

LABORATOIRE KASTLER-BROSSEL

UPMC PARIS 6

Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Vincent Josse

Pour obtenir le titre de docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

Réduction du bruit de polarisation et intrication quantique en variables continues avec un nuage d'atomes froids

Soutenue le 16 décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Philippe GRANGIER	Rapporteur
M. Luigi LUGIATO	
Mme Elisabeth GIACOBINO	Directeur de thèse
M. Gerd LEUCHS	
M. Antonio ZELAQUETT KHOURY	Rapporteur
M. Jacques VIGUE	
Mme Claire LHUILLIER	Présidente

Table des matières

Table des matières i

Introduction 1

1. Introduction au bruit quantique 5
A Bruit quantique du champ électromagnétique 5
A.1 Inégalités de Heisenberg 5
A.2 Etat cohérent et limite quantique standard 7
A.3 Etats comprimés 8
A.4 Effet des pertes 8
A.5 Champ multimode temporel 9
A.5.1 Ecriture du champ libre multimode 10
A.5.2 Relations de commutation 11
A.5.3 Densités spectrales de bruit 11
A.5.4 Lien avec les variances 12
B Production d'états comprimés 12
B.1 Réduction de bruit par amplification paramétrique dégénérée . 13
B.2 Réduction de bruit par effet Kerr idéal 14
B.3 Réduction de bruit avec des atomes froids 16
B.3.1 Effet Kerr dû à la saturation d'une transition optique 16
B.3.2 Réduction de bruit par bistabilité optique 17
B.3.3 Réalisation expérimentale 19
B.3.4 Effet d'une polarisation incidente linéaire 22
C Bruit quantique de polarisation 23
C.1 Notations 23
C.2 Représentation d'un état de polarisation classique 23
C.2.1 Ellipse de polarisation 23
C.2.2 Paramètres de Stokes et sphère de Poincaré 24
C.3 Opérateurs de Stokes quantiques 26
C.4 Etat coherent en polarisation 27
C.5 Etat comprimé en polarisation 28
C.5.1 L'état cohérent: un état de référence? 28
C.5.2 Un exemple: champ polarisé linéairement 28

C.5.3 Définition générale 29
C.5.4 Interprétation du bruit de polarisation 29
C.6 Intérêt du bruit de polarisation 32
C.6.1 Formalisme d'interaction matière-rayonnement. . . . 32
C.6.2 Détection directe 33
C.7 Production d'états non classiques en polarisation 34
C.7.1 Méthode indirecte 34
C.7.2 Méthode directe 35

2. Réduction du bruit de polarisation 37
A Dispositif experimental 38
A.1 Le laser Titane:Saphir 38
A.1.1 La cavité laser 38
A.1.2 Les asservissements 40
A.2 Le piège magnéto-optique 42
A.2.1 Principe 42
A.2.2 Génération des faisceaux pièges 43
A.2.3 La diode laser de repompage 44
A.2.4 Caractéristiques du piège magnéto-optique 44
A.3 La Cavité à atomes 46
A.3.1 Les caractéristiques 46
A.3.2 Détection des résonances et asservissement 46
A.3.3 Schéma expérimental 47
B Résonances de la cavité 49
B.1 bascule de polarisation 49
B.2 Interprétation phénoménologique 51
B.3 Dépendance en fonction de l'intensité 55
B.3.1 Paramètres de saturation - Ordres de grandeur . . . 55
B.3.2 Evolution des courbes de résonance 57
B.3.3 Mesure du nombre d'atomes 62
C Réduction du bruit 65
C.1 Détection homodyne 66
C.1.1 Principe 66
C.1.2 Mise en oeuvre expérimentale 68
C.2 Observation de deux modes comprimés 69
C.3 Dépendance en fonction de la fréquence et du désaccord 72
C.4 Dépendance en intensité 74
D Bruit de polarisation 76
D.1 Dispositif expérimental 76
D.1.1 Principe 76
D.1.2 Effet du déphasage dû aux éléments biréfringents . . 78
D.1.3 Réglage de la détection 79

D.1.4 Résultats préliminaires 81
D.2 Détection des paramètres de Stokes 85
D.3 Dépendance en fonction de la fréquence et du désaccord 88
D.4 Autres modes de polarisation 90
E Expérience réalisée en polarisation circulaire 92
F Conclusion 94

3. Amélioration de l'expérience: coupure des faisceaux pièges 97
A Mise en place de la coupure des faisceaux pièges 98
A.1 Coupure des faisceaux pièges 98
A.2 Caractérisation du piège magnéto-optique 99
A.2.1 Détection par fluorescence 99
A.2.2 Dynamique du piège magnéto-optique 99
B Résonances de la cavité à atomes 102
B.1 Modulation de la transmission de la cavité 102
B.2 Détection synchrone des résonances 104
B.3 Bascule de polarisation 106
C Asservissement de la cavité 108
C.1 Principe et première réalisation 108
C.2 Diode laser auxiliaire 110
C.2.1 Montage de la diode laser 110
C.2.2 Asservissement en fréquence 111
C.2.3 Couplage dans la cavité - asservissement d'intensité . 115
C.3 Asservissement de la cavité 116
D Mesure du bruit 119
D.1 Détection synchrone du bruit 119
D.2 Détection de la phase 120
E Réduction du bruit 123
E.1 Amélioration de la réduction de bruit 123
E.2 Dépendance en fonction du désaccord 123
E.3 Expérience en polarisation circulaire 126
F Conclusion 128

4. Etude théorique du système: modèle à quatre niveaux en "X" . . 131
A Présentation du modèle en X 133
A.1 Choix du modèle 133
A.2 Description du modèle 133
A.2.1 Evolution des variables atomiques 135
A.2.2 Evolution des champs en cavité 136
B Approximation du pompage optique 137
B.1 Hypothèse de grand désaccord 137
B.2 Etat stationnaire 139

B.2.1 Effet de "rotation auto-induite" . . . 139
B.2.2 Bascule de polarisation . . . 140
B.2.3 Analogie avec un oscillateur paramétrique optique . . . 143
B.3 Fluctuations quantiques . . . 146
B.3.1 Principe . . . 146
B.3.2 Linéarisation des équations . . . 147
B.3.3 Matrices de susceptibilité et de corrélations atomiques 149
B.3.4 Bruit associé au pompage optique . . . 150
B.3.5 Spectres de bruit . . . 151
C Etat stationnaire complet . . . 153
C.1 Variables atomiques . . . 153
C.2 Bascule de polarisation . . . 154
C.3 Stabilité de la solution de polarisation linéaire . . . 155
C.4 Courbes de résonance - tristabilité . . . 156
C.5 Bistabilité optique et bascule de polarisation . . . 158
D Fluctuations quantiques dans la limite Kerr . . . 162
D.1 Evolution des champs . . . 162
D.2 Fluctuations des populations excitées . . . 164
D.3 Effet Kerr sur le champ moyen . . . 165
D.4 Fluctuations du mode vide . . . 165
D.5 Cas Limites . . . 166
D.5.1 Limite basse fréquence de bruit . . . 166
D.5.2 Limite haute fréquence . . . 167
D.6 Fluctuations des composantes circulaires à haute fréquence . . . 169
D.7 Spectres de bruit . . . 170
D.7.1 Matrices de susceptibilité et de corrélations atomiques 170
D.7.2 Comparaison avec un modèle complet . . . 171
D.7.3 Comparaison théorie-expérience . . . 173
D.7.4 Optimisation de la réduction de bruit . . . 174
D.7.5 Phases des quadratures comprimées . . . 177
D.7.6 Autres modes de polarisation . . . 179
E Conclusion . . . 181

5. Génération d'états non-séparables . . . 183
A Corrélations quantiques en variables continues . . . 183
A.1 Corrélations EPR . . . 183
A.1.1 Le paradoxe EPR . . . 183
A.1.2 Critère de corrélations EPR en variables continues . . . 184
A.2 Critère de non-séparabilité . . . 186
A.3 Production d'états d'intriqués . . . 187
A.4 Corrélations entre deux modes de polarisation orthogonale . . . 189
B Intrication et réduction de bruit pour un système quelconque . . . 191

B.1 Généralités sur le critère de non-séparabilité . . . 191
B.1.1 Formulation du critère . . . 191
B.1.2 Un exemple: l'oscillateur paramétrique optique non dégénéré . . . 193
B.2 Recherche de l'intrication maximale . . . 194
B.2.1 Existence d'une base de polarisation "décorrélée" . . . 195
B.2.2 Intrication maximale . . . 196
B.2.3 Interprétation . . . 197
B.3 Lien avec la réduction de bruit . . . 199
B.3.1 Réduction de bruit pour deux modes . . . 199
B.3.2 Réduction de bruit pour un seul mode . . . 201
B.4 Résumé des propriétés dans la sphère de Poincaré . . . 202
C Application à l'expérience . . . 206
C.1 Dispositif expérimental . . . 207
C.1.1 Principe . . . 207
C.1.2 mise en oeuvre . . . 209
C.2 Générations d'états intriqués en quadrature . . . 211
C.2.1 Base de polarisation décorrélée . . . 211
C.2.2 Limite haute fréquence . . . 213
C.2.3 Intrication et réduction de bruit dans la limite haute fréquence . . . 216
C.2.4 Dépendance en fréquence . . . 220
C.3 Polarisation circulaire . . . 223
D Intrication en polarisation . . . 228
D.1 Définition et principe . . . 228
D.2 Mise en oeuvre . . . 230
D.2.1 Détection des paramètres de Stokes . . . 231
D.2.2 Vérification de la détection . . . 233
D.2.3 Asservissement de la phase . . . 235
D.3 Résultats expérimentaux . . . 235
E Conclusion . . . 239

Conclusion . . . 241

Annexe . . . 243

Annexe . . . 245
A Relations de passage . . . 245
A.1 Relations de passage entre différentes bases de polarisation . . . 245
A.2 Relations de passage à la traversée d'une lame d'onde . . . 246
A.2.1 Lame demi-onde . . . 246
A.2.2 Lame quart d'onde . . . 247

B Compléments à l'étude du bruit quantique 248
B.1 Coefficients de diffusion 248
B.1.1 Expressions générales 248
B.1.2 Approximation du pompage optique 248
B.2 Susceptibilité et matrice de corrélations atomiques 250
B.2.1 Limite basse fréquence: effet de "rotation auto-induite" 250
B.2.2 Limite haute fréquence : effet Kerr 250
C Critère d'inséparabilité 251
C.1 Rappel de la démonstration 251
C.2 Quadratures du champ 253
C.3 Paramètres de Stokes 253
D Existence d'une base décorrélée 253
D.1 Partie imaginaire 254
D.2 Partie réelle 255
D.3 Cas symétrique 255

Bibliographie 257

Introduction

La mécanique quantique établit l'existence de fluctuations fondamentales sur les quadratures du champ électromagnétique. Cette propriété est la conséquence des incertitudes associées à la détermination simultanée de deux quadratures orthogonales, qui obéissent à une inégalité de Heisenberg, analogue à celle existant sur la mesure de la position $\hat{x}$ et de l'impulsion $\hat{p}$ d'une particule: $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} \geq \hbar/2$. Cette inégalité de Heisenberg définit une "limite quantique standard" pour les fluctuations du champ.

Les progrès techniques ayant permis de s'affranchir progressivement des sources de bruit classiques, ces fluctuations quantiques intrinsèques se sont alors imposées comme une limite à la précision de certaines mesures ultra-sensibles. Toutefois cette limite n'est pas infranchissable puisqu'il est possible de produire des états pour lesquels les fluctuations d'une quadrature sont inférieures à la limite quantique standard, ce au prix d'un excès de bruit sur la quadrature conjuguée. De tels états sont dits comprimés.

La production de ces états comprimés a tout d'abord été motivée par la possibilité d'améliorer la sensibilité des expériences. Puis l'intérêt qu'ils ont suscité s'est orienté récemment vers leurs applications potentielles dans le domaine naissant de l'information quantique. L'idée principale consiste alors à transposer les protocoles de calcul quantique, de cryptographie quantique ou bien de téléportation quantique, initialement pensés pour des systèmes à variables discrètes, au domaine des variables continues, que sont les quadratures du champ électromagnétique. Par exemple, deux états comprimés mélangés sur une lame séparatrice permettent de produire deux faisceaux fortement corrélés, appelés faisceaux EPR: de tels états, intriqués au sens de la mécanique quantique, ont permis de réussir l'expérience de téléportation quantique dans le domaine des variables continues [Vaidman94, Braunstein98], réalisée pour la première fois en 1998 [Furusawa98].

Cette expérience a ouvert la voie au domaine de l'information quantique en variables continues. Dans ce cadre, l'étude des fluctuations quantiques de polarisation d'un faisceau lumineux s'est particulièrement développée [Chirkin93, Korolkova02a]. L'attrait grandissant pour ces fluctuations de polarisation s'explique notamment par les résultats prometteurs obtenus à l'université de Aarhus dans l'équipe du professeur Polzik. En effet, cette équipe a montré qu'il était possible de transférer une partie des fluctuations non classiques de la polarisation du champ aux fluctuations de variables atomiques [Hald99]. La possibilité de transfert réciproque de fluctuations entre la

polarisation et le moment angulaire collectif d'une vapeur atomique constitue une première étape vers la réalisation, à terme, de "mémoires quantiques" [Schori02]. De plus, ces travaux permettent d'envisager prochainement la réalisation d'une expérience de téléportation quantique de variables atomiques [Kuzmich00a].

Par ailleurs, les fluctuations de la polarisation ont l'avantage de pouvoir être mesurées directement pour des faisceaux suffisamment intenses. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de recourir à l'utilisation d'un oscillateur local. Cette propriété constitue, quant à elle, une nette simplification par rapport aux protocoles utilisant les fluctuations des quadratures du champ comme vecteur de l'information quantique [Korolkova02a].

Ces deux raisons ont, notamment, motivé l'étude et la réalisation expérimentale de tels états de polarisation non classiques qui peuvent être produits de différentes façons. Un premier moyen consiste à combiner sur un cube polariseur un faisceau vide comprimé, obtenu, par exemple, à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique dégénéré fonctionnant sous le seuil, avec un faisceau intense polarisé orthogonalement [Grangier87, Hald99]. Ces états non classiques en polarisation, peuvent également être obtenus en combinant deux faisceaux comprimés et indépendants sur un cube polariseur. Ces expériences ont été réalisées à partir de faisceaux comprimés à la sortie d'un amplificateur paramétrique optique dégénérés par Bowen *et al.* [Bowen02a] ou à partir de faisceaux comprimés en utilisant l'effet Kerr dans des fibres optiques [Heersink03].

Au sein du groupe d'Optique Quantique du Laboratoire Kastler-Brossel, notre équipe s'intéresse à la production d'états comprimés du champ lors de l'interaction de la lumière avec un nuage d'atomes froids de césium placé à l'intérieur d'une cavité optique. Lorsque la polarisation incidente sur la cavité est circulaire, les phénomènes de pompage optique conduisent le milieu atomique à se comporter comme un ensemble d'atomes à deux niveaux. La non-linéarité associée à la saturation de la transition optique est alors susceptible de modifier les fluctuations du champ incident [Hilico92a]. Cette méthode a permis d'observer une réduction de bruit d'environ 40% sur un seul mode du champ [Lambrecht96a].

Dans le contexte de l'étude des fluctuations de polarisation, nous avons changé la configuration de l'expérience: la polarisation incidente sur la cavité est maintenant linéaire. Ce changement, en apparence mineur, modifie en fait totalement les propriétés physiques du système. En effet, nous avons observé dans ces conditions une réduction de bruit sur deux modes orthogonaux du champ: le champ moyen et le mode vide orthogonal. Un état non classique de polarisation est alors produit directement à la sortie de la cavité. Par ailleurs, ce dispositif génère des états intriqués en quadratures.

Lors de ce travail de thèse nous avons expliqué ces phénomènes, amélioré la réduction de bruit et finalement identifié les corrélations quantiques produites par le

système.

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à l'introduction des propriétés du bruit quantique dans le domaine des variables continues. Nous détaillerons également les caractéristiques de la réduction de bruit avec un milieu d'atomes froids puis nous préciserons la notion d'états comprimés en polarisation, définis à l'aide des opérateurs de Stokes quantiques [Chirkin93].

Dans un second chapitre, nous présenterons les premiers résultats que nous avons obtenus. Tout d'abord, nous avons observé la modification des courbes de résonance de la cavité: lorsque que l'on balaie sa longueur, il existe un seuil à partir duquel la polarisation intracavité, initialement linéaire, devient circulaire. Nous détaillerons ainsi les propriétés de ce basculement de la polarisation, observé pour la première fois sur une vapeur de sodium en 1982 [Cecchi82]. La cavité étant asservie dans le domaine où la polarisation reste linéaire, nous avons observé et étudié la réduction de bruit sur deux modes de polarisation orthogonale. Enfin, nous présentons une méthode originale de mesure de la "phase" de la quadrature comprimée du mode vide orthogonal, ce qui revient à déterminer les fluctuations quantiques des paramètres de Stokes.

Afin d'améliorer la réduction de bruit sur ces deux modes du champ, nous avons changé la configuration expérimentale. Au lieu du piégeage continu utilisé jusqu'alors, nous avons mis en place un cycle de coupure des faisceaux pièges. Ceux-ci sont éteints pendant un temps court devant le temps de fuite des atomes de manière à ce que le nombre d'atomes interagissant avec la lumière soit quasiment stationnaire. Nous avons alors utilisé la référence du cycle de coupure des faisceaux pièges pour effectuer une détection synchrone du bruit quantique. La description de cette nouvelle méthode et les résultats obtenus font l'objet du troisième chapitre.

Le quatrième chapitre présente les résultats d'un modèle à quatre niveaux en "X", développé afin d'expliquer les phénomènes physiques que nous avons observés. La motivation de cette étude s'est trouvée renforcée par les travaux théoriques de Matsko *et al.* [Matsko02a] qui prévoient l'apparition d'une réduction de bruit sur le mode vide orthogonal d'un faisceau polarisé linéairement, lors de la traversée d'un milieu atomique. Une réduction de bruit sur ce mode vide a effectivement été observée très récemment par Ries *et al.* [Ries03] en utilisant la propagation du faisceau dans une cellule de rubidium. C'est pourquoi il nous a semblé, dans un premier temps, que cet effet de dit de "rotation auto-induite", ou "self rotation" en anglais, était à l'origine de la réduction de bruit observée dans notre expérience. Cependant, nous montrerons qu'il constitue, du fait des processus de pompage optique, une source d'excès de bruit importante pour notre système. La réduction de bruit est alors attribuée à l'effet Kerr croisé dû à la saturation de la transition optique $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$.

Les mécanismes physiques intervenants dans notre système étant bien compris, nous consacrerons le dernier chapitre à l'étude des corrélations quantiques. Afin

de les caractériser, nous utiliserons le critère d'inséparabilité développé par Duan *et al.* [Duan00a] et Simon [Simon00] pour des variables continues. En particulier, nous développerons une méthode permettant de déterminer quels sont les modes les plus intriqués pour un système quelconque. En applicant cette démarche à notre expérience, nous démontrerons que les modes polarisés à 45° par rapport aux directions horizontale et verticale sont intriqués à la sortie de la cavité. Finalement nous utiliserons cette intrication en quadrature pour produire des états intriqués en polarisation.

Chapitre 1

Introduction au bruit quantique

Il est bien connu que le champ électromagnétique possède des fluctuations quantiques fondamentales. Nous rappellerons dans ce chapitre les notions essentielles et nous poserons les notations qui serviront dans la suite du manuscrit.

Nous discuterons, en particulier, comment il est possible de réduire ces fluctuations quantiques en utilisant l'interaction entre le champ électromagnétique et un ensemble d'atomes froids placé à l'intérieur d'une cavité optique. Une telle réduction de bruit sur un mode du champ a été observée en 1995 lors du travail de thèse d'Astrid Lambrecht [Lambrecht96a]. Récemment, des modifications de la configuration expérimentale nous ont permis d'obtenir une réduction de bruit sur deux modes du champ à la sortie de la cavité. Cette observation nous a conduit à étudier, notamment, les fluctuations de la polarisation du faisceau sortant de la cavité.

Ainsi nous préciserons la notion de fluctuations quantiques pour la polarisation d'un faisceau lumineux en introduisant le formalisme des opérateurs de Stokes, puis nous discuterons la notion d'états comprimés en polarisation.

A Bruit quantique du champ électromagnétique

A.1 Inégalités de Heisenberg

Considérons dans un premier temps un mode du champ électromagnétique de fréquence ω, quantifié dans une boite de volume V. En un point fixe de l'espace, le champ électrique s'écrit à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation du photon:

$$\hat{E}(t) = E_0(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{+i\omega t}) = E_0\left(\hat{X}\cos(\omega t) + \hat{Y}\sin(\omega t)\right) \tag{1-1}$$

où nous avons introduit les quadratures $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ du champ définies par:

$$\hat{X} = \hat{a}^\dagger + \hat{a} \quad \text{et} \quad \hat{Y} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{1-2}$$

Le champ E_0 correspond au champ électrique d'un photon d'énergie $\hbar\omega$:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \tag{1-3}$$

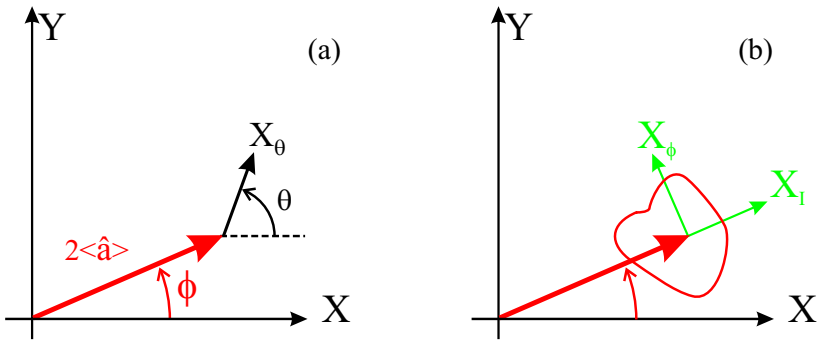


Fig. 1.1 – Figure (a): représentation d'un état classique dans le repère de Fresnel. Figure (b): représentation d'un état quantique. Les quadratures $\hat{X}_I$ et $\hat{X}_\phi$ sont les quadratures d'amplitude et de phase du champ.

Dans le cadre de la mécanique classique, ces quadratures sont des nombres réels et correspondent aux coordonnées de l'amplitude complexe du champ (normalisée à E_0) dans le repère de Fresnel (voir partie (a) de la figure 1.1). En mécanique quantique, ces quadratures sont des variables conjuguées. En utilisant la relation de commutation des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ ($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$), nous obtenons en effet:

$$\left[\hat{X}, \hat{Y}\right] = 2i \tag{1-4}$$

Par conséquent, ces quadratures ne peuvent être mesurées simultanément avec une précision infinie. Les dispersions des résultats, caractérisées par les variances $\Delta^2\hat{X} \equiv \langle(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)^2\rangle$ et $\Delta^2\hat{Y} \equiv \langle(\hat{Y} - \langle\hat{Y}\rangle)^2\rangle$ obéissent alors à l'inégalité de Heisenberg:

$$\Delta^2\hat{X}\Delta^2\hat{Y} \geq 1 \tag{1-5}$$

C'est pourquoi nous représentons l'état quantique d'un champ dans le repère de Fresnel en associant au vecteur donnant la valeur moyenne du champ, des fluctuations intrinsèques (voir partie (b) de la figure 1.1).

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que les quadratures $\hat{X}$ et $\hat{Y}$. Toutefois, la définition des opérateurs de quadratures est arbitraire: elle correspond à un choix de l'origine des phases dans le plan de Fresnel. Par la suite, nous serons amenés à étudier les propriétés de bruit pour un couple de quadratures orthogonales quelconque $\hat{X}(\theta)$ et $\hat{Y}(\theta)$, tournées de l'angle θ dans le repère de Fresnel (voir figure 1.1):

$$\hat{X}(\theta) = \hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a}e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad \hat{Y}(\theta) = i(\hat{a}^\dagger e^{i\theta} - \hat{a}e^{-i\theta}) \tag{1-6}$$

Ces quadratures vérifient la même relation de commutation que les quadratures $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ et leurs variances doivent donc satisfaire à l'inégalité de Heisenberg 1-5.

Parmi tous les choix de quadratures possibles, il existe un couple de quadrature privilégié correspondant à $\theta = \phi$, où ϕ est la phase du champ moyen: $\langle\hat{a}\rangle = |\langle\hat{a}\rangle|e^{i\phi}$. En effet, les fluctuations des quadratures $\hat{X}(\phi)$ et $\hat{Y}(\phi)$, notées $\hat{X}_I$ et $\hat{X}_\phi$, sont

respectivement proportionnelles aux fluctuations d'intensité et de phase du champ. Les fluctuations de phase n'ont de sens ici que pour des champs suffisamment intenses [Reynaud90]. Dans ces conditions, les fluctuations du champ $\delta\hat{a}$ sont très faibles devant la valeur moyenne $\langle\hat{a}\rangle$. En négligeant les termes du second ordre en $\delta\hat{a}$, les fluctuations du nombre de photons et de la phase s'écrivent:

$$\delta\hat{N} = \delta(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \simeq |\langle a\rangle|\delta\hat{X}_I \tag{1-7}$$

$$\delta\phi \simeq \frac{\delta\hat{X}_\phi}{2|\langle a\rangle|} \tag{1-8}$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité de Heisenberg dite "phase-nombre", valable pour des champs intenses:

$$\Delta\hat{N}\Delta\phi \geq \frac{1}{2} \tag{1-9}$$

Par exemple, un état de Fock a, par définition, un nombre de photons parfaitement déterminé, mais en contrepartie une phase complètement indéterminée.

A.2 Etat cohérent et limite quantique standard

L'inégalité de Heisenberg 1-5 est valable quel que soit l'état du champ, et en particulier pour l'état vide. Dans ce cas, il n'existe pas de phase privilégiée et le bruit, identique sur toutes les quadratures, est égal à la limite permise:

$$\Delta^2\hat{X}_{vide}(\theta) = 1 \quad \text{quel que soit } \theta \tag{1-10}$$

Le vide définit ainsi une référence naturelle pour les fluctuations, que l'on appelle la limite quantique standard.

L'état du champ le plus proche d'un champ classique est obtenu en superposant à ce champ classique les fluctuations du vide, comme nous l'avons illustré sur la figure 1.2. Ces états sont appelés semi-classiques et sont produits expérimentalement par un laser très au dessus du seuil. Ils correspondent, en fait, aux états cohérents définis comme les états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$.

Avant d'aller plus loin, on peut donner une interprétation simple de cette limite quantique standard en terme de *bruit de grenaille* (ou *"shot noise"* en anglais) des photons. En effet, si on mesure le nombre de photons à l'aide d'un détecteur, la dispersion des résultats pour un champ cohérent suit une loi de Poisson:

$$\Delta\hat{N} = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle} \quad \text{d'après la relation 1-7} \tag{1-11}$$

Cette statistique de bruit reflète la nature granulaire des photons, dont les temps d'arrivée sur le détecteur sont aléatoires.

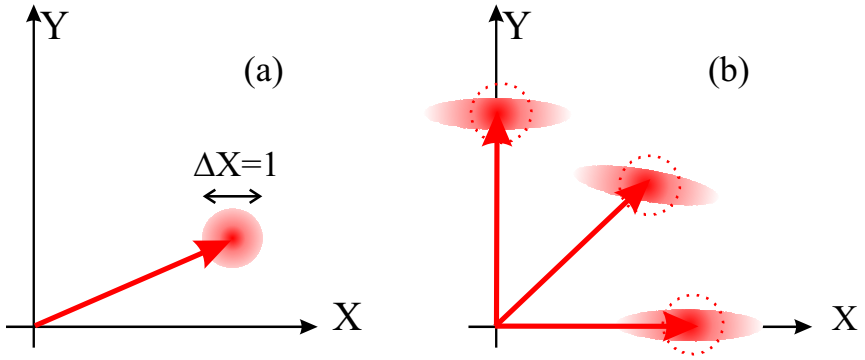


Fig. 1.2 – Représentation de différents états du champ dans le repère de Fresnel. Figure (a): état cohérent. Figure (b): états comprimés pour différentes quadratures.

A.3 Etats comprimés

Si les fluctuations du vide constituent une référence pour les fluctuations quantiques, rien n'empêche cependant d'obtenir des états pour lesquels les fluctuations d'une quadrature, $\hat{X}(\theta_{sq})$, sont réduites sous la limite quantique standard. L'inégalité de Heisenberg 1-5 porte en effet sur le produit des incertitudes. Celle-ci est alors satisfaite pourvu que fluctuations augmentent en conséquence sur la quadrature orthogonale $\hat{Y}(\theta_{sq})$:

$$\Delta^2\hat{X}_{comprimé}(\theta_{sq}) < 1 \qquad \text{et} \qquad \Delta^2\hat{Y}_{anti-comprimé}(\theta_{sq}) > 1 \tag{1-12}$$

Sur la figure 1.2, nous avons représenté différents états comprimés dans le repère de Fresnel, la compression de bruit apparaissant pour une quadrature quelconque, la quadrature d'intensité ou de phase.

Les états comprimés ont suscité un intérêt considérable en raison de leurs applications potentielles. A l'origine, les principales motivations concernaient l'amélioration des mesures optiques ultrasensibles, comme par exemple la détection des ondes gravitationnelles. Plus récemment l'intérêt s'est porté vers leurs applications éventuelles dans le domaine des communications quantiques [Bachor98a]. En particulier, ils peuvent être combinés pour générer des états fortements corrélés [Furusawa98,Ralph98,Pereira00,Silberhorn01], appelés états EPR du nom des auteurs du paradoxe Einstein, Podolsky et Rosen. Nous étudierons en détail le lien entre ces corrélations quantiques et les états comprimés au chapitre 5.

A.4 Effet des pertes

Les états comprimés sont en fait très fragiles car ils sont très sensibles aux pertes. Afin d'évaluer cet effet, on décrit les pertes optiques linéaires comme le passage du faisceau au travers d'une lame partiellement réfléchissante, de coefficient de réflexion égal aux pertes en intensité.

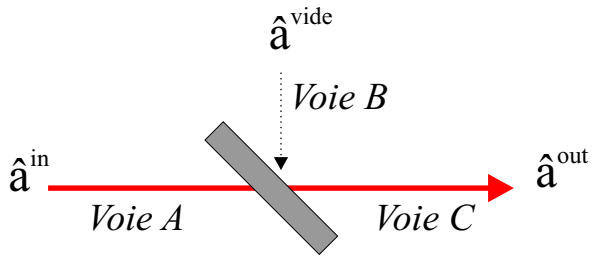


Fig. 1.3 – Modélisation des pertes optiques linéaires par une lame séparatrice. Les fluctuations du vide sont mélangées aux fluctuations du champ incident, ce qui a pour effet de ramener ses fluctuations à la limite quantique standard.

Considérons la situation représentée sur la figure 1.3: la lame mélange les fluctuations du champ $\hat{a}^{in}$ entrant par la voie A avec les fluctuations du vide entrant par la voie B. L'opérateur d'annihilation $\hat{a}^{out}$ correspondant au champ sortant sur la voie C s'écrit en fonction des opérateurs $\hat{a}^{in}$ et $\hat{a}^{vide}$:

$$\hat{a}^{out} \;=\; t\,\hat{a}^{in} \;+\; r\,\hat{a}^{vide} \tag{1-13}$$

où r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la lame. Le champ $\hat{a}^{vide}$ étant dans l'état vide, le bruit du champ sortant sur une quadrature quelconque vaut:

$$\Delta^2 X^{out}(\theta) = T\,\Delta^2 X^{in}(\theta) \;+\; (1-T) \tag{1-14}$$

Si les fluctuations du champ entrant sont égales au bruit quantique standard, les fluctuations du champ sortant le sont également. Cependant, si le champ entrant est dans un état comprimé, les pertes ramènent les fluctuations à la limite quantique standard et la compression de bruit diminue. Notons que ce raisonnement s'applique quelle que soit la quadrature de bruit considérée et quel que soit son niveau de bruit.

C'est pourquoi il faut prêter une attention particulière aux pertes afin de pouvoir produire de tels états comprimés. Notamment, il est important de disposer de photodétecteurs avec un rendement quantique proche de 1 pour mesurer une éventuelle réduction de bruit.

A.5 Champ multimode temporel

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent aux fluctuations d'un champ monomode. De fait, cette description n'est pas adaptée à la réalité de l'expérience. Par exemple, le champ sortant d'un laser a une valeur moyenne non nulle dans une étroite bande de fréquence, mais aussi des fluctuations à toutes les autres fréquences. Pour caractériser l'état d'un champ on devrait donc, *a priori*, décrire le comportement des modes à toutes les fréquences. En pratique nous considérerons des champs quasi-monomodes avec un mode de fréquence centraleω_L, entouré de modes latéraux situés dans une bande de fréquence $\Delta\omega$ très inférieure à ω_L.

A.5.1 Ecriture du champ libre multimode

En toute rigueur, il faut également tenir compte de la structure spatiale transverse du champ que l'on cherche à décrire. Afin de simplifier le problème, on modélise le faisceau par une onde d'extension finie, de section $\mathcal{S}$, dont on néglige la variation d'amplitude dans le plan transverse. Les limites de cette approximation ont été précisées par A. Lambrecht *et al.* [Lambrecht96b], dans le cas où l'on étudie l'interaction de la lumière avec un ensemble d'atomes à deux niveaux placé en cavité.

Le champ électrique s'écrit alors comme une somme sur les différents modes latéraux [Fabre96]:

$$\hat{E}(t) = \int_{\omega_L-\Delta\omega/2}^{\omega_L+\Delta\omega/2} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 \mathcal{S} c}} (\hat{a}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{+i\omega t}) \tag{1-15}$$

Comme $\Delta\omega \ll \omega_l$, nous obtenons en posant $\Omega = \omega - \omega_L$:

$$\hat{E}(t) \simeq \mathcal{E}_0 \left(\int_{\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \frac{d\Omega}{2\pi}\, \hat{a}_{\omega_L+\Omega}\, e^{-i\Omega t} \right) e^{-i\omega_L t} \quad + \quad \text{c.c.} \tag{1-16}$$

où $\mathcal{E}_0$ vaut:

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 \mathcal{S} c}} \tag{1-17}$$

La relation 1-16 permet alors de définir l'opérateur $\hat{A}(t)$:

$$\hat{A}(t) = \int_{\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \frac{d\Omega}{2\pi}\, \hat{a}_{\omega_L+\Omega}\, e^{-i\Omega t} \tag{1-18}$$

Cet opérateur est l'enveloppe lentement variable du champ électrique autour de la fréquence optique ω_L et le champ se met finalement sous la forme:

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{A}(t) e^{-i\omega_L t} \; + \; \hat{A}^\dagger(t) e^{+i\omega_L t} \right) \tag{1-19}$$

Notons que le choix de la constante $\mathcal{E}_0$ fixe l'unité des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{A}^\dagger$ telle que $\langle \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t) \rangle$ corresponde au flux moyen de photons à travers la section $\mathcal{S}$.

De façon équivalente au cas monomode détaillé au début de ce chapitre, le champ électrique s'exprime en fonction des quadratures $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ définies maintenant à partir des opérateurs enveloppes:

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{X}(t) \cos(\omega_L t) \; + \; \hat{Y}(t) \sin(\omega_L t) \right) \tag{1-20}$$

avec

$$\hat{X}(t) = \hat{A}^\dagger(t) + \hat{A}(t) \quad \text{et} \quad \hat{Y}(t) = i \left(\hat{A}^\dagger(t) - \hat{A}(t) \right) \tag{1-21}$$

Il existe toujours des fluctuations quantiques fondamentales sur ces quadratures dues aux fluctuations du vide des modes latéraux contenus dans la bande de fréquence $\Delta\omega$. Afin de caractériser leurs manifestations, il nous faut déterminer les relations de commutation entre ces quadratures.

A.5.2 Relations de commutation

Par la suite nous étudierons le bruit pour des fréquences ω_m très inférieures aux fréquences optiques. Il est donc possible de choisir la bande d'étude $\Delta\omega$ telle que:

$$\omega_m \ll \Delta\omega \ll \omega_L \tag{1-22}$$

Dans cette limite, on montre que les champs $\hat{A}(t)$ et $\hat{A}(t')$ vérifient la relation de commutation [Fabre96]:

$$\left[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t')\right] \;=\; \delta(t-t') \qquad \text{avec } \; t-t' \gg \frac{1}{\Delta\omega} \tag{1-23}$$

Dans ce cas, la relation de commutation entre les quadratures $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ s'écrit immédiatement:

$$\left[\hat{X}(t), \hat{Y}(t')\right] \;= 2i\;\delta(t-t') \tag{1-24}$$

A.5.3 Densités spectrales de bruit

Nous verrons au paragraphe C.1 du chapitre 2 que nous pouvons mesurer le bruit du champ électromagnétique à l'aide d'une détection homodyne. Cette technique nous permet de déterminer les densités spectrales de bruit d'une quadrature quelconque, tournée de l'angle θ dans le repère de Fresnel:

$$\hat{X}(\theta) = \hat{A}^\dagger(t)\; e^{i\theta} + \hat{A}(t)\; e^{-i\theta} \tag{1-25}$$

Pour une fonction stationnaire quelconque $f(t)$, de transformée de Fourier (TF) $f(\omega)$, la densité spectrale de bruit $S_f(\omega)$ est définie par la relation:

$$\langle f(\omega) f(-\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega-\omega')\; S_f(\omega) \tag{1-26}$$

où la TF de la fonction f vaut:

$$f(\omega) = \int dt f(t) e^{i\omega t} \tag{1-27}$$

Nous déduisons de la relation 1-24, le commutateur des opérateurs de quadratures $\hat{X}(\omega)$ et $\hat{Y}(\omega)$, obtenus par transformée de Fourier:

$$\left[\hat{X}(\omega)\;,\; \hat{Y}(-\omega')\right] \;= 4i\pi\;\delta(\omega-\omega') \tag{1-28}$$

A partir cette relation, on généralise la relation de Heisenberg 1-5 valable dans le cas monomode, aux densités spectrales de bruit des quadratures X et Y [Fabre96]:

$$S_X(\omega)\; S_Y(\omega) \geq 1 \tag{1-29}$$

Cette inégalité nous permet de définir une limite quantique standard pour les densités spectrales de bruit. Ainsi, on appellera état comprimé à la fréquenceω, un champ pour lequel la densité spectrale d'une quadrature vérifie:

$$S_{X(\theta_{sq})}(\omega) < 1 \tag{1-30}$$

A.5.4 Lien avec les variances

En pratique, nous mesurons le bruit à l'aide d'un analyseur de spectre fonctionnant à une fréquence d'analyse donnée$\omega_m/2\pi$ et une résolution en fréquence δf petite devant l'échelle de variation des densités spectrales de bruit. Le signal de sortie de l'analyseur de spectre est alors proportionnel à la variance de la quantité$X_F(\theta)$ obtenu à partir de $X(\theta)$ après filtrage par un filtre en créneau F, de bande passante en fréquence δf et centré sur la pulsation ω_m. Cette variance est proportionnelle à la densité spectrale de bruit:

$$\Delta^2 X_F(\theta) = 2\,\delta f\; S_{X(\theta)}(\omega_m) \tag{1-31}$$

A partir de la relation 1-29, nous obtenons alors une inégalité de Heisenberg sur les variances mesurées:

$$\Delta^2 X_F \Delta^2 Y_F \geq 4\,(\delta f)^2 \tag{1-32}$$

On retrouve ainsi le résultat bien connu: la limite quantique standard (ou "shot noise" pour le bruit de photon) est proportionnelle à la bande passante de la mesure. Lorsque celle-ci diminue, le temps d'intégration des fluctuations augmente et le bruit diminue.

Par la suite, on utilisera cette relation entre les variances et les densités spectrales de bruit pour mener les calculs dans le cadre d'un champ monomode. Il sera alors implicite que les variances calculées correspondent à une fréquence d'analyse et une bande passante donnée. Une formulation mathématiquement rigoureuse de cette analogie est donnée dans la référence [Treps01].

B Production d'états comprimés

Depuis bientôt une vingtaine d'années, de nombreuses expériences permettant d'obtenir des états comprimés du champ ont été réalisées. On peut classer ces méthodes en plusieurs familles:

1. Méthode utilisant le principe de la pompe régulière [Golubev84]. La statistique des photons émis par un laser très au dessus du seuil reflète, en effet, la statistique des processus de pompage. Lorsque celle-ci est régulée, il est possible d'obtenir une statistique de photon sub-poissonièn ne. Ce mécanisme a

été mis en oeuvre dans les lasers à semiconducteurs alimentés en courant électrique régulier et a conduit à des réductions de bruit d'intensité allant jusqu'à 60% [Wang93].

2. Méthodes utilisant les processus d'interaction non linéaires de type $\chi^{(2)}$.
3. Méthodes utilisant les processus d'interaction non linéaires de type $\chi^{(3)}$.

Les deux dernières méthodes permettent de produire des états comprimés en brisant la symétrie entre les quadratures du champ. Afin d'illustrer ces phénomènes, nous allons présenter brièvement le principe de génération d'états comprimés utilisant le processus d'amplification paramétrique dégénéré lors de la traversée d'un milieu présentant une linéarité de type $\chi^{(2)}$.

Ensuite nous verrons comment un milieu de type $\chi^{(3)}$ est également susceptible de réduire les fluctuations quantiques. De fait, la première réalisation d'états comprimés a été obtenue par mélange à quatre ondes dans un faisceau d'atomes de sodium en 1985 [Slusher85]. Nous nous consacrerons ici uniquement à l'étude de la réduction du bruit par effet Kerr afin d'introduire les motivations initiales de l'expérience menée dans le groupe.

B.1 Réduction de bruit par amplification paramétrique dégénérée

Considérons un milieu de type $\chi^{(2)}$ dans une configuration de simple passage, sans cavité. Une onde incidente de fréquence ω_P est susceptible de produire deux ondes, signal et complémentaire, de fréquence ω_S et ω_C. Dans le cas dégénéré, ces deux ondes correspondent à un même mode du champ noté $\hat{A}_S$. Classiquement, l'amplification paramétrique du champ $\alpha_S = \langle \hat{A}_S \rangle$ est décrite par l'équation:

$$\frac{\partial \alpha_S}{\partial z} = -\chi^{(2)} \alpha_P \alpha_S^* \tag{1-33}$$

où α_P est le champ pompe. La forme de cette équation montre que le champ α_S peut être amplifié ou atténué suivant sa phase par rapport au champ pompe. Ce qui signifie que l'amplification paramétrique brise la symétrie entre les différentes quadratures: certaines sont amplifiées et d'autres déamplifiées. Il en est de même des fluctuations quantiques qui sont déformées par le processus. Par exemple, si la phase de la pompe est choisie telle que α_P soit un réel positif, la quadrature $\hat{X}_S$ est déamplifiée tandis que la quadrature $\hat{Y}_S$ est amplifiée:

$$\frac{\partial \hat{X}_S}{\partial z} = -\chi^{(2)} \alpha_P \hat{X}_S \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \hat{Y}_S}{\partial z} = +\chi^{(2)} \alpha_P \hat{Y}_S \tag{1-34}$$

Si le champ incident $\hat{A}_S^{in}$ est dans un état cohérent, le champ sortant $\hat{A}_S^{out}$ est comprimé suivant la quadrature $\hat{X}_S$. Cette situation est illustrée sur la figure 1.4, où l'on

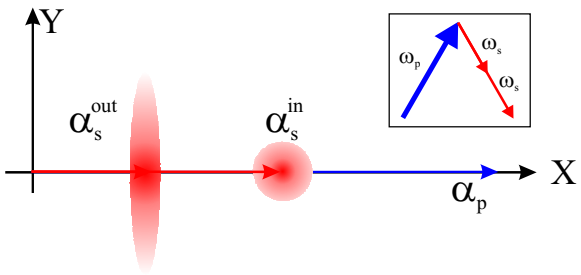


Fig. 1.4 – Réduction de bruit par amplification paramétrique dégénérée dans le cas où le champ signal incident α_S est en phase par rapport au champ pompe α_P. Le signal est alors déamplifié et ses fluctuations sont comprimées en intensité.

a représenté le cas où les champs moyens α_S et α_P sont en phase: le champ sortant est alors comprimé en intensité.

En pratique, on place le milieu non linéaire à l'intérieur d'une cavité optique pour exalter l'interaction. Un tel dispositif est appelé Oscillateur Paramétrique Optique (OPO). Il existe alors un seuil d'oscillation pour le champ $\hat{a}_S$ initialement de valeur moyenne nulle. En dessous de ce seuil, le champ émis est du type vide comprimé [Wu87]. La réduction de bruit obtenue par un tel dispositif est actuellement de l'ordre de 80% [Lam99].

B.2 Réduction de bruit par effet Kerr idéal

Un milieu Kerr est un milieu dont l'indice de réfraction dépend de l'intensité $I = \mathcal{E}_0^2 |\langle \hat{A} \rangle|^2$ du faisceau:

$$n \;=\; n_0 \;-\; n_2\, I \tag{1-35}$$

Le signe du coefficient n_2 dépend du milieu. Par exemple, nous verrons qu'il est positif si cet effet est dû à la saturation d'une transition optique.

Considérons un champ incident $\hat{A}^{in}$ dans un état cohérent. Ce champ possède des fluctuations d'amplitude et de phase qui sont proportionnelles aux fluctuations des quadratures $\delta\hat{X}_I^{in}$ et $\delta\hat{X}_\phi^{in}$. Lors de la traversée du milieu, les fluctuations d'intensité vont moduler l'indice du milieu, qui, en retour, va moduler la phase du champ transmis $\hat{A}^{out}$. Pour un milieu de longueur L et une longueur d'onde λ, la phase du champ sortant s'écrit:

$$\phi^{out} \;=\; \phi^{in} \;+\; \phi_0 \;-\; \phi_{NL} \quad \text{avec:} \quad \phi_O = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} \;\;,\;\; \phi_{NL} = \frac{2\pi n_2 L}{\lambda}\, I \tag{1-36}$$

Comme un milieu Kerr n'a aucun effet sur les fluctuations d'amplitude, les fluctuations du champ sortant sont reliées aux fluctuations entrantes de la façon suivante:

$$\delta\hat{X}_I^{out} = \delta\hat{X}_I^{in} \qquad \text{et} \qquad \delta\hat{X}_\phi^{out} = \delta\hat{X}_\phi^{in} \;-\; 2\phi_{NL}\, \delta\hat{X}_I^{in} \tag{1-37}$$

Dans le repère de Fresnel, cet effet se traduit simplement par une rotation du champ incident qui dépend de l'intensité (voir figure 1.5). Si le champ incident est dans un

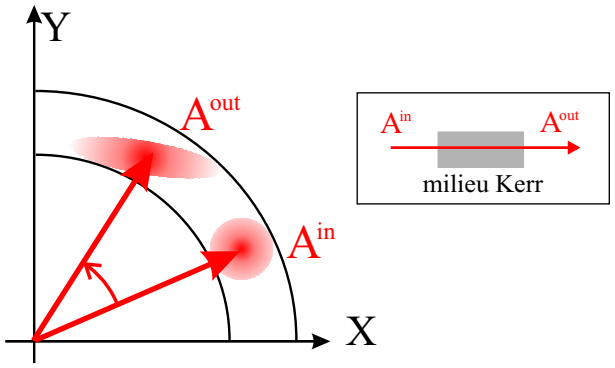


Fig. 1.5 – Génération d'états comprimés par effet Kerr.

état cohérent, l'interaction transforme le disque de fluctuations, correspondant aux fluctuations du vide, en une ellipse. Pour un milieu Kerr parfait, l'aire des fluctuations doit être conservée et le champ sortant est donc comprimé.

A partir des relations 1-37, on montre que la densité spectrale de bruit de la quadrature comprimée S_{min} vaut dans ce cas:

$$S_{min} = e^{-2r_{Kerr}} < 1 \qquad \text{avec} \qquad r_{Kerr} = \sinh^{-1}(\phi_{NL}) \tag{1-38}$$

Pour obtenir une bonne réduction de bruit, il faut que la non-linéarité soit importante. Parmi les nombreux milieux Kerr existants, on peut distinguer deux grandes classes: les milieux résonants et les milieux non résonants.

Pour ces derniers la non-linéarité est plus faible mais on peut l'augmenter en jouant sur la longueur du milieu. C'est pourquoi de nombreux travaux ont été effectués sur la réduction du bruit dans les fibres optiques [Shelby86]. Afin de résoudre le problème posé par la diffusion Brillouin due aux résonances des ondes acoustiques dans la fibre, les expériences sont réalisées en régime pulsé et deux faisceaux se propagent à contre sens dans la fibre. Ces deux faisceaux interfèrent à la sortie de la fibre et ainsi les effets de diffusion de phase disparaissent. Cette méthode permet d'obtenir une réduction de bruit de l'ordre de 60% [Silberhorn01].

Par ailleurs, les milieux résonants ou quasi-résonants possèdent de fortes non-linéarités. En revanche, le taux d'absorption est en général important et cette absorption tend à diminuer la réduction de bruit attendue. De plus, ces milieux réémettent de la lumière de fluorescence, ce qui a pour effet de rajouter du bruit. Il faut donc faire très attention au choix des paramètres afin d'obtenir un bon compromis entre ces différents effets. Nous allons rappeler ici dans quelles conditions il a été possible d'observer une réduction de bruit par effet Kerr avec des atomes froids de césium lors des travaux de thèse précédents [Lambrecht96a].

Cette présentation nous servira par la suite, puisque ces conditions expérimentales sont très proches de celles correspondant aux expériences présentées dans la suite de ce manuscrit.

B.3 Réduction de bruit avec des atomes froids

B.3.1 Effet Kerr dû à la saturation d'une transition optique

Afin de faire le lien entre un milieu atomique proche de résonance et un milieu Kerr, nous considérons ici une transition atomique à deux niveaux. Cette transition est caractérisée par une énergie de transition ω_0 et un dipôle d ayant un taux de relaxation γ dû à l'émission spontanée (voir figure 1.6). Pour un désaccord en fréquence du laser $\Delta = \omega_0 - \omega_L$, le déphasage Φ_{at} produit sur le champ par un ensemble de N atomes s'obtient en résolvant les équations de Bloch optiques [Cohen96c]:

$$\Phi_{at} = Ng^2 \frac{\Delta}{\gamma^2 + \Delta^2} \frac{1}{1+s} \tag{1-39}$$

où $g = d\mathcal{E}_0/\hbar$ est la constante de couplage atomes-champ (nous rappelons que la quantité $\mathcal{E}_0$ est définie par la relation 1-17) et s est le paramètre de saturation:

$$s = \frac{I}{I_{sat}} \frac{1}{1+(\Delta/\gamma)^2} \qquad \text{avec} \qquad I_{sat} = \epsilon_0 c \frac{\gamma^2 \hbar^2}{d^2} \tag{1-40}$$

Lorsque la saturation est faible ($s \ll 1$), le milieu se comporte approximativement comme un milieu Kerr:

$$\Phi_{at} \;\simeq\; \Phi_0 \;-\; \Phi_{NL} \tag{1-41}$$

avec

$$\Phi_0 = Ng^2 \frac{\Delta}{\gamma^2+\Delta^2} \;\propto\; \frac{1}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{NL} = \Phi_0\, s \;\propto\; \frac{1}{\Delta^3} \tag{1-42}$$

Comme la non linéarité de type Kerr décroît très vite avec le désaccord ($\propto 1/\Delta^3$), il faut se placer au voisinage d'une résonance. Cependant, les effets d'absorption peuvent devenir importants. En effet, l'absorption en intensité $\mathcal{A}_{at}$ subie par le champ lors de la traversée du milieu est donnée par:

$$\mathcal{A}_{at} \;=\; 2Ng^2 \frac{\gamma}{\gamma^2+\Delta^2} \frac{1}{1+s} \;\simeq\; 2Ng^2 \frac{\gamma}{\gamma^2+\Delta^2} \;\propto\; \frac{1}{\Delta^2} \tag{1-43}$$

Il est donc important de maîtriser précisément le désaccord entre le laser et la transition atomique afin d'obtenir le meilleur compromis possible entre l'absorption et la non-linéarité du milieu. C'est pourquoi il faut absolument s'affranchir du phénomène d'élargissement inhomogène de la transition dû à l'effet Doppler. On peut contourner ce problème de deux façons: soit en utilisant un jet atomique dans une direction perpendiculaire à celle de propagation ou soit en utilisant un gaz d'atomes froids. Le premier type d'expérience a conduit à l'observation d'une réduction de bruit de l'ordre de 20% (50% corrigé des pertes) [Raizen87, Hope92]. Cependant, les résultats obtenus étaient toujours inférieurs aux prédictions théoriques. Afin de mieux contrôler les conditions expérimentales, le groupe d'Optique Quantique du

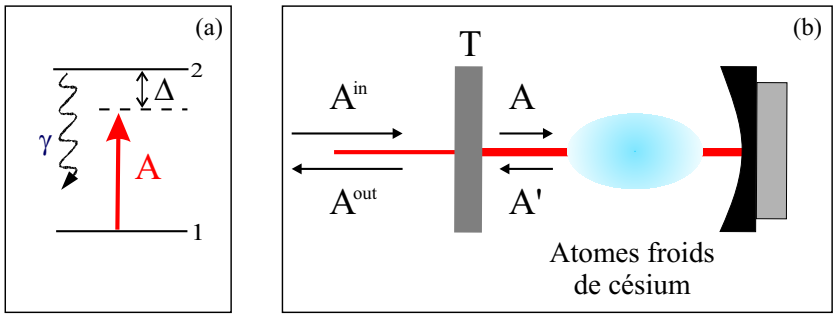


Fig. 1.6 – Principe de l'expérience de réduction de bruit par effet Kerr avec des atomes à deux niveaux. Figure (a): structure atomique à deux niveaux. Figure (b): le milieu atomique est constitué d'atomes froids, placés à l'intérieur d'une cavité pour augmenter l'interaction non-linéaire.

laboratoire décida de réaliser l'expérience avec des atomes froids de césium, qui débuta lors du travail de thèse de Laurent Hilico [Hilico92b]. Le choix du césium fut, en partie, lié au récent développement d'un piège magnéto-optique pour cet atome dans le laboratoire. En outre, la longueur d'onde de la transition D_2 se situe autour de 850 nm et correspond au domaine spectrale où les photodiodes au silicium ont un rendement quantique proche de 1 (c'est à dire donnant un électron par photon reçu). On limite ainsi les pertes au niveau du dispositif de détection.

B.3.2 Réduction de bruit par bistabilité optique

Pour un nuage d'atomes froids l'effet Doppler est complètement négligeable. De plus le temps d'interaction des atomes avec le champ (de l'ordre de quelques ms) est beaucoup plus long que pour des jets atomiques. On dispose ainsi d'un milieu atomique bien adapté à l'étude de la réduction de bruit de la lumière. En revanche, le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau est très faible, typiquement de l'ordre de 10^6 à 10^7 pour nos conditions expérimentales. Afin d'obtenir une non-linéarité suffisante pour observer une réduction de bruit, le milieu atomique est donc placé au milieu d'une cavité Fabry-Perot qui a pour effet d'augmenter la longueur effective d'interaction (voir figure 1.6).

Les pics de résonance de cette cavité sont alors déformés par la présence du milieu atomique. En effet si l'intensité incidente dépasse un certain seuil, la cavité devient bistable [Gibbs76]. On peut comprendre aisément ce phénomène en se plaçant dans la limite de faible saturation, auquel cas le déphasage atomique peut se mettre sous la forme 1-41. Si on ne tient pas compte des effets d'absorption, l'évolution du champ dans la cavité se traduit par un simple déphasage. Le champ $\hat{A}'$ défini sur la figure 1.7 s'obtient à partir du champ $\hat{A}$ suivant la relation:

$$\hat{A}' = \hat{A}\, e^{-i\Phi_{tot}} \qquad \text{avec} \quad \Phi_{tot} = \Phi_{cav} - \Phi_{at} = \Phi_{cav} - \Phi_0 + \Phi_{NL} \tag{1-44}$$

où Φ_{cav} est le déphasage linéaire dû à la propagation du champ pour un aller-retour.

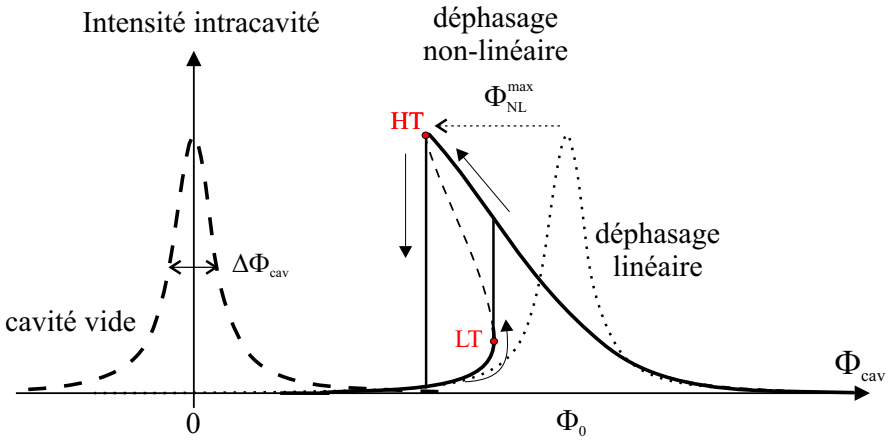


Fig. 1.7 – Résonance de la cavité en fonction du désaccord Φ_{cav}. Lorsque la non-linéarité est assez importante, il apparaît le phénomène de bistabilité optique.

Afin de calculer la valeur de l'intensité intracavité, nous écrivons la relation d'entrée sortie sur le miroir de couplage de coefficient de transmission$T$ en intensité, supposé petit devant 1:

$$\hat{A} = (1 - \frac{T}{2})\hat{A}' + \sqrt{T}\hat{A}^{in} \tag{1-45}$$

où nous avons effectué l'approximation $r = \sqrt{1-T} \simeq 1 - T/2$. Au voisinage d'une résonance, la solution pour l'intensité intracavité $|\langle\hat{A}\rangle|^2$ est donnée par la relation bien connue:

$$|\langle\hat{A}\rangle|^2 = \frac{4}{T}\frac{|\langle\hat{A}^{in}\rangle|^2}{1 + m^2(\Phi_{cav} - \Phi_{at})^2} \qquad \text{avec} \quad m = \frac{2}{T} \tag{1-46}$$

Lorsque la cavité est vide, la courbe de résonance est la fonction d'Airy usuelle centrée en $\Phi_{cav} = 0$ et de largeur à mi-hauteur $\Delta\Phi_{cav} = T$ (voir figure 1.7). En présence du milieu atomique, le déphasage linéaire Φ_0 a pour effet de simplement déplacer la courbe de résonance qui se retrouve centrée en $\Phi_{cav} = \Phi_0$. En revanche, le déphasage non-linéaire Φ_{NL} diminue avec l'intensité, ce qui a pour effet de décaler progressivement la courbe de résonance vers la gauche à mesure que l'intensité croît dans la cavité. Si ce déphasage non-linéaire est assez important, cette déformation conduit au phénomène de bistabilité: pour certaines valeurs de Φ_{cav}, il existe trois valeurs possibles pour l'intensité intracavité, comme nous l'avons illustré sur la figure 1.7. Une analyse de stabilité montre que les solutions correspondant à la branche intermédiaire sont en fait instables.

On peut donner un ordre de grandeur pour l'apparition du phénomène de bistabilité. La figure 1.7 montre qu'il faut que le déphasage non linéaire au sommet de la cavité Φ_{NL}^{max} soit de l'ordre de la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance

non déformée, soit $T/2$:

$$\Phi_{NL}^{max} \simeq \frac{T}{2} \qquad \text{ce qui donne} \qquad \frac{2}{T}\,\Phi_{NL}^{max} = \Phi_0\,\frac{8}{T^2}\,\frac{I^{in}}{I_{sat}} \simeq 1 \tag{1-47}$$

où l'on a utilisé les relations 1-42 et 1-46. On peut calculer précisément la condition de bistabilité dans le cas d'un milieu Kerr parfait:

$$\Phi_0\,\frac{8}{T^2}\,\frac{I^{in}}{I_{sat}} \geq \frac{4}{3\sqrt{3}} \simeq 0.77 \tag{1-48}$$

Cette condition est très proche de l'ordre de grandeur estimé ci-dessus, ce qui justifie notre analyse précédente.

Nous avons vu qu'un milieu Kerr était capable de produire des états comprimés pour des champs traversant le milieu en simple passage. D'après l'analyse précédente, il est clair que l'effet de la cavité ne revient pas seulement à augmenter la longueur effective du milieu atomique et donc la non-linéarité. En effet, si la condition de bistabilité est satisfaite, il existe des points tournants (LT et HT sur la figure 1.7). Au voisinage de ces points, les fluctuations d'une des quadratures divergent à cause de l'existence d'un gain différentiel. Si le milieu est un milieu Kerr idéal passif, l'aire des fluctuations est conservée lors de ce processus et les fluctuations de la quadrature orthogonale diminuent pour passer sous la limite quantique standard. Ainsi, il est possible d'obtenir théoriquement une réduction de bruit allant jusqu'à 100% à la fréquence de bruit nulle au voisinage des points tournants, et ce sans que la longueur d'interaction ne tende vers l'infini.

Contrairement à la configuration en simple passage décrite au paragrapheB.2, les fluctuations du champ sortant dépendent ici de la fréquence d'analyse du bruit. De manière générale la réduction de bruit diminue lorsque la fréquence de bruit devient supérieure à la largeur de la cavité, ce qui peut se comprendre intuitivement: la cavité n'a d'effet que pour les temps longs devant son temps de stockage, c'est à dire pour des fréquences de bruit inférieures à sa bande passante qui est de l'ordre de 5 MHz pour notre expérience. Une description de ces phénomènes pour un milieu Kerr passif est donnée dans la référence [Reynaud89].

Le milieu atomique considéré ci-dessus n'étant pas un milieu Kerr passif, l'analyse précédente est très simplifiée. L'étude de la réduction de bruit pour un ensemble d'atomes à deux niveaux placé à l'intérieur d'une cavité a donné lieu à de nombreux travaux théoriques, comme par exemple [Reid88]. En particulier, la comparaison entre la réduction de bruit obtenue par un milieu atomique ou un milieu Kerr passif est détaillée dans la référence [Hilico92a].

B.3.3 Réalisation expérimentale

Nous avons vu au paragraphe précédent les raisons qui nous ont conduit à réaliser l'expérience avec des atomes froids de césium. Il est clair que cet atome n'est pas

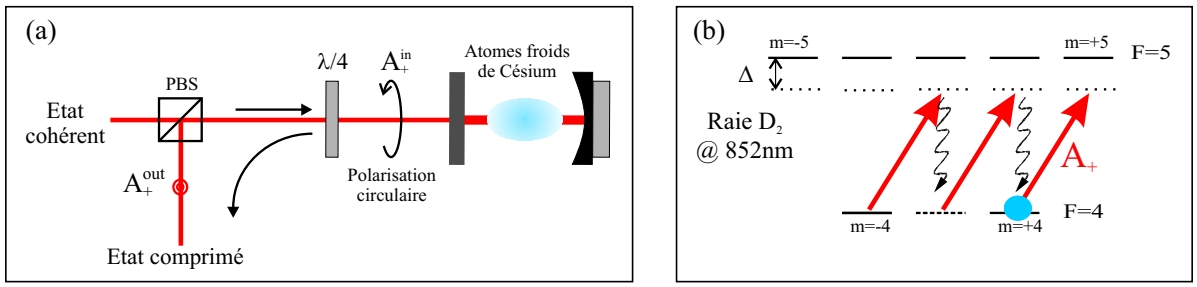


Fig. 1.8 – Principe de l'expérience réalisée en polarisation incidente circulaire (figure (a)). Les phénomènes de pompage optique conduisent le milieu à se comporter approximativement comme un ensemble d'atomes à deux niveaux (figure (b)).

un atome à deux niveaux. Cependant, il est possible de se ramener à la situation décrite ci-dessus en utilisant les processus de pompage optique entre les différents sous niveaux Zeeman. Pour cela, *le faisceau incident est polarisé circulairement* et proche de la résonance $6S_{1/2}\,F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\,F' = 5$ et les atomes sont pompés dans le sous niveau Zeeman $6S_{1/2}\,F = 4,\ m = +4$. Dans ce cas le champ n'interagit plus qu'avec la transition fermée $6S_{1/2}\,F = 4,\ m = +4 \rightarrow 6P_{3/2}\,F' = 5,\ m' = +5$ (voir figure 1.8). On peut alors considérer le milieu atomique comme un ensemble d'atomes à deux niveaux.

La description détaillée du montage expérimental sera effectuée dans la partieA du chapitre 2. Cependant nous allons donner ici l'ordre de grandeur des différentes quantités introduites au paragraphe précédent pour les paramètres correspondant à l'expérience.

La cavité Fabry-Pérot utilisée a un coefficient de transmission $T = 0.1$ et sa longueur vaut environ $25\,cm$. Pour cette géométrie, le col ("waist") du mode propre fondamental est de $w_0 = 260\ \mu m$. Nous avons considéré jusqu'ici que l'amplitude du faisceau était constante dans le plan transverse sur une extension finie de section $\mathcal{S}$. Pour adapter cette description au mode gaussien de la cavité, nous prenons $\mathcal{S} = \pi w_0^2/2 = 0.1\ mm^2$. On peut alors calculer la constante de couplage atome-champ qui se met sous la forme:

$$\frac{g^2}{2\pi} = \frac{3\lambda^2}{4\pi\mathcal{S}}\frac{\gamma}{2\pi} = 4.24\ Hz \qquad \text{avec} \qquad \frac{\gamma}{2\pi} = 2.6\ MHz \tag{1-49}$$

Les études expérimentales effectuées précédemment ont montré que le choix d'un désaccord atomique de $\Delta \simeq 45\ MHz \simeq 17\gamma$ dans le rouge de la transition fermée constituait un bon compromis entre la non-linéarité et l'absorption [Lambrecht96a,Khoury98]. La configuration expérimentale ne permettant pas de changer ce désaccord aisément, celui-ci est resté fixé à cette valeur pour toute les expériences qui seront présentées dans ce manuscrit. Enfin, le piège magnéto-optique nous permet d'obtenir un nombre d'atomes de 10^6 à 10^7 interagissant avec la pompe. Avec ces données on peut maintenant donner un ordre de grandeur pour les déphasages

linéaire Φ_0 et non linéaire Φ_{NL}.

De fait, les quantités intéressantes sont les déphasages normalisés à la demi-largeur de la cavité $T/2$ (voir, par exemple, l'équation 1-47):

$$\delta_0 = \frac{2}{T}\,\Phi_0 \simeq \frac{2Ng^2}{T\Delta} = 2\,C\,\frac{\gamma}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad \delta_{NL} = \frac{2}{T}\,\Phi_{NL} = \delta_0\,\frac{\gamma^2}{\Delta^2}\,\frac{I_{intra}}{I_{sat}} \tag{1-50}$$

où l'on a introduit le paramètre de coopérativité C:

$$C = \frac{Ng^2}{\gamma T} \tag{1-51}$$

Pour un nombre d'atomes de $5\,10^6$, la coopérativité est de $C \simeq 80$ et le déphasage linéaire normalisé vaut $\delta_0 \simeq 10$. En utilisant la formule 1-47, nous trouvons alors:

$$\delta_{NL}^{max} \;\simeq\; 1 \qquad \text{pour} \qquad \frac{I^{in}}{I_{sat}} \simeq 0.8 \tag{1-52}$$

Ce qui correspond à une puissance incidente sur la cavité de l'ordre de $800nW$. Cette estimation est assez grossière car le milieu atomique ne se comporte pas comme un milieu Kerr parfait. En outre, l'intensité intracavité est réduite à cause de l'absorption du faisceau par le milieu. En pratique le seuil de bistabilité apparaît pour des puissances incidentes de l'ordre de $10\,\mu W$.

Il est important d'estimer ces pertes par absorption car elles ont un effet destructeur sur la compression de bruit. La formule 1-43 donne $\mathcal{A}_{at} = 5\%$. Ces pertes par absorption doivent être comparées aux pertes "utiles" T dues au miroir de couplage qui permettent d'observer une réduction de bruit à la sortie de la cavité. Le paramètre intéressant est donc l'absorption normalisée:

$$\alpha_{at} \;=\; \frac{1}{T}\,\mathcal{A}_{at} \;=\; 2\,C\,\frac{\gamma^2}{\Delta^2} \simeq 0.5 \tag{1-53}$$

Dans le cas simple d'un milieu Kerr parfait, il est montré dans la référence [Reynaud89] que la réduction de bruit est diminuée par un facteur η:

$$\eta \;=\; \frac{1}{1+\alpha_{at}} \;\simeq\; 0.66 \tag{1-54}$$

L'effet des pertes est donc non négligeable pour ces paramètres. Néanmoins celles-ci sont compensées par une non-linéarité importante qui permet d'obtenir une réduction de bruit effective à la sortie de la cavité.

Les conditions expérimentales peuvent être, selon les cas, légèrement différentes de celles décrites ici, néanmoins ces quantités constituent généralement des ordres de grandeur acceptables. Ce dispositif a permis d'observer une réduction de bruit de l'ordre de 40% sous la limite quantique standard [Lambrecht96a]. Dans ce cas les faisceaux pièges étaient coupés lors de la mesure du bruit quantique afin d'éviter l'excès de bruit dû à la fluorescence dans le mode de la cavité provoquée par ces faisceaux [Khoury98]. Cette technique de mesure compliquant fortement la procédure expérimentale, l'expérience a également été réalisée en présence de faisceaux pièges atténués et une réduction de bruit d'environ 20% a été observée.

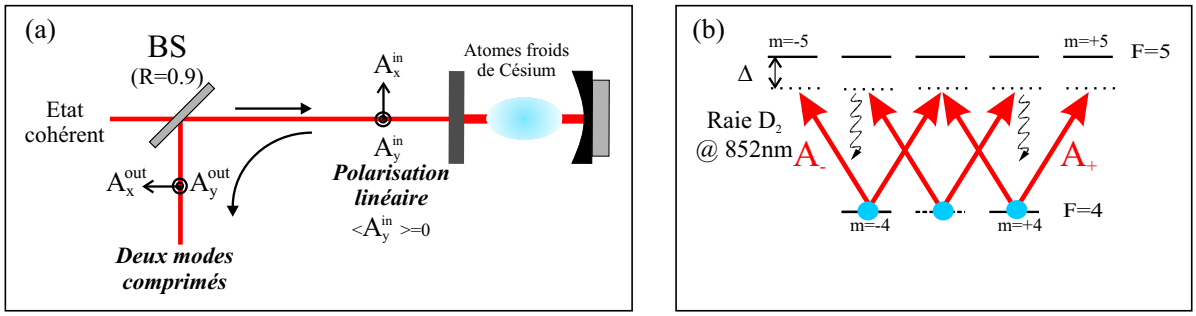


Fig. 1.9 – Principe de l'expérience en polarisation incidente linéaire (figure (a)). Dans ce cas les phénomènes de pompage optique sont plus complexes (figure (b)) et il faut tenir compte, a priori, de toute la structure atomique. L'étude des résultats observés pour cette configuration fait l'objet du travail présenté dans ce manuscrit.

B.3.4 Effet d'une polarisation incidente linéaire

A la suite de l'intérêt suscité par les expériences sur le bruit de polarisation [Hald99, Korolkova02a, Bowen02a, Bowen02b, Heersink03], nous avons décidé d'étudier le comportement de notre système lorsque le faisceau incident sur la cavité contenant les atomes est *polarisé linéairement*.

Afin de se placer dans cette nouvelle configuration expérimentale, il suffit simplement d'enlever la lame quart d'onde $\lambda/4$ placée à l'entrée de la cavité (voir figure 1.8). La situation est alors fondamentalement différente de celle décrite au paragraphe précédent car les processus de pompage optique ne conduisent plus le milieu à se comporter comme un ensemble d'atomes à deux niveaux (voir figure1.9). Ainsi les résonances de la cavité sont fortement modifiées et nous avons observé un basculement de la polarisation du faisceau transmis. En effet, lorsque l'on balaie sa longueur, il existe un domaine pour lequel la polarisation devient circulaire à l'intérieur de la cavité.

Par ailleurs, nous avons constaté qu'il était possible d'obtenir une réduction de bruit sur deux modes de polarisation orthogonale à la sortie de la cavité, à savoir le champ moyen et le mode vide orthogonal.

L'interprétation de ces phénomènes s'est imposée naturellement comme l'objectif principal de ce travail de thèse. D'après l'analyse précédente, il est clair que nous devrons maintenant décrire le système à l'aide de deux modes du champ, et non plus d'un seul comme c'était le cas pour une polarisation incidente circulaire. Les phénomènes de polarisation jouent alors un rôle essentiel dans le système, aussi bien au niveau de leurs propriétés classiques que quantiques. Il existe, en effet, un lien direct entre les fluctuations de la polarisation et le bruit du mode vide orthogonal. De fait, ce dernier est couramment appelé *bruit de polarisation*.

Afin de clarifier ce lien, nous allons maintenant présenter le formalisme des opé-

rateurs de Stokes quantiques à partir desquels la notion d'états comprimés en polarisation a été introduite [Chirkin93, Korolkova02a].

C Bruit quantique de polarisation

C.1 Notations

Nous reprenons ici le modèle de faisceau lumineux introduit au paragrapheA.5.1: nous considérons une onde plane d'extension finie, de section$\mathcal{S}$, se propageant dans la direction donnée par le vecteur d'onde$\vec{k} = k\vec{e}_z$. On repère alors la direction du champ électrique dans le plan orthogonal à l'aide des vecteurs$\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, définis tels que le trièdre ($\vec{e}_x$,$\vec{e}_y$,$\vec{e}_k$) soit direct, les axes x et y correspondant aux directions horizontale et verticale (voir figure 1.10). Avec ces conventions, le champ électromagnétique s'écrit sous la forme:

$$\vec{E} = \mathcal{E}_0 \left[(\ A_x\,\vec{e}_x\ +\ A_y\,\vec{e}_y\ )\,e^{-i\omega_L t}\ +\ (\ A_x^\dagger\,\vec{e}_x\ +\ A_y^\dagger\,\vec{e}_y\ )\,e^{i\omega_L t} \right] \tag{1-55}$$

où la constante $\mathcal{E}_0$ est définie par la relation 1-17. Par la suite nous appellerons A_x et A_y les modes du champs correspondant aux directions$x$ et y.

C.2 Représentation d'un état de polarisation classique

Pour un champ classique, A_x et A_y sont des amplitudes complexes. La polarisation du faisceau est alors déterminée par le vecteur:

$$\vec{A}\ =\ A_x\,\vec{e}_x\ +\ A_y\,\vec{e}_y\ =\ |A_x|\,e^{i\phi_x}\,\vec{e}_x\ +\ |A_y|\,e^{i\phi_y}\,\vec{e}_y \tag{1-56}$$

En particulier, deux états de polarisation définis par$\vec{A}$ et $\vec{A}'$ seront orthogonaux si leur produit scalaire hermitien est nul:

$$\vec{A}^*\,.\,\vec{A}'\ =\ A_x^*\,A_x'\ +\ A_y^*\,A_y' = 0 \tag{1-57}$$

C.2.1 Ellipse de polarisation

On peut représenter un état de polarisation quelconque en étudiant l'évolution temporelle du vecteur $\vec{A}(t) = A_x(t)\,\vec{e}_x\ +\ A_y(t)\,\vec{e}_y$ avec:

$$A_x(t) = |A_x|\cos(\omega_L t - \phi_x) \qquad \text{et} \qquad A_y(t) = |A_y|\cos(\omega_L t - \phi_y) \tag{1-58}$$

Le vecteur $\vec{A}(t)$ décrit donc une ellipse au cours du temps, appelée *ellipse de polarisation*. On repère sur la figure 1.10 les angles α, appelé "azimuth", et ϵ qui caractérisent l'orientation et l'ellipticité de la polarisation. Ces angles sont déterminés en fonction des amplitudes $|A_x|$, $|A_y|$ et de la différence de phase $\phi = \phi_y - \phi_x$ à l'aide de relations données dans la référence [Huard97].

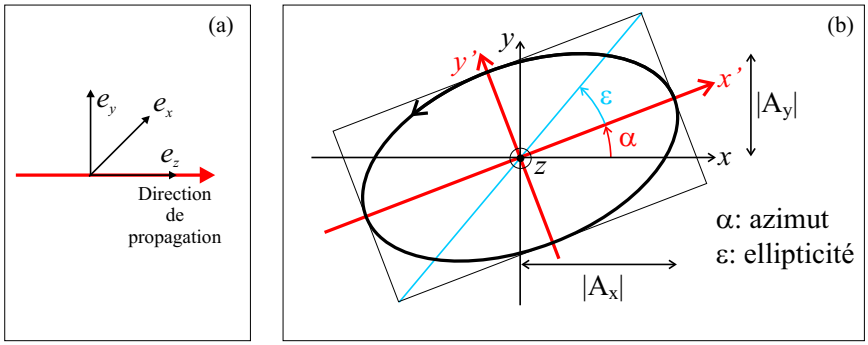


Fig. 1.10 – Figure (a): orientation du trièdre de référence qui servira de repère pour l'étude de la polarisation du champ électromagnétique. Figure (b): ellipse de polarisation.

Le signe de l'ellipticité ϵ dépend du sens de rotation du vecteur $\vec{A}(t)$. Elle est choisie positive lorsque le sens de rotation est direct, ce qui correspond àϕ compris entre 0 et π. En revanche, elle est négative pour un sens de rotation indirect,ϕ étant alors compris entre $-\pi$ et 0. Par exemple, un état polarisé linéairement correspond à $\epsilon = 0$ tandsi que les états circulaires σ_+ et σ_- vérifient $\epsilon = +\pi/4$ et $\epsilon = -\pi/4$ respectivement.

De manière générale, deux états de polarisation orthogonale définis par les couples (α, ϵ) et (α',ϵ') vérifient [Huard97]:

$$\alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \epsilon' = -\epsilon \tag{1-59}$$

C.2.2 Paramètres de Stokes et sphère de Poincaré

On peut également caractériser un état de polarisation à l'aide des paramètres de Stokes définis comme:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_x^* A_x + A_y^* A_y = I_x + I_y \\ S_1 &= A_x^* A_x - A_y^* A_y = I_x - I_y \\ S_2 &= A_x^* A_y + A_y^* A_x = I_{+45} - I_{-45} \\ S_3 &= i(A_y^* A_x - A_x^* A_y) = I_{\sigma_+} - I_{\sigma_-} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations de passage entre les différentes bases de polarisation qui sont données dans l'appendice A. Ces paramètres de Stokes s'expriment uniquement en fonction des intensités dans différentes bases de polarisation. Il sont donc mesurables directement comme nous le verrons au paragraphe C.6.2. Pour un faisceau parfaitement polarisé, ces trois paramètres ne sont pas indépendants. Ils vérifient en effet la relation:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{1-60}$$

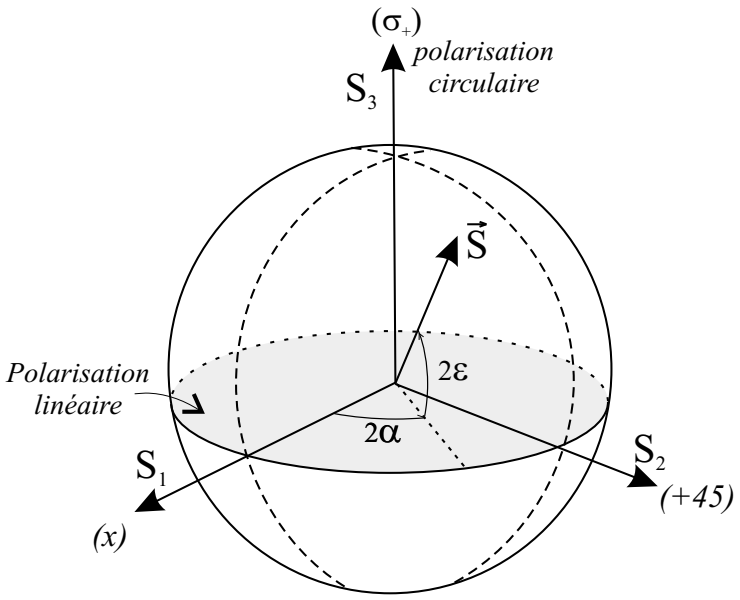


Fig. 1.11 – Représentation des états de polarisation classiques dans la sphère de Poincaré. Les angles α et ϵ correspondent à l'azimuth et à l'ellipticité de la polarisation (voir figure 1.10).

Le paramètre S_0, qui correspond à l'intensité totale du faisceau, est donc redondant et s'interprète simplement comme la norme du vecteur de Stokes $\vec{S}$ de coordonnées $(S_1,\ S_2,\ S_3)$. Ce vecteur $\vec{S}$ caractérise complètement l'état de polarisation et s'exprime aisément à partir de l'azimuth α et de l'ellipticité ϵ introduits au paragraphe précédent [Huard97]:

$$S_1 = A_x^* A_x - A_y^* A_y = S_0 \cos 2\epsilon \cos 2\alpha \quad (1\text{-}61)$$

$$S_2 = A_x^* A_y + A_y^* A_x = S_0 \cos 2\epsilon \sin 2\alpha \quad (1\text{-}62)$$

$$S_3 = i(A_y^* A_x - A_x^* A_y) = S_0 \sin 2\epsilon \quad (1\text{-}63)$$

L'examen de ces trois relations suggère immédiatement une représentation sphérique des états de polarisation. Pour cela, on introduit la sphère de Poincaré de rayon S_0 (voir figure 1.11). Un état de polarisation quelconque correspondant au vecteur $\vec{S}$ est alors repéré par les angles polaires 2α et 2ϵ sur cette sphère (voir relations 1-61 à 1-63).

Ainsi chaque parallèle de la sphère correspond à des états de polarisation d'ellipticité fixe et chaque méridien représente des états dont l'azimuth est fixe. En particulier, le plan equatorial défini par (S_1, S_2) regroupe l'ensemble des états de polarisation linéaire ($\epsilon = 0$) et les pôles correspondent aux états de polarisation circulaire σ_+ et σ_- ($\epsilon = \pm\pi/4$).

De manière générale, deux états de polarisation diamètralement opposés sur la sphère de Poincaré sont orthogonaux. En effet, la transformation $\alpha \rightarrow \alpha \pm \pi/2$ et

$\epsilon \rightarrow -\epsilon$ donne ici $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$. Par exemple, un état représenté suivant S_1 correspond à un état polarisé horizontalement tandis que un état polarisé verticalement est aligné suivant $-S_1$.

C.3 Opérateurs de Stokes quantiques

Nous revenons maintenant au traitement quantique du champ électromagnétique. Les quantités A_x et A_y sont alors des opérateurs quantiques dont les relations de commutations sont données par des relations du type 1-24. Afin d'étudier les propriétés quantiques de la polarisation, on introduit alors les opérateurs de Stokes quantiques, définis à partir de leurs homologues classiques [Chirkin93,Korolkova02a]:

$$\hat{S}_0 = \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x + \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y \tag{1-64}$$

$$\hat{S}_1 = \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x - \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y \tag{1-65}$$

$$\hat{S}_2 = \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_y + \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_x = \hat{A}_{+45}^\dagger \hat{A}_{+45} - \hat{A}_{-45}^\dagger \hat{A}_{-45} \tag{1-66}$$

$$\hat{S}_3 = i(\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_x - \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_y) = \hat{A}_{\sigma_+}^\dagger \hat{A}_{\sigma_+} - \hat{A}_{\sigma_-}^\dagger \hat{A}_{\sigma_-} \tag{1-67}$$

Nous avons introduit ces opérateurs en utilisant le formalisme développé pour des champs multimodes (voir paragraphe A.5). Les quantités de la forme $\langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle$ correspondent donc à des flux de photons. En outre les fluctuations s'expriment maintenant en terme de densités spectrales de bruit. On peut bien sûr poursuivre l'analyse avec ce formalisme [Josse03a]. Néanmoins ces opérateurs sont généralement écrits pour des champs monomodes [Heersink03,Bowen02a]. Afin de simplifier les écritures, nous adopterons ici la même description du champ. Dans ce cas les relations de commutation s'écrivent:

$$\left[\hat{A}_i \, , \, \hat{A}_j^\dagger \right] = \delta_{ij} \qquad \text{avec } i,j = x,y \tag{1-68}$$

et les quantités $\langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle$ correspondent maintenant à un nombre de photons. Nous avons vu au paragraphe A.5.4 que l'on pouvait justifier ce passage en considérant le processus de mesure des fluctuations à la fréquence d'analyse ω_0 avec une bande passante δf. $\langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle$ représente alors le nombre de photons, contenus dans les bandes latérales situées aux fréquences $\pm\omega_0$ par rapport à la fréquence centrale du laser, reçus par le détecteur pendant le temps de mesure $T = 1/(2\delta f)$.

Avec ces définitions, les opérateurs de Stokes vérifient les relations de commutation suivantes:

$$\left[\hat{S}_0, \hat{S}_i\right] = 0 \qquad \text{et} \quad \left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = 2i\epsilon_{ijk}\,\hat{S}_k \quad \text{avec } i,j,k = 1,2,3 \tag{1-69}$$

On remarque que ces relations de commutation sont similaires à celles du moment angulaire $\vec{J}$. Nous reviendrons sur cette similitude au paragraphe C.6.1. Du fait de

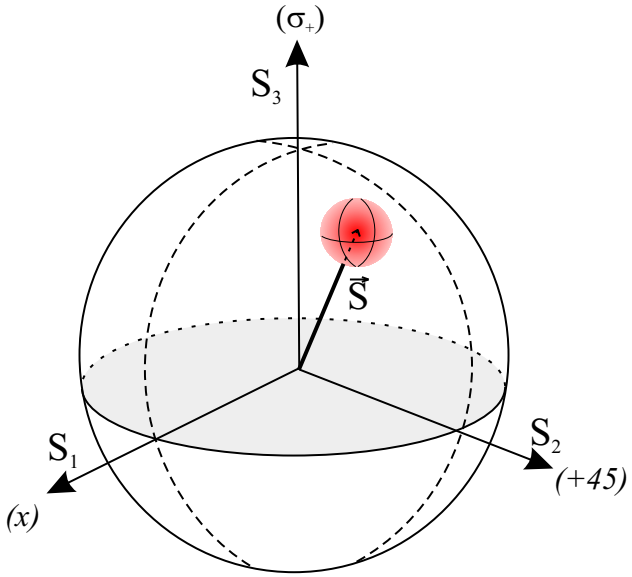


Fig. 1.12 – Représentation d'un état de polarisation cohérent.

ces relations de commutation, les opérateurs de Stokes satisfont aux inégalités de Heisenberg suivantes:

$$\Delta^2\hat{S}_1\,\Delta^2\hat{S}_2 \;\geq\; |\langle\hat{S}_3\rangle|^2 \;\;,\;\; \Delta^2\hat{S}_1\,\Delta^2\hat{S}_3 \;\geq\; |\langle\hat{S}_2\rangle|^2 \;\;,\;\; \Delta^2\hat{S}_2\,\Delta^2\hat{S}_3 \;\geq\; |\langle\hat{S}_1\rangle|^2 \quad (1\text{-}70)$$

Il est donc, en général, impossible de mesurer simultanément ces trois paramètres avec une précision arbitraire. Contrairement aux inégalités vérifiées par les quadrature du champ, celles-ci dépendent maintenant des valeurs moyennes de ces quantités. Dans ce cas, la limite quantique standard dépend de l'état de polarisation du faisceau. Afin d'éclaircir ces propriétés, nous allons considérer l'état cohérent en polarisation, puis définir la notion d'état comprimé en polarisation.

C.4 Etat coherent en polarisation

L'état cohérent en polarisation est défini comme l'état pour lequel les deux modes A_x et A_y sont dans un état cohérent:

$$A_x|\alpha_x\rangle = \alpha_x|\alpha_x\rangle \qquad \text{et} \qquad A_y|\alpha_y\rangle = \alpha_y|\alpha_y\rangle \qquad (1\text{-}71)$$

Dans ce cas, les valeurs moyennes α_x et α_y définissent le vecteur de Stokes classique $\langle\vec{\hat{S}}\rangle$ suivant les relations 1-61 à 1-63. Il faut superposer à ce vecteur des fluctuations quantiques données par les incertitudes des paramètres de Stokes. Pour un état cohérent, ces variances sont toutes identiques:

$$\Delta^2\hat{S}_i^{coh} \;=\; |\alpha_x|^2 \;+\; |\alpha_y|^2 = \langle\hat{S}_0\rangle = \langle\hat{n}\rangle \qquad \text{pour}\;\; i = 1,2,3 \qquad (1\text{-}72)$$

Le volume d'incertitude est donc une sphère de rayon $\sqrt{3\langle\hat{n}\rangle}$, comme illustré sur la figure 1.12.

C.5 Etat comprimé en polarisation

C.5.1 L'état cohérent: un état de référence?

Pour définir un état comprimé en polarisation, l'idée la plus naturelle consiste à se servir des fluctuations de l'état cohérent comme référence, comme nous l'avions fait pour les quadratures du champ. Dans cette optique, on appellera alors état comprimé en polarisation, un état tel que [Korolkova02a, Bowen02a]:

$$\Delta^2\hat{S}_i \;\leq\; \Delta^2\hat{S}_i^{coh} \;=\; \langle\hat{S}_0\rangle \tag{1-73}$$

Notons ici que cette définition s'applique aux fluctuations de n'importe quel vecteur de Stokes orienté de façon quelconque dans la sphère de Poincaré. S'il est clair qu'un état vérifiant cette condition est un état non classique du champ (car ces fluctuations sont inférieures à celles d'un état cohérent), cette définition pose un problème car l'état cohérent n'est pas un état minimal du point de vue des inégalités1-70. Suivant cette définition, un état peut donc être dit comprimé en polarisation, sans pour autant "violer" aucune de ces inégalités d'Heisenberg.

Nous allons discuter ce problème sur un exemple particulier qui nous servira à poser la bonne définition d'un état comprimé en polarisation.

C.5.2 Un exemple: champ polarisé linéairement

Considérons ici le cas où le faisceau est polarisé horizontalement suivant l'axe$x$:

$$\langle\hat{A}_x\rangle \;=\; \alpha_x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle\hat{A}_y\rangle \;=\; 0 \tag{1-74}$$

Dans ce cas le vecteur de Stokes est orienté suivant $\hat{S}_1$ (voir figure 1.13):

$$\langle\hat{S}_0\rangle \;=\; \langle\hat{S}_1\rangle \;=\; |\alpha_x|^2 \qquad \text{et} \qquad \langle\hat{S}_2\rangle \;=\; \langle\hat{S}_3\rangle \;=\; 0 \tag{1-75}$$

et les inégalités de Heisenberg 1-70 s'écrivent:

$$\Delta^2\hat{S}_1\,\Delta^2\hat{S}_2 \;\geq\; 0 \;\;,\;\; \Delta^2\hat{S}_1\,\Delta^2\hat{S}_3 \;\geq\; 0 \;\text{ et }\; \Delta^2\hat{S}_2\,\Delta^2\hat{S}_3 \;\geq \langle\hat{S}_1\rangle^2 = |\alpha_x|^4 \tag{1-76}$$

Il n'existe donc aucune limite quantique sur les fluctuations du paramètre$\hat{S}_1$. En revanche, les paramètres $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$ satisfont à une relation d'incertitude et possèdent donc des fluctuations minimales. De manière générale, les paramètres de Stokes du plan sous-tendu par $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$ et repérés par l'angle θ suivant la relation $\hat{S}_\theta = \cos\theta\,\hat{S}_2 + \sin\theta\,\hat{S}_3$ satisfont à la même relation d'incertitude:

$$\Delta^2\hat{S}_\theta\;\Delta^2\hat{S}_{\theta+\pi/2} \;\geq\; \langle\hat{S}_1\rangle^2 = \langle\hat{S}_0\rangle^2 \tag{1-77}$$

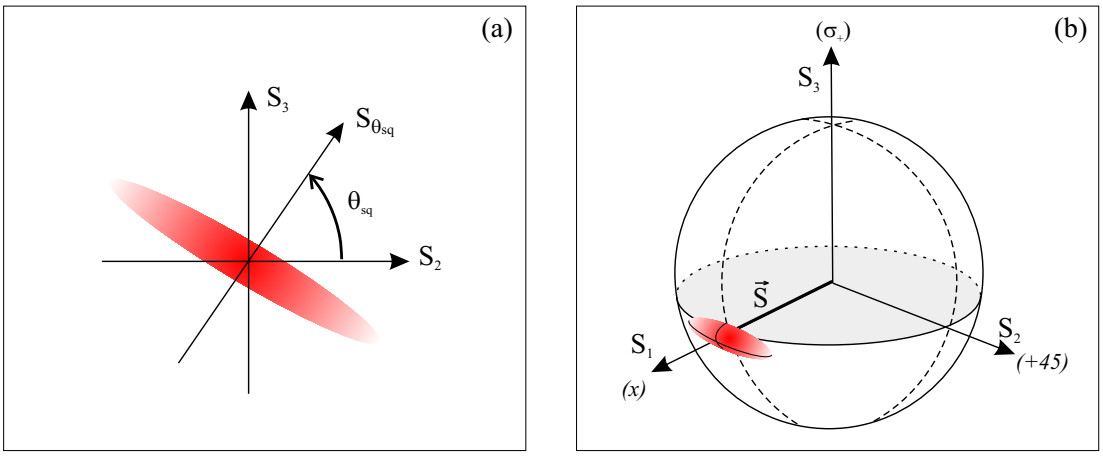


Fig. 1.13 – Figure (a): fluctuations des paramètres de Stokes dans le plan sous tendu par $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$. On a représenté ici un état comprimé en polarisation pour le paramètre de Stokes $\hat{S}_{\theta_{sq}}$. Figure (b): état polarisé suivant $\hat{S}_1$ et comprimé en polarisation pour le paramètre de Stokes $\hat{S}_3$.

On définit alors la notion d'état comprimé en polarisation à partir de cette inégalité. Ainsi un état polarisé linéairement suivant $\hat{S}_1$ sera dit comprimé en polarisation s'il existe un paramètre de Stokes $\hat{S}_\theta$ pour lequel:

$$\Delta^2 \hat{S}_\theta \ \leq \ \langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \hat{S}_0 \rangle \qquad \text{avec} \ \ \hat{S}_\theta \ \perp \ \hat{S}_1 \tag{1-78}$$

On remarque que la limite quantique standard dans le plan orthogonal au vecteur de Stokes moyen (ici $\hat{S}_1$) est donnée par les fluctuations de l'état cohérent ($\Delta^2 \hat{S}_i^{coh} = \langle \hat{S}_0 \rangle$).

C.5.3 Définition générale

Ce résultat se généralise pour une polarisation moyenne quelconque, caractérisée par le vecteur de Stokes $\langle \vec{S} \rangle$. On appellera *état comprimé en polarisation*, un état pour lequel les fluctuations d'un paramètre de Stokes $\hat{S}_\perp$, perpendiculaire au vecteur de Stokes moyen, sont inférieures à celles d'un état cohérent de même intensité totale [Heersink03]:

$$\Delta^2 \hat{S}_\perp \ \leq \ |\langle \vec{S} \rangle| = \langle \hat{S}_0 \rangle \tag{1-79}$$

C.5.4 Interprétation du bruit de polarisation

La définition de la réduction du bruit de polarisation est donc restreinte aux fluctuations dans le plan orthogonal au vecteur de Stokes moyen. Le sens physique d'une telle restriction apparaît plus clairement si on effectue une analyse semi-classique des fluctuations du vecteur de Stokes. Pour cela, nous nous placerons dans la situation où les fluctuations sont très petites devant les valeurs moyennes. En revenant au cas

d'une polarisation linéaire suivant l'axe x, cette hypothèse se traduit ici par:

$$\delta\hat{A}_y,\ \delta\hat{A}_x \ \ll\ \langle\hat{A}_x\rangle = \alpha_x \tag{1-80}$$

Le vecteur de Stokes est défini classiquement par sa longueur S_0 et son orientation donnée par les valeurs de l'azimuth α et l'ellipticité ϵ suivant les relations 1-61 à 1-63. Pour la polarisation linéaire considérée ici, l'azimuth et l'ellipticité sont nuls en valeur moyenne. Au premier ordre, leurs fluctuations $\delta\alpha$ et $\delta\epsilon$ sont directement reliées aux fluctuations des paramètres de Stokes par les formules:

$$\delta\hat{S}_1 \ \simeq\ \delta\hat{S}_0 \tag{1-81}$$
$$\delta\hat{S}_2 \ \simeq\ 2\,\hat{S}_0\,\delta\,\alpha \tag{1-82}$$
$$\delta\hat{S}_3 \ \simeq\ 2\,\hat{S}_0\,\delta\,\epsilon \tag{1-83}$$

Ainsi les fluctuations de $\hat{S}_1$ correspondent aux fluctuations de l'élongation du vecteur de Stokes et donc simplement aux fluctuations de l'intensité totale du faisceau. En ne gardant que les termes du premier ordre, les fluctuations de $\hat{S}_1$ sont proportionnelles à celles de la quadrature d'amplitude du champ moyen A_x:

$$\delta\hat{S}_1 \simeq \alpha_x\delta\hat{A}_x^\dagger + \alpha_x^*\delta\hat{A}_x = |\alpha_x|\,\delta\hat{X}_x(\theta_x) \qquad \text{avec}\ \ \alpha_x = |\alpha_x|e^{i\theta_x} \tag{1-84}$$

Si le champ moyen est comprimé en amplitude ($\Delta^2\hat{X}_x(\theta_x) < 1$), les propriétés du faisceau sont bien non classiques et les fluctuations de $\hat{S}_1$ sont inférieures celles d'un état cohérent:

$$\Delta^2\hat{S}_1 = |\alpha_x|^2\,\Delta^2\hat{X}_x(\theta_x)\ <\ \langle\hat{S}_0\rangle \tag{1-85}$$

Pourtant cet état n'est pas, *à priori*, comprimé en polarisation. En effet la polarisation d'un faisceau ne dépend pas de son intensité.

On s'intéresse maintenant aux fluctuations de $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$. Celles-ci sont proportionnelles aux fluctuations d'azimuth et d'ellipticité et sont donc intimement liées à la notion de polarisation. Les inégalités 1-70 se traduisent simplement comme une relation d'incertitude sur la détermination de l'azimuth et de l'ellipticité de la polarisation d'un faisceau:

$$\Delta\,\alpha\,\Delta\,\epsilon\ \geq\ \frac{1}{4\langle\hat{S}_0\rangle} = \frac{1}{4\langle\hat{n}\rangle} \tag{1-86}$$

Ces fluctuations minimales sont, en fait, dues aux fluctuations du mode vide A_y. Toujours au premier ordre, les fluctuations des paramètres $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$ sont, en effet, proportionnelles aux fluctuations des quadratures du mode vide orthogonal:

$$\delta\hat{S}_2 \ =\ |\alpha_x|(\delta\hat{A}_y^\dagger e^{i\theta_x} + \delta\hat{A}_y e^{-i\theta_x}) = |\alpha_x|\,\delta\hat{X}_y(\theta_x) \tag{1-87}$$
$$\delta\hat{S}_3 \ =\ i|\alpha_x|(\delta\hat{A}_y^\dagger e^{i\theta_x} - \delta\hat{A}_y e^{-i\theta_x}) = |\alpha_x|\,\delta\hat{Y}_y(\theta_x) \tag{1-88}$$

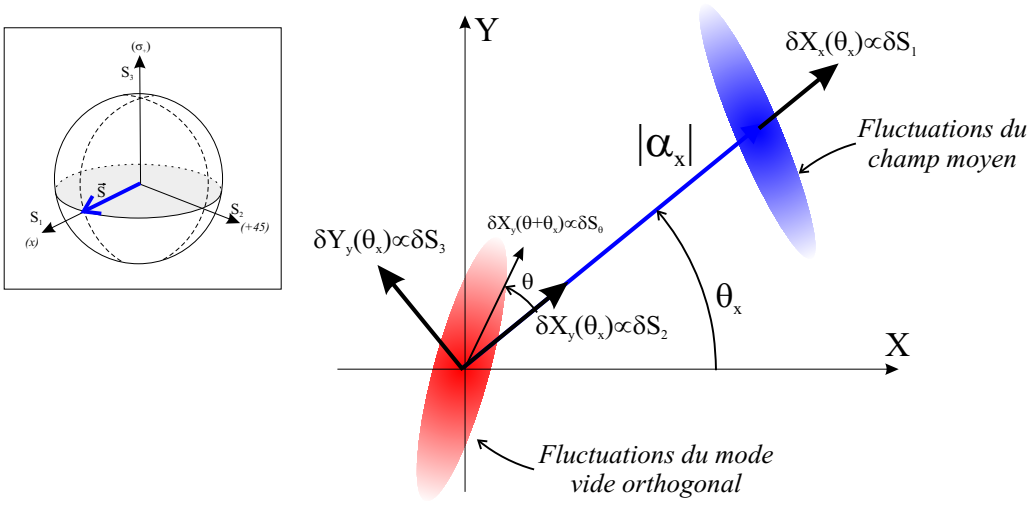


Fig. 1.14 – Equivalence entre la section de la sphère de Poincaré suivant $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$ et le diagramme de Fresnel. Le faisceau est polarisé horizontalement suivant la direction x et le paramètre de Stokes moyen est aligné suivant $\hat{S}_1$ (voir encart). On représente alors les deux modes A_x (champ moyen) et A_y (mode vide orthogonal) dans le même diagramme de Fresnel. Les fluctuations des quadratures du mode vide orthogonal sont proportionnelles au fluctuations des paramètres de Stokes contenus dans le plan perpendiculaire au vecteur de Stokes moyen $\langle\vec{\hat{S}}\rangle$. En revanche, les fluctuations d'amplitude du champ moyen sont proportionnelles aux fluctuations du paramètre $\hat{S}_1$.

Ainsi l'inégalité de Heisenberg vérifiée par ces paramètres découle directement de celle satisfaite par les quadratures du mode vide:

$$\Delta^2\hat{X}_y(\theta_x)\,\Delta^2\hat{Y}_y(\theta_x)\;\geq\;1 \qquad \text{donne} \qquad \Delta^2\hat{S}_2\,\Delta^2\hat{S}_3\;\geq\langle\hat{S}_0\rangle^2 \tag{1-89}$$

De manière générale, les fluctuations du paramètre de Stokes tourné de l'angle θ dans le plan défini par $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$ s'écrivent:

$$\delta\hat{S}_\theta = |\alpha_x|\;\delta\hat{X}_y(\theta_x+\theta) \tag{1-90}$$

Le plan (S_2,S_3) est donc équivalent (au coefficient près $|\alpha_x|$) au repère de Fresnel dont les axes correspondent aux quadratures d'amplitude et de phase du champ moyen A_x (voir figure 1.14). Les fluctuations de S_2 et S_3 sont alors proportionnelles aux fluctuations d'"intensité" et de "phase" du mode vide orthogonal, définies par rapport à la phase du champ moyen θ_x.

L'analyse précédente nous permet finalement de donner une définition simple de la réduction de bruit en polarisation pour des faisceaux intenses: *un faisceau est comprimé en polarisation si et seulement si le mode vide orthogonal au champ moyen est un état comprimé en quadrature.*

C.6 Intérêt du bruit de polarisation

Nous présentons ici brièvement les différents aspects qui ont motivé l'étude des propriétés non classiques de la polarisation dans le domaine des variables continues.

D'une part, de tels faisceaux comprimés en polarisation peuvent être utilisés pour améliorer les mesures de spectroscopie reposant sur l'étude de la modification de la polarisation à la traversée d'un milieu [Grangier87, Sørensen98].

Toutefois, ce sont leurs applications potentielles dans le domaine des communications quantiques qui ont suscité dernièrement un intérêt grandissant pour ce domaine de recherche.

C.6.1 Formalisme d'interaction matière-rayonnement

En effet, afin de stocker les propriétés non classiques des fluctuations du champ électromagnétique, il est important de pouvoir transférer ces propriétés aux variables atomiques d'une vapeur ou d'un gaz d'atomes froids. Ces variables atomiques sont les composantes du moment angulaire total $\vec{\hat{J}}$. Celles-ci vérifient des relations de commutations similaires à celle des opérateurs de Stokes:

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hat{J}_z \tag{1-91}$$

les autres relations s'obtenant par permutation circulaire. On peut définir, à partir des relations d'incertitude découlant de ces relations de commutation, la notion d'état comprimé pour les variables atomiques [Wineland94].

La similitude des algèbres entre le moment angulaire et les opérateurs de Stokes incite alors à décrire l'interaction entre la lumière et un milieu atomique à l'aide de ces derniers. Récemment, le formalisme des opérateurs de Stokes quantiques a effectivement été utilisé pour caractériser le transfert de la compression de bruit en polarisation du faisceaux aux fluctuations de l'orientation $\hat{J}_z$ d'un niveau excité dans le césium [Hald99].

Dans le cas d'une interaction non résonante entre le champ et les atomes, les opérateurs de Stokes sont également bien adaptés pour déterminer l'évolution des variables atomiques dans le niveau fondamental. Considérons par exemple les systèmes simples, représentés sur la figure 1.15, pour lesquels la structure atomique est en "X" ou en "Λ". Pour des grands désaccords de fréquence avec la transition atomique, les systèmes sont décrits par des hamiltoniens effectifs $\hat{H}_X^{eff}$ et $\hat{H}_\Lambda^{eff}$, ne faisant intervenir que les variables atomiques associés aux sous niveaux fondamentaux 1 et 2 [Duan00b, Kuzmich00b]:

$$\hat{H}_X^{eff} \propto \hat{J}_z\,\hat{S}_3 \qquad \text{et} \qquad \hat{H}_\Lambda^{eff} \propto \vec{\hat{J}}.\vec{\hat{S}} = \hat{J}_x\hat{S}_1 + \hat{J}_y\hat{S}_2 + \hat{J}_z\hat{S}_3 \tag{1-92}$$

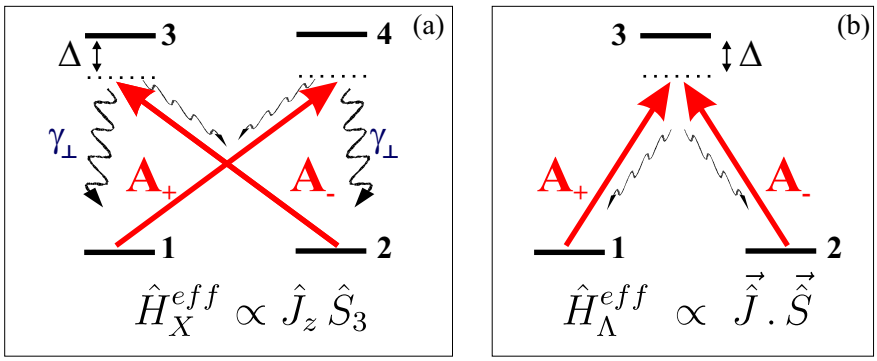


Fig. 1.15 – Expression des hamiltoniens effectifs pour une transition en "X" (a) et une transition en "Λ"(b).

Les termes supplémentaires dans le second hamiltonien tiennent compte de la cohérence induite par effet Raman dans un système en "Λ".

Ainsi, l'hamiltonien effectif du système en "X" a été utilisé pour préciser le principe d'intrication entre les moments angulaires collectifs d'atomes de rubidium contenus dans deux cellules séparées spatialement [Julsgaard01]. D'autre part, il a été démontré que l'on pouvait transférer une partie des fluctuations d'un état comprimé en polarisation aux fluctuations du moment angulaire collectif $\vec{\hat{J}}$ d'une cellule de rubidium [Schori02].

C.6.2 Détection directe

Les différents exemples présentés au paragraphe précédent illustrent un aspect de l'intérêt pour l'étude des états non classiques en polarisation. Du point de vue des applications dans le domaine des communications quantiques, les fluctuations des paramètres de Stokes ont également l'avantage de pouvoir être mesurées directement.

En effet, pour des faisceaux intenses, la détection des paramètres de Stokes repose sur des mesures directes d'intensité. Le dispositif est alors identique à celui utilisé pour la mesure des paramètres de Stokes classiques [Korolkova02a]. Les relations 1-64 à 1-67 indiquent la démarche à suivre. A l'aide d'un cube polariseur PBS_S, on sépare les polarisations horizontale et verticale du faisceau. La somme et la différence des fluctuations d'intensité détectées sur les deux voies donnent les fluctuations des paramètres $\hat{S}_0$ et $\hat{S}_1$ respectivement (voir figures (a) et (b) de la figure 1.16). Pour obtenir les fluctuations des deux autres paramètres $\hat{S}_2$ et $\hat{S}_3$, il suffit de placer la combinaison adéquate de lames d'ondes avant le cube PBS_S afin de séparer les modes polarisés à 45°, puis les modes circulaires (voir figures (c) et (d)).

Pour des faisceaux suffisamment intenses, il n'est donc pas nécessaire de recourir à un oscillateur local pour mesurer les fluctuations des variables conjuguées. Cette propriété conduit à une nette simplification par rapport au dispositif de mesure des

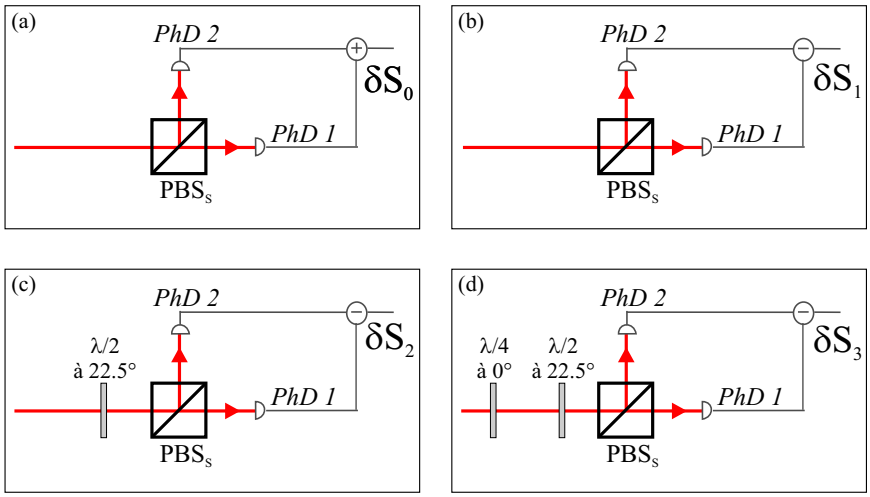


Fig. 1.16 – Dispositif de mesure directe des différents paramètres de Stokes.

fluctuations des quadratures du champ par détection homodyne (voir paragraphe C.1 du chapitre 2). Dans cette optique, Korolkova *et al.* [Korolkova02a] ont proposé d'étendre certains protocoles de cryptographie quantique utilisant des états non classiques en quadrature [Ralph99,Silberhorn02] au domaine des états non classiques en polarisation.

C.7 Production d'états non classiques en polarisation

Nous allons maintenant passer en revue les différents moyens qui ont été mis en oeuvre pour produire de tels états de polarisation non classiques. On peut classer ces techniques en deux grandes catégories: les méthodes indirectes et directes.

C.7.1 Méthode indirecte

La solution la plus simple consiste à mélanger un mode vide comprimé avec un état cohérent sur un cube polariseur selon le principe décrit sur la partie (a) de la figure 1.17. D'après la définition donnée au paragraphe C.5.4, le faisceau sortant est comprimé en polarisation. Cette méthode a été utilisée pour la première fois par Grangier *et al.* [Grangier87] en 1987 afin de démontrer l'amélioration de la sensibilité des mesures faites sur la polarisation d'un faisceau à la sortie d'un cristal. Hald *et al.* [Hald99] ont produit de la même façon leur faisceau comprimé en polarisation qui a permis de réduire les fluctuations des variables atomiques d'un gaz d'atomes froids de césium. Dans ces deux cas, les modes vides comprimés sont produits à l'aide d'oscillateurs paramétriques optiques dégénérés fonctionnant sous le seuil (voir paragraphe B.1).

Dans la configuration précédente, les fluctuations de l'élongation du vecteur de Stokes dans la sphère de Poincaré sont celles d'un état cohérent en polarisation (voir

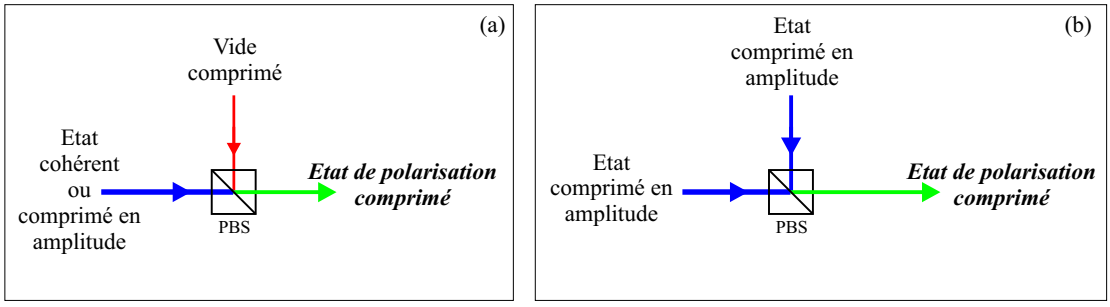


Fig. 1.17 – Génération d'états comprimés en polarisation en combinant sur un cube polariseur des champs comprimés indépendamment.

paragraphe C.5). Nous avons vu que ces fluctuations sont reliées aux fluctuations d'amplitude du champ moyen (voir paragraphe C.5.4); on peut donc les réduire si le faisceau intense, représenté sur la partie (a) de la figure 1.17, est comprimé en amplitude.

Cependant, on peut arriver au même résultat en combinant, par exemple, deux états comprimés en amplitude sur un cube polariseur suivant le principe illustré sur la partie (b) de la figure 1.17. Cette méthode a été utilisée récemment par Bowen *et al.* [Bowen02a] et Heersink *et al.* [Heersink03] pour produire de tels états non classiques de polarisation.

C.7.2 Méthode directe

Il est également possible de générer directement des états comprimés en polarisation en utilisant des non-linéarités de type Kerr [Chirkin93]. Pour cela on peut tirer partie de l'effet Kerr croisé dans les fibres suivant la proposition Boivin et Haus [Boivin96]. Supposons qu'un faisceau possédant une faible ellipticité (l'intensité du mode polarisé suivant x étant très supérieure à celle du mode polarisé suivant y) se propage dans une fibre présentant de l'effet Kerr croisé. Le mode de faible intensitéy est alors amplifié ou déamplifié suivant sa phase relative avec le mode intense$x$. On retrouve alors un phénomène analogue à celui décrit au paragrapheB.1 dans le cas de l'amplification paramétrique dégénérée.

Supposons maintenant que le faisceau est parfaitement polarisé linéairement: le mode y est vide et ses fluctuations, à l'entrée de la fibre, sont celles d'un état cohérent. Lors de la propagation dans la fibre, l'effet Kerr croisé brise la symétrie entre les quadratures et le mode y se retrouve dans un état vide comprimé à la sortie de la fibre (voir partie (a) de la figure 1.18). Ce phénomène a effectivement été observé expérimentalement en 1998 par Margalit *et al.* [Haus98] et a conduit à une réduction de bruit de 50% sur le mode vide orthogonal. Le faisceau est ainsi directement comprimé en polarisation.

En suivant la même idée Matsko *et al.* [Matsko02a] ont proposé d'utiliser des vapeurs atomiques pour réduire les fluctuations sur le mode vide orthogonal d'un fais-

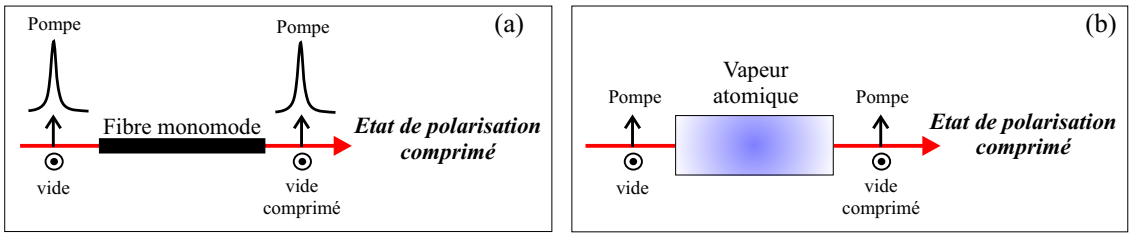


Fig. 1.18 – Génération d'états comprimés en polarisation en utilisant l'effet Kerr croisé dans les fibres (a) ou l'effet de "self-rotation" dans les vapeurs atomiques (b).

ceau polarisé linéairement. Ces milieux atomiques, initialement isotropes, peuvent devenir biréfringents lors de l'interaction avec un faisceau lumineux. Du fait, par exemple, des phénomènes de pompage optique entre les différents sous niveaux Zeeman ou bien des déplacements lumineux des niveaux d'énergie, la biréfringence circulaire d'une vapeur atomique dépend de l'ellipticité du faisceau incident [Rochester01]. Ainsi un faisceau polarisé elliptiquement à l'entrée du milieu atomique va induire une biréfringence circulaire qui, en retour, provoque la rotation de la direction de sa polarisation lors de sa propagation. C'est pourquoi ce phénomène est couramment appelé "self-rotation" en anglais.

Le même raisonnement que celui effectué pour l'effet Kerr croisé dans les fibres s'applique ici. Si le faisceau est polarisé linéairement alors le mode vide orthogonal subit un gain qui dépend de la phase. Ce mode vide est donc comprimé à la sortie du milieu atomique (voir partie (b) de la figure 1.18). Ainsi, une réduction de bruit de l'ordre de 20% a été observée récemment par Ries *et al.* [Ries03] en utilisant une vapeur de rubidium.

Notre configuration expérimentale, illustrée sur la figure 1.9, rappelle le principe des expériences décrites ci-dessus. Ainsi le faisceau incident sur la cavité est polarisé linéairement et nous avons observé une réduction de bruit sur le mode vide orthogonal du faisceau après l'interaction avec le nuage d'atomes froids à l'intérieur de cette cavité.

Après avoir présenté les principaux résultats expérimentaux dans les chapitres 2 et 3, nous verrons au chapitre 4 comment s'interprètent ces observations. En particulier, nous montrerons que la réduction de bruit n'est pas due à l'effet de "rotation auto-induite" comme le suggère l'analyse précédente, mais plutôt à la présence d'effet Kerr croisé du fait de la saturation de la transition optique.

Chapitre 2

Réduction du bruit de polarisation

Commencée lors de la thèse de Laurent Hilico [Hilico92b], cette expérience avait pour objectif d'obtenir une réduction des fluctuations d'un faisceau lumineux sous la limite quantique standard en utilisant la non-linéarité associé à la saturation d'un milieu atomique constitué d'un nuage d'atomes froids (voir paragrapheB.3 du chapitre 1).

Les atomes interagissent avec un faisceau, que l'on appellera par la suite faisceau pompe, produit par un laser Titane:Saphir (TiSa) stabilisé en fréquence. Si le faisceau pompe est *polarisé circulairement* et proche de résonance de la transition fermée $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$ de la raie D_2 du césium alors les atomes sont pompés optiquement dans le niveau $6S_{1/2}\ F = 4,\ m = +4$. On peut alors considérer le milieu atomique comme un système à deux niveaux: $6S_{1/2}\ F = 4,\ m = +4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5,\ m' = +5$. Afin de s'affranchir de l'effet Doppler, les atomes sont refroidis dans un piège magnéto-optique. Pour augmenter l'interaction, les atomes sont placés à l'intérieur d'une cavité. Lorsque l'intensité du faisceau pompe dépasse un certain seuil, la cavité devient bistable et l'on peut prédire théoriquement une importante réduction du bruit au voisinage des points tournants. La bistabilité optique a été observée expérimentalement lors du travail de thèse de Laurent Hilico et une compression du bruit sous la limite quantique standard de l'ordre de40% a été obtenue par Astrid Lambrecht et Jean Michel Courty [Lambrecht96a].

A la fin de la thèse de Laurent Vernac et lors de mon arrivée dans le groupe, nous avons repris le même type d'expérience, le champ pompe étant maintenant *linéairement polarisé*. Le système est alors profondément modifié et les processus de pompage optique sont plus complexes. Lorsque l'intensité du faisceau pompe croît, nous avons observé dans ce cas un basculement de la polarisation, de l'état linéaire vers un état circulaire, du champ transmis par la cavité. Avant cette transition, la polarisation reste linéaire et nous avons obtenu une réduction du bruit sous la limite quantique standard pour deux modes du champ: le champ moyen et le mode vide de polarisation orthogonale.

Nous présenterons successivement dans cette partie le montage expérimental, l'étude de la bascule de polarisation et les résultats obtenus sur la mesure du bruit quantique des deux modes du champ de polarisation orthogonale. Nous interprétons ensuite ces résultats en termes de réduction des fluctuations de polarisation du

faisceau pompe.

A Dispositif experimental

Nous présentons dans cette section les principaux éléments du dispositif experimental, à savoir le laser Titane:Saphir et ses asservissements, le piège magnéto-optique et la cavité optique. Le montage a tout d'abord été réalisé pendant la thèse de Laurent Hilico, puis successivement modifié au cours des expériences menées par Astrid Lambrecht, Thomas Coudreau et Laurent Vernac. La caractérisation de ces éléments ayant été détaillée dans les manuscrits de thèse précédents, nous nous limiterons ici à une présentation succinte.

A.1 Le laser Titane:Saphir

Le laser Titane:Saphir constitue la source laser principale de l'expérience. Les fluctuations d'intensité et de phase de ce type de laser sont au niveau quantique standard pour des fréquences supérieures à quelques MHz. Le TiSa est donc un laser particulièrement adapté à nos mesures de bruit, contrairement aux diodes laser qui présentent en particulier un fort excès de bruit de phase (de l'ordre de40 dB au dessus de la limite quantique standard).

A.1.1 La cavité laser

La cavité laser est une cavité en anneau construite d'après le modèle développé par François Biraben (figure 2.1). Le cristal de Titane:Sapphir est pompé par un laser à argon ionisé 10 Watt(INNOVA 310). Le faisceau pompe rentre à l'intérieur de la cavité grâce au miroir dichroïque M_1 et est focalisé sur le cristal. L'alignement de la pompe est effectué à l'aide de différents miroirs; les miroirs m_1 et m_3, montés en position de "baïonnette", disposent de montures Micro-contrôle. Ils permettent ainsi un réglage précis de la direction du laser à argon afin d'obtenir une puissance et une stabilité de pompage optimales.

La cavité a une longueur d'environ 1.6 m ce qui correspond à un intervalle spectral libre (ISL) de 170 MHz. Afin d'obtenir un fonctionnement monomode du laser, différents filtres sélectifs en fréquence sont disposés dans la cavité. Ils possèdent des largeurs spectrales de plus en plus fines afin de pouvoir sélectionner la fréquence du laser. Ces trois éléments sont un filtre de Lyot ($ISL = 1THz$) et deux étalons Fabry-Perot: un étalon "mince" constitué d'une lame de verre ($ISL = 150GHz$) et un étalon "épais" constitué de deux prismes séparés par une couche d'air ($ISL = 20GHZ$). Ces trois éléments permettent de sélectionner un seul mode d'oscillation de la cavité laser. Afin de pouvoir changer continûment la fréquence du laser, on

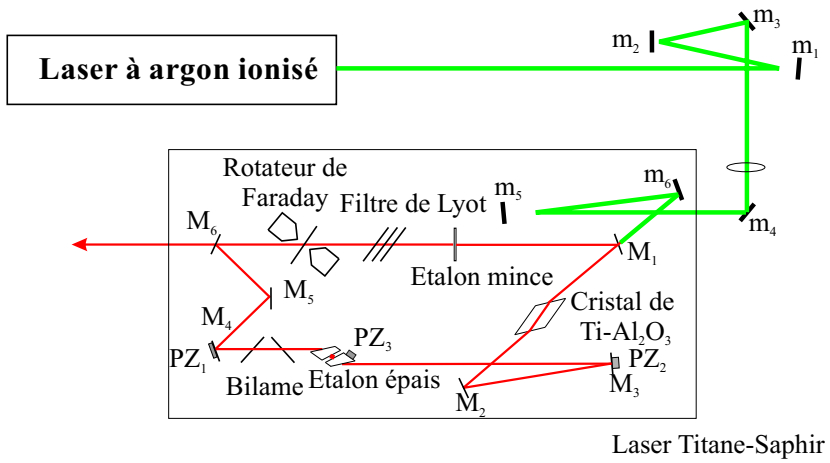


Fig. 2.1 – Cavité en anneau du laser Titane:Saphir pompé par un laser à Argon ionisé.

fait varier la longueur de la cavité à l'aide d'un bilame ou en utilisant la cale piezo-électrique du miroir M_4. Afin d'éviter que le laser ne saute de mode, l'étalon épais est asservi en longueur à l'aide d'une détection synchrone: on module sa longueur grâce à la cale piézo-électrique PZ_3 à 1 kHz et on détecte la modulation d'intensité à la sortie du laser. On génére ainsi un signal d'erreur utilisé pour contrôler la longueur de l'étalon épais. On peut ainsi balayer la fréquence du laser sur une plage d'environ 10 GHz sans avoir de sauts de modes.

La cavité étant en anneau, il peut exister *a priori* deux modes d'oscillation du laser correspondant aux deux sens de propagation du faisceau lumineux dans la cavité. Afin de sélectionner le mode d'oscillation correspondant au sens direct de rotation (figure 2.1), il faut introduire des pertes sur l'autre sens de propagation. Pour ce faire, trois miroirs non coplanaires M_4, M_5 et M_6 sont placés à l'intérieur de la cavité et induisent une rotation de la polarisation du faisceau dépendant du sens de propagation. Parallèlement un rotateur de Faraday induit une rotation de polarisation indépendante du sens de parcours. Ces deux rotations ayant la même valeur absolue, elles se compensent dans un sens et s'ajoutent pour l'autre. Comme plusieurs éléments de la cavité sont montés à l'angle de Brewster par rapport au faisceau, on introduit de fortes pertes pour le sens de propagation indirect et le laser oscille finalement de façon unidirectionnelle.

Dans ces conditions, le laser délivre typiquement 1 Watt à 850 nm. Cette puissance est largement suffisante pour satisfaire aux besoins de l'expérience. Toutefois, ce laser n'est pas assez stable en fonctionnement libre et il est nécessaire d'asservir sa fréquence.

A.1.2 Les asservissements

Dans notre expérience, nous étudions l'interaction entre le laser et des atomes de césium placés dans un piège magnéto-optique. Ce piège utilise le même laser, décalé en fréquence à l'aide de modulateurs acousto-optiques. Afin d'optimiser la réduction de bruit, il faut maîtriser précisément le désaccord entre le laser et la transition atomique. En outre, le piège est très sensible aux fluctuations de fréquence des faisceaux pièges qui doivent être décalés d'environ 5 MHz dans le rouge de la transition. Pour ces raisons la fréquence du laser doit avoir une largeur de raie faible et sa fréquence centrale doit rester stable au cours du temps.

La largeur du laser TiSa libre est de l'ordre de quelques MHz. Nous la diminuons en asservissant le laser sur une cavité de référence très stable. Puis nous corrigeons les dérives lentes de fréquence en contrôlant la longueur de la cavité de référence à l'aide d'un asservissement sur une résonance d'absorption saturée du césium.

La cavité de référence utilisée est une cavité linéaire construite en Invar. Sa finesse vaut $\mathcal{F} = 58$ et son intervalle spectral libre 375 MHz. Le signal d'erreur est généré par la méthode dite "Hänsch et Couillaud" (figure 2.2). Une lame à l'incidence de Brewster est placée à l'intérieur de la cavité. L'ellipticité du faisceau réfléchi dépend ainsi du désaccord entre le laser et la cavité. L'analyse de la polarisation donne un signal d'erreur qui est utilisé pour contrôler la longueur de la cavité (figure2.1). On corrige les fluctuations basses fréquences à l aide de la "grosse" calePZ_1 (figure 2.1) sur laquelle on envoie le signal d'erreur après son passage par un circuit intégrateur. Parallèlement un circuit dérivateur fournit le signal d'erreur envoyé sur la petite cale PZ_2 afin de corriger les fluctuations hautes fréquences (voir figure2.2). Ce dispositif permet de réduire le jitter du laser à environ 100 kHz, la fréquence centrale étant fixée par la longueur de la cavité de référence qu'il faut alors asservir.

Pour ce faire, on utilise une résonance d'absorption saturée. On choisit le pic d'absorption correspondant au croisement des transitions $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 4$ et $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$. La fréquence de résonance correspondante est décalée de 125 MHz dans le rouge de la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$ (figure 2.4). Par ailleurs, les expériences nécessitent une fréquence du faisceau pompe décalée de 45 MHz dans le rouge. Si on asservit directement le laser sur le pic d'absorption saturée, il faut ensuite décaler la fréquence du laser avec un modulateur acousto-optique de fréquence 80 MHz afin d'obtenir le bon désaccord du faisceau pompe avec le milieu atomique. Cette solution n'est pas adaptée à l'étude des fluctuations quantiques car le passage à travers un modulateur acousto-optique introduit un bruit de phase sur le faisceau [Lambrecht t3]. Il faut donc décaler la fréquence du laser qui est envoyé dans la cellule d'absorption saturée de -80 MHz par rapport au faisceau pompe (voir figure 2.2). Pour réaliser l'asservissement, nous modulons la fréquence RF qui est envoyée dans le modulateur acousto-optique à environ 2 kHz. Nous effectuons ensuite la détection synchrone du signal enregistré par la photodiodePhD_4

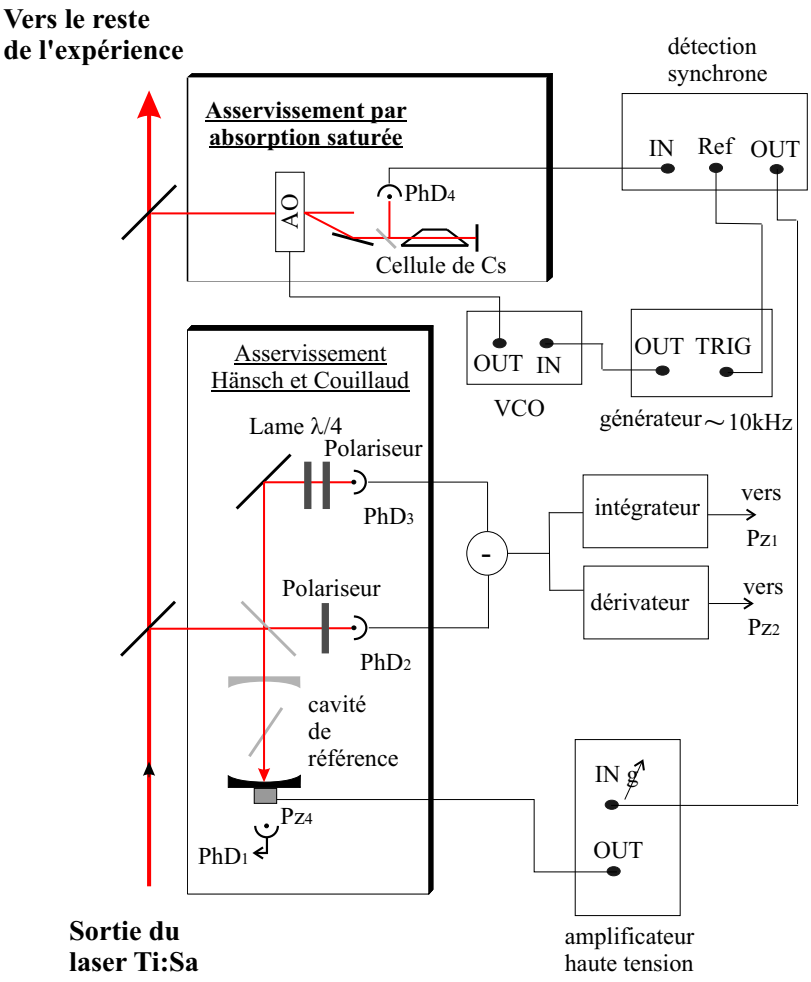


Fig. 2.2 – Asservissement du laser Titane:saphir sur une cavité de référence et asservissement de cette cavité sur une résonance d'absorption saturée.

à la sortie de la cellule afin d'obtenir un signal d'erreur.

Une fois ces asservissements réalisés, on obtient une source laser stabilisée en fréquence et adaptée à notre étude des fluctuations quantiques. Cette boucle d'asservissement est assez stable pour tenir plusieurs heures typiquement.

A.2 Le piège magnéto-optique

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il était nécessaire de refroidir les atomes afin que la largeur Doppler soit inférieure à la largeur homogène de la raie. Le piège magnéto-optique (MOT) permet d'obtenir des densités relativement importantes à des températures de quelques mK [Raab87]. On peut ainsi obtenir un milieu possédant une forte non-linéarité, une faible absorption si on se place légèrement hors de résonance, et dont la structure hyperfine est bien résolue.

La technique de refroidissement d'un MOT est maintenant bien connue, ce dispositif étant utilisé pour de nombreuses expériences. Nous n'en présentons donc ici que les caractéristiques principales.

A.2.1 Principe

Le piège magnéto-optique combine l'utilisation de faisceaux quasi-résonants pour ralentir les atomes et un champ magnétique inhomogène destiné à créer une force de rappel. Les faisceaux pièges sont composés de trois paires de faisceaux contra-propagatifs dans les trois directions de l'espace. Ils ont tous la même fréquence et sont décalés dans le rouge de la transition fermée $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$. A cause de l'effet Doppler, un atome se déplaçant avec une vitesse non nulle s'éloigne de résonance du faisceau laser qui se propage dans sa direction et se rapproche de résonance du faisceau qui se propage en sens inverse. L'atome absorbe donc plus le faisceau s'opposant à son mouvement et est donc ralenti. On peut ainsi montrer que la force totale exercée par les faisceaux lumineux sur les atomes s'écrit comme une force de friction. Cette force est optimale si le désaccord est de l'ordre de la largeur de raie, i.e. 5 MHz.

Pour piéger les atomes ainsi refroidis il faut appliquer une force de rappel. Celle-ci est crée par un champ magnétique produit par une paire de bobines en configuration anti-Hemholtz. Le champ magnétique s'annule au centre et possède un fort gradient de l'ordre de 10 $Gauss/cm$. Ce champ magnétique décale en fréquence les différents sous niveaux Zeeman. De cette façon, le désaccord entre les lasers et les atomes dépend maintenant de la position par rapport au centre et de la polarisation des faisceaux pièges. Ces derniers sont polarisés circulairement, avec des polarisations orthogonales pour les faisceaux contra-propageant. On peut alors montrer qu'une force de rappel s'ajoute à la force de friction décrite ci dessus.

Les atomes sont donc tout d'abord refroidis par les faisceaux lumineux puis

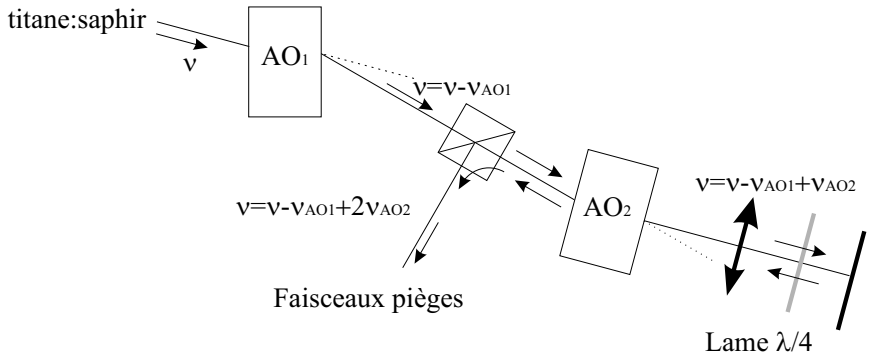


Fig. 2.3 – Décalage en fréquence des faisceaux pièges à l'aide de modulateurs acousto-optiques.

piégés au zéro du champ magnétique. Nous disposons également de trois paires de bobines Helmholtz pour compenser les champs magnétiques résiduels. En pratique ces champs magnétiques nous servent à déplacer le nuage atomique afin de maximiser le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau pompe.

Afin d'éviter toute collision avec un gaz résiduel, on piège les atomes à l'intérieur d'une cellule dont le vide, très poussé (inférieur à 10^{-9} $Torr$), est réalisé à l'aide d'une pompe ionique. Le césium est introduit par une vanne qui met en communication la cellule avec un réservoir, on assure ainsi une pression constante en vapeur de césium dans la cellule. Les caractéristiques de cette cellule sont présentés en détail dans la thèse de Laurent Hilico.

A.2.2 Génération des faisceaux pièges

Comme nous l'avons déjà signalé dans la partie A.1, la puissance fournie par le laser Titane:Saphir est bien supérieure à celle nécessaire pour effectuer nos expériences sur le faisceau pompe. Les faisceaux pièges sont donc également produits par ce laser.

Le désaccord du faisceau pompe est fixé à 45 MHz dans le rouge de la transition $6S_{1/2}$ $F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}$ $F' = 5$ (voir figure 2.4). Il faut décaler cette fréquence de 40 MHz dans le bleu pour obtenir la fréquence désirée des faisceaux pièges (de l'ordre de 5 MHz dans le rouge de la résonance atomique). On utilise pour cela deux modulateurs acousto-optiques en série. Le premier décale la fréquence dans le rouge de 110 MHz. Le deuxième est en configuration de "double passage": il diffracte deux fois le faisceau, et le décale à chaque fois de 75 MHz dans le bleu (figure 2.3). La fréquence des faisceaux pièges est donc finalement décalée dans le bleu de $-110 + 2 \times 75 = +40$ MHz.

Le dispositif en double passage a l'avantage de permettre de faire varier légèrement la fréquence des faisceaux sans faire varier l'orientation du faisceau. On peut

donc optimiser leur fréquence pour maximiser l'interaction entre le faisceau pompe et les atomes, sans pour autant dérégler leur alignement.

Une lame quart d'onde est placée entre le modulateur et le miroir de renvoi (voir figure 2.3) de façon à réaliser un circulateur optique: la polarisation à la sortie du second modulateur acousto-optique est perpendiculaire à la polarisation incidente. On peut donc séparer les faisceaux pièges obtenus à l'aide d'un cube polariseur. On dispose ainsi d'une puissance disponible d'environ $200\ mW$, ce qui est bien supérieur à la puissance nécessaire (de l'ordre de quelques mW).

A.2.3 La diode laser de repompage

Lorsque les atomes sont piégés dans le MOT, ils peuvent être pompés par les faisceaux pièges dans le niveau excité $6P_{3/2}F' = 4$ et se désexciter dans le niveau fondamental $6S_{1/2}F = 3$ (voir figure 2.4). Dans ce cas, ils n'interagissent plus avec les faisceaux pièges. Ce processus vide rapidement le MOT de tous les atomes; il faut donc utiliser un faisceau de "repompage" résonant avec la transition $6S_{1/2}\ F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 4$ qui repeuple les atomes dans le niveau $6S_{1/2}\ F = 4$. Ce faisceau doit être décalé en fréquence d'environ $9\ GHz$ et ne peut être produit à partir du laser Ti:Sa à l'aide d'un modulateur acousto-optique.

C'est pourquoi ce faisceau de repompage est produit indépendamment par une diode laser DBR ($SDL - 5712 - H1$). Le MOT étant très sensible à la stabilité de cette diode, elle est régulée en température pour limiter ses fluctuations de fréquence. Néanmoins, cette régulation n'est pas suffisante pour éviter les dérives lentes de fréquence et nous avons donc monté un asservissement par absorption saturée (voir figure 2.5). Le faisceau de repompage est ensuite superposé aux faisceaux pièges et envoyé dans la cellule.

A.2.4 Caractéristiques du piège magnéto-optique

Pour une puissance de pièges de l'ordre de quelques mW, on obtient un nuage d'atomes froids comprenant typiquement de 10^6 à 10^7 atomes. L'estimation du nombre d'atomes peut se faire par différentes méthodes qui seront détaillées dans la partie B.3. La température du nuage a été évaluée précédemment à $1\ mK$. Dans ce cas l'élargissement Doppler de la transition est de l'ordre de la largeur naturelle de la raie $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$. Il est alors possible de contrôler précisément le désaccord entre le faisceau pompe et la transition atomique. Au final, nous disposons d'un milieu atomique dont la non-linéarité est suffisante, l'absorption restant limitée.

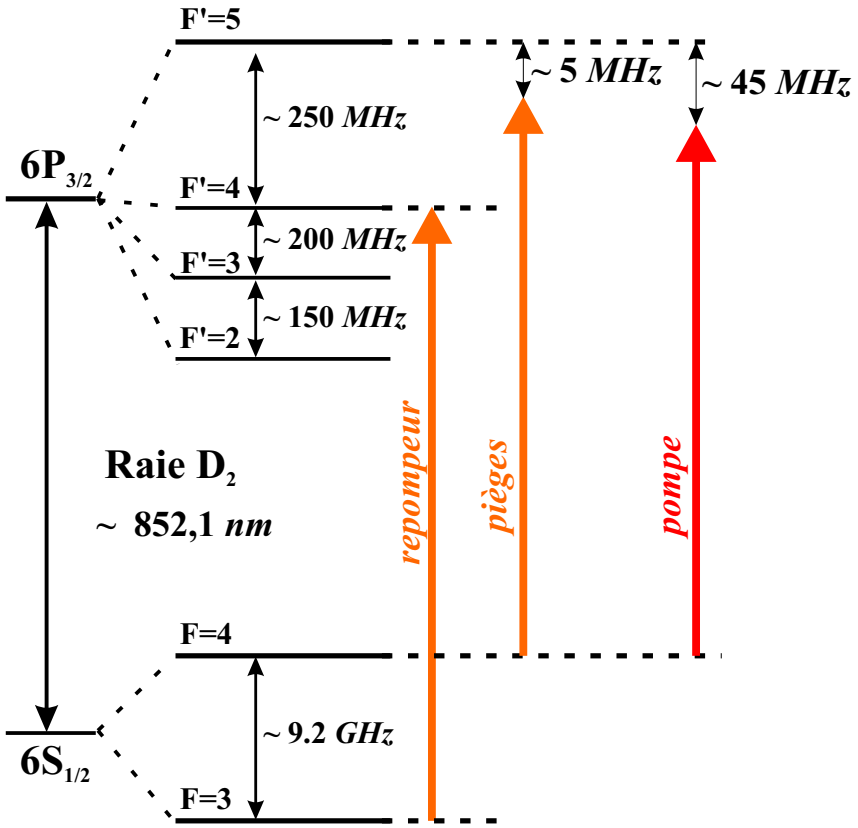


Fig. 2.4 – Structure hyperfine de la raie D_2 du césium et fréquences des différents faisceaux lumineux utilisés dans l'expérience.

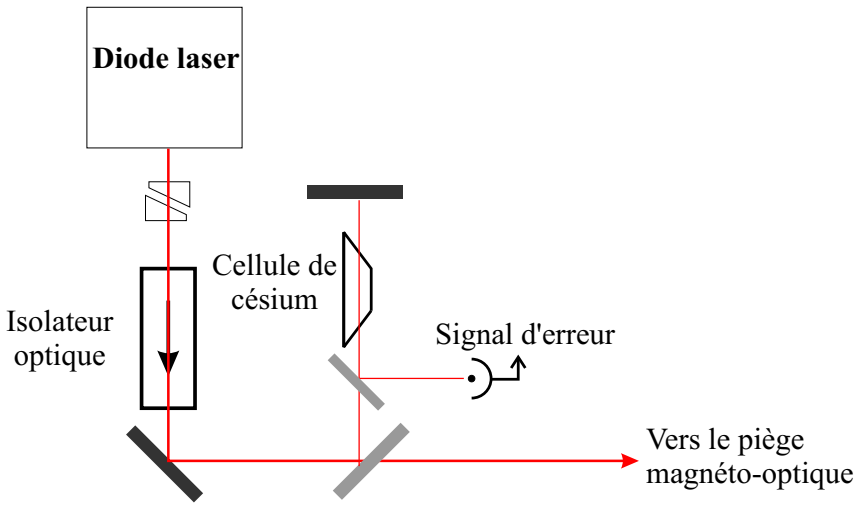


Fig. 2.5 – Asservissement de la diode de repompage par absorption saturée.

A.3 La Cavité à atomes

A.3.1 Les caractéristiques

La configuration de la cavité est celle choisie par Astrid Lambrecht. La cavité est linéaire et les miroirs sont situés à l'extérieur de la cellule contenant le nuage de césium. L'axe optique défini par la cavité est horizontal et orienté à 45° des faisceaux pièges. La longueur de la cellule est environ de 25 cm. L'intervalle spectral libre (ISL) peut être déterminé à l'aide d'un autre faisceau: le faisceau sonde (voir section C.2). La valeur obtenue est $ISL = 543\ MHz$; ce qui équivaut à une longueur effective de 27.6 cm. Le miroir d'entrée est un miroir plan et le miroir de sortie est concave de rayon de courbure 500 mm. Dans ces conditions le col (*"waist"*) du mode gaussien fondamental (TEM_{00}) vaut 260 μm.

La transmission du miroir d'entrée vaut $T_1 = 0.1$. Le miroir de sortie a un coefficient de réflexion proche de 1 afin de minimiser les pertes sur le faisceau réfléchi dont on veut mesurer le bruit quantique. La mesure du coefficient en transmission de ce miroir donne $T_2 = 6\ 10^{-4}$. Dans ces conditions la finesse théorique de la cavité est estimée à $\mathcal{F}_{th} \simeq 2\pi/T_1 \simeq 63$.

Le faisceau pénètre dans la cellule par des fenêtres traitées anti-reflet qui introduisent des pertes. Celles-ci dégradent la finesse de la cavité. Cette finesse a été évaluée expérimentalement à l'aide d'un faisceau auxiliaire (voir paragrapheC.2 du chapitre 3), ce qui donne $\mathcal{F}_0 \simeq 52$. On peut ainsi estimer les pertes dues aux fenêtres $\mathcal{A}_{fenêtres}$ sur un aller retour de la cavité en utilisant la relation:

$$\mathcal{F}_0 = 2\pi/(T_1 + \mathcal{A}_{fenêtres}) \tag{2-1}$$

On trouve une absorption $\mathcal{A}_{fenêtres} = 1.8\%$. Pour un aller retour, le faisceau traverse huit fois un traitement anti-reflet dont on évalue ainsi l'absorption à environ0.2%, ce qui correspond à l'ordre de grandeur attendu. On déduit de ces résultats le taux de réflexion de la cavité à résonance à partir de la formule:

$$R^{th}_{rés} = \frac{(T_1 - \mathcal{A}_{fenêtres})^2}{(T_1 + \mathcal{A}_{fenêtres})^2} \simeq 0.46 \tag{2-2}$$

Cette valeur est proche de la valeur expérimentale mesurée$R^{exp}_{rés} = 0.47$, ce qui valide notre traitement. Il est à noter que ces mesures ont été faites après le nettoyage des fenêtres. Ce nettoyage a été effectué lors du démontage et du réassemblage de l'expérience à la suite d'une rupture du vide à l'intérieur de la cellule. En effet, les fenêtres s'étaient dégradées et présentaient une absorption totale d'environ3.5%.

A.3.2 Détection des résonances et asservissement

Pour observer les résonances de la cavité, on balaie sa longueur à l'aide de la cale piézo-électrique montée sur le miroir arrière. On détecte alors l'intensité transmise

avec une photodiode sensible. Avec les paramètres de la cavité, la transmission est de l'ordre de 1.6%. L'intensité incidente sur la cavité étant typiquement de l'ordre de quelques μW, la photodiode doit être capable de détecter quelques dizaines de nW. Le montage de cette photodiode est détaillé dans la thèse de Laurent Vernac [Vernac01a]. Son temps de réponse a été estimé à environ $50\,\mu s$.

Pour réaliser les expériences sur la mesure du bruit, il faut pouvoir contrôler l'état stationnaire du système et donc asservir la longueur de la cavité. Afin de produire un signal d'erreur, une tension continue de référence est soustraite au signal de transmission du faisceau pompe. Cette méthode permet d'asservir la cavité sur le flanc du pic de transmission.

Toutefois, les non-linéarités étant importantes, les pics de résonances sont fortement modifiés par rapport aux pics d'Airy correspondant aux résonances d'une cavité vide. Les points de fonctionnement intéressants pour la réduction du bruit quantique sont, de manière générale, situés au voisinage des points tournants du système. En particulier, il est nécessaire de pouvoir asservir la cavité proche du sommet du pic. L'asservissement devient alors instable. Afin de s'approcher le plus possible ce point, une attention particulière a été portée à la stabilité mécanique de la cavité [Coudreau97].

Pour asservir la cavité, on peut également penser à utiliser les pics de transmission d'un faisceau auxiliaire dont la non-linéarité est négligeable. Pour cela, il faut désaccorder ce faisceau loin des transitions atomiques. Cette méthode a effectivement été développée et sera présentée dans le chapitre 3.

A.3.3 Schéma expérimental

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 2.6. Le laser Titane:Saphir produit la source lumineuse pour le faisceau pompe et les faisceaux pièges. Le laser repompeur est superposé aux faisceaux pièges et envoyé dans la cellule contenant le césium. Le faisceau pompe *polarisé linéairement* interagit avec les atomes à l'intérieur de la cavité optique. Sa puissance incidente est réglée grâce à la lame demi-onde placée en amont du cube polariseur $PBS1$. Une faible partie du faisceau est transmise par la cavité et sert, comme indiqué ci-dessus, à étudier ses résonances et asservir sa longueur.

Le faisceau réfléchi est séparé du faisceau incident à l'aide d'une lame séparatrice. Son coefficient de réflexion doit être important afin de minimiser les pertes sur le faisceau réfléchi et ne pas dégrader les réductions de bruit observées. La lame utilisée possède les caractéristiques suivantes: $R_s = 0.9$ pour la polarisation verticale (suivant y) et $R_p = 0.7$ pour la polarisation horizontale (suivant x). Dans toute la suite, nous allons étudier les fluctuations quantiques du mode vide de polarisation orthogonale à celle du champ moyen. Ce mode doit être le moins atténué possible:

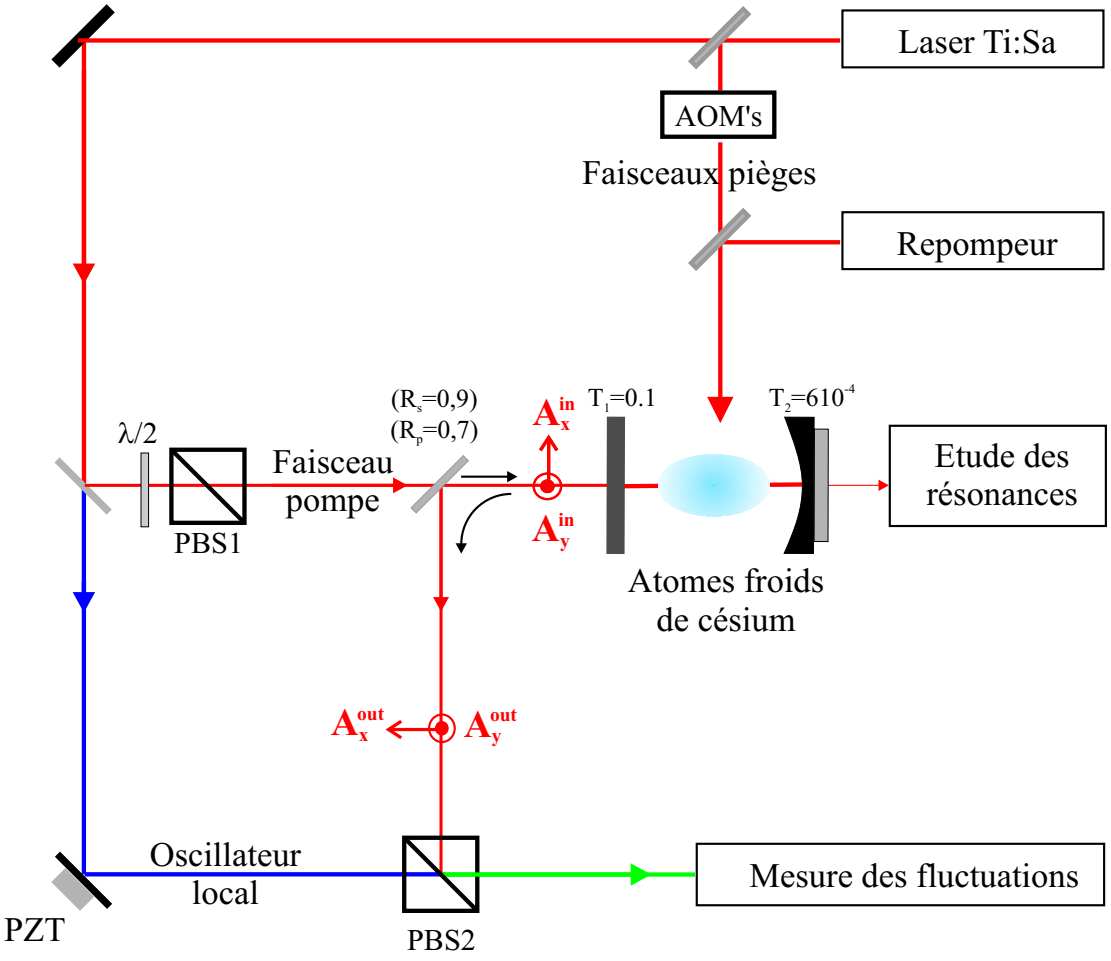


Fig. 2.6 – Schéma de principe de la configuration expérimentale.

sa polarisation est donc choisie verticale pour qu'il soit bien réfléchi par la lame séparatrice. C'est pourquoi nous considérerons dorénavant uniquement le cas où le faisceau pompe est polarisé horizontalement.

Finalement le faisceau pompe est mélangé avec un oscillateur local afin d'effectuer une détection homodyne des fluctuations quantiques. Ce principe de mesure sera détaillé au paragraphe C.1.

B Résonances de la cavité

Les résonances de la cavité sont fortement modifiées du fait des non-linéarités atomiques. Ainsi, pour *une polarisation incidente circulaire*, la cavité devient bistable à partir d'un certain seuil pour l'intensité (voir paragraphe B.3.2 du chapitre 1).

Lorsque la *polarisation incidente est linéaire*, le système est plus complexe et nous observons notamment des instabilités de la polarisation. Ce phénomène, mis en évidence précédemment avec des vapeurs atomiques de sodium au début des années 80 [Cecchi82, Hamilton83], est dû à la compétition des processus de pompage optique entre les différents sous niveaux Zeeman du fondamental [Kitano81, Giacobino85]. Nous présenterons dans cette section l'étude de ces résonances puis leur interprétation.

B.1 bascule de polarisation

Lorsque la longueur de la cavité est balayée continûment, on observe les résonances de la cavité à l'aide de l'intensité transmise par la cavité. Pour étudier les instabilités de polarisation nous effectuons une analyse de polarisation du faisceau. Cette analyse est réalisée à l'aide d'un cube polariseur, d'une lame quart d'onde et de deux photodiodes (PhD 1 et PhD 2), comme illustré sur la figure 2.7. Ces photodiodes sont identiques à celle décrite au paragraphe A.3.2.

Pour effectuer une analyse de polarisation linéaire, on enlève la lame quart d'onde. Dans ce cas si la polarisation reste linéaire alors le faisceau doit être totalement transmis par le cube et enregistré par la photodiode 1. Le signal vu par la photodiode 2 est alors nul. La figure (a) de la figure 2.8 montre un enregistrement typique pour une puissance incidente $P_{in} = 5\ \mu W$ et une puissance des pièges $P_{pièges} = 1.2\ mW$. On balaie la cavité de la gauche vers la droite. Au départ la polarisation reste linéaire car le signal observé sur la voie 2 est quasi-nul. Au point A, on observe un saut de l'intensité intracavité. Cette brusque discontinuité apparaît simultanément sur les deux voies et l'on constate que les intensités V_1 et V_2 sont maintenant presque égales. La pompe n'est donc plus polarisée horizontalement.

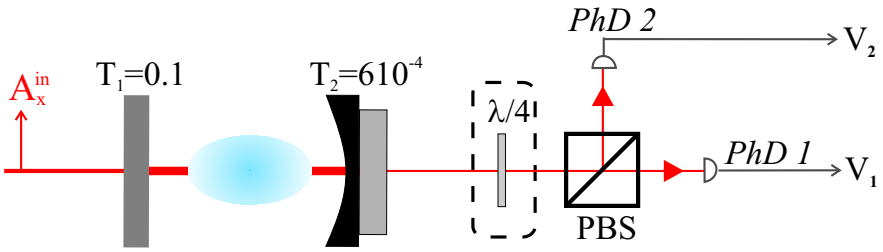


Fig. 2.7 – Dispositif expérimental pour l'analyse de la polarisation transmise par la cavité. Si la lame quart d'onde est enlevée, les photodiodes PhD 1 et PhD 2 mesurent les intensités des modes polarisés horizontalement et verticalement. Si la lame quart d'onde est tournée de 45°, alors ces photodiodes mesurent les intensités des modes polarisés circulairement.

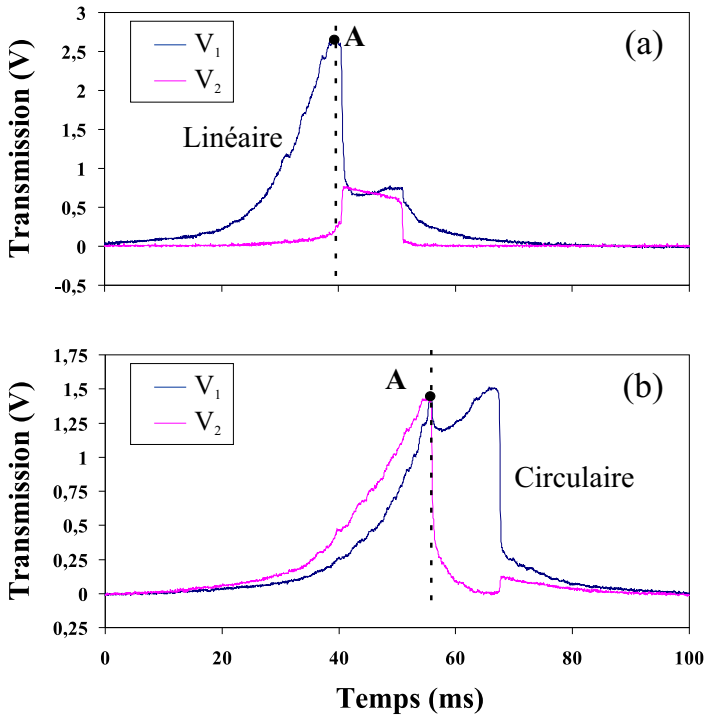


Fig. 2.8 – Courbe (a): analyse linéaire de la polarisation transmise en fonction de la longueur de la cavité. Courbe (b): analyse circulaire de la polarisation. La puissance incidente du faisceau pompe vaut 5 μW et le nombre d'atomes est estimé à 5 10^6.

Afin de déterminer la nature de la polarisation après cette discontinuité, on effectue une analyse circulaire de la polarisation à l'aide d'une lame quart d'onde tournée à 45° (figure 2.7). Les photodiodes 1 et 2 mesurent alors les intensités des composantes polarisées circulairement. Les courbes obtenues sont présentées sur la partie (b) de la figure 2.8.

Sur la partie gauche de la courbe, on constate que les intensités sur les voies 1 et 2 sont peu différentes, ce qui est en accord avec le fait que la polarisation reste quasiment linéaire. Par contre, il apparaît un seuil (point A) à partir duquel l'intensité d'une composante circulaire de polarisation tend rapidement vers zéro; la polarisation devenant très proche d'une circulaire.

Nous concluons de cette analyse qu'il existe un seuil à partir duquel la polarisation incidente, initialement linéaire, bascule vers une polarisation circulaire. Nous allons voir maintenant comment l'allure générale de ces résonances peut être simplement interprétée.

B.2 Interprétation phénoménologique

On s'intéresse ici à l'étude des courbes de résonance des composantes circulaires σ_+ et σ_- (partie (b) de la figure 2.8). D'une côté, les résonances de ces composantes dépendent des déphasages atomiques qu'elles subissent à l'intérieur de la cavité. Or ceux-ci sont directement liés à la répartition des populations entre les différents sous-niveaux Zeeman du fondamental. D'un autre côté, cette répartition dépend de l'intensité intracavité des composantes circulaires et donc de la position sur la courbe de résonance. Le système est donc couplé de façon non-linéaire et, *a priori*, complexe. C'est pourquoi l'étude théorique complète ne sera pas détaillée ici mais présentée au chapitre 4.

Sans rentrer dans ces calculs, il est néanmoins possible d'interpréter qualitativement l'allure générale de la résonance présentée sur la figure 2.8. Afin de simplifier au maximum l'analyse, nous supposons ici que la saturation du faisceau pompe est assez faible pour pouvoir se placer dans le cadre de l'approximation du pompage optique.

Pour fixer les idées, considérons le cas où la répartition des populations dans les sous niveaux du fondamental est déterminée exclusivement par les processus de pompage optique dus au champ pompe. En d'autres termes, cela revient à négliger les processus de relaxation de l'orientation dans le fondamental (pompage optique dû aux faisceaux pièges, relaxation due champ magnétique transverse, etc...) devant le taux de pompage optique du faisceau pompe. Nous préciserons la validité de ces hypothèses au paragraphe suivant.

Dans ces conditions, on peut calculer la répartition des populations dans le cas où le faisceau pompe est polarisé linéairement. Si on essaie d'effectuer le calcul dans

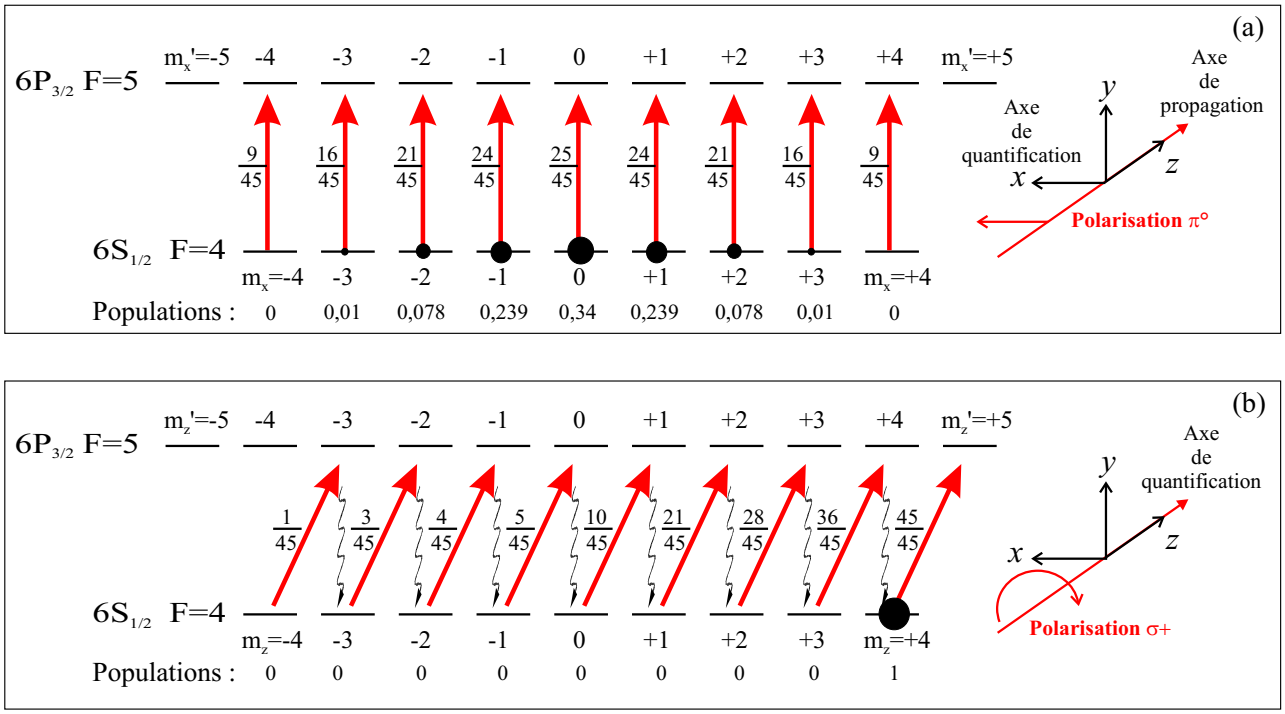


Fig. 2.9 – Répartition des populations des sous niveaux Zeeman dans le cas d'une polarisation linéaire (a) où l'axe de quantification est celui de la polarisation, et dans celui d'une circulaire (b) où l'axe de quantification est celui de l'axe de propagation.

la base des sous niveaux Zeeman pour laquelle l'axe de quantification coïncide avec l'axe de propagation de la lumière, il faut tenir compte des cohérences créées par le champ pompe entre ces différents sous niveaux. Il est beaucoup plus simple de changer de base et d'utiliser comme axe de quantification l'axe de polarisation du faisceau incident (voir partie (a) de la figure 2.9). Dans cette base, la polarisation du faisceau est une polarisation π. Si on néglige la saturation de la transition, le calcul des populations stationnaires p_i dans le niveau fondamental se réduit à la résolution d'une équation de taux. Les résultats sont présentés sur la figure 2.9.

Le déphasage total est égal à la somme des déphasages pour chaque transition $6S_{1/2}\ F = 4,\ m_i \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5,\ m_i$ (caractérisée par le coefficient de Clebsh-Gordan $c_{m_i \rightarrow m_i}$), pondérée par les populations p_i:

$$\phi_{at}^{lin} = N_{at} g^2 \frac{\Delta}{\gamma^2 + \Delta^2} \left(\Sigma p_i c_{m_i \rightarrow m_i}^2\right) \simeq 0.52\ \phi_0 \tag{2-3}$$

où $\phi_0 = N_{at} g^2\ \Delta/(\gamma^2 + \Delta^2)$ est le déphasage correspondant à une transition dont le coefficient de Clebsch-Gordan est égal à 1 (voir paragraphe B.3 du chapitre 1).

Revenons à l'étude des courbes de résonance des composantes circulaires σ_+ et σ_-. Lorsque la polarisation est linéaire, les déphasages atomiques associés à ces composantes sont égaux et valent ϕ_{at}^{lin}:

$$\phi_{\sigma_+}^{lin} = \phi_{\sigma_+}^{lin} = \phi_{at}^{lin} \tag{2-4}$$

En négligeant tout phénomène de saturation, les pics de résonance de ces composantes sont identiques et correspondent à des pics d'Airy centrés autour de la valeur ϕ_{at}^{lin} (voir figure 2.10).

Supposons maintenant que la polarisation ait basculé à l'intérieur de la cavité: une composante circulaire devient dominante. Les processus de pompage optique modifient alors la répartition des populations entre les sous niveaux et donc le déphasage atomique. Dans la suite, on notera ϕ_{at}^{circ} le déphasage atomique pour cette composante.

Pour étudier cette situation, il est préférable de choisir l'axe de propagation du faisceau comme axe de quantification (voir partie (b) de la figure 2.9). Supposons que la composante dominante soit la composante σ_+; par effet de pompage optique, la plupart des atomes se trouvent dans le niveau $6S_{1/2}\ F = 4,\ m_z = +4$. Ce mode interagit essentiellement avec la transition $m_z = 4 \rightarrow m'_z = 5$ dont le coefficient de Clebsch-Gordan est égal à 1. En utilisant une relation similaire à la relation 2-3 dans cette base de quantification, on montre aisément que son déphasage, noté $\phi_{\sigma_+}^{circ}$, est approximativement égal à :

$$\phi_{\sigma_+}^{circ} \equiv \phi_{at}^{circ} \simeq\ \phi_0 \simeq 2\ \phi_{at}^{lin} \tag{2-5}$$

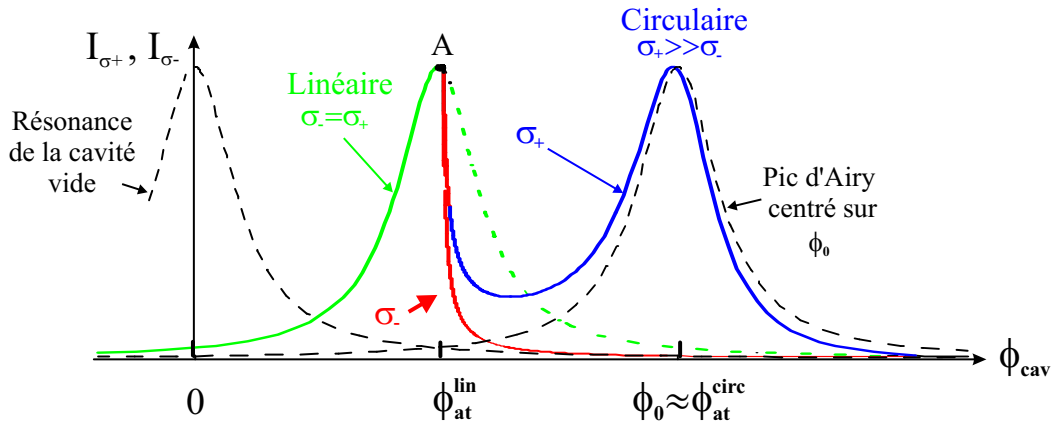


Fig. 2.10 – Interprétation des courbes de résonance pour les composantes circulaires σ_+ et σ_-. Lorsque la polarisation est linéaire, les résonances de ces deux composantes sont confondues et correspondent au pic d'Airy centré sur ϕ_{at}^{lin}. Toutefois cette polarisation linéaire n'est pas stable dans un certain domaine du désaccord de la cavité (trait pointillé), ce qui correspond typiquement à $\phi_{cav} \geq \phi_{at}^{lin}$ sur la figure. Dans ce domaine, la polarisation devient elliptique. Les processus de pompage optique dus à la composante circulaire dominante, par exemple σ_+, modifient la répartition des populations entre les différents sous niveaux Zeeman du fondamental (voir détails dans le texte). Ainsi cette composante "voit" maintenant tous les atomes et son déphasage atomique vaut alors ϕ_0. C'est pourquoi la résonance de cette composante tend vers le pic d'Airy centré en ϕ_0 (tiret). Inversement la composante circulaire σ_- ne "voit" plus les atomes et son déphasage atomique devient négligeable par rapport à la largeur de la cavité. Ainsi elle tend rapidement vers le pic d'Airy centré en 0 (tiret) qui se trouve hors de résonance dans ce domaine du désaccord de la cavité.

Son pic de résonance doit donc se rapprocher du pic d'Airy centré en$\phi_0 \simeq 2\phi_{at}^{lin}$. En pratique le pompage optique dépend de l'intensité, c'est pourquoi cette approximation sera d'autant plus pertinente que l'intensité intracavité est élevée. Cet effet est visible sur la figure 2.10 où l'on a représenté à la fois la résonance de la composante σ_+ et le pic d'Airy centré en ϕ_0.

Pour la composante σ_- la situation est complètement différente. Les atomes se trouvant dans le niveau $m_z = +4$, elle interagit avec la transition $m_z = 4 \rightarrow m'_z = 3$ dont le coefficient de Clebsch-Gordan vaut $1/\sqrt{45}$ (voir figure 2.9). Dans ce cas, son déphasage atomique est très faible :

$$\phi_{\sigma_-}^{circ} \simeq 1/45\phi_0 \simeq 0 \tag{2-6}$$

Cette composante se comporte alors comme si la cavité était vide, la solution étant un pic d'Airy centré en 0. Il est clair sur la figure 2.10 que ce pic est loin de résonance dans le domaine où la polarisation a basculée: l'intensité tombe donc rapidement à zéro.

Cette analyse permet d'interpréter simplement la forme des courbes de résonance: lorsque la polarisation bascule, la composante dominante retrouve la résonance de la cavité tandis que l'autre composante est rejetée hors de résonance. Toutefois, nous n'avons pas décrit ici les causes de ce basculement, cette étude étant détaillée au chapitre 4. Nous montrerons, en particulier, comment ce phénomène s'explique par l'effet de "rotation auto-induite" exercé par le milieu atomique sur la polarisation du faisceau [Rochester01, Matsko02a]. En particulier, nous interpréterons cette bascule comme un seuil d'oscillation laser pour le mode vide orthogonal.

B.3 Dépendance en fonction de l'intensité

B.3.1 Paramètres de saturation - Ordres de grandeur

De façon évidente, le système physique étudié ici est beaucoup plus complexe. En effet les processus de pompage optique dépendent de l'intensité de tous les lasers avec lesquels les atomes interagissent. Les déphasages atomiques dépendent de la répartition des populations entre les différents sous niveaux Zeeman et donc également de ces intensités.

Comme nous l'avons vu, les différents faisceaux présents dans notre expérience sont: le faisceau pompe, les faisceaux pièges et le faisceau repompeur (voir figure2.4). Afin de déterminer quel est le processus de pompage dominant, il faut estimer les différents taux de pompage optique γ_p^i qui sont reliés aux paramètres de saturation s_i par la relation $\gamma_p^i = \gamma s_i$. Le paramètre de saturation est défini à partir de l'intensité par:

$$s_i = \frac{I}{I_{sat}} \frac{1}{1 + (\Delta_i/\gamma)^2} \tag{2-7}$$

avec $I_{sat} = 1.05\ mW/cm^2$ et Δ_i le désaccord du faisceau avec la transition atomique.

Pour le repompeur, on estime le taux de pompage optique à $s_{repompeur} = 0.007$ [Lambrecht t4] et ce processus sera négligé dans la suite. Ainsi, seul le taux de pompage optique dû aux faisceaux pièges est en compétition avec celui du champ pompe. La surface des faisceaux pièges étant d'environ $S_{pièges} = 0.5\ cm^2$ et le désaccord $\Delta_{pièges} \simeq 7\ MHz \simeq 3\gamma$, on obtient $s_{pièges} \simeq 0.2$ pour $1\ mW$ de puissance totale. Le taux de pompage optique des pièges n'est donc pas du tout négligeable.

Afin d'estimer l'ordre de grandeur de la saturation du faisceau pompe, on calcule le paramètre de saturation à résonance en négligeant l'absorption due aux atomes. Dans ce cas l'intensité intracavité maximale est donnée par la relation:

$$P_{max} = \frac{4T_1}{(T_1 + \mathcal{A}_{fenêtres})^2}\ P_{in}\ =\ \frac{T_1 \mathcal{F}^2}{\pi^2} P_{in} \tag{2-8}$$

où l'on a utilisé la relation 2-1. Le waist du mode de la cavité vaut $w_0 = 260\ \mu m$ et nous prendrons comme section faisceau la surface moyenne $\mathcal{S} = \pi w_0^2/2 = 0.1\ mm^2$ (voir paragraphe B.3.3 du chapitre 1). A partir de l'intensité incidente, on peut ainsi déterminer le paramètre de saturation intracavité à résonance:

$$s_{pompe}^{max} = \frac{P_{max}/\mathcal{S}}{I_{sat}^{lin}}\ \frac{1}{1 + (\Delta_{pompe}/\gamma)^2} \tag{2-9}$$

En toute rigueur, il faudrait calculer l'intensité de saturation I_{sat}^{lin} lorsque la polarisation est linéaire pour la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$. Nous n'avons pas effectué ce calcul. Néanmoins, nous verrons au chapitre 4 que, dans le cas d'une transition $J = 1/2 \rightarrow J' = 1/2$, cette intensité de saturation I_{sat}^{lin} est multipliée par 2 par rapport à sa valeur en polarisation circulaire I_{sat}. En effet, ce sont les composantes circulaires qui saturent les transitions optiques et elles ont une intensité moitié par rapport à l'intensité totale du faisceau. Afin de donner un ordre de grandeur nous nous référerons à cet exemple: c'est pourquoi nous poserons par la suite $I_{sat}^{lin} = 2I_{sat} = 2.1\ mW/cm^2$. Ainsi l'expression du paramètre de saturation est finalement donnée par:

$$s_{pompe}^{max} = \frac{P_{max}/\mathcal{S}}{2I_{sat}}\ \frac{1}{1 + (\Delta_{pompe}/\gamma)^2} \tag{2-10}$$

Pour une puissance incidente de $P_{in} = 1\ \mu W$ et un désaccord $\Delta_{pompe} = 45\ MHz \simeq 17\gamma$, le paramètre de saturation du faisceau pompe vaut $s_{pompe}^{max} = 0.044$.

Cependant cette valeur $s_{pompe}^{max} = 0.044$ (pour une puissance incidente de $1\ \mu W$) est surestimée car on n'a pas pris en compte l'absorption atomique. Expérimentalement, on peut déterminer plus précisément la valeur du paramètre de saturation intracavité du champ pompe en utilisant la tension de sortie délivrée par la photodiode $PhD1$ placée en transmission de la cavité (voir figure 2.7). Elle est directement

proportionnelle à l'intensité intracavité. Pour une puissance incidente donnée, les relations 2-8 et 2-9 nous donnent la valeur de la saturation à résonance pour une cavité sans atomes; on relie cette valeur à la tension mesuré par la photodiode correspondant au sommet du pic d'Airy de la cavité vide. Cette calibration nous permet ainsi d'évaluer la saturation du faisceau pompe en présence d'atomes et ce pour un désaccord de la cavité quelconque. Nous nous servirons de cette calibration au paragraphe B.3.3 pour estimer le nombre d'atomes N_{at}.

Un mode de fonctionnement typique de l'expérience correspond à une puissance de pièges de l'ordre de 1 mW. Dans ce cas, les phénomènes de pompage optique de la pompe et des faisceaux pièges s'équilibrent pour une puissance incidente de la pompe de l'ordre de quelques μW ($s_{pièges} \simeq s_{pompe}^{max} \simeq 0.2$ pour $P_in \simeq 5\ \mu W$). Or cette valeur correspond à l'ordre de grandeur de l'intensité incidente pour nos paramètres expérimentaux; le pompage optique dû aux faisceaux pièges joue donc un rôle important. Nous verrons ces effets sur les courbes de résonance que nous allons maintenant étudier plus en détails.

B.3.2 Evolution des courbes de résonance

Nous présentons ici l'étude des courbes de résonance en fonction de l'intensité. Cette série d'enregistrements a été réalisée avec une puissance des faisceaux pièges constante égale à 1.2 mW. Dans ces conditions, nous pouvons évaluer le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau pompe à environ $N_{at} = 5\ 10^6$. La méthode de mesure de ce nombre d'atomes sera explicitée au prochain paragraphe.

Si l'intensité du faisceau pompe est faible, on s'attend à ce que l'état stationnaire soit déterminé par les mécanismes du piège magnéto-optique. Or il existe des asymétries dans le système comme un léger déséquilibre des puissances entre les différents faisceaux pièges, l'inhomogénéïté du champ magnétique de piégeage (qui joue un rôle d'autant plus important qu'on s'éloigne du centre géométrique des bobines anti-Hemholtz) ou encore les effets dus à des champs magnétiques parasites (par exemple ceux produits par l'aimant de la pompe ionique avant que l'on ne place un blindage magnétique). Ces asymétries se répercutent sur la répartition des populations et le nuage atomique présente ainsi une biréfringence circulaire intrinsèque. Celle-ci a pour effet de décaler les résonances des deux composantes circulaires l'une par rapport à l'autre.

On observe effectivement ce décalage sur la figure 1(b) de la figure 2.11, correspondant à une analyse circulaire de la polarisation. Cet enregistrement correspond à une puissance de pompe très faible (environ 400 nW) et son paramètre de saturation ($s_{pompe}^{max} \simeq 0.02$) est très petit devant $s_{pièges} \simeq 0.25$. Comme nous l'avons évoqué ci dessus, le phénomène de basculement de la polarisation est due à la compétition

des processus de pompage optique entre les différents sous niveaux Zeeman. Pour de faibles puissances incidentes, ces effets de pompage optique sont négligeables et ce basculement ne peut avoir lieu. Les pics de résonances des deux composantes circulaires correspondent alors à des pics d'Airy simplement décalés du fait de la biréfringence du nuage de césium. C'est pourquoi la polarisation ne reste pas linéaire dans la cavité, même à faible puissance (voir courbe (a) de la figure 2.11).

Lorsqu'on augmente continûment l'intensité de la pompe, nous retrouvons le basculement de la polarisation décrit au paragraphe B.1. Il est repéré par le point A sur les courbes 2(a) et 2(b). La composante circulaire dominante correspond à celle enregistrée par la voie 1 (voir figure 2.7). Nous n'avons pas déterminé les axes lent et rapide de la lame quart d'onde et nous ne pouvons savoir s'il s'agit d'une polarisation σ_+ ou σ_-. Néanmoins, nous observons que la polarisation bascule toujours sur cette composante. Cette brisure de symétrie entre les deux polarisations circulaires est attribuée aux asymétries intrinsèques du système évoquées ci-dessus.

Pour une intensité incidente de quelques μW (typiquement supérieures à 3-4 μW), il apparaît des non-linéarités dues au pompage optique. Lorsque la polarisation bascule, la composante circulaire pompe les atomes dans le sous-niveau $6S_{1/2}F = 4, m = +4$ (voir figure 2.9). Comme les coefficients de Clebsch-Gordan augmentent avec la valeur du nombre quantique m_F des sous-niveaux Zeeman, le déphasage de la composante circulaire dominante $\phi_{\sigma_+}^{circ}$ croît avec l'efficacité du processus de pompage [Lambrecht95]. Le déphasage dépend donc de l'intensité intracavité et il apparaît un phénomène de bistabilité (point B) pour la composante circulaire dominante. Inversement, les coefficients de Clebsch-Gordan diminuent pour la composante circulaire σ_- lors du pompage optique. Son déphasage diminue donc avec l'intensité et il apparaît également un flanc raide sur son pic résonance.
Ces phénomènes sont illustrés sur les courbes 3(a) et 3(b) de la figure 2.11 pour une puissance incidente de 5 μW.

On continue à augmenter la puissance de la pompe. Les processus de pompage optique de la pompe commence alors à dominer ceux des faisceaux pièges. Avant le seuil de bascule de polarisation, la pompe polarisée linéairement va tendre à symétriser la répartition des populations des différents sous niveaux et et donc à diminuer la biréfringence circulaire du piège (courbes 4(b) et 5(b)). En effet, la différence d'intensité entre les deux composantes circulaire avant la bascule est plus faible. En outre, lorsque la polarisation devient circulaire, le pompage optique commence à saturer: les atomes sont de mieux en mieux pompés dans le niveau $m_F = +4$, le déphasage de l'onde σ_+ augmente par rapport au déphasage linéaire ϕ_{at}^{lin} et tend alors vers sa valeur limite:

$$\phi_{\sigma+}^{circ} \rightarrow \phi_0 \simeq 2\phi_{at}^{lin}. \tag{2-11}$$

Pour des puissances incidentes supérieures à une dizaine de μW, il faut tenir compte d'un nouveau type de non-linéarité: le déphasage atomique décroît en fonc-

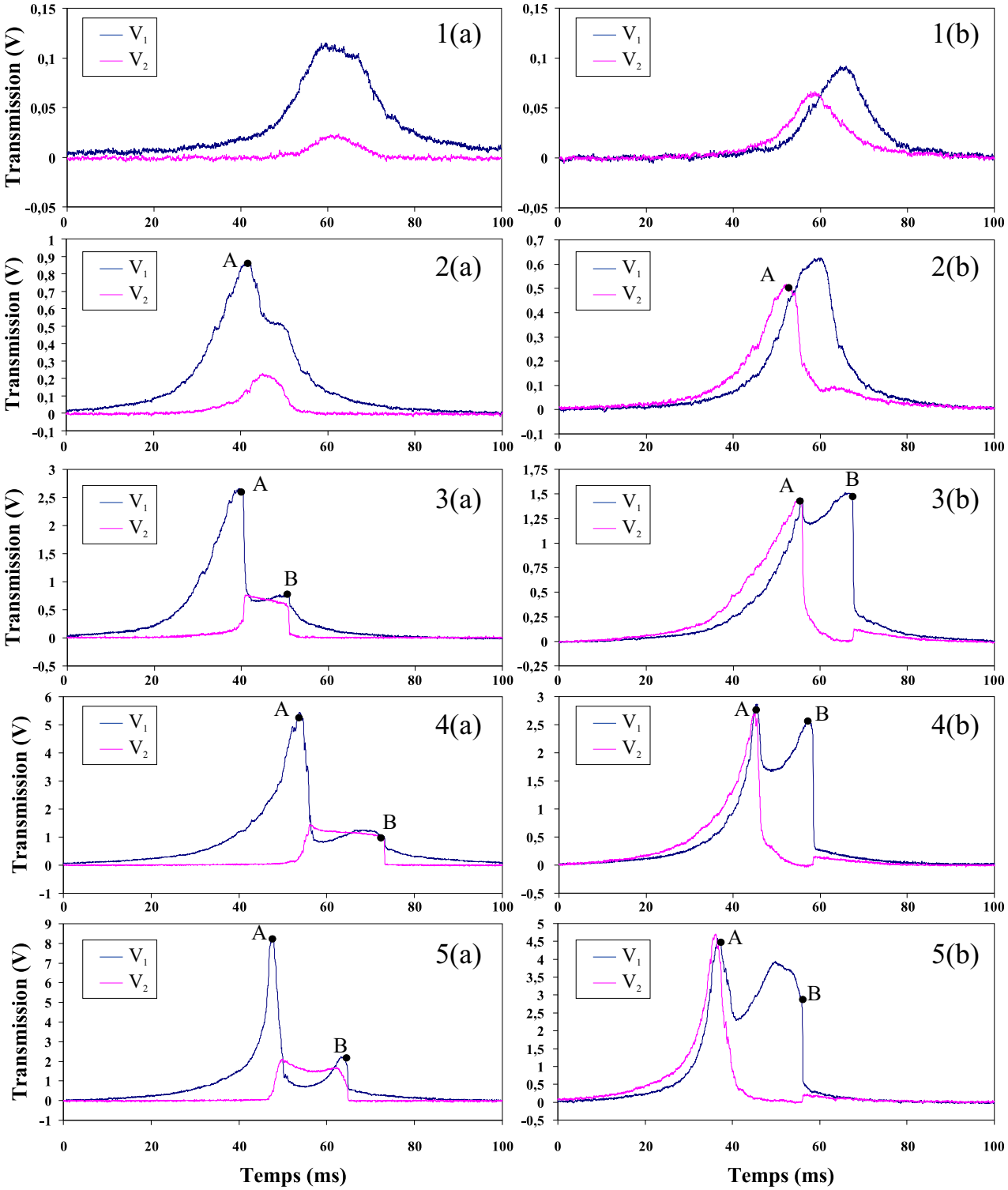


Fig. 2.11 – Evolution des courbes de résonance en fonction de l'intensité. Les courbes (a) et (b) correspondent à une analyse linéaire et circulaire respectivement. La puissance des pièges vaut $P_{pièges} = 1.2\ mW$ et le paramètre de saturation est $s_{pièges} = 0.25$. Courbes 1): $P_{in} = 0.4\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.02$; 2): $P_{in} = 1.9\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.08$; 3): $P_{in} = 5\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.22$; 4): $P_{in} = 8.5\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.37$; 5): $P_{in} = 13\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.57$.

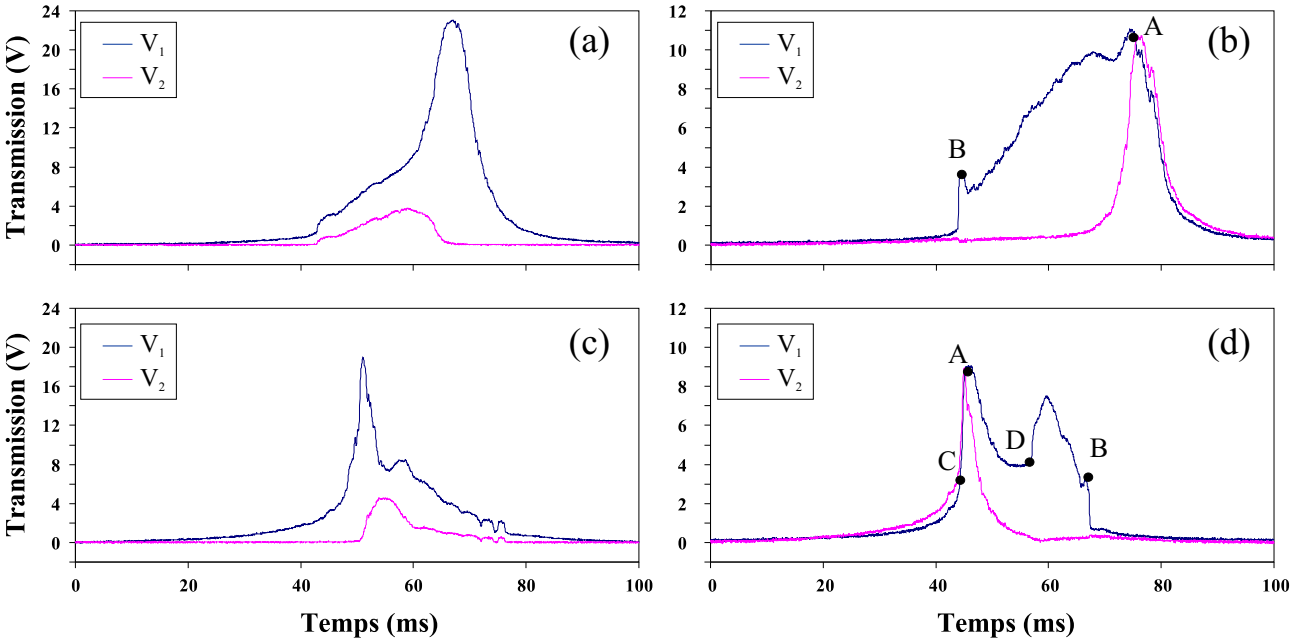


Fig. 2.12 – Courbes de résonance en fonction du sens de balayage: de droite à gauche pour les courbes (a) et (b), et de gauche à droite pour les courbes (c) et (d). Les courbes (a) et (c) ((b) et (d)) représentent l'analyse linéaire (circulaire) de polarisation. La puissance des pièges est $P_{pièges} = 1.2\ mW$ et la puissance incidente du faisceau pompe vaut $17\,\mu W$.

tion de l'intensité à cause de la saturation de la transition optique. Contrairement à la non linéarité de pompage optique qui ne joue un rôle que lorsque la polarisation est circulaire, celle-ci se manifeste aussi bien dans les deux régimes de polarisations: linéaire ou circulaire. On observe effectivement que les flancs des pics de résonance deviennent de plus en plus raides (voir courbes 5).

Finalement, si la puissance dépasse $15\mu W$, on constate que l'allure des courbes est fortement modifiée (voir figure 2.12). On observe une forte variation des courbes en fonction du sens de balayage de la cavité. En effet, la pompe pousse les atomes hors du pièges, ce qui introduit une autre source de non-linéarité.

Afin de compléter l'étude des phénomènes intervenant pour des intensités élevées, il faut augmenter la puissance des pièges. Nous avons donc réalisé une nouvelle série d'enregistrements pour une puissance de pièges de $10\ mW$ et un nombre d'atomes de l'ordre de $3\ 10^7$. La figure 2.13 présente les résonances pour différentes puissances incidentes $P_{in} = 7;\ 14;\ 21;\ 28$ et $42\ \mu W$. On remarque qu'il existe un écart important entre les intensités des composantes circulaires dans le domaine où la polarisation est censée être quasiment linéaire (avant le point A). Nous avons attribué ce phénomène à la forte biréfringence circulaire du milieu atomique dans cette situation. Celle-ci diminue lorsqu'on augmente l'intensité, en accord avec les processus évoqués ci-dessus: le pompage optique dû à la pompe tend à symétriser les populations des sous niveaux Zeeman.

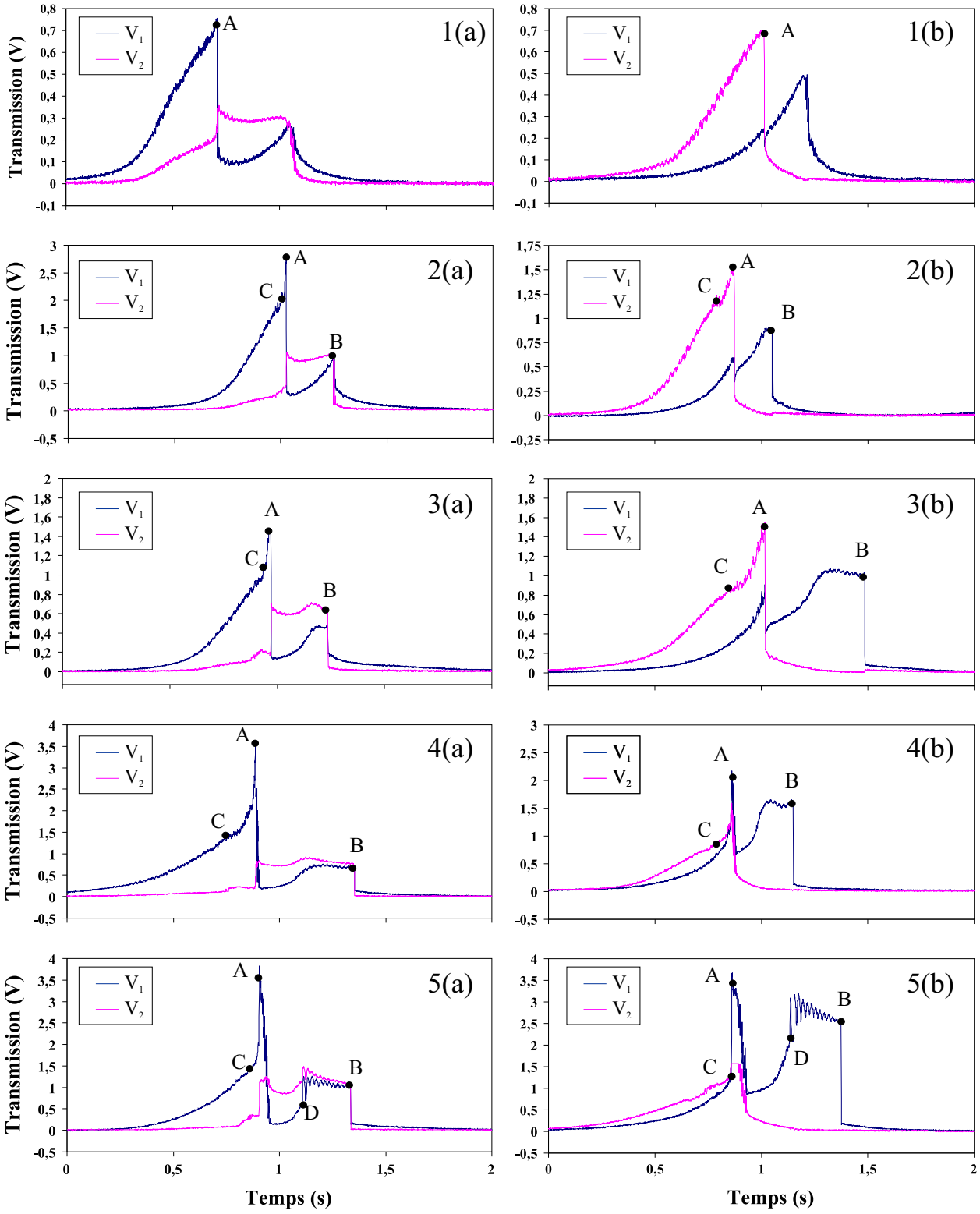


Fig. 2.13 – Evolution des courbes de résonance en fonction de l'intensité. Les courbes (a) et (b) représentent l'analyse linéaire et circulaire respectivement. La puissance des pièges vaut $P_{pièges} = 10\ mW$ et le paramètre de saturation est $s_{pièges} \simeq 2$. Courbes 1): $P_{in} = 7\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} \simeq 0.3$; 2): $P_{in} = 14\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} = 0.6$; 3): $P_{in} = 21\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} = 0.9$; 4): $P_{in} = 28\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} = 1.2$; 5): $P_{in} = 42\ \mu W$, $s^{max}_{pompe} = 0.35$.

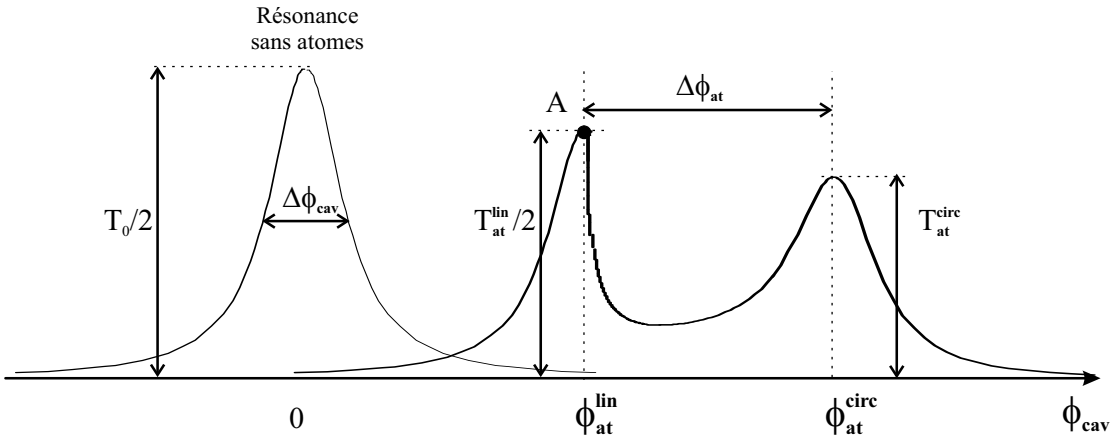


Fig. 2.14 – Notations utilisées pour la mesure du nombre d'atomes. Nous avons représenté ici l'allure typique de la résonance de la composante circulaire dominante pour la cavité vide ou contenant des atomes.

Les effets de saturation de la transition optique apparaissent à partir de14 μW et ne sont plus masqués par la diminution du nombre d'atomes. Ces phénomènes de saturation se manifestent par l'apparition d'un flanc raide sur les pics de résonance, et ce aussi bien sur la partie linéaire (point C) que circulaire (point D). Dans le domaine où la polarisation est circulaire, les non-linéarités dues au pompage optique et à la saturation s'opposent: dans le premier cas le déphasage augmente avec l'intensité tandis que la saturation de la transition optique tend à le diminuer. Pour des puissances incidentes importantes (voir courbes 5 de la figure2.13), on observe alors les instabilités précédemment étudiées durant la thèse d'Astrid Lambrecht [Lambrecht95].

B.3.3 Mesure du nombre d'atomes

Pour mesurer le nombre d'atomes, trois techniques ont été utilisées lors des travaux précédents. La mesure de la fluorescence des pièges conduit au nombre total d'atomes dans le piège et non au nombre d'atomes interagissant effectivement avec le faisceau pompe. Pour avoir accès à ce nombre d'atomes, on peut mesurer l'absorption de la pompe par le milieu ou bien le déplacement des résonances dû au déphasage atomique.

A l'aide des courbes de résonance, l'absorption peut être estimée par deux méthodes différentes: en utilisant les maxima de transmission de la pompe polarisée linéairement T_{at}^{lin} ou circulairement T_{at}^{circ} que l'on compare à celui de la cavité vide T_0 (voir figure 2.14). En effet, la transmission de la cavité contenant des atomes est donnée par:

$$\frac{T_{at}}{T_0} = \frac{4T_1}{(T_1 + \mathcal{A}_{fenêtres} + \mathcal{A}_{at})} \qquad (2\text{-}12)$$

En utilisant l'équation 2-1, la valeur de l'absorption s'écrit simplement:

$$\mathcal{A}_{at}^{lin} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0}(\sqrt{\frac{T_0}{T_{at}^{lin}}} - 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{at}^{circ} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0}(\sqrt{\frac{T_0}{2T_{at}^{circ}}} - 1) \tag{2-13}$$

A partir de ces deux expressions de l'absorption en intensité, nous pouvons évaluer de deux façons le nombre d'atomes à partir de la relation 1-43:

$$N_{at}^{lin} = \mathcal{A}_{at}^{lin}\frac{\gamma}{2g_{lin}^2}(1 + (\Delta_{pompe}/\gamma)^2)(1 + s_{pompe}^{lin}) \tag{2-14}$$

$$N_{at}^{circ} = \mathcal{A}_{at}^{circ}\frac{\gamma}{2g_{circ}^2}(1 + (\Delta_{pompe}/\gamma)^2)(1 + s_{pompe}^{circ}) \tag{2-15}$$

Ces formules reposent sur des hypothèses simplificatrices. D'une part, nous avons supposé que les pics de résonance atteignent leur valeur maximale avant la bascule de polarisation pour pouvoir appliquer la relation 2-12. D'autre part le coefficient de Clebsch-Gordan moyen vu par les atomes, lorsque la polarisation est circulaire, dépend de l'intensité à cause des processus de pompage optique, i.e. $g_{circ}^2 \equiv g_{circ}^2(I)$. Pour résoudre ce problème, on suppose le pompage optique saturé (cf partie B.2) et on prend $g_{circ}^2 \simeq g^2 = 4.24Hz$. Cette hypothèse se justifie pour des puissances incidentes du faisceau pompe supérieures à une dizaine de μW.

Lorsque la pompe est polarisée linéairement, nous avons vu que le coefficient de couplage moyen valait $g_{lin}^2 \simeq 0.5g^2$. Enfin pour tenir compte de la saturation de l'intensité intracavité intervenant dans les relations 2-14 et 2-15, nous avons utilisé la calibration des photodiodes $PhD1$ et $PhD2$ décrite dans le paragraphe B.3.1.

Ces deux méthodes nous donnent donc deux estimations du nombre d'atomes, N_{at}^{lin} et N_{at}^{circ}, interagissant avec la pompe. Les résultats sont présentés sur la figure 2.15 pour différentes séries réalisées avec des puissances de pièges différentes. La figure (a) correspond aux mesures exposées dans le paragraphe précédent (voir figure 2.11). Ces deux types de mesure donnent le même ordre de grandeur mais ne coïncident pas. On peut expliquer ce désaccord par le fait que le pic de transmission linéaire bascule avant d'avoir atteint son maximum: l'absorption du milieu $\mathcal{A}_{at}^{lin}$ est ainsi surestimée.

Afin de valider cette hypothèse, on détermine le nombre d'atomes suivant une troisième méthode reposant sur une mesure des déphasages. Pour cela nous utilisons la différence $\Delta\phi_{at}$ entre les déphasages atomiques correspondant à la polarisation linéaire ϕ_{at}^{lin} et circulaire ϕ_{at}^{circ} (voir figure 2.14). On utilise à nouveau l'hypothèse de pompage optique saturé pour relier ce déphasage au nombre d'atomes:

$$\Delta\phi_{at} = \phi_{at}^{circ} - \phi_{at}^{lin} \simeq \phi_0 - 0.52\phi_0 \simeq 0.5\phi_0 \tag{2-16}$$

$$\text{avec} \quad \phi_0 = \frac{N_{at}^{déphasage}g^2}{\gamma}\frac{1}{1 + (\Delta_{pompe}/\gamma)^2}\frac{1}{1 + s_{pompe}^{circ}} \tag{2-17}$$

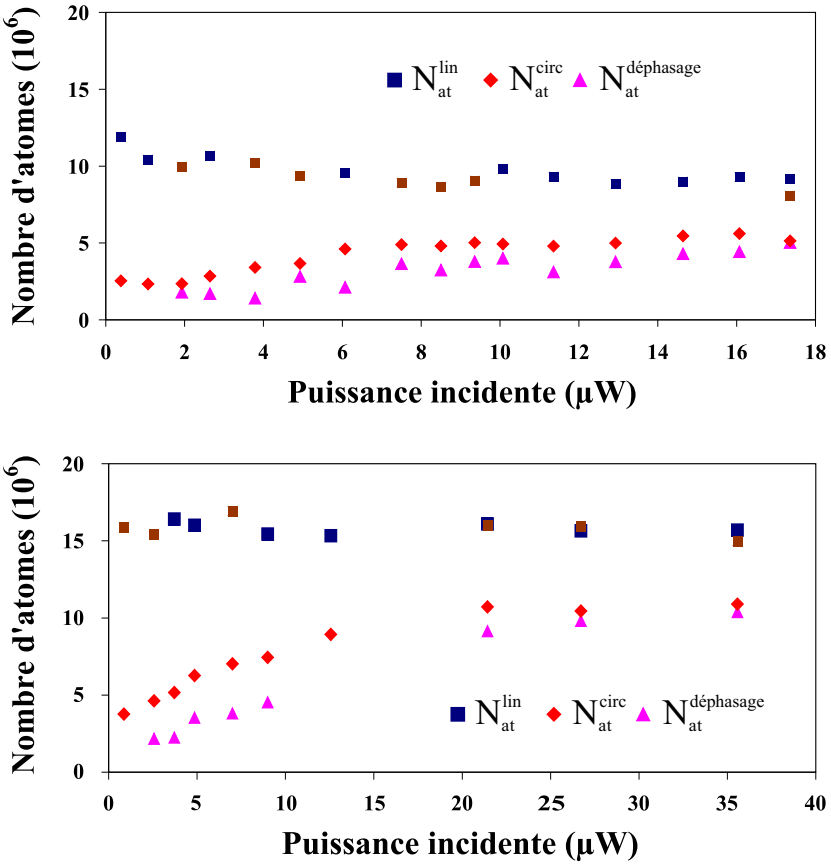


Fig. 2.15 – Mesure du nombre d'atomes pour deux puissances de pièges distinctes. Figure (a): $P_{pièges} = 1.2\ mW$. Figure (b): $P_{pièges} = 2.5\ mW$. Les valeurs N_{at}^{lin} et N_{at}^{circ} sont estimées en mesurant l'absorption dans le cas où la polarisation est linéaire et lorsque elle est devenue circulaire respectivement. La valeur $N_{at}^{déphasage}$ est reliée à la mesure du déphasage $\Delta\phi_{at}$ entre les pics de résonance linéaire et circulaire.

Pour mesurer ce déphasage $\Delta\phi_{at}$, on normalise l'écart mesuré entre les deux pics à l'aide de la largeur de la cavité à mi-hauteur $\Delta\phi_{cav} = 2\pi/\mathcal{F}_0$. Le nombre d'atomes calculé de cette façon $N_{at}^{déphasage}$ est comparé avec les valeurs N_{at}^{lin} et N_{at}^{circ} sur la figure 2.15. On obtient un bon accord entre les valeurs estimées de deux manières différentes lorsque la polarisation est circulaire. En effet, N_{at}^{circ} et $N_{at}^{déphasage}$ tendent vers la même limite lorsque l'intensité de la pompe augmente et que le pompage optique sature. Nous en concluons que cette limite donne la meilleure estimation du nombre d'atomes qui est bien de l'ordre de 10^6-10^7.

Les expériences suivantes ont été réalisées avec une analyse en polarisation linéaire à la sortie de la cavité. Afin d'optimiser le recouvrement entre le nuage atomique et le mode de la cavité, nous maximisons l'absorption du faisceau dans la cavité et donc minimisons la hauteur du pic de transmission en linéaire, i.e. T_{at}^{lin}. Le rapport T_{at}^{lin}/T_0 nous sert donc à évaluer l'interaction. D'après l'analyse que nous venons de présenter, on ne peut utiliser cette valeur directement pour estimer le nombre d'atomes. Néanmoins elle donne le bon ordre de grandeur à un facteur 2 près pour des puissances de l'ordre de quelques μW (voir figure 2.15).

Nous venons donc de présenter une étude détaillée des courbes de résonance de la cavité. Celle-ci nous a permis d'introduire les différents phénomènes physiques intervenant dans l'expérience. La suite de ce chapitre sera maintenant consacrée à l'étude de la réduction du bruit dans un tel système.

C Réduction du bruit

La réduction du bruit sous la limite quantique standard a été observée expérimentalement pour la première fois avec des atomes froids en cavité lors du travail de Thèse d'Astrid Lambrecht en 1995 [Lambrecht96a]. Elle a été obtenue dans le cas où la pompe incidente est *polarisée circulairement*. Grâce aux effets de pompage optique, on peut alors considérer le milieu atomique comme un ensemble d'atomes à deux niveaux. Deux configurations expérimentales ont été envisagées; la mesure du bruit quantique s'effectuant alors que les faisceaux pièges sont coupés ou non. Dans ce dernier cas, le mode opératoire est simplifié mais il faut tenir compte du bruit ajouté par la présence des faisceaux pièges: cette étude a été réalisée par Thomas Coudreau et Antonio Zelaquett-Khoury [Khoury98].

Nous allons maintenant présenter le dispositif de détection homodyne qui nous permet de mesurer le bruit quantique de la lumière et les résultats obtenus sur la réduction du bruit quantique de deux modes du champ lorsque la *polarisation incidente est linéaire*. Cette étude a été commencée par L. Vernac à la fin de son travail de thèse.

Dans toute cette partie, les expériences ont été effectuées en présence des fais-

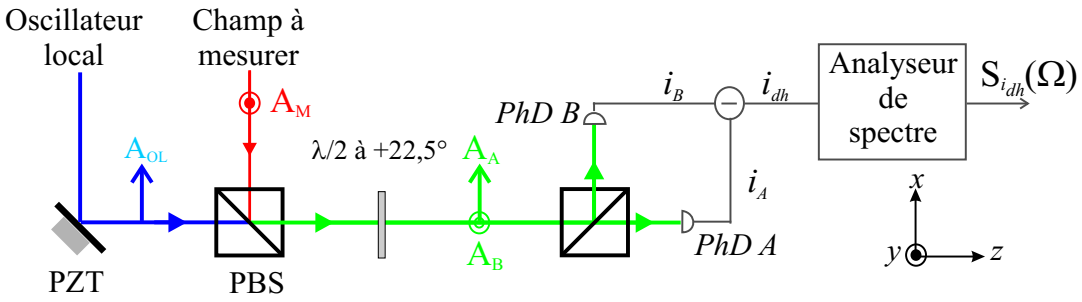


Fig. 2.16 – Schéma de principe de la détection homodyne.

ceaux pièges. La cavité est asservie sur un point de fonctionnement où la polarisation reste linéaire. Dans la dernière section nous exposerons les résultats obtenus lorsque la polarisation est devenue circulaire à l'intérieur de la cavité, à l'issue du phénomène de bascule déjà décrit.

C.1 Détection homodyne

C.1.1 Principe

Bien que le principe de la détection homodyne soit maintenant bien connu, nous allons détailler le processus de mesure afin de poser les définitions qui nous serviront par la suite. Cette détection permet de mesurer les fluctuations de toutes les quadratures d'un faisceau lumineux en le faisant interférer avec un faisceau lumineux intense, appelé "oscillateur local" (noté A_{OL}). L'interféromètre est du type Mach-Zehnder. Une cale piézo-électrique permet de faire varier le chemin parcouru par l'oscillateur local et donc son déphasage par rapport au champ dont on veut mesurer le bruit, que nous noterons A_M. Après avoir été séparés par une lame, les deux faisceaux sont recombinés sur un cube polariseur avec des polarisations orthogonales (voir figure 2.16).

Ils passent alors à travers une lame demi-onde dont les axes sont tournés de $+22.5°$ par rapport aux directions horizontale et verticale. A la sortie de cette lame, les modes A_A et A_B sont séparés par un cube polariseur et envoyés vers les deux photodiodes $PhD\ A$ et $PhD\ B$. Ces deux modes sont des combinaisons des modes A_{OL} et A_M (voir appendice A):

$$A_A = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(A_M + A_{OL}) \tag{2-18}$$

$$A_B = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(A_M - A_{OL}) \tag{2-19}$$

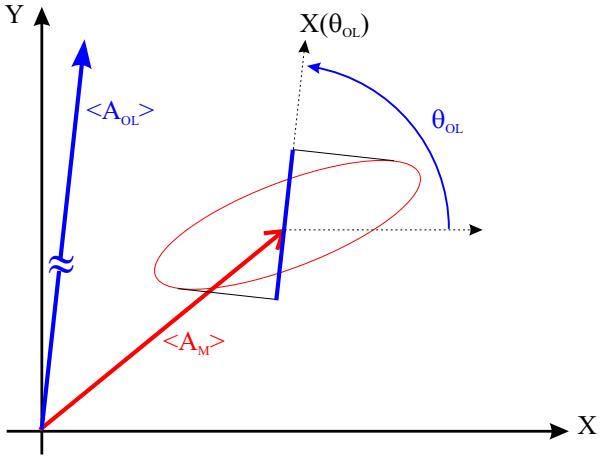


Fig. 2.17 – Principe de la mesure du bruit des quadratures dans le diagramme de Fresnel.

Les signes $\pm$ dans ces expressions tiennent compte du fait que nous ne savons pas quel est l'axe rapide de la lame. Les expressions des photocourants sont donnés par $i_A \propto A_A^\dagger A_A$ et $i_B \propto A_B^\dagger A_B$. Le signal de la détection homodyne est alors obtenu en effectuant la différence de ces photocourants. Un rapide calcul donne:

$$i_{dh} = i_A - i_B \propto \epsilon(A_M^\dagger A_{OL} + A_M A_{OL}^\dagger). \tag{2-20}$$

Dans tout ce manuscrit, nous considérons des champs dont les fluctuations quantiques sont assez faibles pour qu'on puisse les décomposer en leur valeur moyenne et leurs fluctuations.

$$A_M = \langle A_M \rangle + \delta A_M \quad \text{et} \quad A_{OL} = \langle A_{OL} \rangle + \delta A_{Ol} \tag{2-21}$$

Les fluctuations du photocourant i_{dh} s'expriment donc comme la somme de deux termes:

$$\delta i_{dh} \propto (\langle A_{OL} \rangle \delta A_M^\dagger + \langle A_{OL} \rangle^* \delta A_M) + (\langle A_M \rangle \delta A_{OL}^\dagger + \langle A_M \rangle^* \delta A_{OL}) \tag{2-22}$$

Comme l'oscillateur local est beaucoup plus intense ($\sim 10\ mW$) que le signal mesuré (quelques μW), alors $|\langle A_{OL} \rangle| \gg |\langle A_M \rangle|$ et on peut négliger le second terme dans l'expression précédente. Les fluctuations du signal de la détection homodyne sont donc proportionnelles à celles de la quadrature du champ $X_M(\theta_{OL})$ tournée de l'angle θ_{OL} dans le repère de Fresnel (voir figure 2.17), où θ_{OL} est la phase de l'oscillateur local par rapport à une référence de temps arbitraire ($\langle A_{OL} \rangle = \alpha_{OL} e^{i\theta_{Ol}}$):

$$\delta i_{dh} \propto \alpha_{OL}(\delta A_M^\dagger e^{i\theta_{OL}} + \delta A_M e^{-i\theta_{OL}}) = \alpha_{OL}\ X_M(\theta_{OL}) \tag{2-23}$$

En balayant la phase de l'oscillateur local à l'aide de la cale piézo-électrique PZT, nous pouvons ainsi mesurer le bruit de toutes les quadratures du champ. Pour cela, on envoie le signal dans un analyseur de spectre fonctionnant à la fréquence d'analyse Ω avec une résolution en fréquence δf. A la sortie de cet analyseur, nous obtenons la variance $\Delta^2(i_{dh})_F$ du bruit du courant $(i_{dh})_F$ obtenu à partir de i_{dh} après filtrage par un filtre en créneau F de bande passante en fréquence δf et centré en Ω. Cette variance est proportionnelle à la densité spectrale de bruit des quadratures du champ (voir paragraphe A.5.4 du chapitre 1):

$$\Delta^2(i_{dh})_F = 2\delta f S_{i_{dh}}(\Omega) \propto \alpha_{OL}^2 S_{X_M(\theta)}(\Omega) \tag{2-24}$$

Les courbes de bruit sont ensuite normalisées au bruit quantique standard $S_{i_{bqs}}$, donné par la détection des fluctuations du vide dans les mêmes conditions: $S_{i_{bqs}} \propto \alpha_{OL}^2 S_{X_{vide}} = \alpha_{OL}^2$. Cette normalisation nous permet de mesurer, au final, la densité spectrale de bruit des quadratures:

$$S_{X_M(\theta)}(\Omega) = \frac{S_{i_{dh}}}{S_{i_{bqs}}}(\Omega) \tag{2-25}$$

En pratique, il faut tenir compte du bruit électronique $S_{i_{bel}}(\Omega)$. Celui-ci s'ajoute au bruit mesuré car ils sont complètement décorrélés. On soustrait donc ce bruit pour obtenir finalement la densité spectrale de bruit du faisceau A_M:

$$S_{X_M(\theta)}(\Omega) = \frac{S_{i_{dh}} - S_{i_{bel}}}{S_{i_{bqs}} - S_{i_{bel}}}(\Omega) \tag{2-26}$$

C.1.2 Mise en oeuvre expérimentale

Les deux photodiodes $PhDA$ et $PhDB$ utilisées sont des photodiodes EG&G FND 100 qui ont une grande efficacité quantique ($\sim 90\%$) à 852 nm. Le montage électronique d'amplification a été mis au point par Antoine Heidmann. Il permet d'obtenir d'une part la partie basse fréquence du signal d'interférence ($\Omega < 10\ kHz$) et d'autre part sa partie haute fréquence sur une plage allant de 1.5 MHz à environ 30 MHz. Pour la détection, il faut que ces photodiodes soient équilibrées afin d'éviter les erreurs dans la soustraction des deux photocourants i_A et i_B. Cet équilibrage doit être également réalisé sur la partie basse fréquence afin de pouvoir régler précisément la lame demi-onde de manière à envoyer la même puissance lumineuse sur les deux photodiodes $PhDA$ et $PhDB$.

La différence des deux photocourants i_A et i_B est assurée pour la partie haute fréquence par un composant Minicircuits ZSCJ-2-1. A la sortie, le signal obtenu est amplifié par un amplificateur commercial faible bruit (Minicircuits ZHL 1D) qui a un gain de 20 dB.

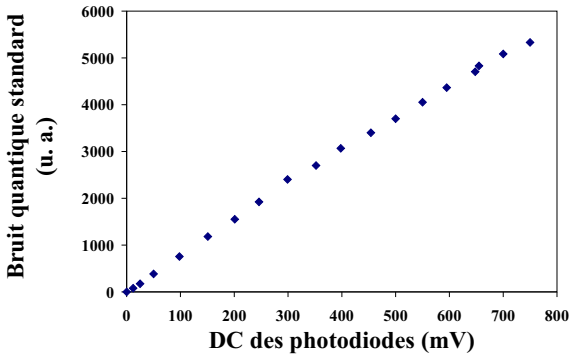


Fig. 2.18 – Evolution du bruit quantique standard à la fréquence de 4 MHz en fonction de la puissance de l'oscillateur local.

Plus on augmente la puissance de l'oscillateur meilleur est le rapport signal sur bruit de la détection. Cependant il faut veiller à ne pas saturer la partie haute fréquence du signal. On vérifie donc que la valeur du bruit quantique standard dépend bien linéairement de l'intensité comme le montre la figure 2.18. Par la suite, la puissance de l'oscillateur local est fixée à 6 mW sur chaque photodiode, ce qui correspond à une puissance totale de 12 mW. Dans ces conditions, le bruit quantique standard est supérieur d'environ 10 dB au bruit électronique.

Afin de limiter les pertes lors de la détection, il faut optimiser le recouvrement spatial entre le faisceau à mesurer A_M et l'oscillateur local. Pour le contrôler, on utilise la partie basse fréquence du signal d'interférence enregistré par la photodiode $PhDA$ et on compare la valeur de l'amplitude de l'oscillation de ce signal à la valeur qu'il prendrait pour un recouvrement parfait. Pour cela, on balaye le déphasage θ_{hd} entre l'oscillateur local et le faisceau mesuré à l'aide d'un générateur basse fréquence. On note V_{OL}, V_M et V_{osc} les valeurs des tensions mesurées à l'oscilloscope pour l'intensité de l'oscillateur local, l'intensité du faisceau mesuré et l'amplitude des oscillations crête à crête. La qualité du recouvrement est caractérisé par le paramètre η qui vaut:

$$\eta = \frac{V_{osc}}{4\sqrt{V_{OL}V_M}} \tag{2-27}$$

Pour un recouvrement parfait η vaut 1, et la mesure de η selon la formule ci-dessus donne une valeur typique de $\eta = 0.95$.

C.2 Observation de deux modes comprimés

Nous présentons ici l'observation d'une réduction de bruit sous la limite quantique standard pour les deux modes du champ polarisés linéairement A_x et A_y. La pompe est dans ce cas polarisée linéairement suivant l'axe horizontal x et on asservit la cavité à l'aide du signal de transmission selon la méthode décrite dans le

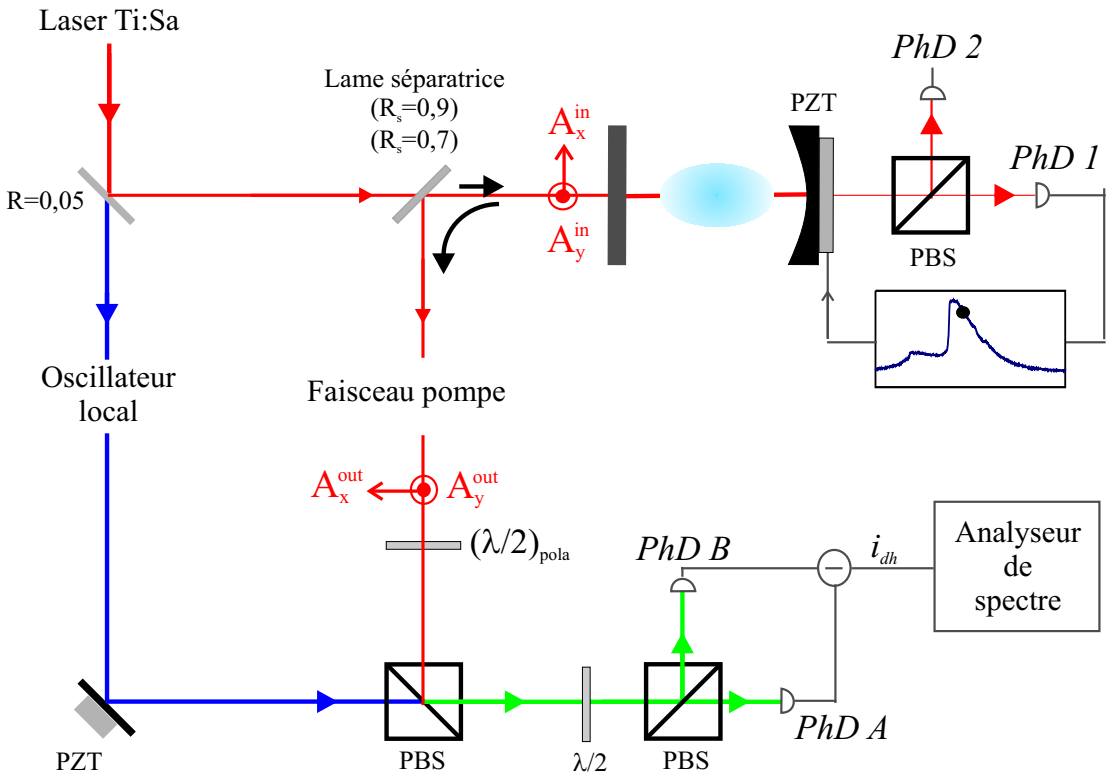


Fig. 2.19 – Configuration expérimentale pour l'observation du bruit sur deux modes. La cavité est asservie dans le domaine où la polarisation reste linéaire. On mesure successivement le bruit des modes x (champ moyen) et y (mode vide orthogonal) en tournant la lame demi-onde $(\lambda/2)_{pola}$.

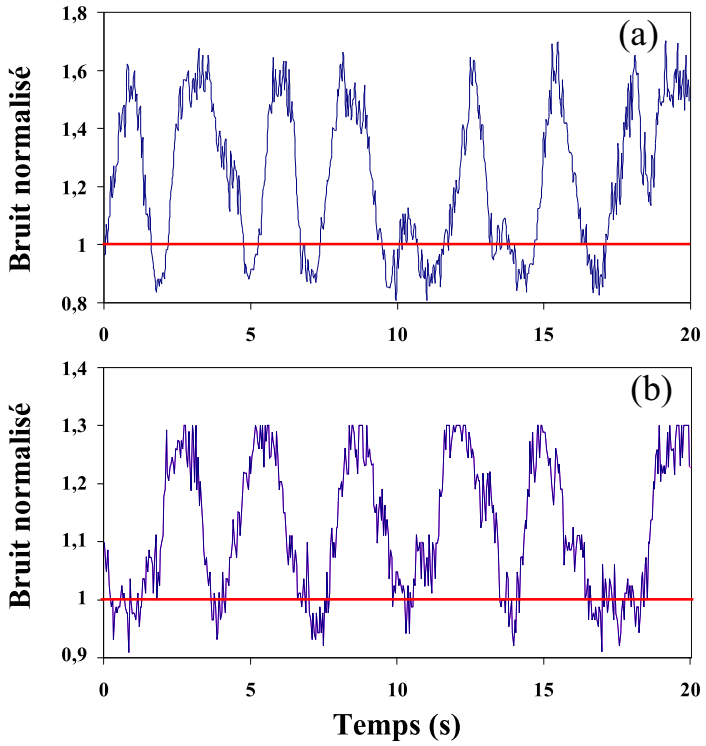


Fig. 2.20 – Réduction du bruit pour deux modes du champ. Courbe (a): bruit normalisé du mode vide A_y pour une fréquence d'analyse de 3 MHz. On observe une réduction de bruit de 13%. Courbe (b): bruit normalisé du champ moyen A_x à la fréquence de 6 MHz. La réduction de bruit est estimée à 4%.

paragraphe A.3.2. Le point de fonctionnement est choisi dans le domaine où la polarisation reste linéaire. Le mode A_y a donc une valeur moyenne nulle et le champ reste polarisé suivant l'axe x à la sortie de la cavité.

Afin de mesurer les fluctuations quantiques de ces deux modes du champ, on place une lame demi-onde $(\lambda/2)_{pola}$ sur le chemin du faisceau pompe avant de le recombiner avec l'oscillateur local (voir figure 2.19). On peut ainsi envoyer alternativement les deux modes vers la détection homodyne selon l'orientation de cette lame.

Nous avons fait remarquer lors de l'étude des résonances de la cavité, que la polarisation ne reste jamais complètement linéaire du fait de la biréfringence intrinsèque du nuage atomique. Avant que le phénomène de bascule de la polarisation n'intervienne, la polarisation du faisceau sortant a donc légèrement tourné. On corrige alors cette rotation à l'aide de la lame $(\lambda/2)_{pola}$ afin d'envoyer, effectivement, le champ moyen et le mode vide orthogonal vers le dispositif de détection homodyne.

Les spectres de bruit dépendent bien sûr de la fréquence d'analyse, de la puissance incidente, du point de fonctionnement de la cavité et du nombre d'atomes. Leur évolution en fonction de ces paramètres sera étudiée dans les paragraphes sui-

vants. Nous présentons ici l'allure typique des courbes de réduction de bruit. La figure 2.20 montre les résultats obtenus pour ces deux modes lorsque la puissance incidente de la pompe vaut 7 μW et pour une puissance des faisceaux pièges de l'ordre de 1 mW. On a obtenu une réduction de bruit de l'ordre de 13% pour le mode A_y et de 3% pour le champ moyen A_x. Il est clair sur la figure 2.21 que l'on ne peut donner très précisément la valeur de la réduction de bruit pour ces deux modes. Nous estimons que la marge d'erreur est d'environ $\pm 2\%$. Par la suite, cette marge d'erreur sera implicite pour toutes les mesures de bruit présentées dans ce manuscrit.

Comme nous l'avons signalé, les pertes en puissance ont pour effet de diminuer la réduction du bruit. Pour estimer le bruit à la sortie de la cavité, il faut tenir compte de toutes les pertes du système. Les pertes dues à l'atténuation entre la cavité et la détection sont de l'ordre de 5%, celles dues à la lame séparatrice placée devant la cavité valent 10% pour le mode A_y et 30% pour le mode A_x, l'efficacité quantique limitée des photodiodes de la détection homodyne correspond à des pertes de 10%. Finalement le défaut de recouvrement spatial entre l'oscillateur local et le faisceau pompe rajoute 5% de pertes. On a donc une efficacité totale de détection de $T_y = 0.95 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.95 = 0.73$ et $T_x = 0.95 \times 0.7 \times 0.9 \times 0.95 = 0.56$. On peut donc remonter à la valeur du bruit normalisé à la sortie de cavité $S^{cav}_{x,y}$ en fonction du bruit normalisé mesuré $S^{mes}_{x,y}$ en utilisant la relation:

$$S^{mes}_{x,y} = T_{x,y} S^{cav}_{x,y} + (1 - T_{x,y}) \times 1 \qquad (2\text{-}28)$$

On obtient alors une réduction de bruit corrigée des pertes de 17% pour le mode A_y et de 5% pour le champ moyen A_x.

C.3 Dépendance en fonction de la fréquence et du désaccord

Les dépendances en fréquence des spectres de bruit pour ces deux modes sont très différentes.

Pour le mode vide A_y, la réduction de bruit est la plus importante à basse fréquence d'analyse Ω. Lorsqu'on augmente cette fréquence, la réduction diminue du fait de la faible largeur spectrale de la cavité ($\kappa = 5\ MHz$). Notre système de détection permet de mesurer le bruit quantique à partir de 1.5 MHz. Nous reportons sur la courbe (b) de la figure 2.21 l'évolution en fréquence du bruit pour différents points de fonctionnement choisis sur la courbe de résonance de la cavité. On repère les points d'asservissements A, B et C par leur transmission $T_{\{A,B,C\}}$ normalisée à la transmission au sommet du pic en polarisation linéaire: $r_{\{A,B,C\}} = \frac{T_{\{A,B,C\}}}{T^{lin}_{at}}$. Sauf à très basse fréquence, la réduction du bruit augmente si on s'approche du sommet du pic de résonance.

La courbe (c) de la figure 2.21 donne l'évolution du bruit du mode A_x dans les mêmes conditions. Nous observons une forte augmentation du bruit à basse

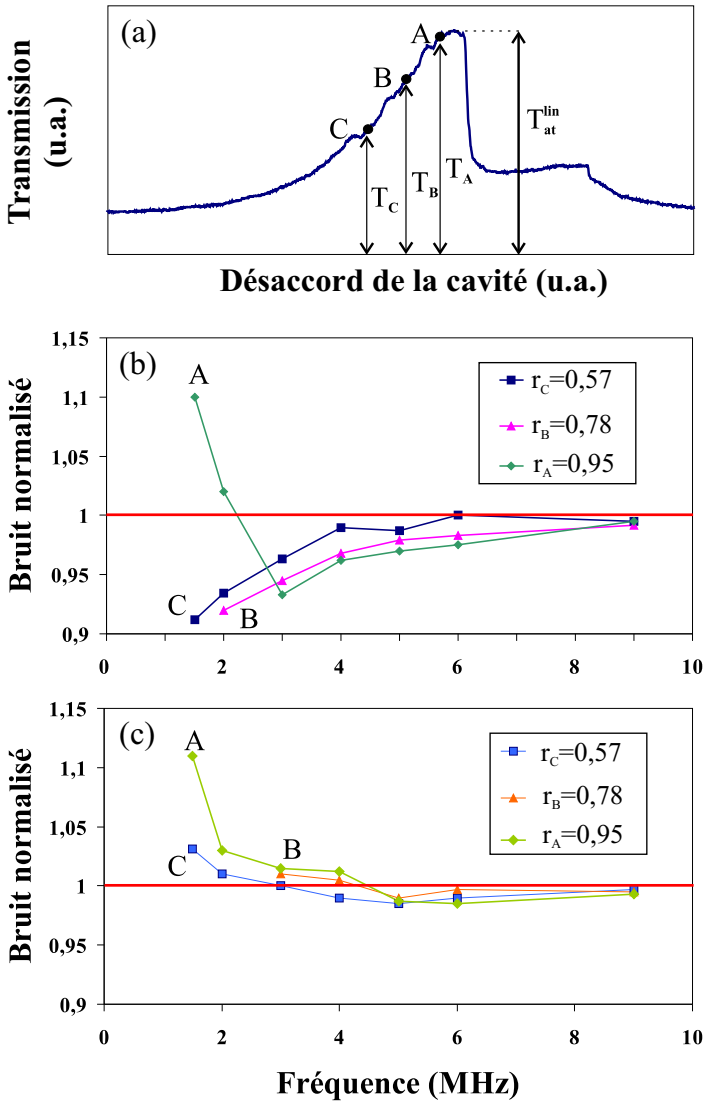


Fig. 2.21 – Réduction du bruit en fonction de la fréquence pour différents points de fonctionnement. Courbe (a): Position des points de fonctionnement. Courbe (b): spectre de bruit du mode vide A_y. Courbe (c): spectre de bruit du champ moyen A_x. La puissance incidente vaut $7\ \mu W$ *et la puissance des pièges est de* $1\ mW$.

fréquence. La réduction de bruit sous la limite quantique standard apparaît pour des fréquences supérieures à 4 MHz et reste très faible. Le maximum ($\sim$ 2% soit 4% corrigé des pertes) est généralement atteint pour des fréquences de l'ordre de5 à 6 MHz. La variation du bruit en fonction du désaccord dépend de la fréquence: à basse fréquence ($\leq$ 4 MHZ) le bruit augmente lorsque l'intensité intracavité croît. A haute fréquence ($\geq$ 6 MHZ), cette tendance s'inverse. Nous reviendrons sur l'interprétation de ces résultats dans la partie 4. Comme la réduction du bruit de ce mode reste limitée dans cette configuration expérimentale, nous allons nous consacrer essentiellement à l'étude du bruit du mode vide A_y dans la suite de ce chapitre.

C.4 Dépendance en intensité

Nous avons vu qu'il fallait se placer le plus près possible du sommet du pic de transmission pour obtenir la meilleure réduction de bruit possible sur le mode A_y. Nous sommes alors limités par notre système d'asservissement "sur le flanc" de la cavité. Nous avons donc monté un nouveau type d'asservissement utilisant le pic de résonance d'un laser auxiliaire, décalé loin de la résonance atomique et donc peu sensible aux atomes. Nous avons utilisé différents montages qui seront détaillés dans la partie C.2 du chapitre 3. Les résultats présentés ici ont été obtenus avec ce type d'asservissement qui nous a permis d'asservir la cavité au sommet du pic de résonance.

Nous avons alors étudié l'evolution de la réduction du bruit avec la puissance incidente, et ce pour des puissances de pièges différentes. La fréquence d'analyse est choisie à 3 MHz. La figure 2.22 montre les résultats obtenus. Les mesures d'absorption réalisées à l'aide des pics de transmission de la pompe polarisée linéairement (voir paragraphe B.3) sont également présentées pour évaluer l'effet de la puissance de la pompe sur le nuage atomique. L'absorption diminue lorsque la puissance augmente car les atomes sont chassés du piège. Pour des puissances de pièges faibles (voir par exemple la courbe 1(b)), le piège se vide complètement pour des puissances de pompe de l'ordre d'une dizaine de μW.

Pour chaque puissance de pièges, il existe une puissance incidente optimale. Elle augmente légèrement avec le nombre d'atomes. Pour les puissances de pièges utilisées, cette intensité de pompe varie de 6 à 9 $\mu\, W$ (voir figure 2.22). La valeur de la réduction de bruit varie peu et vaut typiquement 10%. Ces courbes montrent qu'il paraît difficile de dépasser cette valeur. Il est possible que cette réduction de bruit soit limitée par l'excès de bruit dû à la présence des faisceaux pièges [Lambrecht96a]. Nous avons donc changé de configuration expérimentale, afin de s'affranchir de cet excès de bruit potentiel. La méthode utilisée pour couper les faisceaux pièges est différente de celle mise en place durant la thèse d'Astrid Lambrecht et sera présentée dans le chapitre 3.

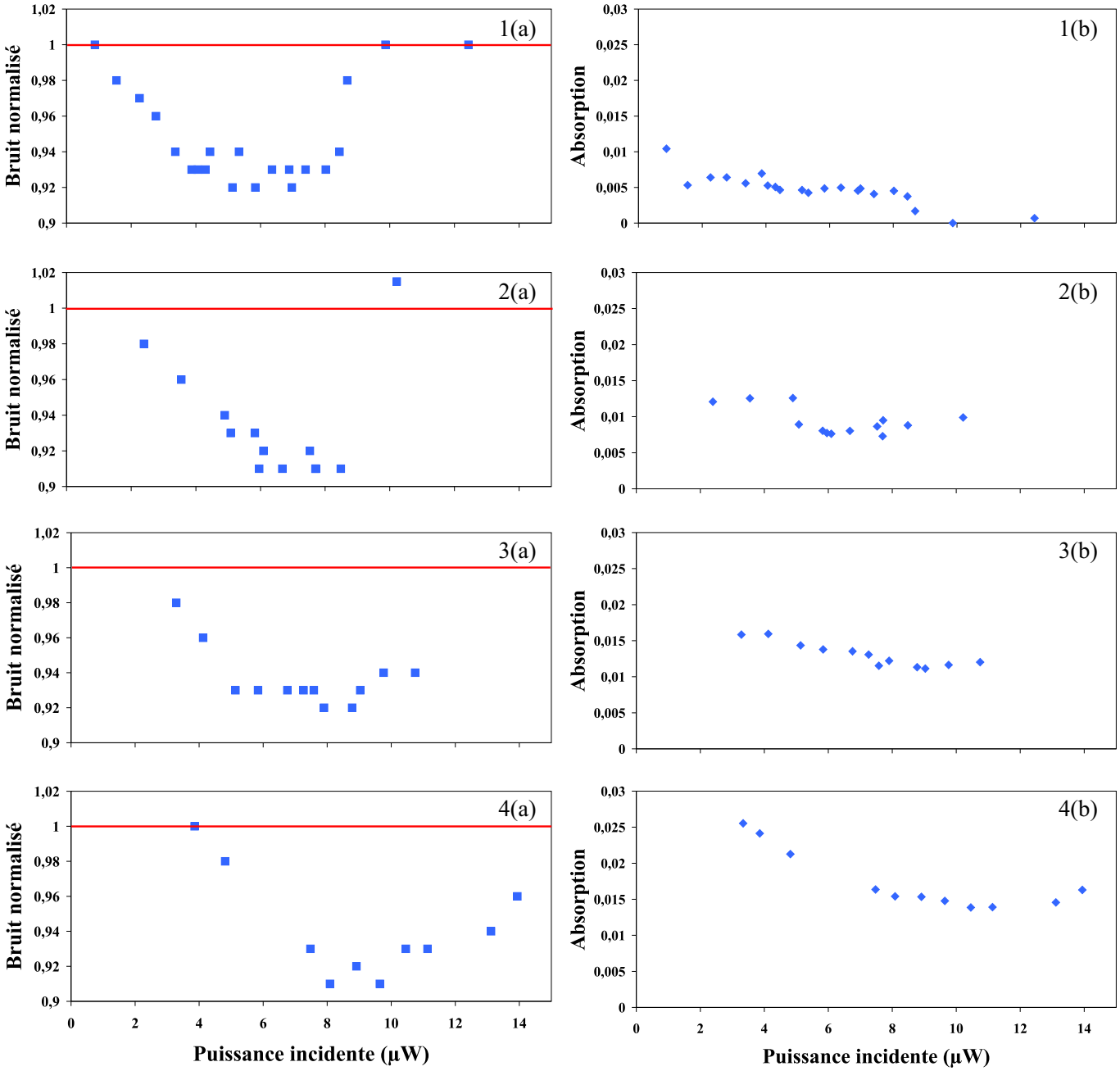


Fig. 2.22 – Réduction du bruit en fonction de l'intensité incidente pour différentes valeurs de la puissance des faisceaux pièges. Les courbes (a) correspondent aux bruits normalisés du mode vide A_y et les courbes (b) représentent l'évolution de l'absorption. 1): $P_{pièges} = 0.34\ mW$, $N_{at} \sim 2\ 10^6$; 2): $P_{pièges} = 0.54\ mW$, $N_{at} \sim 3\ 10^6$; 3): $P_{pièges} = 1\ mW$, $N_{at} \sim 5\ 10^6$; 4): $P_{pièges} = 1.5\ mW$, $N_{at} \sim 6\ 10^6$.

D Bruit de polarisation

D.1 Dispositif expérimental

D.1.1 Principe

Comme nous l'avons montré dans l'introduction de ce manuscrit (voir sectionC du chapitre 1), les fluctuations quantiques du mode vide orthogonal sont reliées au bruit de polarisation du faisceau sortant de la cavité. Ces propriétés quantiques de la polarisation d'un faisceau lumineux sont, en fait, caractérisées par les fluctuations des opérateurs de Stokes définis par:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_x^\dagger A_x + A_y^\dagger A_y \quad S_1 = A_x^\dagger A_x - A_y^\dagger A_y \\ S_2 &= A_x^\dagger A_y + A_y^\dagger A_x \quad S_3 = i(A_y^\dagger A_x - A_x^\dagger A_y) \end{aligned} \tag{2-29}$$

Dans la configuration expérimentale, le faisceau pompe incident sur la cavité est polarisé linéairement le long de l'axe x. Comme nous l'avions fait au paragraphe précédent, nous limitons ici notre étude au domaine des désaccord de la cavité pour lequel la polarisation reste linéaire. Dans ce cas nous posons:

$$\langle A_y \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle A_x \rangle = \alpha_x e^{i\theta_x} \neq 0 \tag{2-30}$$

où θ_x est la phase du champ moyen. Dans la sphère de Poincaré, définie au chapitre1, le vecteur de Stokes est donc aligné suivant S_1: $\langle S_0 \rangle = \langle S_1 \rangle = |\alpha_x^2|$ et $\langle S_2 \rangle = \langle S_3 \rangle = 0$. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les fluctuations de S_2 sont dans ce cas liées à celles de l'azimuth alors que celles de S_3 expriment les fluctuations d'ellipticité du faisceau. Les fluctuations de S_2 et S_3 sont alors proportionnelles aux fluctuations d'"amplitude" et de "phase" du mode vide.

$$\delta S_2 = \alpha_x(\delta A_y^\dagger e^{i\theta_x} + \delta A_y e^{-i\theta_x}) = \alpha_x \, \delta X_y(\theta_x) \tag{2-31}$$

$$\delta S_3 = i\alpha_x(\delta A_y^\dagger e^{i\theta_x} - \delta A_y e^{-i\theta_x}) = \alpha_x \, \delta Y_y(\theta_x) \tag{2-32}$$

Nous rappelons que les notions de quadrature d'"amplitude" et "phase" pour le mode vide n'ont de sens ici que par rapport à la phase du champ moyen θ_x(voir figure 1.14).

En principe ces paramètres de Stokes peuvent être mesurés directement suivant la méthode décrite au paragraphe C.6.2 du chapitre 1. Toutefois l'intensité totale du faisceau doit être suffisante pour que le signal soit détectable. Le dispositif étant analogue à celui d'une détection homodyne, la puissance du faisceau doit être supérieure à quelques centaines de μW. Or la puissance du faisceau pompe interagissant avec les atomes est typiquement de l'ordre de quelques μW. C'est pourquoi nous ne pouvons utiliser cette méthode.

Néanmoins, il est possible de mesurer les fluctuations des paramètres de Stokes à l'aide d'un oscillateur local. En effet, notre dispositif de détection homodyne nous

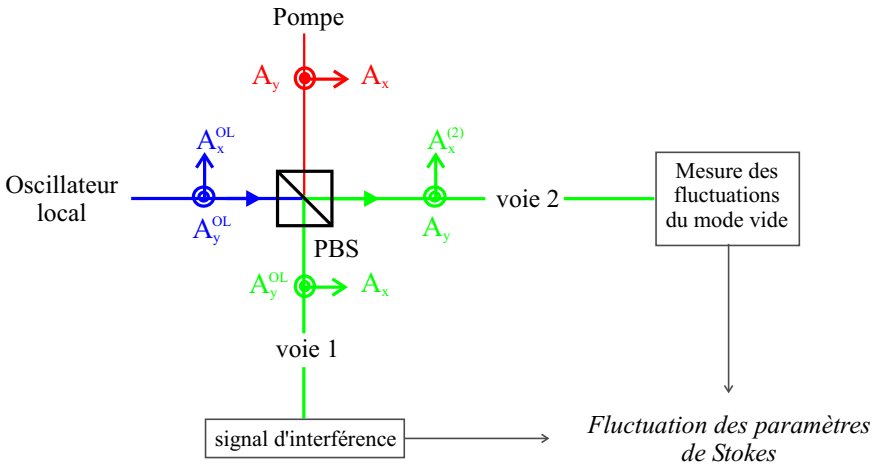


Fig. 2.23 – Principe de la détection du bruit de polarisation. Les interférences entre le champ moyen et l'oscillateur local sont détectées sur la voie 1. Le bruit du mode vide orthogonal y est mesuré sur le voie 2 à l'aide d'une détection homodyne standard.

permet de mesurer les fluctuations des quadratures du mode vide orthogonal et donc, d'après les relations 2-31 et 2-32, de mesurer les fluctuations des opérateurs de Stokes S_2 et S_3. En effet, Le signal de la détection homodyne donné par la relation 2-23 peut se réécrire sous la forme:

$$\delta i_{hd} \propto \frac{\alpha_{OL}}{\alpha_x}(\cos\theta_{hd}\delta S_2 + \sin\theta_{hd}\delta S_3) = \frac{\alpha_{OL}}{\alpha_x}\,\delta S_{\theta_{hd}} \qquad (2\text{-}33)$$

où $S_\theta \equiv \cos\theta S_2 + \sin\theta S_3$ est l'opérateur de Stokes tourné de l'angle θ dans le repère $(S_2,\, S_3)$ et $\theta_{hd} = \theta_{OL} - \theta_x$ est la phase relative entre l'oscillateur local et le champ moyen. Lorsqu'on balaie la phase de l'oscillateur, on mesure successivement toutes les quadratures du mode vide et donc les fluctuations des paramètres S_θ.

Pour caractériser complètement les fluctuations de polarisation nous avons besoin de savoir précisément quel est le paramètre mesuré. Il nous faut donc mesurer simultanément la phase θ_{hd} de la détection homodyne et le bruit. Pour cela, on peut utiliser les interférences entre l'oscillateur local et le champ moyen qui nous permettent de déterminer $\cos(\theta_{hd})$. On mélange sur le cube polariseur $PBS3$ le faisceau pompe et l'oscillateur local polarisé maintenant à 45°. Le mode vide est réfléchi par le cube sur la voie 2 et envoyé vers la détection homodyne avec une portion de l'oscillateur local. On enregistre alors les interférences entre le champ moyen et l'autre partie de l'oscillateur local sur la voie 1. Ce principe de détection est illustré sur la figure 2.23.

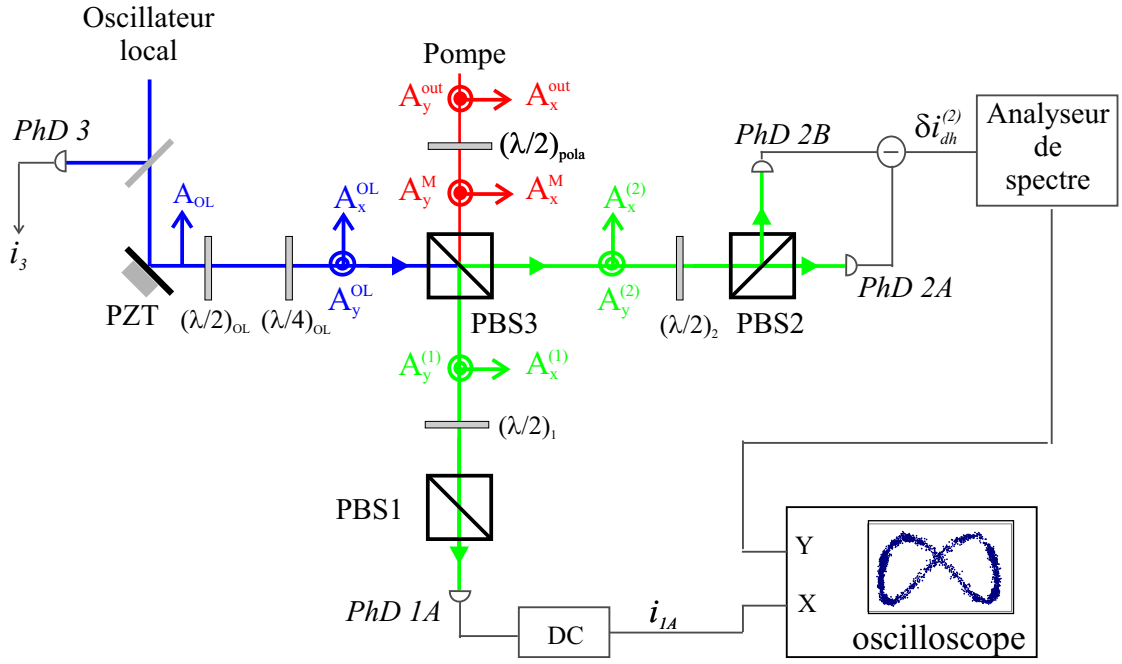


Fig. 2.24 – Dispositif expérimental pour la détection des paramètres de Stokes.

D.1.2 Effet du déphasage dû aux éléments biréfringents

Nous détaillons ici la mise en oeuvre expérimentale de la mesure des paramètres de Stokes. Les notations qui seront utilisées pour décrire le dispositif sont précisées sur la figure 2.24. D'après l'analyse de principe du paragraphe précédent, l'objectif est ici de déterminer la différence de phase entre l'oscillateur local utilisé pour la détection homodyne noté A_x^{OL} et le mode A_y^M. Pour cela on exploite les interférences entre le champ A_x^M et l'autre partie de l'oscillateur local A_y^{OL}. Pour que cette mesure soit fiable, les déphasages doivent être identiques sur les voies1 et 2 correspondant aux deux sorties du cube $PBS3$.

Ces déphasages dépendent de la différence de marche entre le faisceau pompe et l'oscillateur local avant qu'ils soient recombinés sur le cube polariseur. Cette différence de marche est donnée par deux contributions. La première correspond à la différence de longueur entre les bras de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Celle-ci est de nature géométrique et ne dépend pas de la polarisation du faisceau; elle est donc égale pour les voies 1 et 2.

La seconde contribution est donnée par les déphasages que l'oscillateur local et le faisceau à mesurer subissent à la traversée des différents éléments optiques, comme les cubes polariseurs, les lames demi-ondes, etc... Ceux-ci ne sont pas, *a priori*, identiques pour les polarisations horizontale et verticale. Afin de déterminer sans ambiguïté la valeur des paramètres de Stokes, il nous faut donc prêter une attention particulière aux éléments biréfringents qui déphasent différemment les modes A_x^{OL},

A_y^{OL}, A_x^M et A_y^M. Par exemple, le cube polariseur $PBS3$ qui recombine la pompe et l'oscillateur local introduit des déphasages distincts pour les voies1 et 2. Nous allons voir maintenant comment ceux-ci peuvent être compensés en jouant sur l'ellipticité de l'oscillateur local.

D.1.3 Réglage de la détection

Les relations de passage au niveau du cube polariseur $PBS3$ (voir figure 2.24) sont définis par les déphasages θ_x^C, θ_y^C, ϕ_x^C et ϕ_y^C:

$$A_x^{(1)} = A_x^M\ e^{i\theta_x^C} \quad A_x^{(2)} = A_x^{OL}\ e^{i\phi_x^C} \tag{2-34}$$

$$A_y^{(1)} = A_y^{OL}\ e^{i\phi_y^C} \quad A_y^{(2)} = A_y^M\ e^{i\theta_y^C} \tag{2-35}$$

Sur les voies 1 et 2, les lames demi-ondes $(\lambda/2)_1$ et $(\lambda/2)_2$ sont tournées de $+22.5°$ par rapport à la direction horizontale x. Les champs A_{1A}, A_{2A} et A_{2B} mesurés par les photodiodes $PhD\ 1A$, $PhD\ 2A$ et $PhD\ 2B$ s'expriment dans ce cas:

$$A_{1A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^{(1)} + A_y^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^M\ e^{i\theta_x^C} + A_y^{OL}\ e^{i\phi_y^C}) \tag{2-36}$$

$$A_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^{(2)} + A_y^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_y^M\ e^{i\theta_y^C} + A_x^{OL}\ e^{i\phi_x^C}) \tag{2-37}$$

$$A_{2B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^{(2)} - A_y^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_y^M\ e^{i\theta_y^C} - A_x^{OL}\ e^{i\phi_x^C})$$

La détection homodyne des fluctuations du mode A_y^M est réalisée sur la voie 2 par la différence des photocourants i_{2A} et i_{2B}. On obtient alors (voir relation 2-23):

$$\delta i_{dh}^{(2)} \propto \alpha_x^{OL}((\delta A_y^M)^\dagger\ e^{i\theta^{(2)}} + \delta A_y^M\ e^{-i\theta^{(2)}}) = \alpha_x^{OL}\delta X_y(\theta^{(2)}) \tag{2-38}$$

avec $\langle A_x^{OL}\rangle = \alpha_x^{OL}e^{i\phi_x^{OL}}$, et $\theta^{(2)} = \phi_x^{OL} + \phi_x^C - \theta_y^C$ la phase de la quadrature mesurée. D'après la relation 2-33, on peut relier ce signal aux fluctuations des paramètres de Stokes du faisceau à mesurer A_M, dans le cas où le mode A_y^M a une valeur moyenne nulle ($\langle A_y^M\rangle = 0$). En posant $\langle A_x^M\rangle = \alpha_x^M e^{i\phi_x^M}$, on peut ainsi écrire:

$$\delta i_{dh}^{(2)} \propto \frac{\alpha_x^{OL}}{\alpha_x^M}\ \delta S_{\theta_{hd}^{(2)}} \tag{2-39}$$

$$\text{où} \quad \theta_{hd}^{(2)} = \theta^{(2)} - \phi_x^M = \phi_x^{OL} + \phi_x^C - \theta_y^C - \phi_x^M \tag{2-40}$$

La phase $\theta_{dh}^{(2)}$ correspond à la différence de phase entre celle de la quadrature mesurée et celle du champ moyen A_x^M.

Suivant notre principe de détection, cette phase doit être mesurée à l'aide du signal d'interférence entre ce champ moyen et l'autre partie de l'oscillateur localA_y^{OL}.

Celui-ci est enregistré sur la voie 1 par la photodiode $PhD\ 1A$ (voir figure 2.24). Pour des raisons pratiques (qui apparaîtront clairement dans le chapitre 5 concernant les mesures de corrélations), cette photodiode est identique aux photodiodes $PhD\ 2A$ et $PhD\ 2B$. Le signal d'interférence est donné par la sortie basse fréquence:

$$i_{1A} \propto (\alpha_y^{OL})^2 + (\alpha_x^M)^2 + 2\alpha_y^{OL}\alpha_x^M \cos\theta_{1A} \tag{2-41}$$

$$\text{avec} \quad \theta_{1A} = \phi_y^{OL} + \phi_y^C - \theta_x^C - \phi_x^M \tag{2-42}$$

On peut déduire de ce signal la différence de phase θ_{1A} entre la portion de l'oscillateur local A_y^{OL} et le champ A_x^M. *Afin d'étalonner la détection, il faut imposer:*

$$\theta_{1A} = \theta_{dh}^{(2)} \tag{2-43}$$

D'après les relations 2-40 et 2-42, cette condition s'écrit:

$$\phi_y^{OL} + \phi_y^C - \theta_x^C = \phi_x^{OL} + \phi_x^C - \theta_y^C \tag{2-44}$$

On corrige donc les déphasages du cube, en envoyant un oscillateur local polarisé elliptiquement. Le déphasage entre ses deux composantes A_x^{OL} et A_y^{OL} doit satisfaire:

$$\phi_y^{OL} - \phi_x^{OL} = (\phi_x^C - \theta_y^C) - (\phi_y^C - \theta_x^C) \tag{2-45}$$

Pratiquement, on peut obtenir l'ellipticité souhaitée à l'aide des lames demi-onde $(\lambda/2)_{OL}$ et quart d'onde $(\lambda/4)_{OL}$ (voir figure 2.24).

Pour régler les orientations de ces lames, le faisceau A_M est maintenant polarisé à $+45°$ en tournant la lame demi-onde $(\lambda/2)_{pola}$ à $+22.5°$. Dans ces conditions, les phases des modes envoyés sur les voies 1 et 2 sont égales: $\langle A_x^M \rangle = \langle A_y^M \rangle = \alpha_M e^{i\phi^M}$. Les interférences peuvent êtres enregistrées simultanément par les photodiodes $PhD\ 1A$ et $PhD\ 2A$. On compare alors les deux photocourants i_{1A} et i_{2A} de ces photodiodes lorsqu'on balaie la phase de l'oscillateur local (voir équations 2-36 et 2-37):

$$\begin{aligned} i_{1A} &\propto (\alpha_y^{OL})^2 + \alpha_M^2 + 2\alpha_y^{OL}\alpha_M \cos\theta_{1A} \\ &\text{avec} \quad \theta_{1A} = \phi_y^{OL} + \phi_y^C - \theta_x^C - \phi^M \end{aligned} \tag{2-46}$$

$$\begin{aligned} i_{2A} &\propto (\alpha_x^{OL})^2 + \alpha_M^2 + 2\alpha_x^{OL}\alpha_M \cos\theta_{2A} \\ &\text{avec} \quad \theta_{2A} = \phi_x^{OL} + \phi_x^C - \theta_y^C - \phi^M \end{aligned} \tag{2-47}$$

Lorsque l'intensité de l'oscillateur est également répartie entre ses deux composantes ($\alpha_x^{OL} = \alpha_y^{OL}$), on oriente les lames $(\lambda/2)_{OL}$ et $(\lambda/4)_{OL}$ de manière à superposer à l'oscilloscope les tensions correspondant à ces photocourants (voir figure 2.25). Dans ce cas le déphasage entre i_{1A} et i_{2A} est nul: $\theta_{2A} = (\theta_{1A})_{[2\pi]}$. Les relations 2-46 et 2-47 montrent alors clairement que la condition 2-45 sur l'ellipticité de l'oscillateur local est satisfaite.

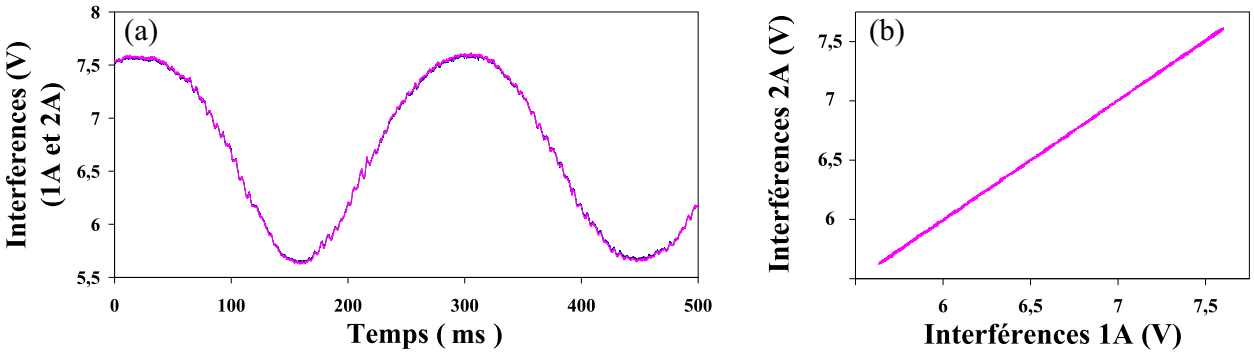


Fig. 2.25 – Photocourants i_{1A} et i_{2A} (superposés) une fois les déphasages du cube $PBS3$ corrigés (a). En (b), le résultat obtenu en mode X, Y à l'oscilloscope.

Une fois ces déphasages corrigés, la condition 2-43 est automatiquement vérifiée, ce qui garantit la validité de notre détection. Nous obtenons finalement d'après les relations 2-40 et 2-42:

$$\theta_{dh}^{(2)} = (\theta_{1A})_{[2\pi]} = \phi_x^{OL} + \phi_2^C - \phi_x^M \equiv \theta_{dh} \tag{2-48}$$

Par souci de simplicité, nous n'avons considéré ici que les déphasages dus au cube polariseur $PBS3$. En pratique, la méthode de réglage de la phase de l'oscillateur local permet de corriger d'un seul coup les déphasages de tous les éléments biréfringents.

D.1.4 Résultats préliminaires

Pour caractériser les fluctuations des paramètres de Stokes, nous mesurons simultanément le bruit du mode vide A_y sur la voie 2 et le signal d'interférence sur la photodiode $1A$. Afin de pouvoir synchroniser les deux enregistrements, il faut pouvoir disposer de ces deux signaux sur le même oscilloscope. Sur notre analyseur de spectre, il existe une sortie qui donne un signal directement proportionnel à la déviation du point lumineux sur l'écran avant le filtre vidéo. Lorsque l'analyseur de spectre fonctionne en échelle linéaire et en mode "zéro span" (fréquence d'analyse fixe), ce signal est donc proportionnel au bruit. En pratique, l'échelle de l'analyseur est réglée sur le calibre 10 $\mu V/div$ et la résolution vaut 100 kHz. Après avoir été filtré par un filtre passe bas (fréquence de coupure $\sim$ 20 Hz), ce signal est envoyé sur la voie Y de notre oscilloscope, le signal d'interférence étant envoyé sur la voie$X$.

La procédure de normalisation du bruit mesuré est maintenant modifiée. On mesure successivement la référence de l'analyseur de spectre $V_0(\Omega)$, le bruit électronique du montage $V_{el}(\Omega)$, le niveau du bruit quantique standard $V_{bqs}(\Omega)$ et le bruit

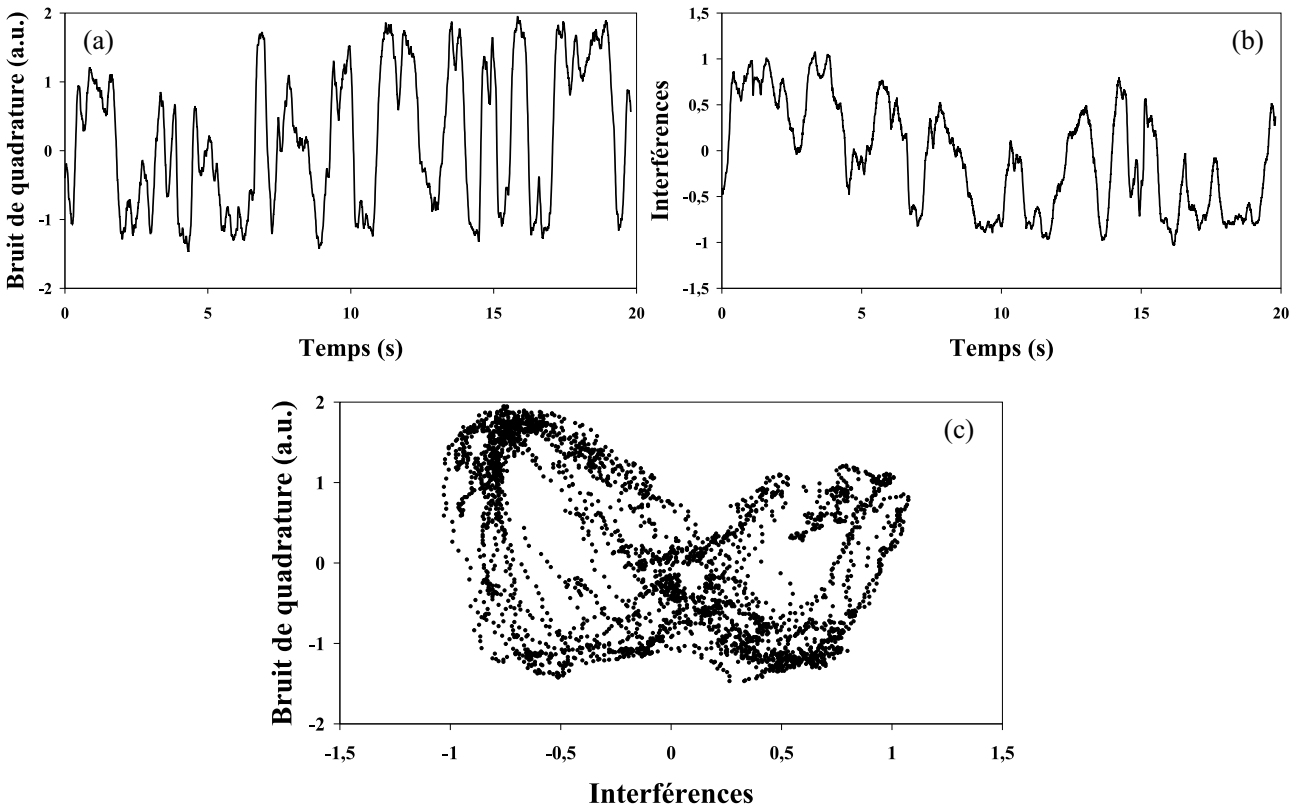


Fig. 2.26 – Résultats préliminaires pour la mesure du bruit de polarisation.

quantique du faisceau $V_M(\Omega)$. Le bruit normalisé est alors obtenu par la formule:

$$S_{X_M}(\Omega) = \frac{(V_M - V_0)^2 - (V_{el} - V_0)^2}{(V_{bqs} - V_0)^2 - (V_{el} - V_0)^2}(\Omega) \qquad (2\text{-}49)$$

Les signaux correspondant aux interférences et à la mesure du bruit étant enregistrés, il faut les comparer pour déterminer quelle est la quadrature comprimée. Par exemple si le minimum de bruit est atteint lorsque les faisceaux sont en phase ou en opposition de phase ($\theta_{dh} = 0$ ou π), c'est la quadrature d'"intensité" du mode vide (par rapport à la référence de phase du champ moyen) qui est comprimée. Dans le cas général il est difficile de déterminer le bruit associé à chaque quadrature. Un moyen de rétablir ce lien univoque est de tracer le bruit quantique en fonction des interférences ($\propto \cos\theta_{dh}$). L'allure typique des premières courbes obtenues par cette méthode est montrée sur la figure 2.26.

Ces courbes ne sont pas satisfaisantes car le bruit sur le signal mesuré est trop important. Comme nous allons le voir, les fluctuations d'intensité de l'oscillateur local sont ici le facteur limitant pour la détermination des interférences. En ne considérant que les fluctuations d'intensité, on peut écrire l'expression du photocourant en

notant ΔI_{OL} et ΔI_{pompe} les fluctuations d'intensité de l'oscillateur et de la pompe:

$$i_{1A} = (I_{OL} + \Delta I_{OL}) + (I_{pompe} + \Delta I_{pompe}) + \frac{1}{2}(I_{osc} + \Delta I_{osc}) \cos\theta_{dh} \quad (2\text{-}50)$$

$$\text{où} \quad I_{osc} = 4\eta\sqrt{I_{OL} I_{pompe}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta I_{osc}}{I_{osc}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta I_{pompe}}{I_{pompe}} + \frac{\Delta I_{OL}}{I_{OL}}\right) \quad (2\text{-}51)$$

Notre laser Titane:Saphir n'est pas asservi en intensité. Du fait des fluctuations thermiques et mécaniques de la cavité, l'intensité du laser fluctue. Ces fluctuations sont de deux natures: des fluctuations rapides (typiquement 50 kHz) devant le temps de balayage de la phase de l'oscillateur local et des fluctuations très basses fréquences qui ont pour effet de déplacer verticalement le niveau moyen des oscillations présentées sur la courbe (b) de la figure 2.26. Sur cette enregistrement les fluctuations hautes fréquences n'apparaissent pas car elles ont été éliminées par un filtre passe-bas identique à celui utilisé à la sortie de l'analyseur de spectre (fréquence de coupure de l'ordre de 20 Hz). L'ordre de grandeur de ces fluctuations est typiquement de 2-3% pour des fréquences de quelques centaines de mHz. Pour une puissance de l'oscillateur local de l'ordre de 5 mW, on a donc des fluctuations de l'ordre de $\Delta I_{OL} \simeq 100\ \mu W$.

Celles-ci sont à comparer avec l'amplitude moyenne des interférences qui valent $I_{osc} = 4\sqrt{I_{OL} I_{pompe}}$. Estimons l'ordre de grandeur de l'intensité du faisceau pompe au niveau de la détection homodyne. La puissance incidente sur la cavité vaut typiquement 7 μW. Le taux de réflexion de la cavité à résonance est d'environ 50% (voir 2-2) pour une cavité vide et de 30% si l'on considère une absorption atomique. L'intensité est encore divisée par deux au niveau des photodiodes de détection, ce qui nous donne finalement une puissance $I_{pompe} \simeq 1\ \mu W$. L'amplitude des oscillations est donc de l'ordre: $I_{osc} \simeq 250\ \mu W$. Ce qui fait un rapport signal à bruit de l'ordre de 2-3 !

Ces fluctuations sont donc très importantes. Elles ont pour effet de décaler horizontalement la courbe (c) de la figure 2.26 et perturbent fortement notre mesure des fluctuations des paramètres de Stokes.

Une solution serait bien sûr d'asservir l'intensité du Titane:Saphir, à l'aide par exemple d'un modulateur électro-optique et d'un analyseur. Une solution bien plus simple consiste à compenser ces fluctuations d'intensité à l'aide d'un signal de référence. Pour cela, nous avons monté une photodiode, notée PhD 3, équilibrée avec les photodiodes de la détection homodyne, qui reçoit une partie de l'oscillateur local avant qu'il ne soit recombiné avec le faisceau pompe (voir figure 2.24). En envoyant la même intensité sur les photodiodes PhD $1A$ et PhD 3 en l'absence de faisceau pompe, on obtient exactement le même signal donnant les fluctuations d'intensité de l'oscillateur local. On soustrait alors le signal de la photodiode 3 à celui de la photodiode $1A$ et on élimine ainsi les fluctuations d'intensité de l'oscillateur local.

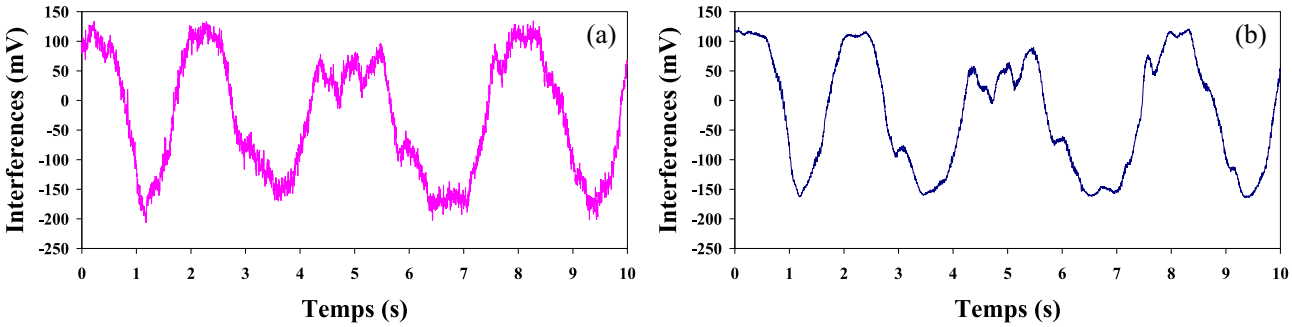


Fig. 2.27 – Réduction du bruit sur le signal d'interférence. Courbe (a): signal d'interférence i_{1A} donné par la photodiode $1A$. Courbe (b): différence des photocourants ($i_{1A} - i_3$). Ces deux signaux ont été enregistrés sans utiliser de filtre basse fréquence.

Le signal ainsi mesuré sera noté par la suite i_{phase}:

$$i_{phase} \equiv i_{1A} - i_3 \quad \propto \quad (I_{pompe} + \Delta I_{pompe}) + \frac{1}{2}(I_{osc} + \Delta I_{osc}) \cos\theta_{dh} \qquad (2\text{-}52)$$

$$\simeq \quad \frac{1}{2}(I_{osc} + \Delta I_{osc}) \cos\theta_{dh} \qquad (2\text{-}53)$$

L'approximation utilisée vient du fait que $I_{pompe} \simeq 1\ \mu W \ \ll \ I_{osc} \simeq 250\ \mu W$. La figure 2.27 compare les signaux d'interférence obtenus avec (i_{phase}) ou sans (i_{1A}) soustraction du photocourant i_3. Ici le filtre utilisé pour l'enregistrement de la courbe (b) de la figure 2.26 a été enlevé pour rendre compte de la réduction du bruit sur toute la bande de fréquence accessible par les photodiodes ($< 100\ kHz$ sur la sortie basse fréquence). Nous avons estimé un gain d'un facteur 10 pour le rapport signal à bruit avec cette méthode. Comme nous l'avons expliqué ci dessus, seule la réduction du bruit à basse fréquence (de l'ordre de quelques Hz) est réellement intéressante pour notre expérience.

A posteriori, il paraît clair qu'il existe une autre méthode pour obtenir un résultat similaire: on peut en effet placer la photodiode 3 (nommée dans ce cas $1B$) sur la voie 1, à la sortie en réflexion du cube polariseur $PBS1$. On effectue alors la différence des photocourants sur les sorties basse fréquence. Ceci correspond à un montage classique de détection homodyne et le signal est donné par:

$$i_{dh}^{(1)} \equiv i_{1A} - i_{1B} \ \propto \ 4\eta\sqrt{I_{OL} I_{pompe}} \cos\theta_{dh} \qquad (2\text{-}54)$$

Cette méthode permet de gagner un facteur 2 par rapport au dispositif décrit ci-dessus. Celui-ci nous ayant permis de résoudre les problèmes de bruit d'intensité, nous n'avons pas utilisé cette seconde méthode.

Nous n'avons discuté ici que des fluctuations du niveau moyen des interférences. On peut également estimer les fluctuations de l'amplitude des oscillations I_{osc}. Avec les ordres de grandeur discutés ci-dessus, on obtient:

$$\Delta I_{osc} = \frac{I_{osc}}{2}\left(\frac{\Delta I_{pompe}}{I_{pompe}} + \frac{\Delta I_{OL}}{I_{OL}}\right) \simeq 5\ \mu W \ll I_{osc} \simeq 250\ \mu W \qquad (2\text{-}55)$$

Ces fluctuations sont tout à fait négligeables.

Après avoir détaillé de quelle façon nous avons résolu les problèmes de déphasage lié au cube polariseur $PBS3$, ainsi que ceux liés aux fluctuations d'intensité de l'oscillateur local, nous pouvons présenter maintenant les résultats concernant la mesure du bruit de polarisation.

D.2 Détection des paramètres de Stokes

Un exemple typique des résultats obtenus est présenté sur la figure2.28. Le bruit du mode vide normalisé au bruit quantique standard est représenté en fonction du signal d'interférence normalisé: $cos\theta_{dh}$. Nous avons également représenté les courbes correspondant au bruit et au signal d'interférence. Ce dernier reste toujours affecté par le bruit sous l'effet des fluctuations mécaniques de l'interféromètre (voir les courbes (b) des figures 2.26 et 2.28), mais nous mesurons maintenant de manière plus précise la phase θ_{dh} grâce à la soustraction des fluctuations d'intensité de l'oscillateur local (voir paragraphe précédent).

La forme générale de cette courbe s'explique par le fait que la puissance de bruit oscille deux fois plus vite que le signal d'interférence lorsqu'on balaie la phase de l'oscillateur local. En effet, on a:

$$S_{S_{\theta_{dh}}} = \cos^2\theta_{dh} S_{S_2} + \sin^2\theta_{dh} S_{S_3} + \sin\theta_{dh}\cos\theta_{dh}(S_{S_2S_3} + S_{S_2S_3}) \qquad (2\text{-}56)$$

où le dernier terme tient compte des corrélations entre les fluctuations de S_2 et S_3.

Pour déterminer la phase θ_{dh} à partir de la valeur $\cos\theta_{dh}$, il faut connaître son sens de variation. Celui-ci nous est donné par l'étude de la haute tension appliquée sur la cale piézo-électrique PZT (voir figure 2.24). Lorsque la haute tension augmente, la cale piézo-électrique se dilate, la distance parcourue par l'oscillateur local diminue et la phase de la détection θ_{dh} (définie par la relation 2-48) décroît. Nous avons réalisé toutes nos mesures dans cette situation. Ainsi lorsque la valeur de $cos\theta_{dh}$ varie continûment de la valeur -1 à $+1$, la phase θ_{dh} passe de π à 0.

On fixe ce sens de parcours de la phase pour interpréter la courbe (c) de la figure 2.28. Au départ la phase vaut $\theta_{hd} = \pi$, le champ moyen est en opposition de phase avec l'oscillateur local: on mesure le bruit d'"intensité" du mode vide, soit le paramètre S_2. Lorsque la phase décroît continûment jusqu'à0, on mesure successivement le bruit de tous les paramètres de Stokes S_θ. Par exemple, pour $\theta_{dh} = \pi/2$, la pompe est en quadrature de phase, on mesure dans ce cas le bruit de "phase" du mode vide, i.e. S_3. On peut déterminer ainsi quel est le paramètre de Stokes comprimé: celui-ci est repéré par l'angle θ_{sq}. La réduction du bruit de polarisation observé sur la figure 2.28 correspond à un paramètre tourné de $\theta_{sq} = 45°$ par rapport à S_2. De

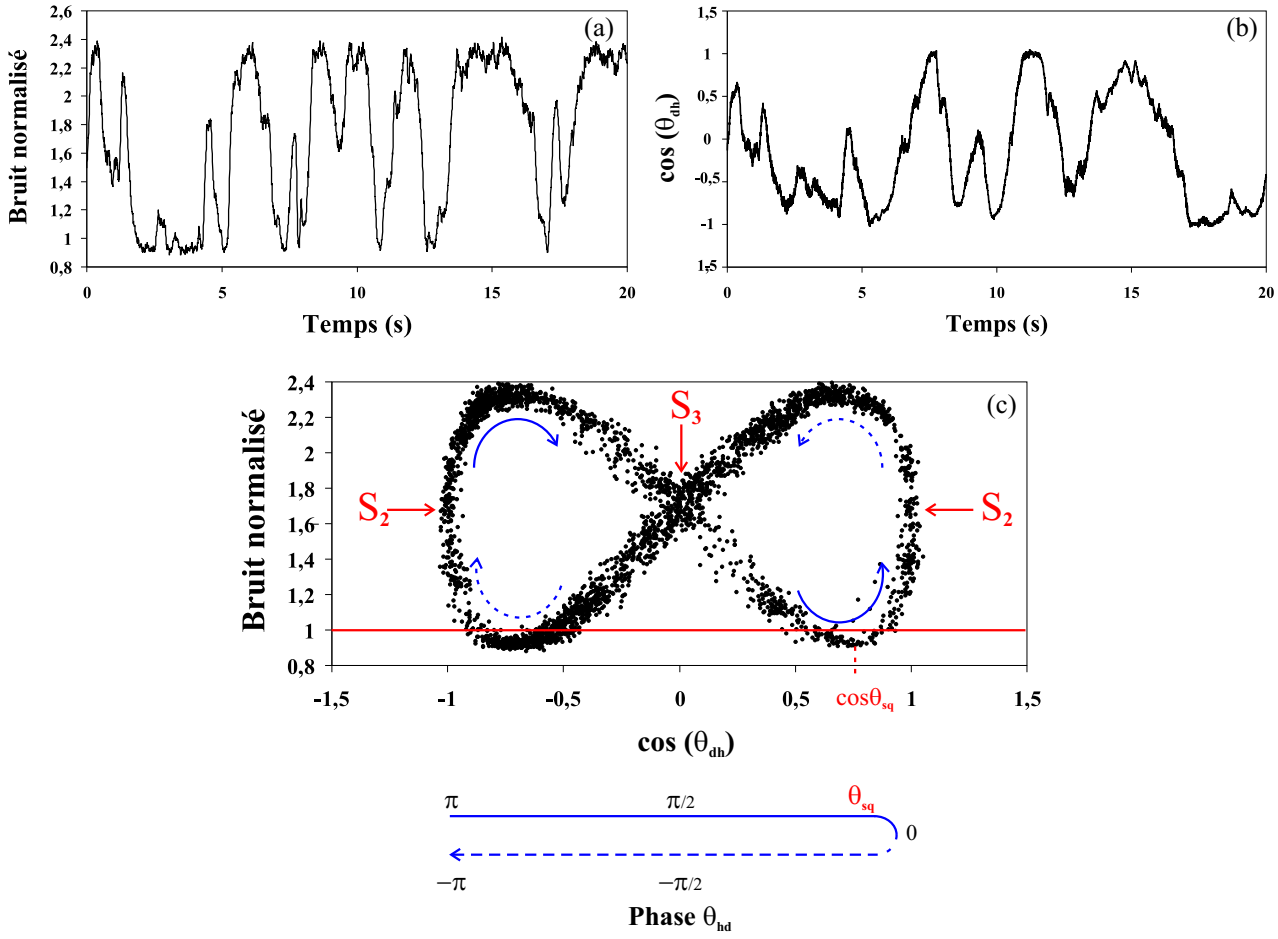


Fig. 2.28 – Méthode de mesure du bruit de polarisation. Courbe (a): bruit du mode vide enregistré sur la voie 2 (voir figure 2.24). Courbe (b): signal d'interférence entre le champ moyen et l'oscillateur local enregistré sur la voie 1. Courbe (c): Bruit du mode vide en fonction du signal d'interférence normalisé $\cos\theta_{dh}$*. Lorsque la phase* θ_{dh} *varie, nous mesurons successivement le bruit des paramètres de Stokes* $S_{\theta dh}$*. Par exemple, lorsque le champ moyen et l'oscillateur local sont en phase ou en opposition de phase (*$\theta_{dh} = 0_{[\pi]}$*), le bruit correspond aux fluctuations de* S_2*. Le paramètre de Stokes dont les fluctuations sont comprimées correspond à l'angle* $\theta_{sq} = +45°$ *et la réduction de bruit est de* 10% *(*14% *corrigé des pertes). La fréquence d'analyse est fixée à* 3 MHz*. La puissance incidente est de 7,5* μW *et la puissance des faisceaux pièges vaut 1.2* mW*.*

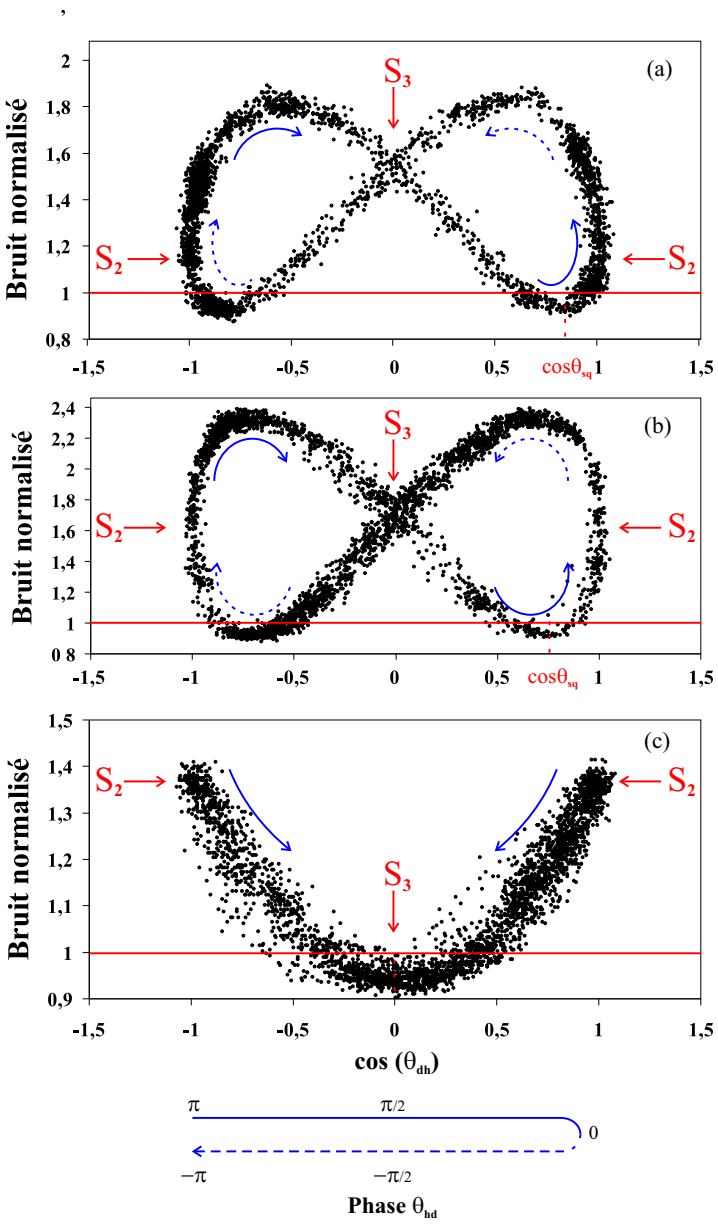


Fig. 2.29 – Mesure du bruit de polarisation pour différentes puissances incidentes du faisceau pompe. Le désaccord de la cavité est choisi proche de la résonance et la fréquence d'analyse vaut $3\ MHz$*. La puissance des pièges est de l'ordre de 1.2* mW*. Courbe (a):* $P_{in} = 8.5\ \mu W$ *et* $\theta_{sq} \simeq 35 \pm 10°$*. Courbe (b):* $P_{in} = 7.5\ \mu W$ *et* $\theta_{sq} \simeq 45 \pm 10°$*. Courbe (c):* $P_{in} = 6\ \mu W$ *et* $\theta_{sq} \simeq 90 \pm 10°$*. En passant des courbes (a) à (c), les fluctuations du paramètres de Stokes* S_3 *diminuent tandis qu'elles augmentent pour le paramètre* S_2*, afin de satisfaire les inégalités d'Heisenberg.*

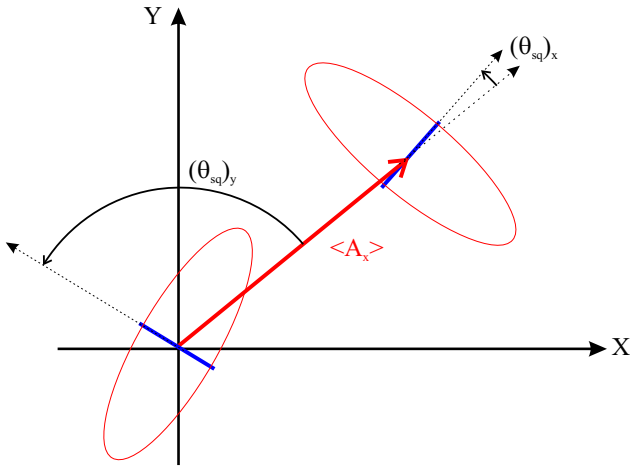


Fig. 2.30 – Représentation du bruit des quadratures des modes x et y dans le diagramme de Fresnel. On note $(\theta_{sq})_x$ et $(\theta_{sq})_y$ les phases des quadratures comprimées par rapport à la phase du champ moyen A_x.

manière générale, nous estimons l'incertitude à environ $\pm 10°$ pour la mesure de la phase avec cette méthode.

Nous sommes donc capables de caractériser le bruit de polarisation du faisceau pompe. Cette méthode de mesure du bruit en fonction de la phase des quadratures peut s'appliquer également à la mesure du bruit de n'importe quel mode de polarisation du faisceau pompe. Par exemple, en tournant la lame demi-onde $(\lambda/2)_{pola}$, on peut envoyer le champ moyen A_x sur la voie 2 et mesurer ainsi ses fluctuations quantiques. Dans ce cas les interférences disparaissent sur la voie 1 car le mode y a une valeur moyenne nulle. On utilise donc naturellement les interférences entre le champ moyen et l'oscillateur local mesurées directement sur la voie 2 par la photodiode $PhD\ 2A$. La phase de la quadrature comprimée pour ce mode est alors déterminée par la méthode décrite ci-dessus.

D.3 Dépendance en fonction de la fréquence et du désaccord

Nous avons étudié précédemment l'évolution de la réduction du bruit du mode vide A_y. Ces résultats s'appliquent directement à la réduction du bruit de polarisation. C'est pourquoi nous nous consacrons ici uniquement à l'étude de la phase de la quadrature comprimée. Celle-ci dépend aussi bien du désaccord de la cavité que de la fréquence d'analyse. La figure 2.29 illustre les transformations des courbes de mesure du bruit de polarisation pour différents points de fonctionnement à la fréquence d'analyse de 3 MHz. Ces courbes ont été réalisées avec des puissances incidentes distinctes et le désaccord de la cavité est choisi proche de la résonance. Il ne s'agit pas ici de faire une étude systématique mais d'illustrer les transformations

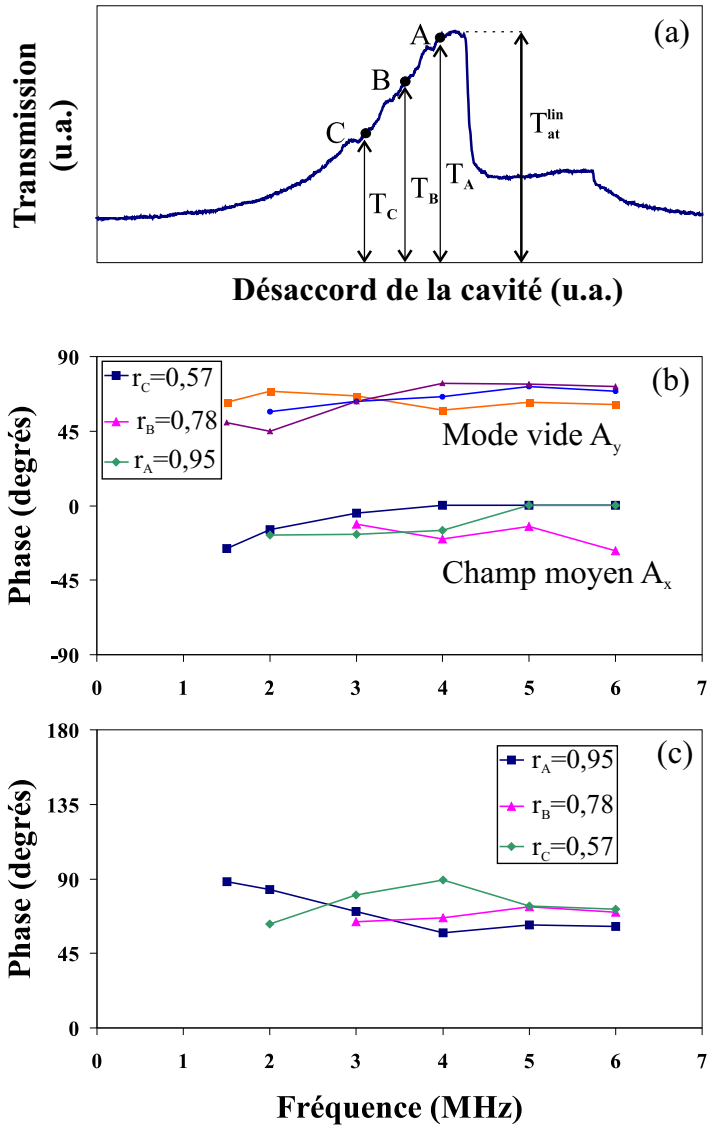


Fig. 2.31 – Mesure de la phase de la quadrature comprimée par rapport à la phase du champ moyen A_x en fonction de la fréquence, pour différents points de fonctionnement. Courbe (a): position des points de fonctionnement. Courbe (b): phases des quadratures comprimées du mode vide $(\theta_{sq})_y$ et du champ moyen $(\theta_{sq})_x$. Courbe (c): différence des phases: $(\theta_{sq})_y - (\theta_{sq})_x$. La puissance incidente vaut 7 μW et la puissance des pièges est de 1 mW. L'incertitude sur les mesures est de l'ordre de $\pm 10°$

des courbes lorsque la phase de la quadrature comprimée varie.

Nous présentons sur la courbe (b) de la figure 2.31 les mesures que nous avons effectuées sur la phase de la quadrature comprimée $(\theta_{sq})_y$ du mode vide, en fonction de la fréquence et ce pour différents points de fonctionnement. Cette série correspond à celle présentée pour l'étude de la réduction de bruit (voir figure 2.21). Nous avons également déterminé la phase de la quadrature comprimée pour le champ moyen $(\theta_{sq})_x$. Comme nous l'avons expliqué ci dessus, le signal d'interférence est mesuré dans ce cas par la photodiode $PhD\ 2A$. Ces phases $(\theta_{sq})_y$ et $(\theta_{sq})_x$ sont ainsi déterminées par rapport à la phase du champ moyen A_x pour les deux configurations comme illustré sur la figure 2.30.

De manière générale, le champ moyen est comprimé pour des quadratures voisines de la quadrature d'intensité, alors que le mode vide est comprimé en "phase". La réduction du bruit de polarisation est donc essentiellement suivant le paramètre de Stokes S_3. Ses fluctuations correspondent à celles de l'ellipticité du faisceau pompe, celle-ci est alors mieux définie que celle d'un état cohérent. La courbe (c) de la figure 2.31 représente l'évolution de la différence des quadratures comprimées pour les deux modes: cette différence est proche de $\pi/2$. Cette propriété nous sera utile par la suite pour déterminer les corrélations générées par ce système.

D.4 Autres modes de polarisation

Jusqu'à présent, nous nous sommes uniquement intéressés aux spectres de bruit des modes polarisés linéairement x et y. Qu'en est-il pour les autres modes de polarisation? Pour un point de fonctionnement donné sur la courbe de résonance de la cavité et pour une fréquence fixe de $3\ MHz$, nous avons mesuré le bruit en fonction des quadratures pour les modes polarisés à $\pm 45°$ des axes x et y, et pour les modes polarisés circulairement.

Pour réaliser ces mesures, nous avons enregistré le signal d'interférence à l'aide de la photodiode $PhD\ 2A$, c'est à dire sur la voie 2. Dans ce cas, la phase des quadratures est mesuré par rapport à la phase du mode mesuré, à savoir la phase de $\langle A_{+45}\rangle$, $\langle A_{-45}\rangle$, $\langle A_{\sigma_+}\rangle$ et $\langle A_{\sigma_-}\rangle$ respectivement. Pour les modes x et y nous avons utilisé la méthode détaillée au paragraphe D.2.

Les résultats sont présentés sur la figure 2.32. Conformément à l'analyse du paragraphe précédent, les deux modes A_x et A_y sont comprimés pour des quadratures orthogonales. Considérons maintenant les autres modes de polarisation. Pour cela, nous envoyons successivement les modes $A_{\pm 45°}$ vers la détection homodyne en tournant la lame demi-onde $(\lambda/2)_{pola}$ de $\pm 22.5°$. Les spectres de bruit de ces deux

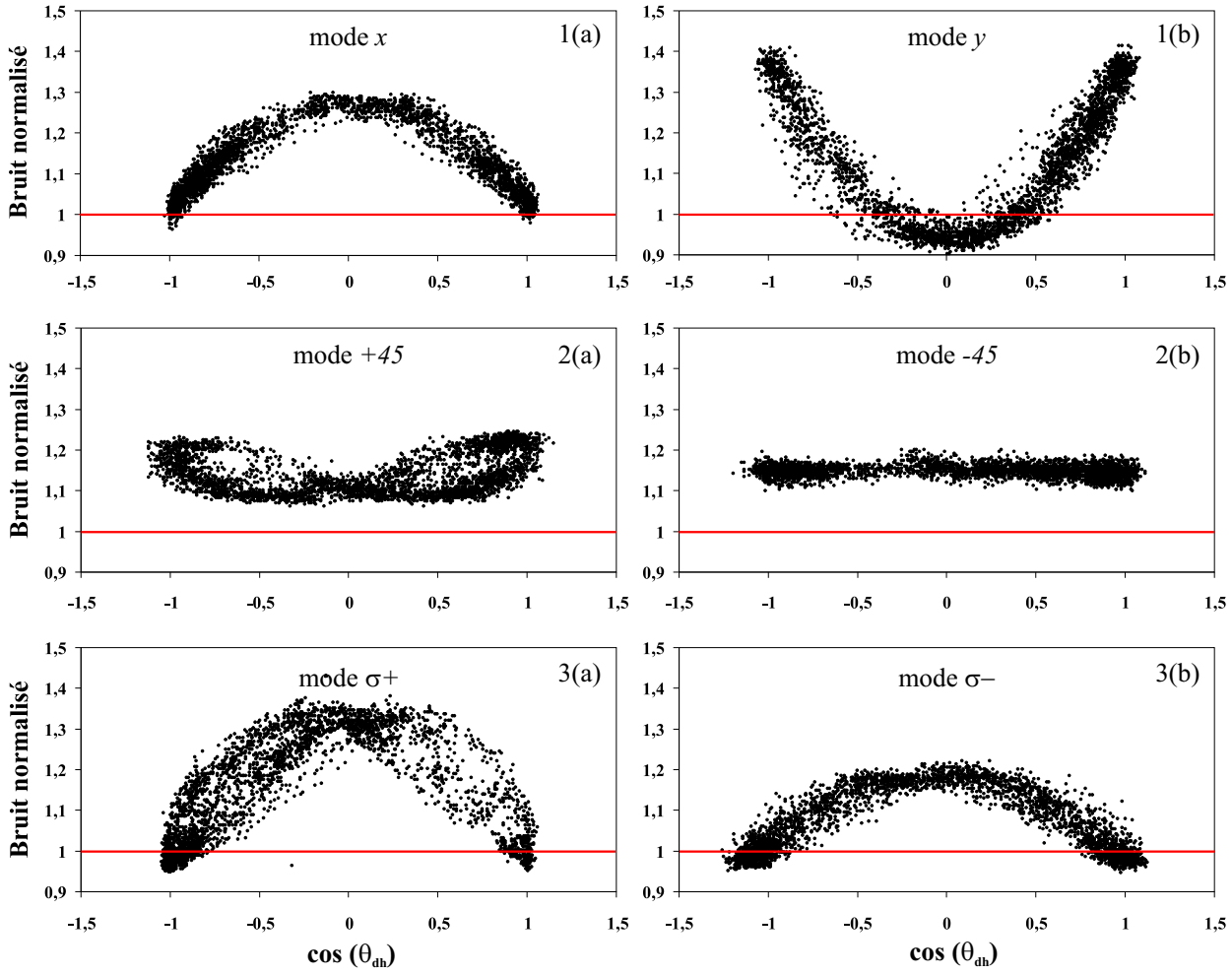


Fig. 2.32 – Bruit normalisé de différents modes de polarisation en fonction des interférences lorsque la polarisation est linéaire à l'intérieur de la cavité. Ces interférences sont toutes enregistrées par la photodiode PhD 2A, sauf pour la mesure du bruit du mode vide y où l'on a utilisé la photodiode PhD 1A (courbe 1(b)). Courbes 1(a) et (b): modes A_x et A_y. Courbes 2(a) et (b): modes A_{+45° et A_{-45°. Courbes 3(a) et (b): modes A_{σ_+} et A_{σ_-}. La fréquence d'analyse est fixée à 3 MHz. La puissance incidente du faisceau pompe est de 6μW et la puissance des faisceaux pièges vaut 1.2 *mW.*

modes présentent un excès de bruit quasiment constant pour toutes les quadratures (courbes 2(a) et 2(b) de la figure 2.32).

La mesure du bruit des modes σ_+ et σ_- est obtenue en plaçant une lame quart d'onde tournée à 45° sur le trajet du faisceau pompe. Nous n'avons pas mesuré les axes lent et rapide de cette lame; nous ne pouvons donc discriminer les modesσ_+ et σ_-. Comme la polarisation du faisceau est linéaire, ces deux modes sont symétriques et on s'attend à ce que leurs propriétés de bruit soient identiques. Les spectres de bruit ont en effet la même forme correspondant à une faible réduction de bruit pour la quadrature d'intensité (courbes 3(a) et 3(b)). Néanmoins ils ne sont pas tout à fait identiques; nous avons en effet montré que la polarisation de la pompe devient légèrement elliptique à l'intérieur de la cavité du fait des asymétries du système (voir paragraphe B.3.2).

Nous reviendrons par la suite sur l'interprétation de ces résultats aux chapitres 4 et 5. Toutefois, on peut signaler dès maintenant que la réduction de bruit sur les modes σ_+ et σ_- était attendue. En effet, ces deux modes saturent la transition optique, ce qui conduit à une réduction de bruit par effet Kerr sur ces deux composantes. Les relations de passage entre la base de polarisation circulaire et les bases de polarisation linéaire permettent alors d'expliquer la réduction de bruit sur les modes A_x et A_y, ainsi que l'excès de bruit observé sur les modes $A_{\pm 45°}$. Cette analyse nécessite la prise en compte des corrélations entre les différents modes et sera détaillée au chapitre 5.

E Expérience réalisée en polarisation circulaire

L'étude du bruit est jusqu'ici restée limitée au domaine où la polarisation du champ moyen reste linéaire. Le faisceau pompe incident étant toujours polarisé linéairement, il existe un seuil à partir duquel la polarisation devient circulaire à l'intérieur de la cavité (voir paragraphe B.1). Dans ce domaine, on peut penser que le système se comporte comme si la polarisation incidente était elle-même circulaire, ce qui nous ramène à la configuration expérimentale étudiée en détail lors des travaux de thèse précédents [Hilico92b, Lambrecht96a, Coudreau97, Vernac01a]. On s'attend alors à observer une réduction de bruit sur la composante circulaire à la sortie de la cavité.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons étudié les fluctuations quantiques des champs sortants dans le cas où la polarisation a basculé. Cependant, il est difficile d'asservir la longueur de la cavité dans ce domaine. Nous nous sommes donc limités à une étude succinte de la réduction de bruit en fonction de la fréquence pour un seul point de fonctionnement, représenté sur la courbe (a) de la figure 2.33. Ainsi, nous avons effectivement observé une réduction de bruit de l'ordre de3% pour le mode de polarisation dominant dans la cavité, disons σ_+ (voir courbe (b) de la figure 2.33).

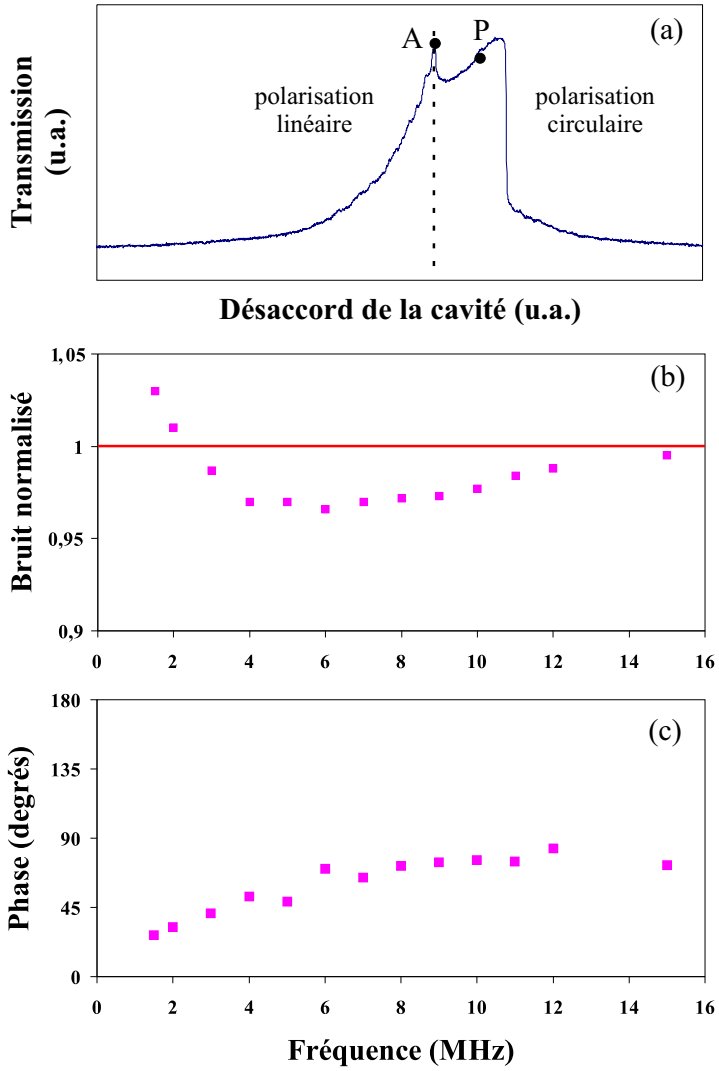


Fig. 2.33 – Réduction du bruit et mesure de la phase de la quadrature comprimée pour un point de fonctionnement en polarisation circulaire (P). On s'intéresse uniquement au bruit de la composante circulaire dominante $\sigma+$. Courbe (a): point de fonctionnement sur la courbe de résonance (point P); le point A correspond au seuil de bascule de la polarisation. Courbe (b): spectre de bruit minimal du mode $\sigma+$. Courbe (c): phase de la quadrature comprimée par rapport à la phase du champ moyen $\langle A_{\sigma_+} \rangle$.

Ce mode est envoyé vers la détection homodyne à l'aide de la lame quart d'onde $(\lambda/4)_{pola}$ tournée à 45°.

Nous avons également vérifié que le bruit de la composante orthogonale σ_- se trouve au niveau du bruit quantique standard dans ces conditions. Cette composante est en effet hors de résonance de la cavité et n'interagit plus avec les atomes (cf paragraphe B.2).

En comparant la courbe (b) de la figure 2.33 et la courbe (c) de la figure figure 2.21, on remarque que la dépendance en fréquence du bruit minimum de la composante σ_+ présente la même forme que celle correspondant au champ moyen dans le cas où la polarisation est linéaire. On constate en effet un excès de bruit à basse fréquence et la quadrature comprimée tend vers la quadrature d'amplitude lorsque la fréquence augmente. Le comportement du bruit des champs moyens en polarisation linéaire A_x et circulaire A_{σ_+} sont donc très semblables. Cette comparaison indique que l'origine de la réduction de bruit est certainement due au même phénomène, à savoir la saturation des transitions optiques.

F Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les premiers résultats obtenus sur la réduction du bruit quantique du faisceau pompe lorsqu'il est polarisé linéairement à l'entrée de la cavité.

Dans un premier temps, nous avons montré que la polarisation transmise par la cavité peut basculer et devenir quasiment circulaire. Les courbes de résonances observées ont été analysées en détail. Parallèlement nous avons donné une interprétation simple de ces résonances, l'étude théorique complète étant présentée au chapitre 4.

Puis nous avons étudié les fluctuations quantiques du système dans le domaine où la polarisation reste linéaire. Nous avons alors observé une réduction du bruit quantique sur les deux modes de polarisation du champ: le mode vide A_y et le mode correspondant au champ moyen A_x. La réduction de bruit pour le champ moyen est assez faible (de l'ordre de 3%) et est obtenue pour des fréquences d'analyse supérieures à 4 MHz. Pour le mode vide orthogonal, la réduction est plus élevée (de l'ordre de 17% corrigé des pertes) et ceci pour des fréquences d'analyse plus basses.

La réduction du bruit sur le mode vide orthogonal s'interprète comme la réduction du bruit de polarisation du faisceau. Celui-ci est caractérisé par les fluctuations des opérateurs de Stokes. Nous avons réalisé un montage permettant de mesurer ces fluctuations, ce qui revient à déterminer la phase de la quadrature comprimée

du mode vide par rapport à la référence de phase du champ moyen. Cette mesure, réalisée par une méthode originale, a montré que les deux modes sont comprimés pour des quadratures quasiment orthogonales. Nous verrons que cette propriété est fondamentale pour l'étude des corrélations quantiques générées par le système.

Nous avons également réalisé une étude des fluctuations quantiques pour les autres modes de polarisation. Il ressort de cette étude que les modes polarisés circulairement σ_+ et σ_- sont également comprimés, tandis que les modes polarisés à $\pm 45\%$ présentent un excès de bruit uniforme sur toutes les quadratures. Une étude détaillée de ces phénomènes sera présentée au chapitre 5.

Finalement nous nous sommes intéressés au comportement du système à la suite du basculement de la polarisation. Dans ce cas, la polarisation devient quasiment circulaire à l'intérieur de la cavité et nous avons obtenu une réduction de bruit sur le mode de polarisation dominant, i.e. une composante circulaire. Cette réduction de bruit était attendue puisque cette configuration expérimentale est similaire à celle étudiée lors des travaux précédents [Lambrecht96a].

Les réductions de bruit observées restant limitées, nous avons essayé d'améliorer notre dispositif expérimental. En particulier, il a été démontré que la présence des faisceaux pièges constituait une source importante d'excès de bruit [Khoury98]. C'est pourquoi nous avons décidé d'effectuer nos mesures de bruit en l'absence de ces faisceaux. Pour cela une nouvelle configuration expérimentale a été mise en place. La description de celle-ci fait l'objet du prochain chapitre de ce manuscrit.

Chapitre 3

Amélioration de l'expérience: coupure des faisceaux pièges

Afin d'améliorer les réductions de bruit observées sur les deux modes de polarisation du faisceau pompe, nous avons développé une technique permettant de mesurer le bruit quantique en l'absence de l'excès de bruit rajouté par les faisceaux pièges [Khoury98]. Nous reprenons ainsi le principe de mesure utilisé initialement sur cette expérience [Lambrecht96a].

Notre montage diffère pourtant fondamentalement de celui mis en place par Astrid Lambrecht pendant sa thèse. Le principe expérimental consistait alors à couper les faisceaux pièges et les champs magnétiques sur une période de temps longue par rapport au temps de vie des atomes dans le piège magnéto-optique (de l'ordre de 5 ms). Dans ce cas, le nuage atomique explose suivant sa répartition de vitesse initiale et tombe sous l'effet de la gravité. Le déphasage atomique tombe à zéro sur cette échelle de temps, ce qui a pour effet de balayer la résonance de la cavité. Comme le bruit dépend de la position du point de fonctionnement sur la courbe de résonance, il faut effectuer la mesure du bruit rapidement devant le temps de balayage de la cavité. Le temps de balayage de la phase de l'oscillateur local est alors d'environ2 ms (i.e. un temps de balayage du bruit des quadratures de $1ms$). Cette mesure du bruit a un sens car on peut considérer que l'état du système est quasi-stationnaire pendant le temps de mesure. Celui-ci est donné par le temps de mesure de l'analyseur de spectre, i.e. l'inverse de la résolution en fréquence, choisie à $100kHz$ [Lambrecht t1].

Cette méthode a permis d'observer une réduction du bruit d'environ 40% sous la limite quantique standard; néanmoins elle complique notablement la procédure expérimentale, essentiellement au niveau du traitement des données [Lambrecht t2].

Nous avons donc opté pour une solution intermédiaire: nous coupons les faisceaux pièges sur des temps courts devant le temps de fuite des atomes (typiquement $1ms$). Dans ce cas les atomes n'ont pas le temps de quitter la zone d'interaction avec le faisceau pompe, car ils sont aussitôt piégés à nouveau lorsque l'on rallume les pièges. Le nombre d'atomes reste donc quasiment constant au fil du temps. On peut alors considérer que l'état du système reste stationnaire sur des temps très long (de l'ordre de quelques heures en fonctionnement stable).

Suivant cette méthode le bruit quantique est modulé par le cycle de coupure des pièges. Seule la partie du signal de bruit correspondant à l'absence des faisceaux pièges nous intéresse. On effectue alors la mesure du bruit par détection synchrone. Cette technique suppose des échelles bien séparées: le temps de mesure du bruit doit être très long devant le temps d'un cycle de coupure des pièges. On balaie donc lentement la phase de l'oscillateur local comme c'était le cas pour les résultats présentés dans le chapitre 2.

Pour assurer un fonctionnement stationnaire de l'interaction entre la pompe et les atomes, la longueur de la cavité doit rester fixe pendant le temps de mesure. Nous devons donc asservir cette cavité. La réalisation de cet asservissement est ici nettement plus difficile que dans la configuration expérimentale précédente, où nous effectuions la mesure du bruit sans couper les faisceaux pièges. Nous verrons en effet que la résonance de la cavité est maintenant fortement perturbée. C'est pourquoi nous avons donc décidé d'utiliser une diode laser auxiliaire pour asservir la cavité.

Dans ce chapitre, nous présenterons successivement la mise en oeuvre de la coupure des faisceaux pièges, les résonances de la cavité et la nouvelle méthode d'asservissement, puis le principe de détection du bruit. Nous discuterons ensuite les résultats obtenus sur la mesure du bruit quantique dans ces conditions.

A Mise en place de la coupure des faisceaux pièges

A.1 Coupure des faisceaux pièges

La coupure des faisceaux pièges est réalisée de façon très simple: il suffit de contrôler la puissance diffractée par le modulateur acousto-optiqueAO_1 fonctionnant à 110 MHz (voir figure 2.3). Pour cela on utilise un atténuateur placé sur la sortie radio-fréquence (RF) de l'oscillateur à 110 MHz (voir figure 3.1). La puissance RF transmise est commandée par une tension TTL 0-5V. Cette tension TTL sera noté V_{cycle} et constitue la référence de notre cycle de coupure. Si $V_{cycle} = 0\ V$ alors la transmission est proche de 0: le faisceau sortant du laser Ti:Sa n'est donc pas diffracté à la sortie du modulateur AO_1. Quand $V_{cycle} = 5\ V$, la transmission vaut 1 et le faisceau est diffracté (voir figure 3.1); celui-ci passe alors dans l'acousto-optique double passage AO_2 et est envoyé avec la fréquence adéquate vers la cellule à vide où sont piégés les atomes (voir figure 2.3).

Nous n'avons pas mesuré le temps de réponse de ce dispositif; nous verrons néanmoins dans le paragraphe A.2.2 qu'il est nettement inférieur au temps de coupure qui est choisi de l'ordre de 1 ms. Ce dispositif est donc bien adapté et nous allons maintenant étudier l'effet de la coupure des pièges sur le nuage atomique.

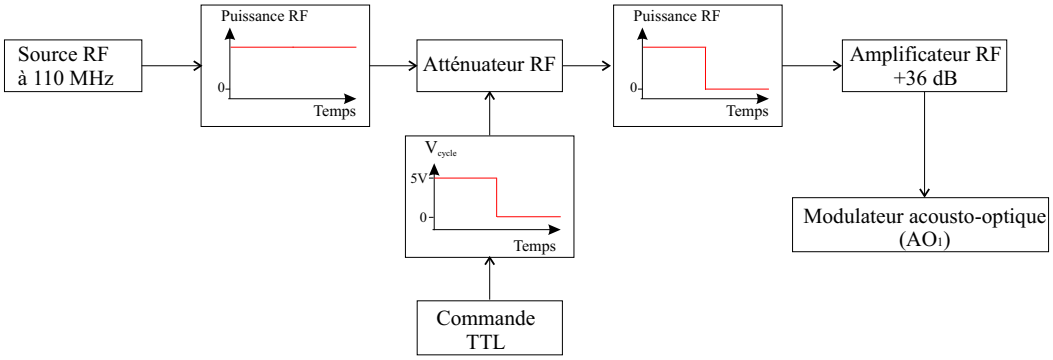


Fig. 3.1 – Principe de la coupure des faisceaux pièges. On contrôle la puissance radio-fréquence à 110 MHz envoyée vers le modulateur acousto-optique AO_1 (voir figure 2.3) à l'aide d'un atténuateur commandé par une tension TTL.

A.2 Caractérisation du piège magnéto-optique

A.2.1 Détection par fluorescence

Il nous faut obtenir un moyen d'observation du nuage atomique. Celui-ci risque en effet de subir des perturbations importantes lors de la coupure. Nous avons donc monté une photodiode pour détecter la lumière de fluorescence émise par les atomes. La puissance émise, notée $P_{fluo}^{piège}$, est égale à l'énergie d'un photon, multipliée par le nombre d'atomes $\mathcal{N}_{at}$ qui subissent un cycle de fluorescence pendant une seconde: $P_{fluo}^{piège} = \hbar\omega_{at}\mathcal{N}_{at}$. $\mathcal{N}_{at}$ est relié à la probabilité pour un atome d'être excité par les faisceaux pièges qui s'exprime en fonction du paramètre de saturation $s_{pièges}$:

$$\mathcal{N}_{at}^{pièges} = \Gamma\, N_{at}\, \frac{1}{2}\, \frac{s_{pièges}}{1 + s_{pièges}}. \qquad (3\text{-}1)$$

Par rapport aux conditions expérimentales précédentes, nous avons augmenté la puissance des faisceaux pièges afin d'obtenir un nombre d'atomes, interagissant avec le faisceau pompe, assez important. Leur puissance typique totale est maintenant de l'ordre de 5 mW et leur désaccord vaut $\Delta_{pièges} \simeq 7\ MHz \simeq 3\gamma$. Dans ce cas, le paramètre de saturation des pièges (donné par la relation 2-7) est de l'ordre de 1.

En tenant compte de l'angle solide de détection imposé par la géométrie de notre cellule $\Delta\Omega/4\pi \simeq 0.01$, l'ordre de grandeur de la puissance de fluorescence est de $P_{fluo}^{piège} \simeq 20\ nW$, pour 10^7 atomes. Cette fluorescence est collectée par une photodiode sensible dont le temps de réponse est d'environ 50μs.

A.2.2 Dynamique du piège magnéto-optique

Avant d'étudier le comportement du nuage atomique lorsqu'on coupe les faisceaux pièges de manière cyclique, nous avons estimé le temps de chargement du

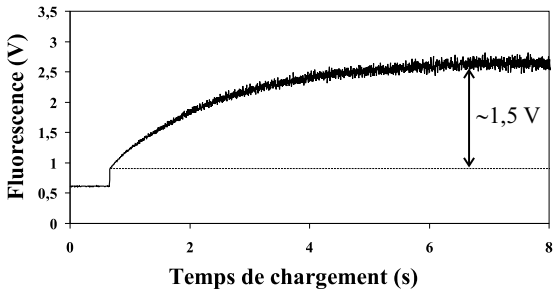


Fig. 3.2 – Temps de chargement du piège: évolution de la fluorescence en fonction du temps.

piège. Pour cela, on utilise le dispositif décrit ci-dessus mais pour des cycles de plusieurs secondes. On observe alors l'augmentation de la fluorescence des pièges au cours du temps (voir figure 3.2). La valeur stationnaire de la fluorescence due aux atomes, mesurée par la photodiode décrite ci-dessus, vaut environ $1.5V$. L'état stationnaire du piège est atteint au bout de 6 secondes et le temps à mi-hauteur est de l'ordre de 1.5 s.

Dans la suite, le temps typique de coupure des pièges sera de $1ms$. Ce temps est très inférieur au temps mis par le système à atteindre son régime stationnaire. Nous avons alors constaté que la fluorescence diminuait pour atteindre un régime stable au cours du temps. La figure 3.3 montre l'évolution de cette fluorescence pendant un cycle de coupure. Ce cycle correspond à un temps de coupure de $\tau_{coupure} = 850\ \mu s$ et un temps de piégeage de $\tau_{pièges} = 1.15\ ms$.

Sur cet enregistrement, la différence de fluorescence entre les périodes éteintes et allumées des pièges est d'environ $300\ mV$. Ce signal est composé de la fluorescence due aux atomes et des réflexions parasites des faisceaux pièges sur les parois de la cellule. La contribution de ces derniers peut être estimée indépendamment en coupant les champs magnétiques de piégeage. Dans ce cas les atomes ne sont plus piégés et la fluorescence disparaît. On obtient ainsi une valeur effective de la fluorescence atomique de l'ordre de $250\ mV$.

On remarque que cette valeur est constante entre deux cycles de coupure; le nombre d'atomes dans le piège semble donc stationnaire en présence des faisceaux pièges. Qu'en est il pour le nombre d'atomes en l'absence des faisceaux pièges? Afin de répondre à cette question, nous allons maintenant étudier l'évolution de ce nombre d'atomes lorsque l'on coupe les pièges. Pour cela, nous utilisons la fluorescence due au faisceau pompe.

En effet, l'étude précédente a été réalisée en l'absence du faisceau pompe. Néanmoins, lorsque celui-ci est résonant avec la cavité, il interagit avec les atomes et diffuse également de la lumière par fluorescence, notée P_{fluo}^{pompe}. Pour une puissance incidente de $7\,\mu W$, le paramètre de saturation de la pompe à résonance vaut $s_{pompe}^{max} \simeq 0.3$

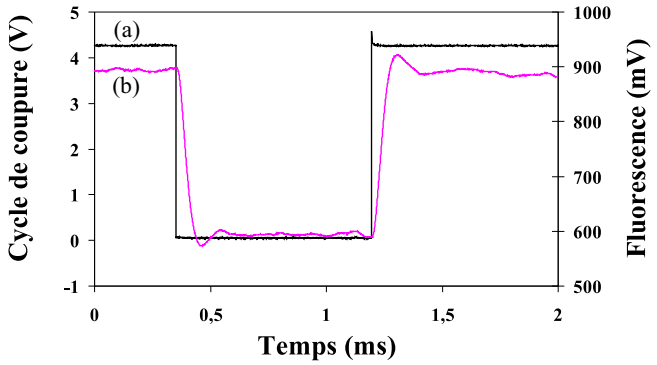


Fig. 3.3 – Fluorescence du nuage atomique due aux faisceaux pièges. Courbe (a): tension de commande de la coupure des faisceaux pièges:V_{cycle}. Courbe (b): tension de sortie de la photodiode enregistrant la fluorescence des atomes. La puissance totale des faisceaux pièges est de l'ordre de 5 mW. résonance de la cavité. Courbe (b) : évolution de l'intensité maximale de fluorescence de la pompe en fonction du temps T, compté à partir de la coupure des faisceaux pièges.

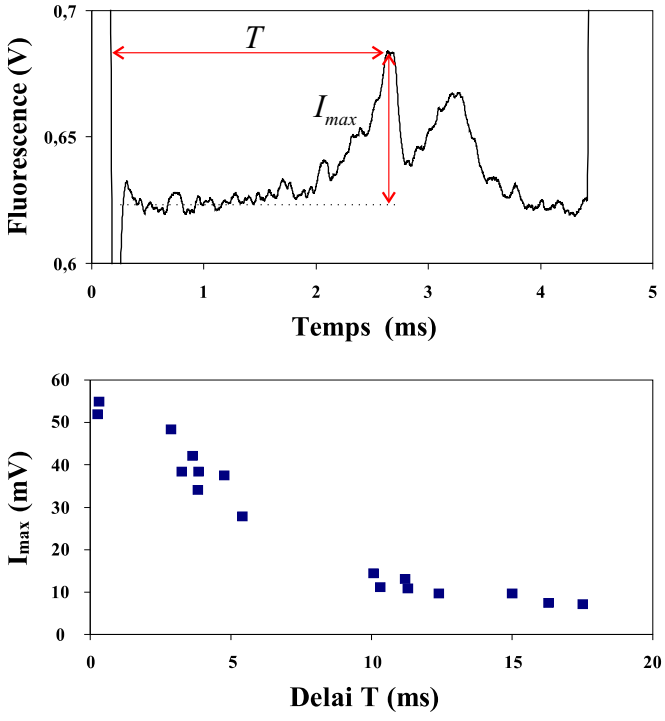


Fig. 3.4 – Fluorescence du nuage atomique due au faisceau pompe. Courbe (a): résonance de la cavité. Courbe (b) : évolution de l'intensité maximale de fluorescence de la pompe en fonction du temps T, compté à partir de la coupure des faisceaux pièges.

(voir relation 2-10). On compare cette fluorescence à celle due aux faisceaux pièges:

$$\frac{P_{fluo}^{pompe}}{P_{fluo}^{pièges}} = \frac{s_{pompe}^{max}/2}{s_{pièges}} \frac{1+s_{pièges}}{1+s_{pompe}^{max}/2} \simeq 0.4 \qquad (3\text{-}2)$$

La fluorescence due aux faisceaux pièges étant d'environ $250\,mV$, on s'attend à observer une puissance de fluorescence due à la pompe de l'ordre d'une centaine de mV, ce qui est tout à fait détectable. Ainsi, la courbe (a) de la figure 3.4 montre la détection d'une résonance de la cavité à l'aide de la fluorescence de la pompe. Celle-ci est enregistrée pendant l'intervalle de temps où les faisceaux pièges sont coupés. Pour cela, on balaie la longueur de la cavité plus rapidement que le temps de coupure, choisi ici à $\tau_{coupure} = 4\ ms$. L'intensité maximale du pic de résonance $I_{max} \simeq 60\ mV$ est en bon accord avec l'ordre de grandeur calculé ci-dessus.

Cette intensité maximale I_{max} est proportionnelle au nombre d'atomes interagissant avec la pompe pour un délai T écoulé après la coupure. Nous avons tracé sur la courbe (b) de la figure 3.4 l'évolution de cette intensité I_{max} en fonction de ce délai T. Cette courbe montre que les atomes quittent la zone d'interaction au bout d'une dizaine de ms. Le temps caractéristique de fuite (temps à mi-hauteur) des atomes est d'environ $5\ ms$. Ce temps caractéristique est environ deux fois plus petit que la valeur déterminée par A. Lambrecht, les faisceaux pièges utilisés dans ce dernier cas étant environ trois fois plus puissants.

Cette mesure peut être effectuée de manière similaire en étudiant la transmission de la cavité en fonction de ce même temps T; nous obtenons les mêmes résultats par ces deux méthodes.

Pour un temps de coupure d'environ $1\,ms$, inférieur au temps de fuite des atomes, le nombre d'atomes interagissant avec la pompe est donc quasi-stationnaire. Dans toute la suite de ce manuscrit, le cycle utilisé correspond à celui de la figure 3.3, à savoir $\tau_{coupure} = 850\ \mu s$ et $\tau_{pièges} = 1.15\ ms$. Nous allons maintenant étudier les résonances de la cavité dans ces conditions.

B Résonances de la cavité à atomes

B.1 Modulation de la transmission de la cavité

Lorsque les faisceaux pièges sont coupés, on enregistre la transmission de la cavité à l'aide de la photodiode PhD 1 (voir figure 2.7). Le temps de coupure étant assez rapide, la longueur de la cavité reste constante pendant quelques cycles. La figure 3.5 montre que la transmission de la cavité est alors modulée par le cycle de coupure. Ceci est dû à la modulation du déphasage atomique, qui peut résulter

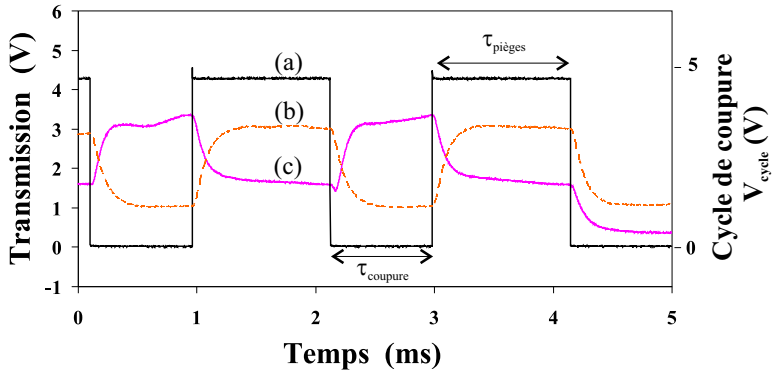


Fig. 3.5 – Transmission de la cavité en fonction du temps. Courbe (a): tension de commande de la coupure des faisceaux pièges: V_{cycle}. Les deux courbes (b) et (c) donnent les transmissions correspondant à deux longueurs de cavité différentes. Ces longueurs de cavité restent quasiment constantes sur l'intervalle de temps considéré ici, i.e. 5 ms.

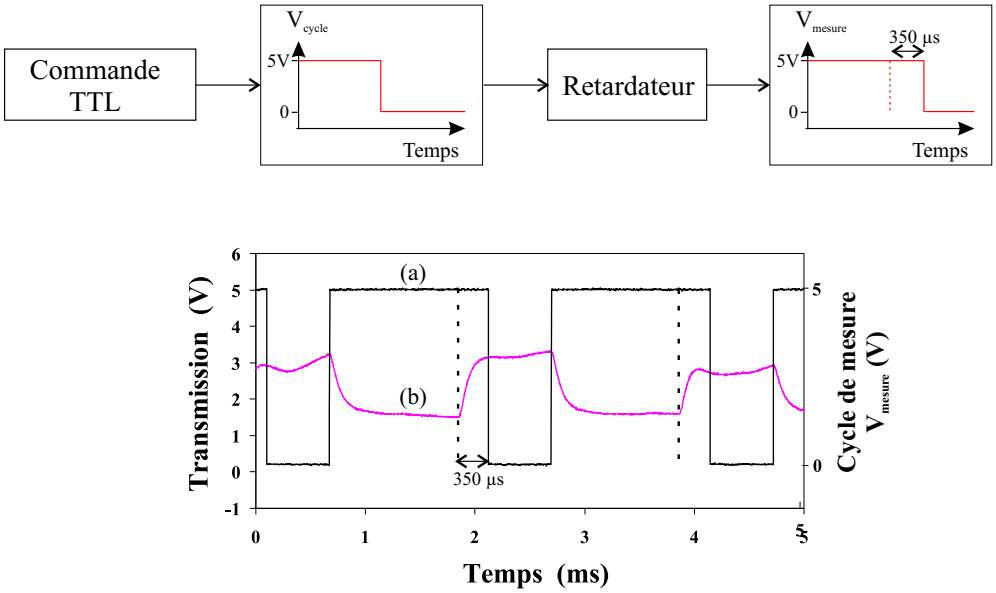


Fig. 3.6 – En haut: obtention d'un nouveau cycle pour la mesure du bruit quantique à l'aide d'un retardateur. En bas: cycle de mesure V_{mesure} (a) et signal de transmission pour une longueur fixe de la cavité (b).

d'une modulation du nombre d'atomes. Il est en effet raisonnable de supposer que ce nombre diminue en l'absence des faisceaux pièges.

On observe un temps de relaxation sur la courbe transmission de la cavité. Celui-ci est dû au temps de coupure de la photodiode PhD 1 (environ 50 μs). Pour éviter de mesurer le bruit pendant cette phase transitoire, nous avons mis en place un deuxième cycle qui sera utilisé pour définir la plage de temps pendant laquelle nous allons effectivement mesurer le bruit quantique. Pour cela on retarde le début de la mesure par rapport à la chute de la tension V_{cycle} qui conditionne l'arrêt des pièges (voir figure 3.6). Ce retard est choisi de quelques centaines de μs. La nouvelle tension de commande ainsi obtenue, notée V_{mesure}, servira de référence pour effectuer la détection synchrone du bruit mesuré par l'analyseur de spectre. Nous avons constaté une amélioration des résultats sur la réduction de ce bruit lorsque ce retard est de l'ordre de 350 μs.

B.2 Détection synchrone des résonances

L'étude précédente a été réalisée pour une longueur de la cavité fixée. Afin d'observer les résonances, on balaie maintenant cette longueur. Comme nous l'avons vu, la transmission de la cavité est modulée par la coupure des faisceaux. Une courbe typique de résonance de la cavité est présentée sur la courbe (a) de la figure 3.7: le signal de transmission bascule lorsqu'on éteint ou allume les pièges. On discerne alors deux courbes de transmission: une partie "basse" correspondant à la coupure des pièges et une partie "haute" donnant la transmission en leur présence. Il est néanmoins difficile d'étudier les résonances de la cavité dans ces conditions; on effectue donc une détection synchrone pour démoduler le signal de transmission.

Pour cela on utilise un échantillonneur commandé par la tension TTL du cycle de mesure (figure 3.6): la tension de sortie est égale à la tension d'entrée lorsque $V_{mesure} = 0\ V$ et s'annule si $V_{mesure} = 5\ V$. On obtient ainsi un signal non nul uniquement pour la partie "basse" de la courbe correspondant à la coupure des faisceaux pièges. Le résultat est présenté sur la courbe (b) de la figure 3.7. Ce signal est ensuite filtré par un filtre passe bas dont la fréquence de coupure vaut typiquement 20 Hz. Celui-ci donne la moyenne, pondérée par les temps respectifs $\tau_{coupure}$ et $\tau_{pièges}$, entre la valeur du signal sans pièges et la valeur constante nulle. Le signal ainsi filtré est donc proportionnel à la transmission de la cavité en l'absence des faisceaux pièges.

Cette méthode est, en fait, une détection synchrone et suppose une échelle de temps bien séparée entre le temps de coupure et le temps de balayage de la cavité de telle sorte que $\tau_{coupure} \ll \tau_{filtre} \ll \tau_{balayage}$. Les courbes (c) et (d) de la figure 3.7 montrent le signal direct en transmission et le résultat à la sortie du filtre passe bas pour un temps de balayage de l'ordre de 500 ms. On retrouve ainsi l'allure des courbes de résonance présentées dans la section B du chapitre 2.

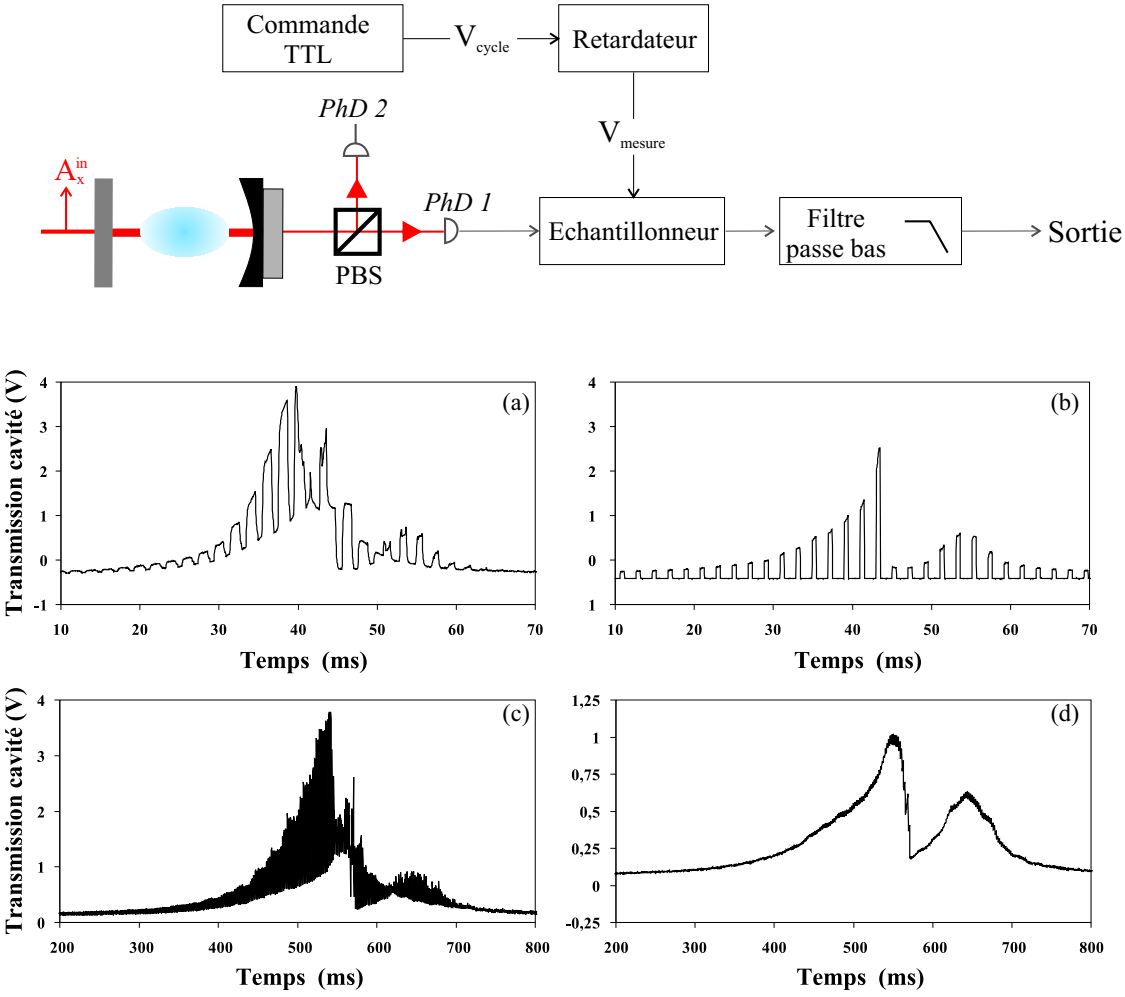


Fig. 3.7 – Méthode de détection des résonances en l'absence des faisceaux pièges par détection synchrone. En haut: schéma du dispositif expérimental. En bas: signaux de transmission illustrant les différentes étapes de la détection synchrone. Courbe (a): transmission de la cavité pour un balayage rapide de la cavité. Courbe (b): signal obtenu à la sortie de l'échantillonneur. Courbe (c): transmission de la cavité pour un balayage lent. Courbe (d): signal à la sortie du filtre basse fréquence. La puissance incidente de la pompe vaut 7 μW.

B.3 Bascule de polarisation

On peut appliquer la méthode de détection des résonances présentée ci-dessus à l'analyse de la polarisation à la sortie de la cavité à l'aide des photodiodes PhD 1 et PhD 2 (voir figure 2.7). La figure 3.8 montre les courbes de résonance obtenues pour une puissance incidente du faisceau pompe de $6\,\mu W$.

On observe à nouveau le phénomène de bascule de polarisation que nous avons étudié en détail dans la section B du chapitre 2. Le pompage optique dû aux faisceaux pièges ne joue maintenant plus aucun rôle; on s'attend alors à ce que le régime de pompage optique saturé soit atteint pour des puissances de pompe inférieures à celles nécessaires dans le cas où les faisceaux pièges sont allumés (voir paragraphe B.3.2 du chapitre 2). Ce comportement semble être vérifié sur les courbes 1(a) et 1(b) de la figure 3.8, puisque les flancs raides sont nettement moins marqués sur les courbes de résonance au niveau du point B en l'absence des faisceaux pièges qu'en leur présence (pour comparaison voir figure 2.8).

Pour comparer directement ces différences de comportement, on peut obtenir la courbe de transmission en présence des faisceaux pièges. Pour cela, il suffit d'inverser la commande TTL V_{mesure} envoyée sur l'échantilloneur. Les courbes 2(a) et 2(b) de la figure 3.8 montrent les résonances pour les polarisations circulaire et linéaire. Contrairement au cas précédent, les processus de pompage optique dus à la pompe et aux pièges entrent maintenant en compétition; le pompage optique n'est plus saturé et on observe à nouveau l'apparition de flancs raides au voisinage du point B (voir paragraphe B.3.2 du chapitre 2).

En comparant les courbes 1(b) et 2 (b) de la figure 3.8, on remarque que l'interaction entre la pompe et les atomes semble plus importante en l'absence des faisceaux pièges qu'en leur présence puisque le basculement de la polarisation est moins marqué dans ce cas. Cette observation semble donc contredire l'hypothèse d'une diminution du nombre d'atomes en l'absence des faisceaux pièges, hypothèse que nous avions faite pour expliquer la modulation de la transmission du faisceau pompe à travers la cavité (voir, par exemple, la courbe (a) de la figure 3.7).

En fait, on attribue cet effet à la saturation importante du milieu atomique en présence des faisceaux pièges. En effet, pour les puissances de pièges utilisées (de l'ordre de $5\,mW$), le paramètre de saturation des pièges est proche de 1, comme nous l'avons estimé au paragraphe A.2.1. Ainsi une partie non négligeable des atomes est excitée par ces faisceaux. Pour se faire une idée, calculons l'effet de la saturation due aux faisceaux pièges exclusivement. Cette saturation se traduit par une diminution apparente du nombre d'atomes donnée par:

$$N_{eff} = N_{fondamental} - N_{excité} = N_{at}\frac{1}{1+s_{pièges}} \simeq 0.5\ N_{at} \qquad (3\text{-}3)$$

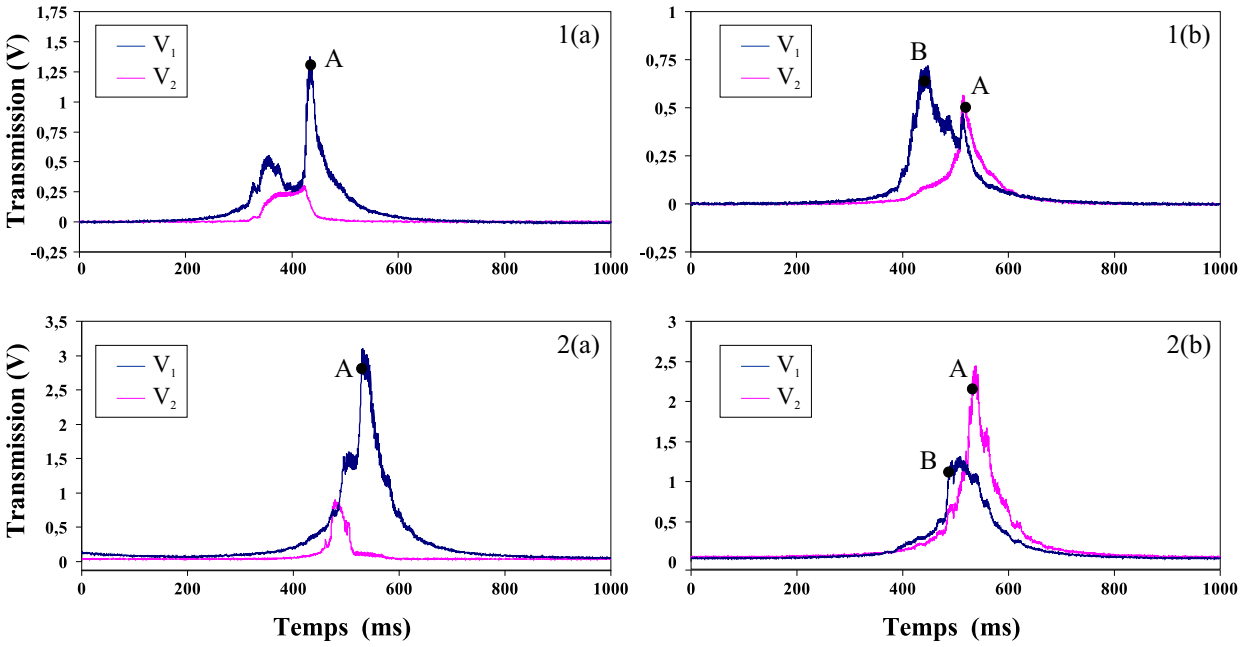


Fig. 3.8 – Analyse de la polarisation transmise par la cavité lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. Les tensions V_1 et V_2 correspondent aux tensions délivrées par les photodiodes $PhD1$ et $PhD2$ placées en transmission de la cavité (voir figure 2.7). Les courbes présentées ici ont été obtenues après le dispositif de détection de synchrone décrit dans le texte. Les courbes (a) et (b) correspondent aux analyses de polarisation linéaire et circulaire respectivement. Courbes (1): transmission en l'absence des faisceaux pièges. Courbes (2): on inverse la tension de commande V_{mesure} afin d'obtenir la partie de la transmission correspondant à la présence des faisceaux pièges. La puissance incidente du faisceau pompe vaut $6\mu W$.

Ainsi le faisceau pompe "voit" successivement un nombre d'atomes valant N_{at} ou N_{eff} suivant que les faisceaux pièges sont éteints ou allumés. Nous pensons donc, finalement, que la modulation observée sur la transmission de la cavité est due à la modulation du nombre effectif d'atomes vus par la pompe, le nombre réel d'atomes étant quasiment constant.

C Asservissement de la cavité

C.1 Principe et première réalisation

Par la suite, nous allons mesurer les fluctuations quantiques des champs sortant de la cavité en effectuant une détection synchrone du signal donné par la détection homodyne. Pour réaliser cette détection synchrone il faut bien séparer les échelles de temps de mesure, de celles de la coupure des faisceaux pièges. Le balayage de la phase de l'oscillateur local doit alors être long devant le temps de coupure des pièges. En pratique, le temps de balayage est choisi de l'ordre de la seconde. Il faut donc asservir la longueur de la cavité pour obtenir un comportement stationnaire du système sur cette échelle de temps.

Nous avons vu que la transmission de la cavité était maintenant fortement modulée, il est donc difficile d'utiliser ce signal pour asservir la cavité "sur le flanc" comme c'était le cas précédemment (voir paragraphe A.3.2 du chapitre 2). Comme nous l'avons déjà évoqué, nous avons décidé d'utiliser les pics de résonance d'un faisceau auxiliaire pour asservir la cavité. Sa fréquence doit être suffisamment éloignée des résonances atomiques pour qu'il ne soit pas sensible à la modulation d'indice due aux atomes à l'intérieur de la cavité. En outre, sa stabilité en fréquence doit être inférieure à la largeur de la cavité qui vaut environ $5\ MHz$. Enfin sa fréquence doit être asservie pour ne pas entraîner de dérive lente de la cavité pendant les enregistrements des spectres de bruit.

La première solution envisagée fut de produire ce faisceau à l'aide de modulateurs acousto-optiques à partir du laser Titane:Saphir. Cette solution permet de s'affranchir de tous les problèmes de stabilité de fréquence car le Ti:Sa est déjà asservi (voir paragraphe A.1 du chapitre 2).

A cette époque, nous avions le projet d'étudier les fluctuations atomiques du niveau $6S_{1/2}\ F = 4$ à l'aide d'un faisceau quasi-résonant avec la transition$6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 3$. Cette transition est décalée d'environ $450\ MHz$ dans le rouge de la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$, i.e. décalée de $400\ MHz$ par rapport au faisceau pompe. Ce faisceau, que nous appellerons le faisceau sonde (voir figure2.4), est produit à partir du faisceau pompe par un modulateur acousto-optique. Celui-ci fonctionne autour de $200\ MHz$ et est monté en configuration double passage, analogue à celle décrite sur la figure 2.3. Afin d'obtenir la résonance simultanée des

faisceaux pompe et sonde, la cavité avait été allongée de telle sorte que l'intervalle spectral libre de la cavité soit réduit à environ $400\,MHz$.

Nous n'avons finalement pas utilisé ce faisceau sonde pour l'étude des fluctuations atomiques. En revanche, il nous a servi, dans un premier temps, à générer le faisceau auxiliaire pour asservir la cavité. Le faisceau d'asservissement, obtenu à partir du faisceau sonde par un nouveau décalage de $2 \times 200\ MHz$, est ainsi décalé de 800 MHz dans le rouge du faisceau pompe, soit deux fois l'intervalle spectral libre de la cavité. Dans ce cas, il est situé à $400\,MHz$ de la transition atomique la plus proche, à savoir la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 3$ (voir figure 2.4). Ce désaccord est suffisamment important pour que ce faisceau ne soit pas sensible à la modulation d'indice à l'intérieur de la cavité.

Nous avons pu ainsi asservir la cavité sur un pic de résonance de ce faisceau. Malgré la faible puissance de ce faisceau à l'entrée de la cavité (inférieure à $1\mu W$), nous avons observé une augmentation de la biréfringence du nuage atomique vue par le faisceau pompe. La rotation de polarisation induite sur le faisceau pompe réfléchi par la cavité peut être corrigée à l'aide d'une lame demi-onde avant d'envoyer le faisceau vers la détection homodyne; ce problème n'est donc pas critique. En outre nous n'avons pas constaté d'excès de bruit ajouté par ce faisceau.

Cette solution a néanmoins été abandonnée pour des raisons pratiques. En effet, nous voulons pouvoir choisir le point de fonctionnement sur la courbe de résonance de la pompe. La demi-largeur de la cavité vide est de $5\,MHz$. Lorsque la pompe interagit avec les atomes, l'absorption qu'elle subit a pour effet de diminuer la finesse et donc d'augmenter cette largeur. Pour balayer le pic de résonance en polarisation linéaire il faut ainsi pouvoir faire varier la fréquence du faisceau d'asservissement d'environ 20 MHz. Nous sommes alors confrontés à deux problèmes lorsque l'on change la fréquence de fonctionnement du modulateur acousto-optique: d'une part la puissance diffractée diminue à chaque passage par rapport au réglage initial, la puissance du faisceau auxiliaire décroît donc très rapidement. D'autre part, l'angle de Bragg avec lequel ce faisceau est diffracté dépend de la fréquence. Bien que le modulateur soit monté en configuration de double passage (voir figure2.3), l'orientation du faisceau varie légèrement et le recouvrement entre le mode du laser auxiliaire et de la cavité chute également rapidement. Cet effet s'ajoute au précédent pour détruire le signal de transmission de ce faisceau par la cavité. En pratique, la plage de balayage accessible est de l'ordre de 1 à $2\,MHz$, ce qui n'est pas suffisant.

Pour résoudre ce problème, on aurait pu utiliser un modulateur acousto-optique fonctionnant à des fréquences plus élevées comme 400 ou $800\,MHz$. Nous ne disposions pas de tels modulateurs acousto-optique; il nous a donc semblé préférable d'utiliser une diode laser annexe, notre groupe bénéficiant d'une solide expérience sur leur fonctionnement. Il faut alors stabiliser sa fréquence.

Pour cela, nous détectons les battements entre la diode et le faisceau sonde décrit ci-dessus à l'aide d'une photodiode rapide. Le signal des battements est ensuite utilisé

pour contrôler la fréquence de la diode. Nous allons maintenant détailler le montage de cette diode puis la technique d'asservissement de sa fréquence.

C.2 Diode laser auxiliaire

C.2.1 Montage de la diode laser

La diode laser utilisée est une diode SDL-5422-H1, régulée en température et montée sur réseau en configuration Littrow afin de réduire sa largeur spectrale. Néanmoins le centre d'émission de cette diode varie sensiblement, de l'ordre de 50 MHz. Il est principalement dû aux fluctuations mécaniques et acoustiques. Pour réduire ces fluctuations, nous avons apporté un soin particulier au montage mécanique de la diode. En suivant les conseils de François Nez, nous avons inséré du caoutchouc entre la table optique et le support de la diode. En outre nous avons réalisé une boite en bois, tapissé d'un isolant acoustique pour améliorer l'isolation acoustique de la diode laser. Ceci a eu pour effet de réduire le "jitter" à une dizaine de MHz, évalué par les battements avec le laser Ti:Sa sur la photodiode rapide (voir paragraphe C.2.2).

Pour des raisons d'encombrement, cette diode a été montée sur une table optique annexe. Le faisceau est envoyé vers la cavité à atomes et le dispositif d'asservissement en fréquence à l'aide d'une fibre optique (voir figure 3.9).

A la sortie de la diode laser, on dispose deux prismes taillés à l'angle de Brewster pour rendre circulaire le mode spatial du faisceau, initialement elliptique. Le faisceau traverse ensuite deux isolateurs optiques montés en série afin d'éviter tout retour de lumière. Une partie du faisceau est envoyée vers un lambdamètre afin de repérer sa fréquence, tandis que l'autre partie est envoyée vers une fibre optique monomode à maintien de polarisation. Cette fibre possède un coupleur à l'entrée et un collimateur en sortie. On adapte le mode du faisceau à l'aide de deux lentilles convergentes de focale 500 et 300 mm pour coupler efficacement le faisceau dans la fibre et on obtient une transmission à travers la fibre d'environ 55%. Le passage par cette fibre permet également de filtrer spatialement le mode de la diode. Celui est donc un mode gaussien TEM_{00} à la sortie de la fibre.

Pour obtenir la fréquence désirée, nous ajustons l'angle d'incidence du faisceau sur le réseau qui assure l'affinement spectral de la diode en cavité étendue. On peut ainsi déplacer la longueur d'onde de la diode d'une vingtaine de nm par sauts de mode. La fréquence libre de la diode laser étant d'environ 849 nm, on peut obtenir ainsi un mode d'oscillation autour de 852,11 nm. On règle alors finement la fréquence en jouant sur la température et sur l'intensité d'alimentation. Nous avons ainsi choisi un point de fonctionnement correspondant à une intensité de $I = 75\ mA$ et une température de $T \simeq 8°$. La puissance disponible à la sortie de la fibre est alors d'environ 5 mW, ce qui est largement suffisant pour les besoins de l'expérience.

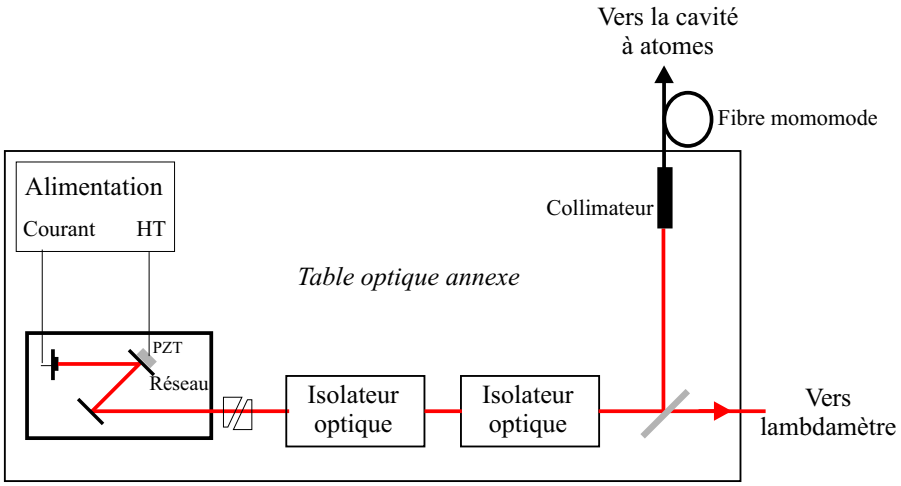


Fig. 3.9 – Montage de la diode laser auxiliaire sur réseau. Le faisceau est envoyé vers la cavité à l'aide d'une fibre monomode.

La fréquence dépend également de la longueur de la cavité étendue, définie par la distance entre la diode laser et le réseau. On balaye la fréquence continûment en montant le réseau sur une cale piézo-électrique. Pour asservir la fréquence de la cavité, nous allons jouer à la fois sur le courant d'alimentation de la diode et la longueur de la cavité étendue.

C.2.2 Asservissement en fréquence

Le signal d'asservissement de la fréquence est généré par le signal de battements entre la diode laser et le faisceau sonde. Nous avons vu au paragraphe C.1 que ce dernier est décalé d'environ 400 MHz dans le rouge par rapport au faisceau pompe.

Ces battements sont détectés à l'aide d'une photodiode rapide. On transforme ce signal en un signal d'erreur exploitable à l'aide d'un convertisseur fréquence-tension qui nous a été fourni par F. Nez. Le signal de sortie est proportionnel à la différence de la fréquence des battements par rapport à une fréquence de référence centrée autour de 300 MHz. Cette dernière est commandée par une tension continue et peut être choisie entre 280 et 320 MHz.

Le signal d'erreur ainsi généré est séparé en deux parties. La première partie est utilisée pour corriger les fluctuations rapides de la fréquence en agissant sur le courant d'alimentation. Ce signal passe par un intégrateur à gain ajustable dont la constante de temps vaut typiquement 500 μs. La seconde partie est utilisée pour corriger les dérives lentes de la fréquence en jouant sur la tension appliquée sur la cale piézo-électrique du réseau. Ce signal est également intégré avec un gain réglable, la constante de temps étant plus lente (de l'ordre de 100 ms).

Les battements entre la diode et la sonde, de fréquence située autour de 300

MHz, ont tout d'abord été détectés par une photodiode FND 100, identique à celles utilisées pour la détection homodyne. Ce dispositif permet de détecter les battements entre la sonde et la diode jusqu'à 400 MHz. Ceux-ci sont asservis autour de 300 MHz suivante la technique décrite ci-dessus. Dans ce cas, le faisceau sonde est décalé de 500 MHz dans le rouge par rapport au faisceau pompe. Au total, la diode laser se trouve alors décalée d'environ 800 MHz par rapport au faisceau pompe, i.e deux fois l'intervalle spectral libre de la cavité dans cette configuration.

Ce désaccord étant le même que celui obtenu pour la configuration préliminaire utilisant un modulateur acousto-optique pour produire le faisceau auxiliaire, nous avons à nouveau constaté l'influence du faisceau d'asservissement sur la rotation de la polarisation du champ pompe à la sortie de la cavité (voir paragraphe C.1). Une fois la diode laser asservie, on peut choisir la fréquence d'asservissement des battements autour de 300 MHz à l'aide de la tension de référence. Cette technique nous permet de déplacer la fréquence de la diode sur une plage de 40 MHz et de balayer ainsi toute une résonance de la cavité (de l'ordre de 20 MHz). Nous avons utilisé cette méthode pour obtenir les résultats présentés au paragraphe C.4 du chapitre 2.

A la suite d'une rupture du vide dans la cellule contenant le gaz d'atomes froids, nous avons dû démonter puis réassembler une partie du dispositif expérimental. A cette occasion, nous avons décidé de revenir à la configuration initiale de la cavité, à savoir diminuer sa longueur pour améliorer sa stabilité. Ses caractéristiques correspondent dans ce cas à celles présentées lors de la description du montage expérimental au paragraphe A.3.1 du chapitre 2. Son intervalle spectral libre (ISL) vaut donc à nouveau environ 540 MHz.

Dans ce cas, la différence de fréquence entre la diode et la pompe doit valoir au moins de 1080 MHz pour que ces deux faisceaux soient résonants simultanément avec la cavité. Les battements entre la sonde et la diode doivent toujours se situer autour de 300 MHz pour pouvoir asservir la fréquence de la diode, ce qui nous oblige à décaler la sonde d'environ 800 MHz par rapport à la pompe. Ceci n'est pas possible: le modulateur acousto-optique utilisé pour produire la sonde fonctionne en effet autour de 200 MHz. Nous avons alors changé de méthode d'asservissement.

Les battements, entre la diode et la sonde, sont maintenant détectés par une photodiode à avalanche, polarisée à 180 V. Celle-ci nous permet d'obtenir un signal de battement pour des fréquences, $\nu_{batt} = \nu_{diode} - \nu_{sonde}$, allant jusqu'à la limite permise par notre analyseur de spectre, à savoir 1.8 GHz. Ces battements ne peuvent pas être utilisés directement pour générer le signal d'erreur car le convertisseur fréquence-tension fonctionne seulement autour de 300 MHz. Ils sont sont donc comparés à une fréquence de référence ν_{ref} variable fournie par un générateur fonctionnant jusqu'à 2 GHz (voir figure 3.10). Ces deux fréquences sont mélangées sur un mixeur RF (Minicircuit ZP-5) dont la sortie nous donne un signal de fréquence $\nu_{mix} = \nu_{batt} - \nu_{ref}$.

On asservit finalement cette fréquence ν_{mix} à 300 MHz à l'aide du convertisseur

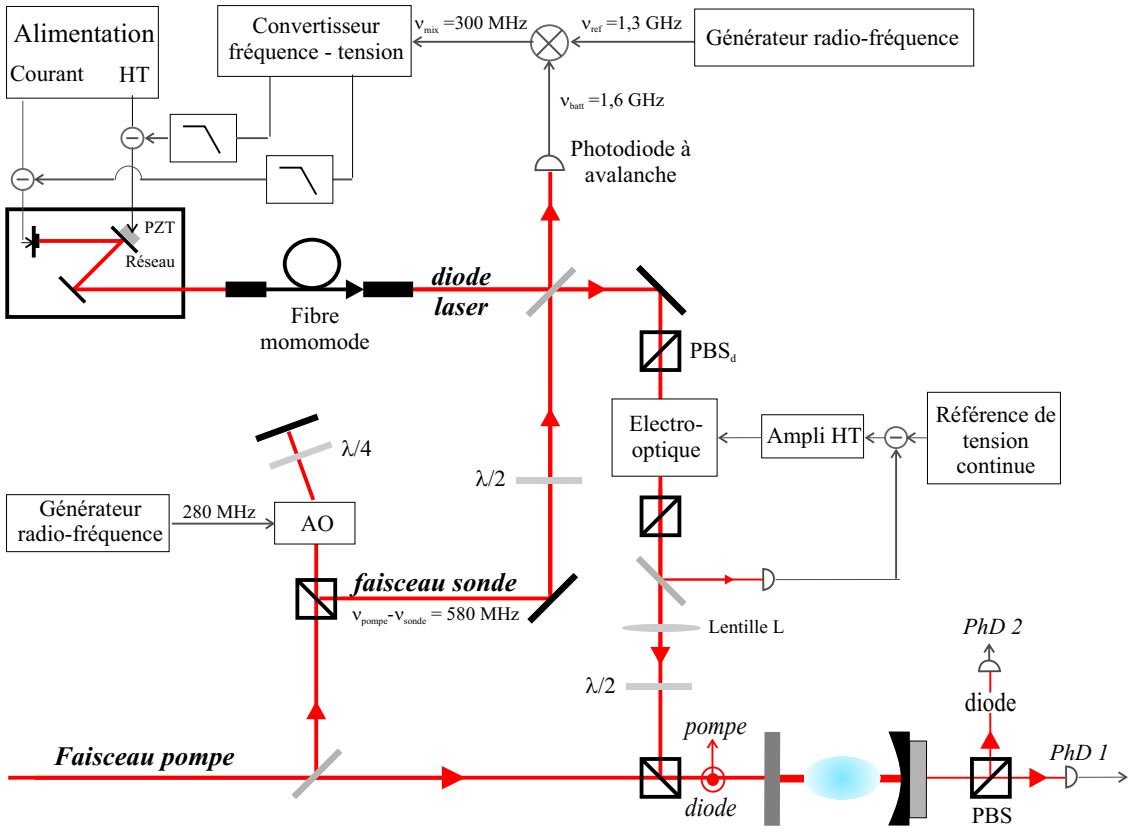


Fig. 3.10 – Principe d'asservissement de la diode laser à 2.16GHz de la pompe.

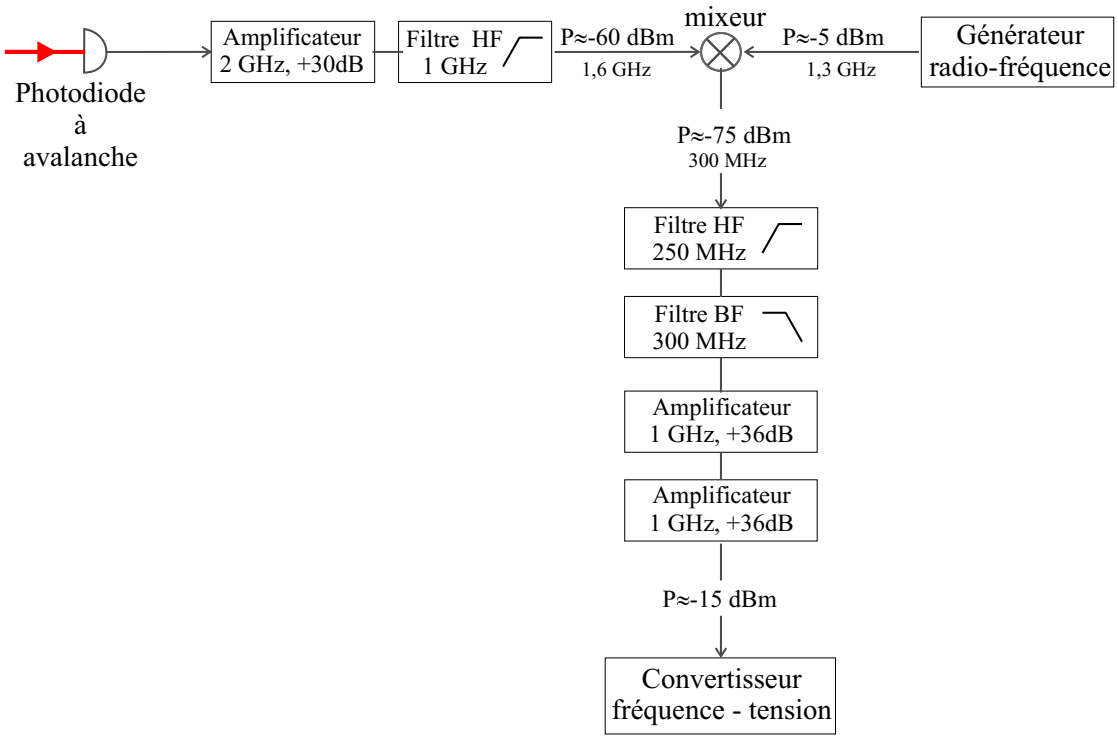


Fig. 3.11 – Chaîne de fréquence pour l'asservissement des battements entre la diode laser et le faisceau sonde. Le convertisseur fréquence-tension nécessite une puissance RF à 300 MHz supérieure à -20 dBm. Les différentes puissances RF sont indiquées.

fréquence-tension. En pratique, la puissance RF de ce signal doit être supérieure à -20 dBm pour que ce convertisseur fréquence-tension puisse fonctionner. Afin d'obtenir une telle puissance, nous avons donc utilisé une série d'amplificateurs. Toutefois ces amplificateurs ont une bande passante très large et ils amplifient également les modulations parasites. Pour les éliminer, nous avons donc inséré une série de filtres RF permettant de sélectionner uniquement le signal correspondant aux battements. Le détail de cette chaîne de fréquence est présenté sur la figure3.11.

Dans la configuration finale, les battements se situent autour de $1.6\,GHz$ et la fréquence de référence vaut environ $1.3\,GHz$. La sonde est, quant à elle, décalée de 560 MHz dans le rouge du faisceau pompe. Au total, la différence de fréquence entre le faisceau pompe et la diode laser est de l'ordre de 4 fois l'intervalle spectrale libre de la cavité:

$$\nu_{pompe} - \nu_{diode} = (\nu_{pompe} - \nu_{sonde}) + \nu_{batt} \simeq 0.560 + 1.6 = 2.16\,GHz = 4\,ISL \quad (3\text{-}4)$$

Cette technique nous a permis d'asservir la fréquence de la diode laser, ce qui est indispensable pour asservir la longueur de la cavité. En outre, en changeant simplement la fréquence RF de référence ν_{ref} envoyée sur le mixeur, on peut maintenant balayer cette fréquence sur une plage de l'ordre de $200\,MHz$.

C.2.3 Couplage dans la cavité - asservissement d'intensité

Pour asservir la cavité à l'aide de cette diode laser, il faut tout d'abord coupler le mode de la diode avec celui de la cavité. Pour cela, on superpose le faisceau de la diode laser avec le faisceau pompe sur un cube polariseur à l'entrée de la cavité (voir figure 3.10). On obtient un bon recouvrement entre les modes spatiaux de la diode et de la cavité à l'aide de la lentille L de focale 800 mm. La diode laser étant polarisée verticalement, on détecte ses résonances sur la photodiode PhD 2 de la figure 3.10.

La figure 3.12 montre la résonance de la diode laser. Lorsque l'asservissement par battements n'est pas utilisé, on observe les fluctuations de sa fréquence en balayant la cavité assez lentement (courbe (a)). La courbe (b) montre l'amélioration apportée par cet asservissement. Nous disposons ainsi d'une source laser adéquate pour asservir la longueur de la cavité.

Néanmoins nous avons constaté que la polarisation de la diode laser à la sortie de la fibre fluctuait lentement au cours du temps. Ces fluctuations se manifestent par une variation de l'intensité en transmission du cube polariseur PBS_d de la figure 3.10. Cette variation peut atteindre jusqu'à 50% et disparaître pendant plusieurs heures.

Ces fluctuations de polarisation peuvent être provoquées par des contraintes mécaniques exercées sur cette fibre. Celles-ci ont été réduites au minimum, mais nous

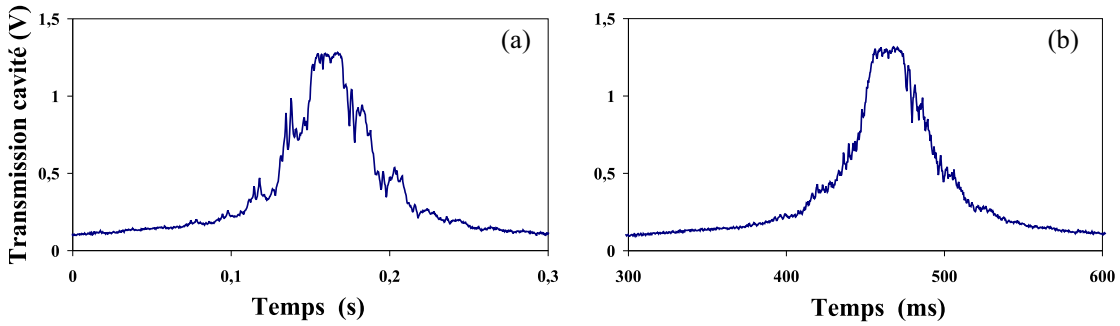


Fig. 3.12 – Transmission de la diode laser. Courbe (a): diode laser sur réseau. Courbe (b): diode laser asservie en fréquence à l'aide des battements avec le faisceau sonde.

n'avons pas noté d'amélioration sensible. Nous pensons donc que notre fibre à maintien de polarisation présente un défaut de fabrication. Ces fluctuations d'intensité posent un réel problème pour l'asservissement sur le flanc de la cavité: elles induisent, en effet, des fluctuations lentes de la longueur de la cavité qui peuvent être très importantes.

L'intensité de la diode laser à la sortie de la fibre est donc asservie à l'aide d'un modulateur électro-optique (figure 3.10). Le faisceau de la diode laser est polarisé horizontalement à l'aide d'un premier cube polariseur: on transforme ainsi les fluctuations de polarisation en fluctuations d'intensité. Les axes optiques du cristal électro-optique sont tournés de 45° et on applique, dans un premier temps, une tension constante U_0 sur le cristal de manière à ce que la polarisation transmise soit tournée à +45°. Enfin on place un cube polariseur en sortie, celui-ci joue le rôle d'analyseur. Une portion de l'intensité transmise par ce dispositif est détectée par une photodiode et comparée à une tension de référence pour générer un signal d'erreur, qui est sommé à la tension constante U_0 (voir figure 3.10). On contrôle ainsi la polarisation transmise par le cristal de manière à ce que l'intensité soit constante à la sortie du deuxième cube polariseur.

C.3 Asservissement de la cavité

Nous pouvons maintenant asservir la longueur de la cavité à l'aide du faisceau de la diode laser. Sa transmission est détectée par la photodiode PhD 2, celle de la pompe par la photodiode PhD 1 (lorsque celle-ci reste linéaire) (voir figure 3.10). On réalise un asservissement "sur le flanc", à mi-hauteur du pic de transmission de la diode. On change ensuite le désaccord entre la pompe et la cavité en jouant sur la fréquence de référence (ν_{ref}) qui décale continûment le désaccord entre la pompe et la diode (voir paragraphe C.2.2). Cette méthode permet de faire varier le désaccord d'environ 200 MHz, on peut donc aisément balayer la résonance d'un pic de cavité

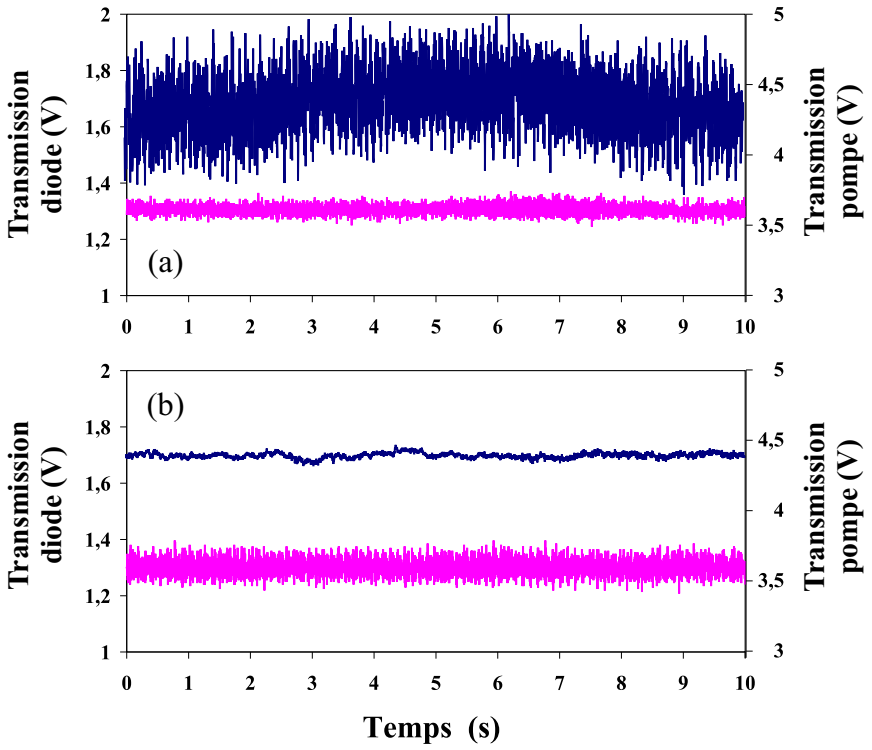


Fig. 3.13 – Asservissement de la cavité par la diode laser en l'absence d'atomes. Courbe (a): diode laser sur réseau sans asservissement par battements; le signal de transmission du faisceau pompe présente un bruit important. Courbe (b): diode laser stabilisée en fréquence: la transmission de la pompe est alors aussi asservie.

($\simeq 20\ MHz$).

Les performances de cet asservissement sont illustrées sur la figure3.13. En l'absence d'atomes, on asservit la cavité sur le signal de la diode laser alors que le faisceau pompe est également résonant. Lorsque la diode n'est pas stabilisée en fréquence, on peut asservir la cavité sur la diode de manière stable (courbe (a)); les fluctuations de fréquence sont alors transmises aux fluctuations de longueur de la cavité. On observe ces dernières sur le signal de transmission du faisceau pompe qui est dans ce cas très bruyant. Si on asservit la fréquence de la diode, la différence de fréquence entre la pompe et la diode est maintenant fixe. Le désaccord entre la pompe et la cavité est donc également asservi (voir courbe (b)).

Lorsque les atomes sont présents, on vérifie que la résonance de la diode n'est pas affectée par la modulation introduite par la coupure des faisceaux pièges. On compare sur la courbe (a) de la figure 3.14 les résonances de la diode et de la pompe, lorsque celles-ci ne sont pas résonantes simultanément. On retrouve sur cette courbe le phénomène de bascule de polarisation: une partie de la résonance de la pompe

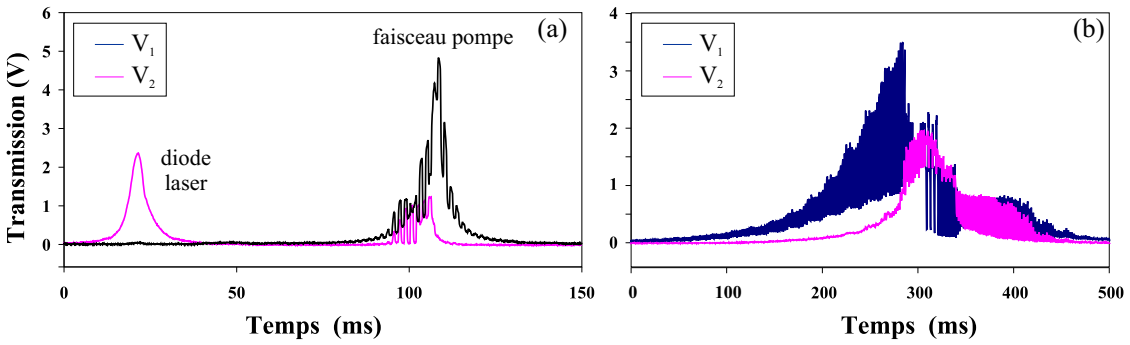


Fig. 3.14 – Comparaison des résonances de la diode laser et du faisceau pompe lorsque la cavité contient des atomes. La transmission de la diode laser est détectée par la photodiode PhD 2 (voir figure 2.7), alors que celle de la pompe est détectée par les photodiodes PhD 1 et PhD 2 suivant sa polarisation à l'intérieur de la cavité. On applique le cycle de coupure sur les faisceaux pièges, c'est pourquoi on retrouve la modulation sur la transmission du faisceau pompe à travers la cavité. En revanche la transmission de la diode n'est pas modulée car elles est suffisamment désaccordée par rapport aux transitions atomiques. Courbe (a): résonances séparées. Courbe (b): résonances simultanées.

est détectée par la photodiode 2. Cette bascule de polarisation perturbe fortement le signal de transmission de la diode lorsque la pompe et la diode sont résonantes simultanément. La courbe (b) de la figure 3.14 illustre cette situation: on ne peut donc asservir la longueur de la cavité que dans le domaine où la polarisation reste linéaire. Cette partie de la résonance étant celle qui nous intéresse, cette limitation n'est pas problématique.

La figure 3.15 montre la transmission de la pompe en présence d'atomes lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. La cavité est asservie à l'aide de la diode (stabilisée en fréquence) dans la partie où la polarisation reste linéaire. On retrouve la modulation de la transmission. Néanmoins ce point de fonctionnement est maintenant bien stable pour des durées très supérieures au temps d'enregistrement des spectres de bruit.

Nous avons donc atteint notre objectif de départ, à savoir l'asservissement de la cavité lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. Bien que sa réalisation complique sensiblement l'expérience, la stabilité de l'ensemble de l'expérience dans cette version améliorée peut atteindre plusieurs heures.

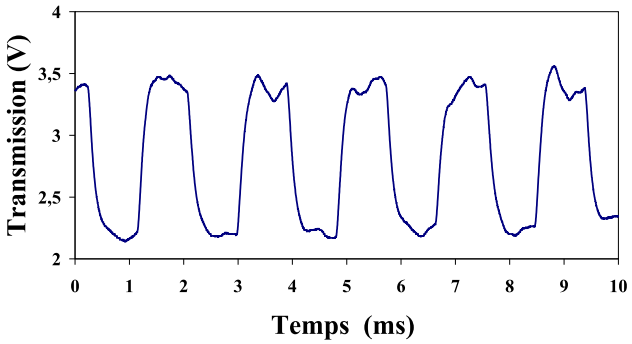


Fig. 3.15 – Transmission de la pompe en présence d'atomes lorsque l'on coupe les pièges. La cavité est asservie à l'aide des pics de transmission de la diode laser.

D Mesure du bruit

D.1 Détection synchrone du bruit

Un fois la cavité asservie sur un point de fonctionnement stable, on mesure le bruit quantique du faisceau pompe à l'aide de la détection homodyne dont le principe a été décrit au paragraphe C.1 du chapitre 2. Ce bruit est modulé par le cycle de coupure des faisceaux pièges. Afin de sélectionner la composante de bruit qui nous intéresse, à savoir celle correspondant à l'absence des faisceaux, nous effectuons une détection synchrone.

Le bruit mesuré par l'analyseur de spectre est accessible grâce à la sortie vidéo qui nous donne un signal proportionnel à la déviation du point lumineux sur l'écran. Ce signal nous a déjà servi à mesurer le bruit quantique lorsque l'on s'intéresse à la détermination de la phase de la quadrature comprimée (voir paragraphe D.1.4 du chapitre 2). L'analyseur de spectre fonctionne à nouveau en échelle linéaire (10 $\mu V/div$), avec une résolution de 100 kHZ. Ceci correspond à un temps de mesure de l'analyseur d'une dizaine de μs, ce qui est bien inférieur au temps de coupure des pièges (de l'ordre de 500 μs).

Pour démoduler le signal de bruit, on utilise une technique identique à celle décrite pour étudier la transmission de la cavité (cf paragraphe B.2). On envoie tout d'abord le signal dans un échantilloneur. Celui-ci est commandé par la tension TTL V_{mesure}, dont le cycle est retardé par rapport au cycle de coupure de pièges V_{cycle} (voir figure 3.6). Nous avons constaté que la réduction de bruit était plus importante pour un retard de l'ordre de 350 μs. Le régime transitoire à l'instant de la coupure semble donc être une source d'excès de bruit. L'allure du signal à la sortie de l'échantillonneur est donnée sur la figure 3.16.

Le signal passe ensuite par un filtre passe bas similaire à celui utilisé pour la détection synchrone des résonances. Ce filtre a une fréquence de coupure de l'ordre

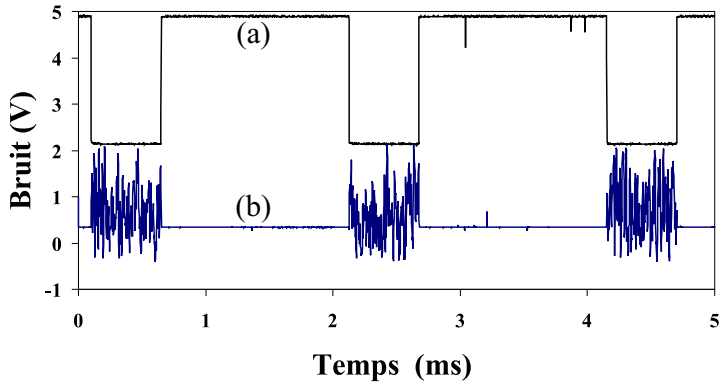


Fig. 3.16 – Signal de bruit à la sortie de l'échantillonneur (b) -voir figure 3.19- en fonction du cycle de mesure V_{mesure} (a).

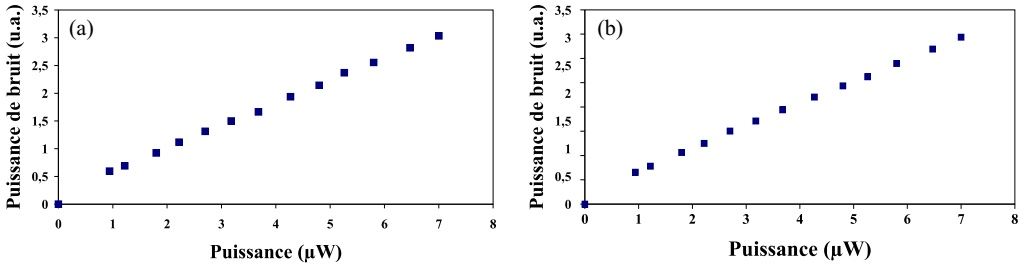


Fig. 3.17 – Dépendance du bruit quantique standard mesuré par détection synchrone avec la puissance de l'oscillateur local. Courbe (a): fréquence d'analyse 1.5 MHz. Courbe (b): fréquence d'analyse 5 MHz

de 20 Hz. Le signal ainsi obtenu est proportionnel à la valeur du bruit quantique en l'absence des faisceaux pièges.

Pour normaliser le bruit au bruit quantique standard, on mesure les fluctuations du vide avec ce dispositif. De même, on mesure la référence de bruit de l'analyseur V_0 et le bruit électronique introduit par le système de détection. On utilise ensuite la formule 2-49. On vérifie que le bruit quantique standard mesuré dans ces conditions est bien proportionnel à l'intensité de l'oscillateur local. On estime que le comportment est bien linéaire à partir de 1.5 MHz. Nous n'étudierons pas des fréquences plus basses car le signal est détruit par la coupure basse fréquence du montage électronique des photodiodes. Les courbes (a) et (b) de la figure 3.17 montrent la dépendance du bruit avec la puissance de l'oscillateur local pour les deux fréquences 1.5 et 5 MHz.

D.2 Détection de la phase

Pour mesurer les paramètres de Stokes du faisceau pompe, nous avons vu qu'il fallait connaître la quadrature comprimée du mode vide par rapport à la référence de phase du champ moyen (voir section D du chapitre 2). Pour cela, on enregistre

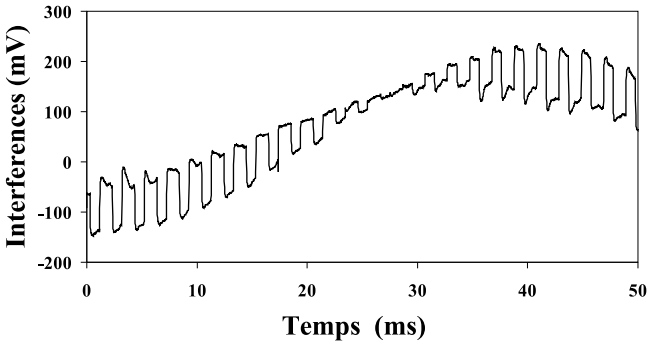


Fig. 3.18 – Modulation du signal d'interférence entre l'oscillateur local et le faisceau pompe du fait de la coupure des faisceaux pièges.

le signal d'interférence entre l'oscillateur local et le champ moyen. La phase du faisceau pompe réfléchi dépend du désaccord entre la pompe et la cavité. Celui-ci est modulé par la coupure des faisceaux pièges (essentiellement du fait de la saturation due à ces faisceaux). La phase de la pompe et, par conséquent, le signal d'interférence sont donc également modulés (voir figure 3.18). On sélectionne la composante de ce signal correspondant à l'absence des faisceaux pièges à l'aide d'une nouvelle détection synchrone (similaire aux deux autres décrites aux paragraphesB.2 et D.1).

Le signal d'interférence est obtenu à la sortie d'un filtre passe bas placé à la suite de l'échantilloneur (voir figure 3.19). Comme c'était le cas pour les autres détections synchrones, le temps de coupure de ce filtre est assez bas (de l'ordre de $50\,ms$). Il faut donc balayer lentement la phase de l'oscillateur local. La période d'une oscillation est de l'ordre de 1 à quelques secondes. A ces échelles de temps, les fluctuations mécaniques de l'interféromètre sont importantes. Un effort particulier a été apporté pour les réduire en remontant complètement le dispositif expérimental. On ne peut néanmoins empêcher les événements consistant en une variation rapide de la phase relative entre l'oscillateur local et le champ moyen (de l'ordre d'une centaine de ms). Ce temps est trop rapide pour le filtre passe bas et donc nous ne pouvons pas mesurer la phase avec précision. Ce problème rend impossible la détermination de la quadrature comprimée si on balaie la phase de cette façon.

Nous avons donc décidé d'asservir la phase de l'oscillateur local. Pour cela on utilise le signal d'interférence à la sortie de la détection synchrone. Il est comparé à une tension de référence pour générer le signal d'erreur qui est envoyé sur la cale piézo-électrique PZT (voir figure 3.19). On peut ainsi asservir la phase de l'oscillateur local, sauf lorsque celui-ci est en phase ou en opposition de phase avec le champ moyen. On peut faire varier lentement la référence de tension de l'asservissement et mesurer ainsi le bruit de toutes les quadratures du faisceau pompe, exceptée celle d'intensité.

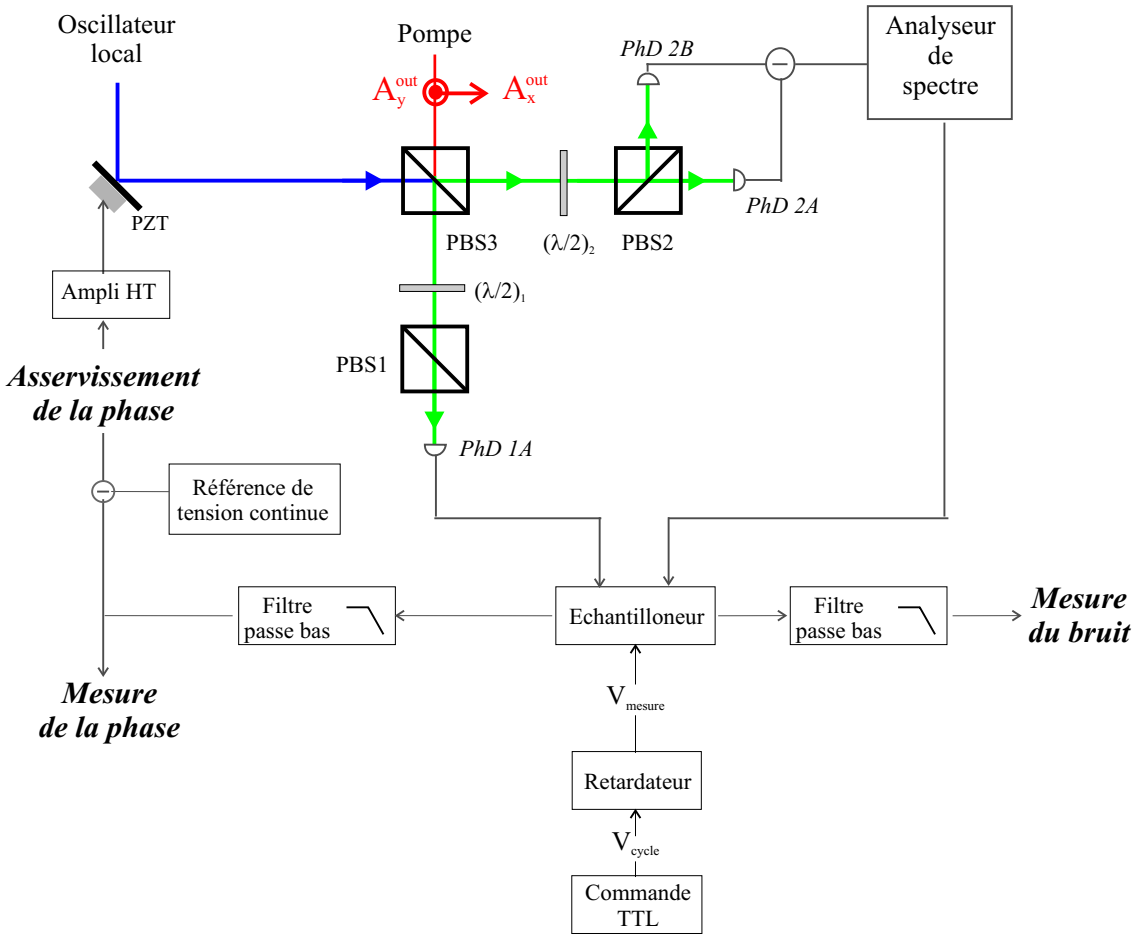


Fig. 3.19 – Principe de mesure du bruit lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. Le signal d'interférence est mesuré par détection synchrone. Il est utilisé pour déterminer la phase de la quadrature comprimée et pour asservir la phase de l'oscillateur local. Le bruit quantique est mesuré en effectuant la détection synchrone du signal à la sortie de l'analyseur de spectre.

E Réduction du bruit

Nous présentons ici les mesures de bruit que nous avons réalisées lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. La cavité est asservie à l'aide de la diode auxiliaire stabilisée en fréquence et le bruit correspondant à l'absence des faisceaux pièges est mesuré par détection synchrone du signal donné par la détection homodyne.

E.1 Amélioration de la réduction de bruit

Dans ces conditions, nous avons observé à nouveau la réduction du bruit du mode vide A_y. A basse fréquence d'analyse, nous obtenons typiquement une réduction de bruit de l'ordre de 10%. La courbe (a) de la figure 3.20 montre une réduction de bruit de l'ordre de 11% à 2 MHz; la puissance incidente de la pompe étant de 7 μW et le nombre d'atomes est estimé à 3 10^6. De manière générale, la réduction de bruit mesurée dans cette configuration est similaire à celle obtenue en l'absence de coupure des faisceaux pièges pour des paramètres expérimentaux équivalents (cf paragraphe C.3 du chapitre 2). On retrouve ainsi la même évolution en fréquence (courbe (c) de la figure 3.20): la réduction du bruit sur le mode vide est maximale à basse fréquence et atteint 12% à 1.5 MHz (17 % corrigé des pertes).

La meilleure réduction de bruit obtenue pour le champ moyen est de l'ordre de 5% (9% corrigé des pertes). Cette réduction de bruit est environ deux fois supérieure à celle obtenue en présence des faisceaux pièges (cf paragraphe C.3 du chapitre 2). En outre, l'excès de bruit à basse fréquence est moins marqué. La reduction de bruit reste toujours limitée mais elle s'étend sur une plage de fréquence plus importante. Pratiquement, cette nouvelle configuration rend l'observation de la réduction de bruit sur ce mode beaucoup plus aisée, reproductible et non négligeable. Pour ces raisons, la coupure des faisceaux pièges constitue une nette amélioration. On obtient ainsi un domaine de fréquence centré autour de 5 MHz (voir courbe (c) de la figure 3.20) où les deux modes du champ sont comprimés simultanément d'environ 5%.

E.2 Dépendance en fonction du désaccord

Nous avons présenté au chapitre 2 l'évolution de la réduction du bruit en fonction de la fréquence et ce pour différents points de fonctionnement choisis sur la courbe de résonance. Nous avons alors repris cette étude dans cette nouvelle configuration. Nous nous sommes intéressés en particulier à la détermination des quadratures comprimées pour les deux modes du champs; ces résultats nous serviront en effet à caractériser les corrélations quantiques générées par notre système au chapitre 5.

Afin de déterminer la phase de la quadrature comprimée du mode vide, nous utilisons les interférences entre le champ moyen et l'oscillateur local. Cette méthode

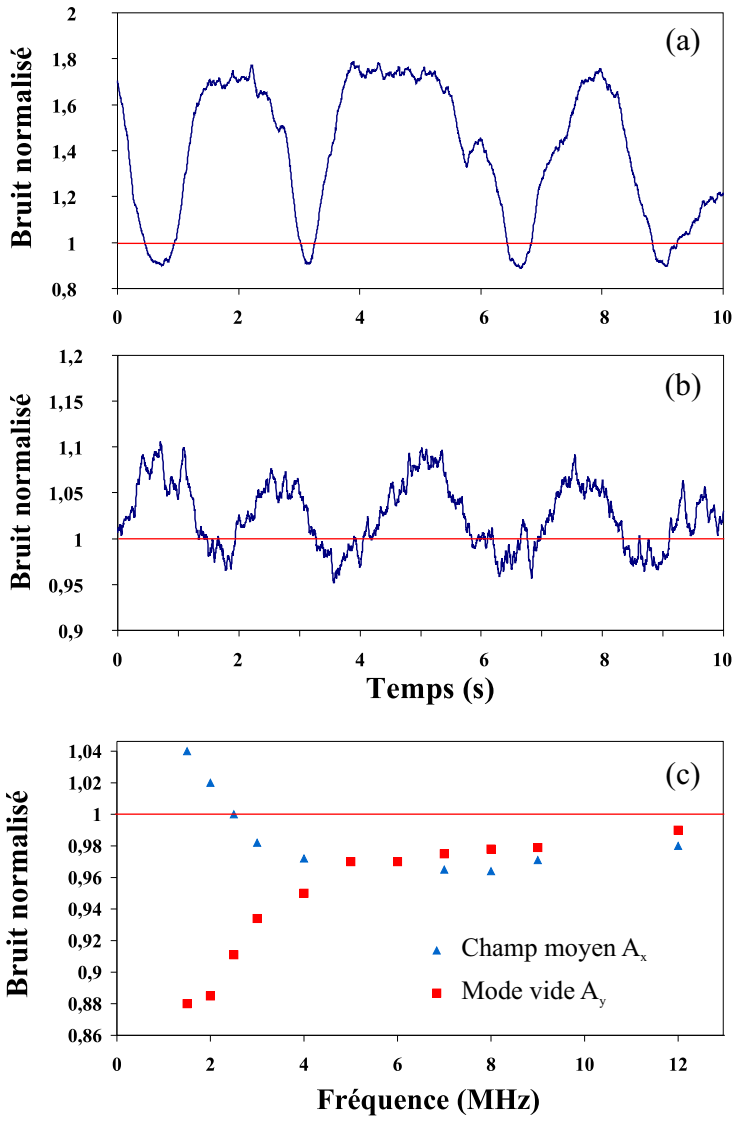


Fig. 3.20 – Mesure du bruit dans la configuration de coupure des faisceaux pièges. Courbe (a): bruit normalisé du mode vide A_y à la fréquence d'analyse de 2 MHz. Courbe (b): bruit normalisé du champ moyen A_x à la fréquence d'analyse de 5 MHz. Courbe (c): réduction du bruit sur les modes A_x et A_y en fonction de la fréquence d'analyse. La puissance incidente du faisceau pompe vaut 7μW et le nombre d'atomes est estimé à 3 10^6. Le point de fonctionnement est choisi proche du sommet de la courbe ($r_A = T_A/T_{at}^{lin} \simeq 0.8$).

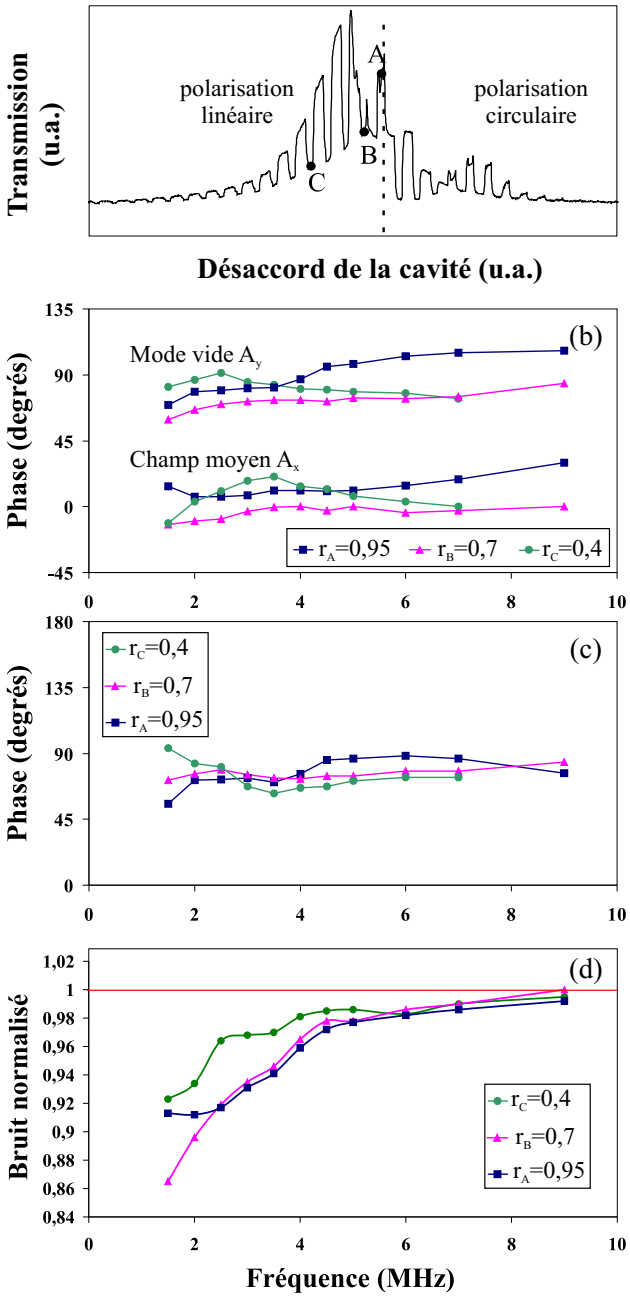


Fig. 3.21 – Evolution de la réduction de bruit et de la phase de la quadrature comprimée en fonction de la fréquence pour différents points de fonctionnement. Courbe (a): position des différents points de fonctionnement sur la courbe de résonance de la cavité. Ces points sont choisis dans le domaine où la polarisation reste linéaire. Les coefficients $r_{A,B,C}$ sont égaux aux rapports entre leur transmission $T_{A,B,C}$ et la transmission maximale en polarisation linéaire T_{at}^{lin} (voir figure 2.21). Courbe (b): phases des quadratures comprimées$(\theta_{sq})_x$ et $(\theta_{sq})_y$ des modes A_x et A_y. Courbe (c): différence des phases entre les quadratures comprimées $((\theta_{sq})_x - (\theta_{sq})_y)$. Courbe (d): réduction du bruit sur le mode vide A_y. La puissance incidente du faisceau pompe vaut $5\,\mu W$ et le nombre d'atomes est estimé à 2.5 10^6. Comme pour les résultats présentés au chapitre 2, l'incertitude sur la mesure de la phase des quadratures est de l'ordre de $\pm 10°$ et de $\pm 2\%$ sur la mesure du bruit.

a été détaillée dans la section D.1 du chapitre 2. Nous rappelons ici que cette mesure nous donne les phases des quadratures comprimées du champ moyen $(\theta_{sq})_x$ et du mode vide orthogonal $(\theta_{sq})_y$ par rapport à la phase du champ moyen A_x (voir figure 2.30).

Nous avons expliqué au paragraphe D.2 précédent pourquoi la mesure du bruit et des interférences par détection synchrone nous impose maintenant d'asservir la phase de l'oscillateur local. Cette technique pose un problème pour le champ moyen. En effet, la quadrature comprimée est très proche de la quadrature d'intensité; celle-ci n'est pas accessible par notre asservissement "sur le flanc" des interférences. On peut contourner ce problème en mesurant la quadrature dont le bruit est maximale qui est tournée de $+\pi/2$ par rapport à la quadrature comprimée. Celle-ci est en effet aisément accessible à l'expérience. On peut mesurer indépendamment la réduction de bruit sur ce mode en balayant la phase de l'oscillateur local sans asservissement.

Cependant, les résultats présentés sur la figure 3.21 nécessitent l'acquisition d'un nombre importants de spectres de bruit et donc une stabilité de tous les asservissements (en particulier ceux du laser Titane:Saphir) pendant plusieurs heures. Pour ces raisons pratiques, nous n'avons pas mesuré la réduction du bruit du champ moyen pour cette série d'expériences.

Les résultats sont présentés sur la figure 3.21. La puissance incidente du faisceau est de 5 μW et le nombre d'atomes d'environ $3\,10^6$. La courbe (d) montre l'évolution des spectres de bruit du mode vide A_y. La réduction du bruit augmente lorsque l'on s'approche du sommet du pic de résonance, sauf à très basse fréquence où la réduction de bruit semble saturer. Nous avons obtenu la meilleure réduction de bruit, à savoir 14% (soit 20% corrigé des pertes).

La courbe (b) montre que la phase de la quadrature comprimée de ce mode vaut typiquement $(\theta_{sq})_y \simeq 80°$, celle-ci est donc proche de la quadrature de "phase". La quadrature comprimée du champ moyen correspond à $\theta_x \simeq 0°$. Comme nous l'avons annoncé ci-dessus, ce mode est comprimé en intensité. Nous vérifions sur la courbe (c) que les modes A_x et A_y sont comprimés pour des *quadratures quasiment orthogonales*. En outre cette propriété dépend peu du point d'asservissement sur la courbe de transmission de la pompe.

Ces résultats expérimentaux sont en accord avec les prédictions du modèle théorique que nous avons développé et que nous allons présenter au chapitre suivant.

E.3 Expérience en polarisation circulaire

Nous consacrons cette dernière section aux résultats obtenus lorsque la polarisation est devenue circulaire. La polarisation incidente de la pompe est toujours linéaire mais nous choisissons un point de fonctionnement situé après la bascule de polarisation (voir courbe (a) de la figure 3.22).

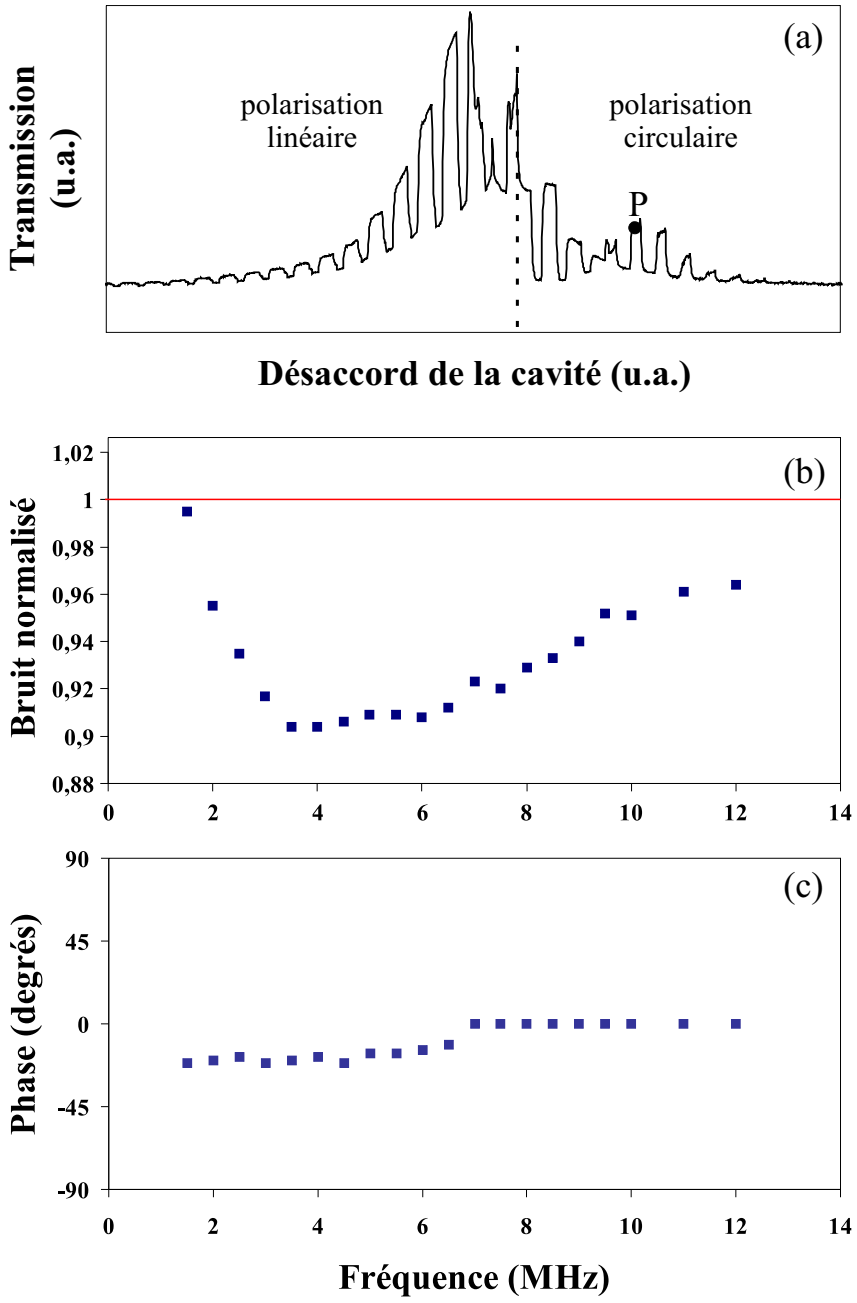


Fig. 3.22 – Evolution de la réduction de bruit du faisceau pompe et de la phase de sa quadrature comprimée en fonction de la fréquence d'analyse dans le cas où la polarisation est devenue circulaire à l'intérieur de la cavité. σ_+ désigne le mode circulaire dominant. Courbe (a): position du point de fonctionnement P sur la courbe de transmission du faisceau pompe. Courbe (b): réduction du bruit sur le mode σ_+. Courbe (c): phase de la quadrature comprimée $(\theta_{sq})_{\sigma_+}$ par rapport à la phase du champ moyen $\langle A_{\sigma_+} \rangle$. La puissance incidente du faisceau pompe vaut 6 μW et le nombre d'atomes est estimé à $3\,10^6$. L'incertitude sur la mesure de la phase est de $\pm 10°$ et de 2% sur la mesure du bruit.

Ces résultats sont à mettre en parallèle avec ceux de la section E du chapitre 2. Comme la polarisation de la pompe est maintenant circulaire, une partie du signal de transmission est détectée à la sortie de la cavité par la photodiode PhD 2, qui détecte également la transmission du faisceau d'asservissement produit par la diode (voir figure 3.14). C'est pourquoi il n'est plus possible d'utiliser cette diode laser pour asservir la longueur de la cavité dans ce domaine.

Néanmoins, on peut asservir directement la cavité sur le signal de transmission du faisceau pompe qui est fortement modulé par la coupure des faisceaux pièges. Dans ces conditions, l'asservissement n'est pas très stable et le point de fonctionnement dérive lentement au cours du temps. Nous ajustons alors la longueur de la cavité "à la main" pour chaque spectre de bruit. Pour cette raison, nous nous sommes contentés d'étudier les propriétés de bruit pour un seul point de fonctionnement.

La figure 3.22 montre les résultats obtenus sur la réduction de bruit du mode circulaire dominant, disons σ_+. La réduction de bruit est de l'ordre de 10% autour de la fréquence de 4 MHz. La comparaison de ce spectre de bruit avec celui présenté sur la figure 2.33 du chapitre 2 illustre à nouveau l'amélioration apportée par la coupure des faisceaux pièges. Cette amélioration n'est effective que pour les spectres de bruit des champs moyens: A_x en polarisation linéaire et A_{σ_+} en polarisation circulaire.

Comme nous l'avions déjà remarqué au paragraphe E du chapitre précédent, il existe une forte similitude entre les bruits de ces champs moyens. Ceci est également vrai pour la phase de la quadrature comprimée dans les deux cas. On retrouve en effet sur la courbe (c) de la figure 3.22 le fait que la quadrature comprimée des champs moyens est proche de la quadrature d'intensité.

F Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les moyens mis en oeuvre afin d'obtenir une amélioration de la réduction de bruit. Dans ce but, nous avons modifié le dispositif expérimental afin de pouvoir effectuer la mesure du bruit en l'absence des faisceaux pièges. Ces derniers sont coupés de manière cyclique pendant un temps court devant le temps de fuite des atomes de manière à ce que le nombre d'atomes interagissant avec la lumière soit quasiment stationnaire. Afin de sélectionner la partie du bruit correspondant à l'absence des faisceaux pièges, nous mesurons le bruit par détection synchrone. Cette méthode permet de s'affranchir de l'excès de bruit dû à la présence de ces faisceaux pièges [Khoury98]. Cette procédure complique néanmoins l'expérience.

En effet, le cycle de coupure de ces faisceaux entraîne une modulation du nombre d'atomes "vus" par le faisceau pompe. Cette modulation se traduit par une modulation du dépahasage subie par la pompe à l'intérieur de la cavité et donc de l'intensité transmise.

Dans ces conditions, l'asservissement de la cavité a fait l'objet d'un travail expérimental important. Ainsi, l'utilisation du signal de transmission d'une diode laser auxiliaire, dont les battements sont asservis en fréquence, nous a permis d'obtenir un fonctionnement stable de la cavité pendant plusieurs heures.

Une fois cette cavité asservie, le bruit quantique des modes polarisés linéairement est mesuré en effectuant la détection synchrone du signal de la détection homodyne. Ces nouvelles conditions ont conduit à l'observation d'une nette amélioration de la réduction de bruit sur le champ moyen. En revanche, ces efforts n'ont pas permis d'obtenir une amélioration significative de la réduction de bruit sur le mode vide orthogonal. Le bruit sur ce mode ne semble donc pas affecté par la présence de ces faisceaux, l'excès de bruit étant entièrement reporté sur le champ moyen.

Chapitre 4

Etude théorique du système: modèle à quatre niveaux en "X"

Afin de comprendre les phénomènes physiques présentés dans les chapitres précédents, à savoir la bascule de la polarisation de la lumière à l'intérieur de la cavité et l'observation de la réduction du bruit sous la limite quantique standard pour deux modes du champ, nous avons cherché à modéliser le système. Les réductions de bruit observées étant assez faibles, l'objectif est ici de déterminer si ces résultats sont limités intrinsèquement par le système, ou bien s'il existe un domaine des paramètres pour lequel on pourrait espérer améliorer la réduction de bruit.

L'interaction entre la lumière et les atomes placés à l'intérieur d'une cavité est complexe. En effet, le champ est proche de la résonance de la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$ et donc au moins 20 sous niveaux Zeeman (9 pour l'état fondamental et 11 pour l'état excité) doivent être, en principe, pris en compte. Et ce sans tenir compte d'autres niveaux qui sont peuplés, comme les sous niveaux de l'état fondamental hyperfin $6S_{1/2}\ F = 3$, et qui interagissent avec les autres niveaux sous l'effet du faisceau repompeur.

Notre but n'est pas ici de tenir compte de toutes ces interactions mais de simplifier au maximum notre modèle afin de pouvoir donner une interprétation claire des résultats. Dans cette optique, nous ne considérerons pas les effets dus aux faisceaux pièges ni au repompeur. L'étude de l'influence de ces faisceaux sur la réduction de bruit a été effectué par Khoury *et al.* [Khoury98], dans le cas où la polarisation incidente du faisceau pompe est circulaire. De même, nous ne tiendrons pas compte de la structure spatiale transverse du faisceau. Les limites de cette approximation ont été discutées par Lambrecht *et al.* [Lambrecht96b], dans le cas où le milieu atomique est constitué d'atomes à deux niveaux.

Cette étude a été menée en nous appuyant sur les travaux préexistants. Ainsi, le basculement de la polarisation d'un faisceau transmis par une cavité contenant une vapeur atomique a été prédite au début des années 80 par Walls *et al.* [Walls80] et Kitano *et al.* [Kitano81]. Ce basculement a été observé pour la première fois par Cecchi *et al.* [Cecchi82] en étudiant la polarisation transmise par une cavité contenant une vapeur de sodium. Les différentes études théoriques réalisées sur un tel système [Walls80, Kitano81, Savage82, Giacobino85] ont montré que ce phénomène

de basculement était dû à la compétition des processus de pompage optique entre les différents sous niveaux de l'état fondamental. Nous avons déjà évoqué ces processus lors de la présentation des courbes de résonance de la cavité au paragraphe B du chapitre 2. L'étude d'Elisabeth Giacobino [Giacobino85] nous a servi, en particulier, de point de départ. Le modèle à quatre niveaux en "X" a été adapté à notre cas, où le milieu est constitué d'atomes froids.

Nous verrons que l'on peut interpréter cette bascule de polarisation en terme de seuil d'oscillation laser pour le mode vide orthogonal A_y. En effet, les processus de pompage optique entre les sous niveaux Zeeman du fondamental modifient la répartition des sous niveaux du fondamental et peuvent induire une biréfringence circulaire. Celle-ci a pour effet d'entraîner une rotation de la polarisation du faisceau lorsqu'il traverse le milieu, ce qui se traduit par un gain sur le mode de polarisation orthogonale. Cet effet est couramment appelé "rotation auto-induite", ou "self-rotation" (SR) en anglais [Rochester01]. Toutefois ce phénomène n'est pas intrinsèque au milieu atomique, en effet, il a été observé pour la première fois dans les liquides par Maker *et al.* [Maker64].

Lorsque la polarisation incidente est linéaire (par exemple suivant l'axe x), cet effet se traduit par un gain non-linéaire sur les fluctuations du mode vide orthogonal y [Matsko02a, Boivin96]. Ce champ étant recyclé dans la cavité, il se produit une oscillation dès que ce gain est supérieur aux pertes. Nous ferons alors l'analogie entre ce système et le comportement d'un oscillateur paramètrique optique (OPO) dégénéré sous le seuil.

En poursuivant l'analogie avec un OPO, on peut penser que cette interaction non linéaire est capable de produire un état vide comprimé à la sortie de la cavité. Ainsi Matsko *et al.* [Matsko02a] ont récemment prédit la possibilité d'obtenir une réduction de bruit sur ce mode vide orthogonal lorsqu'un champ polarisé linéairement traverse un milieu présentant ce phénomène de "rotation auto-induite", ce qui est le cas pour un ensemble d'atomes à quatre niveaux en "X". Dernièrement cette réduction de bruit a effectivement été observée expérimentalement lorsqu'un faisceau polarisé linéairement traverse une vapeur de rubidium [Ries03].

C'est pourquoi la modélisation du milieu par un ensemble d'atomes à quatre niveaux en "X" semble bien appropriée à notre système, aussi bien du point de vue de l'étude de la bascule de polarisation que du calcul des fluctuations quantiques. Nous avons donc choisi ce modèle d'interaction pour rendre compte des phénomènes observés.

Dans un premier temps, nous ferons l'approximation du pompage optique où l'on néglige la saturation de la transition optique. Cette hypothèse permet de mettre en valeur le rôle joué par le phénomène de "rotation auto-induite" sur la stabilité de la polarisation linéaire à l'intérieur de la cavité. En revanche, nous montrerons que ce phénomène ne peut expliquer l'observation de la réduction du mode vide orthogonal.

Nous verrons qu'il constitue, en fait, une source d'excès de bruit du système.

Dans une seconde partie nous tiendrons compte de la saturation optique du milieu. Après avoir détaillé les résonances de la cavité dans ce cas, nous verrons qu'il est possible d'obtenir une réduction de bruit sur deux modes du champ: par effet Kerr sur le champ moyen et effet Kerr croisé sur le mode vide orthogonal.

A Présentation du modèle en X

A.1 Choix du modèle

Nous avons exposé ci-dessus les raisons qui nous ont amené à modéliser le milieu d'interaction par un ensemble d'atomes à quatre niveaux en "X". C'est également le modèle le plus simple que l'on puisse envisager pour le système.

Dans le cas d'un modèle à deux niveaux, seul un mode du champ interagit avec les atomes. Il ne peut donc y avoir de réduction de bruit sur le mode vide orthogonal.

Si l'on considère maintenant un système à trois niveaux en V ou Λ, il existe alors un état dit "état noir", combinaison des états 1 et 2 et qui n'est pas couplé avec le champ. Ce cas nous ramène au cas précédent. Toutefois, ces états noirs ne sont jamais totalement isolés car il existe toujours des sources de relaxation. Ces résonances noires, très fines, peuvent ainsi être utilisées afin d'obtenir de fortes non-linéarités de "self-rotation" [Novikova00, Matsko02b]. Il est alors possible de prédire une bascule de polarisation avec un tel modèle, que l'on ne peut donc éliminer *a priori*. Cependant notre faisceau est quasi-résonant avec la transition atomique $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$ du type $J \rightarrow J+1$ pour laquelle il n'existe pas d'états noirs [Rochester01]. C'est pourquoi nous ne nous intéresserons pas ici à un modèle de ce type.

Nous avons donc naturellement choisi un modèle à quatre niveaux en "X" pour traiter l'interaction entre la lumière et le milieu atomique. Ceci constitue une approximation pour notre système, en particulier au niveau des cohérences entre les sous niveaux Zeeman. En effet, un tel système en X ne crée pas de cohérences entre les sous niveaux fondamentaux ce qui n'est, bien sûr, pas le cas pour la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$.

A.2 Description du modèle

Nous considérerons dans la suite de ce chapitre un ensemble de N atomes à quatre niveaux qui interagissent avec la lumière à l'intérieur d'une cavité en anneau (voir figure 4.1). En outre, nous ne tiendrons pas compte ici de la structure transverse du faisceau lumineux. Le champ électromagnétique est donc représenté par une onde plane progressive.

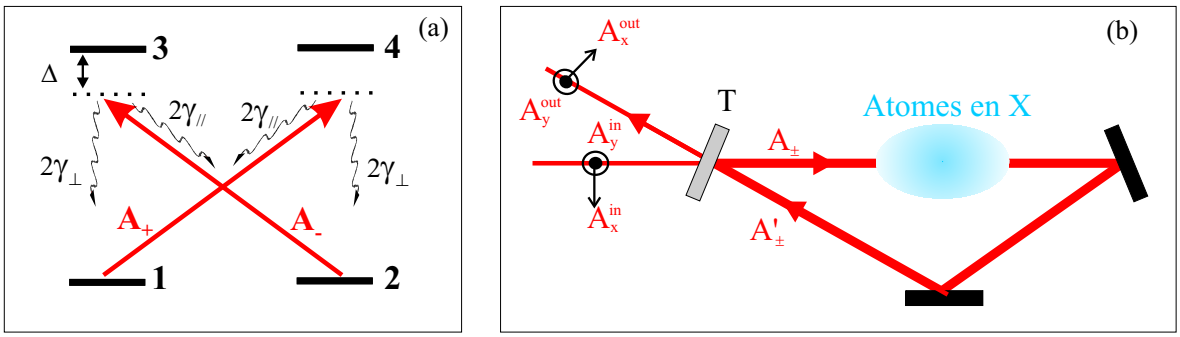


Fig. 4.1 – Description du modèle. La transition atomique est à quatre niveaux (b) et la cavité est en anneau (b). Le coefficient de transmission du miroir de couplage vaut T.

Le faisceau incident est polarisé linéairement suivant l'axe horizontal x. Les champs $A_\pm$, représentés sur la figure 4.1, sont les enveloppes lentement variables des composantes circulaires σ_+ et σ_- définies au paragraphe A.5 du chapitre 1:

$$\overrightarrow{E} = \mathcal{E}_0 \, [\, A_+(t) e^{-i\omega_L t} \overrightarrow{e}_+ + A_-(t) e^{-i\omega_L t} \overrightarrow{e}_- \quad + \quad c.c. \,] \tag{4-1}$$

où $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 \mathcal{S} c}$. Avec cette définition, les intensités $|\langle A_\pm \rangle|^2$ s'expriment alors en nombre de photons par seconde. Ces deux modes sont couplés aux transitions atomiques $1 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$ (voir partie (b) de la figure 4.1) et s'expriment en fonction des modes polarisés linéairement x et y suivant la relation de passage entre les deux bases:

$$A_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) \tag{4-2}$$

$$A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \tag{4-3}$$

Les niveaux fondamentaux 1 et 2 sont dégénérés, de même pour les niveaux excités. Les fréquences atomiques des deux transitions sont donc toutes les deux égales à $\omega_{at} = \omega_{13} = \omega_{24}$. Ainsi, le désaccord entre la fréquence du faisceau et la transition atomique est égal dans les deux cas à $\Delta = \omega_{at} - \omega_L$.

Les populations des états excités des niveaux 3 et 4 relaxent par émission spontanée vers les niveaux 1 et 2 avec les taux $2\gamma_\perp$ et $2\gamma_{//}$ (voir figure 4.1). Si on ne considère pas d'autres sources de relaxation, le taux de relaxation des dipôles optiques vaut dans ce cas $\gamma = \gamma_{//} + \gamma_\perp$ [Cohen96b]. Par la suite, nous ne prendrons pas en compte de taux de relaxation, γ_0, entre les sous niveaux fondamentaux 1 et 2. Nous supposerons en effet que les taux de pompage optique sont très supérieurs à γ_0, c'est à dire que nous nous placerons dans l'hypothèse de pompage optique saturé.

Les variables atomiques sont décrites par les opérateurs collectifs correspondants

aux populations σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} et σ_{44} et aux dipôles optiques σ_{14} et σ_{23}:

$$\text{populations} \qquad \sigma_{ii} = \sum_{j=1}^{N} |i\rangle_j\langle i|_j \qquad i = \{1,2,3,4\} \tag{4-4}$$

$$\text{dipôles optiques} \quad \sigma_{14} = \sum_{j=1}^{N} e^{i\omega_L t}|1\rangle_j\langle 4|_j \tag{4-5}$$

$$\text{et} \qquad \sigma_{23} = \sum_{j=1}^{N} e^{i\omega_L t}|2\rangle_j\langle 3|_j \tag{4-6}$$

Les dipôles optiques sont définis dans le repère tournant à la fréquence du laser ω_L. L'approximation de l'onde tournante consiste à éliminer les termes évoluant aux fréquences $2\omega_L$, l'hamiltonien d'interaction entre le champ et les atomes s'écrit alors:

$$H = -\hbar g[A_+\sigma_{41} + A_+^\dagger\sigma_{14} + A_-\sigma_{32} + A_-^\dagger\sigma_{23}] \tag{4-7}$$

où $g = \mathcal{E}_0 d/\hbar$ est la constante de couplage et d le dipôle commun aux deux transitions [Cohen96c]. Avec cette définition, la constante g est reliée à la fréquence de Rabi par la relation $\Omega_\pm = 2g|\langle A_\pm\rangle|$.

A.2.1 Evolution des variables atomiques

L'évolution des variables atomiques est obtenue par dérivation des équations de Heisenberg-Langevin. Aux termes d'évolutions hamiltoniennes décrits par $i\hbar\dot{A} = [A,H]$, nous ajoutons les processus de relaxation dus au couplage avec l'extérieur. A ces processus de relaxation sont associées des fluctuations qui sont données par les forces de Langevin $F_{\mu,\nu}$:

$$\frac{d\sigma_{14}}{dt} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{14} + igA_+(\sigma_{11} - \sigma_{44}) + F_{14} \tag{4-8}$$

$$\frac{d\sigma_{23}}{dt} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{23} + igA_-(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + F_{23} \tag{4-9}$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = 2\gamma_\perp\sigma_{33} + 2\gamma_{//}\sigma_{44} + ig(A_+^\dagger\sigma_{14} - A_+\sigma_{41}) + F_{11} \tag{4-10}$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = 2\gamma_{//}\sigma_{33} + 2\gamma_\perp\sigma_{44} + ig(A_-^\dagger\sigma_{23} - A_-\sigma_{32}) + F_{22} \tag{4-11}$$

$$\frac{d\sigma_{33}}{dt} = -2\gamma\sigma_{33} - ig(A_-^\dagger\sigma_{23} - A_-\sigma_{32}) + F_{33} \tag{4-12}$$

$$\frac{d\sigma_{44}}{dt} = -2\gamma\sigma_{44} - ig(A_+^\dagger\sigma_{14} - A_+\sigma_{41}) + F_{44} \tag{4-13}$$

Les forces de Langevin sont définies par leurs coefficients de diffusion:

$$\langle F_\mu(t)F_\nu(t')\rangle = 2D_{\mu,\nu}\delta(t-t') \tag{4-14}$$

Ces coefficients, dont leur expressions sont données dans l'appendiceB, sont calculés en utilisant le théorème de régression quantique [Cohen96a].

A.2.2 Evolution des champs en cavité

La transmission du miroir de couplage de la cavité en anneau vaut T (voir figure 4.1). Nous supposerons que la finesse de la cavité est élevée, c'est à dire que T est petit devant 1, comme c'est le cas pour l'expérience où $T = 0.1$. Les relations d'entrée-sortie sur la lame de couplage s'écrivent dans ces conditions:

$$A_{\pm}(t) = (1 - \frac{T}{2})A'_{\pm}(t) + \sqrt{T}A^{in}_{\pm}(t) \quad (4\text{-}15)$$

$$A^{out}_{\pm}(t) = -A^{in}_{\pm}(t) + \sqrt{T}A'_{\pm}(t) \quad (4\text{-}16)$$

où nous avons utilisé l'approximation $r \simeq 1 - T/2$. On note $\tau = L/c$ le temps de parcours du champ dans la cavité de longueur L. Lorsque la cavité est vide, le champ E' qui a effectué un tour dans la cavité est égal au champ E qui est rentré à l'instant $t - \tau$:

$$E'(t) = E(t - \tau) \quad (4\text{-}17)$$

D'après la relation 4-1, cette égalité se traduit pour les enveloppes $A_{\pm}$ par:

$$A'_{\pm}(t) = A_{\pm}(t - \tau)e^{i\omega_L \tau} = A_{\pm}(t - \tau)e^{-i\Phi_{cav}} \quad (4\text{-}18)$$

où nous avons introduit le déphasage de la cavité Φ_{cav}. Celui-ci est définit en considérant la fréquence de résonance de la cavité ω_{cav} la plus proche de la fréquence du laser ω_L:

$$\Phi_{cav} = (\omega_{cav} - \omega_L)\tau \quad (4\text{-}19)$$

Au voisinage d'une résonance de la cavité Φ_{cav} est petit devant 1. En développant au premier ordre l'exponentielle dans l'expression 4-18, la relation 4-15 donne:

$$A_{\pm}(t) - A_{\pm}(t - \tau) \simeq -(\frac{T}{2} + i\Phi_{cav})A_{\pm} + \sqrt{T}A^{in}_{\pm}(t) \quad (4\text{-}20)$$

En supposant que les variations de $A_{\pm}$ sont petites pour un aller retour dans la cavité, l'équation d'évolution des deux composantes circulaires σ_+ et σ_- dans une cavité vide devient:

$$\tau\frac{dA_{\pm}}{dt} = -(T/2 + i\Phi_{cav})A_{\pm} + \sqrt{T}A^{in}_{\pm} \quad (4\text{-}21)$$

L'interaction avec les atomes à l'intérieur de la cavité se traduit par un terme supplémentaire $dA_{\pm}$ correspondant au champ électromagnétique rayonné par les

atomes dans le mode de la cavité [Hilico92a]. Les équations d'évolution des champs s'écrivent alors:

$$\tau\frac{dA_+}{dt} = -(T/2+i\Phi_{cav})A_+ + ig\sigma_{14} + \sqrt{T}A_+^{in} \quad (4\text{-}22)$$

$$\tau\frac{dA_-}{dt} = -(T/2+i\Phi_{cav})A_- + ig\sigma_{23} + \sqrt{T}A_-^{in} \quad (4\text{-}23)$$

B Approximation du pompage optique

B.1 Hypothèse de grand désaccord

Le système d'équations précédent est complexe car l'évolution des champs dans la cavité est donnée par celles des variables atomiques qui dépendent elles-mêmes des champs A_+ et A_-. Il est possible de simplifier ce problème en se plaçant dans le cadre de l'approximation du pompage optique.

Pour cela, nous supposons que le désaccord entre le laser et la transition atomique est très grand devant les fréquences de Rabi et le taux de relaxation:

$$\Delta \gg \Omega_\pm \ , \ \gamma \quad (4\text{-}24)$$

Dans ce cas les dipôles optiques évoluent très rapidement par rapport au temps d'évolution des populations et on peut effectuer l'approximation adiabatique dans les équations 4-8 et 4-9:

$$\begin{aligned}\sigma_{14} &\simeq \frac{ig}{\gamma+i\Delta}A_+(\sigma_{11}-\sigma_{44}) + \frac{F_{14}}{\gamma+i\Delta} \\ &\simeq \frac{g}{\Delta}A_+\sigma_{11} - i\frac{F_{14}}{\Delta} \quad (4\text{-}25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \quad \sigma_{23} &\simeq \frac{ig}{\gamma+i\Delta}A_-(\sigma_{22}-\sigma_{33}) + \frac{F_{23}}{\gamma+i\Delta} \\ &\simeq \frac{g}{\Delta}A_-\sigma_{22} - i\frac{F_{23}}{\Delta} \quad (4\text{-}26)\end{aligned}$$

Nous avons négligé ici les populations des états excités σ_{33} et σ_{44}. Nous allons maintenant justifier cette approximation. A l'aide des expressions des dipôles σ_{14} et σ_{23}, on peut estimer les populations stationnaires des états excités à partir des équations 4-12 et 4-13:

$$\langle\sigma_{33}\rangle \simeq \frac{1}{2}s_-\langle\sigma_{22}\rangle \quad (4\text{-}27)$$

$$\langle\sigma_{44}\rangle \simeq \frac{1}{2}s_-\langle\sigma_{11}\rangle \quad (4\text{-}28)$$

où nous avons introduit les paramètres de saturation des composantes $\sigma+$ et $\sigma-$ [Cohen96c]:

$$s_\pm = \frac{2g^2|\langle A_\pm\rangle|^2}{\Delta^2+\gamma^2} \simeq \frac{2g^2|\langle A_\pm\rangle|^2}{\Delta^2} = \frac{\Omega_\pm^2/2}{\Delta^2} \quad (4\text{-}29)$$

L'hypothèse de grand désaccord ($\Delta \gg \Omega_{\pm}$) se traduit par $s_{\pm} \ll 1$, ce qui légitime l'approximation faite dans les équations 4-25 et 4-26:

$$\langle\sigma_{33}\rangle \ll \langle\sigma_{22}\rangle \quad \text{et} \quad \langle\sigma_{44}\rangle \ll \langle\sigma_{11}\rangle \tag{4-30}$$

Les populations des états excités sont donc bien négligeables devant celles des états fondamentaux 1 et 2 dans le cadre de notre approximation. De plus, nous effectuerons leur élimination adiabatique dans la suite de cette partie consacrée au régime de pompage optique. Cette approximation suppose que les fréquences d'évolution des populations fondamentales sont petites devant γ. En utilisant cette approximation dans les équations 4-10 et 4-11, nous obtenons les équations d'évolution des populations fondamentales. Celles-ci se réduisent à de simples équations de taux:

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = -\gamma_{\perp} s_{+} \sigma_{11} + \gamma_{\perp} s_{-} \sigma_{22} + F_{11}^{ad} \tag{4-31}$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = -\gamma_{\perp} s_{-} \sigma_{22} + \gamma_{\perp} s_{+} \sigma_{11} + F_{22}^{ad} \tag{4-32}$$

où les taux $\gamma_{p+} = \gamma_{\perp} s_{+}$ et $\gamma_{p-} = \gamma_{\perp} s_{-}$ sont les taux de pompage optique associés aux composantes circulaires σ_{+} et σ_{-}. L'élimination adiabatique des populations excitées est donc bien justifiée puisque les taux de pompages optiques sont petits devant γ:

$$\gamma_{p+}, \gamma_{p-} \ll \gamma \tag{4-33}$$

Les expressions des forces de Langevin F_{11}^{ad} et F_{22}^{ad} intervenant dans les équations 4-31 et 4-32 sont données dans l'appendice B. Elles contiennent les forces de Langevin associées aux cohérences optiques F_{14} et F_{23}, ainsi que celles associées aux populations excitées F_{33} et F_{44}. Nous montrons dans l'appendice B que ces nouvelles forces de Langevin vérifient bien $F_{11}^{ad} + F_{22}^{ad} = 0$. Nous déduisons alors directement des équations 4-31 et 4-32 que les populations du fondamental satisfont à la relation de conservation du nombre d'atomes:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = N = \text{constante} \tag{4-34}$$

L'interaction des champs avec le milieu atomique se traduit, quant à elle, comme un simple déphasage:

$$\tau \frac{dA_{+}}{dt} = -(T/2 + i\Phi_{cav}) A_{+} + i\Phi_{+} A_{+} + \sqrt{T} A_{+}^{in} - \frac{g F_{14}}{\Delta} \tag{4-35}$$

$$\tau \frac{dA_{-}}{dt} = -(T/2 + i\Phi_{cav}) A_{-} + i\Phi_{-} A_{-} + \sqrt{T} A_{-}^{in} - \frac{g F_{23}}{\Delta} \tag{4-36}$$

où les déphasages Φ_{+} et Φ_{-} dépendent des populations des états 1 et 2 (voir équations 4-25 et 4-26):

$$\Phi_{+} = g\sigma_{14} = \frac{g^2}{\Delta}\sigma_{11} \quad \text{et} \quad \Phi_{-} = g\sigma_{23} = \frac{g^2}{\Delta}\sigma_{22} \tag{4-37}$$

B.2 Etat stationnaire

Nous ne considérons, dans cette partie, que les valeurs moyennes des opérateurs. Afin de ne pas alourdir les notations nous n'écrirons pas explicitement ces valeurs moyennes: par exemple A_+ se lira comme $\langle A_+ \rangle$.

B.2.1 Effet de "rotation auto-induite"

La solution pour les valeurs stationnaires des populations des niveaux 1 et 2 est obtenue aisément à partir des équations 4-31, 4-32 et 5-65:

$$\sigma_{11} = N\frac{s_-}{s_- + s_+} \quad \text{et} \quad \sigma_{22} = N\frac{s_+}{s_- + s_+} \tag{4-38}$$

Comme attendu, ces populations dépendent des intensités respectives des modes circulaires et sont égales à $N/2$ lorsque la polarisation est linéaire ($s_+ = s_-$). Ces intensités s_+ et s_- dépendent en retour des populations σ_{11} et σ_{22}.

Pour résoudre aisément ce système non linéaire couplé, nous suivons la démarche de la référence [Giacobino85] et nous décomposons alors les déphasages atomiques Φ_+ et Φ_- en leur partie linéaire et non linéaire. Les relations 4-37 conduisent à:

$$\Phi_+ = \Phi_0 + \Phi_{SR} \qquad \text{et} \qquad \Phi_- = \Phi_0 - \Phi_{SR} \tag{4-39}$$

$$\text{avec} \quad \Phi_0 = \frac{1}{2}(\Phi_+ + \Phi_-) = \frac{Ng^2}{2\Delta} \tag{4-40}$$

$$\text{et} \quad \Phi_{SR} = \frac{1}{2}(\Phi_+ - \Phi_-) = \Phi_0\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{N} = -2\Phi_0\frac{J_z}{N} \tag{4-41}$$

Dans la dernière équation nous avons introduit $J_z = (\sigma_{22} - \sigma_{11})/2$ qui donne la différence des populations des niveaux fondamentaux. Cette valeur est appelée l'orientation du milieu.

Le déphasage Φ_0 correspond au déphasage des deux composantes lorsque l'état stationnaire du système est symétrique, i.e. la polarisation est linéaire et les populations sont équiréparties ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = N/2$). Cette valeur est ainsi divisée par deux par rapport à la valeur du déphasage correspondant à un milieu atomique constitué de N atomes à deux niveaux (voir relation 1-42 du chapitre 1).

En revanche le déphasage Φ_{SR} est lié à la biréfringence circulaire du milieu. Si cette valeur est non nulle, les déphasages subis par les composantes σ_+ et σ_- sont différents. Lorsque le champ n'est pas en cavité, cet effet entraîne la rotation de la polarisation lors de la traversée du milieu en simple passage. Cette biréfringence dépend ici de l'ellipticité ϵ du faisceau. Si nous remplaçons J_z par sa valeur stationnaire donnée par les équations 4-38, nous obtenons en effet:

$$\Phi_{SR} = \Phi_0\frac{s_- - s_+}{s_- + s_+} = \Phi_0\frac{|A_-|^2 - |A_+|^2}{|A_-|^2 + |A_+|^2} = -\Phi_0\frac{S_3}{S_0} = -\Phi_0 \sin 2\epsilon \tag{4-42}$$

Les paramètres S_0 et S_3 sont les paramètres de Stokes définis au paragraphe C.2.2 chapitre 1. Le paramètre S_3 est, en effet, relié à l'ellipticité du faisceau d'après la relation 1-63.

Ainsi un faisceau polarisé elliptiquement ($\epsilon \neq 0$) à l'entrée du milieu atomique va induire une biréfringence circulaire du milieu ($\Phi_{SR} \neq 0$). Celle-ci va, en retour, provoquer la rotation de la direction de polarisation du faisceau. Ce phénomène est appelé "self rotation" et ces équations, valables pour un milieu atomique en "X", ont été établies précédemment par d'autres groupes [Matsko02a, Rochester01]. Ici la situation est plus compliquée car les champs se propagent en cavité. Nous allons montrer par la suite que cet effet de "self-rotation" est responsable de la bascule de polarisation à l'intérieur de la cavité.

B.2.2 Bascule de polarisation

Les solutions stationnaires des champs A_+ et A_- découlent des équations 4-35, 4-36 et 4-39:

$$A_+ = \frac{\sqrt{T}A_+^{in}}{\frac{T}{2} + i(\Phi_{cav} - (\Phi_0 + \Phi_{SR}))} \tag{4-43}$$

$$A_- = \frac{\sqrt{T}A_-^{in}}{\frac{T}{2} + i(\Phi_{cav} - (\Phi_0 - \Phi_{SR}))} \tag{4-44}$$

Elles dépendent de la valeur des champs A_+^{in} et A_-^{in} à l'entrée de la cavité. La polarisation incidente étant linéaire suivant l'axe horizontal x, les relations de passage 4-2 et 4-3 conduisent à $s_+^{in} = s_-^{in} = s_x^{in}/2$, où s_x est le paramètre de saturation du champ moyen A_x:

$$s_x = \frac{2g^2|\langle A_x\rangle|^2}{\Delta^2 + \gamma^2} \simeq \frac{2g^2|\langle A_x\rangle|^2}{\Delta^2} \tag{4-45}$$

En normalisant tous les déphasages à la demi-largeur de la cavité $T/2$, par exemple $\delta_{SR} = 2\Phi_{SR}/T$, nous obtenons finalement:

$$s_+ = \frac{s_{max}}{1 + (\delta_0 + \delta_{SR} - \delta_{cav})^2} \tag{4-46}$$

$$s_- = \frac{s_{max}}{1 + (\delta_0 - \delta_{SR} - \delta_{cav})^2} \tag{4-47}$$

$$\text{avec} \quad s_{max} = 4s_\pm^{in}/T = 2s_x^{in}/T \tag{4-48}$$

Les solutions sont des fonctions de la valeur δ_{SR}, définie à partir de la relation 4-41, qui dépend en retour de s_+ et s_-. Nous reportons alors ces solutions dans la relation 4-42 afin d'aboutir à l'équation:

$$\delta_{SR} = \delta_0 \frac{s_- - s_+}{s_- + s_+} = \frac{2\delta_0\delta_{SR}(\delta_0 - \delta_{cav})}{1 + \delta_{SR}^2 + (\delta_0 - \delta_{cav})^2} \tag{4-49}$$

Pour un désaccord de la cavité fixé, cette équation admet, *a priori*, deux solutions:

$$\delta_{SR} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{SR}^2 = \delta_0^2 - \delta_{cav}^2 - 1 = \mathcal{C}_{PS} \tag{4-50}$$

Lorsque $\delta_{SR} = 0$, le système est symétrique et la polarisation est linéaire. Les solutions pour les composantes circulaires, notées dans ce cas $s_+^{(s)}$ et $s_-^{(s)}$, sont égales et correspondent à un pic d'Airy centré en δ_0. En effet, les équations 4-46 et 4-47 donnent:

$$s_+^{(s)} = s_-^{(s)} = \frac{s_{max}}{1 + (\delta_0 - \delta_{cav})^2} \tag{4-51}$$

Par ailleurs, il existe des solutions non nulles pour δ_{SR}, si la fonction $\mathcal{C}_{PS}$ est positive:

$$\mathcal{C}_{PS} = \delta_{SR}^2 = \delta_0^2 - \delta_{cav}^2 - 1 \geq 0 \tag{4-52}$$

Comme $\delta_{SR} \neq 0$, on remarque que les solutions données par les équations 4-46 et 4-47, notées $s_+^{(a)}$ et $s_-^{(a)}$, correspondent à des intensités intracavités différentes pour les composantes circulaires: $s_+^{(a)} \neq s_-^{(a)}$. La polarisation est donc, dans ce cas, elliptique à l'intérieur de la cavité ($\epsilon \neq 0$ d'après l'équation 4-42).

Nous montrerons au prochain paragraphe que la solution symétrique n'est plus stable dès que le critère $\mathcal{C}_{PS} \geq 0$ est vérifié. Lorsque le déphasage de la cavité δ_{cav} varie, la polarisation devient donc elliptique pour les déphasages compris entre $-\delta_{PS}$ et δ_{PS}:

$$-\delta_{PS} \leq \delta_{cav} \leq \delta_{PS} \quad \text{avec} \quad \delta_{PS} \equiv \sqrt{\delta_0^2 - 1} \tag{4-53}$$

Un tel domaine existe si

$$\delta_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Phi_0 \geq \frac{T}{2} \tag{4-54}$$

Cette condition est aisément satisfaite pour nos paramètres expérimentaux. Nous avons vu au paragraphe B.3.3 du chapitre 2 que le nombre d'atomes est de l'ordre de $5\ 10^6$. Le désaccord atomique vaut environ $45\,MHz$ soit $\Delta \simeq 17\gamma$. En utilisant $g^2/2\pi = 4.24Hz$, on estime le déphasage atomique δ_0 à:

$$\delta_0^{exp} = \frac{Ng^2}{T\Delta} \simeq 5 > 1 \tag{4-55}$$

En reportant la valeur de δ_{SR} donnée par la relation 4-50 dans les équations 4-46 et 4-47, il est possible de déterminer analytiquement les valeurs stationnaires de $s_+^{(a)}$ et $s_-^{(a)}$. Nous ne donnerons pas ici le résultat car il ne présente pas d'intérêt particulier. En revanche, nous avons tracé les résonances prédites par le modèle sur la figure 4.2. Ces courbes reproduisent l'allure générale des courbes de résonances expérimentales que nous avons présentées dans la section B au chapitre 2.

Afin d'expliquer ces courbes, nous reprenons ici l'analyse faite au paragraphe B.2 du chapitre 2 en considérant les processus de pompage optique en polarisation linéaire ou circulaire. En polarisation linéaire, le système est symétrique et les déphasages atomiques sont égaux pour les deux polarisations circulaires:$\delta_+ = \delta_- = \delta_0$.

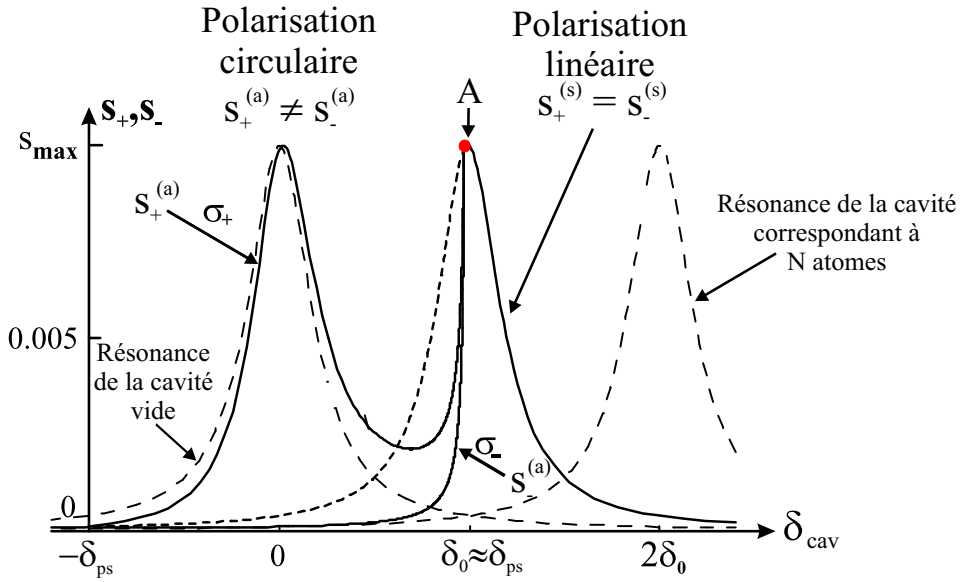


Fig. 4.2 – Courbes de résonance pour les composantes circulaire σ_+ et σ_-. Les paramètres correspondent à $\delta_0 = 5$ et $s_{max} = 0.01$. Le déphasage de la cavité correspondant au seuil de bascule de polarisation (point A) vaut $\delta_{PS} = \sqrt{\delta_0^2 - 1} \simeq 4.9 \simeq \delta_0$. Quand on balaie le déphasage de la cavité δ_{cav} à partir de la droite, la solution de polarisation linéaire ($s_+^{(s)} = s_-^{(s)}$) est stable jusqu'à ce que $\delta_{cav} = \delta_{PS}$ (trait plein), puis instable jusqu'à $\delta_{cav} = -\delta_{PS}$ (trait pointillé). Dans ce domaine, les solutions stables sont les solutions de polarisation elliptique (spa $\neq s_-^{(a)}$) (trait plein). Nous avons représenté également les résonances pour la cavité correspondant à des déphasages atomiques constants égaux à 0 et $2\delta_0$, vers lesquels tendent les solutions σ_+ et σ_- après la bascule de la polarisation.

Les solutions pour $s_+^{(s)}$ et $s_-^{(s)}$ correspondent donc à un pic d'Airy centré en δ_0 donné par la relation 4-51.

Quand une composante circulaire devient dominante, choisissons σ_+, les atomes sont pompés dans le niveau 2 (voir figure 4.1). Dans la limite où $s_+^{(a)} \gg s_-^{(a)}$, les équations 4-38 et 4-42 donnent:

$$\sigma_{11} \simeq 0 \ , \ \sigma_{22} \simeq N \ \text{ et } \ \delta_{SR} \simeq -\delta_0 \tag{4-56}$$

Dans ces conditions, la composante σ_+ ne "voit" plus les atomes et la solution s'approche d'un pic d'Airy centré en 0:

$$s_+^{(a)} \simeq \frac{s_{max}}{1+\delta_{cav}^2} \tag{4-57}$$

Cette solution correspond à la résonance de la cavité vide. Inversement la composante σ_- interagit avec pratiquement tous les atomes. La solution tend alors vers le pic d'Airy centré en $2\delta_0$ qui est justement hors de résonance dans ce domaine du déphasage de la cavité (voir figure 4.2):

$$s_-^{(a)} \simeq \frac{s_{max}}{1+(2\delta_0-\delta_{cav})^2} \tag{4-58}$$

Les courbes de résonance présentées ici ont le même comportement que les courbes expérimentales présentées dans la partie B du chapitre 2. Néanmoins l'analyse montre que la situation est inversée. En effet, le modèle montre que la composante circulaire dominante σ_+ n'interagit plus avec les atomes contrairement au cas expérimental où cette composante interagit avec tous les atomes (voir discussion du paragraphe B.2 du chapitre 2). Pour obtenir cet effet théoriquement, il faut considérer une transition $J \rightarrow J+1$, le plus simple étant de considérer une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Dans ce cas, les équations concernant l'évolution des populations sont les mêmes. L'expression des déphasages dépend des valeurs des différents coefficients de Clebsch-Gordan. Il est alors aisé de montrer qu'on obtient le même phénomène de bascule de polarisation, cette fois-ci dans le sens correspondant à la situation expérimentale.

B.2.3 Analogie avec un oscillateur paramétrique optique

Nous allons voir dans ce paragraphe que l'on peut donner une interprétation simple au phénomène de bascule de polarisation en terme de seuil d'oscillation laser. Pour ce faire, nous nous intéresserons ici aux fluctuations classiques du mode orthogonal A_y qui sont liées à la stabilité de la solution de polarisation linéaire, dans le cas où le champ moyen est aligné selon $(0x)$.

En utilisant la relation de changement de base de polarisation 4-2, on obtient à partir des équations 4-35 et 4-36:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{dA_y}{dt} = -(1+i\delta_{cav})A_y + i\delta_0 A_y - \delta_{SR}A_x \tag{4-59}$$

où $\kappa = T/2\tau$ est le taux de relaxation de la cavité. Rappelons qu'il n'y a pas de terme source correspondant au champ incident ($A_y^{in} = 0$) et que l'on ignore les fluctuations quantiques dans ce paragraphe.

Afin d'obtenir une interprétation simple de la bascule de polarisation, nous effectuons l'élimination adiabatique de toutes les variables atomiques dans l'équation. Nous reviendrons sur cette simplification importante dans la suite de ce paragraphe. Dans ce cas, le terme de biréfringence circulaire du milieu donné parδ_{SR} est directement relié à l'ellipticité. En se plaçant dans la base des modes polarisé linéairement x et y, la relation 4-42 devient:

$$\delta_{SR} = -\delta_0 \frac{S_3}{S_0} = -\delta_0 \frac{i(A_y^* A_x - A_y A_x^*)}{|A_y|^2 + |A_x|^2} \tag{4-60}$$

Dans le domaine où la polarisation est linéaire, δ_{SR} et A_y sont nuls en valeur moyenne. Nous remplacerons donc A_y par δA_y. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en fluctuations, δ_{SR} s'écrit:

$$\delta_{SR} \simeq -\delta_0 \frac{i(\delta A_y^* \langle A_x \rangle - \delta A_y \langle A_x \rangle^*)}{|\langle A_x \rangle|^2} \tag{4-61}$$

En reportant cette valeur de δ_{SR} dans l'équation d'évolution 4-59, nous obtenons finalement à l'ordre 1:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_y = -(1 + i\delta_{cav})\delta A_y + i\delta_0 \frac{\langle A_x \rangle^2}{|\langle A_x \rangle|^2} \delta A_y^* \tag{4-62}$$

Cette équation est analogue à celle dérivée par Matsko *et al.* [Matsko02a] dans le cas de la traversée du milieu en simple passage. Dans notre configuration, l'équation est identique à celle d'un oscillateur paramétrique optique (OPO) dégénéré sous le seuil, le champ moyen A_x jouant le rôle de la pompe [Milburn81, Collet84, Collet85]. Le mode vide orthogonal subit un gain non linéaire qui dépend de la phase: $i\delta_0(\langle A_x \rangle^2)/(|\langle A_x \rangle|^2)A_y^*$. Ce gain s'interprète aisément: les fluctuations de δ_{SR} entraînent la fluctuation de la polarisation du champ autour de l'axe horizontal x (voir figure 4.3). La projection de ces fluctuations sur l'axe orthogonal y agit comme un gain sur ce mode. Celui-ci oscille dés que ce gain est supérieur aux pertes de la cavité:

$$\delta_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Phi_0 \geq \frac{T}{2} \tag{4-63}$$

Nous retrouvons alors la condition de bascule de polarisation donnée par le critère 4-54.

Nous vérifions cette analogie en effectuant l'analyse de stabilité du mode vide y. A partir de l'équation 4-62, nous avons directement:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta A_y \\ \delta A_y^* \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \delta A_y \\ \delta A_y^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} -(1 + i\delta_{cav}) & i\delta_0 \frac{\langle A_x \rangle^2}{|\langle A_x \rangle|^2} \\ -i\delta_0 \frac{\langle A_x \rangle^{*2}}{|\langle A_x \rangle|^2} & -(1 - i\delta_{cav}) \end{bmatrix} \tag{4-64}$$

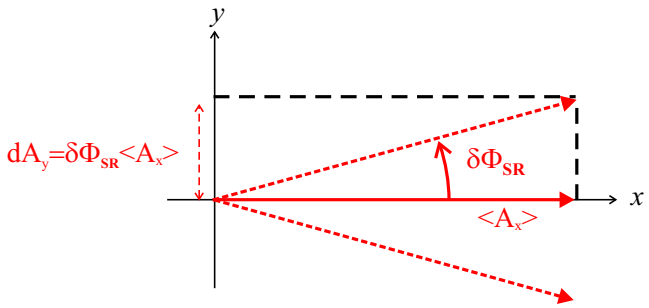


Fig. 4.3 – Interprétation des fluctuations de la polarisation en terme de gain sur le mode vide orthogonal.

La stabilité de la solution dépend du signe des valeurs propres de la matrice B. Celles-ci sont données par:

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{\delta_0^2 - \delta_{cav}^2} \tag{4-65}$$

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{\delta_0^2 - \delta_{cav}^2} \tag{4-66}$$

La valeur propre λ_2 devient positive lorsque

$$\delta_0^2 - \delta_{cav}^2 - 1 \geq 0 \tag{4-67}$$

Le seuil d'instabilité du mode vide orthogonal coïncide alors exactement avec le seuil d'existence de solutions asymétriques d'après le critère 4-52 ($\mathcal{C}_{PS} \geq 0$).

Les deux méthodes différentes employées conduisent ainsi au même résultat. Le seuil de bascule de la polarisation s'interprète donc comme le seuil d'oscillation laser du mode vide y suivant un processus similaire à celui d'un OPO.

Toutefois notre analyse repose sur l'élimination adiabatique des variables atomiques. Celle-ci se justifie uniquement si on effectue une analyse de stabilité à fréquence nulle. Comme le seuil d'instabilité trouvé ci-dessus correspond justement à l'annulation d'une valeur propre, notre traitement est justifié *a postériori*. Néanmoins, nous n'avons pas pris en compte toutes les causes d'instabilité du système et il se peut qu'il existe d'autres seuils correspondant à des instabilités dynamiques. C'est pourquoi nous avons vérifié que notre analyse était en accord avec les calculs effectués numériquement de la matrice complète de stabilité atomes-champ.

La capacité d'un système à produire des états comprimés étant étroitement reliée aux propriétés de stabilité [Hilico92a], on s'attend à ce que les fluctuations du mode vide y soient fortement modifiées au voisinage du seuil de bascule de polarisation. En poursuivant l'analogie avec un OPO dégénéré sous le seuil (voir équation 4-62), on peut se demander s'il est possible d'obtenir une réduction de bruit importante grâce à

l'effet de "rotation auto-induite" [Matsko02a]. Pour répondre à cette question, il faut tenir compte du bruit atomique, qui, comme nous allons le démontrer maintenant, est très important.

B.3 Fluctuations quantiques

B.3.1 Principe

L'objectif est ici de calculer les densités spectrales de bruit des quadratures des champs sortants de la cavité. Nous nous limiterons par la suite au cas où la polarisation reste linéaire dans la cavité, i.e. sous le seuil de bascule de la polarisation.

Pour cela, nous allons linéariser les opérateurs quantiques autour de leur valeurs moyennes en suivant la méthode entrée-sortie détaillée dans la référence [Hilico92a]. Cette méthode est valable si les fluctuations des champs sont faibles devant la valeur moyenne $\langle A_x \rangle$.

Considérons un champ A, qui pourra être, par la suite, aussi bien le champ moyen A_x que le mode vide orthogonal A_y. Pour une quadrature quelconque $X_\theta = A^\dagger e^{i\theta} + A e^{-i\theta}$, repérée par l'angle θ dans le repère de Fresnel, la densité spectrale de bruit s'écrit:

$$\langle \delta X_\theta(\omega) \delta X_\theta(-\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega')\ S_{X_\theta}(\omega) \tag{4-68}$$

Cette densité spectrale de bruit s'exprime à partir des fonctions de corrélations faisant intervenir les opérateurs enveloppes $\delta A(\omega)$ et $\delta A^\dagger(-\omega')$. En effet, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \langle \delta X_\theta(\omega) \delta X_\theta(-\omega') \rangle &= \langle \delta A(\omega) \delta A^\dagger(-\omega') \rangle + \langle \delta A^\dagger(\omega) \delta A(-\omega') \rangle \\ &\quad + \langle \delta A^\dagger(\omega) \delta A^\dagger(-\omega') \rangle e^{2i\theta} + \langle \delta A^\dagger(\omega) \delta A^\dagger(-\omega') \rangle e^{-2i\theta} \end{aligned} \tag{4-69}$$

Afin de simplifier les écritures, il est commode d'introduire la matrice de corrélation du champ $[V(\omega)]$ définie par:

$$2\pi\delta(\omega - \omega')\ [V(\omega)] = \langle \begin{bmatrix} \delta A(\omega) \\ \delta A^\dagger(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A(\omega') \\ \delta A^\dagger(\omega') \end{bmatrix}^\dagger \rangle \tag{4-70}$$

En utilisant la relation 4-171, on remarque que les densités spectrales de bruit des quadratures s'expriment alors en fonction des éléments de cette matrice suivant la relation:

$$S_{X_\theta}(\omega) = [V(\omega)]_{11} + [V(\omega)]_{22} + [V(\omega)]_{21} e^{2i\theta} + [V(\omega)]_{12} e^{-2i\theta} \tag{4-71}$$

C'est pourquoi nous allons consacrer cette section au calcul des corrélations$[V_x^{out}]$ et $[V_y^{out}]$, afin de déterminer les bruits des champs sortants A_x^{out} et A_y^{out} pour toutes les quadratures. Ces champs sortants sont reliés aux champs intracavités par les relations (voir équation 4-16):

$$A_{x,y}^{out} = \sqrt{T} A_{x,y} - A_{x,y}^{in} \tag{4-72}$$

B.3.2 Linéarisation des équations

Les équations d'évolution des champs x et y à l'intérieur de la cavité s'obtiennent à partir de celles des modes polarisés circulairement σ_+ et σ_- en utilisant les relations de passage 4-2 et 4-3. Les équations 4-35 et 4-36 conduisent à:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{dA_x}{dt} = -(1+i\delta_{cav})A_x + i\delta_0 A_x + \delta_{SR}A_y + \frac{2}{\sqrt{T}}A_x^{in} + F_x^{dip} \qquad (4\text{-}73)$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{dA_y}{dt} = -(1+i\delta_{cav})A_y + i\delta_0 A_y - \delta_{SR}A_x + \frac{2}{\sqrt{T}}A_y^{in} + F_y^{dip} \qquad (4\text{-}74)$$

où les forces de Langevin F_x^{dip} et F_y^{dip} s'expriment en fonction de celles associées aux dipôles optiques:

$$F_x^{dip} = \frac{g\sqrt{2}}{T\Delta}(F_{14} - F_{23}) \quad \text{et} \quad F_y^{dip} = -i\frac{g\sqrt{2}}{T\Delta}(F_{14} + F_{23}) \qquad (4\text{-}75)$$

Le champ est polarisé linéairement suivant l'axe x, donc A_y et δ_{SR} ont une valeur moyenne nulle. Comme nous l'avons fait précédemment, nous remplacerons A_y par δA_y. Le champ x est, quant à lui, décomposé en sa valeur moyenne et ses fluctuations: $A_x = \langle A_x\rangle + \delta A_x$. En se limitant à l'ordre 1 en fluctuations, nous linéarisons les équations des champs:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_x = -(1+i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_x + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_x^{in} + F_x^{dip} \qquad (4\text{-}76)$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_y = -(1+i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_y - \delta_{SR}\langle A_x\rangle + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_y^{in} + F_y^{dip} \qquad (4\text{-}77)$$

Considérons tout d'abord, l'équation d'évolution des fluctuations du champ moyen A_x. Nous remarquons que les effets de pompage optique liés à δ_{SR} n'ont aucune incidence sur le spectre de bruit du champ moyen x puisque le terme $\delta_{SR}A_y$ est du second ordre en fluctuations. En effet, il est clair que la projection du mode y sur le champ moyen est complètement négligeable. Par ailleurs, nous montrons dans l'appendice B que la force de Langevin F_x^{dip} est à l'origine d'un terme de bruit dû à l'absorption atomique. Dans cette partie, consacrée à l'étude du pompage optique, les phénomènes d'absorption sont négligés, par conséquent le coefficient de diffusion associé à ces forces est, lui aussi, négligeable. Si le champ incident est dans un état cohérent, le champ sortant l'est donc également.

Le comportement du champ moyen ne présente donc pas d'intérêt particulier dans le cadre de cette étude et nous nous consacrerons exclusivement, par la suite, à l'étude des fluctuations du mode vide y.

Nous avons montré au paragraphe B.2.3 que le terme de "self-rotation" δ_{SR} est responsable de la bascule de la polarisation. Ce terme dépend de la répartition des populations dans le fondamental qui est caractérisée par l'orientation

$J_z = (\sigma_{22} - \sigma_{11})/2$ (voir équation 4-41). L'équation d'évolution de cette quantité découle directement des équations de pompage optique 4-31 et 4-32:

$$\frac{dJ_z}{dt} = -\gamma_\perp(s_+ + s_-)(J_z - \frac{N}{2}\frac{S_3}{S_0}) + F_z \tag{4-78}$$

où $F_z = (F_{22}^{ad} - F_{11}^{ad})/2 = F_{22}^{ad}$ est la force de Langevin associée aux fluctuations de pompage optique. En polarisation linéaire, la valeur moyenne de J_z est nulle, nous remplacerons donc J_z par δJ_z. En utilisant le fait que $s_+ = s_- = s_x/2$, l'équation 4-78 devient, au premier ordre en fluctuations:

$$\frac{d}{dt}\delta J_z = -\gamma_p \left(\delta J_z - \frac{N}{2}\frac{\delta S_3}{|\langle A_x\rangle|^2} \right) + F_z \tag{4-79}$$

$$\text{avec} \quad \gamma_p = \gamma_\perp s_x = \gamma_\perp \frac{2g^2|\langle A_x\rangle|^2}{\Delta^2} \quad \text{et} \quad \delta S_3 = i(\delta A_y^\dagger \langle A_x\rangle - \delta A_y \langle A_x\rangle^*) \tag{4-80}$$

Les spectres de bruit sont calculés en effectuant la transformée de Fourier des équations donnant δJ_z et δA_y. L'équation 4-79 donne immédiatement:

$$\delta J_z(\omega) = \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega}\frac{N}{2}\frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x\rangle|^2} + \frac{F_z(\omega)}{\gamma_p - i\omega} \tag{4-81}$$

Nous rappelons que l'équation de pompage optique suppose l'élimination adiabatique des populations excitées. L'équation précédente n'est donc valable que pour un domaine de fréquence limité à:

$$\omega \ll \gamma \tag{4-82}$$

Cette équation montre, par ailleurs, que les fluctuations de J_z ne sont importantes que sur une plage de fréquence centrée en 0 et de largeur γ_p. Ce taux de pompage optique est effectivement petit devant γ (voir relation 4-33), ce qui confirme la cohérence de notre traitement.

En reportant la relation 4-81 dans l'équation d'évolution du champ y 4-77 (par l'intermédiaire de la relation 4-41), nous obtenons finalement l'équation suivante:

$$\begin{aligned}(1 + i\delta_{cav} - i\omega/\kappa)\delta A_y(\omega) &= i\delta_0 \left[1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega}\right]\delta A_y(\omega) \\ &\quad + i\delta_0 \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega}\frac{\langle A_x\rangle^2}{|\langle A_x\rangle|^2}\delta A_y^\dagger(\omega) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_y^{in}(\omega) + F_{A_y}(\omega)\end{aligned} \tag{4-83}$$

Le terme de "rotation auto-induite", dépendant de la phase ($\propto \delta A_y^\dagger$), a une amplitude de $\delta_0 \propto \gamma/\Delta$ à fréquence nulle, ce qui est très important par rapport aux ordres de grandeurs usuels des termes non-linéaires dus à la saturation ($\propto (\gamma/\Delta)^3$).

On peut donc s'attendre à une bonne réduction de bruit si le bruit atomique est négligeable. Celui-ci est, quant à lui, inclus dans l'expression de la force de Langevin F_{A_y}:

$$F_{A_y}(\omega) = \frac{2\delta_0 A_x}{N} \frac{F_z(\omega)}{\gamma_p - i\omega} + F_y^{dip}(\omega) \tag{4-84}$$

Nous allons voir comment intervient ce terme dans les calculs du spectre de bruit.

B.3.3 Matrices de susceptibilité et de corrélations atomiques

Nous avons jusqu'à présent décrit l'interaction entre le champ éléctromagnétique et les atomes en terme de déphasages. Cette présentation est bien adaptée lorsque l'on effectue l'élimination adiabatique des dipôles optiques σ_{14} et σ_{23}. La méthode générale détaillée par Hilico *et al.* [Hilico92a] permet de calculer les spectres à l'aide des matrices de susceptibilité $[\chi(\omega)]$ et de corrélations $[\sigma(\omega)]$, qui sont définies à partir des fluctuations de ces dipôles. Nous allons adapter ici notre calcul à ce formalisme.

Pour simplifier les écritures, il est commode d'utiliser les notations suivantes pour les vecteurs:

$$|\delta A_y(\omega)] = \begin{bmatrix} \delta A_y(\omega) \\ \delta A_y^\dagger(\omega) \end{bmatrix} \tag{4-85}$$

$$\text{et} \quad [\delta A_y(\omega)| = |\delta A_y(\omega)]^\dagger = [\delta A_y^\dagger(-\omega), \delta A_y(-\omega)] \tag{4-86}$$

L'équation 4-83 peut se mettre alors sous la forme:

$$(\ 1 - i\frac{\omega}{\kappa} + i[\epsilon]\delta_{cav} + 2C\gamma[\epsilon][\chi(\omega)]\ )\ |\delta A_y(\omega)] = \frac{2}{\sqrt{T}}|\delta A_y^{in}(\omega)] + |F_{A_y}(\omega)] \tag{4-87}$$

où l'on a introduit le paramètre de coopérativité:

$$C = \frac{Ng^2}{2\kappa\tau\gamma} = \delta_0 \frac{\Delta}{\gamma} \tag{4-88}$$

ainsi que la matrice de susceptibilité $[\chi(\omega)]$ et la matrice $[\epsilon]$:

$$[\chi(\omega)] \ = \ [\chi(\omega)]_0 \ + \ [\chi(\omega)]_{SR} \quad \text{et} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4-89}$$

Les expressions des matrices $[\chi(\omega)]_0$ et $[\chi(\omega)]_{SR}$ sont données dans l'appendice B. Nous définissons alors la matrice de transfert $[\mu(\omega)]$, qui relie le champ entrant au champ intracavité, de la façon suivante:

$$[\mu(\omega)] = 2(\ 1 - i\frac{\omega}{\kappa} + i[\epsilon]\delta_{cav} + 2C\gamma[\epsilon][\chi(\omega)]\ )^{-1} \tag{4-90}$$

La relation entrée-sortie 4-72 donne l'expression du champ sortant en fonction du champ entrant et du bruit ajouté par les atomes:

$$|\delta A_y^{out}(\omega)] = ([\mu(\omega)] - 1)|\delta A_y^{in}(\omega)] + \frac{\sqrt{T}}{2}[\mu(\omega)]|F_{A_y}(\omega)] \tag{4-91}$$

Les fluctuations du champ entrant A_y^{in} et les fluctuations dues à la relaxation des atomes étant décorrélées [Hilico92a], on obtient finalement l'expression de la matrice de corrélation du champ $[V_y^{out}]$, définie par la relation 4-70:

$$[V_y^{out}] = ([\mu(\omega)] - 1)[V_y^{in}]([\mu(\omega)]^\dagger - 1) + [\mu(\omega)][V_y^{at}][\mu(\omega)]^\dagger \tag{4-92}$$

où la matrice $[V_y^{at}]$ contient les termes de bruit dus aux atomes. Cette matrice est définie par:

$$2\pi\delta(\omega - \omega')[V_y^{at}] = \frac{T}{4}|F_{A_y}(\omega)][F_{A_y}(\omega)| \tag{4-93}$$

La matrice $[V_y^{at}(\omega)]$ se calcule à partir des coefficients de diffusion des forces de Langevin. Le détail de ce calcul est reporté dans l'appendice B. Afin de poursuivre la comparaison avec les calculs de la référence [Hilico92a], nous notons ici que la matrice de corrélation $[\sigma(\omega)]$ est directement reliée à $[V_y^{at}(\omega)]$ par:

$$[V_y^{at}(\omega)] = \frac{Ng^2}{T}[\epsilon][\sigma(\omega)][\epsilon] = C\gamma[\epsilon][\sigma(\omega)][\epsilon] \tag{4-94}$$

B.3.4 Bruit associé au pompage optique

Avant de calculer les spectres de bruit au paragraphe suivant, nous montrons ici que les processus de pompage optique sont associés à un important excès de bruit.

Les termes de bruit correspondant au pompage optique sont donnés par la force de Langevin F_z intervenant dans l'expression de F_{A_y} (voir équation 4-84). Afin d'estimer leur ordre de grandeur, il faut calculer le coefficient de diffusion D_z défini par la relation:

$$\langle F_z(t)F_z(t')\rangle = 2D_z\delta(t - t') \tag{4-95}$$

Ce coefficient de diffusion D_z est calculé rigoureusement dans l'appendice B. Néanmoins on peut retrouver directement le résultat dans le cadre de l'approximation du pompage optique. En effet, le théorème de régression quantique [Cohen96a] donne:

$$2D_z = \langle \mathcal{D}(J_z^2)\rangle - \langle J_z\mathcal{D}(J_z)\rangle - \langle \mathcal{D}(J_z)J_z\rangle \tag{4-96}$$

La notation $\mathcal{D}$ désigne les termes de dérive des opérateurs [Cohen96a]. Les forces de Langevin étant associées au couplage avec l'extérieur, nous ne gardons que les termes de relaxation dans ces termes de dérive. L'équation de pompage optique4-79 conduit immédiatement à:

$$\mathcal{D}(J_z) = -\gamma_p J_z \tag{4-97}$$

En outre, nous vérifions aisément que:

$$J_z^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{N}{4} = \text{constante} \tag{4-98}$$

J_z^2 étant constant, son terme de dérive est donc nul ($\mathcal{D}(J_z^2) = 0$) et nous obtenons ainsi:

$$2D_z = -2\langle(-\gamma_p J_z^2)\rangle = \frac{N}{2}\gamma_p \tag{4-99}$$

On peut maintenant estimer les termes de bruit correspondant au pompage optique dans l'expression de la matrice de $[V_y^{at}]$. Celle-ci se calcule à partir de la force de Langevin F_{A_y} (voir équation 4-93). Regardons, par exemple, l'élément de matrice $[V_y^{at}]_{1,1}$ défini par:

$$2\pi\delta(\omega - \omega')[V_y^{at}(\omega)]_{1,1} = \frac{T}{4}\langle F_{A_y}(\omega)F_{A_y}^{\dagger}(-\omega')\rangle \tag{4-100}$$

L'expression de F_{A_y} est composée de deux termes (voir équation 4-84), toutefois on peut obtenir un ordre de grandeur de l'élément $[V_y^{at}(\omega)]_{1,1}$ en ne considérant que la contribution faisant intervenir la corrélation $\langle F_z(\omega)F_z(-\omega')\rangle$:

$$\langle F_{A_y}(\omega)F_{A_y}^{\dagger}(-\omega')\rangle \simeq \frac{4\delta_0^2|\langle A_x\rangle|^2}{N^2}\frac{1}{\gamma_p^2 + \omega^2}\langle F_z(\omega)F_z(-\omega')\rangle \tag{4-101}$$

$$\simeq 2\pi\delta(\omega - \omega')\frac{C}{T}\frac{\gamma}{\gamma_\perp}\frac{\gamma_p^2}{\gamma_p^2 + \omega^2} \tag{4-102}$$

où l'on a utilisé $\langle F_z(\omega)F_z(-\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega')(2D_z)$. L'élément de matrice vaut finalement:

$$[V_y^{at}(\omega)]_{1,1} \simeq \frac{C}{4}\frac{\gamma}{\gamma_\perp}\frac{\gamma_p^2}{\gamma_p^2 + \omega^2} \tag{4-103}$$

L'ordre de grandeur de la coopérativité est de typiquement 50-100 pour notre expérience. A basse fréquence ($\omega \ll \gamma_p$) ce terme est donc très important. Nous allons voir, en effet, qu'il rend impossible une réduction de bruit, due au phénomène de "self-rotation" sur le mode vide A_y.

B.3.5 Spectres de bruit

Le champ entrant A_y^{in} étant un mode vide du champ, sa matrice de corrélations s'écrit simplement [Hilico92a]:

$$[V_y^{in}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-104}$$

A l'aide des expressions des matrices $[\chi(\omega)]$ et $[\sigma(\omega)]$ données dans l'appendice B, nous pouvons calculer la matrice de corrélation $[V_y^{out}]$ du champ sortant en utilisant

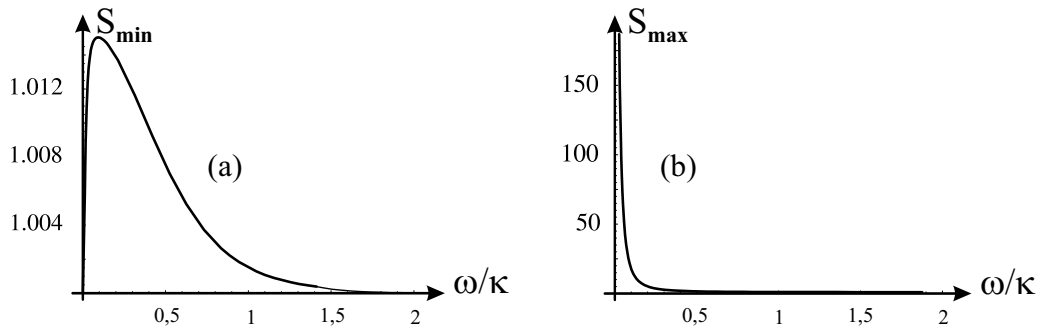


Fig. 4.4 – Spectres de bruit minimal (a) et maximal (b) pour le champ sortant A_y^{out} en ne considérant que les effets de pompage optique. Les paramètres correspondent à $\delta_0 = 5$, $\Delta = 40\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_x = 0.1$, $\delta_{cav} = 3$.

la relation 4-92. D'après la relation 4-71, les spectres de bruit minimal S_{min} et maximal S_{max} sont donnés par:

$$S_{min} = [V_y^{out}]_{1,1} + [V_y^{out}]_{2,2} - 2|[V_y^{out}]_{1,2}| \quad (4\text{-}105)$$

$$S_{max} = [V_y^{out}]_{1,1} + [V_y^{out}]_{2,2} + 2|[V_y^{out}]_{1,2}| \quad (4\text{-}106)$$

Ces spectres de bruit sont représentés sur la figure 4.4. Nous avons choisi dans ce cas $\kappa = 2\gamma$ ce qui correspond à nos paramètres expérimentaux ($\kappa \simeq 5\ MHz$ et $\gamma = 2.6\ MHz$). Notre configuration est effectivement proche de la limite de "mauvaise cavité" ($\kappa \gg \gamma$) qui est la plus favorable pour la réduction de bruit par effet Kerr [Reid88]. Le bruit minimal est juste au dessus de la limite quantique standard alors que le niveau de bruit maximal est très élevé. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent, le pompage optique est, en effet, un phénomène très bruyant.

Il est possible de calculer analytiquement le spectre de bruit de ce mode. Nous constatons alors qu'il n'est jamais possible d'obtenir une réduction de bruit sous la limite quantique standard et ce aussi bien dans la limite de bonne ou mauvaise cavité. Le processus non-linéaire de "self-rotation" considéré ici n'est donc pas utilisable pour produire des états comprimés, c'est même, en fait, une source d'excès de bruit très importante.

Néanmoins, l'excès de bruit dû au pompage optique n'est important que sur une largeur en fréquence de l'ordre γ_p. L'approximation des grands désaccords ($\Delta \gg \Omega, \gamma$) nous assure ici $\gamma_p \ll \gamma$. Ce bruit se manifeste donc uniquement pour des fréquences inférieures au taux de relaxation des dipôles γ.

Nous verrons dans la suite de cette partie que nous pouvons alors obtenir une réduction de bruit par effet Kerr pour des fréquences de bruit supérieures à γ. Il faut pour cela prendre compte les processus de saturation des transitions optiques. C'est l'objet de la suite de ce chapitre.

C Etat stationnaire complet

Il est possible de déterminer complètement l'état stationnaire du système sans faire l'approximation des grands désaccords. Dans ce cas, la saturation des transitions optiques a pour effet de modifier les courbes de résonance de la cavité. Celles-ci sont complexes puisqu'au phénomène de bascule de la polarisation s'ajoute maintenant celui de bistabilité optique.

Dans un premier temps, nous étudierons en détail ces résonances afin de déterminer quel peut être le point de fonctionnement le plus favorable à la génération d'états comprimés. L'exposé suit la même démarche que celle de la section précédente, qui servira de référence afin d'interpréter aisément les résultats.

Nous calculerons ensuite les spectres de bruit des deux modes x et y dans la limite des grands désaccord à l'ordre 1 en saturation. Nous comparons finalement ces résultats à ceux fournis par un calcul numérique exact des fluctuations.

C.1 Variables atomiques

Les équations d'évolution des variables atomiques (4-8 à 4-13) nous permettent de déterminer l'état stationnaire du système en fonction des valeurs des champs $\langle A_- \rangle$ et $\langle A_+ \rangle$:

$$\langle \sigma_{14} \rangle = \frac{-igN\langle A_+ \rangle}{\gamma + i\Delta} \frac{s_-}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S} \tag{4-107}$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = \frac{-igN\langle A_- \rangle}{\gamma + i\Delta} \frac{s_+}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S} \tag{4-108}$$

$$\langle \sigma_{11} \rangle = N \frac{s_-}{s_+ + s_-} \frac{1 + s_+/2}{1+S} \tag{4-109}$$

$$\langle \sigma_{22} \rangle = N \frac{s_+}{s_+ + s_-} \frac{1 + s_-/2}{1+S} \tag{4-110}$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{44} \rangle = \frac{N}{4} \frac{S}{1+S} \tag{4-111}$$

Les paramètres de saturation s_+ et s_- ont déjà été définis (relations 4-29) et l'on a introduit ici le paramètre de saturation couplé S:

$$S = \frac{2s_+s_-}{s_+ + s_-} \tag{4-112}$$

Le développement des expressions précédentes à l'ordre zéro en saturation conduit aux solutions simples correspondant à l'approximation de pompage optique, détaillées dans la section précédente.

Lorsque la polarisation est linéaire, on remarque que le paramètre S est égal à la saturation des composantes circulaires σ_+ et σ_-et donc à la moitié de la saturation

du champ moyen A_x:

$$S = s_+ = s_- = s_x/2 \tag{4-113}$$

Nous verrons par la suite le rôle essentiel joué par ce paramètre dans la résolution de ce problème complexe.

C.2 Bascule de polarisation

Les valeurs stationnaires des champs polarisés circulairement dépendent des valeurs stationnaires des dipôles $\langle\sigma_{14}\rangle$ et $\langle\sigma_{23}\rangle$. Leur contribution se décompose en un terme de déphasage $\Phi_\pm$ et un terme d'absorption en intensité $\mathcal{A}_\pm$:

$$ig\langle\sigma_{14}\rangle = (-\frac{\mathcal{A}_+}{2} + i\Phi_+)\langle A_+\rangle \quad \text{et} \quad ig\langle\sigma_{23}\rangle = (-\frac{\mathcal{A}_-}{2} + i\Phi_-)\langle A_-\rangle \tag{4-114}$$

$$\text{avec} \quad \Phi_\pm = 2\Phi_0 \frac{s_\mp}{s_+ + s_-}\frac{1}{1+S} \quad , \quad \mathcal{A}_\pm = 2\mathcal{A}_0 \frac{s_\mp}{s_+ + s_-}\frac{1}{1+S} \tag{4-115}$$

$$\text{et} \quad \Phi_0 = \frac{Ng^2\Delta}{2(\Delta^2+\gamma^2)} \quad , \quad \mathcal{A}_0 = \frac{Ng^2\gamma}{\Delta^2+\gamma^2} \tag{4-116}$$

Φ_0 et $\mathcal{A}_0$ sont le déphasage et l'absorption en intensité pour un faisceau polarisé linéairement, en l'absence de saturation. Réciproquement, les quantités $\Phi_\pm$ et $\mathcal{A}_\pm$ dépendent des intensités des champs A_+ et A_-.

Afin de déterminer les solutions, on suit la démarche de la section précédente. La première étape consiste à séparer les déphasages et les absorptions en deux contributions:

$$\Phi_\pm = \Phi_l \pm \Phi_{SR} \qquad \text{avec} \qquad \Phi_l = \frac{\Phi_0}{1+S} \ \text{ et } \ \Phi_{SR} = \Phi_l x_{SR} \tag{4-117}$$

$$\mathcal{A}_\pm = \mathcal{A}_l \pm \mathcal{A}_{SR} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{A}_0}{1+S} \ \text{ et } \ \mathcal{A}_{SR} = \mathcal{A}_l x_{SR} \tag{4-118}$$

Φ_l et $\mathcal{A}_l$ correspondent au cas où le système est symétrique tandis que Φ_{SR} et $\mathcal{A}_{SR}$ donnent la biréfringence et le dichroïsme circulaire. Ces derniers sont reliés à l'ellipticité du faisceau ϵ [Huard97]:

$$x_{SR} = \frac{s_- - s_+}{s_+ + s_-} = -\sin 2\epsilon \tag{4-119}$$

On retrouve dans le cas général l'effet de "rotation auto-induite" décrit dans le cadre de l'approximation de pompage optique. Les équations sont ici similaires sauf qu'il faut tenir compte de la saturation du milieu caractérisée par S, s_+ et s_-.

On poursuit la démarche précédente en cherchant l'équation satisfaite par x_{SR}. Pour ce faire, on exprime les paramètres de saturation des composantes circulaires

à partir des équations 4-22, 4-23 et 4-114. En normalisant les déphasages à la demi-largeur de la cavité $T/2$ et les absorptions aux pertes T ($\delta_j = 2\Phi_j/T$ et $\alpha_j = \mathcal{A}_j/T$), on obtient:

$$s_{\pm} = \frac{s_{max}}{(1+\alpha_l \pm \alpha_{SR})^2 + (\delta_l \pm \delta_{SR} - \delta_{cav})^2} \tag{4-120}$$

où $s_{max} = 2/T s_x^{in}$ correspond à l'intensité intracavité maximale, pour les composantes circulaires, en l'absence d'absorption. En reportant les solutions 4-120 dans la relation 4-119, nous obtenons l'équation désirée pour x_{SR}:

$$x_{SR} = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\alpha_l^2 + \delta_l^2) x_{SR}^2 = \delta_l^2 + \alpha_l^2 - \delta_{cav}^2 - 1 \tag{4-121}$$

Les solutions non nulles correspondent à un état stationnaire de polarisation elliptique. La seconde équation nous fournit un critère d'existence pour ces solutions:

$$\mathcal{C}_{ex}(s_+, s_-) = \frac{\delta_0^2 + \alpha_0^2}{(1+S)^2} - \delta_{cav}^2 - 1 \geq 0 \quad \text{avec } s_+ \neq s_- \quad \text{car} \quad x_{SR} \neq 0 \tag{4-122}$$

où nous avons utilisé les relations 4-117 et 4-118. Il est important de noter ici que ce critère est complexe puisque la fonction $\mathcal{C}_{ex}$ dépend des valeurs stationnaires de s_+ et s_-. Il est donc fondamentalement différent de celui dérivé en l'absence de saturation (voir équation 4-52).

Nous remarquons également que l'absorption favorise l'existence de solutions asymétriques. En effet le dichroïsme circulaire dépend de l'ellipticité du faisceau incident (voir équations 4-118 et 4-119). Ce phénomène a donc un effet similaire au processus de "self rotation" [Rochester01] décrit au paragraphe B.2.1 et il n'est pas surprenant qu'il participe favorablement à la bascule de polarisation.

Enfin, le critère 4-122 est uniquement associé à l'existence de solutions asymétriques et ne nous donne pas d'informations *a priori* sur la stabilité du système. Afin d'effectuer cette étude de stabilité, nous évaluons numériquement les valeurs propres de la matrice de stabilité atomes-champ du système.

C.3 Stabilité de la solution de polarisation linéaire

On peut toutefois obtenir des informations sur la stabilité de la polarisation linéaire en reprenant l'analyse faite au paragraphe B.2.3. L'étude des fluctuations classiques du mode orthogonal A_y nous a, en effet, permis d'interpréter la bascule de polarisation comme le seuil d'oscillation laser de ce mode. Nous reprenons ici cette étude dans le cas général afin de déterminer un critère de stabilité pour la solution linéaire.

On effectue à nouveau l'élimination adiabatique des variables atomiques dans l'équation d'évolution du mode y. A partir des équations 4-22, 4-23 4-114 et des relations de passage, 4-2 et 4-3, nous obtenons maintenant:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{dA_y}{dt} = -(1+i\delta_{cav})A_y + (i\delta_l - \alpha_l)A_y - (\delta_{SR} + i\alpha_{SR})A_x \tag{4-123}$$

Lorsque la polarisation est linéaire, A_y est un terme fluctuant que l'on remplace par δA_y. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en fluctuations et en utilisant le fait que $S = s_x/2$, nous obtenons une équation similaire à celle d'un OPO, comme nous l'avions déjà remarqué au paragraphe B.2.3:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_y = -(1 + i\delta_{cav})\delta A_y + (\frac{i\delta_0 - \alpha_0}{1 + s_x/2})\frac{A_x^2}{|A_x|^2}\delta A_y^* \tag{4-124}$$

On en déduit un seuil de bascule de la polarisation à partir de la solution polarisée linéairement. Le mode A_y oscille dès que le gain ($\propto \delta A_y^*$) est supérieur aux pertes, ce qui se traduit par:

$$\mathcal{C}'_{PS}(s_+ = s_- = s_x/2) = \frac{\delta_0^2 + \alpha_0^2}{(1 + s_x/2)^2} - \delta_{cav}^2 - 1 \geq 0 \tag{4-125}$$

Une étude de stabilité identique à celle menée au paragraphe B.2.3 montre que la solution symétrique, correspondant à une polarisation linéaire, n'est plus stable dès que $\mathcal{C}'_{PS} \geq 0$. Nous avions signalé alors les limites de cette analyse dues à l'élimination adiabatique des variables atomiques. Nous avons donc vérifié que notre étude était en accord avec le calcul numérique complet de la matrice de stabilité. C'est pourquoi nous utiliserons, par la suite, $\mathcal{C}'_{PS} \leq 0$ comme critère de stabilité de la solution symétrique.

Il est important de noter que ce critère de stabilité ($\mathcal{C}'_{PS} \leq 0$) ne coïncide pas avec le critère 4-122 ($\mathcal{C}_{ex} \geq 0$), associé à l'existence de solutions asymétriques. En effet, le paramètre de saturation couplé S, intervenant dans la fonction $\mathcal{C}_{ex}$, est différent de $s_x/2$ lorsque la solution est asymétrique ($s_+ \neq s_-$), ce qui implique $\mathcal{C}'_{PS} \neq \mathcal{C}_{ex}$. Nous allons maintenant détailler ce point en étudiant l'allure des courbes de résonance.

C.4 Courbes de résonance - tristabilité

Les phénomènes de saturation modifient les courbes de résonance de la cavité et nous n'avons pas trouvé de solutions analytiques pour s_+ et s_- en fonction du désaccord de la cavité δ_{cav}. Il est toutefois possible de tracer les résonances de la cavité. Pour cela, nous allons exprimer les fonctions s_+, s_- et δ_{cav} en fonction du paramètre de saturation couplé S.

A partir des relations 4-120, nous obtenons aisément:

$$S = \frac{2s_+s_-}{s_+ + s_-} = \frac{s_{max}}{(1 + \alpha_l)^2 + (\delta_l - \delta_{cav})^2 + \alpha_{SR}^2 + \delta_{SR}^2} \tag{4-126}$$

D'après l'équation 4-121, il existe toujours une solution symétrique correspondant à $x_{SR} = 0$. A cette solution est associée une valeur du paramètre S par l'intermédiaire de la relation 4-126, on la note $S^{(s)}$.

Lorsque le critère $\mathcal{C}_{ex} \geq 0$ est vérifié, il existe en outre une solution asymétrique caractérisée par $x_{SR} \neq 0$. A cette solution correspond une autre valeur de S que l'on notera $S^{(a)}$.

En combinant les équations 4-121 et 4-126, nous obtenons les expressions de ces deux valeurs, $S^{(s)}$ et $S^{(a)}$:

$$S^{(s)} = s_+^{(s)} = s_-^{(s)} = s_x^{(s)}/2 = \frac{s_{max}}{(1+\alpha_l^{(s)})^2 + (\delta_l^{(s)} - \delta_{cav})^2} \tag{4-127}$$

$$\text{avec} \quad \alpha_l^{(s)} = \frac{\alpha_0}{1 + s_x^{(s)}/2} \quad , \quad \delta_l^{(s)} = \frac{\delta_0}{1 + s_x^{(s)}/2} \tag{4-128}$$

$$\text{et} \quad S^{(a)} = \frac{s_{max}/2}{\alpha_l^{(a)}(1+\alpha_l^{(a)}) + \delta_l^{(a)}(\delta_l^{(a)} - \delta_{cav})} \quad \text{pour} \;\; \mathcal{C}_{ex} \geq 0 \tag{4-129}$$

$$\text{avec} \quad \alpha_l^{(a)} = \frac{\alpha_0}{1 + S^{(a)}} \quad , \quad \delta_l^{(a)} = \frac{\delta_0}{1 + S^{(a)}} \tag{4-130}$$

La première solution donne la valeur de l'intensité intracavité des composantes circulaires, $s_+^{(s)}$ et $s_-^{(s)}$, dans le cas où la polarisation est linéaire. On retrouve l'équation classique de bistabilité optique dont les solutions sont bien connues. La courbe de résonance de la solution symétrique ($S^{(s)} = s_+^{(s)} = s_-^{(s)} = s_x^{(s)}/2$) est tracée sur la figure 4.5 pour une intensité maximale intracavité donnée par $s_{max} = 2$. Cette résonance est déformée par rapport à un pic d'Airy à cause l'importante saturation de la transition. Au dessus d'un certain seuil de saturation, il existe des désaccords de la cavité δ_{cav} pour lesquels l'intensité intracavité peut prendre trois valeurs. Cette région est délimitée sur la figure par les points tournants HT et LT.

La seconde solution $S^{(a)}$ ne correspond pas directement à une solution de l'intensité intracavité. On peut néanmoins s'en servir pour paramétrer les courbes $s_+^{(a)}$ et $s_-^{(a)}$ qui sont les solutions dans le cas asymétrique ($s_+^{(a)} \neq s_-^{(a)}$). En effet les relations 4-129 et 4-130 permettent d'exprimer le déphasage de la cavité en fonction de $S^{(a)}$:

$$\delta_{cav} = \frac{1}{\delta_l^{(a)}}[\alpha_l^{(a)}(1+\alpha_l^{(a)}) + \delta_l^{(a)} - \frac{s_{max}}{2S^{(a)}}] = \delta_{cav}(S^{(a)}) \quad \text{pour } \mathcal{C}_{ex} \geq 0 \tag{4-131}$$

Cette valeur est reportée dans l'expression de x_{SR} (voir équation 4-121):

$$x_{SR}^{\pm} = \pm\sqrt{1 - \frac{\delta_{cav}^2(S^{(a)}) + 1}{(\alpha_l^{(a)})^2 + (\delta_l^{(a)})^2}} = x_{SR}^{\pm}(S^{(a)}) \;\; \text{pour } \mathcal{C}_{ex} \geq 0 \tag{4-132}$$

Le signe $\pm$ revient à inverser les solutions entre les composantes σ_+ et σ_-, et donc simplement échanger leur rôle. Jusqu'à présent, nous avons toujours choisi la polarisation σ_+ comme composante dominante après la bascule de la polarisation. Cela revient à prendre la solution x_{SR}^-. Dans ce cas, la biréfringence circulaire et le dichroïsme s'expriment comme:

$$\alpha_{SR}^- = x_{SR}^- \, \alpha_l^{(a)} = \alpha_{SR}^- \, (S^{(a)}) \tag{4-133}$$

$$\delta_{SR}^- = x_{SR}^- \, \delta_l^{(a)} = \delta_{SR}^- \, (S^{(a)}) \tag{4-134}$$

Nous obtenons finalement les expressions des intensités lorsque la polarisation a basculé en revenant aux relations 4-120:

$$s_+^{(a)} = \frac{s_{max}}{(1+\alpha_l+\alpha_{SR}^-)^2+(\delta_l+\delta_{SR}^- -\delta_{cav})^2} = s_+^{(a)}\,(S^{(a)}) \qquad (4\text{-}135)$$

$$s_-^{(a)} = \frac{s_{max}}{(1+\alpha_l-\alpha_{SR}^-)^2+(\delta_l-\delta_{SR}^- -\delta_{cav})^2} = s_-^{(a)}\,(S^{(a)}) \qquad (4\text{-}136)$$

Nous pouvons alors tracer ces solutions $s_+^{(a)}$ et $s_-^{(a)}$ en fonction du désaccord $\delta_{cav}(S^{(a)})$, les courbes étant paramétrées par $S^{(a)}$. Nous retrouvons alors l'allure générale des courbes de résonance sur la figure 4.5. Celles-ci sont déformées, par rapport aux courbes présentées sur la figure 4.2, du fait de la saturation du milieu.

L'effet de l'absorption sur ces courbes est clair: la hauteur du pic de résonance de la solution symétrique diminue, ce qui n'est pas le cas pour la composante dominante σ_+. En effet, cette composante n'interagit plus avec les atomes à cause des processus de pompage optique.

Afin de clarifier leur rôle, les fonctions $\mathcal{C}_{ex}(s_+^{(a)}, s_-^{(a)})$ et $\mathcal{C}'_{PS}(s_+^{(s)} = s_-^{(s)})$ sont également tracées sur la figure 4.5. Lorsque la première fonction $\mathcal{C}_{ex}$ est positive, il existe des solutions asymétriques qui correspondent à des déphasages compris entre δ_{min} et δ_{ex}. En revanche, la stabilité de la solution symétrique est donnée par le signe de $\mathcal{C}'_{PS}$ et le seuil de bascule de polarisation ($\mathcal{C}'_{PS}=0$) est atteint pour le déphasage $\delta_{cav}=\delta_{PS}$.

Dans le domaine de désaccord défini par $\delta_{PS} \leq \delta_{cav} \leq \delta_{ex}$, il existe donc une solution symétrique stable et quatre solutions asymétriques (on peut échanger les valeurs de s_+ et s_-). Les solutions asymétriques admettent en effet deux valeurs possibles pour le même désaccord (voir figure 4.5). Ce phénomène est analogue à la bistabilité sur la solution symétrique, on s'attend donc à ce que seule la branche basse de ces solutions soit stable (courbes en trait plein). Nous avons vérifié cette hypothèse en calculant numériquement les valeurs propres de la matrice de stabilité atomes-champs.

Ce domaine correspond donc à une zone de tristabilité pour la polarisation: linéaire, dominante σ_+ et dominante σ_-. Il apparaît alors un cycle d'hystéresis sur la courbe de résonance de la cavité. Lorsqu'on balaie le désaccord de droite à gauche, la polarisation bascule de linéaire à circulaire pour $\delta_{cav}=\delta_{PS}$. Si on revient en arrière, la polarisation redevient linéaire pour le déphasage $\delta_{cav}=\delta_{ex}$ (voir figure 4.5).

C.5 Bistabilité optique et bascule de polarisation

La résonance de la cavité présentée sur la figure 4.5 conduit à deux observations. Premièrement il est difficile de dissocier le seuil de bascule de polarisation (PS) du point tournant (HT) de la branche haute de la courbe. Deuxièmement la branche basse de la solution symétrique n'est pas stable (à gauche du point LT).

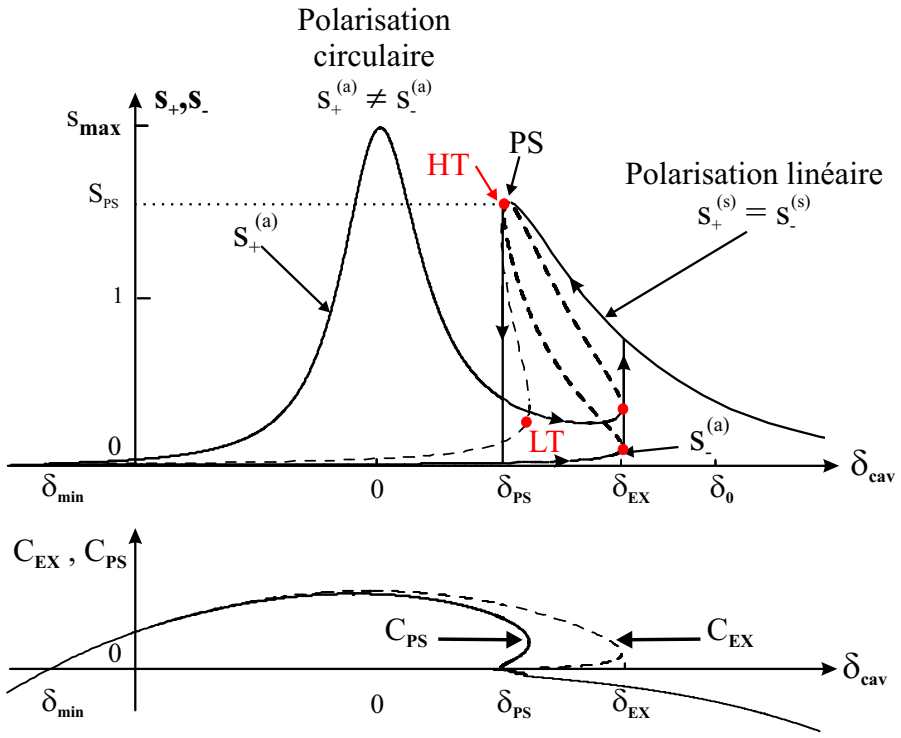


Fig. 4.5 – Figure (a): courbes de résonance pour les composantes circulaires σ_+ et σ_- lorsque la saturation est importante. Les paramètres correspondent à $\delta_0 = 7$, $\Delta = 20\gamma$ et $s_{max} = 2$. L'absorption linéaire vaut dans ce cas $\alpha_0 = 0.35$. Les courbes en pointillé correspondent aux solutions instables. La bascule de la polarisation de linéaire en circulaire correspond à $\delta_{cav} = \delta_{PS}$. La fonction $\mathcal{C}_{ex}$ est positive pour $\delta_{min} \simeq -\delta_0 \leq \delta_{cav} \leq \delta_{ex}$, ce qui correspond au domaine d'existence de solutions asymétriques. La zone de tristabilité est donnée par $\delta_{PS} \leq \delta_{cav} \leq \delta_{ex}$. Les flèches correspondent au sens de balayage de la cavité lorsqu'on parcourt le cycle d'hystéresis. Figure (b): évolutions des fonctions $\mathcal{C}_{ex}$ (courbe en tiret) et $\mathcal{C}'_{PS}$ (trait plein). Comme nous l'avons fait remarquer dans le texte, ces fonctions ne sont pas identiques.

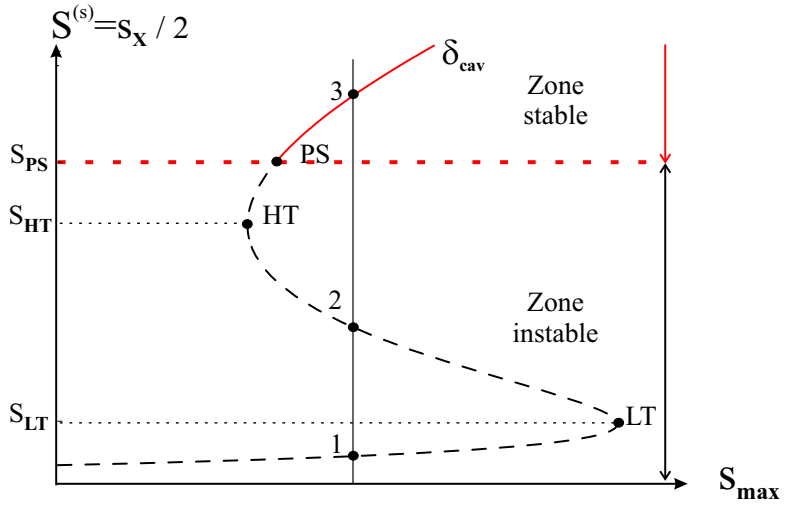


Fig. 4.6 – Courbe de bistabilité pour la solution de polarisation linéaire: intensité intracavité $S = s_x/2$ en fonction de s_{max}. PS est le point correspondant à la bascule de la polarisation, HT et LT sont les points tournants haut et bas. Pour certaines intensités incidentes s_{max}, il existe 3 solutions (1,2,3) pour l'intensité intracavité $s_x/2$. Seule la solution (3) est stable. En revanche, on aurait deux solutions stables, (1) et (3), en l'absence de bascule de polarisation.

Comment évolue la stabilité des points tournants LT et HT vis à vis de la bascule de polarisation lorsqu'on se déplace dans l'espace des paramètres? En particulier, est-il possible de trouver un domaine pour lequel le point LT soit stable? Comme on s'attend à ce que les meilleures réductions de bruit par effet Kerr soient obtenues au voisinage des points tournants [Reynaud89, Hilico92a], la réponse à ces questions est cruciale pour caractériser la capacité de notre système à produire des états comprimés.

Ce problème se pose de façon simple sur la figure 4.6, où l'on a tracé l'allure générale de l'intensité intracavité $S = s_x/2$ en fonction de l'intensité maximale $s_{max} = 2s_x^{in}/T$, pour un désaccord de la cavité fixe. Nous avons choisi ici des paramètres pour δ_0 et δ_{cav} de façon à ce qu'il existe une zone où S peut prendre trois valeurs (1, 2 et 3). Nous avons reporté la position des points tournants HT et LT. En l'absence de phénomène de bascule de polarisation, la solution (2) est toujours instable et les solutions sur les branches basses (1) et hautes (3) sont stables. Il faut tenir compte ici d'une source d'instabilité supplémentaire due à la bascule de polarisation.

La stabilité des solutions vis à vis de cette bascule nous est donnée par le signe de $\mathcal{C}'_{PS}(S)$. Pour le désaccord δ_{cav}, cette fonction s'annule pour l'intensité $S_{PS}(\delta_{cav})$, calculée à partir de l'équation 4-125:

$$S_{PS}\,(\delta_{cav}) = \sqrt{\frac{\delta_0^2 + \alpha_0^2}{\delta_{cav}^2 + 1}} - 1 \qquad (4\text{-}137)$$

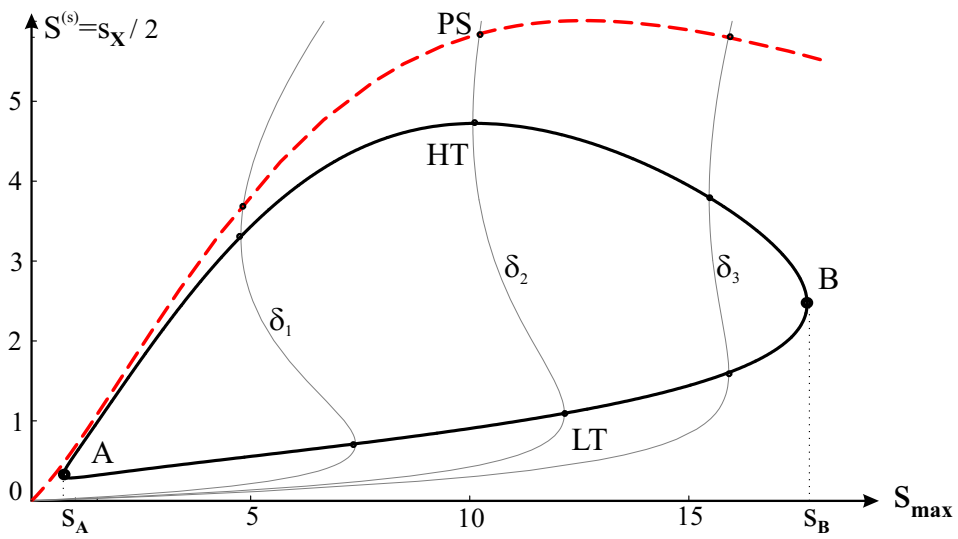


Fig. 4.7 – Lieu des points PS (trait pointillé) par rapport aux points tournants HT et LT (trait gras). Les courbes de bistabilité (trait fin) représentées correspondent aux déphasages $(\delta_{cav})_1 = -0.25$, $(\delta_{cav})_2 = 0.3$ *et* $(\delta_{cav})_3 = 1.1$. *Les valeurs de* δ_0 *et* Δ *sont les mêmes que sur la figure 4.6. Les branches haute et basse de la courbe AB donnent le lieu des points HT et LT respectivement. Le phénomène de bistabilité apparaît pour les intensités incidentes telles que* $s_A \leq s_{max} \leq s_B$.

Si $S(\delta_{cav}, s_{max}) = s_x/2 \leq S_{PS}$ alors $\mathcal{C}_{PS}(S) \geq 0$ et la polarisation linéaire est instable. En revanche si $S \geq S_{PS}$ alors la solution linéaire est stable. Cette valeur sépare donc en deux le graphique de la figure 4.6. Si $S_{PS}(\delta_{cav}) \geq S_{HT}(\delta_{cav})$, alors le point HT et par conséquent toute la branche basse sont instables.

Afin de pouvoir décider de la stabilité des solutions, nous avons tracé sur la figure 4.7 les positions relatives des points $S_{PS}(\delta_{cav})$, $S_{HT}(\delta_{cav})$ et $S_{LT}(\delta_{cav})$ lorsque le désaccord varie. Pour illustrer ces positions, nous avons également représenté trois courbes de bistabilité semblables à celles de la figure 4.6 pour des désaccords δ_{cav} différents. L'ensemble des points tournants HT et LT constitue les branches haute et basse de la courbe AB respectivement. La courbe en pointillé donne la position des points S_{PS} à partir desquels la polarisation bascule. Celle-ci est toujours au dessus de la courbe HT, et donc les points tournants ne sont jamais stables. Nous avons vérifié que cette conclusion restait vraie quels que soient les valeurs des paramètresδ_0 et Δ.

Cette analyse répond ainsi aux questions posées au début de ce paragraphe: lorsque la polarisation est linéaire et qu'on se déplace sur la courbe de résonance, alors la polarisation bascule avant que l'on atteigne le point HT. En outre le point tournant bas LT n'est jamais stable.

Ces résultats montrent que les processus de pompage optique constituent un réel problème pour ce type d'expérience: ils sont en effet responsables d'un important excès de bruit à basse fréquence (voir paragraphe B.3.4) et provoquent, en outre, la

bascule de la polarisation qui nous empêche de nous placer au point de fonctionnement le plus favorable, i.e. le point tournant bas [Hilico92a].

Toutefois, il est possible de se placer au voisinage du point tournant haut HT. En effet, nous voyons sur la figure 4.7 que pour de faibles puissances incidentes, les points S_{PS} et S_{HT} sont très proches. On retrouve ainsi l'observation faite sur la courbe de résonance correspond à $s_{max} = 2$ (voir figure 4.5). Le point tournant HT étant un point favorable à la réduction de bruit par effet Kerr, nous nous attendons à ce que les meilleures réduction de bruit soient obtenues au sommet de la courbe de résonance. Nous avons effectivement constaté cette propriété expérimentalement (voir section C du chapitre 2).

Pour conclure cette étude, nous remarquons sur la figure 4.7 que la bistabilité disparaît lorsque la puissance incidente est trop importante: $s_{max} \geq s_B$. De même, la polarisation ne bascule plus si on augmente encore la saturation. Cette situation n'est pas visible sur la figure 4.7 car il faut atteindre une saturation de l'ordre de 40.

D Fluctuations quantiques dans la limite Kerr

Nous allons maintenant étudier les fluctuations des deux modes x et y dans le domaine où la polarisation linéaire est stable. Afin de pouvoir interpréter aisément les équations, nous nous placerons à nouveau dans la limite de grand désaccord et ne garderons que les termes du premier ordre en saturation. Ceci revient à effectuer un développement au troisième ordre en $1/\Delta$. Dans la suite nous supposerons que l'intensité est suffisante pour que la fréquence de Rabi ($\Omega_\pm = 2g|\langle A_\pm \rangle|$) soit également très supérieure au taux de relaxation des dipôles γ:

$$\Delta \gg \Omega_\pm \gg \gamma \tag{4-138}$$

Dans cette limite, le milieu se comporte comme un milieu Kerr idéal [Hilico92a], en l'absence, bien sûr, du phénomène de bascule de polarisation.

D.1 Evolution des champs

Nous ne considérerons dans ce paragraphe que la contribution due aux atomes. En outre, nous n'écrirons pas les forces de Langevin afin d'alléger les expressions. Afin d'estimer le bruit dû aux atomes, nous tiendrons compte au final de la matrice de corrélations $[\sigma]$ (voir paragraphe B.3.3) dont l'expression est donnée dans l'appendice B.

A partir des équations 4-22 et 4-23 et de la relation de passage dans la base des

états polarisés linéairement 4-2, on écrit les termes de fluctuations dus aux atomes:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_{x|_{at}} = -i\frac{\sqrt{2}g}{T}\,(\delta\sigma_{14}-\delta\sigma_{23}) \tag{4-139}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_{y|_{at}} = \frac{\sqrt{2}g}{T}\,(\delta\sigma_{14}+\delta\sigma_{23}) \tag{4-140}$$

Les expressions des fluctuations des dipôles $\delta\sigma_{14}$ et $\delta\sigma_{23}$ sont obtenues en linéarisant les équations 4-8 et 4-9. Après avoir effectué leur transformée de Fourier, nous obtenons aisément:

$$\delta\sigma_{14}(\omega) = \frac{-ig}{\gamma+i\Delta-i\omega}\,(\langle A_+\rangle(\delta\sigma_{11}-\delta\sigma_{44})+\delta A_+(\omega)\langle\sigma_{11}-\sigma_{44}\rangle) \tag{4-141}$$

$$\delta\sigma_{23}(\omega) = \frac{-ig}{\gamma+i\Delta-i\omega}\,(\langle A_-\rangle(\delta\sigma_{22}-\delta\sigma_{33})+\delta A_-(\omega)\langle\sigma_{22}-\sigma_{33}\rangle) \tag{4-142}$$

Comme la polarisation est linéaire, la relation de passage4-2 impose $\langle A_-\rangle = -\langle A_+\rangle = \langle A_x\rangle/\sqrt{2}$. Au premier ordre en saturation, les valeurs stationnaires s'écrivent dans ce cas:

$$\langle\sigma_{11}-\sigma_{44}\rangle = \langle\sigma_{22}-\sigma_{33}\rangle \simeq \frac{N}{2}(1-\frac{s_x}{2}) \tag{4-143}$$

De plus nous utiliserons le développement au troisième ordre en $1/\Delta$:

$$\frac{1}{\gamma+i\Delta-i\omega} \simeq \frac{1}{i\Delta}(1+i\frac{\gamma-i\omega}{\Delta}-(\frac{\gamma-i\omega}{\Delta})^2) \tag{4-144}$$

En fait, la contribution du dernier terme (en $1/\Delta^3$) de l'expression précédente aux équations d'évolution des champs sera toujours négligeable. En effet, nous avons supposé que la fréquence de Rabi est très grande devant γ. Nous l'éliminerons donc par la suite. Les équations d'évolution des champs, obtenues à partir des relations 4-139 à 4-144, s'écrivent finalement comme:

$$\begin{aligned}-i\frac{\omega}{\kappa}\delta A_x(\omega)_{|_{at}} = {} & i\delta_0(1+i\frac{\gamma-i\omega}{\Delta})\,\{\,(1-\frac{s_x}{2})\delta A_x(\omega)\\ & +\frac{\langle A_x\rangle}{N}[(\delta\sigma_{22}+\delta\sigma_{11})-(\delta\sigma_{33}+\delta\sigma_{44})]\,\}\end{aligned} \tag{4-145}$$

$$\begin{aligned}-i\frac{\omega}{\kappa}\delta A_y(\omega)_{|_{at}} = {} & i\delta_0(1+i\frac{\gamma-i\omega}{\Delta})\,\{\,(1-\frac{s_x}{2})\delta A_y(\omega)\\ & -i\frac{\langle A_x\rangle}{N}[(\delta\sigma_{22}-\delta\sigma_{11})-(\delta\sigma_{33}-\delta\sigma_{44})]\,\}\end{aligned} \tag{4-146}$$

Si on ne considère pas les phénomènes de saturation, les populations vérifient $\delta\sigma_{22}+\delta\sigma_{11}=0$ et $\delta\sigma_{22}-\delta\sigma_{11}=2\delta J_z$. On retrouve alors les équations dérivées dans le cas de l'approximation de pompage optique (voir équations4-76 et 4-77).

D.2 Fluctuations des populations excitées

Le mode vide orthogonal est sensible aux fluctuations de la différence des populations entre les deux transitions $1 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$: $(\delta\sigma_{22} - \delta\sigma_{11}) - (\delta\sigma_{33} - \delta\sigma_{44})$. La biréfringence induite par ces fluctuations de l'orientation du milieux provoque la rotation de l'axe de polarisation. Leur projection sur le mode vide orthogonal modifie alors les fluctuations de ce mode.

Par contre le champ moyen n'est sensible qu'aux fluctuations de la population totale des états excités. En effet la projection des fluctuations de polarisation sur ce mode est négligeable.

Ces fluctuations des populations dépendent en retour des fluctuations des champs dans la cavité. Pour déterminer cette réponse, on linéarise les équations d'évolution 4-12 et 4-13 autour des valeurs moyennes et on effectue leur transformée de Fourier. En effectuant le développement au troisième ordre en $1/\Delta$, on obtient, à l'aide des équations 4-141 et 4-142:

$$\delta\sigma_{33}(\omega) = \frac{\gamma - i\omega}{2\gamma - i\omega}\frac{s_x}{2}\,\delta\sigma_{22}(\omega) + \frac{Ng^2}{2\sqrt{2}\Delta^2}\,(\langle A_x\rangle^*\delta A_- + \langle A_x\rangle\delta A_-^\dagger) \qquad (4\text{-}147)$$

$$\delta\sigma_{44}(\omega) = \frac{\gamma - i\omega}{2\gamma - i\omega}\frac{s_x}{2}\,\delta\sigma_{11}(\omega) - \frac{Ng^2}{2\sqrt{2}\Delta^2}\,(\langle A_x\rangle^*\delta A_+ + \langle A_x\rangle\delta A_+^\dagger) \qquad (4\text{-}148)$$

Le terme intervenant dans les fluctuations du champ moyen vaut $(\delta\sigma_{22}+\delta\sigma_{11}) - (\delta\sigma_{33}+\delta\sigma_{44})$. On le calcule à partir des équations précédentes en utilisant la propriété de conservation du nombre d'atomes qui s'exprime par:

$$(\delta\sigma_{22}+\delta\sigma_{11}+\delta\sigma_{33}+\delta\sigma_{44})(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad (\delta\sigma_{33}+\delta\sigma_{44})(\omega) = -(\delta\sigma_{22}+\delta\sigma_{11})(\omega) \quad (4\text{-}149)$$

Le résultat final donne:

$$(\delta\sigma_{33} + \delta\sigma_{44})(\omega) = \frac{Ng^2}{2\Delta^2}(\langle A_x\rangle^*\delta A_x(\omega) + \langle A_x\rangle\delta A_x^\dagger(\omega)) = \frac{N}{4}\delta s_x(\omega) \qquad (4\text{-}150)$$

On obtient ainsi une propriété fondamentale: les fluctuations des populations excitées suivent les fluctuations du champ sur tout le domaine de fréquence. Connaissant cette propriété le résultat présenté ci-dessus se retrouve immédiatement. Les valeurs stationnaires de ces populations valent, en effet, $\langle\sigma_{33}+\sigma_{44}\rangle = Ns_x/4$. En linéarisant directement cette solution, nous obtenons bien:

$$(\delta\sigma_{33} + \delta\sigma_{44})(\omega) = \frac{N}{4}\delta s_x(\omega) \qquad (4\text{-}151)$$

Toutefois, cette propriété n'est vraie que pour la somme des populations et pour un développement au troisième ordre en γ/Δ.

Pour la différence des populations, les processus de pompage optique jouent un rôle important. Ceux-ci ont un temps de réponse de l'ordre de $1/\gamma_p$. A basse

fréquence, les fluctuations de cette différence de population ne suivent plus les fluctuations du champ. Ce temps de réponse important du milieu donne lieu à un excès de bruit sur une largeur de l'ordre de γ_p. Ces effets se ressentent sur le bruit du mode vide. En effet, cette différence de populations intervient dans son équation d'évolution par l'intermédiaire de la quantité $(\delta\sigma_{22} - \delta\sigma_{11}) - (\delta\sigma_{33} - \delta\sigma_{44})$. A partir des équations 4-147 et 4-148, celle-ci s'écrit:

$$(\delta\sigma_{44} - \delta\sigma_{33})(\omega) = -\frac{2(\gamma - i\omega)}{2\gamma - i\omega}\frac{s_x}{2}\,\delta J_z(\omega) + \frac{N s_x}{4}\frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x\rangle|^2} \qquad (4\text{-}152)$$

où J_z et S_3 sont l'orientation du milieu et le paramètre de Stokes défini dans l'introduction.

Les équations 4-150 et 4-152 vont nous permettre d'étudier maintenant les fluctuations des champs A_x et A_y respectivement.

D.3 Effet Kerr sur le champ moyen

On utilise la relation 4-150 pour déterminer l'équation d'évolution du champ moyen 4-145. En tenant compte des termes d'évolution du champ dans la cavité, nous obtenons:

$$\begin{aligned} -i\frac{\omega}{\kappa}\delta A_x(\omega) &= -(1 + i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_x(\omega) \\ &\quad -i\delta_0\frac{s_x}{2}\left[2\delta A_x(\omega) + \frac{\langle A_x\rangle^2}{|\langle A_x\rangle|^2}\delta A_x^\dagger(\omega)\right] + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_x^{in}(\omega) \qquad (4\text{-}153) \end{aligned}$$

Le terme provenant de l'effet Kerr ($\propto \langle A_x\rangle^2\delta A_x^\dagger$) est responsable de la réduction de bruit à la sortie de la cavité. Nous n'avons pas inclus dans cette équation les termes correspondant à l'absorption, la dispersion et la force de Langevin associée. A partir de cette équation on peut calculer le spectre de bruit du champ sortant suivant la méthode détaillée au paragraphe B.3.3. La matrice de susceptibilité s'écrit sous la forme:

$$[\chi(\omega)]_x \;=\; [\chi(\omega)]_0 \;+\; [\chi(\omega)]_{Kerr} \qquad (4\text{-}154)$$

Les expressions de ces matrices, ainsi que la matrice $[\sigma(\omega)]_{Kerr}$ donnant la contribution du bruit dû aux atomes, sont données dans l'appendice B. L'étude de ces spectres de bruit et en particulier de la réduction de bruit a donné lieu à de nombreuses publications [Lugiato82, Reid88, Hilico92a] et les résultats sont bien connus. Nous ne détaillerons donc pas plus ici ces propriétés pour nous consacrer maintenant à l'étude des fluctuations du mode vide orthogonal y.

D.4 Fluctuations du mode vide

Pour le mode vide, la situation est plus complexe compte tenu des effets de pompage optique. Nous avons vu au paragraphe B.3.5 que ce mode est affecté par

un excès de bruit important à basse fréquence. Nous allons maintenant obtenir une équation valable dans tout le domaine de fréquence.

A partir des relations 4-146 et 4-152, l'équation d'évolution du mode A_y s'écrit:

$$\begin{aligned} -i(\omega/\kappa)\delta A_y &= -(1+i\delta_{cav}-i\delta_0)\delta A_y - i\delta_0\frac{s_x}{4}\left[3\delta A_y - \frac{\langle A_x\rangle^2}{|\langle A_x\rangle|^2}\delta A_y^\dagger\right] \\ &\quad +\beta(\omega)\frac{2\delta_0}{N}\langle A_x\rangle\ \delta J_z(\omega) + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_y^{in} + F_{A_y} \end{aligned} \tag{4-155}$$

où l'on a introduit la fonction $\beta(\omega)$:

$$\beta(\omega) = 1 - \frac{s_x}{4\lambda(\omega)} \quad \text{avec} \quad \lambda(\omega) = \frac{2\gamma - i\omega}{2(\gamma - i\omega)} \tag{4-156}$$

Il apparaît un terme d'effet Kerr croisé ($\propto \langle A_x\rangle^2\delta A_y^\dagger$) provenant de la saturation de la transition. Celui-ci contribue à l'obtention d'un état comprimé. On retrouve également la contribution des fluctuations de J_z comme c'était le cas dans la partie concernant l'approximation du pompage optique. Pour calculer les spectres de bruit du mode y, il nous faut donc déterminer l'équation d'évolution de l'orientation J_z.

Celle-ci s'obtient en linéarisant les équations 4-10 et 4-11 correspondant aux populations fondamentales. En utilisant les résultats obtenus pour les fluctuations des états excités (formules 4-147 et 4-148) et après quelques calculs, nous obtenons finalement:

$$-i\omega\delta J_z(\omega) = -\gamma_p\alpha(\omega)\left[\delta J_z - \lambda(\omega)\left(1-\frac{s_x}{2}\right)\frac{N}{2}\frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x\rangle|^2}\right] + F_z \tag{4-157}$$

avec

$$\alpha(\omega) = \left[1 - \frac{i\omega}{4\gamma_\perp}\right]\frac{\beta(\omega)}{\lambda(\omega)} \tag{4-158}$$

les fonctions $\beta(\omega)$ et $\lambda(\omega)$ étant définies par les relations 4-156.

Ces équations sont d'apparences complexes, néanmoins nous allons voir que les cas limites de haute et basse fréquence de bruit conduisent à des interprétations très simples.

D.5 Cas Limites

D.5.1 Limite basse fréquence de bruit

On se place dans le domaine des basses fréquences telles que$\omega \ll \gamma$. Dans ce cas les fonctions α, β et λ tendent vers les limites:

$$\alpha(\omega) \to 1 - \frac{s_x}{4} \ , \ \beta(\omega) \to 1 - \frac{s_x}{4} \ , \ \lambda(\omega) \to 1 \tag{4-159}$$

Négliger ω devant γ dans les équations donnant les populations excitées 4-147 et 4-148 revient à effectuer leur élimination adiabatique. On retrouve donc naturellement les équations établies dans le cadre de l'approximation du pompage optique (voir équations 4-81 et 4-83). On est donc ramené à l'étude réalisée au paragraphe B.3.2.

Toutefois les équations obtenues ci-dessus tiennent compte maintenant des effets de saturation à l'ordre 1. Or nous avons vu dans la section précédente que les fluctuations sont dominées par les effets de pompage optique à l'ordre 1 en $1/\Delta$. En particulier, l'excès de bruit est très important (cf § B.3.4) et les effets de saturation des transitions optiques sont négligeables dans ce domaine de fréquence.

On calcule donc le bruit à l'aide des matrices $[\chi(\omega)]_{SR}$ et $[\sigma(\omega)]_{SR}$ utilisées dans la section précédente et qui sont données dans l'appendice B. Leurs éléments de matrices sont pondérés par des fonctions dont la largeur en fréquence est de l'ordre de γ_p et tendent rapidement vers 0 quand $\omega \gg \gamma_p$. Les effets de pompage optique sont alors négligeables à haute fréquence.

D.5.2 Limite haute fréquence

On suppose maintenant que les fréquences de bruit sont grandes devant le taux de relaxation γ. Les limites des fonctions α, β et λ valent dans ce cas:

$$\alpha(\omega) \to \frac{-i\omega}{2\gamma_\perp}(1-\frac{s_x}{2}) \quad , \quad \beta(\omega) \to 1-\frac{s_x}{2} \quad , \quad \lambda(\omega) \to \frac{1}{2} \tag{4-160}$$

Ce qui donne pour J_z:

$$\delta J_z(\omega) = \frac{N}{2}\frac{s_x}{4}\frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x\rangle|^2} \tag{4-161}$$

Ce résultat n'est pas surprenant. Lorsque l'on étudie le bruit à haute fréquence ($\omega \gg \gamma, \gamma_p$), on s'intéresse, en effet, à des processus dont les échelles de temps sont très inférieures au temps de relaxation atomique. Or ce sont ces relaxations qui introduisent un couplage entre les deux transitions $1 \to 4$ et $2 \to 3$. On peut alors considérer que le système se comporte comme si ces deux transitions étaient symétriques et indépendantes, chacune contenant $N/2$ atomes (voir figure 4.8). En supposant que ce soit effectivement le cas, les fluctuations des populations se séparent suivant:

$$\delta\sigma_{11} + \delta\sigma_{44} = 0 \quad \text{et} \quad \delta\sigma_{22} + \delta\sigma_{33} = 0 \tag{4-162}$$

Nous avons vu au paragraphe D.2 que les populations des états excités suivent les fluctuations des champs sur toute la gamme de fréquence (voir en particulier l'équation 4-150). En appliquant ce résultat pour des transitions à deux niveaux, on peut obtenir directement les fluctuations des populations à partir des valeurs

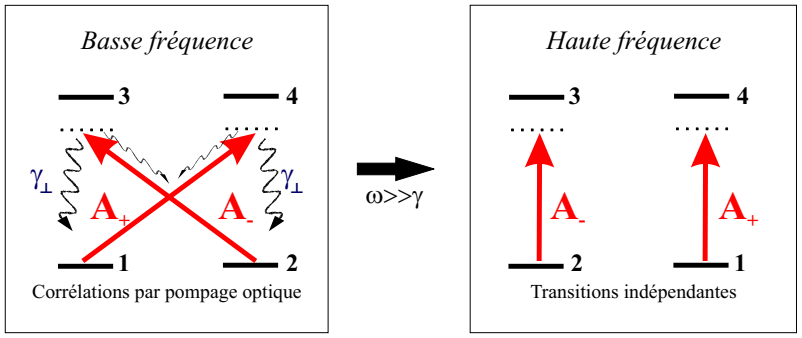


Fig. 4.8 – Comportement de la transition en "X" à haute fréquence. Pour des fréquences de bruit telles que $\omega \gg \gamma$, on s'interesse à des échelles de temps petites devant le temps de couplage des deux transitions $1 \to 4$ et $2 \to 3$ par émission spontanée (a). On peut alors considéré que le milieu se comporte comme s'il était constitué de deux transitions indépendantes $1 \to 4$ et $2 \to 3$ (b). Afin d'insister sur ce comportement effectif de ces deux transitions, nous les avons séparées spatialement sur la figure (b).

stationnaires ($\langle \sigma_{33} \rangle = N s_-/4$ et $\langle \sigma_{44} \rangle = N s_+/4$):

$$\delta\sigma_{44}(\omega) = -\delta\sigma_{11}(\omega) = \frac{N}{4}\delta s_+ \quad \text{et} \quad \delta\sigma_{33}(\omega) = -\delta\sigma_{22}(\omega) = \frac{N}{4}\delta s_- \tag{4-163}$$

On retrouve ainsi directement les fluctuations de J_z (relation 4-161):

$$\delta J_z(\omega) = \frac{\delta\sigma_{22} - \delta\sigma_{11}}{2} = \frac{N}{8}(\delta s_+ - \delta s_-) = \frac{N}{8}\frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x \rangle|^2} \tag{4-164}$$

Ce raisonnement simple est, en fait, complètement justifié. En effet, le résultat 4-161 permet de démontrer rigoureusement les relations 4-162 et 4-163.

Revenons maintenant à l'étude des fluctuations de J_z. Les termes dus au pompage optique ont disparu dans ce domaine de fréquence car $\omega \gg \gamma_p$. Les fluctuations de J_z sont donc uniquement dues à la saturation de la transition optique et contribuent à l'effet Kerr croisé (terme $\propto \langle A_x \rangle^2 \delta A_y^\dagger$) dans l'équation d'évolution de δA_y 4-155 par l'intermédiaire de:

$$\langle A_x \rangle \delta J_z(\omega) = \frac{N s_x}{8}\langle A_x \rangle \frac{\delta S_3(\omega)}{|\langle A_x \rangle|^2} = i\frac{N s_x}{8}\left(\frac{\langle A_x \rangle^2}{|\langle A_x \rangle|^2}\delta A_y^\dagger(\omega) - \delta A_y(\omega)\right) \tag{4-165}$$

L'équation des fluctuations pour le mode vide, obtenue avec cette valeur de J_z, est finalement semblable à celle du champ moyen A_x (voir équation 4-153):

$$\begin{aligned} -i(\omega/\kappa)\delta A_y(\omega) \;=\; & -(1 + i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_y(\omega) \\ & -i\delta_0 \frac{s_x}{2}\left[2\delta A_y(\omega) - \frac{\langle A_x \rangle^2}{|\langle A_x \rangle|^2}\delta A_y^\dagger(\omega)\right] \\ & + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_y^{in}(\omega) + F_{A_y}(\omega) \end{aligned} \tag{4-166}$$

La force de Langevin F_{A_y} tient compte du bruit atomique. Comme l'excès de bruit dû au pompage optique disparaît à haute fréquence, il ne reste plus que les effets dus à l'absorption. Nous en tiendrons compte par l'intermédiaire de la matrice $[\sigma(\omega)]_{abs}$ (voir appendice B).

La réduction de bruit sur les deux modes x et y est donc identique dans ce domaine de fréquence. Plus précisément les fluctuations de quadrature d'un mode correspondent aux fluctuations de la quadrature orthogonale pour l'autre mode. Ceci est dû à la différence de signe pour les termes non linéaires ($\propto \delta A_y^\dagger$) dans les équations 4-153 et 4-166. On peut donner une interprétation simple en étudiant les propriétés de bruit des composantes circulaires, ce qui constitue l'objet du paragraphe suivant.

D.6 Fluctuations des composantes circulaires à haute fréquence

Nous pouvons déterminer les équations d'évolution des modes circulaires à partir de la relation de passage 4-2 et des équations donnant les fluctuations du champ moyen 4-153 et du mode vide 4-166.

Néanmoins, nous voulons insister ici sur le fait que ces équations s'obtiennent très simplement dans la limite des hautes fréquences de bruit ($\omega \gg \gamma$). Considérons, par exemple, le mode σ_+. La modification de ses fluctuations dans la cavité est liée aux fluctuations du dipôle $\delta\sigma_{14}$:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt}\delta A_{+|at} \;=\; +ig\;\delta\sigma_{14} \tag{4-167}$$

La relation 4-141 montre que les fluctuations de ce dipôle dépendent de celles des populations selon le terme $\delta\sigma_{11} - \delta\sigma_{44}$. Celles-ci se calculent immédiatement en utilisant la propriété fondamentale valable à haute fréquence: la transition à quatre niveaux se sépare en deux transitions indépendantes et symétriques (voir figure4.8 et relation 4-162). Dans ce cas les relations 4-143 et 4-163 donnent:

$$\langle\sigma_{11} - \sigma_{44}\rangle = \frac{N}{2}(1 - s_+) \qquad \text{donc} \qquad (\delta\sigma_{11} - \delta\sigma_{44})(\omega) = -\frac{N}{2}\delta s_+(\omega) \tag{4-168}$$

Nous obtenons finalement une équation similaire à celles obtenues pour les champs x et y:

$$\begin{aligned} -i\frac{\omega}{\kappa}\delta A_\pm(\omega) \;&=\; -(1 + i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_\pm \\ &\quad -i\delta_0 s_\pm\left[2\delta A_\pm + \frac{\langle A_\pm\rangle^2}{|\langle A_\pm\rangle|^2}\delta A_\pm^\dagger\right] + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_\pm^{in} \end{aligned} \tag{4-169}$$

La polarisation étant linéaire, les composantes circulaires jouent un rôle symétrique c'est pourquoi nous avons remplacé A_+ par $A_\pm$ dans l'équation précédente.

Ces équations correspondent à la saturation d'un ensemble de $N/2$ atomes à deux niveaux et sont identiques à celles obtenues dans la limite de grand désaccord par Hilico *et al.* [Hilico92a]. La polarisation étant linéaire, on utilise les relations $\langle A_- \rangle = -\langle A_+ \rangle = \langle A_x \rangle / \sqrt{2}$ et $s_+ = s_- = s_x/2$ pour obtenir:

$$\begin{aligned} -i\frac{\omega}{\kappa}\delta A_\pm(\omega) &= -(1 + i\delta_{cav} - i\delta_0)\delta A_\pm \\ &\quad -i\delta_0 \frac{s_x}{2}\left[2\delta A_\pm + \frac{\langle A_x \rangle^2}{|\langle A_x \rangle|^2}\delta A_\pm^\dagger\right] + \frac{2}{\sqrt{T}}\delta A_\pm^{in} \end{aligned} \qquad (4\text{-}170)$$

Cess équations sont identiques à celle du champ moyen 4-153: les spectres de bruit des modes x, σ_+ et σ_- sont donc égaux dans la limite haute fréquence.

Cette propriété est directement liée au fait que les composantes circulaires sont complètement décorrélées. En effet, les deux transitions $1 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$ sont indépendantes dans ce domaine de fréquence, et par conséquent, il n'existe aucun terme de couplage entre les modes A_+ et A_- dans les équations 4-170.

Dans ces conditions, les relations de passage 4-2 et 4-3 entre les bases de polarisation circulaire et linéaire nous permettent de résumer les liens qui existent entre les bruits de quadrature des champs sortants:

$$S_{X_+}(\theta) = S_{X_-}(\theta) = S_{X_x}(\theta) = S_{X_y}(\theta + \pi/2) \qquad (4\text{-}171)$$

Comme nous l'avions évoqué au paragraphe précédent, le champ moyen A_x et le mode vide A_y sont effectivement comprimés sur des quadratures orthogonales et cette propriété est due au fait que les spectres de bruit des composantes circulaires sont identiques et indépendants à haute fréquence.

D.7 Spectres de bruit

D.7.1 Matrices de susceptibilité et de corrélations atomiques

Les spectres de bruit s'obtiennent à partir de la matrice de corrélation du champ sortant $[V^{out}]$. Celle-ci est déterminée par les matrices de susceptibilité $[\chi(\omega)]$ et de corrélations atomiques $[\sigma(\omega)]$ par l'intermédiaire de la relation 4-92.

La matrice de susceptibilité correspondant au mode vide se calcule à partir des équations 4-155 et 4-157. Néanmoins, cette expression est complexe. Pour simplifier le problème, nous utilisons les expressions dérivées dans les cas limites de haute et basse fréquence de bruit:

$$[\chi(\omega)]_y \simeq [\chi(\omega)]_0 + [\chi(\omega)]_{SR} + [\chi(\omega)]_{abs} + [\chi(\omega)]_{Kerr} \qquad (4\text{-}172)$$

La matrice $[\chi(\omega)]_{SR}$ correspond à la limite basse fréquence lorsqu'on néglige les termes de saturation. La matrice $[\chi(\omega)]_{Kerr}$ est obtenue à partir de l'équation 4-166 et est valide à haute fréquence. Enfin la matrice $[\chi(\omega)]_{abs}$ est associée à l'absorption et la dispersion du milieu.

Cette approximation est justifiée car les termes dus à la saturation (effet Kerr) sont négligeables à basse fréquence devant les termes dus au pompage optique (effet SR). Inversement ces derniers disparaissent à haute fréquence où l'effet Kerr est dominant.

On applique la même idée au calcul de la matrice de corrélations atomiques $[\sigma(\omega)]$. Nous avons vu que le bruit atomique était très important à basse fréquence, celui-ci étant caractérisé par $[\sigma(\omega)]_{SR}$. A haute fréquence, seuls les effets de saturation rentrent en compte. Au troisième ordre en $1/\Delta$, le bruit atomique est uniquement associé à l'absorption du milieu [Hilico92a]. Nous écrivons donc:

$$[\sigma(\omega)]_y \simeq [\sigma(\omega)]_{SR} + [\sigma(\omega)]_{abs} \tag{4-173}$$

Quant au champ moyen, ses matrices de susceptibilité et de corrélations atomiques s'écrivent:

$$[\chi(\omega)]_x = [\chi(\omega)]_0 + [\chi(\omega)]_{abs} + [\chi(\omega)]_{Kerr} \text{ et } [\sigma(\omega)]_x = [\sigma(\omega)]_{abs} \tag{4-174}$$

Les expressions de ces différentes matrices sont données dans l'appendice B.

D.7.2 Comparaison avec un modèle complet

La figure 4.9 compare les spectres de bruit minimal du mode vide estimé suivant la méthode décrite dans ce chapitre (courbes (a)) avec le résultat d'un traitement complet des fluctuations (courbes (b)). Il est en effet possible de calculer numériquement les spectres de bruits exacts en appliquant la théorie de la réponse linéaire [Hilico92a] au modèle à quatre niveaux.

Les paramètres choisis sont proches des paramètres expérimentaux, à savoir $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$ et $\kappa = 2\gamma$. L'intensité intracavité maximale $s_{max} = 0.1$ correspond à une puissance incidente de l'ordre de $7\,\mu W$ pour le champ polarisé linéairement A_x^{in}. Enfin le désaccord de la cavité est choisi de telle sorte que le point de fonctionnement est proche du seuil de bascule de la polarisation (point PS sur la courbe 4.5). Tant que la saturation reste faible, on constate un très bon accord entre notre modèle et le calcul exact des fluctuations.

Nous avons représenté sur la courbe (a) les spectres de bruits minimaux donnés par les limites basse et haute fréquence. On constate que le spectre de bruit du mode vide se confond avec celui donné par la limite Kerr dès que ω est supérieur à γ. En revanche le niveau de bruit remonte à basse fréquence à cause de l'excès de bruit dû au pompage optique. La meilleure réduction est donc obtenue pour une fréquence intermédiaire (de l'ordre de κ) et vaut 25%.

La figure 4.9 nous permet également de comparer les spectres de bruit minimal du champ moyen obtenus par les deux méthodes. Celui-ci est donné d'une part par la limite Kerr sur tout le domaine de fréquence (trait grisé sur la courbe (a)). D'autre

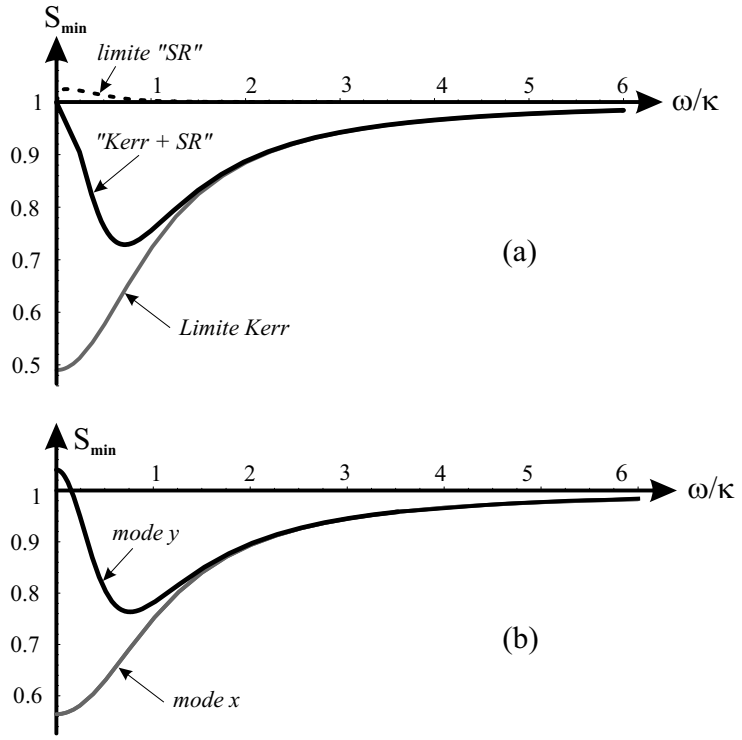


Fig. 4.9 – Figure (a): spectre de bruit minimal du mode vide A_y^{out} donné par les termes basse fréquence "SR" (trait pointillé), par les termes hautes fréquences Kerr (trait grisé) et par les deux effets combinés (trait noir). D'apparence négligeable sur cette figure, puisque l'on a représenté le spectre de bruit minimal, les termes "SR" sont en fait associés à un important excès de bruit sur les autres quadratures. Cet excès de bruit provoque une remontée du bruit à basse fréquence. Par ailleurs, on note que le spectre de bruit minimal donné par la limite Kerr (trait grisé) correspond également au spectre de bruit minimal du champ moyen A_x^{out}. Figure (b): spectre de bruit des modes A_y^{out} (trait noir) et A_x^{out} (trait grisé) calculés par un traitement numérique complet des fluctuations. Les paramètres valent: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$, $\delta_{cav} = 4.6$. Le point de fonctionnement est proche du seuil de bascule de la polarisation et correspond au point A représenté sur la figure 4.11.

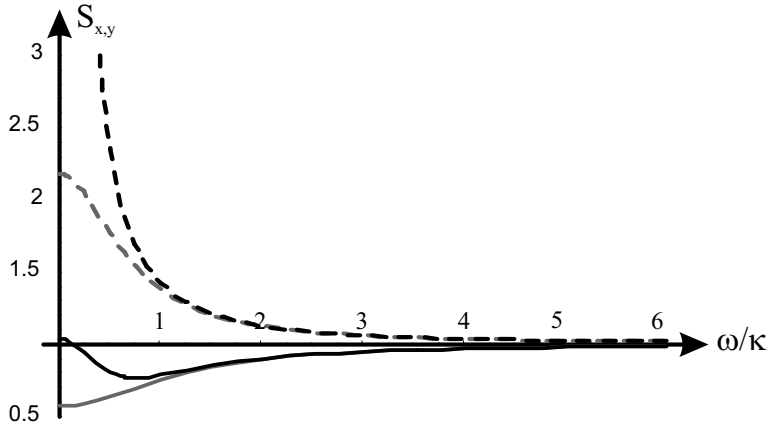


Fig. 4.10 – Spectres de bruits minimaux et maximaux pour les modes A_y^{out} (trait noir) et A_x^{out} (trait grisé). Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 4.9 et valent: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$, $\delta_{cav} = 4.6$.

part nous avons représenté le résultat du calcul complet pour ce mode (trait grisé sur la courbe (b)). On constate également un bon accord entre les deux méthodes, la réduction de bruit étant légèrement surestimée par nos approximations.

Afin d'insister sur l'important excès de bruit à basse fréquence, nous avons représenté sur la figure 4.10 les spectres de bruit minimaux et maximaux pour les deux modes du champ x et y. Nous constatons à nouveau que seul le mode vide est affecté par le bruit de pompage optique. Le champ moyen reste, quant à lui, proche d'un état minimal ($S_{min}S_{max} \simeq 1$).

D.7.3 Comparaison théorie-expérience

Ces spectres de bruit théoriques sont à comparer avec les résultats expérimentaux présentés aux chapitres 2 et 3. Notre modèle est très simplifié par rapport à la situation expérimentale réelle. Notamment nous avons remplacé la transition $6S_{1/2}\ F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}\ F' = 5$ par une transition à quatre niveaux. Nous nous contenterons donc de comparaisons qualitatives.

La figure 3.20 résume l'allure générale des spectres de bruit enregistrés lorsque l'on coupe les faisceaux pièges. La réduction de bruit sur le mode vide est optimale à basse fréquence pour atteindre environ 17% (corrigé des pertes) autour de $2\,MHZ$. Le dispositif de détection homodyne ne nous permet pas de mesurer le bruit à plus basse fréquence. Nous ne pouvons donc observer l'excès de bruit dû au pompage optique qui est prédit théoriquement pour des fréquences de bruit inférieures au taux de pompage optique γ_p. On peut estimer ce dernier pour un point de fonctionnement proche du sommet du pic de résonance de la cavité à $\gamma_p^{max} \simeq 2\gamma s_{max} \simeq 500\ kHZ$, pour $s_{max} = 0.1$. Ce terme est multiplié par deux car s_{max} correspond à l'intensité maximale des composantes circulaires. Insistons sur le fait qu'on obtient ainsi qu'un

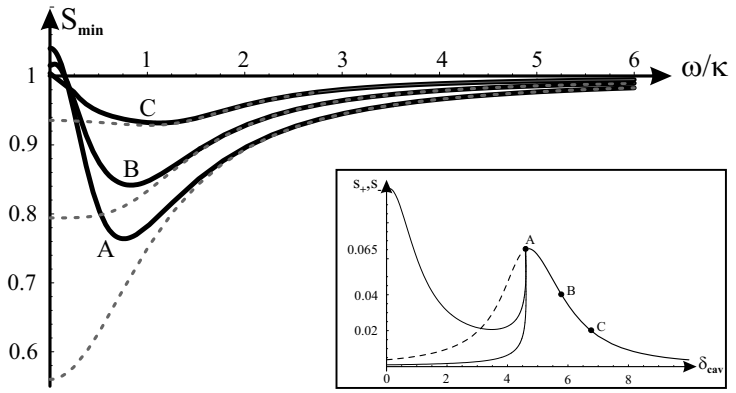


Fig. 4.11 – Spectre de bruit minimal du mode vide A_y^{out} (trait noir) et du champ moyen (tireté) pour différents désaccord de la cavité. $\delta_0 0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\kappa = 2\gamma = 6\gamma_\perp$, $s_{max} = 0.1$. Les points de fonctionnement sont: A ($\delta_{cav} = \delta_{SR} = 4.6$, $s_x/2 = 0.065$, $r_A = 1$), B ($\delta_{cav} = 5.78$, $s_x/2 = 0.04$, $r_B \simeq 0.6$), C ($\delta_{cav} = 6.79$, $s_x/2 = 0.02$, $r_C \simeq 0.3$). L'encart illustre la position de ces points sur la courbe de résonance de la cavité tracée pour ces paramètres. Les paramètres $r_{A,B,C}$ sont définis comme le rapport des intensités intracavités à l'intensité maximale permise, comme c'était le cas sur la figure 2.21.

ordre de grandeur puisque cette estimation a été faite en utilisant une expression obtenue pour une transition à quatre niveaux.

Quant au spectre de bruit sur le champ moyen, il est affecté par un excès de bruit à basse fréquence qui n'est pas pris en compte par le modèle. Nous avons réussi à le diminuer en mesurant le bruit en l'absence des faisceaux pièges (voir chapitre 3), ces derniers ayant été reconnus comme une source d'excès de bruit [Khoury98]. Néanmoins cet effet reste important et limite la plage de fréquence pour laquelle il est possible d'observer une réduction de bruit sous la limite quantique standard.

Il reste à comprendre cette source d'excès de bruit à basse fréquence. Nous pouvons l'imputer aux imperfections de la configuration expérimentale. En effet, nous ne coupons pas les champs magnétiques de piégeage ni le faisceau repompeur. Néanmoins il faudrait expliquer pourquoi cet excès de bruit ne vient pas, apparemment, perturber les fluctuations du mode vide orthogonal.

D.7.4 Optimisation de la réduction de bruit

Nous avons vu que les spectres de bruit du champ moyen étaient identiques à ceux obtenus pour un atomes à deux niveaux, dans la limite d'un effet Kerr idéal. Les caractéristiques de ces spectres de bruits sont bien connus ainsi que leur comparaison avec un modèle complet. Nous ne détaillerons donc pas plus les résultats ici car ils sont décrits dans la référence [Hilico92a]. En revanche nous allons consacrer ce paragraphe à l'étude de l'évolution des spectres de bruit du mode y lorsque les

paramètres varient. Ces spectres seront calculés, par la suite, à l'aide du traitement exact des fluctuations.

L'espace des paramètres est trop important pour présenter ici une étude exhaustive des spectres de bruit. Pour limiter notre domaine d'investigation, nous fixons le déphasage atomique et le désaccord atomique, à savoir $\delta_0 = 5$ et $\Delta = 20\gamma$, en accord avec les valeurs expérimentales. Ces grandeurs sont en effet difficiles à faire varier dans la configuration actuelle de l'expérience. Elles correspondent à une coopérativité de $C = \Delta\delta_0/\gamma = 100$ et à un nombre d'atomes environ égal à $5\,10^6$.

Ces paramètres étant fixés, nous cherchons le point de fonctionnement le plus favorable à la réduction de bruit lorsqu'on se déplace sur la courbe de résonance (voir figure 4.11). L'intensité incidente est identique à celle de la figure 4.9 ($s_{max} = 0.1$). Quand on se rapproche du sommet du pic de résonance, l'intensité augmente et les effets non-linéaires sont plus importants. La meilleure réduction de bruit est donc obtenue proche du seuil de bascule de polarisation (point A). On remarque, toujours sur la figure 4.11, que la fréquence correspondant à la meilleure réduction de bruit est quasiment indépendante du désaccord de la cavité.

Ce comportement est bien vérifié expérimentalement. Les figures 2.21 et 3.21 montrent l'évolution des spectres de bruit lorsqu'on se déplace sur la courbe de résonance. Comme cela a déjà été mis en évidence, la meilleure réduction de bruit est effectivement observée au voisinage du sommet du pic de résonance.

Par la suite, nous choisirons comme désaccord δ_{cav} celui correspondant au sommet du pic de résonance. On étudie alors l'influence de la puissance incidente sur la réduction de bruit. Nous voyons sur la figure 4.12 qu'il existe une valeur de saturation optimale. Si la saturation augmente trop, l'excès de bruit dû au pompage optique détruit la réduction de bruit qu'il est possible d'obtenir par effet Kerr. Cette valeur optimale de la saturation correspond à un compromis entre ces deux effets et vaut environ $s_{max} \simeq 0.5$. Néanmoins nous remarquons que la réduction de bruit varie peu en fonction de la saturation, elle reste de l'ordre de 20 à 30% lorsque s_{max} passe de 0.05 à 1. En revanche la fréquence de bruit optimale augmente en fonction de l'intensité incidente du fait de l'excès de bruit croissant à basse fréquence.

Nous n'avons pas effectué cette étude expérimentalement. Néanmoins nous avons présenté sur la figure 2.22, l'évolution de la réduction du bruit à la fréquence d'analyse fixe de 3 MHz en fonction de la puissance incidente du faisceau pompe. Nous avions alors constaté l'existence d'une puissance optimale de l'ordre de 7-8μW. Nous pouvons maintenant attribuer la remontée du bruit pour des puissances incidentes supérieures à l'influence croissante des effets du pompage optique.

Afin de s'affranchir de cet excès de bruit basse fréquence, il faut mesurer le bruit à des fréquences d'analyses plus élevées. Dans la configuration actuelle, nous sommes limités par la bande passante de la cavité. Nous pouvons l'augmenter sans changer

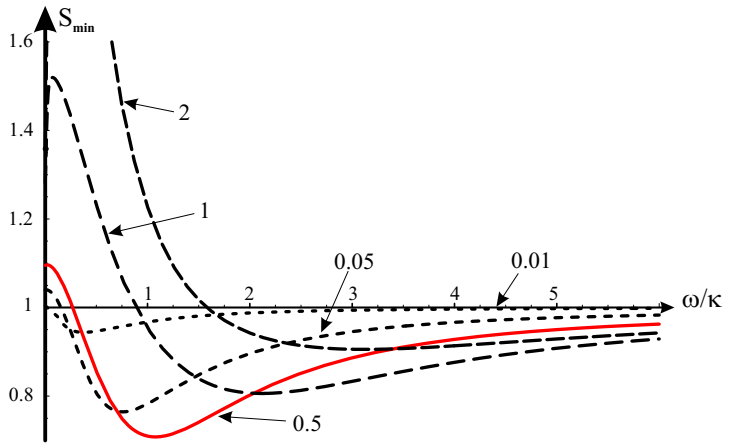


Fig. 4.12 – Spectres de bruit minimal du mode vide A_y^{out} pour différentes valeurs de saturations s_{max}. Pour chaque valeur de s_{max}, le désaccord de la cavité est choisi proche du seuil de bascule de la polarisation (PS). Les paramètres valent:$\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\kappa = 2\gamma = 6\gamma_\perp$.

les non-linéarités du système en diminuant simplement sa longueur:

$$\text{si } L \searrow \text{ alors } \kappa = \frac{T}{2\tau} = \frac{CT}{2L} \nearrow \quad \text{et} \quad \delta_0 = \frac{Ng^2}{T\Delta} = \frac{\gamma C}{\Delta} = \text{constante} \qquad \text{(4-175)}$$

La configuration la plus favorable correspond à la limite de "mauvaise cavité": $\kappa \gg \gamma$. On tire ainsi profit de la réduction de bruit qui s'étend sur toute la bande passante de la cavité, l'excès de bruit restant limité aux basses fréquences. Les spectres de bruit correspondant à différentes valeurs de κ sont présentés sur la figure 4.13. On peut donc atteindre théoriquement des valeurs importantes de réduction de bruit. Par exemple, nous obtenons une réduction de bruit de l'ordre de 75%, pour une cavité telle que $\kappa = 50\gamma$, ce qui correspond à une longueur d'environ $1\,cm$.

Evidemment, on surestime avec ce modèle l'importance de la réduction de bruit obtenue, car on ne tient pas compte de toutes les sources d'excès de bruit provenant des différentes sources de relaxation du système, comme, par exemple, la relaxation due aux champs magnétiques parasites. En outre la modélisation de l'interaction atomes - champ par une transition à quatre niveaux constitue une grosse approximation. Toutefois nous avons remarqué que le mode vide orthogonal semblait moins affecté par les sources d'excès de bruit -exceptées celles provenant des processus de pompage optique- que le champ moyen (voir paragraphe D.7.3).

Nous pensons donc qu'il serait intéressant de diminuer la longueur de la cavité afin de vérifier s'il est possible d'obtenir une nette amélioration sur la réduction de bruit. Malheureusement, nous ne pouvons raccourcir la longueur de la cavité dans notre configuration expérimentale.

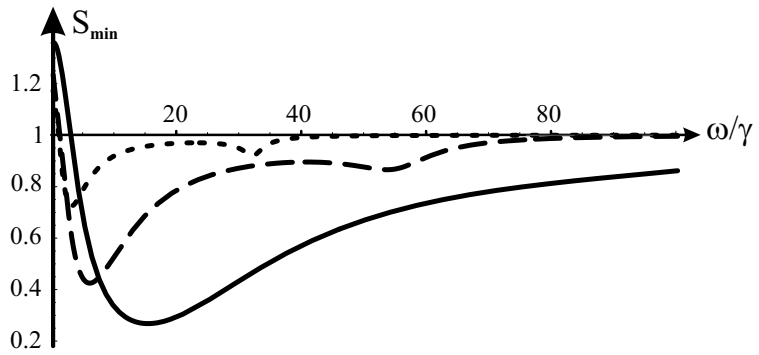


Fig. 4.13 – Spectres de bruit minimal pour différentes valeurs du rapport$\rho = \kappa/\gamma$ (pointillé: $\rho = 2$, tireté: $\rho = 10$, plein: $\rho = 50$). Pour chaque valeur de ρ, le paramètre de saturation s_{max} est optimisé. Les paramètres correspondent à:$\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$.

D.7.5 Phases des quadratures comprimées

Afin de terminer cette étude des spectres de bruit des deux modes x et y, nous allons estimer maintenant la phase des quadratures comprimées. Nous avons déjà évoqué l'importance de ces résultats pour l'étude des corrélations que nous allons mener au chapitre 5.

Nous avons développé une méthode permettant de mesurer expérimentalement la phase des quadratures comprimées pour les modes du champ x et y (voir paragraphe D.2 du chapitre 2). Nous avons vu que ces deux modes étaient comprimés pour des quadratures quasiment orthogonales: le champ moyen est comprimé pour une quadrature proche de la quadrature d'amplitude, et le mode vide pour une quadrature proche de la quadrature de "phase", définie par rapport au champ moyen (voir figures 2.31 et 3.21). Comme nous l'avons évoqué au paragraphe D.6, nous nous attendons en effet à ce que ces deux modes soient comprimés sur des quadratures orthogonales à haute fréquence, les deux modes de polarisation circulaire σ_+ et σ_- étant dans ce cas décorrélés (voir relation 4-171).

Nous comparons ici ces résultats aux prévisions théoriques. A partir de la relation 4-71 donnant le bruit d'une quadrature quelconque, on détermine les phases des quadratures comprimées pour le mode vide $(\theta_{sq})_y$ et pour le champ moyen $(\theta_{sq})_x$:

$$(\theta_{sq})_y(\omega) = \theta_{V_y}(\omega) - \theta_x^{out} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{avec} \quad e^{2i\theta_{V_y}} = [V_y^{out}]_{1,2}/|[V_y^{out}]_{1,2}| \qquad (4\text{-}176)$$

$$(\theta_{sq})_x(\omega) = \theta_{V_x}(\omega) - \theta_x^{out} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{avec} \quad e^{2i\theta_{V_x}} = [V_x^{out}]_{1,2}/|[V_x^{out}]_{1,2}| \qquad (4\text{-}177)$$

Celles-ci sont repérées par rapport à la phase du champ moyen sortant de la cavité θ_x^{out}. Les résultats présentés sur la figure 4.14 correspondent aux points de fonctionnement A, B et C repérés sur la figure 4.11.

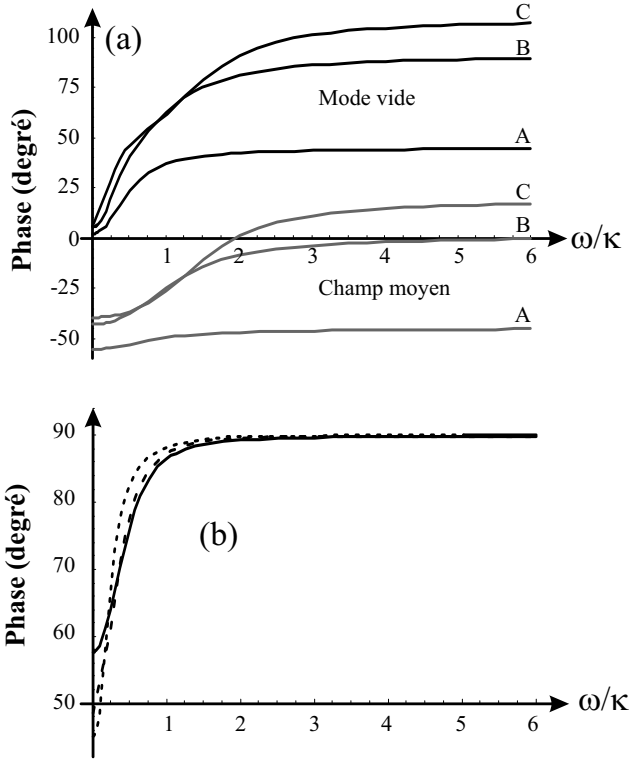


Fig. 4.14 – Figure (a): phase des quadratures comprimées pour le mode vide ⟨$(\theta_{sq})_y$- (trait noir) et pour le champ moyen -⟨$(\theta_{sq})_x$- (trait grisé). Les courbes sont tracées pour les points de fonctionnement A, B et C définis sur la figure 4.11. Figure (b): différence des phases comprimées (⟨$(\theta_{sq})_y - (\theta_{sq})_x$⟩) pour les différents points de fonctionnement. Les paramètres valent: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$.

On obtient un accord qualitatif avec les résultats expérimentaux (voir par exemple la figure 3.21). En effet, à haute fréquence, les phases des quadratures comprimées sont quasiment constantes et orthogonales (courbe (b) de la figure3.21). En outre le champ moyen est effectivement comprimé en amplitude lorsqu'on se place au milieu de la courbe de résonance (point B), le mode vide étant alors comprimé en "phase". Toutefois, ces phases dépendent fortement du point de fonctionnement et le champ moyen n'est plus comprimé en intensité au sommet du pic de résonance (point A).

Etant donné les approximations faites par le modèle nous nous contentons ici d'un accord qualitatif. D'autant plus que la propriété essentielle par la suite, à savoir que *les deux modes sont comprimés pour des quadratures orthogonales*, est bien vérifiée expérimentalement.

D.7.6 Autres modes de polarisation

La suite de ce manuscrit est consacrée à l'étude des corrélations quantiques produites par le système. Nous chercherons à déterminer quelle est la meilleure intrication qu'il est possible d'obtenir entre deux modes de polarisation orthogonale. En particulier nous serons amenés à étudier les propriétés de bruit pour d'autres modes de polarisation que les modes x et y.

Nous présentons ici l'allure des spectres de bruit des modes polarisés à 45°, par rapport aux axes x et y, et les modes circulaires σ_+ et σ_- (voir figure 4.15). Les spectres de bruit de ces modes sont égaux deux à deux, nous ne ferons donc pas de différence entre les modes +45 et -45 (de même pour σ_+ et σ_-). Ces modes présentent un excès de bruit important à basse fréquence car ils sont des combinaisons linéaires des modes x et y. On remarque que les composantes circulaires ont une allure similaire au spectre de bruit du mode vide y: ils sont comprimés à haute fréquence et la réduction de bruit diminue à basse fréquence (courbe (b) de la figure 4.15). En revanche, les modes polarisés à 45° présentent un excès de bruit à toutes les fréquences. En outre, la différence entre leur bruit minimal et maximal tend rapidement vers zéro ($\omega \geq \kappa$) (courbe (a) de la figure 4.15).

Ces résultats sont en bon accord avec les courbes de bruit présentées sur la figure 2.32 pour une fréquence d'analyse de 3 MHz: le bruit des modes ± 45 dépend peu des quadratures et se trouve au dessus de la limite quantique standard tandis que les modes $\sigma_\pm$ sont légèrement comprimés.

Avant de conclure cette partie théorique, nous traçons sur la figure 4.16 les spectres de bruit minimal obtenus pour les modes de polarisation x, y, ± 45 et $\sigma_\pm$. Comme nous l'avons signalé au paragraphe D.6, les bruits minimaux des modes circulaires (σ_+,σ_-) et linéaires (x,y) sont identiques à haute fréquence.

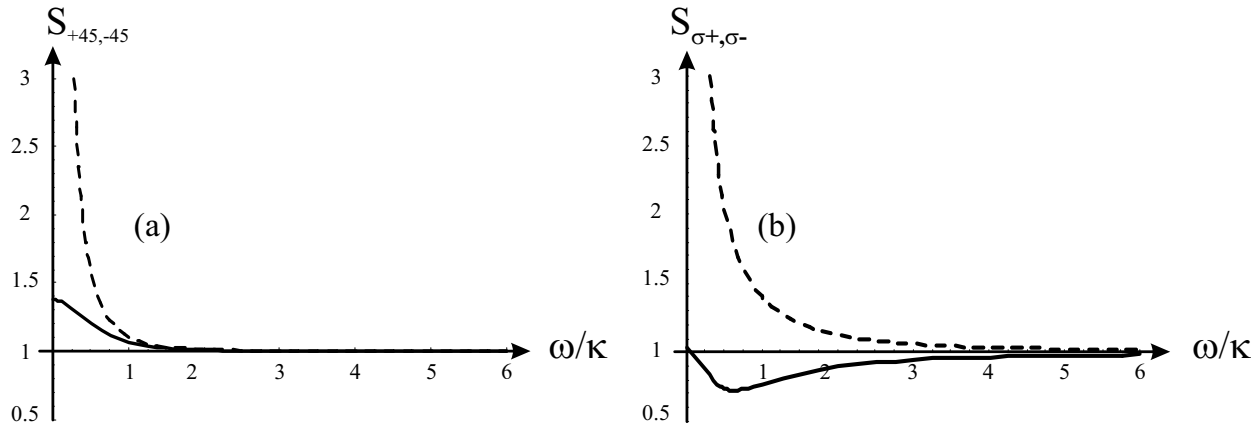


Fig. 4.15 – Figure (a): spectre de bruit minimal (trait plein) et maximal (tireté) pour les modes polarisés à 45°. (les spectres de bruit des modes à +45 et −45 sont identiques). Figure (b): spectre de bruit minimal (trait plein) et maximal (tireté) pour les modes circulaires $\sigma_{\pm}$. (Les spectres de bruit des modes à σ_+ et σ_- sont identiques). Le point de fonctionnement correspond au point A défini sur la figure 4.11 et les paramètres valent: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$, $\delta_{cav} = 4.6$.

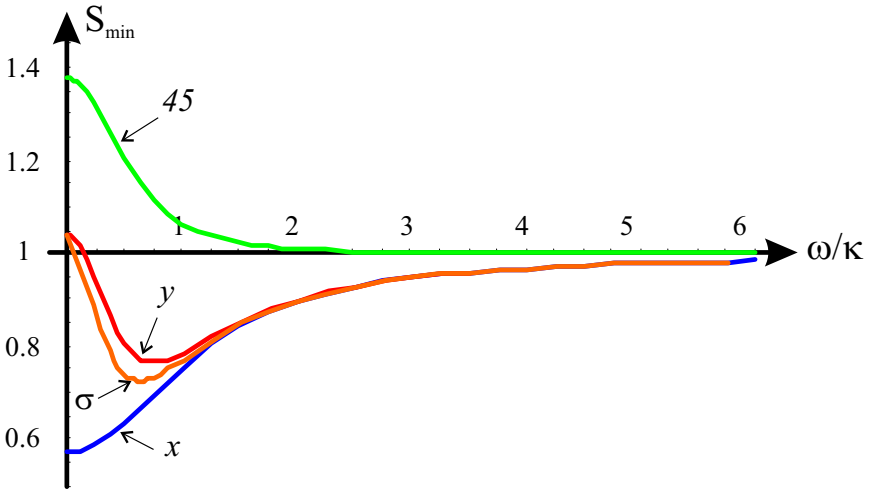


Fig. 4.16 – Spectres de bruit minimal des modes x, y, ± 45 et $\sigma_{\pm}$. Le point de fonctionnement correspond au point A défini sur la figure 4.11 et les paramètres valent: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$, $\delta_{cav} = 4.6$.

E Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de la modélisation de l'expérience par un système à quatre niveaux en X. Ce modèle permet de prédire la bascule de la polarisation à l'intérieur de la cavité. Les courbes de résonance reproduisent bien l'allure des courbes observées expérimentalement (voir figure 2.8 du chapitre 2). En particulier, ce modèle donne une interprétation simple de la bascule de polarisation en terme de seuil d'oscillation laser du mode vide orthogonal. En effet, la biréfringence circulaire du milieu dépend de l'ellipticité entrante du faisceau, ce qui introduit un gain non linéaire sur le mode vide orthogonal au cours de sa propagation dans le milieu. Nous avons pu ainsi obtenir un critère de bascule qui signifie simplement que ce gain doit être supérieur aux pertes de la cavité.

Lorsque la saturation est importante, il apparaît un cycle d'hystéresis: le seuil de bascule de la polarisation dépend du sens de balayage du désaccord de la cavité (voir figure 4.5). Ce comportement a également été observé expérimentalement comme nous pouvons le voir sur les courbes de la figure 2.12 du chapitre 2.

Nous avons ensuite détaillé les calculs des fluctuations quantiques dans le cas où le désaccord atomique est très grand devant les autres fréquences d'évolution du système et pour une faible saturation du milieu: $\Delta \gg \Omega \gg \gamma \gg \gamma_p$.

Dans un premier temps nous n'avons considéré que les effets dits de "rotation auto-induite" qui induisent la bascule de la polarisation. Il a été prédit par Matsko *et al.* [Matsko02a] que cet effet pouvait générer un état vide comprimé sur le mode orthogonal à la polarisation moyenne à la sortie du milieu. Compte tenu de l'important excès de bruit dû au pompage optique associé à la bascule de polarisation, nous avons montré qu'il n'était pas possible de générer, à partir de cet effet, de tels états lorsque le milieu est placé à l'intérieur de la cavité. Inversement, cet effet est responsable d'un important excès de bruit.

Toutefois, cet excès de bruit reste limité aux basses fréquences de bruit, sur une largeur de γ_p qui est le taux de pompage optique. Il est alors possible d'obtenir une réduction de bruit sur ce mode par effet Kerr croisé pour des fréquences supérieures à quelques γ_p. Cet effet Kerr croisé est dû à la saturation des transitions optiques.

Quant au champ moyen, il n'est pas affecté par les fluctuations de pompage optique: celles-ci sont à l'origine des fluctuations de l'axe de polarisation et la projection de ces fluctuations sur le champ moyen est du deuxième ordre. On prédit donc une réduction de bruit pour des fréquences de bruit comprises dans toute la bande passante de la cavité.

Nous avons alors comparé ces résultats avec les observations expérimentales présentées aux chapitres 2 et 3. Nous trouvons un très bon accord entre les spectres de bruit du mode vide orthogonal et ceux prédits théoriquement. En particulier, nous

avons une réduction de bruit de l'ordre 15-20 % (corrigé des pertes), ce qui est très proche de la valeur théorique de 25% prévue pour les paramètres correspondant à l'expérience.

En revanche, le modèle ne permet pas d'expliquer la remontée du bruit du champ moyen à basse fréquence. Ceci n'est pas surprenant car nous avons effectué beaucoup d'approximations, aussi bien au niveau de la transition choisie que des sources de relaxation prises en compte (champs magnétiques, faisceau repompeur,...).

Enfin, cette étude a permis de clarifier le comportement du système en fonction de la fréquence. En effet, nous avons démontré que les variables atomiques sont couplées à basse fréquence par les processus de pompage optique, tandis que le milieu atomique se comporte à haute fréquence comme s'il était composé de deux transitions indépendantes et symétriques. Cette propriété sera essentielle pour comprendre quelles sont les corrélations produites par le système. L'étude de ces corrélations quantiques constitue l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 5

Génération d'états non-séparables

A Corrélations quantiques en variables continues

A.1 Corrélations EPR

A.1.1 Le paradoxe EPR

La description du paradoxe dit "EPR" [Einstein35] du nom de ses auteurs Einstein, Podolsky et Rosen nous fournit un cadre idéal pour introduire la spécificité des corrélations quantiques. Le paradoxe se présente lorsque les deux observables conjuguées d'un sous système sont fortement corrélées avec les mêmes observables d'un second sous système. Nous allons résumer brièvement les principaux arguments de leur raisonnement.

Tout d'abord ils supposent que les prédictions de la mécanique quantique sont valables pour le cas de figure dont ils discutent. Ils définissent le concept de réalité de la manière suivante: si on peut, sans perturber un système, prédire avec certitude une de ses grandeurs physiques, alors il existe un élément de réalité associé à cette quantité. Enfin ils supposent qu'aucune action à distance n'est possible. Einstein, Podolsky et Rosen considèrent alors deux particules séparées spatialement et qui exhibent des corrélations maximales entre leurs positions x et leurs impulsions p.

Afin d'effectuer le lien avec le travail présenté dans ce manuscrit, nous adaptons la formulation initiale en considérant ici les corrélations entre deux modes du champ électromagnétique a et b, décrits respectivement par les quadratures orthogonales X_a, Y_a et X_b, Y_b. Celles-ci sont définies par $X_{a,b} = A^\dagger_{a,b} + A_{a,b}$ et $Y_{a,b} = i(A^\dagger_{a,b} - A_{a,b})$. Ces observables obéissent aux relations de commutation:

$$[X_j, Y_k] = 2i\delta_{jk} \quad \text{avec} \quad j,k = a,b \tag{5-1}$$

En revanche les opérateurs $X_a + X_b$ et $Y_a - Y_b$ commutent:

$$[X_a + X_b, Y_a - Y_b] = 0 \tag{5-2}$$

Il est donc possible de créer des états pour lesquels les quadratures X_a et X_b sont parfaitement anticorrélées et les quadratures orthogonales Y_a et Y_b parfaitement

corrélées:

$$\langle \delta(X_a + X_b)^2 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \delta(Y_a - Y_b)^2 \rangle = 0 \tag{5-3}$$

Cette situation est illustrée sur la figure 5.1.

Une mesure réalisée sur la quadrature X_b du mode b nous permet alors de connaître avec certitude la valeur de X_a. Selon les auteurs du paradoxe EPR, il ne peut y avoir d'actions à distance, la prédiction de la quantité X_a est faite sans perturber le mode a. D'après la proposition de EPR, on doit alors associer un élément de réalité physique à cette quadrature X_a et donc une valeur prédéterminée. De la même façon, on aurait associé, avec certitude, une valeur prédéterminée à la quadrature Y_a si on avait effectué la mesure de la quadrature Y_b. Ce résultat est en contradiction avec les postulats de la mécanique quantique qui interdisent au mode a du champ d'avoir une valeur parfaitement définie, simultanément, pour les quadratures X_a et Y_a. L'inégalité de Heisenberg impose en effet:

$$\langle \delta X_a^2 \rangle \langle \delta Y_a^2 \rangle \geq 1 \tag{5-4}$$

En fait, les mesures des quadratures du modes b, X_b et Y_b, ne peuvent être effectuées simultanément. Pour résoudre ce paradoxe, il faut donc admettre que l'état du mode a dépend de la mesure du mode b. En acceptant les lois de la mécanique quantique on doit donc supposer qu'il existe des interactions non locales, ce que refusaient Einstein, Podolsky et Rosen.

Ce paradoxe repose donc sur l'hypothèse de "réalisme local". En se limitant à de telles interactions, Bell [Bell64] introduisit des inégalités que doivent vérifier les mesures faites sur de tels systèmes. En 1982, Aspect *et al.* [Aspect82] démontrent expérimentalement que les corrélations entre les photons émis par cascade radiative dans le calcium permettent de violer ces inégalités.

A.1.2 Critère de corrélations EPR en variables continues

L'expérience réalisée par Aspect concernait les corrélations de variables discrètes que sont les états de polarisation du photon. En revenant à la formulation initiale du paradoxe EPR en terme de variables continues, Reid proposa de démontrer le paradoxe EPR en utilisant les corrélations entre les quadratures de deux modes du champ électromagnétique [Reid89]. Dans la suite de ce manuscrit, nous ne considérerons que des états gaussiens (c'est à dire dont la fonction de Wigner est gaussienne [Kimble90]).

Les corrélations ne sont, en pratique, jamais parfaites entre deux modes du champ contrairement au cas idéal présenté ci dessus (voir équation 5-3). Supposons que les deux modes du champ sont partiellement anticorrélés sur les quadratures X_a et X_b et partiellement corrélés pour les quadratures Y_a et Y_b. A partir des mesures de X_b et Y_b réalisées sur le mode b, on cherche à déterminer le plus précisément possible

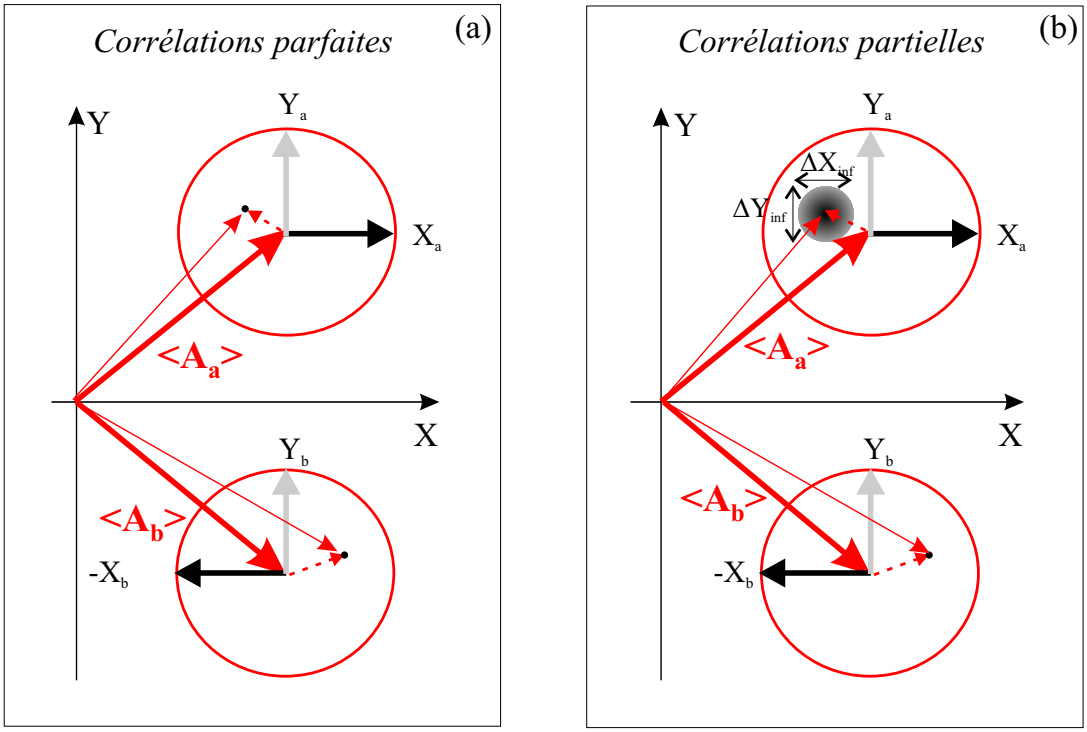


Fig. 5.1 – Représentation de deux faisceaux EPR dans le diagramme de Fresnel. Partie (a): faisceaux parfaitement corrélés: à un instant donné, la connaissance deA_b permet de déterminer la valeur de A_a. Il faut faire ici attention car cette représentation simple peut induire en erreur: on ne peut en effet déterminer simultanément les quadratures X_b et Y_b. De même les quadratures X_a et Y_a ne sont pas déterminées simultanément, conformément aux postulats de la mécanique quantique. Partie (b): faisceaux partiellement corrélés: la connaissance du modea à partir du mode b est entachée d'erreurs données par les variances conditionnelles.

les valeurs des quadratures X_a et Y_a. Les corrélations n'étant pas parfaites, cette détermination est en pratique entachée d'erreurs comme nous l'avons illustré sur la figure 5.1. Les incertitudes sont données par les variances:

$$\langle \delta X_a^2 \rangle (g_X) = \langle (\delta X_a + g_X \delta X_b)^2 \rangle \quad (5\text{-}5)$$

$$\langle \delta Y_a^2 \rangle (g_Y) = \langle (\delta Y_a - g_Y \delta Y_b)^2 \rangle \quad (5\text{-}6)$$

où l'on a introduit les gains g_X et g_Y que l'on peut ajuster afin de réduire ces erreurs. Les incertitudes minimales correspondent alors aux variances conditionnelles définies par [Reid89]:

$$\langle \delta X_a^2 \rangle_{inf} = \min_{g_X} \langle (\delta X_a + g_X \delta X_b)^2 \rangle = \langle \delta X_a^2 \rangle - \frac{\langle \delta X_a \delta X_b \rangle^2}{\langle \delta X_b^2 \rangle} \quad (5\text{-}7)$$

$$\langle \delta Y_a^2 \rangle_{inf} = \min_{g_Y} \langle (\delta Y_a - g_Y \delta Y_b)^2 \rangle = \langle \delta Y_a^2 \rangle - \frac{\langle \delta Y_a \delta Y_b \rangle^2}{\langle \delta Y_b^2 \rangle} \quad (5\text{-}8)$$

En suivant le raisonnement de Einstein, Podolsky et Rosen, le paradoxe apparaît si les corrélations entre les modes a et b sont suffisantes pour contredire, en apparence, la relation d'incertitude de Heisenberg donné par l'inégalité 5-4:

$$\langle \delta X_a^2 \rangle_{inf} \langle \delta Y_a^2 \rangle_{inf} < 1 \quad (5\text{-}9)$$

La première démonstration expérimentale du paradoxe EPR en variables continues fut réalisée par Ou *et al.* [Ou92] en 1992 en utilisant les corrélations entre les modes signal et complémentaire à la sortie d'un amplificateur paramétrique nondégénéré, reprenant ainsi l'idée initiale de Reid [Reid89].

Ces faisceaux de type EPR ont suscité depuis un grand intérêt du fait de leur implication dans de nombreux protocoles d'information quantique utilisant les variables continues, comme par exemple la téléportation quantique [Braunstein98, Furusawa98, Bowen03b] ou la cryptographie quantique [Ralph99, Reid00, Silberhorn02].

En fait, la caractérisation de ces différents protocoles dépend des objectifs qu'ils cherchent à atteindre [Bowen03a]. Il existe donc différents critères pour caractériser les corrélations quantiques entre deux modes. Par exemple, les interprétations du protocole de téléportation quantique en variables continues varient suivant les critères utilisés [Braunstein98, Ralph98, Grosshans01, Braunstein01, Bowen03b].

A.2 Critère de non-séparabilité

Tous ces critères de corrélations quantiques reposent sur la notion de non-séparabilité pour deux états quantiques. Considérons deux modes a et b dont l'état est caractérisé par la matrice densité ρ_{ab}. En mécanique quantique, ces états sont séparables si cette matrice densité s'exprime comme le produit tensoriel des matrices densités ρ_a et ρ_b attachées à chaque état: $\rho_{ab} = \rho_a \otimes \rho_b$. Plus généralement un état est dit

séparable si et seulement si on peut l'exprimer sous la forme d'une superposition statistique d'états séparables:

$$\rho_{ab} = \sum_i p_i \rho_{a_i} \otimes \rho_{b_i} \tag{5-10}$$

où ρ_{a_i} et ρ_{b_i} sont les matrices densités des modes a et b dans l'état i.

Soient maintenant deux états gaussiens a et b, décrits par des variables continues, pour lesquels les quadratures X_a et X_b sont partiellement anticorrélées, tandis que les quadratures Y_a et Y_b sont partiellement corrélées. Duan *et al.* [Duan00a] et Simon [Simon00] ont proposé un critère de non-séparabilité pour ces états, qui s'écrit sous la forme:

$$\frac{1}{2}\left[\langle\delta(X_a + X_b)^2\rangle + \langle\delta(Y_a - Y_b)^2\rangle\right] < 2 \tag{5-11}$$

Nous rappelons dans l'appendice C le principe de cette démonstration. Il est important de noter que cette condition est uniquement suffisante. La formulation complète du critère de non-séparabilité dans sa forme nécessaire et suffisante requiert une présentation nettement plus détaillée [Duan00a]. Nous nous contenterons donc du caractère suffisant dans la suite de cet exposé.

Ce critère de non-séparabilité rappelle l'expression du critère EPR (inégalité5-9) présentée par Reid, du fait la présence des termes de la forme $X_a + X_b$ et $Y_a - Y_b$. Par exemple, la variance $\langle\delta(X_a + X_b)^2\rangle$ donne l'information que l'on peut obtenir sur X_a à partir de la mesure de X_b pour un gain unité ($g_X = 1$ dans la relation 5-7). Néanmoins ces deux critères ne sont pas équivalents. De manière générale, tout état EPR est non-séparable, la réciproque n'étant pas vraie [Bowen03a].

Par la suite nous quantifierons les corrélations quantiques entre deux modes de polarisation orthogonale a et b du faisceau pompe à l'aide du critère de non-séparabilité exprimé par la condition 5-11.

A.3 Production d'états d'intriqués

Afin de guider notre étude des corrélations produites à la sortie de la cavité à atomes, il est intéressant de rappeler comment peuvent être produits ces faisceaux non-séparables.

Nous avons vu plus haut que les modes signal et complémentaire constituent une paire de faisceaux EPR à la sortie d'un amplificateur paramétrique optique nondégénéré (NOPA) [Reid89, Ou92]. Ce n'est toutefois pas la seule méthode pour produire de telles corrélations.

En effet, on peut générer des états intriqués en faisant interférer deux modes 1 et 2 *indépendants* sur une lame séparatrice [Furusawa98, Bowen03a, Leuchs99, Silberhorn01] (voir figure 5.2). Supposons que ces deux modes soient *comprimés sur les mêmes quadratures*, par exemple en amplitude à la sortie de deux amplificateurs

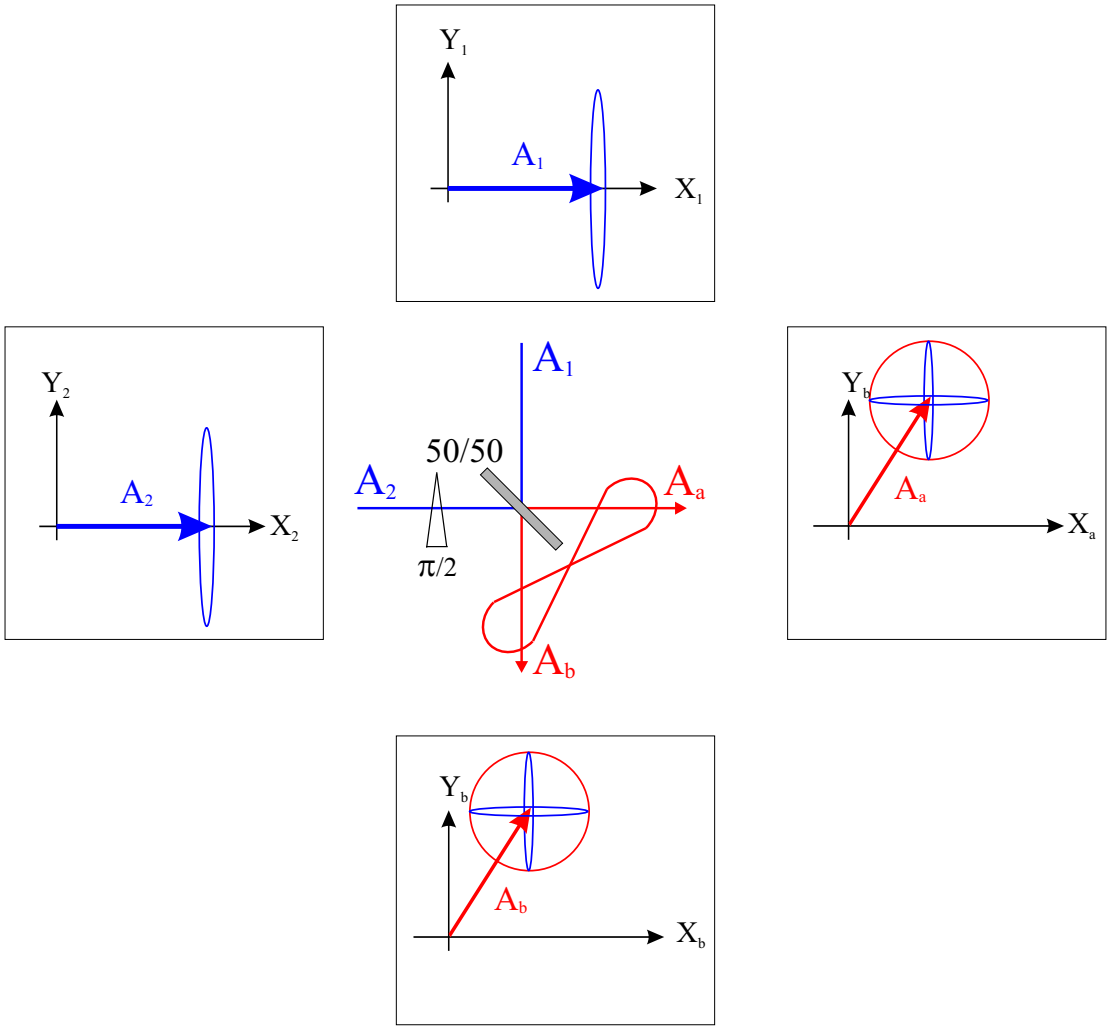


Fig. 5.2 – Génération de faisceaux intriqués en combinant deux faisceaux 1 et 2 comprimés sur une lame séparatrice 50/50. Ces faisceaux sont comprimés en amplitude (quadrature X). Si on introduit un déphasage de $\pi/2$ entre les deux bras, alors les faisceaux sortant sont intriqués.

paramétriques optiques [Furusawa98, Bowen03a] ou en exploitant les non-linéarités de type Kerr dans les fibres optiques [Silberhorn01]. Nous considérerons ici que les modes 1 et 2 sont comprimés pour les quadratures X_1 et X_2: $\langle \delta X_1^2 \rangle < 1$ et $\langle \delta X_2^2 \rangle < 1$. On introduit alors un déphasage de $\pi/2$ avant de les combiner sur la lame. A la sortie, les modes a et b s'expriment en fonction des modes A_1 et A_2 de la manière suivante:

$$A_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - iA_2) \tag{5-12}$$

$$A_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + iA_2) \tag{5-13}$$

Nous obtenons alors immédiatement:

$$\frac{1}{2}\langle \delta(X_a + X_b)^2 \rangle = \langle \delta X_1^2 \rangle < 1 \tag{5-14}$$

$$\frac{1}{2}\langle \delta(Y_a - Y_b)^2 \rangle = \langle \delta X_2^2 \rangle < 1 \tag{5-15}$$

Le critère de non-séparabilité est donc automatiquement vérifié pour les modes$a$ et b:

$$\frac{1}{2}[\langle \delta(X_a + X_b)^2 \rangle + \langle \delta(Y_a - Y_b)^2 \rangle] = \langle \delta X_1^2 \rangle + \langle \delta X_2^2 \rangle < 2 \tag{5-16}$$

Il existe ainsi un lien direct entre la réduction de bruit et la valeur de l'intrication estimée par le critère de non-séparabilité. Nous reviendrons sur cette propriété dans la suite de cet exposé.

En général, les modes a et b présentent chacun un important excès de bruit en contrepartie de leurs corrélations. En effet ce bruit provient des quadratures non comprimées, donc bruyantes, des modes A_1 et A_2 (voir figure 5.1). Dans le cas où ces modes 1 et 2 jouent un rôle symétrique (i.e leurs spectres de bruit sont identiques), cet excès de bruit est indépendant des quadratures :

$$\langle \delta X_a^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_b^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2}(\langle \delta X_1^2 \rangle_{min} + \langle \delta Y_1^2 \rangle_{max}) = \text{constante} \geq 1 \tag{5-17}$$

Cette propriété peut être utilisée pour les protocoles de communication quantique: un message A_m est codé en le mélangeant avec un des modes intriqués (par exemple le mode a) et est donc complètement noyé dans le bruit de ce mode. Le message est décodé à la réception en utilisant les corrélations avec le mode$b$ également transmis par une autre voie [Pereira00].

A.4 Corrélations entre deux modes de polarisation orthogonale

Revenons à l'étude des corrélations produites par notre système entre deux modes de polarisation orthogonale du même faisceau. Les modes a et b décrits ci-dessus

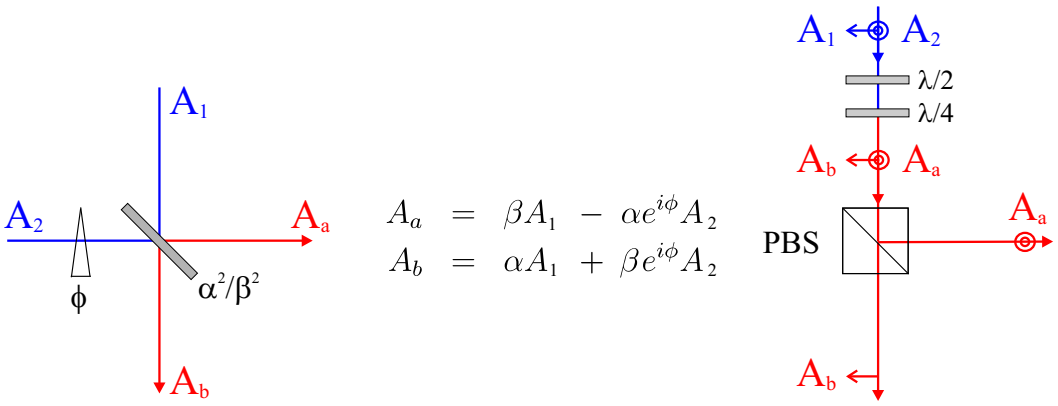


Fig. 5.3 – Analogie entre les relations de passage entre les différentes bases de polarisation et la traversée d'une lame séparatrice.

comme des modes spatialement séparés seront donc dorénavant deux modes de polarisation orthogonale. Les relations de commutation entre ces deux modes sont toujours données par les équations 5-1 et 5-2 et le critère de non-séparabilité s'applique de façon identique.

Notre but est de déterminer quelle est la base de polarisation pour laquelle les corrélations sont maximales et plus généralement de caractériser les propriétés de réduction de bruit et de corrélations dans toutes les bases.

Afin d'interpréter aisément les résultats qui vont suivre, il est important de garder en mémoire l'analogie suivante. Considérons la relation de passage d'une base de polarisation (1,2) à la base de polarisation (a,b) définie par les paramètres α, β et ϕ [Huard97]:

$$\begin{aligned} A_a &= \beta A_1 - \alpha e^{i\phi} A_2 \\ A_b &= \alpha A_1 + \beta e^{i\phi} A_2 \end{aligned} \qquad (5\text{-}18)$$

Celle-ci est équivalente à la relation de passage à travers une lame de coefficient $T = \alpha^2$ et $R = \beta^2$ sur laquelle on combine les modes 1 et 2, ce dernier étant déphasé de ϕ. Cette analogie est illustrée sur la figure 5.3.

Ainsi, s'il existe une base de polarisation pour laquelle les modes 1 et 2 *sont comprimés sur la même quadrature*, on déduit immédiatement des relations 5-14 et 5-15 que les états de polarisation a et b définis par les relation de passages 5-12 et 5-13 sont intriqués. Ces états sont les modes polarisés circulairement par rapport à la base des modes 1 et 2. De plus, si ces modes 1 et 2 sont indépendants, il est clair que les modes a et b sont les modes les plus intriqués. Cependant, s'il existe des corrélations quantiques entre les deux modes 1 et 2, la situation est plus complexe.

Dans notre expérience, le champ sort de la cavité contenant le nuage d'atomes froids avec deux modes de polarisation linéaire comprimés. Néanmoins, il se peut

qu'il existe des corrélations quantiques entre ces deux modes. On peut se demander ce que vaut dans ce cas l'intrication maximale produite par le système.

Pour résoudre ce problème, on peut, bien sûr, utiliser les résultats théoriques obtenus au chapitre précédent par le modèle en "X". Toutefois nous allons montrer que l'on peut adopter une démarche systématique valable quel que soit le système décrit par deux modes du champ afin de déterminer les corrélations maximales qu'il est capable de produire.

B Intrication et réduction de bruit pour un système quelconque

Nous allons chercher à caractériser les propriétés de corrélations quantiques et de réduction de bruit d'un système quelconque dont on ne connaît pas, *a priori*, les mécanismes physiques. Il s'agit de montrer dans cette partie qu'il existe des propriétés valables quel que soit le système considéré. Les résultats généraux démontrés ici seront appliqués par la suite à l'étude des corrélations produites par l'interaction d'un faisceau polarisé linéairement avec des atomes en cavité.

B.1 Généralités sur le critère de non-séparabilité

B.1.1 Formulation du critère

Nous utiliserons tout au long de cet exposé le critère de non-séparabilité développé par Duan *et al.* [Duan00a] et Simon [Simon00] pour quantifier l'intrication entre deux modes. Comme nous l'avions fait pour discuter des fluctuations quantiques de la polarisation, nous considérerons les relations de commutation d'un champ monomode (voir paragraphe A.5 et C.3 du chapitre 1). Cette description est couramment utilisée [Silberhorn01, Bowen03a].

La relation 5-11 donne la formulation du critère de non-séparabilité dans le cas particulier où les quadratures X_a et X_b sont anticorrélées tandis que les quadratures Y_a et Y_b sont corrélées. En général, les corrélations et anticorrélations peuvent apparaître sur des quadratures quelconques, i.e sur les couples $X_a(\theta)$, $X_b(\theta')$ et $Y_a(\theta)$, $Y_b(\theta')$ respectivement. Pour deux modes a et b de polarisation orthogonale, la forme générale du critère s'écrit alors :

S'il existe deux angles θ et θ' tels que :

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta') = \frac{1}{2}[\langle\delta(X_a(\theta)+X_b(\theta'))^2\rangle + \langle\delta(Y_a(\theta)-Y_b(\theta'))^2\rangle] < 2 \quad (5\text{-}19)$$

alors les modes a et b sont intriqués

où $X_{a,b}(\theta) = (A^{\dagger}_{a,b}e^{i\theta} + A_{a,b}e^{-i\theta})$ et $Y_{a,b}(\theta) = X_{a,b}(\theta+\pi/2)$ sont les quadratures des modes a et b, tournées de l'angle θ dans le repère de Fresnel. On développe alors

l'expression de $\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta')$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta') &= \frac{1}{2}[\ \langle\delta X_a^2(\theta)\rangle + \langle\delta X_b^2(\theta')\rangle + 2\langle\delta X_a(\theta)\delta X_b(\theta')\rangle \\ &\quad + \langle\delta Y_a^2(\theta)\rangle + \langle\delta Y_b^2(\theta')\rangle - 2\langle\delta Y_a(\theta)\delta Y_b(\theta')\rangle\ ] \qquad (5\text{-}20)\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie en utilisant les propriétés suivantes:

$$\langle\delta X_a^2(\theta)\rangle + \langle\delta Y_a^2(\theta)\rangle = 2\langle\delta A_a^\dagger\delta A_a + \delta A_a\delta A_a^\dagger\rangle \qquad (5\text{-}21)$$

$$\langle\delta X_b^2(\theta')\rangle + \langle\delta Y_b^2(\theta')\rangle = 2\langle\delta A_b^\dagger\delta A_b + \delta A_b\delta A_b^\dagger\rangle \qquad (5\text{-}22)$$

$$\langle\delta X_a(\theta)\delta X_b(\theta')\rangle - \langle\delta Y_a(\theta)\delta Y_b(\theta')\rangle = 2\langle\delta A_a\delta A_b\rangle e^{-i(\theta+\theta')} + \text{c.c.} \qquad (5\text{-}23)$$

Ces relations montrent que la fonction $\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta')$ ne dépend que de la phase $\theta+\theta'$:

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta') = \mathcal{I}_{a,b}(\frac{\theta+\theta'}{2},\frac{\theta+\theta'}{2}) \qquad (5\text{-}24)$$

Cette propriété fondamentale, illustrée sur la figure5.4 dans le cas particulier des corrélations produites par un oscillateur paramétrique optique de type II, sera discutée au paragraphe suivant. Elle démontre qu'il est possible de restreindre notre étude au cas où $\theta=\theta'$ sans perdre en généralité. Par commodité on pose $\mathcal{I}_{a,b}(\theta,\theta)\equiv\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$. L'avantage de cette transformation, mise à part la simplification des expressions, apparaîtra clairement lorsque nous nous intéresserons à la mesure de cette quantité (voir paragraphe C.1.1).

A partir des relations 5-21 à 5-23, on obtient finalement:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a,b}(\theta) &= \langle\delta A_a^\dagger\delta A_a + \delta A_a\delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger\delta A_b + \delta A_b\delta A_b^\dagger\rangle \\ &\quad + 4|\langle\delta A_a\delta A_b\rangle|\cos(2(\theta-\theta_{a,b})) \qquad (5\text{-}25)\end{aligned}$$

où $2\theta_{a,b}$ est la phase du terme croisé $\langle\delta A_a\delta A_b\rangle$. La valeur minimale, notée $\mathcal{I}_{a,b}$, est atteinte pour $\theta_{min}=\theta_{a,b}\pm\pi/2$ et vaut:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a,b} &\equiv \mathcal{I}_{a,b}(\theta_{min}) = \min_\theta \mathcal{I}_{a,b}(\theta) \\ &= \langle\delta A_a^\dagger\delta A_a + \delta A_a\delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger\delta A_b + \delta A_b\delta A_b^\dagger\rangle - 4|\langle\delta A_a\delta A_b\rangle| \qquad (5\text{-}26)\end{aligned}$$

Avec ces définitions, le critère de non-séparabilité s'écrit simplement sous la forme:

$$\text{Si}\quad \mathcal{I}_{a,b}<2 \quad \text{alors les modes } a \text{ et } b \text{ sont intriqués} \qquad (5\text{-}27)$$

Si on cherche à quantifier l'intrication de ces deux modes, celle-ci doit rester inchangée lorsque l'on effectue des déphasages sur les modes a et b séparément. D'après la relation 5-26, il est clair que $\mathcal{I}_{a,b}$ vérifie cette propriété. Si on pose $A_{a'}=$

$e^{i\theta_a}A_a$ et $A_{b'} = e^{i\theta_b}A_b$, alors $X_{a'}(\theta) = X_a(\theta - \theta_a)$ et $X_{b'}(\theta) = X_b(\theta - \theta_b)$ et la valeur $\mathcal{I}_{a',b'}$ devient:

$$\mathcal{I}_{a',b'}(\theta) = \mathcal{I}_{a,b}(\theta - \theta_a, \theta - \theta_b) = \mathcal{I}_{a,b}(\theta - (\theta_a + \theta_b)/2) \tag{5-28}$$

La seconde égalité découle directement de l'identité 5-24. Nous retrouvons ainsi la propriété:

$$\mathcal{I}_{a',b'} = \min_{\theta} \mathcal{I}_{a',b'}(\theta) = \mathcal{I}_{a,b} \tag{5-29}$$

Ainsi, l'intrication est bien indépendante des déphasages relatifs que peuvent subir les modes a et b. Cette propriété n'est bien sûr pas suffisante pour que la valeur $\mathcal{I}_{a,b}$ constitue une mesure de l'intrication. Néanmoins, il a été montré récemment par Giedke *et al.* [Giedke03] que, pour des états gaussiens symétriques, la fonction $\mathcal{I}_{a,b}$ était directement reliée à la notion de "d'intrication de formation" et donc à une mesure de l'intrication [Josse03c].

Dans toute la suite de ce chapitre, *nous prendrons donc la valeur* $\mathcal{I}_{a,b} = \min_\theta \mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ *comme caractérisation de l'intrication entre deux modes* a *et* b. Pour des états gaussiens non-symétriques, cette caractérisation n'est pas une mesure de l'intrication, mesure qu'il reste encore à définir pour de tels états.

B.1.2 Un exemple: l'oscillateur paramétrique optique non dégénéré

Afin de clarifier la signification de l'égalité 5-24, nous nous intéressons ici aux corrélations produites par un oscillateur paramétrique optique (OPO) de type II dégénéré en fréquence. Au dessus du seuil, les modes signal S et complémentaire C, polarisés orthogonalement, sont fortement corrélés en amplitude et anticorrélés en phase [Reynaud87]. On représente habituellement ces corrélations dans le diagramme de Fresnel où l'on choisit la phase globale telle que $\theta_s = -\theta_c = \theta_0$ (voir figure 5.4). Les quadratures d'amplitude et de phase correspondant à $X_s(\theta_0)$ et $Y_s(\theta_0)$ pour le signal et $X_c(-\theta_0)$ et $Y_c(-\theta_0)$ pour le complémentaire sont celles qui correspondent à l'intrication maximale. Les corrélations entre ces quadratures donnent:

$$\frac{1}{2}[\langle \delta(X_s(\theta_0) - X_c(-\theta_0))^2 \rangle + \langle \delta(Y_s(\theta_0) + Y_c(-\theta_0))^2 \rangle] < 2 \tag{5-30}$$

$$\text{c'est à dire} \quad \mathcal{I}_{s,c}(\theta_0, -\theta_0 + \pi) \; < \; 2 \tag{5-31}$$

En utilisant maintenant la relation 5-28, nous obtenons:

$$\mathcal{I}_{s,c}(\theta_0, -\theta_0 + \pi) = \mathcal{I}_{s,c}(\frac{\pi}{2}) < 2 \tag{5-32}$$

Cette égalité nous dit que les quadratures $Y_s = X_s(\pi/2)$ et $Y_c = X_c(\pi/2)$ sont également anticorrélées tandis que les quadratures $-X_s = Y_s(\pi/2)$ et $-X_c = Y_c(\pi/2)$ sont corrélées, comme indiqué sur la figure 5.4.

Ainsi, il est toujours possible de se ramener à des quadratures corrélées ou anticorrélées pour la même phase θ. Dans le cas particulier présenté ci-dessus $\theta = \pi/2$.

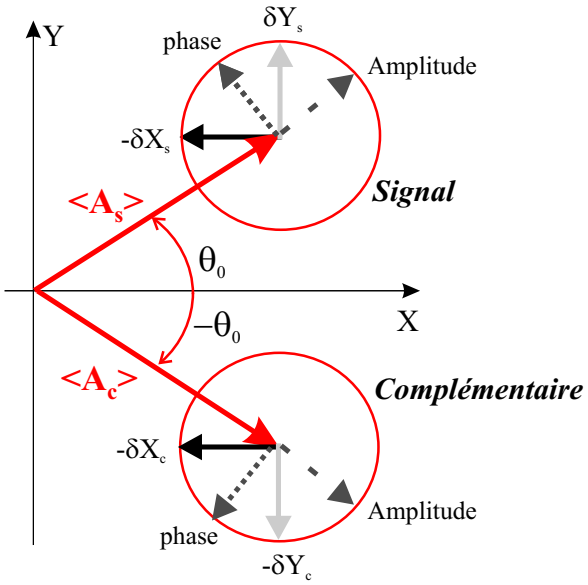


Fig. 5.4 – Illustration de la propriété 5-28 dans le cas des corrélations générées par un OPO de type II. Les corrélations d'intensité et de phase se traduisent par des corrélations entre les quadratures X_s et X_c et des anticorrélations entre les quadratures Y_s et Y_c.

B.2 Recherche de l'intrication maximale

Dans le cas général, notre but est de trouver la base de polarisation, composée des modes a et b, pour laquelle la valeur de l'intrication $\mathcal{I}_{a,b}$ donnée par la relation 5-26 est minimale. Les modes correspondants sont les modes les plus intriqués du système et seront notés a^* et b^*.

Il est aisé de montrer que le premier terme de la relation 5-26 est indépendant du choix de la base a et b. Celui-ci est en effet donné par la trace de la matrice de corrélation $[V]$ (introduite dans le cadre du calcul des propriétés quantiques du système au chapitre 4):

$$\langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle = tr([V]) \geq 2 \qquad (5\text{-}33)$$

Il est bien connu que la trace d'une matrice est invariante par changement de base. Si on remplace δA_a et δA_b par A_a et A_b, cette propriété exprime la conservation de l'intensité dans toutes les bases de polarisation. Cette quantité est supérieure ou égale à 2. En utilisant la relation d'incertitude de Heisenberg dans l'équation 5-21, nous obtenons en effet:

$$\langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger \rangle = \frac{1}{2}(\langle \delta X_a^2 \rangle + \langle \delta Y_a^2 \rangle) \geq \frac{1}{2}|\langle [X_a, Y_a] \rangle| = 1 \qquad (5\text{-}34)$$

Revenons à la valeur de l'intrication $\mathcal{I}_{a,b}$ entre deux modes a et b. D'après l'analyse précédente, celle-ci est uniquement caractérisée par le terme croisé $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$.

D'après la relation 5-26, la base des états les plus intriqués (a^*,b^*) correspond donc à la base de polarisation pour laquelle cette quantité est maximale:

$$|\langle \delta A_{a^*} \delta A_{b^*} \rangle| = \max_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| \tag{5-35}$$

B.2.1 Existence d'une base de polarisation "décorrélée"

Afin d'évaluer le terme $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$ pour une base de polarisation quelconque, nous introduisons une base de référence (u,v). Deux modes a et b de polarisation orthogonale quelconques se décomposent sur cette base (voir relation 5-18):

$$A_a = \beta A_u - \alpha e^{i\phi} A_v \tag{5-36}$$
$$A_b = \alpha A_u + \beta e^{i\phi} A_v \tag{5-37}$$

où α, β et ϕ sont des nombres réels. α, β sont choisis positifs et vérifient $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Nous n'avons pas considéré ici de phase relative entre les modes$a$ et b, car nous avons vu que cette donnée n'est pas pertinente pour l'optimisation des corrélations (voir relation 5-29).

Nous montrons dans l'appendice D qu'il est toujours possible de choisir une base telle que:

$$\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0 \tag{5-38}$$

Ces modes u et v ne sont pas, *a priori*, décorrélés puisque le terme $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ peut être non nul. Néanmoins, nous les appellerons par la suite les modes "décorrélés", à comprendre par rapport au critère de non-séparabilité. En effet, ces modes ne sont jamais intriqués et vérifient d'après les relations 5-26 et 5-33:

$$\mathcal{I}_{u,v} = \langle \delta A_u^\dagger \delta A_u + \delta A_u \delta A_u^\dagger + \delta A_v^\dagger \delta A_v + \delta A_v \delta A_v^\dagger \rangle = tr([V]) \geq 2 \tag{5-39}$$

Comme $|\langle \delta A_u \delta A_v \rangle| = 0$, cette valeur est de fait minimale, comparée aux autres bases de polarisation:

$$|\langle \delta A_u \delta A_v \rangle| = \min_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| = 0 \tag{5-40}$$

La quantité $\mathcal{I}_{u,v}$ est donc maximale et ces modes sont bien les moins corrélés du système:

$$\mathcal{I}_{u,v} = \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} \tag{5-41}$$

Ce choix de base n'est évidemment pas unique puisque tous les modes $A'_u = e^{i\theta_{u'}} A_u$ et $A'_v = e^{i\theta_{v'}} A_v$ vérifient aussi $\langle \delta A'_u \delta A'_v \rangle = 0$. Afin de lever toute indétermination, on choisit par la suite les modes u et v tels que $\langle \delta A_u^2 \rangle$ et $\langle \delta A_v^2 \rangle$ soient des nombres réels positifs. On rappelle l'expression du bruit des quadratures de ces deux modes:

$$\langle \delta X_u^2(\theta) \rangle = \langle \delta A_u^\dagger \delta A_u + \delta A_u \delta A_u^\dagger \rangle + 2\langle \delta A_u^2 \rangle \cos 2\theta \tag{5-42}$$
$$\langle \delta X_v^2(\theta) \rangle = \langle \delta A_v^\dagger \delta A_v + \delta A_v \delta A_v^\dagger \rangle + 2\langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\theta \tag{5-43}$$

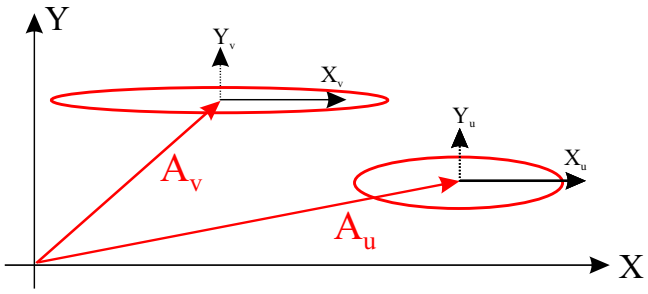


Fig. 5.5 – Représentation des deux modes u et v dans le diagramme de Fresnel. La référence de phase est choisie de telle sorte que les bruits minimaux correspondent à la quadrature Y.

Ces relations montrent que les modes u et v atteignent leur bruit minimal pour la même quadrature repérée par $\theta = \pi/2$, i.e. la quadrature Y, ce qu'illustre la figure 5.5. On ne considère pas ici la phase des champs moyens A_u et A_v, la quadrature Y n'est donc pas reliée aux quadratures de phase ou d'amplitude de ces modes. Suivant nos notations, les bruits minimaux s'écrivent alors:

$$\langle \delta X_u^2 \rangle_{min} = \langle \delta A_u^\dagger \delta A_u + \delta A_u \delta A_u^\dagger \rangle \; - \; 2\langle \delta A_u^2 \rangle \tag{5-44}$$

$$\langle \delta X_v^2 \rangle_{min} = \langle \delta A_v^\dagger \delta A_v + \delta A_v \delta A_v^\dagger \rangle \; - \; 2\langle \delta A_v^2 \rangle \tag{5-45}$$

B.2.2 Intrication maximale

Revenons à la quantité à maximiser $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$ qui s'écrit en fonction des paramètres α, β et ϕ (voir relation 5-37):

$$|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|^2 \; = \; \alpha^2 \beta^2 \left[\, \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \langle \delta A_v^2 \rangle^2 - 2\langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \, \right] \tag{5-46}$$

où l'on a utilisé le fait que $\langle \delta A_u^2 \rangle$ et $\langle \delta A_v^2 \rangle$ sont des réels positifs. Il est clair que cette valeur est maximale pour $\phi = (\pi/2)_{[\pi]}$ et $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Les modes les plus intriqués que nous notons a^* et b^* s'écrivent donc:

$$A_{a^*} \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\, A_u \; - \; i A_v \, \right) \tag{5-47}$$

$$A_{b^*} \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\, A_u \; + \; i A_v \, \right) \tag{5-48}$$

Cette relation de passage est équivalente à la relation des états polarisés linéairement aux états de polarisation circulaire (voir appendice A). C'est pourquoi nous appellerons par la suite les modes a^* et b^*, les modes polarisés "circulairement" par rapport aux modes u et v. D'après 5-46 ces modes vérifient:

$$|\langle \delta A_{a^*} \delta A_{b^*} \rangle| = \max_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| = \frac{1}{2} \left[\, \langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle \, \right] \tag{5-49}$$

En reportant cette valeur dans l'expression 5-26 et en utilisant les équations 5-44, 5-45 et la relation de conservation 5-33, on obtient finalement l'expression de l'intrication maximale du système. Celle-ci est égale à la somme des bruits minimaux des modes "décorrélés" u et v:

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} \equiv \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} \qquad (5\text{-}50)$$

B.2.3 Interprétation

Les modes u et v ne sont, *a priori*, pas indépendants ($\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle \neq 0$) mais ils sont "décorrélés" au sens du critère de non-séparabilité car ils vérifient la relation 5-38.

De fait, tout se passe comme si ces deux modes étaient réellement indépendants. On interprète alors aisément les résultats en revenant à l'analogie discutée au paragraphe A.4 entre le changement de base de polarisation et la combinaison de deux faisceaux sur une lame séparatrice. Les modes u et v étant comprimés sur la même quadrature (Y), on génère des faisceaux intriqués en les mélangeant sur une lame 50/50 après avoir introduit un déphasage de $\pi/2$ sur un des modes (voir relations 5-12 et 5-13). Cette transformation revient à passer de la base de polarisation (u,v) à la base (a^*,b^*). Ces modes sont polarisés "circulairement" par rapport aux modes u et v et sont naturellement les modes les plus intriqués. La valeur de l'intrication maximale est alors donnée par la somme des bruits minimaux des modes$u$ et v (voir relation 5-50). Nous avons illustré cette équivalence sur la partie (a) de la figure 5.6 dans le cas général où les modes u et v ne sont pas symétriques.

Nous avons ainsi établi un lien formel entre les corrélations quantiques d'un système quelconque (à deux modes) et celles produites par le mélange de deux faisceaux indépendants. Cette analogie, déjà mise en lumière sur des systèmes particuliers comme l'amplificateur paramétrique optique de type II [Lugiato02], est ici généralisée à des systèmes quelconques.

Notre analyse est particulièrement intéressante dans le cas où les corrélations sont produites par un même système, considéré comme une boite noire. Pour déterminer les corrélations, il faut tout d'abord trouver une base du type (u,v). Une formule explicite de ces modes est donnée dans l'appendice D. Expérimentalement, nous montrerons par la suite que nous sommes capables de mesurer la quantité $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ pour n'importe quelle base de polarisation (a,b). Il existe alors une signature expérimentale claire d'une base "décorrélée": d'après les relations 5-25 et 5-38 cette quantité $\mathcal{I}_{u,v}$ ne dépend pas de θ. Une fois cette base identifiée, il faut déphaser ces modes de façon à ce qu'ils soient comprimés pour la même quadrature. On caractérise alors immédiatement les modes les plus intriqués (relation 5-48) et la valeur de leur intrication (relation 5-50).

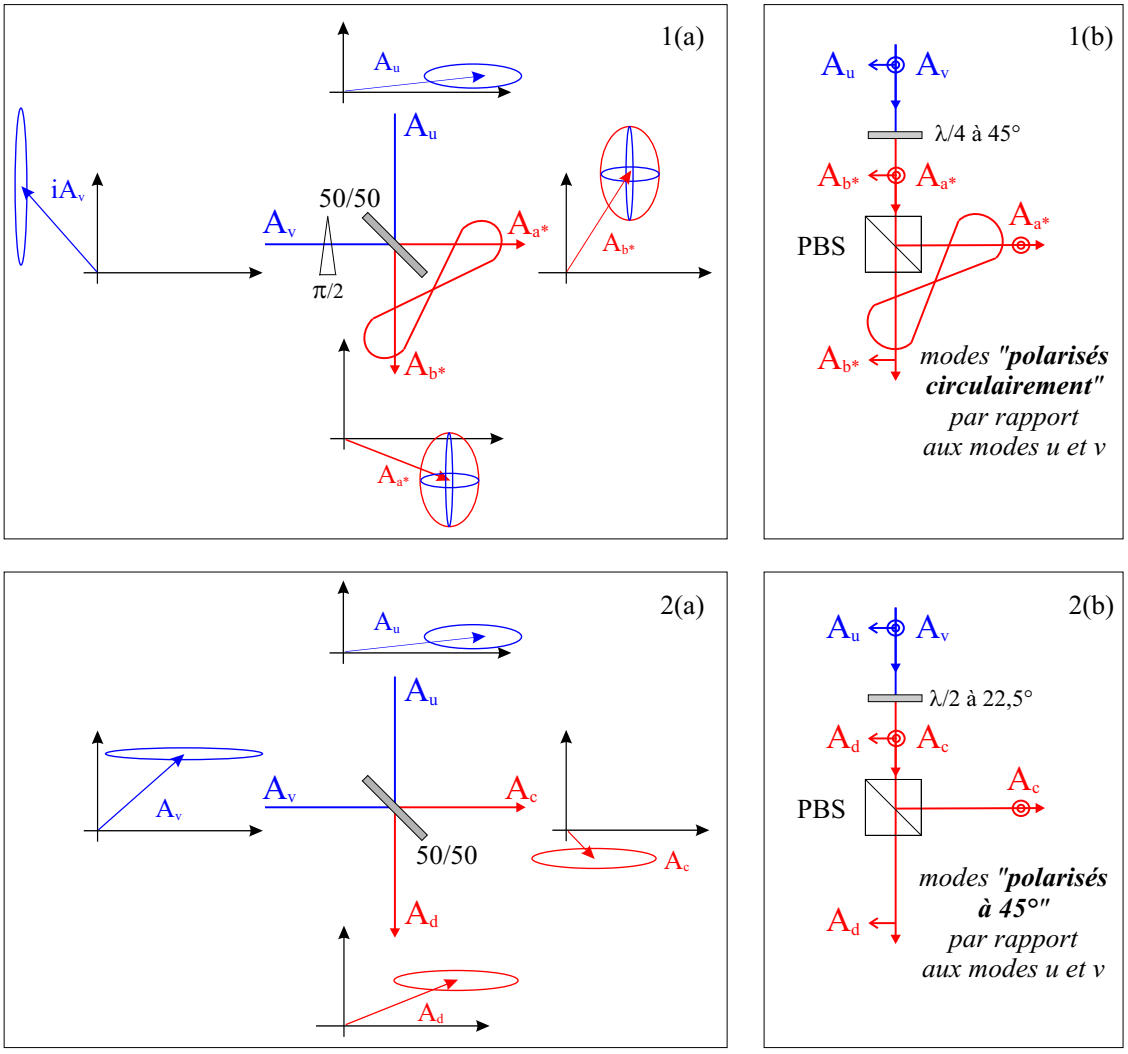


Fig. 5.6 – Interprétation des propriétés de corrélations et de bruits en utilisant l'analogie avec la combinaison de deux faisceaux sur une lame séparatrice (voir figure5.3). Partie 1(a): génération d'états intriqués en faisant interférer deux modes comprimés sur des quadratures orthogonales. La lame 50/50 mélange les quadratures bruyantes et comprimées des modes u et v. A la sortie les champs a et b* sont bruyants mais corrélés. Partie 1(b): équivalence en terme de base de polarisation. Les modes intriqués sont les modes "polarisés circulairement" par rapport aux modes u et v. Supposons les modes u et v polarisés suivant les directions horizontale et verticale. Afin de séparer les modes a* et b*, il faut placer une lame quart d'onde sur le trajet du faisceau. A la sortie de cette lame, les modes anciennement polarisés circulairement se retrouvent polarisés suivant les directions verticales et horizontales (voir appendice A) et peuvent être séparés à l'aide d'un cube polariseur. Partie 2(a): si les modesu et v interfèrent maintenant avec un déphasage nul sur la lame, on ne mélange pas les quadratures bruyantes et comprimées et la réduction de bruit se conserve sur les modesc et d. Partie 2(b): la transformation précédente est équivalente à la traversée d'une lame demi-onde tournée à 22.5°. Les modes c et d sont dans ce cas les modes "polarisés à 45° " par rapport aux modes u et v. On a représenté ici le cas le général pour lesquels les modes u et v ne sont pas symétriques.*

Cette méthode permet, par exemple, de caractériser les corrélations maximales produites par un oscillateur paramétrique optique (OPO) dans lequel on a inséré des éléments biréfringents [Longchambon03a, Longchambon03b].

B.3 Lien avec la réduction de bruit

B.3.1 Réduction de bruit pour deux modes

Nous avons vu qu'il existait un lien étroit entre l'intrication et la réduction de bruit (voir équation 5-50). De manière générale, la valeur $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ définie pour les modes a et b s'exprime comme la somme des bruits de deux modes de polarisation orthogonale:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b}(\theta) &= \langle \delta X_1^2(\theta) \rangle + \langle \delta X_2^2(\theta) \rangle \qquad (5\text{-}51) \\ \text{avec} \quad A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a + A_b) \\ A_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(A_a - A_b) \end{aligned}$$

Les modes a et b sont les modes polarisés "circulairement" par rapport aux modes 1 et 2. La valeur de l'intrication maximale est donc également la meilleure somme de bruit minimaux de deux modes orthogonaux produite par le système, à savoir la somme des bruits minimaux des modes u et v:

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \min_{1,2} \{ \langle \delta X_1^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_2^2 \rangle_{min} \} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} \qquad (5\text{-}52)$$

Afin d'étudier l'évolution de cette réduction de bruit en fonction des différentes bases de polarisation, on estime la réduction de bruit pour une base de polarisation quelconque, définie par les modes a et b. On note $\Sigma_{a,b}$ la somme de leur bruits minimaux respectifs:

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,b} &\equiv \langle \delta X_a^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_b^2 \rangle_{min} \qquad (5\text{-}53) \\ &= \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle - 2 \left[|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle| \right] \qquad (5\text{-}54) \end{aligned}$$

D'après la relation de conservation 5-33 le premier terme est constant et la somme $\Sigma_{a,b}$ ne dépend que de la quantité $|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|$. Afin de minimiser la somme des bruits, il faut maintenant maximiser cette quantité. Pour une base de polarisation repérée par les paramètres α, β et ϕ suivant la relation de passage 5-37, nous obtenons:

$$\begin{aligned} |\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 &= \beta^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \alpha^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2\beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \qquad (5\text{-}55) \\ |\langle \delta A_b^2 \rangle|^2 &= \alpha^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \beta^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2\beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \qquad (5\text{-}56) \end{aligned}$$

α et β étant fixés, $|\langle \delta A_a^2 \rangle|$ et $|\langle \delta A_b^2 \rangle|$ atteignent leur valeur maximale pour $\phi = 0_{[\pi]}$. Dans ce cas la relation de passage 5-37 est identique à celle du passage d'une base

de polarisation linéaire à une autre base de polarisation, également linéaire. C'est pourquoi, nous appellerons par la suite les modes définis par $\phi = 0$, les modes polarisés "linéairement" par rapport aux modes u et v. Ils vérifient alors:

$$|\langle \delta A_a^2 \rangle|_{\phi=0} = \beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle + \alpha^2 \langle \delta A_v^2 \rangle \quad \text{et} \quad |\langle \delta A_b^2 \rangle|_{\phi=0} = \alpha^2 \langle \delta A_u^2 \rangle + \beta^2 \langle \delta A_v^2 \rangle \quad (5\text{-}57)$$

La quantité $|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|$ est alors maximale et indépendante des coefficients α et β:

$$[|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|]_{\phi=0} = \max_{a,b}[|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|] = \langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle \quad (5\text{-}58)$$

La somme des bruits minimaux n'est donc pas uniquement minimale pour les modes u et v (relation 5-52), mais aussi pour tous les modes "polarisés linéairement" par rapport aux modes u et v, d'après la formule 5-54. On la note Σ_{min}:

$$\Sigma_{min} = (\Sigma_{a,b})_{\phi=0} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} \quad (5\text{-}59)$$

Ce résultat s'interprète très simplement: la relation de passage entre les modes polarisés "linéairement" et la base (u,v) est équivalente au mélange sur une lame séparatrice des deux modes u et v lorsque le déphasage est nul ($\phi = 0$) (voir partie (b) de la figure 5.6). Les modes u et v étant comprimés pour la même quadrature, il n'y a pas de mélange entre les quadratures bruyantes et comprimées à la sortie de la lame: la réduction de bruit est donc conservée.
Afin de poursuivre l'étude de l'évolution de la réduction de bruit lorsque l'on change de base de polarisation, on peut se demander quelle est la base de polarisation pour laquelle la réduction de bruit est la plus faible. Il est clair sur la partie (a) de la figure 5.6, que les modes les plus intriqués a^* et b^* sont, *a priori*, bruyants. Ces modes sont polarisés "circulairement" par rapport à la base (u,v) ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ et $\phi = \pi/2$) et les quadratures bruyantes et comprimées des modes u et v ont été mélangées. On peut montrer que la somme des bruits minimaux est, en effet, maximale pour ces modes, i.e. leur réduction de bruit est la plus faible. Pour cela, considérons la quantité $|\langle \delta A_{a^*}^2 \rangle| + |\langle \delta A_{b^*}^2 \rangle|$. A partir des relations 5-55 et 5-56, nous obtenons:

$$|\langle \delta A_{a^*}^2 \rangle| + |\langle \delta A_{b^*}^2 \rangle| = |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle| \quad (5\text{-}60)$$

Il est possible de démontrer que cette quantité est, en fait, minimale par rapport aux autres bases de polarisation:

$$|\langle \delta A_{a^*}^2 \rangle| + |\langle \delta A_{b^*}^2 \rangle| = \min_{a,b} \left(|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle| \right) \quad (5\text{-}61)$$

C'est pourquoi la somme de leur bruit minimaux Σ_{a^*,b^*} est, d'après la relation 5-54, la plus élevée que l'on puisse obtenir. Par la suite, on appellera Σ_{max} cette somme de bruit:

$$\Sigma_{max} = \Sigma_{a^*,b^*} = \max_{a,b} \Sigma_{a,b} \quad (5\text{-}62)$$

En supposant $\langle \delta A_u^2 \rangle \geq \langle \delta A_v^2 \rangle$, on obtient à partir des équations 5-61 et 5-54:

$$\Sigma_{max} = \langle \delta X_{a^*}^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_{b^*}^2 \rangle_{min} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{max} \tag{5-63}$$

De manière générale, cette somme vaut:

$$\Sigma_{max} = \min\{ \ (\langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{max}) \ , \ (\langle \delta X_u^2 \rangle_{max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min}) \ \} \tag{5-64}$$

Cette analyse montre que les modes les plus intriqués sont ceux qui ont une réduction de bruit la plus faible. Inversement les modes u et v, qui sont les modes "décorrélés", possèdent la plus forte réduction de bruit. Formellement, il existe en fait une relation entre les quantités $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$ et $|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|$ dont dépendent respectivement les quantités $\mathcal{I}_{a,b}$ et $\Sigma_{a,b}$:

$$|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 + |\langle \delta A_b^2 \rangle|^2 + 2|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|^2 = \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \langle \delta A_v^2 \rangle^2 = \text{constante} \tag{5-65}$$

Cette égalité montre bien que l'intrication augmente quand la réduction de bruit diminue et vice versa.

B.3.2 Réduction de bruit pour un seul mode

Nous avons étudié jusqu'à présent la somme des bruits de deux modes. On peut se demander quelle est la réduction de bruit optimale qu'il est possible d'obtenir *pour un seul mode* de polarisation. Cette étude n'est pas triviale car les deux modes u et v ne sont pas, *a priori*, indépendants. En effet $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ peut être différent de zéro.

Nous cherchons donc ici à minimiser le bruit d'un mode$a$, combinaison des modes u et v, et repéré par les paramètres α, β et ϕ (voir relation 5-37). Son bruit sur une quadrature quelconque est donné par

$$\langle \delta X_a^2(\theta) \rangle = \beta^2 \langle \delta X_u^2(\theta) \rangle + \alpha^2 \langle \delta X_v^2(\theta - \phi) \rangle - 2\alpha\beta \langle \delta X_u(\theta) \delta X_v(\theta - \phi) \rangle \tag{5-66}$$

Le terme de corrélation s'écrit en utilisant la relation 5-38:

$$\langle \delta X_u(\theta) \delta X_v(\theta - \phi) \rangle = \langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle e^{-i\phi} + \langle \delta A_u^\dagger \delta A_v \rangle e^{+i\phi} = 2\cos(\phi_C - \phi) |\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle| \tag{5-67}$$

où ϕ_C est la phase de $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$. Nous n'avons pas trouvé de solution simple dans le cas général. On peut toutefois calculer le bruit minimal si on suppose que $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ est un nombre réel ($\phi_C = 0$). Par commodité, on le choisit positif.

Nous rappelons que les modes u et v ont été choisis de manière à ce que leur bruit soit minimal pour la même quadrature $\theta = \pi/2$. D'après la relation 5-67, les trois termes de l'équation 5-66 atteignent donc leur minimum pour cette valeur de

θ si le déphasage ϕ est nul. Le mode possédant la meilleure réduction de bruit est donc polarisé "linéairement" par rapport aux modes u et v ($\phi = 0$). Après quelques calculs, que nous ne détaillerons pas ici, nous obtenons l'expression de la meilleure réduction de bruit pour un mode du champ:

$$\min_a\{\langle\delta X_a^2\rangle_{min}\} = \frac{1}{2}\{\ \langle\delta X_u^2\rangle_{min}\ +\ \langle\delta X_v^2\rangle_{min} - \sqrt{(\langle\delta X_u^2\rangle_{min} - \langle\delta X_v^2\rangle_{min})^2 + 16\langle\delta A_u \delta A_v^\dagger\rangle^2}\ \} \quad (5\text{-}68)$$

Ce résultat n'est pas surprenant. Si les modes u et v ne sont pas indépendants, il est donc possible d'exploiter la corrélation entre les modes u et v ($\langle\delta A_u \delta A_v^\dagger\rangle \neq 0$) pour obtenir une réduction de bruit sur un mode plus importante que celle des modes u et v.

En revanche, si $\langle\delta A_u \delta A_v^\dagger\rangle = 0$, alors les modes u et v sont complètement indépendants et la meilleure réduction de bruit est donnée par celle des modes u ou v:

$$\min_a\langle\delta X_a^2\rangle_{min} = \min\{\langle\delta X_u^2\rangle_{min}, \langle\delta X_v^2\rangle_{min}\} \quad (5\text{-}69)$$

B.4 Résumé des propriétés dans la sphère de Poincaré

Ce paragraphe a pour but de résumer les propriétés de corrélation et de réduction de bruit du système pour les différentes bases de polarisation. Cette présentation constitue un inventaire qui nous servira de référence par la suite. Pour simplifier la lecture, nous écrirons les formules essentielles qui, pour la plupart, ont été démontrées dans les paragraphes précédents.

Afin d'exposer les résultats, il est utile d'introduire la sphère de Poincaré classique. La base des modes "décorrélés" est la base naturelle pour effectuer cette étude. On définit alors les paramètres de Stokes classiques S'_i à l'aide des modes u et v:

$$\begin{aligned} S'_0 &= A_u^* A_u + A_v^* A_v \quad S'_1 = A_u^* A_u - A_v^* A_v \\ S'_2 &= A_u^* A_v + A_v^* A_u \quad S'_3 = i(A_v^* A_u - A_u^* A_v) \end{aligned}$$

Nous avons vu au paragraphe C.2.2 du chapitre 1 que l'on pouvait représenter un état de polarisation par un vecteur de longueur de S'_0 sur cette sphère. Ici les paramètres de Stokes sont définis par rapport aux modes u et v et non par rapport aux modes x et y comme nous l'avions fait dans l'introduction de ce manuscrit. Les pôles correspondent donc maintenant aux modes polarisés "circulairement" par rapport aux modes u et v, c'est à dire les modes a^* et b^*. De même les modes polarisés "linéairement" (toujours par rapport aux modes u et v) sont représentés par les vecteurs contenus dans le plan équatorial. De manière générale, nous avons vu que deux modes de polarisation orthogonale correspondent à deux vecteurs diamètralement opposés. Une base de polarisation quelconque est donc représentée par un diamètre

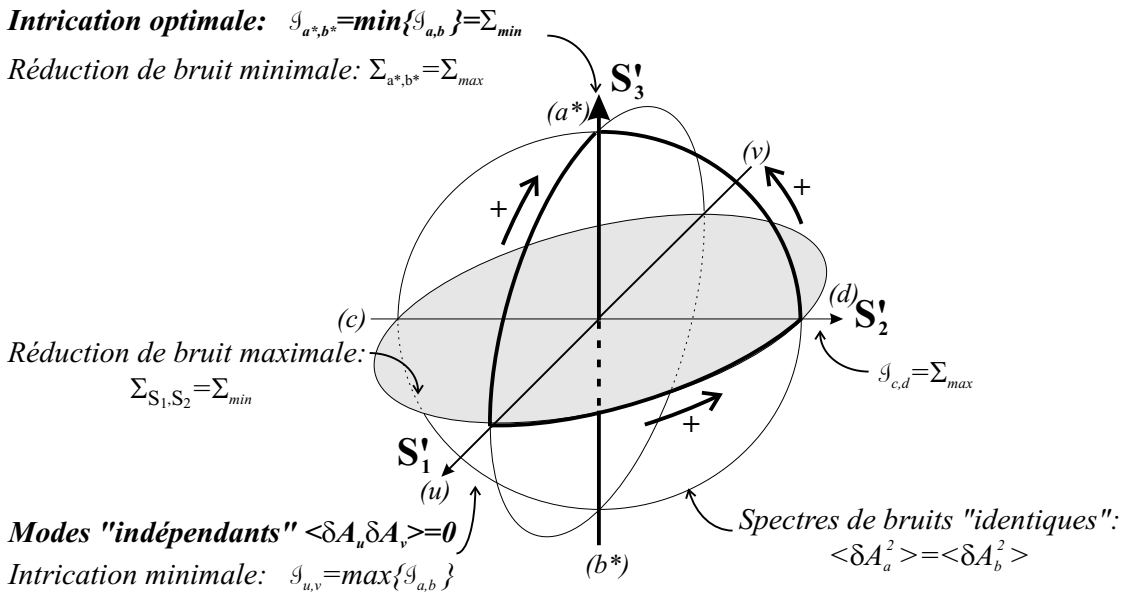


Fig. 5.7 – Représentation des propriétés quantiques du système dans la sphère de Poincaré définie par rapport aux modes u et v. Ces derniers sont "décorrélés". Les modes les plus intriqués sont situés aux pôles: a et b*. Ces diverses propriétés sont détaillées dans le corps du texte. Le sens des flèches correspond à l'augmentation des corrélations.*

de cette sphère de Poincaré.

Nous nous intéressons ici à l'évolution de la somme des bruits minimaux $\Sigma_{a,b}$ et de l'intrication $\mathcal{I}_{a,b}$ lorsqu'on se déplace sur cette sphère (voir figure 5.7). On rappelle les expressions de ces valeurs pour une base de polarisation quelconque définie par les paramètres α, β et ϕ (voir équations 5-37, 5-26 et 5-54):

$$\mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle - 4|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| \quad (5\text{-}70)$$

$$\Sigma_{a,b} = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle - 2[|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|] \quad (5\text{-}71)$$

Celles-ci dépendent uniquement des valeurs $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$ et $|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|$. Pour une base de polarisation quelconque, on obtient (équations 5-46, 5-55 et 5-56):

$$|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|^2 = \alpha^2\beta^2[\ \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \langle \delta A_v^2 \rangle^2 - 2\langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi\ ] \quad (5\text{-}72)$$

$$|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 = \beta^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \alpha^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2\beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \quad (5\text{-}73)$$

$$|\langle \delta A_b^2 \rangle|^2 = \alpha^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \beta^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2\beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \quad (5\text{-}74)$$

1. ***Axe*** S_1'***:*** modes u et v ($\alpha = 0$, $\beta = 1$).
   Ce sont les modes "décorrélés" pour lesquels la valeur de l'intrication et la plus faible ($\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$)(voir équation 5-39):

$$\mathcal{I}_{u,v} = \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta A_u^\dagger \delta A_u + \delta A_u \delta A_u^\dagger + \delta A_v^\dagger \delta A_v + \delta A_v \delta A_v^\dagger \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\{\langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_u^2 \rangle_{max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{max}\} \quad (5\text{-}75)$$

   Ces modes se caractérisent par le fait que la valeur $\mathcal{I}_{u,v}(\theta)$ ne dépend plus de la phase θ. Leur quadrature de bruit minimale est la quadrature Y par définition: $\langle \delta A_u^2 \rangle$ et $\langle \delta A_v^2 \rangle$ sont réels et positifs. Ce choix a permis de simplifier les calculs, cependant nous insistons sur le fait qu'il est seulement nécessaire que les phases de leur quadrature de bruit minimal soient identiques pour les résultats présentés ici restent juste. Leur somme de réduction de bruit est la meilleure qu'il est possible d'obtenir et vaut Σ_{min}:

$$\Sigma_{min} = \min_{a,b} \Sigma_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} \quad (5\text{-}76)$$

2. ***Plan équatorial*** (S'_1, S'_2)***:*** modes polarisés linéairement ($\phi = 0$).
La somme de la réduction de bruit est maximale pour toutes les bases de polarisation situées dans ce plan et vaut Σ_{min} (équation 5-58):

$$(|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|)_{S'_1,S'_2} = \langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle \quad (5\text{-}77)$$

$$\text{d'où} \quad \Sigma_{S'_1,S'_2} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} = \Sigma_{min} \quad (5\text{-}78)$$

Par contre la valeur de l'intrication dépend des valeurs respectives de α et β et on a d'après 5-46:

$$|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|_{S'_1,S'_2} = \alpha\beta |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle| \quad (5\text{-}79)$$

Dans ce plan, l'intrication est maximale pour les modes polarisés à "45°" par rapport aux modes u,v ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$). Afin d'éviter toute confusion dans la suite de l'exposé avec les modes polarisés à 45° par rapport aux modes x,y, on les note ici c et d. Leur intrication est égale à la valeur maximale prise par la somme des bruits minimaux Σ_{max} (équation 5-64):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{c,d} &= \Sigma_{max} \\ &= \min\{ \ (\langle \delta X_u^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{max}) \ , \ (\langle \delta X_u^2 \rangle_{max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{min}) \ \} \end{aligned} \quad (5\text{-}80)$$

3. ***Axe*** S'_3***:*** modes polarisés circulairement a^* et b^* ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ et $\phi = \pi/2$).
Ce sont les modes les plus intriqués du système et leur intrication est égale à la meilleure réduction de bruit Σ_{min} (équation 5-50):

$$|\langle \delta A_{a^*} \delta A_{b^*} \rangle| = \max_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| = \frac{1}{2}[\ \langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle \ ] \quad (5\text{-}81)$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{I}_{a^*,b^*} \ \equiv \ \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} \ = \ \langle \delta X_u^2 \rangle_{min} \ + \ \langle \delta X_v^2 \rangle_{min} \quad (5\text{-}82)$$

En revanche, leur réduction de bruit est la moins bonne (équation 5-63):

$$|\langle \delta A_{a^*}^2 \rangle| = |\langle \delta A_{b^*}^2 \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle| \quad (5\text{-}83)$$

$$\text{d'où} \quad \langle \delta X_{a^*}^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_{b^*}^2 \rangle_{min} = \Sigma_{max} \quad (5\text{-}84)$$

4. ***Plan méridien*** S'_2, S'_3***:*** modes elliptiques à 45° ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$).
Ces modes sont des combinaisons à poids égaux des modes u et v; ils vérifient:

$$\langle \delta A_a^2 \rangle_{S'_2,S'_3} = \langle \delta A_b^2 \rangle_{S'_2,S'_3} = \frac{1}{2}(\langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle e^{2i\phi}) \quad (5\text{-}85)$$

La norme de la quantité $\langle \delta A_a^2 \rangle$ caractérise l'amplitude de l'oscillation du bruit entre sa valeur maximale et minimale. En outre sa phase définit la quadrature comprimée; le bruit des modes a et b oscillent donc en phase et avec la même amplitude. A priori, les spectres de bruits ne sont toutefois pas identiques: la différence du niveau moyen de bruit est reliée à la corrélation des modes u et v: $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$. On déduit des équations 5-66 et 5-67:

$$\langle \delta X_b(\theta)^2 \rangle - \langle \delta X_a(\theta)^2 \rangle = 2\langle \delta X_u(\theta) \delta X_v(\theta - \phi) \rangle = 4\cos(\phi_C - \phi) |\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle| \tag{5-86}$$

où ϕ_C est la phase de $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$. C'est pourquoi, seuls les modes a et b de la base définie par $\phi = \phi_C + \pi/2$ ont des spectres de bruit parfaitement identiques.

5. ***Axe*** S_2'***:*** modes c et d ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2},\ \phi = 0$)
   Cet axe est l'intersection des plans (S_1', S_2') et (S_2', S_3'), les propriétés de ces modes ont donc déjà été détaillées. Nous les rappelons ici. Ils sont symétriques, au sens où leurs bruits oscillent en phase et avec la même amplitude. Ils peuvent être intriqués

$$|\langle \delta A_c \delta A_d \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle| \tag{5-87}$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{I}_{c,d} = \Sigma_{max} \tag{5-88}$$

   tout en gardant la meilleure réduction de bruit:

$$\Sigma_{c,d} = \Sigma_{min} \tag{5-89}$$

Ces différentes propriétés sont résumées sur la figure 5.7. L'intrication est maximale aux pôles ($\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \Sigma_{min}$) et la réduction de bruit la moins bonne ($\Sigma_{a^*,b^*} = \Sigma_{max}$). Sur le plan équatorial, on obtient la meilleure réduction de bruit ($\Sigma_{S_1',S_2'} = \Sigma_{min}$) mais l'intrication n'est, *a priori*, pas constante. Pour l'intrication, ces résultats se condensent sous la forme:

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \Sigma_{min} \quad \leq \quad \mathcal{I}_{c,d} = \Sigma_{max} \quad \leq \quad \mathcal{I}_{u,v} = \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} \tag{5-90}$$

C Application à l'expérience

Nous pouvons maintenant appliquer ces considérations générales à l'étude de l'interaction entre le faisceau pompe et le milieu atomique lorsque la polarisation incidente est linéaire. Lorsque la polarisation réfléchie par la cavité reste linéaire, nous avons observé la compression du bruit sur les deux modes x et y. Nous avons montré au chapitre 4 que cette réduction du bruit est due à l'effet Kerr pour le champ moyen et à l'effet Kerr croisé pour le mode vide. Le but de cette section est d'étudier les corrélations produites par le système.

C.1 Dispositif expérimental

C.1.1 Principe

Afin de mesurer les corrélations en quadratures entre deux modes de faibles amplitudes, on peut utiliser la méthode proposée par Reid [Reid89]. Cette méthode consiste à séparer ces modes et de mesurer les fluctuations à l'aide deux détections homodynes distinctes utilisant deux oscillateurs locaux [Ou92,Bowen03a]. Cette méthode est illustrée sur la partie (a) de la figure 5.8. Les fluctuations de la différence des photocourants produits par ces dispositifs permettent d'estimer les corrélations. La valeur $\mathcal{I}_{a,b}$ est calculée en effectuant deux mesures successives afin de déterminer les corrélations sur deux quadratures et les anticorrélations sur les quadratures orthogonales correspondantes.

Nous avons développé ici une méthode originale pour mesurer l'intrication entre deux modes a et b orthogonaux quelconques. Cette intrication est donnée par $\mathcal{I}_{a,b}$ définie par (équation 5-26):

$$\mathcal{I}_{a,b} \equiv \min_{\theta} \mathcal{I}_{a,b}(\theta) \equiv \min_{\theta} \frac{1}{2}\left[\langle \delta(X_a(\theta) + X_b(\theta))^2\rangle + \langle \delta(Y_a(\theta) - Y_b(\theta))^2\rangle\right] \qquad (5\text{-}91)$$

La valeur de $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ s'exprime comme la somme des bruits de deux modes 1 et 2 (voir relations 5-26):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b}(\theta) &= \langle \delta X_1^2(\theta)\rangle \ + \ \langle \delta X_2^2(\theta)\rangle \qquad (5\text{-}92)\\ \text{avec} \qquad A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a \ + \ A_b)\\ A_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(A_a \ - \ A_b) \end{aligned}$$

Cette relation nous donne immédiatement la démarche à suivre: il faut mesurer simultanément les bruits des modes A_1 et A_2 et ce *pour la même quadrature* θ. Cette mesure est permise par les lois de la mécanique quantique car ces deux modes sont orthogonaux et commutent $[A_1, A_2] = 0$.

Les modes a et b étant polarisés suivant les directions horizontale et verticale (voir figure 5.8), on obtient les modes 1 et 2 à l'aide d'une lame demi-onde tournée à $+22{,}5°$, suivie d'une lame quart d'onde à l'angle nul. La lame demi-onde a pour effet de faire tourner de 45° les modes A_a et A_b. Sur la base x et y de polarisation, on a alors les modes $(A_a + A_b)/\sqrt{2}$ et $(A_a - A_b)/\sqrt{2}$. La lame quart d'onde introduit ensuite un déphasage de $\pi/2$ entre ces deux modes et on obtient finalement les deux modes A_1 et A_2 définis par la relation 5-92 (voir figure 5.8).

On sépare ensuite les modes 1 et 2 sur un cube polariseur. Sur l'autre entrée du cube, on envoie un oscillateur local polarisé à 45°. Sur chaque voie de sortie, notées 1 et 2, on dispose d'une détection homodyne. On mesure alors simultanément le bruit des quadratures des deux modes et ce pour les mêmes quadratures. Cette dernière

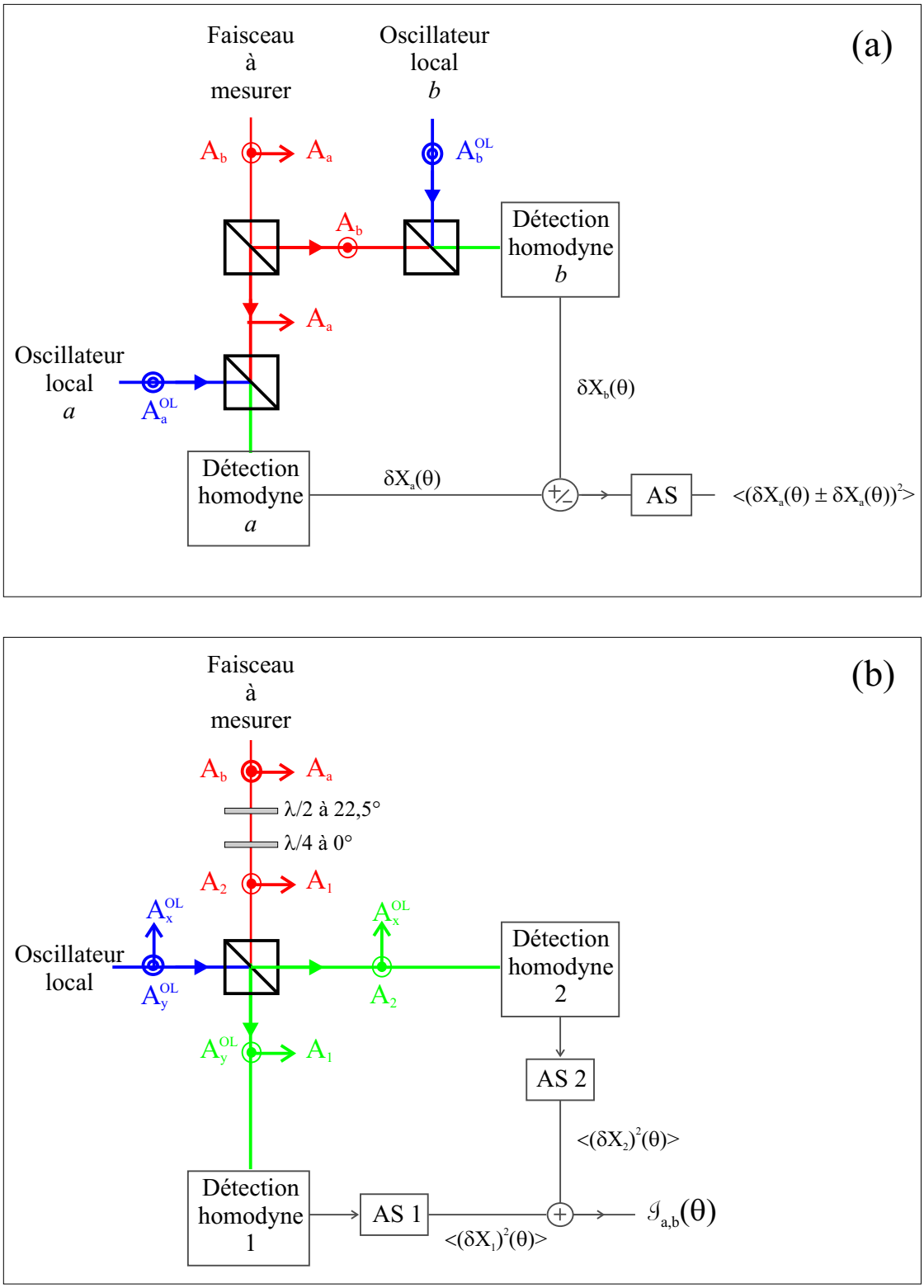


Fig. 5.8 – En haut: principe de mesure des corrélations en séparant spatialement les modes a et b dont on veut estimer $\mathcal{I}_{a,b}$. Cette méthode suppose deux mesures successives. En bas: mesure directe du critère de non-séparabilité selon la méthode décrite dans le texte.

propriété est essentielle pour la mesure et nous détaillerons au paragraphe suivant les moyens que nous avons mis en oeuvre pour qu'elle soit vérifiée. La somme des deux spectres de bruit donne alors directement la valeur$\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$. Cette dernière oscille lorsqu'on balaye la phase de l'oscillateur local, sa valeur minimale correspondant à l'intrication $\mathcal{I}_{a,b}$ entre les modes a et b.

C.1.2 mise en oeuvre

Le dispositif de détection a été construit a partir du montage réalisé pour la mesure des paramètres de Stokes du faisceau pompe détaillé dans la partie D.1. Sur la voie 2, nous avons déjà monté une détection homodyne qui nous a servi à enregistrer les spectres de bruit présentés aux chapitres 2 et 3 (voir figure 2.6). Nous avons donc simplement construit une nouvelle détection homodyne sur la voie 2 (voir figure 5.9). Le signal de la détection est obtenu par la différence des photocourants donnés par les photodiodes $PhD\ 1A$ et $PhD\ 1B$ qui sont équilibrées avec les autres photodiodes $PhD\ 2A$ et $PhD\ 2B$.

Nous avons déjà obtenu l'expression du signal de détection homodyne de la voie 2 (relation 2-38). Il est toutefois important de détailler ici le principe de détection pour vérifier que nous mesurons bien les spectres de bruit des modes 1 et 2 pour les mêmes quadratures. En effet, nous avons vu au paragraphe D.1 du chapitre 2 qu'il fallait tenir compte des déphasages introduits par le cube polariseur $PBS3$ sur lequel on combine les faisceaux 1 et 2 avec l'oscillateur local.

En tenant compte de ces déphasages, les modes envoyés sur les photodiodes $PhD\ 1A$, $PhD\ 1B$, $PhD\ 2A$ et $PhD\ 2B$ s'écrivent (cf paragraphe D.1.3 du chapitre 2):

$$A_{1A} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1\ e^{i\theta_x^C} + A_y^{OL}\ e^{i\phi_y^C}) \tag{5-93}$$

$$A_{1B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1\ e^{i\theta_x^C} - A_y^{OL}\ e^{i\phi_y^C}) \tag{5-94}$$

$$A_{2A} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_2\ e^{i\theta_y^C} + A_x^{OL}\ e^{i\phi_x^C}) \tag{5-95}$$

$$A_{2B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_2\ e^{i\theta_y^C} - A_x^{OL}\ e^{i\phi_x^C}) \tag{5-96}$$

On reprend les notations précédentes, à savoir $\langle A_x^{OL}\rangle = \alpha_x^{OL}e^{i\phi_x^{OL}}$ et $\langle A_y^{OL}\rangle = \alpha_y^{OL}e^{i\phi_y^{OL}}$. Les signaux des deux détections homodynes valent alors:

$$\delta i_{dh}^{(1)} \propto \alpha_y^{OL}(\delta A_1^\dagger\ e^{i\theta^{(1)}} + \delta A_1\ e^{-i\theta^{(1)}}) = \alpha_y^{OL}\ \delta X_1(\theta^{(1)}) \tag{5-97}$$

$$\delta i_{dh}^{(2)} \propto \alpha_x^{OL}(\delta A_2^\dagger\ e^{i\theta^{(2)}} + \delta A_2\ e^{-i\theta^{(2)}}) = \alpha_x^{OL}\ \delta X_2(\theta^{(2)}) \tag{5-98}$$

où $\theta^{(1)} = \phi_y^{OL} + \phi_1^C$ et $\theta^{(2)} = \phi_x^{OL} + \phi_2^C$ sont les phases respectives des détections homodynes 1 et 2; $\phi_1^C = \phi_y^C - \theta_x^C$ et $\phi_2^C = \phi_x^C - \theta_y^C$ correspondant aux déphasages

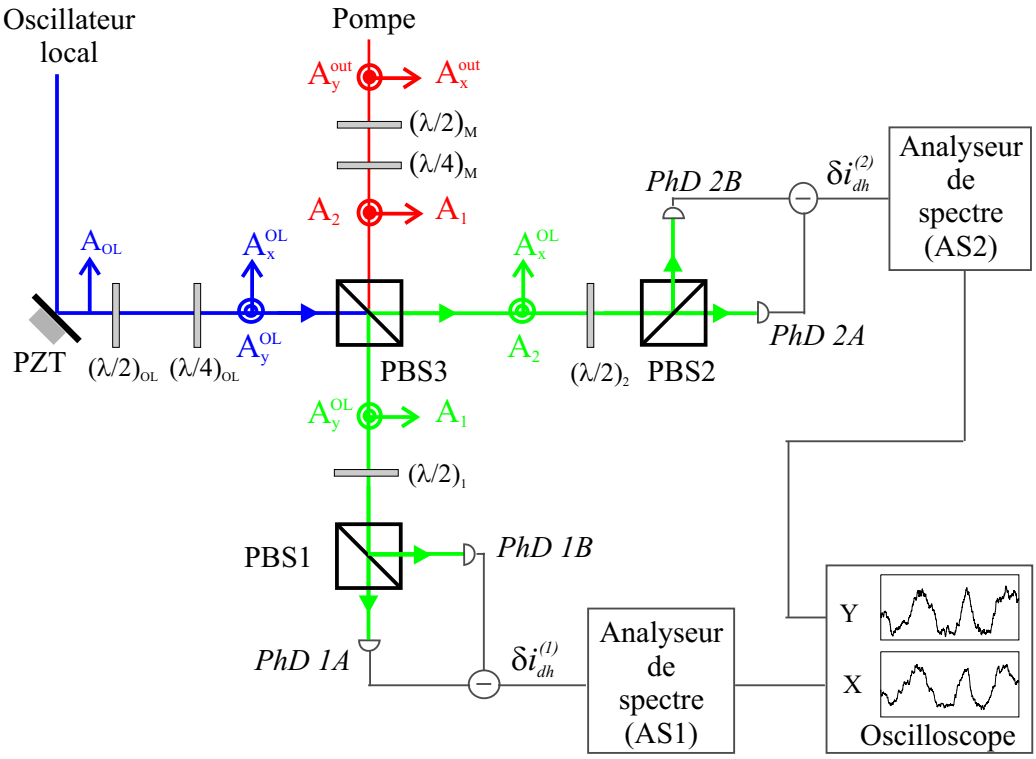


Fig. 5.9 – Dispositif expérimental pour la mesure du critère de non-séparabilité. Les spectres de bruit des modes A_1 et A_2 sont enregistrés simultanément sur un oscilloscope. La somme de leur bruit normalisé donne $\mathfrak{I}_{a,b}(\theta)$.

induits par le cube $PBS3$. L'ellipticité de l'oscillateur local est réglée de manière à corriger ces déphasages (voir équation 2-45): $\phi_y^{OL} - \phi_x^{OL} = \phi_1^C - \phi_2^C$. Dans ce cas l'identité $\theta^{(1)} = \theta^{(2)} \equiv \theta$ est satisfaite et on mesure les bruits des modes 1 et 2 sur la même quadrature θ, ce qui garantit la validité de la mesure de l'intrication pour les modes a et b (cf relation 5-92).

Les photocourants $\delta i_{dh}^{(1)}$ et $\delta i_{dh}^{(2)}$ sont envoyés vers deux analyseurs de spectre $AS1$ et $AS2$. Idéalement ces deux analyseurs de spectres doivent être équilibrés. Nous ne disposons pas de deux analyseurs identiques; on ne peut donc sommer les spectres de bruit directement. D'une part, on envoie les sorties des deux analyseurs, V_1 et V_2, sur les voies X et Y d'un oscilloscope. D'autre part, on normalise séparément les spectres au bruit quantique standard par traitement informatique avant de les

sommer (voir équation 2-49):

$$S_{X_1}(\Omega) = \frac{(V_1 - V_0^{(1)})^2 - (V_{el}^{(1)} - V_0^{(1)})^2}{(V_{bqs}^{(1)} - V_0^{(1)})^2 - (V_{el}^{(1)} - V_0^{(1)})^2}(\Omega) \quad (5\text{-}99)$$

$$S_{X_2}(\Omega) = \frac{(V_2 - V_0^{(2)})^2 - (V_{el}^{(2)} - V_0^{(2)})^2}{(V_{bqs}^{(2)} - V_0^{(2)})^2 - (V_{el}^{(2)} - V_0^{(2)})^2}(\Omega) \quad (5\text{-}100)$$

Au final on obtient la mesure de l'intrication des modes a et b:

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta) = S_{X_1(\theta)} + S_{X_2(\theta)} \quad (5\text{-}101)$$

où ces quantités dépendent implicitement de la fréquence d'analyse Ω.

Nous avons vu comment mesurer l'intrication de deux modes a et b polarisés suivant les directions horizontale et verticale respectivement. Cette méthode peut être utilisée pour mesurer l'intrication de deux modes a et b orthogonaux quelconques. A ces deux modes sont associés deux modes 1 et 2 par les relations 5-92. On obtient directement les modes 1 et 2 à partir des modes x et y en choisissant la combinaison adéquate des lames demi-onde $(\lambda/2)_M$ et quart d'onde $(\lambda/4)_M$ sur le trajet du faisceau pompe (voir figure 5.9). Le dispositif de détection permet de déterminer alors l'intrication des deux modes a et b.

C.2 Générations d'états intriqués en quadrature

C.2.1 Base de polarisation décorrélée

Pour caractériser les corrélations produites par le système et déterminer les modes présentant l'intrication maximum, il faut tout d'abord trouver la base des modes "décorrélés" (u,v). On rappelle que cette base vérifie $\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$ et que les phases des quadratures de bruit minimal sont identiques. Il n'est pas nécessaire ici d'utiliser la formule permettant de déterminer cette base dans le cas le plus général (voir appendice D).

En effet, lorsque le champ est polarisé linéairement dans la cavité le milieu atomique joue un rôle complètement symétrique pour les composantes circulaires σ_+ et σ_-. Dans ce cas, on montre aisément que les modes x et y sont complètement décorrélés. Ces modes s'écrivent en effet en fonction des composantes σ_+ et σ_-:

$$A_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ - A_-) \quad (5\text{-}102)$$

$$A_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A_+ + A_-) \quad (5\text{-}103)$$

Par symétrie, les composantes circulaires vérifient $\langle \delta A_+^2 \rangle = \langle \delta A_-^2 \rangle$, $\langle \delta A_+ \delta A_-^\dagger \rangle = \langle \delta A_+^\dagger \delta A_- \rangle$ et $\langle \delta A_+ \delta A_+^\dagger \rangle = \langle \delta A_- \delta A_-^\dagger \rangle$. Les termes de corrélations croisés entre les

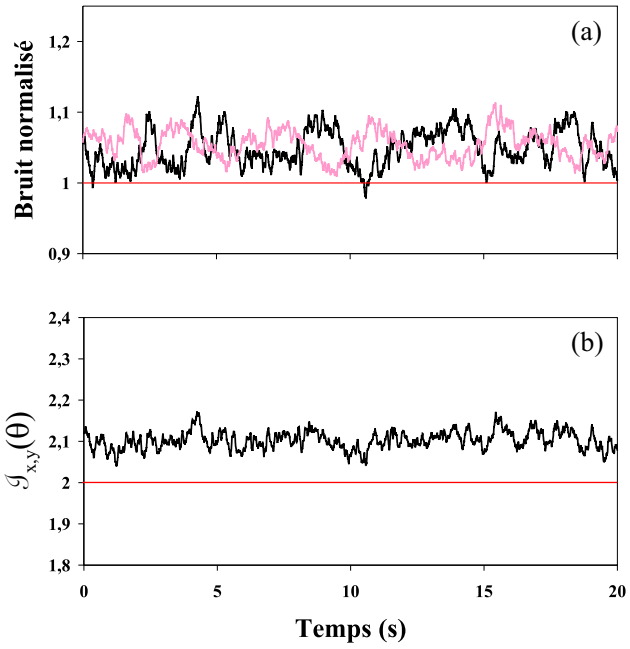


Fig. 5.10 – Mesure de l'intrication des modes x et y. La courbe (a) donne les spectres de bruit des modes $+45$ et $i(-45)$. La somme de ces deux bruits donne la valeur $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$ (courbe (b)). La fréquence d'analyse vaut 5MHz, pour une puissance incidente du faisceau pompe de 7 μW.

modes x et y sont alors nuls:

$$\langle \delta A_x \delta A_y \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+^2 \rangle - \langle \delta A_-^2 \rangle + \langle \delta A_+ \delta A_- \rangle - \langle \delta A_+ \delta A_- \rangle) = 0 \qquad (5\text{-}104)$$

$$\langle \delta A_x \delta A_y^\dagger \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+ \delta A_+^\dagger \rangle - \langle \delta A_- \delta A_-^\dagger \rangle + \langle \delta A_+ \delta A_-^\dagger \rangle - \langle \delta A_+^\dagger \delta A_- \rangle) = 0 \qquad (5\text{-}105)$$

Les modes x et y sont bien décorrélés et leur intrication $\mathcal{I}_{x,y}$ est la plus faible du système (voir paragraphe B.4). Dans ce cas la quantité $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$ ne dépend pas la phase θ (voir, par exemple, la relation 5-39). Afin de vérifier cette propriété expérimentalement, nous avons mesuré cette quantité. On applique la méthode générale décrite au paragraphe précédent. D'après la relation 5-92, on doit sommer les spectres de bruit des modes A_{+45} et iA_{-45}:

$$\mathcal{I}_{x,y}(\theta) = \langle \delta X^2_{+45}(\theta)) \rangle + \langle \delta X^2_{i(-45)}(\theta) \rangle \qquad (5\text{-}106)$$

$$\text{avec} \quad A_{+45} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + A_y)$$

$$iA_{-45} = \frac{i}{\sqrt{2}} (A_x - A_y)$$

La lame $(\lambda/2)_M$ est donc tournée de $+22{,}5°$ et les axes de la lame $(\lambda/4)_M$ coïncident avec les directions horizontale et verticale de manière à envoyer les modes A_{+45} et iA_{-45} vers les deux détections homodynes 1 et 2 (voir figure 5.9). On vérifie sur la figure 5.10 que $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$ ne dépend pas, en effet, de la phase de l'oscillateur local. *Les deux modes x et y sont donc bien "décorrélés" au sens du critère de non-séparabilité.*

Cette propriété n'est pas suffisante pour que la base (x,y) soit du type (u,v) car il faut que les quadratures de bruit minimales soient les mêmes. Les orientations respectives de ces quadratures pour les modes x et y sont données par les phases des quantités $\langle \delta A_x^2 \rangle$ et $\langle \delta A_y^2 \rangle$:

$$\langle \delta A_x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \delta A_+^2 \rangle + \langle \delta A_-^2 \rangle - 2\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle) \quad (5\text{-}107)$$

$$\langle \delta A_y^2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \delta A_+^2 \rangle + \langle \delta A_-^2 \rangle + 2\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle) \quad (5\text{-}108)$$

Celles-ci sont *a priori* distinctes. En outre, cette différence de phase des quadratures dépend de la corrélation $\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle$ entre les modes circulaires. Il faut donc effectuer une rotation de phase sur l'un des deux modes pour obtenir une base du type (u, v).

C.2.2 Limite haute fréquence

Physiquement les modes circulaires sont corrélés par les processus de pompage optique entre les sous niveaux Zeeman. Toutefois, on mesure le bruit à des fréquences d'analyse de l'ordre de quelques MHz. Cette fréquence est supérieure au taux de pompage optique qui vaut quelques centaines de kHz pour nos paramètres expérimentaux. Cela revient à considérer des échelles de temps inférieures au temps caractéristique de pompage optique et donc de couplage. Les modes circulaires sont donc décorrélés dans ces conditions:

$$\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle \simeq 0 \text{ et } \langle \delta A_+ \delta A_-^\dagger \rangle \simeq 0 \quad (5\text{-}109)$$

Ils saturent le milieu atomique et sont donc comprimés par effet Kerr. Par symétrie leur spectre de bruit sont identiques:

$$\langle \delta X_{\sigma+}^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_{\sigma-}^2(\theta) \rangle \equiv \langle \delta X_\sigma^2(\theta) \rangle \quad (5\text{-}110)$$

Ces modes étant indépendants, on déduit aisément des relations de passage 5-102 que les modes x et y sont comprimés sur des quadratures orthogonales, leur réduction de bruit étant égale à celle des modes circulaires:

$$\langle \delta X_x^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_y^2(\theta + \pi/2) \rangle = \langle \delta Y_y^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_\sigma^2(\theta) \rangle \quad (5\text{-}111)$$

Ces propriétés ont été mises en évidence expérimentalement (paragraphes D.3 du chapitre 2 et E.2 du chapitre 3). Elles ont également été démontrées rigoureusement lors de l'étude théorique d'une transition à quatre niveaux en X. Le détail des

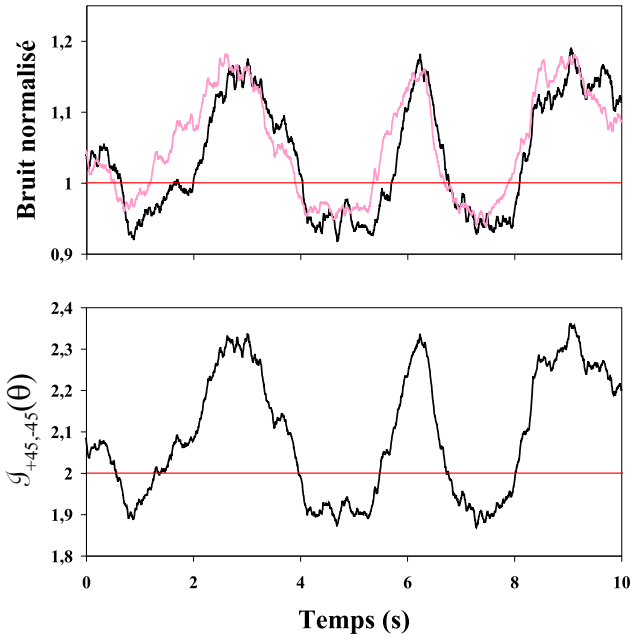


Fig. 5.11 – Mesure de l'intrication des modes polarisés à 45°. La courbe (a) donne les spectres de bruit des modes x et iy. La somme de ces bruits correspond à $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$ (courbe (b)). La fréquence d'analyse vaut 5 MHz et la puissance incidente 7 μ W.

calculs est donné au paragraphe D.5.2 du chapitre 4.

Afin d'obtenir une base du type (u,v), il suffit donc de déphaser le mode y de $\pi/2$. Les modes définis par

$$A_u = A_x \quad \text{et} \quad A_v = iA_y \tag{5-112}$$

vérifient les conditions requises: ils sont indépendants et comprimés pour la même quadrature (voir figure (a) de la figure 5.11). Une fois cette base déterminée, on applique directement les résultats résumés sur la sphère de Poincaré au paragrapheB.4.

Ainsi, les modes intriqués sont les modes "polarisés circulairement" par rapport à la base (u,v). Comme les modes u et v sont les modes x et y, l'un étant déphasé de $\pi/2$ par rapport à l'autre, les modes a^* et b^* sont, en fait, les modes polarisés à 45° des axes Ox et Oy (voir relation 5-48):

$$A_{a^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u - iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + A_y) \equiv A_{+45} \tag{5-113}$$

$$A_{b^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u + iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - A_y) \equiv A_{-45} \tag{5-114}$$

Leur intrication est donnée par la somme des bruits des modes A_x et iA_y:

$$\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta) \rangle + \langle \delta X_{iy}^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_x^2(\theta) \rangle + \langle \delta Y_y^2(\theta) \rangle \tag{5-115}$$

$$\text{avec} \quad A_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{+45} + A_{-45})$$

$$iA_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(A_{+45} - A_{-45})$$

On déphase donc le mode A_y de $\pi/2$ à l'aide de la lame quart d'onde $(\lambda/4)_M$ pour envoyer les modes $A_u = A_x$ et $A_v = iA_y$ vers les deux détections homodynes. Les deux modes étant comprimés sur la même quadrature, la valeur minimale de $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$ est bien inférieure à 2 (voir figure (b) de la figure 5.11). Leur intrication est optimale et vaut:

$$\mathcal{I}_{+45,-45} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_x^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_y^2 \rangle_{min} \simeq 1,9 \tag{5-116}$$

Ce résultat s'interprète aisément. Les relations de passage de la base (x,y) à la base de polarisation $(+45°,-45°)$ sont analogues à celles d'une lame séparatrice 50/50 (cf paragraphe B.2.3). On peut donc considérer que ces corrélations proviennent du mélange sur une lame de deux modes indépendants, comprimés sur des quadratures orthogonales.

De manière équivalente, on peut raisonner dans la base des états circulaires. Les modes σ_+ et σ_- sont indépendants et symétriques, ils sont alors comprimés pour la même quadrature. Pour obtenir des états intriqués, il faut les combiner sur une lame 50/50 après avoir introduit un déphasage de $\pi/2$ [Reid89, Silberhorn01, Bowen03a]. On retrouve ainsi le même résultat: les modes intriqués sont les modes polarisés à 45°:

$$A_{+45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + A_y) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ + iA_-) \tag{5-117}$$

$$A_{-45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - A_y) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ - iA_-) \tag{5-118}$$

En pratique, il existe des sources d'asymétries dans le système qui induisent une biréfringence circulaire du milieu atomique. Les composantes σ_+ et σ_- ne sont donc pas tout à fait symétriques. Les modes x et iy ne sont donc pas comprimés pour des quadratures parfaitement orthogonales (voir figure (a) de la figure 5.11). L'intrication des modes polarisés à 45° est alors légèrement supérieure à la somme des bruits des modes x et y. Néanmoins, les spectres des modes x et iy présentés sur la figure 5.11 étant très peu décalés, nous n'avons donc pas cherché à caractériser plus précisément les modes a^* et b^* qui sont, en toute rigueur, les modes d'intrication maximale du système.

C.2.3 Intrication et réduction de bruit dans la limite haute fréquence

Les résultats détaillés dans le paragraphe précédent sont résumés sur la sphère de Poincaré représentée sur la figure 5.12. Les paramètres de Stokes sont définis par rapport aux modes x et y. Ce choix équivaut à une rotation de $\pi/2$ suivant l'axe S_1 de la sphère de Poincaré correspondant à la base $(u,v)\equiv(x,iy)$ (figure 5.7):

$$\begin{array}{rcccccl} S_1 & = & A_x^*A_x - A_y^*A_y & = & A_u^*A_u - A_v^*A_v & = & S_1' \\ S_2 & = & A_x^*A_y + A_y^*A_x & = & i(A_v^*A_u - A_u^*A_v) & = & S_3' \\ S_3 & = & i(A_y^*A_x - A_x^*A_y) & = & -(A_v^*A_u + A_u^*A_v) & = & -S_2' \end{array}$$

Les propriétés quantiques du système découlent directement de l'analyse effectuée dans le cas général au paragraphe B.4. A haute fréquence les modes circulaires sont symétriques et indépendants; les relations 5-107, 5-108 et 5-109 donnent ici:

$$\langle \delta A_x^2 \rangle = -\langle \delta A_y^2 \rangle \qquad \text{d'où} \qquad \langle \delta A_u^2 \rangle = \langle \delta A_v^2 \rangle \tag{5-119}$$

On déduit aisément de cette identité que pour toute base de polarisation (a,b) du plan sous-tendu par (S_1,S_3), les modes sont indépendants, leur compression de bruit

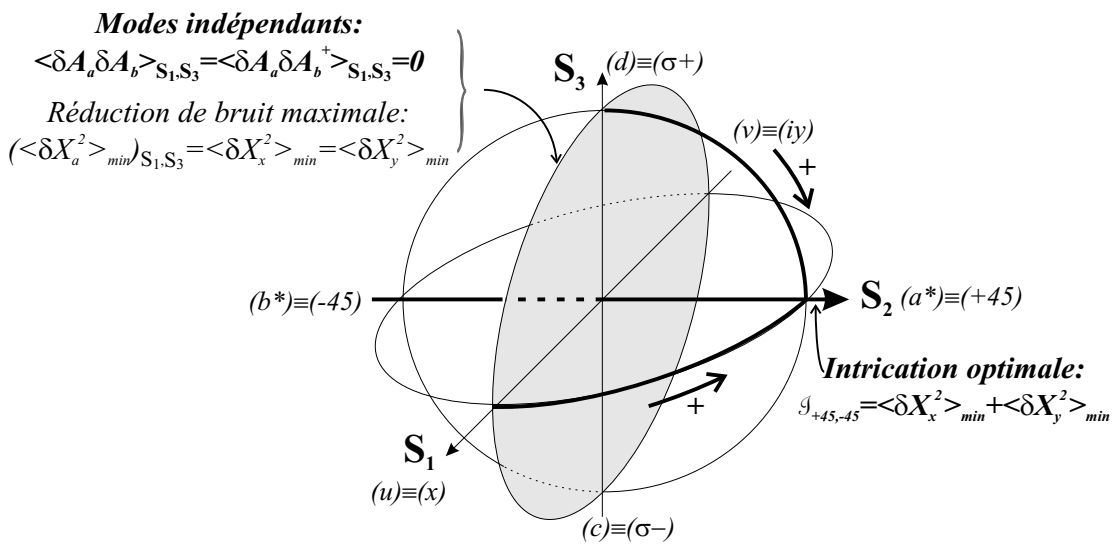


Fig. 5.12 – Propriétés quantiques du système dans la limite haute fréquence. La sphère de Poincaré est définie par rapport à la base (x,y)≡(x,−iy). Les modes polarisés circulairement sont indépendants, de même pour les modesx et y. La meilleure intrication a lieu pour les modes polarisés à 45°. Les flèches correspondent à une augmentation des corrélations lorsque l'on se déplace sur la sphère.

étant identique et maximale (voir équations 5-79).

En revanche, les modes polarisés à 45° sont les plus intriqués. Ils présentent en outre un excès de bruit constant pour toutes les quadratures car $\langle \delta A^2_{+45} \rangle = \langle \delta A^2_{-45} \rangle = 0$ d'après la relation 5-83.

Nous avons vérifié ces propriétés expérimentalement. Les figures 5.13 et 5.14 présentent les mesures du bruit et de l'intrication réalisées pour les trois bases de polarisation (x,y), $(+45,-45)$ et (σ_+,σ_-). Ces courbes ont été obtenues pour un point de fonctionnement proche du sommet du pic de résonance de la cavité; la fréquence d'analyse est fixée à $5\,MHz$.

On observe une réduction de bruit quasiment constante pour les modes$x$, y, σ_+ et σ_- de l'ordre de 5%. En revanche, les modes polarisés à 45° ne sont pas comprimés et leur excès de bruit est quasiment constant. Il existe néanmoins de légères différences dues aux asymétries du système. Celles-ci entraînent une légère oscillation des spectres de bruit des modes polarisés à 45° au dessus du bruit quantique standard.

Pour mesurer l'intrication dans ces bases, on effectue la somme des spectres de

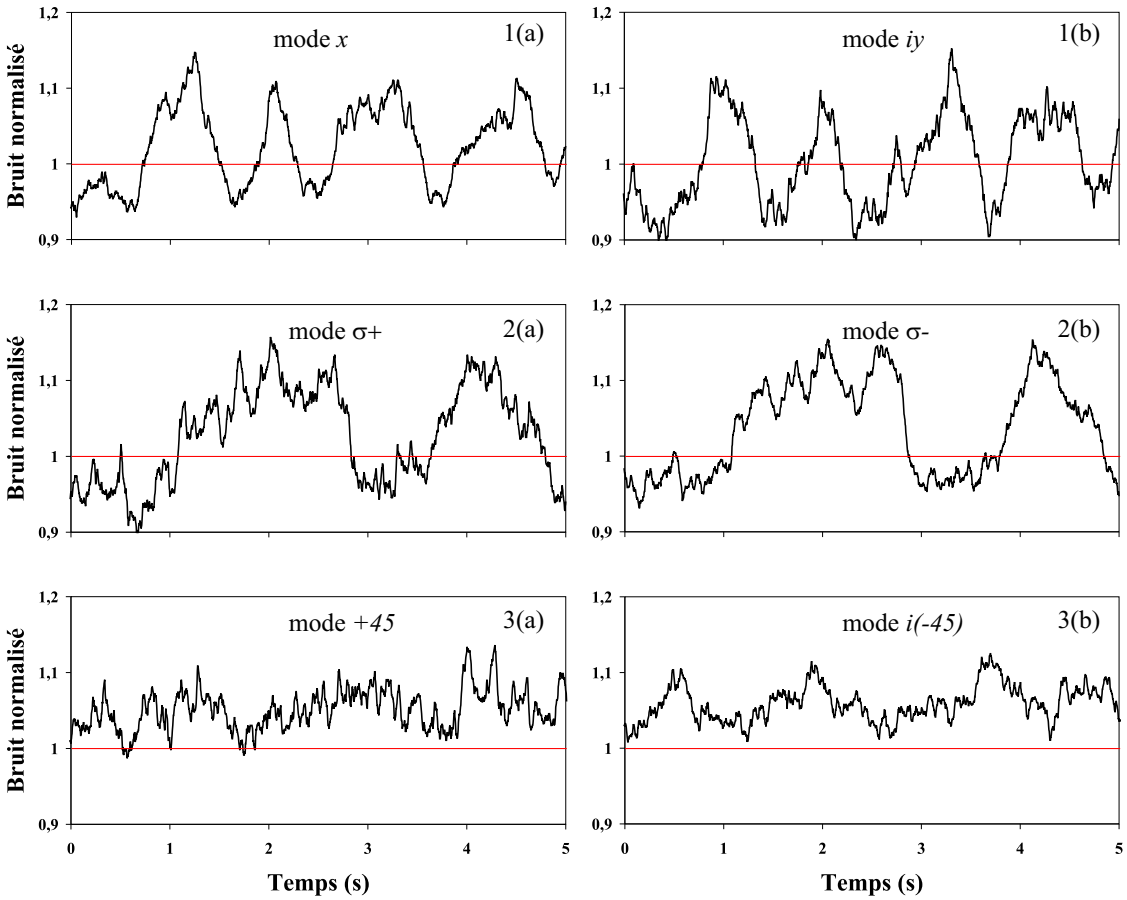


Fig. 5.13 – Bruits normalisées à la fréquence d'analyse de 5MHz. La cale piézo-électrique de l'oscillateur local est modulée dans la temps, ce qui balaie la phase des quadratures de bruit mesurées. La vitesse de balayage est différente pour les enregistrements 1,2 et 3. Courbes 1(a) et (b): modes A_x et A_y. Courbes 2(a) et (b): modes A_{σ_+} et A_{σ_-}. Courbes 3(a) et (b): modes A_{+45° et A_{-45°. Les modes x, y, σ_+, σ_- sont comprimés tandis que les modes à 45° présentent un excès de bruit. Les spectres de bruits (a) et (b) sont enregistrés en même temps: à chaque instant, la quadrature mesurée sur les deux spectres est la même.

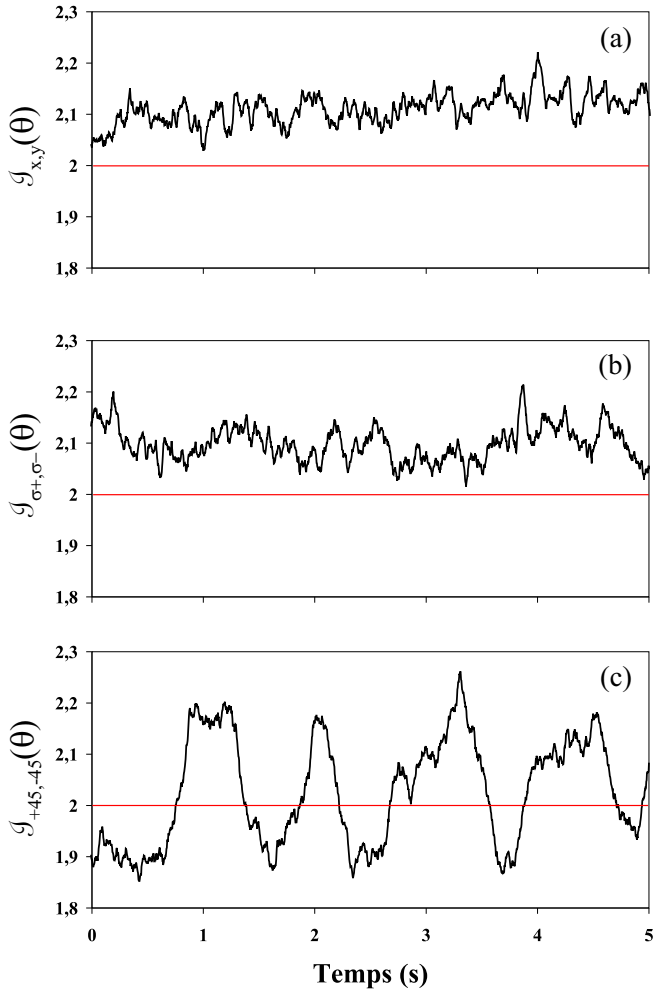


Fig. 5.14 – Mesure de l'intrication pour différentes bases de polarisation. Courbe (a): $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$. Courbe (b): $\mathcal{I}_{\sigma_+,\sigma_-}(\theta)$. Courbe (c): $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$. Seul les modes polarisés à 45° sont intriqués. La fréquence d'analyse vaut $5\,MHz$ et la puissance incidente vaut $5\,\mu W$.

bruit suivant les relations:

$$\mathcal{I}_{\sigma_+,\sigma_-}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_y^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}120)$$

$$\mathcal{I}_{x,y}(\theta) = \langle \delta X_{+45}^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_{i(-45)}^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}121)$$

$$\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_{iy}^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}122)$$

Ainsi l'intrication $\mathcal{I}_{\sigma_+,\sigma_-}$ est obtenue à partir des spectres 1(a) et 1(b) de la figure 5.14, où le spectre 1(b) est décalé de π. L'intrication $\mathcal{I}_{x,y}$ est obtenue de la même manière en sommant directement les spectres 3(a) et 3(b). Enfin l'intrication$\mathcal{I}_{+45,-45}$ est obtenue à partir de la somme des spectres 1(a) et 1(b) sans décalage.

Conformément à nos prédictions, les modes circulaires sont effectivement décorrélés à la fréquence de $5MHz$ (voir courbe (b) de la figure 5.14). On retrouve pour la base (x,y), les résultats présentés dans les paragraphes précédents (voir les courbes (a) de la figure 5.14 et (b) de la figure 5.11), à savoir qu'ils sont décorrélés. Seuls les modes $+45$ et -45 sont intriqués (courbe (c) de la figure 5.14).

C.2.4 Dépendance en fréquence

A basse fréquence, la situation est plus complexe: il faut tenir compte des corrélations entre les composantes circulaires. Celles-ci jouent en effet un rôle important pour des fréquences inférieures au taux de pompage optique. Néanmoins les modes σ_+ et σ_- sont toujours symétriques car la polarisation est linéaire. Les modes x et y sont donc toujours indépendants, même à basse fréquence (équations 5-104 et 5-105). Par contre, les quadratures de bruit minimal tournent l'une par rapport à l'autre. On rappelle les expressions des quantités $\langle \delta A_x^2\rangle$ et $\langle \delta A_y^2\rangle$ (équations 5-107 et 5-108):

$$\langle \delta A_x^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \delta A_+^2\rangle + \langle \delta A_-^2\rangle - 2\langle \delta A_+ \delta A_-\rangle) \quad (5\text{-}123)$$

$$\langle \delta A_y^2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \delta A_+^2\rangle + \langle \delta A_-^2\rangle + 2\langle \delta A_+ \delta A_-\rangle) \quad (5\text{-}124)$$

Pour obtenir une base du type (u,v), il faut donc déphaser un mode, par exemple le mode y:

$$A_u = A_x \quad \text{et} \quad A_v = ie^{-i\phi_c} A_y \quad (5\text{-}125)$$

$$\text{avec} \qquad \tan\phi_c = \frac{2|\langle \delta A_+ \delta A_-\rangle| \sin(\phi_2 - \phi_1)}{|\langle \delta A_+^2\rangle| + |\langle \delta A_-^2\rangle| + 2|\langle \delta A_+ \delta A_-\rangle| \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (5\text{-}126)$$

où ϕ_2 et ϕ_1 sont les phases des termes $\langle \delta A_+^2\rangle = \langle \delta A_-^2\rangle$ et $\langle \delta A_+ \delta A_-\rangle$. Ce déphasage du mode y revient à faire tourner la sphère de Poincaré associée aux modes$u$, v de

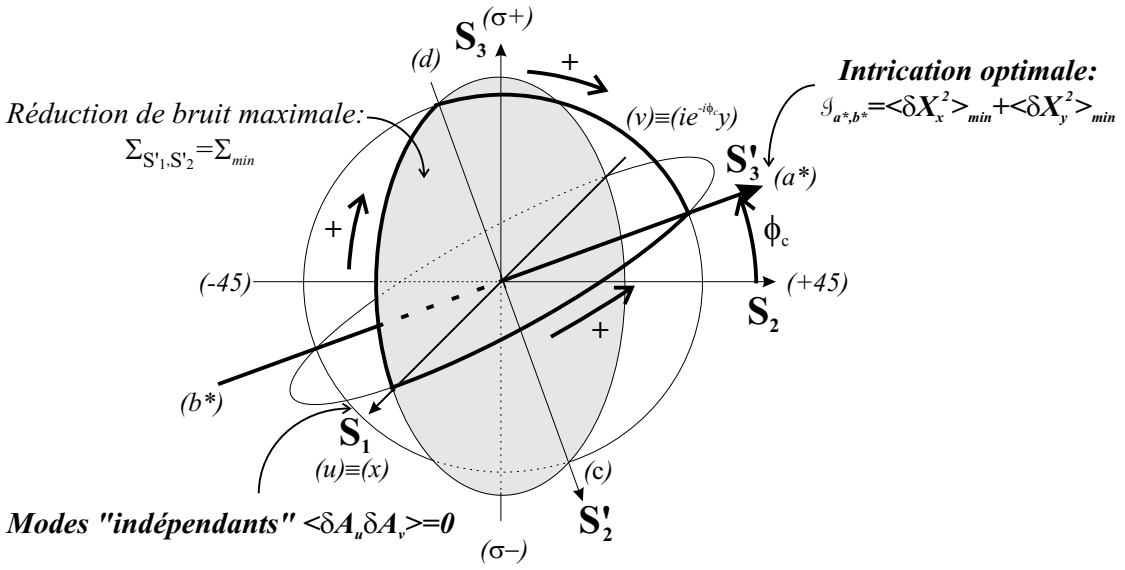


Fig. 5.15 – Propriétés quantiques du système à basse fréquence d'analyse du bruit représentées dans la sphère de Poincaré. La sphère est ici définie par rapport aux modes x,y. Les modes intriqués sont les modes correspondant à l'axe S'_3. Contrairement au cas précédent où l'on avait $S'_3 = S_2$, l'axe S'_3 fait maintenant un angle ϕ_c avec l'axe S_2.

l'angle ϕ_c autour de l'axe S_1. Les différentes propriétés de bruit et d'intrication sont illustrés sur la figure 5.15.

Les modes les plus intriqués (a^* et b^*) sont maintenant donnés par:

$$A_{a^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u - iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + e^{-i\phi_c}A_y) \quad (5\text{-}127)$$

$$A_{b^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u + iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - e^{-i\phi_c}A_y) \quad (5\text{-}128)$$

Ce sont des modes elliptiques tournés à 45°. Leur intrication est égale à la réduction de bruit des modes x et y (voir relation 5-50):

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_x^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_y^2 \rangle_{min} \quad (5\text{-}129)$$

La figure 5.16 montre l'évolution de cette intrication maximale lorsque la fréquence d'analyse varie entre 1.5 et 12 MHz. Cette série de mesure correspond à celle présentée dans le paragraphe E.1 du chapitre 3. A basse fréquence, la réduction du bruit augmente pour le mode vide y et diminue pour le champ moyen x; ce dernier présente alors un excès de bruit (voir figure (a) de la figure 5.16). Au total, l'intrication générée par le système commence à diminuer pour des fréquences d'analyse

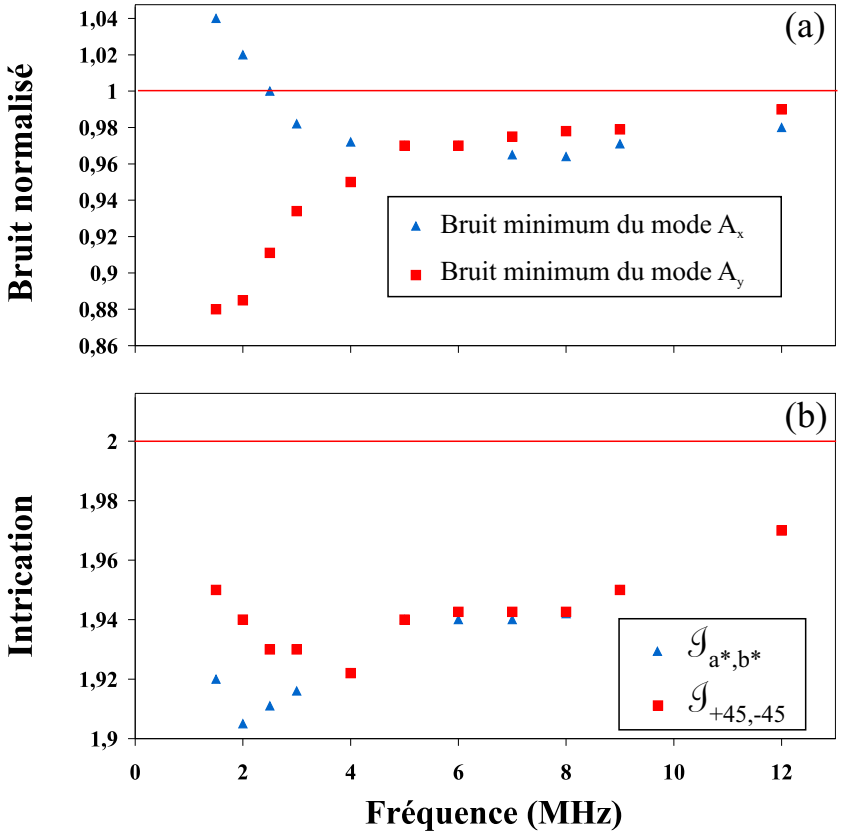


Fig. 5.16 – Mesure de l'intrication en fonction de la fréquence. Courbe (a): spectres de bruit minimal pour les modes x et y. Ces résultats correspondent à la série de mesure présentée sur la figure 3.20. Courbe (b): comparaison entre la valeur de l'intrication maximale ($\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \langle \delta X_x^2 \rangle_{min} + \langle \delta X_y^2 \rangle_{min}$) et l'intrication des modes polarisés à 45° ($\mathcal{I}_{+45,-45}$). Pour des fréquences inférieures à 4 MHz, la meilleure intrication ne correspond plus aux modes polarisés à 45°. La puissance incidente vaut 4,2 μW.

inférieures à $2\,MHz$.

On présente également sur la figure 5.16 la valeur de l'intrication correspondant aux modes polarisés à 45°. A haute fréquence, $|\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle|$ tend vers 0, de même que ϕ_c. On retrouve le fait que les modes polarisés à 45° sont les plus intriqués: les deux valeurs $\mathcal{I}_{+45,-45}$ et $\mathcal{I}_{a^*,b^*}$ doivent être égales. On constate néanmoins un léger désaccord car les modes x et y ne sont pas comprimés pour des quadratures parfaitement orthogonales.

Pour des fréquences inférieures à $4\,MHz$, ces deux mesures se séparent: les modes $+45$ et -45 ne sont plus les modes les plus corrélés. Ceci est dû à l'apparition de corrélations sur les modes circulaires σ_+ et σ_-.

Nous avons ainsi détaillé les différentes propriétés de bruit et d'intrication en quadrature sur les différents modes de polarisation à la sortie de la cavité. Cette étude complète l'analyse de notre système lorsque la polarisation est linéaire. Avant de nous intéresser à la possibilité de générer des états intriqués en polarisation, nous allons maintenant présenter les résultats obtenus lorsque la polarisation est devenue circulaire à l'intérieure de la cavité.

C.3 Polarisation circulaire

Le faisceau pompe est toujours polarisé linéairement. Toutefois, il existe un domaine de désaccord de la cavité pour lequel la polarisation devient circulaire, i.e. une composante circulaire, disons σ_+, devient dominante. Nous avons montré aux paragraphes E du chapitre 2 et E.3 du chapitre 3 qu'il était possible d'obtenir une réduction de bruit sur cette composante.

Dans ce cas, un seul mode du champ est nécessaire pour décrire l'interaction avec le milieu atomique. Les propriétés quantiques du système se déduisent de l'analyse générale du paragraphe B.4. De façon évidente, la base des états circulaires correspond à une base du type (u,v): $A_u = A_{\sigma_+}$ et $A_v = A_{\sigma_-}$. Le mode v possède en effet les fluctuations du vide: il n'a pas d'orientation particulière dans le diagramme de Fresnel: $\langle \delta A_v^2 \rangle = 0$. Les propriétés de la base (u,v) doivent donc rester inchangées quelque soit le déphasage de ce mode. Ce déphasage revient à faire tourner la sphère de Poincaré autour de l'axe S_1', avec la définition:

$$S_1' = A_u^* A_u - A_v^* A_v = A_{\sigma_+}^* A_{\sigma_+} - A_{\sigma_-}^* A_{\sigma_-} \equiv S_3$$

Les propriétés quantiques représentées sur la sphère de Poincaré (voir figure 5.17) sont donc invariantes par rotation autour de l'axe S_3.

En particulier la somme des bruits minimaux $\Sigma_{a,b}$ est constante pour toutes les

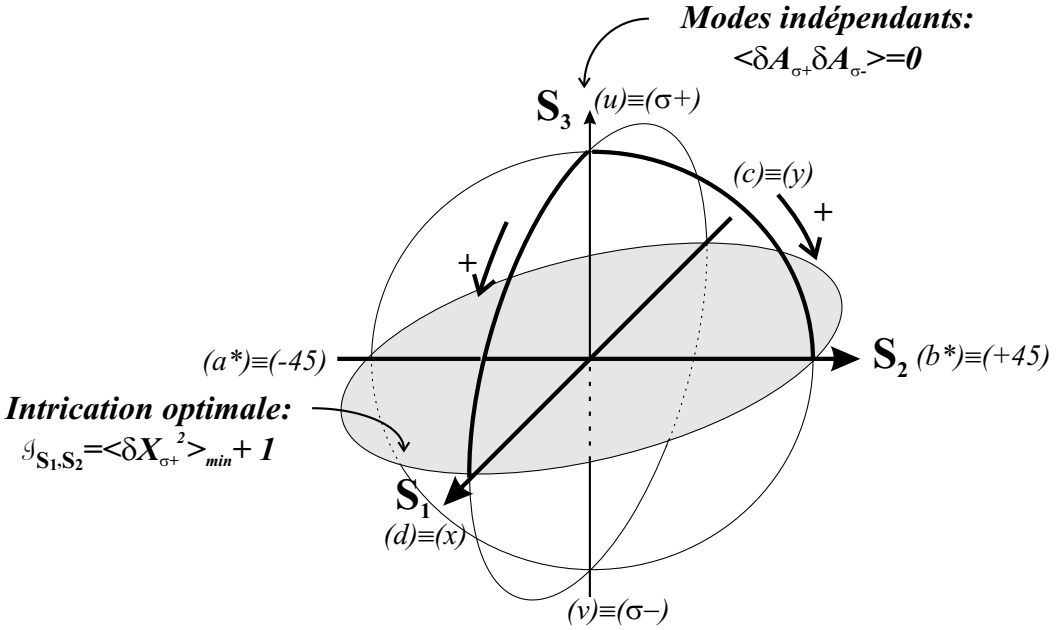


Fig. 5.17 – Propriétés quantiques du système dans le cas où la polarisation est devenue circulaire à l'intérieur de la cavité. La sphère de Poincaré est définie par rapport aux modes x,y. Les modes circulaires sont indépendants. La somme des bruits minimaux est constante pour toutes les bases de polarisation. Les modes situés dans le plan équatorial sont les plus corrélés.

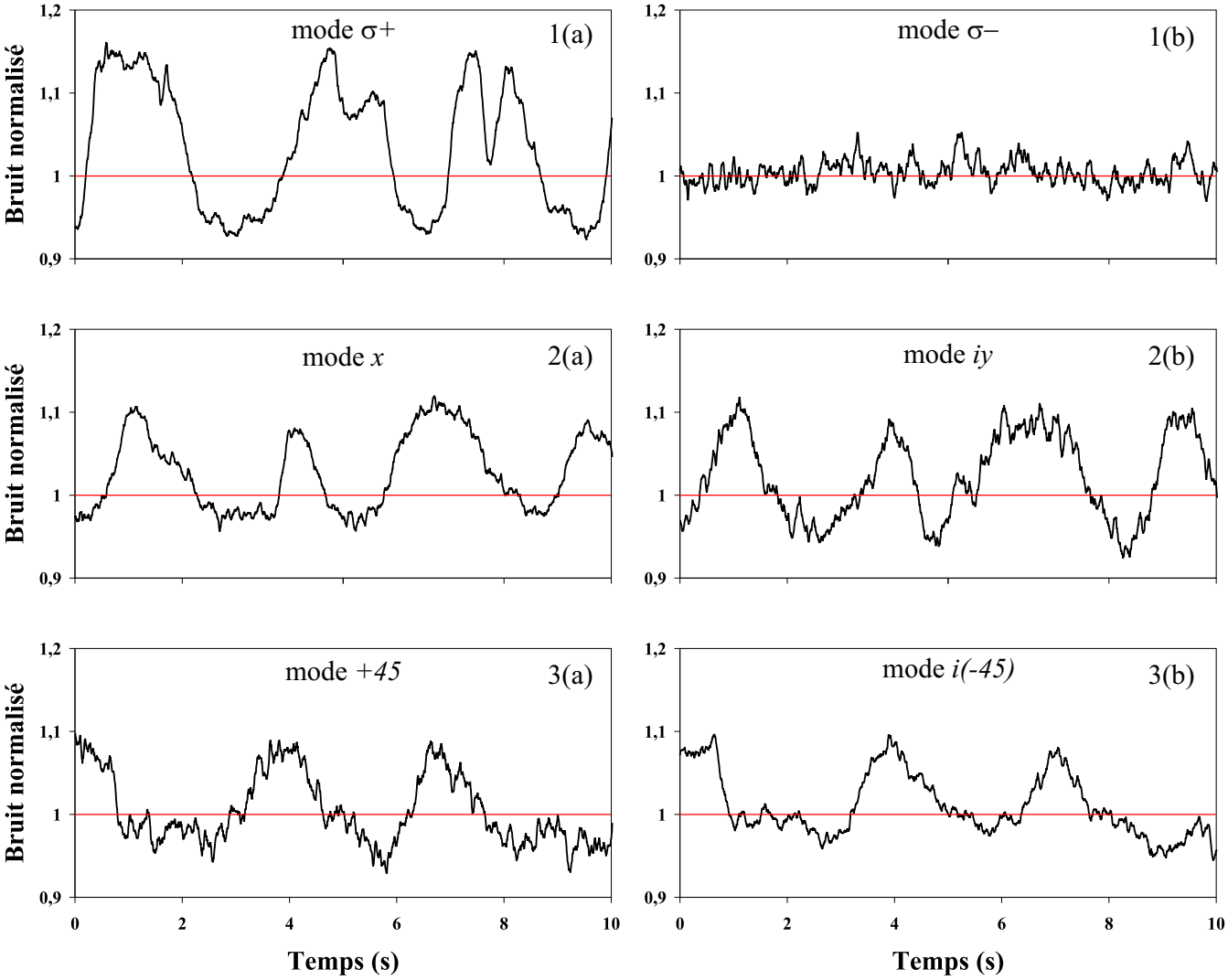


Fig. 5.18 – Bruits noramlisés pour différents modes à la fréquence d'analyse de 4 MHz. la cavité est asservie dans le domaine où la polarisation du faisceau intracavité est circulaire. Courbes 1(a) et (b): modes A_{σ_+} et A_{σ_-}. Courbes 2(a) et (b): modes A_x et iA_y. Courbes 3(a) et (b): modes A_{+45° et iA_{-45°. Les modes x, y, $+45$ et $i(-45)$ sont comprimés de manière semblables. La fréquence d'analyse vaut 4 MHz et la puissance incidente 4 μ W.

bases de polarisation:

$$\langle \delta X_a^2(\theta)\rangle = \beta^2 \langle \delta X_{\sigma_+}^2(\theta)\rangle + \alpha^2 \quad (5\text{-}130)$$

$$\langle \delta X_b^2(\theta)\rangle = \alpha^2 \langle \delta X_{\sigma_+}^2(\theta)\rangle + \beta^2 \quad (5\text{-}131)$$

$$\text{d'où} \quad \Sigma_{a,b} = \langle \delta X_{\sigma_+}^2\rangle_{min} + 1 = \Sigma_{min} \quad (5\text{-}132)$$

Ce comportement est illustré sur la figure 5.18 où l'on présente les bruits des modes σ_+, σ_-, x, iy, $+45$ et $i(-45)$ à la fréquence de 4 MHz, la cavité étant asservie dans le domaine où la polarisation est devenue circulaire. Nous observons la réduction de bruit, de l'ordre de 7%, attendue sur la composante σ_+. Les bruits des modes x, iy, $+45$, $i(-45)$ sont très semblables. Leur réduction de bruit est égale à la moitié de celle du mode σ_+:

$$\langle \delta X_x^2\rangle_{min} \simeq \langle \delta X_y^2\rangle_{min} \simeq \langle \delta X_{+45}^2\rangle_{min} \simeq \langle \delta X_{-45}^2\rangle_{min} \simeq 0,97 \quad (5\text{-}133)$$

On remarque que les modes x et y présentent les mêmes caractéristiques de bruit que dans le cas où la polarisation est linéaire, à savoir ils sont tous les deux comprimés et ce pour des quadratures orthogonales. Pourtant la situation est ici radicalement différente: le champ à la sortie de la cavité est monomode, autrement dit les propriétés quantiques du système peuvent être décrites ici par la compression de bruit d'un seul mode, i.e. σ_+. C'est pourquoi les modes x et y ne sont maintenant plus indépendants, contrairement au cas où la polarisation reste linéaire dans la cavité.

L'intrication est maximale, en fait, pour toutes les bases du plan sous-tendu par S_1 et S_2 et en particulier pour la base (x,y)(voir figure 5.17). L'équation 5-49 donne ici:

$$(|\langle \delta A_a \delta A_b\rangle|)_{S_1,S_2} = \max_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b\rangle| = \frac{1}{2}\,\langle \delta A_u^2\rangle$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{I}_{S_1,S_2} = \langle \delta X_{\sigma+}^2\rangle_{min} + 1 = \Sigma_{min} \ \text{ d'après la relation 5-50} \quad (5\text{-}134)$$

On vérifie cette propriété en mesurant l'intrication générée par le système. Nous rappelons l'expression de l'intrication pour les bases de polarisation (x,y), ($+45$,-45) et (σ_+,σ_-):

$$\mathcal{I}_{\sigma_+,\sigma_-}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_y^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}135)$$

$$\mathcal{I}_{x,y}(\theta) = \langle \delta X_{+45}^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_{i(-45)}^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}136)$$

$$\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta)\rangle + \langle \delta X_{iy}^2(\theta)\rangle \quad (5\text{-}137)$$

Les figures (b) et (c) de la figure 5.19 mettent en évidence les corrélations des modes x et y, ainsi que celles des modes polarisés à 45°. Ce résultat nous permet

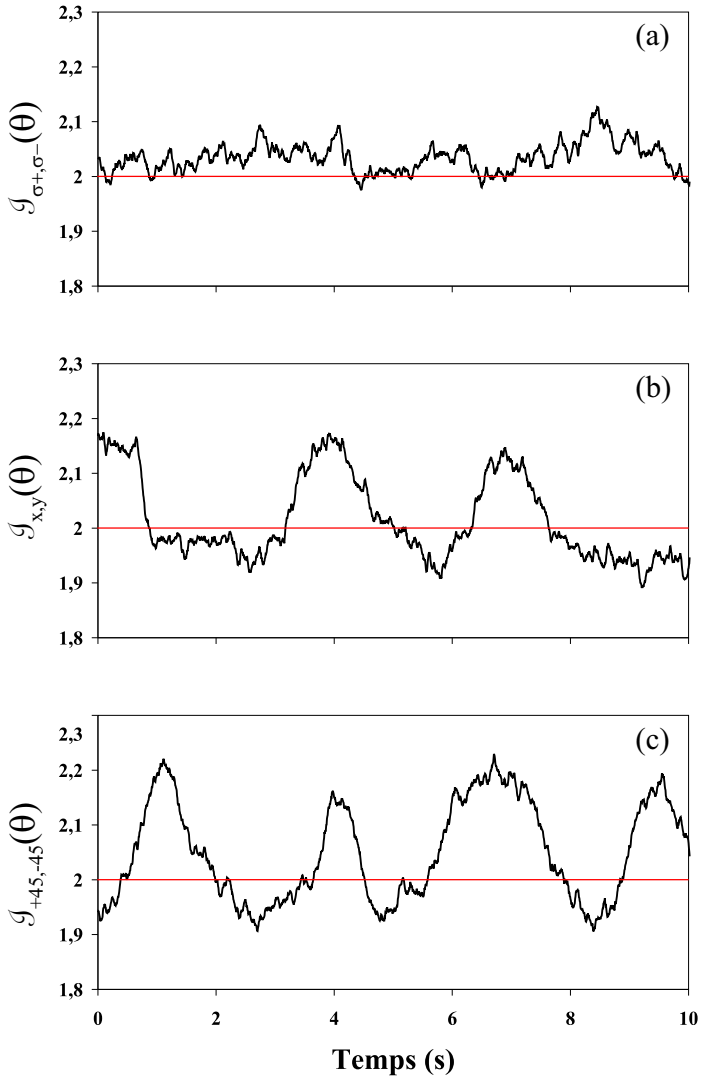


Fig. 5.19 – Mesure de l'intrication pour différentes bases de polarisation. Courbe (a): $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$. Courbe (b): $\mathcal{I}_{\sigma_+,\sigma_-}(\theta)$. Courbe (c): $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$. La fréquence d'analyse est ici fixée à 4 MHz.

donc de dissocier sans ambiguïtés les propriétés de bruit du système lorsque un seul ou deux modes du champ sont impliqués, i.e. lorsque la polarisation est circulaire ou linéaire.

L'analogie entre les relations de changement de bases de polarisation et celle de passage par une lame séparatrice donne à nouveau une interprétation claire de ces résultats. Le cas étudié ici s'apparente au mélange sur une lame d'un faisceau comprimé u (σ_+) avec un faisceau vide au bruit quantique standard (σ_-). En transmission, la réduction de bruit est plus faible car une partie de la compression de bruit a été transférée au mode réfléchi, la réduction de bruit totale étant conservée. Par contre ce processus intrique les modes transmis et réfléchi.

D Intrication en polarisation

Nous avons déterminé théoriquement et expérimentalement les propriétés de corrélation et de réduction du bruit du système. En particulier, nous avons montré que ce système génère des états non-séparables: les modes polarisés à 45° dans la limite des hautes fréquences de bruit. Toutefois nous n'avons jamais séparé spatialement ces deux modes du champ.

Pour confirmer expérimentalement l'intrication de ces deux modes, nous les avons séparés et nous avons mesuré leurs fluctuations individuellement. Nous avons alors étudié les corrélations entre les photocourants de détection [Reid89, Ou92, Bowen03a]. Ce principe de mesure est illustré sur la figure (a) de la figure 5.8.

Nous allons voir maintenant qu'il est possible de se servir de ce principe de détection pour produire des faisceaux intriqués, non plus en quadrature mais en polarisation [Korolkova02a, Bowen02b].

D.1 Définition et principe

A deux modes de polarisation α et β séparés spatialement, sont associés deux ensembles de paramètres de Stokes. Ces opérateurs peuvent être intriqués. Le critère de non-séparabilité, utilisé pour caractériser l'intrication en quadrature se généralise aisément si les deux faisceaux sont parfaitement polarisés (voir appendiceC). Deux faisceaux sont *intriqués en polarisation* si:

$$\mathcal{I}^S_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}[\langle\delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2\rangle + \langle\delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2\rangle] \quad < \quad |\langle[S_2^\alpha, S_3^\alpha]\rangle| + |\langle[S_2^\beta, S_3^\beta]\rangle| \quad \text{(5-138)}$$

On peut bien sûr intervertir les rôles des composantes S_1, S_2 et S_3. Ce critère est maintenant plus complexe: il dépend des valeurs stationnaires de certains paramètres, i.e. $\langle S_1^\alpha\rangle$ et $\langle S_1^\beta\rangle$. Il faut, en outre, considérer les relations de commutation

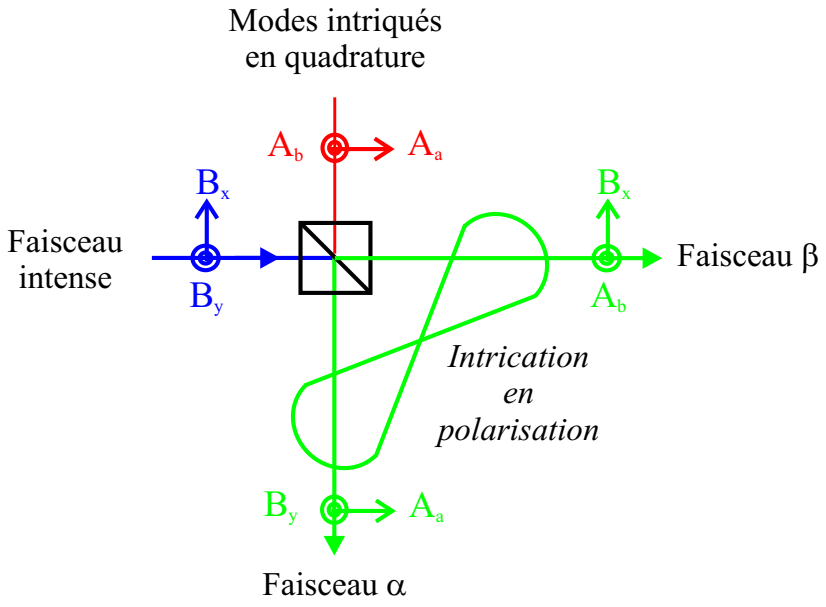


Fig. 5.20 – Principe de génération de faisceaux intriqués en polarisation à l'aide de deux modes intriqués en quadrature

entre les deux observables $S_2^\alpha + S_2^\beta$ et $S_3^\alpha + S_3^\beta$. Les relations d'incertitude imposent en effet:

$$\mathcal{I}^S_{\alpha,\beta} \geq |\langle [S_2^\alpha + S_2^\beta, S_3^\alpha + S_3^\beta] \rangle| = |\langle S_1^\alpha \rangle + \langle S_1^\beta \rangle| \tag{5-139}$$

Un état intriqué en polarisation doit donc satisfaire:

$$|\langle S_1^\alpha \rangle + \langle S_1^\beta \rangle| \leq \mathcal{I}^S_{\alpha,\beta} < |\langle S_1^\alpha \rangle| + |\langle S_1^\beta \rangle| \tag{5-140}$$

Ceci n'est possible que si $\langle S_1^\alpha \rangle \neq \langle S_1^\beta \rangle$.

De tels états sont générés, par exemple, en combinant deux faisceaux comprimés en polarisation sur un cube polariseur [Korolkova02a]. On peut également utiliser l'intrication en quadrature de deux modes a et b en suivant la méthode utilisée dans la référence [Bowen02b]. Ces deux modes sont séparés sur un cube polariseur et mélangés avec un faisceau intense polarisé à 45°, noté B (voir figure 5.20). A la sortie du cube, on obtient deux faisceaux α et β, composés des modes A_a et B_y, et B_x et A_b respectivement. Les paramètres de Stokes associés aux faisceaux α et β s'écrivent:

$$\begin{aligned}
S_1^\alpha &= A_a^\dagger A_a - B_y^\dagger B_y & S_1^\beta &= B_x^\dagger B_x - A_b^\dagger A_b \\
S_2^\alpha &= A_a B_y^\dagger + A_a^\dagger B_y & S_2^\beta &= B_x A_b^\dagger + B_x^\dagger A_b \\
S_3^\alpha &= i(A_a B_y^\dagger - A_a^\dagger B_y) & S_3^\beta &= i(B_x A_b^\dagger - B_x^\dagger A_b)
\end{aligned}$$

Le faisceau B étant polarisé à 45°, on définit

$$\langle B_x\rangle = \langle B_y\rangle = \alpha_B e^{i\theta_B} \quad , \quad \langle A_a\rangle = \alpha_a e^{i\theta_a} \quad , \quad \langle A_b\rangle = \alpha_b e^{i\theta_b} \tag{5-141}$$

Le faisceau B est choisi suffisamment intense pour satisfaire $\alpha_B \gg \alpha_a, \alpha_b$. Les deux faisceaux sont donc polarisés orthogonalement suivant les directions verticale et horizontale respectivement: $\langle S_1^\alpha\rangle = -\langle S_1^\beta\rangle = -\alpha_B^2$. Dans ces conditions, le critère d'intrication en polarisation s'écrit:

$$0 \;\leq\; \frac{1}{2}[\langle\delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2\rangle + \langle\delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2\rangle] \;<\; 2\alpha_B^2 \tag{5-142}$$

Les fluctuations des paramètres de Stokes S_2 et S_3 sont proportionnelles aux quadratures des modes a et b (cf paragraphe C.5.4 du chapitre 1):

$$\begin{aligned} \delta S_2^\alpha &= \alpha_B \delta X_a(\theta_B), & \delta S_2^\beta &= \alpha_B \delta X_b(\theta_B) \\ \delta S_3^\alpha &= -\alpha_B \delta Y_a(\theta_B), & \delta S_3^\beta &= \alpha_B \delta Y_b(\theta_B) \end{aligned}$$

La valeur $\mathcal{I}^S_{\alpha,\beta}$ est donc directement proportionnelle à la valeur de l'intrication en quadrature des modes a et b:

$$\mathcal{I}^S_{\alpha,\beta} \;=\; \alpha_B^2 \, \mathcal{I}_{a,b}(\theta_B) \tag{5-143}$$

La phase du faisceau B doit être fixée par rapport aux modes a et b de manière à obtenir $\mathcal{I}_{a,b}(\theta_B) = \min_\theta \mathcal{I}_{a,b}(\theta) \equiv \mathcal{I}_{a,b} < 2$. Les faisceaux α et β sont alors intriqués en polarisation à la sortie du cube polariseur.

On mesure directement les fluctuations des paramètres de Stokes S_2 et S_3 selon la méthode décrite au paragraphe C.6.2 du chapitre 1. Les signaux sortant des deux détections sont sommés pour obtenir successivement les fluctuations des variables $S_2^\alpha + S_2^\beta$ et $S_3^\alpha + S_3^\beta$.

Il est clair que cette expérience, présentée sous le formalisme de l'intrication en polarisation, revient à mesurer l'intrication des modes a et b par la méthode usuelle décrite sur la partie (a) de la figure 5.8; ces derniers étant alors séparés spatialement. Le faisceau B joue ici un rôle similaire à l'oscillateur local, à la différence près que sa phase est fixée.

D.2 Mise en oeuvre

Nous reprenons le montage expérimental utilisé pour la mesure directe de l'intrication des modes a et b (voir figure 5.9). Les faisceaux α et β sont envoyés vers les dispositifs de détection 1 et 2 (figure 5.21). Au cours de l'analyse précédente,

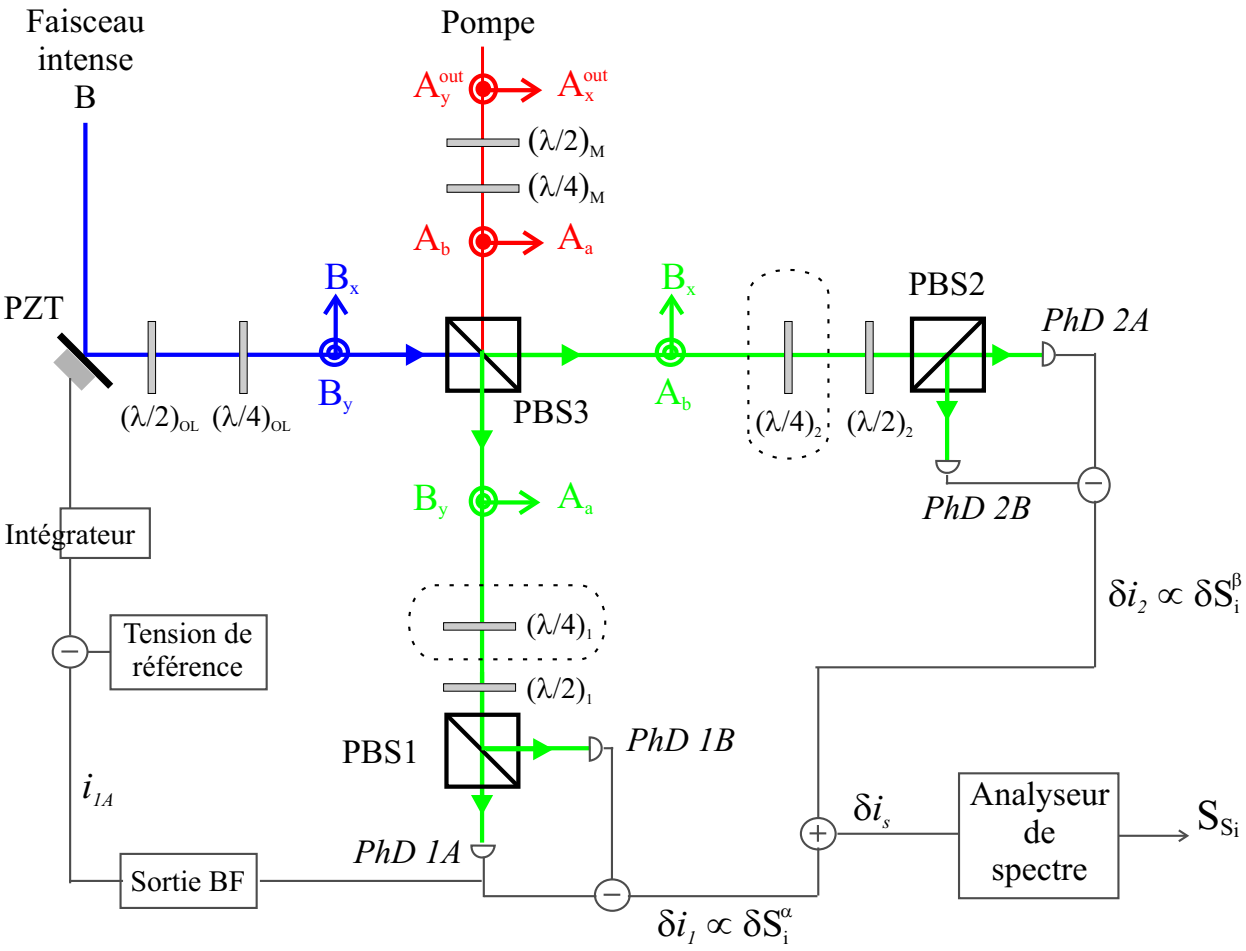


Fig. 5.21 – Dispositif de mesure de l'intrication en polarisation. Les lames quart d'onde $(\lambda/4)_{1,2}$ et demi-onde $(\lambda/4)_{1,2}$ sont ajustées pour mesurer les paramètres de Stokes $S_2^{\alpha,\beta}$ et $S_3^{\alpha,\beta}$. Le signal d'interférence de la photodiode 1A est utilisé pour asservir la phase du faisceau B.

nous n'avons pas tenu compte des déphasages introduits par le cube qui mélange les modes a, b avec le faisceau intense B. Néanmoins, nous avons vu qu'il était possible de corriger ces déphasages en jouant sur l'ellipticité du faisceau B (cf § D.1.3 du chapitre 2). Par souci de simplicité, nous n'en tiendrons donc pas compte dans la suite.

D.2.1 Détection des paramètres de Stokes

Sur les voies 1 et 2 on mesure successivement les paramètres de Stokes S_2 et S_3 des faisceaux α et β. Deux lames quart d'onde amovibles $(\lambda/4)_1$ et $(\lambda/4)_2$ sont ajoutées sur les deux voies pour mesurer le paramètre S_3 (voir figure 5.21). Leurs

axes optiques sont orientées suivant les directions horizontales et verticales. Pour déterminer les expressions des photocourants $i_1 \equiv i_{1A} - i_{1B}$ et $i_2 \equiv i_{2A} - i_{2B}$, on réécrit les équations 5-93 à 5-96 avec les nouvelles notations:

$$A_{1A} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_a + B_y) \tag{5-144}$$

$$A_{1B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_a - B_y) \tag{5-145}$$

$$A_{2A} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_b - B_x) \tag{5-146}$$

$$A_{2B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(A_b + B_x) \tag{5-147}$$

En présence des lames $(\lambda/4)_1$ et $(\lambda/4)_2$, il faut remplacer B_y par $-i\epsilon_1 B_y$ et A_b par $-i\epsilon_2 A_b$ dans les équations précédentes. Les coefficients $\epsilon_1 = \pm 1$ et $\epsilon_2 = \pm 1$ dépendant de l'orientation des axes lent et rapide de ces lames. Les fluctuations des photocourants donnent:

$$\text{sans lame } (\lambda/4)_1\text{:} \quad \delta i_1 \propto \delta S_2^{\alpha} = \alpha_B\, \delta X_a(\theta_B) \tag{5-148}$$

$$\text{avec lame } (\lambda/4)_1\text{:} \quad \delta i_1 \propto \epsilon_1\, \delta S_3^{\alpha} = -\epsilon_1\, \alpha_B\, \delta Y_a(\theta_B) \tag{5-149}$$

$$\text{sans lame } (\lambda/4)_2\text{:} \quad \delta i_2 \propto \delta S_2^{\beta} = \alpha_B\, \delta X_b(\theta_B) \tag{5-150}$$

$$\text{avec lame } (\lambda/4)_2\text{:} \quad \delta i_2 \propto \epsilon_2\, \delta S_3^{\beta} = \epsilon_2\, \alpha_B\, \delta Y_b(\theta_B) \tag{5-151}$$

Il n'est pas nécessaire de déterminer quels sont les axes lents et rapides des lames quart d'onde; il suffit simplement de connaître l'orientation de l'une par rapport à l'autre. Cette caractérisation peut être effectuée aisément: on envoie un faisceau polarisé horizontalement sur ces deux lames placées en série et tournées de 45°. Si les axes optiques coïncident, cette combinaison est équivalente à une lame demi-onde; la polarisation sortante est alors verticale et donc réfléchie par un cube polariseur. On repère ainsi les axes optiques l'un par rapport à l'autre. On fixe finalement $\epsilon_1 = \epsilon_2 \equiv \epsilon$. Ce problème étant réglé, il suffit d'envoyer la somme des deux photocourants i_s vers un analyseur de spectre:

$$\text{sans lames:} \quad \delta i_s \propto \delta S_2^{\alpha} + \delta S_2^{\beta} = \alpha_B\, (\delta X_a + \delta X_b)(\theta_B) \tag{5-152}$$

$$\text{avec lames:} \quad \delta i_s \propto \delta S_3^{\alpha} + \delta S_3^{\beta} = -\epsilon\alpha_B\, (\delta Y_a - \delta Y_b)(\theta_B) \tag{5-153}$$

En pratique cette somme est obtenue par la différence des photocourants i_1 et $-i_2$ par le même composant (Minicircuits ZSCJ-2-1) que ceux utilisés pour effectuer la différence des photocourants $i_1 = i_{1A} - i_{1B}$ et $-i_2 = i_{2B} - i_{2A}$.

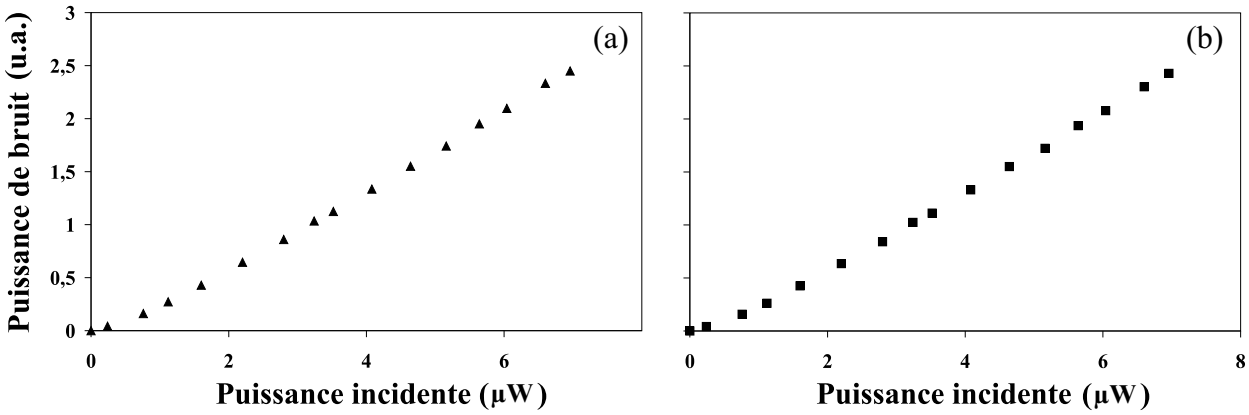


Fig. 5.22 – Bruit quantique standard mesuré avec (a) ou sans (b) les lames$(\lambda/4)_1$ et $(\lambda/4)_2$ en fonction de la puissance de l'oscillateur local. La fréquence d'analyse vaut 5 MHz.

D.2.2 Vérification de la détection

On mesure le niveau du bruit quantique standard en envoyant deux modes vides a et b vers les deux détections homodynes. Dans ce cas $\langle(\delta i_s^{vide})^2\rangle \propto 2\alpha_B^2$. Cette mesure peut se faire de deux façons: avec ou sans lames. Nous avons vérifié que sa valeur est bien identique dans les deux cas et qu'elle dépend linéairement de l'intensité (figure 5.22). On note S_{S_2} et S_{S_3} les bruits normalisés au shot:

$$\text{sans lames:} \quad S_{S_2} \equiv \frac{\langle(\delta i_s)^2\rangle}{\langle(\delta i_s^{vide})^2\rangle} = \frac{1}{2\alpha_B^2}\langle\delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2\rangle = \frac{1}{2}\langle(\delta X_a + \delta X_b)^2(\theta_B)\rangle \quad (5\text{-}154)$$

$$\text{avec lames:} \quad S_{S_3} \equiv \frac{\langle(\delta i_s)^2\rangle}{\langle(\delta i_s^{vide})^2\rangle} = \frac{1}{2\alpha_B^2}\langle\delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2\rangle = \frac{1}{2}\langle(\delta Y_a - \delta Y_b)^2(\theta_B)\rangle \quad (5\text{-}155)$$

On remarque que les valeurs S_{S_2} et S_{S_3}, correspondent aux bruits de la quadrature θ_B des modes A_1 et A_2:

$$S_{S_2} = \frac{1}{2}\langle(\delta X_a + \delta X_b)^2(\theta_B)\rangle = \langle\delta X_1^2(\theta_B)\rangle \quad (5\text{-}156)$$

$$S_{S_3} = \frac{1}{2}\langle(\delta Y_a - \delta Y_b)^2(\theta_B)\rangle = \langle\delta X_2^2(\theta_B)\rangle \quad (5\text{-}157)$$

$$\text{avec} \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a + A_b)$$

$$A_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(A_a - A_b)$$

On retrouve ainsi la propriété utilisée pour la mesure directe de l'intrication des modes a et b (voir équation 5-92). Une attention particulière a été portée au réglage des différentes lames impliquées dans la mesure. Il est néanmoins indispensable de

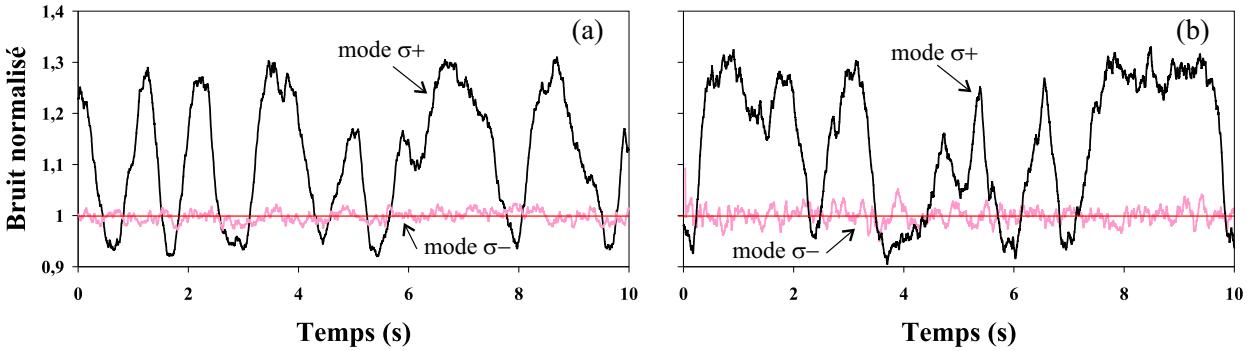


Fig. 5.23 – Mesure des spectres de bruit des composantes circulaires par deux méthodes. Courbe (a): mesure directe selon la méthode décrite en légende de la figure 5.8. Courbe (b): avec (mode σ_+) ou sans (mode σ_-) lames quart d'onde.

s'assurer qu'aucune erreur ne s'est introduite dans le montage. Par exemple, si les lames quart d'ondes avaient été, par erreur, réglées de telle sorte que $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ alors S_{S_2} et S_{S_3} seraient les bruits de quadrature du même mode A_1 (voir formules 5-149, 5-151 et 5-153).

On vérifie la validité de la détection en choisissant deux modes a et b tels que les spectres de bruit des modes 1 et 2 qui leur sont associés (suivant les relations 5-156 et 5-157) soient très différents, donc aisément identifiables. Une bonne solution consiste à asservir la cavité dans le domaine où la polarisation est devenue circulaire dans la cavité. Dans ce cas, seul un mode circulaire, soit $A_{\sigma_+} = A_1$, est comprimé, tandis que le mode $A_{\sigma_-} = A_2$ reste au niveau du bruit quantique standard. On envoie donc les modes $A_a = A_{+45}$ et $A_b = iA_{-45}$ vers le dispositif de détection:

$$S_{S_2} = \langle \delta X^2_{\sigma_+}(\theta_B) \rangle \quad , \quad S_{S_3} = \langle \delta X^2_{\sigma_-}(\theta_B) \rangle \tag{5-158}$$

$$\text{avec} \qquad A_{\sigma_+} = \frac{-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_{+45} + iA_{-45})$$

$$A_{\sigma_-} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_{+45} - iA_{-45})$$

En faisant varier continûment la phase de B, celui-ci jouant le rôle d'oscillateur local, on retrouve les spectres de bruit des modes circulaires. On compare ces spectres à ceux donnés par une mesure directe (on revient alors à la méthode de mesure utilisant les deux détections homodynes décrites sur la figure 5.9). La figure 5.23 montre un très bon accord entre ces deux méthodes: le mode σ_+ oscille entre les mêmes valeurs de bruit minimal et maximale et le mode σ_- est bien au niveau du bruit quantique standard. Nous validons ainsi notre dispositif de détection.

D.2.3 Asservissement de la phase

Pour produire les deux faisceaux intriqués en polarisation, on asservit la phase θ_B. Le principe de cet asservissement a été présenté dans le paragraphe D.2 du chapitre 3. On utilise le signal d'interférence i_{1A} entre le mode A_a et le mode B_y donné par la sortie basse fréquence de la photodiode $PhD\ 1A$. La lame quart d'onde $(\lambda/4)_1$ introduisant un déphasage de $\pi/2$ entre ces deux modes, l'expression du photocourant i_{1A} est différente suivant que l'on mesure le paramètre de Stokes S_2 ou S_3 du faisceau. A partir des équations 5-141 et 5-144 on obtient:

$$\begin{aligned} i_{1A} &\propto \alpha_B^2 + \alpha_a^2 + 2\alpha_B\alpha_a \cos\ \theta_{1A} \qquad (5\text{-}159)\\ \text{sans lame } (\lambda/4)_1&: \quad \theta_{1A} \equiv \theta_{S_2} = \theta_B - \theta_a \\ \text{avec lame } (\lambda/4)_1&: \quad \theta_{1A} \equiv \theta_{S_3} = \theta_B - \theta_a - \epsilon\pi/2 \end{aligned}$$

La valeur de θ_B ne doit pas varier entre les mesures des paramètres de Stokes S_2 et S_3. C'est pourquoi on compense le déphasage de $\pi/2$ introduit par la lame $(\lambda/4)_1$ sur le mode B en déplaçant le point d'asservissement de θ_{1A} entre les deux mesures de $\pi/2$.

D.3 Résultats expérimentaux

Si on s'intéresse à des fréquences d'analyse élevées, c'est à dire supérieures à γ, les modes polarisés à 45° sont intriqués à la sortie de la cavité. On les utilise donc naturellement pour produire les deux faisceaux intriqués en polarisation suivant la méthode décrite ci-dessus. On place une lame demi-onde tournée à $+22.5°$ sur le trajet du faisceau pompe de manière à obtenir $A_a = A_{+45}$ et $A_b = A_{-45}$. Pour cette configuration, les signaux S_{S_2} et S_{S_3} correspondent aux bruits des modes x et y pour la quadrature θ_B (voir les équations 5-156 et 5-157):

$$S_{S_2} = \langle \delta X_x^2(\theta_B)\rangle \quad , \quad S_{S_3} = \langle \delta Y_y^2(\theta_B)\rangle \qquad (5\text{-}160)$$

Dans ce domaine de fréquence, les modes x et y sont comprimés sur des quadratures orthogonales. Afin que les faisceaux α et β soient intriqués en polarisation, la phase du faisceau B doit être égale à la phase $\theta_B^{sq} = \theta_{sq}$ des quadratures comprimées des modes x et iy, tel que:

$$S_{S_2} = \langle \delta X_x^2(\theta_{sq})\rangle = \langle \delta X_x^2\rangle_{min} < 1 \qquad (5\text{-}161)$$

$$S_{S_3} = \langle \delta Y_y^2(\theta_{sq})\rangle = \langle \delta X_{iy}^2(\theta_{sq})\rangle = \langle \delta X_y^2\rangle_{min} < 1 \qquad (5\text{-}162)$$

En pratique nous asservissons les phases θ_{S_2} et θ_{S_3} à l'aide du signal d'interférence i_{1A} (voir relation 5-159):

$$\text{sans lame } (\lambda/4)_1: \quad \theta_{S_2} = \theta_B - \theta_{+45} = \theta_B - \theta_x \qquad (5\text{-}163)$$

$$\text{avec lame } (\lambda/4)_1: \quad \theta_{S_3} = \theta_B - \theta_{+45} \pm \pi/2 = \theta_B - \theta_x \pm \pi/2 \qquad (5\text{-}164)$$

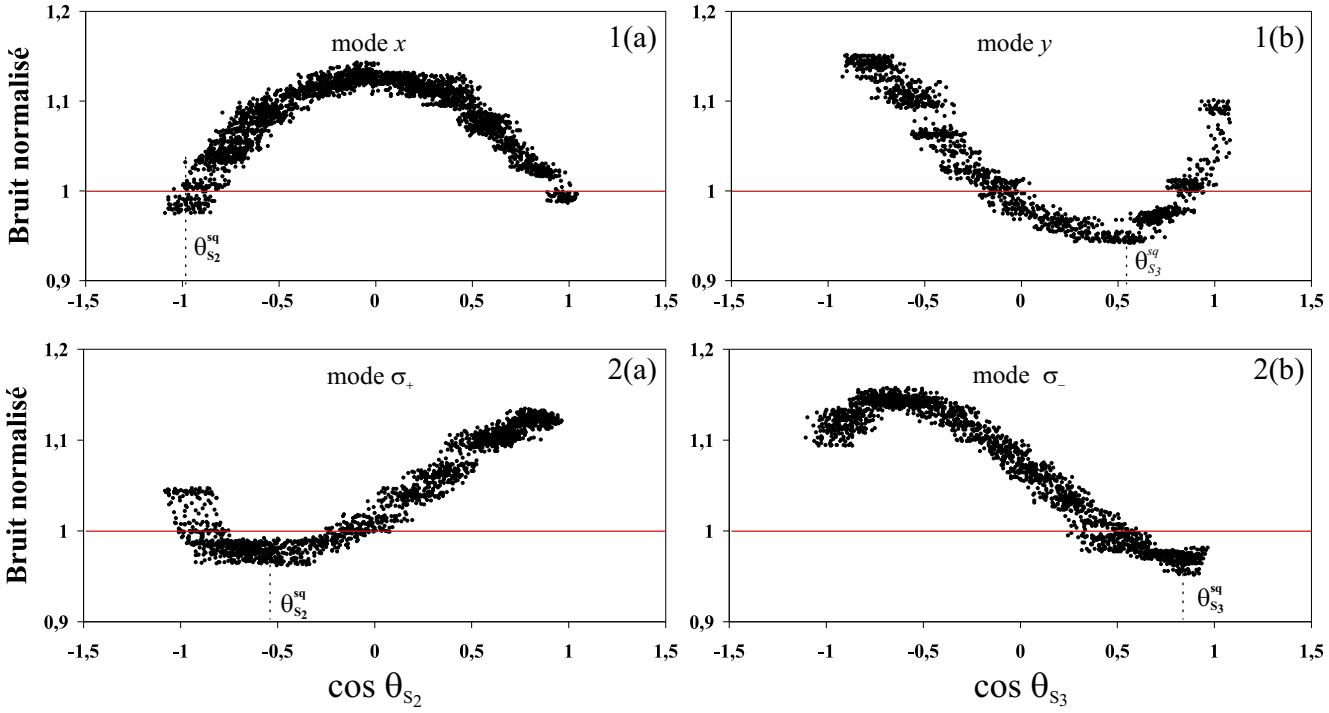


Fig. 5.24 – Mesure des bruits S_{S_2} (courbes (a)) et S_{S_3} (courbes (b)) en fonction de $\cos\theta_{S_2}$ et $\cos\theta_{S_3}$ respectivement. Courbes (1): $A_a = A_{+45}$ et $A_b = A_{-45}$. Courbes (2): $A_a = A_{+45}$ et $A_b = iA_{-45}$. Les valeurs $\theta^{sq}_{S_2}$ et $\theta^{sq}_{S_3}$ correspondent aux quadratures comprimées. Pour les courbes 2, on obtient $\theta^{sq}_{S_2} \simeq 120°$ et $\theta^{sq}_{S_3} \simeq 30°$, et donc $\theta^{sq}_{S_3} - \theta^{sq}_{S_2} \simeq 90°$.

où $\theta_x = \theta_{+45}$ est la phase commune des champs moyens $\langle A_x \rangle$ et $\langle A_{+45} \rangle$. Nous déterminons la position d'asservissement en étudiant l'évolution des bruits S_{S_2} et S_{S_3} lorsqu'on balaie la phase θ_B. La figure 5.24 montre les courbes obtenues lorsque l'on trace ces bruits en fonction des signaux d'interférences normalisés $\cos\theta_{S_2}$ et $\cos\theta_{S_3}$. Ceci revient à déterminer quelles sont les quadratures comprimées pour le modes x et y. Cette étude a déjà été réalisée en utilisant une méthode directe (voir paragraphe E.2 du chapitre 3).

On retrouve ici la propriété observée précédemment, à savoir que la réduction de bruit du champ moyen apparaît sur une quadrature très proche de la quadrature d'amplitude correspondant à $\theta_{S_2} \equiv \theta^{sq}_{S_2} \simeq 0_{[\pi]}$, i.e $\theta^{sq}_B \simeq \theta_x$ (voir courbe 1(a) de la figure 5.24). Pour cette raison, il n'est pas possible d'asservir la phase du faisceau B avec le signal i_{1A}, l'asservissement par différence ne fonctionnant pas au voisinage d'un extremum ($\theta_{S_2} \simeq 0$ ou π).

Pour résoudre ce problème, on rajoute une lame quart d'onde sur le trajet du faisceau pompe. Les modes $A_a = A_{+45}$ et $A_b = iA_{-45}$ sont maintenant mélangés avec le faisceau B. Ils possèdent la même intrication que les modes A_{+45} et A_{-45}

($\mathcal{I}_{+45,-45} = \mathcal{I}_{+45,i(-45)}$) mais les bruits S_{S_2} et S_{S_3} s'expriment maintenant en fonction des bruits des modes circulaires. Les relations 5-156, 5-157 et 5-159 donnent dans ce cas:

$$S_{S_2} = \langle \delta X^2_{\sigma_+}(\theta_B) \rangle \quad , \quad S_{S_3} = \langle \delta X^2_{\sigma_-}(\theta_B) \rangle \tag{5-165}$$

et
$$\theta_{S_2} = \theta_B - \theta_{+45} = \theta_B - \theta_{\sigma_+} + \pi \tag{5-166}$$
$$\theta_{S_3} = \theta_B - \theta_{+45} \pm \pi/2 = \theta_B - \theta_{\sigma_-} \pm \pi/2 \tag{5-167}$$

Les relations 5-166 et 5-167 découlent directement des relations de passage entre les différentes bases de polarisation qui sont résumées dans l'appendice A. La dépendance des bruits S_{S_2} et S_{S_3} en fonction de la phase est illustrée sur les courbes 2(a) et 2(b) de la figure 5.24. La courbe (a) donne la dépendance du bruit du mode σ_+ en fonction de la phase relative entre ce mode et le mode B; celle-ci est donc équivalente à la courbe 3(a) de la figure 2.32. Ce mode est comprimé pour une quadrature différente de la quadrature d'amplitude, il est donc possible d'asservir la phase θ_{S_2} sur la quadrature comprimée $\theta^{sq}_{S_2}$.

Le mode σ_- doit être comprimé pour la même quadrature, les composantes circulaires jouant un rôle symétrique lorsque la polarisation est linéaire. Or la phase θ_{S_3} est décalée de $\pi/2$ par rapport à la phase relative entre ce mode et champ B. La quadrature de bruit minimum doit correspondre alors à $\theta^{sq}_{S_3} \simeq \theta^{sq}_{S_2} \pm \pi/2$, ce qui est bien le cas, comme on le voit sur la courbe 2(b) de la figure 5.24. Le point de fonctionnement correspondant est également accessible par notre asservissement.

Dans ces conditions, nous avons pu mesurer les fluctuations des paramètres de Stokes S_2 et S_3, la phase θ_B étant maintenue constante à la valeur:

$$\theta^{sq}_B = \theta^{sq}_{S_2} + \theta_x \simeq \theta^{sq}_{S_3} + \theta_x + \pm\pi/2 \tag{5-168}$$

Les résultats obtenus à la fréquence d'analyse de $5\,MHz$ sont présentés sur la figure 5.25. On observe une réduction de bruit de l'ordre de 4% sur les deux bruits S_{S_2} et S_{S_3}:

$$S_{S_2} \equiv \frac{1}{2\alpha_B^2} \langle \delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2 \rangle = \langle \delta X^2_{\sigma_+} \rangle_{min} \simeq 0.96 < 1 \tag{5-169}$$

$$S_{S_3} \equiv \frac{1}{2\alpha_B^2} \langle \delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2 \rangle = \langle \delta X^2_{\sigma_-} \rangle_{min} \simeq 0.96 < 1 \tag{5-170}$$

Les deux faisceaux α et β sont donc bien intriqués en polarisation puisqu'ils vérifient le critère:

$$\frac{\mathcal{I}^S_{\alpha,\beta}}{\alpha_B^2} = S_{S_2} + S_{S_3} = \mathcal{I}_{+45,i(-45)} \simeq 1.92 < 2 \tag{5-171}$$

On retrouve ainsi la valeur de l'intrication des modes polarisés à 45°. Cette valeur concorde avec les résultats obtenus par la mesure directe décrite au paragraphe C.2.

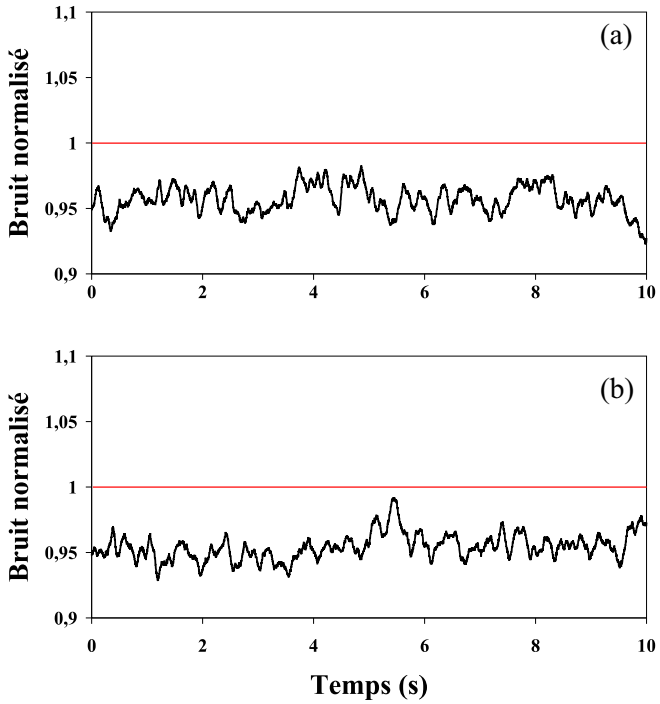


Fig. 5.25 – Mesure des bruits S_{S_2} (courbe (a)) et S_{S_3} (courbe (b)) à la fréquence d'analyse de 5 MHz. La phase du faisceau B est maintenue constante entre les deux mesures. On observe une réduction de bruit d'environ 4% sur ces deux bruits.

E Conclusion

Nous avons donc étudié les corrélations quantiques produites par le système. Pour cela, nous avons estimer l'intrication, définie à partir du critère de non-séparabilité développé par Duan *et al.* [Duan00a], entre deux modes de polarisation orthogonale. Dans un premier temps nous avons considéré les propriétés générales d'un système impliquant deux modes, et nous avons montré que il était toujours possible de trouver une base particulière pour lesquels les modes sont "décorrélés". Une fois cette base identifiée, les propriétés d'intrication du système se déterminent aisément.

Nous avons appliqué ces résultats à l'étude de l'interaction du faisceau pompe avec le milieu atomique en cavité. Pour des fréquences supérieures au taux de pompage optique, les modes de polarisation circulaire σ_+ et σ_- sont indépendants. Ceux-ci sont également symétriques lorsque la polarisation du faisceau pompe reste linéaire. Du fait de la non-linéarité associée à la saturation de la transition optique ces deux modes sont comprimés, et ce pour des quadratures identiques.

Les propriétés d'intrication et de réduction de bruit du système découlent alors directement des relations de passage entre la base de polarisation circulaire et les autres bases de polarisation. Ainsi les modes polarisés linéairement x et y sont décorrélés et comprimés sur des quadratures orthogonales. En revanche, les modes polarisés à 45° sont les modes les plus intriqués du système.

Nous avons vérifié ces résultats expérimentalement en mesurant, par une méthode originale, l'intrication entre ces différents modes. Ces résultats sont en accord, d'une part avec les résultats expérimentaux déjà présentés dans les chapitres 2 et 3 et d'autre part avec les prévisions théoriques données par le modèle à quatre niveau en "X" (voir chapitre 4).

Une fois les modes intriqués identifiés, nous les avons mélangés sur un cube polariseur avec un faisceau intense afin de produire une paire de faisceaux intriqués en polarisation.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce manuscrit l'étude de l'interaction entre un faisceau lumineux polarisé linéairement et un nuage d'atomes froids placés à l'intérieur d'une cavité. A partir de l'observation expérimentale réalisée au début de ce travail de thèse, à savoir la réduction de bruit sur deux modes du champ, nous avons mis en oeuvre des techniques permettant de caractériser les fluctuations de polarisation du faisceau ainsi que les corrélations quantiques produites par le système.

Dans un premier temps, nous avons développé une méthode permettant de mesurer la phase des quadratures comprimées des champs sortants. Cette méthode nous a permis de déterminer, tout d'abord, les fluctuations de polarisation du faisceau [Josse03b], puis de montrer que le champ moyen et le mode vide orthogonal étaient comprimés sur des quadratures orthogonales.

A partir de considérations de symétrie, nous avons déduit que le champ moyen et le mode vide orthogonal étaient en fait complètement décorrélés à la sortie de la cavité. En revanche, les modes polarisés à 45° sont les modes les plus intriqués du système. La valeur de leur intrication, estimée à partir du critère d'inséparabilité, est alors donnée par la somme de la réduction de bruit du champ moyen et du mode vide orthogonal. Ces propriétés ont été vérifiées expérimentalement [Josse03c].

Pour palier l'excès de bruit dû à la présence des faisceaux pièges, nous avons mis en place une méthode de détection synchrone, les pièges étant coupés de manière cyclique. Cette technique nous a permis d'améliorer la réduction de bruit mesurée sur le champ moyen. Toutefois, aucun effet n'a été observé sur le mode vide orthogonal.

Afin d'expliquer les résultats expérimentaux, nous avons modélisé le milieu atomique par un ensemble d'atomes à quatre niveaux en "X" [Josse03a]. Ce modèle nous a permis de démontrer que la réduction de bruit sur les deux modes du champ résulte de l'effet Kerr sur le champ moyen et de l'effet Kerr croisé sur le mode vide orthogonal. Ces effets sont dus à la saturation des transitions optiques. En particulier, nous avons montré que l'effet de "rotation auto-induite" est, dans notre cas, responsable d'un fort excès de bruit à basse fréquence sur le mode vide orthogonal. Les résultats obtenus par ce modèle laissent à penser qu'il serait possible d'améliorer la réduction de bruit en augmentant la bande passante de la cavité, ce qui pourrait se faire simplement en diminuant sa longueur. Pour des raisons pratiques, dues à la

configuration actuelle de l'expérience, nous n'avons pu vérifier cette hypothèse.

A terme, l'objectif du groupe d'optique quantique est d'étudier la réduction de bruit sur les variables atomiques. En étendant les prévisions du modèle théorique en "X" au calcul de ces fluctuations atomiques, on peut montrer que les fluctuations de l'orientation atomique du nuage d'atomes froids peuvent être réduites lors de l'interaction avec la lumière. Cette caractérisation constituera, entre autre, l'objet de travaux futurs.

Par ailleurs, les méthodes développées dans ce manuscrit peuvent être appliquées à d'autres systèmes pour lesquels les corrélations quantiques sont produites au sein d'un même dispositif. Par exemple, le groupe d'optique quantique s'intéresse actuellement aux corrélations que pourraient produire un oscillateur paramétrique optique de type II dans lequel on a inséré des éléments biréfringents [Longchambon03b]. Dans ce cas, les considérations générales effectuées sur les corrélations quantiques [Josse03d] peuvent servir à déterminer et à mesurer la meilleure intrication produite par un tel système.

Annexe

Annexe

A Relations de passage

A.1 Relations de passage entre différentes bases de polarisation

Dans la base de polarisation (x,y), le champ électromagnétique s'écrit en fonction des modes A_x et A_y:

$$\vec{E} = \mathcal{E}_0(\ A_x\,\vec{e}_x\ +\ A_y\,\vec{e}_y\ )\,e^{-i\omega_L t}\ +\ \text{c.c} \tag{A-1}$$

On peut également écrire le champ électromagnétique sur les bases de polarisation à 45° ou circulaire:

$$\vec{E} = \mathcal{E}_0(\ A_{+45}\,\vec{e}_{+45}\ +\ A_{-45}\,\vec{e}_{-45}\ )\,e^{-i\omega_L t}\ +\ \text{c.c} \tag{A-2}$$

$$\vec{E} = \mathcal{E}_0(\ A_+\,\vec{e}_+\ +\ A\,\vec{e}_-\ )\,e^{-i\omega_L t}\ +\ \text{c.c} \tag{A-3}$$

où les différents vecteurs $\vec{e}_{+45}$, $\vec{e}_{-45}$, $\vec{e}_+$ et $\vec{e}_-$ sont représentés sur la figure 7.1. Ces vecteurs se décomposent dans le repère ($\vec{e}_x$,$\vec{e}_y$) suivant les relations:

$$\vec{e}_{+45} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{e}_{-45} = \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \tag{A-4}$$

$$\text{et} \quad \vec{e}_+ = -\frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{e}_- = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \tag{A-5}$$

En utilisant l'expression de ces vecteurs dans les relations A-2 et A-3, nous obtenons alors les relations de passage entre les modes polarisés à 45° et les modes A_x et A_y:

$$A_{+45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\ +\ A_y) \quad \text{et} \quad A_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{+45}\ +\ A_{-45}) \tag{A-6}$$

$$A_{-45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\ -\ A_y) \qquad A_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{+45}\ -\ A_{-45}) \tag{A-7}$$

De même, les modes circulaires A_+ et A_- s'écrivent:

$$A_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\ -\ iA_y) \quad \text{et} \quad A_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_+\ -\ A_-) \tag{A-8}$$

$$A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\ +\ iA_y) \qquad A_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A_+\ +\ A_-) \tag{A-9}$$

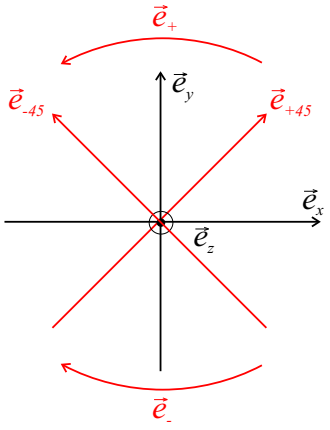


Fig. 7.1 – Représentation des différents états de polarisation considérés.

Enfin les relations de passages entre les modes polarisés à 45° et les modes circulaires valent:

$$A_+ = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_{+45} + iA_{-45}) \quad \text{et} \quad A_{+45} = -\frac{e^{+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ + iA_-) \qquad \text{(A-10)}$$

$$A_- = i\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_{+45} - iA_{-45}) \qquad A_{-45} = i\frac{e^{+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ - iA_-) \qquad \text{(A-11)}$$

A.2 Relations de passage à la traversée d'une lame d'onde

Lors de ce travail, nous avons été amenés à utiliser les relations de passage à travers des lames d'onde. Nous détaillons ici ces transformations pour une lame demi-onde tournée à +22.5° et pour une lame quart d'onde tournée à 45°.

A.2.1 Lame demi-onde

Considérons une lame demi-onde tournée de +22.5° comme illustré sur la figure 7.2. A l'entrée de la lame les modes A_a et A_b sont les modes polarisés suivant les directions horizontale et verticale. Nous les noterons:

$$A_a = A_x^{in} \qquad \text{et} \qquad A_b = A_y^{in} \qquad \text{(A-12)}$$

Les axes de la lames correspondent à deux modes de polarisation $A_{x'}$ et $A_{y'}$. L'effet de cette lame est de déphaser le mode $A_{y'}$ de π:

$$A_{x'}^{out} = A_{x'}^{in} \qquad \text{et} \qquad A_{y'}^{out} = -A_{y'}^{in} \qquad \text{(A-13)}$$

A la sortie de la lame, les modes polarisés suivant les directions horizontale et verticale sont donc les modes "polarisés à 45°" par rapport aux modes A_a et A_b:

$$A_x^{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^{in} + A_y^{in}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a + A_b) = "A_{+45}" \qquad \text{(A-14)}$$

$$A_y^{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x^{in} - A_y^{in}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a - A_b) = "A_{-45}" \qquad \text{(A-15)}$$

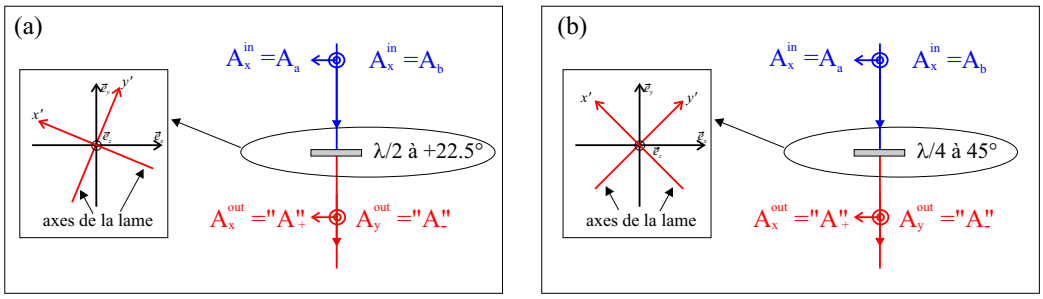


Fig. 7.2 – Figure (a): orientation du trièdre de référence qui servira de repère pour l'étude de la polarisation du champ électromagnétique. Figure (b): ellipse de polarisation.

Si on inverse maintenant le rôle des axes x' et y', cela revient à déphaser les deux modes de π. Cette phase globale ne change pas le résultat.

A.2.2 Lame quart d'onde

Considérons maintenant une lame quart d'onde tournée de 45° (voir figure 7.2). Nous reprenons les mêmes définitions qu'au paragraphe précédent, à savoir $A_a = A_x^{in}$ et $A_b = A_y^{in}$. Les axes rapide et lent de lames correspondent aux axes x' et y', cette fois-ci tournés à $+45°$. La lame quart d'onde déphase les modes associés à ces deux axes de $\pi/2$:

$$A_{x'}^{out} = A_{x'}^{in} \qquad \text{et} \qquad A_{y'}^{out} = iA_{y'}^{in} \tag{A-16}$$

A la sortie, les modes polarisés suivant les directions horizontale et verticale sont les modes "polarisés circulairement" par rapport aux modes A_a et A_b:

$$A_x^{out} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_x^{in} - iA_y^{in}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_a - iA_b) = -e^{i\frac{\pi}{4}}\text{"}A_+\text{"} \tag{A-17}$$

$$A_y^{out} = -i\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_x^{in} + iA_y^{in}) = -i\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_a + iA_b) = -ie^{i\frac{\pi}{4}}\text{"}A_-\text{"} \tag{A-18}$$

Si on échange les rôles des axes lent et rapide, alors on intervertit les composantes circulaires à la sortie de la lame. On montre dans ce cas:

$$A_x^{out} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_a + iA_b) = e^{i\frac{\pi}{4}}\text{"}A_-\text{"} \tag{A-19}$$

$$A_y^{out} = i\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_a - iA_b) = -ie^{-i\frac{\pi}{4}}\text{"}A_+\text{"} \tag{A-20}$$

B Compléments à l'étude du bruit quantique

B.1 Coefficients de diffusion

B.1.1 Expressions générales

Les coefficients de diffusion sont définis de la manière suivante:

$$\langle F_{ab}(t)\, F_{cd}(t')\rangle \;=\; 2\, D_{ab,cd}\, \delta(t-t') \tag{B-1}$$

Ces coefficients se calculent en utilisant le théorème de régression quantique [Cohen96a]. Les coefficients de diffusion correspondant aux populations sont donnés par:

$$2D_{11,11} = 2\gamma_\perp\langle\sigma_{33}\rangle + 2\gamma_{//}\langle\sigma_{44}\rangle \;,\; 2D_{22,22} = 2\gamma_\perp\langle\sigma_{44}\rangle + 2\gamma_{//}\langle\sigma_{33}\rangle \tag{B-2}$$
$$2D_{11,44} = -2\gamma_{//}\langle\sigma_{44}\rangle \;,\; 2D_{22,33} = -2\gamma_{//}\langle\sigma_{33}\rangle \tag{B-3}$$
$$2D_{11,33} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{33}\rangle \;,\; 2D_{22,44} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{44}\rangle \tag{B-4}$$
$$2D_{44,44} = 2\gamma\langle\sigma_{44}\rangle \;,\; 2D_{33,33} = 2\gamma\langle\sigma_{33}\rangle \tag{B-5}$$

Les coefficients de diffusion impliquant les cohérences optiques valent:

$$2D_{11,41} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{41}\rangle \;,\; 2D_{22,32} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{32}\rangle \tag{B-6}$$
$$2D_{22,41} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{41}\rangle \;,\; 2D_{11,32} = -2\gamma_\perp\langle\sigma_{32}\rangle \tag{B-7}$$
$$2D_{44,41} = 2\gamma\langle\sigma_{41}\rangle \;,\; 2D_{33,32} = 2\gamma\langle\sigma_{32}\rangle \tag{B-8}$$
$$2D_{14,41} = 2\gamma\langle\sigma_{11}\rangle + 2\gamma_\perp\langle\sigma_{33}\rangle + 2\gamma_\perp\langle\sigma_{44}\rangle \tag{B-9}$$
$$2D_{23,23} = 2\gamma\langle\sigma_{22}\rangle + 2\gamma_\perp\langle\sigma_{44}\rangle + 2\gamma_\perp\langle\sigma_{33}\rangle \tag{B-10}$$

On remarque que ces coefficients de diffusion satisfont aux relations suivantes:

$$2D_{11,41} + \frac{\gamma_{//}}{\gamma}(2D_{44,41}) = 0 \tag{B-11}$$
$$2D_{22,41} + \frac{\gamma_\perp}{\gamma}(2D_{44,41}) = 0 \tag{B-12}$$
$$2D_{22,32} + \frac{\gamma_{//}}{\gamma}(2D_{33,32}) = 0 \tag{B-13}$$
$$2D_{11,32} + \frac{\gamma_\perp}{\gamma}(2D_{33,32}) = 0 \tag{B-14}$$
$$2D_{14,41} + 2D_{23,23} = 2\gamma(\langle\sigma_{11}\rangle + \langle\sigma_{22}\rangle + \langle\sigma_{33}\rangle + \langle\sigma_{44}\rangle) = 2\gamma\, N \tag{B-15}$$

B.1.2 Approximation du pompage optique

Dans le cas où le désaccord atomique est très grand devant la fréquence de Rabi et le taux de relaxation des dipôles ($\Delta \gg \Omega_\pm \gg \gamma$), nous effectuons l'élimination adiabatique des cohérences optiques et des populations excitées pour déterminer

l'évolution des populations dans le fondamental. Nous nous limiterons ici au développement au permettant d'obtenir les matrices de susceptibilité et corrélations atomiques au premier ordre en γ/Δ.

Dans ce cas les forces de Langevin F_{11}^{ad} et F_{22}^{ad} associées aux équations de pompage optique 4-31 et 4-32 s'écrivent:

$$F_{11}^{ad} = F_{11} + \frac{\gamma_{//}}{\gamma} F_{44} + \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma} F_{33} \tag{B-16}$$

$$+g\frac{\gamma_{\perp}}{\gamma}\frac{1}{\Delta}\left(\langle A_+\rangle F_{41} - \langle A_-\rangle F_{32} \quad + \quad \text{c.c} \ \right) \tag{B-17}$$

$$\text{et} \quad F_{22}^{ad} = F_{22} + \frac{\gamma_{//}}{\gamma} F_{33} + \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma} F_{44} \tag{B-18}$$

$$-g\frac{\gamma_{\perp}}{\gamma}\frac{1}{\Delta}\left(\langle A_+\rangle F_{41} - \langle A_-\rangle F_{32} \quad + \quad \text{c.c} \ \right) \tag{B-19}$$

La conservation du nombre total d'atomes N impose une relation entre les différentes forces de Langevin associées aux populations:

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} + F_{44} = 0 \tag{B-20}$$

Dans le cadre de l'approximation du pompage optique, nous négligeons les populations excitées: $N \simeq \sigma_{11} + \sigma_{22}$. Cette approximation est bien cohérente puisque l'on montre aisément à partir des équations précédentes que:

$$F_{11}^{ad} + F_{22}^{ad} = 0 \tag{B-21}$$

Pour calculer le bruit du mode vide A_y^{out} à la sortie de la cavité, il faut prendre en compte le bruit atomique. Le bruit dû aux processus de pompage optique (entre les différents sous niveaux Zeeman du fondamental) est relié, en partie, au coefficient de diffusion associé à l'orientation du milieu J_z (voir paragraphe B.3 du chapitre 4). La force de Langevin correspondante vaut:

$$F_z = \frac{F_{22}^{ad} - F_{11}^{ad}}{2} = F_{22}^{ad} \tag{B-22}$$

Le coefficient de diffusion D_z, défini par $\langle F_z(t)F_z(t')\rangle = 2D_z\delta(t-t')$, s'obtient à partir des coefficients de diffusion donnés au paragraphe précédent. Lorsque la polarisation est linéaire à l'intérieur de la cavité, le système est symétrique et on montre alors que D_z s'écrit simplement:

$$2D_z \ = \ \frac{N}{2}\,\gamma_{\perp}\, s_x \ = \ \frac{N}{2}\,\gamma_p \tag{B-23}$$

où γ_p est le taux de pompage optique. Nous avons montré au paragraphe B.3.4 du chapitre 4 que l'on pouvait retrouver cette relation directement à l'aide du théorème de régression quantique.

B.2 Susceptibilité et matrice de corrélations atomiques

Nous donnons ici les expressions des matrices de susceptibilité$[\chi(\omega)]$ et de corrélations atomiques $[\sigma]$ utilisées pour calculer les spectres de bruit du champ moyen et du mode vide aux paragraphes B.3 et D du chapitre 4. Celles-ci sont écrites suivant les notations usuelles de la théorie linéaire entrée-sortie décrite dans la référence [Hilico92a].

B.2.1 Limite basse fréquence: effet de "rotation auto-induite"

Nous nous intéressons ici uniquement au traitement des fluctuations du mode vide y dans le cadre de l'approximation du pompage optique. Le principe du calcul est détaillé au paragraphe B.3 du chapitre 4. A partir de l'équation 4-83, nous obtenons la matrice susceptibilité, qui s'exprime comme:

$$[\chi(\omega)] \;=\; [\chi]_0 \;+\; [\chi(\omega)]_{SR} \tag{B-24}$$

avec

$$[\chi]_0 = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B-25}$$

$$\text{et}\quad [\chi(\omega)]_{SR} = -\frac{1}{2\Delta}\frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega}\begin{bmatrix} 1 & -\langle A_x\rangle^2/|\langle A_x\rangle|^2 \\ -\langle A_x\rangle^{*2}/|\langle A_x\rangle|^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{B-26}$$

La matrice $[\chi]_0$ est associée au déphasage linéaire dû aux atomes tandis que la matrice $[\chi(\omega)]_{SR}$ correspond au phénomène de "rotation auto-induite".

Le bruit atomique intervient dans la calcul des fluctuations du champ sortant (équation 4-92) par l'intermédiaire de la matrice de corrélation $[V_{at}]$, définie par la relation 4-93. Celle-ci s'exprime en fonction de la matrice de corrélation $[\sigma(\omega)]$ d'après la relation 4-94. En utilisant les coefficients de diffusion présentés dans cet appendice, nous obtenons l'expression de cette matrice:

$$\begin{aligned}[\sigma(\omega)]_{SR} \;=\; & \frac{\gamma_p^2}{4\gamma_\perp(\gamma_p^2+\omega^2)}\begin{bmatrix} 1 & -\langle A_x\rangle^2/|\langle A_x\rangle|^2 \\ -\langle A_x\rangle^{*2}/|\langle A_x\rangle|^2 & 1 \end{bmatrix} \\ & +\frac{\gamma_p}{2\Delta(\gamma_p^2+\omega^2)}\begin{bmatrix} -2\omega & \omega+i\gamma_p \\ \omega-i\gamma_p & 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{B-27}$$

B.2.2 Limite haute fréquence : effet Kerr

Pour des fréquences très supérieures au taux de pompage optique ($\omega \ll \gamma_p$), les termes dus au pompage optique disparaissent. A haute fréquence et pour des grands désaccords, le milieu se comporte approximativement comme un milieu Kerr

[Hilico92a]. En se limitant au troisième ordre en γ/Δ, la matrice de susceptibilité s'écrit en effet:

$$[\chi(\omega)] \;=\; [\chi]_0 \;+\; [\chi]_{abs} \;+\; [\chi(\omega)]_{Kerr} \tag{B-28}$$

avec

$$[\chi]_{abs} = \frac{1}{2\Delta^2}\begin{bmatrix} i\gamma+\omega & 0 \\ 0 & -i\gamma-\omega \end{bmatrix} \tag{B-29}$$

$$\text{et}\quad [\chi(\omega)]_{Kerr} = -\frac{g^2}{2\Delta^3}\begin{bmatrix} 2|\langle A_x\rangle|^2 & \varepsilon\langle A_x\rangle^2 \\ \varepsilon\langle A_x\rangle^{*2} & 2|\langle A_x\rangle|^2 \end{bmatrix} \tag{B-30}$$

La matrice $[\chi]_{abs}$ prend en compte la dispersion et l'absorption du milieu et la matrice $[\chi]_{Kerr}$ correspond à l'effet Kerr. Ce dernier est bien en $1/\Delta^3$. Le coefficient $\varepsilon = -1$ donne la matrice de susceptibilité du mode vide A_y, associée à l'équation 4-166. Cette expression n'est valable que dans le domaine des hautes fréquences de bruit. En revanche $\varepsilon = +1$ donne la matrice de susceptibilité du champ moyen A_x, celle-ci est alors valable à toutes fréquences.

Quant à la matrice de corrélations atomiques $[\sigma(\omega)]$, elle vaut [Hilico92a]:

$$[\sigma(\omega)] = [\sigma(\omega)]_{abs} = \frac{\gamma}{\Delta^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B-31}$$

Dans la limite Kerr, le bruit atomique provient uniquement des pertes linéaires dues à l'absorption du milieu. Celles-ci tendent à ramener les fluctuations des champs au niveau du bruit quantique standard.

C Critère d'inséparabilité

C.1 Rappel de la démonstration

Nous présentons ici la démonstration du caractère suffisant de du critère d'inséparabilité 5-11, utilisé pour caractériser les corrélations quantiques au chapitre5. Nous reprenons ici une partie de la démonstration effectuée par Duan *et al.* [Duan00a]. Afin de pouvoir établir un critère valable aussi bien pour les quadratures du champ que pour les paramètres de Stokes, nous allons suivre la démarche de Korolkova *et al.* [Korolkova03].

Considérons deux sous systèmes 1 et 2, auxquels sont associés un couple d'opérateurs conjugués A_i et B_i qui vérifient les relations de commutations:

$$[\,A_1\,,\,B_1\,] \;=\; C_1 \qquad \text{et} \qquad [\,A_2\,,\,B_2\,] \;=\; C_2 \tag{C-1}$$

Les commutateurs C_1 et C_2 peuvent être ici des opérateurs. On définit alors les opérateurs S et D:

$$S \;=\; A_1 \;+\; A_2 \qquad \text{et} \qquad D \;=\; B_1 \;-\; B_2 \tag{C-2}$$

Si l'état du système est séparable, il existe alors une borne inférieur sur la somme des variances $\Delta^2 S + \Delta^2 D$. Dans ce cas la matrice densité ρ du système global s'écrit sous la forme:

$$\rho = \sum_i p_i \; \rho_{i1} \otimes \rho_{i2} \qquad \text{avec} \quad \sum_i p_i = 1 \tag{C-3}$$

où les p_i sont des nombres positifs. On calcule alors la somme des variances:

$$\begin{aligned} \Delta^2 S + \Delta^2 D &= (\langle S^2 \rangle_\rho - \langle S \rangle_\rho^2) + (\langle D^2 \rangle_\rho - \langle D \rangle_\rho^2) && \text{(C-4)} \\ &= \sum_i p_i (\langle S^2 \rangle_i + \langle D^2 \rangle_i) \; - \; \langle S \rangle_\rho^2 - \langle D \rangle_\rho^2 && \text{(C-5)} \end{aligned}$$

où la notation $\langle ... \rangle_i$ désigne la valeur moyenne sur le produit des matrices densités $\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}$. En utilisant la séparabilité de ces matrices, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Delta^2 S + \Delta^2 D &= \sum_i p_i \left(\langle A_1^2 \rangle_i + \langle A_2^2 \rangle_i + \langle B_1^2 \rangle_i + \langle B_2^2 \rangle_i \right) \\ &\quad + 2 \sum_i p_i \left(\langle A_1 \rangle_i \langle A_2 \rangle_i - \langle B_1 \rangle_i \langle B_2 \rangle_i \right) - \langle S \rangle_\rho^2 - \langle D \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i p_i \left((\Delta^2 A_1)_i + (\Delta^2 A_2)_i + (\Delta^2 B_1)_i + (\Delta^2 B_2)_i \right) \\ &\quad + \sum_i p_i \langle S \rangle_i^2 - \left(\sum_i p_i \langle S \rangle_i \right)^2 + \sum_i p_i \langle D \rangle_i^2 - \left(\sum_i p_i \langle D \rangle_i \right)^2 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la dernière ligne est positive et nous obtenons donc l'inégalité:

$$\begin{aligned} \Delta^2 S + \Delta^2 D &\geq \sum_i p_i \left((\Delta^2 A_1)_i + (\Delta^2 A_2)_i + (\Delta^2 B_1)_i + (\Delta^2 B_2)_i \right) \\ &\geq \sum_i p_i \left(|\langle C_1 \rangle_i| + |\langle C_2 \rangle_i| \right) && \text{(C-6)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités:

$$(\Delta^2 A_1)_i + (\Delta^2 B_1)_i \geq |\langle C_1 \rangle_i| \qquad \text{et} \qquad (\Delta^2 A_2)_i + (\Delta^2 B_2)_i \geq |\langle C_2 \rangle_i| \tag{C-7}$$

Celles-ci découlent directement des inégalités de Heisenberg$(\Delta^2 A_1)_i (\Delta^2 B_1)_i \geq |\langle C_1 \rangle_i|^2/4$ et $(\Delta^2 A_2)_i (\Delta^2 B_2)_i \geq |\langle C_2 \rangle_i|^2/4$.

Ainsi si un l'état du système vérifie:

$$\Delta^2 (A_1 + A_2) \; + \; \Delta^2 (B_1 - B_2) \; \leq \; \sum_i p_i \left(|\langle C_1 \rangle_i| + |\langle C_2 \rangle_i| \right) \tag{C-8}$$

alors il est non-séparable.

C.2 Quadratures du champ

Considérons le cas où les opérateurs A_i et B_i correspondent aux quadratures X_i et Y_i du champ éléctromagnétique. Les commutateurs C_1 et C_2 sont alors égaux à $2i$. On retrouve alors le critère d'inséparabilité 5-11:

$$\Delta^2(X_1 + X_2) \; + \; \Delta^2(Y_1 - Y_2) \; \leq \; 4 \tag{C-9}$$

C.3 Paramètres de Stokes

Considérons maintenant le critère d'inséparabilité en polarisation pour deux faisceaux α et β. Prenons, par exemple, les paramètres de Stokes S_2 et S_3 comme opérateurs A et B. Les relations de commutations vérifiées par ces opérateurs donnent:

$$[\, S_2^\alpha \, , \, S_3^\alpha \,] \; = \; 2i\, S_1^\alpha = C_1 \qquad \text{et} \qquad [\, S_2^\beta \, , \, S_3^\beta \,] \; = \; 2i\, S_1^\beta = C_2 \tag{C-10}$$

Le critère d'inséparabilité en polarisation s'écrit alors sous la forme:

$$\Delta^2(S_2^\alpha + S_2^\beta) \; + \; \Delta^2(S_3^\alpha - S_3^\beta) \; \leq \; 2 \sum_i p_i \left(|\langle S_1^\alpha \rangle_i| + |\langle S_1^\beta \rangle_i| \right) \tag{C-11}$$

Pour des faisceaux parfaitement polarisés, nous avons:

$$\forall\, i \quad \langle S_1^\alpha \rangle_i = \langle S_1^\alpha \rangle \quad \text{et} \quad \langle S_1^\beta \rangle_i = \langle S_1^\beta \rangle \tag{C-12}$$

On retrouve le critère d'intrication en polarisation utilisé dans la partieD du chapitre 5: si ces deux faisceaux satisfont l'inégalité:

$$\Delta^2(S_2^\alpha + S_2^\beta) \; + \; \Delta^2(S_3^\alpha - S_3^\beta) \; \leq \; 2|\langle S_1^\alpha \rangle| + |\langle S_1^\beta \rangle| \tag{C-13}$$

alors ils sont intriqués.

D Existence d'une base décorrélée

Nous revenons ici sur la propriété énoncée au paragraphe B.2.1 du chapitre 5. Nous allons donc montrer qu'il existe toujours une base de polarisation (u,v) telle que les modes A_u et A_v vérifient:

$$\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0 \tag{D-1}$$

Pour cela, on se fixe une base de polarisation quelconque associée aux modes A_1 et A_2. Nous supposerons par la suite que $\langle \delta A_1 \delta A_2 \rangle \neq 0$. Dans le cas contraire, la

démonstration est en effet immédiate. On décompose alors sur cette base, les modes u et v recherchés:

$$A_u = \cos\psi A_1 - \sin\psi e^{i\omega} A_2 \quad \text{(D-2)}$$
$$A_v = \sin\psi A_1 + \cos\psi e^{i\omega} A_2 \quad \text{(D-3)}$$

La relation D-1 se traduit par une équation su les coefficients ψ et ω:

$$\frac{1}{2}\left(\langle\delta A_1^2\rangle - e^{2i\omega}\langle\delta A_2^2\rangle\right)\sin 2\psi + \langle\delta A_1\delta A_2\rangle\cos 2\psi = 0 \quad \text{(D-4)}$$

Afin de résoudre cette équation, on pose:

$$\langle\delta A_1^2\rangle = |\langle\delta A_1^2\rangle|e^{i\kappa_1} \;,\; \langle\delta A_2^2\rangle = |\langle\delta A_2^2\rangle|e^{i\kappa_2} \text{ et } \langle\delta A_1\delta A_2\rangle = |\langle\delta A_1\delta A_2\rangle|e^{i\kappa_3} \quad \text{(D-5)}$$

D.1 Partie imaginaire

En considérant la partie imaginaire de l'équation D-4, nous obtenons une équation pour ω:

$$(|\langle\delta A_1^2\rangle|\sin\psi_1 - |\langle\delta A_2^2\rangle|\sin\psi_2)\cos\omega \quad \text{(D-6)}$$
$$- \quad (|\langle\delta A_1^2\rangle|\cos\psi_1 + |\langle\delta A_2^2\rangle|\cos\psi_2)\sin\omega = 0 \quad \text{(D-7)}$$

où $\psi_1 = \kappa_1 - \kappa_3$ et $\psi_2 = \kappa_2 - \kappa_3$. Une solution de cette équation correspond à $\omega = \kappa$ avec:

$$\cos\kappa = \frac{|\langle\delta A_1^2\rangle|\cos\psi_1 + |\langle\delta A_2^2\rangle|\cos\psi_2}{\mathcal{N}} \quad \text{(D-8)}$$
$$\sin\kappa = \frac{|\langle\delta A_1^2\rangle|\sin\psi_1 - |\langle\delta A_2^2\rangle|\sin\psi_2}{\mathcal{N}} \quad \text{(D-9)}$$
$$\text{avec} \quad \mathcal{N}^2 = |\langle\delta A_1^2\rangle|^2 + |\langle\delta A_2^2\rangle|^2 + 2|\langle\delta A_1^2\rangle||\langle\delta A_2^2\rangle|\cos(\psi_1+\psi_2) \quad \text{(D-10)}$$

Cette solution n'a de sens que si $\mathcal{N} \neq 0$. Dans le cas contraire, l'équation D-7 est alors immédiatement vérifiée, quelque soit la valeur de ω. Finalement, on met la solution sous la forme:

$$e^{i\omega} = \frac{\mathcal{M}}{|\mathcal{M}|} \quad \text{avec } \mathcal{M} = \langle\delta A_1^2\rangle\langle\delta A_1\delta A_2\rangle^* + \langle\delta A_2^2\rangle^*\langle\delta A_1\delta A_2\rangle \quad \text{(D-11)}$$

On vérifie $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}|\langle\delta A_1\delta A_2\rangle$. Dans le cas où $\mathcal{N} \neq 0$, la quantité $\mathcal{M}$ est bien non nulle.

D.2 Partie réelle

En considérant maintenant la partie réelle de l'équation D-4, nous obtenons l'équation:

$$\frac{\sin 2\psi}{2}\{(|\langle\delta A_1^2\rangle|\cos\psi_1 - |\langle\delta A_2^2\rangle|\cos\psi_2)\cos\omega \; + \\ (|\langle\delta A_1^2\rangle|\sin\psi_1 + |\langle\delta A_2^2\rangle|\sin\psi_2)\sin\omega\} \; + \; |\langle\delta A_1\delta A_2\rangle|\cos 2\psi = 0 \quad \text{(D-12)}$$

Supposons, dans un premier temps, que $\mathcal{N} \neq 0$. En utilisant les relations D-8 et D-9, nous obtenons finalement l'équation:

$$\frac{|\langle\delta A_1^2\rangle|^2 - |\langle\delta A_2^2\rangle|^2}{2|\mathcal{M}|}\sin 2\psi + \cos 2\psi = 0 \quad \text{(D-13)}$$

La solution pour ψ est donc donnée par:

$$\cos 2\psi = \frac{|\langle\delta A_1^2\rangle|^2 - |\langle\delta A_2^2\rangle|^2}{\mathcal{D}} \quad , \quad \sin 2\psi = -\frac{2|\mathcal{M}|}{\mathcal{D}} \quad \text{(D-14)}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{D}^2 = 4|\mathcal{M}|^2 + (|\langle\delta A_1^2\rangle|^2 - |\langle\delta A_2^2\rangle|^2)^2 \quad \text{(D-15)}$$

Nous avons ainsi obtenu une solution pour ω et pour ψ, ce qui démontre l'existence d'une base "décorrélée".

Pour être complet, considérons maintenant le cas où $\mathcal{N} = 0$. Dans ce cas, l'équation D-12 se simplifie sous la forme:

$$|\langle\delta A_1^2\rangle|\{\cos\psi_1\cos\omega \; + \sin\psi_1\sin\omega\}\sin 2\psi \; + \; |\langle\delta A_1\delta A_2\rangle|\cos 2\psi = 0 \quad \text{(D-16)}$$

Il suffit donc de prendre $\omega = -\psi_1$ et $\psi = \pi/4$.

D.3 Cas symétrique

Considérons maintenant le cas d'un système symétrique pour les modes A_1 et A_2, tel que $\langle\delta A_1^2\rangle = \langle\delta A_2^2\rangle$. La quantité $\mathcal{M}$ est alors réelle:

$$\mathcal{M} = \langle\delta A_1^2\rangle\langle\delta A_1\delta A_2\rangle^* \; + \; \text{c.c.} \quad \text{(D-17)}$$

En utilisant les équations D-11 et D-14, nous obtenons alors:

$$\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi = -\frac{\pi}{4} \quad \text{(D-18)}$$

Dans ce cas, les modes décorrélés u et v sont donc les modes "polarisés à 45°" par rapport aux modes 1 et 2:

$$A_u \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 \; + \; A_2) \quad \text{(D-19)}$$

$$A_v \; = \; \frac{-1}{\sqrt{2}}(A_1 \; - \; A_2) \quad \text{(D-20)}$$

Nous retrouvons ainsi la propriété utilisée au paragrapheC.2 du chapitre 5. Dans le cas où la polarisation est linéaire, notre système est symétrique par rapport aux composantes circulaires et les modes décorrélés sont les modes polarisés linéairement A_x et A_y.

Bibliographie

[Aspect82] *Experimental test of Bell's inequality using-time varying analysers*, A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).

[Bachor98a] H.A. Bachor *A guide to experiments in quantum optics*, Chapitre 12, Wiley-vch (1998).

[Bachor98b] H.A. Bachor *A guide to experiments in quantum optics*, Chapitre 10, Wiley-vch (1998).

[Bell64] J.S. Bell, Physics, **1**, 195 (1964).

[Boivin96] *$\chi^{(3)}$ squeezed vacuum generation without a Sagnac interferometer*, L. Boivin, H.A. Haus, Optics Lett. **21**, 146 (1996).

[Bowen02a] *Polarization Squeezing of Continous Variable Stokes Parameters*, W.P. Bowen, R. Schnabel, H.A. Bachor, P.K. Lam, Phys. Rev. Lett. **88**, 093601 (2002).

[Bowen02b] *Experimental Demonstration of continous Variable Polarization Entanglement*, W.P. Bowen, N. Treps, R. Schnabel, P.K. Lam, Phys. Rev. Lett. **89**, 253601 (2002).

[Bowen02c] *Biased EPR entanglement and its application to teleportation*, W.P. Bowen, P.K. Lam, T.C. Ralph, *quant-ph/0104108 (2002)*.

[Bowen03a] *Experimental Investigation of Criteria for Continous Variable Entanglement* W.P. Bowen, R. Schnabel, P.K. Lam, T.C. Ralph, Phys. Rev. Lett.**90**, 043601 (2003).

[Bowen03b] *Experimental investigation of continous-variable quantum teleportation* W.P. Bowen, N. treps, B.C. Buchler, R. Schnabel, T.C. Ralph, H.A. Bachor, Phys. Rev. A **67**, 032302 (2003).

[Braunstein98] *Teleportation of Continous Quantum Variables*, S.L. Braunstein, H.J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).

[Braunstein01] *Quantum versus Classical Domains for Teleportation with Continous Variables*, S.L. Braunstein, C.A. Fuchs, H.J. Kimble, P. van Loock Phys. Rev. A **64**, 022321 (2001).

[Chirkin93] *Quantum theory of two-mode interactions in optically anisotropic media with cubic nonlinearities: Generation of quadrature- and polarization-squeezed light*, A.S. Chirkin, A.A. Orlov, D.Yu Paraschuk, Kvant. Elektron. **20**, 999 (1993) [Quantum Electron. **23**, 870 (1993)].

[Cecchi82] *Observation of Optical Trisability in Sodium Vapors*, S. Cecchi, G. Giusfredi, E. Petriella, P. Salieri, Phys. Rev. Lett. **26**, 1928 (1982)

[Cohen96a] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Complément C_{IV}, p. 335, Editions du CNRS (1996)

[Cohen96b] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Chapitre IV.C. p. 264, Editions du CNRS, (1996).

[Cohen96c] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Chapitre V.A. p. 340, Editions du CNRS, (1996).

[Collet84] *Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification* M.J. Collet, C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).

[Collet85] *Squeezing spectra for nonlinear optical systems*, M.J. Collet, D.F. Walls, Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985).

[Coudreau97] Thomas Coudreau, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Chapitre 3, p. 49, 1997.

[Duan00a] *Inseparability criterion for Continous Variables Systems*, L. M. Duan, G. Diecke, J.I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).

[Duan00b] *Quantum Communication between Atomic Ensembles Using Coherent Light*, L.M. Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **85**, 5643 (2000).

[Einstein35] *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, A. Einstein, B. Podolsky, R. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[Fabre96] C. Fabre, *Quantum fluctuations in light beams*, Les Houches session LXIII (1996).

[Furusawa98] *Unconditional Quantum Teleportation*, A. Furusawa, J.L. Sorensen, S.L. Braunstein, C.A. Fuchs, H.J. Kimble, E.S. Polzik, Science **282**, 706 (1998).

[Giacobino85] *Tristability and bifurcations in sodium vapors*, E. Giacobino, Opt. Comm. **56**, 249 (1985).

[Gibbs76] *Differential Gain and Bistability Using a Sodium-Filled Fabry-Perot Interferometer*, H.M Gibbs, S.L. McCall, T.N.C Venkatesan, Phys. Rev. Lett. **36**, 1135 (1976).

[Giedke03] *Entanglement of Formation for Symmetric Gaussian States*, G. Giedke, M. M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **91**, 107901 (2003).

[Golubev84] *Photon antibunching in a coherent light source and suppresion of the photorecording noise*, Y. Golubev, I.V. Sokolov, Sov. Phys. JETP, **60**, 234 (1984).

[Grangier87] *Squeezed-Light-Enhanced Polarization interferometer*, P. Grangier, R.E. Slusher, B. Yurke, A. LaPorta, Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987).

[Grosshans01] *Quantum cloning and teleportation criteria for continous quantum variables*, F. Grosshans, P. Grangier, Phys. Rev. A **64**, 010301 (2001).

[Hald99] *Spin Squeezed Atoms: A Macroscopic Entangled Ensemble Created by Light*, J. Hald, J.L. Sørensen, C. Shori, E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **83**, 1319 (1999).

[Hamilton83] *Observation of polarization switching: D1 line of sodium in a Fabry-Perot*, H. Hamilton, W.J. Sandle, J.T. Chilwell, J.S. Satchell, D.M. Warrington, Opt. Commun. 48, 190 (1983)

[Haus98] *Cross phase modulation squeezing in optical fibers*, M. Margalit, C. X. Yu, E.P. Ippen, H.A. Haus, Optics Express **2**, 72 (1998).

[Heersink03] *Polarization squeezing of intense pulses with a fiber Sagnac interferometer*, J. Heersink, T. Gaber, S. Lorenz, O. Glöckl, N. Korolkova, G. Leuchs, Phys. Rev. A **68**, 013815 (2003).

[Hilico92a] *Linear input-output method for quantum fluctuations in optical bistability with two-level atoms*, L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, E. Giacobino, Phys. Rev. A **46**, 4397 (1992).

[Hilico92b] Laurent Hilico, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1992.

[Hope92] *Observation of quadrature squeezing in a cavity-atom system*, D.M. Hope, H.A. Bachor, P.J. Manson, D.E. McClelland, P.T.H. Fisk, Phys. Rev. A **46**, R1181-4 (1992).

[Huard97] S. Huard, *Polarization of light*, John Wiley and Sons, New York (1997).

[Josse03a] *Polarization squeezing in a four-level system*, V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, S513 (2003).

[Josse03b] *Polarization squeezing with Cold Atoms*, V. Josse, A. Dantan, L. Vernac, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, Phys. Rev. Lett. **91**, 103601 (2003).

[Josse03c] *Continous variable entanglement using cold atoms* , V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, E. Giacobino, à paraître dans Phys. Rev. Lett. eprint:quant-ph0306152.

[Josse03d] *Entanglement and squeezing in a two-mode system: theory and experiment* , V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, E. Giacobino, à paraître dans J. Opt. B, Quantum Semiclass. Opt. eprint:quant-ph0310139.

[Julsgaard01] *Experimental long-lived entanglement of two mascroscopic object*, B. Julsgaard, A. Kozhekin, E.S. Polzik, Nature **413**, 400 (2001).

[Khoury98] *Three level approach to squeezing with cold atoms*, A.Z. Khoury, T. Coudreau, C. Fabre, E. Giacobino, Phys. Rev. A **57**, 4770 (1998)

[Kimble90] H.J. Kimble, *Quantum fluctuations in quantum optics* in *Fundamental systems in quantum optics*, Les Houches session LIII, J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn-Justin editors, North Holland (1990).

[Kitano81] *Optical Tristability*, M. Kitano, T. Yabuzaki, T. Ogawa, Phys. Rev. Lett. **46**, 926 (1981).

[Korolkova02a] *Polarization squeezing and continous-variable polarization entanglement*, N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T.C. Ralph, C. Silberhorn, Phys. Rev. A **65**, 052306 (2002).

[Korolkova02b] *Direct experimental test of non-separability and other quantum techniques using continous variables of light*, N. Korolkova, Ch. Silberhorn, O. Glöckl, S. Lorentz, Ch. Marquardt, G. Leuchs, Eur. Phys. J. D.**18**, 229 (2002).

[Korolkova03] *Nonseparability and squeezing of continous polarization variables: the complete story*, N. Korolkova, R. loudon, e-print: quant-ph/0303135.

[Kuzmich00a] *Atomic Quantum State Teleportation and Swapping* A. Kuzmich, E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **85**, 5639 (2000).

[Kuzmich00b] *Generation of spin Squeezing via Continous Quantum Nondemolition Measurement*, A. Kuzmich, L. Mandel, N.P. Bigelow, Phys. Rev. Lett.**85**, 1594 (2000).

[Lam99] *Optimization and transfer of vacuum squeezing from an optical parametric oscillator*, P.K. Lam, T.C. Ralph, B.C. Buchler, D.E. McClelland, H-A Bachor, J. Gao, J. Opt. B, **1**, 469 (1999).

[Lambrecht95] *Optical nonlinear dynamics with cold atoms in a cavity* A. Lambrecht, E. Giacobino, J.M. Courty, Optics Comm. **115**,199 (1995).

[Lambrecht96a] *Squeezing with cold atoms*, A. Lambrecht, T. Coudreau, A.M. Steimberg, E. Giacobino, Europhys. Lett. **36**, 93 (1996).

[Lambrecht96b] *Transverse effects on Squeezing with cold atoms*, A. Lambrecht, J.M. Courty, S. Reynaud, J. Phys. II, France **6**, 1133 (1996).

[Lambrecht t1] Astrid Lambrecht, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1995, chapitre 5, p. 69.

[Lambrecht t2] Astrid Lambrecht, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1995, chapitre 8, p. 209.

[Lambrecht t3] Astrid Lambrecht, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1995, chapitre 4, p. 65.

[Lambrecht t4] Astrid Lambrecht, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1995, chapitre 7, p. 204.

[Leuchs99] *Scheme for the generation of entangled solitons for quantum communication*, G. Leuchs, T.C. Ralph, C. Silberhorn, N. Korolkova, , J. Mod. Opt.**46**, 1927 (1999).

[Longchambon03a] L. Longchambon, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2003, chapitre 3.

[Longchambon03b] *Non-linear and quantum optics of a type II OPO containing a birefringent element. Part 2: bright entangled beams generation*, L. Longchambon, J. Laurat, T. Coudreau, C. Fabre, soumis à Eur. Phys. J. D

[Lugiato82] *On the squeezing obtainable in parametric oscillators and bistable absorption*, L.A. Lugiato, G. Strini, Optics Comm. **41**, 67 (1982).

[Lugiato02] *Quantum imaging*, L.A. Lugiato, A. Gatti, E. Brambilla, e-print: quant-ph/0203046.

[Maker64] *Intensity-Dependent Changes in the Refractive Index of Liquids*, P.D. Maker, R.W. Terhune, C.M. Savage, Phys. Rev. Lett. **12**, 507 (1964).

[Matsko02a] *Vacuum squeezing in atomic media via self rotation*, A.B. Matsko, I. Novikova, G.R. Welsch, D. Ducker, D.F. Kimball, S.M. Rochester, Phys. Rev. A **66**, 043815/1 (2002).

[Matsko02b] *Enhancement of Kerr nonlinearity via multi-photon coherence*,A.B. Matsko, I. Novikova, G.R. Welch, M.S. Zubairy, e-print: quant-ph/0207141.

[Milburn81] *Production of squeezed states in a degenerate parametric amplifier*, G. Milburn, D.F. Walls, Optics. Comm. **39**, 401 (1981).

[Novikova00] *Ac-Stark shifts in the nonlinear Faraday effect*, I. Novikova, A.B. Matsko, V.A. Sautenkov, V.L. Velichansky, G.R. Welch, M.O. Scully, Optics. Lett. **25**, 1651 (2000).

[Ou92] *Realization of Einstein-Podolsky-Rosen Paradox for Continous Variables* Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble, K.C. Peng, Phys. Rev. Lett. **68**, 3663 (1992).

[Pereira00] *Quantum communications with correlated nonclassical states*, S.F. Pereira, Z.Y. Ou, H.J. Kimble, Phys. Rev. A **62**, 042311 (2000).

[Polzik92] *Spectroscopy with Squeezed Light*, E.S. Polzik, J. Carri, H.J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **89**, 057903 (2002).

[Raab87] *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard , Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).

[Raizen87] *Squeezed-state generation by the normal modes of a coupled system*, M.G. Raizen, L.A. Orozco, Min Xiao, T.L. Boyd, H.J. Kimble, Phys. Rev. Lett.**59**, 198 (1987).

[Ralph98] *Teleportation with Bright Squeezed Light* T.C. Ralph, P.K. Lam, Phys. Rev. Lett. **81**, 5668 (1998).

[Ralph99] *Continous variable quantum cryptography*, T.C. Ralph, Phys. Rev. A **61**, 010303 (1999).

[Reid88] *Quantum theory of optical bistability without adiabatic eliminantion*, M.D. Reid, Phys. Rev. A **37**, 4792 (1988).

[Reid89] *Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification*, M.D. Reid, Phys. Rev. A **40**, 913 (1989).

[Reid00] *Quantum cryptography with a predetermined key, using continous-variable Einstein-Podolsky-Rosen correlations*, M.D. Reid, Phys. Rev. A **62**, 062308 (2000).

[Reynaud87] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, J. Opt. Soc. Am. B, **4**, 1520 (1987).

[Reynaud89] *Photon noise reduction by passive optical bistable systems*, S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, Phys. Rev. A **40**, 1440 (1989).

[Reynaud90] *Introduction à la réduction du bruit quantique*, S. Reynaud, Ann. Phys. Fr. **15**, 63 (1990).

[Ries03] *Experimental Vacuum Squeezing in Rubidium Vapor via Self-Rotation*, J. ries, B. Brezger, A.I. Lvovsky, e-print: quant-ph/0303109.

[Rochester01] *Self-rotation of resonant elliptically polarized light in collision-free rubidium vapor*, S.M. Rochester, D.S. Hsiung, D. Bucker, R.Y. Chiao, D.F Kimball, V.V. Yashchuk, Phys. Rev. A **63**, 043814 (2001).

[Santarelli99] *Quantum projection noise in an Atomic Fountain: a High Stability Cesium Frequency Standard*, G. Santarelli, Ph. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A.G. Mann, S. Chang, A.N. Luiten, C. Salomon, Phys. Rev. Lett., 82, 4619 (1999).

[Savage82] *Optical multistability and self oscillations in three level systems*, C.M. Savage, H.J. Carmichael, D.F. Walls, Optics Comm. **42**, 211 (1982).

[Schori02] *Recording Quantum Properties of Light in a Long Lived Atomic Spin State: Towards Quantum Memory*, C. Schori, B. Julsgaard, J.L. Sørensen, E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **89**, 057903 (2002).

[Shelby86] *Broad-Band Parametric Deamplification of Quantum Noise in an Optical Fiber*, R.M. Shelby, M.D. Levenson, S.H. Perlmutter, R.G. DeVoe, D.F. Walls, Phys. Rev. Lett., **57**, 691 (1986).

[Silberhorn01] *Generation of Continous Variable Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement via rhe Kerr Nonlinearity in an Optical Fiber*, Ch. Silberhorn, P.K. Lam, O. Weiß, F. König,N. Korolkova, G. Leuchs , Phys. Rev. Lett. **86**, 4267 (2001).

[Silberhorn02] *Quantum Key Distribution with Bright Entangled Beams*, C.H. Silberhorn, N. Korolkova, G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **88**, 167902 (2002).

[Simon00] *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continous Variable Systems*, R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).

[Slusher85] *Observation of squeezed states generated by four wave mixing in an optical cavity*, R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz, J.F. Valley, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).

[Sørensen98] *Quantum noise of an Atomic Spin polarization Measurement*, J.L. Sørensen, J. Hald, E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **80**, 3487 (1998).

[Treps01] Nicolas Treps, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2001, Chapitre 1, p. 18.

[Vaidman94] *Teleportation of quantum states*, L. Vaidman, Phys. Rev. A, **49**, 1473 (1994).

[Vernac00] *Spin squeezing in two-level systems*, L. Vernac, M. Pinard, E. Giacobino, Phys. Rev. A, 62, 063812 (2000).

[Vernac01a] Laurent Vernac, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2001.

[Vernac01b] Laurent Vernac, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2001, chapitre 3.

[Walls80] *A coherent nonlinear mechanism for optical bistability from three level atoms*, D.F. Walls, P. Zoller, Optics Comm. **34**, 260 (1980).

[Wang93] *Squeezed light from injection-locked quantum well lasers* H. Wang, M. J. Freeman,D. G. Steel, Phys. Rev. Lett. **71**, 3951 (1993).

[Wineland94] *Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy* D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, D.J. Heinzen, Phys. Rev. A,**50**, 67 (1994).

[Wu87] *Squeezed states of light from an optical parametric oscillator*, L.A. Wu, Min Xiao, H.J. Kimble, J. Opt. Soc. Am., **4**, 1465 (1987).