



HAL
open science

**MODELISATION DES DEFORMATIONS DIFFEREES
DU BETON SOUS SOLLICITATIONS BIAXIALES.
APPLICATION AUX ENCEINTES DE
CONFINEMENT DE BATIMENTS REACTEURS DES
CENTRALES NUCLEAIRES**

Farid Benboudjema

► **To cite this version:**

Farid Benboudjema. MODELISATION DES DEFORMATIONS DIFFEREES DU BETON SOUS SOLLICITATIONS BIAXIALES. APPLICATION AUX ENCEINTES DE CONFINEMENT DE BATIMENTS REACTEURS DES CENTRALES NUCLEAIRES. Matériaux. Université de Marne la Vallée, 2002. Français. NNT : . tel-00006945

HAL Id: tel-00006945

<https://theses.hal.science/tel-00006945>

Submitted on 22 Sep 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE MARNE LA VALLEE
U. F. R. DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ANNEE 2002

**MODELISATION DES DEFORMATIONS DIFFEREES DU BETON SOUS
SOLLICITATIONS BIAxiaLES. APPLICATION AUX ENCEINTES DE
CONFINEMENT DE BATIMENTS REACTEURS DES CENTRALES
NUCLEAIRES**

FARID BENBOUDJEMA

THESE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN GENIE CIVIL, SPECIALITE STRUCTURES

le 19 décembre 2002

devant la commission d'examen composée de

<i>M. Paul ACKER</i>	<i>, Examineur</i>
<i>M. Grégory HEINFLING</i>	<i>, Examineur</i>
<i>M. Adnan IBRAHIMBEGOVIĆ</i>	<i>, Président du jury</i>
<i>M. Yann LE PAPE</i>	<i>, Examineur</i>
<i>M. Fékri MEFTAH</i>	<i>, Examineur</i>
<i>M. Gilles PIJAUDIER-CABOT</i>	<i>, Rapporteur</i>
<i>M. Jean-Michel TORRENTI</i>	<i>, Directeur de thèse</i>
<i>M. Franz-Joseph ULM</i>	<i>, Rapporteur</i>



UNIVERSITE DE MARNE LA VALLEE
U. F. R. DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

**MODELISATION DES DEFORMATIONS DIFFEREES DU BETON SOUS
SOLLICITATIONS BIAxiaLES. APPLICATION AUX ENCEINTES DE
CONFINEMENT DE BATIMENTS REACTEURS DES CENTRALES
NUCLEAIRES**

AU LABORATOIRE DE MECANIQUE DE MARNE-LA-VALLEE
([HTTP://WWW-MECA.UNIV-MLV.FR](http://www-meca.univ-mlv.fr))

AVEC LA COLLABORATION,

**DU DEPARTEMENT MATERIAUX ET MECANIQUE DES COMPOSANTS
R&D - EDF / SITE DES RENARDIERES**

([HTTP://WWW.EDF.FR](http://www.edf.fr))

FARID BENBOUDJEMA

ADRESSE ELECTRONIQUE : FBENBOUDJEMA@YAHOO.COM

« Étant entendu que les modèles sans données n'ont aucune valeur prédictive [...] les données sans modèles apportent la confusion »

Jacques Louis LION, professeur au collège de France

Je dédie ce mémoire à mon père Abderrahmane ...

AVANT-PROPOS

Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire de Mécanique (LaM) de l'Université de Marne-La-Vallée sous la direction de Jean-Michel TORRENTI, Professeur associé IRSN¹, et Fékri MEFTAH, Maître de Conférences à l'Université de Marne-La-Vallée. Je tiens sincèrement à leur exprimer toute ma reconnaissance pour leurs conseils avisés et leurs disponibilités, pendant ces trois années.

Ce travail a été effectué en collaboration avec le Département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC) de la Division Recherche et Développement du site des Renardières d'EDF². Mes remerciements vont à Grégory HEINFLING, Ingénieur de Recherche à EDF/SEPTEN³, qui a été à l'origine de ce projet de partenariat, et à Yann LE PAPE, Ingénieur de Recherche à MMC, qui a contribué à son déroulement.

Je tiens également à remercier Adnan IBRAHIMBEGOVIC, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, pour m'avoir fait l'honneur de présider au jury de la soutenance.

Je remercie très chaleureusement Gilles PIJAUDIER-CABOT, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et Franz-Joseph ULM, Professeur au Massachusetts Institute of Technology, pour avoir accompli la lourde tâche de rapporter ce travail. Je remercie également Paul ACKER, Directeur de Recherche chez Lafarge, pour avoir examiné ce travail.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes du Laboratoire de Mécanique, qui par leurs conseils et les échanges enrichissant que nous avons eu, ont contribué à faire avancer ce travail. Mes remerciements vont particulièrement à Alain SELIER, actuellement Maître de Conférences à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, à Ahmed MEBARKI, Professeur à l'Université de Marne-La-Vallée et à Stéphane, Ali, Jorge, doctorants au LaM.

Je remercie toute l'équipe de l'Institut Universitaire Professionnalisé de Génie Civil et Infrastructures de l'Université de Marne-La-Vallée pour leurs soutiens.

Je suis enfin très reconnaissant envers ma famille, en particulier ma maman Houa, et envers Sitti, pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces trois années.

Ce mémoire de thèse peut être téléchargé sur la page <http://farid.benboudjema.free.fr/>

¹ Institut de Radioprotection et de sûreté Nucléaire.

² Electricité De France.

³ Service d'Etude et Projet Thermique et Nucléaire.

RESUME

La prédiction des déformations différées est d'une très grande importance pour l'étude de la durabilité et de l'aptitude au fonctionnement à long terme des structures en béton (ponts, enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires, etc.). En effet, elles peuvent être à l'origine de la fissuration, de pertes de précontrainte, d'une redistribution des contraintes et même, plus rarement, de la ruine de l'ouvrage.

L'objectif de ce travail est alors de développer des outils de calcul numérique, capable de prédire le comportement différé de structures en béton. Pour cela, un nouveau modèle hydromécanique du béton est développé, intégrant la description des phénomènes de séchage, de retrait, de fluage et de fissuration. La modélisation du retrait de dessiccation est basée sur une approche unifiée du fluage et du retrait. Les modèles de fluage propre et de fluage de dessiccation sont basés sur des mécanismes physico-chimiques plausibles, se produisant à différentes échelles d'observation de la pâte de ciment. Le modèle de fluage propre est associé à la micro-diffusion de l'eau adsorbée entre la porosité interhydrates et intrahydrates et la porosité capillaire, et au glissement des feuilletts de C-S-H à l'échelle des nanopores. Le fluage de dessiccation est induit par la micro-diffusion de l'eau adsorbée à différentes échelles de porosité sous l'effet d'une sollicitation mécanique et hydrique combinée. Le retrait de dessiccation résulte, en effet, de la déformation élastique et différée du squelette solide, sous les effets de la pression capillaire et de la pression de disjonction. Le comportement mécanique du béton fissuré est modélisé en utilisant le formalisme de l'élastoplasticité endommageable orthotrope. La combinaison de ces phénomènes est effectuée dans le cadre de la mécanique des milieux poreux non saturés, en s'appuyant sur le concept des contraintes effectives.

Ce modèle a été incorporé dans un code de calcul aux éléments finis. L'analyse du comportement différé d'éprouvettes et de structures en béton et en béton précontraint, soumises à des sollicitations hydriques et mécaniques combinées, est alors présentée.

Mots-clés : béton, déformations différées, fluage, retrait, fissuration, dessiccation, modélisation éléments finis, couplage, pertes de précontrainte, centrale nucléaire.

ABSTRACT

The prediction of delayed strains is of crucial importance for durability and long-term serviceability of concrete structures (bridges, containment vessels of nuclear power plants, etc.). Indeed, creep and shrinkage cause cracking, losses of pre-stress and redistribution of stresses, and also, rarely, the ruin of the structure.

The objective of this work is to develop numerical tools, able to predict the long-term behavior of concrete structures. Thus, a new hydro mechanical model is developed, including the description of drying, shrinkage, creep and cracking phenomena for concrete as a non-saturated porous medium. The modeling of drying shrinkage is based on an unified approach of creep and shrinkage. Basic and drying creep models are based on relevant chemo-physical mechanisms, which occur at different scales of the cement paste. The basic creep is explicitly related to the micro-diffusion of the adsorbed water between interhydrates and intrahydrates and the capillary pores, and the sliding of the C-S-H gel at the nano-porosity level. The drying creep is induced by the micro-diffusion of the adsorbed water at different scales of the porosity, under the simultaneous effects of drying and mechanical loadings. Drying shrinkage is, therefore, assumed to result from the elastic and delayed response of the solid skeleton, submitted to both capillary and disjoining pressures. Furthermore, the cracking behavior of concrete is described by an orthotropic elastoplastic damage model. The coupling between all these phenomena is performed by using effective stresses which account for both external applied stresses and pore pressures.

This model has been incorporated into a finite element code. The analysis of the long-term behavior is also performed on concrete specimens and prestressed concrete structures submitted to simultaneous drying and mechanical loadings.

Keywords: concrete, delayed strains, creep, shrinkage, cracking, drying, finite element modeling, coupling, prestress losses, nuclear power plant.

TABLE PRINCIPALE DES MATIÈRES :

INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE.....	10
I. ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE DU COMPORTEMENT HYDRIQUE ET MECANIQUE DES MATERIAUX A MATRICE CIMENTAIRE	16
I-1 INTRODUCTION.....	16
I-2 LES CARACTERISTIQUES DE LA PATE DE CIMENT	16
I-2.1 <i>Structure et morphologie du gel de C-S-H</i>	16
I-2.2 <i>Les pores de la pâte de ciment</i>	17
I-2.3 <i>L'eau dans la pâte de ciment</i>	17
I-3 OBSERVATIONS EXPERIMENTALES SUR LE COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BETON	19
I-3.1 <i>Le séchage</i>	19
I-3.2 <i>La fissuration des bétons</i>	26
I-3.3 <i>La déformation de retrait de dessiccation</i>	30
I-3.4 <i>La déformation de fluage</i>	37
I-4 MODELISATION DU COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BETON	49
I-4.1 <i>Modélisation du séchage</i>	49
I-4.2 <i>Modélisation de la fissuration</i>	52
I-4.3 <i>La déformation de retrait de dessiccation</i>	61
I-4.4 <i>Modélisation de la déformation de fluage</i>	66
I-5 CONCLUSION ET PROPOSITION D'UN CADRE DE MODELISATION.....	72
II. MODELISATION DU COMPORTEMENT HYDRIQUE ET MECANIQUE... 76	
II-1 INTRODUCTION.....	76
II-2 MODELISATION DU SECHAGE	76
II-2.1 <i>Équations gouvernant le séchage</i>	76
II-2.2 <i>Conditions aux limites</i>	80
II-2.3 <i>Conclusion sur la modélisation du séchage</i>	81
II-3 MODELISATION DE LA FISSURATION	81
II-3.1 <i>Formulation</i>	81
II-3.2 <i>Évolution de l'endommagement</i>	82
II-3.3 <i>Couplage entre la plasticité et l'endommagement</i>	83
II-3.4 <i>Plasticité</i>	84
II-3.5 <i>Objectivité vis-à-vis de la taille des éléments finis</i>	90
II-3.6 <i>Méthode d'identification des paramètres</i>	91
II-3.7 <i>Conclusion sur la modélisation de la fissuration</i>	92
II-4 MODELISATION DU FLUAGE PROPRE	92
II-4.1 <i>Fluage propre sphérique</i>	92
II-4.2 <i>Fluage propre déviatorique</i>	102
II-4.3 <i>Effet de l'humidité relative</i>	105
II-4.4 <i>Déformation totale de fluage propre</i>	106
II-4.5 <i>Conclusion sur la modélisation du fluage propre</i>	107
II-5 MODELISATION DU FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE	107
II-5.1 <i>Description des mécanismes</i>	108
II-5.2 <i>Équations constitutives</i>	108
II-5.3 <i>Évolution des déformations</i>	109

Table principale des matières

II-5.4	<i>Identification des paramètres du modèle</i>	111
II-5.5	<i>Conclusion sur la modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque</i>	111
II-6	MODELISATION DU RETRAIT DE DESSICCATION	112
II-6.1	<i>Effet de la pression capillaire</i>	112
II-6.2	<i>Pression de disjonction</i>	114
II-6.3	<i>Prise en compte de la pression capillaire et de disjonction</i>	115
II-6.4	<i>Expression de la déformation de retrait de dessiccation</i>	116
II-6.5	<i>Couplage avec la fissuration</i>	118
II-6.6	<i>Conclusion sur la modélisation du retrait de dessiccation</i>	120
II-7	INTEGRATION DES EQUATIONS CONSTITUTIVES DU MODELE.....	120
II-7.1	<i>Discrétisation Éléments Finis</i>	121
II-7.2	<i>Discrétisation des équations constitutives</i>	121
II-7.3	<i>Équations constitutives</i>	122
II-7.4	<i>Algorithme de résolution</i>	123
II-8	CONCLUSION SUR LA MODELISATION	128
III.	VALIDATION DU MODELE	132
III-1	INTRODUCTION.....	132
III-2	SIMULATIONS A L'ECHELLE CONSTITUTIVE DU MATERIAU	132
III-2.1	<i>Étude du comportement d'une pâte de ciment soumise à la dessiccation</i> .	133
III-2.2	<i>Étude du fluage propre sous des sollicitations uniaxiales et multiaxiales</i> .	139
III-3	SIMULATIONS A L'ECHELLE DE LA STRUCTURE	142
III-3.1	<i>Étude des effets du séchage sur le comportement mécanique</i>	143
III-3.2	<i>Étude du comportement différé sous des sollicitations biaxiales</i>	150
III-3.3	<i>Analyse des effets intrinsèques et structuraux induits par la dessiccation</i>	155
III-3.4	<i>Simulation du comportement différé d'une enceinte de confinement</i>	176
III-4	CONCLUSION	185
	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	187
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	191
	ANNEXE A INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON DE FLUAGE	204
	ANNEXE B CONTRAINTES PRINCIPALES	206
B-1	CALCUL DES CONTRAINTES PRINCIPALES	206
B-2	CALCUL DES VECTEURS PROPRES	207
	ANNEXE C ÉVOLUTION ORTHOTROPE DES CONTRAINTES RESISTANTES EN TRACTION	209
	ANNEXE D CALCUL DES DEFORMATIONS DE FLUAGE	212
D-1	FLUAGE PROPRE	212
D-1.1	<i>Déformation de fluage propre sphérique</i>	213
D-1.2	<i>Déformation de fluage propre déviatorique</i>	221
D-1.3	<i>Déformation de fluage propre total</i>	224
D-2	FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE.....	225
D-2.1	<i>Expression discrétisée</i>	225
D-2.2	<i>Cas où les contraintes et l'incrément d'humidité relative sont constants.</i> ..	226
	ANNEXE E RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME HYDROMECHANIQUE	228

Table principale des matières

E-1	RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME HYDRIQUE	229
E-1.1	<i>Formulation faible</i>	229
E-1.2	<i>Formulation Éléments Finis</i>	229
E-1.3	<i>Résolution itérative incrémentale</i>	230
E-2	RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME MECANIQUE.....	232
E-2.1	<i>Formulation faible</i>	232
E-2.2	<i>Formulation Éléments Finis</i>	233
E-2.3	<i>Résolution itérative incrémentale</i>	233
ANNEXE F	PROPRIETES DU MODELE DE FLUAGE	235
F-1	CAS D'UN AMORTISSEUR	236
F-2	CAS D'UNE CHAINE DE KELVIN-VOIGT.....	237
ANNEXE G	SCHEMA ITERATIF DE RESOLUTION	239
ANNEXE H	VALIDATION DU MODELE DE FISSURATION	244
H-1	DESCRIPTIF DES ESSAIS	244
H-2	SERIE NUMERO 3	246
H-3	SERIE NUMERO 4	249
TABLE DES ILLUSTRATIONS	254

INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE

Contexte de l'étude :

Les chocs pétroliers de 1973 et 1974 ont conduit à des modifications de la politique énergétique française. Les pouvoirs publics ont alors développé le programme nucléaire civil, afin de réduire la dépendance énergétique du pays. En effet, la France possède des réserves en uranium estimées à plus de 30 ans (consommation actuelle). Électricité de France (EDF) a choisi d'adopter pour les filières REP⁴ 1300 et 1400 MWe le concept de double enceinte, afin de garantir la sécurité de ses installations nucléaires.

Une paroi externe en béton armé protège le réacteur nucléaire des agressions naturelles et accidentelles. En cas d'accident nucléaire (risque de dispersion d'éléments radioactifs), la protection de l'environnement est garantie par une paroi interne en béton d'épaisseur 1,2 m (réacteur de type REP 1400 MWe) et biaxialement précontrainte. Elle est dimensionnée pour résister à une pression interne de 0,5 MPa absolue et à une température voisine de 140°C, correspondant à l'accident de dimensionnement APRP (Accident par Perte de Réfrigérant Primaire).

Un enjeu majeur pour EDF concerne actuellement la prédiction des pertes de précontrainte dans les enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires. Ces pertes de précontrainte des câbles réduisent la marge de résistance à la fissuration de la paroi interne de l'enceinte en situation accidentelle et, dans le cas où elles seraient suffisamment importantes, pourraient conduire à l'augmentation de son taux de fuite lors des épreuves⁵. Bien que la sûreté de l'installation ne soit pas remise en cause, EDF doit dans ce cas mettre en œuvre un revêtement étanche afin de garantir le respect du critère réglementaire sur le taux de fuite de la paroi interne. L'arrêt de tranches en service a un coût très élevé (perte d'exploitation d'environ 150 k€ par jour + coût des réparations). La principale cause aux pertes de précontrainte est l'évolution des déformations différées du béton incluant différents mécanismes de fluage et de retrait, et notamment les effets des sollicitations biaxiales sur ces déformations.

Position du problème :

La découverte des déformations différées du béton intervient assez tardivement par rapport à la date de dépôt du premier brevet du ciment Portland par Joseph Apsdin en 1824. C'est en 1911, qu'Eugène Freyssinet en fait la désagréable expérience lors de la construction du pont du Veudre sur l'Allier (Ordonez 1979). Il constate sur ce pont, de taille importante pour l'époque, des déformations considérables qui compromettent l'intégrité de la structure. Le pont ne sera sauvé que par l'utilisation de vérins pour compenser l'amplitude des déformations importantes subies. Cette aventure lui révéla l'existence de déformations

⁴ Réacteur à eau pressurisée.

⁵ Afin de vérifier périodiquement que l'enceinte jouera son rôle de confinement en cas d'accident, des épreuves d'enceinte (application d'une pression interne de 0,5 MPa en air sec et à température ambiante) sont menées à l'issue de sa construction, puis ensuite tous les dix ans (Chauvel et al. 1998).

différées, essentiellement de retrait et de fluage, mais sans les moyens d'en définir les lois complexes, à ce moment.

Les premières affirmations de l'existence d'une déformation différée, fonction de la durée de chargement, ne se sont produites que seize ans plus tard, et se heurtèrent alors à l'incrédulité la plus obstinée. Les mesures effectuées furent considérées comme anormales, entachées d'erreur, et personne n'en tenait compte. Cette suspicion était liée au fait que les déformations des bétons étaient calquées sur celles des aciers (qui ne subissent ni retrait ni fluage significatif). La prise de conscience de la communauté scientifique que ces déformations étaient réelles, ne se produit que bien plus tardivement, grâce notamment aux travaux de Faber et Glanville.

Pourtant, la déformation différée du béton est loin d'être négligeable. Fonction de sa composition et des conditions environnantes, elle est en moyenne égale à 3 fois la déformation élastique instantanée (Le Roy 1996).

De plus, le retrait induit un raccourcissement différentiel du béton, par rapport à ses armatures et aux points fixes de la construction, provoquant des contraintes de traction incontrôlées, qui fissurent les structures avant même d'être soumises aux charges d'utilisation.

En outre, le processus de séchage est un phénomène très lent. Les ruptures, ces dernières années, d'anciennes tours en maçonnerie (comme la tour municipale de Pavie en Italie en 1989), après des centaines d'années d'existence, semblent s'expliquer à travers l'interaction complexe entre les phénomènes de séchage, de retrait, de fluage et les effets d'échelle (Bažant et Ferretti 2001).

De plus, dans le cas de structures de dimensions importantes (telles que les enceintes de confinement), il est impossible de réaliser dans des conditions de laboratoire (conditions aux limites maîtrisées), une expérimentation à cette échelle. Il est alors nécessaire, à partir des résultats obtenus sur des éprouvettes de laboratoire, de prédire le comportement de la structure. Cette transition ne peut être effectuée rigoureusement, que si les phénomènes physico-chimiques concernés sont connus et modélisés en conséquence.

Ainsi, la prédiction du comportement différé des structures passe par l'étude des mécanismes des déformations différées et leurs modélisations, afin d'en quantifier, de façon la plus précise, les cinétiques et les amplitudes.

Dans ce contexte, l'objectif principal de ce travail est de développer un modèle de comportement hydromécanique, qui intègre les phénomènes de séchage, de retrait, de fluage et de fissuration⁶, dans le but d'étudier et de prédire le comportement différé de structures en béton et en béton précontraint. Nous nous limitons dans cette étude à des chargements mécaniques (extérieurs) modérés et à des valeurs de l'humidité relative habituellement rencontrées sous nos climats (intervalle 50-100 %).

Ce mémoire de thèse s'articule autour de trois chapitres. Dans le premier chapitre, une analyse bibliographique du comportement hydromécanique, alliant à la fois les constatations expérimentales et les modélisations adoptées dans la littérature, est effectuée. Cette analyse tente de relier la microstructure du matériau béton, à son comportement macroscopique

⁶ Dans la majeure partie de ce travail, le terme micro-fissuration sera généralement plus approprié que le terme fissuration. Néanmoins, sauf mention contraire, les termes de fissuration et micro-fissuration seront indifféremment employés.

observé. L'étude des modélisations existantes permet de mettre en avant, à travers les constatations expérimentales, leurs pertinences et leurs limites. Nous serons alors en mesure de positionner la modélisation à adopter dans notre travail et de proposer un cadre de modélisation pertinent du comportement hydromécanique du béton.

Le développement d'un nouveau modèle de comportement différé est présenté dans le deuxième chapitre. Ce modèle intègre la description des phénomènes susmentionnés.

Le séchage est décrit à l'aide d'une équation de diffusion non linéaire. Elle permet de calculer simplement la distribution et l'évolution de l'humidité relative dans le matériau, qui seront utilisées pour le calcul des déformations différées.

Le fluage propre est modélisé en se basant sur les mécanismes de micro-diffusion de l'eau adsorbée interhydrates (entre les hydrates) et intrahydrates (au sein des hydrates) vers la porosité capillaire et sur le mécanisme de glissement des feuilletts de C-S-H dans la nanoporosité. Chacun de ces mécanismes est associé au fluage propre sphérique et déviatorique, respectivement. Cette modélisation intègre donc l'effet de sollicitations mécaniques multiaxiales, sans introduire artificiellement un coefficient de Poisson de fluage.

Le modèle de fluage de dessiccation intrinsèque utilisé est basé sur le mécanisme de micro-diffusion de l'eau adsorbée. Il s'agit du modèle de Bažant et Chern (1985) étendu, pour tenir compte de l'interaction entre l'eau adsorbée et le squelette solide, lorsque l'effet de la dessiccation se conjugue à l'effet de contraintes mécaniques.

La modélisation du retrait de dessiccation est basée sur une approche unifiée du retrait et du fluage. Le retrait de dessiccation est considéré comme étant la déformation élastique et la déformation de fluage du squelette solide sous l'effet résultant de la pression capillaire et de la pression de disjonction.

Le comportement mécanique du béton fissuré est intégré dans la modélisation par le biais d'un modèle élastoplastique endommageable. Ce type de modèle permet d'allier dans une même formulation les qualités des modèles d'endommagement (description de la dégradation de la raideur) et les qualités des modèles élastoplastiques (description des déformations anélastiques). Une formulation orthotrope a également été choisie afin de décrire le comportement mécanique du béton fissuré, dès qu'une micro-fissuration est induite en traction dans une direction préférentielle. Le couplage fluage/fissuration est basé sur le concept de contraintes effectives. Un schéma d'intégration implicite est alors utilisé pour résoudre le problème mécanique.

Dans le troisième et dernier chapitre, le modèle proposé est validé, à l'aide d'une confrontation des simulations numériques avec des résultats expérimentaux (existants dans la littérature). Des premières simulations sont effectuées en configuration homogène. Elles ont pour objectif de valider le modèle à l'échelle constitutive de la matière, par rapport aux hypothèses retenues pour décrire les mécanismes de déformations différées. Les simulations en configuration non homogène permettront de valider la modélisation sur des éprouvettes, soumises à des chargements hydromécaniques combinés, mais aussi d'appréhender le comportement global de structures en béton. Ces simulations serviront de base de données pour la prédiction du comportement différé de la zone courante de la paroi interne d'une enceinte de confinement générique.

Introduction et problématique

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale, dans laquelle nous rappelons le cadre de la modélisation, puis nous évaluons les apports du modèle, ainsi que ses limites. Des perspectives sur le développement théorique et sur la réalisation d'expériences sont alors proposées.

Chapitre I
Analyse bibliographique du comportement hydrique et mécanique
des matériaux a matrice cimentaire

I-1	INTRODUCTION.....	16
I-2	LES CARACTERISTIQUES DE LA PATE DE CIMENT	16
I-2.1	<i>Structure et morphologie du gel de C-S-H.....</i>	16
I-2.2	<i>Les pores de la pâte de ciment</i>	17
I-2.3	<i>L'eau dans la pâte de ciment.....</i>	17
I-3	OBSERVATIONS EXPERIMENTALES SUR LE COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BETON	19
I-3.1	<i>Le séchage.....</i>	19
I-3.1.1	Mécanismes du séchage	19
I-3.1.2	Effet temporel et effet d'échelle.....	21
I-3.1.3	Interaction séchage/comportement mécanique	22
I-3.1.3.1	La fissuration induite par le séchage.....	22
I-3.1.3.2	Les effets du séchage sur les propriétés mécaniques.....	23
I-3.1.4	Conclusion.....	25
I-3.2	<i>La fissuration des bétons.....</i>	26
I-3.2.1	Comportement expérimental du béton sous chargement	26
I-3.2.1.1	Sollicitations uniaxiales	26
I-3.2.1.1.1	Comportement en compression et en traction.....	26
I-3.2.1.1.2	Comportement intrinsèque/effet d'échelle.....	27
I-3.2.1.2	Sollicitations biaxiales	28
I-3.2.1.3	Sollicitations triaxiales.....	28
I-3.2.2	Les effets de la fissuration sur le séchage	29
I-3.2.3	Conclusion.....	29
I-3.3	<i>La déformation de retrait de dessiccation.....</i>	30
I-3.3.1	Mécanismes du retrait de dessiccation	30
I-3.3.2	Effet structural du retrait de dessiccation.....	31
I-3.3.3	Observations expérimentales.....	32
I-3.3.3.1	Éprouvettes de faible épaisseur	32
I-3.3.3.2	Éprouvettes d'épaisseur usuelle.....	33
I-3.3.3.2.1	Analyse des courbes d'évolution de la déformation de retrait.....	34
I-3.3.3.2.2	Paramètres influant sur le retrait.....	35
I-3.3.4	Conclusion.....	37
I-3.4	<i>La déformation de fluage</i>	37
I-3.4.1	Le fluage propre	37
I-3.4.1.1	Mécanismes du fluage propre	38
I-3.4.1.1.1	Fluage à court terme	38
I-3.4.1.1.2	Fluage à long terme	40
I-3.4.1.2	Effet de la composition et des conditions environnantes.....	41
I-3.4.2	Le fluage de dessiccation	42
I-3.4.2.1	La part structurale du fluage de dessiccation.....	43
I-3.4.2.2	La part intrinsèque du fluage de dessiccation.....	43
I-3.4.2.2.1	Les mécanismes du fluage de dessiccation intrinsèque.....	44
I-3.4.2.2.2	Les caractéristiques du fluage de dessiccation	45

Chapitre I : Table des matières

I-3.4.3	Le cas de la traction.....	46
I-3.4.4	Le cas des sollicitations multiaxiales en compression	47
I-3.4.4.1	Le coefficient de Poisson de fluage	47
I-3.4.4.2	Décomposition de la déformation de fluage propre.....	48
I-3.4.5	L'interaction fluage/fissuration	48
I-3.4.6	Conclusion.....	49
I-4	MODELISATION DU COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BETON	49
I-4.1	<i>Modélisation du séchage</i>	49
I-4.1.1	Modélisation physique du séchage.....	49
I-4.1.2	Modélisation simplifié du séchage.....	50
I-4.1.3	Conclusion.....	51
I-4.2	<i>Modélisation de la fissuration</i>	52
I-4.2.1	Le cas de la fissuration repartie.....	52
I-4.2.1.1	Choix du potentiel thermodynamique	52
I-4.2.1.2	Approche par la mécanique de l'endommagement élastique	52
I-4.2.1.2.1	Définition des contraintes effectives.....	53
I-4.2.1.2.2	Formulation des modèles d'endommagement	53
I-4.2.1.3	Approche par l'élastoplasticité adoucissante.....	56
I-4.2.1.4	Le couplage endommagement / élastoplasticité	57
I-4.2.2	Instabilité matérielle/phénomène de localisation	58
I-4.2.3	Conclusion.....	60
I-4.3	<i>La déformation de retrait de dessiccation</i>	61
I-4.3.1	Modélisation phénoménologique du retrait de dessiccation	61
I-4.3.1.1	Modélisation simplifiée	61
I-4.3.1.2	Modèle basé sur le mécanisme de pression capillaire	61
I-4.3.1.3	Modèle basé sur le mécanisme de pression capillaire et de pression de disjonction	62
I-4.3.2	Modélisation par la mécanique des milieux poreux.....	62
I-4.3.3	Modèles d'homogénéisation	64
I-4.3.4	Conclusion.....	65
I-4.4	<i>Modélisation de la déformation de fluage</i>	66
I-4.4.1	Le fluage propre	66
I-4.4.1.1	Modélisation du fluage propre.....	66
I-4.4.1.2	Modélisation de l'interaction fluage/fissuration	69
I-4.4.1.3	Conclusion	69
I-4.4.2	Le fluage de dessiccation	70
I-4.4.2.1	Modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque	70
I-4.4.2.2	Conclusion	72
I-5	CONCLUSION ET PROPOSITION D'UN CADRE DE MODELISATION.....	72

I. ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE DU COMPORTEMENT HYDRIQUE ET MECANIQUE DES MATERIAUX A MATRICE CIMENTAIRE

I-1 Introduction

Dans ce chapitre, une analyse bibliographique du comportement hydromécanique des matériaux à matrice cimentaire est menée.

La pâte de ciment étant le siège des déformations différées observées sur les bétons, il nous paraît important, dans une première partie, de revenir brièvement sur ses principales caractéristiques.

Ensuite, une étude du comportement expérimental et une analyse des mécanismes à l'origine des déformations différées sont effectuées. Cette étude permettra de mettre en évidence les propriétés importantes du comportement hydromécanique à prendre en compte dans la modélisation.

Enfin, la modélisation du comportement hydromécanique, telle qu'elle est adoptée dans la littérature, est présentée et analysée, afin d'en dégager ses avantages et ses limites.

A l'issue de cette analyse critique, un cadre de modélisation des phénomènes étudiés sera proposé.

I-2 Les caractéristiques de la pâte de ciment

La connaissance de la structure de la pâte de ciment est essentielle pour comprendre le comportement et les propriétés du béton. La pâte de ciment joue le rôle de « colle », qui confère au matériau béton ses propriétés de rigidité et de résistance. Elle est constituée de différents composés chimiques, dont le gel de C-S-H (silicate de calcium hydraté), à l'origine de son pouvoir adhérent. Elle se compose aussi de pores à différentes échelles, contenant de l'eau et/ou de l'air. L'eau en est un élément essentiel. Elle lui confère en effet ses propriétés de maniabilité (pour le transport et le moulage avant la prise) et de résistance mécanique (après avoir réagi avec le clinker). Mais elle est aussi responsable de ses principaux défauts (augmentation de la porosité et diminution de la résistance mécanique, présence inhérente d'agents agressifs, possibilité de transport d'agents agressifs, retrait et fluage).

I-2.1 Structure et morphologie du gel de C-S-H

Le C-S-H (ou gel de C-S-H) est l'hydrate principal du ciment Portland. Il est responsable de la structuration de la pâte de ciment durcie. Il est composé de particules solides (composition $(\text{CaO})_x(\text{SiO}_2)(\text{H}_2\text{O})_y$, où les valeurs de x et y dépendent de la teneur en calcium et en silicates dans la phase aqueuse, Viallis-Terrisse 2000). Il présente une grande surface spécifique (caractéristique des gels colloïdaux) et une porosité d'environ 28 %. La morphologie du gel serait peu influencée par le type de ciment utilisé ou le rapport e/c (Hansen 1986, Baroghel-Bouny 1994). Les surfaces du gel de ciment sont très attractives. Elles adhèrent entre elles et avec les autres éléments constitutifs du béton (sable, granulats, portlandite ...), ce qui explique le rôle de « colle » du ciment.

De nombreux modèles existent dans la littérature scientifique pour décrire sa structure et sa morphologie. Toutefois il semble que le modèle proposé par Feldman et Sereda (1968) soit le plus à même de justifier la plupart des comportements différés de la pâte de ciment (Guénot-

Delahaie 1997). Dans ce modèle, les C-S-H se présentent sous la forme de fibres formées de lamelles enroulées sur elles-mêmes. La lamelle de C-S-H est considérée de forme prismatique et ses dimensions sont environ de $100\ 000 \times 5000 \times 300\ \text{nm}^3$ (estimées à partir de mesures au microscope électronique à balayage, Hansen 1986). Chaque lamelle est constituée de 2 à 4 feuillettes simples mal cristallisés (Figure I-1), séparés par des espaces interfoliaires de 150 à 300 nm environ (Regourd 1982). Ces feuillettes sont capables d'avoir un mouvement relatif et la pénétration ou le départ de l'eau des espaces interfoliaires est possible.

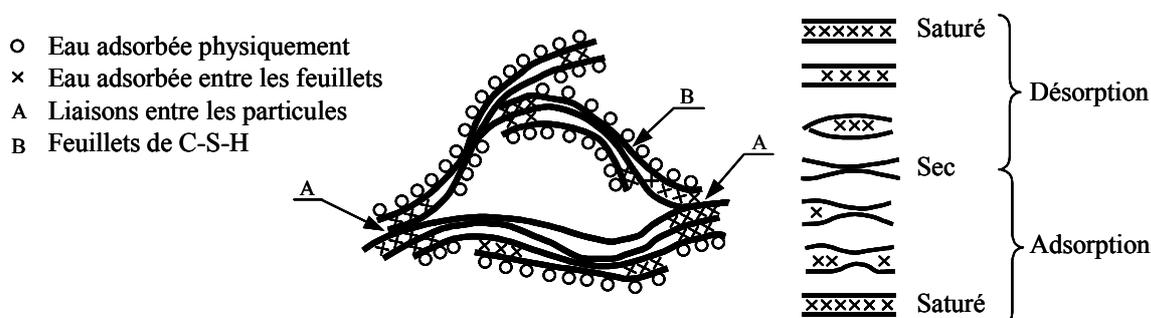


Figure I-1 Représentation schématique de la microstructure du gel de C-S-H selon le modèle de Feldman et Sereda (1968).

I-2.2 Les pores de la pâte de ciment

La pâte de ciment présente une porosité à différentes échelles d'observation. Sa caractérisation expérimentale nécessite alors l'emploi de différentes techniques d'investigation selon l'échelle désirée. Bien que ces techniques nécessitent souvent un remaniement de l'échantillon (par exemple un séchage préalable dans le cas de l'essai de porosimétrie au mercure), elles permettent de donner un ordre de grandeur de la taille et de la distribution des pores. On distingue généralement (les bulles d'air ont été omises) :

- La porosité capillaire : vestige de la porosité initiale du clinker, sa dimension caractéristique se situe dans la plage $0,01 - 50\ \mu\text{m}$. Il semble que les différences structurales entre des pâtes de ciment, de type ou de rapports e/c différents, proviennent essentiellement des différences entre les porosités capillaires (Hansen 1986, Baroghel-Bouny 1994) ;
- La porosité du gel de C-S-H : porosité intrinsèque aux hydrates (environ 0,28, voir le paragraphe § I-2.1), sa dimension caractéristique, de l'ordre du nanomètre, est beaucoup plus faible que celle de la porosité capillaire.

I-2.3 L'eau dans la pâte de ciment

L'eau est généralement classifiée selon la nature de sa liaison avec la pâte de ciment hydratée. Les différentes classes sont dans l'ordre croissant de liaison (Regourd 1982, Guénot-Delahaie 1997) :

- L'eau libre : elle n'est pas soumise aux forces d'attraction des surfaces solides. Elle se trouve principalement dans les pores capillaires de dimension supérieure à $10\ \mu\text{m}$;
- L'eau adsorbée : elle est adsorbée sur les surfaces solides :
 - Physiquement : les forces d'attraction sont de type van der Waals d'intensité faible (énergie de l'ordre d'une dizaine de $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$). Le nombre de molécules d'eau adsorbée est compris entre un et cinq (en fonction de l'humidité relative des

pores), où l'énergie de liaison avec le solide décroît lorsque l'on s'éloigne de la surface adsorbante. La structure de l'eau adsorbée et de la surface adsorbante n'est pas affectée par cette adsorption ;

- Chimiquement : des électrons sont mis en commun entre l'eau et la surface solide. L'intensité des forces mises en jeu est moyenne (énergie de l'ordre d'une centaine de $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$). Ainsi, la structure de la molécule d'eau est modifiée (dissociation par rupture de la liaison covalente O-H). Contrairement à l'adsorption physique, celle-ci a lieu uniquement dans des sites privilégiés (défauts cristallins par exemple) sur une couche d'eau au maximum ;

➤ L'eau chimiquement combinée : elle a réagi chimiquement avec le ciment pour former un nouveau produit, comme le C-S-H ou l'ettringite.

Ainsi, l'eau est présente dans différents états de liaison dans la pâte de ciment hydraté. Nous verrons plus loin que l'eau présente dans le gel de C-S-H et l'eau présente dans les zones d'adsorption empêchée semblent jouer un rôle majeur dans le comportement différé du béton. Les caractéristiques des eaux concernées sont présentées brièvement :

- Eau dans les C-S-H :

A partir de multiples méthodes expérimentales, Sierra (1974 cité par Regourd 1982) a pu identifier dans la structure des C-S-H, la présence de l'eau sous trois formes, classées ici par ordre décroissant d'énergie de liaison avec le solide (Figure I-2) :

- L'eau hydroxylique (groupement OH) : elle est liée aux atomes de silicium et de calcium à la surface des feuillets ;
- L'eau interfoliaire (ou interfeuille) : elle est liée aux feuillets par des groupements hydroxyles. Elle intervient dans la cohésion intrinsèque de la lamelle ;
- L'eau interlamellaire : elle est soit fixée à la surface des lamelles par un hydroxyle, soit liée à d'autres molécules d'eau.

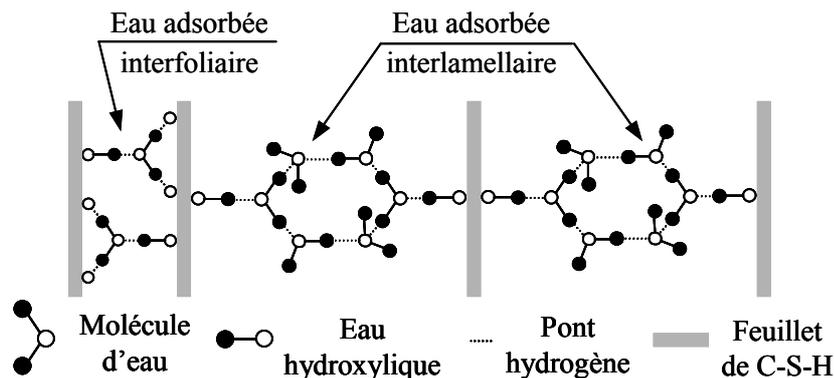


Figure I-2 État de l'eau dans le gel de C-S-H selon Sierra (1974 cité par Regourd 1982).

- Eau dans les zones d'adsorption empêchée :

Sur une surface plane, l'eau est librement adsorbée jusqu'à une épaisseur de 5 molécules pour une humidité relative proche de l'unité. La molécule d'eau a un diamètre d'environ $2,6 \text{ \AA}$ ce qui donne une épaisseur de la couche d'adsorption de 13 \AA . La distance interfoliaire doit donc être supérieure à 26 \AA pour que l'adsorption se produise librement. Or, cette distance est en moyenne proche de 17 \AA . L'adsorption libre ne peut donc avoir lieu, puisque les surfaces

adsorbantes sont trop proches. On est alors en zone dite d'adsorption empêchée (Figure I-3). Dans ces zones, l'eau fortement adsorbée, est sous une pression, dite de disjonction, de l'ordre de 130 MPa (Bažant 1972). Cette pression s'oppose aux forces d'attraction, qui existent entre les particules de C-S-H et qui maintiennent la structure du squelette. Cette eau est ainsi un élément structural à part entière du matériau, capable de transmettre localement les contraintes.

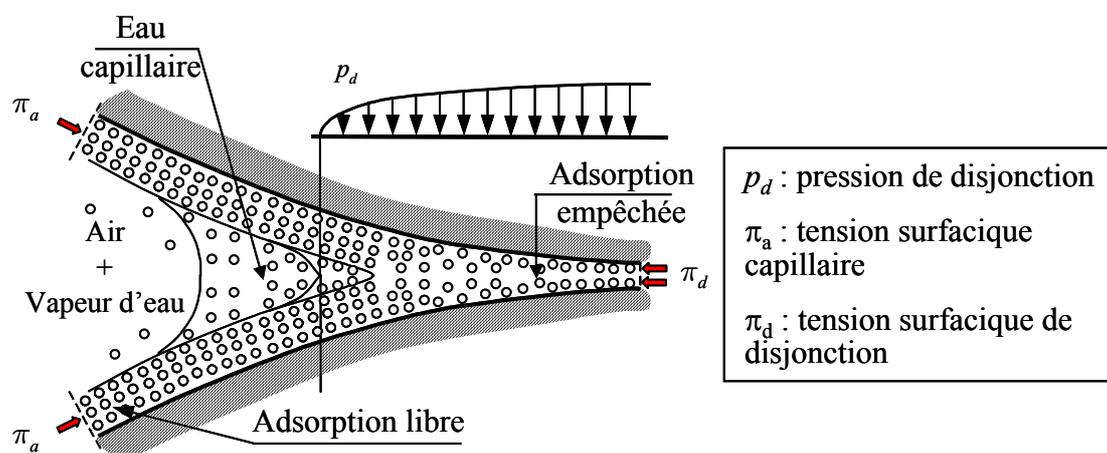


Figure I-3 Description idéalisée de l'eau dans les zones d'adsorption empêchée et de la transition avec les pores capillaires (Bažant 1972).

I-3 Observations expérimentales sur le comportement hydromécanique du béton

I-3.1 Le séchage

L'exposition d'une structure en béton à une humidité relative environnante, inférieure à celle régnant au sein du matériau est à l'origine d'un déséquilibre hygrométrique. Ce déséquilibre se traduit par un mouvement de l'eau de l'intérieur du matériau vers l'extérieur, conduisant au séchage de celui-ci. La prise en compte du transport de l'eau au sein du béton est d'une grande importance pour les matériaux à matrice cimentaire. En effet, la teneur en eau affecte considérablement l'évolution des déformations de retrait et de fluage. En outre, le séchage s'accompagne généralement d'effets structuraux, du fait du gradient de déformations induit. Ainsi, la connaissance des mécanismes du séchage est primordiale.

I-3.1.1 Mécanismes du séchage

L'eau est présente dans la pâte de ciment sous sa phase liquide et gazeuse. Bien que le mécanisme moteur du séchage soit le gradient d'humidité relative, lié à la phase vapeur, l'eau liquide est également concernée. L'équilibre thermodynamique entre les phases vapeurs et liquides doit être en effet maintenu. Le séchage fait intervenir de multiples mécanismes complexes, qui se produisent de façon plus ou moins couplés (Coussy et al. 2001, Daïan 2001, Mainguy et al. 2001). Les phénomènes de perméation, diffusion, adsorption-désorption, condensation-évaporation sont en effet mis en jeu dans la pâte de ciment (Figure I-4).

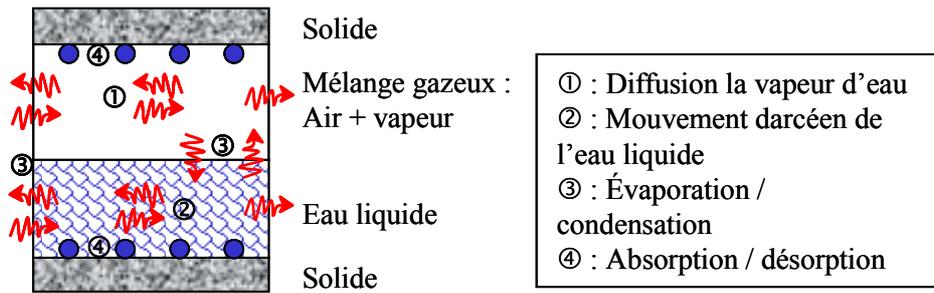


Figure I-4 Représentation schématique des mécanismes de transport de l'eau au sein de la pâte de ciment.

Néanmoins, trois mécanismes prédominants de migration de l'eau se dégagent (Xi et al. 1994) :

La diffusion moléculaire :

Lorsque l'humidité relative est assez faible dans les pores, une seule couche d'eau est adsorbée à la surface (Figure I-5a). Dès que l'humidité relative augmente, le nombre de couches d'eau adsorbée augmente, induisant deux effets opposés. D'une part, l'espace disponible à la vapeur d'eau pour diffuser diminue et donc la résistance au transport augmente. D'autre part, les forces d'attraction de la surface du solide diminuent et donc la résistance au transport diminue. Lorsque l'humidité relative dépasse une valeur seuil, un ménisque se forme à chaque extrémité des cols reliant les macropores (Figure I-5b). Étant donné qu'une partie du transport de l'eau se fait sous phase vapeur, les processus de condensation et d'évaporation aux extrémités des cols accélèrent fortement le processus de diffusion.

Ce mécanisme est dominant pour des pores de dimension 50 nm – 10 µm (Xi et al. 1994), ce qui correspond typiquement à la taille des pores capillaires (§ I-2.2).

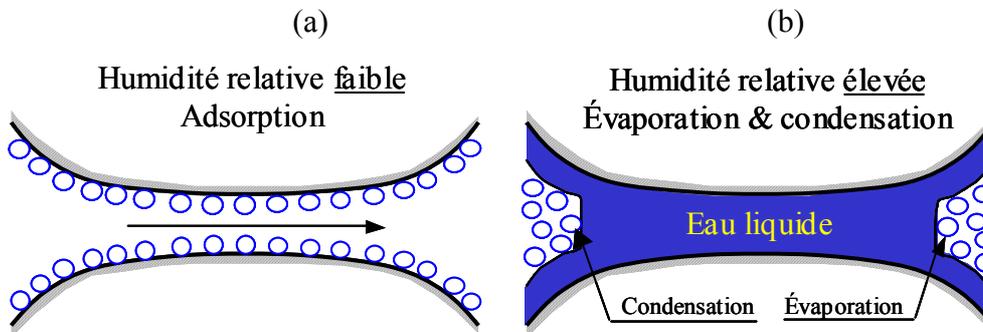


Figure I-5 La diffusion moléculaire (Xi et al. 1994).

La diffusion de Knudsen :

Les nanopores (de dimension inférieure à 50 nm) constituent une grande partie des pores de la pâte de ciment. Les dimensions de ces pores sont plus faibles que le libre parcours moyen des molécules d'eau (environ 80 nm). Les collisions entre les molécules, ainsi que les collisions contre les parois des pores constituent alors la principale source de résistance à la diffusion des molécules d'eau (Figure I-6a).

La diffusion surfacique :

Ce mécanisme a lieu aussi dans les nanopores, où les molécules d'eau sont soumises aux champs de force des parois des pores. Le processus de transport est thermiquement activé. Il est gouverné par les sauts des molécules d'eau entre les sites d'adsorption (Figure I-6b). Ce

mécanisme a lieu principalement lorsque l'eau présente est essentiellement adsorbée, ce qui est le cas lorsque l'humidité relative est faible (Xi et al. 1994).

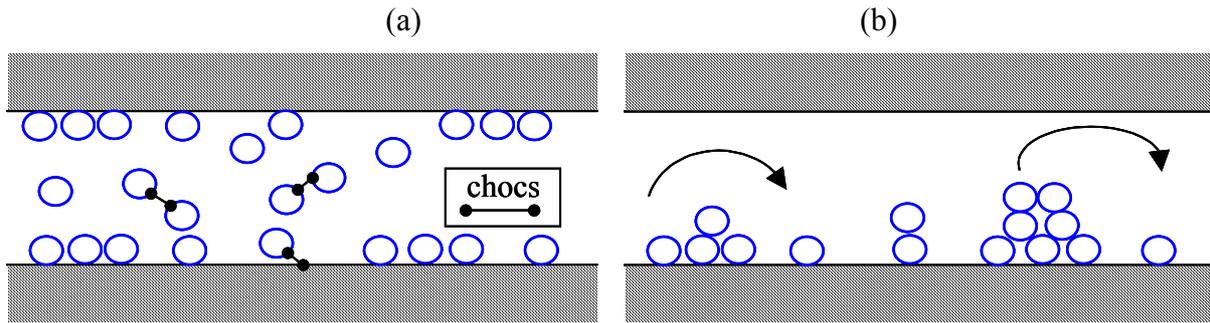


Figure I-6 La diffusion de Knudsen (a) et la diffusion surfacique (b) (Xi et al. 1994).

I-3.1.2 Effet temporel et effet d'échelle

Le processus de séchage, dans les matériaux à matrice cimentaire, est un phénomène très lent (1000 à 10000 fois plus lent que le processus de diffusion thermique, Acker et Ulm 2001). Cela est visible sur la Figure I-7, où la distribution de la teneur en eau est reportée (Acker et al. 1990).

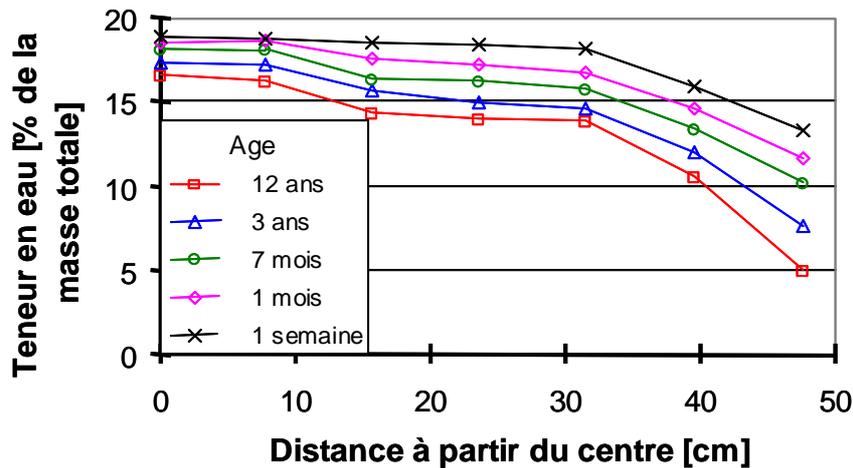


Figure I-7 Distribution de la teneur en eau dans l'éprouvette à différents instants (Acker et al. 1990).

Ces mesures ont été effectuées sur un bloc de béton imposant (prisme de dimension $100 \times 100 \times 200$ cm) séchant de façon unidirectionnelle sur une longueur de 1 m, pendant 12 ans. On constate sur la Figure I-7 une distribution fortement différentielle de la teneur en eau. L'équilibre hydrique est loin d'être atteint après 12 années de séchage. Les auteurs estiment, par extrapolation, la fin du séchage à 120 ans.

Par conséquent, les effets du séchage, à long terme, sont peu sensibles aux variations cycliques courtes, et dépendent plutôt de l'humidité relative moyenne de la période la plus sèche de l'année (Acker et Ulm 2001). Cela a été aussi montré à travers une analyse stochastique des effets du séchage sur les structures en béton (Bažant et Xi 1993). Cette étude a montré qu'une variation cyclique journalière de l'humidité relative n'affecte sensiblement le comportement du béton que sur une largeur inférieure à 5 cm, et que les résultats sont plutôt affectés par la valeur moyenne de l'humidité relative.

De plus, les mesures expérimentales de perméabilité et de perte en masse indiquent que les caractéristiques de transport de l'eau ne sont pas affectées significativement par l'âge du

béton, dès que l'âge est supérieur à une vingtaine de jours (Powers et *al.* 1954, Gamble et Parrott 1978). Ainsi, l'étude de structures suffisamment âgées ne nécessite pas la prise en compte de ce paramètre.

I-3.1.3 Interaction séchage/comportement mécanique

Nous allons voir dans le paragraphe § I-3.3.2 que le retrait différentiel, induit par le séchage, provoque une fissuration de peau. Nous allons étudier dans cette partie, quelles sont les caractéristiques de la fissuration induite et ses effets sur les propriétés mécaniques.

I-3.1.3.1 La fissuration induite par le séchage

Les observations au microscope optique à fluorescence et au microscope électronique à balayage (MEB) permettent d'observer la microstructure du matériau à différentes échelles d'observation. Ces observations mettent en évidence, sur des éprouvettes de mortier soumises à la dessiccation, l'existence de fissures induites par la dessiccation, dont l'ouverture est typiquement comprise entre 0,25 μm et 50 μm (Bažant et *al.* 1986, Sicard et *al.* 1992, Bisschop et van Mier 2002, Figure I-8).

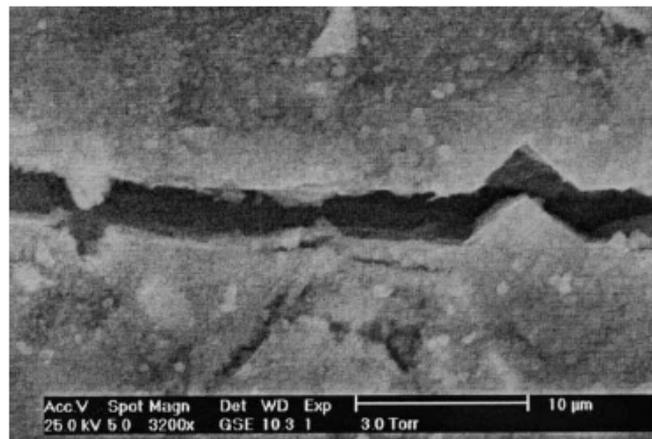


Figure I-8 Ouverture typique des fissures induites par la dessiccation, observée au microscope électronique à balayage (Bisschop et van Mier 2002).

L'analyse de répliques au MEB permet d'observer la micro-fissuration en peau d'éprouvette. La technique des répliques consiste à observer une empreinte protégée par un film en plastique insensible au vide du MEB. A l'aide de cette technique, Sicard et *al.* (1992) ont observé une micro-fissuration prononcée sur des éprouvettes, après 400 jours de dessiccation (Figure I-9a). L'application d'un chargement en compression n'empêche pas l'apparition de micro-fissures (Figure I-9b).

Un traitement numérique des images obtenues permet de quantifier l'orientation des micro-fissures, représentée à l'aide d'une rosace d'orientation (Figure I-9). L'obtention d'une rosace d'orientation circulaire met en évidence une distribution isotrope des micro-fissures dans le plan étudié (plan perpendiculaire à la direction de séchage). Dans le cas où la rosace d'orientation obtenue est aplatie selon l'axe horizontal, les micro-fissures sont majoritairement verticales. L'étude des rosaces d'orientation indique que :

- La micro-fissuration induite est quasi-isotrope en peau (Figure I-9a). Un résultat similaire a été obtenu par Colina et Acker (2000) sur des micro-bétons et des argiles soumis à la dessiccation.
- L'application d'un chargement en compression verticale modifie alors l'orientation des micro-fissures. Ainsi, on constate notamment une diminution significative des micro-fissures horizontales (Figure I-9b).

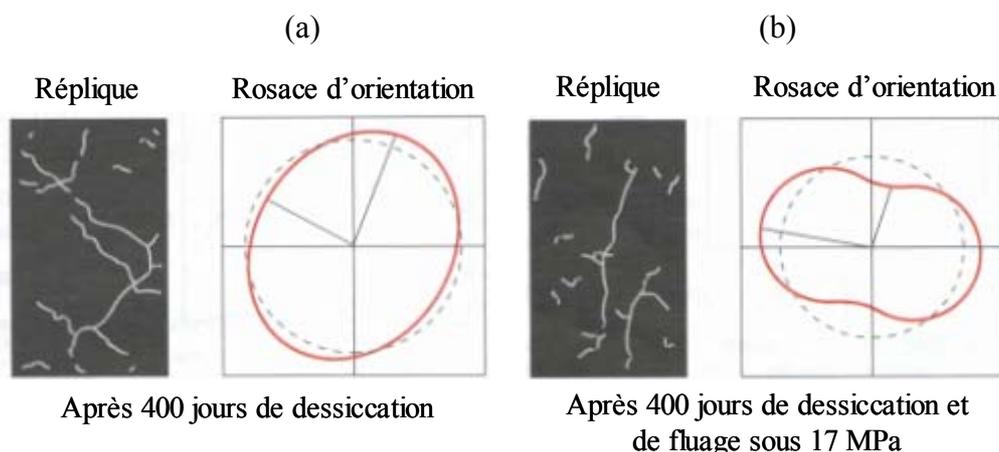


Figure I-9 Microfissuration à la surface d'une éprouvette en béton, relevée et analysée à l'aide de répliques pour différentes conditions d'essai (Sicard et *al.* 1992).

I-3.1.3.2 Les effets du séchage sur les propriétés mécaniques

La fissuration induite par le séchage peut être à l'origine de la dégradation des propriétés mécaniques du béton (résistance, module d'Young). En effet, les mesures expérimentales de ces propriétés sont sensibles aux conditions de conservation hydrique de l'éprouvette. Pour des éprouvettes jeunes, l'effet de la fissuration induite par le séchage s'accompagne des effets d'inhibition de l'hydratation. En effet, la réaction d'hydratation s'arrête lorsque l'humidité relative descend en dessous de 70-80 % (Xi et *al.* 1994). Par conséquent, une éprouvette préséchée au jeune âge sera prédisposée à avoir des propriétés mécaniques plus faibles. A cela s'ajoutent (et c'est le cas aussi des éprouvettes chargées tardivement) les effets des pressions existantes dans la pâte de ciment (osmotique, capillaire ou disjonction) qui peuvent jouer le rôle de « précontraintes » et donc modifier les propriétés mécaniques (Torrenti 1987).

Sur des éprouvettes placées dans des ambiances différentes assez tardivement (afin de s'affranchir des effets de la réaction d'hydratation), les résultats obtenus sont contradictoires dans la plage d'humidité relative concernant notre étude (50 – 100 %).

Brooks et Neville (1977) ont mesuré à 28, 56 et 84 jours les caractéristiques mécaniques (module d'Young et résistance) en traction et en compression d'éprouvettes conservées soit dans l'eau, soit dans une ambiance à une humidité relative de 60 %. Les éprouvettes testées (composition 1:2:4:0,5) sont cylindriques de diamètre 76 mm et de hauteur 255 mm. Les différents résultats obtenus sont reportés dans le Tableau I-1. Ces mesures indiquent que le module d'élasticité sécant des éprouvettes séchées est plus faible que celui des éprouvettes conservées dans l'eau, quel que soit le sens de la sollicitation (compression ou traction).

Tableau I-1 Évolution des propriétés mécaniques du béton selon le mode de conservation des éprouvettes (eau ou air), d'après Brooks et Neville (1977).

Mode de conservation	f_{c56}/f_{c28}	f_{c84}/f_{c28}	f_{t56}/f_{t28}	f_{t84}/f_{t28}	Type de sollicitation	E_{56air}/E_{56eau}
Eau	1,1	1,19	1,01	0,98	Compression	0,96
Air	1,34	1,22	1,24	0,99	Traction	0,92

Par contre, les résistances mécaniques mesurées sur des éprouvettes séchées (en compression et en traction) sont toujours supérieures à celles mesurées sur des éprouvettes

conservées dans l'eau. Néanmoins, on peut observer que les résistances mécaniques des éprouvettes séchées diminuent entre 56 et 84 jours.

Dantec et Terme (1996) obtiennent une augmentation progressive de la résistance en compression lorsque l'humidité relative diminue. Les résultats, reportés dans le Tableau I-2, ont été obtenus sur des éprouvettes cylindriques creuses (épaisseur de 52 mm et hauteur de 320 mm), et conservées en auto-dessiccation pendant plus de 2 ans, avant le début des essais. Les éprouvettes ont été ensuite placées dans les différentes ambiances choisies, puis testées lorsque l'équilibre hydrique a été atteint. Des résultats similaires ont été obtenus par Bourgeois et *al.* (2002) sur des éprouvettes cylindriques (diamètre de 110 mm et hauteur de 220 mm) immergées pendant 28 jours dans de l'eau, puis placées en dessiccation.

Tableau I-2 Évolution des propriétés mécaniques du béton en compression pour différentes ambiances, d'après Dantec et Terme (1996).

	Initial	85 %	70 %	60 %	50 %
f_c [MPa]	41	44	46	50	51
E [GPa]	36,2	37,3	35,8	35,8	37,2

A l'inverse des résultats précédents, une faible diminution de la résistance en compression est mesurée par d'autres auteurs, sur des éprouvettes conservées à une humidité relative de 50 % par rapport à celles conservées à 100 %. Pihlajavaara (1974) mesure une diminution de 5,3 % pour des mortiers, Wittmann (1985 cité par Torrenti 1987) une diminution de 12,7 % pour des pâtes de ciment, Torrenti (1987) une diminution de 11 % pour des bétons, et Hanson (1968) une diminution de 2 % pour des bétons. Ensuite, ces mêmes auteurs constatent une augmentation progressive de la résistance en compression jusqu'à une humidité relative de 0 %.

Quant aux propriétés mécaniques en traction, on observe dans le cas d'un essai de fendage une légère augmentation (3 %, Hanson 1968). Dans le cas d'un essai de flexion, Pihlajavaara (1974) et Kanna et *al.* (1998 pour des mortiers) observent une diminution de la résistance jusqu'à une humidité relative de 70 % puis une augmentation progressive jusqu'à une humidité relative de 0 %. Dans le cas d'un essai de traction directe, il semble que lors d'une cure étanche, la résistance en traction augmente tout d'abord du fait des effets de l'hydratation, puis décroît (Fouré 1985, de Larrard et Bostvironnois 1991), pour ensuite croître à nouveau (Fouré 1985). Le même résultat est observé en flexion par Fouré (1985).

Il est intéressant de noter que dans tout l'intervalle de l'humidité relative (0 – 100 %), Kanna et *al.* (1998) ont observé en parallèle une forte diminution du module d'Young lorsque l'humidité relative décroît. Wittmann (1970, cité par Torrenti 1987) observe lui aussi une diminution, puis une augmentation en dessous d'une humidité relative de 20 %.

La diminution du module d'élasticité lorsque l'humidité décroît de 100 % à 50 % semble être liée à un effet structural : la fissuration induite par le séchage (Brooks et Neville 1977, Torrenti 1987, Kanna et *al.* 1998). L'augmentation de la résistance mécanique est attribuée à un comportement intrinsèque du matériau :

- L'augmentation des tensions superficielles, du fait de la diminution de la quantité d'eau adsorbée selon Wittmann (1970 cité par Torrenti 1987) ;
- Le départ de l'eau adsorbée qui, dans un béton saturé, agit comme une cale et favorise alors la rupture précoce par une rupture interne (Brooks et Neville 1960) ;

➤ L'effet de la pression capillaire qui agit comme une précontrainte selon Pihlajavaara (1974).

Par ailleurs, il est à noter que le séchage induit une fissuration, orientée en fonction de la direction de séchage. Les résultats expérimentaux obtenus par Bourgeois *et al.* (2001) mettent en évidence que le séchage dans des directions préférentielles est à l'origine d'une fissuration orthotrope du béton. Après avoir séché préférentiellement dans les directions y et z pendant 1 an, l'éprouvette a été découpée, puis soumise à un chargement hydrostatique. Les déformations dans chacune des directions ont été alors suivies (ε_{xx} et ε_{zz} au niveau des surfaces séchantes et ε_{yy} en cœur) en fonction de la contrainte hydrostatique appliquée. Les courbes contraintes-déformations obtenues sont reportées dans la Figure I-10. Les déformations élastiques et inélastiques mesurées (pour des contraintes identiques) sont plus importantes sur les surfaces séchantes, qu'en cœur, preuve est faite qu'une orientation de la micro-fissuration a eu précédemment lieu lors de la dessiccation. Elle a affecté différemment les propriétés mécaniques en fonction de la surface et de la direction concernée.

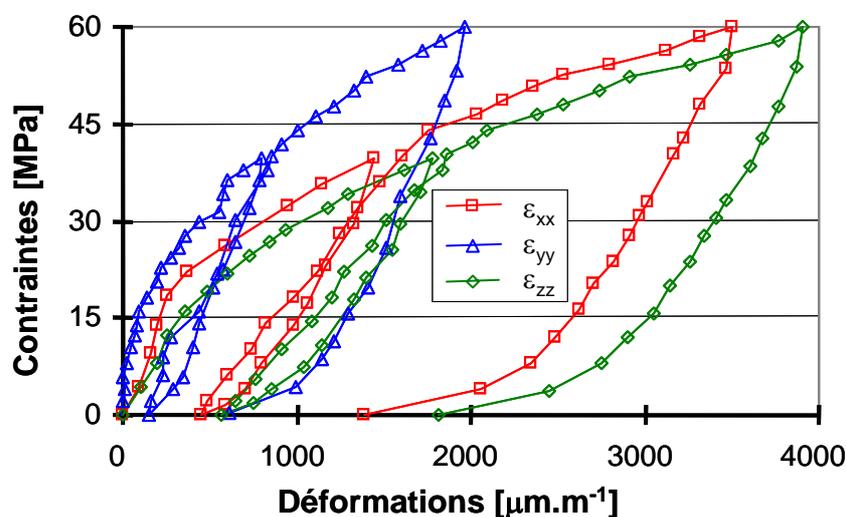


Figure I-10 Courbes contraintes-déformations d'une éprouvette pré-séchée essentiellement dans les directions y et z , et soumise à un chargement hydrostatique (Bourgeois *et al.* 2001).

I-3.1.4 Conclusion

A l'issue de cette analyse, il apparaît que le séchage est un phénomène très lent et complexe. De nombreux mécanismes sont mis en jeu, et se produisent à différentes échelles de la pâte de ciment. Sa prise en compte est primordiale, car le séchage est un phénomène qui induit un fort déséquilibre hygrométrique dans le béton.

Les conséquences du séchage sont alors nombreuses. On observe une micro-fissuration induite par ce déséquilibre, qui peut être à l'origine de la dégradation du module d'élasticité du béton dans des directions privilégiées. De plus, les propriétés mécaniques en compression et en traction sont affectées par le séchage. Bien que cette effet semble contradictoire d'un auteur à l'autre (peut être lié à la différence entre les conditions d'essai), il semble que le séchage soit à l'origine d'une augmentation des résistances mécaniques, induite probablement par l'interaction entre l'eau et le squelette solide. Cette augmentation des résistances est un fait bien connu des expérimentateurs.

En outre, l'âge ne modifie pas sensiblement l'évolution du séchage, si celui-ci est supérieur à une vingtaine de jours. Étant donné que nous nous intéressons à des structures suffisamment âgées, cet effet peut être négligé dans la modélisation.

I-3.2 La fissuration des bétons

I-3.2.1 Comportement expérimental du béton sous chargement

La fissuration du béton est fortement dépendante de la sollicitation mécanique subie par le matériau. Dans cette partie, le comportement du béton sous des sollicitations uniaxiales, biaxiales et triaxiales est brièvement analysé. Enfin, l'effet de la fissuration sur le séchage est étudié.

I-3.2.1.1 Sollicitations uniaxiales

I-3.2.1.1.1 Comportement en compression et en traction

Le comportement du béton dépend du sens de la sollicitation appliquée (traction ou compression).

Le comportement du béton en compression est quasiment élastique linéaire isotrope jusqu'à une contrainte inférieure à environ 30 % de la résistance (Phase ①, Figure I-11a). Puis, la raideur décroît sensiblement, des micro-fissures décelables acoustiquement se propagent à partir de points singuliers. L'observation au microscope optique met en évidence la décohérence à l'interface pâte de ciment – granulats (Phase ②, Figure I-11a). Le volume du matériau diminue jusqu'à une contrainte égale à 80 % de la résistance en compression. Des micro-fissures apparaissent au sein de la pâte de ciment (Phase ③, Figure I-11a). Puis à partir de 85 % de la résistance, la rupture devient inévitable même si l'accroissement de la charge reste nul. Les déformations latérales augmentent plus vite que les déformations longitudinales (Figure I-11b), le volume apparent de l'éprouvette augmente. Cette caractéristique est appelée dilatance. Les fissures se propagent progressivement dans la pâte de ciment, sous la forme de macro-fissures, jusqu'à la rupture du matériau (Phase ④, Figure I-11a).

En pilotant l'essai en déplacement, on observe, après le pic de contraintes, que le comportement du béton, initialement rigidifiant, devient adoucissant (Figure I-11b). Cet endommagement du matériau se traduit lors d'une décharge par une diminution sensible du module d'élasticité, ainsi que la présence de déformations anélastiques.

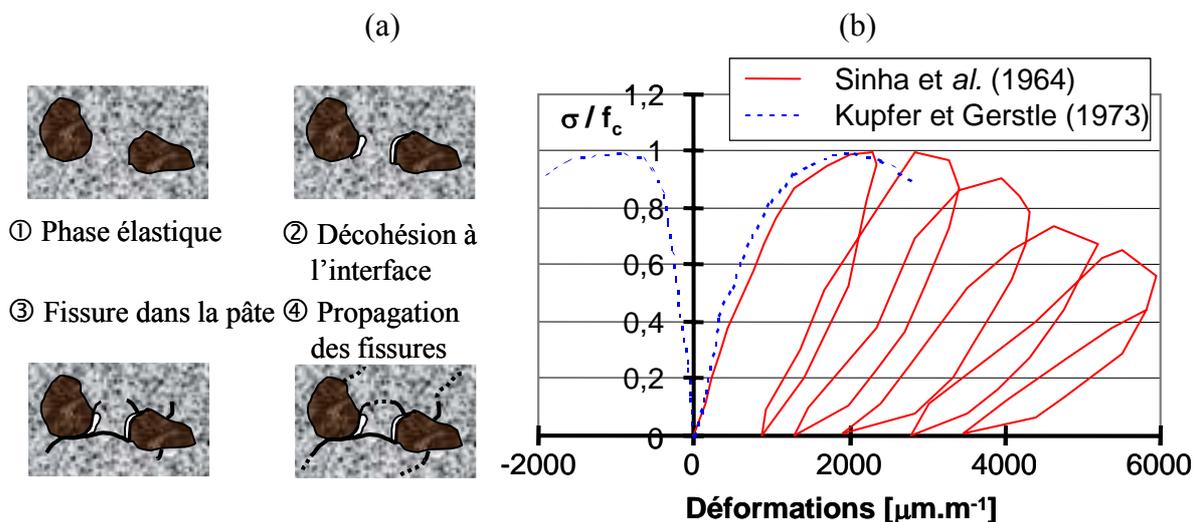


Figure I-11 (a) Description des différentes phases de fissuration observées au microscope optique. (b) Courbe contraintes-déformations en compression.

Dans le cas d'une sollicitation de traction, on observe que le comportement est quasiment élastique isotrope jusqu'à la contrainte de pic. Ensuite, des micro-fissures apparaissent dans le matériau et le comportement du béton devient adoucissant (Figure I-12a), si l'essai est piloté en déplacement. De plus, on constate comme dans le cas de la compression, une diminution

de la raideur, accompagnée d'une déformation irréversible significative lors des déchargements (Figure I-12a). Durant cette phase, on constate que les micro-fissures se propagent essentiellement en mode I, jusqu'à constituer une fissure traversante et localisée, avant la rupture du matériau.

Lorsqu'une éprouvette de béton est chargée en traction, jusqu'à atteindre le régime adoucissant, puis ensuite chargée en compression, on observe une restauration progressive de la raideur (Ju 1989, Ramtani 1990, La Borderie 1991, Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000). Cette propriété du comportement du béton est appelée effet « unilatéral ».

Cette propriété est liée au fait que, les fissures créées en traction ne se ferment que partiellement lorsque la contrainte de traction appliquée s'annule. Lorsque le chargement de compression appliqué devient assez important, les lèvres des fissures entrent en contact. Ainsi une fermeture quasi-complète de la fissure se produit, une restauration de la raideur se produit et le comportement du matériau se rapproche de celui du matériau sain.

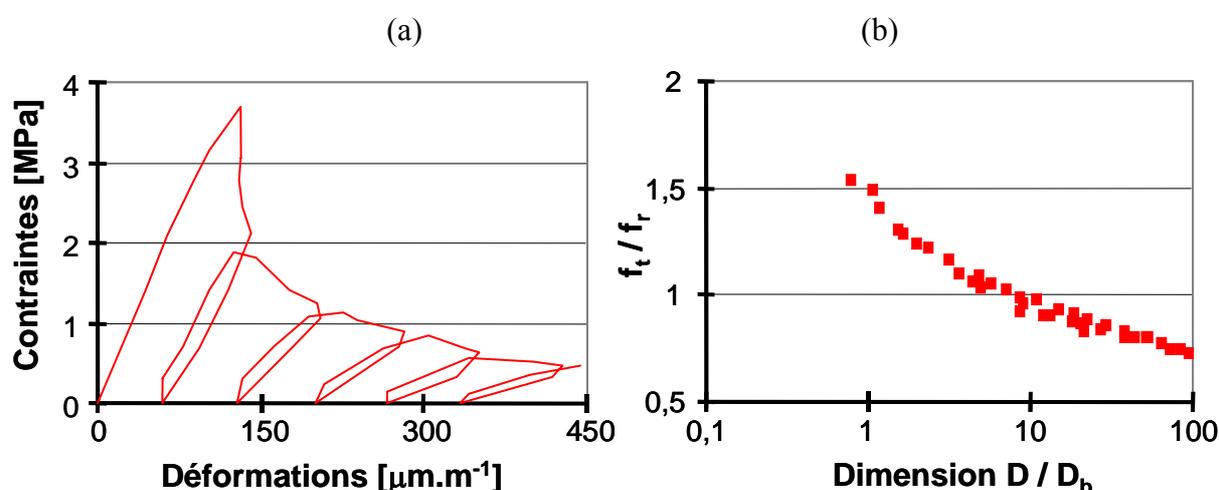


Figure I-12 (a) Courbe contraintes-déformations en traction (Gopalaratnam et Shah 1985). (b) Évolution de la résistance en traction en fonction du rapport de la dimension de l'éprouvette sur une dimension de référence (Bažant et Becq-Giraudon 2002).

I-3.2.1.1.2 Comportement intrinsèque/effet d'échelle

La rupture expérimentale du béton est un phénomène localisé. La déformation n'est plus homogène dans les spécimens en béton. Un important gradient des déformations se concentre dans une zone localisée, dont l'épaisseur, appelée la longueur caractéristique l_c , est reliée à des propriétés intrinsèques du matériau, comme la taille des granulats (Bažant et Pijaudier-Cabot 1989, Jansen et Shah 1997). Par conséquent, le comportement global d'une éprouvette (ou d'une structure) en béton n'est plus représentatif du comportement local du matériau. Néanmoins, une loi contrainte-déformation moyenne du matériau peut être déduite à partir de la mesure expérimentale de la courbe force-déplacement.

Si l'on admet que le comportement adoucissant du béton, en traction (mode de rupture I), est une propriété intrinsèque du matériau, il peut être caractérisé par, au moins, deux paramètres mécaniques : la résistance en traction f_t et l'énergie dissipée G_{ft} après localisation dans la région fissurée.

L'existence de l'énergie de rupture comme une propriété intrinsèque du béton en compression est aujourd'hui controversée. Si la communauté scientifique a admis depuis assez longtemps que la rupture en traction est un phénomène localisé, elle n'a pas admis que la rupture en compression est aussi un phénomène localisé. Néanmoins, il est possible de

définir, comme dans le cas de la traction, une énergie de rupture G_{fc} (Jansen et Shah 1997, Comi et Perego 2001).

Une particularité intéressante du comportement du béton est qu'il est caractérisé par un effet d'échelle très important, d'origines très diverses (distribution des hétérogénéités, conditions aux limites). Son influence a été mise en évidence par de nombreuses études menées sur la rupture de structures existantes. Ainsi, la diminution de la résistance du béton (Figure I-12b) lors du passage de l'éprouvette (petite taille) à la structure réelle (grande taille) est en partie responsable de la ruine de nombreux ouvrages en béton (Bažant et Becq-Giraudon 2002).

I-3.2.1.2 Sollicitations biaxiales

Dans le cas de la bi-compression, on constate une augmentation de la résistance par rapport à la résistance uniaxiale (Figure I-13a). Ainsi, la résistance devient maximale pour un rapport des contraintes égal à 0,5. Le gain de résistance pour des contraintes biaxiales égales est d'environ 25 %. De plus, on constate une augmentation de la ductilité du matériau.

Dans le cas de contraintes de compression – traction (Figure I-13a, résultats de Kupfer et Gerstle 1973), on observe une diminution progressive (à peu près linéaire) de la résistance ultime en compression, lorsque la contrainte de traction augmente (Figure I-13a). De plus, le comportement du matériau devient de plus en plus fragile.

Dans le cas d'un chargement de bi-traction, on n'observe pas de différence appréciable entre la résistance en traction biaxiale et la résistance en traction uniaxiale (Figure I-13a). On constate alors que la surface de rupture est orthogonale à la direction de la contrainte principale maximale (Chen et Schreyer 1995). Ce comportement suggère que les fissures orthogonales, induites par des chargements de traction, n'interagissent pas significativement.

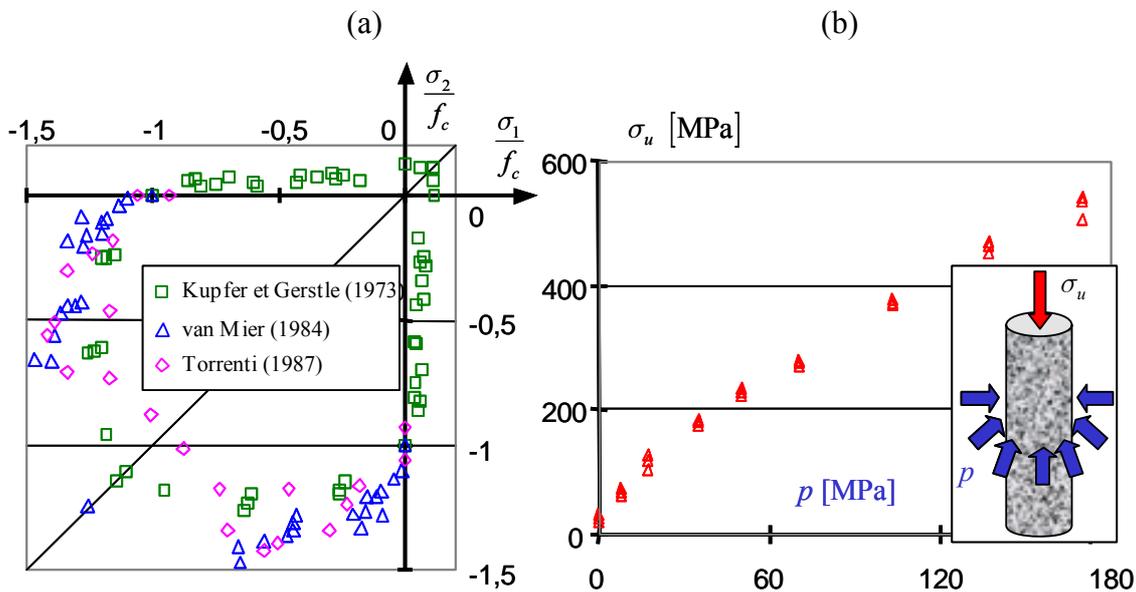


Figure I-13 (a) Résistances du béton dans le cas de sollicitations biaxiales. (b) Comportement du béton sous sollicitations triaxiales (Neville 2000).

I-3.2.1.3 Sollicitations triaxiales

Sous un chargement hydrostatique, la rupture du matériau est impossible. La relation contrainte-déformation est néanmoins non-linéaire. Les tests triaxiaux mettent en évidence une contrainte de rupture plus élevée, si le confinement initial est important (Figure I-13b, Neville 2000, Chen et Schreyer 1995). Comme dans le cas des sols et des autres matériaux

granulaires pulvérulents, la teneur en eau affecte considérablement la surface de rupture du béton sous ces sollicitations (Imran et Pantazopoulou 2001).

Avant la rupture, le volume du matériau augmente. La ductilité augmente par ailleurs, ce qui est une caractéristique commune aux matériaux quasi-fragiles. De plus, le comportement est fortement dépendant de la pression hydrostatique, contrairement aux matériaux métalliques. De même, un phénomène intéressant et inhabituel à de nombreux géomatériaux, appelé « shear enhanced compaction », est observé : la présence de contraintes déviatoriques induit une augmentation de volume.

I-3.2.2 Les effets de la fissuration sur le séchage

Le processus de séchage induit, de façon pratiquement inévitable, une fissuration de peau (Acker 1983). On pourrait donc s'attendre à ce que la création de fissures accélère le processus de séchage. Néanmoins, les résultats expérimentaux mettent en évidence que l'application d'un chargement de compression ne modifie pas significativement l'évolution de la perte en masse des éprouvettes (Maney 1941 cité par Lassabatère et al. 1997, Hansen 1960 cité par Bažant et al. 1997, Neville 1960 cité par Lassabatère et al. 1997, Lassabatère et al. 1997), bien que le chargement de compression réduise significativement la micro-fissuration de l'éprouvette. Cela est montré dans la Figure I-14 à travers les essais de Lassabatère et al. (1997) sur des mortiers de rapport $e/c = 0,5$ et séché à un âge de 28 jours.

De plus, les fissures du béton n'affectent la migration de l'eau que si leurs ouvertures dépassent quelques dixièmes de millimètres (Bažant et al. 1986, Acker 2001). Or, nous avons noté dans le paragraphe § I-3.1.3.1 que les fissures induites par la dessiccation ont une ouverture typiquement inférieure à $50 \mu\text{m}$. Ces deux constatations vont dans le même sens : la fissuration induite par le séchage seul ne modifie pas de façon significative le transport de l'eau dans les bétons.

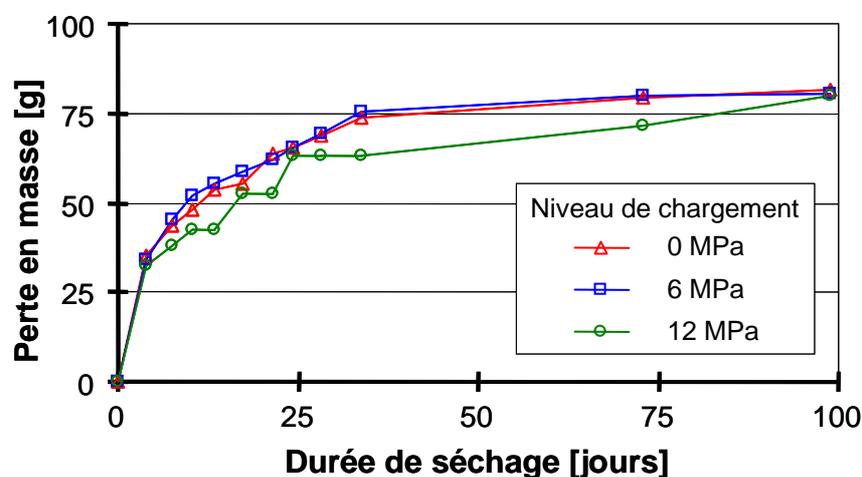


Figure I-14 Évolution de la perte en masse pour différents niveaux de chargement (Lassabatère et al. 1997).

I-3.2.3 Conclusion

L'analyse bibliographique du comportement mécanique du béton permet d'en identifier les caractéristiques essentielles. Ainsi, les aspects macroscopiques qui nous paraissent les plus importants à prendre en compte sont (sans ordre d'importance) :

- La dégradation progressive de la raideur dès qu'un seuil a été atteint ;
- Le comportement adoucissant du matériau après que la contrainte au pic a été atteinte ;

- L'occurrence de déformations inélastiques associées à la dégradation de la raideur et à la dilatance ;
- Un comportement asymétrique du béton en compression et en traction (relation $\sigma - \varepsilon$, résistance, énergie de rupture) ;
- L'orthotropie induite par la fissuration en traction provoquée par le séchage ;
- L'effet unilatéral.

Ensuite, l'analyse de l'effet de la fissuration (induite uniquement par le séchage) sur le transport de l'eau a été menée. Elle met en évidence que la fissuration induite n'influence par le séchage, et donc qu'il n'est pas nécessaire de coupler ces deux phénomènes.

I-3.3 La déformation de retrait de dessiccation

La déformation de retrait de dessiccation d'un béton est la déformation causée par le séchage du matériau du fait du déséquilibre hygrométrique avec le milieu environnant (Aïtcin et *al.* 1998). C'est donc la déformation observée dans cette configuration diminuée de la déformation de retrait endogène. La composante de retrait endogène est celle mesurée sur une éprouvette protégée de la dessiccation. Cette décomposition des déformations est conventionnelle. En réalité, la déformation de retrait endogène mesurée lorsque l'éprouvette est protégée de la dessiccation n'est pas identique à celle d'une éprouvette séchante. En effet, la déformation de retrait endogène est liée à l'avancement de la réaction hydratation, alors que cette réaction dépend de l'humidité relative (la réaction d'hydratation s'arrête si l'humidité relative interne descend en dessous de 70-80 % environ, Xi et *al.* 1994). Néanmoins, cette partition des déformations reste valable si, au début de l'essai de retrait de dessiccation, la réaction d'hydratation ne se développe plus significativement. Cela est généralement le cas, lorsque l'âge de l'éprouvette est supérieur à 28 jours.

I-3.3.1 Mécanismes du retrait de dessiccation

Le départ de l'eau présente initialement dans les pores du béton induit une déformation du squelette solide. L'origine de cette variation dimensionnelle ne fait pas aujourd'hui l'unanimité de la communauté scientifique (Aïtcin et *al.* 1998). Néanmoins, les expériences de retrait de dessiccation montrent que la distribution des pores et les caractéristiques du gel C-S-H ont une influence prépondérante sur la déformation de retrait de dessiccation (Wittmann 1982, Young 1988, Neville 2000). Trois principaux modèles microstructuraux proposent un mécanisme pour le retrait de dessiccation : le modèle de Powers (Powers 1968), le modèle de Feldman-Sereda (Feldman et Sereda 1968) et le modèle de Munich (Wittmann 1973). Toutefois, il semble que le retrait de dessiccation ne résulte pas d'un mécanisme unique, mais plutôt de la combinaison de plusieurs mécanismes (Tableau I-3).

Les trois principaux mécanismes proposés pour les valeurs usuelles de l'humidité relative (plage 50-100 %, Tableau I-3) sont liées aux effets de :

- La pression capillaire : Elle résulte de l'équilibre liquide-vapeur dans la porosité capillaire du béton. La diminution de l'humidité relative au sein du béton (du fait du séchage) induit une diminution de la pression de l'eau liquide, provoquée par la vaporisation de celle-ci. La coexistence des phases liquides (eau) et gazeuses (vapeur d'eau et air sec) entraîne la formation d'un ménisque à l'interface liquide / gaz, et donc l'apparition de tensions capillaires. Elles entraînent alors la contraction du squelette solide et provoquent ainsi le retrait de dessiccation ;
- La pression de disjonction : L'eau associée à la pression de disjonction est en équilibre avec l'humidité relative environnante. Une diminution de l'humidité relative

2001). Elles sont donc à l'origine de l'apparition d'une fissuration de peau. En phase finale de séchage, l'humidité relative en cœur diminue et la zone de peau a fini de sécher (étape ②, Figure I-15 en haut). Contrairement à l'étape précédente, la zone de cœur a maintenant tendance à vouloir se contracter plus que la peau, induisant des incréments de contraintes positifs (traction) en cœur et des incréments de contraintes négatifs (compression) en peau (étape ②, Figure I-15 en bas).

Le séchage du béton induit donc un effet structural (fissuration de peau). Si des précautions particulières relatives à la fissuration ne sont pas prises, la mesure des déformations de retrait de dessiccation inclut un effet structural qui se superpose au comportement intrinsèque du matériau (résultat des mécanismes physico-chimiques moteurs). L'exploitation directe des résultats d'essais expérimentaux est alors rendue difficile. Elle ne permet pas, notamment, de quantifier l'effet structural dû à la fissuration. Il devient alors difficile d'identifier le comportement intrinsèque du matériau et donc de proposer une loi constitutive pour le retrait de dessiccation.

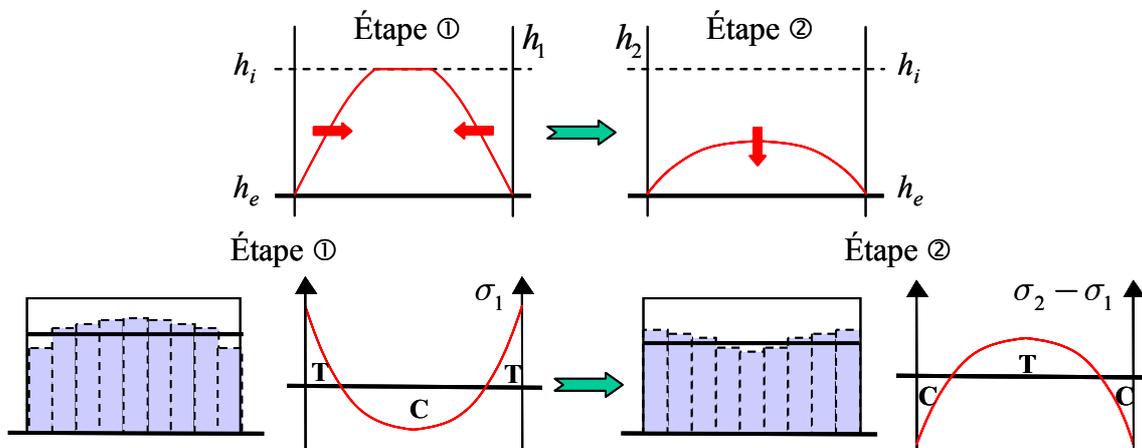


Figure I-15 Évolution du profil d'humidité relative d'une éprouvette en dessiccation (en haut). Variations des déformations et des contraintes induites par le séchage différentiel (en bas).

Il est donc nécessaire de distinguer la déformation de retrait de dessiccation incluant un effet structural, de celle correspondante au comportement intrinsèque du matériau. Dans la littérature anglo-saxonne, il est fait référence au « free drying shrinkage » (que l'on peut traduire littéralement par « déformation de retrait de dessiccation libre »), pour désigner la déformation correspondante aux mécanismes physico-chimiques du retrait. Nous l'appellerons plutôt par la suite « déformation de retrait de dessiccation intrinsèque », puisqu'elle est liée à un comportement intrinsèque du matériau.

L'effet structural peut être réduit en choisissant des éprouvettes de faible dimension (quelques *millimètres* pour une pâte de ciment) et/ou en séchant le matériau en diminuant progressivement l'humidité relative ambiante par paliers successifs (dans le but de minimiser le déséquilibre hydrique entre l'éprouvette et l'ambiance). Nous analyserons donc séparément, dans ce qui suit, les résultats expérimentaux de retrait de dessiccation obtenus sur des éprouvettes minces (de l'ordre du *millimètre*, effets structuraux nuls ou négligeables) et sur des éprouvettes épaisses (de l'ordre du *décimètre*, effets structuraux significatifs).

I-3.3.3 Observations expérimentales

I-3.3.3.1 Éprouvettes de faible épaisseur

Les résultats expérimentaux montrent que la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque est plus ou moins proportionnelle à la variation de l'humidité relative interne, pour

des valeurs d'humidité relative comprises entre 40 % et 100 % (Pihlajavaara 1974, Parrott et Young 1982, Sabri et Illston 1982, Alvaredo et *al.* 1995 cité par van Zijl 1999, Baroghel-Bouny et *al.* 1999, Obeid et *al.* 2002, voir la Figure I-16). Ces résultats ont été obtenus sur des éprouvettes de pâte de ciment, mortier et béton de faibles épaisseurs et en diminuant l'humidité relative environnante par paliers successifs.

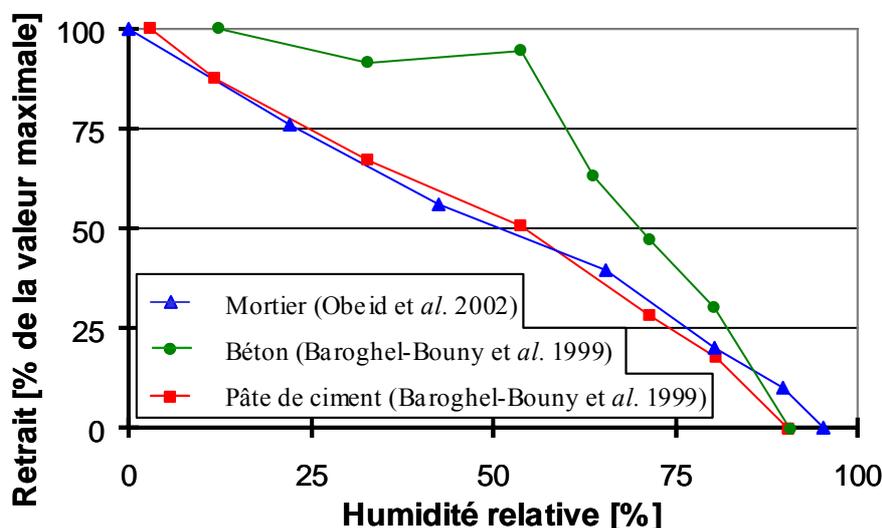


Figure I-16 Retrait à l'équilibre typique de matériaux à matrice cimentaire en fonction de l'humidité relative (Baroghel-Bouny et *al.* 1999, Obeid et *al.* 2002).

De plus, il est observé dans les mêmes conditions une relation linéaire entre le retrait de dessiccation et la perte en masse (Powers 1968, Day et *al.* 1984, Bissonnette et *al.* 1999).

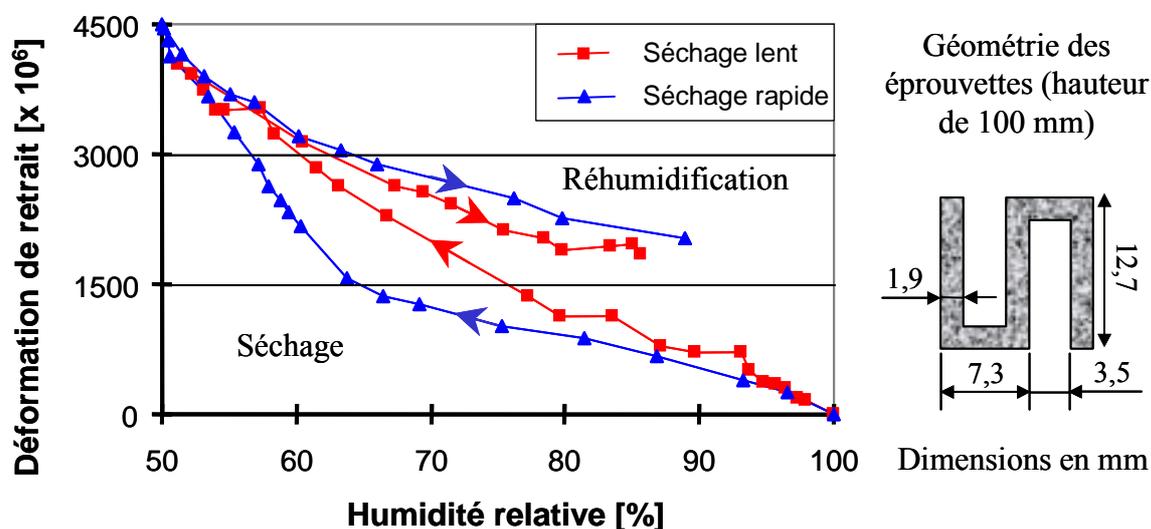


Figure I-17 Retrait en fonction de l'humidité relative de pâtes de ciment séchées (lentement ou rapidement) puis réhumidifiées (Day et *al.* 1984).

Dans le cas où le séchage est rapide, la relation déformation de retrait – variation de l'humidité relative devient plutôt bi-linéaire dans la plage d'humidité relative 50-100 % pour une pâte de ciment (Day et *al.* 1984, voir la Figure I-17) et pour des mortiers (Siyoucef 2001).

Lorsque l'éprouvette est réhumidifiée, on observe une déformation irréversible (50 % environ dans la Figure I-17). Un résultat similaire a été obtenu par Parrott et Young (entre 50 et 65 %, 1982), ainsi que Sabri et Illston (40 %, 1982). Cette caractéristique semble être intrinsèque au matériau. En effet, les propriétés hydriques et mécaniques ne varient plus

significativement (les éprouvettes sont âgées de 82 jours au début de l'essai). De plus, l'effet structural est négligeable, puisque les éprouvettes ont une épaisseur très faible (1,9 mm).

Différentes explications à l'occurrence d'une déformation irréversible importante lors de la réhumidification ont été proposées dans la littérature :

- Les réarrangements des pores dans le gel de C-S-H (Parrott et Young 1982, Sabri et Illston 1982) ;
- La formation de nouvelles liaisons silicates (Bentur et al. 1979).

I-3.3.3.2 Éprouvettes d'épaisseur usuelle

Les caractéristiques de la déformation de retrait de dessiccation sont montrées, dans le cas où les éprouvettes testées ont des épaisseurs usuelles (typiquement supérieures à une dizaine de centimètres). Dans une première partie, les évolutions de la déformation de retrait de dessiccation apparentes sont discutées. Puis, les principaux paramètres qui affectent cette déformation sont montrés.

I-3.3.3.2.1 Analyse des courbes d'évolution de la déformation de retrait

Les essais expérimentaux mettent en évidence dans le diagramme retrait – perte en masse l'occurrence de 2 zones (Verbeck et Helmuth 1968, Bissonnette et al. 1999) ou 3 zones distinctes (Granger 1996). Les résultats expérimentaux obtenus par Granger (1996) sur des éprouvettes de diamètre 16 cm et de hauteur 100 cm sont reportés sur la Figure I-18a, pour différentes compositions de bétons. Les déplacements (à partir desquels les déformations de retrait sont déduites) sont mesurés sur une base de 50 cm, centrée sur la hauteur de l'éprouvette. Le choix de cette base de mesure (en terme de position et de taille) permet à la fois de s'affranchir des effets des conditions de bord et d'obtenir une mesure expérimentale plus précise.

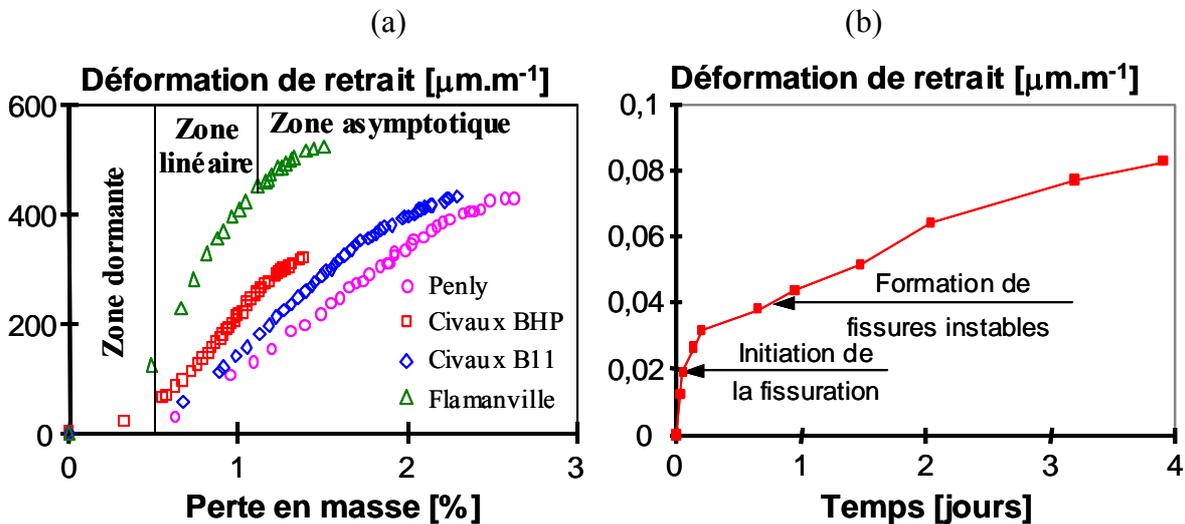


Figure I-18 (a) Évolution du retrait de dessiccation en fonction de la perte en masse (Granger 1996) et (b) à court terme en fonction du temps (Alvaredo et Wittmann 1993).

Les trois zones observées dans le diagramme retrait-perte en masse sont successivement :

- Une zone dormante, où le séchage ne s'accompagne pas de retrait apparent. Ce comportement a été attribué au départ de l'eau libre des capillaires, qui ne provoque pas de retrait (Huet et al. 1982, Neville 2000). Toutefois, les nombreux essais effectués sur des éprouvettes de petite dimension (avec un risque de fissuration minimale) montrent une relation linéaire entre le retrait et la perte en masse (voir le paragraphe § I-3.3.3.1), ce qui

contredit cette hypothèse. Granger (1996) suggère que ce comportement soit plutôt lié à la fissuration en surface de l'éprouvette (voir le paragraphe § I-3.3.2), qui masque en partie l'effet de la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque ;

➤ Une zone linéaire, où le retrait est proportionnel à la perte en masse. La fissuration n'évoluant plus à ce stade (le gradient de teneur en eau s'étant atténué), le retrait devient proportionnel à la perte en masse tel que cela est observé sur des éprouvettes de faible dimension (voir le paragraphe § I-3.3.3.1) ;

➤ Une zone asymptotique, où le retrait tend vers une valeur asymptotique. Le gradient de teneur en eau disparaît progressivement et les fissures créées dans la phase dormante tendent à se fermer partiellement, induisant une déformation de retrait apparente plus faible (Granger 1996).

On notera que les hypothèses proposées par Granger (1996) sont appuyées par un calcul numérique à l'aide d'un modèle probabiliste, en utilisant des éléments de contact permettant de modéliser l'amorce et la propagation des fissures.

A court terme, Alvaredo et Wittmann (1993) distinguent encore trois zones, dans la courbe retrait de dessiccation – temps (Figure I-18b) :

➤ Une première zone, où le retrait augmente linéairement pendant quelques minutes jusqu'à l'initiation de la fissuration. Cette zone est une réponse élastique du matériau ;

➤ Ensuite, une deuxième zone, où la vitesse de retrait diminue. Cette diminution est due à la formation de fissures en peau ;

➤ Enfin, la vitesse de déformation augmente à nouveau, pour ensuite décroître. Durant cette dernière zone, le retrait est contrôlé par le processus de diffusion de l'eau (comme la perte en masse).

I-3.3.3.2.2 Paramètres influant sur le retrait

Le béton est un matériau fortement hétérogène. Les granulats et la pâte de ciment ont des comportements rhéologiques très différents. Le retrait de dessiccation se produit uniquement dans la pâte de ciment, les granulats empêchant alors la pâte de se déformer librement. Aussi, on constate expérimentalement, que plus le volume de la pâte de ciment est important, plus la déformation de retrait de dessiccation est importante (voir Figure I-19a).

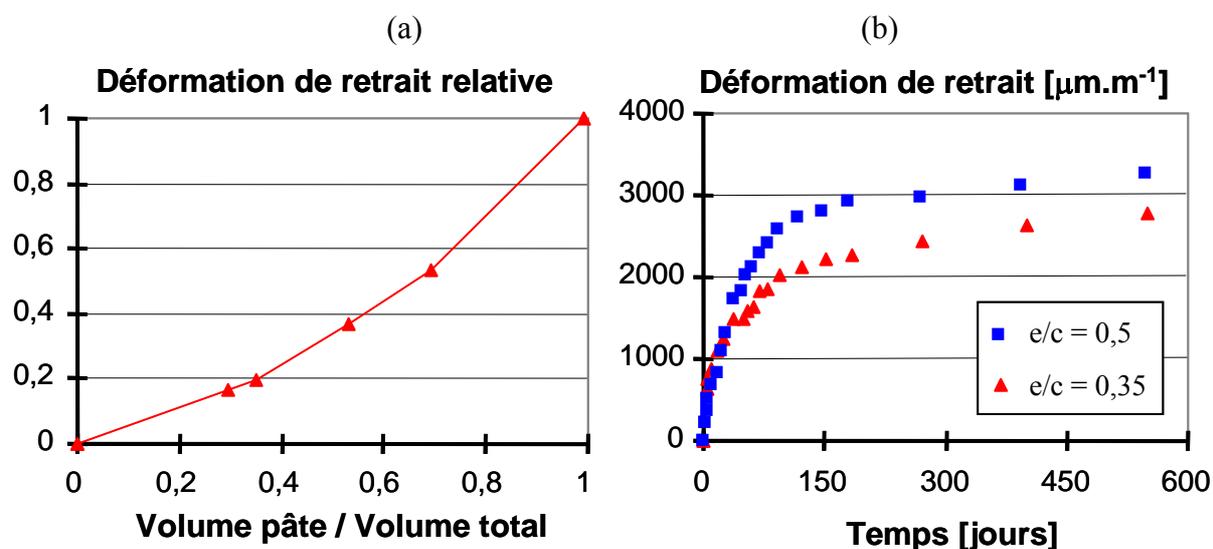


Figure I-19 (a) Déformation de retrait de dessiccation en fonction de la fraction volumique de pâte et (b) en fonction du temps pour différents rapports e/c (Bissonnette et al. 1999).

Quant au rapport e/c , il semble que les données disponibles et bien documentées soient relativement rares (Bissonnette et *al.* 1999). L'évolution de la déformation de retrait de dessiccation de deux pâtes de ciment différentes, en fonction du temps, est donnée dans la Figure I-19b. On constate que la déformation de retrait de dessiccation est d'autant plus importante que le rapport e/c augmente (Bissonnette et *al.* 1999, Miyazawa et Tazawa 2001). De plus, cette déformation dépend aussi du type de liant utilisé. L'ajout de fumée de silice ou de laitier de haut fourneau (avec le même rapport eau/liant) diminue l'amplitude des déformations de retrait de dessiccation (Li et Yao 2001). Ainsi, les bétons à hautes performances (BHP) développent une déformation de retrait de dessiccation moins importante que les bétons ordinaires (Le Roy 1996, Miyazawa et Tazawa 2001). Cela est habituellement attribué à la fois à la faible teneur en eau initiale des BHP et à la diminution importante de l'humidité relative interne, due à l'auto-dessiccation.

Par ailleurs, un effet d'échelle est observable sur la déformation de retrait de dessiccation. Lorsque la taille de l'éprouvette augmente, on constate une diminution de la valeur asymptotique de la déformation de retrait de dessiccation (Figure I-20a, Hanson et Mattock 1966, Miyazawa et Tazawa 2001, Neville 2000, Ayano et Wittmann 2002). Il est probable que cet effet soit dû essentiellement à la fissuration induite par le séchage en surface (qui affecte la déformation de retrait apparente, voir la Figure I-20a). En effet, la fissuration est d'autant plus importante que l'épaisseur de l'éprouvette est importante.

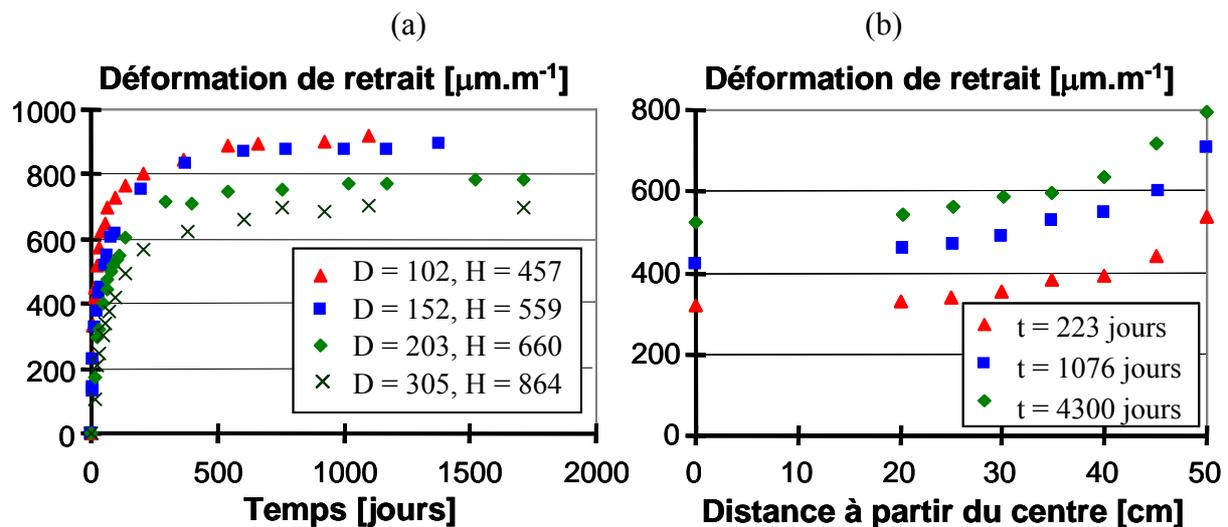


Figure I-20 (a) Évolution du retrait de dessiccation pour différentes dimensions (Hanson et Mattock 1966) et (b) en fonction de la position dans l'éprouvette (Acker et *al.* 1990).

De plus, l'effet d'échelle induit une distribution hétérogène de la déformation de retrait de dessiccation dans l'éprouvette, qui dépend de la géométrie adoptée (Acker et *al.* 1990, Alvaradeo et Wittmann 1993, Kim et Lee 1998, Ayano et Wittmann 2002). La distribution de la déformation de retrait de dessiccation, à différents instants, obtenue par Acker et *al.* (1990) sur une éprouvette de 1 m d'épaisseur (voir aussi le paragraphe § I-3.1.2) est reportée dans la Figure I-20b. Il est donc important lors de l'interprétation de résultats de connaître l'emplacement précis des instruments de mesure (des déplacements ou des déformations) dans l'éprouvette.

Quant à l'effet de l'âge du béton sur la déformation de retrait de dessiccation, les résultats expérimentaux indiquent qu'au-delà d'une vingtaine de jours, son influence n'est plus significative (Gamble et Parrott 1978, Bazant 1982, Parrott et Young 1982).

I-3.3.4 Conclusion

Cette analyse bibliographique a mis en évidence la complexité du phénomène de retrait de dessiccation (nombreux mécanismes, effet structural, effet d'échelle, effet de la vitesse de séchage, hystérésis lors de la réhumidification). Il apparaît donc nécessaire d'adopter une modélisation physique du retrait de dessiccation intrinsèque, basé sur les mécanismes prédominants (dans la gamme d'humidité relative utile pour nos applications 50-100 %) et donc capable de reproduire les principaux aspects expérimentaux mis en évidence. De plus, la fissuration induite influence sensiblement la déformation de retrait de dessiccation, et nécessite donc d'être prise en compte, au moins à l'échelle macroscopique.

I-3.4 La déformation de fluage

La déformation de fluage est conventionnellement décomposée en une déformation de fluage propre et de fluage de dessiccation. Chacune de ces composantes correspond à une configuration d'ambiance de conservation différente (en humidité relative). Cette décomposition de la déformation de fluage est nécessaire, car les caractéristiques du fluage du béton sont très sensibles à l'humidité relative interne (Glücklich 1962, Pihlajavaara 1974, Bažant et al. 1973, Bažant et al. 1976).

I-3.4.1 Le fluage propre

La déformation de fluage propre est la déformation mesurée sur une éprouvette chargée et protégée contre la dessiccation externe, à laquelle on a ôté la déformation de retrait endogène et la déformation élastique instantanée. Cette décomposition des déformations suppose qu'il n'existe pas d'interaction entre les différentes composantes de déformations lors de l'essai de fluage propre. Or, l'existence d'un couplage entre la déformation de fluage propre et le retrait endogène a été proposée (Ulm et al. 1999). En effet, la réaction d'hydratation génère des tensions capillaires (liées à la consommation de l'eau par la réaction d'hydratation), modifiant l'état de contraintes au sein de la microstructure du béton, s'ajoutant aux contraintes macroscopiques appliquées lors de l'essai de fluage propre.

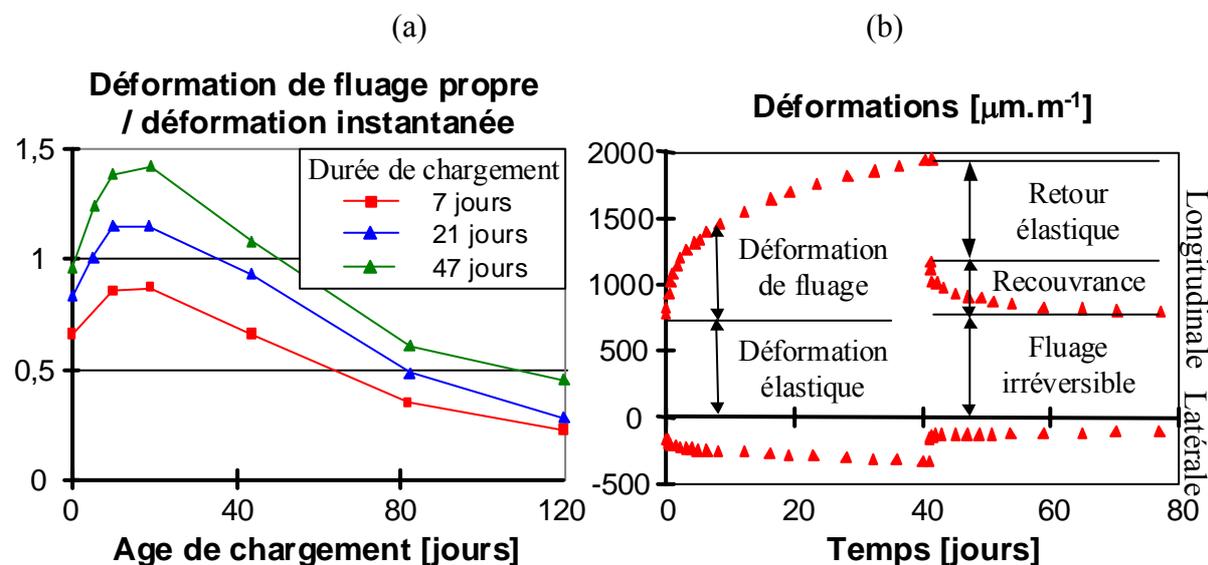


Figure I-21 (a) Déformation de fluage propre en fonction de l'âge de chargement (Niyogi et al. 1973). (b) Évolution des déformations d'une pâte de ciment (Parrott 1974).

Par ailleurs, le fluage propre est caractérisé expérimentalement par une forte dépendance à l'âge du matériau lors du chargement, qui se poursuit bien après que la réaction d'hydratation a cessé (Figure I-21a). Cette dépendance au vieillissement est une caractéristique unique au

fluage propre. En effet, les propriétés mécaniques du béton (coefficient de Poisson, module d'Young, résistance), les paramètres gouvernant le transport de l'eau et le retrait de dessiccation ne dépendent plus significativement de l'âge, après 90 jours (Gaucher 1982, Guénot-Delahaie 1997, Powers et *al.* 1954, Gamble et Parrott 1978, Bažant 1982, Parrott et Young 1982).

Un chargement en compression uniaxiale s'accompagne d'une déformation longitudinale de fluage importante, 2 à 3 fois supérieure à la déformation élastique initiale, ainsi que d'une déformation latérale plus faible et de signe opposé (Figure I-21b), comme dans le cas de l'élasticité. Après déchargement, on observe l'occurrence d'une déformation de fluage réversible (appelée recouvrance) et d'une déformation irréversible 2 à 4 fois plus importante que la part réversible.

Le fluage propre des béton reste un phénomène aujourd'hui encore mal connu (Tamtsia et Beaudoin 2000). De nombreux mécanismes ont été proposés dans la littérature scientifique et sont brièvement rappelés dans ce qui suit.

I-3.4.1.1 Mécanismes du fluage propre

L'eau semble jouer un rôle fondamental dans le mécanisme de fluage propre du béton. En effet, la déformation de fluage propre d'un béton sec (dont on a enlevé toute l'eau évaporable) est négligeable (Glücklich 1962, Pihlajavaara 1974, Acker 1988). De plus, des matériaux comme les bétons à hautes performances, traités thermiquement (Cheyrezy et Behloul 2001) ou le Ductal© (Acker 2001), présentent une quantité d'eau non liée quasi inexistante et ne fluent pratiquement pas.

L'analyse de la cinétique de la déformation de fluage propre des pâtes de ciments et des bétons met en évidence deux régimes cinétiques distincts, quelle que soit la composition utilisée (Ruetz 1968, Ulm et *al.* 1998) :

- A court terme, la cinétique de la déformation de fluage propre est rapide pendant quelques jours après le chargement ;
- A long terme, la déformation de fluage propre est caractérisée par une cinétique très lente.

Cette analyse suggère qu'il existe au moins deux mécanismes de fluage propre associés à chacune de ces cinétiques.

I-3.4.1.1.1 Fluage à court terme

On distingue dans la littérature principalement cinq mécanismes pour expliquer le fluage propre du béton à court terme :

- L'effet de la pression osmotique : Les grains de ciment non hydratés et les pores capillaires sont séparés par une couche d'hydrates relativement perméable. Pour que la réaction d'hydratation puisse continuer, l'eau diffuse à travers la couche d'hydrates. Les propriétés physiques du gel et la présence d'anhydres seraient propices à la création d'une pression osmotique. Cette pression s'exerce sur le gel et affaiblit sa structure. L'application d'un chargement extérieur modifie alors les contraintes appliquées localement et entraîne la rupture localisée de liaisons, se traduisant au niveau macroscopique par la déformation de fluage (Ghosh 1973) ;
- L'hydratation sous contraintes : L'hydratation d'un 1 cm^3 d'anhydre produit environ $2,1 \text{ cm}^3$ de gel hydraté. Ainsi, la moitié des hydrates produits occupe la place initiale du grain de ciment, alors que l'autre moitié diffuse vers la porosité capillaire où le gel se dépose. Dans le cas où un chargement mécanique est présent, la solubilité augmente et

accélère le processus d'hydratation. Le gel ne peut se former en totalité dans l'espace proposé, ce qui entraîne une contraction des grains de ciment. A l'échelle macroscopique, cette contraction correspond à la déformation de fluage (Ghosh 1973) ;

➤ La déposition graduelle d'un nouveau gel sous charge (théorie de la solidification) : Le gel se formant, se dépose sous un état de contraintes initialement nul (il ne participe pas à la reprise des efforts extérieurs). Au fur et à mesure que les particules de gel adjacentes fluent, le gel venant de se déposer commence à reprendre progressivement les contraintes. Cette redistribution des contraintes induit la déformation du gel néoformé et contribue à la déformation de fluage de la pâte de ciment (Bažant et Prasanna 1989) ;

➤ La migration de l'eau absorbée dans la porosité capillaire sous contraintes (Lohtia 1970, Wittmann 1982, Ulm et al. 1998) : La diffusion s'amorce sous l'action des efforts extérieurs. Les contraintes sont retransmises à l'échelle microscopique, à travers l'assemblage des produits d'hydratation qui entourent les pores capillaires (Figure I-22a). Ce transfert d'effort microscopique induit localement un déséquilibre thermodynamique entre les molécules d'eau en adsorption libre dans ces zones de transmission et celles qui sont plus loin (porosité capillaire). Pour restituer l'équilibre, les molécules d'eau diffusent dans les couches d'eau adsorbée (diffusion surfacique) vers la porosité capillaire, entraînant la déformation du squelette solide.

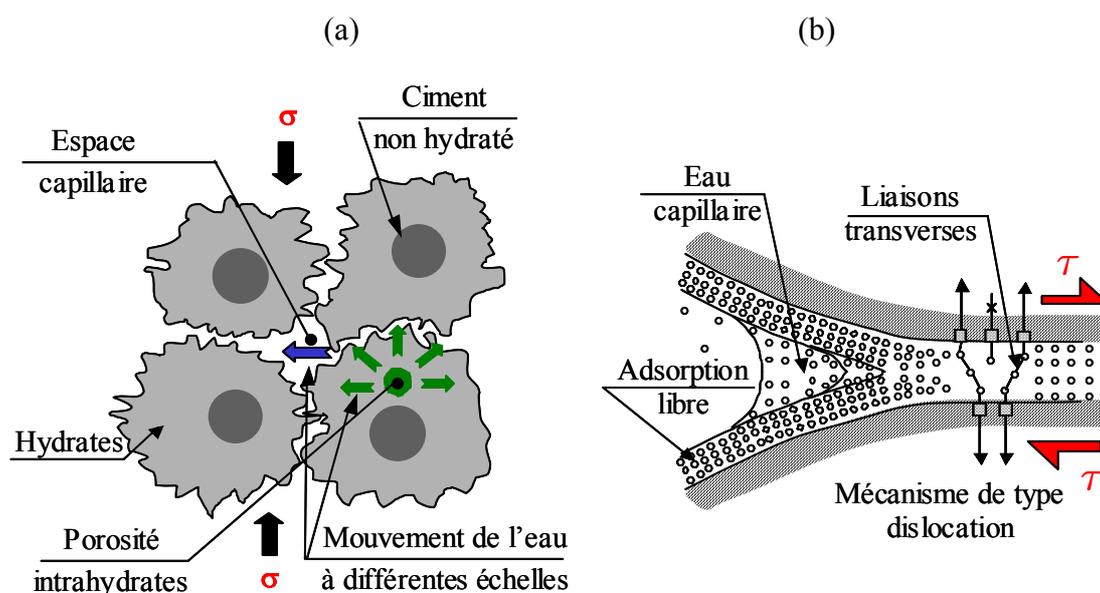


Figure I-22 Mécanismes du fluage propre à court terme (a) et à long terme (b) proposés par Ulm et al. (1999).

Il semblerait que cette dernière hypothèse soit la plus probable, puisqu'elle est corroborée par de nombreux résultats expérimentaux :

➤ L'énergie d'activation associée au processus de déformation de fluage propre est environ égale à 25 kJ.mol^{-1} (Day et Gamble 1983) à court terme (pendant quelques jours après le chargement). Cette valeur est relativement proche de l'énergie d'activation associée à la migration de l'eau physio-sorbée (environ 15 kJ.mol^{-1}) dans les pores capillaires (Dias et al. 1987) ;

➤ Ulm et al. (1998) remarquent que seule la cinétique de la déformation de fluage à court terme est influencée par le rapport e/c. Or, la principale différence entre des bétons de rapport e/c différents se situe au niveau de la distribution des pores capillaires (voir le

paragraphe I-2.2), ce qui supporte l'idée que le fluage propre fait intervenir, à court terme, les pores capillaires (Ulm et *al.* 1998).

I-3.4.1.1.2 Fluage à long terme

Aucun des mécanismes présentés précédemment ne peut expliquer l'effet important du vieillissement sur l'amplitude de la déformation de fluage propre, observé après plusieurs années. De nombreux auteurs ont alors suggéré l'existence d'un mécanisme de fluage propre à long terme, différent de celui à court terme. Ainsi, Bažant et *al.* (1997) et Ulm et *al.* (1998) proposent que l'effet du vieillissement observé soit d'origine mécanique, lié à la relaxation des micro-précontraintes (« micro-prestress ») dans les zones d'adsorption empêchée. Les micro-précontraintes sont générées par la pression de disjonction, ainsi que par des variations volumiques importantes et fortement localisées induites par l'hydratation ou le séchage.

La relaxation des micro-précontraintes se situe à l'échelle des nanopores de la pâte de ciment. Les liaisons entre les surfaces solides, sur-tendues localement et instables, sont susceptibles de se rompre (Wittmann 1982). Elles se reforment dans des zones adjacentes de moindres surtensions du fait du glissement des feuillettes de C-S-H (Figure I-22b). Les forces de liaison se relaxent dans le temps, et ce sont d'autres sites qui seront alors le siège de ruptures potentielles. Ce processus en chaîne épuise successivement les sites de fluage qui ont été activés par le chargement mécanique. Cet épuisement conduit au vieillissement observé au niveau de la cinétique du fluage en fonction de l'âge du matériau. Il est à noter qu'à priori, la contrainte macroscopique, du fait de son ordre de grandeur bien inférieur à celui de la pression de disjonction ne modifierait pas, de façon significative, l'amplitude des forces de liaison au niveau des nanopores (Bažant 1972). Ce processus de « quasi-dislocation » résulte de l'instabilité intrinsèque aux hydrates. Ruetz (1968) et Lohtia (1970) avaient déjà proposé un mécanisme similaire lié au cisaillement des feuillettes de C-S-H (incluant l'eau adsorbée et l'eau inter-couche associée).

De nombreuses évidences expérimentales suggèrent que le fluage propre à long terme soit lié au glissement des feuillettes de C-S-H :

- Bentur et *al.* (1979) ont mesuré des valeurs de surface d'adsorption d'azote différentes entre des pâtes de ciment chargées et non chargées, ce qui n'est pas le cas avec de l'eau ou de l'hélium. Contrairement à ces deux dernières molécules de taille plus petite, la molécule d'azote ne peut pas accéder à la nanoporosité. Cette observation est donc compatible avec le mécanisme de glissement des feuillettes de C-S-H dans le sens où la déformation de cisaillement créerait de nouvelles surfaces accessibles aux molécules d'azote (Bentur et *al.* 1979, Guénot-Delahaie 1997) ;
- Si l'eau contenue dans un spécimen en béton est remplacée par du méthanol (après que le spécimen a été désaturé), le spécimen exhibe une déformation de fluage propre importante (Tamtsia et Beaudoin 2000). Or, le méthanol est adsorbé physiquement sur les feuillettes de C-S-H. De plus, il forme un complexe en réagissant avec les C-S-H. Ces deux processus induisent une diminution de l'intensité des forces entre les feuillettes de C-S-H et donc une augmentation de la mobilité au glissement (entre ces feuillettes) ;
- L'analyse cinétique des déformations montre que la cinétique de fluage à long terme est indépendante du rapport e/c (Ulm et *al.* 1998). Or, la structure de la nanoporosité est identique pour différentes formulations des bétons, ce qui corrobore que cette déformation se produit à l'échelle de la nanoporosité.

I-3.4.1.2 Effet de la composition et des conditions environnantes

Nous avons précédemment noté que l'eau joue un rôle fondamental dans les mécanismes physico-chimiques du fluage propre. Ainsi, il est observé que la déformation de fluage propre d'éprouvettes pré-séchées est quasi-proportionnelle à l'humidité relative à l'équilibre (Bažant et al. 1973, Pihlajavaara 1974, Wittmann 1970, Bažant et al. 1976, Figure I-23a).

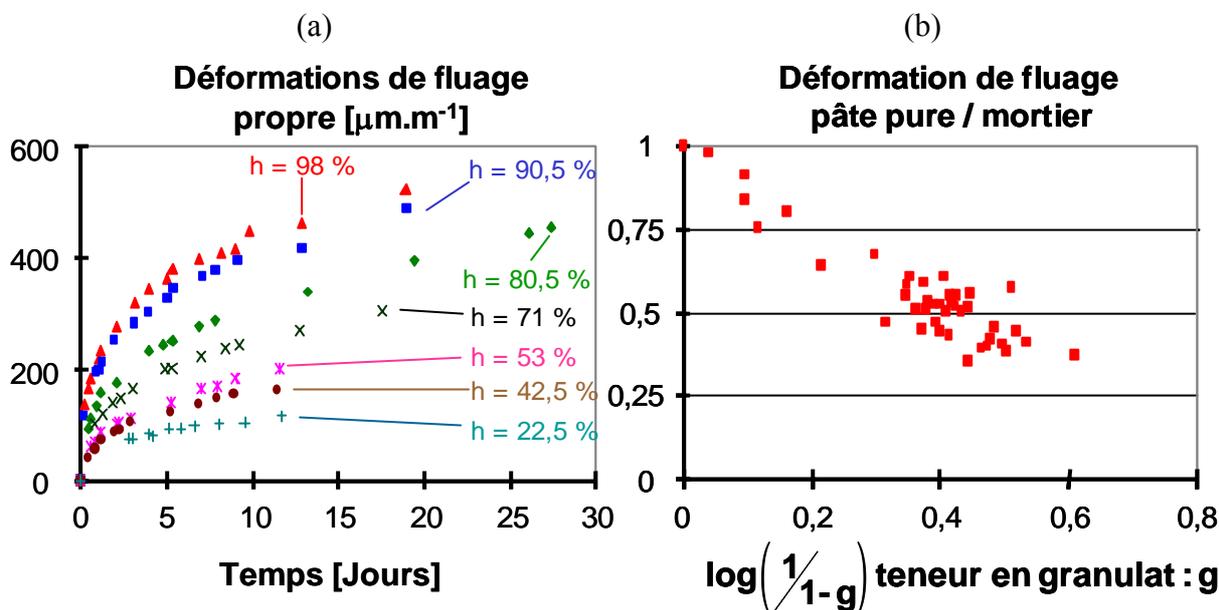


Figure I-23 (a) Déformation de fluage propre en fonction du temps pour différentes conditions de pré-séchage (Wittmann 1970) et (b) pour différentes teneurs en granulat (Pickett 1956, cité par Huet et al. 1982).

Comme dans le cas du retrait de dessiccation, le siège de la déformation de fluage est la pâte de ciment. En effet, les granulats ne fluent pas sous les valeurs de contraintes communément appliquées aux ouvrages de Génie Civil et à l'échelle de temps de la durée de vie des ouvrages (ils ne fluent sensiblement qu'à l'échelle géologique). Ainsi, on remarque que pour des valeurs identiques du rapport e/c, l'augmentation de la teneur en granulat diminue l'amplitude de la déformation de fluage propre d'un mortier par rapport à celle d'une pâte de ciment (Figure I-23b). Cette différence de comportement entre la pâte de ciment et les granulats peut aussi induire une micro-fissuration à l'interface. En effet, les granulats ne se déformant pas, des contraintes différentielles de traction naissent localement dans la pâte de ciment, alors que les granulats subissent des contraintes de compression. Ce processus explique peut-être la détection de fissures, lors de l'auscultation par émission acoustique, d'éprouvettes de béton dans un essai de fluage propre (Rossi et al. 1993).

De plus, l'eau est généralement surabondante par rapport à l'hydratation complète. Or, il a été mis en évidence que l'eau joue un rôle fondamental dans le fluage propre. Ainsi, on observe, comme dans le cas du retrait de dessiccation (voir le paragraphe § I-3.3.3.2.2), une forte dépendance au rapport e/c (Figure I-24a). Cette dépendance est sûrement attribuable à la quantité d'eau non liée qui est d'autant plus importante que le rapport e/c est élevé.

Par ailleurs, la déformation de fluage dépend aussi significativement du type de ciment (Figure I-24b), ainsi que du type de liant utilisé (ciment, fumée de silice, laitier de haut fourneau, Li et Yao 2001). Il semble que ces effets ne peuvent pas être reliés directement aux valeurs différentes de résistance (Huet et al. 1982) ou de finesse (ou surface spécifique) du liant utilisé (Neville 2000).

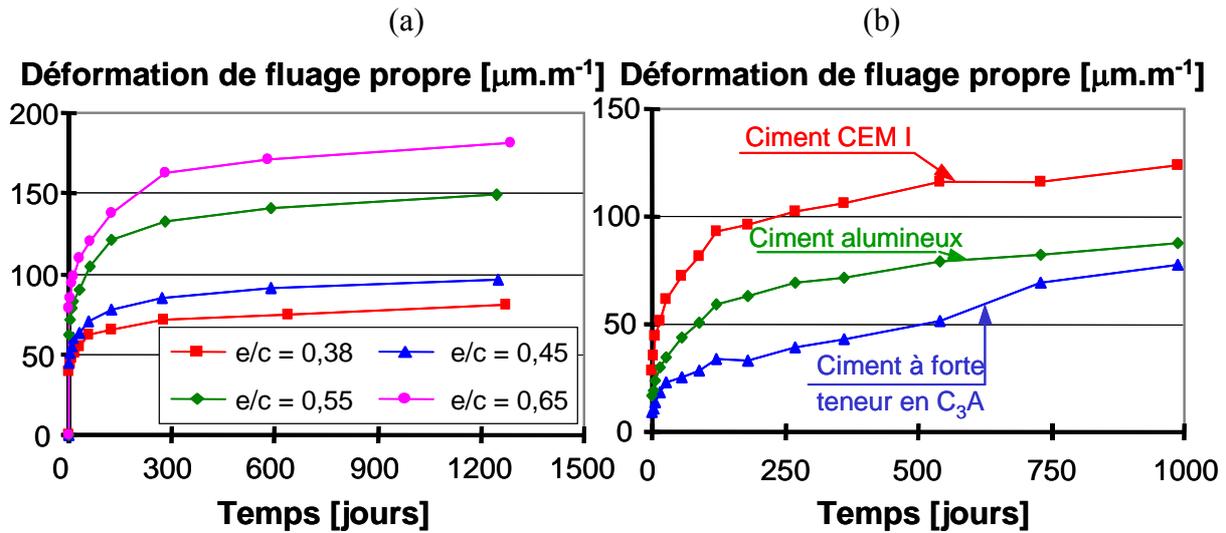


Figure I-24 (a) Déformation de fluage propre pour différents rapports e/c et (b) pour différents types de ciment (Hummel 1959, cité par Kanstad 1991).

I-3.4.2 Le fluage de dessiccation

Le comportement du béton chargé et séchant simultanément peut sembler au premier abord paradoxal. En effet, nous avons noté qu'une éprouvette pré-séchée, de façon uniforme, flue moins qu'une éprouvette saturée (voir la Figure I-23a). Cependant, lorsque le spécimen sèche simultanément avec l'application de la charge (essai de fluage total), la déformation de fluage du béton est plus importante, que celle mesurée sur une éprouvette chargée et pré-séchée uniformément (Figure I-25).

Ce paradoxe est appelé « effet Pickett », du nom du scientifique qui a mis en évidence expérimentalement ce comportement en 1942. La part additionnelle de la déformation de fluage est définie comme la composante de fluage de dessiccation. Le fluage de dessiccation reste un phénomène encore mal expliqué et sujet à controverse dans la communauté scientifique (Jennings et Xi 1992). On notera que ce phénomène n'est pas limité aux matériaux à matrice cimentaire. En effet, le même comportement paradoxal a été observé sur le bois, bien plus tard (Armstrong et Kingston 1960) et où le terme de désorption mécanique (« mechano-sorption » en anglais) est préféré au terme de fluage de dessiccation.

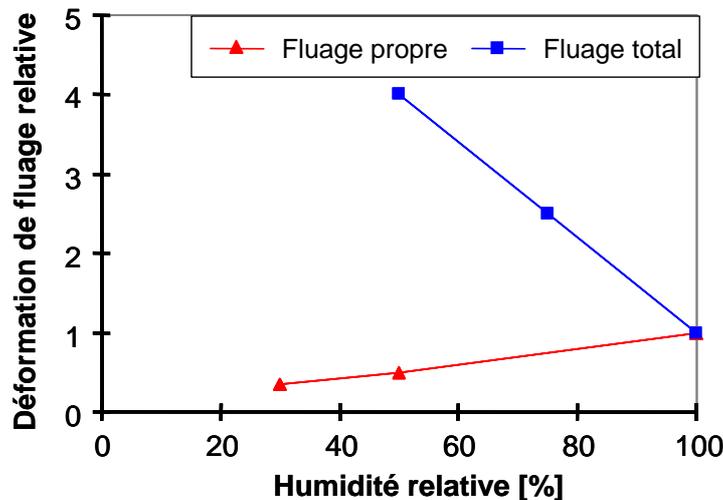


Figure I-25 Déformation de fluage relative pour différentes conditions hygrométriques (Acker et Ulm 2001).

Dans la littérature, deux phénomènes sont proposés pour expliquer l'origine de la déformation de fluage de dessiccation.

I-3.4.2.1 La part structurale du fluage de dessiccation

Le premier phénomène est lié à la fissuration du béton. En effet, lorsqu'une éprouvette en béton est soumise au séchage et à un chargement de compression, la fissuration induite (par le séchage) est moins prononcée, comparativement à celle d'un spécimen non chargé. Par conséquent, la déformation différée mesurée est supérieure à la somme des composantes élémentaires : retrait de dessiccation et fluage propre. La déformation additionnelle est appelée fluage de dessiccation structural (« micro-cracking effect » en anglais). Cette théorie est à rapprocher à celle proposée initialement par Pickett qui suggérait que le comportement non linéaire du béton soit responsable du fluage de dessiccation. Wittmann et Roelfstra (1980) ont aussi suggéré que la fissuration (et donc l'effet structural) soit la principale cause du fluage de dessiccation.

I-3.4.2.2 La part intrinsèque du fluage de dessiccation

Le deuxième phénomène est lié au comportement intrinsèque du matériau béton, en sus de l'effet structural. Les résultats expérimentaux et numériques de la littérature supportent cette idée. En effet, des éprouvettes de pâte de ciment d'épaisseur faible (1,9 mm, et donc non sujettes à une microfissuration importante) subissent une déformation de fluage de dessiccation importante (Figure I-26). De plus, les essais de fluage en compression uniaxiale et en flexion sur des éprouvettes séchantes mettent en évidence des déformations de fluage (par MPa) différentes, alors que ce n'est pas le cas si les éprouvettes sont protégées de la dessiccation (Reid et Sedra 1998). Étant donné que le retrait de dessiccation n'induit pas d'effort de flexion dans une poutre isostatique, on peut donc supposer que les différences obtenues entre les déformations soient imputables à un mécanisme physico-chimique de fluage de dessiccation.

Enfin, du point de vue numérique, la confrontation des résultats expérimentaux avec ceux des simulations numériques montre que le fluage de dessiccation structural ne permet pas d'expliquer à lui seul la totalité de la déformation de fluage de dessiccation mesurée (Thelandersson et al. 1988, Bažant et al. 1997, Benboudjema et al. 2001b).

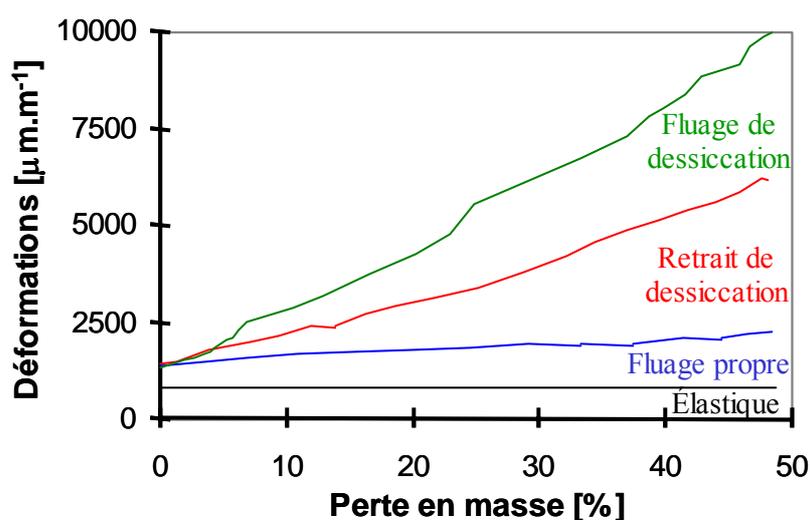


Figure I-26 Déformations d'une pâte de ciment d'épaisseur 1,9 mm (Day et al. 1984).

Nous présentons maintenant les mécanismes du fluage de dessiccation intrinsèque proposés dans la littérature. Ensuite, les caractéristiques expérimentales du fluage de dessiccation sont étudiées.

I-3.4.2.2.1 Les mécanismes du fluage de dessiccation intrinsèque

Le mécanisme de fluage de dessiccation intrinsèque ne peut pas être lié directement aux mécanismes de fluage propre. En effet, l'utilisation de laitier de haut fourneau réduit la déformation de fluage propre, mais augmente celle de fluage de dessiccation (Chern et Chan 1989). A l'inverse, la fumée de silice n'a pas d'influence sur la déformation de fluage propre mais réduit de façon significative celle de fluage de dessiccation (Buil et Acker 1985). De plus, si le fluage propre est fortement vieillissant (Figure I-21a, Nigoyi et *al.* 1973), cela n'est pas le cas du fluage de dessiccation, où la déformation ne dépend plus significativement de l'âge de chargement après 60 jours (Nigoyi et *al.* 1973).

Dans la littérature, plusieurs mécanismes ont été suggérés :

- La théorie de la consolidation (Ruetz 1968) : le chargement en compression accentue le départ de l'eau contenue dans la pâte de ciment, comme c'est le cas avec une éponge. Le départ de l'eau induit alors une contraction. Cette théorie fut abandonnée rapidement car, d'une part, les mesures de perte en masse d'éprouvettes chargées et non-chargées n'ont montré aucune différence (Figure I-14) et, d'autre part, la rigidité du squelette solide est beaucoup plus élevée que celle de l'eau (Bažant et Prasanna 1989) ;
- Le couplage entre la diffusion de l'eau et des éléments solides : des particules solides formant la pâte de ciment sont susceptibles de se dissoudre (probablement les ions Ca^{2+}), du fait des pressions exercées dans les zones d'adsorption empêchée. La partie dissoute diffuse, puis précipite au niveau des parois d'un macropore adjacent. Du fait de la dessiccation, les molécules d'eau, qui diffusent, entrent en collision avec le solide et favorisent alors le processus de dissolution. Le départ de particules solides des zones d'adsorption empêchée, sous l'effet de la dessiccation, entraîne alors une contraction, correspondante à la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque (Bažant et Moschovidis 1973) ;
- Le retrait induit par les contraintes (« stress-induced shrinkage », Bažant et Chern 1985) : le fluage de dessiccation intrinsèque est lié à l'existence au sein du béton de deux processus différents de diffusion de l'humidité : une diffusion macroscopique au sein des macropores du matériau (traduisant le séchage) et une diffusion microscopique dans les micropores. Dans ce dernier cas, le flux local des molécules d'eau entre les zones d'adsorption empêchée et les pores capillaires dans la pâte de ciment accélérerait le processus de rupture des liaisons atomiques entre les C-S-H, conduisant à l'apparition de la déformation de fluage de dessiccation ;
- La relaxation des micro-précontraintes dans les zones d'adsorption empêchée (Bažant et *al.* 1997) : ce mécanisme a été présenté dans le paragraphe § I-3.4.1.1.2. L'humidité relative, à travers son effet sur la pression de disjonction, entraîne une modification de l'amplitude des micro-précontraintes, causant ainsi la déformation de fluage de dessiccation ;
- Le fluage induit par la concentration des contraintes sur le gel de C-S-H (Brooks 2001) : lorsque le béton est saturé, les contraintes macroscopiques sont redistribuées entre le squelette solide et l'eau présente dans les pores de gel. Lors du séchage, le départ de l'eau augmente l'amplitude des contraintes reprises par le squelette solide, induisant une déformation de fluage additionnelle, correspondant à la déformation de fluage de

dessiccation intrinsèque. Ce mécanisme est à rapprocher à la théorie de la théorie de la consolidation ;

➤ Le fluage induit par la variation du rayon de courbure des ménisques (Kovler 2001) : étant donné que le coefficient de Poisson élastique du béton est de l'ordre de 0,2, l'application d'un chargement induit une variation de volume dans le matériau. Ainsi, dans le cas d'un chargement de compression, le volume diminue, induisant une diminution du rayon de courbure des ménisques dans les pores capillaires⁷ et donc une augmentation de la pression capillaire. Cette augmentation se traduit par l'apparition de la déformation de fluage de dessiccation.

I-3.4.2.2.2 Les caractéristiques du fluage de dessiccation

Ali et Kesler (1964) semblent être les premiers à avoir observé que le fluage de dessiccation a de nombreuses caractéristiques communes avec le retrait de dessiccation. Ainsi, ils ont observé que la déformation de fluage de dessiccation est proportionnelle à la déformation de retrait de dessiccation (Figure I-27a).

Ils ont alors suggéré que le fluage de dessiccation ne soit en réalité qu'une déformation de retrait de dessiccation, induite par les contraintes. Les mêmes observations ont été faites par la suite par d'autres auteurs (Gamble et Parrott 1978, Sicard et *al.* 1996). Or, les résultats expérimentaux de retrait de dessiccation ont montré l'existence d'une relation quasi-linéaire entre le retrait de dessiccation et l'humidité relative interne (et à la perte en masse) dans la gamme d'humidité relative 50 – 100 % (paragraphe § I-3.3.3.1). Cela implique que la déformation de fluage de dessiccation soit aussi proportionnelle à la perte en masse. Or, les résultats expérimentaux obtenus par Day et *al.* (1984) sur des pâtes de ciment ne confirment pas ce résultat. En effet, selon la vitesse de séchage, la relation déformation de fluage de dessiccation–perte en masse est plutôt linéaire (séchage lent) ou bi-linéaire (séchage rapide, Figure I-27).

Les effets d'une variation des contraintes (chargement, déchargement) et de l'humidité relative (vitesse, séchage ou réhumidification) sur la déformation de fluage de dessiccation, n'ont été que très peu étudiés pour le béton. De tels résultats permettraient d'améliorer nos connaissances sur le fluage de dessiccation, et notamment de proposer une modélisation intégrant ces effets. L'étude des résultats disponibles (peu nombreux) indique toutefois que :

- Lors d'un déchargement total, la déformation de fluage de dessiccation serait, soit totalement irréversible (Day et *al.* 1984), soit réversible à 20 % environ (Gamble et Parrott 1978). A titre de comparaison, il est à rappeler que la déformation de fluage propre est, elle aussi, réversible à environ 20-30 % (voir le paragraphe § I-3.4.1) ;
- Une réhumidification entraîne une déformation additionnelle de fluage, de sens opposé au gonflement libre (Gamble et Parrott 1978, Day et *al.* 1984). La déformation ainsi obtenue est appelée déformation de fluage de réhumidification. La déformation de fluage propre étant proportionnelle à l'humidité relative (voir la Figure I-23 à gauche), on peut se demander légitimement si la déformation de fluage de réhumidification n'est pas en réalité une déformation de fluage propre.

Cette analyse montre que la déformation de fluage de dessiccation présente à la fois des similarités et des différences avec la déformation de retrait de dessiccation (ou gonflement en cas de réhumidification) et la déformation de fluage propre. Néanmoins, il faut garder à

⁷ Cette variation du rayon de courbure est questionnable. Un calcul élastique met en évidence une diminution de 0,55 % de la porosité sous un chargement de 12 MPa (Granger 1996).

l'esprit qu'aucune technique expérimentale actuelle ne permet réellement d'isoler la composante de fluage de dessiccation, bien que des tentatives aient été menées (Bažant et Xi 1994, Altoubat et Lange 2002). La micro-fissuration et l'hétérogénéité des contraintes (liées à la dessiccation) peuvent être limitées pour des pâtes de ciment, en choisissant une faible épaisseur. Mais, cela ne peut pas être fait pour des éprouvettes en béton, puisque l'épaisseur doit être suffisamment importante pour avoir un volume représentatif. De plus, nous avons remarqué que la déformation de fluage propre est proportionnelle à l'humidité interne : sa contribution dans un essai de fluage propre et de fluage total n'est donc pas identique. Puisque la déformation de fluage propre obtenue en auto-dessiccation est ôtée des mesures expérimentales pour obtenir la déformation de fluage de dessiccation, la déformation ainsi obtenue inclut alors indubitablement une part de fluage propre.

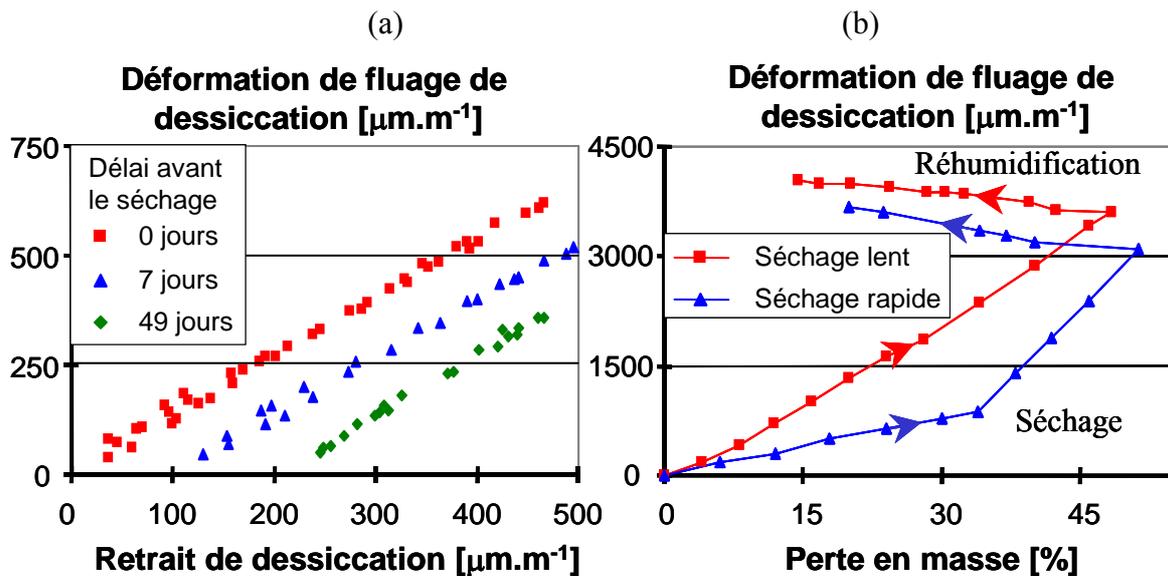


Figure I-27 (a) Déformation de fluage de dessiccation d'un béton (Gamble et Parrott 1978) et (b) d'une pâte de ciment (Day et al. 1984).

Ces constatations compliquent la proposition d'un mécanisme de fluage de dessiccation, et notamment son lien possible avec le retrait ou/et le fluage. La modélisation de la déformation de fluage de dessiccation s'en trouve alors plus délicate à mettre en œuvre. Ceci peut expliquer pourquoi la communauté scientifique n'est toujours pas d'accord sur le ou les mécanismes qui sont à l'origine du fluage de dessiccation.

I-3.4.3 Le cas de la traction

Très peu d'études expérimentales existent dans la littérature à ce sujet. La majorité des études expérimentales a porté sur le fluage en compression. Pourtant, la connaissance précise du fluage en traction est importante pour estimer la fissuration due au retrait de dessiccation et/ou au retrait thermique (Østergaard et al. 2001). Cela a une grande conséquence lorsque ces déformations de retrait sont gênées, ce qui est le cas lors de l'utilisation d'enduit de mortier (Bissonnette et Pigeon 1995), dans le cas de la réparation d'ouvrages par remplissage d'un béton frais (Shambira et Nounu 2001) ou lors des reprises de bétonnage (Granger 1996). En effet, les déformations de fluage induisent une relaxation des auto-contraintes induites et limitent donc les risques de fissuration au jeune âge. Au contraire, elles peuvent induire une fissuration, dans le cas où un fluage différentiel se produit.

Les complaisances du fluage propre en compression et en traction semblent être du même ordre de grandeur (Brooks et Neville 1977). Les résultats expérimentaux montrent que la déformation de fluage en traction dépend fortement du rapport e/c (Bissonnette et Pigeon

1995), de la température (Hauggaard et *al.* 1999) et surtout de l'âge de chargement (Østergaard et *al.* 2001), comme dans le cas de la compression.

Lors d'un chargement simultané avec la dessiccation, on observe, de la même façon que dans le cas de la compression, une déformation de fluage de dessiccation. Toutefois, contrairement à la compression, cette déformation est du signe opposé à la déformation de retrait de dessiccation (Brooks et Neville 1977, Kovler 1999, Altoubat et Lange 2002), ce qui rend impropre le terme employé de retrait induit par la contrainte.

On signalera, néanmoins, que toutes ces remarques sont sujettes à caution, puisque les contraintes de traction appliquées sont très faibles (en général inférieures à 3 MPa), du fait de la faible résistance en traction du béton.

I-3.4.4 Le cas des sollicitations multiaxiales en compression

I-3.4.4.1 Le coefficient de Poisson de fluage

Le comportement élastique sous des contraintes multiaxiales est en général caractérisé par le coefficient de Poisson. Par analogie avec l'élasticité, un coefficient de Poisson de fluage est généralement défini (Gopalakrishnan et *al.* 1969, Jordaan et Illston 1969, Neville et *al.* 1983, Granger 1996, Bažant et *al.* 1997) pour appréhender le fluage multiaxial. La question qui se pose alors, est de savoir, si ces deux coefficients de Poisson (élastique et fluage) sont liés.

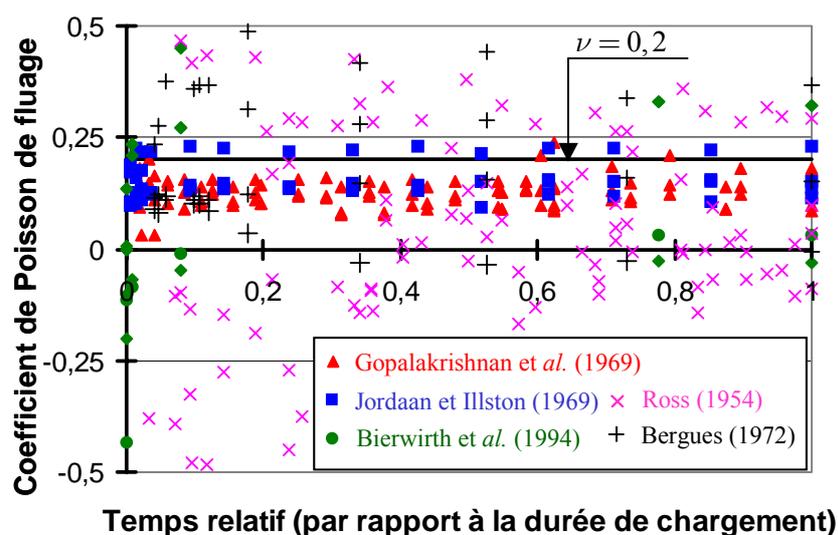


Figure I-28 Évolution du coefficient de Poisson de fluage dans le cas de sollicitations multiaxiales pour différents auteurs (Benboudjema et *al.* 2000a).

Ulm et *al.* (1999) ont suggéré, étant donné que le fluage et l'élasticité ne sont pas attribuables aux mêmes mécanismes, que leurs coefficients de Poisson respectifs soient différents. Ceci a pu être mis en évidence expérimentalement. En effet, Ghosh (1974) et Parrott (1974) observent que le coefficient de Poisson élastique dépend de la quantité d'eau perdue avant chargement, ce qui n'est pas le cas du coefficient de Poisson de fluage. De plus, l'augmentation du volume de pâte de ciment, dans la composition du béton, induit des effets opposés sur le coefficient de Poisson élastique (qui diminue) et le coefficient de Poisson de fluage propre (qui augmente, Neville et *al.* 1983). Par conséquent, le coefficient de Poisson de fluage propre ne peut pas être relié directement au coefficient de Poisson élastique. De plus, le coefficient de Poisson de fluage dépend des valeurs des contraintes appliquées et de la direction concernée, ce qui, par ailleurs, n'autorise plus l'application du principe de superposition.

En outre, l'analyse bibliographique de plusieurs résultats expérimentaux de fluage multiaxial (voir la Figure I-28) montre une grande dispersion sur les valeurs du coefficient de Poisson de fluage pour les bétons (Benboudjema et al. 2000a), ce qui n'est pas observée pour le coefficient de Poisson élastique.

A l'heure actuelle, peu d'hypothèses ont été émises sur l'origine de cette dispersion. Neville et al. (1983) ont suggéré qu'elle soit liée aux conditions d'essais (effet de l'humidité relative ambiante, effet du frettage) et/ou à la technique de mesure (jauge de déformations ou capteur de déplacements).

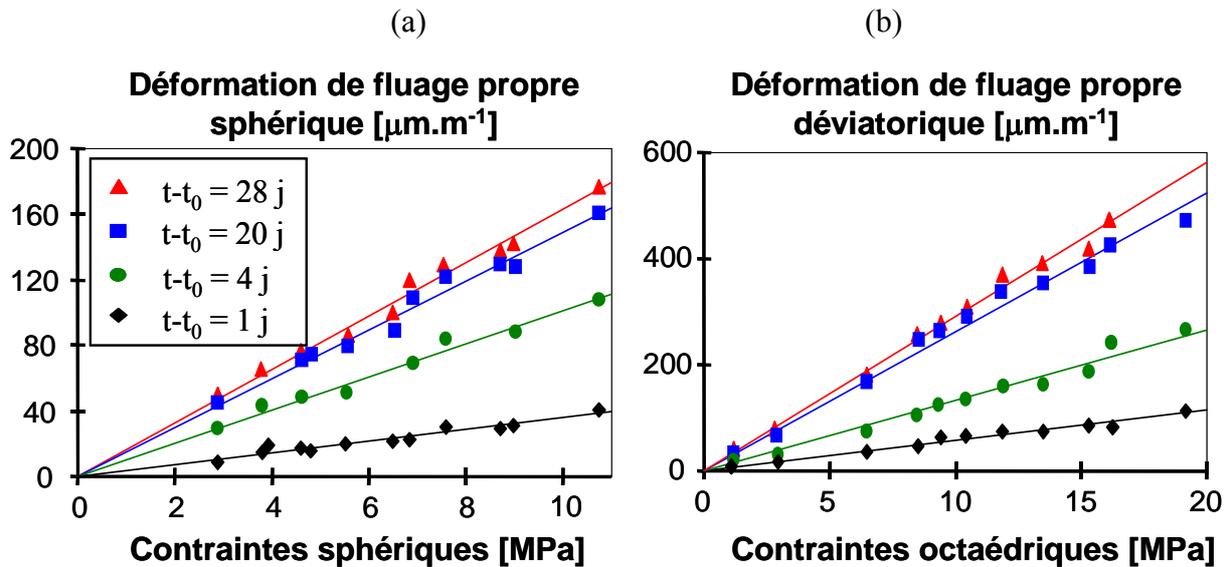


Figure I-29 Déformations de fluage propre sphérique et déviatorique en fonction des contraintes sphériques (a) et des contraintes déviatoriques (b), respectivement (Gopalakrishnan et al. 1969).

Pourtant la connaissance de la valeur du coefficient de Poisson de fluage, dans le cas de sollicitations multiaxiales, est fondamentale. Un calcul viscoélastique linéaire, en considérant un état de contraintes biaxiales moyen, du à la précontrainte dans une enceinte de confinement de bâtiment réacteur nucléaire le met en évidence en **Annexe A**. Une variation du coefficient de Poisson de fluage entre 0,2 et - 0,2 conduit à une variation de 33 % de la déformation orthoradiale et de 79 % de la déformation verticale ! De plus, un calcul probabiliste, sur une structure précontrainte biaxialement, souligne l'importance du coefficient de Poisson de fluage, pour la prédiction des déformations différées à long terme (Heinfling et al. 1998).

I-3.4.4.2 Décomposition de la déformation de fluage propre

Par ailleurs, de nombreux essais expérimentaux (Figure I-29, Gopalakrishnan et al. 1969, Jordaan et Illston 1969, Glücklich et Amar 1972, Ohgishi et al. 1979) mettent en évidence la proportionnalité entre les déformations sphériques (respectivement déviatoriques) de fluage propre et les contraintes sphériques (respectivement déviatoriques).

I-3.4.5 L'interaction fluage/fissuration

La déformation de fluage est proportionnelle à la contrainte jusqu'à 30-50 % de la résistance en compression (Bierwirth et al. 1994, Li 1994, Neville 2000, Mazzotti et Savoia 2001). Au-delà, la réponse est fortement non linéaire. La déformation de fluage devient beaucoup plus élevée, que celle prédite par la théorie de la viscoélasticité linéaire. Dès que la contrainte dépasse 85 % de la résistance, la rupture se produit inévitablement après quelques minutes (Li 1994). Avant que la rupture ne se produise, on observe une croissance rapide des fissures macroscopiques (Li 1994, Mazzotti et Savoia 2001). La déformation latérale augmente alors

plus rapidement que la déformation longitudinale, ce qui se traduit par une augmentation rapide du coefficient de Poisson.

I-3.4.6 Conclusion

Bien que des progrès certains aient été réalisés pour appréhender les mécanismes et les propriétés du fluage du béton, il s'agit encore d'un sujet à controverse (Tamtsia et Beaudoin 2000). Pourtant, c'est une propriété importante des bétons ordinaires (il est vrai, le plus souvent néfaste). Les mécanismes de fluage situés à différentes échelles de la pâte de ciment, (porosité capillaire, porosité des hydrates) sont difficilement accessibles par les moyens d'investigation expérimentale traditionnels (Ulm et Acker 1998). Le fluage dans le cas de sollicitations de traction, de dessiccation ou multiaxiales est encore moins connu, bien que de nombreux ouvrages subissent ces sollicitations.

Néanmoins, il semble que l'on puisse dégager parmi les différents mécanismes de fluage propre, deux mécanismes proposés par de nombreux auteurs et qui sont en accord avec plusieurs observations expérimentales : la migration de l'eau adsorbée sous contraintes dans la porosité capillaire et le glissement des feuilletts de C-S-H à l'échelle de la nanoporosité. Ensuite, il apparaît clairement que les caractéristiques essentielles du fluage, à prendre en compte sont, sans ordre d'importance : l'occurrence d'une déformation irréversible lors d'un déchargement, une relation linéaire entre la déformation de fluage et la contrainte appliquée (pour des contraintes inférieures à 30–50 % de la résistance en compression), une décomposition sphérique/déviatorique, une dépendance forte à l'humidité relative à l'âge et à la formulation de béton utilisée.

I-4 Modélisation du comportement hydromécanique du béton

I-4.1 Modélisation du séchage

I-4.1.1 Modélisation physique du séchage

Le facteur initiant le séchage du béton est le gradient d'humidité relative existant entre l'environnement (extérieur) et le béton (intérieur). Ce déséquilibre se traduit par le mouvement de l'eau et de l'air présents dans le béton, vers l'extérieur selon principalement quatre modes de transport couplés (Baroghel-Bouny *et al.* 1999, Oshita et Tanabe 2000, Wirtanen et Pentalla 2000, Daïan 2001, Coussy *et al.* 2001, Mainguy *et al.* 2001) :

- Le transport de l'eau liquide, dont le mécanisme moteur est le gradient de pression (gouverné par la perméabilité du réseau poreux). Ce mouvement peut être décrit à l'aide de la loi de Darcy :

$$\mathbf{v}_l = -\frac{K}{\eta_l} k_{r,l} \nabla p_l \quad (\text{I-1})$$

où \mathbf{v}_l [m.s⁻¹] est la vitesse de filtration de l'eau liquide, K [m²] représente la perméabilité intrinsèque du matériau (indépendante du liquide saturant), η_l [kg. m⁻¹.s⁻¹ ou Pa.s] est la viscosité dynamique du liquide saturant (ici de l'eau), $k_{r,l}$ est la perméabilité relative de l'eau liquide et p_l [Pa] est la pression du liquide saturant.

- Le transport de l'humidité sous phase vapeur dont le mécanisme moteur est le gradient de concentration (gouverné par la diffusivité de la vapeur d'eau). Ce mouvement peut être décrit à l'aide de la première loi de Fick :

$$\Phi_{diff} = -D_{diff} \nabla C_{v,l} \quad (\text{I-2})$$

où C_{v_l} [kg.m⁻³] est la concentration en vapeur d'eau libre, D_{diff} [m².s⁻¹] est la diffusivité de la vapeur d'eau et Φ_{diff} [kg.m⁻².s⁻¹] est le flux de vapeur d'eau libre.

- Le transport de l'air sec, dont le mécanisme moteur est le gradient de pression (gouverné par la perméabilité du réseau poreux). Ce mouvement peut être décrit à l'aide de la loi de Darcy :

$$\mathbf{v}_a = -\frac{K}{\eta_a} k_{ra} \nabla p_a \quad (I-3)$$

où \mathbf{v}_a [m.s⁻¹] est la vitesse l'air sec, η_a [kg. m⁻¹.s⁻¹] est la viscosité dynamique de l'air sec, k_{ra} est la perméabilité relative de l'air sec et p_a [Pa] est la pression de l'air sec.

- Le transport convectif de l'eau sous phase vapeur essentiellement. La vapeur d'eau est entraînée par la migration de l'air sec, si elle a lieu :

$$\Phi_{conv} = C_{v_l} \mathbf{v}_a \quad (I-4)$$

où Φ_{conv} [kg.m⁻².s⁻¹] est le flux de vapeur d'eau dû à la convection.

Une modélisation physique du séchage peut être alors effectuée à l'aide des équations de transport précédentes I-1, I-2, I-3 et I-4 (dès que les paramètres intervenants sont connus) et des équations de conservation de la masse de chacun des constituants (Baroghel-Bouny et al. 1999) :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Phi \rho_l S_l)}{\partial t} = -\nabla(\Phi S_l \rho_l \mathbf{v}_l) - \mu_{l \rightarrow v} \\ \frac{\partial[\Phi \rho_v (1-S_l)]}{\partial t} = -\nabla(\Phi (1-S_l) \rho_v \mathbf{v}_v) + \mu_{l \rightarrow v} \\ \frac{\partial[\Phi \rho_a (1-S_l)]}{\partial t} = -\nabla(\Phi (1-S_l) \rho_a \mathbf{v}_a) \end{cases} \quad (I-5)$$

où ϕ est la porosité du matériau, ρ_i [kg.m⁻³] est la masse volumique du fluide i ($i=l$ pour l'eau liquide, $i=v$ pour la vapeur d'eau, $i=a$ pour l'air sec), S_l est le degré de saturation (rapport entre le volume d'eau liquide et le volume des pores), \mathbf{v}_i est la vitesse du fluide i et $\mu_{l \rightarrow v}$ [kg.m⁻³.s⁻¹] est la vitesse de vaporisation volumique.

I-4.1.2 Modélisation simplifiée du séchage

Le séchage peut être modélisé plus simplement à l'aide d'une seule équation de diffusion, similaire à la deuxième loi de Fick, et écrite en fonction de la teneur en eau (Granger 1996) ou de l'humidité relative (Xi et al. 1994, Witasse 2000) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla[D_{eq}(C) \nabla C] \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla[D_{eq}(h) \nabla h] \quad (I-6)$$

où D_{eq} est le coefficient de diffusion équivalent de l'eau, dont plusieurs expressions sont disponibles dans la littérature (Bažant et Najjar 1972, Mensi et al. 1988, Xi et al. 1994, Garboczi et al. 1995) et $\frac{\partial C}{\partial h}$ est la pente de la courbe de l'isotherme d'adsorption ou de désorption (« moisture capacity » en anglais).

Les deux principales hypothèses, sous-jacentes à cette modélisation, sont (Coussy et al. 2001, Mainguy et al. 2001) :

- Durant le processus de séchage à température ambiante, la pression du mélange gazeux (air sec + vapeur d'eau) est égale à la pression atmosphérique extérieure. La justification de cette hypothèse est que la viscosité dynamique de l'air sec est très faible. Ainsi, les variations possibles de pression engendrées se dissipent rapidement à l'échelle de temps du processus de séchage ;
- Le transport de la vapeur d'eau est de type diffusif uniquement. La justification est que la quantité de vapeur d'eau transportée lors du mouvement du mélange gazeux (mouvement convectif) reste négligeable, par rapport à celle induite lors du transport diffusif.

L'analyse fine des transferts hydriques (dans le sens de la démarche présentée dans le paragraphe précédent § I-4.1.1) combinant modèle et expérience (Coussy *et al.* 2001) a mis en évidence que la deuxième hypothèse est justifiée. Par contre, la première hypothèse est discutable. Les simulations numériques montrent en effet que la surpression du mélange gazeux atteint 20 à 70 % de la pression atmosphérique. La surpression dépend fortement de la perméabilité relative de l'eau liquide utilisée dans le calcul numérique (équation I-1, Mainguy *et al.* 2001). Cette surpression ne peut pas être attribuée à l'évaporation de l'eau liquide, puisque la pression de vapeur ne peut pas dépasser la pression de vapeur saturante. Elle est due à la faible perméabilité du matériau, n'autorisant plus la dissipation rapide de la surpression du gaz. Par ailleurs, il a été obtenu que la perte de masse mesurée au cours du séchage résulte essentiellement du transport de l'humidité sous forme liquide, l'air sec entrant par diffusion moléculaire (et responsable de la surpression) bloquant rapidement la diffusion de la vapeur d'eau (Coussy *et al.* 2001, Mainguy *et al.* 2001).

I-4.1.3 Conclusion

Nous avons mis en évidence que l'utilisation d'un modèle de séchage basé sur des mécanismes physiques, prenant en compte les différents phénomènes de transport de l'eau, fait apparaître de nombreuses difficultés, au niveau numérique, mais aussi au niveau de la modélisation. En effet, elle met en œuvre des expressions complexes des paramètres de modélisation. Les nombreux paramètres intervenant dans ces équations ne sont pas constants et dépendent fortement de l'humidité relative, de la dimension et de la morphologie des pores à l'échelle où se produit le transport. Les nombreuses fonctions proposées dans la littérature sont alors souvent non linéaires et semi-empiriques (Baroghel-Bouny *et al.* 1999, Coussy *et al.* 2001, Mainguy *et al.* 2001, Bourgeois *et al.* 2002). D'une part, l'identification expérimentale des paramètres est difficile. D'autre part, la résolution numérique est complexe et coûteuse en temps de calcul. Nous ne nous intéressons pas réellement dans ce travail aux mécanismes de diffusion, mais plutôt aux effets de l'eau sur le comportement différé du béton. Ainsi, une modélisation simplifiée (présentée dans le paragraphe § I-4.1.2) nous semble suffisante. En effet, elle permet de retrouver la variation expérimentale de la masse globale et les gradients de la teneur en eau et de l'humidité relative (Xi *et al.* 1994, Granger 1996, Witasse 2000). Dans notre cas, elle permettra de calculer, de façon précise, l'évolution dans le temps et la distribution de la teneur en eau (et de l'humidité relative) au sein du matériau.

Quant à la micro-fissuration induite par le séchage, elle ne modifie pas de façon significative les propriétés de transport de l'eau (voir le paragraphe § I-3.2.2). Ainsi, nous considérerons dans notre travail les paramètres de transport indépendants de l'état de dégradation mécanique.

I-4.2 Modélisation de la fissuration

La majorité des modèles de comportement du béton fissuré appartient à l'une de ces trois classes de modèles : les modèles élastoplastiques, les modèles d'endommagement et les modèles élastoplastiques endommageables.

I-4.2.1 Le cas de la fissuration répartie

I-4.2.1.1 Choix du potentiel thermodynamique

La température est considérée ici constante et uniforme. Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, on postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérive les lois d'état. Le potentiel thermodynamique énergie libre convexe ψ est fonction des variables d'état observables et des variables internes. Son expression dépend du type d'approche choisie et sera précisée dans chacun des cas étudiés.

La dissipation totale du système φ est toujours positive (inégalité de Clausius-Duhem, Lemaitre et Chaboche 1988). Elle s'écrit pour un système fermé non réactif en situation isotherme :

$$\varphi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (\text{I-7})$$

La relation I-7 ne tient pas compte du couplage hydromécanique. En effet, la dissipation due au transport de l'eau à travers le milieu solide ainsi que son interaction avec celui-ci ne sont pas prises en compte dans cette relation. Ces hypothèses seront également retenues par la suite, notamment en ce qui concerne le modèle de fissuration développé dans ce mémoire.

I-4.2.1.2 Approche par la mécanique de l'endommagement élastique

La théorie de l'endommagement est apparue au début des années 60, dans le but initial de prédire le fluage des matériaux métalliques. Les modèles d'endommagement ont été ensuite utilisés dans le but de modéliser les effets des micro-fissures et des micro-vides sur le comportement mécanique du béton.

Le terme endommagement, très utilisé, reflète en réalité l'endommagement que subit le matériau à 3 différentes échelles d'observation (Ju 1989) :

- Les lacunes atomiques ou les défauts liés à la dislocation, nécessitant de se placer à l'échelle de l'atome ;
- Les micro-fissures et les micro-vides, nécessitant des modèles d'endommagement micro-mécaniques (modélisant les changements micro-structuraux et la croissance individuelle des micro-fissures) ou des modèles d'endommagement continus phénoménologiques (modélisant les micro-fissures réparties) ;
- Les macro-fissures, nécessitant un modèle basé sur la mécanique de la rupture, afin de rendre compte de la croissance des macro-fissures discrètes.

Afin de modéliser le comportement de structures en béton, de façon macroscopique, le concept de fissuration répartie paraît une bonne solution. En effet, l'échelle atomique nécessiterait un maillage trop fin pour caractériser la loi de comportement à l'échelle macroscopique. De plus, la prise en compte de fissure discrète nécessite l'introduction d'éléments joints, intégrant l'ouverture de fissures. Le développement des fissures est alors biaisé par le maillage adopté.

Nous nous limitons par la suite aux modèles basés sur le concept de fissuration répartie.

I-4.2.1.2.1 Définition des contraintes effectives

Les modèles d'endommagement, à l'échelle des micro-fissures et des micro-vides, sont basés sur le concept des contraintes effectives. Le matériau réel fissuré est décomposé en une partie saine, de surface effective $\tilde{S}(\mathbf{n})$ et une partie constituée de vide (due à la microfissuration ou à des micro-vides), de surface $S(\mathbf{n}) - \tilde{S}(\mathbf{n})$ (Figure I-30).

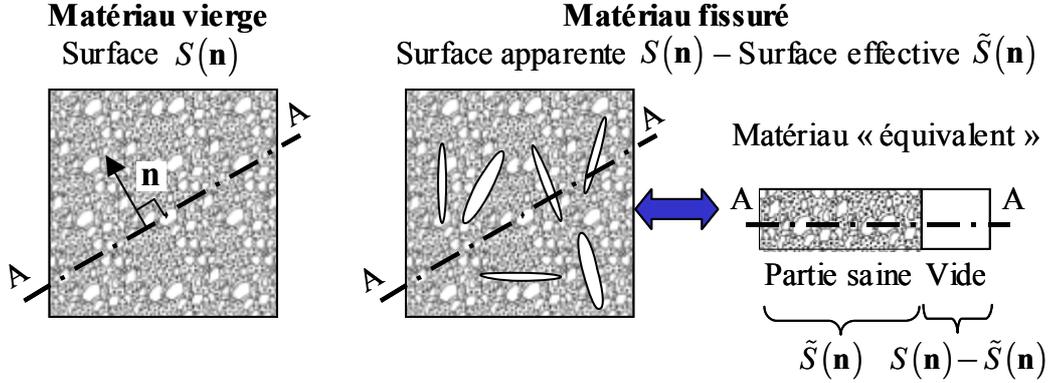


Figure I-30 Définition de la surface effective.

Ainsi, la contrainte macroscopique apparente $\sigma(\mathbf{n})$ dans la direction \mathbf{n} n'est reprise que par la partie saine du matériau, soumise à la contrainte effective $\tilde{\sigma}(\mathbf{n})$:

$$\sigma(\mathbf{n}) = \frac{\tilde{S}(\mathbf{n})}{S(\mathbf{n})} \tilde{\sigma}(\mathbf{n}) \quad (\text{I-8})$$

L'endommagement $d(\mathbf{n})$ dans la direction \mathbf{n} est définie comme le rapport de la surface des vides sur la surface totale :

$$d(\mathbf{n}) = \frac{S(\mathbf{n}) - \tilde{S}(\mathbf{n})}{S(\mathbf{n})} \quad (\text{I-9})$$

I-4.2.1.2.2 Formulation des modèles d'endommagement

Dans le cas où il n'y a pas d'effets plastiques, le potentiel thermodynamique ψ s'écrit :

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}, \boldsymbol{\kappa}_d) \quad (\text{I-10})$$

où \mathbf{D} est le tenseur d'endommagement associé, représentant la variable $d(\mathbf{n})$ et $\boldsymbol{\kappa}_d$ est le vecteur des variables internes.

En dérivant le potentiel thermodynamique énergie libre convexe ψ , on obtient la relation :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}_d} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_d + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{I-11})$$

L'inégalité I-7 devient alors :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}_d} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_d - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (\text{I-12})$$

Cette inégalité doit être vérifiée dans le cas d'un matériau élastique (Lemaitre et Chaboche 1988). On obtient finalement les lois d'état classiques :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad \mathbf{Y} = -\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = -\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\kappa}_d} \quad (\text{I-13})$$

où la variable force thermodynamique \mathbf{Y} (taux de restitution d'énergie) est associée à l'endommagement \mathbf{D} , et la variable force d'écrouissage \mathbf{A} est associée au vecteur des variables internes $\boldsymbol{\kappa}_d$.

La structure principale des modèles d'endommagement élastique est basée sur la relation contrainte-déformation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^s(w, \boldsymbol{\Omega}, \dots) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{I-14})$$

où \mathbf{D}^s est le tenseur de rigidité sécant dépendant éventuellement d'un certain nombre de variables internes (scalaire w ou tensorielle $\boldsymbol{\Omega}$) et $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est le tenseur de déformations élastiques.

A la relation précédente, une dépendance de la loi de comportement à l'histoire des contraintes et des déformations est incorporée. Cette dépendance est introduite par le biais d'une (ou plusieurs) fonction(s) de charge/décharge F_d supposée fermée et convexe. Si cette fonction est négative, le comportement du matériau est élastique linéaire. La fonction F_d peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$F_d(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}_d) \leq 0 \quad (\text{I-15})$$

L'endommagement du matériau est caractérisé par les lois d'évolution du paramètre d'écrouissage $\boldsymbol{\kappa}_d$ (i) et de l'endommagement \mathbf{D} (ii) :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\kappa}}_d &= \dot{\lambda}_d \mathbf{H}_d(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}_d) \quad (\text{i}) \\ \mathbf{D} &= \dot{\lambda}_d \frac{\partial G_d(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}_d)}{\partial \mathbf{Y}} \quad (\text{ii}) \end{aligned} \quad (\text{I-16})$$

où G_d est une fonction décrivant l'évolution de la variable d'endommagement, différente de la fonction F_d dans le cas d'une loi non associée et $\dot{\lambda}_d$ est le multiplicateur d'endommagement.

La fonction F_d doit alors satisfaire aux conditions de Kuhn-Tucker :

$$F_d \leq 0, \quad \dot{\lambda}_d \geq 0, \quad \dot{\lambda}_d F_d = 0 \quad (\text{I-17})$$

Dans la littérature, on distingue les modèles d'endommagement isotrope et anisotrope.

Dans le cas où l'endommagement est isotrope, la relation contraintes – déformations élastiques s'écrit (de Borst 1999) :

$$\sigma_{ij} = \left[(1-d_G) G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + (1-d_K) K \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e \quad (\text{I-18})$$

où G [MPa] est le module de cisaillement et K [MPa] est le module de compressibilité du matériau sain, dégradés par les variables d'endommagement scalaires d_G et d_K , respectivement. δ est le symbole de Kronecker, défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{I-19})$$

Les modules G et K peuvent être reliés au module d'Young E et au coefficient de Poisson ν du matériau sain par les relations suivantes :

$$\begin{cases} K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{I-20})$$

Une simplification additionnelle peut être effectuée en supposant que les paramètres G et K se dégradent de façon identique lors du processus de fissuration. Dans ce cas, le tenseur de rigidité sécant devient :

$$\mathbf{D}^s = (1-d) \mathbf{E}^0 \quad (\text{I-21})$$

où \mathbf{E}^0 est le tenseur de rigidité initial du matériau non fissuré :

$$E_{ijkl}^0 = G \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) + K \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (\text{I-22})$$

La fonction F_d ne dépend en général que des déformations ou des contraintes. Plusieurs fonctions F_d sont proposées dans la littérature (Mazars 1984, La Borderie 1991). Mazars (1984) a proposé d'exprimer la fonction F_d uniquement en fonction des déformations d'extension $\tilde{\varepsilon}$:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_i \left(\langle \varepsilon_{ii} \rangle^+ \right)^2} \quad (\text{I-23})$$

Il est à noter que ce choix peut paraître judicieux, puisque les essais expérimentaux mettent en évidence la rupture du béton dans des plans perpendiculaires à la direction d'extension maximale, dans le cas de sollicitations uniaxiales (Torrenti 1987).

De plus, l'évolution de la variable d'endommagement d est donnée par la relation suivante :

$$d = \alpha_c d_c + (1-\alpha_c) d_t \quad (\text{I-24})$$

avec :

$$d_i = 1 - \frac{\varepsilon_{D0} (1-A_i)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_i}{\exp[-B_i (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})]} \quad (\text{I-25})$$

où l'indice i correspond à la traction ($i = t$) ou à la compression ($i = c$), α_c est le coefficient de partition de l'endommagement, A_i et B_i sont des paramètres du modèle, ε_{D0} est le seuil d'endommagement.

Ce découplage de l'endommagement en une composante de compression et de traction, permet d'obtenir une dégradation de la rigidité asymétrique en compression et en traction.

Un des inconvénients de la formulation isotrope est qu'elle reproduit une fissuration non orientée. Or, si le béton peut être considéré comme un matériau initialement isotrope, le processus de fissuration en traction induit un comportement orthotrope du matériau (voir le paragraphe § I-3.1.3.2).

Le comportement du béton devient orthotrope dès qu'une fissuration dans des directions privilégiées a lieu. La modélisation du comportement anisotrope dans le cadre de la mécanique de l'endommagement peut se faire en dégradant le module d'Young dans une direction préférentielle, par le biais de fonctions de charge dépendantes de la direction

considérée. Une manière relativement simple d'obtenir une formulation anisotrope est de considérer un nombre fini de fonctions de charge/décharge f_n :

$$f_n(\varepsilon_n, \kappa_n) = \varepsilon_n - \kappa_n \quad (\text{I-26})$$

où ε_n et κ_n sont la déformation et le paramètre d'écrouissage dans la direction \mathbf{n} .

Dans le cas où trois directions seulement sont concernées, l'endommagement est alors orthotrope. Dans le cas des modèles micro-plan (Carol et Bažant 1997), les contraintes apparentes σ sont définies en fonction des contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ et de l'endommagement $d(\mathbf{n})$ dans un nombre fini de direction de l'espace, dans le même esprit que les équations I-8 et I-9. La contrainte macroscopique est alors définie à partir de l'intégration volumique des contraintes apparentes, définies dans chacune des directions (nombre supérieur à 20). On obtient alors une formulation anisotrope du modèle.

De nombreuses autres formulations du comportement anisotrope existent, basées sur une écriture de l'endommagement en un tenseur du second ordre (ou un ordre supérieur), et sur diverses hypothèses d'évolution : concept de déformations équivalentes, contraintes équivalentes ou énergie équivalente, produit de symétrisation, interaction négligeable entre les fissures créées dans chacune des directions élémentaires (sans être exhaustif, Fichant et al. 1997, Dragon et al. 2000, Carol et al. 2001).

Enfin, il est à noter que les modèles de fissuration fixe et tournante (« fixed smeared crack » et « rotating smeared crack »), ainsi que les modèles micro-plans peuvent être vus comme un cas spécial des modèles d'endommagement (anisotrope).

I-4.2.1.3 Approche par l'élastoplasticité adoucissante

L'analyse bibliographique a mis en évidence qu'une déformation anélastique se produit, dès qu'une fissuration est initiée (paragraphe § I-3.2.1). Ce comportement irréversible du béton peut être décrit en utilisant la théorie de la plasticité adoucissante. Il est à noter que la théorie de la plasticité a été développée à l'origine dans le but de caractériser les déformations irréversibles des métaux dues aux processus de dislocation (suivant des plans de glissement préférentiels). Cette théorie fut ensuite adaptée dans le cas des matériaux quasi-fragiles. Les matériaux quasi-fragiles ont un comportement différent des métaux : phénomène de dilatance, influence importante du confinement ... Plusieurs auteurs préfèrent alors utiliser le terme d'inélasticité (ou anélasticité), plutôt que de plasticité pour illustrer la différence de comportement phénoménologique entre les matériaux quasi-fragiles et les métaux. Dans ce qui suit, nous utiliserons ici le terme de plasticité, en gardant à l'esprit que seul le formalisme mathématique de la plasticité est utilisé pour décrire convenablement le comportement irréversible du béton.

Dans la théorie de l'élastoplasticité, il est postulé qu'il existe un domaine admissible dans l'espace des contraintes. La surface délimitant ce domaine, appelée surface de charge, est convexe. La surface de charge divise l'espace en trois domaines : une région à l'intérieur de la surface définissant l'élasticité, une région située sur la surface de charge définissant l'élastoplasticité et une région à l'extérieur de la surface qui ne peut pas être atteinte. Si la surface de charge reste fixe pendant le processus d'écrouissage, le comportement plastique parfait est alors simulé. Si la surface de charge se translate, on parle alors d'écrouissage cinématique. Si la surface de charge se dilate, le comportement rigidifiant est simulé. Enfin, si la surface se contracte, le comportement adoucissant est reproduit. La surface de charge F_p est fonction des contraintes σ et des variables d'écrouissage κ_p (qui gardent en mémoire entre autre l'histoire des contraintes à l'origine des déformations plastiques) :

$$F_p(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_p) \leq 0 \quad (\text{I-27})$$

Si cette surface ne dépend que des invariants des contraintes, le critère est alors isotrope, sinon il est anisotrope.

On adopte la partition de la vitesse de déformation totale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en une vitesse de déformation plastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et élastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (\text{I-28})$$

Cette écriture permet d'écrire le potentiel ψ sous la forme :

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}_p) \quad (\text{I-29})$$

La déformation plastique est conventionnellement définie par la relation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial G_p(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{I-30})$$

où la fonction G_p est la fonction potentielle plastique et λ_p le multiplicateur plastique.

Dans le cas où $F_p = G_p$ la loi d'écoulement est dite associée. Les résultats expérimentaux mettent en évidence qu'une loi associée est en général suffisante pour décrire correctement le comportement des métaux, mais pas celui des matériaux quasi-fragiles (Vermeer et de Borst 1984).

Les variables d'écrouissage sont déterminées à partir de la loi d'écrouissage :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_p = \dot{\lambda}_p \mathbf{H}_p(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_p) \quad (\text{I-31})$$

où la fonction \mathbf{H}_p définit la loi d'évolution des variables d'écrouissage.

La fonction F_p doit satisfaire aux conditions de Kuhn-Tucker :

$$F_p \leq 0, \quad \dot{\lambda}_p \geq 0, \quad \dot{\lambda}_p F_p = 0 \quad (\text{I-32})$$

De nombreux critères de plasticité sont proposés dans la littérature, certains relativement simples (Rankine, von Mises, Tresca, Drucker-Prager, ...), d'autres plus complexes (Willam et Warnke, Ottosen, ...). Le choix du critère à adopter dépend évidemment du comportement du matériau étudié. Dans le cas du béton, il apparaît que l'enveloppe de rupture dans le cas de sollicitations uniaxiales et biaxiales peut être décrite correctement par l'adoption de deux critères distincts : le critère de Rankine en traction et le critère de Drucker-Prager en compression (Feenstra et de Borst 1996, Georgin 1998, Heinfliing 1998, Nechnech 2000).

I-4.2.1.4 Le couplage endommagement / élastoplasticité

De nombreux matériaux se comportent de façon élastique linéaire dans le cas d'un chargement mécanique modéré, puis sont sujets à des déformations irréversibles et à une dégradation de la raideur, lorsque le chargement sort du domaine élastique. Pour les géomatériaux, les déformations irréversibles sont dues au développement de la microfissuration.

De nombreuses évidences expérimentales indiquent que l'endommagement des bétons peut être relié aux déformations plastiques (Ju 1989). Ainsi, les phénomènes d'endommagement et de plasticité ne peuvent pas être découplés pour les bétons, comme c'est le cas pour certains matériaux métalliques, où les déformations plastiques ne contribuent pas ou peu au processus de croissance de la micro-fissuration (Lemaitre 1985). Les mécanismes physiques

d'interaction entre l'endommagement et les déformations irréversibles sont de nature complexe. Peu d'informations sont disponibles sur les effets de la température, de l'hygrométrie, de la vitesse de déformation, de la localisation des déformations ou de la microstructure du matériau sur ces interactions (Luccioni et *al.* 1996).

De nombreux auteurs ont proposé des modèles reproduisant le couplage entre l'endommagement et la plasticité (sans être exhaustif : Lemaitre et Chaboche 1988, Ju 1989, Borino et *al.* 1996, Luccioni et *al.* 1996, Ibrahimbegović et *al.* 2002), en s'appuyant sur le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles.

Le potentiel thermodynamique, où les variables internes sont la variable d'endommagement (\mathbf{D} , force thermodynamique associée \mathbf{Y}) et les autres variables internes intégrant en outre les variables d'écroutissage plastique ($\boldsymbol{\kappa}$, force thermodynamique associée \mathbf{A}) s'écrit :

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{D}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (\text{I-33})$$

Les variables internes $\boldsymbol{\kappa}$ peuvent être scindées en une partie rendant compte des modifications de l'état du matériau dû à l'endommagement $\boldsymbol{\kappa}_d$ et en une partie associée aux effets de la plasticité $\boldsymbol{\kappa}_p$ (ouverture des fissures) :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_d + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p \quad (\text{I-34})$$

Les processus d'endommagement et de plasticité doivent alors satisfaire aux conditions de chargement/déchargement dérivées des relations de Kuhn-Tucker (équation I-17). L'évolution des déformations plastiques et de l'endommagement est alors obtenue en résolvant simultanément les deux équations traduisant les conditions de consistance :

$$\begin{cases} \dot{F}_d(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\kappa}_d) = 0 \\ \dot{F}_p(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_p) = 0 \end{cases} \quad (\text{I-35})$$

Un autre choix est d'associer explicitement l'endommagement d (scalaire) au paramètre d'écroutissage plastique κ_p , puisque les deux phénomènes sont interdépendants dans le béton (Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000) :

$$d = d(\kappa_p) \quad (\text{I-36})$$

Ce choix, réaliste, a l'avantage de simplifier considérablement l'intégration des lois constitutives, puisque la plasticité et l'endommagement peuvent être « découplées » au niveau du calcul numérique.

I-4.2.2 Instabilité matérielle/phénomène de localisation

Il est connu à l'heure actuelle que le comportement adoucissant (en compression et en traction) est à l'origine de difficultés d'ordre théorique et numérique (Bažant 1976, Pijaudier-Cabot et Benallal 1993, Meftah 1997).

Du point de vue théorique, on démontre qu'il se produit :

- Un changement de nature de l'équation d'équilibre. Initialement de nature elliptique, l'équation d'équilibre devient de type hyperbolique ;
- Une infinité de solutions possibles.

Du point de vue numérique, on constate :

- Une dépendance de la solution au maillage (taille, type et orientation) ;

- Une rupture possible sans dissipation d'énergie.

Les réponses à apporter se situent à deux niveaux. Du point de vue de la loi de comportement, les modèles continus cessent de donner une représentation significative du comportement mécanique du matériau, lorsque l'échelle d'observation approche celle de la microstructure du matériau. A cette échelle, le matériau ne peut plus être considéré comme continu, et sa description en terme de contraintes et déformations « classiques » (définies avec des valeurs moyennes sur le V.E.R.⁸) n'est plus valide. Le besoin de décrire le comportement du matériau globalement, rendant compte des détails de la microstructure et du processus de déformation à l'échelle microscopique, a conduit au développement de modèles continus enrichis. Ces approches ont été utilisées avec succès comme limiteurs de localisation :

- Modèle de type Cosserat, où la réciprocity des contraintes tangentielles n'est plus valide et où de nouveaux degrés de liberté sont introduits (microrotations associées à des micromoments) ;
- Modèle non local intégral, les forces d'interaction sont prises en compte en pondérant dans l'espace les quantités équivalentes. La déformation équivalente non locale $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ au point \mathbf{x} est définie comme la moyenne pondérée, par la fonction de voisinage $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, de la déformation équivalente locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans tout le domaine Ω (Pijaudier-Cabot et Bažant 1987, Bažant et Pijaudier-Cabot 1989) :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varphi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{I-37})$$

- Modèle au gradient (au premier ordre, second ordre ou même à des ordres supérieurs), prenant en compte des forces cohésives d'interaction à longue portée. En introduisant le paramètre c (\sqrt{c} peut être considéré comme la longueur caractéristique du modèle), la déformation équivalente non locale $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est définie à partir de la déformation équivalente locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ par la relation (Meftah 1997, Peerlings et al. 2001) :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - c \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I-38})$$

Ces trois approches introduisent une longueur caractéristique, liée à la distance à laquelle l'interaction se produit, et donc à l'échelle de la microstructure du matériau.

Du point de vue numérique, il est également possible de remédier aux pathologies précédemment mentionnées avec une méthode simple qui consiste à relier la valeur de l'énergie de rupture G_f à la courbe post-pic $\sigma - u$ (Hillerborg et al. 1976) :

$$G_f = \int_{u=0}^{u=\infty} \sigma du \quad (\text{I-39})$$

où u représente le déplacement lié à l'ouverture de fissure.

L'énergie dissipée à la rupture est alors gardée constante lorsque la taille des éléments change par affinement du maillage. La densité de l'énergie de fissuration g_f dissipée localement est liée à l'énergie de fissuration G_f par le biais d'une longueur caractéristique l_c qui dépend de la taille et du type de l'élément fini (Bažant et Oh 1983, Rots 1998) :

⁸ Volume Élémentaire Représentatif.

$$g_f = \frac{G_f}{l_c} \quad (\text{I-40})$$

Il est vrai que cette méthode ne permet pas de préserver la nature bien posée des équations régissant l'équilibre (Meftah 1997). Elle induit une évolution de la fissuration biaisée par l'orientation du maillage (Sluys 1992). Néanmoins, cette méthode a l'avantage d'être relativement simple à introduire dans une loi de comportement, et de ne pas nécessiter des calculs numériques lourds (comme c'est le cas des approches non locales). Elle devient alors particulièrement adaptée aux calculs sur des structures imposantes en un temps raisonnable.

I-4.2.3 Conclusion

Les objectifs du modèle de fissuration développé sont que ce modèle soit *relativement simple, robuste* et capable de reproduire correctement le comportement mécanique du béton expérimentalement observé. Le terme *simple*, signifie que le modèle doit décrire correctement les phénomènes mécaniques macroscopiques, par le biais d'une formulation mathématique simple, permettant un développement rapide (dans le cadre d'une thèse) dans un code de calcul aux éléments finis standard (ici CAST3M). Le terme *robuste* fait allusion à la capacité du modèle implanté dans le code de calcul à converger lors de simulations numériques. Ainsi, un algorithme performant est nécessaire pour y parvenir.

Les modèles d'endommagement élastique décrivent généralement correctement le comportement non linéaire des matériaux fragiles, puisqu'ils sont basés sur l'existence de micro-fissures ou de micro-vides dans le matériau. Néanmoins, ils ne peuvent pas prédire l'occurrence des déformations anélastiques, observées lors d'un déchargement. Quant aux modèles plastiques, ils sont adaptés à la description de ces déformations. Mais ils ne parviennent pas à décrire la dégradation de la raideur. Ainsi, il nous paraît judicieux d'allier à la fois les avantages des modèles d'endommagement élastique et de plasticité, à travers le formalisme de l'élastoplasticité endommageable.

Dans le cas de la plasticité, la description correcte de l'asymétrie du comportement en compression et en traction peut être menée par l'adoption de plusieurs critères de plasticité. Notre choix s'est porté sur l'utilisation d'un critère de Drucker-Prager en compression et de trois critères de Rankine en traction, afin de décrire un comportement isotrope en compression et orthotrope (orthotropie induite par la fissuration) en traction. En effet, nous avons constaté que la fissuration (en traction) induite par le séchage différentiel est à l'origine d'un comportement orthotrope (voir le paragraphe § I-3.1.3.2). De plus, les critères de Rankine et de Drucker-Prager ont été utilisés de nombreuses fois avec succès par le passé (Feenstra et de Borst 1996, Georgin 1998, Heinfling 1998, Nechnech 2000), dans le cas isotrope et sont particulièrement *simples* et *robustes* dans le sens défini plus haut.

La variable d'endommagement sera alors liée, de manière explicite, à la variable d'écrouissage plastique, telle que cela a été proposé par Lee et Fenves (1998) et Nechnech (2000). Ce choix est réaliste, puisque les phénomènes de dégradation de la raideur et de déformations plastiques sont liés. De plus, il permet de traiter, de façon simple, le couplage plasticité/endommagement.

Le caractère adoucissant du comportement du béton étant à l'origine de la dépendance de la solution numérique vis-à-vis du maillage, il est choisi d'adopter la méthode de Hillerborg afin d'y remédier. Ce choix permettra d'effectuer l'analyse numérique de structures de dimension importante, en un temps de calcul raisonnable.

I-4.3 La déformation de retrait de dessiccation

Les modélisations adoptées dans les approches codifiées ne sont pas abordées dans ce travail. En effet, ces approches sont menées dans une section moyenne (problème homogénéisé), alors que les variables concernées (humidité relative, contraintes, déformations) présentent un caractère fortement non homogène. Malgré la performance certaine des meilleurs modèles, on constate une variabilité prévisionnelle irréductible de l'ordre de 30 %, lorsque toutes les conditions d'essais sont maîtrisées (Heinfling et *al.* 1999).

I-4.3.1 Modélisation phénoménologique du retrait de dessiccation

I-4.3.1.1 Modélisation simplifiée

Les observations expérimentales sur l'évolution du retrait de dessiccation présentées dans le paragraphe § I-3.3.3.1 ont conduit de nombreux auteurs à relier linéairement, de façon phénoménologique, la déformation de retrait de dessiccation à la variation d'humidité relative (Wittmann et Roelfstra 1980, Alvaredo et Wittmann 1993, Bažant et Xi 1994, Bažant et *al.* 1997, van Zijl 1999) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{rd} = k_{rd}^h \dot{h} \mathbf{1} \quad (\text{I-41})$$

où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{rd}$ est le tenseur de déformation de retrait de dessiccation intrinsèque, k_{rd}^h est le coefficient de compressibilité hydrique et $\mathbf{1}$ est le tenseur unité du second ordre.

Il est parfois choisi d'exprimer le retrait de dessiccation suivant une fonction linéaire de la variation de teneur en eau (Carlson 1937, Thelandersson et *al.* 1988, Granger 1996, Torrenti et *al.* 1997, Benboudjema et *al.* 2001b, Benboudjema et *al.* 2002) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{rd} = k_{rd}^C \dot{C} \mathbf{1} \quad (\text{I-42})$$

où k_{rd}^C [$\text{m}^3 \cdot \text{l}^{-1}$] est un coefficient de proportionnalité, identifié sur la zone linéaire de la courbe retrait de dessiccation – perte en masse (Granger 1996, voir la Figure I-18).

Cette équation, basée sur la linéarité observée expérimentalement entre le retrait et la variation de la teneur en eau (paragraphe § I-3.3.3.1), est similaire à l'équation précédente I-41. En effet, la courbe de l'isotherme de désorption est quasi-linéaire pour des valeurs de l'humidité relative comprises entre 50 et 100 % (Pihlajavaara 1974, Xi et *al.* 1994, Baroghel-Bouny et *al.* 1999).

I-4.3.1.2 Modèle basé sur le mécanisme de pression capillaire

Yuan et Wan (2002) ont suggéré que le retrait de dessiccation soit gouverné par la pression capillaire p_c reliée à la tension superficielle σ_{lg} de l'interface eau/gaz par la relation de Laplace :

$$p_c = p_l - p_g = \frac{2 \sigma_{lg}}{r_m} \quad (\text{I-43})$$

où r_m est le rayon moyen du ménisque et p_g est la pression du gaz (air sec + vapeur d'eau).

La contrainte appliquée sur le solide σ_s , générée par la pression capillaire, est prise égale à :

$$\sigma_s = A_s p_c \quad (\text{I-44})$$

où A_s est la proportion volumique de l'eau liquide par rapport au béton

La déformation de retrait de dessiccation est alors calculée par analogie avec la loi de Hooke :

$$\varepsilon^{rd} = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (\text{I-45})$$

où E_s est le module élastique de retrait (différent du module d'Young) associé à la contrainte σ_s , identifié à partir de l'évolution expérimentale du retrait de dessiccation.

I-4.3.1.3 Modèle basé sur le mécanisme de pression capillaire et de pression de disjonction

Powers (1968) a proposé une loi pour calculer le retrait de dessiccation ε^{rd} localement dans la pâte de ciment pour une humidité relative passant de la valeur h_1 à la valeur h_2 :

$$\varepsilon^{rd} = (k+1) \frac{\beta}{V_w} \frac{RT}{M_v} \int_{h_1}^{h_2} \frac{W_a}{h} dh \quad (\text{I-46})$$

où k est un coefficient dépendant de la configuration des pores, β est le coefficient de compressibilité, W_a et V_w sont la masse et le volume de l'eau adsorbée, respectivement, $R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{°K}^{-1}$ est la constante des gaz parfait, T est la température en degré Kelvin et $M_v = 18 \text{ g.mol}^{-1}$ est la masse molaire de l'eau. Cette équation suppose que le rayon moyen du ménisque r_m est constant entre h_1 et h_2 .

Le premier terme $(k+1)$ de l'équation I-46 prend en compte le retrait induit par le mécanisme de pression capillaire (par le biais du coefficient 1 dans le terme $(k+1)$), tandis que le deuxième terme prend en compte le retrait induit par le mécanisme de pression de disjonction (coefficient k dans le terme $(k+1)$). En effet, l'expression de la variation de pression de disjonction est similaire à celle de la pression capillaire, à un coefficient de proportionnalité près (Powers 1968, Bažant 1972).

En utilisant l'expression de la pression capillaire p_c , et sous certaines hypothèses d'évolution (voir Han et Lytton 1996), l'intégration de l'équation I-46 conduit à la relation :

$$\varepsilon^{rd} = b \ln(1 + p_c/a) \quad (\text{I-47})$$

où a et b sont deux constantes.

I-4.3.2 Modélisation par la mécanique des milieux poreux

Une alternative à la modélisation phénoménologique, présentée dans le paragraphe § I-4.3.1, est de modéliser le retrait de dessiccation à l'échelle macroscopique, sur la base de la théorie des milieux poreux non saturés (Schrefler et al. 1989, Coussy 1995, Gray et Schrefler 2001). Elle permet de décrire les transferts de l'eau (sous les phases liquides et vapeurs essentiellement) et de la chaleur dans le milieu poreux, ainsi que les interactions existantes entre différents phénomènes (thermique, hydrique et mécanique).

Dans cette approche, on considère que le V.E.R. du milieu poreux est constitué d'un squelette solide et de vides, occupés par l'eau (liquide et vapeur) et l'air. Les variables caractérisant ce V.E.R. sont considérées comme des variables « moyennes », ce qui permet de s'affranchir de la caractérisation précise de la microstructure du matériau. Dans le cas de l'étude hydromécanique d'un milieu poreux non saturé, on utilise en général le concept de contraintes effectives σ' au sens de Bishop (Gray et Schrefler 2001). La contrainte effective est la contrainte appliquée directement sur le squelette solide.

On distingue, en général, deux principales approches pour déterminer son expression. Dans l'approche de Coussy (1995), la contrainte effective est définie de façon incrémentale :

$$d\boldsymbol{\sigma}' = d\boldsymbol{\sigma} + dp_{sol} \mathbf{1} \quad (I-48)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte apparente et p_{sol} est la pression appliquée sur le solide par les fluides environnants (eau et air).

Dans le cadre de l'approche proposée par Schrefler (Gray et Schrefler 2001), la contrainte effective est définie de façon totale :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + p_{sol} \mathbf{1} \quad (I-49)$$

Une étude numérique montre que la différence de comportement résultant des équations I-48 et I-49 est en général faible (Gray et Schrefler 2001).

Par ailleurs, la pression p_{sol} est la somme des pressions de chacun des fluides présents dans les pores, affectées par un coefficient de pondération (Coussy 1995) :

$$dp_{sol} = b_i dp_i \quad (I-50)$$

où p_i est la pression du fluide i , b_i est le coefficient de Biot (Biot 1941) associé au fluide i et l'indice i est associée à chacun des fluides présents (on rappelle que : $i = l$, $i = v$ et $i = a$ pour l'eau liquide, la vapeur d'eau et l'air sec, respectivement).

Cette approche fait apparaître trois coefficients de Biot difficiles à identifier individuellement. Par le biais de la méthode d'homogénéisation, deux relations entre ces paramètres peuvent être obtenues (Lassabatère 1994, Coussy 1995) :

$$b_l + b_g = 1 - \frac{K_d}{K_s} \text{ avec } b_g = b_v = b_a \quad (I-51)$$

où K_d est le coefficient de compressibilité du matériau dans des conditions non drainées, K_s est le coefficient de compressibilité du squelette solide et b_g est le coefficient de Biot associé à la phase gazeuse (air sec + vapeur d'eau).

Les coefficients de Biot expriment en quelque sorte le taux de transfert de la pression du fluide vers le squelette solide, et constituent donc des coefficients de couplage hydromécanique.

Il est généralement supposé que le squelette solide est peu compressible ($K_d/K_s \rightarrow 0$), que la pression de la phase gazeuse est égale à la pression atmosphérique ($p_g = p_{atm}$) et que le coefficient de Biot de la phase liquide b_l est égal au degré de saturation de la phase liquide S_l . Ainsi l'équation I-50 devient (Baroghel-Bouny et al. 1999, Gray et Schrefler 2001, Obeid et al. 2002) :

$$dp_{sol} = S_l dp_c \quad (I-52)$$

où p_c est la pression capillaire, qui peut se calculer à l'équilibre, par la relation de Kelvin (Baron 1982) :

$$p_c = \frac{\rho_l RT}{M_v} \ln(h) \quad (I-53)$$

où $\rho_l = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau liquide.

Néanmoins, une expérience de Obeid et *al.* (2002) sur mortiers montre que le coefficient de Biot liquide semble légèrement inférieur au degré de saturation (Figure I-31).

Dans le cas où les contraintes apparentes sont nulles dans l'éprouvette et en supposant un comportement élastique, l'équation I-48 permet d'établir la relation donnant la déformation de retrait de dessiccation libre :

$$\dot{\epsilon}^{rd} = \frac{1}{K} \dot{p}_{sol} \mathbf{1} \quad (I-54)$$

En utilisant l'expression simplifiée I-52 de la pression appliquée sur le solide, on aboutit à une relation non linéaire entre le retrait et l'humidité relative (Baroghel-Bouny et *al.* 1999) :

$$\dot{\epsilon}^{rd} = \frac{1}{K} \frac{\rho_l RT}{M_v} \frac{S_l}{h} \dot{h} \mathbf{1} \quad (I-55)$$

où la non-linéarité entre le retrait et l'humidité relative est liée aux termes S_l et $1/h$.

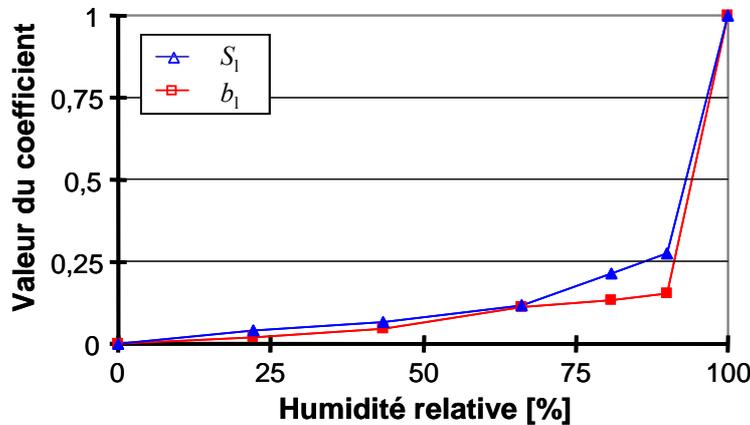


Figure I-31 Variation du coefficient de Biot liquide et du degré de saturation en fonction de l'humidité relative pour des mortiers (Obeid et *al.* 2002).

I-4.3.3 Modèles d'homogénéisation

Le béton est un matériau fortement hétérogène à différentes échelles d'observation. Par exemple, à l'échelle de l'hétérogénéité des granulats (dimension de l'ordre du millimètre) : le matériau béton peut être considéré comme bi-phasique (granulat + pâte de ciment, Le Roy 1996, voir la Figure I-32a). A l'échelle de la porosité capillaire de la pâte de ciment, coexistent la matrice solide, l'eau sous forme liquide et vapeur et l'air sec (voir Figure I-32b).

Les méthodes d'homogénéisation ont été développées pour les matériaux hétérogènes. A partir de la connaissance du comportement de chacune des phases le constituant (à l'échelle des hétérogénéités), la méthode consiste à prédire le comportement global macroscopique. Les lois constitutives (équations de conservation, équations d'équilibre) et les équations liées aux conditions aux limites sont écrites au niveau local, puis homogénéisées afin d'obtenir la loi de comportement au niveau macroscopique (le matériau est alors « homogénéisé »). Cette technique peut être intéressante dans le cadre de la modélisation des déformations différées du béton (et donc du retrait de dessiccation), puisque celles-ci n'ont lieu effectivement qu'au sein de la pâte de ciment. Ainsi, cette modélisation peut prendre en compte le comportement différent des granulats et de la pâte de ciment.

La technique d'homogénéisation consiste alors à calculer la valeur globale Σ (déformations, contraintes, flux ...), à partir de la connaissance des variables $\sigma^{(i)}$ dans chacune des phases i (Dormieux 2000, Oshita et Tanabe 2000) :

$$\Sigma = \sum_i \frac{1}{V^{(i)}} \int_{V^{(i)}} \omega^{(i)} \sigma^{(i)} dV^{(i)} + \mathbf{X} \quad (\text{I-56})$$

où $\omega^{(i)}$ sont des poids affectant la phase i , $V^{(i)}$ est le volume de la phase i et \mathbf{X} est un terme pouvant prendre en compte différents phénomènes comme l'effet de fissures.

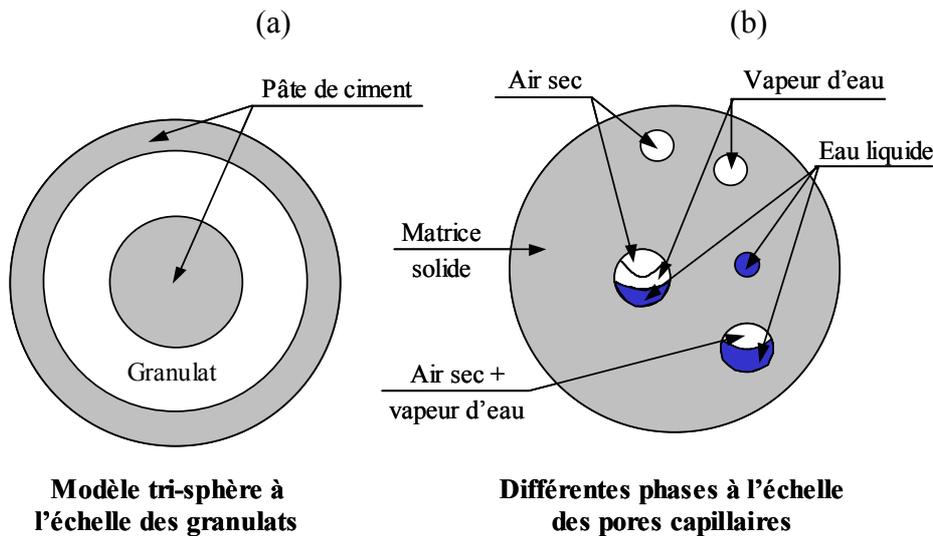


Figure I-32 Hétérogénéité idéalisée du béton à l'échelle des granulats (a, modèle trisphère, Le Roy 1996) et à l'échelle des pores capillaire (b).

I-4.3.4 Conclusion

Pour les deux premiers modèles, les équations constitutives (I-41 et I-42) sont purement phénoménologiques, elles ne sont pas basées sur une analyse précise des mécanismes à l'origine du retrait de dessiccation. En outre, l'analyse fine des résultats expérimentaux montre que la déformation de retrait n'est pas rigoureusement proportionnelle à la variation d'humidité relative. Ainsi, Obeid et *al.* (2002) suggèrent plutôt une relation bilinéaire entre ces deux variables (pente $k_{rd}^h = 398 \mu\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$ pour $0 \% < h < 66 \%$ et $k_{rd}^h = 568 \mu\text{m} \cdot \text{m}^{-1}$ pour $66 \% < h < 100 \%$, Figure I-16). De même, à partir d'une analyse inverse des résultats de retrait de dessiccation, van Zijl (1999) suggère que le coefficient de proportionnalité soit dépendant, de façon non linéaire, de l'humidité relative.

De plus, l'analyse bibliographique a montré qu'une réponse différente en déformation selon la vitesse de séchage est observée (Figure I-17). Cette caractéristique ne peut être reproduite par aucun des modèles présentés. En outre, ces modèles ne peuvent pas expliquer le caractère partiellement irréversible des déformations de retrait (en l'absence de fissuration, voir § I-3.3.3.1), lorsque l'éprouvette est réhumidifiée.

Quant à la méthode d'homogénéisation, des difficultés inhérentes à ce type de modélisation existent. D'une part, il n'est pas toujours possible de caractériser précisément chacune des phases (et leurs interfaces). D'autre part, la méthode d'homogénéisation ne permet pas toujours d'obtenir une loi de comportement analytique et nécessite alors un calcul numérique préalable pour toutes les configurations possibles (déformations imposées, humidité relative,

température ...). Cette dernière étape complique fortement la tâche à accomplir et limite fortement l'utilisation de cette technique dans le calcul de structures réelles.

La modélisation du retrait de dessiccation intrinsèque sera alors effectuée dans le cadre de la mécanique des milieux poreux non saturés, à l'échelle macroscopique (V.E.R.). L'avantage est qu'il est possible de se baser sur les mécanismes physiques du retrait, mis en évidence dans le paragraphe § I-3.3.1, à savoir la pression capillaire et la pression de disjonction, principalement. Ainsi, nous suggérons que le retrait de dessiccation résulte de la déformation élastique et différée du squelette solide, sous l'effet de la pression capillaire et de la pression de disjonction. Bien que l'hétérogénéité (pâte de ciment-granulat) et la composition du béton jouent un rôle important sur les déformations de retrait, son influence peut être prise en compte à travers des paramètres représentatifs du V.E.R. étudié.

I-4.4 Modélisation de la déformation de fluage

I-4.4.1 Le fluage propre

I-4.4.1.1 Modélisation du fluage propre

La déformation de fluage propre ε^{fp} s'écrit conventionnellement, dans le cas d'un état de contraintes σ constant, sous la forme :

$$\varepsilon^{fp}(t, t') = \mathbf{J}(t, t') \cdot \sigma \quad (\text{I-57})$$

où t désigne le temps, t' l'âge d'application des contraintes et $\mathbf{J}(t, t')$ est le tenseur de complaisance de fluage du quatrième ordre.

Cette écriture est basée sur l'observation expérimentale de la linéarité entre la déformation de fluage propre et les contraintes (pour des contraintes inférieures à 30 à 50 % de la résistance dans le cas d'une sollicitation uniaxiale en compression).

Dans le cas de contraintes variables, le principe de superposition de Boltzmann est alors utilisé :

$$\varepsilon^{fp}(t, t') = \int_{\varsigma=t'}^{\varsigma=t} \mathbf{J}(t, \varsigma) \cdot \dot{\sigma}(\varsigma) d\varsigma \quad (\text{I-58})$$

Dans le cas de contraintes modérées, l'expression du tenseur de complaisance de fluage propre du béton est souvent basée sur la théorie de la viscoélasticité linéaire non vieillissante ou vieillissante (Bažant et Chern 1985, Bažant et Prasannan 1989, Granger 1996, Bažant et al. 1997, Guénot-Delahaie 1997, de Schutter 1999, van Zijl 1999, Fafard et al. 2001). Dans le cas non vieillissant et pour des contraintes uniaxiales, la complaisance de fluage peut être approchée avec une très bonne précision (Bažant et Huet 1999) par une combinaison multiple de chaînes de Maxwell (Figure I-33a) ou de Kelvin-Voigt (Figure I-33b). Dans le cas de l'utilisation de chaînes de Kelvin-Voigt, la fonction de complaisance de fluage propre J obtenue correspond alors à une décomposition en série de Dirichlet :

$$J(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{k_i} \left(1 - e^{-\frac{k_i}{\eta_i} t} \right) \quad (\text{I-59})$$

où k_i [MPa] et η_i [MPa.s] sont la rigidité et la viscosité élémentaire de la $i^{\text{ème}}$ chaîne de Kelvin-Voigt, respectivement.

L'avantage important de ce choix pour la complaisance de fluage est qu'il n'est pas nécessaire de stocker en mémoire l'histoire des contraintes. En effet, l'utilisation d'une telle complaisance permet de réécrire l'équation I-58 sous la forme d'équations différentielles, qui peuvent alors être résolues de façon incrémentale (Granger 1996, Benboudjema *et al.* 2000b).

Cette formulation peut être étendue au cas vieillissant en faisant varier les paramètres de la chaîne de Maxwell ou de Kelvin-Voigt en fonction de l'âge du matériau (Bažant et Chern 1985, de Schutter 1999). Toutefois, certaines restrictions doivent être vérifiées afin de garantir le caractère strictement monotone de la complaisance de fluage (Bažant 1998).

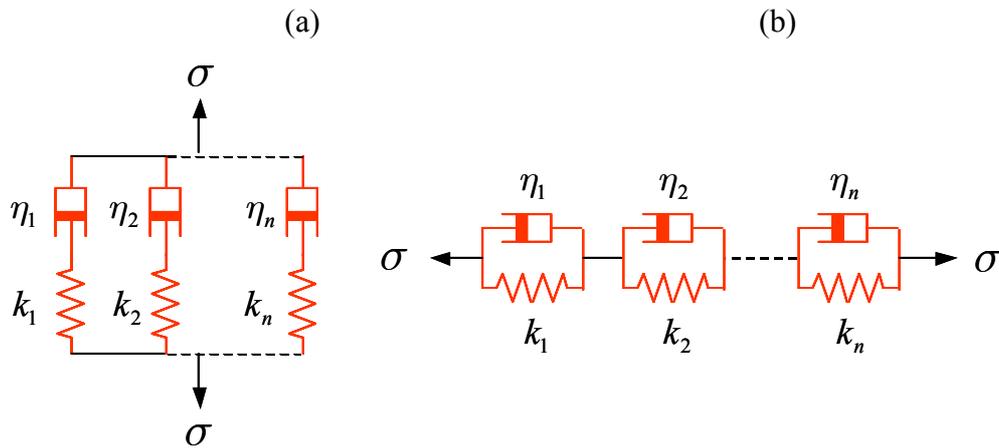


Figure I-33 Chaînes de Maxwell (a) et chaînes de Kelvin-Voigt (b).

La décomposition en série de Dirichlet adoptée dans l'équation I-59 garantit que la déformation de fluage propre sera bornée. Un débat sur le comportement à l'infini du fluage propre a lieu au sein de la communauté scientifique. Certains chercheurs pensent que cette déformation est bornée (Granger 1996), d'autres non (Bažant et Chern 1985). Or, les résultats expérimentaux ne permettent pas de confirmer l'une ou l'autre des deux hypothèses, étant donné que les essais ne dépassent pas souvent trois ans. Ainsi, d'autres fonctions de complaisance de fluage sont proposées dans la littérature afin d'obtenir une complaisance de fluage non asymptotique, telles que des fonctions puissances ou logarithmiques.

Afin de proposer une description plus physique de l'aspect vieillissant, Bažant et Prasannan (1989) et Bažant *et al.* (1997) suggèrent de considérer que les éléments constituant la pâte de ciment ne sont pas dépendants de l'âge. Ainsi, la dépendance du fluage à l'âge est alors attribuée :

- Soit à la déposition graduelle du gel de C-S-H du fait de la réaction d'hydratation (paragraphe § I-3.4.1.1.2, Bažant et Prasannan 1989). Le gel de C-S-H est supposé non-vieillissant et viscoélastique (ou visqueux). Le C-S-H qui se dépose est alors susceptible de contribuer à la reprise du chargement macroscopique. Lorsque la réaction d'hydratation s'arrête, le vieillissement est dû à d'autres réactions chimiques (par exemple la polymérisation des C_3S), prises en compte à travers la même expression. Ainsi, la déformation de fluage propre visqueuse ε^{fp} s'écrit en fonction de la fraction d'hydrates formées $v(t)$ et de la complaisance de fluage (non vieillissante) J :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \frac{1}{v(t)} \int_{t'=0}^{t'=t} J(t-t') d\sigma(t') \quad (I-60)$$

➤ Soit à la relaxation des micro-précontraintes transversales au plan de glissement (paragraphe § I-3.4.1.1.2, Bažant et *al.* 1997). Cet effet est purement mécanique. Ainsi, la déformation de fluage propre visqueuse ε^{fp} s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^{fp}(t) = \frac{\sigma}{\eta(S)} \quad (I-61)$$

où la viscosité η est une fonction décroissante de la micro-précontrainte S , qui se relaxe dans les sites de fluage, du fait de la déformation subie par le matériau :

$$\frac{1}{\eta(S)} = c p S^{p-1} \quad (I-62)$$

où c et p sont deux constantes positives.

Dans le cas de sollicitations multiaxiales, ces modèles sont basés sur l'analogie avec la loi d'élasticité de Hooke en introduisant un coefficient de Poisson de fluage propre ν_{fp} constant et égal à 0,2 (Granger 1996, Bažant et *al.* 1997). Ainsi, le tenseur de complaisance de fluage propre $\mathbf{J}(t, t')$ s'écrit :

$$J_{ijkl}(t, t') = J_u(t, t') \left[-\nu_{fp} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1 + \nu_{fp}}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \right] \quad (I-63)$$

où $J_u(t, t')$ est la complaisance de fluage uniaxial.

Cette modélisation est en désaccord avec les observations expérimentales mentionnées dans la paragraphe § I-3.4.4. En effet, celles-ci ont mis en évidence que le coefficient de Poisson de fluage dépend de la direction concernée et du temps. Néanmoins, on se rappellera la dispersion et le peu de résultats expérimentaux disponibles, ce qui limite les possibilités de modélisation.

Quant à l'effet de l'humidité relative interne h , on peut rencontrer dans la littérature scientifique deux types de prise en compte de cet effet dans la modélisation du fluage propre.

La première approche consiste à remplacer le temps réel t par un « temps équivalent » t_{eq} dans les équations constitutives du modèle (Granger 1996, Hanhijärvi 1997, Svensson et Toratti 1997). Le temps équivalent est défini suivant une fonction f exprimée en fonction du temps réel t et de l'humidité relative interne h :

$$dt_{eq} = f(h(t)) dt \quad (I-64)$$

Dans la deuxième approche, la complaisance de fluage propre est multipliée par une fonction isotrope qui dépend de l'humidité relative $g(h)$ (Granger 1996, Hanhijärvi 1997, Svensson et Toratti 1997) :

$$\mathbf{J}(t, h) = g(h) \mathbf{J}(t) \quad (I-65)$$

L'approche par le temps équivalent dans le cas du fluage propre conduit à une amplitude de déformation finale indépendante de l'humidité relative interne (Benboudjema et *al.* 2000b). Par contre, la deuxième approche conduit à une amplitude de fluage proportionnelle à la fonction $g(h)$ choisie (Benboudjema et *al.* 2000b). Les résultats expérimentaux indiquent que seule l'amplitude de fluage propre est affectée par l'humidité relative interne (voir le paragraphe § I-3.4.1.2). Ainsi, c'est la seconde approche qui est souvent retenue, pour

laquelle différentes fonctions croissantes $g(h)$ ont été proposées (Bažant et Chern 1985, Bažant et Prasanna 1989, Granger 1996, Bažant et *al.* 1997). La première approche est quant à elle plutôt adoptée à la prise en compte de l'effet de la température (en complément de la seconde approche).

L'analyse bibliographique a montré une forte dépendance des déformations de fluage propre à la composition du béton (rapport e/c , teneur en granulat, type de liant). Hormis dans les codes de calcul réglementaires (qui n'ont pas été présentés dans ce travail), l'effet de la composition est rarement pris en compte. Ainsi, malgré des conditions identiques, un changement dans la composition du béton nécessite une nouvelle identification des paramètres du modèle.

I-4.4.1.2 Modélisation de l'interaction fluage/fissuration

Lorsque les contraintes en compression deviennent importantes, nous avons remarqué dans le paragraphe § I-3.4.5 que la relation déformation de fluage – contraintes devient non linéaire. Plusieurs possibilités de modélisations de cet effet sont disponibles dans la littérature :

- A partir de la théorie de l'endommagement (Li 1994). Il est ainsi possible d'introduire explicitement (et rationnellement) la variable temporelle t , dans les fonctions d'évolution des paramètres d'écrouissage et de l'endommagement (équation I-16) ;
- Selon Bažant et Xiang (1997), cette non-linéarité n'est qu'apparente. Pour eux, le fluage non linéaire n'existe pas. La non-linéarité résulte de la manifestation de la croissance des micro-fissures dans le temps. Elle peut être modélisée à l'aide d'une approche de type viscoplastique (van Zijl 1999) ou élastoplastique, en intégrant une fonction d'écoulement de fluage (Benboudjema et *al.* 2001a) ;
- Le caractère non linéaire est supposé lié à la redistribution des contraintes du fait du fluage et de la distribution non homogène de l'endommagement (Ožbolt et Reinhardt 2001). En effet, la fissuration du béton n'est jamais homogène dans l'éprouvette, elle se produit dans des zones localisées (liées aux défauts géométriques ou matériels). La redistribution prend place entre les zones les plus endommagées et les moins endommagées. Cette hypothèse nécessite donc, dans la modélisation, la prise en compte de défauts initiaux dans le matériau pouvant altérer la distribution initialement homogène des contraintes et des déformations.

I-4.4.1.3 Conclusion

Malgré les recherches extensives (théoriques et expérimentales) et les nombreuses théories proposées dans la littérature scientifique pour expliquer le fluage propre des matériaux à matrice cimentaire (voir le paragraphe § I-3.4.1.1), les mécanismes physico-chimiques à l'origine du fluage ne sont pas parfaitement connus à l'heure actuelle. Ce manque de consensus sur ces mécanismes limite les possibilités de modélisation de ces déformations.

Hormis quelques exceptions, la plupart des modèles de fluage pour le béton ne sont pas basés sur des mécanismes de fluage proposés, mais plutôt basés sur des fonctions mathématiques diverses (puissances, logarithmiques, chaîne de Kelvin ou Maxwell). Si de telles expressions permettent de retrouver plus ou moins précisément les déformations de fluage propre expérimentales, elles masquent complètement les phénomènes réels concernés.

De nombreux modèles ne tiennent pas compte de l'aspect irréversible des déformations de fluage propre, ou alors par l'intermédiaire du caractère vieillissant. Or, même après quelques jours de chargement, les déformations sont irréversibles à plus de 60 %, ce que l'effet de l'âge

ne peut pas expliquer intégralement. Cette propriété est très importante dans le cas de déchargement (partiel ou total), ce qui est le cas d'ouvrages précontraints, du fait de la relaxation induite, et plus particulièrement des enceintes de confinement, lors de l'épreuve décennale. De plus, la prise en compte d'une sollicitation multiaxiale est souvent basée sur l'adoption d'un coefficient de Poisson de fluage constant, ce que les résultats expérimentaux ne confirment pas actuellement. Ainsi, en s'éloignant des conditions de l'essai où les coefficients ont été calibrés, l'erreur de prédiction devient importante.

Bien que les mécanismes de fluage propre probables, tels qu'ils ont été rappelés en conclusion de l'étude expérimentale (voir le paragraphe § I-3.4.6), ne fassent pas l'unanimité, il nous semble judicieux de développer un nouveau modèle basé sur les mécanismes pouvant se produire aux différentes échelles d'observation du matériau (micro-diffusion de l'eau adsorbée vers la porosité capillaire et glissement des feuillets de C-S-H dans la nanoporosité). Ainsi, la modélisation qui en découle doit être capable de retrouver les principales caractéristiques expérimentales mentionnées, à savoir, l'occurrence d'une déformation irréversible lors du déchargement, la linéarité entre la déformation de fluage propre et les contraintes (jusqu'à la limite élastique), la dépendance à l'humidité relative interne et la description correcte du comportement multiaxial (décomposition sphérique/déviatorique). Lorsqu'une fissuration se produit, le couplage fluage/fissuration doit être aussi considéré.

Quant à l'influence de la composition du béton, nous avons rappelé, la forte dispersion des modèles codifiés prenant en compte ce paramètre. Ainsi, ce paramètre ne sera pas intégré dans la modélisation adoptée. Le passage à une composition de béton différente nécessitera donc d'identifier à nouveau les paramètres du modèle.

I-4.4.2 Le fluage de dessiccation

L'étude bibliographique (paragraphe § I-3.4.2) a mis en évidence l'existence de deux composantes de déformation : une part structurale, liée à un effet de structure (fissuration) et une part intrinsèque, correspondant aux mécanismes physico-chimiques du fluage de dessiccation. Dans ce paragraphe, seule la modélisation de la part intrinsèque est présentée. La part structurale est reproduite dès lors qu'un modèle de fissuration est intégré dans la modélisation.

I-4.4.2.1 Modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque

L'idée initialement proposée par Ali et Kesler (1964) (l'idée est que le fluage de dessiccation n'est en réalité qu'une déformation de retrait de dessiccation, induite par les contraintes, (voir paragraphe § I-3.4.2.2.2)) a conduit quelques auteurs (Ali et Kesler 1964, Gamble et Parrott 1978, Sicard *et al.* 1996) à proposer la loi constitutive suivante :

$$\varepsilon^{fd} = \mu_{fd} \varepsilon^{rd} \sigma \quad (\text{I-66})$$

où ε^{fd} est la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque et μ_{fd} [MPa⁻¹] est un paramètre constant.

Afin de prendre en compte le fluage de réhumidification, Gamble et Parrott (1978) propose de modifier l'équation précédente :

$$\varepsilon^{fr} = \mu_{fr} \varepsilon^{go} \sigma \quad (\text{I-67})$$

où ε^{fr} est la déformation de fluage de réhumidification, ε^{go} est la déformation de gonflement et μ_{fr} [MPa⁻¹] est un paramètre constant, inférieur à μ_{fd} (Gamble et Parrott 1978).

A partir des mécanismes physico-chimique proposés (voir le paragraphe § I-3.4.2.2.1), Bažant et Chern (1985) analysent cette déformation à travers une chaîne de Maxwell. La viscosité de la chaîne de Maxwell η est reliée alors à la variation d'humidité relative :

$$\frac{1}{\eta} = \lambda_{fd} \left| \dot{h} \right| \quad (\text{I-68})$$

où λ_{fd} est un paramètre constant.

Ainsi, la déformation de fluage de dessiccation s'exprime par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{fd} = \lambda_{fd} \left| \dot{h} \right| \sigma \quad (\text{I-69})$$

où la valeur absolue permet de retrouver la déformation de fluage de réhumidification (mais de manière symétrique).

La relation constitutive I-69 proposée par Bažant et Chern (1985) est similaire aux équations I-66 et I-67, si on adopte une relation linéaire entre la déformation de retrait de dessiccation et la variation d'humidité relative (telle que l'équation I-41). L'équation constitutive ainsi proposée permet de retrouver la linéarité observée expérimentalement entre la déformation de fluage de dessiccation et le retrait de dessiccation (voir la Figure I-27a). Cependant, elle ne permet pas d'obtenir une réponse sensible à la vitesse de séchage, telle que cela a été obtenu expérimentalement par Day et *al.* (1984, Figure I-27b). De plus, les résultats expérimentaux obtenus par Granger (1996) ne sont pas reproduits correctement à l'aide de la loi constitutive I-69, lors des simulations numériques (Benboudjema et *al.* 2001b). En effet, une des limites de ce modèle est que, pour des contraintes constantes, la cinétique de la déformation de fluage de dessiccation est contrôlée complètement par celle du processus de séchage. Malgré cela, de nombreux auteurs utilisent l'équation I-69 pour le calcul de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque (Bažant et Xi 1994, Granger 1996, Kim et Lee 1998, van Zijl 1999).

En se basant sur la théorie des micro-précontraintes (voir le paragraphe § I-4.4.1.1), Bažant et *al.* (1997) ont proposé que les micro-précontraintes S , agissant dans les zones d'adsorption empêchée, varient en fonction de l'humidité relative interne, selon la relation :

$$\dot{S} + c_0 S = -c_1 \frac{\dot{h}}{h} \quad (\text{I-70})$$

où c_0 et c_1 sont deux constantes.

Ainsi, la relation I-61 permet de calculer à la fois la déformation de fluage propre et de fluage de dessiccation. Toutefois, cette relation ne permet pas de reproduire la diminution de l'amplitude de la déformation de fluage propre, observée sur des éprouvettes pré-séchées (Figure I-23a).

Nous avons mentionné précédemment que le bois subit de façon analogue une déformation de fluage de dessiccation. Or, il est intéressant de noter que la microstructure du béton et la microstructure du bois sont similaires au niveau de la distribution des pores. En effet, dans les deux matériaux, il se dégage deux types de porosité dont les dimensions sont du même ordre de grandeur (Tableau I-4).

Tableau I-4 Taille caractéristique des micropores et des nanopores dans le bois et le béton.

	Bois (de Meijer et <i>al.</i> 1998)	Béton (Baroghel-Bouny 1994)
Microporosité	$\approx 5 - 30 \mu\text{m}$	$\approx 0,01 - 10 \mu\text{m}$
Nanoporosité	$\approx 0,1 - 1 \text{ nm}$	$\approx 1 \text{ nm}$

Ainsi, les modèles de retrait de dessiccation (équation I-41 ou I-42) et de fluage propre (équation I-59) sont similaires pour ces deux matériaux, si l'aspect vieillissant est écarté. De même, dans le cas du fluage de dessiccation, l'équation I-69 est parfois utilisée. Néanmoins, Hanhijärvi (1997) et Svensson et Toratti (1997) ont montré qu'une modification de l'équation I-69 permettait un meilleur calibrage des résultats expérimentaux de fluage de dessiccation pour le bois. L'équation suggérée, sans pour autant qu'une justification physique soit proposée, est la suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{fd} = \frac{J_{fd} \sigma - \varepsilon_{fd}}{\tau_{fd}} \left| \dot{h} \right| \quad (\text{I-71})$$

où J_{fd} et τ_{fd} sont des paramètres matériaux.

L'avantage de l'équation I-71, par rapport à l'équation I-69, est qu'elle permet de contrôler à la fois la cinétique et l'amplitude des déformations de fluage de dessiccation, indépendamment de la cinétique de séchage, par le biais des paramètres J_{fd} et τ_{fd} .

I-4.4.2.2 Conclusion

Nous avons présenté différents modèles de fluage de dessiccation intrinsèque. Néanmoins, il est nécessaire de garder à l'esprit que ces modélisations sont souvent phénoménologiques, car basées sur des constatations expérimentales. Or, nous avons émis plusieurs réserves concernant l'obtention de la déformation de fluage de dessiccation (microfissuration induite, gradient de contraintes induit, fluage propre et retrait concomitant (voir le paragraphe § I-3.4.2.2.2)). L'interprétation des résultats expérimentaux n'est donc jamais directe. Elle nécessite une analyse précise des déformations mesurées, à l'aide d'une modélisation adaptée. Cette modélisation doit intégrer et reproduire correctement chacune des composantes de la déformation du béton (retrait, fluage, fissuration).

Les mécanismes du fluage de dessiccation sont encore aujourd'hui mal connus. Ainsi, il est difficile de proposer un modèle basé sur ces mécanismes. Néanmoins, il semble qu'une relation linéaire entre la déformation de fluage de dessiccation et la variation d'humidité relative ne soit pas adaptée. Nous proposons alors d'utiliser la relation constitutive I-71, utilisée déjà pour le bois, pour laquelle nous proposerons une justification physique.

I-5 Conclusion et proposition d'un cadre de modélisation

Lors de cette analyse, nous avons volontairement omis les déformations d'origines chimiques (retrait endogène, retrait de carbonatation) et thermiques. En effet, le cadre de notre étude se situe au niveau de structures en béton suffisamment âgées pour lesquelles la réaction d'hydratation ne se développe plus significativement, et pour lesquelles la température ambiante a une valeur usuelle (typiquement égale à 20 °C). Ainsi, les déformations de retrait endogène et thermique ne devraient pas contribuer de façon significative à la déformation différée. Quant au retrait de carbonatation, les essais de déformations différés dans la littérature ne permettent pas de le quantifier. Par conséquent, il ne sera pas intégré dans la modélisation.

Nous avons proposé dans chacune des parties une modélisation spécifique des processus de séchage, de fissuration, de déformation de retrait de dessiccation, de fluage propre et de fluage de dessiccation. Cela n'est possible qu'en décomposant conventionnellement la vitesse de la déformation totale $\dot{\varepsilon}$ en différentes composantes élémentaires :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p + \dot{\varepsilon}^{fp} + \dot{\varepsilon}^{fd} \quad (\text{I-72})$$

Si cette décomposition suppose qu'au niveau local, ces déformations n'interagissent pas, par contre, au niveau global, le caractère non homogène du séchage induit un état de déformations et de contraintes fortement non homogènes, induisant alors une interaction entre les déformations élémentaires. On notera que la déformation de retrait de dessiccation ϵ^{rd} n'apparaît pas de façon explicite dans l'équation de la partition des déformations I-72. Nous verrons, en effet, qu'elle résulte implicitement du cadre de modélisation adoptée dans laquelle elle consiste en la part supplémentaire de la déformation élastique et de fluage sous l'effet des pressions dans les pores. Ce choix sous-entend, en passant, que les déformations de fluage propre et de fluage de dessiccation ne sont pas nulles même s'il n'y a pas de charges extérieures.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons la modélisation que nous avons développée pour l'étude des différents phénomènes exposés dans ce chapitre.

Chapitre II

Modélisation du comportement hydrique et mécanique

II-1	INTRODUCTION.....	76
II-2	MODELISATION DU SECHAGE	76
II-2.1	Équations gouvernant le séchage.....	76
II-2.2	Conditions aux limites.....	80
II-2.3	Conclusion sur la modélisation du séchage.....	81
II-3	MODELISATION DE LA FISSURATION.....	81
II-3.1	Formulation.....	81
II-3.2	Évolution de l'endommagement.....	82
II-3.2.1	Variables d'endommagement en traction et compression.....	82
II-3.2.2	Prise en compte de l'effet unilatéral.....	83
II-3.3	Couplage entre la plasticité et l'endommagement.....	83
II-3.4	Plasticité.....	84
II-3.4.1	Critères de plasticité.....	84
II-3.4.2	Calcul des déformations plastiques.....	86
II-3.4.3	Définition des variables d'érouissage.....	87
II-3.4.4	Les contraintes nominales résistantes.....	88
II-3.5	Objectivité vis-à-vis de la taille des éléments finis.....	90
II-3.6	Méthode d'identification des paramètres.....	91
II-3.7	Conclusion sur la modélisation de la fissuration.....	92
II-4	MODELISATION DU FLUAGE PROPRE.....	92
II-4.1	Fluage propre sphérique.....	92
II-4.1.1	Description des mécanismes.....	92
II-4.1.2	Équations constitutives.....	94
II-4.1.3	Prise en compte de l'hygrométrie.....	96
II-4.1.4	Identification des valeurs des paramètres du modèle sphérique.....	97
II-4.1.4.1	Identification à partir des caractéristiques de la microstructure de la pâte de ciment.....	97
II-4.1.4.2	Identification à partir d'un essai sur une pâte de ciment.....	98
II-4.1.4.3	Identification macroscopique à partir d'un essai sur un mortier.....	101
II-4.2	Fluage propre déviatorique.....	102
II-4.2.1	Description des mécanismes.....	102
II-4.2.2	Équations constitutives.....	103
II-4.2.3	Prise en compte de l'hygrométrie.....	103
II-4.2.4	Identification des valeurs des paramètres du modèle déviatorique.....	104
II-4.3	Effet de l'humidité relative.....	105
II-4.4	Déformation totale de fluage propre.....	106
II-4.5	Conclusion sur la modélisation du fluage propre.....	107
II-5	MODELISATION DU FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE.....	107
II-5.1	Description des mécanismes.....	108
II-5.2	Équations constitutives.....	108
II-5.3	Évolution des déformations.....	109
II-5.4	Identification des paramètres du modèle.....	111
II-5.5	Conclusion sur la modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque.....	111
II-6	MODELISATION DU RETRAIT DE DESSICCATION.....	112

Chapitre II : Table des matières

II-6.1	<i>Effet de la pression capillaire</i>	112
II-6.1.1	Équation de Kelvin et de Laplace	113
II-6.1.2	Pression appliquée sur le squelette solide	113
II-6.2	<i>Pression de disjonction</i>	114
II-6.3	<i>Prise en compte de la pression capillaire et de disjonction</i>	115
II-6.4	<i>Expression de la déformation de retrait de dessiccation</i>	116
II-6.5	<i>Couplage avec la fissuration</i>	118
II-6.6	<i>Conclusion sur la modélisation du retrait de dessiccation</i>	120
II-7	INTEGRATION DES EQUATIONS CONSTITUTIVES DU MODELE.....	120
II-7.1	<i>Discrétisation Éléments Finis</i>	121
II-7.2	<i>Discrétisation des équations constitutives</i>	121
II-7.3	<i>Équations constitutives</i>	122
II-7.4	<i>Algorithme de résolution</i>	123
II-8	CONCLUSION SUR LA MODELISATION	128

II. MODELISATION DU COMPORTEMENT HYDRIQUE ET MECANIQUE

II-1 Introduction

Dans ce chapitre, un modèle hydromécanique est élaboré pour les matériaux à matrice cimentaire. L'analyse bibliographique effectuée dans le chapitre précédent a mis en évidence que les différents phénomènes étudiés dans ce travail pouvaient être dissociés en composantes élémentaires. Ainsi, ces différents phénomènes sont présentés successivement : le séchage, la fissuration, le fluage et le retrait de dessiccation.

Le béton est un matériau hétérogène, dont le comportement est fortement affecté par les propriétés de la microstructure. Le comportement du béton peut néanmoins être modélisé en supposant que le matériau est homogène à l'échelle macroscopique, sans nécessairement localiser les principaux constituants du matériau et leurs interactions. Ainsi, chacun des modèles élémentaires est basé sur une description macroscopique des mécanismes concernés (au niveau du V.E.R.).

Les modélisations adoptées de chacun des phénomènes concernés sont présentées successivement, ainsi que l'intégration du modèle hydromécanique complet dans un code de calcul aux Éléments Finis. Ainsi, cette étape permettra de construire l'outil numérique devant permettre, par la suite, de prédire le comportement différé du matériau béton.

II-2 Modélisation du séchage

Nous avons mis en évidence lors de l'analyse bibliographique (voir les paragraphes § I-3.1 et § I-4.1) la complexité d'ordre théorique et expérimental du phénomène de séchage. Afin de s'affranchir de cette complexité, une modélisation simplifiée est choisie. Les hypothèses sous-jacentes et la description mathématique du processus de séchage sont présentées.

II-2.1 Équations gouvernant le séchage

La modélisation adoptée est basée sur les équations de perméation (équation I-1), de diffusion de l'eau liquide (équation I-2), de transport de l'air sec (équation I-3) et de convection de la vapeur d'eau (équation I-4), rappelées lors de la synthèse bibliographique (voir le paragraphe § I-4.1).

Ainsi, l'équation de perméation I-1 peut s'écrire sous la forme de flux :

$$\Phi_{perm} = \rho_l \mathbf{v}_l = -\rho_l \frac{K}{\eta_l} k_{rl} \nabla p_l \quad (\text{II-1})$$

où ρ_l [kg.m^{-3}] est la masse volumique de l'eau liquide et Φ_{perm} [$\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$] est le flux d'eau liquide.

L'équation de conservation de la masse totale d'eau s'écrit alors (voir la Figure II-2) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C_l}{\partial t} + \frac{\partial C_a}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi_{div} + \Phi_{perm} + \Phi_{conv}) - \frac{\partial C_{cons}}{\partial t} - q \quad (\text{II-2})$$

où C_l et C_a [kg.m^{-3}] sont les concentrations en eau (liquide et vapeur) libre et adsorbée, respectivement, C_{cons} est la quantité d'eau consommée (à cause de l'hydratation ou de la

réretention de l'eau par les granulats par exemple) et q un terme pouvant prendre en compte d'autres phénomènes, comme les effets de la gravitation ou de la fissuration.

Il est raisonnable de penser pour des bétons ordinaires (rapport e/c de l'ordre de 0,45) que la consommation de l'eau par la réaction d'hydratation affecte peu l'humidité relative interne. En effet, on mesure expérimentalement sur des bétons de rapports $e/c = 0,59$, $e/c = 0,48$ et $e/c = 0,44$, conservés en auto-dessiccation pendant 1 an, une humidité relative interne de 99 %, 93 % et 88 % respectivement (Figure II-1). Par contre, ce n'est plus le cas si le rapport e/c est inférieur à 0,3. En effet, l'humidité relative descend en dessous de 65 %, sous le seul effet de l'auto-dessiccation !

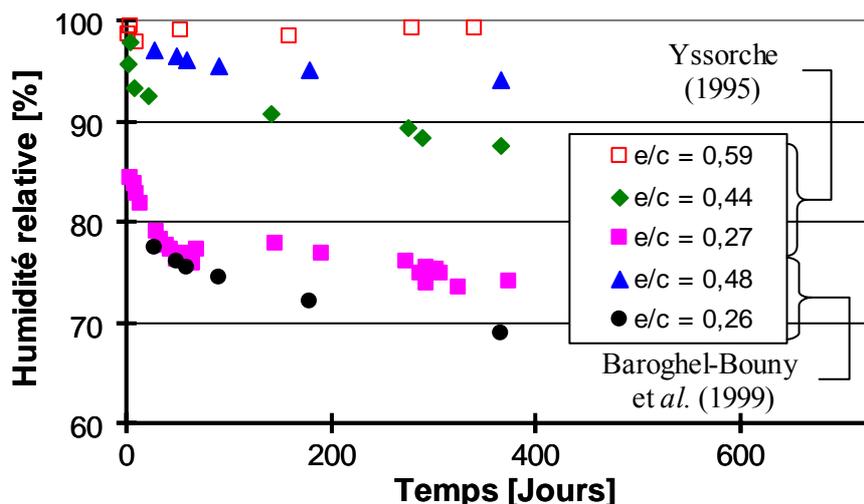


Figure II-1 Variation de l'humidité relative des bétons à l'équilibre pour différents rapports e/c (Yssorche 1995, Baroghel-Bouny et al. 1999).

Quant à l'effet des granulats (à travers les phénomènes de rétention ou d'apport d'eau), il n'est pas considéré. Par conséquent, le terme $\partial C_{cons} / \partial t$ est nul. De plus, il est supposé que la convection de la vapeur d'eau est négligeable $\Phi_{conv} \simeq 0$ (Coussy et al. 2001).

En outre, les phénomènes d'interactions eau / paroi des pores (à travers les phénomènes d'adsorption et de désorption) sont négligés ($\partial C_a / \partial t = 0$). Ceci reste vrai tant que la dimension des pores traversés reste grande par rapport au libre parcours moyen des molécules. En effet, la « résistance » au transport par diffusion résulte des chocs entre les molécules qui remplissent le capillaire (effet Knudsen) : pour qu'il en soit ainsi, il suffit que la taille de ce capillaire soit suffisamment élevée pour que le nombre moyen de collisions intermoléculaires soit très supérieur au nombre de collisions avec les parois du capillaire. Pratiquement, cela signifie que la taille du capillaire doit être supérieure à quelques dizaines de nanomètres (le diamètre de la molécule d'eau est de 0,26 nm). Or, la diffusion a lieu pour des bétons ordinaires à travers la porosité capillaire essentiellement (Baron et Ollivier 1992). Pour les bétons ordinaires, le diamètre des pores capillaires est en général compris entre 25 nm et 10 μm (Xi et al. 1994). En conséquence, cette hypothèse semble réaliste, sauf pour des bétons à hautes performances, où des interactions physico-chimiques entre l'eau qui diffuse et la surface des pores peuvent donc avoir lieu.

Quant à l'effet de la fissuration, nous avons montré que son incidence sur le séchage, dans le cas où celle-ci est induite par le séchage lui-même, est négligeable (voir paragraphe § I-3.2.2). De plus, l'effet de la gravité n'est pas pris en compte. Par conséquent, le terme q est nul.

Ainsi, l'équation II-2 devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla(\Phi_{diff} + \Phi_{perm}) \quad (II-3)$$

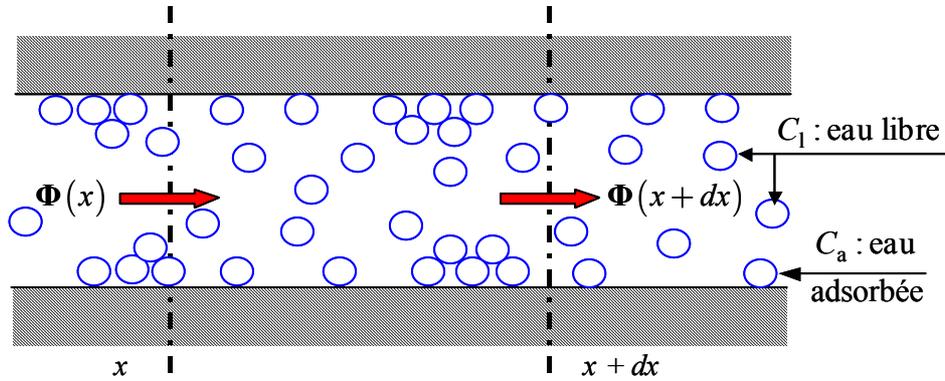


Figure II-2 Transport et absorption de l'eau dans un pore cylindrique.

Il est possible d'exprimer la relation II-3 uniquement en fonction de la teneur en eau sous certaines hypothèses supplémentaires. Exprimons tout d'abord les flux Φ_{diff} et Φ_{perm} en fonction de l'humidité relative h .

➤ Terme Φ_{diff} (équation I-2) :

La pression de vapeur s'écrit en fonction de l'humidité relative :

$$p_v = h p_{vsat} \quad (II-4)$$

où p_{vsat} est la pression de vapeur saturante dépendante de la température.

En supposant que la vapeur d'eau et l'air sec se comportent comme des gaz parfaits, la teneur en vapeur d'eau libre s'écrit en fonction de la pression de vapeur d'eau :

$$C_{v-l} = \frac{\rho_v}{\phi_g p_g} p_v \quad (II-5)$$

où p_v est la pression du gaz (air sec + vapeur d'eau) et ϕ_g est le rapport du volume de vapeur d'eau sur le volume du gaz.

En supposant que $p_g = p_{atm}$ (hypothèse que la pression du gaz est égale à la pression atmosphérique en tout point), le flux d'eau vapeur s'écrit alors (en s'aidant des équations II-4 et II-5) :

$$\Phi_{diff} = -D_{diff} \frac{\rho_v p_{vsat}}{\phi_g p_a} \nabla h \quad (II-6)$$

➤ Terme Φ_{perm} (équation II-1) :

La pression liquide s'écrit (équations I-43 et I-53) :

$$p_l = p_c + p_g = \frac{\rho_l RT}{M_v} \ln(h) + p_g \quad (II-7)$$

Le flux d'eau liquide s'écrit alors :

$$\Phi_{perm} = -K \frac{\rho_l^2 R T}{\eta_l M_v h} \nabla h \quad (\text{II-8})$$

La loi de conservation en masse d'eau s'écrit donc :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div} \left[\left(D_{diff} \frac{\rho_v P_{vsat}}{\phi_g p_a} + K \frac{\rho_l^2 R T}{\eta_l M_v h} \right) \nabla h \right] \quad (\text{II-9})$$

En utilisant la loi de sorption reliant la teneur en eau et l'humidité relative, $h = h(C)$, la loi de conservation de masse précédente II-9 s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div} \left[\left(D_{diff} \frac{\rho_v P_{vsat}}{\phi_g p_a} + K \frac{\rho_l^2 R T}{\eta_l M_v h} \right) \frac{dh}{dC} \nabla C \right] \quad (\text{II-10})$$

où dh/dC est l'inverse de la pente de l'isotherme de désorption.

En posant :

$$D(C) = \left(D_{diff} \frac{\rho_v P_{vsat}}{\phi_g p_a} + K \frac{\rho_l^2 R T}{\eta_l M_v h} \right) \frac{dh}{dC} \quad (\text{II-11})$$

On obtient finalement une loi de conservation en masse d'eau similaire à la seconde loi de Fick :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla (D(C) \nabla C) \quad (\text{II-12})$$

où $D(C)$ est le coefficient de diffusion de l'eau dépendant fortement de la teneur en eau et prenant en compte à la fois les mouvements de l'eau sous phase liquide et vapeur.

L'équation II-12 peut se mettre sous la forme condensée

$$\dot{C} = -\nabla \mathbf{q} \quad (\text{II-13})$$

où le point désigne la dérivée partielle par rapport au temps et le flux \mathbf{q} est égal à :

$$\mathbf{q} = -D(C) \nabla C \quad (\text{II-14})$$

L'équation de transport de l'eau est écrite en fonction de la teneur en eau, plutôt qu'en fonction de l'humidité relative. En effet, l'utilisation d'une courbe de perte en masse expérimentale permet d'identifier directement le coefficient de diffusion non linéaire $D(C)$ (Granger 1996, Witasse 2000).

L'évolution du coefficient de diffusion en fonction de la teneur en eau peut être obtenue à l'aide de l'équation II-11. Néanmoins, les développements présentés ici sont basés sur des hypothèses simplistes, qui ne rendent pas compte parfaitement de la microstructure complexe du béton (à travers les différents mécanismes de diffusion et leurs interactions).

Ainsi, il est choisi d'utiliser une loi de diffusion phénoménologique. Les paramètres seront alors identifiés à partir de résultats expérimentaux de séchage (perte en masse, mesure d'humidité relative). Sur les nombreuses lois de diffusion proposées dans la littérature (voir le paragraphe § I-4.1.2), notre choix s'est porté sur l'expression proposée par Xi et al. (1994) :

$$D(h) = D_0 \left[1 + a \left(1 - 2^{-10^{b(h-1)}} \right) \right] \quad (\text{II-15})$$

où D_0 , a et b sont des paramètres matériaux dépendants du rapport e/c (Xi et al. 1994).

L'avantage de la loi adoptée pour le coefficient de diffusion est qu'elle rend compte, de façon phénoménologique il est vrai, des différents mécanismes de transport de l'eau dans la pâte de ciment. De plus, elle permet de calibrer avec une bonne précision les profils expérimentaux d'humidité relative (Xi et al. 1994).

La relation II-12 est exprimée en fonction de la teneur en eau. Le coefficient de diffusion (équation II-15) peut être exprimé en fonction du même paramètre, grâce à une isotherme de désorption. L'expression de l'isotherme de désorption est déterminée à l'aide du modèle BSB (Brunauer et al. 1969). Le modèle BSB est une amélioration du modèle BET (Xi et al. 1994). L'hypothèse principale du modèle BET est que l'adsorption d'un gaz sur une surface solide résulte de l'attraction physique entre les molécules de gaz et les molécules du solide en surface. La quantité de gaz adsorbée est alors proportionnelle à la surface adsorbante. Dans le cas du béton, cette théorie décrit correctement le phénomène pour une humidité relative comprise entre 0,05 et 40 %, car l'eau n'y est présente dans la pâte de ciment que sous sa phase vapeur essentiellement. Pour une humidité relative supérieure à 40 %, le phénomène de condensation capillaire se produit, et la description correcte des phénomènes nécessite alors l'utilisation d'une théorie complémentaire. L'addition de la théorie de la condensation capillaire au modèle BET conduit alors au modèle BSB. Dans ce modèle, la teneur en eau C est reliée à l'humidité relative h par l'expression :

$$C(h) = \frac{A k V_m h}{(1 - k h) [1 + (A - 1) k h]} \quad (\text{II-16})$$

où A , k et V_m sont des constantes du modèle BSB.

II-2.2 Conditions aux limites

La surface d'échange hydrique entre le béton et l'air environnant est le siège de phénomènes complexes. En effet, l'eau liquide s'échappant de l'éprouvette s'évapore en surface (voir la Figure I-4), l'humidité relative de l'air à proximité de la surface n'est pas constante.

Afin de prendre en compte de manière phénoménologique ce phénomène, la condition aux limites sur les surfaces séchantes est choisie de type convectif. Le flux d'eau \mathbf{q}_f (en $\text{l.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$) échangé entre la surface exposée du béton et le milieu environnant est déterminé alors à partir de la relation suivante (Torrenti et al. 1997) :

$$\mathbf{q}_f = H_f(C) (C - C_{eq}) \mathbf{n} \quad (\text{II-17})$$

où H_f est le coefficient d'échange par convection, C est la teneur en eau sur la surface séchante (inconnue), C_{eq} est la teneur en eau correspondante à l'humidité relative environnante et \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface séchante (orienté vers l'extérieur).

Le coefficient d'échange est ici calculé à l'aide de l'expression proposée par Torrenti et al. (1997) :

$$H_f(C) = \beta_f \left((2 C_0 - C_{eq}) - C \right) \quad (\text{II-18})$$

où β_f est un paramètre matériau constant égal à $5.10^{-10} \text{ m}^4.\text{s}^{-1}$ et C_0 est la teneur en eau initiale.

Le caractère non linéaire du coefficient d'échange permet en quelque sorte de prendre en compte les différents phénomènes complexes sus-mentionnés qui se produisent au niveau de la surface d'échange béton/air.

II-2.3 Conclusion sur la modélisation du séchage

Dans notre étude, il s'agit dans un premier temps de connaître la distribution de la teneur en eau au sein du matériau, et son évolution dans le temps. A cet effet, un modèle de séchage est adopté. Il est basé sur les hypothèses précitées, conduisant à la résolution d'une équation de type diffusif (deuxième loi de Fick).

Afin d'obtenir des résultats réalistes, les paramètres du modèle sont identifiés à partir de la courbe de perte en masse expérimentale. Ainsi, conformément aux résultats numériques obtenus par Coussy *et al.* (2001), la perte en masse est considérée comme uniquement due à la variation de la teneur en eau.

Cette approche simplifiée peut être critiquée à la vue des multiples mécanismes moteurs du séchage présentés dans la bibliographie. Le caractère empirique du coefficient de diffusion permet néanmoins de retrouver les effets des mécanismes de diffusion classique. De plus, ce modèle permet de retrouver avec une très bonne précision les évolutions de la perte en masse obtenues expérimentalement pour différents spécimens (Xi *et al.* 1994, Witasse 2000, Benboudjema *et al.* 2001b).

II-3 Modélisation de la fissuration

Le modèle de fissuration développé appartient à la classe des modèles élastoplastiques endommageables orthotropes. Le caractère orthotrope du béton est ici induit par la fissuration du béton en traction dans des directions préférentielles. Sa prise en compte est nécessaire puisque le séchage naturel (dans des directions préférentielles) induit un comportement orthotrope du béton (voir le paragraphe § I-3.1.3.2). Le cadre de modélisation adopté est celui de la fissuration répartie qui est adapté à des calculs sur structures nécessitant un grand nombre de degré de liberté.

Nous avons choisi d'utiliser ici un modèle de fissure tournante, car il permet de s'affranchir du blocage de contraintes (Li *et al.* 1998). La théorie de la plasticité est ici utilisée afin de décrire de façon phénoménologique la fissuration du béton. Ainsi, la déformation plastique traduit l'ouverture de fissure. Celle-ci joue un rôle non négligeable dans la modélisation de la déformation de retrait de dessiccation (Benboudjema *et al.* 2001b). Dans ce cas, l'ouverture et la fermeture de fissures affectent sensiblement l'effet structural induit par la dessiccation.

Le comportement du béton dès qu'une fissuration se produit est fortement asymétrique en compression et en traction. Ainsi, afin de reproduire la différence de comportement, les variables du modèle de fissuration sont décomposées en une composante de compression, d'indice c , identique quelle que soit l'orientation des contraintes (traduisant alors un comportement isotrope) et en une composante de traction, d'indice t , dépendant de l'orientation des contraintes (traduisant alors un comportement orthotrope).

II-3.1 Formulation

L'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérive les lois d'état est supposée. Ce potentiel est défini par :

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^{fp}, \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\iota}) \quad (\text{II-19})$$

où κ désigne le tenseur des variables d'érouissage, \mathbf{u} désigne le vecteur des variables internes de fluage, et $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{fp}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}$ sont les tenseurs des déformations totales, élastiques, plastiques, de fluage propre et de fluage de dessiccation, respectivement. On rappelle que \mathbf{D} est la matrice d'endommagement

On considère la partition « classique » des déformations en vitesse, qui s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fd} \quad (\text{II-20})$$

Le potentiel énergie convexe ψ est décomposé en une partie élastique, plastique et de fluage :

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}) + \psi^p(\mathbf{D}, \kappa) + \psi^f(\boldsymbol{\varepsilon}^{fp}, \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}, \mathbf{u}) \quad (\text{II-21})$$

où ψ^e est le potentiel élastique, ψ^p est le potentiel plastique et ψ^f est le potentiel de fluage.

Le potentiel élastique dépend linéairement de l'endommagement :

$$\rho\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{II-22})$$

La loi d'élasticité s'écrit alors (équation I-13) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{II-23})$$

Le matériau fissuré est donc assimilé à un matériau dont la surface effective \tilde{S} (résistante) est réduite du fait de la création de fissures (Figure I-30). Les contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, qui s'appliquent sur la partie non fissuré du matériau (et de surface \tilde{S}), sont liées aux contraintes apparentes par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{II-24})$$

Les contraintes effectives sont alors liées aux déformations élastiques par la relation :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{II-25})$$

II-3.2 Évolution de l'endommagement

L'endommagement \mathbf{D} est décomposé en une variable d'endommagement scalaire de compression D_c (isotrope) et une variable d'endommagement tensorielle de traction \mathbf{D}_t (orthotrope).

II-3.2.1 Variables d'endommagement en traction et compression

Il est choisi d'exprimer la variable d'endommagement en compression et en traction directement en fonction du paramètre d'érouissage plastique en compression et en traction, respectivement. En effet, de nombreuses évidences expérimentales indiquent que l'endommagement peut être relié aux déformations plastiques (Ju 1989) : les déformations plastiques contribuent à l'initiation et à la croissance de la micro-fissuration. Ce choix a déjà effectué par plusieurs auteurs (Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000). La fonction d'évolution de la variable d'endommagement est de type exponentiel (Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000).

En traction, la variable d'endommagement est orthotrope. La loi d'évolution est alors définie dans l'espace principal du tenseur d'endommagement et dans la direction i ($i \in [1,3]$) par l'équation suivante :

$$1 - D_t^{ii}(\kappa_t^{ii}) = \exp(-c_t \kappa_t^{ii}) \quad (\text{II-26})$$

La variable d'endommagement en compression est isotrope. Elle est fonction du paramètre d'écrouissage en compression κ_c :

$$1 - D_c(\kappa_c) = \exp(-c_c \kappa_c) \quad (\text{II-27})$$

II-3.2.2 Prise en compte de l'effet unilatéral

De nombreuses techniques ont été proposées dans la littérature pour prendre en compte l'effet unilatéral (Ju 1989, La Borderie 1991, Chaboche 1993, Lee et Fenves 1998, Nechnech 2001).

Dans ce travail, l'approche proposée par Lee et Fenves (1998) et Nechnech (2000) est utilisée. La variable d'endommagement en traction est multipliée par un paramètre s qui traduit l'effet du passage de la traction à la compression sur l'endommagement total :

$$(1 - D_{ii}) = 1 - (1 - D_c) (1 - s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) D_t^{ii}) \quad (\text{II-28})$$

Le paramètre $s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ peut s'exprimer sous la forme :

$$s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = s_0 + (1 - s_0) r(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (\text{II-29})$$

Le paramètre $r(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ est fonction de l'état de contraintes (Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000) :

$$r(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \\ \frac{\left\langle \sum_{i=1}^3 \tilde{\sigma}_{ii} \right\rangle^+}{\left(\sum_{i=1}^3 |\tilde{\sigma}_{ii}| \right)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-30})$$

Le symbole $\langle \rangle^+$ désigne l'opérateur de Macaulay :

$$\langle x \rangle^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

La valeur $s_0 = 0,1$ permet de reproduire correctement l'effet unilatéral (Lee et Fenves 1998, Nechnech 2000). Cette valeur sera adoptée dans la suite de ce travail.

II-3.3 Couplage entre la plasticité et l'endommagement

Le couplage entre la plasticité et l'endommagement est basé sur le concept des contraintes effectives. Il est admis que l'écoulement plastique est dû uniquement aux quantités effectives (Ju 1989, Nechnech 2000). Ainsi, les lois d'écoulement et d'écrouissage sont caractérisées à l'aide des quantités effectives.

On introduit la contrainte nominale résistante effective de traction $\tilde{\tau}_t$, fonction de la variable d'érouissage κ_t et de la contrainte nominale apparente τ_t par :

$$\tilde{\tau}_t(\kappa_t^{ii}) = \frac{\tau_t(\kappa_t^{ii})}{(1 - D_t^{ii})} \quad (\text{II-32})$$

On introduit, de même, une contrainte nominale effective de compression $\tilde{\tau}_c$, fonction du paramètre d'érouissage κ_c et de la contrainte nominale apparente τ_c par :

$$\tilde{\tau}_c(\kappa_c) = \frac{\tau_c(\kappa_c)}{(1 - D_c)} \quad (\text{II-33})$$

II-3.4 Plasticité

Afin de prendre en compte la différence de comportement phénoménologique du béton en compression et en traction, il est choisi d'utiliser un critère multi-surface. On considère deux surfaces de charge distinctes suivant la nature de la sollicitation. Ainsi, le critère de Drucker-Prager en compression (comportement isotrope) et trois critères de Rankine en traction (comportement orthotrope) sont adoptés.

II-3.4.1 Critères de plasticité

On considère dans le repère des contraintes principales, trois critères de Rankine en traction, définis dans chacune des directions principales. Une représentation graphique est donnée dans le cas de contraintes planes dans la Figure II-3.

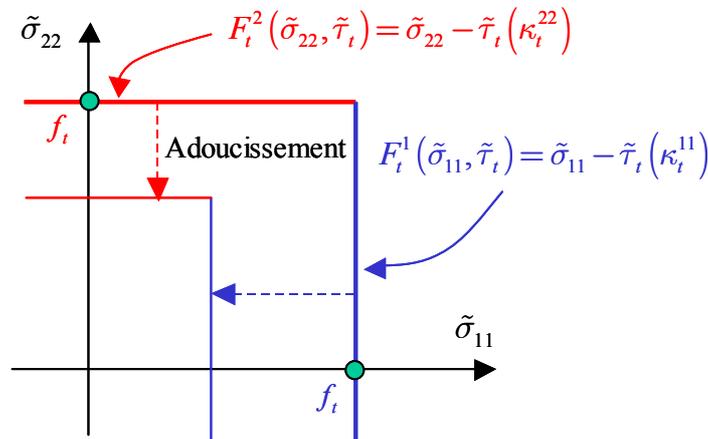


Figure II-3 Double critère de Rankine dans le cas de contraintes planes.

Les trois critères de Rankine peuvent s'écrire dans le repère des contraintes principales sous la forme suivante :

$$F_t^i(\tilde{\sigma}, \kappa_t^{ii}) = \tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\tau}_t(\kappa_t^{ii}) = 0 \quad (\text{II-34})$$

où $\tilde{\sigma}_{ii}$ sont les contraintes effectives principales, dont l'expression, ainsi que les matrices de passage sont données en **Annexe B** dans le cas de sollicitations triaxiales.

L'adoption de trois critères indépendants en traction permet de reproduire un comportement orthotrope, où l'orthotropie est induite par la fissuration en traction dans une ou plusieurs directions préférentielles.

Afin de décrire correctement le comportement du béton en compression, le critère de Drucker-Prager est adopté. Ce critère est isotrope et permet de prendre en compte l'effet de la pression hydrostatique (Chen *et al.* 1995). Ce critère s'exprime dans l'espace des contraintes effectives par la relation suivante :

$$F_c(\tilde{\sigma}, \kappa_c) = \frac{1}{\beta} \cdot \left[\sqrt{3 \cdot J_2(\tilde{\sigma})} + \alpha_f \cdot I_1(\tilde{\sigma}) \right] - \tilde{\tau}_c(\kappa_c) = 0 \quad (\text{II-35})$$

où $I_1(\tilde{\sigma})$ est le premier invariant du tenseur des contraintes effectives, $J_2(\tilde{\sigma})$ est le deuxième invariant du tenseur des contraintes effectives, α_f et β sont deux paramètres, déterminés à partir de la résistance en compression simple f_c et de la résistance en compression biaxiale f_b à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_f = \frac{1 - \beta_c}{1 - 2\beta_c}; & \beta = \frac{\beta_c}{2\beta_c - 1} \\ \beta_c = (f_b / f_c) \end{cases} \quad (\text{II-36})$$

En choisissant la valeur $\beta_c = 1,2$, les surfaces de rupture expérimentales sont correctement reproduites, dans le cas de contraintes biaxiales (Figure II-4). Cette valeur sera adoptée par la suite.

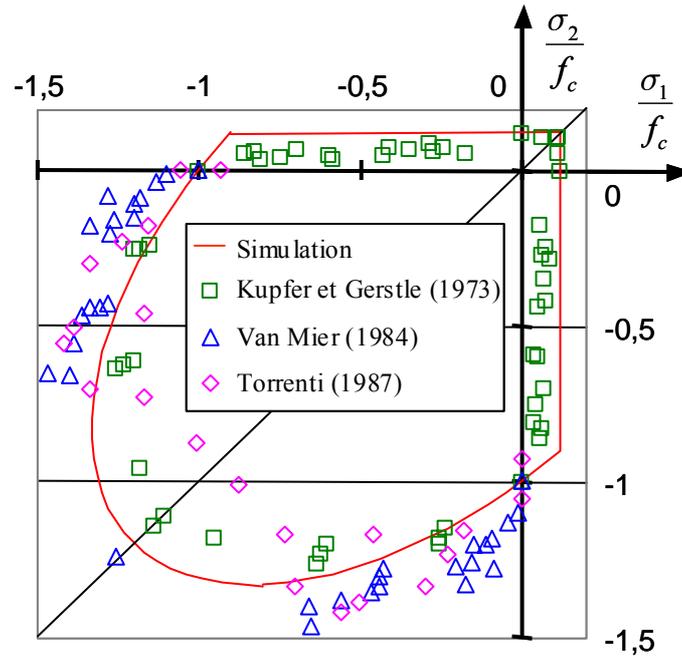


Figure II-4 Comparaison du critère de Drucker-Prager et de Rankine avec les résultats expérimentaux de Kupfer et Gerstle (1973), van Mier (1984) et Torrenti (1987).

Les relations donnant les invariants sont les suivantes :

$$\begin{cases} I_1(\tilde{\sigma}) = 3 \tilde{\sigma}^{sph} \\ J_2(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^{dev} \cdot \tilde{\sigma}^{dev} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \tilde{\sigma}^{sph} = \frac{tr(\tilde{\sigma})}{3} \\ \tilde{\sigma}^{dev} = \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{sph} \mathbf{1} \end{cases} \quad (\text{II-37})$$

où $\tilde{\sigma}^{sph}$ et $\tilde{\sigma}^{dev}$ sont les contraintes effectives sphériques et déviatoriques, respectivement.

Dans un repère quelconque des contraintes, les expressions des invariants deviennent alors :

$$\begin{cases} I_1(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} + \tilde{\sigma}_{zz} \\ J_2(\tilde{\boldsymbol{s}}) = \frac{1}{6} \left[(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy})^2 + (\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\sigma}_{zz})^2 + (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{xx})^2 \right] + (\tilde{\sigma}_{xy})^2 + (\tilde{\sigma}_{yz})^2 + (\tilde{\sigma}_{zx})^2 \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

Dans le repère des contraintes principales et dans le cas de contraintes planes, le critère est représenté dans la Figure II-5.

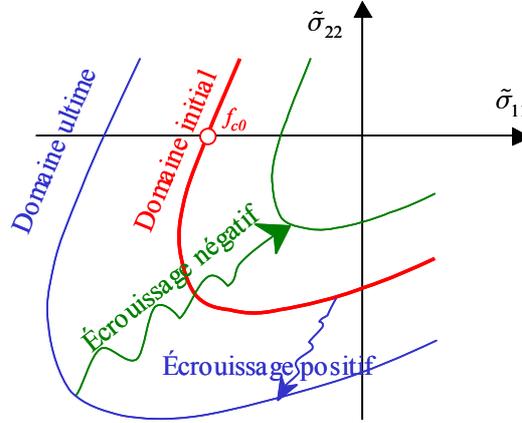


Figure II-5 Critère de Drucker-Prager en compression dans le repère des contraintes principales et dans le cas de contraintes planes.

Notons que le critère de plasticité en compression peut être calculé en utilisant des matrices de projection de l'état de contraintes \mathbf{P}_c et $\boldsymbol{\pi}_c$ (Feenstra et de Borst 1996) :

$$F_c(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa_c) = \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{P}_c \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right)^{1/2} + \alpha_f \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right] - \tilde{\tau}_c(\kappa_c) \quad (\text{II-39})$$

Avec :

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\pi}_c^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{II-40})$$

Cette dernière forme sera utilisée à la place de la forme II-35, lors de l'intégration des équations constitutives du modèle (Paragraphe § II-7).

II-3.4.2 Calcul des déformations plastiques

Les lois d'évolution de la déformation plastique sont subordonnées par la connaissance des fonctions potentielles plastiques. Les déformations plastiques sont calculées à partir de la proposition de Koiter, dans le cas où plusieurs critères sont actifs :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sum_{j=1}^{j=3} \dot{\lambda}_t^j \frac{\partial G_t^j}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + \dot{\lambda}_c \frac{\partial G_c}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{II-41})$$

où λ_x^j ($x=t$ pour la traction et $x=c$ pour la compression) est le multiplicateur plastique, associé au potentiel plastique G_c en compression et G_t^j en traction.

Dans le cas de la traction, les fonctions potentielles plastiques sont identiques aux fonctions de charge (lois associées : $G_t^j = F_t^j$), ce qui conduit à la relation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{j=1}^{j=3} \dot{\lambda}_t^j \frac{\partial F_t^j}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{II-42})$$

Ainsi, dans le repère des contraintes principales, la déformation plastique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ii}^p = \dot{\lambda}_t^i & \text{si le critère est activé dans la direction } i \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-43})$$

Dans le cas de la compression, la loi d'écoulement plastique est non associée afin de prédire correctement la dilatance du béton. La loi d'écoulement plastique est définie par la donnée du potentiel plastique G_c :

$$G_c = \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{3 J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} + \alpha_g I_1(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \right] - \tilde{\tau}_c(\kappa_c) \quad (\text{II-44})$$

où α_g est un paramètre contrôlant la dilatance.

L'évolution de la déformation plastique est alors donnée par la loi d'écoulement suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_c \frac{\partial G_c}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda}_c \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{P}_c \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right)^{1/2}} \mathbf{P}_c \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \alpha_g \boldsymbol{\pi}_c \right] \quad (\text{II-45})$$

II-3.4.3 Définition des variables d'érouissage

Dans le cas de la traction, la fissuration est orthotrope. Ainsi, la variable d'érouissage est tensorielle d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{\kappa}_t^{princ} = \begin{bmatrix} \kappa_t^{11} & \kappa_t^{12} & \kappa_t^{13} \\ \kappa_t^{21} & \kappa_t^{22} & \kappa_t^{23} \\ \kappa_t^{31} & \kappa_t^{32} & \kappa_t^{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa}_t = \begin{bmatrix} \kappa_t^{xx} & \kappa_t^{xy} & \kappa_t^{xz} \\ \kappa_t^{yx} & \kappa_t^{yy} & \kappa_t^{yz} \\ \kappa_t^{zx} & \kappa_t^{zy} & \kappa_t^{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II-46})$$

où $\boldsymbol{\kappa}_t^{princ}$ est le tenseur des paramètres d'érouissage dans le repère des contraintes principales.

Le paramètre d'érouissage $\boldsymbol{\kappa}$ peut être défini en adoptant l'hypothèse du travail plastique maximal ou de la déformation plastique cumulée. Nous faisons ici l'hypothèse de la déformation plastique cumulée. Cette hypothèse conduit à exprimer dans chacune des directions principales i les taux des variables d'érouissage selon la relation :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t^{ii} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} (\dot{\varepsilon}_{ii}^p)^2} \\ \dot{\kappa}_t^{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-47})$$

A l'aide de l'expression II-43, on en déduit finalement que :

$$\dot{\kappa}_t^{ii} = \dot{\lambda}_t^i \quad (\text{II-48})$$

Dans le repère des contraintes principales, le tenseur taux du paramètre d'érouissage $\dot{\kappa}_t$ est aussi principal. Afin de connaître les valeurs de la variable d'érouissage dans le repère initial, un changement de base doit alors être effectué :

$$\dot{\kappa}_t = \mathbf{Q} \cdot \dot{\kappa}_t^{princ} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{II-49})$$

où \mathbf{Q} est la matrice de passage, reliant les contraintes principales aux contraintes dans le repère initial, dont l'expression est donnée en **Annexe B** (équation B-18).

Dans le cas de la compression l'érouissage est considéré isotrope :

$$\dot{\kappa}_c = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (\text{II-50})$$

A l'aide de l'expression de la déformation plastique en compression II-45 et en remarquant que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\pi}_c = 3 \\ \mathbf{P}_c^T \cdot \mathbf{P}_c = 3\mathbf{P}_c \\ \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{P}_c = 0 \end{cases} \quad (\text{II-51})$$

La variable d'érouissage en compression κ_c s'écrit :

$$\dot{\kappa}_c = (1 + 2 \alpha_g^2)^{1/2} \dot{\lambda}_c \quad (\text{II-52})$$

II-3.4.4 Les contraintes nominales résistantes

Les contraintes nominales résistantes en traction $\tau_t(\kappa_t^{ii})$, intervenant dans le critère de Rankine, sont reliées à la variable d'érouissage en traction κ_t par une fonction bi-exponentielle, de façon similaire à l'expression proposée par Lee et Fenves (1998) et Nechnech (2000). La différence dans ce travail est que la variable d'érouissage est tensorielle. Ainsi, dans le repère des contraintes principales, elles s'expriment dans la direction i suivant la relation :

$$\tau_t(\kappa_t^{ii}) = f_t \left[(1 + a_t) \exp(-b_t \kappa_t^{ii}) - a_t \exp(-2b_t \kappa_t^{ii}) \right] \quad (\text{II-53})$$

où f_t est la limite élastique en traction, a_t et b_t sont deux paramètres déterminés à partir de la courbe contrainte-déformation obtenue lors d'un essai uniaxial de traction. La valeur du paramètre a_t conditionne le sens de l'érouissage, après avoir dépassé la limite d'élasticité (érouissage positif ou négatif). Une valeur de ($a_t < 1$) permet de caractériser correctement le comportement adoucissant du béton en traction (voir la Figure II-6). L'identification des paramètres a_t et b_t sera présentée dans le paragraphe § II-3.6.

La combinaison des équations II-26 et II-53 permet d'exprimer les contraintes nominales résistantes effectives en traction :

$$\tilde{\tau}_t(\kappa_t^{ii}) = \frac{\tau_t(\kappa_t^{ii})}{1 - D_t^{ii}(\kappa_t^{ii})} = f_t \left\{ (1 + a_t) \left[\exp(-b_t \kappa_t^{ii}) \right]^{(1-c_t/b_t)} - a_t \left[\exp(-b_t \kappa_t^{ii}) \right]^{(2-c_t/b_t)} \right\} \quad (\text{II-54})$$

Dans le cas d'une sollicitation en traction, les évolutions des contraintes résistantes orthotropes sont données en **Annexe C**, afin d'illustrer la modélisation adoptée.

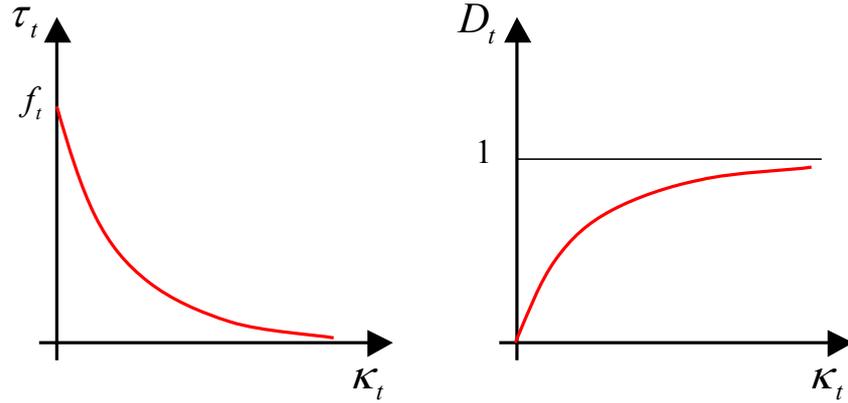


Figure II-6 Évolution des contraintes nominales et de la variable endommagement en fonction de la variable d'écroutissage en traction.

La contrainte nominale en compression τ_c est reliée au paramètre d'écroutissage en compression κ_c par une fonction bi-exponentielle similaire à celle adoptée en traction :

$$\tau_c(\kappa_c) = f_{c0} \left[(1 + a_c) \exp(-b_c \kappa_c) - a_c \exp(-2b_c \kappa_c) \right] \quad (\text{II-55})$$

où f_{c0} est la limite élastique ($f_{c0} = 0.3 f_c$ environ, où f_c est la résistance ultime en compression), a_c et b_c sont des paramètres déterminés à partir de la courbe contrainte-déformation obtenue lors d'un essai de compression uniaxial. Une valeur de ($a_c > 1$) permet de caractériser correctement le comportement rigidifiant puis adoucissant du béton en compression (voir la Figure II-7). La méthode d'identification des paramètres a_c et b_c sera présentée dans le paragraphe § II-3.6.

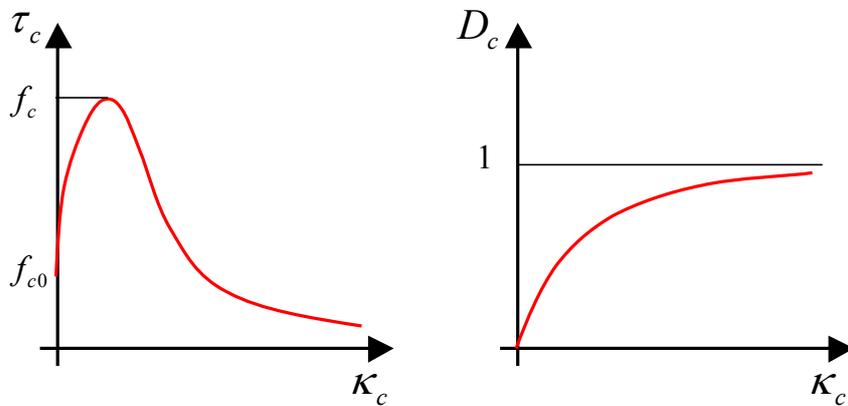


Figure II-7 Évolution des contraintes nominales et de la variable endommagement en fonction de la variable d'écroutissage en compression.

La combinaison des équations II-27 et II-55 permet d'exprimer la contrainte nominale résistante effective :

$$\tilde{\tau}_c(\kappa_c) = \frac{\tau_c(\kappa_c)}{1 - D_c(\kappa_c)} = f_{c0} \left\{ (1 + a_c) \left[\exp(-b_c \kappa_c) \right]^{(1 - c_c/b_c)} - a_c \left[\exp(-b_c \kappa_c) \right]^{(2 - c_c/b_c)} \right\} \quad (\text{II-56})$$

II-3.5 Objectivité vis-à-vis de la taille des éléments finis

L'analyse bibliographique a mis en évidence que le comportement adoucissant induit une réponse numérique sensible aux éléments finis utilisés (taille, forme et orientation). Afin de s'affranchir en partie de ce problème, la méthode de Hillerborg (Hillerborg et *al.* 1976) a été choisie. Dans cette approche, la loi d'évolution de la contrainte résistante nominale en régime adoucissant, dépend de la taille de l'élément fini. L'énergie dissipée à la rupture est alors gardée constante lorsque la taille des éléments change par affinement du maillage. La densité de l'énergie de fissuration g_{fx} est liée à l'énergie de fissuration G_{fx} par la relation suivante (Bažant et Oh 1983, Rots 1998) :

$$g_{fx} = \frac{G_{fx}}{l_c} \quad (\text{II-57})$$

où $x = c$ dans le cas de la compression, $x = t$ dans le cas de la traction et l_c est la longueur caractéristique liée à la taille de la zone localisée, définie en configuration bidimensionnelle par la relation suivante :

$$l_c = k \sqrt{A} \quad (\text{II-58})$$

où A est la surface de l'élément fini et k un paramètre dépendant du type d'élément fini utilisé (Rots 1988) :

$$\begin{cases} k = 1 & \Rightarrow \text{éléments linéaires} \\ k = \sqrt{2} & \Rightarrow \text{éléments quadratiques} \end{cases} \quad (\text{II-59})$$

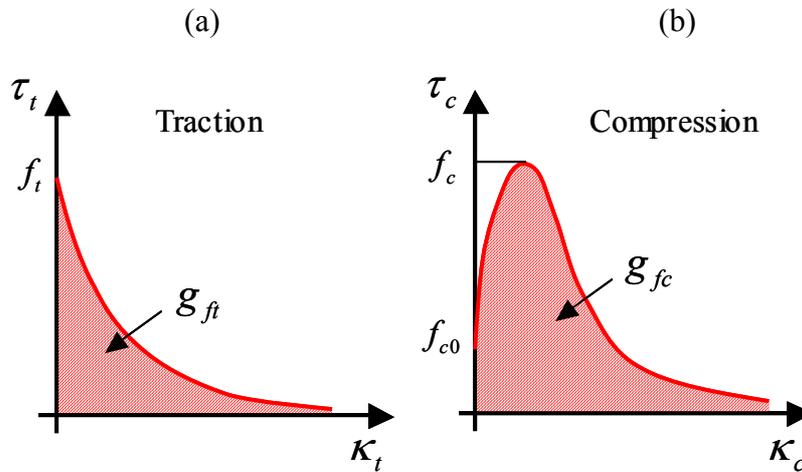


Figure II-8 Densité d'énergie de fissuration en traction (a) et en compression (b).

Dans le cas d'une configuration tridimensionnelle, où des éléments finis cubiques sont utilisés, la relation II-58 devient :

$$l_c = \sqrt[3]{V} \quad (\text{II-60})$$

où V est le volume de l'élément fini.

La densité d'énergie de fissuration est donnée par la relation suivante (voir la Figure II-8) :

$$g_{fx} = \int_{\kappa_x=0}^{\kappa_x=+\infty} \tau_x(\kappa_x) d\kappa_x \quad (\text{II-61})$$

Cette relation permet d'identifier la contrainte nominale τ_x à partir de la donnée de l'énergie de fissuration G_{fi} .

II-3.6 Méthode d'identification des paramètres

Cas de la traction :

Le paramètre a_t est fixé conventionnellement égal à $-0,5$ (Nechnech 2000), ce qui permet d'avoir une réponse prépic linéaire. Le paramètre b_t peut être alors défini à partir de l'énergie de fissuration G_{fi} et de la longueur caractéristique de l'élément fini l_c , afin de dissiper une énergie identique quel que soit le maillage adopté.

$$G_{fi} = l_c \int_{\kappa_t=0}^{\kappa_t=+\infty} \tau_t(\kappa_t) d\kappa_t \quad (\text{II-62})$$

A l'aide de l'équation II-53, on obtient alors la relation :

$$b_t = f_t l_c \left(1 + \frac{a_t}{2}\right) / G_{fi} \quad (\text{II-63})$$

Le paramètre c_t est défini en fonction des paramètres a_t , b_t et $D_{t/2}$ qui est l'endommagement correspondant à une contrainte de traction (en régime adoucissant) égale à la moitié de la limite élastique en traction (Figure II-9a) :

$$\frac{c_t}{b_t} = \frac{\ln[1 - D_{t/2}]}{\ln\left[\frac{(1 + a_t) - \sqrt{1 + a_t^2}}{2a_t}\right]} \quad (\text{II-64})$$

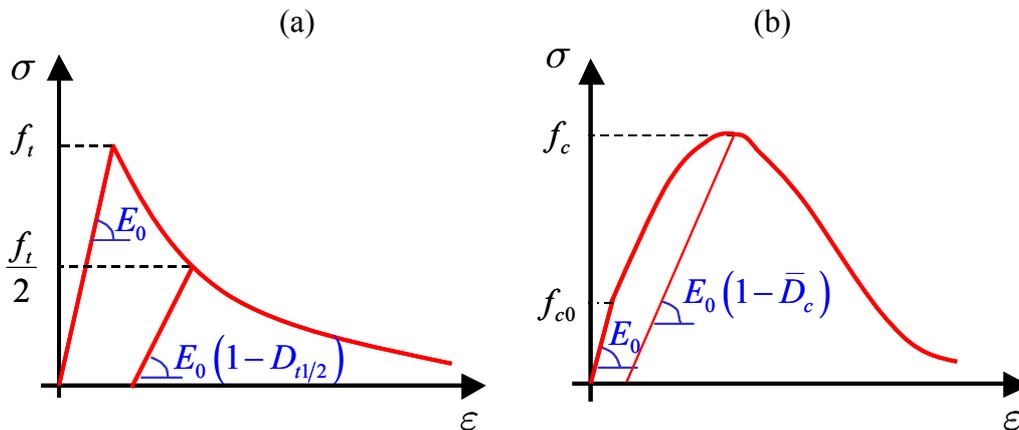


Figure II-9 Définition des valeurs d'endommagement nécessaire à l'identification des paramètres en traction (a) et en compression (b).

Cas de la compression :

Le paramètre a_c est fonction du rapport de la contrainte limite élastique f_{c0} sur la résistance ultime en compression f_c :

$$a_c = 2 f_c / f_{c0} - 1 + 2 \sqrt{(f_c / f_{c0})^2 - f_c / f_{c0}} \quad (\text{II-65})$$

Le paramètre b_c est relié à l'énergie de rupture en compression G_c , suivant la relation :

$$b_c = f_{c0} l_c \left(1 + \frac{a_c}{2} \right) / G_c \quad (\text{II-66})$$

Le paramètre c_c est alors défini en fonction de a_c , b_c et \bar{D}_c qui est l'endommagement de compression correspondant à une contrainte égale à la résistance ultime en compression (Figure II-9b) :

$$\frac{c_c}{b_c} = \frac{\ln[1 - \bar{D}_c]}{\ln\left[\frac{1 + a_c}{2a_c}\right]} \quad (\text{II-67})$$

II-3.7 Conclusion sur la modélisation de la fissuration

L'analyse bibliographique effectuée au premier chapitre (paragraphe § I-3.2) a rappelé les principales caractéristiques observées expérimentalement sur des bétons soumis à des chargements mécaniques, en compression et en traction. La modélisation adoptée, dans le cadre de la formulation élastoplastique endommageable orthotrope, permet de décrire de nombreuses caractéristiques du comportement du béton fissuré : asymétrie en compression et en traction, dégradation de la raideur, déformations irréversibles, orthotropie induite etc.

L'intégration du modèle de fissuration développé dans un code de calcul aux Éléments Finis sera présentée dans le paragraphe § II-7.

II-4 Modélisation du fluage propre

L'analyse bibliographique des résultats de fluage propre sous sollicitations multiaxiales a mis en évidence la pertinence de la décomposition des déformations de fluage propre en une partie sphérique et une partie déviatorique. Ainsi, ce choix est adopté dans ce travail : la déformation de fluage propre est la somme de la déformation sphérique et de la déformation déviatorique de fluage propre :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fp} = \varepsilon_{fp}^{sph} \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev} \quad (\text{II-68})$$

où ε_{fp}^{sph} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{fp}$ sont les déformations sphériques, déviatoriques et totales de fluage propre, respectivement, définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{fp}^{sph} = tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{fp})/3 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev} = \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} - \varepsilon_{fp}^{sph} \mathbf{1} \end{cases} \quad (\text{II-69})$$

Dans le modèle de fluage propre développé, chacune de ces composantes (sphériques et déviatoriques) est associée explicitement à différents mécanismes, ayant lieu à différentes échelles d'observation du matériau. Les mécanismes de fluage propre choisis sont cohérents avec les observations expérimentales mentionnées dans le paragraphe § I-3.4.1.1. Ces mécanismes et la modélisation qui en découle sont présentés successivement.

II-4.1 Fluage propre sphérique

II-4.1.1 Description des mécanismes

La partie sphérique est associée à la migration de l'eau physi-sorbée vers la porosité capillaire adjacente, à différentes échelles de porosité dans la pâte de ciment (Figure II-10).

L'étude bibliographique (paragraphe § I-3.4.1.1.1) a mis en évidence que de nombreux résultats expérimentaux sont en accord avec cette théorie.

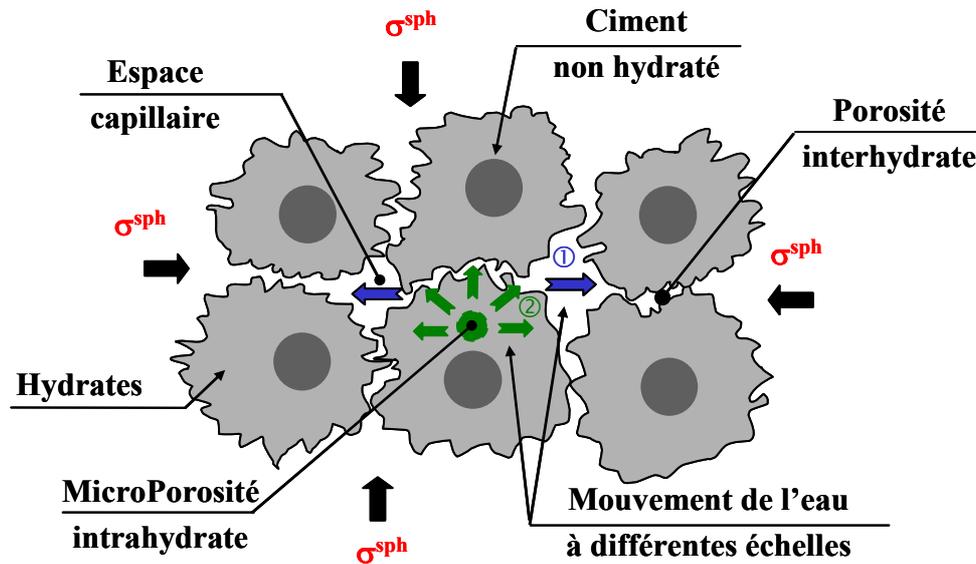


Figure II-10 Mécanismes du fluage propre sphérique.

La part sphérique de la contrainte appliquée σ^{sph} induit un déséquilibre thermodynamique dans les macropores entre l'eau adsorbée physiquement et l'eau libre (Figure II-10 et Figure II-11). La contrainte sphérique est retransmise instantanément à l'eau physi-sorbée interhydrate (sous la forme d'un potentiel énergétique représentée par la pression p_r), qui désordonne l'équilibre préexistant entre celle-ci et l'eau libre. L'eau physi-sorbée interhydrate migre alors vers la porosité capillaire pour rejoindre l'eau libre, selon le chemin ①. La contrainte sphérique est alors retransmise progressivement de l'eau physi-sorbée aux particules de ciment non hydratées et hydratées, de rigidité globale k_r^{sph} (module 1, Figure II-11) sous la forme de la contrainte $\tilde{\sigma}_r^{sph}$. La migration des molécules d'eau entraîne progressivement la déformation sphérique du squelette solide ε_r^{sph} . Cette déformation du squelette solide est réversible. En cas de décharge, le mouvement des molécules d'eau s'inverse et entraîne un gonflement qui est assimilé à la recouvrance.

Ce mécanisme associé à la déformation de fluage propre sphérique à court terme, est similaire à celui proposé par différents auteurs (Lohtia 1970, Wittmann 1982, Ulm et al. 1998, voir le paragraphe § I-3.4.1.1.1). De plus le caractère réversible est justifié puisqu'on observe en effet une similitude entre la cinétique de déformation de fluage propre très tôt après le déchargement (recouvrance) et très tôt après le chargement (Illston 1965). Par ailleurs, l'énergie d'activation mesurée au cours du déchargement est similaire à celle mesurée à court terme (environ 25 kJ.mol^{-1} , Day et Gamble 1983).

La contrainte $\tilde{\sigma}_r^{sph}$ est ensuite retransmise à l'eau adsorbée dans les micropores intrahydrates (sous la forme d'un potentiel énergétique représentée par la pression p_i). Celle-ci migre alors suivant le chemin ② vers les pores interhydrates (si la pression p_i est supérieure à la pression p_r) et ensuite éventuellement vers les pores capillaires voisins si le déséquilibre thermodynamique persiste. La contrainte sphérique $\tilde{\sigma}_r^{sph}$ est alors transmise progressivement aux hydrates de rigidité k_i^{sph} (module 2, Figure II-11) et dont la contrainte subie est $\tilde{\sigma}_i^{sph}$. La migration ne pouvant s'effectuer que des micropores intrahydrates vers les pores

interhydrates, la déformation du squelette solide associée ε_i^{sph} est irréversible. En effet, les tensions capillaires existantes empêchent le retour de l'eau au sein de la micro-porosité. La déformation de fluage propre sphérique n'est donc que partiellement réversible.

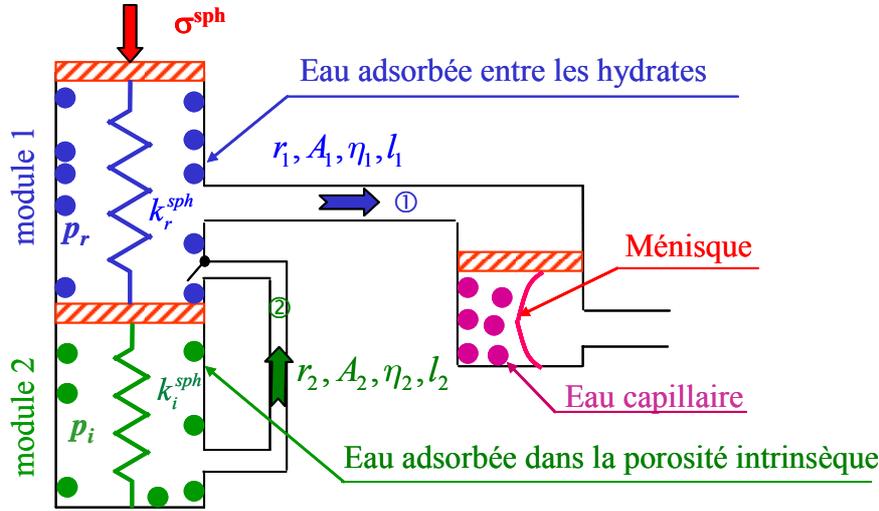


Figure II-11 Modélisation physique du fluage propre sphérique.

Ce mécanisme est associé à la déformation de fluage propre sphérique à long terme. En effet, la microstructure des hydrates étant complexe (rayon de pore faible et tortuosité élevée), le temps caractéristique associé à la déformation résultante est donc plus élevé que le temps caractéristique associé à la déformation dite de fluage à court terme.

La micro-diffusion des molécules d'eau continue jusqu'à ce que la contrainte sphérique appliquée σ^{sph} ne soit plus suffisante pour arracher celles-ci de l'attraction des surfaces solides. Ainsi, la déformation de fluage propre sphérique est bornée, ce qui est cohérent avec le mécanisme de micro-diffusion proposé. Ce résultat est confirmé sur mortier et sur béton, où il est observé que la déformation de fluage propre sous des contraintes hydrostatiques atteint sa valeur asymptotique après environ une dizaine de jours (Glücklich et Amar 1972, Ohgishi et al. 1979).

II-4.1.2 Équations constitutives

On considère que la déformation de fluage propre sphérique ε_{fp}^{sph} est donnée par la somme de la partie réversible ε_r^{sph} et de la partie irréversible ε_i^{sph} :

$$\varepsilon_{fp}^{sph} = \varepsilon_r^{sph} + \varepsilon_i^{sph} \quad (\text{II-70})$$

La transmission de la contrainte sphérique appliquée σ^{sph} au squelette solide (sous la forme d'une contrainte effective agissant sur l'ensemble hydrates et anhydres $\tilde{\sigma}_r^{sph}$) et à l'eau adsorbée interhydrate (sous la forme de la pression p_r) s'écrit :

$$\sigma^{sph} = \tilde{\sigma}_r^{sph} + b_r p_r \quad (\text{II-71})$$

Ensuite, la transmission de la contrainte sphérique $\tilde{\sigma}_r^{sph}$ aux hydrates seuls (sous forme de contrainte $\tilde{\sigma}_i^{sph}$) et à l'eau adsorbée dans les micropores intrahydrates (sous la forme de la pression p_i) s'écrit :

$$\tilde{\sigma}_r^{sph} = \tilde{\sigma}_i^{sph} + b_i p_i \quad (\text{II-72})$$

où b_r et b_i sont des coefficients de retransmission des efforts à l'eau adsorbée dans les pores interhydrates et les micropores intrahydrates. Ces coefficients jouent un rôle similaire à celui du coefficient de Biot (Biot 1941).

On considère que le comportement des particules non hydratées et hydratées est élastique linéaire. Les relations contraintes sphériques - déformations sphériques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_r^{sph} = k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph} \\ \tilde{\sigma}_i^{sph} = k_i^{sph} \varepsilon_i^{sph} \end{cases} \quad (\text{II-73})$$

La relation II-71 devient alors :

$$\begin{cases} p_r = \sigma_r^{sph} / b_r - k_r^{sph} / b_r \varepsilon_r^{sph} \\ p_i = k_r^{sph} / b_i \varepsilon_r^{sph} - k_i^{sph} / b_i \varepsilon_i^{sph} \end{cases} \quad (\text{II-74})$$

Les canaux, reliant les porosités à différentes échelles, sont supposés de formes cylindriques de longueurs caractéristiques l_x ($x = 1$ pour le chemin ① ou $x = 2$ pour le chemin ②, voir la Figure II-11). Cette approximation cylindrique est aussi effectuée pour déterminer la distribution des pores lors de l'essai de porosimétrie mercure. De plus, l'allure de l'hystérésis observée lors du cycle sorption-désorption dans le diagramme de l'isotherme suggère que la forme des pores soit proche d'un cylindre (Neimark 1991, Baroghel-Bouny 1994, Raouf 1998).

Ces longueurs caractéristiques l_x peuvent être estimées à l'aide des relations (Baron et Ollivier 1992) :

$$l_x = \frac{l_{ax}}{t_x} \quad (\text{II-75})$$

où l_{ax} est la longueur apparente et t_x est la tortuosité du milieu.

On suppose alors que les écoulements dans les canaux 1 et 2 sont laminaires et obéissent à la relation de Poiseuille :

$$\begin{cases} A_1 v_1 = \frac{\pi r_1^4}{8 \eta_1} \frac{p_r}{l_1} \\ A_2 v_2 = \frac{\pi r_2^4}{8 \eta_2} \frac{\langle p_r - p_i \rangle^+}{l_2} \end{cases} \quad (\text{II-76})$$

où r_1 et r_2 désignent les rayons des canaux 1 et 2, respectivement (supposés cylindriques). η_1 et η_2 sont les viscosités dynamiques de l'eau dans les canaux 1 et 2, respectivement. v_1 et v_2 sont les vitesses de l'eau dans les canaux 1 et 2, respectivement. A_1 et A_2 sont les sections des canaux 1 et 2, respectivement (voir la Figure II-11). Le terme $\langle p_r - p_i \rangle^+$ modélise le caractère irréversible de l'écoulement de l'eau entre les micropores et la porosité capillaire.

En supposant que l'eau est incompressible, l'équation de conservation de la masse d'eau (écrite ici pour un volume unitaire) dans les modules 1 et 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= 1 \left(\dot{\varepsilon}_{fp}^{sph} + \dot{\varepsilon}_i^{sph} \right) \\ A_2 v_2 &= 1 \dot{\varepsilon}_i^{sph} \end{aligned} \quad (\text{II-77})$$

On suppose que $b_r = b_i = b = \text{cst}$ et on pose :

$$\begin{cases} \eta_r^{sph} = \frac{8 b \eta_1 l_1}{\pi r_1^4} \\ \eta_i^{sph} = \frac{8 b \eta_2 l_2}{\pi r_2^4} \end{cases} \quad (II-78)$$

où η_r^{sph} et η_i^{sph} sont les viscosités apparentes.

Les équations II-76 et II-77 conduisent alors au système de deux équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{fp}^{sph} + \dot{\varepsilon}_i^{sph} = \frac{1}{\eta_r^{sph}} [\sigma^{sph} - k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}] \\ \dot{\varepsilon}_i^{sph} = \frac{1}{\eta_i^{sph}} \left\langle -[k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph} - k_i^{sph} \varepsilon_i^{sph}] + [\sigma^{sph} - k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}] \right\rangle^+ \end{cases} \quad (II-79)$$

Le système précédent peut s'écrire en fonction uniquement des déformations réversibles et irréversibles :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{sph} + 2 \dot{\varepsilon}_i^{sph} = \frac{1}{\eta_r^{sph}} [\sigma^{sph} - k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}] \\ \dot{\varepsilon}_i^{sph} = \frac{1}{\eta_i^{sph}} \left\langle -2 k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph} + k_i^{sph} \varepsilon_i^{sph} + \sigma^{sph} \right\rangle^+ \end{cases} \quad (II-80)$$

Ce système d'équations correspond, à la loi constitutive du fluage propre sphérique. La détermination de ces deux composantes à partir de l'équation II-80 permet de retrouver la déformation de fluage propre sphérique (équation II-70).

II-4.1.3 Prise en compte de l'hygrométrie

L'étude bibliographique (paragraphe § I-3.4.1.2) a mis en évidence le rôle crucial de l'humidité relative dans le processus de déformation de fluage propre. Une diminution de l'humidité relative entraîne une diminution du nombre de couches d'eau adsorbée. Ainsi, la quantité d'eau disponible qui migre des pores interhydrates ou des micropores intrahydrates vers la porosité capillaire est réduite. Par conséquent, l'amplitude de la déformation de fluage diminue aussi. Ce phénomène est pris en compte en modifiant les paramètres k_r^{sph} et k_i^{sph} suivant les relations simples suivantes :

$$\begin{cases} k_r^{sph} \Rightarrow k_r^{sph} / h \\ k_i^{sph} \Rightarrow k_i^{sph} / h \end{cases} \quad (II-81)$$

L'équation II-81 traduit ainsi une augmentation de la rigidité intrinsèque k_i^{sph} du gel de C-S-H et de la rigidité apparente k_r^{sph} de l'ensemble clinker non hydraté et gel d'hydrates, lorsque l'humidité relative diminue. Scherer (1999) suggère aussi, à partir d'observations expérimentales, que le séchage induise une augmentation de la rigidité intrinsèque du gel de C-S-H. Néanmoins, il ne propose aucune relation pour modéliser ce phénomène.

De même, la relation diffusivité - humidité relative (par exemple l'équation II-15) indique que le coefficient de diffusion décroît lorsque l'humidité relative diminue. Ainsi, la résistance à la migration de l'eau est augmentée, ce qui se traduit par l'augmentation des viscosités

apparentes de l'eau dans les micropores (η_r^{sph} et η_i^{sph}). Cet effet est pris en compte, de façon phénoménologique, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \eta_r^{sph} \Rightarrow \eta_r^{sph} / h \\ \eta_i^{sph} \Rightarrow \eta_i^{sph} / h \end{cases} \quad (II-82)$$

L'équation II-80 devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{sph}(t) + 2 \dot{\varepsilon}_i^{sph}(t) = \frac{1}{\eta_r^{sph}} [h(t) \sigma^{sph}(t) - k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}(t)] \\ \dot{\varepsilon}_i^{sph}(t) = \frac{1}{\eta_i^{sph}} \langle -2 k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}(t) + k_i^{sph} \varepsilon_i^{sph}(t) + h(t) \sigma^{sph}(t) \rangle^+ \end{cases} \quad (II-83)$$

où t est le temps dont l'origine se situe au moment du premier chargement.

Dans le cas où la contrainte sphérique et l'humidité relative sont constantes, la déformation de fluage propre sphérique $\varepsilon_{fp}^{sph}(t)$ peut se mettre alors sous la forme :

$$\varepsilon_{fp}^{sph}(t) = J_{fp}^{sph}(t) h \sigma^{sph} \quad (II-84)$$

où $J_{fp}^{sph}(t)$ est la complaisance de fluage propre sphérique, dont l'expression est donnée en **Annexe D** (équation D-49 ou D-55). On démontre dans cette annexe que, dans l'espace des vecteurs propres du système d'équations II-83, le modèle devient équivalent à une double chaîne de Kelvin-Voigt (équation D-24). De plus, on y constate que la déformation réversible correspond à la déformation à court terme, conformément aux suppositions faites.

II-4.1.4 Identification des valeurs des paramètres du modèle sphérique

Deux mécanismes ont été proposés pour le fluage propre sphérique et une formulation mécanique en a été déduite. Celle-ci a fait apparaître l'existence de 4 paramètres macroscopiques (k_r^{sph} , k_i^{sph} , η_r^{sph} et η_i^{sph}), qui sont reliés aux caractéristiques physiques de l'eau et de la microstructure de la pâte de ciment.

Dans cette partie, les valeurs de ces paramètres sont, dans un premier temps, calculées à partir des caractéristiques de la microstructure. Ils sont par la suite identifiés de façon macroscopique à partir de l'évolution expérimentale de la déformation sphérique de fluage propre d'une pâte de ciment. L'objectif étant de confronter et analyser les ordres de grandeurs des paramètres du modèle obtenus à partir de ces deux démarches.

II-4.1.4.1 Identification à partir des caractéristiques de la microstructure de la pâte de ciment

La rigidité des composants de la pâte de ciment varie considérablement. Des mesures expérimentales indiquent que les grains de ciment anhydres ont une rigidité comprise entre $5,5 \times 10^4$ MPa (Ghosh 1973) et $14,5 \times 10^4$ MPa (mesurée par nano-indentation, Acker 2001), alors que les hydrates (C-S-H) ont une rigidité comprise entre $1,4 \times 10^4$ MPa (Ghosh 1973) et $3,1 \times 10^4$ MPa (Acker 2001). Ainsi, il est possible de déterminer les ordres de grandeur des paramètres k_r^{sph} (rigidité des particules anhydres et hydratées de ciment) et k_i^{sph} (rigidité des hydrates de C-S-H) :

$$\begin{cases} k_r^{sph} \simeq 1,4 \cdot 10^4 - 14,5 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ k_i^{sph} \simeq 1,4 - 3,1 \cdot 10^4 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{II-85})$$

Il serait également possible d'avoir une approximation plus réaliste de k_r^{sph} , en reliant la proportion des particules d'hydrates et de clinker au degré d'avancement de la réaction d'hydratation.

Le temps caractéristique de la diffusion des molécules d'eau adsorbées interhydrates vers la porosité capillaire voisine peut être aussi calculé à partir de la connaissance du coefficient de micro-diffusion et de la dimension caractéristique associée. Le chemin moyen parcouru par l'eau est sensiblement égal à la demi-distance moyenne entre 2 gros capillaires, soit 20 à 30 μm (Ulm et Acker 1998). S'il est supposé que la tortuosité associée est égale à l'unité, la longueur l_1 est alors égale à 20 à 30 μm . En supposant que le coefficient de diffusion dans les couches d'eau en adsorption libre est environ $D_1 \simeq 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (Ulm et Acker 1998), on obtient alors la plage variation suivante du paramètre τ_r^{sph} :

$$\tau_r^{sph} = \frac{l_1^2}{D_1} = 4,62 - 10,4 \text{ jours} \quad (\text{II-86})$$

Il est aussi possible de calculer le temps caractéristique de la micro-diffusion des molécules d'eau adsorbées dans la micro-porosité. La valeur choisie du chemin moyen de micro-diffusion (entre la porosité intrahydrate et la porosité interhydrate) est choisie du même ordre de grandeur que la longueur l_1 , soit $l_2 \simeq 20$ à 30 μm . On peut remarquer sur la Figure II-10, que la distance à parcourir entre la porosité intrahydrate et la porosité interhydrate est plus faible que la demi-distance entre 2 gros capillaires. Néanmoins, la tortuosité associée à la longueur l_2 est plus importante. En effet, la complexité de la microstructure à cette échelle augmente la tortuosité t_2 . Le coefficient de diffusion associé D_2 est choisi 5 fois plus faible que D_1 , $D_2 \simeq D_1/5 \simeq 2 \times 10^{-15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ce choix se justifie par la réduction de la taille des pores concernés qui induit une augmentation de l'interaction entre la micro-diffusion et la surface des pores. De plus, cette valeur est proche de celle mesurée sur des bétons de poudres réactives (Matte 2000), pour lesquels la porosité capillaire n'existe quasiment pas. On obtient alors la plage variation suivante du paramètre τ_i^{sph} :

$$\tau_i^{sph} = \frac{l_2^2}{D_2} = 23,1 - 52 \text{ jours} \quad (\text{II-87})$$

Ces valeurs montrent l'existence d'une cinétique de déformation à court terme (temps caractéristique τ_r^{sph} de l'ordre de quelques jours) et à long terme (temps caractéristique τ_i^{sph} de l'ordre de plusieurs dizaines de jours).

Ainsi, il est possible d'en déduire les valeurs des viscosités apparentes η_r^{sph} et η_i^{sph} associées aux deux processus de micro-diffusion :

$$\begin{cases} \eta_r^{sph} = \tau_r^{sph} k_r^{sph} = 5,6 - 130 \cdot 10^9 \text{ MPa} \cdot \text{s} \\ \eta_i^{sph} = \tau_i^{sph} k_i^{sph} = 50,8 - 112,5 \cdot 10^9 \text{ MPa} \cdot \text{s} \end{cases} \quad (\text{II-88})$$

II-4.1.4.2 Identification à partir d'un essai sur une pâte de ciment

Parrott (1974) a réalisé des essais uniaxiaux de fluage propre sur des pâtes de ciment, en mesurant les déformations longitudinales et transversales de l'éprouvette. Les éprouvettes de

pâte de ciment sont de formes parallélépipédiques, de dimension $150 \times 150 \times 20 \text{ mm}^3$. Les caractéristiques de la pâte de ciment sont données dans le Tableau II-1.

Tableau II-1 Composition et caractéristiques de la pâte de ciment.

e/c	Âge de chargement [jours]	Âge de déchargement [jours]	σ_u [MPa]
0,47	28	68	8,9

A partir des déformations longitudinales ε_{fp}^{long} et transversales ε_{fp}^{lat} , il est possible de déterminer l'évolution de la déformation de fluage propre sphérique ε_{sp}^{fp} , à partir de laquelle les paramètres du modèle de fluage propre sphérique seront identifiés :

$$\varepsilon_{sp}^{sph} = (\varepsilon_{fp}^{long} + 2 \varepsilon_{fp}^{lat}) / 3 \quad (\text{II-89})$$

Les paramètres du modèle sont reliés directement à l'amplitude et à la cinétique de la déformation de fluage propre sphérique (Tableau II-2).

Tableau II-2 Identification expérimentale des paramètres du modèle de fluage propre sphérique.

Paramètres	Identification expérimentale
k_r^{sph}	Amplitude de la déformation réversible de fluage (asymptotique)
k_i^{dev}	Amplitude de la déformation irréversible de fluage (asymptotique)
$\tau_r^{sph} = \frac{\eta_r^{sph}}{k_r^{sph}}$	Cinétique de la déformation réversible de fluage
$\tau_i^{sph} \simeq \frac{\eta_i^{sph}}{k_i^{sph}}$	Cinétique de la déformation de fluage à long terme

Les mesures expérimentales nécessaires à l'identification des paramètres du modèle sont reportées sur la Figure II-12. La déformation à la recouvrance (carré bleu) est supposée ici égale à la déformation à court terme (voir le paragraphe § II-4.1.3). Celle-ci est reportée en début d'essai pour déterminer l'amplitude de la déformation irréversible.

On en déduit alors, successivement, les valeurs des paramètres du modèle de fluage propre sphérique :

$$\begin{cases} k_r^{sph} = \sigma^{sph} / \varepsilon_r^{sph}(\infty) \\ \eta_r^{sph} = k_r^{sph} \tau_r^{sph} \\ k_i^{sph} = \sigma^{sph} / \varepsilon_i^{sph}(\infty) \\ \eta_i^{sph} \simeq k_i^{sph} \tau_i^{sph} \end{cases} \quad (\text{II-90})$$

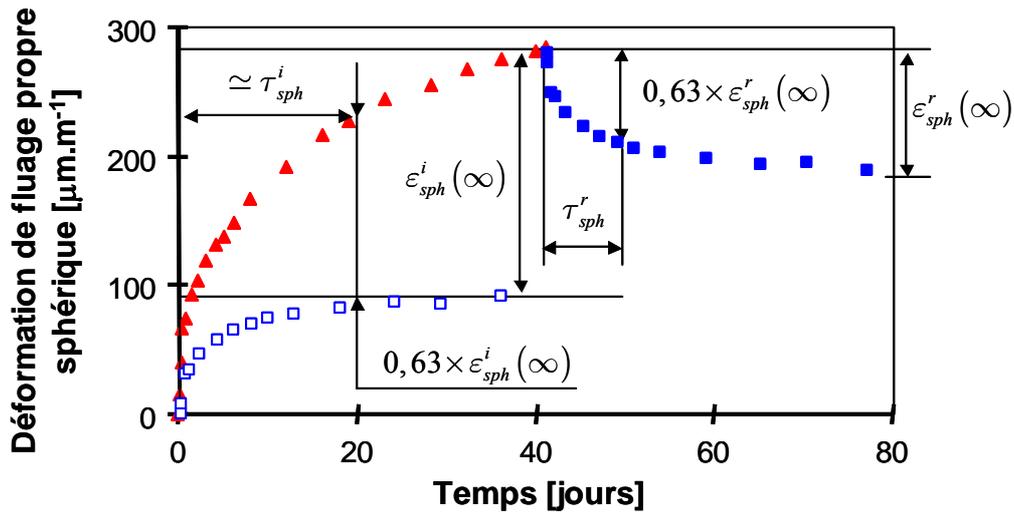


Figure II-12 Identification des paramètres du modèle de fluage propre sphérique.

Les évolutions expérimentales et simulées de la déformation sphérique de fluage propre sont comparées dans la Figure II-13. Ainsi, le modèle de fluage propre sphérique permet de décrire correctement la cinétique et l'amplitude de la déformation de fluage propre sphérique, ainsi que l'occurrence d'une déformation irréversible importante lors d'un déchargement.

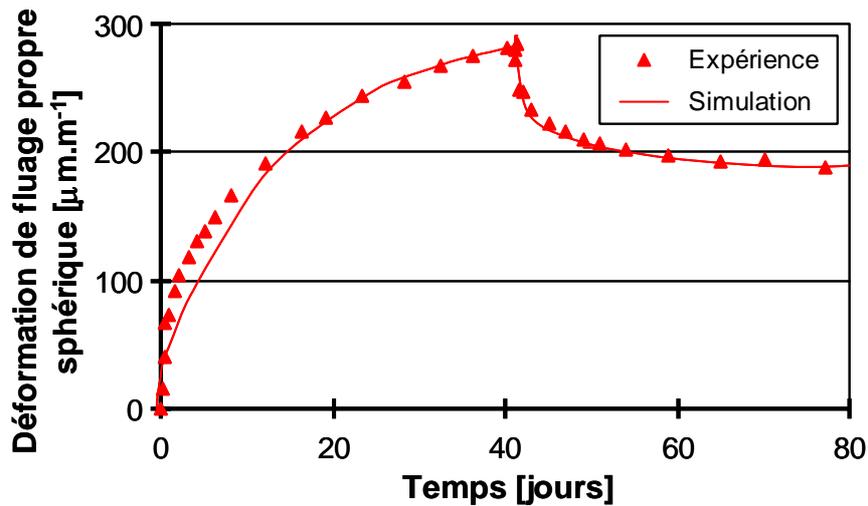


Figure II-13 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées de la déformation de fluage propre sphérique.

Les valeurs des paramètres de fluage propre sphérique sont comparées à celles estimées dans le paragraphe § II-4.1.4.1 (à partir des caractéristiques de la microstructure de la pâte de ciment) dans le Tableau II-3.

Tableau II-3 Valeurs des paramètres de fluage propre sphérique.

	k_r^{sph} [MPa]	k_i^{sph} [MPa]	η_r^{sph} [MPa.s]	η_i^{sph} [MPa.s]
Estimation (§ II-4.1.4.1)	$1,4 - 15,5 \times 10^4$	$1,4 - 3,1 \times 10^4$	$5,6 - 130 \times 10^9$	$5,08 - 11,25 \times 10^{10}$
Simulation	$3,3 \times 10^4$	$1,36 \times 10^4$	$4,2 \times 10^9$	$1,4 \times 10^{10}$

On constate que les estimations menées dans le paragraphe § II-4.1.4.1 conduisent à des valeurs proches de celles identifiées sur les essais expérimentaux sur pâtes de ciment de Parrott (1974). De plus, on constate que la valeur de k_r^{sph} est proche de la borne inférieure (qui correspond à celle du C-S-H). Ce résultat est logique, étant donné que le rapport e/c élevé de la pâte de ciment implique une hydratation importante du clinker.

II-4.1.4.3 Identification macroscopique à partir d'un essai sur un mortier

Dans ces essais, Glücklich et Amar (1972) se sont intéressés à des chemins de chargement purement sphériques sur des éprouvettes de mortiers avec trois niveaux de contraintes hydrostatiques. Les spécimens chargés sont cylindriques de diamètre 7,5 cm et de hauteur 15 cm.

Les compositions des mortiers et les caractéristiques des essais sont regroupées dans le Tableau II-4.

Tableau II-4 Compositions et caractéristiques du mortier étudié.

e/c	g/c	Type de granulat	Age	f _{c42} [MPa]	f _{t42} [MPa]
0,44	3,64	Argile expansée	4 mois ½	31,8	2,5

Le chargement est réalisé en plaçant les éprouvettes dans des cellules en acier contenant du kérosène, dont la mise sous pression est assurée par l'intermédiaire d'une bouteille d'azote pressurisée.

Les évolutions des déformations mécaniques (déformations élastiques et déformations de fluage propre), déterminées en mesurant la variation du niveau de kérosène pour différentes valeurs de contraintes hydrostatiques, sont données dans la Figure II-14.

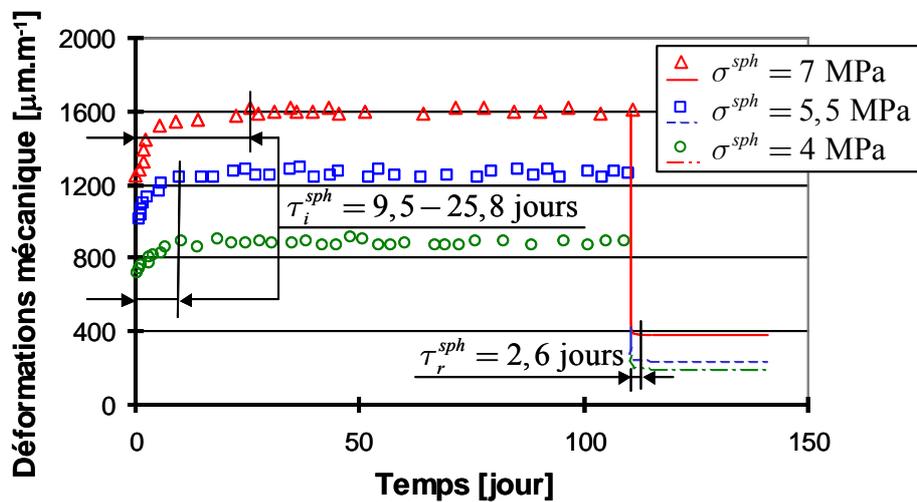


Figure II-14 Déformations mécaniques des éprouvettes de mortiers.

Les temps caractéristiques sont identifiés à partir de ces cinétiques de déformation. Ainsi, on obtient $\tau_r^{sph} = 2,6$ jours et $\tau_i^{sph} = 9,5 - 25,8$ jours (Figure II-14).

A partir de l'identification macroscopique des paramètres obtenus sur pâte de ciment (paragraphe § II-4.1.4.2), les temps caractéristiques sont calculés et comparés à ceux obtenus précédemment dans le Tableau II-5. Les valeurs calculées (équations II-86 et II-87) et les valeurs obtenues à partir des essais expérimentaux sur mortier (Glücklich et Amar 1972) et sur pâte de ciment (Parrott 1974) sont du même ordre de grandeur.

Tableau II-5 Valeurs des temps caractéristiques de fluage propre sphérique.

	τ_r^{sph} [jour]	τ_i^{sph} [jour]
Équations II-86 et II-87	4,62-10,4	23,1-52
Essais sur mortier (Glücklich et Amar 1972)	2,6	9,5-25,8
Essais sur pâte de ciment (Parrott 1974)	1,44	12,3

Ces résultats encourageants ne constituent pas, bien entendu, une preuve que les mécanismes, que nous avons supposés, sont bien à l'origine du fluage propre. Néanmoins, ils sont en accord avec la théorie proposée.

II-4.2 Fluage propre déviatorique

II-4.2.1 Description des mécanismes

Il est supposé que le mécanisme de fluage propre déviatorique est lié au glissement des feuillets de C-S-H dans la nanoporosité, où l'eau joue le rôle de lubrifiant. Ce mécanisme est similaire à celui déjà proposé par de nombreux auteurs (Ruetz 1968, Lohtia 1970, Wittmann 1982, Bažant et *al.* 1997, Ulm et *al.* 1998). Ainsi, sous l'effet des contraintes déviatoriques, il se produit un glissement réversible de l'eau interfoliaire (fortement adsorbée), du fait de la forte énergie de liaison avec le solide. Ce n'est pas le cas de l'eau adsorbée interlamellaire pour laquelle, il se produit une rupture des liaisons (voir la Figure II-15). Ainsi, la déformation associée est irréversible. Néanmoins, les liaisons hydrogènes peuvent éventuellement se reformer par la suite.

Dans la partie bibliographique (Paragraphe § I-3.4.1.1.1), nous avons remarqué que la valeur de l'énergie d'activation du fluage à court terme (environ 25 kJ.mol^{-1}) était compatible avec un mécanisme de diffusion de l'eau physi-sorbée. Cette valeur est aussi compatible avec un mécanisme de glissement par rupture des liaisons hydrogènes (Huet et *al.* 1982). Ainsi, il est possible que ces deux mécanismes se produisent de façon simultanée.

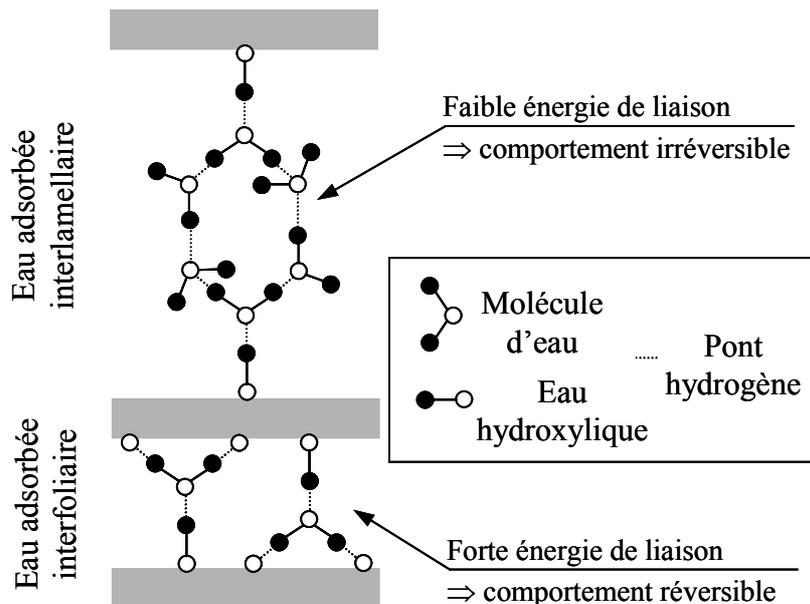


Figure II-15 Mécanismes de fluage propre déviatorique.

II-4.2.2 Équations constitutives

Afin de modéliser le fluage propre déviatorique, il est choisi de modéliser le processus réversible par une chaîne de Kelvin-Voigt, associée à un amortisseur pour la partie irréversible (Figure II-16). La déformation réversible de fluage propre déviatorique ϵ_r^{dev} est alors donnée classiquement par :

$$\eta_r^{dev} \dot{\epsilon}_r^{dev}(t) + k_r^{dev} \epsilon_r^{dev}(t) = \sigma^{dev}(t) \quad (II-91)$$

où t est le temps dont l'origine se situe au moment du premier chargement et σ^{dev} sont les contraintes déviatoriques.

La part irréversible ϵ_i^{dev} est également donnée par :

$$\eta_i^{dev} \dot{\epsilon}_i^{dev}(t) = \sigma^{dev}(t) \quad (II-92)$$

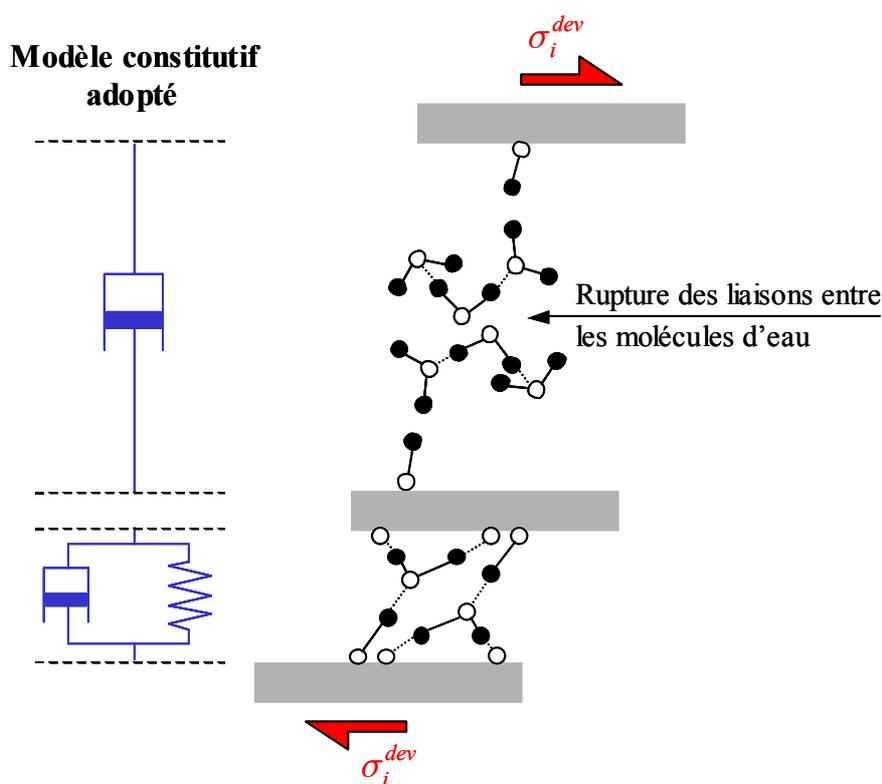


Figure II-16 Modèles constitutifs du fluage propre déviatorique réversible et irréversible.

La déformation de fluage propre déviatorique totale est alors obtenue en sommant la part réversible et la part irréversible :

$$\epsilon_{fp}^{dev}(t) = \epsilon_r^{dev}(t) + \epsilon_i^{dev}(t) \quad (II-93)$$

II-4.2.3 Prise en compte de l'hygrométrie

Il est choisi de faire évoluer, de façon identique, les composantes sphériques et déviatoriques de fluage propre en fonction de l'humidité relative (voir le paragraphe § II-4.1.3). En effet, on constate expérimentalement, que le pré-séchage n'affecte pas le coefficient de Poisson de fluage propre des pâtes de ciment, quelle que soit sa composition ou la valeur de l'humidité relative interne atteinte (Ghosh 1974, Parrott 1974).

L'eau est responsable en partie de la faible rigidité intrinsèque du gel d'hydrate. Une diminution de l'humidité relative induit alors une augmentation de cette rigidité intrinsèque. Ainsi, le paramètre k_r^{dev} est modifié suivant la relation :

$$k_r^{dev} \Rightarrow k_r^{dev} / h \quad (\text{II-94})$$

De même que dans le cas de la partie sphérique (voir le paragraphe § II-4.1.3), la diminution de l'humidité relative augmente la viscosité apparente. Ainsi, cet effet sur les viscosités η_r^{dev} et η_i^{dev} est pris en compte par les relations :

$$\begin{cases} \eta_r^{dev} \Rightarrow \eta_r^{dev} / h \\ \eta_i^{dev} \Rightarrow \eta_i^{dev} / h \end{cases} \quad (\text{II-95})$$

Ainsi, les équations II-91 et II-92 deviennent alors :

$$\begin{cases} \eta_r^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{dev}(t) + k_r^{dev} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = h(t) \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) \\ \eta_i^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{dev}(t) = h(t) \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) \end{cases} \quad (\text{II-96})$$

Dans le cas où les contraintes déviatoriques et l'humidité relative sont constantes, la déformation de fluage propre déviatorique $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(t)$ peut se mettre alors sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(t) = J_{fp}^{dev}(t) h \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (\text{II-97})$$

où $J_{fp}^{dev}(t)$ est la complaisance de fluage propre déviatorique, dont l'expression est donnée en **Annexe D** (équation D-76).

II-4.2.4 Identification des valeurs des paramètres du modèle déviatorique

Il a été possible d'estimer les paramètres du modèle de fluage propre sphérique à travers la connaissance des caractéristiques de la microstructure de la pâte de ciment, à l'échelle microscopique. Cela n'est pas le cas du modèle de fluage propre déviatorique. En effet, les mécanismes associés sont supposés se produire à l'échelle de la porosité du gel de C-S-H, dont les rayons du pore sont de l'ordre du nanomètre. Or, cette échelle est encore aujourd'hui difficilement accessible par les techniques actuelles d'investigation expérimentale.

Néanmoins, les paramètres du modèle de fluage propre déviatorique peuvent être identifiés de façon macroscopique à partir de l'évolution expérimentale de la déformation (de fluage propre déviatorique) dans le cas d'un essai de fluage propre uniaxial. A partir des déformations longitudinales ε_{fp}^{long} et transversales ε_{fp}^{lat} , il est possible de déterminer l'évolution de la déformation de fluage propre déviatorique ε_{fp}^{dev} , à partir de laquelle les paramètres seront identifiés :

$$\varepsilon_{fp}^{dev} = 2 (\varepsilon_{fp}^{long} - \varepsilon_{fp}^{lat}) / 3 \quad (\text{II-98})$$

Les paramètres du modèle sont reliés directement à l'amplitude et à la cinétique de la déformation de fluage propre déviatorique (Tableau II-6).

Tableau II-6 Identification expérimentale des paramètres du modèle de fluage propre déviatorique.

Paramètres	Identification expérimentale
$\tau_r^{dev} = \frac{\eta_r^{dev}}{k_r^{dev}}$	Cinétique de la déformation réversible de fluage
k_r^{dev}	Amplitude de la déformation réversible de fluage (asymptotique)
η_i^{dev}	Cinétique de la déformation de fluage à long terme

A partir des mesures expérimentales reportées sur la Figure II-17, on en déduit successivement les valeurs des paramètres du modèle de fluage propre déviatorique :

$$\begin{cases} k_r^{dev} = \sigma_{yy}^{dev} / \varepsilon_r^{dev}(\infty) \\ \eta_r^{dev} = k_r^{dev} \tau_r^{dev} \\ \eta_i^{dev} = \sigma_{yy}^{dev} / \dot{\varepsilon}_i^{dev}(\infty) \end{cases} \quad (II-99)$$

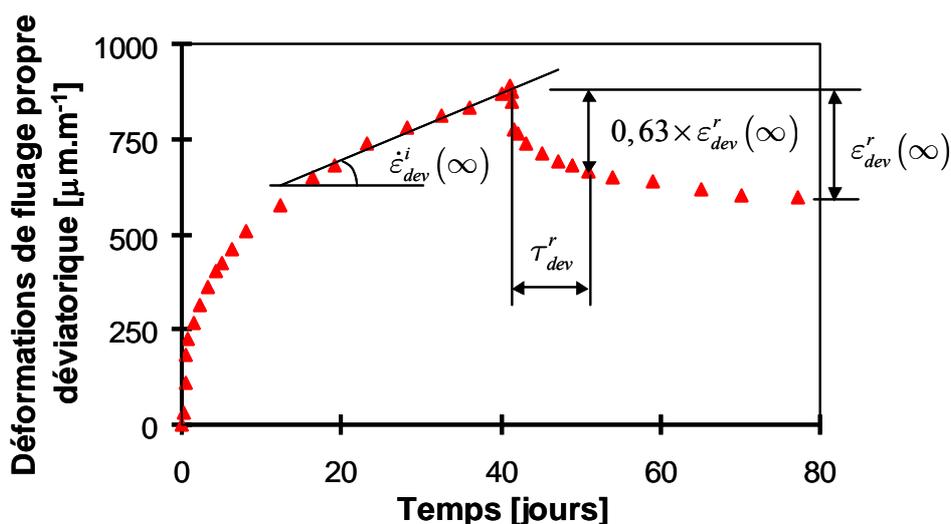


Figure II-17 Identification des paramètres du modèle de fluage propre déviatorique (résultats expérimentaux de Parrott 1974).

II-4.3 Effet de l'humidité relative

Le choix effectué pour la prise en compte de l'humidité relative dans la déformation de fluage propre (partie sphérique : équations II-81 et II-82, partie déviatorique : équations II-94 et II-95) est justifié dans cette partie. Les évolutions expérimentales (Wittmann 1970) de la déformation de fluage propre dans différentes ambiances de conservation sont confrontées aux évolutions numériques dans la Figure II-18.

La Figure II-18 montre que le modèle de fluage propre développé permet de retrouver l'effet de l'humidité relative dans l'intervalle 22,5 – 98 %.

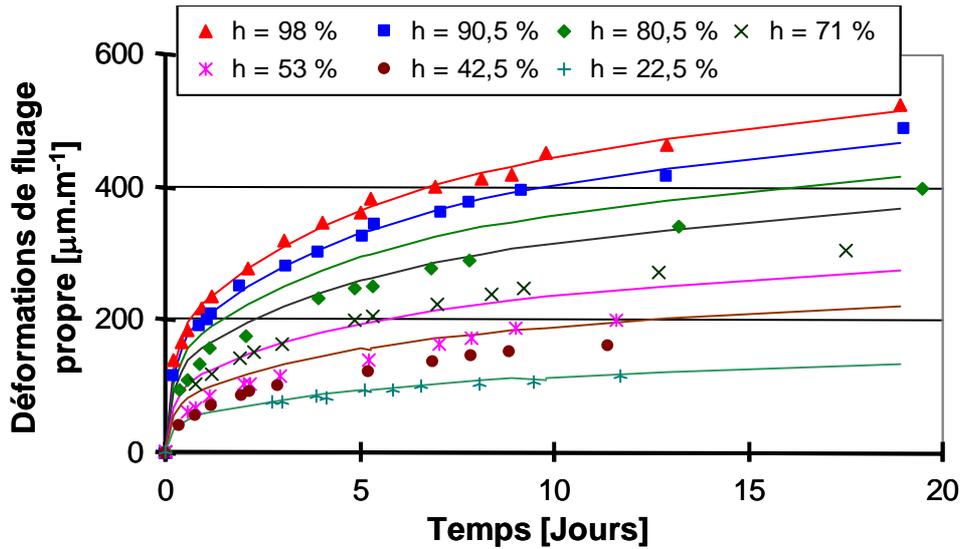


Figure II-18 Comparaison entre les résultats expérimentaux (Wittmann 1970) et les résultats numériques de fluage propre pour différentes valeurs d'humidité relative.

II-4.4 Déformation totale de fluage propre

II-4.4.1 Expression analytique de la déformation

La déformation de fluage propre $\epsilon^{fp}(t)$ est la somme des composantes sphériques $\epsilon_{fp}^{sph}(t)$ et déviatoriques $\epsilon_{fp}^{dev}(t)$:

$$\epsilon^{fp}(t) = \epsilon_{fp}^{sph}(t) \mathbf{1} + \epsilon_{fp}^{dev}(t) \quad (\text{II-100})$$

Ainsi, les relations II-84 et II-97 permettent d'obtenir la déformation de fluage propre $\epsilon^{fp}(t)$, dans le cas où l'humidité relative et les contraintes sont constantes :

$$\epsilon^{fp}(t) = h \left[J_{fp}^{sph}(t) \sigma^{sph} \mathbf{1} + J_{fp}^{dev}(t) \sigma^{dev} \right] \quad (\text{II-101})$$

Les déformations de fluage propre peuvent alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\epsilon^{fp}(t) = h \mathbf{J}^{fp}(t) \sigma \quad (\text{II-102})$$

avec :

$$J_{ijkl}^{fp}(t) = h \left[\frac{1}{3} \left(J_{fp}^{sph}(t) - J_{fp}^{dev}(t) \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} J_{fp}^{dev}(t) \left(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \right] \quad (\text{II-103})$$

II-4.4.2 Développement limité à court terme et à long terme

A partir des expressions analytiques de la déformation de fluage propre (voir l'Annexe D équations D-49, D-55 et D-76), il est possible d'en effectuer un développement limité à court terme et à long terme. Ce développement permet d'approcher les évolutions de la déformation de fluage propre. En outre, il permet d'identifier les paramètres qui dominent les évolutions de la déformation de fluage propre à ces instants.

Considérons le cas où les contraintes et l'humidité relative sont constantes, les contraintes sont uniaxiales (appliquées dans la direction longitudinale et égales à σ_u). Les déformations

de fluage propre longitudinales ε_{fp}^{long} et transversales ε_{fp}^{lat} s'écrivent alors, à court terme ($t \rightarrow 0$) :

$$\begin{cases} \left. \frac{\varepsilon_{fp}^{long}(t)}{h \sigma_u} \right|_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta_r^{sph}} + \frac{2}{\eta_r^{dev}} + \frac{2}{\eta_i^{dev}} \right) t \\ \left. \frac{\varepsilon_{fp}^{lat}(t)}{h \sigma_u} \right|_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta_r^{sph}} - \frac{1}{\eta_r^{dev}} - \frac{1}{\eta_i^{dev}} \right) t \end{cases} \quad (II-104)$$

A long terme ($t \rightarrow +\infty$), ces déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} \left. \frac{\varepsilon_{fp}^{long}(t)}{h \sigma_u} \right|_{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{k_r^{sph}} + \frac{1}{k_i^{sph}} + \frac{2}{k_r^{dev}} \right) + \frac{2}{\eta_i^{dev}} t \right] \\ \left. \frac{\varepsilon_{fp}^{lat}(t)}{h \sigma_u} \right|_{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{k_r^{sph}} + \frac{1}{k_i^{sph}} - \frac{1}{k_r^{dev}} \right) - \frac{1}{\eta_i^{dev}} t \right] \end{cases} \quad (II-105)$$

Ces expressions simples offrent la possibilité de recalculer les paramètres du modèle et permettent de mieux identifier leurs rôles respectifs. Ainsi, si une évolution précise des déformations de fluage propre est requise à court terme, les paramètres η_r^{sph} , η_r^{dev} et η_i^{dev} sont prédominants et nécessitent donc une attention particulière. Par contre, à long terme, seul le paramètre η_i^{dev} contrôle la cinétique de la déformation. Il est alors judicieux de calibrer plus particulièrement ce paramètre.

II-4.5 Conclusion sur la modélisation du fluage propre

Le modèle de fluage propre élaboré est basé sur la description macroscopique de mécanismes physico-chimiques choisis. Notre choix s'est focalisé sur les mécanismes de micro-diffusion de l'eau et de glissement des feuillettes de C-S-H, présentés lors de l'analyse bibliographique (voir les paragraphes § I-3.4.1.1.1 et § I-3.4.1.1.2). Ces mécanismes sont compatibles avec de nombreuses observations expérimentales.

Bien que les mécanismes concernés se produisent au sein de la pâte de ciment, le modèle élaboré ici sera utilisé pour prédire les déformations de fluage propre des mortiers et des bétons (seuls les paramètres du modèle changent). Ce choix nécessiterait une validation numérique (par exemple à l'aide d'une méthode d'homogénéisation). Les paramètres peuvent néanmoins intégrer la présence de granulats à travers les termes de rigidité et de viscosité et donc restituer une part de leur (les granulats) contribution. En effet, l'effet des granulats (déformation de fluage nulle) est susceptible de modifier le comportement macroscopique, comme l'initiation d'une fissuration à l'interface pâte de ciment/granat ou l'interaction avec le transfert d'eau.

L'intégration du modèle de fluage propre développé dans un code de calcul aux Éléments Finis et le couplage avec la fissuration seront présentés dans le paragraphe § II-7.

II-5 Modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque

L'analyse bibliographique du fluage de dessiccation intrinsèque a mis en évidence le manque d'un consensus actuel sur les mécanismes physiques concernés (voir le paragraphe § I-3.4.2.2.1). Nous proposons dans ce travail un modèle qui est une version améliorée du

modèle « stress-induced shrinkage » proposé par Bažant et Chern (1985). Les mécanismes supposés sont tout d'abord présentés, puis les équations constitutives en sont déduites. Enfin, nous montrerons les conséquences de la modélisation adoptée sur l'évolution de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque.

II-5.1 Description des mécanismes

Nous suggérons, par rapport au modèle proposé par Bažant et Chern (1985, voir le paragraphe § I-4.4.2.1), que le squelette solide affecte le mécanisme de rupture des liaisons entre les particules de gel (due à la micro-diffusion des molécules d'eau et donnant naissance au fluage de dessiccation intrinsèque).

Le modèle proposé intègre ainsi l'interaction entre la micro-diffusion des molécules d'eau (entre les micropores et les macropores) et la déformation du squelette solide (particules de gel). Il est supposé, dans notre modèle, que les particules de gel limitent le processus de rupture de leurs liaisons, induite par la micro-diffusion des molécules d'eau. Ainsi, la rupture des liaisons n'est plus immédiate, comme c'est le cas du modèle de Bažant et Chern (1985). En effet, la rigidité des liaisons entre les particules de C-S-H retarde ce processus.

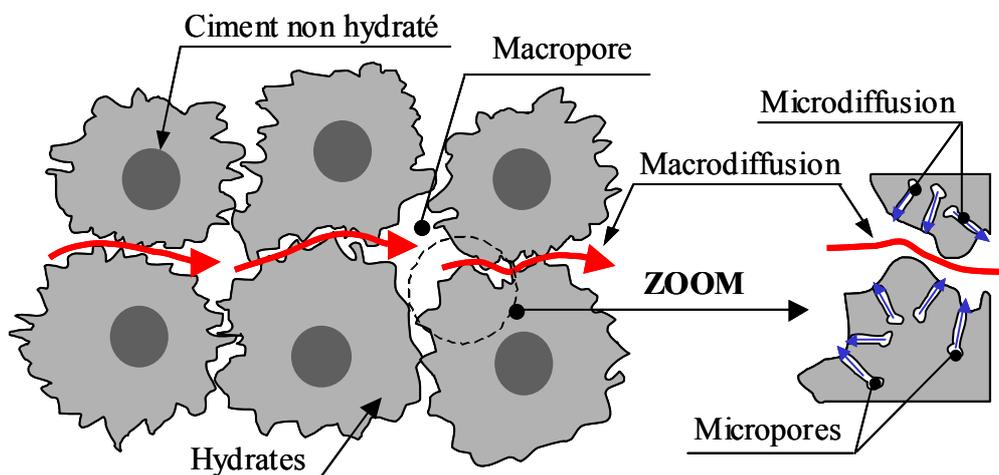


Figure II-19 Mécanisme du fluage de dessiccation intrinsèque.

II-5.2 Équations constitutives

Le modèle de fluage de dessiccation intrinsèque proposé dans ce travail est une chaîne de Kelvin-Voigt (Figure II-20). Il est similaire au modèle de fluage de dessiccation intrinsèque proposé pour le bois par Hanhijärvi (1997) et Svensson et Toratti (1997) :

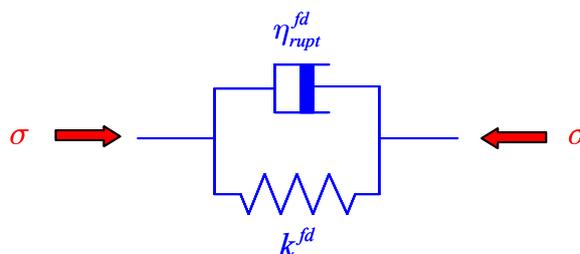


Figure II-20 Modèle rhéologique du fluage de dessiccation intrinsèque.

Ainsi, la loi constitutive de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque s'écrit :

$$\eta_{rupt}^{fd} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fd} + k^{fd} \boldsymbol{\varepsilon}^{fd} = \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II-106})$$

où k^{fd} [Pa] est la rigidité associée aux liaisons entre les C-S-H, à l'échelle de la micro-diffusion. Celle-ci limite le processus de micro-diffusion en induisant un effet « retard ». η_{rupt}^{fd} est la viscosité apparente associée au processus de rupture des liaisons entre les C-S-H. Cette viscosité est fonction de l'humidité relative. En effet, une variation rapide de l'humidité relative favorise la rupture des liaisons entre les C-S-H.

La viscosité apparente η_{rupt}^{fd} varie selon la relation :

$$\eta_{rupt}^{fd} = \frac{\eta^{fd}}{-\theta^{fd} \langle \dot{h} \rangle^-} \quad (\text{II-107})$$

où $\theta^{fd} = 1$ s est un paramètre de conversion d'unité et $\langle \dot{h} \rangle^- = \dot{h}$ si $\dot{h} < 0$ et $\langle \dot{h} \rangle^- = 0$ si $\dot{h} \geq 0$.

La viscosité η^{fd} est constante (indépendante de l'humidité relative). Le terme $\langle \dot{h} \rangle^-$ rend compte d'une déformation de fluage de dessiccation nulle lors de la réhumidification. En effet, le fluage de réhumidification résulte, ici, uniquement de la déformation de fluage propre, puisque celle-ci dépend linéairement de l'humidité relative (voir l'équation II-101).

L'équation II-106 devient alors :

$$\eta^{fd} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fd} - k^{fd} \langle \dot{h} \rangle^- \boldsymbol{\varepsilon}^{fd} = -\langle \dot{h} \rangle^- \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II-108})$$

Dans le cas où la vitesse d'humidité relative et les contraintes sont constantes dans le temps, la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque $\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = J^{fd}(t) \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II-109})$$

où $J^{fd}(t)$ est la complaisance de fluage de dessiccation intrinsèque, dont l'expression est déterminée en **Annexe D** (équation D-95).

L'avantage de la modélisation adoptée est que la cinétique et l'amplitude des déformations de fluage de dessiccation peuvent être contrôlées, de façon indépendante, en ajustant les valeurs des paramètres de rigidité et de viscosité. Ainsi, le paramètre k^{fd} contrôle la valeur asymptotique de la déformation, alors que le pseudo-temps caractéristique τ^{fd} défini par :

$$\tau^{fd} = -\frac{\eta^{fd}}{k^{fd} \langle \dot{h} \rangle^-} \quad (\text{II-110})$$

permet d'ajuster la cinétique de la déformation et traduit le fait que le squelette solide affecte également le processus de fluage de dessiccation intrinsèque.

II-5.3 Évolution des déformations

Afin d'illustrer la modélisation adoptée, l'évolution de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque est simulée, pour le chargement mécanique et hydrique de la Figure II-21. L'humidité relative décroît linéairement de 100 % à 50 % en 250 jours, et on considère différentes évolutions de la contrainte uniaxiale appliquée. Celle-ci est initialement égale à 12 MPa. On distingue alors 3 durées de chargement pour mettre en exergue les

caractéristiques du modèle développé : l'éprouvette est déchargée après 100 jours (①), 200 jours (②) ou 300 jours (③) de chargement.

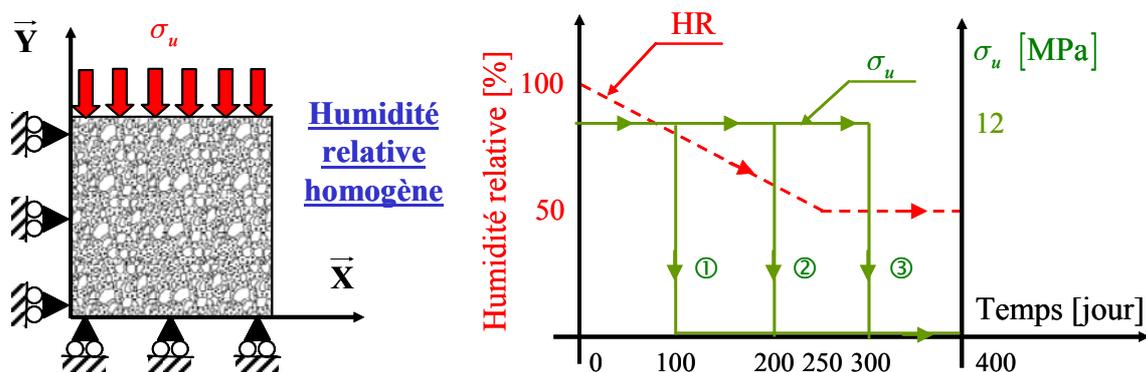


Figure II-21 Évolution de la contrainte uniaxiale imposée et de l'humidité relative imposée.

Les évolutions des déformations de fluage de dessiccation intrinsèque sont alors calculées pour chaque cas de chargement, à l'aide des équations D-92, D-96 et D-97, données en **Annexe D**. Les évolutions obtenues sont alors tracées dans la Figure II-22.

Les valeurs utilisées des paramètres pour ces simulations sont données dans le Tableau II-7.

Tableau II-7 Valeurs des paramètres de fluage de dessiccation intrinsèque.

	k^{fd} [MPa]	τ^{fd} [MPa.s]
Simulation	5×10^3	5×10^3

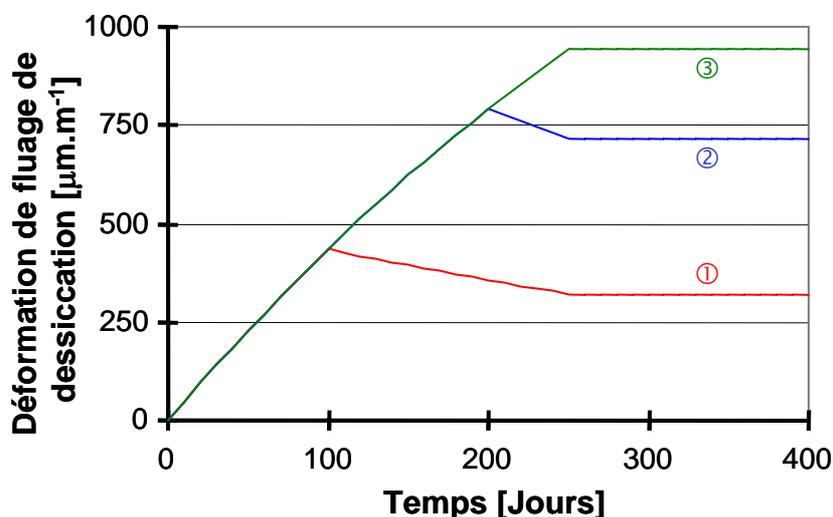


Figure II-22 Évolution des déformations de fluage de dessiccation intrinsèque pour chaque cas de chargement.

Au moins deux remarques peuvent être effectuées au vu des résultats de la Figure II-22. Tout d'abord, une variation nulle de l'humidité relative n'induit pas de déformation de fluage de dessiccation intrinsèque. Ensuite, on observe que lors des différents déchargements, la part de la déformation réversible n'est pas identique. Ainsi, lors du premier cas, la part réversible de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque est égale à environ 25 %, puis au deuxième déchargement, la part réversible descend à 10 % et enfin lors du dernier cas, la

déformation est totalement irréversible. Nous avons noté lors de l'analyse bibliographique (voir le paragraphe § I-3.4.2.2.2) que lors d'un déchargement, la déformation de fluage de dessiccation est soit totalement irréversible selon Day et *al.* (1984), soit réversible à 20 % environ selon Gamble et Parrott (1978). Cette discordance apparente des résultats peut s'expliquer à travers les simulations effectuées. Si le séchage ne se produit plus de façon significative, aucun retour de fluage n'est observé, sinon une partie de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque, qui dépend de la cinétique de séchage, est réversible.

II-5.4 Identification des paramètres du modèle

Les paramètres du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque peuvent être identifiés à partir de l'évolution expérimentale de cette déformation. En appliquant une contrainte uniaxiale $\sigma_u = cste$ et en imposant par palier l'humidité relative dans l'éprouvette (de faible épaisseur pour minimiser l'effet structural), telle que $\langle \dot{h} \rangle^- = \dot{h}_0 = cste$, la vitesse de déformation de fluage de dessiccation intrinsèque s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^{fd}(t=0) = \dot{\epsilon}_{t_0}^{fd} = \sigma_u \frac{\dot{h}_0}{\eta^{fd}} \quad (\text{II-111})$$

A l'instant $t = t_1$, la déformation asymptotique de fluage de dessiccation intrinsèque s'écrit :

$$\epsilon^{fd}(t=t_1) = \epsilon_{t_1}^{fd} = \frac{\sigma_u}{k^{fd}} \left(1 - \exp\left(-\frac{k^{fd} \dot{h}_0}{\eta^{fd}} t_1\right) \right) \quad (\text{II-112})$$

Les mesures expérimentales sont reportées dans la Figure II-23.

A partir de l'équation II-111, on peut en déduire directement la valeur de η^{fd} , puis l'équation non linéaire II-112 est résolue, pour obtenir la valeur du paramètre k^{fd} .

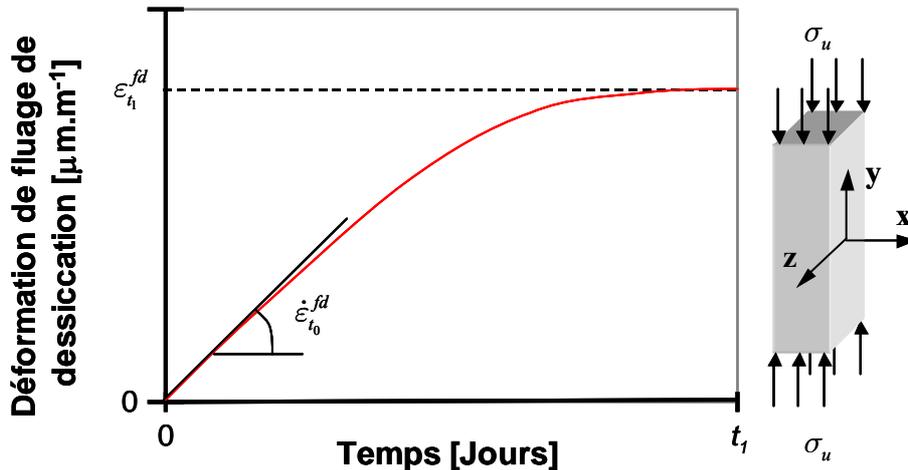


Figure II-23 Identification des paramètres du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque.

II-5.5 Conclusion sur la modélisation du fluage de dessiccation intrinsèque

Le modèle de fluage de dessiccation intrinsèque élaboré dans ce travail est une version améliorée du modèle « stress-induced shrinkage », proposé par Bažant et Chern (1985). Le modèle développé permet de décrire qualitativement les observations expérimentales. Cependant, les mécanismes se produisant uniquement dans la pâte de ciment, l'effet des

granulats doit être étudié de façon plus détaillée. En outre, l'analyse bibliographique du fluage de dessiccation menée dans le précédent chapitre (paragraphe § I-3.4.2.2.1) a montré que c'est un phénomène aujourd'hui encore mal connu. Ainsi, l'identification précise des mécanismes de fluage de dessiccation reste à mener.

L'intégration du modèle de fluage de dessiccation dans un code de calcul aux Éléments Finis et le couplage avec la fissuration seront présentés dans le paragraphe § II-7.

II-6 Modélisation du retrait de dessiccation

Le béton est un matériau fortement hydrophile possédant une surface spécifique importante. Par conséquent, il exhibe un comportement très sensible aux conditions hygrométriques, du fait de l'adsorption moléculaire et des phénomènes de condensation capillaire. Les forces de tension surfacique à l'interface solide-liquide-vapeur du ménisque capillaire, induisent la traction de l'eau liquide. Dans les nanopores, la pression de disjonction est initiée par la répulsion entre les molécules d'eau adsorbées, gardant les parois des pores à une certaine distance. Afin d'équilibrer mécaniquement ces forces, des micro-précontraintes sont induites dans le squelette solide. L'amplitude de ces micro-précontraintes dépend considérablement du degré de saturation.

La modélisation du retrait de dessiccation adoptée est ainsi basée sur les mécanismes de pression capillaire et de pression de disjonction, qui semblent prédominant dans la gamme d'humidité relative 50 – 100 % (voir le Tableau I-3). Il est supposé que sous l'effet de la pression capillaire et de la variation de pression de disjonction (induite par le séchage), le squelette solide se déforme de façon élastique et différée. Le cadre de la modélisation est celui de la mécanique des milieux poreux non saturés.

Nous rappelons tout d'abord les hypothèses utilisées pour le calcul de la pression capillaire et de la pression de disjonction. Ensuite, l'intégration de leurs effets dans la modélisation adoptée est présentée.

II-6.1 Effet de la pression capillaire

Le mécanisme de retrait de dessiccation par pression capillaire s'explique à partir des équations de Kelvin et de Laplace. L'obtention de ces équations nécessite plusieurs hypothèses (Baron 1982) :

- L'eau capillaire forme une phase, c'est-à-dire un milieu continu ;
- La vapeur d'eau est un gaz parfait ;
- L'eau capillaire est homogène et incompressible ;
- La vitesse de chacun des points est nulle ;
- L'eau capillaire n'est soumise à aucune force extérieure à distance significative (gravité, force de Van der Waals, force électrique due aux ions en présence ...) ;
- La pression du gaz p_g (air sec + vapeur d'eau) est égale à la pression atmosphérique p_{atm} ;
- L'eau est en équilibre avec l'atmosphère ambiante (pas d'évaporation, de condensation ou d'écoulement).

II-6.1.1 Équation de Kelvin et de Laplace

L'équation de Kelvin exprime l'équilibre entre la phase liquide et la vapeur d'eau. Les potentiels chimiques de la vapeur d'eau et de l'eau liquide sont alors égaux :

$$\mu_v = \mu_l \quad (\text{II-113})$$

En choisissant un état de référence particulier (Baron 1982), on obtient alors l'équation de Kelvin (équation I-53) :

$$p_l - p_g = p_c = \frac{\rho_l RT}{M_v} \ln(h) \quad (\text{II-114})$$

En prenant une température $T = 300 \text{ °K}$ et une humidité relative de 50 %, l'application numérique donne :

$$p_c = -95 \text{ MPa} \quad (\text{II-115})$$

Ce calcul met en évidence l'intensité élevée de la pression capillaire dans les pores.

La pression capillaire entre l'air humide (air sec et vapeur d'eau) et l'eau liquide doit être équilibrée par la tension superficielle σ_{lg} de l'interface eau/air humide. Si on suppose que le ménisque est circulaire de rayon r_m (voir la Figure II-24), on obtient alors la première loi de Laplace :

$$p_l - p_g = \frac{2 \sigma_{lg}}{r_m} \quad (\text{II-116})$$

Par ailleurs, le ménisque est relié à la paroi du pore, ce qui nécessite l'équilibre entre les tensions superficielles existantes (Figure II-24) entre les trois interfaces en présence (Deuxième loi de Laplace) :

$$\sigma_{lg} \cos \gamma = -\sigma_{ls} + \sigma_{gs} \quad (\text{II-117})$$

où σ_{ls} et σ_{gs} sont les tensions superficielles des interfaces liquide/solide et air humide/solide respectivement .

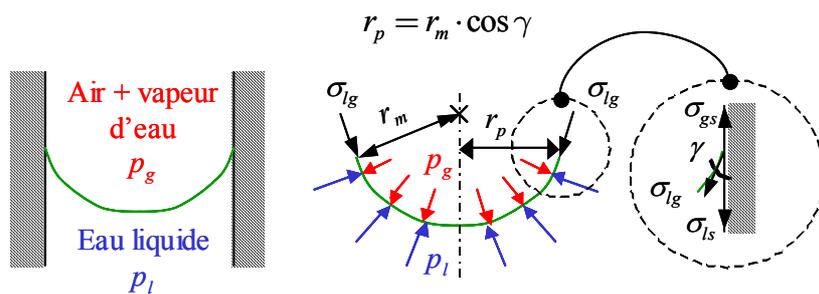


Figure II-24 Équilibre eau liquide/air humide dans un pore de rayon r_p .

II-6.1.2 Pression appliquée sur le squelette solide

La dépression du liquide est donc globalement équilibrée par une force de compression hydrostatique appliquée sur le squelette solide σ_{lg} (équation II-117). Elle contribue ainsi avec la pression de l'eau liquide p_l et du gaz p_g (Figure II-25) aux efforts de compression appliqués sur le squelette solide p_{sol_pc} (induits par la pression capillaire). Cette compression est en partie à l'origine du retrait de dessiccation dans la plage d'humidité relative 50 – 100 %. La pression hydrostatique moyenne p_{sol_pc} subie par le squelette solide est égale à :

$$p_{sol_pc} = \alpha_{lg} \sin \gamma \sigma_{lg} + \alpha_l p_l + (1 - \alpha_l) p_g - p_{atm} \quad (II-118)$$

où α_l est la proportion volumique de l'eau liquide dans les pores capillaires (Figure II-25) et α_{lg} est un coefficient intégrant l'effet de la tension superficielle σ_{lg} (équation II-116).

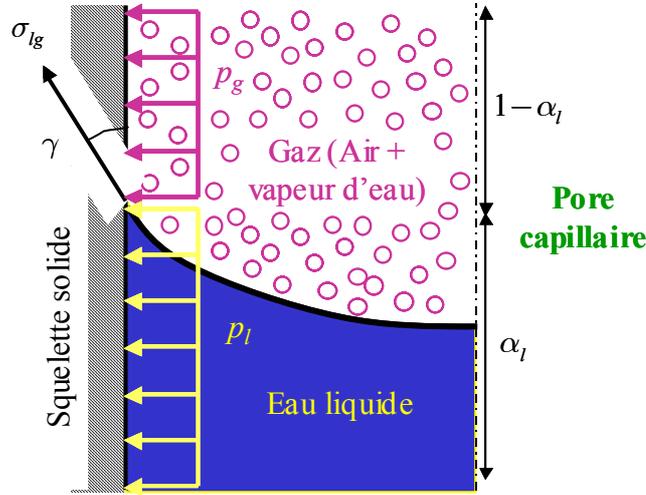


Figure II-25 Les différentes pressions appliquées au solide dans les pores capillaires.

En utilisant les équations I-53 et II-116, on obtient alors l'expression suivante :

$$p_{sol_pc} = \frac{\alpha_{lg} \sin \gamma r_m}{2} p_c + \alpha_l p_c + p_g - p_{atm} \quad (II-119)$$

En posant $\alpha_{sol_pc} = \alpha_l + \alpha_{lg} \cdot \sin \gamma \cdot r_m / 2$ et puisque $p_g = p_{atm}$, l'expression de la pression moyenne exercée sur le solide s'écrit alors :

$$P_{sol_pc} = \alpha_{sol_pc} P_c \quad (II-120)$$

En général, le terme α_{sol_pc} est pris égal au degré de saturation de la phase liquide S_l (Gray et Schrefler 2001), défini par la relation :

$$\alpha_{sol_pc} = S_l = \frac{C_l}{\phi} \quad (II-121)$$

où ϕ est la porosité totale et C_l est la teneur en eau volumique dans les pores capillaires.

II-6.2 Pression de disjonction

La pression de disjonction résulte de l'adsorption empêchée dans la nanoporosité (voir le paragraphe § I-2.3). La pression est maximale lorsque l'humidité relative est égale à 100 %, puis elle décroît progressivement lorsque l'humidité relative diminue, puisque le nombre de couches d'eau, correspondant à l'adsorption libre, diminue lui aussi.

Afin que l'énergie libre de Gibbs soit minimale, le potentiel chimique de l'eau dans les zones d'adsorption empêchée doit être identique quelle que soit la couche d'eau. Par ailleurs, il doit être égal à celui de l'eau liquide et de la vapeur d'eau dans les pores capillaires. L'expression de la variation de la pression de disjonction Δp_d est alors similaire à celle de la pression capillaire (voir l'équation I-53) à un coefficient de proportionnalité près (Bažant 1972) :

$$\Delta p_d = \frac{\rho_a RT}{M_a} \ln(h) \quad (\text{II-122})$$

où ρ_a est la masse volumique de l'eau adsorbée et M_a est la masse molaire de l'eau adsorbée.

De même que dans le cas de la pression capillaire, la pression de disjonction ne s'applique que sur une partie du squelette solide α_{sol_pd} :

$$\alpha_{sol_pd} = \frac{C_{ld}}{\phi} \quad (\text{II-123})$$

où C_{ld} est la teneur en eau volumique dans la zone d'adsorption empêchée.

La variation de pression appliquée sur le solide Δp_{sol_pd} , du fait de la pression de disjonction s'écrit alors :

$$\Delta p_{sol_pd} = \alpha_{sol_pd} \Delta p_d \quad (\text{II-124})$$

II-6.3 Prise en compte de la pression capillaire et de disjonction

La pression totale appliquée sur le solide p_{sol} résulte de la pression capillaire et de la variation de la pression de disjonction. Il est choisi d'intégrer globalement leurs effets sur le squelette solide, par le biais du degré de saturation S_l et d'un coefficient « d'homogénéisation » α_{rd} :

$$p_{sol} = \alpha_{rd} S_l p_c \quad (\text{II-125})$$

Le coefficient α_{rd} peut être identifié à partir d'un essai de retrait de dessiccation. En effet, ce paramètre contrôle l'amplitude de la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque générée par la pression p_{sol} .

La variation de la pression appliquée sur le squelette solide p_{sol} en fonction de l'humidité relative, dans le cas où $\alpha_{rd} = 1$, est donnée dans la Figure II-26.

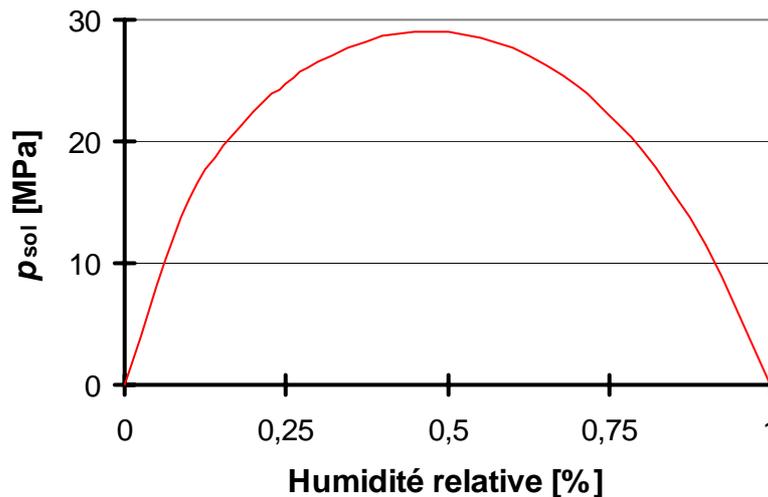


Figure II-26 Variation de la pression appliquée par les différents fluides de la pâte de ciment sur le squelette solide.

Cette figure met en évidence que l'effet conjugué de la pression capillaire et de disjonction augmente lorsque l'humidité relative diminue, jusqu'à une valeur de 50 % environ. Puis il

diminue progressivement pour atteindre une contribution nulle lorsque l'humidité relative devient égale à 0 %. Ce résultat peut être observé lors d'une expérience avec des billes, initialement en contact et immergées dans de l'eau, puis séchées progressivement. On observe en effet lors du séchage une diminution progressive du volume, puis un gonflement (discussion entre Torrenti et Wittmann). Ainsi, en deçà de 50 %, les mécanismes de pression capillaire et de pression de disjonction ne permettent plus d'expliquer la déformation de retrait de dessiccation observée dans cette zone.

II-6.4 Expression de la déformation de retrait de dessiccation

La pression appliquée sur le solide p_{sol} , résultant des effets de la pression capillaire et de la variation de la pression de disjonction, est responsable de la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque. En effet, elle entraîne une contraction du squelette solide, dont nous allons déterminer l'expression.

Les contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ subies par le squelette solide ne résultent donc que du seul effet de la pression appliquée sur le solide p_{sol} (Figure II-27). L'équation reliant la pression appliquée sur le solide p_{sol} , les contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ et les contraintes apparentes σ s'écrit alors :

$$\sigma = (1 - \phi) \tilde{\sigma} - \phi p_{sol} \mathbf{1} \quad (\text{II-126})$$

On se place alors dans la configuration d'un essai de retrait de dessiccation libre. Ainsi, il n'y a pas de fissuration (et donc pas d'effet structural). Les contraintes extérieures sont nulles :

$$\sigma = \mathbf{0} \quad (\text{II-127})$$

La loi de comportement dans le squelette solide est élastique et s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{E}^{sol} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}) \quad (\text{II-128})$$

où \mathbf{E}^{sol} est le tenseur d'élasticité de Hooke du squelette solide.

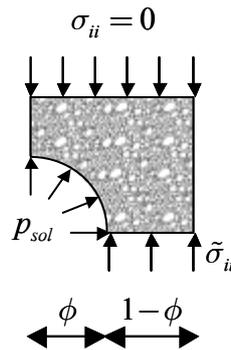


Figure II-27 Définition des contraintes effectives (en l'absence de fissures).

Dans le cas général, les déformations de fluage propre et de fluage de dessiccation intrinsèque peuvent se calculer à partir du principe de superposition de Boltzmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^{fp}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) d(h(\tau) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\tau)) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fd}(t-\tau) d(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\tau)) \end{array} \right. \quad (\text{II-129})$$

où \mathbf{J}^{fp} est la complaisance de fluage propre (voir l'équation II-103) et \mathbf{J}^{fd} est la complaisance de fluage de dessiccation intrinsèque (voir l'équation D-95 en **Annexe D**).

On pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^0 = (1-\phi) \mathbf{E}^{sol} \\ \mathbf{J}^{fp} = (1-\phi) \mathbf{J}_{sol}^{fp} \\ \mathbf{J}^{fd} = (1-\phi) \mathbf{J}_{sol}^{fd} \end{array} \right. \quad (\text{II-130})$$

La déformation de retrait de dessiccation intrinsèque (totale) est déduite alors à partir de la combinaison des équations précédentes II-126, II-128, II-129 et II-130 :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{rd} = \phi \left[\left(\mathbf{E}^0 \right)^{-1} p_{sol} + \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) d(h p_{sol}) + \int_0^t \mathbf{J}^{fd}(t-\tau) d(p_{sol}) \right] \cdot \mathbf{1} \quad (\text{II-131})$$

où on peut noter que $\mathbf{J}^{fp} \cdot \mathbf{1} = J_{fp}^{sph}$.

Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'introduire de façon explicite dans la modélisation la déformation de retrait de dessiccation, lors de la partition des déformations, contrairement à ce qui est fait conventionnellement dans la littérature. En effet, le cadre de modélisation adopté intègre implicitement la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque.

Ainsi, la déformation de retrait de dessiccation est induite par la pression appliquée sur le solide p_{sol} . Elle est la somme de trois composantes de déformation : une déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}_e^{rd}$, une déformation différé de fluage propre $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{rd}$ et une déformation différé de fluage de dessiccation $\boldsymbol{\varepsilon}_{fd}^{rd}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{rd} = \boldsymbol{\varepsilon}_e^{rd} + \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{rd} + \boldsymbol{\varepsilon}_{fd}^{rd} \quad (\text{II-132})$$

Les expressions de ces composantes de déformation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_e^{rd} = \phi \left(\mathbf{E}^0 \right)^{-1} p_{sol} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{rd} = \phi \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) d(h p_{sol}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{fd}^{rd} = \phi \int_0^t \mathbf{J}^{fd}(t-\tau) d(p_{sol}) \end{array} \right. \quad (\text{II-133})$$

Nous avons noté lors de l'analyse bibliographique que lors d'une réhumidification, les résultats expérimentaux montrent que la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque est partiellement réversible (voir le paragraphe § I-3.3.3). En outre, nous avons aussi remarqué, dans ce même paragraphe, une dépendance de la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque à la cinétique de séchage. La modélisation adoptée dans ce travail est en accord

avec ces deux observations. En effet, la déformation de retrait de dessiccation résulte partiellement de la déformation sphérique de fluage propre et de la déformation sphérique de fluage de dessiccation intrinsèque :

- Ces deux composantes de déformations sont partiellement réversibles, lorsque la pression p_{sol} devient à nouveau nulle à l'issue de la phase de réhumidification (voir la Figure II-13 pour le fluage propre sphérique et la Figure II-22 pour le fluage de dessiccation intrinsèque).
- Ces deux composantes sont sensibles à la variation de la contrainte appliquée dans le temps (équation II-133). Ainsi, si la pression p_{sol} diminue rapidement, l'amplitude de la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque est plus faible. En effet, elle ne dispose pas d'une durée suffisante pour se développer.

II-6.5 Couplage avec la fissuration

Dans le cas où la fissuration et le séchage se produisent simultanément, l'apparition de micro-fissures induit une augmentation de la surface du squelette solide en contact avec les vides. Ainsi, la pression p_{sol} appliquée sur le squelette solide ne s'applique plus uniquement sur le squelette solide en contact avec la porosité initiale. Elle s'applique aussi perpendiculairement aux lèvres des fissures.

Dans ce cas la pression p_{sol} est modifiée par l'apparition des micro-fissures. Elle sera appliquée au squelette solide sous la forme d'une contrainte σ^{sol} .

Les contraintes apparentes σ sont équilibrées par les contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ et les contraintes induites par la pression capillaire et la pression de disjonction σ^{sol} (voir la Figure II-28).

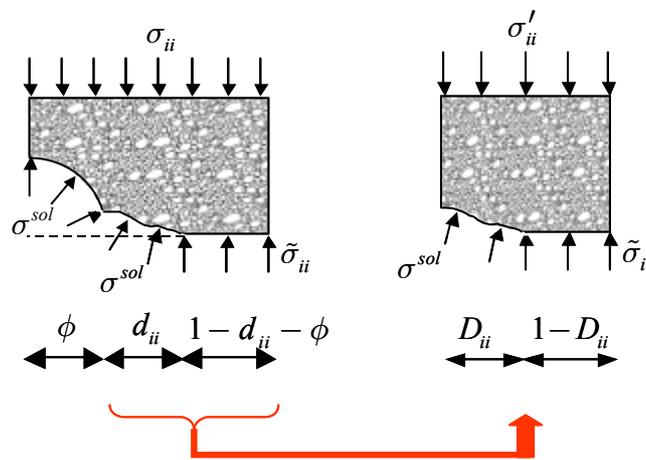


Figure II-28 Définition des contraintes effectives (présence de fissures).

En tenant compte de l'interaction entre la fissuration et la pression p_{sol} , l'équation II-126 devient alors :

$$\sigma = [(1-\phi) \mathbf{1} - \mathbf{d}] \cdot \tilde{\sigma} - (\phi \mathbf{1} + \mathbf{d}) \cdot \sigma^{sol} \quad (\text{II-134})$$

où \mathbf{d} est un tenseur intégrant la proportion surfacique et directionnelle des fissures (dont les valeurs des termes sont comprises entre 0 et $1-\phi$) lié à l'endommagement mécanique \mathbf{D} (dont les valeurs des termes sont comprises entre 0 et 1, voir le paragraphe § II-3.2), par la relation suivante :

$$\mathbf{d} = (1 - \phi) \mathbf{D} \quad (\text{II-135})$$

En combinant les équations II-134 et II-135, on obtient l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \phi) (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - [1 - (1 - \phi) (\mathbf{1} - \mathbf{D})] \cdot \boldsymbol{\sigma}^{sol} \quad (\text{II-136})$$

La contrainte appliquée sur le solide $\boldsymbol{\sigma}^{sol}$ dans l'expression précédente, diffère de la pression p_{sol} donnée dans le paragraphe § II-6.3. En effet, la fissuration interagit avec la pression capillaire et la pression de disjonction. Dans le cas où le béton est totalement saturé, il est mis en évidence un couplage fort entre la pression hydraulique dans les pores et la fissuration (Bary 1996). Ainsi, la pression hydraulique, s'appliquant sur les lèvres des fissures, a tendance à augmenter l'ouverture des fissures. Ce n'est pas le cas lorsque le béton est partiellement saturé. En effet, l'occurrence de la fissuration entraîne une diminution de la pression, du fait de la migration de l'eau capillaire et de l'eau adsorbée vers la partie crée de la fissure. De plus, dans le cas où le matériau est totalement endommagé ($\mathbf{D} = \mathbf{1}$), la relation II-136 devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}^{sol} \cdot \mathbf{1} \quad (\text{II-137})$$

Ainsi, bien que le matériau soit totalement endommagé, les contraintes apparentes ne sont pas nulles (dans le cas où l'humidité relative est différente de l'unité). Or, lors d'un essai mécanique de compression ou de traction, la contrainte apparente tend vers une valeur nulle traduisant la rupture du matériau. Dans le but de prendre en compte ce phénomène, il est choisi d'exprimer la contrainte appliquée sur le solide $\boldsymbol{\sigma}^{sol}$ en fonction de la pression p_{sol} et des variables d'endommagement mécanique suivant la relation :

$$\begin{cases} \sigma^{sol}_{ii} = (1 - D_c)^{\alpha_c} (1_{ii} - (D_t)_{ii})^{\alpha_t} p_{sol} \\ \sigma^{sol}_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-138})$$

où α_c et α_t sont deux paramètres différents affectant, respectivement, l'endommagement en compression D_c et en traction D_t . En effet, les fissures se forment de façon différente (forme, taille, orientation) suivant la nature de la sollicitation (compression et en traction).

Cette écriture permet de prendre en compte la dissipation de la pression du fait de la propagation de la fissure. Les paramètres α_c et α_t sont introduits afin de traduire l'effet de la fissuration sur la pression. Ils peuvent être identifiés à partir des courbes contraintes-déformations obtenues à différentes valeurs d'humidité relative.

Ainsi, la pression p_{sol} agit comme une précontrainte. Elle augmente donc les résistances en traction et en compression des éprouvettes séchées (de façon uniforme) par rapport à celles obtenues sur des éprouvettes saturées. Des essais mécaniques menées sur des éprouvettes séchées de façon uniforme confirment cette augmentation (Neville 2000). Lorsque le séchage se produit de façon non uniforme, la fissuration induite par le retrait différentiel induit une diminution de la contrainte résistante (en compression et en traction). Ces deux phénomènes, dont les effets sont opposés, agissent alors de façon simultanée.

La prise en compte de la pression appliquée sur le solide p_{sol} nécessite de modifier l'expression du potentiel thermodynamique énergie libre élastique ψ^e (équation II-22). Ainsi, ce terme devient :

$$\rho \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}, p_{sol}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e - [1 - (1 - \phi) (\mathbf{1} - \mathbf{D})] \cdot \boldsymbol{\sigma}^{sol} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{II-139})$$

La loi d'élasticité $\sigma = \rho \cdot \partial \psi^e / \partial \varepsilon^e$ permet alors de retrouver la relation II-136.

II-6.6 Conclusion sur la modélisation du retrait de dessiccation

Dans le modèle développé, le retrait de dessiccation résulte des déformations élastiques et de fluage sphérique du béton sous l'action des pressions appliquées sur le squelette solide (pression capillaire et pression de disjonction). La variation de l'humidité relative dans les pores induit donc, avec un effet retard (lié au fluage), la déformation de retrait de dessiccation.

Cette hypothèse va dans le sens des observations expérimentales, où on remarque que les bétons assujettis à un fluage important subissent aussi un retrait important (L'Hermitte 1960). Ainsi, l'augmentation de la déformation de retrait de dessiccation lorsque le rapport e/c croît (voir la Figure I-19b) peut s'expliquer par l'effet du fluage. En effet, la déformation de fluage propre augmente aussi lorsque le rapport e/c croît (voir la Figure I-24). De plus, la modélisation prend en compte l'augmentation de la résistance en compression mesurée sur une éprouvette séchée, par rapport à celle mesurée sur une éprouvette humide. En outre, la modélisation adoptée est en accord avec les observations expérimentales, et notamment l'effet de la cinétique de séchage et l'occurrence d'une déformation irréversible lors de la réhumidification.

Freyssinet en 1951 (Ordonez 1979), Lohtia (1970), Bažant et Wu (1974) ou Acker (2001) avaient déjà suggéré que le retrait de dessiccation et le fluage étaient des facettes différentes d'un même mécanisme physique et qu'ils ne pouvaient pas être séparés, contrairement à ce qui est fait conventionnellement. De même, Parrott et Young (1982) avançaient l'idée que le retrait résulte du fluage sous les contraintes initiées par le séchage, appliquées au squelette solide. Ulm et al. (2001) ont aussi, de façon analogue, suggéré que le retrait endogène observé après que la réaction d'hydratation ait cessé est due au fluage des hydrates sous l'action permanente d'une pression « d'hydratation ».

Néanmoins, seuls Bažant et Wu (1974) et Ulm et al. (2001) ont traduit sous une forme mathématique, différente de l'approche menée dans ce travail, ces hypothèses. Ainsi, Bažant et Wu (1974) considéraient que le retrait de dessiccation est gouverné par des contraintes internes sphériques σ_i^h $i \in [1, \dots, n]$ (résultante de la pression de disjonction) dépendante de l'humidité relative et indépendante des contraintes macroscopiques, selon la relation suivante :

$$\sigma_i^h = \alpha_i (1 - 0,95 h - 0,25 h^{200}) \quad (\text{II-140})$$

où α_i sont des coefficients de proportionnalité.

II-7 Intégration des équations constitutives du modèle

Nous sommes confrontés ici à un problème hydromécanique. La modélisation adoptée dans ce travail nécessite la résolution des équations de transfert de l'eau dans le béton et des équations d'équilibre mécanique. Ces équations, fortement non linéaires, sont résolues numériquement à l'aide de la méthode des Éléments Finis. Cette méthode, fondée sur une approche en déplacement (ou son équivalent hydrique, ici la teneur en eau), est basée sur la discrétisation spatiale de la géométrie de la structure calculée (en éléments finis) et sur la discrétisation temporelle du chargement appliqué (en pas de temps). Ainsi, un processus itératif est mené afin de satisfaire à chaque pas de temps les équations sus-mentionnées. De nombreux codes de calcul aux Éléments Finis sont disponibles. Notre choix s'est porté, étant

donné l'expérience scientifique des membres du laboratoire sur le code de calcul CAST3M développé par le C.E.A. (Commissariat à l'Énergie Atomique). Il est à noter que les modèles sont en cours d'implantation dans le code de calcul Code_Aster⁹ développé par EDF qui constituera leur code d'exploitation industrielle.

II-7.1 Discrétisation Éléments Finis

La discrétisation Éléments Finis (calcul global), faisant appel à une formulation faible du problème hydromécanique est présentée en **Annexe E**.

Le calcul hydrique est effectué dans un premier temps. Il s'agit de préciser dans un fichier de calcul du code CAST3M (en langage Gibiane), les données du problème à résoudre et notamment la loi d'évolution non linéaire du coefficient de diffusion équivalent (équation II-15). A l'issue du calcul, les valeurs de la teneur en eau, pour le pas de temps courant C_n (début du pas de temps) et C_{n+1} (fin du pas de temps) sont alors connues aux points de Gauss de chaque élément fini. Elles sont alors utilisées dans le modèle mécanique, après avoir calculé les valeurs de l'humidité relative, à l'aide de la loi de l'isotherme de désorption (équation II-16).

Dans un deuxième temps, le problème mécanique est résolu. Contrairement au calcul hydrique, il est nécessaire de modifier les fichiers sources (en langage Esope) du code de calcul CAST3M, afin d'y incorporer la loi de comportement du modèle mécanique. En effet, il est nécessaire de calculer, par le biais de la loi de comportement, les contraintes $\sigma_{n+1}^{(i)}$ à l'itération (i) à l'étape 4, lors du processus d'itérations internes de l'algorithme de résolution mécanique (Tableau E-2 de l'**Annexe E**). Étant donné que les équations du modèle mécanique sont fortement non linéaires, les expressions sont discrétisées pour chaque pas de temps. La discrétisation adoptée est présentée dans le prochain paragraphe.

II-7.2 Discrétisation des équations constitutives

Les contraintes et l'humidité relative sont approchées par des fonctions affines par morceaux dans chaque pas de temps $t \in [t_n, t_{n+1}]$ (voir la Figure II-29) :

$$\begin{cases} h(t) = h_n + \Delta h_n \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} & \text{avec } \Delta h_n = h_{n+1} - h_n \\ \tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}_n + \Delta \tilde{\sigma}_n \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} & \text{avec } \tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_{n+1} - \tilde{\sigma}_n \end{cases} \quad (\text{II-141})$$

où $h_n = h(t_n)$ est l'humidité relative au temps t_n (avec $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$).

Cette discrétisation permet d'augmenter la précision des calculs numériques (Bažant 1982) de façon significative par rapport à une approximation par palier (fonction de Heaviside), surtout dans le cas où la taille des pas de temps est importante.

On présente par la suite, les expressions discrétisées du modèle mécanique, ainsi que l'algorithme de résolution adopté permettant de calculer les contraintes σ_{n+1} à la fin de chaque pas de temps.

⁹ <http://www.code-aster.org>

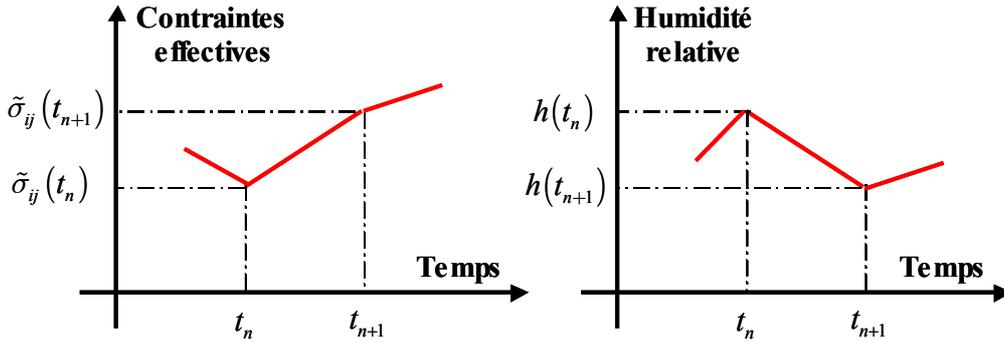


Figure II-29 Variation affine par morceaux des contraintes et de l'humidité relative.

II-7.3 Équations constitutives

La partition des déformations a été adoptée. Les déformations sont reliées aux contraintes effectives par la relation suivante :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{E}^{sol} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{E}^{sol} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}) \quad (\text{II-142})$$

où \mathbf{E}^{sol} est le tenseur de rigidité intrinsèque du squelette solide.

La porosité du matériau ϕ est supposée constante (sa variation reste négligeable devant l'effet de la fissuration donné par l'endommagement). On pose alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \phi) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{II-143})$$

Le tenseur de rigidité intrinsèque du squelette solide \mathbf{E}^{sol} est relié au tenseur de rigidité macroscopique du matériau \mathbf{E}^0 par la relation :

$$\mathbf{E}^0 = (1 - \phi) \mathbf{E}^{sol} \quad (\text{II-144})$$

où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson élastique du matériau sain. Ces paramètres peuvent être mesurés conventionnellement lors d'une expérience, contrairement aux paramètres relatifs au squelette solide.

Les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont celles qui s'appliquent sur le matériau poreux non fissuré (les contraintes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ s'appliquent uniquement sur le squelette solide). La relation II-142 devient alors (en utilisant l'égalité II-144) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{E}^0 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}) \quad (\text{II-145})$$

On rappelle que la plasticité est contrôlée par les contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}$ (voir le paragraphe § II-3.3). La relation reliant les contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}$ aux contraintes apparentes $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrit (voir l'équation II-136) :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - [\mathbf{1} - (1 - \phi) (\mathbf{1} - \mathbf{D})] \cdot \boldsymbol{\sigma}^{sol} \quad (\text{II-146})$$

Il est supposé que le processus de fluage est gouverné par les contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}$. En effet, seul le squelette solide (où les contraintes effectives s'appliquent) est soumis au fluage. Ainsi, dans le cas où les contraintes et l'humidité relative sont variables, la déformation de fluage propre et la déformation de fluage de dessiccation s'obtiennent à l'aide du principe de superposition de Boltzmann. Les déformations de fluage propre s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fp}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) \cdot \frac{d(h(\tau) \boldsymbol{\sigma}(\tau))}{d\tau} d\tau \quad (\text{II-147})$$

où $\mathbf{J}^{fp}(t)$ est le tenseur de complaisance de fluage propre de l'ensemble squelette solide + porosité (autre que celle induite par la fissuration) du quatrième ordre donné par l'équation II-103.

De même, les déformations de fluage de dessiccation intrinsèque s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fd}(t-\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) \cdot d\tau \quad (\text{II-148})$$

où \mathbf{J}^{fd} est le tenseur de complaisance de fluage de dessiccation intrinsèque de l'ensemble squelette solide + porosité (autre que celle induite par la fissuration) du quatrième ordre dont l'expression est donnée en **Annexe D** (voir l'équation D-95).

La relation entre les complaisances de fluage (propre et dessiccation) du squelette solide et celle du matériau non fissuré est donnée par l'équation II-130.

Les critères de plasticité adoptés en compression (Drucker-Prager) et en traction (Rankine) sont donnés par les équations II-34 et II-35, respectivement. Les déformations plastiques sont calculées classiquement à l'aide de la proposition de Koiter (équation II-41).

L'hypothèse de la déformation plastique a été adoptée dans ce travail. Les variables d'écroutissage peuvent se mettre sous la forme suivante (voir les équations II-48 et II-52) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{k}}_t^i = \gamma_t \dot{\boldsymbol{\lambda}}_t^i \\ \dot{\mathbf{k}}_c = \gamma_c \dot{\boldsymbol{\lambda}}_c \end{cases} \quad (\text{II-149})$$

Avec :

$$\begin{cases} \gamma_t = 1 \\ \gamma_c = (1 + 2 \alpha_g^2)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{II-150})$$

Les conditions de Kuhn-Tucker doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_t^i \geq 0, \quad F_t^i \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_t^i F_t^i = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_c \geq 0, \quad F_c \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_c F_c = 0 \end{cases} \quad (\text{II-151})$$

II-7.4 Algorithme de résolution

L'intégration des équations constitutives présentées plus haut consiste à actualiser le vecteur de déformations totales $\boldsymbol{\varepsilon}$, le vecteur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le vecteur des variables internes \mathbf{V} , initialement connus à l'instant t_n . L'algorithme de retour radial est utilisé ici. Il est basé sur la prédiction élastique des contraintes suivie d'un correcteur plastique, afin de satisfaire les conditions de Kuhn-Tucker (système d'équations II-151). Connaissant l'incrément de déformations totales $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$, le problème se ramène alors à la mise à jour de ces vecteurs :

$$(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \mathbf{V}_n) \xrightarrow{\text{mise à jour}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}) \quad (\text{II-152})$$

Il est choisi ici d'utiliser la méthode implicite (retour arrière d'Euler) pour effectuer la mise à jour des variables. Cette méthode a l'avantage d'être précise et inconditionnellement stable quelle que soit la complexité du critère de plasticité utilisé (Ortiz et Popov 1985).

Les contraintes effectives, la déformation et la variable l'écroutissage peuvent s'écrire au temps t_{n+1} sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_n + \Delta \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon}_{n+1} &= \underline{\varepsilon}_n + \Delta \underline{\varepsilon} \\ \mathbf{V}_{n+1} &= \mathbf{V}_n + f(\mathbf{V})\end{aligned}\quad (\text{II-153})$$

Le tenseur des contraintes effectives $\underline{\sigma}$ s'exprime sous la forme discrétisée suivante :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \mathbf{E}^0 \cdot (\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p - \underline{\varepsilon}_{n+1}^{fp} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^{fd}) \quad (\text{II-154})$$

L'incrément de déformation plastique est dépendant du nombre de critères activés. Dans la suite, on supposera que **le critère de compression est activé** et que **les critères orthotropes en traction sont activés dans deux directions (notées 1 et 2)**. Les expressions présentées par la suite peuvent être aisément modifiées dans les autres cas de figures. De plus, on se place dans le repère des contraintes principales effectives. Les contraintes effectives principales $\hat{\underline{\sigma}}$ s'obtiennent par changement de base à l'aide de la relation suivante (voir l'équation B-18 en **Annexe B**) :

$$\hat{\underline{\sigma}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{Q} \quad (\text{II-155})$$

Par la suite, pour éviter l'utilisation accrue d'exposants, **toutes les variables seront exprimées dans le repère des contraintes principales**, sans qu'un signe distinctif soit utilisé. Le passage des variables du repère initial vers le repère des contraintes principales (ou inversement) s'effectue de façon similaire à l'équation II-155 à l'aide de la matrice \mathbf{Q} .

En utilisant les expressions des potentiels plastiques (équations II-34 et II-44) et la proposition de Koiter (équation II-41), l'incrément de déformation plastique s'écrit (équation II-43 en traction et équation II-45 en compression) :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{1}{\beta} \Delta \lambda_{c,n+1} \left(\frac{\mathbf{P}_c \cdot \underline{\sigma}_{n+1}}{2 \chi_{c,n+1}} + \alpha_g \pi_c \right) + \Delta \lambda_{t,n+1}^{11} \mathbf{i} + \Delta \lambda_{t,n+1}^{22} \mathbf{j} \quad (\text{II-156})$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{i}^T = [1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ \mathbf{j}^T = [0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ \chi_{c,n+1} = 1/2 (\underline{\sigma}_{n+1})^T \cdot \mathbf{P}_c \cdot \underline{\sigma}_{n+1} \end{cases} \quad (\text{II-157})$$

Ensuite, il est nécessaire de connaître les déformations de fluage au pas de temps $n+1$. Dans le cas général, les équations II-147 et II-148 indiquent qu'il est nécessaire de connaître l'histoire des contraintes $\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_n, \underline{\sigma}_{n+1}$ et donc de les stocker en mémoire lors d'un calcul de structure. Si le nombre d'éléments finis est important ou/et la discrétisation temporelle est fine (le nombre de pas de temps est important), les quantités de données à stocker peuvent être très importantes, rendant ainsi impossible le calcul. Une particularité des modèles de fluage développés est que cette sauvegarde de l'histoire des contraintes n'est pas nécessaire. En effet, ces modèles sont basés sur des combinaisons de chaînes de Kelvin-Voigt et d'amortisseurs. Ainsi, il est démontré en **Annexe F**, que l'utilisation de l'équation II-147 ou II-148 pour exprimer la déformation de fluage à l'aide du principe de superposition de Boltzmann dans l'intervalle de temps $t \in [t_n, t_{n+1}]$ est équivalente à la résolution incrémentale

des équations différentielles constitutives II-83, II-96 et II-106 sur l'intervalle de temps considéré (connaissant l'évolution des contraintes et des conditions initiales à $t = t_n$). L'adoption de la discrétisation proposée de l'histoire des contraintes (équation II-141), conduit à exprimer les incréments de déformations de fluage propre et de fluage de dessiccation selon les relations suivantes (voir les équations D-81 et D-89 en **Annexe D**) :

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fp} = \mathbf{A}_n^{fp} + \mathbf{B}_n^{fp} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_n^{fp} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fd} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{fd} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fd} = \mathbf{A}_n^{fd} + \mathbf{B}_n^{fd} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_n^{fd} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{cases} \quad (\text{II-158})$$

L'équation II-154 peut être alors exprimée en fonction de l'incrément de déformation plastique sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \mathbf{E}^{flu} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II-159})$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}$ représente le prédicteur élastique du tenseur des contraintes effectives corrigé par le fluage, donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} = \mathbf{E}^{flu} \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - (\mathbf{A}_n^{fp} + \mathbf{A}_n^{fd}) - (\mathbf{B}_n^{fp} + \mathbf{B}_n^{fd}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fd} \right] \quad (\text{II-160})$$

et la matrice \mathbf{E}^{flu} est égale à :

$$\mathbf{E}^{flu} = \left[\mathbf{1} + \mathbf{E}^0 \cdot (\mathbf{C}_n^{fp} + \mathbf{C}_n^{fd}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{E}^0 \quad (\text{II-161})$$

L'équation de mise à jour des contraintes effectives s'écrit alors, en utilisant l'expression de l'incrément de déformation plastique II-156 :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \mathbf{E}^{flu} \cdot \left[\frac{\Delta \lambda_{c,n+1}}{\beta} \left(\frac{\mathbf{P}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{2 \cdot \chi_{c,n+1}} + \alpha_g \boldsymbol{\pi}_c \right) + \Delta \lambda_{t,n+1}^1 \mathbf{i} + \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \mathbf{j} \right] \quad (\text{II-162})$$

Ainsi, le vecteur des contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ est mis à jour à l'aide de l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \mathbf{E}^{flu} \cdot \left(\alpha_g \Delta \lambda_{c,n+1} \boldsymbol{\pi}_c / \beta + \Delta \lambda_{t,n+1}^1 \mathbf{i} + \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \mathbf{j} \right) \right] \quad (\text{II-163})$$

où la matrice \mathbf{A}_{n+1} est égale à :

$$\mathbf{A}_{n+1} = \left(\mathbf{1} + \frac{\Delta \lambda_{c,n+1}}{2 \beta \chi_{c,n+1}} \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{P}_c \right) \quad (\text{II-164})$$

Le vecteur de contraintes effectives n'est donc pas lié de façon linéaire au prédicteur élastique $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}$ (la matrice \mathbf{A}_{n+1} dépend du vecteur des contraintes recherchées $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$). Afin de s'affranchir de cette difficulté, nous allons utiliser une technique analogue à celle proposée par Feenstra et de Borst (1996), puis reprise par Georgin (1998) et Nechnech (2000). Le critère en compression doit être satisfait à la fin du pas du temps $n+1$, c'est-à-dire $F_{c,n+1} = 0$. Par conséquent le terme $\chi_{c,n+1}$ (équation II-157) peut s'écrire sous la forme (équation II-39) :

$$\chi_{c,n+1} = \beta \mathcal{T}_c (\kappa_{c,n+1}) - \alpha_f \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (\text{II-165})$$

où $\mathcal{T}_c = (1 - \phi) \cdot \tilde{\tau}_c$ est la contrainte nominale résistante intégrant l'effet de la porosité.

En multipliant à gauche l'équation II-163 par le terme $\boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{A}_{n+1}$, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{A}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1} &= \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1}^{tr} - \alpha_g / \beta \Delta \lambda_{c,n+1} \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \boldsymbol{\pi}_c \\ &\quad - \Delta \lambda_{t,n+1}^1 \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{i} - \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{II-166})$$

En multipliant à gauche l'équation II-164 par le terme $\boldsymbol{\pi}_c^T$ et remarquant que $\boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{P}_c = \mathbf{0}$, on obtient l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{A}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1} \quad (\text{II-167})$$

En notant que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \boldsymbol{\pi}_c = 3 \left(E_{1,1}^{flu} + 2 \cdot E_{1,2}^{flu} \right) = 3 \omega^{flu} \\ \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{i} = \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{j} = E_{1,1}^{flu} + 2 E_{1,2}^{flu} = \omega^{flu} \\ \boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1}^{tr} = tr \left(\boldsymbol{\varrho}_{n+1}^{tr} \right) \end{cases} \quad (\text{II-168})$$

L'équation II-166 devient alors :

$$\boldsymbol{\pi}_c^T \cdot \boldsymbol{\varrho}_{n+1} = tr \left(\boldsymbol{\varrho}_{n+1}^{tr} \right) - \left[3 \alpha_g / \beta \Delta \lambda_{c,n+1} + \left(\Delta \lambda_{t,n+1}^1 + \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \right) \right] \omega^{flu} \quad (\text{II-169})$$

On peut donc finalement exprimer le terme $\chi_{c,n+1}$ indépendamment du vecteur des contraintes effectives $\boldsymbol{\varrho}_{n+1}$, à l'aide des équations II-165 et II-169, sous la forme :

$$\chi_{c,n+1} = \beta \mathcal{T}_c \left(\kappa_{c,n+1} \right) - \alpha_f \left\{ tr \left(\boldsymbol{\varrho}_{n+1}^{tr} \right) - \left[3 \alpha_g / \beta \Delta \lambda_{c,n+1} + \left(\Delta \lambda_{t,n+1}^1 + \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \right) \right] \omega^{flu} \right\} \quad (\text{II-170})$$

Lors du calcul de $\chi_{c,n+1}$ à l'aide de la relation précédente, il est possible qu'on obtienne une valeur nulle. Dans ce cas, il est impossible de calculer directement la matrice \mathbf{A}_{n+1} . Cependant, on peut montrer que la matrice $(\mathbf{A}_{n+1})^{-1}$ reste définie si une décomposition spectrale est utilisée. On obtient alors l'expression suivante (Feenstra et de Borst 1996, Georgin 1998, Nechnech 2000) :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-171})$$

Ainsi, le vecteur des contraintes effectives $\boldsymbol{\varrho}_{n+1}$ peut être finalement mis à jour, si les incréments des multiplicateurs plastiques $\Delta \lambda_{c,n+1}$, $\Delta \lambda_{t,n+1}^1$ et $\Delta \lambda_{t,n+1}^2$ sont connus. Ceux-ci sont calculés par le biais des critères de plasticité actifs. En effet, les critères doivent être satisfaits au pas de temps $n+1$ (voir le système d'équations **II-151**). Ainsi, le système d'équations non linéaires à résoudre est :

$$\begin{cases} F_{t,n+1}^1(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \kappa_{t,n+1}^{11}) = 0 \\ F_{t,n+1}^2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \kappa_{t,n+1}^{22}) = 0 \\ F_{c,n+1}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \kappa_{c,n+1}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-172})$$

Étant donné que les contraintes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ (voir l'équation II-163) et les variables d'érouissage (voir le système d'équations II-149) sont fonctions des multiplicateurs plastiques $\Delta\lambda_{c,n+1}$, $\Delta\lambda_{t,n+1}^1$ et $\Delta\lambda_{t,n+1}^2$, le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} F_{t,n+1}^1(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}) = 0 \\ F_{t,n+1}^2(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}) = 0 \\ F_{c,n+1}(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-173})$$

La résolution de ce système d'équations non linéaires ne peut pas s'effectuer de façon analytique. Ainsi une méthode numérique itérative est utilisée. Celle-ci est décrite en **Annexe G**.

Une fois que le système d'équations II-173 est résolu, les multiplicateurs plastiques $\Delta\lambda_{c,n+1}$, $\Delta\lambda_{t,n+1}^1$ et $\Delta\lambda_{t,n+1}^2$ sont alors connus. Les contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ sont mises alors à jour à l'aide de l'équation II-163. On se rappellera que les équations gouvernant l'écoulement plastique ont été écrites dans le repère des contraintes principales. Il est nécessaire, ensuite, de revenir à la base initiale à l'aide de l'équation II-155.

De plus, les variables d'érouissage au pas de temps $n+1$ sont calculées à l'aide du système d'équations II-149, ce qui permet de connaître les variables d'endommagement en compression $D_{c,n+1}$ (équation II-27) et en traction $\mathbf{D}_{t,n+1}$ (équation II-26), puis le tenseur d'endommagement \mathbf{D}_{n+1} (équation II-28). La contrainte appliquée sur le solide $\boldsymbol{\sigma}^{sol}$ est alors déterminée à partir de la pression p_{sol} (équation II-125) et de la variable d'endommagement :

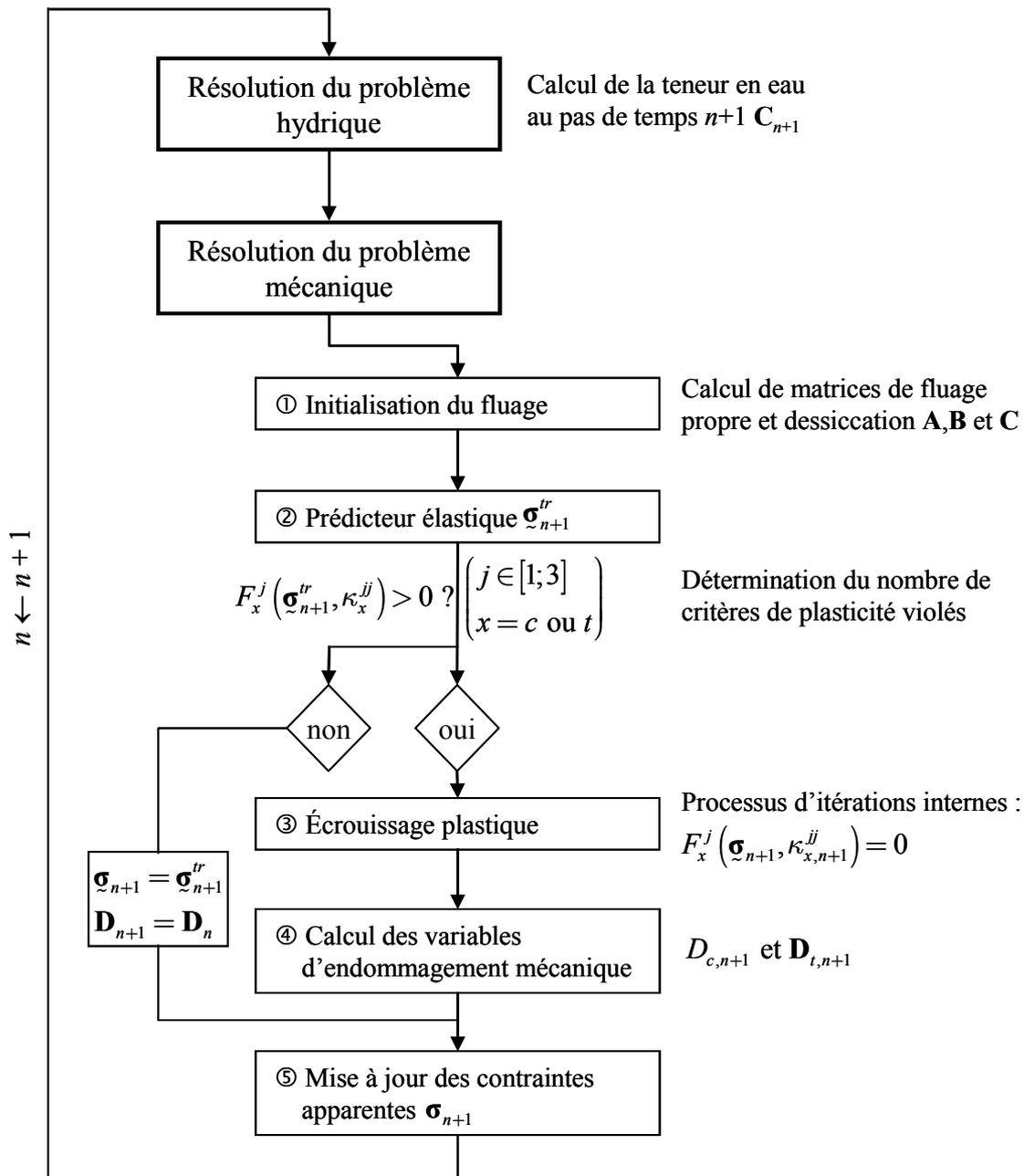
$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{sol} = (1 - D_{c,n+1})^{\alpha_c} (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{t,n+1})^{\alpha_t} p_{sol} (\mathbf{C}_{n+1}) \quad (\text{II-174})$$

Finalement, les contraintes apparentes peuvent être déterminées (équation II-146) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - [1 - (1 - \phi) (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})] \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{sol} \quad (\text{II-175})$$

L'algorithme général de résolution adopté est résumé sous une forme schématique dans le Tableau II-8.

Tableau II-8 Résumé de l'algorithme général de résolution du problème hydromécanique.



II-8 Conclusion sur la modélisation

Un nouveau modèle hydromécanique, intégrant de nombreux phénomènes (séchage, fissuration, fluage, retrait) a été élaboré. Ce modèle est basé sur des mécanismes physico-chimiques réalistes, compatibles avec de nombreuses observations expérimentales. Le cadre de la modélisation adoptée est alors celui de la mécanique des milieux poreux élastoplastique endommageable orthotrope, en s'appuyant sur le concept des contraintes effectives. Le cadre adopté permet de modéliser la déformation de retrait de dessiccation de façon pertinente, puisqu'elle n'est pas introduite explicitement lors de la partition des déformations (contrairement à ce qui est fait habituellement).

Ainsi, on obtient un modèle original, dont les paramètres ont une véritable signification physique. Ceux-ci peuvent être aisément identifiés à partir d'essais expérimentaux *classiques*.

Puis, l'intégration des équations constitutives dans le code de calcul aux Éléments Finis CAST3M¹⁰ a été effectuée. L'algorithme de résolution développé est relativement *simple* et *robuste* à mettre en œuvre.

Il reste alors à effectuer la validation numérique et à confronter les résultats de simulations numériques à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature. La validation numérique sera effectuée dans le troisième chapitre. Cette étape ne constituera pas évidemment une preuve que les mécanismes proposés soient (ou ne soient pas) ceux qui se produisent réellement au sein du matériau, mais permettra de supporter l'idée (ou non) que ces mécanismes soient responsables des effets.

Les perspectives relatives à la modélisation proposée sont abordées dans la conclusion générale.

¹⁰ Il est à rappeler que les modèles sont en cours d'implantation dans le code de calcul Code_Aster ® développé par EDF qui constituera leur code d'exploitation industrielle.

Chapitre III
Validation du modèle

III-1	INTRODUCTION.....	132
III-2	SIMULATIONS A L'ECHELLE CONSTITUTIVE DU MATERIAU	132
III-2.1	<i>Étude du comportement d'une pâte de ciment soumise à la dessiccation .</i>	<i>133</i>
III-2.1.1	Description des essais	133
III-2.1.2	Évolutions des déformations différées	134
III-2.1.2.1	Déformation de fluage de dessiccation	135
III-2.1.2.2	Déformation de retrait de dessiccation.....	136
III-2.2	<i>Étude du fluage propre sous des sollicitations uniaxiales et multiaxiales.</i>	<i>139</i>
III-2.2.1	Description des essais	139
III-2.2.2	Évolutions des déformations de fluage propre.....	140
III-3	SIMULATIONS A L'ECHELLE DE LA STRUCTURE	142
III-3.1	<i>Étude des effets du séchage sur le comportement mécanique.....</i>	<i>143</i>
III-3.1.1	Évolutions des résistances en compression et en traction.....	143
III-3.1.1.1	Évolution de la résistance en compression et en traction.....	144
III-3.1.1.2	Courbes contraintes-déformations pour différentes valeurs d'humidité relative interne.....	146
III-3.1.2	Comportement orthotrope induit.....	149
III-3.2	<i>Étude du comportement différé sous des sollicitations biaxiales.....</i>	<i>150</i>
III-3.2.1	Description des essais	150
III-3.2.2	Simulation des essais de déformations différées.....	151
III-3.2.2.1	Évolutions des déformations	151
III-3.2.2.2	Évolutions des contraintes et de l'endommagement.....	154
III-3.3	<i>Analyse des effets intrinsèques et structuraux induits par la dessiccation</i>	<i>155</i>
III-3.3.1	Description des essais	155
III-3.3.2	Essais de séchage	158
III-3.3.3	Comportement mécanique	160
III-3.3.4	Essai de déformations différées	162
III-3.3.4.1	Essai de retrait de dessiccation.....	163
III-3.3.4.1.1	Iso-valeurs de la variable d'endommagement.....	164
III-3.3.4.1.2	Distribution des contraintes.....	166
III-3.3.4.1.3	Déformations de l'éprouvette.....	167
III-3.3.4.1.4	Contribution de chacune des composantes de déformation	170
III-3.3.4.2	Essai de fluage total	171
III-3.3.4.2.1	Distribution des contraintes et de l'endommagement.....	171
III-3.3.4.2.2	Déformations de l'éprouvette.....	174
III-3.3.4.2.3	Contribution de chacune des différentes composantes de déformation	175
III-3.4	<i>Simulation du comportement différé d'une enceinte de confinement</i>	<i>176</i>
III-3.4.1	Description des simulations	177
III-3.4.1.1	Planning de mise en service adopté	177
III-3.4.1.2	Calcul des forces de précontrainte	178
III-3.4.1.3	Essai d'épreuve	179
III-3.4.1.4	Maillage et conditions aux limites adoptés	179
III-3.4.1.5	Paramètres utilisés pour les simulations numériques.....	180

Chapitre III : Table des matières

III-3.4.2	Évolution du séchage	180
III-3.4.3	Évolutions des déformations et des pertes de précontrainte	181
III-3.4.4	Distribution des contraintes et de l'endommagement.....	183
III-4	CONCLUSION	185

III. VALIDATION DU MODELE

III-1 Introduction

Nous avons développé lors du chapitre précédent un modèle, afin de décrire le comportement différé du matériau béton (mais également celui de la pâte de ciment et du mortier) sous sollicitations hydromécaniques. Afin de vérifier que le modèle développé est capable de reproduire correctement ce comportement, des simulations numériques sont effectuées. Ces simulations sont menées à l'aide du code de calcul CAST3M¹¹, dans lequel le modèle a été implanté. Les éléments finis utilisés sont des QUA8 lors des simulations uniaxiales ou biaxiales et des CUB20 lors des simulations triaxiales. Les résultats issus des simulations numériques sont alors analysés et comparés avec des résultats expérimentaux de la littérature.

Dans la première partie, les simulations numériques sont menées sur la base d'essais en configuration de déformations homogènes (ou quasi-homogènes). L'objectif est d'analyser et de valider les hypothèses du modèle en terme de comportement intrinsèque (échelle constitutive du matériau), puisqu'on s'affranchit des effets structuraux.

Dans la seconde partie, nous présentons l'analyse de structures en béton et en béton précontraint, soumises à des chargements mécaniques (uniaxiaux et multiaxiaux) et à un environnement hydrique donné. L'objectif est, d'une part, de valider le modèle dans le cas de configuration de déformations non homogènes et, d'autre part, de comprendre et d'analyser le comportement différé de structures, et notamment les effets structuraux. De plus, elle permettra de remettre en cause certains résultats que l'analyse bibliographique a fait ressortir.

Lors des simulations, tous les paramètres du modèle n'ont pas pu être identifiés, lorsque les essais expérimentaux nécessaires sont manquants. Dans ce cas, les paramètres obtenus sur des bétons de composition proche ou des bétons courants sont utilisés.

Des simulations numériques, sur des structures entaillées soumises à un chargement en mode mixte, sont également présentées en **Annexe H**. Celles-ci ne sont pas présentées dans le corps de ce troisième chapitre, étant donné qu'elles sortent en partie du cadre de la thématique de ce travail. Néanmoins, elles permettent de vérifier que le modèle de fissuration développé est bien capable d'appréhender le comportement de structures soumises à des chargements mécaniques complexes (ce qui justifie sa présence en annexe).

III-2 Simulations à l'échelle constitutive du matériau

Dans cette partie, les simulations numériques sont menées en configuration de déformations homogènes. Les chargements appliqués sont de type mécanique et/ou hydrique.

Les premières simulations sont effectuées sur des éprouvettes de pâte de ciment de faible épaisseur (afin de s'affranchir de la fissuration) soumises à un chargement hydromécanique. Elle permet de vérifier que les hypothèses, concernant notamment le comportement de retrait de dessiccation, sont cohérentes avec les observations expérimentales. Il est à noter que cette composante est considérée, en partie, comme une composante supplémentaire de fluage du squelette sous la pression capillaire et sous la pression de disjonction.

¹¹ Il est à rappeler que les modèles sont en cours d'implantation dans le code de calcul Code_Aster® développé par EDF qui constituera leur code d'exploitation industrielle.

Ensuite, une série de simulation d'essais uniaxiaux et multiaxiaux de fluage propre sur des éprouvettes en béton est effectuée. Elle permet de vérifier que le modèle est capable de reproduire l'évolution des déformations de fluage propre, quel que soit le chemin de chargement.

III-2.1 Étude du comportement d'une pâte de ciment soumise à la dessiccation

Les simulations numériques effectuées dans ce paragraphe ont pour but d'illustrer et de valider les hypothèses du modèle au sujet de la déformation de retrait de dessiccation (voir le paragraphe § II-6), et de fluage de dessiccation intrinsèque (voir le paragraphe § II-5). Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux obtenus par Day et *al.* (1984).

III-2.1.1 Description des essais

Les essais de retrait et de fluage ont été réalisés sur des éprouvettes d'épaisseur faible, afin de réduire la fissuration induite par la dessiccation. L'utilisation d'une pâte de ciment permet de mesurer des déformations importantes (par rapport à un mortier ou à un béton). Les éprouvettes en forme de S ont une épaisseur de 1,9 mm, les autres dimensions sont données dans la Figure III-1.

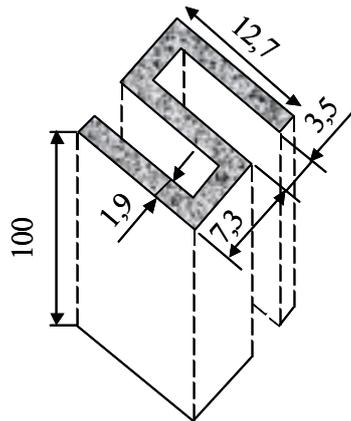


Figure III-1 Géométrie des éprouvettes testées (Day et *al.* 1984, dimensions en millimètre).

Afin de s'affranchir des effets de l'hydratation, les éprouvettes ont été conservées en auto-dessiccation pendant 75 jours. Ensuite, deux séries d'essai ont été réalisées en parallèle. Pour chaque série d'essai, 13 spécimens ont été utilisés :

- 3 spécimens sont immédiatement chargés et placés en dessiccation, pour lesquels l'évolution de la déformation totale est mesurée ;
- 4 spécimens sont utilisés pour mesurer la déformation de fluage propre (spécimens chargés et protégés contre la dessiccation) ;
- 3 spécimens ne sont pas chargés, ce qui permet de suivre l'évolution des déformations de retrait de dessiccation ;
- 3 spécimens sont utilisés pour suivre l'évolution de la perte en masse.

Les spécimens sont soumis à deux vitesses de séchage différentes selon la série. Dans la première série, le séchage s'effectue lentement, l'humidité relative externe est imposée par palier, jusqu'à atteindre la valeur de 53 %. Dans la deuxième série, le séchage s'effectue rapidement, en appliquant une humidité relative externe de 53 % initialement. Les évolutions

expérimentales de la perte en masse, pour chaque série, sont données en fonction du temps dans la Figure III-2.

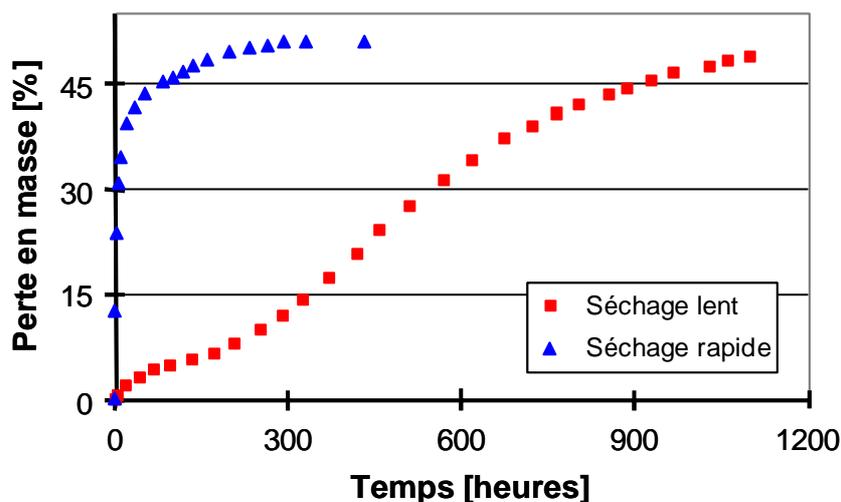


Figure III-2 Évolution expérimentale de la perte en masse (Day et al. 1984).

La contrainte de compression, appliquée aux deux extrémités, lors des essais de fluage est toujours égale à 11,3 MPa, ce qui correspond à un rapport contrainte / résistance égal à 0,3. Les déformations sont obtenues à partir de la mesure des déplacements entre les deux extrémités (base de mesure de 100 mm), à l'aide d'un capteur de déplacement. La température a été maintenue à 24 ± 1 °C lors de la conservation des éprouvettes et pendant les essais. Les caractéristiques des éprouvettes testées et des essais sont rappelées dans le Tableau III-1.

Tableau III-1 Caractéristiques des pâtes de ciment et conditions d'essai (Day et al. 1984).

e/c	0,47
E [GPa]	26,4
Mode de conservation avant chargement	T = 24 ± 1 °C en auto-dessiccation
Âge au début des essais	75 jours
Contrainte appliquée	11,3 MPa

III-2.1.2 Évolutions des déformations différées

Afin d'effectuer le calcul de la déformation de retrait de dessiccation et de fluage de dessiccation intrinsèque, il est nécessaire de connaître l'isotherme de sorption et de désorption, pour pouvoir relier la teneur en eau à l'humidité relative. Celle-ci n'a pas été déterminée expérimentalement sur la pâte de ciment étudiée. Aussi, les paramètres de l'isotherme (modèle BSB, voir le paragraphe II-2.1) ont été identifiés à partir de l'isotherme d'une pâte de ciment de rapport e/c égal à 0,48 (valeur très proche de celle de la pâte de ciment étudiée, Baroghel-Bouny et al. 1999). De plus, nous avons considéré que l'isotherme de sorption et l'isotherme de désorption sont identiques, puisque ces deux courbes sont relativement proches dans la plage d'humidité relative 50-100 %. Dans la Figure III-3, l'isotherme obtenue à partir du modèle BSB est comparée à celle d'une pâte de ciment de rapport e/c égal à 0,48.

Les paramètres du modèle BSB ayant permis de caler l'isotherme théorique sont donnés dans le Tableau III-4.

Tableau III-2 Paramètres matériaux du modèle BSB.

A	k	V_m [l.m ⁻³]
7	0,5	0,5

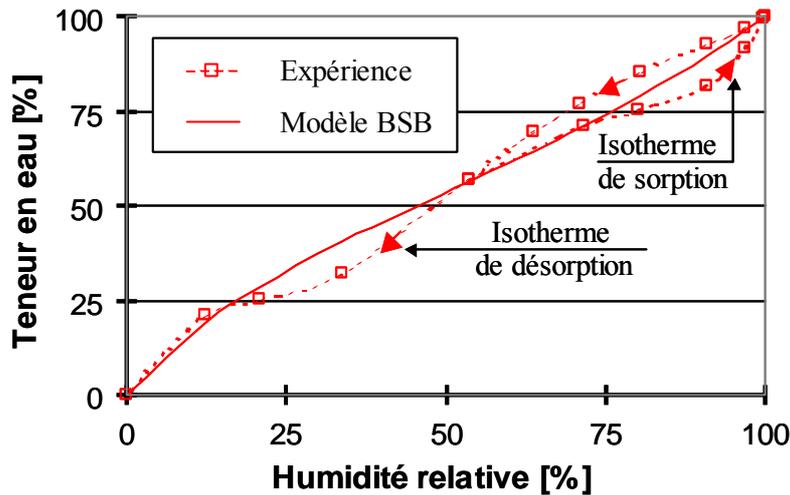


Figure III-3 Comparaison entre les isothermes de sorption et de désorption simulées et expérimentales (Baroghel-Bouny et al. 1999) et l'isotherme adoptée (modèle BSB).

Les simulations numériques ont été effectuées à l'échelle du point matériel, afin de valider les relations constitutives du retrait (comportement intrinsèque). Par conséquent, il ne se produit pas de fissuration (variables d'endommagement et déformations plastiques nulles).

Il reste à déterminer l'évolution de l'humidité relative au sein de l'éprouvette. En supposant que la teneur en eau dans l'éprouvette soit homogène, le rapport de la teneur en eau $C(t)$ à l'instant t sur la teneur en eau initiale C_0 s'écrit :

$$\frac{C(t)}{C_0} = 1 - \frac{\Delta m(t)}{m_0} \quad \text{(III-1)}$$

où m_0 est la masse initiale de l'éprouvette et $\Delta m(t)$ est la perte en masse expérimentale.

Ainsi, l'évolution de la teneur en eau peut être déterminée à partir de la connaissance de la perte en masse expérimentale des éprouvettes. Ensuite, à partir de la courbe de l'isotherme de désorption (Figure III-3), l'évolution de l'humidité relative interne, qui sera appliquée lors des simulations numériques, est calculée.

III-2.1.2.1 Déformation de fluage de dessiccation

Les essais de fluage de dessiccation (séchage rapide et séchage lent) sont simulés à l'aide de deux modèles de fluage de dessiccation intrinsèque.

Le premier modèle est le modèle « stress-induced shrinkage » proposé par Bažant et Chern (1985, voir le paragraphe § I-4.4.2). Dans ce modèle, la déformation de fluage de dessiccation est proportionnelle à l'incrément d'humidité relative et à la contrainte appliquée.

Le deuxième modèle est le modèle présenté dans le paragraphe § II-5. Dans ce modèle, la cinétique de séchage et la cinétique de déformation de fluage de dessiccation peuvent être dissociées, contrairement au modèle précédent.

Les paramètres de ces deux modèles sont tout d'abord identifiés sur l'essai de séchage lent. Les valeurs obtenues sont reportées dans le Tableau III-3.

Tableau III-3 Valeurs des paramètres des deux modèles de fluage de dessiccation intrinsèque.

Modèle développé		Modèle de Bažant et Chern (1985)
k^{fd} [MPa]	η^{fd} [MPa.s]	λ_{fd} [Pa ⁻¹]
2,2	1×10^8	$6,81 \times 10^{-11}$

Ensuite, l'essai de séchage rapide est simulé. Les évolutions expérimentales de la déformation de fluage de dessiccation lors de l'essai de séchage rapide sont comparées alors à celles prédites par les deux modèles dans la Figure III-4. Les évolutions expérimentales et simulées de cette déformation, dans le cas de l'essai de séchage lent, sont également reportées.

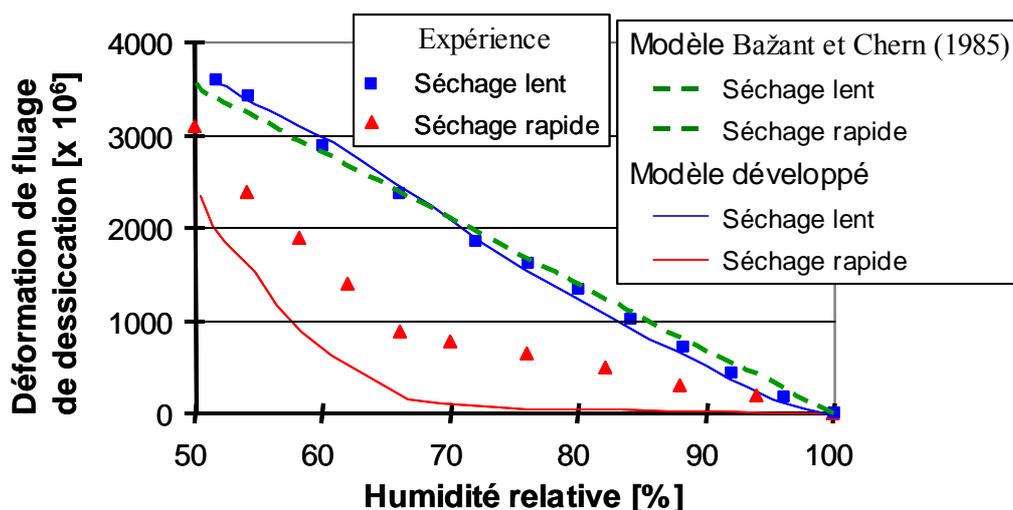


Figure III-4 Déformation de fluage de dessiccation lors de l'essai de séchage lent et rapide.

La comparaison, entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques, met en évidence que les cinétiques du processus de séchage et de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque sont différentes. En effet, le modèle proposé par Bažant et Chern (1985) reproduit une déformation identique quelle que soit la cinétique de séchage. Ce n'est pas le cas de l'approche adoptée dans ce travail : le modèle proposé permet de reproduire l'effet de la cinétique de séchage sur la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque. En effet, plus la vitesse de séchage est importante, moins le matériau a de temps disponible pour fluer. Par conséquent, la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque est plus faible.

III-2.1.2.2 Déformation de retrait de dessiccation

Deux modèles de retrait de dessiccation ont été utilisés pour simuler les essais de retrait de dessiccation (séchage lent et séchage rapide) :

- Le modèle linéaire proposé dans la littérature (équation I-41) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{rd} = k_{rd}^h \dot{h} \mathbf{1} \quad (III-2)$$

➤ Le modèle non linéaire développé dans le cadre de cette étude. La déformation de retrait de dessiccation résulte de la déformation élastique, de fluage propre et de fluage de dessiccation du squelette solide sous l'effet de la pression capillaire et de la pression de disjonction (équation II-131) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{rd} = \phi \left[\left(\mathbf{E}^0 \right)^{-1} p_{sol} + \int_0^t \mathbf{J}^{fp} (t-\tau) d(h p_{sol}) + \int_0^t \mathbf{J}^{fd} (t-\tau) d(p_{sol}) \right] \cdot \mathbf{1} \quad (III-3)$$

Les valeurs des paramètres du modèle de fluage propre sphérique sont choisies identiques à celles préalablement obtenues sur des pâtes de ciment de rapport e/c égal à 0,47 (Parrott 1974, voir le paragraphe § II-4.1.4.2). Quant aux paramètres de fluage de dessiccation, ils ont été identifiés au paragraphe § III-2.1.2.1.

Tout d'abord, le paramètre α_{rd} du modèle proposé et le coefficient de proportionnalité k_{rd}^h du modèle linéaire sont identifiés à partir de la courbe expérimentale donnant l'évolution de la déformation de retrait de dessiccation de la série séchage lent. Les valeurs des paramètres du matériau sont reportées dans le Tableau III-4.

Tableau III-4 Valeurs des paramètres de retrait de dessiccation et de fluage propre.

Modèle développé			
k_r^{sph} [MPa]	k_i^{sph} [MPa]	η_r^{sph} [MPa.s]	η_i^{sph} [MPa.s]
$3,37 \times 10^4$	$1,31 \times 10^4$	$1,4 \times 10^9$	$1,4 \times 10^{10}$
α_{rd}	Φ	Modèle linéaire	
1,49	0,2	k_{rd}^h	$8,61 \times 10^{-3}$

Ensuite, l'essai de séchage rapide est simulé. La Figure III-5 donne les évolutions expérimentales et simulées (avec les deux modèles) de la déformation de retrait de dessiccation dans le cas de l'essai de séchage rapide et de séchage lent.

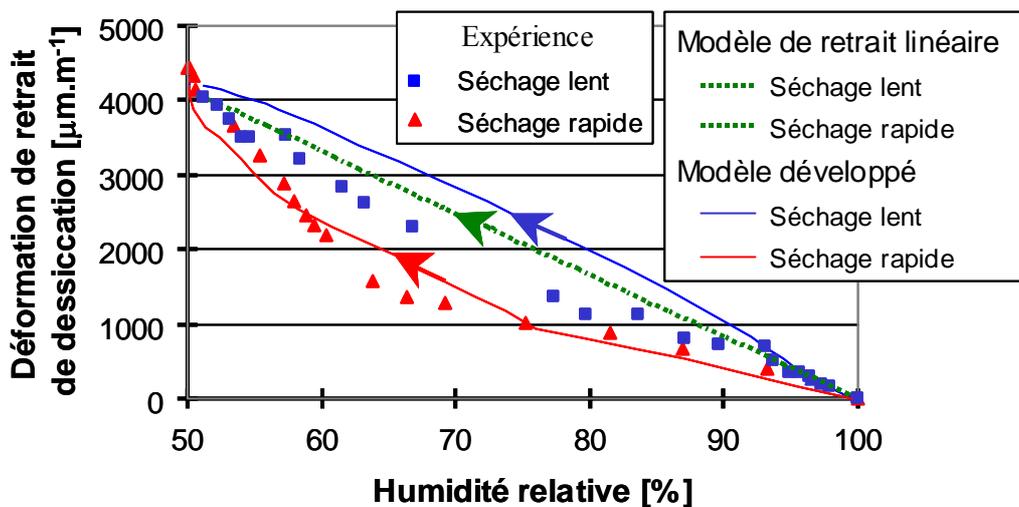


Figure III-5 Évolution expérimentale et simulée de la déformation de retrait de dessiccation lors des essais de séchage lent et séchage rapide.

On constate alors que le modèle linéaire ne permet pas de reproduire la dépendance à la cinétique de séchage. La déformation de retrait de dessiccation est en effet proportionnelle à l'humidité relative et donc à la perte de masse, puisque la courbe d'isotherme de désorption est quasi linéaire dans la plage d'humidité relative 53 – 100 % (voir la Figure III-3). Ce n'est pas le cas du modèle de retrait de dessiccation développé. En effet, celui-ci présente la possibilité de traduire un comportement différent, dépendant de la vitesse de séchage.

Une réhumidification a également été menée pour mettre en évidence la part irréversible de la déformation de retrait. Les évolutions expérimentales et simulées (avec les deux modèles) de la déformation de retrait de dessiccation, lors de la réhumidification, sont reportées dans la Figure III-6.

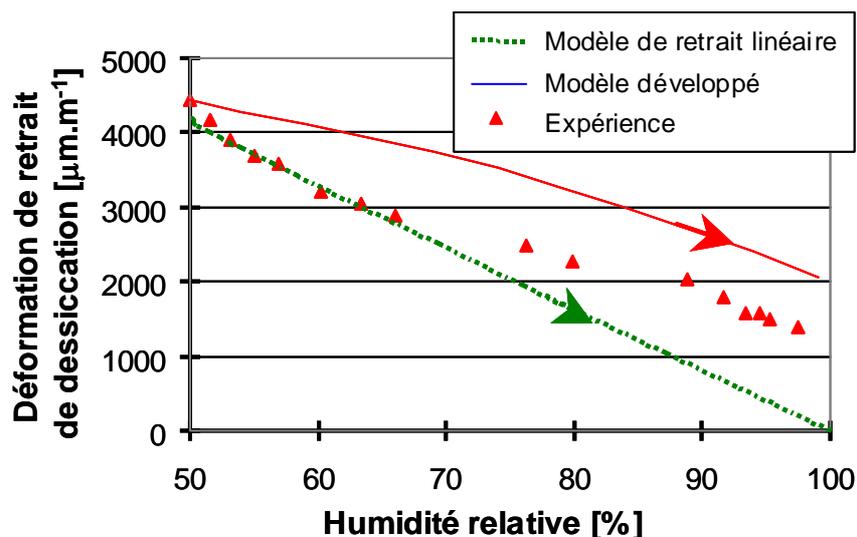


Figure III-6 Évolution de la déformation de retrait de dessiccation lors de la réhumidification, qui fait suite à l'essai de séchage rapide.

L'occurrence d'une déformation de retrait de dessiccation partiellement réversible, après réhumidification, n'est retrouvée que par le modèle proposé. En effet, le modèle linéaire reproduit un comportement identique en séchage et en réhumidification.

Ainsi, au-delà de la reproduction exacte des déformations expérimentales, le modèle proposé permet dans son principe de retrouver les caractéristiques intrinsèques du retrait de dessiccation (effet de la cinétique et de la réhumidification), mentionnées lors de l'analyse bibliographique (paragraphe § I-3.3.3.1).

Ce comportement peut s'expliquer en déterminant les évolutions des différentes composantes de la déformation de retrait de dessiccation (équation III-3) : une déformation élastique, une déformation de fluage propre et une déformation de fluage de dessiccation (réversible et irréversible, voir la Figure III-7) :

- Lors d'un essai où le séchage est rapide, l'humidité relative décroît rapidement au sein de l'éprouvette. Ainsi la pression appliquée sur le squelette solide p_{sol} (sous l'effet de la pression capillaire et la pression de disjonction, équation II-125) croît rapidement. Dans la déformation de retrait de dessiccation, la part de la déformation de fluage est assez prépondérante. Ainsi, la déformation de fluage est plus faible lorsque le séchage est rapide, puisqu'elle ne dispose pas d'une durée suffisante pour se développer significativement. Ce n'est pas le cas de la déformation élastique dont l'amplitude reste identique quelle que soit la cinétique de séchage ;

➤ La déformation de fluage n'est que partiellement réversible lors d'un déchargement. Lors de la phase de réhumidification, la pression p_{sol} décroît. Par conséquent, une partie de la déformation de retrait de dessiccation, correspondant à la déformation de fluage irréversible, n'est pas récupérée.

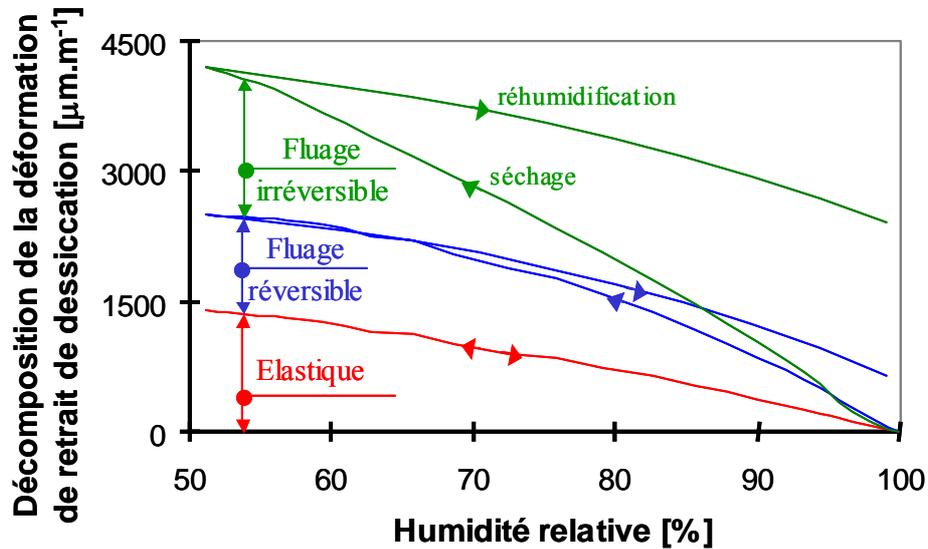


Figure III-7 Décomposition de la déformation de retrait de dessiccation pour la série séchage rapide (séchage puis réhumidification).

III-2.2 Étude du fluage propre sous des sollicitations uniaxiales et multiaxiales

Les simulations numériques menées ont pour objectif de vérifier que le modèle est capable de reproduire l'évolution des déformations de fluage propre, notamment en ce qui concerne le passage d'une configuration de chargement à une autre, pour un même béton. Pour cela, les résultats expérimentaux obtenus, pour des sollicitations diverses, par Gopalakrishnan et *al.* (1969) sur des éprouvettes en béton sont utilisés.

III-2.2.1 Description des essais

Les éprouvettes de béton sont de formes cubiques, de dimension $254 \times 254 \times 254$ mm (voir la Figure III-8).

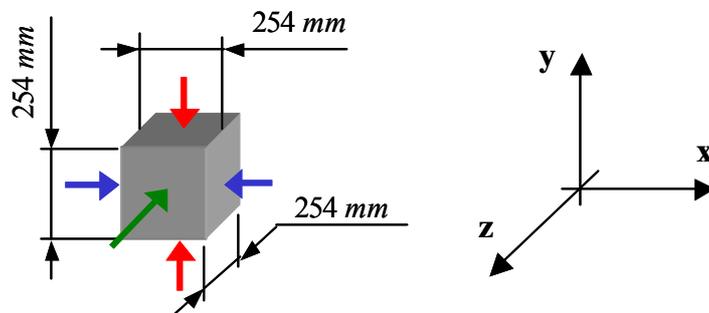


Figure III-8 Géométrie des éprouvettes des essais de fluage propre (Gopalakrishnan et *al.* 1969).

Les éprouvettes ont été curées et conservées à une humidité relative de 98 %, avant le chargement. L'auteur a réalisé plusieurs séries d'essais. Dans la série étudiée, l'auteur réalise un essai de fluage propre sous sollicitation biaxiales, triaxiales et un essai uniaxial associé.

Les caractéristiques des éprouvettes testées et les caractéristiques des essais sont données dans le Tableau III-5.

Tableau III-5 Caractéristiques du béton et des conditions d'essai (Gopalakrishnan et al. 1969).

e/c	0,72
g/c	3,5
s/c	3,5
D_{\max}	19 mm
f_{c8} [MPa]	29
Mode de conservation avant chargement	T = 25 °C et HR = 98 ± 2 %
Âge de chargement	8 jours

Une schématisation des chemins de chargement appliqués est donnée par la Figure III-9.

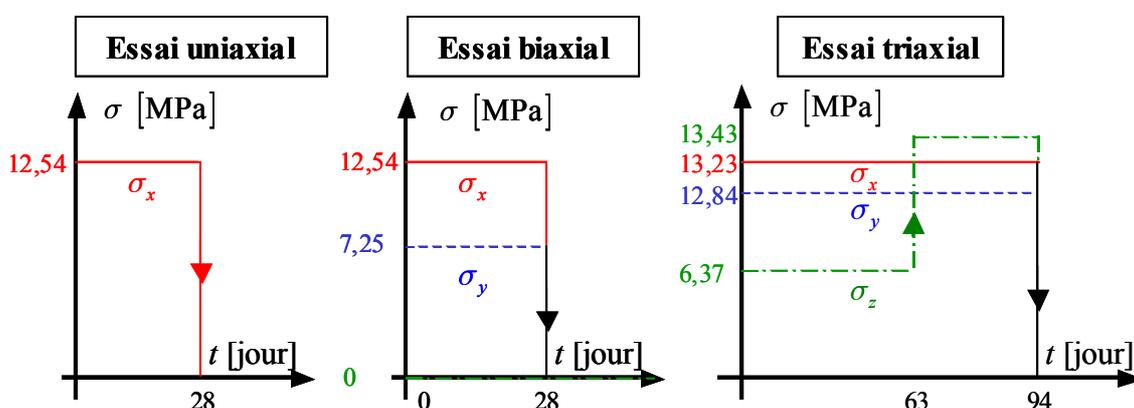


Figure III-9 Chemin des contraintes de la série étudiée (Gopalakrishnan et al. 1969).

Les contraintes ont été appliquées à l'aide de tiges en acier à haute résistance, ancrées sur un plateau de chargement en aluminium afin de limiter le frettage. Les déformations ont été mesurées à l'aide de jauges mécaniques démontables (de longueur 20,3 cm) dont la précision est d'environ 10×10^{-6} et à l'aide de capteurs de déplacements placés en surface de l'éprouvette.

III-2.2.2 Évolutions des déformations de fluage propre

Les paramètres du modèle de fluage propre sont tout d'abord identifiés sur l'essai biaxial. L'identification des paramètres de fluage propre n'a pas été effectuée sur l'essai uniaxial, car l'évolution de la déformation de fluage propre transversale n'a pas été suivie lors de l'expérience. L'identification des paramètres sphériques et déviatoriques est menée sur les évolutions des parts sphériques et déviatoriques de la déformation de fluage propre, respectivement. Les paramètres obtenus sont donnés dans le Tableau III-6.

Tableau III-6 Valeurs des paramètres de fluage propre, identifiés à partir des résultats expérimentaux.

Partie sphérique			
k_r^{sph} [MPa]	k_i^{sph} [MPa]	η_r^{sph} [MPa.s]	η_i^{sph} [MPa.s]
$2,01 \times 10^5$	$7,26 \times 10^4$	$7,66 \times 10^9$	$7,71 \times 10^{10}$
Partie déviatorique			
k_r^{dev} [MPa]	η_r^{dev} [MPa.s]	η_i^{dev} [MPa.s]	
$9,65 \times 10^4$	$1,72 \times 10^{10}$	$1,54 \times 10^{11}$	

Les paramètres identifiés correspondent alors à la réponse du modèle donnée par la Figure III-10.

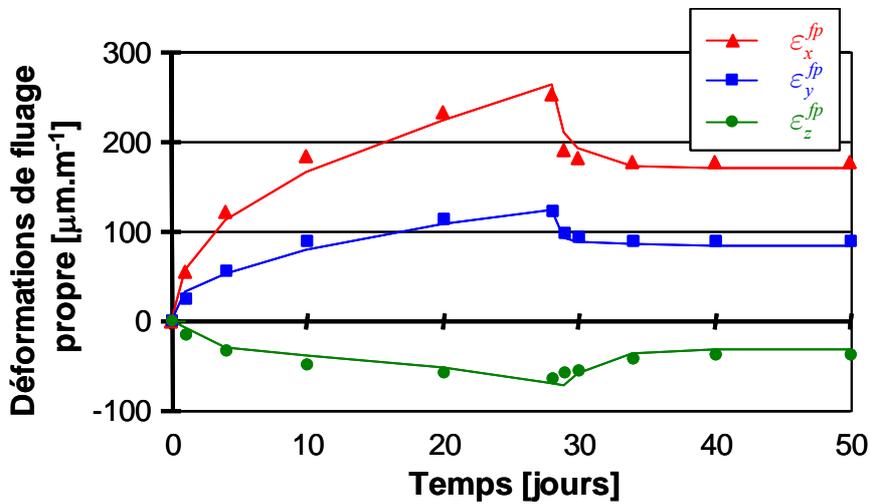


Figure III-10 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées des déformations de fluage propre pour l'essai biaxial.

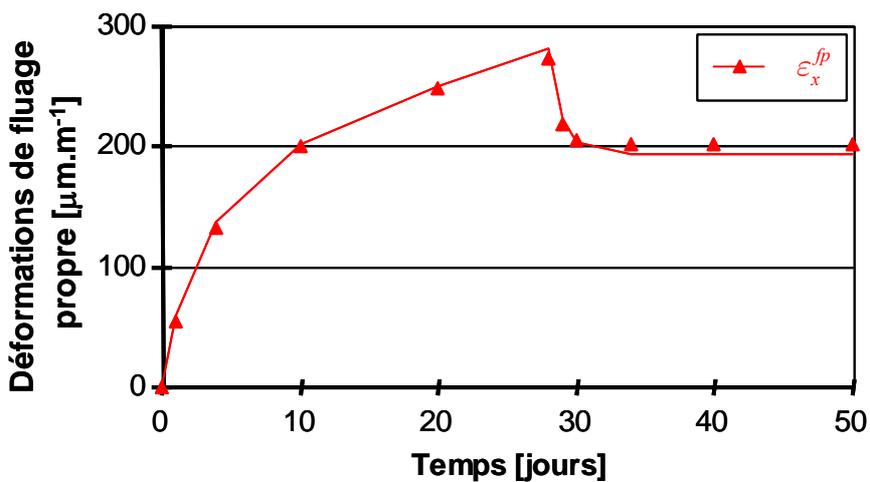


Figure III-11 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées de la déformation longitudinale de fluage propre pour l'essai uniaxial.

La Figure III-10 montre ainsi que le modèle de fluage propre proposé permet d'identifier un jeu de paramètres qui reproduit correctement, l'amplitude, la cinétique et la part irréversible

(entre 50 et 70 % de la déformation totale) de la déformation de fluage propre dans les trois directions simultanément.

A l'aide des paramètres identifiés précédemment sur l'essai biaxial, les essais uniaxiaux et triaxiaux associés sont simulés. On notera que les bétons de l'essai biaxial et uniaxial ont été confectionnés à partir de la même gâchée, ce qui n'est pas le cas du béton de l'essai triaxial utilisé. La comparaison entre les évolutions simulées et expérimentales des déformations de fluage propre est effectuée dans la Figure III-11 et la Figure III-12 pour l'essai uniaxial et l'essai triaxial, respectivement.

Il est à rappeler que la déformation de fluage propre latérale n'a pas été reportée dans la Figure III-11 puisque les auteurs n'ont pas mesuré cette déformation. On constate sur cette figure que la déformation uniaxiale est correctement décrite, en utilisant les paramètres identifiés précédemment sur l'essai biaxial.

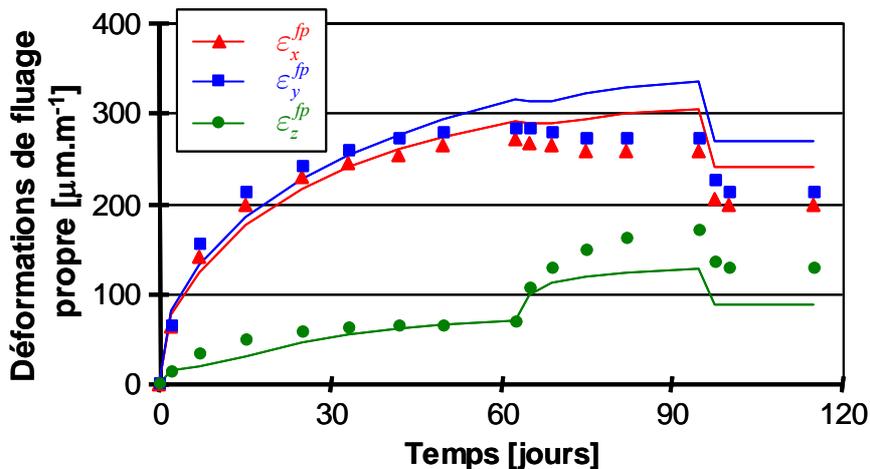


Figure III-12 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées des déformations de fluage propre pour l'essai triaxial.

On constate à nouveau que les paramètres identifiés lors de l'essai biaxial permettent de reproduire correctement, l'évolution des déformations de fluage propre de l'essai triaxial. L'écart observé après 60 jours entre les courbes expérimentales et simulées reste limité, au regard de la dispersion des mesures expérimentales (Clément et Le Maou 2000). Ainsi, le modèle est capable de reproduire correctement les caractéristiques principales de la déformation de fluage propre, dans le cas du passage de sollicitations multiaxiales à des sollicitations uniaxiales et vice-versa (Benboudjema 1999).

III-3 Simulations à l'échelle de la structure

Dans cette partie, le comportement en configuration non homogène est étudié, dans l'objectif de valider la modélisation adoptée.

Dans un premier temps, on étudie l'effet du séchage sur les caractéristiques mécaniques (résistance en traction, résistance en compression, module d'Young). L'objectif est de vérifier si le modèle adopté est apte à décrire qualitativement les effets du séchage sur les caractéristiques mécaniques des bétons, au-delà de la reproduction exacte des résultats expérimentaux. De plus, cette étude permettra de mettre en évidence la nécessité d'introduire une loi gouvernant la dissipation des effets de la pression capillaire et de la pression de disjonction, dès qu'une fissuration se produit (Paragraphe § II-6.5).

Ensuite, l'effet combiné du séchage et de l'application d'un chargement mécanique uniaxial ou biaxial est étudié. L'objectif est de mettre en évidence, d'une part, le caractère orthotrope du coefficient de Poisson de fluage, et, d'autre part, l'influence du chargement mécanique sur le faciès de fissuration. Les résultats expérimentaux de Ross (1954) seront utilisés.

Puis, une analyse précise du comportement hydromécanique du béton est menée, dans de multiples configurations d'essais. Pour cela, les résultats expérimentaux de séchage, de retrait et de fluage obtenus par Granger (1996), sur différentes compositions de béton, seront utilisés. La comparaison entre les résultats expérimentaux et simulés permettra en outre de vérifier si le modèle est apte à décrire le comportement hydromécanique des bétons pour différentes compositions.

Enfin, les paramètres identifiés précédemment sur éprouvette seront utilisés pour analyser et prédire le comportement d'une structure : l'enceinte de confinement du bâtiment réacteur nucléaire de Civaux B11.

III-3.1 Étude des effets du séchage sur le comportement mécanique

Les résultats expérimentaux mettent en évidence que le séchage modifie le comportement mécanique des bétons. D'une part, les propriétés mécaniques en compression et en traction sont sensibles à l'ambiance de conservation (voir le paragraphe § I-3.1.3.2). L'étude numérique de ce comportement fait l'objet du premier paragraphe. D'autre part le comportement devient orthotrope (voir le paragraphe § I-3.1.3.2). Ce comportement fait l'objet d'une étude dans le deuxième paragraphe.

III-3.1.1 Évolutions des résistances en compression et en traction

L'analyse bibliographique menée dans le paragraphe § I-3.1.3.2 a montré que les résistances en compression et en traction sont affectées par le séchage. Les résultats ont été obtenus par différents auteurs, pour différentes configurations. Nous avons choisi d'utiliser les résultats expérimentaux de Bourgeois et *al.* (2002, D = 110 mm, H = 220 mm) en compression et ceux de Fouré (1985, D = 80 mm, H = 120 mm) en traction. Les géométries et le maillage adopté sont reportées dans la Figure III-13. Les résultats expérimentaux, relatifs au séchage, au comportement post-pic en compression et en traction, au retrait et au fluage ne sont pas disponibles. Seuls Bourgeois et *al.* (2002) donnent les résultats sur le séchage et la réponse post-pic en compression. Ainsi, les valeurs des paramètres du matériau sont choisies identiques à celles du béton de Civaux B11 (voir le paragraphe § III-3.3). Ce choix permettra, d'une part, d'obtenir des résultats réalistes et, d'autre part, d'avoir des valeurs identiques pour les deux bétons étudiés.

On notera que, pour des raisons de symétrie, seule la ½ partie supérieure a été maillée pour les simulations numériques.

Des simulations numériques sont effectuées pour un chargement mécanique en compression ou en traction, pour différentes configurations de séchage.

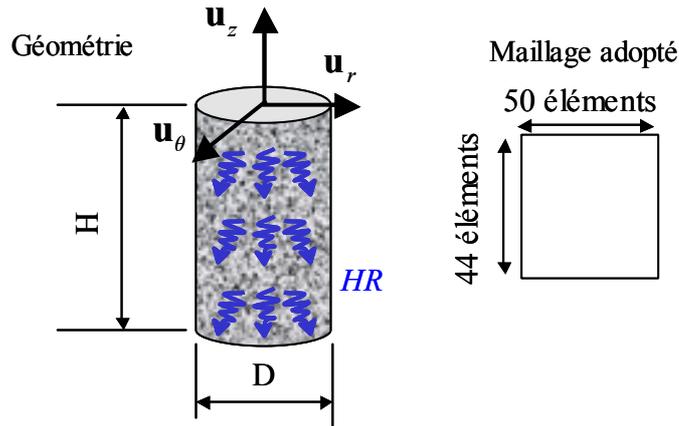


Figure III-13 Géométrie et maillage éléments finis des éprouvettes (calcul axisymétrique).

III-3.1.1.1 Évolution de la résistance en compression et en traction

Tout d'abord, des simulations numériques sont menées en imposant une humidité relative extérieure égale à 50 % (l'éprouvette est initialement saturée), autorisant une distribution non homogène à l'intérieur de l'éprouvette. Après que les éprouvettes ont séché pendant une durée donnée (5 j, 15 j, 28 j, 50 j ou 70 j), des simulations d'essais de compression et de traction sont effectuées pour déterminer les résistances mécaniques à la rupture. Ces simulations sont effectuées avec deux modèles.

Le premier modèle (avec p_{sol}) est le modèle développé dans le cadre de ce travail, intégrant l'effet de la pression capillaire et de la pression de disjonction. Afin de juger de l'influence des paramètres α_c et α_t (traduisant la dissipation des effets des pressions sus-mentionnées), trois valeurs pour chacun des deux paramètres sont utilisées (Tableau III-14).

Tableau III-7 Valeurs des paramètres du modèle de fissuration EPEO¹².

α_c	α_t
0,5 & 1 & 2	1 & 5 & 10

Le deuxième modèle (sans p_{sol}) est le modèle de fissuration EPEO, associé au modèle de retrait de dessiccation linéaire (voir l'équation I-42 du paragraphe § I-4.3.1.1) :

$$\dot{\epsilon}^{rd} = k_{rd}^C \dot{C} \mathbf{1} \quad (\text{III-4})$$

Les résultats obtenus avec le deuxième modèle permettront de voir l'effet de la fissuration, induite par le séchage, sur les résistances mécaniques. La comparaison des résultats obtenus avec ces deux modèles permettra alors de montrer l'effet de la pression capillaire et la pression de disjonction sur les résistances mécaniques.

Les évolutions de la résistance en compression, obtenues avec ces deux modèles, en fonction de la durée de séchage, sont comparées aux résultats expérimentaux de Bourgeois et al. (2002) dans la Figure III-14.

¹² Élastoplastique endommageable orthotrope (modèle développé dans le cadre de ce travail et présenté dans le paragraphe § II-3).

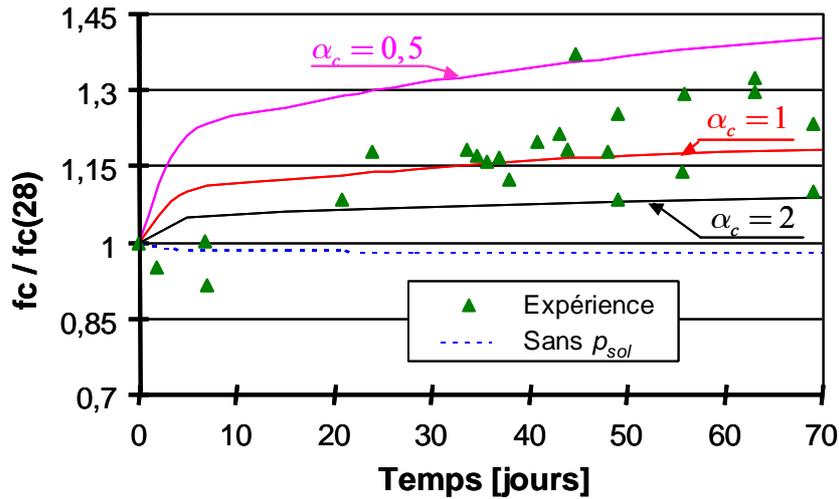


Figure III-14 Évolutions de la résistance en compression en fonction de la durée de séchage préalable (humidité relative extérieure égale à 50 %).

On observe sur cette figure que le modèle développé décrit une augmentation de la résistance de l'éprouvette lorsque celle-ci a préalablement séché, en accord avec les résultats expérimentaux. L'augmentation de la résistance en compression est alors contrôlée par le paramètre α_c . L'effet de la fissuration, induite par le séchage, semble faible au vu des résultats obtenus avec le modèle sans p_{sol} , pour lequel on observe une faible chute de résistance.

Les évolutions de la résistance en traction, obtenues avec les deux modèles, sont comparées avec les résultats expérimentaux de Fouré (1985) dans la Figure III-15.

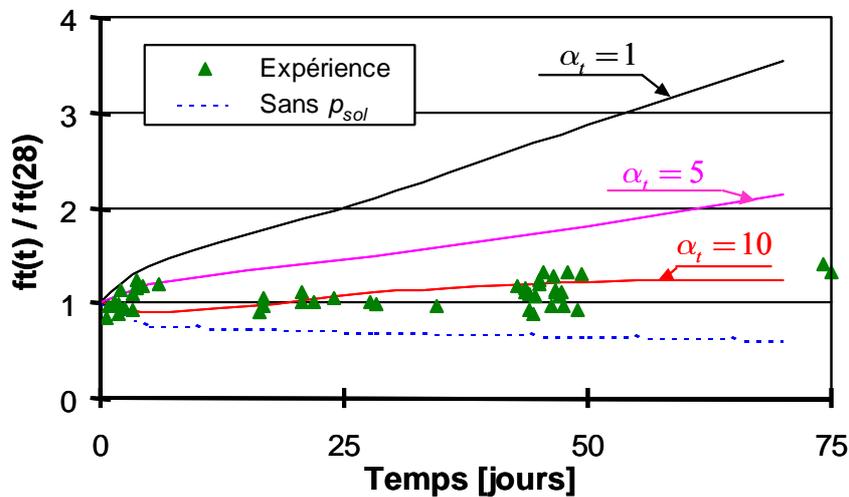


Figure III-15 Évolutions de la résistance en traction en fonction de la durée de séchage préalable (humidité relative extérieure égale à 50 %).

Dans le cas de la traction, on observe que la réponse du modèle est sensible à la valeur du paramètre α_t . Dans le cas où $\alpha_t = 10$, le modèle décrit une augmentation de la résistance, pour une durée de séchage supérieure à une vingtaine de jours. En début de séchage, on observe plutôt une diminution brève de la résistance, liée à l'occurrence rapide d'une microfissuration de peau. Pour les deux autres valeurs du paramètre α_t , le modèle décrit une augmentation continue et importante de la résistance en traction. Cette augmentation est beaucoup plus importante, que celle prédite par les résultats expérimentaux. Dans le cas où

l'effet de la pression capillaire et de la pression de disjonction ne sont pas considérés (modèle sans p_{sol}), une chute marquée de la résistance en traction est obtenue (environ 40 % après 70 jours de séchage). Ceci montre le rôle important joué par la fissuration induite dans le cas de la traction.

Dans le cas de l'application du chargement de compression, après 28 jours de séchage, les iso-valeurs de l'endommagement en compression au pic de contraintes sont reportés dans la Figure III-16 pour les deux modèles étudiés.

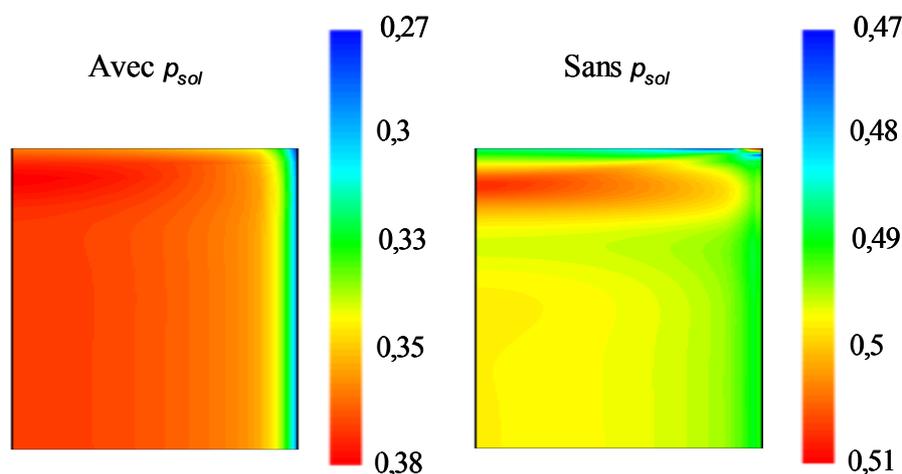


Figure III-16 Iso-valeurs de l'endommagement en compression après 28 jours de séchage pour deux différentes modélisations (humidité relative extérieure égale à 50 %).

Tout d'abord, on constate que les deux faciès des iso-valeurs de la variable d'endommagement de compression sont différents, en terme de distribution et d'amplitude. Dans les deux cas, on observe que la variable d'endommagement est plus importante à quelques millimètres du bord libre supérieur. Le séchage différentiel induit à cet endroit une concentration des déformations irréversibles. Ainsi, le séchage induit un gradient de contraintes et de déformations, qui complique l'interprétation des essais de compression et de traction (van Vliet et van Mier 2000, van Mier et van Vliet 2002).

III-3.1.1.2 Courbes contraintes-déformations pour différentes valeurs d'humidité relative interne

Il s'agit de retrouver la réponse uniaxiale (traction, compression) du matériau pour différentes valeurs de l'humidité relative. Pour cela, les valeurs d'humidité relative sont imposées de façon homogène dans l'éprouvette. Les valeurs des paramètres de couplage retrait de dessiccation - fissuration utilisées sont $\alpha_c = 1$ et $\alpha_t = 10$. Les courbes contraintes – déformations obtenues dans ces conditions sont données dans la Figure III-17 et la Figure III-18, dans le cas d'un chargement en compression et en traction, respectivement.

On constate alors, qu'un séchage homogène préalable à l'application d'un chargement mécanique (en compression ou en traction), augmente sensiblement la résistance à la rupture, la déformation au pic associée et la ductilité du matériau.

Dans le cas de la compression, l'augmentation de résistance est d'environ 40 % si l'humidité relative interne est égale à 50 % (valeur homogène). Cette valeur est plus importante que celle observée dans le premier cas simulé, où l'humidité relative est non homogène au sein de l'éprouvette (humidité extérieure égale à 50 %). Cet écart peut s'expliquer par le fait que la résistance apparente, de la zone où l'humidité relative n'a pas

encore atteint la valeur d'équilibre (50 %) dans le cas non homogène, est plus faible, conduisant à une résistance globale de l'éprouvette plus faible.

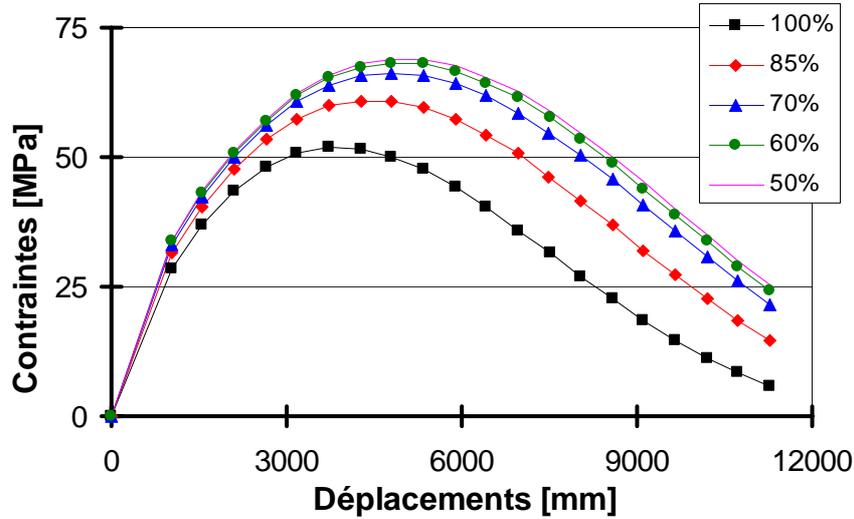


Figure III-17 Courbes contraintes-déformations en compression, pour différentes valeurs d'humidité relative (HR homogène dans l'éprouvette).

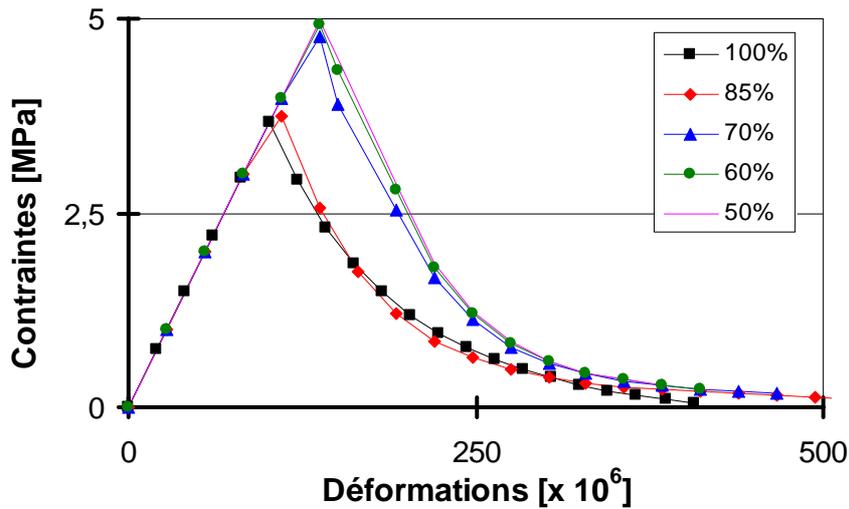


Figure III-18 Courbes contraintes-déformations en traction, pour différentes valeurs d'humidité relative (HR homogène dans l'éprouvette).

Les raisons de ces augmentations de résistance sont différentes suivant la nature de la sollicitation. En effet, la relation liant les contraintes apparentes σ , aux contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ et aux contraintes appliquées par les fluides sur le squelette solide σ^{sol} (liées à la pression capillaire et à la pression de disjonction) s'écrit (équation II-136) :

$$\sigma = (1 - \phi) (1 - D) \cdot \tilde{\sigma} - [1 - (1 - \phi) (1 - D)] \cdot \sigma^{sol} \quad (III-5)$$

Les contraintes σ^{sol} sont des contraintes de compression. Dans le cas d'un chargement en traction, elles agissent comme une précontrainte, qui augmente la résistance apparente par rapport à celle obtenue lorsque le béton est saturé (la résistance effective est invariable). Il est à noter, que la résistance apparente en traction obtenue serait supérieure à 60 MPa (à 50 %

HR), si la loi de dissipation des effets de la pression capillaire et des effets de la pression de disjonction n'avait pas été incorporée (équation II-138).

Dans le cas de la compression, le critère de Drucker-Prager est adopté (équation II-35) :

$$F_c(\tilde{\sigma}, \kappa_c) = \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{3 J_2(\tilde{\sigma})} + \alpha_f I_1(\tilde{\sigma}) \right] - \tilde{\tau}_c(\kappa_c) = 0 \quad (\text{III-6})$$

En compression, les contraintes σ^{sol} interviennent à travers le premier invariant $I_1(\tilde{\sigma})$. Le matériau étant soumis à un état de contraintes triaxiales en compression, les contraintes σ^{sol} produisent un confinement. Le confinement induit alors une augmentation sensible de la contrainte de rupture apparente en compression (la résistance effective est invariable) par rapport à celle obtenue sur une éprouvette saturée. Cet effet est d'autant plus important que les contraintes de confinement sont importantes (et donc que l'humidité relative diminue). Du point de vue expérimental, l'étude bibliographique a rappelé que la contrainte de rupture des bétons est plus élevée, si le confinement initial est important (voir le paragraphe § I-3.2.1.3).

Dans le cas du chargement en compression à une humidité relative interne égale à 50 %, les évolutions de la contrainte apparente σ_{zz} , des contraintes effectives $\tilde{\sigma}_{zz}$ et $\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ sont reportées dans la Figure III-19.

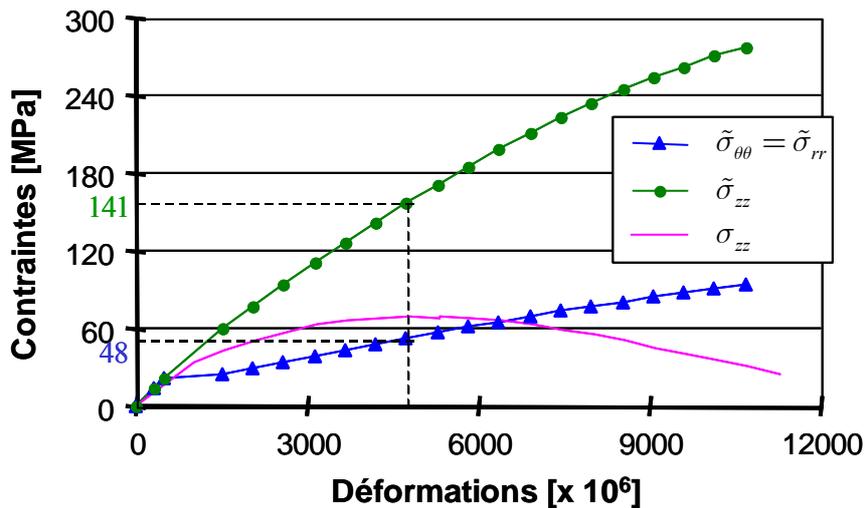


Figure III-19 Évolutions de la contrainte apparente σ_{zz} , des contraintes effectives $\tilde{\sigma}_{zz}$ et $\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, dans le cas d'un essai de compression, pour une humidité relative de 50 %.

On observe sur cette figure une amplitude importante des contraintes effectives (et notamment la contrainte $\tilde{\sigma}_{zz}$), par rapport aux contraintes apparentes appliquées. Les amplitudes des contraintes effectives obtenues restent néanmoins réalistes. En effet, pour un béton saturé, la contrainte expérimentale de rupture observée σ_{zz}^{rup} est environ égale à 220 MPa pour un confinement latéral $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 50$ MPa (Figure I-13b, Neville 2000). Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que celles mesurées dans ces simulations au pic de la contrainte σ_{zz} ($\tilde{\sigma}_{zz} = 141$ MPa et $\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta} = 48$ MPa). L'effet de confinement sous les contraintes σ^{sol} , dans l'espace des contraintes effectives, est alors très significatif.

III-3.1.2 Comportement orthotrope induit

Les résultats expérimentaux mettent en évidence que le séchage dans une direction préférentielle induit un comportement orthotrope du béton (Bourgeois et *al.* 2001, Paragraphe § I-3.1.3.2).

Il s'agit de vérifier si le modèle de fissuration utilisé (EPEO) permet de décrire le comportement orthotrope dû au séchage dans une direction privilégiée. Le retrait étant considéré comme isotrope, ce comportement est essentiellement imputé à l'effet structural induit. Ainsi, ce test permettra de connaître les capacités du modèle de fissuration adopté à reproduire les effets structuraux, ce qui signifie une identification plus précise du comportement intrinsèque.

Pour cela, une simulation numérique sur un spécimen en béton rectangulaire a été menée ($40 \times 40 \text{ mm}^2$). Le maillage adopté est constitué de 20×20 éléments. Les calculs ont été effectués pour une configuration de contraintes planes. Les paramètres gouvernant le séchage et le comportement mécanique sont identiques à ceux du béton de Civaux B11 (voir le paragraphe § III-3.3). La configuration simulée est similaire à celle testée par Bourgeois et *al.* (2001) sur un béton différent. L'utilisation du béton de Civaux B11 est liée à l'impossibilité d'identifier l'ensemble des paramètres du modèle développé pour le béton utilisé par les auteurs Bourgeois et *al.* (2001).

L'éprouvette est tout d'abord soumise à un séchage sur la surface de droite uniquement, pendant une durée de 1 an à une humidité relative ambiante égale à 60 % (Phase ①, Figure III-20). Ensuite, elle est soumise à un chargement biaxial jusqu'à une contrainte égale à 40 MPa dans chacune des directions, puis complètement déchargée (Phase ②, Figure III-20).

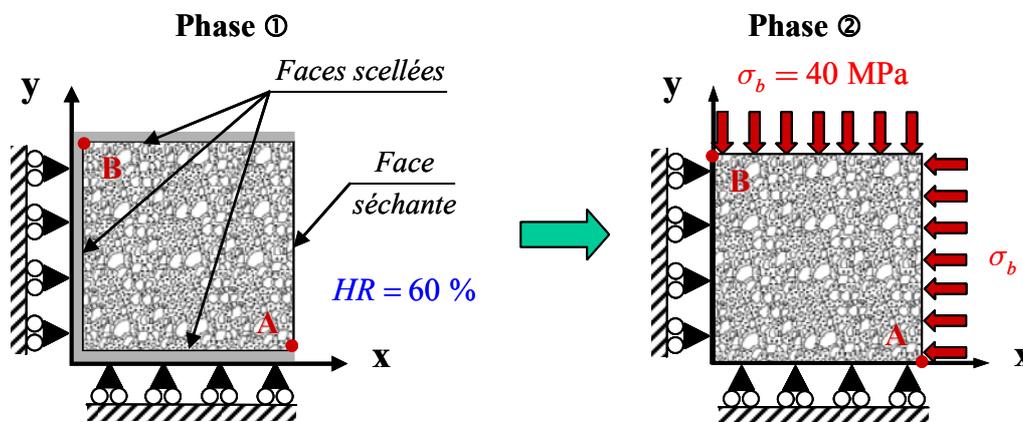


Figure III-20 Géométrie et conditions aux limites durant la phase de séchage ① et la phase de chargement ② (calcul en contraintes planes).

Nous ne donnons que les résultats concernant la phase ②, puisque nous nous focalisons uniquement sur l'orthotropie induite par la fissuration. Ainsi, les courbes contraintes-déformations relatives sont données dans la Figure III-21 dans chacune des directions chargées. Les déformations relatives $\Delta\varepsilon_{xx}$ et $\Delta\varepsilon_{yy}$ sont obtenues en soustrayant les déformations obtenues à la fin du processus de séchage (phase ①) des déformations totales.

Cette figure met en évidence une différence dans le comportement mécanique du béton selon la direction considérée. Ainsi, le béton apparaît plus dégradé dans la direction perpendiculaire à la direction de séchage. En effet, la raideur initiale est plus faible et les déformations irréversibles ont une plus grande amplitude dans la direction y (que dans la direction x).

Ces résultats numériques sont similaires qualitativement à ceux obtenus lors des essais expérimentaux de Bourgeois et *al.* (2001, Figure I-10).

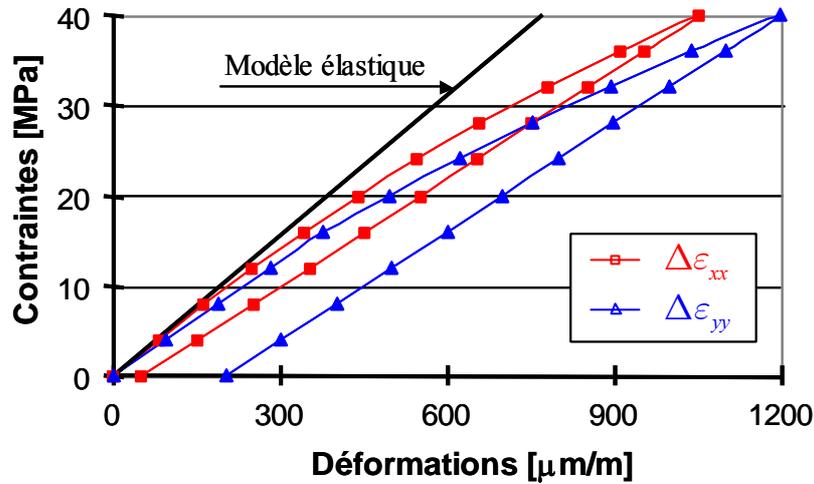


Figure III-21 Évolution des contraintes de compression appliquées en fonction des déformations relatives, dans chacune des directions chargées.

III-3.2 Étude du comportement différé sous des sollicitations biaxiales

L'objectif des simulations numériques effectuées dans cette partie est de valider le modèle développé dans le cas d'un chargement mécanique (uniaxial et biaxial) et hydrique simultanés. Pour cela, les essais expérimentaux de Ross (1954) sont utilisés. Les simulations menées permettront également de mettre en évidence les principales caractéristiques du comportement du béton dans cette configuration de chargement.

III-3.2.1 Description des essais

Les éprouvettes de béton sont de forme parallélépipédique, de dimension 15,2 cm × 15,2 cm × 5 cm. Les conditions de symétrie permettent d'effectuer le calcul numérique sur un huitième de l'éprouvette uniquement, en adoptant les conditions aux limites reportées sur la Figure III-22. Le maillage adopté (12 × 12 × 12 éléments) est reporté sur la même figure.

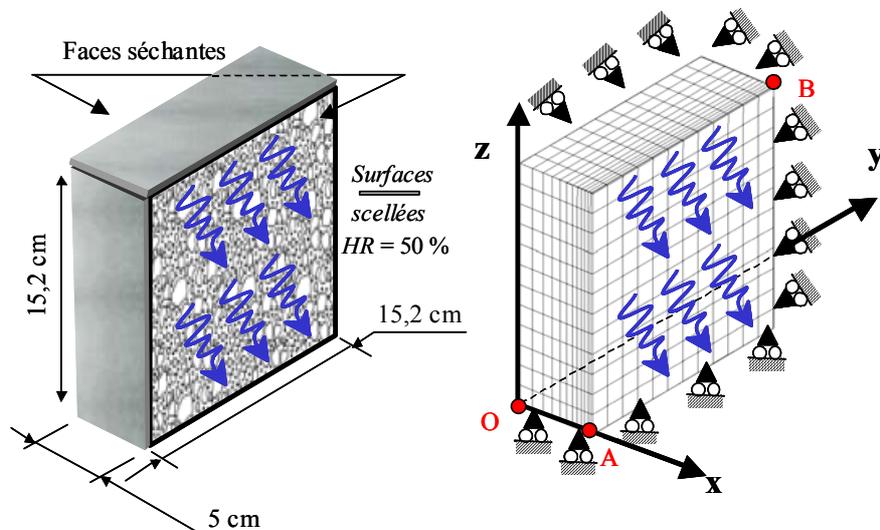


Figure III-22 Géométrie des éprouvettes des essais, conditions aux limites adoptées pour les simulations et maillage adopté.

Lors de la série étudiée, l'auteur a procédé à un essai de séchage seul, un essai de fluage en compression uniaxiale avec séchage et un essai de fluage en compression biaxiale avec séchage. Ces essais ont permis alors de quantifier les déformations de fluage (propre et de dessiccation).

L'éprouvette sèche suivant les deux faces opposées non chargées. La composition adoptée du béton et les conditions de conservation des éprouvettes sont reportées dans le Tableau III-8.

Tableau III-8 Composition des éprouvettes et conditions de conservation (Ross 1954).

e/c	0,5
s/c	2
g/c	2
D_{max}	9,5 mm
E_{28} [GPa]	27,6 – 33,6
$\nu_{elastique}$	0,15 – 0,26
Âge de chargement	21 jours

Lors des essais de fluage uniaxiaux et biaxiaux, les contraintes appliquées sont reportées sur la Figure III-23.

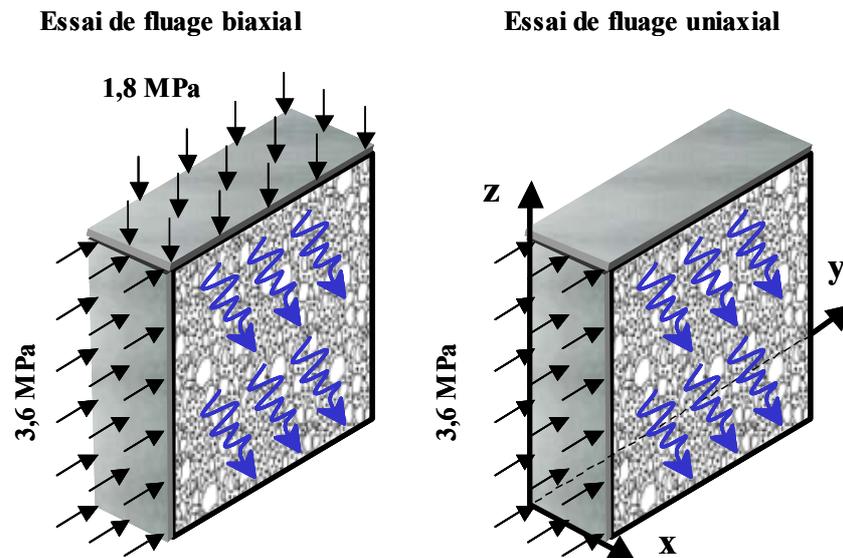


Figure III-23 Contraintes appliquées lors des essais (Ross 1954).

III-3.2.2 Simulation des essais de déformations différées

III-3.2.2.1 Évolutions des déformations

Les expériences menées par Ross (1954) ne permettent pas l'identification des paramètres gouvernant le séchage (l'évolution expérimentale de la perte en masse n'est pas disponible) et gouvernant la dégradation mécanique du matériau (les courbes contraintes-déformations ne sont pas disponibles). Par conséquent, ces paramètres sont choisis identiques à ceux du béton de Civaux B11 (voir le Tableau III-13), étant donné que leurs compositions sont proches

(Tableau III-8 et Tableau III-10). De même, les paramètres de la courbe post-pic en traction et en compression sont choisis identiques (voir le Tableau III-14).

Les paramètres des modèles de retrait de dessiccation et de fluage propre sphérique sont, dans un premier temps, identifiés sur l'essai de retrait de dessiccation. En effet, le fluage de dessiccation et le fluage propre déviatorique n'influencent pas de façon significative la déformation de retrait de dessiccation. Puis, les paramètres des modèles de fluage de dessiccation et de fluage propre déviatorique sont identifiés à partir des mesures des déformations différées de l'essai de fluage biaxial. Les valeurs obtenues sont regroupées dans le Tableau III-9.

Tableau III-9 Valeurs des paramètres de fluage propre et de dessiccation.

Fluage propre : partie sphérique			
k_r^{sph} [MPa]	k_i^{sph} [MPa]	η_r^{sph} [MPa.s]	η_i^{sph} [MPa.s]
$2,28 \times 10^5$	$4,91 \times 10^4$	$4,8 \times 10^{10}$	$6,86 \times 10^{11}$
Fluage propre : partie déviatorique			
k_r^{dev} [MPa]	η_r^{dev} [MPa.s]	η_i^{dev} [MPa.s]	
$2,86 \times 10^4$	$3,36 \times 10^{10}$	$1,8 \times 10^{12}$	
α_{rd}	Fluage de dessiccation	k^{fd} [MPa]	η^{fd} [MPa.s]
0,65		15	5×10^4

Ensuite, l'évolution de la déformation différée lors de l'essai de fluage uniaxial est simulée et comparée à l'évolution expérimentale dans la Figure III-24. Les évolutions des déformations différées pour l'essai de retrait de dessiccation et l'essai de fluage biaxial sont également reportées.

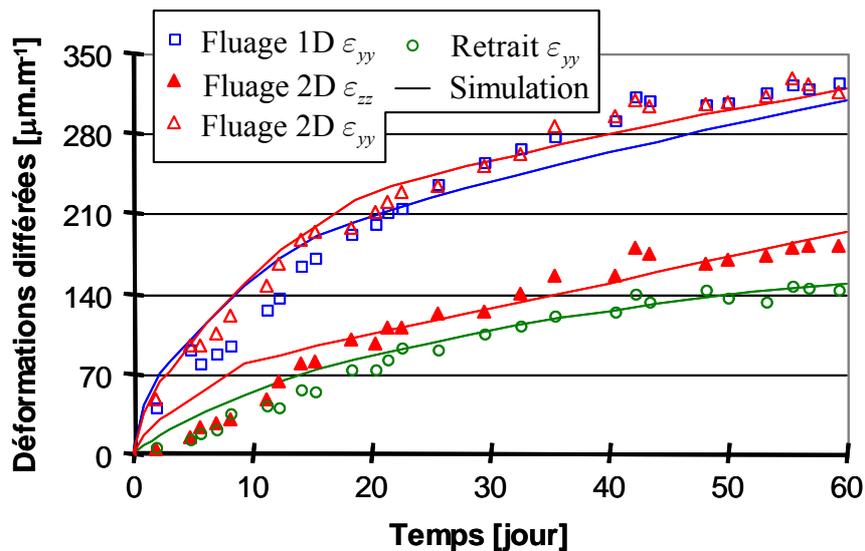


Figure III-24 Évolutions numériques et expérimentales des déformations différées lors des essais de retrait de dessiccation, de fluage uniaxial (1D) et biaxial (2D).

On peut constater que les amplitudes et les cinétiques sont reproduites correctement avec les mêmes paramètres quel que soit l'essai considéré.

Dans la littérature, les calculs de fluage multiaxiaux sont conventionnellement effectués en supposant un coefficient de Poisson de fluage égal à 0,2. L'analyse bibliographique menée dans le paragraphe § I-3.4.4.1 a montré qu'il s'agit d'une hypothèse forte qui n'a pas de justification physique. L'évolution du coefficient de Poisson de fluage (incluant le fluage propre et le fluage de dessiccation) est calculée à partir des résultats expérimentaux de l'essai de fluage biaxial, puis comparée à l'évolution obtenue avec le modèle proposé. Tout d'abord, nous rappelons les équations utilisées pour calculer le coefficient de Poisson de fluage.

La déformation de fluage longitudinale $\varepsilon_u^{flu}(t)$ sous des contraintes uniaxiales σ_u est définie par la relation :

$$\varepsilon_u^{flu}(t) = J(t) \sigma_u \quad (III-7)$$

où $J(t)$ est la complaisance de fluage.

Sous des sollicitations multiaxiales et par analogie avec la loi d'élasticité de Hooke, la déformation de fluage est définie par la relation :

$$\varepsilon_i^{flu} = J(t) \left[\sigma_i - \nu_i^{flu} (\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (III-8)$$

où ε_i^{flu} et σ_i sont les déformations de fluage et les contraintes dans la direction i , respectivement, et ν_i^{flu} est le coefficient de Poisson de fluage dans la direction i . On notera que la complaisance de fluage est choisie identique quel que soit le chargement.

Le coefficient de Poisson de fluage s'écrit donc :

$$\nu_i^{flu} = \frac{\sigma_i - \varepsilon_i^{flu} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u^{flu}}}{\sigma_j + \sigma_k} \quad (III-9)$$

où σ_j et σ_k sont les contraintes dans les directions orthogonales à la direction i .

Tout d'abord, les déformations de fluage sont obtenues en retranchant classiquement les déformations de retrait de dessiccation des déformations différées totales. Ensuite, les coefficients de Poisson de fluage sont calculés, pour l'essai biaxial, à l'aide de l'équation III-9. Les évolutions expérimentales et numériques sont alors comparées sur la Figure III-25.

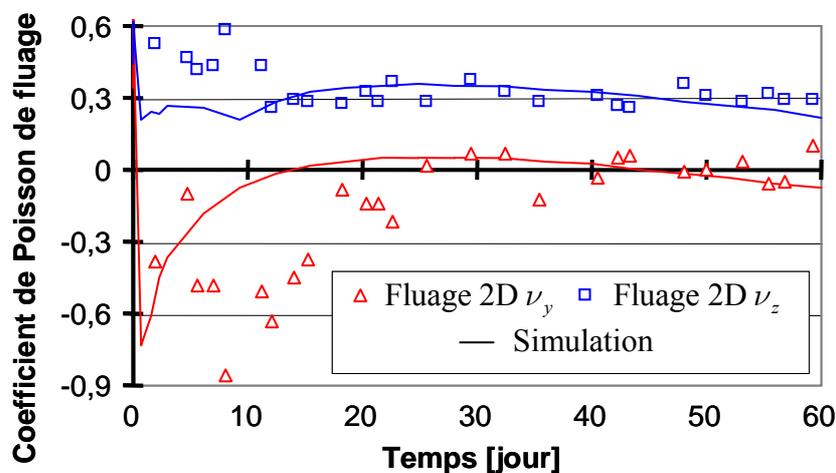


Figure III-25 Évolutions expérimentales et numériques du coefficient de Poisson de fluage.

La Figure III-25 met en évidence clairement que, d'une part, le coefficient de Poisson de fluage n'est pas constant dans le temps, et, d'autre part, qu'il est orthotrope. Ainsi, l'hypothèse d'un coefficient de Poisson de fluage constant et isotrope adoptée dans la littérature n'est pas justifiée. Il est à noter qu'une variation du coefficient de Poisson de fluage dans l'intervalle 0 – 0,2 peut induire une variation des déformations de fluage estimées à entre 17 % et 39 % (dans les conditions données en **Annexe A**).

III-3.2.2.2 Évolutions des contraintes et de l'endommagement

Les distributions des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} après 60 jours d'essai sont reportées dans la Figure III-26 dans le cas de l'essai biaxial.

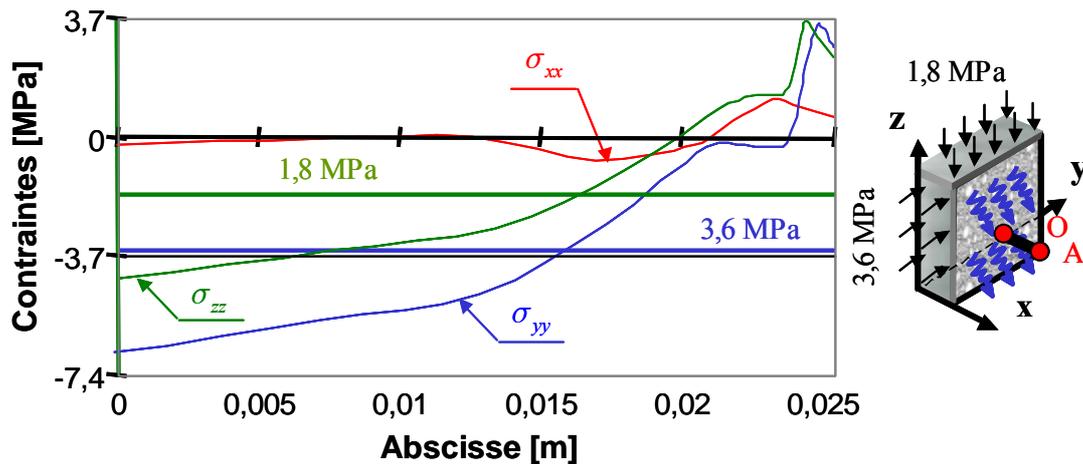


Figure III-26 Distribution des contraintes à 60 jours le long du segment [OA].

Les simulations numériques montrent que les valeurs de la contrainte σ_{xx} sont peu affectées par le séchage. Ce n'est pas le cas dans les deux autres directions. En effet, on constate que les contraintes σ_{yy} et σ_{zz} sont fortement hétérogènes dans l'éprouvette. En cœur, le matériau est soumis à des contraintes de compression, supérieures à la contrainte initialement appliquée. En surface, le matériau est soumis à des contraintes de traction, qui atteignent la résistance en traction, induisant ainsi une fissuration en surface. Ainsi, l'occurrence de la fissuration et le caractère hétérogène du champ de contraintes contribuent à perturber la valeur du coefficient de Poisson apparent (voir la Figure III-25).

Ensuite, les iso-valeurs de l'endommagement dans les directions y et z , sont donnés dans la Figure III-27 dans le cas du séchage seul, après 60 jours. On peut remarquer que les faciès de fissuration obtenus, bien qu'orthotrope, sont similaires.

L'application d'un chargement de compression biaxial conduit à une modification importante des iso-valeurs de l'endommagement (Figure III-28).

On constate, d'une part, que l'amplitude des valeurs d'endommagement D_y et D_z est beaucoup plus faible que dans le cas de l'essai de retrait de dessiccation. En effet, l'application du chargement de compression réduit la fissuration de la structure en peau. D'autre part, le faciès de fissuration est complètement différent. En effet, lors de l'essai de retrait de dessiccation, on peut constater que les valeurs des variables d'endommagement D_y et D_z sont identiques dans la zone ①. Ce n'est plus le cas de l'essai de fluage biaxial, où ces valeurs sont différentes. Ainsi, il apparaît que le séchage induit un faciès de fissuration orthotrope, qui dépend fortement des conditions aux limites appliquées sur la structure.

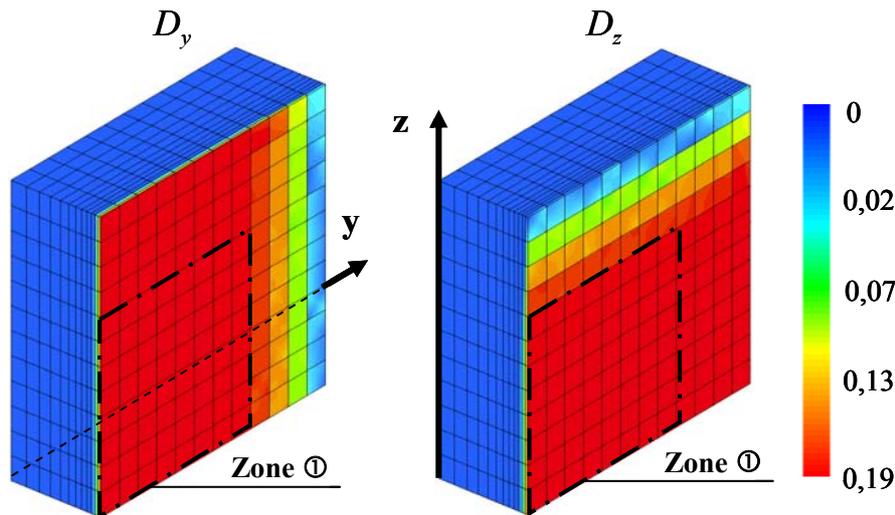


Figure III-27 Iso-valeurs de la variable d'endommagement lors de l'essai de retrait de dessiccation après 60 jours dans les directions y et z .

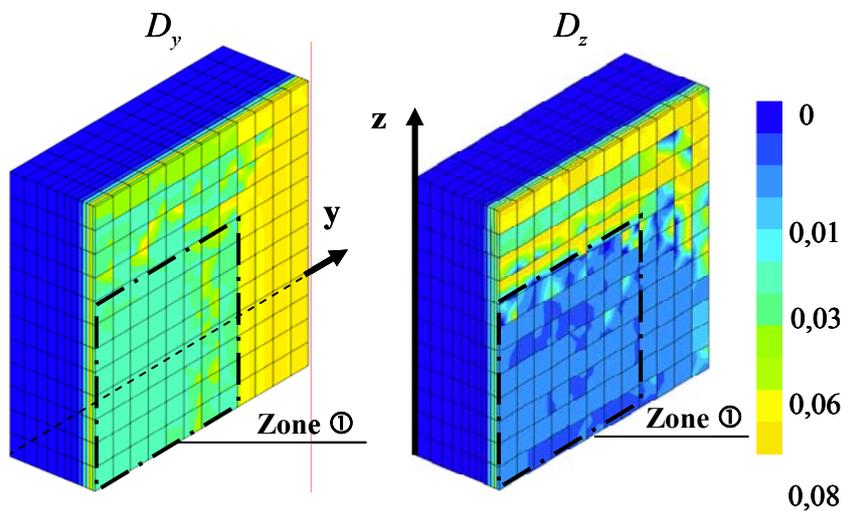


Figure III-28 Iso-valeurs de la variable d'endommagement lors de l'essai de fluage biaxial après 60 jours dans les directions y et z .

III-3.3 Analyse des effets intrinsèques et structuraux induits par la dessiccation

Dans ce paragraphe, la pertinence de la modélisation adoptée est illustrée à travers les résultats expérimentaux de Granger (1996) sur 4 bétons de compositions différentes. Pour chacune des compositions, nous disposons des valeurs des principales caractéristiques mécaniques, ainsi que des évolutions de la perte en masse, de la déformation de retrait de dessiccation, de la déformation de fluage propre et de la déformation différée totale. Ainsi, ces résultats expérimentaux serviront à l'identification des paramètres du modèle. Ce travail d'identification permettra l'analyse précise des contributions de chaque composante de la déformation différée.

III-3.3.1 Description des essais

Les 4 formulations de béton étudiées sont reportées dans le Tableau III-10 (Granger 1996).

Tableau III-10 Composition des bétons étudiés (Granger 1996).

Béton	Eau [kg.m ⁻³]	Ciment [kg.m ⁻³]	Graviers [kg.m ⁻³]	Sable [kg.m ⁻³]	Fillers [kg]	Fumée de silice [kg]	Adjuvant [kg.m ⁻³]
Civaux B11	195	350	1100	637	142	0	1,225
Civaux BHP	161	266	1133	629	201	40	10
Flamanville	180	375	1040	743	51	0	1,5
Penly	202	350	1012	591	60	0	1,15

Les expériences ont été effectuées sur un béton âgé de 28 jours, et conservé préalablement en auto-dessiccation. La salle d'essai est contrôlée en température (20°C ± 1°C) et en humidité relative (50 % ± 5 %). Les caractéristiques mécaniques mesurées par Granger (1996) sont données dans le Tableau III-11.

Tableau III-11 Caractéristiques mécaniques des 4 bétons étudiés (Granger 1996).

Béton	E [GPa]	ν	f_t [MPa]	f_c [MPa]
Civaux B11	33,7	0,248	3,7	49,6
Civaux BHP	39,5	0,245	3,8	75,7
Flamanville	37,3	0,194	4	61,2
Penly	39,5	0,19	3,4	40,6

Afin de suivre l'évolution du séchage, les pertes en masse ont été mesurées sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 16 cm et de hauteur 15 cm. Ces éprouvettes ont été protégées contre la dessiccation en face inférieure et supérieure afin d'assurer un séchage unidirectionnel (voir la Figure III-29a)

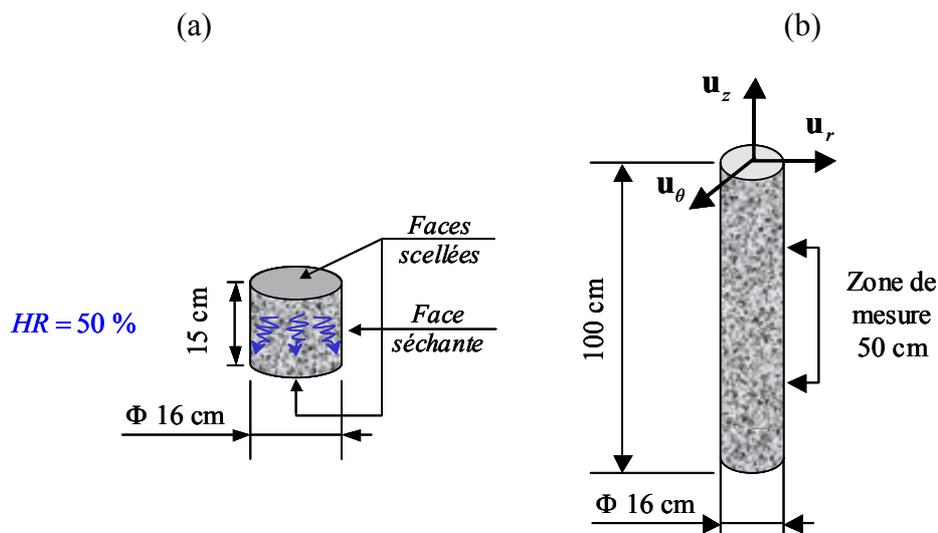


Figure III-29 Conditions aux limites, géométrie des éprouvettes et principe de mesure.

Les essais de retrait et de fluage ont été menés sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 16 cm et de hauteur 100 cm. Les déplacements ont été mesurés sur une base centrale de 50 cm, afin de s'affranchir des effets de bords (voir la Figure III-29b).

Pendant les essais de fluage propre et de fluage total, un effort de compression a été appliqué en tête, correspondant à une contrainte verticale de 12 MPa. Les conditions aux limites pour les différents essais étudiés sont regroupées dans la Figure III-30.

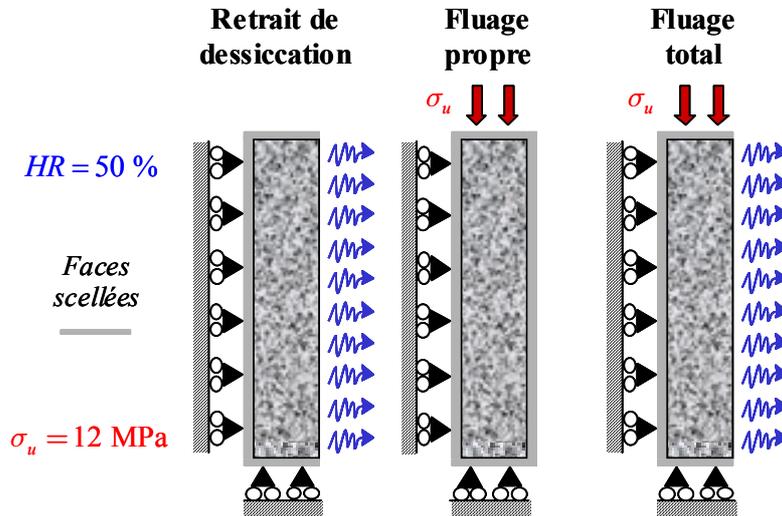


Figure III-30 Conditions aux limites des essais de retrait de dessiccation, de fluage propre et de fluage total.

Le maillage de référence (a) utilisé lors des différentes simulations est donné dans la Figure III-31. Afin de juger de l'influence du maillage sur le faciès de fissuration, des calculs avec le maillage (b) ont également été effectués dans le cas de l'essai de retrait de dessiccation. On notera que seule la $\frac{1}{2}$ partie supérieure a été maillée pour les simulations numériques, pour des raisons de symétrie.

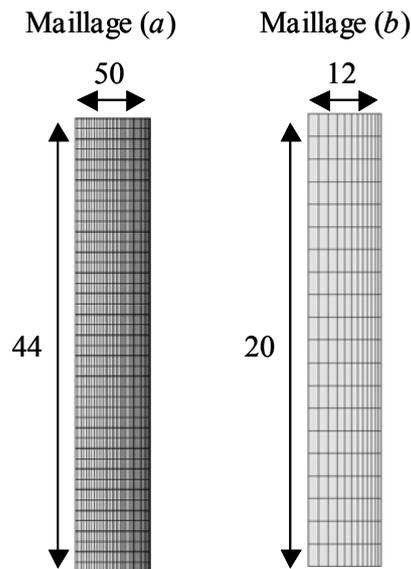


Figure III-31 Maillages adoptés lors des simulations numériques (calcul axisymétrique).

III-3.3.2 Essais de séchage

Les essais réalisés par Granger (1996) ne permettent pas d'identifier simultanément l'isotherme de désorption (modèle BSB) et le coefficient de diffusion. En effet, seules les évolutions de la perte en masse ont été mesurées. Ainsi, il est choisi de caler les paramètres du modèle BSB sur la courbe de désorption expérimentale, obtenue par Pihlajavaara (1974) pour un béton de rapport $e/c = 0,5$ (valeur proche des rapports e/c des bétons étudiés). Les valeurs obtenues sont reportées dans le Tableau III-12.

Tableau III-12 Valeurs des paramètres du modèle BSB.

Bétons	A	k	V_m [$l.m^{-3}$]
Civaux B11	1,3	0,61	74,1
Civaux BHP	1,3	0,61	63,7
Flamanville	1,3	0,61	60,8
Penly	1,3	0,61	76,3

L'isotherme de désorption identifiée est reportée dans la Figure III-32 avec les valeurs expérimentales.

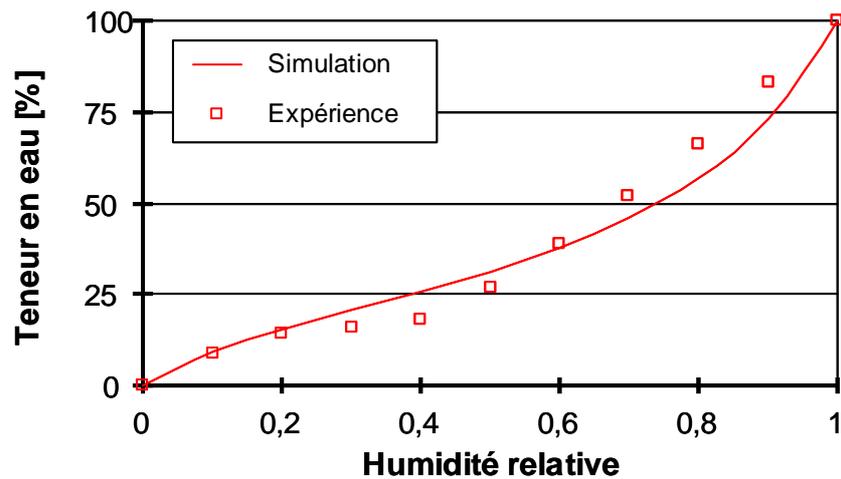


Figure III-32 Comparaison entre l'isotherme de désorption utilisée dans les simulations et celles obtenue par Pihlajavaara (1974).

Ensuite, le coefficient de diffusion est identifié de sorte à ce que la simulation de la perte en masse puisse correspondre, le plus précisément possible, à l'évolution expérimentale. Les valeurs des paramètres intervenant dans l'expression du coefficient de diffusion sont alors données dans le Tableau III-13 pour chaque composition de béton.

Tableau III-13 Valeurs des paramètres du coefficient de diffusion.

Béton	D_0 [$m^2.s^{-1}$]	a	b
Civaux B11	$6,09 \times 10^{-12}$	400	15
Civaux BHP	$1,69 \times 10^{-12}$	1000	18
Flamanville	$1,42 \times 10^{-12}$	470	8
Penly	$7,49 \times 10^{-12}$	360	9,5

Leurs évolutions en fonction de l'humidité relative sont reportées dans la Figure III-33.

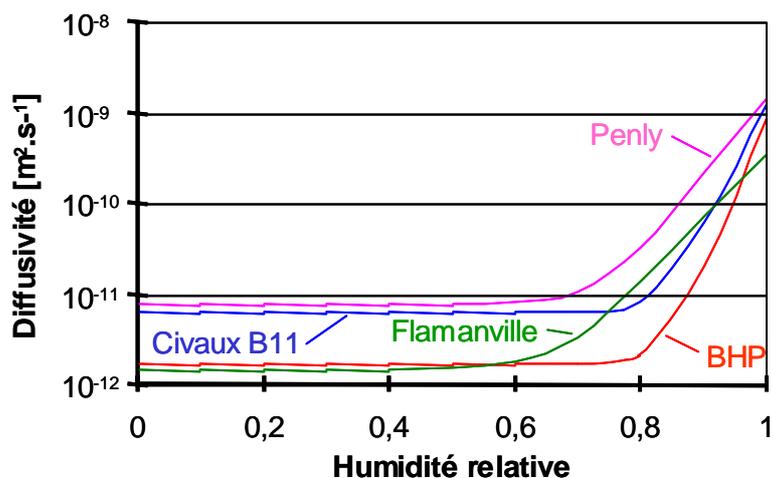


Figure III-33 Évolutions du coefficient de diffusion en fonction de l'humidité relative.

Les évolutions numériques de la perte en masse en fonction du temps, correspondant aux coefficients identifiés précédemment, sont comparées aux valeurs expérimentales dans la Figure III-34.

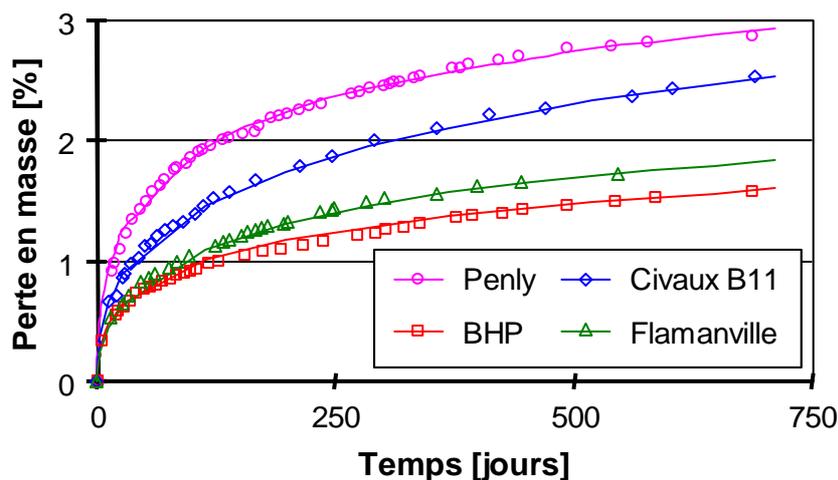


Figure III-34 Comparaison entre les évolutions numériques et expérimentales de la perte en masse.

Le calcul hydrique permet ainsi de retrouver les pertes en masse mesurées de sorte à ce que l'on puisse considérer que les distributions expérimentales et simulées de la teneur en eau au sein de l'éprouvette correspondent également. Or, ces distributions de la teneur en eau (ou de l'humidité relative) seront par la suite introduites dans le calcul mécanique. Nous pouvons alors considérer que l'erreur reste également faible en terme de distribution et que la teneur en eau en chaque point correspond à celle réellement existant dans l'éprouvette.

La Figure III-35 met en évidence l'existence d'un fort gradient de teneur en eau, en début de séchage. Ce gradient se dissipe progressivement par la suite. Ceci montre que le processus de séchage a lieu de façon fortement non homogène dans l'éprouvette.

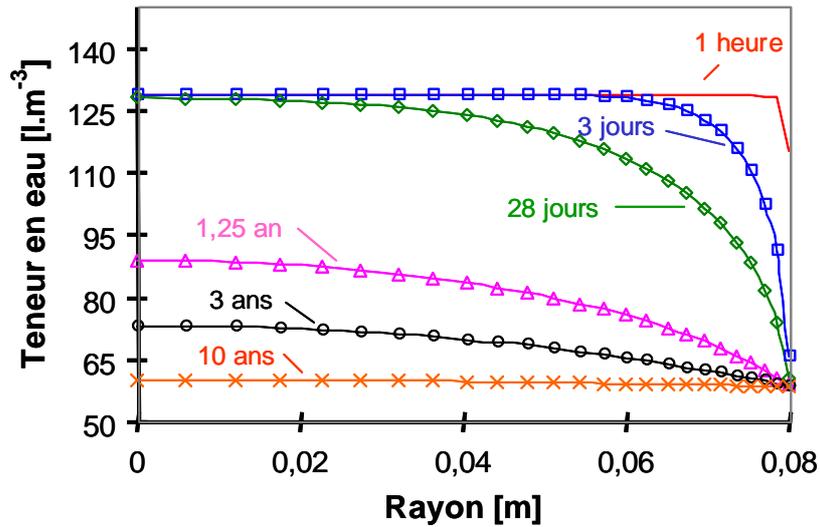


Figure III-35 Profil de teneur en eau à différents instants pour le béton de Civaux B11.

III-3.3.3 Comportement mécanique

L'analyse bibliographique a mis en évidence que le séchage s'accompagne d'une fissuration. Le modèle EPEO est alors utilisé pour décrire le comportement du béton fissuré. Afin d'étudier les caractéristiques (et les conséquences) de la fissuration induite par le séchage, des simulations numériques sont également menées avec un modèle d'endommagement élastique isotrope (modèle de Mazars, voir le paragraphe § I-4.2.1.2.2).

Ainsi, il est nécessaire de connaître le comportement expérimental post-pic des bétons étudiés en traction et en compression. Malheureusement, celui n'a pas été déterminé par Granger (1996). Par conséquent, nous avons identifié les paramètres des deux modèles, à partir des essais de Gopalaratnam et Shah (1985) en traction. La composition du béton utilisé par Gopalaratnam et Shah (1985, rapport $e/c = 0,45$, $s/c = g/c = 2$) est, en effet, relativement proche de celles des bétons étudiés (voir le Tableau III-10).

Le modèle EPEO nécessite la connaissance de l'énergie de fissuration en traction et en compression. Il est à noter que l'énergie de fissuration en traction peut être calculée, en l'absence de données expérimentales, à l'aide de l'expression proposée par le CEB-FIP (1990) :

$$G_{ft} = \left(2 + \frac{d_{\max}}{4} \right) f_c^{0,7} \quad (\text{III-10})$$

où d_{\max} est la taille du plus gros granulat.

Pour toutes les compositions de béton étudiées, la taille du plus gros granulat est de 25 mm (Granger 1996). Ainsi, l'utilisation de l'expression III-10 conduit à des valeurs de l'énergie de fissuration comprises entre 110 et 170 N.m^{-1} .

Néanmoins, nous avons utilisé une valeur identique pour toutes les simulations, correspondante à celle obtenue sur les essais de Gopalaratnam et Shah (1985), car ces essais présentent des décharges qui permettent d'identifier les paramètres b_t et $D_{t/2}$.

Les paramètres du modèle de fissuration en compression sont ceux d'un béton courant. Les valeurs obtenues sont reportées dans le Tableau III-14.

Tableau III-14 Valeurs des paramètres du modèle de fissuration EPEO.

G_{ft} [N.m ⁻¹]	G_{fc} [N.m ⁻¹]	α_f	α_g	α_c
78	7800	0,14	0,21	1
a_t	a_c	$D_{t/2}$	\bar{D}_c	α_t
-0,5	11,24	0,5	0,2	10

Les courbes contraintes-déformations (en traction) expérimentales et simulées sont alors comparées dans la Figure III-36.

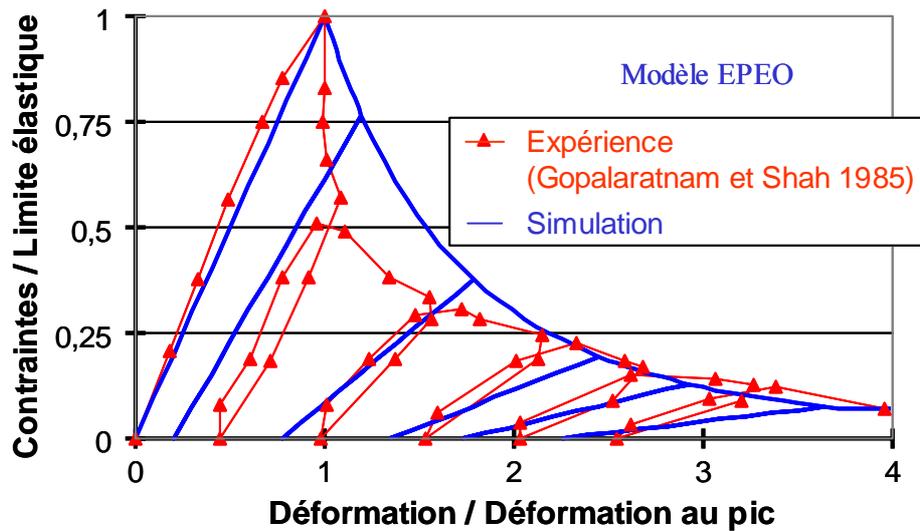


Figure III-36 Comparaison entre les courbes contraintes-déformations expérimentales et simulées (modèle EPEO), en traction.

Des simulations numériques avec le modèle d'endommagement élastique isotrope de Mazars (1984) sont également menées. Les paramètres du modèle en traction sont identifiés aussi à partir des essais de Gopalaratnam et Shah (1985). Les valeurs de ces paramètres sont reportées dans le Tableau III-15.

Tableau III-15 Valeurs des paramètres du modèle de fissuration de Mazars (1984).

A_t	B_t
0,95	21000

Les paramètres du modèle de Mazars en compression n'ont pas été identifiés, car les contraintes de compression ne dépassent jamais la limite élastique lors de l'essai de retrait de dessiccation (ce qui ne sera pas le cas de l'essai de fluage total). Les courbes contraintes-déformations expérimentales et simulées sont alors comparées dans la Figure III-37.

Une différence importante dans les réponses des deux modèles est observée en cas de décharge. En effet, la décharge est élastique avec le modèle d'endommagement élastique de Mazars. La fermeture des fissures est alors totale. Ce n'est pas le cas avec le modèle EPEO, où la fermeture des fissures n'est que partielle, en accord avec l'expérience. La réponse est caractérisée alors par une déformation irréversible, qui correspond à la déformation plastique.

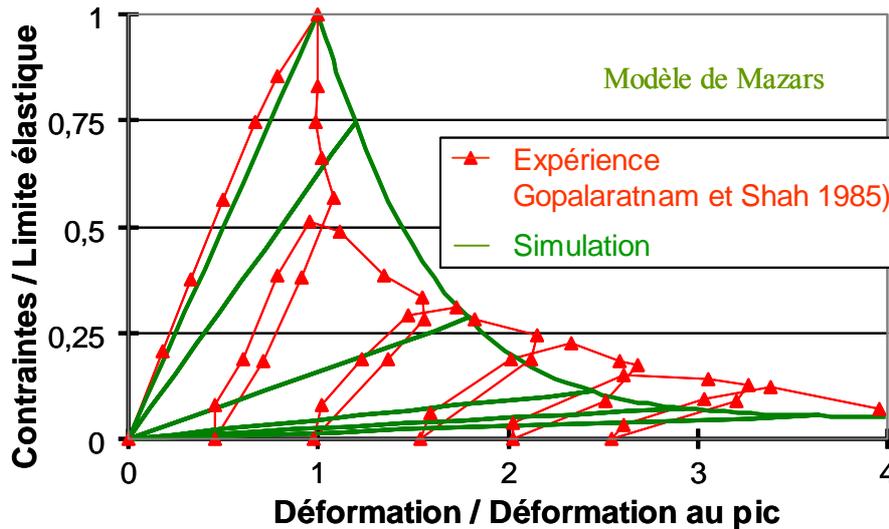


Figure III-37 Comparaison entre les courbes contraintes-déformations expérimentales et simulées (modèle de Mazars), en traction.

La confrontation des résultats obtenus lors des simulations numériques avec les modèles de Mazars et le modèle EPEO permettra alors de juger du rôle des déformations anélastiques sur le comportement différé du béton.

III-3.3.4 Essai de déformations différées

Les simulations numériques de fluage propre sont tout d'abord présentées. En effet, la composante de fluage propre ne présente pas d'effets structuraux. Ainsi, ces simulations permettront d'identifier les paramètres du modèle pour analyser par la suite le retrait et le fluage de dessiccation, pour lesquels des effets structuraux apparaissent.

III-1.1.1.1. Essai de fluage propre

Les paramètres gouvernant la déformation de fluage propre peuvent être identifiés séparément, à partir des résultats expérimentaux de fluage propre. Le Tableau III-16 présente les valeurs des paramètres de fluage propre utilisées pour les calculs.

On peut remarquer que les viscosités apparentes associées au fluage propre sphérique, obtenues pour le béton de Civaux BHP sont toujours supérieures à celles des autres bétons. En effet, le béton de Civaux BHP étant un béton à hautes performances, sa porosité est plus fine (Baroghel-Bouny et *al.* 2000). Ainsi, le parcours de l'eau est plus difficile, ce qui se traduit par une viscosité importante. De même, nous observons que la viscosité apparente η_i^{sph} est toujours supérieure à la viscosité apparente η_r^{sph} , telle que nous l'avons déduit à partir des caractéristiques de la microstructure de la pâte de ciment (voir le paragraphe § II-4.1.4.1). De même, la rigidité apparente k_r^{sph} est toujours supérieure à la viscosité apparente k_i^{sph} . En effet, la déformation de fluage propre irréversible a une amplitude bien plus importante que la déformation de fluage propre réversible.

Les résultats expérimentaux de Granger (1996) sont alors comparés à ceux issus des simulations dans la Figure III-

Tableau III-16 Valeurs des paramètres de fluage propre, identifiés à partir des résultats expérimentaux.

Partie sphérique				
Béton	k_r^{sph} [MPa]	k_i^{sph} [MPa]	η_r^{sph} [MPa.s]	η_i^{sph} [MPa.s]
Civaux B11	$1,2 \times 10^5$	$6,22 \times 10^4$	$2,21 \times 10^{10}$	$4,16 \times 10^{10}$
Civaux BHP	$4,02 \times 10^5$	$1,61 \times 10^5$	$1,92 \times 10^{11}$	$3,34 \times 10^{11}$
Flamanville	$2,06 \times 10^5$	$5,33 \times 10^4$	$2,08 \times 10^{10}$	$3,12 \times 10^{10}$
Penly	$1,72 \times 10^5$	$7,77 \times 10^4$	$5,95 \times 10^{10}$	$9,9 \times 10^{10}$
Partie déviatorique				
Béton	k_r^{dev} [MPa]	η_r^{dev} [MPa.s]	η_i^{dev} [MPa.s]	
Civaux B11	$3,86 \times 10^4$	$6,19 \times 10^{10}$	$1,64 \times 10^{12}$	
Civaux BHP	$3,86 \times 10^4$	$6,12 \times 10^{10}$	$6,08 \times 10^{12}$	
Flamanville	$6,83 \times 10^4$	$3,47 \times 10^{10}$	$1,3 \times 10^{12}$	
Penly	$7,5 \times 10^4$	1×10^{11}	$1,67 \times 10^{12}$	

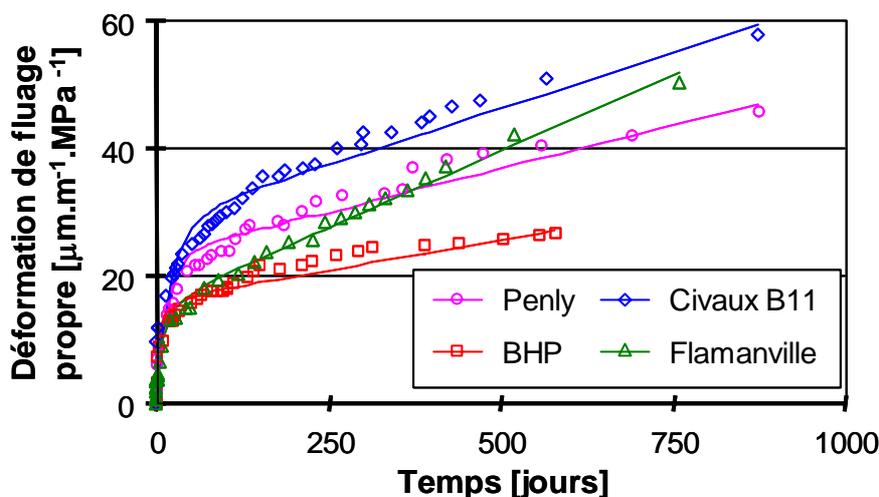


Figure III-38 Évolutions expérimentales et simulées des déformations verticales de fluage propre pour les 4 bétons étudiés.

On constate alors une bonne concordance entre les courbes expérimentales et numériques pour les différents bétons étudiés, à la fois à court terme et à long terme.

III-3.3.4.1 Essai de retrait de dessiccation

Dans un premier temps, les simulations numériques ont été menées en utilisant le modèle de retrait de dessiccation linéaire (équation I-41), associé à trois modèles de comportement : un modèle élastique linéaire isotrope, le modèle d'endommagement de Mazars (élastique isotrope) et le modèle EPEO. La comparaison entre les résultats des simulations effectuées avec le modèle élastique et les résultats des simulations effectuées avec les deux modèles de fissuration permettra de mettre évidence l'effet structural induit par le séchage, et d'en étudier les caractéristiques.

Le paramètre k_{rd}^C (équation I-41) gouvernant la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque est identifié sur la partie linéaire de la courbe expérimentale de retrait de dessiccation – perte en masse (Granger 1996). La valeur obtenue sur le béton de Civaux B11 est $k_{rd}^C = 1,22 \times 10^{-5}$.

Dans un deuxième temps, le modèle développé basé sur une approche unifiée du retrait de dessiccation et du fluage (modèle de retrait non linéaire) est utilisé en association avec le modèle EPEO. Le paramètre du modèle de retrait de dessiccation α_{rd} est aussi identifié à partir de la courbe expérimentale de retrait de dessiccation – perte en masse. Les valeurs obtenues sont indiquées dans le Tableau III-17. Les valeurs des paramètres du modèle de fluage propre sont reportées dans le Tableau III-16. Il est à noter que le fluage de dessiccation intrinsèque a une incidence négligeable sur l'évolution des déformations de retrait de dessiccation. Par conséquent, cette composante n'est pas considérée dans les calculs effectués.

Tableau III-17 Valeurs du paramètre du modèle de retrait de dessiccation non linéaire.

Béton	α_{rd}
Civaux B11	0,7
Civaux BHP	1,06
Flamanville	0,9
Penly	0,69

Tout d'abord, les résultats en terme de distribution de la variable d'endommagement et de distribution des contraintes sont étudiés. Ces résultats correspondent aux calculs effectués avec le modèle développé dans ce travail (modèle EPEO associé au modèle de retrait non linéaire) et uniquement dans le cas du béton de Civaux B11. Ces résultats permettront l'analyse précise, par la suite, des évolutions de la déformation de retrait de dessiccation.

III-3.3.4.1.1 Iso-valeurs de la variable d'endommagement

La micro-fissuration induite par le séchage est observée à travers les iso-valeurs de la variable d'endommagement. Les variables d'endommagement de traction D_t^{zz} et $D_t^{\theta\theta}$ sont tracées dans la Figure III-39, pour le maillage (a) de la Figure III-31, après 3 ans de séchage. Afin de vérifier que le taille des éléments finis n'affecte pas la distribution de l'endommagement, les variables d'endommagement de traction D_t^{zz} et $D_t^{\theta\theta}$ sont également reportées dans la même figure pour le maillage (b) de la Figure III-31 (dans les mêmes conditions).

Il est à noter que les variables d'endommagement en compression D_c et en traction D_t^{rr} ont une contribution nulle.

La fissuration observée dans les directions perpendiculaires aux vecteurs \mathbf{u}_z et \mathbf{u}_θ , est relativement homogène et identique sur toute la hauteur, excepté au niveau du bord libre supérieur. En effet, le séchage de l'éprouvette induit une déformation de contraction isotrope en peau, homogène sur toute la hauteur. Alors que les déformations radiales se produisent librement, les déformations verticales et orthoradiales sont empêchées par le cœur (qui n'est pas affecté à ce moment par le séchage).

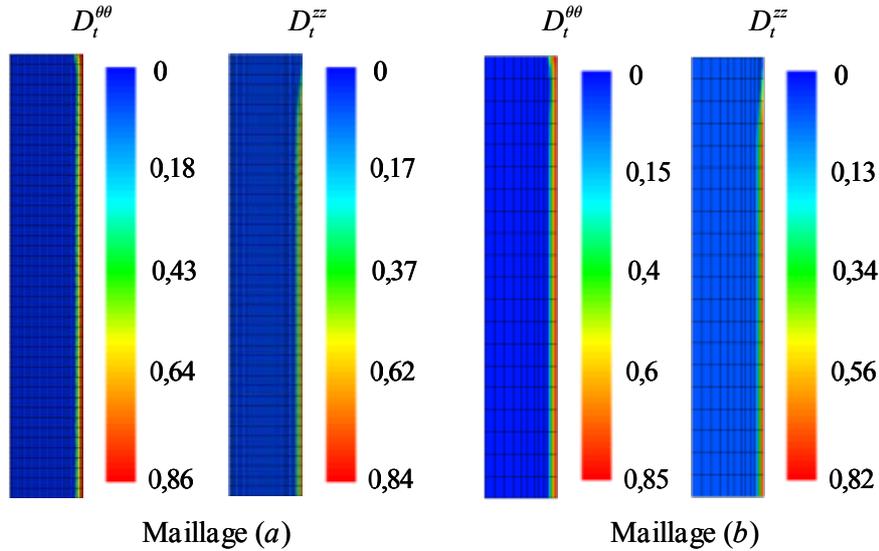


Figure III-39 Iso-valeurs des variables d'endommagement D_t^{zz} et $D_t^{\theta\theta}$ obtenus avec le maillage (a) et le maillage (b) de la Figure III-31, après 3 ans de séchage.

On peut observer, en outre, que les iso-valeurs obtenus avec les deux maillages (a) et (b) sont similaires (en terme d'amplitude et de distribution spatiale). Une étude numérique plus détaillée de la sensibilité au maillage (influence de la taille et du type des éléments finis) le met aussi en évidence lorsque le modèle EPEO est associé au modèle de retrait de dessiccation linéaire (voir Benboudjema et *al.* 2002).

Cette fissuration n'est pas très pénétrante et se développe rapidement : la profondeur de la micro-fissuration est de 3 mm après 3 jours (voir la Figure III-40), puis elle se stabilise à sa taille maximale (11 mm) après quelques mois. En outre, la valeur maximale de la variable d'endommagement D_t^{zz} est de 0,84.

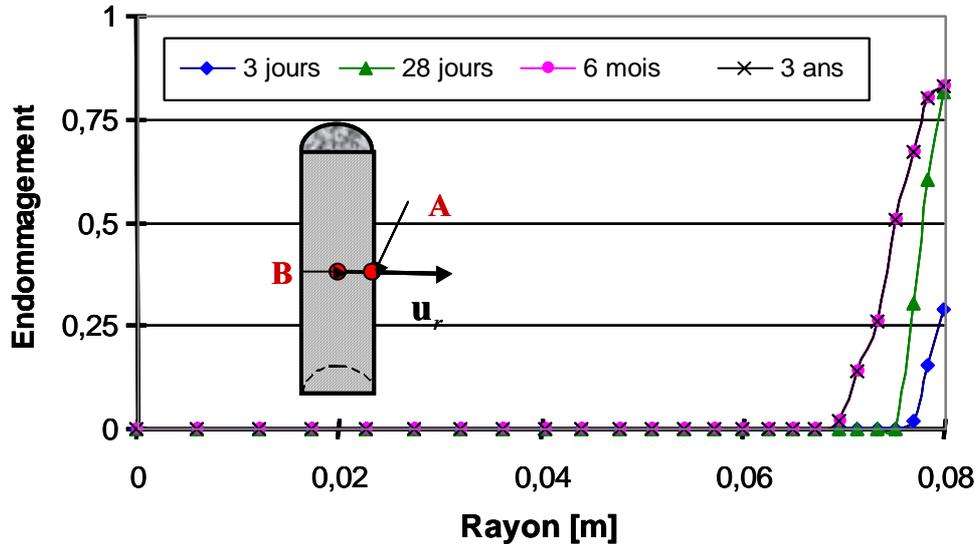


Figure III-40 Distribution de la variable d'endommagement D_t^{zz} à différents instants pour le béton de Civaux B11.

En utilisant le modèle de retrait de dessiccation linéaire (équation I-41), l'épaisseur endommagée obtenue est beaucoup plus importante (entre 16 et 36 mm avec le modèle EPEO et entre 24 et 53 mm pour le modèle de Mazars, Benboudjema et *al.* 2002), que celle obtenue

lors des calculs avec le modèle développé. Il est à noter que l'écart entre ces deux épaisseurs dégradées est lié à l'évolution différente de l'endommagement selon le modèle de fissuration adopté (dégradation différente du module d'Young lors des déchargements post-pic, visible sur la Figure III-36 et la Figure III-37).

De plus, la valeur maximale de la variable d'endommagement est proche de l'unité. Ce résultat est imputé au fait que l'effet fluage propre n'est pas considéré dans le modèle de retrait de dessiccation linéaire. En effet, la déformation de fluage propre relaxe les auto-contraintes induites par le séchage et diminue donc la micro-fissuration.

La valeur élevée de l'endommagement indique alors que l'éprouvette est alors fortement dégradée sous l'effet du séchage seul. Or, l'analyse bibliographique menée dans le paragraphe § I-3.1.3.1 ne supporte pas cette idée. En effet, le séchage n'induit que des micro-fissures, dont l'ouverture est typiquement inférieure à 50 μm .

Ainsi, il est important de prendre en compte la déformation de fluage propre lors des simulations numériques de retrait, si la connaissance précise de l'endommagement au sein de l'éprouvette est requise.

III-3.3.4.1.2 Distribution des contraintes

Les distributions des contraintes σ_{zz} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont données dans les Figures III-41 et III-42 respectivement. Ces résultats ont été obtenus sur le béton de Civaux B11 et en utilisant le modèle de retrait non linéaire développé. Il est à noter que les contraintes σ_{rr} restent faibles, et n'induisent pas de fissuration.

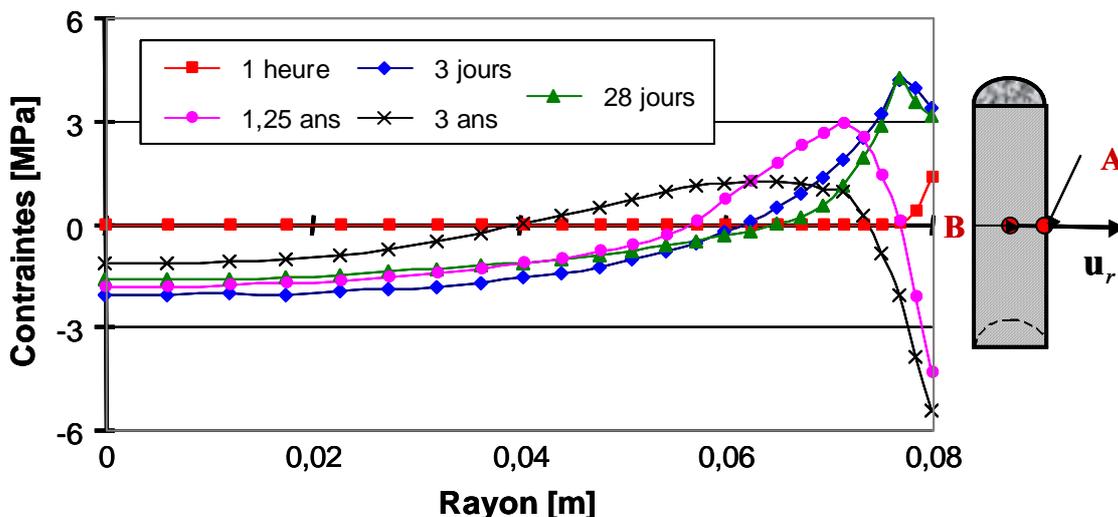


Figure III-41 Distribution des contraintes σ_{zz} le long du segment [BA].

Les Figures III-41 et III-42 mettent en évidence un état de contraintes fortement non homogène au sein de l'éprouvette, durant toute la période de séchage. Des contraintes de traction en peau et de compression en cœur apparaissent en début de séchage. Ces auto-contraintes sont à l'origine de la micro-fissuration de peau qui apparaît dans les directions $\theta\theta$ et zz dès le début du séchage (voir la Figure III-39), après que la résistance en traction a été atteinte. En fin de séchage, le signe des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} s'inversent. Ainsi, des contraintes de traction apparaissent à mi-épaisseur et des contraintes de compression apparaissent en peau de l'éprouvette, fermant alors partiellement, les micro-fissures préalablement créées.

Il est à noter que ce n'est pas le cas avec le modèle de Mazars, où les contraintes générées par le séchage se dissipent progressivement, tendant vers une distribution homogène et nulle (Meftah et al. 2000). Ceci s'explique par le fait qu'avec le modèle de Mazars, les fissures se ferment complètement sans contraintes résiduelles en fin de séchage.

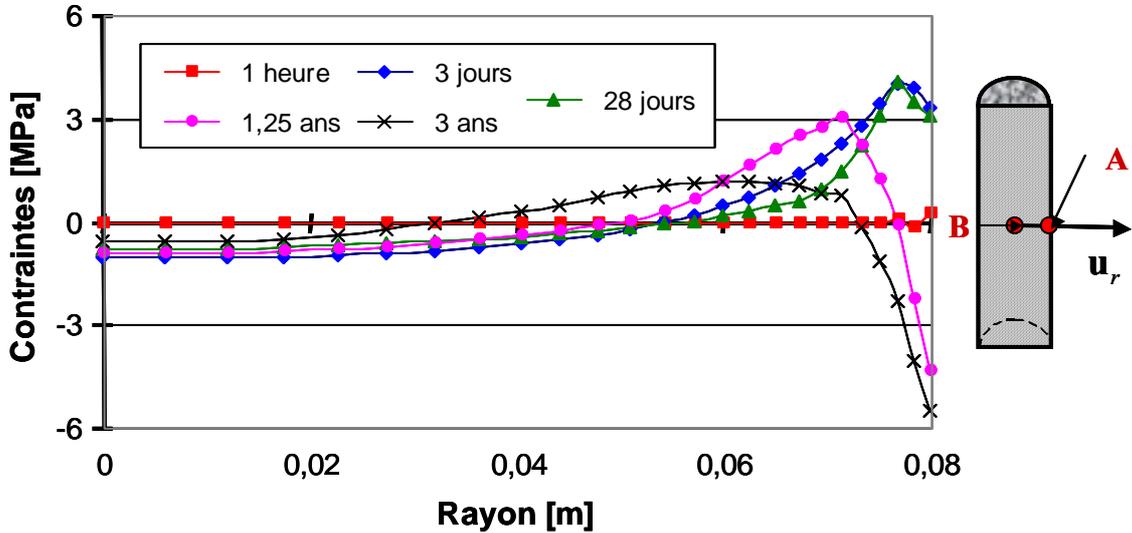


Figure III-42 Distribution des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ le long du segment [BA].

III-3.3.4.1.3 Déformations de l'éprouvette

Les déformées obtenues après 3 jours, 28 jours et 3 ans de séchage sont reportées sur la Figure III-43, dans le cas de la modélisation adoptée, pour le béton de Civaux B11.

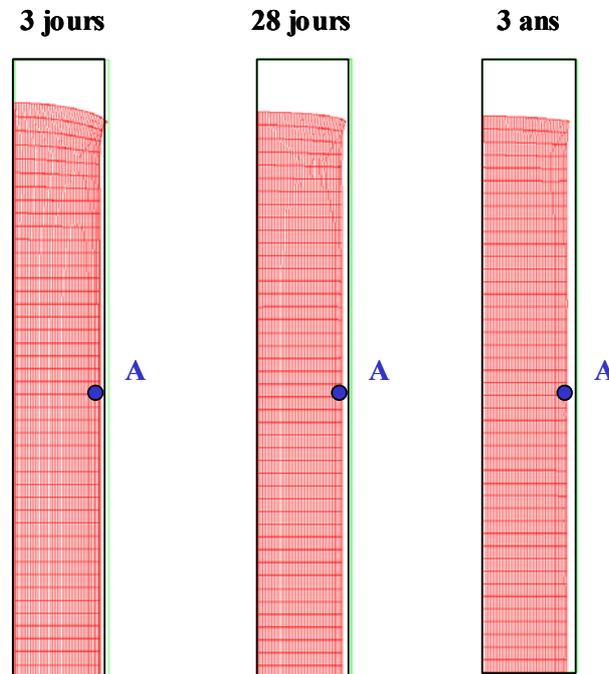


Figure III-43 Déformées obtenues après 3 jours, 28 jours et 3 ans de séchage pour le modèle EPEO.

Les déformées obtenues mettent en évidence une contraction plus importante de l'éprouvette en peau au niveau du bord libre supérieur en début de séchage. Ce résultat est cohérent, puisque la teneur en eau chute rapidement en peau de l'éprouvette. Ensuite, on

constate que la différence de contraction entre le cœur et la peau de l'éprouvette se résorbe progressivement. Elles mettent également en évidence une déformation homogène de l'éprouvette sur la base de mesure.

Des simulations numériques, sont alors effectuées avec le modèle élastique ou le modèle de Mazars, associé au modèle de retrait de dessiccation linéaire. Les résultats de ces simulations sont confrontés aux résultats expérimentaux dans la Figure III-44. Afin d'obtenir, une présentation claire, les résultats ne sont présentés que pour le béton de Civaux B11 (les résultats obtenus avec les autres compositions de béton sont similaires à ceux présentés ici).

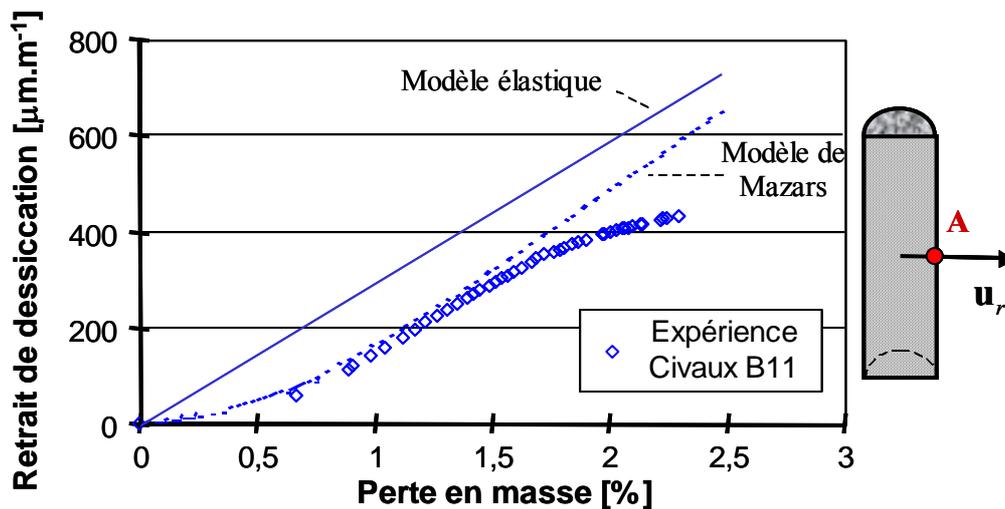


Figure III-44 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées de la déformation de retrait au point A (modèle élastique ou modèle de Mazars associé au modèle de retrait linéaire).

Il apparaît clairement sur cette figure que la déformation expérimentale de retrait de dessiccation présente les trois zones distinctes, que nous avons explicitées dans le paragraphe § I-3.3.3.2.1 : une zone dormante, puis une zone linéaire et enfin une zone asymptotique. On constate que l'utilisation d'un modèle élastique et d'un modèle de retrait de dessiccation linéaire ne permet pas de retrouver l'occurrence de ces trois zones. En effet, la déformation de retrait de dessiccation évolue linéairement en fonction de la perte en masse.

Par contre, l'utilisation du modèle de Mazars ou du modèle EPEO (Figure III-45) permet de restituer correctement la zone dormante et la zone linéaire. Ces simulations valident les hypothèses émises par Granger (1996) sur l'origine de ces deux zones (rappelée dans le paragraphe § I-3.3.3.2.1) :

- La zone dormante : les simulations numériques ont montré l'occurrence d'une microfissuration (voir la Figure III-40). Cette microfissuration masque alors partiellement la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque. Ainsi, la zone dormante correspond uniquement à un effet de peau ;
- La zone linéaire : le gradient de contraintes s'atténue au fur et à mesure que la cinétique de séchage ralentit. La microfissuration de peau n'évolue plus (voir la Figure III-40). La réponse obtenue avec le modèle de Mazars s'écarte alors de la réponse expérimentale et tend asymptotiquement vers la solution élastique. En effet, les fissures se ferment progressivement, ce qui se traduit dans le modèle de Mazars par un déchargement élastique. On observe une réponse différente avec le modèle EPEO. Les fissures ne se ferment que partiellement. En effet, le comportement est caractérisé par l'occurrence d'une déformation anélastique. Ceci se traduit par une déformation de retrait de dessiccation proportionnelle à la perte en masse.

Néanmoins, le modèle EPEO associé au modèle de retrait linéaire ne parvient pas à reproduire correctement la phase asymptotique. Ainsi, la phase asymptotique ne peut être expliquée par le seul effet de la fermeture partielle des fissures en fin de séchage, comme cela est suggéré par Granger (1996).

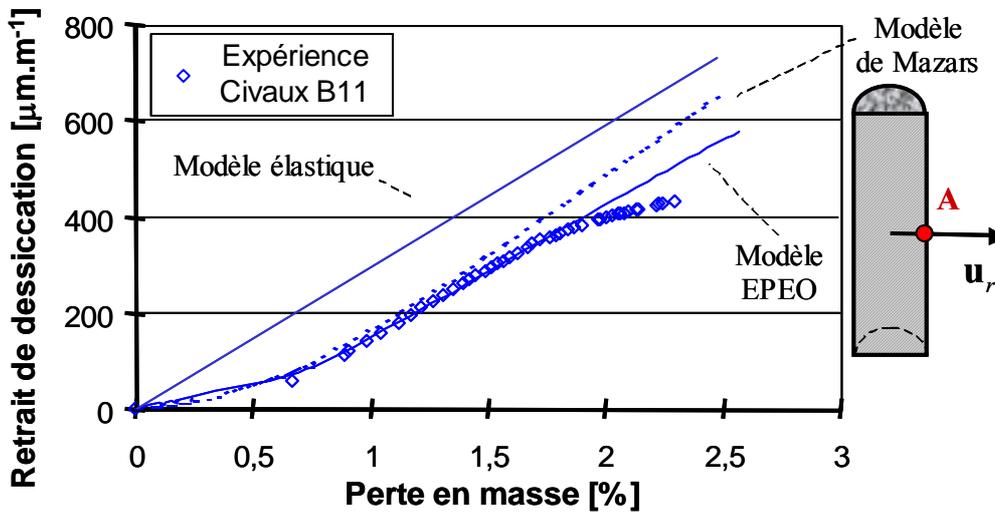


Figure III-45 Comparaison entre l'évolution expérimentale et les évolutions simulées du retrait au point A (modèle élastique, de Mazars ou EPEO associé au modèle de retrait linéaire).

Le modèle de retrait développé basé sur les mécanismes de pression capillaire et de pression de disjonction (modèle de retrait non linéaire) est ensuite utilisé en association avec le modèle EPEO (Figure III-46).

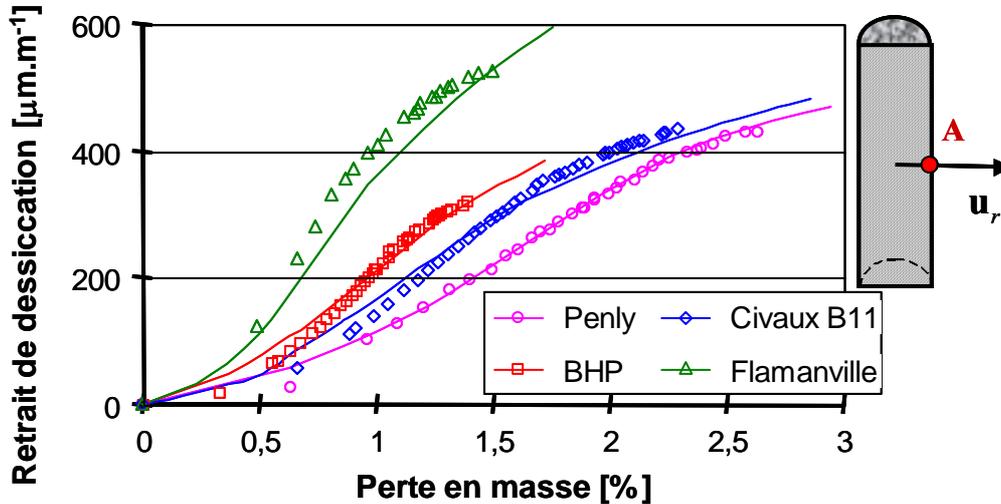


Figure III-46 Comparaison entre les évolutions expérimentales et simulées du retrait de dessiccation au point A pour les 4 bétons étudiés (avec la modélisation proposée).

Les simulations numériques montrent que l'occurrence des trois phases du retrait susmentionnées est correctement reproduite pour les 4 compositions de béton étudiées, et notamment la phase asymptotique. Ainsi, le comportement intrinsèque du matériau est à l'origine de cette dernière phase, puisque seul le modèle de retrait de dessiccation intrinsèque a été changé.

Ces résultats permettent d'expliquer l'occurrence de la phase asymptotique. Pendant cette phase, les gradients de teneur en eau (Figure III-35) et de contraintes (Figure III-41 et Figure III-42) s'atténuent progressivement. Les micro-fissures induites lors de la phase dormante se

ferment partiellement (des contraintes de compression apparaissent en peau). La déformation plastique n'évolue alors plus. La vitesse de déformation de retrait de dessiccation *intrinsèque* s'atténue. En effet, la courbe présentant les effets de la pression capillaire et de la pression de disjonction (Figure II-26) met en évidence que ces effets se dissipent progressivement lorsque l'humidité relative approche la valeur de 50 %. Ainsi, cela se traduit globalement par une déformation asymptotique dans l'éprouvette.

III-3.3.4.1.4 Contribution de chacune des composantes de déformation

Afin de quantifier l'effet structural et d'analyser la composante intrinsèque, l'étude de la contribution de chacune des composantes de la déformation de retrait de dessiccation est menée. Les résultats sont donnés, pour le béton de Civaux B11, lorsque le modèle EPEO est associé au modèle de retrait non linéaire.

Ces contributions sont montrées dans la Figure III-47 et la Figure III-48, au point A et B, respectivement. Les résultats sont reportés uniquement pour le béton de Civaux B11.

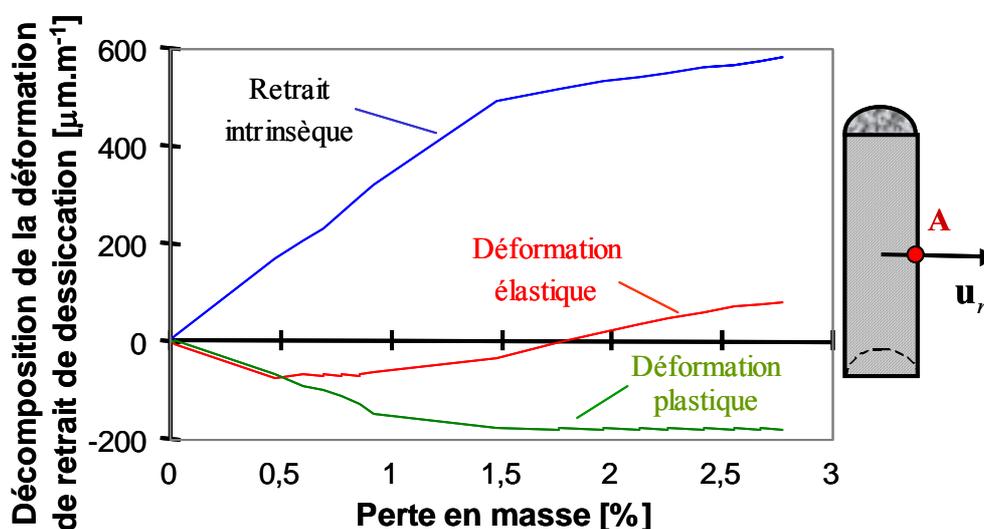


Figure III-47 Contribution de chacune des composantes de déformation au point A (en peau).

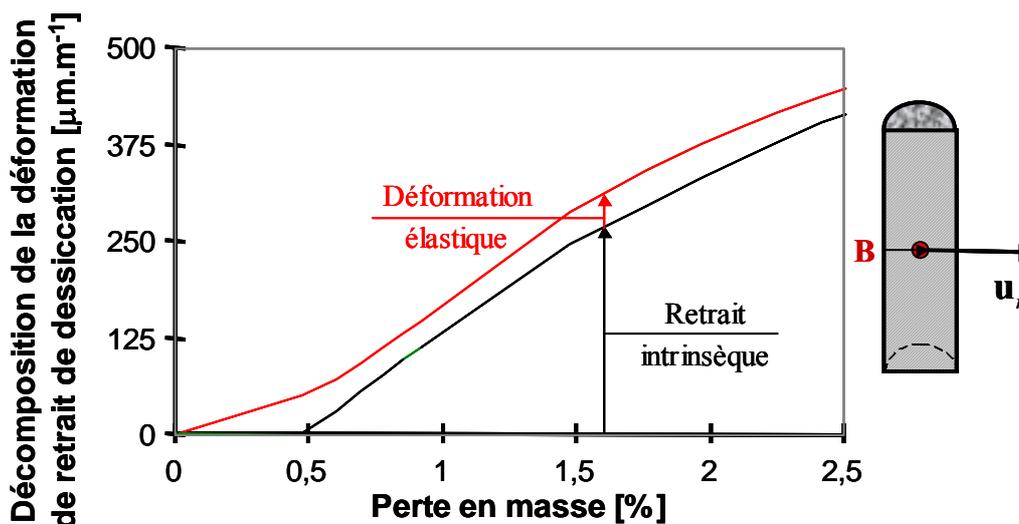


Figure III-48 Contribution de chacune des composantes de déformation au point B (en cœur).

Il est à noter que la déformation de retrait de dessiccation intrinsèque reportée dans ces figures est calculée à l'aide de l'équation III-3.

Les déformations élastiques et plastiques représentées dans la Figure III-47 et la Figure III-48 sont dues aux auto-contraintes induites par le séchage. Ces figures mettent en évidence qu'il existe une contribution différente de chacune des composantes de la déformation, lorsque l'on passe de la surface au cœur de l'éprouvette. Cette contribution différentielle est due au caractère hétérogène du processus de séchage.

Ainsi, loin de la surface séchante (ici au point B), seule la composante de déformation de retrait de dessiccation intrinsèque a une contribution significative, la déformation plastique ayant une contribution nulle, puisque les contraintes, en ce point, n'atteignent jamais le régime adoucissant.

En peau de l'éprouvette, on observe une contribution importante de la composante de la déformation plastique (amplitude maximale proche de $200 \mu\text{m.m}^{-1}$), qui correspond à l'ouverture de fissure. Elle apparaît rapidement en début de séchage, pour se stabiliser après une centaine de jours. La prise en compte de cette déformation est importante pour la prédiction de la déformation de retrait de dessiccation. En effet, d'une part, elle modifie l'évolution de la déformation de retrait de dessiccation. D'autre part, elle dépend de la géométrie de la structure et des conditions aux limites (effet structural). Par conséquent, du point de vue prédictif, l'absence de prise en compte de cette déformation conduira à des résultats erronés lors d'un calcul numérique sur une géométrie différente ou pour des conditions aux limites différentes.

Par ailleurs, les résultats de la Figure III-47 confortent les explications proposées aux origines de la phase dormante, de la phase linéaire et de la phase asymptotique, données dans le paragraphe § III-3.3.4.1.3.

III-3.3.4.2 Essai de fluage total

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas de l'éprouvette soumise à la dessiccation sous contraintes (essai de fluage total). Les paramètres du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque sont identifiés à partir de l'évolution expérimentale de la déformation différée totale. Les valeurs sont données dans le Tableau III-18.

Tableau III-18 Valeurs des paramètres du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque adopté.

Bétons	k^{fd} [MPa]	η^{fd} [MPa.s]
Civaux B11	20,7	$1,6 \times 10^5$
Civaux BHP	30,1	$8,2 \times 10^5$
Flamanville	25,7	$1,2 \times 10^6$
Penly	10,3	8×10^4

III-3.3.4.2.1 Distribution des contraintes et de l'endommagement

Les distributions des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sont données dans la Figure III-49 et la Figure III-50, respectivement, pour le béton de Civaux B11 uniquement.

On observe à nouveau que les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sont non homogènes dans l'éprouvette. Malgré l'application d'un chargement de compression de 12 MPa, des contraintes de traction apparaissent en peau, en début de séchage, alors que le cœur de l'éprouvette est soumis à des contraintes de compression. Ensuite, les contraintes σ_{zz} changent de signe en peau : des contraintes de compression importantes apparaissent, dépassant même la limite élastique du béton en compression (15 MPa). Il est intéressant de remarquer que le chargement de

compression ne modifie pas de façon significative la distribution des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ par rapport à celle obtenue dans l'essai de retrait de dessiccation (Figure III-42).

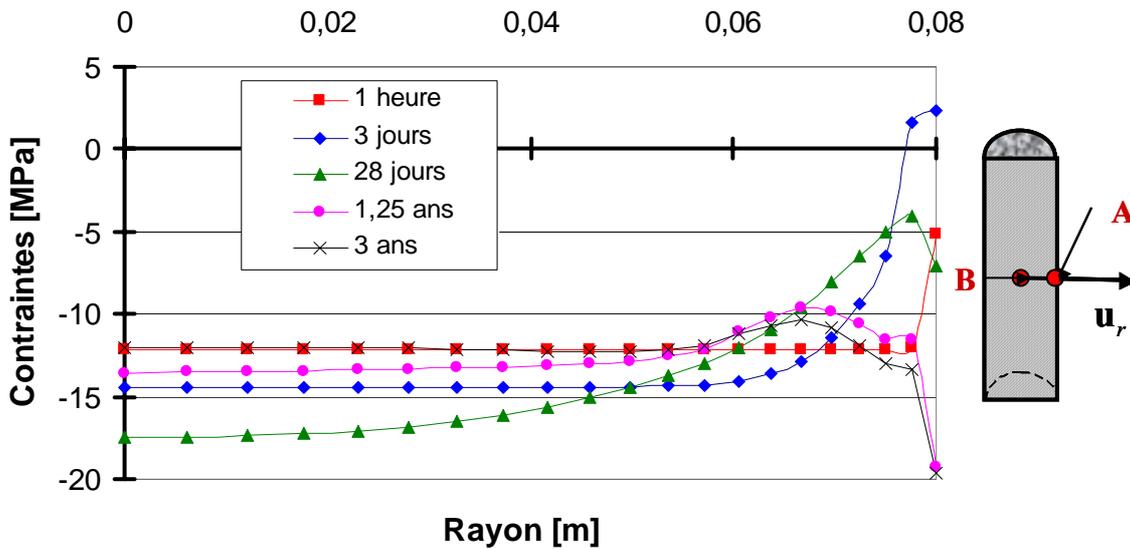


Figure III-49 Distribution des contraintes σ_{zz} le long du segment [BA].

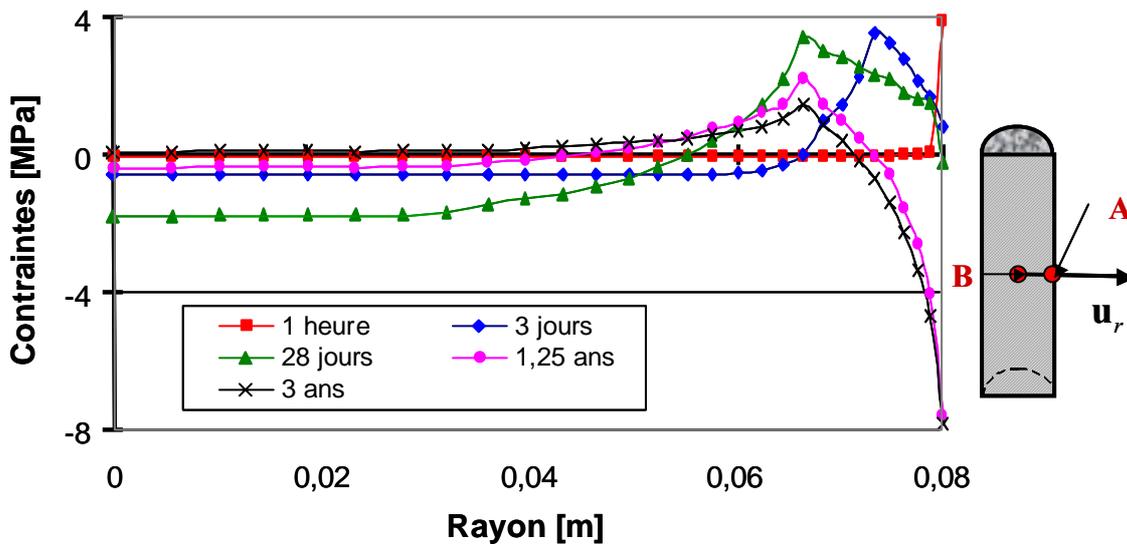


Figure III-50 Distribution des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ le long du segment [BA].

Ensuite, les iso-valeurs des variables d'endommagement de traction D_c , D_t^{zz} et $D_t^{\theta\theta}$ sont tracées sur la Figure III-51, afin de quantifier la micro-fissuration de l'éprouvette. Elles sont données pour le béton de Civaux B11 uniquement, après 3 ans d'essai.

On observe que l'application d'une contrainte de 12 MPa, pendant le séchage suffit pour induire un endommagement (faible) en compression. On remarque par ailleurs que le chargement en compression permet de diminuer sensiblement la micro-fissuration dans la direction perpendiculaire à u_z , puisque la largeur maximale de l'épaisseur endommagée est très faible (environ 2,4 mm, contre 11 mm lors de l'essai de retrait de dessiccation). Par contre, on remarque que le chargement en compression affecte peu la variable d'endommagement $D_t^{\theta\theta}$ (l'épaisseur endommagée est de 10 mm, contre 11 mm lors de l'essai de retrait de dessiccation). Ce résultat peut être visualisé en traçant la rosace de distribution de

la variable d'endommagement \mathbf{D}_t obtenu lors de l'essai de retrait de dessiccation et l'essai de fluage total (Figure III-52).

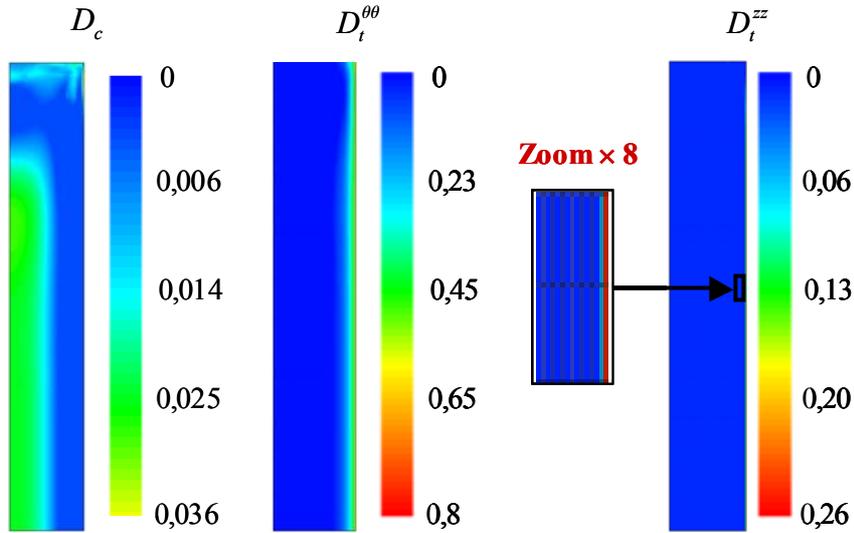


Figure III-51 Iso-valeurs de la variable d'endommagement D_c , $D_t^{\theta\theta}$ et D_t^{zz} après 3 ans.

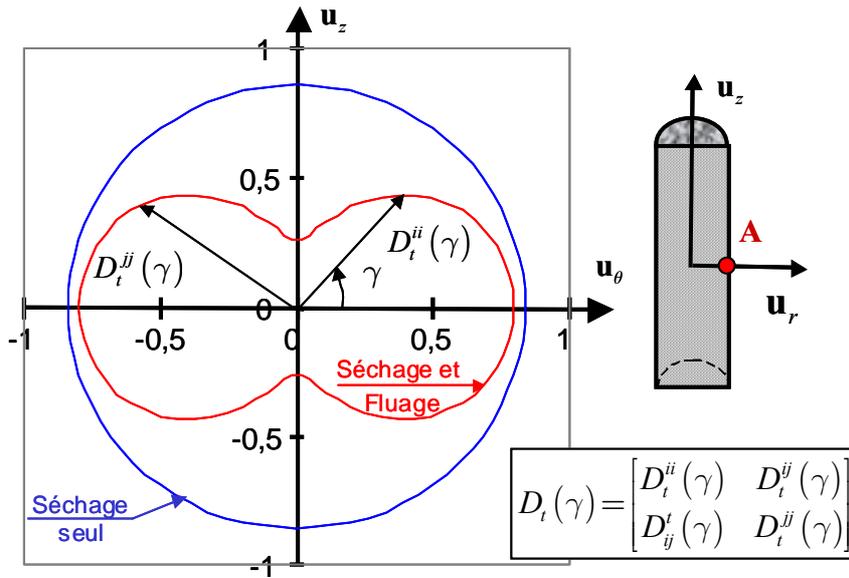


Figure III-52 Rosace de répartition de la variable d'endommagement \mathbf{D}_t .

La variable d'endommagement \mathbf{D}_t est alors orthotrope pendant l'essai de fluage total. Un modèle d'endommagement isotrope n'aurait pas permis de retrouver ce résultat.

Par ailleurs, on observe des rosaces de distribution de la variable d'endommagement \mathbf{D}_t qui ont une allure similaire à celles obtenues expérimentalement par Sicard et *al.* (1992, voir la Figure I-9). L'application d'un chargement en compression verticale modifie l'amplitude et surtout l'orientation de la variable d'endommagement (et donc l'orientation des microfissures). Les valeurs de la variable d'endommagement $D_t^{\theta\theta}$ sont beaucoup plus élevées que les valeurs de la variable d'endommagement D_t^{zz} . Ainsi, on constate une diminution du nombre des microfissures horizontales.

III-3.3.4.2.2 Déformations de l'éprouvette

Les évolutions expérimentales de la déformation différée obtenues pendant l'essai de fluage total sont confrontées aux résultats des simulations numériques dans la Figure III-53.

Ces simulations montrent que la modélisation adoptée permet de restituer correctement les évolutions expérimentales des déformations différées lors de l'essai de fluage total, à la fois à court terme et à long terme.

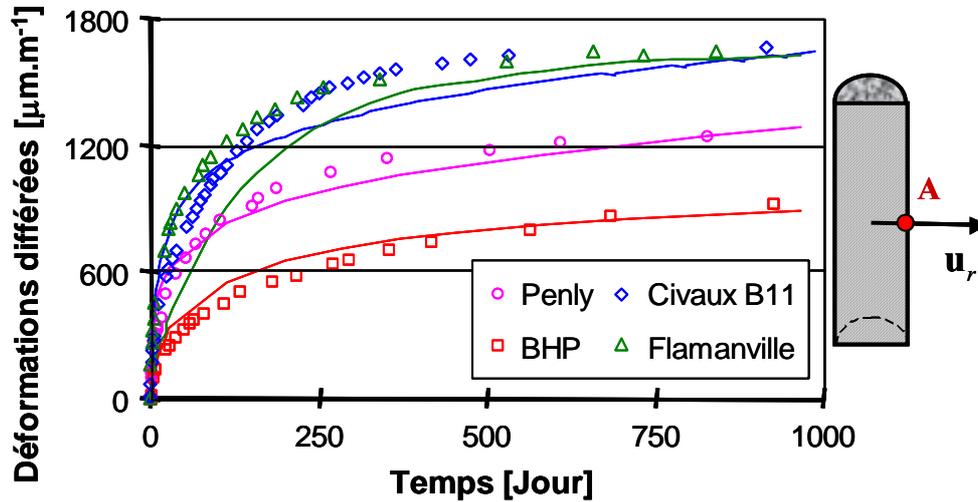


Figure III-53 Évolutions expérimentales et simulées des déformations différées verticales au point A pour les 4 bétons étudiés.

Les mêmes simulations ont été effectuées avec le modèle « stress-induced shrinkage » ("SIS") proposé par Bažant et Chern (1985) avec deux valeurs différentes du paramètre λ (Tableau III-19), pour le béton de Civaux B11 uniquement.

Tableau III-19 Valeurs des paramètres du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque "SIS".

Modèle de Bažant et Chern (1985)	
λ_1 [Pa ⁻¹]	λ_2 [Pa ⁻¹]
$3,03 \times 10^{-10}$	$9,03 \times 10^{-10}$

Le paramètre λ_1 a été identifié sur la courbe expérimentale afin de retrouver précisément la valeur finale de la déformation différée. Le paramètre λ_2 est déterminé dans le but de reproduire correctement l'évolution expérimentale en début de séchage.

Les évolutions simulées des déformations différées sont représentées dans la Figure III-53, pour les deux modèles de fluage de dessiccation intrinsèque.

On observe, que les déformations différées expérimentales sont correctement reproduites, à court terme, avec le paramètre λ_2 (modèle "SIS"). Ensuite, les résultats s'écartent progressivement des points expérimentaux (à 900 jours, l'écart est de 45 %). Les simulations menées avec le paramètre λ_1 (modèle "SIS") permettent de reproduire correctement l'amplitude finale de la déformation différée. Par contre, un écart de 30 % (au maximum) est observé à court terme entre l'évolution simulée et l'évolution expérimentale. Cela met, à nouveau, en évidence que les cinétiques du processus de séchage et de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque sont différentes et doivent être par conséquent dissociées.

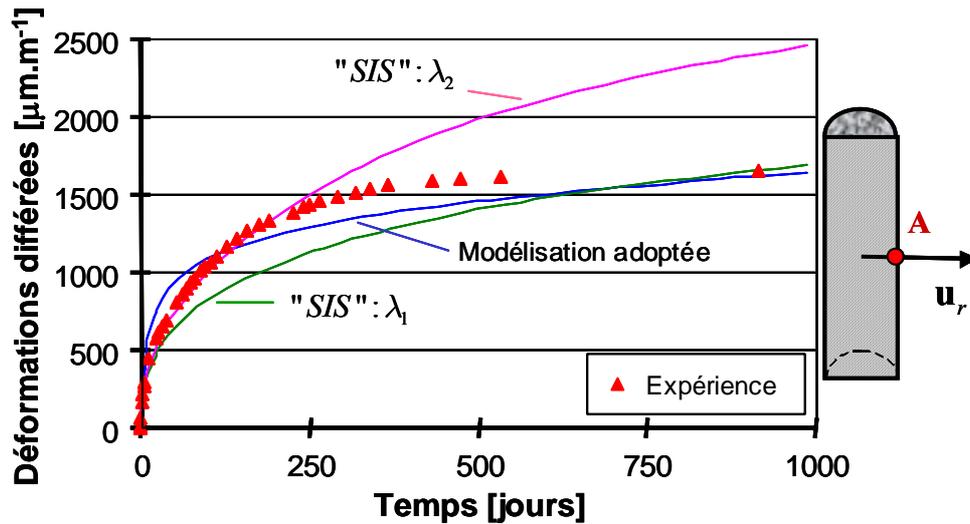


Figure III-54 Évolutions expérimentales et simulées des déformations différées au point A pour le béton de Civaux B11.

III-3.3.4.2.3 Contribution de chacune des différentes composantes de déformation

Nous avons vu au paragraphe § I-3.4.2, que la déformation de fluage de dessiccation se scinde en deux composantes distinctes :

- Une composante structurale ϵ^{mf} . Elle est liée à la micro-fissuration induite par la dessiccation lorsque l'éprouvette n'est pas chargée. Le fait de charger l'éprouvette dans l'essai de fluage total limite la fissuration et mobilise donc une partie supplémentaire de retrait de dessiccation, qui correspond à la composante structurale. Elle ne peut être identifiée expérimentalement et nécessite donc le recours à un calcul. Elle est obtenue en retranchant les déformations de retrait de dessiccation $\epsilon_{rd_essai}^{rd}$ (obtenue dans l'essai de retrait de dessiccation), les déformations de fluage propre ϵ^{fp} et les déformations de fluage de dessiccation ϵ^{fd} de la déformation différée totale ϵ^{ddt} :

$$\epsilon^{mf}(t) = \epsilon^{ddt} - [\epsilon^{fp} + \epsilon^{fd} + \epsilon_{rd_essai}^{rd}] \quad (III-11)$$

- Une composante intrinsèque, correspondant aux mécanismes physico-chimiques du fluage de dessiccation intrinsèque à l'échelle de la pâte de ciment. Elle est calculée à partir des équations constitutives du modèle de fluage de dessiccation intrinsèque.

Les contributions de chacune des composantes de déformations différées sont reportées dans la Figure III-55 pour le béton de Civaux B11.

Bazant et Xi (1994) ont reporté que la contribution de la part structurale de la déformation de fluage de dessiccation est significative uniquement durant quelques jours, sa contribution devenant nulle par la suite. Cependant, les simulations numériques effectuées dans ce travail ne corroborent pas ces résultats. La contribution de cette composante reste non nulle pendant la durée totale de l'essai. Ce même résultat est obtenu avec le modèle de fluage de dessiccation intrinsèque proposé par Bazant et Chern (1985, Benboudjema et al. 2002).

Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la fissuration à l'origine de l'effet structural intervient :

- Par son occurrence due au gradient de teneur en eau en début de séchage.

- Par sa fermeture partielle lorsque la teneur en eau s'approche d'une distribution homogène en fin du séchage.

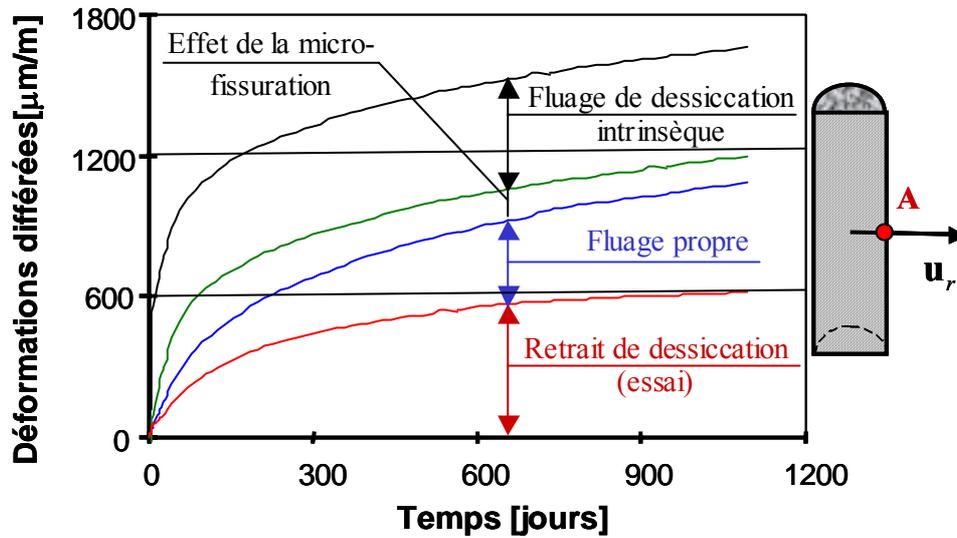


Figure III-55 Évolutions des composantes de déformations au point A pour la modélisation adoptée.

III-3.4 Simulation du comportement différé d'une enceinte de confinement

Un enjeu majeur pour EDF est actuellement la prédiction des pertes de précontrainte dans les enceintes de confinement des bâtiments réacteurs de centrales nucléaires. Les enceintes de confinement des centrales nucléaires REP (Réacteurs à Eau Pressurisée) 1400 MWe sont constituées de 2 parois concentriques (voir la Figure III-56, Granger 1998) :

- La paroi interne en béton, d'épaisseur 1,2 m précontrainte biaxialement, est conçue pour une durée de vie de 40 ans en fonctionnement et pour résister à une pression interne de 0,5 MPa absolue et à une température voisine de 140°C, correspondant à l'accident de dimensionnement APRP (Accident par Perte de Réfrigérant Primaire) ;
- La paroi externe en béton armé est calculée pour résister aux agressions externes naturelles ou accidentelles.

Les pertes de tension dans les câbles de précontrainte, induites par les déformations différées, peuvent être importantes et donc à terme nuire à la sûreté des installations. L'objectif de cette partie est double. Il s'agit dans un premier temps, de prédire les déformations différées subies par l'enceinte, dans le but de déterminer quelles sont les pertes induites de précontrainte. Ensuite, la distribution des contraintes et de la variable d'endommagement est étudiée afin d'évaluer l'état mécanique de l'enceinte de confinement.

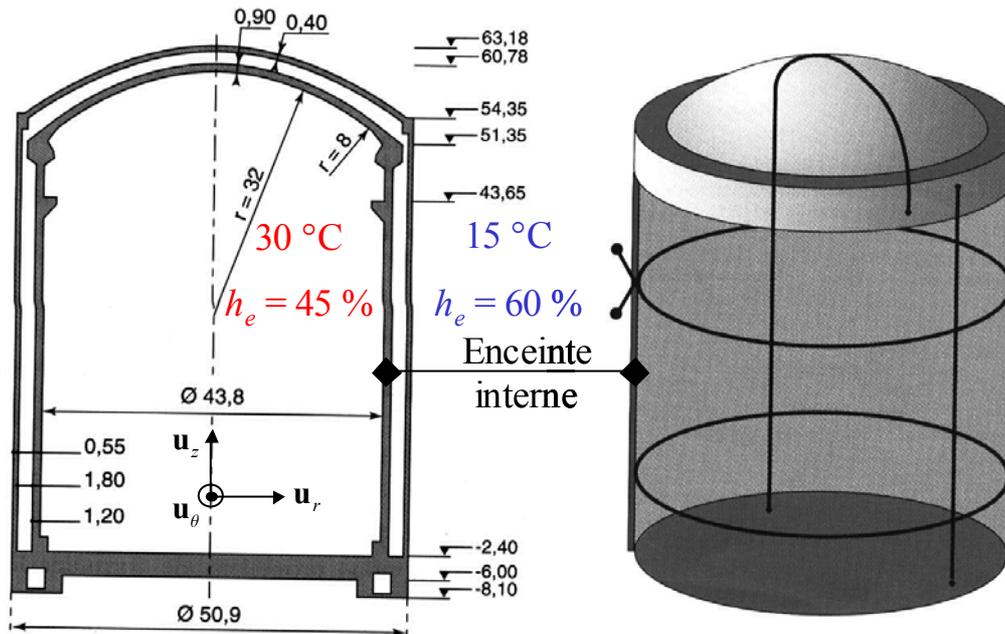


Figure III-56 Schéma de principe du réacteur français REP 1400 MWe (Granger 1998).

III-3.4.1 Description des simulations

III-3.4.1.1 Planning de mise en service adopté

La construction des enceintes s'étend sur une durée approximative de cinq ans. La précontrainte commence à l'issue de la seconde année et dure environ 1 année, suivant un phasage complexe. La mise en service du réacteur a lieu environ sept ans après le début des travaux pour une phase d'exploitation de quarante ans, pendant laquelle l'enceinte est soumise extérieurement aux « conditions atmosphériques » ($T = 15 \text{ °C}$, $HR = 60 \%$) et intérieurement à une température voisine de 30 °C ainsi qu'à une humidité relative d'environ 45% HR. Des épreuves d'enceinte sont menées à l'issue de sa construction, puis ensuite tous les dix ans.

Étant donné la complexité du phasage de la construction et de la mise en précontrainte, nous choisissons d'adopter pour les simulations numériques le planning simplifié représenté dans la Figure III-57.

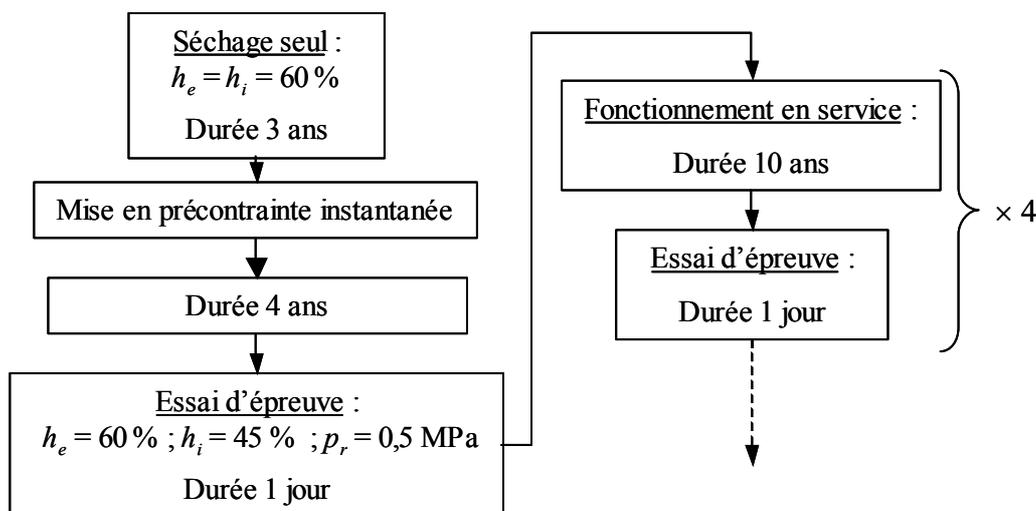


Figure III-57 Description du phasage de calcul de l'enceinte.

III-3.4.1.2 Calcul des forces de précontrainte

Le rôle de confinement joué par les enceintes nécessite une précontrainte verticale et orthoradiale. Les forces induites par les câbles de précontrainte correspondent à des contraintes moyennes de compression appliquées sur le béton σ_{zz} et $\sigma_{\theta\theta}$, et calculées à partir des relations (Granger 1996) :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \frac{A_{\theta\theta}}{B_{\theta\theta}} \sigma_{\theta\theta}^a \\ \sigma_{zz} = \frac{A_{zz}}{B_{zz}} \sigma_{zz}^a \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

où A_{zz} et $A_{\theta\theta}$ sont les surfaces des câbles de précontrainte dans les directions \mathbf{u}_z et \mathbf{u}_θ respectivement, B_{zz} et $B_{\theta\theta}$ sont les surfaces de béton dans ces deux directions, respectivement, et $\sigma_{\theta\theta}^a$ et σ_{zz}^a sont les contraintes dans les câbles de précontrainte.

Les valeurs numériques utilisées pour le calcul des contraintes moyennes de compression appliquées sur le béton sont données dans le Tableau III-20.

Tableau III-20 Valeurs des paramètres relatifs aux contraintes de compression appliquées sur le béton (Granger 1996).

A_{zz} [m ²]	$A_{\theta\theta}$ [m ²]	B_{zz} [m ²]	$B_{\theta\theta}$ [m ²]	$\sigma_{\theta\theta}^a$ [MPa]	σ_{zz}^a [MPa]
0,0064	0,0129	1,2	1,2	1595	1115

On obtient alors des contraintes moyennes de compression verticales de 8,5 MPa (suivant \mathbf{u}_z) et orthoradiales de 12 MPa (suivant \mathbf{u}_θ).

La diminution de la force de précontrainte sous l'effet des déformations du béton est prise en compte. Ainsi, la variation des contraintes dans les câbles de précontrainte $\Delta\sigma_{ii}^a$ dans la direction ii est égale à :

$$\Delta\sigma_{ii}^a = E_p \Delta\varepsilon_{ii}^t \quad (\text{III-13})$$

où E_p est module d'élasticité des câbles égal à 195 GPa et $\Delta\varepsilon_{ii}^t$ est la déformation totale subie par le béton dans la direction ii (le glissement entre le béton et les câbles est supposé nul).

La combinaison des équations III-12 et III-13 conduit finalement à l'expression suivante des variations de contraintes dans le béton :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{\theta\theta} = \frac{A_{\theta\theta}}{B_{\theta\theta}} E_p \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^t \\ \Delta\sigma_{zz} = \frac{A_{zz}}{B_{zz}} E_p \Delta\varepsilon_{zz}^t \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

Il est à noter que les pertes de précontrainte induites par la relaxation dans les aciers ne sont pas prises en compte dans cette étude.

III-3.4.1.3 Essai d'épreuve

Durant l'épreuve, l'enceinte dans sa partie courante est soumise à une pression interne $p = 0,5 \text{ MPa}$ qui induit une variation moyenne de l'état de contraintes (voir la Figure III-57) :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{\theta\theta}^p = p \frac{R_i + e/2}{e} \\ \Delta\sigma_{zz}^p = p \frac{R_i}{2 \cdot e} \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

En utilisant les valeurs des dimensions reportées dans la Figure III-56, la valeur moyenne des contraintes, induites par l'épreuve d'enceinte, est égale à :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{\theta\theta}^p = 9,375 \text{ MPa} \\ \Delta\sigma_{zz}^p = 4,5 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

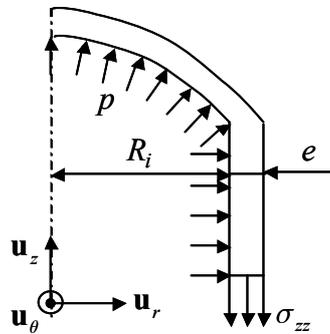


Figure III-58 Définition des dimensions utilisées pour le calcul des variations moyennes des contraintes lors de l'épreuve d'enceinte.

III-3.4.1.4 Maillage et conditions aux limites adoptés

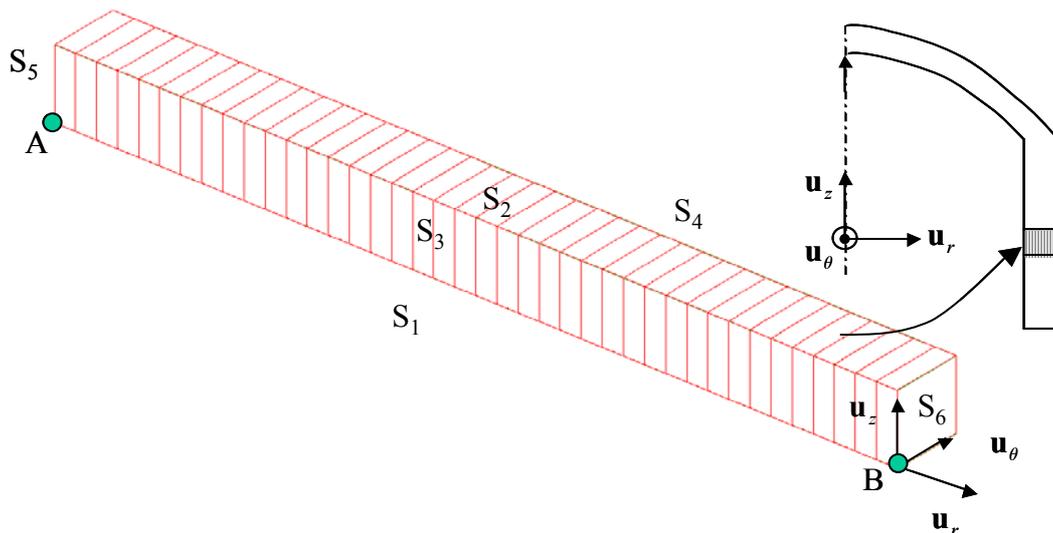


Figure III-59 Maillage adopté lors des simulations numériques.

Un calcul aux Éléments Finis avec un comportement élastique montre qu'en zone courante ($15 < z < 45 \text{ m}$), le fût se déforme comme un cylindre infini, ni bridé par le dôme, ni bridé par le radier (Granger 1996). Nous nous intéressons dans cette partie au calcul d'une zone courante de l'enceinte, loin des zones singulières (sas d'amenée du matériel, sas d'entrée du

personnel, jonction radier-fût, etc.). Ceci justifie le fait de choisir une tranche d'enceinte ne nécessitant qu'un seul élément dans la hauteur. Les calculs peuvent alors être menés dans un temps relativement court. Le maillage adopté est donné dans la Figure III-59.

Les conditions aux limites en déplacement et en humidité relative adoptées sont données dans le Tableau III-21.

Tableau III-21 Conditions aux limites en déplacement et en humidité relative.

Surface	Conditions aux limites en déplacement	Conditions aux limites en HR
S ₁	Bloqué suivant u_z	Convection nulle
S ₂	Déplacement d'ensemble u_z	Convection nulle
S ₃	Bloqué suivant u_θ	Convection nulle
S ₄	Déplacement d'ensemble u_θ	Convection nulle
S ₅	Bloqué suivant u_r	Convection naturelle
S ₆	Déplacement d'ensemble u_r	Convection naturelle

III-3.4.1.5 Paramètres utilisés pour les simulations numériques

Les paramètres utilisés dans ces simulations ont été identifiés sur une éprouvette générique. Ils ont été corrigés pour prendre en compte la présence des armatures. La correction adoptée est celle proposée dans le BPEL. Le module d'Young, les résistances et les paramètres relatifs aux déformations différées (retrait de dessiccation, fluage propre, fluage de dessiccation) sont multipliés par le coefficient correcteur k_s défini par :

$$k_s = \frac{1}{1 + \rho_s n_{eq}} \quad (\text{III-17})$$

où ρ_s est le pourcentage d'armatures pris égal à 0,2 % et n_{eq} est le coefficient d'équivalence pris égal au rapport du module d'élasticité des aciers sur le module d'élasticité du béton.

III-3.4.2 Évolution du séchage

L'évolution de la perte en masse en fonction du temps est reportée sur la Figure III-60.

On peut constater sur cette figure que le processus de séchage de l'enceinte est très lent. La perte en masse finale de l'éprouvette est de 4,16 % (correspondant à une humidité relative homogène et égale à 45 %), alors que la perte en masse obtenue après 47 ans de séchage n'est que de 1,4 %. Le profil de teneur en eau à différents instants est reporté dans la Figure III-61.

On peut remarquer que la teneur en eau est fortement hétérogène, même après 47 ans de séchage. Si la teneur en eau en surface est proche de celle à l'équilibre, la teneur en eau en cœur n'a pas varié de façon importante. Par ailleurs, les profils de teneur en eau simulés sont similaires qualitativement à ceux obtenus expérimentalement par Acker et *al.* (1990) sur une éprouvette de largeur 1 m (voir la Figure I-7).

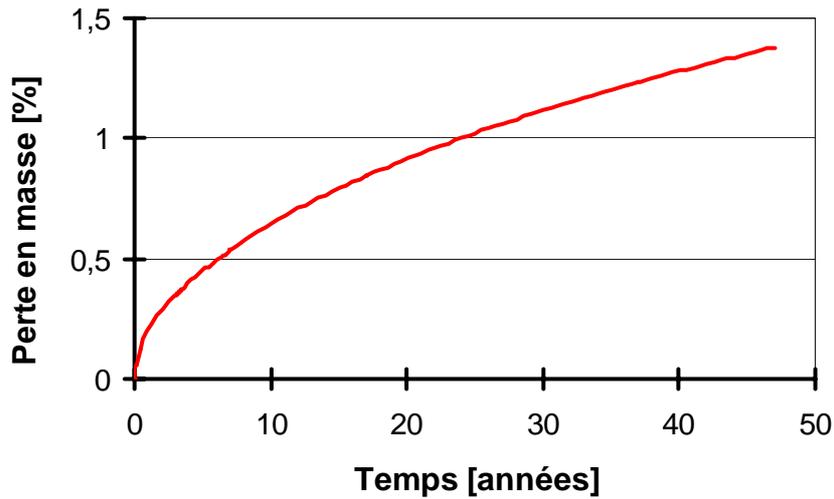


Figure III-60 Évolutions de la perte en masse en fonction du temps de l'enceinte générique.

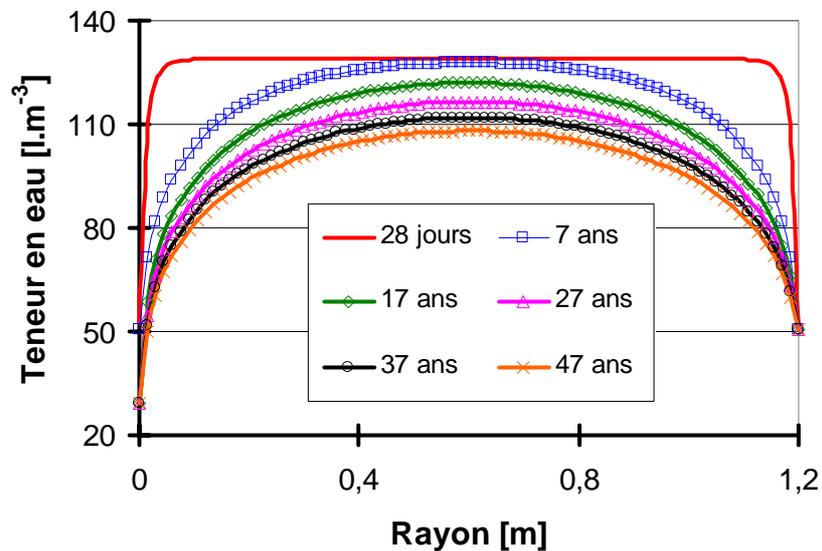


Figure III-61 Profil de teneur en eau à différents instants au sein de la tranche d'enceinte.

III-3.4.3 Évolutions des déformations et des pertes de précontrainte

Les évolutions numériques des déformations sur la surface externe de l'enceinte sont données dans la Figure III-62. Celles-ci sont comparées aux déformations mesurées à mi-hauteur (et donc en zone courante), à l'aide d'extensomètres à cordes vibrantes.

Cette figure montre une forte amplitude des déformations quelle que soit la direction. On constate que les simulations sous-estiment les déformations mesurées sur site (notamment la déformation orthoradiale). Par contre les vitesses des déformations différées orthoradiales et verticales sont correctement reproduites.

L'écart obtenu entre les courbes simulées et les courbes expérimentales peut avoir diverses origines. Ainsi, nous avons considéré que toute la précontrainte est appliquée à 3 ans. Or, nous avons précisé que la mise en précontrainte débute 2 ans après la construction de l'ouvrage et dure une année, selon un phasage complexe. Ainsi, le fluage du béton commence réellement à l'issue de la deuxième année (sous une précontrainte partielle) et non après 3 ans, comme nous l'avons supposé dans ce calcul.

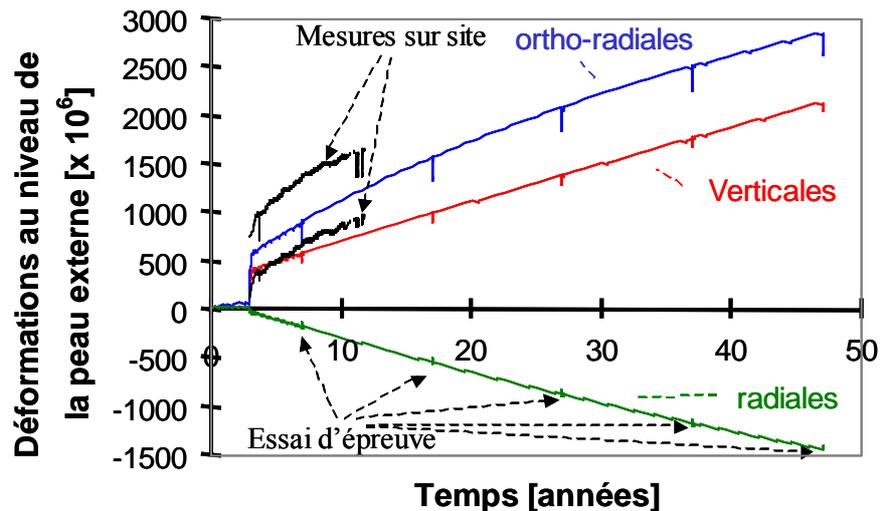


Figure III-62 Évolution des déformations sur la surface externe de l'enceinte.

Il est à noter qu'on aurait pu s'attendre, au contraire, à surestimer les déformations différées. En effet, l'analyse bibliographique (paragraphe § I-3.4.1) a mis en évidence que le fluage propre du béton est très sensible aux effets du vieillissement. Ainsi, plus le béton est chargé tôt, plus la déformation de fluage propre du béton est importante. Les simulations numériques ont été menées avec des paramètres de fluage propre identifiés sur un béton chargé à 28 jours. Or, la mise en précontrainte est effectuée à un âge compris entre 2 ans et 3 ans.

En outre, nous n'avons pas pris en compte dans la présente étude de nombreux phénomènes, dont il est difficile de déterminer leurs effets sur le comportement à long terme de l'enceinte :

- L'état initial de la structure après la fin du bétonnage (début des simulations numériques) n'est pas parfaitement connu. Les nombreuses reprises de bétonnage induisent des déformations (de retrait endogène notamment) empêchées entre le béton déjà en place et le béton coulé. Une fissuration peut se produire alors à l'interface ;
- Diverses injections sont effectuées sur l'ouvrage (colmatage des fissures) qui peuvent localement modifier le comportement du béton ;
- Les effets endogènes et thermiques n'ont pas été pris en compte dans cette étude. Si les déformations de retrait endogène et thermique peuvent être négligées pour le béton étudié (Granger 1996), les effets de la température sur le comportement béton nécessitent une attention particulière, et notamment son effet sur la déformation de fluage.

La contribution de chacune des composantes de la déformation orthoradiale sur la surface externe de l'enceinte est représentée dans la Figure III-63.

Il est à noter que la composante de fluage de dessiccation intrinsèque est négligeable sur la surface externe de l'enceinte (mais pas en d'autres points de l'enceinte). Par conséquent, sa contribution n'a pas été reportée dans la Figure III-63. En effet, cette déformation nécessite des contraintes significatives et une variation de l'humidité relative, simultanément, pour se développer. Or, l'humidité relative a atteint, en surface, sa valeur d'équilibre bien avant que la précontrainte ne soit appliquée.

On constate que la contribution de la déformation de fluage propre est très importante. De plus, celle-ci évolue significativement pendant toute la durée de vie de l'ouvrage. Les autres composantes de déformations (déformation de retrait de dessiccation, déformation élastique et déformation plastique) ont, d'une part, une contribution moindre. L'amplitude de ces déformations est de l'ordre de $200 \mu\text{m.m}^{-1}$. D'autre part, ces déformations se stabilisent

rapidement (après quelques années), hormis la déformation élastique qui diminue légèrement après une vingtaine d'années, du fait de la diminution de la précontrainte. Ces simulations mettent donc en évidence le rôle important de la composante de fluage propre et le besoin de bien la modéliser en configuration multiaxiale.

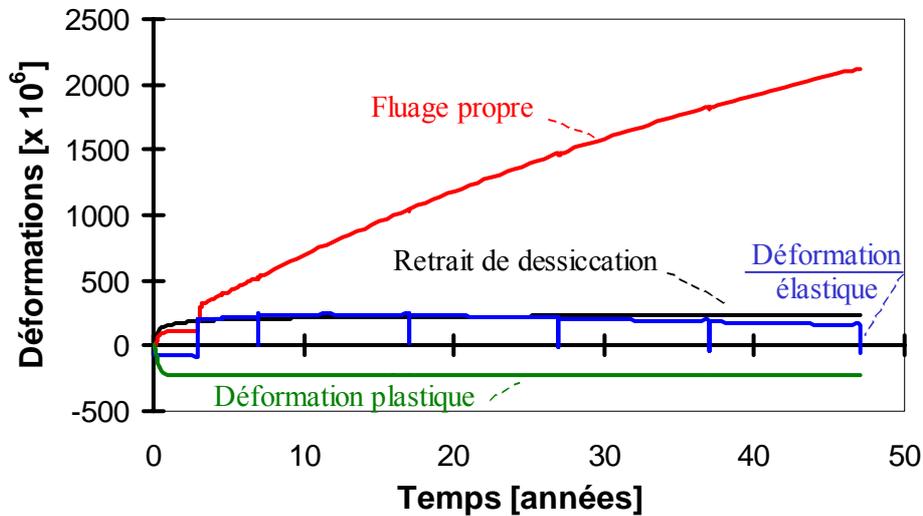


Figure III-63 Contribution des composantes de la déformation orthoradiale sur la surface externe de l'enceinte.

Les déformations dans les directions u_θ et u_z sont responsables des pertes de précontrainte dans ces directions. Les évolutions des contraintes équivalentes sont reportées dans la Figure III-64.

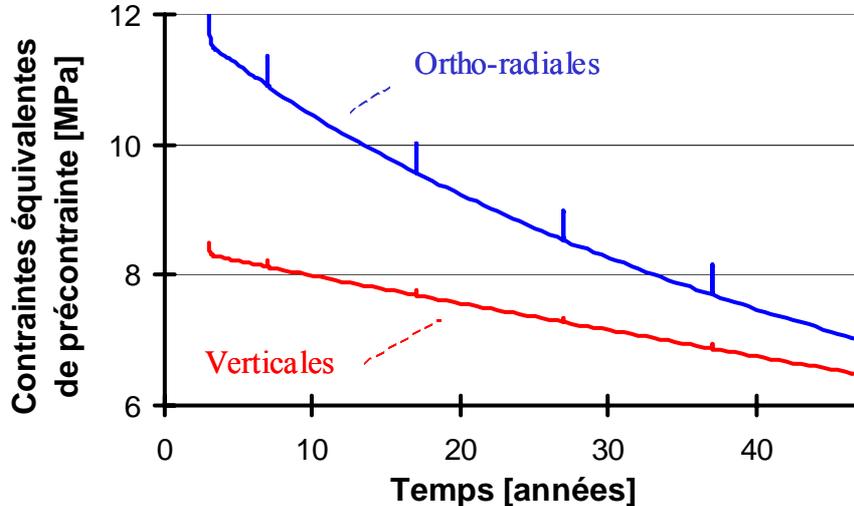


Figure III-64 Évolution des contraintes correspondantes à la précontrainte.

On remarque que les pertes de précontrainte sont bien plus importantes dans la direction orthoradiale (pertes de 38 %) que dans la direction verticale (pertes de 23 %). Ces pertes de précontrainte réduisent la marge de sécurité des enceintes de confinement, en cas d'accident. L'état mécanique de l'enceinte est alors étudié à travers les iso-valeurs d'endommagement et la distribution des contraintes, pour évaluer cette marge de sécurité.

III-3.4.4 Distribution des contraintes et de l'endommagement

La variable d'endommagement de traction D_t^{zz} sur la surface S_3 est donnée dans la Figure III-65 après 1 an, 7 ans et 47 ans (avant et après l'épreuve d'enceinte). Il est à noter que la

distribution de la variable d'endommagement $D_t^{\theta\theta}$ est similaire à celle de la variable d'endommagement D_t^{zz} et que les variables d'endommagement en compression D_c et en traction D_t^{rr} ont une contribution négligeable.

On observe que la variable d'endommagement se stabilise rapidement avant la mise en route du réacteur. L'épaisseur endommagée est alors égale à 15 cm et la valeur d'endommagement maximale est environ égale à 0,76. La précontrainte n'étant appliquée qu'après 3 ans, elle n'a pas d'influence sur le faciès de fissuration. Ensuite, la mise en route du réacteur entraîne une chute de l'humidité relative sur la face interne de l'enceinte, et donc une augmentation des valeurs de l'endommagement à cet endroit, sans que la fissuration ne devienne plus profonde. Puis, la réalisation des différents essais d'épreuve ne modifie pas la distribution de la fissuration dans l'enceinte.

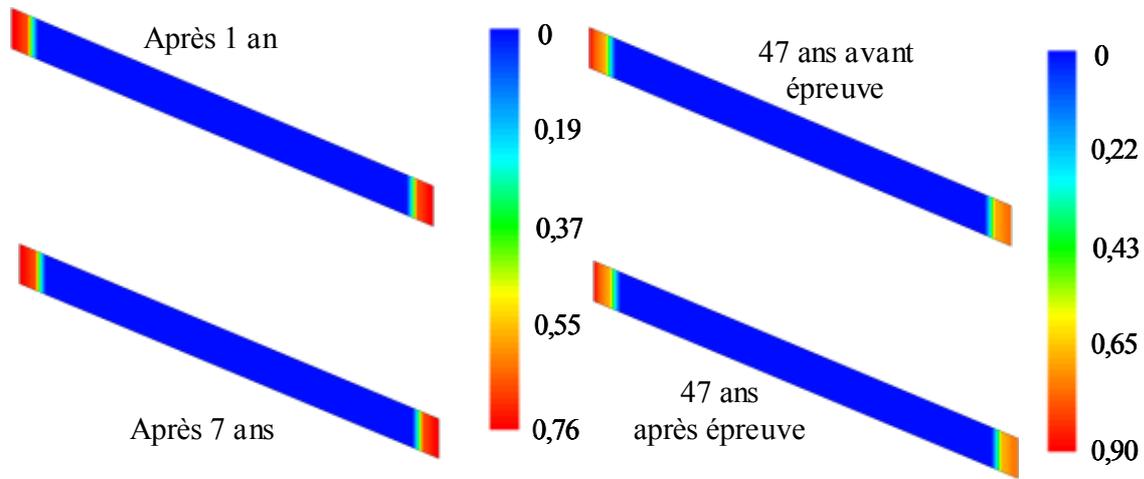


Figure III-65 Iso-valeurs de la variable d'endommagement D_t^{zz} sur la surface S_3 après 1 an, 7 ans et 47 ans (avant et après l'épreuve d'enceinte).

Les distributions des contraintes σ_{zz} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont données dans la Figure III-66 et la Figure III-67, respectivement, après 3 ans, 7 ans et 47 ans (avant et après l'essai d'épreuve).

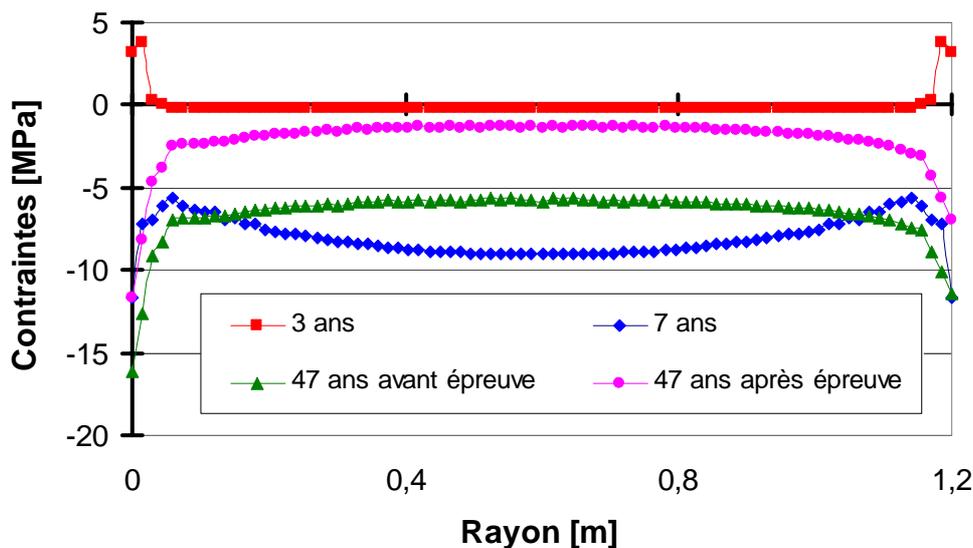


Figure III-66 Distribution des contraintes σ_{zz} le long du rayon.

On observe à 3 ans, sur ces figures, des contraintes de traction en peau, alors que le cœur est légèrement comprimé. Ensuite, l'application de la précontrainte induit, après 7 et 47 ans, des contraintes de compression dans toute la structure. Lors du dernier essai d'épreuve, les contraintes verticales sont suffisantes pour maintenir la structure en compression. Ce n'est pas le cas dans la direction orthoradiale où on observe que les pertes de précontrainte dans cette direction (voir la Figure III-64) sont trop conséquentes pour maintenir l'enceinte dans un état de compression. Toutefois, toute exploitation de ces résultats en termes de durée de vie de la paroi nécessiterait au préalable un recalage des paramètres sur les données de site prenant en particulier en compte les déformations différées s'étant développées pendant la construction de la paroi.

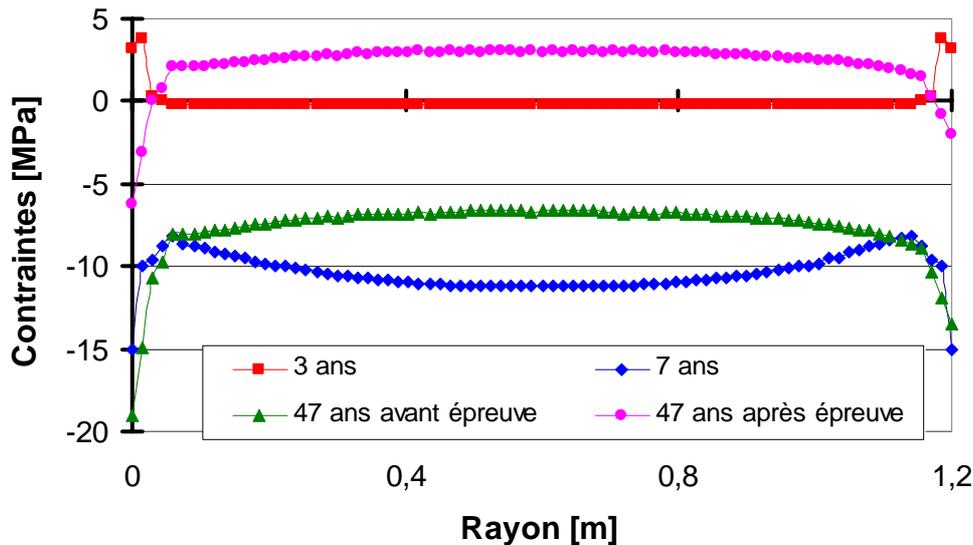


Figure III-67 Distribution des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ le long du rayon.

III-4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques exemples d'applications du modèle développé. Les simulations numériques effectuées ont permis de montrer la capacité du modèle à prédire le comportement du béton, dans de multiples configurations de sollicitations mécaniques et/ou hydriques.

Les simulations numériques menées à l'échelle constitutive du matériau (configuration homogène) ont mis en évidence que le modèle est capable de prédire correctement le comportement intrinsèque du matériau, que ce soit dans le cas de sollicitations uniaxiales ou multiaxiales. Ces simulations ont permis alors d'analyser précisément le comportement intrinsèque. Ainsi, il a été mis en évidence, notamment, que les cinétiques de fluage de dessiccation intrinsèque et de séchage doivent être dissociées dans la modélisation.

Cette étape a permis de valider notre choix du modèle de déformations différées. Elle ne constitue pas, évidemment, une preuve que les mécanismes proposés pour le retrait et le fluage soient ceux qui se produisent réellement. Néanmoins, les hypothèses que nous avons émises sont confortées.

Ensuite, des simulations numériques ont été menées sur des structures en béton. Elles ont permis d'identifier et d'analyser de façon précise les composantes intrinsèques des déformations et les effets structuraux induits.

Ainsi, le rôle important du modèle de fissuration adopté a été mis en évidence. Il est nécessaire de prendre en compte le comportement adoucissant post-pic et l'occurrence d'une déformation irréversible en traction. En outre, la modélisation adoptée du retrait de dessiccation, basée sur les mécanismes de pression capillaire et de pression de disjonction, a permis de reproduire correctement la phase asymptotique du diagramme retrait de dessiccation – perte en masse. Elle a mis en évidence, que cette phase est due à un comportement intrinsèque du matériau, et non à un effet exclusivement structural.

De plus, la prise en compte de la dissipation des effets de la pression capillaire et de la pression de disjonction est essentielle lorsque les phénomènes de dessiccation et de fissuration se produisent de façon simultanée. Cela montre aussi les limites actuelles de la modélisation par l'approche de type fissuration répartie pour décrire le comportement de structures à proximité de la ruine.

Puis, des simulations ont été menées sur une enceinte de confinement de bâtiments réacteurs de centrales nucléaires en zone courante. Elles ont mis en évidence la part prépondérante de la composante de fluage propre, dans la déformation subie par l'enceinte (sur la surface externe). De plus, elles ont montré qu'une fissuration se développe en peau en début de séchage (face interne et face externe de l'enceinte), puis augmente en amplitude à la mise en service (uniquement en face interne de l'enceinte), malgré l'application d'une précontrainte biaxiale. En fin de durée de vie, la précontrainte reste suffisante dans l'enceinte pour garantir l'étanchéité en cas d'accident APRP. Néanmoins, d'une part, nous n'avons pas porté notre attention sur les zones singulières de l'ouvrage, où une fissuration plus importante peut se développer et créer ainsi une zone privilégiée de fuite, en cas d'accident. Un calcul sur la géométrie réelle de l'enceinte permettrait alors d'étudier précisément le comportement de ces zones singulières. D'autre part, les déformations différées prédites sous-estiment les déformations mesurées sur site. Ainsi, les pertes de précontrainte réelles dans l'ouvrage peuvent être supérieures à celles prédites par les simulations.

Enfin, nous pouvons regretter que certains des résultats expérimentaux utilisés datent de plus d'une trentaine d'années (Ross 1954, Gopalakrishnan et *al.* 1969). En effet, les compositions pour confectionner ces bétons ne sont plus tout à fait celles utilisées aujourd'hui. Malheureusement, nous n'avons pas pu trouver, dans la littérature, de résultats expérimentaux récents traitant du comportement différé multiaxial des bétons (dans de multiples configurations d'essais).

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale

Ce travail a porté sur la modélisation du comportement différé du béton sous des sollicitations mécaniques et hydriques combinées. L'objectif de ce travail a été de développer des outils numériques capables de prédire et comprendre le comportement différé de structures, et notamment des enceintes de confinement de bâtiments réacteurs nucléaires. En effet, un enjeu majeur pour EDF est actuellement de prévoir les pertes de précontrainte de ces enceintes, afin d'en estimer la durée de vie (en terme de garantie d'étanchéité). Nous nous sommes alors volontairement limités à des chargements mécaniques modérés et à une humidité relative ambiante couvrant les valeurs habituellement rencontrées sous nos climats (intervalle 50-100 %).

L'analyse bibliographique, du premier chapitre, a mis en évidence que le comportement différé du béton s'avère être délicat puisque de nombreux phénomènes, agissent, de façon plus ou moins couplés, et à différentes échelles d'observations du matériau : séchage, fissuration, retrait et fluage. De plus, des difficultés supplémentaires apparaissent. D'une part, les mécanismes de retrait et de fluage, sont plus ou moins connus et admis ou contestés dans la communauté scientifique. D'autre part, des nombreux résultats expérimentaux intègrent *un effet structural* dû à la fissuration, qui empêche l'identification *du comportement intrinsèque* du matériau et donc la proposition de lois constitutives pour ces phénomènes. Ainsi, il apparaît nécessaire d'associer dans la modélisation, les déformations différées au comportement mécanique du béton fissuré.

Afin de décrire le comportement différé du béton, nous avons proposé, dans le deuxième chapitre, une modélisation basée sur les mécanismes physico-chimiques à l'origine du retrait et du fluage. Les mécanismes choisis étant ceux qui sont en accord avec de nombreux résultats expérimentaux à l'échelle (microscopique) où se produisent ces mécanismes, ainsi qu'à l'échelle (macroscopique) où les effets de ces mécanismes sont observés (déformations différées mesurées). La modélisation du retrait de dessiccation est basée sur une approche unifiée du fluage et du retrait. Il est supposé que la déformation de retrait de dessiccation est induite par la déformation élastique et la déformation de fluage sous l'effet des pressions dans les pores (pression capillaire et pression de disjonction). Contrairement à ce qui est fait conventionnellement dans la littérature, de nombreux auteurs avaient déjà suggéré par le passé que le fluage et le retrait ne peuvent pas être dissociés. A titre d'illustration, on peut évoquer le discours tenu par Freyssinet à la réunion de spécialistes en précontraintes, à Ganol, dès 1951 : « J'ai la certitude absolue que la déformation différée est la somme du fluage, tendance de tout système vers un maximum de stabilité, qui peut augmenter considérablement sous de fortes contraintes, et sur la réversibilité, duquel je ne sais rien, et d'une fraction de la déformation élastique, différée par le mouillage du béton, par l'effet de la pression, et qui est entièrement réversible ». Notre modèle constitue alors un pas dans ce sens.

Le séchage du béton est décrit, de façon phénoménologique, par une équation de diffusion non linéaire, qui permet alors de déterminer localement la teneur en eau et l'humidité relative, nécessaire au calcul des déformations du béton. Enfin, la fissuration initiée par la

dessiccation, est incorporée par le biais d'un modèle élastoplastique endommageable orthotrope. La modélisation mise en œuvre est basée essentiellement sur les travaux de Feenstra et de Borst (1996), Georgin (1998), Lee et Fenves (1998) et Nechnech (2000). Dans notre travail, nous avons apporté des modifications et des améliorations sensibles, afin de nous adapter à notre domaine d'étude (variables d'endommagement et critères de plasticité orthotropes, extension à des contraintes triaxiales).

Ainsi, nous obtenons un modèle complet décrivant les principaux aspects expérimentaux du comportement différé du béton. Ce modèle permet notamment de séparer clairement les composantes intrinsèques de la déformation différée, des effets structuraux induits et donc d'identifier chacune des composantes.

Ce modèle a été implanté dans le code de calcul aux Éléments Finis CAST3M développé par le C.E.A. Cette implantation rend alors possible la simulation du comportement différé de structures sous sollicitations hydromécaniques.

Le modèle développé a été alors validé par des simulations d'essais expérimentaux sur des éprouvettes. La confrontation des simulations avec les résultats expérimentaux, à l'échelle constitutive du matériau, a montré que le modèle permet de reproduire nombre des caractéristiques du comportement intrinsèque du béton, mis en évidence dans le premier chapitre (fluage propre multiaxial, effet de la cinétique de dessiccation sur la déformation de retrait et de fluage, occurrence de déformations partiellement réversibles, etc.).

Les simulations menées, ensuite, en configuration non homogène (humidité relative et contraintes) ont rendu possible l'analyse du comportement différé. Elles ont mis en évidence les divers effets du séchage sur le comportement mécanique du béton (fissuration orthotrope, augmentation des résistances) et la complexité du comportement multiaxial (coefficient de Poisson de fluage orthotrope). Par ailleurs, elles ont montré que les trois phases de la courbe retrait de dessiccation – perte en masse sont dues à un *effet structural* (lié à l'endommagement et aux déformations anélastiques) et à un *comportement intrinsèque* du matériau (lié aux mécanismes de pression capillaire et de pression de disjonction). En outre, l'adoption d'un modèle de fissuration orthotrope a permis de retrouver, qualitativement, la répartition préférentielle de la micro-fissuration, observée expérimentalement lors de l'essai de fluage total.

Puis, le comportement différé des enceintes de confinement a été prédit, à partir de paramètres identifiés préalablement sur éprouvette. La complexité de la géométrie, du phasage de construction et de la mise en précontrainte nous a conduit à simplifier le problème initial. Le calcul a été alors mené en zone courante de l'enceinte (loin des zones singulières, tel que les différents sas d'accès, le radier, le dôme etc.). La part prépondérante de la composante de fluage propre dans la déformation différée a été observée. Les simulations mettent également en évidence une déformation différée importante dans l'ouvrage, mais elle reste en deçà de la déformation mesurée sur site. Toutefois, la vitesse de déformation différée est correctement prédite. Les pertes de précontrainte prédites sont alors importantes, mais restent suffisantes pour empêcher l'occurrence d'une fissuration lors de l'épreuve d'enceinte, après 40 ans de fonctionnement.

Perspectives

Au-delà des résultats encourageants que nous avons obtenus, il convient de préciser les perspectives futures, qui permettront de mieux appréhender, dans le futur, le comportement différé du béton. Les perspectives se situent, à la fois au niveau de la modélisation, et au niveau de l'expérience.

Du point de vue de la modélisation :

Les effets de la réaction d'hydratation n'ont pas été intégrés dans la modélisation. Il s'agit notamment de prendre en compte son effet sur les phénomènes de séchage, retrait, fluage, et sur les propriétés mécaniques, essentiellement. Ce travail peut être mené en modélisant tout d'abord le développement de la réaction d'hydratation (en se basant sur le modèle de Jennings et Tennis 1994 par exemple), afin de connaître l'évolution du degré d'hydratation. Puis, il est nécessaire d'incorporer son effet en proposant de nouvelles lois d'évolutions pour les paramètres du modèle. Ce travail permettra alors d'aboutir à un modèle prédictif complet. Par contre, les risques sont d'aboutir à un modèle trop complexe, dont les paramètres ne peuvent plus être identifiés à l'aide d'expériences simples.

La description du séchage est basée sur de nombreuses hypothèses. Le phénomène d'auto-dessiccation a été, notamment, négligé. Or, il se produit progressivement une auto-dessiccation importante au sein de la structure, lorsque le rapport e/c du béton est inférieur à 0,44 environ (ce qui est le cas du béton de Civaux BHP). Cette auto-dessiccation affecte la déformation de fluage propre dans cet essai et induit alors une erreur lors de l'identification des paramètres matériaux, si cet effet n'est pas considéré. Ainsi, le phénomène d'auto-dessiccation nécessite d'être incorporé dans la modélisation. De plus, le transport de l'air n'a pas été pris en compte. Une description plus précise des transferts de l'eau (liquide et vapeur) et de l'air (et de leurs interactions) passe par l'adoption d'une modélisation de type milieu poreux non saturé (Schrefler 1989, Coussy et *al.* 2001). Elle permettra notamment d'obtenir un cadre de modélisation global et de connaître précisément la contribution des différentes pressions (eau, gaz) qui interviennent dans l'expression de la déformation de retrait de dessiccation.

Le problème de la localisation des déformations, lorsque le comportement adoucissant est atteint, n'a été que partiellement résolu. En effet, si la méthode de Hillerborg (Hillerborg et *al.* 1976) adoptée dans ce travail permet d'obtenir des résultats objectifs vis-à-vis de la taille et de la forme des éléments finis (en terme de courbe force-déplacement), elle ne permet pas de régulariser les équations d'équilibre. L'adoption d'une formulation non locale (intégrale ou différentielle) constitue une alternative intéressante. Néanmoins, la forme particulière du critère adopté (multi-surface) et le coût en temps de calcul nécessitent une attention particulière. Ce point nécessite d'être affiné dans de futurs travaux.

Les mécanismes de fluage et de retrait ne se produisent qu'au sein de la pâte de ciment. Les effets des granulats ont été intégrés dans la modélisation en adoptant des paramètres globaux, qui masquent partiellement la physique des phénomènes concernés. Une étude particulière est alors à mener afin de préciser le comportement à l'interface granulat/pâte de ciment et ses effets à l'échelle de la structure, afin de valider en toute rigueur la démarche adoptée.

Les effets du vieillissement n'ont pas été intégrés dans la modélisation adoptée. L'analyse bibliographique a mis en évidence que seul le fluage propre était fortement sensible à l'âge. Ainsi, la prise en compte des effets du vieillissement n'est pas nécessaire, hormis dans le cas du fluage propre, où une attention particulière est nécessaire. Elle passe par la connaissance précise des origines du vieillissement, puis par sa prise en compte dans la modélisation. Par exemple, en se basant sur l'explication proposée par Bažant et *al.* (1997), on pourrait modifier la partie déviatorique du modèle de fluage propre, en intégrant la relaxation des efforts de liaisons entre les feuillettes de C-S-H.

Enfin, de nombreux autres phénomènes agissent simultanément avec les phénomènes étudiés. Il nous paraît néanmoins judicieux d'en retenir 2 : le retrait endogène et les effets thermiques au jeune âge. En effet, les simulations sont effectuées en supposant un état vierge de la structure. Or, les effets thermiques et endogènes peuvent induire une fissuration précoce du matériau à l'échelle de l'hétérogénéité du granulats et à l'échelle de la structure (reprise de bétonnage, autres zones de déformations empêchées). Cet aspect nécessite un traitement numérique et expérimental particulier. De plus, l'effet de la température ambiante n'a pas été considéré dans cette étude. La température ambiante des structures étant variable, sa prise en compte, dans la modélisation du fluage propre notamment, permettra une prédiction plus fine des déformations différées.

Du point de l'expérimentation :

L'analyse bibliographique a fait ressortir que les mécanismes à l'origine du retrait de dessiccation, mais plus particulièrement ceux à l'origine du fluage propre et du fluage de dessiccation sont aujourd'hui encore mal connus. En outre, le problème du vieillissement n'est pas aujourd'hui parfaitement résolu, bien que Bažant et *al.* (1997) propose une explication intéressante à ce phénomène. Il est regrettable d'observer une absence de consensus remarquable au sein de la communauté scientifique.

De plus, les résultats expérimentaux sous des sollicitations hydriques et mécaniques variées ne sont pas disponibles, ou uniquement de façon limitée, à notre connaissance. Par exemple, les effets d'un chargement (et d'un déchargement) mécanique, préalable ou succédant, à une variation d'humidité relative croissante (ou décroissante) seraient d'une grande utilité pour la proposition de lois constitutives. De telles études ont été déjà menées pour caractériser de façon précise le comportement hydromécanique du bois. De plus, les effets du séchage (sur des éprouvettes minces et épaisses) sur les caractéristiques mécaniques (résistances et modules d'élasticité) et sur la fissuration (mesure de l'énergie de fissuration) ne sont que partiellement connus. Cette situation se complique plus encore lorsqu'il s'agit d'étudier le comportement hydromécanique du béton sous sollicitations multiaxiales.

Il est donc nécessaire de poursuivre le travail de caractérisation expérimentale (et ensuite d'analyse numérique) de ces mécanismes et des déformations induites...

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Acker P. (1983), *De la controverse sur les lois de fluage du béton et des moyens d'en sortir*, Cement and Concrete Research, 13, p. 580-582.

Acker P. (1988), *Comportement mécanique des bétons : Apports de l'approche physico-chimique*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris - Rapport de recherche des laboratoires des Ponts et chaussées, 152.

Acker P., Mamillan M., Miao B. (1990), Drying and shrinkage of concrete: the case of massive parts, Suprenant, B.A. (Ed.), Serviceability and Durability of Construction Materials. ASCE, New York, p. 1072-1081.

Acker P. (2001), *Nouveaux bétons, couplages de performance, science des matériaux, science des couplages*, 2^{ème} Rencontres du Réseau Doctoral Génie Civil, 17-19 Janvier 2001, Aussois, France, 8 p.

Acker P., Ulm F.-J. (2001), *Creep and Shrinkage of concrete: physical origins and practical measurements*, Nuclear Engineering Design, 203, p. 143-158.

Aïtcin P., Neville A., Acker P. (1998), *Les différents types de retrait du béton*, Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 215, p. 41-51.

Ali I., Kesler C. E. (1964), *Mechanism of creep in concrete*, Symposium on creep of concrete, Détroit, American Concrete Institute, Publication, S-P 9, p. 35-63.

Altoubat S.A., Lange D.A. (2002), *The Pickett effect at early age and experiment separating its mechanisms in tension*, Materials and Structures, 35, p. 211-218.

Alvaredo A.M., Wittmann F.H. (1993), *Shrinkage as influenced by strain softening and crack formation*, dans 'Creep and Shrinkage of Concrete', édité par Z.P. Bazant and I. Carol, E & FN Spon, Londres, p. 103-113.

Armstrong L.D., Kingston R.S.T. (1960), *Effect of moisture content changes on creep of wood*, Nature, 4716 (185), p. 862-863.

Ayano T., Wittmann F.H. (2002), *Drying, moisture distribution, and shrinkage of cement-based materials*, Materials and Structures, 35, p. 134-140.

Baroghel-Bouny V. (1994), *Caractérisation des pâtes de ciment et des bétons. Méthodes, analyse, interprétation*, Thèse de doctorat de l'ENPC, Paris, 468 p.

Baroghel-Bouny V., Mainguy M., Lassabatere T., Coussy O. (1999), *Characterization and identification of equilibrium and transfer moisture properties for ordinary and high-performance cementitious materials*, Cement and Concrete Research, 29, p. 1225-1238.

Baroghel-Bouny V., Ammouche A., Hornain H., Gawsewitch J. (2000), *Vieillissement des bétons en milieu naturel : Une expérimentation pour le XXI^e siècle. I – Caractérisation microstructurale sur des éprouvettes de bétons de résistance 25 à 120 MPa*, Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 228, p. 71-86.

Baron J. (1982), *Les retraits de la pâte de ciment*, dans *Le béton hydraulique*, Presse de l'ENPC, sous la direction de Jacques Baron et Raymond Sauterey, Paris, p. 485-501.

Baron J., Ollivier J.-P. (1992), *La durabilité des bétons*, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 453p.

Bary B. (1996), *Étude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 156 p.

Bažant Z.P. (1972), *Thermodynamics of hindered adsorption and its implications for hardened cement paste and concrete*, Cement and Concrete Research, 2, p. 1-16.

Bažant Z.P., Najjar L.J. (1972), *Non linear water diffusion in non saturated concrete*, Matériaux et construction, 5 (25), p. 3-20.

Bažant Z.P., Hemann J.H., Koller H., Najjar L. A. (1973), *Thin-wall cement paste cylinder for creep test at variable humidity or temperature*, Materials and Structures, 6 (34), p. 277-281.

Bažant Z.P., Moschovidis Z. (1973), *Surface-diffusion theory for drying creep effect in Portland cement paste and concrete*, Journal of the American Ceramic Society, 56(5), p. 235-241.

Bažant Z.P., Wu S.T. (1974), *Creep and shrinkage law of concrete at variable humidity*, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 6 (100), p. 1183-1209.

Bažant Z.P. (1976), *Instability, ductility and size effect in strain softening concrete*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, 102, p. 331-344.

Bažant Z.P., Asghari A.A., Scamiot J. (1976), *Experimental study of creep of hardened Portland cement paste at variable water content*, Materials and Structures, 9 (52), p. 279-290.

Bažant Z.P. (1982), *Mathematical models for creep and shrinkage in concrete*, dans 'Creep and shrinkage in concrete structures', édité par Bažant Z.P. et Wittmann F.H., Wiley, Londres.

Bažant Z.P., Oh B. (1983), *Crack band theory for fracture of concrete*, RILEM Materials and Structures, 16, p. 155-177.

Bažant Z. P., Chern J. C. (1985), *Concrete Creep at Variable Humidity : constitutive law and mechanism*, Materials and Structures, 18 (103), p. 1-20.

Bažant Z. P., Sener S., Kim J.K. (1986), *Effect of cracking on drying permeability and diffusivity of concrete*, ACI Materials Journal, 84, p. 351-357.

Bažant Z.P., Pijaudier-Cabot (1989), *Measurement of characteristic length of non local continuum*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 115, 755-767.

Bažant Z.P., Prasannan S. (1989), *Solidification theory for concrete creep I. Formulation*, Journal of Engineering Mechanics, 115 (8), p. 1691-1703.

Bažant Z.P., Xi Y. (1993), *Stochastic drying and creep effects in concrete structures*, Journal of Structural Engineering, 119 (1), p. 301-322.

Bažant Z.P., Xi Y. (1994), *Drying creep of concrete: constitutive model and new experiments separating its mechanisms*, Materials and Structures, 27, p. 3-14.

Bažant Z.P., Huggaard A.B., Baweja S., Ulm F.J. (1997), *Microprestress-solidification theory for concrete creep. I: Aging and drying effects*, Journal of Engineering Mechanics, 123 (11), p. 1188-1194.

Bažant Z.P., Xiang Y. (1997), *Crack growth and lifetime of concrete under long time loading*, Journal of Engineering Mechanics, 123(4), p. 350-358.

Bažant Z.P. (1998), *Criteria for rational prediction of creep and shrinkage of concrete*, Structural Engineering Report 98-7/B675C to ACI Committee 209, Juillet 1998, 25 p.

Bažant Z.P., Huet C. (1999), *Thermodynamic functions for ageing viscoelasticity: integral form without internal variables*, International Journals of Solids and Structures, 36, p. 3993-4016.

Bažant Z. P. (2001), *Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future*, Nuclear Engineering Design, 203, p. 27-38.

Bažant Z.P., Ferretti D. (2001), *Asymptotic temporal and spatial scaling of coupled creep, aging, diffusion and fracture processes*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann, Elsevier, Cambridge, 2001, p. 121-145.

Bažant Z.P. Becq-Giraudon E. (2002), *Statistical prediction of fracture parameters of concrete and implications for choice of testing standard*, Cement and Concrete Research, 32, p. 529-556.

Benboudjema F. (1999), *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux bâtiments réacteurs de centrales nucléaires*, Rapport de D.E.A. de l'ENS Cachan, 74 p.

Benboudjema F., Meftah F., Torrenti J.-M., Heinfling G. (2000a), *Analyse des essais de fluage propre réalisés sur des pâtes de ciment, mortiers et bétons, avec mesures des déformations principales*, Octobre 2000, Rapport interne EDF, 88 p.

Benboudjema F., Meftah F., Torrenti J.-M., Heinfling G. (2000b), *Étude numérique et analytique de la partie sphérique du modèle de fluage propre LGCU*, Novembre 2000, Rapport interne EDF, 56 p.

Benboudjema F., Meftah F., Torrenti J.-M., Heinfling G., Sellier A. (2001a), *A basic creep model for concrete subjected to multiaxial loads*, 4th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, Cachan, France, 28-31 Mai 2001, p. 161-168.

Benboudjema F., Meftah F., Sellier A., Torrenti J.-M., Heinfling G. (2001b), *On the prediction of delayed strains for concrete subjected to drying and loading simultaneously*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann, Elsevier, Cambridge, p. 245-250.

Benboudjema F, Meftah F., Torrenti J.-M., Le-Pape Y. (2002), *Prise en compte des effets du séchage sur les déformations du béton non chargé et chargé*, Rapport interne EDF, Mars 2002, 78 p.

Bentur A., Berger R.L., Lawrence F.V., Milestone N.B., Mindess S., Young J.F. (1979), *Creep and Drying Shrinkage of Calcium Silicate Pastes : III. A Hypothesis of Irreversible Strains*, Cement and Concrete Research, 9, p. 83-96.

Bergues J., Habib P. (1972), *Fluage triaxial des bétons*, dans 'La déformation et la rupture des solides soumis à sollicitations pluri-axiales', Colloque international de la RILEM, Cannes, 4-6 octobre 1972, p. 23-35.

Bierwirth H., Stöckl S., Kupfer H. (1994), *Versuche zum Kriechen von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung – Auswertung auf der Basis von errechneten elastischen*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, p. 5-54 (en allemand).

Biot M. A. (1941), *General theory of the three-dimensional consolidation*, Journal of applied physics, 12, p. 155-164.

Bisschop J., van Mier J.G.M. (2002), *How to study drying shrinkage microcracking in cement-based materials using optical and scanning electron microscopy ?*, Cement and Concrete Research, 32, p. 279-287.

Bissonnette B, Pigeon M. (1995), *Tensile creep at early ages of ordinary silica fume and fiber reinforced concretes*, Cement and Concrete Research, 25(5), p. 1075-1085.

Bissonnette B, Pierre P., Pigeon M. (1999), *Influence of key parameters on drying shrinkage of cementitious materials*, Cement and Concrete Research, 29(10), p. 1655-1662.

Borino G., Fuschi P., Polizzotto C. (1996), *Elastic-plastic-damage constitutive models with coupling internal variables*, Mechanical Research Communications, 23 (1), p. 19-28.

Bourgeois F., Burlion N, Shao J.F. (2001), *Elastoplasticity and anisotropic damage due to drying shrinkage in concrete*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann, Elsevier, Cambridge, p. 171-177.

Bourgeois F., Burlion N, Shao J.F. (2002), *Modelling of elastoplastic damage in concrete due to desiccation shrinkage*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 26, p. 759-774.

Brooks J.J., Neville A.M. (1977), *A comparison of creep, elasticity and strength of concrete in tension and in compression*, Magazine of Concrete Research, 29 (100), p. 131-141.

Brooks J.J. (2001), *The influence of pore stress on creep of hardened cement paste*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann, Elsevier, Cambridge, p. 61-66.

Brunauer S., Skalny J., Bodor E.E. (1969), *Adsorption on nonporous solids*, Journal of Colloid and Interface Science, 30 (4), p. 546-552.

Buil M., Acker P. (1985), *Creep of Silica Fume Concrete*, Cement and Concrete Research, 15 (3), p. 463-467.

Carol I., Bažant Z.P. (1997), *Damage and plasticity in microplane theory*, International Journal of Solids Structures, 34 (29), p. 3807-3835.

Carol I., Rizzi E., Willam K. (2001), *On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate*, International Journal of Solids and Structures, 38, p. 491-518.

CAST3M, *Code de Calcul aux Eléments Finis CAST3M*, Commissariat à l'Energie Atomique, CEA - DRN/DMT/SEMT.

CEB-FIP (1990), *CEB-FIP model code 1990*, Bulletin d'information n° 195, Contribution à l 20^{ème} session plénière du comité euro-international du béton, Paris, 437 p.

Chaboche, J.L. (1993), *Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*, International Journal of Damage Mechanics, 2, p. 311-329.

Chauvel D., Costaz J.-L., Granger L., Ithurralde G. (1998), *Centrale nucléaire de Civaux 2 : une enceinte à hautes performances*, dans ' Les bétons à hautes performances ;

innovations, réglementations et applications nouvelles', Séminaire de Formation Continue, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 24 et 25 Novembre 1998.

Chen Z., Schreyer H.L. (1995), *Formulation and computational aspects of plasticity and damage models with application to quasi-Brittle materials*, Rapport SAND95-0328, Sandia National Laboratories, U.S.A., 96 p.

Cheyrezy M., Behloul M. (2001), *Creep and shrinkage of ultra-high performance concrete*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Wittmann, Elsevier, Cambridge, p. 527-538.

Chern J.-C., Chan Y.-W. (1989), *Deformations of Concrete made with blast-furnace Slag Cement and ordinary Portland Cement*, ACI Material Journal, 86 (4), p. 372-382.

Clément J.-L., Le Maou F. (2000), *Étude de la répétabilité des essais de fluage sur éprouvette de béton*, Bulletin de Liaison des Laboratoire des Ponts et Chaussées, 228, p. 59-69.

Colina H., Acker P. (2000), *Drying cracks: kinematics and scale laws*, Materials and Structures, 33, p. 101-107.

Comi C. Perego U. (2001), *Fracture energy based bi-dissipative damage model*, International Journal of Solids and Structures, 38, p. 6427-6454.

Coussy O. (1995), *Mechanics of Porous Continua*, John Wiley & Sons.

Coussy O., Baroghel-Bouny V., Dangla P., Mainguy M. (2001), *Évaluation de perméabilité à l'eau liquide des bétons à partir de leur perte de masse durant le séchage*, Revue Française de Génie Civil. Union, Mai 2001, p. 269-284.

Daïan J.-F. (2001), *Évaluation des propriétés de transfert dans les matériaux cimentaires*, Revue Française de Génie Civil. Union, Mai 2001, p. 179-202.

Dantec P., Terme G. (1996), *Séchage et comportement différé du béton : influence de la cinétique de dessiccation sur le comportement mécanique des bétons*, Rapport 1.41.02.5 du LCPC, 88 p.

Day R.L., Gamble B.R. (1983), *The effect of changes in structure on the activation energy for the creep of concrete*, Cement and Concrete Research, 13 (4), p. 529-540.

Day R.L., Cuffaro P., Illston J.M. (1984), *The effect of drying on the drying creep of hardened cement paste*, Cement and Concrete Research, 14 (3), p. 329-338.

De Borst R. (1999), *Isotropic and anisotropic damage models for concrete fracture*, Proceedings of Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures Workshop, ENS de Cachan, France, p. 39-77.

De Larrard F., Bostvirronois J.L. (1991), *On the long term losses of silica fume high strength concretes*, Magazine of Concrete Research, 43 (155).

De Meijer M., Thurich K., Militz H. (1998), *Comparative study on penetration characteristics of modern wood coatings*, Wood Science Technology, 32, p. 347-365.

De Schutter G. (1999), *Degree of hydration based Kelvin model for the basic creep of early age concrete*, Materials and Structures, 32, p. 260-265.

Dela B.F., Stang H. (2000), *Two-dimensional analysis of crack formation around aggregates in high-shrinkage cement paste*, Engineering Fracture Mechanics, 65, p. 149-164.

Di Prisco M., Ferrara L., Meftah F., Pamin J., De Borst R., Mazars J., Reynouard J.-M. (2000), *Mixed mode fracture in plain and reinforced concrete : some results on benchmark tests*, International Journal of Fracture, 103, p. 127-148.

Dias W.P.S., Khoury G.A., Sullivan P.J.E. (1987), *An activation approach for the temperature dependence of basic creep of hardened cement paste*, Magazine of Concrete Research, 39 (140), p. 141-147.

Dormieux L. (2000), *Apport des méthodes de changement d'échelle à la résolution de quelques problèmes de mécanique des milieux poreux*, Cours de l'ENPC.

Dragon A., Halm D., Désoyer T. (2000), *Anisotropic damage in quasi-brittle solids: modeling, computational issues and applications*, computational Methods in applied Mechanics and Engineering, 183, p. 331-352.

Fafard M., Boudjelal M.T., Bissonnette B., Cloutier A. (2001), *Three-dimensional viscoelastic model with non constant coefficients*, Journal of Engineering Mechanics, 126 (8), p. 808-815.

Feenstra P.H., de Borst R. (1996), *A composite plasticity model for concrete*, International Journal of Solids Structures, 33 (5), p. 707-730.

Feldman R.F., Sereda P.J. (1968), *The model for hydrated Portland cement as deduced from sorption-length change and mechanical properties*, Materials and Construction, 1, p. 509-520.

Fichant S., Pijaudier-Cabot G., La Borderie C. (1997), *Continuum damage modeling : Approximation of crack induced anisotropy*, Mechanics Research Communications, 24 (2), p. 109-114.

Fouré B. (1985), *Note sur la chute de résistance à la traction du béton léger consécutive à l'arrêt de la cure humide*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 432, p. 3-14.

Gamble B.R., Parrott L.J. (1978), *Creep of concrete in compression during drying and wetting*, Magazine of Concrete Research, 104 (30), p. 129-138.

Garboczi E.J., Halamickova P., Detwiler R.J., Bentz D.P. (1995), *Water permeability and chloride diffusion in Portland cement mortars*, Cement and Concrete Research, 25 (4), p. 790-802.

Gaucher C. (1982), *Fluage du béton : tentative de caractérisation du comportement rhéologique non linéaire dans la représentation par intégrales multiples*, Rapport de Recherche LCPC, 108, 120 p.

Georgin J.F. (1998), *Contribution à la modélisation du béton sous sollicitation de dynamique rapide – La prise en compte de l'effet de vitesse par la viscoplasticité*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 204 p.

Gérard B., Marchand J. (2000), *Influence of cracking on the diffusion properties of cement-based materials part I : Influence of continuous cracks on the steady-state regime*, Cement and Concrete Research, 30, p. 37-43.

Ghosh R.S. (1973), *A hypothesis on mechanism of maturing creep of concrete*, Materials and Structures, 6 (31), p. 23-26.

Ghosh R.S. (1974), *Lateral creep of maturing cement paste*, Materials and Structures, 7 (42), p. 403-407.

Glücklich J. (1962), *Creep mechanism in cement mortar*, Journal of American Concrete Institute, 59, p. 923-48.

Glücklich J., Amar A. (1972), *The volumetric creep of mortars subjected to triaxial compression*, dans: La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales, Colloque international de la RILEM, Cannes, France, 1, p. 79-95.

Gopalakrishnan K.S., Neville A.M., Ghali A. (1969), *Creep Poisson's ratio of concrete under multiaxial compression*, ACI Journal, 66 (90), p. 1008-1020.

Gopalaratnam V.S., Shah S.P. (1985), *Softening response of plain concrete in direct tension*, ACI Journal, 82(27), p. 310-323.

Granger L. (1996), *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires. Analyse et modélisation*, Thèse de doctorat de l'ENPC, avril 1996.

Granger L. (1998), *Prise en compte du comportement différé des ouvrages en béton. Le cas des structures épaisses*, Rapport de Recherche LCPC, Spécial XX, p. 49-60.

Gray W.G., Schrefler B.A. (2001), *Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media*, European Journal of applied Mechanics in Solids, 20, p. 521-538.

Guénot-Delahaie I. (1997), *Contribution à l'analyse physique et à la modélisation du fluage propre du béton*, Thèse de doctorat de l'ENPC, avril 1997.

Han M.Y., Lytton R.L. (1996), *Theoretical prediction of drying shrinkage of concrete*, Journal of Materials in Civil Engineering, 7 (4), p. 204-207.

Hanhijärvi A. (1997), *Perpendicular to grain creep of Finnish softwoods in high temperature drying conditions : Experiments and modeling in temperature range 95-125°C*, Technical Research Center of Finland, VTT Publications 301, 94 p.

Hansen T.C. Mattock A.H. (1966), *Influence of size and shape of member on the shrinkage and creep of concrete*, Journal of the American concrete Institute, 63, p. 267-290.

Hansen T.C. (1986), *Physical structure of hardened cement paste. A classical approach*, Materials and Structures, 19 (114), p. 423-436.

Hanson J.A. (1968), *Effects of curing and drying environments on splitting tensile strength of concrete*, Journal of the American Concrete Institute, 65 (7), p. 535-543.

Hauggaard A.B., Damkilde L., Hansen P.F. (1999), *Transitional thermal creep of early age concrete*, Journal of Engineering Mechanics, 125(4), p. 458-465.

Hearn N. (1999), *Effect of Shrinkage and Load-Induced Cracking on Water Permeability of Concrete*, ACI Materials Journal, 96 (2), p. 234-241.

Heinfling G. (1998), *Contribution à la modélisation numérique du comportement du béton et des structures en béton armé sous sollicitations thermomécaniques à hautes températures*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 227 p.

Heinfling G., Courtois A., Hornet P. (1998), *Application des méthodes probabilistes à l'analyse du comportement des structures en béton armé vieillissantes : une approche industrielle*, Dans Fiabilité des structures, 2^{ème} conférence nationale JN-FIAB'98, Marne-La-Vallée, 23-24 Novembre 1998, Paris, Hermes, p. 231-246.

Heinfling G., Courtois A., Espion B. (1999), *A comparative study of code type models as an illustration of a guide for the engineer*, Revue française de Génie Civil, 3 (3-4), p.219-243.

Hillerborg A., Modeer M., Petersson P. E. (1976), *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cement and Concrete Research, 6, p. 773-782.

Huet C., Acker P., Baron J. (1982), Fluage et autres effets rhéologiques différées du béton, dans « Le béton hydraulique ». Paris, Presse de l'École Nationale des Pont et Chaussées.

Ibrahimbegović A., Markovic D., Gatuingt F. (2002), *Constitutive model of coupled damage-plasticity and its finite element implementation*, Revue européenne des éléments finis, à paraître.

Iding R., Bresler B. (1982), *Prediction of shrinkage stresses and deformations in concrete*, dans 'Fundamental research on creep and shrinkage of concrete', Edité par F.H. Wittmann, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.

Illston J.M. (1965), *The components of strains in concrete under sustained compressive stress*, Magazine of Concrete Research, 17 (50), p. 21-28.

Imran I., Pantazopoulou S.J. (2001), *Plasticity model for concrete under triaxial compression*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 127 (3), p. 281-290.

Jansen D.C., Shah S.P. (1997), *effects of length on compressive strain softening in concrete*, ASCE journal of Engineering Mechanics, 123, 25-35.

Jennings H.M., Xi Y. (1992), *Relationships between microstructure and creep and shrinkage of cement paste*, Material Science of Concrete, III, Ed. J. Skalny, The American Ceramic Society, Westerville, OH, p. 37-69.

Jennings H.M., Tennis P.D. (1994), *A model for the developing microstructure in Portland Cement Paste*, Journal of the American Ceramic Society, 77 (2), p. 3161-3172.

Jordaan I.J., Illston J.M. (1969), *The creep of sealed concrete under multiaxial compressive stresses*, Magazine of Concrete Research, 21 (69), p. 195-204.

Ju J.W. (1989), *On energy-based coupled elasto-plastic damage theories : Constitutive modelling and computational aspects*, International Journal of Solids and structures, 25 (7), p. 803-833.

Kanna V., Olson R.A., Jennings H.M. (1998), *Effect of shrinkage and moisture content on the physical characteristics of blended cement mortars*, Cement and Concrete Research, 18 (10), p. 1467-1477.

Kanstad T. (1991), *Evaluation of material models for shrinkage and creep of concrete*, Nordic concrete research, 10, p. 93-104.

Kim J.K., Lee C.S. (1998), *Prediction of differential drying shrinkage in concrete*, Cement and Concrete Research, 28 (7), p. 985-994.

Kovler K. (1999), *A new look at the problem of drying creep of concrete under tension*, Journal of Materials in Civil Engineering, 11 (1), p. 84-87.

Kovler K. (2001), *Drying creep of stress-induced shrinkage ?*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Wittmann, Elsevier, Cambridge, p. 67-72.

Kupfer H.B., Gerstle K.H. (1973), *Behavior of concrete under biaxial stresses*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, 99, p. 853-866.

L'Hermite R. (1960), *Volume changes of concrete*, Proceedings of the 4th International Symposium on the Chemistry of Cement, Washington D.C., p. 659-94.

La Borderie C. (1991), *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable – Modélisation et application à l'analyse de structures en béton*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI ENS de Cachan, 149 p.

Lassabatère T. (1994), *Couplages hydromécaniques en milieux poreux non saturé avec changement de phase. Application au retrait de dessiccation*, Thèse de doctorat de l'ENPC, novembre 1994.

Lassabatère T., Torrenti J.-M., Granger L. (1997), Sur le couplage entre séchage du béton et contrainte appliqué, Actes du Colloque Saint-Venant, Paris, France, 331-338.

Le Roy R. (1996), *Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances*, Thèse de doctorat de l'ENPC, septembre 1996.

Lee J., Fenves G.L. (1998), *Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures*, Journal of Engineering Mechanics, 124 (8), p. 892-900.

Lemaitre J. (1985), *A continuous damage mechanics model for ductile fracture*, Journal of engineering Materials Technologies, 107, 83-89.

Lemaitre J. Chaboche J.-L. (1988), *Mécanique des matériaux solides*, 2ème édition Dunod, 544 p.

Li Z. (1994), *Effective creep Poisson's ration for damaged concrete*, International Journal of Fracture, 66, p. 189-196.

Li J., Yao Y. (2001), *A study on creep and drying shrinkage of high performance concrete*, Cement and Concrete Research, 31, p. 1203-1206.

Lohtia R.P. (1970), *Mechanism of creep in concrete*, Roorkee University Research Journal, 1-2 (12), p. 37-47.

Luccioni B., Oller S., Danesi R. (1996), *Coupled plastic*, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, 129, 81-89.

Mainguy M., Coussy O., Baroghel-Bouny V. (2001), *Role of air pressure in drying of weakly permeable materials*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 127 (6), p. 582-592.

Martinez J.M. (2000), *Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 124, p. 97-121.

Matte V. (2000), *Durabilité des bétons à ultra hautes performances: rôle de la matrice cimentaire*, Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan & Université de Sherbrooke.

Mazars, J. (1984), *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture de béton de structure*, Thèse de doctorat d'état, Paris VI.

Mazzotti C., Savoia M. (2001), *Experimental study of non-linear creep of concrete at high stress level*, dans: F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann (Eds.), Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials, Elsevier, Cambridge, 2001, p. 259-264.

Meftah F. (1997), *Contribution à l'étude numérique des modes localisés de rupture dans les structures en béton de type poutre : Approche multicouches par la plasticité au gradient*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 217 p.

Meftah F., Torrenti J.-M., Nechnech W., Benboudjema F., de Sa C. (2000), *An elasto-plastic damage approach for the modeling of concrete submitted to the mechanical induced*

effects of drying, Shrinkage 2000 Proceedings, Rilem Publications, Paris, France, 16 – 17 Octobre 2000.

Mensi R., Acker P., Attolou A. (1988), Séchage du béton : analyse et modélisation, *Materials and Structures*, 21, p. 3-10.

Miyazawa S., Tazawa E. (2001), *Influence of specimen size and relative humidity on shrinkage of high-strength concrete*, *Concrete Science and Engineering*, 3, p. 39-46.

Nechnech W. (2000), *Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et des structures en béton armé soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques couplées : Une approche thermo-élastoplastique endommageable*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 207 p.

Neimark A. V. (1991), *Percolation theory of capillary hysteresis phenomena and its application for characterization of porous solids*, *Characterization of porous solids II*, Elsevier, Amsterdam, p. 67-75.

Neville A.M., Dilger W. H., Brooks J. J. (1983), *Creep of Plain and Structural Concrete*, Construction Press, Longman Group Ltd.

Neville A.M. (2000), *Propriétés des bétons*, traduction de la version anglaise par le CRIB, Editions Eyrolles, 806 p.

Nigoyi A.K., Hsu P., Meyers B.L. (1973), *The influence of age at time of loading on basic and drying creep*, *Cement and Concrete Research*, 3, p. 633-644.

Nooru-Mohamed M.B. (1992), *Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach*, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, 151 p.

Obeid W Mounajed G., Alliche A. (2002), *Experimental identification of Biot's hydro-mechanical coupling coefficient for cement mortar*, *Materials and Structures*, 35, p. 229-236.

Ohgishi S., Wada M., Ono, H. (1979), *Triaxial compressive creep of concrete at temperatures 20 degrees C to 320 degrees C*, *Proceedings of the 3rd International Conference on Mechanical Behavior of Materials*, Cambridge, Royaume-Uni, 20-24 Août 1979, p. 109-119.

Ordonez J.A.F. (1979), *Eugène Freyssinet*, Éditions 2C, éditions bilingues, 441 p.

Ortiz M., Popov E.P. (1985), *Accuracy and stability of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations*, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21 (35), p. 1561-1576.

Oshita H., Tanabe T. (2000), *Modeling of water migration phenomenon in concrete as homogeneous material*, *Journal of Engineering Mechanics*, 126 (5), p. 551-553.

Østergaard L., Lange D.A., Altoubat S.A., Stang H. (2001), *Tensile basic creep of early-age concrete under constant load*, *Cement and Concrete Research*, 31, p. 1895-1899.

Ožbolt J., Reinhardt H.W. (2001), *Creep-cracking interaction of concrete – three dimensional finite element model*, dans 'Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of concrete and other Quasi-Brittle Materials', édité par F.-J. Ulm, Z.P. Bažant and F.H. Witmann, Elsevier, Cambridge, 2001, p. 221-228.

Pamin J. (1996), *Simulation of mixed mode fracture in plain and reinforced concrete using standard and enhanced Rankine plasticity*, Report n° 03.21.1.31.31, Delft University of Technology, 35 p.

Parrott L.J. (1974), *Lateral strains in hardened cement paste under short and long-term loading*, Magazine of Concrete Research, 26 (89), p. 198-202.

Parrott L.J., Young J.F. (1982), *Shrinkage and swelling of two hydrated alite pastes*, dans 'Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete', édité par F.H. Wittmann, Martinus Nijhoff Publishers, La Hague, Boston, Londres, p. 35-48.

Peerlings R.H.J., Geers M.G.D., de Borst R., Brekelmans W.A.M. (2001), *A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua*, International Journal of Solids and Structures, 38, p. 7723-7746.

Philajavaara S.E. (1974), *A review of some of the main results of a research on the aging phenomena of concrete: effect of moisture conditions on strength*, Shrinkage and creep of mature concrete, Cement and Concrete Research, 4 (5), p. 761-771.

Pijaudier-Cabot G., Bažant Z. P. (1987), *Nonlocal damage theory*, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 113, p. 1512-1533.

Pijaudier-Cabot G., Benallal A. (1993), *Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum*, International Journal of Solids Structures, 30, p. 1761-1775.

Powers T.C., Copeland L.E., Hayes J.C., Mann H.M. (1954), *Permeability of Portland cement paste*, ACI Journal, 51, p. 285-298.

Powers T.C. (1968), *The thermodynamics of volume change and creep*, Materials and Constructions, 1 (6), p. 487-507.

Press W.H., Tenkolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery R.P. (1994), *Numerical recipes in Fortran : The art of scientific computing*, Second Edition, Cambridge University Press, 963 p.

Ramtani S. (1990), *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI ENS de Cachan, 185 p.

Raouf A. (1998), *Adsorption, distribution et dynamique de l'eau dans les milieux poreux*, Thèse de doctorat de l'université de Marne-la-Vallée, Paris, 196 p.

Regourd M. (1982), *L'eau*, dans Le béton hydraulique, Presse de l'ENPC, sous la direction de Jacques Baron et Raymond Sauterey, Paris, p. 59-68.

Reid S., Sedra S. (1998), *Interaction of creep, shrinkage and shrinkage-induced cracking of concrete*, dans: Mihashi et Rokuzo K. (Eds.), Fracture Mechanics of Concrete Structures, Aedificatio Publishers, Freiburg, Allemagne, 1998, pp. 1377-1386.

Ross A.D. (1954), *Experiments on the creep of concrete under two-dimensional stressing*, Magazine of Concrete Research, 21 (69), p. 195-204.

Rossi P., Gdart N., Robert J.-L., Gervais J.-P., Bruhat D. (1993), *Utilisation de la technique d'auscultation par émission acoustique pour étudier le fluage propre du béton*, Bulletin de Liaison des Laboratoire des Ponts et Chaussées, 186, p. 88-92.

Rots J.G. (1988), *Computational modeling of concrete fracture*, Dissertation, Delft University of Technology, Pays-Bas.

Ruetz W. (1968), *An hypothesis for the creep of the hardened cement paste and the influence of simultaneous shrinkage*, Proceedings of the Structure of Concrete and its Behaviour under Load, Londres, p. 365-387.

Sabri S., Illston J.M. (1982), *Isothermal drying shrinkage and wetting swelling of hardened cement paste*, dans F.H. Wittmann (Eds.), *Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete*, Martinus Nijhoff Publishers, La Hague, Boston, Londres, p. 63-72.

Scherer G.W. (1999), *Structure and properties of gels*, *Cement and Concrete Research*, 29, p. 1149-1157.

Schrefler B. A., Simoni L., Majorana C. E. (1989), *A general model for the mechanics of saturated-unsaturated porous materials*, *Materials and Structures*, p. 323-334.

Shambira M.V., Nounu G.F. (2001), *Numerical simulation of shrinkage and creep in patch-repaired axially loaded reinforced concrete short columns*, *Computers and Structures*, 79, p. 2491-2500.

Sicard V., François R., Ringot E., Pons G. (1992), *Influence of creep and shrinkage on cracking in high strength concrete*, *Cement and Concrete Research*, 22, p. 159-168.

Sicard V., Cubaynes J.-F., Pons G. (1996), *Modélisation des déformations différées des bétons à hautes performances : relation entre le retrait et le fluage*, *Materials and Structures*, 29, p. 345-353.

Siyoucef M. (2001), *Analyse expérimentale et numérique des effets structurels sur les déformations de retrait de dessiccation*, Rapport de D.E.A. de l'Université de Marne-La-Vallée, 50 p.

Sluys L.J. (1992), *Wave propagation localization and dispersion in softening solids*, Dissertation, Delft University of Technology, Pays-Bas.

Soroka I. (1979), *Portland cement paste and concrete*, Macmillan, Londres, 1979.

Svensson S., Toratti T. (1997), *Mechanical response of wood perpendicular to grain when subjected to changes of humidity*, Rapport TVBK-1013, Université de Lund, Suède, p. 67-78.

Tamtsia B.T., Beaudoin J.J. (2000), *Basic creep of hardened cement paste: A re-examination of the role of water*, *Cement and Concrete Research*, 30, p. 1465-1475.

Thelandersson S., Martensson A., Dahlblom O. (1988), *Tension softening and cracking in drying concrete*, *Materials and Structures*, 21, p. 416-424.

Torrenti J.-M. (1987), *Comportement multiaxial du béton: Aspects expérimentaux et modélisation*, Thèse de doctorat de l'ENPC, 310 p.

Torrenti J.M., Granger L., Diruy M., Genin P. (1997), *Modélisation du retrait du béton en ambiance variable*, *Revue Française de Génie Civil*, 1 (4), p. 687-698.

Ulm F.-J., Acker P. (1998), *Le point sur le fluage et la recouvrance des bétons*, *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées spécial XX*, p. 73-82.

Ulm F.-J., Le Maou F., Boulay C. (1999), *Creep and shrinkage coupling: new review of some evidence*, *Revue Française de Génie Civil*, 3, p. 21-37.

Van Mier J.G.M. (1984), *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*, PhD Dissertation, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.

Van Mier J.G.M., van Vliet M.R.A. (2002), *Uniaxial tension test for the determination of the fracture parameters of concrete: state of the art*, *Engineering Fracture Mechanics*, 69, p. 235-247.

- Van Vliet M.R.A., van Mier J.G.M. (2000)**, *Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension*, Engineering Fracture Mechanics, 65, p. 165-188.
- Van Zijl G. (1999)**, *Computational modeling of masonry creep and shrinkage*, PhD thesis, Université de Delft, Pays-Bas, 170 p.
- Verbeck G.J., Helmuth R.A. (1968)**, *Structures and physical properties of cement paste*, 5th International Symposium on Chemistry of Cement, Cachan, 3, p. 1-36.
- Vermeer P.A., De Borst R. (1984)**, *Non-associated plasticity for soils*, Concrete and rock, Heron (The Netherlands), 29 (3), 64 pp.
- Viallis-Terrisse H. (2000)**, *Interaction des Silicates de Calcium Hydratés, principaux constituants du ciment, avec les chlorures d'alcalins. Analogie avec les argiles*, Thèse de Doctorat de l'université de Bourgogne, 256 p.
- Wirtanen L., Penttala V. (2000)**, *Influence of temperature and relative humidity on the drying of concrete*, Concrete Science and Engineering, 2, p. 39-47.
- Witasse R. (2000)**, *Contribution à la compréhension du comportement d'une coque d'aéroréfrigérant vieilli : définition d'un état initial, influence des effets différés sous sollicitations hydromécaniques*, Thèse de doctorat de l'INSA de Lyon.
- Wittmann F.H. (1970)**, *Einfluß des feuchtigkeitsgehaltes auf das kriechen des zementsteines*, Rheologica Acta, 9 (2), p. 282-287. (en allemand)
- Wittmann F.H. (1973)**, *Interaction of hardened cement paste and water*, Journal of American ceramic Society, 56(8), p. 409-415.
- Wittmann F.H., Roelfstra P. (1980)**, *Total deformation of loaded drying creep*, Cement and Concrete Research, 10, p. 601-610.
- Wittmann F.H. (1982)**, *Creep and shrinkage mechanisms*, dans : Bažant Z.P., Wittmann F.H. (Eds.), *Creep and Shrinkage in concrete Structures*, Wiley, Chi Chester, p. 129-161.
- Wittmann F.H. (2001)**, *Damage of normal and high strength concrete as introduced by shrinkage*, Keynote Lecture, FraMCoS-4, 28-31 Mai 2001, Cachan, France.
- Xi Y., Bažant Z.P., Molina L., Jennings H.M. (1994)**, *Moisture diffusion in cementitious materials : moisture capacity and diffusivity*, Advanced Cement Based Materials, 1, p. 258-266.
- Young J.F. (1988)**, *Physical mechanisms and their mathematical descriptions*, dans 'Mathematical of Creep and Shrinkage of Concrete', édité par Bažant Z.P., Wiley, Chichester, p. 63-98.
- Yssorche M.P. (1995)**, *Microfissuration et durabilité des bétons à hautes performances*; Thèse de doctorat de l'INSA de Toulouse.
- Yuan Y., Wan Z.L. (2002)**, *Prediction of cracking within early-age concrete due to thermal, drying and creep behavior*, Cement and Concrete Research, 32, p. 1053-1059.

Annexe A INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON DE FLUAGE

Granger (Granger 1996) a mesuré les déformations de fluage propre d'un béton de même composition que la centrale de Civaux B11 sous une sollicitation uniaxiale. La déformation de fluage (fluage propre et fluage de dessiccation) mesurée est de $100 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ après une durée de chargement de 2,7 ans environ. Par analogie avec la loi d'élasticité de Hooke, les déformations de fluage propre sous une sollicitation multiaxiale peuvent s'écrire :

$$\varepsilon_{ii}^{flu} = J_u \left(\sigma_{ii} - \nu_f (\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \right) \quad (\text{A-1})$$

J_u est la complaisance de fluage uniaxial, ν_f est le coefficient de Poisson de fluage (supposé isotrope), ε_{ii}^{flu} et σ_{ii} sont les déformations de fluage et les contraintes, respectivement, dans la direction i .

En introduisant la déformation uniaxiale ε_u^{flu} mesurée sous une contrainte uniaxiale σ_u , l'équation A-1 devient :

$$\varepsilon_{ii}^{flu} = \frac{\varepsilon_u^{flu}}{\sigma_u} \left(\sigma_{ii} - \nu_f (\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \right) \quad (\text{A-2})$$

La précontrainte appliquée à l'enceinte de confinement de Civaux B11 conduit aux valeurs moyennes des contraintes de compression dans le béton indiquées dans la Figure A-1.

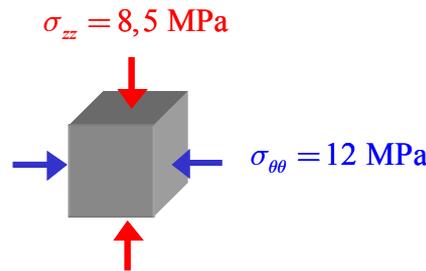


Figure A-1 Sollicitations biaxiales.

L'équation A-2 peut alors se ramener au système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{flu} &= \frac{\varepsilon_u^{flu}}{\sigma_u} \left(\sigma_{\theta\theta} - \nu_f (\sigma_{zz} + 0) \right) \\ \varepsilon_{zz}^{flu} &= \frac{\varepsilon_u^{flu}}{\sigma_u} \left(\sigma_{zz} - \nu_f (\sigma_{\theta\theta} + 0) \right) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Dans la Figure I-28, nous avons pu constater une variabilité importante du coefficient de Poisson de fluage, il peut donc en résulter une variabilité non négligeable de la déformation de fluage. Dans le Tableau A-1, on présente l'influence du coefficient de Poisson de fluage sur la déformation de fluage dans les directions orthoradiales ($\theta\theta$) et verticales (zz).

On peut constater que le coefficient de Poisson de fluage a un rôle non négligeable sur l'évolution des déformations de fluage propre. Si le coefficient de Poisson de fluage a, en réalité, une valeur proche de zéro (comme le montrent certains essais expérimentaux), la déformation de fluage propre verticale est alors sous-estimée de 39 % environ par rapport à un calcul réalisé en choisissant un coefficient de Poisson de fluage proche de 0,2 (valeur adoptée

dans le cas des calculs de centrales nucléaires, Granger 1996). La déformation de fluage propre est alors sous-estimée de 17 % dans la direction orthoradiale.

Pire encore, si le coefficient de Poisson de fluage ν , en réalité, une valeur proche de $-0,2$ (comme le montrent certains essais expérimentaux), la déformation de fluage propre verticale est sous-estimée de 79 % environ par rapport à un calcul réalisé en choisissant un coefficient de Poisson de fluage proche de $0,2$! La déformation de fluage propre est sous-estimée de 33 % dans la direction orthoradiale.

Tableau A-1 Déformation de fluage en fonction du coefficient de Poisson de fluage.

ν	- 0,3	- 0,2	- 0,1	0	0,1	0,2	0,3
$\varepsilon_{\theta\theta}^{flu} [\times 10^6]$	1455	1370	1285	1200	1115	1030	945
$\varepsilon_{zz}^{flu} [\times 10^6]$	1210	1090	970	850	730	610	490
$\varepsilon_{\theta\theta}^{flu}(\nu) / \varepsilon_{\theta\theta}^{flu}(0,2)$	1,41	1,33	1,25	1,17	1,12	1	0,92
$\varepsilon_{zz}^{flu}(\nu) / \varepsilon_{zz}^{flu}(0,2)$	1,98	1,79	1,59	1,39	1,2	1	0,8

Annexe B CONTRAINTES PRINCIPALES

B-1 Calcul des contraintes principales

Le tenseur de contraintes effectives dans le repère initial s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{yy} & \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} & \tilde{\sigma}_{yz} & \tilde{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

Étant symétrique, il admet trois valeurs propres réelles, λ_1 , λ_2 et λ_3 , qui sont solutions de l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} - \lambda & \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{yy} - \lambda & \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} & \tilde{\sigma}_{yz} & \tilde{\sigma}_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B-2})$$

Cette équation peut s'exprimer sous la forme d'une équation polynomiale du troisième degré :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{B-3})$$

où I_1 , I_2 et I_3 sont les trois invariants de la matrice des contraintes :

$$\begin{cases} I_1 = \tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} + \tilde{\sigma}_{zz} \\ I_2 = \tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{yy} + \tilde{\sigma}_{yy} \tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{zz} \tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{xy}^2 - \tilde{\sigma}_{yz}^2 - \tilde{\sigma}_{zx}^2 \\ I_3 = \tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{yy} \tilde{\sigma}_{zz} + 2 \tilde{\sigma}_{xy} \tilde{\sigma}_{yz} \tilde{\sigma}_{zx} - \tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{yz}^2 - \tilde{\sigma}_{yy} \tilde{\sigma}_{zx}^2 - \tilde{\sigma}_{zz} \tilde{\sigma}_{xy}^2 \end{cases} \quad (\text{B-4})$$

Ces trois valeurs propres correspondent aux contraintes principales. Elles s'expriment en fonction des invariants, ce qui garantit qu'elles ne dépendent pas du repère initial. Il est possible de résoudre analytiquement cette équation. Posons tout d'abord :

$$y = \lambda - I_1/3 \quad (\text{B-5})$$

L'équation B-3 devient alors :

$$y^3 - J_2 y - J_3 = 0 \quad (\text{B-6})$$

où J_2 et J_3 sont les invariants du tenseur de contraintes déviatoriques, $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - tr(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1}$:

$$\begin{cases} J_2 = I_1^2/3 - I_2 \\ J_3 = I_3 - I_1 I_2/3 + 2 I_1^3/27 \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

Les trois valeurs propres sont donc égales à :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \cos(\beta) + I_1/3 \\ \lambda_2 = \alpha \cos(\beta + 2\pi/3) + I_1/3 \\ \lambda_3 = \alpha \cos(\beta + 4\pi/3) + I_1/3 \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{4J_2/3} \\ \beta = \text{Arccos} \left[J_3 \sqrt{27/(4J_2^3)} \right] / 3 \end{cases} \quad (\text{B-9})$$

Connaissant les valeurs propres, il est possible de diagonaliser la matrice des contraintes :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{Q} \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{B-10})$$

où \mathbf{Q} est la matrice de passage et $\hat{\sigma}$ le tenseur de contraintes principales (diagonales).

Afin de revenir à l'espace de base initial et de connaître les évolutions des paramètres d'érouissage, il est nécessaire de connaître la matrice de passage \mathbf{Q} , déterminé à partir des vecteurs propres.

B-2 Calcul des vecteurs propres

Les vecteurs propres \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 et \mathbf{X}_3 , relatifs aux valeurs propres, λ_1 , λ_2 et λ_3 , respectivement, sont déterminés par la résolution du système linéaire suivant :

$$\tilde{\sigma} \cdot \mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i \quad (\text{B-11})$$

Il est choisi d'exprimer les vecteurs propres selon la forme suivante :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-12})$$

Nous allons donner les expressions des trois vecteurs propres successivement.

Expression du vecteur propre \mathbf{X}_1 :

L'équation B-11 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_1 & \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{yz} & \tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{B-13})$$

L'expression des coordonnées du vecteur propre est donc :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_1)(\tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_1) - \tilde{\sigma}_{yz}^2} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{yz}\tilde{\sigma}_{zx} - \tilde{\sigma}_{xy}(\tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_1) \\ \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{yz} - \tilde{\sigma}_{zx}(\tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B-14})$$

Expression du vecteur propre \mathbf{X}_2 :

L'équation B-11 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_2 & \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{zx} & \tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{B-15})$$

L'expression des coordonnées du vecteur propre est donc :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_2)(\tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_2) - \tilde{\sigma}_{zx}^2} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{yz}\tilde{\sigma}_{zx} - \tilde{\sigma}_{xy}(\tilde{\sigma}_{zz} - \lambda_2) \\ \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{zx} - \tilde{\sigma}_{yz}(\tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III-36})$$

Expression du vecteur propre \mathbf{X}_3 :

L'équation B-11 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_3 & \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

L'expression des coordonnées du vecteur propre est donc :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_3)(\tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_3) - \tilde{\sigma}_{xy}^2} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{yz} - \tilde{\sigma}_{zx}(\tilde{\sigma}_{yy} - \lambda_3) \\ \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{zx} - \tilde{\sigma}_{yz}(\tilde{\sigma}_{xx} - \lambda_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B-17})$$

Finalement l'expression de la matrice \mathbf{Q} est :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-18})$$

Annexe C ÉVOLUTION ORTHOTROPE DES CONTRAINTES RESISTANTES EN TRACTION

L'objectif de cette partie est de voir l'effet d'une fissuration préalable en traction dans une direction fixée sur la contrainte résistante en traction dans une direction quelconque. On se limite ici à des sollicitations dans le plan. On considère les trois chargements présentés dans la Figure C-1, pilotés en déplacement. Tout d'abord, un chargement en traction est appliqué, piloté par le déplacement latéral U_x , en dépassant la limite élastique en traction afin d'atteindre le régime adoucissant. Ensuite, un chargement en traction, piloté par le déplacement en tête U_y , est appliqué dans une direction perpendiculaire au premier chargement. Enfin, un chargement en cisaillement est appliqué. Ainsi, l'orientation des contraintes principales est différente dans les trois cas de chargement considéré.

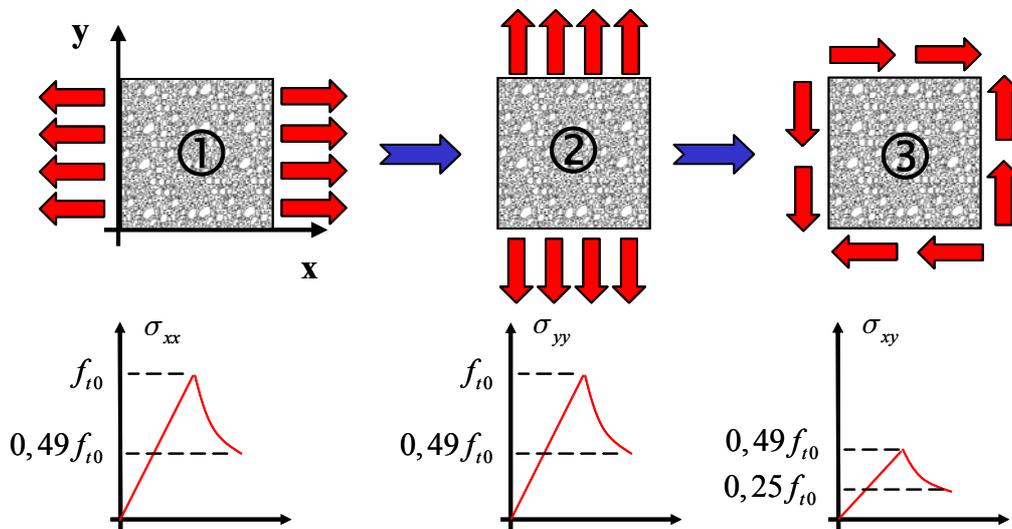


Figure C-1 Chemins de chargement.

A l'issue des trois chargements, la Figure C-2 présente, pour différentes directions $\theta \in [0, 90^\circ]$, le rapport de la contrainte résistante nominale sur la contrainte résistante initiale. La valeur de ce rapport est donnée par la distance OM :

$$\|\overline{\mathbf{OM}}\| = \text{OM} = f_t(\theta)/f_{t0} \quad (\text{C-1})$$

où $f_t(\theta)$ est la contrainte résistante nominale dans la direction inclinée d'un angle θ et f_{t0} est la contrainte résistante initiale.

Après le premier chargement en traction dans la direction x , le matériau est endommagé de façon plus importante dans cette direction. Le rapport $f_t(\theta)/f_{t0}$ croît alors progressivement au fur et à mesure que l'angle θ tend vers 90° (direction y). Dans la direction y , orthogonale à x , le matériau n'est pas endommagé. A la fin du second chargement en traction dans la direction y , on observe que la réduction de la résistante devient isotrope au sein du matériau. Par conséquent, si deux fissures identiques sont créées dans des directions orthogonales, le comportement du matériau devient alors isotrope.

Ce résultat est logique. En effet, considérons un essai de bi-traction où les deux contraintes sont égales. Cet état de contraintes dans le plan de Mohr est représenté par un point. Par conséquent, l'état de contraintes est isotrope quelque soit la valeur de θ :

$\sigma_I(\theta) = \sigma_{xx}$ et $\sigma_{II}(\theta) = \sigma_{yy} = \sigma_{xx}$. Ainsi, le matériau se comporte « de façon isotrope » lors du chargement ce qui implique que le matériau se dégrade de façon identique quelle que soit la direction concernée.

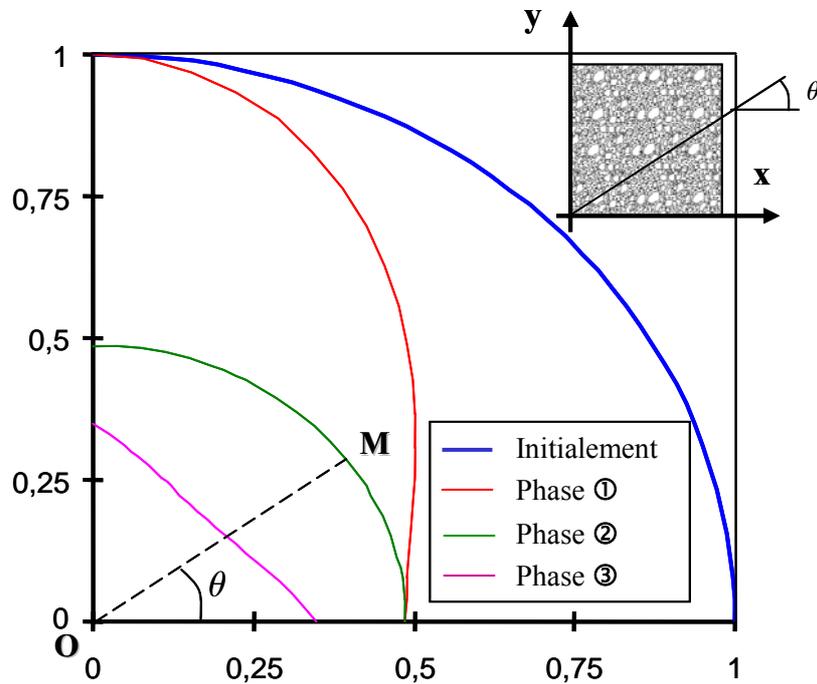


Figure C-2 Rapport de la contrainte résistante nominale sur la contrainte résistante initiale.

On peut par ailleurs considéré le chargement représenté dans la Figure C-3. On suppose qu'à l'issue des deux premiers chargements, les fissures sont « quasi-traversantes ».

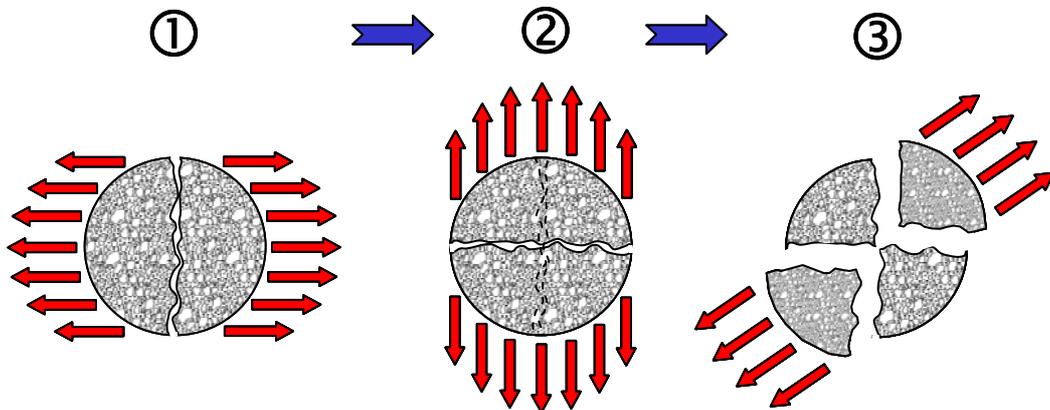


Figure C-3 Chemins de chargement.

Puisque la fissure initiée lors du premier chargement est parallèle à la direction du deuxième chargement, il n'y a aucune interaction entre la (première) fissure et le (deuxième) chargement. Ensuite, puisque deux fissures « quasi-traversantes » orthogonales ont été initiées, il n'existe presque plus de contact entre les quatre différentes parties (induites par les deux fissurations préalables) du matériau. Le matériau ne peut donc plus retransmettre d'effort quelle que soit la direction de chargement considérée.

Si nous revenons aux résultats montrés dans la Figure C-2, nous remarquons que le chargement de cisaillement rend de nouveau le matériau orthotrope. La direction la plus endommagée correspond maintenant à celle des nouvelles contraintes principales, dont l'angle

d'inclinaison est $\theta = 45^\circ$ ($f_t(\theta = 45^\circ)/f_{t0} = 0,25$). Les directions **x** et **y** se sont aussi dégradées de façon identique, mais suivant une amplitude moindre ($f_t(\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ)/f_{t0} = 0,35$).

Annexe D CALCUL DES DEFORMATIONS DE FLUAGE

Dans cette annexe, nous intégrons les expressions des déformations sphériques et déviatoriques de fluage propre et de fluage de dessiccation, dans le cas où les contraintes et l'humidité relative sont variables. Il est supposé qu'il n'y a ni fissuration, ni porosité et donc que le fluage est gouverné par les contraintes apparentes.

Nous allons présenter successivement les discrétisations relatives à la déformation de fluage propre et de fluage de dessiccation. De plus, les expressions des déformations de fluage seront données dans le cas où les contraintes et l'humidité relative sont constantes.

Les contraintes et l'humidité relative sont approchées par des fonctions affines par morceaux dans chaque pas de temps $t \in [t_n, t_{n+1}]$ (voir la Figure D-1) :

$$\begin{cases} h(t) = h_n + \Delta h_n \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} & \text{avec } \Delta h_n = h_{n+1} - h_n \\ \sigma(t) = \sigma_n + \Delta \sigma_n \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} & \text{avec } \Delta \sigma_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n \end{cases} \quad (\text{D-1})$$

où $h_n = h(t_n)$ est l'humidité relative au temps t_n et $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

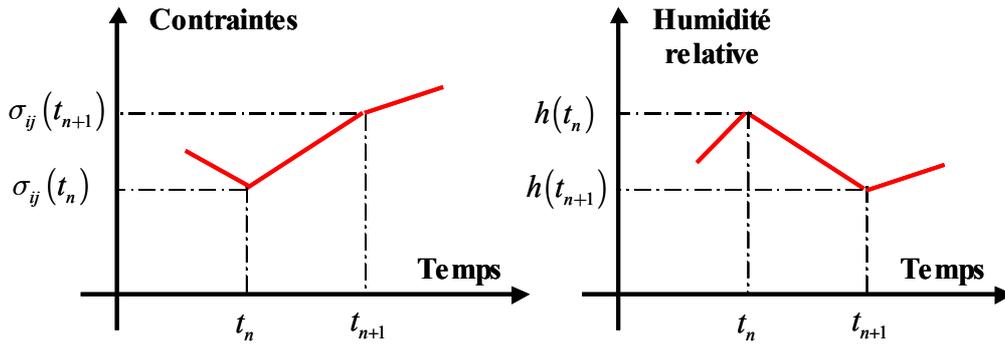


Figure D-1 Variation linéaire par morceaux des contraintes et de l'humidité relative.

Le produit des contraintes par l'humidité relative est alors linéarisé au premier ordre :

$$h(t)\sigma(t) = h_n\sigma_n + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n}(h_n\Delta\sigma_n + \Delta h_n\sigma_n) \quad (\text{D-2})$$

D-1 Fluage propre

L'expression de la déformation de fluage propre sphérique est (voir l'équation II-80) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{sph}(t) + 2\dot{\varepsilon}_i^{sph}(t) = \frac{1}{\eta_r^{sph}} [h(t)\sigma^{sph}(t) - k_r^{sph}\varepsilon_r^{sph}(t)] \\ \dot{\varepsilon}_i^{sph}(t) = \frac{1}{\eta_i^{sph}} \langle -2k_r^{sph}\varepsilon_r^{sph}(t) + k_i^{sph}\varepsilon_i^{sph}(t) + h(t)\sigma^{sph}(t) \rangle^+ \end{cases} \quad (\text{D-3})$$

L'expression de la déformation de fluage propre déviatorique est (voir l'équation II-96) :

$$\begin{cases} \eta_r^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{dev}(t) + k_r^{dev} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = h(t) \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) \\ \eta_i^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{dev}(t) = h(t) \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) \end{cases} \quad (D-4)$$

Lors du calcul numérique, ces expressions sont discrétisées, lors du pas de temps $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, afin de connaître les déformations sphériques et déviatoriques de fluage propre au temps t_{n+1} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{sph}(n+1)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(n+1)$, respectivement.

D-1.1 Déformation de fluage propre sphérique

On peut remarquer d'après l'équation D-3 que la déformation de fluage irréversible n'évolue que sous certaines conditions. Connaissant les déformations sphériques réversibles et irréversibles de fluage au pas de temps d'indice n (temps t_n), on estime la vitesse de la déformation sphérique irréversible de fluage au pas de temps d'indice n :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{sph}(t_n) = -\frac{1}{\eta_i^{sph}} \left(-2k_r^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{sph}(t_n) + k_i^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{sph}(t_n) + h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} \right) \quad (D-5)$$

On considère alors deux cas suivant le signe de la vitesse de la déformation sphérique irréversible de fluage.

D-1.1.1 Vitesse négative (déformation à long terme)

A l'aide de la discrétisation adoptée D-1, le système d'équations couplées D-3 s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{sph}(t) + 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{sph}(t) = \frac{1}{\eta_r^{sph}} \left[h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{sph}) \right. \\ \quad \left. - k_r^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{sph}(t) \right] \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{sph}(t) = -\frac{1}{\eta_i^{sph}} \left\langle -2k_r^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{sph}(t) + k_i^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{sph}(t) + h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} \right. \\ \quad \left. + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{sph} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{sph}) \right\rangle^+ \end{cases} \quad (D-6)$$

Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{sph}(t) = a_{rr}^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{sph}(t) + a_{ri}^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{sph}(t) + b_{rr}^{sph} + c_{rr}^{sph}(t-t_n) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{sph}(t) = a_{ir}^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{sph}(t) + a_{ii}^{sph} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{sph}(t) + b_{ii}^{sph} + c_{ii}^{sph}(t-t_n) \end{cases} \quad (D-7)$$

Avec :

$$\begin{cases}
 \mathbf{a}^{sph} = \begin{bmatrix} a_{rr}^{sph} & a_{ri}^{sph} \\ a_{ir}^{sph} & a_{ii}^{sph} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{k_r^{sph}}{\eta_r^{sph}} - 4\frac{k_r^{sph}}{\eta_i^{sph}} \right) & \left(2\frac{k_i^{sph}}{\eta_i^{sph}} \right) \\ \left(2\frac{k_r^{sph}}{\eta_i^{sph}} \right) & \left(-\frac{k_i^{sph}}{\eta_i^{sph}} \right) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}^{sph} = \begin{bmatrix} b_{rr}^{sph} \\ b_{ii}^{sph} \end{bmatrix} = h_n \sigma_n^{sph} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\eta_r^{sph}} + \frac{2}{\eta_i^{sph}} \right) \\ \left(-\frac{1}{\eta_i^{sph}} \right) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{c}^{sph} = \begin{bmatrix} c_{rr}^{sph} \\ c_{ii}^{sph} \end{bmatrix} = \frac{(h_n \Delta \sigma_n^{sph} + \Delta h_n \sigma_n^{sph})}{\Delta t_n} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\eta_r^{sph}} + \frac{2}{\eta_i^{sph}} \right) \\ \left(-\frac{1}{\eta_i^{sph}} \right) \end{bmatrix}
 \end{cases} \quad (D-8)$$

La relation D-7 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{sph}(t) = \left[\dot{\varepsilon}_r^{sph}(t) \quad \dot{\varepsilon}_i^{sph}(t) \right]^T = \mathbf{a}^{sph} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{sph}(t) + \mathbf{b}^{sph} + (t - t_n) \mathbf{c}^{sph} \quad (D-9)$$

Les équations peuvent être découplées à l'aide d'un changement de variable adéquat, en diagonalisant la matrice \mathbf{a}^{sph} :

$$\mathbf{a}^{sph} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (D-10)$$

où \mathbf{P} est la matrice de passage de la base initiale vers la base des vecteurs propres et \mathbf{D} est la matrice diagonale.

On pose par souci de simplicité :

$$\begin{cases}
 u_{rr} = \frac{k_r^{sph}}{\eta_r^{sph}} = \frac{1}{\tau_r^{sph}} \\
 u_{ii} = \frac{k_i^{sph}}{\eta_i^{sph}} = \frac{1}{\tau_i^{sph}} \\
 u_{ri} = \frac{k_r^{sph}}{\eta_i^{sph}}
 \end{cases} \quad (D-11)$$

Les deux valeurs propres de la matrice \mathbf{a}^{sph} , notées λ_1 et λ_2 sont obtenues à l'aide de l'équation suivante :

$$\det(\mathbf{a}^{sph} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -u_{rr} - 4u_{ri} - \lambda & 2u_{ii} \\ 2u_{ri} & -u_{ii} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (D-12)$$

Les valeurs propres sont donc solutions de l'équation du second degré suivante :

$$\Rightarrow \lambda^2 + (u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii})\lambda + u_{rr}u_{ii} = 0 \quad (D-13)$$

Le discriminant de cette équation du second degré est égal :

$$\Delta = (u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii})^2 - 4u_{rr}u_{ii} = (u_{rr} - u_{ii})^2 + 8u_{ri}(u_{rr} + u_{ii}) + 16u_{ri}^2 \quad (D-14)$$

Les variables u_{ri} , u_{rr} et u_{ii} étant strictement positives, le discriminant est donc toujours strictement positif. Les valeurs propres sont donc réelles et distinctes, la matrice \mathbf{a}^{sph} est donc diagonalisable. Par ailleurs, aucune des 2 valeurs propres n'est égale à zéro ($\lambda_1 \lambda_2 = u_{rr} u_{ii} \neq 0$). Les 2 valeurs propres sont donc égales à :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii}) - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii}) + \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (\text{D-15})$$

La première valeur propre est évidemment négative. Montrons que la deuxième valeur propre est aussi négative. Pour cela, nous allons comparer les quantités Δ et $(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii})^2$. A partir de l'équation D-14, on peut écrire que :

$$(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii})^2 - \Delta = 4 u_{rr} u_{ii} \quad (\text{D-16})$$

Le produit $u_{rr} u_{ii}$ étant toujours positif, on en déduit que :

$$(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii})^2 > \Delta > 0 \quad (\text{D-17})$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante :

$$(u_{rr} + 4u_{ri} + u_{ii}) < \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_2 < 0 \quad (\text{D-18})$$

Les 2 valeurs propres sont donc négatives, la déformation de fluage sphérique est donc asymptotique, ce qui confirme l'hypothèse émise lors de la description du modèle de fluage propre sphérique (voir le paragraphe § II-4.1.1). Déterminons maintenant une base des vecteurs propres ($\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$) associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , respectivement. Elle se détermine en résolvant l'équation :

$$(\mathbf{a}^{sph} - \lambda_i \mathbf{1}) \cdot \mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad (\text{D-19})$$

Exprimons les vecteurs propres selon la forme :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-20})$$

La résolution de l'équation D-19 pour chacune des valeurs propres et des vecteurs propres conduit au résultat suivant :

$$x_1 = \frac{\lambda_1 + u_{ii}}{2u_{ri}} \text{ et } x_2 = \frac{2u_{ri}}{\lambda_2 + u_{ii}} \quad (\text{D-21})$$

Les matrices \mathbf{P} et \mathbf{D} s'écrivent alors :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-22})$$

Le vecteur de déformation de fluage propre sphérique $\boldsymbol{\varepsilon}^{sph}(t)$ dans la base initiale, s'écrit alors en fonction du vecteur de déformation de fluage propre sphérique $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ dans l'espace des vecteurs propres (base diagonale) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sph}(t) = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \left[\varepsilon_1^*(t) \quad \varepsilon_2^*(t) \right]^T \quad (\text{D-23})$$

Dans l'espace des vecteurs propres, le système d'équations devient découplé, et s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^*(t) = \lambda_1 \varepsilon_1^*(t) + b_1^* + c_1^*(t - t_n) \\ \varepsilon_2^*(t) = \lambda_2 \varepsilon_2^*(t) + b_2^* + c_2^*(t - t_n) \end{cases} \quad (\text{D-24})$$

Ainsi, dans l'espace des vecteurs propres, le modèle de fluage devient équivalent à une double chaîne de Kelvin-Voigt. Il est nécessaire de connaître la solution de l'équation homogène (sans second membre), ainsi qu'une solution particulière afin de résoudre les deux équations différentielles précédentes. La solution homogène de chacune des deux équations est la suivante :

$$\varepsilon_j^*(t) = \mu_j \exp(\lambda_j t) \quad (\text{D-25})$$

où μ_j est un paramètre dépendant de la condition initiale. Une solution particulière est obtenue par la méthode de variation de la constante ($\mu_j = \mu_j(t)$). On obtient alors les solutions suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^*(t) = \mu_1 \exp(\lambda_1 t) - \frac{1}{\lambda_1} \left(b_1^* + c_1^* \left(t - t_n + \frac{1}{\lambda_1} \right) \right) \\ \varepsilon_2^*(t) = \mu_2 \exp(\lambda_2 t) - \frac{1}{\lambda_2} \left(b_2^* + c_2^* \left(t - t_n + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \end{cases} \quad (\text{D-26})$$

Les déformations sphériques réversibles et irréversibles de fluage sont alors égales à :

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{sph}(t_{n+1}) = \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_r^{sph}} + \left[x_1 \mu_1 \exp(\lambda_1 t_{n+1}) + \mu_2 \exp(\lambda_2 t_{n+1}) \right] \\ \varepsilon_i^{sph}(t_{n+1}) = \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_i^{sph}} + \left[\mu_1 \exp(\lambda_1 t_{n+1}) + x_2 \mu_2 \exp(\lambda_2 t_{n+1}) \right] \end{cases} \quad (\text{D-27})$$

Les coefficients μ_1 et μ_2 sont donnés par les conditions initiales. Après simplification, on obtient alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{(x_1 x_2 - 1) \exp(\lambda_1 t_n)} \left[\left(\varepsilon_r^{sph}(t_n) - \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_r^{sph}} \right) x_2 \right. \\ \quad \left. - \left(\varepsilon_i^{sph}(t_n) - \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_i^{sph}} \right) \right] \\ \mu_2 = \frac{1}{(x_1 x_2 - 1) \exp(\lambda_2 t_n)} \left[- \left(\varepsilon_r^{sph}(t_n) - \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_r^{sph}} \right) \right. \\ \quad \left. + \left(\varepsilon_i^{sph}(t_n) - \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph} + h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_i^{sph}} \right) x_1 \right] \end{cases} \quad (\text{D-28})$$

La déformation de fluage propre réversible peut s'écrire alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{sph}(t_{n+1}) &= \frac{\varepsilon_r^{sph}(t_n)}{x_1 x_2 - 1} (x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t_n) - \exp(\lambda_2 \Delta t_n)) \\
&+ \frac{x_1 \varepsilon_i^{sph}(t_n)}{x_1 x_2 - 1} (-\exp(\lambda_1 \Delta t_n) + \exp(\lambda_2 \Delta t_n)) \\
&+ \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph}}{k_r^{sph}} \left(1 + \frac{-x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t_n) + \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph}}{k_i^{sph}} x_1 \left(\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t_n) - \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_r^{sph}} \left(1 + \frac{-x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t_n) + \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_i^{sph}} x_1 \left(\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t_n) - \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right)
\end{aligned} \tag{D-29}$$

La déformation de fluage propre réversible peut s'écrire alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^{sph}(t_{n+1}) &= \frac{x_2 \varepsilon_r^{sph}(t_n)}{x_1 x_2 - 1} (\exp(\lambda_1 \Delta t_n) - \exp(\lambda_2 \Delta t_n)) \\
&+ \frac{\varepsilon_i^{sph}(t_n)}{x_1 x_2 - 1} (-\exp(\lambda_1 \Delta t_n) + x_1 x_2 \exp(\lambda_2 \Delta t_n)) \\
&+ \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph}}{k_r^{sph}} x_2 \left(\frac{-\exp(\lambda_1 \Delta t_n) + \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{\Delta h_n \sigma_n^{sph}}{k_i^{sph}} \left(1 + \frac{\exp(\lambda_1 \Delta t_n) - x_1 x_2 \cdot \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_r^{sph}} x_2 \left(\frac{-\exp(\lambda_1 \Delta t_n) + \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{h_n \sigma_{n+1}^{sph}}{k_i^{sph}} \left(1 + \frac{\exp(\lambda_1 \Delta t_n) - x_1 x_2 \exp(\lambda_2 \Delta t_n)}{x_1 x_2 - 1} \right)
\end{aligned} \tag{D-30}$$

La déformation de fluage propre sphérique peut alors se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{sph}(t_{n+1}) = a_n^{s-r} + b_n^{s-r} \sigma_n^{sph} + c_n^{s-r} \sigma_{n+1}^{sph} \\ \varepsilon_i^{sph}(t_{n+1}) = a_n^{s-i} + b_n^{s-i} \sigma_n^{sph} + c_n^{s-i} \sigma_{n+1}^{sph} \end{cases} \tag{D-31}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_n^{s-r} = \left[\frac{x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t) - \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \varepsilon_r^{sph}(t_n) \\
 \quad - x_1 \left[\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \varepsilon_i^{sph}(t_n) \\
 b_n^{s-r} = \frac{\Delta h_n}{k_r^{sph}} \left[1 + \frac{-x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t) + \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 \quad + \frac{\Delta h_n}{k_i^{sph}} x_1 \left[\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 c_n^{s-r} = \frac{h_n}{k_r^{sph}} \left[1 + \frac{-x_1 x_2 \exp(\lambda_1 \Delta t) + \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 \quad + \frac{h_n}{k_i^{sph}} x_1 \left[\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right]
 \end{array} \right. \quad (D-32)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_n^{s-i} = x_2 \left[\frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \varepsilon_r^{sph}(t_n) \\
 \quad - \left[\frac{(-\exp(\lambda_1 \Delta t) + x_1 x_2 \cdot \exp(\lambda_2 \Delta t))}{x_1 x_2 - 1} \right] \varepsilon_i^{sph}(t_n) \\
 b_n^{s-i} = \frac{\Delta h_n}{k_r^{sph}} x_2 \left[\frac{-\exp(\lambda_1 \Delta t) + \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 \quad + \frac{\Delta h_n}{k_i^{sph}} \left[1 + \frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - x_1 x_2 \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 c_n^{s-i} = \frac{h_n}{k_r^{sph}} x_2 \left[\frac{-\exp(\lambda_1 \Delta t) + \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right] \\
 \quad + \frac{h_n}{k_i^{sph}} \left[1 + \frac{\exp(\lambda_1 \Delta t) - x_1 x_2 \exp(\lambda_2 \Delta t)}{x_1 x_2 - 1} \right]
 \end{array} \right. \quad (D-33)$$

D-1.1.2 Vitesse positive (déformation à court terme ou déchargement)

On impose la vitesse de déformations de fluage irréversibles à zéro.

A partir de l'équation différentielle D-3, en utilisant la discrétisation proposée, l'équation constitutive s'écrit :

$$\eta_r^{sph} \dot{\varepsilon}_r^{sph}(t) + k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}(t) = h_n \sigma_n^{sph} + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} (h_n \Delta \sigma_n^{sph} + \Delta h_n \sigma_n^{sph}) \quad (D-34)$$

Il est nécessaire de connaître la solution de l'équation homogène (sans second membre), ainsi qu'une solution particulière afin de résoudre l'équation différentielle précédente :

$$\varepsilon_r^{sph_hom}(t) = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{sph}}\right) \quad (D-35)$$

où μ est un paramètre dépendant de la condition initiale :

$$\varepsilon_r^{sph}(t = t_n) = \varepsilon_r^{sph}(n) \quad (D-36)$$

τ_r^{sph} est le temps caractéristique associé au fluage propre sphérique réversible :

$$\tau_r^{sph} = \frac{\eta_r^{sph}}{k_r^{sph}} \quad (D-37)$$

Une solution particulière est obtenue par la méthode de variation de la constante ($\mu = \mu(t)$) :

$$\varepsilon_r^{sph-par}(t) = \alpha_r^{sph} + \beta_r^{sph}(t - t_n) \quad (D-38)$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_{sph} = \frac{1}{k_r^{sph}} \left(h_n \sigma_n^{sph} - \frac{\tau_r^{sph}}{\Delta t_n} (h_n \Delta \sigma_n^{sph} + \Delta h_n \sigma_n^{sph}) \right) \\ \beta_{sph} = \frac{1}{k_r^{sph} \Delta t_n} (h_n \Delta \sigma_n^{sph} + \Delta h_n \sigma_n^{sph}) \end{cases} \quad (D-39)$$

Finalement au pas de temps $n+1$, la déformation de fluage propre réversible est égale à :

$$\varepsilon_r^{sph}(n+1) = (\varepsilon_r^{sph}(n) - \alpha_{sph}) \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{sph}}\right) + \alpha_{sph} + \beta_{sph} \Delta t_n \quad (D-40)$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_r^{sph}(n+1) = \varepsilon_{n+1}^{sph-r} = a_n^{s-r} + b_n^{s-r} \sigma_n^{sph} + c_n^{s-r} \sigma_{n+1}^{sph} \quad (D-41)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_n^{s-r} = \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{sph}}\right) \varepsilon_n^{sph-r} \\ b_n^{s-r} = \frac{1}{k_r^{sph}} \left[-\left(\frac{2\tau_r^{sph}}{\Delta t_n} + 1\right) h_n + \frac{\tau_r^{sph}}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{sph}}\right) \\ \quad + \frac{1}{k_r^{sph}} \left[\left(\frac{2(\tau_r^{sph} - \Delta t_n)}{\Delta t_n} + 1\right) h_n - \frac{\tau_r^{sph} - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \\ c_n^{s-r} = \frac{h_n \tau_r^{sph}}{k_r^{sph} \Delta t_n} \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{sph}}\right) - \frac{h_n}{k_r^{sph}} \frac{\tau_r^{sph} - \Delta t_n}{\Delta t_n} \end{cases} \quad (D-42)$$

En notant bien entendu que la déformation irréversible ne varie pas :

$$\varepsilon_i^{sph}(n+1) = \varepsilon_i^{sph}(n) \quad (D-43)$$

D-1.1.3 Cas où les contraintes et l'humidité relative sont constantes

L'humidité relative et les contraintes sont constantes dans le temps :

$$\begin{cases} h(t) = h \\ \sigma^{sph}(t) = \sigma^{sph} \end{cases} \quad (D-44)$$

➤ Déformation à court terme

Initialement, les déformations sphériques réversibles et irréversibles de fluage propre sont nulles :

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{sph}(t=0) = 0 \\ \varepsilon_i^{sph}(t=0) = 0 \end{cases} \quad (D-45)$$

Ainsi, la deuxième équation du système D-3 conduit à une vitesse de déformation sphérique irréversible de fluage propre nulle (et donc une amplitude aussi nulle) dans le cas d'un chargement en compression ($\sigma^{sph} < 0$) :

$$\eta_i^{sph} \dot{\varepsilon}_i^{sph}(0) = \langle -2k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}(0) + k_i^{sph} \varepsilon_i^{sph}(0) + h\sigma^{sph} \rangle^+ = \langle h\sigma^{sph} \rangle^+ = 0 \quad (D-46)$$

Cette vitesse est aussi nulle dans le cas d'un déchargement. La déformation sphérique réversible de fluage propre $\varepsilon_r^{sph}(t)$ s'écrit alors, après la simplification de l'équation D-31 :

$$\varepsilon_r^{sph}(t) = \frac{h}{k_r^{sph}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{sph}}\right) \right] \sigma^{sph} \quad (D-47)$$

La déformation sphérique réversible de fluage propre $\varepsilon_i^{sph}(t)$ est nulle dans ce cas. Ainsi la déformation de fluage propre sphérique $\varepsilon_{fp}^{sph}(t)$ peut se mettre alors sous la forme :

$$\varepsilon_{fp}^{sph}(t) = J_{fp}^{sph}(t) h\sigma^{sph} \quad (D-48)$$

où $J_{fp}^{sph}(t)$ est la complaisance de fluage propre déviatorique, dont l'expression est :

$$J_{fp}^{sph}(t) = \frac{1}{k_r^{sph}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{sph}}\right) \right] \quad (D-49)$$

La vitesse de la déformation sphérique irréversible de fluage propre devient non nulle dès que $t = t_p$, où t_p est le temps défini par l'équation suivante :

$$-2k_r^{sph} \varepsilon_r^{sph}(t_p) + h\sigma^{sph} = 0 \quad (D-50)$$

A l'aide de l'expression de la déformation réversible D-47, on obtient alors l'expression du temps t_d :

$$t_p = \ln(2) \tau_r^{sph} \quad (D-51)$$

➤ Déformation à long terme

Lorsque $t \geq t_p$, la vitesse de la déformation sphérique irréversible de fluage propre devient non nulle. La déformation sphérique réversible de fluage propre $\varepsilon_r^{sph}(t)$ s'écrit alors, après la simplification de l'équation D-29 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{sph}(t) = & \left\{ \frac{1}{k_r} + \frac{1}{(x_1 x_2 - 1)} \left[\frac{1}{2k_r} \left(-x_1 x_2 \exp(\lambda_1(t-t_p)) + \exp(\lambda_2(t-t_p)) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x_1}{k_i} \left(\exp(\lambda_1(t-t_p)) - \exp(\lambda_2(t-t_p)) \right) \right] \right\} h\sigma^{sph} \end{aligned} \quad (D-52)$$

De même, la déformation sphérique irréversible de fluage propre $\varepsilon_i^{sph}(t)$ s'écrit, après avoir simplifié de l'équation D-30 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{sph}(t) = & \left\{ \frac{1}{k_i} + \frac{1}{(x_1 x_2 - 1)} \left[\frac{x_2}{2k_r} \left(-\exp(\lambda_1(t-t_p)) + \exp(\lambda_2(t-t_p)) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{k_i} \left(\exp(\lambda_1(t-t_p)) - x_1 x_2 \exp(\lambda_2(t-t_p)) \right) \right] \right\} h\sigma^{sph} \end{aligned} \quad (D-53)$$

Ainsi la déformation sphérique de fluage propre $\varepsilon_{fp}^{sph}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{fp}^{sph}(t) = J_{fp}^{sph}(t) h\sigma^{sph} \quad (D-54)$$

où $J_{fp}^{sph}(t)$ est la complaisance de fluage propre sphérique, dont l'expression est :

$$\begin{aligned} J_{fp}^{sph}(t) = & \frac{1}{k_r^{sph}} + \frac{1}{k_i^{sph}} + \frac{(x_1 + 1) \exp[\lambda_1(t-t_p)]}{(x_1 x_2 - 1)} \left(-\frac{x_2}{k_r^{sph}} + \frac{1}{k_i^{sph}} \right) \\ & + \frac{(1 + x_2) \exp[\lambda_2(t-t_p)]}{(x_1 x_2 - 1)} \left(\frac{1}{k_r^{sph}} - \frac{x_1}{k_i^{sph}} \right) \end{aligned} \quad (D-55)$$

➤ Cas d'un déchargement

Si à l'instant $t = t_d$, le matériau est déchargé ($\sigma^{sph} = 0$), les déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{sph}(t) = \varepsilon_r^{sph}(t_d) \cdot \exp\left(-\frac{t-t_d}{\tau_r^{sph}}\right) \text{ pour } t \geq t_d \\ \varepsilon_i^{sph}(t) = \varepsilon_i^{sph}(t_d) \end{cases} \quad (D-56)$$

Ainsi, la déformation totale est égale :

$$\varepsilon_{fp}^{sph}(t) = \varepsilon_r^{sph}(t_d) \exp\left(-\frac{t-t_d}{\tau_r^{sph}}\right) + \varepsilon_i^{sph}(t_d) \quad (D-57)$$

D-1.2 Déformation de fluage propre déviatorique

D-1.2.1 Déformation de fluage déviatorique réversible

A partir de l'équation différentielle D-4, en utilisant la discrétisation proposée, l'équation constitutive s'écrit :

$$\eta_r^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{dev}(t) + k_r^{dev} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \quad (D-58)$$

Il est nécessaire de connaître la solution de l'équation homogène (sans second membre), ainsi qu'une solution particulière afin de résoudre l'équation différentielle précédente. La solution de l'équation homogène est de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev-hom}(t) = \boldsymbol{\mu} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{dev}}\right) \quad (\text{D-59})$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est un vecteur paramètre dépendant de la condition initiale, qui est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t = t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(n) \quad (\text{D-60})$$

τ_r^{dev} est le temps caractéristique associé au fluage propre déviatorique réversible :

$$\tau_r^{dev} = \frac{\eta_r^{dev}}{k_r^{dev}} \quad (\text{D-61})$$

Une solution particulière est obtenue par la méthode de variation de la constante ($\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t)$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev-par}(t) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}(t - t_n) \quad (\text{D-62})$$

Avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k_r^{dev}} \left(h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} - \frac{\tau_r^{dev}}{\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \right) \\ \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{k_r^{dev} \Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \end{cases} \quad (\text{D-63})$$

Finalement au pas de temps $n+1$, la déformation de fluage propre réversible est égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(n+1) = (\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(n) - \boldsymbol{\alpha}) \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{dev}}\right) + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \Delta t_n \quad (\text{D-64})$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{dev-r} = a_n^{d-r} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{dev-r} + b_n^{d-r} \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + c_n^{d-r} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} \quad (\text{D-65})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_n^{d-r} = \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{dev}}\right) \\ b_n^{d-r} = \frac{1}{k_r^{dev}} \left[-\left(\frac{2\tau_r^{dev}}{\Delta t_n} + 1\right) h_n + \frac{\tau_r^{dev}}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{dev}}\right) \\ \quad + \frac{1}{k_r^{dev}} \left[\left(\frac{2(\tau_r^{dev} - \Delta t_n)}{\Delta t_n} + 1\right) h_n - \frac{\tau_r^{dev} - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \\ c_n^{d-r} = \frac{h_n \tau_r^{dev}}{k_r^{dev} \Delta t_n} \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^{dev}}\right) - \frac{h_n}{k_r^{dev}} \frac{\tau_r^{dev} - \Delta t_n}{\Delta t_n} \end{cases} \quad (\text{D-66})$$

D-1.2.2 Déformation de fluage déviatorique irréversible

La déformation déviatorique irréversible de fluage propre dépend du signe et du sens de variation de la contrainte déviatorique. En effet, en cas de changement de signe de la contrainte déviatorique, la déformation irréversible décroît, ce qui n'est pas le cas si la contrainte déviatorique décroît. L'équation D-4 devient :

$$\eta_i^{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{dev}(t) = h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \frac{(t-t_n)}{\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \quad (D-67)$$

La résolution de l'équation différentielle précédente donne l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t_n) = \frac{1}{\eta_i^{dev}} \left[h_n (t-t_n) \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \frac{(t-t_n)^2}{2\Delta t_n} (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \right] \quad (D-68)$$

Finalement au pas de temps $n+1$, la déformation de fluage propre réversible est égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(n) + \frac{\Delta t_n}{\eta_i^{dev}} \left[h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + 1/2 (h_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta h_n \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \right] \quad (D-69)$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{dev-i} = a_n^{d-i} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{dev-i} + b_n^{d-i} \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + c_n^{d-i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} \quad (D-70)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_n^{d-i} = 1 \\ b_n^{d-i} = \frac{\Delta t_n h_{n+1}}{2\eta_i^{dev}} \\ c_n^{d-i} = \frac{\Delta t_n h_n}{2\eta_i^{dev}} \end{cases} \quad (D-71)$$

D-1.2.3 Cas où les contraintes et l'humidité relative sont constantes

L'humidité relative et les contraintes sont constantes dans le temps :

$$\begin{cases} h(t) = h \\ \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \end{cases} \quad (D-72)$$

La déformation déviatorique réversible de fluage propre $\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t)$ s'écrit alors, après la simplification de l'équation D-65 :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = \frac{h}{k_r^{dev}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{dev}}\right) \right] \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (D-73)$$

De même, la déformation déviatorique irréversible de fluage propre $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t)$ s'écrit, après la simplification de l'équation D-70 :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = \frac{h t}{\eta_i^{dev}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (D-74)$$

Ainsi la déformation déviatorique de fluage propre $\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(t)$ peut se mettre alors sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(t) = J_{fp}^{dev}(t) h \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (D-75)$$

où $J_{fp}^{dev}(t)$ est la complaisance de fluage propre déviatorique, dont l'expression est :

$$J_{fp}^{dev}(t) = \frac{1}{k_r^{dev}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r^{dev}}\right) \right] + \frac{t}{\eta_i^{dev}} \quad (D-76)$$

Dans le cas d'un déchargement à l'instant $t = t_d$, la contrainte déviatorique devient nulle ($\boldsymbol{\sigma}^{dev} = \mathbf{0}$). Les déformations réversibles et irréversibles sont alors égales à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t_d) \exp\left(-\frac{t-t_d}{\tau_r^{dev}}\right) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t_d) \end{cases} \quad (D-77)$$

Ainsi, la déformation totale s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(t_d) \exp\left(-\frac{t-t_d}{\tau_r^{dev}}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(t_d) \quad (D-78)$$

D-1.3 Déformation de fluage propre

La déformation de fluage propre est la somme des déformations sphériques et déviatoriques de fluage. Les vecteurs des déformations sphériques et déviatoriques peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{fp}^{sph}(n+1) = \varepsilon_r^{sph}(n+1) + \varepsilon_i^{sph}(n+1) = a_n^s + b_n^s \sigma_n^{sph} + c_n^s \sigma_{n+1}^{sph} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}_r^{dev}(n+1) + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev}(n+1) = \mathbf{A}_n^d + b_n^d \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + c_n^d \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} \end{cases} \quad (D-79)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_n^s = a_n^{s-r} + a_n^{s-i} \\ b_n^s = b_n^{s-r} + b_n^{s-i} \\ c_n^s = c_n^{s-r} + c_n^{s-i} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{A}_n^d = a_n^{d-r} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{dev-r} + a_n^{d-i} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{dev-i} \\ b_n^d = b_n^{d-r} + b_n^{d-i} \\ c_n^d = c_n^{d-r} + c_n^{d-i} \end{cases} \quad (D-80)$$

Le vecteur de la déformation de fluage propre peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fp} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{fp} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fp} = \left[\varepsilon_{fp}^{sph}(n+1) - \varepsilon_{fp}^{sph}(n) \right] \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(n+1) - \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(n) \\ &= \mathbf{A}_n^{fp} + \mathbf{B}_n^{fp} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_n^{fp} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{aligned} \quad (D-81)$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_n^{fp} = (\mathbf{a}_n^s - \varepsilon_{fp}^{sph}(n))\mathbf{1} + (\mathbf{A}_n^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{fp}^{dev}(n)) \\ \mathbf{B}_n^{fp}(i, j) = \frac{b_n^s + 2b_n^d}{3} \delta_{ij} + \frac{b_n^s - b_n^d}{3} (1 - \delta_{ij}) \\ \mathbf{C}_n^{fp}(i, j) = \frac{c_n^s + 2c_n^d}{3} \delta_{ij} + \frac{c_n^s - c_n^d}{3} (1 - \delta_{ij}) \end{cases} \quad (\text{D-82})$$

où i et j sont les composantes des matrices et δ est le symbole de Kronecker :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{D-83})$$

L'équation D-81 suppose que les contraintes et les déformations soient exprimées sous leur forme vectorielle, plutôt que sous leur forme de tenseur du second ordre. Ainsi, le tenseur \mathbf{X} d'ordre 2 est écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$X_{ij} \leftrightarrow X_i \text{ avec } \begin{cases} X_i = X_{ii} \\ X_4 = X_{12} \\ X_5 = X_{23} \\ X_6 = X_{31} \end{cases} \quad (\text{D-84})$$

D-2 Fluage de dessiccation intrinsèque

L'expression de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque est (voir l'équation II-108) :

$$\eta^{fd} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fd} - k^{fd} \langle \dot{h} \rangle^- \boldsymbol{\varepsilon}^{fd} = - \langle \dot{h} \rangle^- \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D-85})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \langle \dot{h} \rangle^- = \dot{h} \text{ si } \dot{h} < 0 \\ \langle \dot{h} \rangle^- = 0 \text{ si } \dot{h} \geq 0 \end{cases}$$

On remarquera que cette équation différentielle est similaire à l'équation D-4 (terme du haut).

D-2.1 Expression discrétisée

En posant :

$$\tau^{fd} = - \frac{\eta^{fd} \Delta t_n}{k^{fd} \Delta h_n} \quad (\text{D-86})$$

Sur l'intervalle de temps Δt_n , la discrétisation de l'humidité relative et des contraintes (équation D-1) de l'équation D-85 conduit à la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{fd} = (\boldsymbol{\varepsilon}_n^{fd} - \boldsymbol{\alpha}^{fd}) \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau^{fd}}\right) + \boldsymbol{\alpha}^{fd} + \boldsymbol{\beta}^{fd} \quad (\text{D-87})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{fd} = \frac{1}{k^{fd}} \left[\left(1 + \frac{\tau^{fd}}{\Delta t_n} \right) \boldsymbol{\sigma}_n - \frac{\tau^{fd}}{\Delta t_n} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] \\ \mathbf{b}^{fd} = \frac{1}{k^{fd}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n) \end{cases} \quad (\text{D-88})$$

Cette équation peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fd} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{fd} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fd} = \mathbf{A}_n^{fd} + \mathbf{B}_n^{fd} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_n^{fd} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (\text{D-89})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_n^{fd} = \left[\exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau^{fd}}\right) - 1 \right] \boldsymbol{\varepsilon}_n^{fd} \\ \mathbf{B}_n^{fd} = \frac{1}{k^{fd}} \left[\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau^{fd}}\right) \right) \left(1 + \frac{\tau^{fd}}{\Delta t_n} \right) - 1 \right] \mathbf{1} \\ \mathbf{C}_n^{fd} = \frac{1}{k^{fd}} \left[- \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau^{fd}}\right) \right) \frac{\tau^{fd}}{\Delta t_n} + 1 \right] \mathbf{1} \end{cases} \quad (\text{D-90})$$

D-2.2 Cas où les contraintes et la vitesse d'humidité relative sont constantes

La vitesse d'humidité relative et les contraintes sont constantes dans le temps :

$$\begin{cases} \langle \dot{h}(t) \rangle^- = \langle \dot{h} \rangle^- \\ \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (\text{D-91})$$

La déformation de fluage de dessiccation intrinsèque $\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t)$ s'écrit alors, après la simplification de l'équation D-89 :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = \frac{1}{k^{fd}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau^{fd}}\right) \right] \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D-92})$$

avec :

$$\tau^{fd} = - \frac{\eta^{fd}}{k^{fd} \langle \dot{h} \rangle^-} \quad (\text{D-93})$$

Ainsi la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque $\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t)$ peut se mettre alors sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = J^{fd}(t) \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D-94})$$

où $J^{fd}(t)$ est la complaisance de fluage propre de dessiccation intrinsèque, dont l'expression est :

$$J^{fd}(t) = \frac{1}{k^{fd}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau^{fd}}\right) \right] \quad (\text{D-95})$$

Dans le cas où l'humidité relative est constante ou croissante $\langle \dot{h} \rangle^- = 0$, la déformation est égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t_d) \quad (\text{D-96})$$

Dans le cas d'un déchargement à l'instant $t = t_d$, la contrainte devient nulle ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$). La déformation est alors égale à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{fd}(t_d) \exp\left(-\frac{t-t_d}{\tau^{fd}}\right) \quad (\text{D-97})$$

Annexe E RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME HYDROMECHANIQUE

Dans le code CAST3M, il n'existe pas de module intégrant les équations de transfert de masse de matière. Néanmoins, les équations de transfert thermique par diffusion (équation (a)), ainsi que la possibilité s'appliquer différents types de conditions aux limites (type Fourier, équation (b)) sont disponibles :

$$\begin{cases} \rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda(T)\nabla T) & (a) \\ \Phi = k(T - T_e)\mathbf{n} & (b) \end{cases} \quad (E-1)$$

où ρ est la masse volumique, c est la chaleur massique, λ est le coefficient de conduction thermique du matériau, T est la température, k est le coefficient d'échange par convection, Φ est le flux de chaleur perpendiculaire à la surface, T_e est la température environnante et \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface (orienté vers l'extérieur).

Ainsi, étant donné la similitude entre les équations de transfert thermique par diffusion et les équations de transfert de masse (II-13 et II-17), le module thermique est utilisé. L'analogie entre les différents termes est la suivante :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline T & \Leftrightarrow & C \\ \hline \rho(T) & \Leftrightarrow & 1 \\ \hline c(T) & \Leftrightarrow & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda(T) & \Leftrightarrow & D(C) \\ \hline \Phi & \Leftrightarrow & \mathbf{q}_f \\ \hline k & \Leftrightarrow & H \\ \hline \end{array} \quad (E-2)$$

Dans le cas de la mécanique, l'équation d'équilibre doit être satisfaite (donnée ici en l'absence de force intérieure) :

$$\nabla\sigma = 0 \quad (E-3)$$

L'analyse bibliographique a mis en évidence que les processus de transfert hydrique et mécanique pouvaient être dissociés dans notre étude. Ainsi, le problème hydrique est tout d'abord résolu au début du pas de temps courant. Puis, les résultats du calcul hydrique sont incorporés dans le modèle mécanique, et le problème mécanique est alors résolu (voir la Figure E-1).

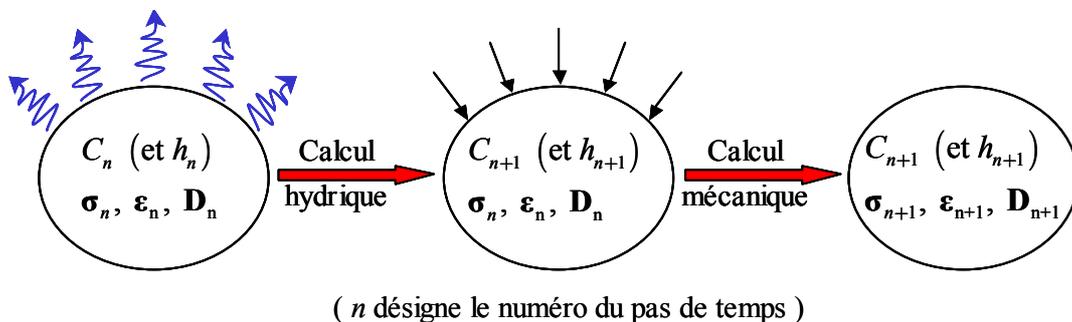


Figure E-1 Traitement numérique du calcul hydromécanique.

La dissociation de ces deux processus permet de simplifier le traitement numérique. Il est à noter que ce choix a déjà été effectué par le passé dans le cas du traitement des problèmes thermomécaniques (Heinfling 1998, Nechnech 2000) et hydromécaniques (Witasse 2000).

E-1 Résolution numérique du problème hydrique

E-1.1 Formulation faible

L'équation de transport de l'eau **II-13** décrit ce processus suivant une formulation forte, i.e. cette condition doit être satisfaite à chaque point matériel de la structure. Dans la méthode des Éléments finis, une formulation faible est adoptée, i.e. les conditions ne sont satisfaites que globalement, dans tout le domaine étudié de volume V :

$$\int_V W [\dot{C} + \nabla \mathbf{q}] dV = 0 \quad (\text{E-4})$$

où W est une fonction virtuelle.

Afin de réduire l'ordre d'intégration d'une unité, le théorème de Gauss est appliqué :

$$\int_V W \dot{C} dV - \int_V \nabla W \mathbf{q} dV + \int_S W \mathbf{q} \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{E-5})$$

où S désigne la surface externe.

Les conditions aux limites sur la surface externe sont séparées en une première partie où la teneur en eau est imposée (surface S_T), et en une deuxième partie où la condition de limites est de type convective (surface S_f) et où le flux \mathbf{q}_f est calculé à l'aide de l'équation **II-17** (voir la Figure E-2) :

$$\int_V W \dot{C} dV - \int_V \nabla W \mathbf{q} dV + \int_{S_T} W q_T dS + \int_{S_f} W \mathbf{q}_f \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{E-6})$$

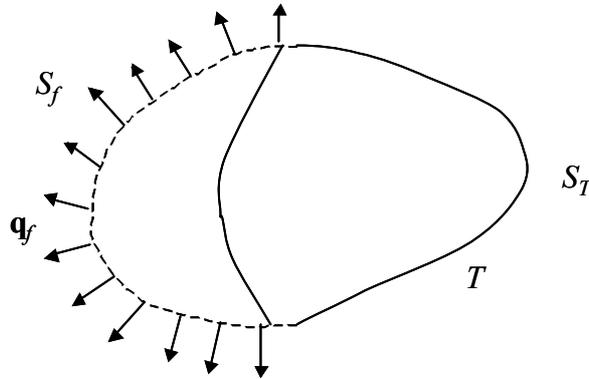


Figure E-2 Conditions aux limites du problème hydrique.

A l'aide des expressions du flux d'eau \mathbf{q} (équation **II-14**) et du flux convectif \mathbf{q}_f (équation **II-17**), l'équation E-6 devient alors :

$$\begin{aligned} & \int_V W \dot{C} dV - \int_V \nabla W D \nabla C dV + \int_{S_f} W H C dS \\ & = - \int_{S_T} W q_T dS + \int_{S_f} W H C_{eq} dS \end{aligned} \quad (\text{E-7})$$

E-1.2 Formulation Éléments Finis

Dans la méthode des Éléments Finis, le domaine est discrétisé en éléments finis. Ainsi, la teneur en eau est interpolée au sein de chaque élément fini selon la relation :

$$C = \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{C}_e \quad (\text{E-8})$$

où \mathbf{N}_e est la matrice des fonctions de forme et \mathbf{C}_e est le vecteur contenant les valeurs nodales de la teneur en eau définies aux points de l'élément.

De plus, dans l'approche de Galerkin la fonction virtuelle W est choisie égale à la teneur en eau. Ainsi, l'équation E-7 peut finalement se mettre finalement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \dot{\mathbf{C}}_e dV_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}_e)^T D \mathbf{B}_e \mathbf{C}_e dV_e + \int_{S_{fe}} \mathbf{N}_e^T H \mathbf{N}_e \mathbf{C}_e dS_e \\ & = - \int_{S_{re}} \mathbf{N}_e^T q_T dS_e + \int_{S_{fe}} \mathbf{N}_e^T H C_{eq} dS_e \end{aligned} \quad (\text{E-9})$$

où V_e est le volume élémentaire de l'élément fini et où $\mathbf{B}_e = \nabla \mathbf{N}_e$.

Cette équation peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathbf{E}_e \cdot \dot{\mathbf{C}}_e + \mathbf{D}_{C_e} \cdot \mathbf{C}_e = \mathbf{Q}_e \quad (\text{E-10})$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \int_{V_e} \mathbf{N}_e^T \cdot \mathbf{N}_e dV_e \\ \mathbf{D}_{C_e} &= - \int_{V_e} (\mathbf{B}_e)^T D \mathbf{B}_e dV_e + \int_{S_{fe}} \mathbf{N}_e^T H \mathbf{N}_e dS_e \\ \mathbf{Q}_{C_e} &= - \int_{S_{re}} \mathbf{N}_e^T q_T dS_e + \int_{S_{fe}} \mathbf{N}_e^T H C_{eq} dS_e \end{aligned} \quad (\text{E-11})$$

En effectuant la somme des contributions de chaque élément fini, on obtient finalement l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \mathbf{D}_C \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q}_C \quad (\text{E-12})$$

où \mathbf{C} est le vecteur contenant les valeurs nodales de la teneur en eau en tous les points du domaine étudié de volume V et où \mathbf{E} , \mathbf{D}_C et \mathbf{Q}_C sont les assemblages des matrices \mathbf{E}_e , \mathbf{D}_{C_e} et \mathbf{Q}_{C_e} , respectivement, sur tout le domaine étudié.

E-1.3 Résolution itérative incrémentale

L'équation E-12 est résolue pas à pas pour chaque pas de temps. Dans le code de calcul CAST3M, cette équation peut être résolue de deux façons différentes : soit à l'aide d'un schéma à deux pas de temps (méthode Dupont) ou suivant un schéma trapézoïdal à l'aide de la théta-méthode. C'est cette dernière méthode qui est ici utilisée.

Dans la théta-méthode, la teneur en eau est évaluée à l'aide de la relation :

$$\mathbf{C}^* = (1-\theta)\mathbf{C}_n + \theta\mathbf{C}_{n+1} \quad (\text{E-13})$$

où n est le numéro du pas de temps et $\theta \in [0;1]$.

La dérivée de la teneur en eau s'écrit :

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}_{n+1} - \mathbf{C}_n}{\Delta t} \quad (\text{E-14})$$

où Δt est l'incrément du pas de temps.

L'équation E-12 devient alors :

$$\mathbf{D}_C^* \cdot \mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{Q}_C^* \quad (\text{E-15})$$

Où :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_C^* &= \mathbf{E} + \theta \Delta t \mathbf{D}_C \\ \mathbf{Q}_C^* &= \Delta t \mathbf{Q}_C + (\mathbf{E} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{D}_C) \cdot \mathbf{C}_n \end{aligned} \quad (\text{E-16})$$

Dans le cas où $\theta \in [0,5;1]$, la méthode est inconditionnellement stable, quelle que soit la discrétisation temporelle utilisée. Nous avons opté dans ce travail la valeur $\theta = 0,5$, car c'est celle qui donne généralement la meilleure précision, lorsque le pas de temps choisi est « assez » faible.

Soit \mathbf{R}_C la matrice des résidus de l'équation à résoudre E-15 :

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{D}_C^* \cdot \mathbf{C}_{n+1} - \mathbf{Q}_C^* \quad (\text{E-17})$$

Afin de satisfaire l'équation E-15, le résidu \mathbf{R}_C doit être nul. Du fait de la non-linéarité de l'équation E-15 (à travers les matrices \mathbf{D} et \mathbf{Q}), un schéma itératif est utilisé : l'équation est résolue alors à l'aide de la méthode de Newton-Raphson (voir la Figure E-3). A chaque itération (i), l'incrément de teneur en eau $\Delta \mathbf{C}^{(i)} = \mathbf{C}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{C}_n$ est mis à jour à l'aide de l'expression :

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_C^{(i)}}{d\mathbf{C}_{n+1}} \right) \cdot \Delta \mathbf{C}^{(i)} = -\mathbf{R}_C^{(i)} \quad (\text{E-18})$$

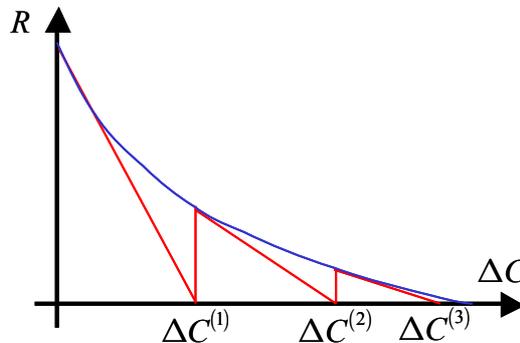


Figure E-3 Schéma itératif de résolution par la méthode de Newton-Raphson.

Le processus d'itération se poursuit jusqu'à ce que la matrice des résidus \mathbf{R}_C soit nulle à une tolérance près. Lorsque ce critère est satisfait, le processus d'itérations internes recommence pour le pas de temps suivant. L'algorithme de résolution du problème hydrique, lors du calcul Éléments Finis est donné dans le Tableau E-1.

Tableau E-1 Algorithme de résolution du problème hydrique.

1.	Initialisation des itérations internes : $i = 0$
2.	Initialisation de la teneur en eau : $C_{n+1}^{(i)} = C_n$
3.	Calcul des matrices $D_C^{(i)*}$ et $Q_C^{(i)*}$
4.	Calcul du résidu $R_C^{(i)} = D_C^{(i)*} \cdot C_{n+1}^{(i)} - Q_C^{(i)*}$
5.	Évaluation du critère de convergence $\ R_C^{(i)}\ \leq Tolérance?$ <ul style="list-style-type: none"> • oui : la loi de conservation de la masse est vérifiée, allez à (9) • non : allez à (6)
6.	$\Delta C^{(i)} = - \left(\frac{dR_C^{(i)}}{dC_{n+1}} \right)^{-1} \cdot R_C^{(i)}$
7.	$C_{n+1}^{(i)} = C_n + \Delta C^{(i)}$
8.	Itération suivante : $i \leftarrow i + 1$, allez à (3)
9.	Pas de temps suivant : $n \leftarrow n + 1$, allez à (2)

E-2 Résolution numérique du problème mécanique

E-2.1 Formulation faible

L'équation d'équilibre mécanique E-3 constitue une formulation forte du problème à résoudre. De même que lors de la résolution du problème hydrique par la méthode des Éléments Finis (voir le paragraphe § E-1), une formulation faible est adoptée. Ainsi, l'équation d'équilibre est intégrée dans le domaine de volume V , selon le théorème des puissances virtuelles :

$$\int_V \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} dV = 0 \quad (\text{E-19})$$

où $\delta \hat{\mathbf{u}}$ est un déplacement virtuel admissible.

Les conditions aux limites sur la surface externe sont séparées en une première partie où le déplacement \mathbf{u} est imposé sur la surface S_u , et en une deuxième partie où la force surfacique \mathbf{F} est appliquée sur la surface S_F (voir la Figure E-4).

En appliquant alors une intégration par partie, puis le théorème de Gauss, on obtient classiquement la relation :

$$\int_V \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_F} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{F} dS \quad (\text{E-20})$$

où le terme de gauche représente l'énergie interne du système et le terme de droite représente le travail des forces extérieures.

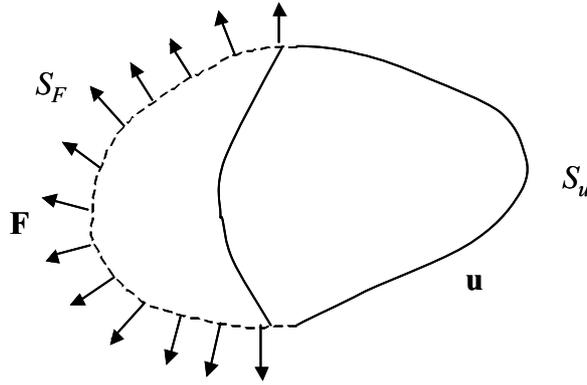


Figure E-4 Conditions aux limites du problème mécanique.

E-2.2 Formulation Éléments Finis

Le domaine est discrétisé en éléments finis. Ainsi, les déplacements sont interpolés au sein de chaque élément fini selon la relation :

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{E-21})$$

où \mathbf{N} est la matrice des fonctions de forme et \mathbf{u} est le vecteur contenant les valeurs nodales des déplacements définies en chaque point des éléments finis.

Les déplacements sont reliés aux déformations par le biais de la matrice \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{E-22})$$

En injectant les relations E-21 et E-22 dans l'équation E-20, et après simplification (les équations sont vraies quel que soit le champ de déplacement virtuel $\hat{\mathbf{u}}$), on obtient finalement l'égalité :

$$\int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_F} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F} dS \quad (\text{E-23})$$

E-2.3 Résolution itérative incrémentale

L'équation d'équilibre mécanique E-23 est résolue pas à pas pour chaque pas de temps. L'équation doit être satisfaite à la fin du pas de temps :

$$\int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \int_{S_F} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1} dS \quad (\text{E-24})$$

où n est le numéro du pas de temps.

Soit \mathbf{R}_σ la matrice des résidus de l'équation à résoudre E-24 :

$$\mathbf{R}_\sigma = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV - \int_{S_F} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1} dS \quad (\text{E-25})$$

Afin de satisfaire l'équation E-24, le résidu \mathbf{R}_σ doit être nul. Du fait de la non-linéarité de l'équation précédente, un schéma itératif est utilisé. L'équation E-24 est alors résolue à l'aide de la méthode de Newton-Raphson, comme c'est le cas du calcul hydrique (voir l'équation E-15 et la Figure E-3). A chaque itération (i), l'incrément de déplacement nodal $\Delta \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{u}_n$ est mis à jour par le biais de l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_\sigma^{(i)}}{d\mathbf{u}_e} \right) \cdot \Delta \mathbf{u}^{(i)} = -\mathbf{R}_\sigma^{(i)} \quad (\text{E-26})$$

Le processus d'itération se poursuit jusqu'à ce que la matrice de résidu \mathbf{R}_σ soit nulle à une tolérance près. Lorsque ce critère est satisfait, le processus d'itérations internes recommence pour le pas de temps suivant. L'algorithme de résolution du problème mécanique, lors du calcul aux Éléments Finis est donné dans le Tableau E-2.

Tableau E-2 Algorithme de résolution du problème mécanique.

1.	Initialisation des itérations internes : $i = 0$
2.	Initialisation du vecteur des déplacements nodaux : $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{u}_n$
3.	Calcul des déformations nodales : $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$
4.	Calcul des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)}$ à partir de la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \dots)$
5.	Calcul du résidu $\mathbf{R}_\sigma = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} dV - \int_{S_F} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} dS$
6.	Évaluation du critère de convergence $\ \mathbf{R}_\sigma^{(i)}\ \leq \text{Tolérance}?$ <ul style="list-style-type: none"> • oui : l'équation d'équilibre est vérifiée \Rightarrow allez à (10) • non : allez à (7)
7.	$\Delta \mathbf{u}^{(i)} = - \left(\frac{d\mathbf{R}_\sigma^{(i)}}{d\mathbf{u}_{n+1}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_\sigma^{(i)}$
8.	$\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^{(i)}$
9.	Itération suivante : $i \leftarrow i + 1$, allez à (3)
10.	Pas de temps suivant : $n \leftarrow n + 1$, allez à (2)

Annexe F PROPRIETES DU MODELE DE FLUAGE

Dans le cas d'un chargement variable $\sigma(t)$ dans le temps, la déformation de fluage propre s'obtient généralement, en utilisant le principe de superposition de Boltzmann :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) \cdot d\sigma(\tau) \quad (\text{F-1})$$

L'intégrale utilisée est de type Stieltjes. Dans le cas où la contrainte est dérivable, cette relation peut être définie à l'aide d'une intégrale classique (de type Riemann) en posant $d\sigma(\tau) = \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau$:

$$\varepsilon^{fp}(t) = \int_0^t \mathbf{J}^{fp}(t-\tau) \cdot \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-2})$$

Dans un cadre général, l'équation précédente montre que l'histoire des contraintes doit être connue pour pouvoir calculer la déformation de fluage propre à un instant quelconque. Si le nombre d'éléments finis est important ou/et la discrétisation temporelle est fine (le nombre de pas de temps est important), les quantités de données à stocker peuvent être très importantes, rendant ainsi impossible le calcul. La construction du modèle de fluage propre (ou de dessiccation) proposé permet de s'affranchir de cette difficulté. En effet, nous allons montrer que la connaissance de la valeur initiale $\varepsilon^{fp}(t_n)$ et de la variation des contraintes, lors du pas de temps courant ($t \in [t_n, t_{n+1}]$), est suffisante pour connaître la variation de la déformation de fluage propre, quelle que soit l'histoire des contraintes.

Nous allons maintenant considérer une chaîne de Kelvin-Voigt et un amortisseur. Nous démontrerons tout d'abord que l'utilisation de l'équation F-2 pour exprimer la déformation de fluage propre dans l'intervalle de temps $t \in [t_n, t_{n+1}]$ est équivalente à la résolution des équations différentielles constitutives II-80 et II-96 sur l'intervalle de temps considéré (connaissant l'évolution des contraintes et des conditions initiales à $t = t_n$). Ce résultat peut être généralisé aux modèles de fluage propre (partie sphérique et déviatorique) et au modèle de fluage de dessiccation, développés dans notre travail. En effet, ces modèles sont basés sur ces deux éléments rhéologiques élémentaires.

On supposera que la déformation de fluage propre est initialement nulle, et que la contrainte est appliquée à l'instant $t = 0^+$:

$$\begin{cases} \varepsilon^{fp}(t=0) = \mathbf{0} \\ \sigma(t=0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{F-3})$$

On considère une histoire quelconque des contraintes (Figure F-1). On s'intéresse à la variation de la déformation de fluage propre lors du pas de temps courant ($t \in [t_n, t_{n+1}]$).

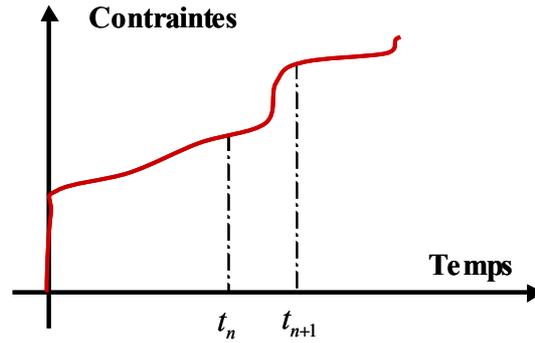


Figure F-1 Variation quelconque des contraintes.

F-1 Cas d'un amortisseur

On considère le modèle rhéologique de l'amortisseur (voir la Figure F-2). L'équation rhéologique de l'amortisseur est :

$$\eta \dot{\varepsilon}^{fp}(t) = \sigma(t) \quad (\text{F-4})$$



Figure F-2 Modèle rhéologique de l'amortisseur.

On intègre alors l'équation précédente F-4 entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = t$:

$$\int_0^t \eta \dot{\varepsilon}^{fp}(\tau) d\tau = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{F-5})$$

En faisant une intégration par partie dans le membre de droite et en utilisant les conditions initiales (équation F-3), on obtient alors la relation :

$$\eta \cdot [\varepsilon^{fp}(t) - \varepsilon^{fp}(0)] = [-(t-\tau)\sigma(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t -(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-6})$$

En utilisant à nouveau les conditions initiales (équation F-3), on obtient la relation :

$$\eta \cdot [\varepsilon^{fp}(t) - \varepsilon^{fp}(0)] = \int_0^t (t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-7})$$

En remarquant que la complaisance de fluage du modèle de l'amortisseur J^{am} est égale à :

$$J^{am}(t) = \frac{t}{\eta} \quad (\text{F-8})$$

On obtient finalement la relation suivante :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \int_0^t J^{am}(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-9})$$

L'équation précédente est donc identique à l'équation F-2. Ainsi, la résolution de l'équation différentielle F-4 ou l'utilisation du principe de superposition de Boltzmann conduit au même

résultat. L'intégration de l'équation F-4 entre les instants $\tau = t_n$ et $\tau = t$ conduit à la relation :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \varepsilon^{fp}(t_n) + \frac{1}{\eta} \int_{t_n}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{F-10})$$

Par conséquent, la connaissance de la valeur initiale $\varepsilon^{fp}(t_n)$ et de la variation des contraintes, lors du pas de temps courant ($t \in [t_n, t_{n+1}]$), est suffisante pour connaître l'évolution de la déformation de fluage propre.

F-2 Cas d'une chaîne de Kelvin-Voigt

On considère le modèle rhéologique de la chaîne de Kelvin-Voigt (voir la Figure F-3). L'équation rhéologique de cet élément est :

$$\eta \dot{\varepsilon}^{fp}(t) + k \varepsilon^{fp}(t) = \sigma(t) \quad (\text{F-11})$$

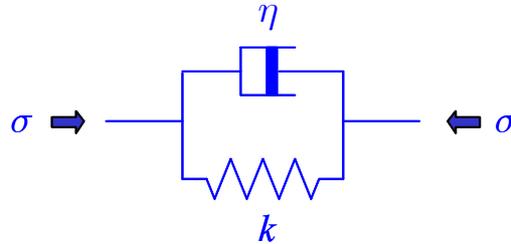


Figure F-3 Modèle rhéologique de la chaîne de Kelvin-Voigt.

La solution de l'équation homogène $\varepsilon^{\text{hom}}(t)$ (sans second membre) est :

$$\varepsilon^{\text{hom}}(t) = \mu \exp\left(-\frac{k}{\eta} t\right) \quad (\text{F-12})$$

Une solution particulière $\varepsilon^{\text{par}}(t)$ de l'équation F-11 s'obtient par la méthode de la variation de la constante :

$$\varepsilon^{\text{par}}(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{k}{\eta} t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{k}{\eta} \tau\right) \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{F-13})$$

Les solutions de l'équation F-11 s'obtiennent en sommant la solution particulière et les solutions de l'équation homogène. En utilisant la condition initiale de la déformation de fluage propre (équation F-3), la solution s'écrit alors sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{k}{\eta} t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{k}{\eta} \tau\right) \sigma(\tau) d\tau = \frac{1}{\eta} \int_0^t \exp\left[-\frac{k}{\eta} (t-\tau)\right] \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{F-14})$$

En procédant une intégration par partie, l'équation précédente devient :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\eta}{k} \exp\left(-\frac{k}{\eta} (t-\tau)\right) \sigma(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{\eta}{k} \int_0^t \exp\left(-\frac{k}{\eta} (t-\tau)\right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-15})$$

En utilisant la condition initiale sur la contrainte (équation F-3)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{k} \left(\sigma(t) - \int_0^t \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t-\tau)\right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right) \quad (\text{F-16})$$

On remarque que :

$$\sigma(t) = \int_0^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-17})$$

, l'équation F-16 peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t-\tau)\right) \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-18})$$

En remarquant que la complaisance de fluage du modèle de l'amortisseur J^{ke} est égale à :

$$J^{ke}(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta}{k}t\right) \right) \quad (\text{F-19})$$

On obtient donc la relation suivante :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \int_0^t J^{ke}(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (\text{F-20})$$

L'équation précédente est donc identique à l'équation F-2. Ainsi, la résolution de l'équation différentielle F-11 ou l'utilisation du principe de superposition de Boltzmann conduit au même résultat. La résolution de l'équation F-11 entre les instants $\tau = t_n$ et $\tau = t$ conduit à la relation :

$$\varepsilon^{fp}(t) = \varepsilon^{fp}(t_n) \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t-t_n)\right) + \frac{1}{\eta} \int_{t_n}^t \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t-\tau)\right) \sigma(\tau) d\tau \quad (\text{F-21})$$

Par conséquent, la connaissance de la valeur initiale $\varepsilon^{fp}(t_n)$ et de la variation des contraintes, lors du pas de temps courant ($t \in [t_n, t_{n+1}]$), est suffisante pour connaître l'évolution de la déformation de fluage propre.

Annexe G SCHEMA ITERATIF DE RESOLUTION

L'intégration des équations constitutives du modèle mécanique développé nécessite donc la résolution du système d'équations non linéaires II-149. Il est choisi d'utiliser ici la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce système. Cette méthode a l'avantage de converger de façon quadratique. Néanmoins, il arrive dans certains cas que cette méthode diverge (Press et al. 1994, Georgin 1998, Nechnech 2000). Si celle-ci n'aboutit pas, on utilise alors la méthode de Broyden. Dans le cas où une seule équation est à résoudre, ces deux méthodes itératives sont schématisées dans la Figure G-1.

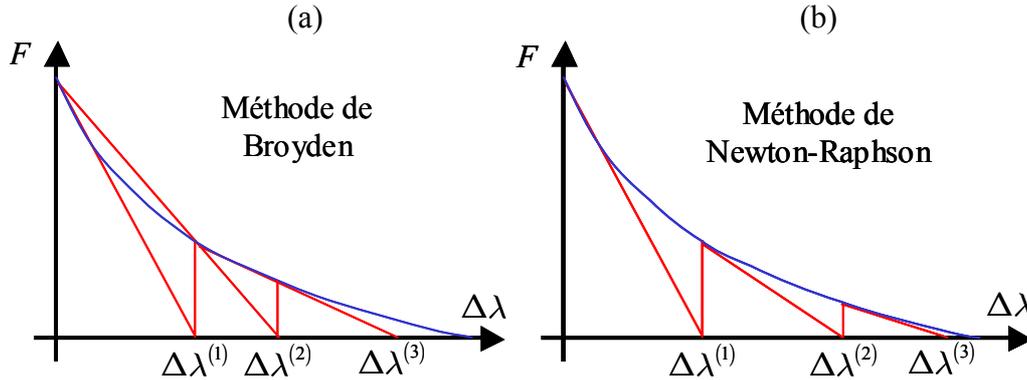


Figure G-1 Estimation du jacobien à l'aide de la méthode de Broyden (a) ou de Newton-Raphson (b).

Quelle que soit la méthode utilisée, la relation vectorielle de mise à jour des incréments des multiplicateurs plastiques s'écrit :

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(i+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(i)} - \left(\mathbf{J}^{(i)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}_{n+1} \left(\Delta\lambda_{n+1}^{(i)}\right) \quad (\text{G-1})$$

où \mathbf{J} est le jacobien du système d'équations non linéaires II-149, l'indice (i) correspond à l'itération interne effectuée lors du calcul des variables du modèle mécanique au pas de temps $n+1$ et $\Delta\lambda_{n+1}^{(i)}$ est un vecteur contenant les multiplicateurs plastiques en compression et en traction. Celui-ci s'écrit dans les conditions données dans le paragraphe § II-7.4 :

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{t,n+1}^1 \\ \Delta\lambda_{t,n+1}^2 \\ \Delta\lambda_{c,n+1} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{G-2})$$

et \mathbf{F}_{n+1} est un vecteur contenant les valeurs des critères actifs :

$$\mathbf{F}_{n+1} \left(\Delta\lambda_{n+1}^{(i)}\right) = \begin{bmatrix} F_{t,n+1}^1 \left(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}\right) \\ F_{t,n+1}^2 \left(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}\right) \\ F_{c,n+1} \left(\Delta\lambda_{t,n+1}^1, \Delta\lambda_{t,n+1}^2, \Delta\lambda_{c,n+1}\right) \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{G-3})$$

L'actualisation du jacobien à chaque itération est réalisée soit par la méthode de Newton-Raphson, soit, en cas de non-convergence, par la méthode de Broyden. Dans le cas où la méthode de Newton-Raphson est utilisée, le jacobien est actualisé à l'aide de la relation suivante :

$$\mathbf{J}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \\ \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \\ \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{G-4})$$

avec :

$$\left(\frac{dF_{x,n+1}^j}{d\Delta\lambda_{y,n+1}^k} \right)^{(i)} = \left(\frac{\partial F_{x,n+1}^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda_{y,n+1}^k} \right) - \frac{\partial \tau_x^j(\kappa_{x,n+1}^{jj})}{\partial \Delta\lambda_{y,n+1}^k} \quad (\text{G-5})$$

où $[j;k] \in [1;2]^2$ et $x=y=c$ dans le cas de la compression et $x=y=t$ dans le cas de la traction.

Dans le cas de la méthode de Broyden, le jacobien est actualisé à l'aide de la relation suivante (Martinez 2000) :

$$\left(\mathbf{J}^{(i)} \right)^{-1} = \left(\mathbf{J}^{(i-1)} \right)^{-1} + \frac{\left(\mathbf{x}^{(i-1)} - \left(\mathbf{J}^{(i-1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{y}^{(i-1)} \right) \cdot \left(\mathbf{x}^{(i-1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{J}^{(i-1)} \right)^{-1}}{\left(\mathbf{x}^{(i-1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{J}^{(i-1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{y}^{(i-1)}} \quad (\text{G-6})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(i-1)} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i)} - \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i-1)} \\ \mathbf{y}^{(i-1)} = \mathbf{F}\left(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i)}\right) - \mathbf{F}\left(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i-1)}\right) \end{cases} \quad (\text{G-7})$$

Cette méthode ne nécessite donc pas le calcul des dérivées des critères plastiques, contrairement à la méthode de Newton-Raphson où les dérivées sont calculées explicitement (équation G-4). De plus, il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse du jacobien, ce qui limite le nombre d'opérations à effectuer. Ainsi, cette méthode est adaptée au cas où le calcul des dérivées est trop complexe, voire impossible à effectuer.

Ce processus itératif nécessite la connaissance de la valeur initiale du jacobien $\mathbf{J}^{(0)}$. Une estimation de celui-ci est possible en linéarisant les critères au voisinage du prédicteur élastique. La décomposition en série de Taylor du premier ordre, de chacun des critères F_x^j $j \in [1;2]$ avec $x=t$ dans le cas de la traction et $x=c$ dans le cas de la compression, au voisinage du prédicteur élastique conduit à la relation suivante :

$$F_{x,n+1}^j \approx F_{x,n}^j + \left(\frac{\partial F_x^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^r \right) + \frac{\partial F_x^j}{\partial \kappa_c} \left(\kappa_{c,n+1} - \kappa_{c,n} \right) + \sum_{k=1}^{k=2} \frac{\partial F_x^j}{\partial \kappa_t^{kk}} \left(\kappa_{t,n+1}^{kk} - \kappa_{t,n}^{kk} \right) \quad (\text{G-8})$$

A l'aide de la loi d'érouissage II-149 et de l'équation de mise à jour du vecteur des contraintes II-159, nous pouvons exprimer ce critère sous la forme linéarisée suivante :

$$F_{x,n+1}^j \approx F_{x,n}^j - \left(\frac{\partial F_x^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \gamma_c \frac{\partial F_x^j}{\partial \kappa_c} \cdot \Delta \lambda_{c,n+1} + \sum_{k=1}^{k=2} \frac{\partial F_x^j}{\partial \kappa_t^{kk}} \Delta \lambda_{t,n+1}^k \quad (\text{G-9})$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial F_t^j}{\partial \kappa_t^{jj}} = \frac{\partial F_t^j}{\partial \kappa_c} = \frac{\partial F_c}{\partial \kappa_t^{jj}} = \frac{\partial F_c}{\partial \kappa_t^{kk}} = 0 \text{ si } j \neq k \quad (\text{G-10})$$

et en utilisant la loi d'écoulement plastique II-41 dans le cas où le critère en traction est actif (avec $j \neq k$), l'équation G-9 peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} F_{t,n+1}^j \approx F_{t,n}^j - \left[\left(\frac{\partial F_t^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial F_t^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_t^j}{\partial \kappa_t} \right] \Delta \lambda_{t,n+1}^j \\ - \left(\frac{\partial F_t^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial F_t^k}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \lambda_{t,n+1}^k - \left(\frac{\partial F_t^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial G_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \lambda_{c,n+1} \end{aligned} \quad (\text{G-11})$$

Dans le cas du critère de compression, l'équation G-9 devient

$$\begin{aligned} F_{c,n+1} \approx F_{c,n} - \left(\frac{\partial F_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial F_t^1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \lambda_{t,n+1}^1 - \left(\frac{\partial F_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial F_t^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \\ - \left[\left(\frac{\partial F_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \frac{\partial G_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \gamma_c \frac{\partial F_c}{\partial \kappa_c} \right] \Delta \lambda_{c,n+1} \end{aligned} \quad (\text{G-12})$$

Les équations G-11 et G-12 peuvent alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{J}^{(0)} \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \Delta \mathbf{F} \quad (\text{G-13})$$

avec $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{n+1}(\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) - \mathbf{F}_n(\Delta \boldsymbol{\lambda}_n)$ et où $\mathbf{J}^{(0)}$ est une estimation initiale du jacobien au voisinage du prédicteur élastique :

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 + h_t^1 & -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 & -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c \\ -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 & -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 + h_t^2 & -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c \\ -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 & -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 & -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c + h_c \end{bmatrix} \quad (\text{G-14})$$

où :

$$\mathbf{n}_x^j = \frac{\partial F_x^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{m}_c = \frac{\partial G_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{et} \quad h_x^j = \gamma_x \frac{\partial F_t^j}{\partial \kappa_x^{jj}} = -\gamma_x \frac{\partial \tau_x^j}{\partial \kappa_x^{jj}} \quad (\text{G-15})$$

avec $j \in [1;2]$, $x = t$ dans le cas de la traction et $x = c$ dans le cas de la compression.

Le schéma itératif interne est résumé schématiquement dans le Tableau G-1.

Tableau G-1 Algorithme de résolution du problème mécanique (avec $x = t$ dans le cas de la traction et $x = c$ dans le cas de la compression).

- | | |
|----|---|
| 1. | Initialisation des itérations internes : $i = 0$, méthode = "Newton-Raphston" |
| 2. | Initialisation des multiplicateurs plastiques : $(\Delta \lambda_{x,n+1}^j)^{(0)} = 0$ avec $j \in [1;2]$ |
| 3. | Estimation du jacobien initial au voisinage du prédicteur élastique $\mathbf{J}^{(0)}$: |

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 + h_t^1 & -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 & -(\mathbf{n}_t^1)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c \\ -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 & -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 + h_t^2 & -(\mathbf{n}_t^2)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c \\ -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^1 & -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{n}_t^2 & -(\mathbf{n}_c)^T \cdot \mathbf{E}^{flu} \cdot \mathbf{m}_c + h_c \end{bmatrix}$$

4. Mise à jour des multiplicateurs plastiques :

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} = \Delta \lambda_{n+1}^{(i)} - (\mathbf{J}^{(i)})^{-1} \cdot \mathbf{F}_{n+1} (\Delta \lambda_{n+1}^{(i)})$$

5. Test du signe des multiplicateurs plastiques :

- Si $\Delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} \geq 0$, allez à (6)
- Si $(\Delta \lambda_{t,n+1}^j)^{(i+1)} \leq 0, j \in [1;2]$ et $(\Delta \lambda_{c,n+1})^{(i+1)} \geq 0$, seul le critère de plasticité en compression est actif \Rightarrow sortir
- Si $(\Delta \lambda_{t,n+1}^j)^{(i+1)} \geq 0, j = 1$ ou 2 et $(\Delta \lambda_{c,n+1})^{(i+1)} \leq 0$, seul le critère de plasticité en traction (direction j) est actif \Rightarrow sortir
- Si $(\Delta \lambda_{t,n+1}^j)^{(i+1)} \geq 0, j \in [1;2]$ et $(\Delta \lambda_{c,n+1})^{(i+1)} \leq 0$, seuls les deux critères de plasticité en traction sont actifs \Rightarrow sortir
- Si $(\Delta \lambda_{t,n+1}^j)^{(i+1)} \geq 0, j = 1$ ou 2 et $(\Delta \lambda_{c,n+1})^{(i+1)} \geq 0$, seul les critères de plasticité en traction (direction j) et en compression sont actifs \Rightarrow sortir
- Si $\Delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} \leq 0$ et méthode = "Newton-Raphston" \Rightarrow méthode = "Broyden" et allez à (1)
- Si $\Delta \lambda_{n+1}^{(i+1)} \leq 0$ et méthode = "Broyden" \Rightarrow non-convergence interne \Rightarrow sortir du programme avec un message d'erreur

6. Mise à jour des contraintes effectives :

$$(\mathfrak{g}_{n+1})^{(i+1)} = \left\{ \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \cdot \left[\mathfrak{g}_{n+1}^{tr} - \mathbf{E}^{flu} \cdot (\alpha_g \Delta \lambda_{c,n+1} \cdot \boldsymbol{\pi}_c / \beta + \Delta \lambda_{t,n+1}^1 \cdot \mathbf{i} + \Delta \lambda_{t,n+1}^2 \cdot \mathbf{j}) \right] \right\}^{(i+1)}$$

7. Mise à jour des variables d'écrouissage :

$$(\kappa_{x,n+1}^{jj})^{(i+1)} = \kappa_{x,n}^{jj} + \gamma_x (\Delta \lambda_{x,n+1}^j)^{(i+1)}$$

8. Évaluation du critère de convergence :

$$\left| F_x^j \left((\mathfrak{g}_{n+1})^{(i+1)}, (\kappa_{x,n+1}^{jj})^{(i+1)} \right) \right| \leq \text{Tolérance?}$$

- oui : les critères sont vérifiés \Rightarrow allez à (11)
- non : allez à (9)

9. Calcul de la nouvelle valeur du jacobien :

méthode = "Newton-Raphston"	méthode = "Broyden"
$\mathbf{J}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{t,n+1}^1}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \\ \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{t,n+1}^2}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \\ \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^1} & \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{t,n+1}^2} & \frac{dF_{c,n+1}}{d\Delta\lambda_{c,n+1}} \end{bmatrix}^{(i+1)}$	$\begin{aligned} (\mathbf{J}^{(i+1)})^{-1} &= (\mathbf{J}^{(i)})^{-1} + \\ &\frac{\left(\mathbf{x}^{(i)} - (\mathbf{J}^{(i)})^{-1} \mathbf{y}^{(i)}\right) \left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^T (\mathbf{J}^{(i)})^{-1}}{\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^T (\mathbf{J}^{(i)})^{-1} \mathbf{y}^{(i)}} \end{aligned}$
<p>10. Itération suivante : $i \leftarrow i + 1$, allez à (4)</p> <p>11. Processus d'itérations internes terminé \Rightarrow sortir</p>	

L'étape (5) du processus itérations internes (Tableau G-1) est très importante. En effet, lors de la vérification initiale du nombre de critères actifs (étape ② du Tableau II-8), à l'aide des contraintes effectives de test σ_{n+1}^{tr} , il est possible de violer plusieurs critères. Étant donné que cet état de contraintes n'est pas admissible (puisque l'on ne peut se situer qu'à l'intérieur ou sur la surface de charge), il peut s'avérer qu'une sous-partie des critères violés initialement ne le soit pas réellement. Ainsi, cela se traduit par une valeur négative des multiplicateurs plastiques des critères concernés, impliquant alors un traitement particulier.

Annexe H VALIDATION DU MODELE DE FISSURATION

H-1 Descriptif des essais

Dans cette annexe, le modèle de fissuration développé est validé sur les essais expérimentaux de Nooru-Mohamed (1992). Dans ces essais, l'auteur a appliqué différents chemins de chargement à une éprouvette bi-entaillée de forme parallélépipédique ($200 \times 200 \times 50 \text{ mm}^3$, voir la Figure H-1). Parmi les essais réalisés, nous n'allons utiliser que quatre chemins de chargement (notés 3a, 3b, 4a et 4c). Durant ces essais, le côté AB est bloqué dans la direction verticale, tandis que le côté BC est bloqué dans la direction horizontale. Les chemins étudiés sont les suivants :

- L'éprouvette est tout d'abord soumise à un chargement en traction, en déplacement imposé (U_y) sur le côté DE, jusqu'à une valeur de $200 \mu\text{m}$. Ensuite, en contrôlant cette fois-ci l'effort, l'éprouvette est déchargée en traction jusqu'à un effort de 0 kN (3a) ou de -1 kN (3b). Puis l'éprouvette est chargée en cisaillement (F_x) sur le côté EF, en contrôlant le déplacement jusqu'à la rupture.
- L'éprouvette est tout d'abord soumise à un chargement en cisaillement (F_x) sur le côté EF, en contrôlant la force, jusqu'à une valeur de 5 kN (4a) ou jusqu'à la charge de cisaillement maximale admissible (4c). Durant ce chargement, le côté DE a été maintenu aligné et libre de se mouvoir, de façon à ne pas induire de confinement. Ensuite, cet effort étant maintenu constant, on applique alors un chargement en traction (F_y) sur le côté DE, en pilotant le déplacement, jusqu'à la ruine de l'éprouvette.

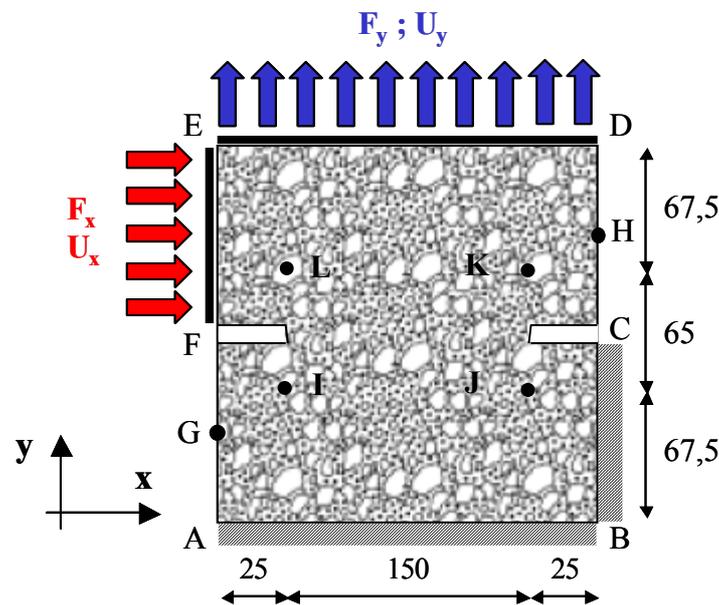


Figure H-1 Géométrie de l'éprouvette testée.

L'auteur a mesuré les déplacements horizontaux aux points G, H, les déplacements verticaux aux points I, J, K et L, ainsi que les efforts appliqués durant les essais. Par ailleurs, le faciès de fissuration a été relevé. Les résultats donnés par la suite se réfèrent aux déplacements horizontaux U_x et verticaux U_y définis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_x = U_x^H - U_x^G \\ U_y = [(U_y^L - U_y^I) + (U_y^K - U_y^J)]/2 \end{cases} \quad (\text{H-1})$$

Le calcul est effectué dans le cas de contraintes planes. Les paramètres du modèle utilisés sont donnés dans le Tableau H-1 et dans le Tableau H-2 pour les séries 3 et 4 respectivement.

Tableau H-1 Caractéristiques du matériau utilisé lors des simulations numériques de la série numéro 3.

E [MPa]	ν	f_t [MPa]	f_c [MPa]	a_c	β_c	G_{ft} [N.m ⁻¹]
$3,28 \times 10^4$	0,2	2,53	41,2	11,24	1,2	227
G_{fc} [N.m ⁻¹]	a_t	$D_{t/2}$	\bar{D}_c	α_g		
12420	- 0,5	0,25	0,2	0,21		

Tableau H-2 Caractéristiques du matériau utilisé lors des simulations numériques de la série numéro 4.

E [MPa]	ν	f_t [MPa]	f_c [MPa]	a_c	β_c	G_{ft} [N.m ⁻¹]
$3,20 \times 10^4$	0,2	3	38,4	11,24	1,2	270
G_{fc} [N.m ⁻¹]	a_t	$D_{t/2}$	\bar{D}_c	α_g		
11900	- 0,5	0,25	0,2	0,21		

Le maillage adopté pour le calcul aux éléments finis a été le même pour les séries 3 et 4 (Figure H-2).

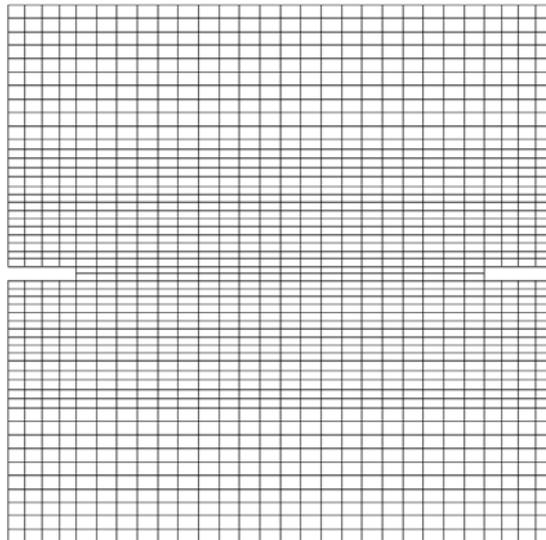


Figure H-2 Maillage de l'éprouvette utilisé pour les calculs aux éléments finis.

H-2 Série numéro 3

Les évolutions expérimentales et numériques de la force F_y en fonction du déplacement U_y sont données dans la Figure H-3 pour les chemins (3a) et (3b) pendant la phase de chargement et de déchargement en traction.

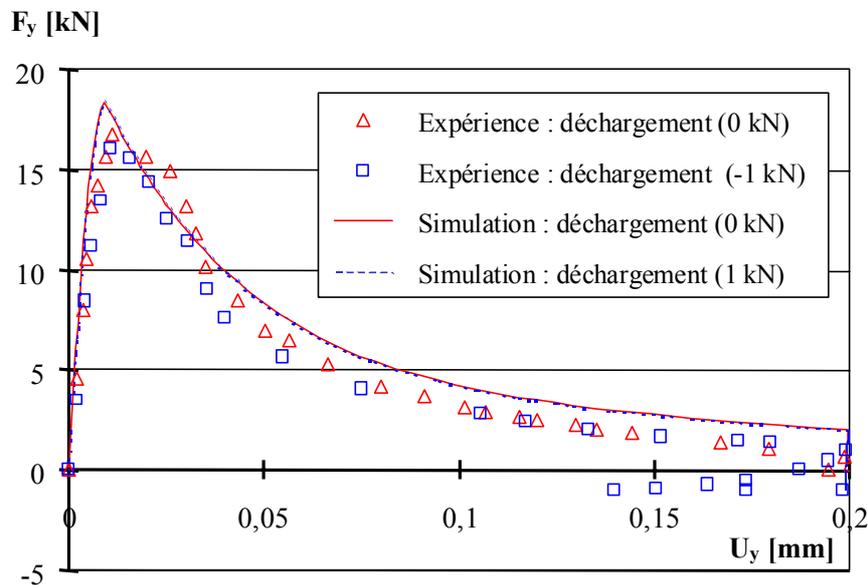


Figure H-3 Évolutions expérimentales et numériques de la force F_y en fonction du déplacement U_y dans le cas de la série 3.

Dans la Figure H-3, on peut observer que le modèle mécanique décrit correctement l'évolution de la force F_y en fonction du déplacement U_y pendant la phase de chargement. Durant la phase de déchargement, la rigidité est par contre surestimée. Cette simulation met en évidence le fait que le modèle est capable de reproduire les résultats expérimentaux, lorsque le mode I de rupture prévaut.

Les évolutions expérimentales et numériques du déplacement U_y en fonction du déplacement U_x sont données dans la Figure H-4 pour les chemins (3a) et (3b).

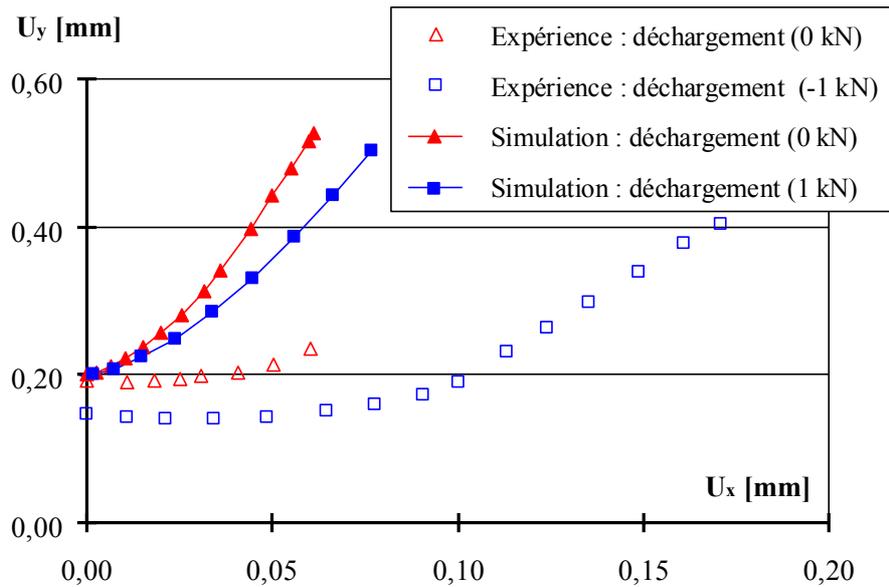


Figure H-4 Évolutions expérimentales et numériques du déplacement U_y en fonction du déplacement U_x dans le cas de la série 3.

Les simulations numériques ne permettent pas de retrouver les résultats expérimentaux. Le modèle prédit une évolution trop rapide du déplacement U_y de l'éprouvette.

Après le déchargement de l'éprouvette en traction, les évolutions expérimentales et numériques de la force F_x en fonction du déplacement U_x sont données dans la Figure H-5 pour les chemins (3a) et (3b) pendant le chargement en cisaillement.

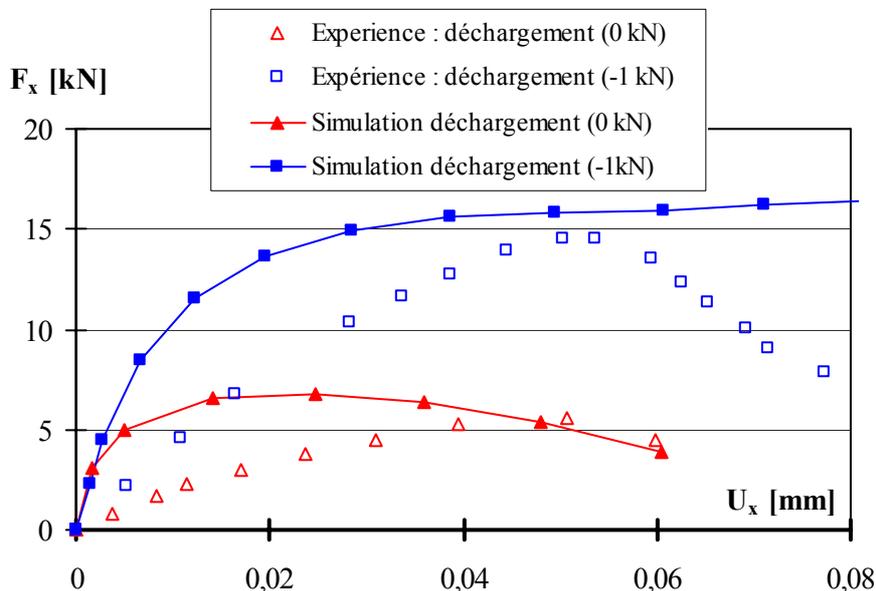


Figure H-5 Évolutions expérimentales et numériques de la force F_x en fonction du déplacement U_x dans le cas de la série 3.

Durant cet essai, le mode (I) de rupture est associé au mode (II). Les simulations numériques surestiment la rigidité initiale, ainsi que la force maximale admissible de cisaillement. Cela est probablement dû au décollement en partie haute à droite et en partie basse à gauche, du béton par rapport au bâti en acier (Di Prisco *et al.* 2000). Par ailleurs, la différence de force admissible entre la série (3a) et (3b) est bien prédite (environ 10 kN),

montrant ainsi l'influence du confinement préalable sur la contrainte de cisaillement maximale admissible.

Les déformées de l'éprouvette obtenues à la fin de la phase de cisaillement sont données dans la Figure H-6 pour la série 3.

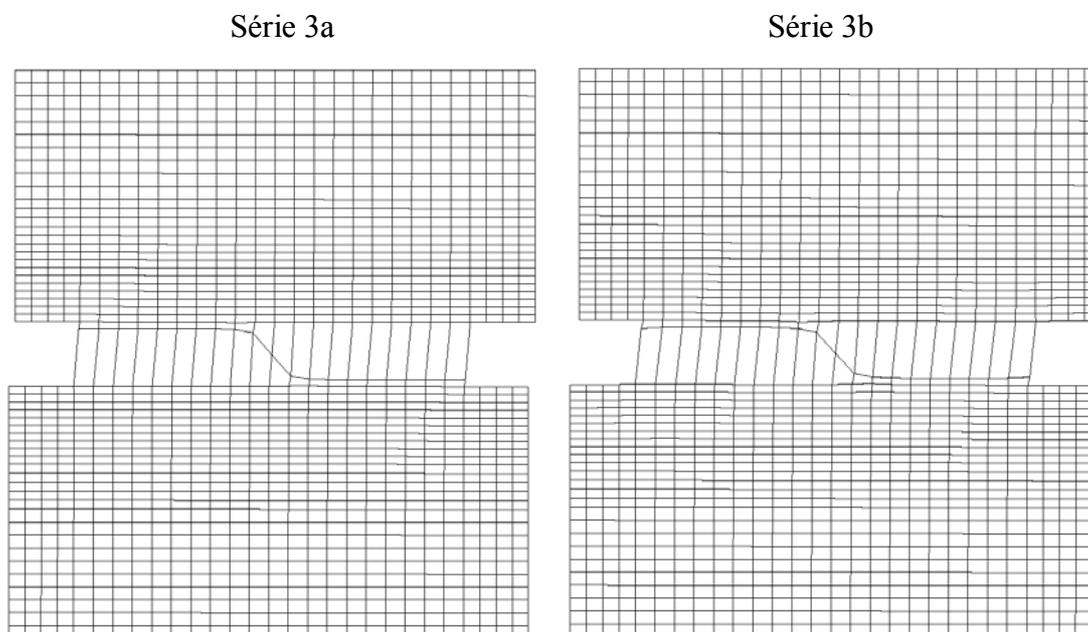


Figure H-6 Déformées de l'éprouvette à la fin de la phase de cisaillement dans le cas de la série 3.

Les déformées obtenues sont relativement similaires dans les deux cas. On observe entre les deux entailles une zone de déformations intenses.

A la fin de l'essai, l'auteur a procédé au relevé du faciès de fissuration observé expérimentalement sur l'éprouvette dans chacun des deux cas. Ces faciès sont représentés dans la Figure H-7 et dans la Figure H-8, avec les iso-valeurs de l'endommagement dans les deux directions (x et y), pour les séries 3a et 3b, respectivement.

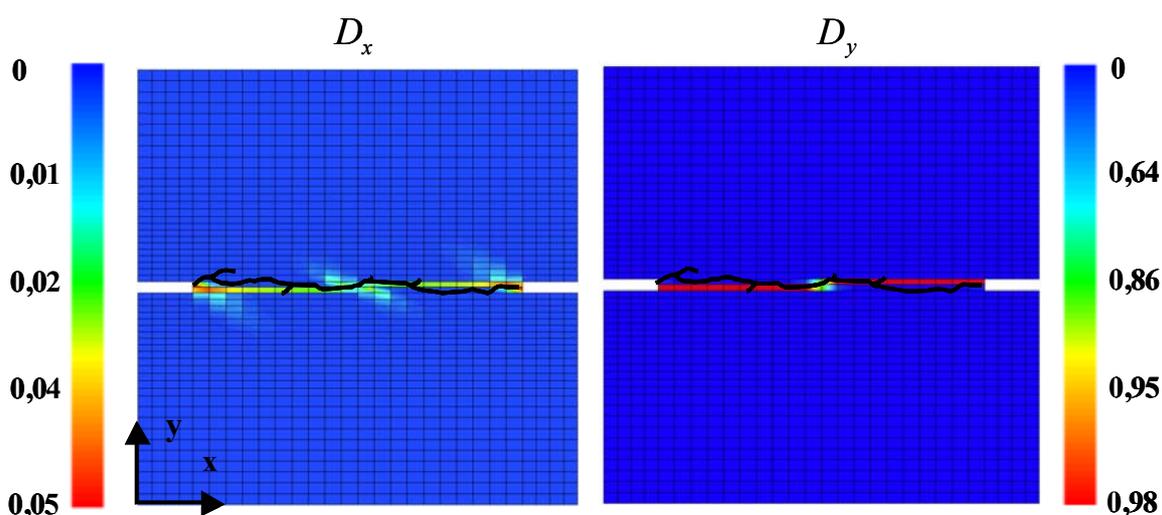


Figure H-7 Comparaison du faciès de fissuration expérimentale avec les iso-valeurs de la variable endommagement dans le cas de la série 3a.

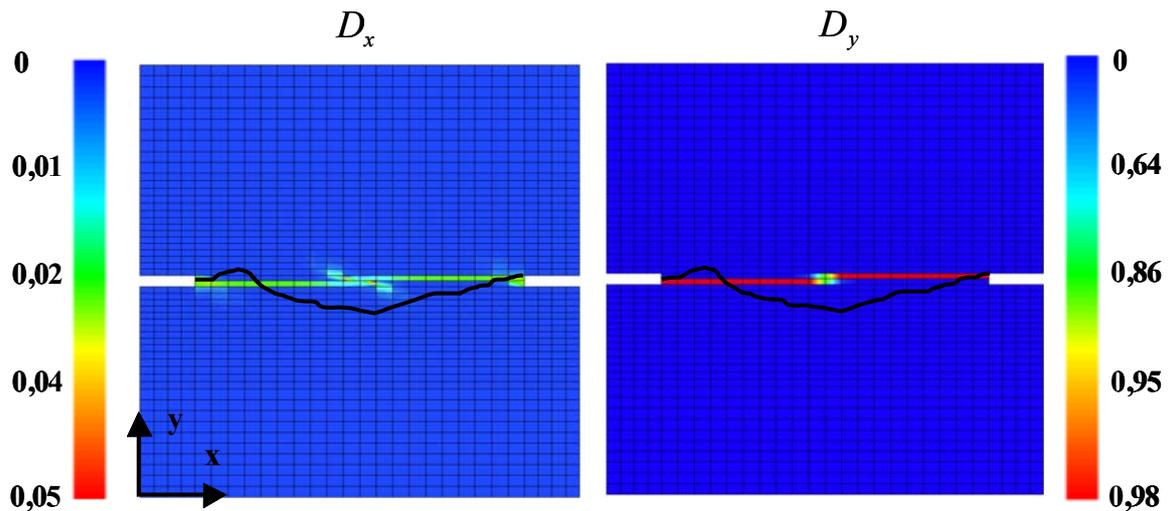


Figure H-8 Comparaison du faciès de fissuration expérimentale avec les iso-valeurs de la variable endommagement dans le cas de la série 3b.

Les iso-valeurs d'endommagement obtenues à la fin de la phase de cisaillement sont similaires dans les deux séries. Les simulations montrent une occurrence préférentielle de la fissuration dans la direction du chargement de traction (y). Le faciès de fissuration est reproduit correctement dans les deux cas.

H-3 Série numéro 4

On présente tout d'abord les évolutions expérimentales et numériques de la force F_x en fonction du déplacement U_x lors d'un test de cisaillement seul dans la Figure H-9. L'objectif étant de déterminer la force de cisaillement maximale nécessaire pour la simulation (4c).

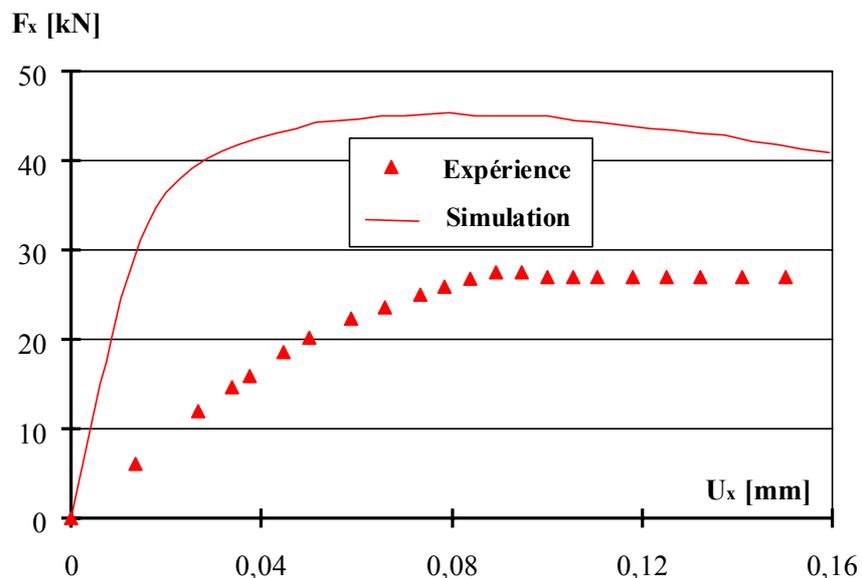


Figure H-9 Évolutions expérimentales et numériques de la force F_x en fonction du déplacement U_x dans le cas d'un test de cisaillement.

En cisaillement seul, le modèle surestime fortement la charge maximale admissible (45 kN contre 27,5 kN mesurée expérimentalement), ainsi que la rigidité initiale. Ce résultat a été

également obtenu pour différents modèles de comportement (Pamin 1996, Di Prisco et al. 2000).

Par ailleurs, les évolutions expérimentales et numériques de la force F_y en fonction du déplacement U_y sont données dans la Figure H-10 pour les chemins (4a) et (4c) pour lesquels une force de traction F_y est appliquée simultanément à la force de cisaillement maintenue constante.

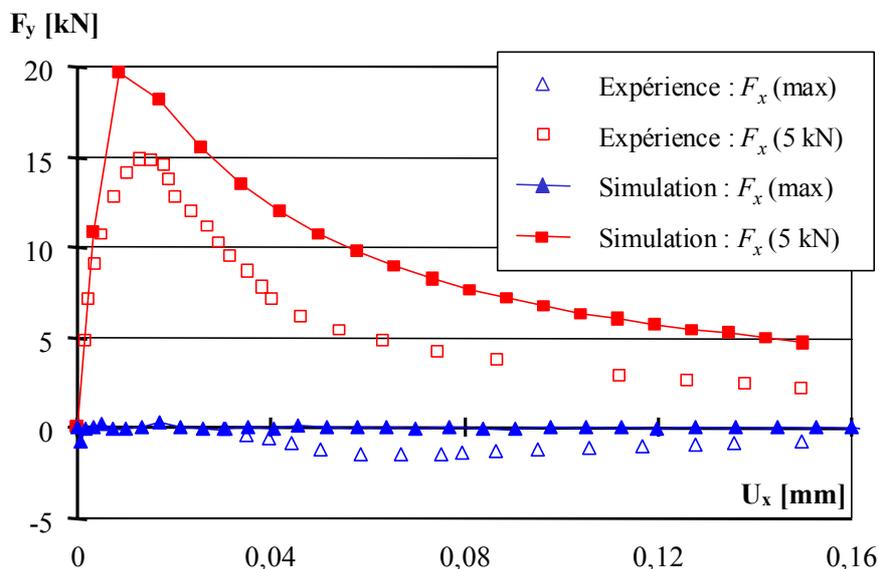


Figure H-10 Évolutions expérimentales et numériques de la force F_y en fonction du déplacement U_y dans le cas de la série 4.

Dans les deux simulations, le modèle décrit correctement les résultats expérimentaux en terme de courbe force – déplacement normal, notamment en ce qui concerne la résistance résiduelle en traction après cisaillement. Dans le cas (4a) qui correspond à un faible cisaillement, la traction n'est pas affectée alors que le cisaillement maximum réduit à zéro la résistance à la traction de l'éprouvette.

Les évolutions expérimentales et numériques du déplacement U_y en fonction du déplacement U_x sont données dans la Figure H-11 pour les chemins (4a) et (4b).

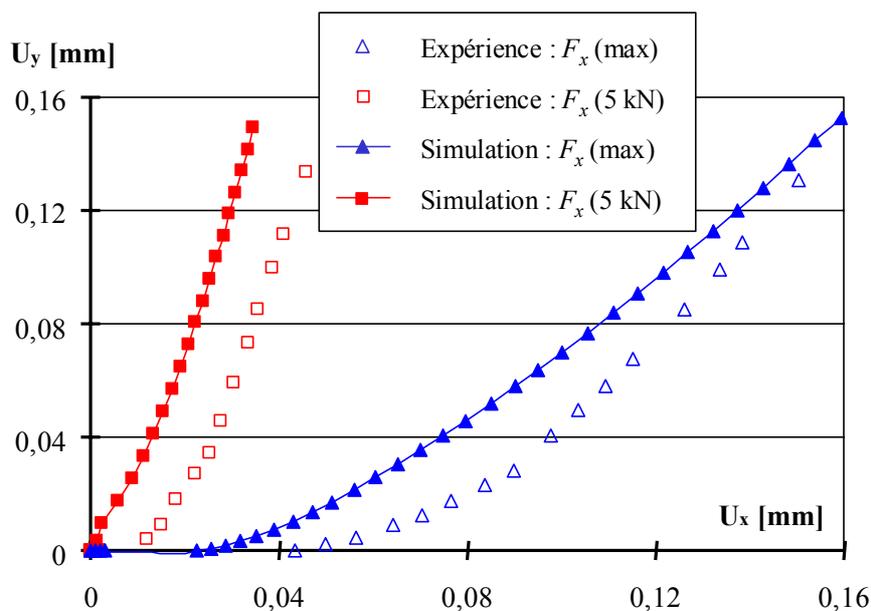


Figure H-11 Évolutions expérimentales et numériques du déplacement U_y en fonction du déplacement U_x dans le cas de la série 4.

Les simulations numériques décrivent correctement les évolutions des déplacements dans le cas des deux séries, seul le déplacement seuil U_y est sous-estimée. Il correspond à un déplacement initial dans la direction perpendiculaire à la direction du chemin de chargement initial. Ce déplacement n'est pas reproduit par les simulations.

Les déformées de l'éprouvette obtenues à la fin de la phase de traction sont données dans la Figure H-12 pour la série 4.

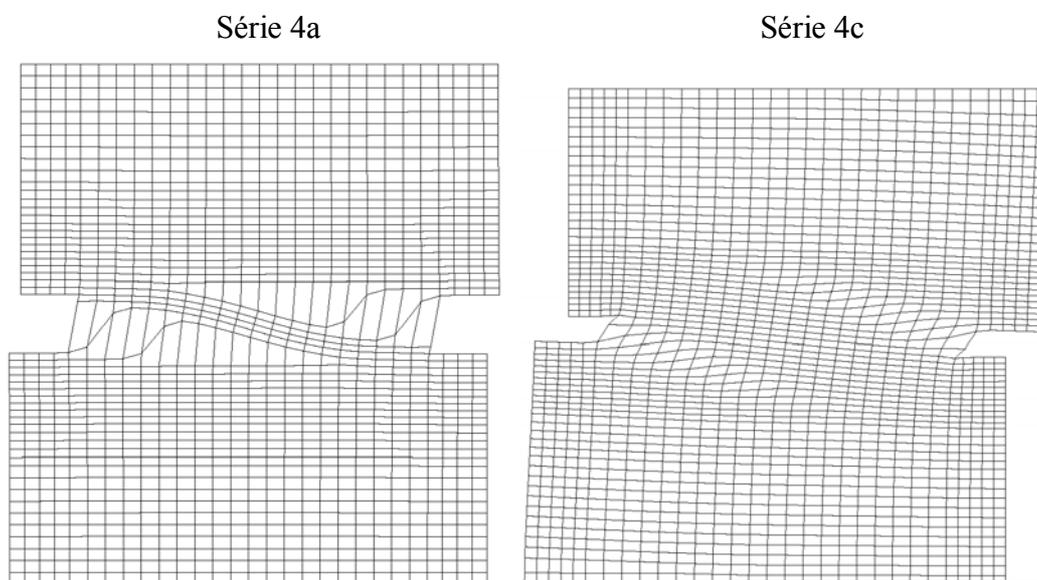


Figure H-12 Déformée de l'éprouvette à la fin de la phase de traction dans le cas de la série 4.

A la fin du chargement en traction, les simulations montrent une déformée différente pour chacune des séries. On observe une zone de grandes déformations plus inclinées dans le cas de la série (4c).

A la fin de l'essai, l'auteur a procédé au relevé du faciès de fissuration observé expérimentalement sur l'éprouvette dans chacun des deux cas. Ces faciès sont représentés

dans la Figure H-13 et dans la Figure H-14, avec les iso-valeurs de l'endommagement dans les deux directions (x et y), pour les séries 4a et 4c, respectivement.

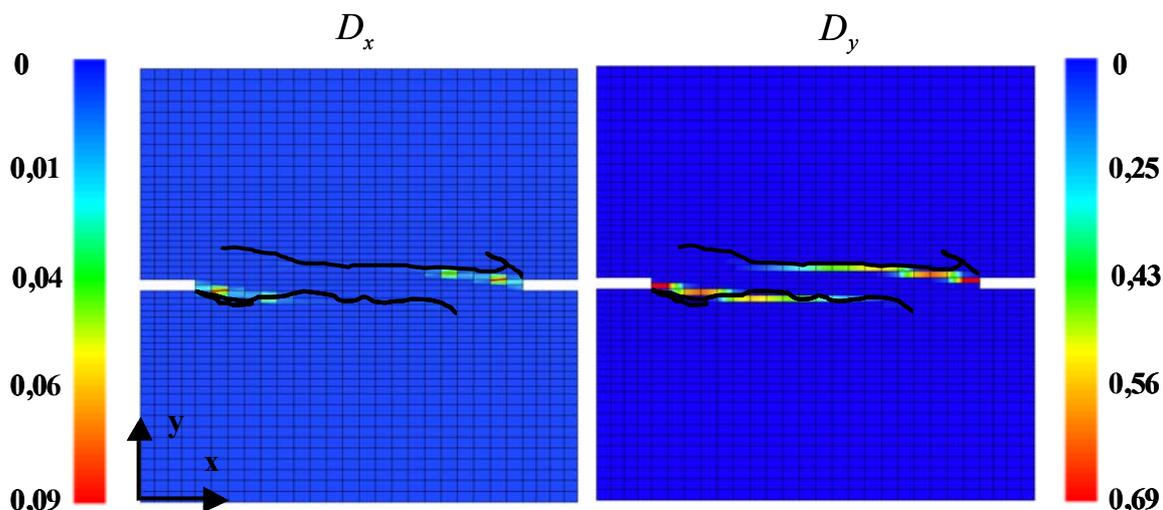


Figure H-13 Comparaison du faciès de fissuration expérimentale avec les iso-valeurs de la variable endommagement dans le cas de la série 4a.

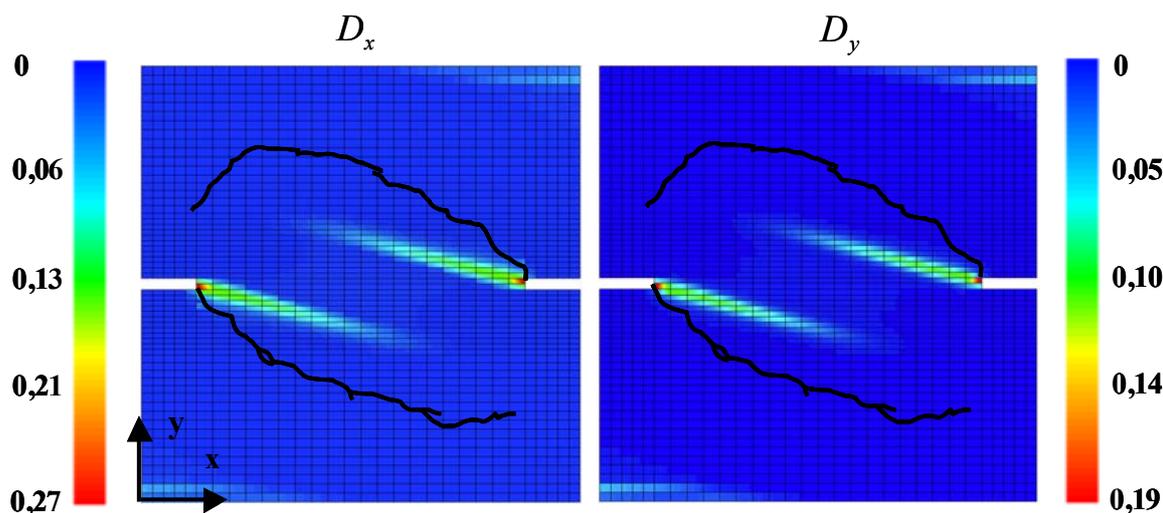


Figure H-14 Comparaison du faciès de fissuration expérimentale avec les iso-valeurs de la variable endommagement dans le cas de la série 4c.

Dans le cas de la série (4a), les simulations montrent une occurrence préférentielle de la fissuration dans la direction y . Une bonne concordance entre le relevé expérimental des fissures et les iso-valeurs de l'endommagement est observée. Dans le cas de la série (4c), les simulations mettent en évidence la coexistence de deux fissures partant des bords entaillés, dont l'angle d'inclinaison est moins prononcé que celui relevé expérimentalement.

Les simulations numériques menées montrent que le modèle est capable de décrire correctement les faciès de fissuration observés expérimentalement lors des différents essais étudiés. Les courbes force-déplacement sont décrites correctement, lorsque le seul mode de rupture (I) en traction est concerné.

Lorsque les modes de rupture mixtes sont concernés successivement, l'existence d'un couplage entre l'endommagement de traction (mode I) et de cisaillement (mode II) est mis en évidence. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce phénomène afin d'estimer avec une

bonne précision les valeurs réelles des efforts ultimes dans des situations de chargements mixtes.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

FIGURE I-1 REPRÉSENTATION SCHEMATIQUE DE LA MICROSTRUCTURE DU GEL DE C-S-H SELON LE MODELE DE FELDMAN ET SEREDA (1968).	17
FIGURE I-2 ÉTAT DE L'EAU DANS LE GEL DE C-S-H SELON SIERRA (1974 CITE PAR REGOURD 1982).	18
FIGURE I-3 DESCRIPTION IDEALISEE DE L'EAU DANS LES ZONES D'ADSORPTION EMPECHÉE ET DE LA TRANSITION AVEC LES PORES CAPILLAIRES (BAZANT 1972).	19
FIGURE I-4 REPRÉSENTATION SCHEMATIQUE DES MECANISMES DE TRANSPORT DE L'EAU AU SEIN DE LA PATE DE CIMENT.	20
FIGURE I-5 LA DIFFUSION MOLECULAIRE (XI ET AL. 1994).	20
FIGURE I-6 LA DIFFUSION DE KNUDSEN (A) ET LA DIFFUSION SURFACIQUE (B) (XI ET AL. 1994).	21
FIGURE I-7 DISTRIBUTION DE LA TENEUR EN EAU DANS L'ÉPROUVETTE A DIFFERENTS INSTANTS (ACKER ET AL. 1990).	21
FIGURE I-8 OUVERTURE TYPIQUE DES FISSURES INDUITES PAR LA DESSICCATION, OBSERVÉE AU MICROSCOPE ELECTRONIQUE A BALAYAGE (BISSCHOP ET VAN MIER 2002).	22
FIGURE I-9 MICROFISSURATION A LA SURFACE D'UNE ÉPROUVETTE EN BETON, RELEVÉE ET ANALYSÉE A L'AIDE DE REPLIQUES POUR DIFFERENTES CONDITIONS D'ESSAI (SICARD ET AL. 1992).	23
FIGURE I-10 COURBES CONTRAINTES-DEFORMATIONS D'UNE ÉPROUVETTE PRE-SECHÉE ESSENTIELLEMENT DANS LES DIRECTIONS Y ET Z, ET SOUMISE A UN CHARGEMENT HYDROSTATIQUE (BOURGOIS ET AL. 2001).	25
FIGURE I-11 (A) DESCRIPTION DES DIFFERENTES PHASES DE FISSURATION OBSERVÉES AU MICROSCOPE OPTIQUE. (B) COURBE CONTRAINTES-DEFORMATIONS EN COMPRESSION.	26
FIGURE I-12 (A) COURBE CONTRAINTES-DEFORMATIONS EN TRACTION (GOPALARATNAM ET SHAH 1985). (B) ÉVOLUTION DE LA RESISTANCE EN TRACTION EN FONCTION DU RAPPORT DE LA DIMENSION DE L'ÉPROUVETTE SUR UNE DIMENSION DE REFERENCE (BAZANT ET BECQ-GIRAUDON 2002).	27
FIGURE I-13 (A) RESISTANCES DU BETON DANS LE CAS DE SOLlicitATIONS BIAxiaLES. (B) COMPORTEMENT DU BETON SOUS SOLlicitATIONS TRIAXIALES (NEVILLE 2000).	28
FIGURE I-14 ÉVOLUTION DE LA PERTE EN MASSE POUR DIFFERENTS NIVEAUX DE CHARGEMENT (LASSABATERE ET AL. 1997).	29
FIGURE I-15 ÉVOLUTION DU PROFIL D'HUMIDITE RELATIVE D'UNE ÉPROUVETTE EN DESSICCATION (EN HAUT). VARIATIONS DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES INDUITES PAR LE SECHAGE DIFFERENTIEL (EN BAS).	32
FIGURE I-16 RETRAIT A L'ÉQUILIBRE TYPIQUE DE MATERIAUX A MATRICE CIMENTAIRE EN FONCTION DE L'HUMIDITE RELATIVE (BAROGHEL-BOUNY ET AL. 1999, OBEID ET AL. 2002).	33
FIGURE I-17 RETRAIT EN FONCTION DE L'HUMIDITE RELATIVE DE PATES DE CIMENT SECHÉES (LENTEMENT OU RAPIDEMENT) PUIS REHUMIDIFIÉES (DAY ET AL. 1984).	33
FIGURE I-18 (A) ÉVOLUTION DU RETRAIT DE DESSICCATION EN FONCTION DE LA PERTE EN MASSE (GRANGER 1996) ET (B) A COURT TERME EN FONCTION DU TEMPS (ALVAREDO ET WITTMANN 1993).	34
FIGURE I-19 (A) DEFORMATION DE RETRAIT DE DESSICCATION EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE PATE ET (B) EN FONCTION DU TEMPS POUR DIFFERENTS RAPPORTS E/C (BISSONNETTE ET AL. 1999).	35
FIGURE I-20 (A) ÉVOLUTION DU RETRAIT DE DESSICCATION POUR DIFFERENTES DIMENSIONS (HANSON ET MATTOCK 1966) ET (B) EN FONCTION DE LA POSITION DANS L'ÉPROUVETTE (ACKER ET AL. 1990).	36
FIGURE I-21 (A) DEFORMATION DE FLUAGE PROPRE EN FONCTION DE L'AGE DE CHARGEMENT (NIYOGI ET AL. 1973). (B) ÉVOLUTION DES DEFORMATIONS D'UNE PATE DE CIMENT (PARROTT 1974).	37
FIGURE I-22 MECANISMES DU FLUAGE PROPRE A COURT TERME (A) ET A LONG TERME (B) PROPOSÉS PAR ULM ET AL. (1999).	39
FIGURE I-23 (A) DEFORMATION DE FLUAGE PROPRE EN FONCTION DU TEMPS POUR DIFFERENTES CONDITIONS DE PRE-SECHAGE (WITTMANN 1970) ET (B) POUR DIFFERENTES TENEURS EN GRANULAT (PICKETT 1956, CITE PAR HUET ET AL. 1982).	41
FIGURE I-24 (A) DEFORMATION DE FLUAGE PROPRE POUR DIFFERENTS RAPPORTS E/C ET (B) POUR DIFFERENTS TYPES DE CIMENT (HUMMEL 1959, CITE PAR KANSTAD 1991).	42
FIGURE I-25 DEFORMATION DE FLUAGE RELATIVE POUR DIFFERENTES CONDITIONS HYGROMETRIQUES (ACKER ET ULM 2001).	42
FIGURE I-26 DEFORMATIONS D'UNE PATE DE CIMENT D'ÉPAISSEUR 1,9 MM (DAY ET AL. 1984).	43
FIGURE I-27 (A) DEFORMATION DE FLUAGE DE DESSICCATION D'UN BETON (GAMBLE ET PARROTT 1978) ET (B) D'UNE PATE DE CIMENT (DAY ET AL. 1984).	46
FIGURE I-28 ÉVOLUTION DU COEFFICIENT DE POISSON DE FLUAGE DANS LE CAS DE SOLlicitATIONS MULTIAxiaLES POUR DIFFERENTS AUTEURS (BENBOUDJEMA ET AL. 2000A).	47

Table des Illustrations

FIGURE I-29 DEFORMATIONS DE FLUAGE PROPRE SPHERIQUE ET DEVIATORIQUE EN FONCTION DES CONTRAINTES SPHERIQUES (A) ET DES CONTRAINTES DEVIATORIQUES (B), RESPECTIVEMENT (GOPALAKRISHNAN ET AL. 1969).....	48
FIGURE I-30 DEFINITION DE LA SURFACE EFFECTIVE.	53
FIGURE I-31 VARIATION DU COEFFICIENT DE BIOT LIQUIDE ET DU DEGRE DE SATURATION EN FONCTION DE L'HUMIDITE RELATIVE POUR DES MORTIERS (OBEID ET AL. 2002).	64
FIGURE I-32 HETEROGENEITE IDEALISE DU BETON A L'ECHELLE DES GRANULATS (A, MODELE TRISPHERE, LE ROY 1996) ET A L'ECHELLE DES PORES CAPILLAIRE (B).	65
FIGURE I-33 CHAINES DE MAXWELL (A) ET CHAINES DE KELVIN-VOIGT (B).	67
FIGURE II-1 VARIATION DE L'HUMIDITE RELATIVE DES BETONS A L'EQUILIBRE POUR DIFFERENTS RAPPORTS E/C (YSSORCHE 1995, BAROGHEL-BOUNY ET AL. 1999).....	77
FIGURE II-2 TRANSPORT ET ABSORPTION DE L'EAU DANS UN PORE CYLINDRIQUE.	78
FIGURE II-3 DOUBLE CRITERE DE RANKINE DANS LE CAS DE CONTRAINTES PLANES.	84
FIGURE II-4 COMPARAISON DU CRITERE DE DRUCKER-PRAGER ET DE RANKINE AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX DE KUPFER ET GERSTLE (1973), VAN MIER (1984) ET TORRENTI (1987).	85
FIGURE II-5 CRITERE DE DRUCKER-PRAGER EN COMPRESSION DANS LE REPERE DES CONTRAINTES PRINCIPALES ET DANS LE CAS DE CONTRAINTES PLANES.	86
FIGURE II-6 ÉVOLUTION DES CONTRAINTES NOMINALES ET DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT EN FONCTION DE LA VARIABLE D'ECROUISSAGE EN TRACTION.	89
FIGURE II-7 ÉVOLUTION DES CONTRAINTES NOMINALES ET DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT EN FONCTION DE LA VARIABLE D'ECROUISSAGE EN COMPRESSION.	89
FIGURE II-8 DENSITE D'ENERGIE DE FISSURATION EN TRACTION (A) ET EN COMPRESSION (B).	90
FIGURE II-9 DEFINITION DES VALEURS D'ENDOMMAGEMENT NECESSAIRE A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES EN TRACTION (A) ET EN COMPRESSION (B).	91
FIGURE II-10 MECANISMES DU FLUAGE PROPRE SPHERIQUE.	93
FIGURE II-11 MODELISATION PHYSIQUE DU FLUAGE PROPRE SPHERIQUE.	94
FIGURE II-12 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DE FLUAGE PROPRE SPHERIQUE.	100
FIGURE II-13 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DE LA DEFORMATION DE FLUAGE PROPRE SPHERIQUE.	100
FIGURE II-14 DEFORMATIONS MECANIKES DES EPROUVETTES DE MORTIERS.	101
FIGURE II-15 MECANISMES DE FLUAGE PROPRE DEVIATORIQUE.	102
FIGURE II-16 MODELES CONSTITUTIFS DU FLUAGE PROPRE DEVIATORIQUE REVERSIBLE ET IRREVERSIBLE.....	103
FIGURE II-17 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DE FLUAGE PROPRE DEVIATORIQUE (RESULTATS EXPERIMENTAUX DE PARROTT 1974).	105
FIGURE II-18 COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS EXPERIMENTAUX (WITTMANN 1970) ET LES RESULTATS NUMERIQUES DE FLUAGE PROPRE POUR DIFFERENTES VALEURS D'HUMIDITE RELATIVE.	106
FIGURE II-19 MECANISME DU FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE.	108
FIGURE II-20 MODELE RHEOLOGIQUE DU FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE.....	108
FIGURE II-21 ÉVOLUTION DE LA CONTRAINTE UNIAXIALE IMPOSEE ET DE L'HUMIDITE RELATIVE IMPOSEE.	110
FIGURE II-22 ÉVOLUTION DES DEFORMATIONS DE FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE POUR CHAQUE CAS DE CHARGEMENT.	110
FIGURE II-23 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DE FLUAGE DE DESSICCATION INTRINSEQUE.....	111
FIGURE II-24 ÉQUILIBRE EAU LIQUIDE/AIR HUMIDE DANS UN PORE DE RAYON R_p	113
FIGURE II-25 LES DIFFERENTES PRESSIONS APPLIQUEES AU SOLIDE DANS LES PORES CAPILLAIRES.	114
FIGURE II-26 VARIATION DE LA PRESSION APPLIQUEE PAR LES DIFFERENTS FLUIDES DE LA PATE DE CIMENT SUR LE SQUELETTE SOLIDE.	115
FIGURE II-27 DEFINITION DES CONTRAINTES EFFECTIVES (EN L'ABSENCE DE FISSURES).	116
FIGURE II-28 DEFINITION DES CONTRAINTES EFFECTIVES (PRESENCE DE FISSURES).	118
FIGURE II-29 VARIATION AFFINE PAR MORCEAUX DES CONTRAINTES ET DE L'HUMIDITE RELATIVE.	122
FIGURE III-1 GEOMETRIE DES EPROUVETTES TESTEES (DAY ET AL. 1984, DIMENSIONS EN MILLIMETRE).....	133
FIGURE III-2 ÉVOLUTION EXPERIMENTALE DE LA PERTE EN MASSE (DAY ET AL. 1984).	134
FIGURE III-3 COMPARAISON ENTRE LES ISOTHERMES DE SORPTION ET DE DESORPTION SIMULEES ET EXPERIMENTALES (BAROGHEL-BOUNY ET AL. 1999) ET L'ISOTHERME ADOPTEE (MODELE BSB).	135
FIGURE III-4 DEFORMATION DE FLUAGE DE DESSICCATION LORS DE L'ESSAI DE SECHAGE LENT ET RAPIDE.	136
FIGURE III-5 ÉVOLUTION EXPERIMENTALE ET SIMULEE DE LA DEFORMATION DE RETRAIT DE DESSICCATION LORS DES ESSAIS DE SECHAGE LENT ET SECHAGE RAPIDE.	137
FIGURE III-6 ÉVOLUTION DE LA DEFORMATION DE RETRAIT DE DESSICCATION LORS DE LA REHUMIDIFICATION, QUI FAIT SUITE A L'ESSAI DE SECHAGE RAPIDE.	138
FIGURE III-7 DECOMPOSITION DE LA DEFORMATION DE RETRAIT DE DESSICCATION POUR LA SERIE SECHAGE RAPIDE (SECHAGE PUIS REHUMIDIFICATION).	139

Table des Illustrations

FIGURE III-8 GEOMETRIE DES EPROUVETTES DES ESSAIS DE FLUAGE PROPRE (GOPALAKRISHNAN ET AL. 1969).	139
FIGURE III-9 CHEMIN DES CONTRAINTES DE LA SERIE ETUDIEE (GOPALAKRISHNAN ET AL. 1969).	140
FIGURE III-10 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DES DEFORMATIONS DE FLUAGE PROPRE POUR L'ESSAI BIAXIAL.	141
FIGURE III-11 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DE LA DEFORMATION LONGITUDINALE DE FLUAGE PROPRE POUR L'ESSAI UNIAXIAL.	141
FIGURE III-12 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DES DEFORMATIONS DE FLUAGE PROPRE POUR L'ESSAI TRIAXIAL.	142
FIGURE III-13 GEOMETRIE ET MAILLAGE ELEMENTS FINIS DES EPROUVETTES (CALCUL AXISYMETRIQUE).	144
FIGURE III-14 ÉVOLUTIONS DE LA RESISTANCE EN COMPRESSION EN FONCTION DE LA DUREE DE SECHAGE PREALABLE (HUMIDITE RELATIVE EXTERIEURE EGALE A 50 %).	145
FIGURE III-15 ÉVOLUTIONS DE LA RESISTANCE EN TRACTION EN FONCTION DE LA DUREE DE SECHAGE PREALABLE (HUMIDITE RELATIVE EXTERIEURE EGALE A 50 %).	145
FIGURE III-16 ISO-VALEURS DE L'ENDOMMAGEMENT EN COMPRESSION APRES 28 JOURS DE SECHAGE POUR DEUX DIFFERENTES MODELISATIONS (HUMIDITE RELATIVE EXTERIEURE EGALE A 50 %).	146
FIGURE III-17 COURBES CONTRAINTES-DEFORMATIONS EN COMPRESSION, POUR DIFFERENTES VALEURS D'HUMIDITE RELATIVE (HR HOMOGENE DANS L'EPROUVETTE).	147
FIGURE III-18 COURBES CONTRAINTES-DEFORMATIONS EN TRACTION, POUR DIFFERENTES VALEURS D'HUMIDITE RELATIVE (HR HOMOGENE DANS L'EPROUVETTE).	147
FIGURE III-19 ÉVOLUTIONS DE LA CONTRAINTE APPARENTE σ_{zz} , DES CONTRAINTES EFFECTIVES $\tilde{\sigma}_{zz}$ ET $\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, DANS LE CAS D'UN ESSAI DE COMPRESSION, POUR UNE HUMIDITE RELATIVE DE 50 %.	148
FIGURE III-20 GEOMETRIE ET CONDITIONS AUX LIMITES DURANT LA PHASE DE SECHAGE ① ET LA PHASE DE CHARGEMENT ② (CALCUL EN CONTRAINTES PLANES).	149
FIGURE III-21 ÉVOLUTION DES CONTRAINTES DE COMPRESSION APPLIQUEES EN FONCTION DES DEFORMATIONS RELATIVES, DANS CHACUNE DES DIRECTIONS CHARGEES.	150
FIGURE III-22 GEOMETRIE DES EPROUVETTES DES ESSAIS, CONDITIONS AUX LIMITES ADOPTEES POUR LES SIMULATIONS ET MAILLAGE ADOPTE.	150
FIGURE III-23 CONTRAINTES APPLIQUEES LORS DES ESSAIS (ROSS 1954).	151
FIGURE III-24 ÉVOLUTIONS NUMERIQUES ET EXPERIMENTALES DES DEFORMATIONS DIFFEREES LORS DES ESSAIS DE RETRAIT DE DESSICCATION, DE FLUAGE UNIAXIAL (1D) ET BIAXIAL (2D).	152
FIGURE III-25 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DU COEFFICIENT DE POISSON DE FLUAGE.	153
FIGURE III-26 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES A 60 JOURS LE LONG DU SEGMENT [OA].	154
FIGURE III-27 ISO-VALEURS DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT LORS DE L'ESSAI DE RETRAIT DE DESSICCATION APRES 60 JOURS DANS LES DIRECTIONS Y ET Z.	155
FIGURE III-28 ISO-VALEURS DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT LORS DE L'ESSAI DE FLUAGE BIAXIAL APRES 60 JOURS DANS LES DIRECTIONS y ET z .	155
FIGURE III-29 CONDITIONS AUX LIMITES, GEOMETRIE DES EPROUVETTES ET PRINCIPE DE MESURE.	156
FIGURE III-30 CONDITIONS AUX LIMITES DES ESSAIS DE RETRAIT DE DESSICCATION, DE FLUAGE PROPRE ET DE FLUAGE TOTAL.	157
FIGURE III-31 MAILLAGES ADOPTES LORS DES SIMULATIONS NUMERIQUES (CALCUL AXISYMETRIQUE).	157
FIGURE III-32 COMPARAISON ENTRE L'ISOTHERME DE DESORPTION UTILISEE DANS LES SIMULATIONS ET CELLES OBTENUE PAR PIHLAJAVAARA (1974).	158
FIGURE III-33 ÉVOLUTIONS DU COEFFICIENT DE DIFFUSION EN FONCTION DE L'HUMIDITE RELATIVE.	159
FIGURE III-34 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS NUMERIQUES ET EXPERIMENTALES DE LA PERTE EN MASSE.	159
FIGURE III-35 PROFIL DE TENEUR EN EAU A DIFFERENTS INSTANTS POUR LE BETON DE CIVAUX B11.	160
FIGURE III-36 COMPARAISON ENTRE LES COURBES CONTRAINTES-DEFORMATIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES (MODELE EPEO), EN TRACTION.	161
FIGURE III-37 COMPARAISON ENTRE LES COURBES CONTRAINTES-DEFORMATIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES (MODELE DE MAZARS), EN TRACTION.	162
FIGURE III-38 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DES DEFORMATIONS VERTICALES DE FLUAGE PROPRE POUR LES 4 BETONS ETUDIES.	163
FIGURE III-39 ISO-VALEURS DES VARIABLES D'ENDOMMAGEMENT D_t^{zz} ET $D_t^{\theta\theta}$ OBTENUS AVEC LE MAILLAGE (A) ET LE MAILLAGE (B) DE LA FIGURE III-31, APRES 3 ANS DE SECHAGE.	165
FIGURE III-40 DISTRIBUTION DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT D_t^{zz} A DIFFERENTS INSTANTS POUR LE BETON DE CIVAUX B11.	165
FIGURE III-41 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES σ_{zz} LE LONG DU SEGMENT [BA].	166
FIGURE III-42 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES $\sigma_{\theta\theta}$ LE LONG DU SEGMENT [BA].	167

Table des Illustrations

FIGURE III-43 DEFORMEES OBTENUES APRES 3 JOURS, 28 JOURS ET 3 ANS DE SECHAGE POUR LE MODELE EPEO.	167
FIGURE III-44 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DE LA DEFORMATION DE RETRAIT AU POINT A (MODELE ELASTIQUE OU MODELE DE MAZARS ASSOCIE AU MODELE DE RETRAIT LINEAIRE).	168
FIGURE III-45 COMPARAISON ENTRE L'EVOLUTION EXPERIMENTALE ET LES EVOLUTIONS SIMULEES DU RETRAIT AU POINT A (MODELE ELASTIQUE, DE MAZARS OU EPEO ASSOCIE AU MODELE DE RETRAIT LINEAIRE).	169
FIGURE III-46 COMPARAISON ENTRE LES EVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DU RETRAIT DE DESSICCATION AU POINT A POUR LES 4 BETONS ETUDIES (AVEC LA MODELISATION PROPOSEE).	169
FIGURE III-47 CONTRIBUTION DE CHACUNE DES COMPOSANTES DE DEFORMATION AU POINT A (EN PEAU).	170
FIGURE III-48 CONTRIBUTION DE CHACUNE DES COMPOSANTES DE DEFORMATION AU POINT B (EN CŒUR).	170
FIGURE III-49 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES σ_{zz} LE LONG DU SEGMENT [BA].	172
FIGURE III-50 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES $\sigma_{\theta\theta}$ LE LONG DU SEGMENT [BA].	172
FIGURE III-51 ISO-VALEURS DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT D_c , $D_t^{\theta\theta}$ ET D_t^{zz} APRES 3 ANS.	173
FIGURE III-52 ROSACE DE REPARTITION DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT D_t	173
FIGURE III-53 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DES DEFORMATIONS DIFFEREES VERTICALES AU POINT A POUR LES 4 BETONS ETUDIES.	174
FIGURE III-54 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET SIMULEES DES DEFORMATIONS DIFFEREES AU POINT A POUR LE BETON DE CIVAUX B11.	175
FIGURE III-55 ÉVOLUTIONS DES COMPOSANTES DE DEFORMATIONS AU POINT A POUR LA MODELISATION ADOPTEE.	176
FIGURE III-56 SCHEMA DE PRINCIPE DU REACTEUR FRANÇAIS REP 1400 MWe (GRANGER 1998).	177
FIGURE III-57 DESCRIPTION DU PHASAGE DE CALCUL DE L'ENCEINTE.	177
FIGURE III-58 DEFINITION DES DIMENSIONS UTILISEES POUR LE CALCUL DES VARIATIONS MOYENNES DES CONTRAINTES LORS DE L'EPREUVE D'ENCEINTE.	179
FIGURE III-59 MAILLAGE ADOPTE LORS DES SIMULATIONS NUMERIQUES.	179
FIGURE III-60 ÉVOLUTIONS DE LA PERTE EN MASSE EN FONCTION DU TEMPS DE L'ENCEINTE GENERIQUE.	181
FIGURE III-61 PROFIL DE TENEUR EN EAU A DIFFERENTS INSTANTS AU SEIN DE LA TRANCHE D'ENCEINTE.	181
FIGURE III-62 ÉVOLUTION DES DEFORMATIONS SUR LA SURFACE EXTERNE DE L'ENCEINTE.	182
FIGURE III-63 CONTRIBUTION DES COMPOSANTES DE LA DEFORMATION ORTHORADIALE SUR LA SURFACE EXTERNE DE L'ENCEINTE.	183
FIGURE III-64 ÉVOLUTION DES CONTRAINTES CORRESPONDANTES A LA PRECONTRAINTE.	183
FIGURE III-65 ISO-VALEURS DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT D_t^{zz} SUR LA SURFACE S_3 APRES 1 AN, 7 ANS ET 47 ANS (AVANT ET APRES L'EPREUVE D'ENCEINTE).	184
FIGURE III-66 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES σ_{zz} LE LONG DU RAYON.	184
FIGURE III-67 DISTRIBUTION DES CONTRAINTES $\sigma_{\theta\theta}$ LE LONG DU RAYON.	185
FIGURE A-1 SOLLICITATIONS BIAxiaLES.	204
FIGURE C-1 CHEMINS DE CHARGEMENT.	209
FIGURE C-2 RAPPORT DE LA CONTRAINTE RESISTANTE NOMINALE SUR LA CONTRAINTE RESISTANTE INITIALE.	210
FIGURE C-3 CHEMINS DE CHARGEMENT.	210
FIGURE D-1 VARIATION LINEAIRE PAR MORCEAUX DES CONTRAINTES ET DE L'HUMIDITE RELATIVE.	212
FIGURE E-1 TRAITEMENT NUMERIQUE DU CALCUL HYDROMECHANIQUE.	228
FIGURE E-2 CONDITIONS AUX LIMITES DU PROBLEME HYDRIQUE.	229
FIGURE E-3 SCHEMA ITERATIF DE RESOLUTION PAR LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON.	231
FIGURE E-4 CONDITIONS AUX LIMITES DU PROBLEME MECANIQUE.	233
FIGURE F-1 VARIATION QUELCONQUE DES CONTRAINTES.	236
FIGURE F-2 MODELE RHEOLOGIQUE DE L'AMORTISSEUR.	236
FIGURE F-3 MODELE RHEOLOGIQUE DE LA CHAINE DE KELVIN-VOIGT.	237
FIGURE G-1 ESTIMATION DU JACOBIEN A L'AIDE DE LA METHODE DE BROYDEN (A) OU DE NEWTON-RAPHSON (B).	239
FIGURE H-1 GEOMETRIE DE L'EPROUVETTE TESTEE.	244
FIGURE H-2 MAILLAGE DE L'EPROUVETTE UTILISE POUR LES CALCULS AUX ELEMENTS FINIS.	245
FIGURE H-3 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DE LA FORCE F_y EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_y DANS LE CAS DE LA SERIE 3.	246
FIGURE H-4 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DU DEPLACEMENT U_y EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_x DANS LE CAS DE LA SERIE 3.	247
FIGURE H-5 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DE LA FORCE F_x EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_x DANS LE CAS DE LA SERIE 3.	247

Table des Illustrations

FIGURE H-6 DEFORMEES DE L'ÉPROUVETTE A LA FIN DE LA PHASE DE CISAILLEMENT DANS LE CAS DE LA SERIE 3.	248
FIGURE H-7 COMPARAISON DU FACIES DE FISSURATION EXPERIMENTALE AVEC LES ISO-VALEURS DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT DANS LE CAS DE LA SERIE 3A.	248
FIGURE H-8 COMPARAISON DU FACIES DE FISSURATION EXPERIMENTALE AVEC LES ISO-VALEURS DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT DANS LE CAS DE LA SERIE 3B.	249
FIGURE H-9 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DE LA FORCE F_x EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_x DANS LE CAS D'UN TEST DE CISAILLEMENT.	249
FIGURE H-10 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DE LA FORCE F_y EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_y DANS LE CAS DE LA SERIE 4.	250
FIGURE H-11 ÉVOLUTIONS EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES DU DEPLACEMENT U_y EN FONCTION DU DEPLACEMENT U_x DANS LE CAS DE LA SERIE 4.	251
FIGURE H-12 DEFORMEE DE L'ÉPROUVETTE A LA FIN DE LA PHASE DE TRACTION DANS LE CAS DE LA SERIE 4. .	251
FIGURE H-13 COMPARAISON DU FACIES DE FISSURATION EXPERIMENTALE AVEC LES ISO-VALEURS DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT DANS LE CAS DE LA SERIE 4A.	252
FIGURE H-14 COMPARAISON DU FACIES DE FISSURATION EXPERIMENTALE AVEC LES ISO-VALEURS DE LA VARIABLE ENDOMMAGEMENT DANS LE CAS DE LA SERIE 4C.	252