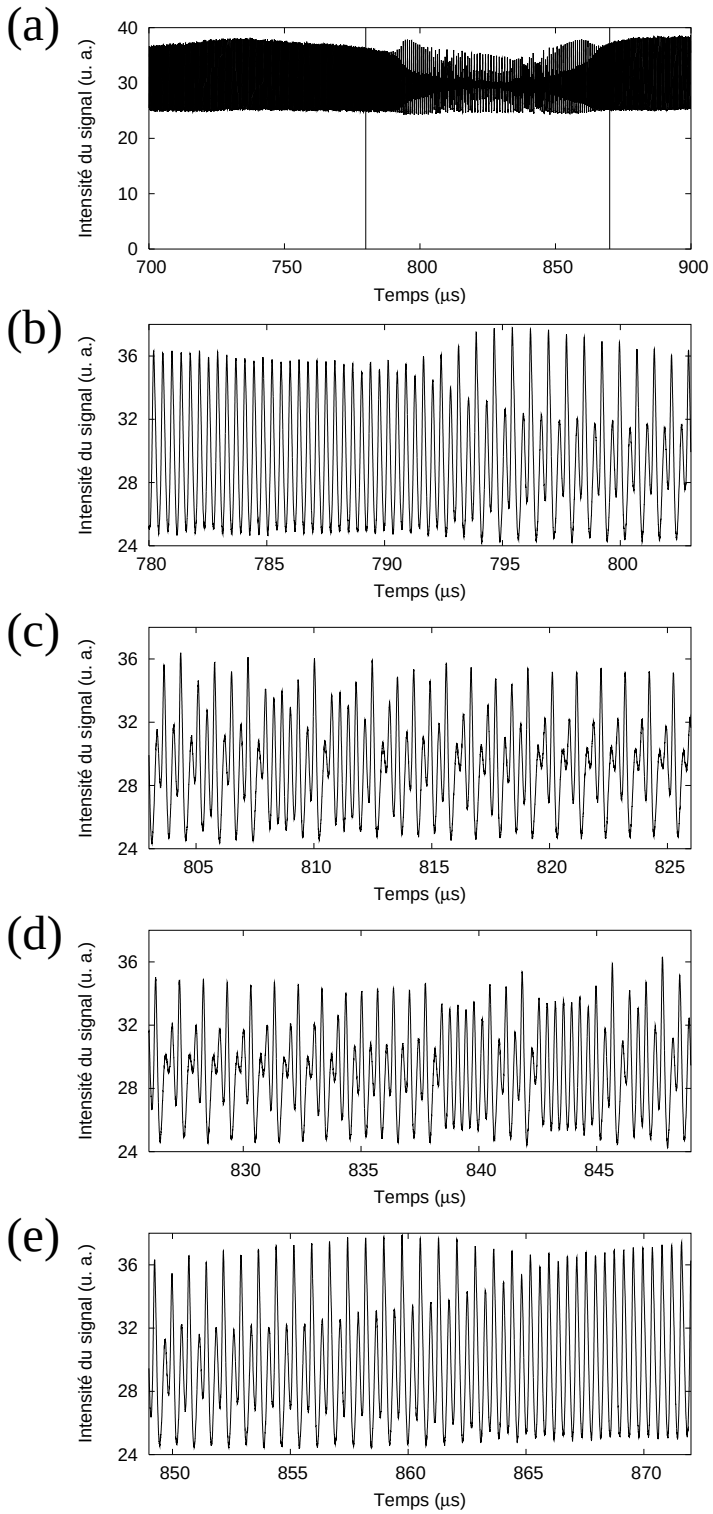


FIG. *3.23: Intensité du signal au cours du temps observée à plusieurs centaines de fois le seuil. (a) Série temporelle extraite d'une série plus longue où le signal a majoritairement un comportement périodique à 3 MHz, (b)–(e) agrandissements de la bouffée chaotique comprise entre les deux traits verticaux de (a). (a) la séquence présente une bifurcation par doublement de période et (e) la bifurcation inverse. Les séries (c) et (d) présentent des oscillations irrégulières.*

La séquence commence (figure 3.23(b)) par un doublement de période identique à ceux décrits dans la partie précédente. Cependant avant de passer par la bifurcation inverse (figure 3.23(d)), le système présente une suite d'oscillations plus complexes. Cette séquence irrégulière (figures 3.23(c) et (d)) ressemble beaucoup à un signal chaotique [Gilmore et Lefranc, 2002; Lefranc et Glorieux, 1993]. Avant de détailler les caractéristiques du signal qui le font ressembler à un signal chaotique, nous allons rappeler le mécanisme d'un chemin classique vers le chaos par une cascade de doublement de période.

3.2.1.c-ii Rappel d'un chemin classique vers le chaos : la cascade de doublement de période

Un chemin vers le chaos très courant est la cascade de doublement de période ou cascade sous-harmonique. On rappelle sur la figure 3.24 la structure du diagramme de bifurcation dans cette situation. Ce diagramme a été fait à partir de l'application classique : $f(x) = 4\mu x(1-x)$. On a représenté les solutions asymptotiques $x_k = f(x_{k-1})$ en fonction du paramètre μ.

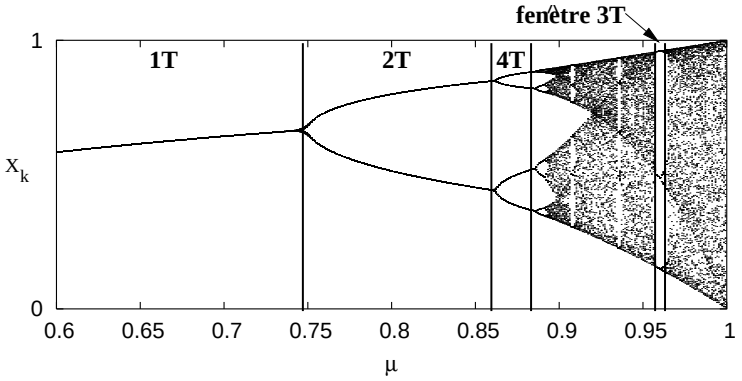


FIG. *3.24: Solutions asymptotiques $x_k = f(x_{k-1})$ de l'application $f(x) = 4\mu x(1-x)$ pour $\mu \in [0.6 : 1]$. Cette application modèle présente une cascade de doublement de période typique. On a montré sur la figure les zones 1T ($x = f(x)$), 2T ($x = f^2(x)$), 4T ($x = f^4(x)$). L'application présente ensuite une région chaotique où les itérés successifs remplissent densément un intervalle. Le diagramme de bifurcation présente ensuite des fenêtres périodiques dont la plus large est la fenêtre 3T.*

Pour les petites valeurs de μ (fenêtre 1T) la solution $f(x) = x$ est stable, lorsqu'on arrive à la limite de cette fenêtre, cette solution se déstabilise et les deux solutions $f^2(x) = x$ apparaissent (fenêtre 2T). Elles se déstabilisent pour laisser place aux quatre solutions de $f^4(x) = x$. Le diagramme de bifurcation du système présente donc une suite de bifurcations pour chacune desquelles la période double jusqu'à atteindre une zone où les points remplissent densément l'espace : c'est dans cette zone que le régime est chaotique. Lorsque μ augmente encore, des fenêtres périodiques apparaissent pour certaines valeurs du paramètre μ, notamment la fenêtre 3T qui est particulièrement large et donc obervable dans un système expérimental présentant ce type de cascade de bifurcation si on maîtrise suffisamment la variation du paramètre.

3.2.1.c-iii Description de la bouffée irrégulière

Le premier indice rappelant un régime chaotique dans la série temporelle est donc son démarrage par du doublement de période (figure 3.23(b)). La série temporelle contient ensuite de courtes séquences périodiques. La figure 3.25 montre ainsi un agrandissement de la figure 3.23(a) où sont localisées des bouffées périodiques de période 1, 2, 3 et 6. On notera notamment le passage de la période 3T vers la période 6T par doublement de période suivi de la bifurcation inverse où le système retourne sur une orbite 3T. La présence de séquences périodiques dans une série temporelle est caractéristique de chaos déterministe de basse dimension. En effet l'attracteur étrange contient une infinité d'orbites périodiques mais celles-ci sont instables. Le système en passant près d'une orbite périodique la suit quelques temps avant de s'en éloigner. D'autre part il existe entre les zones chaotiques des fenêtres périodiques stables comme la fenêtre 3T présentée dans le cas de la cascade de doublement de période. Dans le cas de notre série, comme les paramètres dérivent pendant la série irrégulière, on ne peut déterminer si c'est la variation du paramètre qui conduit le système à explorer différentes orbites ou si cela est lié à la présence de chaos dans le système.

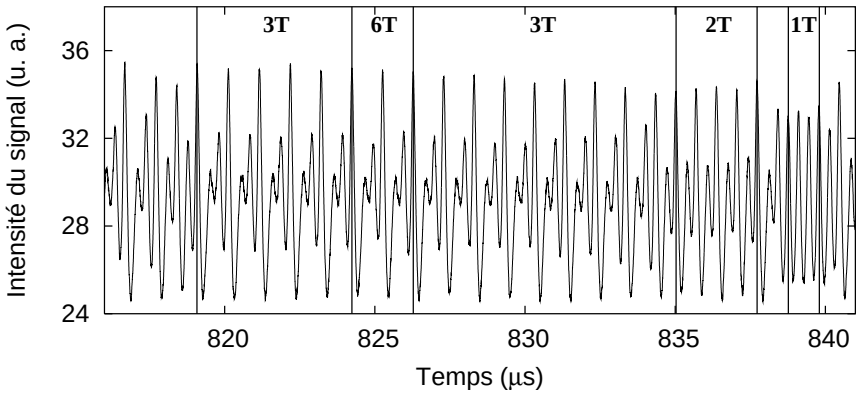


FIG. *3.25: Agrandissement de la figure 3.23(a) entre les temps* 816μs *et* 841μs*. Les barres verticales isolent des bouffées périodiques 1T, 2T, 3T et 6T par lesquelles passent le système.*

Dans un système présentant du chaos déterministe par le chemin classique de doublement de période, le fait d'obtenir une période 3T en partant d'un régime 1T et en passant par une cascade de doublement de période donne une indication que le système est probablement passé par une zone chaotique. En effet, nous avons vu que la période 3T dans le diagramme de bifurcation d'une application de l'intervalle constitue une fenêtre localisée entre des zones chaotiques (figure 3.24). Le passage par une fenêtre 3T rappelle ce mécanisme de l'application du plan et suggère donc la présence de chaos, mais ne le prouve pas.

A priori, l'utilisation de méthodes standards [Bergé *et al.*, 1988; Ott, 1993] pour mettre en évidence le chaos sont inutiles dans notre cas puisqu'un paramètre est balayé. Cependant la ressemblance du signal avec un régime chaotique nous conduit

à tenter de voir quelles informations suplémentaires on peut obtenir du système par ces méthodes. Ainsi, on va reconstruire la trajectoire du système dans l'espace des phases et tracer un diagramme de premier retour à partir d'une coupe de Poincaré.

3.2.2 Analyse d'un fichier expérimental

3.2.2.a Analyse du fichier par des méthodes classiques

3.2.2.a-i Reconstruction de la trajectoire dans l'espace des phases

Par définition l'espace des phases est un espace de dimension égale au nombre de degrés de liberté du système (le nombre de variables et de leurs dérivées). Cet espace est a priori très grand, mais comme le comportement de notre série temporelle rappelle un régime chaotique de basse dimension, on pourra certainement représenter la trajectoire dans un espace de dimension inférieure. Il arrive cependant fréquemment de n'avoir comme données expérimentales qu'une unique série temporelle $X(t)$. Dans ce cas, pour construire la trajectoire dans l'espace des phases, on utilise la méthode classique des *délais*. On peut en effet construire à partir d'un délai τ arbitraire une suite de séries temporelles $\{X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau), \ldots, X(t+n\tau)\}$ appartenant à un espace des phases de dimension n. Comme on ne connaît pas a priori la dimension qui nous sera nécessaire pour visualiser la trajectoire, on commence par le plan $\{X(t), X(t+\tau)\}$ puis on ajoute des dimensions successives à notre espace jusqu'à obtenir la dimension dans laquelle la trajectoire se développe.

Dans le cas de notre expérience, les intensités de la pompe, du signal et du complémentaire sont identiques, nous allons donc utiliser cette méthode des délais et tracer le portrait de phase $\{I(t), I(t+\tau)\}$. Pour $\tau = 55ns$ et à partir de la partie de la série temporelle des figures 3.23(b)–(e), on obtient la trajectoire de la figure 3.26. On voit se dégager de cette figure une structure fractale qui ressemble à celle d'un attracteur étrange de type Rössler projeté dans un espace à deux dimensions. Le fait de pouvoir observer une telle structure est étonnant, en effet on se serait plutôt attendu à une trajectoire brouillée à cause de la variation des paramètres. L'attracteur se modifie alors au cours du temps et cette déformation continue devrait se révéler dans la figure 3.26 par la disparition de toute structure. On peut donc supposer que la variation des paramètres modifie peu la trajectoire du système.

Comme l'attracteur du système est peu modifié par le balayage en paramètre et que le portrait de phase ressemble à celui d'une trajectoire chaotique, on va continuer à utiliser les outils habituels de l'analyse du chaos et faire une section de Poincaré de l'attracteur pour faire une carte de premier retour.

3.2.2.a-ii Section de Poincaré

Comme visiblement la trajectoire de la figure 3.26 se développe dans un espace à trois dimensions, il faut faire une coupe de la trajectoire précédente par un plan pour pouvoir travailler dans un espace à deux dimensions. Une telle coupe est appelée *section de Poincaré*. Elle consiste à sélectionner les intersections successives X_n de la trajectoire orientée et de ce plan comme le montre de manière schématique la

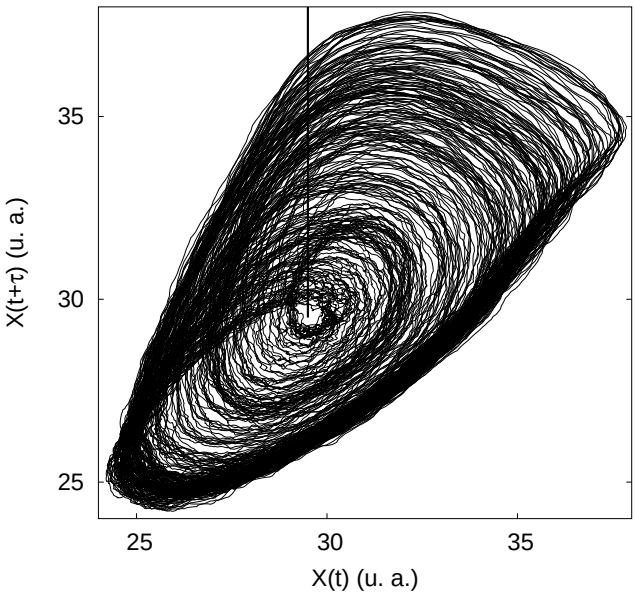


FIG. *3.26: Portrait de phase dans le plan* $\{I(t), I(t+\tau)\}$ *pour* $\tau = 55ns$*, où* $I(t)$ *est l'intensité du signal au cours du temps de la figure 3.23(a) entre les temps délimités par des traits verticaux sur cette figure. La trajectoire a l'allure d'un attracteur étrange. Le trait vertical représente le plan de coupe utilisée pour la section de Poincaré.*

figure 3.27. Ainsi sur la figure 3.26, la ligne verticale représente le plan de section de la trajectoire. Le flot tourne dans le sens direct autour du trou au milieu de la trajectoire. On n'a tracé qu'un demi-plan : pour l'autre partie du plan, la trajectoire intercepte le plan dans le sens inverse. En numérotant ces points d'intersections au cours du temps, on obtient à partir de la série temporelle $X(t)$ une suite X_n.

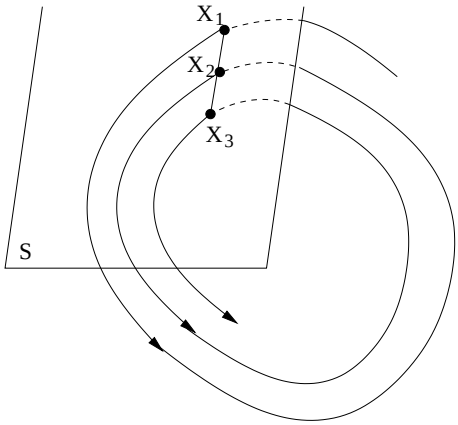


FIG. *3.27: Représentation schématique d'une section de Poincaré : le plan S est le plan de la section, la ligne courbe est la trajectoire orientée du système dans l'espace des phases, les intersections successives forment une série* X_n.

Dans le cas particulier de notre série temporelle, plutôt que d'utiliser la série I_n, on va utiliser les temps de vol T_n entre deux intersections successives avec le plan car cette variable est moins sensible au bruit. La figure 3.28 montre la carte de premier retour des temps entre deux intersections successives de la section de Poincaré, c'est à dire T_{n+1} en fonction de T_n. Cette carte a une structure repliée proche d'une application unidimensionnelle du plan caractéristique du chaos déterministe dissipatif.

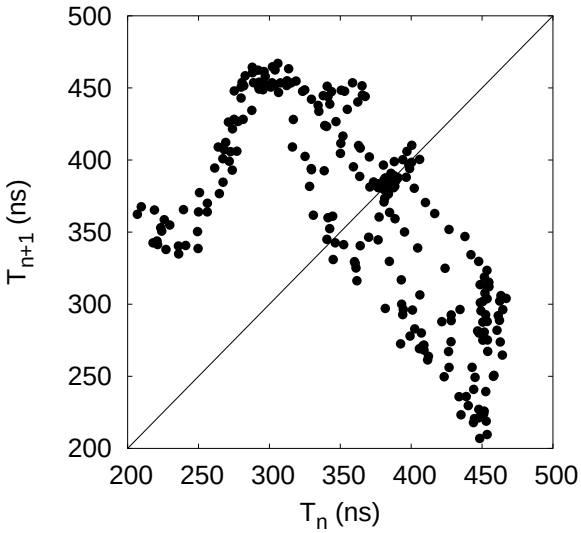


FIG. *3.28: Carte de premier retour des temps entre deux intersections successives du plan de Poincaré pour la série temporelle comprise entre les traits verticaux de la figure 3.23(a). La structure générale est proche d'une application unidimensionnelle du plan, propre au chaos déterministe dissipatif.*

L'intersection d'une telle courbe unidimensionnelle avec la première bissectrice donne les orbites de période 1 définies par $T_{n+1} = T_n$. Cependant, sur la figure 3.28, l'application a plusieurs intersections avec la première bissectrice : il y a trois intersections principales correspondants à des orbites de périodes 1 localisées au début, au milieu et à la fin de la série temporelle. Les deux intersections les plus à droite correspondent aux parties périodiques précédant et suivant la bouffée irrégulière tandis que celle de gauche correspond à la bouffée de période 1 vers $840\mu s$ à l'intérieur de la séquence irrégulière. Cela montre qu'au cours du temps, à cause de la variation des paramètres de contrôle, la localisation de l'orbite de période 1 le long de la première bissectrice change. On voit ainsi le problème lié à la variation des paramètres : les points proches sur la carte de premier retour correspondent à des points très éloignés dans la série temporelle et donc à une valeur différente des paramètres. La carte est brouillée par cette dérive et n'est pas exploitable en tant que telle.

On peut aussi représenter ces temps en fonction de n, on obtient alors le diagramme de la figure 3.29 qui rappelle un diagramme de bifurcation de cascade de doublement de période (voir figure 3.24) avec d'abord une branche périodique, puis deux branches montrant un doublement de période, une zone semblable à une zone chaotique, une fenêtre 3T puis le chemin inverse. On retrouve bien la symétrie des

bifurcations que l'on voit déjà sur les figures 3.23(b)–(e).

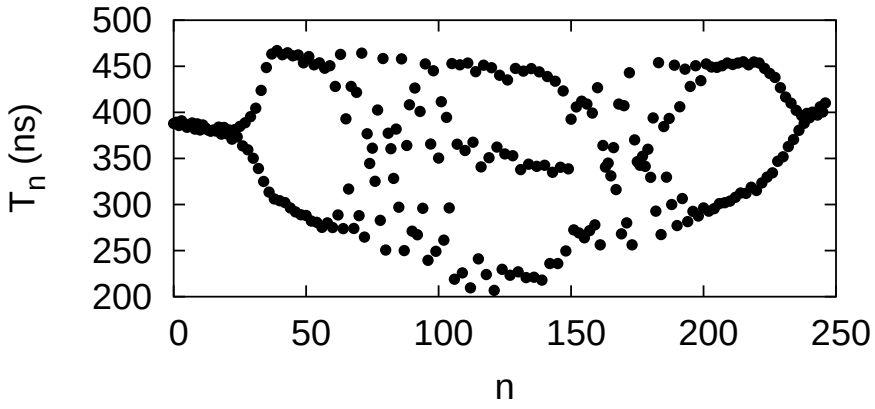


FIG. *3.29: Variation des temps entre deux intersections successives de la section de Poincaré en fonction de leur ordre dans le fichier. Le diagramme de bifurcation montre une bifurcation vers un doublement de période, une zone chaotique, une fenêtre 3T puis les bifurcations inverses symétriques.*

Une telle représentation montre bien qu'un paramètre est balayé et suggère d'éliminer les zones périodiques du diagramme dans la carte de premier retour pour ne garder qu'une des zones chaotiques de manière à obtenir une séquence sur un temps suffisamment court pour que la variation des paramètres soit négligeable. On va donc sélectionner les points appartenant à la première zone chaotique et les représenter sur une carte de premier retour comme précédemment. On obtient alors la figure 3.30 qui montre toujours la structure attendue pour un régime de chaos dissipatif mais où il ne reste que très peu de points. La conséquence est qu'une fois que l'on a restreint notre étude à une zone à l'allure chaotique et sur un temps suffisamment court pour estimer que la perturbation liée aux paramètres de contrôle ne soit pas trop importante, il ne reste plus assez de points pour pouvoir conclure sur la présence de chaos déterministe dans le système.

En fait les méthodes de caractérisation habituelles du chaos utilisent des méthodes non-locales en temps. En effet, pour un attracteur étrange deux points proches dans l'espace des phases sont en général très éloignés dans la série temporelle et donc dans notre cas, correspondent à des valeurs différentes des paramètres. D'autre part, dans le cas de la carte de premier retour de la figure 3.30, les paramètres de contrôle ont peu varié, mais il ne reste plus suffisamment de points pour déterminer la structure de l'attracteur étrange. On voit donc que les méthodes classiques d'estimation du chaos ne sont pas robustes à des fluctuations des paramètres de contrôle et demandent en général des séries temporelles très longues.

L'analyse topologique permet de s'affranchir de ces problèmes car elle permet d'obtenir des informations sur la structure de l'attracteur à partir d'une unique orbite périodique.

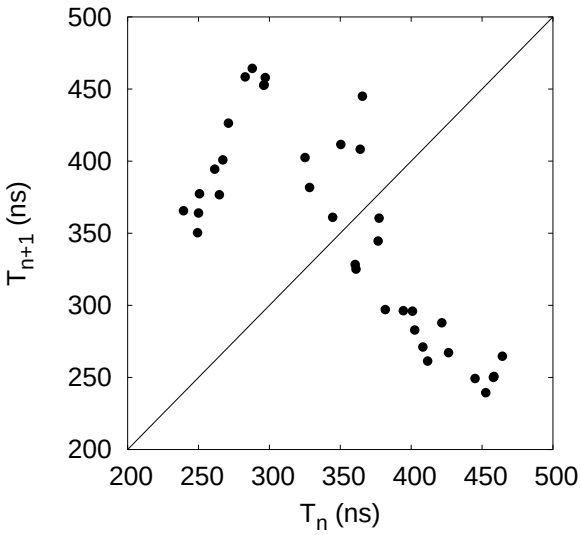


FIG. *3.30: Carte de premier retour des temps entre deux intersections successives du plan de Poincaré pour la série temporelle comprise dans la première zone chaotique de la figure 3.29 soit pour l'intervalle de temps compris entre* $806.8\mu s$ *et* $819.0\mu s$.

3.2.2.b Analyse topologique

3.2.2.b-i Principe de l'approche topologique

Dans la série temporelle de la figure 3.23, il existe de nombreuses séquences où le système suit une orbite, et repasse donc à proximité des mêmes points dans l'espace des phases. Un tel comportement correspond soit au passage, lorsque les paramètres varient, dans une fenêtre où l'orbite est stable, soit au passage à proximité d'une orbite périodique instable dans un régime chaotique. En effet, l'attracteur étrange contient une infinité d'orbites périodiques instables et un système dans un régime chaotique passant à proximité d'une telle orbite la suit quelque temps avant de s'en éloigner.

L'analyse topologique utilise la manière particulière qu'ont les orbites de s'entrelacer pour caractériser le chaos. Dans notre étude nous allons exploiter le fait que ce type d'analyse peut se faire localement, sur une unique orbite plutôt que sur une série temporelle idéalement infinie. L'attracteur contient une infinité d'orbites périodiques instables et pour un portrait de phase à trois dimensions, chacune de ces orbites peut être caractérisée par le noeud qu'elle forme. L'ensemble de ces noeuds caractérise la structure de l'attracteur. Chaque orbite garde le même type de noeud pendant tout son domaine d'existence, qu'elle soit stable ou instable. Certaines orbites et donc certains types de noeud ne vont pouvoir exister que dans un régime chaotique. Ces orbites contiennent dans leur structure ce qui rend l'attracteur chaotique : les mécanismes d'étirement et de repliement. L'analyse topologique [Gilmore, 1998] permettant de traiter chaque orbite périodique indépendamment de sa place dans la série, en montrant que l'une d'entre elles appartient à un régime chaotique, on aura montré que notre série temporelle comporte du chaos.

Le type de noeud d'une orbite peut être caractérisé par son *entropie topologique* que l'on peut calculer numériquement [Hall] à partir d'une série temporelle. La figure 3.31 schématise la signification de cette entropie. On considère deux orbites de période 3 de types de noeud différents que l'on projette sur un plan. Pour retrouver les orbites dans l'espace à trois dimensions, il faut recoller les extrémités des brins (dans le cas de la figure, le brin a avec le brin c et le brin b avec lui-même). On imagine ensuite que les brins sont des tiges rigides sur lesquelles on essaie de faire coulisser un élastique. Dans le cas de la figure 3.31(a), la taille de l'élastique est identique au début et à la fin de l'orbite. Par contre dans le cas de la figure 3.31(b), la taille de l'élastique est plus grande après un tour complet de l'orbite. L'entropie topologique quantifie cet étirement, il mesure donc le mécanisme d'étirement de l'orbite. Dans le cas de la figure 3.31(a) l'orbite est non mélangeante, son entropie est nulle. Dans le cas de la figure (b) la structure de l'orbite contient les mécanismes d'étirement, son entropie est strictement positive.

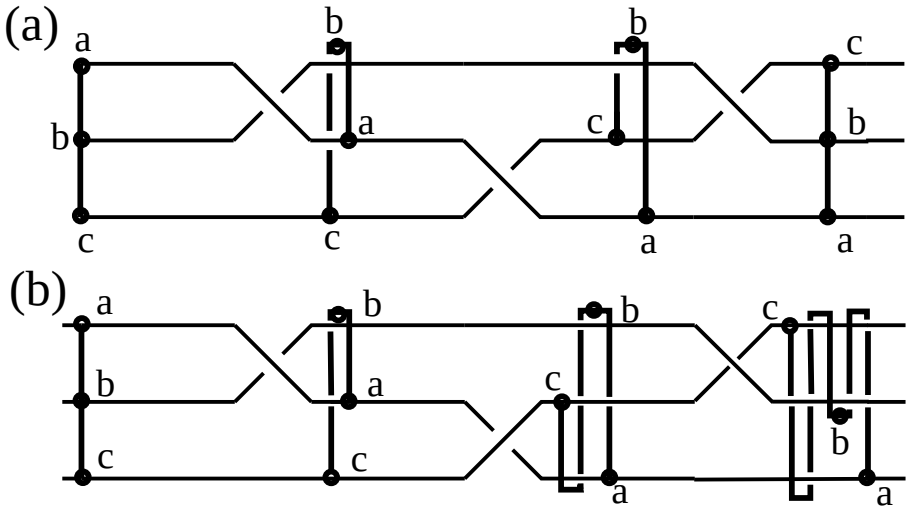


FIG. *3.31: Schéma expliquant la notion d'entropie topologique. Deux orbites de période 3 de type de noeud différent sont projetés sur le plan. On imagine qu'on fait coulisser un élastique le long des brins de l'orbite. (a) la taille de l'élastique est la même au début et à la fin de l'orbite, il n'y a pas de mécanisme d'étirement, (b) l'élastique a été étiré entre le début et la fin de l'orbite, il y a étirement de la trajectoire.*

3.2.2.b-ii Etude d'une orbite de période 9

Une séquence périodique correspond dans l'espace des phases à une courbe fermée : ainsi, l'orbite de période 9 de la figure 3.23(c) correspond à l'orbite périodique de la figure 3.32(a). On peut étudier le noeud formé par cette orbite en la découpant suivant la ligne diagonale de la figure 3.32(a) et en étalant les brins, obtenant ainsi la figure 3.32(b). La manière dont l'orbite est enlacée permet de savoir si ce noeud ne peut apparaître que dans le cas d'un régime chaotique et dans ce cas de quantifier le chaos.

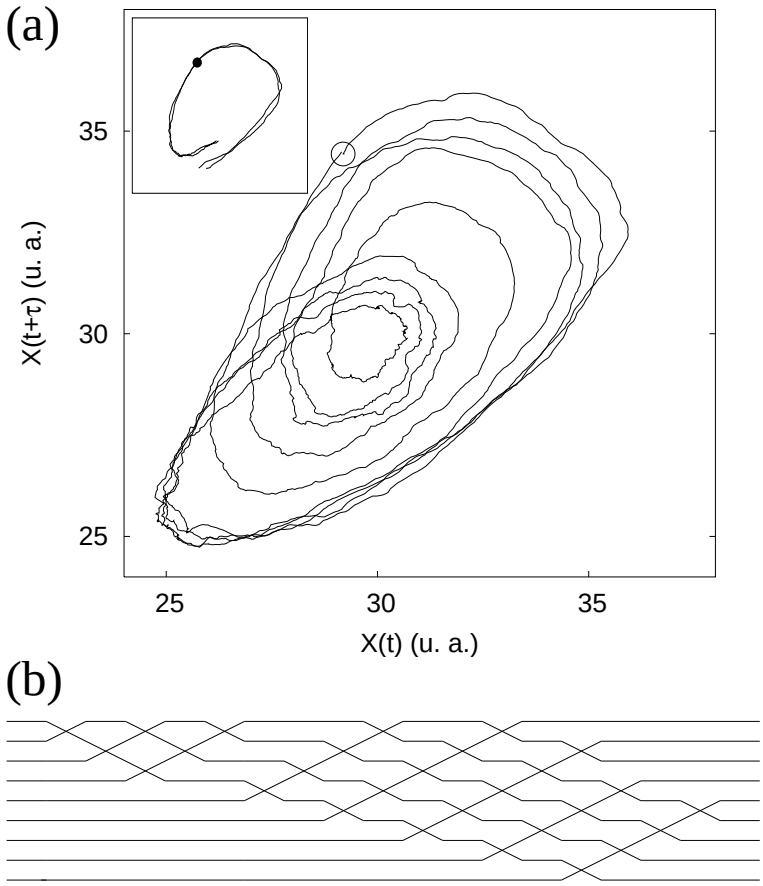


FIG. *3.32: (a) Période 9 comprise entre les temps, l'insert montre la manière dont la trajectoire arrive et repart de l'orbite. (b) Projection de cette orbite montrant le type de noeud.*

L'orbite de période 9 de la figure 3.32 a une entropie topologique de $h_T \sim 0.377057$. Une telle entropie topologique positive signifie que son type de noeud contient bien le mécanisme d'étirement nécessaire au chaos et prouve que le système est dans un régime chaotique.

3.2.2.b-iii Variation des paramètres le long de l'orbite

Le problème est que l'orbite étudiée n'est pas à proprement parler une orbite périodique puisqu'au moment où elle boucle sur elle-même les paramètres ont bougé. Cependant si on regarde la manière qu'a la trajectoire d'arriver sur l'orbite puis de s'en éloigner (insert de la figure 3.32(a)), on voit que les courbes se superposent presque parfaitement : le champ de vecteurs tangents à cette orbite reste quasiment identique entre le début et la fin de l'orbite malgré la variation des paramètres. On peut donc conclure par continuité qu'il existe une orbite périodique avec le même type de noeud dans le système non-perturbé.

Nous avons étudié dans cette partie une série temporelle présentant des oscillations irrégulières présentées par l'intensité du signal à la sortie d'un TROPO. Nous avons montré que cette série était chaotique. C'est à notre connaissance la première observation de chaos déterministe dans ce système.

3.3 Origine du chaos

Il est naturel de se demander quel est le mécanisme menant aux oscillations chaotiques que nous avons observées. Une cascade de doublement de période conduisant à un régime chaotique a été prédite dans le modèle champ moyen monomode [Lugiato *et al.*, 1988] et ce scénario est donc un suspect naturel. Cependant, si on se penche sur les conditions d'apparition de ce régime dans le modèle monomode, et plus particulièrement sur les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf à l'origine de la cascade de doublement de période, on constate qu'il est très peu probable expérimentalement de pouvoir atteindre cette bifurcation. Nous allons montrer en effet qu'après avoir tenu compte de la limitation des désaccords du signal liée aux sauts de mode et aux conditions d'apparition de la bifurcation, compte tenu de la puissance de pompe maximale de pompe disponible expérimentalement, nous ne pouvons pas atteindre cette bifurcation.

Nous pensons donc que l'interprétation de cette bouffée chaotique nécessite un modèle plus complet : le modèle multimode transverse. Nous avons en effet montré expérimentalement qu'un modèle bimode transverse modélise bien la plupart des situations où l'on observe des oscillations rapides de 1 à plus de 100 MHz. D'autre part des régimes chaotiques avaient été prévus numériquement dans les travaux antérieurs sur ces oscillations [Suret *et al.*, 2001a]. Cependant il s'agissait de régimes chaotiques beaucoup plus complexes que ceux que nous avons observés expérimentalement. Nous montrons numériquement que du chaos par cascade de doublement de période existe dans le modèle bimode transverse dans certaines zones de paramètres.

3.3.1 Modèle monomode

Comme on préfère a priori décrire un système par le modèle le plus simple possible et comme d'autre part les formes des signaux chaotiques observés ressemblent à ceux prévus par la théorie dans le modèle monomode [Lugiato *et al.*, 1988; Drummond *et al.*, 1980], nous déterminons dans cette partie si les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf précédant le régime chaotique peuvent être satisfaites dans nos conditions expérimentales.

Nous n'allons pas tenir compte des effets thermiques, mais juste considérer dans un premier temps dans le modèle monomode les conditions sur les désaccords pour que la bifurcation apparaisse. Un facteur limitant pour ces désaccords est la puissance de pompe que nous utilisons. Celle-ci impose que le seuil d'apparition de la bifurcation de Hopf soit inférieure à la pompe maximale qu'il est possible d'injecter. Nous montrerons que compte tenu des finesses de notre cavité, la taille de la zone où cette bifurcation peut apparaître est nulle dans nos conditions expérimentales. Nous

montrerons ensuite que pour la même puissance de pompe, les conditions recherchées pourraient être atteintes en augmentant la finesse de la cavité pour la pompe.

D'autres limites sur les désaccords sont imposées par la sélection de mode des OPO. En effet comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 1, si le désaccord d'un mode augmente trop, il existe un autre couple de fréquences qui minimise les désaccords et qui sera choisi par le système car son seuil sera plus faible. Il est possible de calculer le désaccord maximal atteignable par l'OPO dans nos conditions expérimentales et nous montrons que cette limite restreint encore le domaine pour lequel il est possible de voir la bifurcation de Hopf.

3.3.1.a Possibilité expérimentale d'apparition de la bifurcation de Hopf du modèle monomode

3.3.1.a-i Rappel sur les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf

Nous nous intéressons donc au cas du modèle champ-moyen monomode :

$$\dot{A}_s = -(1+i\Delta_s)A_s + A_s^* A_p \tag{3.7a}$$

$$\dot{A}_p = \gamma\left[-(1+i\Delta_p)A_p - A_s^2 + E\right]. \tag{3.7b}$$

L'étude des états stationnaires de ce modèle a été rappelé en détail dans la partie 1.2.1.b. Le seuil d'oscillation du signal est :

$$E_s^2 = (1+\Delta_p^2)(1+\Delta_s^2).$$

Soulignons donc que plus les désaccords vont être écartés de leurs valeurs optimales qui minimisent le seuil ($\Delta_p = \Delta_s = 0$), plus le seuil va augmenter. Lorsque nous donnons un seuil expérimental, celui-ci est mesuré en balayant la cavité, donc on peut considérer qu'il passe par une position où la condition $\Delta_p = \Delta_s = 0$ est vérifiée et que le seuil mesuré correspond à $E_s = 1$.

D'autre part, pour observer la bifurcation de Hopf et les régimes chaotiques prévus par le modèle monomode, il est nécessaire de se trouver dans les conditions suivantes :

$$\Delta_p\Delta_s < -[1+\frac{\gamma(1+\Delta_p^2)}{2}] \tag{3.8a}$$

$$|A_s|^2 > \frac{\gamma^2(1+\Delta_p^2)+4(1+\gamma)}{-2(1+\gamma)^2[1+\frac{2(1+\Delta_p\Delta_s)}{\gamma(1+\Delta_p^2)}]} \tag{3.8b}$$

Le seuil de la bifurcation de Hopf est alors :

$$E_h^2 = \left[\frac{\gamma^2(1+\Delta_p^2)+4(1+\gamma)}{-2(1+\gamma)^2[1+\frac{2(1+\Delta_p\Delta_s)}{\gamma(1+\Delta_p^2)}]} - (\Delta_p\Delta_s - 1)\right]^2 + (\Delta_p+\Delta_s)^2. \tag{3.9}$$

3.3.1.a-ii Normalisation des paramètres : intervention des finesses des cavités

Nous voulons savoir si, avec la puissance maximale de notre laser ($\sim 3.5W$ à l'entrée de la cavité) et compte tenu des seuils minimaux atteints ($\sim 10mW$), on peut atteindre la bifurcation de Hopf du modèle monomode. Nous savons donc que dans notre modèle $E^2 = 1$ correspond à une puissance de $10mW$. Donc la puissance maximale atteignable correspond à $E^2_{max} = 350$ que nous avons arrondi à 400 pour tenir compte du fait que le seuil est peut-être plus faible.

Comme nous le montrons plus bas, dans nos conditions expérimentales ($\mathcal{F}_p = 45$ et $\mathcal{F}_s = 550$), la puissance de la pompe est insuffisante pour que nous ayons atteint la bifurcation de Hopf du modèle monomode. Nous nous demandons donc quelles seraient les conditions expérimentales qui permettraient de voir cette bifurcation. Or notre seule marge de manoeuvre concerne les finesses de la cavité : pour ce qui est de la puissance du laser, l'optimisation des pertes (notamment au niveau de l'isolateur) de la pompe avant la cavité ne nous permettront pas de dépasser une puissance de $4W$, or nous considérons déjà $E^2_{max} = 400$ dans nos simulations. Bien sûr une solution serait d'utiliser un laser de pompe plus puissant, par exemple un laser Verdi Coherent de 8W, cependant, il faut prendre garde de ne pas atteindre les seuils de dommage du cristal. Nous allons donc plutôt chercher à jouer sur les finesses des miroirs.

Lorsqu'on change les finesses des miroirs, le problème est de savoir quel est le nouveau $E(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_s)^2_{max}$. Il faut donc tenir compte de la normalisation de nos équations [Yariv et Louisell, 1966] qui intégrent les finesses dans les champs :

$$|E|^2 \propto \frac{1}{\gamma_p \gamma_s \gamma_c} \propto \mathcal{F}_p \mathcal{F}_s \mathcal{F}_c.$$

On connait $|E|^2_{max}$ pour une donnée des finesses : celles de notre expérience : $|E(\mathcal{F}_{p0}, \mathcal{F}_{s0})|^2_{max} = 400$. On en déduit lorsqu'on change les finesses :

$$|E(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_s)|^2_{max} = 400 \frac{\mathcal{F}_p \mathcal{F}_s \mathcal{F}_c}{\mathcal{F}_{p0} \mathcal{F}_{s0} \mathcal{F}_{c0}}.$$

3.3.1.a-iii Zones d'apparition de la bifurcation

On peut alors calculer numériquement sur une carte (Δ_p, Δ_s) les points dont le seuil de fonctionnement est inférieur à $400 \frac{\mathcal{F}_p \mathcal{F}_s \mathcal{F}_c}{\mathcal{F}_{p0} \mathcal{F}_{s0} \mathcal{F}_{c0}}$. Ces points sont à l'intérieur des courbes en étoiles sur les cartes de la figure 3.33 qui délimitent donc la zone de fonctionnement de l'OPO. On vérifie ensuite si pour ces points les conditions d'apparition de Hopf sont vérifiées, toujours pour notre puissance maximale, ce sont les points des zones grisées. Pour connaître la probabilité en explorant différentes tailles de la cavité de trouver la bifurcation de Hopf, on peut comparer la surface des zones grisées à celle des zones de fonctionnement.

On voit que dans nos conditions de fonctionnement (figure 3.33(a), $\mathcal{F}_p = 45$, $\mathcal{F}_s = 550$), les conditions de la bifurcation de Hopf ne sont pas atteintes dans les zones de fonctionnement à puissance maximale de notre OPO. Pour qu'il existe un domaine de paramètres à l'intérieur duquel la bifurcation de Hopf est atteignable, il

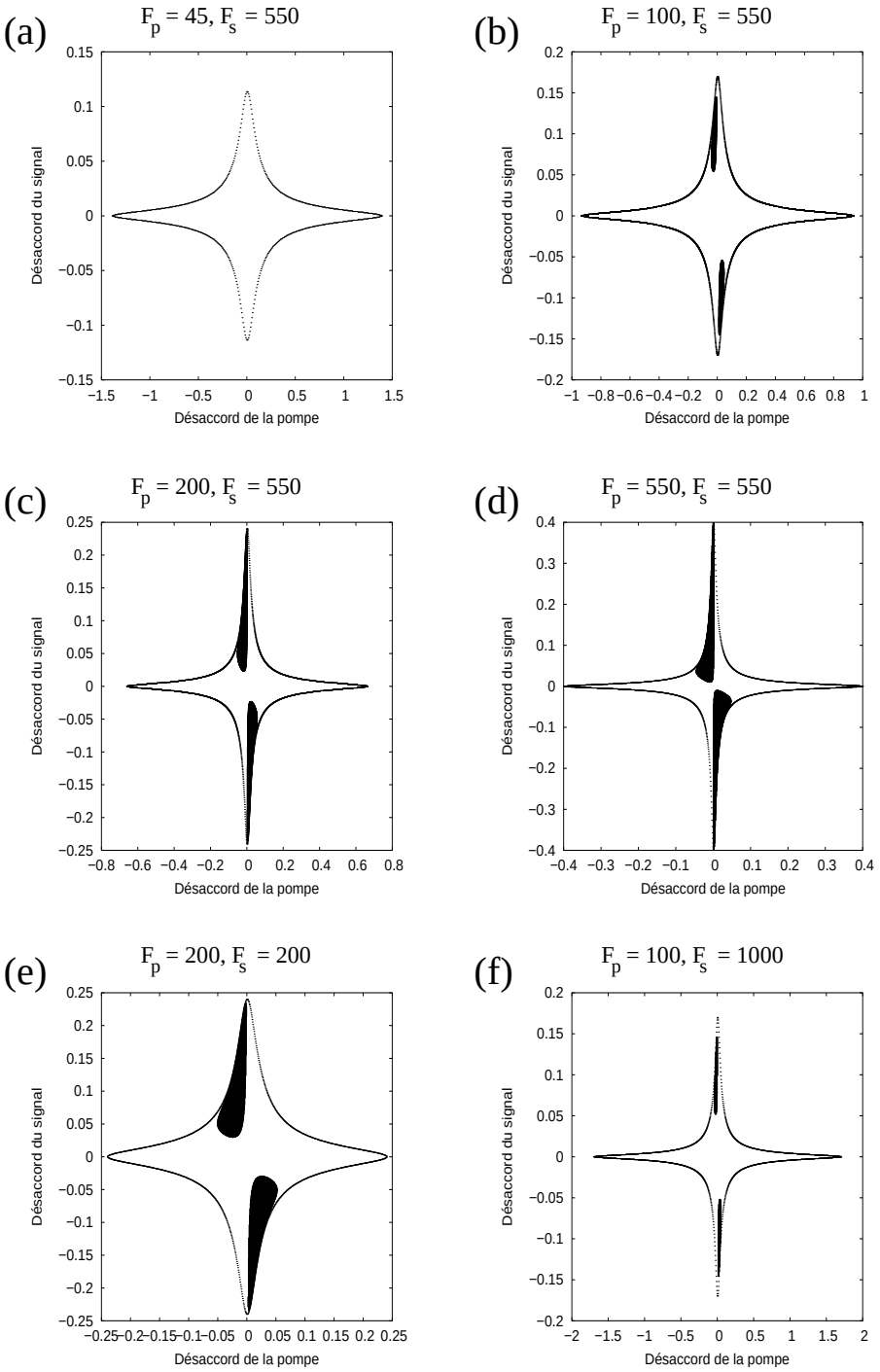


FIG. *3.33: Régions dans l'espace des désaccords pour lesquelles le système est au-dessus du seuil de fonctionnement à la puissance maximale utilisée. Les désaccords sont normalisés de manière à parcourir l'intervalle* $[-\pi, \pi]$*, les désaccords de la pompe sont en abscisse, ceux du signal en ordonnée. Les zones grisées correspondent aux zones pour lesqquelles le système est dans les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf. Les différentes figures correspondent à différentes conditions sur les finesses : (a)* $\mathcal{F}_p = 45$*,* $\mathcal{F}_s = 550$*, (b)*$\mathcal{F}_p = 100$*,* $\mathcal{F}_s = 550$*, (c)* $\mathcal{F}_p = 200$*,* $\mathcal{F}_s = 550$*, (d)* $\mathcal{F}_p = 550$*,* $\mathcal{F}_s = 550$*, (e)* $\mathcal{F}_p = 200$*,* $\mathcal{F}_s = 200$*, (f)* $\mathcal{F}_p = 100$*,* $\mathcal{F}_s = 1000$*.*

faut augmenter la finesse de la pompe (figure 3.33(b)-(d), $\mathcal{F}_p = 100, 200, 550$). Plus la finesse de la pompe augmente, plus la surface de la zone grise occupe une proportion importante de la zone de fonctionnement de l'OPO. Cependant, si on regarde d'autre part les extrémités des échelles des cartes, on voit que les zones de fonctionnement de l'OPO, par contre, correspondent à des désaccords limites de la pompe [2] de plus en plus petits : cela signifie que plus la finesse de la pompe augmente, moins il existe de tailles de cavité pour lesquelles l'OPO émet de l'infrarouge. On en conclut que plus la finesse de la pompe augmente, plus le domaine d'émission d'infrarouge se réduit. Par contre, si tous les couples (Δ_p, Δ_s) ont la même probabilité d'être atteints en balayant la cavité, parmi toutes les conditions de fonctionnement de l'OPO, la probabilité d'être dans les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf augmente lorsque la finesse de la pompe augmente.

En fait la probabilité d'être dans les conditions de Hopf est maximale lorsque le signal et la pompe ont la même finesse (figures 3.33(d) et (e)). Il est plus important d'augmenter cette probabilité que simplement la surface de la zone grise : on voit ainsi sur la figure 3.33(f) qu'en multipliant par 2 les finesses de la pompe et du signal ($\mathcal{F}_p = 100$, $\mathcal{F}_s = 1000$) la zone de fonctionnement augmente et les conditions de la Hopf sont remplies pour certains paramètres, mais la surface de cette zone est très petite devant la surface totale de fonctionnement.

A présent nous allons voir comment la sélection de mode limite les désaccords du signal.

3.3.1.b Limitations sur les désaccords du signal liées à la sélection de modes

Les désaccords maximaux atteignables pour le signal et le complémentaire sont limités par la sélection de mode. Les désaccords $(\Delta\omega_{s,c})$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta\omega_s &= \omega_s - \omega_s^R = \frac{\delta\phi_s \delta\omega_s}{2\pi} \\ \Delta\omega_c &= \omega_c - \omega_c^R = \frac{\delta\phi_c \delta\omega_c}{2\pi}, \end{aligned}$$

où les $\omega_{s,c}^R$ sont les resonances de la cavité les plus proches des fréquences des repères tournants $\omega_{s,c}$, $\delta\phi_{s,c}$ sont les déphasages cumulés par les champs après un tour complet de cavité et $\delta\omega_{s,c}$ sont les intervalles spectraux libres ($\delta\omega = \frac{2\pi c}{2(L_{cav}+(n-1)l_c)}$).

Rappelons que si on cherche le mode de fonctionnement de l'OPO pour des paramètres fixés, il existe une procédure décrite en détail dans l'article [Eckardt *et al.*, 1991] pour un OPO doublement résonant. La conservation de l'énergie et l'accord de phase exact donnent un couple de fréquence (ω_s, ω_c). Le cluster le plus proche de ce couple de fonctionnement donnera un nouveau couple de fréquences $(\omega_{s,Cl}, \omega_{c,Cl})$ vérifiant $\omega_{s,Cl}+\omega_{c,Cl} = \omega_p$ et correspondant à $\frac{\omega_{s,Cl}}{\delta\omega_s} + \frac{\omega_{c,Cl}}{\delta\omega_c}$ entier. Un cluster va caractériser une manière d'apparier les résonances du signal et du complémentaire : à l'intérieur

[2] Nous ne considérons que les désaccords de la pompe et non ceux du signal, dont les valeurs limites augmentent pourtant, car nous ne maîtrisons pas ce paramètre qui est limité par la sélection de mode comme nous le verrons dans la suite.

d'un cluster, si lorsqu'on se déplace d'un certain nombre de résonances pour le signal, on se déplace du même nombre de résonances en sens opposé pour le complémentaire. C'est à l'intérieur d'un cluster que se font les sauts de mode. Dans ce cas, on exprime les désaccords du signal et du complémentaire en fonction des finesses du signal et du complémentaire ($\mathcal{F}_{s,c}$) et de la somme des désaccords $\Delta\omega = \Delta\omega_s + \Delta\omega_c$ par [Eckardt *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}\Delta\omega_s &= \frac{\Delta\omega\delta\omega_s\mathcal{F}_c}{\delta\omega_s\mathcal{F}_c + \delta\omega_c\mathcal{F}_s}\\ \Delta\omega_c &= \frac{\Delta\omega\delta\omega_c\mathcal{F}_s}{\delta\omega_s\mathcal{F}_c + \delta\omega_c\mathcal{F}_s}.\end{aligned}$$

La somme des désaccords prend sa valeur maximale pour : $\Delta\omega_{max} = \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_c|}{2}$. Si $\Delta\omega$ dépasse cette valeur, il existe une paire de modes du même cluster pour lequel $\Delta\omega$ sera plus petit.

3.3.1.b-i Normalisation

Avec la normalisation utilisée dans les modèles que nous avons présentés dans les parties précédentes, les désaccords sont donnés par :

$$\begin{aligned}\Delta_s &= \frac{\mathcal{F}_s\delta\phi_s}{\pi} = \frac{2\mathcal{F}_s\Delta\omega_s}{\delta\omega_s}\\ \Delta_c &= \frac{\mathcal{F}_c\delta\phi_s}{\pi} = \frac{2\mathcal{F}_c\Delta\omega_c}{\delta\omega_c}.\end{aligned}$$

Cette normalisation correspond à une largeur à mi-hauteur des résonances de 2 et à un intervalle possible de balayage des paramètres $[-\mathcal{F}, \mathcal{F}]$.

Les désaccords du signal et du complémentaire en fonction de $\Delta\omega$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned}\Delta_s &= \frac{2\Delta\omega\mathcal{F}_s\mathcal{F}_c}{\delta\omega_s\mathcal{F}_c + \delta\omega_c\mathcal{F}_s}\\ \Delta_c &= \frac{2\Delta\omega\mathcal{F}_s\mathcal{F}_c}{\delta\omega_s\mathcal{F}_c + \delta\omega_c\mathcal{F}_s},\end{aligned}$$

Si on considère que les finesses sont identiques pour le signal et le complémentaire car pour le cristal que nous utilisons $\omega_s \simeq \omega_c$, on obtient comme désaccord maximum :

$$\Delta_s^{max} = \Delta_c^{max} = \mathcal{F}\frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_c|}{\delta\omega_s + \delta\omega_c} \tag{3.10}$$

La figure 3.34 montre la courbe des désaccords maximaux en fonction de la taille de la cavité. Ces tailles sont données en centimètres. La taille minimale atteignable dans notre expérience est ∼3cm, la taille maximale pour que la cavité soit stable avec des miroirs sphériques de rayon de courbure 5cm est ∼10cm. La courbe est

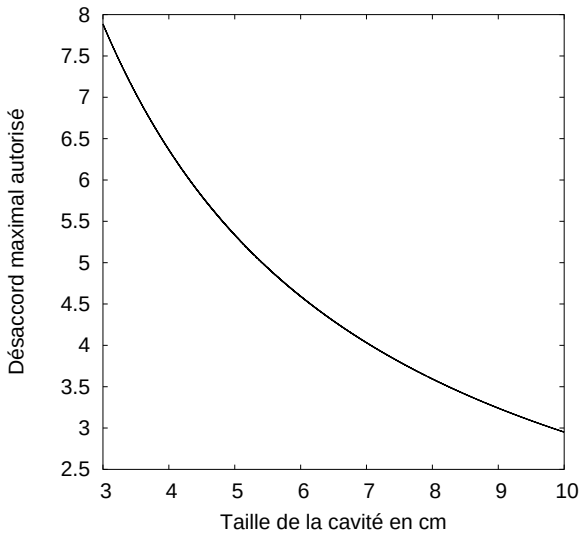


FIG. *3.34: Désaccord maximal autorisé par les sauts de mode, dans la normalisation des modèles que nous avons utilisés dans les parties précédentes, en fonction de la taille de la cavité.*

décroissante : on atteindra les désaccords les plus grands pour les cavités de plus petite taille. Les désaccords sont exprimés avec la normalisation de nos équations.

Pour la taille de cavité correspondant à nos expériences (∼6cm), les désaccords sont donc compris entre environ -4.5 et +4.5.

Nous allons à présent tenir compte de cette limitation dans nos cartes de paramètres de la figure 3.33. Nous reprenons donc la normalisation indépendante de la finesse que nous utilisions dans cette figure.

3.3.1.b-ii Paramètres accessibles expérimentalement

La figure 3.35 est la superposition des limites liées à la sélection de mode sur la figure 3.33. Ces limites sont indiquées par des cadres : le plus grand correspond à la taille minimale de la cavité réalisable expérimentalement (∼30mm) et donc celle pour laquelle Δ_s^{max} est le plus grand. Le cadre plus petit correspond à la taille de la cavité à laquelle nous avons le plus travaillée (∼45mm) et pour laquelle sont atteints les seuils (∼10mW) que nous avons utilisés dans nos simulations. Tous ces cadres ont la même taille suivant Δ_s car avec la normalisation $\Delta \in [-\pi, \pi]$, Δ_s^{max} ne dépend pas de la finesse. Cela justifie le fait de ne considérer que les désaccords de la pompe pour estimer la taille de la zone où l'OPO fonctionne.

On constate donc que pour les figures 3.35(b) et (f) pour lesquelles il existe des zones pour lesquelles la bifurcation de Hopf est accessible, celles-ci se trouvent au-delà des limites imposées par la sélection de mode : on ne peut donc pas les atteindre expérimentalement. Pour les cartes où l'intersection de la selection de mode et des critères de la Hopf est non-nulle, on peut calculer à l'intérieur du cadre le plus grand le rapport entre la surface vérifiant les conditions de la Hopf et la surface pour laquelle

l'OPO est au-dessus du seuil de fonctionnement. Cela donne une estimation de la probabilité de trouver la bifurcation autour d'une taille de cavité de 3cm. Celle-ci est de :

- ∼4% pour la figure 3.35(c) ($\mathcal{F}_p = 200$ et $\mathcal{F}_s = 550$)
- ∼10% pour la figure 3.35(d) ($\mathcal{F}_p = 550$ et $\mathcal{F}_s = 550$)
- ∼3% pour la figure 3.35(e) ($\mathcal{F}_p = 200$ et $\mathcal{F}_s = 200$).

On en déduit donc que même lorsque la finesse de la pompe est égale à celle du signal, la probabilité d'être dans les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf reste faible.

3.3.1.c Limites du calcul

Bien que les simulations précédentes ne prédisent que de manière approximative ce qui se passe réellement dans nos conditions expérimentales, elles donnent une bonne idée des difficultés rencontrées par l'expérimentateur pour se mettre dans les conditions d'une prévision théorique. Il faut cependant souligner plusieurs limites du calcul. En premier lieu, le choix du seuil utilisé comme référence (∼10mW) est peut-être surestimé : on peut dans certaines situations atteindre des seuils plus bas, de 1 à 5mW [Suret, 2000; Richy *et al.*, 1995]. D'une part nous avons soulevé dans la partie 1.3.5 les difficultés à estimer le seuil de l'OPO lorsqu'on travaille à une puissance de pompe élevée. D'autre part, il faut prendre garde à ne pas atteindre le seuil de destruction du cristal. Finalement la puissance maximale utilisée semble donc raisonnable, surtout si on se replace dans la problématique initiale, pour laquelle le but est de dépasser la valeur critique du taux de pompage à la bifurcation de Hopf pour atteindre une zone chaotique qui est nécessairement à des puissances de pompe plus élevées.

On pourrait penser qu'il suffit d'augmenter les finesses de la pompe et du signal au-dessus de 550 pour obtenir des zones très larges de paramètres pour lesquelles la bifurcation de Hopf est accessible. Cependant, lorsqu'on augmente la finesse de la pompe, l'injection du laser de pompe dans la cavité devient extrêmement délicate. D'autre part, nos considérations sur la sélection de modes sont faites pour une situation où l'OPO est doublement résonant. Ces calculs restent valables lorsque les résonances de la pompe sont larges comparées à celle du signal et du complémentaire. Cependant, lorsque la finesse de la pompe devient du même ordre que celles du signal, il faut considérer les limites imposées par les conditions de résonances de la pompe [Debuisschert *et al.*, 1993] qui donneront des restrictions suplémentaires par rapport à celles de la sélection de modes. D'autre part, lorsque les finesses du signal et du complémentaire sont grandes, il est possible que l'OPO cesse de fonctionner ou change de cluster avant d'atteindre le désaccord maximal autorisé [Eckardt *et al.*, 1991].

La conclusion que nous pouvons tirer de ces calculs numériques est qu'il est hautement improbable que les signaux chaotiques que nous avons observés soient décrits par le modèle monomode. Rappelons d'autre part que la limite inférieure de la fréquence de la bifurcation de Hopf du modèle monomode est de 9.5MHz. Comme les

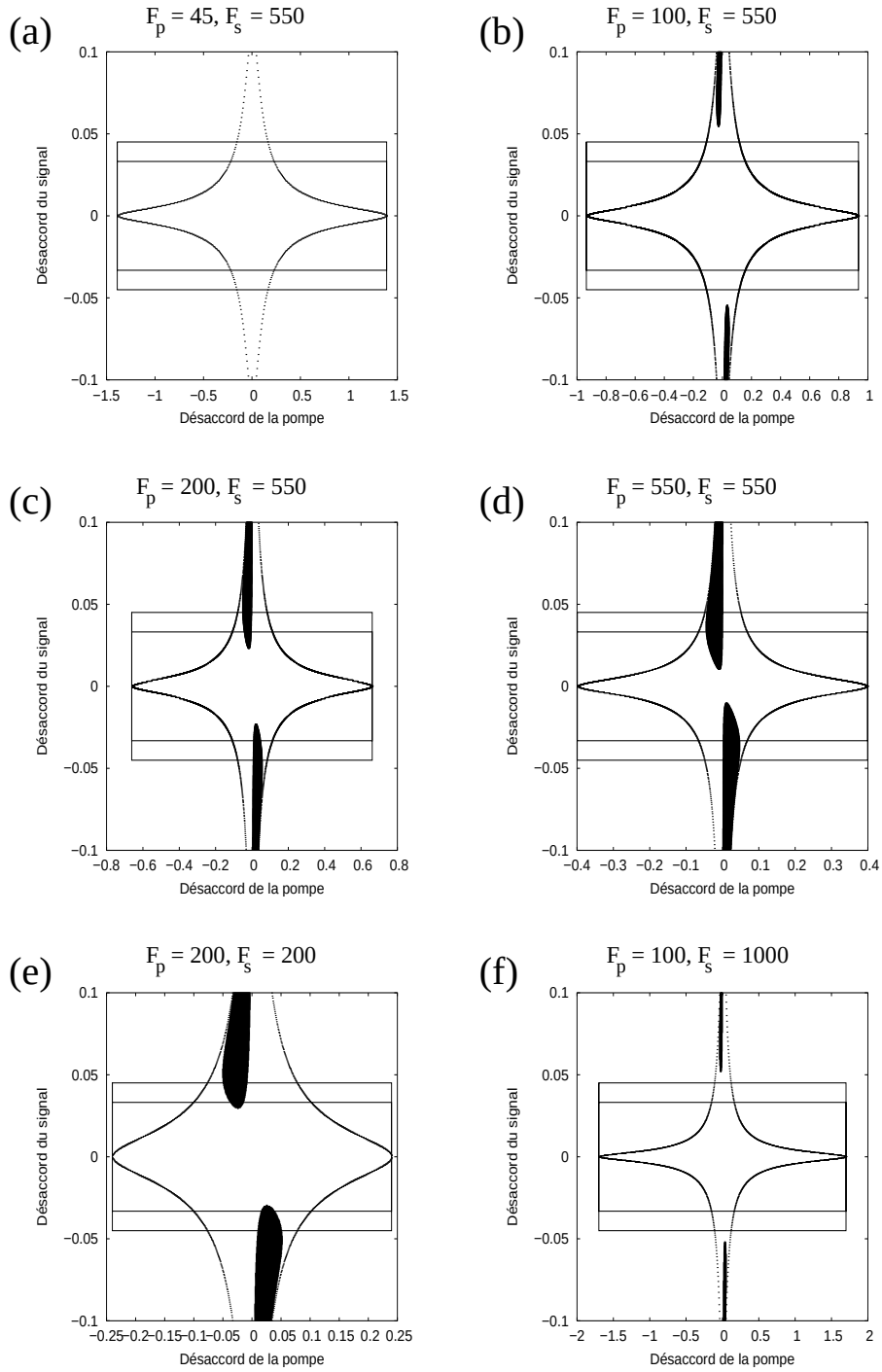


FIG. *3.35: Superposition des conditions liées à la sélection de modes aux cartes des zones vérifiant les conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf (zones grises) de la figure 3.33. La sélection de modes impose aux désaccords du signal de rester à l'intérieur des cadres. Le cadre le plus grand correspond à la plus petite taille de cavité réalisable expérimentalement (3 cm), le cadre plus petit correspond à la taille de cavité que nous avons le plus fréquemment utilisé dans nos expériences (4,5cm). Rappelons que les différentes figures correspondent à différentes conditions sur les finesses : (a)* $\mathcal{F}_p = 45$, $\mathcal{F}_s = 550$, *(b)*$\mathcal{F}_p = 100$, $\mathcal{F}_s = 550$, *(c)* $\mathcal{F}_p = 200$, $\mathcal{F}_s = 550$, *(d)* $\mathcal{F}_p = 550$, $\mathcal{F}_s = 550$, *(e)* $\mathcal{F}_p = 200$, $\mathcal{F}_s = 200$, *(f)* $\mathcal{F}_p = 100$, $\mathcal{F}_s = 1000$.

oscillations régulières encadrant la bouffée chaotique sont de fréquence 3MHz, nous sommes bien en-dessous de cette limite. Ces oscillations encadrant la bouffée chaotique sont proches en forme et en fréquence des oscillations rapides dont nous avons validé expérimentalement la description par un modèle bimode transverse, nous allons montrer numériquement qu'il existe dans certaines zones de paramètres une cascade de doublement de période dans ce modèle.

3.3.2 Modèle multimode transverse

3.3.2.a Rappel des diagrammes de bifurcation

Rappelons que dans le modèle multimode transverse dont nous avons montré qu'il modélise la plupart des oscillations rapides de 1 à plus de 100 MHz observées, des régimes chaotiques avaient été prévus numériquement [Suret *et al.*, 2001a]. Cependant, les exemples de comportement chaotiques montrés dans cette référence sont qualitativement différents du type de chaos observé expérimentalement. Nous avions confirmé dans la partie 2.3.2 l'existence de régimes chaotiques et montré différents diagrammes de bifurcation à désaccord de la pompe nul correspondant à des modes dont le barycentre est de plus en plus éloigné de la fréquence du repère tournant.

Nous rappelons donc qu'un chemin vers le chaos par doublement de période est prévu dans certaines gammes de paramètres. La figure 3.36 montre cette zone, elle correspond à un décalage de 15 entre le barycentre des deux modes et la fréquence du repère tournant. La figure 3.36(a) montre le diagramme que nous avons présenté dans la partie 2.3.2. Le diagramme 3.36(b) est un agrandissement de la zone chaotique pour un désaccord du mode 1 compris entre -18 et -16.6. On voit que le chemin suivi vers le chaos est un chemin classique de doublement de période.

On peut s'interroger sur la pertinence des paramètres choisis après les considérations précédentes sur les limitations des désaccords par la sélection de mode. Cependant, dans le cas du modèle bimode transverse, le nombre de paramètres dans les équations devient très grand (rôle du désaccord de la pompe, coefficients de couplage entre les champs) et il est très difficile de prendre en considération toutes les limites expérimentales. Il existe certainement d'autres cascades de doublement de période pour d'autres jeux de paramètre dans ce modèle. Compte tenu de nos travaux expérimentaux sur les oscillations rapides, cela en fait un modèle probable pour décrire le signal chaotique observé. Nous avons de plus montré que ce modèle pouvait présenter des régimes chaotiques de basse dimension alors que les exemples précédents [Suret *et al.*, 2001a] correspondaient a des régimes chaotiques plus complexes.

Finalement, dans cette partie nous avons exclu une interprétation du régime chaotique observé expérimentalement par un modèle monomode. Nous pensons qu'il est probable que plusieurs modes transverses interagissent dans le système pendant nos observations. Cela pourrait être prouvé expérimentalement par des expériences similaires à celles qui ont été menées dans la partie précédente, notamment en plaçant deux détecteurs en différents points du profil transverse du faisceau et en comparant les intensités de ces deux points.

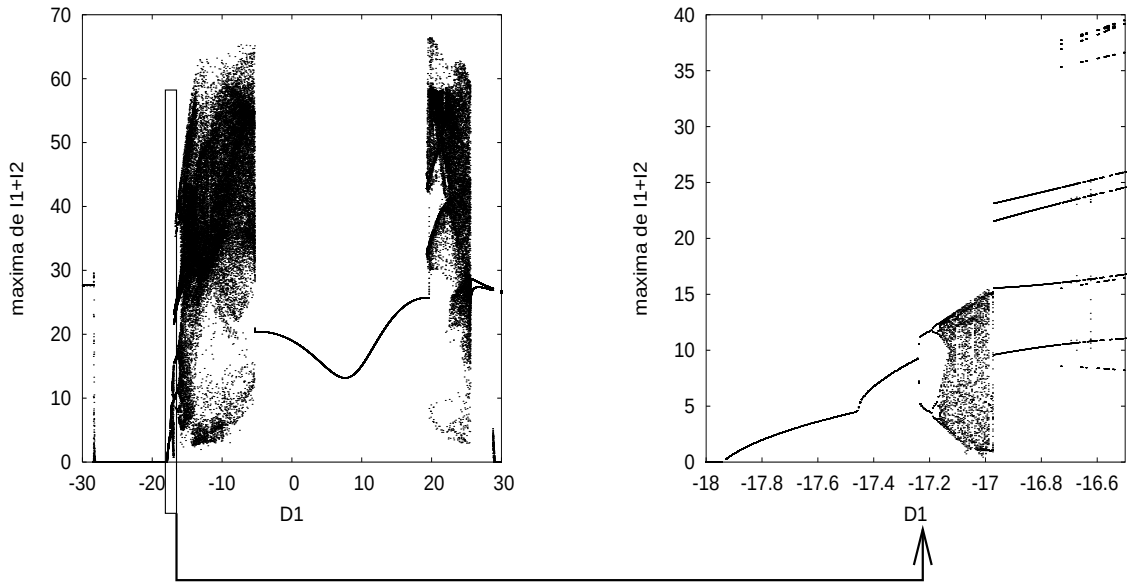


FIG. *3.36: Diagramme de bifurcation de l'intensité de la somme des intensités des modes en fonction du désaccord du mode 1. La somme des désaccords des deux modes est constante et égale à 15.*

D'autre part, notre étude des conditions d'apparition de la bifurcation de Hopf du modèle monomode nous a conduits à souligner les difficultés liées à la sélection de modes dans les OPO pour réaliser expérimentalement certaines conditions sur les désaccords.

Conclusion

Nous nous sommes intéréssés dans ce chapitre à des comportements dynamiques complexes présentés par les oscillateurs paramétriques optiques. Ceux-ci, malgré leur apparente simplicité sont susceptibles de présenter des comportements dynamiques très variés. Nous avons étudié particulièrement deux types d'oscillations complexes : des oscillations en rafales et du chaos déterministe.

Nous avons montré dans le cas des oscillations en rafales que le mécanisme des instabilités reposait sur des oscillations lentes autour d'un cycle de bistabilité dont une des branches est une solution périodique. D'autre part un développement perturbatif du modèle champ moyen multimode transverse dans le cas des oscillations les plus rapides a permis de montrer que la fréquence de ces oscilllations est la fréquence de battement entre les deux modes impliqués. Le seuil d'apparition du fonctionnement multimode ne dépend pas de cette fréquence, qui peut être très élevée, mais de la moyenne des désaccords des deux champs.

Nous avons d'autre part présenté ce qui est sans doute la première observation expérimentale de chaos déterministe dans les oscillateurs paramétriques optiques. Des techniques issues de l'analyse topologique nous ont permis d'analyser nos signaux

alors que les paramètres du système sont balayés.

Enfin, nous avons mis en évidence que l'interprétation la plus probable de ce régime chaotique repose sur le modèle multimode transverse à l'origine des oscillations rapides analysées dans le chapitre précédent. En étudiant la possibilité de remplir les conditions de la bifurcation de Hopf du modèle monomode, nous avons montré que les contraintes liées à la sélection de modes diminuent notoirement les désaccords du signal atteignables expérimentalement. Cela montre la difficulté de réaliser expérimentalement certaines prédictions théoriques.

Chapitre 4

Etude des spectres d'OPO de type II et I, retard à la bifurcation

Nous réunissons dans ce chapitre des travaux qui demanderaient à être approfondis de diverses manières. Cependant, l'intérêt des résultats déjà obtenus, même s'ils sont parfois incomplets, nous conduit à les exposer ici.

Nous avons jusqu'à présent étudié la dynamique temporelle de l'OPO et plus particulièrement de comportements oscillatoires de fréquences élevées (de 1 à plus de 100 MHz) pouvant conduire à des comportements dynamiques plus complexes. Nous avons montré qu'en général ces oscillations rapides peuvent être décrites par un modèle impliquant deux modes transverses couplés du signal. Pour que ce couplage puisse avoir lieu, il est nécessaire que les deux modes impliqués dans l'interaction soient proches. Si on prend comme critère les fréquences des oscillations les plus rapides observées expérimentalement ($\sim$300MHz), cela représente un neuvième d'intervalle spectral libre et 60 fois la largeur d'une résonance. Dans ce cas le spectre du signal peut soit présenter une seule fréquence (les deux modes sont accrochés), soit comporter deux fréquences mais relativement proches. A priori, deux modes de fréquences très éloignées ne peuvent coexister car le couplage devient trop faible. On s'attend donc finalement, avec la résolution de nos appareils de mesure, à obtenir une seule raie ou deux raies très proches dans le spectre du signal et dans celui du complémentaire si ceux-ci peuvent être séparés, ce qui est le cas des OPO de type II. Cette séparation ne peut pas se faire dans le cas des OPO de type I et le spectre du champ émis par l'OPO contient alors deux fréquences : celles du signal et celle du complémentaire sauf à la dégénérescence où ces deux fréquences sont confondues. Dans ce chapitre, nous allons d'abord nous intéresser aux spectres expérimentaux des OPO de type I et II. Enfin nous présenterons une étude théorique du retard à la bifurcation dans les instabilités monomodes thermiques.

Pour les OPO de type II, le travail repose sur des observations expérimentales montrant la présence de plusieurs fréquences dans le spectre du signal distantes d'au moins 1GHz. Ces observations sont étonnantes car les OPO sont en général considérés comme intrinséquement monomodes. Nous étudions donc la possibilité pour l'OPO de pouvoir présenter deux fréquences très différentes dans son spectre. Nous proposons

deux hypothèses pour interpréter ce résultat. Pour la première, nous tenons compte des effets thermiques dans un modèle bimode thermique [Suret *et al.*, 2001b] et nous montrons numériquement que la température peut stabiliser le système au point de bifurcation entre ces deux modes. Dans un second temps, nous étudions la possibilité de la projection de la pompe sur plusieurs modes transverses, et donc de la présence de plusieurs termes de pompage dans les équations.

Dans le cas des OPO de type I, nous nous sommes intéressés au comportement du spectre du signal et du complémentaire au voisinage de la dégénérescence. En effet le passage de l'OPO de non dégénéré à dégénéré par changement de la température du cristal est similaire à une transition de phase du second ordre. C'est une transition au cours de laquelle chaque photon de pompe au lieu de produire deux photons différents ne produit plus qu'un seul type de photons. D'autre part une fois le point de transition dépassé, il n'existe plus de solutions pour l'OPO vérifiant la conservation de l'énergie et l'accord de phase. Nous présenterons un dispositif expérimental permettant d'observer l'évolution des spectres du signal et du complémentaire au voisinage de la dégénérescence. Les observations expérimentales montrent la présence d'une dynamique complexe.

Dans une dernière partie nous exposerons une étude du retard à la bifurcation dans les oscillations monomodes thermiques [Suret *et al.*, 2000]. En effet ces oscillations monomodes thermiques sont des oscillations de relaxation autour d'un cycle de bistabilité et le système traverse périodiquement deux bifurcations. Comme il arrive avec une certaine vitesse sur cette bifurcation, la commutation sur une nouvelle branche ne se fait qu'avec un certain retard. Dans le cas où la bifurcation est localisée sur une branche pour laquelle l'intensité du signal est nulle, ce retard est lié au problème du démarrage de l'OPO à partir du bruit. Nous montrons qu'il existe des lois d'échelles entre le niveau moyen de bruit et le retard à la bifurcation.

4.1 Coexistence de modes

Dans un premier temps nous étudions donc la possibilité dans certaines conditions de la présence dans le spectre du signal de l'OPO de deux fréquences différentes. Nous commençons par rappeler brièvement les raisons qui rendent ce résultat étonnant. En effet l'OPO est souvent comparé à un laser à élargissement homogène pour lequel un seul mode peut osciller. Nous présentons ensuite le dispositif expérimental et les observations d'une telle situation. Nous proposons finalement deux interprétations théoriques dont nous montrons numériquement qu'elles peuvent conduire à la coexistence de deux modes de fréquences très différentes dans le signal de l'OPO. La première hypothèse repose sur la stabilisation thermique de l'OPO sur une solution bimode stationnaire. La seconde interprétation considère la possibilité d'implication de plusieurs modes de la pompe.

4.1.1 L'OPO comme laser à élargissement homogène

Nous allons rappeler que dans le cas où on ne tient compte ni des effets thermiques ni du couplage entre les modes transverses, l'OPO est forcément monomode. Pour simplifier les calculs, on va se placer dans le cas dégénéré et considérer seulement deux modes. Bien sûr, dans le cas dégénéré une seule fréquence d'oscillation est possible pour l'OPO, $\omega_p/2$. Cependant, nous avons vu dans la partie 3.1, qu'un OPO non-dégénéré peut s'écrire asymptotiquement et après changement de variable sous la forme des équations de l'OPO dégénéré. Dans ce cas un "mode" représente un couple signal/complémentaire de fréquences (ω_s, ω_c) vérifiant la conservation de l'énergie et dont les désaccords vérifient $\Delta_s = \Delta_c$. Considérer plus de deux modes ne change rien aux considérations qui vont suivre.

Les équations pour un OPO bimode sans couplage s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_p &= \gamma[-(1+i\Delta_p)A_p - A_1^2 - A_2^2 + E], \\
\dot{A}_1 &= -(1+i\Delta_1)A_1 + A_p A_1^*, \\
\dot{A}_2 &= -(1+i\Delta_2)A_2 + A_p A_2^*.
\end{aligned}$$

Les solutions stationnaires de ce système sont alors [Schwob *et al.*, 1998] :

– mode off :

$$\begin{aligned}
|A_p|^2 &= \frac{E^2}{1+\Delta_p^2} \\
A_1 &= 0 \\
A_2 &= 0
\end{aligned}$$

– mode on1 :

$$\begin{aligned}
|A_p|^2 &= 1+\Delta_1^2 \\
|A_1|^2 &= (-1+\Delta_p\Delta_1) \pm \sqrt{E^2 - (\Delta_p + \Delta_1^2)} \\
A_2 &= 0
\end{aligned}$$

– mode on2 :

$$\begin{aligned}
|A_p|^2 &= 1+\Delta_2^2 \\
A_1 &= 0 \\
|A_2|^2 &= (-1+\Delta_p\Delta_2) \pm \sqrt{E^2 - (\Delta_p + \Delta_2^2)}
\end{aligned}$$

Lorsque $E < \min((1+\Delta_p^2)(1+\Delta_1^2), (1+\Delta_p^2)(1+\Delta_1^2))$, l'OPO est en dessous du seuil et aucun mode n'oscille. Lorsque E atteint le seuil du mode de seuil le plus bas, ce mode commence à osciller. Si E augmente encore, comme la pompe intracavité reste bloquée à la valeur $|A_p|^2 = (1+\Delta_1^2)$, le seuil du deuxième mode n'est jamais atteint.

La seule configuration pour laquelle les deux modes A_1 et A_2 peuvent coexister correspond à une situation où : $|\Delta_1| = |\Delta_2|$. Les deux modes ayant le même seuil, ils commencent à osciller simultanément. Mais cette condition est critique : les fluctuations mécaniques ou thermiques ne permettent pas de maintenir le système en ce point [Agarwal et Gupta, 1997]. La figure 4.1 représente schématiquement l'intensité du signal en fonction de la taille de la cavité dans une zone où il existe deux modes tels que $\Delta_1 = -\Delta_2$. On voit que lorsqu'on change la taille de la cavité, on balaie la résonance du mode 1 puis celle du mode 2, le seul point pour lequel les deux modes peuvent coexister est celui pour lequel $\Delta_1 = -\Delta_2$.

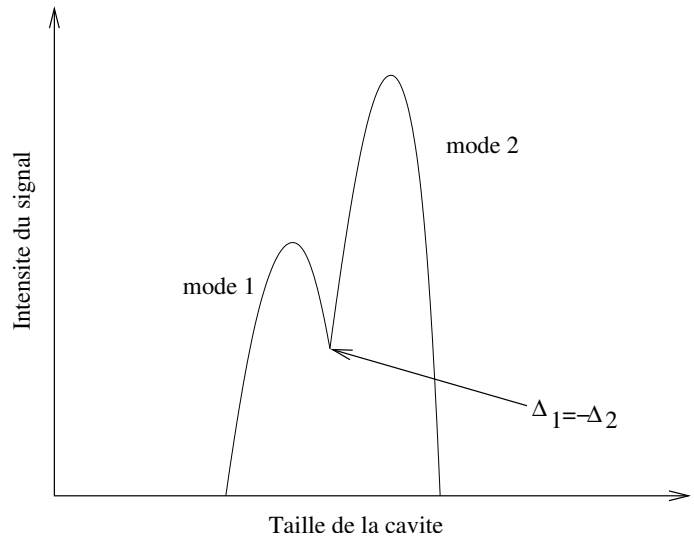


FIG. *4.1: Représentation schématique inspirée de [Schwob et al., 1998] de l'intensité du signal en fonction de la taille de la cavité et à désaccord de la pompe nul. Si le mode 1 est celui qui a le désaccord le plus petit pour les petites tailles de la cavité, le système balaie d'abord la résonance du mode 1. Arrivé au point* $\Delta_1 = -\Delta_2$ *les désaccords du mode 2 seront plus petits que ceux du mode 1 et le système va balayer la résonance du mode 2. Au point où* $\Delta_1 = -\Delta_2$ *les deux modes coexistent.*

Pour conclure, dans un modèle ne tenant compte ni des effets thermiques, ni du couplage, sauf situations très particulières, l'OPO peut être considéré comme monomode. Les effets thermiques observés expérimentalement [Suret *et al.*, 2001b] correspondent à des sauts d'un mode à l'autre. Le système est alors périodiquement sur un mode ou sur l'autre au cours du temps, mais n'est pas sur les deux simultanément sauf pendant les transitoires. Quant aux effets de couplage, comme nous l'avons dit dans l'introduction, ils concernent a priori des modes dont les résonances sont très proches par rapport à un intervalle spectral libre de la cavité de l'OPO.

4.1.2 Observations expérimentales

4.1.2.a Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est similaire à celui des parties précédentes : l'OPO est constitué d'un cristal de KTP (15mm x 5mm x 5mm) coupé pour un accord de phase de type II placé entre deux miroirs sphériques de rayon de courbure 5 cm, réfléchissants pour les longueurs d'onde 532 nm (longueur d'onde de la pompe) avec une finesse de 50 et 1064 nm (longueur d'onde approximative du signal et du complémentaire) avec une finesse de 550. La taille de la cavité est d'environ 47 mm, c'est à dire une configuration proche de confocale. La puissance de pompe injectée est d'environ 3.5 W pour un seuil minimum d'oscillation d'environ 25mW. Nous sommes donc à environ 140 fois le seuil.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 4.2. Il est semblable au dispositif général décrit en détail dans la partie 2.1.2. Pour étudier le spectre du signal, le faisceau est injecté dans un interféromètre Pérot-Fabry. Un isolateur à la longueur d'onde du signal (1064nm) est placé entre le cube polariseur et l'analyseur de spectre. L'analyseur de spectre est une cavité Fabry-Pérot confocale de finesse 200 à $1.06\mu m$ et d'intervalle spectral libre 10 GHz.

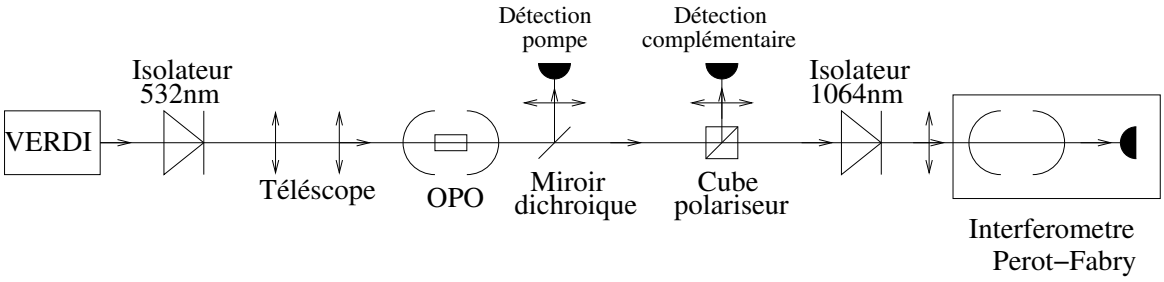


FIG. *4.2: Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé. Le dispositif est semblable aux dispoisitifs précédents. Le signal est injecté à l'aide d'une lentille dans un analyseur de spectre consistant en une cavité Fabry-Pérot à la sortie de laquelle est disposée une photodiode.*

4.1.2.b Observations

La figure 4.3(a) montre l'intensité du signal au cours du temps de balayage d'un intervalle spectral libre de la cavité par l'interféromètre Fabry-Pérot. Les fichiers de la figure 4.3 ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1MHz. Le fichier avant filtrage ne présente aucune instabilité mise à part une oscillation résiduelle à la fréquence 300 Hz qui est toujours observée lorsqu'on regarde l'évolution de l'intensité sur des temps lents et qui est sans doute liée à des fluctuations mécaniques. Pendant ce temps d'observation, pour lequel l'intensité du signal peut être considérée comme stationnaire, on observe à la sortie de l'interféromètre l'intensité de la figure 4.3(b). On voit trois pics d'intensité. Les deux pics extrêmes correspondent au même mode de l'OPO, ils sont donc séparés par un intervalle spectral libre de la

cavité Fabry-Pérot, soit 10GHz. Le pic du milieu correspond à un autre mode. La figure 4.3(c) montre la tension appliquée aux cales piézo-électriques permettant de balayer la cavité Fabry-Pérot.

On sait que la distance entre les deux pics correspondant à un intervalle spectral libre de la cavité Fabry-Pérot correspond à un écart en fréquences de 10 GHz. D'autre part l'intervalle spectral libre de la cavité de l'OPO est environ 2.5GHz. On peut en déduire que la distance entre les deux pics est au minimum de 1.1GHz. A cause du repliement des fréquences liées à la cavité, la distance en fréquence réelle entre les deux pics est de $|1.1 + n\times10|$GHz où n est un entier relatif. On peut en déduire que les deux pics correspondent à deux modes transverses différents. Comme nous sommes proches de la configuration confocale et qu'un demi intervalle spectral libre de l'OPO correspond à 1.25GHz, il est raisonnable de penser que ces deux modes correspondent à un mode TEM_{00} et à un mode TEM_{01}.

La figure 4.4 est un enregistrement consécutif à celui de la figure 4.3. Les fichiers ont aussi été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1MHz. Le comportement est globalement semblable au précédent et les mêmes modes sont mis en jeu. Cependant l'intensité du signal (figure 4.4(a)) présente une oscillation de fréquence 6.5 kHz supplémentaire à celle de 300 Hz. Cette fréquence est suffisamment faible pour être résolue par le Fabry-Pérot et le dédoublement du pic autour du temps 9ms est lié à la modulation de l'intensité à la sortie du Fabry-Pérot par les oscillations.

La fréquence de cette nouvelle oscillation est du même ordre de grandeur que celle des instabilités thermiques et celles-ci peuvent avoir une forme quasi-sinusoidale lorsqu'on est près de la bifurcation leur donnant naissance.

Ces observations sont surprenantes compte tenu des considérations que nous avons rappelées dans la première partie et qui tendent à montrer que le signal et le complémentaire sont monomodes. Elles ont été faites à forte puissance de pompe. L'exploration expérimentale montre qu'on peut trouver des régimes bimodes pour des puissances de pompe plus faibles, mais dans ces situations, un mode était toujours beaucoup plus faible que l'autre.

Nos observations étant en contradiction avec la description précédente de l'OPO, nous proposons à présent plusieurs hypothèses pouvant expliquer ce comportement de l'OPO. Le manque de temps n'a pas permis de valider ces hypothèses expérimentalement mais nous proposerons des pistes d'expériences qui permettraient de pouvoir valider une des hypothèses.

4.1.3 Interprétations théoriques

Nous allons proposer deux hypothèses permettant d'expliquer le caractère multimode de l'OPO et montrer numériquement que pour chacune de ces hypothèses l'OPO peut en effet être multimode. La première est la stabilisation thermique d'une situation multimode, la seconde fait intervenir plusieurs modes de la pompe.

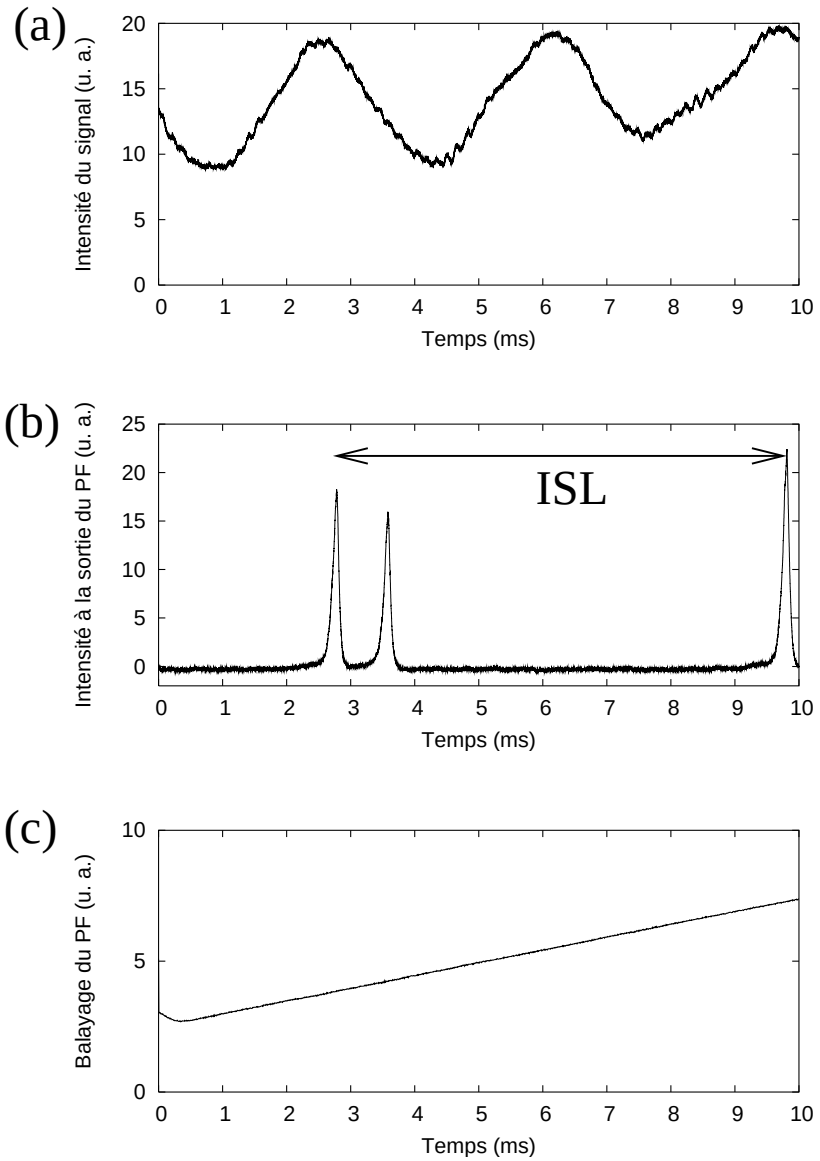


FIG. *4.3: (a) Intensité du signal vue par un détecteur au silicium de bande passante 1GHz, cette intensité ne présente pas d'instabilités rapides, seulement une oscillation résiduelle à la fréquence de 300 Hz qui pourrait être liée aux fluctuations mécaniques ; (b) Intensité vue à la sortie de l'interféromètre Fabry-Pérot, l'intervalle spectral libre (ISL) de la cavité Fabry-Pérot est indiqué par une double flèche ; (c) Tension appliquée aux cales piézo-électrique de la cavité Fabry-Pérot. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1MHz.*

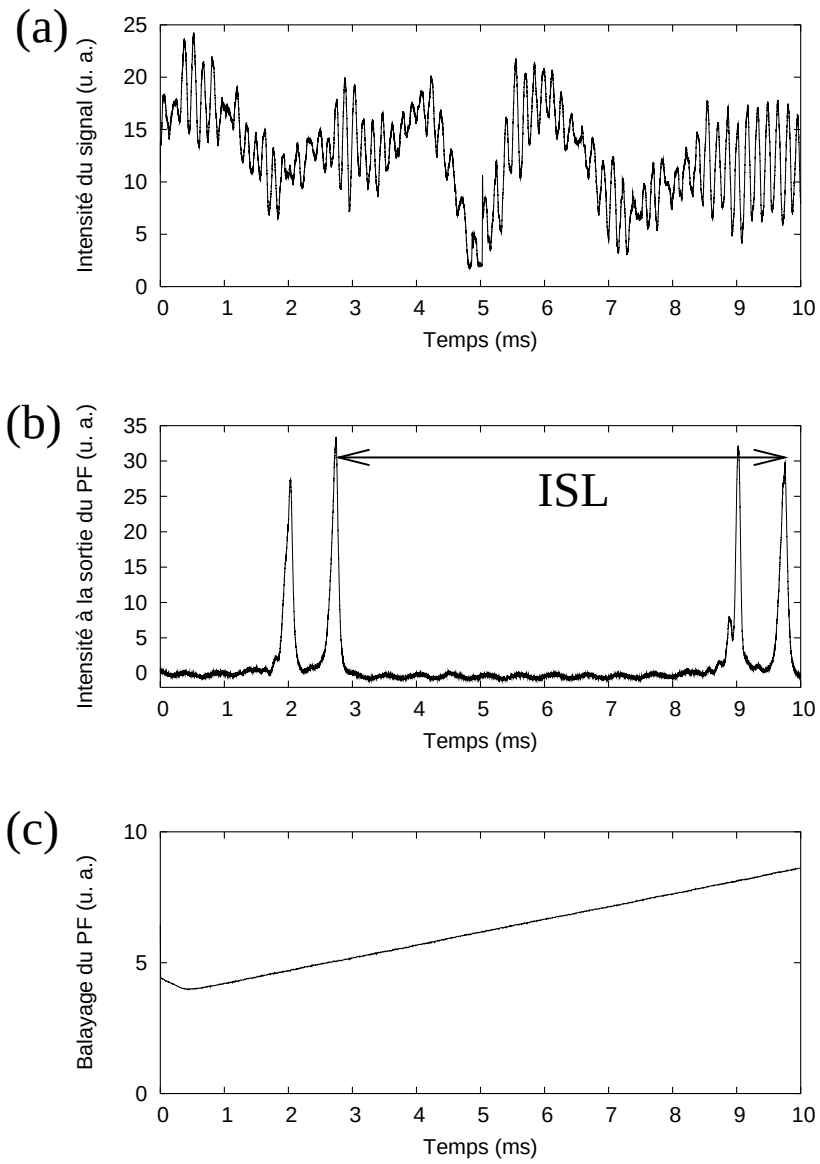


FIG. *4.4: (a) Intensité du signal vue par un détecteur silicium de bande passante 1 GHz, cette intensité présente outre l'oscillation résiduelle à la fréquence de 300 Hz une oscilllation plus rapide à la fréquence 6.5kHz ; (b) Intensité vue à la sortie de l'interféromètre Fabry-Pérot ; (c) Tension appliquée aux cales piézo-électrique de la cavité Fabry-Pérot. Les fichiers ont été filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1MHz.*

4.1.3.a Stabilisation de l'échange de stabilité par les effets thermiques

4.1.3.a-i Modèle multimode thermique

Suret *et al.* ont développé un modèle multimode thermique [Suret *et al.*, 2001b] tenant compte des fluctuations de la taille de la cavité liées aux variations de la température du cristal. Ce modèle permet d'interpréter des oscillations spontanées dans l'OPO de fréquence de l'ordre de 10kHz, il a été décrit dans la partie 1.2.2 et nous en rappelons les grandes lignes.

Les fluctuations de la taille de la cavité engendrent des variations des désaccords qui deviennent alors des variables lentes du système. Le modèle décrivant le système contient alors une nouvelle variable, θ, qui est l'écart entre les désaccords des signaux pour la cavité froide et la cavité chaude. On suppose que cet écart est identique pour les deux modes car ils ont les mêmes pertes. L'écart pour la pompe est $\frac{2\theta}{\gamma}$ pour tenir compte de la différence des pertes et d'intervalle spectral libre entre la pompe et le signal. L'équation différentielle à laquelle obéit θ est phénoménologique. Le paramètre $\epsilon \ll 1$ représente l'échelle de temps lente de variation de la température du système par rapport aux variables optiques. Le système décrivant la dynamique de l'OPO devient alors :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_p &= \gamma[-(1+i\sigma_p(\theta))A_p - A_1^2 - A_2^2 + E] \\
\dot{A}_1 &= -(1+i\sigma_1(\theta))A_1 - A_p A_1^* \\
\dot{A}_2 &= -(1+i\sigma_2(\theta))A_2 - A_p A_2^* \\
\dot{\theta} &= \epsilon[-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta(|A_1|^2 + |A_2|^2)],
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \Delta_p - \frac{2\theta}{\gamma} \\
\sigma_1 &= \Delta_1 - \theta \\
\sigma_2 &= \Delta_2 - \theta.
\end{aligned}$$

Lorsque le système est proche du point d'échange de stabilité entre les deux modes, ces équations conduisent l'OPO à osciller successivement sur deux modes différents (longitudinaux ou transverses) de l'OPO. On a représenté de manière schématique sur la figure 4.5 les états stationnaires des deux modes lorsque θ est considéré comme un paramètre. Les états stables sont en traits fins continus et les états instables en traits fins pointillés. Le point θ^* marque le point d'échange de stabilité entre les deux modes, qui vérifie $\sigma_1(\theta^*) = -\sigma_2(\theta^*)$. Le cycle en trait gras correspond à la trajectoire du système lorsque θ n'est plus considéré comme un paramètre mais comme une variable lente. S'il n'y avait pas de retard à la bifurcation, le cycle serait de largeur nulle. Par rapport à la figure 4.1, le désaccord de la pompe n'est plus considéré comme nul, ce qui explique que les résonances soient inclinés.

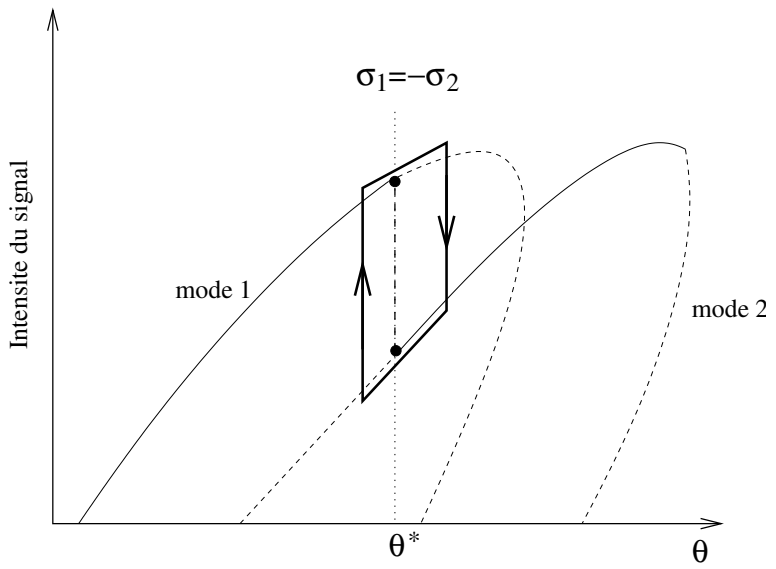


FIG. *4.5: Représentation schématique issue de [Suret, 2000] de l'intensité du signal en fonction de θ représentant la température du système. Les traits fins représentent les états stationnaires du système bimode pour θ paramètre, en traits continus les états stables et en pointillés les états instables. En trait gras est représenté le cycle parcouru par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente.*

4.1.3.a-ii Déformation du portrait de phase pour le modèle complet

Si dans certaines situations la prise en compte de la température conduit le système à osciller entre les deux modes, on peut se demander si la température, dans d'autres gammes de paramètres ne permet pas de stabiliser le système sur une solution bimode stationnaire. En effet, sur la figure 4.5, toutes les combinaisons linéaires de la ligne en trait pointillé gras sont stables pour le système où θ est considéré comme un paramètre fixé à sa valeur θ^*. Cependant, lorsque θ est considéré comme une variable, cela n'est plus vrai : le portrait est déformé et un point particulier est sélectionné pour lequel se fait l'échange de stabilité.

D'autre part, le cycle d'oscillation thermique peut être plus étroit que celui présenté sur la figure 4.5. Ainsi nous montrons schématiquement sur la figure 4.6 un cycle pouvant donner lieu à des oscillations de forme sinusoïdale. Cela correspond tout à fait aux observations expérimentales de la figure 4.4(a). Dans ce cas, la figure 4.3 correspond à la stabilisation thermique sur un point intermédiaire entre les deux points d'échange de stabilité, puis à cause de la dérive des paramètres, le système s'éloigne de ce point et oscille sur un cycle de petite taille autour de ce point donnant naissance aux oscillations de la figure 4.4(a).

4.1.3.a-iii Stabilisation dans des simulations numériques

Des simulations numériques avec des paramètres proches de ceux employés dans l'article [Suret *et al.*, 2001b] montrent que le système peut en effet être stabilisé par la température sur une solution bimode.

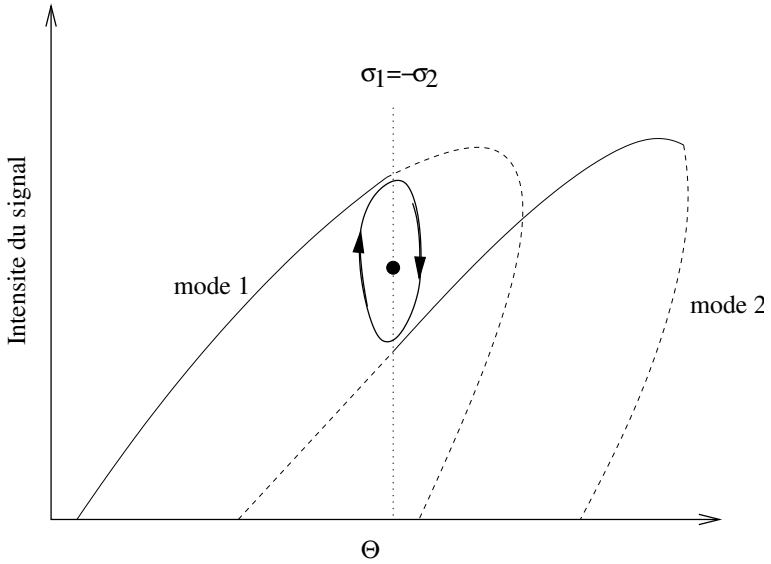


FIG. *4.6: Représentation schématique de l'intensité du signal en fonction de θ représentant la température du système. Les traits fins représentent les états stationnaires du système bimode pour θ paramètre, en traits continus les états stables et en pointillés les états instables. En trait gras est représenté un cycle parcouru par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente et donnant lieu à des oscillations de l'intensité de forme quasi-sinusoidale. Le point central marque la bifurcation pour laquelle le système est stationnaire.*

La figure 4.7 montre le résultat de cette simulation numérique. On constate donc qu'en plus des solutions périodiques, il existe des solutions stables même en tenant compte de l'influence de la température. Cette simulation ne correspond cependant pas tout à fait à la réalité de notre dispositif expérimental, notamment la puissance de pompe utilisée dans la simulation (36 fois le seuil) est beaucoup plus faible que celle de la situation expérimentale (140 fois le seuil). D'autre part le rapport des intensités des modes est beaucoup plus grand dans la simulation numérique que dans l'expérience. Si le modèle était validé, une exploration numérique plus poussée mériterait d'être menée pour trouver des situations bimodes stationnaires à forte puissance ($E = 17$) et où les deux modes ont des intensités du même ordre.

La figure 4.8(a) montre les états stationnaires du modèle pour θ paramètre et pour les valeurs des paramètres utilisés dans les simulations numériques de la figure 4.7. Les traits continus sont des états stables et les traits pointillés les états instables. On retrouve bien un profil similaire au portrait schématique de la figure 4.5. Si on superpose les solutions stationnaires obtenues par l'intégration numérique sur un agrandissement de cette figure, on obtient les trois points de la figure 4.8(b). Ces points sont les intensités des modes 1 et 2 seuls et la somme des deux. L'intensité du mode 2 correspond à celle que le mode aurait au point d'échange de stabilité pour θ paramètre, tandis que celle de du mode 1 est beaucoup plus faible.

Nous avons donc montré qu'une stabilisation thermique d'une solution bimode périodique est possible numériquement. Nous allons proposé une autre interpréta-

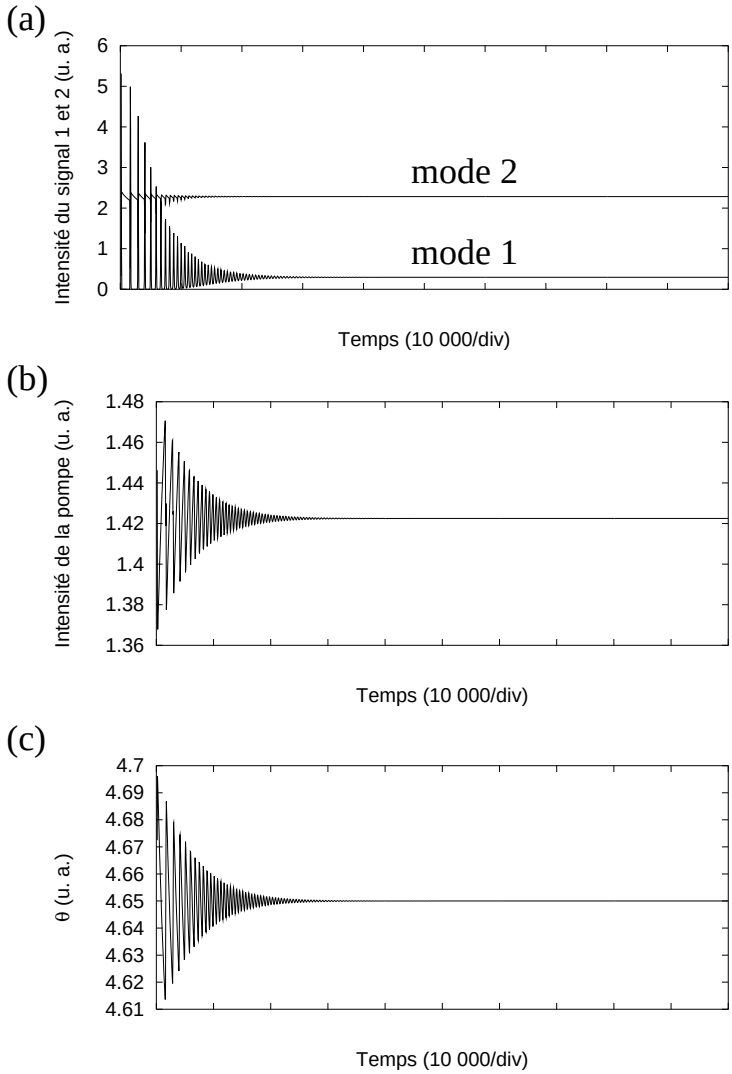


FIG. *4.7: Intégration numérique du modèle complet pour les paramètres :* $\Delta_p = -2.1, \Delta_1 = 4, \Delta_2 = 5.3, E = 6, \epsilon = 3.10^{-4}, \alpha = 2, \beta = .7, \gamma = 8, \eta = 10^{-40}$. *(a) Intensités des modes 1 et 2, (b) Intensité de la pompe, (c)* θ. *Une unité de temps d'intégration correspond à environ 80ns.*

tion du comportement multimode avant de proposer des expériences complémentaires permettant de déterminer quelle hypothèse est celle qui correspond à l'expérience.

4.1.3.b Modèle multimode transverses pour la pompe et le signal

Nous envisageons à présent une autre possibilité liée au problème de l'injection de la pompe. Le fait de considérer que le mode de la pompe est un mode TEM_{00} de la cavité est une approximation. En général, expérimentalement, on utilise un télescope formé de deux lentilles de manière à adapter la taille du waist du faisceau de pompe et sa position à celle du mode TEM_{00} de la cavité. Ce mode transverse est alors celui qui est injecté majoritairement. Si d'autres modes sont injectés, c'est avec un très

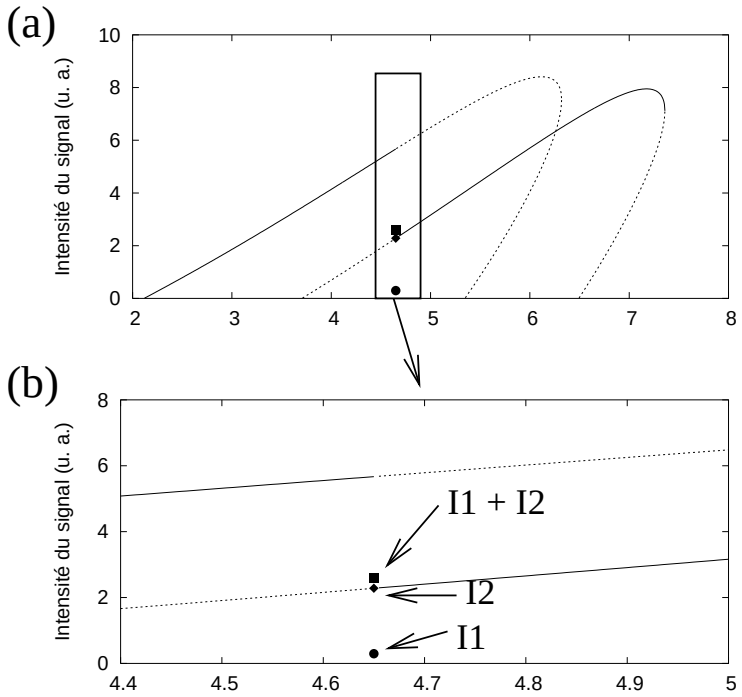


FIG. *4.8: (a) Etats stationnaires de l'intensité du signal en fonction de θ considéré comme un paramètre pour les valeurs des paramètres de l'intégration numérique de la figure 4.7. Les traits continus sont les états stables, les traits pointillés les états instables ; (b) agrandissement de (a) pour $4.4 < \theta < 5$, les points sont les solutions stationnaires obtenues numériquement pour l'intensité du mode 1 (I1), du mode 2 (I2) et pour la somme de ces intensité.*

faible couplage et a priori ils ne vont pas générer de sous-harmoniques. Cependant à haut taux de pompage on peut se demander si cette approximation est toujours vraie. Tout particulièrement lorsqu'on travaille dans des positions pour lesquelles on peut supposer qu'il existe des chevauchements de résonance pour les sous-harmoniques (dans certaines situations où l'on observe des oscillations rapides), il y a de fortes probabilités pour qu'il y ait un chevauchement semblable pour les résonances de la pompe. Finalement, le problème de la déplétion de la pompe peut modifier sa structure transverse et après interaction avec le signal et le complémentaire, on ne peut sans doute plus considérer le mode de la pompe comme un TEM_{00}. Enfin, l'interaction paramétrique fonctionne aussi bien de la pompe vers le signal que du signal vers la pompe. Si le recouvrement entre le champ du signal et un autre mode transverse de la pompe est suffisant, l'introduction d'un nouveau mode de pompe est justifié.

4.1.3.b-i Possibilité de projeter la pompe sur plusieurs modes

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 1, une des étapes conduisant à l'établissement des différents modèles champs moyens que nous avons utilisés consiste à décomposer les champs sur une base des modes transverses de la cavité. En général

on ne considère ensuite qu'un seul mode transverse pour la pompe, c'est à dire qu'on considère que les projections de la pompe sur les autres modes transverses sont très faibles et n'influent pas sur la dynamique du système.

La possibilité que la présence de plusieurs modes transverses de la pompe perturbe la dynamique du système pour des taux de pompage élevés est évoquée dans différents travaux [Schwob *et al.*, 1998]. L'étude théorique et numérique dans le cas de faisceaux gaussiens et de miroirs sphériques de la structure spatiale des faisceaux pompe et signal est détaillée dans [M.Marte *et al.*, 1998] pour différentes conditions plus ou moins proches de la situation confocale. Le profil de la pompe n'est alors plus gaussien mais aplati au centre, là où se fait la déplétion.

4.1.3.b-ii Conséquences sur le modèle

Nous proposons un modèle très simplifié mettant en jeu seulement deux modes de la pompe et deux modes du signal. Nous considérerons que ces deux modes du signal ne sont pas couplés car ils correspondent à deux couples signal/complémentaire (A_{s1}, A_{c1}) et (A_{s2}, A_{c2}) tels que $\omega_{s1} \neq \omega_{s2}$ et $\omega_{c1} \neq \omega_{c2}$. Si les modes sont suffisamment éloignés en fréquence, ils ne sont pas couplés [Jou, 1997]. Les couplages possibles sont schématisés sur la figure 4.9.

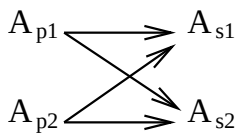


FIG. *4.9: Représentation schématique des couplages possibles dans le modèle des equations 4.1.*

Si on tient compte de deux modes transverses de la pompe, on obtient deux termes de pompe A_{p1} et A_{p2} pompés par deux termes d'injection E_1 et E_2 correspondant à la projection du champ de pompe sur chaque mode. Ces deux modes sont dans le même repère tournant de fréquence ω_p. On suppose que ces deux modes sont chacun couplés avec deux modes transverses du signal : A_{s1} et A_{s2} qui peuvent être deux modes transverses ou longitudinaux différents. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\dot{A}_{s1} = -(1+i\Delta_{s1})A_{s1} + \chi_{11}A_{s1}^*A_{p1} + \chi_{21}A_{s1}^*A_{p2} \tag{4.1a}$$
$$\dot{A}_{s2} = -(1+i\Delta_{s2})A_{s2} + \chi_{12}A_{s2}^*A_{p1} + \chi_{22}A_{s2}^*A_{p2} \tag{4.1b}$$
$$\dot{A}_{p1} = \gamma\left[-(1+i\Delta_{p1})A_{p1} - \chi_{11}A_{s1}^2 - \chi_{12}A_{s2}^2 + E_1\right] \tag{4.1c}$$
$$\dot{A}_{p2} = \gamma\left[-(1+i\Delta_{p2})A_{p2} - \chi_{21}A_{s1}^2 - \chi_{22}A_{s2}^2 + E_2\right], \tag{4.1d}$$

où les coefficients de couplage χ_{ij} dépendent du recouvrement des modes. On a supposé que les pertes étaient identiques pour les deux modes de la pompe d'une part et ceux du signal d'autre part. Cette approximation est raisonnable si les modes

transverses mis en jeu sont d'ordre comparable et donc que leurs pertes aux miroirs sont du même ordre.

La figure 4.10 montre la signification des désaccords des équations (4.1). L'OPO est supposé dégénéré mais les modes $|A_{s1}|$ et $|A_{s2}|$ correspondent en fait à des couples signal/complémentaire de fréquences différentes, ce qui justifie qu'on ne considère pas de couplage entre ces modes.

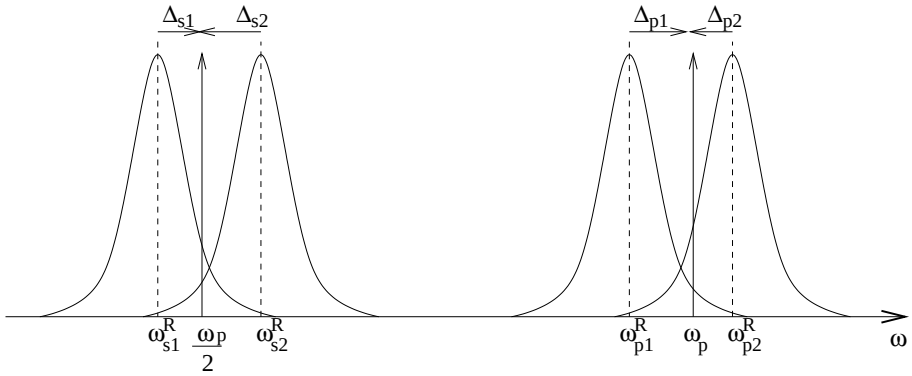


FIG. *4.10: Schéma de la position des résonances ω_{p1}^R et ω_{p2}^R de la pompe et ω_{s1}^R et ω_{s2}^R du signal. La fréquence du repère tournant est ω_p pour la pompe et $\omega_p/2$ pour le signal car notre modèle est dégénéré.*

Insistons cependant sur le fait que la signification de la décomposition sur deux modes de pompe ne signifie pas un mauvais alignement de la cavité mais plutôt une situation où les modes sont trop proches pour que l'on puisse négliger ce mode (proche confocal à puissance élevée comme c'est le cas dans notre expérience) ou lorsque la déplétion de la pompe montre que son profil transverse ne peut être raisonnablement décrit avec un unique mode transverse.

4.1.3.b-iii Simulations numériques

Comme on pouvait s'y attendre puisque le modèle a deux termes de pompage, on voit bien qu'on peut avoir deux modes du signal. Une intégration numérique de ce système en balayant les désaccords de la pompe confirme qu'il existe des domaines de coexistence des deux modes.

Dans ces simulations numériques, on considère que la distance entre les modes de la pompe reste constante et on balaie les désaccords possibles en déplaçant la fréquence ω_p entre les deux résonances de la figure 4.10. La figure 4.11 montre les résultats des simulations numériques pour les paramètres indiqués. Les intensités des deux modes sont représentés en fonction du désaccord Δ_{p1} en considérant $\Delta_{p2} = \Delta_{p1} - 5$. Les différentes figures correspondent à différentes répartitions du champ de pompe total ($E_1 + E_2 = 18$) entre les modes depuis une répartition égale pour la figure 4.11(a) ($E_1 = E_2 = 9$) à une répartition où l'injection est nulle dans le mode 2 pour (d) ($E_1 = 18$ et $E_2 = 0$).

La figure 4.11(d) est particulièrement étonnante car on a alors choisi $E_2 = 0$. Or

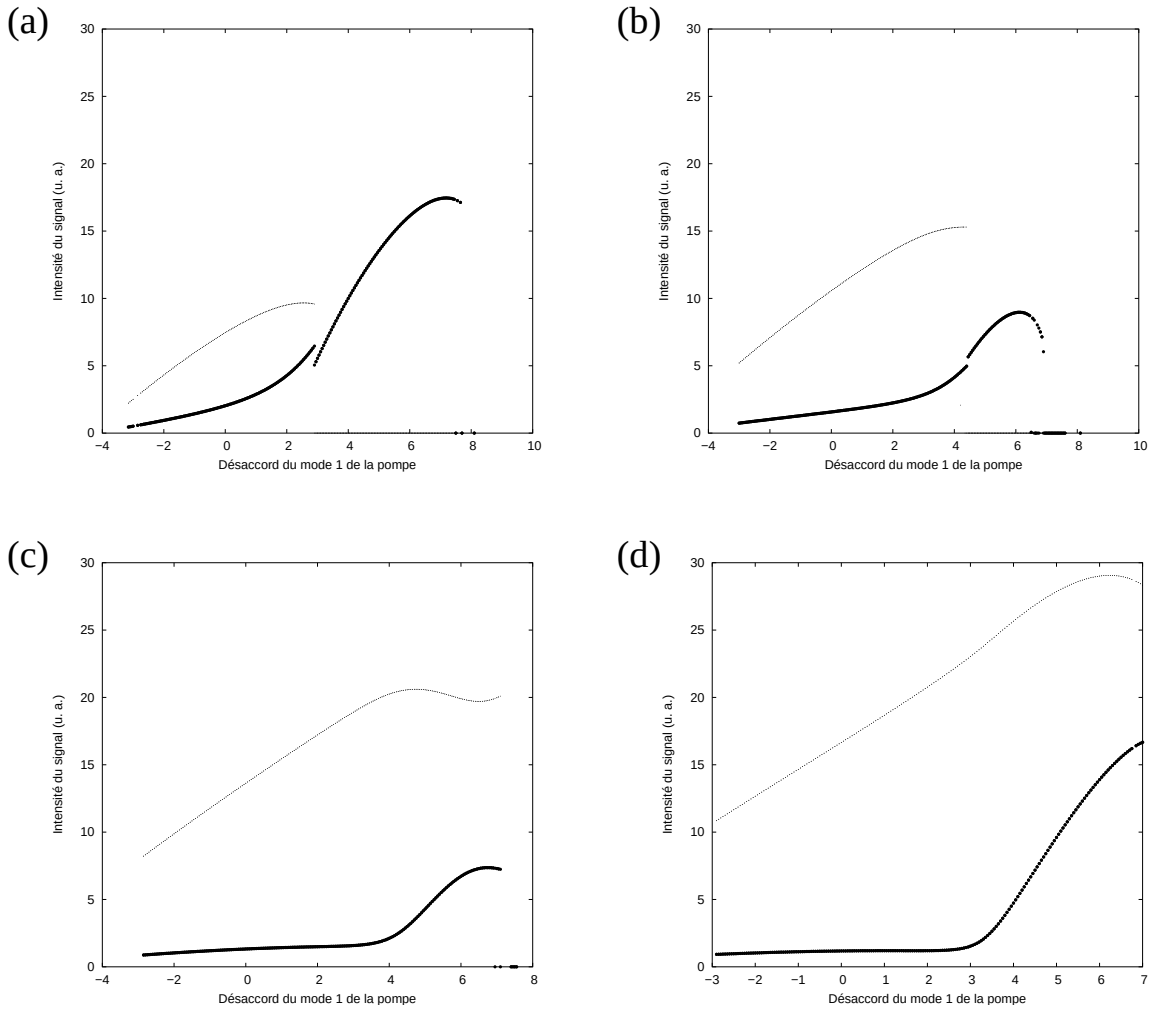


FIG. *4.11: Intégration du modèle 4.1 : intensité des deux modes du signal en fonction des désaccords du mode 1 de la pompe, l'écart entre les désaccords des deux modes de la pompe étant constant. Les points de plus petit diamètre correspondent à l'intensité du mode 1, ceux de plus grand diamètre à ceux du mode 2. Paramètres :* $\Delta_{p1} - \Delta_{p2} = 5, \chi_{11} = 1., \chi_{12} = .2, \chi_{21} = .2, \chi_{22} = .5, \gamma = 8., \eta = 10^{-40}, \Delta_{s1} = 2, \Delta_{s2} = 1$ *; (a)* $E_1 = 9$ *et* $E_2 = 9$ *; (b)* $E_1 = 12$ *et* $E_2 = 6$ *; (c)* $E_1 = 15$ *et* $E_2 = 3$ *; (d)* $E_1 = 18$ *et* $E_2 = 0$.

ceci n'est pas équivalent à supprimer l'équation du mode 2 de la pompe : en fait le mode 2 de la pompe est généré par les modes du signal et celui-ci à son tour génère du signal dans les deux modes. Cela permet de justifier le fait que l'apparition des deux modes de la pompe n'est pas un problème d'alignement : même si on a parfaitement injecté un seul mode, la conversion vers les sous-harmoniques puis la somme de fréquence peut générer deux modes du signal.

Ce modèle peut sembler caricatural puisque rajouter des termes de pompage entraîne obligatoirement la possibilité pour les OPO d'être multimode, cependant le

fait de considérer systématiquement que la pompe est monomode TEM_{00} est une approximation. De même que précédement, ce modèle mériterait une étude plus détaillée pour déterminer s'il peut décrire correctement le comportement de l'OPO dans nos observations expérimentales.

4.1.3.c Propositions de validation expérimentale

Avant d'étudier plus avant une des interprétations précédentes, il serait nécessaire de procéder à des expériences complémentaires pour valider l'un des modèles. Comme nous savons que les effets thermiques existent aussi pour un OPO doublement résonant [Suret, 2000], alors que dans ce cas comme il n'y a plus de cavité sur la pompe, les effets liés au profil transverse de la pompe sont faibles. Il serait donc d'un grand intérêt de savoir si un tel exemple de comportement multimode existe dans un DROPO.

Le deuxième point important, dans une configuration de TROPO serait de faire une étude expérimentale plus approfondie des conditions d'apparition de deux modes, et notamment si leur apparition ou leur proportion dépend de la puissance de pompe utilisée.

Enfin, rappelons que dans le chapitre 2, nous avions fait l'hypothèse que la non-dégénérescence de l'OPO devait être prise en compte pour expliquer la possibilité du couplage observé expérimentalement entre un mode TEM_{00} et TEM_{01} du signal alors que la configuration est proche de confocale et donc que les modes sont éloignés d'un demi intervalle spectral libre. Nous avions alors décrit la possibilité de couplages croisés entre le mode TEM_{00} du signal et TEM_{01} du complémentaire et réciproquement. Une autre hypothèse pour expliquer la coexistence de modes est que nous observons des régimes de couplages croisés mais dans la zone où la solution est stationnaire.

Même si nous n'avons pas validé une hypothèse précise parmis celles que nous proposons, l'observation expérimentale d'un régime multimode sur le signal d'un TROPO dont l'intensité est stationnaire reste étonnante puisqu'elle contredit la vision habituelle de l'OPO comme laser à élargissement homogène.

4.2 Dynamique spectrale au voisinage de la dégénérescence

Nous nous sommes intéressés dans la partie précédente au spectre du signal d'un OPO de type II et nous avons montré expérimentalement que celui-ci pouvait présenter dans certaines situations un comportement multimode a priori inattendu. Dans cette partie nous présentons des résultats préliminaires sur l'étude du spectre à la sortie d'un OPO de type I et donc sur l'évolution des fréquences d'oscillation des champs signal et complémentaire.

Dans un premier temps nous reproduisons la courbe d'accord de phase du $LiNbO_3$ en utilisant le fait que le cristal, dans notre dispositif expérimental, est placé dans un four dont la température est contrôlable. Nous pouvons donc accorder cet OPO dans une gamme de fréquences assez large, limitée en fait par les traitements des miroirs.

Nous présentons ensuite des observations reposant sur un dispositif expérimental original. Nous utilisons un monochromateur pour séparer les longueurs d'onde du signal et du complémentaire à la sortie de l'OPO. Une fois dispersé spatialement, ce spectre est enregistré au cours du temps à l'aide d'une barette CCD. Nous pouvons ainsi observer la dynamique de l'OPO au voisinage de la dégénérescence.

Les résultats de cette partie sont purement qualitatifs. Bien que nous ayons conscience qu'ils nécessiteraient une approche plus précise et plus systématique, le manque de temps n'a pas permis de mener une étude plus poussée. Nous les présentons cependant ici, car les observations expérimentales de la dynamique spectrale de l'OPO au voisinage de la dégénérescence montrent que ce domaine d'étude est prometteur.

4.2.1 Courbe d'accord de phase

4.2.1.a Différence entre les OPO de type I et de type II

Rappelons que pour un OPO de type II les champs du signal et du complémentaire sont polarisés orthogonalement et peuvent donc être séparés expérimentalement par un cube polariseur. On peut ainsi comparer les évolutions temporelles du signal et du complémentaire qui sont en général absolument identiques. D'autre part, même lorsque les fréquences du signal et du complémentaire sont identiques et égales à $\omega_p/2$, les OPO de type II ne sont jamais réellement dégénérés puisque les deux champs ont une polarisation différente.

Dans le cas de l'OPO de type I, le signal et le complémentaire ont la même polarisation. Dans ce cas, l'OPO est réellement dégénéré lorsque les fréquences des deux champs sont égales. La fréquence de battement entre le signal et le complémentaire en fonction d'un paramètre permettant d'accorder les fréquences a alors une dépendance du même type qu'une transition de phase du second ordre alors qu'elle est du type d'une transition du premier ordre dans le cas du type II [Debuisschert *et al.*, 1993; Nabors *et al.*, 1989]. Cela implique par exemple, que si les conditions d'accord de phase sont légèrement dépassées, dans le cas d'un OPO de type II, l'accord de phase peut toujours se faire à des fréquences légérement différentes tandis que pour un OPO de type I l'accord ne peut plus se faire.

Typiquement, la courbe d'accord de phase, c'est-à-dire les fréquences du signal et du complémentaire en fonction du paramètre permettant de faire l'accord est une parabole. Dans cette première partie, bien qu'elle déjà fait l'objet d'études détaillées [Eckardt *et al.*, 1991], nous montrons que notre dispositif est bien caractérisé par une courbe de ce type.

4.2.1.b Dispositif expérimental

Le montage expérimental est présenté sur la figure 4.12. Il diffère des montages précédents essentiellement par l'OPO lui-même. Le cristal non-linéaire est à présent un niobate de lithium dopé à l'oxyde de magnésium (MgO :$LiNbO_3$) de taille $5 \times 5 \times 15\text{mm}^3$. Le cristal est coupé à 90°, permettant ainsi un accord de phase de type

I. Autour du support du cristal est bobinée une resistance chauffante alimentée par un potentiomètre contrôlant la température du cristal. Un thermostat permet de stabiliser cette température.

Les champs infrarouges à la sortie de l'OPO, une fois séparés du champ de pompe par un miroir dichroïque, sont injectés dans un analyseur de spectre. Cet analyseur de spectre peut atteindre des résolutions très élevées, jusqu'à 1pm, cependant son fonctionnement étant basé sur un balayage d'un double réseau, la lenteur du système empêche toute étude dynamique.

La taille de la cavité est d'environ 7cm, c'est-à-dire dans une configuration intermédiaire entre confocale et concentrique. Les seuils sont particulièrement élevés, de l'ordre de 300mW. Cela est lié d'une part à la mauvaise qualité de l'injection (une unique lentille plutôt qu'un télescope formé de deux lentilles). D'autre part les miroirs étant traités à 1064nm, lorsqu'on s'éloigne de la dégénérescence, on ne peut plus garantir que les coefficients de réflexion des miroirs ont la même valeur. Le miroir d'entrée a pour coefficient de réflexion 90% à 532 nm et le coefficient de réflexion est maximal à 1064 nm. Le miroir de sortie a pour coefficients de réflexion R_{max} à 532 nm et 99% à 1064 nm.

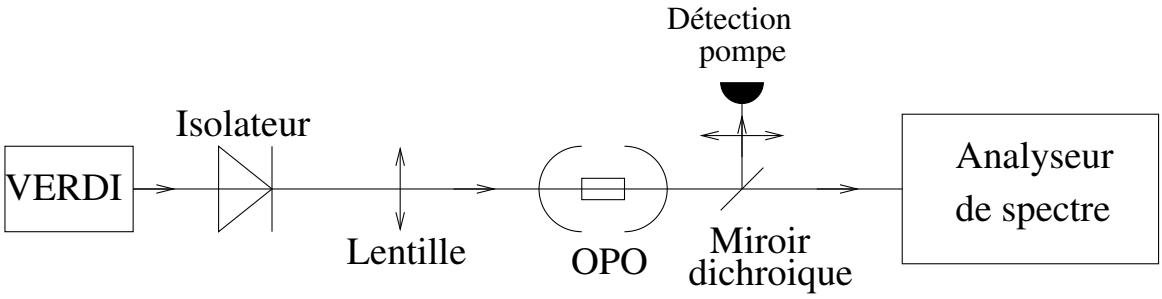


FIG. *4.12: Dispositif expérimental*

4.2.1.c Courbe expérimentale de l'accord de phase

Les fréquences du signal et du complémentaire sont déterminées par un ensemble de règles qui a été présenté dans la partie 1.1.2.c. Elles sont liées d'une part aux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion et d'autre part aux résonances de la cavité.

La conservation de l'énergie est donnée par :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_c,$$

et l'accord de phase par :

$$n_p\omega_p = n_s\omega_s + n_c\omega_c.$$

Alors que la première relation est vérifiée exactement, la seconde n'est vérifiée qu'approximativement. Ces deux relations, si on connait la dispersion des indices en fonction de la température [Dmitriev *et al.*, 1997; Edwards et Lawrence, 1984], permettent de tracer la courbe d'accord de phase exact en fonction de la température,

c'est à dire la courbe donnant les fréquences ou les longueurs d'onde du signal et du complémentaire en fonction de la température. Cette courbe peut être reproduite expérimentalement en contrôlant la température du four dans lequel est placé le cristal de $LiNbO_3$.

La figure 4.13 montre la courbe d'accord de phase que nous avons obtenue à l'aide de l'analyseur de spectre. Nous avons procédé de la manière suivante : pour chaque température du four, une fois celle-ci stabilisée, la taille de la cavité est changée finement autour d'une position moyenne à l'aide de la cale piezo-électrique. Suivant la taille de la cavité, le signal et le complémentaire vont osciller sur des fréquences différentes liées aux modes de résonance de la cavité, ce qui explique que différents points soient obtenus pour une même température. En balayant périodiquement la taille de la cavité en appliquant une tension alternative à la cale piezo-électrique, on observe plusieurs pics à l'analyseur de spectre, correspondant aux différents clusters. La largeur des pics observés est de l'ordre du nanomètre loin de la dégénérescence, les mesures étant faites sur une moyenne de 64 spectres. La dégénérescence étant prévue à 107 °C [Koslovski *et al.*, 1988], nous avons sans doute un problème d'étalonnage de notre four puisque nous trouvons une dégénérescence à 102 °C dans notre dispositif expérimental.

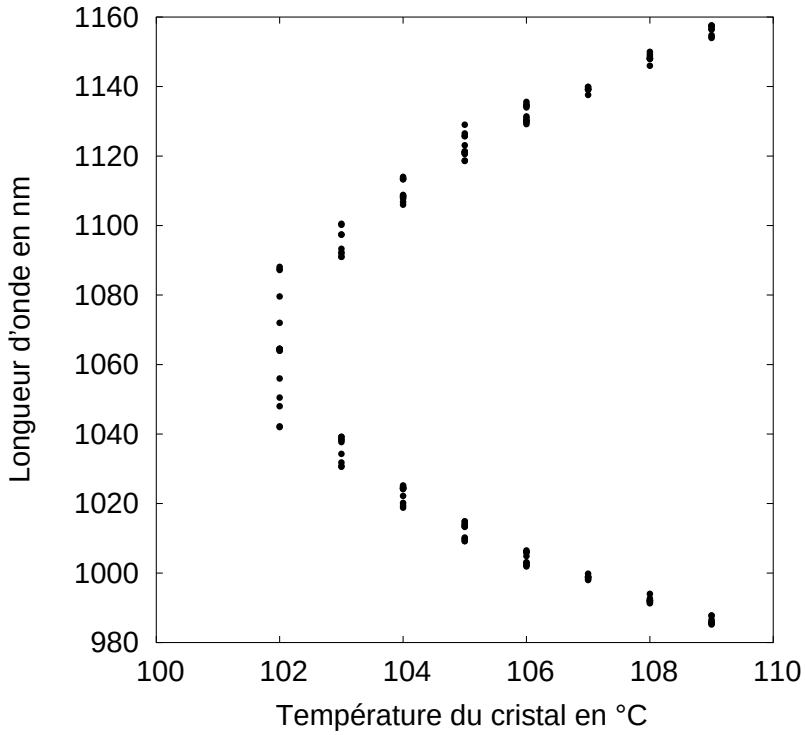


FIG. *4.13: Courbe expérimentale d'accord de phase en fonction de la température pour un cristal de $LiNbO_3$ placé dans un four.*

Lorsqu'on s'approche de la dégénérescence, l'écartement entre les clusters augmente. D'autre part, les largeurs des pics observés augmentent aussi notablement.

Ainsi, lorsqu'on balaie périodiquement la cavité au niveau de la dégénérescence on observe des zones du spectre larges d'une vingtaine de nanomètres où l'OPO fonctionne. Cela est lié à l'augmentation de la pente de l'indice du cristal en fonction de la température, qui atteint une pente infinie au niveau de la dégénérescence. En fait le comportement à la dégénérescence (série de points à 102 °C) ne correspond plus à des pics bien séparés, mais à une large plage de fonctionnement centrale.

4.2.2 Dynamique spectrale d'un OPO de type I au voisinage de la dégénérescence

On s'attend au voisinage de la dégénérescence à observer un comportement du type accrochage de fréquence entre les fréquences du champ du signal et celui du complémentaire. Un tel comportement a été observé expérimentalement dans un OPO doublement résonant [Nabors *et al.*, 1990].

4.2.2.a Un dispositif expérimental original

Pour résoudre le spectre à la sortie de l'OPO, on peut utiliser un analyseur de spectre tel que celui utilisé précédemment. Cependant, si on peut de cette manière faire une courbe d'accord de phase de l'OPO telle que celle de la partie précédente, ce type d'instrument de mesure est trop lent pour pouvoir étudier la dynamique à proximité de la dégénérescence.

On va utiliser un monochromateur, qui sépare par un réseau le signal du complémentaire. Une fois séparés spatialement, on les détecte avec une barette CCD qui nous permettra d'observer l'évolution du spectre au cours du temps à une fréquence de 33kHz.

La figure 4.14 montre le dispositif expérimental utilisé. Celui-ci est semblable à celui de la partie précédente. Les champs infrarouges à la sortie de l'OPO sont injectés dans le monochromateur permettant grâce à un réseau de séparer spatialement le spectre. Deux miroirs paraboliques permettent de faire l'image de l'entrée du monochromateur à sa sortie. Différents dispositifs d'injection et d'imagerie permettent de visualiser cette image sur la barette CCD. Nous avons rencontré différentes difficultés sur la résolution du spectre, l'étalonnage de la barette et pour obtenir un contraste suffisant. La taille de la cavité est d'environ 7.5 cm soit une configuration de cavité intermédiaire entre confocal et concentrique. La puissance de pompe utilisée est maximale.

4.2.2.b Observations expérimentales

Sur toutes les figures qui vont suivre la direction horizontale représente le temps, une mesure dure 30ms, soit mille enregistrements successifs de la barrette. La direction verticale est la longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm et de largeur totale de l'ordre de 20nm.

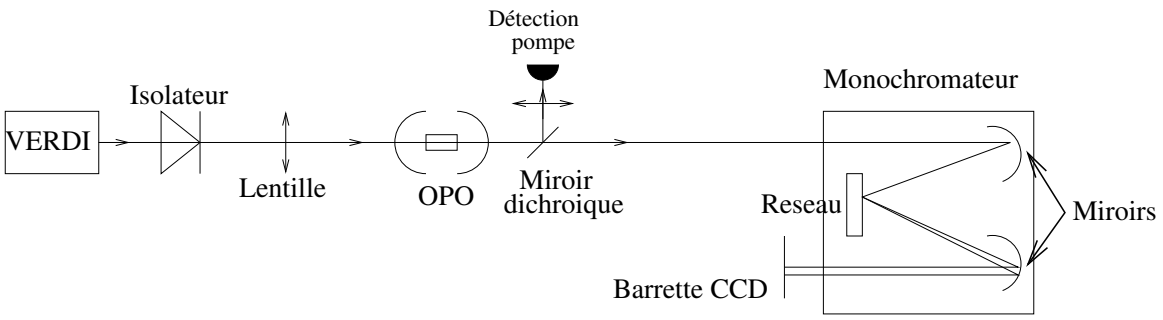


FIG. *4.14: Dispositif expérimental*

La série de spectrochronogrammes présentée sur la figure 4.15 montre des oscillations lentes sur le spectre de fréquence environ 230Hz. Pour les trois derniers spectrochronogrammes cela conduit le système à osciller entre une situation d'accrochage de fréquences et des fréquences non-accrochées. On voit sur le deuxième exemple que l'accrochage de fréquence ne se produit pas toujours : les fréquences se rapprochent sans devenir égales. Dans le cas de la dernière figure, quand le système atteint la dégénérescence, il y a extinction de l'OPO. La dégénérescence n'est donc pas forcément une situation favorisée sur laquelle le système serait conduit à rester.

La fréquence des oscillations étant basse, on ne peut déterminer si ces oscillations viennent d'un problème de stabilisation du four (sachant que le bruit est amplifié près de la dégénérescence) ou d'une dynamique d'accrochage de fréquence. Notons de plus que cette fréquence lente est du même ordre que d'autres oscillations lentes que nous observons en général sur l'évolution des intensités (partie 4.1).

Les figures 4.16 ne présentent pas les oscillations de forme quasi sinusoïdale des figures précédentes. Dans le cas des deux premières figures le système semble approximativement stabilisé sur un couple de longueurs d'onde. Cependant la dernière figure montre une périodicité de même fréquence que celles des figures 4.15. Le système oscille alors entre un couple de fréquences signal/complémentaire à peu près stable et une situation où leurs fréquences sont plus proches mais sautent entre plusieurs modes.

Les figures 4.17 montrent des comportements plus complexes où les longueurs d'onde ne sont pas stabilisées sur un couple sauf pendant des temps très courts. Les spectres présentent de nombreux sauts de modes. On remarquera que l'évolution du spectre au cours du temps présente souvent des symétries : le système emprunte le même chemin lorsqu'il se rapproche puis s'éloigne de la dégénérescence. On retrouve aussi une certaine périodicité.

Les figures 4.18 montrent des comportements très près de la dégénéréscence. On constate qu'en contradiction avec le comportement prévu intuitivement pour deux oscillateurs couplés, les fréquences du signal et du complémentaire ne sont pas nécessairement accrochées et qu'un tel accrochage n'est pas forcément favorisé. Le système

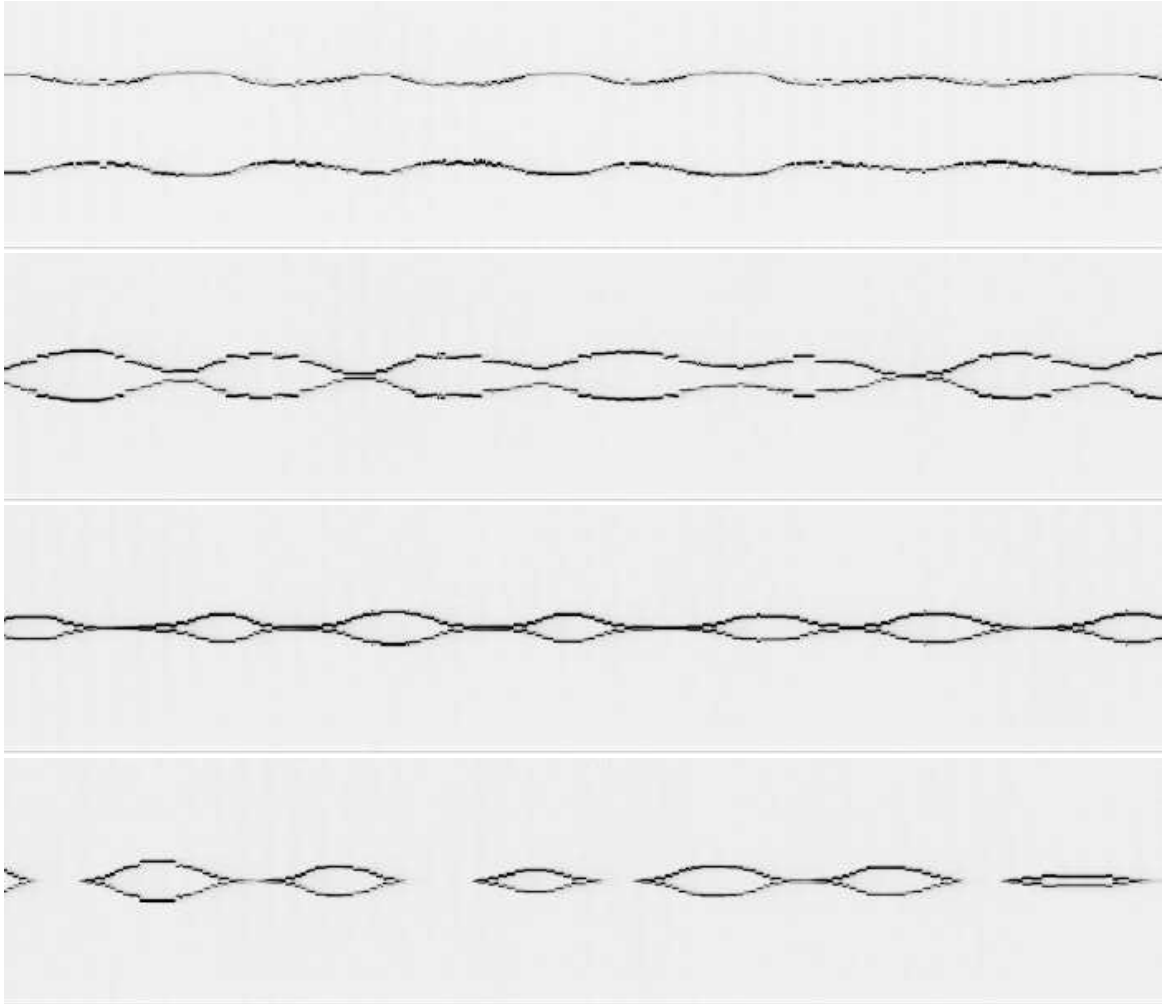


FIG. *4.15: Horizontalement : temps, la durée totale d'un enregistrement étant 30ms. Verticalement : longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm et de largeur totale de l'ordre de 20nm.*

peut osciller entre une situation accrochée et une situation non accrochée mais où les fréquences sont très proches. Ces oscillations entre ces deux situations se font à des fréquences comparables à celle des figures 4.15. Le système peut aussi ne jamais atteindre la dégénérescence mais s'éteindre périodiquement comme dans le cas de la deuxième figure. Finalement il peut présenter des comportements plus complexes comme dans le cas de la dernière figure.

L'ensemble de ces enregistrements ont été pris dans des configurations très proches. On constate qu'ils présentent cependant des comportements très différents. Même si éventuellement il existe un problème de stabilisation du four qui expliquerait la dynamique des figures 4.15, les fluctuations lentes ne se retrouvent pas forcément sur les autres spectrochronogrammes.

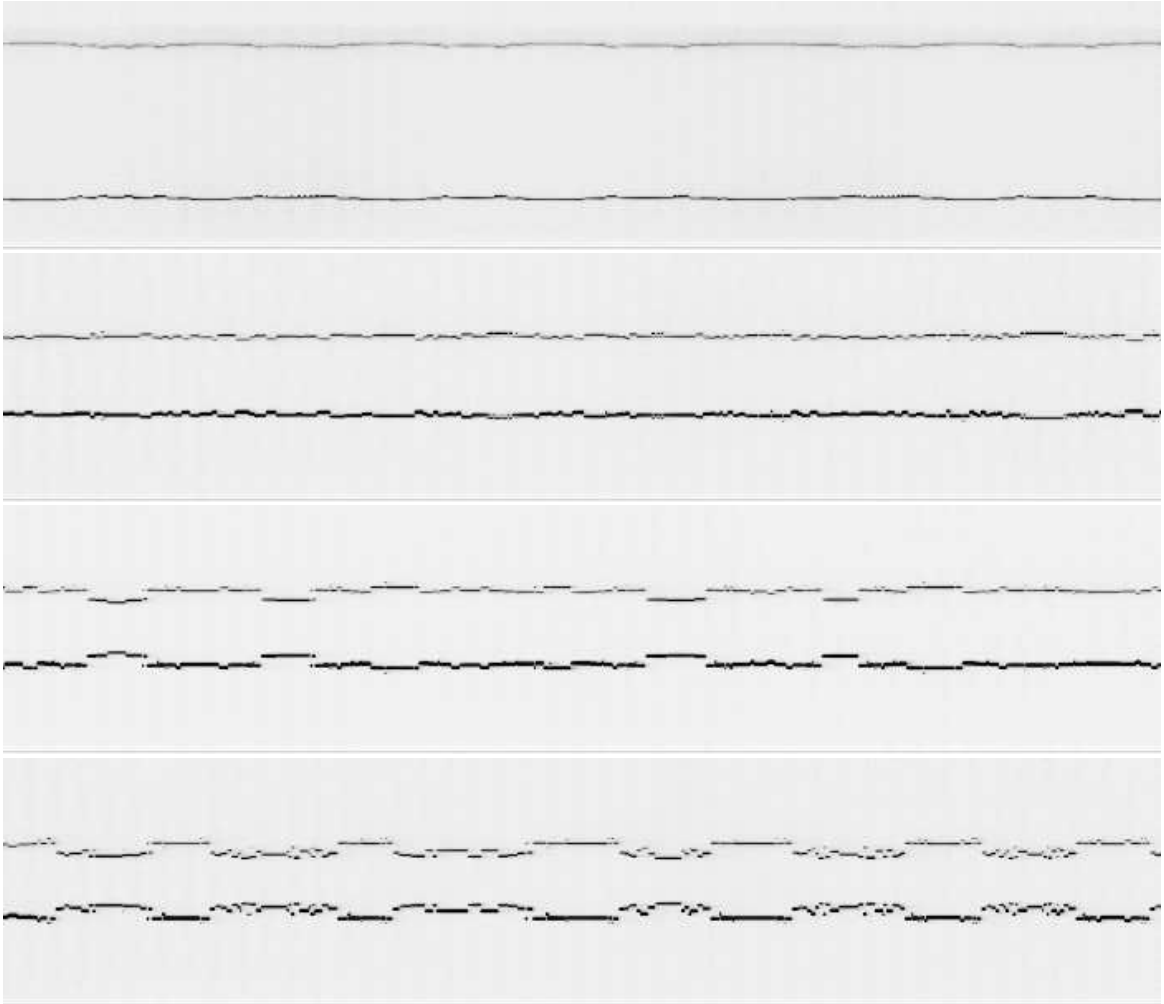


FIG. *4.16: Horizontalement : temps, la durée totale d'un enregistrement étant 30ms. Verticalement : longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm et de largeur totale de l'ordre de 20nm.*

Nous donnons sur la figure 4.19 d'autres exemples de comportements du spectre. Cependant la résolution sur cette série d'enregistrements est particulièrement mauvaise. Nous les montrons entre autres car on peut identifier dans certaines zones dégénérées des alternances entre allumage et extinction du signal sur l'échelle de temps d'un enregistrement de la barrette qui sont surement des instabilités monomodes thermiques.

4.2.2.c Limites de l'expérience

Bien que les spectrochronogrammes précédemment décrits soulèvent de nombreuses questions, une certain nombre de problèmes doivent être traités avant d'aborder leur interprétation. En premier lieu, il convient de savoir comment la boucle de rétroaction du thermostat du four affecte la dynamique du système.

D'autre part, pour pouvoir conclure sur les comportements observés, il serait né-

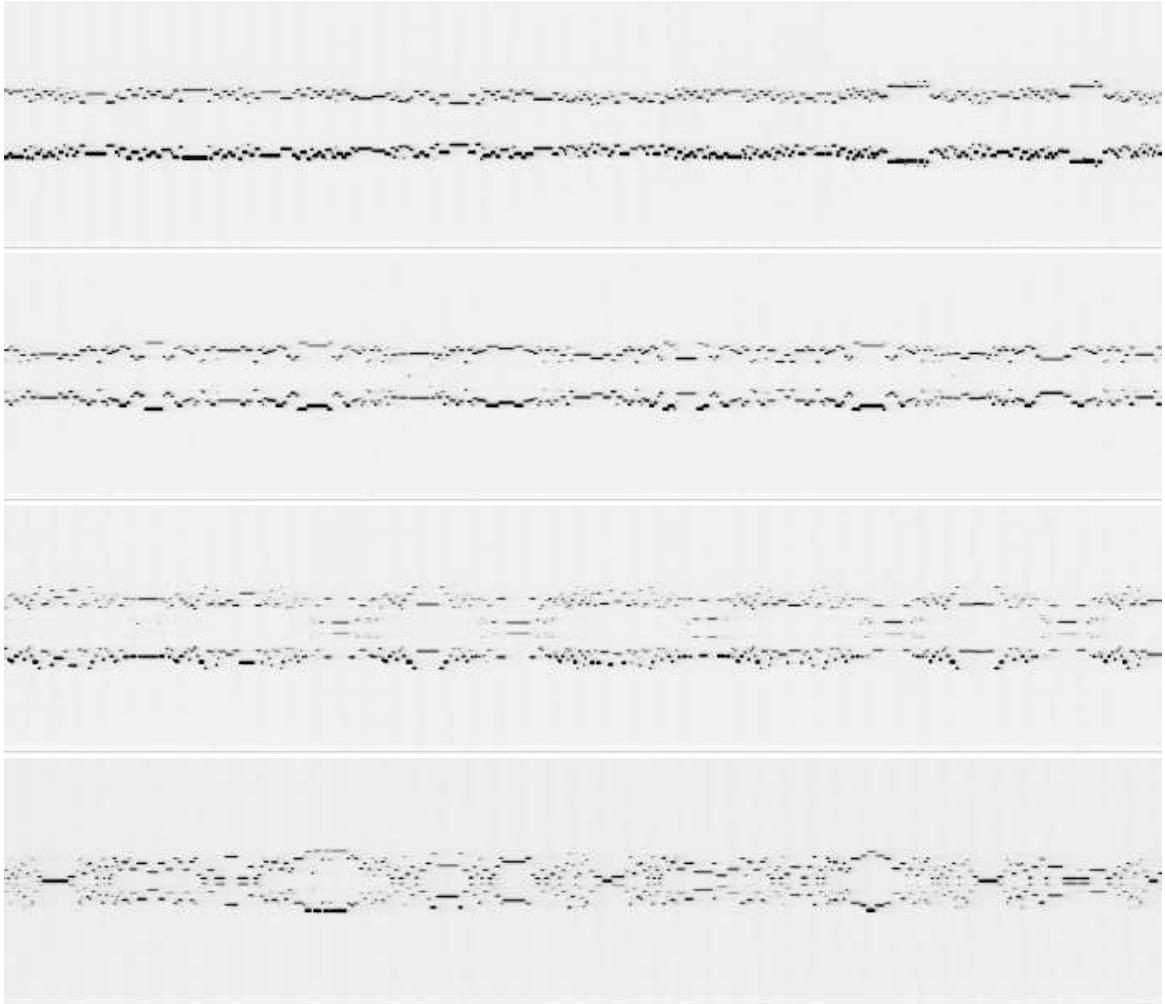


FIG. *4.17: Horizontalement : temps, la durée totale d'un enregistrement étant 30ms. Verticalement : longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm et de largeur totale de l'ordre de 20nm.*

cessaire d'observer la dynamique temporelle simultanément à la dynamique spectrale. Cela permettrait d'identifier des comportements déjà connus (oscillations thermiques monomodes ou multimodes) et de savoir si des comportements spectralement stationnaires correspondent bien à des comportements stationnaires en intensité.

Enfin, nous avons vu que dans certaines situations l'accrochage de fréquence ne se faisait pas, les deux fréquences du signal et du complémentaire étant constantes mais différentes, très proches de la dégénérescence. Ce comportement pourait être lié aux contraintes liées aux résonances de la pompe. Il serait donc intéressant de refaire ces expériences avec un OPO doublement résonant. Finalement, il conviendrait d'analyser comment le comportement du spectre évolue lorsqu'on change la puissance de la pompe.

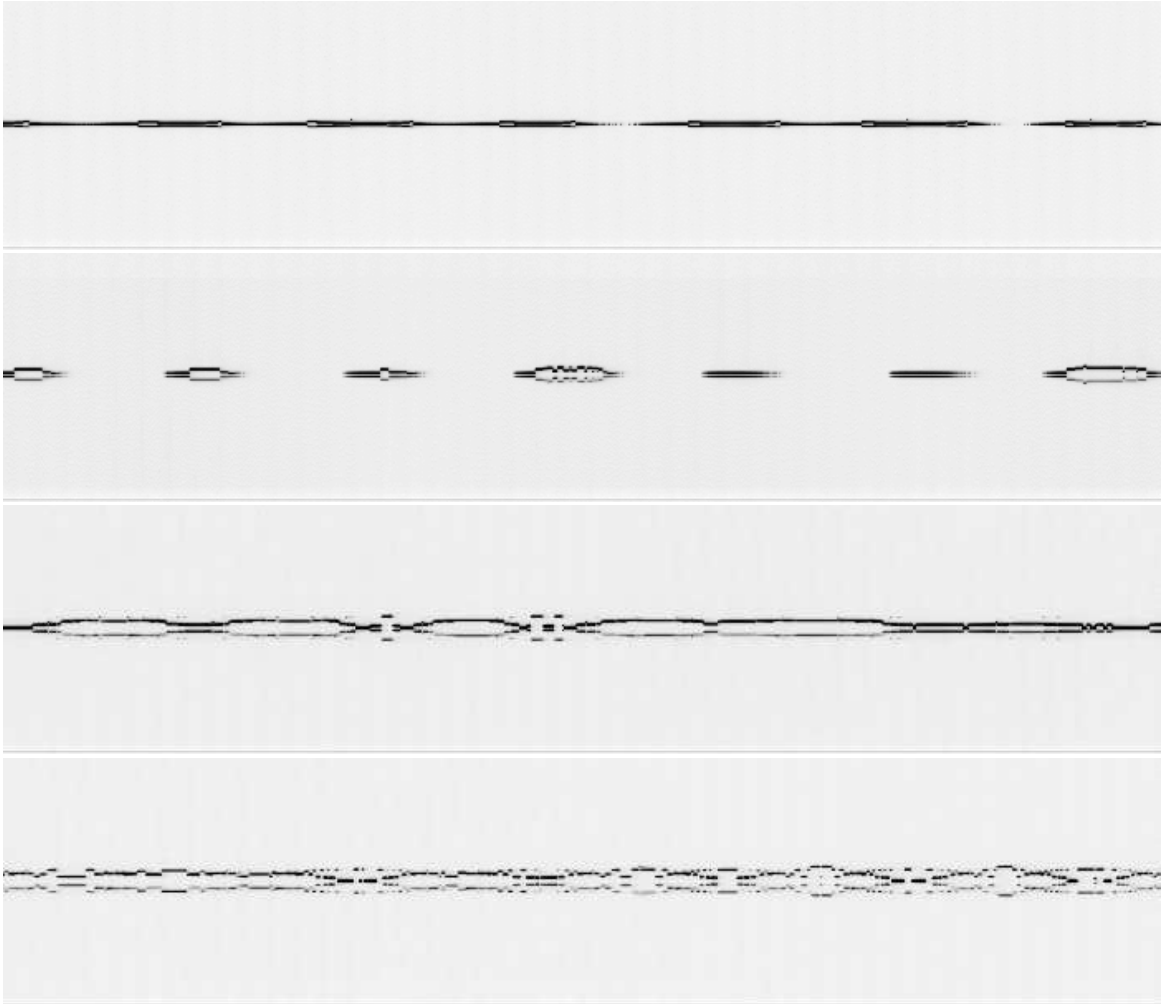


FIG. *4.18: Horizontalement : temps, la durée totale d'un enregistrement étant 30ms. Verticalement : longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm et de largeur totale de l'ordre de 20nm.*

4.3 Retard à la bifurcation

La dernière partie de ce mémoire ne concerne pas l'étude du spectre de l'OPO comme les deux parties précédentes mais le problème du retard à la bifurcation. Il rejoint les parties précédentes dans la mesure où les résultats de cette partie sont préliminaires. En effet, les résultats, théoriques, demanderaient à être complétés par des observations expérimentales.

On appelle retard à la bifurcation le fait qu'un système traversant une bifurcation par le balayage d'un paramètre de contrôle suit pendant un certain temps la branche de solution stationnaire devenue instable avant de commuter sur la nouvelle solution stable. Idéalement, s'il n'y a aucun bruit, le système pourrait rester indéfiniment sur la branche instable. La présence de bruit va le conduire à quitter cette solution et à trouver une nouvelle solution stationnaire stable. Le retard à la bifurcation est donc

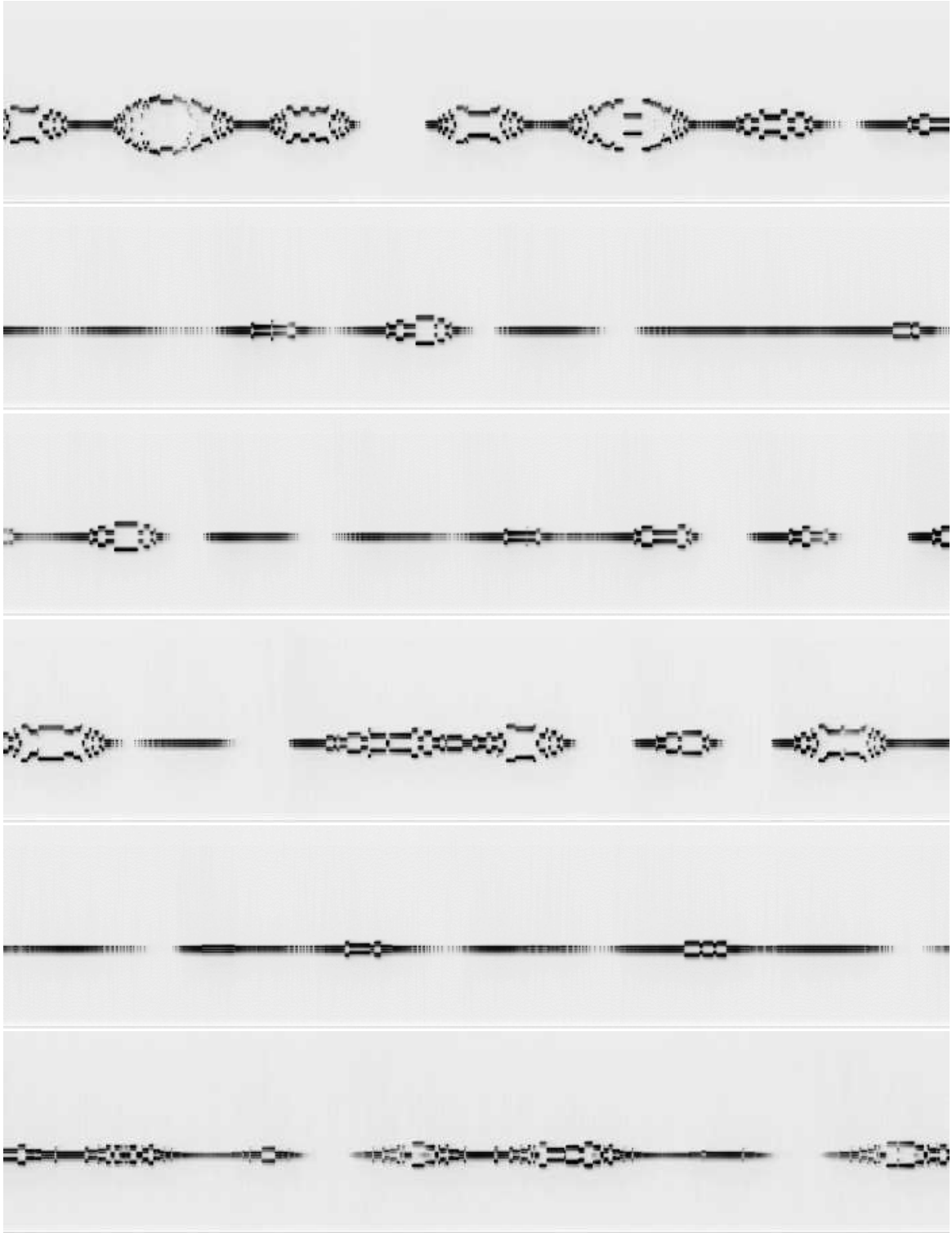


FIG. *4.19: Horizontalement : temps, la durée totale d'un enregistrement étant 30ms. Verticalement : longueur d'onde centrée approximativement sur 1064nm.*

étroitement liée à la présence de bruit dans le système. Plus le bruit sera important, plus le retard à la bifurcation sera faible.

Nous allons nous intéresser d'un point de vue théorique à l'étude du retard à la bifurcation lors des oscillations monomodes thermiques présentées par les intensités des champs à la sortie de l'OPO (voir partie 1.2.2). Le système présente alors des oscillations de relaxation autour d'un cycle de bistabilité donnant lieu à la traversée périodique de deux bifurcations. Nous traitons le cas de la bifurcation où partant d'une situation où l'intensité du signal est nulle, le système commute sur une branche d'intensité non nulle. Cette situation est donc proche du problème du démarrage de l'OPO à partir du bruit quantique.

Le but de cette partie est d'essayer de comprendre et de caractériser ce phénomène numériquement et analytiquement. Nous rappelerons dans un premier temps les observations expérimentales de retard à la bifurcation dans les OPO. Nous donnerons ensuite les résultats de nos simulations numériques sur le modèle monomode qui nous permettront de mettre en évidence deux lois d'échelles reliant le niveau de bruit au retard à la bifurcation. Finalement nous présenterons des modèles grossiers donnant une idée de l'origine de ces lois d'échelle.

4.3.1 Preuves expérimentales

Le retard à la bifurcation a été prévu d'abord théoriquement [Mandel et Erneux, 1983, 1984] et a été observé expérimentalement dans les lasers [Sharp *et al.*, 1987; Arecchi *et al.*, 1989]. Pour ce qui est de la dynamique des OPO, on peut observer du retard à la bifurcation dans différentes situations.

Dans leur étude expérimentale de la dynamique d'un OPO triplement résonant, Richy *et al.* [Richy *et al.*, 1995] ont mis en évidence l'existence de bistabilité prévue par le modèle monomode dans certaines zones de paramètres, mais aussi la présence de retard à la bifurcation. Ainsi, même dans les conditions où le système ne présente pas théoriquement de bistabilité, à cause de ce retard, les observations expérimentales font apparaître un cycle d'hystérésis lorsqu'on augmente puis diminue le taux de pompage. Lorsqu'on augmente la puissance de pompe à partir d'une valeur nulle, l'émission de l'OPO ne démarre pas au seuil prévu théoriquement, et à partir duquel la solution nulle pour l'intensité du signal devient instable. L'émission de l'OPO commence à une valeur plus grande que ce seuil. Par contre, une fois qu'il y a émission des champs signal et complémentaire, si la puissance de pompe est diminuée, le système suit approximativement la courbe théorique et s'éteint bien à la valeur du seuil prévue théoriquement.

D'autre part, dans leurs travaux sur les instabilités d'origine thermique, Suret *et al.* ont mis en évidence la présence de retard à la bifurcation dans le cas d'oscillations monomodes [Suret *et al.*, 2000] et multimodes [Suret *et al.*, 2001b]. Avant de mener une étude théorique sur le cas de ces premières instabilités, nous rappelons les preuves expérimentales de ce retard.

4.3.1.a Oscillations monomodes thermiques

Nous avons présenté de manière détaillée les oscillations d'origine thermique dans la partie 1.2.1.b. Rappelons que l'étude des instabilités observées expérimentalement sur les intensités des champs [Suret, 2000] a conduit à ajouter au modèle champ-moyen monomode une variable lente, θ, liée à l'échauffement du cristal par l'absorption des intensités des champs présents dans la cavité. Ce modèle est donné par les équations suivantes :

$$\dot{A}_p = \gamma\left[-\left(1+i\left(\Delta_p-\frac{2}{\gamma}\theta\right)\right)A_p - A_s^2 + E\right] \tag{4.2a}$$

$$\dot{A}_s = -\left[1+i\left(\Delta_s-\theta\right)\right]A_s + A_pA_s^* \tag{4.2b}$$

$$\dot{\theta} = \epsilon\left(-\theta+\alpha|A_p|^2+\beta|A_s|^2\right) \tag{4.2c}$$

L'équation d'évolution de la température est donnée phénoménologiquement : son temps caractéristique d'évolution (par rapport à celui de A_s) est lent ($\epsilon \ll 1$). L'équation $\dot{\theta}$ comprend un terme de décroissance exponentielle ($-\theta$) et un terme d'absorption des intensités des champs ($\alpha|A_p|^2+\beta|A_s|^2$), les termes α et β dépendants des coefficients d'absorption des champs. La variation de la température du cristal modifie les indices, et donc la taille de la cavité. Cette dépendance se retrouve dans les désaccords des champs σ_s et σ_p sous la forme d'une dépendance linéaire en θ.

Le portrait de phase de l'intensité du signal en fonction de la variable lente θ est représenté sur la figure 4.20. En traits fins continus sont représentés les états stationnaires stables, et en traits pointillés les états instables du système (4.2) lorsque θ est considéré comme un paramètre. La trajectoire suivie par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente est représentée en trait gras. Le retard à la bifurcation apparaît dans le fait que la trajectoire ne commute pas au point de bifurcation θ_b où la solution nulle devient instable mais au point θ_m. Nous avons précédemment évoqué ce phénomène à plusieurs reprises sans l'analyser plus avant, c'est ce que nous allons faire à présent.

4.3.1.b Observations expérimentales

Lorsque l'OPO présente des oscillations monomodes thermiques, il existe des preuves expérimentales du retard à la bifurcation [Suret, 2000]. On ne trouve pas ces preuves sur le portrait de phase du signal de la figure 4.20, mais sur le portrait de phase de la pompe reproduit sur la figure 4.21. Ce portrait correspond à celui de la figure 4.20 mais pour l'intensité de la pompe. Les traits fins sont les états stationnaires du système (4.2) lorsque θ est considéré comme un paramètre, le cycle en pointillé est la trajectoire suivie par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente.

Si le système ne présentait pas de retard à la bifurcation, la pompe présenterait une unique discontinuité correspondant à la bifurcation noeud-col du signal en θ_d. En effet c'est une propriété connue qu'au seuil, les intensités de pompe dans les états ON et OFF sont identiques [Lugiato *et al.*, 1988]. Cependant expérimentalement, comme

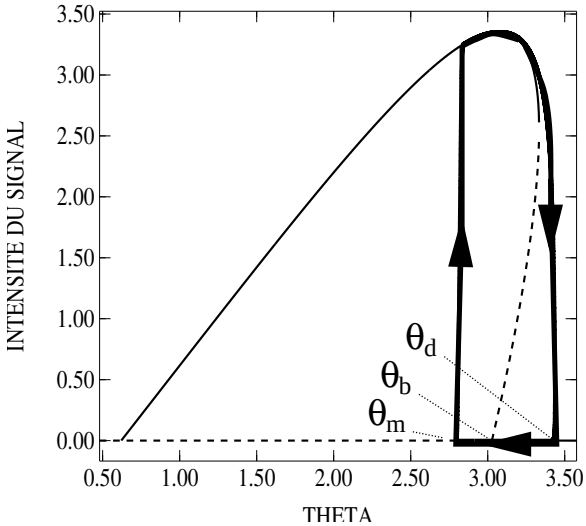


FIG. *4.20: Portrait de phase de l'intensité du signal en fonction de la température. Les traits fins sont les solutions stationnaires du système lorsque θ est considéré comme paramètre, en traits continus les états stables et en pointillés les états instables. Le cycle en trait gras est la trajectoire suivie par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente. Le système ne commute pas au point de bifurcation θ_b mais au point θ_m.*

le montre les figures 4.22, la pompe présente deux discontinuités, ce qui prouve que le système dépasse le point d'échange de stabilité.

Les figures 4.22 montrent différents exemples d'évolution temporelle de l'intensité de la pompe lorsque le système présente des instabilités du type oscillations monomodes.

Pour estimer le retard à la bifurcation à partir des fichiers expérimentaux, il faut pouvoir estimer où se situe le point de bifurcation pendant les intervalles de temps où la pompe a la pente la plus faible.

Le problème de l'estimation expérimentale du retard à la bifurcation présente plusieurs difficultés. En premier lieu les oscillations thermiques ne durent que quelques centaines de microsecondes avant de basculer sur un nouveau type d'instabilité. Pendant ce temps, les paramètres du système dérivent lentement si bien que la trajectoire du système se déforme dans l'espace des phases comme le montre la figure 4.23 où on voit que l'intensité maximale atteinte par la pompe décroît au cours du temps. D'autre part, deux fichiers issus de deux séries temporelles différentes sont difficilement comparables quantitativement car ils correspondent à des cycles d'oscillations totalement différents. Enfin, les durées des branches où l'intensité du signal est nulle varient peu dans une même série temporelle peu déformée par les fluctuations des paramètres. Cela signifie que soit les fluctuations statistiques du bruit sont trop faibles pour être

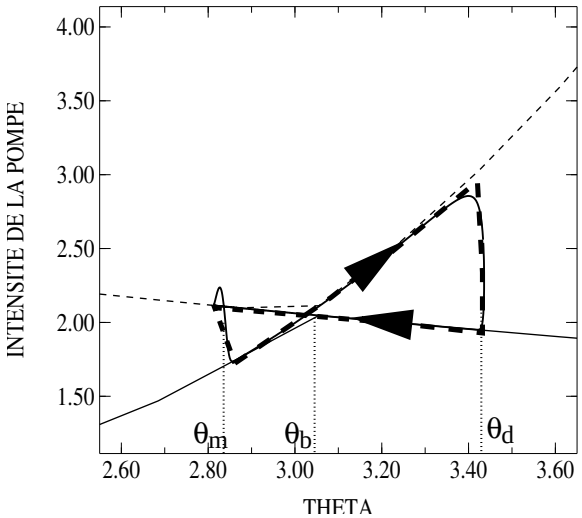


FIG. *4.21: Portrait de phase de l'intensité de la pompe en fonction de la température. Les traits fins sont les solutions stationnaires du système lorsque θ est considéré comme paramètre. Le cycle en trait gras pointillé est la trajectoire suivie par le système lorsque θ est considéré comme une variable lente. Le système ne commute pas au point de bifurcation θ_b mais au point θ_m.*

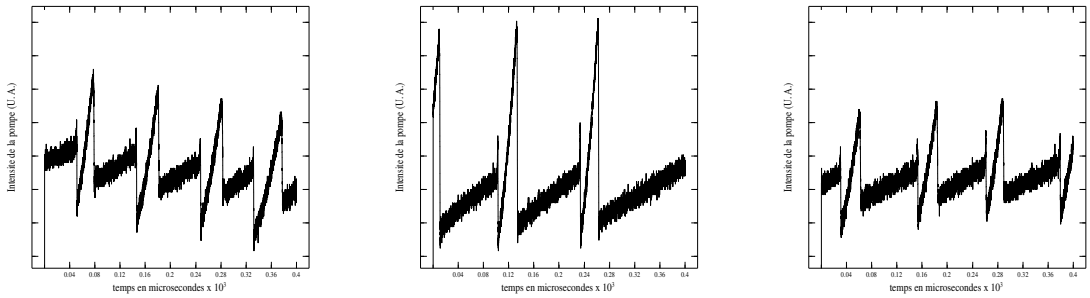


FIG. *4.22: Exemples d'instabilités monomodes sur la pompe.*

observées, soit qu'un moyennage se produit pendant la durée de cette branche.

4.3.1.c Estimation d'un ordre de grandeur du bruit

Nous nous heurtons donc au problème de la quantité de paramètres du modèle face au nombre de grandeurs mesurables expérimentalement (I_s et I_p). En particulier nous ne maîtrisons pas les désaccords des champs : le système va choisir spontanément les désaccords qui permettront de minimiser le seuil.

Cependant si nous nous limitons à l'étude de cas expérimentaux où les fluctuations

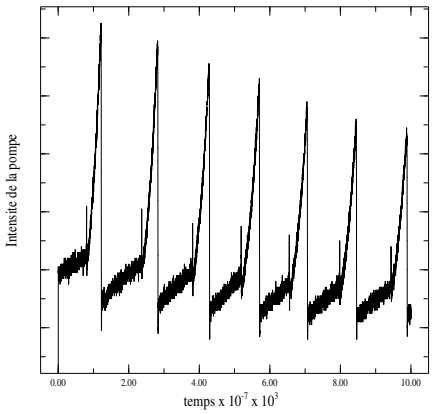


FIG. *4.23: Dérive lente des oscillations thermiques sur l'intensité de la pompe.*

de la pompe sont quasi linéaires entre les discontinuités (les figures 4.22 et 4.23 en sont des exemples) et si nous considérons d'autre part des variations faibles de la température de manière à développer θ au premier ordre en fonction du temps (ce sont des simplifications massives mais on cherche juste un ordre de grandeur pour le bruit). On a alors à partir de la figure 4.24 :

$$\frac{|\theta_b - \theta_m|}{|\theta_b - \theta_d|} \simeq \frac{|T_b - T_m|}{|T_b - T_d|}.$$

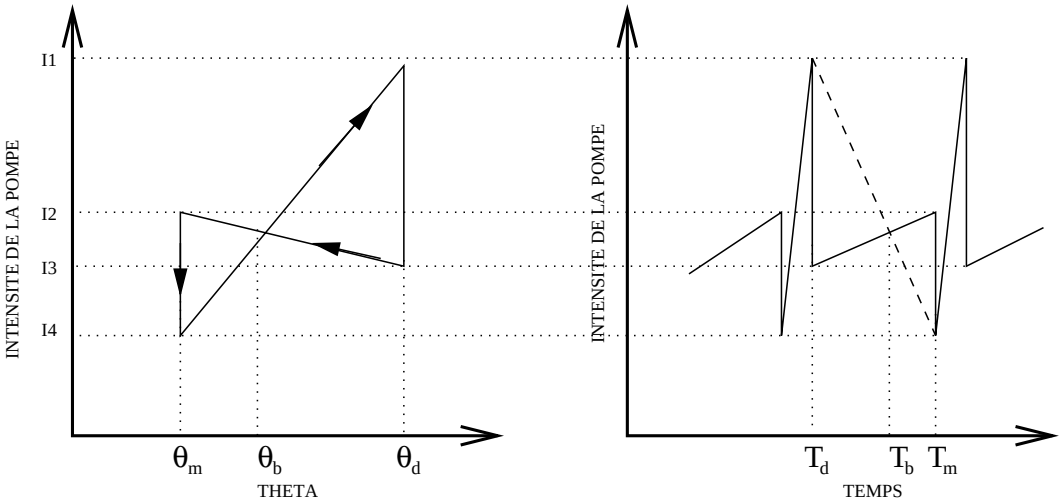


FIG. *4.24: Méthode de calcul de l'ordre de grandeur du retard à la bifurcation.*

A partir de résultats expérimentaux des figures 4.22, le rapport $\frac{|T_b - T_m|}{|T_b - T_d|}$ peut prendre des valeurs allant de 0.33 à 0.71.

4.3.2 Retard à la bifurcation

4.3.2.a Origine du retard à la bifurcation

On peut expliquer schématiquement l'existence du retard à la bifurcation en tenant compte dans les équations dynamiques du balayage d'un paramètre au cours du temps. Si on linéarise le problème au voisinage d'une bifurcation, on obtient une équation du type :

$$\dot{x} = \mu x. \tag{4.3}$$

La bifurcation est caractérisée par le changement de signe de μ : si $\mu > 0$ la branche est stable, si $\mu < 0$ elle est instable. On tient compte à présent du balayage expérimental du paramètre μ et on suppose que ce paramètre change de signe au temps $t = T_b$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &< 0 \text{ pour } t < T_b \\ \mu(T_b) = 0 & \\ \mu(t) &> 0 \text{ pour } t > T_b \end{aligned}$$

On peut intégrer l'équation différentielle (4.3) :

$$x(t) = x(0) \exp\left(\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right)$$

où $x(0)$ est la valeur initiale de l'intensité.

Pour $t < T_b$, $\int_0^t \mu(\tau)d\tau$ est négatif car $\mu(\tau)$ est lui-même négatif. Donc x décroit entre 0 et T_b. A partir de T_b, $\mu(\tau)$ devient positif donc x croît, cependant il faudra un certain temps avant d'atteindre sa valeur de départ $x(0)$: c'est ce temps qui est à l'origine du retard à la bifurcation. En effet, la divergence de x, qui lui fera quitter la branche instable, ne se produira que lorsque l'intégrale $\int_0^t \mu(\tau)d\tau$ deviendra positive.

4.3.2.b Prise en compte du bruit dans le modèle monomode

Revenons à présent sur les équations de notre système (4.2) et considérons à présent le bruit sur les différents champs. Le bruit sur la pompe ne va pas nous intéresser autour de la bifurcation car le signal est alors très faible et la pompe n'intervient dans $\dot{A}_s$ que multipliée dans le terme $A_p A_s^*$. On négligera donc dans la suite le bruit sur la pompe. Par contre le bruit sur le signal va intervenir, on le notera η dans les équations.

$$\dot{A}_p = \gamma\left[-\left(1 + i\left(\Delta_p - \frac{2}{\gamma}\theta\right)\right) A_p - A_s^2 + E\right] \tag{4.4a}$$

$$\dot{A}_s = -\left[1 + i\left(\Delta_s - \theta\right)\right] A_s + A_p A_s^* + \eta \tag{4.4b}$$

$$\dot{\theta} = \epsilon\left(-\theta + \alpha|A_p|^2 + \beta|A_s|^2\right) \tag{4.4c}$$

L'effet du bruit sera d'atteindre plus rapidement le point de divergence et donc de diminuer le retard à la bifurcation ; ainsi pour un bruit très important, il n'y aura plus de retard. Des études détaillées de l'effet du bruit sur le retard à la bifurcation ont été menées dans le cas où le paramètre de contrôle varie linéairement [Broggi *et al.*, 1986; Zeghlache *et al.*, 1989]. La difficulté de notre problème vient de la dépendance non-linéaire de θ dans le temps. Cette difficulté et la volonté de pouvoir mener des calculs analytiques nous ont conduits à modéliser le bruit comme une simple constante additive réelle du champ signal.

Notons que nous considérons ici les oscillations de relaxation comme établies. Un autre problème est le début des oscillations : le système démarre alors sur le bruit quantique en l'absence du résidu de signal que nous considérons dans la discussion précédente. Dans cette phase de démarrage, le bruit quantique sur le mode du signal conduit à la formation de photons du complémentaire et réciproquement : c'est le phénomène de fluorescence parmétrique [Shen, 1984]. En fait si l'intensité a diminué pendant un temps suffisant paour atteindre le niveau moyen de bruit, les deux problèmes sont équivalents.

4.3.3 Simulations numériques

4.3.3.a Premières approximations

Pour nos simulations numériques, nous avons fait plusieurs approximations sur le système d'équations (4.4) :

- limite adiabatique : l'ordre de grandeur de γ est 10, donc la pompe réagit dix fois plus vite que le signal et on peut considérer que la pompe est toujours à son état stationnaire, à tout instant :

$$A_p = \frac{E - A_s^2}{1 + i(\Delta_p - \frac{2}{\gamma}\theta)}$$

- linéarisation : nous nous intéressons au comportement du signal autour de son état stationnaire nul, donc nous pouvons linéariser sa partie réelle (x) et sa partie imaginaire (y) autour de 0 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & (\frac{E}{1+(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma})^2} - 1)x + (\Delta_s - \theta - \frac{E(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma})}{1+(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma}^2)})y + \eta \\ \dot{y} & = & -(\Delta_s - \theta + \frac{E(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma})}{1+(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma}^2)})x - (\frac{E}{1+(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma})^2} + 1)y \\ \dot{\theta} & = & \epsilon[-\theta + \frac{\alpha E^2}{1+(\Delta_p-\frac{2\theta}{\gamma})^2}] \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Nous avons fait varier le paramètre η dans nos simulations entre les valeurs 10^{-18} et 10^{-6}. La figure 4.25 est un agrandissement du portrait de phase de l'intensité du signal autour de la bifurcation θ_b. Les différentes courbes en traits fins sont

différentes trajectoires correspondant à l'intégration du système d'équations linéarisées (4.5) pour les différentes valeurs de η. La trajectoire divergeant le plus près de la bifurcation correspond à une valeur de η de 10^{-6} tandis que celle qui remonte le plus loin de la bifurcation correspond à une valeur de η de 10^{-18}. On vérifie donc que plus la valeur de η est élevée, plus la commutation se rapproche du point de bifurcation. On observe d'autre part que la dépendance du retard à la bifurcation en fonction de η semble logarithmique, en effet les courbes correspondant à des puissances de 10 successives semblent en première approximation régulièrement espacées.

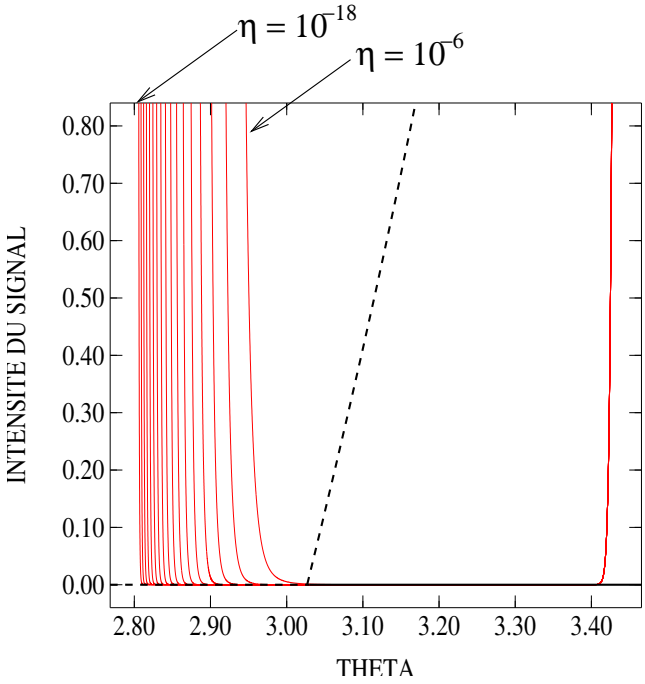


FIG. *4.25: Agrandissement du portrait de phase de l'intensité du signal (figure 4.20) autour de θ_b. Différentes trajectoires sont représentées correspondant à l'intégration du système* (4.5) *pour des valeurs du paramètre η comprises entre 10^{-18} et 10^{-6}. Les valeurs des paramètres sont $\gamma = 10$, $E = 4$, $\Delta_p = -2$, $\Delta_s = 2$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\alpha = 1.3$, $\beta = .35$.*

4.3.3.b Lois d'échelle

On peut en effet mettre en évidence deux lois d'échelles entre η et le décalage définit par $|\theta_m(\eta) - \theta_m(10^{-18})|$. Ce décalage représente l'écart entre la remontée à η nul (en fait très petit puisqu'égal à 10^{-18}) et la remontée à η non-nul : c'est-à-dire l'écart entre le point de remontée théorique (sans bruit) et le point de remontée réel (avec bruit). La figure 4.26 montre le décalage en échelle linéaire à gauche et en échelle logarithmique à droite en fonction du logarithme de η. On constate que pour les petites valeurs du bruit, la courbe de gauche est linéaire tandis que celle de droite est linéaire pour les grandes valeurs de η.

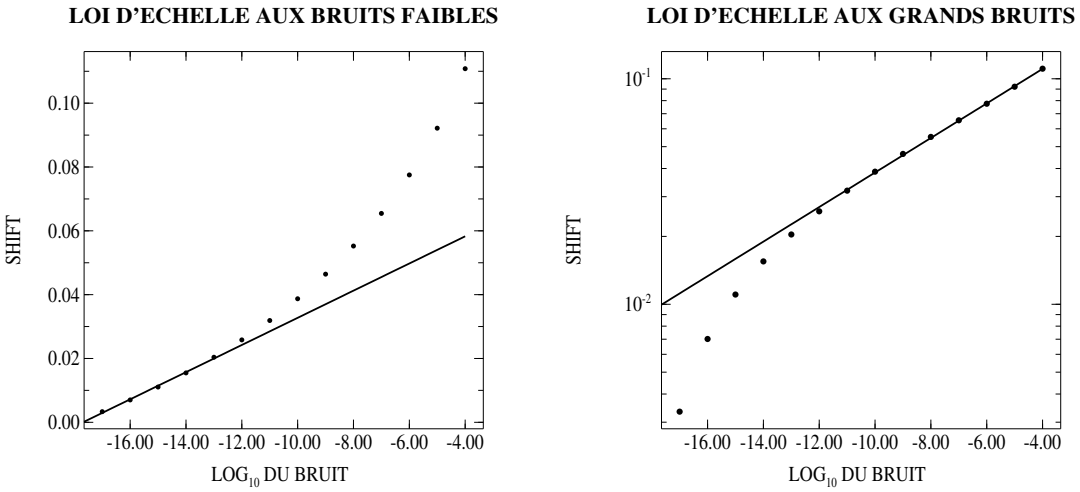


FIG. *4.26: Décalage (noté shift) en échelle linéaire à gauche et en échelle logarithmique à droite en fonction du logarithme de η.*

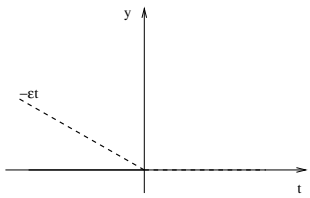
On a donc deux lois d'échelles :
- aux faibles bruits ($\eta < 10^{-11}$) : $\Delta\theta \sim log\eta$,
- aux grands bruits ($\eta > 10^{-11}$) : $\Delta\theta \sim \eta^{1/13}$.

Cela signifie que le système a une sensibilité logarithmique au bruit lorsque celui-ci est faible, tandis que quand le bruit est important la dépendance se fait en loi de puissance.

4.3.3.c Modèle grossier

Nous allons d'abord essayer de retrouver ces lois d'échelles au moyen d'un modèle grossier.

Autour de la bifurcation θ_b, le diagramme de bifurcation est donné par une forme normale telle que $\dot{y} = \epsilon t y + y^2$ si on considère que le paramètre dépend linéairement du temps. Les solutions stationnaires sont $y = 0$ et $y = -\epsilon t$. La solution nulle est stable pour $t < 0$ et instable pour les $t > 0$. La solution $-\epsilon t$ est instable pour $t < 0$. On retrouve donc bien un diagramme de bifurcation ayant la même allure que celui de notre modèle au voisinage de la bifurcation :



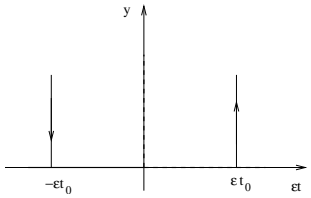
On va donc étudier tout d'abord l'équation

$$\dot{y} - y^2 - \epsilon t y = \eta. \tag{4.6}$$

On distingue deux domaines : à faible bruit, y va prendre des valeurs si faibles qu'on va pouvoir négliger la branche instable correspondant à une solution non-nulle, à grand bruit, il faut tenir compte de cette branche.

4.3.3.c-i A faible bruit

Pour le problème sans bruit, on a une bifurcation du type :



L'equation d'une telle bifurcation est :

$$\dot{y} = \epsilon t y$$

et sa solution est :

$$y = y_0 e^{\frac{\epsilon(t^2 - t_0^2)}{2}}.$$

La remontée après le point bas s'effectue de manière symétrique à la descente. Lorsqu'on rajoute le terme de bruit, l'équation et sa solution deviennent :

$$\dot{y} = \epsilon t y + \eta \tag{4.7}$$

$$y = y_0 e^{\frac{\epsilon^2(t^2 - t_0^2)}{2\epsilon}} + \eta e^{\frac{\epsilon^2 t^2}{2\epsilon}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{\epsilon s^2}{2}} ds \tag{4.8}$$

Si on se place à t grand, on peut calculer approximativement l'intégrale du second terme de l'équation (4.8) :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{\epsilon s^2}{2}} ds &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}(erf(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}t) + erf(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}t_0) \\
&\simeq \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} erf(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}t) \\
&\simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$y \simeq y_0 e^{\frac{\epsilon^2(t^2 - t_0^2)}{2\epsilon}} + \eta\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{\frac{\epsilon^2 t^2}{2\epsilon}} \tag{4.9}$$

La remontée ne se fait plus de manière symétrique car le deuxième terme de (4.9) devient $O(1)$ avant le premier, qui est retardé de t_0. La remontée se fait à un temps tel que :

$$(\epsilon t)^2 \sim \epsilon \ln(\eta).$$

Plus η sera grand, plus la dissymétrie sera importante, cependant, lorsqu'il le devient trop, on ne peut plus négliger le terme y^2 dans l'équation différentielle.

4.3.3.c-ii A bruit élevé

Il nous faut ici alors tenir compte du terme en y^2 :

$$\dot{y} = \epsilon t y + y^2 + \eta.$$

En faisant les changements de variables suivant :

$$\begin{aligned} Y &= \delta^{1/2} y, \\ \tau &= \delta^{-1/2} t, \\ \epsilon t &= \delta^{-1/2} \tau, \end{aligned}$$

on obtient alors l'équation :

$$\dot{Y} = \tau Y + Y^2 + 1.$$

Alors comme tous les termes de l'équation sont du même ordre dans cette partie, Y est d'ordre 1 et donc τ l'est aussi. On a donc finalement

$$\epsilon t \sim \delta^{1/2.}$$

On obtient donc bien une loi d'échelle en puissance pour les bruits élevés.

Pour finir cette partie nous devrions montrer que le système linérarisé (4.5) comportant trois variables peut se réduire à un système à deux variables : une unique variable pour l'intensité, et une pour la variable lente θ. La complexité du problème vient du fait que les coefficients des équations sur x et y dépendent de la variable θ. On peut cependant montrer que le système est simplifiable en tenant compte du fait que les variables optiques évoluent suivant un temps beaucoup plus rapide que celui de θ. Il est alors possible d'obtenir une solution au premier ordre en η pour x [Erneux].

Nous n'allons cependant pas pousser plus loin les calculs analytiques car ce travail est demeuré inachevé faute de temps. En effet nous aimerions pouvoir retrouver expérimentalement les lois d'échelles obtenues par les simulations numériques en injectant par exemple dans la cavité un champ infrarouge très faible dont on pourrait faire varier l'intensité. Une telle expérience est difficile à réaliser. Si on essaie d'estimer le retard directement à partir des séries temporelles comme nous avons essayé de le faire dans la partie 4.3.1.c nous nous heurtons au problème du grand nombre de paramètres de notre modèle par rapport aux variables que nous pouvons observer expérimentalement.

Nous avons cependant obtenu dans cette partie des lois d'échelles reliant le retard à la bifurcation à un niveau moyen du bruit sur le signal. Ces lois sont logarithmique pour des bruits faibles et en loi de puissance pour les bruits élevés.

Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre des travaux préliminaires dont l'intérêt réside particulièrement, pour les deux premières parties, sur les observations expérimentales surprenantes que nous avons pu faire. En effet, alors que l'OPO est presque

toujours considéré comme une source monomode, nous avons montré qu'on pouvait observer des situations où l'OPO oscille sur deux modes séparés d'au moins un demi intervalle spectral libre. En nous interogeant sur l'origine de cette coexistence de modes nous avons montré numériquement que plusieurs modèles de l'OPO pouvaient conduire à un tel résultat. Dans une deuxième partie nous avons présenté des résultats expérimentaux qualitatifs montrant que la dynamique spectrale au voisinage de la dégénérescence dans un OPO de type I peut être très complexe.

Ces deux premières parties montrent que l'étude du spectre des OPO est un domaine prometteur, aussi bien pour la compréhension du fonctionnement des OPO (comme la possibilité de l'OPO de fonctionner sur des coïncidences croisées, que nous avons abordée dans le chapitre 2 et qui pourrait expliquer la coexistence de modes observée dans la partie 4.1), que pour l'étude de régimes dynamiques complexes au voisinage de la dégénérescence pour un OPO de type I.

Enfin, nous avons étudié dans une dernière partie le problème du retard à la bifurcation dans les oscillations monomodes thermiques et montré numériquement que la prise en compte d'un terme dans les équations modélisant le niveau moyen de bruit conduit à des lois d'échelles entre ce terme et le retard à la bifurcation.

Conclusion

L'oscillateur paramétrique optique n'est pas seulement une source largement accordable, permettant de générer des états non-classiques de la lumière, c'est aussi un système dynamique modèle qui, malgré son apparente simplicité, est riche en comportements dynamiques. Ainsi, nous avons montré dans la partie 3.1 qu'en changeant très peu la configuration de l'OPO, on peut observer des oscillations en rafales de formes et de fréquences très variées modélisables de manière simple et robuste. Les OPO sont donc sans doute un système modèle pour l'étude du bursting, qui est un phénomène dynamique très étudié en biologie.

Les travaux expérimentaux et théoriques que nous avons effectués sur les OPO d'accord de phase de type II triplement résonnants à taux de pompage élevés ont permis d'éclaircir certains points de la dynamique temporelle de ce système. Ainsi, nous avons étudié dans le chapitre 2 des oscillations de fréquences 1 à 100MHz dont nous avons montré qu'elles reposent sur l'interaction de plusieurs modes transverses. Notre étude montre qu'en général un faible nombre de modes est impliqué dans l'interaction et que l'ordre de ces modes est peu élevé. D'autre part ces instabilités apparaissent facilement et pour presque toutes les tailles de cavité. Lorsque ces oscillations multimodes sont superposées à des oscillations plus lentes d'origine thermique, on observe les instabilités de type oscillations en rafales que nous avons mentionnées au paragraphe précédent.

L'interaction entre les modes transverses est sans doute aussi à l'origine des signaux temporels irréguliers que nous avons observés. Ces régimes sont à notre connaissance la première observation expérimentale de chaos déterministe dans les OPO. D'autre part nous avons montré, en analysant une série irrégulière pendant laquelle les paramètres du système étaient balayés, que la variation des paramètres de contrôle n'est pas un obstacle à l'identification de chaos dans une série temporelle. En effet, alors que la plupart des techniques classiques d'analyse du chaos nécessitent que les paramètres soient fixes, ce qui n'est pas toujours évident à réaliser dans un système expérimental, des techniques issues de l'analyse topologique nous ont permis de caractériser le chaos localement dans notre série temporelle expérimentale.

L'étude des instabilités multimodes et des régimes chaotiques susceptibles d'être présentés par l'OPO pourraient être grandement complétée par l'utilisation de mécanismes de contrôle permettant de stabiliser l'OPO et de limiter le balayage des paramètres. Il est probable en effet qu'une boucle de rétroaction à des échelles de temps lentes, permettant de compenser les fluctuations thermiques et mécaniques, ne perturberait pas la dynamique rapide du système. On pourrait ainsi étudier de

manière plus détaillée le spectre de l'OPO pendant les oscillations multimodes et les valeurs des fréquences d'apparition en fonction de la taille de la cavité. D'autre part une telle stabilisation de la cavité devrait permettre d'étudier de manière plus détaillée les régimes chaotiques et notamment d'obtenir des régimes de chaos plus complexes qui ont été prévus théoriquement [Suret *et al.*, 2001a].

Dans le cas particulier des OPO de type I, ceux-ci présentent des classes d'instabilités semblables à celle de l'OPO de type II : oscillations rapides dont l'origine est probablement aussi liée à des couplages entre modes transverses et oscillations à des fréquences plus lentes d'origine thermique. Cependant cette dynamique temporelle mériterait d'être explorée plus avant car, l'écart entre les sauts de mode étant beaucoup plus faible que pour les OPO de type II, cette dynamique devrait être plus riche [Suret, 2000]. D'autre part, nous avons vu qu'en situation dégénérée, le système présente une dynamique spectrale complexe. Une étude expérimentale simultanée de la dynamique temporelle et spectrale de l'OPO de type I proche de la dégénéréscence devrait conduire à l'observation de régimes dynamiques complexes.

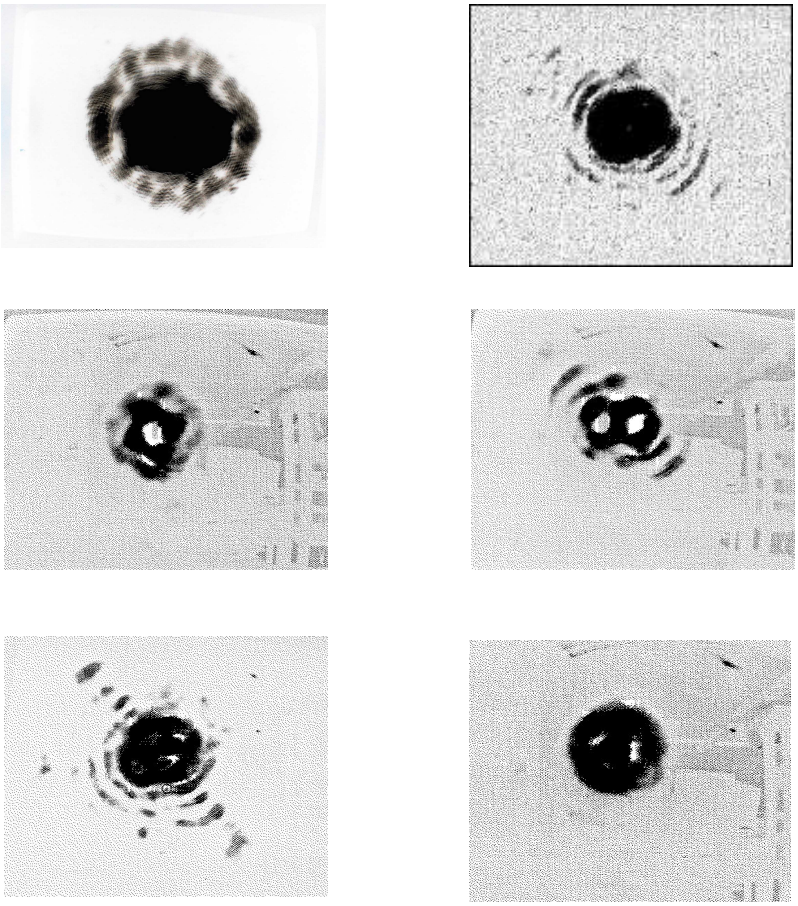
Au niveau du fonctionnement des OPO et plus particulièrement du problème de la sélection de modes, c'est-à-dire du choix spontané par l'OPO de son mode de fonctionnement, nous avons montré théoriquement que l'interaction entre les modes transverses pouvait se faire même lorsque les résonances des modes impliqués dans l'interaction sont très séparés, le seuil de fonctionnement multimode étant déterminé par la moyenne des désaccords et non par l'écart entre les modes. La conséquence de cette étude est l'existence de "résonances" virtuelles situées au milieu de chaque paire de modes transverse. Nos observations expérimentales d'oscillations à des fréquences comprises entre 100MHz et 300MHz, alors que la fréquence de coupure de la cavité est de l'ordre de 10MHz, confirment l'existence de ces résonances virtuelles car la fréquence des oscillations est en première approximation la fréquence de battement entre les deux modes. Les oscillations multimodes que nous observons impliquent donc des modes transverses séparés de 100 à 300MHz.

Le fonctionnement multimode stationnaire de l'OPO peut aussi impliquer des modes distants d'au moins 1GHz comme nous l'avons montré expérimentalement. Les études numériques que nous avons menées sur la possibilité théorique de cette coexistence montrent que différentes hypothèses peuvent conduire à un tel fonctionnement de l'OPO. Il serait intéressant de savoir si ces différentes hypothèses peuvent être validées expérimentalement. Finalement, nous avons exposé une hypothèse mettant en jeu des coïncidences "croisées" entre les modes du signal et ceux du complémentaires, qui, si elle s'avérait valide, devrait conduire à l'observation très commune de comportements multimodes de l'OPO.

Ainsi, en dehors de l'aspect dynamique des OPO, ce travail de thèse conduit à remettre en question la vision habituelle de l'OPO comme source monomode par le même processus que les lasers à élargissement homogène. Nous pensons que notre observation de coexistence de modes, loin d'être une phénomène exotique, devrait s'observer très facilement. Une étude détaillée de ces comportements, à des taux de pompage plus faibles devrait pouvoir conduire à la validation d'une de nos hypothèses.

Enfin, nous avons été conduits à étudier les plages de désaccords atteignables expérimentalement. Nous avons souligné le fait que la sélection de mode conduit à restreindre drastiquement la zone dans laquelle les désaccords du signal peuvent prendre leurs valeurs. Si on tient compte d'autre part des limitations liées aux puissances de pompe disponibles actuellement, nous montrons que l'observation expérimentale des régimes prédits théoriquement par le modèle le plus simple (la bifurcation de Hopf du modèle monomode) sera sans doute extrêmement difficile à réaliser.

La littérature est en effet riche de prédictions théoriques sur la dynamique des OPO. Tout particulièrement, sa dynamique spatio-temporelle a été l'objet de nombreux travaux. Nous n'avons pas exploré cet aspect de la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques. Nous avons soulevé dans la partie 1.2.3 les difficultés expérimentales propres à l'étude de tels comportements. Nous donnons cependant ci-dessous quelques exemples d'images de la structure transverse du champ du signal impliquant de nombreux modes transverses et qui rappellent les observations antérieures de structures transverses [Vaupel *et al.*, 1999].



Nous soulignons le fait que nous ne pouvons garantir que ces modes coexistent simultanément ou se succèdent pendant le temps d'acquisition de la caméra (voir la partie 2.2.1.a). Il semble cependant que ce domaine soit également aussi prometteur.

Annexe A

Calculs d'intensité

Nous détaillons dans cette annexe les calculs des intensités vues par deux détecteurs rapides placés en deux points du faisceau transverse d'un champ dont les résultats sont utilisés dans la partie 2.2.2.a.

De même que dans cette partie, nous supposons qu'il n'y a que deux modes impliqués dans le mécanisme. Ces deux modes s'écrivent $E_1(\vec{r},t) = A_1(t)f_1(\vec{r})e^{i\omega_1 t}$ et $E_2(\vec{r},t) = A_2(t)f_2(\vec{r})e^{i\omega_2 t}$ où les $A_i(t)$ sont les amplitudes lentement variables, les $f_i(\vec{r})$ des fonctions complexes décrivant la distribution spatiale des champs dans le plan transverse, dépendant d'un vecteur à deux dimensions $\vec{r}$ du plan orthogonal à la direction de propagation, et les ω_i les fréquences optiques des champs. L'intensité totale du champ est :

$$\begin{aligned} I(\vec{r},t) &= (A_1 f_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 f_2 e^{i\omega_2 t})(A_1^* f_1^* e^{-i\omega_1 t} + A_2^* f_2^* e^{-i\omega_2 t}) && \text{(A.1)} \\ &= |f_1|^2|A_1|^2 + |f_2|^2|A_2|^2 + 2\Re(f_1 f_2^* A_1 A_2^* e^{i(\omega_1-\omega_2)t}) && \text{(A.2)} \end{aligned}$$

Dans notre situation expérimentale, nous comparons les valeurs de l'intensité précédente en deux points $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ du plan transverse. Nous allons séparer les cas où les deux modes ont la même fréquence (cas accroché) du cas où leurs fréquences sont différentes (cas non accroché).

A.1 Cas de l'accrochage de fréquences

Si A_1 et A_2 sont accrochés en fréquence, leur différence de phase ne dépend pas du temps et :

$$I(\vec{r},t) = |f_1(\vec{r})|^2 I_1(t) + |f_2(\vec{r})|^2 I_2(t) + 2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})||A_1(t)||A_2(t)|\cos\Delta\phi(\vec{r})$$

Si on considère que les termes $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $|A_1(t)||A_2(t)|$ oscillent tous à la même fréquence Ω puisque ces oscillations naissent de la même instabilité, on peut noter :

$$\begin{aligned} |f_1(\vec{r})|^2 I_1(t) &= \alpha_1 + \beta_1\cos\Omega t \\ |f_2(\vec{r})|^2 I_2(t) &= \alpha_2 + \beta_2\cos(\Omega t + \phi_2) \\ 2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})||A_1(t)||A_2(t)|\cos\Delta\phi(\vec{r}) &= \alpha_3 + \beta_3\cos(\Omega t + \phi_3) \end{aligned}$$

Où les termes α_i, β_i et ϕ_i sont des termes lentement variables qui pourront donc être considérés comme constants pendant le temps d'intégration τ_B.

On a alors

$$\begin{aligned}
I(\vec{r},t) &= \sum_i \alpha_i + \beta_1 \cos\Omega t + \beta_2 \cos(\Omega t + \phi_2) + \beta_3 \cos(\Omega t + \phi_3) \\
&= \sum_i \alpha_i + (\beta_1 + \beta_2 \cos\phi_2 + \beta_3 \cos\phi_3)\cos\Omega t - (\beta_2 \sin\phi_2 + \beta_3 \sin\phi_3)\sin\Omega t \\
&= A(\vec{r}) + B(\vec{r})\cos\Omega t - C(\vec{r})\sin\Omega t \\
&= A + \sqrt{B^2 + C^2}\,(\sin\phi\cos\Omega t - \cos\phi\sin\Omega t) \\
&= A + \sqrt{B^2 + C^2}\cos(\Omega t + \phi)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \sum_i \alpha_i, \\
B &= \beta_2 \sin\phi_2 + \beta_3 \sin\phi_3 \\
C &= \beta_2 \sin\phi_2 + \beta_3 \sin\phi_3 \\
\text{et } \phi &= \arctan(B/C).
\end{aligned}$$

En deux points $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ du plan transverve, on observe donc les intensités :

$$\begin{aligned}
I(\vec{r},t) &= A(\vec{r}) + \sqrt{B(\vec{r})^2 + C(\vec{r})^2}\cos(\Omega t + \phi(\vec{r})) \\
I(\vec{r'},t) &= A(\vec{r'}) + \sqrt{B(\vec{r'})^2 + C(\vec{r'})^2}\cos(\Omega t + \phi(\vec{r'}))
\end{aligned}$$

A.2 Cas sans accrochage de fréquence

Si les champs ne sont pas accrochés en fréquence il y a un terme de battement à la fréquence $\Delta\omega$:

$$\begin{aligned}
I(\vec{r},t) &= |f_1(\vec{r})|^2 I_1(t) + |f_2(\vec{r})|^2 I_2(t) \\
&\quad +2|f_1(\vec{r})||f_2(\vec{r})||A_1(t)||A_2(t)|\cos(\Delta\omega t + \Delta\phi(\vec{r}))
\end{aligned}$$

On aura donc en prenant des notations semblables à celles de la partie précédente :

$$\begin{aligned}
I(\vec{r},t) &= \sum_i \alpha_i + \beta_1 \cos\Omega t + \beta_2 \cos(\Omega t + \phi_2) + \beta_3 \cos(\Omega t + \phi_3)\cos(\Delta\omega t + \phi_4) \\
&= \sum_i \alpha_i + \beta_1 \cos\Omega t + \beta_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \\
&\quad + \frac{\beta_3}{2}\left(\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_3 + \phi_4) + \cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_4 - \phi_3)\right) \\
&= \sum_i \alpha_i + (\beta_1 + \beta_2 \cos\phi_2)\cos\Omega t - \beta_2 \sin\phi_2 \sin\Omega t \\
&\quad + \frac{\beta_3}{2}\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_4 + \phi_3) + \frac{\beta_3}{2}\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_4 - \phi_3) \\
&= A(\vec{r}) + B(\vec{r})\cos(\Omega t + \phi_B(\vec{r})) + C(\vec{r})\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_C(\vec{r})) \\
&\quad + D(\vec{r})\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_D(\vec{r}))
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
A &= \sum_i \alpha_i \\
B &= \sqrt{(\beta_1 + \beta_2 \cos\phi_2)^2 + (\beta_2 \sin\phi_2)^2} \\
\phi_B &= \arctan\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 \cos\phi_2}{\beta_2 \sin\phi_2}\right) \\
C &= \frac{\beta_3}{2} \\
\phi_C &= \phi_3 + \phi_4 \\
D &= \frac{\beta_3}{2} \\
\phi_C &= \phi_4 - \phi_3
\end{aligned}$$

En deux points $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan transverse, on observe donc les intensités :

$$\begin{aligned}
I(\vec{r},t) &= A(\vec{r}) + B(\vec{r})\cos(\Omega t + \phi_B(\vec{r})) + C(\vec{r})\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_C(\vec{r})) \\
&\quad + D(\vec{r})\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_D(\vec{r})) \\
I(\vec{r'},t) &= A(\vec{r'}) + B(\vec{r'})\cos(\Omega t + \phi_B(\vec{r'})) + C(\vec{r'})\cos((\Omega + \Delta\omega)t + \phi_C(\vec{r'})) \\
&\quad + D(\vec{r'})\cos((\Omega - \Delta\omega)t + \phi_D(\vec{r'}))
\end{aligned}$$

Annexe B

Développement perturbatif

Dans cette annexe, nous détaillons le calcul perturbatif multi-échelle de la partie 3.1.

B.1 Condition de l'étude perturbative

B.1.1 Modèle bimode transverse

Le modéle utilisé est le modèle multimode transverse dégénéré, où on considère la pompe monomode transverse TEM_{00}. Le signal se décompose sur deux modes transverses différents dont les amplitudes lentement variables sont notées respectivement A_1 et A_2. Le champ total du signal s'écrit :

$$E(\vec{r},t) = f_1(\vec{r})E_1(t) + f_2(\vec{r})E_2(t),$$

où les fonctions $f_i(\vec{r})$ décrivent la structure transverse des champs et où $E_1(t) = A_1(t)\exp(i\omega_p t/2 - k_p z/2)$ et $E_2(t) = A_2(t)\exp(i\omega_p t/2 - k_p z/2)$ décrivent les variations temporelles dans le même repère tournant. Le champ de la pompe s'écrit pour sa partie temporelle : $E_p(t) = A_p(t)\exp(i\omega_p t - k_p z)$. Les champs obéissent alors aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_p &= \gamma\left[-(1+i\sigma_p)A_p - A_1^2 - \chi A_2^2 - 2\chi_{12}A_1A_2 + E\right], && \text{(B.1a)}\\
\dot{A}_1 &= -(1+i\sigma_1)A_1 + A_pA_1^* + \chi_{12}A_pA_2^*, && \text{(B.1b)}\\
\dot{A}_2 &= -(1+i\sigma_2)A_2 + \chi A_pA_2^* + \chi_{12}A_pA_1^*. && \text{(B.1c)}
\end{aligned}$$

B.1.2 Conditions de l'analyse

On introduit les paramètres $\Delta\sigma_s = \omega_2^R - \omega_1^R = \sigma_2 - \sigma_1$, la fréquence de battement entre les deux modes transverses considérés et $\sigma_s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, la moyenne des désaccords.

Dans les conditions du développement :

$$\begin{aligned} |\sigma_1|, |\sigma_2| &= O(\eta^{-1}) \\ |\sigma_p|, |\sigma_s| &= O(1) \end{aligned}$$

On a l'apparition d'un temps rapide :

$$s \equiv \eta^{-1} t \text{ avec } \sigma_j = \eta^{-1}\delta_j.$$

η est alors un petit paramètre positif et les δ_j sont des fonctions de θ $O(1)$. Dans le domaine de θ qui nous intéresse $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ est $O(1)$. On cherche des solutions de la forme :

$$A_p = A_{p0}(s,t) + \eta A_{p1}(s,t) + ... \tag{B.2}$$

$$A_j = A_{j0}(s,t) + \eta A_{j1}(s,t) + ... \tag{B.3}$$

où $s \equiv \eta^{-1}t$. Alors s est la variable de temps rapide et t la variable de temps lente. On suppose que ces deux temps sont indépendants, c'est à dire que les variables se comportent indépendamment à ces deux échelles, on a alors :

$$\begin{aligned} A'_p &= \eta^{-1} A_{ps} + A_{pt} \\ A'_j &= \eta^{-1} A_{js} + A_{jt} \end{aligned}$$

Où les indices s et t indiquent les dérivées partielles par rapport à s et t.

B.2 Développement multi-échelle

A partir des équations (B.1), on obtient :

$$\begin{aligned} (A_{p0} + \eta A_{p1} + \ldots)' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)(A_{p0} + \eta A_{p1} + \ldots) \\ &- (A_{10} + \eta A_{11} + \ldots)^2 - \chi(A_{20} + \eta A_{21} + \ldots)^2 \\ &- 2\chi_{12}(A_{20} + \eta A_{21} + \ldots)(A_{20} + \eta A_{21} + \ldots) + E] \\ \eta^{-1} A_{p0s} + A_{p0t} + \eta(\eta^{-1} A_{p1s} + A_{p1t}) &= \gamma[-(1+i\sigma_p)(A_{p0} + \eta A_{p1}) \\ &- (A_{10}^2 + 2\eta A_{11})) - \chi(A_{20}^2 + 2\eta A_{21}^2) \\ &- 2\chi_{12}(A_{20}A_{10} + \eta A_{21}A_{10} + \eta A_{20}A_{21}) + E] \end{aligned}$$

donc pour les différents ordres :

$$\begin{aligned} \eta^{-1} A_{p0s} &= 0 \\ A_{p0t} + A_{p1s} &= \gamma[-(1+i\sigma_p) A_{p0} - A_{10}^2 - \chi A_{20}^2 \\ &- 2\chi_{12} A_{20} A_{10} + E] \\ \eta A_{p1t} &= \gamma[-(1+i\sigma_p)\eta A_{p1}) \\ &- 2\eta A_{11} - 2\chi\eta A_{21}^2 \\ &- 2\chi_{12}\eta(A_{21}A_{10} + A_{20}A_{21}) + E] \end{aligned}$$

De même pour les A_j :

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}A_{10s} + A_{10t} + \eta(\eta^{-1}A_{11s} + A_{11t}) &= -\left(1 + i\eta^{-1}\delta_1\right)(A_{10} + \eta A_{11}) \\
&+ A_{p0}A_{10}^* + \eta A_{p1}A_{10}^* + \eta A_{p0}A_{11}^* \\
&+ \chi_{12}(A_{p0}A_{20}^* + \eta A_{p1}A_{20}^* + \eta A_{p0}A_{21}^*)
\end{aligned}$$

donc pour les différents ordres :

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}A_{10s} &= -i\eta^{-1}\delta_1 A_{10} \\
A_{10t} + A_{11s} &= -A_{10} - i\delta_1 A_{10}A_{11} + A_{p0}A_{10}^* + \chi_{12}A_{p0}A_{20}^* \\
\eta A_{11t} &= -\eta A_{11} + \eta A_{p1}A_{10}^* + \eta A_{p0}A_{11}^* \\
&+ \chi_{12}(\eta A_{p1}A_{20}^* + \eta A_{p0}A_{21}^*)
\end{aligned}$$

B.2.1 Ordre $O(\eta^{-1})$

$$\begin{aligned}
A_{p0s} &= 0 \\
A_{10s} &= -i\delta_1 A_{10}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{aligned}
A_{p0} &= B_p(t) \\
A_{j0} &= B_j(t)\exp(-i\delta_1 s)
\end{aligned}$$

B.2.2 Ordre $O(1)$

$$\begin{aligned}
A_{p1s} &= -A_{p0t} + \gamma[-(1 + i\sigma_p)A_{p0} - A_{10}^2 - \chi A_{20}^2 \\
&- 2\chi_{12}A_{10}A_{20} + E] \\
A_{11s} + i\delta_1 A_{11} &= -A_{10t} - A_{10} + A_{p0}A_{10}^* + \chi_{12}A_{p0}A_{20}^* \\
A_{21s} + i\delta_2 A_{21} &= -A_{20t} - A_{20} + A_{p0}A_{20}^* + \chi_{12}A_{p0}A_{10}^*
\end{aligned}$$

Si on insère dans les équations précédentes les solutions à l'ordre 0 :

$$\begin{aligned}
A_{p1s} &= -B_p' + \gamma[-(1 + i\sigma_p)B_p - 2\chi_{12}B_1B_2\exp(-2i\sigma_s t) + E] \\
&+ \gamma(B_1^2\exp(-2i\delta_1 s) + \chi B_2^2\exp(-2i\delta_2 s)) \\
\frac{\partial}{\partial s}(A_{11}\exp(i\delta_1 s)) &= -B_1' - B_1 + \chi_{12}B_pB_2^*\exp(2i\sigma_s t) + B_pB_1^*\exp(2i\delta_1 s) \\
\frac{\partial}{\partial s}(A_{21}\exp(i\delta_2 s)) &= -B_2' - B_2 + \chi_{12}B_pB_1^*\exp(2i\sigma_s t) + B_pB_2^*\exp(2i\delta_2 s)
\end{aligned}$$

Pour que les solutions ne divergent pas, les parties ne dépendants pas de s doivent s'annuler :

$$\begin{aligned} B_p' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)B_p - 2\chi_{12}B_1B_2\exp(-2i\sigma_s t) + E] \\ B_1' &= -B_1 + \chi_{12}B_pB_2^*\exp(2i\sigma_s t) \\ B_2' &= -B_2 + \chi_{12}B_pB_1^*\exp(2i\sigma_s t) \end{aligned}$$

B.2.2.a Equations du système moyenné

Opérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} B_p &= a_p \\ B_1 &= a_1\exp(2i\sigma_s t/2) \\ B_2 &= a_2\exp(2i\sigma_s t/2) \end{aligned}$$

qui correspond à se placer dans le repère tournant adapté au problème. On obtient :

$$\begin{aligned} a_p' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)a_p - 2\chi_{12}a_1a_2 + E] \\ a_1' &= -(1+i\sigma_s)a_1 + \chi_{12}a_pa_2^* \\ a_2' &= -(1+i\sigma_s)a_2 + \chi_{12}a_pa_1^* \end{aligned}$$

B.2.2.b Comportement asymptotique

$$\begin{aligned} (|a_1|^2)' &= -2|a_1|^2 + \chi_{12}(a_pa_2^*a_1^* + cc) \\ (|a_2|^2)' &= -2|a_2|^2 + \chi_{12}(a_pa_2^*a_1^* + cc) \\ (|a_1|^2 - |a_2|^2)' &= -2(|a_1|^2 - |a_2|^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (|a_1|^2 - |a_2|^2) &= K\exp(-2t) \\ (|a_1|^2 - |a_2|^2) &\stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

En se plaçant aux temps longs et en choisissant comme nouvelles variables $a_s = \sqrt{a_1a_2}$ (avec une racine au sens complexe) et $\phi = \arg(a_1a_2*)$ on a les équations :

$$\begin{aligned} a_p' &= \gamma[-(1+i\sigma_p)a_p - 2\chi_{12}a_s^2 + E] \\ a_s' &= -(1+i\sigma_s)a_s + \chi_{12}a_pa_s^* \\ \phi' &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve alors avec les deux premières équations le modèle d'un TROPO dégénéré dont la dynamique a déjà été étudiée dans le chapitre I.

B.2.3 Ordre $O(\eta)$

Pour ce qui est de la solution au premier ordre :

$$\begin{aligned} A_{p1s} &= \gamma(B_1^2 \exp(-2i\delta_1 s) + \chi B_2^2 \exp(-2i\delta_2 s)) \\ \frac{\partial}{\partial s}(A_{11} \exp(i\delta_1 s)) &= B_p B_1^* \exp(2i\delta_1 s) \\ \frac{\partial}{\partial s}(A_{21} \exp(i\delta_2 s)) &= B_p B_2^* \exp(2i\delta_2 s) \end{aligned}$$

Pour chaque mode :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{B_p B_1^*}{2i\delta_1} \exp(i\delta_1 s) + B_{11} \exp(-i\delta_1 s) \\ A_{21} &= \frac{B_p B_2^*}{2i\delta_2} \exp(i\delta_2 s) + B_{21} \exp(-i\delta_2 s) \end{aligned}$$

B.2.4 Résultats du développement

B.2.4.a Amplitudes

Finalement on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{10} + \eta A_{11} = B_1 \exp(-i\delta_1 s) + \eta \left(\frac{B_p B_1^*}{2i\delta_1} \exp(i\delta_1 s) + B_{11} \exp(-i\delta_1 s) \right) \\ A_2 &= A_{20} + \eta A_{21} = B_2 \exp(-i\delta_2 s) + \eta \left(\frac{B_p B_2^*}{2i\delta_2} \exp(i\delta_2 s) + B_{21} \exp(-i\delta_2 s) \right) \end{aligned}$$

B.2.4.b Intensités

$$\begin{aligned} A_1 A_1^* &= |B_1|^2 + \eta(B_1^* B_{11} + c.c.) + \eta \left(\frac{B_1^{*2} B_p}{2i\delta_1} \exp(2i\delta_1 s) + c.c. \right) \\ &= |a_1|^2 + \eta(B_1^* B_{11} + c.c.) + \eta \left(\frac{a_1^{*2} A_{p0}}{2i\delta_1} \exp(i(\sigma_1 - \sigma_2)t) + c.c. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_s &= |A_1|^2 + |A_2|^2 \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + \eta \left(B_1^* B_{11} + c.c. \right) \\ &\quad + \eta \left(\left(\frac{a_2^{*2} A_{p0}}{2i\delta_2} - \frac{a_1^{*2} A_{p0}}{2i\delta_1} \right) \exp(i(\sigma_2 - \sigma_1)t) + c.c. \right) + O(\eta^2) \\ &= F_0(t) + (F_1(t) \exp(i(\sigma_2 - \sigma_1)t) + c.c.) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(t) &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + \eta \left(B_1^* B_{11} + c.c. \right) \\ F_1(t) &= \eta \left(\frac{a_2^{*2} A_{p0}}{2i\delta_2} - \frac{a_1^{*2} A_{p0}}{2i\delta_1} \right) \end{aligned}$$

Bibliographie

W. Adams et J. Benson. The generation and modulation of endogenous rhythmicity in the *aplysia* bursting pacemaker neurone R15. *Progr. Biophys. Mol. Biol.*, 46 : 1–49, 1985.

G. S. Agarwal et S. D. Gupta. Model for mode hopping in optical parametric oscillators. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14 :2174–2180, 1997.

A. Amon et M. Lefranc. Topological signature of deterministic chaos in short nonstationary signals from an optical parametric oscillator. soumis à Physical Review Letters, 2003.

A. Amon, M. Nizette, M. Lefranc, et T. Erneux. Bursting oscillations in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 68 :023801, 2003.

F. Arecchi, W. Gadomski, R. Meucci, et J. Roversi. Delayed bifurcation at the threshold of a swept gain CO_2 laser. *Opt. Comm.*, 70 :155–160, 1989.

P. Bergé, Y. Pomeau, et C. Vidal. *L'ordre dans le chaos.* Hermann, 1988.

N. Bloembergen. *Nonlinear Optics.* World Scientific, 1996.

G. Boyd et D. Kleinman. Parametric interaction of focused gaussian light beams. *Journal of Appl. Phys.*, 39(8) :3597, 1968.

R. W. Boyd. *Nonlinear Optics.* Academic Press, 1992.

G. Broggi, A. Colombo, L. Lugiato, et P. Mandel. Influence of white noise on delayed bifurcations. *Phys. Rev. A*, 33 :3635, 1986.

P. Butcher et D. Cotter. *The elements of nonlinear Optics.* Cambridge University Press, 1998.

R. L. Byer. Parametric oscillators and nonlinear material. In P. Harper et B. S. Wherrett, editors, *Nonlinear Optics*, pages 47–160. Academic Press, London, 1977.

M. Cross et P. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3) :851, 1993.

T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino, et C. Fabre. Type-II continuous-wave optical parametric oscillators : oscillation and frequency-tuning characteristics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10(9) :1668, 1993.

O. Decroly et A. Goldbeter. From simple to complex oscillatory behaviour : Analysis of bursting in a multiply regulated biochemical system. *J. Theor.Biol.*, 124 :219–50, 1987.

F. Devaux et E. Lantz. Spatial and temporal properties of parametric fluorescence around degeneracy in a type I LBO crystal. *Eur. Phys. J. D.*, 8 :117–124, 2000.

V. Dmitriev, G. Gurzadyan, et D. Nikogosyan. *Handbook of nonlinear optical crystals.* Springer, optical sciences, 1997.

A. Douillet et J.-J. Zondy. Low-threshold, self-frequency -stabilized $AgGaS_2$ continous-wave subharmonic optical parametric oscillator. *Opt. Lett.*, 23(16) :1259, 1998.

A. Douillet, J.-J. Zondy, A. Yelisseyev, S. Lobanov, et L. Isaenko. Stability and frequency tuning of thermally loaded continuous-wave $AgGaS_2$ optical parametric oscillators. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16(9) :1481–1498, 1999.

P. Drummond, K. McNeil, et D. Walls. Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation I. semiclassical theory. *Optica Acta*, 27(3) :321–335, 1980.

P. Drummond, K. McNeil, et D. Walls. Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation II. quantum theory. *Optica Acta*, 28(2) :211–225, 1981.

S. Ducci, N. Treps, A. Maître, et C. Fabre. Pattern formation in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 64 :023803, 2001.

R. Eckardt, H. Masuda, Y. Fan, et R. Byer. Absolute and relative nonlinear optical coefficients of KDP, KD*P, BaB_2O_4, $LiIO_3$, MgO :$LiNbO_3$, and KTP measured by phased-matched second harmonic generation. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-26 (5) :922, 1990.

R. Eckardt, C. Nabors, W. Koslovsky, et R. Byer. Optical parametric oscillator frequency tuning and control. *J. Opt. Soc. Am. B*, 8(3) :646, 1991.

G. J. Edwards et M. Lawrence. A temperature-dependent dispersion equation for congruently grown lithium niobate. *Opt. Quantum Electron.*, 16 :373–375, 1984.

T. Erneux. communication privée.

C. Fabre. Oscillateurs paramétriques optiques et optique quantique. formation à l'Université de Lille I, avril 2003.

R. Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 70 : 1455–1530, 1998.

R. Gilmore et M. Lefranc. *The Topology of Chaos : Alice in Stretch and Squeezeland.* Wiley, New York, 2002.

J. Giordmaine et R. Miller. Tunable coherent parametric oscillation in $LiNbO_3$ at optical frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 14(24) :973, 1965.

A. Goldbeter. *Biochemical oscillation and cellular rythms.* Cambridge University Press, 1996.

R. Graham et H. Haken. The quantum-fluctuations of the optical parametric oscillator. *Zeitschrift für Physik*, 210 :276, 1968.

E. Hairer, P. Norsett, et G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.* Springer Series in Comput. Mathematics. Springer-Verlag, 1993.

T. Hall. Trains. Software available from http ://www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html.

C. Hammond et D. Tritsch. *Neurobiologie cellulaire.* Doin, 1990.

E. M. Izhikevich. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 10 :1171–1266, 2000.

Special issue on $\chi^{(2)}$ second order nonlinear optics : from fundamentals to applications, Quantum and semiclassical Optics, 1997. Journal of the European Optical Society. (2).

H. Kogelnik et T. Li. Lasers beams and resonators. *Appl. Opt.*, 5(10) :1550, 1966.

W. Koslovski, C. Nabors, et R. Byer. Efficient second harmonic generation of a diode-laser-pumped CW Nd :YAG laser using monolithic MgO :$LiNbO_3$ external resonant cavities. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-24(6) :913, 1988.

P. Lebrun et I. Atwater. Chaotic and irregular bursting electrical activity in mouse pancreatic β-cells. *Biophys. J.*, 48 :529–31, 1985.

M. Lefranc et P. Glorieux. Topological analysis of chaotic signals from a CO_2 laser with modulated losses. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 3 :643–649, 1993.

S. Longhi. Alternating rolls in non-degenerate optical parametric oscillators. *Journal of modern optics*, 43(8) :1569, 1996a.

S. Longhi. Dark solitons in degenerate optical parametric oscillator. *Optics letters*, 21(12) :860, 1996b.

S. Longhi. Traveling-wave states and secondary instabilities in optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 53(6) :4488, 1996c.

S. Longhi. Spatial solitary waves in nondegenerate optical parametric oscillators near an inverted bifurcation. *Optics communications*, 149 :335, 1998.

L. Lugiato, L. Narducci, E. Eschenazi, D. Bandy, et N. Abraham. Multimode instabilities in a homogeneously broadened ring laser. *Phys. Rev. A*, 32(3) :1563, 1985.

L. A. Lugiato, C. Oldano, C. Fabre, E. Giacobino, et R. J. Horowicz. Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators. *Il Nuovo Cimento*, 10D(8) : 959–976, 1988.

P. Mandel et T. Erneux. Temporal aspects of absorptive optical bistability. *Phys. Rev. A*, 28 :896–909, 1983.

P. Mandel et T. Erneux. Laser Lorenz equations with a time dependant parameter. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1818–1820, 1984.

M. Marte, H. Ritsch, L. Lugiato, et C. Fabre. Simultaneous multimode optical parametric oscillation in a triply resonant cavity. *Acta Physica Slovaca*, 47(3/4) :233, 1997.

K. McNeil, P. Drummond, et D. Walls. Self pulsing in second harmonic generation. *Opt. Commun.*, 27(2) :292–294, 1978.

R. Meucci, A. D. Garbo, E. Allaria, et T. Arecchi. Autonomous bursting in a homoclinic system. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :144101–4, 2002.

M.Marte, H. Ritsch, K. Petsas, A. Gatti, L. Lugiato, C. Fabre, et D. Leduc. Spatial patterns in optical parametric oscillators with spherical mirrors : classical and quantum effects. *Optics Express*, 3(2) :71, 1998.

C. Nabors, R. Eckards, W. Koslovsky, et R. Byer. Efficient, single-axial-mode operation of a monolithic MgO :$LiNbO_3$ optical parametric oscillator. *Opt. Lett.*, 14 (20) :1134, 1989.

C. Nabors, S. Yang, T. Day, et R. Byer. Coherence properties of a doubly resonant monolithic optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 7(5) :815, 1990.

A. Newell et J. Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

G. Oppo, M. Brambilla, D. Camesasca, A. Gatti, et L. Lugiato. Spatiotemporal dynamics of optical parametric oscillators. *Journal of modern optics*, 41(6) :1151, 1994a.

G. Oppo, M. Brambilla, et L. Lugiato. Formation and evolution of rolls patterns in optical parametric oscillators. *Physical Review A*, 49(3) :2028, 1994b.

E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

C. Richy, K. I. Petsas, E. Giacobino, C. Fabre, et L. Lugiato. Observation of bistability and delayed bifurcation in a triply resonant optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12(3) :456–461, 1995.

V. Sánchez-Morcillo, E. Roldan, et G. de Valcarcel ans K. Staliunas. Generalized complex Swift-Hohenberg equation for optical parametric oscillators. *Phys. Rev. A*, 56(4) :3237, 1997.

C. Schwob. *Utilisation des faisceaux corrélés au niveau quantique produits par un Oscillateur Paramétrique Optique en spectroscopie de grande sensibilité.* PhD thesis, Université de Paris VI, 1997.

C. Schwob, P. Cohadon, C. Fabre, M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti, et L. Lugiato. Transverse effects and mode couplings in OPOs. *Appl. Phys. B*, 66 :685–699, 1998.

W. Sharp, M. Squicciarrini, D. Bromley, C. Green, J. Tredicce, et L. Narducci. Experimental observation of a delayed bifurcation at the threshold of an argon laser. *Opt. Comm.*, 63 :344–348, 1987.

E. Shechter. *Biochimie et biophysique des membranes.* Masson, 1990.

Y. Shen. *The principles of nonlinear optics.* J. Wiley and sons, 1984.

A. Siegman. *Lasers.* University Science Books, 1986.

R. Smith, J. Geusic, H. Levinstein, J. Rubin, S. Singh, et L. van Utiert. Continuous optical parametric oscillation in $Ba_2NaNb_5O_{15}$. *Appl. Phys. Lett.*, 12(9) :308, 1968.

K. Staliunas. Transverse pattern formation in optical parametric oscillators. *Journal of modern optics*, 42(6) :1261, 1995.

K. Staliunas et V. Sánchez-Morcillo. Localized structures in degenerate optical parametric oscillators. *Opt. Commun.*, 139 :306, 1997.

P. Suret. *Dynamique temporelle et effets transverses dans les Oscillateurs Paramétriques Optiques : observations expérimentales et modélisation.* PhD thesis, Université de Paris Sud, 2000.

P. Suret, D. Derozier, M. Lefranc, J. Zemmouri, et S. Bielawski. Self-pulsing instabilities in an optical parametric oscillator : experimental observation and modeling of the mechanism. *Phys. Rev. A*, 61 :021805(R), 2000.

P. Suret, M. Lefranc, D. Derozier, J. Zemmouri, et S. Bielawski. Fast oscillations in an optical parametric oscillator. *Opt. Commun.*, 200 :369–379, 2001a.

P. Suret, M. Lefranc, D. Derozier, J. Zemmouri, et S. Bielawski. Periodic mode hopping induced by thermo-optic effects in continuous-wave optical parametric oscillators. *Opt. Lett.*, 26 :1415–1417, 2001b.

M. Tachikawa, K. Tanii, M. Kajita, et T. Shimizu. Undamped undulation superposed on the passive Q-switching pulse of a CO_2 laser. *Appl. Phys. B*, 39 :83–90, 1986.

L. Tarassov. *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent.* Ed. Mir. Moscou, 1985.

S. Trillo, M. Haelterman, et A. Sheppard. Stable topological spatial solitons in optical parametric oscillators. *Optics letters*, 22(13) :970, 1997.

M. Vaupel, A. Maître, et C. Fabre. Observation of pattern formation in optical parametric oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 83(25) :5278, 1999.

A. Yariv. *Quantum Electronics.* CBS College Publishing, 1985.

A. Yariv et W. Louisell. Theory of the optical parametric oscillator. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-2(9) :418, 1966.

A. Yariv et P. Yeh. *Optical waves in crystals.* Wiley-interscience, 1984.

H. Zeghlache, P. Mandel, et C. V. de Broeck. Influence of noise on delayed bifurcations. *Phys. Rev. A*, 40 :286, 1989.

F. Zernike et J. Midwinter. *Applied Nonlinear Optics.* Wiley-interscience publications (New-York, Sydneyd, Toronto, London), 1973.

Dynamique temporelle des oscillateurs paramétriques optiques continus : oscillations multimodes, oscillations en rafales et chaos

Les oscillateurs paramétriques optiques (OPO) continus sont des sources de lumière cohérente largement accordables reposant sur l'interaction paramétrique de trois champs dans un cristal non-linéaire. Leur utilité est aussi bien liée à cette accordabilité (spectroscopie) qu'aux propriétés quantiques propres au système (génération d'états comprimés, photons jumeaux). D'autre part, en tant que systèmes non-linéaires, les OPO sont susceptibles de présenter une grande richesse de phénomènes dynamiques temporels et spatio-temporels.

Nous présentons une étude expérimentale, théorique et numérique de différentes instabilités temporelles présentées par les intensités des champs à la sortie de la cavité de notre OPO. Nous caractérisons des oscillations de fréquence de 1 à 300MHz dont nous montrons expérimentalement qu'elles ont pour origine l'interaction entre plusieurs modes transverses. Ces oscillations rapides peuvent être couplées à des oscillations plus lentes d'origine thermique, menant à l'apparition d'instabilités du type oscillations en rafales. Un développement perturbatif multi-échelle permet d'obtenir des solutions analytiques pour les champs une fois les oscillations rapides moyennées. Nous avons d'autre part observé ce qui est à notre connaissance la première observation expérimentale de chaos déterministe dans ce système. Enfin nos travaux expérimentaux et théoriques ont permis d'améliorer notre compréhension de la sélection de modes dans les OPO.

Temporal dynamics of optical parametric oscillators : multimode oscillations, bursting oscillations and chaos

Continuous wave optical parametric oscillators (OPO) are widely accordable sources of coherent light, based on nonlinear interaction which may lead to a great diversity of dynamical regimes. We are interested in their temporal dynamics in an experimental, theoretical and numerical point of view. We characterize oscillations of frequency from 1 up to 300MHz. We show experimentally that they originate from the interaction of several transverse modes. Moreover, those fast oscillations give birth to bursting instabilities when they are coupled to slower ones due to thermal effects. We have observed what is to our knowledge the first experimental observation of deterministic chaos in this system. Finaly, our experimental an theoretical works have improved our understanding of mode selection in OPO.