



HAL
open science

Ondelettes et applications en imagerie et en calcul de surfaces

Jules Waku Kouomou

► **To cite this version:**

Jules Waku Kouomou. Ondelettes et applications en imagerie et en calcul de surfaces. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1993. Français. NNT: . tel-00005140

HAL Id: tel-00005140

<https://theses.hal.science/tel-00005140>

Submitted on 26 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Jules WAKU KOUOMOU

pour obtenir le titre de DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ Joseph FOURIER - GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et
du 30 Mars 1992)

“Spécialité : Mathématiques Appliquées”

ONDELETTES ET APPLICATIONS EN IMAGERIE ET EN CALCUL DE SURFACES

Date de soutenance : 4 Novembre 1993

Composition du Jury :

Anestis ANTONIADIS PRESIDENT
Jean Marc CHASSERY DIRECTEUR
Albert COHEN EXAMINATEURS
Michel BARLAUD
Alain CHEHIKIAN

Thèse préparée au sein du Laboratoire **TIMC - Institut IMAG**

Autorisation de Soutenance

Doctorat de l'Université Joseph Fourier - GRENOBLE 1

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984 et de l'arrêté du 30 Mars 1992.

Vu les rapports de :

Mr. Albert COHEN

Mr. Michel BARLAUD

Mr. Jules WAKU KOUOMOU est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du Doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Fait à Grenoble le

Le Président de l'Université
Joseph Fourier - Grenoble 1.

A. NEMOZ

Remerciements

J'exprime toute ma reconnaissance à Mr. le Professeur Anestis Antoniadis qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et accepter de présider le jury de soutenance. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond attachement.

Je remercie Mr. Albert Cohen Ingénieur de l'armement chercheur au CEREMADE et Mr. Michel Barlaud Professeur à l'Université de Sophia Antipolis dont les travaux sont les contributions fondamentales tant théoriques que pratiques sur de nombreux aspects de la mise en œuvre des ondelettes en imagerie d'avoir accepté d'examiner ce rapport de thèse et de participer au jury.

Mes remerciements vont également à Mr. Didier Girad chercheur au CNRS qui m'a indiqué l'intérêt du problème d'interpolation ou d'approximation par les fonctions radiales.

Mr. Alain Chéhikian Professeur à l'IUT 1 de l'Université Joseph Fourier m'a fait l'honneur de faire partie de ce jury qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Mes remerciements à Jean Marc Chassery Directeur de Recherches au CNRS qui a dirigé cette thèse pour sa disponibilité sa compétence et son esprit d'entreprise. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour son soutien ses qualités humaines sa patience tout au long de cette thèse. Malgré toutes ses occupations il a toujours trouvé du temps pour écouter discuter et indiquer des directives.

Je tiens également à exprimer ma sympathie à tous les membres du laboratoire TIMC. Merci à Philippe Martin qui a relu le manuscrit de cette thèse. La présentation a été améliorée grâce aux discussions avec Françoise Peyrin.

Table des matières

Remerciements	iii
	1
Introduction	3
1 Présentation des ondelettes	5
1.1 Introduction	5
1.2 Approche théorie des groupes	7
1.2.1 Notions élémentaires sur des groupes	7
1.2.2 Notion de mesure dans un groupe	8
1.2.3 Représentation de carré intégrable d'un groupe G dans un espace de Hilbert H	10
1.3 Approche multirésolution	12
1.3.1 Analyse multirésolution ou Analyse graduée	13
1.3.2 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$	14
1.4 Approche bancs de filtres	25
1.5 Extension de la construction des ondelettes	28
1.5.1 Notion de repère et bases biorthogonales	28
1.5.2 Notion de paquets d'ondelettes	32
1.6 Conclusion	35
2 Compression d'images : Survol	36
2.1 Introduction	36
2.2 Evaluation de la qualité de la compression	39
2.2.1 Taux de compression	39
2.2.2 Taux d'information	40

2.2.3	Mesures de fidélité	41
2.3	Quantification	42
2.3.1	Quantification scalaire	42
2.3.2	Quantification vectorielle	44
2.4	Quelques techniques de compression d'images	47
2.4.1	Introduction	47
2.4.2	Techniques spatiales	47
2.4.3	Techniques de compression par transformation	49
2.4.4	Techniques hybrides	52
2.5	Conclusion	53
3	Ondelettes et compression d'images	55
3.1	Introduction	55
3.2	Quelques algorithmes de transformation en ondelettes	56
3.2.1	Introduction	57
3.2.2	Eléments de construction de l'algorithme de Mallat	57
3.2.3	Algorithme pyramidal non séparable en quinconce	67
3.2.4	Remarques sur les algorithmes déduits d'une analyse multirésolution	68
3.3	Algorithme pyramidal de Burt et Adelson	69
3.3.1	Introduction et filtres associés	69
3.3.2	Description et implémentation	72
3.4	Choix d'une ondelette en traitement d'image	75
3.5	Résultats de l'implémentation	77
3.6	Robustesse d'une représentation hiérarchique dans la perspective d'une localisation d'indices visuels	88
3.6.1	Introduction	88
3.6.2	Représentations hiérarchiques et localisation d'indices visuels	89
3.6.3	Résultats expérimentaux	90
3.7	Conclusion	93
4	Représentation de formes discrètes	94
4.1	Introduction	94
4.2	Représentation d'un contour discret	95
4.2.1	Représentations analytique et paramétrique	95

4.2.2	Représentations géométrique et discrète	96
4.3	Codage en imagerie : cas dun contour discret	97
4.4	Codage de Freeman	98
4.4.1	Présentation du codage de Freeman	99
4.4.2	Code de Freeman et Généralisations	99
4.4.3	Déplacements associés au code de Freeman et quelques propriétés	103
4.5	Conclusion	105
5	Ondelettes et représentation de formes discrètes	106
5.1	Introduction	106
5.2	Ondelettes et multirésolution	107
5.3	Multirésolution et courbes discrètes	108
5.3.1	Approche analytique de description d'une courbe discrète	109
5.3.2	Spécification de l'ondelette	110
5.4	Algorithmes d'analyse et de synthèse	111
5.4.1	Algorithme d'analyse	111
5.4.2	Phase de quantification	111
5.4.3	Algorithme de synthèse	113
5.5	Analyse des résultats de l'implémentation	116
5.6	Conclusion	118
6	Interpolation par des fonctions radiales	119
6.1	Introduction	119
6.2	Interpolation par les fonctions radiales : Cas général	120
6.2.1	Conditions de solvabilité	121
6.2.2	Condition géométrique et Positivité conditionnelle	122
6.3	Cas des splines de type plaque mince	123
6.3.1	Introduction	123
6.3.2	Cas général	124
6.3.3	Cas particulier d'une surface 2-D	125
6.4	Formulation matricielle et approches de solutions	126
6.4.1	Formulation matricielle	126
6.4.2	Présentation d'une méthode directe et d'une méthode itérative .	127
6.4.3	Convergence et ordre de l'erreur d'interpolation	130
6.5	Conclusion	130

7	Algorithme <i>BCR</i>	132
7.1	Introduction	132
7.2	Représentation d'un opérateur T	132
7.2.1	Représentation du noyau $k(x, y)$ d'un opérateur T	133
7.2.2	Coefficients de la représentation d'une fonction f	134
7.2.3	Approximation de T au point f	134
7.2.4	Approximation de $T(f)$ par AX	135
7.3	Description de l'algorithme <i>BCR</i>	136
7.3.1	Détails de l'implémentation de l'algorithme	137
7.3.2	Ondelettes pour l'algorithme <i>BCR</i>	140
7.4	Conclusion	141
8	Expériences numériques	142
8.1	Introduction	142
8.2	Cadre des expériences numériques	143
8.3	Mesures de fidélité et d'efficacité de l'approche	144
8.3.1	Mesures de fidélité	144
8.3.2	Mesure de l'efficacité de l'approche	145
8.4	Sur le choix de l'ondelette	147
8.4.1	Sur la taille des données	154
8.4.2	Sur quelques fonctions radiales	155
8.5	Calcul des surfaces	156
8.5.1	Avec une multiquadrique de Hardy	157
8.5.2	Avec une spline de type plaque mince	157
8.6	Conclusion	159
	Conclusion	164
	A Coefficients de filtres déduits des ondelettes	168
	B Construction d'ondelettes splines d'ordre k	171

Résumé

Cette thèse présente des travaux sur les aspects théoriques de la transformation en ondelettes et quelques applications en imagerie et en calcul de surface.

Nous présentons trois approches de construction d'une base d'ondelettes, à savoir l'approche théorie des groupes, l'approche analyse multirésolution et l'approche banc de filtres.

Les applications de la transformée en ondelettes portent sur la compression d'image, la représentation de courbes discrètes et le calcul de l'approximation d'une surface par les fonctions radiales.

Nous commençons par un survol de différentes techniques de compression. Nous montrons graphiquement et numériquement que les transformations en ondelettes, comparativement aux autres méthodes pyramidales (Burt et Adelson) permettent d'envisager de très bons résultats de compression.

On montre que parmi les représentations hiérarchiques, la représentation par ondelettes est celle qui permet de préserver au mieux les indices visuels dans le cadre de la construction d'un modèle numérique de terrain par exemple.

En ce qui concerne la représentation des courbes discrètes, nous avons mis au point un algorithme d'analyse et de synthèse multi-échelles. Ce nouvel algorithme s'applique à des directions élémentaires correspondant à une suite de Freeman représentant un contour discret ou une courbe discrète. On montre que l'ondelette de Haar permet d'obtenir une bonne représentation multi-échelle d'une courbe discrète avec une taille mémoire faible et un coût de calcul minimal.

Enfin, après avoir posé dans le cadre général le problème d'interpolation par les fonctions radiales et présenté une analyse des conditions d'existence de la solution, nous proposons une nouvelle approche de résolution du système linéaire qui définit les paramètres du problème. Notre approche est fondée sur la transformation en ondelettes et permet de rendre creuse la matrice du système. Nous montrons la performance de cette approche surtout quand le nombre de données est important. Les résultats d'interpolation d'une surface par une spline de type plaque mince ou multiquadrique sont présentés.

En particulier, nous avons testé les ondelettes splines, les ondelettes à support compact et les ondelettes biorthogonales. Les résultats graphiques sont accompagnés des estimations numériques des erreurs, ceci permettant une meilleure appréciation des démarches proposées.

Mots Clés : Ondelettes, transformée en ondelettes, théorie des groupes, analyse multirésolution, bancs de filtres, compression d'image, algorithme pyramidal, représentation multi-échelle, contour discret, interpolation, fonction radiale, spline de type plaque mince, multiquadrique.

Abstract

This thesis is a theoretical and numerical contribution to wavelet transform in image processing and surface computing. Group theory approach, multiresolution approach and filters bank approach of wavelets basis are reviewed.

The wavelet transform applications concern image compression, discrete curve representation and surface approximation by radial functions.

We begin by reviewing different image compression techniques. Graphically and numerically we illustrate that wavelet transform compared to other pyramidal methods such as Burt and Adelson scheme performed better for image compression.

We illustrate also that among hierarchical representations, edges are well preserved between scales by the wavelet representation.

We develop an original multi-scale algorithm for synthesis and analysis of discrete curve. Our algorithm is applied to discrete curves or contours starting from its Freeman chain code in order to obtain discrete approximations at several levels of resolution. The best results are obtained with Haar wavelet at minimal cost of time and memory.

Last, after a review of interpolation problem by radial functions and a remainder about existence of solutions, we propose a new approach to solve the linear system which defines the parameters of the problem. The approach is based on wavelet transform and allows the conversion of a dense matrix to a sparse one. The linear system can then be easily solved by an iterative procedure. We show that the approach is more efficient as the amount of data grows. Results of surface interpolation by thin plate spline and multiquadrics are presented.

In the implementations developed in this thesis, we used three families of wavelets : spline wavelets, wavelets with compact support and biorthogonal wavelets. The graphical and numerical presentation of results illustrate the efficiency of the proposed approaches.

Keys words : Wavelets, wavelet transform, group theory, multiresolution analysis, filters bank, image compression, pyramidal algorithm, multiscale representation, discrete contour, interpolation, radial functions, thin plate spline, multiquadrics.

Introduction

Les travaux que nous présentons dans ce mémoire de thèse portent sur les aspects théoriques et quelques applications de la transformation en ondelettes.

Cette thèse se présente en quatre parties. Dans la première partie réduite à un chapitre nous rappelons après un bref rappel historique différentes approches de constructions des bases d'ondelettes. Il s'agit de l'approche théorie des groupes l'approche fonctionnelle (multirésolution) et l'approche discrète (bancs de filtres). Nous avons construit quelques courbes : ondelettes fonction d'échelle filtres associés . . . pour illustrer cette partie.

Dans la deuxième partie après avoir fait un survol de quelques algorithmes de compression d'image nous insisterons sur ceux qui procèdent par transformation. Nous décrivons le formalisme et les détails de l'implémentation de l'algorithme d'analyse et de synthèse d'images de S. Mallat d'un point de vue plus global. Les résultats de l'implémentation sont présentés en analysant l'effet du nombre de coefficients du filtre et de la résolution. L'algorithme en question basé sur une analyse multirésolution non dyadique est ensuite présenté. La représentation d'une image par la pyramide laplacienne et/ou gaussienne de Burt et Adelson est explicitée. Nous analysons la construction des noyaux de convolution correspondants à la génération de telles pyramides. La présentation des résultats obtenus à l'implémentation met en relief l'effet du paramètre indépendant du noyau de convolution 5×5 . Dans la perspective de la compression d'images par ondelettes nous utilisons la technique de mise à zéro d'un certain pourcentage de coefficients d'ondelette après l'analyse. Nous présentons les résultats de l'implémentation de l'algorithme de Mallat avec différentes ondelettes de même que celui de Burt et Adelson en mettant différents pourcentages de coefficients de détail à zéro. La présentation des résultats se fait autant que ce peut numériquement et graphiquement. Ces deux aspects de l'appréciation des résultats étant complémentaires surtout en imagerie. Ni le critère visuel ni le critère numérique ne rend compte

à lui tout seul de la complexité du résultat d'un traitement sur une image. Cette partie se termine par l'étude de la stabilité d'indices visuels dans une structure hiérarchique ceci par exemple lors d'un prétraitement. Nous comparons les résultats obtenus avec différentes ondelettes et ceux obtenus avec la pyramide laplacienne.

La troisième partie assez originale porte sur l'analyse multi-échelle d'une courbe discrète ou d'un contour discret. Nous présentons les caractéristiques et les propriétés d'une représentation ou codage d'une courbe discrète notamment avec le code de Freeman. Les algorithmes d'analyse et de synthèse proposés sont décrits. Notons que la phase de quantification souvent implicite est très déterminante pour rester dans un environnement discret. Nous terminons par une présentation et une analyse des résultats de l'implémentation.

La quatrième partie de cette thèse est consacrée à l'utilisation des ondelettes en interpolation/approximation de surface par des fonctions radiales. Cette méthode d'interpolation étant l'une des meilleurs mais très peu utilisée en raison de la structure très dense du système linéaire à résoudre pour déterminer les paramètres du problème. Nous présentons le problème général ensuite quelques conditions d'existence et d'unicité de la solution seront passées en revue. Il est bien connu que la matrice du système linéaire associé à la résolution de ce problème est très dense et souvent mal conditionnée. Nous proposons de rendre creuse cette matrice après décomposition dans une base adéquate d'ondelettes. Nous envisageons différentes grilles de représentation des données. La nouvelle approche proposée est présentée ainsi que les résultats obtenus en considérant différentes familles d'ondelettes.

La conclusion est suivie des perspectives et d'orientations futures sur l'aspect des applications des ondelettes. En imagerie on portera l'accent sur l'aspect compression et robustesse de frontières en détection et représentation discrète d'un contour ou d'une courbe. Le problème d'interpolation pourra être remplacé par celui d'approximation avec choix de paramètres ajustant le compromis entre le lissage et la fidélité aux données.

Chapitre 1

Présentation des ondelettes

1.1 Introduction

Depuis quelques années se développent un ensemble de travaux tant théoriques que pratiques sur une famille de fonctions appelées *ondelettes* [27Γ50Γ53Γ69]. Ces recherches ont eu un regain d'intérêt d'une part parce qu'elles proposent des algorithmes plus efficaces pour des problèmes pratiques pour lesquels les techniques classiques avaient montré leurs limites et d'autre part parce qu'elles apportent un formalisme mathématique attrayant dans la reformulation de plusieurs problèmes dans différents domaines scientifiques [97]. Cette reformulation entraîne de nouvelles approches de solutions et des interprétations bien au delà de ce qui avait été obtenu jusqu'alors.

Un fait remarquable dans ce développement est la multiplicité des disciplines qui sont concernées et dont les techniques propres ont contribué à élargir le champ d'investigation. En traitement du signal par exemple où la première application (signaux sismiques) est apparue [18]Γla transformation de FourierΓmalgré sa version FFT (Fast Fourier Transform) voit sa prépondérance discutée par la nouvelle transformation qui possède déjà un algorithme rapide [67Γ73Γ75]. La transformation en ondelettes permet une *représentation temps-fréquence*, meilleure que celle induite par la transformation de Gabor [1] où la fenêtre i.e plage temporelle d'observation est fixe. La possibilité du contrôle des variables temps et fréquence permet à la transformée en ondelettes de conforter l'utilité de ce nouvel espace de représentation [80Γ88]. Dans cet espaceΓle principe d'incertitude d'Heisenberg sur la limite numérique de la localisation de la position et de la fréquence d'une particule est amélioré [34]. Les méthodes temps-fréquence ou temps-échelle qui tentent de palier aux insuffisances de l'espace de Fourier

sont complétées par cette nouvelle approche [80Γ97].

L'ensemble de ces développements a conduit comme le remarque Y. Meyer [34]Γà une théorie cohérente permettant de réunir dans une synthèse harmonieuse les algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson [25]Γde S. Mallat [53] en traitement numérique des imagesΓles filtres miroirs en quadrature utilisés en codage [28Γ65]Γl'analyse et la caractérisation de quelques espaces fonctionnels classiques [69] etc. . .

D'un point de vue formelΓles développements sur les ondelettes visent à trouver des bases hilbertiennes et en particulier celles de $L^2(\mathbb{R}^n)$ Γpour la modélisation des applications [50Γ49Γ53] ou en général des bases des espaces de SobolevΓde Banach et ainsi que ceux qui s'en déduisent pour l'étude des opérateurs qui y sont définis [42Γ31Γ69].

Pour la construction de ces bases d'ondelettesΓplusieurs approches ont été développées : l'approche théorie des groupes [64] où l'on montre qu'une ondelette est un vecteur admissible d'une représentation de carré intégrable d'un groupe localement compact. La transformée en ondelettes est obtenue en considérant le groupe affine [27Γ55Γ64] alors que le groupe de Weil-Heisenberg conduit à la transformée de Gabor [1Γ55] sur la droite réelle.

Une approche plus fonctionnelle vient de l'analyse graduée [45] ou analyse multirésolution [53] dans laquelle les bases d'ondelettes sont caractérisées en recherchant les bases des espaces complémentaires de la suite d'espaces vectoriels de multirésolution [69]. Cette approche est à la base de l'algorithme de S. Mallat en traitement du signal et de l'image [49Γ53]. Notons au passage que Mallat a donné une interprétation remarquable à la multirésolution en théorie du signal.

I. Daubechies [50] a construit des bases d'ondelettes à support compact en partant des éléments discrets que sont les coefficients d'un filtre en quadrature. Cette construction a relancé les recherches en théorie de bancs de filtres [28Γ65] et a permis une meilleure compréhension et une reformulation mathématique plus rigoureuse [65]. La construction de Daubechies a marqué une étape très importante dans les investigations sur les bases d'ondelettes. Les bases orthonormales d'ondelettes à support compact qu'elle a construites sont préférées à celles obtenues par Lemarié [42] et Battle [41] pour certaines applications numériques telles que l'analyse et la synthèse des signaux en codage [62]Γen analyse numérique [74] etc. . . La notion de base est généralisée à celle de repère ou *frame* dans un espace hilbertien [50Γ55]. Le lien est fait entre un repère et les états cohérents de la physique. Cohen et *al.* [83] construisent en partant

de l'approche de Daubechies des repères duaux qui fournissent des bases biorthogonales d'ondelettes.

1.2 Approche théorie des groupes

1.2.1 Notions élémentaires sur des groupes

Nous commençons par quelques définitions :

Définition 1 (*Groupe localement compact*) On dit qu'un groupe G est localement compact si G est un espace topologique localement compact muni d'une opération de groupe et tel que les applications suivantes :

$$\begin{aligned}(x, y) &\longmapsto x.y \text{ de } G \times G \text{ dans } G \\ x &\longmapsto x^{-1} \text{ de } G \text{ dans } G\end{aligned}$$

soient continues.

Définition 2 (*Représentation ou Action d'un groupe sur un ensemble*) Soit G un groupe quelconque, X un ensemble quelconque et $GL(X)$, le groupe linéaire de X . L'action de G sur X (la représentation de G sur X) est définie par l'application :

$$\begin{aligned}\sigma : G &\longmapsto GL(X) \\ g &\longmapsto \sigma(g) = \sigma_g : X \longmapsto X \\ &\quad x \longmapsto \sigma_g(x) = \sigma_g.x\end{aligned}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

- $\sigma_g(\sigma_{g'}x) = \sigma_{gg'}x \quad \forall g, g' \in G, \forall x \in X$
- $\sigma_e x = x \quad \forall x \in X$, où e est l'élément neutre de G .

Remarques 1 (i) On dit que l'action σ de G sur X est transitive ssi

$$\forall x, x' \in X, \exists g \in G \text{ tel que } x' = \sigma_g.x.$$

(ii) Si G est un groupe localement compact et X , un ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel topologique alors :

$$\begin{aligned}\forall g \in G, \text{ l'application } \sigma_g : X &\longmapsto X \\ x &\longmapsto \sigma_g.x \text{ est continue.}\end{aligned}$$

(iii) Quand il existe une représentation du groupe G sur un espace X , on dit que X est un G -groupe.

(iv) Si X est un espace fonctionnel à valeurs dans G , on peut définir la multiplication à gauche σ^L (resp. à droite σ^R) par :

$$\begin{aligned}\sigma_{g'}^L(f)(g) &= f(g'^{-1}g) \\ \sigma_{g'}^R(f)(g) &= f(gg') \quad \forall g, g' \in G, \forall f \in X\end{aligned}$$

Définition 3 (*Produit semi-direct*)

Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et σ_{g_1} , une action de G_1 sur G_2 , (munissant G_2 d'une structure de G_1 -groupe) i.e :

$$\begin{aligned}\sigma_{g_1} : G_2 &\longrightarrow G_2 \\ g_2 &\longmapsto \sigma_{g_1}.g_2 \text{ vérifie les propriétés de la définition (2) ci-dessus}\end{aligned}$$

On appelle produit semi-direct de G_1 par G_2 , noté $G = G_1 \ltimes G_2$, le groupe défini par :

$$\begin{aligned}\forall g_1, g'_1 \in G_1, \quad \forall g_2, g'_2 \in G_2, \quad (g_1, g_2).(g'_1, g'_2) &= (g_1.g'_1, g_2.\sigma_{g_1}(g'_2)) \\ \text{L'inverse de } (g_1, g_2) \text{ est } (g_1, g_2)^{-1} &= (g_1^{-1}, \sigma_{g_1^{-1}}(g_2^{-1}))\end{aligned}$$

Exemple 1 $G_1 = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, groupe multiplicatif et $G_2 = (\mathbb{R}, +)$, groupe additif. L'action de G_1 sur G_2 est définie par : $\sigma_a.b = a.b$, $a \in G_1$, $b \in G_2$. Le produit semi-direct de G_1 par G_2 est défini par :

$$\begin{aligned}\forall a, a' \in \mathbb{R}_+^*, \forall b, b' \in \mathbb{R} \quad (a, b).(a', b') &= (a.a', b + ab') \\ \text{L'inverse de } (a, b) \text{ est } (a, b)^{-1} &= (a^{-1}, -a^{-1}b)\end{aligned}$$

Le groupe obtenu est le groupe de translation-dilatation sur \mathbb{R} ou le groupe "ax + b" ou encore le groupe affine sur \mathbb{R} .

1.2.2 Notion de mesure dans un groupe

Dans la suite ΓG désignera un groupe localement compact.

$C_0(G)$ (resp. $C_0^+(G)$) désignera l'espace des fonctions continues (resp. continues positives) à support compact sur G .

Définition 4 (*Mesure de Radon*)

Une mesure de Radon sur G , notée μ est une forme linéaire positive sur $C_0^+(G)$.

Définition 5 (Mesure de Haar)

On appelle mesure de Haar à gauche (resp. droite) notée μ_L (resp. μ_R) la mesure de Radon invariante à gauche (resp. droite). Ceci se traduit par :

$$\begin{aligned}\mu(\sigma_{g'}^L f) &= \mu(f) & \text{où} & & (\sigma_{g'}^L f)(g) &= f(g'^{-1}g) \\ \mu(\sigma_{g'}^R f) &= \mu(f) & \text{où} & & (\sigma_{g'}^R f)(g) &= f(gg')\end{aligned}$$

avec $g, g' \in G$ et $f \in C_0^+(G)$.

Soit X un sous ensemble mesurable de G la mesure de X est celle de la fonction indicatrice de X . De cette notion de mesure d'ensemble la mesure de Haar à gauche μ_L (resp. à droite μ_R) satisfait à la relation d'invariance suivante :

$$\mu_L(g^{-1}X) = \mu_L(X) \quad (\text{resp. } \mu_R(Xg) = \mu_R(X))$$

qui peut aussi s'exprimer par :

$$d\mu_L(g^{-1}x) = d\mu_L(x) \quad (\text{resp. } d\mu_R(xg) = d\mu_R(x)) \text{ pour } x \in X, g \in G.$$

On montre [5Γ16] que dans un groupe localement compact toutes les mesures de Haar à gauche (resp. à droite) sont identiques à une constante près. De cette unicité on parlera de la mesure de Haar à gauche ou de la mesure de Haar à droite. Des relations entre une mesure de Haar à gauche à droite on a notamment :

$$\begin{aligned}d\mu_R(g) &= d\mu_L(g^{-1}), \quad g \in G, \\ d\mu_R(g) &= \Delta(g^{-1})d\mu_L(g) \quad g \in G.\end{aligned}$$

où Δ est un isomorphisme de G dans \mathbb{R}_+^* et est appelé *fonction modulaire* de G .

Définition 6 (Groupe unimodulaire)

On dit qu'un groupe est unimodulaire si sa fonction modulaire est constante et est égale à l'unité. Un groupe sera dit non unimodulaire dans le cas contraire.

Exemples 1 (a) $G = (\mathbb{R}^n, +)$, groupe des translations dans \mathbb{R}^n

- G est unimodulaire et la mesure de Haar sur G est simplement la mesure de Lebesgue :

– On a alors :

$$\mu_L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t+x) dx ; \quad \mu_R(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t) dx$$

et par conséquent on note : $\mu_L(f) = \mu_R(f) = \mu(f)$, $\forall f \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$

(b) $G = (\mathbb{R}_+^*, \times)$, groupe des dilatations dans \mathbb{R}_+^*

– G est unimodulaire;

– La mesure de Haar est définie par:

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) \frac{dx}{x} \quad \forall f \in C_0^+(\mathbb{R}_+^*).$$

(c) $G = (\mathbb{R}_+^*, \times) \wedge (\mathbb{R}, +)$, groupe des dilatations et translations ou groupe “ $ax + b$ ”

– G est non unimodulaire;

– Les mesures de Haar sont définies par :

$$\begin{aligned} d\mu_L(g) &= \frac{dad b}{a^2} ; \\ d\mu_R(g) &= \frac{dad b}{a} \text{ où } g = (a, b), \quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

1.2.3 Représentation de carré intégrable d’un groupe G dans un espace de Hilbert H

Soit H un espace de Hilbert $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le produit scalaire défini sur H et qui induit la norme $\|\cdot\|_H$. Soit G un groupe localement compact et $GL(H)$ l’ensemble des opérateurs unitaires de H .

Rappelons quelques définitions utiles

Soit Ω une représentation de G dans H .

On dit que Ω est :

(i) *Unitaire* si : $\forall f_1, f_2 \in H, \quad \forall g \in G, \quad \langle \Omega_g f_1, \Omega_g f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$

(ii) *Fortement continue* si : $\forall f \in H$ l’application $k_f : g \mapsto k_f(g) = \Omega(g)f$ vérifie

$$\lim_{g \mapsto g_0} \|k_f(g) - k_f(g_0)\| = 0$$

(iii) *Irréductible* si :

Pour tout ϕ non nul de H on a :

$$\overline{\text{span}(D)} = H \text{ où } D = \{\Omega_g \phi, g \in G\} \text{ est l'orbite de } \phi \text{ sur } G.$$

ou de manière équivalente :

Le seul vecteur $\varphi \in H$ pour lequel $\langle \varphi, \Omega_g \phi \rangle = 0$ pour tout $g \in G$ est $\varphi = 0$ ce qui se traduit littéralement par : tout vecteur non nul de H est cyclique.

Définition 7 (Vecteur admissible)

Soit Ω une représentation d'un groupe localement compact G , dans un espace de Hilbert H . Un vecteur ϕ non nul de H est dit admissible si :

$$\int_G |\langle \Omega_g \phi, \phi \rangle|^2 d\mu_L(g) < +\infty \tag{1}$$

Nous avons aussi :

Définition 8 (Représentation de carré intégrable)

Une représentation Ω d'un groupe G dans un espace de Hilbert H est de carré intégrable si elle est irréductible et possède au moins un vecteur non nul admissible.

C'est cette notion de représentation de carré intégrable qui est le point central de la construction des ondelettes par l'approche théorie des groupes [27Γ55Γ64]. En fait il s'agit d'une formulation assez générale de caractérisation dans la quelle se retrouve la transformation de Gabor [1] ou transformée de Fourier à fenêtre glissante qui se déduit du groupe de Weil-Heisenberg. La transformation en ondelettes quant à elle se déduit du groupe affine sur la droite réelle.

Dans sa formulation analytique la transformée de Gabor d'un signal ou d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur : T_g qui à $f \in L^2(\mathbb{R})$ associe :

$$T_g f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x - a) e^{-2\pi i b x} dx$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. On note que si la fonction g est centrée autour de 0 pour les variables temps et fréquence alors T_g représente l'image de f au temps a et à la fréquence b . La fonction f est caractérisée par les valeurs de $T_g f(a, b)$ lorsque a et b parcourent l'axe des réels. Elle peut être reconstruite par la formule :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_g f(a, b) e^{2\pi i b x} g(x - a) da db$$

Le choix fait par Gabor [1] pour la fonction g est une gaussienne.

La transformation en ondelettes suit la même philosophie et considère une fonction g spécifique et l'opérateur T_g est défini par :

$$T_g f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) a^{-1/2} g\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$. De même que ci-dessus la fonction f peut se reconstruire à l'aide des coefficients $T_g f(a, b)$ lorsque a parcourt \mathbb{R}_+^* et b parcourt \mathbb{R} par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_g f(a, b) a^{-1/2} g\left(\frac{x-b}{a}\right) da db$$

à une constante multiplicative près.

En considérant l'espace de Hardy Γ sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ contenant les fonctions dont la transformée de Fourier s'annule pour les fréquences négatives Γ Grossmann et Morlet [27] montrent que l'opérateur T_g n'est un isomorphisme dans le cas de la transformation en ondelettes que si g satisfait à : la **condition d'admissibilité** i.e

$$C_g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2)$$

où \hat{g} représente la transformée de Fourier de g . Cette condition est simplement celle que doit satisfaire un vecteur pour être admissible dans la représentation du groupe affine sur \mathbb{R} . Elle est alors équivalente à la condition (1). On montre facilement que pour une fonction de carré intégrable Γ cette condition est équivalente à dire qu'elle a le moment d'ordre 0 nul [50].

On peut retenir pour cette approche Γ qu'une ondelette est simplement un vecteur admissible d'une représentation de carré intégrable du groupe affine sur \mathbb{R} . La condition d'admissibilité est la condition qui doit être satisfaite par une fonction pour être appelée ondelette. On a une généralisation de cette approche dans [64] où l'on étudie le cas du groupe inhomogène $IG(n)$ obtenu par le produit semi-direct du groupe additif \mathbb{R}^n et du groupe des matrices réelles v de la forme $v = ar$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in SO(n)$ Γ groupe orthogonal spécial de dimension n .

1.3 Approche multirésolution

La résolution d'un problème d'analyse fonctionnelle passe par la spécification et la caractérisation d'une part du cadre fonctionnel de recherche des solutions et d'autre part des solutions elles mêmes.

Pour ce qui est de la spécification il s'agit de trouver des critères qui privilégient un espace ou une solution par rapport aux autres. La caractérisation revient à trouver des arguments permettant de reconnaître assez facilement si un élément appartient à un espace et savoir comment l'exprimer, le représenter ou l'évaluer numériquement.

Pour ce qui est de l'espace vectoriel la caractérisation revient à trouver des bases satisfaisant certains critères tels l'orthogonalité, la facilité de représentation d'un élément de l'espace, la réduction du volume de calcul nécessaire etc

Ici nous nous intéressons à la caractérisation de l'espace des fonctions de carré intégrables sur \mathbb{R}^n . Il s'agit de l'espace vectoriel des signaux dits d'énergie finie très utilisé dans la formalisation des problèmes concrets notamment en traitement du signal et de l'image. Nous allons caractériser une base bien particulière de cet espace vectoriel en passant par un cadre fonctionnel qui est l'analyse graduée ou l'analyse multirésolution développée par Y. Meyer [69] et S. Mallat [49, 53].

Dans la section qui va suivre nous allons rappeler d'une part ce qu'est l'analyse multirésolution en tant que cadre fonctionnel et d'autre part la construction des ondelettes qu'offre ce formalisme.

1.3.1 Analyse multirésolution ou Analyse graduée

L'analyse multirésolution est un cadre fonctionnel qui permet de représenter une fonction comme une limite de ses approximations à différents niveaux de résolutions ou à des échelles successives [49, 50, 53].

Cette notion est très liée à celle de l'analyse temps-fréquence ou temps-échelle utilisée en traitement du signal [1, 88]. La représentation temps-fréquence qui se déduit de cette analyse permet d'observer un signal dans un espace intermédiaire entre l'espace temps et l'espace des fréquences. Elle cherche à pallier dans une certaine mesure aux insuffisances des représentations [80] dans l'espace temps ou l'espace fréquence tout en combinant les avantages [69, 88]. C'est le cas notamment pour ce qui est du principe d'incertitude d'Heisenberg où l'on s'intéresse à la précision numérique de la localisation d'une particule en temps et en fréquence en mécanique quantique [34]. Une notion aussi proche de l'analyse multirésolution est la notion *d'espace échelle* telle que décrite par Witkin [24, 53] dans le cadre de l'imagerie. Il s'agit d'une approche assez naturelle en traitement d'images qui consiste à analyser une scène selon plusieurs vues

ou plusieurs échelles Γ notamment de la plus grossière à la plus fine. La caractérisation de l'espace temps-échelle peut se déduire de celle de l'espace temps fréquence en considérant l'échelle représentée par la variable $(a)\Gamma$ comme l'inverse de la fréquence représentée par la variable (μ) i.e $a = \frac{\mu_0}{\mu}$ où μ_0 est une fréquence non nulle.

L'analyse multirésolution dont nous allons donner la définition ci-dessous est qualifiée de dyadique Γ ce terme provenant du facteur de résolution ou d'échelle qui est pris égale à 2 [53 Γ 69]. La valeur $\sqrt{2}$ a été utilisée par Feauveau [65] pour obtenir une décomposition plus fine. Cette analyse multirésolution est dite en quinconce. On montre d'ailleurs que ce facteur de résolution peut être choisi arbitrairement en imagerie [50] et caractérise alors le facteur de réduction ou de sous-échantillonnage dans un processus de compression. En théorie des opérateurs Γ ce facteur de résolution caractérise les valeurs propres qui doivent être de module supérieur à l'unité [34].

1.3.2 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nous donnons ici la définition générale de l'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que l'énonce Y. Meyer [69].

Définition 9 (*Analyse multirésolution*)

On appelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$, une suite croissante V_j , $j \in \mathbb{Z}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1};$
2. $\bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j$ est réduit à $\{0\}$; $\bigcup_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$;
3. $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1};$
4. $\forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0;$
5. Il existe une fonction $g(x) \in V_0$ telle que $(g(x - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ soit une base inconditionnelle de V_0 .

Définition 10 (*Meyer [69]*)

Une analyse multirésolution V_j , $j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est r -régulière ($r \in \mathbb{N}$) si l'on peut choisir la fonction $g(x)$ de la définition (9) de manière à satisfaire :

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}$$

pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $|\alpha| \leq r$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Avec les notations classiques : $\partial^\alpha = ((\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}, \dots, (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n})$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

On trouvera dans [69] quelques exemples de construction d'analyse multirésolution Γ notamment l'analyse multirésolution spline d'ordre r et l'analyse multirésolution de LittleWood-Paley.

Dans [53] Γ l'analyse multirésolution est définie en terme de suite $E_j, j \in \mathbb{Z}$ d'opérateurs de projection de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans un sous espace vectoriel $V_j, j \in \mathbb{Z}$. Dans le cas orthogonal Γ il y a équivalence entre les deux définitions. Mais dans le cas non orthogonal traité dans [65] il faut associer à l'opérateur $E_j \Gamma$ un autre opérateur Z_j indiquant la direction de projection. On a une étroite association entre l'aspect résolution (niveau d'échelle) et l'espace de projection V_j . E_j est l'opérateur d'approximation d'une fonction f à la résolution 2^{-j} ou à l'échelle $2^j \Gamma$ alors que V_j est l'ensemble de toutes les approximations possible de la fonction f à la résolution 2^{-j} . $E_j : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow V_j$ est un opérateur linéaire. La régularité de l'approximation $f_j \in V_j$ de f est fortement liée à celle de l'analyse multirésolution (r -régularité). Pour caractériser l'approximation f_j ou le projecteur $E_j \Gamma$ il est nécessaire de définir une base du sous-espace V_j . Dans la définition de l'analyse multirésolution Γ on a une base de Riesz de $V_j \Gamma$ mais pour simplifier les calculs de l'approximation d'une fonction dans l'un des espaces $V_j \Gamma$ une base orthonormale est plus intéressante.

Nous allons rappeler la définition d'une base de Riesz ou base inconditionnelle et le processus de construction d'une base orthonormée qui s'en déduit.

Définition 11 (*Base inconditionnelle*)

Une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H , constituent une base de Riesz de H si :

- (a) Il existe deux constantes C_1 et C_2 avec $C_2 > C_1 > 0$ telles que pour toute suite de scalaires $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, on ait :

$$C_1 \left(\sum_k |\alpha_k|^{1/2} \right) \leq \left\| \sum_k \alpha_k e_k \right\|_H \leq C_2 \left(\sum_k |\alpha_k|^{1/2} \right)$$

- (b) L'ensemble des combinaisons linéaires finies de $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dense dans H .

D'une analyse multirésolution qui permet d'obtenir la base de Riesz Γ on peut construire une base orthonormée par le théorème ci-dessous :

Théorème 1 Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, une suite d'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors $C_2 > C_1 > 0$ tels que l'on ait pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$C_1 \leq \left(\sum_k |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2} \leq C_2$$

où \hat{g} est la transformée de Fourier de g . On définit ensuite $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{g}(\omega) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2}$$

Alors $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}^n$ est une base orthonormée de V_0 .

Si f , est une autre fonction de V_0 telle que $f(x - k), k \in \mathbb{Z}^n$ soit une base orthonormale de V_0 , alors la relation qui existe entre \hat{f} et $\hat{\phi}$ est :

$$\hat{f}(\omega) = \Theta(\omega) \hat{\phi}(\omega) \text{ où } \Theta(\omega) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ est } 2\pi\text{-périodique et } |\Theta(\omega)| = 1$$

presque partout.

Le lecteur intéressé trouvera dans [69] la démonstration de ce résultat. La régularité de la base orthonormée ainsi obtenue est la même que celle de la base de Riesz correspondante. Moyennant quelques propriétés supplémentaires sur la définition de l'analyse multirésolution Γ notamment l'existence d'un isomorphisme entre V_j et $l^2(2^{-j}\mathbb{Z}^n)$ Γ Mallat [49] a démontré qu'on peut obtenir directement une base orthonormée de V_j et se passer donc de la construction que suggère le théorème (1).

Théorème 2 (Mallat [53])

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe une fonction $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que : si l'on note $\phi_{jk}(x) = 2^{nj/2} \phi(2^{j/2}x - k), j \in \mathbb{Z}$, alors $(\phi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est une base orthonormée de V_j .

Dans la littérature sur l'analyse multirésolution dédiée à la construction des ondelettes Γ la fonction ϕ est appelée *fonction de graduation* Γ ou *fonction d'échelle* ou encore *l'ondelette père*. Une approximation multirésolution d'une fonction quelconque $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ à la résolution 2^{-j} est obtenue par projection orthogonale de $f(x)$ dans V_j . Ceci s'exprime par :

$$f_j(x) = E_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jk} \phi_{jk}(x) \text{ où } \alpha_{jk} = 2^{nj} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(2^j y - k) dy$$

et E_j l'opérateur de projection orthogonale dans V_j .

Les α_{jk} représentent les moyennes des approximations de f aux points $2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et à l'échelle 2^j . On peut ainsi obtenir un échantillonnage de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sur le réseau régulier $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}^n$ de \mathbb{Z}^n .

L'analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ définie ci-dessus dans le cadre formel de $L^2(\mathbb{R}^n)$ reste valable dans le cas d'autres espaces fonctionnels [69].

En fait les opérateurs E_j permettent d'obtenir une approximation d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à la résolution 2^{-j} . On peut se demander comment se présente la différence entre deux approximations successives de la même fonction? Ou encore comment écrire cette différence et dans une base adéquate? C'est en apportant une réponse à ces interrogations que l'on trouve l'ondelette par l'approche analyse multirésolution.

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si l'on note $W_j \Gamma$ le complémentaire orthogonal de V_j dans $V_{j+1} \Gamma$ on a en terme ensembliste $V_{j+1} = V_j \oplus W_j \Gamma$ ce qui peut se traduire sur les opérateurs par la relation : $E_{j+1} = E_j + D_j$ où D_j est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur W_j . De la définition de l'analyse multirésolution on a $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \Gamma$ ce qui signifie qu'une base de $L^2(\mathbb{R}^n)$ peut être constituée des bases des différents sous-espaces W_j . On montre [69] que les bases orthogonales d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sont des bases inconditionnelles de la plupart des espaces fonctionnels classiques tels $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < +\infty$) les espaces de Sobolev les espaces de Besov ...

De même l'appartenance d'une fonction f à l'un de ces espaces fonctionnels peut se déduire sans difficulté du comportement ou de la représentation de cette fonction sur les bases ainsi obtenues. C'est à dire par l'analyse des coefficients d'ondelettes de la fonction.

Dans un cadre assez général Y. Meyer [69] a démontré l'existence d'une base orthonormale d'ondelettes. Notons qu'il s'agit en fait d'un cas particulier mais très important obtenu par produit tensoriel. C'est d'ailleurs le cas le plus souvent utilisé dans la pratique. Nous rappelons ici le théorème d'existence.

Théorème 3 (Meyer [69])

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution r -régulière de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe $q = 2^n - 1$ fonctions ψ_1, \dots, ψ_q appartenant à V_1 et ayant les deux propriétés suivantes :

$$(a) \quad |\partial^\alpha \psi_l(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq r$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $N \geq 1$.

$$(b) \quad \text{Les fonctions } \psi_l(x - k), 1 \leq l \leq q, k \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z} \text{ forment une base}$$

orthonormée de W_0 . Les fonctions $2^{nj/2}\phi_l(2^jx - k)$, $1 \leq l \leq q$, $k \in \mathbb{Z}^n$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemple de construction d'ondelettes (1-D et 2-D)

Nous allons rappeler [53] ici la construction explicite d'une ondelette en partant de la caractérisation de la fonction de graduation par un filtre discret. Dans les applications numériques c'est d'ailleurs cet aspect filtrage qui est fondamental. Le *théorème (2)* nous donne l'existence d'une fonction d'échelle qui constitue pour chaque j (après modulation et translation) la base d'un de V_j l'un des sous-espaces vectoriels de multirésolution. En dimension 1 la fonction de graduation est liée à un filtre discret défini sur \mathbb{R} par :

Théorème 4 (Mallat [53])

Soit $\phi(x)$, une fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et H , un filtre discret de réponse impulsionnelle $h(n) = \langle \phi_{-10}, \phi_{0n} \rangle$ avec $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx - k)$. En fait on a : $h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi(\frac{x}{2})\phi(x - n) dx$. On suppose que $|\phi(x)|$ et $|\phi'(x)|$ sont de l'ordre de x^{-2} à l'infini.

Considérons $H(\omega)$ la série de Fourier définie par :

$$H(\omega) = \sum h(n) e^{-in\omega}$$

alors $H(\omega)$ satisfait les deux propriétés suivantes :

$$|H(0)| = 1 \text{ et } h(n) = o(n^{-2}) \text{ à l'infini} \quad (3)$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (4)$$

Réciproquement, soit $H(\omega)$, une série de Fourier satisfaisant à (3) et (4) ci-dessus telle que :

$$|H(\omega)| \neq 0, \quad \forall \omega \in [0, \pi/2].$$

alors la fonction définie par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{p=+\infty} H(2^{-p}\omega)$$

est la transformée de Fourier de la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.

En fait dans la pratique on n'utilise pas explicitement la fonction d'échelle ϕ mais le filtre $H(\omega)$ associé. Etant donné que la fonction ϕ est à décroissance rapide mais de support infini il existe une infinité non nulle de réponses impulsionnelles $h(n)$ correspondant à $H(\omega)$. Ces $h(n)$ sont en fait les coefficients du développement de $H(\omega)$ en série de Fourier.

Nous avons effectué le calcul de ces coefficients en double précision que nous présentons dans l'Annexe A. Notons que ceux publiés dans [53] contiennent deux erreurs de signe. En réalité $h(5)$ est de signe positif alors que $h(6)$ est de signe négatif contrairement à ce qui se trouve dans [53]. Notons que le filtre $h(n)$ est symétrique i.e $h(-n) = h(n)$ ce qui n'est pas le cas de $g(n)$ qui s'en déduit par la relation $g(n) = (-1)^{1-n}h(1-n)$.

En rappelant que nous avons noté W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} et que $\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2(\mathbb{R})$ la construction de l'ondelette est donnée par :

Théorème 5 (Mallat [53]) *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, $\phi(x)$, la fonction de graduation et H , le filtre associé. L'ondelette est la fonction dont la transformée de Fourier est donnée par :*

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega)\hat{\phi}(\omega) \text{ avec } G(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

Si l'on note $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$, alors $(\psi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j et $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

En définissant V_j comme l'espace des fonctions splines (polynômes par morceaux) on peut construire une analyse multirésolution correspondante [42] et en déduire une fonction d'échelle $\phi(x)$ sa transformée de Fourier $\hat{\phi}(\omega)$ le filtre $H(\omega)$ associé ainsi que $h(n)$ sa réponse impulsionnelle (Cf. Figure (1)).

Du théorème (5) on peut déduire la transformée de Fourier $\hat{\psi}(\omega)$ d'une ondelette et le filtre passe haut $G(\omega)$ associé dès qu'on a $\hat{\psi}$ et $H(\omega)$. La transformée de Fourier inverse nous permet alors d'obtenir une ondelette spline $\psi(x)$ (Cf. Figure (2)).

En fait l'attribut spline donné à l'ondelette ici vient simplement du fait que la suite des espaces de multirésolution est constituée par des espaces de fonctions splines.

En dimension 2, une construction peut se faire par produit tensoriel des fonctions obtenues en dimension 1. Cette construction a d'ailleurs la particularité de privilégier les orientations directionnelles ce qui peut être important dans le cas d'une détection qui tient compte de l'orientation (verticale, horizontale ou diagonale) des structures

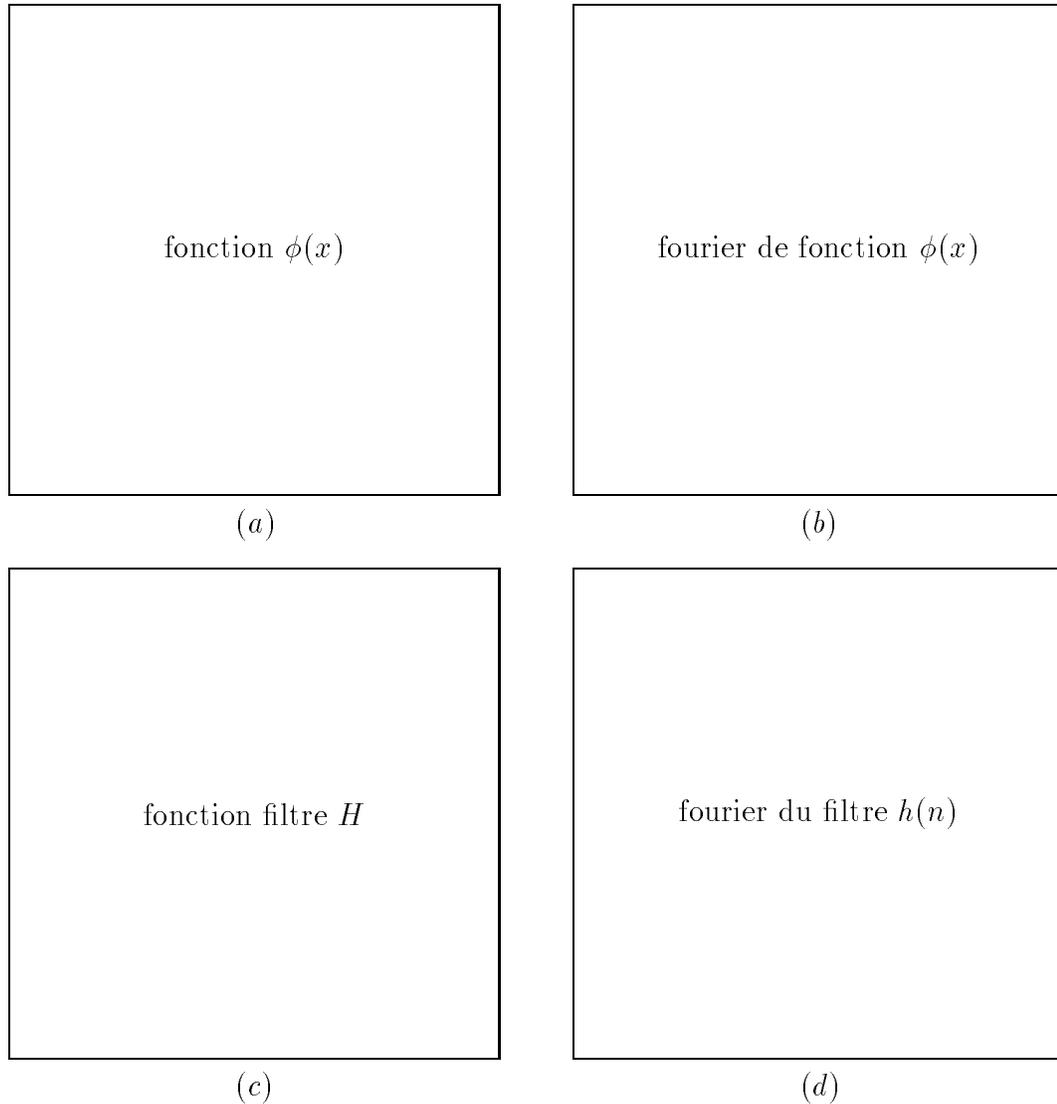


Figure 1: (a) : *Fonction d'échelle $\phi(x)$* ; (b) : *Transformée de Fourier de $\phi(x)$* ; (c) : *Filtre passe bas $H(\omega)$* ; (d) : *Réponse impulsionnelle de $H(\omega)$ i.e $h(n)$*

recherchées. L'analyse multirésolution $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ correspondante est dite séparable et exprime le fait que la fonction d'échelle $\Phi(x, y)$ associée est obtenue par produit tensoriel de fonction d'échelles 1-D. De même qu'en 1-D on a la relation $V_{j+1}^{(2)} = V_j^{(2)} \oplus W_j^{(2)}$ où $W_j^{(2)}$ est le complémentaire orthogonal de $V_j^{(2)}$ dans $V_{j+1}^{(2)}$. Pour expliciter la construction 2-D (construction par produit tensoriel) on a besoin d'une extension

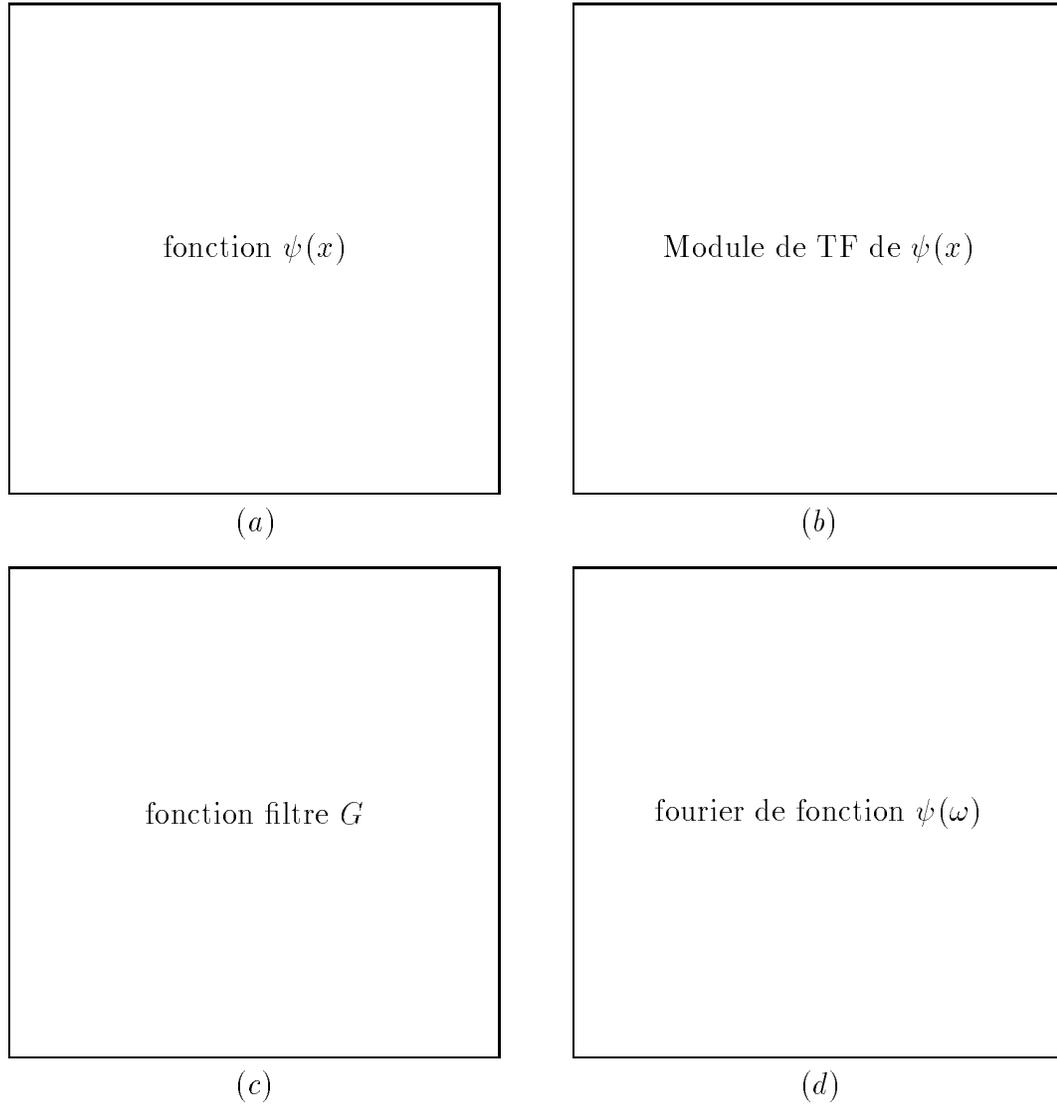


Figure 2: (a) : Ondelette $\psi(x)$; (b) : Module de la Transformée de Fourier de $\psi(x)$; (c) : Filtre passe haut $G(\omega)$; (d) : Réponse impulsionnelle de $G(\omega)$.

du théorème (5) d'où :

Théorème 6 Soit $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ la fonction d'échelle 2-D associée et $\psi(x)$ l'ondelette 1-D associée

à $\phi(x)$. On peut alors construire les trois ondelettes suivantes :

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \phi(x)\psi(y), \quad \Psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad \text{et} \quad \Psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y).$$

En notant $f_{jnm}(x, y) = 2^j f_1(2^j x - n) f_2(2^j y - m)$ pour $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ et $j, n, m, \in \mathbb{Z}$, on a le système :

$$\begin{aligned} & \{ \Psi_{jnm}^{(1)}, \Psi_{jnm}^{(2)}, \Psi_{jnm}^{(3)} \}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \text{ qui forme une base orthonormée de } W_j^{(2)} \text{ et} \\ & \{ \Psi_{jnm}^{(1)}, \Psi_{jnm}^{(2)}, \Psi_{jnm}^{(3)} \}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3} \text{ qui constitue une base orthonormée de } L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Observant que les ondelettes permettent de construire des algorithmes discrets Γ malgré l'approche fonctionnelle de l'analyse multirésolution ou algébrique de la théorie des groupes qui a permis de les construire jusqu'alors Γ . Daubechies [50] s'est demandé si l'on ne pouvait pas obtenir une analyse multirésolution Γ et par conséquent une ondelette à partir d'éléments discrets ? La réponse à cette question passe par l'étude des conditions de convergence des algorithmes de Mallat [53] et d'autres algorithmes du même type tel celui de Burt et Adelson [25Γ89] pour la construction des pyramides gaussienne et laplacienne.

Elle a montré que l'on peut construire une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et par conséquent les bases d'ondelettes en partant des éléments discrets qui sont alors les réponses impulsionnelles d'un filtre miroir en quadrature. Cette approche lui a permis de construire des ondelettes orthonormales à support compact. Nous rappelons ici le théorème fondamental d'I. Daubechies [50].

Théorème 7 (Daubechies [50])

Soit $h(n)$, la réponse impulsionnelle d'un filtre t.q :

$$(i) \quad \sum_n |h(n)| |n|^\epsilon < +\infty ; \text{ pour } \epsilon > 0,$$

$$(ii) \quad \sum_n h(n - 2k) h(n - 2l) = \delta_{kl};$$

$$(iii) \quad \sum_n h(n) = 2^{1/2}.$$

Supposons aussi que $m_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_n h(n) e^{+in\omega}$ peut se mettre sous la forme :

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2} (1 + e^{i\omega}) \right]^N \left[\sum_n f(n) e^{+in\omega} \right], \text{ pour } N \in \mathbb{N}$$

où

$$(iv) \quad \sum_n |f(n)||n|^\epsilon < +\infty; \text{ pour } \epsilon > 0,$$

$$(v) \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \sum_n f(n)e^{in\omega} \right| < 2^{N-1}.$$

Définissons

$$\begin{aligned} g(n) &= (-1)^n h(1-n) \\ \hat{\phi}(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\omega) \\ \psi(x) &= 2^{1/2} \sum_n g(n)\phi(2x-n) \end{aligned}$$

Alors $\phi_{jk}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k)$ définit la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ est la base d'ondelettes associée.

Ce théorème est démontré dans [50] où l'on montre qu'une conséquence de ce résultat revient à dire que les fonctions ϕ et ψ sont bornées et uniformément continues car leurs transformées de Fourier sont dans $L^1 \cap L^\infty$. Quand la suite $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire i.e si l'on choisit un filtre à réponse impulsionnelle finie ou encore s'il $\exists N_i, N_f \in \mathbb{N}$ t.q $h(n) = 0 \forall n < N_i$ ou $n > N_f$, alors la base d'ondelette correspondante est à support compact. Les supports de ϕ et ψ sont tels que :

$$\begin{aligned} (i) \quad \text{supp}(\phi) &\subset [N_i, N_f] \\ (ii) \quad \text{supp}(\psi) &\subset \left[\frac{1}{2}(1 - N_f - N_i), \frac{1}{2}(1 + N_f - N_i) \right] \end{aligned}$$

Nous présentons (Cf. *Figure (3)*) quelques exemples d'ondelettes à support compact. Notons que les ondelettes à support compact se caractérisent par le nombre de moments nuls. On rappelle que le moment d'ordre k d'une fonction $f(x)$ est défini par : $m_k = \int x^k f(x) dx$ ou de manière équivalente $m_k = \sum_l l^k \alpha_l$ où α_l est la réponse impulsionnelle associée au filtre déduit de f .

Dans la démonstration du *théorème (7)* Daubechies introduit un filtre $H(\omega)$ ayant $h(n)$ pour coefficients dans le développement en série de Fourier et montre alors que ce filtre satisfait aux équations :

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 &= 2 \\ H(0) &= \sqrt{2} \end{aligned} \tag{5}$$

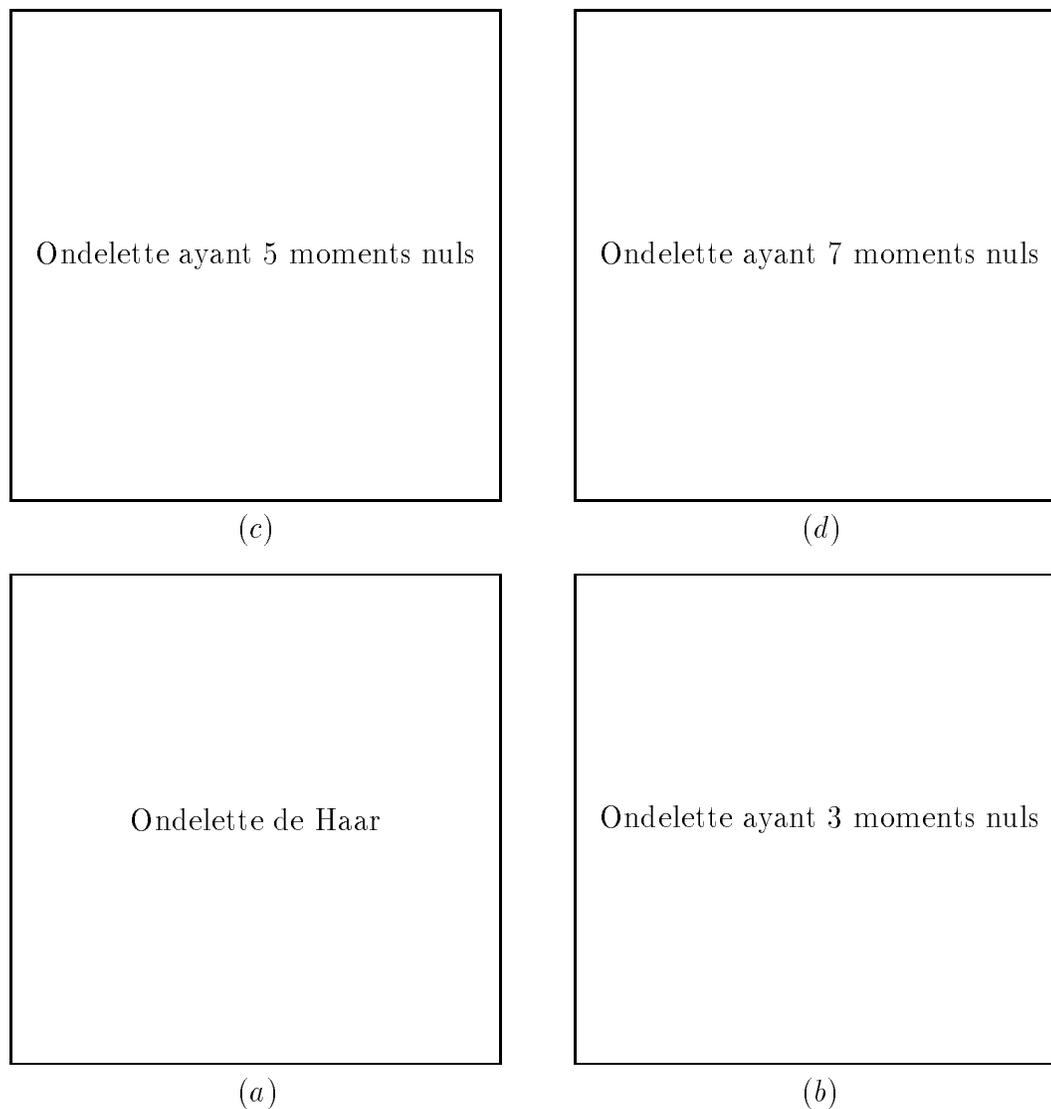


Figure 3: Graphes de quelques ondelettes à support compact ayant respectivement (a)-(1), (b)-(3), (c)-(5), (d)-(7) moments nuls [50]. La régularité croît avec le nombre de moments nuls de l'ondelette.

Ces relations sont utilisées par Y. Meyer [34Γ69] pour démontrer la déduction d’une base orthonormée d’une base inconditionnelle dans un sous-espace vectoriel V_j intervenant dans la définition de l’analyse multirésolution. Elles font partie des conditions que S. Mallat [49Γ53] imposent à un filtre qui permet de caractériser la transformée de Fourier de la fonction d’échelle.

Une relation similaire à (5) ci-dessus avait déjà été imposée par Smith et *al.* [28] dans le cadre de la construction des filtres pour le codage en sous bandes à reconstruction exacte d’un signal de parole ou d’image [36].

Nous présentons en *Annexe A* quelques coefficients d’ondelettes à support compact utilisés dans nos applications numériques.

1.4 Approche bancs de filtres

L’idée du codage d’un signal en sous bandes revient à définir une autre représentation de ce signal en utilisant un nombre prédéfini de symboles [28]. La nouvelle représentation est obtenue par décomposition suivant différentes bandes de fréquences. Le codage i.e la représentation par un nombre fini de symboles ou codes est ensuite obtenu en utilisant au mieux les propriétés statistiques du signal dans chaque bande de fréquences [28Γ52] pour permettre en cas de besoin une meilleure reconstruction. Un système de codage en sous bandes peut se diviser en deux sous systèmes différents : le sous système de codage de canaux comprenant les opérations de codage et de décodage du signal et le sous système d’analyse et de synthèse qui est constitué de la décomposition et de la reconstruction par différents bancs de filtres avec notamment une opération de sous-échantillonnage ou décimation à la décomposition et de sur-échantillonnage ou interpolation à la reconstruction.

Les recherches sur les bancs de filtres visent à améliorer la phase d’analyse et de synthèse en éliminant au mieux les effets d’aliasing ou repliement de spectre et en s’assurant une reconstruction exacte. Les filtres H satisfaisant à une relation du type (5) rappelée ci-dessus sont appelés *filtres conjugués* et sont en fait une amélioration des *filtres miroirs en quadrature* introduits par Esteban et Galand [10] en 1-D et généralisé par Vetterli [26]. Dans cette généralisation on note un cas particulier très important : les filtres miroirs en quadrature séparables qui réduisent le problème de recherche des filtres performants (selon des critères prédéfinis) au cas 1-D. L’un des aspects pratiques et très intéressant pour ce type de généralisation est le faible coût de calcul en plusieurs

dimensions via le concept de sérabilité.

Pour l'analyse et la synthèse en codage sous bandes on part de deux filtres $h_0(n)$ et $h_1(n)$ pour la décomposition du signal en 2 bandes. Les fonctions de transfert associées $H_0(\omega)$ et $H_1(\omega)$ sont l'une passe bas et l'autre passe haut respectivement. Après la décomposition suit la phase de décimation qui complète ainsi l'analyse. Pour la reconstruction on considère deux autres filtres $g_0(n)$ et $g_1(n)$ ayant $G_0(\omega)$ et $G_1(\omega)$ pour fonctions de transfert. On procède d'abord à une interpolation ou sur-échantillonnage de chaque canal et le résultat de la reconstruction est obtenue par sommation des deux canaux préalablement filtrés.

On impose aux filtres H_0, H_1, G_0 et G_1 de satisfaire les conditions suivantes :

$$H_0(\omega + \pi)G_0(\omega) + H_1(\omega + \pi)G_1(\omega) = 0 \quad (6)$$

$$H_0(\omega)G_0(\omega) + H_1(\omega)G_1(\omega) = 2e^{-in\omega} \quad (n \in Z) \quad (7)$$

La condition (6) garanti l'élimination du phénomène de repliement de spectre et (7) l'exactitude de la reconstruction du signal original.

On obtient les *filtres miroirs en quadrature* communément appelé QMF (Quadrature mirror Filters) en imposant aux filtres H_0, H_1, G_0, G_1 les conditions suivantes :

$$H_1(\omega) = H_0(\omega + \pi),$$

$$G_0(\omega) = H_0(\omega),$$

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi).$$

Pour les *filtres conjugués en quadrature* ou CQF (Conjugate Quadrature Filters) on impose les conditions :

$$H_1(\omega) = -\overline{H_0(\omega + \pi)} e^{-in\omega},$$

$$G_0(\omega) = H_1(\omega + \pi),$$

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi).$$

et la relation de reconstruction exacte est alors donnée par :

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 2$$

De même que pour les filtres miroirs en quadrature les autres filtres conjugués en quadrature se déduisent d'un seul H_0 , par transformation ou modulation. En fait il s'agit de définir 4 filtres H_0, H_1, G_0 et G_1 (H_0 et H_1 pour l'analyse et G_0 et G_1 pour

la synthèse). Des relations ci-dessus il ressort que si l'on définit H_0 on en déduit les trois autres tels que :

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi) \text{ et}$$

$$\text{si } H_1(\omega) = H_0(\omega + \pi) \text{ avec } G_0(\omega) = H_0(\omega) \text{ c'est un QMF alors que}$$

$$\text{si } H_1(\omega) = -\overline{H_0(\omega + \pi)}e^{-in\omega} \text{ avec } G_0(\omega) = H_0(\omega + \pi) \text{ c'est un CQF.}$$

Remarquons qu'on peut souhaiter obtenir des filtres causaux à réponses impulsionnelles finies et/ou symétriques. La causalité s'exprime par le fait que les réponses impulsionnelles associées aux indices négatifs sont nuls. Tout ceci se traduit sur un filtre H par :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{k=2p+1} h_k e^{ik\omega} \text{ avec } h_{p+k+1} = h_{p-k} \text{ pour } k = 1 \dots p$$

D'après les travaux de Daubechies [50] on peut construire une analyse multirésolution et par conséquent une ondelette à partir des réponses impulsionnelles d'un filtre (Cf. *théorème (7)* ci-dessus). D'où l'approche bancs de filtre pour la construction des ondelettes. Il s'agit de construire les réponses impulsionnelles $h(n)$ d'un filtre H et de déduire les filtres d'analyse et de synthèse correspondants. On déduit par exemple $g(n)$ (réponse impulsionnelle de G) de $h(n)$ dans le cas des ondelettes splines d'ordre 3 par la relation $g(n) = (-1)^n h(1-n)$. Cette approche de construction est très similaire des CQF (Cf. *théorème (5)*).

Pour l'extension de cette approche bancs de filtres en dimension 2 et dans la perspective du rapprochement avec la notion d'analyse multirésolution on peut consulter [65]. On y rappelle notamment les schémas des algorithmes utilisant des bancs de filtres non séparables ainsi que l'algorithme pyramidal en quinconce sur lequel nous reviendrons dans le chapitre deux de cette thèse. L'auteur définit une nouvelle famille de bancs de filtres à deux canaux : filtres miroirs conjugués. Cette famille est explicitement étudiée pour son implémentation algorithmique en vue de l'analyse et de la synthèse d'un signal ou d'une image. Un résultat théorique assez remarquable pour cette famille de filtres est le suivant : si à chaque filtre on associe un opérateur alors l'ensemble de ces opérateurs muni de l'addition usuelle et de la composition des applications et du produit par un scalaire forment une algèbre non commutative. On montre alors que le filtre miroir de reconstruction est l'inverse au sens de la composition des applications du filtre d'analyse.

1.5 Extension de la construction des ondelettes

Les travaux sur les ondelettes ont conduit à différentes généralisations. On a construit entre autres des bases biorthogonales d'ondelettes en partant de la notion de repère [55Γ68Γ69Γ83Γ84]. Cette construction permet de séparer les éléments d'analyse de ceux de synthèse dans un processus de compression d'image ou simplement de décomposition en sous bandes par exemple. Un lien a été établi par I. Daubechies entre les bases d'ondelettes et la notion d'états cohérents très utilisée en physique quantique [64Γ68]. Il en est de même avec l'espace des phases en physique théorique [68]. Les paquets d'ondelettes ont été construits par V. Wickerhauser [81] et sont obtenu par l'approche bancs de filtres algébrique [79]. L'idée est de construire une bibliothèque de base de fonctions Γ dans laquelle on extrait celle qui est la mieux adaptée à une application précise [81].

Dans cette section nous rappellerons différentes notions nécessaires à la construction des ondelettes biorthogonales qui seront utiles pour les applications dans les chapitres suivants. La notion de paquet d'ondelettes sera brièvement abordée.

1.5.1 Notion de repère et bases biorthogonales

La notion de repère généralise celle de base dans un espace vectoriel. Il est bien connu que l'orthonormalité est une contrainte qui peut faciliter le calcul des coefficients de la représentation d'une fonction dans un espace possédant une base adéquate mais elle reste assez restrictive. On peut se passer de cette contrainte d'orthogonalité et obtenir des résultats tout à fait satisfaisants pour certaines applications [62].

Définition et propriétés d'un repère

Nous nous limitons ici au cas d'un espace Hilbertien que nous noterons H muni d'une norme $\|\cdot\|_H$ déduit du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La généralisation de cette notion dans un espace de Banach a été obtenue par Feichtinger et Grochenig [57].

Définition 12 (*Daubechies [68]*)

Une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H est un repère s'il existe $A, B > 0$ tel que :

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n \in J} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2$$

pour tout $f \in H$.

Remarques 2 (i) Une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H est un repère exact s'il n'existe pas d'entier n_0 tel que $(e_n)_{n \in \mathbb{N} - \{n_0\}}$ cesse d'être un repère.

(ii) Les nombres A et B sont les bornes du repère.

(iii) Un repère est strict (tight frame) si $A = B$.

(iv) Du théorème de Plancherel, on déduit qu'une base orthonormée est un repère strict et exact, avec $A = B = 1$.

Exemple 2 Existence de repère [68]

Si (e_1, e_2) est la base canonique ou standard de \mathbb{R}^2 , on définit :

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2, \quad u_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

Un calcul simple montre que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{n=3} |\langle f, u_n \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|f\|^2.$$

Cette relation montre bien que (u_1, u_2, u_3) est un repère de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Si l'on note I l'opérateur identité de H une propriété qui permet ensuite de trouver le repère dual est donnée par :

Théorème 8 (Heil et al. [55])

Soit $(e_n)_{n \in J}$, une suite d'éléments de H , alors on a l'équivalence entre :

(a) $(e_n)_{n \in J}$ est un repère de bornes A et B .

(b) $Sf = \sum_{n \in J} \langle f, e_n \rangle e_n$ est un opérateur linéaire borné avec $AI \leq S \leq BI$.

De même on a le corollaire suivant :

Corollaire 1 (1) S est inversible et on a $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$.

(2) $(S^{-1}e_n)_{n \in J}$ est un repère de bornes B^{-1}, A^{-1} et est appelé repère dual de $(e_n)_{n \in J}$.

(3) Pour tout $f \in H$, on a $f = \sum_{n \in J} \langle f, S^{-1}e_n \rangle e_n = \sum_{n \in J} \langle f, e_n \rangle S^{-1}e_n$

(4) Si $(e_n)_{n \in J}$ est un repère exact, alors $(e_n)_{n \in J}$ et $(S^{-1}e_n)_{n \in J}$ sont biorthogonaux i.e $\langle e_n, S^{-1}e_m \rangle = \delta_{nm}$ où δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

Ce corollaire nous indique formellement l'existence et la construction d'un repère biorthogonal. En explicitant la relation entre un repère et une base on pourra mettre en évidence la construction par cette approche d'une base biorthogonale.

En fait le corollaire (1) du théorème (8) nous donne une décomposition d'une fonction de H i.e pour tout $f \in H$ nous avons :

$$f = \sum_{n \in J} c_n e_n$$

Si $(e_n)_{n \in J}$ est une base alors on a l'unicité des c_n ce qui n'est pas le cas pour un repère. D'après le (iv) de la remarque (2) un repère est une base orthonormée s'il est strict et exact. Notons que la notion de repère permet de donner une formulation discrète de la décomposition de l'unité en théorie de représentation des groupes [64, 68]. Elle se retrouve en théorie des états cohérents de la mécanique quantique dans le cadre de l'espace des phases dont le repère est le cas particulier où les paramètres de l'espace sont répartis sur une grille régulière [68].

Bases biorthogonales d'ondelettes

La nécessité de la construction des bases biorthogonales d'ondelettes s'est accrue pour deux raisons :

- Obtenir une base de représentation dans laquelle on s'est affranchi de la contrainte d'orthogonalité des premières bases d'ondelettes
- Utilité au codage par bancs de filtres où dans la conception initiale [28] les filtres d'analyse sont différents des filtres de synthèse.

Il s'agit dans tous les cas d'introduire une flexibilité dans la construction des bases d'ondelettes. Cette construction commence par la construction des fonctions qui définissent une analyse multirésolution à partir des réponses impulsionnelles des filtres [83]. Notons qu'une telle base i.e biorthogonale avait déjà été construite par Tchamitchian [37] par une approche différente.

Cohen et al. [83] ont démontré le théorème suivant :

Théorème 9 (Existence de bases biorthogonales)

Soient $(h(n), \tilde{h}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels tels que :

$$\sum_n h(n) \tilde{h}(n + 2k) = \delta_{0k}$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \text{ et } \sum_n \tilde{h}(n) = \sqrt{2}$$

Définissons :

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= 2^{-1/2} \sum_n h(n) e^{-in\omega}; & \tilde{m}_0(\omega) &= 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}(n) e^{-in\omega} \\ \hat{\phi}(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{j=+\infty} m_0(2^{-j}\omega); & \hat{\tilde{\phi}}(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{j=+\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\omega) \end{aligned}$$

Supposons que pour $C, \epsilon > 0$, on ait :

$$|\tilde{\phi}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1/2-\epsilon}; \quad |\hat{\tilde{\phi}}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1/2-\epsilon}$$

Définissons enfin :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n (-1)^n \tilde{h}(1-n) \phi(2x+n) \\ \tilde{\psi}(x) &= \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h(1-n) \tilde{\phi}(2x+n) \end{aligned}$$

Alors $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ est un repère de $L^2(\mathbb{R})$. Le repère dual associé est défini par : $\tilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$f(x) = \sum_{jk \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk}(x) = \sum_{jk \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}(x)$$

où les séries convergent fortement.

De plus $\psi_{jk}, \tilde{\psi}_{jk}$ constituent deux bases inconditionnelles duales, avec

$$\langle \psi_{jk}, \tilde{\psi}_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \text{ ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \tilde{\phi}_{0k}(x) dx = \delta_{0k}$$

Remarques 3 1. On montre que si ψ et $\tilde{\psi}$ du théorème (9) ci-dessus sont tels que $\psi_{jk}, \tilde{\psi}_{j'k'}$ constituent une base de Riesz, alors :

$$\begin{aligned} \psi \in C^L &\implies m_0 \text{ est divisible par } (1 + e^{-i\omega})^{L+1} \\ \tilde{\psi} \in C^{\tilde{L}} &\implies \tilde{m}_0 \text{ est divisible par } (1 + e^{-i\omega})^{\tilde{L}+1} \end{aligned}$$

2. Pour les applications numériques, on considère généralement les ondelettes à support compact. La compacité du support de l'ondelette se traduit ici par le fait que les filtres m_0 et \tilde{m}_0 aient un nombre fini de réponses impulsionnelles. On dit aussi en théorie du filtrage que m_0 et \tilde{m}_0 sont des filtres FIR (Finite Impulse Response). En d'autres termes :

Il existe $N1, N2, \tilde{N}1$ et $\tilde{N}2$ tel que :

$$m_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_{n=N1}^{n=N2} h(n) e^{-i\omega} \text{ et } \tilde{m}_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_{n=\tilde{N}1}^{n=\tilde{N}2} \tilde{h}(n) e^{-i\omega}$$

$$\text{avec } h(N1) \neq 0 \neq h(N2) \text{ et } \tilde{h}(\tilde{N}1) \neq 0 \neq \tilde{h}(\tilde{N}2)$$

Dans ces conditions on a $\text{supp}(\phi) = [N1, N2]$ et $\text{supp}(\tilde{\phi}) = [\tilde{N}1, \tilde{N}2]$.

Ce qui implique comme dans le cas orthogonale (Cf. théorème (7)) que :

$$\begin{aligned} \text{supp}(\psi) &= \left[\frac{1}{2}(N1 - \tilde{N}2 - 1), \frac{1}{2}(N2 - \tilde{N}1 - 1) \right] \\ \text{supp}(\tilde{\psi}) &= \left[\frac{1}{2}(\tilde{N}1 - N2 - 1), \frac{1}{2}(\tilde{N}2 - N1 - 1) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{et par conséquent : } |\text{supp}(\psi)| = |\text{supp}(\tilde{\psi})| = \frac{1}{2}(N2 + \tilde{N}2 - N1 - \tilde{N}1)$$

Nous donnons en *Annexe A* quelques exemples de suites associées aux ondelettes biorthogonales. Ces suites sont caractérisées par le nombre de coefficients non nuls. Dans la terminologie de ces types d'ondelettes on parle d'ondelette α - β pour dire qu'il s'agit d'ondelettes dont les filtres associés à savoir h et \tilde{h} ont respectivement α et β coefficients non nuls.

1.5.2 Notion de paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes ont été développés par Wickerhauser [81]. Ils représentent sur $\mathbb{R}\Gamma$ une famille de fonctions de carré intégrable avec des régularités et quelques propriétés prédéfinies. On peut distinguer deux approches de construction :

- l'approche théorie des groupes qui conduit à l'obtention des paquets d'ondelettes continues [79]
- l'approche théorie des bancs de filtres qui donne des ondelettes discrètes plus adaptées aux traitements numériques [81].

L'idée de base est très séduisante car il s'agit de construire une librairie de bases de fonctions dans laquelle on extrait celle qui correspond le mieux à une application donnée. Nous nous limitons ici à la présentation des paquets d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$. La généralisation se déduisant par produit tensoriel.

Comme l'a fait Daubechies [50] on part de deux filtres miroirs en quadrature dont les réponses impulsionnelles satisfont les conditions du *théorème (7)* i.e :

$$\sum_n h(n - 2k)\tilde{h}(n - 2l) = \delta_{kl} \text{ et } \sum_n h(n) = \sqrt{2}$$

et on définit $g(n) = (-1)^n h(1 - n)$. Et de manière récursive on considère :

$$\begin{aligned} W_{2n}(x) &= \sqrt{2} \sum_k h(k) W_n(2x - k) \\ W_{2n+1}(x) &= \sqrt{2} \sum_k g(k) W_n(2x - k) \end{aligned}$$

En fait W_0 représente la fonction d'échelle et W_1 l'ondelette associée exactement comme défini par I. Daubechies [50] et noté respectivement ϕ et ψ . Si l'on définit $\Omega_n = \{f/f(x) = \sum_k \alpha_k W_n(x - k)\}$ alors $\{W_n(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthogonale de Ω_n . Cette définition est à rapprocher de celle de l'espace V_0 de la définition de l'analyse multirésolution [50Γ53Γ69]. On montre alors que $\{W_n(x - k), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Définissons $\delta f(x) = \sqrt{2}f(2x)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a alors $\delta\Omega_n = \Omega_{2n} \oplus \Omega_{2n+1}$ et de manière récurrente $\delta^k\Omega_n = \Omega_{2^k n} \oplus \dots \oplus \Omega_{2^k(n+1)-1}$. En observant que $\bigoplus_n \Omega_n = L^2(\mathbb{R})$ on a :

Théorème 10 (Wickerhauser [81])

Pour toute partition P de l'ensemble \mathbb{N} en sous-ensembles de la forme $I_{jk} = \{2^j k, \dots, 2^j(k+1) - 1\}$, la collection de fonctions $\{2^{j/2} W_n(2x - k), I_{jk} \in P; k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

La démonstration porte sur le fait que $\{W_n(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de Ω_n et sur la relation $\bigoplus_j \Omega_j = \sum_{I_{jk} \in P} \delta^k \Omega_j = L^2(\mathbb{R})$.

De tout ce qui précède on a la définition suivante :

Définition 13 (Wickerhauser [81])

Une base de paquet d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, est toute base orthonormée sélectionnée parmi les fonctions $\{2^{j/2} W_n(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarques 4 *Etant donné que ceci constitue une généralisation de différentes bases, on a :*

- (i) *Base de type Wash si : $\Omega_0 \oplus \Omega_1 \oplus \dots \oplus \Omega_k \oplus \dots$*
- (ii) *Base d'ondelettes habituelle si : $\Omega_0 \oplus \Omega_1 \oplus \delta\Omega_1 \dots \oplus \delta^k\Omega_1 \oplus \dots$*
- (iii) *Base de type sous bandes si : $\delta^K\Omega_0 \oplus \delta^K\Omega_1 \oplus \dots \oplus \delta^K\Omega_n \oplus \dots$*

Etant donné qu'on obtient une famille de bases on peut se demander quelle est la meilleure base de la librairie pour décrire une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit alors la fonction coût de l'information qui devra être minimale pour la meilleure base. Cette fonction doit mesurer le coût de la description d'une suite dans la base prise en compte.

Définition 14 (Fonction coût additive)

Une application C de $l^2(\mathbb{Z})$ dans \mathbb{R} est appelée fonction coût additive de l'information si elle vérifie :

$$(a) \quad C(0) = 0$$

$$(b) \quad C(x) = \sum_n C(x_n)$$

Il s'agit bien d'une fonction qui permet de décrire une suite le plus économiquement possible i.e avec le plus petit nombre de coefficients en conservant le minimum d'information. On a les exemples suivants de fonctions coût [81] :

- (i) *Fonction seuil* : On ne garde pour définir la suite que les coefficients qui sont en valeur absolue au dessus d'un certain seuil. Elle permet d'obtenir le nombre de coefficients nécessaire pour transmettre par exemple un signal avec la précision de ce seuil.
- (ii) *Norme $l^p(\mathbb{Z})$* : $m(x) = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$ pour $p < 2$ on mesure la concentration de l'énergie du signal. On remarque que plus $m(x)$ est petit plus l'énergie est concentrée sur un petit nombre de coefficients.
- (ii) *L'entropie* : $H(x) = -\sum_j p_j \log p_j$ où $p_j = \frac{|x_j|^2}{\|x\|^2}$ avec $p_j \log p_j = 0$ si $p_j = 0$. Définie par Shannon elle n'est pas strictement une fonction coût additive de l'information mais de manière classique $\exp(H(x))$ est proportionnel au nombre de coefficients nécessaire pour représenter convenablement le signal avec une erreur quadratique fixée. H mesure en fait la quantité d'informations contenue dans le signal.

Pour caractériser la meilleure base on a :

Définition 15 (Meilleure base)

Si B est une base dans un espace vectoriel V et Bx , la description de la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans cette base, on dira que B est la meilleure base pour x , relativement à C , si $C(Bx)$ est minimale.

De la librairie de bases qu'offre un paquet d'ondelettes on peut ainsi choisir en utilisant un critère de coût minimal celle qui permet mieux que d'autres la représentation d'un signal ou de son échantillon dans $l^2(\mathbb{Z})$.

La notion de paquet d'ondelettes a été généralisée en plusieurs dimensions par produit tensoriel avec des applications en compression d'images et en calcul matriciel notamment [81].

1.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre différentes approches de construction d'une base d'ondelettes. On distingue l'approche théorie des groupes l'approche multirésolution l'approche discrète ou approche bancs de filtres. Les développements de ces approches ont souvent pour origine l'analyse des techniques propres de l'application traitée par cette famille de fonctions. Les extensions en plusieurs dimensions se font le plus souvent par produits tensoriels ce qui dans certains cas est motivé par des considérations numériques (séparabilité des filtres par exemple) d'où réduction de coût de calcul. La généralisation en dimension deux sans utilisation du produit tensoriel dans la perspective du traitement des images est développée dans [86].

Chapitre 2

Compression d'images : Survol

2.1 Introduction

La compression d'un signal (1-D Γ 2-D Γ 3-D Γ ...) consiste à minimiser la quantité d'information nécessaire à sa représentation Γ ceci en vue d'un stockage Γ d'une transmission ou simplement pour l'accélération des traitements ultérieurs. En traitement d'images Γ les applications sont nombreuses et en rapide développement. Citons par exemple : image satellite Γ vidéo-conférence Γ transmission par fac-similés de documents Γ image télévision. Ceci n'est certes possible que sur des images digitales Γ on dit aussi images numériques qui peuvent être obtenues par digitalisation d'images analogiques en utilisant notamment un scanner ou tout autre instrument de numérisation.

Il existe plusieurs stratégies d'acquisition d'une image numérique. Elles se ramènent généralement à l'échantillonnage d'une image analogique sur une grille de \mathbb{Z}^n . Une image analogique étant une représentation fonctionnelle associée à une variable continue dans \mathbb{R}^n . Pour $n = 2$ on a par exemple une photographie ou une fonction $f(x, y)$ et une scène pour $n = 3$ qui peut être modélisée par $f(x, y, z)$. Pour qu'une image numérique obtenue par échantillonnage représente assez fidèlement l'image originale Γ il faut respecter les conditions du théorème de Witteraker-Shannon (très connu en théorie de l'information [12]) qui caractérise le pas d'échantillonnage par rapport à la fréquence de coupure de l'image. De $f(x, y)$ Γ par exemple Γ on calcule $f(x_j, y_j)$ avec $x_i = ih$, $y_j = jk$ si l'on considère une grille où h (resp. k) sont les pas d'échantillonnage en x (resp. y). Dans le cas d'une grille régulière ou d'un maillage carré Γ ce qui est souvent le cas Γ on a $h = k$. On obtient alors une matrice de valeurs appelées pixels Γ qui sont généralement codés par 0 ou 1 pour les images binaires ou par des entiers entre 0

et 255 pour les images à niveaux de gris. Cette matrice constitue la représentation numérique de $f(x, y)$. Notons qu'il existe différentes grilles ou maillages [77] possibles pour l'échantillonnage mais le maillage carré est le plus utilisé car il correspond au codage fourni par la plupart des capteurs et coïncide avec la structure de donnée d'une matrice.

Les images digitales peuvent être acquises directement à partir de la scène observée c'est le cas des images satellitaires délivrées par des satellites tel Landsat ou Spot par exemple. Il en est de même des images médicales obtenues par un système tomographique ou d'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Les images de synthèse se composent sous forme numérique et l'utilisation de ce type d'images en création artistique en animation dans le domaine de la publicité n'est plus à démontrer.

Une image numérique s'acquiert à l'aide d'un capteur s'il s'agit d'une image monochrome ou de plusieurs s'il s'agit d'une image couleur ou d'une image multicanaux. Dans ce dernier cas un pixel ne sera pas une valeur comme précédemment mais un vecteur de trois composantes représentant les composantes *RGB* du pixel. Une image de dimension $M \times N$ est généralement représentée par une matrice ayant M lignes et N colonnes. Si chaque pixel de l'image est codé sur b bits alors elle possède 2^b niveaux de gris et le nombre total de bits nécessaire à sa représentation est $Nbm = M \times N \times b$.

Pour illustrer la taille des images à traiter nous avons par exemple :

- i) Une image classique à basse résolution de taille 512×512 pixels et codée sur 8 bits par pixel nécessite : $512 \times 512 \times 8$ bits pour une image à niveaux de gris et $512 \times 512 \times 8 \times 3$ si elle est en couleur.
- ii) Une image de radiographie obtenue par scanner et de résolution $70\mu m$ de taille 5000×6000 pixels et codée sur 12 bits par pixel nécessite : $5000 \times 6000 \times 12$ bits pour une image à niveaux de gris et $5000 \times 6000 \times 12 \times 3$ si elle est en couleur.
- iii) Une image spot à 20 m approximativement de taille 6000×6000 pixels par bande spectrale et codée sur 8 bits par pixel elle nécessite : $6000 \times 6000 \times 8 \times 3$ bits pour 3 bandes spectrales.

De toute évidence au travers de ces données on observe qu'une banque d'archives doit nécessiter un espace très important. Ceci est notamment le cas pour un service médical qui doit conserver des données images pour des patients. Il en est de même pour la conservation des images satellitaires qui seront utilisées ultérieurement pour établir des cartes géographiques ou météorologiques.

En dehors du problème de stockage si les données images doivent être transmises en utilisant un modem classique de 1200 ou 9600 *bauds* (bits/seconde) on se rend bien compte de la lenteur de la transmission ce qui est inacceptable pour certaines applications en temps réel.

La préférence des images numériques au détriment des autres formes de représentation vient de la facilité de leur manipulation par ordinateur dont les puissances de calcul ou de traitement suivent une croissance exponentielle. Le problème crucial qui se pose pour l'utilisation de ce type d'image est la grande quantité d'information ou de données nécessaires à leur représentation. En fait le nombre de bits nécessaire pour représenter une information image peut être substantiellement réduit en raison de la redondance présente dans l'image. La redondance peut être due au pas d'échantillonnage au nombre de niveaux de quantification ou à la qualité de la source (bruitée ou non) d'acquisition. La redondance d'une image numérique peut être spatiale et se caractérise par la dépendance (corrélation) entre des pixels voisins de l'image. On peut noter une redondance spectrale due à la corrélation entre différents plans des composantes *RGB* pour une image couleur ou une redondance temporelle entre différentes images pour une séquence d'images. Pour une animation ou pour un spot publicitaire avec des images couleurs on peut avoir une redondance spatiale spectrale et temporelle. Tous ces types de redondance expriment l'intérêt de la minimisation de la quantité de données nécessaire pour la représentation de l'information image. C'est pour ces raisons et bien d'autres que de multiples techniques de réduction de redondance ou encore de compression sont développées [20-25-78] et dépendent des applications. Plusieurs critères déterminent la technique à mettre en œuvre : le type d'image (image télévision image médicale etc. . .) l'utilisation (statique/archivage ou transmission/dynamique) le type de traitement (temps réel ou non) etc. . . . L'efficacité de ces techniques est mesurée par leur habileté à la compression avec ou sans distorsion significative et par la complexité de l'implémentation des algorithmes qui en découlent. Parmi les techniques de compression on peut citer les techniques prédictives les techniques directes les techniques de transformations et les techniques hybrides.

Toutes les techniques ci-dessus peuvent se classer en deux grands groupes en fonction de la qualité de l'image reconstituée. On a d'abord le groupe des techniques de compression sans perte d'information dites aussi réversibles ou à reconstruction exacte [20-28-36-52]. Ces techniques sont idéales et difficilement réalisables si on veut accéder

à des taux de compression significatifs. L'autre groupe avec perte d'information Γ contient des techniques dites irréversibles Γ permettent d'obtenir des images reconstruites de moyenne qualité [20 Γ 78]. En réalité Γ le critère d'appréciation de la bonne qualité de l'image reconstruite est surtout visuel et par conséquent subjectif. Cependant les techniques de reconstruction exacte conduisent à des taux de compression moins importants. Il existe des domaines Γ la médecine par exemple où les techniques réversibles sont presque imposées. Ceci est dû au risque important qu'entraînerait un mauvais diagnostic causé par une image de mauvaise qualité obtenue à la reconstruction. Ceci n'est pas le cas pour une image satellitaire devant servir à établir un modèle numérique de terrain.

Dans ce chapitre Γ nous allons faire un survol de quelques techniques de compression d'images [20 Γ 78] Γ avec des éléments d'évaluation ou d'appréciation autres que la qualité visuelle de l'image restituée.

2.2 Evaluation de la qualité de la compression

2.2.1 Taux de compression

Etant donné que l'objectif d'une compression est de minimiser la quantité d'information nécessaire à la représentation d'une image Γ on définit la quantité :

$$\tau_c = \frac{\text{Nombre de bits de l'image originale}}{\text{Nombre de bits de l'image compressée}}$$

appelée *taux de compression*. Par définition on se rend compte que si l'on ne réduit pas le nombre de bits nécessaire à la représentation de l'image originale Γ alors $\tau_c = 1$. Si l'on imagine Γ ce qui est utopique qu'il existe une technique de compression permettant de représenter l'image compressée avec seulement un bit par exemple Γ alors le taux de compression sera égal au nombre de bits de la représentation de l'image. Par exemple pour une image monochromatique de taille 256×256 codée sur 8 bits par pixel Γ on aura un taux de compression $256 \times 256 \times 8$! Il existe une autre quantité permettant de définir le taux de compression maximal ceci sans perte d'information Γ c'est l'entropie Γ que nous définissons ci-dessous.

2.2.2 Taux d'information

Il faut noter la différence entre la *qualité* de l'information et la *quantité* d'information dans une image. D'un ensemble de pixels il est bien évident qu'une valeur moins probable c'est à dire moins représentée porte une information très importante car on se rendra très vite compte de sa disparition. La qualité de l'information est représentée par une grandeur appelée *entropie* (en bits) qui se calcule par la formule :

$$H = - \sum_{i=1}^{i=N} p_i \log_2 p_i \quad (bits)$$

où p_i est la probabilité de présence de niveau de gris r_i dans l'image qui est supposée quantifiée sur N niveaux. En fait il s'agit ici de l'entropie d'ordre zéro car cette formule ne tient pas compte d'une relation éventuelle entre des pixels voisins. On peut définir des entropies d'ordre supérieur. Par exemple l'entropie d'ordre 1 se définit par :

$$H = - \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} p_{ij} \log_2 (p_{ij}/p_j) \quad (bits)$$

où p_i est la probabilité de présence de niveau de gris r_i et p_{ij} est la probabilité marginale de présence de r_j sachant que r_i est présent. Cet entropie représente l'information moyenne que contient le pixel r_j connaissant l'état du pixel r_i . Il est à remarquer que l'exponentielle de l'entropie est proportionnelle au nombre de coefficients nécessaires pour représenter de manière minimale un signal image. Nous reviendrons sur cette notion quand il s'agira de mesurer l'information perdue d'une résolution à l'autre dans une représentation discrète dans le chapitre 6 de cette thèse.

L'importance de cette quantité i.e de l'entropie se retrouve aussi dans le théorème de codage de Shannon qui précise qu'une source image S ayant une entropie $H(S)$ peut être codée sans perte d'information avec des pixels ayant un nombre L de bits si $H(S) \leq L \leq H(S) + \epsilon$ où ϵ est une quantité relativement faible. On peut dans le cas du codage sans perte d'information définir le taux de compression maximal par $\tau_{max} = \frac{b}{L}$ pour une image codée sur b bits. Ceci ne peut éventuellement être réalisé qu'avec des techniques sans perte d'information. Avec les autres techniques on a $\tau_c > \tau_{max}$ avec d'autant plus de perte que τ_c est grand. Cette perte qui se traduit par la dégradation de l'aspect visuel de l'image peut se quantifier par des mesures de fidélité de la qualité de la reconstruction.

2.2.3 Mesures de fidélité

Il s'agit de définir des quantités permettant d'évaluer numériquement la qualité de l'image reconstruite. Si l'on note f^0 l'image originale de taille $M \times N$ et f l'image de même taille obtenue après reconstruction on peut définir :

- L'erreur moyenne quadratique (*MSE : Mean Square Error*) :

$$MSE^2 = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=M} (f^0(i, j) - f(i, j))^2$$

- Le rapport signal sur bruit (*PSNR : Peak Signal to Noise Ratio*) :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(\text{Dynamique de l'image})^2}{MSE^2} \quad (dB)$$

Etant donné que généralement une image est codée sur 8 bits et est représentée par 256 niveaux de gris qui varient entre 0 et 255 l'étendue ou la dynamique de l'image est alors de 255 d'où :

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{255}{MSE} \right)^2 \quad (dB)$$

Notons que si les valeurs de niveaux de gris varient entre $ngmin$ et $ngmax$ la dynamique de l'image est de $ngmax - ngmin$. Cette formulation utilisée en imagerie a une expression différente en traitement du signal à savoir [20] :

$$PSNR' = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma}{MSE} \right)^2 \quad (dB)$$

où σ^2 est la variance du signal original. Cette formule est probablement plus expressive car $PSNR'$ prend la valeur 0 quand le bruit de reconstruction est identique à la variance du signal original et est infini quand la reconstruction est exacte i.e bruit de la reconstruction nul.

Etant donné que l'image reconstruite doit s'apprécier visuellement on peut compléter l'information donnée par l'erreur quadratique moyenne en présentant "l'image différence" entre l'originale et la reconstruite qui est alors définie par :

$$g(i, j) = 2(f^0(i, j) - f(i, j)) + 128$$

où le 2 est mis pour réhausser la dynamique et 128 rendant l'erreur g positive pour des raisons de visualisation. Cette image différence devrait être uniforme pour une image

parfaitement reconstruite. Dans l'algorithme pyramidal de Burt et Adelson [25] sur lequel nous reviendrons cette différence est en fait appelée *image laplacienne*. Dans [20] on propose de calculer l'erreur quadratique pondérée du contraste de l'image et non de l'intensité lumineuse.

En fait l'image numérique peut prendre toute valeur sur la droite réelle mais la représentation d'une image sur la plupart des écrans d'ordinateurs nécessite une phase de traitement appelé *quantification*. Quand on parle d'une image codée sur 256 niveaux de gris il s'agit des valeurs quantifiées qui sont alors entières. La plupart des algorithmes de compression [20, 78] ont une phase implicite ou explicite de quantification qui est indispensable quand on veut visualiser les résultats.

2.3 Quantification

La quantification est un processus qui permet d'associer à un nombre réel (resp. vecteur de réels) un nombre entier (resp. vecteur d'entiers). Dans un certain sens on peut considérer qu'elle réalise une compression implicite (passage des réels aux entiers) i.e réduction du nombre de bits nécessaire à la représentation de l'information image. On distingue en général deux types de quantification : la quantification scalaire et la quantification vectorielle.

2.3.1 Quantification scalaire

Soit u une variable aléatoire de densité de probabilité $p_u(x)$. Une quantification est alors une application Q définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{N} qui à u associe \tilde{u} . En général l'image de Q est un ensemble fini i.e $\{q_j, j = 1 \dots L\}$ où L est le nombre de niveaux de quantification (on dit aussi de reconstruction). On choisit souvent pour Q une fonction en escalier (Cf. Figure (4)).

La règle de quantification est alors la suivante : on définit $\{d_j, j = 1 \dots L + 1\}$ un ensemble croissant de niveaux de transition ou de décision et l'application Q est alors définie par $Q((d_j, d_{j+1}]) = q_j, j = 1 \dots L$. Ceci revient à subdiviser l'ensemble des valeurs de u en L intervalles $(d_j, d_{j+1}]$ et à associer à chaque $u \in (d_j, d_{j+1}]$ la valeur q_j .

L'objet de la quantification scalaire revient à déterminer les niveaux de transition d_j et de quantification q_j optimaux connaissant la densité de probabilité et se fixant un critère d'optimisation. De toute évidence l'application ainsi définie introduit par

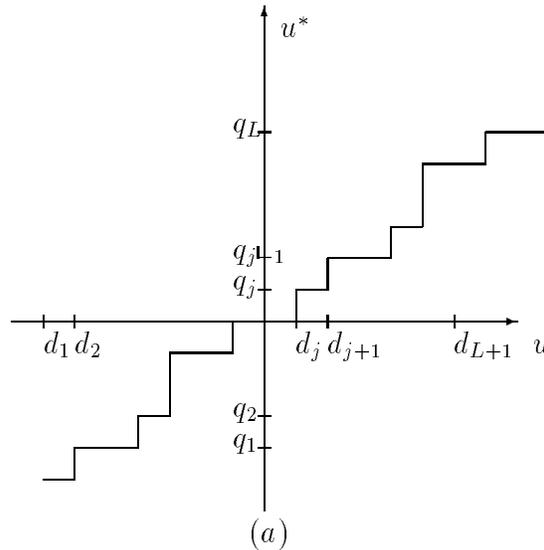


Figure 4: Exemple de fonction de quantification : fonction en escalier.

conséquent une distorsion entre les valeurs de v et $Q(v)$ qu'il faut rendre minimale.

Si l'on prend pour critère d'optimisation la minimisation de l'erreur quadratique moyenne pour un nombre donné de niveaux de transition on obtient un quantificateur optimal au sens des moindres carrés. On obtient le quantificateur de Lloyd-Max [20]. En désignant par d_j , ($j = 1 \dots L+1$) (resp. q_j , ($j = 1 \dots L$)) les niveaux de transition (resp. de quantification) et par $p_u(x)$ la fonction de densité de probabilité l'erreur quadratique se définit par :

$$Err = \sum_{j=1}^{j=L} \int_{d_j}^{d_{j+1}} (x - Q(x))^2 p_u(x) dx \quad (8)$$

La minimisation de cette fonctionnelle revient à trouver les quantités d_j et q_j solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} d_j &= \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1}) \\ q_j &= \frac{\int_{d_j}^{d_{j+1}} x p_u(x) dx}{\int_{d_j}^{d_{j+1}} p_u(x) dx} \end{aligned}$$

Notons que ces $2L - 1$ équations à $2L - 1$ inconnues se déduisent par annulation des dérivées obtenues par différenciation de (8) par rapport à d_j d'une part et q_j d'autre

part. Ces équations sont non linéaires et par conséquent nécessitent la mise en œuvre d'algorithmes spécifiques à des systèmes non linéaires.

Elles montrent que les niveaux de décision sont les centres des intervalles délimités par les niveaux de reconstruction et que les niveaux de quantification sont les moyennes normalisées dans chaque intervalle de décision. Pour cette quantification Γ on montre [20] que l'erreur de distorsion est donnée par :

$$Err_d = \frac{1}{12L^2} \left(\int_{d_1}^{d_{L+1}} p_u^{1/3}(x) dx \right)^3$$

On modélise le plus souvent la distribution de densité des niveaux de gris par une gaussienne ou une laplacienne [20Γ63]. Ces deux densités de probabilité sont des cas particuliers de la gaussienne généralisée dont la loi est donnée par [20Γ62] :

$$p_u(x) = \alpha \exp(-|\beta x|^r)$$

avec $\alpha = \frac{\beta r}{2\Gamma(\frac{1}{r})}$ et $\beta = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{r})}{\Gamma(\frac{1}{r})} \right]^{1/2}$

où σ^2 est la variance de l'image et $\Gamma(\cdot)$ la fonction Gamma classique. Notons que pour $r = 1$ on a la densité de probabilité laplacienne et celle de la gaussienne pour $r = 2$.

Si l'on suppose que la densité de probabilité est uniforme Γ les niveaux de décision d_j et de quantification q_j du quantificateur optimal sont alors définis par :

$$\begin{aligned} d_j &= d_1 + (j-1)p \\ q_j &= d_j + p/2 \\ p &= (d_{L+1} - d_1)/L \end{aligned}$$

Ce quantificateur est souvent appelé *quantificateur linéaire*. Au lieu de la fonction densité de probabilité Γ on peut utiliser l'histogramme de l'image à quantifier. En général Γ les lois ne sont pas connues ou sont complexes à évaluer Γ ce qui complique les calculs de d_j et q_j . Pour certaines lois classiques (loi normale Γ loi de laplace ...) Γ ces valeurs sont tabulées Γ ce qui facilite la mise en œuvre de la quantification quand on prend en compte ces modèles.

2.3.2 Quantification vectorielle

Le principe général du quantificateur vectoriel revient à quantifier une suite d'échantillons (vecteur) d'une image au lieu de quantifier chaque valeur comme c'est le cas pour

la quantification scalaire. Pour réaliser ceci on commence par créer un catalogue de vecteurs $\tilde{X}_i, i = 1 \dots N_c$ de référence appelé *codebook* ou *dictionnaire* à partir d'un ensemble d'images tests par un algorithme d'apprentissage. On utilise habituellement l'algorithme conçu par Linde, Buzo et Gray communément appelé *algorithme LBG* [62, 78]. L'image à quantifier est décomposée en un ensemble de vecteurs X_i de même taille que ceux du codebook. Ensuite utilisant une métrique d , chaque vecteur X_i de l'image à quantifier est comparé à tous les vecteurs \tilde{X}_i de la séquence d'apprentissage générée précédemment. Il s'agit de choisir dans le codebook le vecteur \tilde{X}_k tel que $d(X_j, \tilde{X}_k) \leq d(X_j, \tilde{X}_i) \quad i = 1 \dots N_c$. La distorsion mesurée par d doit être minimale et permettre d'obtenir une image de bonne qualité visuelle. La métrique communément utilisée pour ce type de quantification est la métrique euclidienne qui correspond à :

$$d^2(X, \tilde{X}) = \sum_{i=1}^{i=N} (X(i) - \tilde{X}(i))^2$$

On peut envisager pour mieux tenir compte de la valeur de chaque pixel une pondération de cette métrique :

$$d_{\omega}^2(X, \tilde{X}) = \sum_{i=1}^{i=N} \omega_i (X(i) - \tilde{X}(i))^2$$

où les ω_i sont des poids pouvant être identiques. Après avoir sélectionné parmi les vecteurs du codebook le vecteur le plus proche (au sens de la métrique choisie) du vecteur à quantifier ce dernier est représenté par son indice qui peut alors être transmis ou stocké en vue de la reconstruction de l'image originale. En fait si l'on a une image de taille $N \times N = 512 \times 512$ on peut la décomposer en 512 vecteurs de taille 512 chacun. Son indice est alors codé sur $\log_2 N$ bits i.e 9 bits. On se rend ainsi compte que si au lieu de manipuler (stocker ou transmettre) l'image toute entière on ne travaille que sur les indices on réalise un gain important au niveau de la quantité d'information à traiter. A la réception d'un processus de transmission l'image originale est reconstruite en utilisant simplement une table de correspondance. Il est à noter que soit le codebook est transmis en même temps que les index ou bien un codebook est construit de manière identique i.e en utilisant la même métrique et les mêmes images dans la séquence d'apprentissage que celles utilisées pour la quantification. Nous illustrons ce processus de quantification par le schéma de la *Figure (5)*.

Les difficultés principales (que nous n'abordons pas ici) pour l'utilisation de ce type de quantification sont :

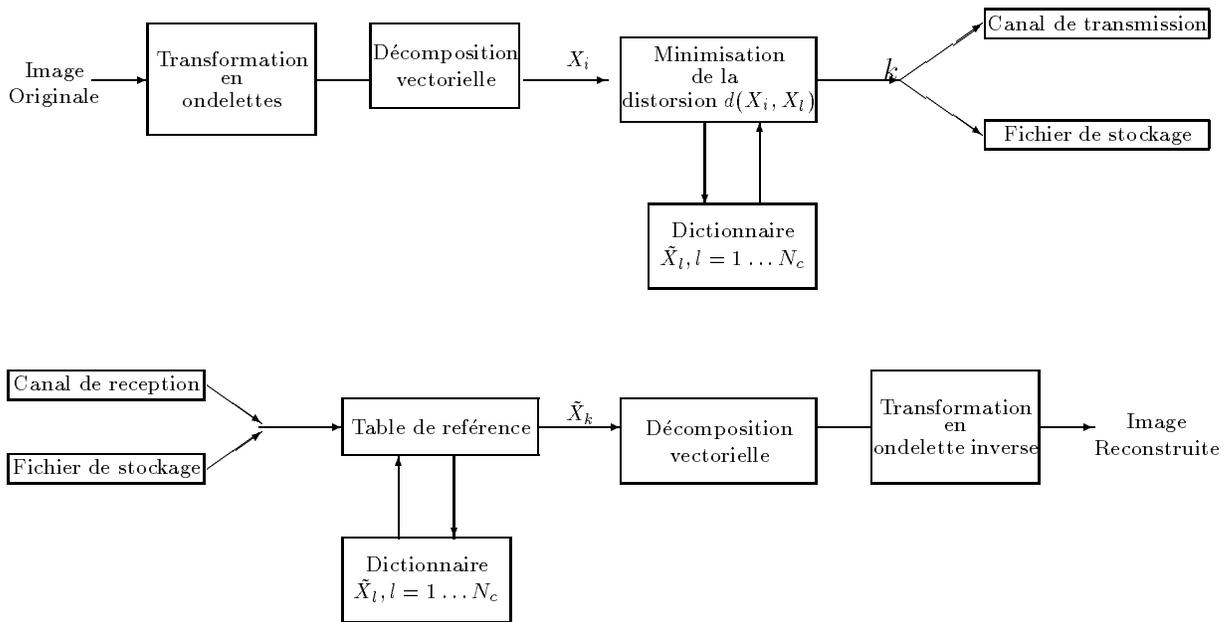


Figure 5: Illustration d'un schéma de quantification vectorielle dans un processus de compression (stockage ou transmission) en utilisant la transformation en ondelettes.

- i) La génération du codebook ou dictionnaire [78]. Cette phase permettant la création du catalogue de référence est très importante et dépend de la structure et de la nature de l'image.
- ii) Structuration du dictionnaire pour une recherche efficace et rapide des index de référence.

S'il est vrai que la mise en œuvre de cette quantification est complexe elle permet d'obtenir des taux de compression importants. Par exemple si l'on considère comme indiqué ci-dessus un dictionnaire formé de vecteurs de taille 512 chacun avec les index codés sur 9 bits ceci donne un codage de $\frac{9}{512}$ bit/pixel (bpp) soit un taux de compression de $\frac{512 \times 8}{9}$ pour une image ayant 2^8 niveaux de gris. Remarquons que ce taux ne dépend pas de la taille de l'image mais de la longueur des mots (ici vecteurs) du dictionnaire. En général si l'on veut coder un bloc de taille $n \times m$ pixels avec un dictionnaire ayant des mots sur d bits on a un rapport de $\frac{d}{n \times m}$ bit/pixel d'où un taux de compression de $\frac{n \times m \times b}{d}$ pour une image codée sur 2^b bits.

Les expériences numériques réalisées dans [66-78] montrent que la quantification

vectorielle est meilleure que la quantification scalaire dans la mesure où elle donne de meilleurs taux de compression. Le processus de quantification n'étant qu'une partie d'une chaîne de traitements nous allons maintenant présenter quelques techniques de compression (en fait de décomposition et de reconstruction) d'images.

2.4 Quelques techniques de compression d'images

2.4.1 Introduction

Le but de la compression est de réduire la quantité d'information nécessaire pour représenter une image [20] [62] [78] en exploitant au mieux les redondances contenues dans l'image présentée sous forme canonique.

Cette réduction peut être effectuée dans le domaine spatial (directement sur les échantillons) ou dans un domaine transformé (transformation linéaire) d'où l'existence de plusieurs techniques de compression avec ou sans perte d'information à la reconstruction. En fait après une décomposition ce qui se fait souvent par produits de convolution les valeurs obtenues sont réelles or pour une représentation graphique il faut des entiers d'où la nécessité d'une quantification.

Nous présenterons quelques algorithmes de compression dans le domaine spatial d'abord et dans le domaine transformé ensuite.

2.4.2 Techniques spatiales

Les méthodes spatiales ou directes sont celles qu'on applique directement sur les valeurs des niveaux de gris de l'image soit pixel par pixel soit par blocs. On peut citer : les méthodes différentielles et prédictives [20] quelques techniques de codage (de Huffman de Freeman par "Quadtree" par plans de bits etc ...). Nous allons rappeler brièvement le principe de quelques unes ici. On pourra consulter [78] pour d'autres techniques de compression spatiales. Nous expliciterons le codage de Freeman dans le chapitre 5.

Méthodes différentielles et méthodes prédictives

Les méthodes différentielles et prédictives [12] [78] sont classées parmi les méthodes spatiales qui sont basées sur le fait que des échantillons voisins sont corrélés. Pour une

image en niveaux de gris ceci se traduit par le fait que les pixels voisins ont des valeurs très proches.

L'idée de ces méthodes est de construire une suite $\tilde{x}(k, l)$ à partir de la suite d'échantillons originale $x(i, j)$ par différentiation ou par prédiction. Une valeur de la nouvelle suite est obtenue par une *règle de prédiction* qui se présente généralement comme une combinaison des valeurs voisines dans la suite initiale. Cette combinaison peut être linéaire ou non. Théoriquement les combinaisons non linéaires du fait qu'elles rendent mieux compte des relations avec les points voisins devraient donner de meilleurs résultats mais elles sont difficiles à mettre en œuvre et plus onéreuses en temps de calcul.

Dans la pratique on utilise des combinaisons linéaires qui sont d'un coût de calcul faible et s'implémentent très rapidement. Le nombre de voisins pris en compte et les coefficients de la combinaison linéaire caractérisent la prédiction. On dira que la *prédiction est d'ordre p* si le nombre de voisins pris en compte pour calculer la nouvelle valeur est p . Dès que $\tilde{x}(k, l)$ est obtenue à partir des $x(i, j)$ la différence $e(i, j) = \tilde{x}(i, j) - x(i, j)$ est *l'erreur de prédiction*. On obtient alors une image différence d'une dynamique plus faible que l'image originale et qui par conséquent peut être représentée de manière plus économique.

Pour illustrer une application de cette technique supposons que l'on veuille obtenir la valeur de $x(j, k)$ et que l'on ait déjà obtenu $x(j - 1, k - 1)$, $x(j - 1, k)$, $x(j, k - 1)$ alors $x(j, k)$ s'obtient par $x(j, k) = \alpha_1 x(j - 1, k - 1) + \alpha_2 x(j - 1, k) + \alpha_3 x(j, k - 1)$. Pour un système de transmission on a les équations suivantes :

- a) Prédiction : $\tilde{x}(j, k) = \alpha_1 x(j - 1, k - 1) + \alpha_2 x(j - 1, k) + \alpha_3 x(j, k - 1)$
- b) Erreur de prédiction : $e(j, k) = x(j, k) - \tilde{x}(j, k)$ (quantification)
- c) Reconstruction : $x(j, k) = \tilde{x}(j, k) + \tilde{e}(j, k)$

On a considéré ici un prédicteur d'ordre 3 où les coefficients α_i indiquent l'importance relative accordée au voisin sur la ligne (α_3) sur la colonne (α_2) ou sur la diagonale (α_1).

Le gain en compression de ces méthodes dépend de l'image des coefficients (leurs valeurs) utilisés et de l'ordre de prédiction considéré. Il n'existe pas de critère objectif pour apprécier numériquement la qualité de ces méthodes de compression. On se limite le plus souvent comme pour beaucoup de méthodes de filtrage basées sur le

même principe à une appréciation visuelle. Ces méthodes ne sont pas entièrement réversibles.

Méthodes par plages et méthodes des plans de bits

La méthode par plage (*Run-Length Coding*) [20], est basée sur le fait que plusieurs pixels voisins ont des valeurs identiques et ceci de manière fréquente. Une séquence de valeurs est appelée *plage* et est caractérisée par 3 paramètres : l'adresse du début de la plage i.e premier pixel sa longueur et sa valeur. Si toute l'image n'est représentée que par deux valeurs cas d'une image binaire les valeurs ne sont spécifiées qu'une seule fois et sont déterminées alternativement par la suite. La compression revient alors à représenter l'ensemble des trois paramètres ci-dessus pour toute l'image. Cette méthode est d'autant plus efficace que le nombre de niveaux de gris dans l'image est faible. Elle est réversible et est particulièrement adaptée pour les images binaires.

Comme l'indique le nom la *méthode par plans de bits* considère la représentation bit par bit de l'image [12]. En effet dans une image de taille $N \times N$ chaque pixel peut être représenté par un certain nombre de mots binaires *e.g* b bits ou simplement codé sur b bits. Pour $N = 256$ ou 512 on peut prendre $b = 8$ on a alors une image classique codée sur 2^8 niveaux de gris. Si dans une telle représentation le $k^{\text{ème}}$ bit de chaque mot représentant un échantillon est prélevé on obtient alors une image binaire appelé *plan de bits*. Pour $b = 8$ l'image toute entière est alors représentée par un ensemble de 8 plans de bits. Une fois cette représentation obtenue on peut alors utiliser une méthode de compression adaptée aux images binaires pour réduire la quantité d'information nécessaire au stockage de l'image.

L'efficacité de ces méthodes de compression dépend du type d'image. Si elles peuvent être intéressantes pour des images ne présentant que deux niveaux de gris elles sont en général mauvaises pour une image quelconque. Elles permettent cependant une reconstruction exacte.

2.4.3 Techniques de compression par transformation

Les méthodes de compression par transformation n'agissent pas directement sur l'image numérique dans sa représentation canonique mais dans le domaine transformé. Cette transformation pouvant être linéaire ou non. Il est bien connu qu'une transformation peut permettre de mettre en évidence certaines propriétés de l'image que la

représentation originale ou canonique ne laisse pas apparaître.

En partant d'un ensemble de valeurs numériques corrélées d'une image le but est d'obtenir un autre ensemble de valeurs le moins corrélées possible dans l'espace transformé. En général les schémas de codage par transformation subdivisent l'image de taille $N \times N$ en sous-images de taille plus petites avant de faire subir à ces sous images une transformation. On privilégie les transformations qui sont unitaires et conservent l'énergie. La transformation consiste en la décomposition de l'image dans une base adéquate de fonctions telles que les coefficients de la transformation soient indépendants et qu'un nombre minimum de ces coefficients contienne une proportion importante de l'énergie de l'image. Ainsi on pourra mettre à zéro certains d'entre eux sans nuire de manière significative ni à la quantité d'énergie ni à l'aspect visuel de l'image reconstruite.

Une transformation adéquate pour la compression d'image devrait permettre la décorrélation des coefficients transformés la conservation d'énergie ou sa condensation dans un nombre minimum de coefficients et enfin posséder un algorithme rapide. Les transformations linéaires sont les plus utilisées car ayant des expressions analytiques simples et s'implémentant assez vite. Pour satisfaire la contrainte de décorrélation on utilise les bases orthogonales. On sait aussi que le nombre d'opérations dans un algorithme issu d'une transformation 2-D non séparable pour une image est de $O(N^4)$ alors qu'il est de l'ordre de $O(N \log_2 N)$ si la transformation est séparable d'où la préférence aux algorithmes utilisant des bases séparables de fonctions. En général une transformation linéaire de l'image $x(i, j)$ en une image $X(k, l)$ se formule par :

$$X(k, l) = \sum_i \sum_j n(i, j, k, l) x(i, j) \quad (9)$$

où $n(i, j, k, l)$ est le noyau de la transformation. On dit que la transformation 2-D est séparable si le noyau associé l'est i.e si : $n(i, j, k, l) = n_1(i, k) n_2(j, l)$ où n_1 et n_2 désignent les noyaux associés à une transformation à une dimension. Le noyau de convolution de la transformation est souvent invariant en translation de manière à ce que l'on ait : $n(i, j, k, l) = \tilde{n}_1(i - k, j - l)$. Ce qui signifie que le résultat de la transformation ne dépend pas du point où elle est appliquée mais des valeurs du noyau en ces points. Si la transformation est séparable et invariante en translation on a : $n(i, j, k, l) = \tilde{n}_1(i - k) \tilde{n}_2(j - l)$. Cette invariance est une caractéristique discrète du produit de convolution. L'invariance et la séparabilité sont caractéristiques de la plupart des systèmes de filtrage.

Transformation de Karhunen-Loeve

On appelle *transformée de Karhunen-Loeve* [20, 78] la transformation optimale au sens où tous les coefficients obtenus sont décorrélés et que la quasi-totalité de l'énergie est conservée par un minimum de coefficients. Malheureusement les éléments de la transformation notamment la matrice dépendent de l'image dont il faut entre autres calculer la moyenne et la covariance. Par ailleurs il n'existe pas d'algorithme rapide pour le calcul de la transformation de Karhunen-Loeve. Toutes ces raisons font que cette transformation soit très peu utilisée dans la pratique. On lui préfère des transformations qui sont indépendantes des images et qui ont des algorithmes rapides tels les transformations spectrales en ondelettes ...

Transformations spectrales ou sinusoidales

La *transformation de Fourier* et celles qui s'en déduisent telles la *transformation en sinus* la *transformation en cosinus* sont très utilisées en analyse et en filtrage du signal [12]. Ces transformations possèdent des algorithmes rapides comme la *FFT* et ses variantes. La variable de l'espace transformé étant la fréquence une telle décomposition permet de mieux observer la répartition fréquentielle de l'image. Etant donné que ce sont les premières harmoniques qui contiennent la quasi-totalité de l'énergie il est donc possible de mettre à zéro une proportion importante des coefficients et de coder l'image à moindre coût.

Malgré la rapidité de la transformation de Fourier elle décompose l'image en une partie réelle et une partie imaginaire pouvant se convertir en module et argument ce qui n'est pas facile à manipuler ou à interpréter. Les traitements de ces données peuvent s'avérer lourds d'où la préférence accordée à la transformation en cosinus qui bénéficie de toutes les caractéristiques de la *FFT*. La transformée en cosinus a été choisie comme standard par *JPEG (Joint Photographic Experts Group)* pour le codage d'images fixes. Nous rappelons les formules définissant la transformée en cosinus discrète [78]. On commence par la décomposition avec :

$$X(k, l) = \frac{4c(k)c(l)}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(i, j) \cos\left[\frac{(2i+1)k\pi}{2k}\right] \cos\left[\frac{(2j+1)l\pi}{2l}\right]$$

et la reconstruction se fait par :

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} c(k)c(l)X(k, l) \cos\left[\frac{(2i+1)k\pi}{2k}\right] \cos\left[\frac{(2j+1)l\pi}{2l}\right]$$

où

$$c(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } u = 0; \\ 1 & \text{si } u = 1 \dots N - 1; \end{cases}$$

On montre que la performance de la transformée en cosinus discrète est proche d'une transformation de Karhunen-Loeve en utilisant une image modélisée par un processus de Markov du premier ordre.

Transformations quasi-spectrales

Les *transformations de Haar et de Walsh-Hadamard* sont souvent utilisées pour la compression d'image. Elles ne sont pas optimales au sens de la concentration de l'énergie de l'image dans une faible proportion de coefficients, mais leur grand avantage est l'extrême simplicité de calcul. Ceci facilite une implémentation matérielle ou logicielle. Ces transformations utilisent des matrices ou des noyaux dont les valeurs sont $+1$ ou -1 . La construction de la matrice de transformation de Walsh-Hadamard se fait de manière récurrente. La plus petite étant une matrice 2×2 qui représente la matrice d'une symétrie d'angle $\pi/4$ par rapport à l'origine. De

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

on déduit

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{2n} & H_{2n} \\ H_{2n} & -H_{2n} \end{bmatrix}$$

qui est la matrice de Hadamard de taille $2n \times 2n$.

On obtient la matrice des coefficients de la transformation en faisant le produit de la matrice image par la matrice de Hadamard de taille correspondante. Ce calcul peut être accéléré en procédant d'abord à une partition de l'image originale en blocs de taille plus petite et chacun de ces blocs est traité de manière indépendante.

2.4.4 Techniques hybrides

Les *techniques hybrides* de compression d'une image combinent de manière adéquate des méthodes par prédiction et des méthodes par transformation [20]. Il peut être intéressant par exemple de procéder d'abord à une transformation de l'image ensuite d'utiliser l'une des méthodes de prédiction pour la compression effective. Il reste clair que cette démarche n'est intéressante que si l'image transformée possède de bonnes

propriétés pour justifier l'une des méthodes de prédiction. Si par exemple la transformation permet d'obtenir une image binaire ou une image ayant des valeurs très voisines alors les méthodes différentielles ou par plages peuvent être mises en œuvre pour réduire la quantité d'information.

Nous classons dans ces techniques les méthodes de codage : de Huffman, arithmétique, de Freeman, par Quadtree, par contours et textures etc... [20, 78].

Le codage de Huffman et le codage arithmétique [78] sont fondés sur les probabilités de présence des niveaux de gris ou de mots de la source à coder. On associe à chaque mot une probabilité d'apparition proportionnelle à sa longueur. Ainsi l'information ou au mot du code de taille minimale est affecté la plus grande probabilité. Ceci permet d'obtenir un nombre moyen de bits/pixel proche de l'entropie de la source originale. Ces codages sont réversibles mais le taux de compression est très faible. Ils sont complexes à mettre en œuvre vu les calculs de probabilité à effectuer. Un des inconvénients majeure est cette dépendance à la statistique de la source à coder.

Le code de Freeman [3] sur lequel nous reviendrons au chapitre 5 est plus adapté à la description des courbes tout en réalisant une réduction de données.

Le codage par Quadtree ou arbre quaternaire [77] est lié à la propriété de récursivité du maillage carré. C'est une structuration hiérarchique des données image construite par codage binaire des quadrants uniformes de l'image. Une image (on dit souvent "nœud") est divisée en 4 quadrants (appelé "fils") de tailles égales. Chaque fils non uniforme ou mixte résultant est considéré comme nouveau nœud et est encore subdivisé ainsi de suite jusqu'à l'obtention de fils "parfaitement" uniformes ou homogènes. Le codage se fait à chaque niveau de la subdivision. Ce codage est très adapté à la description ou à la représentation des formes binaires ayant plusieurs zones homogènes. Pour le cas d'une image non binaire ou pour certains quadrants mixtes on considère qu'il y a homogénéité si la variance est inférieure à un certain seuil fixé à l'avance. Le taux de compression est fonction de la nature de l'image.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un survol de quelques méthodes de compression d'images. Il s'agit souvent des techniques de décomposition d'images qui permettent d'obtenir des coefficients justifiant de par leurs propriétés une réduction de l'espace nécessaire pour leur représentation ou stockage. De ces techniques celles qui passent

par les transformations doivent non seulement conserver l'énergie mais également posséder des algorithmes rapides et si possible que le nouvel espace puisse permettre une interprétation des images obtenues.

La liste des méthodes est loin d'être exhaustiveΓ mais constitue un aperçu de la diversité des techniques de compression des données image.

Les techniques de quantification sont souvent classées parmi les techniques de compressionΓ en ce sens qu'elles réduisent le nombre de bits nécessaire à la représentation des données (passage du réel en entier). En faitΓ ces techniques de même que les différentes méthodes de codage sont des transformations [8] qui donnent une autre représentation de l'image par un ensemble de données ou de paramètres qui peuvent permettre de reconstruire l'image. On peut d'ailleurs classer la méthode par plages dans cette catégorie (codage des paramètres) de même que la technique de compression fractale qui code un ensemble de transformations affines. Nous n'avons pas évoqué les techniques de décomposition en sous-bandes [36Γ65]Γ ni les techniques pyramidales [25] car elles s'intègrent dans les techniques de transformations par ondelettes qui font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Ondelettes et compression d'images

3.1 Introduction

Nous avons dans le chapitre précédent fait un survol sur plusieurs types de techniques permettant d'obtenir des coefficients décorrélés d'une image ce qui entraîne une réduction des données nécessaires à son stockage ou à sa transmission. En fait les transformations sont obtenues par projection du signal image sur des bases de fonctions appropriées. Les propriétés d'une transformation sont étroitement liées à celles des fonctions qui constituent la base de la transformation.

La transformation de Haar et celle de Walsh-Hadamard ont une très bonne localisation spatiale alors que les transformations spectrales sont caractérisées par une localisation fréquentielle assez nette.

Il peut être très intéressant de considérer une transformation qui soit intermédiaire des transformations précédentes en ce sens qu'elle soit localisée avec précision en temps et en fréquence. C'est ce que fait la transformation en ondelettes qui permet d'obtenir une représentation temps-fréquence [80] ou temps-échelle [88]. Elle a des propriétés d'adaptativité ou de flexibilité très attrayantes notamment au niveau du choix des fonctions de bases i.e des ondelettes (orthogonales ou non à support compact ou infini etc ...) et des paramètres de dilatation et de translation [50-53-83]. Les transformées en ondelettes conservent l'énergie du signal et possèdent notamment des algorithmes rapides [73-75] et sont donc bien adaptées à la compression d'image [53-65-66].

Nous allons dans ce chapitre décrire deux algorithmes à structure pyramidale qui se déduisent de l'analyse multirésolution. Nous présenterons d'abord les éléments de construction de l'algorithme de S. Mallat [53] ainsi que les résultats de l'implémentation.

L'algorithme en quinconce développé par Feauveau [65] sera formellement présenté. Celui de Burt et Adelson [25] sera décrit avec une analyse des caractéristiques des filtres utilisés. Les propriétés importantes des ondelettes qui conduisent au choix de la meilleure pour une application en imagerie seront discutées.

Nous présenterons ensuite les résultats de l'implémentation de l'algorithme de Mallat avec différentes familles d'ondelettes. Dans une perspective de compression nous mettrons différents pourcentages de coefficients d'ondelettes de l'image à zéro et nous examinerons graphiquement et numériquement les erreurs de reconstruction. Nous étudierons l'influence du nombre de niveaux de résolution sur les erreurs de reconstruction. Avec l'algorithme pyramidal de Burt nous examinerons l'influence du paramètre indépendant a ainsi que le niveau de la pyramide sur les erreurs à la synthèse. Nous avons calculé l'entropie qui tout en mesurant la quantité d'information permet de donner une estimation théorique du taux de compression dans le cas d'un codage sans perte d'information. Nous proposons une formule pour calculer de manière approximative le taux de compression de la représentation en ondelettes d'une image après avoir mis un certain pourcentage de coefficients à zéro.

Dans le cadre d'une application pratique nous nous sommes intéressés à la conservation d'indices visuels (frontières) dans les représentations hiérarchiques. Il s'agit d'étudier parmi différentes approches de représentations multi-échelles celle qui permet à différents niveaux d'échelles ou de la pyramide de conserver les indices visuels. Les résultats de cette étude de stabilité des contours avec l'algorithme pyramidal de Burt et celui de Mallat utilisant différentes ondelettes sont ensuite présentés sur une image synthétique et sur une image réelle.

3.2 Quelques algorithmes de transformation en ondelettes

Le premier algorithme de transformation en ondelettes utilisé dans le cadre de l'imagerie est celui de S. Mallat [53] basé sur une analyse multirésolution dyadique. Partant de la formulation fonctionnelle de l'écriture d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans une base de cet espace la structure particulière de ces espaces de projection (espaces emboîtés de multirésolution) permet de déduire un algorithme ayant une structure pyramidale.

3.2.1 Introduction

L'idée est de représenter un signal image à plusieurs niveaux de résolution la résolution étant ici la plus petite distance entre deux éléments tels que ceux-ci puissent être séparés par un instrument d'observation qui peut être l'oeil. En fait la précision que notre oeil a à déceler les détails dans une scène est fonction de la distance qui nous sépare de ce qui est observé. Ainsi plus la résolution d'une image est faible plus il faut être près pour mieux observer les légères variations ou de petits détails. Soient deux plans l'un celui de l'image et l'autre celui de l'observateur pouvant se déplacer. Si le plan de l'observateur se déplace alors que celui de l'image est immobile on a un effet de zoom avec agrandissement si le plan s'éloigne et réduction s'il se rapproche. On a un effet similaire si c'est le plan de l'image qui subit un déplacement. Le terme déplacement est utilisé ici pour une translation simple on ne prend pas en compte les éventuelles rotations.

En terme de traitement d'image on peut se demander quelle transformation faire subir à une image ou à une représentation adoptée de celle-ci pour que la visibilité soit la même quel que soit le déplacement que subit le plan d'observation ? La représentation de l'image à plusieurs niveaux de résolution en extrayant notamment les différences d'information entre les images de différentes résolution paraît un cadre adapté. Nous allons présenter l'analyse multirésolution dyadique d'une image par ondelettes [50-53] et l'algorithme qui s'en déduit. L'ondelette agit sur une image comme un microscope mathématique à effet de zoom.

3.2.2 Eléments de construction de l'algorithme de Mallat

Nous avons déjà indiqué le concept général de construction d'une ondelette par une analyse multirésolution au chapitre un nous nous limitons ici aux éléments essentiels pour la compréhension de l'algorithme de S. Mallat [53]. Rappelons qu'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est constituée par une suite $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous espace vectoriels emboîtés et fermés de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Chaque $V_j^{(2)}$ a une base constituée des dilatations et des translations de la fonction d'échelle.

Une analyse multirésolution $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être obtenue par produit tensoriel d'une analyse multirésolution $(V_j^{(1)})_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Il en est de même pour une base de $V_j^{(2)}$. On peut alors déduire trois ondelettes qui constituent une base de $W_j^{(2)}$. Pour expliciter ceci considérons $(V_j^{(1)})_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

alors un sous-espace $V_j^{(2)}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être obtenu par : $V_j^{(2)} = V_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}$. En fait la notation rigoureuse est $V_j^{(2)} = \overline{V_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}}$ qui représente la fermeture dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ du produit tensoriel de $V_j^{(1)}$ par $V_j^{(1)}$. Si l'on note $W_j^{(1)}$ (resp. $W_j^{(2)}$) le complémentaire orthonormé de $V_j^{(1)}$ (resp. $V_j^{(2)}$) dans $L^2(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^2)$) alors de :

$$V_{j+1}^{(2)} = V_{j+1}^{(2)} \otimes V_{j+1}^{(2)} \text{ et } V_{j+1}^{(1)} = V_j^{(1)} \oplus W_j^{(1)}$$

on a :

$$\begin{aligned} V_{j+1}^{(2)} &= (V_j^{(1)} \oplus W_j^{(1)}) \otimes (V_j^{(1)} \oplus W_j^{(1)}) \\ &= (V_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}) \oplus ((V_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)}) \oplus (W_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}) \oplus (W_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)})) \end{aligned}$$

d'où $W_j^{(2)} = (V_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)}) \oplus (W_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}) \oplus (W_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)})$

Si $\phi(x)$ est une fonction d'échelle de $(V_j^{(1)})_{j \in \mathbb{Z}}$ alors $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ est une fonction d'échelle de $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ et d'après le *théorème (6) du Chapitre II* nous avons une base de $W_j^{(2)}$ constituée de trois ondelettes.

Soit $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ représentant une image analogique et P_j (resp. Q_j) la projection de f dans $V_j^{(2)}$ (resp. $W_j^{(2)}$). Considérant les bases de $V_j^{(2)}$ (resp. $W_j^{(2)}$) définies dans le *théorème (6) du Chapitre II* la projection de $f(x, y)$ dans $V_j^{(2)}$ est :

$$P_j f(x, y) = \sum_{n, m} \langle f, \Phi_{jnm} \rangle \Phi_{jnm}(x, y)$$

et peut donc être caractérisée par : $AI_j(f) = ((\langle f, \Phi_{jnm} \rangle))_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2}$ qu'on appelle *approximation de l'image f à la résolution 2^{-j}* . De plus on a :

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_{jnm} \rangle &= \int f(x, y) 2^j \Phi((2^j x, 2^j y) - (n, m)) dx dy \\ &= \int f(x, y) 2^j \Phi[-2^{+j}((2^{-j} n, 2^{-j} m) - (x, y))] dx dy \\ &= (f * \underline{\Phi}_j)(2^{-j} n, 2^{-j} n) \text{ avec } \underline{\Phi}_j(x, y) = 2^j \Phi(-2^j(x, y)) \end{aligned}$$

L'approximation de f à la résolution 2^{-j} peut donc être obtenue comme produit de convolution d'où l'interprétation [53] du calcul de l'approximation discrète d'un signal en terme de filtrage.

De même la projection de $f(x, y)$ dans $W_j^{(2)}$ se décompose en :

$$\text{Projection dans } V^{(1)} \otimes W^{(1)} : Q_j^{01} f(x, y) = \sum_{n, m} \langle f, \Psi_{jnm}^{(1)} \rangle \Psi_{jnm}^{(1)}(x, y)$$

$$\text{Projection dans } W^{(1)} \otimes V^{(1)} : Q_j^{10} f(x, y) = \sum_{n, m} \langle f, \Psi_{jnm}^{(2)} \rangle \Psi_{jnm}^{(2)}(x, y)$$

$$\text{Projection dans } W^{(1)} \otimes W^{(1)} : Q_j^{11} f(x, y) = \sum_{n, m} \langle f, \Psi_{jnm}^{(3)} \rangle \Psi_{jnm}^{(3)}(x, y)$$

et se caractérise par les coefficients qui peuvent de la même manière que $\langle f, \Phi_{jnm} \rangle$ s'écrire sous la forme de produits de convolution.

Formules d'implémentation

Du point de vue de l'implémentation comme de l'analyse ci-dessus Γ c'est le caractère emboîté des sous-espaces $V_j^{(2)}$ qui est fondamental. En effet Γ on a $V_j^{(2)} \subset V_{j+1}^{(2)}$ d'où l'écriture de tout élément de $V_j^{(2)}$ dans une base de $V_{j+1}^{(2)}$ et en particulier l'écriture de tout élément de base soit :

$$\Phi_{jnm}(x, y) = \sum_{kl} \langle \Phi_{jnm}, \Phi_{j+1kl} \rangle \Phi_{j+1kl}(x, y) \quad (10)$$

En calculant le produit scalaire de $f(x, y)$ avec les deux membres de (10) Γ on obtient :

$$\langle f, \Phi_{jnm} \rangle = \sum_{kl} \langle \Phi_{jnm}, \Phi_{j+1kl} \rangle \langle f, \Phi_{j+1kl} \rangle \quad (11)$$

Par un simple changement de variables et en tenant compte de la notation de l'approximation de f , (11) devient :

$$AI_j(n, m) = \sum_{kl} \Phi * \underline{\Phi}_{-1}(2n - k, 2m - l) AI_{j+1}(k, l) \quad (12)$$

Cette équation montre qu'étant donné AI_{j+1} Γ l'approximation d'une image f à la résolution $2^{-(j+1)}$ Γ on peut en déduire AI_j Γ l'approximation de la même image à la résolution 2^{-j} Γ par filtrage. La qualité de l'image obtenue à la résolution suivante dépend des propriétés du filtre mis en œuvre.

On montre aussi que si l'on note $DI_j^{(1)}$, $DI_j^{(2)}$ et $DI_j^{(3)}$ les coefficients des projections de l'image $f(x, y)$ respectivement dans : $V_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)}$, $W_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)}$ et $W_j^{(1)} \otimes W_j^{(1)}$ alors on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} DI_j^{(1)}(n, m) &= \sum_{kl} \Psi^{(1)} * \underline{\Psi}_{-1}^{(1)}(2n - k, 2m - l) AI_{j+1}(k, l) \\ DI_j^{(2)}(n, m) &= \sum_{kl} \Psi^{(2)} * \underline{\Psi}_{-1}^{(2)}(2n - k, 2m - l) AI_{j+1}(k, l) \\ DI_j^{(3)}(n, m) &= \sum_{kl} \Psi^{(3)} * \underline{\Psi}_{-1}^{(3)}(2n - k, 2m - l) AI_{j+1}(k, l) \end{aligned}$$

qui donnent les formules explicites de calcul des projections dans différentes bases. Notons que la formulation adoptée ici s'écarte un peu de celle de Mallat [49 Γ 53] dans la mesure où le filtre considéré peut être formellement non séparable. En ce sens Γ cette

formulation est plus proche du cas général des filtres non séparables et en particulier du cas de la multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$ [65]. La séparabilité adoptée par Mallat a pour avantage de permettre un calcul plus rapide. Elle permet aussi d'interpréter les images $DI_j^{(k)}$ $k = 1 \dots 3$ comme les hautes fréquences sélectives en direction. $DI_j^{(1)}$, $DI_j^{(2)}$ et $DI_j^{(3)}$ sont respectivement les détails dans les directions horizontale, verticale et "diagonale". La Figure (6) représente le schéma formel d'analyse et de sous-échantillonnage de l'algorithme de Mallat où \tilde{H} (resp. \tilde{G}) représente le filtre miroir de H (resp. G) :

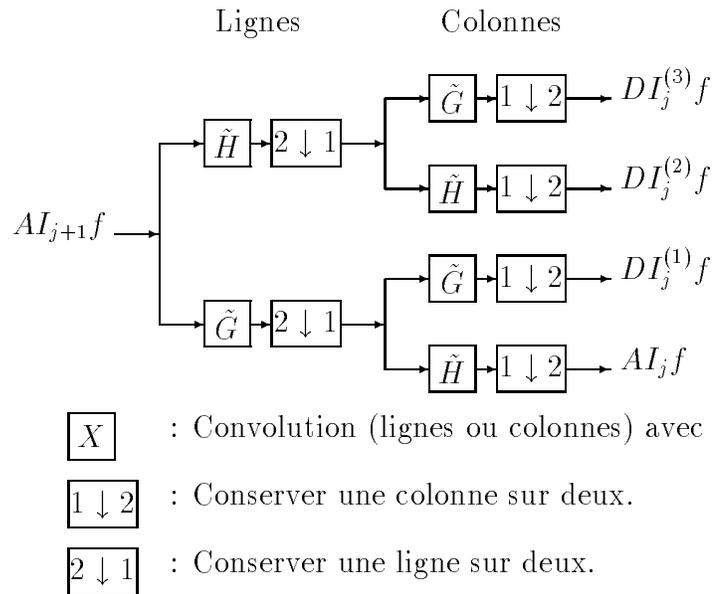


Figure 6: Schéma de décomposition de l'image $AI_{j+1}f$ en AI_jf , $DI_j^{(1)}f$, $DI_j^{(2)}f$ et $DI_j^{(3)}f$. Il est basé sur les produits de convolution 1-D des lignes et des colonnes de $AI_{j+1}f$.

En fait une image AI_0 est après décomposition équivalente à $(AI_J, (DI_j^{(k)})_{j=1, \dots, J}^{k=1, \dots, 3})$ qui est sa *représentation en ondelettes*. On remarque que si AI_0 occupe une place mémoire de $N \times N$ il en est de même de sa *représentation formelle en ondelettes* (Cf. Figure (7)) ce qui n'est pas le cas pour toutes les représentations de type pyramidal. Par exemple la représentation d'une image par la pyramide laplacienne [25] occupe $1/3$ de place en plus vis à vis de sa représentation originale.

De la représentation par ondelettes il est possible de reconstruire l'image originale. Ceci vient du simple fait que $W_j^{(2)}$ étant le complémentaire orthogonal de $V_j^{(2)}$ dans

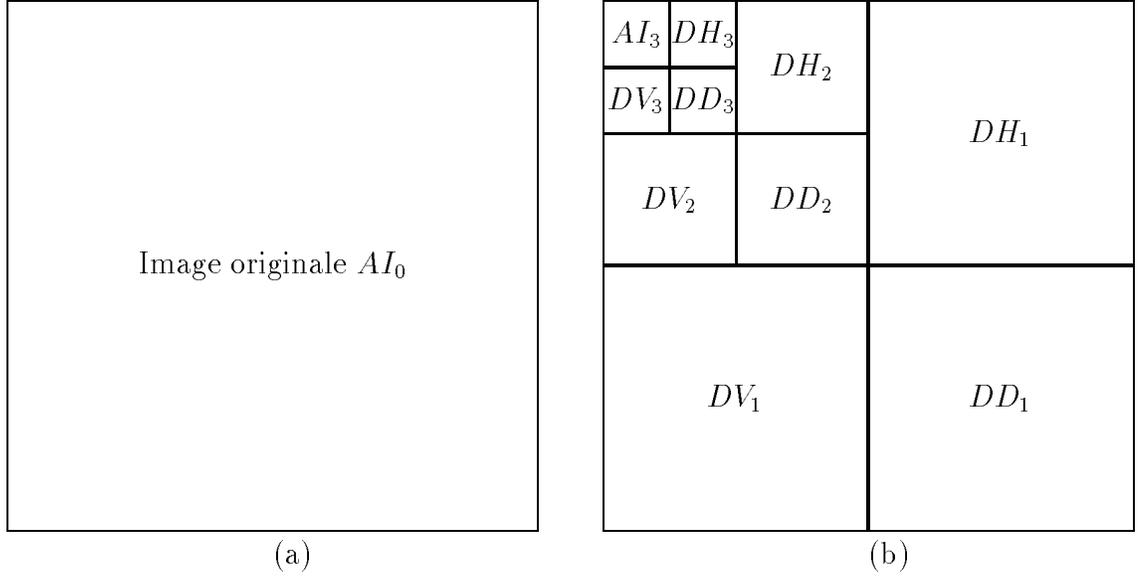


Figure 7: Schéma de représentation de l'algorithme dyadique. (a) Image originale; (b) Décomposition en $j = 3$ niveaux de résolution où DV_j : détails verticaux, DH_j : détails horizontaux, DD_j : détails diagonaux et AI_j : approximation de AI_0 à la résolution j .

$V_{j+1}^{(2)}$ une fonction de $V_{j+1}^{(2)}$ peut s'exprimer dans la base constituée de la réunion des bases de $V_j^{(2)}$ et $W_j^{(2)}$. Du fait de l'orthogonalité des bases on a :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{j+1nm}(x, y) &= \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Phi_{jkl} \rangle \Phi_{jkl}(x, y) + \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(1)} \rangle \Psi_{jkl}^{(1)}(x, y) + \\
 &\quad \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(2)} \rangle \Psi_{jkl}^{(2)}(x, y) + \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(3)} \rangle \Psi_{jkl}^{(3)}(x, y) \\
 &= P_j \Phi_{j+1nm}(x, y) + Q_j^{01} \Phi_{j+1nm}(x, y) + Q_j^{10} \Phi_{j+1nm}(x, y) + Q_j^{11} \Phi_{j+1nm}(x, y)
 \end{aligned}$$

En calculant le produit scalaire de cette expression avec la fonction $f(x, y)$ représentant l'image nous avons :

$$\begin{aligned}
 \langle f, \Phi_{j+1nm} \rangle &= \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Phi_{jkl} \rangle \langle f, \Phi_{jkl} \rangle + \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(1)} \rangle \langle f, \Psi_{jkl}^{(1)} \rangle \\
 &\quad + \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(2)} \rangle \langle f, \Psi_{jkl}^{(2)} \rangle + \sum_{kl} \langle \Phi_{j+1nm}, \Psi_{jkl}^{(3)} \rangle \langle f, \Psi_{jkl}^{(3)} \rangle
 \end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
 AI_{j+1}(n, m) &= \sum_{kl} \Phi * \underline{\Phi}_1(2k - n, 2l - m) AI_j(k, l) \\
 &\quad + \sum_{kl} \Phi * \underline{\Psi}_1^{(1)}(2k - n, 2l - m) DI_j^{(1)}(k, l)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{kl} \Phi * \underline{\Psi}_1^{(2)}(2k - n, 2l - m) DI_j^{(2)}(k, l) \\
 & + \sum_{kl} \Phi * \underline{\Psi}_1^{(3)}(2k - n, 2l - m) DI_j^{(3)}(k, l)
 \end{aligned}$$

qui montre que l'image AI_{j+1} peut être reconstruite à partir de AI_j , $DI_j^{(1)}$, $DI_j^{(2)}$ et $DI_j^{(3)}$ après un sur-échantillonnage ou une interpolation. Formellement la reconstruction de l'image originale se fait par le schéma de la *Figure* (8).

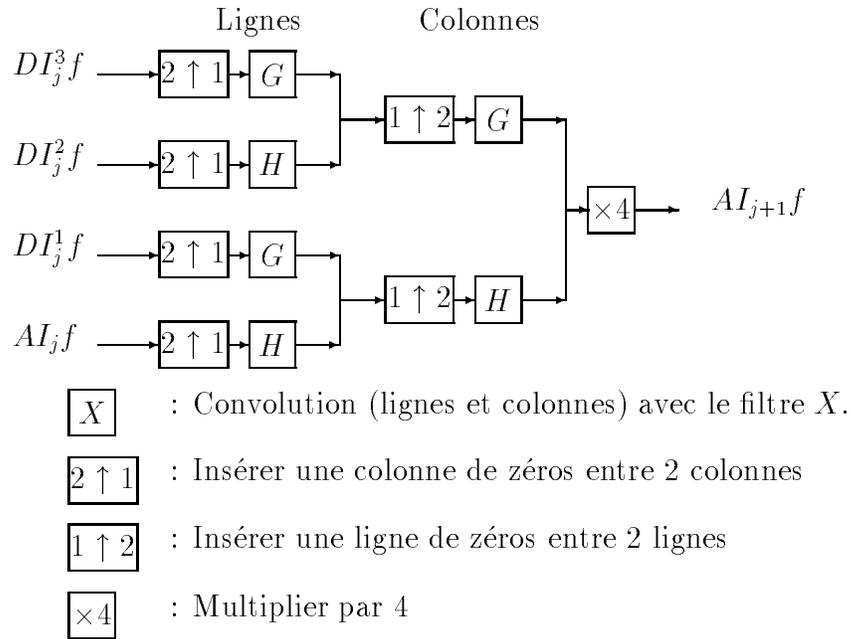


Figure 8: Schéma de reconstruction de l'image $AI_{j+1}f$ à partir de AI_jf , $DI_j^{(1)}f$, $DI_j^{(2)}f$ et $DI_j^{(3)}f$. De même que dans le schéma de décomposition, il s'agit ici de produits de convolution des lignes et colonnes.

Notons une fois de plus que cette présentation de l'algorithme de Mallat sous une forme un peu plus générale a pour but de montrer que dans sa conception il peut être implémenté pendant la phase d'analyse ou de synthèse en utilisant des filtres non séparables.

Résultats de l'implémentation

Nous présentons à la *Figure* (9) une image originale (9, (a)) et sa représentation en ondelettes (9, (b)) suivant la disposition du schéma de la *Figure* (7). On remarquera la

sélectivité directionnelle des détails (coefficients d'ondelettes) qui est due à la construction par produit tensoriel des bases d'ondelettes en dimension 2. Nous avons en (9, (d)) l'image différence pixel à pixel et (9, (c)) la reconstruction de l'image (9, (a)) à partir de sa représentation en ondelettes. L'homogénéité de (9, (d)) prouve que visuellement la reconstruction est bonne. Ceci est en parfait accord avec la formulation mathématique en considérant la réversibilité de la transformation. Mais numériquement les mesures d'écarts (Cf. Tableau (1)) montrent une différence entre l'image originale et l'image reconstruite. En fait l'algorithme de S. Mallat est formellement très attrayant dans sa formulation mathématique. Dans l'implémentation on n'utilise pas les fonctions Φ et les ondelettes $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ et $\Psi^{(3)}$ associées mais les filtres H , G ainsi que les filtres miroirs correspondants. Les propriétés de ces filtres se déduisent de celles des ondelettes et de la fonction d'échelle. Le filtre H associé à ϕ est un passe bas alors que celui associé à l'ondelette le filtre G est un passe haut. On utilise par exemple des ondelettes splines qui ont certes une décroissance exponentielle mais à support infini ce qui pose le problème de taille optimale du support pour l'implémentation. Notons que la taille du support étant liée au nombre de coefficients du filtre associé on parle alors du choix de la taille du filtre à utiliser. En fait de la symétrie du filtre passe bas on se donne un nombre n_0 et on utilise alors les coefficients $h(n)$ tels que $|n| < n_0$. Dans l'implémentation originale Mallat a utilisé 15 coefficients i.e $n_0 = 8$. Mais les calculs montrent que précision de la reconstruction augmente avec n_0 (Cf. Tableau (1)).

n_0	<i>Err. Abs.</i>	<i>Err. Moy.</i>	<i>Err. Qua.</i>	<i>PSNR</i>	<i>Entropie</i>
6	42.3	7.06	8.85	29.2	7.44
8	14.8	2.88	3.61	37.0	7.52
11	10.8	5.32	5.63	39.1	7.47
14	1.83	0.32	0.41	55.3	7.40
16	0.87	0.16	0.20	61.8	7.40
25	$8.85 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$4.96 \cdot 10^{-2}$	74.2	7.40
40	$7.73 \cdot 10^{-3}$	$4.52 \cdot 10^{-3}$	$4.60 \cdot 10^{-3}$	94.9	7.40

Tableau 1: La précision augmente avec le nombre de coefficients du filtre. L'analyse est faite sur 3 niveaux de résolution.

Dans ce tableau on considère une image originale et l'image reconstruite après

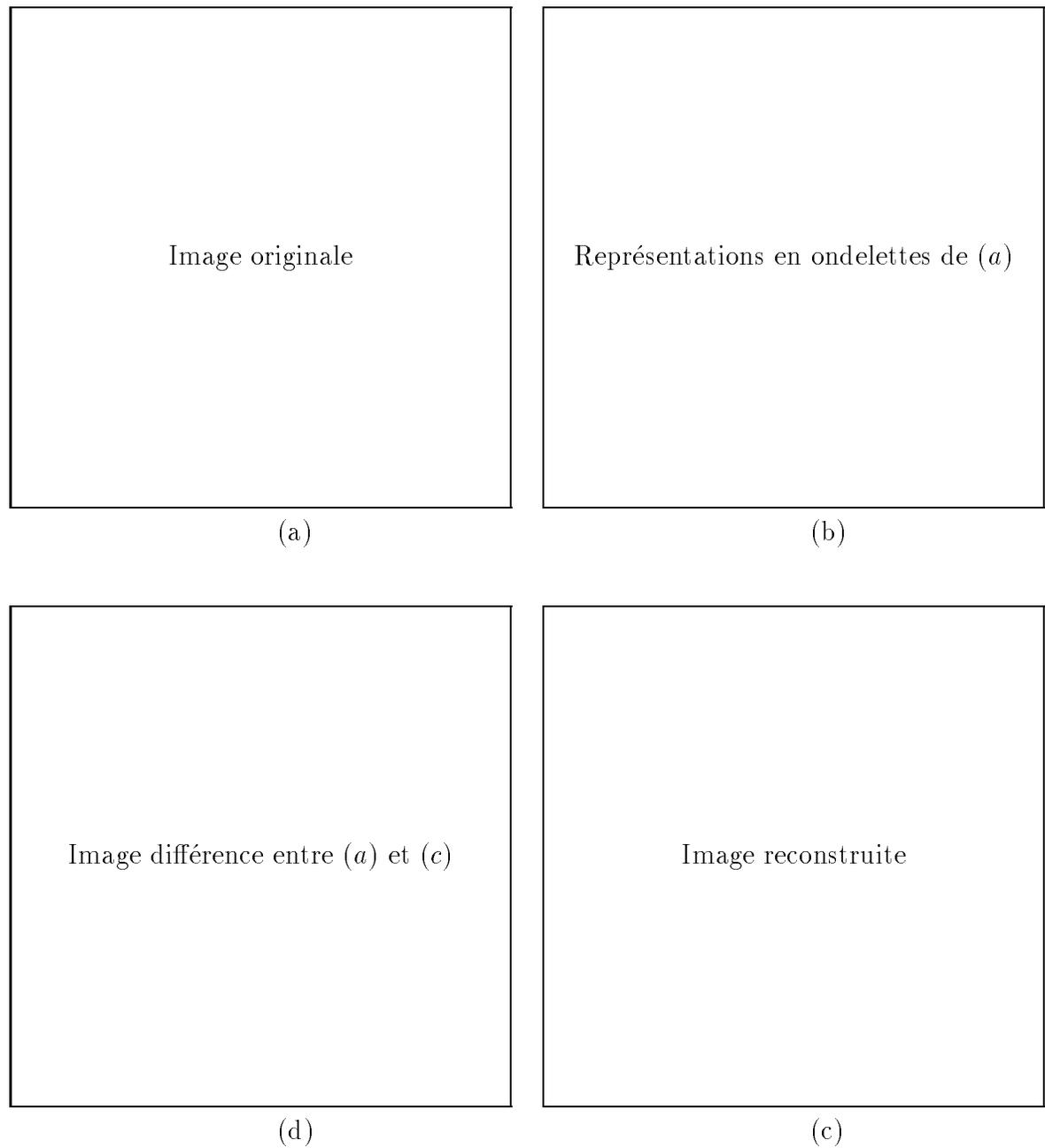


Figure 9: (a) : *Image originale*; (b) : *Décomposition de (a) en 3 niveaux de résolution i.e représentation en ondelettes de (a)*; (c) : *Reconstruction de (a) à partir de (b)*; (d) : *Différence entre (a) et (c)*.

une décomposition sur trois niveaux de résolution. On évalue alors l'erreur absolue l'erreur moyenne l'erreur quadratique le rapport signal sur bruit des deux images qui sont représentées par des valeurs de 0 à 255 et l'entropie de l'image reconstruite.

Les valeurs de ces mesures d'écart attestent que l'image reconstruite est d'autant plus proche (numériquement) de l'image originale que le nombre de coefficients du filtre est élevé. L'entropie qui permet de mesurer la quantité d'information se stabilise à 7.40 pour les valeurs de $n_0 > 16$. Ceci montre qu'aucune information n'est ajoutée en plus quel que soit n_0 au delà de cette valeur. Les erreurs obtenues confirment ce fait. Etant donné que les valeurs des niveaux de gris sont des entiers compris entre 0 et 255, une différence à 10^{-2} près est pratiquement insignifiante.

Visuellement on ne perçoit pratiquement plus de différence entre les deux images pour $n_0 = 6$ malgré la valeur de l'erreur absolue. Le choix du nombre de coefficients dépend de ce qui est privilégié dans le traitement considéré. Si l'accent est simplement mis sur l'aspect visuel (reconnaissance par exemple) on gagne en temps de calcul en utilisant peu de coefficients. Mais si c'est l'aspect numérique qui est le plus important la précision sera obtenue au prix d'un sacrifice en temps de calcul.

<i>Résolutions</i>	<i>Err. Abs.</i>	<i>Err. Moy.</i>	<i>Err. Qua.</i>	<i>PSNR</i>	<i>Entropie</i>
1	0.42	0.07	0.10	64.2	7.40
2	0.57	0.01	0.15	64.2	7.40
3	0.87	0.16	0.20	61.8	7.40
4	1.13	0.21	0.27	59.5	7.41
5	1.44	0.30	0.37	56.6	7.42
6	1.79	0.42	0.52	53.8	7.43
7	2.09	0.52	0.64	52.0	7.43
8	2.14	0.56	0.67	51.6	7.43

Tableau 2: *La précision diminue avec l'augmentation du nombre de niveaux de résolution. Nous avons utilisé la même image que ci-dessus avec $n_0 = 16$.*

L'autre paramètre de l'algorithme est le nombre de niveaux de résolution i.e j . Nous avons établi le *Tableau (2)* pour montrer que la précision numérique l'indépendamment du nombre de coefficients l'indiminue quand l'analyse est poussée à de très basses résolutions. On observe par exemple que quand on décompose l'image à une

seule résolution l'erreur absolue est de 0.42 cette même erreur est de 2.14 si l'on est à 8 niveaux de résolution soit une augmentation de l'erreur de 509% ! Il est à remarquer que malgré la rapidité inhérente à la structure pyramidale de l'algorithme le temps de calcul augmente avec la taille du filtre. Ce fait s'observe en remarquant comme nous l'avons bien fait apparaître dans la formulation de l'algorithme qu'il s'agit d'effectuer un ensemble de produits de convolution. Il est bien connu que le temps de calcul d'un produit de convolution croît avec le nombre de coefficients du filtre ou avec la taille du masque de convolution mis en œuvre. On pourrait voir la structure pyramidale de l'algorithme considérer un filtre de taille adaptative i.e tel que la taille du masque décroît au fur et à mesure que la taille de l'image traitée diminue. Mais alors quels seraient les coefficients à conserver ? Seront-ils choisis en fonction de leurs positions dans le masque de convolution ou en fonction de leurs valeurs numériques ? Le critère de choix pourra-t-il être objectif et indépendant de l'image ? Ce sont des questions assez complexes étant donné qu'il n'existe pas de critères objectifs et universellement reconnus autres que visuels pour apprécier la qualité d'une image.

En conclusion pour l'analyse de l'effet de ces deux paramètres de l'algorithme on peut dire que si l'on s'intéresse surtout à l'aspect visuel il n'est pas nécessaire d'utiliser beaucoup de coefficients du filtre. Les calculs se font alors plus rapidement ce qui peut être très intéressant pour des applications en temps réel ou l'aspect visuel est prépondérant comme dans le cas du traitement des images de télévision ou de météorologie. Par contre s'il s'agit d'une analyse médicale on peut sacrifier le temps et veiller à la précision des résultats obtenus pour éviter toute erreur d'interprétation qui peut entraîner un faux diagnostic. Le nombre de niveaux de résolution dépend du volume de l'image à traiter. A la résolution la plus faible (dernier niveau de la pyramide) l'image de texture est constituée d'au moins un pixel. La qualité visuelle (bonne ou mauvaise) de l'image à une résolution donnée varie selon les applications. Une image médicale doit être de très haute résolution permettant de distinguer tous les détails alors qu'une image nécessaire pour la construction d'un Modèle Numérique de Terrain (MNT) peut être moins précise.

Pour passer d'une résolution à une autre on utilise un facteur de résolution de 2. On peut s'imaginer qu'en changeant ce facteur on puisse obtenir une autre précision. C'est ce qui est fait dans [65] en considérant le facteur $\sqrt{2}$ pour rendre plus fins les détails inter-échelles. En considérant ce facteur d'échelle on obtient un algorithme pyramidal en quinconce que nous présentons dans la section suivante.

3.2.3 Algorithme pyramidal non séparable en quinconce

Il s'agit d'un algorithme pyramidal qui peut se déduire d'une analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$ [65] et non de 2 comme dans le cas précédent dit dyadique. L'analyse est alors plus fine car le facteur de résolution est plus petit mais les filtres induits sont non séparables. Pour plus de détails sur les relations entre la fonction d'échelle et l'ondelette comme ce fut le cas ci-dessus nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse de J. C. Feauveau [65]. Ce type de construction a été introduit par Vetterli [26] dans le cadre du codage par bancs de filtres mais n'a pas eu d'écho important du fait de la non séparabilité des filtres.

Vu sous l'aspect banc de filtres la phase de décomposition consiste à filtrer l'image par un banc de deux filtres 2-D et à la sortie les images obtenues sont sous-échantillonnées de la façon suivante : on garde un point sur deux sur toutes les lignes et d'une ligne à l'autre on effectue un décalage d'un pixel vers la droite. La phase de reconstruction est précédée d'une interpolation qui consiste habituellement à intercaler un zéro entre les échantillons et le résultat est obtenu en additionnant la sortie des deux canaux ainsi interpolés et filtrés. Pour obtenir de bons résultats à la reconstruction les filtres utilisés doivent satisfaire les conditions de reconstruction exacte que nous avons rappelées dans le chapitre premier de cette thèse. L'un des filtres devra être un passe bas pour assurer le passage de basses fréquences et l'autre un passe haut.

Vu sous l'aspect multirésolution la décomposition est à peu près la même que dans le cas dyadique sauf qu'on introduit une étape supplémentaire dans cette phase et qu'on utilise une seule ondelette au lieu de trois comme précédemment. L'étape supplémentaire consiste simplement en un changement d'orientation permettant une réorganisation plus compacte de l'image haute fréquence.

Sous forme algorithmique si l'on appelle AI_0 l'image originale l'application des deux filtres permet d'obtenir $AI_{1/2}$ et $DI_{1/2}$. Ensuite de $AI_{1/2}$ on déduit AI_1 et DI_1 par convolution avec les mêmes filtres que précédemment mais ayant changé d'orientation. $DI_{1/2}$ est réorganisée de manière plus compacte en $\tilde{DI}_{1/2}$. A ce stade de la décomposition AI_0 est représentée par AI_1 (image dégradée 'basses résolutions) de AI_0 et $(DI_1, \tilde{DI}_{1/2})$ qui sont les détails ou différences entre AI_0 et AI_1 . On peut recommencer le processus sur la sous-image AI_1 qui représente la texture de l'image à une résolution inférieure. L'image AI_0 peut alors être représentée par $(AI_{J/2}, (DI_{j/2})_{j=1\dots J})$ (Cf. Figure (10)) au lieu de $(AI_J, (DI_j^{(1)}, DI_j^{(2)}, DI_j^{(3)})_{j=1\dots J})$ comme dans le cas dyadique. On montre [65] qu'en fait si l'on définit un traitement séparable comme tout traite-

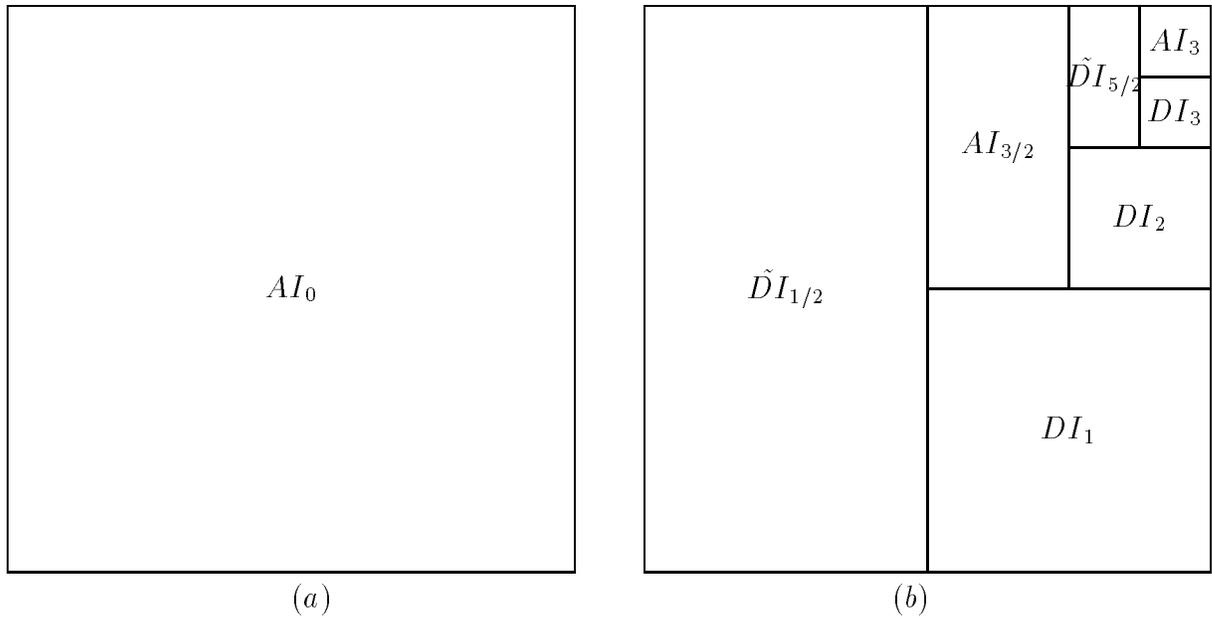


Figure 10: *Schéma de représentation de l'algorithme en quinconce. (a) Image originale; (b) Décomposition de (a) en quinconce pour $j = 3$ résolutions.*

ment pouvant se ramener au produit de deux traitements 1-DΓalors on peut obtenir la séparabilité des bancs de filtres qui définissent l'algorithme en quinconce.

3.2.4 Remarques sur les algorithmes déduits d'une analyse multirésolution

Les techniques de filtrage et d'optimisation des filtres en fonction des critères comme l'exactitude de la reconstructionΓle caractère fini des réponses impulsionnelles etc. . . pour l'analyse ou la synthèse des signaux en codage ou en compression sont bien connues [28Γ36]. GénéralementΓl'optimisationΓles caractérisations et les interprétations se font dans l'espace de Fourier. L'introduction de l'outil mathématique qu'est l'analyse multirésolution a conduit pratiquement aux mêmes algorithmes procédant par filtrage avec cet avantage que les propriétés des filtres peuvent être analysées dans l'espace temporel [50Γ65]. Nous avons vu que dans l'algorithme de Mallat par exempleΓles coefficients de la combinaison linéaire qui caractérisent l'écriture (projection) d'une fonction dans l'espace vectoriel de multirésolution peuvent se présenter comme un produit de convolution en des points discrets d'une grille d'échantillonnage. On a ainsi d'une manière quasi-automatique le passage d'une image analogique à une image

numérique dans une même formulation. Ceci permet une meilleure compréhension et par conséquent une interprétation améliorée du filtrage introduit. L'analyse des coefficients obtenus par l'analyse multirésolution se fait donc à partir des propriétés de la fonction d'échelle ou de l'ondelette. L'ensemble des choix possibles de ces fonctions étant très vaste on peut obtenir des effets de lissage ou de dérivation de plusieurs ordres ce qui permet de s'affranchir des notions discrètes correspondantes qui ne sont pas toujours définies sans équivoque [77].

L'un des aspects importants du point de vue numérique est la séparabilité qui réduit les coûts de calcul. La sélectivité directionnelle dans le cas de l'algorithme dyadique peut être intéressante si l'on recherche ou si l'on traite des entités géométriques formées de segments de droites. L'approche non dyadique est non orientée en direction et introduit des espaces intermédiaires de projection. Elle peut être utile si l'on veut faire par exemple du zéro-crossing en perspective de détection ou de localisation des objets dont on ne connaît pas *a priori* les caractéristiques géométriques.

3.3 Algorithme pyramidal de Burt et Adelson

3.3.1 Introduction et filtres associés

La structure pyramidale pour la représentation des images a été introduite par Burt et Adelson [25]. En fait il s'agit d'une méthode de décomposition de l'image en vue d'un codage qui peut être classée parmi les techniques prédictives. Elle a cependant quelques avantages des techniques de transformation. C'est une méthode prédictive parce que la valeur d'un pixel est obtenue (moyennage pondéré) à partir de celles des pixels voisins. Elle rejoint les méthodes de transformation dans la mesure où on peut considérer les opérateurs locaux (i.e masques de convolution) comme des fonctions qui constituent une base dans laquelle on décompose l'image. Burt et Adelson indiquent d'ailleurs que la différence entre leur technique et les autres réside dans le fait que les éléments codés sont localisés en espace et en fréquence. On note ici l'intuition visionnaire qu'avaient les auteurs sur la puissance de leur algorithme en évoquant notamment la notion d'espace-fréquence [80] qui est l'un des atouts de l'analyse par transformation en ondelettes.

Dans l'approche construction des ondelettes par banc de filtres Barlaud et *al.* [63] déduisent une ondelette associée au masque utilisé par Burt et Adelson. La famille

d'ondelettes ainsi obtenue ne constitue pas une base orthonormée Γ mais une base biorthogonale [86]. Ceci est encore un argument de poids pour considérer cet algorithme comme une technique de compression par transformation.

L'algorithme de Burt et Adelson plus connu sous le nom de pyramide laplacienne est donc intéressant en tant que technique prédictive Γ car il s'implémente facilement. L'inconvénient majeur de cette méthode de décomposition Γ par rapport à la décomposition par analyse multirésolution dyadique par exemple Γ est que la taille mémoire nécessaire au stockage du résultat est plus importante. En outre les images de détail n'ont pas d'interprétation précise. On peut cependant noter qu'en considérant une laplacienne comme la différence de deux gaussiennes Γ les images de détails peuvent permettre de détecter les passages par zéro.

L'algorithme utilise un masque de convolution qui fait partie d'un ensemble d'opérateurs ou de masques permettant de construire les algorithmes de génération de pyramides passe bas et laplaciennes [89].

Nous rappellerons les contraintes imposées par Burt et Adelson [25 Γ 89] pour obtenir les noyaux de filtrage en faisant si possible une analogie avec l'aspect fonctionnel (transformation) de l'approche :

- i) **La séparabilité** : Dans le but de réduire les coûts de calculs. Cette propriété est obtenue en considérant en 2-D Γ un produit tensoriel d'espace vectoriel.
- ii) **La normalisation** : En terme de filtrage Γ ceci assure l'obtention d'un filtre passe bas et peut être interprété en terme de normalisation d'une base pour assurer l'homogénéité des calculs.
- iii) **La symétrie** : Cette propriété garantit d'une part une réponse impulsionnelle réelle et d'autre part est en harmonie avec la symétrisation qu'il faut souvent imposer à une image lors du traitement afin de réduire les effets de bords.
- iv) **L'unimodalité** : La réponse impulsionnelle doit être unimodale. Il s'agit d'approximer au mieux un filtre gaussien. Dans une perspective de détection de contour (par zéro crossing) Γ ceci permet d'éviter la détection de faux contours.
- v) **L'équi-contribution** : La contribution de chaque pixel de l'image originale à une image d'un niveau quelconque de la pyramide doit être identique à tous les niveaux. Ceci se traduit par le fait que la somme de toutes les contributions à un pixel donné est indépendante du pixel. On peut exprimer ceci en indiquant que

la somme des contributions de rangs pairs doit être égale à celle des contributions de rangs impairs.

La taille du masque de convolution n'est pas définie *a priori* mais habituellement elle est choisie petite. Burt et Adelson proposent un noyau de taille 3×3 ou 5×5 justifiant ce choix par le gain en temps de calcul si le filtre est court. Dans [89] la condition *iii*) est complétée par le caractère impair de la taille du filtre ce qui assure une parfaite symétrie dans le domaine discret.

Si l'on considère $(w(n))_{n \in \mathbb{N}}$ comme l'élément unidimensionnel du noyau la traduction des contraintes ci-dessus donne [25, 50].

$$\begin{aligned} w(n) &= w(-n) && : \text{symétrie} \\ \sum_n w(n) &= 1 && : \text{normalisation} \\ \sum_n w(2n) &= \sum_n w(2n+1) && : \text{équicontribution} \end{aligned}$$

Le masque 3×3 est entièrement déterminé par la résolution du système ci-dessus pour $n = 1$. Pour $n = 2$ on obtient un masque qui n'introduit pas de déphasage [89] et permet un filtrage à moindre coût de calcul. En 1-D il s'agit de déterminer $w(-2)$, $w(-1)$, $w(0)$, $w(1)$ et $w(2)$ satisfaisant aux contraintes ci-dessus. La traduction explicite de ces conditions donne un système de trois équations à quatre inconnues que l'on peut résoudre en considérant $w(0) = \mathbf{a}$ comme paramètre indépendant. On obtient alors les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} w(0) &= \mathbf{a} \\ w(-1) &= w(1) = \frac{1}{4} \\ w(-2) &= w(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} * \mathbf{a} \end{aligned}$$

Le choix du paramètre \mathbf{a} est fait de manière à ce que la condition d'unimodalité se réalise au mieux. D'ailleurs on discute dans [25] des valeurs possibles de \mathbf{a} en traçant les courbes correspondantes à différentes valeurs ainsi que les histogrammes des distributions associées. Pour $\mathbf{a} = 0.4$ on a une meilleure approximation d'une gaussienne. La valeur $\mathbf{a} = 0.5$ donne une courbe d'une forme plutôt triangulaire alors qu'avec $\mathbf{a} = 0.3$ la courbe est aplatie par rapport à une gaussienne. En considérant la valeur $\mathbf{a} = 0.6$ la courbe obtenue a des lobes négatifs et oscille comme une ondelette ! Cette valeur permet d'après Burt et Adelson d'obtenir un bon taux de compression. C'est

probablement ce qui a motivé son utilisation pour déduire les coefficients permettant de construire une ondelette biorthogonale [63] (*Cf. Annexe A*). De manière analytique et en se basant notamment sur la fréquence de coupure de Nyquist (pour éviter la création de faux contours) On donne dans [50Γ89] les bornes de validité du paramètre a .

3.3.2 Description et implémentation

L'algorithme de Burt et Adelson construit en fait deux suites d'images à structure hiérarchique : la pyramide laplacienne et la pyramide gaussienne.

De l'image initiale notée G_0 (premier niveau de la pyramide gaussienne) On construit l'image G_1 par convolution de G_0 avec un masque (filtre passe bas) ayant en une dimension les propriétés indiquées ci-dessus et approximant au mieux une gaussienne. Ceci est suivi d'un sous-échantillonnage : on garde un coefficient sur deux. G_1 est l'image du niveau 1 de la pyramide gaussienne et est de taille moitiée de celle de G_0 . Etant donné que la différence de deux gaussiennes peut être approximée par une laplacienne On obtient l'image du premier niveau de la pyramide laplacienne en prenant la différence entre G_0 et \tilde{G}_1 où \tilde{G}_1 est l'image G_1 dilatée d'un facteur de 2 pour que la différence puisse être possible (G_1 est de taille moitiée de G_0). On a donc $L_1 = G_0 - \tilde{G}_1$.

On recommence le processus sur G_1 . De G_{k-1} on construit respectivement G_k et L_k jusqu'au dernier niveau de la pyramide où l'on considère que $L_n = G_n$. Le nombre de niveaux maximum de la pyramide dépend de la taille de l'image. Ainsi pour une image de taille $N \times N = 2^b \times 2^b$ On a $n = b$ ce qui signifie qu'au niveau n $L_n = G_n$ est constituée d'un seul pixel.

L'ensemble (G_0, G_1, \dots, G_n) constitue la pyramide gaussienne et représente l'image de texture à différents niveaux de résolution Alors que (L_0, L_1, \dots, L_n) est la pyramide laplacienne qui est en fait la représentation de G_0 . Il est bien connu que la représentation d'une image par sa pyramide laplacienne augmente le volume de données. En effet étant donné que la taille de l'image diminue de moitié à chaque niveau l'image laplacienne au niveau k est de taille $N/2^k \times N/2^k$ d'où pour une image $N \times N = 2^n \times 2^n$ on a :

$$\begin{aligned} N \times N + N/2^1 \times N/2^1 + \dots + N/2^k \times N/2^k + \dots &= N \times N(1 + \dots + 1/2^{2n}) \\ &\approx 4/3(N \times N) \end{aligned}$$

Les images de détails n'ont pas de caractéristiques particulières mais devraient être homogènes. Nous illustrons les résultats de cet algorithme à la *Figure (11)*.

Nous avons évalué quelques éléments numériques *Tableau (3)* d'appréciation de la qualité de la reconstruction à partir de sa représentation par la pyramide laplacienne ceci en fonction de \mathbf{a} . Nous avons considéré quelques valeurs de \mathbf{a} présentées ci-dessus. La valeur $\mathbf{a} = 0.375$ est proposée par Daubechies comme celle qui permet d'obtenir dans sa construction des ondelettes à support compact une fonction d'échelle de régularité légèrement inférieure à 3. Cette fonction d'échelle se construit récursivement et est obtenue comme produit de convolution de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1[$ par elle-même à l'ordre 4.

a	<i>Err. Abs.</i>	<i>Err. Moy.</i>	<i>Err. Qua.</i>	<i>PSNR</i>
0.3	2.84×10^{-14}	8.97×10^{-17}	7.77×10^{-16}	3.50×10^2
0.375	—	—	—	∞
0.6	1.14×10^{-13}	5.86×10^{-16}	3.61×10^{-15}	3.37×10^2
0.9	1.31×10^{-11}	1.61×10^{-13}	3.85×10^{-13}	2.96×10^2
0.95	1.37×10^{-11}	1.75×10^{-13}	4.39×10^{-13}	2.95×10^2

Tableau 3: *Erreur de reconstruction d'une image à partir de sa représentation par une pyramide laplacienne en fonction du paramètre indépendant \mathbf{a} .*

Dans le *Tableau (3)* les tirets (dans la ligne correspondante à $\mathbf{a} = 0.375$) indiquent que les données sont très faibles. On remarque que le filtre proposé par Burt et Adelson est à reconstruction exacte pour certaines valeurs de \mathbf{a} à la précision machine près et que les erreurs tout en restant très faibles diminuent avec les valeurs du paramètre \mathbf{a} que nous avons considéré dans $[0, 1[$.

Généralement pour obtenir la représentation par la pyramide laplacienne d'une image la décomposition est faite de sorte que la dernière image laplacienne qui est la gaussienne soit réduite à un seul pixel. Une image de taille 256×256 par exemple est décomposée sur 8 niveaux. L'analyse de l'influence du nombre de niveaux de décomposition sur les erreurs de reconstruction nous a permis d'établir le *Tableau (4)* qui montre l'évolution des écarts. On observe une décroissance des erreurs du niveau 1 à 4 et une stabilisation à partir du niveau 5.

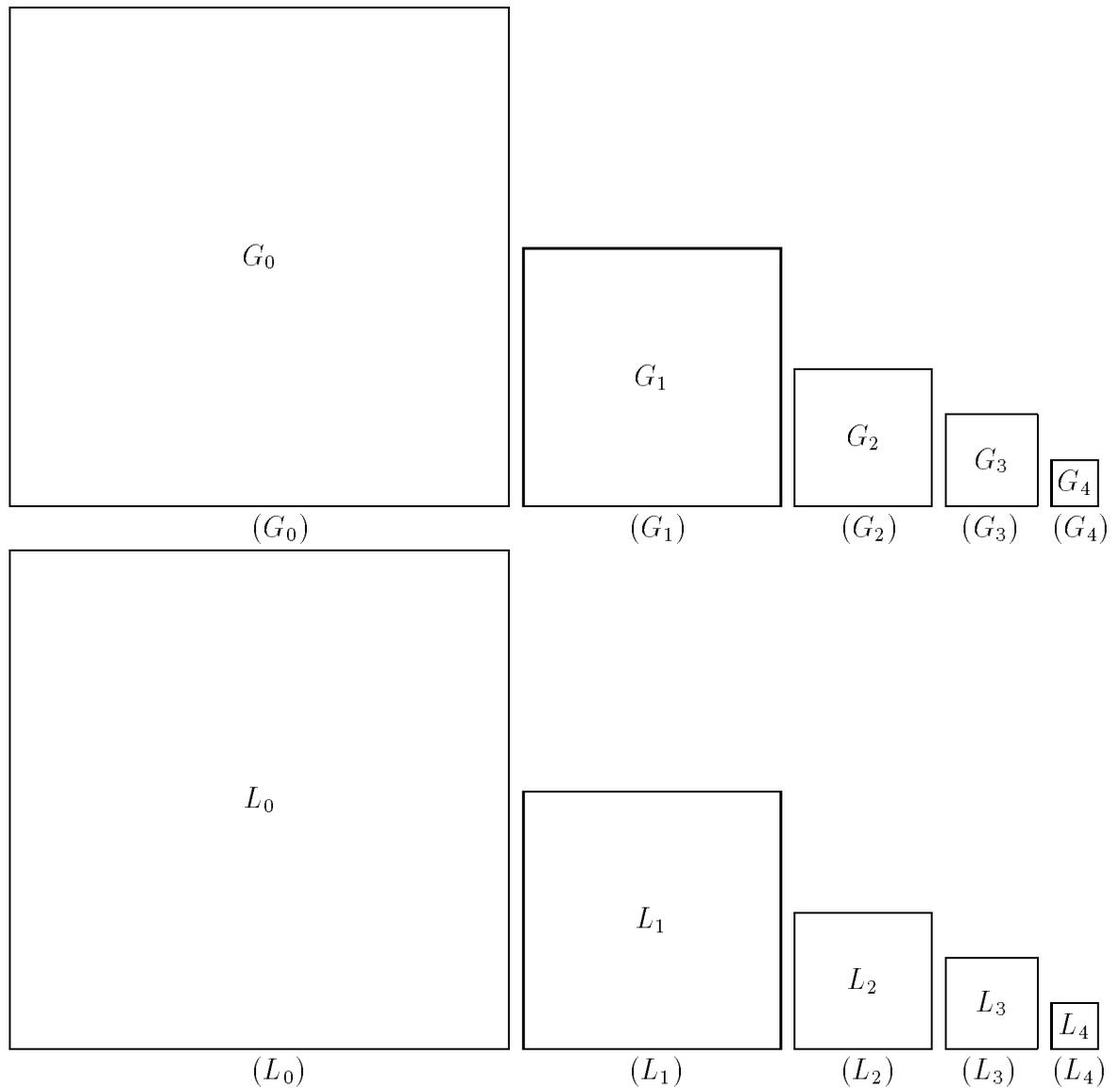


Figure 11: Exemple de pyramide Gaussienne et Laplacienne d'une image avec la valeur du paramètre indépendant \mathbf{a} égale à 0.375. Les G_i sont les différents niveaux de la pyramide Gaussienne et les L_i sont ceux de la pyramide Laplacienne.

<i>Résolutions</i>	<i>Err. Abs.</i>	<i>Err. Moy.</i>	<i>Err. Qua.</i>	<i>PSNR</i>
1	7.11×10^{-15}	8.67×10^{-19}	6.51×10^{-17}	3.72×10^2
2	1.42×10^{-14}	3.63×10^{-18}	1.75×10^{-16}	3.63×10^2
3	1.42×10^{-14}	7.81×10^{-18}	2.40×10^{-16}	3.61×10^2
4	2.84×10^{-14}	1.00×10^{-16}	1.26×10^{-15}	3.46×10^2
$j \Rightarrow 5$	1.14×10^{-13}	3.86×10^{-16}	3.25×10^{-15}	3.38×10^2

Tableau 4: *Evolution de la précision en fonction du nombre de niveaux de la pyramide laplacienne pour le paramètre $\mathbf{a} = 0.6$.*

3.4 Choix d'une ondelette en traitement d'image

Etant donné la grande variété d'ondelettes [50Γ69Γ83]Γla question fondamentale à se poser lors de l'utilisation de ces fonctions est : Quelle est la meilleure ondelette pour cette application ? La question ainsi formulée est très vaste et n'a pas de réponse absolue. Une approche de proposition de solution est l'étude des propriétés spécifiques des ondelettes et d'analyser leurs influences sur le traitement envisagé. Cohen [86] s'est déjà penché sur ce problèmeΓdans le cadre du traitement numérique des images. Nous présentons ici les principales observations pour un signal 1-D. Le cas d'une image (signal 2-D s'en déduit) facilement.

Une ondelette est surtout caractérisée par les trois propriétés : **localisation**, **oscillation** et **régularité**.

- * **Localisation** : Elle est obtenue en faisant varier deux paramètresΓun d'échelle et l'autre de translation. L'ajustement de ces deux paramètres lors de l'analyse d'un signal par exempleΓfait agir une ondelette comme un zoom à effet de réduction ou d'agrandissement. Cette propriété est très intéressante dans le cas de l'imagerie étant donné qu'il faut pouvoir caractériser assez précisément les phénomènes locauxΓou les singularités en généralΓdans des applications comme la segmentationΓla détection d'indices visuels.

Dans la pratiqueΓcette propriété est liée à la taille du support de la fonction d'échelle et par conséquent à celle de l'ondelette. En effet si $supp(\phi) \subset [N_i, N_f]$ alors $supp(\psi) \subset [\frac{1}{2}(1 - N_f - N_i), \frac{1}{2}(1 + N_f - N_i)]$. A l'échelle 2^{-j} Γcorrespondant à la résolution j Γsi l'on considère une translation discrète de k Γalors C_{jk} Γle

coefficient d'ondelette associé Γ caractérise ce qui se passe autour du point $k2^{-j}$.

- * **Oscillation** : Ceci se traduit graphiquement par plusieurs passages par zéro de l'ondelette. Elle peut aussi s'exprimer en terme de nombre de moments nuls de la fonction ψ . Plus précisément ceci signifie qu'il existe un entier M tel que :

$$\int x^k \psi(x) dx = 0 \quad 0 \leq k \leq M \quad (13)$$

Si l'on considère une fonction assez régulière (zone homogène dans une image) Γ le coefficient $C_{jk}(f)$ caractérisant la projection de f sur une base d'ondelettes est $C_{jk}(f) = \langle f, \psi_{jk} \rangle$. En considérant le développement de Taylor de f au voisinage de 0 et en tenant compte de (13) Γ on a :

$$C_{jk}(f) = \int f(x) \psi_{jk} dx \approx O(2^{-j(M+1/2)})$$

Cette relation montre bien que dans une image analysée par une ondelette ayant plusieurs moments nuls Γ les coefficients obtenus sur les régions régulières sont d'autant plus petits que M est grand. Ceci permet de mettre à zéro une grande proportion de coefficients d'une représentation en ondelettes sans nuire de manière significative à la précision de la reconstruction.

Cette propriété s'exprime aussi par les valeurs nulles que prennent les dérivées du filtre associé à la fonction d'échelle au point π . Notons qu'étant donné que l'on effectue des produits de convolution Γ le temps de calcul augmente avec la taille des filtres qui est proportionnelle au nombre de moments nuls de l'ondelette. Ceci impose l'utilisation de filtres de tailles raisonnables.

- * **Régularité** : Elle peut être évaluée à partir de l'exposant de Hölder Γ de Sobolev ou simplement de la puissance Lipschitzienne de la fonction d'échelle. La régularité de la fonction d'échelle est la même que celle de l'ondelette associée. La propriété de régularité est surtout importante dans la phase de synthèse à cause de la sensibilité de l'oeil à l'introduction de nouvelles singularités. En d'autres termes Γ si l'on fait simplement de l'analyse i.e de la décomposition Γ il n'est pas nécessaire de disposer d'une ondelette très régulière. Dans l'utilisation des ondelettes biorthogonales (de différentes régularités) Γ il est souhaitable de disposer de la plus régulière à la reconstruction. En fait Γ si l'ondelette n'est pas du tout régulière (cas de l'ondelette de Haar) Γ on a simplement un moyennage de pixels

voisinsΓce qui introduit des effets de blocs dans les basses échelles. Par contre si elle est d'une régularité très forteΓon a l'apparition des effets de bords due à un lissage très important.

On ajoute à ces propriétés spécifiques aux ondelettesΓl'aspect phase linéaire des filtres qui est très important en traitement numérique des images. La linéarité de la phase d'un filtre se caractérise par la symétrie de ses coefficients. Pour les filtres déduits de la spline d'ordre 3 utilisés par S. MallatΓcette propriété est vérifiée pour l'un des filtres (passe bas). Pour ce qui est des filtres issus des ondelettes à support compactΓDaubechies a montré que seul celui correspondant à l'ondelette de Haar est à phase linéaire.

C'est la volonté d'associer les filtres à phases linéaires au traitement d'image qui a conduit au développement des ondelettes biorthogonales [83]. On obtient des filtres de tailles très variables. Il s'agit en fait de s'autoriser à employer des filtres à la synthèse différents de ceux de l'analyseΓprincipe déjà fort ancien en codage en sous bandes [28].

3.5 Résultats de l'implémentation

Nous présentons ici un ensemble de résultats tant graphiques que numériques pour illustrer la faisabilité de la compression d'images en utilisant la transformation en ondelettes. Après décompositionΓnous mettons à zéro les coefficients inférieurs à un certain seuil et la reconstruction de l'image est faite ensuite avec les coefficients restant. Il a déjà été expérimentalement montré [63] que la transformation en ondelettes associée à la quantification vectorielle donne de bons taux de compression. Nous allons utiliser 3 familles d'ondelettes : les ondelettes splinesΓles ondelettes à support compact et les ondelettes biorthogonales.

Les résultats qui sont présentés proviennent du traitement de l'image de la *Figure* (12) de taille 256×256 codée sur 8 bits avec 256 niveaux de gris.

Nous avons accompagné les résultats graphiques des Tableaux contenant quelques éléments numériques d'appréciation de la qualité de la reconstruction. Ces résultats sont constitués d'une part par l'image reconstruite après avoir mis une certaine proportion de coefficients d'ondelettes à zéro et d'autre part par l'image de différence pixel à pixel entre l'image originale et de l'image reconstruite. L'homogénéité de cette différence indique visuellement la bonne qualité de la reconstruction.

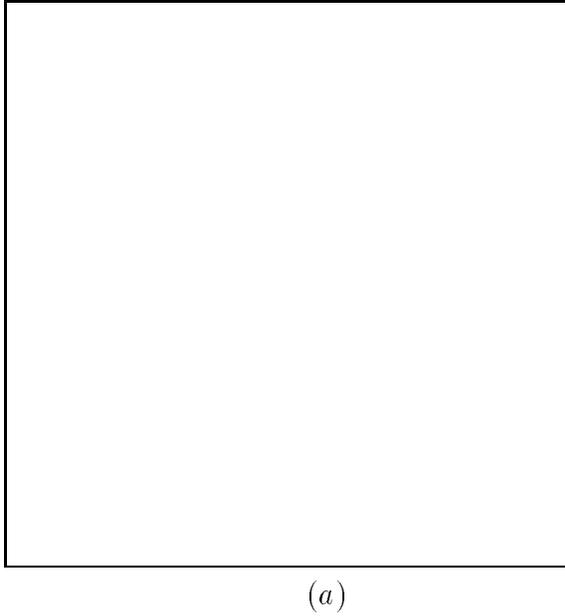


Figure 12: *Image originale utilisée dans les expériences numériques ci-dessous.*

Avec des ondelettes splines

Nous avons utilisé les filtres déduits des ondelettes splines d'ordre 3 dont nous donnons quelques coefficients en *Annexe A*. Ici nous avons pris $n_0 = 16$ mais en fait on obtient déjà de bons résultats avec $n_0 = 13$. Les résultats (*Cf. Figure (13)*) montrent que visuellement on ne fait pas de différence entre l'image reconstruite en utilisant tous les coefficients d'ondelettes et celle obtenue avec seulement 50% de coefficients.

Mais on observe une dégradation significative de l'image (lissage) quand on met tous les coefficients à zéro. Rappelons ici que la décomposition est faite sur 3 niveaux de résolution. Ceci signifie que la reconstruction obtenue en mettant tous les coefficients d'ondelettes à zéro revient à utiliser seulement l'image d'approximation à la résolution 3. Une image 256×256 par exemple est alors reconstruite avec seulement son approximation à la résolution 3 i.e l'image de texture de taille 32×32 .

Numériquement le *Tableau (5)* montre l'évolution des erreurs en fonction du pourcentage de coefficients d'ondelette mis à zéro. On observe par exemple que malgré l'apparence visuelle que l'on a en mettant 0% ou 50% d'éléments à zéro les écarts numériques de reconstruction ne sont pas les mêmes. De même l'entropie montre une variation considérable de la quantité d'information contenue dans les deux images.

Le rapport signal sur bruit décroît au fur et à mesure qu'on met plus d'éléments à

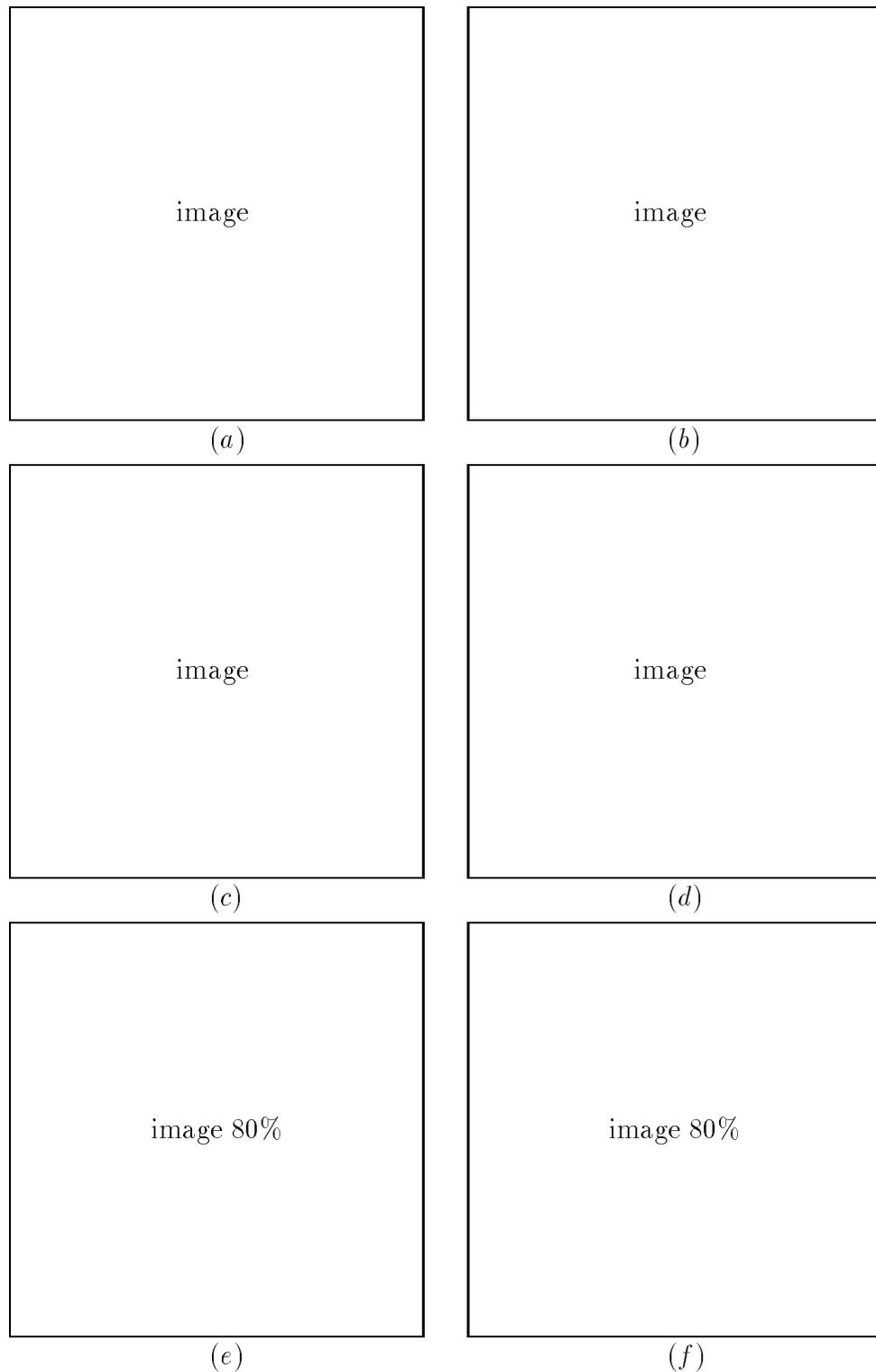


Figure 13: *Synthèse avec une ondelette spline d'ordre 3 et différents pourcentages de coefficients mis à zéro. (a), (c) et (e) représentent respectivement les résultats de la reconstruction avec 100%, 50% et 0% de coefficients d'ondelettes. (b), (d) et (f) représentent les différences entre l'image originale et les images (a), (c) et (e) respectivement.*

<i>Er. Abs.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Err.Qua.</i>	<i>Entropie</i>	<i>PSNR</i>
0%	0.87	0.16	7.40	61.8
50%	7.56	1.11	7.44	45.1
100%	1.54×10^2	1.11×10^1	7.52	23.4

Tableau 5: *Evolution des erreurs en fonction du pourcentage de coefficients mis à zéro pour une ondelette spline d'ordre 3. L'image est décomposée sur 3 niveaux de résolution.*

zéro. Cette décroissance montre simplement que plus on reconstruit l'image sans ses détails (coefficients d'ondelette) obtenus à l'analyse, plus le bruit (différence quadratique entre l'image originale et l'image reconstruite) est grand. Rappelons que le rapport signal sur bruit varie comme l'inverse du logarithme du bruit comme l'indique la formule Cf. *Chapitre II* de cette grandeur.

Avec des ondelettes à support compact

Les filtres ici proviennent des ondelettes à support compact construites par I. Daubechies [50] (Cf. *Annexe A*). Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse du choix des ondelettes en traitement d'image, un nombre très petit de coefficients fait apparaître des effets de bloc. Et on obtient un lissage très important avec un filtre très long.

Pour illustrer ceci, nous avons effectué des calculs avec l'ondelette de Haar (ondelette dégénérée qui a un seul moment nul) (Cf. *Figure (14)*) et avec une ondelette ayant 6 moments nuls (Cf. *Figure (15)*).

En ne mettant aucun coefficient obtenu par l'ondelette de Haar à zéro, le *Tableau (6)* montre que la reconstruction peut être assez précise.

On observe bien un effet de blocs avec l'ondelette de Haar et un lissage avec une ondelette ayant 6 moments nuls quand on met tous les coefficients à zéro. Avec moins de 50% de coefficients à zéro, on ne se rend pas visuellement bien compte de la perte d'information. Mais les *Tableaux (6)* et *(7)* montrent que numériquement, il existe bien des écarts entre l'image originale et l'image reconstruite.

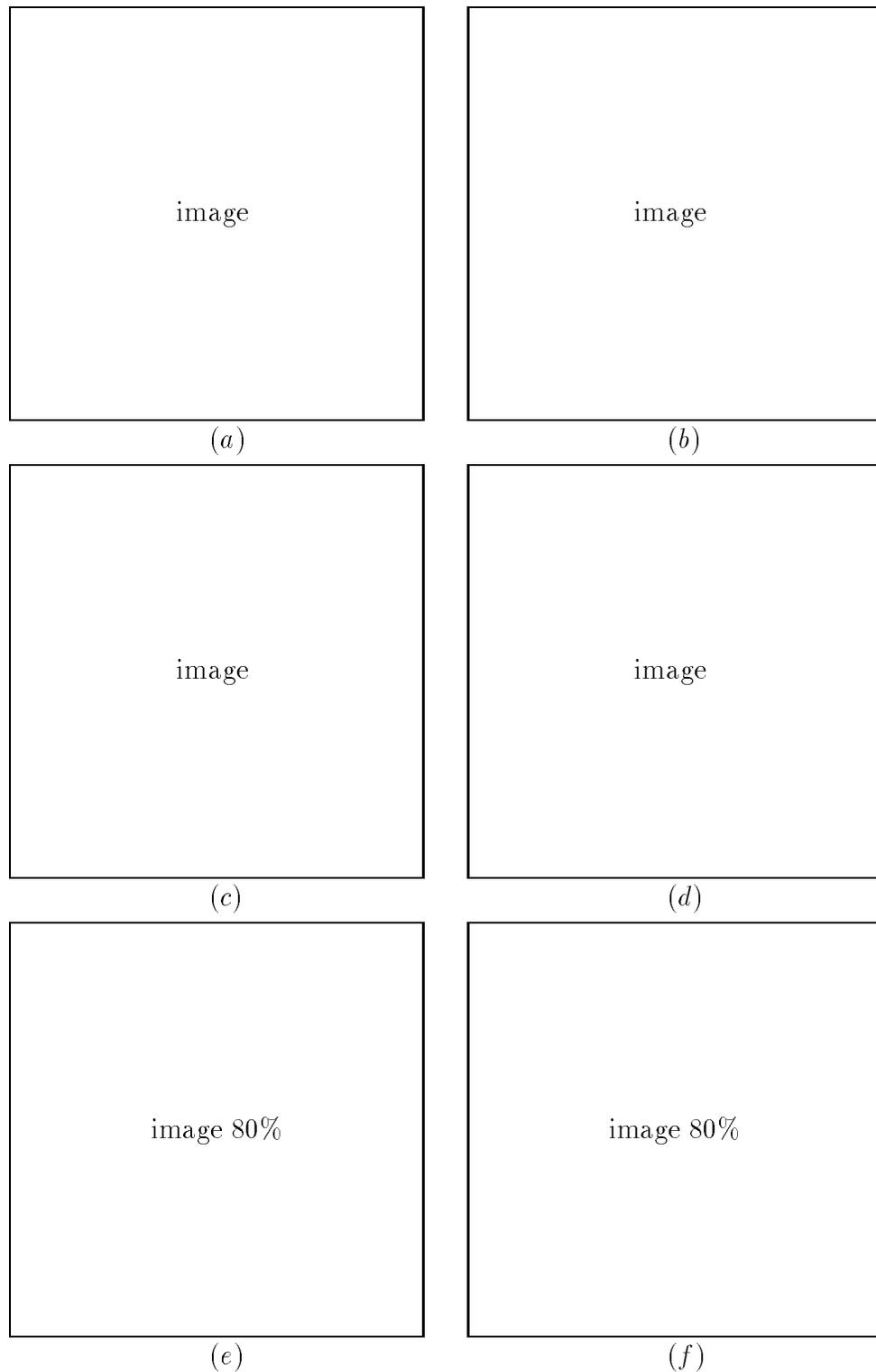


Figure 14: *Synthèse avec l'ondelette de Haar et différents pourcentages de coefficients mis à zéro. (a), (c) et (e) représentent respectivement les résultats de la reconstruction avec 100%, 50% et 0% de coefficients d'ondelettes. (b), (d) et (f) représentent les différences entre l'image originale et les images (a), (c) et (e) respectivement.*

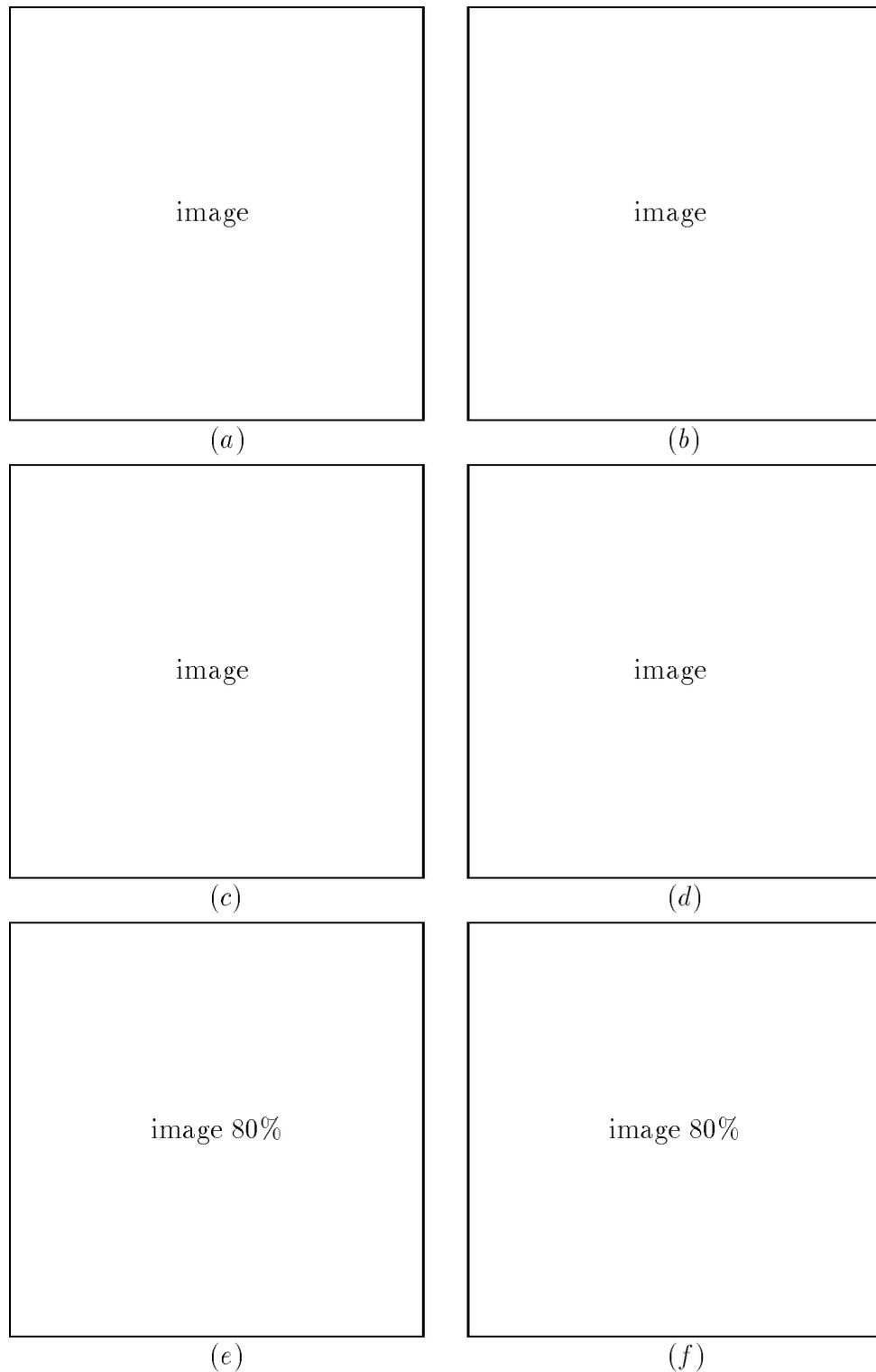


Figure 15: *Synthèse avec une ondelette à support compact ayant 6 moments nuls et différents pourcentages de coefficients mis à zéro. (a), (c) et (e) représentent respectivement les résultats de la reconstruction avec 100%, 50% et 0% de coefficients d'ondelettes. (b), (d) et (f) représentent les différences entre l'image originale et les images (a), (c) et (e) respectivement.*

<i>Er. Abs.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Err.Qua.</i>	<i>Entropie</i>	<i>PSNR</i>
0%	4.54×10^{-13}	1.63×10^{-13}	7.40	3.02×10^2
50%	8.53	1.13	7.42	4.46×10^1
100%	1.96×10^2	1.29×10^1	7.28	2.09×10^1

Tableau 6: *Evolution des erreurs en fonction du pourcentage de coefficients mis à zéro avec l'ondelette de Haar. L'image est décomposée sur 3 niveaux de résolution.*

<i>Er. Abs.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Err.Qua.</i>	<i>Entropie</i>	<i>PSNR</i>
0%	2.34×10^{-9}	1.32×10^{-9}	7.40	2.25×10^2
50%	6.96	1.11	7.44	45.0
100%	1.56×10^2	1.08×10^1	7.46	23.4

Tableau 7: *Evolution des erreurs en fonction du pourcentage de coefficients mis à zéro avec une ondelette ayant 6 moments nuls. L'image est décomposée sur 3 niveaux de résolution.*

Avec des ondelettes biorthogonales

Les coefficients utilisés sont à phase linéaire. Etant donné qu'on considère des filtres associés à deux ondelettes de régularités différentes, nous avons dans nos expériences numériques privilégié l'ondelette la plus régulière pour la phase de reconstruction. Notons que la régularité augmente avec le nombre de coefficients du filtre associé. Le *Tableau (8)* donne une indication numérique sur les résultats de la *Figure (16)*. La première ligne du *Tableau (8)* (celle correspondant à 0% de coefficient mis à zéro) indique qu'il n'y a pratiquement pas d'erreur de calcul à la précision machine près. Les remarques concernant les effets de blocs ou de lissage en fonction du nombre de coefficients des filtres utilisés faites ci-dessus restent valables. Il existe des ondelettes biorthogonales à reconstruction exacte comme celle que nous avons utilisé pour les expériences du *Tableau (8)* et d'autres qui permettent une reconstruction de moins bonne qualité (du moins numériquement).

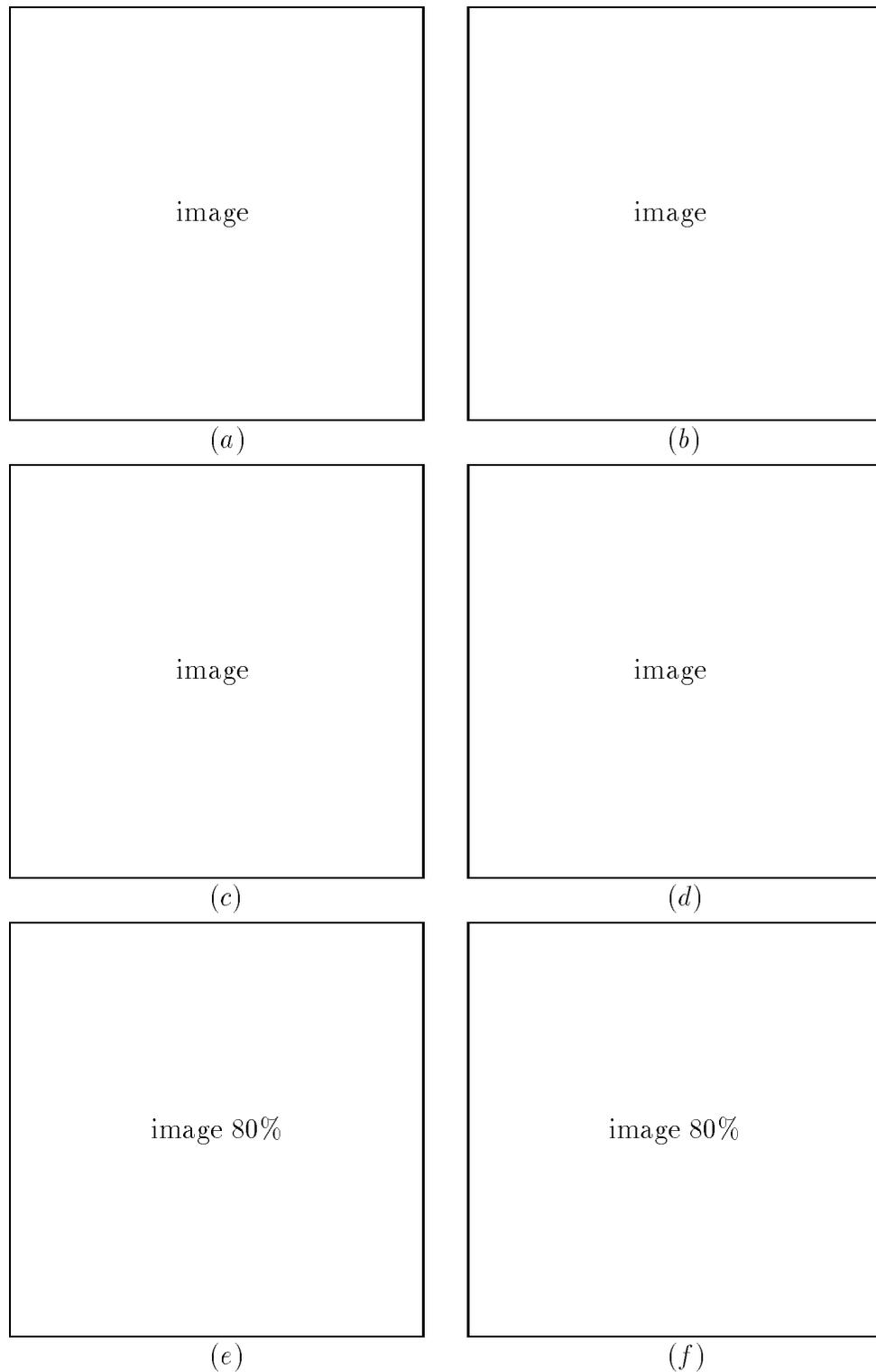


Figure 16: *Synthèse avec différents pourcentages de coefficients mis à zéro avec des ondelettes biorthogonales 3-3. (a), (c) et (e) représentent respectivement les résultats de la reconstruction avec 100%, 50% et 0% de coefficients d'ondelettes. (b), (d) et (f) représentent les différences entre l'image originale et les images (a), (c) et (e) respectivement.*

<i>Er. Abs.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Err.Qua.</i>	<i>Entropie</i>	<i>PSNR</i>
0%	–	–	–	∞
50%	7.97	1.29	1.67	43.6
100%	1.67×10^2	1.28×10^1	2.09×10^1	2.17×10^1

Tableau 8: *Evolution des erreurs en fonction du pourcentage de coefficients mis à zéro avec des ondelettes biorthogonales 3-3. L'image est décomposée sur 3 niveaux de résolution.*

Avec la pyramide laplacienne

Nous avons analysé l'effet de la mise à zéro d'un certain nombre de coefficients de détails sur la pyramide laplacienne. Cela revient à annuler une proportion de coefficients représentant les niveaux de la pyramide qui sont les détails entre les images de deux niveaux différents et consécutifs de la pyramide gaussienne.

Le *Tableau (9)* donne des précisions numériques sur les résultats graphiques de la *Figure (9)*. La remarque en ce qui concerne la première ligne est la même que ci-dessus. Contrairement à ce qui se passe avec des ondelettes Γ on observe déjà une altération significative de l'image reconstruite en mettant 50% de coefficients de détails à zéro. Ceci se traduit naturellement sur les grandeurs numériques (Cf. *Tableau (9)*).

<i>Er. Abs.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Err.Qua.</i>	<i>Entropie</i>	<i>PSNR</i>
0%	–	–	–	∞
50%	7.92	1.28	1.77	4.32×10^1
100%	1.98×10^2	1.64×10^1	2.46×10^1	2.03×10^1

Tableau 9: *Evolution des erreurs en fonction du pourcentage de détails mis à zéro. Le paramètre α est pris ici égal à 0.375. L'image est décomposée sur 3 niveaux de résolution.*

Taux de compression

Pour évaluer le taux de compression il faut pouvoir déterminer en nombre de bits l'espace occupé d'une part par l'image originale et d'autre part par l'image reconstruite

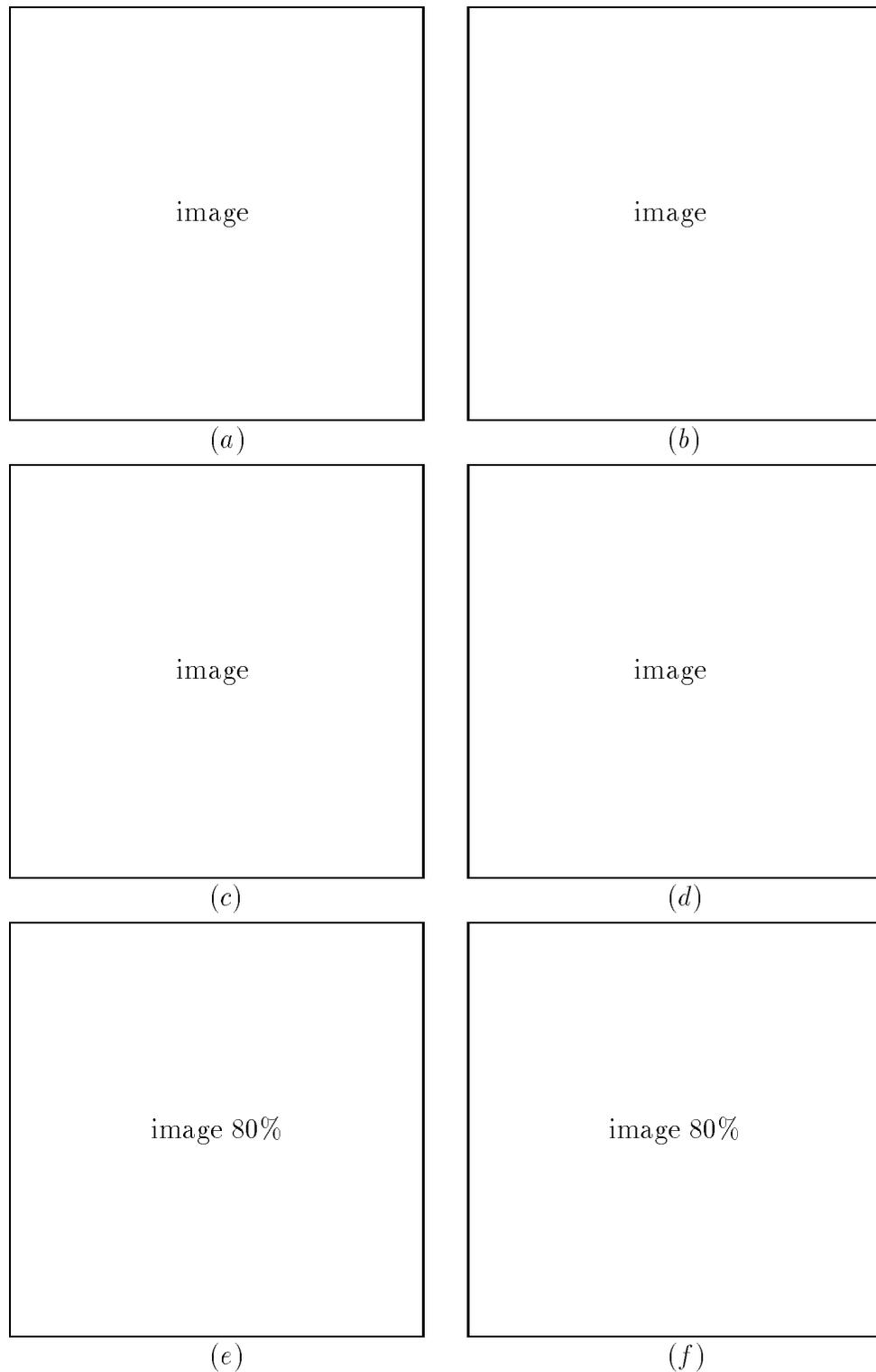


Figure 17: *Synthèse avec différents pourcentages de coefficients mis à zéro dans la pyramide laplacienne avec le paramètre indépendant $\mathbf{a} = 0.375$. (a), (c) et (e) représentent respectivement les résultats de la reconstruction avec 100%, 50% et 0% de coefficients. (b), (d) et (f) représentent les différences entre l'image originale et les images reconstruites (a), (c) et (e) respectivement.*

ou tout au moins par les coefficients qui permettent cette reconstruction. D'après la théorie de Shannon une image codée sur b bits par pixel ayant une entropie du premier ordre approximativement égale à H peut être codée sans perte d'information avec un taux maximal $\tau_{max} = \frac{b}{H}$. L'image de la *Figure* (12) est codée sur 8 bits et a une entropie de 7.40 bits. Elle peut donc être codée avec $\tau_{max} = \frac{8}{7.40} \approx 1.08$ sans perte d'information. Un taux supérieur à celui-ci est forcément accompagné de distorsion. Quand on dit ici (et dans la suite) codé sur b bits il s'agit en fait de b bits par pixel.

Nous considérons une technique rudimentaire de mise à zéro des coefficients d'ondelettes pour estimer le taux de compression. Quand on décompose l'image $N \times N$ codée sur b bits en k niveaux de résolution elle est représentée par son approximation de taille $\frac{N}{2^k} \times \frac{N}{2^k}$ qui peut être codée sur s bits et des détails (coefficients d'ondelettes) de taille $3 \times (\frac{N}{2^k} \times \frac{N}{2^k})$ qui peuvent être codée sur d bits. En mettant $\alpha\%$ de coefficients à zéro nous proposons d'estimer le taux de compression $\tau_{Comp.}$ avec la formule :

$$\tau_{Comp.} = \frac{N \times N \times b}{(\frac{N}{2^k} \times \frac{N}{2^k}) \times s + (3 \times (\frac{N}{2^k} \times \frac{N}{2^k})) (1 - \frac{\alpha}{100}) \times d}$$

Par exemple si l'on prend $N = 256$, $b = 8$, $k = 3$, $s = 8$, $d = 5$ et $\alpha = 50$ alors $\tau_{Comp.} = 33.03$. Ce qui revient à considérer que l'analyse est faite sur 3 niveaux de résolution et que nous avons mis 50% de coefficients d'ondelettes à zéro. L'image de texture est codée sur 8 bits et les coefficients d'ondelette sur 5 bits. Les paramètres s et d de cette formule se déduisent de l'analyse des valeurs extrêmes des coefficients obtenus à l'analyse.

Observations générales sur les résultats

Avec cette approche rudimentaire de mise à zéro des coefficients d'ondelettes de petites valeurs et notre formule on obtient une estimation intéressante et réaliste du taux de compression. Notons que ce taux est obtenu sans distorsion visuelle perceptible pour certaines familles d'ondelettes. Dans cette formulation du calcul du taux de compression nous n'avons pas pris en compte le codage de la position du pixel non mis à zéro. En fait en tenant compte du codage de la position du pixel on obtient un taux de compression plus important et ceci permet d'effectuer des calculs plus rapidement (en évitant des produits par des valeurs nulles) avec une gestion délicate des indices ou des pointeurs de positions.

Avec plusieurs familles d'ondelettes nous avons montré à travers ces résultats tant graphiques que numériques qu'il est possible de décomposer une image en ondelettes et

d'obtenir une reconstruction de “bonne qualité” après avoir mis un certain pourcentage de coefficients d'ondelettes à zéro. En faisant une décomposition sur trois niveaux de résolution et la reconstruction avec moins de 50% de coefficients d'ondelettes l'œil humain ne distingue pas la différence entre les deux images. On sait qu'en fonction de la régularité des ondelettes les coefficients obtenus peuvent être très petits et par conséquent être codés en utilisant un très petit nombre de bits. C'est ce qui explique que la transformation en ondelettes soit un outil puissant pour la compression d'image. En fait pour une compression effective il faut associer à la phase d'analyse et de synthèse une phase de quantification pour mieux apprécier l'efficacité de ce nouvel outil.

Nous avons établi une formule qui permet de calculer le taux de compression en mettant simplement un certain pourcentage de coefficients d'ondelettes mis à zéro. Nous obtenons des taux de près de 30 ce qui atteste de l'efficacité de la compression par ondelettes.

En fonction de la famille d'ondelettes utilisée et du nombre de coefficients on a plus ou moins un effet de lissage. Numériquement on observe que la précision de la reconstruction augmente avec le nombre de coefficients du filtre et que les écarts entre l'image originale et l'image reconstruite augmentent avec le nombre de niveaux de résolution. La représentation d'une image par une pyramide laplacienne est plus sensible que les représentations par ondelettes quand on met à zéro des coefficients de détails.

3.6 Robustesse d'une représentation hiérarchique dans la perspective d'une localisation d'indices visuels

3.6.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est d'analyser l'évolution des indices visuels à travers différentes échelles dans une représentation hiérarchique. Il s'agit d'étudier la robustesse ou la stabilité (en un sens à préciser) d'une représentation des frontières ou contours qui peuvent être détectés par un opérateur de type Deriche [40]. Une partie de ce travail a déjà été présentée dans [90].

Dans le cadre de l'étude de modèle numérique de terrain par exemple et ceci dans

le but de l'établissement des cartes géographiques ou pour l'aménagement du territoire on doit souvent traiter un très grand volume de données image. En général il s'agit de spécifier les indices caractéristiques permettant de reconnaître les habitations les réseaux routiers les cours d'eau ou des zones homogènes. Ce qui se réalise par la mise en correspondance ou en corrélation de plusieurs images prises par des satellites à différentes altitudes ou à des angles de vue différents. Il est alors important de considérer une technique de prétraitement qui tout en permettant la réduction du volume de données conserve les indices visuels qui sont les éléments fondamentaux à préserver. Les techniques de réduction de volume de données vont d'un simple sous-échantillonnage (garder un point sur deux) aux méthodes de transformations qui par un sous-échantillonnage implicite induisent la compression (Cf. *Chapitre II*) ceci tout en conservant l'aspect hiérarchique de la représentation et pour certaines transformations l'avantage de permettre une reconstruction sans dégradation perceptible de l'image.

Il s'agit ici de déterminer parmi les techniques pyramidales (laplacienne et ondelettes) l'approche hiérarchique qui permet la conservation des frontières et donc apte à être mise en œuvre pour un prétraitement et ceci dans une perspective d'extraction de contours.

3.6.2 Représentations hiérarchiques et localisation d'indices visuels

Les représentations hiérarchiques du type pyramidal de Burt et Adelson [25] permettent de structurer l'information à différents niveaux de la pyramide ou à différentes échelles dans une approche multi-échelles [53]. Au fur et à mesure que l'on progresse dans la hiérarchie (niveau de la pyramide ou d'échelle) on a une réduction de volume de données par élimination de détails. Il est bien évident que la réduction du volume des données introduite par l'élimination des détails entraîne une perte de résolution i.e de qualité visuelle. Dans un processus d'analyse d'un MNT cette réduction de données doit être stable pour les contours ou les frontières.

La stabilité ou la robustesse est vue ici au sens de la conservation à chaque niveau de la hiérarchie des indices visuels. Les approches de réduction de volumes de données considérées ici sont d'une part la représentation par la pyramide laplacienne et d'autre part les représentations par ondelettes. Nous avons considéré trois familles d'ondelettes : splines à support compact et biorthogonales. En fait les approches par

ondelettes diffèrent de l'approche pyramidale laplacienne par la manière (Cf. *Sections ci-dessus*) dont les détails sont extraits. On sait que si la famille d'ondelettes est séparable par exemple on a une sélectivité directionnelle. Ceci peut être intéressant si on a *a priori* des informations sur la structure à analyser. Nous avons aussi montré dans la section précédente que la représentation par la pyramide laplacienne est plus sensible que les représentations par ondelettes aux pertes de détails.

3.6.3 Résultats expérimentaux

Etant donné une image Γ nous la représentons par une pyramide gaussienne (i.e texture de la pyramide laplacienne) et par différentes représentations en ondelettes. En fait Γ c'est l'image de texture qui nous intéresse dans cette caractérisation de robustesse. Ensuite Γ nous extrayons les contours de l'image originale et ceux de chacune des sous-images obtenues par différentes représentations. En observant l'évolution des contours Γ il s'agit de déterminer la représentation qui les a mieux conservés.

Nous illustrons cette analyse de stabilité ou de robustesse d'une représentation hiérarchique sur deux types d'images : une image synthétique (Cf. *Figure (18)*) et une image réelle (Cf. *Figure (19)*).

La *Figure (18)* présente l'image originale Γ les sous-images obtenues par les différentes représentations (première ligne) Γ ainsi que les contours extraits (deuxième ligne).

Quand on observe les contours de différentes sous-images Γ on voit que dans l'image de contour (g) de la sous-image (b) (obtenue par la pyramide laplacienne) Γ les contours sont moins bien ressortis que ceux extraits des représentations par différentes ondelettes. Parmi les contours déduits des représentations par ondelettes Γ ceux issus de la représentation par des ondelettes biorthogonales sont mieux localisés et les raccords sont plus précis.

La *Figure (19)* montre les résultats obtenus sur une image satellitaire d'une zone de montagne. C'est en fait pour ce type d'image ou pour une image de zone urbaine qu'il est vraiment intéressant d'observer l'évolution des contours. Les indices visuels sont alors plus nombreux et ont un sens bien précis. On peut ainsi suivre l'évolution d'un tracé routier Γ d'un fleuve ou d'une zone forestière. De même que dans la *Figure (18)* les contours (g) de la sous-image (b) (obtenue par la pyramide laplacienne) sont moins bien localisés. Certains contours ont subi un léger déplacement et la connexion n'est pas toujours assurée. En fait on peut observer qu'avec les ondelettes splines ou à support

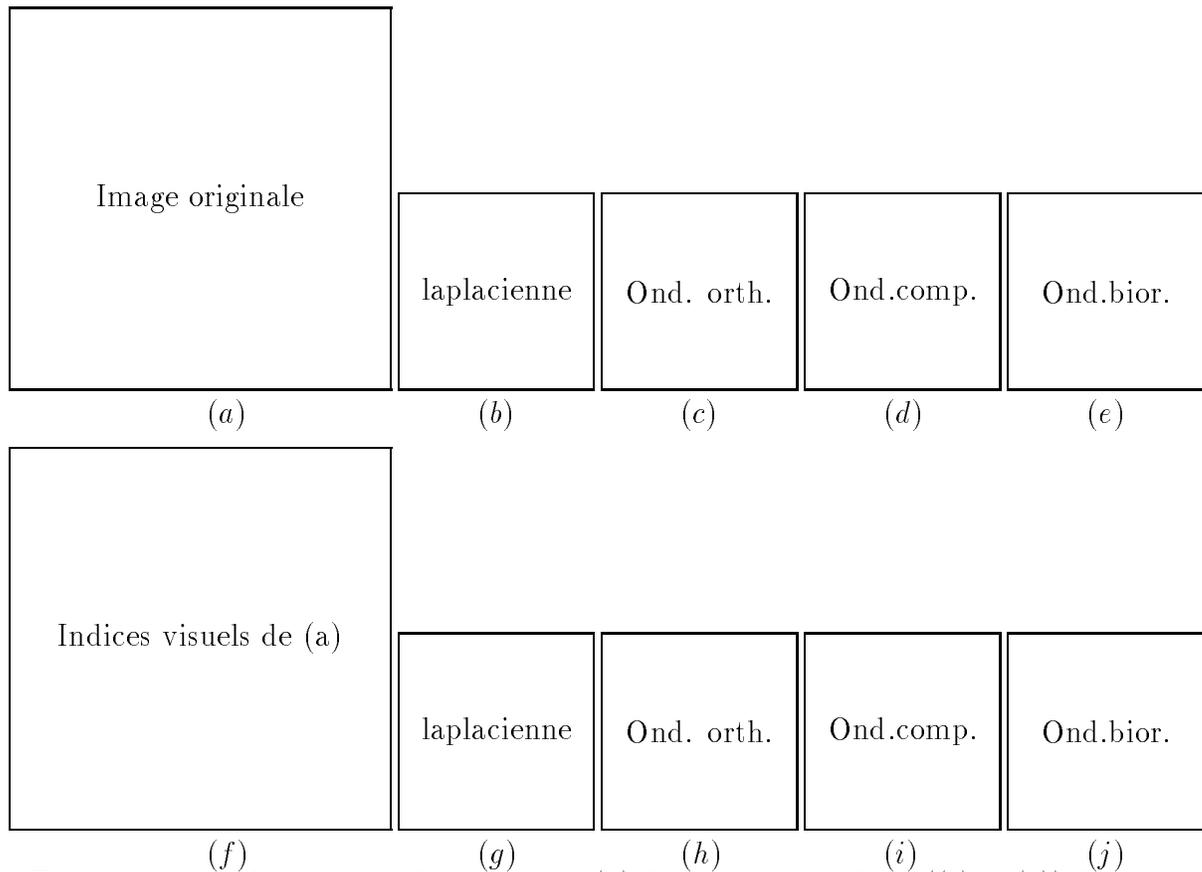


Figure 18: Sur la première ligne on a : (a) l'image originale et ((b) – (e)) les sous-images de basse résolution obtenues respectivement par (b) : pyramide laplacienne; (c) : ondelette orthogonale; (d) : ondelette à support compact et (e) : ondelette biorthogonale. Sur la 2^{ème} ligne, on a de manière correspondante (en colonne), les indices visuels extraits des images de la première ligne.

compact les contours se précisent déjà mieux. Avec les ondelettes biorthogonales (sous-images (e) et (j)) on retrouve pratiquement tous les contours mais à une échelle réduite.

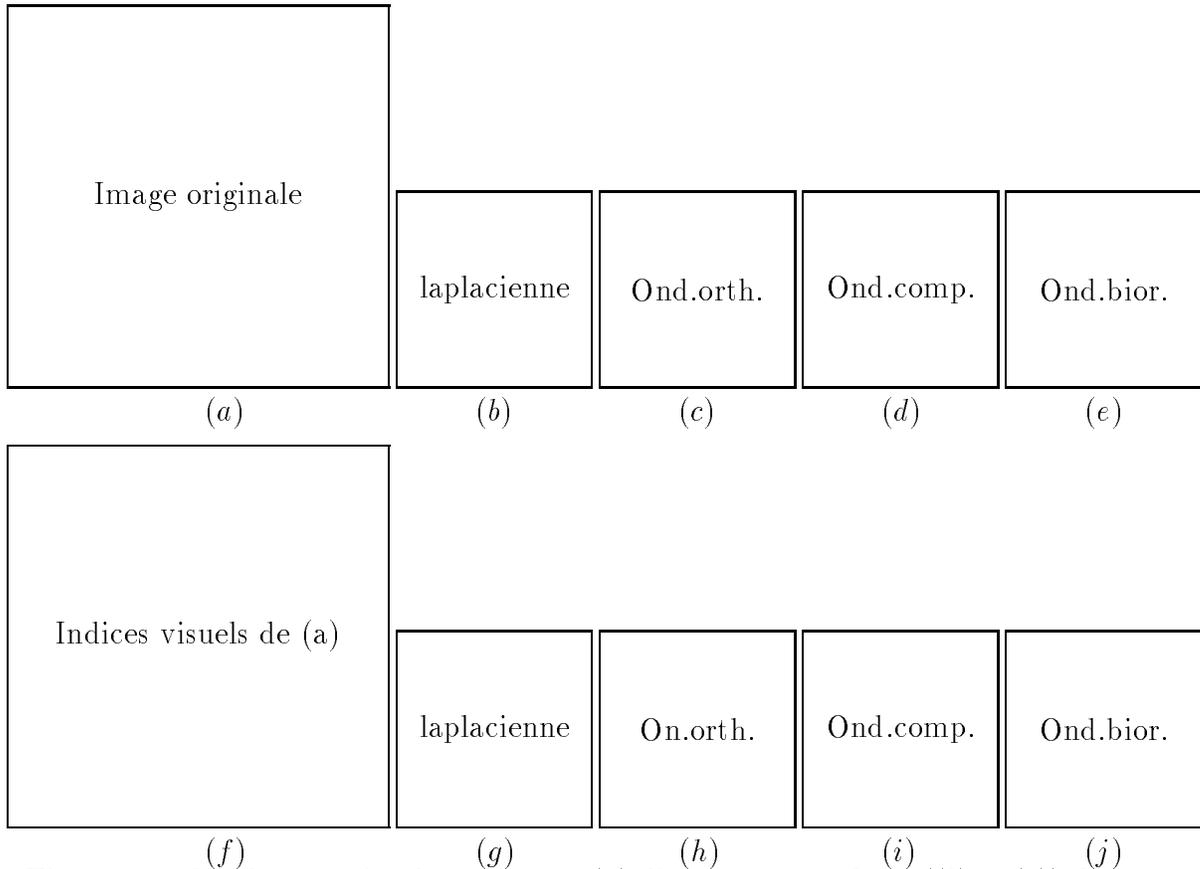


Figure 19: Sur la première ligne on a : (a) l'image originale et ((b) – (e)) les sous-images de basse résolution obtenues respectivement par (b) : pyramide laplacienne; (c) : ondelette orthogonale; (d) : ondelette à support compact et (e) : ondelette biorthogonale. Sur la 2^{ème} ligne, on a de manière correspondante (en colonne), les indices visuels extraits des images de la première ligne.

De l'analyse ce cet aspect prétraitement par approches hiérarchiques en vue de la détection d'indices visuels on peut conclure que les résultats obtenus en utilisant les ondelettes sont meilleurs. Les contours issus de la représentation par la pyramide laplacienne sont moins bien connectés. L'un des avantages non négligeable de l'approche ondelette est comme nous l'avons remarqué dans la section précédente la réversibilité même si l'on “ perd ” 50% de coefficients.

Notons que les approches diffèrent d'une part par la manière de générer les détails et d'autre part par les valeurs des coefficients du noyau de convolution ou des

filtres associés. Les ondelettes biorthogonales sont donc bien indiquées pour ce type de prétraitement.

3.7 Conclusion

Nous avons illustré dans ce chapitre la puissance de la transformation en ondelettes dans l'optique de la compression d'image. En fait la phase complète pour le codage du signal ou de l'image nécessite une quantification vectorielle et notamment différents codebooks selon les directions des détails dans le cas d'une ondelette qui privilégie les directions [53]. Les résultats que nous avons obtenus en mettant un certain pourcentage de coefficients à zéro montrent graphiquement et numériquement qu'on peut atteindre des taux de compression très importants en utilisant la transformée en ondelettes. Avec la formule que nous avons proposée nous calculons de manière approximative les taux de compression qui peuvent être obtenus simplement en annulant certains coefficients. L'analyse de l'influence du nombre de coefficients du filtre et du niveau de résolution de la décomposition est fonction de l'application. Si l'aspect visuel est prépondérant on peut utiliser peu de coefficients. L'aspect précision numérique demande beaucoup plus de coefficients et donc de temps de calcul.

Dans le cadre de l'étude de la stabilité d'une représentation hiérarchique en vue de la détection d'indices visuels dans une image satellitaire nous avons comparé différentes ondelettes de même que la représentation par la pyramide laplacienne. Les meilleurs résultats sont obtenus avec des ondelettes. Actuellement dans le cadre du rééchantillonnage des images satellitaires ces ondelettes sont en phase de test et des résultats très encourageants sont obtenus.

Chapitre 4

Représentation de formes discrètes

4.1 Introduction

La vision par ordinateur a pour but notamment de développer des techniques d'analyse et de reconnaissance et/ou d'interprétation d'images. Ces traitements se font sur la base des formes présentes dans l'image qui peut être réelle ou synthétique. Il s'agit de construire des algorithmes pour des tâches comme la reconnaissance de formes, l'analyse de l'écriture etc... Un objet ou une forme dans une image peuvent être défini par la région occupée, par son contour ou par sa frontière qui peut être représenté par des courbes. Nous considérerons ici le cas où la forme est caractérisée par son contour ou sa frontière. Ce cas particulier est cependant très important en traitement d'images. En effet dans le domaine de l'imagerie divers traitements fondamentaux tels : segmentation, transformations géométriques, reconnaissance se font en exploitant l'information contour.

Nous nous proposons de présenter ici quelques techniques de représentation d'un contour ou d'une courbe contenue dans une image qui a la spécificité d'être une entité discrète. Partant de la représentation discrète d'une courbe, nous allons rappeler comment elle peut être codée en utilisant le codage de Freeman [3] ou les généralisations de ce dernier [61]. Du codage de Freeman, on déduira une autre représentation de la même courbe par des suites de déplacements associés au code. Nous terminerons par l'analyse des propriétés de ce type de codage qui nous permettront d'introduire au chapitre suivant une nouvelle représentation de courbe discrète.

4.2 Représentation d'un contour discret

Un contour étant un cas particulier d'une courbe [2] il peut être traité en utilisant les éléments définis pour une courbe. Commençons par :

Définition 16 (Courbe fermée) *Toute courbe fermée simple sépare le plan en deux domaines (ensembles connexes) qui sont : le domaine intérieur et le domaine extérieur de la courbe.*

Ce théorème de Jordan donne le concept formel de courbe Γ mais ne permet pas de dégager rapidement une représentation explicite [2] 77]. En fait Γ il existe plusieurs représentations possibles : analytique Γ paramétrique Γ géométrique Γ discrète... Le choix d'une représentation est motivé par la nature de l'information et par le traitement envisagé [13] 51].

4.2.1 Représentations analytique et paramétrique

La représentation d'un contour peut être implicite ou explicite. Elle est implicite (analytique) lorsqu'on donne une relation du type polynomiale ou rationnelle entre les coordonnées des points contour. On parle de représentation explicite (paramétrique) lorsque les coordonnées des points définissant le contour dépendent d'un paramètre. Ce paramètre est souvent le temps si le contour définit la trajectoire d'un point matériel par exemple.

Soit f un polynôme de deux variables défini par : $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. La relation $f(x, y) = 0$ définit analytiquement le cercle de centre (a, b) et de rayon R Γ contour du disque $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$. La représentation paramétrique d'une courbe plane est généralement définie par :

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

Cette représentation met en évidence le fait qu'une courbe peut être définie par un ensemble de points du plan Γ où l'abscisse et l'ordonnée s'expriment en fonction d'un paramètre. Une représentation paramétrique du cercle ci-dessus est :

$$(R \cos(t) + a, R \sin(t) + b), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Notons que la représentation paramétrique d'une courbe n'est pas unique [2]. Cette représentation est très utilisée en géométrie différentielle pour la définition et le calcul

des éléments caractéristiques d'une courbe tels : la tangente, la normale, la courbure... On passe de la représentation analytique à la représentation explicite par une paramétrisation. L'opération inverse est très délicate et souvent impossible [2]. Ces deux représentations sont surtout utilisées pour la démonstration des théorèmes et des propriétés générales sur la théorie des courbes [2].

4.2.2 Représentations géométrique et discrète

La représentation géométrique d'un contour peut être obtenue par concaténation de segments de droites ayant pour extrémités les points caractéristiques du contour. On obtient un contour polygonal dont les sommets sont les extrémités des segments [13, 51].

Les fonctions splines qui sont des polynômes par morceaux avec des contraintes de régularité aux points de raccordement ainsi que les polynômes de Bernstein qui permettent d'obtenir des courbes de Bézier sont des éléments simples et efficaces qui fournissent des représentations géométriques d'un contour [13]. La jonction des courbes se fait en des points appelés nœuds dont les positions caractérisent la forme du contour. Des nœuds on obtient des polygones de contrôle qui donnent une approximation polygonale de la forme à construire. La représentation géométrique est à la base des développements aussi bien théoriques (énoncé et démonstration de théorèmes) que pratiques (implémentation d'algorithmes) de la géométrie algorithmique [51]. Dans l'industrie automobile, aéronautique et en général en conception assistée par ordinateur on utilise largement ce type de représentation. De même que la représentation géométrique a pour élément de base les points dont les coordonnées sont des nombres réels quelconques il en est de même de la représentation discrète où les coordonnées des points sont des entiers.

La représentation discrète d'une courbe ou d'un contour est fondée sur la notion de connexité qui dépend du voisinage pris en considération dans le pavage adopté du plan. On considère habituellement un réseau régulier de \mathbb{Z}^2 . Ce réseau formé par un maillage carré du plan est le plus utilisé car il correspond à la géométrie de la plupart des capteurs de numérisation d'images et à un codage matriciel où l'élément a_{ij} représente 0 ou 1 si l'image est binaire ou un niveau de gris si on a une image de densité. Une courbe est définie comme un ensemble non vide et connexe de points S tel que chaque point possède exactement deux points adjacents dans S . Plus précisément

on a :

Définition 17 (Courbe discrète) Une courbe discrète est un ensemble de points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ tel que pour chaque indice i , P_i soit adjacent à strictement P_{i-1} et P_{i+1} pour $i = 0 \dots n$ (les indices i étant calculés modulo $(n + 1)$).

Si la courbe représente un contour la propriété de fermeture est alors défini par : $P_{n+1} = P_0$. La représentation discrète a conduit à repenser et à reformuler la plupart des concepts géométriques : orthogonalité, parallélisme... dans l'espace discret donnant ainsi naissance à la *géométrie discrète* [77]. Elle est à la base de la plupart des algorithmes dans le domaine de la reconnaissance de forme et de la visualisation en imagerie.

Les représentations évoquées ici sont les plus courantes. Il existe naturellement bien d'autres types de représentations auxquelles nous n'avons pas fait allusion permettant de caractériser une courbe ou un contour dans une image [2, 77]. On peut citer la représentation en coordonnées polaires utilisée dans la transformation de Hough, la représentation par Quadtree qui est adaptée à la description d'une région... En fait la représentation par Quadtree est plutôt un codage qui comme celui de Freeman qui sera développé dans la section suivante réalise une compression de données et permet en quelque sorte de changer d'espace de représentation.

4.3 Codage en imagerie : cas dun contour discret

Le codage est en fait une transformation qui fournit une représentation différente de la représentation initiale. Il peut souvent s'accompagner d'une réduction du nombre de bits de représentation d'où une compression implicite. Freeman [3] a énoncé trois caractéristiques permettant d'évaluer une telle transformation en imagerie :

- a) *Conservation de l'information ou tout au moins de l'information pertinente dans le cadre de l'application développée ;*
- b) *Réduction de la place mémoire nécessaire au stockage du résultat ;*
- c) *Facilité de l'application des opérateurs de traitement sur la nouvelle représentation.*

A ces caractéristiques on associe de manière naturelle les critères d'appréciation des résultats obtenus. Ainsi on peut faire correspondre respectivement : la quantité

d'information perdue et la réversibilité. Le taux de compression et enfin l'adaptativité des opérateurs de traitement aux nouvelles données.

Il est difficile de trouver un codage qui donne entière satisfaction à ces trois contraintes simultanément. C'est la raison pour laquelle dans une application précise on considère un compromis mettant en valeur les aspects importants de l'application développée.

Un codage représentatif d'une courbe discrète ou d'un contour discret d'une forme devrait en plus des contraintes ci-dessus avoir les caractéristiques suivantes [70] :

Invariance : Deux contours ayant la même forme devraient avoir le même codage;

Unicité : Si deux contours n'ont pas la même forme ils devraient avoir des codages différents;

Stabilité : Si deux contours ont des formes voisines alors leurs codages devraient être voisins. Ceci revient à dire qu'à deux codages voisins sont associés des formes assez proches.

Dans le cadre de la vision on peut considérer des critères additionnels. Par exemple pour des problèmes de reconnaissance/traitement de formes on aura besoin d'un codage *performant, facile à implémenter* et permettant de déduire très simplement quelques *propriétés de l'entité traitée*.

L'efficacité ou la performance d'un codage peut se mesurer par une étude de complexité en liaison avec l'aisance de l'implémentation tant du point de vue du stockage des données que de la rapidité des traitements.

4.4 Codage de Freeman

Le codage de Freeman [3] fait partie d'un ensemble de techniques de codage [61-85] de courbes ou de formes du plan qui peuvent être représentées par leurs frontières. Ces techniques utilisent le maillage carré de \mathbb{Z}^2 pour l'échantillonnage qui est suivi d'une quantification. Elles sont utilisées pour la représentation, l'analyse et la reconnaissance de toutes entités ne pouvant s'exprimer sous forme analytique : contour d'un terrain, d'une cellule biologique, empreinte digitale, signature, etc... On exploite alors les caractéristiques d'adjacence qui existent implicitement entre les points voisins de

l'entité à représenter. La notion d'adjacence est liée à celle de connexité qui dépend du voisinage i.e de la topologie discrète considérée. Une étude comparative de ces notions en relation avec différents maillages du plan peut être consultée dans [77].

4.4.1 Présentation du codage de Freeman

Considérant le maillage carré par exemple du plan Γ on peut définir une distance entre un point discret P de coordonnées (i_P, j_P) et le point discret Q de coordonnées (i_Q, j_Q) . La définition de la distance discrète ici est fonction du nombre de points qui peuvent être atteints en partant d'un point de référence. Les distances couramment utilisées sont notées d_4 et d_8 et sont définies par :

$$\begin{aligned} d_4(P, Q) &= |i_P - i_Q| + |j_P - j_Q| \\ d_8(P, Q) &= \max(|i_P - i_Q|, |j_P - j_Q|) \end{aligned}$$

L'appellation anglaise de d_4 est *City Block Distance (ou Square Distance)* et *Chessboard Distance (ou Diamond Distance)* désigne d_8 . On peut grâce à ces distances définir un voisinage discret i.e l'ensemble des points voisins Q (Cf. *Figure (20)*) admissibles d'un point P (point de référence) par les relations :

- i)* 4 – voisinage $d_4(P, Q) = 1$
- ii)* 8 – voisinage $d_8(P, Q) = 1$
- iii)* 16 – voisinage $d_8(P, Q) = 2$
- iv)* 24 – voisinage $d_8(P, Q) = 1$ ou 2

En exploitant la caractéristique d'adjacence d'un point sur une courbe Γ on peut la considérer comme ayant implicitement son propre moyen de parcours sans ordonnancement préalable. On peut alors Γ partant de cette observation développer un codage spécifique à une courbe Γ à un arc ou à la frontière d'un objet en considérant les points discrets.

4.4.2 Code de Freeman et Généralisations

Code de Freeman

Pour la représentation d'une courbe Γ on peut au lieu de considérer la liste des coordonnées des points de la courbe Γ exploiter la caractéristique d'adjacence et indiquer la direction qui permet de passer d'un point à un autre. *Une courbe discrète* étant

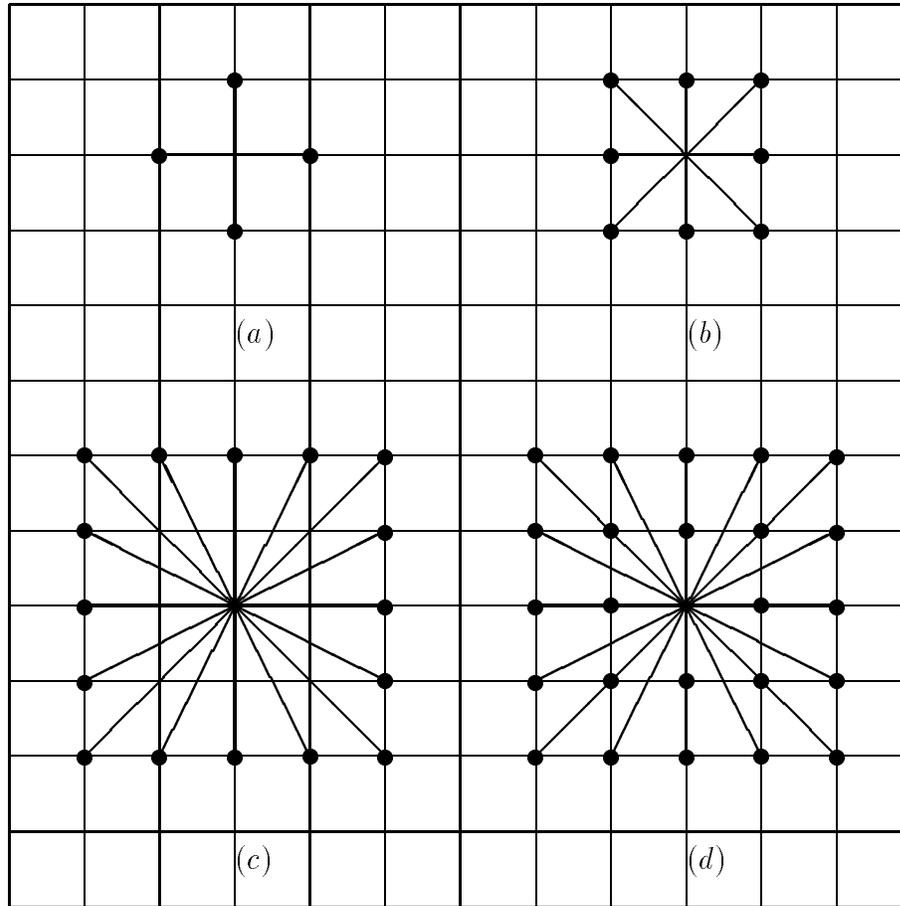


Figure 20: Illustration de 4 types de voisinages : (a)-4, (b)-8, (c)-16, (d)-24

définie par la suite de points $(P_i)_{i=0\dots n}$ où P_i est adjacent à P_{i-1} et à P_{i+1} Freeman [3] a proposé de stocker le point P_0 (point de départ) et la direction qui permet de passer de P_i à P_{i+1} . A chaque direction on associe un code α dont les valeurs admissibles dépendent de la connexité i.e du voisinage considéré. Par exemple pour la 4-connexité α peut prendre les valeurs 0, 2, 4 ou 6 alors que pour la 8-connexité α est issu de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (Cf. Figure (21)).

On appelle *code de Freeman* [3] ou *suite de Freeman* d'une courbe discrète $(P_i)_{i=0\dots n}$ l'ensemble défini par le point P_0 et la séquence des $(\alpha_i)_{i=0\dots n}$ où α_i est la direction suivant laquelle P_{i+1} est obtenu à partir de P_i (Cf. Figure (22)).

La représentation discrète de la courbe de la Figure (22) est :

$$((2, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 8), (8, 8), (9, 9))$$

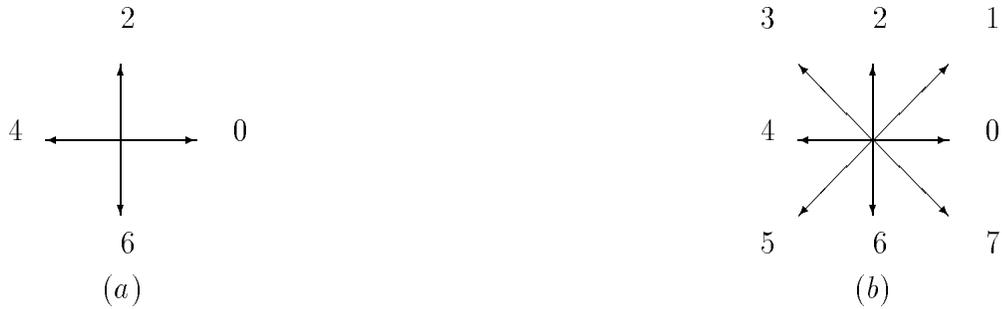


Figure 21: Directions de Freeman : (a) en 4 connexité et (b) en 8 connexité.

(10, 8), (11, 7), (11, 6), (11, 5), (10, 4), (11, 3), (10, 2), (9, 2), (8, 2), (7, 3), (6, 4)
 (5, 3), (4, 3), (3, 2)).

C'est simplement l'énumération des points discrets qui définit la courbe. Le code de Freeman associé à cette courbe discrète est une un point et un ensemble de directions. A partir de ce point (arbitraire) pris comme référence l'ensemble de directions permet de suivre la courbe point par point et de revenir au point (si la courbe est fermée). Les valeurs de la suite sont dans l'ensemble discret $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ puisque nous considérons la 8-connexité (Cf. Figure (22)).

((2, 2), 5, 6, 6, 7, 7, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 3, 4).

Généralisation du codage de Freeman

Le Code de Freeman Γ de par sa simplicité et les autres propriétés qui seront détaillées par la suite Γ a fait l'objet de beaucoup d'investigations. Sur ce sujet Γ on peut consulter [19 Γ 85] et les références qui s'y trouvent. Il a notamment été généralisé [61] en terme d'anneau sur lequel l'espacement de la grille est un nombre entier quelconque q au lieu d'être 1 comme c'est généralement le cas. Ces généralisations excluent souvent le cas de la 4-connexité.

On définit un anneau n ($n \in \mathbb{N}^*$) comme un carré de côté $2nq$ ayant $8n$ nœuds équi-espacés sur sa périphérie et situés de tel sorte qu'il y ait un nœud à chacun des quatre sommets du carré. Un vecteur partant du centre du carré et orienté vers un nœud est appelé lien Γ ce qui constitue une direction de déplacement à laquelle on associe un code α . Les anneaux concentriques forment une chaîne de codes. Un codage est alors identifié par les anneaux sélectionnés. Le codage le plus petit dans cette



Figure 22: *Exemple de contour avec les déplacements de Freeman*

formulation est obtenu en retenant le plus petit anneau. C'est le (1)-code qui est identique à celui déduit avec la topologie de 8-connexité. Le 16-voisinage est obtenu avec le second anneau et est donc appelé (2)-code. En sélectionnant le premier et le deuxième anneau on a alors le (1,2)-code qui constitue un voisinage à 24 points. L'un des buts de la généralisation est l'étude de la précision de l'approximation d'une courbe ou d'un contour avec différentes chaînes de codes i.e en considérant plusieurs voisinages.

On montre dans [19] que du point de vue de la précision de l'approximation Γ la 8-connexité donne de très bons résultats. Cette précision n'est modifiée qu'avec l'espacement de la grille d'échantillonnage. C'est d'ailleurs cette topologie de 8-connexité qui est couramment utilisée dans les descriptions de la géométrie discrète [77]. Dans toute la suite Γ sauf mention explicite Γ nous utiliserons cette connexité et les valeurs des directions de Freeman correspondantes.

4.4.3 Déplacements associés au code de Freeman et quelques propriétés

Déplacements associés

Dans le codage de Freeman d'une courbe ou de toute entité une direction α correspond à un déplacement élémentaire (vertical, horizontal ou diagonal). Si nous notons dx le déplacement horizontal et dy le déplacement vertical le déplacement diagonal est obtenu en considérant dx puis dy ou *vice-versa*. A un code α on peut donc associer un couple de déplacements (dx, dy) (Cf. *Figure (23)*).

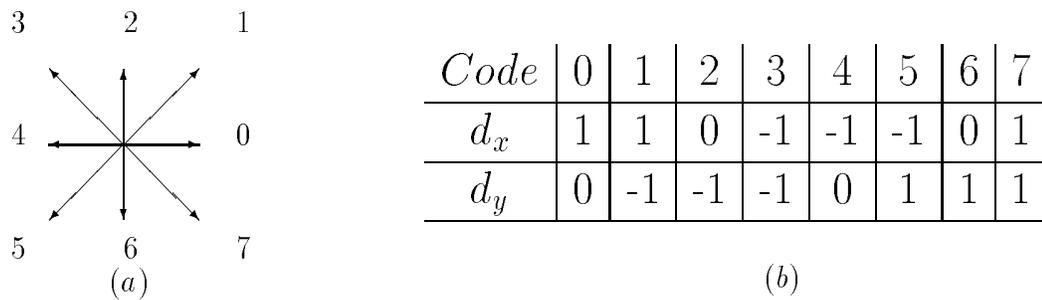


Figure 23: (a) Directions de Freeman; (b) Déplacements en 8-connexité associés à (a).

Avec cette notion de déplacement nous pouvons obtenir une autre représentation d'une courbe discrète codée par une suite de Freeman. Ainsi à $(P_0, (\alpha)_{i=1\dots n})$ on peut faire correspondre :

$$(P_0, (dx_i, dy_i)_{i=1\dots n})$$

Etant donné que les déplacements et les codes sont associés de manière univoque les deux représentations sont équivalentes (Cf. *Figure (23)*). La particularité de la suite des déplacements est que les valeurs possibles sont -1, 0 et 1. Un traitement sur un contour dans une image peut être envisagé soit sur sa représentation discrète soit sur la suite de Freeman correspondante ou sur les déplacements élémentaires associés.

Code de Freeman associée à la courbe de la *Figure (22)* :

$$((2, 2), 5, 6, 6, 7, 7, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 3, 4).$$

Déplacements en x correspondants : d_x

$$(-1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Déplacements en y correspondants : d_y

(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, -1, 0).

Quelques propriétés

Soit $(P_0, (\alpha_i)_{i=1\dots n})\Gamma$ une courbe ou un contour discret représenté par la suite de Freeman.

- * **Compression** : Le codage de Freeman assure une réduction du volume de données nécessaire à la représentation d'une courbe ou d'un contour. Au lieu de conserver toutes les coordonnées des points qui représentent un contour Γ la représentation avec les coordonnées du premier point et la suite des directions est plus avantageuse car une direction α se code simplement sur 3 bits en 8-connexité. Il est à noter que si l'on considère d'autres topologies Γ le nombre de bits nécessaire au codage d'une direction peut être plus important.
- * **Cacul d'un périmètre** : Si l'on a un contour codé par la suite de Freeman Γ le périmètre se calcule simplement par la formule :

$$L = n_{pair} + \sqrt{2} \times n_{impair}$$

où n_{pair} (resp. n_{impair}) est le nombre de directions de valeur pair (resp. impair) de la suite. Ceci est vrai si la grille d'échantillonnage est d'espacement unité car dans ce cas la diagonale est de longueur $\sqrt{2}$. Si la grille reste carrée et est d'espacement $q\Gamma$ alors le périmètre sera qL .

- * **Distance entre deux points P_i et P_j** : Le calcul de la distance entre deux points P_i et P_j se fait par la formule :

$$d(P_i, P_j) = [(\sum_{k=i}^{k=j} dx_k)^2 + (\sum_{k=i}^{k=j} dy_k)^2]^{1/2}$$

où dx_k et dy_k sont les déplacements élémentaires associés à la direction α_k . On obtient alors une approximation de la distance $d_s(P_i, P_j)$ ou de la distance euclidienne. Si les déplacements sont définis par rapport à une autre distance Γ cette formule donne une approximation de la distance correspondante.

- * **Fermeture d'une courbe discrète** : La propriété de fermeture d'une courbe qui caractérise un contour se traduit à l'aide des déplacements élémentaires par :

$$\sum_{k=1}^{k=N} dx_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{k=N} dy_k = 0$$

- * **Translation** : Pour traduire un contour codé par une suite de Freeman il suffit de traduire le point P_0 et de conserver les directions correspondantes. Cette propriété peut être très utile pour la reconnaissance de forme : deux formes seront identiques à une translation près si leurs frontières ont les mêmes valeurs de code de Freeman.

On réalise ainsi la facilité avec laquelle on peut vérifier certaines propriétés ou effectuer certains calculs sur une courbe ou un contour quand il est représenté sous la forme de suite de Freeman ou des déplacements correspondants.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons indiqué quelques représentations d'une courbe ou d'un contour. La représentation discrète est celle qui est adaptée au contexte de l'imagerie numérique. Le code de Freeman a été présenté comme faisant partie d'un ensemble de techniques de codage permettant la description des entités qui ne peuvent pas nécessairement se mettre sous forme analytique. Le code de Freeman qui utilise la topologie des 8-voisins donne de bons résultats d'approximation [19] par rapport aux autres topologies prenant en compte un voisinage plus important i.e un plus grand nombre de points. C'est d'ailleurs cette topologie qui est généralement utilisée en imagerie.

Au code de Freeman nous avons associé des déplacements élémentaires ce qui permet une représentation d'un contour discret en termes de déplacements en abscisses et en ordonnées. Les déplacements élémentaires ne prennent que trois valeurs possibles à savoir : -1 , 0 et 1 . Il est à noter que ceci est vrai pour une grille régulière d'espacement l'unité. Si l'espacement est q alors les valeurs possibles sont $-q$, 0 et q . Nous avons donné quelques propriétés et paramètres facilement accessibles dès que l'on a la représentation d'une courbe ou d'un contour en une suite de Freeman.

Chapitre 5

Ondelettes et représentation de formes discrètes

5.1 Introduction

Nous avons indiqué au début de ce mémoire de thèse que la construction des ondelettes s'est faite initialement par l'approche théorie des groupes. Depuis les travaux d'I. Daubechies [50] les ondelettes les plus utilisées dans la pratique se construisent par une approche discrète ou approche bancs de filtre. Il s'agissait pour Daubechies de se passer de l'approche fonctionnelle ou théorie des groupes pour la construction des ondelettes dont l'utilisation effective est la construction d'algorithmes discrets¹.

Dans le domaine de la reconnaissance de forme de l'écriture ou de l'identification d'une signature les entités à traiter ne peuvent souvent pas se mettre sous la forme analytique. On se trouve alors dans un contexte discret qui est d'ailleurs celui de l'imagerie dans lequel les notions analogiques doivent être représentées de manière à correspondre au mieux aux définitions des mêmes notions dans l'espace discret [77].

Nous proposons dans ce chapitre de considérer le contour d'un objet dans une image comme une courbe discrète représentée sous forme de code de Freeman [378]. Ensuite nous proposons d'appliquer à cette courbe une analyse et une synthèse par ondelettes. Il s'agit de développer un nouvel algorithme de représentation en multirésolution ou multi-échelle d'une courbe discrète en utilisant l'outil ondelette dans son aspect filtrage.

Dans la section deux nous allons rappeler la connection entre l'ondelette et la

¹L'adjectif *discret* intervient ici au sens numérique. Lorsque cet adjectif est utilisé en association avec une des notions géométriques, il doit être vu sous le sens de la représentation discrète.

multirésolution. Un bref survol sur quelques algorithmes de représentation de courbes discrètes en multirésolution fera l'objet de la section trois. La nouvelle approche que nous proposons [82Γ90] sera explicitée dans la section quatre où nous donnerons les formules explicites de calculs. Après la phase de spécification de l'ondelette adaptée à cette approche nous proposons d'utiliser les coefficients des filtres déduits de l'ondelette et de la fonction d'échelle pour calculer les approximations et les détails d'un contour discret à différents niveaux de résolution. Ceci constitue l'analyse qui peut être complétée par une phase de synthèse consistant à réaliser la reconstruction du contour initial. Les résultats de l'implémentation de notre approche seront présentés avec une analyse quantitative et qualitative de ceux-ci.

Les principaux résultats que nous présentons dans ce chapitre ont fait l'objet de plusieurs publications Γ notamment à divers congrès nationaux et internationaux [82Γ87Γ96Γ92] et une dans la revue *Traitement du Signal et Images* [95].

5.2 Ondelettes et multirésolution

L'approche multirésolution pour la résolution d'un problème Γ la description d'une scène ou la représentation de données a été largement abordée dans la littérature et ceci dans différentes disciplines [76Γ80]. En vision par ordinateur par exemple Γ l'un des objectifs est d'obtenir une description simple d'une scène en termes de primitives géométriques aux quelles on peut accéder facilement et qui se prêtent bien à différents traitements. La multirésolution est un cadre de représentation qui peut induire une analyse et/ou une interprétation en tenant compte d'un paramètre qui exprimera le degré de précision de l'analyse ou de l'interprétation.

L'idée de ce contexte de représentation est de développer la notion d'espace-échelle introduite en imagerie [24]. Il s'agit d'associer à l'image originale un paramètre et d'obtenir les images dérivées par convolution de l'image originale avec un noyau gaussien. L'écart-type de la gaussienne est alors dans ce cas le paramètre qui exprime la résolution ou l'échelle. Notons que Koendering [70] a formulé ces images dérivées en termes de solutions de l'équation de la chaleur avec pour condition initiale : retrouver l'image originale. Cette formulation est notamment motivée par le principe de causalité selon lequel dans une représentation à différentes résolutions aucun détail supplémentaire ne peut être généré d'une résolution fine à une résolution grossière. En d'autres termes Γ les images dérivées doivent contenir au plus ce qui se trouve dans l'image originale.

Une autre formulation de ce principe de causalité dans le domaine du traitement du signal et de l'image a été adoptée par Mallat [53]. Il s'agit alors de considérer une image dans sa formulation analogique comme une fonction dans un espace vectoriel en occurrence $L(\mathbb{R}^n)$ et d'obtenir les images dérivées par projection de l'image originale dans une suite de sous espaces vectoriels emboîtés. La résolution est caractérisée par le niveau d'emboîtement de l'espace de projection. On extrait les détails du signal au fur et à mesure que la résolution augmente. Les ondelettes sont alors obtenues en cherchant une base pour la représentation de ces détails.

La formalisation fonctionnelle de l'approche multi-échelle ou multirésolution a le mérite de poser les fondements mathématiques stables et surtout permet d'obtenir une représentation complète i.e réversible.

5.3 Multirésolution et courbes discrètes

La représentation multi-échelle d'une courbe ou d'un contour revient à représenter celui-ci de manière à pouvoir extraire facilement des caractéristiques importantes. Plusieurs approches multi-échelles [70] [71] [80] ont été mises au point en se basant sur l'idée de Witkin [24] de représentation temps-échelle où le passage par zéro de la dérivée seconde de l'image obtenue par convolution avec une gaussienne est examinée pour plusieurs valeurs de l'écart type de la gaussienne. On peut distinguer deux types d'approches principales.

La première considère une courbe dans une image en tant que donnée bi-dimensionnelle [71] et l'autre extrait la courbe de l'image et utilise une représentation spécifique à la courbe. Ceci revient à transformer un traitement naturellement en 2-D (traitement de l'image) en deux traitements 1-D. Cette approche est très intéressante car permettant de mettre en œuvre les outils mieux adaptés à la représentation ou au traitement d'un contour. Dans [70] on considère la représentation paramétrique d'une courbe dans une image et on déduit une représentation à différents niveaux de résolution par convolution avec une gaussienne suivie d'un passage par zéro. Le niveau de résolution est ici encore la valeur de l'écart-type de la gaussienne. Bengtson et *al.* [76] proposent une représentation à différents niveaux de résolution en extrayant à chaque résolution les détails redondants. Il s'agit simplement d'une approximation successive du contour par des polynômes de degré 2 ou 3 en passant par les calculs des tangentes et des points d'inflexion et des courbures à chaque échelle. Par ailleurs, Fermüller et Kropatsch

[84] donnent une description d'une courbe plane en plusieurs niveaux de résolutions en utilisant l'information courbure pour déterminer notamment les points de changement de concavité (points caractéristiques). Ils prennent en compte la nature discrète de l'image et l'aspect discret de la multirésolution pour obtenir une pyramide de courbes. C'est en étudiant le comportement des angles à différents niveaux de la pyramide qu'ils déduisent des informations permettant d'obtenir une représentation stable. En général on prend en compte le calcul de courbure dont l'évaluation et la manipulation dans le domaine discret ne sont pas toujours très précises.

La nouvelle approche de traitement par ondelette d'une courbe discrète que nous proposons se présente en deux phases : l'analyse et la synthèse. En considérant une courbe discrète comme un signal l'analyse revient à le décomposer en ses éléments caractéristiques. On obtient alors une représentation par ondelettes du contour discret. La synthèse revient à reconstituer le signal à partir de ses éléments caractéristiques obtenus à l'analyse.

5.3.1 Approche analytique de description d'une courbe discrète

Considérant l'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$ l'analyse multirésolution d'un tel espace nous permet d'obtenir une base de fonctions d'échelle et une base d'ondelettes. La décomposition multi-échelle d'un signal revient à projeter ce signal d'une part sur la base des fonctions d'échelle ce qui nous donne des approximations à différentes résolutions et d'autre part sur la base d'ondelettes ce qui permet d'obtenir les détails nécessaires à la synthèse. Une base de V_j est donnée par les $(\phi_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}$ (Cf. théorème (2) Chapitre I). Les coefficients d'approximation sont obtenus par $s^{(j)} = (\langle f, \phi_k^j \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ (Cf. théorème (4) Chapitre I). On considère ensuite une base de W_j donnée par les $(\psi_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Les détails sont alors caractérisés par les coefficients $d^{(j)} = (\langle f, \psi_k^j \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Soit $(P_0, (\alpha_i)_{i=0 \dots n})$ le codage de Freeman (tel que rappelé dans le chapitre précédent) d'un contour discret $(P_i)_{i=0 \dots n}$. A chaque direction α_i correspond un déplacement $X^{(0)}(i)$ en x (resp. $Y^{(0)}(i)$ en y) ayant des valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Ainsi à la suite $(\alpha_i)_{i=0 \dots n}$ on associe deux suites $(X^{(0)}(i), Y^{(0)}(i))_{i=0 \dots n}$ appelées *suites des déplacements*. L'algorithme que nous proposons traite séparément les deux suites de déplacements (Cf. figure (22)). Une particularité de ce codage fondé sur les déplacements est qu'il ne fait intervenir que des valeurs $-1, 0$ et $+1$. On peut remarquer que l'ondelette

de Haar dont nous rappelons la définition dans le paragraphe suivant prend les valeurs $-1, 0$ et 1 par intervalle. Une des difficultés de l'approche proposée ici est d'obtenir des approximations tenant compte de la particularité des valeurs utilisées pour le codage (à savoir $-1, 0$ et 1) d'où le recours à une opération de quantification [66Γ20] à chaque niveau de résolution.

5.3.2 Spécification de l'ondelette

Il est bien connu qu'il existe une infinité de bases d'ondelettes Γ pouvant être construites notamment par analyse multirésolution. La spécification de l'ondelette revient alors à déterminer la fonction ψ appropriée pour l'application en vue. Si nous considérons une analyse multirésolution telle que les sous-espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ soient constitués des fonctions constantes par morceaux Γ alors nous pouvons prendre pour ϕ la fonction définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

L'ondelette associée à cette fonction d'échelle est alors :

$$\psi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1[, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

qui n'est autre que la fonction de Haar. Notons que ce choix se justifie dans la mesure où l'objectif est de traiter des contours dans le domaine discret qui comme nous l'avons remarqué fait intervenir les déplacements élémentaires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. De l'ondelette de Haar et de la fonction d'échelle Γ on déduit les filtres H et G de réponses impulsionnelles respectives $h(n)$ et $g(n)$ définies par :

$$\begin{aligned} h(0) = h(1) &= \frac{1}{2}; h(n) = 0, \forall |n| > 1 \text{ et} \\ g(0) = -g(1) &= \frac{1}{2}; g(n) = 0, \forall |n| > 1. \end{aligned}$$

Les propriétés liant les fonctions ϕ et ψ Γ aux filtres H et G Γ ont été largement étudiées par I. Daubechies [50] et J. C. Feauveau [65]. On sait que la régularité des fonctions ϕ et ψ est étroitement liée à la taille des filtres associés.

5.4 Algorithmes d'analyse et de synthèse

Nous présentons ici notre algorithme de représentation en multirésolution d'un contour discret ou d'une courbe discrète. Il s'agit dans un premier temps d'extraire une courbe ou un contour dans une image. Ces données qui sont en fait 2-D sont représentées comme deux entités 1-D en associant notamment au contour les directions de déplacements. Le traitement se fait alors de manière indépendante sur chacune des entités 1-D i.e déplacements.

5.4.1 Algorithme d'analyse

Soit $(S^{(0)}(n))_{n=1\dots N}$ l'une des suites $X^{(0)}$ ou $Y^{(0)}$ de déplacements de Freeman associé à une courbe discrète. La phase d'analyse nous permet d'obtenir l'approximation discrète du signal noté $S^{(j)}$ et le coefficient d'ondelette notée $D^{(j)}$. On parlera d'approximation pour $S^{(j)}$ et de détail pour $D^{(j)}$ à la résolution j . Pour le calcul de $S^{(j)}$ et celui de $D^{(j)}$ à la phase d'analyse nous avons les formules suivantes :

$$S^{(j)}(n) = \frac{1}{2}(S^{(j-1)}(2n) + S^{(j-1)}(2n + 1))$$

$$D^{(j)}(n) = \frac{1}{2}(S^{(j-1)}(2n) - S^{(j-1)}(2n + 1))$$

que nous proposons de généraliser en :

$$S^{(j)}(n) = \sum_{k=0}^{2^M-1} h(k)S^{(j-1)}(k + 2n)$$

$$D^{(j)}(n) = \sum_{k=0}^{2^M-1} g(k)S^{(j-1)}(k + 2n)$$

pour une ondelette ayant M moments nuls i.e plus régulière que celle de Haar. Cette formulation met bien en évidence le fait que la sommation (de 0 à $2^M - 1$) est faite seulement autant de fois que le filtre associé à l'ondelette a de coefficients non nuls.

Après cette phase de calcul les valeurs de $S^{(j)}$ sont dans $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Or les déplacements de Freeman ne pouvant prendre que les valeurs $-1, 0, 1$ c'est ici qu'intervient une opération de quantification.

5.4.2 Phase de quantification

Ici la quantification revient à associer à une valeur de la suite : $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ calculée par décomposition en ondelettes un élément de l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Il s'agit

d'obtenir les valeurs entières \tilde{u}^k à partir de u^k en respectant les contraintes du codage de Freeman Γ de fermeture de contour et de réversibilité de la transformation. Il est important de remarquer que si $S^{(j)}(n)$ n'est pas entier alors Γ il en sera de même de $D^{(j)}(n)$. Ceci est aisément vérifié par l'étude de la définition des fonctions d'échelle et de l'ondelette. Concrètement Γ nous procédons de la manière suivante :

Si $u^k(n)$ est entier alors $\tilde{u}^k(n) := u^k(n)$ sinon Γ nous considérons un résidu r qui prend alternativement les valeurs -0.5 ou $+0.5$ et ensuite la valeur de $\tilde{u}^k(n)$ est obtenue par la somme de $u^k(n)$ et r . Rappelons ici que le but de cette quantification est d'obtenir des valeurs entières et appartenant à l'ensemble discret : $\{-1, 0, 1\}$. Cette opération est réalisée par la séquence d'instructions :

a) $r := -0.5; n := 0;$

b) tant que ($n < N_{max}$) faire

début

si $u^k(n)$ est entier alors $\tilde{u}^k(n) := u^k(n)$

sinon faire

début

i) $\tilde{u}^k(n) := u^k(n) + r$

ii) $r := -r$

fin

$n := n + 1$

aller en b)

fin

Cette opération nous permet d'approximer un contour discret d'une résolution donnée à des résolutions inférieures Γ tout en conservant notamment la propriété de fermeture d'un contour discret que nous avons rappelé dans le chapitre précédent.

En résumé Γ une étape d'analyse d'un niveau $j - 1$ au niveau j se décompose dans un premier temps par l'application des filtres déduits de la fonction échelle et de l'ondelette de Haar Γ suivi dans un second temps par la phase de quantification. Si $S^{(j-1)}$ et $D^{(j-1)}$ représentent respectivement l'approximation du signal et le signal de détail obtenus à la résolution $j - 1$ Γ on note les résultats après application des filtres par $S_r^{(j)}$ et $D_r^{(j)}$. On obtient ensuite $S^{(j)}$ et $D^{(j)}$ par quantification. Il est à préciser que $D_r^{(j)}$ et $D^{(j)}$ sont identiques Γ alors que $S_r^{(j)}$ est à valeurs réelles et $S^{(j)}$ à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. Nous illustrons sur la *Figure* (24) les différentes étapes (trois) pour

le passage de la résolution $j = 0$ à la résolution $j = 2$ correspondant à l'exemple de la *Figure (22)*.

Ces trois étapes sont :

- (i) Calcul des coefficients d'approximation et coefficients d'ondelettes Γ
- (ii) Quantification des coefficients d'approximation Γ
- (iii) Passage des déplacements représentés par les coefficients d'approximation en alphabet du code de Freeman correspondant.

Dans la *Figure (24)* Γ nous avons :

- $SX^{(0)}$ (resp. $SY^{(0)}$) suite des déplacements en x (resp. y) à la résolution 0,
- $SX_r^{(j)}$, $DX_r^{(j)}$ (resp. $SY_r^{(j)}$, $DY_r^{(j)}$) suites des approximations et des détails en x (resp. y) après application de la fonction d'échelle et de l'ondelette de Haar,
- $S^{(j)}$ et $D^{(j)}$ suites des approximations et des détails après quantification à la résolution j .

La suite des déplacements $(X^{(0)}(n), Y^{(0)}(n))_{n=1\dots 2^p}$ associés à un contour discret a pour représentation en ondelettes la suite $((SX^{(p)}, DX^{(j)}) \Gamma (SY^{(p)}, DY^{(j)}))_{j=1\dots p}$. La capacité mémoire nécessaire pour le stockage des deux représentations est la même. Notons que notre algorithme traite un contour ayant un nombre N quelconque (pas nécessairement une puissance de 2) de points Γ ce qui n'est pas toujours le cas pour la transformée en ondelettes standard ou la transformée de Fourier.

5.4.3 Algorithme de synthèse

La synthèse revient à reconstruire $(X^{(0)}(n), Y^{(0)}(n))_{n=1\dots 2^p}$ Γ à partir de $(SX^{(p)} \Gamma (SY^{(p)}))$ et des suites $\Gamma (DX^{(j)} \Gamma DY^{(j)})_{j=1\dots p}$ obtenues à l'analyse. Avant cette phase de synthèse Γ nous procédons à une quantification inverse. Ici Γ cette opération nous permet de retrouver les valeurs entières des codes définissant les déplacements avant la reconstruction selon les formules (14). Cette quantification inverse nous permet de passer de $S^{(j-1)}$ à $S_r^{(j-1)}$ par la séquence d'instructions suivantes :

Figure 24: *Illustration des différentes étapes de la phase d'analyse.*

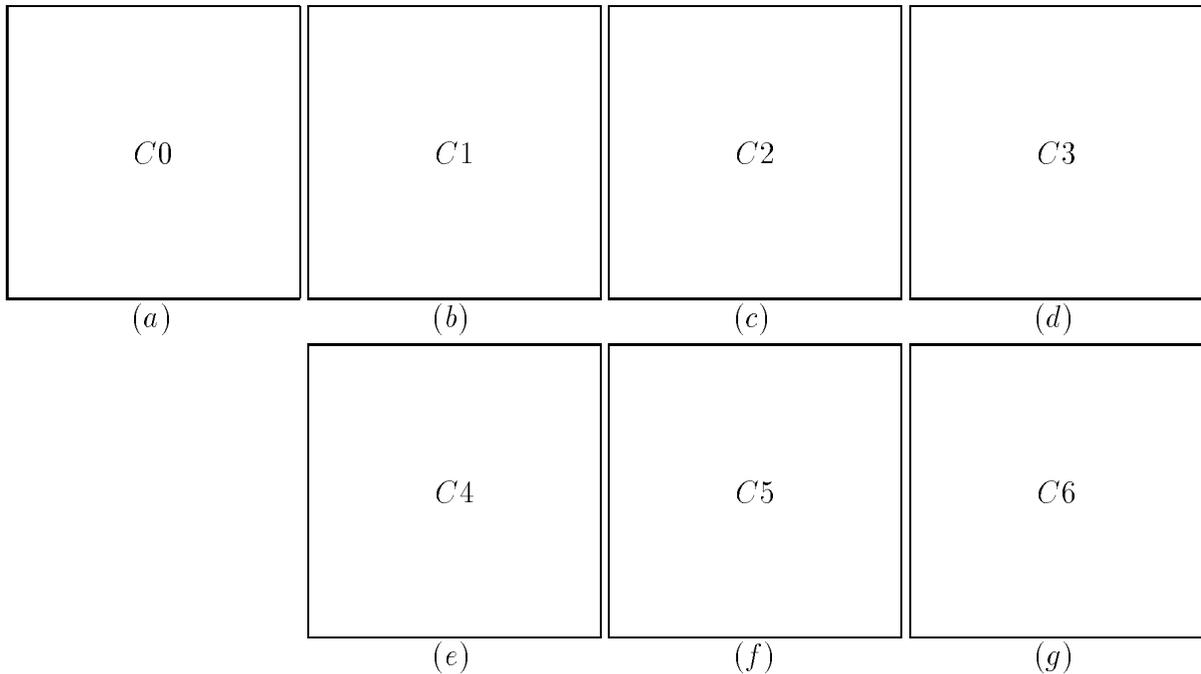


Figure 25: (a) : est le contour initial et de (b) à (g), on a la représentation de (a) à différents niveaux (6) de résolution.

a) $r := +0.5$; $n := 0$;

b) tant que ($n < N_{max}$) faire

début

si $\tilde{u}^k(n)$ est entier alors $u^k(n) := \tilde{u}^k(n)$

sinon faire

début

i) $u^k(n) := \tilde{u}^k(n) + r$

ii) $r := -r$

fin

$n := n + 1$

aller en b)

fin

Des valeurs entières $\{-1, 0, 1\} \Gamma$ de $S^{(j-1)}$ on obtient des valeurs $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\} \Gamma$ de $S_r^{(j-1)}$ qui sont ensuite utilisées pour la reconstruction.

La reconstruction est obtenue par les formules suivantes :

$$S^{(j)}(2n) = (S^{(j-1)}(n) + D^{(j-1)}(n))$$

(14)

$$S^{(j)}(2n+1) = (S^{(j-1)}(n) - D^{(j-1)}(n))$$

que nous proposons de généraliser en :

$$S^{(j-1)}(2n) = \left(\sum_{k=1}^{k=M} h(2k)S^{(j)}(n-k+1) + \sum_{k=1}^{k=M} g(2k)D^{(j)}(n-k+1) \right)$$

$$S^{(j-1)}(2n+1) = \left(\sum_{k=1}^{k=M} h(2k+1)S^{(j)}(n-k+1) + \sum_{k=1}^{k=M} g(2k+1)D^{(j)}(n-k+1) \right)$$

pour une ondelette ayant M moments nuls. Notons que Γ comme ci-dessus Γ une opération de quantification est effectuée pour que les valeurs de $S^{(j)}(n)$ soient dans $\{-1, 0, 1\}$ avant de passer à l'alphabet du code de Freeman.

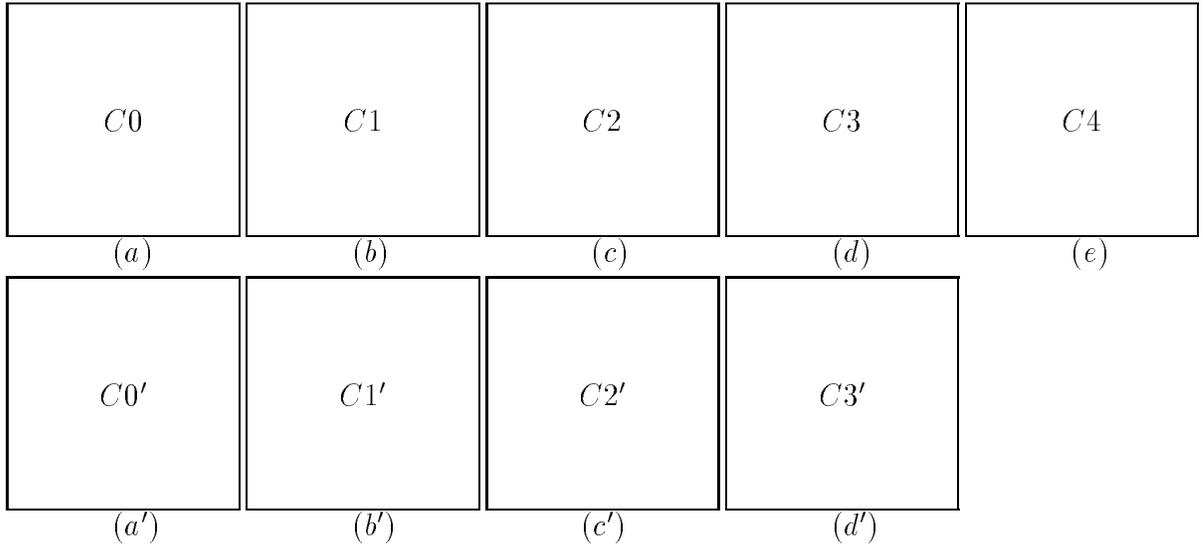


Figure 26: (a) : Contour initial. De (b) à (e) , on a la représentation de (a) à différents (4) niveaux de résolution dans la phase d'analyse. (a') est le contour original reconstruit. De (d') à (b') sont représentées les reconstructions successives de (a') .

5.5 Analyse des résultats de l'implémentation

Considérant un contour discret Γ nous appliquons notre algorithme pour obtenir des approximations et des détails de ce contour à plusieurs niveaux de résolution pendant la

phase d'analyse. La seconde phase qui est la synthèse consiste à reconstruire le contour initial avec les éléments obtenus à l'analyse. Notons que la phase de quantification est indispensable pour conserver le caractère discret du traitement.

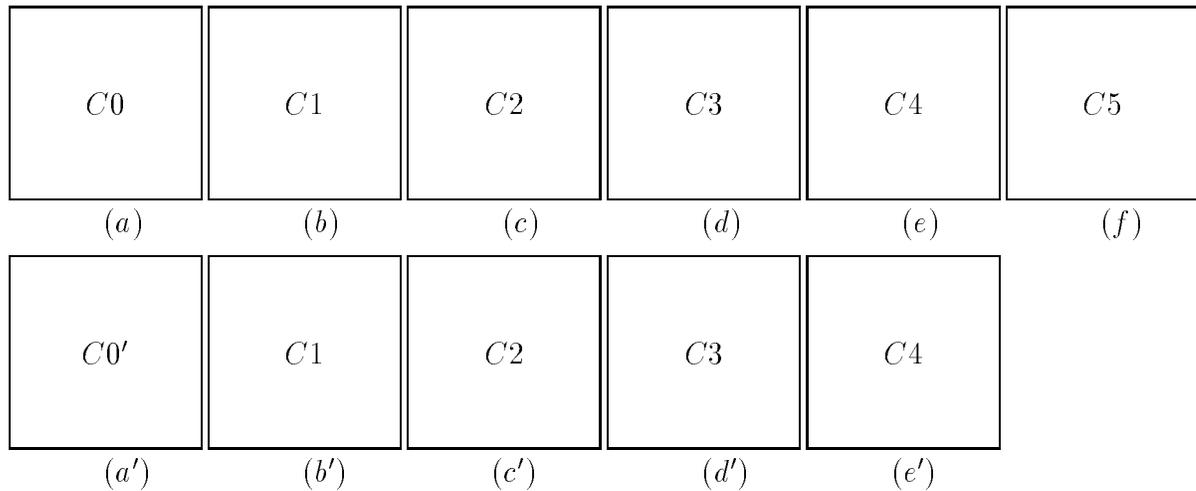


Figure 27: (a) : Contour initial. De (b) à (f), on a la représentation de (a) à différents (5) niveaux de résolution dans la phase d'analyse. (a') est le contour original reconstruit. De (e') à (b') sont représentées les reconstructions successives de (a').

- **Calcul de l'entropie**

Les valeurs des directions de Freeman qui représentent un contour discret étant considérées comme statistiquement indépendantes Γ nous calculons l'entropie à chaque résolution par la formule : $entropie = -\sum_{i=0}^{i=7} p_i \log_2(p_i)$, où p_i est la probabilité de présence de la direction α_i dans le contour. C'est en fait l'entropie d'ordre 0. Cette quantité mesure la diversité des directions présentes dans le contour. Les calculs montrent que l'entropie décroît à partir d'un certain seuil d'une résolution à la résolution inférieure quand le contour est très 'complexe' i.e présente de nombreux changements de direction. On observe un léger effet de lissage du contour discret par approximations successives. Nous présentons dans le *Tableau (10)* Γ l'entropie des contours discrets des *Figures (25) et (26)* .

- **Calcul du rapport signal sur bruit (PSNR)**

Pour apprécier numériquement les résultats Γ nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne à la reconstruction par la formule : $ems^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (x(i) - \tilde{x}(i))^2$

Résolution	0	1	2	3	4	5	6
Entropie Fig. (25)	2.91	2.90	2.92	2.90	2.85	2.76	2.66
Entropie Fig. (26)	2.80	2.81	2.85	2.86	2.79	2.56	—

Tableau 10: Entropies à différentes résolutions pour les deux contours discrets cités.

où x et \tilde{x} représentent respectivement le contour discret initial et le contour discret reconstruit. En fait il s'agit des directions correspondantes. Les résultats du calcul de ems observés sont approximativement nuls à la précision de la machine près et attestent de la bonne qualité visuelle du contour discret obtenu à la reconstruction.

Le rapport signal sur bruit est donné par la formule : $PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_m^2}{ems^2} \right)$ (dB) où σ_m est l'écart type du signal initial. Cette quantité est infinie étant donné la valeur de ems et montre qu'il n'y a pas de distorsion à la reconstruction. En réalité l'écart-type est souvent remplacé (cas du signal image) par la dynamique du signal qui ici est 2.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle approche de représentation d'un contour ou d'une courbe discrète [92]. Cette nouvelle représentation discrète est fondée sur le code de Freeman et exploite l'aspect multirésolution de la construction des ondelettes.

L'algorithme proposé s'implémente facilement et comporte une phase de quantification qui est indispensable dans le processus d'analyse pour retrouver les valeurs admises pour les déplacements élémentaires. Après la spécification de l'ondelette on obtient une représentation d'un contour discret à plusieurs niveaux de résolution et une compression du volume de données pendant la phase d'analyse. Une phase de synthèse incluant implicitement une quantification inverse permet de reconstruire le contour initial ou la courbe discrète initiale. Le calcul du rapport signal sur bruit atteste de la très bonne qualité de la reconstruction. Elle est exacte et montre qu'aucune information n'est perdue quand on passe de la représentation par l'alphabet du code de Freeman à la représentation par ondelettes proposée.

Chapitre 6

Interpolation par des fonctions radiales

6.1 Introduction

Les techniques d'interpolation ou d'approximation multivariées par des fonctions radiales sont fréquemment utilisées pour l'ajustement de données bruitées [11, 17, 32, 44, 59]. Ces techniques qui suscitent beaucoup d'intérêt se mettent en œuvre pour résoudre des problèmes pratiques dans plusieurs domaines de la recherche scientifique.

Il peut s'agir de déterminer en tout point d'un domaine la valeur d'une fonction (ou de ses dérivées) alors que la fonction n'est connue que sur un nombre très limité de points. Ceci peut être vu comme un problème de reconstruction souvent rencontré en imagerie. Le problème peut être celui de la détermination de la réponse à un système quand on lui soumet en entrée des valeurs quelconques d'un paramètre en supposant connue la réponse pour certaines valeurs du paramètre déterminées par des mesures sur des échantillons. Ces valeurs connues peuvent être entachées d'erreur dont les caractéristiques statistiques peuvent être ou non déterminées. C'est souvent le cas du problème classique de déconvolution.

La résolution de ces problèmes peut se ramener à la recherche de l'expression analytique d'une fonction pour ensuite l'évaluer en différents points. D'une expression analytique on peut facilement exprimer la dérivée ou calculer la tangente ou différents éléments permettant d'apprécier notamment la courbure en un point donné. L'interpolation par les fonctions radiales représente un cadre approprié pour ce type de traitement.

Les techniques d'interpolation ou d'approximation par les fonctions radiales [56Γ59] peuvent être vues comme une généralisation des techniques utilisant les fonctions splines polyharmoniques [17] dans une formulation explicite. Les fonctions de base i.e les fonctions radiales sont obtenues par construction [7] (dans la plupart des cas) ou comme solutions fondamentales des itérés de certains opérateurs elliptiques [17] (cas des splines de type plaque mince).

Il est bien établi [35Γ56Γ59] que ces méthodes d'approximation donnent de meilleurs résultats que celles issues des méthodes classiquesΓ surtout quand les données sont entachées d'erreurs. Les fonctions de bases les plus utilisées sont les multiquadriques de Hardy [7] et les splines de type plaque mince de Duchon [17].

Malgré leurs performancesΓ ces méthodes s'utilisent peu quand le nombre de données est important ($N \geq 150$)Γ ce qui est souvent le cas. En effetΓ quand le volume de données est importantΓ le système linéaire d'équations définissant les inconnues du problème d'interpolation est mal conditionné [59] d'où une instabilité numérique. Les algorithmes itératifs de résolution mis en œuvre convergent lentement ou pas du tout [14Γ15]. Ces inconvénients font que dans la pratiqueΓ on préfère d'autres méthodes d'interpolation (bilinéaireΓ polynomiale ...) moins performantesΓ mais assez rapides.

Nous proposons ici d'accélérer le calcul de la résolution du système linéaire issu de la formulation du problème d'interpolation/approximation par les fonctions radiales. Ceci consiste en la mise en œuvre d'un algorithme basé sur la décomposition en ondelettes pour rendre creuse la matrice du système [74Γ91].

Dans la deuxième section nous allons présenter dans un cadre généralΓ le problème d'interpolation par des fonctions radiales [59]. La troisième section sera consacrée au cas particulier des fonctions splines de type plaque mince [17]. Dans la quatrième sectionΓ nous nous intéresserons à la formulation matricielle et quelques approches de solution.

6.2 Interpolation par les fonctions radiales : Cas général

Le problème d'interpolation par les fonctions radiales se formule simplement et se présente de la manière suivante [59] :

Soient :

$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction réelle d'une variable réelle
 m , un entier positif.

Le problème d'interpolation des données :

$$(x^i, F_i), x^i \in \mathbb{R}^d, F_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots N \quad (15)$$

par la fonction radiale $g\Gamma$ consiste à chercher une fonction de la forme :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i g(\|x - x^i\|) + P_m(x) \quad (16)$$

$$\text{avec } P_m \in \Pi_m \text{ et } \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i q(x^i) = 0, q \in \Pi_m$$

satisfaisant à :

$$S(x^i) = F_i, \quad i = 1 \dots N \quad (17)$$

où Π_m est l'ensemble des polynômes algébriques de degré inférieur à m sur \mathbb{R}^d , et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . L'entier m est l'ordre de positivité de la fonction radiale g . Cette méthode d'interpolation est exacte i.e reproduit les polynômes de Π_m quand les conditions de solvabilité que nous rappelons ci-dessous sont vérifiées.

En fait on peut exprimer $P_m(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions $q_j\Gamma$ base de Π_m et alors (16) peut encore s'écrire :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i g(\|x - x^i\|) + \sum_{j=1}^{j=m} d_j q_j(x) \quad m < N$$

$$\text{avec la condition } \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i q_j(x^i) = 0, j = 1 \dots m.$$

6.2.1 Conditions de solvabilité

Les conditions de solvabilité du problème (16), (17) sont l'une géométrique liée à la formulation variationnelle du problème [17]59] et l'autre algébrique liée au caractère conditionnel de la positivité (négativité) [30] de la fonction radiale ou du noyau (semi-noyau) hilbertien dans le cas d'une fonction spline de type plaque mince notamment [17].

6.2.2 Condition géométrique et Positivité conditionnelle

Condition géométrique

Définition 18 (*Ensemble unisolvant*) Soit A un ensemble de points de \mathbb{R}^d et Π_m l'ensemble des polynômes algébriques de degré inférieur à m sur \mathbb{R}^d . On dit que A est Π_m -unisolvant si tout polynôme de Π_m qui s'annule sur A est identiquement nul.

Cette définition peut s'exprimer simplement sur l'ensemble fini $X = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^N\}$ de points d'interpolation du problème (16), (17) par la relation :

$$\dim \Pi_m|_X = \dim \Pi_m$$

qui exprime le caractère unisolvant de l'ensemble X .

Positivité conditionnelle

Définition 19 (*Positivité conditionnelle*) Une fonction radiale $g \in C(\mathbb{R}_+)$ est dite "conditionnellement positive (définie positive) d'ordre m " sur \mathbb{R}^d si pour tout $N \geq 1$ et tout ensemble de points distincts $X = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^N\} \subset \mathbb{R}^d$, la matrice :

$$G_X = \{g(\|x^i - x^j\|)\}_{i,j=1}^N$$

est positive (définie positive) sur le sous-espace :

$$\Pi_m|_X^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^{i=N} v_i q(x^i) = 0, \quad q \in \Pi_m \right\}.$$

i.e. $v^t G_X v \geq 0$ ($v^t G_X v > 0, v \neq 0$), $v \in \Pi_m|_X^\perp$

En fait la caractérisation d'une fonction radiale définie positive d'ordre $m = 0$ a été donnée par Schoenberg et généralisée par Micchelli [30] pour $m \geq 1$. Cette propriété provient de l'extension de la définition d'un noyau reproduisant à un espace Hilbertien contenu dans un espace vectoriel topologique localement compact et séparé.

Théorème 11 (*Micchelli [30]*) Une fonction $g(t)$ est conditionnellement positive d'ordre m sur \mathbb{R}^d , pour $d \geq 1$ si et seulement si :

$$(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} g(\sqrt{t}) \geq 0, \quad t > 0, \quad j \geq m.$$

De plus si $\frac{d^m}{dt^m} g(\sqrt{t}) \neq \text{Constante}$, alors $g(t)$ est définie positive d'ordre m .

En plus de ce théorème qui caractérise simplement la positivité conditionnelle ou la positivité stricte d'une fonction radiale nous avons aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2 (Micchelli [30]) *Le problème d'interpolation (16), (17) sur un ensemble de points distincts X peut être résolu avec $m = 0$ et $g(t)$ définie positive d'ordre 1 et si l'on a :*

$$g(t) < 0, \quad t > 0$$

Ce corollaire justifie une conjecture de Franke [35] sur la solvabilité du problème d'interpolation par les fonctions radiales sans terme polynomial additif en utilisant une multiquadrique de Hardy [7]. La preuve du *théorème* (11) ci-dessus ainsi que celle du corollaire est basée sur la notion de monotonie d'une fonction radiale et sur la représentation de Bernstein d'une fonction monotone [30].

Parmi les fonctions radiales satisfaisant aux conditions du théorème ci-dessus on a notamment :

* Les multiquadriques de Hardy [7] :

$$g(t) = (-1)^m (t^2 + c^2)^{\beta/2}, \quad \beta > -d, \quad \beta \notin 2\mathbb{Z} \text{ ou } 2m - 2 < \beta < 2m$$

* Les noyaux gaussiens :

$$g(t) = e^{-c^2 t^2}$$

et celles qui engendrent les splines de type plaque mince que nous expliciterons dans la section suivante.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction l'interpolation par les fonctions radiales est une généralisation de l'interpolation par les splines polyharmoniques (dont la spline de type plaque mince) qui découle dans sa formulation variationnelle de la minimisation d'une fonctionnelle [17].

6.3 Cas des splines de type plaque mince

6.3.1 Introduction

Les fonctions splines de type plaque mince se retrouvent dans le cadre d'un formalisme abstrait défini par Atteia [4]. Une contribution remarquable par la suite est celle de Duchon [17] qui a explicité les noyaux semi-reproduisants et les fonctionnelles

à minimiser ainsi que les espaces ad-hoc pour obtenir ces fonctions. On sait qu'à un espace Hilbertien est associé de manière biunivoque un noyau reproduisant qui est défini positif. La positivité conditionnelle d'un noyau (de la fonction radiale associée) est définie à partir d'un espace semi-hilbertien caractérisé par une semi-norme d'où est déduite la fonctionnelle à minimiser. Rappelons que la relation qui existe entre un noyau d'espace Hilbertien ou semi-hilbertien et la fonction radiale associée est : $k(x, y) = g(\|x - y\|)$ à une constante multiplicative près.

6.3.2 Cas général

En minimisant la fonctionnelle :

$$R_k(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\nu|=k} (D^\nu f)^2(x) dx \quad (18)$$

$$\text{où } \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d) \in \mathbb{Z}_+^d, \quad D^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d}}, \quad |\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$$

sur l'espace :

$$\chi_k = \{f \in C(\mathbb{R}^d), D^\nu f \in L^2(\mathbb{R}^d), |\nu| = k\}.$$

Duchon [17] a obtenu pour $k > d/2\Gamma$ la fonction :

$$g(t) = \begin{cases} t^{2k-d} \log t, & \text{si } d \text{ pair} \\ t^{2k-d}, & \text{si } d \text{ impair.} \end{cases} \quad (19)$$

Les fonctions radiales ainsi obtenues sont les solutions de la $k^{\text{ième}}$ itérés de l'opérateur laplacien i.e :

$$\Delta^k g(\|x\|) = c\delta(x) \quad (20)$$

On obtient ainsi une fonction radiale appelée *spline de type plaque mince* . Notons que l'espace χ_k ci-dessus est souvent noté $D^{-k}L^2(\mathbb{R}^d)$ et est l'espace de Beppo-Levi d'ordre k . Une extension [17] de la classe fonctionnelle du type (18) est obtenue en considérant les dérivées d'ordre fractionnaire :

$$R_{s,k}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\lambda\|^{2s} \sum_{|\nu|=k} (\widehat{D^\nu f})^2(\lambda) d\lambda, \quad 0 < s < 1$$

sur l'espace des distributions v dont la dérivée d'ordre k a une transformée de Fourier \hat{v} qui vérifie une relation de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\lambda\|^{2s} |\hat{v}(\lambda)|^2 d\lambda < +\infty$$

Cette extension permet à Duchon d'obtenir pour $2s + 2k > d$, des fonctions radiales de la forme :

$$g(t) = \begin{cases} t^{2k+2s-d} \log t, & \text{si } 2k + 2s - d \text{ pair} \\ t^{2k+2s-d}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

qui sont positives d'ordre k et encore appelée spline de type plaque mince. Dyn et al. [32Γ59] ont introduit les fonctions radiales définies par :

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 + c^2)^{(2k-d)/2} \log (t^2 + c^2)^{1/2}, & \text{si } 2k - d \geq 0, d \text{ pair} \\ & c > 0, \\ (t^2 + c^2)^{(2k-d)/2}, & \text{ailleurs } k \geq 1. \end{cases}$$

qui sont en fait les translatées de (19). L'avantage de cette nouvelle classe de fonctions est d'être définies en 0, ce qui n'est pas le cas des fonctions (19) quand d est pair.

6.3.3 Cas particulier d'une surface 2-D

En pratique c'est le cas 2-D qui est le plus utilisé [6Γ11Γ14] d'où l'appellation *surface spline*. Duchon a démontré le théorème suivant :

Théorème 12 (Duchon [17]) Soient $x^i, i = 1 \dots N$, un ensemble de points de \mathbb{R}^2 , Π_k -unisolvant, alors parmi toutes les fonctions continues sur \mathbb{R}^2 , prenant les valeurs F_i en x^i , il en existe une et une seule notée σ qui minimise la fonctionnelle :

$$R_k(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\nu|=k} (D^\nu f)^2(x) dx$$

et σ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i (\|x - x^i\|)^{2k-2} \log (\|x - x^i\|) + P_k(x)$$

où

$$P_k \in \Pi_k \text{ et } \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i q(x^i) = 0, q \in \Pi_k.$$

Pour obtenir les coefficients λ_i et les coefficients du polynôme P_k il suffit de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i (\|x^j - x^i\|)^{2k-2} \log(\|x^j - x^i\|) + P_k(x^j) = \sigma(x^j), j = 1 \dots M \\ \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i q_j(x^i) = 0, j = 1 \dots M \text{ où } M = \dim(\Pi_k) \end{cases}$$

Remarques 5 1. Cette caractérisation de la spline de type plaque mince a l'avantage de présenter un noyau simple à calculer par rapport à celui obtenu par Thomann [6] qui est un développement en série entière.

2. Les conditions $\sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i q_j(x^i) = 0$ imposées aux coefficients $\lambda_i, i = 1 \dots N$ expriment la positivité conditionnelle du noyau semi-hilbertien (et par conséquent celui de la fonction radiale associée).

6.4 Formulation matricielle et approches de solutions

6.4.1 Formulation matricielle

Considérant la formulation analytique du problème d'interpolation par les fonctions radiales tel que présenté dans la deuxième section on peut écrire :

$$G_X = \left(g(\|x^i - x^j\|)_{i,j=1}^N \right)$$

$$Q = \left(q_j(x^i)_{i=1 \dots N}^{j=1 \dots M} \right)$$

avec q_1, \dots, q_M base de Π_m

$$\text{et } \Lambda = [\lambda_i], F = [F_i], \alpha = [\alpha_j], i = 1 \dots N ; j = 1 \dots M.$$

La résolution de (16), (17) revient à trouver les paramètres $\lambda_i, i = 1 \dots N$ et $\alpha_j, j = 1 \dots M$ solution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} G_X & Q \\ Q^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

de taille $(N + M) \times (N + M)$.

La matrice que nous notons G du système linéaire (21) est très dense et symétrique. G_X vérifie la propriété de positivité conditionnelle dont l'ordre est celui de la fonction radiale ou du noyau semi-reproduisant associé.

Le système linéaire (21) est de grande taille si le nombre de données à interpoler est important. Pour fixer les idées si l'on considère les points d'interpolation régulièrement répartis sur une grille de taille 32×32 par exemple la partie principale G_X de la matrice G du système sera de taille 1024×1024 ! Quand le nombre de données à interpoler est très grand le système (21) est très mal conditionné [59] et le caractère dense de la matrice correspondante ne fait qu'accroître les difficultés de résolution du système [32, 59].

Pour le cas des splines de type plaque mince et quand le nombre de données est raisonnable ($N < 150$) plusieurs méthodes sont proposées dans [14, 15, 32] pour résoudre le système (21). Ceci se fait en exploitant au mieux les propriétés de la sous matrice G_X caractérisant la fonction radiale.

Nous indiquons brièvement une méthode directe et une méthode itérative. Ce sont les plus performantes pour ce type de problème [14]; Cette dernière est une méthode du gradient restreint à un sous-espace. D'autres méthodes nécessitant un préconditionnement de la matrice du système sont proposées dans [33].

6.4.2 Présentation d'une méthode directe et d'une méthode itérative

Plusieurs méthodes de résolutions des systèmes du type (21) sont proposées dans [6, 14, 33]. Nous présentons ici l'adaptation des deux méthodes les plus performantes utilisées [14] pour les fonctions splines de type plaque mince.

Méthode directe

Elle est basée sur la construction d'une base r_1, r_2, \dots, r_{N-M} de $\Pi_m|_X$ qui permet par un changement de variables de ramener le système (21) de $(N + M)$ inconnues à un système à $(N - M)$ inconnues avec une matrice définie positive. Si l'on désigne par P la matrice dont les colonnes sont formées des r_i alors (21) devient :

$$\begin{cases} P^t G_X P z & = & P^t z \\ \Lambda & = & P z \end{cases} \quad (22)$$

La matrice $P^t G_X P$ est alors définie positive et est de taille $(N - M) \times (N - M)$. Quand le nombre de points d'interpolation est raisonnable ($N < 150$) on peut appliquer au système (22) une décomposition de Cholesky par exemple [14] et obtenir ensuite les α_i en considérant M relations indépendantes du système (21).

Méthode itérative

Il s'agit d'une méthode de descente dans la direction du gradient sur un sous-espace orthogonal à $\Pi_m|_X$. Notons que dans ce sous-espace la matrice G_X est conditionnellement définie positive. Cette méthode itérative est appelée *gradient projeté* car la direction du gradient est restreinte (par projection) au sous-espace $\Pi_m|_X^\perp$.

On considère une base $v_j, j = 1 \dots M$ orthonormée de $\Pi_m|_X$ (ce qui s'obtient assez facilement en orthonormalisant (procédé de Gram-Schmidt) les M vecteurs qui forment les colonnes de la sous-matrice Q du système (21)). Soit $V = [v_1, v_2, \dots, v_M]$ cette base. En posant $P = I - VV^t$ où I est la matrice identité on obtient un opérateur de projection de \mathbb{R}^N dans $\Pi_m|_X$.

Le système (21) peut se mettre de manière explicite sous la forme :

$$\begin{cases} G_X \Lambda + Q \alpha = F \\ Q^t \Lambda = 0 \end{cases} \quad (23)$$

En considérant l'opérateur de projection P défini ci-dessus un vecteur $\Lambda \in \Pi_m|_X^\perp$ est tel que $P\Lambda = \Lambda$. Une solution (celle de norme minimale) de (23) appartenant à $\Pi_m|_X^\perp$ s'obtient en résolvant d'abord le système :

$$P G_X P \Lambda = P F \quad (24)$$

La solution Λ_* du système (24) est reportée dans (23) et le vecteur α est obtenu par :

$$\alpha = (Q^t Q)^{-1} Q^t (F - G_X \Lambda_*)$$

où $(Q^t Q)$ est une matrice de taille $M \times M$.

La suite d'instructions permettant de résoudre le système (24) est donnée par :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\in \Pi_m|_X^\perp, & U_1 &= \tilde{r}_1 \\ \Lambda_{j+1} &= \Lambda_j + \theta_j U_j, & U_{j+1} &= \tilde{r}_{j+1} + \mu_j U_j, \quad j = 1 \dots \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} r_j &= G_X \Lambda_j - F, & \tilde{r}_j &= \text{Projection de } r_j \text{ sur } \Pi_m|_X^\perp \\ \theta_j &= -\frac{U_j^t G_X \tilde{r}_j}{U_j^t G_X U_j}, & \mu_j &= -\frac{U_j^t G_X \tilde{r}_{j+1}}{U_j^t G_X U_j} \end{aligned}$$

Cet algorithme qui est très proche du gradient conjugué converge assez rapidement. Quand le nombre de données est faible ($N < 150$) tout se passe très bien. Mais quand la taille du système augmente on constate des formules ci-dessus que l'évaluation de θ_j et μ_j pose des problèmes en raison des produits matrice-vecteur nécessaires pendant les itérations.

En plus de ce problème de temps de calcul les systèmes (22), (23) sont mal conditionnés [32] d'où une instabilité des solutions.

Pour faire face au problème d'interpolation quand le système est de grande taille on propose dans [14] de partitionner les données (15) et d'obtenir la fonction d'interpolation (qui est alors globale) par combinaisons connexes de celles calculées localement. En d'autres termes il s'agit de subdiviser le domaine d'interpolation $D = [a, b] \times [c, d]$ en rectangles $R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ contenant un nombre n_{ij} raisonnable de points de manière que les R_{ij} forment une partition de D . On calcule dans [14] pour le cas des splines de type plaque mince les fonctions poids (polynômes de 2 variables) permettant d'obtenir des combinaisons de régularité sensiblement égale à celle de l'interpolant global. La comparaison des temps de calcul obtenu [15] par ce procédé par rapport à l'estimation du temps nécessaire pour évaluer la spline globale milite en faveur de cette démarche par subdivision. Mais les problèmes qui restent ouverts sont notamment la façon d'obtenir un partitionnement optimal en fonction de la répartition initiale des points dans D et le contrôle de la régularité aux frontières des rectangles R_{ij} .

Dyn et al. [32] ont proposé une méthode de préconditionnement des systèmes (22), (23) fondé sur le fait que certaines fonctions radiales sont solutions fondamentales des itérés de l'opérateur laplacien. Pour être plus explicite il s'agit de construire une matrice $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^N$ qui satisfait à :

$$(\Delta^m f) \approx \sum_{i=1}^{i=N} \gamma_{ij} f(x^i) \text{ tel que } \sum_{j=1}^{j=N} \gamma_{ij} p(x^j) = 0 \quad (25)$$

$$p \in \Pi_m; \quad f \in C^{2m}(\mathbb{R}^d)$$

Avec cette matrice Γ on a par construction $\Gamma Q = 0$ et le système (23) devient :

$$\begin{cases} \Gamma G_X \Lambda = \Gamma F \\ Q^t \Lambda = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Ce dernier système est mieux conditionné que les précédents [44] surtout quand la matrice G_X provient d'une fonction radiale qui approxime au mieux la relation (20).

La construction de la matrice de conditionnement Γ satisfaisant aux conditions (25) est la principale difficulté et de très bons résultats ne sont obtenus que pour les fonctions radiales solutions exactes de (20) [59].

6.4.3 Convergence et ordre de l'erreur d'interpolation

Dans un calcul d'interpolation ou d'approximation en général l'étude de la vitesse de convergence et de l'ordre d'erreur est fondamentale. S'il est bien connu que l'interpolation par des fonctions radiales donne de meilleurs résultats c'est surtout la pratique qui le confirme [67, 32, 35].

Pour le cas des splines polyharmoniques Duchon [17] donne quelques résultats théoriques en spécifiant l'espace et l'ordre d'erreur surtout en terme de conjecture.

Wu et Schabak [58] ont donné une estimation de l'erreur d'interpolation pour les fonctions f dont la transformée de Fourier \hat{f} et celle \hat{g} de la fonction radiale satisfont à une relation du type : $\int |\hat{f}|^2 |\hat{g}|^{-1} dt < +\infty$. Ils obtiennent des ordres de convergence arbitraires pour une interpolation par des multiquadriques [7] de même qu'avec des noyaux gaussiens. L'erreur d'interpolation pour les fonctions radiales de type plaque mince : $g(t) = t^{2k+1}$ (resp. $g(t) = t^{2k} \log t$) est de l'ordre de $O(h^{k/2})$ (resp. $O(h^k)$) où h mesure la densité des points d'interpolation et tend vers 0 pour une surface.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons posé et indiqué des approches existantes de résolution du problème d'interpolation par les fonctions radiales. Il ressort de ceci que malgré la puissance de cette méthode d'interpolation son utilisation demeure peu fréquente dans la pratique. Ceci est dû au caractère très dense de la matrice et à l'instabilité des solutions quand le nombre de données est important. On préfère des méthodes peu performantes mais rapides.

Nous proposons ici une nouvelle approche de résolution à ce problème surtout quand le nombre de données est grand. Il s'agit de rendre la matrice du système linéaire (24) creuse après une décomposition dans une base d'ondelettes.

L'approche proposée est d'autant plus performante que le système à résoudre est

de grande taille et a un caractère général. Cette nouvelle approche est basée sur un algorithme dû à Beylkin, Coifman et Rokhlin [74] et communément appelé *algorithme BCR* et qui fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 7

Algorithme *BCR*

7.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques éléments de construction et de l'implémentation de l'algorithme de Beyklin-Coifman et Rokhlin *BCR* [74]. Cet algorithme permet de rendre creuses certaines matrices après décomposition dans une base d'ondelettes. On tient ensuite compte de l'avantage de cette structure creuse pour accélérer les calculs du produit de la matrice ainsi obtenue avec un vecteur. Les méthodes itératives qui sont très coûteuses pour les produits matrice-vecteurs pourront alors être mises en œuvre de manière plus efficace.

Nous commençons dans la deuxième section par présenter la décomposition d'un opérateur quelconque T à noyau dans une base de fonctions. En considérant une base bien adaptée (base d'ondelettes) nous montrerons dans la troisième section que l'application d'un opérateur T en un point f (une fonction) peut se ramener (être approximé) au calcul d'un produit d'une matrice A par un vecteur X . La description de l'algorithme fera l'objet de la quatrième section. Nous indiquerons les ondelettes adaptées à ce type de calcul dans la cinquième section.

7.2 Représentation d'un opérateur T

L'algorithme *BCR* [74] a été conçu et mis en œuvre pour accélérer le calcul de la valeur d'un opérateur T (à noyau $k(x, y)$) en un point f . Les opérateurs qui ont surtout été utilisés pour tester l'efficacité de l'algorithme sont ceux de la classe de Calderon-Zygmund [69-74] et la fonction f un vecteur aléatoire de norme unité. Pour évaluer

numériquement les solutions de certaines équations intégrales ou pour calculer la valeur d'un opérateur T en un point $f \in \Gamma$ cela nécessite la représentation ou l'approximation du noyau de l'opérateur par une matrice qui est généralement très dense. Cette représentation peut être obtenue en décomposant $k(x, y)$ dans une base adéquate de fonctions.

En d'autres termes soit T un opérateur ayant $k(x, y)$ pour noyau et $f \in \Gamma$ une fonction quelconque. Il peut s'agir simplement de calculer :

$$T(f)(x) = \int k(x, y)f(y) dy \quad (27)$$

ou de résoudre l'équation intégrale :

$$\int k(x, y)h(y) dy = q(x) \quad (28)$$

Dans l'équation (28) $q(x)$ est une fonction connue et le problème est de déterminer la fonction inconnue $h(y)$. On peut envisager une solution analytique ce qui n'est pas toujours possible et dépend de la nature du noyau k et de h .

7.2.1 Représentation du noyau $k(x, y)$ d'un opérateur T

Soient $I = I_{jk} = [2^{-j}(k-1), 2^{-j}k[$ et $I' = I_{jl} = [2^{-j}(l-1), 2^{-j}l[$ deux intervalles dyadiques de \mathbb{R} . A chaque carré $I \times I'$ (où I et I' sont de même longueur) on associe les trois fonctions :

$$\begin{aligned} \psi_{II'}^{(1)}(x, y) &= \psi_I(x)\psi_{I'}(y) \\ \psi_{II'}^{(2)}(x, y) &= \psi_I(x)\phi_{I'}(y) \\ \psi_{II'}^{(3)}(x, y) &= \phi_I(x)\psi_{I'}(y) \end{aligned} \quad (29)$$

Quand $I \times I'$ parcourt l'ensemble des carrés dyadiques du plan on obtient un système qui forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Un noyau $k(x, y)$ peut donc s'exprimer formellement dans cette base par :

$$k(x, y) = \sum_{II'} \alpha_{II'} \psi_I(x)\psi_{I'}(y) + \sum_{II'} \beta_{II'} \psi_I(x)\phi_{I'}(y) + \sum_{II'} \gamma_{II'} \phi_I(x)\psi_{I'}(y)$$

où la sommation est faite sur tous les carrés dyadiques $I \times I'$ avec les coefficients $\alpha_{II'}$, $\beta_{II'}$, et $\gamma_{II'}$ définis par les formules :

$$\begin{aligned} \alpha_{II'} &= \iint k(x, y)\psi_I(x)\psi_{I'}(y) dx dy \\ \beta_{II'} &= \iint k(x, y)\psi_I(x)\phi_{I'}(y) dx dy \\ \gamma_{II'} &= \iint k(x, y)\phi_I(x)\psi_{I'}(y) dx dy \end{aligned} \quad (30)$$

Le coefficient d'approximation est défini par :

$$s_{II'} = \int \int k(x, y) \phi_I(x) \phi_{I'}(y) dx dy$$

En considérant $I = I_{ji}$ et $I' = I_{jk}$ les coefficients $\alpha_{II'}, \beta_{II'}$ et $\gamma_{II'}$ (qui sont en fait des matrices) peuvent se noter : $\alpha^{(j)} = \{\alpha_{i,k}^j\}$, $\beta^{(j)} = \{\beta_{ik}^j\}$, $\gamma^{(j)} = \{\gamma_{ik}^j\}$ $j = 1 \dots p$; $i, k = 1 \dots 2^{p-j}$. La matrice d'approximation qui représente $s_{II'}$ à chaque résolution se note $A^{(j)}$.

7.2.2 Coefficients de la représentation d'une fonction f

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si ϕ est la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et ψ l'ondelette associée la représentation de la fonction f peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \sum_I s_I(f) \phi_I(x) + \sum_I c_I(f) \psi_I(x) \quad (31)$$

où les coefficients s_I et c_I s'obtiennent par les formules :

$$s_I(f) = \int f(x) \phi_I(x) dx \text{ et } c_I(f) = \int f(x) \psi_I(x) dx \quad (32)$$

De même que ci-dessus en considérant $I = I_{jk}$ les coefficients $s_I(f)$ et $c_I(f)$ (qui sont en fait des vecteurs) peuvent se noter : $s^{(j)} = \{s_k^j\}$, $d^{(j)} = \{d_k^j\}$, $j = 1 \dots p$, $k = 1 \dots 2^{p-j}$ où 2^p est le nombre d'échantillons qui représente la fonction f .

7.2.3 Approximation de T au point f

Avec la représentation de $k(x, y)$ définie par (30) et les coefficients de f définis en (32) $T(f)(x) = \int k(x, y) f(y) dy$ peut se mettre sous la forme :

$$T(f)(x) = \sum_I \psi_I(x) \sum_{I'} \alpha_{II'} d_{I'} + \sum_I \psi_I(x) \sum_{I'} \beta_{II'} s_{I'} + \sum_I \phi_I(x) \sum_{I'} \gamma_{II'} d_{I'} \quad (33)$$

Dès que l'on obtient les sous-matrices $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}$ et $\gamma^{(j)}$, $j = 1 \dots p$ correspondant à l'opérateur T on calcule les produits (vecteurs) $\hat{s}^{(j)} = \{\hat{s}_k^j\}$, $\hat{d}^{(j)} = \{\hat{d}_k^j\}$ par les formules :

$$\hat{d}^{(j)} = \alpha^{(j)}(d^{(j)}) + \beta^{(j)}(s^{(j)}) \quad (34)$$

$$\hat{s}^{(j)} = \gamma^{(j)}(d^{(j)})$$

où les $d^{(j)} = \{d_k^j\}, s^{(j)} = \{s_k^j\}, j = 1 \dots p, k = 1 \dots 2^{p-j}$ représentent la fonction f . L'approximation de $T(f)$ dans un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est alors donnée par la formule :

$$T^N(f)(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{2^{p-j}} (\hat{d}^{(k)} \psi_{jk}(x) + \hat{s}^{(k)} \phi_{jk}(x)) \quad (35)$$

On trouvera les détails de cette représentation dans [74] ainsi que les formules (qui sont en fait des produits de convolution numériques) pour obtenir les sous-matrices $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}$ en 2-D et les vecteurs $d^{(j)}, s^{(j)}$ en 1-D.

7.2.4 Approximation de $T(f)$ par AX

Du point de vue purement numérique étant donné une fonction $k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ la discrétisation de k peut se mettre sous la forme d'une matrice A telle que $A(i, j) = k(x_i, y_j)$ avec $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Considérons donc une matrice A de taille $N \times N$ où $N = 2^p, p > 1$. La représentation de k dans une base de fonctions d'un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathbb{R}^2)$ revient à calculer les coefficients $\alpha_{II'}, \beta_{II'}$ et $\gamma_{II'}$ qui sont comme nous l'avons remarqué des sous-matrices $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}$ et $\gamma^{(j)}, j = 1 \dots p$, plus un terme résiduel $A^{(p)}$. Ces sous-matrices s'obtiennent en décomposant la matrice A en lignes puis en colonnes si la base considérée est séparable. Ceci se fait par un algorithme ayant une structure pyramidale i.e la taille de la matrice décomposée diminue à chaque étape de la décomposition.

Après discrétisation la fonction f peut se mettre sous la forme d'un vecteur X et se représenter par : $(s^{(0)}(n))_{n=1 \dots N}$ où $N = 2^p, p > 1$. Ceci constitue une certaine approximation finie de f dans $l^2(\mathbb{Z})$. En fait $s^{(0)}$ représente la fonction f à la résolution 1 et les coefficients à la résolution suivante s'obtiennent par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \{s^{(0)}\} & \longrightarrow & \{s^{(1)}\} & \longrightarrow & \{s^{(2)}\} & \dots & \{s^{(p-1)}\} & \longrightarrow & \{s^{(p)}\} \\ & & \searrow & & \searrow & & & & \searrow \\ & & & & \{d^{(1)}\} & & \{d^{(2)}\} & \dots & & & \{d^{(p)}\} \end{array}$$

En fait les coefficients $s^{(j)}$ et $d^{(j)}, j = 1 \dots p$ sont obtenus par filtrage et sous-échantillonnage de $s^{(j-1)}$ et représentent respectivement les approximations et les détails de f à différents niveaux de résolution. Chaque $d^{(j)}$ est la différence d'information qui existe entre les approximations $s^{(j)}$ et $s^{(j-1)}$ i.e entre deux niveaux de résolution consécutifs. A chaque niveau du schéma pyramidal la taille de l'échantillon permettant d'approximer la fonction f à une résolution plus basse est réduite de moitié. Le

nombre d'éléments de $s^{(0)}$ étant de $N = 2^p, p > 1$ la suite $(s^{(j)}, d^{(j)}), j = 1 \dots p$ a $2(N - 1)$ éléments et se calcule en $O(N)$.

Inversement étant donné les coefficients $s^{(j)}$ et $d^{(j)}, j = 1 \dots p$, on peut reconstruire le signal $(s^{(0)}(n))_{n=1 \dots N}$ par les formules suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \{s^{(p)}\} & \longrightarrow & \{s^{(p-1)}\} & \longrightarrow & \{s^{(p-2)}\} & \dots & \{s^{(1)}\} & \longrightarrow & \{s^{(0)}\} \\ & \nearrow & & \nearrow & & & & \nearrow & \\ \{d^{(p)}\} & & \{d^{(p-1)}\} & & \{d^{(p-2)}\} & \dots & \{d^{(1)}\} & & \end{array}$$

Cette reconstruction peut se faire également en $O(N)$ en utilisant seulement la suite des coefficients $(s^{(p)}, d^{(j)}), j = 1 \dots p$ qui a N éléments et est la représentation en ondelettes i.e de $(s^{(0)}(n))_{n=1 \dots N}$.

Le calcul de $T(f)(x) = \int k(x, y)f(y) dy$ peut donc être approximé par celui de AX où A est la représentation matricielle de T et X la représentation de f sous forme de vecteur.

Si la représentation indiquée ci-dessus est valable pour des bases quelconques de fonctions séparables les bases d'ondelettes sont les mieux adaptées [74] de par leur propriétés de *localisation* et de *régularité*.

En effet les propriétés d'oscillation et de régularité (qui se caractérisent par le nombre M de moments nuls) permettent d'estimer l'amplitude des coefficients d'ondelettes d'une fonction ou d'une fonctionnelle. Pour certains opérateurs intégraux (classe de Calderon-Zygmund) [69] et pseudo-différentiels on a une estimation précise du comportement de leurs coefficients obtenus après représentation dans une base d'ondelettes.

Ainsi de ces estimations on peut mettre à zéro les coefficients dont les valeurs absolues sont inférieures à un certain seuil et obtenir une matrice très creuse [74]. La matrice obtenue peut ensuite être utilisée de manière adéquate comme une approximation de la matrice initiale avec de bonnes précisions de calcul. Dans le cas où l'opérateur (et par conséquent la matrice) a des singularités localisées par exemple sur une bande on donne dans [74] des bornes de l'erreur faite en remplaçant l'opérateur par son approximation dans laquelle certains éléments ont été mis à zéro.

7.3 Description de l'algorithme BCR

De la matrice A de taille $N \times N$ où $N = 2^p$ avec $p > 1$ nous obtenons une matrice $\tilde{A} = \{\alpha^{(j)} \beta^{(j)} \gamma^{(j)} j = 1 \dots p A^{(p)}\}$ par décomposition de A en plusieurs niveaux de

résolution dans une base d'ondelettes. En utilisant une base d'ondelettes séparables et un algorithme à structure pyramidale en 2-D cette phase se réalise en $O(N^2)$.

De même à partir du vecteur X de taille $N = 2^p$, $p > 1$ nous obtenons le vecteur $\tilde{X} = \{s^{(j)}, d^{(j)}, j = 1 \dots p\}$.

Le but de l'algorithme *BCR* est d'approcher le produit AX par le produit $\tilde{A}\tilde{X}$ qui nécessite une réorganisation particulière des calculs étant donné les tailles et les structures de \tilde{A} et de \tilde{X} (obtenues après décomposition en coefficients d'ondelettes).

La matrice \tilde{A} est représentée sous la "forme étirée" pour mieux mettre en évidence la disposition des calculs du produit $\tilde{A}\tilde{X}$. Cette forme étirée peut se voir comme une décomposition de l'opérateur T sur les bases orthonormées des différents sous espaces vectoriels V_j et W_j fournis par l'analyse multirésolution correspondante avec des changements de bases quand on passe d'une résolution à une autre. La *figure* (28) présente un exemple de disposition des calculs avec la matrice \tilde{A} sous la forme étirée pour $N = 2^3$.

Dans cette représentation les sous-matrices $(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}, j = 1 \dots p)$ et $A^{(p)}$ sont les seuls éléments éventuellement non nuls du tableau. On observe une structure creuse *a priori* de la matrice due à la réorganisation.

7.3.1 Détails de l'implémentation de l'algorithme

L'implémentation de l'algorithme *BCR* peut se subdiviser en quatre procédures :

- (P1) Décomposition du vecteur X en $\tilde{X} = \{s_k^{(j)}, d_k^{(j)}, j = 1 \dots p; k = 1 \dots 2^{p-j}\}$;
- (P2) Décomposition de la matrice A en $\tilde{A} = \{\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}, j = 1 \dots p, A^{(p)}\}$ suivie d'une mise à zéro des éléments inférieurs à un certain seuil ϵ ou de manière équivalente mise à zéro d'un certain pourcentage de coefficients ;
- (P3) Produit de la matrice \tilde{A} rendue creuse par le vecteur \tilde{X} (en fait un ensemble de sous produits) ;
- (P4) Reconstruction du vecteur résultat à partir de sa décomposition obtenue en (P3).

La première procédure (P1) : Consiste à décomposer le vecteur X en coefficients d'ondelettes $d^{(j)}$ et en coefficients d'approximation $s^{(j)}$ correspondant à chaque niveau de résolution par filtrage et sous-échantillonnage. Le vecteur X est alors représenté par : $\tilde{X} = \{s^{(j)}, d^{(j)}, j = 1 \dots p\}$.

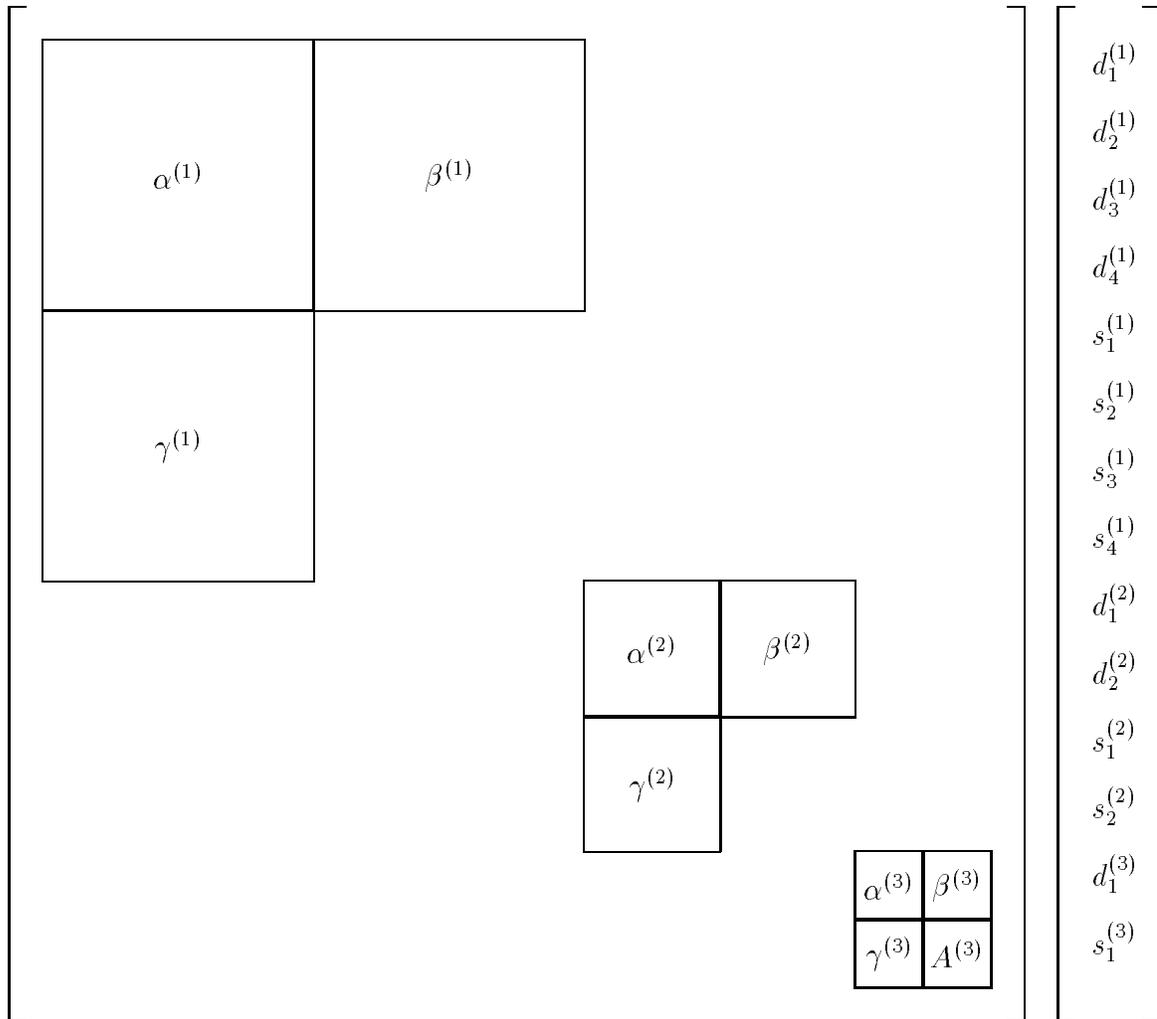


Figure 28: Organisation de la matrice (“forme étirée”) en blocs et du vecteur décomposé pour $N = 2^3$.

La seconde procédure (P2) : Permet de décomposer la matrice A dans une base d'ondelettes séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Cette décomposition se fait en appliquant plusieurs fois la procédure ci-dessus à chaque ligne puis à chaque colonne de A . On obtient ainsi les coefficients d'ondelettes $\alpha^{(j)} = \{\alpha_{kl}^j\}$, $\beta^{(j)} = \{\beta_{kl}^j\}$, $\gamma^{(j)} = \{\gamma_{kl}^j\}$ $j = 1 \dots p$; $k, l = 1 \dots 2^{p-j}$ et le terme résiduel $A^{(p)}$ qui constituent la matrice \tilde{A} . Après ce calcul nous procédons à une compression ou seuillage de \tilde{A} . Ceci est motivé par l'observation suivante : **quand on décompose une structure (fonction, fonctionnelle) dans une base d'ondelettes, les coefficients obtenus sont très petits dans les zones où la structure est régulière et le sont moins dans les zones de discontinuité.**

On montre d'ailleurs [39] que la transformation en ondelettes permet de détecter les discontinuités dans un signal. La compression ici revient à mettre à zéro tous les coefficients qui sont en valeur absolue inférieure à un seuil ϵ fixé à l'avance en tenant compte des précisions de calcul souhaitées.

La troisième procédure (P3) : Permet de calculer les produits des sous-matrices $\alpha^{(j)} \Gamma \beta^{(j)} \Gamma \gamma^{(j)}$ $j = 1 \dots p$ et $A^{(p)}$ (obtenus de $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}$ et $A^{(p)}$ après compression i.e seuillage) avec les vecteurs $s^{(j)}, d^{(j)}$ $j = 1 \dots p$. On obtient alors les vecteurs $\tilde{s}^{(j)}, \tilde{d}^{(j)}$ $j = 1 \dots p$ qui constituent la réalisation de la formule (34) et la représentation sous forme décomposée du résultat de la sommation dans (33) sur l'intervalle $I' = I'_{jl}$ i.e par rapport à l'indice l à chaque résolution. Il reste donc pour réaliser entièrement (33) ce qui se fait par la sommation sur chaque intervalle $I = I_{jk}$ i.e par rapport à l'indice k .

La quatrième procédure (P4) : Reconstruction du résultat du calcul de $\tilde{A}\tilde{X}$ en utilisant les coefficients d'ondelettes représentés par $\tilde{s}^{(j)}, \tilde{d}^{(j)}$ $j = 1 \dots p$ obtenus dans la procédure (P3). Notons que la procédure quatre n'est pas identique à une procédure classique (standard) de reconstruction d'un signal dont on connaît sa représentation en ondelettes. Ici cette procédure utilise tous les éléments des vecteurs $s^{(j)}, d^{(j)}, j = 1 \dots p$ compte tenu de la sommation sur l'indice k (Cf. Formule(35)). Cette reconstruction se fait recursivement sur l'indice j qui caractérise le niveau de résolution.

Remarques

- (i) En fait les procédures (P1) et (P2) sont des produits de convolution et demandent précisément un nombre d'opérations proportionnel à la taille des filtres mis en œuvre. Typiquement si le filtre utilisé est de longueur p , alors le nombre

d'opérations est de l'ordre de pN .

- (ii) La procédure (P3) s'effectue en $O(N^2)$ i.e pratiquement le temps nécessaire pour calculer le produit d'une matrice par un vecteur. **Ce qui est remarquable, c'est qu'après avoir mis des éléments à zéro, la matrice est très creuse et les produits ultérieurs se font en un temps proportionnel au nombre d'éléments non nuls. Or ce nombre étant très petit (du fait de la structure creuse), les produits se font très rapidement d'où l'accélération souhaitée.** Et alors l'intérêt de cet algorithme quand on a un nombre important de produits matrice-vecteur à réaliser. Ce qui est le cas dans la plupart de techniques itératives pour la résolution de systèmes d'équations.
- (iii) Les problèmes de bords qui sont inévitables se résolvent simplement par périodisation de la structure (matrice ou vecteur) dans la phase de décomposition ou de reconstruction. Ceci peut être vu (remarque d'Yves Meyer) comme l'utilisation d'une base d'ondelettes périodiques.

La remarque (ii) ci-dessus est le point central de l'algorithme et par conséquent de l'approche que nous proposons pour accélérer le calcul de l'interpolation ou de l'approximation d'une surface par une fonction radiale. Dans une procédure itérative par exemple la matrice des itérations est décomposée une seule fois et les produits matrice-vecteur suivants au lieu d'être en $O(N^2)$ ont un coût proportionnel au nombre d'éléments non nuls de la matrice rendue creuse.

7.3.2 Ondelettes pour l'algorithme BCR

La spécification de l'ondelette tient compte ici de deux motivations : la rapidité des calculs et le maximum de "creux" à obtenir. La longueur du filtre de convolution est liée au nombre M de moments nuls de l'ondelette. Si le nombre de moments nuls est très petit ce qui exprime une faible régularité (cas de l'ondelette de Harr où $M = 1$) les calculs sont extrêmement rapides mais la matrice obtenue ne peut pas être rendue très creuse sans nuire à la précision des résultats. L'ondelette de Meyer [69] ou celles construites par P. J. Lemarié [42] et G. Battle [41][47] sont certes très régulières mais leur support est infini d'où un temps de calcul élevé. En fait les ondelettes construites à partir des fonctions splines de régularité arbitraire sont à décroissance exponentielle et numériquement considérées comme à support fini (Cf. *Annexe A*) mais elles ne sont

pas adaptées à ce type de calcul [93] pour la simple raison que le nombre de coefficients nécessaire l'obtention des erreurs de même ordre est 4 à 5 fois plus important que dans le cas des ondelettes à support compact par construction d'I. Daubechies [50] qui sont les mieux adaptées à l'algorithme *BCR*. Ceci sera plus explicite dans le chapitre suivant où nous présentons les résultats numériques de différentes implémentations.

On indique dans [74] que l'utilisation des ondelettes qui sont telles que les transférés de la fonction d'échelle associée aient des moments nuls permettent d'obtenir un meilleur taux de creux. Mais l'inconvénient est que le nombre de coefficients à utiliser est $3M$ au lieu de $2M$ comme dans le cas classique. On peut utiliser les ondelettes biorthogonales [93]. Nous avons repris quelques expériences numériques de [74] et nous avons constaté que les erreurs obtenues sont du même ordre. Ce qui nous a encouragé à nous attaquer au problème d'interpolation par les fonctions radiales.

7.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre l'algorithme *BCR* qui permet de rendre creuse une matrice (provenant de la discrétisation d'un opérateur à noyau) pour accélérer le calcul du produit d'une matrice par un vecteur. Ceci permet d'envisager à très faible coût la résolution d'équations intégrales dont la formulation fait intervenir un opérateur à noyau ou l'accélération des méthodes itératives qui sont coûteuses en produits matrice-vecteur.

Le cadre de réalisation et les expériences numériques de l'algorithme que nous venons de présenter sur le problème du chapitre précédent font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 8

Expériences numériques

8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter quelques expérimentations numériques sur l'utilisation de l'algorithme *BCR* pour accélérer la résolution d'un système linéaire qui détermine les paramètres du problème d'interpolation par les fonctions radiales. Nous avons présenté brièvement deux méthodes (les plus performantes) [14Γ15] qui ont été développées dans le cas de la spline de type plaque mince. D'autres approches nécessitant un préconditionnement de la matrice du système linéaire sont proposées dans [32Γ33Γ59].

L'intérêt de l'approche que nous proposons ici réside dans le caractère global (fonctions radiales en général) et surtout dans le fait que l'approche est d'autant plus performante que le système à résoudre est de grande taille.

Dans la deuxième et la troisième section nous définissons le cadre expérimental et des éléments numériques d'appréciation de la qualité des résultats obtenus. La quatrième section est consacrée à la spécification de l'ondelette par l'analyse des propriétés et les tests sur trois familles d'ondelettes. Nous réalisons ensuite quelques exemples de produits matrice-vecteur avec des matrices provenant de diverses fonctions radiales (différents ordre de positivité). Le calcul effectif de quelques surfaces par cette approche fera l'objet de la cinquième section. Nous utilisons une multiquadrique et une spline de type plaque mince pour interpoler des données en considérant plusieurs types de distributions.

8.2 Cadre des expériences numériques

Dans les données (15) (Cf. Chapitre 6) :

$$(x^i, F_i) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots N$$

du problème d'interpolation par les fonctions radiales les points $x^i \in D \subset \mathbb{R}^2$ sont soit sur une grille soit répartis de manière irrégulière dans un domaine défini par D . Notons que les problèmes de convergence ne se posent pas en des termes identiques selon que les points sont répartis sur tout le plan ou dans un domaine borné [58]. Nous considérons ici un domaine rectangulaire $D = [a, b] \times [c, d]$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. D est borné ce qui est généralement le cas dans la pratique [6, 14]. Nous utiliserons principalement deux types de grilles : une grille régulière notée (GI) (Cf. Figure (29)),

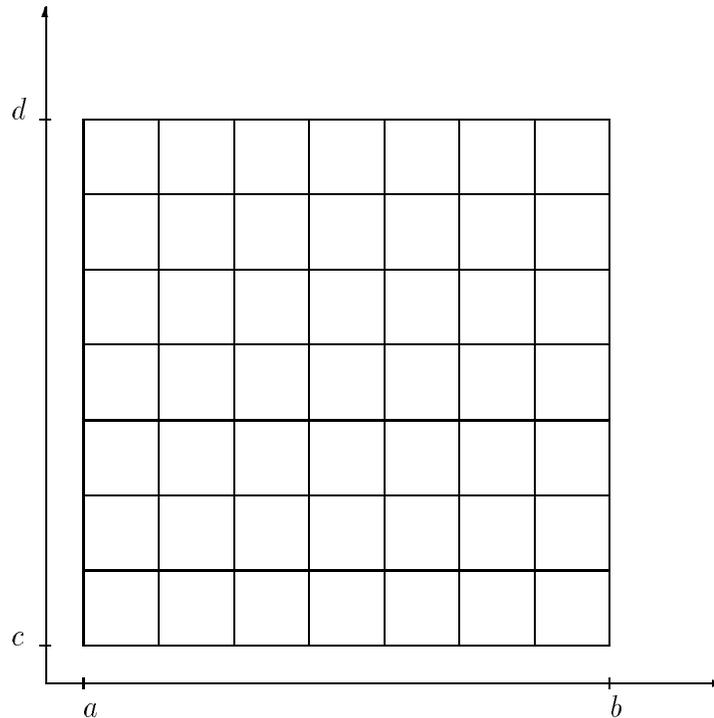


Figure 29: Exemple de grille régulière (GI)

et une grille (GII) obtenue à partir de (GI) par la transformation non linéaire :

$$(x, y) \mapsto \frac{\text{Max}(|x|, |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

Cette grille (*GII*) a déjà été utilisée par Dyn et al. [33Γ59] pour simuler le comportement de la matrice d'interpolation ou d'approximation en présence de données irrégulièrement réparties.

Les $F_i \in \mathbb{R}$ peuvent être les valeurs $F_i = f(x^i)$ d'une fonction régulière connue ou le résultat d'une mesure expérimentale. En fait les F_i sont souvent connues avec une erreur dont les caractéristiques statistiques (moyenneΓécart-type ...) sont inconnuesΓcas des erreurs aléatoiresΓou alors connuesΓcas où l'erreur suit une loi classique (processus de poissonΓgaussien ...).

8.3 Mesures de fidélité et d'efficacité de l'approche

Pour apprécier numériquement les résultats ou évaluer l'efficacité de la démarche proposéeΓ nous avons défini quelques mesures de fidélité. En faitΓ ces quantités nous permettent d'évaluer l'écart entre les résultats obtenus par un calcul classique et ceux obtenus par l'approche que nous proposons.

8.3.1 Mesures de fidélité

Dans un premier tempsΓ il s'agit de calculer le produit d'une matrice pleine par un vecteur (produit standard). Ensuite on effectue le même produit maisΓ avec la matrice et le vecteur décomposés dans une base d'ondelettesΓ suivi d'une mise à zéro de certains éléments de la matrice décomposée. Nous mesurons alors l'écart entre le résultat standard et son approximation.

Pour être plus précisΓ soit f^0 le résultat du produit d'une matrice et d'un vecteur calculé de manière standard et f Γ le résultat obtenu en utilisant la matrice rendue creuseΓ alors la différence entre f^0 et f en chaque point $x = (x_i, x_j)$ est $\varepsilon(i, j) := |f^0(x_i, x_j) - f(x_i, x_j)|$. De cette définition nous avons :

- La moyenne des erreurs : (*Er. Moy.*)

$$Er. Moy. := \frac{1}{N \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon(i, j)$$

- L'erreur maximale : (*Er. Max.*)

$$Er. Max. := \max(\varepsilon(i, j))_{i=1\dots N; j=1\dots N}$$

- L'erreur quadratique (ou en norme L^2) : (*Er. L^2* .)

$$Er. L^2 := \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon(i, j)^2}$$

- L'erreur quadratique relative : (*Er. Rel.*)

$$Er. Rel. := \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon(i, j)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |f^0(x_i, x_j)|^2}}$$

- La déviation standard : (*Dev. Stand.*)

$$Dev. Stand. := \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \varepsilon(i, j)^2 - \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon(i, j) \right]^2}$$

Dans un second temps Γ il s'agira d'interpoler une surface que nous noterons f^0 (surface initiale). On note $f\Gamma$ le résultat de l'interpolation de $f^0\Gamma$ et les quantités définies ci-dessus sont des erreurs d'interpolation classiques qui permettent d'apprécier la performance de la technique d'interpolation mise en œuvre.

Dans un troisième temps Γ la mesure de fidélité porte sur la surface interpolée en utilisant toutes les données (i.e matrice d'interpolation pleine) Γ que nous notons f^0 et la même surface interpolée après avoir décomposé la matrice d'interpolation (partie principale) dans une base d'ondelettes et mis à zéro un certain pourcentage de coefficients. Cette surface obtenue après avoir rendu la matrice creuse est notée f et les mesures de fidélité sont alors les mêmes que celles définies ci-dessus.

8.3.2 Mesure de l'efficacité de l'approche

On sait que l'utilisation d'une matrice creuse dans une procédure itérative réalisant plusieurs produits matrice-vecteur permet un calcul rapide. Le but de l'approche que nous proposons est d'accélérer le temps de calcul de l'interpolant en rendant creuse la matrice du système linéaire à résoudre. Cette accélération passe par :

- i) *la réduction du temps de calcul de la matrice creuse d'où choix d'une base appropriée d'ondelettes : problème de spécification de l'ondelette,*
- ii) *l'obtention du maximum de "creux" dans la matrice tout en préservant de bonnes précisions de calcul.*

Pour réduire la charge de calcul (de la transformation de la matrice pleine en matrice creuse) il faut utiliser des ondelettes “assez régulières”. Rappelons que la régularité d’une ondelette croît son nombre de moments nuls. En effet les ondelettes qui ne sont pas régulières ne permettent pas la réalisation du second critère d’efficacité qui est de maximiser le “taux de creux” (défini ci-dessous). Plus le taux de creux est important moins on a d’éléments non nuls dans la matrice. En considérant une structure de donnée ou une implémentation dans laquelle on évite les produits par zéro on obtient une certaine accélération.

Des ondelettes trop régulières augmentent le temps de calcul qui est proportionnel à la taille du filtre associé à l’ondelette. Il s’agit de trouver un compromis entre la régularité de l’ondelette et l’optimisation du taux de creux en un temps raisonnable.

Taux de creux

Pour caractériser l’accélération de l’approche on définit le “taux de creux” noté τ_{comp} de la matrice \tilde{A} obtenue après décomposition de A dans une base d’ondelettes par :

$$\tau_{comp}(\tilde{A}) = \frac{\text{Nombre de coefficients de } \tilde{A} \text{ mis à zéro}}{N \times N}$$

que nous ramenons à un pourcentage. En fait une fois qu’on a mis à zéro un certain nombre de coefficients de \tilde{A} le produit d’un vecteur avec cette matrice est proportionnel au nombre d’éléments “non nuls” si l’on évite des produits par zéro. On pourra donc effectuer très rapidement le produit de cette matrice par un vecteur et ainsi obtenir une bonne approximation du produit initial. Etant donné que les procédures itératives sont très gourmandes en produits de ce type elles peuvent être mise en œuvre de manière très économique.

Choix des coefficients à mettre à zéro

Etant donné que les coefficients d’ondelettes peuvent être “très petits” on peut mettre un certain nombre d’entre eux à zéro sans nuire à la précision des résultats. On obtient ainsi une bonne approximation du résultat avec transformation de la matrice et du vecteur. Pour choisir les éléments de la matrice qui sont petits i.e les coefficients d’ondelettes à négliger) nous avons adopté deux stratégies :

- i) *Ceux qui sont inférieurs à un certain seuil ϵ .* Il suffit de parcourir la liste de tous les coefficients d'ondelette de la matrice décomposée et de mettre à zéro ceux qui sont plus petits en valeur absolue que ϵ .
- ii) *Un certain pourcentage, disons α .* Il faut alors commencer par classer les valeurs absolues des coefficients d'ondelettes de la matrice. Ensuite déterminer la valeur $\epsilon\alpha$ donc l'index représente $\alpha\%$ des éléments de la matrice décomposée et enfin mettre à zéro les coefficients dont la valeur absolue est inférieure à $\epsilon\alpha$.

Il y a correspondance bi-univoque entre les deux manières de choisir les éléments “petits” car un seuil définit implicitement un pourcentage de la matrice et vice-versa. On peut cependant remarquer que le choix en terme de pourcentage est plus expressif. Car si l'on choisit de mettre $\alpha\%$ d'éléments à zéro cela signifie que l'on utilise ensuite seulement $\beta\% = (100 - \alpha)\%$ d'éléments pour effectuer les calculs ultérieurs d'où un gain de temps de $\frac{\alpha}{100}$. Typiquement ceci signifie que si l'on décide de mettre 80% d'éléments à zéro on utilise alors seulement les 20% restant pour les calculs. Le temps de calcul est alors réduit de $4/5^{\text{ème}}$!

8.4 Sur le choix de l'ondelette

Nous présentons ici quelques éléments numériques qui sans être exhaustifs donnent une indication sur le type d'ondelettes à mettre en œuvre pour ce type de calcul [93]. Nous avons testé trois familles d'ondelettes :

- i) Les ondelettes à décroissance exponentielle [42] qui ne sont à support compact que par des considérations numériques
- ii) Les ondelettes à support compact par construction d'I. Daubechies [50]
- iii) Les ondelettes biorthogonales [83] construites à partir des bancs de filtres.

Dans les tableaux de cette section la première colonne indique le nombre n_0 de coefficients du filtre utilisé pour le cas des ondelettes à décroissance exponentielle le nombre M de moments nuls de l'ondelette à support compact et le nombre n_0 (resp. \tilde{n}_0) de coefficients du filtre h (resp. \tilde{h} son dual) dans le cas des ondelettes biorthogonales.

Nous présentons sur la *Figure (30)* deux exemples de matrice d'interpolation de taille 256×256 . La matrice est donc obtenue en prenant les valeurs de la fonction

radiale en des points $t = (x_i, y_j)$ répartis sur la grille (GI) de taille 16×16 . En fait sur la *Figure (30, (a))* est seulement la partie principale de la matrice d'interpolation par une spline de type plaque mince alors que $(30, (b))$ représente toute la matrice d'interpolation pour le cas d'un multiquadrique. Rappelons que l'interpolation avec

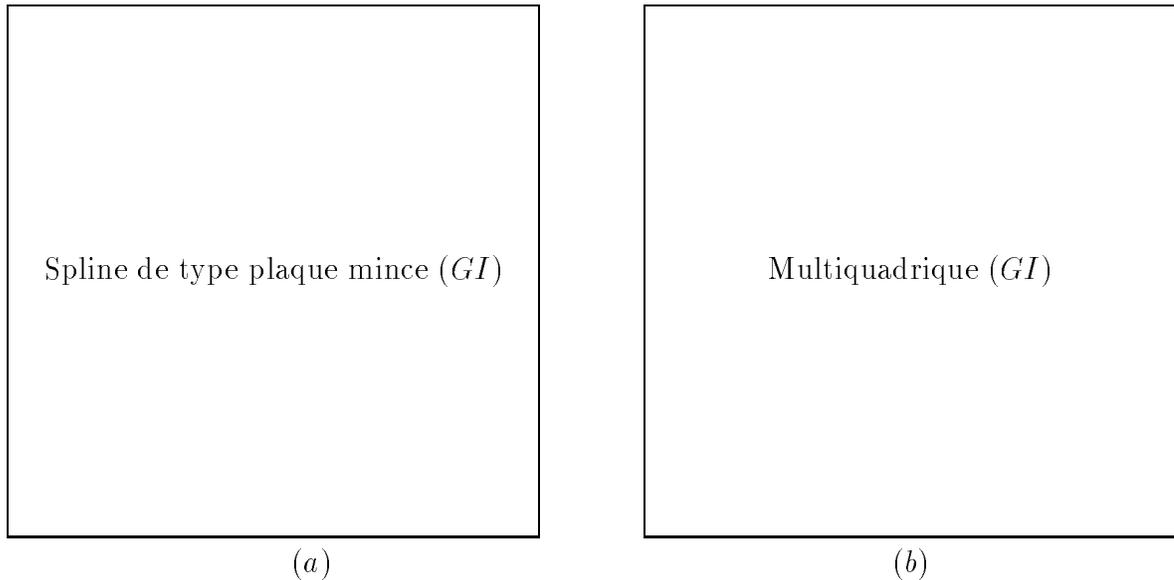


Figure 30: *Partie principale G_X de la matrice d'interpolation par une spline de type plaque mince (a) et matrice d'interpolation pour une multiquadrique (b) sur la grille (GI) .*

une multiquadrique ne nécessite pas l'ajout d'un terme polynomial. Avec différentes familles d'ondelettes Γ nous avons décomposé la matrice d'interpolation et mis à zéro 80% des coefficients d'ondelettes de la matrice.

La décomposition de la matrice Γ contrairement au cas des images est faite de manière à ce que la plus petite approximation de la matrice ait un seul élément. Cette décomposition suit le schéma de l'algorithme de Mallat. Les filtres utilisés sont séparables d'où une réduction de la charge de calcul. La décomposition se fait en $O(pN^2)$ où p est le nombre de coefficients du filtre pour une matrice de taille $N \times N$.

Pour ces expériences numériques Γ nous effectuons le produit d'une matrice ainsi obtenue (rendue creuse) par un vecteur aléatoire de norme unité. Rappelons qu'il s'agit dans cette section de mesurer l'écart entre d'une part le résultat du produit d'une matrice pleine par un vecteur aléatoire et d'autre part le résultat du même produit Γ

mais dans lequel la matrice a été rendue creuse.

Avec les ondelettes splines

Avec les ondelettes splines les *Tableaux* (11) et (12) montrent la précision des résultats obtenus avec cette famille d'ondelettes sur différentes répartitions de données. Les erreurs sont d'autant plus faibles que le filtre utilisé a de coefficients. On observe

n_0	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L²</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dev. Stand.</i>	<i>Temps (s)</i>
6	$3.30.10^{-1}$	$2.17.10^{-1}$	$2.22.10^{-1}$	$2.90.10^{-1}$	$5.01.10^{-1}$	6.400'
10	$7.96.10^{-2}$	$3.52.10^{-2}$	$3.93.10^{-2}$	$5.12.10^{-2}$	$1.75.10^{-2}$	10.017'
15	$4.82.10^{-2}$	$2.77.10^{-2}$	$2.97.10^{-2}$	$3.87.10^{-2}$	$1.05.10^{-2}$	14.650'
20	$4.82.10^{-2}$	$1.68.10^{-2}$	$2.04.10^{-2}$	$2.66.10^{-2}$	$1.15.10^{-2}$	19.117'
25	$4.86.10^{-2}$	$1.60.10^{-2}$	$2.02.10^{-2}$	$2.64.10^{-2}$	$1.23.10^{-2}$	23.233'
30	$4.78.10^{-2}$	$1.63.10^{-2}$	$2.02.10^{-2}$	$2.64.10^{-2}$	$1.19.10^{-2}$	27.400'

Tableau 11: *Ondelette à décroissance exponentielle sur (GI).*

pratiquement une stabilisation des erreurs pour les valeurs de n_0 supérieures à 15 sur les grilles (GI) et (GII). En fait les valeurs des coefficients des filtres deviennent de plus en plus petits au fur et à mesure que n croît (*Cf. Annexe A*). C'est d'ailleurs en les considérant comme nuls à un certain rang qu'on dit que ces ondelettes sont numériquement à support compact.

n_0	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L²</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dev. Stand.</i>	<i>Temps (s)</i>
6	$3.19.10^{-1}$	$2.05.10^{-1}$	$2.11.10^{-1}$	$2.81.10^{-1}$	$4.86.10^{-1}$	6.500'
10	$9.07.10^{-2}$	$3.93.10^{-2}$	$4.60.10^{-2}$	$6.14.10^{-2}$	$2.39.10^{-2}$	9.984'
15	$7.94.10^{-2}$	$2.95.10^{-2}$	$3.72.10^{-2}$	$4.97.10^{-2}$	$2.28.10^{-2}$	14.716'
20	$5.70.10^{-2}$	$2.54.10^{-2}$	$2.93.10^{-2}$	$3.91.10^{-2}$	$1.45.10^{-2}$	19.200'
25	$5.52.10^{-2}$	$2.56.10^{-2}$	$2.93.10^{-2}$	$3.91.10^{-2}$	$1.43.10^{-2}$	23.283'
30	$5.60.10^{-2}$	$2.56.10^{-2}$	$2.93.10^{-2}$	$3.92.10^{-2}$	$1.44.10^{-2}$	28.000'

Tableau 12: *Ondelette à décroissance exponentielle sur (GII).*

Le temps de calcul (dernière colonne) augmente avec la taille du filtre Γ ce qui est normal étant donné que l'on effectue un ensemble de produits de convolution. Les erreurs de calcul sur (GI) sont dans l'ensemble plus faibles que sur (GII) . Ce résultat indique que la matrice (du moins la partie principale) d'interpolation pour les données régulièrement réparties a une structure plus "lisse" que celle obtenue à partir de données non régulièrement distribuées.

Avec les ondelettes à support compact

Les ondelettes à support compact sont caractérisées par le nombre M de moments nuls. Remarquons que plus M est grand Γ plus régulière est l'ondelette correspondante (Cf. Chapitre I).

Les Tableaux (13) et (14) donnent les précisions obtenues avec des ondelettes à support compact pour les deux grilles considérées (GI) et (GII) .

M	$Er. Max.$	$Er. Moy.$	$Er. L^2$	$Er. Rel.$	$Dev. Stand.$	$Temps (s)$
2	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$3.35 \cdot 10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-3}$	$5.45 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	2.667'
3	$1.74 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	3.483'
4	$9.06 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$2.72 \cdot 10^{-3}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$	4.500'
5	$7.55 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$3.63 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	4.500'
6	$5.93 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$	6.717'
7	$7.07 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$2.40 \cdot 10^{-3}$	$3.13 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$	7.583'
8	$8.02 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$4.20 \cdot 10^{-3}$	$1.89 \cdot 10^{-3}$	8.617'

Tableau 13: Ondelette à support compact sur (GI) .

Nous observons en général que les erreurs sont plus faibles que ceux obtenues avec des ondelettes splines.

Ce qui est très remarquable c'est que l'on utilise un nombre très petit de coefficients par rapport au cas précédent pour des erreurs de même ordre de grandeur. Rappelons que quand on se fixe $n_0 \Gamma$ en fait on utilise un nombre n_{coef} de coefficients du filtre tel que $|n| < n_0$ i.e $n_{coef} = 2n_0 - 1$ pour le cas de l'ondelette spline. Avec les ondelettes à support compact Γ se fixe $M \Gamma$ le nombre de moment nul Γ revient à faire un produit de convolution avec un filtre de taille $2M$ d'où $n_{coef} = 2M$ pour une ondelette de Daubechies. Le temps de calcul reste proportionnel à la taille (nombre) des coefficients

M	$Er. Max.$	$Er. Moy.$	$Er. L^2$	$Er. Rel.$	$Dev. Stand.$	$Temps (s)$
2	$1.64.10^{-2}$	$3.05.10^{-3}$	$4.07.10^{-3}$	$5.43.10^{-3}$	$2.69.10^{-3}$	2.683'
3	$1.12.10^{-2}$	$2.60.10^{-3}$	$3.29.10^{-3}$	$4.39.10^{-3}$	$2.02.10^{-3}$	3.466'
4	$9.72.10^{-3}$	$2.25.10^{-3}$	$2.98.10^{-3}$	$3.98.10^{-3}$	$1.96.10^{-3}$	4.483'
5	$1.30.10^{-2}$	$2.66.10^{-3}$	$3.51.10^{-3}$	$4.68.10^{-3}$	$2.29.10^{-3}$	5.517'
6	$1.42.10^{-2}$	$2.67.10^{-3}$	$3.44.10^{-3}$	$4.59.10^{-3}$	$2.16.10^{-3}$	6.667'
7	$1.44.10^{-2}$	$2.68.10^{-3}$	$3.55.10^{-3}$	$4.74.10^{-3}$	$2.34.10^{-3}$	7.566'
8	$1.30.10^{-2}$	$2.89.10^{-3}$	$3.68.10^{-3}$	$4.91.10^{-3}$	$2.27.10^{-3}$	8.600'

Tableau 14: *Ondelette à support compact sur (GII).*

des filtres et la précision des résultats augmente avec leur nombre. Les résultats obtenus sur (GI) sont meilleurs que ceux obtenus sur (GII) . Pour les ondelettes ayant jusqu'à 8 moments nuls on constate sur (GI) que celle qui a 6 moments nuls donne de meilleurs résultats alors que sur (GII) c'est celle qui a 4 moments nuls.

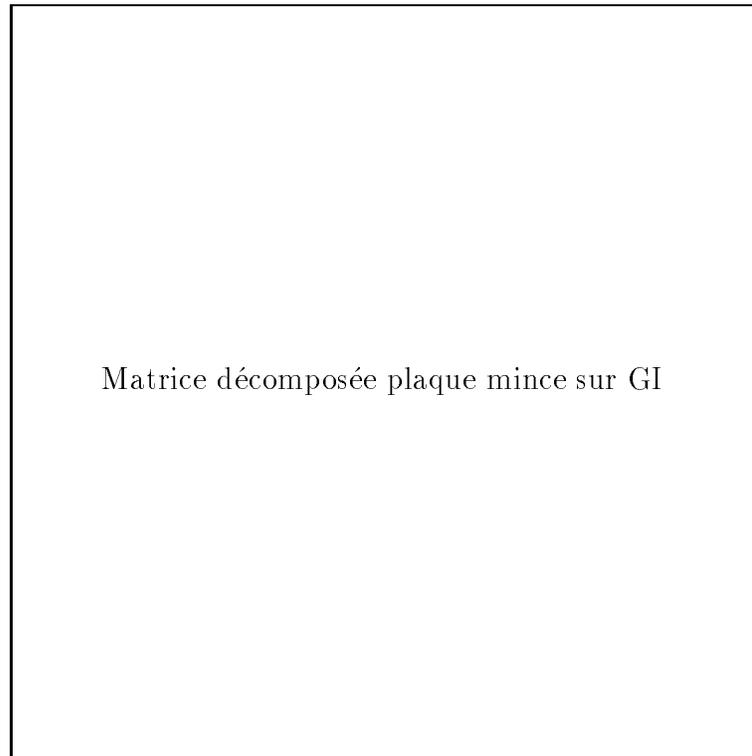
Nous présentons *Figure (31)* deux exemples de la structure "creuse et étirée" de la partie principale de la matrice d'interpolation par une spline de type plaque mince *Figure (31, (a))* et par une multiquadrique *Figure (31, (b))* sur la grille (GI) après la décomposition dans une base d'ondelettes à support compact suivie d'une mise à zéro des coefficients de valeur absolue inférieure à 10^{-3} . En fait le taux de creux que nous évaluons est caractérisé dans cette représentation matricielle par la présence de zone blanche dans les sous matrices de coefficients d'ondelettes.

On observe sur les deux matrices de la *Figure (31)* les "creux" *a priori* dûs à la réorganisation de la matrice et ceux engendrés par la mise à zéro des coefficients d'ondelettes de très faibles valeurs numériques.

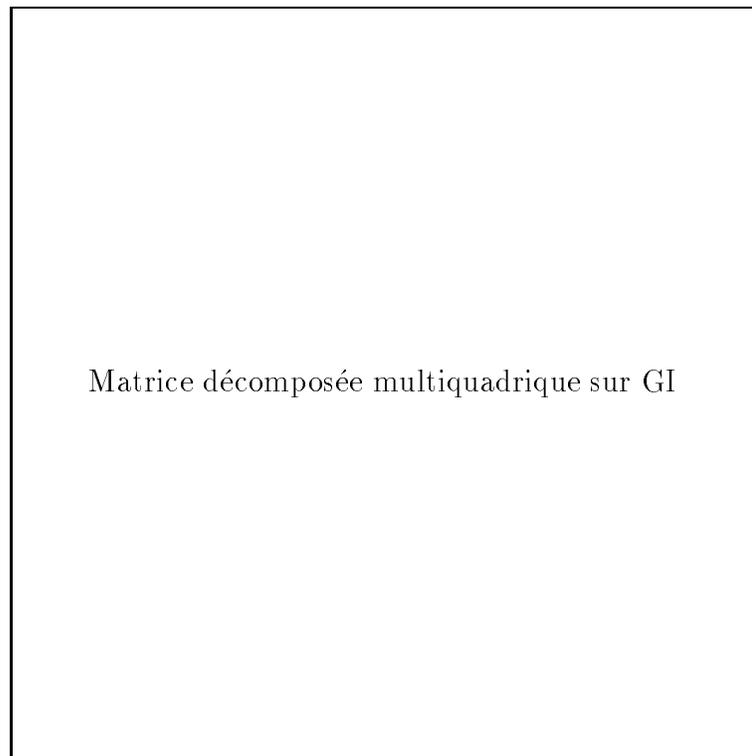
Avec des ondelettes biorthogonales

On utilise en fait deux ondelettes (filtres associés) qui peuvent être de régularité différentes. Ici n_0 (*resp.* \tilde{n}_0) représente le nombre de coefficient du filtre h (*resp.* \tilde{h}) associé à l'ondelette ψ (*resp.* $\tilde{\psi}$, son dual). Les convolutions sont effectuées avec $ncoef = n_0$ (*resp.* $mcoef = \tilde{n}_0$) éléments. Avec des ondelettes biorthogonales nous obtenons des résultats qui sont présentés dans les *Tableaux (15) et (16)*.

Sur les grilles (GI) et (GII) les *Tableaux (15) et (16)* montrent que les meilleurs



(a)



(b)

Figure 31: Structure “étirée et creuse” de la matrice d’interpolation sur la grille (GI). Après décomposition, nous avons mis 80% de coefficients d’ondelettes à zéro. (a) Spline de type plaque mince; (b) Multiquadrique.

$n_0-\tilde{n}_0$	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L^2</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dév. Stand.</i>	<i>Temps (s)</i>
3-3	$1.51.10^{-1}$	$5.42.10^{-2}$	$6.70.10^{-2}$	$8.74.10^{-2}$	$3.94.10^{-2}$	3.000'
5-5	$7.88.10^{-1}$	$7.44.10^{-1}$	$7.45.10^{-1}$	$9.72.10^{-1}$	$3.57.10^{-2}$	4.216'
5-7	$9.68.10^{-3}$	$2.96.10^{-3}$	$3.63.10^{-3}$	$4.74.10^{-3}$	$2.11.10^{-3}$	4.850'
9-7	$1.21.10^{-2}$	$3.82.10^{-3}$	$4.66.10^{-3}$	$6.08.10^{-3}$	$2.68.10^{-3}$	6.034'
11-9	$3.18.10^{-2}$	$8.87.10^{-3}$	$1.19.10^{-2}$	$1.55.10^{-2}$	$7.93.10^{-3}$	7.250'

Tableau 15: *Ondelettes biorthogonales sur (GI).*

résultats sont obtenus avec les ondelettes biorthogonales 5-7.

$n_0-\tilde{n}_0$	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L^2</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dév. Stand.</i>	<i>Temps (s)</i>
3-3	$1.48.10^{-1}$	$4.76.10^{-2}$	$5.58.10^{-2}$	$7.45.10^{-2}$	$2.93.10^{-2}$	2.948'
5-5	$8.22.10^{-1}$	$7.27.10^{-1}$	$7.29.10^{-1}$	$9.73.10^{-1}$	$5.24.10^{-2}$	4.216'
5-7	$1.71.10^{-2}$	$2.93.10^{-3}$	$3.99.10^{-3}$	$5.33.10^{-3}$	$2.71.10^{-3}$	4.800'
9-7	$1.87.10^{-2}$	$3.73.10^{-3}$	$4.56.10^{-3}$	$6.09.10^{-3}$	$2.62.10^{-3}$	6.034'
11-9	$2.51.10^{-2}$	$7.35.10^{-3}$	$9.27.10^{-2}$	$1.24.10^{-2}$	$5.65.10^{-3}$	7.250'

Tableau 16: *Ondelettes biorthogonales sur (GII).*

Quand les ondelettes ne sont pas de même régularité nous utilisons la plus régulière dans la phase de reconstruction du vecteur solution du produit matrice-vecteur. Sur les résultats obtenus en mettant les faibles coefficients à zéro on a pratiquement les mêmes remarques que ci-dessus concernant le temps de calcul et la précision numérique.

Rappelons que les matrices proviennent de la fonction radiale $g(t) = t^2 \log t$ et que les vecteurs qui sont de norme unité sont obtenus par un processus aléatoire.

De la spécification des ondelettes on peut conclure que les ondelettes à support compact sont des trois familles testées celles qui donnent les meilleurs résultats pour le problème posé. D'une part la taille du filtre mis en œuvre est raisonnable et par conséquent le temps de calcul et d'autre part les résultats obtenus avec les différents éléments de mesure d'écart que nous avons définis dans la *Section (8.3.1)* sont plus précis. Pour les ondelettes ayant jusqu'à 8 moments nuls celle de 4 moments nuls est suffisante pour le problème d'interpolation considéré sur (GII) alors que sur (GI) il

faut utiliser celle qui a 6 moments nuls. Les ondelettes biorthogonales peuvent être utilisées. De ceux que nous avons testés les ondelettes 5-7 donnent bons résultats sur les deux configurations de données. Les ondelettes splines sont simplement à déconseiller étant donné le rapport entre le nombre de coefficients du filtre utilisé et les erreurs obtenues.

8.4.1 Sur la taille des données

La résolution du problème d'interpolation par les fonctions radiales est particulièrement difficile quand le nombre de données est important et alors la matrice est très dense et de grande taille et mal conditionnée [33, 59].

Avec les ondelettes à support compact nous avons calculé le taux de creux pour différentes tailles de matrices sur (GI) et (GII) . Nous présentons dans les *Tableaux* (17) et (18) les résultats obtenus en utilisant les ondelettes à support compact ayant six moments nuls. Notons que la matrice est construite de la même manière que précédemment et le produit est effectué avec un vecteur aléatoire de taille correspondante.

N	$Er. Max.$	$Er. Moy.$	$Er. L^2$	$Er. Rel.$	$Dév. Stand.$	$\tau_{Comp.}$
64	$8.77 \cdot 10^{-3}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$3.30 \cdot 10^{-3}$	$8.79 \cdot 10^{-3}$	$1.93 \cdot 10^{-3}$	66.02%
256	$8.69 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$	$4.08 \cdot 10^{-3}$	$5.32 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	83.76%
1024	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	92.07%

Tableau 17: $\tau_{Comp.}$ augmente avec la taille des données sur (GI) .

N	$Er. Max.$	$Er. Moy.$	$Er. L^2$	$Er. Rel.$	$Dév. Stand.$	$\tau_{Comp.}$
64	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$3.04 \cdot 10^{-3}$	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-3}$	66.36%
256	$1.61 \cdot 10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-3}$	$5.67 \cdot 10^{-3}$	$2.73 \cdot 10^{-3}$	83.82%
1024	$2.49 \cdot 10^{-2}$	$3.65 \cdot 10^{-3}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$	$3.27 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	91.89%

Tableau 18: $\tau_{Comp.}$ augmente avec la taille des données sur (GII) .

Ici au lieu de considérer un pourcentage nous avons mis à zéro tous les coefficients de valeur absolue inférieure à 10^{-2} . Les erreurs que nous obtenons sont de l'ordre de

10^{-3} . Ce qui est surtout intéressant est la croissance du taux de creux avec la taille de la matrice. On peut par exemple mettre 92.07% de coefficients d'ondelette d'une matrice 1024×1024 à zéro et obtenir des erreurs de l'ordre de 10^{-3} comme indiqué dans le *Tableau* (17) ! Ayant mis cette proportion de coefficients à zéro les calculs se font plus rapidement avec le peu de coefficients non nuls qui constitue la matrice.

L'approche que nous proposons pour résoudre de manière économique les problèmes d'interpolation par des fonctions radiales sera donc d'autant plus performante que le nombre de données est important. Les *Tableaux* (17) et (18) nous montrent que les taux de creux sont alors plus important quand les données augmentent. Les meilleurs résultats sont obtenus sur la grille (*GI*) avec des ondelettes à support compact.

8.4.2 Sur quelques fonctions radiales

Avec différentes fonctions radiales (différents ordres de positivité) nous avons comparé les erreurs obtenues après une décomposition dans une base d'ondelettes et un seuillage avec différentes tailles de matrice. Sur 64 et 256 points nous donnons dans le *Tableau* (19) les écarts de calcul pour les fonctions radiales d'ordre de positivité 0, 1 et 2 sur (*GI*). On observe en général que pour le même ordre de positivité les

<i>Fonctions radiales</i>	<i>N</i>	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L²</i>	<i>Er. Rel.</i>	τ_{comp}
$g(t) = (t^2 + c^2)^{-1/2}$	64	$7.38 \cdot 10^{-1}$	$3.05 \cdot 10^{-1}$	$3.62 \cdot 10^{-1}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$1.94 \cdot 10^{-1}$
	256	$5.85 \cdot 10^{-1}$	$1.97 \cdot 10^{-1}$	$2.40 \cdot 10^{-1}$	$6.48 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-1}$
$g(t) = -t$	64	$2.18 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$5.40 \cdot 10^{-2}$
	256	$1.02 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$4.20 \cdot 10^{-2}$	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$2.29 \cdot 10^{-2}$
$g(t) = t^2 \log t$	64	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$4.97 \cdot 10^{-3}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$	$3.87 \cdot 10^{-3}$
	256	$5.93 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$

Tableau 19: *Fonctions radiales de différents ordre de positivité sur (GI).*

erreurs sont faibles quand on a plus de points d'interpolation. Plus l'ordre de positivité est élevé plus les erreurs sont faibles. Ainsi les meilleures précisions sont obtenues

avec la spline de type plaque mince qui est d'ordre de positivité 2 et sur 256 points. Remarquons que cet ordre de positivité définit de manière implicite le degré du polynôme qui est reproduit par l'interpolant. Avec la spline de type plaque mince mise en œuvre l'interpolation est exacte pour les polynômes à deux variables et de degré deux.

8.5 Calcul des surfaces

Dans cette section nous présentons les résultats des surfaces interpolées d'une part avec la matrice pleine et d'autre part avec la matrice décomposée dans une base d'ondelettes suivie d'un seuillage. Nous avons utilisé des ondelettes à support compact et les grilles (GI) et (GII). Notons que pour l'interpolation par une multiquadrique toute la matrice est décomposée dans la base d'ondelettes alors que pour le cas d'une spline de type plaque mince c'est la partie principale G_X de la matrice G qui est décomposée. En effet c'est cette partie (Cf. Chapitre 6) qui est la plus dense et présente une "certaine régularité" par rapport à toute la matrice G du système. La procédure itérative mise en œuvre est le gradient conjugué dans le cas de la multiquadrique. Il est bien connu qu'elle converge en $O(N)$. Pour la spline de type plaque mince nous avons eu recours au gradient projecté étant donné que la matrice du système n'est pas définie positive. Le test d'arrêt des itérations porte sur la norme du résidu que nous rendons inférieure à 10^{-6} . Nous avons sur chaque type de grille considéré une surface non bruitée et une surface bruitée. Le bruit (5%) est obtenu par un générateur aléatoire. La fonction interpolée est :

$$f(x, y) = 0.75 \times e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-0.30)^2 + (y-0.70)^2}{\sigma^2}} + 0.25 \times e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-0.70)^2 + (y-0.30)^2}{2\sigma^2}}$$

sur $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Les Figures (32), (33), (34) et (35) représentent les résultats de cette approximation. Nous avons pour chaque Figure en (a) la surface originale en (b) la surface bruitée. Ensuite (c) (resp. (d)) représente l'interpolant de la surface originale (a) (resp. surface bruitée (b)) avec la matrice pleine i.e sans décomposition dans une base d'ondelettes. Enfin (e) (resp. (f)) représente l'interpolant de la surface (a) (resp. surface (b)) avec la matrice décomposée dans une base d'ondelettes et un pourcentage de coefficients mis à zéro. En fait (e) (resp. (f)) est en fait une approximation de (c) (resp. (d)), obtenue en rendant creuse la matrice du système linéaire après une décomposition dans une base d'ondelettes.

Les surfaces non bruitées sont parfaitement interpolées sur les grilles (*GI*) et (*GII*) avec la multiquadrique et la spline de type plaque mince. On observe cependant que les surfaces interpolées sur (*GII*) ont une dynamique plus faible que sur (*GI*).

En ce qui est des surfaces bruitées on observe un effet de lissage de l'interpolant. L'effet de ce lissage tend à éliminer le bruit.

Quand on compare les surfaces interpolantes (*c*) (*resp.* (*d*)) aux surfaces interpolées (*a*) (*resp.* (*b*)) on se rend compte de l'efficacité de la méthode d'interpolation par les fonctions radiales. On sait aussi que cette méthode reproduit (est exacte) pour les polynômes dont l'ordre est celui de la positivité de la fonction radiale considérée.

C'est pour palier aux difficultés de résolution du système linéaire intervenant dans cette méthode d'interpolation ou d'approximation que nous proposons de rendre creuse la matrice du système. Il s'agit donc d'approximer les résultats de l'interpolation avec une charge de calcul minimale sans grande perte de précision numérique. La surface (*e*) (*resp.* (*f*)) approxime la surface (*c*) (*resp.* (*d*)), mais le calcul est fait après décomposition de la matrice dans une base d'ondelettes.

Dans le cas des surfaces non bruitées on peut mettre jusqu'à 80% de coefficients d'ondelettes de la matrice à zéro et obtenir une bonne approximation de l'interpolant. On gagne ainsi $4/5^{\text{ème}}$ du temps de calcul sans nuire de manière significative à la précision des résultats. Par contre quand la surface est bruitée les résultats sont moins bons. Il faut souvent mettre seulement 25% de coefficients à zéro pour obtenir la convergence du processus itératif. Le lissage de l'approximation n'est pas toujours régulier.

8.5.1 Avec une multiquadrique de Hardy

La fonction radiale est la multiquadrique de Hardy [7] qui a une positivité d'ordre 0 et dont l'expression analytique est : $g(t) = (t^2 + c^2)^{-1/2}$. L'interpolant ne contient pas de terme polynômial. Nous présentons dans les *Tableaux* (20) et (21) les erreurs de calcul entre les surfaces interpolées avec la matrice pleine d'une part et la matrice rendue creuse après décomposition dans une base d'ondelettes d'autre part.

8.5.2 Avec une spline de type plaque mince

Rappelons que la spline de type plaque mince [17] est associée à la fonction radiale $g(t) = t^2 \log t$ qui est de positivité 2. La formule explicite de la surface correspondante

Surfaces	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L²</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dév. Stand.</i>
(a) – (c)	$3.55.10^{-3}$	$2.44.10^{-4}$	$4.59.10^{-4}$	$2.65.10^{-3}$	$3.88.10^{-4}$
(a) – (e)	$1.76.10^{-2}$	$4.47.10^{-3}$	$5.70.10^{-3}$	$3.30.10^{-2}$	$3.54.10^{-3}$
(b) – (d)	$2.93.10^{-2}$	$1.03.10^{-2}$	$1.23.10^{-2}$	$7.10.10^{-2}$	$6.64.10^{-3}$
(b) – (f)	$1.06.10^{-1}$	$2.53.10^{-2}$	$3.36.10^{-2}$	$1.94.10^{-1}$	$2.20.10^{-2}$

Tableau 20: *Les erreurs de calcul sur les surfaces interpolées/approximées par une multiquadrique sur (GI) représentées sur la Figure (32) .*

Surfaces	<i>Er. Max.</i>	<i>Er. Moy.</i>	<i>Er. L²</i>	<i>Er. Rel.</i>	<i>Dév. Stand.</i>
(a) – (c)	$2.63.10^{-3}$	$2.53.10^{-4}$	$5.22.10^{-4}$	$2.76.10^{-3}$	$4.57.10^{-4}$
(a) – (e)	$3.05.10^{-2}$	$1.08.10^{-2}$	$1.30.10^{-2}$	$6.84.10^{-2}$	$7.19.10^{-3}$
(b) – (d)	$1.75.10^{-1}$	$4.52.10^{-2}$	$5.48.10^{-2}$	$2.90.10^{-1}$	$3.10.10^{-2}$
(b) – (f)	$3.88.10^{-2}$	$1.09.10^{-2}$	$1.34.10^{-2}$	$7.08.10^{-2}$	$7.83.10^{-3}$

Tableau 21: *Les erreurs de calcul sur les surfaces interpolées/approximées par une multiquadrique sur (GII) représentées sur la Figure (33) .*

contient un polynôme à deux variables d'ordre 2.

8.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats expérimentaux de l'approche de l'interpolation par les fonctions radiales que nous avons proposée. Les ondelettes à support compact de Daubechies donnent de meilleurs résultats. Les erreurs d'approximation sur la grille (*GI*) sont plus faibles que celles obtenues sur (*GII*). L'approche proposée est assez générale (fonction radiale de différents ordre de positivité) et d'autant plus performante que le nombre de données est important. On observe que les surfaces interpolées en utilisant seulement 30% de coefficients d'ondelettes approximent assez bien les surfaces interpolées sans décomposition matricielle. Notons que nous n'avons pas considéré que le taux de creux pour apprécier l'accélération de notre approche. En fait il faut dans l'implémentation utiliser une structure spécifique aux codages de matrices creuses ceci afin d'éviter les produits par zéro.

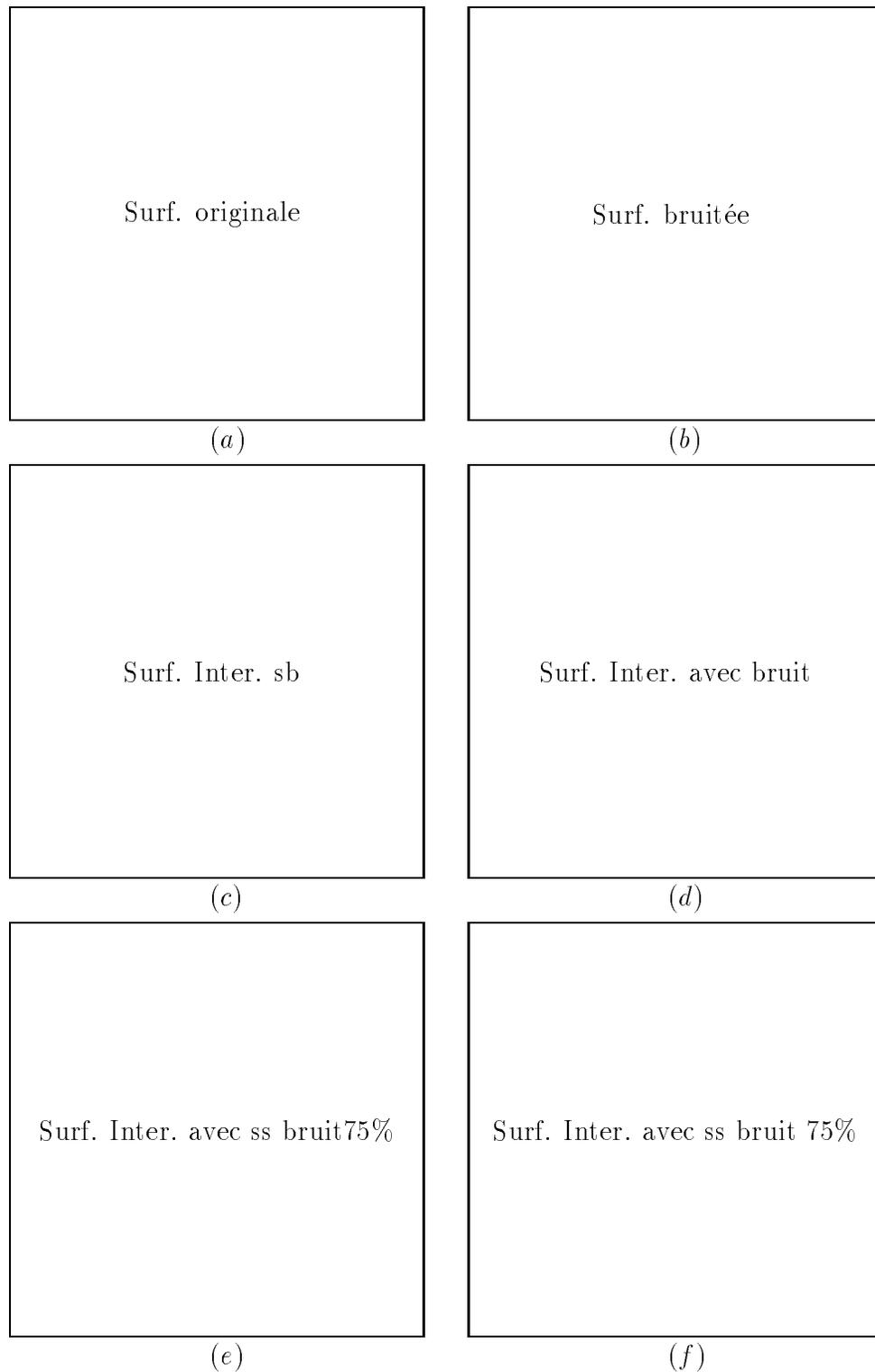


Figure 32: *Interpolation avec une multiquadrique sur (GI).* (a) : *Surface originale*; (c) : *Interpolation de (a)*; (e) : *Interpolation de (a) avec $\tau_{comp} = 80\%$* ; (b) : *Surface bruitée (5% de bruit)*; (d) : *Interpolation de (b)*; (f) : *Interpolation de (b) avec $\tau_{comp} = 75\%$* .

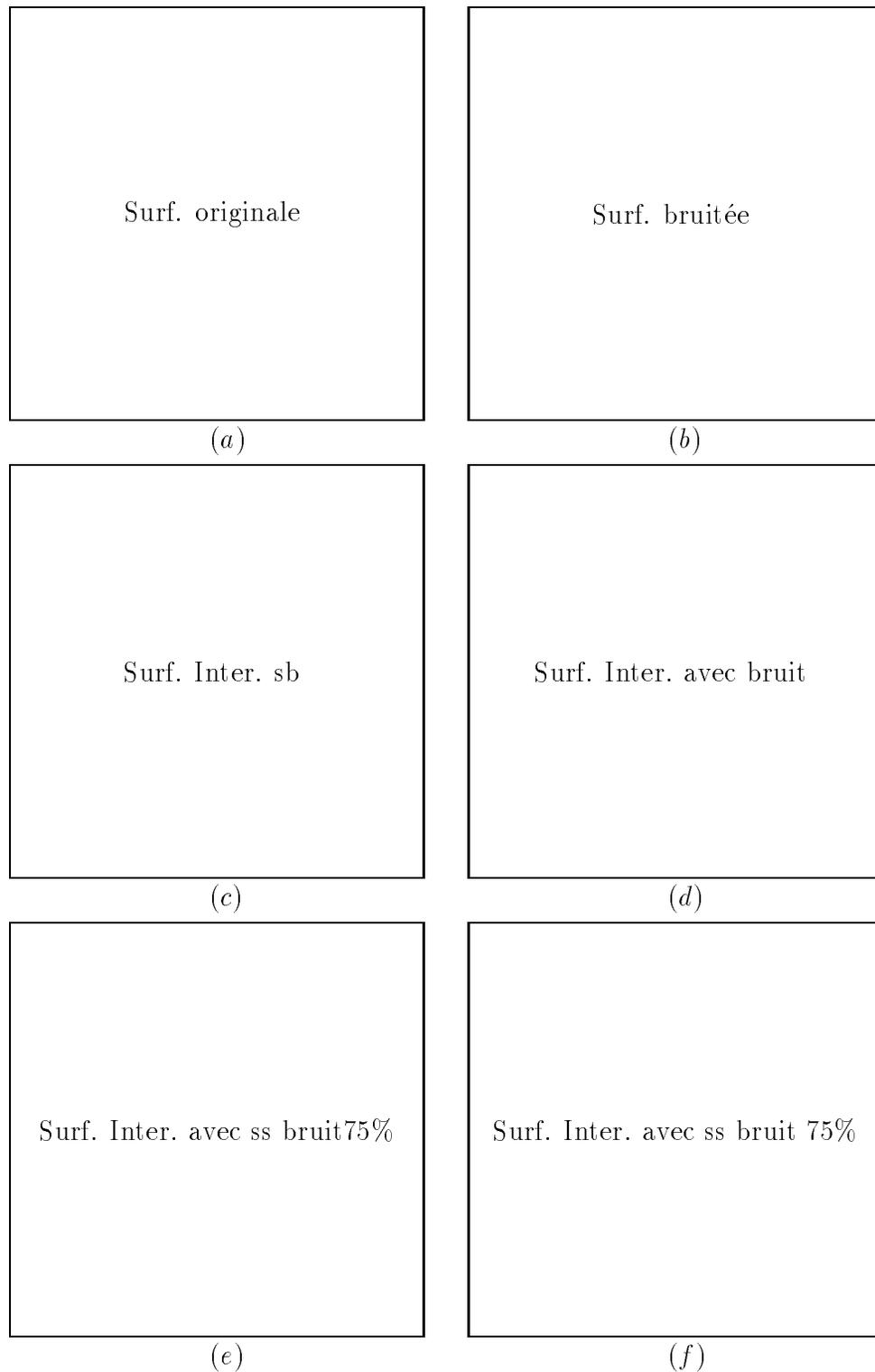


Figure 33: *Interpolation avec une multiquadrique sur (GII).* (a) : Surface originale; (c) : Interpolation de (a); (e) : Interpolation de (a) avec $\tau_{comp} = 75\%$; (b) : Surface bruitée (5% de bruit); (d) : Interpolation de (b); (f) : Interpolation de (b) avec $\tau_{comp} = 50\%$.

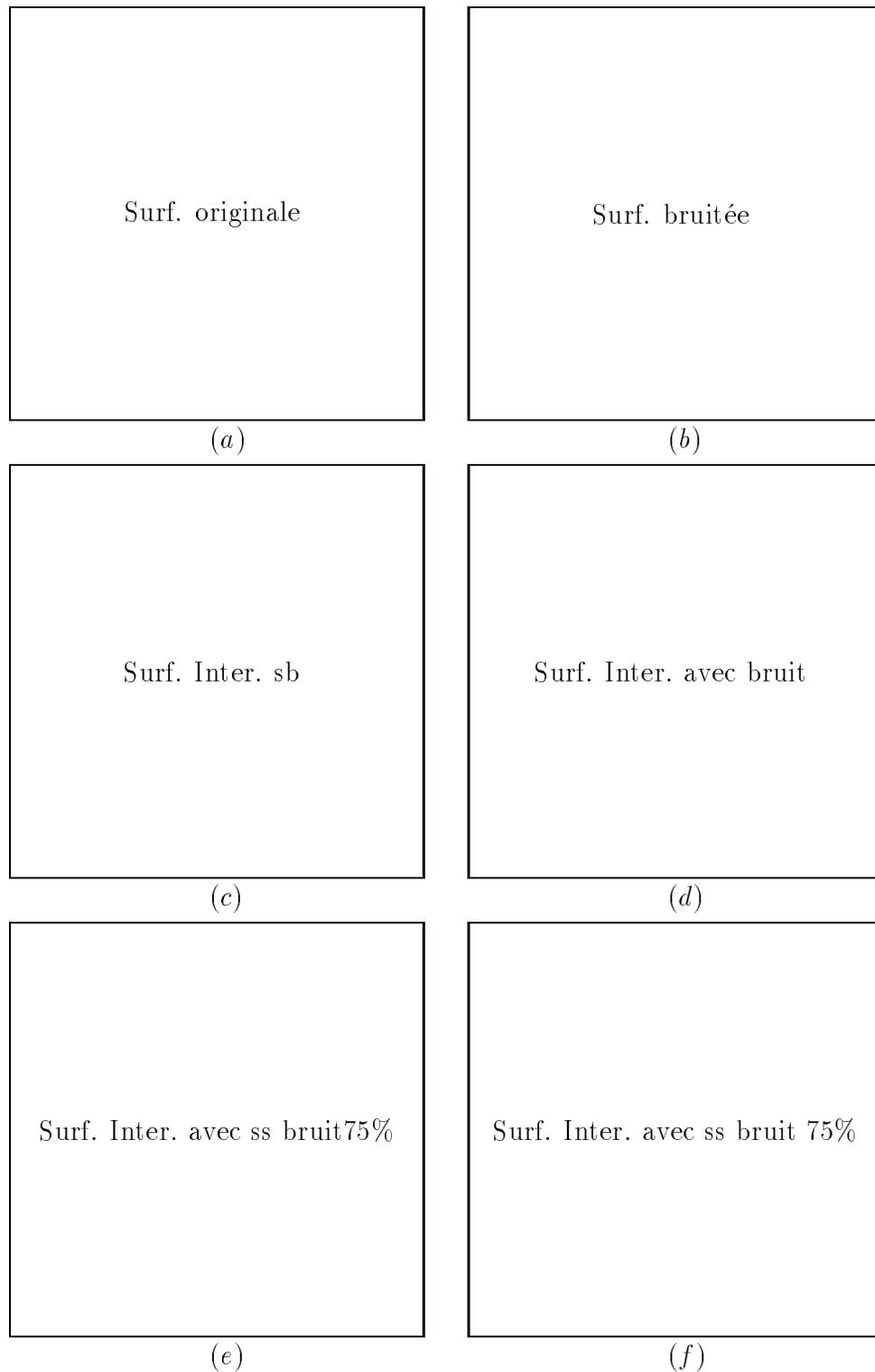


Figure 34: *Interpolation avec une spline de type plaque mince sur (GI). (a) : Surface originale; (c) : Interpolation de (a); (e) : Interpolation de (a) avec $\tau_{comp} = 75\%$; (b) : Surface bruitée (5% de bruit); (d) : Interpolation de (b); (f) : Interpolation de (b) avec $\tau_{comp} = 50\%$.*

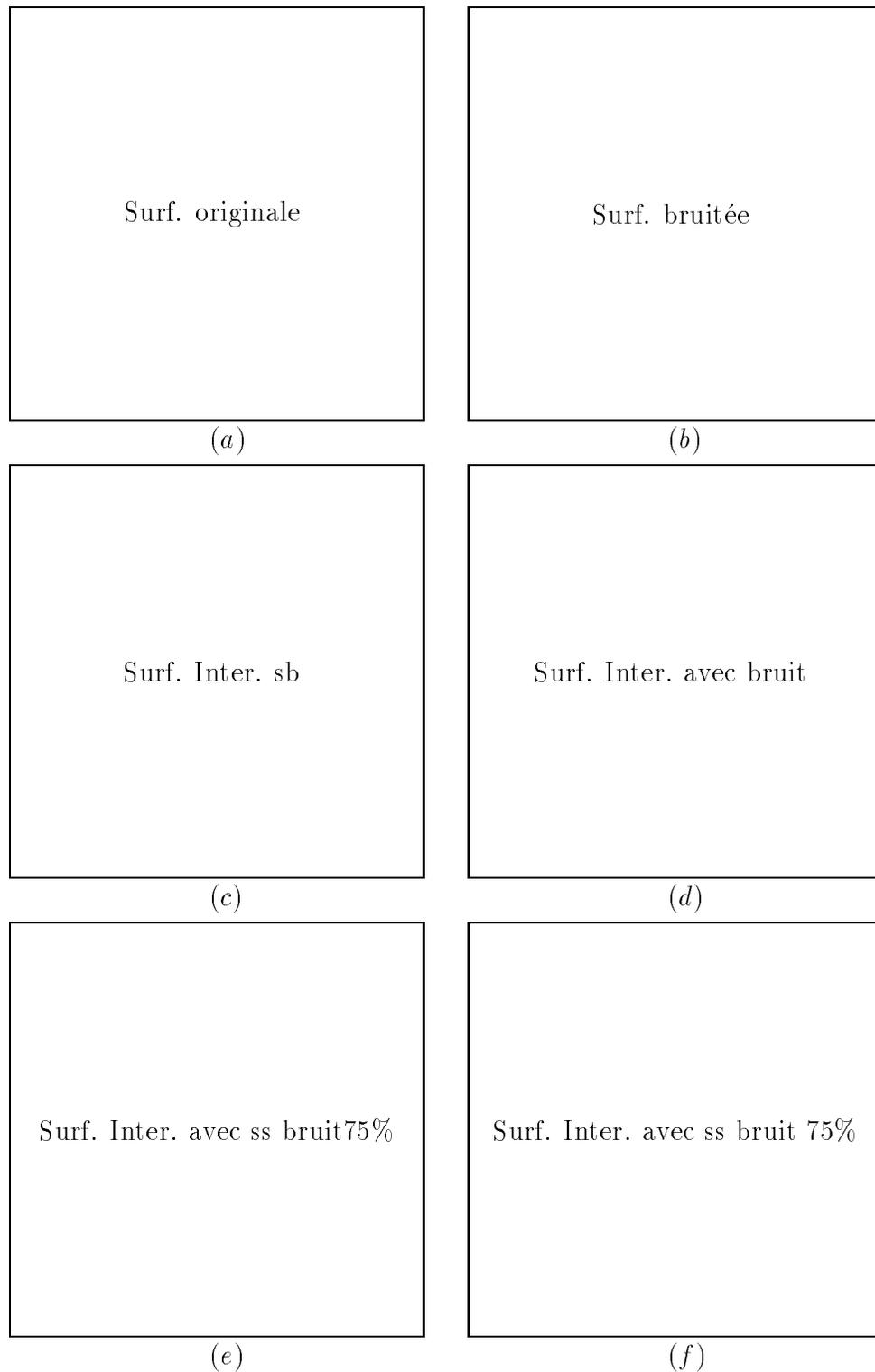


Figure 35: *Interpolation avec une spline de type plaque mince sur (GII). (a) : Surface originale; (c) : Interpolation de (a); (e) : Interpolation de (a) avec $\tau_{comp} = 60\%$; (b) : Surface bruitée (5% de bruit); (d) : Interpolation de (b); (f) : Interpolation de (b) avec $\tau_{comp} = 25\%$.*

Conclusion

Dans ce mémoire de thèse nous avons présenté dans le chapitre 1 la construction des ondelettes par différentes approches à savoir : l'approche théorie des groupes, l'approche multirésolution ou analyse graduée et l'approche bancs de filtres. Nous avons signalé quelques extensions de la notion d'ondelettes en tant que familles de fonctions qui engendrent un espace fonctionnel : notions de repère et de paquet d'ondelettes. De par leurs propriétés ces fonctions sont très étudiées tant du point de vue pratique que théorique. Elles ont permis des reformulations et des énoncés (théorèmes et démonstrations) plus simples en théorie des opérateurs et souvent une meilleure analyse et interprétation en traitement du signal et image.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux applications des ondelettes d'abord en imagerie et ensuite au problème d'interpolation par des fonctions radiales.

En imagerie nous avons considéré deux problèmes : la compression d'images et la représentation multi-échelle d'un contour ou d'une courbe dans le domaine discret.

Nous avons fait un survol des différentes techniques de compression d'images fixes en insistant sur les techniques de compression par transformation dans le chapitre 2. On privilégie pour la compression les transformations qui conservent l'énergie et permettent d'obtenir des coefficients décorrélés et qui possèdent un algorithme rapide.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de quelques algorithmes à structure pyramidale aux résultats de l'implémentation dans une perspective d'une compression et à l'analyse de la stabilité des contours ou indices visuels dans les représentations hiérarchiques.

Nous avons commencé par présenter deux algorithmes d'analyse et de synthèse par transformations en ondelettes puis par l'algorithme pyramidal de Burt et Adelson. L'algorithme de Mallat est présenté d'un point de vue général i.e tel que l'implémentation puisse se faire avec un filtre non séparable. En ce sens notre présentation est plus

proche des algorithmes de codage par bancs de filtres. L'implémentation de cet algorithme donne de très bons résultats visuels. Les deux paramètres qu'il faut prendre en compte sont la taille du filtre et le nombre de niveaux de résolution. Nous avons montré que les erreurs de reconstruction diminuent avec le nombre de coefficients du filtre. Pour une même ondelette (filtre) ces erreurs augmentent avec le nombre de niveaux de résolution. Nous nous sommes intéressés ensuite à la représentation d'une image par la pyramide laplacienne qui est assez proche dans son aspect hiérarchique de la représentation par ondelettes. L'étude de l'effet du paramètre indépendant \mathbf{a} de cette pyramide nous a permis de montrer entre autres que pour les valeurs de \mathbf{a} dans $[0, 1[$ la précision numérique de l'image reconstruite diminue quand \mathbf{a} augmente.

Dans la perspective de l'utilisation de la transformation en ondelettes dans un processus de compression d'images nous avons considéré simplement les phases d'analyse et de synthèse. Après avoir décomposé l'image dans une base d'ondelettes (trois niveaux de résolution) nous avons mis un certain pourcentage de coefficients d'ondelettes de l'image à zéro avant la synthèse. On montre par exemple que si visuellement pour certaines ondelettes on ne fait pas de différence entre une image reconstruite avec tous les coefficients (d'ondelettes) et celle reconstruite avec seulement 50% des coefficients il y a numériquement perte de précision. On observe qu'il faut souvent annuler plus de 80% des coefficients d'ondelettes pour se rendre compte de la dégradation de l'image reconstruite. Pour certaines ondelettes (à support compact et biorthogonales) nous obtenons à la précision de la machine près une reconstruction exacte. Nous avons montré que la reconstruction est d'autant plus précise que le nombre de coefficients du filtre est important et que cette précision diminue quand on augmente la résolution ou le niveau de la pyramide.

Nous avons établi une formule qui nous donne une estimation du taux de compression qui peut être atteint en mettant un certain pourcentage de coefficients d'ondelettes à zéro. Cette estimation dépend du nombre s de bits nécessaire pour coder l'image de texture à la résolution k ainsi que du nombre de bits d pour le codage des détails successifs.

Nous avons montré que la représentation d'une image par la pyramide laplacienne est plus sensible que la représentation par ondelettes à la perte des coefficients de détails.

Dans le cadre de l'analyse de la stabilité ou de la robustesse d'indices visuels dans

une structure hiérarchique nous avons étudié la représentation par la pyramide laplacienne et l'algorithme multirésolution avec plusieurs familles d'ondelettes. Nous avons montré que la représentation par ondelettes est plus stable. Les ondelettes biorthogonales donnent de meilleurs résultats.

Le chapitre 4 est consacré aux représentations d'une forme ou d'un contour discret codé notamment par la suite de Freeman. Nous avons fait un rappel sur quelques notions de représentation de courbes et de codage en imagerie. Nous avons ensuite explicité le codage de Freeman ainsi que quelques propriétés.

Nous avons proposé un algorithme d'analyse et de synthèse d'un contour ou d'une courbe dans le domaine discret basé sur la représentation en ondelettes dans le chapitre 5. L'implémentation de notre algorithme avec l'ondelette de Haar donne de très bons résultats. Notons qu'une phase de quantification est indispensable pour garantir le caractère discret du traitement.

Les chapitres 6, 7 et 8 sont consacrés à l'application des ondelettes au problème d'interpolation par les fonctions radiales.

Nous avons commencé par poser le problème d'interpolation/approximation par les fonctions radiales en général dans le chapitre 6. Les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont rappelées. Ensuite nous avons présenté quelques approches de solutions et leurs limites. Dans le chapitre 7 nous décrivons l'algorithme *BCR*, qui utilise la décomposition en ondelettes pour rendre creuses des matrices issues de certains opérateurs.

L'algorithme *BCR* est ensuite mis en œuvre pour rendre creuse la matrice du système linéaire intervenant dans la résolution du problème d'interpolation par les fonctions radiales dans le chapitre 8. En testant plusieurs familles d'ondelettes nous avons montré que les ondelettes à support compact sont mieux adaptées à ce problème. Les résultats obtenus sur la grille régulière (*GI*) sont meilleurs que ceux obtenus sur celle modifiée (*GII*). Le taux de creux qui caractérise l'efficacité de l'algorithme *BCR* augmente avec la taille de la matrice d'interpolation. En considérant différentes fonctions radiales nous montrons que la précision des résultats augmente avec l'ordre de positivité de la fonction. Nous montrons par le calcul des interpolants/approximants avec différentes fonctions radiales et différentes grilles que l'on peut utiliser seulement 25% de coefficients d'ondelettes de la matrice décomposée et obtenir de bons résultats. Ceci permet d'accélérer le temps de calcul des interpolants par cette nouvelle approche. Notons que le pourcentage de coefficients à conserver pour l'interpolation diminue avec

la taille de la matrice.

Ce travail de thèse peut être poursuivi notamment en :

- **Compression d'images par ondelettes**

- i) Implémentation d'une quantification vectorielle pour mieux apprécier l'apport des ondelettes dans le processus de compression ou de transmission d'images.
- ii) Faire varier dans la formule que nous avons proposée le nombre d de bits pour le codage des détails : considérer un d_j par niveau de résolution. Ou mieux au niveau de chaque résolution prendre un d_j^k suivant la direction k , $k = 1 \dots 3$ (horizontale, verticale ou diagonale) si l'ondelette privilégie les directions.

- **Représentation de formes dans le domaine discret**

- i) Mettre en œuvre la généralisation proposée. Notons que l'étape délicate est la phase de quantification permettant de rester dans le domaine discret.
- ii) Faire un traitement directement sur les codes de Freeman et non sur les directions associées. Ceci demande un calcul sur les entiers d'où déjà des coefficients de filtres qui soient entiers !

- **Interpolation par des fonctions radiales**

- i) Considérer le problème d'approximation qui se formule en de mêmes termes la différence étant au niveau du remplissage de la matrice du système linéaire.
- ii) Etudier le conditionnement de la matrice rendue creuse après décomposition dans une base d'ondelettes.
- iii) On peut envisager de mettre un certain pourcentage de coefficients d'ondelettes du vecteur décomposer à zéro et utiliser une structure de données adaptée à la représentation des matrices creuses.

Annexe A

Coefficients de filtres déduits des ondelettes

n	$h(n)$	n	$h(n)$	n	$h(n)$
0	0.541735756214	10	-0.003078629404	20	0.000103267196
1	0.306829636681	11	-0.002745289232	21	0.000083175275
2	-0.035497979938	12	0.001546239145	22	-0.000053031895
3	-0.077807921874	13	0.001330869378	23	-0.000042341088
4	0.022684620145	14	-0.000780461912	24	0.000027317063
5	0.029746816573	15	-0.000655628510	25	0.000021651998
6	-0.012145489159	16	0.000395934998	26	-0.000014108582
7	-0.012715421105	17	0.000326764811	27	-0.000011114197
8	0.006141430858	18	-0.000201796763	28	0.000007303693
9	0.005799320147	19	-0.000164294347	29	0.000005723380

Tableau 22: Coefficients du filtre associé à une ondelette spline d'ordre 3

$N = 2$	0	0.482962913145	$N = 7$	0	0.077852054085
	1	0.836516303738		1	0.396539319482
	2	0.224143868042		2	0.729132090846
	3	-0.129409522551		3	0.469782287405
$N = 3$	0	0.332670552950	4	-0.143906003929	
	1	0.806891509311	5	-0.224036184994	
	2	0.459877502118	6	0.071309219267	
	3	-0.135011020010	7	0.080612609151	
	4	-0.085441273882	8	-0.038029936935	
$N = 4$	5	0.035226291882	9	-0.016574541631	
	0	0.230377813309	10	0.012550998556	
	1	0.714846570553	11	0.000429577973	
	2	0.630880767930	12	-0.001801640704	
	3	-0.027983769417	13	0.000353713800	
	4	-0.187034811719	14	0.000675449406	
	5	0.030841381836	15	-0.000117476784	
$N = 5$	6	0.032883011667	$N = 8$	0	0.054415842243
	7	-0.010597401785		1	0.312871590914
	0	0.160102397974		2	0.675630736277
	1	0.603829269797		3	0.585354683654
	2	0.724308528438		4	-0.015829105256
	3	0.138428145901		5	-0.284015542962
	4	-0.242294887066		6	0.000472484574
	5	-0.032244869585		7	0.128747426620
$N = 6$	6	0.077571493840	8	-0.017369301002	
	7	-0.006241490213	9	-0.044088253931	
	8	-0.012580751999	10	0.013981027917	
	9	0.003335725285	11	0.008746094047	
	0	0.111540743350	12	-0.004870352993	
	1	0.494623890398	13	-0.000391740373	
	2	0.751133908021	14	0.001847646883	
	3	0.315250351709	15	0.000230385764	
	4	-0.226264693965			
	5	-0.129766867567			
	6	0.097501605587			
7	0.027522865530				
8	-0.031582039318				
9	0.000553842201				
10	0.004777257511				
11	-0.001077301085				

Tableau 23: Quelques coefficients d'ondelettes à support compact

5-7	n	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$	9-7	n	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$
					-4	0.026748757411	
	-3		$-\frac{3}{280}$		-3	-0.016864118443	-0.045635881557
	-2	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{56}$		-2	-0.078223266529	-0.028771763114
	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{73}{280}$		-1	0.266864118443	0.295635881557
	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{17}{28}$		0	0.602949018236	0.557543526229
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{73}{280}$		1	0.266864118443	0.295635881557
	2	$\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{56}$		2	-0.078223266529	-0.028771763114
	3				3	-0.016864118443	-0.045635881557
	4				4	0.026748757411	

9-15	n	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$	3-3	n	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$
	± 0	0.575	0.575291895604		0	0.75	0.25
	± 1	0.28125	0.286392513736		1	0.5	0.5
	± 2	-0.05	-0.052305116758		2	-0.25	0.25
	± 3	-0.03125	-0.039723557692	5-5	-2	1	
	± 4	0.0125	0.015925480769		-1	0	3
	± 5		0.003837568681		0	10	8
	± 6		-0.001266311813		1	8	6
	± 7		-0.000506524725		2	-3	6
					3		-1

Tableau 24: Coefficients du filtre associé à quelques ondelettes biorthogonales

Annexe B

Construction d'ondelettes splines d'ordre k

Dans cet annexe il s'agit d'expliciter la démarche à suivre pour construire une ondelette spline de régularité quelconque k . Cette construction est due à P. J. Lemarié [42] et G. Battle [41Γ47]. C'est l'ondelette qu'utilise S. Mallat [53] dans son algorithme d'analyse et de synthèse d'images. Elle se fait par l'approche multirésolution telle que nous l'avons rappelée au *Chapitre I*.

Il faut définir une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ d'espace vectoriel de multirésolution et construire une fonction d'échelle ϕ un filtre en quadrature H associé. Ensuite déduire du filtre H ou calculer le filtre miroir en quadrature G et enfin l'ondelette spline ψ correspondante.

Soit V_0 , l'espace des fonctions splines (polynômes splines) d'ordre $k = 2p + 1$. C'est en fait un sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ formé de fonctions p fois continuellement différentiable et égale à un polynôme d'ordre $2p + 1$ sur chaque intervalle $[l, l + 1]$, $l \in \mathbb{Z}$. De ceci on déduit d'après la propriété 3 de la définition de l'analyse multirésolution (*Cf. Chapitre I*) que V_j est l'espace des fonctions spline d'ordre $2p + 1$ sur $[2^{-j}l, 2^{-j}(l + 1)]$.

Lemarié a montré que la transformée de Fourier de la fonction d'échelle ϕ peut s'exprimer par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\omega^n \sqrt{\sum_{2n}(\omega)}} \quad \text{avec} \quad \sum_{2n}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \frac{1}{(\omega + 2l\pi)^n}$$

où $n = 2p + 2$. On commence par calculer $\hat{\phi}$ en partant de la série $\sum_{2n}(\omega)$. Rappelons

que la série est convergente et qu'il s'agit de calculer une somme partielle. Cette somme devient numériquement stationnaire à partir de $l = 15$. Ensuite une transformation de Fourier inverse permet d'obtenir ϕ .

D'après le *théorème (1) du Chapitre I*, $\hat{\phi}(\omega)$ est liée au filtre en quadrature $H(\omega)$ par :

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$

or d'après l'expression de $\hat{\phi}(\omega)$, ci-dessus $H(\omega)$ peut alors s'écrire :

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{2n}(\omega)}{2^{2n} \sum_{2n}(2\omega)}}$$

De même d'après le *théorème (4)* le développement de $H(\omega)$ en série de Fourier se présente sous la forme :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n)e^{-i\omega n} \quad (36)$$

En considérant que le support de $H(\omega)$ est l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ un calcul du produit scalaire des deux membres de (36) avec $e^{+i\omega m}$ donne :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\omega)e^{i\omega n} d\omega$$

d'où les réponses impulsionnelles du filtre en quadrature H . Le filtre miroir G , associé est alors caractérisé par :

- son gabarit : $G(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$
- sa réponse impulsionnelle : $g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n)$

D'après le *théorème (5) du Chapitre I*, la transformée de Fourier $\hat{\psi}$ de l'ondelette ψ , s'exprime par la formule :

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega)\hat{\phi}(\omega) \quad \text{avec} \quad G(\omega) = e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

En considérant les expressions de $H(\omega)$ et $\hat{\phi}(\omega)$ en fonction de \sum_{2n} , on peut encore exprimer $\hat{\psi}$ par :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\omega^n} \frac{\sqrt{\sum_{2n}(\frac{\omega}{2} + \pi)}}{\sqrt{\sum_{2n}(\omega) \sum_{2n}(\frac{\omega}{2})}}$$

Un simple transformation de Fourier permet d'obtenir l'ondelette spline dont l'ordre i.e la régularité est associée à celle de la fonction d'échelle correspondante.

Pour construire par exemple les graphes des *Figures (1) et (2) du Chapitre II* nous avons considéré $V_0\Gamma$ comme l'espace des fonctions splines d'ordre $k = 3$ i.e spline cubique. On obtient alors une ondelette spline cubique (*Cf. Figure (2) du Chapitre I*).

L'extension en plusieurs dimensions de cette construction se fait par produit tensoriel.

Bibliographie

- [1] D. Gabor Γ *Theory of communication*; J. Inst. Elec. Eng. Γ Vol. 93(3) Γ pp. 429-457 Γ 1946.
- [2] R. J. Walker Γ *Algebraic Curves*; Dover Publications Γ Inc. New York Γ 1949.
- [3] H. Freeman Γ *On the encoding of arbitrary geometric configurations*; Computer Methods in Image Analysis Γ Aggrawal & al. Ed. Γ IEEE Press Γ 1977. Reprinted from IRE Trans. Electron. Comp. Γ 10 Γ pp. 260-268 Γ June 1961.
- [4] M. Atteia Γ *Etude de certains noyaux et théorie des fonctions "splines" à en analyse numérique*; Thèse Univ. de Grenoble Γ 1966.
- [5] N. J. Vilenkin Γ *Fonctions Spéciales et théorie de la représentation des groupes*; Ed. Dunod Γ Paris Γ 1969.
- [6] J. Thomann Γ *Détermination et construction de fonctions spline à 2 variables définies sur un domaine rectangulaire ou circulaire*; Thèse Univ. de Grenoble Γ Février 1970.
- [7] R. L. Hardy Γ *Multiquadric équations of topography and other irregular surfaces*; J. Geophysical. Res. Γ N $^{\circ}$ 76, pp. 1905-1915, 1971.
- [8] H. Freeman Γ *Computer processing line drawing data*; Computing Survey Γ Vol. 6 Γ N $^{\circ}$ 1, pp. 57-96 Γ 1974.
- [9] A. Rosenfeld Γ *A converse to the Jordan curve theorem for digital curves*; Information and control Vol. 29 Γ pp. 292-293 Γ 1975.
- [10] D. Esteban and G. Galand Γ *Applications of Quadrature Mirror Filters to split-band voice coding schemes* Γ Proc. ICASSP Γ Hartford Γ Connecticut Γ pp. 191-195 Γ May 1977.

- [11] J. Duchon Γ *Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces*; Topics in Constructive Theory of functions of several variables Γ W. Schempp Γ K. Zellev; Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag Γ pp. 85-100, 1976.
- [12] M. Kunt Γ *Analyse numérique des signaux*; Springer Verlag Γ New York Γ 1978.
- [13] C. De Boor Γ *A Practical Guide to Splines*; Springer Verlag Γ New York Γ 1978.
- [14] L. Paihua Γ *Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions splines à une et plusieurs variables*; Thèse Univ. Grenoble Γ 1978.
- [15] D. F. Utreras Γ *Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions splines à une ou deux variables*; Thèse Univ. Grenoble Γ 1979.
- [16] A. O. Barut and R. Raczká Γ *Theory of Group Representations and Applications*; Ed. Polish Publishers Γ Warszawa Γ 1980.
- [17] J. Duchon Γ *Fonctions splines homogènes à plusieurs variables*; Thèse Univ. Grenoble Γ 1980.
- [18] J. Morlet Γ *Sampling theory and wave propagation*; Proc. of 51st Annual Inter. Meeting of the Society of Exploration Geophysicists Γ Los Angeles Γ 1981.
- [19] J.A. Saghri and H. Freeman Γ *Analysis of the Precision of Generalized Chain Code for the Representation of Planar Curves*; IEEE Trans. on PAMI Γ Vol. 3 Γ No. 5 Γ pp. 533-539 Γ 1981.
- [20] A. K. Jain Γ *Image data compression : A review*; Proceedings of the IEEE Vol. 69(3) Γ pp. 349-389 March Γ 1981.
- [21] A. Rosenfeld and A. C. Kak Γ *Digital Picture Processing*; 2nd Ed. Γ Vol. 1 Γ Academic Press Γ Inc. 1982.
- [22] R. Franke Γ *Scattered data interpolation : tests of some methods*; Math. Comp. Γ pp. 181-200 Γ 1982.
- [23] R. Franke Γ *Surface Interpolation and smoothing by 'thin plate' splines*; Topics in Approximation Theory VI Γ C. K. Chui Γ L. L. Schumaker and J. D. Wards; Eds. Academic Press Γ pp. 445-449 Γ 1983.
- [24] A. P. Witkin Γ *Scale space filtering*; Proc. IJCAI Γ pp. 1023-1029 Γ Karlsruhe Γ 1983.

- [25] P. J. Burt and E. H. Adelson Γ *The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code*; IEEE Trans. on Com. Γ Vol. COM-31(4) Γ pp. 337-345 Γ April 1983.
- [26] M. Vetterli Γ *Multi-dimensional sub-band Coding : Some Theory and Algorithms*; Signal Proc. Γ Vol. 6 Γ pp. 97-112 Γ February 1984.
- [27] A. Grossmann and J. Morlet Γ *Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape*; SIAM J. of Math. Anal. Γ Vol. 15 Γ No. 4 Γ pp. 723-736 Γ July 1984.
- [28] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell Γ *Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders*; IEEE Trans. ASSP Vol. 34 Γ No. 3 Γ pp. 434-441 Γ June 1986.
- [29] Y. Meyer Γ *Principe d'Incertitude, Bases Hilbertiennes et Algèbres d'Opérateurs*; Séminaire BOURBAKI Γ 38ème année Γ No. 662 Γ 1986.
- [30] C. Micchelli Γ *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*; Const. Approx. Γ Vol. 2 Γ pp. 11-22 Γ 1986.
- [31] P. G. Lemarié et Y. Meyer Γ *Ondelettes et Bases Hilbertiennes*; Revista Matematica Ibero Americana Γ Vol. 2 Γ pp. 1-18 Γ 1986.
- [32] N. Dyn Γ D. Levin and S. Rippa Γ *Surface Interpolation and smoothing by 'thin plate' splines*; Topics in Approximation Theory VIFC. K. Chui Γ L. L. Schumaker and J. D. Wards; Eds. Academic Press Γ pp. 445-449 Γ 1986.
- [33] N. Dyn Γ D. Levin and S. Rippa Γ *Numerical Procedures for Global Surface fitting of Scattered Data by Radial Functions*; SIAM J. Sci. Stat. Computing Γ Vol. 7 Γ No. 2 Γ pp. 639-659 Γ April 1986.
- [34] Y. Meyer Γ *Ondelettes et fonctions splines*; Semaire Equations aux Dérivées Partielles Γ Ecole Polytechnique Γ Paris Γ Décembre 1986.
- [35] R. Franke Γ *Recent advances in approximation of surfaces from scattered data*; Topics in Multivariate Approximation Γ C. K. Chui Γ L. L. Schumaker and F. Utreras; Eds. Academic Press Γ pp. 79-98 Γ 1987.

- [36] M. J. T. Smith, R. M. Merseau and T. P. Barnwell, *Exact Reconstruction of Recursive Filter Banks for Subband Image Coding*; Miami Technicon 87, 34, No. 3, pp. 121-124, 1987.
- [37] Ph. Tchamitchian, *Biorthogonalité et théorie des opérateurs*; Revista Matematica Ibero Americana 3, No. 2, 1987.
- [38] R. Kronland-Martinet, J. Morlet et A. Grossmann, *Analysis of sound pattern through wavelet transform*; Inter. J. of Pattern Analysis and Artificial Intelligence, Vol. 1(2), pp. 273-302, 1987.
- [39] A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet and J. Morlet, *Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transform*; Advances in Electronics and Electron Phy., suppl. 19, Inverse problems, Academic Press, 1987.
- [40] R. Deriche et J.P. Cocquerez, *Extraction de composantes connexes basée sur une détection optimale des contours*; Actes de congrès COGNITIVA 87, Paris La Villette, 10-12, Mai 1987.
- [41] G. Battle, *A block spin construction ondelettes, Part I : Lemarié functions*; Comm. Math. Phys., Vol. 110, pp. 607-615, 1987.
- [42] P. G. Lemarié, *Ondelettes à localisation exponentielle*; Journal de Math. Pures et Appl. vol. 67, pp. 227-236, 1988.
- [43] Y. Meyer, *Fonctions splines et analyse graduées*; Rend. Sem. Math. Univers. Politecn. TORINO, Vol. 45, 1, 1987.
- [44] N. Dyn, *Interpolation of scattered data by radial functions*; Topics in Multivariate Approximation, C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. Utreras; Eds. Academic Press, pp. 47-61, 1987.
- [45] Y. Meyer, *Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées*; Cahier de Mathématiques de la décision, Num. 8703.
- [46] R. Kronland-Martinet, *The use of wavelet transform for the analysis, synthesis and processing of speech and music sounds*; Comp. Music Journal, MIT Press, Vol. 12(4), 1988.

- [47] G. Battle Γ *A block spin construction ondelette, Part II : QFT connection*; Comm. Math. Phys. Γ Vol. 114 Γ pp. 93-102 Γ 1988.
- [48] N. M. Nasrabadi and R. A. King Γ *Image coding using vector quantization : A review* Γ IEEE Transactions on Communications Γ Vol. 36(8) Γ pp. 957-971 Γ 1988.
- [49] S. Mallat Γ *Review of multifrequency channel decomposition of images and wavelet models*; Technical Report Γ Num. 412 Γ November 1988.
- [50] I. Daubechies Γ *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*; Comm. Pure Appl. Math. Γ Vol. 41 Γ pp. 909-996 Γ Nov. 1988.
- [51] F.P. Preparata Γ M.I. Shamos Γ *Computational Geometry : An introduction*; Texts and Monographs in Computer Science Γ Springer Verlag New York Γ 1988.
- [52] P. H. Westerink Γ D. E. Boekee Γ J. Biemond and J. W. Woods Γ *Subband Coding of Images Using Vector Quantization*; IEEE Trans. on Comm. Vol. 36 Γ No. 6 Γ pp. 713-719 Γ June 1988.
- [53] S. Mallat Γ *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation*; IEEE Trans. on PAMI Γ Vol. 11 Γ No. 7 Γ 1989.
- [54] P. G. Lemarié Γ *Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés* Γ A paraître dans le journal de La Soc. Math. de France.
- [55] C. E. Heil and D. F. Walnut Γ *Continuous and Discrete Wavelet Transforms*; SIAM Review Γ Vol. 31 Γ No. 4 Γ pp. 628-666 Γ 1989.
- [56] M. Buhmann Γ *Multivariate Interpolation using Radial Basis Functions*; Ph. D. Dissertation Γ University of Cambridge Γ 1989.
- [57] H. G. Feichtinger and K. H. Grochening Γ *Banach spaces related to integral group representations and their atomic decompositions*; Int. J. Funct. An. Γ Vol. 86 Γ pp. 307-340 Γ 1989.
- [58] Z. Wu and R. Γ Schaback Γ *Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation of Scattered Data*; Report University of Gröttingen Γ 1989.
- [59] N. Dyn Γ *Interpolation and approximation of scattered data by radial and related functions*; Topics in Approximation Theory VI Γ C. K. Chui Γ L. L. Schumaker and J.D. Wards; Eds. Academic Press Γ pp.1-24 Γ 1989.

- [60] Y. Meyer Γ *Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image*; Cahier de Mathématiques de la décision Γ Num. 8908.
- [61] C. Y. Choo and H. Freeman Γ *Comparative precision analysis of chain coding families for line drawing encoding*; SPIE Vol. 1251 Γ Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics Γ pp. 194-205 Γ 1990.
- [62] M. Antonini Γ M. Barlaud Γ P. Mathieu and I. Daubechies Γ *Image coding using vector quantization in the wavelet transform domain Γ Inter. Conf. on ASSP Γ Albuquerque (New Mexico) Γ pp. 2297-2300 Γ 1990.*
- [63] M. Antonini Γ M. Barlaud Γ P. Mathieu and I. Daubechies Γ *Image Coding Using Wavelet Transform Γ IEEE Γ Trans. on Image Processing Γ Vol. 1, N $\bar{1}$ 2, pp. 205-220 Γ April 1992.*
- [64] R. Murenzi Γ *Ondelettes Multidimensionnelles et Applications à l'Analyse d'Images*; Thèse Γ Univ. Cath. de Louvain Γ 1990.
- [65] J. C. Feauveau Γ *Analyse multirésolution par ondelettes non orthogonales et bancs de filtres numériques*; Thèse Univ. Paris Sud Γ Janvier 1990.
- [66] P. Mathieu Γ M. Barlaud et M. Antonini Γ *Compression d'images par transformée en ondelettes et quantification vectorielle*; Traitement du Signal et Images Γ Vol. 7 Γ No. 2 Γ pp. 101-115 Γ 1990.
- [67] P. Bonnet et D. Remond Γ *Une Transformée en ondelettes rapide*; Traitement du Signal et Images Γ Vol. 8 Γ No. 3 Γ pp. 195-207 Γ 1991.
- [68] I. Daubechies Γ *The Wavelet Transform, Time-Frequency Localisation and Signal Analysis*; IEEE Trans. on Information Theory Γ Vol. 36 Γ No. 5 Γ pp. 961-1005 Γ 1990.
- [69] Y. Meyer Γ *Ondelettes et opérateurs*; Ed. Herman Γ 1990.
- [70] F. Mokhtarian Γ *A Theory of Multiscale, Curvature and Torsion Based shape Representation for Planar and Space Curves*; Tech. Report 90-30 Γ October 1990.
- [71] D. J. Williams and M. Shah Γ *Edge contours using multiple scales*; Com. Vision Γ Graphics Γ and Image Processing Γ Vol. 51 Γ 256-274 Γ 1990.

- [72] A. Cohen Γ *Ondelettes, analyse multirésolution et filtres miroirs en quadrature*; Annales de l'Institut Poincaré Γ Analyse non linéaire Γ 1990.
- [73] O. Rioul and P. Duhamel Γ *Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms*; Technical Report Γ CNET Γ Issy les Moulineaux Γ France 1991.
- [74] G. Beylkin Γ R. Coifman and V. Rokhlin Γ *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*; Comm. Pure Appl. Math. Γ Vol. 44 Γ pp. 141-183 Γ 1991.
- [75] M. Barrat et O. Lepetit Γ *Calcul Rapide de la transformée en ondelettes*; Traitement du Signal et Images Γ Vol. 8 Γ No. 1 pp. 43-49 Γ 1991.
- [76] A. Bengtson and J. O. Eklundh Γ *Shape Representation by Multiscale Contour Approximation*; IEEE Trans. on PAMI Γ Vol. 13 Γ No. 1 pp. 85-93 Γ 1991.
- [77] J. M. Chassery et A. Montanvert Γ *Géométrie discrète en analyse d'images*; Ed. Hermès Γ 1991.
- [78] M. Rabbani and P. W. Jones Γ *Digital Image Compression Techniques* Γ Tutorial Texts Γ SPIE Press Γ Vol. TT 77 Γ 1991.
- [79] B. Toresani Γ *Time-frequency representations : Wavelet packets and optimal decomposition*; CPT-90/P. 2466 Γ Centre de Physique Théorique (Marseille) Γ Nov. 1990.
- [80] Y. Meyer Γ *Méthodes temps-fréquence et temps-échelle en traitement du signal et de l'image*; INRIA Lectures Notes Γ 1991.
- [81] V. Wickerhauser Γ *INRIA Lectures on Wavelets Packet Algorithms*; INRIA Lectures Notes Γ 1991.
- [82] J. Waku et J. M. Chassery Γ *Analyse multirésolution d'un contour discret* Γ Journées Ondelettes et Images Γ Rouen (France) Γ Nov. Γ 1991.
- [83] A. Cohen Γ I. Daubechies and J. C. Feauveau Γ *Biorthogonal Basis of Compactly Supported Wavelets*; Comm. Pure Appl. Math. Γ Vol. 45 Γ pp. 485-560 Γ 1992.
- [84] C. Fermüller and W. Kropatsch Γ *Hierarchical Curve Representation*; Proceeding of ICPR Γ The Hague (Netherlands) Γ pp. 143-146 Γ IEEE Comp. Soc. Press Ed. 1992.

- [85] P. W. Wong and J. Koplowitz Γ *Chain Codes and their Linear Filter Reconstruction* Γ IEEE Trans. on Information Theory Γ Vol. 38 Γ No. 2 Γ 1992.
- [86] A. Cohen Γ *Ondelettes et traitements numériques des images* Γ INRIA Lectures Notes Γ 1992.
- [87] J. Waku and J. M. Chassery Γ *Wavelet and Multiscale Analysis of Discrete Contour*; Proceedings of Inter. Conf. of SPIE Γ Vol. 1706 Γ pp. 90-101 Γ Orlando (Florida) Γ 1992.
- [88] P. Flandrin et N. Martin Γ *Analyse Temps-fréquence et Temps-échelle* Γ Traitement du Signal et Images Γ Vol. 9 Γ suppl. No. 1 Γ 1992.
- [89] A. Chehikian Γ *Algorithmes Optimaux pour la génération de Pyramides d'Images Passe-bas et Laplaciennes* Γ Traitement du Signal et Images Γ Vol. 9 Γ No. 4 Γ pp. 297-307, 1992.
- [90] J. Waku et J. M. Chassery Γ *Localisation de frontières et représentation de contours discrets en multirésolution*; Progress in Wavelet Analysis and Applications Γ Edited by Y. Meyer and S. Roques; Eds Frontières Γ pp. 451-454 Γ 1993.
- [91] J. Waku Γ *Ondelettes et Approximations de Surfaces*; Progress in Wavelet Analysis and Applications Γ Edited by Y. Meyer and S. Roques; Eds Frontières Γ pp. 689-692 Γ 1993.
- [92] J. Waku Γ *Ondelettes et représentation multi-échelles d'une courbe discrète*; Colloque Géométrie Discrète en Imagerie Γ pp. 185-200 Γ Grenoble Γ 8-13 Septembre 1992.
- [93] J. Waku Γ *Wavelets and Interpolation of curves and surfaces by radials functions*; To appear in Proceeding of Second Inter. Conf. on Curves and Surfaces Γ Chamonix-Mont Blanc Γ June 10-16 Γ 1993.
- [94] J. Waku et J. M. Chassery Γ *Ondelettes et analyse numériques des images*; Premier Colloque Africain sur la Recherches en Informatique CARI'92 Γ Yaoundé Γ 14-20 Γ Oct. 1992.
- [95] J. Waku et J. M. Chassery Γ *Spécification d'une ondelette pour la représentation en multirésolution d'un contour discret*; Traitement du Signal et Images Γ Vol. 10 Γ No. 3 Γ pp. 231-240, 1993.

- [96] J. Waku and J. M. Chassery Γ *Wavelets and Multi-Scale Representation of Discrete Boundary*; Proceedings of 11th ICPR Γ The Hague (Netherlands) Γ Aug. 30 - Sept. 3 Γ pp. 680-683 Γ 1992.
- [97] Y. Meyer Γ *Ondelettes : algorithmes et applications*; Edition Armand Colin Γ 1993.