



**Sur une classe d'équations à double non linéarité :
application à la simulation numérique d'un écoulement
visqueux compressible**

Emmanuel Maitre

► **To cite this version:**

Emmanuel Maitre. Sur une classe d'équations à double non linéarité : application à la simulation numérique d'un écoulement visqueux compressible. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00004955

HAL Id: tel-00004955

<https://theses.hal.science/tel-00004955>

Submitted on 20 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par

Emmanuel MAITRE

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées.**

**Sur une classe d'équations à double non linéarité :
application à la simulation numérique d'un écoulement
visqueux compressible.**

Date de soutenance : 7 janvier 1997.

Composition du jury :

M. J. BLUM	Président
M. J. BARANGER	Rapporteur
M. J. SIMON	Rapporteur
M. I. IONESCU	Examineur
M. A. LATROBE	Examineur
M. P. WITOMSKI	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG.

M. Patrick WITOMSKI qui a dirigé mon travail, a su par son expérience et son sens de la métaphore susciter en moi une passion pour les mathématiques appliquées.

Il m'a fait confiance dès le début, s'est montré très disponible malgré ses nombreuses responsabilités et a su trouver les mots justes dans certains moments de doute. Il m'a aussi beaucoup appris au niveau de la rigueur et de la rédaction des démonstrations.

Pour toutes ces raisons c'est à lui que j'adresse mes plus vifs remerciements.

M. Jacques BLUM, dont j'ai apprécié la compétence en tant qu'enseignant et chercheur, ainsi que la dimension humaine, m'a fait l'honneur de présider le jury. Je lui en suis très reconnaissant.

MM. Jacques BARANGER et Jacques SIMON ont bien voulu rapporter sur mon travail. Je les remercie en particulier pour leurs remarques pertinentes sur certains aspects numériques et théoriques.

M. Jacques SIMON m'a suggéré quelques modifications de forme qui ont contribué à la clarté du document.

M. Ioan IONESCU a accepté de faire partie du jury. Je le remercie aussi pour m'avoir encouragé à mes débuts dans une certaine approche de la modélisation mathématique.

M. André LATROBE m'a accueilli il y a quelques années à Cisi Ingénierie lors d'un stage qui a en quelque sorte initié ce travail. Je voudrais le remercier ici pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en acceptant d'être membre du jury.

Certains collègues du laboratoire de modélisation et calcul ont contribué plus ou moins directement à ce travail. En particulier je tiens à remercier chaleureusement M. Bertrand MICHAUX pour avoir toujours été disponible pour des discussions diverses.

Ma reconnaissance va aussi à mon collègue Yves RENARD pour ses précieuses connaissances informatiques qu'il met généreusement au service de la communauté.

Enfin que mes collègues "jeunes chercheurs" trouvent ici toute ma reconnaissance pour leur amitié, et pour m'avoir laissé marquer quelques paniers au Basket !

Mes remerciements vont aussi à mes parents et à Marie pour leur patience, et pour m'avoir encouragé durant ces trois années.

Je finirais en revenant sur une des métaphores qui m'a le plus marqué. Celle-ci met en scène un sculpteur devant son oeuvre, qui lorsqu'on lui demande comment il est arrivé à un tel résultat, explique qu'il n'a eu qu'à démouler l'objet qui se trouvait déjà à l'intérieur du bloc de pierre...

Table des matières

1	Introduction	7
2	Modèle mathématique	11
2.1	Introduction	12
2.2	Dynamique des fluides	12
2.2.1	Le milieu continu et son mouvement	12
2.2.2	Description Eulerienne	13
2.2.3	Conservation de la masse	14
2.2.4	Conservation de la quantité de mouvement	14
2.2.5	Définition d'un fluide	14
2.3	Thermodynamique	16
2.3.1	Variables et équations d'état	16
2.3.2	Premier principe et équation d'énergie	16
2.3.3	Équation d'énergie en fonction de la température	17
2.3.4	Cas d'un écoulement comportant deux fluides	17
2.3.5	Coefficients thermodynamiques	17
2.4	Géométrie du moule	19
2.5	Restrictions pour notre étude	20
2.6	Conditions aux limites	20
2.6.1	Conditions aux limites en entrée	21
2.6.2	Conditions aux limites en sortie	21
2.6.3	Conditions aux limites en paroi latérale	21
2.7	Choix des variables du problème mathématique	21
2.7.1	Première formulation	21
2.7.2	Sur les ouverts définis par une inéquation	22
2.7.3	Seconde formulation	22
2.7.4	Notations	23
2.8	Équations vérifiées par ces variables	24
2.8.1	Solutions classiques	24
2.8.2	Écriture du problème sous forme variationnelle	25
2.9	Conclusion	26
2.10	Commentaires bibliographiques	27
3	Analyse mathématique	29
3.1	Introduction	30
3.2	Préliminaires d'analyse fonctionnelle	31

3.2.1	Représentation de duals	31
3.2.2	Opérateurs de type monotone	32
3.2.3	Quelques notations	33
3.2.4	Lemme de dérivation	33
3.3	Équations à double non-linéarité dans le cas pseudo-monotone	37
3.3.1	Introduction	37
3.3.2	Définitions et notations	37
3.3.3	Le résultat principal	39
3.3.4	Le cas non Hilbertien	46
3.3.5	Exemples d'opérateurs pseudo-monotones sur $L^p(0, T; V)$ et non monotones	46
3.3.6	Retour à l'équation en pression	50
3.4	Équations à double non-linéarité dans le cas $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone	50
3.4.1	Définitions et notations	50
3.4.2	Propriétés des opérateurs $\mathcal{B}$ -pseudo-monotones	52
3.4.3	Hypothèses et résultat	54
3.4.4	Discrétisation du problème (E)	55
3.4.5	Obtention d'estimations <i>a priori</i>	58
3.4.6	Passages à la limite	60
3.4.7	Fin de la démonstration du théorème 3.5 dans le cas pseudo-monotone	61
3.4.8	Résultat de compacité	64
3.4.9	Fin de la démonstration du théorème 3.5	67
3.4.10	Application : exemple d'opérateur $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone	69
3.4.11	Retour à l'équation en pression	74
3.5	Unicité de la solution du problème de Dirichlet	75
3.5.1	Positivité de la solution	76
3.5.2	Unicité des solutions	77
3.6	Directions de recherche dans le cas où l'opérateur de la partie parabolique dépend du temps	80
3.6.1	Découplage sur deux sous-domaines non cylindriques	80
3.6.2	Cas d'une famille de fonctionnelles convexes	81
3.7	Existence et unicité d'une solution à l'équation de propagation du front	82
3.7.1	Introduction	82
3.7.2	Cas d'un champ de vitesse à dérivée normale nulle sur le bord	82
3.7.3	Cas d'un champ de vitesse à dérivée normale non nulle	83
3.8	Propriétés de cette solution (dans le premier cas)	93
3.8.1	Non étalement du front	93
3.8.2	Comparaison de deux solutions associées à deux conditions initiales différentes	94
3.8.3	Indépendance de la ligne de niveau 0 de la solution par rapport à la condition initiale	95
3.8.4	Résultat de continuité de la solution par rapport au champ de vitesse	96
3.9	Annexe	96
3.10	Conclusion	98
3.11	Commentaires bibliographiques	98

4	Analyse numérique	101
4.1	Introduction	102
4.2	Analyse numérique en dimension un	102
4.2.1	Introduction	102
4.2.2	Grille de discrétisation	103
4.2.3	Schéma numérique de référence	103
4.2.4	Deuxième schéma numérique	106
4.2.5	Implémentation d'un schéma linéaire de type Chernoff	107
4.2.6	Formulation équivalente en un problème de type Stefan	108
4.2.7	Conclusion sur les résultats numériques en dimension un	111
4.3	Localisation d'interface en dimension deux	111
4.3.1	Point sur les méthodes numériques pour le calcul des frontières libres	111
4.3.2	Présentation de notre méthode numérique	112
4.3.3	Les cas tests	116
4.3.4	Résultats numériques, cas incompressible	119
4.3.5	Résultats numériques, cas compressible	139
4.4	Conclusion	155
4.5	Commentaires bibliographiques	155
5	Conclusion	157

Chapitre 1

Introduction

L'ORIGINE de ce travail est l'étude d'un problème industriel sur la mise en forme des thermoplastiques par injection. Il s'agit de la simulation numérique du procédé de remplissage/compactage de l'empreinte d'un moule par un polymère fondu. Les objets, obtenus après refroidissement, sont du type "coques minces" (pare-chocs et tableaux de bord dans l'automobile par exemple). Il s'agit d'un procédé très complexe à simuler, basé sur la modélisation de l'écoulement de fluides visqueux compressibles couplé à une thermique du moule qui régule le phénomène. Les effets mécaniques des contraintes thermoélastiques interviennent dans la partie finale lors du refroidissement de la pièce fabriquée. De nombreuses études et des codes de simulation numérique ont été réalisés dans ce domaine (cf [90] pour une revue). L'un d'entre eux, le logiciel CLIP, a récemment été écrit dans le cadre d'un vaste projet regroupant industriels et universitaires. Le point de départ de mon travail est la thèse d'I. Maillot (1993) réalisée dans le cadre de ce projet CLIP. Ayant participé à la mise au point du logiciel à l'occasion de deux stages dans la société Cisi Ingénierie, c'est naturellement que j'ai été intéressé par l'étude mathématique et numérique de certaines questions soulevées par la simulation numérique de ce phénomène.

Nous nous sommes concentrés sur la partie **remplissage du moule** avec une thermique supposée connue et sur la détermination de la position du front du polymère. C'est une question très importante pour la simulation numérique. Le travail présenté dans cette thèse comprend donc deux parties:

- l'étude mathématique et numérique de l'**équation en pression** qui régit l'écoulement du polymère fondu. À partir de cet exemple nous avons mis en évidence et étudié une famille nouvelle d'**équations à double non linéarité**.
- la détermination de l'interface polymère-air par des méthodes de **suivi de lignes de niveau**. Ceci apporte une amélioration notable par rapport aux schémas mis en place dans [90].

L'essentiel de notre étude porte sur les équations découplées : calcul de pression à domaine donné (interface connue), détermination de l'interface à champ de pression connu.

Présentons maintenant plus en détail le contenu de la thèse. Pour situer le problème, donnons tout d'abord rapidement les trois phases du procédé de moulage d'une pièce thermoplastique. La partie amont du procédé (préparation du polymère pour l'injection), ainsi que la partie en aval (compactage, refroidissement et éjection de la pièce . . .) sont parfaitement décrites dans [3]. Nous nous intéressons plus particulièrement à la phase de remplissage : la frontière de l'empreinte comporte une partie par laquelle on injecte le polymère fondu à une température et un débit donnés. L'air qui occupait initialement l'empreinte du moule s'échappe de l'empreinte par des événements situés en fond de moule. Au cours de l'écoulement, le polymère occupe une partie du moule, et cette partie augmente jusqu'à l'obstruction des événements. Notre problème s'arrête à ce moment précis.

Le modèle développé par I. Maillot, s'inscrit dans le cadre d'un écoulement **visqueux** (quasi-newtonien) et **compressible**, à l'intérieur d'un **domaine tridimensionnel à géométrie coque**. Dans ce cadre, l'équation en pression occupe une place privilégiée, car la vitesse du fluide s'exprime proportionnellement au gradient de pression.

Menant une analyse mathématique de cette équation, nous avons extrait une formulation équivalente où apparaît une **équation à double non linéarité**, c'est à dire de la forme

$$\frac{d\mathcal{B}(u)}{dt} + \mathcal{A}(u) = f \quad (1)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs non linéaires sur des espaces de Banach. Ce type d'équation intervient aussi lors de l'étude d'autres phénomènes physiques parmi lesquels figurent les **changements de phase** [24], les écoulements en **milieu poreux** [7][113], la répartition des charges dans les **semi-conducteurs** [63][5].

Nous avons donc consacré une partie importante de notre travail à **développer des outils** pour l'analyse mathématique des problèmes aux limites associés à de telles équations. Il s'agit principalement de l'introduction d'une **classe d'opérateurs** $\mathcal{A}$ pour laquelle l'existence d'une solution à l'équation (1), munie d'une condition initiale, est assurée. Ce faisant nous avons mis au point un **lemme de compacité** adapté aux équations à double non linéarité, dans l'esprit des résultats de J. Simon [120]. Notre approche du problème puise son originalité dans le fait que nous considérons l'équation (1) comme une **équation intermédiaire** entre le cas elliptique et parabolique, pour laquelle nous définissons une pseudo-monotonie intermédiaire adaptée. Nos résultats dans ce domaine étendent par certains aspects les résultats de H.W. Alt et S. Luckhaus [6] et de A. Bermúdez, J. Durany, C. Saguez [24]. Nous avons aussi étudié l'unicité des solutions de (1) en nous restreignant toutefois à un cas particulier, et en faisant une hypothèse de régularité supplémentaire.

Revenant au problème d'injection, nous avons ensuite considéré une **autre difficulté commune** aux phénomènes cités ci-dessus, qui réside dans la localisation précise et robuste de l'interface entre, dans notre cas, le polymère fondu et l'air initialement dans l'empreinte. Cette localisation est **cruciale** car les deux fluides en présence ont des comportements radicalement différents, ce qui se traduit par une **forte discontinuité** de certains coefficients physiques à l'interface; le calcul numérique y est alors **délicat**.

Nous avons proposé une **méthode par ligne de niveau**, c'est à dire que l'interface est décrite comme la ligne de niveau zéro d'une **inconnue auxiliaire**, ψ , que nous devons calculer. Cette approche avait été introduite par J. Sethian [100][118] dans le cas d'un mouvement par courbure moyenne. Nous avons montré que dans notre cas, ψ vérifiait une équation de transport linéaire, lorsque le champ de vitesse est donné (dans notre modèle celui-ci se calcule à partir de la pression).

Nous avons obtenu l'existence d'une solution à cette équation de transport linéaire **avec conditions aux limites**, dans le cas d'un champ de vitesse à **divergence non nulle** (les fluides sont compressibles), de signe quelconque, avec **peu de régularité**. Nous utilisons, comme dans [107], la méthode des caractéristiques. Nos hypothèses sur le champ de vitesse sont moins restrictives que celles de C. Bardos [19] ou C. Bardos, A. Leroux et J.C. Nédélec [20]; elles sont plus fortes que celles (minimales) de R. DiPerna et P.L. Lions [88], obtenues pour un champ de vitesse tangent à la frontière du domaine, donc sans condition aux limites.

L'aspect numérique de ce travail comporte deux parties. Nous avons d'abord essayé de mettre au point des schémas numériques pour mener le calcul sur l'équation à double non-linéarité. Si cette forme s'est bien prêtée à l'étude théorique, la mise en place de schémas de type différences finis ou volumes finis s'est avérée très délicate. Nous donnons quelques schémas qui ont donné des résultats corrects. Mais ceci nous a incité à effectuer le calcul

directement sur l'équation en pression. Nous avons ensuite mis au point une **méthode numérique pour le calcul de l'interface** polymère/air, en résolvant par éléments finis / volumes finis l'équation en pression et l'équation de transport du front. Notre méthode présente l'avantage d'une mise en oeuvre **relativement aisée**, puisque le coût supplémentaire qu'elle induit est le calcul d'un transport linéaire sur les cellules du maillage volumes finis. Elle est **robuste** au sens qu'elle permet de gérer le **recollement de deux fronts** en aval d'un obstacle et la **formation de bulles d'air**, sans complication supplémentaire. D'autre part, contrairement à la méthode classique qui consiste à définir un taux de présence pour les cellules du front, nous disposons d'une **information précieuse** sur l'orientation du front dans la cellule.

Les simulations numériques que nous présentons mettent en évidence la capacité de cette méthode à procurer une localisation de l'interface même lorsque celle-ci n'est pas connexe, après avoir vérifié sa validité sur un cas test.

Ce travail ouvre différentes directions de recherche. La première dans le sens des équations à double non linéarité pour lesquelles le cas d'un opérateur dépendant du temps dans la partie parabolique, reste à étudier (cf. toutefois les travaux de V.M. Hokkanen [70][71]).

Le couplage de l'équation (1) avec l'équation de transport du front permettrait de clore l'analyse du modèle. Cela demande d'obtenir des résultats de régularité sur la solution de l'équation en pression. Des résultats dans ce sens existent dans certains cas particuliers [144][114][73].

Enfin l'existence d'une solution à l'équation de transport (avec conditions aux limites) sous des hypothèses de régularité plus faibles sur le champ de vitesse est à étudier.

Chapitre 2

Modèle mathématique

2.1 Introduction

DANS cette partie nous nous proposons d'établir un modèle mathématique pour l'écoulement tri-dimensionnel du fluide dans l'empreinte du moule. En cela nous avons utilisé de manière essentielle la présentation de la dynamique des fluides de [95]. Dans cette présentation, on essaie de réduire au plus l'intervention parfois involontaire de concepts du langage courant, comme le *volume élémentaire*, afin de leur donner un sens mathématique. Si la description qui en découle est par certains aspects trop simpliste, elle a au moins l'avantage de poser le cadre de notre modélisation précisément.

Comme toujours en mécanique des fluides, nous commençons par poser les lois de la dynamique des milieux continus, pour ensuite nous restreindre au cas des milieux continus fluides. Nous avons utilisé la définition des fluides de G. Duvaut [48]. Puis pour particulariser le type de fluide qui nous intéresse, nous faisons intervenir les lois de comportement. Enfin la géométrie des domaines où les fluides s'écoulent conduit à d'autres simplifications, suivant le travail de I. Maillot.

2.2 Dynamique des fluides

2.2.1 Le milieu continu et son mouvement

Avant de décrire le mouvement d'un milieu continu, il est indispensable de définir ce que l'on entend par milieu continu et mouvement, du point de vue mathématique. Intuitivement, lorsqu'on cherche à définir le mouvement d'un fluide par exemple, on commence par en distinguer une partie, un volume élémentaire, initialement à la position a , et qui au cours du temps se déplace pour se trouver en $x = x(a, t)$ au temps t . Cependant la notion de volume élémentaire n'est pas définie mathématiquement. Aussi nous définissons un milieu continu et son mouvement comme suit :

Définition 2.1 Un mouvement d'un milieu continu est la donnée d'un ouvert borné Ω_0 de $\mathbb{R}^3$ et d'une transformation H_t définie sur $\overline{\Omega_0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de postulats que doit vérifier H_t pour représenter un mouvement physiquement acceptable :

Postulat I H_t est défini sur $\overline{\Omega_0}$ durant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$ tel que $T_1 < 0 < T_2$.

Le suivant postulat traduit le fait que deux particules du milieu initialement distinctes ne peuvent pas se confondre ultérieurement en une seule particule :

Postulat II H_t est inversible sur son image $H_t\Omega_0$.

Il est important de noter qu'au contraire H_t n'est pas forcément inversible sur $\overline{H_t\Omega_0}$ ([95], page 6). Par exemple, lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un obstacle, deux fronts se rencontrent en aval de l'obstacle. Il y a alors une frontière invisible sur laquelle H_t n'est pas inversible. Le postulat suivant est une condition de régularité du mouvement, qui implique

de facto qu'il n'y a pas d'évaporation ni de formation de goutte (cas d'un fluide), et que notre milieu continu ne peut pas être coupé ou cassé :

Postulat III L'application $(a, t) \mapsto x(a, t) = H_t a$ est continue par rapport à (a, t) sur son domaine de définition, et d'inverse continu.

Les conséquences de ce dernier postulat sont que le milieu occupe une partie bornée et ouverte de l'espace pour tout temps ($\Omega_t \stackrel{\text{déf}}{=} H_t \Omega_0$), et que sa frontière est toujours constituée des mêmes particules qu'à l'instant initial :

$$\partial \Omega_t = H_t \partial \Omega_0.$$

Le postulat III n'est pas suffisant en pratique pour assurer une régularité suffisante à l'écoulement. Nous supposons en outre que :

Postulat IV La vitesse, définie par $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} x(a, t)$ est continue par rapport à (a, t) sur le domaine de $x(a, t)$.

2.2.2 Description Eulerienne

Bien que plus intuitive, la description Lagrangienne est souvent moins pratique que l'approche Eulerienne qui considère les différentes grandeurs comme des fonctions de x et de t plutôt que de a et t . Le passage de l'une à l'autre des formulations se fait par la relation :

$$x = x(a, t) = H_t a.$$

Par exemple, si une grandeur a comme représentation Eulerienne $f(x, t)$, sa représentation Lagrangienne est $g(a, t) = f(x(a, t), t)$, et sa dérivée particulaire est donnée par

$$\frac{Df}{Dt}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(a, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f(x, t).$$

Profitons en pour introduire la formule de Reynolds qui nous sera utile pour la suite. Dans les équations de bilan qui vont suivre, on est souvent amené à dériver par rapport au temps l'intégrale d'une grandeur sur un domaine matériel, au sens

Définition 2.2 On appelle domaine matériel tout ouvert Ω_t se déplaçant à la vitesse du milieu en représentation Eulerienne, c'est à dire image d'un ouvert $\omega \subset \Omega_0$ par H_t .

Nous avons le

Théorème 2.1

Soit Ω_t un domaine matériel et $f \in C^1(\overline{\Omega_t})$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f \, dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \right) dx.$$

Pour pouvoir utiliser le théorème de la divergence sur la formule précédente, il faut supposer que la frontière $\partial \Omega_t$ est suffisamment *régulière*. En particulier si cette frontière est une union

finie de surfaces élémentaires de l'espace représentables par des équations de la forme $x_3 = f(x_1, x_2)$, satisfaisant les propriétés de [95], page 10, nous avons

Corollaire 2.1

Soit Ω_t un domaine matériel régulier et $f \in C^1(\overline{\Omega_t})$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f \, dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega_t} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à $\partial\Omega_t$.

Remarque 2.1

Dans le corollaire précédent, il suffit de supposer que le domaine est lipschitzien et la fonction f appartient à $W^{1,1}(\Omega)$ pour que le résultat soit vrai (cf F. Murat et J. Simon, prépublication Paris VI 76015, 1976).

2.2.3 Conservation de la masse

Postulat V Il existe une fonction $\rho(x, t)$ définie sur la fermeture de tout domaine matériel régulier $\Omega_t = H_t(\omega)$, telle que

$$\int_{\Omega_t} \rho \, dx = m(\omega) > 0$$

est invariant au cours du temps.

Par définition, cet invariant est appelé la *masse* du milieu continu et ρ sa *masse volumique*. En appliquant la formule de Reynolds on établit l'équation locale de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

valable sur tout domaine où ρ est continue.

2.2.4 Conservation de la quantité de mouvement

Postulat VI Il existe un champ de vecteurs $\mathbf{g}$ et un tenseur symétrique σ définis sur la fermeture de tout domaine matériel régulier Ω_t , tels que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \, dx + \int_{\partial\Omega_t} \sigma \times \mathbf{n} \, ds, \quad (2.1)$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à $\partial\Omega_t$.

2.2.5 Définition d'un fluide

Nous posons la définition suivante d'un fluide (voir [48] pour plus de précisions).

Définition 2.3 On appelle fluide un milieu continu dont le tenseur σ s'écrit

$$\sigma = -p(x, t)\mathbb{I} + \sigma_v,$$

où $\mathbb{I}$ désigne le tenseur identité, et où σ_v ne dépend que du tenseur des vitesses de déformations

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{2} \{ [\nabla \mathbf{v}] + [\nabla \mathbf{v}]^t \},$$

est isotrope, et nul au repos. Le champ p est appelé champ de pression, le tenseur σ_v est le tenseur visqueux.

Le dernier postulat mécanique que nous faisons concerne la famille de fluides que nous considérons. Indiquons tout d'abord qu'un fluide est dit *newtonien* si la relation entre σ_v et $\underline{\dot{\epsilon}}$ est linéaire. On définit alors la *viscosité dynamique* du fluide comme le scalaire η tel que

$$\sigma_v = 2\eta \underline{\dot{\gamma}}$$

où le tenseur symétrique et de trace nulle $\underline{\dot{\gamma}}$ est donné par

$$\underline{\dot{\gamma}} = \underline{\dot{\epsilon}} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v}) \mathbb{I}.$$

Postulat VII Les fluides étudiés sont des fluides quasi-newtoniens, c'est à dire que leur tenseur visqueux s'exprime toujours linéairement en fonction de $\underline{\dot{\gamma}}$, mais la viscosité dépend cette fois de la température, de la pression, et du taux de cisaillement généralisé :

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 2\eta(\dot{\gamma}, T, p) \underline{\dot{\gamma}}, \\ \dot{\gamma} &= \sqrt{2(\underline{\dot{\gamma}} \times \underline{\dot{\gamma}})}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2

Les lois donnant la viscosité des fluides en fonction de la pression constituent une partie de la rhéologie. Dans sa thèse, I. Maillot [90] rappelle quelques lois usuelles : lorsque la température est suffisamment élevée, et pour un taux de cisaillement suffisamment grand, la viscosité est bien représentée par

$$\eta(\dot{\gamma}, T, p) = A \exp\left(\frac{T_a}{T}\right) \dot{\gamma}^{n-1} \exp(\beta p), \quad 0 \leq n \leq 1. \quad (2.2)$$

Dans cette formule, le coefficient β varie selon le type de thermo-plastique entre $2, 3 \cdot 10^{-8}$ et $6 \cdot 10^{-8} \text{Pa}^{-1}$. La température d'activation T_a s'écrit sous la forme $\frac{E_a}{R}$ ou R désigne la constante des gaz parfaits et E_a l'énergie d'activation, qui selon le type de polymère utilisé varie entre $3 \cdot 10^4$ et $13 \cdot 10^4 \text{J/mole}$. Enfin le coefficient A est de l'ordre de 10^2 à 10^4Pl (Poiseuilles $\equiv \text{Pa.s}$); pour les polyamides, par exemple, il vaut $6.4 \cdot 10^3 \text{Pa.s}$.

Les problèmes de transition vitreuse seront bannis de l'analyse qui va suivre aussi ne nous attacherons nous pas sur les modifications à apporter à cette loi pour des températures trop basses. Par contre, pour un taux de cisaillement tendant vers zéro, la viscosité donnée ci-dessus devient infinie alors que l'expérience montre qu'elle atteint un palier. La loi de Cross/Arrhenius s'écrit pour une température suffisante :

$$\eta(\dot{\gamma}, T, p) = \frac{\eta_0(T, p)}{1 + \left(\frac{\eta_0(T, p) \dot{\gamma}}{\tau^*}\right)^{1-n}}, \quad (2.3)$$

$$\eta_0(T, p) = B \exp\left(\frac{T_b}{T}\right) \exp(\beta p). \quad (2.4)$$

Dans cette formule, τ^ représente un cisaillement, et les constantes B et T_b sont reliées à A et T_a par*

$$A = B^n (\tau^*)^{n-1} \quad \text{et} \quad T_a = nT_b.$$

2.3 Thermodynamique

2.3.1 Variables et équations d'état

La thermodynamique essaie de rendre compte d'un nombre important de propriétés en un petit nombre de variables, appelées variables d'état. Comme exemple de ces variables nous avons la pression p , la température T , la densité ρ , l'entropie massique s , l'énergie interne e , l'enthalpie massique h . Une équation d'état est une relation entre plusieurs de ces variables. On suppose que le fluide est localement en temps à l'équilibre thermodynamique, ce qui a pour conséquence :

Postulat VIII L'état thermodynamique du système est totalement déterminé par deux variables indépendantes parmi l'ensemble des variables d'état. Nous choisissons la pression p et la température T .

Sous ce postulat, la masse volumique est donc donnée par une équation d'état :

$$\rho = \rho(p, T). \quad (2.5)$$

Si cette loi est dérivable, la différentielle de ρ s'exprime en fonction des différentielles de p et T ,

$$d\rho = \rho\chi_T dp - \rho\chi_p dT,$$

où

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \geq 0, & \text{est le coefficient de compressibilité isotherme,} \\ \chi_p &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \geq 0, & \text{est le coefficient de dilatation isobare.} \end{aligned}$$

2.3.2 Premier principe et équation d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence, pour tout système thermodynamique, d'une *variable d'état* appelée énergie interne massique e , telle que pour chaque transformation menant le système d'un état d'équilibre à un autre, la différence entre la variation d'énergie interne et le travail fourni par les forces extérieures est apportée au système sous forme de chaleur. Lorsque le système est en mouvement, l'énergie cinétique vient s'ajouter à l'énergie interne et nous avons

Postulat IX Pour un fluide en équilibre thermodynamique local, il existe une variable d'état e , telle que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) \rho dx = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega_t} [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n}] \mathbf{v} ds - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds,$$

pour tout domaine fluide Ω_t de frontière régulière. La quantité de chaleur $\mathbf{q}$ est reliée à la température par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où la conductivité thermique κ peut être fonction de la température.

En utilisant la forme du tenseur des contraintes σ , et les équations de dynamique déjà introduites, on obtient une forme locale de l'équation d'énergie, valable sur tout domaine fluide où les grandeurs considérées sont continues (il y a dans le cas général des conditions de saut aux interfaces que nous omettons ici). Voici cette forme :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \dot{\gamma}^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (2.6)$$

Remarque 2.3

Le terme $\eta \dot{\gamma}^2$ représente l'énergie dissipée par auto-échauffement visqueux.

2.3.3 Équation d'énergie en fonction de la température

Nous n'utiliserons pas ici l'enthalpie, puisque celle-ci devient intéressante par rapport à la température lors de la modélisation des changements de structure, comme la cristallisation, que nous ne considérons pas. Un calcul simple montre que l'équation d'énergie s'exprime en fonction de la température et de la pression par [90]

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \chi_p T \frac{Dp}{Dt} + \eta \dot{\gamma}^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (2.7)$$

Dans cette équation, le terme en $\frac{Dp}{Dt}$ représente l'échauffement par compression, le terme $\eta \dot{\gamma}^2$ l'échauffement visqueux alors que le dernier rend compte de la diffusion de chaleur.

2.3.4 Cas d'un écoulement comportant deux fluides

Dans notre phénomène physique, l'écoulement d'un premier fluide dans un milieu initialement occupé par un second, nous devons introduire une notation pour distinguer les grandeurs propres à chaque milieu.

**On indice par 1 les grandeurs relatives au fluide entrant (par exemple polymère),
et par 2 celles relatives au fluide chassé (air).**

Lorsque que nous désignons indifféremment l'un ou l'autre, nous indiquons la grandeur par la lettre i . Voyons tout de suite ceci sur les coefficients de compressibilité.

2.3.5 Coefficients thermodynamiques

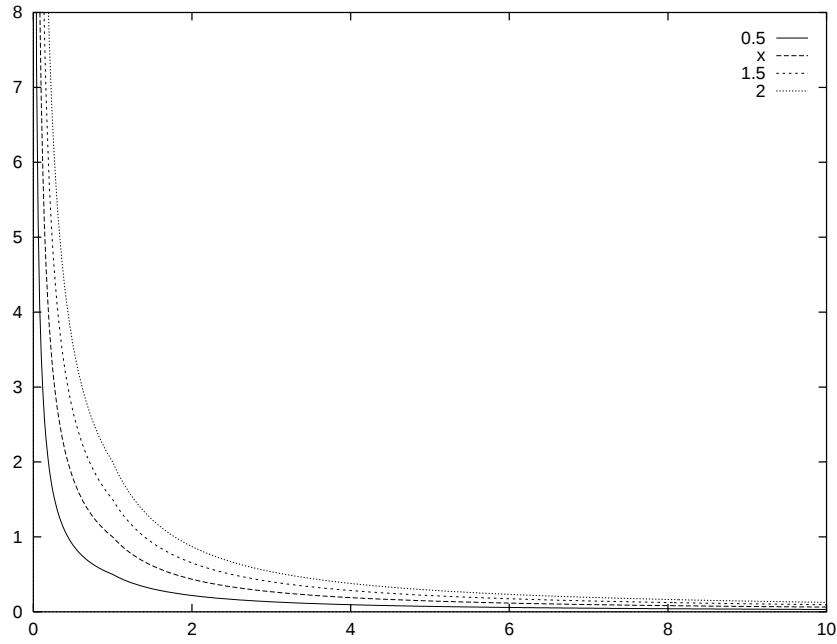
Le polymère et l'air sont deux fluides qui ne sont pas des gaz parfaits. Pour un gaz parfait, la compressibilité s'exprime en fonction de la pression par

$$\chi_{GP}(p) = \frac{1}{p}.$$

Comme les fluides que nous considérons sont *a priori* moins compressibles qu'un gaz parfait (qui représente un modèle de fluide sans interaction entre particules), nous avons posé :

Postulat X Le coefficient de compressibilité des fluides en présence (polymère, air), s'exprime en fonction de la pression par

$$\chi_i(p) = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{p^{p_i}} & \text{pour } p \geq 1, \\ \frac{\alpha_i}{p^{q_i}} & \text{pour } p \leq 1. \end{cases}$$

FIG. 2.1 – Fonction χ_i .

où $\alpha_i > 0$, $1 < p_i < +\infty$, $0 < q_i < 1$, dépendent du milieu (le gaz parfait correspond à $\alpha_i = p_i = q_i = 1$)(voir figure (2.1)).

Sous cette hypothèse, la fonction β_i qui sera introduite en (2.25) s'exprime par

$$\beta_i(p) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{(p_i-1)p^{p_i-1}}\right) & \text{pour } p \geq 1, \\ \lambda_i \exp\left(\frac{\alpha_i}{1-q_i}p^{1-q_i}\right) & \text{pour } p \leq 1. \end{cases}$$

où

$$\lambda_i = \exp\left[-\alpha_i \left(\frac{1}{1-q_i} + \frac{1}{p_i-1}\right)\right] \in]0, 1[.$$

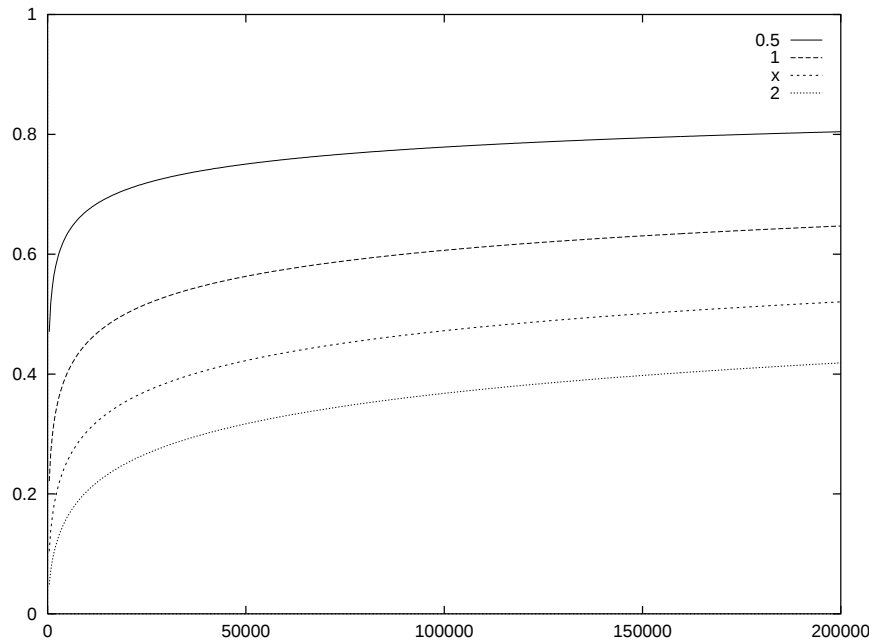
La condition $q_i < 1$ n'est pas nécessaire pour définir β_i , mais elle garantit que cette fonction admet une limite finie en 0. En effet pour toutes les valeurs admissibles des coefficients α_i , p_i , q_i , la fonction β_i est strictement croissante et vérifie

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \beta_i(r) = 1, \quad (2.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \beta_i(r) = \lambda_i \in]0, 1[, \quad (2.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \beta'_i(r) = +\infty. \quad (2.10)$$

Nous avons tracé figure 2.2 l'allure de la fonction β_i pour $p_i = 2$, $q_i = \frac{1}{2}$ et quelques valeurs de α_i . L'important pour notre étude est le caractère dégénéré de β_i pour de grandes pressions.

FIG. 2.2 – Fonction β_i .

2.4 Géométrie du moule

Dans la modélisation de l'injection, les moules considérés auront une géométrie coque, c'est à dire que leur épaisseur sera négligeable devant les deux autres dimensions. On peut penser à des pièces plastiques de la vie courante pour vérifier le bien-fondé de cette restriction : pare-chocs, clavier d'ordinateur, disquette, ... sont autant d'exemples.

I. Maillot a effectué une analyse dimensionnelle des équations du modèle ci-dessus, et a montré que la géométrie particulière de l'empreinte, la forte viscosité des thermo-plastiques et les hautes pressions mises en jeu permettaient de négliger les effets de l'inertie et de la gravité, réduisant l'équation de quantité de mouvement (2.1) à

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0.$$

L'analyse dimensionnelle montre aussi que la pression peut être prise constante dans l'épaisseur de l'empreinte, et que la vitesse (dans le plan horizontal) du fluide est proportionnelle au gradient de pression. Nous résumons tout ceci dans le postulat suivant, qui rend compte de l'hypothèse de *Hele-Shaw*.

Postulat XI La pression est constante dans l'épaisseur de l'empreinte du moule et la vitesse du fluide est proportionnelle au gradient de pression : il existe un coefficient $S(x, t, p)$ tel que

$$\mathbf{v}(x, t) = -S(x, t, p) \nabla p, \quad (2.11)$$

en tout point x de l'empreinte et pour tout temps t .

Remarque 2.4

Notons que S dépend en fait de p par l'intermédiaire de η . D'autre part la notation $S(x, t, p)$ signifie que pour un couple (x, t) , le coefficient de proportionnalité s'écrit $S(x, t, p(x, t))$, la dépendance de S par rapport à p est locale.

Finalement, à partir des équations de continuité et d'énergie, en utilisant la loi d'état donnant ρ en fonction de p et T , on détermine l'équation en pression du modèle, sur laquelle va porter notre analyse mathématique :

$$\chi(x, t, p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi(x, t, p) S(x, t, p) |\nabla p|^2 - \operatorname{div}(S(x, t, p) \nabla p) = \Phi_{\text{th}}, \quad (2.12)$$

où Φ_{th} rend compte du couplage avec la thermique. Cette équation est valable sur tout domaine où la pression est régulière. Nous avons en plus des conditions de saut aux interfaces entre plusieurs fluides, qui imposent la continuité de la pression p et de la vitesse $-S(p) \nabla p$.

2.5 Restrictions pour notre étude

Comme nous l'avons vu, la vitesse est proportionnelle au gradient de pression, et la pression est uniforme dans l'épaisseur. Nous avons donc décidé d'étudier l'équation en pression en dimension deux, laissant de côté l'équation d'énergie dont l'influence n'est considérée que par l'intermédiaire du second membre Φ_{th} . Cette équation nous permet de calculer la pression si on dispose des coefficients χ et S dans chaque fluide, et si on sait comment se déplace l'interface. On s'est déjà donné les coefficients χ . Les coefficients S sont de la forme

$$S_i(p) = \frac{s_i}{\eta_i(p)}. \quad (2.13)$$

On supposera plus généralement que ce sont des coefficients variant **continûment avec la pression**, et étant des fonctions bornées inférieurement et supérieurement sur $\mathbf{R}^+$. Il existe deux constantes $S_{\min}$ et $S_{\max}$ telles que

$$S_{\min} \leq S_i(r) \leq S_{\max}, \quad \forall r \in \mathbf{R}^+. \quad (2.14)$$

En ce qui concerne le mouvement de l'interface, nous supposons qu'elle se déplace à la vitesse du fluide

$$V_{\Gamma(t)}^N = -S_1(p) \frac{\partial p}{\partial n} = -S_2(p) \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (2.15)$$

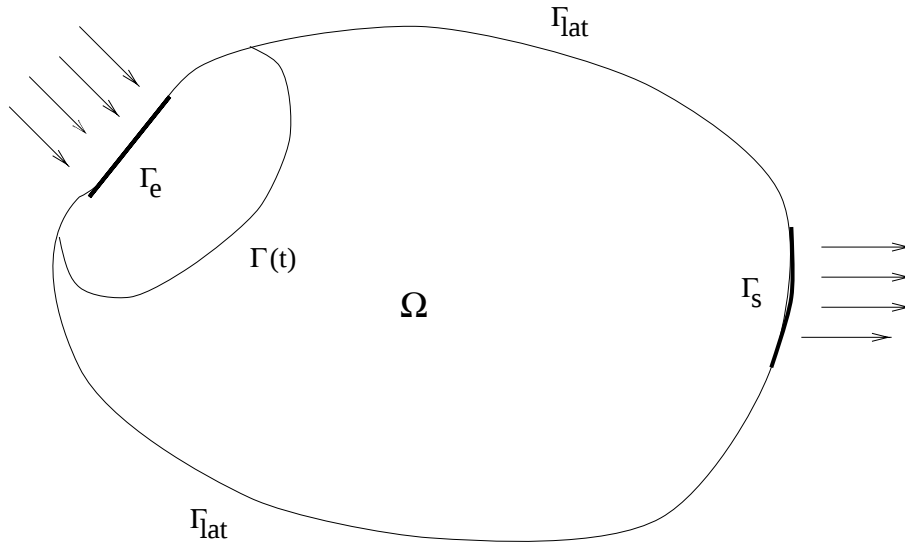
où les dérivées normales sont prises respectivement de chaque côté de $\Gamma(t)$.

Le modèle que nous considérons pour notre étude mathématique est donc seulement composé d'une équation en pression, et d'une loi de déplacement du front (qui prendra une forme plus précise plus loin). Nous n'avons donc plus de température, ce qui semble le comble pour un phénomène où le refroidissement est si crucial. Nous avons deux arguments pour justifier ce choix : le premier est que la dissipation thermique intervient en tant que second membre dans l'équation en pression et n'a donc pas totalement disparu. Le second est que notre travail a été axé sur le comportement mécanique du phénomène d'injection, et en particulier la localisation de l'interface air/polymère. Nous avons donc privilégié l'aspect moteur des équations.

Enfin signalons que la porte n'est pas fermée pour un couplage de l'équation d'énergie en température avec les deux équations que nous étudions ici.

2.6 Conditions aux limites

Pour introduire les conditions aux limites, voici le schéma d'une empreinte de moule, ou figurent les différentes portions de la frontière.



2.6.1 Conditions aux limites en entrée

Sur la frontière d'entrée, Γ_e , nous imposons un débit de polymère, ce qui se traduit par une condition de Neumann sur la vitesse, et grâce à l'hypothèse (2.11),

$$-S_1(p) \frac{\partial p}{\partial n} = G_e, \quad \text{sur } \Gamma_e \times]0, T[. \quad (2.16)$$

En pratique, lors de l'injection du moulage des pièces plastiques, il est d'usage d'injecter à débit imposé jusqu'à ce que la pression en entrée atteigne une valeur donnée, puis de maintenir la pression en entrée à cette valeur. La condition ci-dessus est alors remplacée par une condition de Dirichlet.

2.6.2 Conditions aux limites en sortie

En sortie, par contre, on suppose que la pression (de l'air) est prescrite par la taille des événements (trous) situés en fond de moule. Nous écrivons donc

$$p = p_s, \quad \text{sur } \Gamma_s \times]0, T[. \quad (2.17)$$

2.6.3 Conditions aux limites en paroi latérale

La vitesse est tangente aux parois latérales du moule, ce qui d'après (2.11) induit

$$-S(p) \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{\text{lat}} \times]0, T[. \quad (2.18)$$

2.7 Choix des variables du problème mathématique

2.7.1 Première formulation

Nous étudions donc l'écoulement d'un fluide visqueux et compressible délimité par une surface libre, à l'intérieur de l'empreinte d'un moule Ω . A $t = 0$, le polymère occupe un

ouvert borné connexe $\Omega_p^0 \subset \Omega$ tel que $\partial\Omega_p^0 \cap \partial\Omega = \Gamma_e$. On cherche, pour chaque temps $t \in]0, T[$, la pression dans l'empreinte du moule, représentée par $u : \Omega \times]0, T[\mapsto \mathbf{R}$, et l'ouvert $\Omega_p(t)$ occupé par le polymère, sachant que l'interface

$$\Gamma(t) \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial\Omega_p(t)) \cap \Omega$$

évolue grâce à la vitesse normale $-S_i(p) \frac{\partial p}{\partial n}$, prise par rapport à la normale sortante à $\Omega_p(t)$.

Nous avons donc deux inconnues, dont l'une est une application à valeurs dans $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas très maniable. Aussi, suivant une méthode introduite par J. Sethian, nous allons reformuler le problème en ne considérant plus l'ouvert $\Omega_p(t)$ mais son équation. Commençons par un lemme de géométrie différentielle.

2.7.2 Sur les ouverts définis par une inéquation

Nous regroupons ici des propriétés utiles pour des ouverts ω_t définis par une inéquation, dans $\mathbf{R}^2$, de la forme $\zeta(x, t) > 0$. Nous avons le résultat élémentaire suivant :

Proposition 2.1

Soit $\zeta \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{n+1})$ et $\omega_t = \{x \in \mathbf{R}^n : \zeta(x, t) > 0\}$. En tout point $x \in \partial\omega_t$ où $\nabla\zeta(x, t)$ ne s'annule pas, la normale **sortante** à $\gamma(t) = \partial\omega_t$ est donnée par

$$\mathbf{n}_{\gamma(t)}(x) = -\frac{\nabla\zeta}{|\nabla\zeta|}(x, t)$$

et sa vitesse normale **sortante** par

$$\mathbf{v}_{\gamma(t)}(x) = \frac{\zeta_t}{|\nabla\zeta|}(x, t).$$

2.7.3 Seconde formulation

Commençons par choisir une fonction continue $\psi_0 : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ telle que

$$\Omega_p^0 = \{x \in \Omega : \psi_0(x) > 0\}.$$

Si l'ouvert $\Omega_p(t)$ admet la représentation

$$\Omega_p(t) = \{x \in \Omega : \zeta(x, t) > 0\},$$

avec $\zeta : \Omega \times]0, T[\mapsto \mathbf{R}$ régulière, alors voyons quelle équation doit vérifier ζ . Écrivons donc que la vitesse normale à l'interface, d'équation $\zeta(x, t) = 0$, est égale à $-S(\zeta, p) \frac{\partial p}{\partial n}$, où on a posé

$$S(\zeta, p) = \begin{cases} S_1(p) & \text{si } \zeta > 0, \\ S_2(p) & \text{si } \zeta < 0. \end{cases}$$

On voit que ζ doit vérifier

$$\zeta_t + S(\zeta, p) \frac{\partial p}{\partial n} |\nabla\zeta| = 0$$

sur l'interface. Notons que d'après la proposition ci-dessus, cette équation peut aussi s'écrire, toujours sur l'interface,

$$\zeta_t - S(\zeta, p) \nabla p \cdot \nabla \zeta = 0.$$

Il paraît donc naturel d'introduire la fonction $\psi : \Omega \times]0, T[\mapsto \mathbf{R}$ solution de

$$\psi_t - S(\psi, p) \nabla p \cdot \nabla \psi = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[\quad (2.19)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega \times \{0\}, \quad (2.20)$$

et de définir $\Gamma(t)$ par

$$\Gamma(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \Omega : \psi(x, t) = 0\}.$$

Nous allons donc maintenant choisir comme inconnue le couple de fonctions (u, ψ) . Il faudra bien sûr au cours de l'analyse justifier le fait que $\Gamma(t)$ ne dépende pas du choix de ψ_0 , bien que la fonction ψ en dépende.

Enfin signalons que l'équation du front ainsi obtenue est une équation hyperbolique du premier ordre. On sait grâce aux travaux C. Bardos [19], [20] que l'on doit imposer une condition de Dirichlet sur la frontière d'entrée (celle où $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$) pour que le problème soit bien posé. On se donne donc une valeur au bord g définie sur $\Gamma_e \times]0, T[$, et on demande que l'inconnue ψ vérifie en outre

$$\psi = g \quad \text{sur } \Gamma_e \times]0, T[. \quad (2.21)$$

On suppose que

$$g > 0 \quad \text{sur } \overset{\circ}{\Gamma}_e \quad (2.22)$$

de sorte que la frontière d'entrée soit toujours alimentée.

2.7.4 Notations

Comme nous l'avons vu, la partie de l'ouvert Ω (l'empreinte du moule) contenant du polymère sera caractérisée à l'instant t par $\psi(x, t) > 0$. Lorsque les opérateurs que nous considérons ont pour expression $M_1(p)$ sur le domaine occupé par le polymère et $M_2(p)$ sur la partie où subsiste de l'air, nous convenons de noter $M(\psi, p)$ l'opérateur défini par

$$M(\psi, p) = \begin{cases} M_1(p) & \text{si } \psi > 0, \\ M_2(p) & \text{si } \psi < 0. \end{cases}$$

Ceci nous permet d'utiliser par la suite les expressions $S(\psi, p)$, $\chi(\psi, p)$, $\beta(\psi, p)$, ...

En ce qui concerne les frontières du domaine, nous convenons de noter

$$\Sigma_e = \Gamma_e \times]0, T[, \quad \Sigma_s = \Gamma_s \times]0, T[, \quad \Sigma_{\text{lat}} = \Gamma_{\text{lat}} \times]0, T[, \quad \Sigma = \bigcup_{t \in]0, T[} \Gamma(t) \times \{t\}.$$

2.8 Équations vérifiées par ces variables

2.8.1 Solutions classiques

Par définition une solution classique de notre problème sera un couple (p, ψ) de fonctions régulières sur $\Omega \times]0, T[$ vérifiant les équations en pression :

$$\chi_1(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi_1(p) S_1(p) |\nabla p|^2 - \operatorname{div}(S_1(p) \nabla p) = f \quad \text{sur } \{(x, t), \psi(x, t) > 0\} \quad (2.23)$$

$$\chi_2(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi_2(p) S_2(p) |\nabla p|^2 - \operatorname{div}(S_2(p) \nabla p) = f \quad \text{sur } \{(x, t), \psi(x, t) < 0\} \quad (2.24)$$

auxquelles sont adjointes des conditions aux limites et initiale. On remarque que ces équations se prêtent mal à une analyse mathématique directe du fait de leur forme non standard : un terme multipliant la dérivée en temps, et le terme faisant intervenir le carré du gradient de pression. Ci-dessous nous proposons une transformation sur ces équations pour leur donner une forme plus maniable, en introduisant les fonctions auxiliaires, pour $i = 1, 2$

$$\beta_i(r) = \exp - \int_r^{+\infty} \chi_i(s) \, ds \quad (2.25)$$

qui existent d'après les hypothèses faites sur χ_i au paragraphe 2.3.5. Ceci permet d'écrire les équations (2.23) et (2.24) sous la forme équivalente conservative,

$$\frac{\partial \beta_i(p)}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta_i(p) S_i(p) \nabla p) = f \beta_i(p),$$

sur chaque fluide. A cette équation s'ajoutent des conditions aux limites et de transmission, et l'équation de transport sur ψ , si bien que notre formulation classique correspond au problème suivant

Trouver un couple (p, ψ) solution classique de

$$\frac{\partial \beta_1(p)}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta_1(p) S_1(p) \nabla p) = f \beta_1(p) \quad \text{sur } \{(x, t), \psi(x, t) > 0\} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \beta_2(p)}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta_2(p) S_2(p) \nabla p) = f \beta_2(p) \quad \text{sur } \{(x, t), \psi(x, t) < 0\} \quad (2.27)$$

$$p = p^0 \quad \text{sur } \Omega \times \{0\} \quad (2.28)$$

$$p = p_s \quad \text{sur } \Sigma_s \quad (2.29)$$

$$S_1(p) \frac{\partial p}{\partial n} = G_e \quad \text{sur } \Sigma_e \quad (2.30)$$

$$S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\text{lat}} \quad (2.31)$$

$$S_1(p) \frac{\partial p}{\partial n} = S_2(p) \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - S(\psi, p) \nabla p \cdot \nabla \psi = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[\quad (2.33)$$

$$\psi = g \quad \text{sur } \Sigma_e \quad (2.34)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega \times \{0\} \quad (2.35)$$

2.8.2 Écriture du problème sous forme variationnelle

Dans cette partie, on suppose pour simplifier que $p_s = 0$, et on considère une fonction test telle que

$$\nu \in \mathcal{W} = \left\{ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega} \times [0, T]) : u = 0 \text{ sur } \Sigma_s \right\}.$$

On note, pour simplifier les écritures intégrales, le domaine occupé par le polymère à l'instant t ,

$$\Omega_p(t) = \{x \in \Omega : \psi(x, t) > 0\}. \quad (2.36)$$

En multipliant (2.26) par ν , en intégrant par parties sur

$$\bigcup_{t \in]0, T[} \Omega_p(t) \times \{t\}$$

et en utilisant (2.28), (2.30), (2.31), nous obtenons

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega_p(t)} \beta_1(p) \frac{\partial \nu}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \beta_1(p) \nu V_{\Gamma(t)}^N d\sigma dt - \int_{\Omega_p^0} \beta_1(p^0) \nu(0, x) dx \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_p(t)} \beta_1(p) S_1(p) \nabla p \cdot \nabla \nu dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_e} \beta_1(p) G_e \nu d\sigma dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \beta_1(p) S_1(p) \frac{\partial p}{\partial n} \nu d\sigma dt = \int_0^T \int_{\Omega_p(t)} f \beta_1(p) \nu dx dt \end{aligned} \quad (2.37)$$

Un calcul identique (attention toutefois au sens de la normale extérieure au domaine, portée par $\Gamma(t)$) vaut pour $\Omega_p^c(t)$, sur les équations correspondantes. En regroupant les formulations sur chaque partie de Ω , nous obtenons en utilisant (2.36), et les notations introduites en 2.7.4, la formulation

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\beta(\psi, p) \frac{\partial \nu}{\partial t} + \beta(\psi, p) S(\psi, p) \nabla p \cdot \nabla \nu dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} [\beta_1(p) - \beta_2(p)] \left(V_{\Gamma(t)}^N - S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial n} \right) \nu d\sigma dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, p) f(x, t) \nu dx dt + \int_{\Omega} \beta(\psi^0, p^0) \nu(0, x) dx \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_e} \beta_1(p) G_e \nu d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Il est temps d'utiliser (2.33), (2.36) et la proposition 2.1 pour éliminer l'intégrale sur $\Gamma(t)$. En effet,

$$V_{\Gamma(t)}^N = -\frac{\psi_t}{|\nabla \psi|} \quad \text{et} \quad S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial n} = -S(\psi, p) \nabla p \cdot \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$$

donc pour une fonction ψ dont le gradient ne s'annule pas,

$$(2.33) \iff V_{\Gamma(t)}^N - S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma(t).$$

D'autre part la condition de signe de g faite en (2.22) nous indique que $\beta_1(p)$ coïncide avec $\beta(\psi, p)$ sur Γ_e .

On peut donc écrire une première formulation variationnelle pour p , connaissant ψ :

Trouver p , avec $p = 0$ sur Γ_s , vérifiant pour tout $\nu \in \mathcal{W}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\beta(\psi, p) \frac{\partial \nu}{\partial t} + \beta(\psi, p) S(\psi, p) \nabla p \cdot \nabla \nu \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, p) f(x, t) \nu \, dx \, dt + \int_{\Omega} \beta(\psi^0, p^0) \nu(0, x) \, dx + \int_0^T \int_{\Gamma_e} \beta(\psi, p) G_e \nu \, d\sigma \, dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pour l'instant cette formulation variationnelle ne nous permet pas à l'évidence d'englober l'équation de propagation du front (2.33), sa condition initiale, et sa condition au bord. Prenant des fonctions test dans l'espace

$$\mathcal{Z} = \left\{ \mu \in \mathcal{D}(\overline{\Omega} \times [0, T]) : \mu = 0 \text{ sur } \Sigma_s \right\}$$

on multiplie (2.33) par μ et on intègre sur $\Omega \times]0, T[$. Cela donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\psi \frac{\partial \mu}{\partial t} + \psi \operatorname{div}(\mu S(\psi, p) \nabla p) \, dx \, dt \\ & - \int_{\Omega} \psi(x, 0) \mu(x, 0) \, dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \psi(\sigma, t) \mu(\sigma, t) S(\psi, p) \nabla p \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \, dt = 0. \end{aligned}$$

Au vu de la condition initiale, des conditions au bord vérifiées par ψ et p , et du support de μ nous pouvons écrire notre problème sous la forme faible suivante.

Trouver ψ , vérifiant pour tout $\mu \in \mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\psi \frac{\partial \mu}{\partial t} + \psi \operatorname{div}(\mu S(\psi, p) \nabla p) \, dx \, dt \\ &= \int_{\Omega} \psi_0(x) \mu(x, 0) \, dx + \int_0^T \int_{\Gamma_e} g(\sigma, t) \mu(\sigma, t) G_e(\sigma, t) \, d\sigma \, dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.9 Conclusion

Nous avons donc dégagé dans cette partie les équations qui nous semblent refléter l'aspect mécanique du problème d'injection, et défini clairement sur quelles variables nous allons travailler.

Ceci nous a mené à définir ce que l'on entendait par solution classique de notre problème (2.26) ... (2.35), en restant volontairement vague sur les espaces dans lesquels nous allons chercher ces solutions.

Nous avons proposé ensuite une formulation faible du problème : (2.39) et (2.40). Le chapitre suivant concerne l'étude de l'équation à double non linéarité qui apparaît dans (2.39), puis de l'équation de transport linéaire avec condition au bord (2.40). Le couplage est ensuite considéré. Pour clore ce chapitre voici quelques références, destinées soit à compléter les informations concernant les propriétés physiques des polymères, soit à citer des recherches existantes dans le domaine des écoulements avec frontière libre.

2.10 Commentaires bibliographiques

L'introduction de la dynamique des fluides que nous avons repris ici est largement inspirée de [95]; en ce qui concerne la thermodynamique, nous avons bien sûr utilisé la thèse [90], ainsi que l'ouvrage [48]. Les lois de comportement des fluides sont abordées dans [3]. Des données précises sur les fluides de type polymères en fusion (polyuréthane, polystyrène, caoutchouc, . . .) figurent dans "Introduction to Physical Polymer Science (John Wiley&Sons)", par L.H. Sperling, page 386.

Les écoulements de type Hele-Shaw sont considérés dans [109], sous un angle différent puisque le problème est étudié grâce aux transformations conformes dans le champ complexe. Les travaux [52] et [123] supposent tous deux que la pression est connue sur l'interface. Le livre [8] est consacré à l'étude des fluides non homogènes.

L'écriture du problème de frontière libre sous la forme de ligne de niveau d'une fonction est une idée introduite par J. Sethian [100][118]. D'autres approches sont possibles en particulier celle de [21], [116] [117], [124], où la fonction inconnue représentant l'ouvert $\Omega_p(t)$ est une fonction $\eta : \mathbf{R}^N \times]0, T[\rightarrow \mathbf{R}^N$ telle que

$$\Omega_p(t) = \eta(\Omega_p^0, t),$$

la fonction η vérifiant elle-même l'équation différentielle

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathbf{v}(\eta(x, t), t), \quad \eta(x, 0) = x.$$

Il s'agit bien en fait de l'analogue Lagrangienne de la formulation avec la fonction ψ , le passage de l'une à l'autre se faisant par

$$\psi(x, t) = \psi_0(\eta(x, t)).$$

Une étude sur la viabilité de l'approche Lagrangienne à partir des solutions faibles d'équation de Navier-Stokes a été menée par C. Foias, C. Guillopé et R. Temam [61]. Cependant, dans le cas d'un ouvert borné la méthode par courbes de niveau nous a paru plus adaptée pour la localisation de notre interface.

Chapitre 3

Analyse mathématique

3.1 Introduction

AU VU de la mise en équation précédente, nous étudions dans cette partie l'existence d'un couple solution à (2.39) et (2.40)

☞ **Dorénavant, par commodité, la pression inconnue est notée u au lieu de p . La vitesse est notée $\mathbf{v}$.**

Remarque 3.1

Cette notation a été choisie car les équations que nous allons étudier d'un point de vue abstrait peuvent modéliser divers phénomènes physiques, ne se limitant pas à des équations en pression. Par exemple l'inconnue u pourrait représenter aussi une concentration (ou saturation) dans le cas des équations des milieux poreux ou partiellement fissurés [7][113], une température dans les équations de type Stefan [24] ou un potentiel dans celles modélisant les semi-conducteurs [63][5].

Nous allons d'abord étudier (2.39) à ψ fixé. Soit $\mathcal{B}$ l'opérateur qui à une fonction u associe la fonction $\beta(\psi, u)$ et soit $\mathcal{A}$ l'opérateur qui à u associe la forme linéaire $\mathcal{A}(\psi, u)$ définie par

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\psi, u), \nu \rangle = & \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, u) S(\psi, u) \nabla u \cdot \nabla \nu \, dx \, dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, u) f(x, t) \nu \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_e} \beta(\psi, u) G_e \nu \, d\sigma \, dt \end{aligned}$$

sur des espaces convenablement choisis. Alors (2.39) s'écrit formellement

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}(\psi, u) + \mathcal{A}(\psi, u) = 0, \quad (3.1)$$

c'est à dire une équation à double non linéarité. Il y a au moins deux difficultés à l'étude de telles équations : le "degré" de non linéarité de $\mathcal{A}$ et la dépendance en ψ , donc en t , de $\mathcal{B}$. Afin de procéder par étapes, nous avons d'abord étudié le cas où ψ ne dépend pas du temps, et où la non linéarité de l'opérateur $\mathcal{A}$ est suffisamment "douce" (paragraphe 3.3).

Puis nous avons affaibli l'hypothèse sur $\mathcal{A}$ de sorte qu'elle se plie aux exigences de notre opérateur physique, ce qui est développé dans le paragraphe 3.4.

Enfin nous étudions le cas où ψ dépend de t .

En ce qui concerne la formulation (2.40), nous procédons à l'inverse, en supposant connue la vitesse (i.e. $\mathbf{v} = -S(\psi, u) \nabla u$), et en étudiant l'équation de transport linéaire avec condition au bord qui en résulte :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \psi = 0. \quad (3.2)$$

Pour terminer cette analyse nous étudions le couplage des deux équations.

Mais en premier lieu, dans ce chapitre, nous proposons quelques rappels d'analyse fonctionnelle, ainsi qu'un mot sur les notations utilisées plus loin. Nous démontrons aussi une version plus générale d'un lemme de dérivation utile pour l'obtention d'estimations *a priori* dans les équations à double non linéarité.

3.2 Préliminaires d'analyse fonctionnelle

3.2.1 Représentation de duals

On se placera souvent dans la suite dans la situation suivante : on considère deux espaces de Banach V et W tels que V soit dense dans W . On suppose que V s'injecte continûment dans W i.e.

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in V, \quad \|v\|_V \leq C \|v\|_W.$$

On a l'habitude dans ce cas de *considérer* W' comme un sous-espace de V' . En particulier, si $W = H$ est un espace de Hilbert, il est d'usage d'*identifier* H et son dual et d'écrire

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Le but de ce paragraphe est de clarifier cette situation, en utilisant [35], page 82, et l'exposé de M. Valadier [130], qui pose la définition suivante :

Définition 3.1 Soit E un espace vectoriel topologique, on dit que E' est *représenté* par un espace vectoriel F si sont donnés une forme bilinéaire b sur $E \times F$ et un isomorphisme $\psi : E' \rightarrow F$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E', \quad x'(x) = b(x, \psi(x')).$$

Par exemple, si H est un espace de Hilbert réel, il est représenté par lui-même en prenant pour b le produit scalaire, et ψ l'isomorphisme qui à une forme linéaire continue x' sur H associe, grâce au théorème de Riesz-Fréchet, l'unique élément $\psi(x')$ de H tel que $x'(x) = (\psi(x'), x)$ pour tout x dans H .

Un autre exemple est l'espace $W = L^p(\Omega)$ que l'on utilisera plus loin. Son dual est représenté par $L^q(\Omega)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) par l'intermédiaire de la forme bilinéaire b définie par

$$b(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega),$$

et de l'application ψ définie comme suit : à $T \in (L^p(\Omega))'$, ψ associe (d'après le théorème de représentation de Riesz) l'unique élément $\psi(T)$ de $L^q(\Omega)$ tel que

$$T(f) = \int_{\Omega} \psi(T)(x)f(x) dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

M. Valadier démontre le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit E_1 et E_2 deux e.v.t. tels que $E_1 \subset E_2$ avec injection dense et continue. Alors E_2' est représenté par

$$F_2 = \{x' \in E_1' : x' \text{ est continue sur } E_1 \text{ pour la topologie induite par } E_2\}$$

avec $\psi(x_2') = x_2'|_{E_1}$ et $b(x_2, x')$ est la valeur en x_2 du prolongement (unique) continu de x' à E_2 .

Par conséquent, si V, W sont deux espaces de Banach et H un Hilbert, tels que $V \subset W \subset H$ avec injections denses et continues, il est possible de représenter les W' et H' par des sous-espaces F et G de V' (ou d'une représentation de V'), et $G \subset F \subset V'$ puisque qu'une forme linéaire continue pour la norme de H est continue pour la norme de W .

L'exemple typique est $\mathcal{D}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, qui permet de considérer $W^{-1,p}$ comme un sous-espace de distributions. Par contre, comme $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(\Omega)$, le dual de ce dernier n'est pas un sous-espace de distributions.

3.2.2 Opérateurs de type monotone

Nous rappelons ici les définitions de monotonie et pseudo-monotonie introduites respectivement par F. Browder, G. Minty et H. Brézis [33]. L'espace V (resp. $\mathcal{V}$) est supposé être un espace de Banach réflexif et séparable, et V' (resp. $\mathcal{V}'$) dénote son dual topologique.

On considère maintenant des opérateurs qui à un élément de V associent une partie de V' , et on note $\mathcal{P}(V')$ l'ensemble des parties de V' . On renvoie au livre de J.P. Aubin et A. Cellina [11] pour l'étude des applications multivaluées.

Définition 3.2 1. On dit que $B : V \rightarrow \mathcal{P}(V')$ est monotone si :

$$(M) \quad \forall u_i \in V, \forall v_i \in B(u_i), i = 1, 2, \langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

2. Un opérateur $B : V \rightarrow \mathcal{P}(V')$ est fortement monotone sur V pour $(\cdot, \cdot)_H$ si :

$$(FMH) \quad \exists \alpha > 0 : \forall u_i \in V, \forall v_i \in B(u_i), i = 1, 2 \quad \langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq \alpha |u_1 - u_2|_H^2.$$

3. On dit que $B : V \rightarrow \mathcal{P}(V')$ est maximal monotone si B est monotone et vérifie :

$$\forall u_2 \in V, \{v_2 \in B(u_2)\} - \{\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0 \mid \forall u_1 \in V, \forall v_1 \in B(u_1)\}.$$

En plus de la monotonie, une propriété faible de continuité doit en générale être satisfaite pour assurer l'existence d'une solution :

Définition 3.3 Tout opérateur A de V dans V' satisfaisant à

$$\forall u, v, w \in V \text{ la fonction } \lambda \rightarrow (A(u + \lambda v), w) \text{ est continue de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}$$

est dit hémicontinu.

Définition 3.4 $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ est pseudo-monotone si :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{V} \text{ faible} \\ \limsup (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \liminf (\mathcal{A}(u_n), u_n - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Remarque 3.2

☞ On pourrait être surpris de l'introduction de la pseudo-monotonie pour un problème ne traitant pas d'inéquation variationnelle, alors que cette définition avait été introduite par H. Brézis pour étendre aux inéquations les résultats obtenus dans le cas des équations pour les opérateurs de

type (M) ([33], [86]). Mais depuis les différents auteurs ont souvent utilisé la pseudo-monotonie pour les équations, et la raison majeure est la stabilité par addition de cette propriété (i.e. la somme de deux opérateurs pseudo-monotones l'est aussi [143]), alors que ceci est faux pour les opérateurs de type (M) en général.

☞ D'autre part la définition de pseudo-monotonie que nous donnons diffère de celle de J.L. Lions ([86], page 179) puisque nous reportons à plus tard l'hypothèse A borné. La raison est que cette hypothèse supplémentaire permettait de considérer les opérateurs pseudo-monotones comme une sous-classe des opérateurs de type (M), alors qu'à la lumière de la remarque précédente nous ne considérons plus ici ces opérateurs. Signalons enfin que les ouvrages récents d'analyse non linéaire ([143]) présentent les opérateurs pseudo-monotones selon la définition 3.4.

3.2.3 Quelques notations

1. Pour un espace de Banach X , on notera $W^{1,p}(0, T; X)$ le sous-espace de $L^p(0, T; X)$ dont les éléments possèdent des dérivées au sens des distributions représentables par un élément de $L^p(0, T; X)$.
2. Afin d'alléger les notations, on désignera par C toute constante, étant bien entendu que ce symbole représente en fait une constante *a priori* différente à chaque occurrence.
3. Pour un opérateur P d'un espace de Banach X dans un autre, on notera toujours $\mathcal{P}$ l'opérateur défini sur $L^p(0, T; X)$ par $\mathcal{P}(u)(t) = P(u(t))$ p.p. sur $[0, T]$.
4. Pour un espace de Banach W nous désignerons par $\Gamma_0(W)$ l'ensemble des fonctionnelles convexes, semi-continues inférieure-ment et propres de W dans $\mathbf{R}$ (cf [84]).
5. Enfin le symbole ∂ devant une fonctionnelle convexe représente son sous-différentiel (par exemple dans le lemme ci-dessous).

3.2.4 Lemme de dérivation

Le lemme suivant est une extension au cas non Hilbertien d'un lemme de H. Brézis ([34], page 73):

Lemme 3.1

Soit $\Psi \in \Gamma_0(W)$, où W est un espace de Banach réflexif. Soit $p \in \mathbf{N}$, avec $1 < p < \infty$, et q son exposant conjugué. On suppose qu'il existe $u \in W^{1,p}(0, T; W)$ tel que

- (i) $u(t) \in D(\partial\Psi)$ p.p. $t \in [0, T]$,
- (ii) $\exists v \in L^q(0, T; W')$ tel que $v(t) \in \partial\Psi(u(t))$ p.p. $t \in [0, T]$.

La fonction $\Psi(u) : t \in [0, T] \mapsto \Psi(u(t)) \in \mathbf{R}$ vérifie alors :

1. $\Psi(u) \in W^{1,1}(0, T)$,
2. $\frac{d}{dt}\Psi(u(t)) = \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle$ p.p. $t \in [0, T]$.

3. En identifiant u à son représentant continu sur $[0, T]$, $\Psi(u)$ est absolument continue sur $[0, T]$ et nous avons $\forall (s, t) \in [0, T]^2$:

$$\Psi(u(t)) - \Psi(u(s)) = \int_s^t \left\langle v(\tau), \frac{du}{dt}(\tau) \right\rangle d\tau.$$

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant dû à Brézis ([34], page 154) :

Lemme 3.2

Soit $f \in L^p(0, T; X)$, X Banach, avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; X)$, et

$$f(t) - f(s) = \int_s^t \frac{df}{dt}(\tau) d\tau,$$

p.p. $s \in]0, T[$, p.p. $t \in]0, T[$.

2. il existe $g \in L^p(0, T; X)$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{T-h} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right\|^p dt = 0$$

(pour $p = +\infty$ prendre la formule ci-dessus pour $p = 1$)

3. $f \in W^{1,p}(0, T; X)$ au sens des distributions.

Dans ce cas on a $g = \frac{df}{dt}$ p.p. sur $]0, T[$.

Montrons tout d'abord que $\Psi(u) \in L^1(0, T)$. Prenons $w \in D(\partial\Psi)$ et $w^* \in \partial\Psi(w)$. Comme $v(t) \in \partial\Psi(u(t))$ p.p. t , il vient

$$\Psi(u(t)) \leq \Psi(w) + \langle v(t), u(t) - w \rangle \in L^1(0, T)$$

et

$$\Psi(u(t)) \geq \Psi(w) + \langle w^*, u(t) - w \rangle \in L^1(0, T)$$

$\Psi(u)$ est encadré par deux fonctions de $L^1(0, T)$ donc appartient à $L^1(0, T)$.

Pour montrer que $\Psi(u) \in W^{1,1}(0, T)$ et que $\frac{d}{dt}\Psi(u(t)) = \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle$ nous allons utiliser le lemme 3.2 et montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{T-h} \left| \frac{1}{h} (\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t))) - \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle \right| dt = 0.$$

Notons I_h l'intégrale ci-dessus et remarquons que p.p. $t \in]0, T[$

$$\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t)) \geq \langle v(t), u(t+h) - u(t) \rangle$$

et symétriquement

$$\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t)) \leq \langle v(t+h), u(t+h) - u(t) \rangle.$$

Or si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \geq a \geq \beta$, nous avons $|a - b| \leq |\alpha - b| + |\beta - b|$, et on majore alors I_h comme suit :

$$\begin{aligned} I_h &\leq \int_0^{T-h} \left| \left\langle v(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle - \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle \right| dt \\ &\quad + \int_0^{T-h} \left| \left\langle v(t+h), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle - \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle \right| dt \\ &\leq 2 \int_0^{T-h} \left| \left\langle v(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle - \left\langle v(t), \frac{du}{dt} \right\rangle \right| dt \\ &\quad + \int_0^{T-h} \left| \left\langle v(t+h) - v(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle \right| dt \\ &=: I_h^1 + I_h^2 \end{aligned}$$

On a

$$(I_h^1)^2 \leq 4 \|v\|_{L^q(0,T;W')}^q \int_0^{T-h} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{du}{dt} \right\|_W^p dt.$$

Du lemme 3.2, appliqué à u (dans $W^{1,p}(0, T; W)$) on déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h^1 = 0.$$

On a ensuite :

$$(I_h^2)^2 \leq \|\tau_h v - v\|_{L^q(0,T-h;W')}^q \int_0^{T-h} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\|_W^p dt$$

où on a posé $\tau_h v(t) = v(t+h)$ pour $t \in [0, T-h]$.

L'intégrale reste bornée, d'après le lemme 2, lorsque $h \rightarrow 0$, et comme $\tau_h v - v \rightarrow 0$ dans $L^q(0, T; W')$ on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h^2 = 0.$$

On a donc montré que $\Psi(u) \in W^{1,1}(0, T)$ et

$$\frac{d}{dt} \Psi(u) = \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle \text{ p.p. } t \in]0, T[$$

au sens des distributions.

Le lemme 3.2 nous indique que $\Psi(u)$ est égale presque partout à une fonction absolument continue. Il s'agit de montrer que cette fonction absolument continue est de la forme $\Psi(\hat{u})$ avec $\hat{u}$ égal à u presque partout sur $[0, T]$. Ceci n'est pas évident car *a priori* Ψ n'est pas continue.

Soit $|\cdot|_0$ une norme équivalente sur W rendant W et W' strictement convexes. Une telle norme existe car W est réflexif (Zeidler[89] page 861).

La fonctionnelle Ψ appartient toujours à $\Gamma_0(W)$ pour cette norme.

Posons pour tout $\mu > 0$:

$$\Psi_\mu(u) = \inf_{x \in W} \left\{ \frac{1}{2\mu} |u - x|_0^2 + \Psi(x) \right\}, \quad u \in W.$$

La fonctionnelle Ψ_μ appartient à $\Gamma_0(W)$. Elle vérifie en outre la propriété suivante :

$$\partial(\Psi_\mu) = (\partial\Psi)_\mu$$

où, si F_0 désigne l'application de dualité (monovaluée) de W dans W' pour la nouvelle norme :

$$(\partial\Psi)_\mu(x) = -\frac{1}{\mu}F_0(J_\mu(x) - x)$$

avec $J_\mu(x)$ unique solution (c'est la stricte convexité qui le garantit) de :

$$F_0(y - x) + \mu\partial\Psi(y) \ni 0.$$

Pour l'étude de Ψ_μ et de $(\partial\Psi)_\mu$, on pourra se reporter à V. Barbu [17], pages 42 et 57. Nous aurons simplement besoin des propriétés suivantes :

- (i) $(\partial\Psi)_\mu$ est bornée dans W' sur les bornés de W .
- (ii) pour tout $x \in D(\partial\Psi)$, $\|(\partial\Psi)_\mu(x)\| \leq \inf\{\|y\|; y \in (\partial\Psi)(x)\}$.
- (iii) $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Psi_\mu(x) = \Psi(x)$, pour tout $x \in W$.

Remarquons que (i) implique la continuité de Ψ_μ sur W , et (ii) que $(\partial\Psi)_\mu(u) \in L^q(0, T; W')$. Nous pouvons donc appliquer à Ψ_μ la première partie de notre lemme, à savoir :
L'application $t \mapsto \Psi_\mu(u(t))$ appartient à $W^{1,1}(0, T)$, et

$$\frac{d}{dt}\Psi_\mu(u) = \left\langle (\partial\Psi)_\mu(u), \frac{du}{dt} \right\rangle \text{ p.p. } t \in]0, T[.$$

D'après le lemme 3.2, $\Psi_\mu(u)$ est p.p. égale à une fonction $\hat{\Psi}_\mu(t)$ absolument continue sur $[0, T]$, et cette fonction est unique.

Par ailleurs, $u \in W^{1,p}(0, T; W)$ implique l'existence d'une unique fonction $\hat{u}$ absolument continue sur $[0, T]$ et égale à u p.p. (lemme 3.2).

Comme Ψ_μ est continue sur W , $\Psi_\mu(\hat{u})$ est continue sur $[0, T]$ et $\Psi_\mu(\hat{u}) = \Psi_\mu(u)$ p.p. sur $[0, T]$. Nous avons donc nécessairement $\hat{\Psi}_\mu = \Psi_\mu(\hat{u})$ et donc $\Psi_\mu(\hat{u})$ est absolument continue sur $[0, T]$.

Il en découle que pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$:

$$\Psi_\mu(\hat{u}(t)) - \Psi_\mu(\hat{u}(s)) = \int_s^t \left\langle (\partial\Psi)_\mu(u), \frac{du}{dt} \right\rangle d\tau.$$

De (b), et de $v(t) \in (\partial\Psi)(u(t))$ p.p. nous déduisons que $(\partial\Psi)_\mu(u)$ reste borné lorsque μ tend vers 0. Il existe donc $\Lambda \in L^2(0, T; W')$ tel qu'après extraction d'une sous-suite nous ayons

$$(\partial\Psi)_\mu(u) \rightharpoonup \Lambda \text{ dans } L^q(0, T; W') \text{ faible.}$$

En passant à la limite grâce à (iii), pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$:

$$\Psi(\hat{u}(t)) - \Psi(\hat{u}(s)) = \int_s^t \left\langle \Lambda, \frac{du}{dt} \right\rangle d\tau.$$

Donc $\Psi(\hat{u})$ est absolument continue sur $[0, T]$. D'autre part, nous avons déjà calculé sa dérivée p.p. donc nous avons le résultat demandé, quitte à effectuer l'identification usuelle $\hat{u} = u$. ■

3.3 Équations à double non-linéarité dans le cas pseudo-monotone

3.3.1 Introduction

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs non linéaires sur un espace de fonctions $\mathcal{V}$. Nous considérons le problème de Cauchy suivant : étant donnés un réel $T > 0$, un second membre f et une donnée initiale v^0 dans des espaces à préciser, trouver u tel que

$$\frac{d}{dt}B(u) + \mathcal{A}(u) \ni f, \text{ et } B(u)(0) = v^0.$$

Ce type d'équation intervient notamment dans la modélisation d'écoulements polyphasiques à frontière libre, aussi bien que dans le cadre d'écoulements en milieu poreux et de diffusion avec changement de phase liquide-solide. Aussi ce problème a t'il été l'objet de nombreux articles depuis quelques années.

La question de l'existence pour ce type de problèmes est déjà soulevée dans J.-L. Lions [86]. P.A. Raviart [106] commence à étudier ces équations avec une forme particulière de B . Puis O. Grange et F. Mignot [66] prouvent un résultat d'existence abstrait dans le cas où A et B sont des sous-différentiels de fonctions convexes, et où B est compact. Des résultats d'unicité figurent dans les travaux de A. Bamberger [16][15].

Le but des articles suivants est d'obtenir des hypothèses moins fortes sur A ou B :

H.W. Alt et S. Luckhaus [6] considèrent un opérateur B non compact, et en contrepartie A est supposé fortement monotone. J. Kačur [76] supprime cette dernière hypothèse en supposant seulement que A est monotone. Parallèlement, E. DiBenedetto et R.E. Showalter [46] envisagent le cas : A monotone, et B monotone compact, puis A. Bermúdez, A. Durany et C. Sagiez [24] n'utilisent que le caractère pseudo-monotone de A , en supposant B fortement monotone et compact.

Enfin X. Xu [138] supprime l'hypothèse de compacité sur B .

De leur côté, D. Blanchard et G. Francfort [28], [29], étudient le cas où B est seulement supposé monotone, localement lipschitzien et où A est le différentiel d'une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous nous proposons de traiter dans cette partie le cas où l'opérateur B est monotone compact mais non fortement monotone, et où A est pseudo-monotone. Ce cas n'entre dans aucune des hypothèses faites dans les articles cités précédemment, et est intéressant dans la pratique, puisqu'il permet de traiter le cas d'un opérateur B à faible croissance sans avoir une hypothèse de forte monotonie qui semble aller en sens contraire.

3.3.2 Définitions et notations

a) Espaces fonctionnels

Soit H un espace de Hilbert identifié à son dual : $H = H'$, et V un espace de Banach réflexif séparable tel que $V \subset H \subset V'$ avec injections denses et continues.

On note i l'injection de V dans H , et on suppose i compacte.

Le produit scalaire sur H sera noté $(\cdot, \cdot)_H$, et sa norme associée $|\cdot|_H$. On désignera par $< \cdot, \cdot >$

le crochet de dualité entre V' et V , et par $(\cdot, \cdot)$ celui entre $L^2(0, T; V')$ et $L^2(0, T; V)$.

Remarque 3.3

On se restreint ici à un Hilbert, mais la démonstration peut être adaptée sans grand changement à un Banach réflexif, en considérant non plus un produit scalaire sur H mais un produit de dualité. On se reportera à la section 4 pour plus de détails.

b) L'opérateur B et ses régularisés B_λ

Nous allons considérer un opérateur multivoque $B : V \rightarrow V'$ associé à une fonctionnelle convexe $\Phi \in \Gamma_0(H)$. Son sous-différentiel $\partial\Phi$ est maximal monotone de H dans H ([143], page 861).

On pose $B = i^* \circ \partial\Phi \circ i$. L'opérateur B est maximal monotone de V dans V' . On note Φ_λ la régularisée de Φ définie par :

$$\Phi_\lambda(u) = \Phi(u) + \frac{\lambda}{2}|u|_H^2.$$

Supposons Φ finie en un point $\bar{u}$ de $i(V)$ (et donc *a fortiori* de H); comme $|\cdot|_H^2$ est continue sur H , nous avons ([84], page 369) :

$$\forall u \in H, \partial\Phi_\lambda(u) = \partial\Phi(u) + \lambda u.$$

Si l'on suppose que Φ est finie et continue en $\bar{u} \in i(V)$ alors ([51], page 27) :

$$B_\lambda := i^* \circ \partial\Phi_\lambda \circ i = \partial(\Phi_\lambda \circ i).$$

Exemple : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, et $H = L^2(\Omega)$. On pose

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} g(x, u(x)) dx$$

où g est une application mesurable sur $\Omega \times \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \Omega, r \rightarrow g(x, r) \in \Gamma_0(\mathbf{R})$. g est un intégrande convexe normal, au sens de R.T. Rockafellar (cf [142], proposition 1, page 221).

Pour toute fonction u mesurable sur Ω , l'application $x \rightarrow g(x, u(x))$ est mesurable sur Ω et nous avons $\Phi \in \Gamma_0(H)$.

Notons $\beta : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ le sous-différentiel de $g(x, \cdot)$; alors pour $u \in H$

$$\partial\Phi(u)(x) = \beta(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Soit $\lambda > 0$, et posons $g_\lambda(x, r) = g(x, r) + \frac{\lambda}{2}r^2$.

g_λ est un intégrande convexe normal. La régularisée de Φ est alors :

$$\Phi_\lambda(u) = \int_{\Omega} g_\lambda(x, u(x)) dx = \Phi(u) + \frac{\lambda}{2}|u|_H^2.$$

3.3.3 Le résultat principal

On étudie dans cette partie l'équation d'évolution non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dB(u(t))}{dt} + A(t, u(t)) \ni f(t) \\ B(u)(0) = v^0 \end{cases}$$

où B est l'opérateur défini en b). Rappelons que l'hypothèse

$$B \text{ est maximal monotone de } V \text{ dans } V' \quad (3.3)$$

est vérifiée. On suppose en outre que $\partial\Phi$ vérifie :

$$\partial\Phi \circ i \text{ est borné dans } H \text{ sur les bornés de } V. \quad (3.4)$$

Définissons l'opérateur B de $L^2(0, T; V)$ dans $L^2(0, T; V')$ par :

$$v \in B(u) \iff v(t) \in B(u(t)) \text{ p.p. sur } [0, T].$$

En supposant que

$$B \text{ est borné de } L^2(0, T; V) \text{ dans } L^2(0, T; H), \quad (3.5)$$

nous construisons ainsi un opérateur maximal monotone sur $L^2(0, T; V)$.

On considère la famille $\{A(t, \cdot), t \in [0, T]\}$ d'opérateurs de V dans V' et on lui associe l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $L^2(0, T; V)$ par

$$\forall u \in L^2(0, T; V) \quad \mathcal{A}(u)(t) = A(t, u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

On fait l'hypothèse suivante sur $A(t, \cdot)$:

$$\exists C > 0, \forall u \in V, \|A(t, u)\|_{V'} \leq C(1 + \|u\|_V) \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Sous cette hypothèse, $\mathcal{A}$ est un opérateur borné de $L^2(0, T; V)$ dans $L^2(0, T; V')$. On suppose en outre que

$$\mathcal{A} \text{ est pseudo-monotone sur } L^2(0, T; V), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{A} \text{ est coercif sur } L^2(0, T; V) \text{ i.e. } \liminf_{\|u\|_{L^2(0, T; V)} \rightarrow \infty} \frac{(\mathcal{A}(u), u)}{\|u\|_{L^2(0, T; V)}^2} > 0. \quad (3.8)$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat :

Théorème 3.2

Soit $f \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in D(B)$ et $v^0 \in B(u^0)$. Sous les hypothèses (3.3)-(3.8), il existe $u \in L^2(0, T; V)$ et $v \in L^2(0, T; H)$ avec $\frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V')$ tels que :

$$(E) \begin{cases} \frac{dv}{dt} + A(t, u(t)) = f(t) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v(t) \in B(u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v(0) = v^0. \end{cases}$$

Remarque 3.4

La condition initiale en v a bien un sens car $v \in L^2(0, T; H)$ et $\frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V')$ entraînent $v \in C(0, T; V')$ ([143], tome II/A).

Remarque 3.5

- ☞ Par rapport au résultat de [24], nous considérons ici des opérateurs non nécessairement fortement monotones, et ne vérifiant pas la condition (A3') de [24] (i.e. B admet un inverse Lipschitzien sur H pour $|\cdot|_H$).
- ☞ En contrepartie, nous avons supposé A pseudo-monotone sur $L^2(0, T; V)$ au lieu d'un espace plus petit du type $W(0, T)$ (défini dans [86]). Nous faisons donc une hypothèse plus forte sur A , justifiée par le fait que sans l'hypothèse (A3'), nous ne pouvons plus contrôler $\frac{du}{dt}$. Nous reviendrons sur ce point dans une deuxième partie.
- ☞ D'autre part, la condition de coercivité sur A est plus restrictive dans notre cas, et ceci est naturel, puisque nous ne pouvons plus compter sur un apport de coercivité de la part de B , comme l'y autorisait l'hypothèse de forte monotonie de [24] : B opérateur peut être localement, voire identiquement nul.

Remarque 3.6

Dans le cas où $B = 0$, nous retrouvons le cas "stationnaire" :

$A(u) = f$ avec $u \in \mathcal{V} = L^2(0, T; V)$ et $f \in \mathcal{V}'$.

Le théorème de J.-L. Lions ([86], théorème 2.7 page 180) assure l'existence d'une solution lorsque A est pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, et coercive; a priori le résultat n'est plus valable pour A pseudo-monotone sur $W(0, T)$.

Démonstration du théorème 3.2 :**a) Régularisation du problème (E)**

On régularise le problème (E) en considérant les problèmes (E_λ) (cf ci-dessous), associés aux opérateurs B_λ . Ces opérateurs, vérifient les hypothèses (A2), (A3) de [24], sauf éventuellement la deuxième partie de l'hypothèse (A3), mais celle-ci ne sert qu'à obtenir une régularité sur la dérivée de u , qu'on ne pourra pas obtenir dans notre cadre en raison de la dégénérescence possible de B . On vérifie que le résultat de [24] est toujours valide si on ne fait plus cette hypothèse, et si on suppose l'opérateur A pseudo-monotone sur $L^2(0, T; V)$ entier. L'opérateur A , quant à lui, vérifie les hypothèses (A4), (A5) et (A6) de [24].

Donc pour tout $f \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in D(B)$, et $v_\lambda^0 \in B_\lambda(u^0)$ donnés, il existe $u_\lambda \in L^2(0, T; V)$, $v_\lambda \in L^\infty(0, T; H)$ avec

$$\frac{dv_\lambda}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

tels que

$$(E_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_\lambda}{dt} + A(t, u_\lambda(t)) = f(t) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v_\lambda(t) \in B_\lambda(u_\lambda(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v_\lambda(0) = v_\lambda^0. \end{array} \right.$$

Remarque 3.7

Puisque $B_\lambda = B + \lambda i^* \circ i$, nous pouvons choisir $v_\lambda^0 = v^0 + \lambda i^* \circ i(u^0)$ avec v^0 choisi dans $B(u^0)$.

Nous allons maintenant passer à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$.

b) Estimations a priori

Soit (u_λ, v_λ) une solution du problème (E_λ) . En utilisant u_λ comme fonction test nous avons :

$$\left\langle \frac{dv_\lambda(t)}{dt}, u_\lambda(t) \right\rangle + \langle A(t, u_\lambda(t)), u_\lambda(t) \rangle = \langle f(t), u_\lambda(t) \rangle \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

Si $v_\lambda = u_\lambda$ le premier crochet s'écrit classiquement : $\frac{d}{dt} |u_\lambda(t)|_H^2$.

Afin d'obtenir quelque chose d'analogue pour $v_\lambda(t) \in B_\lambda(u_\lambda(t))$, nous utilisons le lemme 3.1 avec $\Psi = (\Phi_\lambda \circ i)^*$, ce qui nous permet d'affirmer que $t \rightarrow (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(t))$ est absolument continue sur $[0, T]$, et

$$\frac{d}{dt} (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(t)) = \left\langle \frac{dv_\lambda}{dt}, u_\lambda(t) \right\rangle \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Par conséquent nous avons :

$$\forall t \in [0, T], (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(t)) - (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda^0) = \int_0^t \left\langle \frac{dv_\lambda}{dt}(\tau), u_\lambda(\tau) \right\rangle d\tau.$$

En intégrant (3.9) de 0 à $t \in [0, T]$ quelconque, il vient :

$$(\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(t)) + \int_0^t \langle A(s, u_\lambda(s)), u_\lambda(s) \rangle ds = \int_0^t \langle f(s), u_\lambda(s) \rangle ds + (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda^0). \quad (3.10)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

On a d'une part,

$$(\Phi_\lambda \circ i)^*(v) \geq \langle v, 0 \rangle - (\Phi_\lambda \circ i)(0) = -\Phi(0) \quad \forall v \in V'.$$

D'autre part, $(\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda^0)$ reste borné lorsque $\lambda \rightarrow 0$. En effet (cf remarque 3.7) :

$$(\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda^0) + (\Phi_\lambda \circ i)(u^0) = \langle v_\lambda^0, u^0 \rangle = \langle v^0, u^0 \rangle + \lambda |u^0|_H^2,$$

$$(\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda^0) = \langle v^0, u^0 \rangle - \Phi \circ i(u^0) + \frac{\lambda}{2} |u^0|_H^2.$$

On déduit donc de (3.10) que pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$(\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda) \leq (f, u_\lambda) + (\Phi \circ i)^*(v^0) + \frac{\lambda}{2} |u^0|_H^2 + \Phi(0).$$

par conséquent,

$$\frac{(\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda)}{\|u_\lambda\|_{L^2(0,T;V)}^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2(0,T;V')}}{\|u_\lambda\|_{L^2(0,T;V)}} + \frac{cste}{\|u_\lambda\|_{L^2(0,T;V)}^2}$$

Il résulte alors de l'hypothèse (3.8) que u_λ est borné dans $L^2(0, T; V)$:

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \|u_\lambda\|_{L^2(0, T; V)} \leq C \quad (3.11)$$

et $\mathcal{A}$ étant borné,

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \|\mathcal{A}(u_\lambda)\|_{L^2(0, T; V')} \leq C. \quad (3.12)$$

D'après (3.10), (3.11) et l'estimation précédente donnent

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \forall t \in [0, T], (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(t)) \leq C. \quad (3.13)$$

Grâce à l'hypothèse (3.5) nous avons d'après (3.11),

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \|v_\lambda\|_{L^2(0, T; H)} \leq C. \quad (3.14)$$

Sachant que le couple (v_λ, u_λ) vérifie l'équation (E_λ) , nous avons d'après (3.12),

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \left\| \frac{dv_\lambda}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V')} \leq C. \quad (3.15)$$

c) Passage à la limite

Nous pouvons donc extraire une sous-suite que l'on indicera toujours par λ , telle que $(V$ et H sont réflexifs) :

$$u_\lambda \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}(u_\lambda) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faible} \quad (3.17)$$

$$v_\lambda \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible} \quad (3.18)$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faible} \quad (3.19)$$

grâce à (10), (11) et au lemme de compacité de [86], page 58, on a pour une sous-suite

$$v_\lambda \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ fort.} \quad (3.20)$$

En passant à la limite dans l'équation (E_λ) , v vérifie :

$$\frac{dv}{dt} + \chi = f \text{ dans } L^2(0, T; V').$$

Il nous reste à montrer que

$$v \in \mathcal{B}(u), \quad (3.21)$$

$$v(0) = v^0, \quad (3.22)$$

$$\chi = \mathcal{A}(u). \quad (3.23)$$

pour obtenir le résultat annoncé.

Pour montrer (3.21), prenons $u^* \in D(\mathcal{B})$ et $z^* \in \mathcal{B}(u^*)$.

Posons $z_\lambda^* = z^* + \lambda i^* \circ i(u^*) \in \mathcal{B}_\lambda(u^*)$, nous avons

$$z_\lambda^* \rightarrow z^* \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ fort.}$$

Comme $v_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda(u_\lambda)$, la monotonie de $\mathcal{B}_\lambda$ donne

$$(v_\lambda - z_\lambda^*, u_\lambda - u^*) \geq 0.$$

A la limite nous obtenons

$$(v - z^*, u - u^*) \geq 0$$

et ceci pour tout $(u^*, z^*) \in \mathcal{B}$. D'où (3.21) par la maximalité de $\mathcal{B}$.

En ce qui concerne (3.22), prenons $\alpha_0 \in \mathcal{C}^\infty(0, T)$ valant 1 en $t = 0$ et nulle pour $t \geq \frac{T}{2}$. Alors pour tout $\phi_0 \in V$, nous avons d'après (3.19)

$$\int_0^T \left\langle \frac{dv_\lambda}{dt}, \alpha_0(t) \phi_0 \right\rangle \rightarrow \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \alpha_0(t) \phi_0 \right\rangle.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$-\int_0^{\frac{T}{2}} \langle v_\lambda, \alpha_0'(t) \phi_0 \rangle - \langle v_\lambda(0), \phi_0 \rangle \rightarrow -\int_0^{\frac{T}{2}} \langle v, \alpha_0'(t) \phi_0 \rangle - \langle v(0), \phi_0 \rangle.$$

Et comme α_0 est nulle au delà de $\frac{T}{2}$,

$$-\int_0^T \langle v_\lambda, \alpha_0'(t) \phi_0 \rangle - \langle v_\lambda(0), \phi_0 \rangle \rightarrow -\int_0^T \langle v, \alpha_0'(t) \phi_0 \rangle - \langle v(0), \phi_0 \rangle.$$

La fonction $t \mapsto \alpha_0'(t) \phi_0$ appartient à $L^2(0, T; V)$ donc d'après (3.18) nous avons

$$\forall \phi_0 \in V, \quad \langle v_\lambda(0), \phi_0 \rangle \rightarrow \langle v(0), \phi_0 \rangle.$$

Enfin $v_\lambda(0) = v^0 + \lambda i^* \circ i(u^0) \rightarrow v^0$ dans V' fort, donc (3.22).

On montre plus généralement que

$$\forall t \in [0, T], \quad v_\lambda(t) \rightharpoonup v(t) \text{ dans } V' \text{ faible.} \quad (3.24)$$

La démonstration pour $t_0 \neq 0$ est identique pourvu qu'on choisisse α_0 valant 1 en t_0 , nulle pour $t > t_0$ et $t < \frac{t_0}{2}$ et régulière sur $[\frac{t_0}{2}, t_0]$.

Pour récapituler, le couple (v, u) vérifie :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \chi = f & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ v(t) \in B(u(t)) & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ v(0) = v^0. \end{cases}$$

Pour montrer $\chi = \mathcal{A}(u)$, il suffit d'obtenir

$$\limsup (\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda) \leq (\chi, u) \quad (3.25)$$

En effet dans ces conditions

$$\limsup (\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda - u) \leq 0$$

et d'après (3.7) on obtient : $\forall v \in L^2(0, T; V)$

$$(\mathcal{A}(u), u - v) \leq \liminf (\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda - v) \leq (\chi, u - v)$$

d'où $\chi = \mathcal{A}(u)$.

Montrons (3.25). En utilisant le lemme 1, nous avons :

$$(\chi, u) = (f, u) - \left(\frac{dv}{dt}, u \right) = (f, u) - (\Phi \circ i)^*(v(T)) + (\Phi \circ i)^*(v^0)$$

et en utilisant ce même lemme sur (E_λ) :

$$(\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda) = (f, u_\lambda) - (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(T)) + (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(0)).$$

Comme $v_\lambda(0) = v^0 + \lambda i^* \circ i(u^0) \in B_\lambda(u^0)$ on a :

$$\begin{aligned} (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(0)) &= \langle v_\lambda(0), u^0 \rangle - \Phi_\lambda \circ i(u^0) \\ &= \langle v^0, u^0 \rangle - \Phi \circ i(u^0) + \frac{\lambda}{2} |u^0|_H^2 \\ &= (\Phi \circ i)^*(v^0) + \frac{\lambda}{2} |u^0|_H^2. \end{aligned}$$

car $v^0 \in B(u^0)$.

On en déduit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(0)) = (\Phi \circ i)^*(v^0). \quad (3.26)$$

D'autre part, $\forall \phi \in V$

$$\begin{aligned} (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(T)) &\geq \langle v_\lambda(T), \phi \rangle - \Phi_\lambda \circ i(\phi) \\ &\geq \langle v_\lambda(T), \phi \rangle - \Phi \circ i(\phi) - \frac{\lambda}{2} |\phi|_H^2. \end{aligned}$$

En utilisant (3.24), nous avons $\forall \phi \in V$,

$$\liminf (\Phi_\lambda \circ i)^*(v_\lambda(T)) \geq \langle v(T), \phi \rangle - \Phi \circ i(\phi),$$

et en prenant la borne supérieure en ϕ il vient

$$\liminf (\Phi_\lambda \circ i)^* (v_\lambda(T)) \geq (\Phi \circ i)^* (v(T)). \quad (3.27)$$

En regroupant (3.26) et (3.27), nous avons donc

$$\begin{aligned} \limsup (\mathcal{A}(u_\lambda), u_\lambda) &\leq (f, u) - (\Phi \circ i)^* (v(T)) + (\Phi \circ i)^* (v^0) \\ &= (\chi, u). \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration du théorème 1.

Remarque 3.8

On peut simplifier la fin de la démonstration en utilisant les résultats de U. Mosco sur l'épi-convergence de fonction convexes dans les espaces de Banach réflexifs [10].

Définition 3.5 Soit X un espace de Banach réflexif et $(f_n) \subset \Gamma_0(X)$. On dit que (f_n) épi-converge au sens de Mosco vers f si en tout point x de X , les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) pour une suite $(x_n) \subset X$ convergeant faiblement vers x , $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f(x)$;
- (ii) il existe une suite $\bar{x}_n$ convergeant fortement vers x telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\bar{x}_n) \leq f(x)$.

Il apparaît clairement dans ce qui précède que la suite $(\Phi_\lambda \circ i) \subset \Gamma_0(V)$ épi-converge au sens de Mosco vers $\Phi \circ i$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. En effet,

$$(\Phi_\lambda \circ i)(u) = \Phi \circ i(u) + \frac{\lambda}{2} \|u\|_H^2,$$

si bien que la propriété (i) est assurée par la semi-continuité inférieure de $\Phi \circ i$ et la suite $\bar{x}_n$ constante et égale à x satisfait trivialement (ii).

La simplification annoncée vient du résultat de U. Mosco (1971, voir bibliographie de [10]) :

Théorème 3.3

Soit X un espace de Banach réflexif. Alors la transformation de Fenchel $f \rightarrow f^$ est bicontinue pour l'épi-convergence au sens de Mosco. En d'autres termes,*

$$f = \text{M-epi-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \iff f^* = \text{M-epi-lim}_{n \rightarrow \infty} (f_n)^*.$$

Ce théorème nous permet de déduire (3.27) à partir de (3.24), et nous assure de l'existence d'une condition initiale approchée v_λ^0 telle que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} (\Phi_\lambda \circ i)^* (v_\lambda^0) \geq (\Phi \circ i)^* (v^0).$$

3.3.4 Le cas non Hilbertien

Soit V et W deux espaces de Banach réflexifs et séparables tels que l'injection i de V dans W soit compacte.

Nous sommes dans la situation

$$V \subset W \text{ et } W' \subset V'.$$

En comparant avec la situation précédente, on note que $\partial\Phi$ est cette fois un opérateur de W dans W' , si bien que les hypothèses (3.4), (3.5) doivent être remplacées par

$$\partial\Phi \circ i \text{ est borné dans } W' \text{ sur les bornés de } V. \quad (3.28)$$

$$B \text{ est borné dans } L^{p'}(0, T; W') \text{ sur les bornés de } L^p(0, T; V), \text{ où } p^{-1} + p'^{-1} = 1. \quad (3.29)$$

La démonstration reste la même, et nous obtenons l'analogue du théorème 3.2 :

Théorème 3.4

Soit $f \in L^{p'}(0, T; V')$, $u^0 \in D(B)$ et $v^0 \in B(u^0)$.

Sous les hypothèses (3.3)(3.28)(3.29)(3.6) ... (3.8), il existe

$u \in L^p(0, T; V)$ et $v \in L^{p'}(0, T; W')$ avec $\frac{dv}{dt} \in L^{p'}(0, T; V')$ tels que :

$$(E) \begin{cases} \frac{dv}{dt} + A(t, u(t)) = f(t) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v(t) \in B(u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v(0) = v^0. \end{cases}$$

3.3.5 Exemples d'opérateurs pseudo-monotones sur $L^p(0, T; V)$ et non monotones

J.L. Lions ([86], page 182) introduit une classe d'opérateurs pseudo-monotones sur $W^{1,p}$, la classe des opérateurs du calcul des variations (qui ne sont pas monotones en général). Cette caractérisation s'étend aussi aux opérateurs pseudo-monotones sur $W(0, T)$ (page 321).

Il n'est pas évident au premier abord de trouver un exemple simple d'opérateur pseudo-monotone sur $L^p(0, T; V)$, qui ne soit pas monotone. Pour cela nous donnons ci-dessous un lemme dû à Z. Naniewicz [96], qui permet de construire des opérateurs de ce type.

Lemme 3.3

Soit X un espace de Banach réflexif, et $f = f_1 \cdot f_2$, où $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ sont deux fonctions convexes, lipschitziennes et positives sur X . Alors le gradient généralisé de f est pseudo-monotone sur X .

Plutôt que d'utiliser ce lemme qui fait intervenir la dérivée généralisée d'une fonction non convexe (donc *a priori* multivalué, [111]) et une définition de pseudo-monotonie plus forte que la nôtre, nous allons le reformuler dans le cadre régulier et donner l'équivalent de la démonstration de [96].

Lemme 3.4

Soit X un espace de Banach réflexif, et $f = f_1 \cdot f_2$, où $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ sont deux fonctions convexes, différentiables et positives sur X . Alors le gradient de f est pseudo-monotone sur X .

Démonstration. Soit une suite $(x_n) \subset X$ convergeant faiblement vers $x \in X$, et supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x_n), x_n - x \rangle \leq 0. \quad (3.30)$$

D'après nos hypothèses, f est différentiable et nous avons

$$\nabla f = f_1 \cdot \nabla f_2 + f_2 \cdot \nabla f_1.$$

D'autre part, les fonctions f_i sont convexes, i.e.

$$f_i(y) - f_i(x) \geq \langle \nabla f_i(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

Donc nous avons pour la fonction f , qui n'est pas convexe en général,

$$f_1(x)(f_2(y) - f_2(x)) + f_2(x)(f_1(y) - f_1(x)) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in X, \quad (3.31)$$

et cette inégalité caractérise uniquement $\nabla f(x)$. En l'appliquant à $x = x_n, y = x$, nous avons

$$f_1(x_n)(f_2(x_n) - f_2(x)) + f_2(x_n)(f_1(x_n) - f_1(x)) \leq \langle \nabla f(x_n), x_n - x \rangle. \quad (3.32)$$

Les fonctions f_i sont continues et convexes, elles sont aussi bornées, et semi-continues inférieurement pour la topologie faible, ce qui implique ($f_i \geq 0$)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n)(f_2(x_n) - f_2(x))) \geq 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_2(x_n)(f_1(x_n) - f_1(x))) \geq 0. \quad (3.33)$$

puis

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x_n), x_n - x \rangle \geq 0. \quad (3.34)$$

De (3.30) et (3.34) nous déduisons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x_n), x_n - x \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Ceci reporté dans (3.32), nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n)(f_2(x_n) - f_2(x)) + f_2(x_n)(f_1(x_n) - f_1(x))) = 0. \quad (3.36)$$

En utilisant (3.33) il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n)(f_2(x_n) - f_2(x))) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_2(x_n)(f_1(x_n) - f_1(x))) = 0, \quad (3.37)$$

puis, finalement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) = f_i(x). \quad (3.38)$$

D'autre part, (3.31) et (3.35) nous permettent de montrer que $\nabla f(x_n)$ reste borné lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque pour tout y ,

$$\langle \nabla f(x_n), y - x \rangle = \langle \nabla f(x_n), y - x_n \rangle + \langle \nabla f(x_n), x_n - x \rangle.$$

Soit x^* une limite faible de la suite $(\nabla f(x_n)) \subset X^*$. En utilisant (3.31) pour $x = x_n$ et y quelconque, nous avons

$$f_1(x_n)(f_2(y) - f_2(x_n)) + f_2(x_n)(f_1(y) - f_1(x_n)) \geq \langle \nabla f(x_n), y - x_n \rangle, \quad (3.39)$$

ce qui à la limite donne d'après (3.35) et (3.37),

$$f_1(x)(f_2(y) - f_2(x)) + f_2(x)(f_1(y) - f_1(x)) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in X. \quad (3.40)$$

Ceci est équivalent à $x^* = \nabla f(x)$. En conséquence, grâce à (3.35), nous avons pour tout $y \in X$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x_n), x_n - y \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x_n), x - y \rangle \geq \langle \nabla f(x), x - y \rangle.$$

C'est exactement la condition de pseudo-monotonie. ■

Remarque 3.9

☞ Le lemme 3.4 se généralise à un produit fini de fonctions $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

☞ Le produit de deux fonctions convexes pourrait le rester. Mais on peut construire facilement des exemples où cela n'est pas le cas, en remarquant que si les f_i sont strictement convexes positives, et atteignent un minimum nul en deux points distincts x_1 et x_2 , alors le produit f est positif, donc minimal en x_1 et x_2 , et non nul entre les deux, comme par exemple illustré figure 3.1.

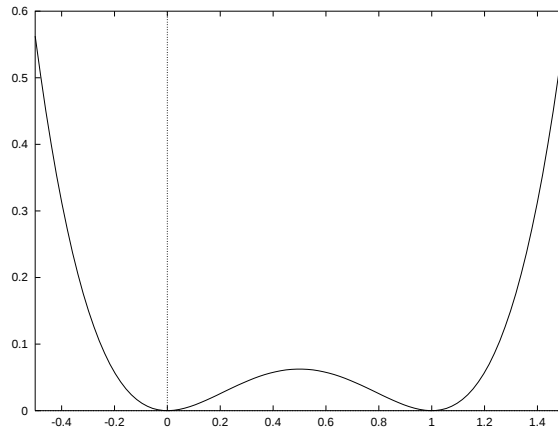
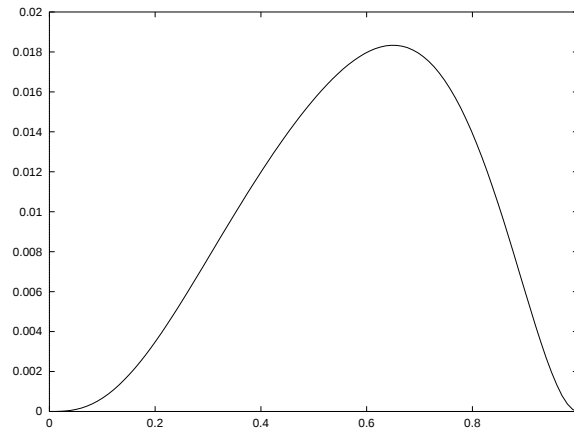


FIG. 3.1 – Graphe de la fonction non convexe $x \rightarrow x^2(x-1)^2$.

Application. Prenons $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W = L^p(\Omega)$, et définissons

$$f_1(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{L^p(0,T;V)}^p + \frac{1}{p} \|u\|_{L^p(0,T;W)}^p, \quad f_2(u) = \frac{1}{p} \|u - 1\|_{L^p(0,T;W)}^p.$$

FIG. 3.2 – Graphe de h pour $p = 2$.

Alors $f = f_1 f_2$ est non convexe, différentiable et son gradient s'exprime par

$$\nabla f(u) = f_2(u)(J(u) + |u|^{p-2}u) + f_1(u)|u - 1|^{p-2}u,$$

où J désigne l'application de dualité ([86], page 173) de $L^p(0, T; V)$ dans $L^q(0, T; V')$, i.e.

$$J(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Ce gradient est non monotone (rappelons que le gradient d'une fonction convexe est cycliquement monotone, il faut donc vérifier que le gradient de cette fonctionnelle n'est pas monotone), pour cela on se place sur l'ensemble des fonctions constantes sur $\Omega \times]0, T[$, prenant une valeur $s \in [0, 1]$. Par abus de notation on désigne ces fonctions par leur valeur réelle constante. On calcule alors

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{T}{p} \text{mes} \{\Omega\} s^p, & \nabla f_2(s) &= s^{p-1}, \\ f_2(s) &= \frac{T}{p} \text{mes} \{\Omega\} (1-s)^p, & \nabla f_2(s) &= (1-s)^{p-2} s, \end{aligned}$$

et donc le gradient de f s'écrit

$$\nabla f(s) = \frac{T}{p} \text{mes} \{\Omega\} s^{p-1} (1-s)^{p-2} (s^2 + (1-s)^2).$$

La question est donc de montrer que pour un certain p , la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(s) = s^{p-1} (1-s)^{p-2} (s^2 + (1-s)^2)$$

n'est pas croissante. Pour $p > 2$, c'est le cas puisque la fonction est strictement positive sur $]0, 1[$ et s'annule aux extrémités de cet intervalle. Son graphe dans le cas $p = 4$ est donné figure 3.2.

Nous obtenons donc l'existence d'une solution à une équation du type

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta(x, u)}{\partial t} - \frac{1}{p} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |u|^p dx dt \right) & \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^{p-2} u \right) \\ & + \frac{1}{p} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p dx dt \right) |u - 1|^{p-2} u = f, \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[, \end{aligned}$$

avec comme condition aux limites

$$u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[,$$

et une condition initiale

$$\beta(., u) = v_0, \quad \text{sur } \Omega \times \{0\}.$$

3.3.6 Retour à l'équation en pression

L'opérateur $\mathcal{A}$ correspondant à l'équation en pression, qui a été introduit en introduction de ce chapitre, n'est malheureusement pas pseudo-monotone sur un espace du type $L^p(0, T; V)$. La raison est que dans la définition de la pseudo-monotonie (cf 3.4), nous supposons la suite u_n seulement faiblement convergente, aussi les termes non-linéaires en u_n dans $\mathcal{A}(u_n)$ ont-ils un comportement incertain.

Le paragraphe suivant permet justement d'étendre notre résultat d'existence à une classe plus large d'opérateurs $\mathcal{A}$ à laquelle appartient l'opérateur physique.

3.4 Équations à double non-linéarité dans le cas $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone

Dans la partie précédente, nous avons prouvé l'existence d'une solution dans le cas où l'opérateur $\mathcal{A}$ est supposé pseudo-monotone sur l'espace $\mathcal{V}$ tout entier. Ce type d'opérateurs, dans la pratique, ne couvre pas suffisamment d'applications, et ne correspond pas à nos hypothèses. Nous avons alors été amenés à définir la notion de $\mathcal{B}$ -pseudo-monotonie, qui est plus adaptée à l'étude des équations à double non linéarité. Notons qu'au même titre J.-L. Lions ([86], chapitre III) avait déjà fait intervenir une pseudo-monotonie plus faible pour les équations paraboliques.

3.4.1 Définitions et notations

a) Espaces fonctionnels

Soit W et V deux espaces Banach réflexifs et séparables, tels que V soit en injection dense et compacte dans W . On note i cette injection. Pour alléger les notations, nous posons pour $T > 0$ et $p \in]1; +\infty[$,

$$\mathcal{V} = L^p(0, T; V) \text{ et } \mathcal{W} = L^p(0, T; W),$$

et on notera respectivement $\langle, \rangle$ et $(,)$ les crochets de dualité $V' \times V$ et $\mathcal{V}' \times \mathcal{V}$. On note toujours p' l'exposant conjugué de p .

b) Pseudo-monotonie

Pour définir une pseudo-monotonie adaptée aux équations à double non linéarité, il est intéressant de les considérer comme des équations intermédiaires entre les équations elliptiques et paraboliques, et de comprendre comment la notion de pseudo-monotonie a été introduite (par H. Brézis) dans ces deux cas.

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur borné et coercif de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, considérons le problème "elliptique" suivant :

Étant donné $f \in \mathcal{V}'$, trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f. \quad (E)$$

Une méthode générale pour ce type de problèmes est de se ramener au cas de la dimension finie par une approximation de Galerkin, la difficulté principale étant le passage à la limite dans les termes non linéaires, i.e.

$$\mathcal{A}(u_n) \rightharpoonup \mathcal{A}(u) \quad (3.41)$$

alors que nous n'avons en général qu'une convergence faible de u_n . La technique classique consiste à obtenir au moyen d'estimations *a priori* que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0. \quad (3.42)$$

Si l'opérateur $\mathcal{A}$ a une structure telle que cette dernière condition entraîne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.43)$$

alors on montre facilement que (3.41) est vérifiée ([86], page 180). C'est ainsi que J.-L. Lions obtient l'existence d'une solution à (E) lorsque l'opérateur $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, c'est à dire lorsque pour toute suite u_n faiblement convergente vers u dans $\mathcal{V}$, (3.42) implique (3.43).

D'un autre côté, pour le problème parabolique suivant :

Étant donnés $f \in \mathcal{V}'$ et $u_0 \in V$, déterminer $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u) = f, \quad u(0) = u_0, \quad (P)$$

on a en général la convergence des dérivées des approximations u_n , et (P) a une solution, d'après J.-L. Lions, dès que $\mathcal{A}$ est supposé pseudo-monotone sur le domaine $D(\frac{d}{dt})$, c'est à dire pour toute suite u_n faiblement convergente vers u dans $\mathcal{V}$ telle que u'_n converge faiblement vers u' dans $\mathcal{V}'$, (3.42) implique (3.43).

Considérons maintenant un opérateur $\mathcal{B}$ borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}'$. Nous essayons de définir une pseudo-monotonie adéquate au problème

Étant donnés $f \in \mathcal{V}'$ et $v_0 \in W'$, existe-t-il $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}(u) + \mathcal{A}(u) = f, \quad \mathcal{B}(u)(0) = v_0. \quad (EP)$$

Raisonnant par analogie, il serait naturel de remplacer dans la définition de la pseudo-monotonie la convergence faible de u'_n par celle de $(\mathcal{B}(u_n))'$ dans $\mathcal{V}'$. Cependant, lors du passage à la limite dans l'opérateur $\mathcal{A}$, la convergence de u'_n sert indirectement à prouver une convergence forte d'une sous-suite de u_n dans $\mathcal{W}$ (grâce à un lemme de type Aubin [86], page 57). La seule hypothèse d'une convergence faible de $\mathcal{B}(u_n)'$ dans $\mathcal{V}'$ ne suffirait pas à obtenir une convergence forte de $\mathcal{B}(u_n)$ dans un espace de fonctions suffisamment régulières (pour fixer les idées dans $\mathcal{W}'$).

Nous avons donc été naturellement amenés à poser la définition suivante.

Définition 3.6 L'opérateur $\mathcal{A}$ est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone si pour chaque suite u_n faiblement convergente vers u dans $\mathcal{V}$, telle que $\mathcal{B}(u_n)$ converge fortement vers $\mathcal{B}(u)$ dans $\mathcal{W}'$, la condition

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0$$

entraîne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

3.4.2 Propriétés des opérateurs $\mathcal{B}$ -pseudo-monotones

On vérifie dans cette partie qu'on a bien une notion intermédiaire entre la pseudo-monotonie sur $\mathcal{V}$ et celle introduite par J.L. Lions pour les problèmes paraboliques. On démontre en outre une propriété d'additivité¹.

Proposition 3.1

- (i) Un opérateur pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$ (a fortiori monotone hémicontinu) est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, pour tout opérateur $\mathcal{B}$.
- (ii) Si $\mathcal{B}$ est compact de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}'$ alors un opérateur est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$ si et seulement s'il est pseudo-monotone.
- (iii) On suppose que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont définis par 3.4.
Alors un opérateur $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone, avec $\mathcal{B}$ continu de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$ est pseudo-monotone sur l'espace $W(0, T) = \{u \in \mathcal{V} : u' \in \mathcal{V}'\}$.
- (iv) Pour tout opérateur $\mathcal{B}$, la somme de deux opérateurs $\mathcal{B}$ -pseudo-monotones est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone.

Démonstration. Les deux premières parties de la proposition sont triviales.

Pour démontrer la troisième, prenons un opérateur $\mathcal{A}$ qui soit $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$. Notons $(u_n) \subset \mathcal{V}$ une suite convergeant faiblement vers u dans $W(0, T)$, et vérifiant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0.$$

Alors le lemme de compacité de [120] (corollaire 4, page 85) implique la convergence forte d'une sous-suite (u_m) dans l'espace $\mathcal{W}$. La continuité de $\mathcal{B}$ entraîne

$$\mathcal{B}(u_m) \rightarrow \mathcal{B}(u) \text{ dans } \mathcal{W}' \text{ fort.}$$

1. voir remarque 3.2.

Pour la sous-suite, nous avons toujours

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_m), u_m - u) \leq 0,$$

et donc par définition de la $\mathcal{B}$ -pseudo-monotonie de $\mathcal{A}$,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_m), u_m - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Mais cette propriété est vraie pour toute la suite (u_n) . Sinon, on pourrait extraire une sous-suite de (u_n) ne la vérifiant pas et refaire le raisonnement ci-dessus ce qui mènerais à une contradiction. Finalement $\mathcal{A}$ est bien pseudo-monotone sur $W(0, T)$.

Enfin, considérons deux opérateurs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ $\mathcal{B}$ -pseudo-monotones. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, et donnons nous une suite u_n , convergeant faiblement vers u dans $\mathcal{V}$, telle que $\mathcal{B}(u_n)$ converge fortement vers $\mathcal{B}(u)$ dans $\mathcal{W}'$ et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0.$$

Nous affirmons que cela implique nécessairement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_1(u_n), u_n - u) \leq 0, \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_2(u_n), u_n - u) \leq 0. \quad (3.44)$$

En effet, si cela n'est pas le cas, on peut supposer qu'il existe une sous-suite que l'on note toujours (u_n) , telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_1(u_n), u_n - u) = a > 0,$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_2(u_n), u_n - u) \leq -a.$$

Pour cette sous-suite $\mathcal{B}(u_n)$ converge encore vers $\mathcal{B}(u)$, et d'après la $\mathcal{B}$ -pseudo-monotonie de $\mathcal{A}_2$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_2(u_n), u_n - v) \geq (\mathcal{A}_2(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

En particulier pour $v = u$ nous obtenons $0 \leq -a$, ce qui est en contradiction avec $a > 0$. Donc (3.44) est vraie, et comme $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont $\mathcal{B}$ -pseudo-monotones,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_1(u_n), u_n - v) &\geq (\mathcal{A}_1(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_2(u_n), u_n - v) &\geq (\mathcal{A}_2(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

La proposition résulte alors de la sur-additivité de la limite inférieure,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_1(u_n), u_n - u) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_2(u_n), u_n - u) \geq (\mathcal{A}(u), u - v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

■

Nous renvoyons au paragraphe 3.4.10 où l'on montre que pour un opérateur $\mathcal{B}$ strictement monotone, un opérateur du type calcul des variations (défini dans [86], pages 182-187 et 321-325) est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone.

3.4.3 Hypothèses et résultat

On étudie dans cette partie l'équation d'évolution non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{B}(u) + \mathcal{A}(u) \ni f, \\ \mathcal{B}(u)(0) = v^0. \end{cases}$$

Précisons les opérateurs intervenant dans l'équation ci-dessus et quelles sont nos hypothèses.

On considère une fonctionnelle convexe Φ , semi-continue inférieurement et propre sur W , telle que :

$$\Phi \text{ est finie et continue sur } i(V), \text{ avec } \Phi(0) = 0, \quad (3.45)$$

$$\exists C > 0, \forall u \in V, \|\partial\Phi \circ i(u)\|_{W'} \leq C(1 + \|u\|_V^{p-1}). \quad (3.46)$$

Nous posons ensuite $B = \partial(\Phi \circ i) = i^* \circ \partial\Phi \circ i$. L'opérateur B est maximal monotone de V dans V' . Définissons l'opérateur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ par :

$$v \in \mathcal{B}(u) - v(t) \in B(u(t)) \text{ p.p. sur } [0, T].$$

Par construction et grâce à l'hypothèse (3.46), cet opérateur est maximal monotone et borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}'$.

On considère une famille $\{A(t, \cdot), t \in [0, T]\}$ d'opérateurs de V dans V' vérifiant la propriété suivante.

$$\exists C > 0, \forall v \in V, \|A(t, v)\|_{V'} \leq C(1 + \|v\|_V^{p-1}) \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (3.47)$$

Étant donné $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ défini par

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{A}(u)(t) = A(t, u(t)) \text{ p.p. sur } [0, T]$$

nous supposons que :

$$\liminf_{\|u\|_{\mathcal{V}} \rightarrow \infty} \frac{(\mathcal{A}(u), u)}{\|u\|_{\mathcal{V}}^p} > 0. \quad (3.48)$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat² :

Théorème 3.5

Soit $f \in \mathcal{V}'$, et $v^0 \in D((\Phi \circ i)^*)$. Sous les hypothèses (3.45)-(3.48), si $\mathcal{A}$ est soit pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone avec $\mathcal{B}$ continu de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$ pour la topologie forte, il existe $u \in \mathcal{V}$ et $v \in \mathcal{W}' \cap L^\infty(0, T; V')$ tels que $\frac{dv}{dt} \in \mathcal{V}'$ et :

$$(E) \begin{cases} \frac{dv}{dt} + \mathcal{A}(u) = f, \\ v \in \mathcal{B}(u), \\ v(0) = v^0. \end{cases}$$

2. qui a fait l'objet de l'article [91]

Cette solution vérifie $v(t) \in D((\Phi \circ i)^*)$ pour tout $t \in [0, T]$. De plus, si Φ est continue sur W alors $v \in L^\infty(0, T; W')$.

Remarque 3.10

- ☞ La condition initiale en v a bien un sens car $v \in \mathcal{W}$ et $\frac{dv}{dt} \in \mathcal{V}'$ entraînent $v \in C(0, T; V')$ ([143], tome IIA, page 446).
- ☞ Si $\mathcal{B}$ est continu de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$ alors B est continu de W dans W' .
- ☞ Remarquons que $v(t)$ demeure pour tout temps dans le même ensemble que la condition initiale. Ceci peut être utilisé pour étudier le cas où B dépend du temps.
- ☞ On peut faire les mêmes remarques que dans la partie précédente, concernant l'opérateur B , moins restrictif que dans [24]. Du coup la condition de coercivité sur $\mathcal{A}$ est plus forte, puisque nous avons pris le parti, ici, de supposer que B n'intervient pas du tout à ce niveau. Cependant, on pourrait envisager d'affaiblir l'hypothèse (3.48) en faisant intervenir la fonctionnelle Φ ou l'opérateur B .

Pour démontrer le théorème 3.5, nous effectuons une discrétisation en temps. Puis nous écrivons le problème stationnaire obtenu sous la forme d'une inéquation variationnelle et appliquons un résultat d'existence de [86]. Nous obtenons ensuite des estimations *a priori* qui nous permettent de passer à la limite dans le cas pseudo-monotone. Nous démontrons enfin un lemme de compacité qui autorise le passage à la limite pour un opérateur $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone.

3.4.4 Discrétisation du problème (E)

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini, et $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision de $[0, T]$ de pas $\varepsilon = T/N$. Comme dans [24], on considère le problème discrétisé suivant :

Trouver $(u_\varepsilon^0, \dots, u_\varepsilon^N) \in V^{N+1}$ tel que

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \frac{v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n}{\varepsilon} + A_\varepsilon^n(u_\varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon^n & \text{pour } n = 0, \dots, N-1, \\ v_\varepsilon^{n+1} \in B(u_\varepsilon^{n+1}) & \text{pour } n = 0, \dots, N-1, \\ v_\varepsilon^0 = v^0, \end{cases}$$

où on a posé

$$\left\| \begin{aligned} f_\varepsilon^n &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt, \\ A_\varepsilon^n &: V \rightarrow V' \\ &u \rightarrow A_\varepsilon^n u = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_n}^{t_{n+1}} A(t, u) dt. \end{aligned} \right.$$

Un premier lemme nous renseigne sur le comportement des f_ε^n :

Lemme 3.5

Soit X un espace de Banach réflexif et séparable, et $f \in L^p(0, T; X)$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, f_ε désigne la fonction en escalier sur $[0, T]$ telle que

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s) ds \quad \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[.$$

Alors

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } L^p(0, T; X) \text{ fort.}$$

Démonstration. On montre alors d'abord que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in L^p(0, T; X), \quad \|f_\varepsilon\| \leq \|f\|,$$

puis que le lemme est vrai pour les fonctions continues sur $[0, T]$,

$$\forall \phi \in \mathcal{C}(0, T; X), \quad \phi_\varepsilon \rightarrow \phi \text{ dans } L^p(0, T; X) \text{ fort.}$$

Le lemme se déduit alors par densité. ■

Étudions les propriétés des opérateurs A_ε^n :

Lemme 3.6

Sous les hypothèses faites sur l'opérateur $\mathcal{A}$, A_ε^n vérifie

- (i) $\exists C > 0, \forall v \in V, \quad \|A_\varepsilon^n v\|_{V'} \leq C(1 + \|v\|_V^{p-1}),$
- (ii) A_ε^n est pseudo-monotone de V dans V' ,
- (iii) $\liminf_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A_\varepsilon^n v, v \rangle}{\|v\|_V^p} > 0.$
- (iv) Il existe deux constantes $\alpha, \gamma > 0$ indépendantes de s et ε et telles que

$$\varepsilon \sum_{n=0}^s \langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{n+1} \rangle \geq \alpha \varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p - \gamma, \quad \forall s \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Démonstration. Pour montrer (i) il suffit d'intégrer (3.47) sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

Afin d'obtenir (ii), prenons une suite u_m convergeant faiblement vers u et supposons que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle A_\varepsilon^n u_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

La fonction $\tilde{u}_m$ appartenant à $\mathcal{V}$ et définie par

$$\tilde{u}_m(t) = u_m \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}], \quad u \text{ ailleurs sur } [0, T],$$

converge faiblement vers la fonction $\tilde{u}$ de $\mathcal{V}$ valant u sur $[0, T]$.

D'autre part la condition

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle A_\varepsilon^n u_m, u_m - u \rangle \leq 0$$

se traduit par

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A} \tilde{u}_m, \tilde{u}_m - \tilde{u}) \leq 0.$$

Cas 1 Si $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, alors nous avons par définition

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A} \tilde{u}_m, \tilde{u}_m - \tilde{v}) \geq (\mathcal{A} \tilde{u}, \tilde{u} - \tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.49)$$

Cas 2 Si $\mathcal{A}$ est seulement $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone, la compacité de l'injection V dans W nous permet d'extraire de la suite (u_m) une sous-suite convergeant fortement vers u dans W , ce qui entraîne la convergence forte d'une sous-suite $\tilde{u}_{\sigma(m)}$ vers $\tilde{u}$ dans $\mathcal{W}$. La continuité de $\mathcal{B}$ entraîne la convergence forte de $\mathcal{B}(\tilde{u}_{\sigma(m)})$. Nous avons donc encore (3.49) pour la sous-suite $\sigma(m)$. En raisonnant par l'absurde, on montre qu'en fait toute la suite vérifie (3.49).

En particulier, pour tout $v \in V$ et $\tilde{v} \in \mathcal{V}$ valant v sur $[t_n, t_{n+1}]$ et u ailleurs sur $[0, T]$, on obtient

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \langle A_\varepsilon^n u_m, u_m - v \rangle \geq \langle A_\varepsilon^n u, u - v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Nous avons donc (ii).

La propriété (iii) s'obtient de manière similaire en prenant dans (3.48) une fonction $\tilde{u}$ de $\mathcal{V}$ valant $u \in V$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ et 0 ailleurs sur $[0, T]$.

Enfin la propriété (iv) est montrée en utilisant (3.47) et (3.48). En effet si dans (3.48) on note $2\alpha > 0$ la valeur de la limite inférieure, nous avons

$$\exists d > 0, \forall u \in \mathcal{V}, \quad \|u\|_{\mathcal{V}} \geq d \implies \frac{(\mathcal{A}(u), u)}{\|u\|_{\mathcal{V}}^p} \geq \alpha,$$

et (3.47) nous indique qu'il existe $\gamma_1 > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad \|u\|_{\mathcal{V}} \leq d \implies |(\mathcal{A}(u), u)| \leq \gamma_1.$$

Par conséquent, il existe $\gamma_2 > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad (\mathcal{A}(u), u) \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{V}}^p - \gamma_2.$$

En particulier si $u \in \mathcal{V}$ vaut u_ε^{n+1} sur $]t_n, t_{n+1}]$ pour $n = 0 \dots s$, avec $s \in \{0, \dots, N-1\}$, nous obtenons (iv). ■

Lemme 3.7

Le problème discrétisé (P_ε) admet une solution.

Démonstration. Le problème discret s'écrit aussi

Trouver u_ε^{n+1} tel que

$$f_\varepsilon^n - A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1} + \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^n \in \frac{1}{\varepsilon} B(u_\varepsilon^{n+1}).$$

En utilisant la définition du sous-différentiel, cette dernière relation est équivalente à

$$\left\langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, v - u_\varepsilon^{n+1} \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon} \Phi \circ i(v) - \frac{1}{\varepsilon} \Phi \circ i(u_\varepsilon^{n+1}) \geq \left\langle f_\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^n, v - u_\varepsilon^{n+1} \right\rangle \quad \forall v \in V.$$

Nous disposons du résultat d'existence suivant, pour les inéquations variationnelles elliptiques (cf [86], page 251; voir aussi [33], page 138):

Théorème 3.6

Soit A un opérateur pseudo-monotone de V dans V' , Ψ une fonction convexe propre semi-continue inférieurement. On suppose que

$$\begin{cases} \text{il existe } v_0 \text{ tel que } \Psi(v_0) < \infty \text{ et} \\ \frac{\langle A(u), u - v_0 \rangle + \Psi(u)}{\|u\|_V} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \|u\|_V \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Alors, pour f donné dans V' , il existe $u \in V$ solution de

$$\langle A(u) - f, v - u \rangle + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Nous pouvons utiliser ce résultat, pour $v_0 = 0$, à condition toutefois de montrer que

$$\lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A_\varepsilon^n u, u \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \Phi \circ i(u)}{\|u\|_V} = +\infty. \quad (3.50)$$

Nous avons plus que cela. En effet sous les hypothèses faites, $\Phi \circ i$ est minorée en écrivant

$$\forall u \in V, \forall v_0 \in B(0), \Phi \circ i(u) - \Phi \circ i(0) \geq \langle v_0, u \rangle.$$

En utilisant le lemme 3.6 nous avons donc

$$\liminf_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A_\varepsilon^n u, u \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \Phi \circ i(u)}{\|u\|_V^p} > 0,$$

ce qui entraîne (3.50) ($p > 1$). ■

3.4.5 Obtention d'estimations a priori

Considérons, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$ les équations de (P_ε)

$$\frac{v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n}{\varepsilon} + A_\varepsilon^n(u_\varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon^n,$$

et prenons u_ε^{n+1} comme fonction test. Nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle + \langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{n+1} \rangle = \langle f_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle.$$

Mais nous avons $u_\varepsilon^{n+1} \in \partial(\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^{n+1})$ et la convexité de $(\Phi \circ i)^*$ donne

$$\langle v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle \geq (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^{n+1}) - (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^n).$$

Puis en sommant de $n = 0$ à $s \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$(\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^{s+1}) + \varepsilon \sum_{n=0}^s \langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{n+1} \rangle \leq \varepsilon \sum_{n=0}^s \langle f_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle + (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^0). \quad (3.51)$$

En remarquant que l'hypothèse $\Phi(0) = 0$ implique que $(\Phi \circ i)^*$ est positive sur V' , on peut dans un premier temps supprimer le premier terme de (3.51), puis utiliser le lemme 3.6, (iv) pour obtenir que

$$\alpha \varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \leq \varepsilon \sum_{n=0}^s \langle f_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle + (\Phi \circ i)^*(v^0) + \gamma, \quad \forall s \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Travaillons tout d'abord sur le second membre en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \sum_{n=0}^s \langle f_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1} \rangle \right| &\leq \varepsilon \sum_{n=0}^s \|f_\varepsilon^n\|_{V'} \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{n=0}^s \|f_\varepsilon^n\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|f_\varepsilon^n\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \|f_\varepsilon^n\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f_\varepsilon\|_{V'} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{V'} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité s'obtenant en consultant la démonstration du lemme 3.5. Finalement, nous avons

$$\alpha \varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \leq \|f\|_{V'} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} + (\Phi \circ i)^*(v^0) + \gamma, \quad \forall s \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Nous en déduisons, par l'absurde, que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall s \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \leq C. \quad (3.52)$$

Cette estimation nous permet de montrer que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall s \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \varepsilon \sum_{n=0}^s \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'}^q \leq C. \quad (3.53)$$

En effet, d'après la première assertion du lemme 3.6

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{n=0}^s \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'}^q &\leq C \varepsilon \sum_{n=0}^s \left(1 + \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^{p-1} \right)^q \\ &\leq C \varepsilon \sum_{n=0}^s \left(1 + \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

(Nous avons utilisé l'inégalité de convexité : $\forall r > 0, (1+r)^q \leq 2^{q-1}(1+r^q)$).

Du coup, nous pouvons borner le deuxième terme de (3.51) en utilisant (3.52) et (3.53) :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \sum_{n=0}^s \langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{n+1} \rangle \right| &\leq \varepsilon \sum_{n=0}^s \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'} \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V \\ &\leq \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \sum_{n=0}^s \|u_\varepsilon^{n+1}\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

On voit que ce dernier résultat, et la majoration du second membre déjà obtenue, donnent dans (3.51),

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall s \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^{s+1}) \leq C. \quad (3.54)$$

D'autre part, on déduit de (3.46) et (3.52)

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \|v_\varepsilon^{n+1}\|_{W'}^q \leq C. \quad (3.55)$$

Enfin, l'estimation (3.53), et le lemme 3.5 appliqués à (P_ε) permettent d'obtenir

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n}{\varepsilon} \right\|_{V'}^q \leq C. \quad (3.56)$$

3.4.6 Passages à la limite

On note u_ε la fonction étagée valant u_ε^{n+1} sur $]t_n, t_{n+1}]$ pour $n = 0, \dots, N-1$, et u^0 en $t = 0$. La fonction v_ε est définie de la même façon. Nous utiliserons aussi la fonction affine par morceaux $\hat{v}_\varepsilon$ qui coïncide avec v_ε aux points de la subdivision.

Des estimations précédentes, nous déduisons qu'il existe une sous-suite (toujours indicée par ε par commodité), telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{V} \text{ faible,} \quad \text{d'après (3.52),} \quad (3.57)$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } \mathcal{W}' \text{ faible,} \quad \text{d'après (3.55).} \quad (3.58)$$

La suite $\hat{v}_\varepsilon$ est convergente et admet la même limite que v_ε . En effet,

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}'}^q &= \int_0^T \|\hat{v}_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{V'}^q dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| v_\varepsilon^n + \frac{t - t_n}{\varepsilon} (v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n) - v_\varepsilon^{n+1} \right\|_{V'}^q dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \|v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n\|_{V'}^q \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| 1 - \frac{t - t_n}{\varepsilon} \right|^q dt \\ &= \frac{\varepsilon}{q+1} \sum_{n=0}^{N-1} \|v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n\|_{V'}^q \\ &\leq C\varepsilon^q, \end{aligned}$$

en utilisant (3.56). Le même calcul sur la norme $\mathcal{W}'$ donne

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{\mathcal{W}'}^q &\leq C\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \|v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n\|_{\mathcal{W}'}^q \\ &\leq C. \end{aligned}$$

d'après (3.55). Donc la norme de $\hat{v}_\varepsilon$ est bornée dans $\mathcal{W}'$ et quitte à extraire une nouvelle sous-suite nous pouvons supposer que :

$$\hat{v}_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } \mathcal{W}' \text{ faible}, \quad (3.59)$$

$$\frac{d\hat{v}_\varepsilon}{dt} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \text{ dans } \mathcal{V}' \text{ faible}, \quad \text{d'après (3.56)}, \quad (3.60)$$

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi \text{ dans } \mathcal{V}' \text{ faible}, \quad \text{d'après (3.47)}. \quad (3.61)$$

Nous avons déduit des estimations *a priori* des convergences faibles. Citons un cas particulier d'un lemme de compacité de [106]³ qui entraîne la convergence forte d'une sous-suite de (v_ε) :

Lemme 3.8

Si la suite $(v_\varepsilon^n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifie (3.55) et (3.56), on peut extraire de $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une sous-suite $(v_{\varepsilon'})_{\varepsilon' > 0}$ qui converge dans $\mathcal{V}'$ fort lorsque ε' tend vers 0.

On écrira pour simplifier

$$v_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon \rightarrow v \text{ dans } \mathcal{V}' \text{ fort}. \quad (3.62)$$

A la limite, nous avons donc dans $\mathcal{V}'$

$$\frac{dv}{dt} + \chi = f. \quad (3.63)$$

Il s'agit de montrer que $v \in \mathcal{B}(u)$, que $v(0) = v^0$ et que $\chi = \mathcal{A}(u)$.

3.4.7 Fin de la démonstration du théorème 3.5 dans le cas pseudo-monotone

- Pour le premier point, écrivons que pour tout couple $(y, x) \in \mathcal{V}' \times \mathcal{V}$ tel que $y \in \mathcal{B}(x)$ nous avons par la monotonie de $\mathcal{B}$:

$$(v_\varepsilon - y, u_\varepsilon - x) \geq 0,$$

ce qui compte tenu de (3.57) et (3.62) donne à la limite

$$(v - y, u - x) \geq 0.$$

Comme ce raisonnement est valable quelque soit le couple (y, x) choisi, la maximalité de $\mathcal{B}$ nous permet de conclure que $v \in \mathcal{B}(u)$.

3. voir aussi J.A. Dubinskii, Trans. AMS 1967, *Weak onvergence in nonlinear elliptic and parabolic equations*

- En ce qui concerne la condition initiale, remarquons que quitte à redéfinir $\widehat{v}_\varepsilon$ et v sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer qu'elles sont absolument continues, d'après [34], page 154.

D'autre part, (3.62) implique qu'il existe au moins un $t_0 \in]0, T[$ tel que

$$\widehat{v}_\varepsilon(t_0) \rightarrow v(t) \text{ dans } V' \text{ fort.}$$

Soit $t \in [0, T]$, l'absolue continuité de $\widehat{v}_\varepsilon$ nous permet d'écrire

$$\widehat{v}_\varepsilon(t) = \widehat{v}_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\widehat{v}_\varepsilon}{ds} ds \rightharpoonup v(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dv}{ds} ds \text{ dans } V' \text{ faible,}$$

en utilisant (3.60). Nous avons donc

$$\forall t \in [0, T], \quad \widehat{v}_\varepsilon(t) \rightharpoonup v(t) \text{ dans } V' \text{ faible.} \quad (3.64)$$

Par définition, $\widehat{v}_\varepsilon(0) = v^0$, donc $v(0) = v^0$.

- Afin de prouver que $\mathcal{A}(u) = \chi$, en utilisant une propriété de pseudo-monotonie, il faut d'abord établir (3.42) i.e.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \leq 0.$$

Pour cela, remarquons que (3.51) pour $s = N - 1$ s'écrit d'après les définitions de A_ε^n et f_ε^n

$$(\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(T)) + (\mathcal{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leq (f, u_\varepsilon) + (\Phi \circ i)^*(v^0).$$

En se servant de (3.61), le passage à la limite supérieure mène à

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \leq (f, u) + (\Phi \circ i)^*(v^0) - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(T)) - (\chi, u).$$

Puisque nous avons montré que $v \in \mathcal{B}(u)$, nous obtenons en prenant u comme fonction test dans (3.63) et en utilisant le lemme 3.1,

$$(\chi, u) = (f, u) - (\Phi \circ i)^*(v(T)) + (\Phi \circ i)^*(v^0).$$

Finalement tout revient à justifier

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(T)) \geq (\Phi \circ i)^*(v(T)). \quad (3.65)$$

Puisque $(\Phi \circ i)^*$ est convexe et semi-continue inférieurement, il suffit pour cela que

$$v_\varepsilon(T) \rightharpoonup v(T) \text{ dans } V' \text{ faible,} \quad (3.66)$$

ce qui découle de (3.64) puisque $\widehat{v}_\varepsilon$ et v_ε coïncident en $t = T$.

Si $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone sur $\mathcal{V}$, (3.42) permet d'obtenir $\chi = \mathcal{A}(u)$, et la démonstration de l'existence s'achève là.

- Montrons maintenant que pour tout t , $v(t)$ demeure dans le domaine de $(\Phi \circ i)^*$. Pour cela, remarquons que par construction,

$$\forall t \in]t_n, t_{n+1}], \quad \widehat{v}_\varepsilon(t) \in [v_\varepsilon^n, v_\varepsilon^{n+1}].$$

De manière explicite,

$$\widehat{v}_\varepsilon(t) = \left(1 - \frac{t - t_n}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon^n + \frac{t - t_n}{\varepsilon} v_\varepsilon^{n+1},$$

donc la convexité de $(\Phi \circ i)^*$ entraîne

$$(\Phi \circ i)^*(\widehat{v}_\varepsilon(t)) \leq \left(1 - \frac{t - t_n}{\varepsilon}\right) (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^n) + \frac{t - t_n}{\varepsilon} (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon^{n+1}) \leq C,$$

d'après (3.54). En passant à la limite supérieure,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi \circ i)^*(\widehat{v}_\varepsilon(t)) \leq C,$$

et *a fortiori*

$$0 \leq (\Phi \circ i)^*(v(t)) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi \circ i)^*(\widehat{v}_\varepsilon(t)) \leq C, \quad \forall t \in [0, T].$$

- Montrons enfin que $v \in L^\infty(0, T; V')$. La définition de $(\Phi \circ i)^*$ implique que

$$\forall u \in V, \quad (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(t)) \geq \langle v_\varepsilon(t), u \rangle - \Phi \circ i(u).$$

Choisissons alors $\delta > 0$ et $u = \frac{J^{-1}v_\varepsilon(t)}{\delta \|v_\varepsilon(t)\|_{V'}}$, où J est l'opérateur associé à la dualité V', V^4 . Nous obtenons

$$\begin{aligned} (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(t)) &\geq \frac{1}{\delta} \|v_\varepsilon(t)\|_{V'} - \Phi \circ i\left(\frac{J^{-1}v_\varepsilon(t)}{\delta \|v_\varepsilon(t)\|_{V'}}\right) \\ &\geq \frac{1}{\delta} \|v_\varepsilon(t)\|_{V'} - \sup_{\|u\|_V = \frac{1}{\delta}} \Phi \circ i(u) \\ \|v_\varepsilon(t)\|_{V'} &\leq \delta (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(t)) + \delta \sup_{\|u\|_V = \frac{1}{\delta}} \Phi \circ i(u). \end{aligned}$$

En utilisant (3.54) qui s'écrit

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} (\Phi \circ i)^*(v_\varepsilon(t)) \leq C, \quad (3.67)$$

l'hypothèse (3.46), et la convexité de Φ nous avons

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|v_\varepsilon(t)\|_{V'} \leq C.$$

Si on suppose en outre que Φ est continue sur W , alors en remarquant que $(\Phi \circ i)^*$ coïncide avec Φ^* sur W' et que $v_\varepsilon(t)$ appartient à W' pour presque tout t , le raisonnement ci-dessus peut se faire dans la dualité W', W et on obtient

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|v_\varepsilon(t)\|_{W'} \leq C. \quad (3.68)$$

4. Nous supposons implicitement ici que V et V' sont strictement convexes (pour que J soit univoque) quitte à les renormer : voir [143] II/B, page 862.

3.4.8 Résultat de compacité

Si $\mathcal{A}$ est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone, il nous reste à montrer la convergence forte d'une sous-suite de v_ε dans $\mathcal{W}'$. Pour cela nous énonçons ci-dessous un résultat de compacité utile dans l'étude des équations à double non linéarité.

Théorème 3.7

Soit V et W deux espaces de Banach réflexifs et séparables tels que V soit en injection dense et compacte dans W .

Soit E un opérateur compact de V dans W' . On définit $\mathcal{E} : L^p(0, T; V) \rightarrow L^q(0, T; W')$ par

$$\mathcal{E}(u)(t) = E(u(t)) \quad \text{p.p. sur }]0, T[,$$

et on suppose que $\mathcal{E}$ est borné (sur les bornés de $L^p(0, T; V)$).

Considérons une famille $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^p(0, T; V)$, et notons $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^q(0, T; W')$ une famille image de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ par $\mathcal{E}$.

Si de plus, $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h v_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^q(0, T-h; W')} = 0 \quad \text{uniformément en } \varepsilon, \quad (3.69)$$

alors $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $L^q(0, T; W')$.

Remarque 3.11

Le cas $\mathcal{E} = 0$ est trivial. Le cas $\mathcal{E} = Id$ revient au résultat de J. Simon [120], théorème 3, page 80. Il s'agit ici d'un résultat intermédiaire.

Remarque 3.12

Lorsque l'opérateur E possède une propriété de type convexité stricte, on pourrait utiliser les résultats de A. Visintin [133] et leur généralisation par E.J. Balder et M. Valadier [13][14].

Démonstration.

Étape 1 :

Pour montrer la compacité de $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ dans $L^q(0, T; W')$, il suffit d'après le théorème 1 de J. Simon [120] de prouver que pour tout $0 < t_1 < t_2 < T$, $\int_{t_1}^{t_2} v_\varepsilon(t) dt$ est relativement compacte dans W' (puisque nous avons déjà (3.69)).

Introduisons les ensembles

$$G_\varepsilon^M = \{t \in [0, T] : \|u_\varepsilon(t)\|_V \geq M\},$$

et une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \|u_\varepsilon\|_{L^p(0, T; V)} \leq C.$$

Alors $\text{mes}(G_\varepsilon^M) \leq \frac{C^p}{M^p}$. Posons

$$u_\varepsilon^M(t) = \begin{cases} u_\varepsilon(t) & \text{si } t \notin G_\varepsilon^M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction,

$$\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0, T], \quad \|u_\varepsilon^M(t)\|_V \leq M.$$

Comme E est compacte de V dans W' ,

$$\{v_\varepsilon^M(t)\} = E(\{u_\varepsilon^M(t)\})$$

est relativement compacte dans W' pour tout $M > 0$.

Étape 2 :

Soit $t_1, t_2 \in]0, T[$ avec $0 < t_1 < t_2 < T$. Pour un entier N , on notera $(s_i^N)_{0 \leq i \leq N}$ la subdivision de pas $h = \frac{t_2 - t_1}{N}$ de $[t_1, t_2]$.

Supposons que pour tout $\eta > 0$, il existe deux entiers M_1 et N_1 tels que :

$$\forall M > M_1, \forall N > N_1, \forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon \in]0, h[,$$

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} v_\varepsilon(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s_\varepsilon) \chi_{[s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) dt \right\|_{W'} < \eta. \quad (3.70)$$

D'après l'étape 1,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s_\varepsilon) \chi_{[s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) dt = \sum_{i=1}^N \frac{t_2 - t_1}{N} v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s_\varepsilon)$$

est relativement compacte dans W' . Donc la convergence uniforme (3.70) nous permet de conclure que

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} v_\varepsilon(t) dt \right\}_{\varepsilon > 0}$$

est relativement compacte dans W' , et la démonstration du théorème est terminée.

Étape 3 :

Pour montrer (3.70), procédons par l'absurde en supposant qu'une telle famille $\{s_\varepsilon\}$ n'existe pas, c'est-à-dire qu'il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $M_1 > 0$ et $N_1 > 0$,

$$\exists M > M_1, \exists N > N_1, \exists \varepsilon > 0, \forall s \in]0, h[,$$

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \left(v_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s) \chi_{[s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) \right) dt \right\|_{W'} \geq \eta. \quad (3.71)$$

Alors *a fortiori*

$$\forall s \in]0, h[, \int_{t_1}^{t_2} \left\| v_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s) \chi_{[s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) \right\|_{W'} dt \geq \eta,$$

et en intégrant par rapport à s de 0 à $h = \frac{t_2 - t_1}{N}$ nous avons

$$\exists M > M_1, \exists N > N_1, \exists \varepsilon > 0,$$

$$\frac{1}{h} \int_0^h \int_{t_1}^{t_2} \left\| v_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s) \chi_{[s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) \right\|_{W'} dt ds \geq \eta. \quad (3.72)$$

Montrons que cette dernière relation mène à une contradiction. En effet,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^h \int_{t_1}^{t_2} \left\| v_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s) \chi_{]s_{i-1}^N, s_i^N]}(t) \right\|_{W'} dt ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon^M(s_{i-1}^N + s) \right\|_{W'} dt ds \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon^M(s) \right\|_{W'} dt ds \end{aligned}$$

et par le théorème de Fubini, puis en posant $\sigma = s - t$,

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}^N}^{s_i^N} \int_{s_{i-1}^N - t}^{s_i^N - t} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon^M(t + \sigma) \right\|_{W'} d\sigma dt.$$

En appliquant de nouveau le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h \sum_{i=1}^N \int_{\max(s_{i-1}^N, s_{i-1}^N - \sigma)}^{\min(s_i^N, s_i^N - \sigma)} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon^M(t + \sigma) \right\|_{W'} dt d\sigma \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{-h}^h \int_{\max(t_1, t_1 - \sigma)}^{\min(t_2, t_2 - \sigma)} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon^M(t + \sigma) \right\|_{W'} dt d\sigma \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{-h}^h \int_{\max(t_1, t_1 - \sigma)}^{\min(t_2, t_2 - \sigma)} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t + \sigma) \right\|_{W'} dt d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{-h}^h \int_{\max(t_1, t_1 - \sigma)}^{\min(t_2, t_2 - \sigma)} \chi_{G_\varepsilon^M}(t + \sigma) \left\| v_\varepsilon(t) \right\|_{W'} dt d\sigma \\ &\leq 2T^{\frac{1}{p}} \sup_{\sigma \in [-h, h]} \left(\int_0^{T-\sigma} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t + \sigma) \right\|_{W'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + 2 \frac{C}{M} \|v_\varepsilon\|_{L^q(0, T; W')}. \end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$ fixé.

Grâce à (3.69), il existe $N_1 > 0$ tel que pour tout $N > N_1$, avec la subdivision de pas $h = \frac{t_2 - t_1}{N}$ on ait :

$$\forall \varepsilon > 0, \sup_{\sigma \in [-h, h]} \left(\int_0^{T-\sigma} \left\| v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t + \sigma) \right\|_{W'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \eta.$$

D'autre part, $\mathcal{E}$ a été supposé borné sur les bornés, et $\|u_\varepsilon\|_{L^p(0, T; V)}$ restant borné par hypothèse, il en est de même pour $\|v_\varepsilon\|_{L^q(0, T; W')}$; donc il existe $M_1 > 0$, tel que :

$$\forall M > M_1, \forall \varepsilon > 0, \frac{C}{M} \|v_\varepsilon\|_{L^q(0, T; W')} \leq \eta.$$

En regroupant les deux dernières inégalités, nous arrivons à une contradiction par rapport à (3.72), ce qui conclut la démonstration du théorème 3.7. $\blacksquare$

3.4.9 Fin de la démonstration du théorème 3.5

Rappelons qu'il nous reste à étudier les passages à la limite dans les termes non-linéaires de $\mathcal{A}$, en obtenant une convergence forte de v_ε grâce au lemme de compacité ci-dessus. Commençons par établir que la suite v_ε définie au paragraphe 3.4.6 vérifie (3.69), en admettant pour l'instant le

Lemme 3.9

On suppose que B est continue de W dans W' . Alors :

(i) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{V}$ faible,

(ii) $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall h \in]0, T[, \int_0^{T-h} \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle_{W', W} dt \leq Ch^{\frac{1}{p}},$

(iii) $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|v_\varepsilon(t)\|_{W'} \leq C.$

entraînent (3.69).

On a déjà (i) d'après (3.57), et (iii) d'après (3.68).

Pour établir (ii), on remarque qu'il suffit de considérer le cas où $h = k\varepsilon$, $k \in \{1, \dots, N-1\}$, puisque v_ε et u_ε sont des fonctions étagées. En effet, supposons l'inégalité vraie pour $k\varepsilon$. Soit $h \in]k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[$, avec $k \geq 1$, et $h_0 = h - k\varepsilon$.

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &= (\varepsilon - h_0) \sum_{n=1}^{N-k} \langle v_\varepsilon^{n+k} - v_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+k} - u_\varepsilon^n \rangle + h_0 \sum_{n=1}^{N-k-1} \langle v_\varepsilon^{n+k+1} - v_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+k+1} - u_\varepsilon^n \rangle \\ &= \frac{\varepsilon - h_0}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{N-k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle v_\varepsilon(t+k\varepsilon) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+k\varepsilon) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &+ \frac{h_0}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{N-k-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle v_\varepsilon(t+(k+1)\varepsilon) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+(k+1)\varepsilon) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &= \frac{\varepsilon - h_0}{\varepsilon} \int_0^{T-k\varepsilon} \langle v_\varepsilon(t+k\varepsilon) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+k\varepsilon) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &+ \frac{h_0}{\varepsilon} \int_0^{T-(k+1)\varepsilon} \langle v_\varepsilon(t+(k+1)\varepsilon) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+(k+1)\varepsilon) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \\ &\leq C \left[\frac{\varepsilon - h_0}{\varepsilon} (k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} + \frac{h_0}{\varepsilon} ((k+1)\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq C \left[\frac{(\varepsilon - h_0)k\varepsilon + h_0(k+1)\varepsilon}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{p}} \leq Ch^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

en utilisant la concavité de la fonction $r \rightarrow r^{\frac{1}{p}}$.

Il s'agit donc de montrer

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall k \in \{1, \dots, N-1\}, \int_0^{T-k\varepsilon} \langle v_\varepsilon(t+k\varepsilon) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+k\varepsilon) - u_\varepsilon(t) \rangle dt \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

c'est à dire au niveau des grandeurs discrètes :

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{N-k-1} \langle v_\varepsilon^{n+k+1} - v_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{n+k+1} - u_\varepsilon^{n+1} \rangle \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.73)$$

Pour prouver (3.73) nous écrivons le problème approché sous forme variationnelle :

Trouver $(u_\varepsilon^n)_{n=0, \dots, N} \in V^{N+1}$ *tel que*

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \frac{v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n}{\varepsilon}, w_n \right\rangle + \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \langle A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, w_n \rangle = \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \langle f_\varepsilon^n, w_n \rangle \quad \forall w = (w_n) \in V^{N+1}.$$

Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et $m \in \{0, \dots, N-k-1\}$ fixés. On choisit comme fonction test le $(N+1)$ -uplet w dont les composantes valent $u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1}$ pour tout $n \in \{m+1, \dots, m+k\}$ et sont nulles pour les autres valeurs de n . Par construction,

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \frac{v_\varepsilon^{n+1} - v_\varepsilon^n}{\varepsilon}, w_n \right\rangle = \langle v_\varepsilon^{m+k+1} - v_\varepsilon^m, u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1} \rangle.$$

C'est donc la somme sur m de ces quantités que nous voulons majorer pour obtenir (3.73). Calculons donc :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \langle f_\varepsilon^n - A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, w_n \rangle \\ &= \varepsilon \left\langle \sum_{n=m+1}^{m+k} f_\varepsilon^n - A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}, u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1} \right\rangle \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{n=m+1}^{m+k} \|f_\varepsilon^n\|_{V'} + \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'} \right) \|u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1}\|_V \\ &\leq \left(\varepsilon \sum_{n=m+1}^{m+k} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \|f_\varepsilon^n\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \|A_\varepsilon^n u_\varepsilon^{n+1}\|_{V'}^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \|u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1}\|_V \\ &\leq (k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} (\|f_\varepsilon\|_{V'} + C) (\|u_\varepsilon^{m+k+1}\|_V + \|u_\varepsilon^{m+1}\|_V) \quad \text{d'après (3.53),} \\ &\leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} (\|u_\varepsilon^{m+k+1}\|_V + \|u_\varepsilon^{m+1}\|_V). \end{aligned}$$

Ceci entraîne pour la quantité que nous désirons estimer :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \sum_{m=0}^{N-k-1} \left\langle v_\varepsilon^{m+k+1} - v_\varepsilon^m, u_\varepsilon^{m+k+1} - u_\varepsilon^{m+1} \right\rangle \\
& \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \varepsilon \sum_{m=0}^{N-k-1} \left(\|u_\varepsilon^{m+k+1}\|_V + \|u_\varepsilon^{m+1}\|_V \right) \\
& \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} ((N-k)\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \|u_\varepsilon\|_V \\
& \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}} (T)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq C(k\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc (ii), puis (3.69) en admettant le lemme 3.9. En appliquant le théorème 3.7, nous obtenons la convergence forte d'une sous-suite de v_ε , et la définition de la $\mathcal{B}$ -pseudo-monotonie donne alors (3.43) et permet de conclure la démonstration du théorème 3.5. Nous renvoyons au paragraphe 3.9 pour la démonstration du lemme 3.9 qui est purement technique.

3.4.10 Application : exemple d'opérateur $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone

Soit N, p, r trois entiers avec $N > 0, p > r > 1$. Les exposants conjugués de p et r seront notés respectivement q et s :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Considérons un ouvert Ω de $\mathbf{R}^N$, et $Q = \Omega \times]0, T[$.

On note Γ_1 une partie de $\partial\Omega$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = (\partial\Omega \setminus \Gamma_1) \times]0, T[$.

Soit V le sous-espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$, contenant $W_0^{1,p}(\Omega)$, et défini par

$$V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Reprenons pour la fonctionnelle Φ l'exemple de la partie précédente (paragraphe 3.3.2), où nous supposons en outre que $z \mapsto \beta(x, z)$ est continue et strictement croissante pour presque tout $x \in \Omega$, et vérifie la condition de croissance :

$$\exists a_1, a_2 > 0 : |\beta(x, z)| \leq a_1 |z|^{p-1} + a_2, \quad \forall z \in \mathbf{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.74)$$

Alors l'opérateur B associé à β vérifie les hypothèses (3.45) et (3.46), et l'opérateur $\mathcal{B}$ associé est continu de $L^p(Q)$ dans $L^q(Q)$.

Pour la partie elliptique, introduisons $A_i(x, t, \eta, \nu, \xi), i \in \{0, \dots, N\}$ une famille de fonctions réelles, définies sur $Q \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et vérifiant :

- (A1) Pour presque tout $(x, t) \in Q$, la fonction $(\eta, \nu, \xi) \mapsto A_i(x, t, \eta, \nu, \xi)$ est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et pour tout (η, ν, ξ) la fonction $(x, t) \mapsto A_i(x, t, \eta, \nu, \xi)$ est mesurable sur Q .

(A2) Pour tout (u, v, w) appartenant à $L^r(Q) \times L^q(Q) \times (L^p(Q))^N$,

$$(x, t) \rightarrow A_i(x, t, u(x, t), v(x, t), w(x, t))$$

appartient à $L^q(Q)$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et à $L^s(Q)$ pour $i = 0$.

La fonction vectorielle $\mathbf{A} = (A_i)_{1 \leq i \leq N}$ vérifie,

(A3) Pour x, t fixés p.p. dans Q et $|\eta|$ borné,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(x, t, \eta, \beta(x, \eta), \xi) \cdot \xi}{|\xi| + |\xi|^{p-1}} = +\infty.$$

(A4) Presque partout dans Q et pour tout η ,

$$(\mathbf{A}(x, t, \eta, \beta(x, \eta), \xi) - \mathbf{A}(x, t, \eta, \beta(x, \eta), \xi^*)) \cdot (\xi - \xi^*) > 0 \text{ si } \xi \neq \xi^*.$$

L'opérateur $\mathcal{A} : L^p(0, T; V) \mapsto L^q(0, T; V')$ est alors défini pour $u \in L^p(0, T; V)$ par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u), v) &= \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{A}(x, t, u(x, t), \beta(x, u(x, t)), \nabla u(x, t)) \cdot \nabla v(x, t) \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} A_0(x, t, u(x, t), \beta(x, u(x, t)), \nabla u(x, t)) v(x, t) \, dx \, dt, \end{aligned}$$

pour tout $v \in L^p(0, T; V)$.

Proposition 3.2

L'opérateur $\mathcal{A}$ ci-dessus est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone sur $L^p(0, T; V)$.

Démonstration. Elle est librement inspirée de celle de J.-L. Lions ([86], pages 182-185). Considérons une suite u_n telle que

- (i) $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(0, T; V)$ faible.
- (ii) $\mathcal{B}(u_n) \rightarrow \mathcal{B}(u)$ dans $L^q(Q)$ fort.
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) \leq 0$.

L'hypothèse (ii) implique après extraction d'une sous-suite que

$$\beta(x, u_n(x, t)) \rightarrow \beta(x, u(x, t)) \quad \text{p.p. sur } Q. \quad (3.75)$$

Comme β est strictement croissante et continue nous avons,

$$u_n(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{p.p. sur } Q. \quad (3.76)$$

On en déduit, d'après (i) et $r < p$ que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^r(Q) \text{ fort.} \quad (3.77)$$

Afin d'améliorer la lisibilité, on notera $A_i(u, \mathcal{B}(u), \nabla u)$ la fonction de $L^q(Q)$ valant

$$A_i(x, t, u(x, t), \mathcal{B}(u)(x, t), \nabla u(x, t)) \quad \text{presque partout sur } Q,$$

et cette valeur sera abrégée par $A_i(x, t, u, \mathcal{B}(u), \nabla u)$. D'autre part $(\cdot, \cdot)$ désigne toujours le produit de dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$ ou entre $L^q(Q)$ et $L^p(Q)$, et $(\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u_n), u_n - u) &= (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - u)) + (A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - u) \\ &= (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) - \mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u), \nabla(u_n - u)) \\ &\quad + (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u), \nabla(u_n - u)) + (A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - u). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Étape 1. Montrons qu'on peut extraire une sous-suite telle que

$$(\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) - \mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u), \nabla(u_n - u)) \rightarrow 0. \quad (3.79)$$

Les hypothèses (A1) et (A2) impliquent (M. Vainberg [129], théorème 19.1 page 154, et page 162) que l'application

$$(u, v, w) \rightarrow A_i(u, v, w)$$

est continue et bornée (sur les bornés) de $L^r(Q) \times L^q(Q) \times (L^p(Q))^N$ dans $L^q(Q)$ pour $i > 0$ et dans $L^s(Q)$ pour $i = 0$ ⁵.

On en déduit que $\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n)$ demeure dans un borné de $(L^q(Q))^N$, et que

$$\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u) \rightarrow \mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla u) \text{ dans } (L^q(Q))^N \text{ fort.} \quad (3.80)$$

Cette convergence forte et (i) entraînent

$$(\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u), \nabla(u_n - u)) \rightarrow 0. \quad (3.81)$$

D'autre part, on a vu que A_0 est bornée de $L^r(Q) \times L^q(Q) \times (L^p(Q))^N$ dans $L^s(Q)$ ce qui nous permet d'écrire

$$|(A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - u)| \leq c \|u_n - u\|_{L^r(Q)} \rightarrow 0. \quad (3.82)$$

En utilisant (iii), (3.81) et (3.82) dans (3.78) nous obtenons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) - \mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u), \nabla(u_n - u)) \leq 0,$$

et d'après (A4) on a (3.79).

Étape 2. Montrons que cette condition (3.79) entraîne

$$\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) \rightharpoonup \mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla u) \text{ dans } (L^q(Q))^N \text{ faible,} \quad (3.83)$$

et

$$A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) \rightharpoonup A_0(u, \mathcal{B}(u), \nabla u) \text{ dans } L^s(Q) \text{ faible.} \quad (3.84)$$

En effet, en notant

$$F_n(x, t) = (\mathbf{A}(x, t, u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) - \mathbf{A}(x, t, u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u)) \cdot \nabla(u_n - u) \geq 0,$$

5. voir aussi [79]

nous avons $\int_Q F_n(x, t) \, dx \, dt \rightarrow 0$ d'après (3.79), et donc il existe $Z \subset Q$ de mesure nulle, tel qu'après extraction d'une sous-suite,

$$u_n(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad \mathcal{B}(u_n)(x, t) \rightarrow \mathcal{B}(u)(x, t), \quad F_n(x, t) \rightarrow 0, \quad \forall (x, t) \in Q \setminus Z.$$

Soit $(x, t) \notin Z$, et $\xi^*(x, t)$ une des limites de $\nabla u_n(x, t)$. On a nécessairement $|\xi^*(x, t)| < +\infty$. sinon on aurait d'après (A3)

$$\frac{\mathbf{A}(x, t, u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) \cdot \nabla u_n(x, t)}{|\nabla u_n(x, t)| + |\nabla u_n(x, t)|^{p-1}} \rightarrow +\infty,$$

et donc

$$\|F_n\|_{L^1(Q)} \rightarrow +\infty$$

ce qui mène à une contradiction. A la limite nous avons donc d'après (A1),

$$(\mathbf{A}(x, t, u(x, t), \mathcal{B}(u)(x, t), \xi^*(x, t)) - \mathbf{A}(x, t, u(x, t), \mathcal{B}(u)(x, t), \nabla u(x, t))) \cdot (\xi^*(x, t) - \nabla u(x, t)) = 0,$$

presque partout sur Q , ce qui d'après (A4) signifie $\xi^*(x, t) = \nabla u(x, t)$. Nous avons donc montré que

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad A_i(x, t, u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) \rightarrow \mathbf{A}(x, t, u, \mathcal{B}(u), \nabla u) \quad \text{p.p. sur } Q.$$

Les opérateurs A_i étant bornés dans $L^q(Q)$ et $L^s(Q)$ nous obtenons (3.83) et (3.84) (voir par exemple [86], page 12).

Étape 3. Soit $w = (1 - \theta)u + \theta v$, $\theta \in]0, 1[$, nous avons d'après (A4)

$$(\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n) - \mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla w), \nabla(u_n - w)) \geq 0 \quad \forall w.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - v)) &\geq - (1 - \theta)(\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - u)) \\ &\quad + (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla w), \nabla(u_n - w)). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Le premier terme du second membre de (3.85) tend vers 0 d'après (3.79) et (3.81). D'autre part,

$$\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla w) \rightarrow \mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla w) \text{ dans } L^q(Q) \text{ fort.}$$

Donc

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - v)) &\geq \frac{1}{\theta} (\mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla w), \nabla(u - w)) \\ &\geq (\mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla w), \nabla(u - v)). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Puis en faisant tendre θ vers 0 nous avons grâce à (A1),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - v)) \geq (\mathbf{A}(u, \mathcal{B}(u), \nabla u), \nabla(u - v)). \quad (3.87)$$

Écrivons maintenant que

$$(\mathcal{A}(u_n), u_n - v) = (\mathbf{A}(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), \nabla(u_n - v)) + (A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - v). \quad (3.88)$$

Puisque

$$(A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - v) = (A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - u) + (A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u - v)$$

nous avons d'après (3.82) et (3.84)

$$(A_0(u_n, \mathcal{B}(u_n), \nabla u_n), u_n - v) \rightarrow (A_0(u, \mathcal{B}(u), \nabla u), u - v),$$

puis en utilisant (3.87) dans (3.88)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{A}(u_n), u_n - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v).$$

Ceci achève la démonstration. ■

Remarque 3.13

Le point crucial est le passage de (ii) à (3.77). Pour avoir une classe d'opérateurs plus large, il faudrait étudier sous quelles conditions la convergence

$$\mathcal{B}(u_n) \rightarrow \mathcal{B}(u) \text{ dans } L^q(Q) \text{ fort}$$

entraîne

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^p(Q) \text{ fort.}$$

Dans ce sens, J. Kačur utilise un lemme ([76], proposition 3.35) qui ne semble pas se généraliser à notre cadre. Les considérations de stricte convexité de A . Visintin pourraient être utilisées [133][136], ainsi que leur généralisation par E.J. Balder et M. Valadier.

Pour $f \in L^q(Q)$, $g \in L^q(\Sigma_2)$, soit $F \in L^q(0, T; V')$ définie par

$$(F, v) = \int_Q f(x, t) v(x, t) \, dx \, dt + \int_{\Sigma_2} g(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma, \quad \forall v \in L^p(0, T; V).$$

Pour $u_0 \in V$, nous obtenons donc l'existence d'une solution u vérifiant

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}(u) + \mathcal{A}(u) = F, \text{ et } \mathcal{B}(u)(0) = \mathcal{B}(u^0).$$

ce qui s'interprète formellement par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta(x, u)}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{A}(x, t, u, \beta(u), \nabla u) + A_0(x, t, u, \beta(u), \nabla u) = f, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ \mathbf{A}(x, t, u, \beta(u), \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g \text{ sur } \Sigma_2, \\ \beta(x, u(x, 0)) = \beta(x, u_0(x)) \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Remarquons que ce résultat améliore celui de [6] au sens où l'opérateur elliptique peut dépendre de u explicitement, et n'est pas fortement monotone.

3.4.11 Retour à l'équation en pression

Voyons comment ce résultat s'applique à la résolution de la formulation variationnelle (2.39), dans le cas où

$$(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \text{ ne dépend pas de } t.$$

Nous supposons que $\psi \in H^1(\Omega)$, par exemple, mais il suffit que la fonction $x \rightarrow \beta(\psi(x), r)$ soit mesurable pour $r \in \mathbf{R}^+$.

Les fonctions β_i définies en (2.25) sont strictement croissantes et continues d'après les hypothèses faites sur les coefficients χ_i . Cependant ces fonctions ne sont pas définies sur $\mathbf{R}$ tout entier. Aussi introduit-on la fonction

$$\tilde{\beta}_i(\eta) = \beta_i(\eta) - \beta_i(0)$$

qui est ensuite prolongée par imparité à $\mathbf{R}$ tout entier. Nous obtenons alors une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, qui vérifie pour toute fonction u dérivable et positive,

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_i(u)}{\partial t} = \frac{\partial \beta_i(u)}{\partial t}.$$

Au vu des propriétés (2.8) ... (2.10), la fonction $z \rightarrow \tilde{\beta}(\psi(x), z)$ vérifie la condition de croissance (3.74).

Le choix des fonctions A_i se fait comme suit :

$$\begin{aligned} A_0(x, t, \eta, \nu, \xi) &= f(x, t) \beta(\psi(x), |\eta|), \\ A_i(x, t, \eta, \nu, \xi) &= \beta(\psi(x), |\eta|) \cdot S(\psi(x), |\eta|) \cdot \xi_i. \end{aligned}$$

On se place dans le cas $p = 2$ et $r = \frac{3}{2}$ ⁶. La condition (A1) est vérifiée lorsque f est intégrable, et $S(\psi, |u|)$ continue par rapport à u . La condition (A2) est vérifiée pour $i = 0$ lorsque $f \in L^3(Q)$, et pour $i \geq 1$ puisque S est supposée bornée supérieurement sur $\mathbf{R}^+$. La coercivité (A3) vient des bornes inférieures strictement positives de S et β sur $\mathbf{R}^+$, et du fait que β est bornée supérieurement. De même pour (A4).

Nous choisissons ensuite comme espace

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_s\},$$

et comme second membre $F \in L^2(0, T; V')$ définie par

$$(F, v) = \int_{\Sigma_e} h(\sigma) v(\sigma) d\sigma \quad \forall v \in L^2(0, T; V),$$

avec $h \in L^2(\Sigma_e)$ fixé.

Nous avons alors le résultat d'existence suivant.

Corollaire 3.1

Étant donnés $f \in L^3(Q)$, $u_0 \in V$, $\psi \in H^1(\Omega)$, et $h \in L^2(\Sigma_e)$, il existe une solution $u \in L^2(0, T; V)$ au problème variationnel suivant.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\tilde{\beta}(\psi, u) \frac{\partial \nu}{\partial t} + \beta(\psi, |u|) S(\psi, |u|) \nabla u \cdot \nabla \nu \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, |u|) f(x, t) \nu \, dx \, dt + \int_{\Omega} \beta(\psi_0, |u_0|) \nu(0, x) \, dx + \int_0^T \int_{\Gamma_e} h \nu \, d\sigma \, dt, \end{aligned} \quad (3.89)$$

6. ou toute valeur r telle que $1 < r < 2$.

pour tout $v \in L^2(0, T; V)$. Si d'autre part on peut prouver que cette solution est positive, alors on peut supprimer les valeurs absolues et remplacer $\tilde{\beta}$ par β .

Remarque 3.14

Nous renvoyons au paragraphe 3.5.1 où on montre la positivité des solutions du problèmes de Dirichlet. Notons que l'existence d'une solution au problème de Dirichlet s'obtient facilement, en prenant pour espace V l'espace H_0^1 et en supprimant h .

Le raisonnement ci-dessus nous donne donc l'existence d'une solution pour une condition sur la frontière Γ_e qui ne correspond pas à (2.39). Pour résoudre effectivement (2.39), notons $\mathcal{A}_1$ l'opérateur de $L^2(0, T; V)$ dans son dual défini à partir de la construction précédente par

$$(\mathcal{A}_1(u), v) = \int_Q \mathbf{A}(u, \beta(x, |u|), \nabla u) \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_Q A_0(u, \beta(x, |u|), \nabla u) v \, dx \, dt,$$

et dont on sait qu'il est β -pseudo-monotone, borné et coercif. Puis introduisons un deuxième opérateur de $L^2(0, T; V)$ dans son dual,

$$(\mathcal{A}_2(u), v) = \int_{\Sigma_e} \tilde{\beta}(\psi_e, u|_{\Sigma_e}) G_e v|_{\Sigma_e} \, d\sigma, \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

L'opérateur $\mathcal{A}_2$ est monotone hémicontinu borné de $L^2(0, T; V)$ dans son dual. En effet, il est bien défini sur cet espace puisque

$$u \in L^2(0, T; V) \implies u|_{\Sigma_e} \in L^2(\Sigma_e) \implies \tilde{\beta}(\psi_e, u|_{\Sigma_e}) \in L^\infty(\Sigma_e),$$

et comme $v|_{\Sigma_e} \in L^2(\Sigma_e)$, $\mathcal{A}_2$ est défini pour $G_e \in L^2(\Sigma_e)$.

Nous utilisons maintenant la proposition 3.1 qui entraîne que la somme

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

est un opérateur β -pseudo-monotone sur $L^2(0, T; V)$. Il suffit, pour pouvoir appliquer le théorème 3.5 de vérifier que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné et coercif. Ces deux propriétés sont facilement obtenues en remarquant que l'opérateur $\mathcal{A}_2$ hérite du caractère borné de β ,

$$\|\mathcal{A}_2(u)\|_{L^2(0, T; V')} \leq \beta_{\max} \|G_e\|_{L^2(\Sigma_e)}.$$

Finalement, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.3

Étant donnés $f \in L^3(Q)$, $u_0 \in V$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $G_e \in L^2(\Sigma_e)$, la formulation variationnelle (2.39) admet une solution $u \in L^2(0, T; V)$.

3.5 Unicité de la solution du problème de Dirichlet

Nous revenons dans ce paragraphe à un cas moins général, en considérant les fonctions β et S (continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$, minorées par une constante strictement positive). Nous

nous plaçons dans le cas d'un problème de Dirichlet homogène. Le théorème 3.5 avec $\mathcal{V} = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ nous assure l'existence d'une solution $u \in \mathcal{V}$ de (ψ est donnée)

$$\frac{\partial \tilde{\beta}(\psi, u)}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta(\psi, |u|)S(\psi, |u|)\nabla u) = f\beta(\psi, |u|) \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[, \quad (3.90)$$

$$u = u_0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.91)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[. \quad (3.92)$$

Dans l'équation précédente, $\tilde{\beta}$ désigne le prolongement de β à $\mathbb{R}$ défini par $\tilde{\beta}(s) = \beta(s) - \beta(0)$ pour $s > 0$ et prolongé par imparité. En introduisant la fonctionnelle convexe sur $L^2(\Omega)$,

$$\tilde{\Phi}(u) = \int_{\Omega} \tilde{B}(\psi(x), u(x)) \, dx$$

où $\tilde{B}(\psi, \cdot)$ désigne la primitive s'annulant en zéro de $\tilde{\beta}(\psi, \cdot)$ on sait que sa conjuguée $\tilde{\Phi}^*$ est positive sur $L^2(\Omega)$ et nulle en $u = 0$.

3.5.1 Positivité de la solution

Nous avons le résultat suivant

Théorème 3.8

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$ avec $u_0 \geq 0$ p.p sur Ω et $f \geq 0$ p.p. sur Q . Toute solution faible u de (3.90)(3.91)(3.92) telle que

$$\tilde{\beta}(\psi, u) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$$

est positive ou nulle p.p. sur Q .

Démonstration. Rappelons tout d'abord qu'une solution faible est une fonction $u \in \mathcal{V}$ telle que

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\beta}(\psi, u) \frac{\partial v}{\partial t} + \beta(\psi, |u|)S(\psi, |u|)\nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt = \\ \int_0^T \int_{\Omega} f\beta(\psi, u)v \, dx \, dt + \int_{\Omega} \tilde{\beta}(\psi_0, u_0)v(0) \, dx, \end{aligned}$$

pour toute fonction $v \in H^1(Q)$ s'annulant en $t = T$ et sur $\partial\Omega$. Comme nous avons fait une hypothèse de régularité sur la solution faible, on peut écrire la formulation précédente sous la forme

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\beta}(\psi, u)}{\partial t} v + \beta(\psi, |u|)S(\psi, |u|)\nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} f\beta(\psi, u)v \, dx \, dt,$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{V}$ nulle sur $\partial\Omega$. Du coup, la fonction $u^- \stackrel{\text{déf}}{=} -\min(u, 0) \in \mathcal{V}$ est une fonction test valide. Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\beta}(\psi, u)}{\partial t} u^- + \beta(\psi, |u|)S(\psi, |u|)\nabla u \cdot \nabla u^- \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} f\beta(\psi, u)u^- \, dx \, dt$$

Dans l'intégrale correspondant au premier terme, seuls les points pour lesquels $u < 0$ interviennent, et en ces points $u = -u^-$ donc l'imparité de $\tilde{\beta}$ fait que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\beta}(\psi, u)}{\partial t} u^- \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\beta}(\psi, u^-)}{\partial t} u^- \, dx \, dt \quad (3.93)$$

$$= -\tilde{\Phi}^*(\tilde{\beta}(\psi, u^-))(T) + \tilde{\Phi}^*(\tilde{\beta}(\psi, u^-))(0) \quad (3.94)$$

$$= -\tilde{\Phi}^*(\tilde{\beta}(u^-))(T) \leq 0, \quad (3.95)$$

puisque $\tilde{\beta}(\psi, u^-)(0) = \tilde{\beta}(\psi_0, u_0^-) = \tilde{\beta}(\psi_0, 0) = 0$. D'autre part, nous avons pour les mêmes raisons l'identité

$$\int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, |u|) S(\psi, |u|) \nabla u \cdot \nabla u^- \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, |u|) S(\psi, |u|) |\nabla u^-|^2 \, dx \, dt.$$

Comme les fonctions β et S sont, par hypothèse, minorées par une constante strictement positive, il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \beta(\psi, |u|) S(\psi, |u|) |\nabla u^-|^2 \, dx \, dt \leq -C \|\nabla u^-\|_{L^2(Q)}^2, \quad (3.96)$$

Enfin nous minorons facilement le dernier terme

$$\int_0^T \int_{\Omega} f \beta(\psi, u) u^- \, dx \, dt \geq 0$$

en vertu de la positivité de β , f et u^- .

La somme de trois quantités négatives ou nulles ne peut être nulle que si ces trois quantités sont nulles. En particulier, (3.96) entraîne que u^- est constante p.p. sur Q , puis nulle p.p. puisqu'elle appartient à $\mathcal{V}$. Nous avons donc montré que u est positive presque partout sur Q . ■

On voit *a posteriori* que les solutions faibles de l'équation (3.90)(3.91)(3.92) vérifient donc

$$\frac{\partial \beta(\psi, u)}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta(\psi, u) S(\psi, u) \nabla u) = f \beta(\psi, u) \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[, \quad (3.97)$$

$$u = u_0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.98)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (3.99)$$

et

$$u \geq 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[. \quad (3.100)$$

3.5.2 Unicité des solutions

Nous allons montrer l'unicité des solutions faibles des équations (3.98) · · · (3.100) (c'est à dire des solutions positives) dans le cas où

les coefficients β et S ne dépendent pas de ψ .

Ces solutions vérifient en particulier

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, v \right\rangle - \int_{\Omega} \nabla B(u) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \beta(u) v \, dx,$$

où on a posé

$$B(r) = \int_0^r \beta(s) S(s) \, ds.$$

Prenons donc deux solutions u^1 et u^2 et formons pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial \beta(u^1) - \beta(u^2)}{\partial t}, v \right\rangle - \int_{\Omega} \nabla (B(u^1) - B(u^2)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(\beta(u^1) - \beta(u^2)) v \, dx. \quad (3.101)$$

Nous allons travailler sur l'espace $H^{-1}(\Omega)$ que nous voulons munir d'un produit scalaire. On introduit d'abord l'application de dualité J de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ définie par $J = -\Delta$, c'est à dire, pour $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle Ju, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que par définition nous avons

$$\langle Ju, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle Jv, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega). \quad (3.102)$$

On sait que cette application de dualité est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ dont l'inverse est défini en $u \in H^{-1}(\Omega)$ comme la solution w du problème de Dirichlet homogène

$$-\Delta w = u, \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On définit alors un produit scalaire sur $H^{-1}(\Omega)$ en posant pour $(a, b) \in H^{-1}(\Omega)^2$,

$$(a, b)_{H^{-1}(\Omega)} = \left\langle a, J^{-1}b \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

En particulier la symétrie de ce produit vient de

$$\left\langle a, J^{-1}b \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \left\langle J(J^{-1}a), J^{-1}b \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

et d'après (3.102),

$$\begin{aligned} &= \left\langle J(J^{-1}b), J^{-1}a \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \left\langle b, J^{-1}a \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous allons construire une fonction test appropriée en introduisant la fonction $w(t)$ appartenant à $H_0^1(\Omega)$ et définie par

$$w(t) = J^{-1}((\beta(u^1) - \beta(u^2))(t)).$$

Sous l'hypothèse que β est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^+$, nous avons $\beta(u^i) \in L^\infty(\Omega)$, donc au moins $w(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$; $w(t)$ est donc une fonction test admissible dans (3.101), et nous obtenons après application de la formule de green,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \beta(u^1) - \beta(u^2)}{\partial t}, \beta(u^1) - \beta(u^2) \right)_{H^{-1}(\Omega)} + \int_{\Omega} (B(u^1) - B(u^2))(\beta(u^1) - \beta(u^2)) \, dx \\ = \int_{\Omega} f(\beta(u^1) - \beta(u^2))w(t) \, dx. \end{aligned}$$

Supposons en outre que f est **constante** en x , et bornée en t , on a

$$\int_{\Omega} f(\beta(u^1) - \beta(u^2))w(t) \, dx = f \int_{\Omega} (\beta(u^1) - \beta(u^2))w(t) \, dx$$

puis l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\beta(u^1) - \beta(u^2)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (B(u^1) - B(u^2))(\beta(u^1) - \beta(u^2)) \, dx \\ \leq \|f\|_{\infty} \|\beta(u^1) - \beta(u^2)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la structure particulière de B , en remarquant que

$$(B(s_1) - B(s_2))(\beta(s_1) - \beta(s_2)) \geq 0, \quad \forall (s_1, s_2) \in (\mathbf{R}^+)^2,$$

ceci traduisant simplement que $B \circ \beta^{-1}$ est croissante; en effet,

$$\begin{aligned} (B \circ \beta^{-1})' &= (\beta^{-1})' \times B' \circ \beta^{-1} \\ &= (\beta^{-1})' \times (\beta \times S) \circ \beta^{-1} \\ &= (\beta^{-1})' \times id \times S \circ \beta^{-1} \geq 0 \quad \text{sur } \mathbf{R}^+, \end{aligned}$$

puisque S est positive, et β croissante. Nous obtenons donc l'estimation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\beta(u^1) - \beta(u^2)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{\infty} \|\beta(u^1) - \beta(u^2)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (3.103)$$

En intégrant de 0 à t et compte tenu que u^1 et u^2 sont égales à l'instant initial,

$$\forall t \in]0, T], \quad \|(\beta(u^1) - \beta(u^2))(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \|f\|_{\infty} \int_0^t \|(\beta(u^1) - \beta(u^2))(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \, ds.$$

Le lemme de Gronwall nous permet de conclure quant à l'égalité $\beta(u^1) = \beta(u^2)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout t , donc dans $L^\infty(Q)$ et presque partout sur Q . Enfin, comme β est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, nous obtenons

$$u^1 = u^2 \quad \text{p.p. sur } Q.$$

Résumons les considérations précédentes dans le résultat d'unicité suivant :

Théorème 3.9

Supposons donnés $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^\infty(0, T)$, et considérons deux solutions faibles de (3.98) ··· (3.100) (donc **positives**), et ψ constant. Si S est positive, bornée, β bornée, positive et strictement croissante alors ces deux solutions sont égales presque partout sur $\Omega \times]0, T[$.

Remarque 3.15

Jusqu'à l'estimation (3.103), nous n'avions pas supposé que les deux conditions initiales étaient égales. Nous obtenons de la même manière un résultat de stabilité par rapport à la condition initiale de la forme

$$\forall t \in]0, T], \quad \left\| (\beta(u^1) - \beta(u^2))(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \|f\|_\infty \int_0^t \left\| (\beta(u^1) - \beta(u^2))(s) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds + \left\| \beta(u_0^1) - \beta(u_0^2) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

et en utilisant le lemme de Gronwall,

$$\forall t \in]0, T], \quad \left\| (\beta(u^1) - \beta(u^2))(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \left\| \beta(u_0^1) - \beta(u_0^2) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \exp(2 \|f\|_\infty t).$$

Donc l'opérateur (non linéaire) qui à la condition initiale $v_0 = \beta(u_0)$ associe la solution $\beta(u)$ est continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Remarque 3.16

Un résultat d'unicité pour des équations à double non linéarité a été obtenu très récemment par F. Otto [101], sans hypothèse de régularité sur $\beta(u)$. Les hypothèses sur les opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ que nous faisons ne nous permettent pas d'appliquer ce résultat.

3.6 Directions de recherche dans le cas où l'opérateur de la partie parabolique dépend du temps

Dans les deux parties précédentes, on a toujours supposé que $\mathcal{B}$ ne dépendait pas du temps. Or en pratique nous avons

$$\mathcal{B}(\psi, u)(x, t) = \begin{cases} \beta_1(u(x, t)) & \text{pour } \psi(x, t) > 0, \\ \beta_2(u(x, t)) & \text{pour } \psi(x, t) < 0. \end{cases} \quad (3.104)$$

Il y a (au moins) deux approches possibles. La première consiste à considérer les deux sous-domaines où l'opérateur $\mathcal{B}$ ne dépend pas du temps explicitement. ces deux sous domaines sont non cylindriques et les deux équations sont couplées par une condition de transmission. La deuxième approche est de traiter complètement la dépendance en temps de $\mathcal{B}$ en introduisant une famille de fonctionnelles convexes paramétrée par t dont $\mathcal{B}(t, \cdot)$ est le sous différentiel, et d'établir en particulier un lemme d'intégration par parties généralisant le lemme 3.1.

3.6.1 Découplage sur deux sous-domaines non cylindriques

Une première approche est de découpler le problème sur chacun des deux domaines fluides. En effet sur un domaine, l'opérateur $\mathcal{B}$ ne dépend pas de ψ . Par contre ce domaine dépend du temps si bien que le cylindre $\Omega \times]0, T[$ doit être remplacé par un ouvert non cylindrique. En plus de cela, une condition de transmission doit être imposée à la frontière séparant les deux domaines fluides.

Concernant le problème des ouverts non cylindriques, on pourrait dans un premier temps tenter un redressement, en utilisant les résultats de A. Bove, B Franchi et E. Obrecht

[32]. L'ennui est que le changement de variables nécessaire, s'il ne change par la nature de l'équation, introduit des termes supplémentaires délicat à gérer même en dimension un.

Une autre approche serait d'utiliser une pénalisation sur un ouvert cylindrique contenant l'ouvert non cylindrique, comme J.L. Lions [85]. Mais cette méthode s'est avérée délicate à mettre en oeuvre pour des conditions aux limites autres que de Dirichlet.

Enfin un article de T.P. Dreyer [47] expose une méthode consistant à approcher l'ouvert cylindriques par la réunion de tranches cylindriques dont l'épaisseur est destinée à tendre vers zéro. Cette méthode n'a pas pu être appliquée au cas d'une condition au bord autre que Dirichlet.

3.6.2 Cas d'une famille de fonctionnelles convexes

On voudrait pouvoir exprimer $\mathcal{B}$ en fonction du sous-différentiel d'une fonctionnelle convexe, comme dans les deux parties précédentes. Pour cela, on se place d'emblée dans le cas Hilbertien, i.e.

$$H = L^2(\Omega), \quad V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_s} = 0 \right\}.$$

On désigne ensuite par B_1 et B_2 les primitives de β_1 et β_2 s'annulant en zéro, puis on pose

$$\Phi(t, u) = \begin{cases} \int_{\Omega} B(\psi(x, t), u(x)) \, dx & \text{si } B(\psi(t), u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.105)$$

où $B(\psi, u)$ prend, comme à l'accoutumée, la valeur $B_1(u)$ ou $B_2(u)$ suivant le signe de ψ . Nous faisons maintenant des hypothèses fortes sur les fonctions β , qui ne sont pas optimales.

(H1) β_1 et β_2 sont continues, bornées (par une constante) sur $\mathbf{R}$, et ne s'annulent pas :

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0 : C_1 \leq \beta_i(r) \leq C_2, \quad \forall r \in \mathbf{R}.$$

Les conséquences de cette hypothèse sont que $\Phi(t, \cdot)$, qui appartient à $\Gamma_0(H)$, a pour domaine H tout entier. D'autre part, son sous-différentiel a pour valeur en $u \in H$,

$$\partial\Phi(t, u) = \beta(\psi, u),$$

si bien que l'opérateur $\mathcal{B}$ s'exprime finalement comme

$$\mathcal{B}(\psi, u)(x, t) = \partial\Phi(t, u(t))(x).$$

On fait ensuite les mêmes hypothèses sur $\mathcal{A}$ que dans la partie précédente : (H3), (H4), $\mathcal{A}$ est $\mathcal{B}$ -pseudo-monotone, et on se pose le problème de l'existence d'une solution u au problème :

$$(E) \begin{cases} \frac{dv}{dt} + \mathcal{A}(u) = f, \\ v \in \mathcal{B}(\psi, u), \\ v(0) = v^0. \end{cases}$$

Les résultats que nous avons obtenus dans cette direction ne sont pas encore assez mûrs pour être exposés ici. Signalons cependant que la méthode employée est là aussi une semi-discrétisation en temps de l'équation (E), et que l'existence d'une solution au problème discrétisé est toujours obtenue de la même manière. Le point crucial est l'obtention d'estimations *a priori*, et on a vu dans la partie précédente que cela passe par la mise au point d'un lemme de dérivation qui permettait de calculer

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, u \right\rangle \quad \text{pour } v \in \mathcal{B}(\psi, u).$$

Sans aucune justification, nous donnons ci-dessous ce que devrait être (formellement) cette formule.

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, u \right\rangle = \frac{d}{dt} [\Phi^*(t, v(t))] + \int_{\Gamma(t)} [B_1(u) - B_2(u)] \frac{\psi_t}{|\psi|} d\sigma.$$

Nous aurons donc à étudier le passage à la limite dans l'intégrale de bord ci-dessus.

3.7 Existence et unicité d'une solution à l'équation de propagation du front

3.7.1 Introduction

Au vu de l'équation de propagation du front (2.33), nous nous intéressons dans cette partie au problème suivant. Étant donné une fonction réelle ψ_0 définie sur Ω , un champ de vitesse $\mathbf{v}$ et éventuellement une condition au bord sur une partie de $\partial\Omega$, existe-t-il une fonction $\psi : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\psi_t + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \psi = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[, \quad (3.106)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega \times \{0\}, \quad (3.107)$$

$$\psi = g \quad \text{sur } \Gamma_e \times]0, T[. \quad (3.108)$$

Nous nous intéresserons aussi à la continuité de la solution par rapport à $\mathbf{v}$ dans le but d'appliquer une méthode de point fixe pour résoudre le couplage entre cette équation et l'équation en pression.

3.7.2 Cas d'un champ de vitesse à dérivée normale nulle sur le bord

Nous supposons dans cette partie que le champ de vitesse $\mathbf{v}$ vérifie

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.109)$$

nous n'avons alors pas besoin de condition aux limites. Alors P.L. Lions et R. DiPerna [88], [87] ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.10

Supposons que $\psi_0 \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{v} \in L^1(0, T; W^{1,q}(\Omega))$, $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$. Alors il existe une unique solution de (3.106)-(3.109), appartenant à $C(0, T; L^p(\Omega))$ et vérifiant

$$\int_{\Omega} h(\psi(t)) dx = \int_{\Omega} h(\psi_0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) h(\psi(s)) dx ds, \quad (3.110)$$

pour toute fonction h continue sur $\mathbf{R}$, et bornée.

3.7.3 Cas d'un champ de vitesse à dérivée normale non nulle

Ce cas est sensiblement plus compliqué que le précédent, car il faut alors faire intervenir une condition sur le bord du domaine, mais seulement en certains points, ceux pour lesquels le champ de vitesse en entrant (i.e. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$, si $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à Ω). Dans ce cadre, les premiers résultats sont obtenus par C. Bardos [19] dans sa thèse, en supposant le champ de vitesse indépendant du temps et suffisamment régulier. En nous inspirant de son travail, et en utilisant la théorie des semi-groupes linéaires [102] nous allons dans un premier temps prouver l'existence d'une solution dans le cas d'un champ de vitesse régulier en temps et en espace. Nous serons cependant contraint de faire une hypothèse non réaliste (3.115) sur le champ de vitesse. Pour lever cette hypothèse, nous abandonnerons la méthode des semi-groupes linéaires pour utiliser celle des caractéristiques, à la lumière des résultats obtenus dans [88]. Cependant la méthode des semi-groupes reste intéressante par sa simplicité et son élégance et nous avons choisi de l'exposer tout de même.

a) Existence d'une solution dans le cas d'un champ de vitesse régulier (semi-groupes)

On suppose maintenant que le champ vérifie

$$\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O} \times [0, T]) \quad (3.111)$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\overline{\Omega}$. On supposera aussi que

$$\partial\Omega \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.} \quad (3.112)$$

Posons

$$\Gamma_e = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t) < 0\}$$

que l'on supposera ne pas dépendre du temps.

Remarque 3.17

Cette hypothèse est vraie en pratique, puisque le point d'injection dans un moule est fixe.

On introduit un opérateur non borné sur $X \stackrel{\text{déf}}{=} L^p(\Omega)$ en posant

$$D(A(t)) = \left\{ \psi \in L^p(\Omega) : \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \psi \in L^p(\Omega) \text{ et } \psi|_{\Gamma_e} = 0 \right\} \quad (3.113)$$

et

$$A(t)\psi = -\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \psi. \quad (3.114)$$

Sous les hypothèses (3.111) et (3.112), on sait, d'après C. Bardos, que pour t fixé, $A(t)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu (i.e. C_0) sur $L^p(\Omega)$, qui vérifie

$$\|S_t(s)\| \leq e^{\frac{\omega(t)}{p}s}, \quad \forall s \geq 0,$$

où

$$\omega(t) = \|\operatorname{div} \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Étant donnée l'hypothèse (3.111), la famille $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ est stable au sens de [102], page 130-131, ce qui constitue la première condition pour le théorème d'existence page 145. L'hypothèse supplémentaire que nous devons faire ici est que le domaine de l'opérateur $A(t)$ ne dépend pas de t , i.e.

$$D(A(t)) = D, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.115)$$

Dans ce cas on note Y l'espace de Banach D muni de la norme

$$\|\phi\|_Y = \|\phi\|_X + \|A(0)\phi\|_X, \quad \forall \phi \in Y.$$

La régularité de $\mathbf{v}$ entraîne que pour $\phi \in D$, l'application $t \rightarrow A(t)\phi$ est continûment différentiable dans $X = L^p(\Omega)$. Nous avons donc le résultat suivant ([102], théorème 4.8.):

Théorème 3.11

Pour chaque $v \in Y$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) & \text{pour } t \in]0, T], \\ u(0) = v \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; X) \cap \mathcal{C}([0, T]; Y)$.

Dans notre cadre, ce théorème se reformule de la manière suivante :

Corollaire 3.2

Soit $\psi_0 \in Y$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; L^p(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} \psi_t + \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \psi = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T], \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_e \times [0, T], \\ \psi = \psi_0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

et qui vérifie $\psi \in \mathcal{C}([0, T]; Y)$.

Remarque 3.18

L'hypothèse (3.115) n'est pas vérifiée par un champ de vecteurs quelconque. Si on autorise le domaine de $A(t)$ à dépendre du temps, la famille des opérateurs $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ doit vérifier des hypothèses plus difficiles à réaliser⁷ [102]. En particulier on doit trouver le bon espace Y sur lequel travailler.

b) Existence d'une solution par la méthode des caractéristiques

Nous utilisons ici la technique présentée par Raviart pour obtenir l'existence d'une solution à une équation hyperbolique linéaire dans le cas d'un champ de vitesse $\mathbf{v}$ appartenant à $L^\infty(0, T; \text{Lip}(\overline{\Omega}))$, et continu en temps à x fixé. Puis en nous inspirant de [88] nous introduisons la définition d'une solution renormalisée à notre équation de transport avec conditions aux limites. Nous prouvons alors que la solution que nous avons trouvé est l'unique solution renormalisée.

⁷. On pourra consulter sur ce sujet, deux articles de T. Kato (1970-73), et un de S. Ishii (1983), tous trois parus J. Math. Soc. Japan.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert. Soit un autre ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^N$ tel que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$. On étudie, sur $\mathcal{O} \times]0, T[$ le système différentiel non linéaire suivant :

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \mathbf{v}(Y(s), s), \quad Y(t) = x, \quad (3.116)$$

où l'on a pris soin de prolonger le champ de vitesse $\mathbf{v}$ à $\mathcal{O} \times]0, T[$.

Supposons que $\mathbf{v}$ est mesurable en s , pour chaque x de $\mathcal{O}$, continue en x pour presque tout s , et que sur tout compact $G \subset \mathcal{O} \times]0, T[$ il existe une fonction intégrable $s \rightarrow m_G(s)$ telle que

$$\|\mathbf{v}(x, s)\|_{\mathbf{R}^N} \leq m_G(s) \quad \text{sur } G. \quad (3.117)$$

Alors en se référant par exemple à J. Hale [68], page 28, le système (3.116) ci-dessus admet (au moins) une solution $s \rightarrow Y(s; x, t)$ absolument continue sur un intervalle $I_{x,t}$ contenant t , et telle que

$$(s, Y(s)) \in]0, T[\times \mathcal{O}, \quad \text{pour } s \in I_{x,t}.$$

D'autre part, Y peut être prolongée sur un intervalle ouvert maximal $J_{x,t}$ tel que $Y(s)$ devienne infiniment proche de $\partial\mathcal{O}$ lorsque s prend des valeurs proches des bornes de $J_{x,t}$.

Enfin, si $\mathbf{v}$ vérifie de surcroît une condition de Lipschitz locale (en x) sur $\mathcal{O} \times]0, T[$, i.e. si pour tout compact G de $\mathcal{O} \times]0, T[$ il existe une fonction $s \rightarrow k_G(s)$ intégrable sur $]0, T[$ telle que

$$\|\mathbf{v}(x, s) - \mathbf{v}(y, s)\|_{\mathbf{R}^N} \leq k_G(s) \|x - y\|_{\mathbf{R}^N}, \quad \forall (x, y) \in G^2, \quad (3.118)$$

alors la solution définie ci-dessus est unique, son domaine de définition est ouvert et $(s, x, t) \rightarrow Y(s; x, t)$ est continue sur ce domaine⁸.

Nous allons alors définir les caractéristiques de notre équation par restriction de $(x, t) \rightarrow Y(., x, t)$ à $\overline{\Omega} \times [0, T]$. Pour cela on introduit pour $x \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0, T]$,

$$\tau_e(x, t) = \inf \left\{ s \in [0, T] : Y(s; x, t) \in \overline{\Omega} \right\}, \quad (3.119)$$

$$\tau_s(x, t) = \sup \left\{ s \in [0, T] : Y(s; x, t) \in \overline{\Omega} \right\}. \quad (3.120)$$

Remarque 3.19

☞ Ces infimum et supremum existent car l'ensemble sur lequel ils sont pris est non vide (il contient t) et contenu dans $[0, T]$.

☞ Si le champ de vitesse laisse invariant Ω (i.e. si $\partial\Omega$ est une caractéristique), alors τ_e est identiquement égal à 0 et τ_s à T .

On définit donc $s \rightarrow X(s; x, t)$ comme la restriction à $[\tau_e(x, t), \tau_s(x, t)]$ de $s \rightarrow Y(s; x, t)$. X est continue sur son domaine de définition c'est à dire sur

$$\mathcal{Q} = \left\{ (s, x, t) : x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, T], \quad s \in [\tau_e(x, t), \tau_s(x, t)] \right\}.$$

Nous avons en outre la propriété fondamentale suivante :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \overline{\Omega}^2, \quad \forall s \in [\tau_e(x, t), \tau_s(x, t)], \quad \forall t \in [\tau_e(x, s), \tau_s(x, s)], \\ (y = X(s; x, t) \iff x = X(t; y, s)). \end{aligned} \quad (3.121)$$

8. Si le champ de vitesse est plus régulier, nous pouvons utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz [43]

Pour obtenir une régularité suffisante des courbes caractéristiques, nous supposons que les fonctions m_G et k_G introduites précédemment sont en fait bornées sur $]0, T[$. Nous supposons donc en ce qui concerne le champ de vitesse

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \text{Lip}(\overline{\Omega})). \quad (3.122)$$

Le théorème de Kirszbraun ([58], page 201) garantit l'existence d'une extension lipschitzienne de $\mathbf{v}$ à tout l'espace, donc la construction des caractéristiques Y est possible. Il nous est apparu nécessaire, en particulier pour donner un sens convenable aux frontières d'entrée et de sortie (voir lemme 3.10), de supposer en plus que

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad s \rightarrow \mathbf{v}(x, s) \in \mathcal{C}(0, T). \quad (3.123)$$

Dans ce cas,

$$(s \rightarrow X(s; x, t)) \in \left(C^1(\tau_\varepsilon(x, t), \tau_s(x, t)) \right)^N. \quad (3.124)$$

Nous avons aussi la proposition suivante, analogue du lemme de Raviart pour $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Proposition 3.4

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Supposons que (3.122) a lieu, alors la solution X de (3.116) vérifie

$$s \rightarrow \frac{\partial X}{\partial x_i}(s; x, t) \in C^0(\tau_\varepsilon(x, t), \tau_s(x, t))^N, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[, \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} \in L^\infty(\mathcal{Q}). \quad (3.126)$$

Le Jacobien $J(s; x, t) = \det(\nabla X(s; x, t))$ possède la même régularité, et nous avons

$$\frac{\partial J}{\partial s}(s; x, t) = J(s; x, t) \operatorname{div}(\mathbf{v})(X(s; x, t), s). \quad (3.127)$$

Démonstration. Posons $\Delta(s) = X(s; x, t) - X(s; y, t)$, alors $\Delta(s)$ vérifie

$$\frac{d\Delta}{ds} = \mathbf{v}(X(s; x, t), s) - \mathbf{v}(X(s; y, t), s)$$

et donc

$$\left\| \frac{d\Delta}{ds} \right\|_{\mathbb{R}^N} \leq C \|\Delta(s)\|_{\mathbb{R}^N}.$$

En écrivant

$$\Delta(\sigma) - \Delta(t) = \int_t^\sigma \frac{d\Delta}{ds} ds,$$

on estime

$$\|\Delta(\sigma) - \Delta(t)\|_{\mathbb{R}^N} \leq C \int_t^\sigma \|\Delta(s)\|_{\mathbb{R}^N} ds$$

puis

$$\|\Delta(\sigma)\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|\Delta(t)\|_{\mathbb{R}^N} + C \int_t^\sigma \|\Delta(s)\|_{\mathbb{R}^N} ds.$$

En remarquant que $\Delta(t) = x - y$, et en utilisant le lemme de Gronwall, nous avons donc

$$\|\Delta(\sigma)\|_{\mathbf{R}^N} \leq \|x - y\|_{\mathbf{R}^N} \exp(C|\sigma - t|).$$

Ceci nous assure que les dérivées premières de X sont bornées sur l'intérieur du domaine de $(s, x, t) \rightarrow X(s; x, t)$ (c'est à dire l'ensemble des triplets (s, x, t) tel que $X(s; x, t) \in \Omega$). Nous utilisons ensuite le théorème de Rademacher qui stipule que toute fonction lipchitzienne est dérivable presque partout. Ceci nous permet de dériver l'équation vérifiée par X par rapport à x_i pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}(X, s).$$

Nous sommes assurés par notre majoration précédente que $\frac{\partial X_j}{\partial x_i}$ reste borné, et nous savons que $\mathbf{v}$ est lipschitzienne. Donc l'égalité précédente nous permet de borner la dérivée de $\frac{\partial X}{\partial x_i}$, et du coup nous assure sa continuité. La même régularité sur le Jacobien s'obtient facilement car il s'agit d'une combinaison multilinéaire des dérivées de X . ■

Remarque 3.20

L'application $s \rightarrow J(s; x, t)$ est continue et ne s'annule pas (d'après la formule d'inversion); Comme $J(t; x, t) = 1$, nous avons donc

$$\forall (s, x, t) \in \mathcal{Q}, \quad J(s; x, t) > 0. \quad (3.128)$$

Nous distinguerons ensuite les parties de la frontière de Ω selon que la vitesse $\mathbf{y}$ est entrante, sortante ou tangente, en posant

$$\Gamma_e(t) = \{x \in \partial\Omega \setminus \chi : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}, \quad (3.129)$$

$$\Gamma_s(t) = \{x \in \partial\Omega \setminus \chi : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}, \quad (3.130)$$

$$\Gamma_{\text{lat}}(t) = \{x \in \partial\Omega \setminus \chi : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) = 0\}. \quad (3.131)$$

où χ désigne la partie de $\partial\Omega$ où la normale n'existe pas. On suppose que

$$\text{mes}\{\chi\} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \quad (3.132)$$

Remarque 3.21

Remarquons que cette fois la frontière entrante peut dépendre du temps sans complication notable.

Les temps τ_e et τ_s correspondent intuitivement aux temps d'entrée et de sortie de Ω de la caractéristique issue du point (x, t) . Pour que ceci ait un sens mathématiquement, rappelons que nous avons fait une hypothèse de régularité supplémentaire sur le champ de vitesse (3.123). Cette hypothèse trouve son application ici pour relier les temps d'entrée et de sortie au frontières des mêmes noms.

Lemme 3.10

Pour tout $t \in]0, T[$, nous avons p.p. $x \in \Omega$ les propriétés suivantes :

$$\text{Si } \tau_e(x, t) > 0 \text{ alors } X(\tau_e(x, t); x, t) \in \Gamma_e(\tau_e(x, t)),$$

$$\text{Si } \tau_s(x, t) < T \text{ alors } X(\tau_s(x, t); x, t) \in \Gamma_s(\tau_s(x, t)).$$

Démonstration. Nous raisonnerons sur τ_e , le cas de τ_s étant symétrique. Montrons d'abord que lorsque $\tau_e(x, t) > 0$, $X(\tau_e(x, t); x, t) \in \partial\Omega$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'au contraire,

$$X(\tau_e(x, t); x, t) \in \Omega.$$

Comme Ω est ouvert, et que l'application $s \rightarrow X(s; x, t)$ est continue, on peut trouver η vérifiant $\tau_e(x, t) > \eta > 0$ et tel que $X(\tau_e(x, t) - \eta; x, t) \in \Omega$. Ceci contredit la définition de $\tau_e(x, t)$. Donc $X(\tau_e(x, t); x, t) \in \partial\Omega$. D'autre part, nous avons $X(\tau_e(x, t) + \eta; x, t) \in \overline{\Omega}$ pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit. Le vecteur

$$\frac{X(\tau_e(x, t) + \eta; x, t) - X(\tau_e(x, t); x, t)}{\eta}$$

converge donc vers un vecteur orienté à l'intérieur de Ω au sens large (i.e. éventuellement tangent).

Mais d'après l'hypothèse (3.123), $s \rightarrow X(s; x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\tau_e(x, t), \tau_s(x, t)] \cap]0, T[$, puisque

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s+h) - \frac{\partial X}{\partial s}(s) = \mathbf{v}(X(s+h), s+h) - \mathbf{v}(X(s), s+h) + \mathbf{v}(X(s), s+h) - \mathbf{v}(X(s), s)$$

qui admet une limite nulle pour h tendant vers zéro, d'après (3.122) et (3.123).

Le vecteur limite ci-dessous est donc

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\tau_e(x, t); x, t) = \mathbf{v}(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)),$$

est le fait qu'il soit orienté à l'intérieur s'écrit

$$\mathbf{v}(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \cdot \mathbf{n}(X(\tau_e(x, t); x, t)) \leq 0.$$

Nous avons donc montré que

$$X(\tau_e(x, t); x, t) \in \Gamma_e(\tau_e(x, t)) \cup \Gamma_{\text{lat}}(\tau_e(x, t)).$$

Remarquons que la courbe $\Gamma_{\text{lat}}(\tau_e(x, t))$ est elle-même une courbe caractéristique du champ de vitesse $\mathbf{v}$. Donc $X(\tau_e(x, t); x, t)$ ne peut appartenir à $\Gamma_{\text{lat}}(\tau_e(x, t))$ que si x y appartient lui-même. Ceci n'est pas le cas puisque $x \in \Omega$. Ce raisonnement s'applique pour tous les couples (x, t) tels que la normale introduite ci-dessus existe, au point $X(\tau_e(x, t); x, t)$. Comme la normale, d'après (3.132), existe p.p. sur $\partial\Omega$, l'ensemble des caractéristiques issues des points où elle n'existe pas est de mesure nulle dans Ω , car $x \rightarrow X(s; x, t)$ est lipschitzienne. Donc la normale existe en $X(\tau_e(x, t); x, t)$, p.p. $x \in \Omega$. ■

Nous avons donc les outils pour définir une solution en terme de transport par les caractéristiques. Il nous manque cependant une condition initiale,

$$\psi_0 \in L^p(\Omega), \quad (3.133)$$

et nous aurons besoin d'une donnée au bord sur la frontière entrante,

$$g \in L^p(0, T; L^p(\Gamma_e(t))). \quad (3.134)$$

Remarque 3.22

Pour espérer obtenir une solution régulière, il faudra ensuite faire des hypothèses de régularité supplémentaires sur les données, ainsi que des condition de compatibilité entre ψ_0 et g . Mais pour l'instant, nous nous intéressons à une solution très faible (L^p); ce qui se passe au bord n'entre donc pas en ligne de compte.

On définit alors la fonction ψ par

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi_0(X(0; x, t)) & \text{si } \tau_e(x, t) = 0, \\ g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) & \text{si } \tau_e(x, t) > 0. \end{cases} \quad (3.135)$$

Nous montrons alors que ψ est une solution faible de notre problème au sens suivant :

Proposition 3.5

Sous les hypothèses (3.122)(3.123)(3.133)(3.134), la fonction ψ vérifie

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\mu) \right) dx dt = \int_{\Omega} \psi_0(x) \mu(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma_e(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} g \mu d\sigma dt, \quad (3.136)$$

pour toute fonction test $\mu \in \mathcal{D}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ qui s'annule sur $\Gamma_s(t) \times]0, T[$.

Remarque 3.23

Remarquons que nous ne faisons pas ici, contrairement à [86], d'hypothèse concernant le signe de $\operatorname{div} \mathbf{v}$. L'écoulement peut être incompressible comme compressible.

Démonstration. D'après les hypothèses faites sur les données, il apparaît que

$$\psi \in L^p([0, T] \times \Omega).$$

En effet,

$$\int_{\Omega} |\psi(x, t)|^p dx = \int_{\tau_e(x, t)=0} |\psi_0(X(0; x, t))|^p dx + \int_{\tau_e(x, t)>0} |g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t))|^p dx.$$

Le premier terme se transforme grâce au changement de variables $x = X(t; y, 0)$, qui est licite car $y \rightarrow X(t; y, 0)$ est lipschitzienne et $\|\psi_0\|^p$ intégrable ([55], page 117)

$$\int_{\tau_e(x, t)=0} |\psi_0(X(0; x, t))|^p dx = \int_{\tau_s(y, 0)>t} |\psi_0(y)|^p J(t; y, 0) dy$$

qui reste borné d'après (3.133) et la proposition 3.4.

Remarque 3.24

Dans ce cas ($\tau_e(x, t) = 0$), comme (x, t) et $(y, 0)$ font partie de la même caractéristique, nous avons bien sur

$$\tau_e(x, t) = \tau_e(y, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_s(x, t) = \tau_s(y, 0) > t.$$

L'ensemble $\{x \in \Omega : \tau_e(x, t) = 0\}$ est transformé par le changement de variables en $\{y \in \Omega : \tau_s(y, 0) > t\}$. Pour vérifier formellement ce qui est évident intuitivement, il faut bien comprendre que l'information $x \in \Omega$ implique de facto $\tau_s(x, t) > t$ et de même $y \in \Omega$ implique $\tau_e(y, 0) = 0$.

Dans le deuxième terme, l'ensemble d'intégration est (t est fixé)

$$\{x \in \Omega : \tau_e(x, t) > 0\} = \bigcup_{s \in]0, t[} \{x \in \Omega : \tau_e(x, t) = s\}.$$

Notons que l'ensemble

$$\{x \in \Omega : \tau_e(x, t) = s\}$$

est l'image par l'application (lipschitzienne) $y \mapsto X(t; y, s)$ de $\Gamma_e(s)$. La déformation locale de l'espace induite par cette transformation est calculée grâce au jacobien $J(t; y, s)$.

D'autre part, de s à $s + ds$, un point y de $\Gamma_e(s)$ se déplace perpendiculairement aux caractéristiques d'une distance égale au premier ordre à $|\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y)| ds$.

Il est donc licite⁹ d'écrire

$$\int_{\tau_e(x,t)>0} |g(X(\tau_e(x,t); x, t), \tau_e(x, t))|^p dx = \int_0^t \int_{\Gamma_e(s)} |g(y, s)|^p J(t; y, s) |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y)| dy ds$$

majoré grâce à (3.134) et (3.122).

Prenons maintenant une fonction $\mu \in \mathcal{D}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ s'annulant sur $\Sigma_s = \Gamma_s(t) \times]0, T[$. Alors

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \psi(x, t) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt &= - \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi_0(X(0; x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)>0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Dans la première intégrale on effectue le changement de variables $y = X(0; x, t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\tau_s(y,0)>t} \psi_0(y) \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t; y, 0), t) J(t; y, 0) dy dt \\ &= - \int_0^T \int_{\tau_s(y,0)>t} \psi_0(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, 0), t)] - \nabla \mu \cdot \mathbf{v}(X(t; y, 0), t) \right\} J(t; y, 0) dy dt \\ &= - \int_0^T \int_{\tau_s(y,0)>t} \psi_0(y) \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, 0), t)] J(t; y, 0) dy dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi(x, t) \nabla \mu \cdot \mathbf{v}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, le premier terme ci dessus devient

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega} \int_0^{\tau_s(y,0)} \psi_0(y) \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, 0), t)] J(t; y, 0) dt dy \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{\tau_s(y,0)} \psi_0(y) \mu(X(t; y, 0), t) \frac{\partial J}{\partial t}(t; y, 0) dt dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \psi_0(y) \mu(X(\tau_s(y, 0); y, 0), \tau_s(y, 0)) J(\tau_s(y, 0); y, 0) dy \\ &\quad - \int_{\Omega} \psi_0(y) \mu(y, 0) dy. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant pour la première intégrale du second membre

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t; y, 0) = J(t; y, 0) \operatorname{div} \mathbf{v}(X(t; y, 0), t)$$

9. au moins moyennant certaines hypothèses de régularité sur $\Gamma_e(s)$. Voir aussi une approche analytique ci-dessous.

et nous remarquons que la deuxième s'annule puisque μ est nulle sur Σ_s et sur $\Omega \times \{T\}$, et que d'après le lemme 3.10, si $\tau_s(y, 0) < T$, alors $(X(\tau_s(y, 0); y, 0), \tau_s(y, 0))$ fait partie de Σ_s . En appliquant le théorème de Fubini dans l'autre sens, nous avons donc montré que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi_0(X(0; x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi(x, t) \mu(x, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(x, t) dx dt \\ & \quad - \int_{\Omega} \psi_0(y) \mu(y, 0) dy + \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi(x, t) \nabla \mu \cdot \mathbf{v}(x, t) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)=0} \psi(x, t) \operatorname{div}(\mu \mathbf{v})(x, t) dx dt - \int_{\Omega} \psi_0(y) \mu(y, 0) dy. \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale de (3.137) nous utilisons un résultat de [55] qui permet d'écrire, sous réserve que $x \rightarrow \tau_e(x, t)$ soit lipschitzienne et $\inf \operatorname{ess} \|\nabla \tau_e\|_{\mathbf{R}^N} > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tau_e(x,t)>0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ & = \int_0^T \int_0^t \int_{\tau_e(x,t)=s} g(X(s; x, t), s) \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{1}{\|\nabla \tau_e\|_{\mathbf{R}^N}} d\mathcal{H}^{N-1} x ds dt. \end{aligned}$$

Comme il semble délicat de montrer que $x \rightarrow \tau_e(x, t)$ est lipschitzienne sur Ω , on considère un compact $K \subset \Omega$, et on travaille sur $\{x \in K : \tau_e(x, t) > 0\}$. Calculons donc $\|\nabla \tau_e\|_{\mathbf{R}^N}$. Pour cela, on utilise le fait que pour tout point $x \in K$, le point $X(\tau_e(x, t); x, t) \in \partial\Omega$ (et même à un compact de $\Gamma_e(\tau_e(x, t))$). Donc pour tout déplacement $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^N$,

$$\left[\frac{DX(\tau_e(x, t); x, t)}{Dx} \right] \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}(X(\tau_e(x, t); x, t)) = 0,$$

ce qui s'exprime par

$${}^t \left[\frac{DX(\tau_e(x, t); x, t)}{Dx} \right] \times \mathbf{n}(X(\tau_e(x, t); x, t)) = 0.$$

Mais¹⁰

$$\begin{aligned} \left[\frac{DX(\tau_e(x, t); x, t)}{Dx} \right] &= \left[\frac{DX}{Dx} \right] (\tau_e(x, t); x, t) + \frac{\partial X}{\partial t} (\tau_e; x, t) \otimes \nabla \tau_e(x, t) \\ &= \left[\frac{DX}{Dx} \right] (\tau_e(x, t); x, t) + \mathbf{v}(X(\tau_e; x, t), \tau_e) \otimes \nabla \tau_e(x, t). \end{aligned}$$

Grâce à la relation

$${}^t [\mathbf{v}(X(\tau_e; x, t), \tau_e) \otimes \nabla \tau_e(x, t)] \times \mathbf{n}(X(\tau_e; x, t)) = \mathbf{v}(X(\tau_e; x, t), \tau_e) \cdot \mathbf{n}(X(\tau_e; x, t)) \nabla \tau_e(x, t),$$

et sachant que sur la frontière Γ_e nous avons

$$\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y) < 0,$$

10. $\otimes$ signifie qu'il s'agit d'un produit tensoriel

on peut calculer le gradient désiré,

$$\nabla \tau_e(x, t) = \frac{{}^t \left[\frac{DX}{Dx} \right] (\tau_e(x, t); x, t) \times \mathbf{n}(X(\tau_e(x, t); x, t))}{|\mathbf{v}(X(\tau_e(x, t), \tau_e) \cdot \mathbf{n}(X(\tau_e(x, t), \tau_e))|}. \quad (3.138)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\tau_e(x, t) = s} g(X(s; x, t), s) \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{|\mathbf{v}(X(s; x, t), s) \cdot \mathbf{n}(X(s; x, t))|}{\left\| {}^t \left[\frac{DX}{Dx} \right] (s; x, t) \times \mathbf{n}(X(s; x, t)) \right\|} d\mathcal{H}^{N-1} x ds dt. \end{aligned}$$

Nous effectuons maintenant le changement de variable $x = X(t; y, s)$ dont la Jacobienne est maintenant (nous sommes sur $\Gamma_e(s)$),

$$\left\| \left[\frac{DX}{Dx} \right]^{-1} (t; y, s) \times \mathbf{t}(y) \right\|.$$

D'autre part, nous avons la relation, tirée des propriétés de X ,

$$\left[\frac{DX}{Dx} \right] (s; X(t; y, s), t) = \left[\frac{DX}{Dx} \right]^{-1} (t; y, s).$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_e(s)} \frac{g(y, s) \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t; y, s), t) |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y, s)|}{\left\| \left[\frac{DX}{Dx} \right]^{-1} (t; y, s) \times \mathbf{n}(y) \right\| \left\| \left[\frac{DX}{Dx} \right]^{-1} (t; y, s) \times \mathbf{t}(y) \right\|} d\mathcal{H}^{N-1} y ds dt. \end{aligned}$$

On conclut le calcul en remarquant que $\mathbf{n}(y)$ et $\mathbf{t}(y)$ sont deux vecteurs propres orthonormaux de la matrice jacobienne de X et donc par conséquent le dénominateur ci-dessus vaut exactement $J(t; y, s)^{-1}$ si bien que nous avons finalement la formule obtenu précédemment par un raisonnement géométrique, à savoir

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_e(s)} g(y, s) \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t; y, s), t) |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y, s)| J(t; y, s) d\mathcal{H}^{N-1} y ds dt. \end{aligned}$$

Écrivons alors que

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t; y, s), t) = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, s), t)] - \nabla \mu \cdot \mathbf{v}(X(t; y, s), t).$$

Le terme ne comportant pas de dérivée en temps est réécrit en variables (x, t) par le raisonnement inverse et il nous reste donc

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} g(X(\tau_e(x, t); x, t), \tau_e(x, t)) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_e(s)} g(y, s) \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, s), t)] |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y, s)| J(t; y, s) d\mathcal{H}^{N-1} y ds dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} \psi(x, t) \nabla \mu \cdot \mathbf{v} dx dt. \end{aligned}$$

Le premier terme se transforme en appliquant Fubini en

$$\int_{s=0}^T \int_{t=s}^T \int_{\Gamma_e(s)} g(y, s) \frac{\partial}{\partial t} [\mu(X(t; y, s), t)] |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y, s)| J(t; y, s) d\mathcal{H}^{N-1} y dt ds$$

et l'identité $\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$ et $\mu(T) = 0$ permettent d'obtenir, en intégrant par parties,

$$- \int_0^T \int_{\tau_e(x, t) > 0} \psi(x, t) \mu \operatorname{div} \mathbf{v} dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_e(s)} g(y, s) \mu(y, s) |\mathbf{v}(y, s) \cdot \mathbf{n}(y, s)| d\mathcal{H}^{N-1} y ds.$$

C'est juste ce qui nous manquait pour achever la preuve. ■

Nous pouvons aussi définir une solution renormalisée dans le cas du problème aux limites, et prouver son unicité.

Théorème 3.12

Sous les hypothèses (3.122)(3.123)(3.133)(3.134), la fonction ψ est l'**unique** fonction vérifiant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(\psi)(t) dx - \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) h(\psi) dx ds + \int_0^t \int_{\Gamma_s(s)} h(\psi)(y, s) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^{N-1} y ds \\ = \int_{\Omega} h(\psi_0) dx - \int_0^t \int_{\Gamma_e(s)} h(g)(y, s) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^{N-1} y ds \end{aligned}$$

pour toute fonction h continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

3.8 Propriétés de cette solution (dans le premier cas)

3.8.1 Non étalement du front

Le théorème précédent, et sa formule intégrale (3.110) en particulier va nous permettre de montrer que le front ne s'étale pas, c'est à dire que la ligne de niveau 0 de ψ est de mesure nulle si celle de ψ_0 l'était. Nous avons en effet le

Corollaire 3.3

La solution ψ définie précédemment vérifie pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|h(\psi(t))\|_{L^1(\Omega)} \leq \|h(\psi_0)\|_{L^1(\Omega)} \exp \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}$$

pour toute fonction h continue sur $\mathbf{R}$, bornée et positive.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application du lemme de Gronwall ([39], page 55) à l'estimation suivante, déduite de (3.110) :

$$\|h(\psi(t))\|_{L^1(\Omega)} \leq \|h(\psi_0)\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{v}(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|h(\psi(s))\|_{L^1(\Omega)} ds.$$

■

Nous avons alors le

Corollaire 3.4

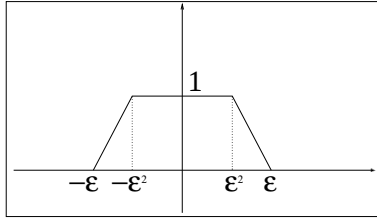
Soit ψ la solution de (3.106)-(3.109) définie dans le théorème 3.10, avec une condition initiale ψ_0 vérifiant

$$\text{mes} \{x \in \Omega : \psi_0(x) = 0\} = 0. \quad (3.139)$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\text{mes} \{x \in \Omega : \psi(x, t) = 0\} = 0. \quad (3.140)$$

Démonstration. Nous allons utiliser le corollaire précédent avec comme fonction h la fonction suivante, pour $\varepsilon > 0$:



$$h_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \leq \varepsilon^2, \\ \frac{\varepsilon - |r|}{\varepsilon - \varepsilon^2} & \text{si } \varepsilon^2 \leq |r| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |r| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Nous avons alors

FIG. 3.3 – La fonction h_ε

$$\|h_\varepsilon(\psi_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{mes} \{x \in \Omega : |\psi_0(x)| \leq \varepsilon^2\},$$

et

$$\|h_\varepsilon(\psi(t))\|_{L^1(\Omega)} \geq \text{mes} \{x \in \Omega : |\psi(x, t)| \leq \varepsilon\}.$$

Donc en utilisant (3.139) nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(\psi_0)\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

et le corollaire 3.3 implique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(\psi(t))\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

et a fortiori

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{mes} \{x \in \Omega : |\psi(x, t)| \leq \varepsilon\} = 0.$$

Cette dernière convergence entraîne (3.140). ■

3.8.2 Comparaison de deux solutions associées à deux conditions initiales différentes

En choisissant une nouvelle fonction h dans le corollaire 3.3 on montre le

Corollaire 3.5

Soit ψ^1 et ψ^2 les deux solutions de (3.106)-(3.109) associées à deux conditions initiales ψ_0^1 et ψ_0^2 . Alors

$$(\psi_0^1(x) \leq \psi_0^2(x) \text{ p.p. } x \in \Omega) \implies \forall t \in [0, T], (\psi^1(x, t) \leq \psi^2(x, t) \text{ p.p. } x \in \Omega).$$

Démonstration. Notons d'abord que la linéarité de (3.106) nous permet de nous limiter au cas où $\psi_0^2 = 0$. Il s'agit donc de montrer que

$$(\psi_0^1(x) \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega) \implies \forall t \in [0, T], (\psi^1(x, t) \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega).$$

Pour cela nous allons appliquer le corollaire 3.3 avec comme fonction h ,

$$h(r) = \max(r, 0) = [r]^+.$$

Nous avons donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\left\| [\psi^1(t)]^+ \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \left\| [\psi_0^1]^+ \right\|_{L^1(\Omega)} \exp \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}$$

et le résultat suit puisque $[\psi_0^1]^+$ est nulle presque partout. ■

3.8.3 Indépendance de la ligne de niveau 0 de la solution par rapport à la condition initiale

Rappelons à qu'à partir d'une courbe $\Gamma_0 \subset \Omega$, dont on a choisi une équation en écrivant

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : \psi_0(x) = 0\}$$

nous voulons définir le front comme étant la ligne de niveau

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega : \psi(x, t) = 0\}$$

où ψ est la solution de (3.106)-(3.109). Pour que cette définition ait un sens, il convient de vérifier que le choix d'une autre fonction $\hat{\psi}_0$ pour représenter Γ_0 ,

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : \hat{\psi}_0(x) = 0\}$$

est sans influence sur le mouvement du front, c'est-à-dire que la solution $\hat{\psi}$ de (3.106), (3.109) avec comme condition initiale $\hat{\psi}_0$ dans (3.107) représente la même courbe que ψ ,

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega : \hat{\psi}(x, t) = 0\}.$$

L.C Evans et J. Spruck ([56], page 660. Voir aussi [57]), étudient les mouvements de ligne de niveau par courbure moyenne, et démontrent ce résultat. Ils utilisent la comparaison des solutions de l'équation du front (qui dans leur cas est parabolique), elle nous est garantie par le corollaire ci-dessus.

Théorème 3.13

Supposons que $\hat{\psi}_0$ est continue sur Ω et que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : \hat{\psi}_0(x) = 0\}.$$

Soit $\hat{\psi}$ l'unique solution de (3.106)-(3.109) avec $\hat{\psi}_0$ à la place de ψ_0 . Alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega : \hat{\psi}(x, t) = 0\}.$$

3.8.4 Résultat de continuité de la solution par rapport au champ de vitesse

Rappelons que dans l'optique d'appliquer un théorème de point fixe, nous nous intéressons à la continuité de la solution par rapport au champ de vitesse. Nous avons alors le résultat suivant ([88], [87])

Théorème 3.14

Sous les hypothèses du théorème 3.10 sur les données, on considère $\mathbf{v}_n \in L^1(0, T; W^{1,q}(\Omega))$, avec $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ borné dans $L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, tel que

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\Omega)) \text{ fort}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_n \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\Omega)) \text{ fort.}$$

Si ψ_n est la solution de (3.106)-(3.109) associée à $\mathbf{v}_n$, alors ψ_n converge vers ψ dans $C(0, T; L^p(\Omega))$.

3.9 Annexe

La démonstration suivante est inspirée de celle de [6].

Démonstration du lemme 3.9. On écrit

$$\int_0^{T-h} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_W^q dt = \int_{E_\varepsilon^M} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_W^q dt + \int_{(E_\varepsilon^M)^c} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_W^q dt,$$

où

$$E_\varepsilon^M = \{t \in]0, T-h[: \|u_\varepsilon(t)\|_V + \|u_\varepsilon(t+h)\|_V + \frac{1}{h^{\frac{1}{p}}} \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle > M\}.$$

Majorons d'abord l'intégrale sur E_ε^M .

Nous avons

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \operatorname{mes}(E_\varepsilon^M) \leq \frac{C}{M}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(E_\varepsilon^M) &= \int_{E_\varepsilon^M} 1 dt \\ &\leq \int_{E_\varepsilon^M} \frac{\|u_\varepsilon(t)\|_V}{M} + \frac{\|u_\varepsilon(t+h)\|_V}{M} + \frac{1}{M h^{\frac{1}{p}}} \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Il s'agit donc de majorer $\|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_W^q$, ce qui découle de l'estimation iii).

Fixons $\eta > 0$. On peut donc trouver $M_0 > 0$ tel que :

$$\forall M > M_0, \forall h \in]0, T[, \quad \int_{E_\varepsilon^M} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_W^q dt \leq \eta.$$

Afin d'obtenir l'estimation dont nous avons besoin pour majorer l'intégrale sur $(E_\varepsilon^M)^c$, nous utilisons le lemme suivant adapté d'un lemme de [6] :

Lemme 3.11

On suppose B continue de W dans W' . Soit $M > 0$, et $\eta > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(u_1, u_2) \in V \times V$,

$$(i) \quad \|u_i\|_V \leq M, i = 1, 2,$$

$$(ii) \quad \langle B(u_1) - B(u_2), u_1 - u_2 \rangle \leq \delta$$

entraînent

$$\|B(u_1) - B(u_2)\|_{W'} \leq \eta.$$

Utilisons ce lemme que nous démontrerons plus loin.

Nous avons $\forall t \in (E_\varepsilon^M)^c$,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_V \leq M, \quad \|u_\varepsilon(t+h)\|_V \leq M, \quad \text{et} \quad \langle v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t) \rangle \leq Mh^{\frac{1}{p}}.$$

Donc il existe $h_0^M > 0$, tel que

$$\forall h < h_0^M, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall t \in (E_\varepsilon^M)^c, \quad \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_{W'}^q \leq \frac{\eta}{T}.$$

En intégrant sur $(E_\varepsilon^M)^c$ nous avons

$$\forall h < h_0^M, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \int_{(E_\varepsilon^M)^c} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_{W'}^q \leq \eta.$$

On en déduit qu'il existe $M_0 > 0$ tel que pour tout $M > M_0$, pour tout $h < h_0^M$,

$$\int_0^{T-h} \|v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)\|_{W'}^q dt \leq 2\eta.$$

Ce qui signifie bien (3.69). ■

Démonstration du lemme 3.11. Si la conclusion du lemme est fausse, il existe $M > 0$ et une suite $\{u_{1,n}, u_{2,n}\}$ tels que

$$(i) \quad \|u_{i,n}\|_V \leq M, \quad (ii) \quad \langle B(u_{1,n}) - B(u_{2,n}), u_{1,n} - u_{2,n} \rangle \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\|B(u_{1,n}) - B(u_{2,n})\|_{W'} \geq \kappa > 0.$$

Comme $(u_{i,n})$ est bornée dans V , et que B est continue sur W , on peut supposer quitte à extraire une sous-suite que $B(u_{i,n}) \rightarrow v_i$ dans W' fort.

A la limite nous aurons donc

$$|v_2 - v_1|_{W'} \geq \kappa > 0.$$

D'autre part, (ii) donne en passant à la limite :

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle = 0,$$

et en utilisant la convexité de Φ ,

$$\Phi \circ i(u_2) - \Phi \circ i(u_1) \leq \langle v_2, u_2 - u_1 \rangle \quad \text{et} \quad \Phi \circ i(u_2) - \Phi \circ i(u_1) \geq \langle v_1, u_2 - u_1 \rangle.$$

Donc

$$\Phi \circ i(u_2) - \Phi \circ i(u_1) = \langle v_1, u_2 - u_1 \rangle = \langle v_2, u_2 - u_1 \rangle.$$

Prenant $z \in V$ quelconque, nous avons

$$\begin{aligned} \Phi \circ i(u_2 + z) - \Phi \circ i(u_2) &= \Phi \circ i(u_2 + z) - \Phi \circ i(u_1) - \langle v_1, u_2 - u_1 \rangle \\ &\geq \langle v_1, u_2 + z - u_1 \rangle - \langle v_1, u_2 - u_1 \rangle \\ &= \langle v_1, z \rangle. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Ceci signifie que $v_1 = B(u_2) = v_2$, ce qui est en contradiction avec $|v_2 - v_1|_{W'} \geq \kappa > 0$. ■

3.10 Conclusion

Avant de conclure ce chapitre, procédons à une synthèse des résultats présentés. Nous avons consacré l'essentiel de cette partie à l'étude de l'existence d'une solution, d'une part à une classe d'équations à double non linéarité modélisant entre autres notre phénomène d'injection, et d'autre part à l'équation de transport du front. Nous avons aussi donné quelques résultats d'unicité. Pour autant le couplage entre ces deux équations n'a pas été abordé théoriquement. Pour résoudre ce problème de couplage, les étapes à accomplir sont l'étude de l'équation à double non linéarité, avec partie parabolique dépendant du temps, pour laquelle nous avons indiqué différentes voies; l'obtention de résultats de régularité sur la vitesse compatibles avec les hypothèses faites dans l'étude de l'équation de transport du front; enfin le couplage proprement dit par une méthode de point fixe.

Le point délicat se situe à mon sens au niveau de la régularité (ou symétriquement au niveau de l'affaiblissement des hypothèses relatives à l'équation de transport).

3.11 Commentaires bibliographiques

Pour la théorie de la mesure et de l'intégration, nous avons utilisé W. Rudin [112], et L.C. Evans et R. Gariepy [55]. Pour les distributions, il est intéressant de consulter, en plus du livre de L. Schwartz [115], le commentaire de ce livre par S. Bochner [31]. Nous avons aussi utilisé V.K. Khoan [78] et pour les espaces de Sobolev citons R. Adams [2] et [145]. L'ouvrage de H. Brézis [35] est un point de départ incontournable vers d'autres ouvrages d'analyse fonctionnelle [140][143][137]. Le livre de L.C. Evans [54] sur la convergence faible est une synthèse précieuse sur les méthodes permettant le passage à la limite dans les termes non linéaires.

Nous nous sommes aperçu que le lemme de dérivation que nous démontrons figure sous une forme analogue dans un rapport technique de P. Colli [41], la démonstration étant plus concise que la notre. La géométrie des espaces de Banach utilisée figure dans B. Beauzamy [22], et les éléments d'analyse convexe que nous utilisons dans les livres de R. Phelps [104], V. Barbu [17], I. Ekeland et R. Temam [51], V.M. Tikhomirov [127].

Sur les équations aux dérivées partielles non linéaires, en général, nous renvoyons bien sûr aux livres de J.L. Lions [86], de O.A. Ladyženskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva [80], et de J. Nečas [97]. Les livres de E. Zeidler [143] et leur bibliographie commentée forment un outil efficace de recherche dans ce domaine.

Des résultats récents sont parus sur les équations à double non linéarité, citons en plus des références déjà données, les travaux de T. Arbogast [9], dans la lignée de Alt et Luckhaus, ceux [141][59] faisant suite aux travaux de J. Kačur, et des résultats de non-existence intéressants dans [122]. Parfois ces équations sont abordées par le versant des équation intégrales. Cette voie, précédemment empruntée par V. Barbu [18], a été récemment explorée par S. Aizicovici [4].

La méthode des semi-groupes non linéaires a été utilisée par F. Simondon [121] sur l'équation étudiée par Alt et Luckhaus, et récemment sur des équations analogue par P. Bénilan et H. Touré [23].

Dans notre cas les domaines sur lesquels nous travaillons sont bornés. Pour le cas non borné, consulter les travaux de F. Bernis [25].

Sur les problèmes de type Stefan et leur généralisation, le nombre de parutions est important. Rappelons que ce cas diffère du notre dans le fait que la valeur de l'inconnue sur la frontière libre est connue. Nous renvoyons à [62][36][37][131][132][98][24][134][94]. Une revue sur le problème de Stefan figure dans l'ouvrage [135].

L'équipe de Pau a aussi étudié des équations de ce type, dans le cas de la double dégénérescence de l'équation [26][105][128], dans un cadre particulier.

Des résultats d'unicité ont été obtenus pour les équations de type doublement non linéaire [139], en particulier récemment [27][63][30][113][101].

La régularité des solutions a été étudiée dans certains cas particuliers [144][114][26]. Les méthodes de E. DiBenedetto restent à étendre à ces équations [45]. Notons que cela passe par l'obtention d'estimations L^∞ des solutions, ce qui a fait l'objet d'une étude récente de G.R. Cirmi et M.M. Porzio [40].

Le comportement asymptotique a été étudié par A. Eden, B. Michaux et J.M. Rakotoson [50][49] et [44]. Enfin citons [1] et [72] où le cas de données mesures ou L^1 est considéré.

L'aspect numérique a connu un intérêt croissant par la mise au point de schémas linéaires, nous renvoyons au chapitre analyse numérique, et à son commentaire bibliographique.

Sur les équations de transport, nous avons déjà cité notre point de départ, à savoir les méthodes développées par P.A. Raviart. Dans l'esprit des travaux de C. Bardos, un article sur les équations de transport abstraites a été mis au point par R. Beals et V. Protopopescu (J. Math. Anal. Appl. 1987). Les travaux de S.N. Kruzkov sur les équations quasilineaires du premier ordre, étendus au cas d'un ouvert borné avec conditions aux limites par C. Bardos, A. Leroux, et J.C. Nédélec [20], ne s'appliquent que pour un champ de vitesse très régulier. Les résultats d'existence et d'unicité d'une solution sous des hypothèses minimales sur la régularité du champ de vitesse ont été obtenues par R. DiPerna et P.L. Lions [88], dans le cas $\Omega = \mathbf{R}^N$, ou Ω borné mais avec un champ de vitesse tangent. Le cas des conditions aux limites n'a pas été considéré à ma connaissance, sauf pour les équations de type Hamilton-Jacobi par la méthode des solutions de viscosité (pour des conditions de Neumann et Dirichlet, voir G. Barles 1984, G. Barles et P.L. Lions, Nonlinear Analysis TMA 1991).

Chapitre 4

Analyse numérique

4.1 Introduction

DANS cette partie nous avons étudié l'implémentation numérique de différents schémas sur les équations à double non linéarité, et ceci en dimension un; nous avons aussi étudié une méthode numérique offrant une bonne localisation de l'interface air/polymère en dimension deux.

Concernant l'étude de schémas numériques en dimension un, nous avons d'abord donné un schéma de référence, qui est le schéma différences finies sur les équations (2.23) (2.24), et calculé la solution associée. Le cas monodimensionnel correspond physiquement à l'écoulement dans les canaux d'alimentation du moule. Un deuxième schéma numérique est implémenté sur les équations en pression sous forme conservative (2.26) (2.27). Puis nous donnons un troisième schéma pour ce cas qui est à rapprocher des schémas linéaires de type Chernoff. Enfin nous suggérons une transformation qui ramène le problème en dimension un à un problème de type Stefan.

Vient ensuite le calcul numérique en dimension deux. Notre problème comportant une interface libre, nous avons proposé un tour d'horizon des méthodes existantes. Nous proposons ensuite une méthode dont l'ambition est d'offrir une meilleure localisation de la position du front. Le reste du chapitre contient nos résultats numériques. Nous présentons d'abord les cas tests. Puis nous décrivons les résultats de notre simulation.

4.2 Analyse numérique en dimension un

4.2.1 Introduction

Rappelons tout d'abord que le problème que nous cherchons à résoudre s'écrit de la manière suivante en dimension un : il s'agit de trouver un couple (p, s) , où p est une fonction réelle définie sur $\Omega \times]0, T[$, avec $\Omega =]0, L[$, $L > 0$, et s une fonction réelle de $]0, T[$ (qui sera à valeurs dans $]0, L[$ en pratique) vérifiant :

$$\chi_1(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi_1(p) S_1(p) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (S_1(p) \frac{\partial p}{\partial x}) = f \quad \text{sur } \{(x, t) : x < s(t)\}, \quad (4.1)$$

$$\chi_2(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi_2(p) S_2(p) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (S_2(p) \frac{\partial p}{\partial x}) = f \quad \text{sur } \{(x, t) : x > s(t)\}, \quad (4.2)$$

$$S_1(p) \frac{\partial p}{\partial x} = S_2(p) \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{sur } \{(x, t) : x = s(t)\}, \quad (4.3)$$

$$S_1(p) \frac{\partial p}{\partial x} = G_\epsilon \quad \text{sur } \{0\} \times]0, T[, \quad (4.4)$$

$$p = p_s \quad \text{sur } \{L\} \times]0, T[, \quad (4.5)$$

$$p = p_0 \quad \text{sur }]0, L[\times \{0\}, \quad (4.6)$$

$$s'(t) = -S_1(p) \frac{\partial p}{\partial x}(s(t), t) \quad \text{sur }]0, T[, \quad (4.7)$$

$$s(0) = s_0. \quad (4.8)$$

Remarque 4.1

On peut, ici aussi, introduire une fonction $\psi :]0, L[\times]0, T[\rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur }]0, L[\times]0, T[, \quad (4.9)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{sur }]0, L[\times \{0\}, \quad (4.10)$$

où on choisit ψ_0 de telle sorte que

$$\psi_0(x) > 0 \iff x < s_0.$$

On remplace alors (4.7)-(4.8) par (4.9)-(4.10), et les ensembles

$$\{(x, t) : x < s(t)\}, \quad \{(x, t) : x > s(t)\}, \quad \{(x, t) : x = s(t)\}$$

s'expriment respectivement

$$\{(x, t) : \psi(x, t) > 0\}, \quad \{(x, t) : \psi(x, t) < 0\}, \quad \{(x, t) : \psi(x, t) = 0\}.$$

Finalement (4.1-4.2) se réécrivent sous la forme

$$\chi(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial t} - \chi(\psi, p) S(\psi, p) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial x}) = f, \quad \text{sur }]0, L[\times]0, T[. \quad (4.11)$$

4.2.2 Grille de discrétisation

Dans les schémas numériques qui suivent, on utilisera la même grille de discrétisation de $]0, L[\times]0, T[$. Soit donc M et N des entiers destinés à tendre vers l'infini. On note les pas de discrétisation en espace et en temps δ et τ i.e.

$$\delta = \frac{L}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

On considère ensuite deux subdivisions associées à ces pas,

$$(x_i)_{i \in \{0, \dots, M\}}, \quad \text{et} \quad (t_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$$

définies par

$$x_i = i\delta, \quad \text{et} \quad t_n = n\tau.$$

Pour une fonction f définie sur $]0, L[\times]0, T[$, on adoptera la notation f_i^n pour la valeur sensée approcher $f(x_i, t_n)$.

4.2.3 Schéma numérique de référence**a) Écriture du schéma en un noeud générique**

Notre premier schéma est un schéma différence finies [65], sur les équations (4.1)-(4.2). Pour l'établir, plaçons nous en un point (x_i, t_n) de la subdivision situé suffisamment en amont ou en aval du front, de sorte qu'on puisse supposer que la solution p est régulière

sur $]x_{i-1}, x_{i+1}[$. On note ci-dessous $\epsilon(z)$ toute expression en z de limite nulle en $z = 0$. Nous avons

$$p(x_i, t_{n+1}) = p(x_i, t_n) + \tau \frac{\partial p}{\partial t}(x_i, t_n) + \tau \epsilon(\tau), \quad (4.12)$$

$$p(x_{i-1}, t_k) = p(x_i, t_k) - \delta \frac{\partial p}{\partial x}(x_i, t_k) + \delta \epsilon(\delta), \quad (4.13)$$

$$p(x_{i+1}, t_k) = p(x_i, t_k) + \delta \frac{\partial p}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_k) + \delta^2 \epsilon(\delta), \quad (4.14)$$

$$p(x_i, t_k) = p(x_{i-1}, t_k) + \delta \frac{\partial p}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_k) + \delta^2 \epsilon(\delta), \quad (4.15)$$

$$S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) = S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{n+1}) + \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(S(\psi, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) (x_i, t_{n+1}) + \delta^2 \epsilon(\delta), \quad (4.16)$$

L'équation (4.11), prise en (x_i, t_{n+1}) peut s'exprimer en fonctions des valeurs de p en certains points de la grille de discrétisation. Pour l'instant nous notons $p_i^n = p(x_i, t_n)$.

$$\begin{aligned} & \chi(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} + \epsilon(\tau) \right) \\ & - \chi(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) S(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} + \delta \epsilon(\delta) \right)^2 \\ & - \frac{1}{\delta} \left(S(\psi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}) \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\delta} + \delta \epsilon(\delta) \right) - S(\psi_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} + \delta \epsilon(\delta) \right) \right) \\ & + \delta \epsilon(\delta) = 0, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} & \chi(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} - \chi(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) S(\psi_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} \right)^2 \\ & - \frac{1}{\delta} \left(S(\psi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}) \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\delta} - S(\psi_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, p_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} \right) \\ & + \epsilon(\delta) + \epsilon(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.2

Nous avons choisi un schéma décentré pour approcher le terme non linéaire par rapport à la dérivée en x , car ce terme est un terme de convection, et par hypothèse l'écoulement se fait dans le sens des x croissants.

Le schéma que nous utilisons finalement est une version linéarisée de l'expression ci-dessus. A partir de maintenant les variables indexées par i et n sont les quantités que nous allons calculer numériquement. Ce sont des approximations supposées des grandeurs continues correspondantes.

$$\begin{aligned} & \chi_i^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} - \chi_i^n S_i^n \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\delta} \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} \\ & - \frac{1}{\delta} \left(S_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\delta} - S_{i-\frac{1}{2}}^n \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\delta} \right) = 0. \quad (4.17) \end{aligned}$$

b) Discrétisation de l'équation du front (4.7)

La position (approchée) du front à l'instant t_n est repérée par s_n , et on note i_0^n le numéro de la cellule contenant le front à l'instant t_n . L'équation de déplacement de ce front est discrétisée par différences finies,

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = v_{i_0^n}^n,$$

où $v_{i_0^n}^n$ représente une approximation de la vitesse au noeud i_0^n . La mise au point de cette approximation est **délicate**, car le gradient de pression est discontinu au passage du front alors que la vitesse est continue, bien que proportionnelle à ce gradient. Bien entendu le coefficient de proportionnalité est discontinu. La technique utilisée prend en compte le taux de présence dans la cellule du front, qui vaut

$$\alpha_n = \frac{s^n - x_{i_0^n - \frac{1}{2}}}{\delta}.$$

Lorsque ce taux est inférieur à $\frac{1}{2}$, la vitesse sera calculée grâce au gradient de pression entre les noeuds $i_0^n - 1$ et i_0^n . Dans le cas contraire, les noeuds intervenant seront i_0^n et $i_0^n + 1$. Le coefficient de proportionnalité entre ce gradient et la vitesse est calculé afin de garantir la continuité de la vitesse en s_n . On écrit donc (pour $\alpha^n < \frac{1}{2}$),

$$S_1 \frac{p_{\text{front}} - p_{i_0^n - 1}}{(\alpha^n + \frac{1}{2})\delta} = S_2 \frac{p_{i_0^n} - p_{\text{front}}}{(\frac{1}{2} - \alpha^n)\delta}.$$

Cette relation nous permet de calculer la pression au front,

$$p_{\text{front}} = \frac{(\frac{1}{2} - \alpha^n)S_1 p_{i_0^n - 1} + (\alpha^n + \frac{1}{2})S_2 p_{i_0^n}}{(\frac{1}{2} - \alpha^n)S_1 + (\alpha^n + \frac{1}{2})S_2}.$$

Le coefficient S **équivalent** est alors calculé de sorte que,

$$S_{\text{front}} \frac{p_{i_0^n} - p_{i_0^n - 1}}{\delta} = S_1 \frac{p_{\text{front}} - p_{i_0^n - 1}}{(\alpha^n + \frac{1}{2})\delta},$$

et on trouve

$$S_{\text{front}}^{<\frac{1}{2}} = \frac{S_1 S_2}{(\frac{1}{2} - \alpha^n)S_1 + (\alpha^n + \frac{1}{2})S_2}.$$

Dans le cas $\alpha^n > \frac{1}{2}$, on écrit la relation de continuité entre i_0^n et $i_0^n + 1$,

$$S_1 \frac{p_{\text{front}} - p_{i_0^n}}{(\alpha^n + \frac{1}{2})\delta} = S_2 \frac{p_{i_0^n + 1} - p_{\text{front}}}{(\frac{3}{2} - \alpha^n)\delta},$$

ce qui mène à

$$S_{\text{front}}^{>\frac{1}{2}} = \frac{S_1 S_2}{(\frac{3}{2} - \alpha^n)S_1 + (\alpha^n - \frac{1}{2})S_2}.$$

Pour résumer, la vitesse se calcule donc au front suivant

$$v_{i_0^n}^n = \begin{cases} -S_{\text{front}}^{<\frac{1}{2}} \frac{p_{i_0^n} - p_{i_0^n - 1}}{\delta} & \text{si } \alpha^n < \frac{1}{2} \\ -S_{\text{front}}^{>\frac{1}{2}} \frac{p_{i_0^n + 1} - p_{i_0^n}}{\delta} & \text{si } \alpha^n > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.18)$$

c) Écriture du schéma en un noeud proche du front

Nous avons vu au a) l'écriture du schéma en un noeud générique, c'est à dire suffisamment éloigné du front. Sans rentrer plus avant dans les détails, nous avons eu à modifier ce schéma pour les noeuds proches du front, en faisant intervenir les coefficients S équivalents calculés ci-dessus à la place des coefficients $S_{i-\frac{1}{2}}$ et $S_{i+\frac{1}{2}}$, dans (4.17).

d) Implémentation du schéma

La simulation ci-dessous représente l'élévation de pression dans un canal d'alimentation du moule. On suppose au départ que celui-ci contient une petite quantité de fluide, et on résout le schéma numérique en utilisant une condition de flux en entrée et une pression imposée en sortie. On constate que l'écoulement ne se distingue pas d'un écoulement

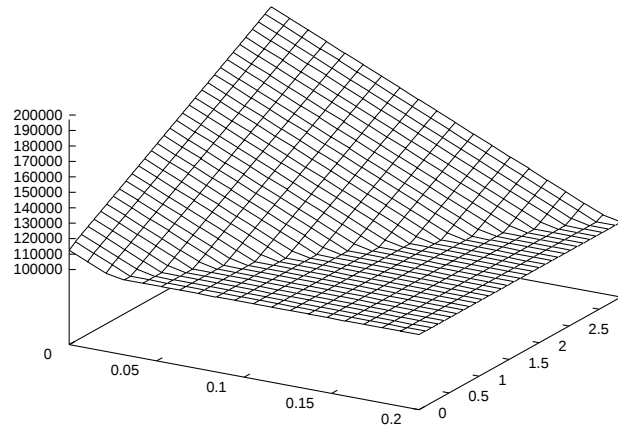


FIG. 4.1 – Écoulement dans un canal d'alimentation.

incompressible, en cela que la montée en pression est linéaire.

4.2.4 Deuxième schéma numérique

Après avoir introduit le schéma numérique de référence, nous nous sommes demandé s'il n'était pas possible de calculer la solution de l'équation en pression sous la forme à double non linéarité étudiée lors de l'analyse mathématique. Pour cela nous écrivons les équations en pression sous forme conservative dans chaque domaine.

$$\frac{\partial \beta_i(p)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_i(p) S_i(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.19)$$

À partir de ces équations, on ne peut pas écrire facilement un schéma du fait des termes non linéaires en β_i en particulier. Pour contourner cette difficulté, on introduit la fonction régulière par morceaux sur Q , définie par

$$q(x, t) = \beta_i(p(x, t)) \quad \text{sur } Q_i. \quad (4.20)$$

Enfin on introduit les coefficients

$$K_i(q) = \frac{S_i(p)}{\chi_i(p)}.$$

Il est clair que la fonction q vérifie sur Q_i l'équation suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_i(q) \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.21)$$

au sens classique, q étant discontinue sur l'interface. Réciproquement, si l'on calcule une solution q de l'équation ci-dessus, et que l'on cherche à reconstruire u , il faudra s'assurer que c'est possible. Cela signifie qu'il faut assurer lors du calcul que la solution v demeure dans l'image de la transformation introduite en (4.20).

Remarque 4.3

Notons que cette question est à mettre en regard du résultat théorique obtenu à savoir $q(t) \in D((\Phi \circ i)^)$ pour tout t , ce qui est "presque" $q(t) \in R(\beta)$.*

L'algorithme que nous avons mis en place consiste donc à discrétiser par volumes finis l'équation en q (méthode de S. Godunov [65]), en utilisant une loi de transport de s appropriée,

$$s(t) = -\frac{K_1(q)}{q} \frac{\partial q}{\partial x} (s(t)^-, t).$$

L'algorithme en q sous cette forme mène à des instabilités numériques que nous n'avons pas pu résoudre. En effet, malgré l'utilisation de schémas non diffusifs (il ne faut surtout pas diffuser la discontinuité de q) de type "donor cell", et l'essai de filtres non linéaires pour la capture des chocs¹, l'algorithme diverge. La raison est qu'au front une erreur est nécessairement commise lors de l'approximation des coefficients discontinus; cette erreur fait sortir la fonction q des valeurs admissibles.

Afin d'éviter que la fonction q sorte de l'image de β , nous avons essayé de la recaler régulièrement sur le graphe de β . Cette procédure, lourde en calcul, ne donne toujours pas de résultat satisfaisant. Aussi avons-nous abandonné cette direction.

4.2.5 Implémentation d'un schéma linéaire de type Chernoff

Le schéma précédent ne fonctionnait pas à cause de la discontinuité de la nouvelle inconnue q , qui ajoutée à la discontinuité des coefficients rendait le calcul délicat au front. Une autre approche est d'écrire un schéma linéaire approchant convenablement les équations (4.19). Ce type de schéma a été largement étudié² par W. Jäger et J. Kačur [74], ainsi que par A. Handličová et M. Kačurová [77]. Des articles récents sont parus dans ce domaine [93], [75]. Nous écrivons le schéma sous forme semi-discrète :

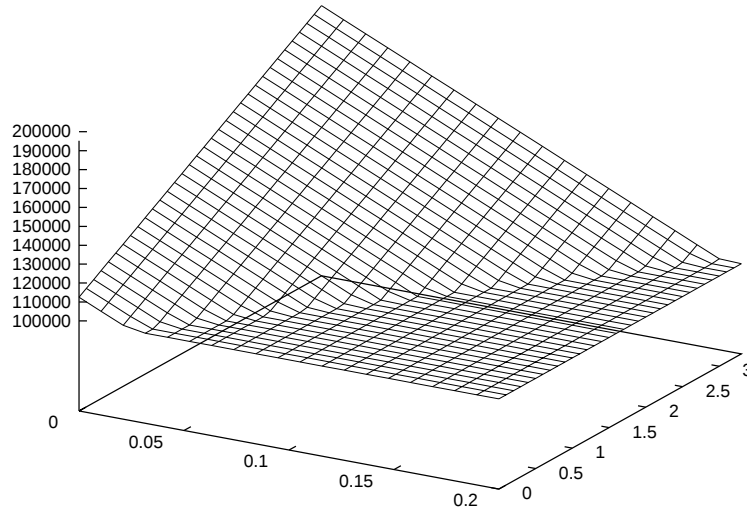
$$\mu_i^n \frac{p^{n+1} - p^n}{\delta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_i(p^n) S_i(p^n) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.22)$$

où le calcul du coefficient μ_i^n est crucial. De chaque coté de l'interface, μ_i^n se calcule grâce à la dérivée de β_i . A l'interface, nous calculons une moyenne pondérée entre les dérivées de β

1. développés par B. Engquist, P. Lötstedt et B. Sjögreen [53]

2. et initié par l'article de A. Berger, H. Brézis et J. Rogers dans RAIRO Analyse Numérique 13 (1979). Voir aussi les nombreux travaux de l'école italienne E. Magenes, R. Nocketto, C. Verdi [89]

et β_2 . L'implémentation de ce schéma mène à la simulation suivante, toujours dans un canal d'alimentation :



La solution calculée semble coïncider avec celle du schéma de référence. Nous avons cependant calculé l'erreur relative entre les deux solutions. Celle ci est de l'ordre de 0.0001 pour cent.

4.2.6 Formulation équivalente en un problème de type Stefan

Le problème des schémas précédents est qu'il y a deux équations (propagation du front, équation en pression), qui sont théoriquement couplées, mais numériquement découplées. Ceci induit une erreur dans le calcul du front et on sait que le calcul à ce niveau est très sensible en particulier à cause de la discontinuité des coefficients S et χ .

D'où l'idée d'introduire une nouvelle inconnue qui véhicule les deux informations : pression et position du front. Posons par exemple

$$w(x, t) = \begin{cases} \int_x^{s(t)} \beta_1(p)(y, t) dy & \text{si } x < s(t), \\ \int_x^{s(t)} \beta_2(p)(y, t) dy & \text{si } x \geq s(t). \end{cases} \quad (4.23)$$

Puis notons

$$\beta(w, p) = \begin{cases} \beta_1(p) & \text{si } w > 0, \\ \beta_2(p) & \text{si } w \leq 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

nous avons alors

$$\beta(w, p) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ou encore} \quad p = \beta^{-1}\left(w, -\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (4.25)$$

et la position du front est donnée par

$$w(x, t) = 0.$$

Remarque 4.4

Cette approche a été motivée par [52]. Voir aussi [123]. Ces deux articles ont pour objet l'étude d'un phénomène physique proche du notre à ceci près que la pression sur l'interface est connue et constante, ce qui simplifie grandement la formulation. En effet, dans ce cas, l'interface est une ligne de niveau de la pression.

Déterminons maintenant l'équation vérifiée par w . En remarquant tout d'abord que (4.23) s'écrit, en utilisant (4.24),

$$w(x, t) = \int_x^{s(t)} \beta(w(x, t), p(y, t)) dy \quad (4.26)$$

puis en dérivant cette expression par rapport au temps, nous obtenons formellement (pour $x \neq s(t)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \int_x^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t} \beta(w(x, t), p(y, t)) dy + s'(t) \beta(w(x, t), p(s(t), t)) \\ &= \int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(x, t), p(y, t)) dy \\ &\quad + \int_x^{s(t)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta(w(x, t), p(y, t)) S(w(x, t), p(y, t)) \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy \\ &\quad + s'(t) \beta(w(x, t), p(s(t), t)) \\ &= \int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(x, t), p(y, t)) dy - \beta(w, p) S(w, p) \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \\ &\quad + \beta(w(x, t), p(s(t), t)) S(w(x, t), p(s(t), t)) \frac{\partial p}{\partial x}(s(t), t) + s'(t) \beta(w(x, t), p(s(t), t)) \\ &= \int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(x, t), p(y, t)) dy - \beta(w(x, t), p(x, t)) S(w(x, t), p(x, t)) \frac{\partial p}{\partial x}(x, t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Afin de simplifier l'intégrale subsistant, nous remarquons d'abord que pour y compris entre x et $s(t)$, $w(y, t)$ est du même signe que $w(x, t)$, puis que $w \rightarrow \beta(w, \cdot)$ ne dépend que du signe de w . Nous avons donc

$$\int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(x, t), p(y, t)) dy = \int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(y, t), p(y, t)) dy.$$

Remarque 4.5

La même remarque vaut pour l'expression (4.26) si bien que w vérifie aussi

$$w(x, t) = \int_x^{s(t)} \beta(w(y, t), p(y, t)) dy. \quad (4.28)$$

Ceci s'obtient aussi directement en intégrant (4.25).

L'intégrale ci-dessus peut, grâce à (4.25), être transformée en utilisant le changement de variables $z = w(y, t)$ à t fixé :

$$\int_x^{s(t)} f(y, t) \beta(w(x, t), p(y, t)) dy = - \int_{w(x, t)}^0 f(w^{-1}(z, t), t) dz$$

Finalement, w vérifie une équation de transport non linéaire (à comparer avec 4.9) :

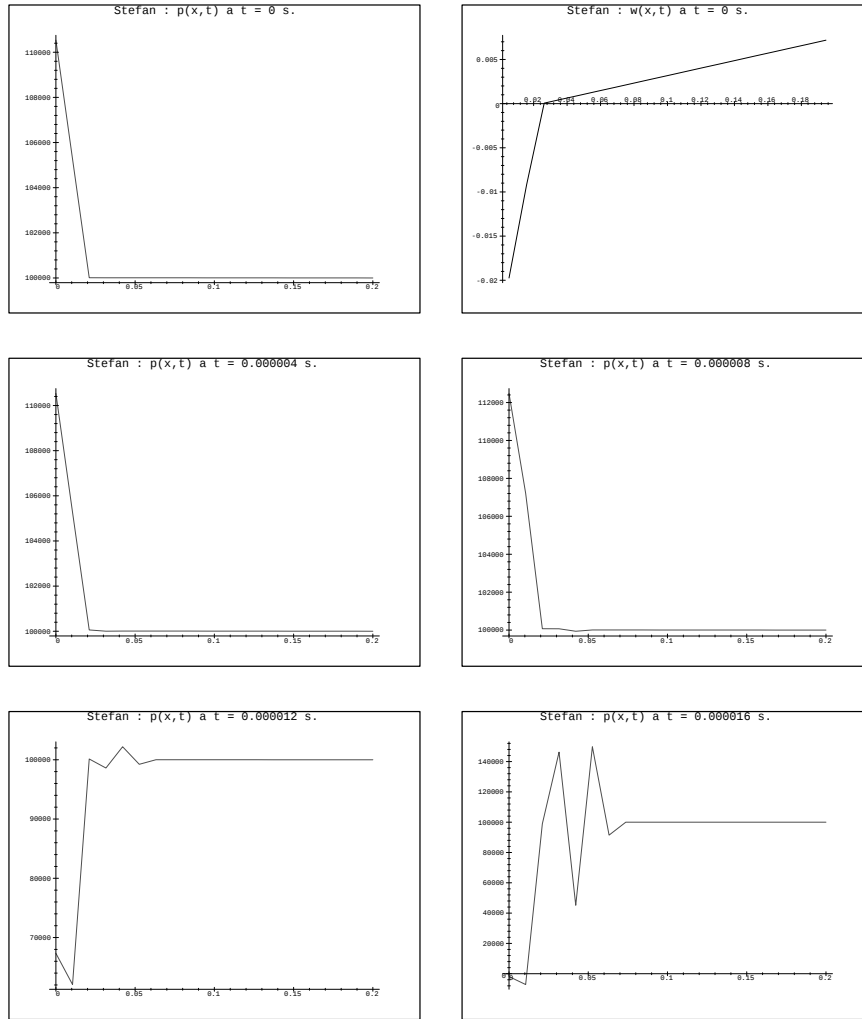
$$\frac{\partial w}{\partial t} + S(w, p) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \int_0^w f(w^{-1}(z, t), t) dz. \quad (4.29)$$

En éliminant p l'équation devient

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v(w) \frac{\partial w}{\partial x} = \int_0^w f(w^{-1}(z, t), t) dz, \quad (4.30)$$

$$v(w) = S(w, \beta^{-1}(w, -\frac{\partial w}{\partial x})) \frac{\partial}{\partial x} \beta^{-1}(w, -\frac{\partial w}{\partial x}). \quad (4.31)$$

Nous avons implémenté un schéma numérique sur cette équation. L'ennui est qu'il faut constamment passer de w à p (par β^{-1}) ce qui au vu du comportement de β est instable. A titre indicatif voici les oscillations que nous obtenons quand nous essayons de calculer la solution numériquement. Nous n'avons fait figurer qu'une seule fois la courbe de la fonction w , puisque celle-ci n'a pas le temps de se transformer sensiblement avant l'explosion de p .



4.2.7 Conclusion sur les résultats numériques en dimension un

Les tentatives que nous avons menées sur la mise au point de schémas résolvant directement l'équation à double non linéarité n'ont pas abouti de manière satisfaisante. Nous avons donc décidé de revenir à un calcul sur l'équation en pression originelle. En dimension un, la localisation de l'interface ne pose pas de problème particulier car il s'agit d'un point. En dimension deux, cette localisation est plus délicate, et cruciale car le gradient de pression y est discontinu. Nous avons mis au point une méthode pour cette localisation que nous présentons maintenant.

4.3 Localisation d'interface en dimension deux

4.3.1 Point sur les méthodes numériques pour le calcul des frontières libres

Notre problème comporte une interface libre, celle située entre l'air et le fluide entrant. Nous présentons ici quelques méthodes utilisées pour calculer une surface libre, en nous inspirant des travaux de synthèse de [60] et de [99].

a) Méthodes Euleriennes

1. **Méthodes à grille fixe.** La grille ou le maillage est fixé dans le domaine, et on utilise une méthode de calcul du type différences ou éléments finis pour résoudre l'équation principale. Comme l'interface ne coïncide pas avec les points de la grille, il faut effectuer un traitement particulier. Il existe alors une méthode de suivi d'interface où celle-ci est spécifiée par un ensemble de points que l'on déplace en accord avec une équation de propagation. Une deuxième méthode, de suivi de volume, consiste à définir des cellules d'interface, chaque cellule portant un taux de présence que l'on calcule. Cette méthode est celle utilisée dans la thèse [90]. Évidemment, si l'interface peut être obtenue directement à partir de l'inconnue principale, comme dans le problème de Stefan (l'interface est alors une ligne de niveau de la température), son calcul numérique est fait en même temps que celui de l'inconnue. D'où l'avantage de la troisième méthode, introduite par Sethian [118] qui repose sur l'introduction d'une fonction auxiliaire ψ telle que $\psi(x, t) = 0$ soit l'équation de l'interface dans $\mathbf{R}^2$ pour tout t . Si on détermine l'équation (aux dérivées partielles) que vérifie ψ , et qu'on la résout numériquement sur le maillage, alors l'interface se calculera facilement comme la ligne de niveau 0 de la solution. Cette méthode sera développée plus loin.

En résumé l'avantage de ce type de méthodes est que l'interface peut être *a priori* irrégulière et que plusieurs interfaces peuvent coexister sans compliquer les calculs. Par contre la précision du calcul de l'interface peut laisser à désirer, bien que la troisième méthode semble plus prometteuse.

2. **Maillages adaptatifs.** La grille est ajustée localement pour coïncider en un certain sens avec l'interface. L'avantage est de garantir une résolution fine à l'interface. Par contre celle-ci doit être suffisamment régulière pour que le maillage soit raisonnable.
3. **Changement de variables.** On se ramène à un domaine fixe par changement de variables. L'équation résultante contient donc une information explicite sur l'interface.

Souvent cette méthode est limitée au cas mono-dimensionnel, car en dimension supérieure il est souvent difficile de déterminer une transformation adéquate, en particulier non singulière.

b) Méthodes Lagrangienne

Dans les méthodes Lagrangienne, le système de coordonnées se déplace avec le fluide, donc chaque cellule du maillage contient toujours les mêmes éléments fluides. Comme les interfaces entre deux fluides se déplacent avec ceux-ci, elles sont fixes dans cette méthode, et les conditions d'interface sont facilement appliquées. Il y a cependant plusieurs méthodes lagrangiennes :

1. **Méthode strictement Lagrangienne.** Elle met en jeu une grille de calcul de topologie fixe qui se déplace avec le fluide. Cette méthode reste valide tant que la grille ne s'enchevêtre pas, c'est à dire pour un temps limité dans les applications. D'où la méthode suivante :
2. **Méthode lagrangienne avec rezonage.** Il y a reconstruction de la grille lorsque celle-ci s'enchevêtre, avec transfert de l'information de l'ancienne vers la nouvelle grille.
3. **Méthode lagrangienne libre.** Dans la méthode précédente il y a enchevêtrement car les liens entre deux noeuds du maillage sont logiquement fixes. Cette méthode, au contraire, laisse les noeuds du maillage plus libres, en autorisant la destruction, la création ou la reconnection de certains d'entre eux.
4. **Méthodes particulières.** C'est une terme générique pour désigner une classe de méthode où la représentation discrète du fluide met en jeu des particules inter-agissantes, possédant chacune des attributs (masse, position, vitesse, ...). L'état du système est caractérisé par cet ensemble fini de particules, et son évolution par des lois d'interaction entre ces particules, simulant en particulier les forces. Pour les frontières libres, l'avantage de cette représentation est que les particules peuvent être marquées (un attribut supplémentaire) comme particule du fluide 1 ou comme particule du fluide 2 si bien que le calcul des positions des particules renseigne aussitôt sur celle de l'interface.

4.3.2 Présentation de notre méthode numérique

Nous avons choisi, afin de localiser l'interface, de mettre en oeuvre une méthode par lignes de niveau. Elle semble effectivement adaptée à notre problème pour au moins deux raisons : la première est qu'elle offre une localisation du front dans une cellule du maillage **plus fine** qu'une méthode de type volumes finis avec taux de présence. La deuxième est qu'elle permet de gérer les **changements de topologie du front** (fusion de deux fronts, formation d'une bulle d'air, ...) sans difficulté.

Nous avons donc une équation en pression (2.23) (2.24) couplée à une équation de propagation d'une fonction ψ (3.106). Étant donné les propriétés de continuité de la pression, il nous a paru judicieux d'implémenter une méthode **éléments finis** de type P1. Le caractère hyperbolique de l'équation de transport de la fonction ψ nous a en revanche orienté vers une méthode **volumes finis** sur cette équation. Ci-dessous figure une portion du type de maillage sur lequel nous allons effectuer nos calculs. Nous voyons d'une part le maillage

éléments finis (triangles) et les cellules de contrôle, centrées aux noeuds, qui sont construites en reliant les centres de gravité des triangles.

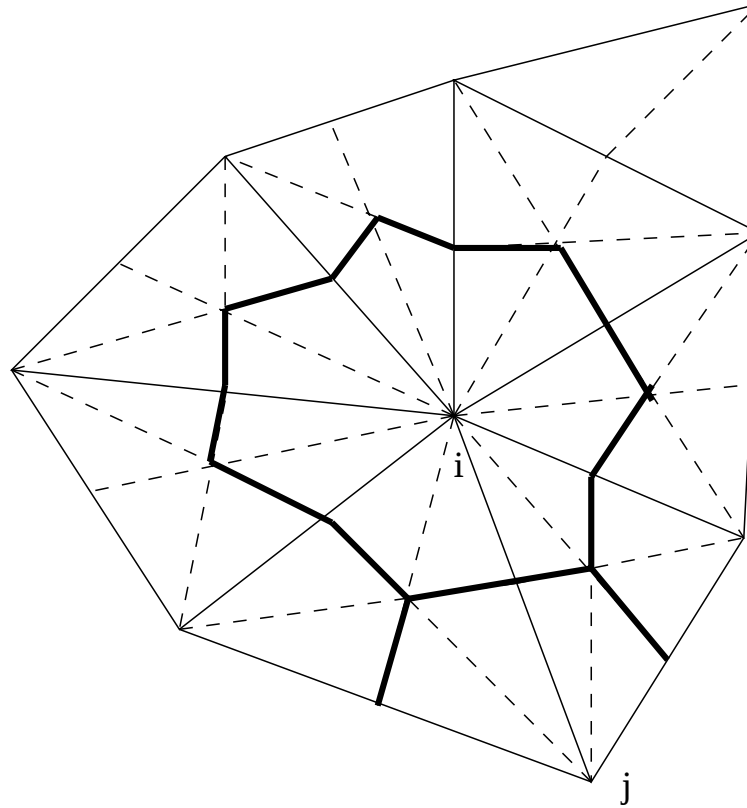


FIG. 4.2 – Maillage Volumes-Éléments Finis

L'algorithme que nous utilisons consiste en un **découplage des deux équations**. Si on suppose les grandeurs p et ψ calculées au temps t_n , nous disposons donc de la position du front qui est la ligne de niveau zéro de ψ . Cette position (sa trace sur les triangle du maillage) permet de calculer les coefficients au front, et nous calculons p au temps t_{n+1} en résolvant l'équation en pression (éléments finis P1). Puis nous calculons ψ au temps suivant par résolution de l'équation de transport (volumes finis), le champ de vitesse ayant été au préalable calculé à partir de la valeur de p au temps t_{n+1} .

Nous utilisons pour ces calculs la bibliothèque éléments finis NEF développée par R. Touzani, qui propose une structure de données prête à l'emploi, des procédures de calcul des fonctions de forme, et des fonctions de manipulation des systèmes linéaires stockés sous forme profil. A ce sujet nous avons procédé à une **renumérotation** par l'algorithme de Cuthill-McKee [12] sur les noeuds du maillage afin d'optimiser la longueur du profil.

Les points non standard de cette modélisation concernent **le calcul de la vitesse au front**, et le choix d'une **condition en entrée** pour la fonction ψ ainsi que d'une **condition initiale**. Un autre problème est de savoir si on doit considérer que **le polymère colle ou non** à la paroi du moule. Nous allons donc développer ces trois points. Enfin nous ferons une remarque sur la condition imposée dans l'état actuel de notre code au fond du moule.

a) Calcul de la vitesse au front

Nous savons que le calcul de la vitesse au front est crucial, car les coefficients physiques présentent une forte discontinuité à ce niveau. On a vu par ailleurs comment mener ce calcul en dimension un. En dimension deux, la position du front est donnée par la **ligne de niveau zéro** de la fonction ψ . Sur le schéma ci-dessous nous voyons la trace de la ligne de niveau zéro de ψ sur le maillage (interface), et son approximation linéaire par morceaux.

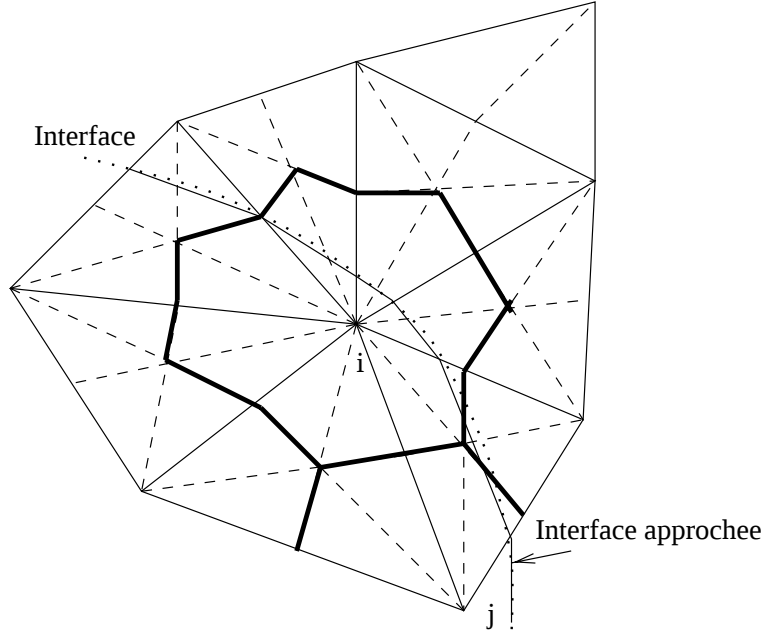


FIG. 4.3 – Courbe de niveau 0 de ψ .

Nous avons donc un moyen pour déterminer la proportion de polymère sur une arête entre deux noeud i et j , lorsque ψ change de signe entre ces deux noeuds. Nous avons choisi une approximation linéaire, en admettant que la proportion de fluide sur une arête est donnée par la formule suivante,

$$\alpha_{ij} = \frac{[\psi_i]^+ + [\psi_j]^+}{|\psi_i| + |\psi_j|},$$

où on a noté de nouveau $[r]^+ = \max(r, 0)$. Puis nous calculons le coefficient S correspondant par

$$S_{ij} = \frac{S_1 S_2}{\alpha_{ij} S_2 + (1 - \alpha_{ij}) S_1}.$$

Cela correspond à assurer la continuité de la quantité $S \nabla p$ à l'interface.

Le calcul de la pression étant de type P1, la pression est linéaire sur un triangle, donc son gradient est constant. Pour calculer le coefficient S correspondant, nous opérons une **moyenne harmonique** des coefficients S sur les arêtes du triangle.

b) Choix des conditions aux limites pour ψ

La fonction ψ doit être nulle sur l'interface, positive sur le domaine occupé par le polymère et négative sur son complémentaire. Étant donné une courbe interface initiale, nous

prenons comme fonction ψ_0 initiale une **distance signée** par rapport à cette courbe. Il est bienvenu d'utiliser une distance régulière, car les irrégularités de la frontière initiale seront transportées lors du calcul. Voici un exemple d'une telle fonction, figure 4.4. Il peut être

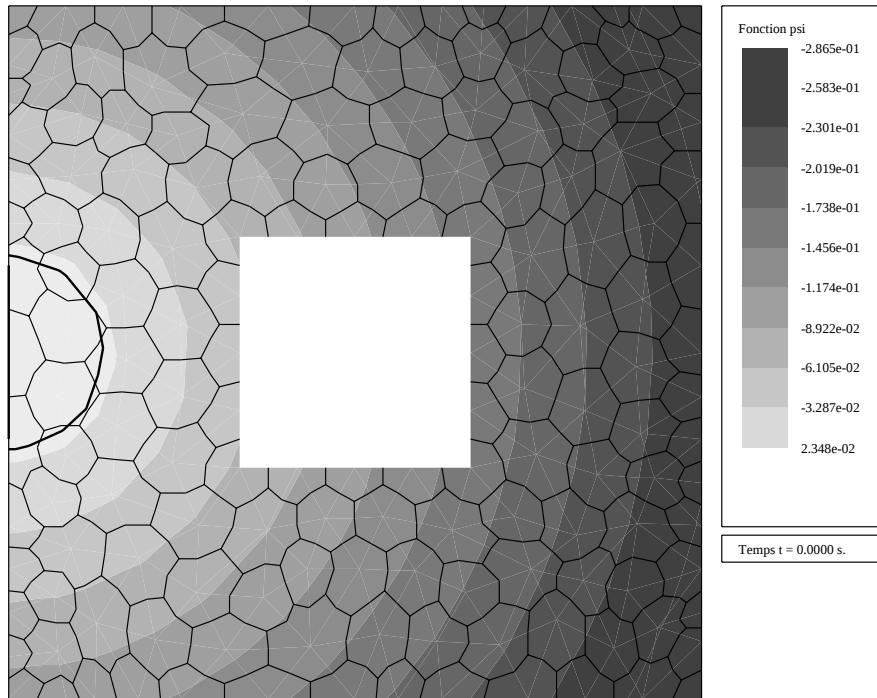


FIG. 4.4 – Valeur initiale de la fonction ψ

aussi intéressant de mailler finement la zone d'injection; en effet les erreurs de calculs qui sont faites dans cette zone sont transportées par la suite.

Un autre problème est le choix de la condition en entrée par ψ . Notre stratégie a été d'imposer une **condition de Dirichlet** dont la valeur est égale à celle de ψ_0 sur la frontière d'entrée. Ainsi nous espérons obtenir une solution régulière.

c) Contact collant ou non collant?

Dans le modèle que nous avons proposé, le contact du polymère est supposé non collant puisque nous avons adopté une condition de glissement au bord, c'est à dire une **vitesse normale nulle**. Intuitivement, il semblerait naturel d'imposer une condition de contact collant (**ou vitesse nulle**) en paroi, par la forte viscosité du fluide. La raison pour laquelle cette condition n'apparaît pas dans notre modèle est que nous avons considéré un écoulement bi-dimensionnel. Or dans les équations tri-dimensionnelles, les conditions de contact collant apparaissent sur les surfaces inférieures et supérieures du moule, et non sur la paroi latérale (en fait le contact collant sur la paroi latérale doit être induit par le contact collant sur les parois supérieure et inférieure).

Lorsque nous passons à deux dimensions, le contact collant disparaît donc automatiquement. Aussi, afin de retrouver ce phénomène nous avons proposé **deux sortes de simulations**: l'une est la résolution du modèle 2-D avec par conséquent un contact non collant

en paroi latérale; l'autre consiste à annuler **artificiellement** les échanges entre deux cellules situées contre la paroi latérale et comportant du polymère (le contact de l'air n'est jamais collant).

d) Condition en fond de moule

La condition en un point du fond du moule est une condition de Dirichlet **tant que l'évent n'est pas bouché**. Ensuite cela devrait être transformé en une condition de Neumann. Nous n'avons **pas encore** effectué cette modification de condition aux limites dans notre code de calcul. Aussi les résultats que nous présentons ci-dessous sont ils obtenus en conservant une condition de Dirichlet même après obstruction des événements. Une condition plus naturelle, que nous envisageons d'introduire par la suite, serait du type

$$\alpha(x, t) \frac{\partial p}{\partial n} + \beta(x, t)(p - p_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \times]0, T[.$$

Ainsi, au début du remplissage, nous pourrions imposer un débit fonction de la pression, puis lors de l'obstruction de l'évent considéré (i.e. la valeur de ψ en ce point devient positive) nous annulerons ce débit. Actuellement le calcul est implémenté avec α nul, ce qui correspond physiquement à de "gros" événements en sortie de moule.

4.3.3 Les cas tests

Nous présentons ici la géométrie des empreintes de moules que nous avons choisi pour nos tests. Ces tests ont pour but tout d'abord de **valider** notre méthode numérique. Pour cela, nous avons d'abord procédé à un test sur un moule rectangulaire sur lequel nous avons injecté le polymère en nappe.

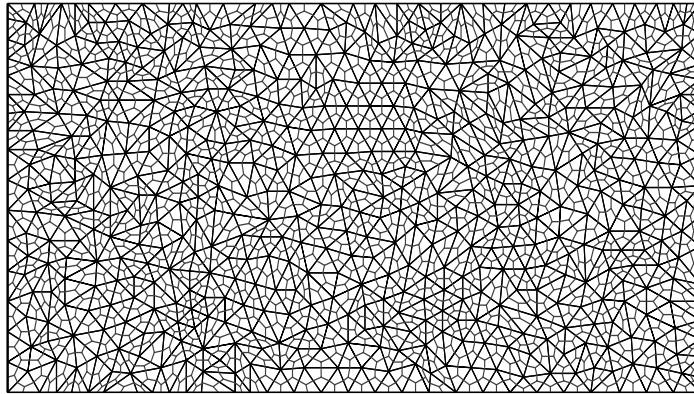


FIG. 4.5 – Test 1 : moule rectangulaire.

La figure ci-dessus représente le maillage, effectué par un mailleur du domaine public³; il comporte 567 noeuds et 1037 éléments triangulaires.

Le maillage dual volumes finis se construit facilement, en reliant les centres de gravité des différents triangles au voisinage d'un noeud. Dans ce cas test le polymère est injecté en

3. mailleur **Triangle**, disponible à l'adresse <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>.

nappe à partir du bord gauche du moule, à débit imposé. Le contact du polymère est collant en paroi (i.e. son **vecteur vitesse** est nul contre le bord latéral) ou glissant (sa **vitesse normale** est nulle) alors que le contact de l'air est toujours glissant. En fond de moule, une condition de Dirichlet (pression imposée) est implémentée.

Le but de ce test est de vérifier que **les temps de passage du front** au quart et à la moitié du moule, par exemple, sont corrects.

Ensuite nous avons voulu tester le **recollement de deux fronts** de polymère, et pour cela nous avons considéré une empreinte comportant un obstacle (c'est à dire que le moule comporte un trou). L'injection se fait par un canal (non représenté sur la figure) alimentant

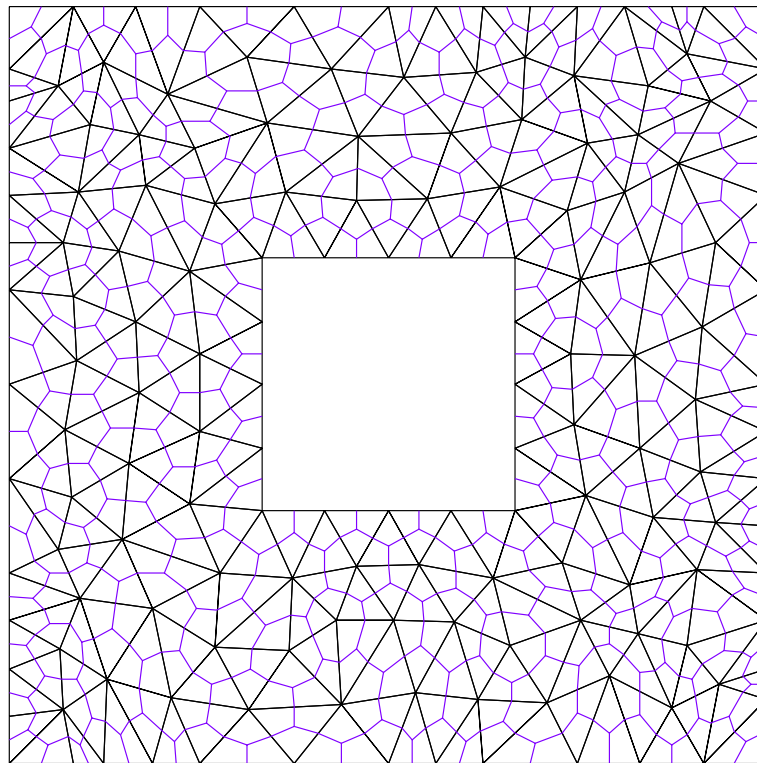


FIG. 4.6 – Test 2 : moule comportant un trou carré.

le moule par le point situé au milieu de la paroi gauche. La condition en ce point est un débit imposé. Les autres conditions aux limites sont identiques au cas précédent. La frontière entourant le trou se comporte comme la paroi latérale. Ainsi le fluide s'écoulera-t-il de part et d'autre de l'obstacle, pour refuser derrière celui-ci. Ce cas test comporte 157 noeuds et 247 éléments.

Une autre question intéressante était d'étudier la **formation de bulles** d'air lors de l'écoulement, dans le but, ensuite, donner des conditions pour que cela n'arrive pas. En effet une bulle même de petite taille dans une pièce plastique la fragilise. Nous avons donc mis au point un moule comportant un trou avec un coin rentrant suffisamment profond pour que

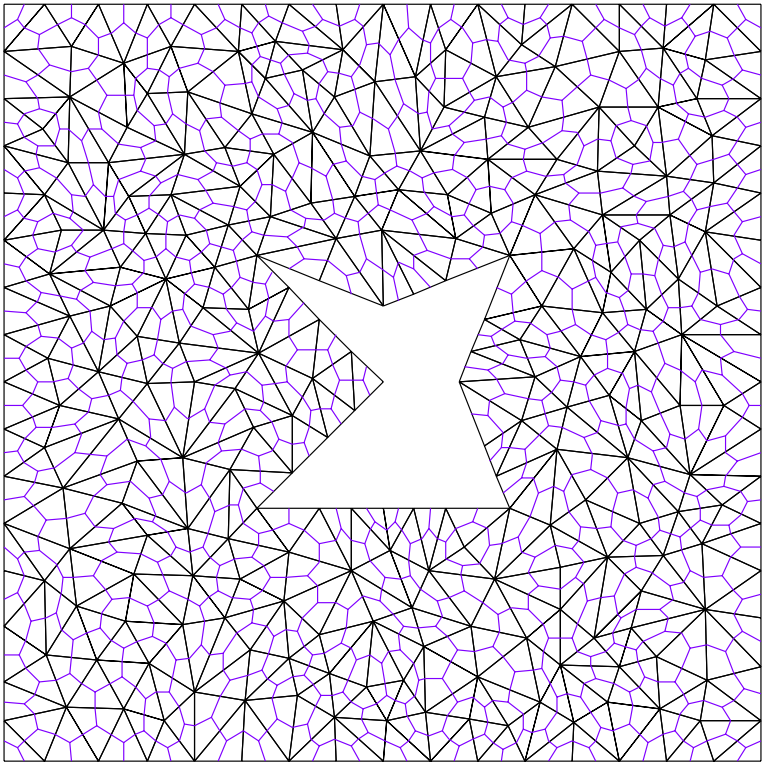


FIG. 4.7 – Test 3 : moule comportant un coin rentrant.

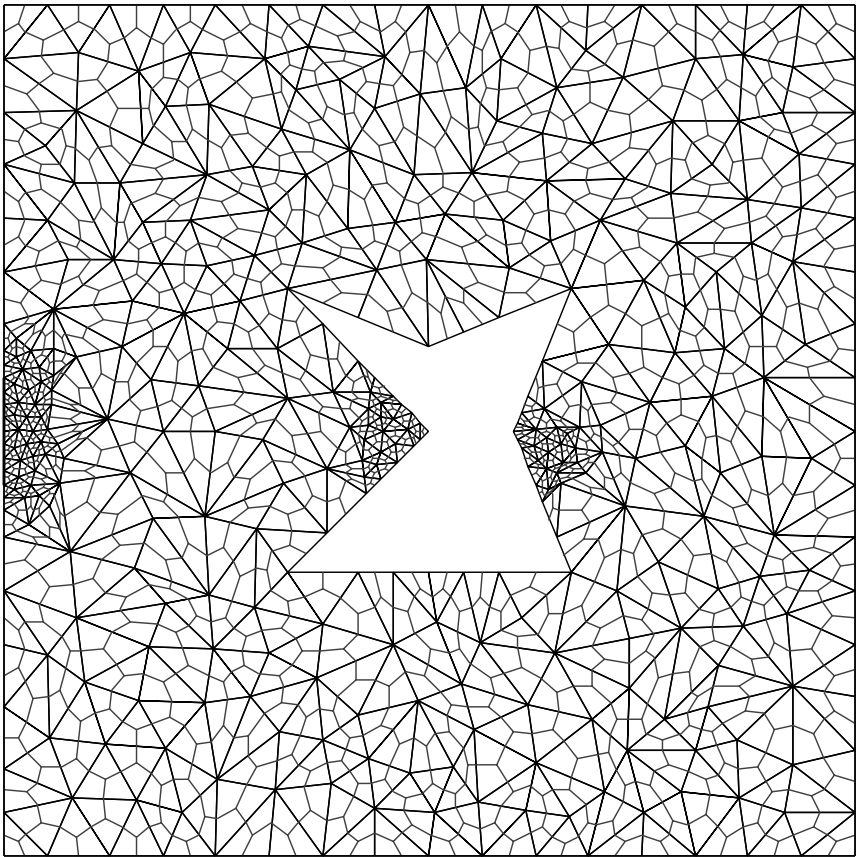


FIG. 4.8 – Test 4 : test 3 avec maillage mieux adapté.

le polymère, visqueux, adhère aux parois et capture une bulle dans le coin. Le maillage (voir figure 4.7) comporte 273 noeuds et 457 éléments. L'injection se fait comme dans le cas précédent par le point situé au milieu de la paroi gauche, et les conditions aux limites sont les mêmes. Remarquons qu'il peut y avoir une **autre bulle** qui se forme en aval du trou lors de la fusion des deux fronts, du fait de la forme particulière de la cavité. Enfin ce trou est un exemple d'écoulement sans symétrie apparente contrairement aux deux exemples précédents. Comme nous l'avons déjà souligné, l'équation de propagation du front étant hyperbolique, a tendance à **transporter l'information** et en particulier les erreurs éventuellement commises lors de la discrétisation. Il paraît donc naturel de **mailler finement** l'empreinte du moule au voisinage du point d'injection. D'autre part, si nous voulons calculer précisément ce qu'il se passe dans les coins, on peut aussi rajouter quelques noeuds à ce niveau. Finalement nous avons proposé un **deuxième maillage** pour le troisième cas test, qui est représenté en figure 4.8.

4.3.4 Résultats numériques, cas incompressible

a) Plaque rectangulaire avec injection en nappe

Dans ce cas test, on injecte le polymère par une série de points d'injection équi-répartis sur la frontière gauche; ainsi le front se déplace-t-il en nappe, celle-ci se déformant si le contact entre le plastique et la paroi du moule est collant. Ci-dessous sont représentés les résultats de simulation dans les deux cas : contact collant ou non collant. La condition initiale est la même pour les deux cas : on suppose que le fluide occupe une petite partie de l'empreinte (voir figure 4.9). Après 0,2 secondes d'écoulement les deux modes de calculs

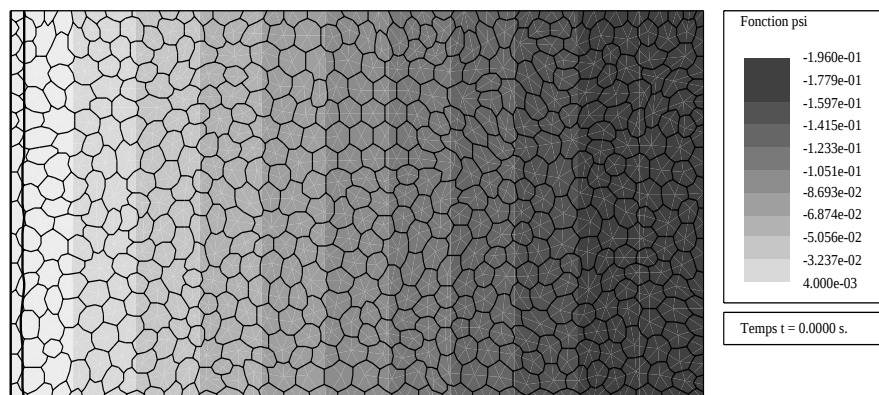


FIG. 4.9 – Valeur initiale.

se différencient légèrement, le front calculé en contact collant avançant plus lentement que l'autre (figure 4.11). **Le temps de passage au milieu de moule est cohérent** par rapport au débit imposé en entrée et le volume du moule, le remplissage devant se faire en 0,4 secondes.

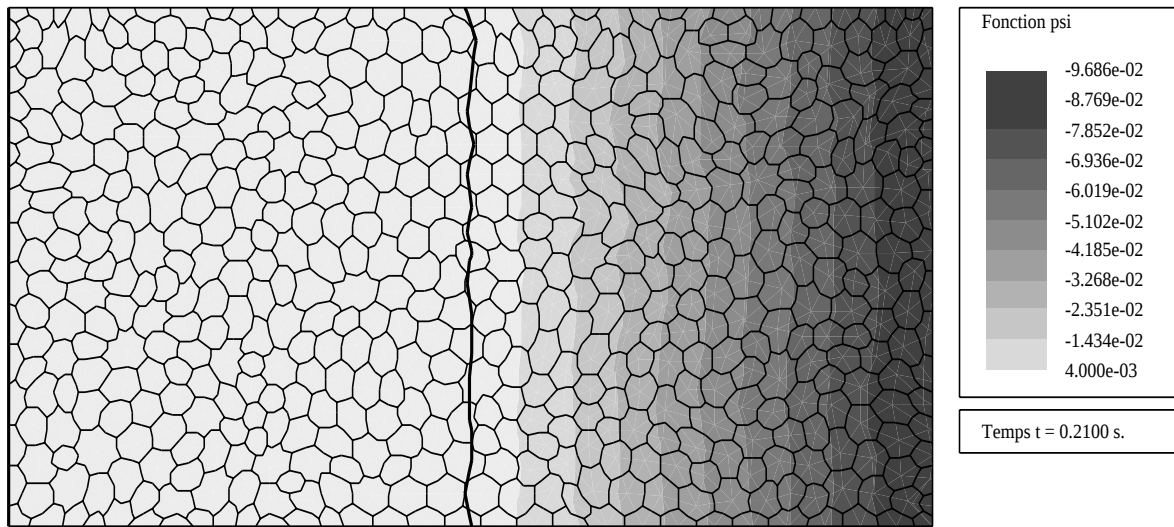


FIG. 4.10 – Position du front à $t = 0,2$ s. Contact non collant.

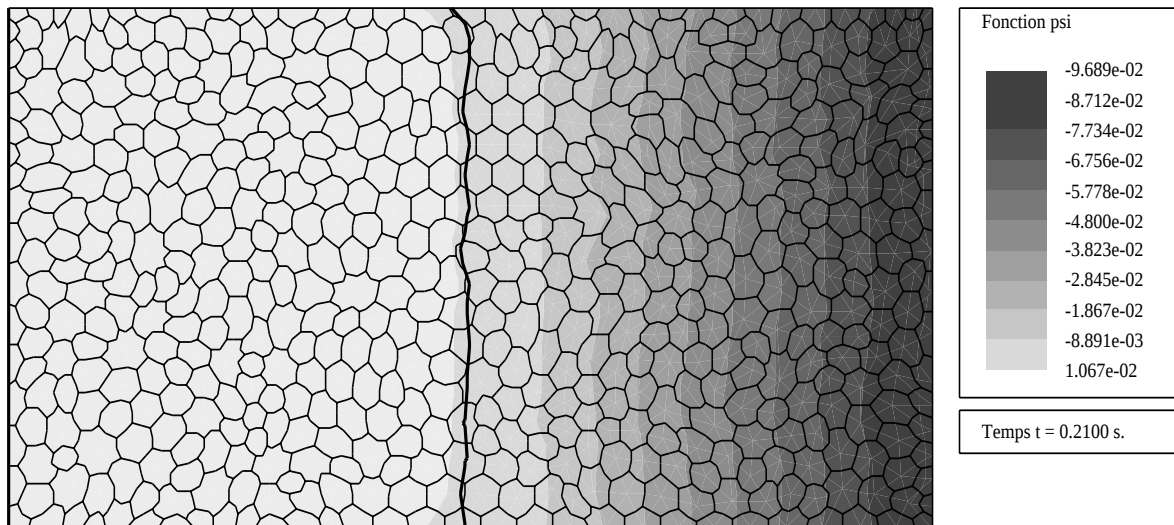
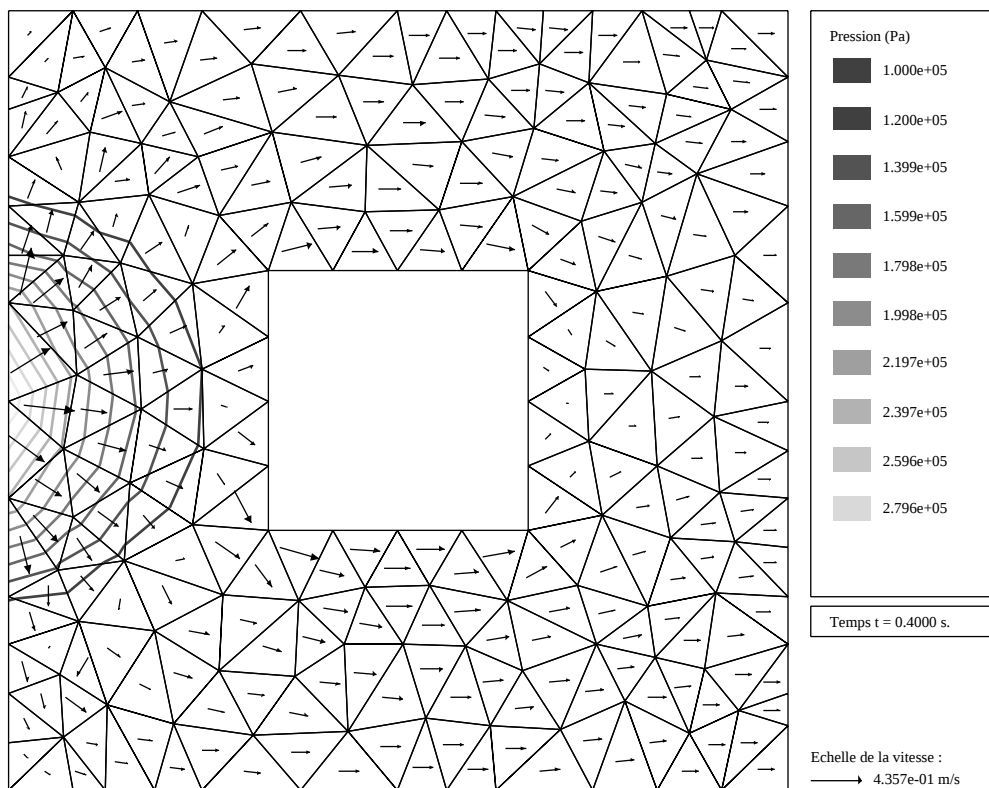
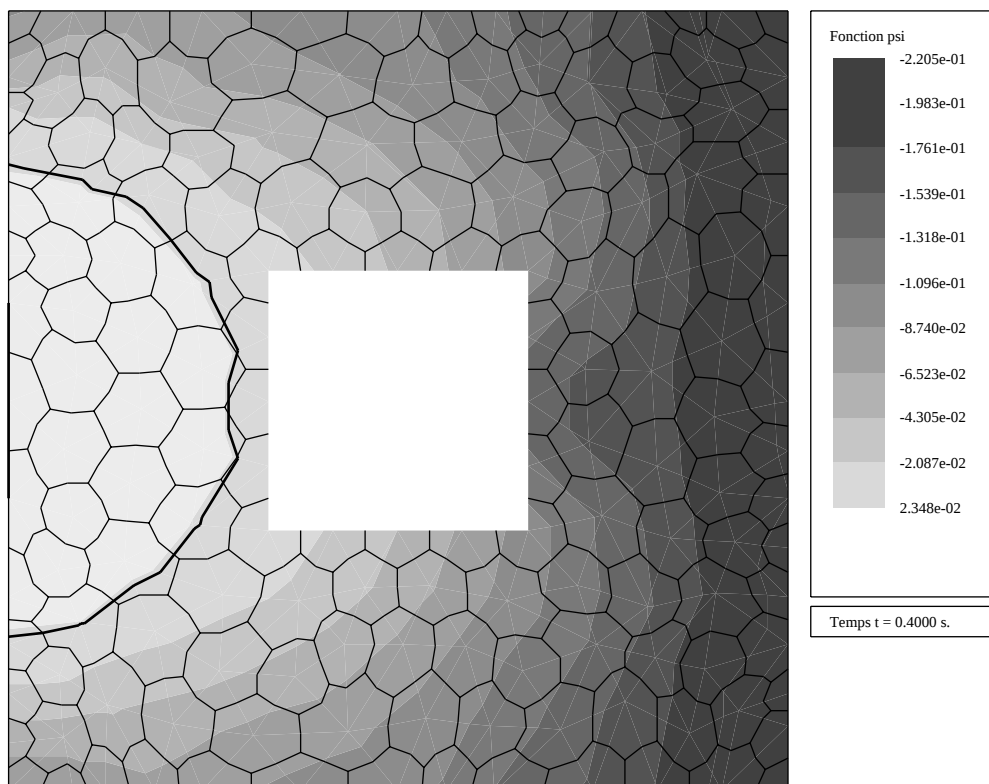
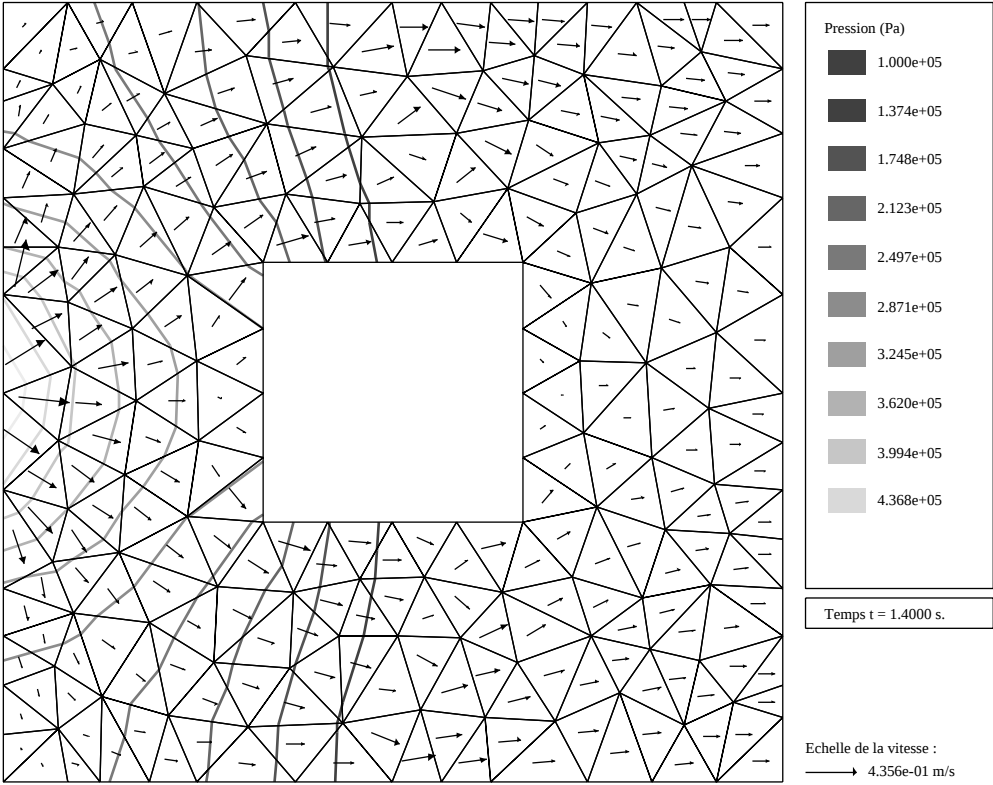
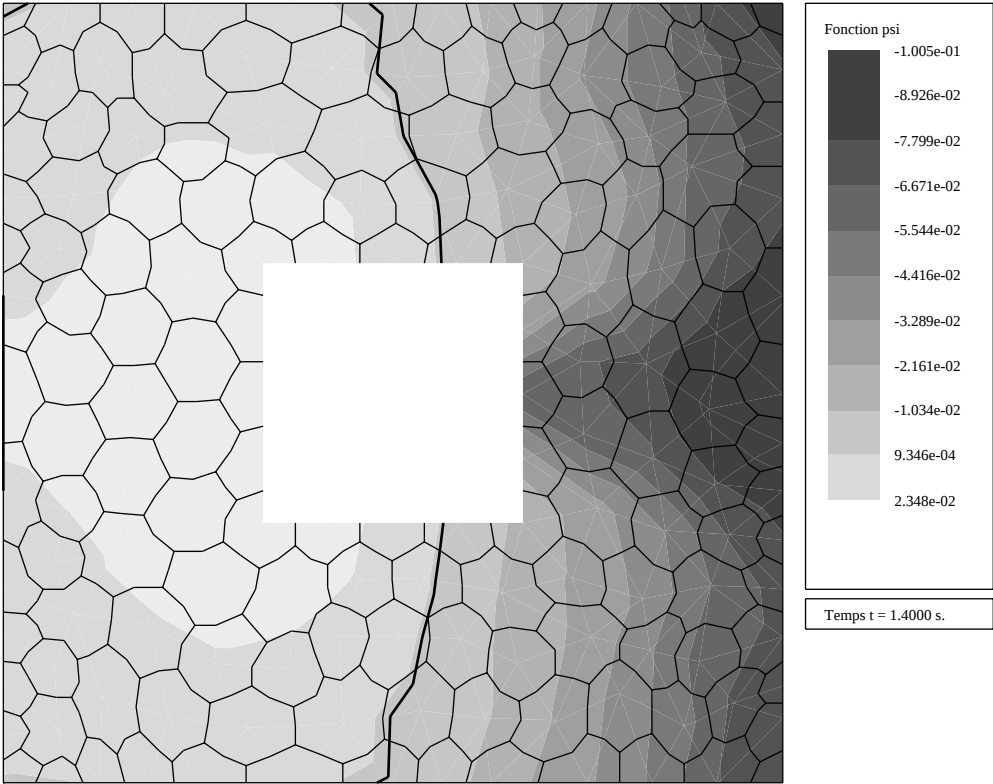


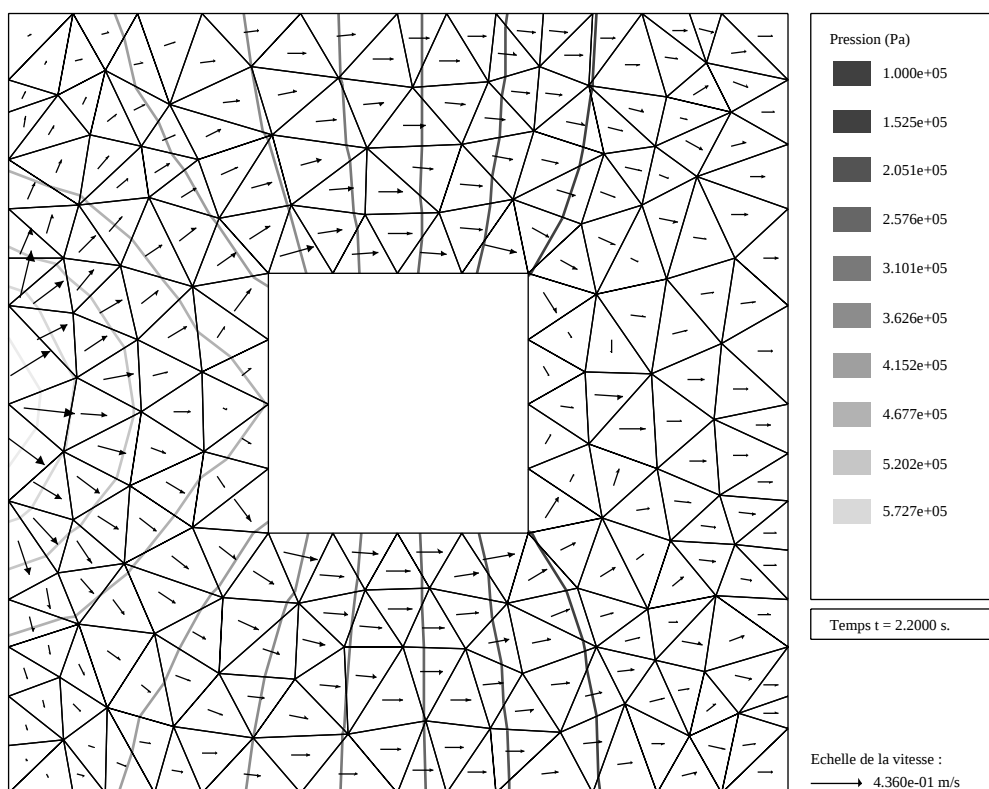
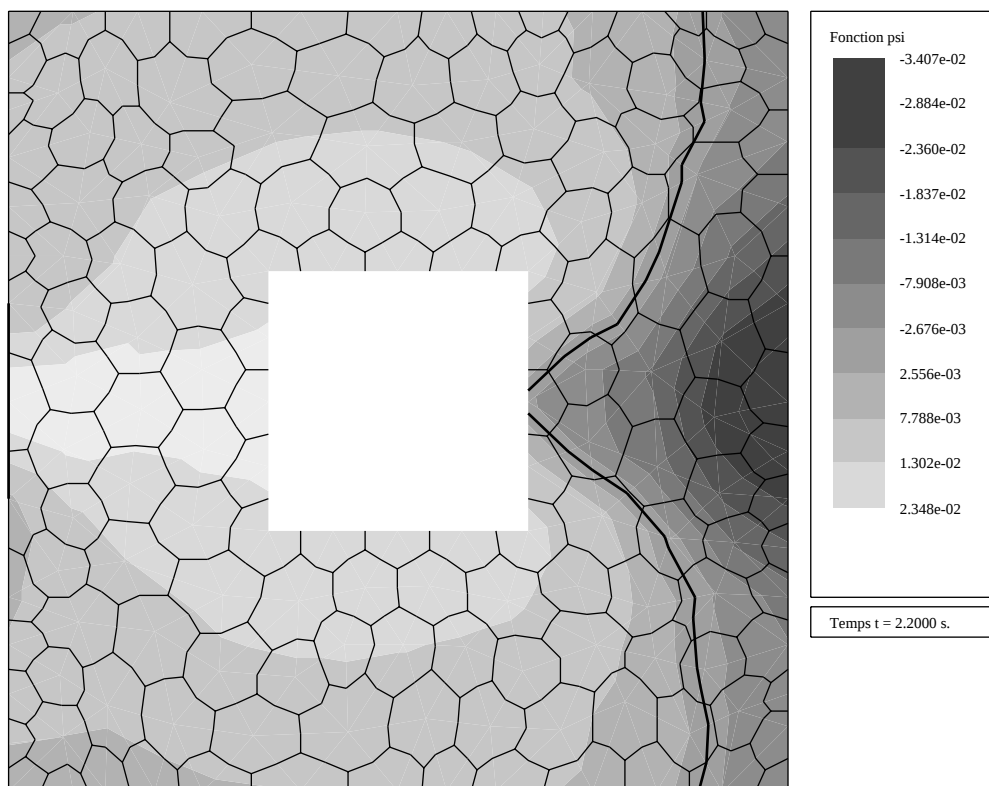
FIG. 4.11 – Position du front à $t = 0,2$ s. Contact collant.

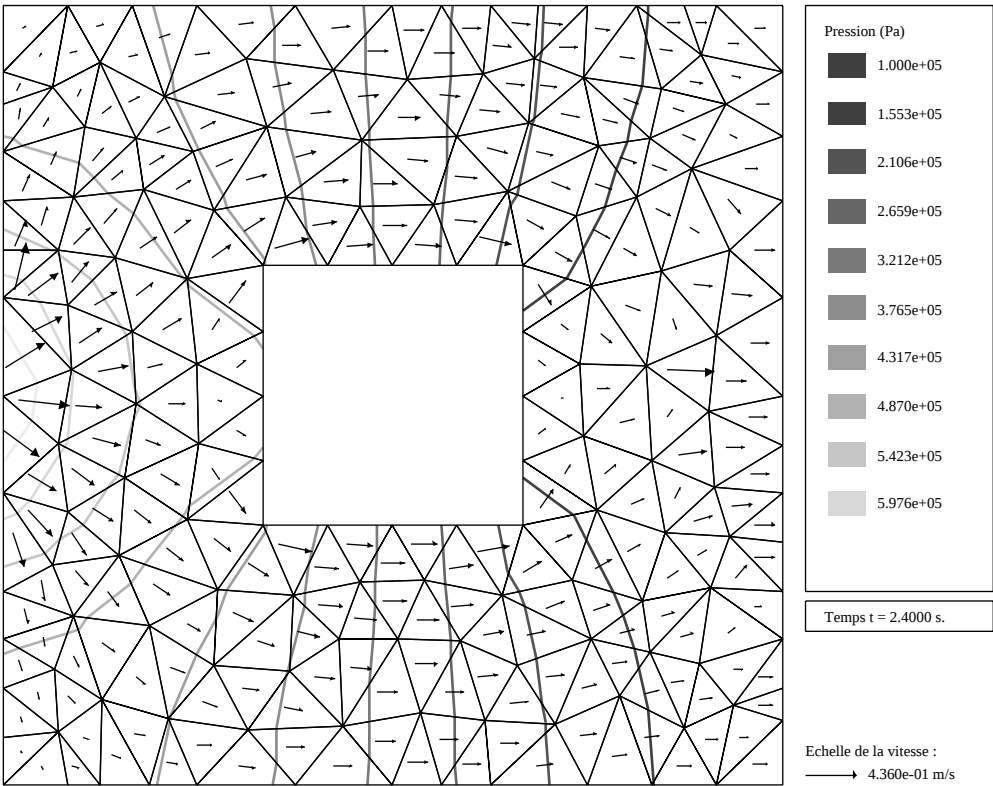
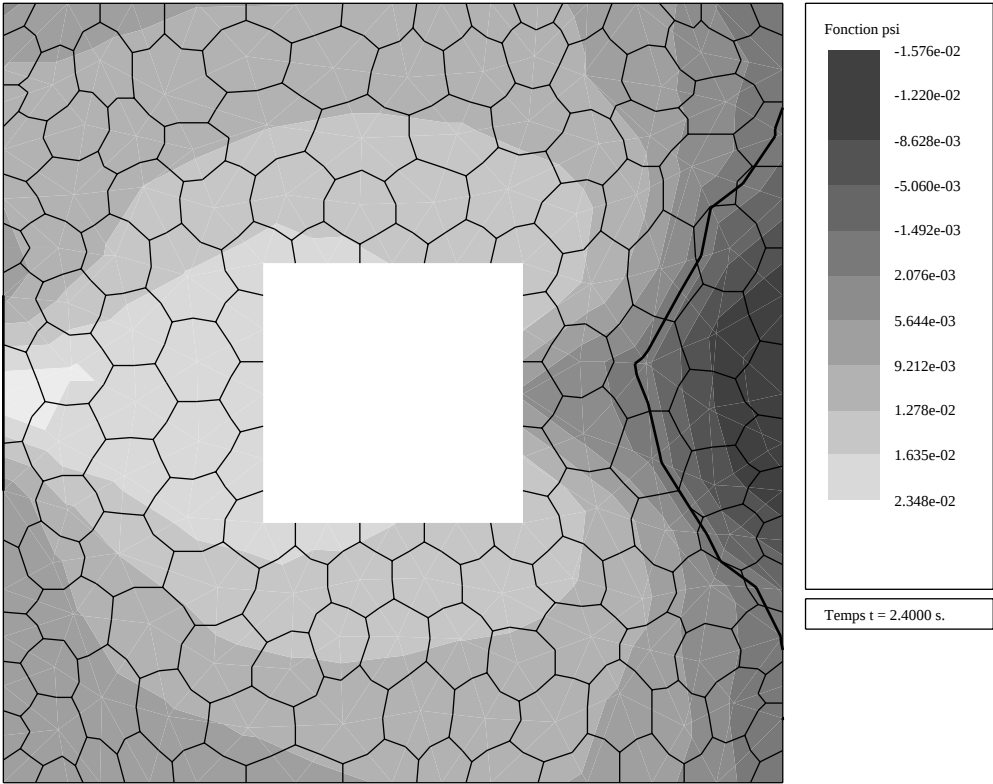
b) Plaque carrée perforée

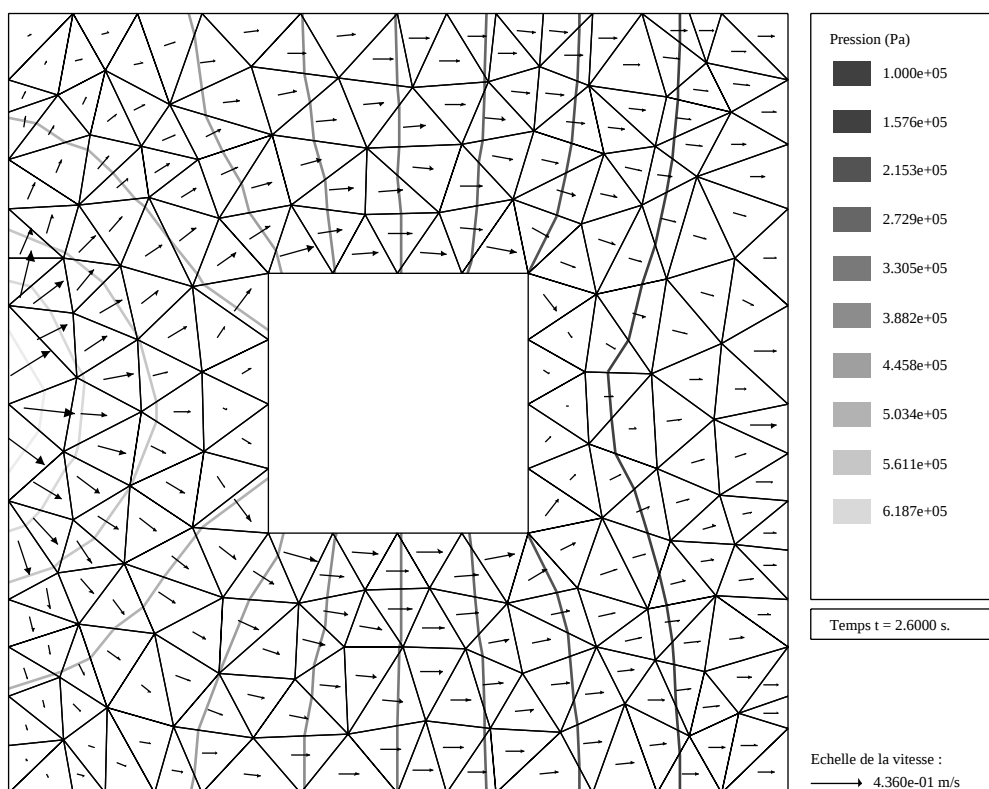
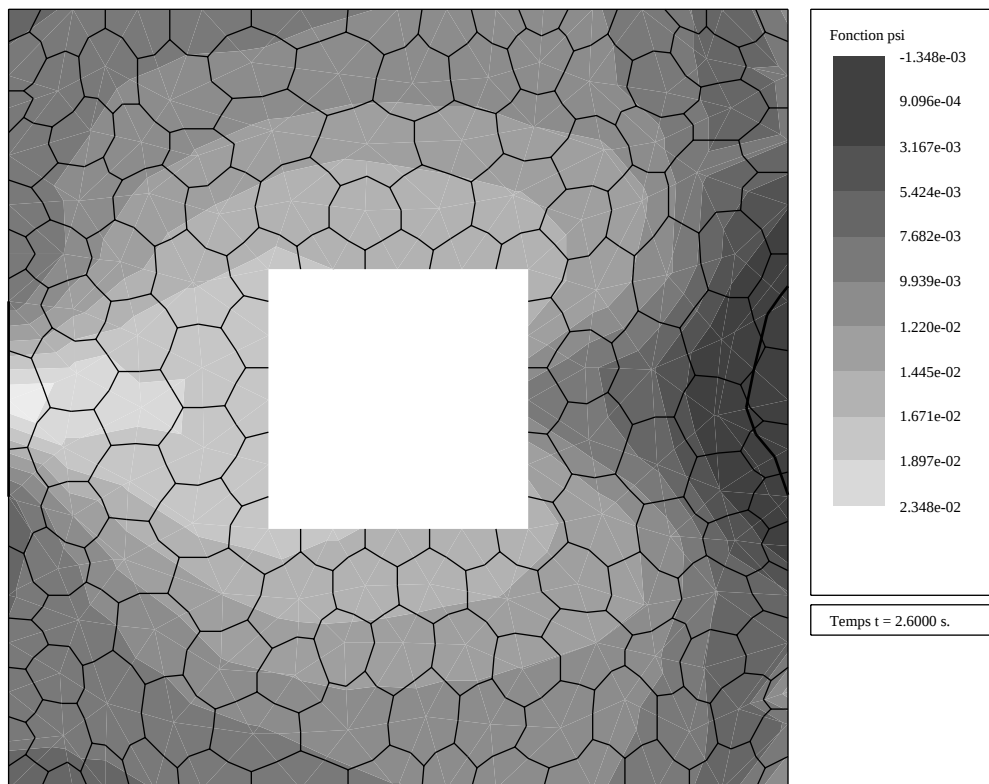
La condition initiale en ψ a été représentée figure (4.4). Nous avons représenté ci-dessus les isovalues de la fonction ψ et de la pression, ainsi que le champ de vitesse pour certains pas de temps.

1^{er} cas : contact non collant

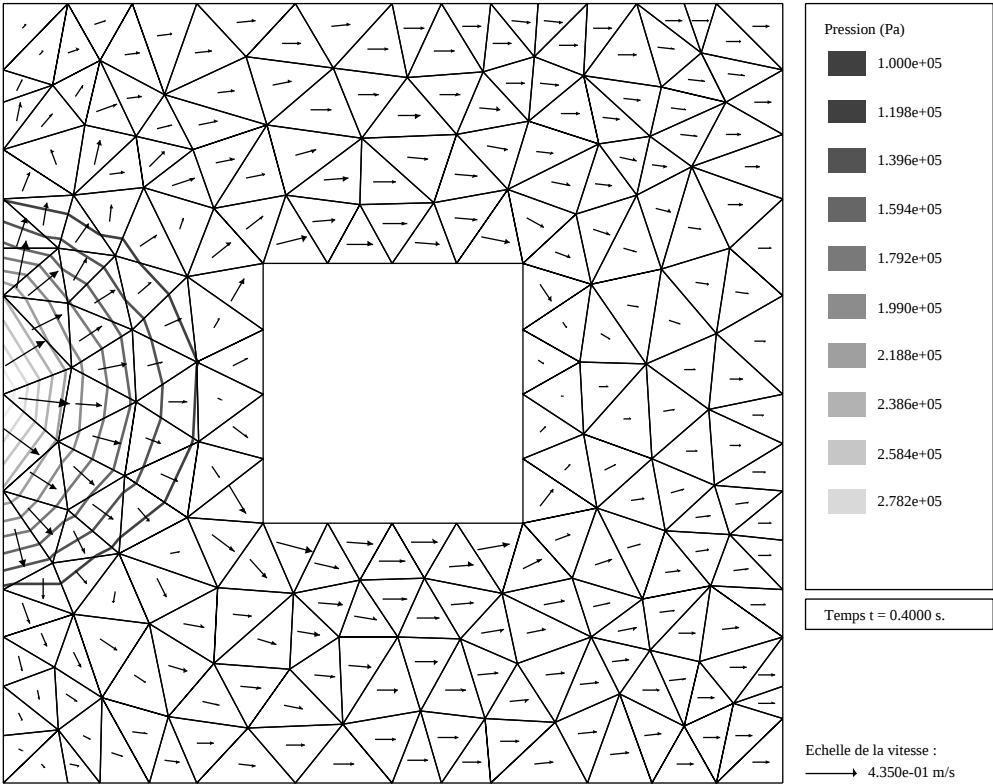
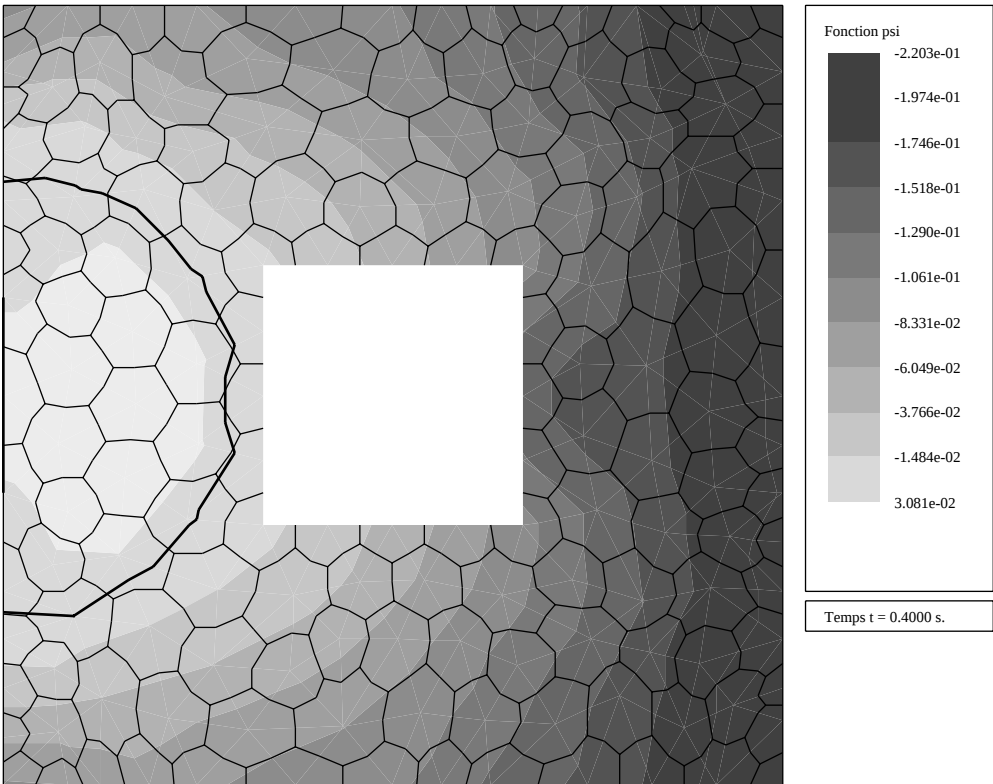


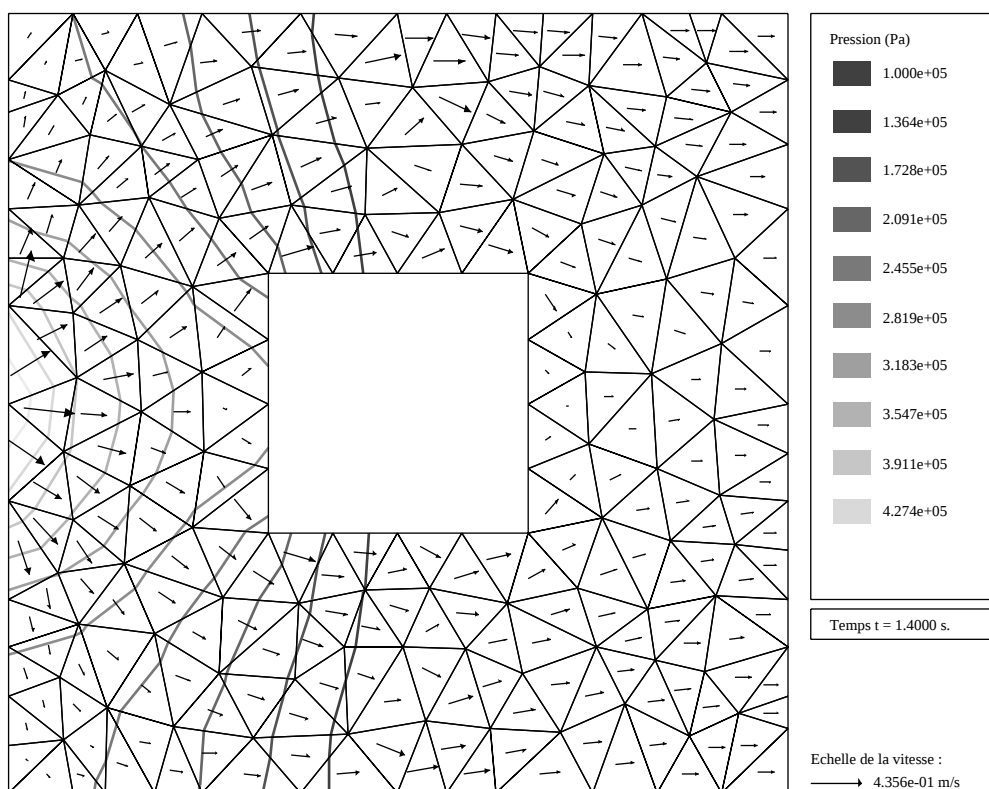
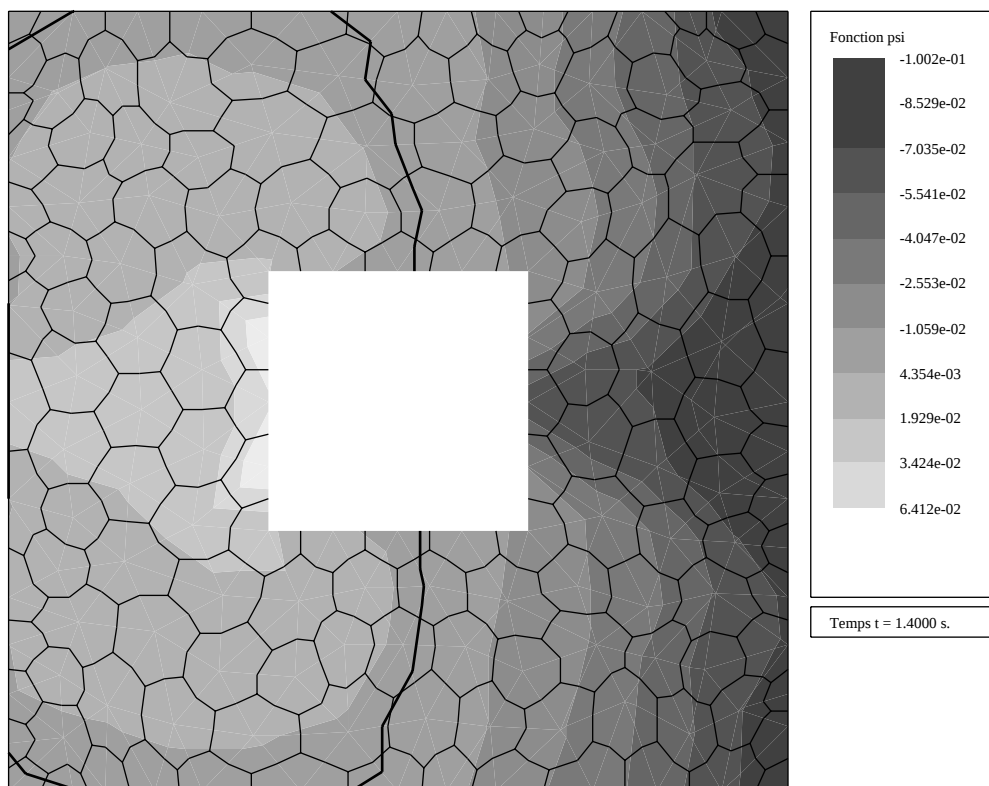


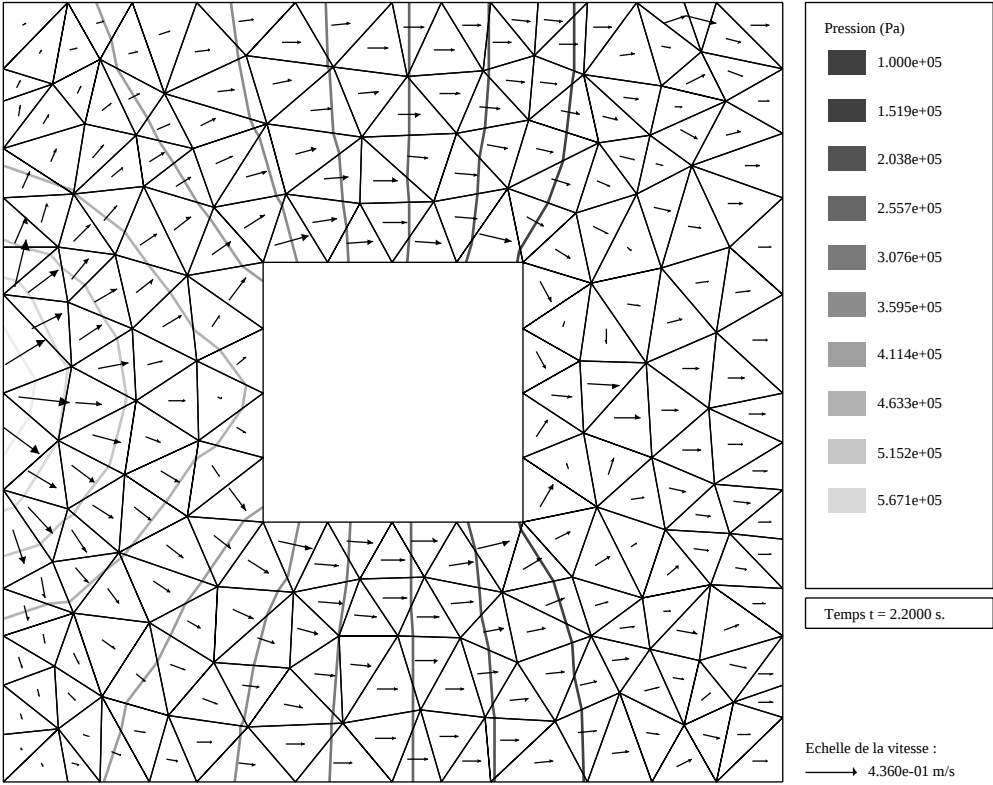
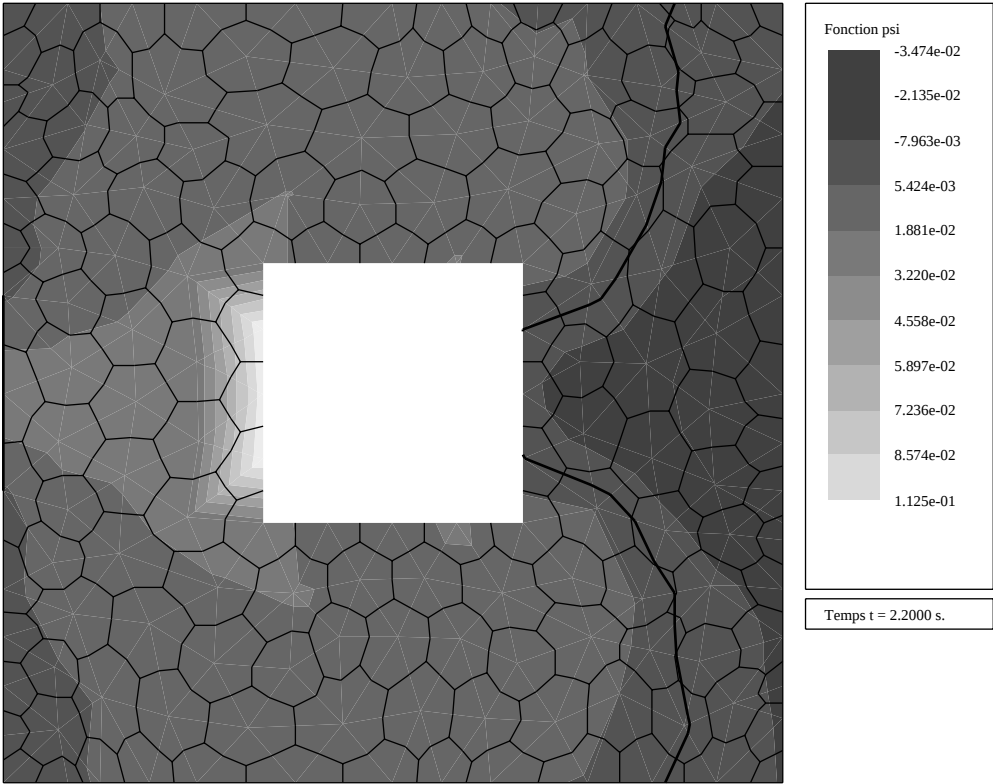


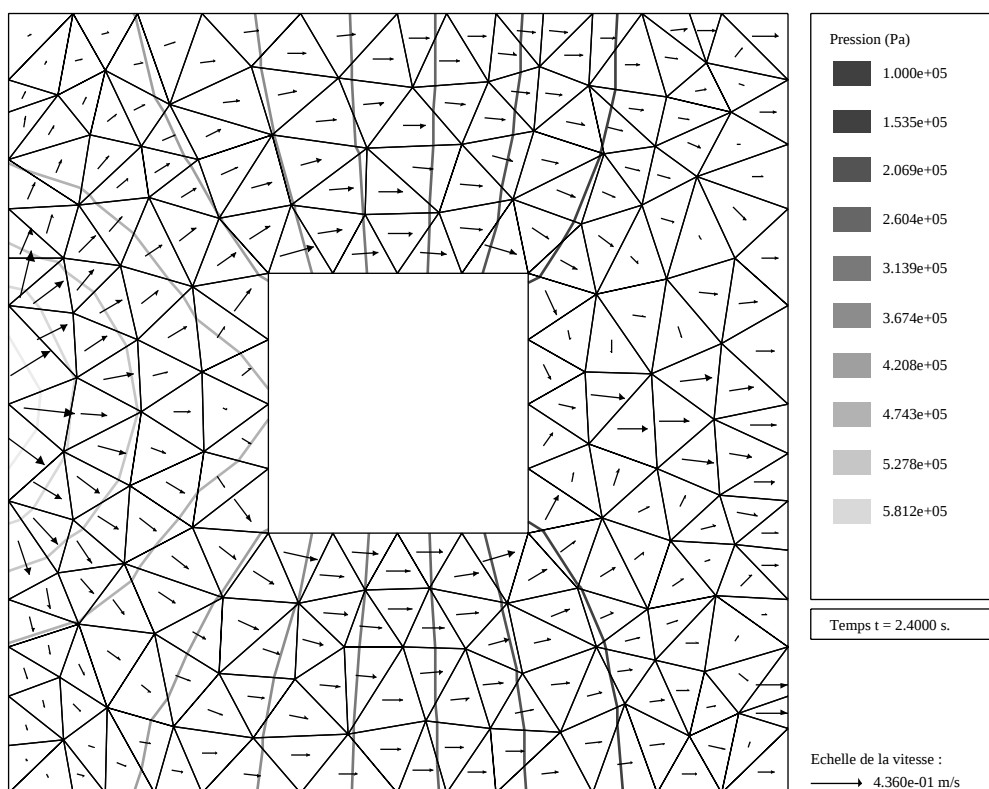
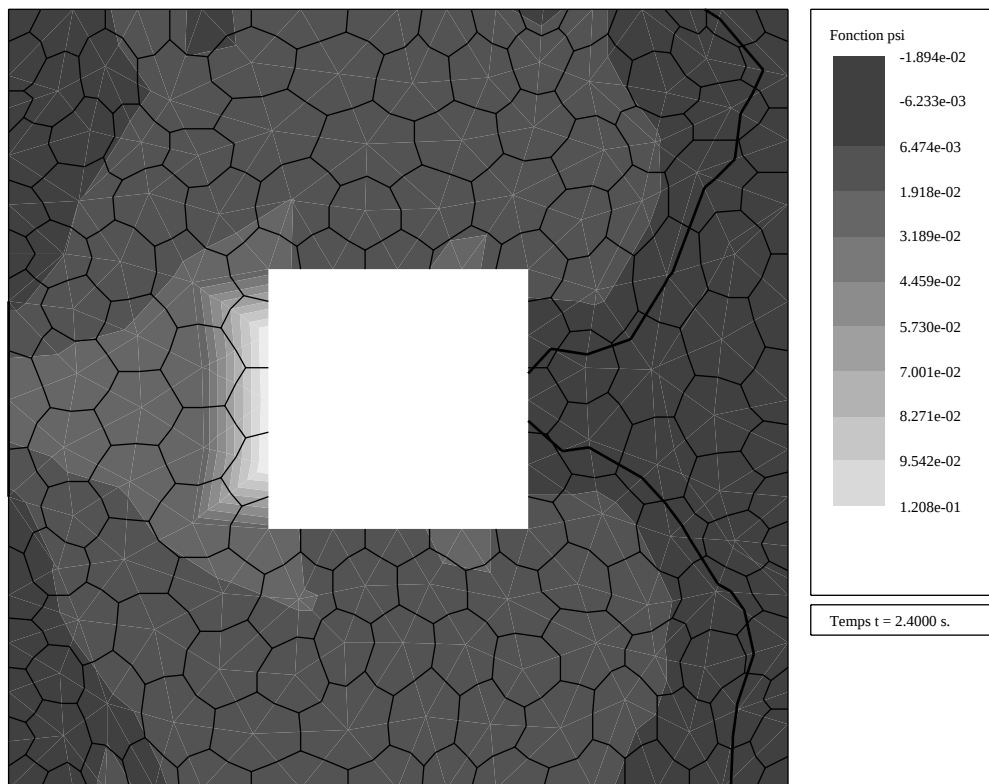


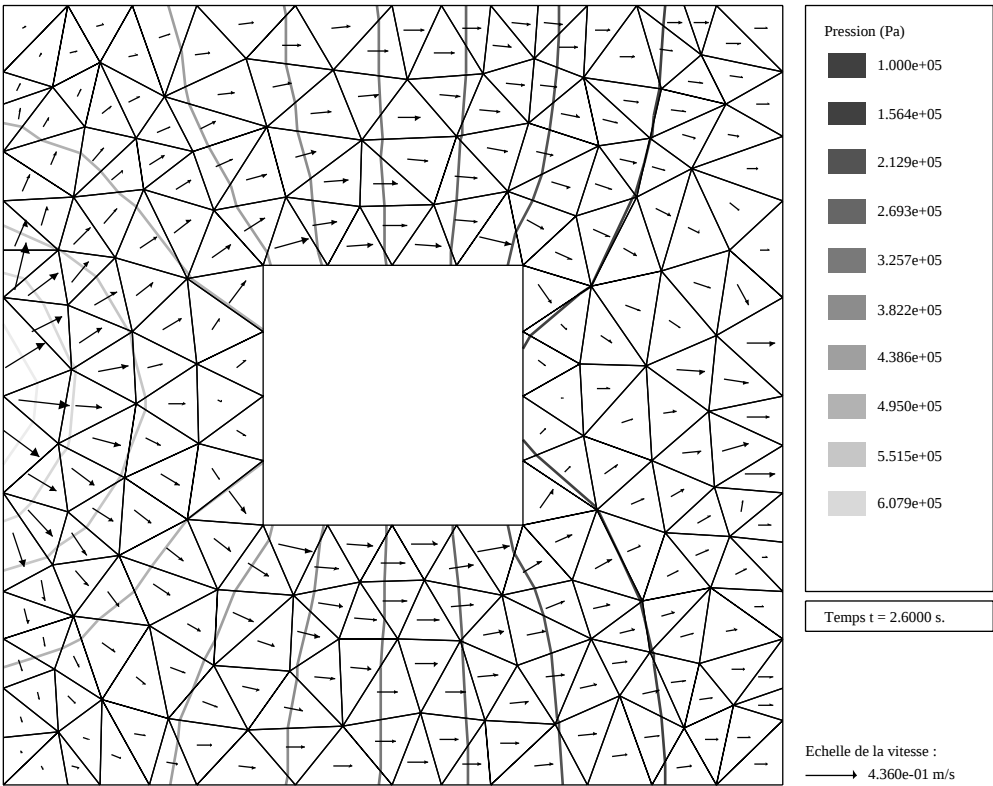
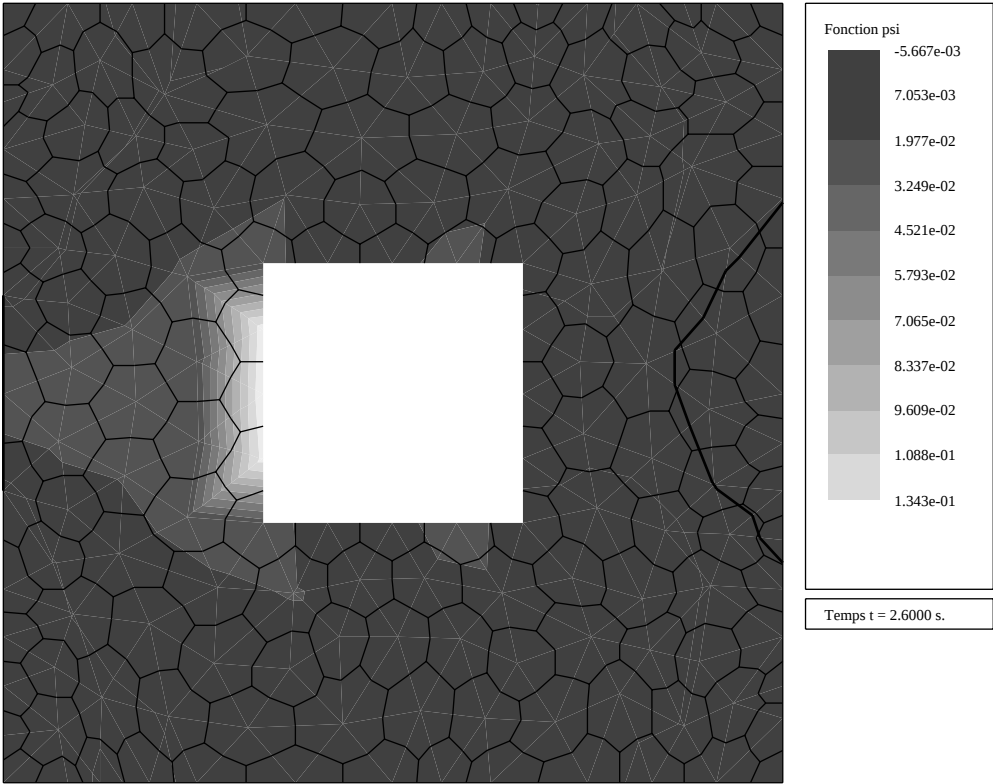
2nd cas : contact collant



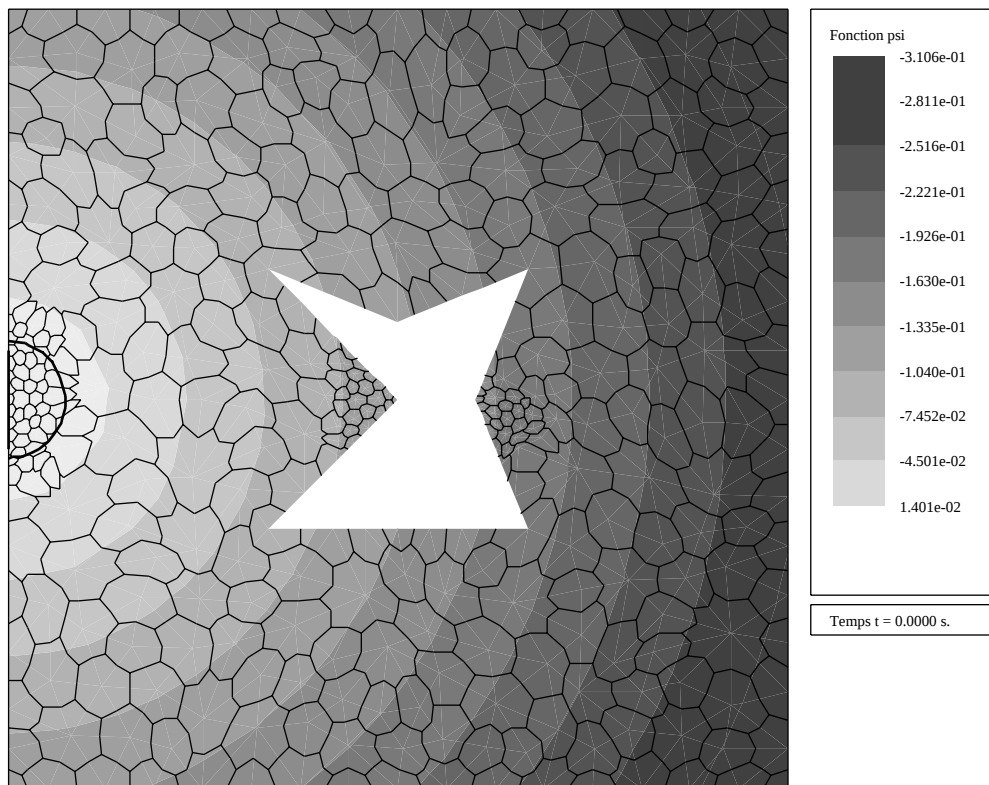


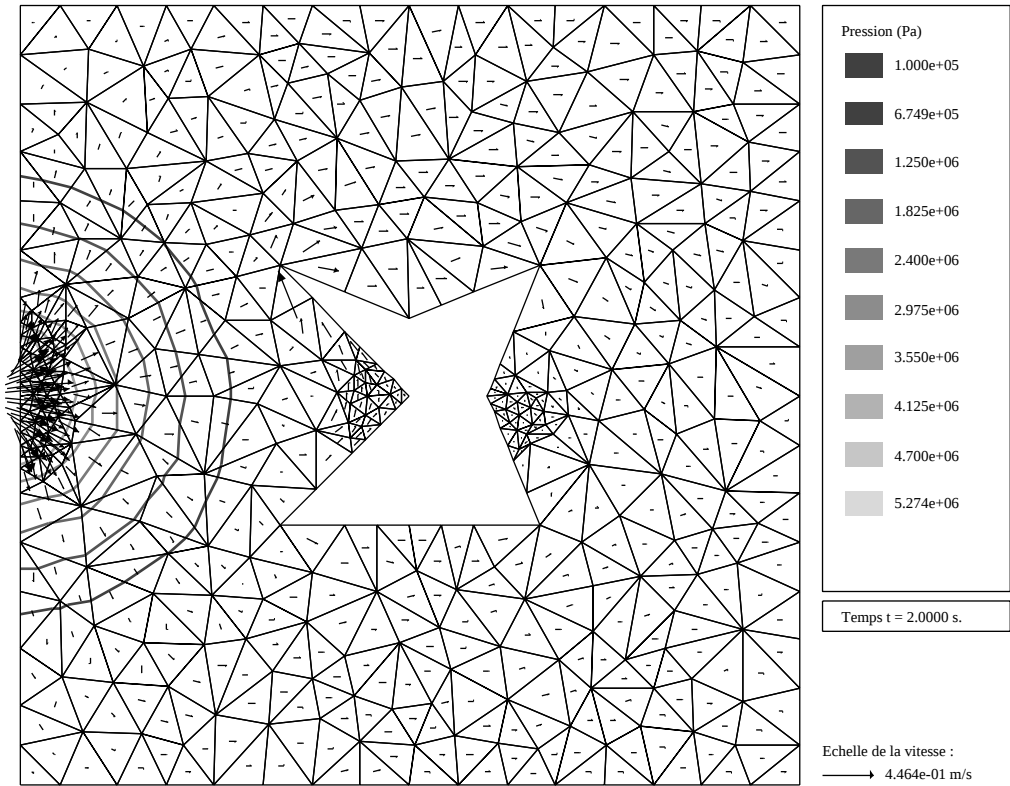
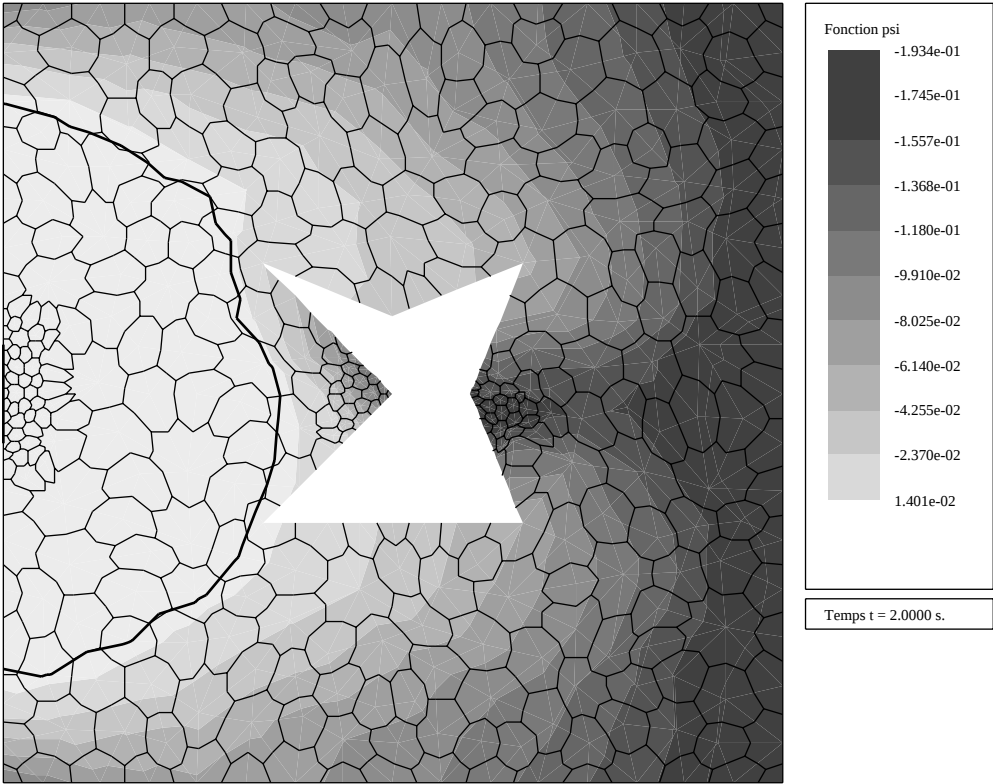


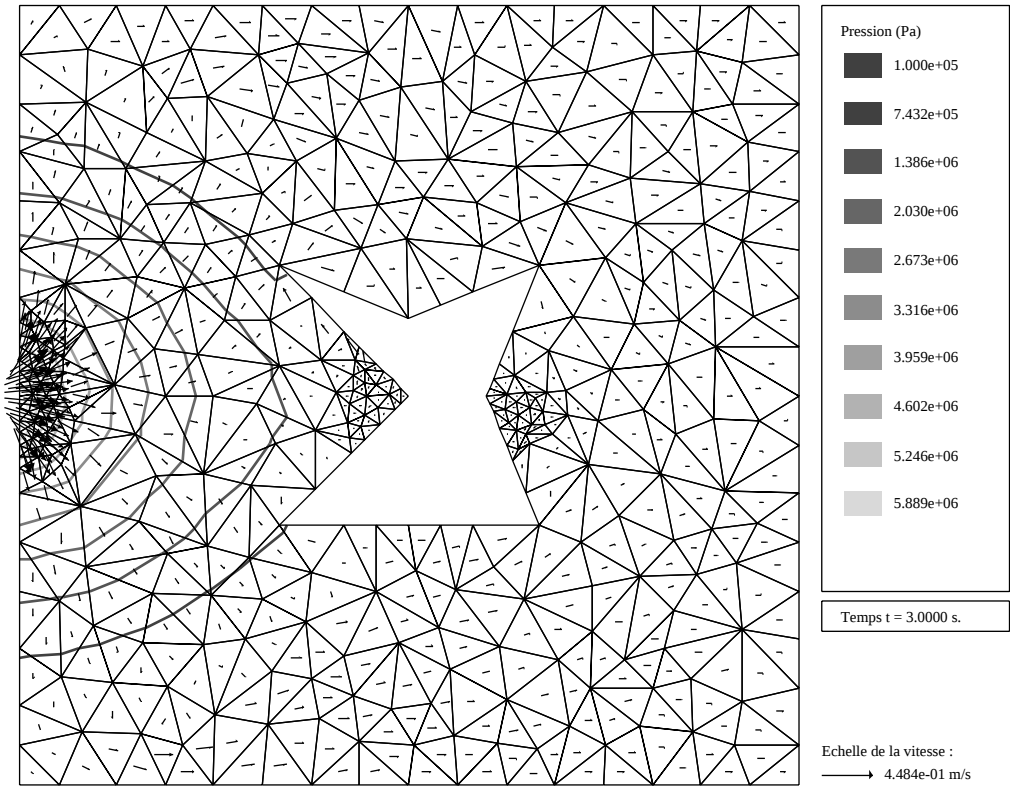
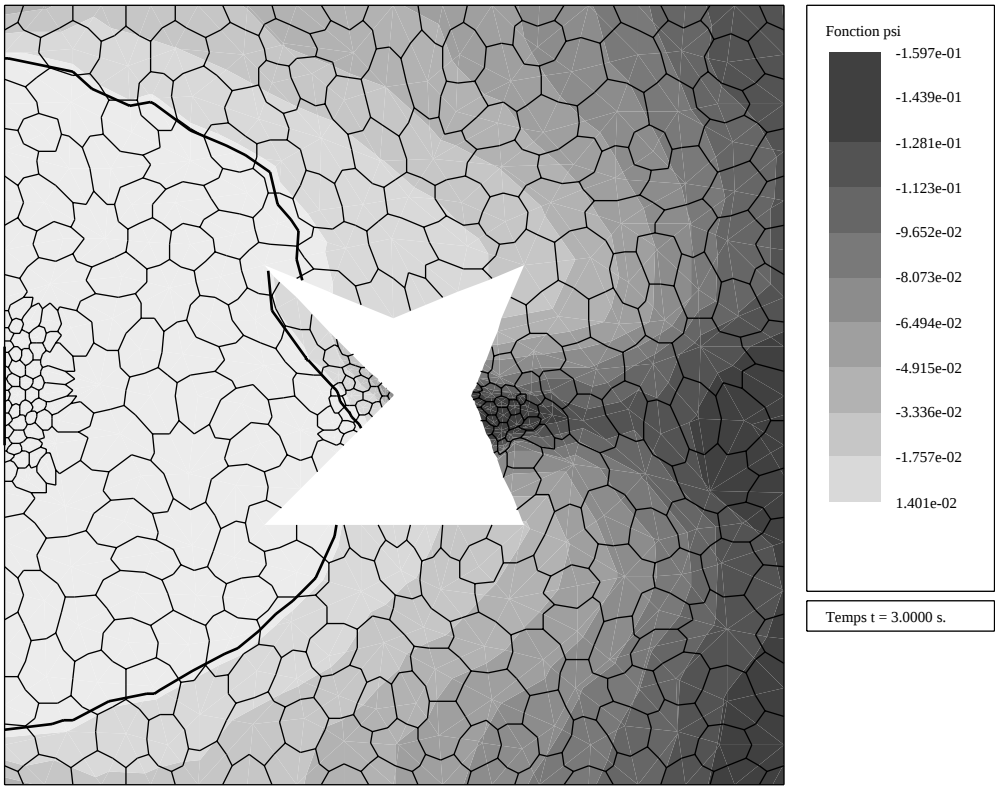


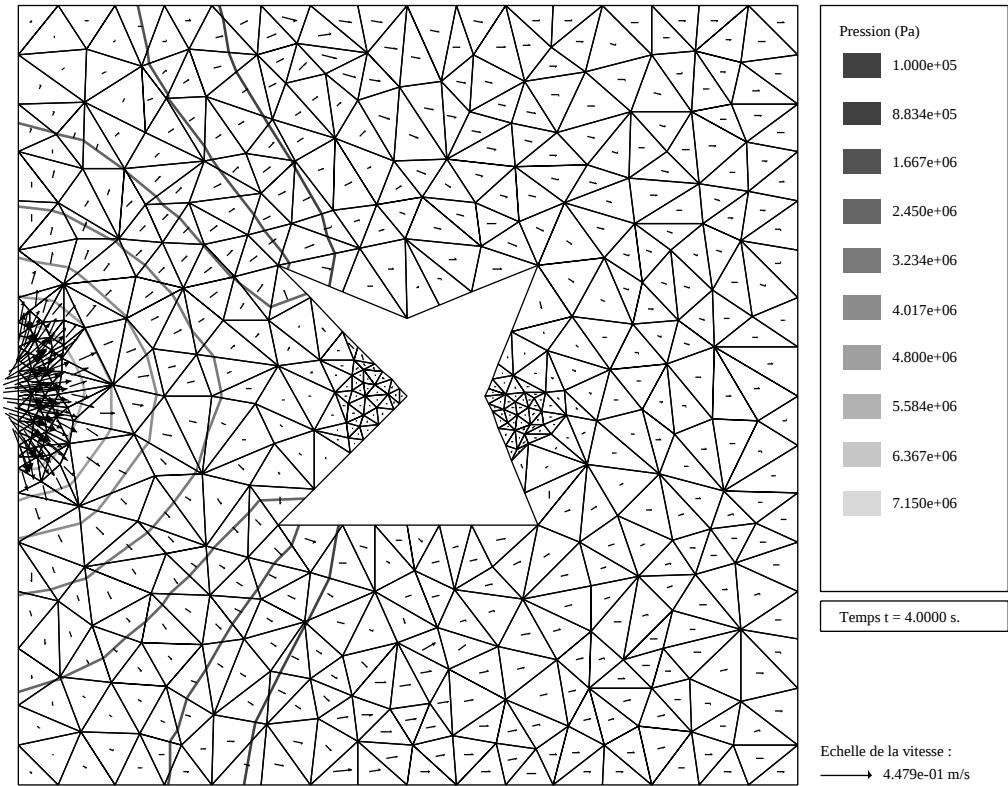
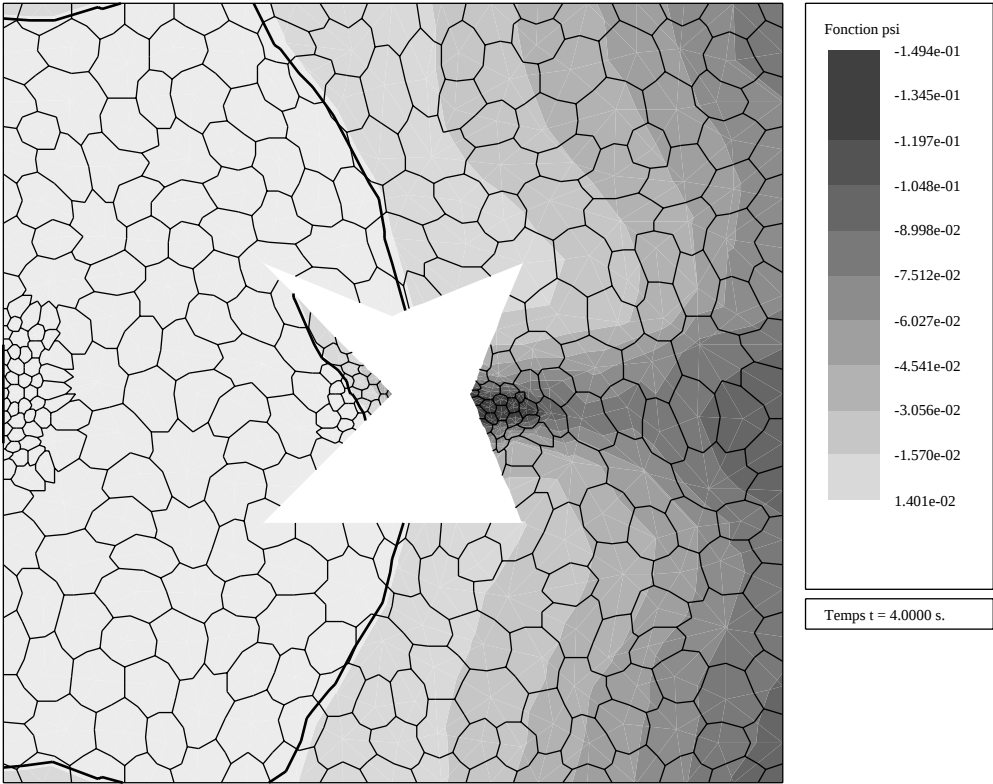


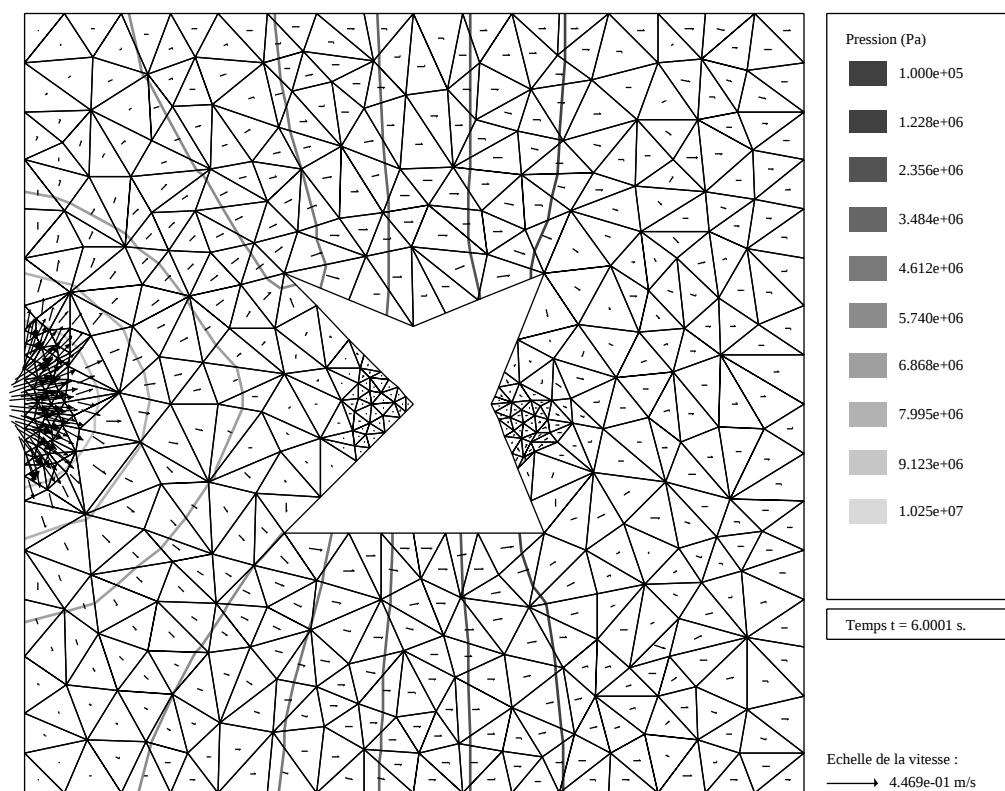
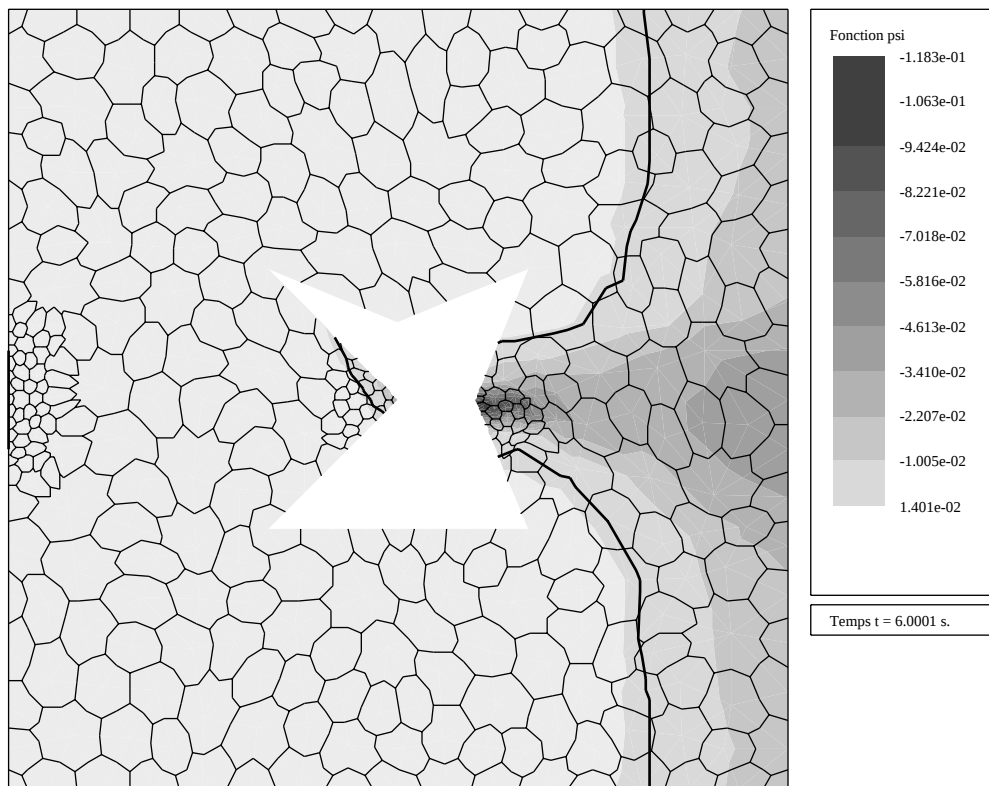
c) Plaque perforée avec coin rentrant, contact non collant

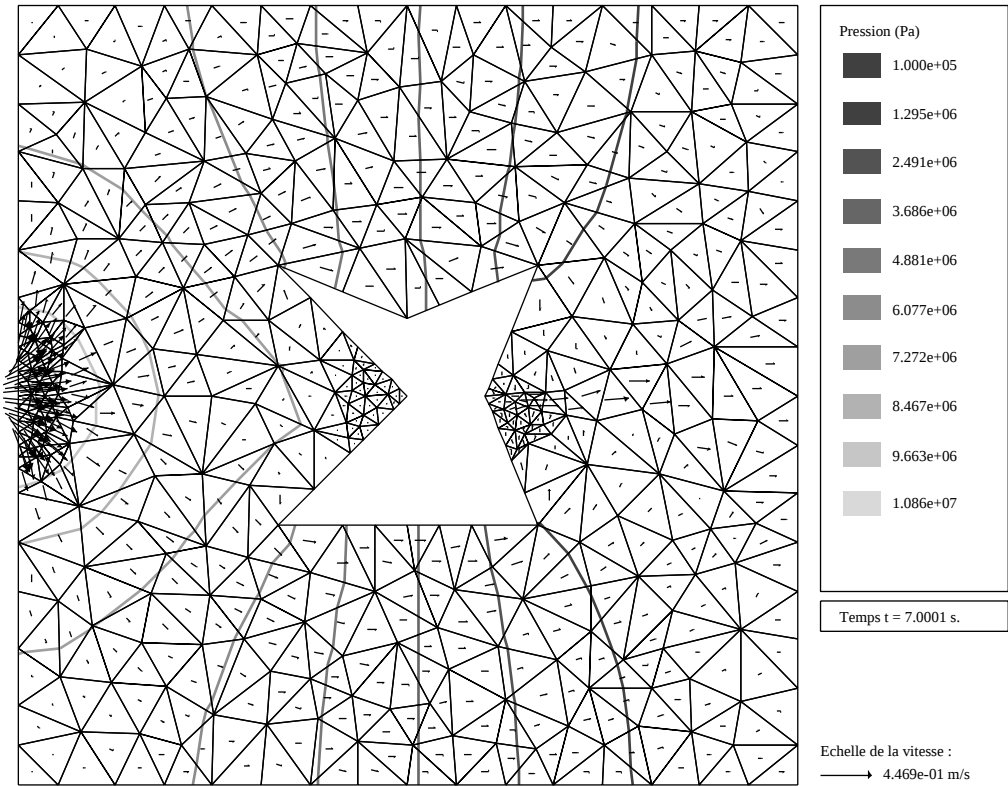
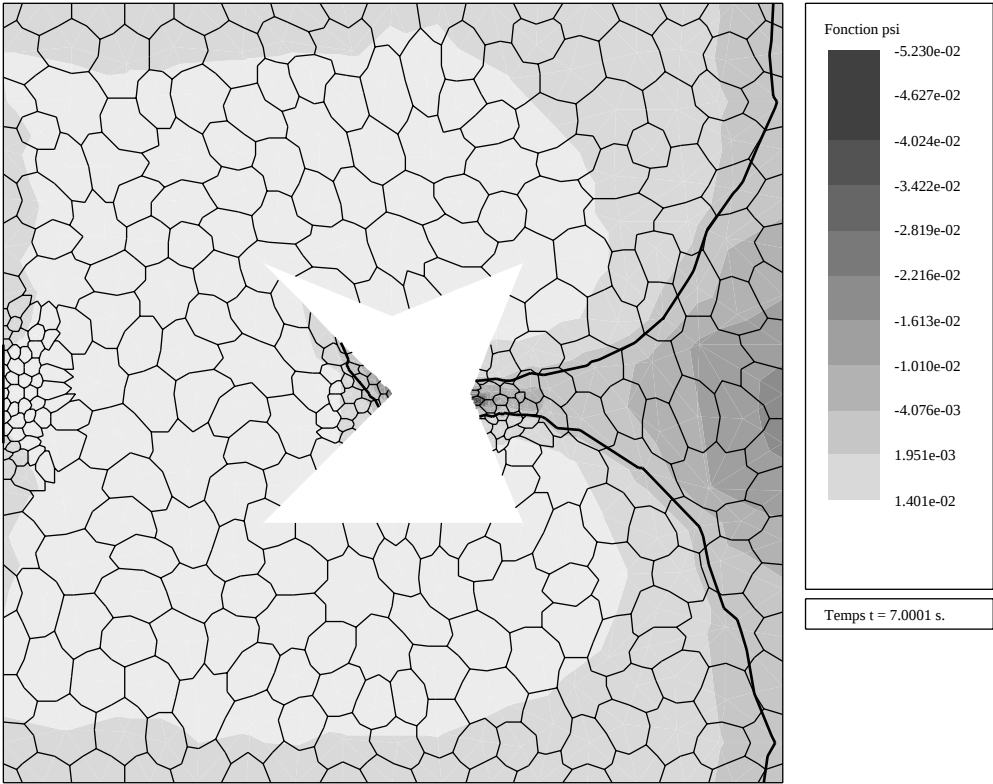


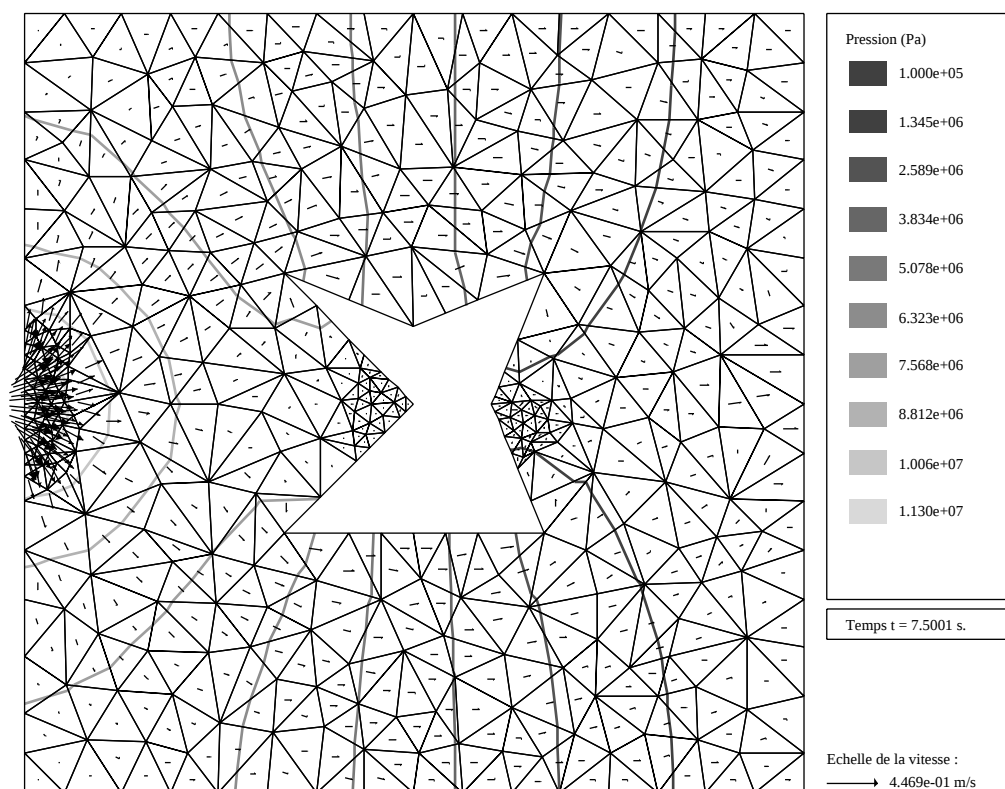
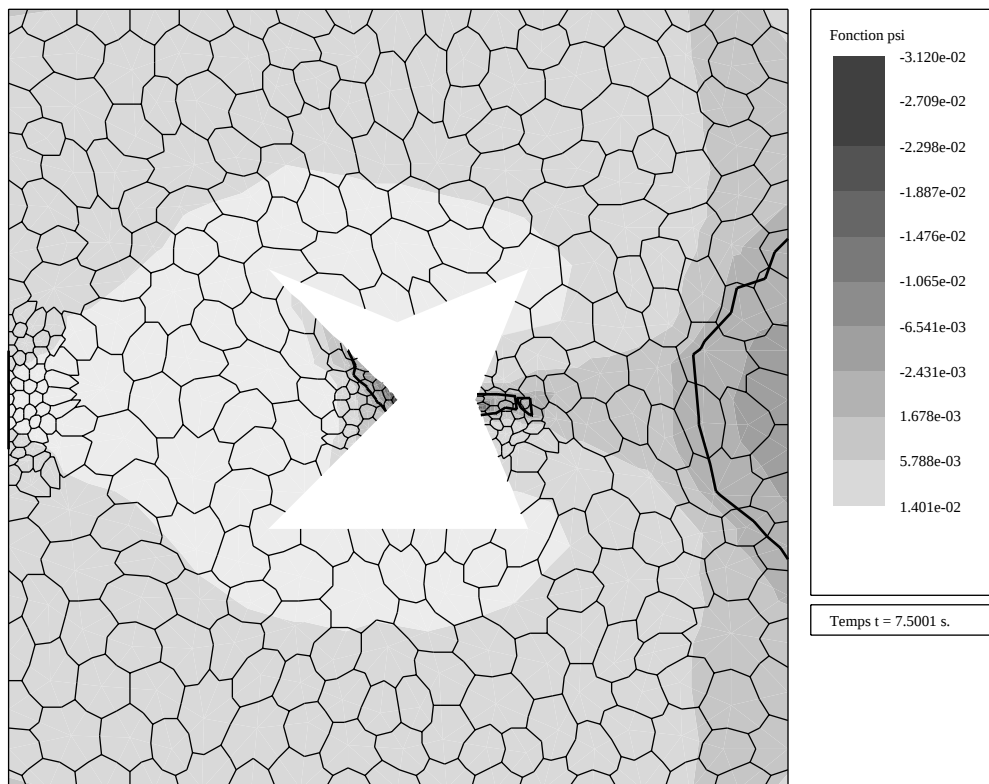


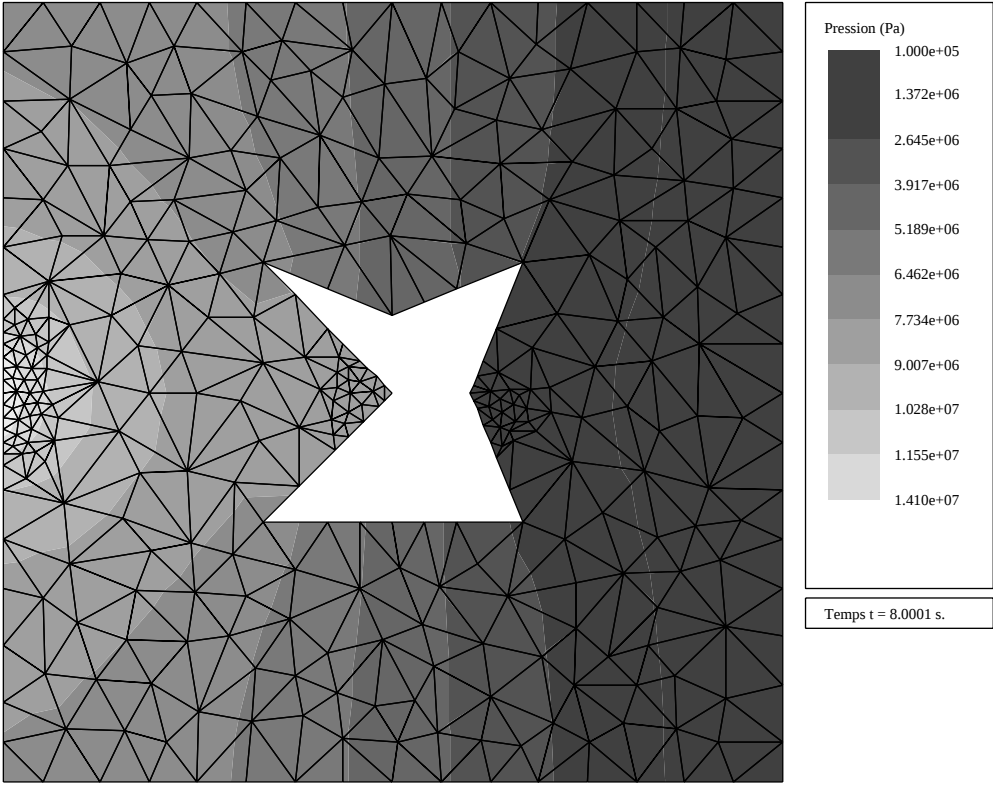
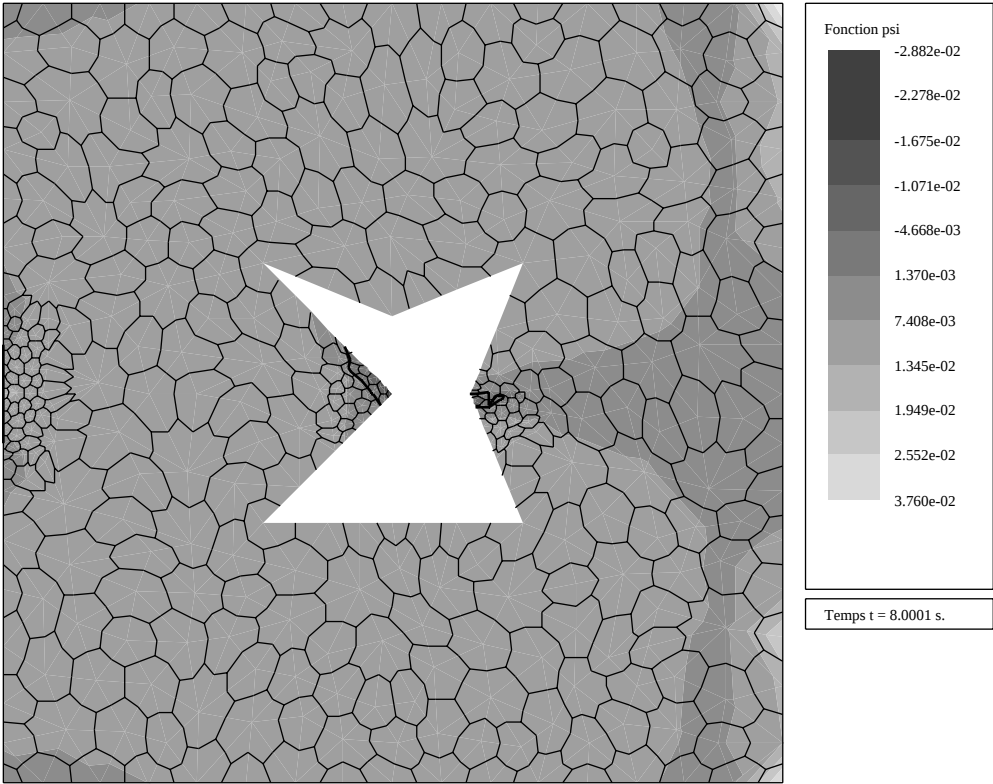








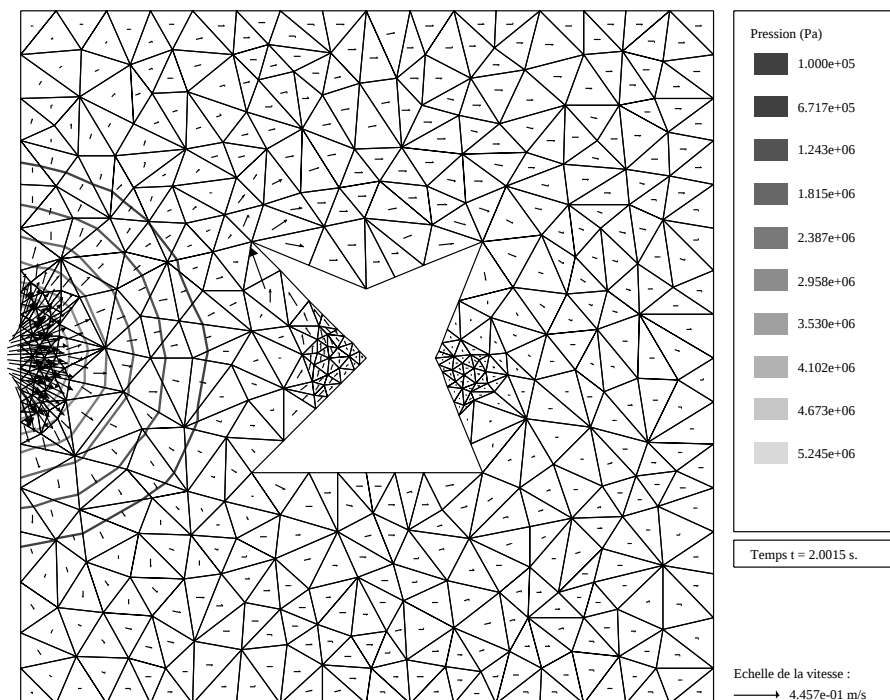
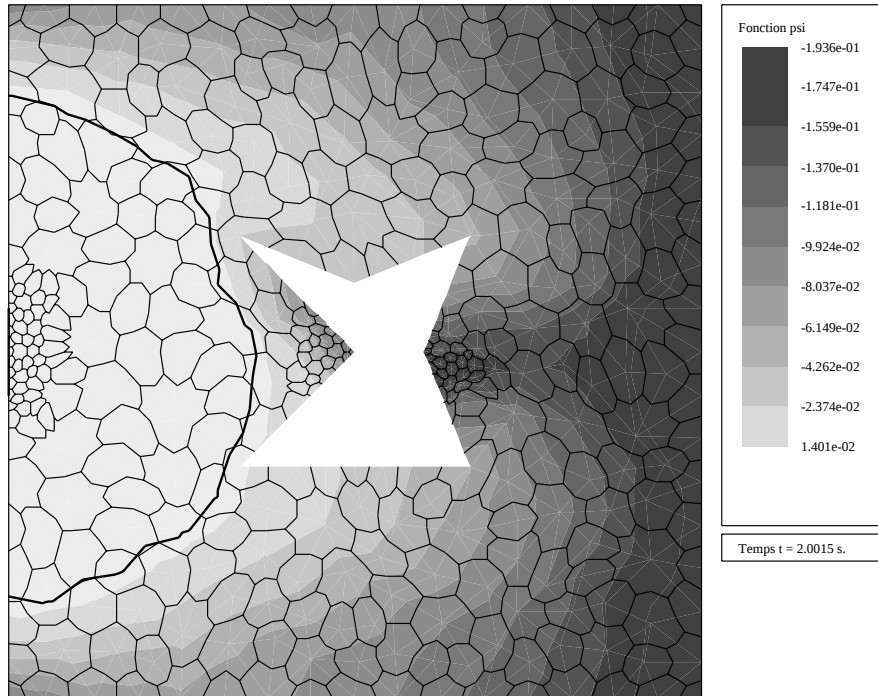


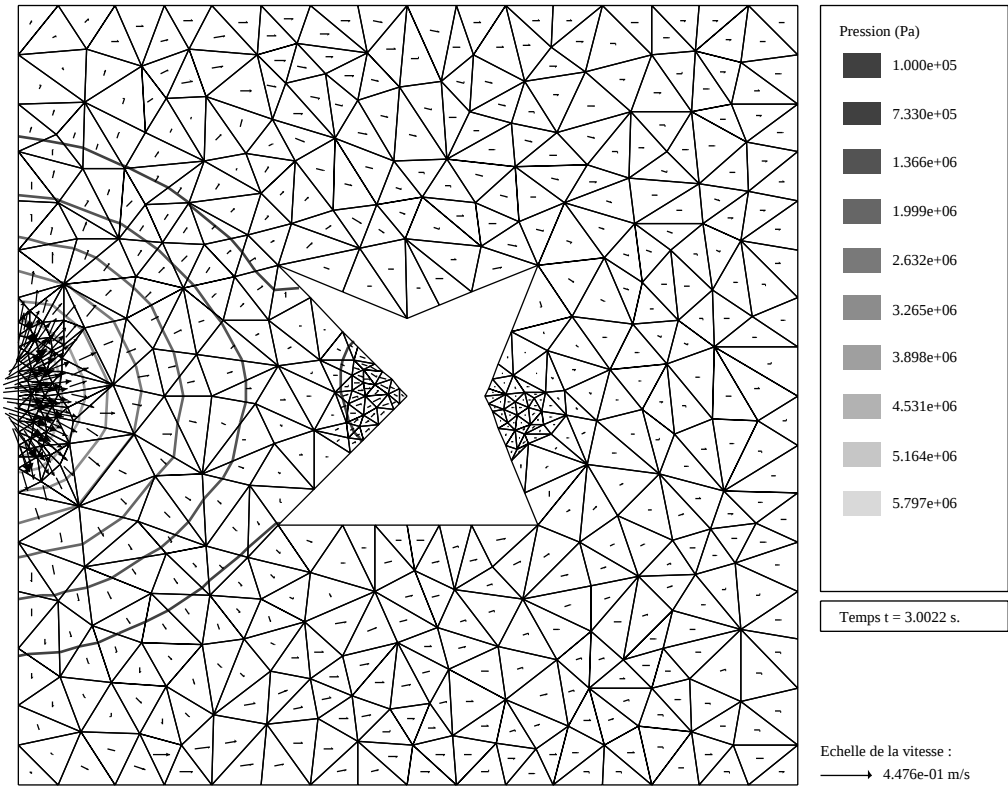
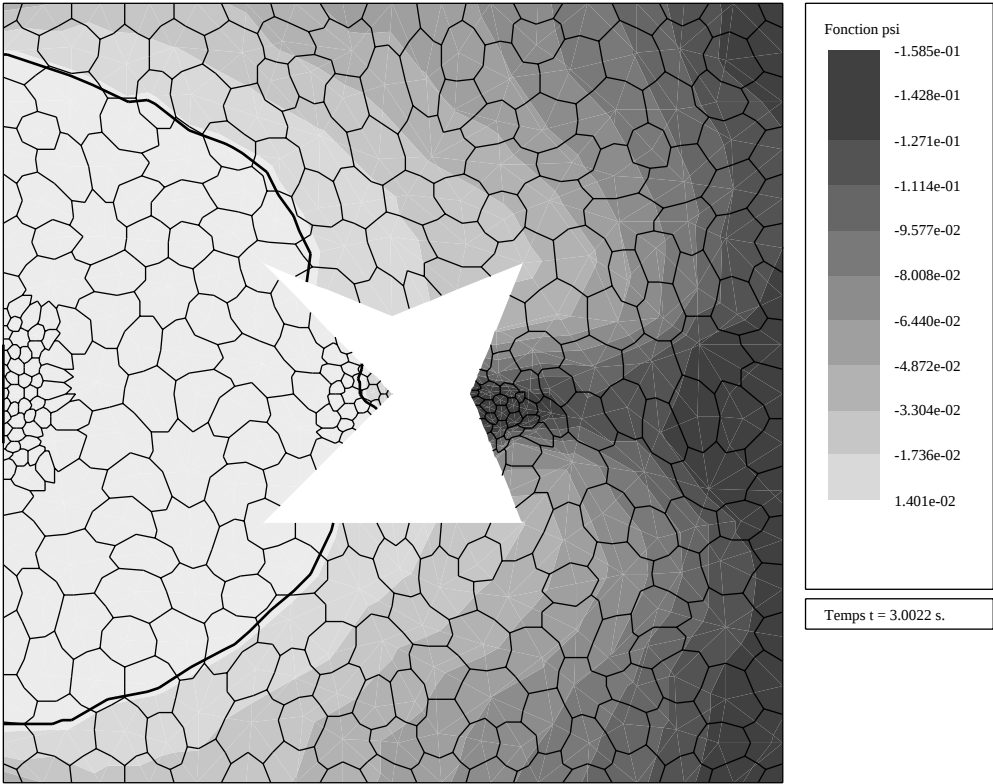


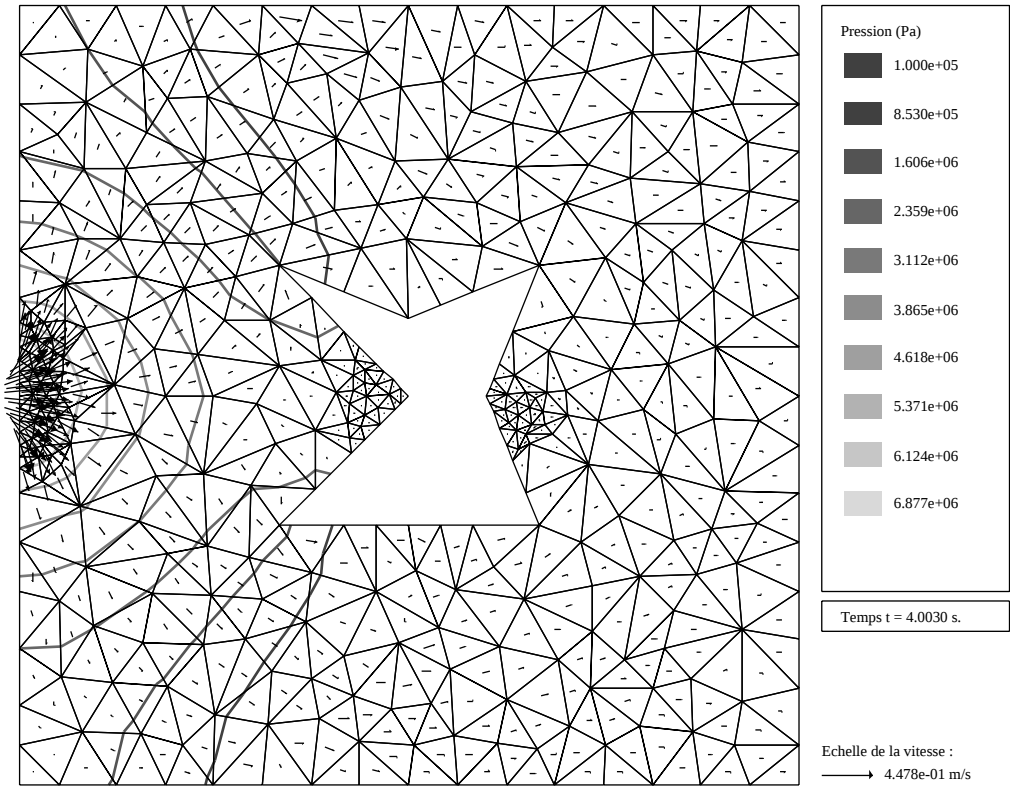
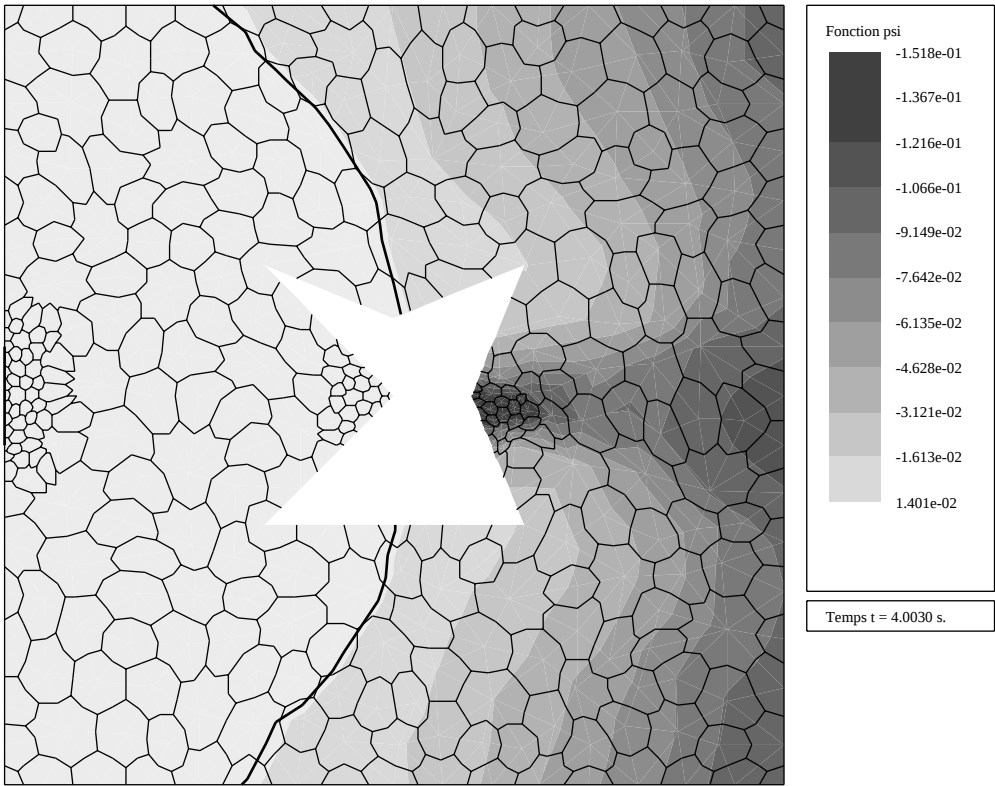
4.3.5 Résultats numériques, cas compressible

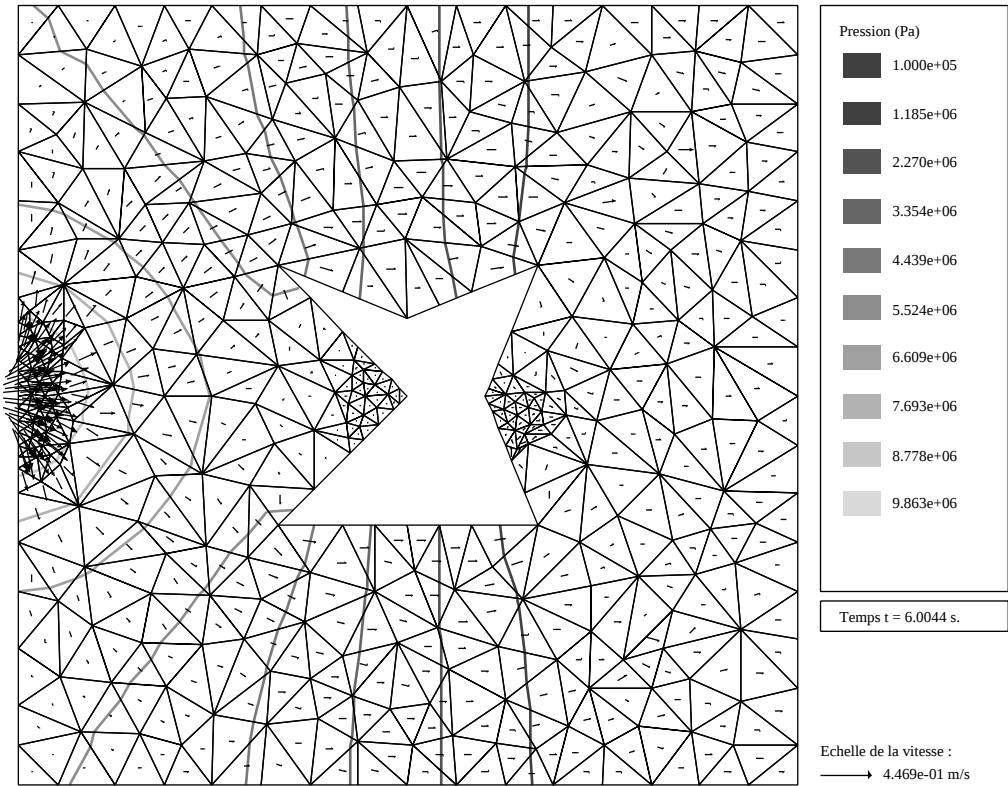
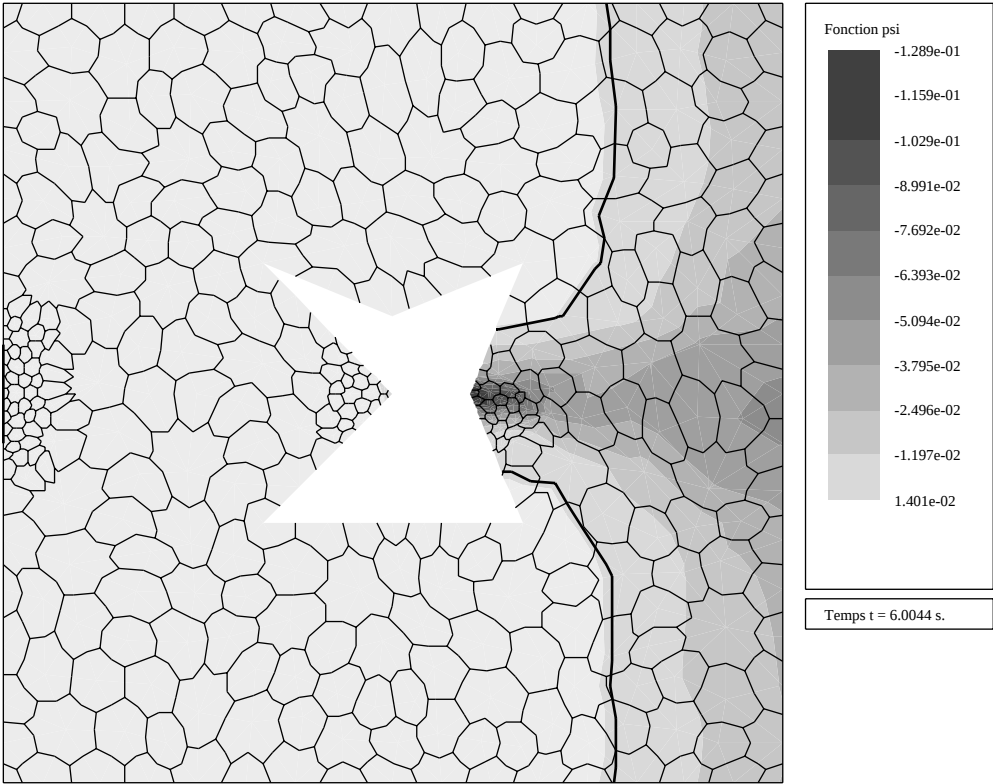
a) Plaque perforée avec coin rentrant, contact non collant

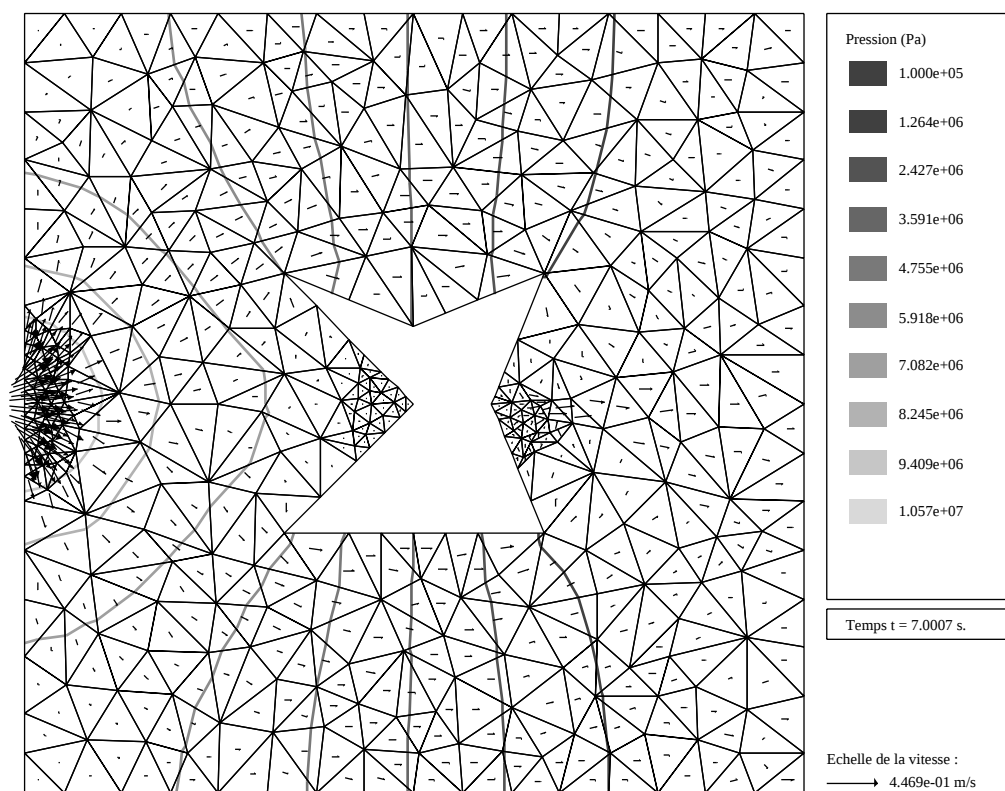
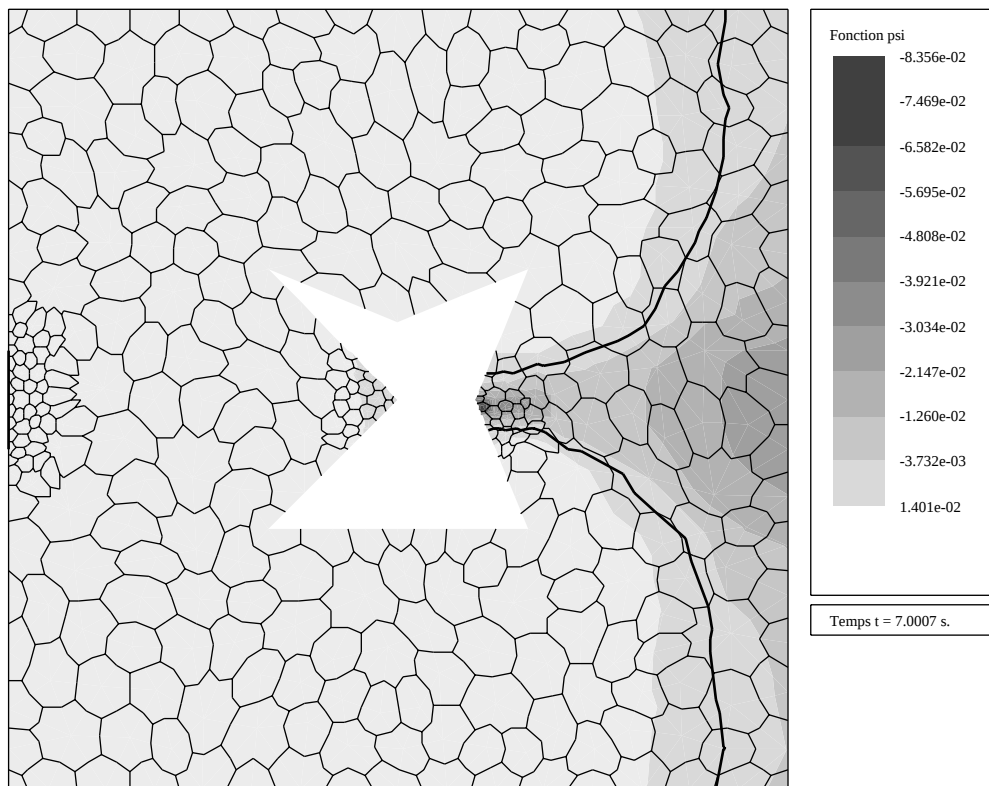
Nous avons constaté dans le cas incompressible pour ce test qu'il y avait capture de deux bulles d'air dans chacun des coins fortement rentrant. Nous allons voir qu'au contraire lorsque la compressibilité intervient les bulles sont suffisamment comprimées pour disparaître visiblement.

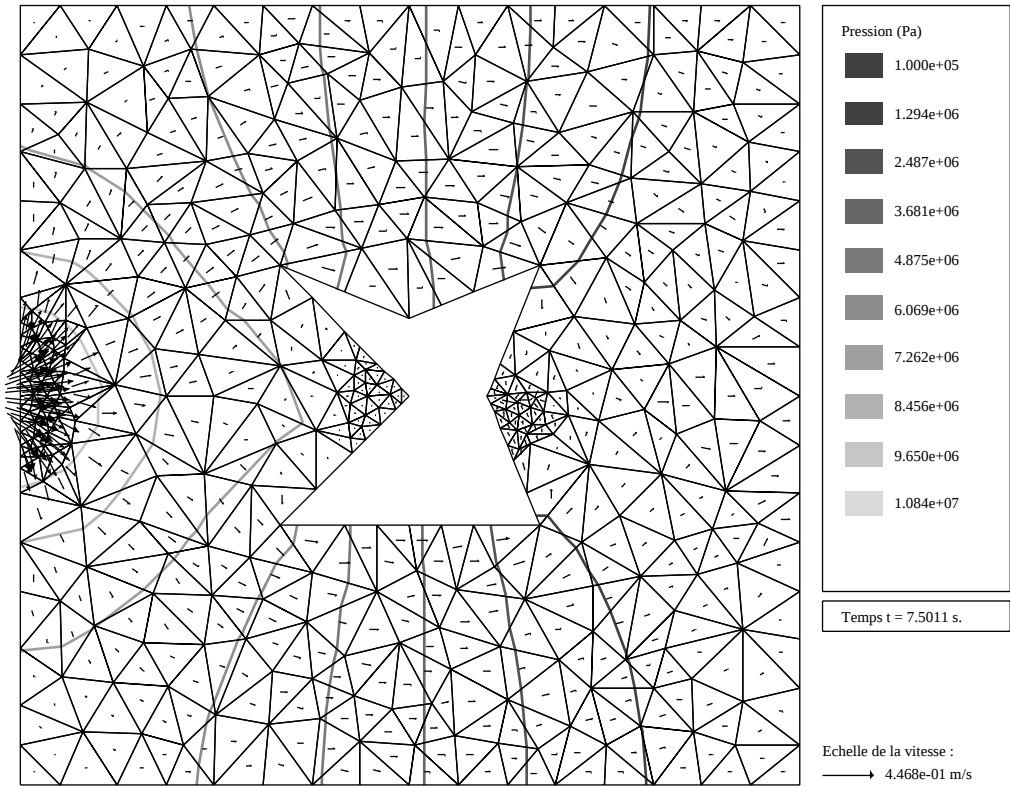
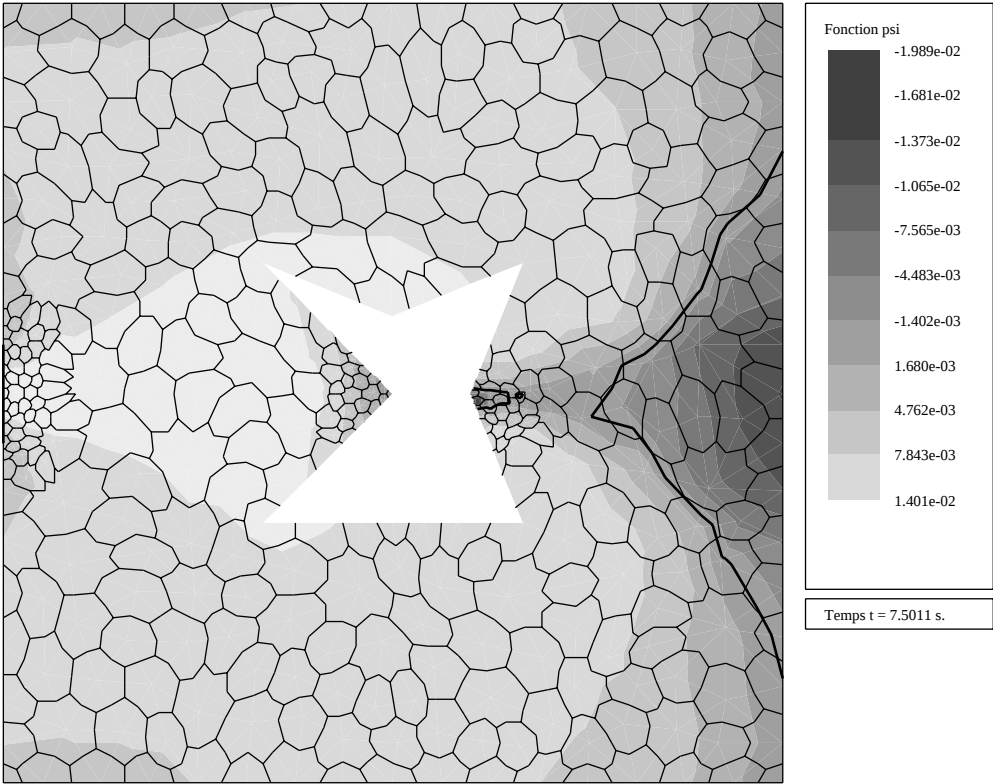


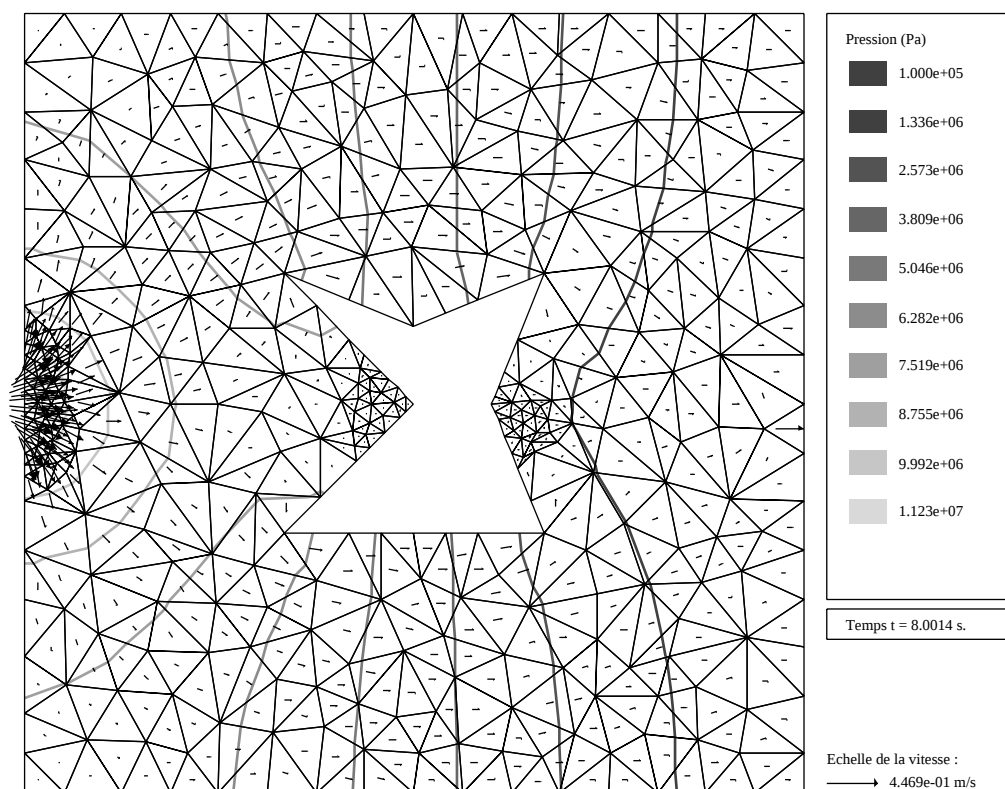
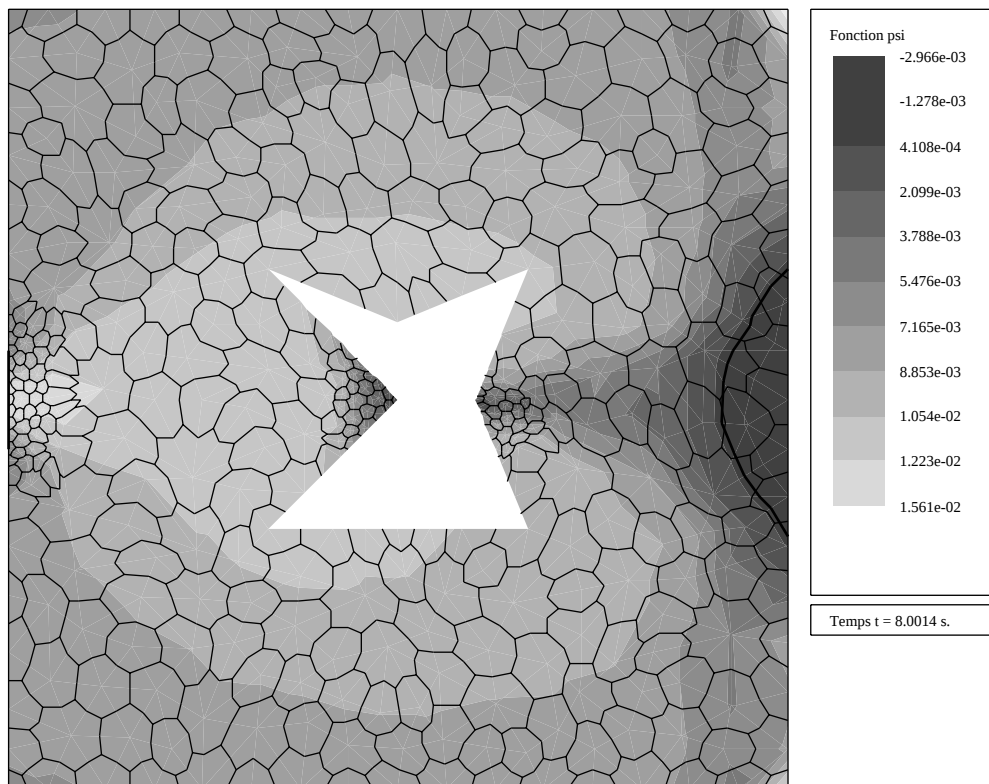






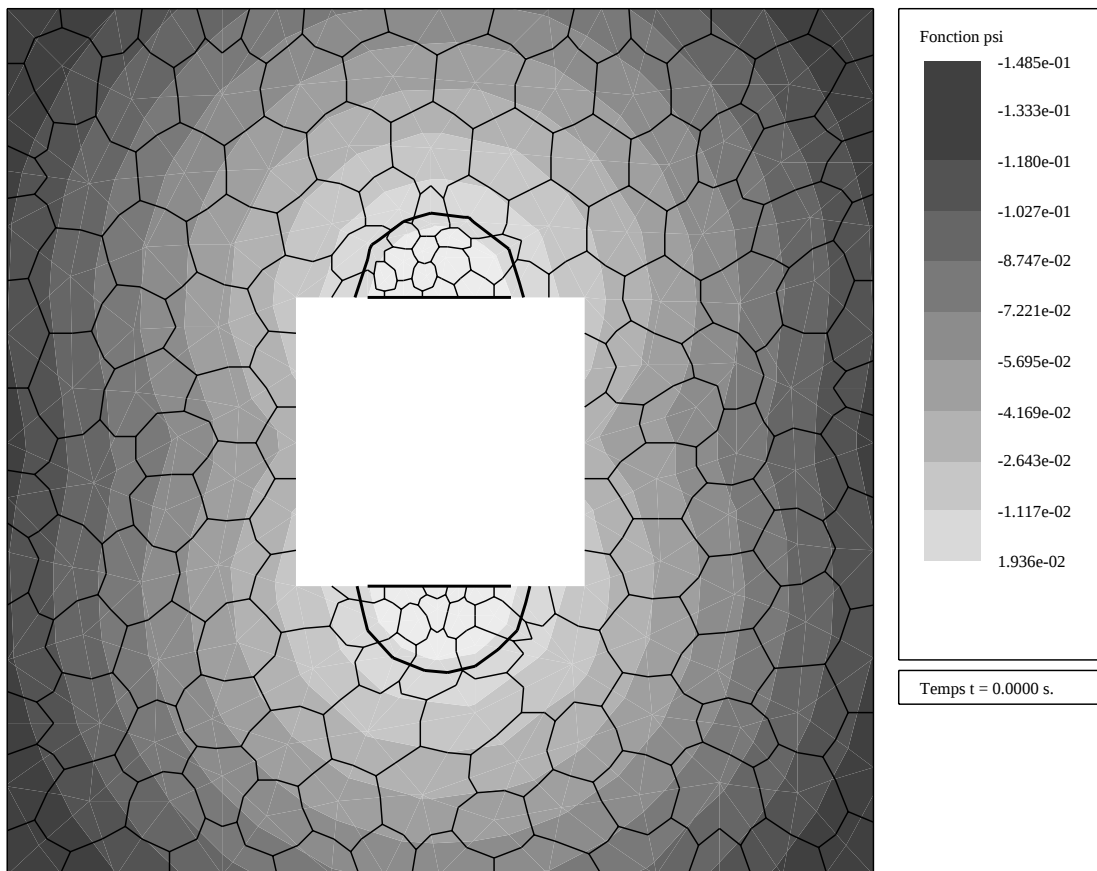


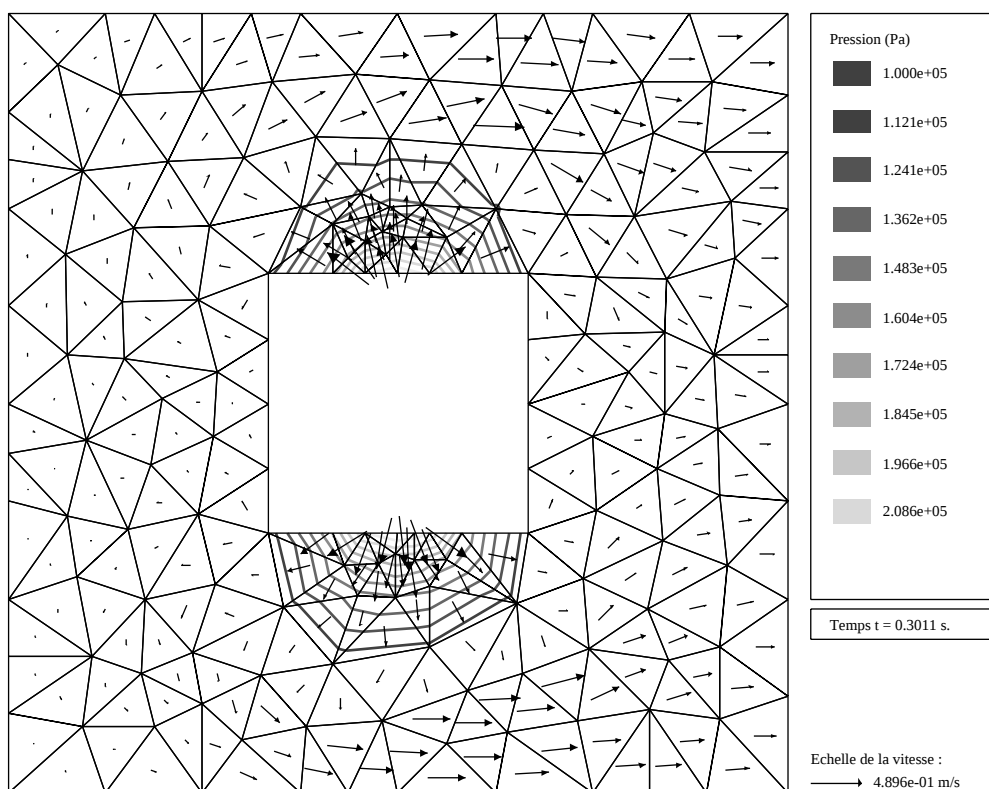
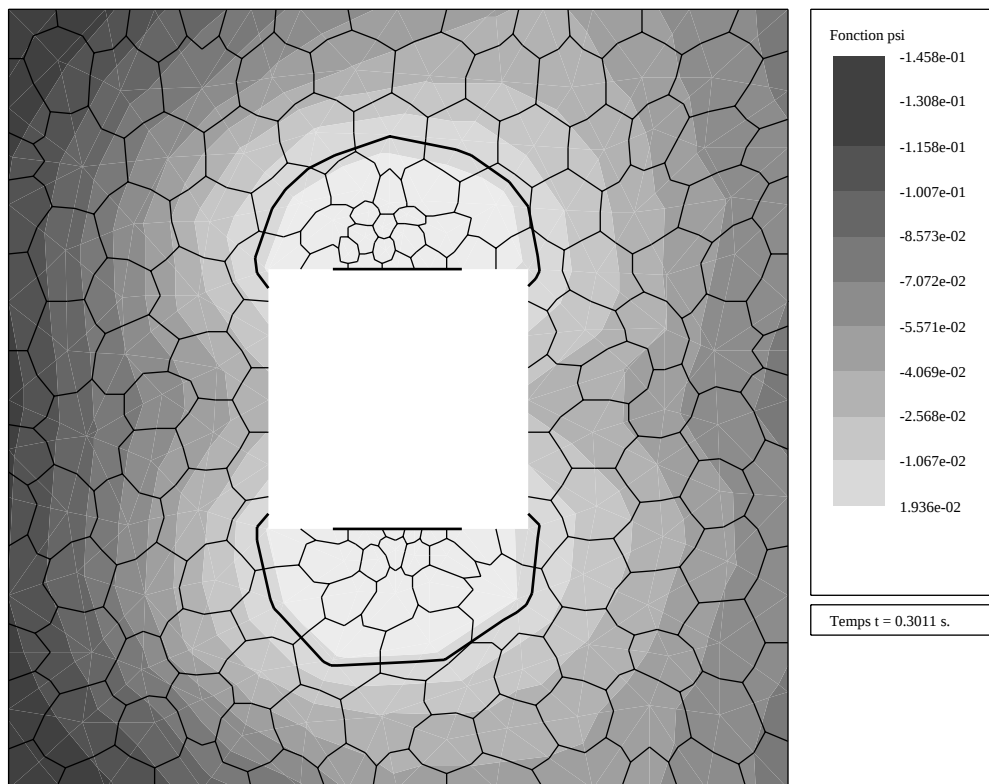


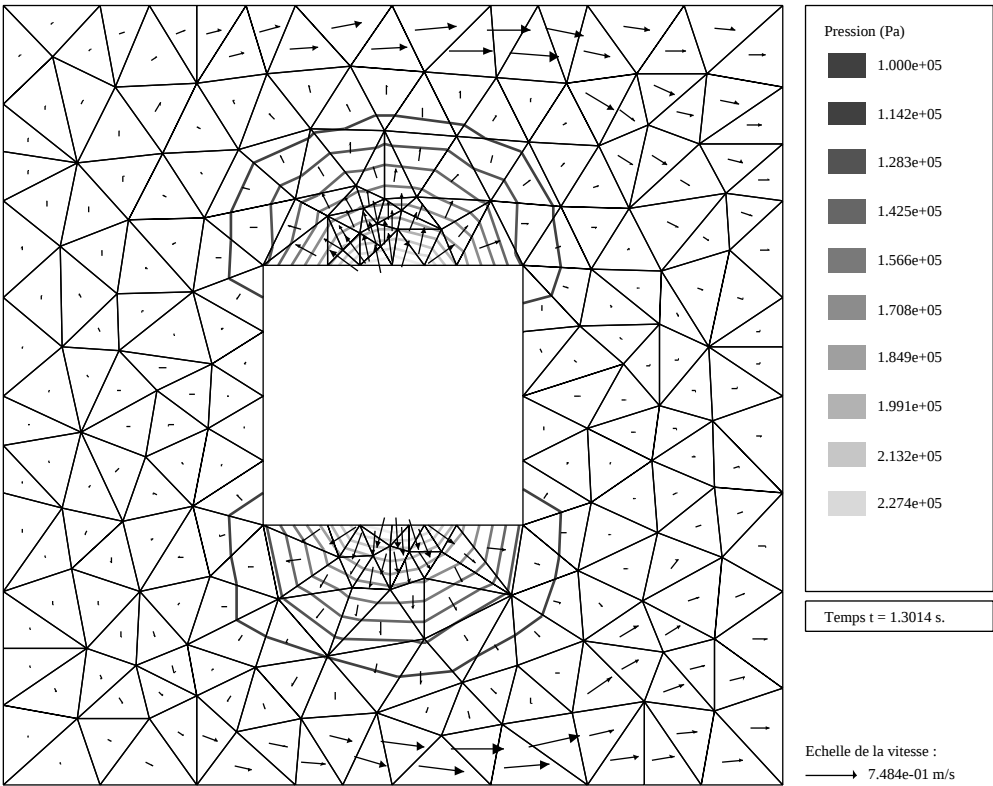
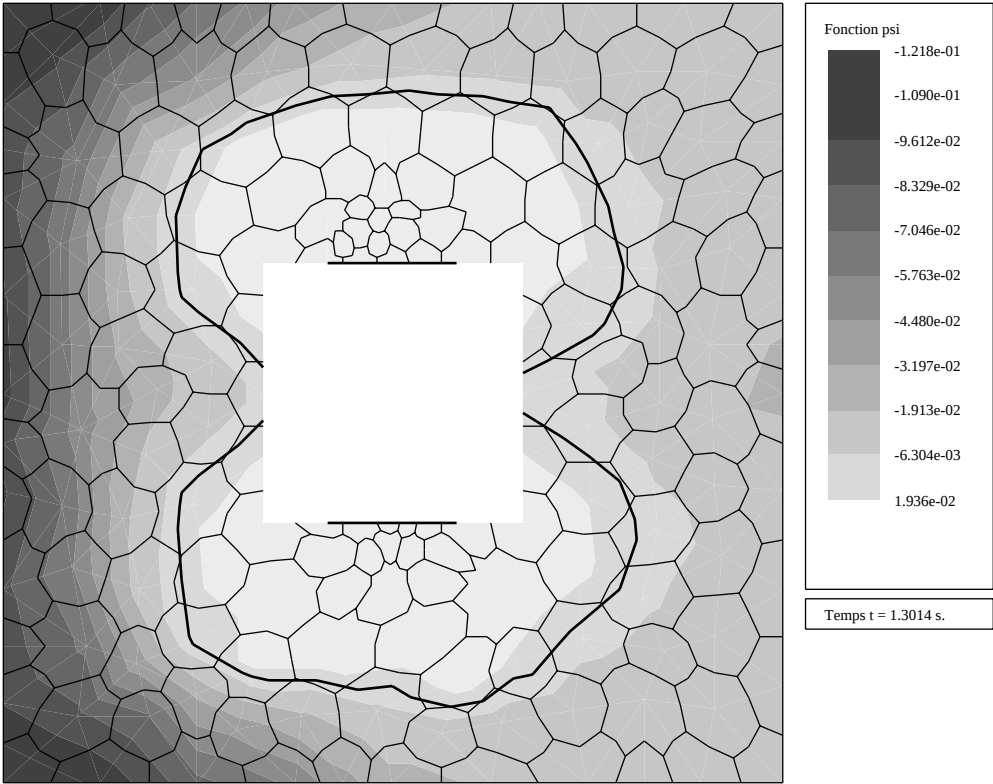


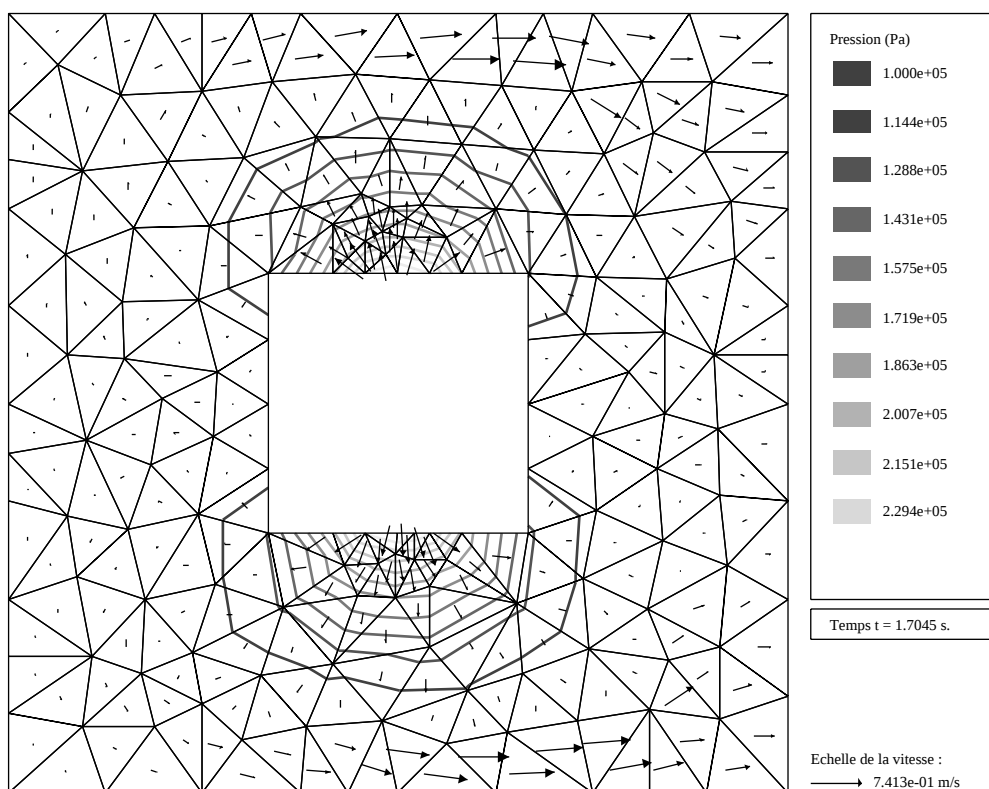
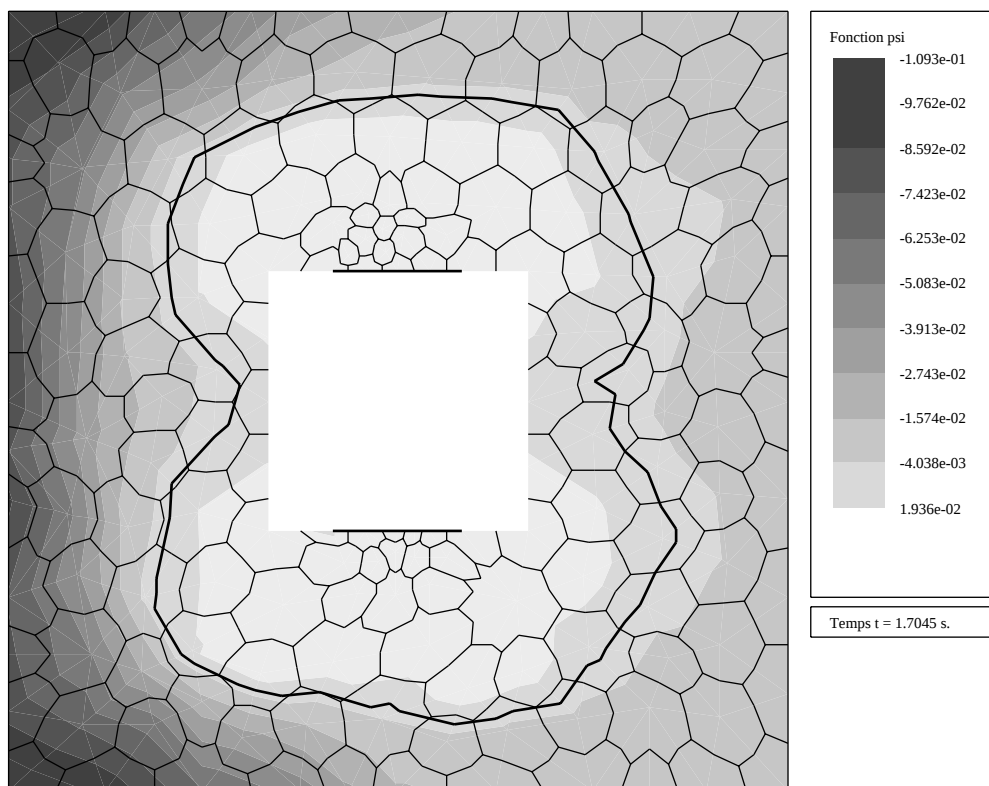
b) Plaque carrée perforée a injection multiple

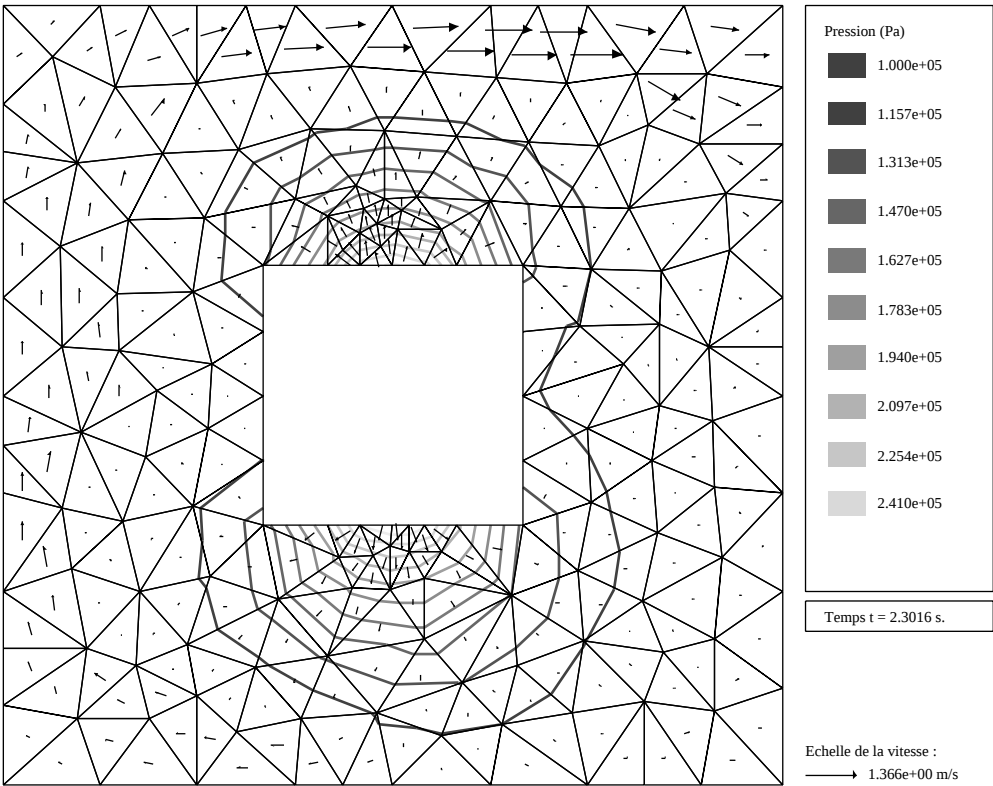
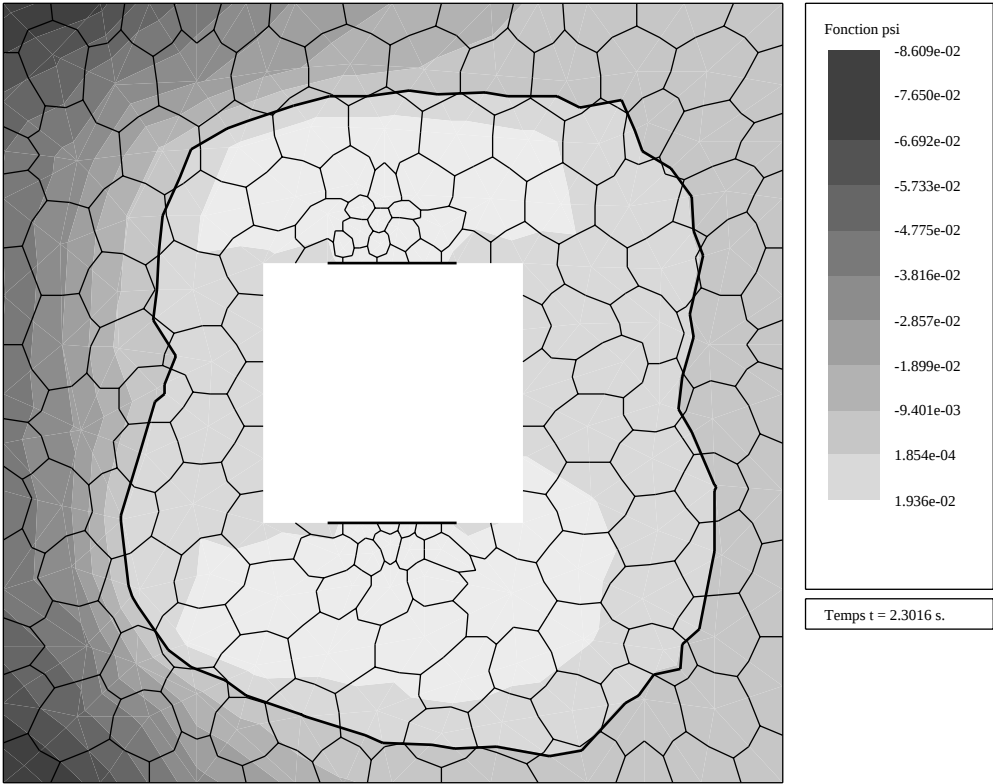
Nous avons donc tenté d'obtenir une bulle en compressible, ce qui est réalisé en injectant par deux points d'injection. Cette configuration est évidemment à proscrire pour réaliser effectivement un pièce par moulage. Le test permet cependant de mettre en évidence la capacité de notre simulation numérique à déceler la formation de bulle, pour des cas éventuellement moins évidents.

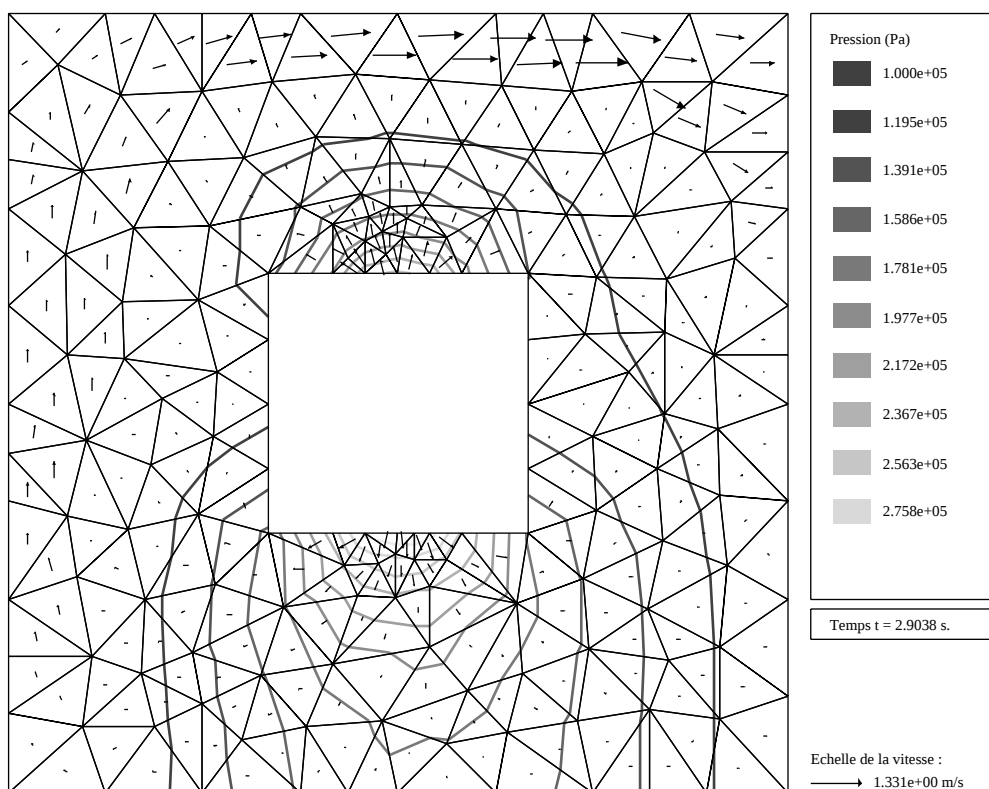
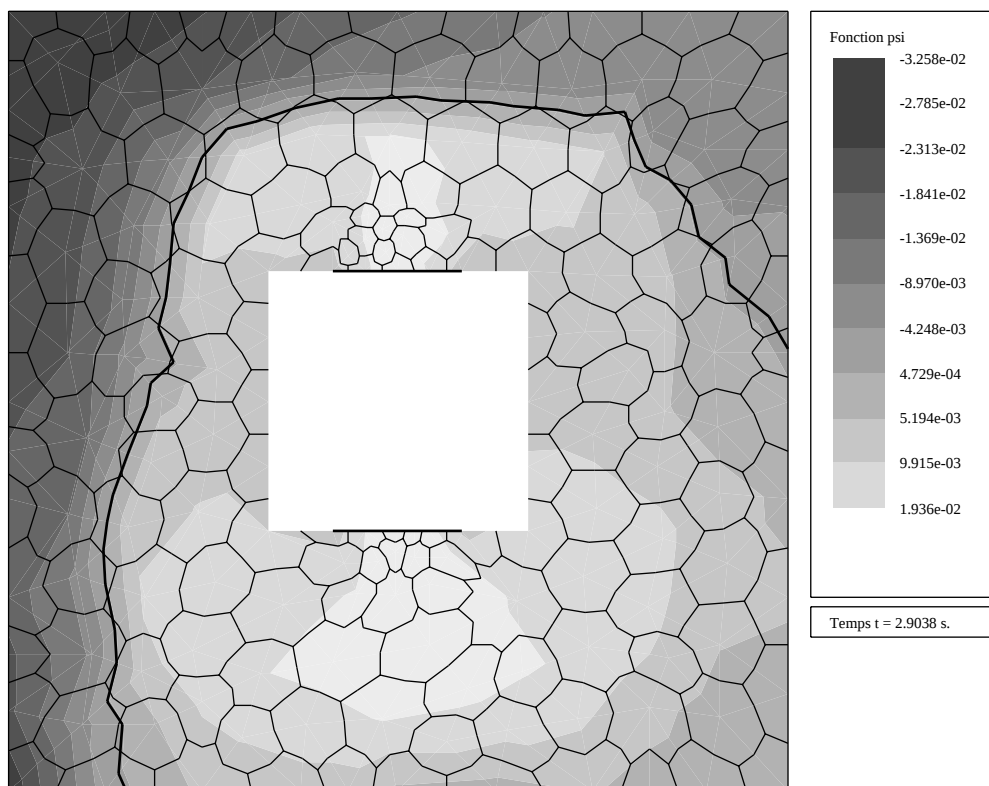


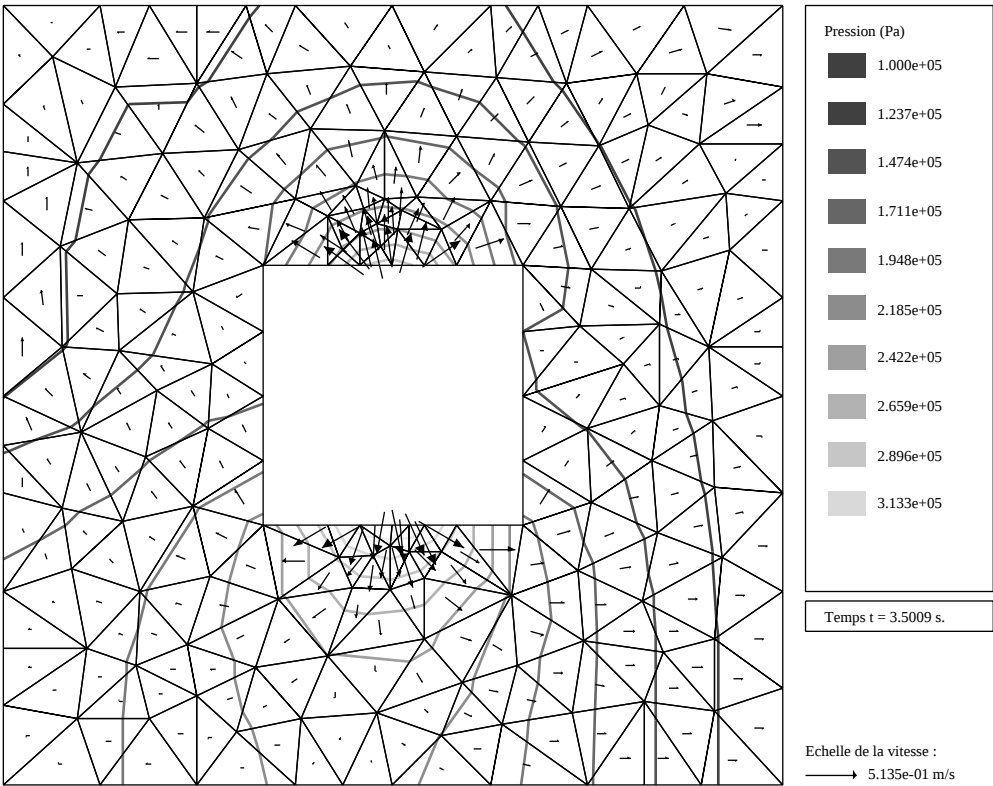
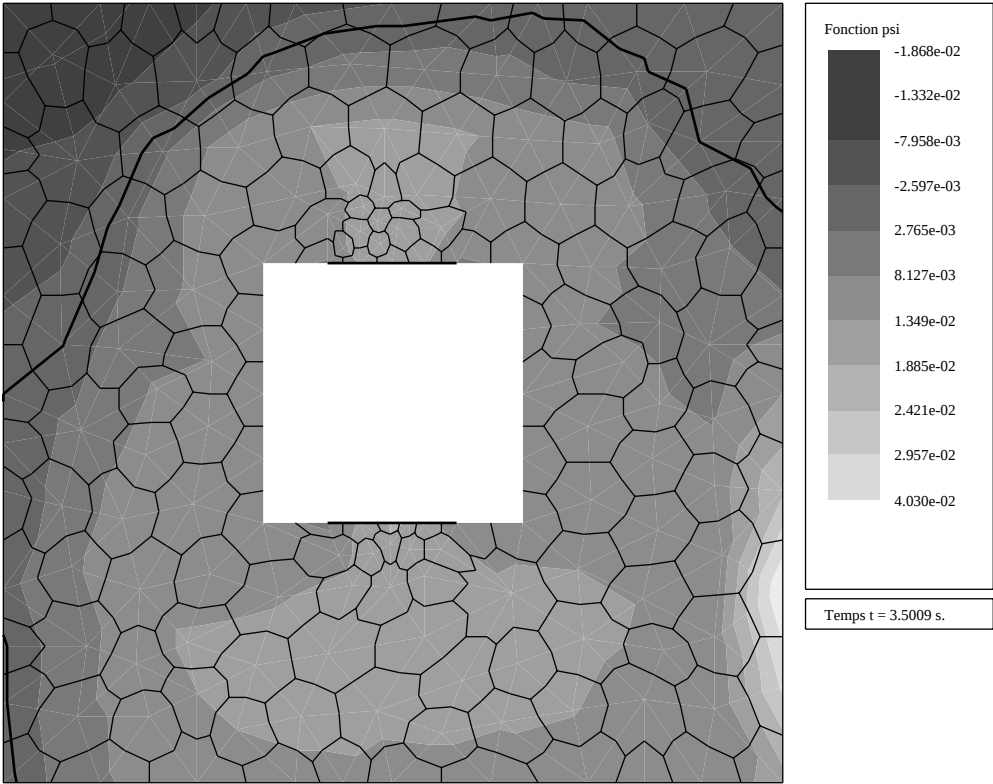


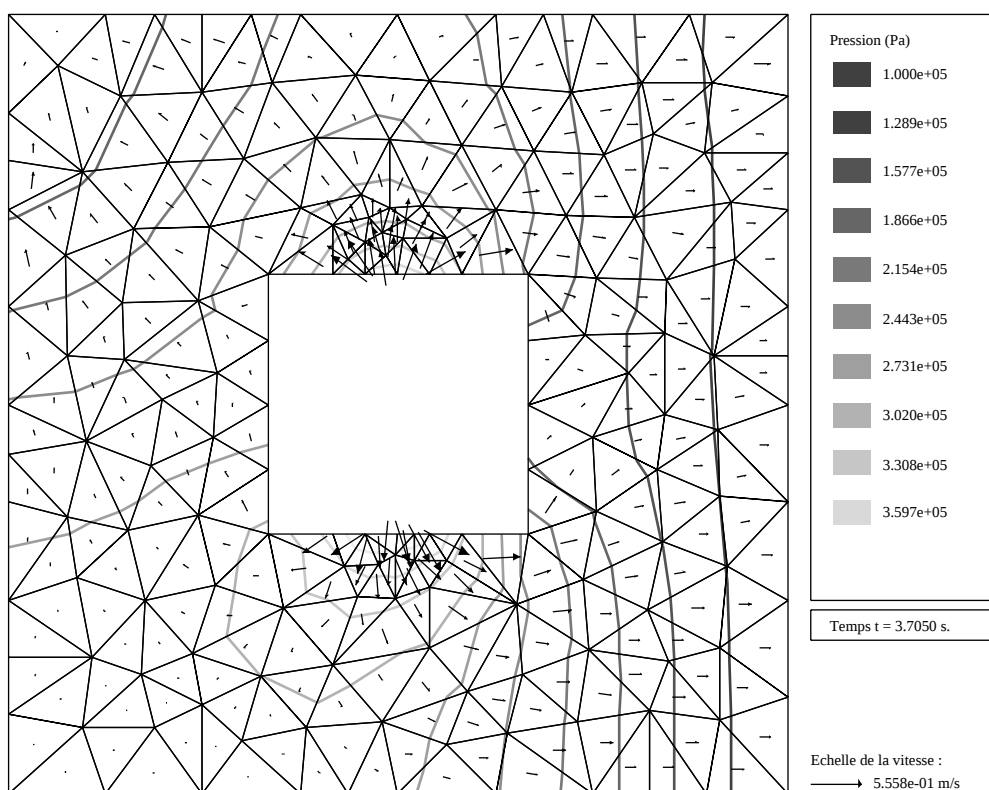
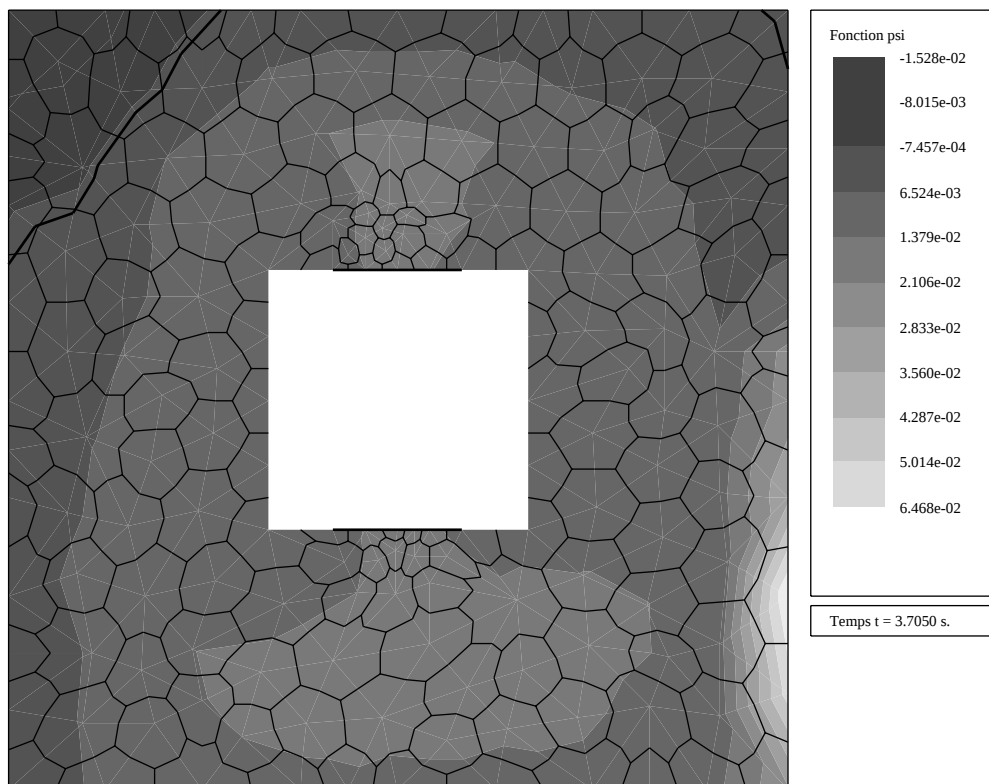


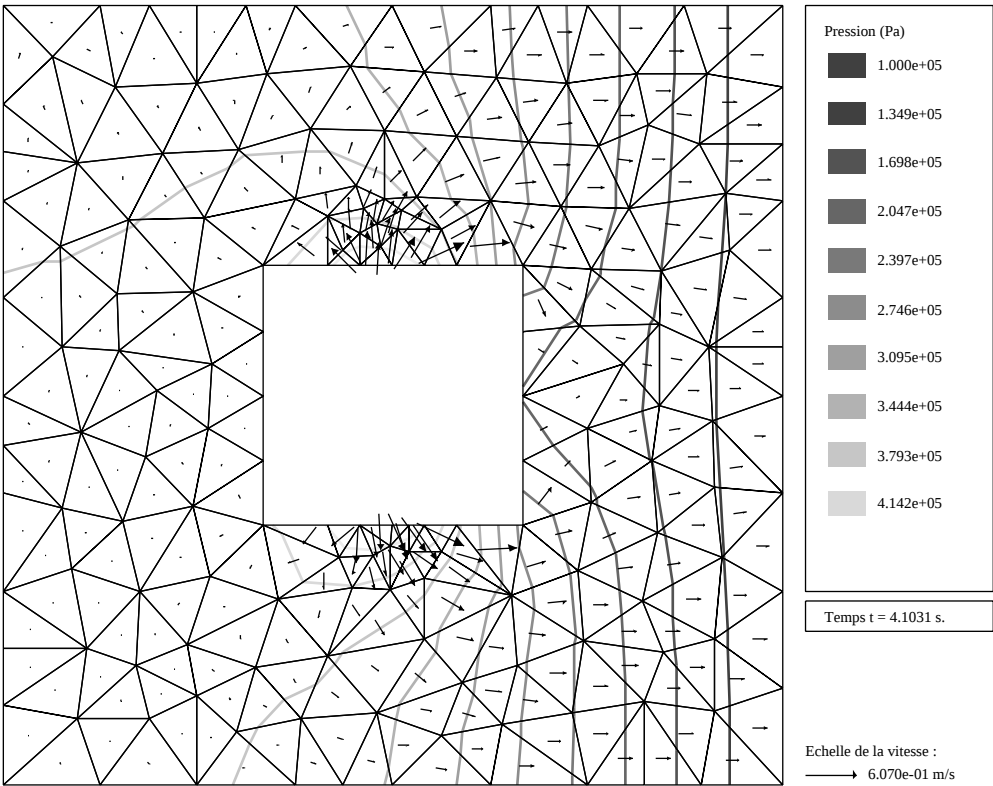
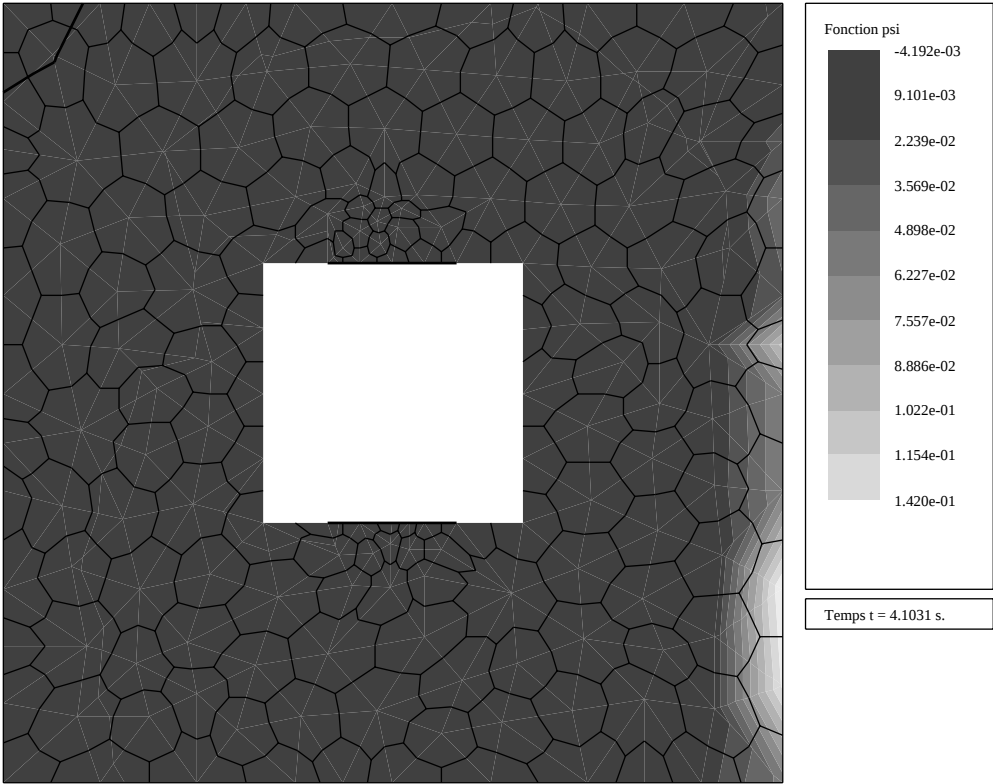












4.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons présenté des résultats en dimension un sur la difficulté de la mise en oeuvre d'une méthode numérique directement sur l'équation à double non linéarité qui avait fait l'objet de l'analyse mathématique. Puis nous nous sommes tournés vers le problème en dimension deux, sur l'équation de départ, en insistant sur la localisation du front. Nous avons proposé pour cela une méthode par ligne de niveau. Numériquement cela revient à résoudre d'une part l'équation en pression, ce que nous faisons par éléments finis P1, et d'autre part l'équation de transport du front, ce que nous réalisons par volumes finis sur le maillage dual.

Signalons cependant que nous avons négligé dans le calcul compressible de l'équation en pression le terme en ∇p^2 , qui est du second ordre du point de vue des coefficients χ et S . Sa prise en compte passe par la mise au point d'un schéma décentré que nous projetons de mettre en oeuvre.

Les tests numériques mettent en évidence la capacité de la méthode à gérer les changements brusque du front comme le recollement de deux nappes et la formation de bulles d'air lorsque les points d'injection ne sont pas choisis convenablement. Les cas incompressibles et compressibles ont été considérés et leur différence comportementale mise en évidence.

4.5 Commentaires bibliographiques

Pour la discrétisation en dimension un, les méthodes de différences finies sont introduites dans les livres de E. Godlewski et P.A. Raviart [64], G. Marchuk [92], S. Godunov et V. Riabenki [65], P. Lascaux [82], Richtmeyer et Morton [110].

Nous avons déjà cité les études sur les schémas linéaires pour les équations doublement non linéaires. Nous nous sommes aussi intéressés à la détermination de solutions exactes de l'équation à double non linéarité par des méthodes de transformations de Bäcklund, dans le but de valider les schémas numériques. Cette voie n'a pas abouti de manière satisfaisante; cependant citons le livre de C. Rogers et W.F. Shadwick ainsi que les articles récents de G.C. Sander (J. Austr. Math. Soc. Ser. B 1992) et J.R. King (J. Phys. A 1990) et leur bibliographie pour aller plus loin dans cette direction.

En dimension deux, la méthode des éléments finis est abordée dans de nombreux ouvrages dont [126], [12], [108]. Sur la résolution des systèmes linéaires issus de ces méthodes, le livre de P. Lascaux et R. Thédor [83] apporte de nombreuses méthodes.

Comme on l'a déjà mentionné, plusieurs études ont été menées par Osher et Sethian sur l'application de la méthode des lignes de niveau à la localisation d'interface, dans la modélisation de divers phénomènes physiques dont la croissance cristalline, la combustion,

Chapitre 5

Conclusion

PARTANT d'un modèle d'écoulement de fluides visqueux et compressibles, nous avons dégagé une formulation en pression sous la forme d'une équation à **double non linéarité**. Constatant que ce type d'équations intervenait dans d'autres phénomènes physiques, nous avons consacré une part importante de notre analyse à l'étude des problèmes aux limites associés. Ce faisant, nous avons été amenés à utiliser des outils d'analyse convexe et d'analyse non linéaire. Brièvement, nous avons étendu un lemme d'**analyse convexe** de H. Brézis qui nous permet d'obtenir des estimations *a priori*, appliquées à la méthode de semi-discrétisation (en temps) que nous utilisons. Dans cette étude, un **lemme de compacité** adapté (utilisant les résultats de J. Simon) a été mis au point dans le cadre non linéaire. Nous avons obtenu dans ce domaine des résultats améliorant par certains points les études existantes.

Un autre aspect de notre étude a été de mettre au point une méthode numérique permettant la **localisation** précise du front. Pour cela nous avons d'abord écrit le problème sous la forme de la recherche d'une fonction régulière dont l'interface serait la **ligne de niveau** zéro. Nous avons donné l'équation aux dérivées partielles à laquelle devait satisfaire cette fonction. Cette équation est une équation de transport couplée avec l'équation en pression par l'intermédiaire du champ de vitesse (qui s'obtient dans notre modèle à partir de la pression). A champ de vitesse donné, il s'agit d'une équation de transport linéaire avec condition au bord, **sans hypothèse de signe** ou de nullité sur la divergence de la vitesse. Nous avons prouvé l'existence d'une solution par la méthode des caractéristiques en faisant des hypothèses assez faibles sur la régularité du champ de vitesse.

L'étude de l'existence d'une solution à ces deux équations forme la partie essentielle de l'analyse mathématique. Nous n'avons pas résolu le problème du couplage entre ces deux équations; cependant l'étude des équations découplées est une étape importante vers cet objectif.

Du point de vue numérique, nous avons étudié certains schémas de calcul sur l'équation à double non linéarité en dimension un, pour constater finalement qu'il valait mieux mener les calculs sur l'équation en pression de départ. Revenant ensuite à la localisation du front, nous avons implémenté une méthode de type **éléments finis / volumes finis** sur le système formé de l'équation en pression et de l'équation de transport du front. Nous résolvons successivement chaque équation. Les résultats obtenus prouvent que la méthode par ligne de niveau permet de localiser finement le front dans les cellules d'interface, ce qui est **crucial** dans ce type de phénomènes où les grandeurs physiques connaissent souvent une discontinuité à ce niveau. D'autre part le procédé s'est révélé **robuste**, et permet de gérer facilement les changements de topologie du front.

Certains points de ce travail me semblent intéressants en guise de voies de recherche futures. L'étude de l'équation de transport du front, en particulier au niveau d'hypothèses **minimales** sur le champ de vitesse pour garantir l'existence d'une solution au problème aux limites. L'étude de l'équation à double non linéarité avec partie parabolique **dépendant du temps** à la suite des travaux de V.M. Hokkanen. L'**extension** de nos résultats à des équations étudiées par P. Colli et A. Visintin, où la dérivée en temps de la fonction non linéaire est remplacée par une fonction non linéaire de la dérivée en temps.

Bibliographie

- [1] F. ABERGEL, A. DECARREAU, et J.M. RAKOTOSON. « Study of a Nonlinear Elliptic-Parabolic Equation with Measures as Data : Existence Regularity and Behaviour near a Singularity ». *Nonlinear Anal.*, 26(11):1869–1887, 1996.
- [2] R.A. ADAMS. *Sobolev spaces*, volume 65 de *Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, 1975.
- [3] J.-F. AGASSANT, P. AVENAS, et J.-Ph. SERGENT. *La Mise en Forme des Matières Plastiques*. Lavoisier, Tech. et Doc., seconde édition, 1986.
- [4] S. AIZICOVICI. « An Abstract Doubly Nonlinear Volterra Integral Equation ». *Funkcial. Ekvac.*, 36:479–497, 1993.
- [5] G. ALBINUS. « A Thermodynamically Motivated Formulation of the Energy Model of Semiconductor devices ». Preprint 210, Weierstrass Institut for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, 1995.
- [6] H.W. ALT et S. LUCKHAUS. « Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations ». *Math. Z.*, 183:311–341, 1983.
- [7] H.W. ALT, S. LUCKHAUS, et A. VISINTIN. « On Nonstationary Flow through Porous Media ». *Ann. Mat. Pura Appl.*, (136):303–316, 1984.
- [8] S.N. ANTONTSEV, A.V. KAZHIKOV, et V.N. MONAKHOV. *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. Traduit du Russe*. Studies in Mathematics and Its Applications. North-Holland Publishing Company, 1990.
- [9] T. ARBOGAST. « The Existence of Weak Solutions To Single Porosity and Simple Dual-Porosity Models of Two-Phase Incompressible Flow ». *Nonlinear Anal.*, 19(11):1009–1031, 1992.
- [10] H. ATTOUCH et M. THÉRA. « Convergences en Analyse Multivoque et Variationnelle ». *Matapli*, (36):23–40, octobre 1993.
- [11] J.P. AUBIN et A. CELLINA. *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*. Numéro 264 dans *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, 1984.
- [12] O. AXELSSON et V.A. BARKER. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems, Theory and Computation*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1984.

- [13] E.J. BALDER. « On Weak Convergence Implying Strong Convergence under Extremal Conditions ». *J. Math. Anal. Appl.*, 163:147–156, 1992.
- [14] E.J. BALDER. « From Weak to Strong Convergence in L_1 Spaces via K -Convergence ». *Ann. Mat. Pura Appl.*, CLXV(IV):337–349, 1993.
- [15] A. BAMBERGER. « Étude d'une Équation Doublement non Linéaire ». Rapport Interne 4, Ecole Polytechnique, 1977.
- [16] A. BAMBERGER. « Étude d'une Équation Doublement non Linéaire ». *J. Funct. Anal.*, 24:148–155, 1977.
- [17] V. BARBU. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Traduit du Roumain*. Noordhoff International Publishing, 1976.
- [18] V. BARBU. « Existence for Nonlinear Volterra Equations in Hilbert Spaces ». *SIAM J. Math. Anal.*, 10(3):552–569, 1979.
- [19] C. BARDOS. « Problèmes aux Limites pour les Équations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre à Coefficients Réels; Théorèmes d'Approximation; Application à l'Équation de Transport ». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (3):185–233, 1970.
- [20] C. BARDOS, A. LEROUX, et J.C. NEDELEC. « First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions ». *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9):1017–1034, 1979.
- [21] J. BEALE. « The Initial-Value Problem for the Navier-Stokes Equations with a Free Boundary ». *Comm. Pure Appl. Math.*, XXXIV:359–392, 1981.
- [22] B. BEAUZAMY. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*. Numéro 68 dans North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [23] P. BÉNILAN et H. TOURÉ. « Sur l'Équation Générale $u_t = a(\cdot, u, \phi(\cdot, u)_x)_x + v$ dans L^1 : II. Le Problème d'Évolution ». *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 12(6):727–761, 1995.
- [24] A. BERMÚDEZ, J. DURANY, et C. SAGUEZ. « An Existence Theorem for an Implicit Nonlinear Evolution Equation ». *Collectanea Mathematica (Barcelona)*, pages 19–34, 1984.
- [25] F. BERNIS. « Existence Theorems for Doubly Nonlinear Higher Order Parabolic Equations in Unbounded Domains ». *Math. Ann.*, 279:373–394, 1988.
- [26] J.B. BETBEDER. « Étude d'une Équation non Linéaire d'Évolution de Type Divergentiel ». *Comm. Partial Differential Equations*, 19(7):1019–1035, 1994.
- [27] J.B. BETBEDER et G. VALLET. « La Question de l'Unicité pour une Classe de Problèmes d'Évolution non Linéaires Intégro-différentiels ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317:319–322, 1992.
- [28] D. BLANCHARD et G.A. FRANCFORT. « Study of a Doubly Nonlinear Heat Equation with no Growth Assumptions on the Parabolic Term ». *SIAM J. Math. Anal.*, 19(5):1032–1056, 1988. Erratum, même journal, vol. 20, 1989, page 761.

- [29] D. BLANCHARD et G.A. FRANCFORT. « A Few Results on a Class of Degenerate Parabolic Equations ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, pages 213–249, 1991.
- [30] D. BLANCHARD et H. REDWANE. « Solutions Renormalisées d'Équations Paraboliques à deux non Linéarités ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319:831–835, 1994.
- [31] S. BOCHNER. « Théorie des Distributions, by Laurent Schwartz. ». *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 79–83, 1952.
- [32] A. BOVE, B. FRANCHI, et E. OBRECHT. « Straightening of a Noncylindrical Region and Evolution Equations ». *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 71:209–216, 1984.
- [33] H. BRÉZIS. « Equations et Inéquations non Linéaires dans les Espaces Vectoriels en Dualité ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 18(1):115–175, 1968.
- [34] H. BRÉZIS. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. Numéro 5 dans North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Company, 1973.
- [35] H. BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. Numéro XIV dans Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1992.
- [36] J.R. CANNON et E. DIBENEDETTO. « On the Existence of Weak-Solutions to an n-Dimensional Stefan Problem with Nonlinear Boundary Conditions ». *SIAM J. Math. Anal.*, 11(4):632–645, 1980.
- [37] J.R. CANNON et A. FASANO. « A Nonlinear Parabolic Free Boundary Problem ». *Ann. Mat. Pura Appl.*, 112:119–149, 1977.
- [38] H. CARTAN. *Cours de Calcul Différentiel*. Hermann, 1985.
- [39] T. CAZENAVE et A. HARAUX. *Introduction aux Problèmes d'Évolution Semi-Linéaires*, volume 1 de *Mathématiques et Applications*. Ellipses, 1990.
- [40] G.R. CIRMI et M.M. PORZIO. « L^∞ -Solutions for some Nonlinear Degenerate Elliptic and Parabolic Equations ». *Ann. Mat. Pura Appl.*, CLXIX:67–86, 1995.
- [41] P. COLLI. « On Some Doubly Nonlinear Evolution Equations in Banach Spaces ». Rapport Technique, Università di Pavia.
- [42] P. CONCUS et R. FINN, éditeurs. *Variational Methods for Free Surfaces Interfaces. Proceedings of a Conference held at Vallombrosa Center, Menlo Park, California*. Springer Verlag, 1987.
- [43] J.P. DEMAILLY. *Analyse Numérique et Équations Différentielles*. Presses de l'Université de Grenoble, 1991.
- [44] J.I. DIAZ et F. de THELIN. « On a Nonlinear Parabolic Problem Arising in some Models Related to Turbulent Flows ». *SIAM J. Math. Anal.*, (25):1085–1111, 1994.
- [45] E. DIBENEDETTO. *Degenerate Parabolic Equations*. Universitext. Springer Verlag, 1993.

- [46] E. DiBENEDETTO et R.E. SHOWALTER. « Implicit Degenerate Evolution Equations and Applications ». *SIAM J. Math. Anal.*, 12(5):731–751, 1981.
- [47] T.P. DREYER. « Existence of Weak Solutions of a Nonlinear Parabolic Equation in a Noncylindrical Domain ». *J. Math. Anal. Appl.*, 58:63–82, 1977.
- [48] G. DUVAUT. *Mécanique des Milieux Continus*. Masson, 1990.
- [49] A. EDEN, B. MICHAUX, et J.M. RAKOTOSON. « Semi-Discrete Nonlinear Evolution Equations as Discrete Dynamical Systems and Error Analysis ». *Indiana University Mathematics Journal*, 39(3):737–783, 1990.
- [50] A. EDEN, B. MICHAUX, et J.M. RAKOTOSON. « Doubly Nonlinear Parabolic-type Equations as Dynamical Systems ». *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 3(1):87–131, 1991.
- [51] I. EKELAND et R. TEMAM. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Dunod, 1974.
- [52] C.M. ELLIOT et V. JANOSKÝ. « A Variational Inequality Approach to Hele-Shaw Flow with a Moving Boundary ». *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 88A:93–107, 1981.
- [53] B. ENGQUIST, P. LÖSTEDT, et B. SJÖGREEN. « Nonlinear Filters for Efficient Shock Computation ». *Math. Comp.*, 52(186):509–537, April 1989.
- [54] L.C. EVANS. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1991.
- [55] L.C. EVANS et R.F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.
- [56] L.C. EVANS et J. SPRUCK. « Motion of Level Sets by Mean Curvature I ». *J. Differential Geom.*, 33:635–681, 1991.
- [57] L.C. EVANS et J. SPRUCK. « Motion of Level Sets by Mean Curvature II ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1):321–332, March 1992.
- [58] H. FEDERER. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [59] J. FILO et J. KAČUR. « Local Existence of General Nonlinear Parabolic Systems ». *Nonlinear Anal.*, 24(11):1597–1618, 1995.
- [60] J.M. FLORYAN. Dans K.-H. HOFFMAN et J. SPREKELS, éditeurs, *Free Boundary Problems : Theory and Applications*, volume II de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Pitman, 1990.
- [61] C. FOIAS, C. GUILLOPÉ, et R. TEMAM. « Lagrangian Representation of a Flow ». *J. Differential Equations*, 57:440–449, 1985.
- [62] A. FRIEDMAN. « The Stefan Problem in Several Space Variables ». August 1968.
- [63] H. GAJEWSKI. « On a Variant of Monotonicity and its Application to Differential Equations ». *Nonlinear Anal.*, 22(1):73–80, 1994.

- [64] E. GODLEWSKI et P.A. RAVIART. *Hyperbolic Conservation Laws*. Numéro 3-4 dans *Mathématiques et Applications*. Ellipses, 1990.
- [65] S. GODUNOV et V. RIABENKI. *Schémas aux Différences. Introduction à la Théorie. Traduit du Russe*. Éditions MIR, 1977.
- [66] O. GRANGE et F. MIGNOT. « Sur la Résolution d'une Équation et d'une Inéquation Paraboliques non Linéaires ». *J. Funct. Anal.*, 11:77–92, 1972.
- [67] J. HADAMARD. *La Théorie des Équations aux Dérivées Partielles*. Gauthier-Villars, 1964.
- [68] J. K. HALE. *Ordinary Differential Equations*, volume 21 de *Pure and Applied Mathematics, a Series of Texts and Monographs*. Wiley-Interscience, 1969.
- [69] A. HARAUX. *Systèmes Dynamiques dissipatifs et Applications*. Numéro 17 dans *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, 1991.
- [70] V.M. HOKKANEN. « An Implicit Nonlinear Time Dependent Equation has a Solution ». *J. Math. Anal. Appl.*, 161(1):117–141, 1991.
- [71] V.M. HOKKANEN. « Continuous Dependence for an Implicit Equation ». *J. Differential Equations*, 110:67–85, 1994.
- [72] K. ISHIGE. « On the Existence of Solutions of the Cauchy Problem for a Doubly Nonlinear Parabolic Equation ». *SIAM J. Math. Anal.*, 27(5):1235–1260, 1996.
- [73] A.V. IVANOV. « Quasilinear Parabolic Equations Admitting Double Degeneracy ». *St. Petersburg Math. J.*, 4(6):1153–1167, 1993.
- [74] W. JÄGER et J. KAČUR. « Solution of Porous Medium Type Systems by Linear Approximation Schemes ». *Numer. Math.*, (60):407–427, 1991.
- [75] W. JÄGER et J. KAČUR. « Solution of Doubly Nonlinear and Degenerate Parabolic Problems by Relaxation Schemes ». *M²AN*, 29(5):605–627, 1995.
- [76] J. KAČUR. « On a Solution of Degenerate Elliptic-Parabolic Systems in Orlicz-Sobolev Spaces ». *Math. Z.*, 203:153–171, 1990.
- [77] J. KAČUR, A. HANDLOVIČOVÁ, et M. KAČUROVÁ. « Solution of Nonlinear Diffusion Problems by Linear Approximation Schemes ». *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(6):1703–1722, 1993.
- [78] V.K. KHOAN. *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*. Vuibert, 1970.
- [79] M.A. KRASNOSELSKII et OTHERS. *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids. Noordhoff International Publishing, 1976.
- [80] O.A. LADYŽENSKHAYA, V.A. SOLONNIKOV, et N.N. URAL'CEVA. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Traduit du Russe*. Numéro 23 dans *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society Translation, 1968.

- [81] R. LANDES. « Quasimonotone versus Pseudomonotone ». *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126A:705–717, 1996.
- [82] P. LASCAUX. *Lectures on Numerical Methods for Time Dependent Equations Applications to Fluid Flow Problems*. Springer Verlag for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.
- [83] P. LASCAUX et R. THÉODOR. *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur*. Masson, 1986.
- [84] P.J. LAURENT. *Approximation et Optimisation*. Herman, 1972.
- [85] J.L. LIONS. « Une Remarque sur les Problèmes d'Évolution non Linéaires dans les Ouverts non Cylindriques ». *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, 9:11–18, 1964.
- [86] J.L. LIONS. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, 1969.
- [87] P.L. LIONS et R.J. DiPERNA. « Équations Différentielles Ordinaires et Équations de Transport avec des Coefficients Irréguliers ». *Séminaire de l'École Polytechnique*, 1988–1989.
- [88] P.L. LIONS et R.J. DiPERNA. « Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces ». *Invent. Math.*, 98:511–547, 1989.
- [89] E. MAGENES, R.H. NOCHETTO, et C. VERDI. « Energy Error Estimates for a Linear Scheme to Approximate Nonlinear Parabolic Problems ». *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21(4):655–678, 1987.
- [90] I. MAILLOT. « Simulation Numérique du Remplissage-Compactage pour l'Injection des Thermo-plastiques ». Thèse, Université Joseph Fourier, 1993.
- [91] E. MAITRE et P. WITOMSKI. « Nonlinear Elliptic-Parabolic Equations and β -Pseudo-monotonicity ». *Applied Math. Letters*, 9(4):71–75, 1996.
- [92] MARCHUK. *Methods of Numerical Mathematics*, volume 2 de *Applications of Mathematics*. Springer Verlag, 1975.
- [93] L. MATEJČKA. « On Approximate Solutions of Degenerate Integro-differential Parabolic Equations ». *Math. Slovaca*, 45(1):91–103, 1995.
- [94] A. M. MEIRMANOV. *The Stefan Problem. Traduit du Russe*. Numéro 3 dans *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter, 1992.
- [95] R.E. MEYER. *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*, volume XXIV de *Pure and Applied Mathematics*. Wiley Interscience a division of John Wiley & Sons, 1971.
- [96] Z. NANIEWICZ. « On Some Nonconvex Variational Problems Related to Hemivariational Inequalities ». *Nonlinear Anal.*, 13(1):87–100, 1989.
- [97] J. NEČAS. *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*. Masson, 1967.

- [98] M. NIEZGÓDKA et I. PAWLOW. « A Generalized Stefan Problem in Several Space Variables ». *Appl. Math. Optim.*, 9:193–224, 1983.
- [99] R.H. NOCHETTO. Dans HOFFMAN et SPREKELS, éditeurs, *Free Boundary Problems: Theory and Application*, volume II de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Pitman, 1990.
- [100] S. OSHER et J.A. SETHIAN. « Front Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithm Based on Hamilton-Jacobi Formulations ». *J. Comput. Phys.*, 79:12–49, 1988.
- [101] F. OTTO. « L^1 -Contraction and Uniqueness for Quasilinear Elliptic-Parabolic Equations. ». *J. Differential Equations*, (131):20–38, 1996.
- [102] A. PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1983.
- [103] R. PEYRET et T.D. TAYLOR. *Computational Methods for Fluid Flows*. Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag, 1990.
- [104] R. PHELPS. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. Numéro 1364 dans *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1988.
- [105] A. PLOUVIER. « Sur une Classe de Problèmes d'Évolution Quasi Linéaires Dégénérés ». *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*, 8(1):197–227, 1995.
- [106] P.A. RAVIART. « Sur la Résolution de Certaines Équations Paraboliques non Linéaires ». *J. Funct. Anal.*, 5:299–328, 1970.
- [107] P.A. RAVIART. « Méthodes Particulières ». Polycopié, École d'été d'Analyse Numérique. CEA/INRIA/EDF, 1987.
- [108] J.N. REDDY. *An Introduction to Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [109] S. RICHARDSON. « Hele Shaw Flows with a Free Boundary Produced by the Injection of Fluid into a Narrow Channel ». *J. Fluid Mech.*, 56(4):609–618, 1972.
- [110] RICHTMYER et MORTON. *Difference Method for Initial Value Problems*. Wiley Interscience, a division of John Wiley & Sons, 1967.
- [111] R.T. ROCKAFELLAR. « Generalized Directional Derivatives and Subgradients of Non-convex Functions ». *Can. J. Math.*, XXXII(2):257–280, 1980.
- [112] W. RUDIN. *Analyse Réelle et Complexe*. Masson, 1995.
- [113] J. RULLA et R.E. SHOWALTER. « Diffusion in Partially Fissured Media and Implicit Evolution Systems ». *Advances in Math. Sci. Appl.*, 5(1):163–191, 1995.
- [114] P.E. SACKS. « Continuity of Solutions of a Singular Parabolic Equation ». *Nonlinear Anal.*, 7(4):387–409, 1983.
- [115] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Herman, 1958.

- [116] P. SECCHI. « On Nonviscous Compressible Fluids in a Time-Dependent Domain ». *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 9(6):683–704, 1992.
- [117] P. SECCHI et A. VALLI. « A Free Boundary Problem for Compressible Viscous Fluids ». *J. Differential Geom.*, 31:131–161, 1990.
- [118] J.A. SETHIAN. « Numerical Algorithms for Propagating Interfaces: Hamilton-Jacobi Equations and Conservation Laws ». *J. Differential Geom.*, 31:131–161, 1990.
- [119] J. SIMON. « Écoulement d'un Fluide non Homogène avec une Densité Initiale s'annulant ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 287:1009–1012, 1978.
- [120] J. SIMON. « Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$ ». *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146:65–96, 1987.
- [121] F. SIMONDON. « Sur l'équation $b(u)_t - a(u, \nabla u) = 0$ par la méthode des semi-groupes dans L^1 . ». Séminaire d'analyse non linéaire, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 1984.
- [122] K.N. SOLTANOV. « Existence and Nonexistence of Global Solutions to Some Nonlinear Elliptic-Parabolic Equations ». *Differential Equations*, 29(4):550–563, 1993.
- [123] J. STEINBACH et W. WEINELT. « Mathematical Modelling of the Injection Moulding Process ». *Adv. Math. Sci. Appl.*, 1(1):137–156, 1992.
- [124] A. TANI. « On the Free Boundary Value Problem for Compressible Viscous Fluid Motion ». *J. Math. Kyoto Univ.*, 21(4):839–859, 1981.
- [125] R. TEMAM. *Navier Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, volume 2 de *Studies in Mathematics and Applications*. North Holland Publishing Company, 1977.
- [126] F. THOMASSET. *Implementation of Finite Element Method for Navier-Stokes Equations*. Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag, 1981.
- [127] V.M. TIKHOMIROV. *Convex Analysis and Approximation theory*. Dans G.A., éditeur, *Analysis. II*, numéro 14 dans *Encycl. Math. Sci.*, pages 1–92. Springer Verlag, 1990.
- [128] P. URRUTY. « Sur une Équation Autonome d'Évolution Doublement non Linéaire et Dégénérée ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322:741–744, 1996.
- [129] M.M. VAINBERG. *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*. Mathematical Physics. Holden-Day, Inc., 1964.
- [130] M. VALADIER. « Représentation de Duals ». *Séminaire d'Analyse Convexe*, pages 6.1–6.7, 1986.
- [131] A. VISINTIN. « Sur le Problème de Stefan avec Flux non Linéaire ». *Boll. Un. Mat. Ital. C*, 18(1):63–88, 1981.
- [132] A. VISINTIN. « General Free Boundary Evolution Problems in Several Space Dimensions ». *J. Math. Anal. Appl.*, 95:117–143, 1983.
- [133] A. VISINTIN. « Strong Convergence Results Related to Strict Convexity ». *Comm. Partial Differential Equations*, 9(5):439–466, 1984.

- [134] A. VISINTIN. « Stefan Problem with a Kinetic Condition at the Free Boundary ». 1986.
- [135] A. VISINTIN, éditeur. *Phase Transitions and Hysteresis*. Numéro 1584 dans *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1994.
- [136] A. VISINTIN. (*Livre à paraître*). 1997.
- [137] VRABIE. *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, volume 32 de *Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, 1987.
- [138] X. XU. « Existence and Convergence Theorem for Doubly Nonlinear Partial Differential Equations of Elliptic-Parabolic Type ». *J. Math. Anal. Appl.*, 150:205–223, 1990.
- [139] J. YIN. « On the Uniqueness and Stability of BV Solutions for Nonlinear Diffusion Equations ». *Comm. Partial Differential Equations*, 15(12):1671–1683, 1990.
- [140] K. YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer Verlag, sixième édition, 1980.
- [141] E. ZADRZYŃSKA et W.M. ZAJĄCZKOWSKI. « On Existence of Solutions of Mixed Problems for Parabolic Systems ». *Topo. Meth. Nonlinear Anal.*, 2:125–145, 1993.
- [142] E. ZARANTONELLO, éditeur. *Convex Integrals and Duality*, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, 1971.
- [143] E. ZEIDLER. *Nonlinear Functional Analysis and its Application I-IV*. Springer Verlag, 1988.
- [144] W.P. ZIEMER. « Interior and Boundary Continuity of Weak Solutions of Degenerate Parabolic Equations ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 271(2):733–748, 1982.
- [145] W.P. ZIEMER. *Weakly Differential Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Numéro 120 dans *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1989.
- [146] D. ZWILLINGER. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, 1989.

Résumé

L'origine de ce travail est l'étude d'un problème industriel sur la mise en forme des thermo-plastiques par injection.

Nous nous sommes concentrés sur la partie remplissage du moule et sur la détermination de la position du front du polymère. Le travail présenté dans cette thèse comprend donc deux parties:

☞ L'étude mathématique et numérique de l'équation en pression qui régit l'écoulement du polymère fondu. À partir de cet exemple nous avons mis en évidence et étudié une famille nouvelle d'équations à double non linéarité.

☞ La détermination de l'interface polymère-air par des méthodes de suivi de lignes de niveau, l'interface étant décrite comme la ligne de niveau zéro d'une inconnue auxiliaire, que nous devons calculer. Nous avons obtenu l'existence d'une solution à l'équation de transport linéaire avec conditions aux limites à laquelle satisfait cette nouvelle inconnue. Puis nous avons mis au point une méthode numérique pour le calcul de l'interface polymère/air, en résolvant par éléments finis / volumes finis l'équation en pression et l'équation de transport du front. Notre méthode présente l'avantage d'une mise en oeuvre relativement aisée, robuste car elle permet de gérer les changements de topologie du front.

Summary

This work has been draw out of an industrial problem dealing with injection moulding of thermo-plastic.

We focussed our attention on the filling stage of the injection process, and on the localisation of melt polymer front. The present work is thus divided in two parts :

☞ The mathematical and numerical study of the pressure equation which is the driving force behind the model. From that example we outlined and studied a new class of doubly nonlinear equations.

☞ The localisation of polymer / air interface by level sets methods the interface curve being describe as the zero level set of a new unknown function. We obtained existence of a solution to a linear transport equation with boundary conditions to which this unknown function must satisfy. Then we devised a numerical method for the front localisation, solving by finite elements / finite volumes method the pressure equation and the front propagating equation. Our method appeared to be robust, specially to handle changes of topology of the front.