



**HAL**  
open science

# Vibrations d'une membrane smectique : rôle de la forme du contour

Catherine Even

► **To cite this version:**

Catherine Even. Vibrations d'une membrane smectique : rôle de la forme du contour. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1999. Français. NNT : . tel-00006615

**HAL Id: tel-00006615**

**<https://theses.hal.science/tel-00006615v1>**

Submitted on 30 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N° d'ordre

UNIVERSITE PARIS-SUD  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

**THESE**

présentée pour obtenir le grade de  
Docteur en Sciences de l'Université Paris-Sud

par

**Catherine Even**

Sujet :

**VIBRATIONS D'UNE MEMBRANE SMECTIQUE :  
ROLE DE LA FORME DU CONTOUR**

Soutenue le 29 juin 1999 devant la commission d'examen composée de :

ERIC AKKERMANS

PETER BUSER

YVES COUDER

PATRICK OSWALD

Rapporteur

Rapporteur

PAWEL PIERANSKI

BERNARD SAPOVAL

Directeur

Président

## Remerciements :

*Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude à Pawel Pieranski pour m'avoir accueillie au sein de son équipe, et pour avoir dirigé cette thèse. Son grand sens physique, son ingéniosité et sa vaste culture (pas seulement en physique) ont été pour moi une véritable source d'enrichissement. D'autre part, il a su m'accorder suffisamment de liberté, mais aussi me consacrer plus de temps aux moments critiques de la thèse, comme le début et la fin.*

*Je suis reconnaissante envers Bernard Sapoval, qui m'a suivie depuis le stage de DEA réalisé avec Pawel. Tout au long de la thèse, j'ai pu bénéficier de ses connaissances dans le domaine des fractales, et de ses nombreuses suggestions d'expériences à réaliser avec des films smectiques. Je lui sais également gré de la rigueur qu'il a montré lors de la rédaction de notre article.*

*Je remercie tout particulièrement Yves Couder et Patrick Oswald pour avoir été les rapporteurs de la thèse. Merci également à Eric Akkermans et à Peter Buser pour avoir accepté de faire partie du jury.*

*Cette thèse est expérimentale, et elle n'aurait pu se faire sans Vincent Klein, qui a entièrement réalisé le nouveau dispositif expérimental. J'ai ainsi pu apprécier toute sa compétence, sa disponibilité et sa gentillesse.*

*Au cours de la thèse, j'ai eu l'occasion de discuter ou de collaborer avec des physiciens numériques et théoriciens. Je remercie notamment Stefanie Russ pour les nombreux échanges et la collaboration que j'ai eus avec elle, et aussi Eric Akkermans, Gilles Montambaux, Frédéric Piéchon et Denis Ullmo, pour l'intérêt qu'ils ont montré à mon travail. J'ai aussi échangé de*

*nombreux mails avec Carolyn Gordon, grâce à laquelle j'ai pu avancer dans ma compréhension de la théorie mathématique de l'isospectralité.*

*Je tiens également à remercier les membres du laboratoire pour leur aide efficace et leur gentillesse. Je pense notamment à Christophe Carrère, My-Anh Dang, Yvette Dufour, Jacqueline Houeix, Pierre Jodry, Hervé Lebeux, Brigitte Le Guével, Marie-France Mariotto, Gilles Poulleau, Christiane Séguy, Sophie Tourlet et Annie Warnet. Merci également à Didier Dallé, et aux membres de l'atelier qui ont réalisé les pièces nécessaires à l'expérience, à savoir Bernard Boisset, Jean-Louis Signoret, Bernard le Bourhis et Olivier Giboulot.*

*Je n'oublie pas les membres de l'équipe Pieranski, qui ont su créer une ambiance agréable pendant ces trois ans : Macha, Eric, Brigitte et Hélène.*

*J'ai eu le plaisir de partager mes déjeuners (et d'interminables pauses café) avec Ana, Michaël, Paul, Daniel (ces quatre personnes m'ayant notamment initiée de force au foot lors de la coupe du monde), et aussi Eric, Patrick, Törsten, Vincent(s), Gilles A. et Anu. J'ai également pris d'agréables « pauses-thé » à la cafétéria avec Yves, Gonçalo, Bernard, Tristan, Stefan B., Richard et Julien. Pardon à ceux que j'aurais pu oublier.*

*Enfin, last but not least, je tiens à remercier ma famille et mes amis, notamment David, pour leur soutien tout au long de la thèse.*

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAP. I - INTRODUCTION AUX FILMS SMECTIQUES COMME SYSTEMES</b>	
<b>MODELES DE MEMBRANES</b>	<b>4</b>
<b>I-1) Les films de cristaux liquides smectiques librement suspendus au repos</b>	<b>4</b>
I-1.1.) Rappel sur les cristaux liquides smectiques	4
I-1.2) Expériences précédentes sur des films smectiques	7
I-1.3) Caractéristiques des films de Sm A	8
<b>I-2) Les films de cristaux liquides smectiques A librement suspendus en vibration</b>	<b>10</b>
I-2.1) Modélisation des films de SmA	10
I-2.2) Les films de SmA et l'équation d'onde de Helmholtz	11
I-2.3) Expériences précédentes utilisant des films smectiques comme membranes vibrantes	15
<b>I-3) Les autres systèmes modèles obéissant à l'équation d'onde bidimensionnelle</b>	<b>16</b>
<b>I-4) Conclusion : intérêt des films smectiques</b>	<b>17</b>
<b>Références du chap. I</b>	<b>19</b>
<b>CHAP. II - METHODES EXPERIMENTALES</b>	<b>24</b>
<b>II-1. Films au repos</b>	<b>25</b>
II-1. 1. Produits utilisés	25
II-1. 2. cadres et supports	26
II-1. 3. tirage du film et mise sous vide	27
II-1. 4. homogénéisation du film	29
II-1. 5. courbure d'un film au repos	30
II-1. 6. épaisseur d'un film au repos	30
<b>II-2. Films en vibration</b>	<b>33</b>
II-2. 1. excitation	33
II-2. 2. détection	35
II-2. 3. détermination du spectre de fréquences propres d'un film sur un contour donné	36
II-2. 4. Allure des modes de vibration	42

<b>II-3) Conclusion</b>	<b>51</b>
<b>Annexe : écouter le son d'un tambour</b>	<b>51</b>
<b>Références du chap. II</b>	<b>52</b>
<b>CHAP. III- MODES DE VIBRATION D'UNE SURFACE PREFRACTALE</b>	<b>56</b>
<b>III-1) Résultats précédents pour un résonateur plan à frontière fractale</b>	<b>57</b>
III-1.1. Résultat mathématique sur la densité d'états	57
III-1.2. Construction de la courbe de Koch quadratique	58
III-1.3. Résultats numériques de B. Sapoval et al.	59
<b>III-2) Résultats numériques et expérimentaux comparés pour la préfractale <math>\nu=2</math></b>	<b>71</b>
III-2.1) Contour étudié	71
III-2.2) Résultats sur le spectre	72
III-2.3) Forme des modes	77
<b>III-3) Conclusion</b>	<b>88</b>
<b>Annexe du chap. III</b>	<b>89</b>
<b>Références du chap. III</b>	<b>91</b>
<b>CHAP. IV- FORCES DISSIPATIVES, ET AUTRES FORCES NEGLIGEES DANS L'EQUATION D'ONDE</b>	<b>95</b>
<b>IV-1) Forces non dissipatives</b>	<b>95</b>
IV-1.1) Forces statiques	95
IV-1.2) Autres forces de rappel	97
IV-1.3) Force non-linéaire	98
<b>IV-2) Sources possibles de dissipation</b>	<b>99</b>
IV-2.1) Résultats préliminaires sur le cadre fractal	99
IV-2.2) Expériences réalisées sur un contour circulaire	108
<b>IV-3) Expériences réalisées sur un contour «dentelé»</b>	<b>135</b>
IV-3.1) Cadre expérimental	135
IV-3.2) Expériences en pression	136

IV-3.3) Courbes $Q_n(e)$ pour le cadre circulaire et pour le cadre dentelé comparées	137
IV-3.4) Discussion	137
<b>IV-4) Conclusion de ce chapitre</b>	<b>139</b>
<b>Annexe</b>	<b>140</b>
<b>Références du chap. IV</b>	<b>142</b>
<b><i>CHAP. V- ISOSPECTRALITE I : ASPECTS MATHEMATIQUES</i></b>	<b>144</b>
<b>V-1) Introduction à l'isospectralité</b>	<b>144</b>
V-1.1. Historique	144
V-1.2. Construction des contours isospectraux	148
<b>V-2) Partie mathématique</b>	<b>148</b>
V-2.1. Transplantation	148
V-2.2 Le théorème de Sunada	151
V-2.3 Autres contours isospectraux - contours homophoniques	173
<b>V-3) Conclusion</b>	<b>177</b>
<b>Références du chap. V</b>	<b>178</b>
<b><i>VI- ISOSPECTRALITE II : EXPERIENCES</i></b>	<b>182</b>
<b>VI-1) Contours F et C de Gordon, Webb et Wolpert</b>	<b>182</b>
VI-1 .1. Travaux antérieurs à cette thèse	182
VI-1 .2. Nos expériences avec des films smectiques	186
<b>VI-2) Evolution de la famille FC</b>	<b>201</b>
<b>VI-3) Brisure de l'isospectralité</b>	<b>205</b>
VI-3.1. Introduction	205
VI-3.2. Spectre et forme des modes obtenus	206
<b>VI-4) Conclusion</b>	<b>209</b>
<b>Annexe</b>	<b>210</b>
<b>Références du chap. VI</b>	<b>212</b>



## INTRODUCTION :

Jusqu'à présent, les cristaux liquides ont été étudiés essentiellement pour deux raisons. Tout d'abord, le premier domaine où ils ont joué un rôle important au cours de ces trente dernières années est l'industrie, avec la réalisation d'afficheurs plats économes en énergie. Ensuite, les cristaux liquides sont caractérisés par une très grande variété de structures, et l'originalité des propriétés physiques qui en découlent. Il faut ainsi souligner que les cristaux liquides ont permis de trouver des exemples concrets de structures imaginées par les théoriciens: citons le cas des phases hexatiques, des phases bleues et des phases TGB. Inversement, d'autres structures sont apparues, dont il a fallu interpréter théoriquement l'existence a posteriori: le cas des phases bleues smectiques en est un des nombreux exemples. En résumé, les cristaux liquides ont permis d'explorer toute la richesse structurale que peut réaliser un système de molécules en interaction.

Cette thèse se situe sur un terrain très différent. En effet, elle se propose d'utiliser les films de cristaux liquides smectiques comme système modèle pour l'étude de certains problèmes physiques et mathématiques généraux. Plus précisément, nous allons aborder le problème de l'équation d'onde de Helmholtz bidimensionnelle, avec les conditions de Dirichlet sur le contour. Cela peut paraître surprenant, mais de nombreuses questions concernant les solutions de cette équation sont restées sans réponse pendant longtemps. Ainsi, les questions que nous aborderons au cours de cette thèse sont les suivantes :

- Quel est le lien entre la forme du contour et le spectre de fréquences propres d'une membrane?

- Comment les irrégularités du contour conduisent-elles à des fonctions d'onde localisées?

- La forme géométrique du contour influe-t-elle sur la dissipation?

Cette thèse s'articule de la manière suivante : en premier lieu, nous avons préféré exposer les aspects les plus concrets de notre travail. Ainsi, nous détaillons notre système expérimental dans le chap. II. Puis, les chap. III et IV concernent les vibrations d'une membrane au contour irrégulier.

Dans le chap. III, nous abordons un problème général : celui du lien entre l'irrégularité d'un contour et la localisation des fonctions d'onde existant dans ce contour. Au cours de cette étude, nous posons la question de l'existence d'une dissipation associée à la forme géométrique de la membrane, en particulier au fait que son bord présente des irrégularités. Le chap. IV est une tentative pour répondre à cette question. Nous effectuons à cette occasion un bilan détaillé des mécanismes dissipatifs présents dans notre expérience.

Comme on l'aura compris, les films smectiques sont, dans cette thèse, surtout un moyen d'étudier des problèmes physiques -voire mathématiques- généraux. C'est notamment le cas de l'étude sur l'isospectralité, qui concerne la question suivante : «Peut-on entendre la forme d'un tambour?». Nous nous sommes penchés sur les aspects mathématiques de ce problème de l'isospectralité : le chap. V constitue, à cet égard, une tentative de clarifier ce que nous avons compris à la lecture des articles des mathématiciens. Puis, les films smectiques nous ont permis d'apporter une confirmation expérimentale de la réponse mathématique à cette question (chap. VI).

<b>I - INTRODUCTION AUX FILMS SMECTIQUES COMME SYSTEMES MODELES DE MEMBRANES</b>	<b>4</b>
<b>I-1) Les films de cristaux liquides smectiques librement suspendus au repos</b>	<b>4</b>
I-1.1.) Rappel sur les cristaux liquides smectiques	4
I-1.1.1) Rappel historique	4
I-1.1.2) Les mésophases nématique et smectique A	5
I-1.2) Expériences précédentes sur des films smectiques	7
I-1.3) Caractéristiques des films de Sm A	8
<b>I-2) Les films de cristaux liquides smectiques A librement suspendus en vibration</b>	<b>10</b>
I-2.1) Modélisation des films de SmA	10
I-2.2) Les films de SmA et l'équation d'onde de Helmholtz	11
I-2.3) Expériences précédentes utilisant des films smectiques comme membranes vibrantes	15
<b>I-3) Les autres systèmes modèles obéissant à l'équation d'onde bidimensionnelle</b>	<b>16</b>
<b>I-4) Conclusion : intérêt des films smectiques</b>	<b>17</b>
<b>Références du chap. I :</b>	<b>19</b>

---

# **I - INTRODUCTION AUX FILMS SMECTIQUES COMME SYSTEMES MODELES DE MEMBRANES**

Le but de ce chapitre introductif est de présenter, à l'intention d'un lecteur non spécialiste du domaine, une introduction succincte aux cristaux liquides. Puis nous expliquerons les raisons pour lesquelles les films smectiques tendus sur des contours rigides sont des systèmes modèles obéissant à l'équation d'onde de Helmholtz, très commodes d'utilisation.

## **I-1) Les films de cristaux liquides smectiques librement suspendus au repos**

### I-1.1.) Rappel sur les cristaux liquides smectiques

#### I-1.1.1) Rappel historique

Les cristaux liquides sont aujourd'hui connus du grand public, essentiellement pour leur application dans le domaine de l'affichage numérique, qui s'est développé depuis ces trente dernières années environ. En fait, ils ont été découverts dès le XIX<sup>ème</sup> siècle par des biologistes, dont le plus célèbre est R. Reinitzer. Celui-ci a fait part de sa découverte au physicien O. Lehmann, qui a nommé ces nouvelles substances (des esters de cholestérol) «flüssige Kristalle», c'est-à-dire des «cristaux qui coulent». Ce nom traduit l'observation expérimentale -effectuée par Reinitzer- que ces substances, tout en étant fluides, présentent des couleurs caractéristiques de la biréfringence, jusque-là seulement connue pour les matériaux cristallins. G. Friedel a ensuite été le premier à identifier ces substances comme de nouveaux états de la matière, qu'il a désignés sous le nom d'«états mésomorphes»<sup>1</sup>[1]. Ces nouveaux états sont intermédiaires entre le solide cristallin et le liquide isotrope. Il a ainsi nommé les deux phases observées par ses prédécesseurs : la phase

---

<sup>1</sup> Notons que les appellations de «cristal liquide» et de «mésophase» sont aujourd'hui équivalentes.

*nématique* (de νημα, fil), à cause de discontinuités linéaires observées dans sa texture ; et la phase *smectique* (de σμηγμα, savon) pour sa structure en couches semblable à celle des bulles de savon.

Il existe deux grandes catégories de cristaux liquides : les *thermotropes*, dont les mésophases apparaissent quand on fait varier la température ; et les *lyotropes*, qui résultent d'un mélange de molécules amphiphiles et d'eau, et dont on trouve les mésophases en faisant varier la concentration de ces molécules dans l'eau. Les films de savon font partie de la deuxième catégorie. Dans toute cette thèse, nous ne nous intéresserons qu'à des cristaux liquides thermotropes.

### I-1.1.2) Les mésophases nématique et smectique A

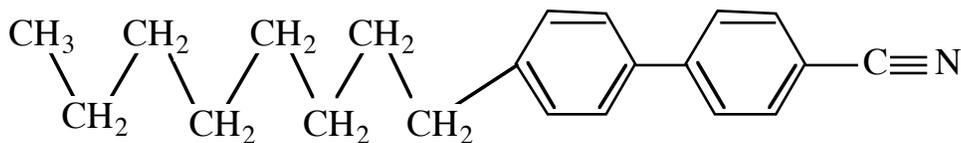


figure 1 : molécule de 8CB

Un exemple de molécule thermotrope, utilisée en pratique dans cette thèse, est présenté sur la figure 1. La molécule est fortement anisotrope : sa longueur est de 3 nm, tandis que sa largeur vaut 0.5 nm. Les deux parties constituant cette molécule ont des comportements en température de nature très différente. La chaîne alkyle seule (octane) fond dès  $-60^{\circ}\text{C}$  : la raison est que les interactions attractives sont faibles entre les molécules d'octane, car elles sont à la fois peu polaires et peu polarisables. Par contre, le biphenyle nitrile ne fond qu'à  $88^{\circ}\text{C}$ , et ceci est dû au fait que cette molécule possède un fort moment dipolaire permanent sur la triple liaison CN. Quand on assemble ces deux molécules, la molécule de 8CB résultante a le diagramme de phases de la figure 2, qui résulte de la compétition entre les deux diagrammes de phases des deux parties de la molécule prises indépendamment.

En partant de la phase liquide isotrope, et en abaissant progressivement la température, on rencontre d'abord la phase *nématique*, caractérisée par un ordre d'orientation à longue distance : les molécules sont toutes, en moyenne, parallèles à la direction du vecteur  $\mathbf{n}$ , appelé *directeur*. Par contre, aucun ordre à longue portée n'existe sur la position des molécules.

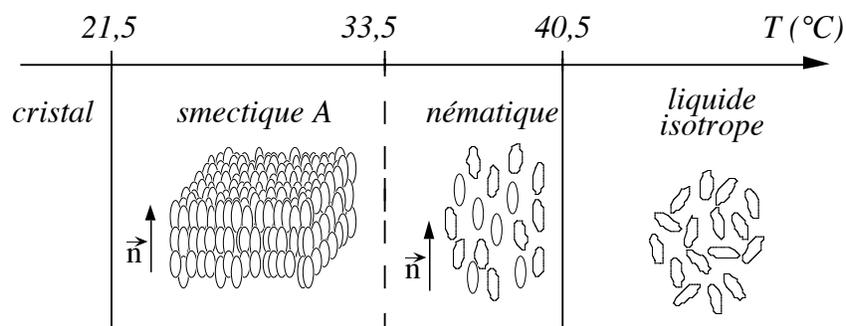


figure 2 : séquence de phases du composé 8CB de la figure 1. Les molécules de 8CB, de forme allongée, sont schématisées par des bâtonnets

La phase smectique A (SmA) a été, en premier, étudiée en détail par Friedel [1], et c'est la seule phase smectique qu'il ait étudiée. Observant que des gouttes de cette phase avaient une structure lamellaire, et que l'épaisseur des couches était un multiple de la longueur des molécules mésogènes, il a effectué l'analogie avec la structure stratifiée (en une seule bicouche) des films de savon. Par la suite, d'autres phases smectiques ont été découvertes : le point commun de toutes ces phases est l'existence d'un ordre de position unidimensionnel dans la direction perpendiculaire au plan des couches<sup>2</sup>, et l'existence, comme pour la phase nématique, d'un ordre sur l'orientation des molécules. La phase SmA est, parmi toutes les phases smectiques, la moins ordonnée, car il n'y existe aucun ordre de position à longue portée à l'intérieur d'une couche : les molécules sont libres de s'y déplacer, comme dans un liquide. C'est cette propriété particulière de la phase SmA qui fait que c'est la seule que nous ayons utilisée dans cette thèse. Notons que cette phase est également caractérisée par la direction du vecteur  $\mathbf{n}$  : il est perpendiculaire au plan des couches.

L'épaisseur d'une couche correspond, dans le cas de monocouches, à la longueur d'une molécule. Les composés mésogènes cyanobiphényles ont souvent une structure en bicouches : l'épaisseur d'une couche smectique est alors de l'ordre de 1.5 fois la longueur d'une molécule [2].

Il existe une autre phase smectique où les couches sont des liquides bidimensionnels : la phase Sm C. Elle est différente de la Sm A en ce qui concerne l'orientation des molécules, qui sont

<sup>2</sup> à l'exception de la phase SmD cubique

inclinées par rapport à la normale aux couches. Elle est plus ordonnée que la phase Sm A<sup>3</sup>, et ceci se traduit *en pratique* par une plus grande fragilité et un plus grand temps d'homogénéisation des films formés de Sm C [3]. Quant aux autres phases smectiques, telle que la phase SmB<sub>cris</sub> par exemple, il est impossible de tirer un film directement dans cette phase, ce qui introduit des complications expérimentales supplémentaires. Pour ces deux raisons, nous nous sommes donc limités à des produits en phase Sm A.

Enfin, signalons que les autres phases smectiques existantes se distinguent entre elles par la nature de l'ordre de position au sein des couches, par l'existence d'un ordre d'orientation des liaisons entre molécules voisines, et par l'angle d'inclinaison du directeur par rapport à la normale aux couches.

### I-1.2) Expériences précédentes sur des films smectiques

Grâce à leur structure lamellaire, les phases smectiques sont les mésophases les plus adaptées au tirage de films<sup>4</sup>. En effet, on peut affirmer que la stabilité des films smectiques est due à leur structure en couches<sup>5</sup> [4]. Constatant que la structure des phases smectiques tridimensionnelles était semblable à celle des films de savon, G. Friedel avait émis dès 1922 l'hypothèse que les cristaux liquides smectiques pouvaient également former des films libres (i.e. sans substrat solide) [1]. La première observation expérimentale de films de Sm C n'eut lieu que dans les années 1970 par C. Young, R. Pindak, N. Clark et R. Meyer [5]. Par la suite, beaucoup d'autres expériences ont été réalisées, faisant apparaître toute la richesse de ces systèmes physiques originaux. Ces expériences se classent en deux catégories : celles qui utilisent les films pour mieux connaître la phase smectique tridimensionnelle, et celles qui étudient les films smectiques pour eux-mêmes. Les

---

<sup>3</sup> car la symétrie autour de l'axe **n** a été brisée

<sup>4</sup> Des films librement suspendus tirés à partir de la phase nématique ont été observés, mais seulement dans un intervalle de température étroit au-dessus de la transition N - SmA [22].

<sup>5</sup> contrairement aux films de savon, pour lesquels les interactions électrostatiques interviennent [4].

techniques utilisées pour l'étude de ces films sont principalement les rayons X [4,10], l'optique [voir par ex., 5 ; 6] et la calorimétrie [7]. Des études structurales de mésophases smectiques, incluant la nature de l'ordre de position des molécules au sein des couches, et les fluctuations de l'ordre d'orientation dans un système bidimensionnel, ont été réalisées [4]. De plus, les transitions de phase ont été étudiées, avec, entre autres, l'influence de la réduction de la dimensionnalité sur celles-ci [6]. Notamment, il a été montré qu'il existait un effet d'augmentation de l'ordre dans les couches voisines des surfaces libres («*Surface enhanced ordering*») [8]. De plus, des transitions de phase couche par couche («*Layer thinning transitions*») ont été observées [9]. Enfin, l'effet de l'épaisseur du film sur le diagramme de phases a été analysé [10,11].

### I-1.3) Caractéristiques des films de Sm A

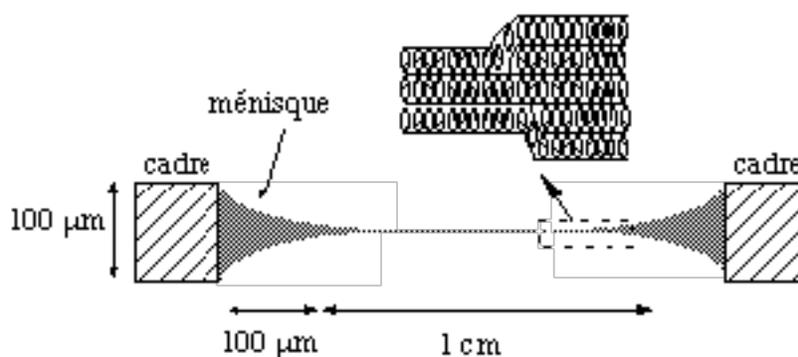


figure 3 : structure du film librement suspendu, et du ménisque le raccordant au cadre. L'extension latérale du ménisque (de l'ordre de  $100\ \mu\text{m}$ ) est largement exagérée pour plus de clarté

Quand on tire un film sur un contour donné, on n'obtient pas d'emblée un film d'épaisseur uniforme, mais on a une série de plages d'épaisseurs différentes. Après la mise à l'équilibre du film, l'épaisseur finale est homogène et peut varier entre deux [5,12] et un nombre arbitrairement grand de couches. Signalons que de manière exceptionnelle, des films stables comportant une seule couche ont été obtenus et étudiés [13]. L'épaisseur du film est bien sûr un des paramètres thermodynamiques qui le caractérise.

A l'équilibre, l'épaisseur du film est homogène, et les couches smectiques sont parallèles aux deux surfaces libres. En fait, l'épaisseur du film n'est pas strictement uniforme sur toute sa surface, car le film est raccordé au cadre sur lequel il est tendu par le biais d'un *ménisque* [17]

(figure 3). Dans sa partie la plus mince, celui-ci est constitué d'une succession de plages d'épaisseur croissante dans la direction du cadre. Les dimensions latérales du ménisque sont de l'ordre de l'épaisseur du cadre, soit 100  $\mu\text{m}$ . Il constitue cependant un réservoir de matière pour le film, car son volume est très grand devant celui du film. Du point de vue thermodynamique, le film smectique est un système grand-canonique, de potentiel chimique imposé par celui du ménisque [14].

Enfin, une différence importante entre le film et la phase smectique tridimensionnelle est constituée par le fait que le film possède une *tension* (que nous noterons  $\gamma$  dans toute cette thèse), qui est un autre paramètre thermodynamique décrivant le film. Grossièrement, cette tension est égale à la tension de surface des deux interfaces film/gaz ( $\gamma = 2*\gamma(F/G)$ ) [15].  $\gamma$  varie linéairement avec la température, mais sa variation n'est que de 2% sur 10°C [16] : on la négligera donc. De plus,  $\gamma$  dépend légèrement de l'épaisseur du film [14]. L'origine physique du terme correctif correspondant est la courbure du ménisque, qui induit une dépression à l'intérieur du film [17] ; cette dépression est équilibrée par une tension plus élevée dans le film. Mais ce terme correctif est  $10^{-8}$  fois plus petit que le terme principal ( $2*\gamma(F/G)$ ) [16]. En conclusion des deux arguments précédents, les expériences ayant été réalisées à température ambiante, nous considérerons par la suite que  $\gamma$  a une valeur fixée pour le matériau utilisé. Il existe des méthodes variées pour mesurer la tension d'un film : on peut ainsi utiliser la tension d'un fil [15], la déviation d'un pendule par rapport à sa position d'équilibre [14,18], la déformation d'une goutte suspendue [19], la formation de bulles smectiques [20] ou les fréquences de résonance du film vibrant [21,14].

Un film smectique est un système thermodynamiquement métastable [12,22], aussi bien par rapport à l'absence de film, que vis-à-vis de la phase smectique tridimensionnelle. Une étude a été réalisée sur la stabilité des films vis-à-vis de la nucléation de trous, qui sont des plages d'épaisseurs plus faibles que le reste du film [17]. Plus précisément, il s'agit de boucles de dislocations coin. Il a été montré que, si le rayon initial du trou est inférieur à une valeur critique, il s'effondrera sur lui-même. Dans le cas contraire, il finira par envahir tout le film. Cependant, comme les barrières

d'énergie mises en jeu pour la nucléation de trous ont des valeurs élevées [12], ce qui se traduit par une valeur de quelques dizaines de  $\mu\text{m}$  pour le rayon critique, il n'arrive jamais qu'un trou s'ouvre spontanément dans le film, sauf, dans le cas d'un film exposé à l'air ambiant, à cause d'une poussière. En pratique, en l'absence de poussières, ces films peuvent donc être conservés longtemps : jusqu'à plusieurs mois sous vide. En fait, les films sont même trop stables : il s'est parfois avéré très difficile de les faire éclater en les perçant...

## **I-2) Les films de cristaux liquides smectiques A librement suspendus en vibration**

### I-2.1) Modélisation des films de SmA

Comme le ménisque a une extension latérale faible ( $100 \mu\text{m}$ ) devant la taille totale du film (1 cm), nous négligerons le ménisque par la suite : nous considérons la membrane smectique comme ayant une épaisseur donnée sur toute sa surface.

De plus, le film peut contenir, comme nous l'avons dit, de 2 à quelques milliers de couches. Une couche smectique mesurant 3 nm de hauteur, cela donne une épaisseur du film comprise entre 6 nm et quelques  $\mu\text{m}$ . Cette grandeur reste toujours faible devant les dimensions latérales du film, qui sont centimétriques. En conséquence, nous modéliserons le film par une membrane bidimensionnelle, c'est-à-dire d'épaisseur tendant vers zéro.

Pour un film plan, la seule force de rappel intervenant est une force *capillaire*. Pour un film SmA, il existe une force provenant de l'élasticité d'orientation du matériau : on peut montrer que sa contribution est négligeable devant celle de la force capillaire (voir le chap. IV). En fait, même pour un film en phase  $\text{SmB}_{\text{crist}} \textit{plan}$ , les contributions élastiques (positionnelles et orientationnelles) sont négligeables [23]. Cette propriété est indispensable pour pouvoir considérer le film smectique comme une membrane au sens classique du terme [24], c'est-à-dire un système vibrant dont l'énergie est uniquement une énergie de *surface* et non une énergie *élastique*.

I-2.2) Les films de SmA et l'équation d'onde de Helmholtz

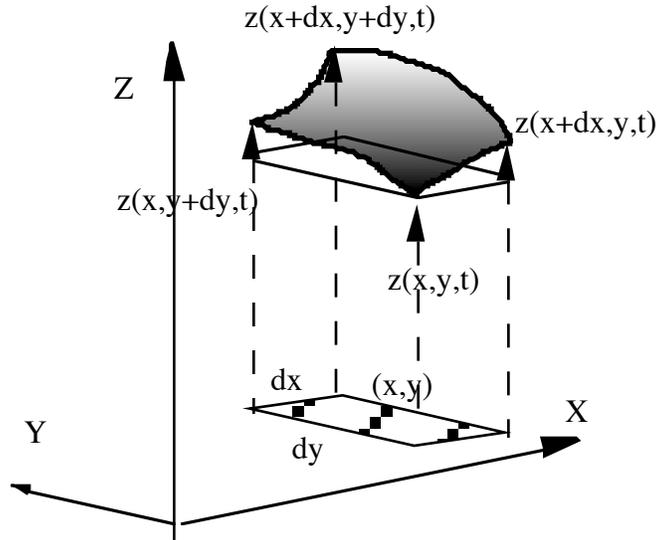


figure 4 : système considéré

Considérons un film tendu sur un cadre plan de forme quelconque, et prenons-en un élément de surface  $dx \cdot dy$ , dans le référentiel du laboratoire. Au repos, notons les coordonnées de cet élément de surface  $(x, y, 0)$ . A l'instant  $t$  (voir la figure 4), elles sont devenues  $(x, y, z(x, y, t))$ . A cause de l'existence de la tension du film, il existe une force de rappel capillaire par unité de surface agissant sur l'élément de surface considéré, qui s'exprime par :

$$\gamma * \Delta z(x, y, t)$$

I- 1

Pour trouver l'expression de cette force de rappel, il suffit de minimiser l'expression de l'énergie capillaire totale de la membrane par rapport à une variation  $\delta z(x, y, t)$  de la forme de la membrane. L'hypothèse fondamentale pour parvenir au résultat (I- 1) est celui d'un déplacement de la membrane qui reste dans le *domaine linéaire* : l'angle d'inclinaison de l'élément de surface par rapport à l'horizontale reste faible.

Il est important également que le film soit plan au repos, car un terme supplémentaire de rappel capillaire apparaîtrait si le film avait au repos une courbure gaussienne non nulle [23] (voir le chapitre IV).

A l'ordre «Zéro», on peut montrer, et ce point sera développé en détail au chapitre IV, que la force (I- 1) est la seule s'exerçant sur le film. On peut donc écrire l'équation du mouvement du système considéré comme (en ne considérant que des forces par unité de surface) :

$$\gamma * \Delta z(x,y,t) = \rho e \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} \quad \text{I- 2}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau, et  $e$  l'épaisseur du film soit, si l'on pose :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho e}} \quad \text{I- 3}$$

pour la célérité des ondes transverses dans la membrane, on obtient alors l'équation d'onde de Helmholtz :

$$\Delta z(x,y,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z(x,y,t)}{\partial t^2} \quad \text{I- 4}$$

Quelles sont les *conditions aux limites* sur la quantité  $z(x,y,t)$  au bord de la membrane? Le film est attaché au cadre par son ménisque. On pourrait imaginer que le ménisque glisse verticalement le long du cadre au cours des vibrations du film. Ceci est corroboré par l'observation expérimentale de «Plis» au bord du film, là où il est rattaché au cadre. Ces plis montrent que le ménisque est attaché au cadre à différentes hauteurs. A partir de là, pourquoi le ménisque ne se déplacerait-il pas un peu verticalement quand le film vibre [25]?

Des expériences ont été réalisées, montrant que le temps de relaxation typique pour le glissement du ménisque sur un substrat solide est de quelques secondes [26]. Ce temps est donc beaucoup plus grand que la période des vibrations du film (typiquement 1 à 10 ms). Nous allons

donc effectuer l'hypothèse que le ménisque reste attaché au cadre au cours des vibrations du film<sup>6</sup>.

De plus, nous verrons un peu plus bas une justification a posteriori de cette hypothèse.

Cette condition aux limites est celle de Dirichlet, et peut s'écrire sous la forme simple suivante :

$$z(x, y, t) = 0 \text{ au bord, quel que soit } t \quad \text{I- 5}$$

Nous avons à résoudre le problème suivant : nous disposons d'un système obéissant à l'équation d'onde bidimensionnelle, avec des conditions aux limites données au bord. Nous avons donc un système en vibration, d'extension spatiale limitée. Nécessairement, les ondes transverses existantes seront des ondes stationnaires, de la forme :

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \cos(\omega t) \quad \text{I- 6}$$

On obtient ainsi l'équation suivante pour la quantité  $Z(x, y)$  :

$$\Delta Z(x, y) = -(\omega^2/c^2)Z(x, y) \quad \text{I- 7}$$

avec la condition

$$Z(x, y) = 0 \text{ au bord} \quad \text{I- 8}$$

Nous obtenons donc une équation aux valeurs propres pour l'opérateur laplacien sur un milieu borné. Il existe des arguments mathématiques généraux [27] pour montrer que le spectre des valeurs propres obtenu est discret. Les modes propres correspondants peuvent donc s'indexer par

$$\{k_n, Z_n(x, y)\} \quad \text{I- 9}$$

avec :

---

<sup>6</sup> Remarquons que le fait que le ménisque se déforme au cours des vibrations du film engendre des forces de rappel et de dissipation supplémentaires, mais ne change rien aux conditions aux limites.

$$k_n^2 = \omega_n^2 / c^2 \quad \text{I- 10}$$

Remarques :

\* Le spectre dépend de la nature des conditions aux limites. Les spectres que nous avons obtenus sont toujours en très bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes et pour les mêmes conditions aux limites, qu'il s'agisse de spectres connus analytiquement (IV-2.2), de simulations numériques (III.1.3, IV-1.1.2) ou d'expériences sur des cavités micro-ondes (IV-1.1.1). Ceci confirme donc a posteriori l'hypothèse que les conditions de Dirichlet sont satisfaites par notre système expérimental.

\* L'équation (I- 7) est analogue à l'équation de Schrödinger sous sa forme stationnaire. En effet, considérons une particule quantique de masse  $m$ , libre de se déplacer à l'intérieur d'un billard bidimensionnel : ceci signifie que les bords du billard sont des murs de potentiel infiniment répulsifs pour la particule, où la fonction d'onde  $\psi(x,y)$  s'annule (condition de Dirichlet). L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y) = E * \psi(x, y) \quad \text{I- 11}$$

où  $\psi(x,y)$  est la fonction d'onde associée à la particule quantique. On peut écrire (I- 11) sous la forme :

$$\Delta \psi(x, y) = -\frac{2mE}{\hbar^2} * \psi(x, y) \quad \text{I- 12}$$

(I- 12) et (I- 7) sont formellement analogues, à condition de réaliser l'identification suivante :

$$\frac{2mE}{\hbar^2} \leftrightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{I- 13}$$

Les énergies possibles pour la particule quantique confinée sont donc analogues aux fréquences propres au carré de la membrane vibrante. De plus, les conditions aux limites sont celles de Dirichlet dans les deux cas. C'est sur cette analogie qu'est basée l'étude expérimentale du chaos quantique,

grâce à des systèmes expérimentaux obéissant à l'équation d'onde bidimensionnelle, tels que les cavités micro-ondes aplaties par exemple [28] (voir le chap. VI pour plus de détails sur ce sujet).

### I-2.3) Expériences précédentes utilisant des films smectiques comme membranes vibrantes

Le premier à avoir fait vibrer des films smectiques est K. Myiano [21,29], dans les années 80. Il a utilisé les mesures des fréquences propres de vibration de films en phase Sm A et Sm B<sub>cris</sub> pour mesurer la tension de ces films, et la dépendance de cette dernière en température. Il a montré que, même pour une phase cristalline comme la phase Sm B<sub>cris</sub>, la force de rappel dominante est celle de capillarité. Sa méthode permet donc de mesurer la tension de surface de n'importe quel matériau cristallin, si l'on est capable d'en faire un film librement suspendu. D'autre part, il a trouvé que la tension  $\gamma$  augmente avec la température T. Or l'entropie vaut  $S = -\partial\gamma/\partial T$ , donc on prévoit que  $\gamma$  diminue avec la température. Les résultats expérimentaux sont donc contraires aux prévisions théoriques, et cela indique la présence d'un ordre plus important à la surface du film. Aucune singularité n'est observée à la transition SmA/SmB, ce qui montre que la solidification de la surface est un processus continu.

Curieusement, le sujet a été abandonné jusqu'à la thèse d'I. Kraus [16] -soutenue en 1995-, qui est la première, à notre connaissance, à étudier en partie les films smectiques mis en vibration. L'étude du comportement en température des fréquences propres des films smectiques a permis de mesurer la dépendance thermique de la tension  $\gamma$ , et notamment son comportement lors du passage par une transition de phase. Pour deux phases différentes où les couches restent liquides (Sm A et Sm C\*), le comportement en température de  $\gamma$  dans ces deux phases est qualitativement différent, mais aucun saut n'est observé à la transition entre les deux phases. Par contre, quand l'une des deux phases au moins est cristalline, on observe un saut de la fréquence des modes propres à la transition de phase. Ce saut n'est pas dû, comme on peut le penser au premier abord [16], à un saut de la tension  $\gamma$ , mais à l'apparition de l'élasticité tridimensionnelle de la phase SmB<sub>cris</sub>, conjuguée à l'existence d'une courbure gaussienne non nulle dans le film [30]. Cet effet est semblable à ce qui

---

se produit pour une plaque de tôle ondulée, dont la rigidité vis-à-vis de la flexion, dans le direction de la corrugation, devient plus grande que pour une plaque plane.

La thèse de M. Brazovskaia [3] a été entièrement consacrée aux vibrations de films smectiques A et C. Des effets non-linéaires ont été mis en évidence, quand l'amplitude de vibration des films dépasse un seuil critique. La robustesse des films smectiques permet d'y incorporer des objets extérieurs sans rompre le film. Ainsi, pour un film tendu sur un contour rectangulaire, percé par une fibre, des points diaboliques ont été découverts dans le spectre de vibration. Enfin, un système auto-ajustable formé du film et d'une bille à la surface du film a été étudié.

### **I-3) Les autres systèmes modèles obéissant à l'équation d'onde bidimensionnelle**

Le premier exemple auquel on pense est celui des tambours, qui sont constitués par des peaux tendues en de nombreux endroits. On peut aussi songer aux membranes plastiques [31]. Ces deux systèmes ont deux inconvénients communs : il est difficile, en attachant une membrane en divers endroits, d'obtenir une tension uniforme. De plus, dans les deux cas, le gaz alentour est également mis en mouvement, ce qui introduit de l'inertie et de la dissipation supplémentaires.

Les films de savon ont longtemps été considérés comme des membranes idéales [24]. Dès le XIX<sup>ème</sup> siècle, des expériences les mettant en vibration ont été réalisées. Ce sont des systèmes liquides, donc leur tension est nécessairement uniforme, ce qui résoud le premier inconvénient évoqué ci-dessus. Par contre, la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante ( $5 \cdot 10^{-2}$  bar) étant trop élevée, il est nécessaire de maintenir ces films sous atmosphère contrôlée en eau. En conséquence, les films de savon ne permettent pas de résoudre le problème dû au gaz évoqué précédemment. Signalons à ce sujet l'existence d'expériences récentes mettant en vibration des films de savon plans [32]. Il a été montré que la densité bidimensionnelle se réarrange du fait des vibrations, à cause d'effets non-linéaires, apparaissant pour des amplitudes de vibration suffisamment élevées. En effet, on trouve que la matière se concentre au niveau des ventres de

vibration, à cause de la force d'inertie centripète. Cet effet est de même nature que celui découvert dans la thèse [3].

Des systèmes physiques analogues à des membranes bidimensionnelles existent également : ce sont les cavités micro-ondes [28], où le champ électrique vertical obéit à l'équation d'onde avec les conditions aux limites de Dirichlet au bord. Le succès de ces expériences vient du fait que les facteurs de qualité des résonances sont élevés (quelques milliers typiquement). Nous renvoyons le lecteur au chap. VI pour plus de détails à ce sujet.

#### **I-4) Conclusion : intérêt des films smectiques**

Une fois mis sous vide, les films smectiques sont extrêmement robustes : on peut les y conserver plusieurs mois. De plus, les expériences sont simples de réalisation et peu coûteuses. Enfin, étant au sein d'une équipe spécialisée dans les cristaux liquides, nous bénéficions des connaissances acquises dans ce domaine. En effet, dans cette thèse, nous utilisons les cristaux liquides comme membranes, plus que nous ne les étudions pour eux-mêmes.

Revenons sur le fait de les étudier sous vide, ce qui est rendu possible par la faible valeur de la pression de vapeur saturante du matériau utilisé. Cela a deux conséquences : d'une part, cela supprime le problème de l'*inertie* du gaz environnant. En effet, à pression ambiante, le rapport de la masse de gaz mise en jeu par les vibrations du film sur la masse du film atteint facilement des valeurs considérables : ce rapport vaut  $m_{\text{gaz}}/m_{\text{film}} = 5 \cdot 10^{-6}/e$ , où  $e$  est l'épaisseur du film (en m). Pour un film de 5 mm de rayon et 0.1  $\mu\text{m}$  d'épaisseur, on obtient une valeur de 50 ; cela vaut 5 pour un film de 1  $\mu\text{m}$ . Le fait de passer à une pression de 0.1 mbar multiplie le rapport précédent par un facteur  $10^{-4}$ , et rend l'inertie du gaz négligeable, sauf pour les films ne comportant que quelques couches moléculaires. D'autre part, le fait que la pression soit faible diminue les *effets dissipatifs* associés au gaz. Nous développons ce point en détail au chapitre IV.

De plus, la valeur de la conductivité électrique des films (faible, mais suffisante) rend possible une excitation électrique. Ceci a deux avantages : cela permet de travailler sous vide ; de plus, c'est une méthode ponctuelle, donc on peut exciter des modes élevés.

Tous ces points seront développés de manière plus précise au cours des chapitres II et IV.

Enfin, l'inconvénient majeur des films smectiques réside dans le fait que les facteurs de qualité, s'ils sont supérieurs (d'un facteur 10 environ) à ceux des films de savon, sont inférieurs (encore d'un facteur 10) à ceux des cavités micro-ondes. Dans le but de comprendre quels sont les mécanismes qui limitent la qualité des résonances, nous nous penchons dans le chap. IV sur les phénomènes physiques à l'origine de l'amortissement des vibrations.

### **Références du chap. I :**

- [1] G. Friedel, *Etats mésomorphes de la matière*, Annale de Physique **18**, 273 (1922)
- [2] G.W. Gray and J.E. Lydon, *Nature* (London) **252**, 221 (1974)
- [3] M. Brazovskaia, *Vibration des films smectiques librement suspendus : effets non-linéaires, points diaboliques et oscillateurs auto-ajustables*, thèse de doctorat, Orsay (1998)
- [4] P. S. Pershan, *Structure of liquid crystal phases*, World Scientific, Singapore (1988), p. 43
- [5] C. Y. Young, R. Pindak, N. A. Clark and R. B. Meyer, *Light-Scattering Study of Two-Dimensional Molecular-Orientation Fluctuations in a Freely Suspended Ferroelectric Liquid-Crystal Film*, Phys. Rev. Lett. **40**, 773 (1978)
- [6] Ch. Bahr, *Influence of Dimensionality and Surface Ordering on Phase Transitions : Studies of Freely-Suspended Liquid-Crystal Films*, Int. J. Mod. Phys. **8**, 3051 (1994)
- [7] C. C. Huang and T. Stoebe, *Thermal properties of «stacked hexatic phases» in liquid crystals*, Advances in Physics **42**, 343 (1993)
- [8] D.E. Moncton and R. Pindak, *Long-Range Order in Two- and Three-Dimensional Smectic-B Liquid Crystal Films*, Phys. Rev. Lett. **43**, 701 (1979)
- [9] voir, par ex. : B. D. Swanson, H. Stragier, D. J. Tweet and L. B. Sorensen, *Layer-by-Layer Surface Freezing of Freely Suspended Liquid-Crystal Films*, Phys. Rev. Lett. **62**, 909 (1989)
- [10] E. B. Sirota, P. S. Pershan, L. B. Sorensen and J. Collett, *X-ray and optical studies of the thickness dependence of the phase diagram of liquid-crystal films*, Phys. Rev. A **36**, 2890 (1987)
- [11] I. Kraus, P. Pieranski, E. Demikhov, H. Stegemeyer and J. W. Goodby, *Destruction of a first order smectic- A->smectic C\* phase transition by dimensional crossover in free-standing films*, Phys. Rev. E **48**, 1917 (1993)
- [12] P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993)
- [13] M. Veum, C.C. Huang, C. F. Chou and V. Surendranath, *Stability and phase transitions of single-molecular-layer free-standing liquid crystal films*, Phys. Rev. E **56**, 2298 (1997).

- 
- [14] P. Pieranski et al., *Physics of smectic membranes*, Phys. A **194**, 364 (1993)
- [15] T. Stoebe, P. Mach and C. C. Huang, *Surface tension of free-standing liquid-crystal films*, Phys. Rev. E **49**, R3587 (1994)
- [16] I. Kraus, *Etudes des films librement suspendus de cristaux liquides thermotropes en phase smectique*, thèse de doctorat, Orsay (1995)
- [17] J. C. Géminard, R. Holyst and P. Oswald, *Meniscus and Dislocations in Free-Standing Films of Smectic-A Liquid Crystals*, Phys. Rev. Lett. **78**, 1924 (1997)
- [18] M. Eberhardt and B. Meyer, *Tensiometer for free standing smectic films*, Rev. Sci. Instrum. **67** (8), 2846 (1996).
- [19] S. Krishnaswamy and R. Shashidhar, *Measurement of the Surface Tension of CBOOA*, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **38**, 353 (1977)
- [20] R. Stannarius and C. Cramer, *Surface tension measurements in freely suspended bubbles of thermotropic smectic liquid crystals*, Liquid Crystals **23** (3), 371 (1997) ; R. Stannarius and C. Cramer, *Self-supporting bubbles of thermotropic smectic liquid crystals*, Europhys. Lett. **42** (1), 43 (1998).
- [21] K. Myiano, *Surface tension measured by vibrating membranes : an application to smectic A and B phases*, Phys. Rev. A **26**, 1820 (1982)
- [22] Y. Martinez, A.M. Somoza and L. Mederos, *Metastability of freely suspended liquid-crystal films*, Phys. Rev. E **53**, 2466 (1996)
- [23] M. Ben Amar, P. Patricio da Silva, M. Brazovskaia, C. Even and P. Pieranski, *Vibrations of smectic films*, Phil. Mag. B **78** (2), 115 (1998) ; voir aussi la référence [30]
- [24] voir par ex. : J. W. Rayleigh, *The theory of sound*, Dover Publishing Inc. (1945).
- [25] hypothèse suggérée par V. Shikin (discussion privée)
- [26] I. V. Chikina, N. Limodin, A. Langlois, M. Brazovskaia, C. Even and P. Pieranski, *Transfer of smectic films to a solid substrate by the method of Maclennan*, Eur. Phys. J. B **3**, 189 (1998).

[27] voir par ex. : H. P. Baltes and E. R. Hilf, *Spectra of finite systems*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1975)

[28] H-J Stöckmann and J. Stein, *Quantum Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990) ; S. Sridhar, *Experimental Observation of Scarred Eigenfunctions of Chaotic Microwave Cavities* , Phys. Rev. Lett. **67**, 785 (1991) ; H. Alt, H-D. Graf and P. Schardt, *Superconducting billiard cavities with chaotic dynamics : experimental test of statistical measures*, Phys. Rev. E **50** (1), R1 (1994).

[29] C. H. Sohl, K. Myiano and J. B. Ketterson, *Novel technique for dynamic surface tension and viscosity measurements at liquid-gas interfaces*, Rev. Sci. Instrum. **49** (10), 1464 (1978).

[30] I. Kraus, Ch. Bahr, I. V. Chikina and P. Pieranski, *Can one hear structures of smectic films?*, Phys. Rev. E **58** (1), 610 (1998).

[31] voir par ex. : B. Sapoval, *Experimental observation of local modes in fractal drums*, Phys. D **38**, 296 (1989).

[32] A. Boudaoud, Y. Couder and M. Ben Amar, *Self-adaptation in vibrating soap films*, to be published in Phys. Rev. Lett. (may 1999)





<b>II - METHODES EXPERIMENTALES</b>	<b>25</b>
<b>II-1. Films au repos</b>	<b>26</b>
II-1. 1. Produits utilisés	26
II-1. 2. cadres et supports	27
II-1. 3. tirage du film et mise sous vide	28
II-1. 4. homogénéisation du film	30
II-1. 5. courbure d'un film au repos	31
II-1. 6. épaisseur d'un film au repos	31
<b>II-2. Films en vibration</b>	<b>34</b>
II-2. 1. excitation	34
II-2. 2. détection	36
II-2. 3. détermination du spectre de fréquences propres d'un film sur un contour donné	37
II-2.3.1) obtention des fréquences de résonance $f_n$ du film	38
II-2.3.2) nécessité des fréquences réduites ( $f_n/f_1$ )	39
II-2.3.3) valeurs des vecteurs d'onde $k_n$	40
II-2.3.4) facteurs de qualité des pics	41
II-2. 4. Allure des modes de vibration	43
II-2.4.1) Méthode qualitative globale	43
II-2.4.2) Méthode par déplacement automatisé de l'électrode	47
II-2.4.2.1) Principe qualitatif	47
II-2.4.2.2) Raisonnement énergétique	48
II-2.4.2.3) Procédure expérimentale	49
II-2.4.2.4) Remarque	51
<b>II-3) Conclusion :</b>	<b>54</b>
<b>Annexe : écouter le son d'un tambour [18]</b>	<b>54</b>
<b>Références du chap. II :</b>	<b>55</b>



## II - METHODES EXPERIMENTALES

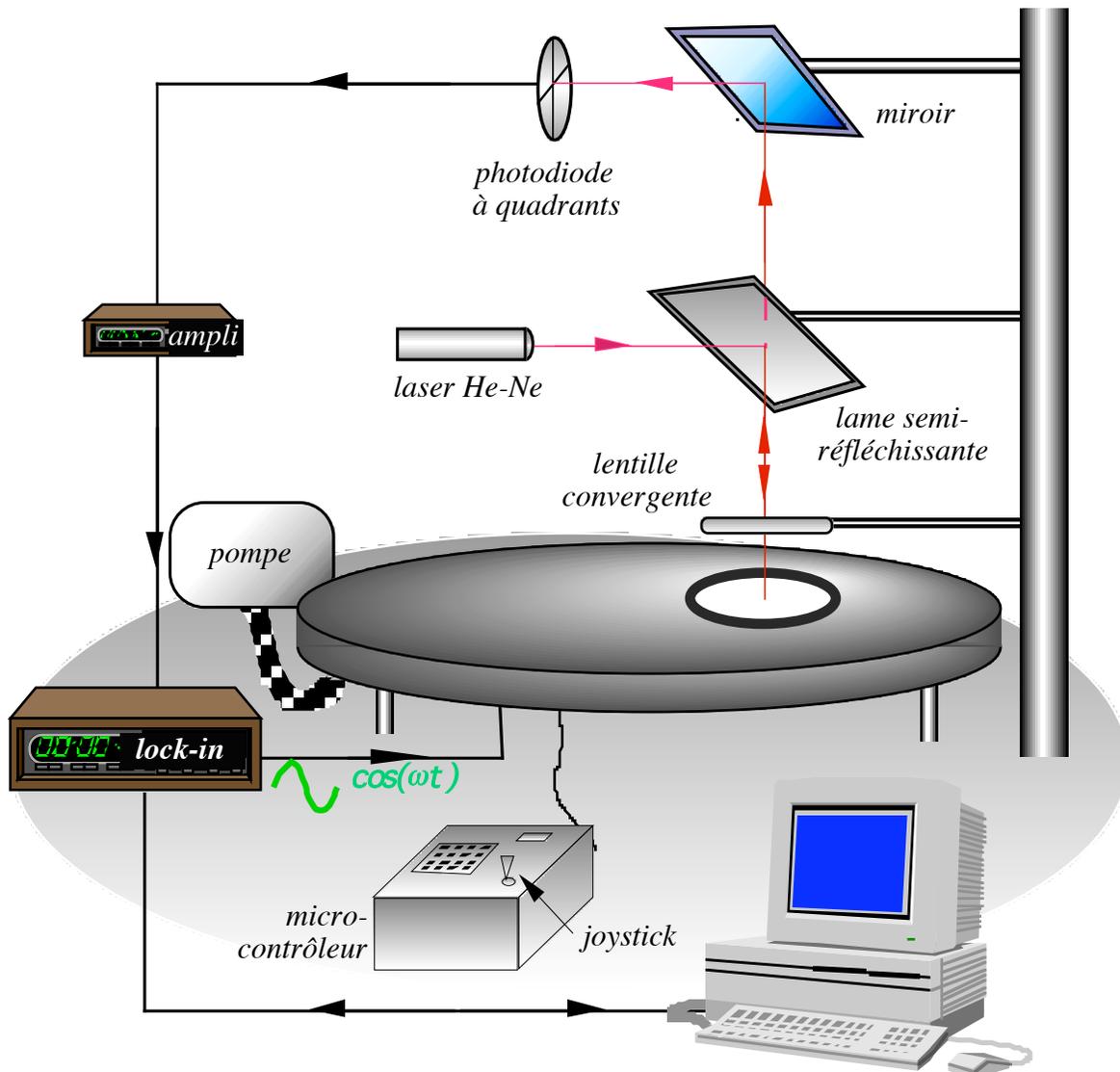


figure 1 : schéma général du dispositif [1]

Au cours de cette thèse, 2 cellules différentes ont été utilisées : une avec microscope et tirage du film à la main. L'autre -mise au point au cours de ma thèse par V. Klein- avec caméra, tirage et déplacement de l'électrode automatisés : cette deuxième cellule permet d'avoir non seulement le spectre, mais aussi l'allure des modes propres. Sauf mention explicite contraire, les descriptions de ce chapitre concerneront la deuxième cellule.

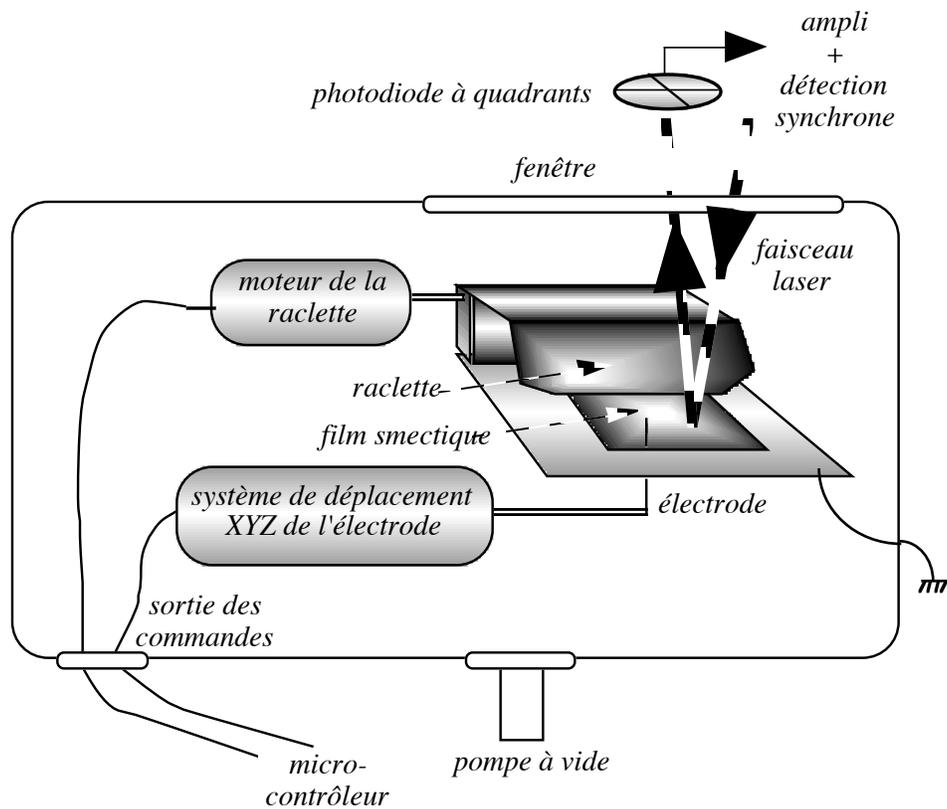


figure 2 : intérieur de la cellule [1]

## **II-1. Films au repos**

### **II-1. 1. Produits utilisés**

Nous avons besoin d'un cristal liquide qui soit en phase smectique à la température ambiante, ceci afin d'éviter d'ajouter un contrôle de température à notre dispositif expérimental. De plus, nous souhaitons que les couches smectiques soient des liquides bidimensionnels, afin que la tension du film soit homogène et isotrope (propriété requise pour un bon tambour, cf chap. I). En pratique, nous avons travaillé avec des matériaux qui sont tous SmA à l'ambiante, ceci essentiellement pour des raisons de commodité. En effet, il semble que les films de SmC soient plus fragiles et mettent plus de temps à s'homogénéiser que ceux de SmA [1].

Nous avons utilisé trois produits : le 8CB, le S1 et le S2. La formule du 8CB est donnée dans le chap. I. Le S1 est un produit qui était commercialisé par British Drug House jusqu'en

octobre 1997 environ : c'est un mélange eutectique de 8CB et de 10CB [2]. Quant au produit S2, c'est un mélange commercial de cyano-biphényles dont la composition n'est pas donnée par B. D. H., mais dont l'intérêt est de posséder une large de plage de température autour de l'ambiante où il est en phase SmA.

	Cristal - SmA (°C)	SmA - N (°C)	N - Iso (°C)
8CB	21.5	33.5	40.5
10CB	44	--	50.5
S1	5	40	43
S2	-1	48	49

Tableau 1 : séquence de phases des différents produits utilisés (bulk)

D'autre part, les composés utilisés ont une pression de vapeur saturante suffisamment faible ( $10^{-6}$  bar environ) pour résister à la mise sous vide primaire ( $10^{-4}$  à  $10^{-5}$  bar).

## II-1. 2. cadres et supports

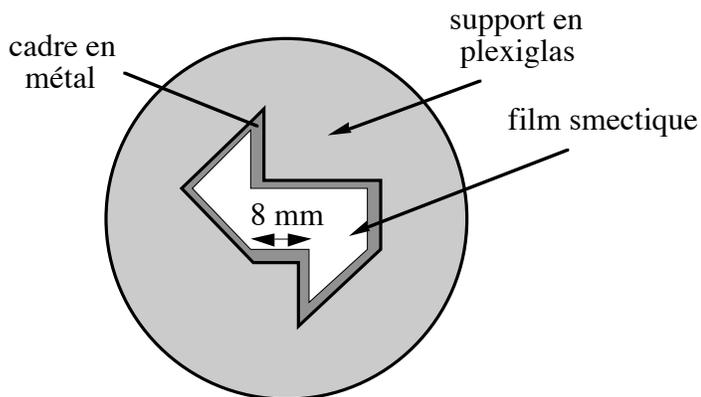


figure 3 : vue de dessous du cadre sur son support

La forme souhaitée de contour sera définie par celle du cadre métallique, à l'intérieur duquel le film sera tendu. Ce film est relié au cadre par l'intermédiaire d'un ménisque (cf chap. I, figure 3), caractérisé par son épaisseur (verticale) et sa dimension latérale. Pour réduire ces deux quantités à la fois, on a intérêt à ce que l'épaisseur du cadre soit aussi faible que possible. Pour des raisons

technologiques, nous avons pris des cadres d'épaisseur environ 100  $\mu\text{m}$ . A cause de cette faible épaisseur, le cadre (et donc le film) est susceptible de se courber : il faut donc le poser sur un support le plus plan possible. La plupart du temps, nous avons utilisé des supports en plexiglas, qui répondent bien à cette condition. De plus, idéalement, la forme du support devrait être la même que celle du cadre, la découpe à l'intérieur étant de surface un peu plus grande que celle du cadre lui-même (figure 3), ceci pour être sûr que le film soit tendu sur le cadre et non sur le support (ce qui ôterait tout intérêt au dispositif!). Enfin, il s'est avéré plus commode de coller le cadre sur son support, soit en utilisant le cristal liquide lui-même comme colle (pour éviter toute pollution chimique de celui-ci), soit en utilisant de l'Araldite.

Plus précisément, nous avons toujours utilisé des cadres métalliques (inox ou nickel), à cause de notre méthode pour exciter le film (voir plus loin). Leur épaisseur était comprise entre 80 et 200  $\mu\text{m}$ . Ces cadres étaient initialement des disques de diamètre 4 cm, à l'intérieur desquels les formes voulues ont été découpées par attaque chimique (attaque d'un acide oxydant sur le métal), par des entreprises comme Innovations Couches Minces (I.C.M.C.), ou au laboratoire (atelier ou Vincent Klein). Le cadre de forme fractale nous a été gracieusement fourni par B. Sapoval.

Les supports étaient en matière plastique, plexi ou polycarbonate, d'épaisseur 1 mm. Certains ont été découpés par jet d'eau par l'entreprise Méca Jet d'Eau, les autres au laboratoire, plus grossièrement.

### II-1. 3. tirage du film et mise sous vide

Le cristal liquide s'est révélé assez sensible à la présence d'impuretés. Pour éliminer les poussières au maximum, un bon nettoyage à l'éthanol de la cellule et du cadre est nécessaire. Le matériau lui-même contenant parfois des solvants, il est utile de commencer par mettre sous vide une petite quantité de produit, afin de la faire dégazer. Ensuite, le tirage du film et sa stabilité ultérieure seront facilités. Le vide est obtenu grâce à une pompe primaire. Pendant la majorité de la thèse, une jauge de pression prévue pour fonctionner entre  $P = 10^5$  Pa et  $P = 0$  (avec une précision de 1 mbar) a été utilisée. Pour vérifier la qualité du vide primaire, nous avons utilisé une jauge à filament : la

valeur de la pression dans la cellule était de l'ordre de 0.1 mbar en fonctionnement normal, et la pression minimale atteinte (grâce à une autre pompe) a été de  $10^{-2}$  mbar. L'importance de mesurer précisément la pression se révélera au chap. IV.

Le principe du tirage des films est très simple (figure 2) [3]. On dépose préalablement une goutte de cristal liquide sur le bord de la "raclette", celle-ci s'appuyant de manière souple sur le cadre. Puis on tire la raclette, créant ainsi le film. La raclette peut être tirée soit à la main, à l'aide d'une vis micrométrique (ancienne cellule), soit automatiquement, avec un petit moteur commandé par le micro-contrôleur (nouvelle cellule). Dans tous les cas, le tirage doit s'effectuer à la vitesse la plus faible possible, et le plus régulièrement possible. En effet, un à-coup éventuel entraîne une brusque augmentation de la tension du film. Des trous sont alors susceptibles d'être créés dans le film. Si le rayon d'un trou dépasse une valeur critique, le trou envahit progressivement tout le film, entraînant ainsi son amincissement [4,5,6].

De plus, même si le tirage est effectué sans à-coups, l'épaisseur du film dépend de la vitesse de tirage : plus on tire lentement, plus le film sera épais [7]. Pour obtenir un film d'épaisseur donnée : en réglant la quantité de cristal liquide introduite et la vitesse de tirage, on tire successivement des films jusqu'à obtenir l'épaisseur voulue.

Au cours du tirage, il est commode d'observer le film en lumière blanche soit à l'aide d'un microscope réfléchissant (ancienne cellule), soit avec une caméra (nouvelle cellule). La couleur observée (résultant des interférences entre les rayons réfléchis par les deux interfaces film-air) peut donner une idée de son épaisseur.

Remarques :

\* Les contours que nous utilisons présentent souvent des angles saillants. Lorsque la raclette arrive sur un tel angle, cela peut entraîner la formation de trous. Pour réduire ce problème, on peut jouer sur l'orientation du cadre par rapport à la raclette. On peut également utiliser une raclette à bord oblique par rapport aux bords du cadre.

\* Il est important de mouiller au préalable la surface du cadre correspondant à l'aire qui sera balayée par la raclette. En effet, ce procédé de tirage des films forme en fait deux films : un qui est

librement suspendu à l'intérieur de la forme découpée, et un autre film qui mouille le cadre : ce dernier film est rendu visible par l'apparition de couleurs sur le cadre (voir figure 4). Parfois, des trous sont créés lorsque la raclette frotte sur une zone du cadre non mouillée par le cristal liquide.



figure 4 : deux films d'un coup ; les flèches montrent les deux films : le film librement suspendu (en bas), et celui sur le cadre (en haut)

#### II-1. 4. homogénéisation du film

Lorsqu'on tire un film, il est rarement homogène d'emblée. Au contraire, souvent, des trous se sont créés au cours du tirage, créant des plages d'épaisseurs différentes au sein du film. A la fin du processus d'homogénéisation du film, c'est la plage la moins épaisse qui "l'emporte" sur les autres. Comme, en pratique, les films plus épais sont plus intéressants pour nous (ils réfléchissent mieux la lumière, ils sont plus stables [8].), on comprend l'intérêt de limiter l'apparition de trous au cours du tirage.

Au cours du tirage du film, sa tension augmente. Lorsqu'on arrête de tirer, des échanges de molécules ont lieu entre le ménisque et le film, jusqu'à atteindre l'égalité de leurs deux potentiels chimiques : le film sera alors à l'équilibre. Pour un matériau pur en phase Sm A, on peut montrer

que le temps d'équilibrage du film est de l'ordre de 10 ms [8]. Pour les matériaux que nous utilisons, qui sont des mélanges de produits, les temps d'équilibrage observés sont beaucoup plus longs : de l'ordre d'une demi-journée. On peut supposer que, dans ce cas, des gradients de concentration sont aussi induits par le tirage, et que le processus de mise à l'équilibre du film une fois tiré implique des diffusions de molécules à l'intérieur du film.

Parfois, il peut être utile de chauffer le film (à l'aide d'une lampe halogène par exemple), afin d'accélérer sa mise à l'équilibre. En effet, en chauffant, on s'approche de la phase nématique. Le matériau devient plus liquide : le ménisque se raccordera au bord du cadre de manière "plus lisse".

#### II-1. 5. courbure d'un film au repos

Nous avons mesuré la différence de hauteur maximale  $\delta z$  entre deux points du film, due à l'existence d'une courbure du film au repos. Pour cela, nous avons utilisé la méthode donnée dans [9,1]. Un faisceau laser arrive sur le film en incidence normale. Comme le film n'est pas plat, le faisceau réfléchi est déformé en une tache allongée. L'élongation mesurée permet de remonter à l'angle maximal de déviation du faisceau par rapport à la direction d'incidence. On trouve ainsi, pour la tache la plus déformée possible, un rayon de courbure moyen de 0.5 m ; ceci donne  $\delta z \approx 100 \mu\text{m}$ . Cette grandeur est à comparer à la dimension latérale du film, qui est de l'ordre du cm. Par ailleurs,  $\delta z$  est beaucoup plus grand que l'épaisseur du film (1 à 10  $\mu\text{m}$  au maximum). Ceci n'est pas gênant, car le film de Sm A est un liquide bidimensionnel. Cela le serait plus pour un film cristallin à deux dimensions, comme un film en phase Sm B par exemple.

#### II-1. 6. épaisseur d'un film au repos

Le *principe* de mesure de l'épaisseur d'un film a déjà été décrit ailleurs [9,10]. Nous le rappellerons ici brièvement. On considère le film smectique comme un milieu homogène d'indice  $n$ . La réflexion d'un faisceau de lumière incident, perpendiculaire au plan du film, donne lieu à des interférences multiples entre les faisceaux réfléchis par les deux interfaces film/air. Le rapport entre l'intensité réfléchie par le film et l'intensité incidente est le suivant :

$$C(\lambda) = \frac{I_r(\lambda)}{I_0(\lambda)}$$

II- 1

Il s'exprime par [11]:

$$C(\lambda) = \frac{f \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} ne\right)}{1 + f \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} ne\right)}$$

II- 2

où  $n$  est l'indice de réfraction du smectique,  $e$  est l'épaisseur du film,  $f$  est le coefficient de finesse et vaut :

$$f = \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2}$$

II- 3

On mesure donc  $C(\lambda)$  pour  $\lambda$  allant de 400 nm à 800 nm, et on effectue un ajustement sur la courbe théorique, afin de déterminer les paramètres  $f$  et  $ne$ . De la valeur de  $f$  trouvée, on déduit  $n$ , puis l'épaisseur  $e$ .

*Mise en oeuvre* (voir figure 5) :

Le monochromateur (relié à un boîtier de commande) permet d'effectuer le balayage en longueur d'onde, à une vitesse choisie par l'expérimentateur. Il délivre également une tension proportionnelle à la longueur d'onde  $\lambda$  instantanée ; cette tension est envoyée sur un voltmètre, dont la valeur donnée est lue par l'ordinateur.

Le courant en inverse dans la photodiode est proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. On amplifie ce courant avant de l'envoyer dans la détection synchrone.

Le signal carré délivré par le hacheur sert de référence pour la détection synchrone. Par ce procédé, on élimine ainsi la lumière parasite arrivant sur la photodiode.

Enfin, l'ordinateur, grâce à un programme approprié, acquisitionne l'intensité mesurée en fonction de la longueur d'onde.

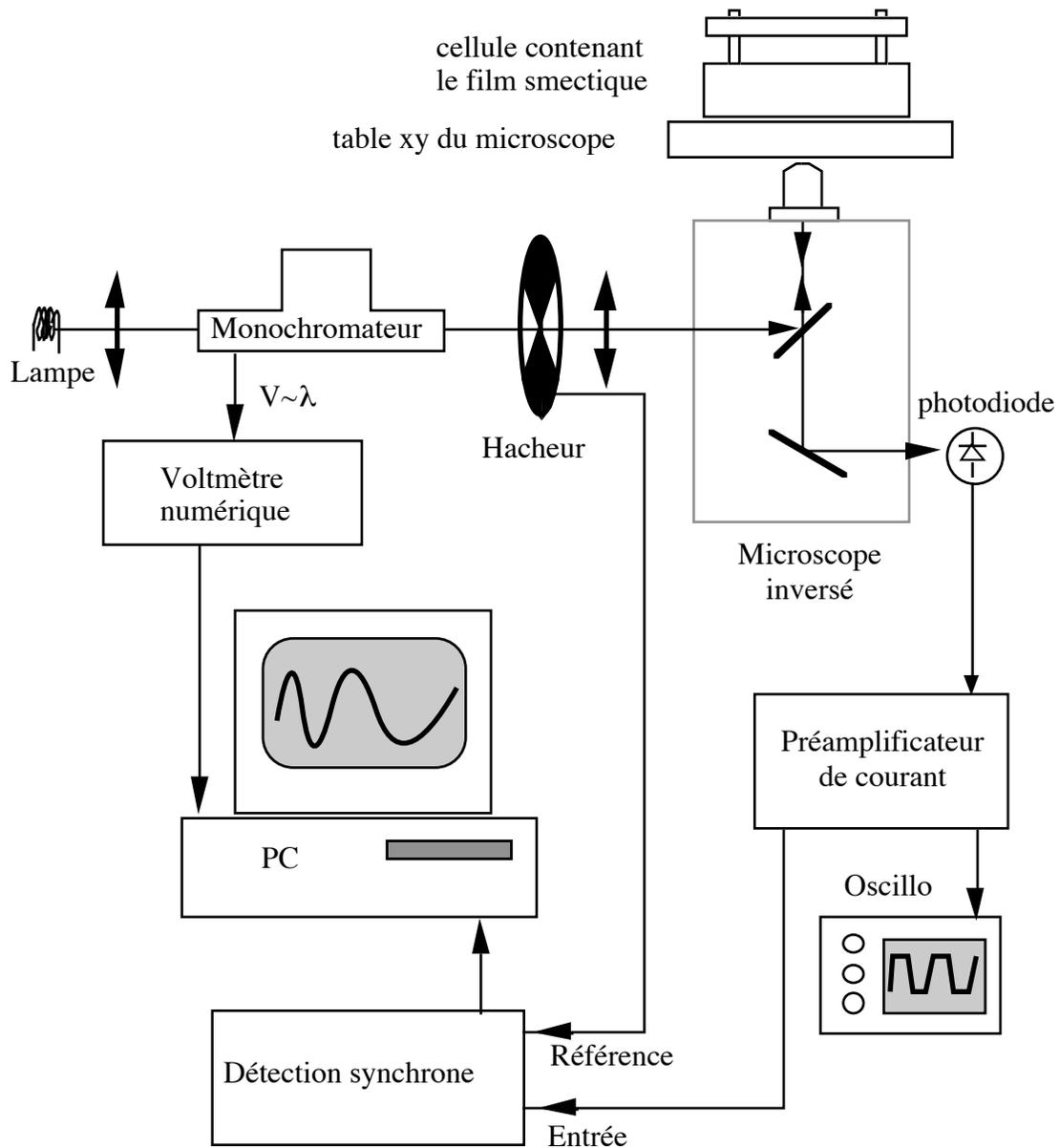


figure 5 : dispositif expérimental (ancienne cellule)

Cependant, l'intensité incidente sur le film n'est pas "plate" en fonction de  $\lambda$ . En effet, la lampe a un certain spectre d'émission ; de plus, il existe une absorption de la lumière par l'optique présente dans le montage (lentilles, etc.) ; enfin, la photodiode elle-même a une réponse spectrale donnée. Pour s'affranchir de ce problème, on fait une première mesure de l'intensité réfléchie  $I_{cadre}(\lambda)$  par le cadre (on suppose que la réflexion est de 100% et qu'elle est indépendante de  $\lambda$  dans le domaine considéré). Puis on fait la mesure de l'intensité réfléchie par le film  $I_{film}(\lambda)$ . Le

coefficient cherché vaut alors :

$$C(\lambda) = \frac{I_{film}(\lambda)}{I_{cadre}(\lambda)}$$

II- 4

Un exemple de détermination de l'épaisseur d'un film est présenté sur la figure 6. On voit que la méthode est précise à une couche smectique près (soit 3 nm). Cette méthode n'est cependant utilisable que pour des films d'épaisseur au moins égale à 0.1  $\mu\text{m}$  (il faut au moins un minimum de la courbe de réflectivité dans le visible). Elle est d'autant plus précise que le film est plus épais.

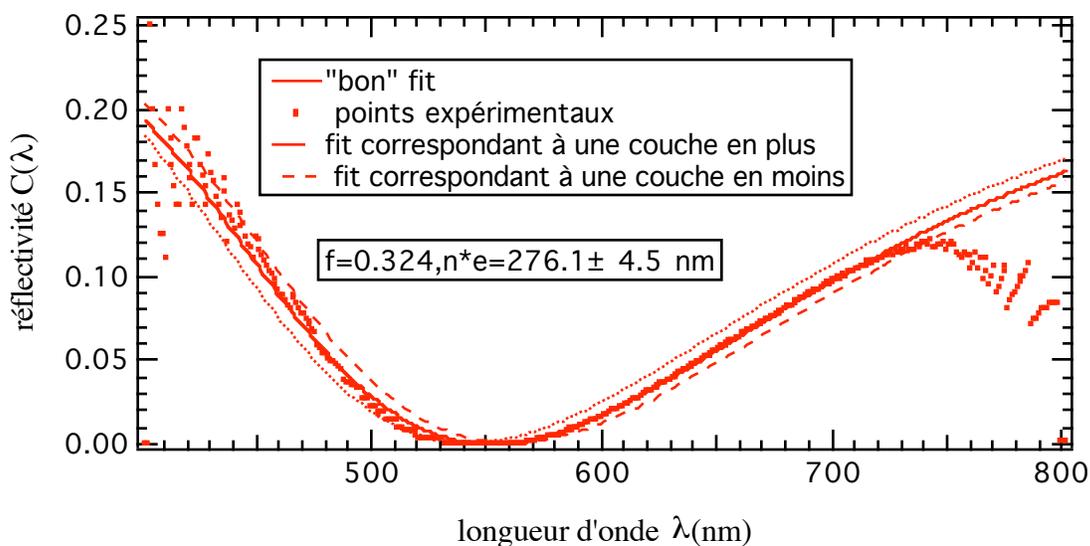


figure 6 : exemple de détermination de l'épaisseur d'un film

## **II-2. Films en vibration**

### II-2. 1. excitation

La nécessité de réaliser les expériences sous vide (cf chap. I) exclut l'utilisation d'un haut-parleur [1] pour exciter le film. On utilisera en fait une méthode électrique, ponctuelle [12]. L'avantage d'exciter le film ponctuellement est qu'on aura ainsi accès à un nombre assez élevé de modes (l'excitation par haut-parleur étant surtout efficace pour le mode fondamental).

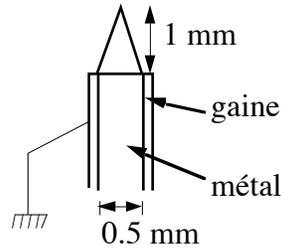


figure 7 : électrode

L'électrode est schématisée sur la figure 7. Elle est de forme conique, afin de la rendre la plus ponctuelle possible. Dans le même objectif, la partie cylindrique est entourée d'une gaine connectée à la masse de la tension excitatrice, afin d'éviter les fuites de champ provenant de cette zone. L'électrode est placée sous le film, à une distance d'environ  $100 \mu\text{m}$  de celui-ci. Son déplacement XYZ est assuré par des moteurs pas-à-pas qu'on peut piloter à l'aide du joystick du micro-contrôleur. La précision du déplacement est de  $10^{-2} \text{ mm}$ .

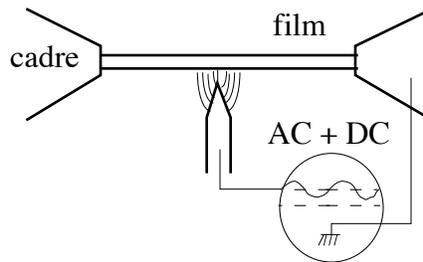


figure 8 : excitation

Le principe d'excitation du film est le suivant (figure 8). Le film est légèrement conducteur : l'ordre de grandeur de sa conductivité [13] est de  $10 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , soit  $10^7$  fois moins que celle du cuivre. Le cadre métallique est, lui, relié à la masse de la tension excitatrice. L'électrode étant métallique, on peut considérer le système {film + électrode} comme un condensateur de capacité  $C$ . La tension continue sert alors à le charger : des charges en quantité  $Q = CV_{DC}$  sont amenées du cadre vers le film, essentiellement vers la zone au voisinage de l'électrode. La tension alternative met alors en mouvement les charges apparues, par la force électrique qui est proportionnelle à  $Q \cdot V_{AC}$ . Soit, si l'on écrit la tension excitatrice sous la forme

$$V = V_{DC} + V_{AC}^0 \sin(2\pi\nu t)$$

La force excitatrice devient :

$$f_{exc} \propto V_{DC} * V_{AC}^0 \sin(2\pi\nu t)$$

C'est-à-dire qu'on a bien une excitation sinusoïdale de fréquence égale à celle,  $\nu$ , de la tension excitatrice. Ce point sera analysé plus en détail au (IV-2.2.1).

Quel est l'ordre de grandeur des tensions  $V_{DC}$  et  $V_{AC}^0$  appliquées? Deux conditions sont requises : tout d'abord, évidemment, on souhaite avoir une excitation suffisamment efficace. De plus, il est nécessaire de rester toujours dans le *domaine linéaire*, c'est-à-dire dans un régime d'amplitude  $Z$  de déplacement vertical du film tel que  $Z / \lambda \ll 10^{-2}$  [14], où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la vibration. Avec  $V_{DC}=100V$  et  $V_{AC}^0=40V$ , on constate expérimentalement que ces deux conditions sont satisfaites.

Nous avons mesuré l'amplitude de vibration typique d'un film, en utilisant la même méthode que pour mesurer la courbure du film (cf II-1. e)) [12]. Un faisceau laser arrive sur le film en incidence normale. Comme le film vibre, le faisceau réfléchi est déformé en une tache allongée. L'élongation mesurée permet de remonter à l'angle maximal de déviation du faisceau par rapport à la direction d'incidence. On trouve ainsi, pour la tache la plus déformée possible,  $Z \cong 10 \mu m$ . En supposant qu'on obtient toujours cet ordre de grandeur pour l'amplitude, quel que soit le mode, on trouve que la condition de linéarité reste vraie tant que  $\lambda \gg 1 \text{ mm}$ . On voit ici un avantage supplémentaire de cette méthode d'excitation : elle permet de rester dans le domaine linéaire dans toute la gamme de fréquence de travail (en pratique  $\lambda$  reste plus grand que 0.5 mm environ).

### II-2. 2. détection

Le système de détection que nous utilisons a déjà été décrit auparavant [12,9,1]. Rappelons brièvement son principe (voir figure 1 et figure 2). Un faisceau laser He-Ne arrive en incidence quasi-normale par rapport au plan du film au repos. Afin de rendre ce faisceau le plus ponctuel possible (ce qui est utile pour l'étude de modes élevés de vibration du film), on le fait converger sur

le film grâce à une lentille de focale  $f = 20$  cm. Le diamètre initial  $D$  du faisceau étant de 2 mm, on en déduit facilement le diamètre maximal de la tache de diffraction sur le film :  $\Lambda f / D \cong 60 \mu\text{m}$  ( $\Lambda$  étant la longueur d'onde du laser, soit  $0.6 \mu\text{m}$ ). Le film étant en mouvement, le faisceau réfléchi<sup>1</sup> est dévié par rapport à la direction d'incidence, d'un angle qui varie avec le temps ; il est ensuite envoyé sur une photodiode à quadrants. Le film étant au repos, ce faisceau réfléchi est réglé au centre des quadrants. En additionnant et soustrayant les intensités mesurées par les différents quadrants, on obtient un signal  $\delta\xi(t)$  proportionnel à la *pente* instantanée du film, dans une certaine direction seulement. Ce signal est ensuite envoyé sur la détection synchrone, afin d'en extraire la composante à la fréquence excitatrice seulement, puis l'amplitude et la phase de ce dernier signal (la phase est relative à celle de l'excitation). Une résonance du film donnera alors lieu à un pic d'amplitude et à une variation de la phase de  $180^\circ$ .

Remarque :

D'autres méthodes de détection sont envisageables :

On peut penser à une méthode électrique, en utilisant une deuxième électrode, ou la même que celle qui excite le film [12]. L'avantage de cette méthode est qu'elle donne accès à une quantité directement proportionnelle à l'amplitude. Nous l'avons essayée sans succès.

On peut aussi envisager une méthode interférométrique [15]. Le principe consiste à comparer la phase de deux faisceaux, dont l'un s'est réfléchi sur le film. Cette méthode serait sans doute très précise, mais elle comporte des difficultés de mise en oeuvre expérimentales.

### II-2. 3. détermination du spectre de fréquences propres d'un film sur un contour donné

Notre but est d'obtenir le spectre correspondant à un contour donné. Nous souhaitons mesurer ce spectre avec la meilleure précision possible : si possible, comparable à celle des expériences avec cavités micro-ondes [16], qui est de 0.2%.

---

<sup>1</sup> pour que ce faisceau réfléchi ait une intensité suffisante, il est souhaitable que le film réfléchisse bien le rouge. On s'arrange pour tirer des films de couleur convenable.

### II-2.3.1) obtention des fréquences de résonance $f_n$ du film

En pratique, on commence par choisir les deux points d'excitation et de détection. Un programme informatique en LabVIEW permet de faire varier automatiquement la fréquence  $\nu$ , et d'enregistrer l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  du signal  $\delta\xi(t)$  pour chaque  $\nu$ .

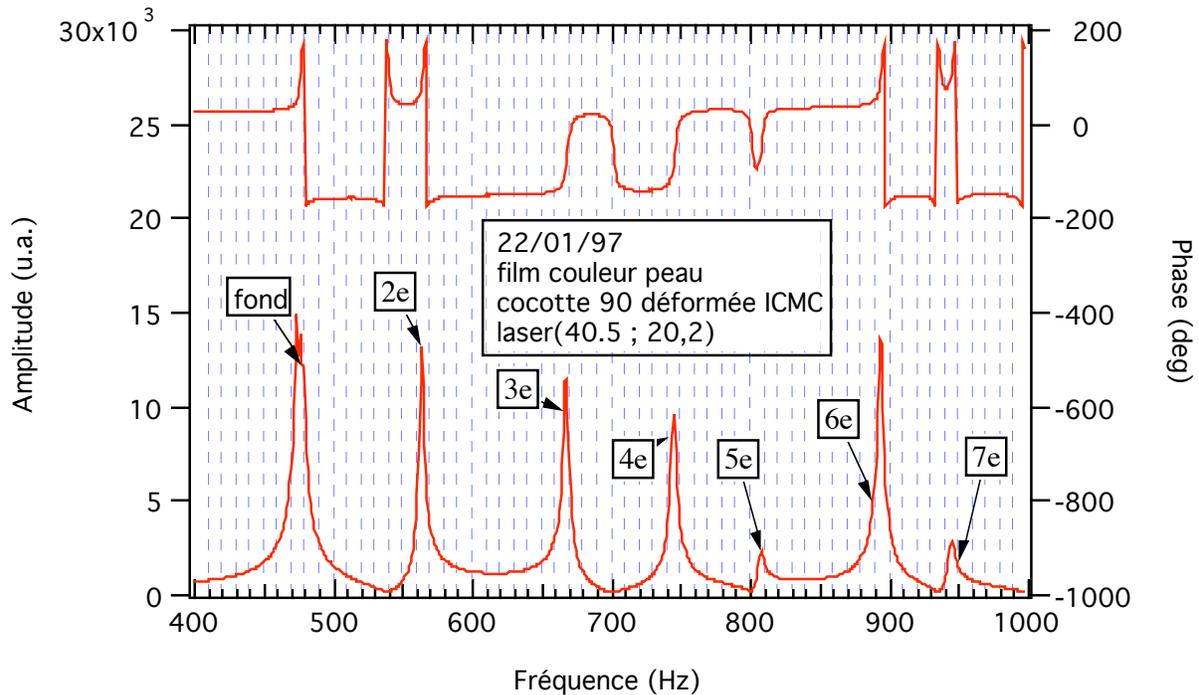


figure 9 : exemple de spectre : amplitude (en bas) et phase (en haut) de  $\delta\xi$  en fonction de la fréquence excitatrice  $\nu$

#### Remarque :

Considérons un pic de fréquence  $\nu_0$  et de largeur  $\Delta\nu$ . Quand on change la fréquence d'excitation, le système vibrant connaît d'abord un régime transitoire de temps caractéristique  $1/\Delta\nu$ , puis il effectue des oscillations forcées de période  $\nu_0$ . Pour que le système ait le temps d'atteindre le régime permanent après chaque incrémentation de fréquence, il est donc nécessaire que :

- le temps d'intégration du lock-in (temps caractéristique du filtre passe-bas à l'intérieur)
- le temps d'attente dans le programme, qui donne le rythme de balayage

soient tous deux plus grands que  $1/\Delta\nu$ . Typiquement, pour une résonance  $\nu_0 = 1$  kHz et un facteur de qualité  $Q \approx 200$ ,  $1/\Delta\nu = Q/\nu_0 \approx 200$  ms.

Une fois qu'on a obtenu un spectre de A et  $\varphi$  en fonction de  $\nu$  ( $\nu$  variant typiquement de quelques 100 Hz à quelques kHz, voir figure 9), il faut être conscient du fait que les amplitudes relatives des différents pics ne sont pas pertinentes : elles dépendent des positions des deux points d'excitation et de détection. Il est clair qu'un mode est excité efficacement si l'excitation est située sous un ventre de ce mode, et la détection sur un noeud. Si l'on veut être sûr de ne pas avoir raté de modes, il faut donc réaliser plusieurs spectres en variant les positions d'excitation et/ou de détection.

Pour déterminer la position des pics de résonance le plus précisément possible, on utilise la courbe  $\nu(\varphi)$  autour de  $\nu_0$ . En effet, on peut ajuster cette courbe par une fonction du type :

$$f(\varphi) = C(0) + C(1) * \tan(C(2) * (\varphi - C(3)))$$

II- 7

à quatre paramètres ajustables (C[2] est en fait proche de 1). La précision d'un tel ajustement a été estimée à 0.1 %.

Pour un film donné sur un contour, on obtient ainsi une série de fréquences propres  $\{f_n\}$  de vibration de ce film.

### II-2.3.2) nécessité des fréquences réduites ( $f_n/f_1$ )

Les fréquences propres  $f_n$  dépendent des caractéristiques du film via la vitesse du son des ondes transverses :  $c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho e}}$  :  $f_n = \frac{c * k_n}{2\pi}$ . Ce que nous souhaitons obtenir, c'est le spectre  $\{k_n\}$  des

vecteurs d'onde du film, qui sont des quantités *géométriques*, ne dépendant que des dimensions géométriques du contour. Le seul moyen simple de se ramener à des grandeurs purement

géométriques est de considérer les fréquences normalisées par celle du fondamental:  $\frac{f_n}{f_1} = \frac{k_n}{k_1}$ <sup>2</sup>. Par

la suite, nous ne parlerons plus que de fréquences normalisées (ou réduites). Remarquons que cette procédure a éliminé les dimensions linéaires réelles du cadre, rendant possible les comparaisons entre les résultats de plusieurs expériences (voir chap. IV par exemple).

---

<sup>2</sup> Dans toute cette thèse, le mode fondamental est désigné par  $n = 1$

Finalement, notre expérience nous permet d'obtenir une précision de 0.5 % sur la détermination des fréquences réduites (voir les chap. III et VI).

Remarques :

1) Dans le cas d'un contour permettant d'obtenir des solutions analytiques de l'équation d'onde, il peut être intéressant d'en déduire la vitesse du son dans le film. Pour un triangle rectangle isocèle (avec  $L$  = longueur des deux côtés égaux), pour lequel la fréquence du mode fondamental s'exprime par :  $\sqrt{5} \frac{\pi c}{L}$ , on a ainsi trouvé des vitesses du son de l'ordre de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  pour le produit S2, pour des films épais d'une centaine de couches environ.

2) Parfois, il reste dans le film des marches correspondant à des différences d'épaisseur de l'ordre de 1 à quelques couches, non visibles à la caméra. Il est donc utile, pour un cadre dont on ne connaît pas le spectre des  $\{k_n\}$  a priori, de tirer deux films différents successivement sur le cadre ; puis, pour chaque film, de mesurer le spectre  $\{k_n/k_1\}$  par la méthode décrite ci-dessus.

II-2.3.3) valeurs des vecteurs d'onde  $k_n$

La fréquence  $f_n$  d'un mode donné  $n$  s'exprime par :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} k_n \frac{1}{\sqrt{e}}$$

II- 8

ce que l'on peut réécrire comme :

$$f_n^{-2} = \frac{(2\pi)^2}{k_n^2} \frac{\rho}{\gamma} e$$

II- 9

Donc, pour un contour donné, on peut tirer successivement des films de différentes épaisseurs, mesurer à chaque fois l'épaisseur  $e$  et la fréquence  $f_n$  du mode  $n$ . Puis, on porte  $f_n^{-2}$  en fonction de  $e$ . On doit obtenir une droite, dont la pente donne  $k_n$ , à condition de supposer  $\gamma$  et  $\rho$  connus, et inchangés d'un film à l'autre. En pratique, pour un cadre dont on a déjà mesuré les fréquences

réduites, la mesure de  $k_1$ , vecteur d'onde du mode fondamental, suffit. Nous en verrons un exemple au III-2.2.1.

Prenons les valeurs :

$$\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \text{ et } \gamma = 5.8 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

extraites de [9]. Une mesure du rapport  $(\rho / \gamma)$  sera d'ailleurs présentée au chap. IV.

#### II-2.3.4) facteurs de qualité des pics

Enfin, il peut être utile de connaître le facteur de qualité des pics de résonance. Pour cela, on utilise une fois de plus la courbe  $v(\varphi)$  autour de la fréquence  $\nu_0$  qui nous intéresse. On choisit comme définition du facteur de qualité  $Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ ,  $\Delta\nu$  étant la différence des fréquences des points dont l'amplitude est  $A_{\max}/\sqrt{2}$  ( $A_{\max} = A(\nu = \nu_0)$ ). On peut montrer que ces deux points correspondent à une différence de phase de  $\pm(\pi/4)$  par rapport à  $\varphi(\nu_0)$ . Dès lors, une fois le fit destiné à trouver la fréquence de résonance effectué, il est immédiat d'avoir aussi le facteur de qualité de ce même pic. Nous avons estimé l'erreur relative sur la détermination des facteurs de qualité des pics à environ 10%.

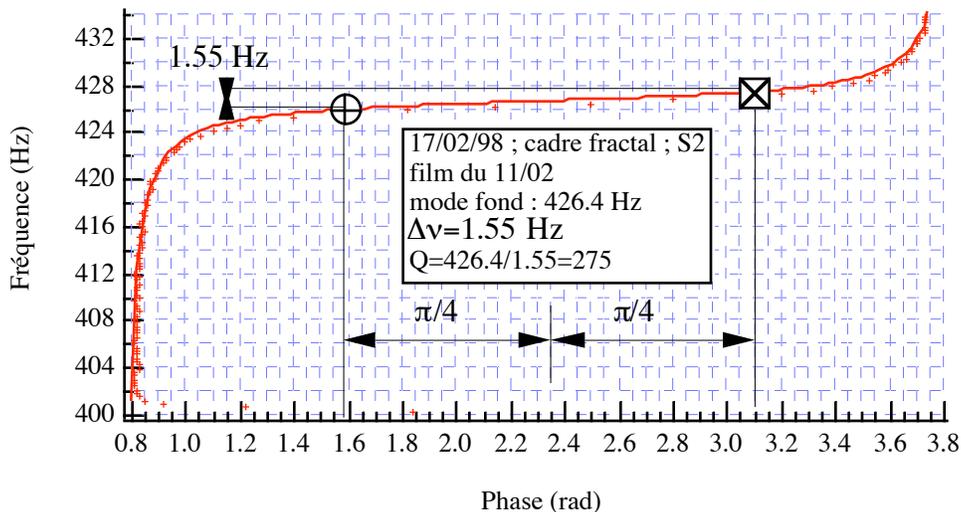
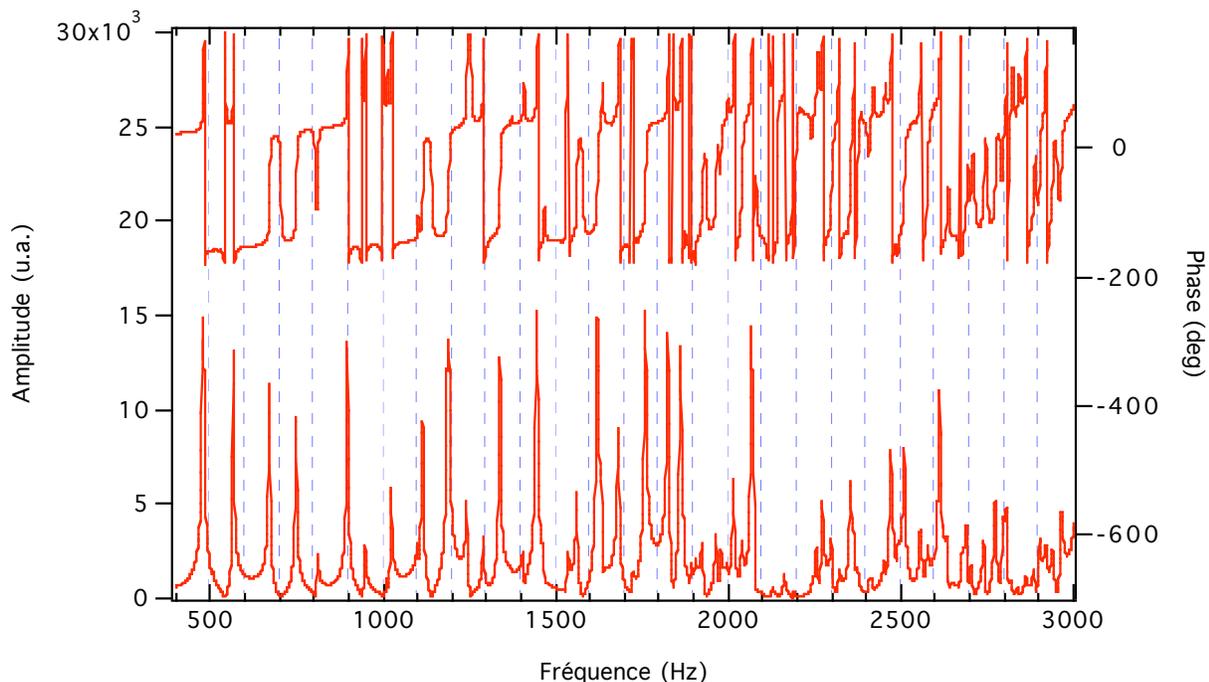


figure 10 : exemple de fit

Remarque :

On peut se demander pourquoi nous utilisons la courbe de phase, et non celle d'amplitude, pour effectuer les mesures de fréquence propre et de facteur de qualité. Au maximum du pic d'amplitude, on a presque toujours une saturation du système de détection. De plus, on a un certain pas de balayage en fréquence. On voit que la valeur du maximum d'amplitude mesurée est certainement fausse. On ne peut donc pas mesurer le facteur de qualité comme la largeur du pic à mi-hauteur du maximum.

La figure 10 présente un exemple de fit et de détermination du facteur de qualité du mode fondamental d'un contour. Les facteurs de qualité que nous avons mesurés étaient compris entre environ 150 et 300. Ce chiffre donne également le nombre de niveaux maximal que nous pouvons mesurer avec notre expérience (voir la figure 11). Ce nombre est tout à fait insuffisant, par exemple, pour effectuer des statistiques de niveaux d'un contour donné. On voit ici apparaître la limitation essentielle de notre expérience par rapport, par exemple, aux expériences de type cavités micro-ondes, où les facteurs de qualité sont au minimum de plusieurs milliers [17]. Nous verrons au chapitre IV quelles sont les sources possibles de dissipation dans notre expérience.



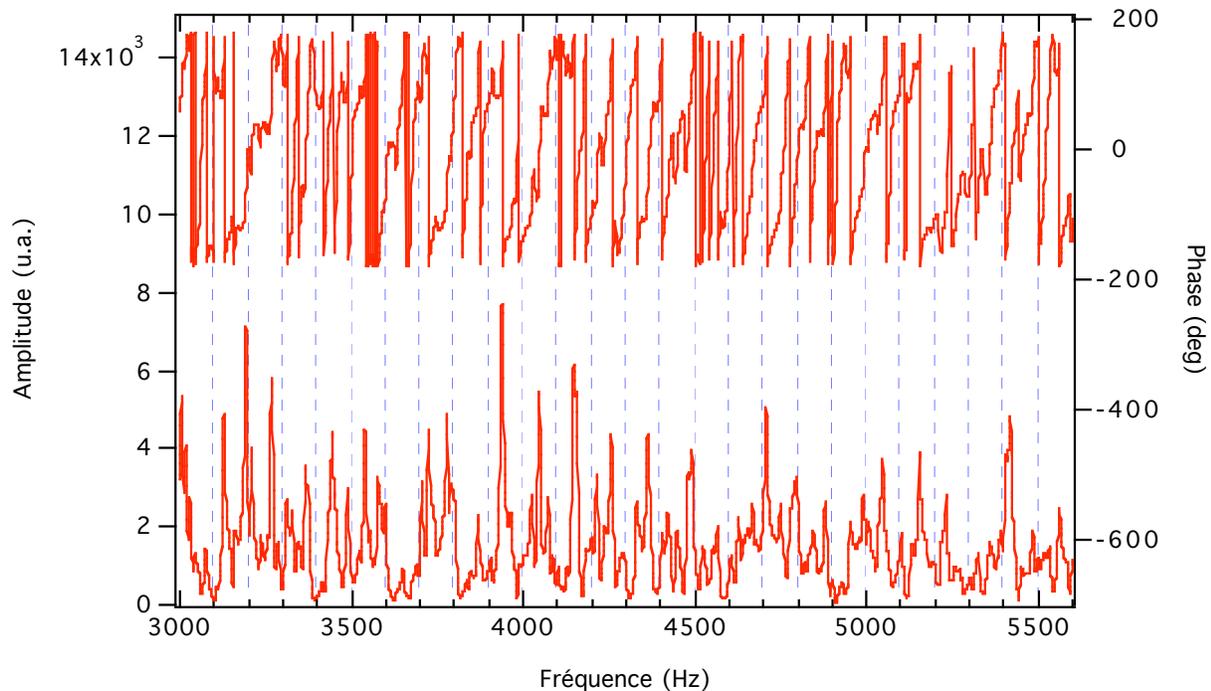


figure 11 : on voit que les pics sont de moins en moins bien résolus quand la fréquence augmente ; sur le premier graphe on a une soixantaine de modes ; il y en a au moins une centaine sur le deuxième

## II-2. 4. Allure des modes de vibration

### II-2.4.1) Méthode qualitative globale

La détection de l'allure des modes propres d'un film constitue l'intérêt principal de la nouvelle cellule expérimentale montée au cours de ma thèse. A priori, différentes méthodes étaient possibles. Tout d'abord, des méthodes pour voir qualitativement l'allure des modes. Par exemple, pourquoi ne pas envisager une visualisation directe des modes par réflexion de lumière sur le film? Les zones les plus lumineuses correspondraient alors aux ventres de vibration. En fait, ce type de méthode est mieux adapté aux cas où l'amplitude de vibration est beaucoup plus élevée ( $A / \lambda > 10^{-2}$ ). En pratique, dans notre cas, on ne voit rien. Une autre méthode qualitative utiliserait une grille. L'idée consiste à regarder à la caméra l'image d'une grille réfléchi par le film. Si le film vibre, l'image de la grille sera déformée au niveau des noeuds du film. Les points immobiles de la grille correspondent alors aux ventres. Pour mieux voir ce phénomène, un éclairage stroboscopique de fréquence

légèrement décalée par rapport à celle de l'excitation serait idéal. Cette méthode n'a rien donné en pratique.

Une autre idée consiste à utiliser le speckle d'un laser, que l'on regarde près du film, à l'aide d'une caméra.

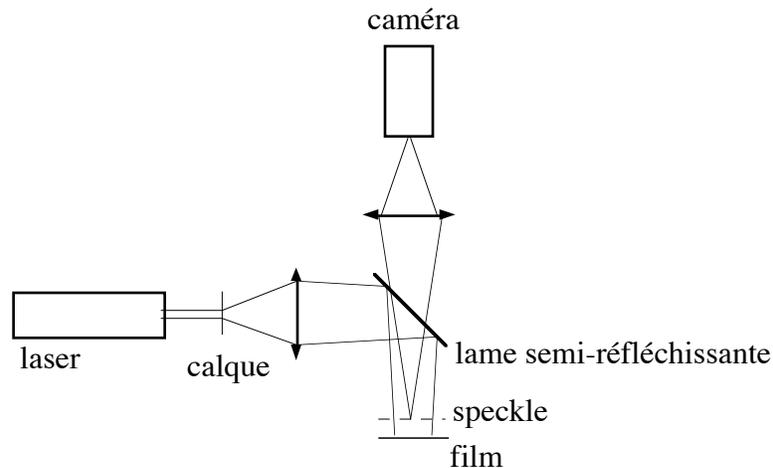
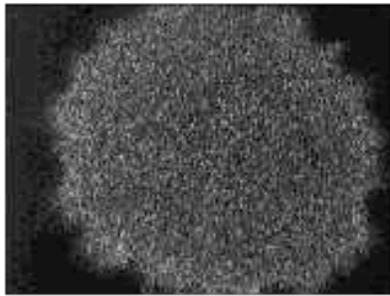


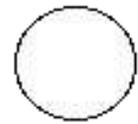
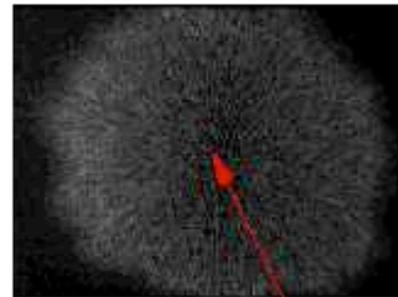
figure 12 : dispositif utilisé pour détecter l'allure des modes de manière globale

Le principe en est illustré sur la figure 12. Le calque sert de diffusant : chaque point du calque se comporte comme une source secondaire réémettant la lumière du laser. Ces différents points sources étant cohérents entre eux, on obtient des interférences non localisées, c'est-à-dire un speckle. La caméra sert à regarder le speckle en un plan distinct de celui du film, par exemple au-dessus de celui-ci. Dans ce cas, on observe alors le speckle réfléchi par le film. Clairement, si le film est plat et immobile, le speckle ne sera pas déformé. Par contre, si le film vibre, l'image du speckle réfléchi par les noeuds deviendra floue. Inversement, le speckle restera net pour les ventres. Plus on observe un plan éloigné du film, meilleure est la sensibilité. Les résultats obtenus pour les premiers modes d'un cadre circulaire sont présentés sur les figure 13 et figure 14. Nous avons effectué un test élémentaire en coupant l'excitation : l'image redevient nette. Nous avons aussi, pour le mode 2, déplacé l'électrode : la ligne de noeuds se déplace elle aussi. Pour plus de clarté, la structure des modes est représentée. Nous avons vérifié que les fréquences des modes trouvées correspondaient aux différentes allures observées.

Malheureusement, cette méthode n'a été utilisée qu'à la fin de la thèse. De toute façon, nous aurons souvent besoin d'une mesure quantitative de l'allure des modes propres.



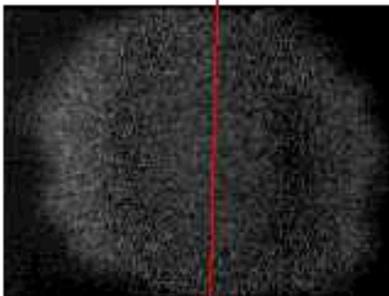
excitation  
coupée



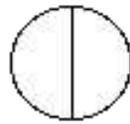
mode 1

345 Hz

ventre

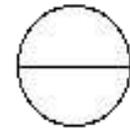
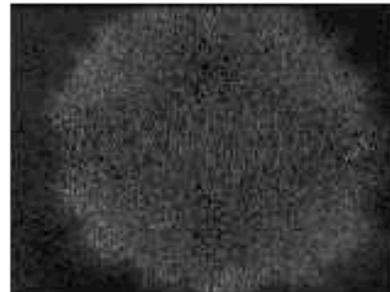


ligne nodale



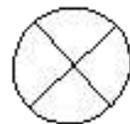
mode 2

548Hz



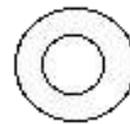
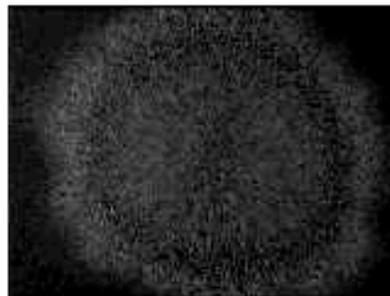
mode 2

548Hz



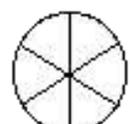
mode 3

738 Hz



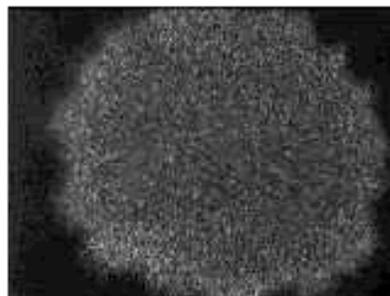
mode 4

797Hz



mode 5

918 Hz



mode 6

1012 Hz

figure 13

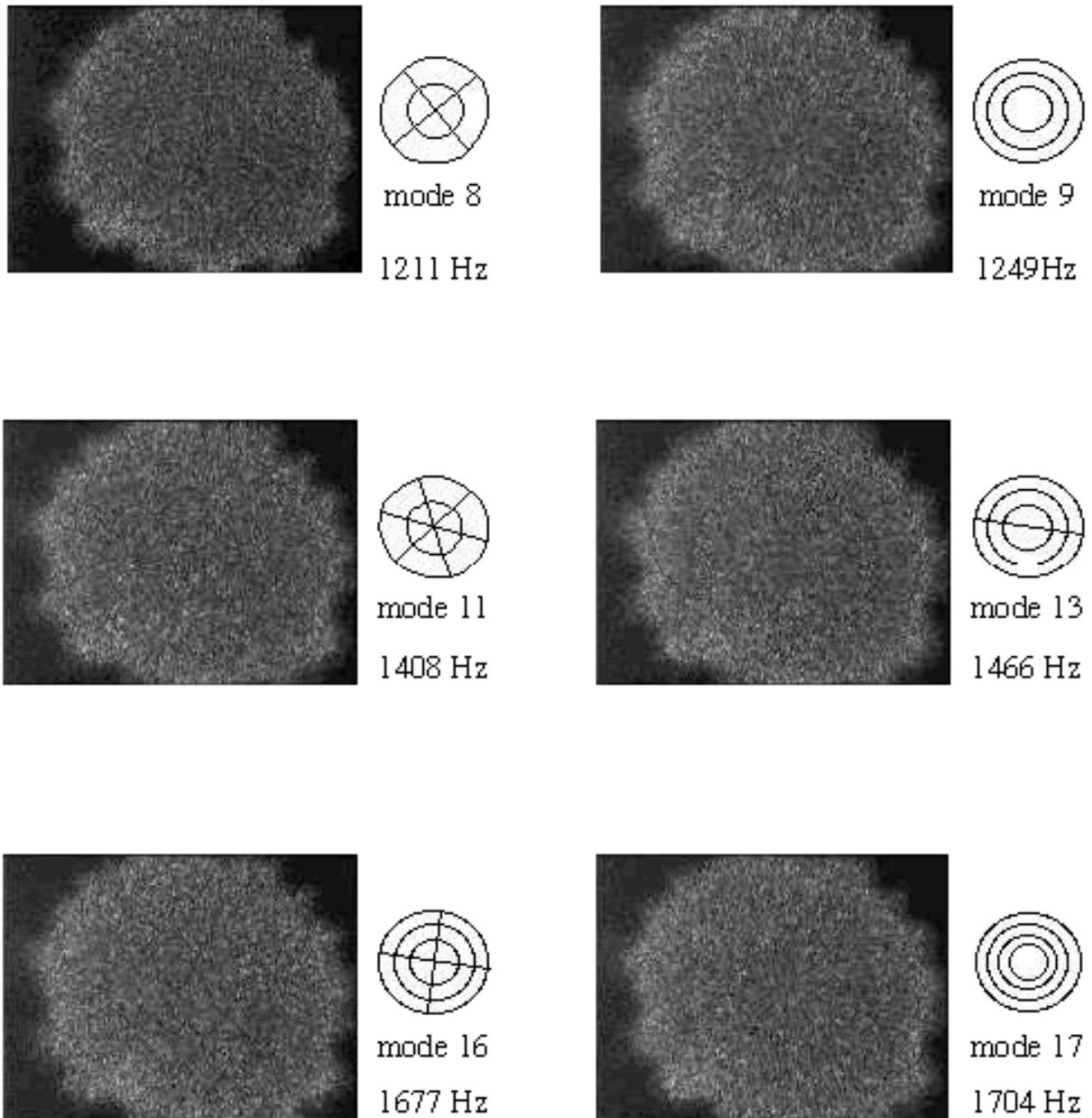


figure 14

II-2.4.2) Méthode par déplacement automatisé de l'électrode

II-2.4.2.1) Principe qualitatif

Il sera plus utile de mesurer quantitativement, pour un mode donné, l'amplitude de vibration du film en fonction des coordonnées spatiales  $x$  et  $y$ . Pour cela, la méthode que nous avons choisie continue à utiliser une excitation et une détection ponctuelles, mais on va dorénavant déplacer l'une des deux. Le plus naturel semblerait de déplacer le laser de détection. Or, le film a une courbure au repos qui n'est pas du tout négligeable (cf II-1.5)). Le film étant au repos, si l'on déplace le faisceau laser d'un point du film à un autre, le faisceau réfléchi se déplace sur la photodiode. Il faut donc refaire le centrage du faisceau laser sur la photodiode entre chaque point de mesure. De plus, la position de l'électrode est plus facile à contrôler précisément que celle du laser. C'est donc l'électrode qui sera déplacée, le laser étant maintenu fixe. Le principe est alors le suivant : le laser étant fixé sur un noeud de vibration, si l'électrode est au-dessous d'un ventre, l'amplitude détectée par le laser sera maximale ; tandis que si elle est sous un noeud, le laser détectera une amplitude nulle (le film étant mal excité). On comprend ainsi qualitativement que cette méthode permet bien d'obtenir une quantité proportionnelle à l'*amplitude* de vibration des points du film en fonction de la position  $(x_e, y_e)$  de l'électrode. On peut écrire ceci de manière plus quantitative de la manière suivante.

#### II-2.4.2.2) Raisonnement énergétique

Notons  $\sigma$  la densité de charge statique dans le film créée par la tension continue  $V_{DC}$  appliquée sur l'électrode. Nous allons effectuer l'hypothèse (qui sera discutée au chap. IV) que cette charge est ponctuelle, et située exactement au-dessus de l'électrode. On peut donc écrire :

$$\sigma(x, y) = Q * \delta(x - x_e, y - y_e) \quad \text{II- 10}$$

où  $Q$  est la charge totale du film,  $S$  sa surface, et  $(x_e, y_e)$  les coordonnées de l'électrode. On a :

$$\iint \delta(x, y) dx dy = 1 \quad \text{II- 11}$$

$E_{AC}(x, y, t)$  désigne la partie alternative du champ électrique créé par l'électrode au point  $(x, y)$  :

$$E_{AC}(x, y, t) = E_{AC}^0(x, y) * \sin(\omega t) \quad \text{II- 12}$$

Le déplacement  $z$  d'un point quelconque du film de coordonnées  $(x,y,0)$  au repos est :

$$z(x, y) = z_0 f(x, y) \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{II- 13}$$

La force électrique agissant sur ce point du film s'écrit :

$$(\sigma(x, y) dx dy) E_{AC}(x, y, t) \quad \text{II- 14}$$

Evaluons la puissance instantanée de la force électrique excitatrice sur tout le film. Elle s'écrit :

$$P(t) = \iint \sigma(x, y) E_{AC}(x, y, t) \dot{z}(x, y) dx dy \quad \text{II- 15}$$

soit, en utilisant (II- 10), (II- 11), (II- 12) et (II- 13) :

$$P(t) = Q E_{AC}(x_e, y_e, t) \dot{z}(x_e, y_e, t) \quad \text{II- 16}$$

La puissance dissipée dans le film ne dépend donc que de ce qui se passe *au niveau de l'électrode*.

Le signal détecté par le laser (fixé sur un noeud) est nécessairement proportionnel à l'énergie injectée par l'excitation : on détecte donc, à l'instant  $t$ , une quantité directement proportionnelle à l'amplitude de vibration au point  $(x_e, y_e)$  où se situe l'électrode.

La puissance moyenne dissipée dans le film sur une période vaut :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = Q E_{AC}^0(x_e, y_e) z_0 \omega f(x, y) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt \quad \text{II- 17}$$

Cette quantité est maximale quand la tension excitatrice et le déplacement  $z$  sont en quadrature de phase. On retrouve ainsi la condition de résonance.

#### II-2.4.2.3) Procédure expérimentale

En pratique, après avoir déterminé la fréquence du mode qui nous intéresse, on fixe la fréquence d'excitation à cette valeur. On fixe également la position du laser sur un noeud de ce mode : le plus simple étant de choisir un point au bord du cadre. Ensuite, on utilise un programme



micro-ondes [16,17], seule l'amplitude est mesurée, bien que les auteurs affirment pouvoir mesurer aussi la phase [17].

#### II-2.4.2.4) Remarque

Que se passe-t-il si l'on mesure l'allure de l'amplitude et de la phase en fonction de (x,y), la fréquence d'excitation n'étant plus fixée au centre d'un mode, mais *entre deux modes*?

Nous avons fait l'expérience sur le cadre "C90" (voir le chap. VI), en mesurant l'amplitude et la phase pour une fréquence intermédiaire entre celle du 8ème et du 9ème mode.

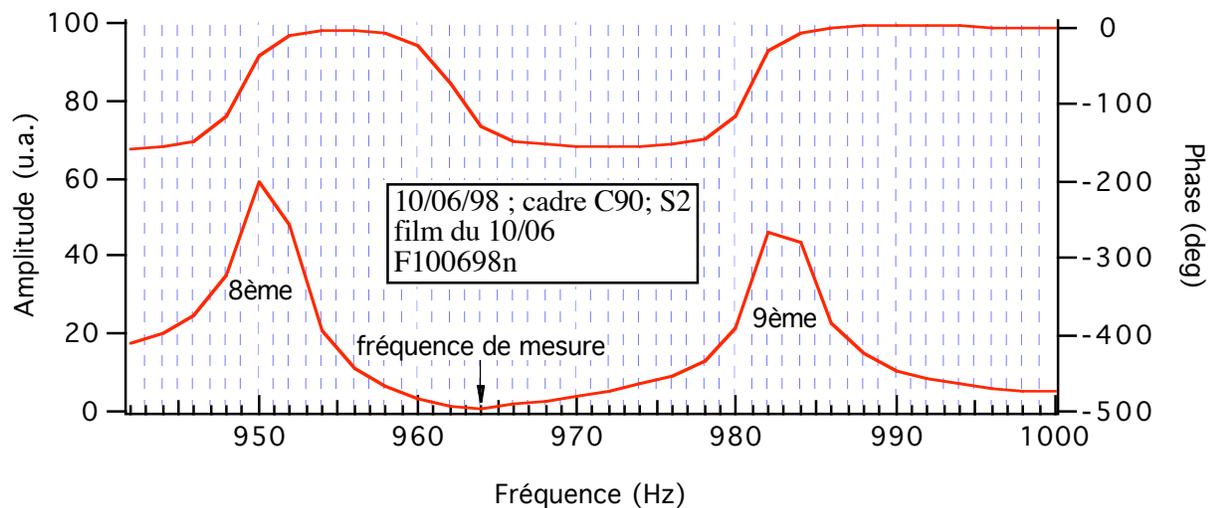
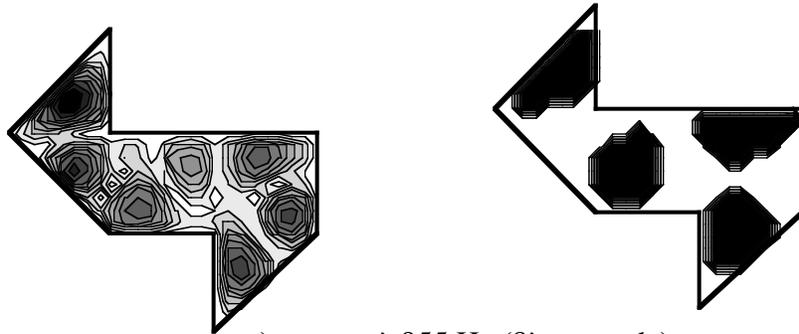


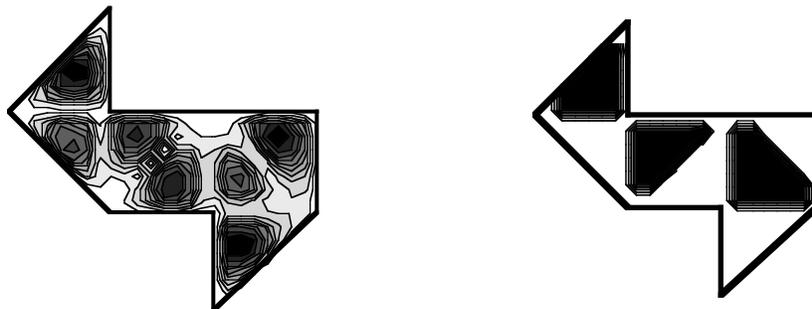
figure 16

Pour obtenir le graphe de la figure 16, nous avons choisi les points d'excitation et de détection de telle sorte que les deux modes soient correctement excités et détectés ; ceci est manifestement vérifié, puisque les deux modes apparaissent avec une amplitude comparable. En laissant le laser toujours au même endroit que pour la figure 16, nous avons mesuré l'amplitude et la phase pour les fréquences de 955 Hz, 990 Hz et 964 Hz. On peut s'attendre à ce que la mesure à 964 Hz nous donne une combinaison linéaire des modes 8 et 9. C'est ce que nous avons vérifié, en effectuant la somme des amplitudes mesurées pour les modes 8 et 9 (en tenant compte de leur signe, c'est-à-dire en utilisant l'information sur la phase), après les avoir ramenées à une même amplitude maximale. Sur la figure 17, c et d ont bien la même allure. Les petites différences que l'on peut

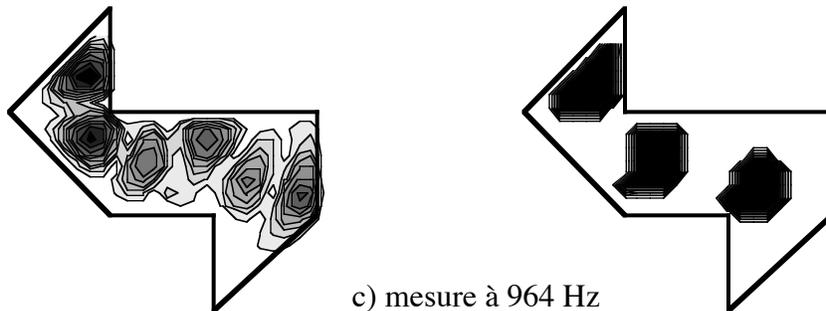
observer sont peut-être dues au fait qu'on a choisi arbitrairement d'effectuer une combinaison linéaire des modes 8 et 9 avec le même coefficient sur chaque mode, ce qui n'est pas forcément évident, ou encore, à une précision insuffisante sur le pas de balayage (qui était ici de 1 mm, alors que le côté des triangles rectangles isocèles constituant le contour mesure 8 mm).



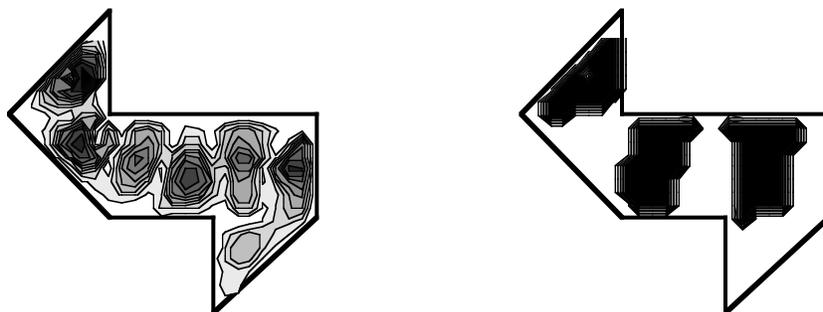
a) mesure à 955 Hz (8ème mode)



b) mesure à 990 Hz (9ème mode)



c) mesure à 964 Hz



d) somme du 8ème et du 9ème mode

figure 17

### **II-3) Conclusion :**

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté notre dispositif expérimental de manière détaillée. On peut le résumer comme un dispositif simple sur le principe (aucune technique « compliquée » n'est utilisée), et peu coûteux. Il s'avérera cependant performant, et ceci apparaîtra bien sûr dans les chapitres suivants, avec les résultats expérimentaux. De plus, certains aspects présentés dans ce chapitre seront discutés plus précisément au chapitre IV : notamment, le dispositif d'excitation utilisant l'électrode sera mieux analysé ; de plus, nous tenterons de comprendre ce qui limite nos facteurs de qualité expérimentaux.

### **Annexe : écouter le son d'un tambour [18]**

Pour « faire entendre » le son d'un tambour donné, on utilise toujours l'électrode pour exciter et le laser pour détecter. Par contre, on envoie sur l'électrode, non plus une tension sinusoïdale, mais une série de pulses de durée environ 200 ms. Le signal récupéré par la photodiode est envoyé sur un ampli de courant, puis sur un haut-parleur. Bien sûr, on entend le son « en un point donné » du film. Et ce son correspond également à une excitation en un point particulier du film. L'intérêt de cette expérience de vulgarisation consiste essentiellement à faire remarquer que le son produit est métallique, alors que le matériau qui vibre est liquide [18].

## **Références du chap. II :**

- [1] M. Brazovskaia, *Vibration des films smectiques librement suspendus : effets non-linéaires, points diaboliques et oscillateurs auto-ajustables*, thèse de doctorat, Orsay (1998)
- [2] G.W. Gray and A. Mosley, J.C.S. Chem. Comm. , 147 (1976)
- [3] P.S. Pershan, Structure of Liquid Crystal Phases, World Scientific, Singapore (1988), p. 45
- [4] P. Pieranski et al., *Physics of smectic membranes*, Phys.A **194**, 364 (1993)
- [5] P.G. de Gennes and J. Prost, *The physics of liquid crystals*, Clarendon Press, Oxford (1995)
- [6] J. C. Géminard, R. Holyst and P. Oswald, *Meniscus and Dislocations in Free-Standing Films of Smectic-A Liquid Crystals*, Phys. Rev. Lett. **78**, 1924 (1997)
- [7] D. E. Moncton, R. Pindak, S. C. Davey and G. S. Brown, *Melting of variable thickness liquid crystal thin films : a synchrotron x-ray study*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1865 (1982)
- [8] I. Kraus, Ch. Bahr, I. V. Chikina and P. Pieranski, *Can one hear structures of smectic films?*, Phys. Rev. E **58** n°1, 610 (july 1998)
- [9] E. B. Sirota, P. S. Pershan, L. B. Sorensen and J. Collett, Phys. Rev. A **36**, 2890 (1987)
- [10] I. Kraus, *Etudes des films librement suspendus de cristaux liquides thermotropes en phase smectique*, thèse de doctorat, Orsay (1995)
- [11] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*, Bergamon Press (1980)
- [12] C. H. Sohl, K. Myiano and J. B. Ketterson, *Novel technique for dynamic surface tension and viscosity measurements at liquid-gas interfaces*, Rev. Sci. Instrum. **49**, 1464 (1978)
- [13] M. Funahashi and J. Hanna, Phys. Rev. Lett. **78**, 2184 (1997)
- [14] M. Brazovskaia, H. Dumoulin and P. Pieranski, *Nonlinear effects in vibrating smectic films*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1655 (1996)
- [15] Jean-Christophe Géminard, discussion privée

[16] voir par ex. S. Sridhar and A. Kudrolli, *Experiments on not "hearing the shape" of drums*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2175 (1994)

[17] S. Sridhar, D. O. Hogenboom and B. A. Willemsen, *Microwave experiments on chaotic billiards*, J. Stat. Phys. **68**, 239 (1992)

[18] " Archimède " , émission de vulgarisation sur Arte le 22/04/97 ; thème : "les tambours" ; participants : C. Even, M. Brazovskaia et P. Pieranski



## III-2) Résultats numériques et expérimentaux comparés pour la préfractale

$\nu=2$  [13]

### III-2.1) Contour étudié

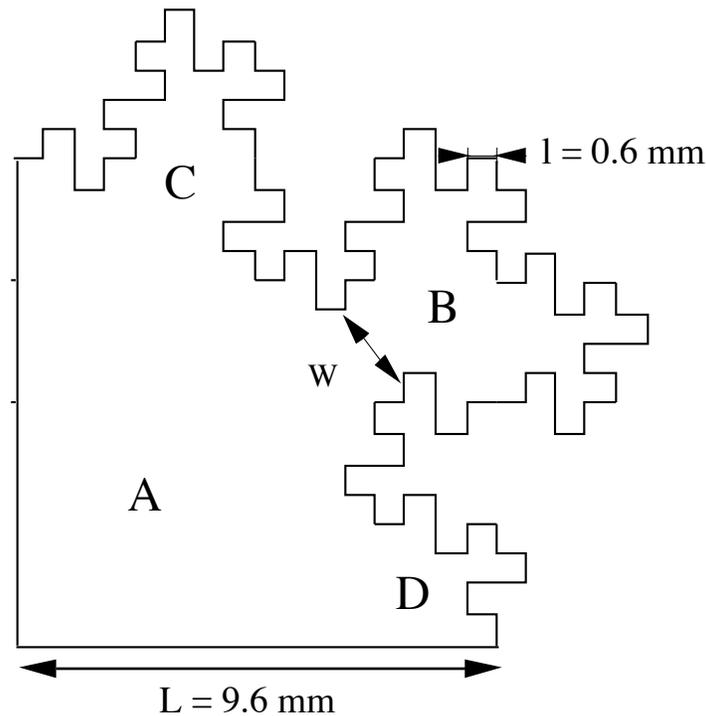


figure 14 : contour étudié expérimentalement et numériquement ; les dimensions indiquées correspondent au cadre expérimental

La forme de la figure 14 est celle sur laquelle des calculs numériques ont été effectués par Stefanie Russ et Bernard Sapoval. Les expériences ont été réalisées en collaboration avec Vincent Repain, stagiaire de DEA.

La taille maximale des films expérimentaux étant de l'ordre du cm, pour  $\nu = 2$  la plus petite longueur,  $l$ , vaut 0.6 mm. Pour  $\nu = 3$ ,  $l$  aurait été de 0.1 mm, ce qui correspond à la taille typique des défauts au bord du film, comme nous allons le voir. Pour cette raison, le choix du cadre  $\nu = 2$  était un bon compromis entre la volonté d'avoir un cadre le plus irrégulier possible, et les contraintes limitant la taille minimale des « dents ».

Ici, le processus d'itération décrit au (III-1.2) n'a été appliqué que sur 2 des 4 côtés du carré initial. Nous appellerons néanmoins la forme de la figure 14 « préfractale », comme les formes du

III-1.3, pour lesquelles le processus d'itération avait été appliqué sur tous les côtés du carré  $\nu = 0$ . Au III-2.2.3, nous présenterons brièvement une comparaison entre les résultats obtenus pour la densité d'états sur la «traie» préfractale  $\nu = 2$  (figure 2) et le contour de la figure 14. De plus, on a choisi d'utiliser le contour de la figure 14, afin d'éviter les dégénérescences dues à une symétrie d'ordre 4, gênantes aussi bien expérimentalement que numériquement. La dimension  $L$  indiquée est la taille du carré correspondant à l'ordre d'itération  $\nu = 0$ .

### III-2.2) Résultats sur le spectre

#### III-2.2.1) Généralités, précision de l'expérience

Le nombre de modes calculés est de 170. Expérimentalement, le nombre de modes accessibles est de l'ordre du facteur de qualité, soit 200 environ. En pratique, seules les 30 premières fréquences propres ont été mesurées.

Dans l'expérience, on mesure essentiellement les fréquences propres réduites (divisées par celle du fondamental), mais on a aussi accès aux vecteurs d'onde  $k_n$ , comme expliqué au II-2.3.3. Pour cela, il suffit de déterminer  $k_1$  : on mesure  $f_1$  pour différentes épaisseurs  $e$ , et on porte  $f_1^{-2}$  en fonction de  $e$ . La pente obtenue est proportionnelle à  $k_1^{-2}$ . La figure 15 présente la courbe expérimentale correspondante. La pente de la droite vaut 1.71 u.S.I. On en tire :

$$k_1 = 653.8 \text{ m}^{-1}$$

Ceci correspond au mode fondamental d'un carré de taille  $6.8*6.8 \text{ mm}^2$ . La surface de ce carré est représentée sur la figure 16, où l'on compare graphiquement ses dimensions à celles du contour préfractal. On constate que ce carré est plus petit que le carré initial ( $\nu = 0$ ). Ceci montre que la fonction d'onde du mode fondamental est confinée dans un domaine dont la surface est plus petite que la surface totale du contour préfractal. Nous détaillerons plus ce point au (III-2.3.1).

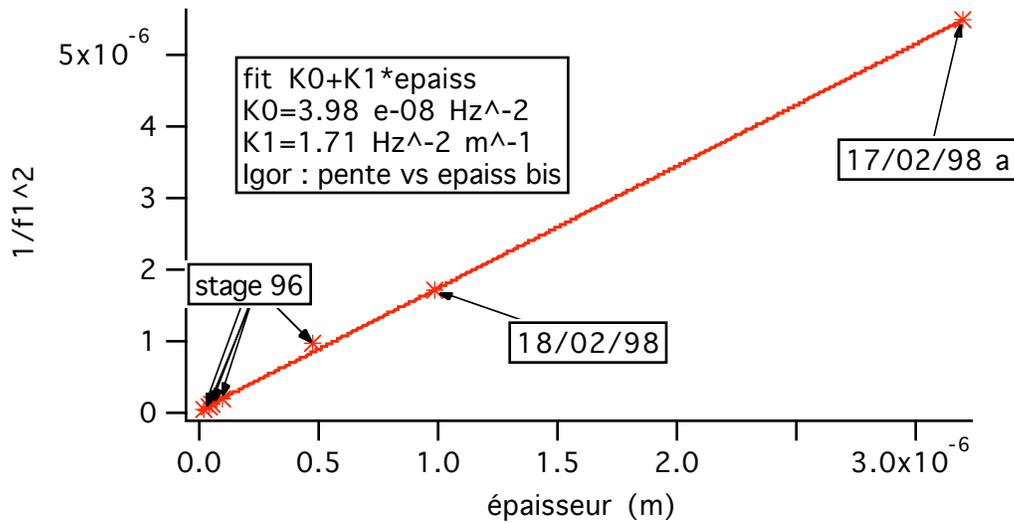


figure 15 : détermination de  $k_1$

On peut déduire de ce qui précède le nombre de modes pour lequel notre précision expérimentale resterait correcte. En effet, on constate que les imperfections de fabrication du cadre ont une échelle caractéristique de 0.1 mm. De plus, le film est attaché au cadre par son ménisque, de taille typique également 0.1 mm. Cette grandeur correspond aussi à l'échelle des défauts observés aux bords du film. On aura donc de fortes imprécisions quand la longueur d'onde sera de cet ordre de grandeur. On trouve que ceci correspond au 6000<sup>ème</sup> mode. A cause des phénomènes dissipatifs, on n'atteindra donc jamais la limite de précision de l'expérience.

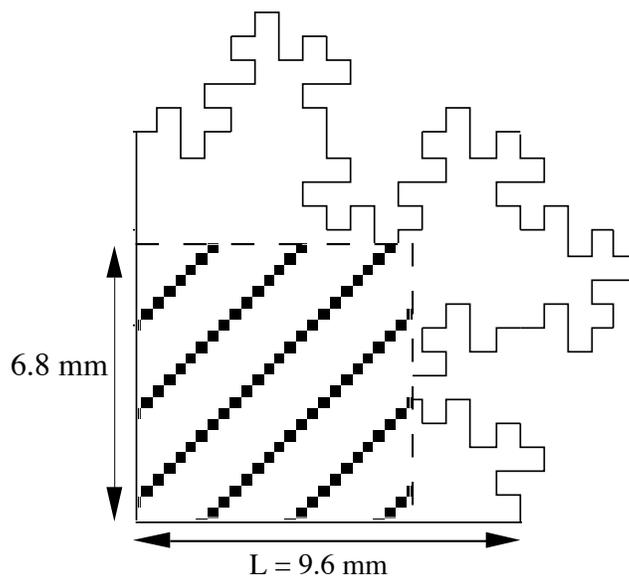


figure 16 : surface de localisation du mode fondamental

III-2.2.2) Comparaison entre les spectres expérimental et numérique

On appellera par la suite «fréquence réduite» les valeurs de  $\Omega_n = f_n/f_1$  : fréquence propre du mode numéro n divisée par celle du mode fondamental (n=1) de la préfractale.

La comparaison entre les fréquences réduites mesurées ( $\Omega_n^{exp}$ ) et calculées ( $\Omega_n^{num}$ ) est présentée sur la figure 17 pour les 30 premiers modes. L'ajustement linéaire est :

$$\Omega_n^{exp} = 0.004 + 0.996\Omega_n^{num}$$

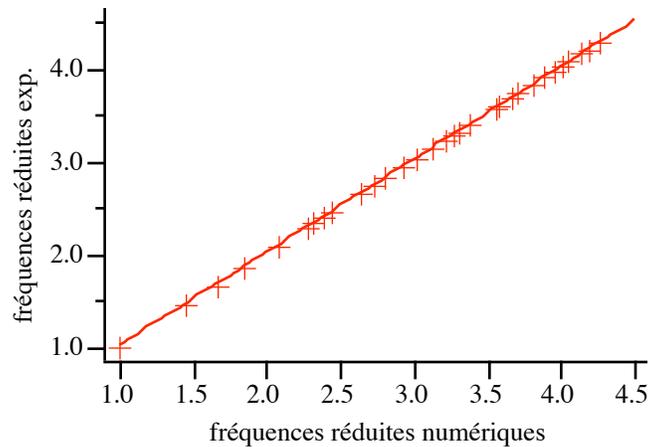


figure 17 : accord entre les spectres expérimental et numérique. Le fit linéaire est également représenté. L'accord entre les spectres numérique et expérimental est donc très satisfaisant. De plus, l'écart moyen obtenu entre les spectres des  $\Omega_n$  expérimentaux et numériques est de 0.5 %. Ceci correspond donc à la précision, aussi bien numérique qu'expérimentale. Concernant la précision expérimentale, voir le chap. VI pour plus de détails.

III-2.2.3) Densité d'états intégrée

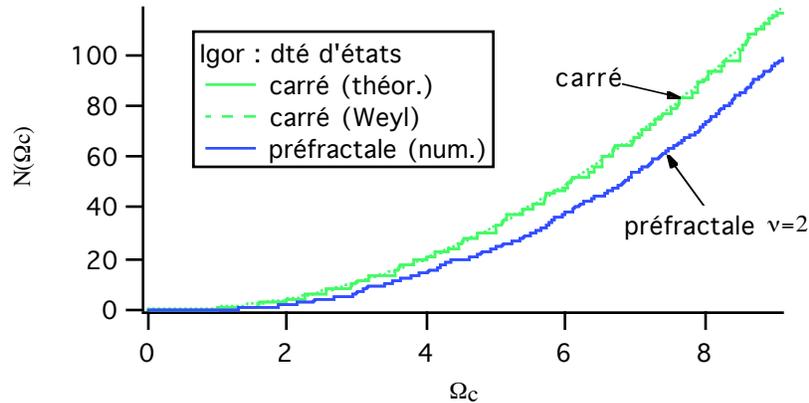


figure 18 : comparaison des densités d'états intégrées pour le carré ( $\nu = 0$ ) et pour la préfractale étudiée (contour de la figure 14)

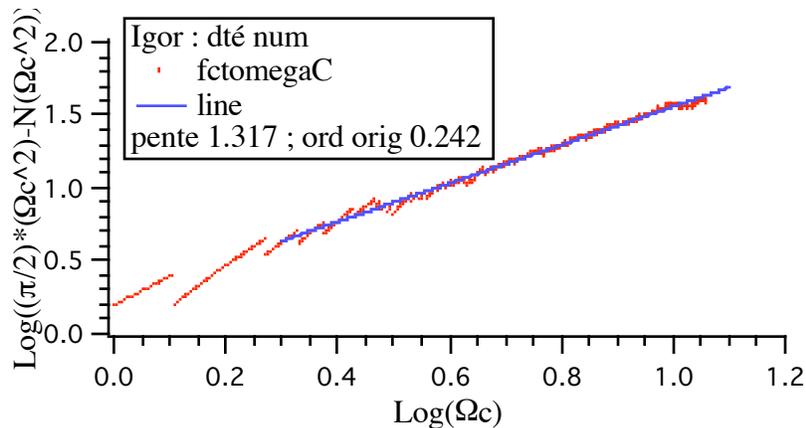


figure 19 : ajustement des valeurs numériques de la densité d'états intégrée de la préfractale de la figure 14

Sur la figure 18, on a tracé les densités d'états intégrées  $N$  pour le carré et la préfractale étudiée, avec  $\Omega_c = \frac{k}{\sqrt{2}\pi/L}$ . On a normalisé par le fondamental du carré pour permettre les comparaisons entre le carré ( $\nu = 0$ ) et la préfractale  $\nu = 2$ . On retrouve que la densité d'états pour un contour irrégulier est plus faible que pour le carré  $\nu = 0$ . Rappelons qu'ici, le processus de fractalisation n'a été effectué que sur deux des quatre côtés du carré initial. Ceci confirme donc le résultat de [12] établi pour des préfractales « entières », i.e. où la construction par itération avait été

appliquée sur les quatre segments du carré  $v = 0$ . On a aussi disposé sur la figure 18 l'ajustement correspondant à la formule de Weyl pour le carré :

$$N(\Omega_C) = \frac{\pi}{2} \Omega_C^2 - \sqrt{2} \Omega_C \quad \text{III- 18}$$

Concernant la préfractale, on a porté sur la figure 19  $\log\left(\frac{\pi}{2} \Omega_C^2 - N(\Omega_C)\right)$  en fonction de  $\log(\Omega_C)$ . On obtient une droite, de pente 1.3. Le deuxième terme de  $N(\Omega)$  a donc un exposant, non pas de 1, mais de 1.3. Ceci prouve que l'aspect irrégulier du contour intervient, puisqu'on trouve un nombre entre 1 et 2. Par contre, on ne trouve pas exactement la dimension fractale, qui vaut 1.5. Ceci est conforme aux résultats présentés au (III-1.3.2.1), où l'exposant trouvé pour la préfractale entière de  $v = 2$  valait  $1.2 \pm 0.1$ . On peut supposer, comme dans [12], qu'à basse énergie les termes correctifs supplémentaires d'ordres plus élevés interviennent et expliquent ainsi ce désaccord.

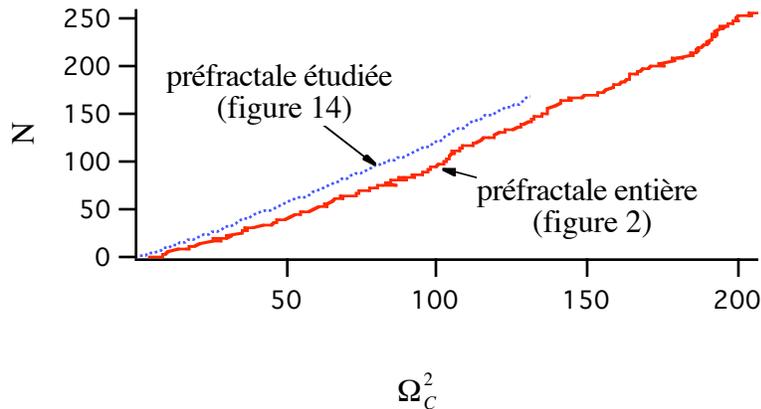


figure 20 : comparaison des densités d'états intégrées des contours des figure 2 et figure 14

Remarque :

Quelle est la différence entre la préfractale entière de la figure 2 et celle de la figure 14? Les résultats respectifs sur la densité d'états intégrée sont présentés sur la figure 20. On observe que  $N$  est plus faible pour la vraie préfractale que pour celle de la figure 14 : ceci est cohérent avec le fait, déjà observé, que plus le contour est irrégulier, plus la densité d'états est faible.

### III-2.3) Forme des modes

Expérimentalement, on a mesuré l'allure des modes suivant la méthode exposée au II-2.4. Le pas de balayage était de 0.25 mm, ce qui représente 1238 points de mesure à l'intérieur de la surface préfractale. Le pas de la grille numérique est, ramené aux dimensions expérimentales, de 0.075 mm (3.3 fois plus petit).

#### III-2.3.1) Mode fondamental

##### *III-2.3.1.1) Forte localisation :*

On a vu que le fondamental du contour de génération  $\nu=3$  était fortement localisé : trois décroissances exponentielles avaient été observées dans une coupe de ce mode. Qu'obtient-on pour le mode fondamental d'un contour de génération  $\nu=2$ ? L'allure générale de ce mode est donnée sur la figure 30. On remarque que ce mode fait essentiellement vibrer la zone notée A sur la figure 14. Plus précisément, les résultats expérimentaux et numériques pour la coupe suivant l'axe Z indiqué sur la figure 21 sont présentés comparativement sur la figure 22. L'accord entre les coupes numérique et expérimentale n'est pas très bon, mais c'est dû au fait que les coupes ne doivent pas être strictement au même endroit par rapport au cadre. On trouve numériquement deux décroissances exponentielles (expérimentalement, une seule) de 0.83 mm et 0.35 mm respectivement (en unités expérimentales). Remarquons les très faibles valeurs précédentes, comparées à la dimension  $l = 0.6$  mm : l'atténuation de l'onde est particulièrement rapide. Les points de début des droites de décroissance sont indiqués sur les figure 21 et figure 22 : ils correspondent bien à des zones où le cadre se rétrécit.

La figure 24 présente les résultats de la coupe suivant Y. On trouve numériquement trois décroissances exponentielles successives. Dans la coupe expérimentale, on ne voit que le début de la première. Les longueurs de décroissance trouvées sont, ramenées à l'échelle du cadre expérimental, de 0.67 mm, 0.27 mm et 0.06 mm. Ces décroissances se produisent bien au niveau de rétrécissements du cadre.

Dans les deux cas des coupes suivant Y et Z, il nous a semblé difficile de modéliser le cadre aux alentours de la coupe par des carrés reliés par des canaux, donc les longueurs de décroissance trouvées n'ont pas été comparées à des valeurs « théoriques ». On a par contre, bien vérifié qualitativement que le mode fondamental est encore fortement localisé pour le contour de génération 2.

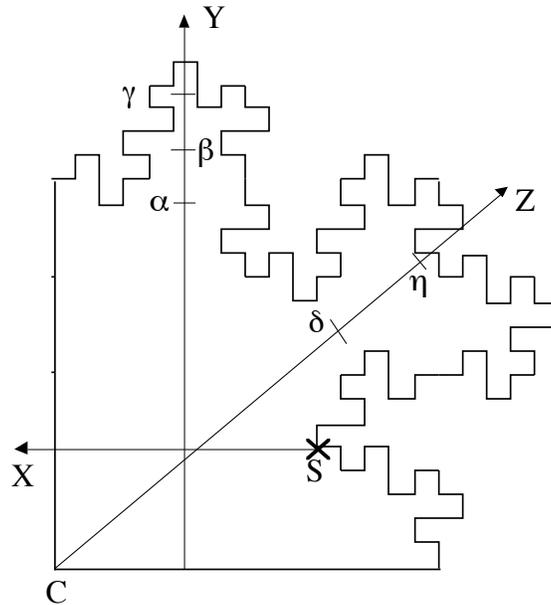


figure 21 : axes des différentes coupes du mode fondamental présentées

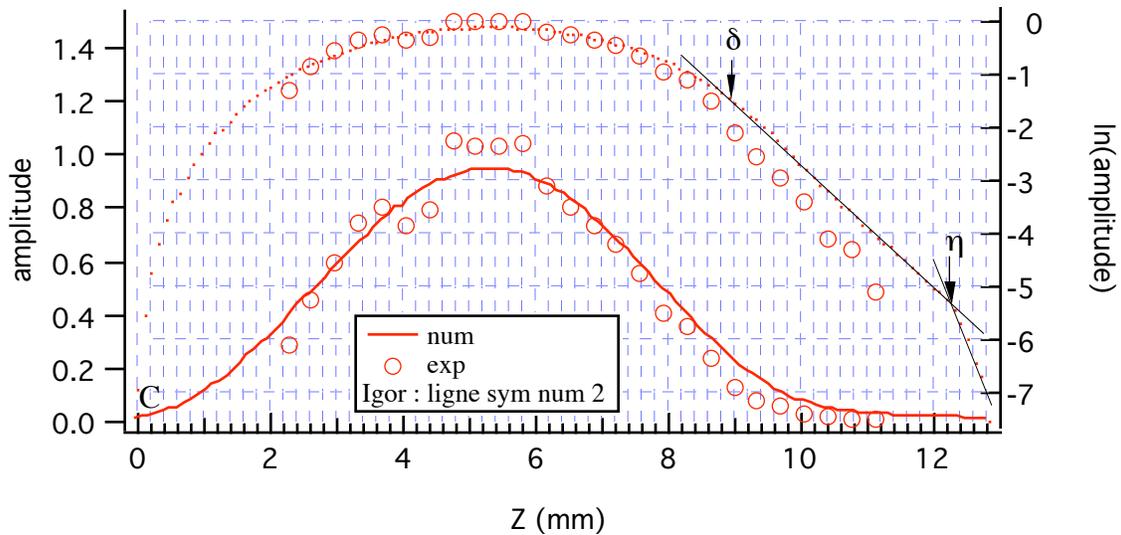


figure 22 : coupe suivant l'axe Z de la figure 21 ; les points  $\delta$  et  $\eta$  sont ceux indiqués sur la figure 14.

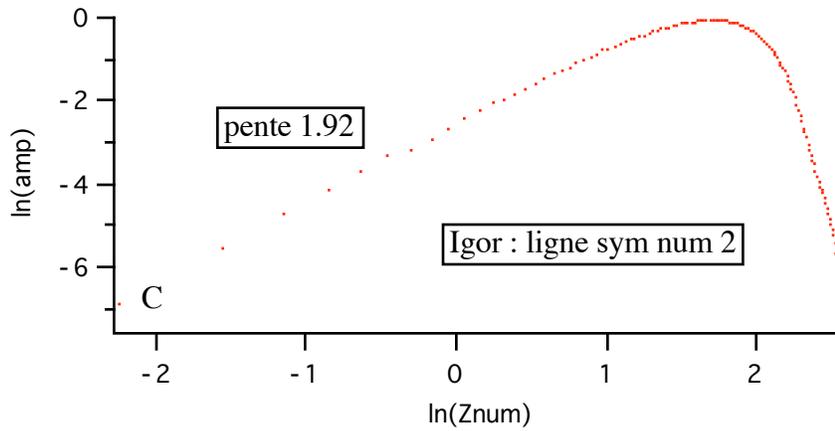


figure 23 : diagramme  $\ln/\ln$  au voisinage du coin C, pour la coupe suivant Z ; on trouve bien, conformément à (III-17), une pente de 2 environ.

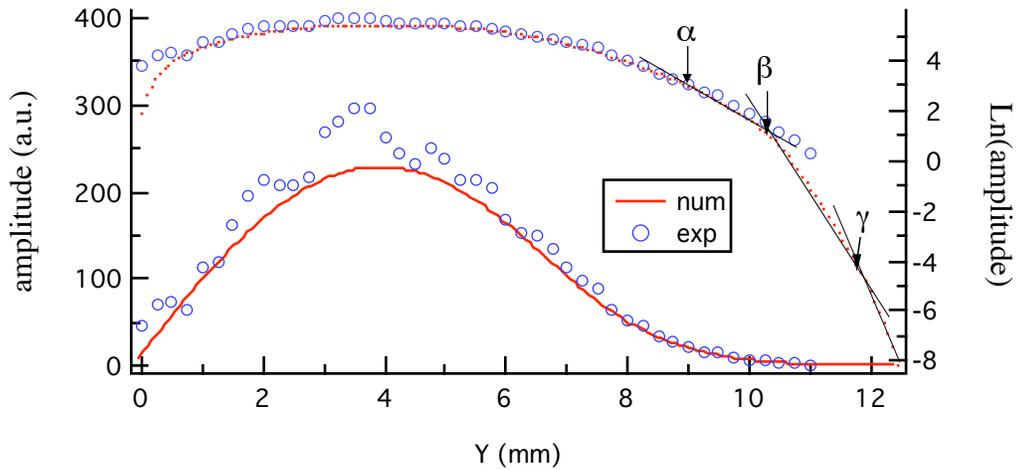


figure 24 : coupe suivant l'axe Y de la figure 21 ; les trois droites de décroissance sont tracées ; les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  indiqués sont ceux de la figure 14.

### III-2.3.1.2) Points saillants

On a également effectué différentes coupes du mode fondamental pour tester son allure au voisinage des points saillants. La figure 25 présente, à titre d'exemple, le résultat obtenu pour la direction X indiquée sur la figure 21.

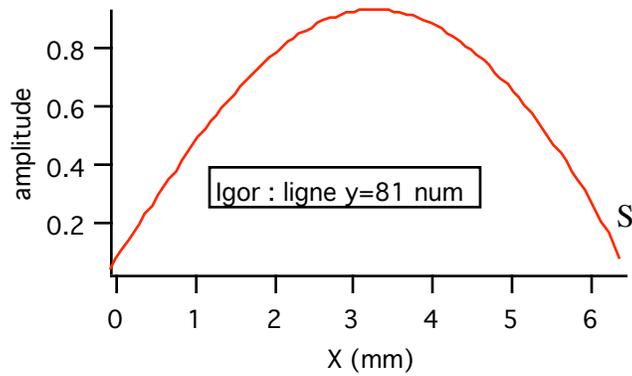


figure 25 : coupe (numérique, ramenée aux unités exp.) le long de l'axe X de la figure 21

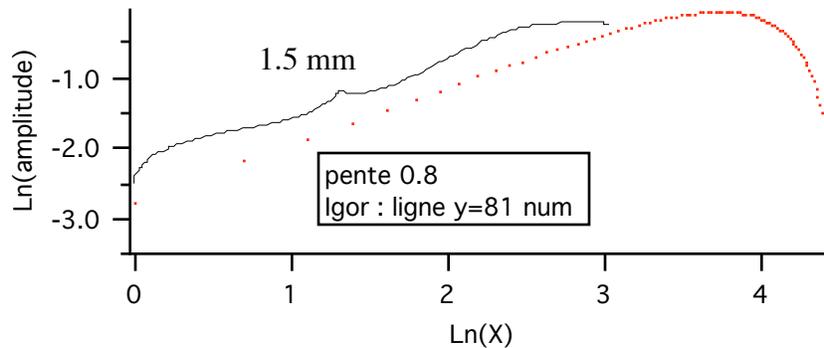


figure 26 : coupe au voisinage du point saillant S indiqué sur la figure 21, dans la direction X

En traçant le  $\ln(\psi)$  en fonction de  $\ln X$ , la pente  $\frac{d(\ln \psi)}{d(\ln X)}$  du côté du point saillant doit donner,

si  $\psi(X) \approx X^{2/3}$  au voisinage du point saillant,  $2/3$ . On trouve, pour la coupe présentée, 0.8 (figure 26). Pour d'autres coupes, on a trouvé 0.9. Pour tester la méthode, on a systématiquement regardé ce que valait cette pente du côté des bords rectilignes : on trouve toujours 1, ce qui est normal pour une fonction d'allure sinusoïdale au voisinage du bord. D'autre part, on a également vérifié qu'on avait bien  $\psi(Z) \approx Z^2$  (voir III-1.3.2.2) au voisinage du coin C dans la direction Z (figure 23). Ici, pour le point saillant, on obtient une valeur légèrement plus grande que celle de  $2/3$  attendue. Ce n'est pas très étonnant car, d'une part, on ne s'approche pas suffisamment près du bord, même numériquement. D'autre part, l'approximation  $\Delta\psi \approx 0$  n'est vraie que près du bord, et la droite trouvée comporte des points jusqu'à une distance de 1.5 mm du bord (en unités

expérimentales)...D'ailleurs, la valeur obtenue pour  $\nu = 3$  était plus proche de  $2/3$ , sans doute pour cette raison. Une autre étude au voisinage d'un point saillant sera présentée au VI-1.2.2.1.1.

### III-2.3.2) Autres modes

#### III-2.3.2.1) Allure générale

On a vu que le mode fondamental était fortement localisé dans la zone notée A sur la figure 14. la question qui se pose est la suivante : les autres modes sont-ils localisés? Quel sens cela a-t-il? Comment quantifier cette notion de localisation? L'allure des modes 1, 8, 38, 51, 62, 74, 128 et 132 est donnée sur la figure 30. On remarque au passage le bon accord entre les fonctions propres expérimentales et numériques. Pour le mode n°132 (le plus élevé dont nous ayons mesuré la forme expérimentalement), des écarts plus importants commencent à apparaître. Cependant, les pics d'amplitude importants dans les petites dents apparaissent bien aux mêmes endroits dans les deux cas.

Considérons une coupe d'un mode autre que le fondamental, comme le n°8 par exemple : ce dernier n'est que partiellement localisé dans la zone B. En effet, à cause de la ligne nodale qui se trouve à la limite entre B et A, il est difficile d'observer une éventuelle décroissance exponentielle vers la zone A.

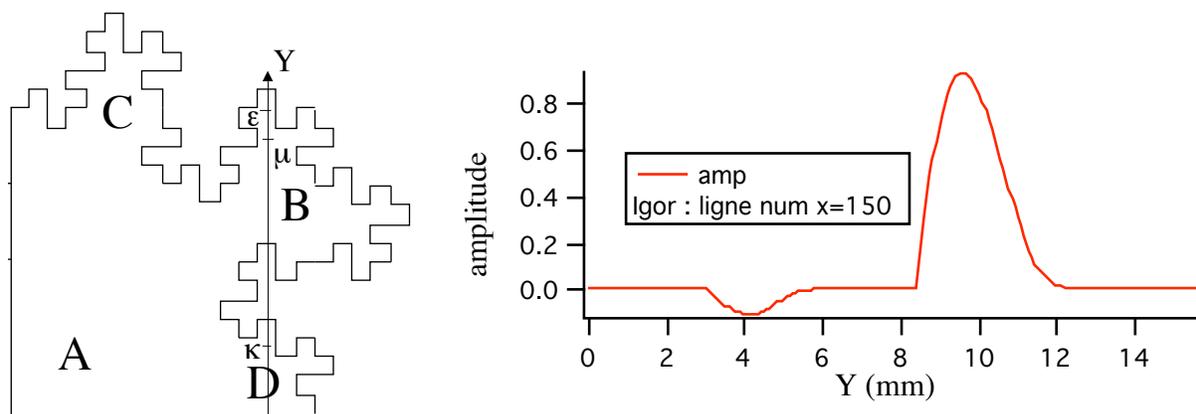


figure 27 : coupe numérique du mode 8

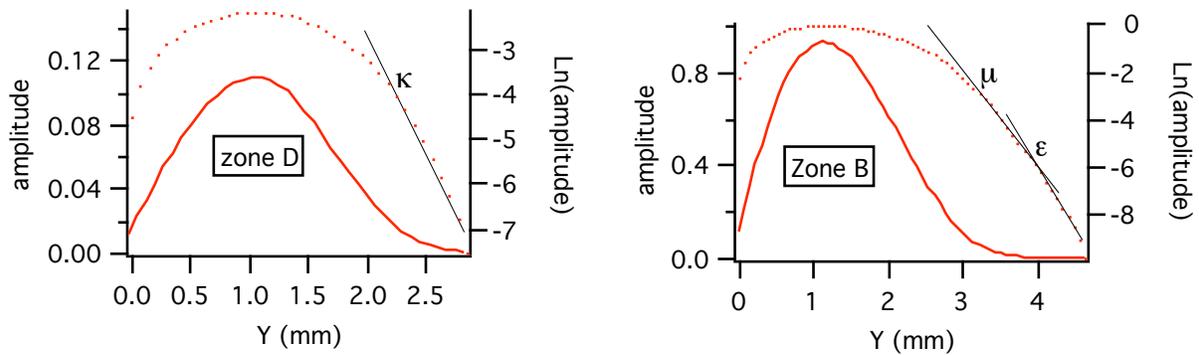


figure 28 : coupes montrant les décroissances exponentielles dans les zones B et D

Par contre, comme le montre la coupe de la figure 27, on peut observer des décroissances exponentielles à l'intérieur de la zone B, ainsi que dans la zone D. On trouve ainsi, dans la zone B, vers les Y croissants, deux longueurs de décroissance exponentielle de (toujours en unités expérimentales) 0.22 mm et 0.17 mm. Dans la zone D, on trouve une seule décroissance de longueur caractéristique 0.17 mm. Dans le premier cas, on voit deux hiérarchies de rétrécissement. Il est rassurant de trouver la même longueur de décroissance de 0.17 mm dans les deux cas, car elle correspond à la pénétration de l'onde dans la zone de dimension la plus étroite du cadre.

Les modes 38 et 51 sont, ainsi que le 8, localisés essentiellement dans B. Nous en reparlerons au III-2.3.2. En fait, on observe que la quasi-totalité des modes calculés vibre dans certaines zones préférentielles à l'intérieur du cadre. Ainsi, le n°74 «Évite» les zones B et C. A plus haute énergie, certains modes sont plus délocalisés (le 132, par exemple), mais d'autres apparaissent fortement localisés près de petites dents (le 128).

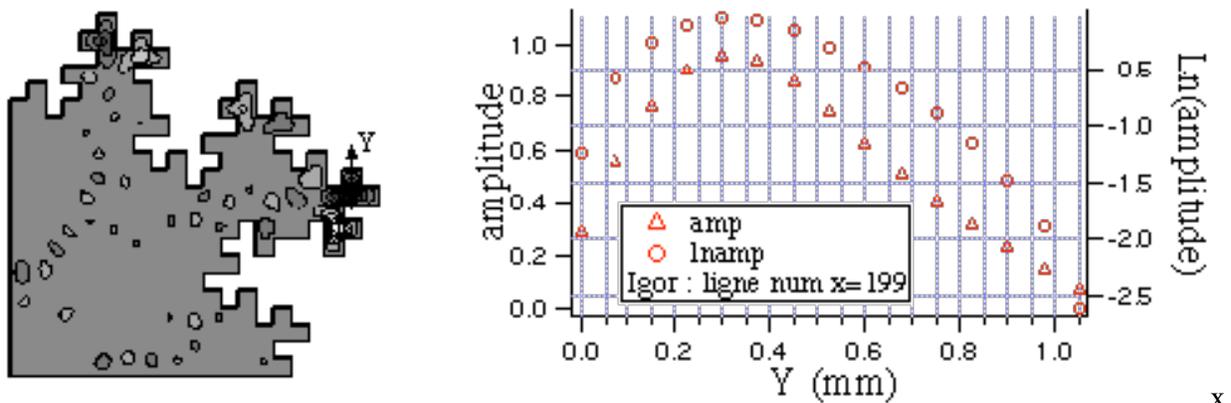


figure 29 : coupe (numérique) suivant l'axe Y du mode n°128

Sur la figure 29, on voit que l'allure du mode 128 est bien sinusoïdale du côté du bord rectiligne. Vers les Y croissants, on observe une allure de décroissance exponentielle tronquée.

### III-2.3.2.2) Ratios de localisation

Pour quantifier la notion de localisation d'un mode, nous avons défini le *ratio de localisation*  $q_n$  du mode d'indice  $n$  comme suit :

$$q_n = \frac{1}{A * \int |\psi_n|^4 ds} \quad \text{III- 19}$$

où  $A$  représente l'aire de la préfractale, et l'intégrale est prise sur sa surface ;  $\psi_n$  est ici normalisée par la condition :

$$\int |\psi_n|^2 ds = 1 \quad \text{III- 20}$$

Cette définition traduit en quelque sorte la fraction de la surface occupée par le mode, en amplifiant l'effet de pic local de la fonction propre. Pour un contour carré, par exemple, le ratio de localisation est le même pour tous les modes, et vaut 0.44.

Les valeurs numériques et expérimentales de ratios pour les modes de la figure 30 y sont indiquées, sous chaque mode. L'accord entre les valeurs numériques et expérimentales est assez bon, en ordre de grandeur. Pour deux expériences différentes sur le mode fondamental, on a trouvé 10% d'écart entre les deux valeurs de  $q_1$ . La définition de  $q_n$  implique une erreur absolue sur  $q_n$  4 fois supérieure à l'erreur sur l'amplitude de la fonction d'onde, ce qui peut expliquer ce type d'écart. Il est probable que les valeurs expérimentales soient moins fiables que les valeurs numériques, car le pas de la grille expérimentale est plus petit, et les effets locaux comptent beaucoup dans la valeur des  $q_n$ . Dans la suite, nous garderons donc uniquement les valeurs numériques.





figure 30 (pages précédentes) : allures comparées de certains modes numériques et expérimentaux. Pour le mode expérimental, deux cadres ont été représentés : le «vrai cadre» sur lequel le film est tendu, et le cadre plus petit correspondant à la zone balayée par l'électrode. Pour les modes 1, 8 et 38, les conventions de couleur sont les mêmes pour les modes numériques et expérimentaux : le gris correspond à une valeur nulle, le noir à une phase de  $+\pi$  et le blanc à une phase de  $-\pi$ . Par contre, pour les modes suivants, les modes expérimentaux ont été laissés tels quels : en noir, on trouve les ventres, le blanc correspondant à une valeur nulle de la fonction propre.

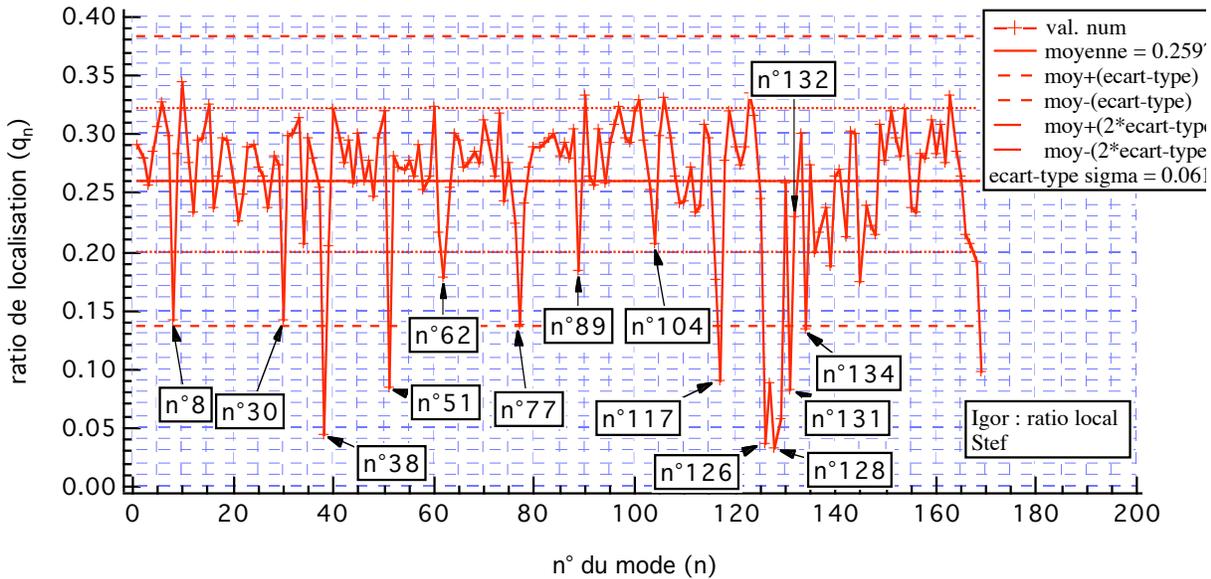


figure 31 : ratios de localisation numériques

La figure 31 donne les valeurs de  $q_n$  en fonction de  $n$ . Les traits horizontaux correspondent respectivement à la valeur moyenne de  $q$ , notée  $\bar{q}$ , et à  $\bar{q} \pm \sigma$  et  $\bar{q} \pm 2\sigma$  (où  $\sigma$  est l'écart-type). On a pour les 170 premiers modes calculés  $0.03 < q < 0.34$  et  $\bar{q} = 0.26$ . Le graphe précédent fait apparaître certains pics vers le bas, correspondant aux modes localisés dans de petites portions du cadre, comme B. Les modes localisés dans A, comme le mode fondamental (de ratio  $q_1 = 0.29$ ), auront un ratio de localisation proche de  $\bar{q}$ , et donc, ne sont pas mis en valeur par le graphe précédent : la notion de ratio de localisation ne sera pas pertinente pour ces modes. On peut encore remarquer que les seuls modes parfaitement délocalisés (i.e. qui font vibrer toute la membrane) sont ceux du petit carré élémentaire de dimensions  $l^2$  (avec les notations de la figure 14). Comme ces modes ont un ratio de 0.44, et qu'on n'atteint jamais cette valeur dans la limite des modes mesurés, on vérifie ainsi que les modes mesurés correspondent au régime où le caractère «désordonné» de la fractale intervient.

---

### *III-2.3.3) Deux mécanismes de localisation*

#### *III-2.3.3.1) Premier mécanisme : « énergétique »*

Le mécanisme le plus simple, qui se retrouve dans tous les modes, est le suivant : on observe une localisation de la fonction propre, c'est-à-dire une décroissance exponentielle, chaque fois que l'onde (de longueur d'onde caractéristique  $\lambda/2$ ) doit pénétrer dans un rétrécissement de taille inférieure à  $\lambda/2$ . Si plusieurs rétrécissements interviennent à la suite, on observe alors plusieurs longueurs de décroissance successives. C'est ce qu'on a observé sur le fondamental dans les directions Y et Z, pour le mode n°8 dans la direction Y, pour le mode 128 dans la direction Y, etc.. On peut en général interpréter grossièrement les ordres de grandeur de ces longueurs de décroissance, en considérant des cavités de forme simple reliées à des canaux plus étroits dans lesquels l'onde décroît exponentiellement. On peut donc prédire que, pour une vraie fractale mathématique, tous les modes seront fortement localisés à l'abord des contours irréguliers, c'est-à-dire présenteront une infinité de longueurs de décroissance exponentielle, de plus en plus courtes quand on se rapproche du bord.

#### *III-2.3.3.2) Deuxième mécanisme : « interférentiel »*

Dans le cas où  $\lambda/2$  devient plus petite que la taille du rétrécissement, on observe néanmoins une localisation de l'onde à l'intérieur de «*cavités*». C'est le cas des modes 38 et 51, localisés essentiellement dans B, du mode 74, qui vibre surtout dans A et D. Même les modes assez délocalisés «*évitent*» certaines zones (ainsi le n°132 vibre peu dans C). De plus, pourquoi le mode 128 préfère-t-il vibrer près de certaines «*petites dents*» du bord? Les raisons de ce deuxième mécanisme de localisation apparaissent beaucoup moins évidentes que précédemment. A priori, il n'y a plus, comme dans le 1er cas, d'interdiction énergétique pour l'onde de sortir de sa cavité (pour le 38ème mode, de sortir de B) : on peut donc imaginer que l'onde sort effectivement. Ensuite, elle subit manifestement des interférences destructives qui l'annulent dans les autres zones de la préfractale. A quoi sont-elles dues? On peut imaginer que c'est le désordre sur le contour qui induit

des réflexions aléatoires de l'onde, entraînant ainsi des interférences destructives. Cependant, contrairement au cas précédent, ce raisonnement n'est étayé par aucun argument semi-quantitatif.

### **III-3) Conclusion**

L'accord observé entre la simulation numérique et l'expérience est très bon. Ceci «valide» en quelque sorte l'étude numérique, et l'intérêt de l'expérience est de disposer d'un «vrai système physique» assez souple.

Aussi bien numériquement qu'expérimentalement, on a observé des effets du désordre sur le contour, d'une part sur le spectre, d'autre part sur la forme des modes propres observés. Notamment, on a bien observé un effet de localisation des fonctions d'onde, que l'on a quantifié de deux manières : grâce à la mesure de longueurs de décroissance exponentielle, et en utilisant la notion de ratio de localisation. On a mis en évidence deux mécanismes différents expliquant cette localisation.

Deux effets différents se combinent au sein du cadre préfractal : d'une part, la hiérarchie propre à la structure auto-similaire, conduisant au premier mécanisme de localisation. D'autre part, l'existence de points saillants. Pour séparer ces deux types d'effets, nous avons réalisé une étude supplémentaire «fillée sur mesure».

Comme l'onde est fortement atténuée à l'approche des bords irréguliers, on peut se demander si cela a des conséquences sur les mécanismes dissipatifs, i.e. sur les facteurs de qualité des modes. On peut notamment se poser la question suivante : existe-t-il une différence entre les facteurs de qualité d'un même mode pour un contour lisse et un contour irrégulier (présentant des «dents»)? Cette question fera l'objet d'une partie du chapitre suivant.

**Annexe du chap. III :**

Nous nous concentrons dans cette partie sur le mécanisme de localisation «*énergétique*» vu précédemment (III-2.3.3.1). Ce mécanisme est caractérisé par une décroissance exponentielle de la fonction d'onde quand un rétrécissement se produit, qui a lieu si la demi-longueur d'onde dans la direction perpendiculaire à l'axe du rétrécissement est supérieure à la taille de celui-ci. Pour la forme préfractale, des calculs d'ordre de grandeur assez grossiers sur ces longueurs de décroissance avaient été effectués, car les «*cavités*» de départ étaient mal définies, et leur forme n'était pas simple. Ici, on étudie un système constitué par un carré «*branché*» sur un «*canal*» de longueur infinie (voir la figure 32). La cavité est prise carrée, car on connaît analytiquement les modes du carré seul, ce qui permettra une étude plus quantitative des longueurs de décroissance exponentielle dans le canal. Ce canal est manifestement plus étroit (par rapport à la taille du carré) que ceux qu'on peut trouver dans le cadre préfractal : on s'est placé dans une limite de «*couplage faible*» entre le carré et le canal.

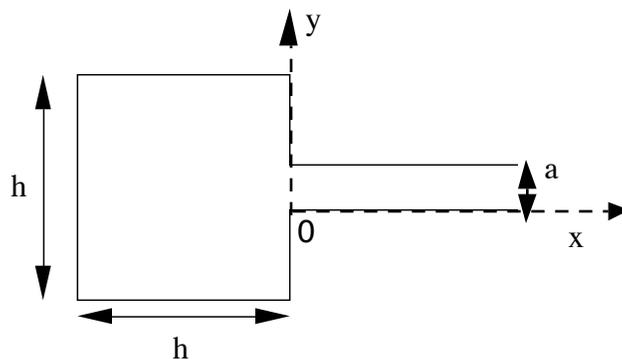


figure 32

On part du mode propre du carré seul, indexé par  $(m,n)$ , défini par :

$$\psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{h} \sin\left(\frac{m\pi}{h}(x+h)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}\left(y + \frac{h-a}{2}\right)\right)$$

III- 21

associée à la valeur propre :

$$k_{mn}^2 = (m^2 + n^2) \left( \frac{\pi}{h} \right)^2$$

III- 22

On cherche maintenant une solution de l'équation d'onde dans le canal, pour le système de la figure. On obtient facilement la forme suivante, en écrivant les conditions aux limites en  $y=0$  et  $y=a$  :

$$\psi(x, y) = \exp(-kx) \sin \frac{\pi y}{a}$$

III- 23

où l'on a choisi d'avoir une demi-longueur d'onde suivant  $y$  dans le canal (cas « un canal », voir [14]). De plus, on a :

$$k^2 = \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

III- 24

Supposons maintenant que la fréquence du mode dans le carré soit peu affectée par l'ouverture du canal, c'est-à-dire qu'on a :

$$\omega \cong \omega_{mn} = ck_{mn}$$

III- 25

On a alors :

$$k^2 \cong \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 - (m^2 + n^2) \left( \frac{\pi}{h} \right)^2$$

III- 26

On voit donc apparaître deux régimes :

\* si  $m^2 + n^2 < (h/a)^2$ ,  $k^2 > 0$ , et l'on a une onde évanescente dans le canal, dont la longueur de décroissance exponentielle est donnée par (III- 26).

\* si  $m^2 + n^2 > (h/a)^2$ ,  $k^2 < 0$ , et le canal est en mode de transmission.

Dans le cas qui nous intéresse (III-1.3.2.2),  $m^2 + n^2 = 2$ , et  $h/a \approx 2$  (voir la table 1) : on est toujours dans le cas de l'onde évanescente.

---

**Références du chap. III :**

- [1] B. Mandelbrot, *Les objets fractals (forme, hasard et dimension)*, Flammarion (1984).
- [2] P. W. Anderson, *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Phys. Rev. **109** (5), 1492 (1958)
- [3] R. Rammal and G. Toulouse, *Random walks on fractal structures and percolation clusters*, J. Phys. (Paris) Lett. **44**, L13 (1983).
- [4] Y-E Lévy and B. Souillard, *Superlocalization of Electrons and Waves in Fractal Media*, Europhys. Lett. **4** (2), 233-237 (1987) ; A. Aharony and A. Brooks Harris, *Superlocalization, correlations and random walks on fractals*, Phys. A **163**, 38-46 (1990).
- [5] D. van der Putten, J.T. Moonen, H.B. Brom, J.C.M. Brokken-Zijp and M.A.J. Michels, *Evidence for Superlocalization on a Fractal Network in Conductive Carbon-Black-Polymer Composites*, Phys. Rev. Lett. **69** (3), 494 (1992) ; A. Aharony, O. Entin-Wohlman and A. Brooks Harris, *Was superlocalization observed on a fractal?*, Phys. A **200**, 171-178 (1993)
- [6] H.P. Baltes and E.R. Hilf, *Spectra of finite systems*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1975).
- [7] voir par ex. M. L. Lapidus, Trans. Am. Math. Soc. **323**, 465 (1991), et les références incluses.
- [8] Y. Hobiki, K. Yakubo and T. Nakayama, *Spectral distribution of drums with fractal perimeters : the Weyl-Berry-Lapidus conjecture*, Phys. Rev. E **52**, R1310 (1995).
- [9] Y. Hobiki, K. Yakubo and T. Nakayama, *Spectral characteristics in resonators with fractal boundaries*, Phys. Rev. E **54**, 1997 (1996).
- [10] B. Sapoval, *Experimental observation of local modes in fractal drums*, Phys. D **38**, 296-298 (1989).
- [11] B. Sapoval, Th. Gobron and A. Margolina, *Vibrations of fractal drums*, Phys. Rev. Lett. **67**, 2974 (1991)

[12] B. Sapoval and Th. Gobron, *Vibrations of strongly irregular and fractal resonators*, Phys. Rev. E **47**, 3013 (1993)

[13] C. Even, S. Russ, V. Repain, P. Pieranski and B. Sapoval, *Localizations in fractal drums, an experimental study*, accepted at Phys. Rev. Lett.

[14] J. Martorell, S. Klarsfeld, D. W. L. Sprung and H. Wu, *Analytical treatment of electron wave propagation in two-dimensional structures*, Sol. State Comm. **78** (1), 13 (1991).



IV-2.2) Expériences réalisées sur un contour circulaire

Avant de poursuivre l'analyse des phénomènes dissipatifs dans le système mécanique {film + gaz} sur un contour circulaire, nous allons aborder un problème laissé dans l'ombre jusqu'ici : celui du rôle de la dissipation électrique par effet Joule dans notre système.

IV-2.2.1) Rôle de l'électrode excitatrice

IV-2.2.1.1) Modèle électrique

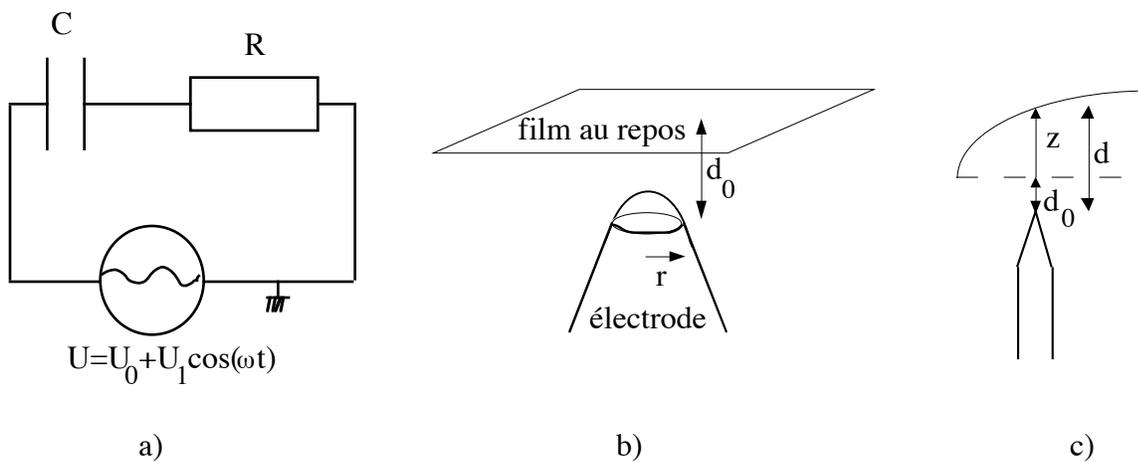


figure 6 : modèle électrique

Précisons le modèle électrique esquissé au II-2.1. La figure 7 du chapitre II est analogue au schéma électrique d'un circuit RC représenté sur la figure 6. A priori, les valeurs de R et C doivent dépendre de la position  $(x_e, y_e)$  de l'électrode à l'intérieur du cadre. Or il existe de la dissipation par effet Joule dans la résistance R, le temps caractéristique associé étant  $R \cdot C$ . On voit ainsi comment le facteur de qualité d'un pic peut dépendre de  $(x_e, y_e)$ .

On note désormais  $U_0 = V_{DC}$  et  $U_1 = V_{AC}$ . R est la résistance interne du film. Comme ce dernier vibre, l'une des armatures du condensateur effectue un mouvement sinusoïdal de fréquence  $\omega$ . On peut écrire :

$$z(x, y, t) = z_0(x, y) \cos(\omega t)$$

$$d = d_0 + z_0 \cos(\omega t) \quad \text{IV- 37}$$

$$\text{et } C = C_0 + C_1 \cos(\omega t) \quad \text{IV- 38}$$

Déterminons l'ordre de grandeur de  $RC_0$ . Pour cela, nous avons effectué la mesure suivante : le film vibrant en régime permanent, on coupe la tension continue  $U_0$ . On mesure alors, à l'aide d'un oscilloscope numérique, le temps de décroissance de l'amplitude du signal de la photodiode, qui correspond au temps de décharge du condensateur, soit à  $R \cdot C_0$ . On trouve ainsi  $\tau_0 = R \cdot C_0 \cong 500$  ms.

Notons qu'expérimentalement, nous n'avons pas trouvé de dépendance de  $\tau_0$  en fonction de la distance film-électrode.

L'équation du circuit RC est la suivante :

$$R\dot{q} + \frac{q}{C_0 + C_1 \cos(\omega t)} = U_0 + U_1 \cos(\omega t) \quad \text{IV- 39}$$

Si  $U_1 = 0$ , alors  $C_1 = 0$ , et en régime permanent

$$q = q_0 = C_0 U_0 \quad \text{IV- 40}$$

et  $i = \dot{q} = 0$  : aucune puissance n'est dissipée dans le circuit électrique.

Si  $U_1 \neq 0$ , alors on pose

$$q(t) = q_0 + q_1(t) \quad \text{IV- 41}$$

En remplaçant (IV- 40) et (IV- 41) dans (IV- 39), et en effectuant un développement limité au premier ordre en  $C_1/C_0$ , on obtient :

$$U \cos(\omega t) = R\dot{q}_1 + \frac{1}{C_0} \left( 1 - \frac{C_1}{C_0} \cos(\omega t) \right) q_1 \quad \text{IV- 42}$$

avec

$$U = U_1 + \frac{C_1}{C_0} U_0$$

IV- 43

On peut écrire  $q_1$  sous la forme :

$$q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n} \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

IV- 44

Il est clair que le terme dominant de cette somme est celui correspondant à  $n = 1$ . Dans la suite, on gardera

$$q \approx q_{11} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

IV- 45

Calculons  $q_{11}$  et  $\varphi_1$ . Pour cela, on passe en nombres complexes. En ne retenant dans (IV- 42) que le terme en  $e^{i\omega t}$ , on obtient aisément :

$$U = \left( i\omega R + \frac{1}{C_0} \right) * q_{11} e^{i\varphi_1}$$

IV- 46

D'où

$$\varphi_1 = -\text{Arc tan}(\omega R C_0)$$

IV- 47

$$q_{11} = \frac{C_0 U}{\sqrt{R^2 C_0^2 \omega^2 + 1}}$$

IV- 48

Il existe alors un courant  $i$  qui vaut

$$i \approx -\omega q_{11} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

IV- 49

On voit ainsi apparaître une source de dissipation supplémentaire en régime permanent.

De plus, nous venons de remettre en cause l'expression de la force excitatrice du II-2.1 En effet, la force agissant sur la charge  $q(t)$  vaut

$$f_{exc} = (q_0 + q_1(t))E_1 \cos(\omega t) \quad \text{IV- 50}$$

Soit

$$f_{exc} = q_0 E_1 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} q_{11} E_1 (\cos \varphi_1 + \cos(2\omega t + \varphi_1)) \quad \text{IV- 51}$$

Ce résultat est confirmé dans [8] par une autre méthode.

Le fait de ne considérer que le premier terme, à la fréquence  $\nu = 2\pi/\omega$  (comme annoncé au II-2.1), correspond donc à une approximation, que nous allons évaluer. Avec les ordres de grandeur précédents et  $\nu = 1$  kHz, on obtient :

$$\frac{q_{11}}{q_0} \approx \frac{U_1/U_0}{\sqrt{1 + (RC_0\omega)^2}} \approx 10^{-4} \quad \text{IV- 52}$$

C'est-à-dire que l'approximation effectuée, consistant à considérer la force excitatrice comme le produit de la charge statique par le champ électrique alternatif, était tout à fait justifiée. On peut la voir grâce à l'image simple suivante : vis-à-vis de la tension continue  $U_0$ , le film est vu comme conducteur. Par contre, par rapport à la tension alternative  $U_1 \cos(\omega t)$ , il est vu comme isolant.

Pour déterminer l'ordre de grandeur relatif de l'effet dissipatif électrique par rapport aux autres sources de dissipation -purement mécaniques- vues au (IV-2.1), il faudrait effectuer un bilan d'énergie global prenant en compte l'équation mécanique (IV- 26) et l'équation électrique (IV- 39), en ayant écrit rigoureusement l'expression de la capacité film-électrode. Ce bilan apparaissant un peu délicat, nous avons préféré contourner le problème en apportant une réponse expérimentale directe à la question posée.

#### IV-2.2.1.2) Expériences

Afin de tester le rôle de l'électrode dans la dissipation, le plus simple consistait à ajouter une deuxième électrode (que nous appellerons « électrode 2 »), sur laquelle nous avons appliqué une tension continue seulement, du même ordre de grandeur que celle déjà appliquée sur la première électrode (« électrode 1 »).

Un premier test a consisté à mesurer l'amplitude de vibration d'un pic donné en fonction de la tension appliquée sur l'électrode 2. Nous avons réalisé ce test pour deux positions relatives différentes des deux électrodes, et pour les deux premiers modes propres du cercle. Les résultats sont présentés sur les figure 7 et figure 8.

Dans le cas présenté sur la figure 7, on observe un comportement inverse pour les deux premiers modes lorsqu'on branche la tension de 60V sur l'électrode 2. Pour le mode 1, l'amplitude du pic augmente de manière conséquente ; pour le mode 2, l'amplitude diminue légèrement. On peut interpréter ceci qualitativement de la manière suivante : on applique en deux endroits du film deux tensions continues de même signe : ceci crée deux charges de même signe. Le mode 1 vibre en phase sur toute sa surface. Le fait d'ajouter une deuxième charge de même signe rend donc l'excitation plus efficace. Ceci signifie que le champ électrique alternatif agit sur toute la surface du film. Ce n'est pas gênant, car aucune hypothèse n'avait été effectuée au (II-2.4.2.2) sur la structure spatiale de ce champ.

La structure du mode 2 est représentée sur la figure 7 : il possède une ligne nodale, dont la position est imposée par celle de l'électrode 1. Vu les positions relatives des deux électrodes, on essaie donc d'exciter en phase des points du film qui devraient vibrer en opposition de phase : on rend ainsi l'excitation moins efficace. On peut se demander pourquoi l'amplitude du pic ne baisse pas de 15%, de même qu'elle augmentait de 15% pour le mode 1. Il faut sans doute imaginer que les charges qui apparaissent ne sont pas ponctuelles (voir la figure 7), contrairement à ce que l'on a supposé jusqu'ici. Il existe peut-être une zone de recouvrement des deux charges créées par les deux électrodes. Dans ce cas, pour le mode fondamental, la zone de recouvrement se situe sur le ventre du mode. Pour le mode 2, elle se situe au contraire au voisinage de la ligne nodale. On comprend ainsi pourquoi l'efficacité de l'excitation n'est diminuée que de peu dans le deuxième cas.

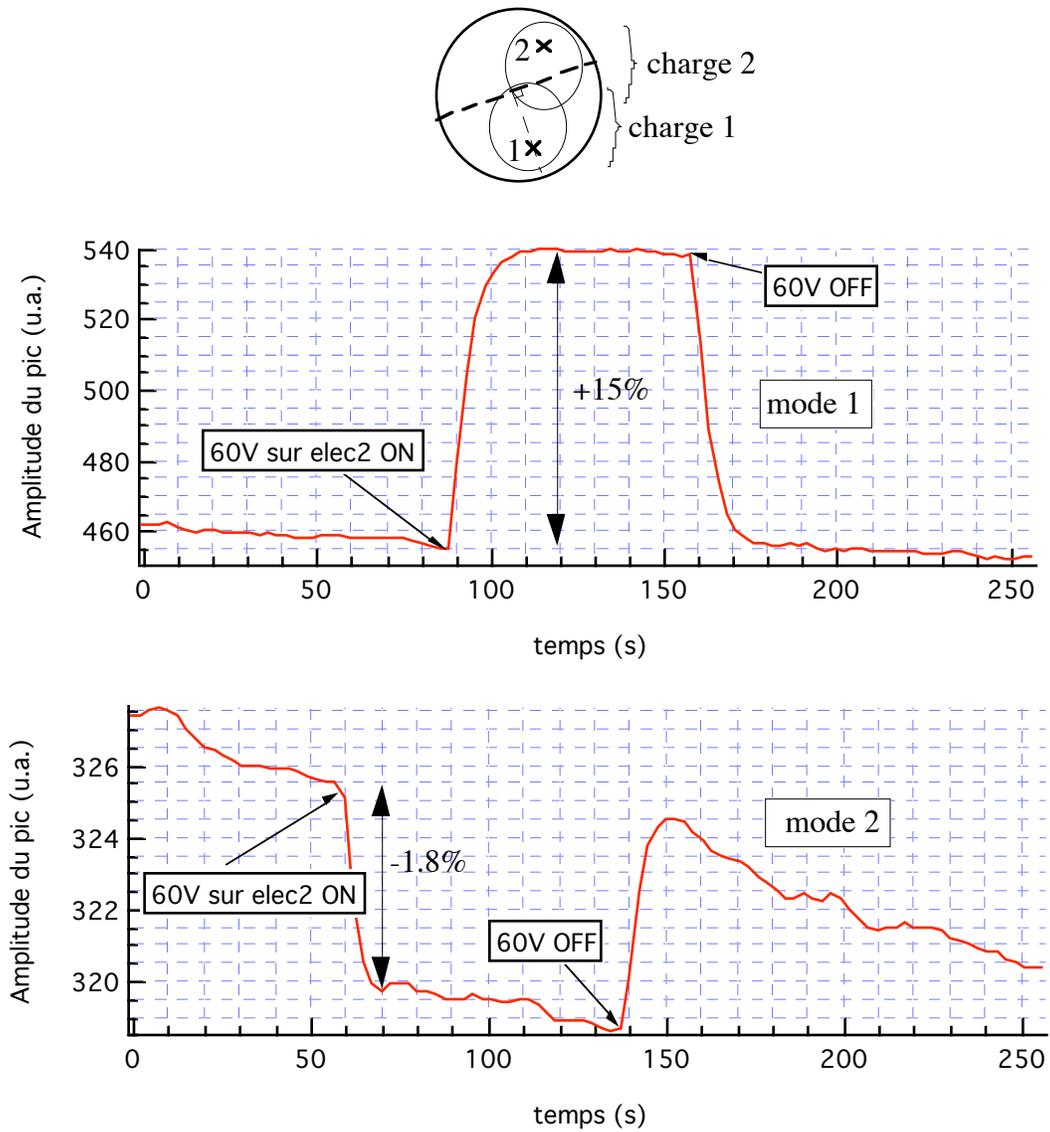


figure 7 : amplitude des deux premiers modes en fonction du temps (la tension sur l'électrode 2 est branchée et débranchée à la main aux instants indiqués), pour les positions respectives des deux électrodes indiquées ci-dessus.

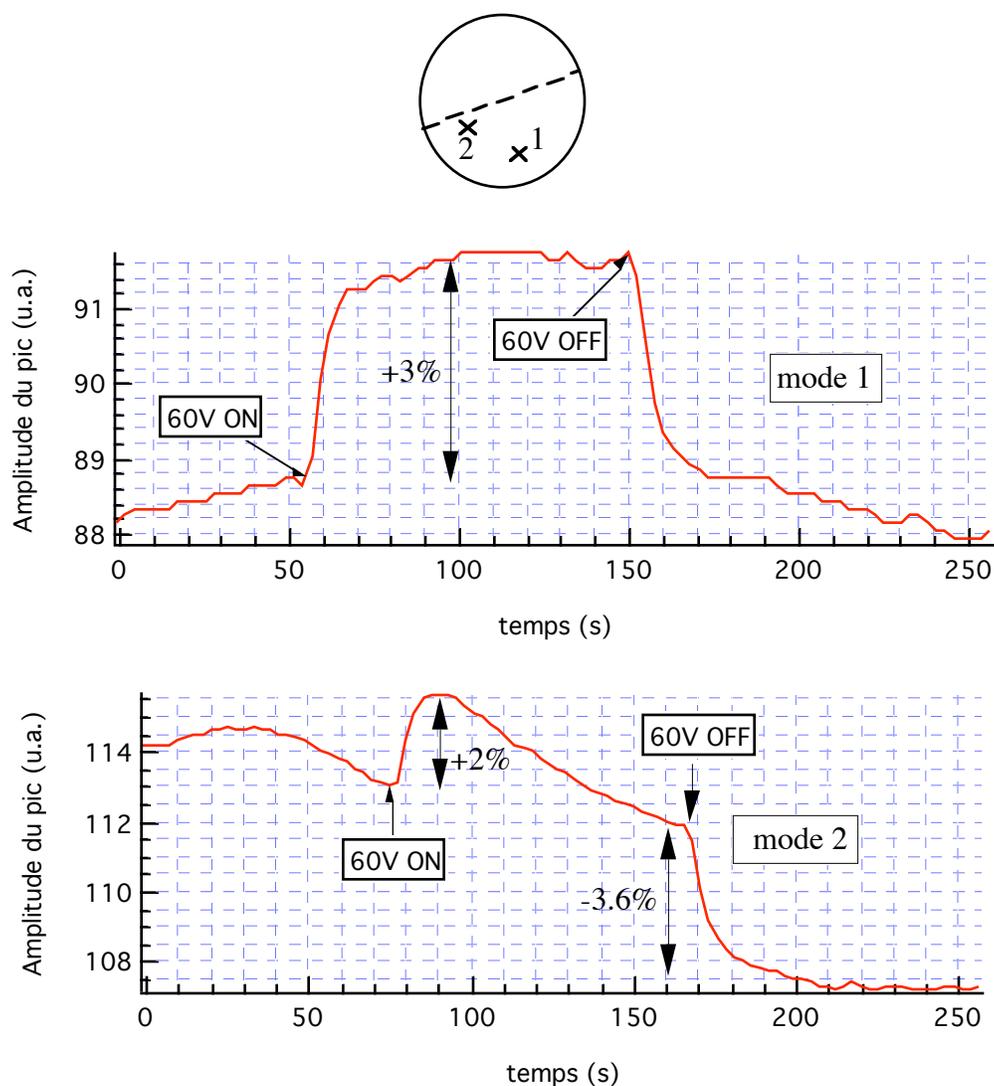


figure 8 : même principe que la figure 7, pour les nouvelles positions respectives des deux électrodes ci-dessus.

Dans le cas représenté sur la figure 8, les deux modes se comportent qualitativement de la même façon, à la dérive près observée pour le mode 2, sans doute due au fait que le film n'était pas encore homogène. On observe ainsi que l'amplitude du pic est augmentée lorsque la tension sur l'électrode 2 est branchée. Pour le mode 1, le raisonnement est le même que précédemment. La tension n'est augmentée que de 3%, ce qui se comprend si l'on considère que la zone de recouvrement des deux charges est cette fois située plus loin du ventre du mode. Pour le mode 2, on observe le même ordre de grandeur d'augmentation de l'amplitude du pic que pour le mode 1. Cette fois, les deux électrodes sont situées du même côté par rapport à la ligne nodale.

Ce premier test a donc mis en évidence que les charges n'étaient « pas si ponctuelles » que nous ne l'avions supposé au II-2.4.2.2.

Le deuxième test a consisté à mesurer le facteur de qualité du premier ou du deuxième mode, selon que la tension continue sur la deuxième électrode valait 0, 30V ou 60V (les positions respectives des électrodes pour cette mesure sont celles indiquées sur la figure 7). Le résultat obtenu est présenté sur les figure 9 et figure 10. Dans les deux cas, on n'observe pas de variation du facteur de qualité du mode due à la tension appliquée à l'électrode 2. On peut en conclure que l'électrode ne joue finalement pas de rôle dans les processus dissipatifs mis en jeu lors des vibrations du film.

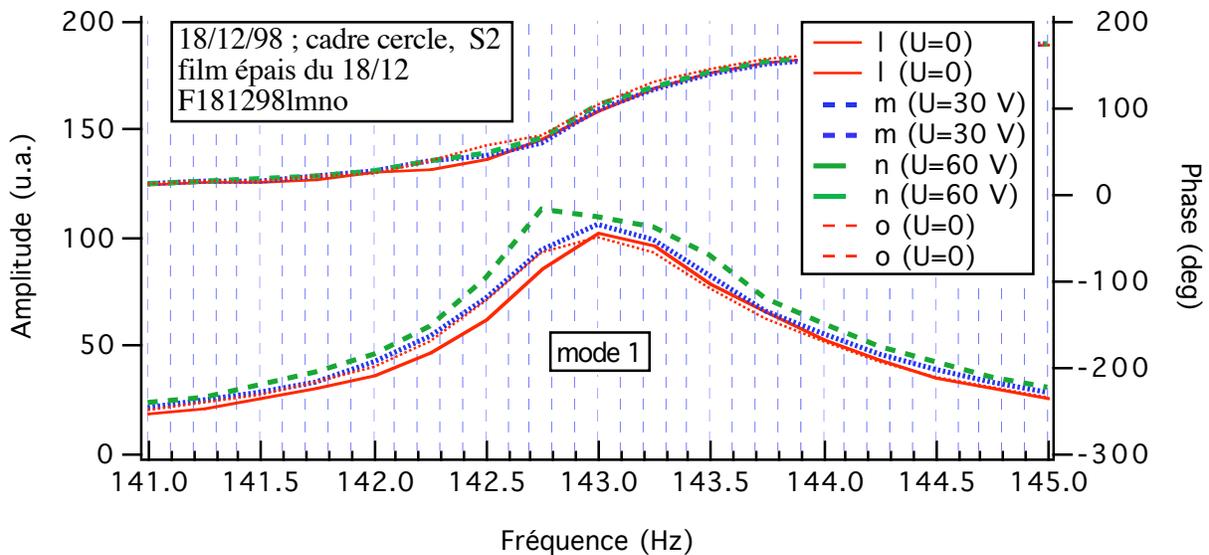


figure 9 : amplitude et phase du mode fondamental en fonction de la fréquence excitatrice, suivant la tension appliquée sur l'électrode 2.

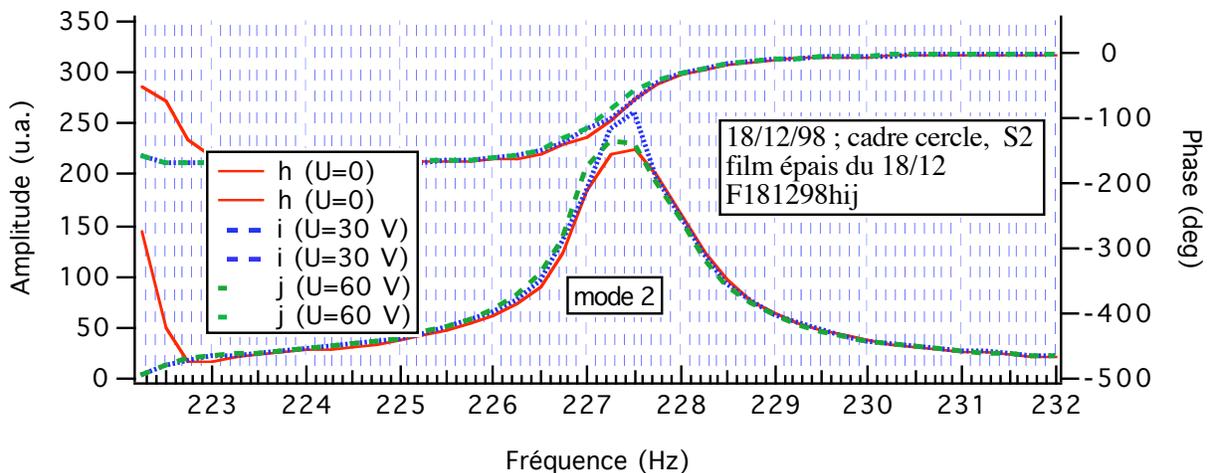


figure 10 : amplitude et phase du mode 2 en fonction de la fréquence excitatrice, suivant la tension appliquée sur l'électrode 2.

#### IV-2.2.2) Effet de la pression

Pour tester le modèle ébauché au IV-2.1, nous avons fait varier le paramètre «pression» P. A quoi s'attend-on? D'une part, à cause de l'inertie du gaz, les fréquences des modes propres vont diminuer avec P. De plus, y a-t-il un effet sur les facteurs de qualité? A priori, on a pris en compte la viscosité seule du gaz, qui est indépendante de sa pression. On peut donc penser que les facteurs de qualité doivent être indépendants de P.

##### *IV-2.2.2.1) sur les fréquences des modes*

La fréquence du mode d'indice n s'écrit, en présence d'une hauteur effective de gaz  $l_g$  de densité  $\rho_g$ , entraînée par les vibrations du film :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} k_n \sqrt{\frac{\gamma}{\rho e + \rho_g l_g}} \quad \text{IV- 53}$$

où, dans le cas d'un cercle de rayon a, les vecteurs d'onde  $k_n$  s'écrivent :

$$k_n = \frac{u_n}{a} \quad \text{IV- 54}$$

où les  $u_n$  sont les racines des différentes fonctions de Bessel, rangées par ordre croissant :

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n$$

On obtient ainsi :

$$\left(\frac{u_n}{f_n}\right)^2 = \frac{4\pi a^2}{\gamma} (\rho e + \rho_g l_{g_n}) \quad \text{IV- 55}$$

soit, en utilisant  $\rho_g = PM_g/RT$  :

$$\left(\frac{u_n}{f_n}\right)^2 = \frac{4\pi a^2}{\gamma} \left( \rho e + \left( M_g l_{g_n} / RT \right) * P \right)$$

IV- 56

où l'on a écrit a priori que la hauteur de gaz effective dépendait du mode n. En mesurant les fréquences des modes pour différentes valeurs de P, et en traçant  $(u_n/f_n)^2$  en fonction de P, on doit donc obtenir une droite, dont la pente nous donne accès à  $l_{g_n}$ . L'ordonnée à l'origine donne un ordre de grandeur de l'épaisseur du film<sup>3</sup>. Posons

$$l_{g_n} = \alpha_n a$$

IV- 57

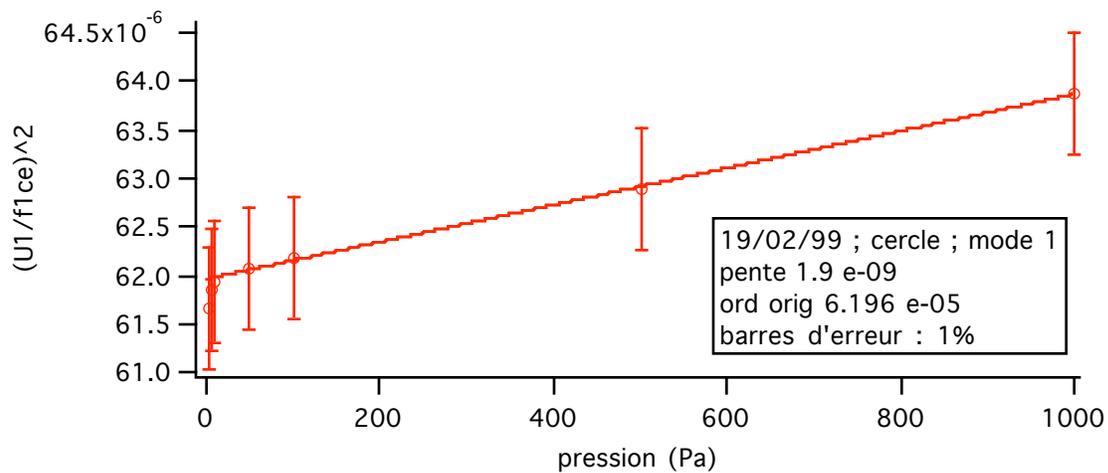


figure 11 : contour circulaire

<sup>3</sup> Nous verrons au IV-2.2.3 comment obtenir l'épaisseur des films plus précisément

Un exemple de résultat expérimental est présenté sur la figure 11, pour le mode fondamental d'un contour circulaire de rayon  $a = 0.5$  cm. On prend  $\gamma = 5.4 \cdot 10^{-2}$  kg.s<sup>-2</sup> (voir IV-2.2.3). On obtient ainsi, pour différentes mesures,  $\alpha_1$  entre 1.28 et 1.77.

Nous avons également mesuré  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  et  $\alpha_5$ , pour tester l'affirmation de [4] selon lequel la hauteur de gaz impliquée vaut environ une demi-longueur d'onde du mode, soit

$$l_{g_n} = \pi/k_n \quad \text{IV- 58}$$

ce qui s'écrit encore, d'après (IV- 54) et (IV- 57) :

$$\alpha_n = \pi/u_n \quad \text{IV- 59}$$

Le résultat correspondant est présenté sur la figure 12. Le bon accord entre l'ajustement linéaire et nos points expérimentaux indique que les expressions (IV- 58) et (IV- 59) semblent correctes. Il aurait fallu toutefois effectuer la mesure précédente sur beaucoup plus de modes pour conclure.

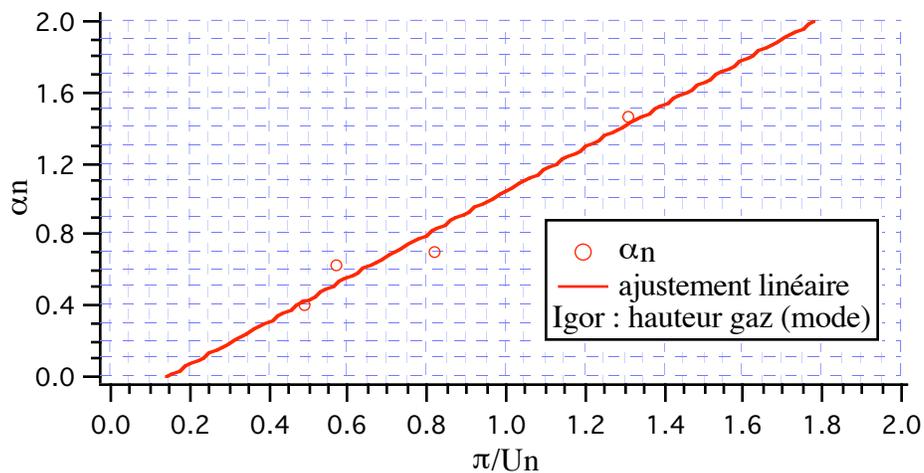


figure 12

#### IV-2.2.2.2) sur les facteurs de qualité $Q_n$

D'après le modèle du IV-2.1.2, le facteur de qualité prenant en compte les effets visqueux à la fois dans le gaz et dans le film s'écrit, pour le mode d'indice  $n$  :

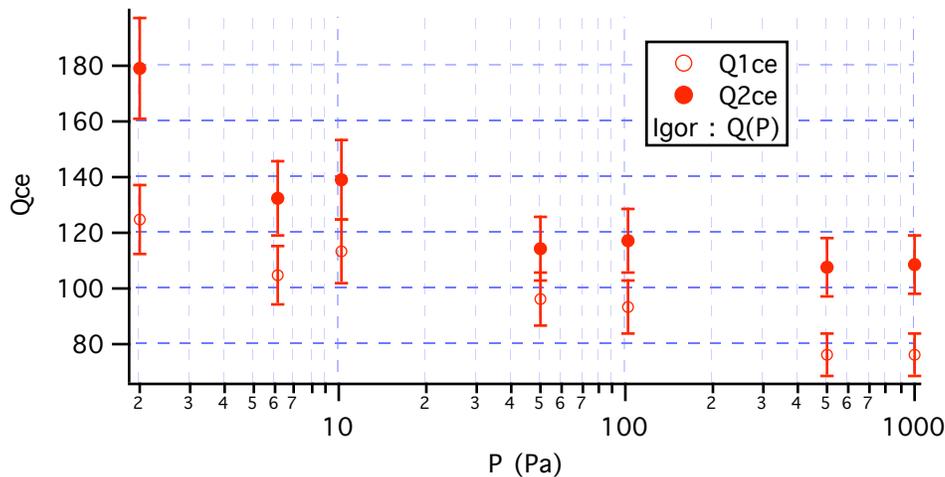
$$Q_n = \frac{\sqrt{\gamma} \sqrt{\rho e + \rho_g l_{g_n}}}{k_n \eta e + \eta_g l_{g_n}} \quad \text{IV- 60}$$

$$\text{Si } \rho_g l_{g_n} = \frac{PM_g}{RT} \ll \rho e \quad \text{IV- 61}$$

$$\text{i.e. si } P \ll 10^8 e \quad \text{IV- 62}$$

(e étant exprimée en m et P en Pa), l'inertie du gaz est alors négligeable, et les facteurs de qualité doivent être indépendants de la pression P, comme annoncé au début du IV-2.2.2.

Le résultat expérimental correspondant aux deux premiers modes du cercle est présenté sur la figure 13. On observe, contrairement à ce qu'on vient de prévoir, une dépendance importante des facteurs de qualité en fonction de la pression. On a notamment une chute conséquente des  $Q_n$  aux basses pressions. Ceci explique peut-être la dispersion observée sur les points de la figure 4, si la pression dans la cellule était mal contrôlée<sup>4</sup>. Comment interpréter les résultats observés? Si c'était l'effet de l'inertie du gaz, cela ferait augmenter et non diminuer le facteur de qualité!...Il existe donc clairement un effet dissipatif lié au gaz, non pris en compte jusqu'ici.



<sup>4</sup> En effet, cette pression a été bien contrôlée expérimentalement seulement pour les tous derniers résultats obtenus dans la thèse.

figure 13 : facteurs de qualité des deux premiers modes du cercle en fonction de la pression.

Un phénomène que nous avons négligé jusqu'ici est celui de *rayonnement acoustique* : les oscillations de la membrane plongée dans le gaz créent des compressions et des dilatations au sein du gaz, c'est-à-dire une onde acoustique<sup>5</sup>. Par ce processus, la membrane transmet de l'énergie au gaz : ceci se traduit par l'existence d'une force dissipative, due à l'air, s'exerçant sur la membrane. C'est par ce mécanisme que les membranes vibrantes (peaux de tambours..) produisent le son qui se propage dans l'air avant d'arriver à nos oreilles.

Considérons un piston *rigide* oscillant près d'un milieu gazeux semi-infini. Il subit donc le déplacement uniforme :

$$z(t) = Z \cos(\omega t) \quad \text{IV- 63}$$

D'après ce qui précède, son mouvement engendre une onde acoustique dans le gaz environnant de fréquence  $\omega$  et de longueur d'onde  $\lambda_g = \omega / c_g$  où  $c_g$  est la vitesse du son dans l'air.  $c_g$  vaut, à un facteur numérique près, la vitesse quadratique moyenne  $\bar{u}$  des molécules du gaz ; elle dépend donc seulement de la température, et pas de la pression du gaz. En conséquence, nous prendrons donc la valeur habituelle à la température ambiante :  $c_g = 340 \text{ m.s}^{-1}$ . On notera d'autre part  $k_g = 2\pi / \lambda_g$ .

Supposons maintenant que la vitesse de déplacement du piston soit très petite devant  $c_g$ , ce qui revient à dire que la taille caractéristique du piston (notée  $a$ ) soit très petite devant la longueur d'onde, soit :

$$a \ll \lambda_g \quad \text{IV- 64}$$

L'hypothèse (IV- 64) implique que, si l'on se place à une distance grande devant  $a$ , on voit la source d'ondes acoustiques (le piston) comme étant ponctuelle : l'émission acoustique est donc isotrope. Avec cette hypothèse, on trouve dans [9,10] l'expression de la force de dissipation par unité de surface s'exerçant sur le piston :

---

<sup>5</sup> Jusqu'ici, nous avons négligé la compressibilité du gaz dans notre modèle.

$$\rho_g c_g (k_g a)^2 \dot{z} \quad \text{IV- 65}$$

Donnons une interprétation partielle de l'expression (IV- 65) précédente. On peut aussi l'écrire comme :

$$mn\bar{u}(k_g a)^2 \dot{z} \quad \text{IV- 66}$$

où  $m$  est la masse d'une molécule de gaz, et  $n$  le nombre de molécules par unité de volume. On voit ainsi apparaître la quantité  $mn\bar{u}$ , qui correspond à la quantité de mouvement du gaz par unité de volume. Il est normal de voir apparaître une telle quantité, car le transfert qui a lieu entre la membrane et l'air est un transfert de quantité de mouvement par chocs. Ce raisonnement est par contre insuffisant pour comprendre l'origine du terme  $(k_g a)^2$ . A ce sujet, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'annexe de ce chapitre.

Remarque :

L'hypothèse d'émission isotrope est vraie en l'absence de viscosité dans le gaz. Quand on tient compte de cette dernière (notée  $\eta_g$ ), cela se traduit par l'existence d'une couche limite près de la paroi entourant le piston (voir la figure 27), et donc par une déformation à ce niveau des surfaces d'onde sphériques. La hauteur de cette couche limite est donnée par [11]:

$$\delta = \sqrt{\eta_g / (\rho_g \omega)} \quad \text{IV- 67}$$

A la pression habituelle de 0.1 mbar, on trouve  $\delta = 4$  mm, pour une fréquence de 1 kHz. Cette grandeur est très petite devant la longueur d'onde  $\lambda_g$ . On peut donc négliger les déformations des surfaces d'onde sphériques dues à la viscosité du gaz.

Revenons au cas de notre *membrane vibrante* circulaire de rayon  $a$ . Prenons le cas du mode fondamental. Comme le déplacement de tous les points du film est en phase, on va pouvoir

appliquer le modèle précédent de piston rigide, pour ce mode. Le rayon de la membrane est  $a = 5$  mm, et  $\lambda_{1g} = 30$  cm pour une fréquence de 1 kHz. La condition (IV- 64) est donc vérifiée. La force par unité de surface sur la membrane vaut maintenant, au point  $(x,y)$  :

$$\rho_g c_g (k_{1g} a)^2 \dot{z}(x, y) \quad \text{IV- 68}$$

Ceci revient à considérer chaque élément de surface de la membrane comme un piston rigide émettant une onde acoustique, indépendamment des autres éléments de surface.

Partant de l'expression (IV- 68) de la force, et en l'insérant dans l'équation du mouvement (IV- 26), on obtient la fréquence caractéristique associée au rayonnement acoustique pour le mode fondamental :

$$\omega_{C1(ray.ac.)} = (\rho_g c_g k_{1g}^2 a^2) / (\rho e) \quad \text{IV- 69}$$

En prenant en compte les trois mécanismes dissipatifs vus jusqu'ici : viscosité du gaz et du film et rayonnement acoustique, on obtient :

$$Q_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{C1(film)} + \omega_{C1(gaz)} + \omega_{C1(ray.ac.)}} \quad \text{IV- 70}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$Q_1^{-1} = \frac{k_1}{\sqrt{\gamma \rho e}} (\eta e + \eta_g l_{g1}) + \frac{M}{RT} \frac{\gamma^{1/2}}{c_g (\rho e)^{3/2}} u_1 a * P \quad \text{IV- 71}$$

Si l'on porte les valeurs expérimentales de  $Q_1^{-1}$  en fonction de P, on doit donc obtenir une droite.

Nous allons maintenant présenter les résultats expérimentaux obtenus pour le mode fondamental du film d'épaisseur 5.39  $\mu\text{m}$ . Le résultat correspondant est présenté sur la figure 14, où l'on a porté  $Q^{-1}$  en fonction de l'épaisseur e pour le cadre circulaire de rayon  $a = 0.5$  cm. La première constatation est qu'on obtient bien une droite comme prévu. Au moins qualitativement, on explique ainsi le sens de variation du facteur de qualité en fonction de la pression P. De plus,

expérimentalement, on trouve une pente de  $1.4 \cdot 10^{-6}$  alors que la valeur prévue par (IV- 71) est  $2.2 \cdot 10^{-7}$  : l'accord est correct en ordre de grandeur. Concernant l'ordonnée à l'origine, la comparaison expérience/modèle est très satisfaisante ( $1.2 \cdot 10^{-2}$  u.S.I dans les deux cas).

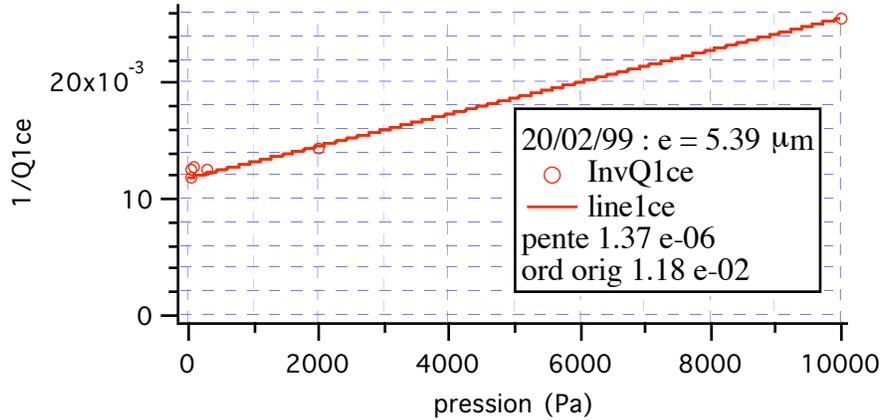


figure 14 : cas du premier mode pour le film d'épaisseur 5.39 μm

#### Conclusion sur le rayonnement acoustique :

On a vu que l'existence du rayonnement acoustique permet d'interpréter la dépendance expérimentale du facteur de qualité du mode fondamental en fonction de la pression. On peut se demander si le phénomène de rayonnement acoustique est à considérer aux pressions habituelles auxquelles on fait les expériences (quelques Pa). On peut pour cela calculer le rapport  $\omega_{C1(ray.ac.)} / \omega_{C1(gaz)}$ . On obtient ainsi, en utilisant les expressions (IV- 31) et (IV- 69), à la pression de 0.1 mbar, un rapport de 1% pour un film de 1 μm d'épaisseur, et 10% pour 0.1 μm.

De plus, on voit sur la figure 13 que le facteur de qualité du deuxième mode chute également de manière significative avec la pression. Cela nous amène à nous poser la question suivante : comment traiter le cas des modes autres que le fondamental, vis-à-vis du rayonnement acoustique? Par exemple, dans le cas du deuxième mode, deux parties de la membrane vibrent en opposition de phase l'une par rapport à l'autre, ce qui rend un modèle éventuel plus difficile à écrire.

---

### *IV-2.2.3) Variation de l'épaisseur du film*

#### *IV-2.2.3.1) Introduction :*

Nous revenons maintenant à des expériences réalisées à la pression habituelle de travail, ici de  $10^{-1}$  mbar. Nous avons déjà obtenu des premiers résultats expérimentaux sur la variation du facteur de qualité du mode fondamental du contour fractal en fonction de l'épaisseur du film, jusqu'à des épaisseurs de 4  $\mu\text{m}$  environ (figure 4). Nous avons présenté un modèle, prenant en compte la viscosité du film et du gaz, qui était compatible avec nos résultats expérimentaux. Ici, nous avons essayé d'atteindre des valeurs de l'épaisseur du film encore plus grandes, afin de mieux voir la décroissance de Q prévue aux grandes épaisseurs (voir figure 4 et (IV- 29)). L'intérêt du contour circulaire, outre celui de ne pas présenter de points saillants, est que les solutions de l'équation d'onde correspondantes sont analytiques. Comme nous l'avons vu au (IV-2.2.2.1), cela nous dispensera de mesurer l'épaisseur de tous les films.

#### *IV-2.2.3.2) Mesure de l'épaisseur d'un film*

Les fréquences des modes d'un contour circulaire sont données par (voir (IV-2.2.2.1)) :

$$f_n(e) = \frac{u_n}{2\pi r} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho e}}$$

IV- 72

où les  $u_n$  sont les racines des fonctions de Bessel. Donc, si l'on connaît le rapport ( $\gamma / \rho$ ), la seule mesure des fréquences de résonance d'un film donne immédiatement son épaisseur. Pour connaître ( $\gamma / \rho$ ), il suffit de mesurer, pour un film donné, son épaisseur (par la méthode du II-1.6) et ses premières fréquences de résonance.

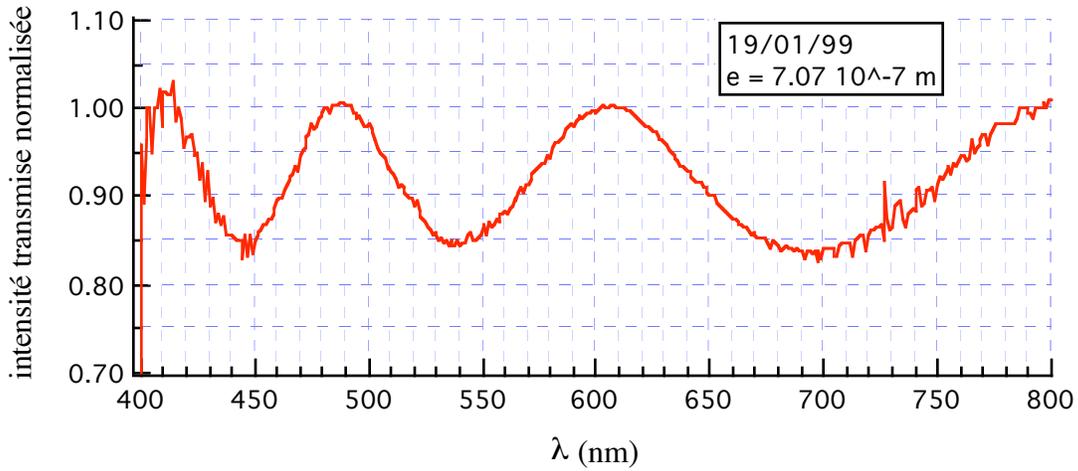


figure 15 : mesure de l'épaisseur d'un film sur le contour circulaire

Le résultat de la mesure d'épaisseur est présenté sur la figure 15. Il s'agit, contrairement à ce qui est expliqué dans (II-1.6), de l'intensité transmise (et non réfléchie) par le film, normalisée par l'intensité transmise quand le film a disparu. On obtient  $e = 7.07 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

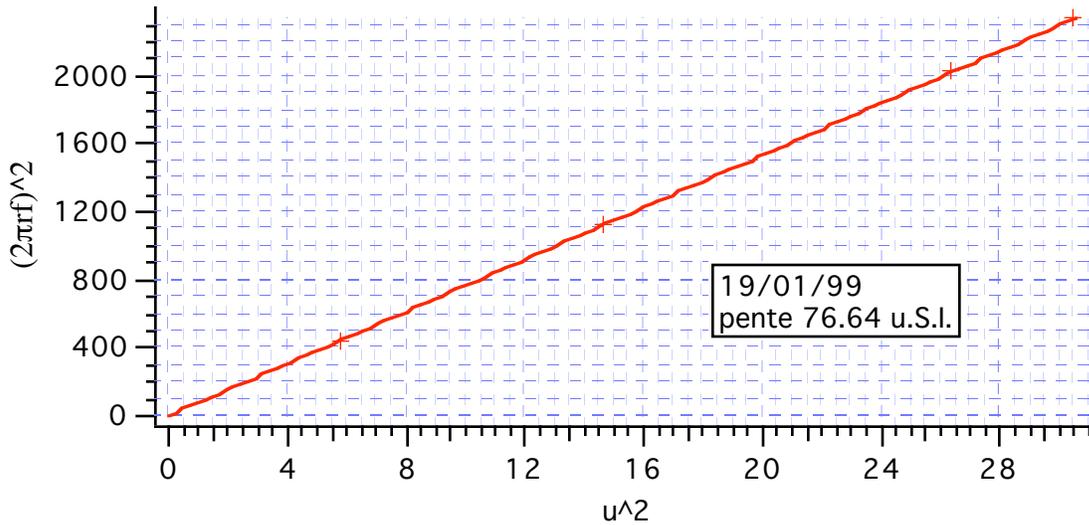


figure 16 : détermination du rapport  $(\gamma / \rho)$

(IV- 72) donne :

$$(2\pi r f_n)^2 = \left( \frac{\gamma}{\rho e} \right) u_n^2$$

La figure 16 présente le résultat expérimental correspondant. On obtient une pente de 76.64 u.S.I., ce qui donne, avec la valeur de  $e$  précédemment déterminée :

$$\gamma/\rho = (5.42 \pm 0.01) 10^{-5} \text{ u.S.I.} \quad \text{IV- 74}$$

Nous n'avons pas mesuré la masse volumique du produit S2, le plus utilisé durant cette thèse. Cependant, quand on dépose une goutte de S2 dans l'eau, elle ne remonte à la surface que très lentement : on peut donc considérer que S2 a la même masse volumique que l'eau. On obtient donc :

$$\gamma = 5.42 10^{-2} \text{ kg.s}^{-2} \quad \text{IV- 75}$$

De plus, jusqu'ici nous avons utilisé les valeurs de [12], où la valeur  $\gamma = 5.78 10^{-2} \text{ kg.s}^{-2}$  avait été obtenue pour le même composé S2. On a un écart de 6% entre ces deux valeurs ; on peut arguer que les mesures ont été faites sur des échantillons provenant de deux flacons différents, et que les méthodes utilisées étaient différentes. Dans [12], les auteurs ont en effet utilisé la déviation d'un pendule placé entre deux membranes smectiques et ont réalisé des mesures différentielles.

#### IV-2.2.3.3) Variation des facteurs de qualité avec l'épaisseur du film

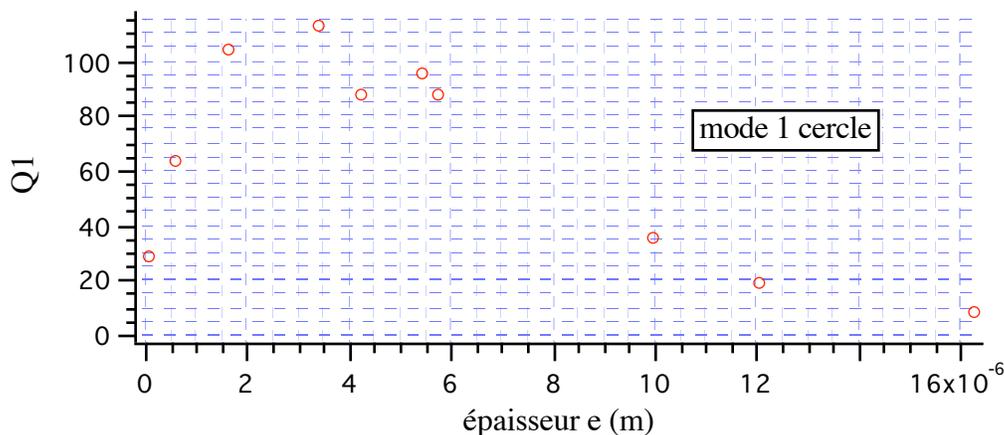


figure 17 : facteur de qualité du mode fondamental d'un contour circulaire, en fonction de l'épaisseur du film

Le résultat expérimental obtenu pour le mode fondamental est présenté sur la figure 17. Les points expérimentaux ont tous été pris à une pression de 0.1 mbar. Les courbes correspondant aux

autres modes que le fondamental ont une allure similaire ; de plus, nous verrons le cas des autres modes plus en détail au (IV-2.2.4).

On observe un maximum pour une valeur de  $e$  d'environ  $3.5 \mu\text{m}$ . Puis on a, comme prévu, une redécroissance du facteur de qualité aux fortes épaisseurs. L'effet est drastique, puisqu'on obtient seulement  $Q_1 = 10$  pour  $16 \mu\text{m}$  d'épaisseur. Pour tester une fois de plus le modèle du (IV-2.1.2.1), traçons, comme pour la figure 5,  $\sqrt{e} * Q^{-1}$  en fonction de  $e$ . Le résultat obtenu correspond à la figure 18.

Contrairement à la figure 5, pour laquelle l'épaisseur maximale atteinte était de  $4 \mu\text{m}$ , on n'obtient pas une droite. De plus, il a été impossible de trouver un ajustement de type polynômial satisfaisant pour ces résultats. D'après (IV- 30) et (IV- 35), la valeur en  $e = 0$  doit être  $b = k_1 \eta_g l_g / \sqrt{\gamma \rho}$ , d'où  $\eta_g \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ Po}$ , à comparer avec la valeur de  $10^{-5} \text{ Po}$  trouvée au (IV-2.1.2.2). La pente à l'origine vaut  $k\eta / \sqrt{\gamma \rho}$  : d'où  $\eta \approx 2.7 \cdot 10^{-2} \text{ Po}$ . Au (IV-2.1.2.2), on avait trouvé  $2 \cdot 10^{-2} \text{ Po}$ . L'accord entre le modèle et les résultats expérimentaux est donc satisfaisant pour les faibles épaisseurs, ce qui n'est pas étonnant, compte tenu des résultats du (IV-2.1.2.2).

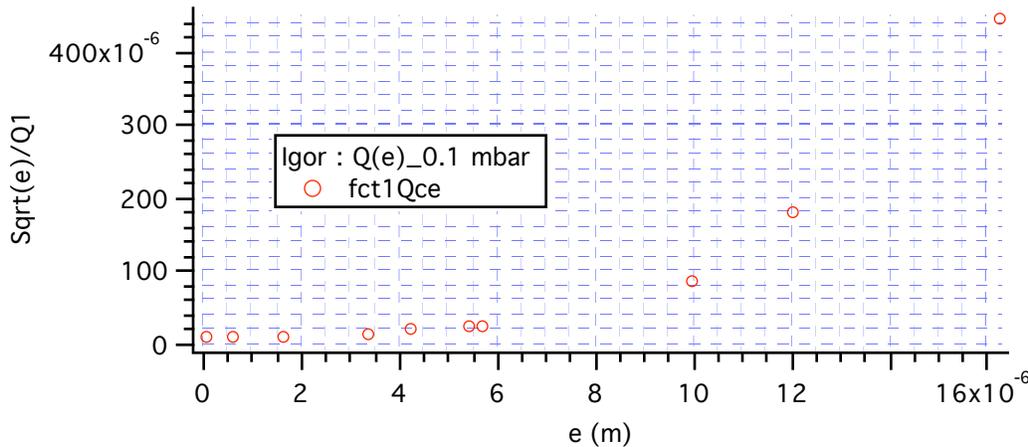


figure 18

Tout ce qu'on peut conclure, c'est qu'il existe un mécanisme dissipatif supplémentaire, qui intervient pour les fortes valeurs de l'épaisseur du film : ce mécanisme est donc nécessairement propre au film. A ce jour, nous n'avons trouvé aucune explication satisfaisante qui expliquerait la dépendance de  $Q(e)$  observée.

---

*IV-2.2.4) Variation du facteur de qualité en fonction du vecteur d'onde  $k$* 
*IV-2.2.4.1) Prévisions*

Que peut-on prévoir sur le sens de variation du facteur de qualité  $Q_n$  en fonction du vecteur d'onde  $k_n$ ? (IV- 60) donne :

$$Q_n = \frac{\sqrt{\gamma\rho e}}{k_n(\eta e + \eta_g l_{gn})} \quad \text{IV- 76}$$

Or, on a montré expérimentalement au (IV-2.2.2) qu'il semblait correct d'écrire :

$$l_{gn} = \pi/k_n \quad \text{IV- 77}$$

On a donc :

$$Q_n^{-1} = (\gamma\rho e)^{-1/2}(\eta_g \pi + \eta e * k_n) \quad \text{IV- 78}$$

Le facteur de qualité doit donc diminuer avec le vecteur d'onde  $k_n$ , et la variation de  $Q^{-1}$  avec  $k$  doit être affine.

*IV-2.2.4.2) Résultat expérimental*

On constate expérimentalement que le sens de variation de  $Q_n$  dépend crucialement de l'épaisseur du film! En effet, on voit sur la figure 19 que :

pour  $e \leq 3 \mu m$ ,  $Q_n$  augmente avec  $k_n$ , en contradiction flagrante avec la prévision précédente.

pour  $e \approx 4$  à  $5 \mu m$ ,  $Q_n(k_n)$  passe par un maximum puis redécroît.

pour  $e \geq 6 \mu m$ ,  $Q_n(k_n)$  décroît, et on a bien une variation affine pour  $Q^{-1}$  : un exemple est présenté sur la figure 20.

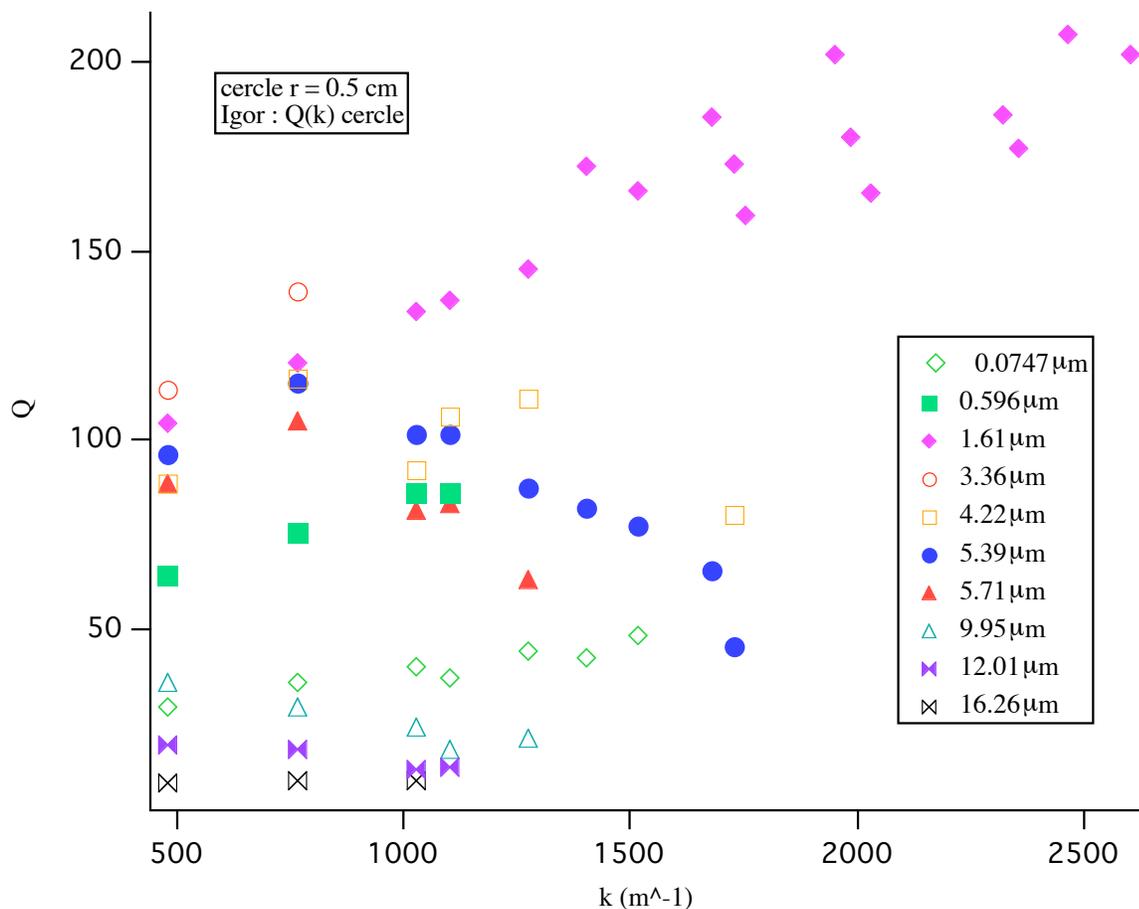


figure 19 : variation du facteur de qualité en fonction du vecteur d'onde, pour différentes valeurs de l'épaisseur du film

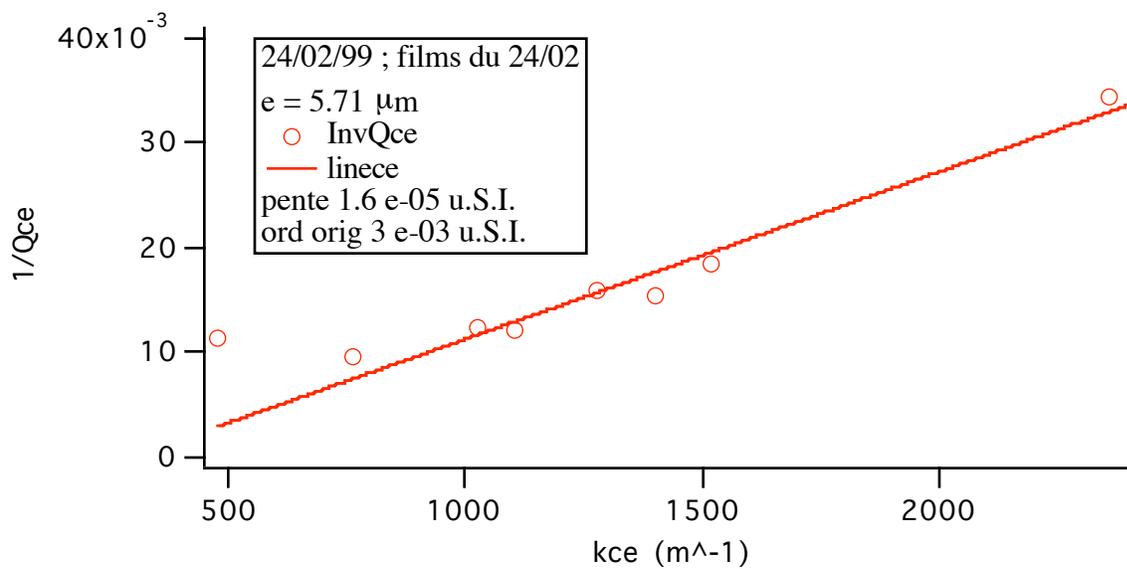


figure 20 : variation de  $Q^{-1}$  en fonction de  $k$ , pour le film d'épaisseur  $5.7 \mu m$ .

## IV-2.2.4.3) Interprétation

La première idée qu'on peut avoir consiste à ajouter l'effet du rayonnement acoustique, non pris en compte dans (IV- 76), en supposant que le terme correspondant garde la même forme (IV- 69) pour tous les modes (ce qui est loin d'être évident..). La seule question à se poser est : est-ce que cela change la dépendance de  $Q_n$  en fonction de  $k_n$ ? Rappelons que  $Q_n$  s'écrit :

$$Q_n = \frac{\omega_n}{\omega_{Cn(film)} + \omega_{Cn(gaz)} + \omega_{Cn(ray.ac.)}} \quad \text{IV- 79}$$

avec, d'après (IV- 23),  $\omega_{Cn(film)} \propto k_n^2$ ,

d'après (IV- 31) et (IV- 57),  $\omega_{Cn(gaz)} \propto k_n$ ,

et d'après (IV- 69), en utilisant le fait que  $k_{ng} = k_n(c/c_g)$  :

$$\omega_{Cn(ray.ac.)} \propto k_n^2$$

On voit ainsi que le terme de rayonnement acoustique a la même dépendance en  $k_n$  que celui associé aux effets visqueux dans le film. Ce n'est donc pas cet effet qui permet d'expliquer la dépendance en  $k_n$  observée.

Compte tenu des résultats du (IV-2.2.3.3), on peut également se demander si les résultats observés ne seraient pas dus au terme supplémentaire de dissipation dans le film, dont nous n'avons pas compris l'origine. Or, aux grandes épaisseurs, le modèle du (IV-2.1.2.1) ajuste bien les résultats expérimentaux de  $Q_n(k_n)$ , et c'est pour les films de faible épaisseur que la dépendance  $Q_n(k_n)$  est contraire aux prévisions de ce modèle. On peut donc penser que l'effet dissipatif non pris en compte qui expliquerait ces résultats vient du gaz et non du film.

Quel effet dissipatif dans le gaz n'a pas encore été pris en compte? Jusqu'ici, on a entré dans le modèle le rayonnement acoustique et les effets visqueux dans le gaz. De quels effets visqueux s'agit-il? Vu la façon dont on a introduit la force  $\eta_g l_g \frac{\partial}{\partial t}(\Delta z)$ , il s'agit nécessairement de viscosité dans le *volume* du gaz. On peut se demander ce qui se passe au voisinage de la *surface* du film. En effet, le film constituant une paroi mobile pour le gaz, on devrait donc avoir une couche

limite de viscosité dans le gaz au voisinage de cette paroi<sup>6</sup>. A cause de la faible compressibilité du film, qui empêche les molécules à sa surface de se déplacer, la vitesse tangentielle du gaz au voisinage du film doit s'annuler. Ceci crée effectivement une couche limite dans le gaz près du film. L'épaisseur de cette couche est donnée par (IV- 67).

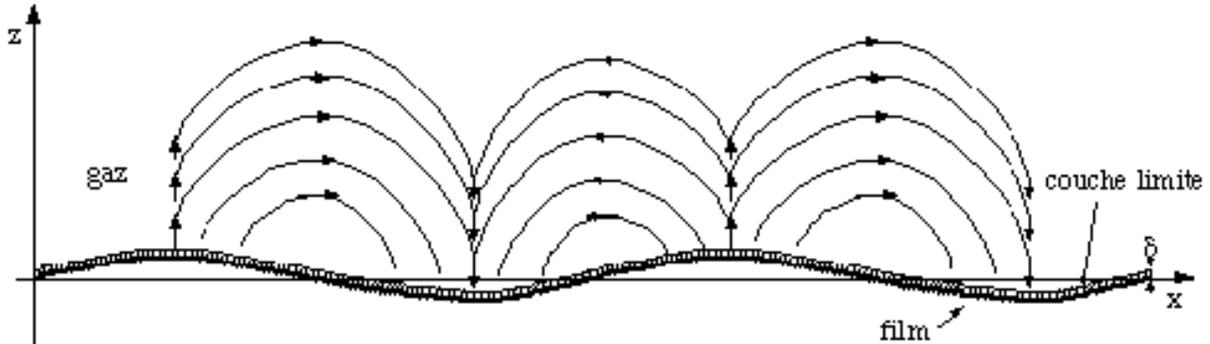


figure 21 : écoulements au sein du gaz (pour simplifier, on n'a représenté que ceux de la partie supérieure)

Remarque : On peut se demander si la notion de couche limite a encore un sens à une pression de 0.1 mbar..Pour répondre à cette question, comparons les ordres de grandeur respectifs de la couche limite  $\delta$  et du libre parcours moyen  $l$  à la même pression de 0.1 mbar. On trouve [7] :

$$l = 3 \text{ mm et } \delta = 4 \text{ mm pour } P = 0.1 \text{ mbar.}$$

On en conclut qu'on se situe juste à la limite où la notion de viscosité a encore un sens pour le gaz.

Sur la figure 21, nous considérons le demi-espace supérieur rempli de gaz, qui constitue notre système. Le raisonnement serait identique pour le demi-espace inférieur. Considérons un système d'ondes capillaires à la surface inférieure de ce fluide : ces ondes sont générées par les oscillations du film. Ecrivons le champ des vitesses dans le gaz sous la forme :

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}\varphi \tag{IV- 80}$$

avec :

$$\varphi = \varphi_0 \exp(i(kx - \omega t)) \exp(-kz) \tag{IV- 81}$$

<sup>6</sup> au (IV-2.2.2.2), on a déjà discuté l'existence d'une couche limite visqueuse au voisinage de la paroi rigide

L'expression de l'énergie moyenne par unité de surface dissipée dans la couche limite vaut alors [11] :

$$P_{diss} = \sqrt{(1/8)\rho_g \eta_g \omega} (k\varphi_0)^2 \quad \text{IV- 82}$$

D'autre part, l'énergie cinétique moyenne du film par unité de surface vaut :

$$E_{cin} = \rho e \bar{v}^2 (z = 0) \quad \text{IV- 83}$$

soit, en utilisant (IV- 80) et (IV- 81) :

$$E_{cin} = \rho e (k\varphi_0)^2 \quad \text{IV- 84}$$

La fréquence caractéristique des phénomènes dissipatifs se produisant dans la couche limite près du film vaut donc :

$$\omega_{Cn(couche\ lim.)} = P_{diss}/E_{cin} = \sqrt{\rho_g \eta_g \omega} / \sqrt{8\rho e} \quad \text{IV- 85}$$

On écrit donc le facteur de qualité du mode n comme :

$$Q_n = \frac{\omega_n}{\omega_{Cn(film)} + \omega_{Cn(gaz)} + \omega_{Cn(ray.ac.)} + 2 * \omega_{Cn(couche\ lim.)}} \quad \text{IV- 86}$$

(le facteur 2 tient compte du demi-espace inférieur au-dessous du film).

On obtient :

$$Q_n = \frac{\sqrt{k_n}}{A + B\sqrt{k_n} + Ck_n^{3/2}} \quad \text{IV- 87}$$

Le modèle ci-dessus a donc bien permis de trouver un terme expliquant que  $Q_n$  puisse augmenter avec  $k_n$ .

A, B et C sont définis par :

$$A = \frac{(\rho_g \eta_g)^{1/2}}{2^{1/2} \gamma^{1/4} (\rho e)^{3/4}}$$

IV- 88

$$B = \frac{\pi \eta_g}{(\gamma \rho e)^{1/2}}$$

IV- 89

$$C = \frac{\eta e + (\gamma \rho_g a^2 / \rho e c_g)}{(\gamma \rho e)^{1/2}}$$

IV- 90

On peut encore écrire (IV- 87) sous la forme :

$$\sqrt{k_n}/Q_n = A + B * \sqrt{k_n} + C * (\sqrt{k_n})^3$$

IV- 91

Il est donc intéressant de tracer  $\sqrt{k_n}/Q_n$  en fonction de  $\sqrt{k_n}$ .

La courbe correspondant au film d'épaisseur 5.39  $\mu\text{m}$  est présentée sur la figure 22.

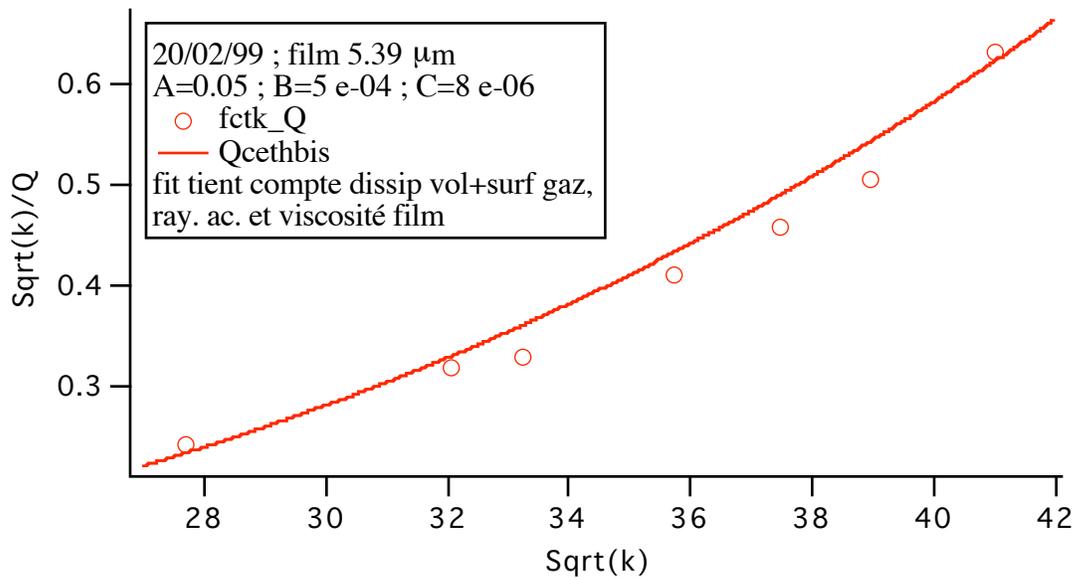


figure 22 : résultat obtenu pour le film d'épaisseur 5.39  $\mu\text{m}$

Pour ce film, les valeurs théoriques de A, B et C sont :

$$A_{th} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1/2} ; B_{th} = 6 \cdot 10^{-4} ; C_{th} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

alors que les valeurs déterminées expérimentalement grâce à l'ajustement effectué à partir de (IV-91) sont :

$$A_{\text{exp}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1/2} ; B_{\text{exp}} = 5 \cdot 10^{-4} ; C_{\text{exp}} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

L'accord est donc correct.

Le résultat pour le film d'épaisseur 1.6  $\mu\text{m}$  est présenté sur la figure 23.

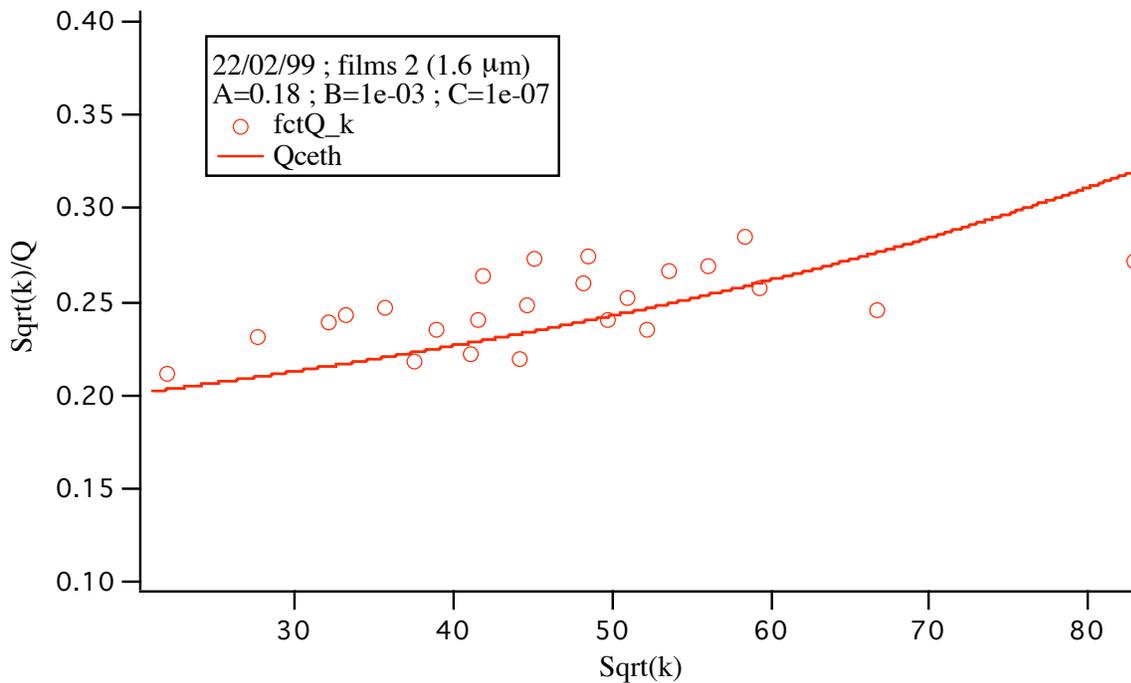


figure 23 : résultat obtenu pour le film d'épaisseur 1.6  $\mu\text{m}$

On a cette fois, comme valeurs théoriques pour A, B et C :

$$A_{\text{th}} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1/2} ; B_{\text{th}} = 10^{-3} ; C_{\text{th}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

et comme valeurs expérimentales:

$$A_{\text{exp}} = 0.18 \text{ m}^{-1/2} ; B_{\text{exp}} = 10^{-3} ; C_{\text{exp}} = 10^{-7} \text{ m}$$

L'accord est, une fois de plus, correct.

#### IV-2.2.5) Conclusion des expériences réalisées sur le cadre circulaire

Notre objectif initial était de comprendre parfaitement l'origine des phénomènes dissipatifs présents dans l'expérience, sur le cas simple d'un contour circulaire. Cet objectif a été partiellement atteint. Nous connaissons déjà le rôle des effets visqueux dans le gaz et dans le film (IV-2.1).

Après avoir éliminé l'électrode excitatrice comme source possible de dissipation, nous avons étudié la dépendance des facteurs de qualité  $Q_n$  en fonction des trois paramètres  $P$ ,  $k_n$  et  $e$ . Grâce à l'introduction du rayonnement acoustique, nous avons compris les variations de  $Q_n$  en fonction de  $P$ , pour le mode fondamental. Pour interpréter le fait que, pour les films de faible épaisseur,  $Q_n$  puisse augmenter avec  $k_n$ , nous avons été amenés à considérer la dissipation visqueuse dans la couche limite du gaz au voisinage du film. Au total, cela fait trois mécanismes différents dans le gaz, dont nous n'avions envisagé aucun au départ!.. Enfin, la chute trop importante de  $Q_n$  aux grandes valeurs de l'épaisseur  $e$  reste encore énigmatique.

Tout ceci était une étude sur un contour à bord lisse, préliminaire à celle d'une forme présentant des irrégularités (points saillants). Notre but est maintenant d'étudier un tel contour, afin de voir si l'existence des points saillants a un effet sur la dissipation.

### **IV-3) Expériences réalisées sur un contour «dentelé»**

#### IV-3.1) Cadre expérimental

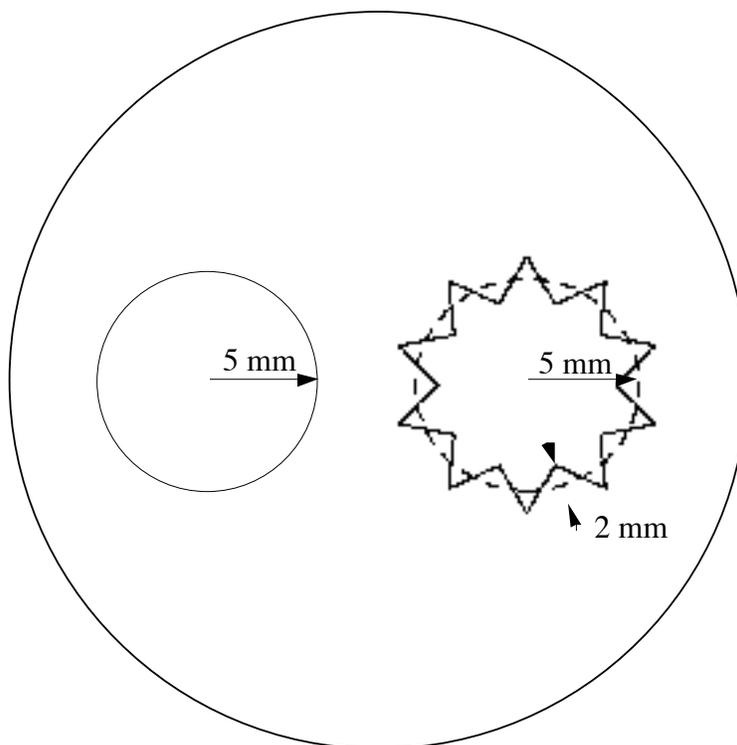


figure 24 : cadre expérimental, dans lequel deux contours ont été découpés.

Nous avons travaillé sur le cadre de la figure 24. Deux contours ont été découpés à l'intérieur (de manière très précise, par l'entreprise I.C.M.C.). Nous espérons en effet, en tirant simultanément les deux films sur les deux cadres, obtenir deux films de même épaisseur. Nous aurions pu, par comparaison directe des facteurs de qualité d'un mode donné, conclure sur l'existence d'un effet dissipatif associé aux points saillants présents dans le contour «dentelé» (à droite sur la figure 24). Malheureusement, il s'est avéré impossible d'obtenir des différences d'épaisseurs entre les deux films inférieures à 10%. Or, comme nous l'avons vu au (IV-2.2.3.3), les facteurs de qualité peuvent varier de manière significative pour une variation d'épaisseur de 10%. La seule solution consiste donc à tirer un grand nombre de films d'épaisseurs variées sur les deux formes, et de comparer les deux courbes de  $Q_n^{ce}(e)$  et  $Q_n^{dt}(e)$  entre elles. On note  $Q_n^{ce}(e)$  le facteur de qualité du mode n pour le cercle, et  $Q_n^{dt}(e)$  celui du mode n pour le contour dentelé.

Notons que les résultats présentés au (IV-2.2) ont été réalisées sur ce contour circulaire.

#### IV-3.2) Expériences en pression

Sur le contour circulaire, les expériences en pression nous avaient permis de connaître l'expression de la hauteur de la couche de gaz mise en jeu lors des vibrations du film en fonction du vecteur d'onde du mode considéré (résultat (IV- 58)). Nous avons aussi mis en évidence l'importance du phénomène de rayonnement acoustique.

Pour le contour dentelé, nous allons supposer que l'expression (IV- 58) reste valable. Nous allons tenter de répondre à la question suivante : existe-t-il un rayon effectif tel que les vecteurs d'onde des modes puissent s'écrire

$$k_n = \frac{u_n}{a_{eff}}$$

IV- 92

Si la réponse est oui, alors le résultat (IV- 56) reste valable, en remplaçant a par  $a_{eff}$ . Nous avons donc tracé  $(u_n/f_n)^2$  en fonction de P pour différents modes : nous obtenons toujours des droites.

Pour les modes 1 et 2, les expériences ont été réalisées sur un film d'épaisseur  $1.58 \mu\text{m}$  : on trouvé un rayon effectif de  $4.3 \text{ mm}$  dans les deux cas. Pour les modes 4 et 5, nous avons utilisé un film d'épaisseur  $3.46 \mu\text{m}$  : nous avons encore trouvé  $4.3 \text{ mm}$  comme rayon effectif pour ces deux modes.

On en conclut que le contour dentelé est équivalent, pour ses premiers modes, à un cercle de rayon  $4.3 \text{ mm}$  : ceci est inférieur au rayon moyen du contour, de  $5 \text{ mm}$ . On a donc un effet de localisation des premiers modes, induit par le contour irrégulier. On peut supposer que les modes de vecteur d'onde plus élevé finiront par pénétrer plus à l'intérieur des dents, et donc que le rayon effectif va augmenter.

#### IV-3.3) Courbes $Q_1(e)$ pour le cadre circulaire et pour le cadre dentelé comparées

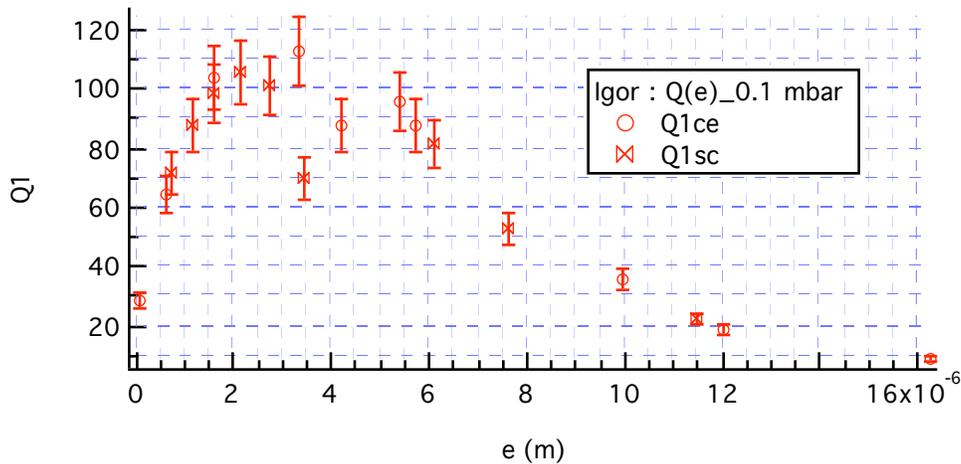


figure 25 : facteur de qualité du premier mode en fonction de l'épaisseur, pour le contour circulaire et le contour dentelé

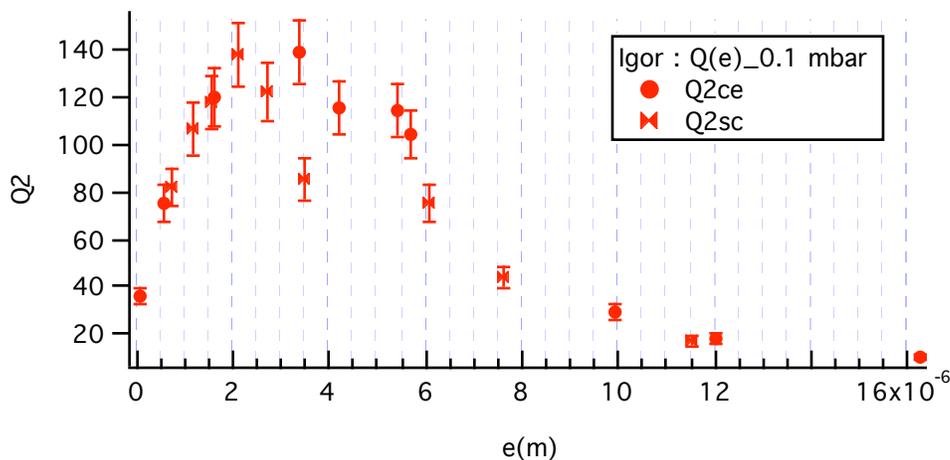


figure 26 : facteur de qualité du deuxième mode en fonction de l'épaisseur, pour le contour circulaire et le contour dentelé

Les résultats obtenus pour les deux premiers modes ont présentés sur les figure 25 et figure 26. Nous avons également effectué cette comparaison pour les modes 3, 4 et 5. On ne peut pas affirmer que la courbe  $Q_n^{dt}(e)$  soit, comme nous l'avons espéré, systématiquement en-dessous de la courbe  $Q_n^{ce}(e)$ . Nous n'avons donc pas pu mettre en évidence un effet dissipatif lié à la présence des points saillants dans ce contour dentelé.

#### IV-3.4) Discussion

Partons de l'hypothèse que cet effet dissipatif existe réellement. Il y a deux possibilités pour que nous ne l'ayons pas observé expérimentalement : soit il est masqué par les autres phénomènes dissipatifs propres à notre expérience. Soit cet effet n'est, en soi, pas aussi important que nous ne le pensions au premier abord.

Supposons que la force de dissipation supplémentaire par unité de surface  $f_d(x,y)$  apparaissant au voisinage d'un point saillant puisse s'écrire comme :

$$\eta_1 \dot{z} \quad (\text{cas 1}) \quad \text{IV- 93}$$

$$\eta_2 \nabla \dot{z} \quad (\text{cas 2}) \quad \text{IV- 94}$$

ou  $\eta_3 \Delta \dot{z}$  (cas 3)

IV- 95

On peut trouver l'expression du facteur de qualité du mode n par un raisonnement énergétique. En effet, il peut s'écrire comme le rapport de l'énergie maximale stockée sur un cycle  $E_n$  par l'énergie dissipée sur un cycle, soit :

$$Q_n = \frac{2\pi E_n}{P_n}$$

IV- 96

posons  $z_n(x, y, t) = A_n \psi_n(x, y) \cos(\omega_n t)$

IV- 97

$$\text{où } \iint_S \psi_n^2(x, y) dx dy = 1$$

IV- 98

$$E_n = \text{Max}(\iint_S (1/2) \rho e \omega_n^2 z_n^2(x, y, t) dx dy) = (1/2) \rho e \omega_n^2 A_n^2$$

IV- 99

$$P_n = \int_0^T \iint_S f_d(x, y) \dot{z}_n dt$$

IV- 100

Au voisinage d'un point saillant, on a (voir III-1.3.2.2) :  $\psi_n(\rho, \varphi) = \rho^{2/3} \sin(2\varphi/3)$

IV- 101

On peut vérifier que dans les trois cas envisagés ci-dessus, l'intégrale (IV- 100) reste finie, bien que  $\nabla \psi_n$  diverge au voisinage du point saillant. Ceci montre que l'effet des points saillants sur le facteur de qualité reste un effet fini.

#### **IV-4) Conclusion de ce chapitre**

Dans un premier temps, nous avons compris que, bien que nous effectuions les expériences sous vide primaire, la viscosité du gaz résiduel joue un rôle non négligeable dans les facteurs de qualité des résonances obtenus. Ensuite, grâce à l'étude sur le contour circulaire, nous avons pu mettre en évidence le rôle du rayonnement acoustique dans les processus dissipatifs, que nous n'avions pas du tout soupçonné au départ. Nous avons par contre disculpé l'électrode comme

source possible de dissipation dans notre expérience. Puis, afin d'interpréter l'augmentation du facteur de qualité en fonction du vecteur d'onde du mode pour les films de faible épaisseur, nous avons introduit les effets visqueux dans la couche limite du gaz au voisinage du film. Nous n'avons pas malheureusement tout compris sur l'origine de la dissipation que nous observons : la trop grande chute des facteurs de qualité pour les grandes valeurs de l'épaisseur du film reste inexplicée. Enfin, notre but initial était de mettre en évidence un rôle éventuel de l'irrégularité du contour dans la dissipation : aucun effet clair n'a été mesuré dans notre expérience, et ce fait a été partiellement interprété.

**Annexe du chap. IV :**

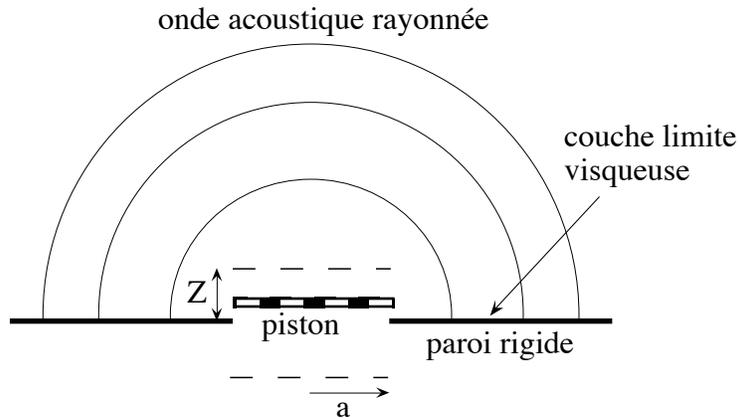


figure 27 : rayonnement d'un piston oscillant de rayon a

Notre but ici est d'expliquer l'origine de l'expression (IV- 65) de la force visqueuse par unité de surface s'exerçant sur un piston rigide oscillant, du fait qu'il émet une onde acoustique (voir la figure 1). [13] traite le cas d'un corps quelconque oscillant dans un fluide (de masse volumique  $\rho_g$ , et on note  $c_g$  la célérité du son dans ce fluide), et émettant ainsi une onde acoustique. Dans le cas où l'onde est émise à cause d'un changement du volume  $V(t)$  du corps au cours du temps, on montre [13] que la puissance émise vaut :

$$I = \rho_g \langle \ddot{V}^2 \rangle / 4\pi c_g, \quad \text{IV- 102}$$

la moyenne étant prise sur le temps. Cette expression est valable dans le cas où les dimensions du corps sont petites devant  $\lambda_g$ , et à une distance grande devant  $\lambda_g$ . On peut adapter ce calcul au cas d'un piston circulaire de rayon a, de déplacement uniforme :

$$z(t) = Z \cos(\omega t) \quad \text{IV- 103}$$

On peut écrire dans ce cas :

$$V(t) = V_0 + \pi a^2 z(t) \quad \text{IV- 104}$$

On a alors :

$$\langle \ddot{V}^2 \rangle = \pi^2 \omega^4 a^4 Z^2 / 2 \quad \text{IV- 105}$$

D'où :

$$I = \pi \rho_g \omega^4 a^4 Z^2 / 8c \quad \text{IV- 106}$$

D'autre part, écrivons que la puissance de l'onde acoustique correspond nécessairement à la puissance de la force dissipative agissant sur le piston :

$$I = (1/T) \int_0^T F(t) \dot{z}(t) dt \quad \text{IV- 107}$$

$$\text{avec : } F(t) = p(t) \pi a^2 \quad \text{IV- 108}$$

en effet, la force agissant sur le piston est homogène sur toute sa surface, et nous cherchons l'expression de la force par unité de surface  $p(t)$  ; écrivons  $p(t)$  sous la forme la plus simple possible pour une force dissipative, soit :

$$p(t) = A \dot{z}(t) \quad \text{IV- 109}$$

En remplaçant (IV- 103) et (IV- 108) dans (IV- 107), en identifiant (IV- 106) et (IV- 107), et en utilisant  $\omega = k_g c_g$ , on obtient finalement :

$$p(t) = (1/4) \rho_g c_g (k_g a)^2 \dot{z}(t) \quad \text{IV- 110}$$

soit, à un facteur numérique près, l'expression cherchée.

**Références du chap. IV :**

- [1] I. Kraus, Ch. Bahr, I. V. Chikina and P. Pieranski, *Can one hear structures of smectic films?*, Phys. Rev. E **58** n°1, 610 (July 1998)
- [2] M. Ben Amar, P. Patricio da Silva, M. Brazovskaia, C. Even and P. Pieranski, *Vibrations of smectic films*, Phil. Mag. B, vol. 78, N° 2, 115-130 (1998)
- [3] R. Holyst, *Mechanical vibrations of freely suspended smectic liquid-crystal films*, Phys. Rev. A **46**, 6748 (1992)
- [4] I. Kraus, *Etudes des films librement suspendus de cristaux liquides thermotropes en phase smectique*, thèse de doctorat, Orsay (1995)
- [5] C. Even, *Etude des vibrations d'un film smectique tendu sur un contour fractal*, rapport de stage du DEA de Physique des Solides (février 96)
- [6] K. Myiano, *Surface tension measured by vibrating membranes : an application to smectic A and B phases*, Phys. Rev. A **26**, 1820 (1982)
- [7] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Intereditions CNRS (1991), p.45
- [8] C. H. Sohl, K. Myiano and J. B. Ketterson, *Novel technique for dynamic surface tension and viscosity measurements at liquid-gas interfaces*, Rev. Sci. Instrum. **49**, 1464 (1978)
- [9] Ph. Morse and K. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University, 1968 (Princeton)
- [10] Fleury et Mathieu, *Vibrations mécaniques, acoustique*, ed. Eyrolles, 1955 (Paris)
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1966)
- [12] P. Pieranski et al., *Physics of smectic membranes*, Phys. A **194**, 364 (1993)
- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1966)



Revenons maintenant sur le graphe de Cayley du groupe  $SL(3,2)$ , obtenu à partir de la description de ce groupe utilisant les deux générateurs  $A$  et  $B$  définis au (V-2.2.3.2.1). Partant de ce graphe de Cayley, il est possible de construire, à l'aide de papier, ciseaux et colle, la variété riemannienne  $M$  dont il est question dans l'énoncé (V-2.2.1).

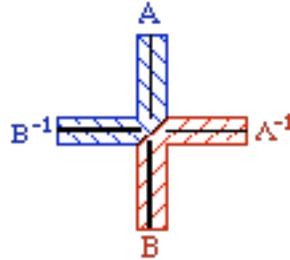


figure 7 [19] : brique de base utilisée par P. Buser pour construire les deux surfaces isospectrales incluses dans l'espace tridimensionnel (voir figure 10) ; les liens  $A$  et  $A^{-1}$  sont dessinés en trait fin, tandis que les liens  $B$  et  $B^{-1}$  sont en trait épais (mêmes conventions que pour la figure 9).

En effet, considérons la croix de la figure 7 : elle symbolise un élément quelconque du groupe  $G$ , ou encore un sommet du graphe de Cayley. On découpe ainsi 168 croix identiques. Sur chaque croix, on écrit la matrice correspondant à l'un des éléments du groupe. Commençons par exemple par l'identité (figure 8). Quand on la multiplie par  $A$ , on obtient  $A$  : du côté du lien  $A$ , on colle la croix « $\square$ ». On fait de même pour  $A^{-1}$ ,  $B$  et  $B^{-1}$ . Puis on recommence le même processus en partant d'une des croix qu'on vient d'ajouter, etc. On peut ainsi matérialiser le graphe de Cayley de  $G$ , en construisant une variété  $M$  formée de 168 croix. C'est cette variété dont il est question dans le théorème de Sunada, et qui va conduire finalement aux domaines isospectraux plans  $F$  et  $C$ .

Remarquons que, les croix étant découpées dans des feuilles de papier initialement planes, elles correspondent à des morceaux de l'espace euclidien. En assemblant les croix entre elles, on courbe les croix : leur courbure moyenne change, mais pas leur courbure gaussienne. La métrique est donc conservée : en conséquence, la variété  $M$  possède la métrique euclidienne. Pour cette raison, l'opérateur laplacien reste le même sur  $M$ .

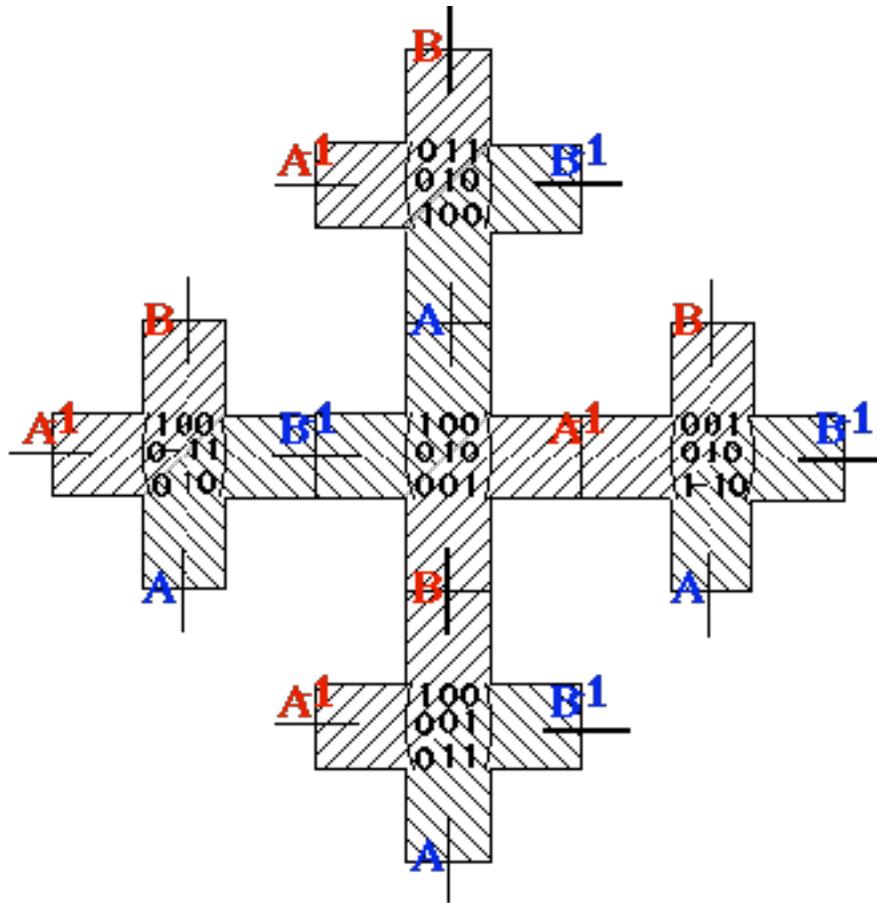


figure 8 : principe de construction de la variété M, correspondant au graphe de Cayley de G obtenu à partir des deux générateurs A et B.

V-2.2.3.2.4) Représentation à l'aide de graphes de Schreier ; notion de groupe quotient [20]

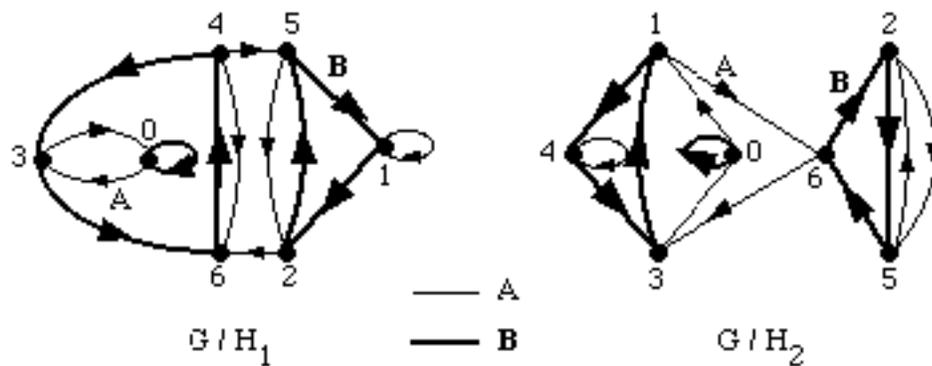
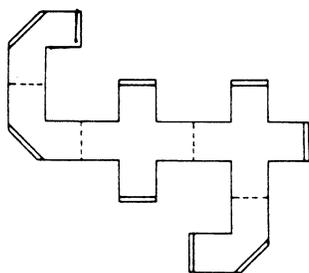
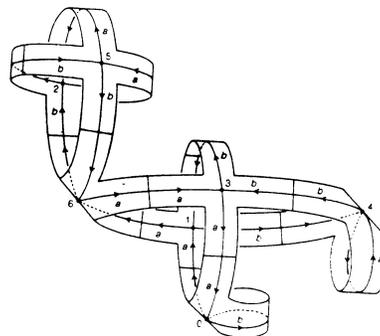
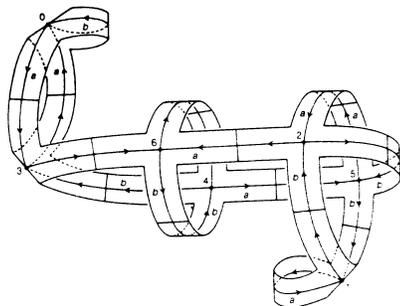
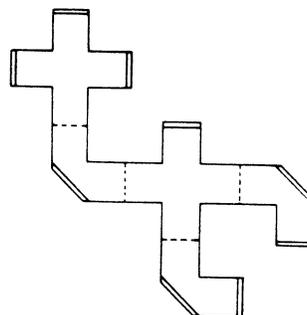


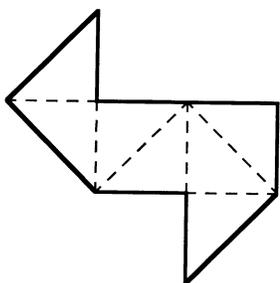
figure 9 : graphes de Schreier des deux groupes quotients  $G/H_1$  et  $G/H_2$ . Le générateur A défini au paragraphe précédent est représenté par un trait fin, tandis que B est représenté par un trait épais.



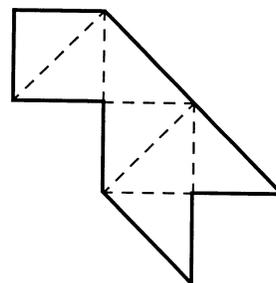
$\sigma_1$



$\sigma_2$



C



F

figure 10 [22] : les deux surfaces isospectrales de P. Buser incluses dans l'espace tridimensionnel (haut), les deux surfaces planes de GWW qui en découlent par aplatissement (milieu), et les deux contours F et C de GWW obtenus en remplaçant chaque demi-croix par un triangle (bas)

Les groupes quotients  $G/H_1$  et  $G/H_2$  sont représentés à l'aide de *graphes de Schreier*, où, cette fois, un sommet représente un *coset* et non plus un élément du "grand groupe"  $G$ . En fait, dans le cas où un sous - groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est normal dans  $G$ , le graphe de Schreier de  $G$  n'est autre que le graphe de Cayley du groupe  $G/H$ . Comme précédemment, on représente par un trait l'élément de  $G$  qui permet de passer d'un coset à un autre : on visualise ainsi les deux partitions différentes de  $G$  (figure 9). A partir des diagrammes de Schreier de la figure 9, on construit les variétés  $M/H_1$  et  $M/H_2$ , en suivant exactement le même procédé que pour la construction de la variété  $M$ . Cette fois, on n'a plus que 7 croix à coller entre elles, donc cette dernière opération est beaucoup plus facilement réalisable, et on obtient ainsi les deux surfaces courbes incluses dans l'espace tridimensionnel représentées sur la figure 10. On peut ensuite les aplatir pour obtenir des surfaces planes, et changer la brique de base en un carré. C'est en suivant ce procédé que GWW ont obtenu les deux contours isospectraux F et C.

#### *V-2.2.3.2.5) Représentation en permutation [20, 4]*

Une dernière représentation possible du groupe  $G = SL(3,2)$  utilisant deux générateurs est une représentation en permutation. On considère le groupe  $S_7$ , constitué par l'ensemble de toutes les permutations de 7 éléments  $\{1, 2, \dots, 7\}$ . A chaque élément du groupe  $G$  est maintenant associée une permutation de  $S_7$ ,  $G$  étant lui-même isomorphe à un sous-groupe  $H$  de  $S_7$ .

En choisissant comme générateurs  $a$  et  $b$  définis par :

$$a = (1,4) (3,7,5,6)$$

$$b = (2,3,6) (5,4,7),$$

on génère un groupe de permutations de 168 éléments isomorphe à  $G$ . Une façon de trouver les sous-groupes possibles de ce groupe de permutations consiste à chercher les éléments du groupe qui laissent un point donné invariant.

Jusqu'ici, on a présenté le groupe  $G$  utilisé pour construire les formes isospectrales  $F$  et  $C$ , ainsi que la variété riemannienne  $M$  sur laquelle  $G$  agit. En utilisant une description de  $G$  à l'aide de deux générateurs, on a vu quels étaient les sous-groupes  $H_1$  et  $H_2$  du théorème de Sunada. On a expliqué la notion de variété quotient et montré quelles étaient les deux variétés quotients  $M/H_1$  et  $M/H_2$ . On a également vu comment les contours plans  $F$  et  $C$  découlaient de ces variétés. Nous allons maintenant introduire une description de  $G$  à l'aide de trois générateurs, qui va nous permettre de préciser la propriété de «presque-conjugaison» liant les deux sous-groupes  $H_1$  et  $H_2$ .

V-2.2.3.3)  $SL(3,2)$  décrit par trois générateurs

V-2.2.3.3.1) Représentation en permutation

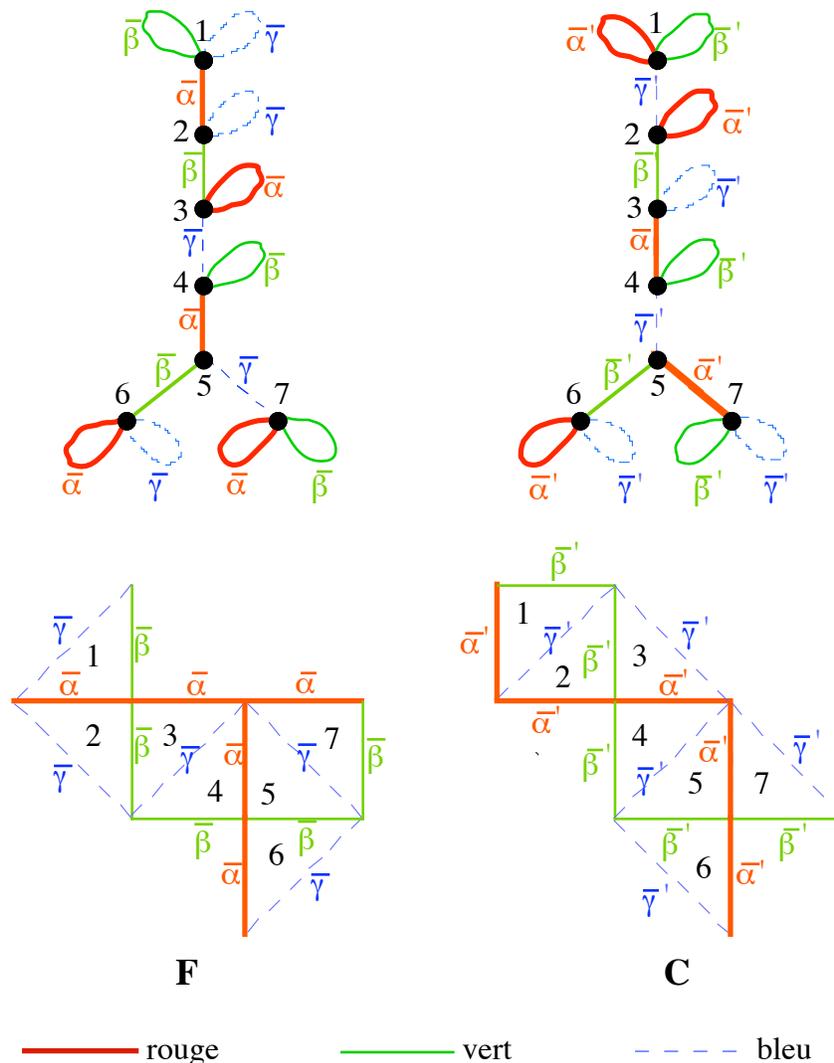


figure 11 : les deux représentations en permutations du groupe  $G = SL(3,2)$ , et les contours C et F qui en découlent

Les trois générateurs employés pour décrire  $G$  seront notés  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . On va utiliser ici deux représentations en permutations de  $G$ . Les permutations correspondant à  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , éléments de  $G$ , seront notées respectivement  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  et  $\bar{\gamma}$  d'une part,  $\bar{\alpha}'$ ,  $\bar{\beta}'$  et  $\bar{\gamma}'$  d'autre part. Les deux graphes de Schreier correspondant respectivement à  $G/H_1$  et  $G/H_2$  sont représentés sur la figure 8.

Ces deux graphes de Schreier servent également à définir les deux sets de générateurs  $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ , et  $\{\bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'\}$  via leur action sur le set  $\{1,2,\dots,7\}$ . Par exemple, dans le graphe correspondant à C,  $\bar{\alpha}$  est définie comme la permutation qui échange 1 et 2, et 4 et 5, mais qui laisse les autres éléments invariants. Chacun des deux graphes correspond ainsi à une représentation en permutation différente du groupe  $G$ .

On peut maintenant voir le rapport entre ces deux graphes de Schreier et le procédé de construction des deux contours F et C. Considérons, au lieu d'un sommet d'un graphe de Schreier, un triangle équilatéral possédant des bords colorés notés  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . La permutation  $\alpha$  est maintenant représentée à son tour par la réflexion le long du bord  $\alpha$ . Partons du triangle numéro 7 de C, qui correspond au sommet 7 du graphe de Schreier au-dessus de C. On applique  $\gamma$  à l'élément 7 : on réfléchit donc le triangle 7 le long de son bord bleu. On obtient ainsi le triangle 5. Puis on applique  $\beta$ , on obtient 6, etc. Ces deux graphes de Schreier donnent ainsi directement le procédé de construction des deux contours F et C.

#### *V-2.2.3.3.2) Représentation à l'aide d'un graphe de Cayley*

On définit les générateurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par leur action sur le groupe  $S_7$  :

$$\alpha = (1,2) (4,5)$$

$$\beta = (2,3) (5,6)$$

$$\gamma = (3,4) (5,7)$$

On construit ainsi un groupe de permutation isomorphe à  $SL(3,2)$  : le graphe de Cayley correspondant est celui de la figure 12. Ce graphe a été ordonné, afin de faire apparaître des

structures hexagonales et octogonales que l'on retrouve dans le pavage du plan hyperbolique de la figure 17.

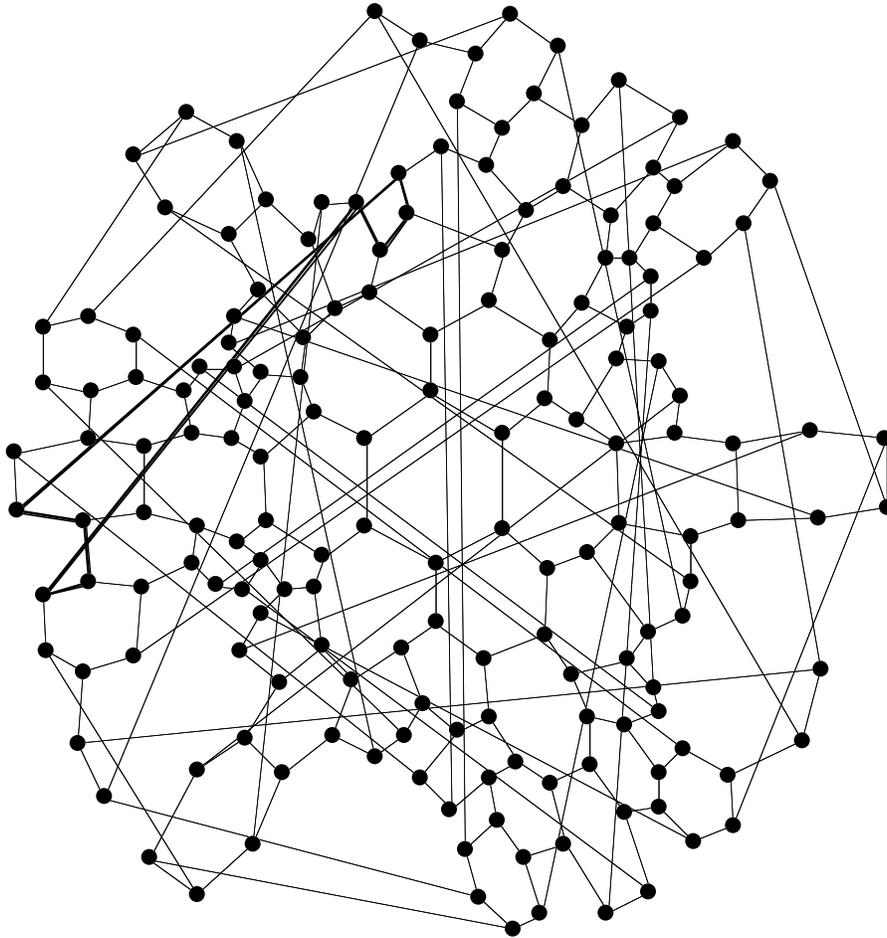


figure 12 : graphe de Cayley de  $SL(3,2)$  ordonné, obtenu à partir des trois générateurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  définis ci-dessous; à comparer avec le pavage du plan hyperbolique de la figure 17.

#### *V-2.2.3.3.3) Représentation à l'aide d'un groupe de pavage [12]*

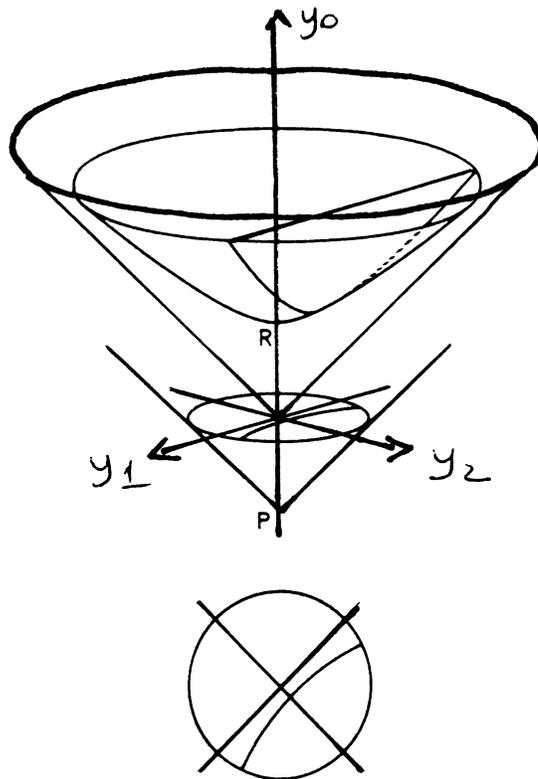
On va s'intéresser dorénavant à la représentation de  $G$  par un groupe de pavage d'un espace particulier. L'espace qui convient est une partie du plan hyperbolique, qu'il nous faut donc définir. Ayant représenté  $G$  par un groupe de pavage du plan hyperbolique, nous pourrions comprendre plus intuitivement la propriété de presque-conjugaison et son lien avec l'isospectralité.

#### *V-2.2.4) Le plan hyperbolique*

##### *V-2.2.4.1) Définitions [23, 24]*

Comme nous l'avons vu un peu plus haut, une *variété riemannienne* est une variété munie d'un procédé de mesure des distances et des angles. On voit ainsi que cela a un sens de parler d'équation d'onde sur une variété riemannienne<sup>7</sup>. Une variété *compacte* est une variété bornée.

\* Le *plan hyperbolique*, ou *pseudosphère*, est une variété riemannienne de courbure gaussienne négative et constante sur toute la surface : chaque point ressemble localement à une selle de cheval. Cette surface n'est pas euclidienne, c'est-à-dire qu'il est impossible de la représenter telle quelle dans notre espace euclidien tridimensionnel. Il est donc nécessaire de choisir un modèle afin de la visualiser.



---

<sup>7</sup> à condition d'avoir préalablement défini un opérateur de Laplace généralisé sur cette variété riemannienne

figure 13 [25] : une des deux nappes de l'hyperboloïde du modèle de Minkowski, et sa projection dans le modèle du disque de Poincaré

Dans le *modèle de Minkowski* , on utilise une métrique minkowskienne et non plus euclidienne. Soit  $M(y_0, y_1, y_2)$ , alors la distance de  $M$  par rapport à l'origine s'écrit□

$$y^2 = -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 \tag{V-6}$$

Le plan hyperbolique est défini par l'équation suivante :

$$y^2 = -R^2 \tag{V-7}$$

On peut montrer que cette surface a effectivement une courbure gaussienne négative et constante, qui vaut  $-1/R^2$ .

On peut paramétriser le plan hyperbolique, en utilisant des coordonnées pseudo-polaires ( $\tau, \varphi$ ) définies par :

$$y_0 = R \operatorname{ch} \tau \qquad y_1 = R \operatorname{sh} \tau \cos \varphi \qquad y_2 = R \operatorname{sh} \tau \sin \varphi$$

avec  $\tau \in [0, \infty[$  et  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

A partir de ces coordonnées, on peut déduire un nouveau modèle pour représenter le plan hyperbolique : le modèle du *disque de Poincaré* . On obtient ce dernier par projection stéréographique de la nappe des  $y_0 > 0$  sur le plan  $(y_1, y_2)$ , en utilisant le point  $(0, 0, -1)$  (figure 13). Cette projection conserve les angles, mais déforme les distances. Le cercle limite correspond aux points à l'infini, tandis que l'intérieur du disque correspond au plan hyperbolique lui-même.

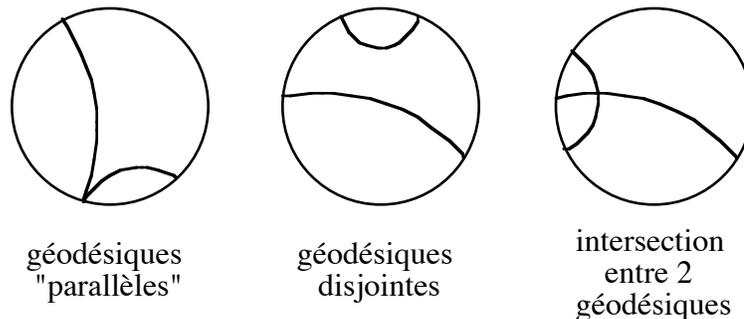


figure 14 [23]

\* Une *géodésique* est le plus court chemin entre deux points donnés. Dans le plan euclidien, toutes les géodésiques sont des droites. Lors de la projection stéréographique, les géodésiques du plan hyperbolique sont transformées en arcs de cercle du disque de Poincaré, qui coupent le bord du disque avec un angle droit (figure 14). Le plan hyperbolique est un espace non euclidien : ceci signifie que le cinquième postulat d'Euclide (ou "axiome du parallélisme") n'y est pas vérifié. Ce postulat s'énonce de la manière suivante [26, 27] : étant donné une géodésique D et un point M n'appartenant pas à cette géodésique, il existe une seule droite passant par M et n'ayant pas d'intersection avec D. Dans le plan hyperbolique par contre, il existe au moins deux géodésiques passant par M et n'ayant pas d'intersection avec D (figure 15)

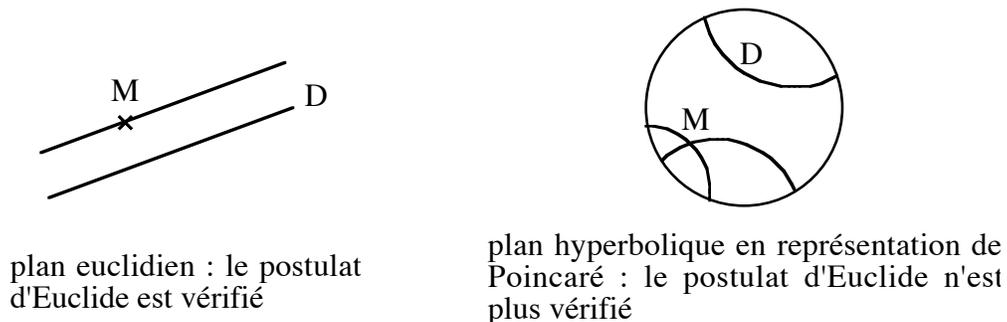


figure 15

La trajectoire d'une particule libre confinée sur une variété riemannienne correspond à une géodésique. Si l'on restreint l'espace accessible à la particule à une partie compacte de la variété, avec des conditions aux limites périodiques au bord, la particule décrira une trajectoire périodique-une *géodésique périodique*. A une variété riemannienne donnée, on peut associer son "spectre de longueurs des géodésiques périodiques", i.e. l'ensemble des longueurs de toutes les géodésiques périodiques. Nous verrons toute l'importance de cette notion par la suite.

\* Parmi les isométries du plan hyperbolique, il existe des *réflexions* par rapport aux géodésiques, qui agissent de manière analogue aux réflexions du plan euclidien. (voir la figure 16)

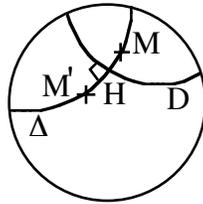


figure 16 : comment effectuer une réflexion par rapport à une géodésique. Le point M et la droite D étant donnés, on trace la géodésique  $\Delta$  passant par M coupant D orthogonalement en H. M' est défini comme le symétrique de M par rapport à  $\Delta$ , c'est-à-dire tel que  $HM = HM'$ .

#### V-2.2.4.2) pavage du plan hyperbolique

Un pavage donné d'un espace est constitué par la répétition périodique d'une cellule fondamentale. Dans le plan euclidien, il existe seulement un petit nombre de pavages différents. façons différentes de paver le plan hyperbolique [25]. En effet, celui-ci peut être pavé par toutes sortes de polygones : entre autres, on peut le paver par des triangles d'angles variables, tous identiques dans un même pavage (c'est-à-dire de même aire). Par exemple, on peut utiliser des triangles d'angles  $(\pi/4, \pi/3, \pi/3)$ <sup>8</sup>, et c'est ce pavage particulier que nous allons considérer pour expliquer le contenu du théorème de Sunada sur le cas particulier de F et C. Mais on peut aussi utiliser bien d'autres triangles, comme ceux d'angles  $(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$ ,  $(\pi/4, \pi/4, \pi/3)$ , etc<sup>9</sup>.

On voit sur le dessin (figure 17) que le plan hyperbolique est entièrement recouvert par ces triangles d'angles  $(\pi/4, \pi/3, \pi/3)$  tous identiques, qui se déduisent les uns des autres par des réflexions le long des bords des triangles. Par exemple, les triangles numérotés 1 et 2 s'échangent par la réflexion notée  $\gamma$ , le long du côté commun (en bleu sur le dessin). On voit ici apparaître ce pavage comme la représentation d'un groupe discret infini, que nous noterons  $\mathbf{G}_0$  : le groupe des déplacements du plan hyperbolique engendré par les trois réflexions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , le long des bords d'un des triangles (le triangle 1).

<sup>8</sup> Il faut ici remarquer que dans le plan hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est inférieure à  $\pi$ .

<sup>9</sup> Certains dessins d'Escher utilisent d'ailleurs le pavage du plan hyperbolique par des triangles.

figure 17 : pavage du plan hyperbolique par des triangles d'angles  $(\pi/4, \pi/3, \pi/3)$ . Il s'agit du dual du graphe de Cayley de  $SL(3,2)$  (figure 12) obtenu avec les trois mêmes générateurs.

figure 18 : pavage du plan hyperbolique par des quadrilatères mis en correspondance avec F en haut (resp. C en bas)

On peut aussi paver le plan hyperbolique à l'aide de quadrilatères constitués de sept des triangles précédents, et ce, de deux manières seulement. La figure 18-haut correspond au pavage par les quadrilatères semblables à celui hachuré sur le dessin, formé des triangles  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$  et  $\psi_7$ . De même pour la figure 18-bas, où le plan hyperbolique est pavé cette fois par les quadrilatères semblables à celui formé de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  et  $\varphi_7$ . Dans les deux cas, le pavage par ces quadrilatères est rendu visible par les portions de géodésiques représentées en traits plus épais. Par cette opération, on a défini deux sous-groupes de  $\mathbf{G}_0$ , correspondant respectivement aux réflexions le long des côtés des *quadrilatères* seulement (on a effacé en quelque sorte les lignes en trait fin à l'intérieur de tous les quadrilatères). Nous noterons ces deux sous-groupes  $\mathbf{F}$  (comme le contour F, figure 18-haut) et  $\mathbf{C}$  (comme C, figure 18-bas).

Remarque : Il existe toutefois une différence importante entre  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}_0$  :  $\mathbf{G}$  est un groupe fini, alors que  $\mathbf{G}_0$  est infini! En fait, on ne devrait considérer qu'une partie finie et compacte du plan hyperbolique, mais ce serait beaucoup plus difficile à visualiser, c'est pourquoi nous préférons raisonner sur le plan hyperbolique entier.

Les deux quadrilatères ( $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$  et  $\psi_7$ ) et ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ ) sont construits suivant le même procédé d'assemblage que les contours du plan euclidien F et C respectivement. En effet, les deux quadrilatères du plan hyperbolique sont formés chacun respectivement à partir d'une suite de réflexions très particulière. En effet, si l'on regarde le

quadrilatère de la figure 18-haut , on passe de  $\psi_1$  à  $\psi_2$  en appliquant à  $\psi_1$  la réflexion  $\gamma$  le long de son bord bleu ; puis de  $\psi_2$  à  $\psi_3$  en appliquant à  $\psi_2$  la réflexion le long du bord vert de celui-ci, etc. Si l'on regarde maintenant  $F$ , on constate qu'on passe de  $\psi_1$  à  $\psi_2$  en appliquant à  $\psi_1$  la réflexion le long de son bord bleu, etc. On peut vérifier que  $F$  (resp.  $C$ ) est construit en utilisant la même suite de réflexions que le quadrilatère de la figure 18-haut (resp. figure 18-bas).

V-2.2.5) Contenu du théorème de Sunada [28]

Dans ce paragraphe, nous tentons d'expliquer intuitivement le contenu du théorème de Sunada, notamment ce que représente géométriquement la propriété de presque-conjugaison de deux sous-groupes. Nous avons ici développé une idée correspondant à un petit paragraphe de [29].

On peut montrer que deux variétés compactes riemanniennes sont isospectrales pour le laplacien si et seulement si leurs deux spectres de longueurs des géodésiques périodiques à l'intérieur de ces deux variétés sont identiques<sup>10</sup>, et ce résultat constitue le théorème de Huber et Selberg. C'est d'ailleurs en se basant sur cette idée que J. Milnor avait découvert deux tores isospectraux à 16 dimensions [5, 4]. Notre but est ici de visualiser le lien entre le théorème de Sunada et l'isospectralité des longueurs des géodésiques périodiques de nos deux quadrilatères du plan hyperbolique. Il nous reste pour cela à visualiser la propriété incluse dans le théorème de Sunada, qui est à la base de l'isospectralité des deux quadrilatères.

Le théorème (voir (V.2.2.1)) stipule que les deux sous-groupes  $F$  et  $C$  doivent être "*presque conjugués*", ceci entraînant l'isospectralité des deux quadrilatères du plan hyperbolique. Qu'est-ce que cela signifie? Soit une réflexion  $\gamma_A$  appartenant à  $F$  (il s'agit donc d'une réflexion le long d'un des côtés de l'un des quadrilatères du pavage de la figure 18-haut), et  $\gamma_C$  appartenant au sous-groupe  $C$  (figure 18-bas). Alors il existe un élément  $a$  appartenant à  $G_0$ , dépendant de  $\gamma_A$ , tel que  $\gamma_C =$

---

<sup>10</sup> intuitivement, on s'attend à ce que les ondes se propagent le long des géodésiques [29]

$a * \gamma_A * a^{-1}$ . Si  $a$  ne dépendait pas de  $\gamma_A$ , les deux sous-groupes seraient *complètement conjugués* et on obtiendrait des contours isospectraux, mais identiques, ce qui présente peu d'intérêt.

Considérons une géodésique périodique dans le quadrilatère de la figure 18-haut, correspondant à la trajectoire périodique  $MNPNM$ . Notre but est de trouver une trajectoire périodique de même longueur dans le quadrilatère de la figure 18-bas, et de voir comment la propriété de "presque conjugaison" de **F** et **C** permet de relier cette deuxième trajectoire à la première. Intuitivement, on trouve que la deuxième trajectoire cherchée est  $M'N'P'N'M'$ . Comment passer de l'une à l'autre? Si l'on "déplie" la trajectoire  $MNPNM$  en lui appliquant la réflexion  $\gamma_A$  indiquée sur le dessin de la figure 18-haut, on obtient une trajectoire "ouverte",  $MNPNO M_0$  correspondant à une portion de géodésique du plan hyperbolique lui-même (et non plus du quadrilatère hachuré seulement). De même, si l'on déplie  $M'N'P'N'M'$  en lui appliquant  $\gamma_C$  définie par la figure 18-bas, on obtient la trajectoire ouverte  $M'N'P'N'_0 M'_0$ . Posons  $a = \gamma_A * \gamma_C$ .

Si l'on applique " $a$ " à  $MNPNO M_0$ , on trouve exactement  $M'N'P'N'_0 M'_0$ . Voyons maintenant si  $a$  correspond bien à la définition mathématique de la presque conjugaison. On peut vérifier qu'on a :

$\gamma_C = a * \gamma_A * a^{-1}$ , en essayant sur n'importe quel objet du plan hyperbolique (un triangle par exemple). On peut également s'assurer, ce que nous ne ferons pas ici, que " $a$ " dépend de la trajectoire, c'est-à-dire que les deux sous-groupes **F** et **C** sont seulement "presque" conjugués.

Ainsi, on a vu le lien entre deux trajectoires périodiques de chacun des contours.  $\gamma_A$  (resp.  $\gamma_C$ ) sert à déplier la trajectoire du quadrilatère correspondant à **F** (resp. **C**). Pour passer d'une trajectoire dépliée à l'autre, on applique  $a$ , qui est précisément l'élément qui conjugue  $\gamma_A$  et  $\gamma_C$ .

Remarque : Suivant P. Buser [30], on pourrait appeler l'opération que nous venons d'effectuer "transplantation de géodésiques".

**F** et **C** ont été obtenues par aplatissement de surfaces courbes incluses dans l'espace euclidien tridimensionnel, elles-mêmes obtenues grâce au théorème de Sunada appliqué sur une

variété riemannienne compacte de l'espace euclidien tridimensionnel (formée de 168 croix collées les unes aux autres). Ici, nous n'avons nullement démontré l'isospectralité de F et C, mais nous avons essayé de comprendre d'où venait l'isospectralité des deux contours hyperboliques<sup>11</sup> (qui sont en fait isométriques!), sans toutefois effectuer de démonstration rigoureuse. De plus, nous n'avions pas besoin du théorème de Sunada pour cela.

Par contre, nous avons visualisé grâce au pavage du plan hyperbolique la structure du groupe  $SL(3,2)$ , ainsi que la signification géométrique de la condition de presque conjugaison des deux sous-groupes.

### V-2.3 Autres contours isospectraux - contours homophoniques

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que la première paire isospectrale découverte historiquement (F/C), qui a été trouvée grâce à l'application du théorème de Sunada sur un groupe particulier,  $SL(3,2)$ . En réalité, beaucoup d'autres paires isospectrales existent ; elles ont également été découvertes par l'application du théorème de Sunada sur des groupes bien choisis.

#### V-2.3.1) autres formes isospectrales

La figure 19 extraite de [12], présente des paires isospectrales construites par les auteurs de cet article, en utilisant le théorème de Sunada. On voit qu'il existe, non seulement des formes isospectrales à 7 triangles, mais aussi à 13, 15, etc. Un nombre de triangles donné correspond à un groupe fini  $G$  donné. Ainsi, les paires  $7_1, 7_2$  et  $7_3$  correspondent au groupe  $SL(3,2)$ . Les paires  $13_1$  à  $13_9$  au groupe  $SL(3,3)$ , etc. Ensuite, chaque paire particulière représente un groupe de pavage donné du plan hyperbolique : chaque paire est définie par le groupe  $G_0$ . Par exemple, la paire  $7_3$  (la seule dont nous ayons parlé jusqu'à présent) correspond au pavage par des triangles d'angles  $(\pi/4, \pi/3, \pi/3)$  ; la paire  $7_1$ , par des triangles d'angles  $(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$ ...

---

<sup>11</sup> Nous aurions aussi pu effectuer une transplantation de fonctions d'onde dans le plan hyperbolique pour démontrer l'isospectralité des deux quadrilatères.

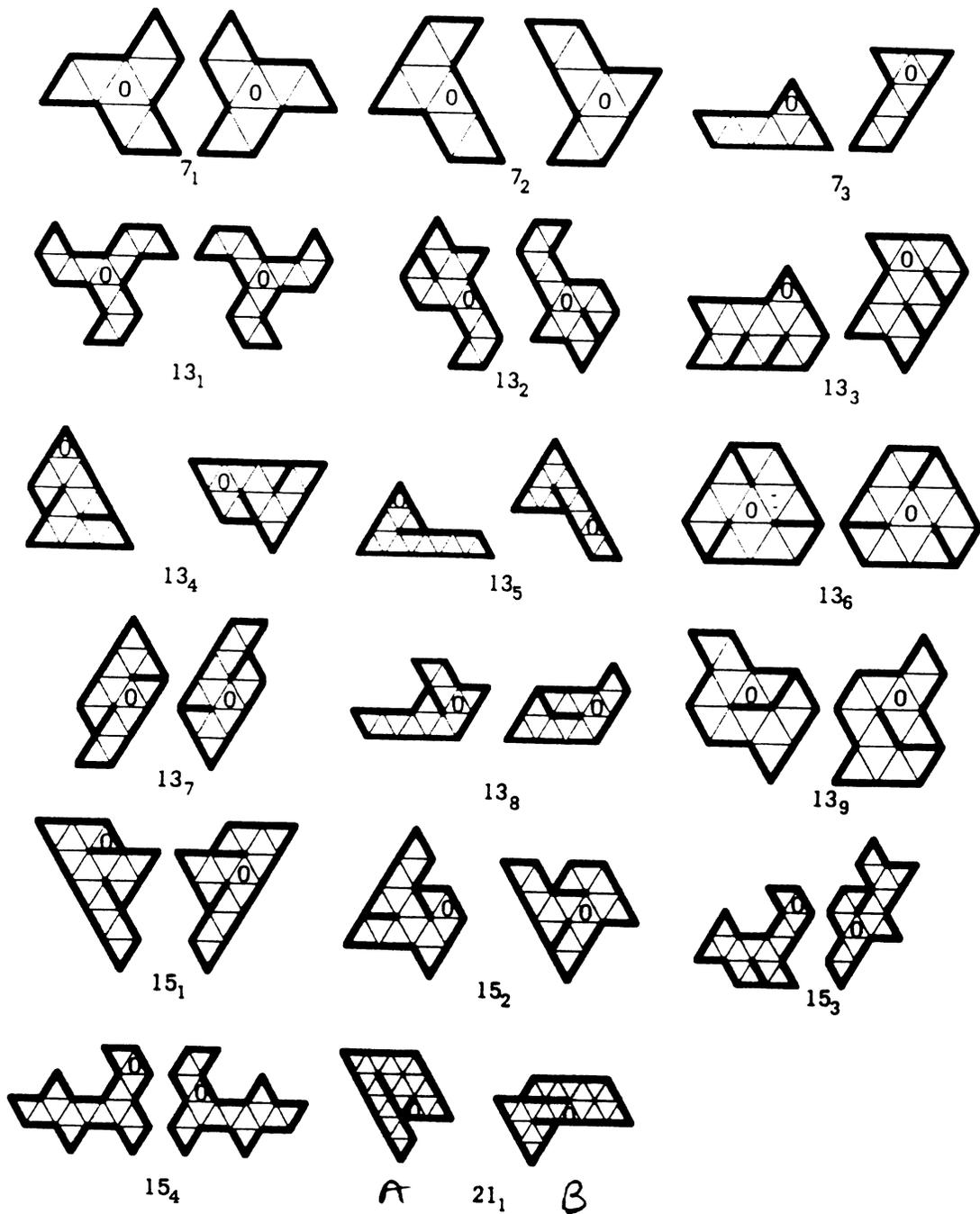


figure 19

Notons que toutes les paires isospectrales sont dessinées à l'aide de triangles équilatéraux : les paires représentées sont toutes formées de contours isométriques. En fait, chaque paire

correspond en réalité à une *famille* de paires isospectrales<sup>12</sup> obtenues en changeant la forme du triangle de base labellé par un "O". La paire F/C vue jusqu'ici est un élément particulier de la famille  $7_3$ , correspondant au cas du triangle rectangle isocèle. On utilise des triangles équilatéraux dans le but de simplifier le dessin des familles de paires. Comment comprendre cette représentation? On part du triangle "O", en le choisissant de forme quelconque. On prend deux exemplaires de ce triangle, qui doivent se superposer par translation. On attribue à chaque segment du triangle une couleur donnée, c'est-à-dire une réflexion ( $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$ ). Puis, on déduit les autres triangles du contour par des réflexions successives définies par la figure ; et ce, bien sûr, pour chaque contour.

On peut se demander s'il existe des formes isospectrales formées par autre chose que des triangles ; ou encore, auxquelles on ne pourrait pas associer de pavage du plan hyperbolique. A notre connaissance, il n'en existe pas d'autres [31,12]<sup>13</sup>. De plus, pour une forme plane donnée, combien de jumelles isospectrales peut-elle posséder? Pourquoi les exemples trouvés jusqu'ici vont-ils toujours par paires? On pourrait trouver plus de deux sous-groupes à l'intérieur d'un même groupe G qui posséderaient la propriété de presque-conjugaison..

---

<sup>12</sup> nous verrons au chapitre suivant la confirmation expérimentale de ce point

<sup>13</sup> sauf des formes obtenues par des déformations triviales du triangle ; on peut, par exemple, percer un trou dans un endroit donné d'un triangle et le reporter par les symétries de construction dans tous les autres triangles des deux contours.

## V-2.3.2) formes homophoniques

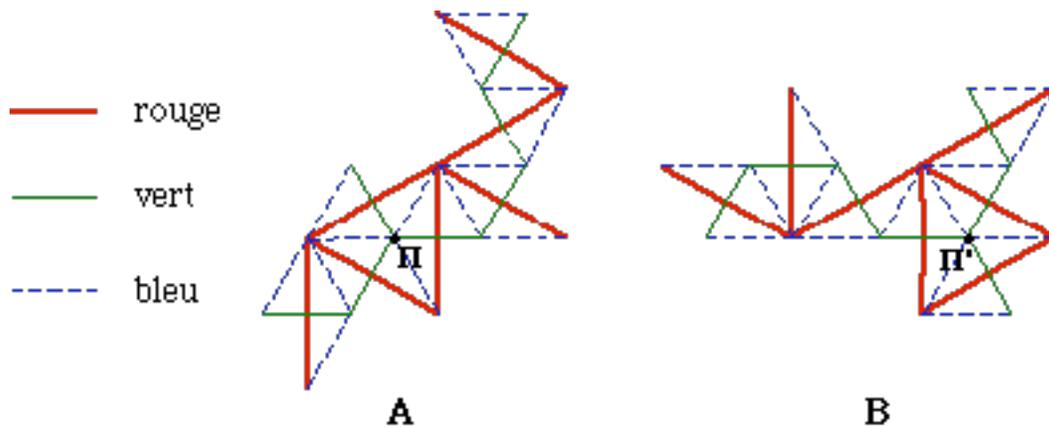


figure 20 : les deux contours homophoniques A et B

La paire  $21_1$ , si l'on choisit comme angles  $(\pi/3, \pi/2, \pi/6)$  pour le triangle de base "O", donne des formes isospectrales dites *homophoniques*. Regardons les deux points particuliers  $\Pi$  et  $\Pi'$  de la figure 20. On voit que ces points ont le même "environnement" : ils correspondent chacun à l'endroit où 6 triangles se rencontrent. L'homophonie signifie que, si l'on excite les contours A et B aux points  $\Pi$  et  $\Pi'$  respectivement, et que l'on détecte l'amplitude de vibration en ces mêmes points, on obtiendra la même valeur. Le fait d'avoir la même amplitude sur chaque mode de vibration signifie bien qu'on a le même son. Le mot "son" est ici plutôt restrictif puisqu'il correspond au son "écouté en un seul point". Notons que la propriété d'homophonie est vraie pour les fonctions d'onde avec les conditions aux limites de Dirichlet seulement ; par contre, l'isospectralité est toujours vraie pour les conditions de Dirichlet et de Neumann.

Pour comprendre d'où vient cette propriété, utilisons une fois de plus la méthode de transplantation vue au V-2.1. On découpe chaque fonction propre  $\psi$  de A et  $\varphi$  de B en 21 sous-fonctions qui sont leurs restrictions sur chaque triangle. Par transplantation, on trouve 2 transformations linéaires  $T_5$  et  $T_{16}$  complémentaires (qu'on ne représente pas pour éviter une lourdeur inutile). On forme alors la matrice  $21 \times 21$   $T(a,b) = a \cdot T_5 + b \cdot T_{16}$ . La transformation  $T(a,b)$  conserve la norme si  $T^+ \cdot T = T \cdot T^+ = 1$ . Cette condition donne

$$5a^2 + 16b^2 = 1 \text{ et } a^2 + 8ab + 12b^2 = 0$$

Ceci nous permet de passer d'une base orthonormée de fonctions propres de A à une de B. Les valeurs de a et b que l'on obtient sont :

$$(a, b) = \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \text{ ou } (a, b) = \pm\left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{14}\right)$$

D'autre part, on voit assez facilement que la valeur commune des 6 sous-fonctions se rencontrant en  $\Pi'$  ne dépend que de la valeur commune des 6 sous-fonctions se rencontrant en  $\Pi$ . En effet,  $\Pi'$  est à l'angle bleu/vert. Sur le contour A, les valeurs sur tous les angles bleu/vert sont nulles, excepté celles en  $\Pi$ . Par continuité des sous fonctions d'onde, il s'agit en fait d'une seule valeur commune au point  $\Pi$ , notée  $\alpha$ . En  $\Pi'$ , on obtient, par  $T_5$ ,  $-2*\alpha$ , et, par  $T_{16}$ ,  $2*\alpha$ .  $T(a,b)$  donne donc  $\varphi(\Pi') = -2\alpha*(a - b)$ . On obtient précisément  $\varphi(\Pi') = \pm\alpha = \pm\psi(\Pi)$  pour les valeurs particulières de a et b ci-dessus.

Remarques :

On a utilisé le fait que les sous-fonctions étaient nulles au bord du contour A. On comprend donc pourquoi l'homophonie n'est vraie que pour la condition de Dirichlet.

On a utilisé la continuité des sous-fonctions à la limite entre deux triangles, mais pas celle de leurs dérivées (comme pour la démonstration de l'isospectralité). Ce n'est pas très étonnant, puisqu'on s'est intéressé à la valeur d'une fonction en un point. La dérivée est inutile.

On voit apparaître deux conditions nécessaires à l'existence de points homophoniques : la conservation de la norme (qui est souvent possible pour un bon choix de a et b), et l'existence de points particuliers où plusieurs triangles se rencontrent.

**V-3) Conclusion**

Nous sommes conscients de ne rien avoir apporté de plus dans ce chapitre, sur le strict plan des mathématiques. Nous avons simplement essayé de traduire avec des images simples ce que nous avons compris de la transplantation et du théorème de Sunada. Nous espérons ainsi que ce chapitre puisse être utile à des physiciens. En effet, seuls deux articles, à notre connaissance, ont été publiés par des physiciens sur le sujet de l'isospectralité [14,15], dans des revues spécialisées en physique.

---

**Références du chap. V :**

- [1] H. Weyl, *Über die Asymptotische Verteilung der Eigenwerte*, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Göttingen, 110-117 (1911)
- [2] Lord Rayleigh, *The theory of sound*, Dover Publishing Inc. (1945).
- [3] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Am. Math. Monthly **73**, 1-23 (1966)
- [4] C. Gordon and D. Webb, *You can't hear the shape of a drum*, Am. Scientist **84**, 46 (jan-feb 1996)
- [5] J. Milnor, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sc. **51**, 542 (1964)
- [6] de très nombreuses références existent à ce sujet. L'article suivant contient une bibliographie extensive : P. Bérard, *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Springer Lecture Notes, 1207 (1986)
- [7] M. F. Vignéras, *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. (2) **112**, 110-117 (1980)
- [8] T. Sunada, *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Ann. of Math. (2) **121**, 169-186 (1985)
- [9] P. Buser, *Isospectral Riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36**, 167-192 (1986)
- [10] C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Am. Math. Soc. **27**, 134-138 (1992)
- [11] P. Bérard, *Transplantation et isospectralité*, Math. Ann. **292**, 547 (1992)
- [12] P. Buser, J. Conway, P. Doyle and K-D Semmler, *Some planar isospectral domains*, Intern. Math. Research Notices **9**, 391 (1994)
- [13] S. Wolpert, *The eigenvalue spectrum as moduli for flat tori*, Trans. Amer. Math. Soc. **244**, 313-321 (1978)

- [14] S. Sridhar and A. Kudrolli, *Experiments on not "hearing the shape" of drums*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2175 (1994)
- [15] H. W. Wu, D. W. L. Sprung and J. Martorell, *Numerical investigation of isospectral cavities built from triangles*, Phys. Rev. E **51**, 703 (1995)
- [16] P. Bérard, *Domaines plans isospectraux à la Gordon-Webb-Wolpert : une preuve élémentaire*, Afrika-Mathematika serie 3, **1**, 135-146 (1993)
- [17] *Handbook of applicable mathematics*, I-Algebra, ed. Ledermann & Vajda, Wiley, Univ. of Sussex (1980)
- [18] E. Halberstadt, *Cube hongrois et théorie des groupes*, Pour la Science
- [19] P. Buser, *Cayley graphs and planar isospectral domains*, Lect. Notes Math. **1339**, 63-77 (1988)
- [20] White, *Graphs, groups and surfaces*, ed. North Holland (1984)
- [21] R. Brooks, *Constructing Isospectral Manifolds*, Amer. Math. Monthly **95**, 823 (1988)
- [22] C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert, *Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds*, Invent. Math. **110**, 1-22 (1992)
- [23] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, NY-Heidelberg-Berlin (1983)
- [24] J. Milnor, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. of the Amer. Math. Soc. **6** n°1, 9 (jan 1982)
- [25] N. L. Balasz and M. Voros, *Chaos on the pseudosphere*, Physics Reports **143** n°3, 109-240, North-Holland, Amsterdam (1986)
- [26] on trouve un énoncé du postulat d'Euclide dans l'excellent : *Mathematics : its contents, methods and meaning*, ed. by Aleksandrov, Kolmogorov and Lavrent'ev, vol.3, M.I.T Press, Cambridge (1963)
- [27] Euclide, *Eléments*, Alexandrie (IIIème s. av. J.C)

- [28] C. Even et P. Pieranski, *Entendre la forme d'un tambour*, Images de la Physique 1998
- [29] C. Gordon, *When you can't hear the shape of a manifold*, The Math. Intelligencer **11** n°3, 39 (1989) ; notamment, pour le contenu du théorème de Sunada, voir p. 45
- [30] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser, Boston (1992)
- [31] C. Gordon, discussion privée (par email).

---

<b>VI- ISOSPECTRALITE II : EXPERIENCES</b>	<b>182</b>
<b>VI-1) Contours F et C de Gordon, Webb et Wolpert</b>	<b>182</b>
VI-1 .1. Travaux antérieurs à cette thèse	182
VI-1 .1.1) Expériences de Sridhar et Kudrolli (" SK ")	182
VI-1 .1.2) Calculs numériques de Wu, Sprung et Martorell (" WSM ")	184
VI-1 .2. Nos expériences avec des films smectiques	186
VI-1 .2.1) Spectre	186
VI-1 .2.1.1) valeurs des $(f_n/f_1)^2$	186
VI-1 .2.1.2) valeurs des vecteurs d'onde $k_n$	189
VI-1 .2.1.3) Facteur de qualité du mode fondamental	190
VI-1 .2.2) Allure des fonctions d'onde	192
VI-1.2.2.1) modes de C	192
VI-1.2.2.2) modes de F	198
<b>VI-2) Evolution de la famille FC</b>	<b>201</b>
VI-2.1) Conservation de l'isospectralité	202
VI-2.2) Etude plus détaillée du spectre de F et C en fonction de $\alpha$	204
<b>VI-3) Brisure de l'isospectralité</b>	<b>205</b>
VI-3.1. Introduction	205
VI-3.2. Spectre et forme des modes obtenus	206
VI-3.2.1) Généralités	206
VI-3.2.2) Autour du 9ème mode	206
VI-3.2.3) Autres modes triangulaires	208
<b>VI-4) Conclusion</b>	<b>209</b>
<b>Annexe du chap. VI</b>	<b>210</b>
<b>Références du chap. VI</b>	<b>212</b>

## VI- ISOSPECTRALITE II : EXPERIENCES

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, grâce à l'application du théorème de Sunada, les mathématiciens ont été capables de prévoir l'isospectralité d'un certain nombre de contours plans bidimensionnels. Cependant, si puissant soit ce théorème, il ne permet pas de prévoir le spectre des contours en question, ni de calculer la forme des états propres correspondants, ce que seule une mesure expérimentale ou un calcul numérique permettra de faire. De plus, comme nous le verrons, on pourra ainsi vérifier certains des aspects mathématiques évoqués au chapitre précédent.

### VI-1) Contours F et C de Gordon, Webb et Wolpert

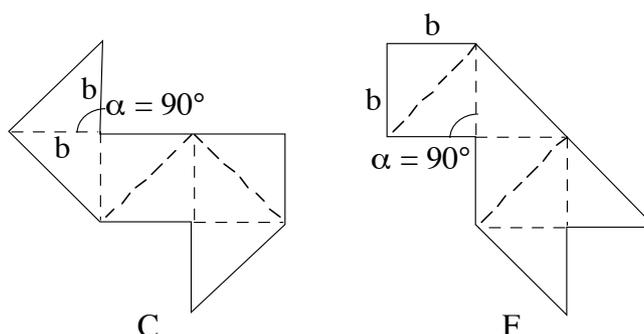


figure 1 : notations utilisées pour décrire les contours C et F de GWW

#### VI-1 .1. Travaux antérieurs à cette thèse

##### VI-1 .1.1) Expériences de Sridhar et Kudrolli ("SK") [1]

Ces deux physiciens américains furent les premiers, en 1994, à mesurer effectivement le spectre de valeurs propres de F et C. En effet, un calcul numérique éventuel est rendu difficile par la présence d'angles saillants à l'intérieur des contours. SK ont aussi, par une mesure directe des fonctions d'onde expérimentales, pu vérifier le théorème de transplantation.

Le principe de leur expérience est le suivant. Des ondes électromagnétiques obéissent à l'équation d'onde de Helmholtz bidimensionnelle si l'une des dimensions  $d$  de la cavité

("verticale" suivant l'axe Oz) vérifie  $d \ll \lambda_z$  ( $\lambda_z$  = longueur d'onde dans la direction z). Le champ électrique vertical  $E_z$  joue alors le rôle de la grandeur propagative, avec la condition aux limites  $E_z = 0$  au bord. On a alors uniquement des ondes transverses magnétiques, tant que la fréquence  $f$  vérifie  $f < f_{\max} = c/2d$ .

Pour mesurer le spectre d'un contour donné, SK utilisent une excitation et une détection "ponctuelles" (leurs dimensions représentent 3% des dimensions linéaires caractéristiques de leurs cavités) en forme de petites boucles : l'une crée un champ magnétique sinusoïdal, l'autre le mesure [2]. En déterminant les maxima d'amplitude de transmission de la cavité, ils obtiennent le spectre d'un contour donné.

Les facteurs de qualité finis des résonances, de l'ordre de 1000 pour des cavités non supraconductrices, sont dus à l'absorption par les parois de la cavité.

Pour la forme des fonctions d'onde, ils excitent toujours la cavité avec une petite boucle, mais détectent maintenant grâce à une petite "perle" métallique, qui induit un décalage  $\Delta f$  des résonances de la cavité tel que :  $\Delta f \propto E_z^2(x,y)$ .

Les résultats qu'ils ont obtenus sur les contours F et C sont les suivants. Ils ont mesuré les 54 premières valeurs propres du spectre des deux cavités, et ont obtenu un écart inférieur à 0.4% sur les fréquences propres réduites<sup>1</sup> au carré. Dans une cavité électromagnétique, on mesure des fréquences de résonance, et la célérité des ondes est connue : on a donc directement accès aux valeurs des vecteurs d'onde  $k$ . Par exemple, le vecteur d'onde du mode fondamental de F et C, pour les cavités utilisées par Sridhar et Kudrolli, vaut  $41.7 \text{ m}^{-1}$ . Or on connaît les dimensions des cavités qu'ils ont utilisées : le côté commun des triangles rectangles isocèles mesurait  $b = 3 \text{ in.} = 7.62 \text{ cm}$  (voir la figure 1). Essayons de voir si l'ordre de grandeur de  $k_1$  est raisonnable. Si l'on regarde l'allure du mode fondamental de C par exemple (voir figure 6), il semble essentiellement localisé dans un rectangle de côtés  $b$  et  $2*b$  : ceci donne une valeur de  $\frac{\sqrt{1.25} \pi}{b} = 46.1 \text{ m}^{-1}$  pour le vecteur d'onde du mode fondamental. Il n'est pas étonnant de trouver une valeur plus grande, car la surface d'occupation réelle du fondamental de C est plus grande

---

<sup>1</sup> i.e., divisées par celle du mode fondamental

que celle du rectangle considéré. Si l'on s'intéresse maintenant au mode fondamental d'un cercle de rayon  $r$  (voir V.1.1) de même surface que  $C$ , on obtient  $k_1 = \frac{2.4}{r} = 29.8 \text{ m}^{-1}$  pour le mode fondamental. Il est normal de trouver cette fois une valeur plus petite, car pour une aire donnée, la forme circulaire est celle qui donne le fondamental de fréquence la plus basse. On peut en conclure que la valeur de  $k_1$  qu'ils obtiennent semble raisonnable en ordre de grandeur. De plus, on peut aussi vérifier plus précisément la valeur de  $k_9$ , car le 9ème mode est un mode connu analytiquement : il correspond au mode fondamental du triangle de base (voir VI-1.1.2 et VI-1.2.1 pour plus de détails). La valeur de  $k_9$  théorique est donc  $k_9 = \frac{\pi\sqrt{5}}{b} = 92.2 \text{ m}^{-1}$ , alors que leur valeur expérimentale est  $91.9 \text{ m}^{-1}$ . La différence entre ces deux valeurs est de 0.3 % seulement.

Grâce à la mesure des fonctions d'onde, ils ont pu vérifier la relation de transplantation, sur l'exemple de l'état fondamental de  $C$  et celui de  $F$ . Ils ont constaté que les deux transformations linéaires  $T_3$  et  $T_4$  donnaient la même fonction, au signe près. Ceci est cohérent avec le fait qu'ils ne trouvent aucune dégénérescence dans le spectre mesuré. On s'attend de toute façon à des dégénérescences à plus haute énergie, pour certains modes dits "triangulaires", que nous verrons plus loin en détail.

#### VI-1.1.2) Calculs numériques de Wu, Sprung et Martorell ("WSM") [3]

Ces calculs, datant de 1995, sont postérieurs à l'expérience de SK. WSM ont utilisé une méthode numérique assez astucieuse pour calculer le spectre et les états propres de  $F$  et  $C$ . Ils ont ainsi obtenu un spectre plus précis et plus étendu que celui de SK, et des fonctions d'onde en bon accord qualitatif avec celles de Sridhar. Au passage, leur méthode, essentiellement analytique, leur a permis d'obtenir une autre preuve mathématique de l'isospectralité de  $F$  et  $C$ . Notons toutefois que cette preuve ne s'applique qu'au cas précis de  $F$  et  $C$ , qui sont formées de triangles rectangles isocèles. Les démonstrations des mathématiciens vues au chapitre précédent sont beaucoup plus générales. De plus, ils sont les premiers à s'être intéressés de près aux modes "triangulaires".

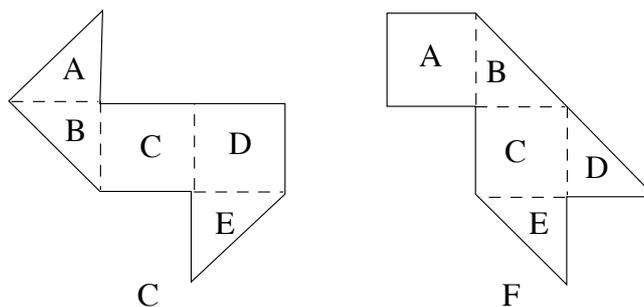


figure 2 : découpage des contours F et C par WSM

Le principe de leur méthode, appelée "mode-matching", utilise les symétries des deux contours. En effet, ils divisent F et C respectivement en 3 triangles et 2 carrés (5 "domaines"), et donc les fonctions d'onde associées à une valeur propre donnée en 5 sous-fonctions chacune. Illustrons-en le principe sur l'exemple du contour C. Ils écrivent la fonction d'onde  $\psi_{AB}$  sur la limite entre deux domaines A et B en la développant en série de Fourier :

$$\psi_{AB} = \sum_n A_{Cn} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \text{ de même pour } \psi_{BC} \text{ en fonction des } B_{cn}, \text{ etc..}$$

La sous-fonction  $\psi_A$  (facile à écrire sur un triangle ou sur un carré, partant de l'expression des  $\psi_{AB}$ , etc.) vérifie l'équation d'onde, et la condition de Dirichlet sur les bords de A qui sont aussi des bords pour le contour total. On utilise aussi la condition de continuité sur les dérivées de deux sous-fonctions entre deux domaines : on obtient ainsi des relations liant les coefficients de

Fourier des fonctions de type  $\psi_{AB}$  : 
$$M_C \begin{pmatrix} A_C \\ B_C \\ C_C \\ D_C \end{pmatrix} = 0, \text{ où les éléments de } M_C \text{ dépendent de l'énergie}$$

E. On obtient ainsi le spectre cherché en cherchant les valeurs de E telles que  $\det(M_C) = 0$ . Les vecteurs propres correspondants de  $M_C$  donnent les valeurs des coefficients de  $A_C$ , etc..et donc les fonctions d'onde.

Il existe un ensemble de solutions triviales, qui sont telles que  $A_C=B_C=C_C=D_C=0$ . Les fonctions  $\psi_{AB}$ , etc. sont donc nulles : on a la condition de Dirichlet aussi sur les limites internes entre les domaines. Les modes correspondants sont ceux du triangle rectangle isocèle de base, ils sont connus analytiquement. WSM sont donc les premiers à mettre véritablement l'accent sur ces modes triangulaires.

On peut montrer que les matrices associées aux deux contours sont liées par une transformation orthogonale :  $M_C = {}^t T * M * T$ . Les valeurs propres de  $M_C$  et  $M_F$  sont donc les mêmes, et ceci constitue une autre démonstration de l'isospectralité de F et C.

Ils ont ainsi obtenu des spectres identiques pour F et C, à la précision de leur machine (qui semble être de  $10^{-7}$ ). Ces résultats sont en bon accord (0.1%) avec un autre calcul numérique qu'ils ont effectué avec une méthode de différence finie. Par contre, ils obtiennent un écart de 0.3% en moyenne avec les énergies obtenues par SK.

Ils ont trouvé des états dégénérés, qui sont tous de nature triangulaire (ils ont calculé les 600 premiers niveaux) : le premier de ce type étant tel que  $(f_n / f_1)^2 = 62.4$ . Comme ils ont un nombre raisonnable de niveaux, ils ont pu effectuer des statistiques : distribution des espacements de niveaux voisins, et statistiques  $\Delta_3$ . On trouve une statistique plutôt de type GOE, ce qui est normal, car les deux contours F et C sont pseudo-intégrables [4].

Enfin, ils obtiennent des fonctions d'onde en bon accord qualitatif avec celles de SK, et qui semblent plus précises.

## VI-1 .2. Nos expériences avec des films smectiques

Que restait-il à faire sur les contours F et C après les travaux de SK et WSM ? Sur les deux contours F et C, nous avons reproduit les expériences précédentes, en essayant d'obtenir la meilleure précision possible sur le spectre. En fait, ces expériences nous ont servi de test pour notre système expérimental, et notamment, pour la nouvelle cellule, avec la détermination de la forme des modes.

### VI-1 .2.1) Spectre

#### *VI-1 .2.1.1) valeurs des $(f_n/f_1)^2$*

Dans tout ce paragraphe, nous parlerons de  $(f_n/f_1)^2$ , comme SK et WSM. L'intérêt de cette quantité est qu'elle est proportionnelle à l'énergie réduite du problème quantique correspondant (voir chap. I). Par ailleurs, l'intérêt des fréquences réduites a déjà été expliqué au II-2.3.

\* série 0

En juin 1996 (soit avant le début de cette thèse), des expériences utilisant des films smectiques ont été réalisées sur les contours F et C, par des stagiaires [5]. Les cadres qu'ils ont utilisés ont été fabriqués au laboratoire par V. Klein, avec une méthode dérivée de la fabrication des circuits imprimés : par attaque chimique (d'un acide fort sur un métal), on grave une ouverture de forme voulue dans une feuille de cuivre. Les irrégularités observées sur le contour ont une taille caractéristique de l'ordre du  $1/50^{\text{ème}}$  de mm environ. Ils ont utilisé du S2 comme matériau smectique. Les expériences ont été réalisées sur "l'ancienne" cellule. Ils ont ainsi mesuré les 25 premiers modes de F et C, et obtenu des écarts de 0.8% en moyenne entre les spectres de  $(f_n/f_1)^2$  de F et C, et 1.8% au maximum. L'écart moyen avec les valeurs de SK est 0.5%, l'écart maximal de 2%.

Ces résultats ont ainsi permis une première vérification expérimentale de l'isospectralité de F et C utilisant des films smectiques. Cependant, la précision n'est pas assez bonne par rapport à celle des cavités micro-ondes (ce fait apparaîtra d'ailleurs plus clairement par la suite : voir VI.2.1). Nous avons dû refaire les expériences avec des cadres fabriqués plus précisément.

\*série 1 (ancienne cellule)

Les cadres utilisés ont été fabriqués par l'entreprise ICMC : ils ont été découpés chimiquement dans une feuille d'inox d'épaisseur 125  $\mu\text{m}$ . La taille des cadres est donnée par la longueur du côté commun des triangles rectangles isocèles formant le contour, soit 8 mm. La précision latérale sur les motifs annoncée par l'entreprise est de  $\pm 5 \mu\text{m}$ , soit 0.05%. Les supports en plexiglas ont été découpés par l'entreprise Méca Jet d'Eau, dans des plaques d'épaisseur 1 mm (voir la figure 3 du chap. II).

Nous avons mesuré les 30 premiers modes de F et C. Sur ces modes, nous avons trouvé un écart moyen entre les deux spectres de  $(f_n/f_1)^2$  de 0.3%, et un écart maximum de 0.7%. Quand on mesure un mode donné sur un cadre pour deux films différents, on trouve un écart de 0.5%

entre les deux valeurs mesurées. Ceci nous donne la précision de notre expérience, qui est donc du même ordre de grandeur que l'écart entre les spectres de F et C.

Cependant, l'écart avec les valeurs mesurées par SK atteint jusqu'à 1.8% ! Ici, l'on doit rappeler que le film est tendu sur son cadre par le biais d'un ménisque dont les dimensions latérales sont de l'ordre de l'épaisseur du cadre, soit 125  $\mu\text{m}$  : ceci représente 1% de la dimension latérale du cadre (prise égale à 1 cm), ce qui n'est pas négligeable, compte tenu de la précision que l'on souhaite. D'ailleurs, on voit à l'oeil nu les corrugations au bord du film, résultant de l'accrochage plus ou moins régulier du film sur son cadre.

#### \*série 2 (nouvelle cellule)

En fait, il est apparu ultérieurement que les expériences précédentes n'avaient pas été réalisées avec suffisamment de soin. L'écart entre les surfaces du plexi et du métal (cf chap.II, fig. 3) n'était sans doute pas assez grand. Les cadres étaient "collés" sur le plexi en utilisant le cristal liquide lui-même comme colle, ceci afin d'éviter toute pollution chimique du matériau. Cependant, cela n'empêchait pas les cadres de glisser légèrement par rapport à leur support. Nous en sommes venus à soupçonner que le film était peut-être, par endroits, tendu sur le *support* et non sur le cadre [6]!

Par la suite, nous avons limé un peu plus les supports, et collé les cadres sur leurs supports à l'araldite. On obtient ainsi une différence moyenne entre les spectres (en énergie) de F et C de 0.15%, et 0.34% au maximum. De plus, la différence avec les valeurs mesurées par SK n'est plus que de 0.23% en moyenne, et celle avec les valeurs de WSM de 0.16% en moyenne. Notre précision est donc maintenant, tout à fait comparable à celle des expériences de cavités micro-ondes.

n	C	F	C (SK)	F (SK)	C, F (WSM)
			[1]	[1]	[3]
1	1	1	1	1	1
2	1.438	1.430	1.436	1.434	1.440
3	2.040	2.027	2.037	2.037	2.039
4	2.571	2.548	2.576	2.577	2.576

5	2.854	2.823	2.858	2.862	2.856
6	3.623	3.570	3.629	3.637	3.629
7	4.184	4.153	4.180	4.180	4.176
8	4.554	4.507	4.556	4.558	4.548
9	4.861	4.811	4.864	4.868	4.861
10	5.150	5.095	5.145	5.151	5.143

table 1 : valeurs des  $(f_n/f_1)^2$  mesurées (série 2), comparées à celles obtenues par SK et WSM, pour les 10 premiers modes.

VI-1 .2.1.2) valeurs des vecteurs d'onde  $k_n$

Comme nous l'avons déjà signalé au II-2.3.3, les fréquences réduites ayant déjà été mesurées, il suffit de mesurer  $k_1$  : les autres valeurs de  $k_n$  s'en déduisent. Pour obtenir  $k_1$ , on mesure, pour des films d'épaisseurs différentes tendus sur F et C, leur fréquence du mode fondamental. Comme on a la relation

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} k_1 \frac{1}{\sqrt{e}}$$

VI- 1

Si l'on trace  $1/f_1^2$  en fonction de  $e$ , on doit obtenir une droite dont la pente nous donne accès à  $k_1$ . Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 3 : l'ajustement linéaire donne une pente de 4.33. A cause du faible nombre de points expérimentaux, la mesure de cette pente est peu précise.

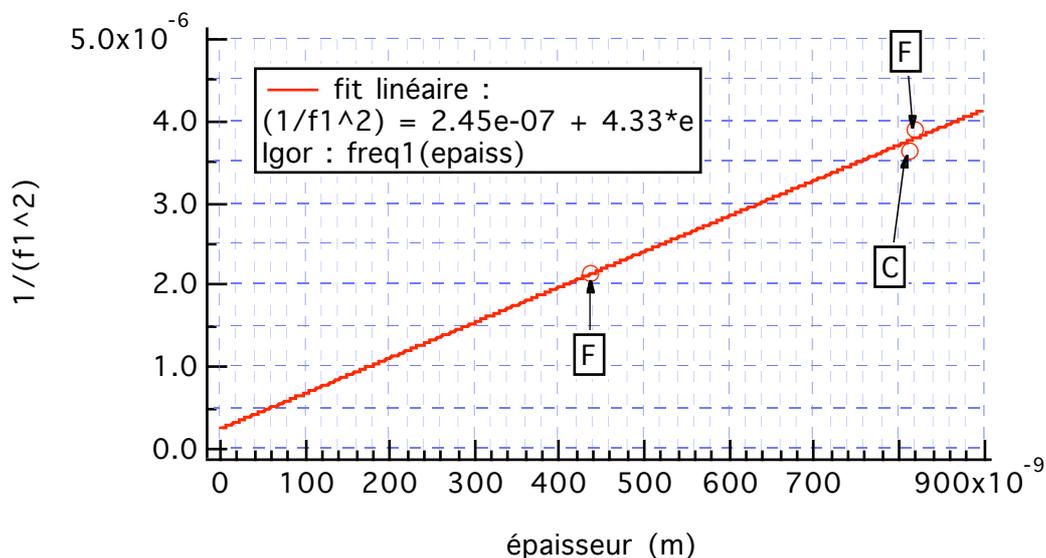


figure 3

D'après les mesures effectuées sur un cadre circulaire,

$$\gamma/\rho = 5.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{s}^{-2}, \text{ d'où :}$$

$$k_1 = 411 \text{ m}^{-1}.$$

On peut, comme pour les résultats expérimentaux de Sridhar, voir si l'ordre de grandeur de  $k_1$  est correct. On trouve ainsi, pour le mode fondamental d'un rectangle de côtés  $b$  et  $2*b$ ,  $k_1=439 \text{ m}^{-1}$  ; pour le fondamental d'un cercle de même surface que  $C$ ,  $k_1 = 285.7 \text{ m}^{-1}$ . On a bien encadré la valeur de  $k_1$ .

Pour le mode 9, on obtient  $k_9 = 2.2 * k_1 = 904 \text{ m}^{-1}$ , alors que la valeur théorique est  $878.1\text{m}^{-1}$ , soit 3 % d'écart entre ces deux valeurs. L'accord est tout-à-fait correct, et il aurait suffi de mesurer l'épaisseur d'un plus grand nombre de films pour obtenir une meilleure précision.

#### VI-1 .2.1.3) Facteur de qualité du mode fondamental

Pour le contour F, nous avons mesuré le facteur de qualité du mode fondamental en fonction de l'épaisseur du film. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 4. On a trois points, et non pas deux, car l'épaisseur d'un des films n'avait pas été mesurée, mais a été déduite grâce à l'ajustement de la figure 3. Les points expérimentaux sont ajustés par l'équation (IV-29) du chap. IV. On peut aussi écrire cette équation sous la forme (IV-35) :

$$\frac{\sqrt{e}}{Q} = a * e + b$$

VI- 2

Donc, si l'on trace  $\sqrt{e}/Q$  en fonction de l'épaisseur  $e$ , on doit obtenir une droite : c'est bien ce que montre la figure 5.

On observe donc que, comme pour le cadre fractal, on peut ajuster les résultats expérimentaux par le modèle de dissipation présenté au (IV-2.1.2). De plus, dans le cas des films tirés sur F, la dissipation dans le gaz résiduel était également prédominante. Cependant, comme la pente de la droite de la figure 5 n'est pas nulle, ceci montre que la dissipation dans le film joue quand même un rôle. Des valeurs de  $a$  et  $b$  de ce nouvel ajustement, on tire:

$$\eta = \frac{\sqrt{\gamma\rho}}{k_1} a = 0.043 \text{ Po},$$

soit le même ordre de grandeur que pour le cadre fractal (on avait trouvé  $\eta = 0.037 \text{ Po}$ )

et aussi :

$$\eta_g l_g = \frac{b\sqrt{\gamma\rho}}{k_1} = 6.0 \cdot 10^{-8} \text{ Po.m pour le mode fondamental, soit,}$$

$$\text{si } l_g \cong \frac{\pi}{k_1} (^2), \eta_g \cong 7.510^{-6} \text{ Po,}$$

ce qui correspond au même ordre de grandeur que ce qu'on avait obtenu pour le fractal ( $\eta = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Po}$  et  $\eta_g = 10^{-5} \text{ Po}$ ) et pour le cercle ( $\eta = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Po}$  et  $\eta_g = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Po}$ ). On constate que, quelle que soit la forme géométrique du contour, on obtient toujours les mêmes valeurs de coefficients de viscosité. Ceci confirme le résultat du (IV-3) : dans notre expérience, on ne voit pas l'effet de la forme du contour dans la dissipation.

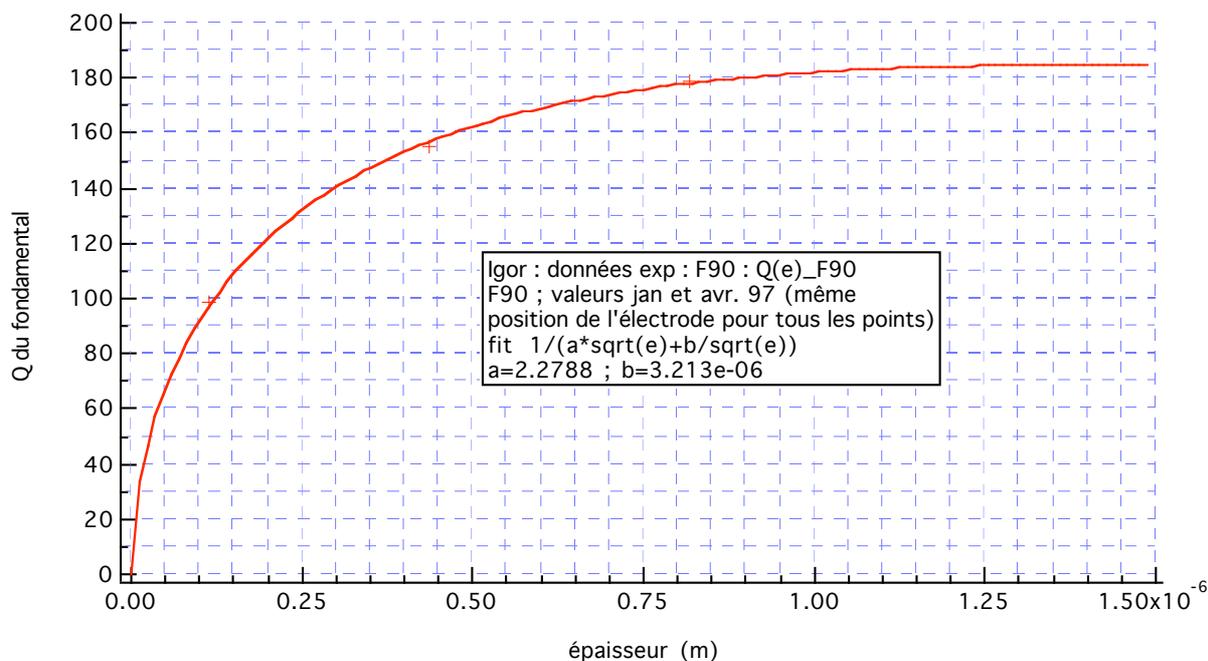


figure 4

<sup>2</sup> Cette hypothèse a été bien vérifiée dans le cas d'un cadre circulaire (voir le chap. IV)

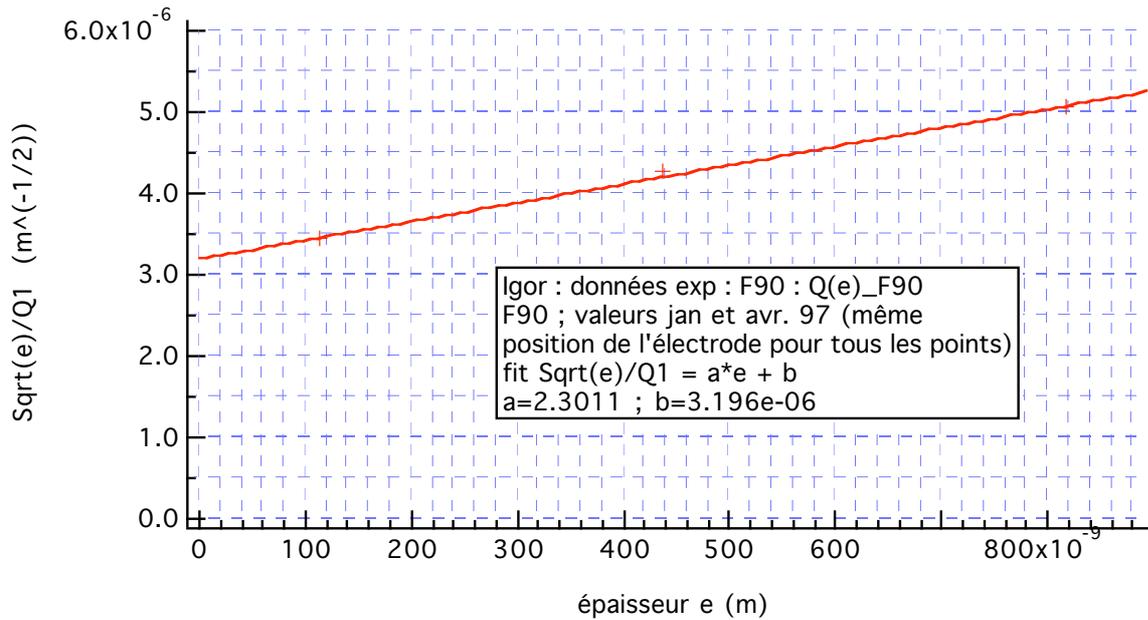


figure 5

### VI-1 .2.2) Allure des fonctions d'onde

La forme des modes de F et C a déjà été déterminée par SK et WSM : ils présentent tous deux dans leurs articles les modes 1, 3 et 6, qui sont en bon accord qualitatif. Ces déterminations ont été utiles à SK pour vérifier la méthode de transplantation. De plus, la détermination de la forme des modes a permis à WSM d'introduire les modes triangulaires. Nous avons également mesuré la forme des modes de F et C ; ceci nous a servi de test pour la nouvelle cellule expérimentale. Les modes mesurés sur le contour C ont été les n° 1 à 10, 20, 21 et 22 (figure 9).

#### *VI-1.2.2.1) modes de C*

##### *VI-1.2.2.1.1 mode fondamentale*

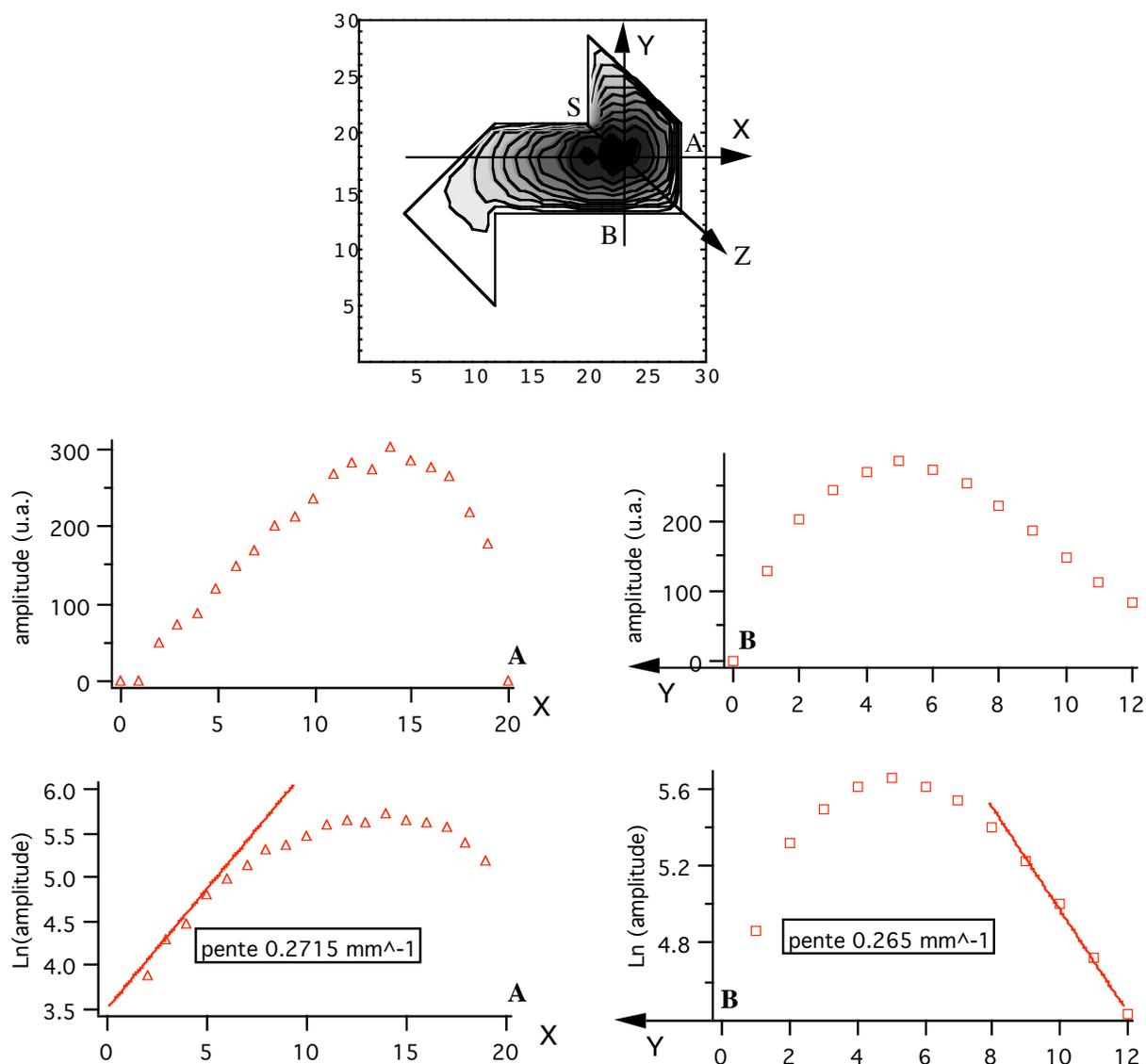


figure 6 : coupes du mode fondamental de C suivant les directions X et Y, indiquées sur les graphes ; les points A et B sont également notés sur ces graphes pour plus de clarté.

Nous avons effectué différentes coupes de ce mode, suivant les directions X et Y indiquées sur la figure 6. Les deux courbes d'amplitude montrent une allure sinusoïdale au voisinage du point A (resp. B), puis une allure de décroissance exponentielle quand on s'éloigne de ce point dans la direction X (resp. Y). Les deux longueurs associées aux décroissances exponentielles dans les directions X et Y sont égales et valent environ 3.7 mm. Le mode fondamental de C est donc localisé exponentiellement. On peut tenter d'interpréter ceci grâce à des prédictions théoriques effectuées dans [7, 8, 9] sur un contour plan en forme de coude d'angle  $\pi/2$  (figure 7), dont les deux branches ont une longueur infinie (voir à ce sujet l'annexe

de ce chapitre). On peut montrer qu'il existe un mode fondamental localisé exponentiellement au niveau du coude, suivi d'un continuum d'états. Le mode fondamental de C semble en effet localisé dans un tel coude carré. Dans le cas du contour C, les deux branches ne sont pas de longueur infinie. Regardons l'ordre de grandeur de la longueur de décroissance exponentielle  $l$  que donne le calcul de [7,8,9] dans notre cas. On a :

$$l = \frac{b}{\sqrt{\pi^2 - k^2}} \quad \text{VI- 3}$$

où, en termes de mécanique quantique,  $k^2$  est proportionnel à l'énergie du fondamental, et vaut :

$$k^2 = 9.34 \quad [7,8] \quad \text{VI- 4}$$

On trouve (VI- 3) en écrivant que l'énergie du mode se décompose entre, d'une part, l'onde stationnaire dans la direction perpendiculaire à l'axe des branches et d'autre part, l'onde évanescente dans la direction des axes.

Avec  $b = 8$  mm, on obtient :  $l = 11$  mm, soit une valeur supérieure d'un facteur 3 à la valeur expérimentale.

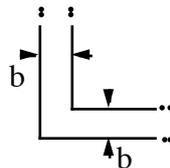


figure 7

On voit donc que la prédiction des théoriciens, même si elle permet sans doute d'interpréter qualitativement le fait que le fondamental de C soit localisé exponentiellement, ne donne pas d'interprétation quantitative quant à la longueur mesurée expérimentalement. Ceci est certainement dû à l'approximation, grossière ici, des branches infinies.

Nous avons également effectué la coupe suivant l'axe noté Z sur la figure 6, afin de mesurer l'exposant de la dépendance de l'amplitude de la fonction d'onde en fonction de la distance au point saillant (voir (III-14)). La valeur expérimentale obtenue est de 0.52, au lieu de 0.66, ce qui est correct, compte tenu du peu de points expérimentaux.

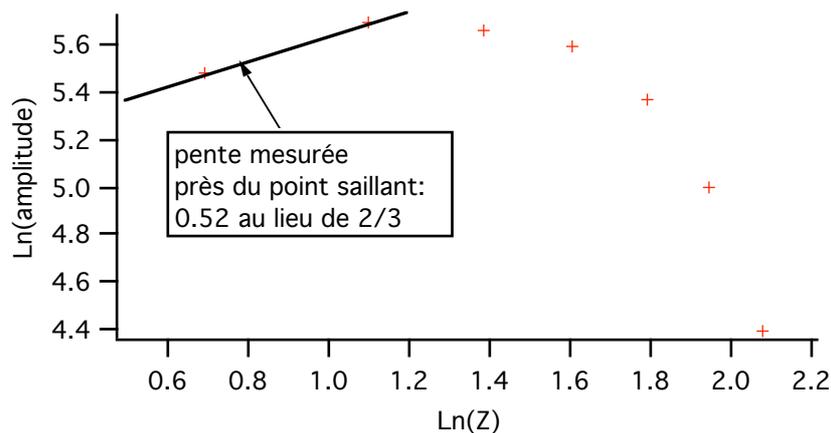


figure 8 : résultat expérimental pour l'exposant de la fonction d'onde au voisinage du point saillant S, an fonction de la distance à ce point

#### VI-1.2.2.1.2 9ème mode

Le 9ème mode est le premier mode "triangulaire" : il est formé, partant du mode fondamental du triangle rectangle isocèle, par la même série de réflexions que celle qui sert à construire le contour C lui-même. Ceci est très clair sur la figure 9, notamment sur la phase, où la structure triangulaire apparaît très nettement. Remarquons toutefois que le mode 8 semble également avoir une structure triangulaire, mais elle ne respecte pas les symétries de construction du contour C. En effet, les différences entre les modes 8 et 9 apparaissent essentiellement dans les deux carrés contenus dans C : on a un mode dégénéré du carré ou l'autre (avec une ligne nodale suivant une diagonale ou celle qui lui est perpendiculaire), suivant qu'on regarde le mode 8 ou le 9. On pourrait donc penser que les modes 8 et 9 devraient être quasi-dégénérés ; en fait, la différence entre leurs deux fréquences réduites vaut 0.071, soit le

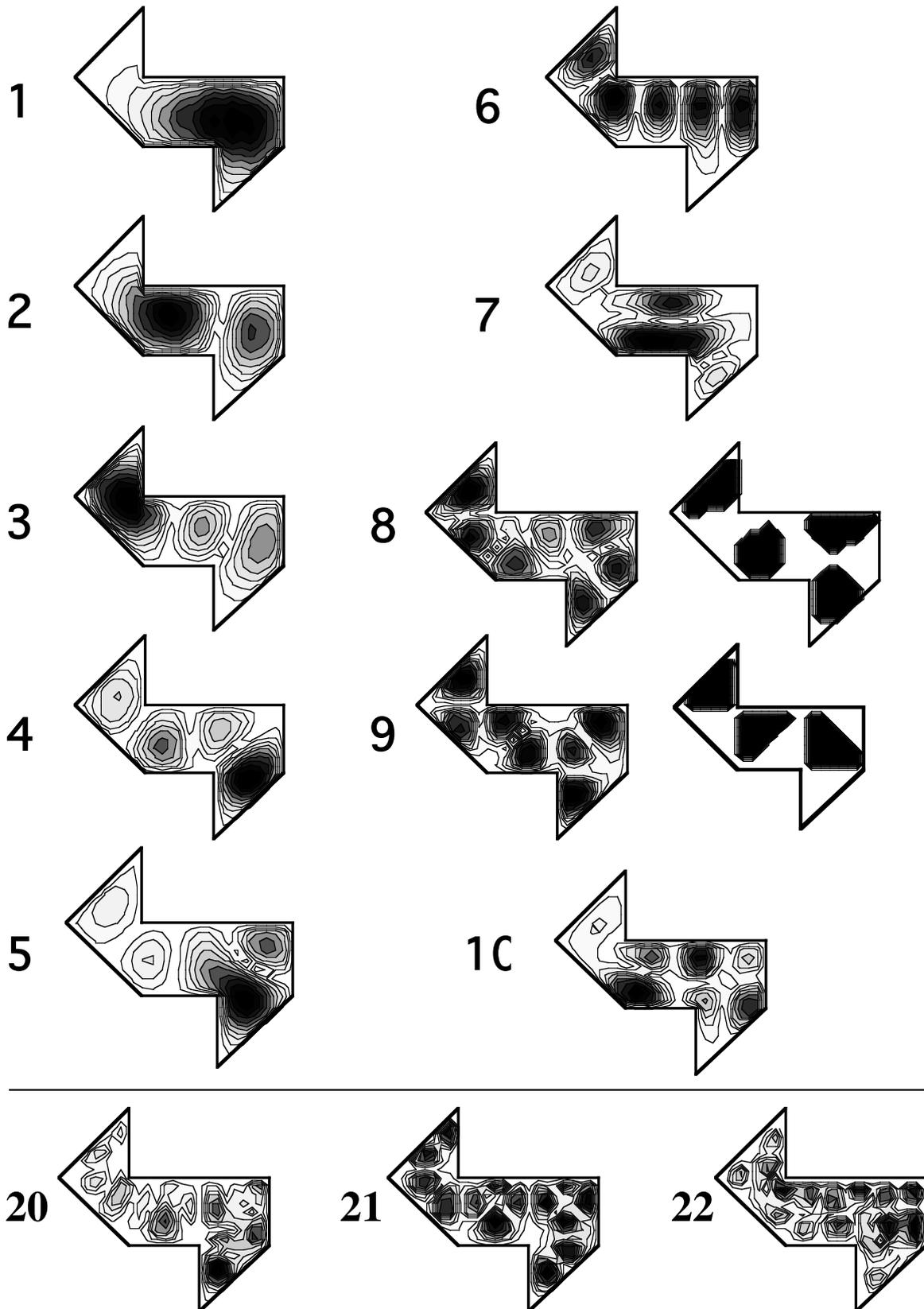


figure 9 : les dix premiers modes de C ainsi que les modes 20, 21, 22, en amplitude ; pour les modes 8 et 9, la phase est également présentée.

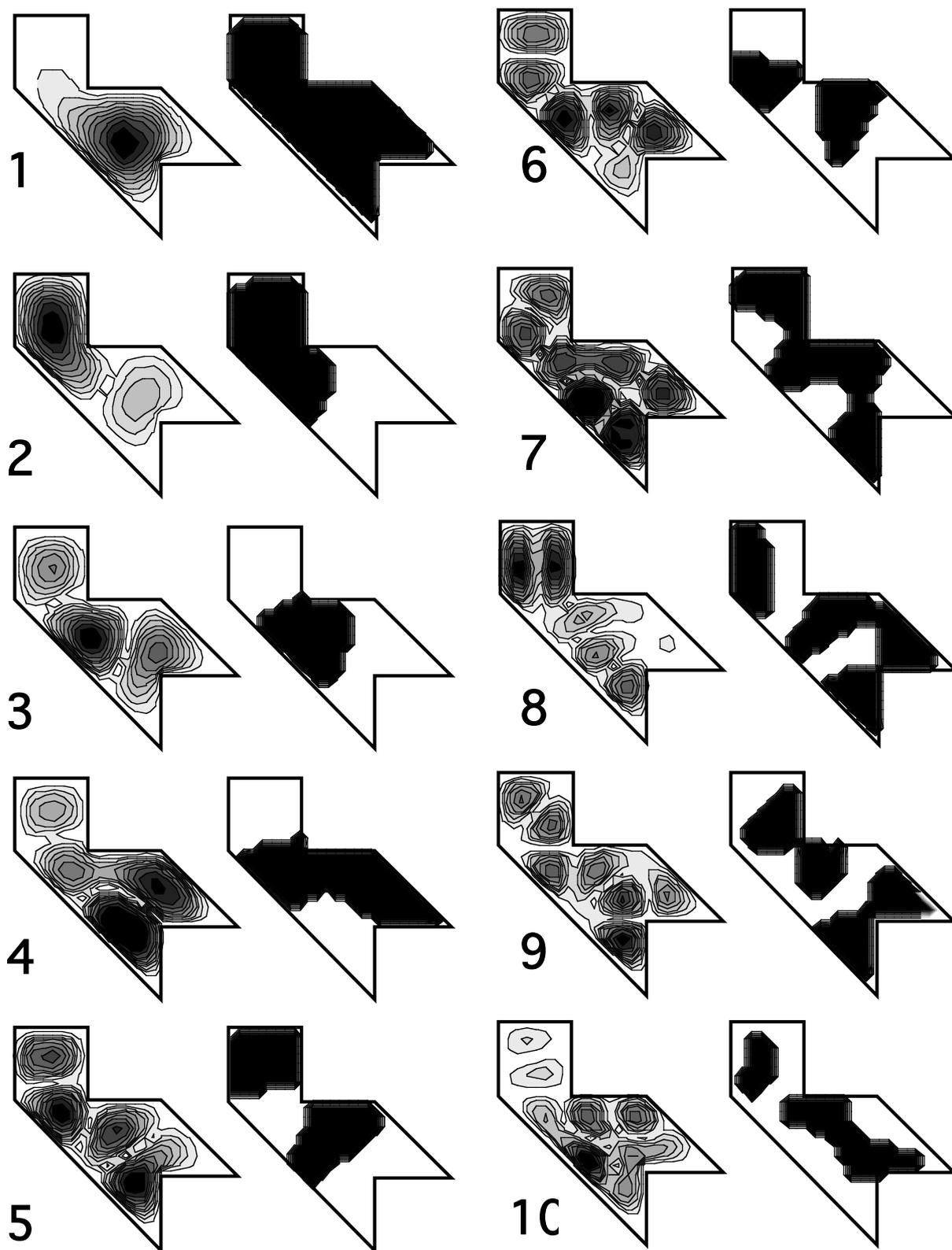


figure 10 : modes 1 à 10 de F, avec la phase

même ordre de grandeur que l'écart entre les modes 9 et 10, 8 et 7,...En fait, la structure triangulaire du mode 8 semble un peu déformée dans la partie du contour la plus à droite. C'est d'ailleurs difficile à dire, car le pas de balayage était de 1 mm, soit  $1/8^\circ$  de la longueur du côté commun des triangles isocèles, ce qui n'est sans doute pas suffisant pour conclure. Ceci explique sans doute l'écart des fréquences observé. Quoi qu'il en soit, cela nous incite à se méfier des raisonnements simplistes sur le lien entre la forme géométrique du mode et la valeur propre associée à ce mode.

#### *VI-1.2.2.1.3 Autres modes*

Sur la figure 9, sont représentés les modes 20, 21 et 22. Le mode 21 est le 2<sup>ème</sup> mode triangulaire, provenant du premier mode harmonique du triangle rectangle isocèle. Ceci est assez clair sur la figure 9. Le mode 20 n'a pas l'air très différent du 21, excepté au voisinage de la partie la plus à droite du contour. Ceci étant, le 20 n'a pas été mesuré suffisamment précisément, il est par conséquent très difficile de conclure quoi que ce soit.

#### *VI-1.2.2.2) modes de F*

##### *VI-1.2.2.2.1 mode fondamental*

On peut, comme pour C, effectuer des coupes du mode fondamental. Par contre, ce mode n'est pas, cette fois, localisé près d'un «coude» bien net. Nous présentons donc une coupe suivant l'axe X de la figure 11. On voit encore une localisation exponentielle, avec une longueur de décroissance associée de 3.35 mm, soit une valeur proche de celle trouvée pour C. Dans ce cas, ce n'est pas par «effet de coude» que l'on observe une localisation exponentielle, mais parce qu'on a un rétrécissement du cadre dans la direction X. Le mécanisme de localisation mis en jeu est le même que celui déjà exposé au (III-2.3.3.1).

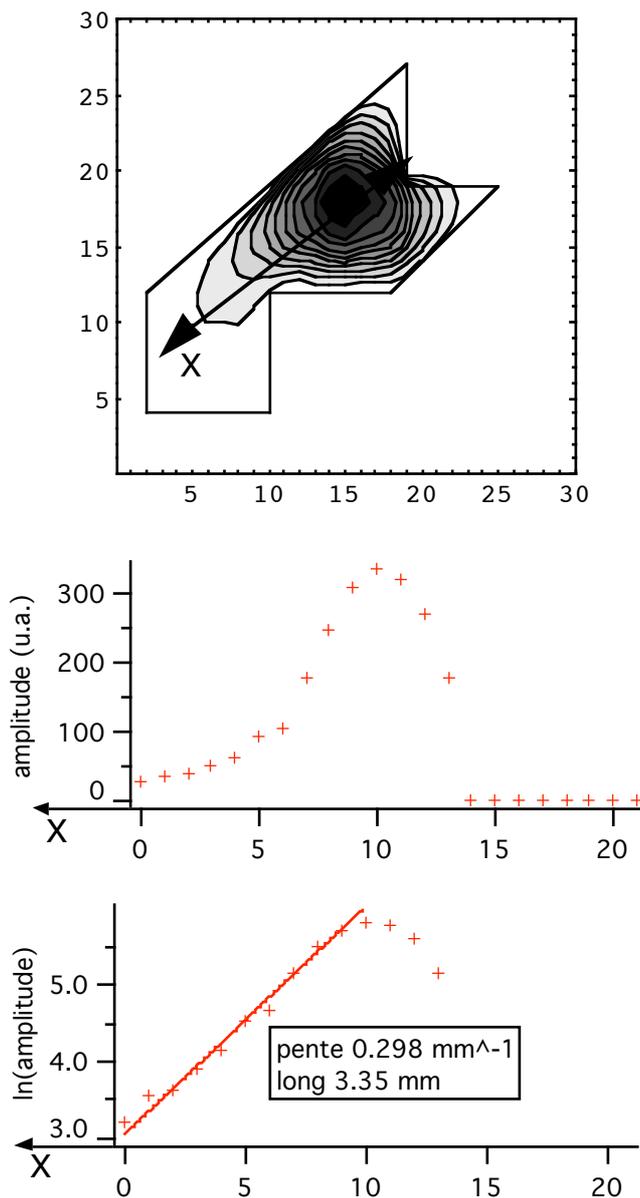


figure 11

#### VI-1.2.2.2.1 Autres modes

En ce qui concerne les modes de F, la mesure de la phase a été réalisée plus systématiquement. On voit bien également la structure triangulaire du mode 9. En fait, pour ce mode, la transplantation est triviale : il est inutile d'effectuer des combinaisons linéaires de sous-fonctions d'onde puis de les transplanter sur l'autre contour. On peut prendre les sous-fonctions elles-mêmes, puis les "recoller" directement sur l'autre contour. Pour la comparaison entre les

---

modes 8 et 9, on voit que cette fois, les changements se produisent seulement dans le carré en haut à gauche, et non pas dans les deux carrés comme pour le 9ème mode de C.VI-1.2.2.3) remarques générales

On peut se demander si les amplitudes relatives des ventres mesurées ont un sens, ou s'il existe des effets de dissipation sur le parcours de l'onde entre le point d'excitation et celui de détection, qui feraient, que les amplitudes mesurées dépendraient de la position du laser (car l'électrode est scannée sous toute la surface).

On peut faire une première réponse a priori : pour un film d'épaisseur  $0.1 \mu\text{m}$ , la célérité des ondes sonores transverses dans le film est de l'ordre de  $20 \text{ m.s}^{-1}$  : le temps de parcours  $\tau_t$  de l'onde sur une distance de  $1 \text{ cm}$  vaut donc  $5.10^{-3} \text{ s}$ . Le temps d'amortissement  $\tau_d$  vaut  $1/\Delta\nu$ , où  $\Delta\nu$  est la largeur de pics, soit environ  $1 \text{ Hz}$ , d'où  $\tau_d \cong 1 \text{ s} \gg \tau_t$

Une deuxième réponse (a posteriori) consiste à comparer visuellement les modes 1, 3 et 6 que nous avons mesurés avec ceux de SK et WSM : dans les trois cas, les ventres les plus intenses sont toujours les mêmes, or il n'y a aucune dissipation introduite dans la simulation numérique.

Conclusion des deux arguments : les amplitudes relatives des différents ventres sont bien pertinentes.

**VI-2) Evolution de la famille FC**

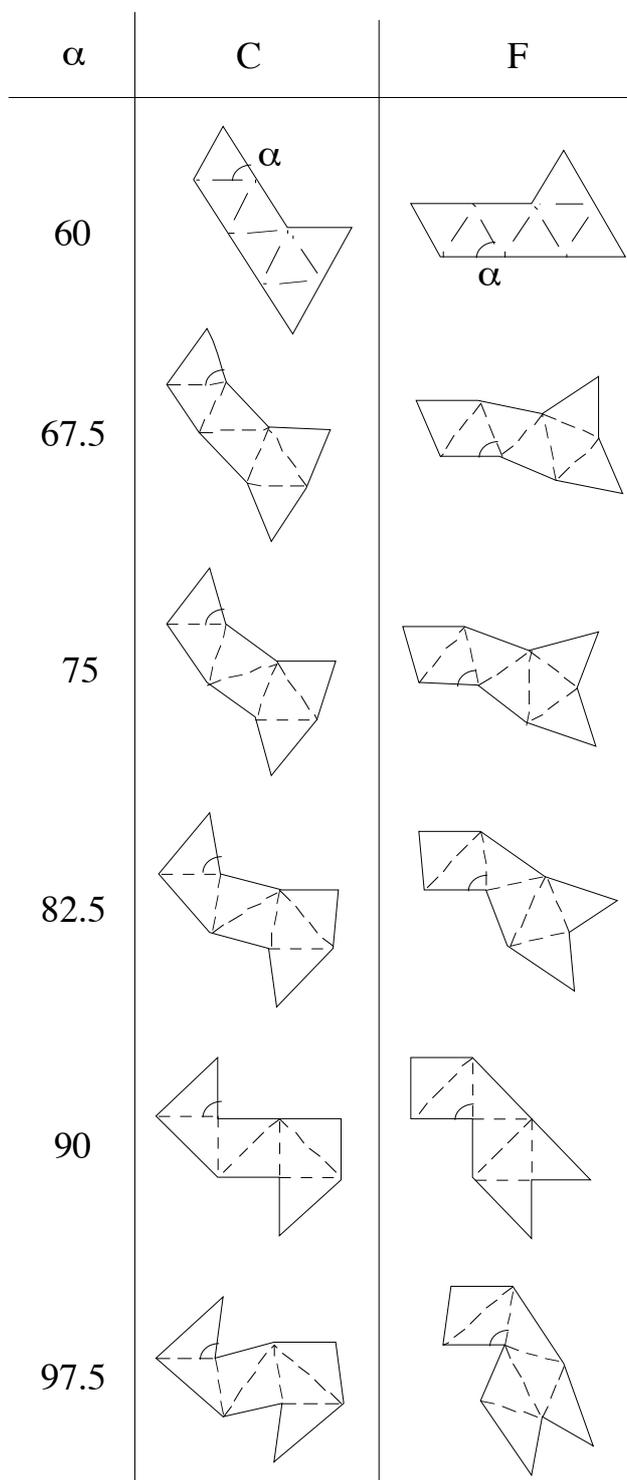


figure 12 : ensemble de paires CF étudiées expérimentalement

Comme nous l'avons vu au (V-2.3.1), les contours F et C étudiés au (VI-1) sont un couple particulier appartenant à la famille  $7_3$  de [10]. Cette dernière est une famille continue de paires isospectrales, dont le point commun est constitué par les deux schémas de réflexions -

---

issus de la théorie des groupes- menant à la construction des contours. On passe d'une paire de la famille à une autre par déformation continue du triangle de base constituant le contour. Les expériences ou simulations numériques précédentes ont toujours concerné uniquement le cas particulier de la paire formée à partir d'un triangle rectangle isocèle. Nous avons travaillé sur un ensemble de paires de la famille  $7_3$ , toutes obtenues avec des triangles isocèles, en faisant varier l'angle  $\alpha$  de la figure 12 entre  $60^\circ$  et  $97.5^\circ$ . Nous avons fait le choix simple de ne faire varier qu'un seul paramètre du triangle : ceci nous permet en effet d'avoir deux limites où l'on retrouve l'isospectralité :  $\alpha = 60^\circ$  et  $\alpha = 90^\circ$ . Nous noterons  $F\alpha$  et  $C\alpha$  les deux éléments du couple FC pour la valeur d'angle  $\alpha$ .

### VI-2.1) Conservation de l'isospectralité

#### \* Série 0

En juin 96, les stagiaires avaient également travaillé sur la série de cadres représentés ci-dessus, pour  $\alpha$  variant entre  $60$  et  $90^\circ$ , avec la même technique que celle exposée au VI-1.2.1. Les résultats obtenus sont résumés sur la figure 13. La question qui se pose est : y a-t-il conservation de l'isospectralité des couples FC quand on fait varier  $\alpha$ ? Au regard de la figure 13, la réponse ne semble pas évidente, vu les barres d'erreur (estimées à 2%). Nous avons donc décidé de refaire ces expériences, avec des cadres fabriqués plus précisément, toujours par l'entreprise ICMC.

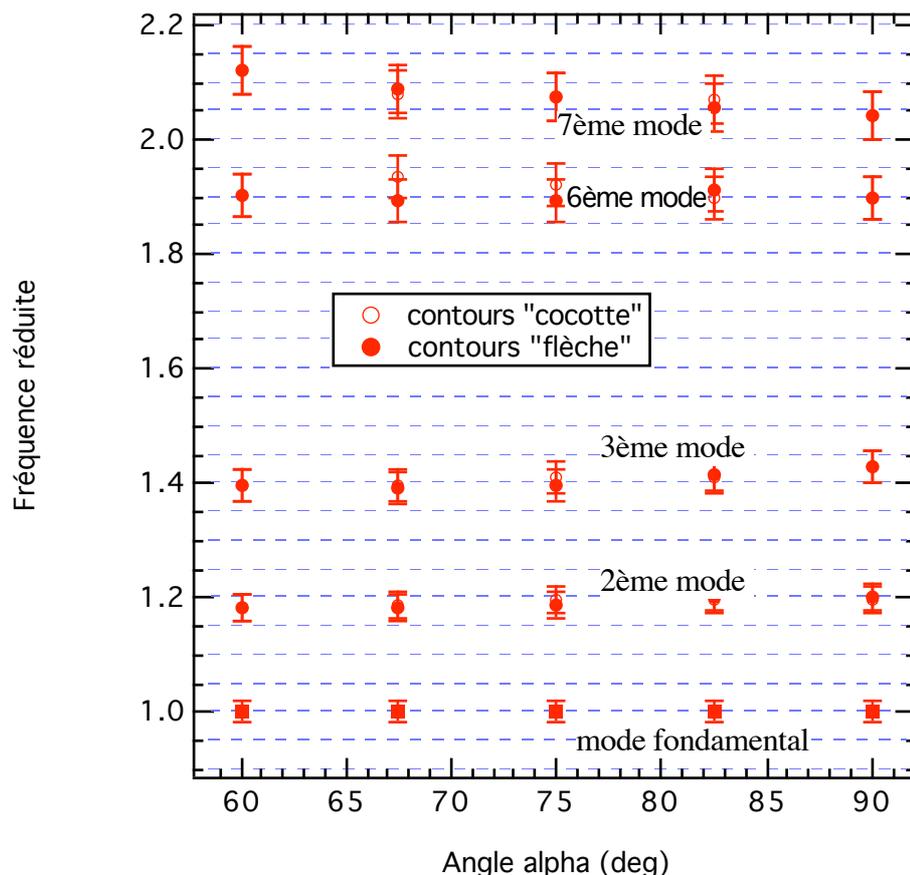


figure 13 : résultats préliminaires obtenus par les stagiaires [5]

\* Série 1 : [11]

Les expériences ont été réalisées en utilisant des cadres fabriqués par ICMC, et différents produits (S2, S1 et 8CB). On obtient maintenant une différence entre les spectres de fréquences réduites de F et C de 0.3% en moyenne, quelque soit  $\alpha$ . Les erreurs expérimentales étant de 0.5%, ceci montre bien que l'isospectralité est conservée pour un couple  $FC\alpha$  quelconque. On en conclut que seul les schémas de réflexions permettant d'aboutir aux formes F et C sont importants, et pas la forme du triangle choisi. Ce résultat est en fait prévu par les mathématiques, ce que nous ne savions pas au départ, quand nous avons commencé cette série d'expériences. En effet, le théorème de Sunada n'exige que peu de propriétés de la variété riemannienne, si ce n'est qu'elle soit compacte. Les conditions les plus drastiques portent plutôt sur la structure du groupe, qui est à l'origine des deux schémas de construction. De même, lorsqu'on effectue une transplantation, seules les réflexions entre triangles adjacents comptent, et pas la forme de ces

triangles. On a donc obtenu une confirmation expérimentale d'un aspect essentiel des mathématiques du problème de l'isospectralité, qui n'avait pas été étudié jusque'ici.

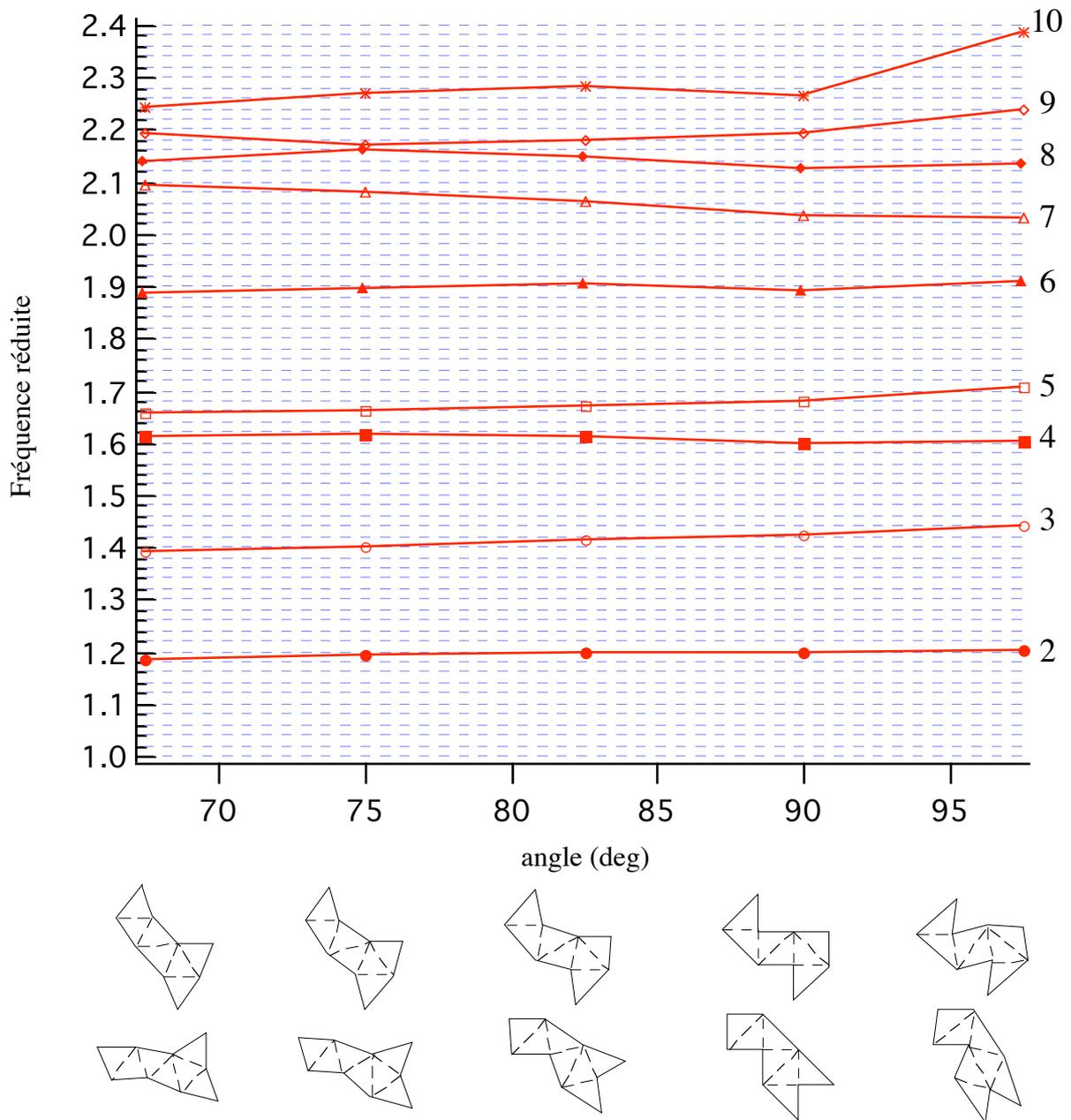


figure 14 : variation des fréquences réduites  $f_n/f_1$  pour les contours  $C\alpha$  et  $F\alpha$  en fonction de l'angle  $\alpha$ .

VI-2.2) Etude plus détaillée du spectre de F et C en fonction de  $\alpha$

Sur la figure 14, on a porté les valeurs de fréquences réduites expérimentales communes à  $F\alpha$  et  $C\alpha$  pour les 10 premiers modes, en fonction de l'angle  $\alpha$ . On observe que les courbes

correspondant aux 8ème et 9ème mode semblent se rapprocher pour  $\alpha \approx 75^\circ$  : la différence des fréquences réduites entre ces deux modes pour  $\alpha = 75^\circ$  vaut 0.01, alors que l'espacement moyen entre les niveaux est de 0.15. Comme nous n'avons fait varier qu'un seul paramètre, i.e.  $\alpha$ , il y a deux possibilités : soit ce croisement est dû à des symétries, soit il existe un point diabolique. Pour trouver la nature du croisement, il faudrait faire varier deux paramètres autour de la dégénérescence [12]. Si la dégénérescence correspond à un point diabolique, le plus probable est que nous ayons mesuré un "croisement évité" (avoided crossing). Comme nous l'avons vu au (VI-1.2.2), les modes 8 et 9 (que ce soit pour F ou pour C) semblent avoir des symétries différentes. En conséquence, ils ne peuvent être couplés, et, d'un point de vue théorique, il s'agit d'un vrai croisement. Cependant, expérimentalement, la symétrie du contour ne peut être parfaitement réalisée : une légère imperfection lèvera la dégénérescence, et on observe alors un "presque croisement", ce qui correspond sans doute à ce que l'on a.

### **VI-3) Brisure de l'isospectralité**

#### VI-3.1. Introduction

Jusqu'ici, on a étudié certaines paires isospectrales de la famille  $7_3$  [10]. On a vu que seuls les deux schémas de réflexions, issus de la théorie des groupes, utilisés pour construire une paire isospectrale étaient importants, et pas la forme des triangles choisis. Il apparaît alors naturel de se demander comment l'on peut briser l'isospectralité de cette famille. Une idée simple consiste à ne pas respecter ces schémas de construction, tout en ne touchant pas à la forme des triangles. C'est dans cette optique que nous avons utilisé le cadre Cdef de la figure 15, construit à partir de C90 en «collant le 7ème triangle à l'envers».

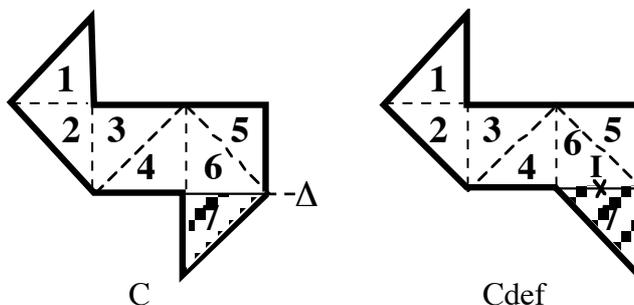


figure 15 : obtention du cadre Cdef à partir de C

Plus précisément, on voit que les triangles numérotés 6 et 7 s'échangent désormais, non plus par une réflexion d'axe  $\Delta$ , mais par une *inversion* de centre I.

### VI-3.2. Spectre et forme des modes obtenus

#### VI-3.2.1) Généralités

n	CF(90°)	Cdef
1	1	1
2	1.434	1.404
3	2.035	1.961
4	2.559	2.442
5	2.838	2.861
6	3.596	3.506
7	4.168	3.924
8	4.530	4.452
9	4.836	4.582
10	5.122	5.729

table 2 : valeurs expérimentales des  $(f_n/f_1)^2$ , pour les cadres C, F et Cdef

Dans la table 2, on a présenté la moyenne des deux spectres expérimentaux de F et C, comparée au spectre obtenu pour le nouveau cadre Cdef. On obtient, sur les  $(f_n/f_1)^2$ , un écart moyen de 4.3%, à comparer à l'écart entre F et C qui était de 0.15%. On en conclut que l'écart observé sort des barres d'erreur, et donc que le cadre Cdef n'est pas isospectral avec C et F.

#### VI-3.2.2) Autour du 9ème mode

Une fois de plus, l'effet le plus remarquable se produit sur le 9ème mode, qui devient quasi-dégénéré avec le 8ème (figure 16).

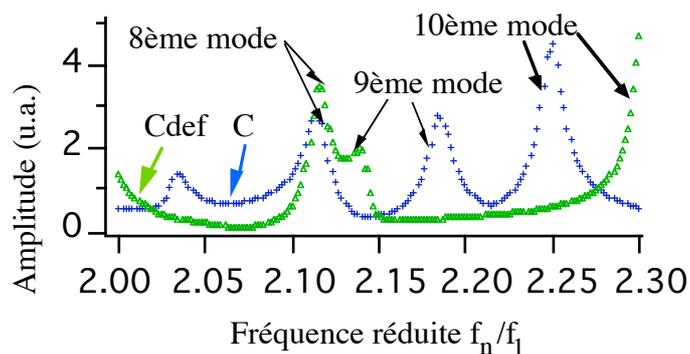


figure 16 : «Zoom» sur le spectre de C et Cdef

On peut interpréter en partie cet effet en considérant la forme des 8ème et 9ème modes pour C et Cdef (figure 17). Comme le 9ème mode a les mêmes symétries de construction que le cadre lui-même, il n'est pas étonnant que ce mode soit très perturbé pour un cadre qui ne respecte pas ces symétries. Plus précisément, on constate que les allures respectives des deux modes 9 des contours C et Cdef sont assez proches dans la zone délimitée par les triangles notés de 1 à 4 sur la figure 15. Par contre, dans les triangles 5 à 7, soit exactement dans la zone de «*Erreur de construction*», les allures observées sont très différentes. Il n'est donc pas très étonnant que le mode 9 de Cdef soit repoussé le plus loin possible en fréquence du mode 9 de C.

Que peut-on dire sur le fait que le 9ème mode de Cdef soit quasi-dégénéré avec le 8ème de C et Cdef? Etant donnée la forme des modes correspondants, il semble que la réponse ne soit pas évidente..De plus, le fait que le mode 9 de Cdef soit repoussé vers le 8 et non vers le 10 n'est sans doute pas trivial.

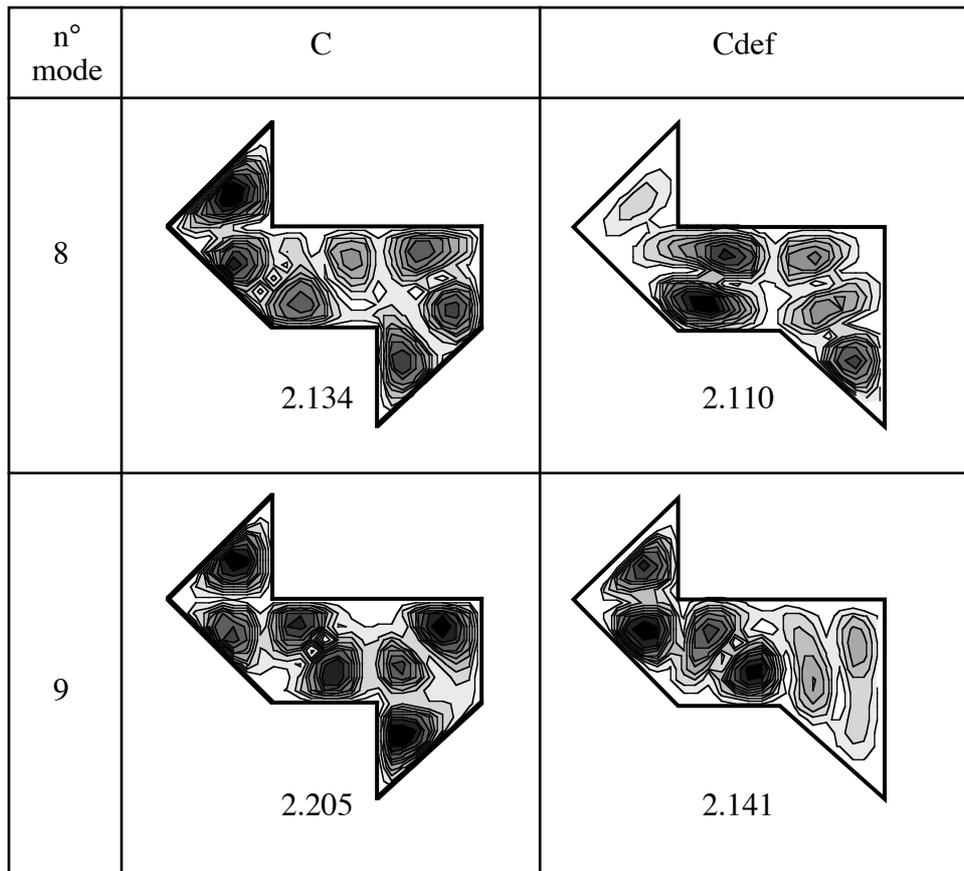


figure 17 : allure des 8ème et 9ème modes pour C et Cdef ; les valeurs des fréquences réduites correspondantes sont également indiquées.

VI-3.2.3) Autres modes triangulaires

Que se passe-t-il autour du 21ème mode, soit le deuxième mode triangulaire du spectre? L'observation expérimentale est la suivante : le 21ème de Cdef se retrouve quasi-dégénéré avec le 22ème de C. Cette fois, le 22ème de Cdef n'est pas à la même fréquence que les deux précédents. Ceci se voit bien sur la table 3.

n	CF(90°)	Cdef
20	9.695	10.153
21	9.777	10.352
22	10.304	10.652

table 3

En conclusion sur les modes triangulaires, on comprend que le mode de Cdef correspondant à un mode triangulaire de C soit repoussé le plus loin possible dans le spectre de la valeur de fréquence pour le mode de C, mais il semble difficile de prévoir a priori de quel côté ce mode sera repoussé.

#### **VI-4) Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord vérifié expérimentalement, avec notre propre dispositif, l'isospectralité des deux contours F et C. Ceci a servi de test à notre expérience, en confirmant avec une bonne précision les résultats déjà obtenus par SK. Puis nous avons présenté deux séries de nouvelles expériences : dans celles-ci, nous avons testé, de deux manières différentes, le fait que seules les symétries de construction importent pour l'isospectralité. Ceci avait été prévu par les mathématiciens. Au passage, nous avons trouvé un croisement de niveaux inattendu dans le spectre, dont nous avons discuté la nature.

**Annexe du chap. VI :**

Nous considérons ici un contour en forme de « $\square$ », dont les deux branches ont des longueurs infinies (voir la figure 7 de ce chapitre). L'existence d'un mode fondamental localisé exponentiellement dans un tel contour a été prévue théoriquement [13,14,15]. A notre connaissance, elle n'a pas encore été vérifiée expérimentalement. Nous avons effectué des expériences sur le contour représenté sur la figure 18. Nous avons pris un rapport longueur sur largeur des deux branches aussi grand que possible, compte tenu de la taille maximale des cadres possible dans notre expérience. Nous avons effectivement trouvé que le mode fondamental de ce contour était localisé exponentiellement dans chaque branche. L'allure générale de ce mode, obtenue avec un pas de balayage de l'électrode assez grossier (1 mm) est présentée sur la figure 19.

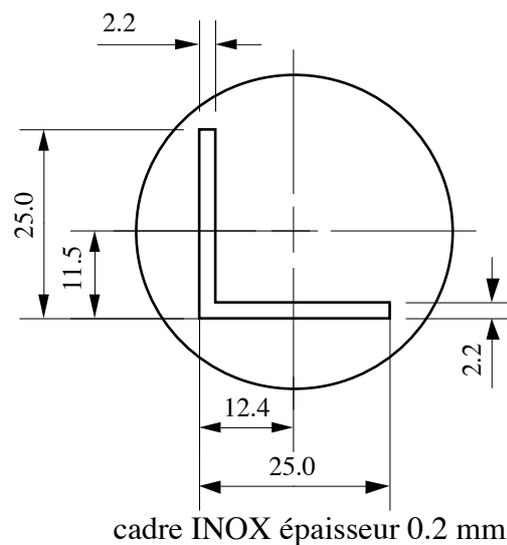


figure 18 : contour utilisé expérimentalement

On effectue les coupes suivant les axes X et Y de la figure 19 : on trouve deux décroissances exponentielles de 2.2 mm chacune. Or, pour  $b = 2.2$  mm, on obtient une longueur de décroissance théorique de (voir VI-3) 3.02 mm. Ici encore, la valeur expérimentale obtenue est inférieure à la valeur théorique. Cependant, l'ordre de grandeur est cette fois correct.

Bien entendu, pour le contour expérimental de la figure 18, où les deux branches n'ont pas une longueur infinie, on n'a pas un continuum d'états au-dessus du fondamental, mais un ensemble de modes discrets. Aucun de ces modes ne présentait expérimentalement de

décroissance exponentielle dans la direction X ou Y, mais on a toujours obtenu une onde stationnaire dans ces deux directions. Un exemple d'un de ces modes est montré sur la figure 20.

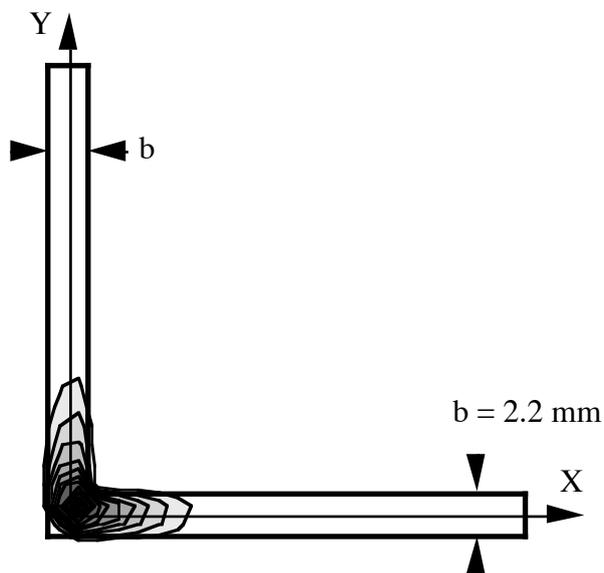


figure 19 : allure générale du mode fondamental

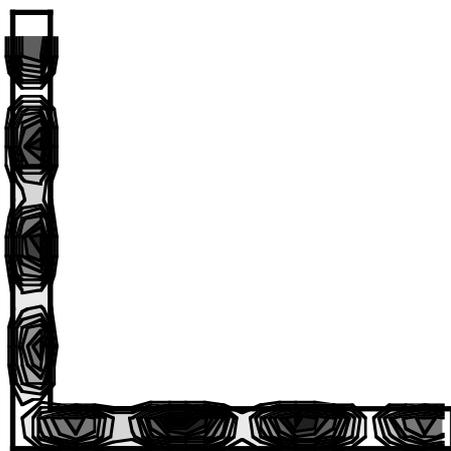


figure 20 : un des modes plus élevés obtenus

---

**Références du chap. VI :**

- [1] S. Sridhar and A. Kudrolli, *Experiments on not "hearing the shape" of drums*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2175 (1994)
- [2] S. Sridhar, D. O. Hogenboom and B. A. Willemsen, *Microwaves Experiments on Chaotic Billiards*, J. Stat. Phys. **68**, 239 (1992)
- [3] H. W. Wu, D. W. L. Sprung and J. Martorell, *Numerical investigation of isospectral cavities built from triangles*, Phys. Rev. E **51**, 703 (1995)
- [4] P. J. Richens and M. V. Berry, *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica D **2**, 495 (1981) ; O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984)
- [5] M. Albertini et J-C Lacouture, *Peut-on entendre la forme d'un tambour?*, rapport de stage de Licence de Physique et Applications de l'Université Paris-Sud (juin 1996) ; X. Poudret, *Peut-on entendre la forme d'un tambour?*, rapport de stage de 2<sup>ème</sup> année de FIUPSO (juillet 1996)
- [6] discussion avec V. Repain, stagiaire du DEA de Physique des Solides (février 1998)
- [7] J. Martorell, S. Klarsfeld, D.W.L. Sprung and H. Wu, *Analytical Treatment of electron wave propagation in two-dimensional structures*, Solid State Comm. vol.**78**,N° 1, 13-18 (1991)
- [8] J. Goldstone and R.L. Jaffe, *Bound states in twisting tubes*, Phys. Rev. B **45**, 14100 (1992)
- [9] H. Wu, D.W.L. Sprung and J. Martorell, *Electronics properties of a quantum wire with arbitrary bending angle*, J. Appl. Phys. **72** (1), 151 (1992)
- [10] P. Buser, J. Conway, P. Doyle and K-D Semmler, *Some planar isospectral domains*, Intern. Math. Research Notices **9**, 391 (1994)
- [11] C. Even and P. Pieranski, *On «hearing the shape of drums» : an experimental study using vibrating smectic films*, accepted at Europhys. Lett.
- [12] J. von Neumann and E. Wigner, Phys. Z. **30**, 467 (1929).

[13] J. Martorell, S. Klarsfeld, D.W.L. Sprung and H. Wu, *Analytical Treatment of electron wave propagation in two-dimensional structures*, Solid State Comm. vol. **78**, N° 1, 13-18 (1991)

[14] J. Goldstone and R.L. Jaffe, *Bound states in twisting tubes*, Phys. Rev. B **45**, 14100 (1992)

[15] H. Wu, D.W.L. Sprung and J. Martorell, *Electronics properties of a quantum wire with arbitrary bending angle*, J. Appl. Phys. **72** (1), 151 (1992)



## CONCLUSION :

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème général du lien entre la forme géométrique d'une membrane et son spectre de vibrations. Ainsi, la question la plus simple - en apparence- est celle de la biunivocité entre forme et spectre de fréquences propres. Sur cette question, nous avons tenté d'expliquer le contenu du théorème de Sunada, à la base de la découverte des premières formes planes isospectrales. Puis nous avons développé un système expérimental permettant de vérifier l'isospectralité de ces formes. Au passage, nous avons vérifié certains des aspects mathématiques du problème. Sur ce sujet, nous avons laissé un point en suspens : la vérification expérimentale de l'homophonie de certaines formes. D'ailleurs, il serait peut-être opportun de développer une méthode expérimentale -interférométrique par exemple- permettant de détecter l'allure des fonctions d'onde de manière à la fois globale et quantitative. De plus, on peut se poser la question, plus théorique, de l'existence de formes isospectrales tridimensionnelles. Cette question est, à notre connaissance, sans réponse à ce jour. Cette étude sur l'isospectralité a été l'occasion de discussions avec des mathématiciens et des physiciens théoriciens, qui ont beaucoup enrichi cette thèse.

Le deuxième thème qui nous a intéressés est celui des membranes au contour irrégulier. En particulier, nous avons vérifié l'existence de localisation des fonctions d'onde induite par la forme fractale du contour. Nous avons en fait montré qu'il existait deux mécanismes distincts pour cette localisation, que nous avons partiellement interprétés. De plus, nous posons la question de l'existence d'une dissipation associée à la forme irrégulière du contour. Avec notre système expérimental, un tel effet n'est pas observable. Cependant, on peut sans doute imaginer des expériences dans lesquelles ce mécanisme dissipatif pourrait être mesuré. Au passage, nous avons tenté de comprendre en profondeur les mécanismes dissipatifs présents dans notre expérience : nous n'avons que partiellement réussi. En effet, nous n'avons pas compris, par exemple, quel

nouvel effet physique intervenait pour les films de grande épaisseur. Ce deuxième thème a fait l'objet d'une étroite collaboration avec B. Sapoval et S. Russ, tout-à-fait enrichissante.

En réalité, ces deux sujets ont été en interaction quasi-permanente. Bien entendu, nous n'avions pas prévu initialement d'aborder tous ces problèmes..

Exprimons enfin l'espoir que ce travail ait quelques suites. Nous avons développé ci-dessus les quelques points laissés en suspens. De plus, nous pensons que le thème particulier de l'isospectralité est suffisamment général pour apparaître dans des contextes inattendus. Par exemple, à notre connaissance, la question posée par Schuster au siècle dernier sur la signature des molécules par leur spectre de vibrations est toujours sans réponse.