



HAL
open science

Groupes de Thompson projectifs de genre 0

Guillaume Laget

► **To cite this version:**

Guillaume Laget. Groupes de Thompson projectifs de genre 0. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT: . tel-00007108

HAL Id: tel-00007108

<https://theses.hal.science/tel-00007108>

Submitted on 14 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Une mathématique bleue sur cette mer jamais étale,
d'où remonte peu à peu cette mémoire des étoiles.*

A Zoé

Si je ne peux citer ici toutes les rencontres qui m'ont orienté vers les mathématiques et conduit à la soutenance de cette thèse, je souhaite évoquer et remercier ici les plus déterminantes.

Les figures de mon grand-père, géologue autodidacte penché sur son établi, de mon père préparant ses cours ou enseignant, m'ont guidé vers les études et l'enseignement. S'ils ne sont plus ici pour voir aboutir ce travail, leur souvenir m'accompagne.

Au lycée, les cours de Geneviève Labé puis de Pierre Auffray ont fait naître puis croître mon envie d'étudier les mathématiques. Les discussions, mathématiques, scientifiques et autres, avec Guillaume Allègre ont commencé à cette époque.

Le cours de mathématiques supérieures de Michel Carré m'a fait découvrir les objets mathématiques courants, m'a initié au raisonnement, à la rigueur. Il m'a surtout offert des heures de travail, de réflexion, d'émerveillement sur les exercices et devoirs. De bonnes bases pour la suite... encore utiles : ce sont des raisonnements par récurrence parfois subtils qui terminent les principales preuves de ce travail. J'espère un jour jouer un rôle comparable auprès d'autres étudiants.

Les discussions, les exposés devant Roland Bacher, Michel Imbert, Christophe Kapoudjian, Xavier Martin m'ont apporté encouragements, références, pistes et m'ont permis de tester mes idées. Je les remercie pour leur écoute, leur patience et leurs remarques.

La grande suite des thésards de l'Institut Fourier est trop longue pour être énumérée. Je citerai quand même pour les repas à Condillac -Diderot les mauvais jours-, les pauses de 10h et 16h hélas disparues, les joggings et autres occasions d'échanges : Frank, Hélène, Matthieu, Alice, Vincent... Les discussions dans le bureau 113 avec Sophie ont été utiles dans les gros moments de découragement de l'été 2002, et bienvenues au delà, jusqu'à ce que deux soutenances quasi-simultanées viennent clore cette période. Comme tous les docteurs, ex-thésards de l'Institut Fourier, je remercie à mon tour Arlette pour sa gentillesse et sa compétence lors de la résolution des formalités techniques et administratives liées à la soutenance.

Durant mon service national au Parc Naturel Régional du Luberon, beaucoup d'activités, mais pas une minute de mathématiques. Cette pause était probablement indispensable à la conclusion de ce travail. Je remercie particulièrement Marie-Ange Courbon et Patrick Lefauconnier pour leur accueil au sein du service Urbanisme.

Jérôme Los et José Burillo m'ont fait l'honneur d'écouter un exposé reprenant les principaux résultats de ce travail, de lire le présent texte et d'assister à ma soutenance. Je les en remercie. Merci aussi à Luis Funar pour sa participation au jury.

C'est à Vlad Sergiescu que va l'essentiel de ma gratitude, à l'image de son importance dans ce travail. En DEA il m'a guidé par son choix d'articles abordables et riches vers le groupe de Thompson ; ses encouragements m'ont poussé à continuer. Durant les premières années de thèse en apparence stériles, il a su me conseiller, m'écouter sans relâche et il a su rester motivé malgré mon absence de résultats et les doutes qui en découlaient. C'est une de ses remarques qui a entraîné tout le reste ; durant ces dernières années où j'avais à mon tour quelques mathématiques à lui présenter, il est resté critique, attentif et optimiste. Sans toi je n'aurai pas la satisfaction de soutenir cette thèse. Merci.

Ma dernière pensée est pour Sigrid et ses sourires endormis quand un fou à la jambe cassée lui annonce à trois heures du matin avoir prouvé un résultat.

Et parfois, le résultat tenait encore le matin !

Certains se trouvent même dans le texte qui suit.

Table des matières

Introduction	7
I Un aperçu des groupes de Thompson classiques	15
I.1 Les groupes F_a et T_a	15
I.1.1 Définitions	16
I.1.2 Présentations de F_a et T_a	22
I.1.3 Présentations explicites des groupes F_a : méthode combinatoire	22
I.1.4 Présentation finie des groupes F_a et T_a : méthodes topologiques	25
I.2 Le groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$	26
I.2.1 Le groupe	26
I.2.2 Présentations du groupe T	27
II Les groupes T_Γ et F_Γ : généralités	29
II.1 Définitions	29
II.2 Conjugaisons entre T_Γ	30
II.3 Résultats connus	30
III Linéarisation des groupes F_Γ et T_Γ en genre 0	31
III.1 Description des groupes T_Γ et F_Γ	31
III.1.1 Le groupe Γ	31
III.1.2 Les intervalles standard	33
III.1.3 Le marquage des intervalles standard	34
III.1.4 Description de T_Γ	35
III.2 Description de $T_{2n-3,2n-2}^1$	35
III.3 La conjugaison	36
III.4 Isomorphisme entre $F_{a,a+1}^1$ et $F_{a,a+1}^\infty$	39
IV F_Γ est de type fini	41
IV.1 Étude de $F_{a,a+1}^\infty$	41
IV.1.1 Introduction	41
IV.1.2 Une transformation préliminaire	42
IV.1.3 Une deuxième transformation	43
IV.1.4 La démonstration	44
IV.1.5 Étude des $\varphi_{\alpha,l,l'}$	47
IV.1.6 Conclusion	48
IV.2 F_Γ est de type fini	48

V Présentations de F_Γ	49
V.1 Le groupe $H_{a,a+1}$	49
V.1.1 Définition de $H_{a,a+1}$	49
V.1.2 Génération de $H_{a,a+1}$	50
V.1.3 Une description forestière de $H_{a,a+1}$	54
V.1.4 Calcul forestier	58
V.2 Un cas particulier : le groupe $H_{3,4}$	59
V.2.1 Forme semi-normale dans $\mathcal{H}_{3,4}$	61
V.2.2 Deux présentations finies de $H_{3,4}$	63
V.3 Le cas général : $H_{a,a+1}$ est de présentation finie	66
V.3.1 Relations et notations	66
V.3.2 La démonstration	67
V.3.3 Preuve des lemmes	68
V.3.4 $H_{a,a+1}$ est de présentation finie	73
V.3.5 Existence d'une forme semi-normale	76
V.4 Présentations de F_Γ	76
V.4.1 F_Γ est de présentation finie	76
V.4.2 Présentations explicites de F_Γ	76
VI Le groupe T_Γ	79
VI.1 Rappel des définitions	79
VI.2 Propriétés de transitivité	79
VI.3 T_Γ est de type fini	81
VI.4 Calculs de stabilisateurs	81
VI.5 T_Γ est de présentation finie	84
VI.6 Le groupe V_Γ	84
VII Quelques compléments	85
VII.1 Centre de F_Γ	85
VII.2 F'_Γ est simple	86
VII.2.1 Le groupe $B_{a,a+1}$	86
VII.2.2 Simplicité de $F'_{a,a+1}$	86
VII.3 Abélianisation de F_Γ	87
VII.3.1 L'application \mathcal{A}	87
VII.3.2 Une description de $F_{a,a+1}^{ab}$	88
VII.3.3 Calcul de $F_{3,4}^{ab}$	89
VII.3.4 Calcul de $F_{5,6}^{ab}$	90
VII.3.5 Calcul de $F_{a,a+1}^{ab}$	91
VII.4 Une remarque générale sur les groupes F_Γ	91
VII.5 En guise de conclusion...	93
VII.5.1 Aspects linéaires	93
VII.5.2 Présentations infinies	93
VII.5.3 Questions homologiques	94
Bibliographie	95

Introduction

Apparus au cours des années 60 dans l'étude du problème des mots, les groupes de Thompson forment une vaste classe de groupes dénombrables ayant en commun la propriété d'être représentables par des groupes d'homéomorphismes "par morceaux" (affines par morceaux sur $[0, 1]$, $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux sur $\partial\mathbb{H}$, ..). Définis dans le cadre de travaux en logique, ces groupes interviennent aujourd'hui dans de multiples domaines des mathématiques : théorie des groupes, combinatoire, topologie, géométrie hyperbolique, physique mathématique...

On peut parmi les groupes de Thompson en distinguer trois, qui résument bien les différents aspects des groupes de Thompson classiques :

- le groupe V , qui peut être vu comme groupe d'homéomorphismes de l'ensemble de Cantor C - c'est le groupe initialement décrit par Thompson,
- le groupe T , sous-groupe de V , qui peut être vu comme groupe d'homéomorphismes de S^1 ,
- le groupe F , sous-groupe du T , qui peut être vu comme groupe d'homéomorphismes de $[0, 1]$ ou $[0, \infty[$.

V est le premier exemple connu de groupe infini, simple et de présentation finie ; le groupe T partage ces propriétés, alors que F est de présentation finie mais n'est pas simple (seul $[F, F]$ l'est).

Ces trois groupes sont les archétypes de trois grandes sous-classes de groupes de Thompson : les groupes qui agissent de manière naturelle sur $[0, 1]$ (groupes de type F), sur S^1 (groupes de type T) ou sur l'ensemble de Cantor C (groupes de type V) ; dans ce travail n'interviendront que les groupes de type F et T .

G.Higman dans les années 70 étudie algébriquement des groupes de type V qu'il définit comme groupes d'automorphismes d'une algèbre universelle.

Plus tard, M.Brin, C.Squier, K.Brown, R.Geoghegan et d'autres vont introduire des groupes -liés aux groupes originaux de R.Thompson et G.Higman- de type F et T , et les interprètent de manière plus concrète comme groupes d'homéomorphismes affines par morceaux de $[0, 1]$, $[0, \infty[$, S^1 . En particulier K.Brown définit les groupes F_a et T_a ($a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$) que nous utiliserons abondamment.

Une remarque de W.Thurston amène une nouvelle description du groupe T qui le relie à la géométrie du plan hyperbolique, et donne un nouvel essor à son étude : le groupe de Thompson peut-être vu comme le groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$ des homéomorphismes $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux sur le bord du plan hyperbolique avec points de rupture dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

P.Greenberg va largement étudier ces aspects projectifs du groupe de Thompson ; pour

cela il utilise des classifiants de pseudogroupes et introduit une géométrie projective par morceaux (*CPP-geometry*) qui se révèle être un bon cadre d'étude pour le groupe de Thompson projectif.

Une question laissée ouverte dans un des papiers de P.Greenberg motive le présent travail. On sait que le groupe de Thompson $PPSL_2(\mathbb{Z})$, isomorphe au groupe T , est de présentation finie ; on peut se demander si cette propriété reste vraie quand on remplace $PSL_2(\mathbb{Z})$ par un sous-groupe Γ d'indice fini sans torsion, c'est-à-dire si l'on se restreint au sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ des éléments Γ par morceaux.

P.Greenberg montre que, dans le cas où \mathbb{H}/Γ est une surface de genre strictement positif, le groupe obtenu n'est pas de type fini. L'objet de notre travail est l'étude du genre 0, et nous allons répondre dans ce cas positivement à la question : si Γ est un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini et sans torsion, tel que \mathbb{H}/Γ est une surface de genre 0, le sous-groupe T_Γ des éléments de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ qui sont Γ par morceaux est de présentation finie.

Au milieu des années 80 E.Ghys et V.Sergiescu étudient les aspects dynamiques de ces groupes, et plus tard V.Sergiescu et P.Greenberg établissent un lien avec les groupes de tresses.

K.Brown, suivi par S.Cleary, M.Stein, vont introduire la topologie dans l'étude des groupes de Thompson : ils élargissent la famille des groupes de Thompson et mettent en place des outils topologiques qui leur permettent de mener l'étude des principales propriétés algébriques de ces groupes (présentation finie, FP_∞ , simplicité).

J.Cannon, W.Floyd et W.Parry, initialement motivés par la question de la moyennabilité du groupe de Thompson, donnent des présentations des groupes F , T et V , et exposent certaines questions ouvertes du domaine.

Cette question de la moyennabilité de F est apparue avec le résultat -déjà présent dans des notes originales de R.Thompson et re-découvert par M.Brin et C.Squier- disant que le groupe de Thompson F ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs. L'existence d'un tel sous-groupe est l'obstruction la plus classique à la moyennabilité d'un groupe ; mais malgré cela, le groupe de Thompson semble aujourd'hui un candidat sérieux pour donner un groupe non moyennable de présentation finie.

On peut aussi, parmi les développements actuels sur les groupes de Thompson, mentionner :

- les conséquences de l'interprétation par V.Guba et M.Sapir de ces groupes comme groupes de diagrammes,
- l'étude de plongements quasi-isométriques entre groupes de Thompson, étudiés par J.Burillo, S.Cleary, M.Stein en utilisant la description des éléments du groupe par des couples d'arbres, et leur forme normale.
- une généralisation de C.Röver, qui considère le groupe d'homéomorphismes de l'ensemble de Cantor engendré par le groupe de Thompson V et un groupe périodique de R.Grigorchuk, et prouve qu'il est, tout comme V , simple et de présentation finie.

Quelques résultats classiques sur les groupes de Thompson affines :

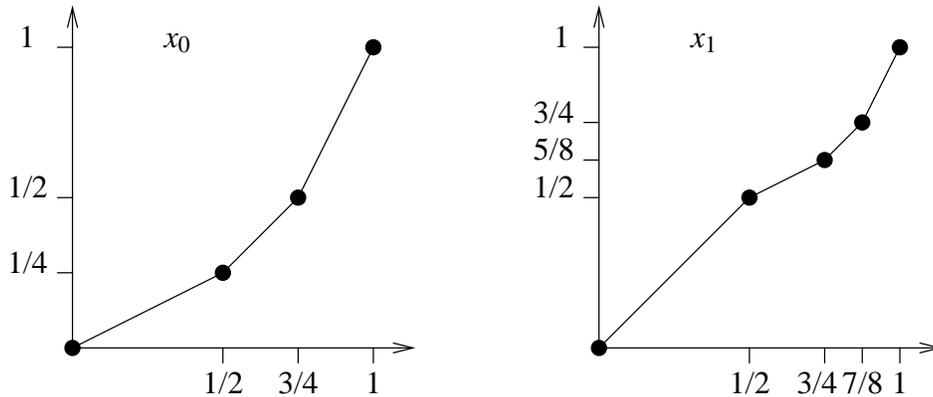
On trouve au moins quatre définitions équivalentes des groupes des Thompson classiques F_a ($a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$) :

- la définition de Thompson-Higman, liée à la notion d'algèbre universelle, qui inspire la définition combinatoire citée ci-dessous. Elle n'est plus directement utilisée aujourd'hui, et nous ne la reprenons pas ici,
- la définition du groupe par une présentation : on se donne des générateurs $x_i, i \in \mathbb{N}$ et des relations $r_{i,j} : x_i x_j = x_{j+a-1} x_i$ pour $i < j$; le groupe est alors :

$$F_a = \langle x_i \mid r_{i,j} \rangle$$

- la définition comme groupe d'homéomorphismes : F_a est le groupe des homéomorphismes croissants affines par morceaux de $[0, 1]$ dont les points de ruptures sont dans $\mathbb{Z}[1/a]$, et les pentes des puissances de a .

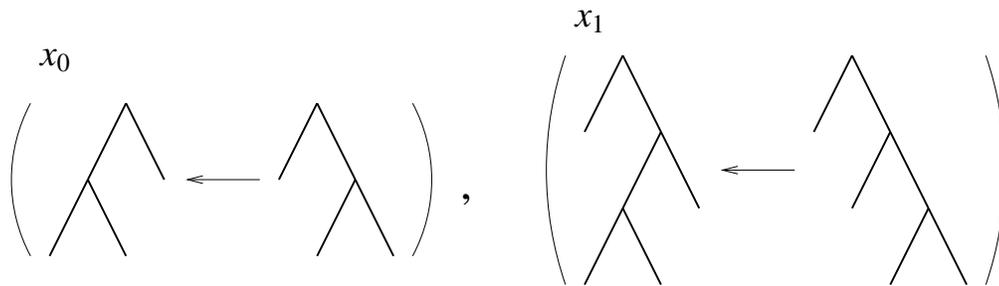
Dans F_2 on retrouve les éléments x_0 et x_1 :



- la définition combinatoire, à l'aide de couples d'arbres : c'est celle que nous utiliserons dans le chapitre I.

Pour le moment contentons nous de remarquer que cette définition découle de la précédente, en représentant par un arbre les partitions de $[0, 1]$ définies par les points de rupture, un couple d'arbres représentant une application qui associe de manière affine les intervalles du second arbre à ceux du premier.

Ainsi, les éléments x_0 et x_1 de F_2 peuvent se représenter par les couples :



Les groupes ainsi définis sont bien entendu isomorphes ; le troisième groupe sera noté F_a^1 si l'on désire préciser sa nature de groupe d'homéomorphismes sur $[0, 1]$.

La présentation ci-dessus de F_a par générateurs et relations, si elle est infinie, peut se ramener aisément à une présentation finie, et ainsi les groupes de Thompson F_a sont des groupes de présentation finie.

La description du groupe F_a^1 comme groupe d'homéomorphismes de $[0, 1]$ suggère une généralisation au cercle S^1 vu comme un quotient $[0, 1]/\{0 = 1\}$; ce sont les groupes

T_a : T_a est le groupe des homéomorphismes affines par morceaux de $[0, 1]/\{0 = 1\}$ dont les points de ruptures sont dans $\mathbb{Z}[1/a]$, et les pentes des puissances de a .

T_a est lui aussi un groupe de présentation finie.

On notera dans la suite $F = F_2$ et $T = T_2$.

On montre que T est un groupe simple, et T est donc, tout comme V qui est le groupe initialement défini par Thompson, un groupe infini, simple et de présentation finie.

Ce groupe T joue un rôle particulier parmi les groupes T_a , car W.Thurston en a donné une interprétation comme groupe d'homéomorphismes $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux sur S^1 vu comme le bord du plan hyperbolique \mathbb{H} .

Description projective des groupes T_2 et F_2 :

Soit \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré. $\partial\mathbb{H}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et S^1 sont homéomorphes, et l'identification avec S^1 permet ainsi de mettre un ordre cyclique sur cet ensemble.

On appelle $PPSL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des homéomorphismes f de $\partial\mathbb{H}$ tels qu'il existe $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et des $f_i \in PSL_2(\mathbb{Z})$ avec $f|_{(p_i, p_{i+1})} = f_i$, $f|_{(p_n, p_1)} = f_n$. Ce groupe est alors isomorphe au groupe de Thompson T .

Cette définition projective de T a suggéré à P.Greenberg au début des années 90 l'étude d'une famille naturelle de sous-groupes de $PPSL_2(\mathbb{Z})$, indexée par certains sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{Z})$: si Γ est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de $PSL_2(\mathbb{Z})$, on appelle T_Γ le sous-groupe des éléments de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ qui, sur chacun des intervalles entre les points de rupture, coïncident avec un élément de Γ , et F_Γ le sous-groupe des éléments de T_Γ qui fixent ∞ . Alors \mathbb{H}/Γ est une surface de Riemann d'aire finie, de genre g_Γ et ayant v_Γ cusps, et ces deux paramètres caractérisent les groupes T_Γ et F_Γ à isomorphisme près.

On sait déjà que le groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$ isomorphe à T_2 est, comme tous les groupes T_a , de présentation finie. A l'inverse, P.Greenberg ([13]) exprime l'abélianisé des groupes F_Γ et T_Γ en fonction de certains espaces de lacets, et il en déduit, pour $g_\Gamma > 0$, qu'ils ne sont pas de type fini.

Mais en genre 0 l'abélianisé de F_Γ est de type fini, et cette méthode ne permet pas de conclure. L'objet principal de ce travail est l'étude de ce cas $g_\Gamma = 0$; on prouvera en particulier que F_Γ et T_Γ sont de présentation finie.

Contenu et apports de ce travail :

chapitre I

Dans ce chapitre on résume les principales définitions, ainsi que les propriétés "classiques", des groupes de Thompson F_a et T_a .

En particulier on donne ici une description concrète de F_a comme sous-groupe F_a^∞ de $\text{Homéo}^+([0, +\infty[)$.

Ces groupes F_a^∞ admettent une description forestière naturelle : chaque élément du groupe peut être défini de manière combinatoire par un couple de forêts, les forêts étant ici des suites indexées par \mathbb{N} d'arbres a -aires.

Cette représentation des groupes F_a , qui est l'analogie sur $[0, \infty[$ de la description usuelle sur $[0, 1]$ par des couples d'arbres, permet une détermination simple et rapide

d'une présentation infinie régulière. Mais le principal intérêt pour nous de ces groupes F_a^∞ apparaîtra dans l'étude de la version "linéarisée" sur $[0, \infty[$ des groupes F_Γ : on montrera que ces groupes peuvent être décrits à l'aide des groupes F_a^∞ et $F_{a^2}^\infty$.

chapitre II

On considère Γ un groupe fuchsien sans torsion, tel que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes, et on définit les groupes "Γ par morceaux" F_Γ et T_Γ qui seront l'objet de notre étude.

On montre que ces groupes ne dépendent que de la classe d'homéomorphisme du quotient \mathbb{H}/Γ , ce qui nous permettra de ramener notre étude du genre 0 à l'étude d'un seul exemple de groupe Γ pour chaque valeur du nombre de cusps de \mathbb{H}/Γ .

chapitre III

On commence ici par mettre en place les outils qui nous permettront d'étudier le groupe F_Γ dans le cas des surfaces de genre 0.

Tout d'abord, à l'aide d'arguments combinatoires portant sur un domaine fondamental du groupe Γ , on montre que l'on peut "linéariser" ce groupe. Ainsi, F_Γ est conjugué au groupe $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ des homéomorphismes croissants affines par morceaux de $[0, 1]$ dont les pentes sont des puissances de a et les points de rupture sont dans $\frac{1}{a+1}\mathbb{Z}[1/a]$.

Il est possible de voir $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ comme un sous-groupe de F_a ; mais, bien que le groupe F_a soit bien connu, cette remarque ne semble pas donner de résultats. En revanche, un homéomorphisme entre $[0, 1[$ et $[0, \infty[$ de nature affine par morceaux (le nombre de "morceaux" étant infini) conjugue $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ à un groupe d'homéomorphismes croissants affines par morceaux de $[0, +\infty[$, $F_{a,a+1}^\infty$, dont l'étude nous permettra de prouver que F_Γ est de type, puis de présentation finie.

chapitre IV

Dans cette partie apparaît l'intérêt de l'introduction de ce groupe $F_{a,a+1}^\infty$: en effet son étude, donc celle du groupe F_Γ qui lui est isomorphe, peut (en partie) se ramener à l'étude des groupes de Thompson F_a et F_{a^2} . Notre principal résultat ici est que tout élément de $F_{a,a+1}^\infty$ peut s'écrire comme une composée de trois types d'applications :

- les éléments du groupe $F_{a^2}^\infty$, qui est naturellement inclus dans $F_{a,a+1}^\infty$,
- les éléments d'un sous-groupe de $F_{a,a+1}^\infty$, conjugué au groupe F_a^∞ ,
- les éléments d'une famille d'applications (f_k) , que l'on explicitera.

On montre ensuite qu'un nombre fini d'applications f_k et les groupes F_a^∞ et $F_{a^2}^\infty$ suffisent à engendrer tous les éléments de $F_{a,a+1}^\infty$; les deux groupes F_a^∞ et $F_{a^2}^\infty$ étant de type fini, on peut alors affirmer que $F_{a,a+1}^\infty$ est de type fini.

A ce stade nous aurons alors obtenu un résultat qui montre déjà que le cas des groupes F_Γ de genre 0 est différent du cas du genre strictement positif :

Théorème A

Si Γ est de genre 0, le groupe F_Γ est de type fini.

Il apparaît alors naturel d'essayer de donner une présentation des groupes F_Γ , en espérant qu'elle puisse se ramener à une présentation finie.

chapitre V

Étudier le groupe $F_{a,a+1}^\infty$ à l'aide des trois types d'applications utilisés pour montrer qu'il est de type fini n'est pas aisé ; mais on remarque alors que ce groupe est d'indice 2 dans un groupe $H_{a,a+1}$ que l'on peut décrire uniquement à l'aide de deux sous-groupes, le groupe F_{a^2} et un groupe \bar{F}_a isomorphe au groupe F_a .

Comme le groupe $F_{a,a+1}^\infty$ est d'indice 2 dans $H_{a,a+1}$, ils seront simultanément de présentation finie ou infinie ; le problème de la présentation finie de F_Γ se ramène donc finalement à l'étude de la même question pour le groupe $H_{a,a+1}$.

On peut alors, à l'aide des ces deux sous-groupes, donner une description forestière du groupe $H_{a,a+1}$ qui généralise, bien que la structure soit rendue plus complexe par la présence de deux familles infinies de générateurs, la description forestière des groupes classiques F_a donnée dans le chapitre I.

En particulier l'étude fine de ces couples de forêts nous permet de donner un système infini de relations du groupe $H_{a,a+1}$, qui est long mais de structure assez régulière :

Théorème B

Le groupe $H_{a,a+1}$ est défini par les générateurs y_{Ai} , $i \geq 0$, z_k , $k \geq 0$, et les relations (R) :

$$\begin{aligned}
 (R^1_{k,l}) \quad k < l : \quad & z_k z_l = z_{l+a^2-1} z_k \\
 (R^2_{i,j}) \quad i < j : \quad & y_{Ai} y_{Aj} = y_{A(j+a-1)} y_{Ai} \\
 (R^3_{k,i}) \quad k < Ai : \quad & z_k y_{Ai} = y_{A(i+2a-2)} z_k \\
 (R^4_{i,k}) \quad A(i+1) \leq k : \quad & y_{Ai} z_k = z_{k+A(a-1)} y_{Ai} \\
 (R^5_i) \quad \forall i : \quad & z_{Ai} z_{A(i+1)} \cdots z_{A(i+1)-1} \\
 & = y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+a-1)} y_{Ai} \\
 (R^{6,\lambda}_i) \quad \forall i, \lambda = 0, \dots, A : \quad & y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+2a-3)} y_{A(i+2a-2)} z_{Ai+\lambda} \\
 & = z_{Ai+\lambda} z_{Ai+\lambda+1} \cdots z_{Ai+\lambda+a-1} y_{Ai}
 \end{aligned}$$

Nous commençons par démontrer cette présentation dans un cas particulier, celui du groupe $\Gamma(2)$ des éléments $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ avec a, d impairs et b, c pairs ; $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ est une surface de genre 0 avec trois cusps.

La démonstration donnée dans ce cas est quasiment identique à la démonstration générale, et prépare donc celle-ci. Mais on sait de plus prouver dans ce cas particulier l'existence d'une forme semi-normale pour les éléments du groupe $H_{3,4}$.

Cette présentation infinie du groupe étant prouvée, on arrive dans un deuxième temps à la réduire à une présentation finie, et on obtient ainsi notre résultat principal :

Théorème C

Le groupe F_Γ est de présentation finie.

chapitre VI

Enfin, pour démontrer que T_Γ est lui aussi de présentation finie, on trouve un complexe simplicial sur lequel il agit avec un quotient fini et des stabilisateurs que l'on calcule à partir de F_Γ et qui sont de présentation finie. Des résultats classiques (de K.Brown) reliant la question de la présentation à ces propriétés topologiques nous donnent alors le :

Théorème D

T_Γ est de présentation finie.

chapitre VII

Dans cette partie on complète par quelques résultats (abélianisé, simplicité de $[F_\Gamma, F_\Gamma]$) l'étude du groupe F_Γ , et l'on donne quelques pistes pour des résultats non encore prouvés : cas général des groupes fuchsien, début d'approche directe du résultat de P.Greenberg sur les groupes de genre strictement positif, ..

Chapitre I

Un aperçu des groupes de Thompson classiques

Les groupes T_Γ et F_Γ sujets de notre étude généralisent les groupes définis et étudiés par R.Thompson puis G.Higman, M.Brin, K.Brown, P.Greenberg, E.Ghys, V.Sergiescu et bien d'autres ; nous utiliserons par la suite certaines des propriétés de ces groupes de Thompson classiques, et plus généralement l'étude de ceux-ci sera pour nous source d'inspiration. C'est pourquoi nous allons, dans ce chapitre, définir les groupes classiques F , T , F_a , T_a , $PPSL_2(\mathbb{Z})$, rappeler leurs principales propriétés, et démontrer tout ce qui nous sera par la suite utile dans l'étude des groupes F_Γ et T_Γ .

Pour cette étude préliminaire nous définirons les groupes d'homéomorphismes de $[0, \infty[F_a^\infty$, isomorphes à F_a , que nous utiliserons de préférence à la représentation classique sur $[0, 1]$. Ces groupes F_a^∞ admettent une représentation combinatoire en terme de couples de forêts, analogue de la description classique par des couples d'arbres des groupes $F_a^{[0,1]}$. Cette description forestière -donnée de manière indépendante par K.Brown et J.Belk dans [8]- nous permet de rendre l'ensemble de ce travail auto-contenu, en redémontrant directement sur F_a^∞ les résultats classiques dont nous aurons besoin concernant les groupes F_a .

L'approfondissement de ce point de vue sur $[0, \infty[$ fournit ici une détermination quasiment immédiate de la présentation des groupes F_a , mais son principal intérêt apparaîtra lors de l'étude de F_Γ , aux chapitres IV et V.

I.1 Les groupes F_a et T_a

Soit a un entier supérieur ou égal à 2.

Nous allons ici étudier les groupes F_a et T_a ; ceux-ci peuvent être définis de manière combinatoire à l'aide d'arbres a -aires, ou comme groupes d'applications affines par morceaux.

Les propriétés de ces groupes F_a et T_a sont largement indépendantes de l'entier a ; si les exemples et figures seront souvent par commodité donnés pour $a = 2$, les résultats et démonstrations dans cette partie seront valables en toute généralité (certaines des propriétés plus spécifiques des groupes $F = F_2$ et $T = T_2$ seront étudiées dans une deuxième partie).

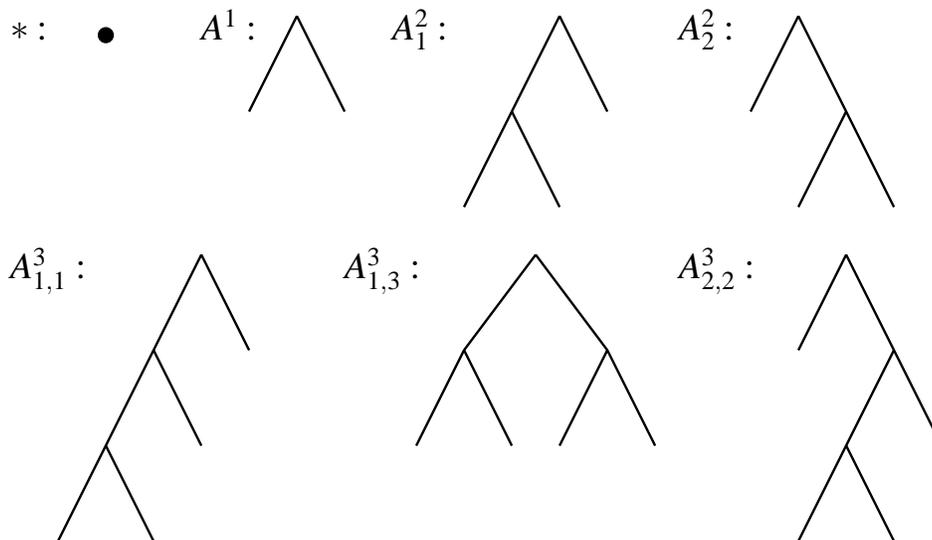
I.1.1 Définitions

Une définition combinatoire

L'objet de base pour la définition des groupes F_a et T_a sera l'arbre a -aire : un arbre a -aire est un arbre constitué d'une racine (sommet de valence a), de sommets intérieurs de valence $a + 1$, et de feuilles, sommets de valence 1 ; on considère aussi l'arbre-racine réduit à un sommet, que l'on notera $*$.

Si t est un tel arbre, on note $f(t)$ le nombre de ses feuilles, numérotées de gauche à droite de 0 à $f(t) - 1$.

On peut donner quelques exemples, dans le cas $a = 2$: on représente l'arbre-racine $*$, l'unique arbre binaire à deux feuilles A_1^1 , les deux arbres binaires à trois feuilles A_1^2 et A_2^2 et trois des cinq arbres binaires à quatre feuilles, $A_{1,1}^3$, $A_{1,3}^3$ et $A_{2,2}^3$:



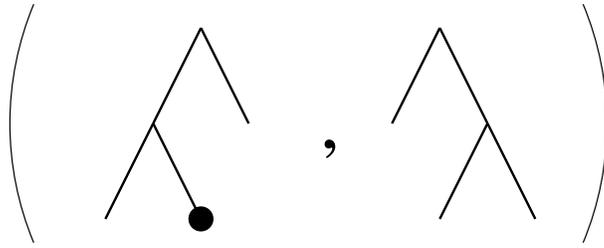
L'arbre à une racine et a feuilles sera appelé a -bouquet (ou bouquet s'il n'y a pas d'ambiguïté sur a) ; le 2-bouquet est donc l'arbre A_1 représenté ci-dessus.

On appelle expansion élémentaire d'un arbre t l'arbre obtenu en remplaçant une des feuilles de t par un a -bouquet ; une expansion de t est le résultat de la répétition d'un nombre fini d'expansions élémentaires.

Dans nos exemples, $A_{1,1}^3$ est une expansion (non élémentaire) de A_1^1 , une expansion élémentaire de A_1^2 , et n'est pas une expansion de A_2^2 .

On voit immédiatement que tout arbre est une expansion de l'arbre-racine, et que deux arbres quelconques admettent une expansion commune (la superposition des deux arbres est l'expansion commune minimale).

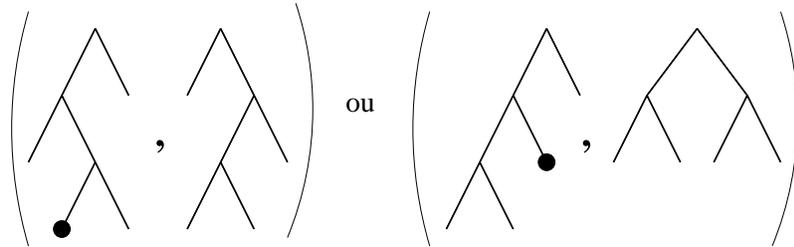
Pour définir le groupe T_a , on considère maintenant l'ensemble \mathcal{T}_a des (t_1, t_2, k) où t_1 et t_2 sont des arbres a -aires ayant le même nombre de feuilles $f = f(t_1) = f(t_2)$, et k un élément de $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, que l'on représente en pointant la k -ième feuille de t_1 . On représente ainsi $(A_1^2, A_2^2, 1)$:



Sur \mathcal{T}_a on définit une relation d'équivalence : (t_1, t_2, k) est équivalent à (t'_1, t'_2, k') , où t'_1 et t'_2 sont des expansions élémentaires de t_1 et t_2 faites sur des feuilles de même rang, k' étant tel que la même feuille reste pointée (i.e si l'expansion de t_1 à lieu au niveau de la feuille pointée k , k' est tel que c'est la première feuille du bouquet rajouté qui est marquée, et sinon k' est tel que la même feuille reste marquée pour t'_1 et t_1 - on prend donc $k' = k$ si l'expansion a lieu sur une feuille d'ordre supérieur ou égal à k , et $k' = k + a - 1$ sinon)

On note \sim la relation d'équivalence minimale sur \mathcal{T}_a correspondante.

L'élément $(A_1^2, A_2^2, 1)$ défini plus haut est ainsi équivalent aux deux éléments :

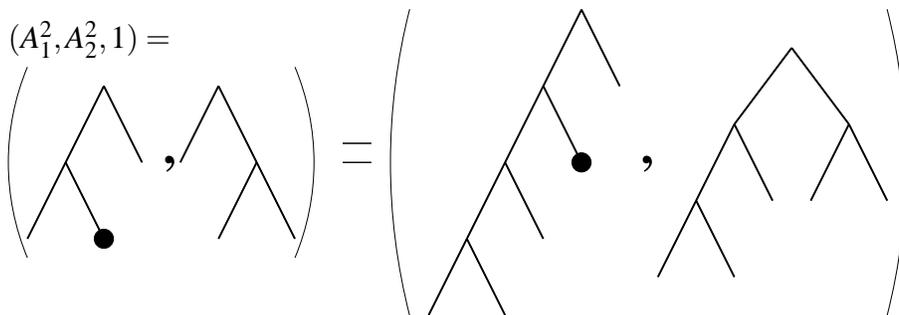


On va maintenant pouvoir définir sur le quotient $T_a = \mathcal{T}_a / \sim$ une structure de groupe.

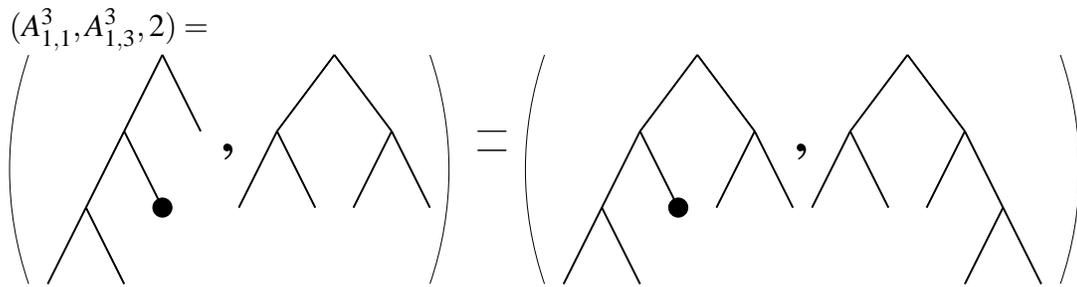
Si $u = (t_1, t_2, k)$ et $v = (s_1, s_2, l)$ sont deux éléments de T_a on peut supposer que $t_2 = s_1$. En effet si tel n'est pas le cas, on peut choisir t une expansion commune à t_2 et s_1 et remplacer u et v par des éléments $(t'_1, t, k') \sim (t_1, t_2, k)$ et $(t, s'_2, l') \sim (s_1, s_2, l)$. On définit alors le produit de deux éléments quelconques de T_a par la formule $(t_1, t_2, k)(t_2, s_2, l) = (t_1, s_2, k + l)$.

On constate que $(t, t, 0) \sim (*, *, 0)$ pour tout arbre t , et cet élément $(*, *, 0)$ est donc l'élément neutre du produit défini sur T_a . Ce produit est associatif, et l'inverse de l'élément (t_1, t_2, k) est $(t_2, t_1, -k)$: on a défini une structure de groupe sur T_a .

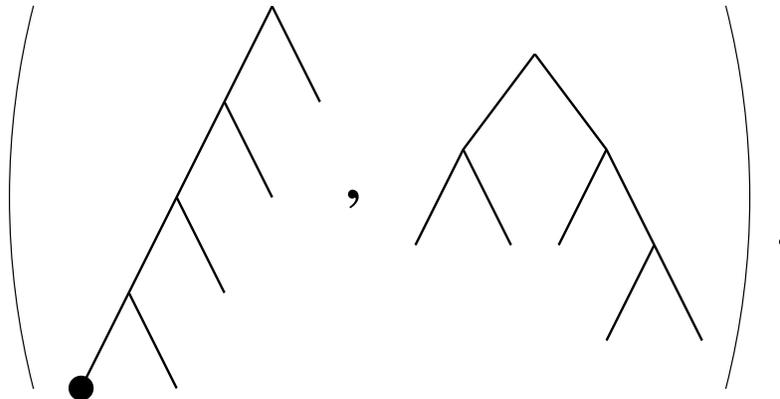
Exemple : Calculons le produit $(A_1^2, A_2^2, 1) \cdot (A_{1,1}^3, A_{1,3}^3, 2)$: on exprime d'abord ;



puis



le produit est alors égal à



Le groupe ici défini est le groupe de Thompson T_a . Le groupe de Thompson F_a est le sous-groupe de T_a constitué des éléments (t_1, t_2, k) tels que $k = 0$.

Dans le cas où $a = 2$ on note F et T les groupes F_2 et T_2 .

Les groupes affines par morceaux F_a^1 et T_a^1

Nous avons défini un groupe T_a de manière combinatoire, à l'aide de couples d'arbres. Mais ce groupe a une interprétation naturelle à l'aide d'homéomorphismes affines par morceaux : en identifiant un arbre à une partition de $[0, 1]/\{0 = 1\}$ (les différentes expansions nécessaires pour obtenir l'arbre à partir de l'arbre-racine * correspondant à des subdivisions régulières de $[0, 1]$ et des intervalles successivement obtenus), on obtient de manière naturelle un isomorphisme entre T_a et un sous-groupe de $\text{Homéo}^+([0, 1]/\{0 = 1\})$.

Considérons donc le groupe T_a^1 , groupe d'homéomorphismes de S^1 vu comme quotient de $[0, 1]$ par l'identification $0 = 1$:

Définition 1 T_a^1 est le sous-groupe de $\text{Homéo}^+([0, 1]/\{0 = 1\})$ formé des applications f telles qu'il existe $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < 1 = x_p$ dans $\mathbb{Z}[1/a]$ avec f de la forme $a^{n_i}x + b_i$ sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}[1/a]$.

F_a^1 est le sous-groupe de T_a^1 des applications qui fixent 0 (on peut voir F_a^1 directement comme sous-groupe de $\text{Homéo}^+([0, 1])$).

Avec les notations précédentes, les x_i tels que n_i et n_{i+1} (n_{p-1} et n_0 pour x_p) sont différents sont appelés points de rupture de l'application f .

On peut ainsi définir (pour $a = 2$) des éléments A, B de F et C de T par

$$A(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x - 1/4 & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 2x - 1 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad B(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x/2 + 1/4 & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ x - 1/8 & 3/4 \leq x \leq 7/8 \\ 2x - 1 & 7/8 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$C(x) = \begin{cases} x/2 + 3/4 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ x - 1/4 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Un élément f de T_a^1 est entièrement déterminé par la donnée de deux partitions P_1, P_2 de $[0, 1]/\{0 = 1\}$ d'extrémités dans $\mathbb{Z}[1/a]$, un intervalle de P_1 étant pointé : f est l'unique homéomorphisme affine par morceaux qui envoie de manière affine les intervalles de P_2 sur ceux de P_1 en commençant par envoyer le premier intervalle de P_2 sur l'intervalle pointé de P_1 ; ainsi A est décrite par les intervalles $[0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ et leurs images $[0, 1/4], [1/4, 3/4], [3/4, 1]$, B par les intervalles $[0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], [7/8, 1]$ et leurs images $[0, 1/2], [1/2, 5/8], [5/8, 3/4]$ et $[3/4, 1]$ et C par les intervalles $[0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ et leurs images $[3/4, 1], [0, 1/2], [1/2, 3/4]$.

Mais il existe une manière naturelle d'associer à un arbre a -aire t une partition de $[0, 1]$ en intervalles d'extrémités dans $\mathbb{Z}[1/a]$, le nombre d'intervalles correspondant au nombre de feuilles $f(t)$ de l'arbre : à $*$ on associe $[0, 1]$, au bouquet, expansion simple de $*$, les intervalles $[0, 1/a], [1/a, 2/a], \dots, [(a-1)/a, 1]$, et ainsi de suite ; si on a associé à un arbre t une partition en $f(t)$ intervalles, on associe à l'expansion de t au niveau de la feuille k la partition obtenue en subdivisant de manière régulière l'intervalle k en a intervalles. Les partitions ainsi obtenues sont appelées partitions standard de $[0, 1]$. (En toute rigueur on devrait, pour parler de partition, considérer des intervalles semi-ouverts de la forme $[u, v[$, mais on fera l'abus de langage d'appeler partition une suite $(I_i)_{i \in I}$ de segments d'intérieurs non vides tels que $\cup_{i \in I} I_i = [0, 1]/\{0 = 1\}$ et si $i \neq j$, $I_i \cap I_j$ est soit vide, soit un singleton.)

Notons que tous les intervalles composant les partitions standard sont de la forme $[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}]$, $k, n \in \mathbb{N}$. La réciproque est vraie : si on se donne une partition de $[0, 1]$ constituée d'intervalles de la forme $[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}]$, $k, n \in \mathbb{N}$, c'est une partition standard. On appelle intervalles standard les intervalles de ce type.

Maintenant que l'on a associé à tout arbre a -aire une partition standard, on peut associer de manière tout aussi naturelle à un élément (t_1, t_2, k) de T_a un homéomorphisme de $[0, 1]/\{0 = 1\}$: l'unique application affine par morceaux qui envoie le premier intervalle de la partition standard définie par t_2 sur l'intervalle k de la partition standard définie par t_1 , et ainsi de suite en suivant un ordre cyclique (les applications étant affines sur chacun de ces intervalles le résultat ne dépend pas du choix de (t_1, t_2, k) à équivalence près). Les points de rupture de cette application sont des extrémités d'intervalles standard, donc dans $\mathbb{Z}[1/a]$, et elle envoie chaque intervalle, dont la longueur est une puissance de a , sur un intervalle dont la longueur est une puissance de a : les pentes de f sont des puissances de a . L'application f ainsi définie est dans T_a^1 .

Cette construction nous donne un morphisme ϕ_a de T_a dans T_a^1 .

Nous allons montrer que ϕ_a est un isomorphisme, en montrant qu'il est injectif et surjectif.

ϕ_a est injectif; en effet si $\phi_a(t_1, t_2, k)$ est l'identité cela implique tout d'abord que l'image de 0 est 0, donc que $k = 0$. De plus, chaque intervalle de t_1 est envoyé sur lui-même, donc $t_1 = t_2$. Mais on a vu que pour tout arbre t , $(t, t, 0)$ est l'élément neutre du groupe T_a , d'où l'injectivité.

Montrons maintenant la surjectivité; pour cela, fixons f dans T_a^1 . On veut montrer que f est l'image par ϕ_a d'un élément de T_a , autrement dit que l'on peut trouver deux partitions standard telles que f envoie de manière affine les intervalles de l'une sur ceux de l'autre.

Remarquons qu'il existe une partition standard dont les extrémités des intervalles contiennent les points de rupture de f , donc telle que f est affine sur chacun des intervalles : il suffit par exemple de considérer la subdivision régulière de $[0, 1]$ en intervalles de longueur $1/a^n$, $n \in \mathbb{N}$ étant choisi assez grand pour que les dénominateurs des points de rupture de f soient inférieurs à a^n .

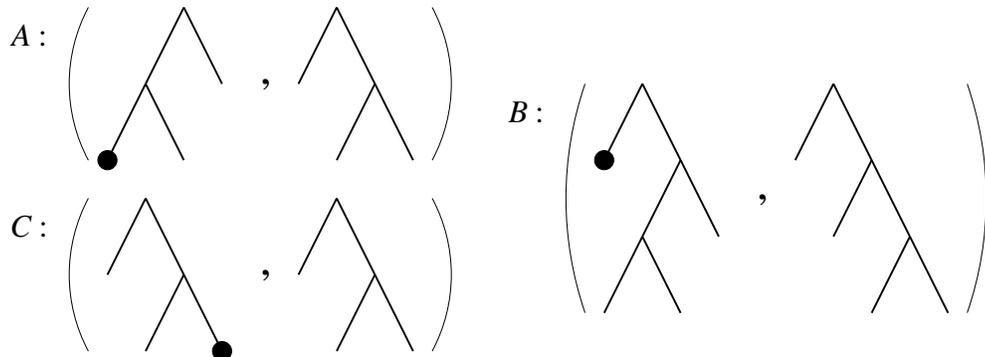
Considérons alors un intervalle $I = [\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}]$ de cette partition standard. f est affine sur I , de la forme $f(x) = a^\alpha x + \frac{\beta}{a^\gamma}$ (α, γ dans \mathbb{N}) et $f(I) = [\frac{a^{\alpha+\gamma}k + \beta a^n}{a^{\gamma+n}}, \frac{a^{\alpha+\gamma}(k+1) + \beta a^n}{a^{\gamma+n}}]$. On distingue deux cas :

- Si $\alpha + \gamma$ est strictement négatif, alors $f(I) = [\frac{k + \beta a^{n-\alpha-\gamma}}{a^{n-\alpha}}, \frac{(k + \beta a^{n-\alpha-\gamma}) + 1}{a^{n-\alpha}}]$ est un intervalle standard.
- Si $\alpha + \gamma$ est positif ou nul, on remplace I par sa subdivision régulière en $a^{\alpha+\gamma}$ intervalles, constituée des intervalles standard $J_j = [\frac{ka^{\alpha+\gamma} + j - 1}{a^{n+\alpha+\gamma}}, \frac{ka^{\alpha+\gamma} + j}{a^{n+\alpha+\gamma}}]$ pour $1 \leq j \leq a^{\alpha+\gamma}$.
Alors chacun des $f(J_j) = [\frac{ka^{\alpha+\gamma} + \beta a^n + j - 1}{a^{\gamma+n}}, \frac{ka^{\alpha+\gamma} + \beta a^n + j}{a^{\gamma+n}}]$ est un intervalle standard.

On peut donc construire, en répétant si nécessaire l'opération de subdivision ci-dessus, une partition standard dont l'image par f est une partition standard. f est alors l'image de ce couple de partitions par le morphisme $\phi_a : T_a \rightarrow T_a^1$.

Ainsi, ϕ_a est un isomorphisme de T_a sur T_a^1 , et on vérifie immédiatement que la restriction de ϕ_a à F_a est un isomorphisme sur F_a^1 .

On obtient ainsi pour les éléments A, B, C définis précédemment les couples :



Le groupe affine par morceaux F_a^∞

Nous allons maintenant donner une autre description du groupe F_a comme groupe d'homéomorphismes affines par morceaux, sur $[0, +\infty[$ cette fois. Bien que cette définition ressemble beaucoup à celle du groupe F_a^1 , elle nous permettra plus facilement d'obtenir un système générateur et de donner une nouvelle description combinatoire de F_a à partir de laquelle on pourra facilement obtenir une présentation régulière du groupe.

Définition 2 *Le groupe F_a^∞ est le groupe des homéomorphismes f croissants, affines par morceaux sur $[0, +\infty[$, tels que :*

- les points de rupture de f sont en nombre fini et dans $\mathbb{Z}[1/a]$.
- f est, sur chaque intervalle où elle est affine, de la forme $x \rightarrow a^n x + b$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}[1/a]$.
- $f(x) = x + (a-1)b$ à l'infini, $b \in \mathbb{Z}$.

Considérons l'application $\psi_a : [0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ définie par morceaux comme suit : ψ_a envoie de manière affine, par l'application $\psi_a(x) = a^n x + n(a-1) + 1 - a^n$, chaque intervalle $[\frac{a^{n-1}-1}{a^{n-1}}, \frac{a^n-1}{a^n}]$ sur l'intervalle $[(n-1)(a-1), n(a-1)]$ ($n \geq 1$).

Proposition 1 ψ_a est un homéomorphisme de $[0, 1[$ sur $[0, \infty[$ qui conjugue F_a^1 et F_a^∞ .

Démonstration:

ψ_a est continue, strictement croissante et $\lim_1 \psi_a = +\infty$, c'est bien un homéomorphisme.

ψ_a envoie bijectivement $\mathbb{Z}[\frac{1}{a}] \cap [0, 1[$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{a}] \cap [0, +\infty[$; c'est immédiat à vérifier car on a la forme explicite de ψ_a et ψ_a^{-1} .

Si f est dans F_a^1 , au voisinage de 1, f est de la forme $x \mapsto a^k(x-1) + 1$ donc pour tout n assez grand et tout k positif, f envoie les intervalles $[\frac{a^{n-1}-1}{a^{n-1}}, \frac{a^n-1}{a^n}]$ sur $[\frac{a^{n-1-k}-1}{a^{n-1-k}}, \frac{a^{n-k}-1}{a^{n-k}}]$, et par conséquent, au voisinage de l'infini $\psi_a f \psi_a^{-1}$ est de la forme $x \mapsto x - k(a-1)$. Cela montre au passage que $\psi_a f \psi_a^{-1}$ est affine par morceaux, avec un nombre fini de points de rupture.

En chaque point x de $[0, \infty[$ on peut trouver n, n', k, p, q dans \mathbb{Z} tels que

$$\begin{aligned} (\psi_a f \psi_a^{-1})(x) &= a^n [a^k (a^{-n'} (x - n'(a-1) - 1 + a^{n'})) + p/a^q] + n(a-1) + 1 - a^n \\ &= a^{n+k-n'} x + a^{n+k-n'} (-n'(a-1) - 1 + a^{n'}) + a^n p/a^q + n(a-1) + 1 - a^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi_a f \psi_a^{-1}$ est dans F_a^∞ , et on vérifie de même que si $g \in F_a^\infty$, $\psi_a^{-1} g \psi_a$ est dans F_a^1 . ■

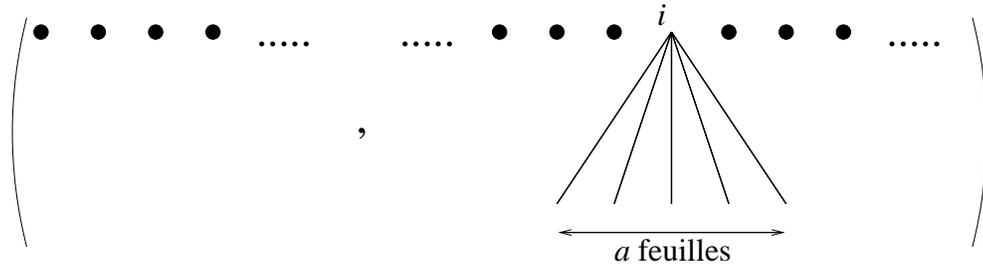
De même que la description à l'aide de couples d'arbres correspondait naturellement à la représentation de F_a par des homéomorphismes de $[0, 1]$, on peut donner une description analogue de F_a^∞ par des couples de forêts constituées d'une infinité d'arbres représentant une décomposition a -aire de chaque intervalle $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$.

On considère des forêts constituées d'une infinité d'arbres a -aires indexés par \mathbb{N} , seul un nombre fini de ces arbres n'étant pas réduits à l'arbre-racine. On peut définir une relation d'équivalence entre couples de forêts, correspondant, comme pour l'équivalence entre couples d'arbres définie plus haut, à rajouter un bouquet sur deux feuilles de mêmes ordres dans chacune des forêts; cet ensemble a une structure de groupe, et on montre (de manière analogue à la démonstration de l'isomorphisme entre T_a et T_a^1) que ce groupe est isomorphe à F_a^∞ .

L'intérêt de cette représentation de F_a par des homéomorphismes de $[0, +\infty[$ est de rendre facile la description et l'étude d'une famille infinie d'éléments de F_a^∞ , qui se révélera être une famille de générateurs :

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on pose $x_i(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq i \\ at - (a-1)i & \text{si } i \leq t \leq i+1 \\ t+a-1 & \text{si } t \geq i+1 \end{cases}$,

alors on peut représenter x_i par le couple de forêts, noté (F_0, X_i) :



Cette description forestière va nous fournir directement les relations entre les x_i .

I.1.2 Présentations de F_a et T_a

Pour montrer que les groupes F_a et T_a sont de présentations finie, de nombreuses méthodes existent, qui se complètent plutôt qu'elles ne s'excluent.

La méthode la plus directe, et que nous réutiliserons pas la suite pour l'étude des groupes F_Γ , consiste à deviner une famille génératrice infinie (les x_i que nous venons de définir), à trouver un ensemble simple de relations entre ces générateurs, et à partir d'une présentation infinie du groupe, se ramener à une présentation finie. C'est cette méthode que nous allons détailler ici.

L'idée de K.Brown, généralisée ensuite par S.Cleary et M.Stein à des familles de groupes un peu plus généraux que les groupes de Thompson F_a et T_a , consiste à remplacer le problème de la présentation par un problème de nature topologique : les propriétés de connexité et de contractibilité de certains complexes simpliciaux sur lequel le groupe agit. Nous tenterons d'expliquer rapidement ces méthodes topologiques de K.Brown, d'abord en traitant une application simple mais instructive (déduire de la propriété de présentation finie de F_a celle de T_a) puis dans le cas général (l'étude directe des groupes F_a et T_a).

I.1.3 Présentations explicites des groupes F_a : méthode combinatoire

Nous avons défini des éléments x_i de F_a^∞ ; nous allons ici prouver que c'est un ensemble de générateurs de F_a^∞ , et surtout donner des relations simples entre ces x_i .

Les générateurs

Considérons un élément (F_0, F) de F_a^∞ , F_0 désignant la forêt triviale, et F une forêt a -aire quelconque.

Si F_i désigne l'expansion de la forêt F où l'on remplace la i -ème feuille par un a -bouquet, on a $(F_0, F) = (X_i, F_i)$, et par conséquent le produit de x_i par (F_0, F) vaut

$$x_i \cdot (F_0, F) = (F_0, X_i)(F_0, F) = (F_0, X_i)(X_i, F_i) = (F_0, F_i).$$

Par une récurrence immédiate sur le nombre de a -bouquets on en déduit que tout élément de la forme (F_0, F) s'écrit comme un produit d'éléments x_i . Et de même, tout (G, F_0) est un produit de x_i^{-1} , car $(G, F_0) = (F_0, G)^{-1}$.

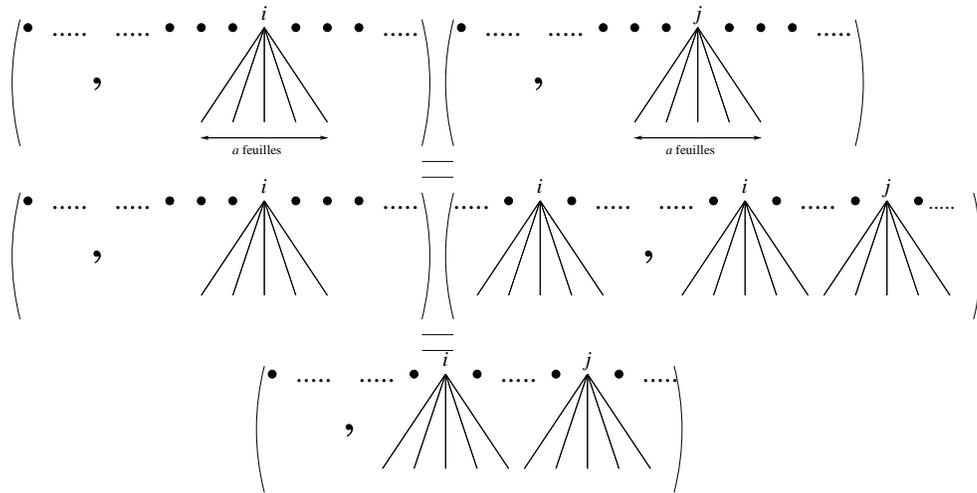
Tout élément (G, F) de F_a^∞ s'écrivant $(G, F) = (G, F_0)(F_0, F)$, on a donc prouvé :

Proposition 2 *Le groupe F_a^∞ est engendré par les $x_i, i \in \mathbb{N}$.*

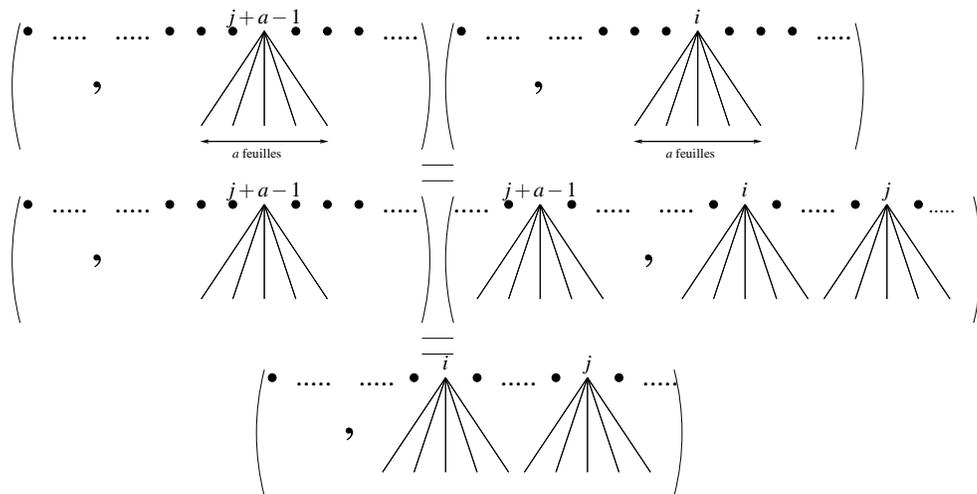
On pourrait dès ici préciser une forme particulière sous laquelle s'écrivent les éléments de F_a^∞ , la forme semi-normale, mais nous la démontrerons un peu plus loin en utilisant les relations qui existent entre les x_i , et que nous allons maintenant déterminer.

Les relations

Nous avons trouvé un ensemble de générateurs $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ de F_a^∞ . On veut maintenant déterminer les relations entre ces générateurs ; pour cela considérons i et $j, 0 \leq i < j$, et calculons le produit $x_i x_j$ en représentant x_i et x_j par les couples de forêts (F_0, X_i) et (F_0, X_j) décrits précédemment :



De même, le produit $x_{j+a-1} x_i$ vaut :



On constate que dans chaque cas, on est parti de la forêt triviale pour, en posant deux bouquets sur les arbres-racines d'ordre i et j , obtenir finalement le même résultat ; seul l'ordre des opérations, et la re-numérotation des feuilles dans le calcul $x_{j+a-1} x_i$, est

différent dans les deux calculs. Et on a donc vérifié la relation $x_i x_j = x_{j+a-1} x_i$ entre les générateurs du groupe.

Nous allons maintenant prouver que ces relations sont essentiellement les seules relations dans le groupe F_a^∞ .

Le plus simple pour cela est de passer par l'existence d'une forme semi-normale pour les éléments du groupe défini par les générateurs x_i et les relations $x_i x_j = x_{j+a-1} x_i$, qui nous permettra de montrer facilement que la surjection naturelle de ce groupe dans F_a^∞ est injective.

La forme semi-normale

Nous avons déjà montré que tout élément de F_a^∞ est égal à un produit d'un produit de x_i^{-1} et d'un produit de x_i ; grâce aux relations précédentes nous allons pouvoir facilement améliorer ce résultat.

Notons \overline{F}_a^∞ le groupe défini par les générateurs x_i et les relations $x_i x_j = x_{j+a-1} x_i$ pour $i < j$ [autrement dit, \overline{F}_a^∞ est le quotient du groupe libre de base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par le sous-groupe normal engendré par les $(x_i x_j x_i^{-1} x_{j+a-1}^{-1})_{i < j}$]. Il est clair que \overline{F}_a^∞ se surjecte sur F_a^∞ .

Les éléments de ce groupe admettent une forme semi-normale :

Proposition 3 *Tout élément de \overline{F}_a^∞ peut s'écrire $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \dots x_n^{-\beta_n} \dots x_1^{-\beta_1} x_0^{-\beta_0}$, les α_i et β_i étant des entiers positifs ou nuls, et nuls pour i assez grand.*

Démonstration:

On a pour tout $j > 0$, $x_0 x_j = x_{j+a-1} x_0$, et donc aussi $x_0 x_j^{-1} = x_{j+a-1}^{-1} x_0$, ce qui permet de 'faire passer à droite' toutes les occurrences de x_0 ; et on peut de même 'faire passer à gauche' les occurrences de x_0^{-1} . Cela prouve que si w est un mot en les lettres x_i et x_i^{-1} contenant au moins une lettre x_0 ou x_0^{-1} , on peut l'écrire $x_0^{-\alpha} w' x_0^\beta$ avec α, β positifs, w' étant un mot en les lettres x_i et x_i^{-1} , $i > 0$, de longueur strictement inférieure à celle de w .

Mais on peut répéter avec x_1, x_2, \dots cette opération jusqu'à ce que le mot w' obtenu soit le mot vide; cela prouve donc l'existence de la forme semi-normale. ■

On montre alors l'isomorphisme :

Proposition 4 *\overline{F}_a^∞ est isomorphe à F_a^∞ , autrement dit le groupe F_a^∞ admet la présentation $\langle x_i \mid x_i x_j = x_{j+a-1} x_i, i < j \rangle$.*

Démonstration:

Il suffit de prouver l'injectivité, autrement dit prouver que si w dans \overline{F}_a^∞ s'envoie sur l'identité dans F_a^∞ , $w = 1$.

Considérons donc $w, w \neq 1$ dans \overline{F}_a^∞ d'image l'identité.

On peut écrire w sous une forme semi-normale et, quitte à remplacer w par un conjugué (qui s'envoierait aussi sur l'identité) on peut supposer que w s'écrit $w = x_i^{-\alpha_i} x_{i+1}^{-\alpha_{i+1}} \dots x_{i+1}^{\beta_{i+1}} x_i^{\beta_i}$, avec $\alpha_i \neq \beta_i$. Mais alors w est conjugué à $x_{i+1}^{-\alpha_{i+1}} \dots x_{i+1}^{\beta_{i+1}} x_i^{\beta_i - \alpha_i}$. Chaque x_j étant l'identité sur $[0, j]$, l'image de cet élément est de pente $\alpha^{\beta_i - \alpha_i} \neq 1$ en i^+ , et ne peut donc être l'identité sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, il n'existe pas de $w \neq 1$ d'image l'identité : l'application est injective. ■

Présentation finie

Nous avons venons de trouver une présentation infinie régulière de F_a^∞ (donc de F_a); pour prouver que le groupe est de présentation finie il suffit donc de montrer que cette présentation finie se ramène à une présentation finie.

Remarquons tout d'abord que le groupe F_a^∞ est engendré par x_0, x_1, \dots, x_{a-1} : si $i > 0$, on a $x_0 x_i = x_{i+a-1} x_0$, et par conséquent $x_{i+n(a-1)} = x_0^n x_i x_0^{-n}$: on obtient $x_{1+n(a-1)}$ en fonction de x_0 et x_1 , $x_{2+n(a-1)}$ en fonction de x_0 et x_2 , etc... le groupe F_a^∞ est donc de type fini.

Il est alors facile de montrer que ce groupe est de présentation finie ; mais l'admettons ici, en renvoyant à notre démonstration principale concernant la présentation finie du groupe F_Γ (cf.V.3.4), dans laquelle ce résultat (que nous n'utiliserons pas) sera prouvé au passage.

Proposition 5 *Le groupe F_a est de présentation finie.*

I.1.4 Présentation finie des groupes F_a et T_a : méthodes topologiques

On vient de montrer que le groupe F_a est, pour tout a , de présentation finie. La description forestière que l'on utilise l'a pas d'équivalent pour le groupe T_a ; pour montrer que celui-ci est de présentation finie, le plus simple est d'utiliser une action de T_a sur un complexe simplicial.

T_a est de présentation finie

L'objectif va être d'utiliser le théorème de K.Brown suivant ([4], [6]) :

Proposition 6 *Soit G un groupe. S'il existe un G -complexe simplicial X , 1-connexe, tel que les stabilisateurs des sommets sont de présentation finie, les stabilisateurs des arêtes sont de type fini, et tel que X a un 2-squelette fini mod G , alors G est de présentation finie.*

On considère $S_0 = [0, 1]/\{0 = 1\} \cap \mathbb{Z}[1/a]$, et K le complexe simplicial des parties finies de S_0 . Alors K est contractile, T_a agit sur le complexe K , et pour tout n , l'action est transitive sur les simplexes de dimension n de K . Enfin le stabilisateur d'un simplexe de dimension n est de la forme F_a^n . Donc si l'on sait que F_a est de présentation finie, on peut appliquer ce théorème pour en déduire que T_a est de présentation finie.

Pour les détails nous renvoyons à la démonstration du théorème 40, où par cette méthode nous démontrons en détail que T_Γ est de présentation finie à partir du résultat pour F_Γ .

Étude directe des groupes F_a et T_a

Cette méthode permettant de généraliser à T_a les propriétés de F_a illustre une idée beaucoup plus générale de K.Brown permettant de remplacer l'étude d'un problème de théorie des groupes (type fini, présentation finie des groupes de Thompson, propriété FP_∞) par un problème de nature topologique (connexité, contractibilité de complexes simpliciaux bien choisis)

K.Brown introduit ces techniques pour prouver que les groupes F_a et T_a sont de présentation finie et FP_∞ . Par la suite M.Stein, S.Cleary, K.Brown lui-même les adaptent et les améliorent pour étudier d'autres groupes de Thompson.

Nous n'avons pas su généraliser ces méthodes topologiques au cas des groupes F_Γ qui nous intéresse ici, et par conséquent nous ne les développons pas plus. L'article de

M.Stein, qui explicite des présentations pour une assez large classe de groupes de Thompson a cependant été une source d'inspiration utile pour le problème de la présentation du groupe $F_{a,a+1}$ isomorphe à F_Γ que nous étudions par la suite.

I.2 Le groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$

Nous avons vu comment interpréter T_a en tant que groupe d'homéomorphismes affines par morceaux sur $[0, 1]/\{0 = 1\}$, cet isomorphisme étant obtenu en associant à chaque arbre a -aire une partition de $[0, 1]/\{0 = 1\}$. En particulier dans le cas $a = 2$, à chaque bouquet de l'arbre correspond à une découpe régulière en deux d'un intervalle. Mais cette construction peut s'imaginer en partant d'un autre ensemble que $[0, 1]/\{0 = 1\}$, avec une autre règle de découpe en deux que la subdivision affine régulière ; c'est ce que nous allons faire ici : à partir de subdivisions du bord du disque hyperbolique $\partial\mathbb{H}$, nous allons obtenir un groupe isomorphe à T_2 constitué d'homéomorphismes $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux.

I.2.1 Le groupe

Nous avons construit le groupe T_2 avec une structure 'affine' de S^1 , $[0, 1]/\{0 = 1\}$, et une combinatoire liée aux nombres dyadiques $\mathbb{Z}[1/2]$. La construction qui va suivre sera analogue, à partir de $S^1 = \partial\mathbb{H}$ et de l'ensemble des rationnels $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \partial\mathbb{H}$.

On va ici aussi définir les partitions standard, subdivisions (correspondant à un arbre binaire) de la partition $[\infty, 0]$, $[0, \infty]$; le "milieu" m d'un intervalle $[p/q, p'/q']$ permettant sa subdivision en deux intervalles $[p/q, m]$ et $[m, p'/q']$ sera la somme de Farey des extrémités : si $\text{pgcd}(p, q) = 1$, $\text{pgcd}(p', q') = 1$, on pose

$$m = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$$

On part donc de la partition de $\partial\mathbb{H}$ en deux intervalles $[\infty = \frac{-1}{0}, \frac{0}{1}]$, $[\frac{0}{1}, \frac{1}{0} = \infty]$, et on obtient successivement les points intermédiaires $\frac{-1}{1}$ et $\frac{1}{1}$, puis $\frac{-2}{1}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, ... Cette énumération de Farey des rationnels décrit tout l'ensemble $\hat{\mathbb{Q}}$.

On peut alors associer à tout arbre binaire une partition de $\partial\mathbb{H}$ dont les extrémités sont dans $\hat{\mathbb{Q}}$, et si on se donne deux tels arbres binaires (a_1, a_2) ayant le même nombre de feuilles f , et un élément k de $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, on peut associer au triplet (a_1, a_2, k) l'unique application de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui envoie le premier intervalle défini par a_2 sur l'intervalle d'ordre k défini par a_1 , et ainsi de suite en suivant un ordre cyclique.

On peut préciser cette application : si $I = [p_1/q_1, p_2/q_2]$ et $J = [p'_1/q'_1, p'_2/q'_2]$ sont deux intervalles appartenant à des partitions standard, on a $p_1q_2 - p_2q_1 = -1$ et $p'_1q'_2 - p'_2q'_1 = -1$.

(en effet ce résultat est vérifié pour les deux intervalles initiaux $[\frac{-1}{0}, \frac{0}{1}]$, $[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$, et s'il l'est pour un intervalle $[p/q, p'/q']$, il l'est aussi pour $[p/q, (p+p)/(q+q')]$ car $p(q+q') - q(p+p') = pq - qp + pq' - qp' = 1$; de même pour $[(p+p)/(q+q'), p'/q']$.)

Alors $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 \\ q'_1 & q'_2 \end{pmatrix}$ sont dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ et envoient ∞ et 0 respectivement sur p_1/q_1 et p_2/q_2 et p'_1/q'_1 et p'_2/q'_2 ; par conséquent l'élément (unique) de $PSL_2(\mathbb{Z})$

qui envoie I sur J est $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 \\ q'_1 & q'_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 q'_2 - p_2 q'_1 & -p_1 p'_2 + p_2 p'_1 \\ q_1 q'_2 - q_2 q'_1 & -q_1 p'_2 + q_2 p'_1 \end{pmatrix}$.

Tout comme dans le cas affine du groupe T_2 , on peut montrer que si l'on se donne un homéomorphisme de $\partial\mathbb{H}$ qui est $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux, avec points de rupture sur $\hat{\mathbb{Q}}$, on peut le représenter par un triplet (a_1, a_2, k) dans \mathcal{T}_2 , et cela nous montre que $PPSL_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe T_2 . Ainsi,

Proposition 7 T_2 est isomorphe au groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$ des homéomorphismes de $\partial\mathbb{H}$ qui sont $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux, avec points de rupture sur $\hat{\mathbb{Q}}$.

F_2 est isomorphe au sous-groupe de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ des éléments qui fixent ∞ .

On a montré ici que le groupe combinatoire T_2 est isomorphe à la fois au groupe T_2^1 et au groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$, ce qui bien entendu fournit un isomorphisme entre ces deux derniers groupes. Mais peut montrer directement que ces deux groupes T_2^1 et $PPSL_2(\mathbb{Z})$ sont conjugués par un homéomorphisme de S^1 respectant la structure binaire de ces groupes.

On va construire cet homéomorphisme φ entre $[0, 1]/\{0 = 1\}$ et $\partial\mathbb{H}$ par étapes : on envoie d'abord 0 sur ∞ , 1/4 sur -1 , 1/2 sur 0, 3/4 sur 1 ; puis on envoie successivement tous les milieux des intervalles standard affines sur les "milieux de Farey" des intervalles standard projectifs : $1/8 = (0 + 1/4)/2$ sur $-2 = \infty \oplus -1$, $3/8 = (1/4 + 1/2)/2$ sur $-1/2 = -1 \oplus 0$, $5/8 = (1/2 + 3/4)/2$ sur $1/2 = 0 \oplus 1$, $7/8 = (3/4 + 1)/2$ sur $2 = 0 \oplus \infty$, et ainsi de suite en énumérant les intervalles standard. La restriction à $]0, 1[$ et $\partial\mathbb{H}$ de φ est alors une bijection strictement croissante entre $\mathbb{Z}[1/2] \cap]0, 1[$ et \mathbb{Q} , qui sont deux ensembles denses. Ainsi, φ se prolonge en un homéomorphisme qui respecte la structure de partition standard, et par conséquent conjugue les deux groupes.

Nous utiliserons plus loin une application de même nature entre $[0, 1]/\{0 = 1\}$ et $\partial\mathbb{H}$ pour linéariser les groupes T_Γ , sujet de notre étude. Mais si ici nous avons deux démonstrations indépendantes de l'isomorphisme entre T et $PPSL_2(\mathbb{Z})$, l'une combinatoire, l'autre qui utilise un homéomorphisme de conjugaison, pour montrer que T_Γ est isomorphe à un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux, il sera nécessaire de combiner les deux aspects.

I.2.2 Présentations du groupe T

Si l'on a sait que les groupes T_a sont tous de présentation finie, il n'y a que pour le groupe T qu'ont été données des présentations finies explicites ; nous en citerons ici trois.

En suivant les notes originales de Thompson, J.Cannon, W.Floyd et W.Parry ([10]) explicitent directement une présentation finie de T_2 , basée sur les trois générateurs A , B et C précédemment donnés en exemple :

Proposition 8 Le groupe T admet une présentation finie avec les trois générateurs A , B et C et les six relations

- $[AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1$
- $[AB^{-1}, A^{-2}BA^2] = 1$
- $C = B(A^{-1}CB)$
- $(A^{-1}CB)(A^{-1}BA) = B(A^{-2}CB^2)$
- $CA = (A^{-1}CB)^2$
- $C^3 = 1$

En partant de cette présentation de T , L.Schneps et P.Lochak trouvent une autre présentation de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ n'utilisant que deux générateurs α et β , α étant le générateur d'ordre 3 de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et β étant une racine carrée dans $PPSL_2(\mathbb{Z})$ du générateur d'ordre 2 de $PSL_2(\mathbb{Z})$:

Proposition 9 *le groupe $PPSL_2(\mathbb{Z})$ admet la présentation*

$$\{\alpha, \beta \mid \alpha^4, \beta^3, (\alpha\beta)^5, [\beta\alpha\beta, \alpha^2\beta\alpha\beta\alpha^2], [\beta\alpha\beta, \alpha^2\beta\alpha^2\beta\alpha\beta\alpha^2\beta^2\alpha^2]\}.$$

T.Tsuboi aussi trouve une présentation de T en utilisant le groupe des applications $SL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux sur le cercles S^1 , qui est isomorphe au groupe T (cf [27]).

Chapitre II

Les groupes T_Γ et F_Γ : généralités

P. Greenberg dans [13] définit et entame l'étude d'une classe de sous-groupes naturels de $PPSL_2(\mathbb{Z})$: les éléments de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ sont des homéomorphismes de $\partial\mathbb{H}$ qui sont $PSL_2(\mathbb{Z})$ par morceaux ; si on fixe un sous-groupe Γ de $PSL_2(\mathbb{Z})$, on peut naturellement définir un sous-groupe T_Γ de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ en imposant à chacun de ces "morceaux" d'appartenir à Γ .

Le cas étudié par P. Greenberg est celui des sous-groupes Γ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini sans torsion, tels que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes ; nous allons ici commencer par donner une définition un peu plus générale des groupes T_Γ et F_Γ dans le cadre des groupes fuchsien, sous-groupes discrets de $PSL_2(\mathbb{R})$.

II.1 Définitions

Soit Γ un groupe fuchsien. On note $p(\Gamma)$ l'ensemble des points fixes des paraboliques de Γ ; on suppose que $\infty \in p(\Gamma)$.

Définition 3 *Le groupe T_Γ est le groupe des homéomorphismes f de $\partial\mathbb{H}$ tels qu'il existe $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ dans Γ et des $p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < p_0$ dans $p(\Gamma)$, avec pour $i = 0, \dots, n-1$, $f|_{[p_i, p_{i+1}]} = \gamma_i$.*

Le groupe F_Γ est le sous-groupe de T_Γ des éléments qui fixent ∞ .

Le premier exemple est bien sûr $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, et on retrouve $T_{PSL_2(\mathbb{Z})} = PPSL_2(\mathbb{Z})$.

Un autre exemple, qui sera l'archétype des groupes de genre 0 que nous étudierons dans la suite, est le sous-groupe $\Gamma(2)$ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ des éléments $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tels que a et d sont impairs et b et c pairs ; le quotient $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ est alors une surface, homéomorphe à une sphère privée de trois points.

Un exemple de groupe donnant une surface de genre strictement positif est le groupe des commutateurs de $PSL_2(\mathbb{Z})$,

$$PSL'_2(\mathbb{Z}) = [PSL_2(\mathbb{Z}), PSL_2(\mathbb{Z})];$$

$\mathbb{H}/PSL'_2(\mathbb{Z})$ est un tore privé d'un point (cf [20]).

Le quotient de \mathbb{H} par un groupe fuchsien Γ n'est pas nécessairement une surface : on peut bien entendu citer le groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ lui-même, le quotient $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ est un orbifold. Nous restreindrons notre étude au cas où le quotient \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes.

II.2 Conjugaisons entre T_Γ

On fixe Γ un groupe fuchsien, tel que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes ; c'est cette surface qui détermine les groupes F_Γ et T_Γ :

Proposition 10 T_Γ et F_Γ ne dépendent, à conjugaison près, que de l'espace topologique \mathbb{H}/Γ .

En effet, considérons Γ_1 et Γ_2 deux groupes fuchiens tels que \mathbb{H}/Γ_1 et \mathbb{H}/Γ_2 sont homéomorphes.

Fixons un homéomorphisme $h : \mathbb{H}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_2$; il se relève au revêtement universel en un homéomorphisme $H : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, tel que, pour tout γ_1 dans Γ_1 , il existe $\gamma_2 \in \Gamma_2$ tel que $H \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ H$. Ainsi, $H\Gamma_1H^{-1} = \Gamma_2$, et H envoie $p(\Gamma_1)$ bijectivement sur $p(\Gamma_2)$.

Ainsi, H conjugue T_{Γ_1} et T_{Γ_2} , et de même F_{Γ_1} et F_{Γ_2} .

Par conséquent, pour étudier les groupes F_Γ et T_Γ , il nous suffira de trouver un groupe Γ particulier pour chaque classe d'homéomorphisme de \mathbb{H}/Γ .

II.3 Résultats connus

Dans [13], P. Greenberg, en déterminant l'abelianisé du groupe F_Γ et en prouvant qu'il n'est pas de type fini si $g(\Gamma) > 0$, obtient :

Théorème : Si $g(\Gamma) > 0$, F_Γ n'est pas de type fini.

Mais en genre 0, F_Γ^{ab} est de type fini et cette méthode ne permet donc pas de conclure. L'objet de ce texte est de montrer qu'en genre 0, F_Γ et T_Γ sont -tout comme les groupes F et $T \sim PPSL_2(\mathbb{Z})$ - de type fini, et même de présentation finie.

Chapitre III

Linéarisation des groupes F_Γ et T_Γ en genre 0

On fixe ici un groupe fuchsien Γ de genre 0, tel que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes ; on a vu que F_Γ et T_Γ ne dépendent, à conjugaison près, que du nombre de cusps de \mathbb{H}/Γ .

Notre principal objectif sera de prouver que les groupes F_Γ et T_Γ sont de présentation finie. Dans ce but, nous allons nous ramener à l'étude de groupes d'homéomorphismes affines par morceaux sur $[0, \infty[$, et nous pourrons généraliser les méthodes appliquées dans le chapitre I aux groupes F_a^∞ pour donner une présentation explicite du groupe, et montrer qu'elle se ramène à une présentation finie.

Pour cela nous allons donc ici conjuguer les groupes T_Γ et F_Γ à des groupes d'applications affines par morceaux sur $[0, 1]/\{0 = 1\}$, puis le groupe F_Γ à un groupe du même type sur $[0, \infty[$; dans les chapitres suivants ce sont ces groupes qui seront étudiés.

Le résultat fondamental ici est la description de la première de ces conjugaisons, entre T_Γ et un groupe $T_{a,a+1}^1$ d'applications affines par morceaux. Pour l'obtenir nous nous inspirons de la preuve exposée au chapitre I de l'isomorphisme entre F_a et F_a^1 . Mais il est ici nécessaire de combiner les aspects purement combinatoires (couples d'arbres avec marquages) et les aspects topologiques pour décrire avec précision en tant que groupe affine par morceaux le conjugué de T_Γ .

III.1 Description des groupes T_Γ et F_Γ

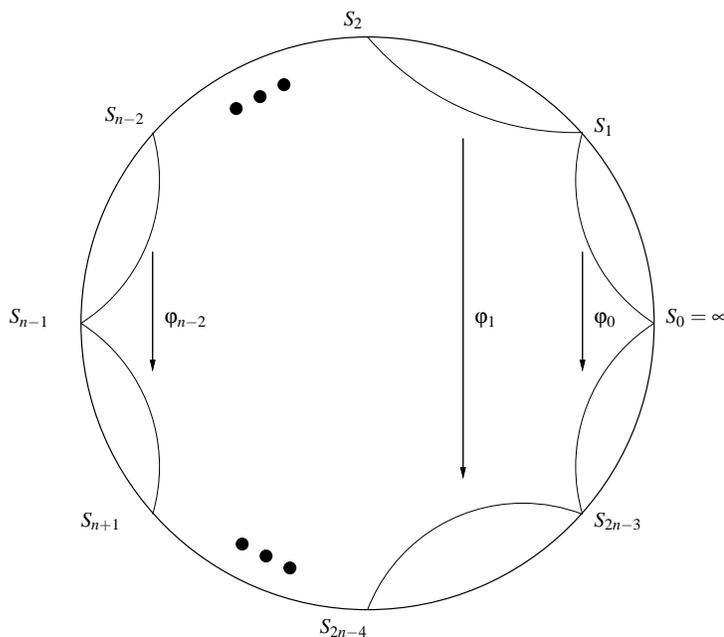
Nous voulons donner une description combinatoire des groupes T_Γ et F_Γ , en décrivant comment ils agissent sur certains intervalles particuliers de $\partial\mathbb{H}$, liés à la géométrie des groupes Γ , que l'on appellera intervalles standard.

La première étape consistera à définir ces intervalles standard et une application de marquage sur ces intervalles ; ensuite nous décrirons les éléments du groupe T_Γ comme des couples de partitions de $\partial\mathbb{H}$ formées d'intervalles standard ayant des marquages identiques.

III.1.1 Le groupe Γ

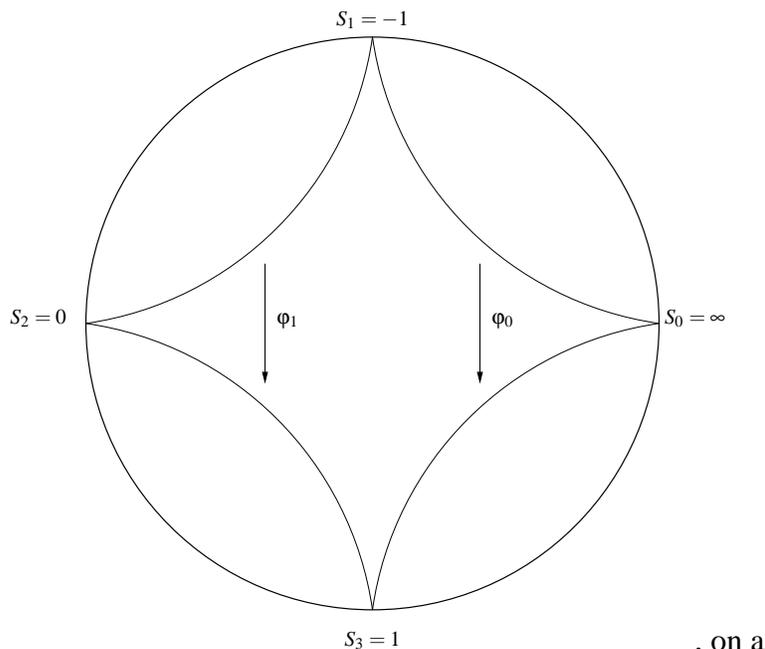
On considère, pour n entier supérieur ou égal à 3, un $(2n - 2)$ -gone \mathcal{P} de \mathbb{H} aux sommets dans $\partial\mathbb{H}$, l'un d'entre eux étant ∞ ; on peut indexer les sommets par $\mathbb{Z}/(2n -$

2) \mathbb{Z} : $S_0 = \infty, S_1, S_2, \dots, S_{2n-3}$, et considérer pour $i \in \{0, \dots, n-2\}$ l'application φ_i qui envoie le coté $[S_i, S_{i+1}]$ sur le coté $[S_{2n-2-i}, S_{2n-3-i}]$.



Ces applications φ_i engendrent alors un groupe Γ de genre 0 avec n cusps (correspondant aux sommets, S_1 et S_{2n-3} , S_2 et S_{2n-4} , \dots , S_{n-2} et S_n étant identifiés), dont un domaine fondamental est \mathcal{P} .

Par exemple pour $n = 3$ si on considère le polygone \mathcal{P} :



, on a

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (z \mapsto z + 2) \text{ et } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (z \mapsto \frac{z}{2z+1}),$$

et le sous-groupe engendré par φ_0 et φ_1 est le groupe (cf.[20])

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid a, d \equiv 1(2), b, c \equiv 0(2) \right\}$$

Plus généralement, en prenant $S_1 = -n + 2, S_2 = -n + 3, \dots, S_{n-2} = -1, S_{n+1} = 1, \dots, S_{2n-3} = n - 2$, les applications φ_i sont dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, et avec la proposition 10, on peut donc trouver pour chaque valeur de n supérieure ou égale à 3 un exemple de groupe Γ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que \mathbb{H}/Γ est une surface de genre 0 avec n cusps.

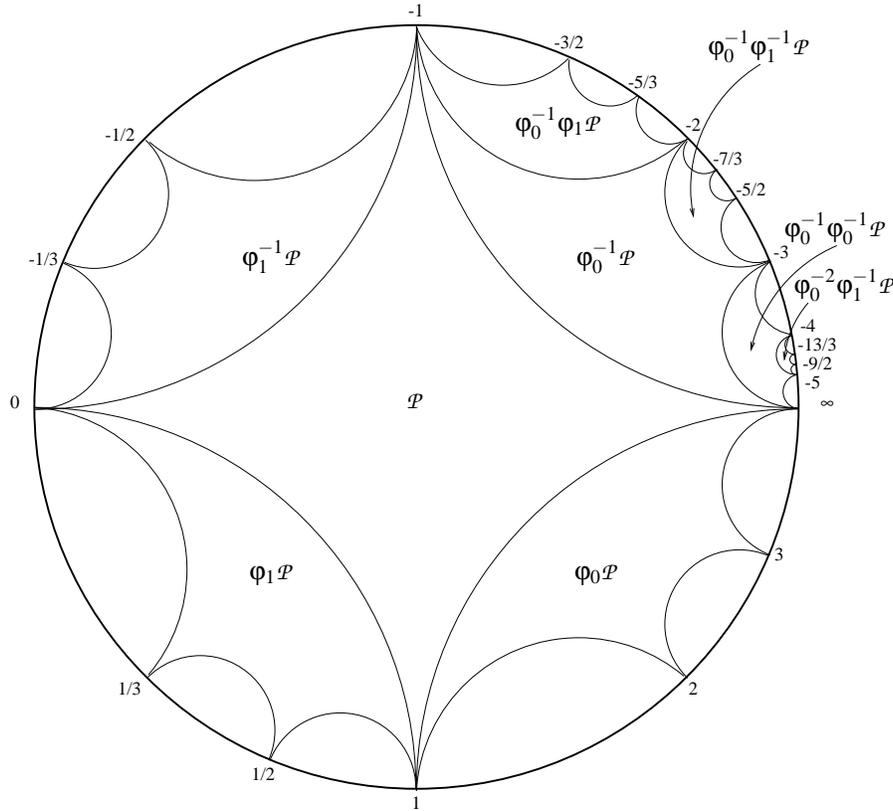
Dans tout ce qui suit, on peut donc supposer le groupe Γ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

III.1.2 Les intervalles standard

Notons $\text{Gen}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\varphi_i, \varphi_i^{-1}, i = 0, \dots, n - 2\}$.

On appelle polygone standard de rang 0 le polygone \mathcal{P} , et pour tout $k \geq 0$, un polygone standard de rang $k + 1$ est l'image par l'un des éléments de $\text{Gen}(\Gamma)$ d'un polygone standard de rang k . On obtient ainsi une énumération du pavage $\Gamma \cdot \mathcal{P}$ de \mathbb{H} .

Par exemple pour le groupe $\Gamma(2)$ on peut représenter le polygone de rang 0, \mathcal{P} , les 4 polygones de rang 1, $\varphi_0 \mathcal{P}, \varphi_1 \mathcal{P}, \varphi_0^{-1} \mathcal{P}, \varphi_1^{-1} \mathcal{P}$, trois des polygones de rang 2, $\varphi_0^{-1} \varphi_0^{-1} \mathcal{P}, \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1} \mathcal{P}, \varphi_1^{-1} \varphi_1^{-1} \mathcal{P}$, et un polygone de rang 3, $\varphi_0^{-1} \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1} \mathcal{P}$.



On définit les intervalles standard de rang 0 comme les intervalles de $\partial\mathbb{H}$ délimités par le polygone de rang 0 : $[S_0S_1], [S_1S_2], \dots, [S_{2n-3}S_0]$.

Considérons un polygone standard de rang $k + 1$, avec $k \geq 0$. Alors un de ses cotés C appartient à polygone standard de rang k ; les autres cotés définissent $2n - 3$ intervalles

de $\partial\mathbb{H}$, que l'on appellera intervalles standard de rang $k + 1$, et qui subdivisent l'intervalle standard de rang k défini par le coté C .

Sur la figure précédente on a ainsi représenté :

- tous les intervalles standard de rang 0 : $[\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty]$,
- tous les intervalles standard de rang 1 : $[\infty, -3]$, $[-3, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$, $[-\frac{1}{3}, 0]$, $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, \infty]$,
- les intervalles $[\frac{-3}{2}, -1]$, $[\frac{-5}{3}, \frac{-3}{2}]$, $[-2, \frac{-5}{3}]$, $[\frac{-7}{3}, -2]$, $[\frac{-5}{2}, \frac{-7}{3}]$, $[-3, \frac{-5}{2}]$, $[-4, -3]$, $[-5, -4]$ et $[\infty, -5]$ de rang 2,
- les intervalles $[-\frac{13}{3}, -4]$, $[-\frac{9}{2}, -\frac{13}{3}]$, $[-5, -\frac{9}{2}]$ de rang 3.

III.1.3 Le marquage des intervalles standard

On va maintenant définir un marquage sur les intervalles standard, application qui a un intervalle associe un élément de $\mathbb{Z}/(2n-2)\mathbb{Z}$, qui nous permettra de caractériser les éléments de T_Γ .

Commençons par remarquer :

Proposition 11 *Γ agit librement sur l'ensemble des intervalles standard, et les orbites des intervalles standard de rang 0 forment une partition de l'ensemble des intervalles standard.*

Démonstration:

Il est clair par construction qu'un intervalle standard est l'image par un élément de Γ d'un intervalle standard de rang 0.

Réciproquement si on se donne $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$, on peut l'écrire $\gamma = \gamma_k \gamma_{k-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$, chaque γ_i étant dans $\text{Gen}(\Gamma)$, et $\gamma_i \gamma_{i-1} \neq 1$. Mais alors si on se donne un intervalle standard I de rang 0, on voit successivement que $\gamma_1 I$ est un intervalle standard de rang 1, $\gamma_2 \gamma_1 I$ est un intervalle standard de rang 2, ..., $\gamma I = \gamma_k \gamma_{k-1} \dots \gamma_2 \gamma_1 I$ est un intervalle standard de rang k .

On a au passage prouvé que l'image par $\gamma \in \Gamma$ d'un intervalle standard de rang 0 n'est de rang 0 que si $\gamma = Id$, et donc les intervalles standard de rang 0 sont d'orbites disjointes. ■

On définit alors l'application de marquage m de l'ensemble des intervalles standard dans $\mathbb{Z}/(2n-2)\mathbb{Z}$ par $m([S_i, S_{i+1}]) = i$ pour $i \in \mathbb{Z}/(2n-2)\mathbb{Z}$, et si I est un intervalle standard de rang non nul, $m(I)$ est le marquage de l'unique intervalle standard de rang 0 qui est dans l'orbite de I .

Alors cette application m a les propriétés :

Proposition 12 – *Si I_1 et I_2 sont deux intervalles standard, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma I_1 = I_2$ si et seulement si $m(I_1) = m(I_2)$.*

– *Si on subdivise un intervalle de marquage m , les marquages des intervalles obtenus sont $-m, -m+1, \dots, -m+2n-4$.*

Démonstration:

Le premier point est immédiat ; pour le deuxième, par le mode de construction des intervalles standard, il suffit de prouver le résultat pour un intervalle de rang 0.

Soit $[S_i, S_{i+1}]$ un intervalle de rang 0, on le subdivise en des intervalles qui sont images par φ_{2n-3-i} (si $i = n-1, \dots, 2n-3$) ou φ_i^{-1} (si $i = 0, \dots, n-2$) des intervalles de rang 0 $[S_{2n-2-i}, S_{2n-2-i+1}]$, $[S_{2n-2-i+1}, S_{2n-2-i+2}]$, ..., $[S_{2n-2-i+2n-4}, S_{2n-2-i+2n-3}]$.

Ainsi les marquages des intervalles obtenus sont $-i, -i+1, \dots, -i+2n-4$. ■

III.1.4 Description de T_Γ

On a défini plus haut la notion d'intervalles standard ; on va dans la suite appeler partition standard une suite d'intervalles standard $I_0 = [\infty, a_1]$, $I_1 = [a_1, a_2]$, \dots , $I_{l-1} = [a_{l-1}, \infty]$ qui recouvrent une seule fois le cercle (i.e ∞ n'est dans aucun des I_1, \dots, I_{l-2}).

Une expansion élémentaire d'une partition standard consiste subdiviser un des intervalles qui la composent par les $2n - 3$ intervalles standard de rang un de plus correspondant. Une expansion est une suite finie d'expansions élémentaires ; on remarque que toute partition standard est une expansion de la partition constituée des intervalles de rang 0.

On appelle marquage d'une partition standard la suite des marquages des intervalles qui la composent.

Soit $f \in T_\Gamma$. Comme les extrémités des intervalles standard sont exactement $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, il existe une partition standard I_0, I_1, \dots, I_{l-1} et des éléments de Γ , $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}$ tels que f coïncide avec γ_i sur chaque I_i ; on dit qu'une telle partition est adaptée à f .

Par construction des intervalles standard, chacun des $\gamma_i(I_i)$ est un intervalle standard, et on peut voir l'image de la partition $(I_0, I_1, \dots, I_{l-1})$ comme une partition standard pointée : on pointe $f(I_0)$ et la partition est à considérer en suivant un ordre cyclique. On a donc associé à chaque élément de T_Γ un couple de partitions standard $((f(I_0), f(I_1), \dots, f(I_{l-1})), (I_0, I_1, \dots, I_{l-1}))$ constituées du même nombre d'intervalles.

On s'intéresse maintenant à la réciproque : étant données deux partitions standard avec le même nombre d'intervalles, définissent-elles un élément de T_Γ ? La réponse est facile en utilisant la notion de marquage définie précédemment : deux intervalles standard s'envoient l'un sur l'autre par un élément de Γ si et seulement si ils ont même marquage. Ainsi un élément de T_Γ envoie une partition standard adaptée sur une partition standard de même marquage (le marquage de I_i correspond au marquage de $f(I_i)$ et ainsi de suite, pour tout i). Réciproquement deux partitions standard de même marquage définissent un élément de T_Γ en 'recollant' les éléments de Γ obtenus pour chaque couple d'intervalles se correspondant dans les deux partitions..

Le sous-groupe F_Γ de T_Γ des éléments qui fixent ∞ correspond aux couples de partitions standard (p_1, p_2) où l'intervalle pointé de p_1 est le premier (celui de la forme $[\infty, *]$).

III.2 Description de $T_{2n-3,2n-2}^1$

Maintenant que nous avons décrit T_Γ et F_Γ de manière combinatoire à l'aide de partitions standard, nous allons donner un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux qui admet la même description combinatoire.

On considère l'ensemble des homéomorphismes de $[0, 1]/\{0 = 1\}$ affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{2n-2}\mathbb{Z}[\frac{1}{2n-3}]$ et des pentes dans $\langle 2n - 3 \rangle$. Ils forment un groupe que l'on note $\mathcal{T}_{2n-3,2n-2}^1$.

On va construire une notion de partition standard ici aussi, qui nous permettra de définir un sous-groupe $T_{2n-3,2n-2}^1$. Pour cela on part du polygone régulier de sommets $0, \frac{1}{2n-2}, \dots, \frac{2n-3}{2n-2}$, et on découpe chacun de ces intervalles de manière régulière en $2n - 3$, et on répète l'opération. On construit ainsi une énumération de $\frac{1}{2n-2}\mathbb{Z}[\frac{1}{2n-3}] \cap [0, 1]/\{0 = 1\}$, et on définit dans ce cadre de manière analogue les intervalles standard, la notion d'expansion, et les partitions standard.

Soit $f \in \mathcal{T}_{2n-3, 2n-2}^1$.

On peut alors représenter f par un couple de partitions standard (p_1, p_2) ayant le même nombre d'intervalles, p_1 ayant un intervalle pointé, f associant de manière affine les intervalles de p_2 sur ceux de p_1 , en commençant par envoyer le premier intervalle de p_2 sur l'intervalle pointé de p_1 .

Sur chaque intervalle standard (pour une partition adaptée) f est de la forme $f(x) = (2n-3)^k x + \frac{p}{(2n-2).(2n-3)^q}$ avec $k, p \in \mathbb{Z}$ et q entier positif.

Définition 4 $T_{2n-3, 2n-2}^1$ est le sous-groupe des $f \in \mathcal{T}_{2n-3, 2n-2}^1$ où, avec les notations précédentes, sur chaque intervalle, p est un multiple de $2n-2$.

On vérifie que l'application affine qui envoie l'intervalle $[\frac{k}{(2n-2).(2n-3)^a}, \frac{k+1}{(2n-2).(2n-3)^a}]$ sur $[\frac{k'}{(2n-2).(2n-3)^{a'}}, \frac{k'+1}{(2n-2).(2n-3)^{a'}}]$ a pour partie de translation $\frac{k'-k}{(2n-2).(2n-3)^{a'}}$. On associe à chaque intervalle $[\frac{k}{(2n-2).(2n-3)^a}, \frac{k+1}{(2n-2).(2n-3)^a}]$ la valeur de k modulo $2n-2$, et à chaque partition standard un marquage constitué de la suite de ces symboles. On remarque que l'on a la règle de subdivision suivante sur les marquages :

$$(\dots, l, \dots) \rightarrow (\dots, -l, -l+1, \dots, -l+2n-4, \dots)$$

Proposition 13 Pour $f \in \mathcal{T}_{2n-3, 2n-2}^1$, représentée par un couple de partitions standard et une feuille pointée, f est dans $T_{2n-3, 2n-2}^1$ si et seulement si les partitions ont des marquages qui se correspondent.

Si on définit $F_{2n-3, 2n-2}^1$ comme le sous-groupe de $T_{2n-3, 2n-2}^1$ des éléments fixant $0 = 1$, il correspond aux couples de partitions (p_1, p_2) tels que le premier intervalle (celui de la forme $[0, *]$) de p_1 est pointé.

Remarque : Ces groupes $\mathcal{T}_{2n-3, 2n-2}^1$ apparaissent chez Minakawa (M.Stein traite également de larges classes de groupes de Thompson qui les contiennent aussi). En revanche, à notre connaissance, les groupes $F_{2n-3, 2n-2}^1$ et $T_{2n-3, 2n-2}^1$ que nous allons étudier n'ont jamais été considérés.

III.3 La conjugaison

On va définir un homéomorphisme φ de $S^1 \simeq \partial\mathbb{H}$ dans $S^1 \simeq [0, 1]/\{0=1\}$ qui envoie partitions standard sur partitions standard en respectant les marquages, et par conséquent conjugue T_Γ et $T_{2n-3, 2n-2}^1$.

On peut définir une bijection strictement croissante

$$\varphi : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \longrightarrow \frac{1}{2n-2} \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2n-3} \right] \cap [0, 1] / \{0=1\}$$

en envoyant S_0 sur 0, S_1 sur $\frac{1}{2n-2}$, ..., S_{2n-3} sur $\frac{2n-3}{2n-2}$, puis de proche en proche en associant les points obtenus à chaque nouvelle étape des deux constructions précédentes, dans l'ordre trigonométrique. La construction des intervalles standard dans $\partial\mathbb{H}$ nous donne tous les éléments de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, et la construction affine tous les éléments de $\frac{1}{2n-2} \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2n-3} \right] \cap [0, 1] / \{0=1\}$.

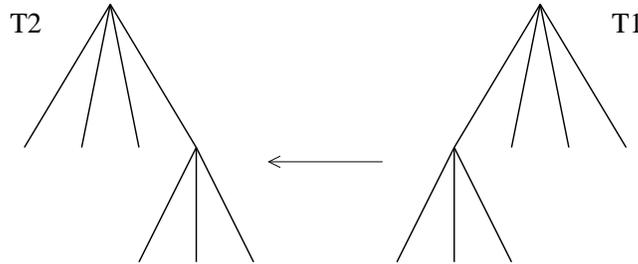
Proposition 14 φ étant une bijection strictement croissante d'un ensemble dense dans S^1 sur un ensemble dense dans S^1 , elle se prolonge en un homéomorphisme de S^1 .

Proposition 15 φ préserve la structure de partition standard : l'image par φ d'une partition standard de $\partial\mathbb{H}$ est une partition standard de $[0, 1]/\{0 = 1\}$ de même marquage, et φ respecte l'opération d'expansion.

Comme T_Γ et $T_{2n-3, 2n-2}^1$ peuvent être décrits comme des couples de partitions standard de même marquage, et que φ envoie les partitions standard sur les partitions standard en conservant le marquage, φ conjugue ces deux groupes. De la même manière φ conjugue les deux sous-groupes F_Γ et $F_{2n-3, 2n-2}^1$.

On peut représenter une partition standard par un arbre qui décrit comment on subdivise la partition standard de rang 0 ($[\infty, S_1], [S_1, S_2], \dots, [S_{2n-4}, S_{2n-3}], [S_{2n-3}, \infty]$ dans le cas projectif, $[0, \frac{1}{2n-2}], [\frac{1}{2n-2}, \frac{2}{2n-2}], \dots, [\frac{2n-4}{2n-2}, \frac{2n-3}{2n-2}], [\frac{2n-3}{2n-2}, 1]$ dans le cas affine) : pour la partition de rang 0 on utilise un arbre à une racine et $2n - 2$ arêtes, chacune des feuilles représentant un des intervalles de la partition, et pour chaque subdivision d'un intervalle de la partition on pose un arbre à une racine et $2n - 3$ arêtes sur la feuille correspondante.

Exemple 1 : Considérons, pour les groupes $F_{\Gamma(2)}$ et $F_{3,4}^1$, le couple (T_2, T_1) suivant :



T_1 représente la partition $[\infty, -3], [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/12], [1/12, 2/12], [2/12, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ de $[0, 1]$.

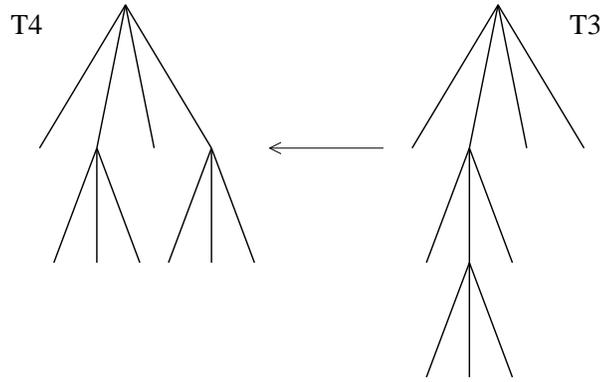
T_2 représente la partition $[\infty, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 10/12], [10/12, 11/12], [11/12, 1]$ de $[0, 1]$.

Ainsi les applications correspondantes, conjuguées par φ , sont $z \mapsto z + 2$ dans $F_{\Gamma(2)}$ et

$$x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/4] \\ (x-2)/3 & \text{si } x \in [1/4, 1] \end{cases} \text{ dans } F_{3,4}^{[0,1]}.$$

On remarque en particulier que le nombre de points de rupture des applications est majoré par le nombre de feuilles des arbres les représentant, mais que certains éléments sans point de rupture de $F_{\Gamma(2)}$ sont nécessairement définis par des couples d'arbres ayant plusieurs feuilles.

Exemple 2 : De même le couple (T_4, T_3) :

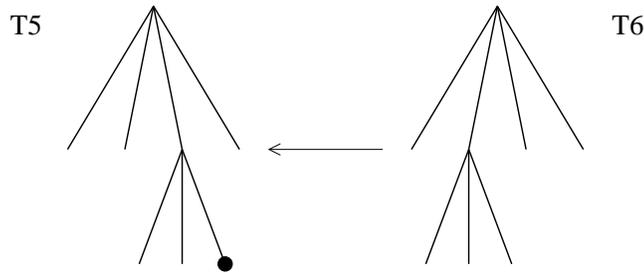


définit sur $\partial\mathbb{H}$ et sur $[0, 1]$ les applications

$$z \mapsto \begin{cases} z & \text{sur } [\infty, -\frac{1}{2}] \\ -\frac{5z+2}{8z+3} & \text{sur } [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}] \\ \frac{5z+2}{2z+1} & \text{sur } [-\frac{2}{5}, 0] \\ z+2 & \text{sur } [0, \infty] \end{cases} \text{ et } x \mapsto \begin{cases} x & \text{sur } [0, \frac{4}{12}] \\ 3x-2/3 & \text{sur } [\frac{4}{12}, \frac{14}{36}] \\ 9x-3 & \text{sur } [\frac{14}{36}, \frac{15}{36}] \\ x+1/3 & \text{sur } [\frac{5}{12}, \frac{1}{2}] \\ (x+2)/3 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Exemple 3 :

On considère cette fois le couple (T_5, T_6)



T_5 représente la partition (la feuille 4 est pointée) $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \infty]$, $[\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition de $[0, 1]$ $[8/12, 9/12]$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 7/12]$, $[7/12, 8/12]$.

T_6 représente la partition $[\infty, -1]$, $[-1, \frac{-1}{2}]$, $[\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}]$, $[\frac{-1}{3}, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/4]$, $[1/4, 4/12]$, $[4/12, 5/12]$, $[5/12, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$ de $[0, 1]$.

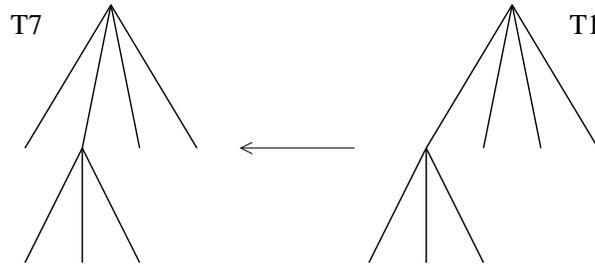
(T_5, T_6) correspond à l'application $z \rightarrow \frac{z}{2z+1}$ sur $\partial\mathbb{H}$, et sur $[0, 1]$ à l'application

$$x \mapsto \begin{cases} (x+2)/3 & \text{sur } [0, \frac{1}{4}] \\ 3x & \text{sur } [\frac{1}{4}, \frac{4}{12}] \\ 3x-1 & \text{sur } [\frac{4}{12}, \frac{1}{2}] \\ (x+1)/3 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un autre exemple d'élément, dans les groupes T et pas dans F cette fois, qui est dans Γ et donc sans point de rupture sur $\partial\mathbb{H}$, mais qui n'est pas affine vu comme application affine par morceaux..

Exemple 4 :

En revanche si l'on considère le couple (T_7, T_1) suivant :



T_7 représente la partition $[\infty, -1]$, $[-1, -1/2]$, $[-1/2, -1/3]$, $[-1/3, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/3]$, $[1/3, 5/12]$, $[5/12, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$ de $[0, 1]$.

Alors les applications correspondantes ne sont pas dans $T_{\Gamma(2)}$ ni dans $T_{3,4}^1$ (par exemple l'application affine envoyant $[1/12, 2/12]$ sur $[1/4, 4/12]$ est $x \mapsto x + 1/6$, l'élément (de $PSL_2(\mathbb{Z})$) qui envoie $[-3, -2]$ sur $[-1, -1/2]$ est $z \mapsto \frac{-1}{z+4}$).

Cela est dû au fait que les marquages des deux partitions définies par T_1 et T_7 ne sont pas identiques.

Cette description de T_Γ par des couples d'arbres avec marquages est intéressante pour décrire le groupe linéarisé $T_{a,a+1}^1$; mais la présence de l'application de marquage rend malaisée la fabrication d'éléments du groupe, et la détermination d'une présentation. Nous allons donc définir un isomorphisme entre $F_{a,a+1}^1$ et un groupe $F_{a,a+1}^\infty \subset \text{Homéo}^+([0, +\infty[)$ qui aura une description sous forme de couples, non pas d'arbres, mais de forêts, et nous verrons que cette structure forestière sera bien adaptée à la détermination d'une présentation.

III.4 Isomorphisme entre $F_{a,a+1}^1$ et $F_{a,a+1}^\infty$

Dans ce qui précède on a montré que si Γ est de genre 0, F_Γ est isomorphe à un groupe affine $F_{2n-3, 2n-2}^1$ où n est le nombre de cusps de \mathbb{H}/Γ . On s'intéressera aux groupes affines $F_{a,a+1}^1$ pour $a \geq 3$, a impair, mais tout ce qui suit est vrai quelle que soit la parité de a .

On va définir un groupe affine par morceaux sur $[0, \infty[$, que l'on notera $F_{a,a+1}^\infty$, et on montrera qu'il est conjugué à $F_{a,a+1}^1$. C'est ce groupe que l'on prouvera être de type fini dans la suite.

On s'intéresse à des homéomorphismes affines par morceaux sur $[0, +\infty[$; une telle application est dérivable sauf au plus en un nombre fini de points, appelés points de rupture. On notera $bk(f)$ l'ensemble des points de rupture d'une application f .

Définition 5 Pour a entier supérieur ou égal à 2, $F_{a,a+1}^\infty$ est le groupe des applications affines par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec points de rupture (en nombre fini) dans $\mathbb{Z}[1/a]$, qui sont de la forme $x \rightarrow a^\alpha x + (a+1)\frac{b}{a^\alpha}$ sur chaque intervalle où elle est affine, et valent $x + (a^2 - 1)b$ à l'infini, b entier.

Considérons l'application $\psi'_a : [0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ définie par morceaux comme suit :
sur chaque $[\frac{a^n-1}{a^n}, \frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}}]$ pour $n \geq 0$, ψ'_a est définie par $\psi'_a(x) = (a+1)a^{n+1}x + (a^2 - 1)(n - a - a^2 - \dots - a^n)$. Par conséquent ψ'_a envoie pour chaque $n \geq 0$ l'intervalle $[\frac{a^n-1}{a^n}, \frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}}]$ sur l'intervalle $[n(a^2 - 1), (n+1)(a^2 - 1)]$.

Proposition 16 ψ'_a est un homéomorphisme de $[0, 1[$ sur $[0, \infty[$ qui conjugue $F_{a,a+1}^1$ et $F_{a,a+1}^\infty$.

Démonstration:

ψ'_a est continue et strictement croissante ; de plus $\psi'_a(0) = 0$ et $\lim_1 \psi'_a = +\infty$: ψ'_a est donc bien un homéomorphisme sur $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$.

ψ'_a envoie bijectivement $\frac{1}{a+1}\mathbb{Z}[\frac{1}{a}] \cap [0, 1[$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{a}] \cap [0, +\infty[$; c'est immédiat à vérifier car on a la forme explicite de ψ'_a et ψ'^{-1}_a .

Si f est dans $F_{a,a+1}^1$, au voisinage de 1, f est de la forme $x \rightarrow a^k(x-1) + 1$ donc pour tout n assez grand et tout k positif, f envoie les intervalles $[\frac{a^n-1}{a^n}, \frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}}]$ sur $[\frac{a^{n-k}-1}{a^{n-k}}, \frac{a^{n-k+1}-1}{a^{n-k+1}}]$, et par conséquent, au voisinage de l'infini $\psi'_a f \psi'^{-1}_a$ est de la forme $x \rightarrow x - k(a^2 - 1)$. Cela montre au passage que $\psi'_a f \psi'^{-1}_a$ a un nombre fini de points de rupture. Et ceux-ci sont dans $\mathbb{Z}[1/a]$.

En chaque point x de $[0, \infty[$ on peut trouver n, n', k, p, q entiers tels que

$$\begin{aligned} (\psi'_a f \psi'^{-1}_a)(x) &= (a+1)a^{n+1} \left(a^k \frac{x - (a^2-1)(n'-a-\dots-a^{n'})}{(a+1)a^{n'+1}} + \frac{p}{a^q} \right) + (a^2-1)(n-a-\dots-a^n) \\ &= a^{n+k-n'}x + \frac{(a+1)a^{n+1}p}{a^q} - (a^2-1) \left(\frac{n'-a-\dots-a^{n'}}{a^{n'-n-k}} - n+a+\dots+a^n \right) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue. Ainsi, $\psi'_a f \psi'^{-1}_a$ est dans $F_{a,a+1}^\infty$.

De même, si $g \in F_{a,a+1}^\infty$ on vérifie que $\psi'^{-1}_a g \psi'_a$ est dans $F_{a,a+1}^{[0,1]}$; en effet en chaque point y de $[0, \infty[$ on peut trouver n, n', k, p, q entiers tels que $(\psi'^{-1}_a g \psi'_a)(y) =$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+1)a^{n+1}} a^k [(a+1)a^{n'+1}y + (a^2-1)(n'-a-\dots-a^{n'})] + (a+1)\frac{p}{a^q} - (a^2-1)(n-a-\dots-a^n) \\ = \frac{1}{a^{n+1}} a^k [a^{n'+1}y + (a-1)(n'-a-\dots-a^{n'})] + \frac{p}{a^q} - (a-1)(n-a-\dots-a^n) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue. Ainsi, $\psi'^{-1}_a g \psi'_a$ est dans $F_{a,a+1}^1$. ■

On peut noter que si f est l'identité au voisinage de 0 ou 1, $\psi'_a f \psi'^{-1}_a$ est l'identité au voisinage respectivement de 0 et ∞ .

Chapitre IV

F_Γ est de type fini

IV.1 Étude de $F_{a,a+1}^\infty$

Tout ce qui suit concernant uniquement le groupe $F_{a,a+1}^\infty$, on le notera ici $F_{a,a+1}$.

Le but de cette partie est de montrer que le groupe $F_{a,a+1}$ est de type fini pour tout a impair supérieur ou égal à 3.

IV.1.1 Introduction

Dans la suite on adopte les notations suivantes pour désigner un élément f de $F_{a,a+1}$: il existe $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n \in \mathbb{Z}[1/a]$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}[1/a]$, $b_n \in \mathbb{Z}$, tels que

$$f(t) = \begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1}t + (a+1)b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}}t + (a+1)b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + (a^2 - 1)b_n & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}$$

On pose $p'_i = f(p_i)$.

Enfin, on fera l'abus de langage de dire qu'un élément de $\mathbb{Z}[1/a]$ est divisible par $a+1$ (resp. $a^2 - 1$) s'il est de la forme $\frac{(a+1)p}{a^q}$ (resp. $\frac{(a^2-1)p}{a^q}$) avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

On va montrer que $F_{a,a+1}$ est engendré par les trois classes d'éléments suivantes :

- Le sous-groupe F_{a^2} constitué des applications dont toutes les pentes sont des puissances non pas de a mais de a^2 . F_{a^2} est un groupe de Thompson classique, connu pour être de type fini [10].
- Le sous-groupe \overline{F}_a des applications à points de rupture dans $(a+1)\mathbb{Z}[1/a]$; \overline{F}_a est isomorphe, par la conjugaison $x \rightarrow (a+1)x$ au groupe de Thompson classique F_a , lui aussi de type fini [10].
- Les applications $\varphi_{\alpha,l,l'}$ (ainsi que leurs inverses) définies, pour α, l, l' entiers avec

$l' > l$, par $\varphi_{\alpha, l, l'}(t) =$

$$\begin{cases} a^{2\alpha+1}t - (a^{2\alpha+1} - 1)p(l) & \text{de } [0, p(l)] \text{ dans } [0, p(l)] \\ t + (a^{2\alpha+1} - 1)(a+1)(l' - l) & \text{de } [p(l), p(l')] \\ & \text{dans } [p(l), p(l + a^{2\alpha+1}(l' - l))] \\ & \text{de } [p(l'), \infty[\\ & \text{dans } [p(l + a^{2\alpha+1}(l' - l)), \infty[\end{cases}$$

où l'on note $p(l) = (a+1)l + \frac{a+1}{2}$.

IV.1.2 Une transformation préliminaire

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut se ramener à une application valant l'identité au voisinage de 0.

Soit f dans $F_{a, a+1}$ avec $a_0 > 0$.

Fixons p le plus petit entier positif tel que $(a+1)p \geq p_n$.

Posons

$$\Psi(t) = \begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p(a+1)] \\ t + p(a+1)(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [p(a+1), +\infty[. \end{cases}$$

Alors $\Psi \in \overline{F}_a$, et

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{cases} a^{-a_0}t & \text{sur } [0, p(a+1)a^{a_0}] \\ t - p(a+1)(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [p(a+1)a^{a_0}, +\infty[. \end{cases}$$

Un petit calcul donne : $f\Psi^{-1}(t) =$

$$\begin{cases} t & \text{sur } [0, a^{a_0}p_1] \\ a^{a_1 - a_0}t + (a+1)b_1 & \text{sur } [a^{a_0}p_1, a^{a_0}p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1} - a_0}t + (a+1)b_{n-1} & \text{sur } [a^{a_0}p_{n-1}, a^{a_0}p_n] \\ a^{-a_0}t + (a^2 - 1)b_n & \text{sur } [a^{a_0}p_n, a^{a_0}p(a+1)] \\ t + (a^2 - 1)b_n - p(a+1)(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [a^{a_0}p(a+1), +\infty[\end{cases}$$

Si par contre $a_0 < 0$, on fixe p entier tel que $(a+1)p > p'_n$ et on pose

$$\Psi(t) = \begin{cases} a^{-a_0}t & \text{sur } [0, (a+1)p] \\ t + p(a+1)(a^{-a_0} - 1) & \text{sur } [(a+1)p, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\Psi \in \overline{F}_a$ et $\Psi f(t) =$

$$\begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1 - a_0}t + a^{-a_0}(a+1)b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1} - a_0}t + a^{-a_0}(a+1)b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ a^{-a_0}t + a^{-a_0}(a^2 - 1)b_n & \text{sur } [p_n, (a+1)p - (a^2 - 1)b_n] \\ t + (a^2 - 1)b_n + p(a+1)(a^{-a_0} - 1) & \text{sur } [(a+1)p - (a^2 - 1)b_n, +\infty[\end{cases}$$

Si on note dans chacun des cas $T_1(f)$ l'application ainsi obtenue, on a donc :

Proposition 17 Si $f \in F_{a,a+1}$ il existe $T_1(f) \in F_{a,a+1}$ tel que :

- $T_1(f)$ est le produit de f par un élément de \overline{F}_a
- $T_1(f)$ est l'identité au voisinage de 0
- Les points de rupture de $T_1(f)$ sont ceux de f et un point, entier, plus grand que les précédents et divisible par $a+1$.
- En particulier $T_1(f)$ et f ont le même nombre de points de rupture non divisibles par $a+1$
- $T_1(f)$ et f ont le même nombre d'intervalles sur lesquels les parties de translation (les $(a+1)b_i$) ne sont pas divisibles par a^2-1

IV.1.3 Une deuxième transformation

Ici on va montrer que l'on peut se ramener au cas où tous les points de rupture sont entiers.

On fixe $\alpha \in \mathbb{N}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n \in \mathbb{N}$ tels que les points de rupture de f s'écrivent $\frac{p_i}{a^{2\alpha}} \cdot p'_i = f(p_i/a^{2\alpha})$, le reste des notations étant inchangé.

Soit f dans $F_{a,a+1}$ et p le plus petit entier positif tel que $(a+1)p + (a^2-1)b_n \geq p'_n$ et $(a+1)pa^{2\alpha} \geq p_n$.

On définit φ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} a^{-2\alpha}t & \text{sur } [0, (a+1)pa^{2\alpha}] \\ t + (a+1)p - (a+1)pa^{2\alpha} & \text{sur } [(a+1)pa^{2\alpha}, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\varphi \in \overline{F}_a \cap F_{a^2}$, et

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} a^{2\alpha}t & \text{sur } [0, (a+1)p] \\ t - (a+1)p + (a+1)pa^{2\alpha} & \text{sur } [(a+1)p, +\infty[\end{cases}$$

On a $f\varphi(t) =$

$$\begin{cases} a^{a_0-2\alpha}t & \text{de } [0, p_1] \text{ dans } [0, p'_1] \\ a^{a_1-2\alpha}t + (a+1)b_1 & \text{de } [p_1, p_2] \text{ dans } [p'_1, p'_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}-2\alpha}t + (a+1)b_{n-1} & \text{de } [p_{n-1}, p_n] \text{ dans } [p'_{n-1}, p'_n] \\ a^{-2\alpha}t + (a^2-1)b_n & \text{de } [p_n, (a+1)pa^{2\alpha}] \\ & \text{sur } [p'_n, p(a+1) + (a^2-1)b_n] \\ t - (a+1)p(a^{2\alpha}-1) + (a^2-1)b_n & \text{de } [(a+1)pa^{2\alpha}, +\infty[\\ & \text{sur } [p(a+1) + (a^2-1)b_n, +\infty[\end{cases}$$

Si $b_n \geq 0$ on a alors $\varphi^{-1}f\varphi(t) =$

$$\begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1}t + a^{2\alpha}(a+1)b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}}t + a^{2\alpha}(a+1)b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + a^{2\alpha}(a^2-1)b_n & \text{sur } [p_n, a^{2\alpha}((a+1)p - (a^2-1)b_n)] \\ a^{-2\alpha}t + (a+1)p(a^{2\alpha}-1) + (a^2-1)b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}(p(a+1) - (a^2-1)b_n), a^{2\alpha}p(a+1)] \\ t + (a^2-1)b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}(a+1)p, +\infty[\end{cases}$$

et si $b_n \leq 0$, $\varphi^{-1}f\varphi(t) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^{a_0 t} & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1 t} + a^{2\alpha}(a+1)b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1} t} + a^{2\alpha}(a+1)b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + a^{2\alpha}(a^2 - 1)b_n & \text{sur } [p_n, a^{2\alpha}((a+1)p)] \\ a^{2\alpha}t - p(a+1)(a^{2\alpha} - 1) + (a^2 - 1)b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}p(a+1), a^{2\alpha}(a+1)(p - (a-1)b_n)] \\ t + (a^2 - 1)b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}(p(a+1) - (a^2 - 1)b_n), +\infty[\end{array} \right.$$

On note $T_2(f)$ l'application $\varphi^{-1}f\varphi$. Alors :

Proposition 18 Si $f \in F_{a,a+1}$ il existe $T_2(f) \in F_{a,a+1}$ tel que :

- $T_2(f)$ est le conjugué de f par un élément de $\overline{F}_a \cap F_{a^2}$
- $T_2(f)$ a tous ses points de rupture entiers
- $T_2(f)$ a deux points de rupture de plus que f
- $T_2(f)$ et f ont le même nombre de points de rupture non divisibles par $a+1$, et ils sont rangés dans le même ordre, les deux points supplémentaires de $T(f)$ étant plus grands
- Au voisinage de 0 et de l'infini, f et $T_2(f)$ coïncident
- Entre leurs premiers et deuxièmes point de rupture (qui diffèrent d'un facteur $a^{2\alpha}$) f et $T_2(f)$ ont la même pente
- f et $T_2(f)$ ont le même nombre d'intervalles sur lesquels la partie de translation n'est pas divisible par $a^2 - 1$

IV.1.4 La démonstration

On note $T(f) = T_2(T_1(f))$. On a alors la :

Proposition 19 Si $f \in F_{a,a+1}$, $T(f) \in F_{a,a+1}$ est telle que :

- $T(f)$ est le produit de f par des éléments de \overline{F}_a
- Les points de rupture de $T(f)$ sont entiers
- $T(f)$ et f ont le même nombre de points de rupture non divisibles par $a+1$, et leurs premier point de rupture non divisible par $a+1$ ont le même ordre
- $T(f)$ est l'identité au voisinage de 0
- f et $T(f)$ ont le même nombre d'intervalles sur lesquels la partie de translation n'est pas divisible par $a^2 - 1$

On note $\chi_1(f)$ le nombre de points de rupture de f non divisibles par $a+1$, et $\chi_2(f)$ le nombre de points de rupture strictement inférieurs au premier point non divisible par $a+1$ (0 si $\chi_1(f) = 0$).

On pose enfin $\chi(f) = (\chi_1(f), \chi_2(f))$ et on ordonne $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par l'ordre lexicographique $[(a, b) \leq (c, d) \text{ si et seulement si } (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d)]$.

On remarque que si f a pour points de rupture p_1, \dots, p_n , $p'_i = f(p_i) = a^{a_i} p_i + (a+1)b_i$, donc p'_i est divisible par $a+1$ si et seulement si p_i l'est. Mais alors, les p'_i étant les points de rupture de f^{-1} et f étant croissante, $\chi(f^{-1}) = \chi(f)$.

Notons aussi que $\chi(T(f)) = \chi(f)$ car $\chi_1(T(f)) = \chi_1(f)$ et les points de rupture supplémentaires de $T(f)$ sont strictement supérieurs au dernier point de rupture de f , donc $\chi_2(T(f)) = \chi_2(f)$.

On va maintenant montrer la

Proposition 20 $F_{a,a+1}$ est engendré par F_{a^2} , \overline{F}_a et les $\varphi_{\alpha,l,l'}$, $\alpha, l, l' \in \mathbb{N}$, $l' > l$.

Démonstration:

On remarque que si $\chi(f) = (0,0)$, $f \in \overline{F}_a$.

Cela nous permet d'initialiser une récurrence sur $\chi(f)$: on fixe $f \in F_{a,a+1}$, on suppose que toute $g \in F_{a,a+1}$ telle que $\chi(g) < \chi(f)$ est un produit d'éléments de F_{a^2} , \overline{F}_a , des $\varphi_{\alpha,l,l'}$ et de leurs inverses, et on veut montrer que f a la même propriété.

On peut remplacer f par $T(f)$, c'est à dire supposer que f est à points de rupture entiers et vaut l'identité au voisinage de 0, grâce aux propriétés de T décrites plus haut.

On distingue deux cas selon p_1 , le premier point de rupture de f (qui est donc entier) :

Si $a+1$ divise p_1

Notons $\sigma(f) : t \rightarrow f(t+p_1) - p_1$, et

$$\tau(f) : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{si } t \leq p_1 \\ f(t-p_1) + p_1 & \text{si } t \geq p_1. \end{cases}$$

$\sigma(f)$ est dans $F_{a,a+1}$: en un point t tel que $f(t+p_1) = a^\alpha(t+p_1) + (a+1)\beta$, $\sigma(f)(t) = a^\alpha t + (a+1)\beta + (a^\alpha - 1)p_1 = a^\alpha t + (a+1)[\beta + (a^\alpha - 1)\frac{p_1}{a+1}]$, et les points de rupture de $\sigma(f)$ sont $p_2 - p_1, \dots, p_n - p_1$.

Ainsi, $\chi_1(\sigma(f)) = \chi_1(f)$, $\chi_2(\sigma(f)) = \chi_2(f) - 1$ et donc $\chi(\sigma(f)) < \chi(f)$; on peut ainsi écrire $\sigma(f) = \prod f_i$, f_i étant dans F_{a^2} , \overline{F}_a ou l'un des $\varphi_{\alpha,l,l'}$ ou $\varphi_{\alpha,l,l'}^{-1}$.

Alors $f = \tau(\sigma(f)) = \tau(\prod f_i) = \prod \tau(f_i)$, et un calcul analogue à celui effectué pour σ montre que si f_i est dans \overline{F}_a , F_{a^2} , ou est l'un des $\varphi_{\alpha,l,l'}$ ou $\varphi_{\alpha,l,l'}^{-1}$, $\tau(f_i)$ aussi.

On a donc bien écrit f sous la forme voulue.

Si p_1 n'est pas divisible par $a+1$: supposons tout d'abord a_1 positif.

On va là encore distinguer deux cas :

b_1 n'est pas divisible par $a-1$

On considère p_1 et p_k , le plus grand point de rupture tel que b_{k-1} ne soit pas divisible par $a-1$ (k existe car la partie de translation est $(a^2-1)b_n$ après p_n).

Écrivons la condition de continuité en p_1 : $p_1 = a^{a_1}p_1 + (a+1)b_1$ d'où $(a^{a_1} - 1)p_1 = -(a+1)b_1$. Si a_1 était pair, $a^2 - 1$ diviserait $(a+1)b_1$, donc $a-1$ diviserait b_1 : c'est absurde. Ainsi, a_1 est impair et on peut écrire $a_1 = 2a'_1 + 1$.

Modulo $a+1$ l'égalité devient alors $((-1)^{2a'_1+1} - 1)p_1 = -2p_1 = 0$, et donc $\frac{a+1}{2}$ divise p_1 : p_1 s'écrit $(a+1)l + \frac{a+1}{2} = p(l)$ pour un $l \in \mathbb{N}$.

On montre de même que $\frac{a+1}{2}$ divise p_k , et p_k s'écrit $p(l')$ pour un $l' \in \mathbb{N}$.

On considère $\varphi_{a'_1,l,l'}$:

$$\varphi_{a'_1,l,l'}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1 = p(l)] \\ a^{a_1}t - (a^{a_1} - 1)p_1 = a^{a_1}t + (a+1)b_1 & \text{sur } [p_1, p_k = p(l')] \\ t + (a^{a_1} - 1)(a+1)(l' - l) & \text{sur } [p_k, +\infty[\end{cases}$$

On a alors $\varphi_{a_1, l, l'} f^{-1}(t) =$

$$\begin{cases} t & \text{sur } [0, p'_2] \\ a^{a_1 - a_2} t - a^{a_1 - a_2} (a + 1) b_2 + (a + 1) b_1 & \text{sur } [p'_2, p'_3] \\ \dots & \\ a^{a_1 - a_{k-1}} t - a^{a_1 - a_{k-1}} (a + 1) b_{k-1} + (a + 1) b_1 & \text{sur } [p'_{k-1}, p'_k] \\ a^{-a_k} t - a^{-a_k} (a + 1) b_k + (a^{a_1} - 1)(a + 1)(l' - l) & \text{sur } [p'_k, p'_{k+1}] \\ \dots & \\ a^{-a_{n-1}} t - a^{-a_{n-1}} (a + 1) b_{n-1} + (a^{a_1} - 1)(a + 1)(l' - l) & \text{sur } [p'_{n-1}, p'_n] \\ t - (a^2 - 1) b_n + (a^{a_1} - 1)(a + 1)(l' - l) & \text{sur } [p'_n, +\infty[\end{cases}$$

Mais alors, $\varphi_{a_1, l, l'} f^{-1}$ et donc $f \varphi_{a_1, l, l'}^{-1}$ a un point de rupture divisible par $a + 1$ de moins que f : $\chi_1(f \varphi_{a_1, l, l'}^{-1}) = \chi_1(f) - 1$, donc $\chi(f \varphi_{a_1, l, l'}^{-1}) < \chi_1(f)$ et on peut écrire grâce à l'hypothèse de récurrence $f \varphi_{a_1, l, l'}^{-1}$ et donc f sous la forme voulue.

b_1 est divisible par $a - 1$. On écrit alors $b_1 = (a - 1) b'_1$.

On montre que a_1 est pair et b'_1 entier : par continuité en p_1 ,

$$(a^2 - 1) b'_1 = (1 - a^{a_1}) p_1 = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{a_1 - 1}) p_1,$$

et en simplifiant par $a - 1$:

$$(a + 1) b'_1 = -(1 + a + a^2 + \dots + a^{a_1 - 1}) p_1.$$

En écrivant b'_1 sous la forme $\frac{u}{a^v}$, en multipliant cette égalité par a^v puis en réduisant modulo $a + 1$, on obtient finalement

$$0 = (-1)^v (1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{a_1 - 1}) [p_1],$$

ce qui n'est possible, $[p_1]$ étant non nul, que si a_1 est pair.

Maintenant, a_1 étant pair, l'égalité initiale nous dit que $b'_1 = -\frac{a^{a_1} - 1}{a^2 - 1} p_1$ est entier.

$$\text{Définissons } \pi(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1} t + (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ t + (a^{a_1} - 1) p_2 + (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_2, +\infty[\end{cases}$$

$$\pi \text{ est dans } F_{a^2} \text{ et } \pi^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{-a_1} (t - (a^2 - 1) b'_1) & \text{sur } [p_1, p_2] \\ t - (a^{a_1} - 1) p_2 - (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_2, +\infty[\end{cases}$$

On a alors

$$\pi^{-1} f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_2] \\ a^{a_2} t + (a + 1) b_2 - (a^{a_1} - 1) p_2 - (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_2, p_3] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}} t + (a + 1) b_{n-1} - (a^{a_1} - 1) p_2 - (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + (a^2 - 1) b_n - (a^{a_1} - 1) p_2 - (a^2 - 1) b'_1 & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\chi_1(\pi^{-1} f) = \chi_1(f) - 1$, donc $\chi(\pi^{-1} f) < \chi_1(f)$ et on peut écrire grâce à l'hypothèse de récurrence $\pi^{-1} f$ et donc f sous la forme voulue.

Si a_1 est négatif, on applique ce qui précède à $T(f^{-1})$: $\chi(T(f^{-1})) = \chi(f)$, et $T(f^{-1})$ vaut l'identité au voisinage de 0, est à points de rupture entiers et sa deuxième pente (son ' a_1 ') est positif. Mais si $T(f^{-1})$ est un produit d'éléments de $F_{a^2}, \overline{F}_a, \varphi_{\alpha, l, l'}$ et leurs inverses, c'est aussi le cas pour f^{-1} et donc pour f . ■

Remarque 1 : Cette démonstration peut se simplifier pour montrer que le groupe engendré par F_{a^2} et \overline{F}_a est le sous-groupe de $F_{a, a+1}$ des éléments dont toutes les parties de translation sont de la forme $(a^2 - 1)b$ avec $b \in \mathbb{Z}[1/a]$.

Remarque 2 : dans le cas où a est pair (qui ne nous intéresse pas ici), $F_{a,a+1}$ est engendré par F_{a^2} et \overline{F}_a (les parties de translation sont nécessairement de la forme $(a^2 - 1)b$ avec $b \in \mathbb{Z}[1/a]$), car dans ce cas toutes les parties de translation sont divisibles par $a^2 - 1$.

IV.1.5 Étude des $\varphi_{\alpha,l,l'}$

On rappelle que si l est entier, $p(l) = (a + 1)l + \frac{a+1}{2}$, et que $\varphi_{\alpha,l,l'}(t)$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} t & \text{de } [0, p(l)] \text{ sur } [0, p(l)] \\ a^{2\alpha+1}t - (a^{2\alpha+1} - 1)p(l) & \text{de } [p(l), p(l')] \\ & \text{sur } [p(l), p(l + a^{2\alpha+1}(l' - l))] \\ t + (a^{2\alpha+1} - 1)(a + 1)(l' - l) & \text{de } [p(l'), \infty[\text{ sur } [p(l + a^{2\alpha+1}(l' - l)), \infty[\end{array} \right.$$

On vérifie facilement que, pour $l' > l$, $\varphi_{\alpha,0,l'}^{-1}\varphi_{\alpha,0,l} = \varphi_{\alpha,l,l'}$. Ainsi, il suffit d'étudier les $\varphi_{\alpha,0,l}$. Mais $\varphi_{0,0,a^{2\alpha+1}l}\varphi_{\alpha,0,l}$ est l'application qui à t associe

$$\left\{ \begin{array}{ll} t & \text{sur } [0, p(0)] \\ a^{2\alpha+2}t - \frac{a^2-1}{2}(1 + a + \dots + a^{2\alpha+1}) & \text{sur } [p(0), p(l)] \\ t + (a + 1)(a^{2\alpha+2} - 1)l & \text{sur } [p(l), \infty[\end{array} \right. ,$$

et on constate que, $1 + a + \dots + a^{2\alpha+1}$ étant pair (a est impair !), toutes les parties de translation des morceaux affines sont multiples de $a^2 - 1$, et $\varphi_{0,0,a^{2\alpha+1}l}\varphi_{\alpha,0,l}$ est en fait dans F_{a^2} .

Posons alors

$$f_l(t) = \varphi_{0,0,l}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t & \text{de } [0, \frac{a+1}{2}] \text{ sur } [0, \frac{a+1}{2}] \\ at - \frac{a^2-1}{2} & \text{de } [\frac{a+1}{2}, p(l)] \text{ sur } [\frac{a+1}{2}, p(al)] \\ t + (a^2 - 1)l & \text{de } [p(l), \infty[\text{ sur } [p(al), \infty[\end{array} \right.$$

De ce qui précède on peut donc conclure que $F_{a,a+1}$ est engendré par \overline{F}_a , F_{a^2} et les f_l , $l \in \mathbb{N}$; on va maintenant montrer qu'un nombre fini de f_l suffisent, plus précisément :

Proposition 21 $\overline{F}_a, F_{a^2}, f_1, f_2, \dots, f_{(a-1)/2}$ engendrent le groupe $F_{a,a+1}$.

Démonstration:

Il suffit de remarquer que si $g \in \langle F_{a^2}, \overline{F}_a \rangle$ vérifie $g(p(0)) = p(0)$ et $g(p(i)) = p(j)$, alors $f_j g f_i^{-1}$ est dans $\langle F_{a^2}, \overline{F}_a \rangle$, et donc f_i, F_{a^2} et \overline{F}_a permettent de retrouver f_j .

En effet, pour calculer cet élément on a les compositions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} & f_i^{-1} & & g & & f_j & & \\ [0, p(0)] & \xrightarrow{t} & [0, p(0)] & \xrightarrow{g} & [0, p(0)] & \xrightarrow{t} & [0, p(0)] \\ [p(0), p(ai)] & \xrightarrow{(t+(a^2-1)/2)/a} & [p(0), p(i)] & \xrightarrow{g} & [p(0), p(j)] & \xrightarrow{at-(a^2-1)/2} & [p(0), p(aj)] \\ [p(ai), \infty[& \xrightarrow{t-(a^2-1)i} & [p(i), \infty[& \xrightarrow{g} & [p(j), \infty[& \xrightarrow{t+(a^2-1)j} & [p(aj), \infty[\end{array}$$

Grâce à la remarque 1 de la partie précédente il suffit de prouver que les parties de translation des expressions affines de cet élément sont des multiples de $a^2 - 1$.

On s'intéresse à la partie de translation de chaque formule affine ; sur la première et la dernière lignes, chacune des trois fonctions fait apparaître des multiples de $a^2 - 1$ et donc la composée l'est aussi.

C'est la deuxième ligne qu'il faut étudier plus en détail ; sur un intervalle où g est affine, $g(x) = \alpha x + \beta$, on a

$$\begin{aligned} (f_j g f_i^{-1})(t) &= a(\alpha((t + (a^2 - 1)/2)/a) + \beta) - (a^2 - 1)/2 \\ &= \alpha t + a\beta, \end{aligned}$$

et donc, β étant toujours multiple de $a^2 - 1$ pour $g \in \langle F_{a^2}, \bar{F}_a \rangle$, le résultat serait prouvé.

Reste à fabriquer une telle famille de g permettant, avec \bar{F}_a , F_{a^2} et un nombre fini de f_i , de reconstituer tous les f_i .

Définissons g_i pour i entier strictement positif par

$$g_i(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, (a+1)i] \\ at - (a^2 - 1)i & \text{sur } [(a+1)i, (a+1)(i+1)] \\ t + (a^2 - 1) & \text{sur } [(a+1)(i+1), \infty[\end{cases}$$

Alors $g_i(p(0)) = p(0)$ et

$$\begin{aligned} g(p(i)) &= a[(a+1)i + \frac{a+1}{2}] - (a^2 - 1)i \\ &= (a+1)i + a\frac{a+1}{2} \\ &= (a+1)i + (a-1+1)\frac{a+1}{2} \\ &= (a+1)i + (a+1)(\frac{a-1}{2}) + \frac{a+1}{2} \\ &= (a+1)(i + \frac{a-1}{2}) + \frac{a+1}{2} \\ &= p(i + \frac{a-1}{2}) \end{aligned}$$

Les g_i étant dans $\langle \bar{F}_a, F_{a^2} \rangle$, cela prouve que f_1 engendre, avec \bar{F}_a et F_{a^2} , tous les $f_{1+k\frac{a-1}{2}}$, et de même f_i engendre tous les $f_{i+k\frac{a-1}{2}}$. Par conséquent, $f_1, f_2, \dots, f_{\frac{a-1}{2}}$ et \bar{F}_a et F_{a^2} engendrent tous les f_i , donc tout le groupe $F_{a,a+1}$. ■

IV.1.6 Conclusion

\bar{F}_a est engendré par les

$$y_i : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{si } t \leq (a+1)i \\ at - (a^2 - 1)i & \text{si } (a+1)i \leq t \leq (a+1)(i+1) \\ t + (a^2 - 1) & \text{si } t \geq (a+1)(i+1) \end{cases},$$

pour $i = 0, 1, \dots, a-1$.

F_{a^2} est engendré par les

$$z_i : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{si } t \leq i \\ a^2 t - (a^2 - 1)i & \text{si } i \leq t \leq i+1 \\ t + (a^2 - 1) & \text{si } t \geq i+1 \end{cases},$$

pour $i = 0, 1, \dots, a^2 - 1$.

Par conséquent, $F_{a,a+1}$ est de type fini, et un système générateur est $y_0, y_1, \dots, y_{a-1}, z_0, z_1, \dots, z_{a^2-1}, f_1, f_2, \dots, f_{\frac{a-1}{2}}$.

IV.2 F_Γ est de type fini

Fixons Γ de genre 0 ; soit $n = v(\Gamma)$. Alors F_Γ est isomorphe à $F_{2n-3, 2n-2}^{[0,1]}$, lui-même isomorphe à $F_{2n-3, 2n-2}^\infty$.

Et on vient de montrer que $F_{2n-3, 2n-2}^\infty$ est de type fini, et que l'on peut trouver un système générateur ayant $(2n-3) + (2n-3)^2 + n - 2 = 4n^2 - 9n + 4$ générateurs.

On a donc prouvé le

Théorème A Si Γ est de genre 0, F_Γ est de type fini.

Chapitre V

Présentations de F_Γ

Dans ce chapitre, après avoir donné la définition du groupe $H_{a,a+1}$ qui sera l'objet de notre étude, nous commencerons par l'étude du cas particulier $a = 3$ (ce qui correspond à l'étude de la présentation du groupe $F_{\Gamma(2)}$), avant de traiter le cas général. Les exemples et dessins seront aussi donnés pour ce groupe particulier. Cela permet de comprendre les idées, qui sont identiques pour toutes les valeurs de a , en limitant autant que possible les difficultés techniques, et aussi de démontrer dans ce cas $a = 3$ un résultat un peu plus fort concernant la présentation du groupe $H_{a,a+1}$.

V.1 Le groupe $H_{a,a+1}$

Nous avons montré dans ce qui précède que F_Γ est de type fini ; nous voulons maintenant étudier, toujours via sa linéarisation $F_{a,a+1}$, la question de sa présentation finie.

Il est malcommode de trouver directement une présentation élégante de $F_{a,a+1}$; nous commençons donc par étudier un groupe $H_{a,a+1}$, dans lequel $F_{a,a+1}$ est d'indice 2 et dont on sait expliciter une présentation (infinie) régulière, qui se ramène ensuite à une présentation finie.

V.1.1 Définition de $H_{a,a+1}$

Commençons par donner une nouvelle description de $F_{a,a+1}$:

Proposition 22 *Pour a entier impair supérieur ou égal à 3, $F_{a,a+1}$ est le groupe des applications affines par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec points de rupture (en nombre fini) dans $\mathbb{Z}[1/a]$, qui sont de la forme $x \rightarrow a^\alpha x + \frac{a^2-1}{2} \frac{p}{a^q}$ sur chaque intervalle où elles sont affines, et valent $x + (a^2 - 1)b$ à l'infini, b entier.*

Démonstration:

Supposons que, autour d'un point de rupture u/a^v , un élément de $F_{a,a+1}$ vaille $x \mapsto a^n x + \frac{a^2-1}{2} \frac{p}{a^q}$ à gauche et $x \mapsto a^{n'} x + (a+1) \frac{p'}{a^q}$ à droite. Alors en calculant la valeur de la fonction en u/a^v , on obtient

$$(a^n - a^{n'}) \frac{u}{a^v} = (a+1) \frac{p'}{a^q} - \frac{a^2-1}{2} \frac{p}{a^q}.$$

En multipliant toute l'expression par $a^{\max(v,q)}$ puis en réduisant modulo $a-1$ ($a \equiv 1 \pmod{a-1}$), on en déduit que $2p' = (a+1)p' = 0 \pmod{a-1}$. Ainsi $a-1$ divise $2p'$, donc $\frac{a-1}{2}$ divise p' et donc $(a+1) \frac{p'}{a^q}$ est de la forme $\frac{a^2-1}{2} \frac{p''}{a^q}$.

Il est alors aisé de conclure, en montrant de proche en proche à partir de l'intervalle $[0, p_1]$ sur lequel la partie de translation est nulle (donc de la forme $\frac{a^2-1}{2} \frac{p}{a^q}$), que sur chaque intervalle maximal où l'application est affine, elle est bien de la forme désirée. ■

Cette nouvelle définition de $F_{a,a+1}$ nous incite à introduire le groupe $H_{a,a+1}$:

Définition 6 Pour a entier impair supérieur ou égal à 3, $H_{a,a+1}$ est le groupe des applications affines par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec points de rupture (en nombre fini) dans $\mathbb{Z}[1/a]$, qui sont de la forme $x \rightarrow a^\alpha x + \frac{a^2-1}{2} \frac{p}{a^q}$ sur chaque intervalle où elle sont affines, et valent $x + \frac{a^2-1}{2} b$ à l'infini, b entier.

$F_{a,a+1}$ est le noyau de l'application de $H_{a,a+1}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui à une fonction valant $x + \frac{a^2-1}{2} b$ à l'infini associe b modulo 2.

$F_{a,a+1}$ est donc un sous-groupe d'indice 2 de $H_{a,a+1}$, et par conséquent les groupes seront ou ne seront pas simultanément de présentation finie : on peut donc se contenter d'étudier $H_{a,a+1}$.

V.1.2 Génération de $H_{a,a+1}$

Avec quelques modifications mineures, la démonstration de la proposition 20 concernant le groupe $F_{a,a+1}$ permet de prouver pour $H_{a,a+1}$ un résultat analogue :

Proposition 23 $H_{a,a+1}$ est engendré par le sous-groupe F_{a^2} des applications dont les pentes sont des puissances de a^2 , et le sous-groupe \overline{F}_a des applications ayant leurs points de rupture dans $\frac{a+1}{2}\mathbb{Z}[1/a]$, groupe isomorphe par la conjugaison $x \rightarrow \frac{a+1}{2}x$ au groupe de Thompson classique F_a .

(par commodité on conserve la notation \overline{F}_a , bien que ce ne soit pas le même groupe que dans l'énoncé de la proposition 20)

On adopte les notations suivantes pour désigner un élément f de $H_{a,a+1}$: il existe $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n \in \mathbb{Z}[1/a]$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}[1/a]$, $b_n \in \mathbb{Z}$, tels que

$$f(t) = \begin{cases} a^{a_0} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1} t + \frac{a^2-1}{2} b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}} t + \frac{a^2-1}{2} b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + \frac{a^2-1}{2} b_n & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}$$

On pose $p'_i = f(p_i)$.

Proposition 24 Si $f \in H_{a,a+1}$, il existe une application $T(f) \in H_{a,a+1}$ telle que :

- $T(f)$ est le produit de f par des éléments de \overline{F}_a
- Les points de rupture de $T(f)$ sont entiers
- $T(f)$ et f ont le même nombre de points de rupture non divisibles par $\frac{a+1}{2}$, et leurs premier point de rupture non divisible par $\frac{a+1}{2}$ ont le même ordre
- $T(f)$ est l'identité au voisinage de 0

Démonstration:

On commence par associer d'abord à toute $f \in H_{a,a+1}$ une application $T_1(f)$ valant l'identité au voisinage de 0.

Si f vérifie $a_0 > 0$, on fixe p le plus petit entier positif tel que $\frac{a+1}{2}p \geq p_n$ et on pose

$$\Psi(t) = \begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p\frac{a+1}{2}] \\ t + p\frac{a+1}{2}(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [p\frac{a+1}{2}, +\infty[. \end{cases}$$

$$\text{Alors } \Psi \in \overline{F}_a, \Psi^{-1}(t) = \begin{cases} a^{-a_0}t & \text{sur } [0, p\frac{a+1}{2}a^{a_0}] \\ t - p\frac{a+1}{2}(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [p\frac{a+1}{2}a^{a_0}, +\infty[. \end{cases}$$

Un petit calcul donne :

$$f\Psi^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, a^{a_0}p_1] \\ a^{a_1-a_0}t + \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [a^{a_0}p_1, a^{a_0}p_2] \\ \dots \\ a^{a_{n-1}-a_0}t + \frac{a^2-1}{2}b_{n-1} & \text{sur } [a^{a_0}p_{n-1}, a^{a_0}p_n] \\ a^{-a_0}t + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [a^{a_0}p_n, a^{a_0}p\frac{a+1}{2}] \\ t + \frac{a^2-1}{2}b_n - p\frac{a+1}{2}(a^{a_0} - 1) & \text{sur } [a^{a_0}p\frac{a+1}{2}, +\infty[\end{cases}$$

Si par contre $a_0 < 0$, on fixe p entier tel que $\frac{a+1}{2}p > p'_n$ et on pose

$$\Psi(t) = \begin{cases} a^{-a_0}t & \text{sur } [0, \frac{a+1}{2}p] \\ t + p\frac{a+1}{2}(a^{-a_0} - 1) & \text{sur } [\frac{a+1}{2}p, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\Psi \in \overline{F}_a$ et

$$\Psi f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1-a_0}t + a^{-a_0}\frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots \\ a^{a_{n-1}-a_0}t + a^{-a_0}\frac{a^2-1}{2}b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ a^{-a_0}t + a^{-a_0}\frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [p_n, \frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n] \\ t + \frac{a^2-1}{2}b_n + p\frac{a+1}{2}(a^{-a_0} - 1) & \text{sur } [\frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n, +\infty[\end{cases}$$

On note dans chacun des cas $T_1(f)$ l'application ainsi obtenue.

Si f est dans $H_{a,a+1}$, on définit $T_2(f)$ à points de rupture entiers : on fixe $\alpha \in \mathbb{N}$, $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}$ tels que les points de rupture de f s'écrivent $\frac{p_i}{a^{2\alpha}}$. $p'_i = f(p_i/a^{2\alpha})$, le reste des notations étant inchangé.

On prend p le plus petit entier positif tel que $\frac{a+1}{2}p + \frac{a^2-1}{2}b_n \geq p'_n$ et $\frac{a+1}{2}pa^{2\alpha} \geq p_n$, et on définit ϕ par

$$\phi(t) = \begin{cases} a^{-2\alpha}t & \text{sur } [0, \frac{a+1}{2}pa^{2\alpha}] \\ t + \frac{a+1}{2}p - \frac{a+1}{2}pa^{2\alpha} & \text{sur } [\frac{a+1}{2}pa^{2\alpha}, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\phi \in \overline{F}_a \cap F_{a^2}$, et

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} a^{2\alpha}t & \text{sur } [0, \frac{a+1}{2}p] \\ t - \frac{a+1}{2}p + \frac{a+1}{2}pa^{2\alpha} & \text{sur } [\frac{a+1}{2}p, +\infty[\end{cases}$$

On a $f\phi(t) =$

$$\begin{cases} a^{a_0-2\alpha}t & \text{de } [0, p_1] \text{ dans } [0, p'_1] \\ a^{a_1-2\alpha}t + \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{de } [p_1, p_2] \text{ dans } [p'_1, p'_2] \\ \dots \\ a^{a_{n-1}-2\alpha}t + \frac{a^2-1}{2}b_{n-1} & \text{de } [p_{n-1}, p_n] \text{ dans } [p'_{n-1}, p'_n] \\ a^{-2\alpha}t + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{de } [p_n, \frac{a+1}{2}pa^{2\alpha}] \text{ sur } [p'_n, p\frac{a+1}{2} + \frac{a^2-1}{2}b_n] \\ t - \frac{a+1}{2}p(a^{2\alpha} - 1) + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{de } [\frac{a+1}{2}pa^{2\alpha}, +\infty[\\ & \text{sur } [p\frac{a+1}{2} + \frac{a^2-1}{2}b_n, +\infty[\end{cases}$$

Si $b_n \geq 0$ on a alors $\varphi^{-1}f\varphi(t) =$

$$\begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1}t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}}t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_n & \text{sur } [p_n, a^{2\alpha}(\frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n)] \\ a^{-2\alpha}t + \frac{a+1}{2}p(a^{2\alpha} - 1) + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}(\frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n), a^{2\alpha} \frac{a+1}{2}p] \\ t + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [a^{2\alpha} \frac{a+1}{2}p, +\infty[\end{cases}$$

et si $b_n \leq 0$, $\varphi^{-1}f\varphi(t) =$

$$\begin{cases} a^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1}t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}}t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + a^{2\alpha} \frac{a^2-1}{2} b_n & \text{sur } [p_n, a^{2\alpha}(\frac{a+1}{2}p)] \\ a^{2\alpha}t - \frac{a+1}{2}p(a^{2\alpha} - 1) + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [a^{2\alpha} \frac{a+1}{2}p, a^{2\alpha}(\frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n)] \\ t + \frac{a^2-1}{2}b_n & \text{sur } [a^{2\alpha}(\frac{a+1}{2}p - \frac{a^2-1}{2}b_n), +\infty[\end{cases}$$

On note $T_2(f)$ l'application $\varphi^{-1}f\varphi$.

Alors $T(f) = T_2(T_1(f))$ a les propriétés voulues. ■

On note $\chi_1(f)$ le nombre de points de rupture de f non divisibles par $\frac{a+1}{2}$, et $\chi_2(f)$ le nombre de points de rupture strictement inférieurs au premier point non divisible par $\frac{a+1}{2}$ (0 si $\chi_1(f) = 0$).

On pose enfin $\chi(f) = (\chi_1(f), \chi_2(f))$ et on ordonne $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par l'ordre lexicographique $[(a, b) \leq (c, d) \text{ si et seulement si } (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d)]$.

On remarque que si f a pour points de rupture p_1, \dots, p_n , $p'_i = f(p_i) = a^{a_i}p_i + \frac{a^2-1}{2}b_i$, donc p'_i est divisible par $\frac{a+1}{2}$ si et seulement si p_i l'est. Mais alors, les p'_i étant les points de rupture de f^{-1} et f étant croissante, $\chi(f^{-1}) = \chi(f)$.

Notons aussi que $\chi(T(f)) = \chi(f)$ car $\chi_1(T(f)) = \chi_1(f)$ et les points de rupture supplémentaires de $T(f)$ sont strictement supérieurs au dernier point de rupture de f , donc $\chi_2(T(f)) = \chi_2(f)$.

On peut maintenant prouver la proposition 23 :

On remarque que si $\chi(f) = (0, 0)$, $f \in \overline{F}_a$.

Cela nous permet d'initialiser une récurrence sur $\chi(f)$: on fixe $f \in H_{a, a+1}$, on suppose que toute $g \in H_{a, a+1}$ telle que $\chi(g) < \chi(f)$ est un produit d'éléments de F_{a^2} et \overline{F}_a , et on veut montrer que f a la même propriété.

On peut remplacer f par $T(f)$, c'est à dire supposer que f est à points de rupture entiers et vaut l'identité au voisinage de 0, grâce aux propriétés de T décrites plus haut.

On distingue deux cas selon p_1 , le premier point de rupture de f (qui est donc entier) :

Si $\frac{a+1}{2}$ divise p_1

Notons $\sigma(f) : t \rightarrow f(t + p_1) - p_1$, et

$$\tau(f) : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{si } t \leq p_1 \\ f(t - p_1) + p_1 & \text{si } t \geq p_1. \end{cases}$$

$\sigma(f)$ est dans $H_{a,a+1}$: en un point t tel que $f(t + p_1) = a^\alpha(t + p_1) + \frac{a^2-1}{2}\beta$, $\sigma(f)(t) = a^\alpha t + \frac{a^2-1}{2}\beta + (a^\alpha - 1)p_1 = a^\alpha t + \frac{a^2-1}{2}[\beta + \frac{a^\alpha-1}{a-1} \frac{2p_1}{a+1}]$, et les points de rupture de $\sigma(f)$ sont $p_2 - p_1, \dots, p_n - p_1$.

Ainsi, $\chi_1(\sigma(f)) = \chi_1(f)$, $\chi_2(\sigma(f)) = \chi_2(f) - 1$ et donc $\chi(\sigma(f)) < \chi(f)$; on peut ainsi écrire $\sigma(f) = \prod f_i$, f_i étant dans F_{a^2} ou \overline{F}_a .

Alors $f = \tau(\sigma(f)) = \tau(\prod f_i) = \prod \tau(f_i)$, et un calcul analogue à celui effectué pour σ montre que si f_i est dans \overline{F}_a ou F_{a^2} , $\tau(f_i)$ aussi.

On a donc bien écrit f sous la forme voulue.

Si p_1 n'est pas divisible par $\frac{a+1}{2}$: supposons tout d'abord a_1 positif.

On montre que a_1 est pair et $b_1/2$ entier : par continuité en p_1 ,

$$\frac{a^2-1}{2}b_1 = (1 - a^{a_1})p_1 = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{a_1-1})p_1,$$

et en simplifiant par $a - 1$:

$$\frac{a+1}{2}b_1 = -(1 + a + a^2 + \dots + a^{a_1-1})p_1.$$

En écrivant b_1 sous la forme $\frac{u}{a^v}$, en multipliant cette égalité par $2a^v$ puis en réduisant modulo $a + 1$, on obtient finalement

$$0 = (-1)^v(1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{a_1-1})[2p_1],$$

ce qui n'est possible, $[2p_1]$ étant non nul, que si a_1 est pair.

Maintenant, a_1 étant pair, l'égalité initiale nous dit que $b_1/2 = -\frac{a^{a_1}-1}{a^2-1}p_1$ est entier.

$$\text{Définissons } \pi(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{a_1}t + \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ t + (a^{a_1} - 1)p_2 + \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_2, +\infty[\end{cases}$$

$$\pi \text{ est dans } F_{a^2} \text{ et } \pi^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ a^{-a_1}(t - \frac{a^2-1}{2}b_1) & \text{sur } [p_1, p_2'] \\ t - (a^{a_1} - 1)p_2 - \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_2', +\infty[\end{cases}$$

On a alors

$$\pi^{-1}f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_2] \\ a^{a_2}t + \frac{a^2-1}{2}b_2 - (a^{a_1} - 1)p_2 - \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_2, p_3] \\ \dots & \\ a^{a_{n-1}}t + \frac{a^2-1}{2}b_{n-1} - (a^{a_1} - 1)p_2 - \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + \frac{a^2-1}{2}b_n - (a^{a_1} - 1)p_2 - \frac{a^2-1}{2}b_1 & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\chi_1(\pi^{-1}f) = \chi_1(f) - 1$, donc $\chi(\pi^{-1}f) < \chi_1(f)$ et on peut écrire grâce à l'hypothèse de récurrence $\pi^{-1}f$ et donc f sous la forme voulue.

Si a_1 est négatif, on applique ce qui précède à $T(f^{-1}) : \chi(T(f^{-1})) = \chi(f)$, et $T(f^{-1})$ vaut l'identité au voisinage de 0, est à points de rupture entiers et sa deuxième pente (son 'a1') est positif. Mais si $T(f^{-1})$ est un produit d'éléments de F_{a^2} et \overline{F}_a , c'est aussi le cas pour f^{-1} et donc pour f .

On vient ainsi de montrer que tout élément du groupe $H_{a,a+1}$ pouvait s'écrire comme une composée d'éléments de F_{a^2} et d'éléments de \overline{F}_a , et donc que le groupe $H_{a,a+1}$ est engendré par ses deux sous-groupes F_{a^2} et \overline{F}_a .

V.1.3 Une description forestière de $H_{a,a+1}$

On notera dans tout ce qui suit $A = \frac{a+1}{2}$.

On a montré au chapitre I que les applications

$$y_{Ai} : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{sur } [0, \frac{a+1}{2}i] \\ at - \frac{a^2-1}{2}i & \text{sur } [\frac{a+1}{2}i, \frac{a+1}{2}(i+1)] \\ t + \frac{a^2-1}{2} & \text{sur } [\frac{a+1}{2}(i+1), \infty[\end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

engendrent \overline{F}_a , et que les

$$z_k : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{sur } [0, k] \\ a^2t - (a^2-1)k & \text{sur } [k, k+1] \\ t + a^2 - 1 & \text{sur } [k+1, \infty[\end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

engendrent F_{a^2} .

Par conséquent, les y_{Ai} et les z_k engendrent $H_{a,a+1}$.

Définition 7 Pour f dans $H_{a,a+1}$, $f \circ y_{Ai}^{-1}$ et $f \circ z_k^{-1}$ sont appelées expansions élémentaires de f .

Une expansion de f est une suite d'expansions élémentaires appliquées successivement à f .

Considérons une application $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Alors

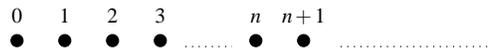
$$f \circ y_{Ai}^{-1} : \begin{cases} [0, \frac{a+1}{2}i] & \xrightarrow{Id} & [0, \frac{a+1}{2}i] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [\frac{a+1}{2}i, \frac{a+1}{2}(i+a)] & \xrightarrow{/a} & [\frac{a+1}{2}i, \frac{a+1}{2}(i+1)] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [\frac{a+1}{2}(i+a), \infty[& \xrightarrow{-(a^2-1)/2} & [\frac{a+1}{2}(i+1), \infty[& \xrightarrow{f} & \dots \end{cases}$$

et

$$f \circ z_k^{-1} : \begin{cases} [0, k] & \xrightarrow{Id} & [0, k] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [k, k+a^2] & \xrightarrow{/a^2} & [k, k+1] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [k+a^2, \infty[& \xrightarrow{-(a^2-1)} & [k+1, \infty[& \xrightarrow{f} & \dots \end{cases}$$

On constate que l'expansion par z_k^{-1} remplace à la source de f l'intervalle $[k, k + 1]$ par les intervalles $[k, k + 1], \dots, [k + a^2 - 1, k + a^2]$, et que l'expansion par y_{Ai}^{-1} remplace les $\frac{a+1}{2}$ intervalles $[\frac{a+1}{2}i, \frac{a+1}{2}i + 1], [\frac{a+1}{2}i + 1, \frac{a+1}{2}i + 2], \dots, [\frac{a+1}{2}(i + 1) - 1, \frac{a+1}{2}(i + 1)]$ par les $a\frac{a+1}{2}$ intervalles $[\frac{a+1}{2}i, \frac{a+1}{2}i + 1], [\frac{a+1}{2}i + 1, \frac{a+1}{2}i + 2], \dots, [\frac{a+1}{2}i + a\frac{a+1}{2} - 1, \frac{a+1}{2}i + a\frac{a+1}{2}]$.

Une application f étant fixée, on peut représenter chacune de ses expansions par une forêt, qui va correspondre à la manière dont on subdivise les intervalles sources de f : pour représenter f elle-même, on prend la forêt triviale F_0 constituée d'une infinité d'arbres réduits à une feuille, indexés par \mathbb{N} ; on ordonne les feuilles de gauche à droite, l'ordre de la feuille la plus à gauche étant 0.



On appellera p -bouquet un arbre qui a un sommet de valence p et p sommets de valence 1.



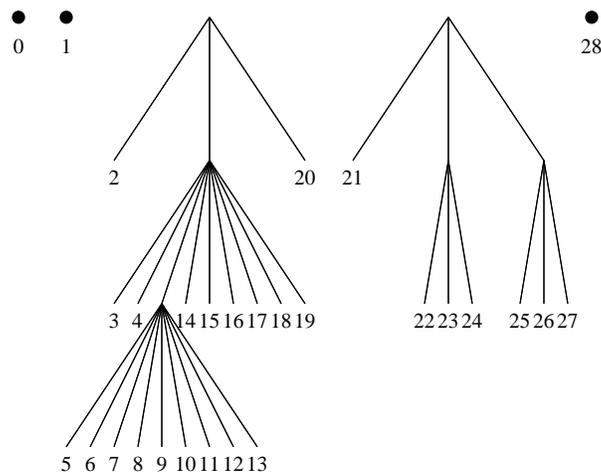
Par exemple un 3-bouquet : , un 9-bouquet : .

Pour chaque z_k^{-1} on colle sur la k -ième feuille par un a^2 -bouquet (en identifiant la feuille et le sommet de valence a^2 du a^2 -bouquet) ;

Pour chaque y_{Ai}^{-1} on colle de même sur chacune des feuilles d'ordre $Ai, Ai + 1, \dots, A(i + 1) - 1$ un a -bouquet.

Et pour une expansion quelconque, produit d'expansions élémentaires, on répète les opérations précédentes en prenant les expansions élémentaires successives de gauche à droite.

Par exemple, pour $a = 3$, à l'expansion $y_2^{-1}z_3^{-1}z_5^{-1}y_{22}^{-1}$ de Id correspond la forêt (on précise l'ordre de chaque feuille) :

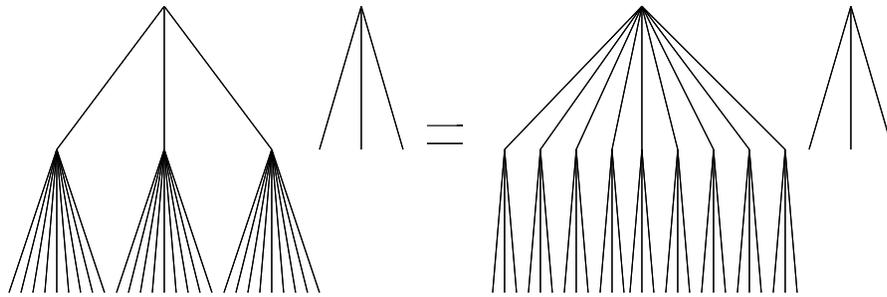


On peut interpréter les forêts obtenues comme des applications, mais aussi comme une subdivision des intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$, \dots , $[n, n+1]$, \dots , la composition par z_k^{-1} correspondant à diviser en a^2 parties égales le k -ième intervalle, et la composition par y_{Ai}^{-1} à subdiviser en a parties égales chacun des intervalles d'ordre $\frac{a+1}{2}i$, $\frac{a+1}{2}i+1, \dots, \frac{a+1}{2}i + \frac{a+1}{2} - 1$.

Bien entendu ces deux interprétations sont équivalentes : à une subdivision en intervalles de $[0, \infty[$, correspond l'application qui envoie de manière affine $[0, 1]$ sur le premier intervalle, $[1, 2]$ sur le second, etc...

Attention, les forêts sont à considérer "modulo les intervalles" qu'elles définissent, c'est à dire que deux forêts définissant les mêmes intervalles sont considérées comme égales.

On a ainsi par exemple l'égalité des forêts :



Nous verrons plus loin comment cette remarque va nous fournir des relations entre les y_{Ai} et les z_k , et nous permettra de donner une description du groupe $H_{a,a+1}$ par générateurs et relations.

Définissons maintenant la notion de partition standard :

Définition 8 On appelle *partition standard* une expansion de Id , c'est-à-dire une forêt du type précédent, ou de manière équivalente, un homéomorphisme de $[0, \infty[$ produit de y_{Ai}^{-1} et de z_k^{-1} pour certains $i, k \in \mathbb{N}$.

Étant donnée une partition standard, on appelle $s(i)$ l'opposé du logarithme en base a de la longueur de l'intervalle d'ordre i . Cela correspond, si l'on prend en compte toutes les décompositions régulières d'intervalles depuis un intervalle de longueur 1 jusqu'à l'intervalle i , à rajouter 1 pour chaque découpe en a morceaux et 2 pour chaque découpe en a^2 .

Par exemple pour $a = 3$ et la partition standard y_0^{-1} , $s(0) = s(1) = \dots = s(5) = 1$ et si $i \geq 5$, $s(i) = 0$. Pour z_1^{-1} , $s(0) = 0$, $s(1) = \dots = s(9) = 2$, et ensuite $s(i) = 0$.

Alors :

Proposition 25 (P) : les intervalles d'une partition standard à s impair vont par $A = \frac{a+1}{2}$, à partir d'un intervalle d'ordre multiple de A .

Démonstration:

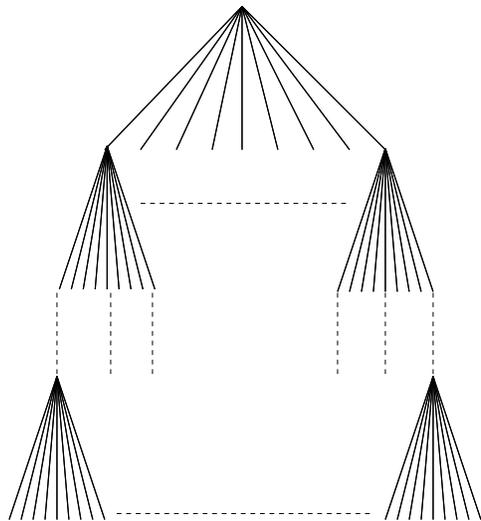
Fixons une partition standard f vérifiant (P), on va montrer que (P) est vraie pour toute expansion élémentaire de cette partition standard.

- Pour une expansion élémentaire $f \circ y_{A_i}^{-1}$:
 f vérifiant (P) , $s(A_i), s(A_i + 1), \dots, s(A(i + 1) - 1)$ ont la même parité. Chacun de ces intervalles est remplacé par a intervalles dont la valeur de s est un de plus que celle de l'intervalle dont on a fait l'expansion : la parité de s est donc constante pour ces aA nouveaux intervalles. Les intervalles d'ordre strictement inférieur à A_i gardent leur ordre et leur valeur de s , les intervalles d'ordre supérieur ou égal à $A(i + 1)$ gardent leur valeur de s alors que leur ordre est augmenté de $(a - 1)A$, multiple de A . Par conséquent la nouvelle partition vérifie bien (P) .
- Pour une expansion élémentaire $f \circ z_k^{-1}$:
 Il existe un unique i tel que $A_i \leq k < A(i + 1)$, et notre partition vérifiant (P) , $s(A_i), \dots, s(A(i + 1) - 1)$ ont la parité de $s(k)$.
 Dans l'expansion, on remplace l'intervalle d'ordre k par a^2 intervalles de longueur divisée par a^2 , c'est à dire que s augmente de 2 : il garde même parité. Mais la parité de $s(k)$ est alors celle de tous les $s(A_i), \dots, s(A(i + 1) - 1 + a^2 - 1)$.
 Les intervalles d'ordre strictement inférieur à A_i gardent leur ordre et leur valeur de s , les intervalles d'ordre supérieur ou égal à $A(i + 1)$ gardent leur valeur de s alors que leur ordre est augmenté de $a^2 - 1$, multiple de A .
 Ainsi $f \circ z_k^{-1}$ vérifie (P) .
 (P) étant vérifiée pour l'identité et pour chaque expansion élémentaire d'une application f vérifiant (P) , comme toute partition standard est une suite finie d'expansions élémentaires, (P) est vérifiée pour toutes les partitions standard. ■

Corollaire 1 *Deux partitions standard ont une expansion commune.*

Démonstration:

Commençons par prouver que toute partition standard a une expansion de la forme suivante : on accole k fois consécutives à partir de la première feuille l'arbre de hauteur n :



(cela revient à découper régulièrement $[0, 1], \dots, [k - 1, k]$ en intervalles de même longueur a^{-2n} , en laissant inchangés les autres intervalles $[i, i + 1], i \geq k$.)

En effet, d'après la proposition précédente, il suffit de rajouter sur chaque suite de A intervalles ayant s impair des expansions de type y pour se ramener à une partition ayant tous les $s(i)$ pairs. Puis d'effectuer des expansions de type z pour se ramener à avoir, pour un certain N bien choisi, les N premiers intervalles ayant le même $s(i)$, et les suivants ayant $s(i) = 0$, ce qui est bien la forme souhaitée.

Comme il est clair que deux telles partitions ont une expansion commune, le résultat est prouvé. ■

Ce dernier point va nous permettre de donner une nouvelle interprétation de $H_{a,a+1}$ en terme de couples de forêts.

On considère \mathcal{H} l'ensemble des applications de la forme pq^{-1} avec p, q des partitions standard.

Alors :

- \mathcal{H} est inclus dans $H_{a,a+1}$
- \mathcal{H} est un sous-groupe ; pour le montrer il suffit de vérifier que si p et r^{-1} sont dans \mathcal{H} , $r^{-1}p$ aussi.
 p et r étant des partitions standard, ils ont une expansion commune, i.e il existe q et s des partitions standard telles que $pq = rs$. Mais alors $r^{-1}p = sq^{-1}$, d'où le résultat.
- \mathcal{H} contient \overline{F}_a et F_{a^2} car par définition il contient les générateurs y_{Ai}^{-1} de \overline{F}_a et z_k^{-1} de F_{a^2} .

Comme \overline{F}_a et F_{a^2} engendrent $H_{a,a+1}$, on en déduit que

$$\mathcal{H} = H_{a,a+1}.$$

On vient donc de montrer que l'on peut représenter tout élément de h de $H_{a,a+1}$ comme un couple de forêts (de partitions standard) : si $h = pq^{-1}$ avec p et q des partitions standard, on peut associer à p une forêt F_1 et à q une forêt F_2 , et représenter h par le couple de forêts (F_1, F_2) .

Le choix se fait à une expansion près : si F'_1 et F'_2 sont les forêts associées à des expansions pr et qr de p et q , les couples (F'_1, F'_2) et (F_1, F_2) représentent le même élément du groupe $H_{a,a+1}$ (autrement dit, si l'on réalise sur les forêts F_1 et F_2 les mêmes expansions -à chaque expansion d'une feuille de F_1 on réalise la même expansion de la feuille de même ordre de F_2 - on obtient le même élément du groupe).

A partir de la donnée d'un couple de forêts on peut calculer directement l'élément de $H_{a,a+1}$ correspondant : c'est l'unique application affine par morceaux qui envoie le premier intervalle décrit par la forêt F_2 sur le premier intervalle de F_1 , le deuxième intervalle de F_2 sur le deuxième de F_1 , et ainsi de suite.

V.1.4 Calcul forestier

On regroupe ici quelques compléments et remarques sur la description du $H_{a,a+1}$ à l'aide de couples de forêts.

Décomposition en deux monoïdes

On définit de manière naturelle le sous-monoïde $H_{a,a+1}^+$ de $H_{a,a+1}$ comme l'ensemble des éléments de $H_{a,a+1}$ qui peuvent s'écrire comme une composée d'applications y_{Ai} et z_k .

De même $H_{a,a+1}^-$ est le sous-monoïde de $H_{a,a+1}$ formé des composées de y_{Ai}^{-1} et z_k^{-1} (c'est le monoïde formé des partitions standard).

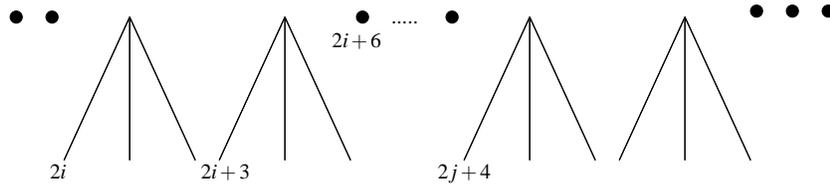
Une conséquence de ce qui précède est que

$$H_{a,a+1} = H_{a,a+1}^- H_{a,a+1}^+.$$

Les éléments de $H_{a,a+1}^+$ peuvent être écrits sous la forme (F_0, G) où F_0 est la forêt triviale ; de même les éléments de $H_{a,a+1}^-$ peuvent être écrits (F, F_0) . La décomposition $H_{a,a+1} = H_{a,a+1}^- H_{a,a+1}^+$ apparaît alors naturelle : $(F, G) = (F, F_0)(F_0, G)$.

On a déjà décrit comment déterminer à partir d'un produit de y_{Ai}^{-1} et de z_k^{-1} la forêt correspondante : on lit de gauche à droite le produit et à chaque lettre y_{Ai}^{-1} ou z_k^{-1} on réalise une expansion de la forêt. Un procédé analogue fonctionne pour calculer la forêt associée à un élément de $H_{a,a+1}^+$: on lit cette fois de droite à gauche le produit, et on fait de la même manière une expansion des feuilles $Ai, Ai + 1, \dots, Ai + A - 1$ pour un terme y_{Ai} , et de la feuille k pour un terme z_k .

Par exemple le calcul de l'élément $y_{2i}y_{2j}$ donne le même résultat que le calcul de $y_{2j+4}y_{2i}$, soit la forêt F suivante (on écrit les ordres de certaines des feuilles de F) :



Et si le contexte n'est pas ambigu on parlera de l'élément défini par F pour l'élément (F_0, F) ou l'élément (F, F_0) .

Ainsi l'arbre ci-dessus peut représenter, selon le contexte, l'élément "positif" $y_{2i}y_{2j} = y_{2j+4}y_{2i}$ de $H_{a,a+1}^+$, ou la partition standard $y_{2j}^{-1}y_{2i}^{-1}$ de $H_{a,a+1}^-$.

Produits

Pour calculer les composés d'éléments de $H_{a,a+1}$ représentés par des couples de forêts, on peut utiliser la règle suivante, immédiate en interprétant les forêts comme des applications :

$$(F_1, F_2)(F_2, F_3) = (F_1, F_3).$$

En effet, si on voit (F_1, F_2) comme un produit $f_1 f_2^{-1}$ où f_1 et f_2 sont des partitions standard, on obtient $(F_1, F_2)(F_2, F_3) = (f_1 f_2^{-1})(f_2 f_3^{-1}) = f_1 f_3^{-1}$.

Maintenant, pour composer deux éléments quelconques (G_1, G_2) et (G_3, G_4) , il suffit de considérer une expansion commune de G_2 et G_3 : on fixe G et G' tels que $G_2 G = G_3 G'$, et alors

$$(G_1, G_2)(G_3, G_4) = (G_1 G, G_4 G').$$

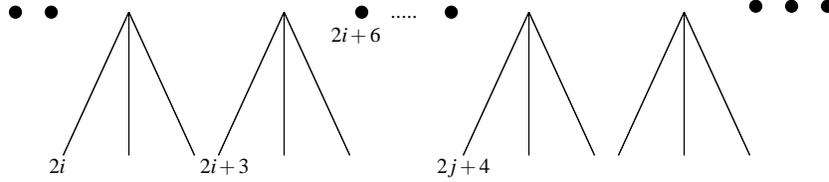
On peut noter que pour calculer des produits à l'intérieur des monoïdes $H_{a,a+1}^+$ et $H_{a,a+1}^-$, dont les éléments peuvent être décrits par une unique forêt (i.e par un couple dont la deuxième forêt est la forêt triviale), il peut-être plus rapide pour calculer un produit vw d'exprimer vw comme un produit de y_{Ai} et z_k (resp. y_{Ai}^{-1} et z_k^{-1}) et de voir ensuite ces lettres comme décrivant des subdivisions de la forêt triviale F_0 .

V.2 Un cas particulier : le groupe $H_{3,4}$

(ces résultats sont exposés dans la prépublication [22])

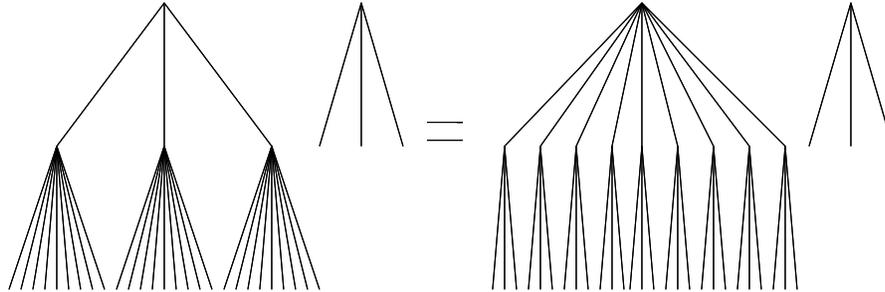
On a déjà pu remarquer que si l'on fabrique de deux manières différentes à partir d'expansions élémentaires une partition standard, on obtient une relation entre les générateurs y_{Ai} et z_k de $H_{a,a+1}$.

Par exemple, la forêt



représente les partitions standard $y_{2j}^{-1}y_{2i}^{-1}$ et $y_{2i}^{-1}y_{2j+4}^{-1}$, et dans le groupe $H_{a,a+1}$ on a donc la relation $y_{2i}y_{2j} = y_{2j+4}y_{2i}$ si $i < j$.

De même, l'égalité forestière (ou plutôt, l'égalité entre les intervalles représentés par les forêts)



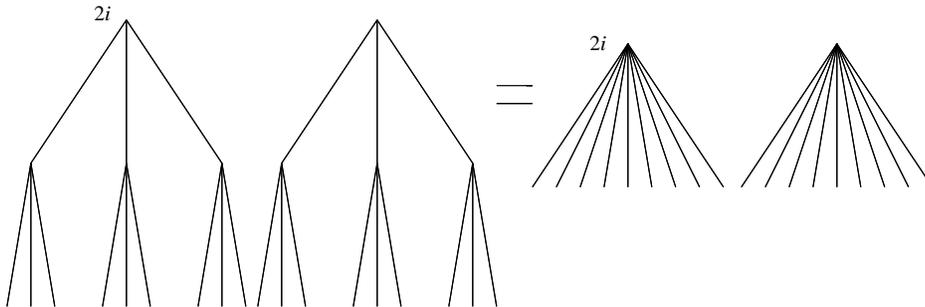
fournit la relation :

$$y_{2i}^{-1}z_{2i+2}^{-1}z_{2i+1}^{-1}z_{2i}^{-1} = z_{2i}^{-1}y_{2i+8}^{-1}y_{2i+6}^{-1}y_{2i+4}^{-1}y_{2i+2}^{-1}y_{2i}^{-1},$$

soit

$$y_{2i}y_{2i+2}y_{2i+4}y_{2i+6}y_{2i+8}z_{2i} = z_{2i}z_{2i+1}z_{2i+2}y_{2i}.$$

et de même,



donne la relation $y_{2i}^{-1}y_{2i+4}^{-1}y_{2i+2}^{-1}y_{2i}^{-1} = z_{2i+1}^{-1}z_{2i}^{-1}$, soit

$$z_{2i}z_{2i+1} = y_{2i}y_{2i+2}y_{2i+4}y_{2i}.$$

On trouve de cette manière les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(a) & k < l : & z_k z_l & = & z_{l+8} z_k \\
(b) & i < j : & y_{2i} y_{2j} & = & y_{2j+4} y_{2i} \\
\\
(c) & k < 2i : & z_k y_{2i} & = & y_{2i+8} z_k \\
(d) & 2i+1 < k : & y_{2i} z_k & = & z_{k+4} y_{2i} \\
\\
(e) & \forall i & z_{2i} z_{2i+1} & = & y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i} \\
& & z_{2i+9} z_{2i} & = & y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2 \\
\\
(f) & \forall i & y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i+6} y_{2i+8} z_{2i} & = & z_{2i} z_{2i+1} z_{2i+2} y_{2i} \\
& \forall i & y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i} & = & z_{2i+18} z_{2i+9} z_{2i} y_{2i} \\
\\
(f') & \forall i & y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i+6} y_{2i+8} z_{2i+1} & = & z_{2i+3} z_{2i+4} z_{2i+5} y_{2i} \\
& \forall i & y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i+1} & = & z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}
\end{array}$$

Nous allons maintenant prouver que ces relations sont suffisantes pour décrire le groupe $H_{3,4}$, c'est à dire que le groupe $\mathcal{H}_{3,4}$ défini par les générateurs $y_{2i}, i \in \mathbb{N}$ et $z_k, k \in \mathbb{N}$, et les relations (a), (b), (c), (d), (e), (f) et (f') s'injecte dans $H_{3,4}$.

V.2.1 Forme semi-normale dans $\mathcal{H}_{3,4}$

(e) donne $z_{2i} = z_{2i+9}^{-1} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2$. Cela montre que le groupe $\mathcal{H}_{3,4}$ est engendré par les z_{2k+1} et les $y_{2k}, k \in \mathbb{N}$.

(f') donne $y_{2i} z_{2i+1} = y_{2i+6}^{-1} y_{2i+12}^{-1} y_{2i+18}^{-1} y_{2i+24}^{-1} z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}$, et par (e) : $z_{2i+12} = y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12}^{-1} z_{2i+13}^{-1}$, donc $z_{2i+21} z_{2i+12} = z_{2i+12} z_{2i+13} = y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12}^2$, et ainsi

$$y_{2i} z_{2i+1} = y_{2i+6}^{-1} y_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}.$$

De même on montre :

$$y_{2i} z_{2i+1}^{-1} = z_{2i+3}^{-1} y_{2i+12}^{-1} y_{2i+6} y_{2i}.$$

(b) et (d) donnent, si $k > 2i+1$,

$$\begin{array}{ll}
y_{2i} z_k & = & z_{k+4} y_{2i} \\
y_{2i} z_k^{-1} & = & z_{k+4}^{-1} y_{2i} \\
y_{2i} y_k & = & y_{k+4} y_{2i} \\
y_{2i} y_k^{-1} & = & y_{k+4}^{-1} y_{2i}
\end{array}$$

(c) donne, si $k < 2i$,

$$\begin{array}{ll}
z_k y_{2i} & = & y_{2i+8} z_k \\
z_k y_{2i}^{-1} & = & y_{2i+8}^{-1} z_k,
\end{array}$$

et si $k < l$, (a) donne

$$\begin{array}{ll}
z_k z_l & = & z_{l+8} z_k \\
z_k z_l^{-1} & = & z_{l+8}^{-1} z_k.
\end{array}$$

Ces relations vont nous permettre de montrer que tout élément du groupe admet une forme semi-normale :

Proposition 26 *Tout élément $h \in \mathcal{H}_{3,4}$ a une écriture de la forme :*

$$h = y_0^{-\alpha_0} z_1^{-\alpha_1} y_2^{-\alpha_2} z_3^{-\alpha_3} \dots z_3^{\beta_3} y_2^{\beta_2} z_1^{\beta_1} y_0^{\beta_0},$$

avec tous les α_i et β_i positifs ou nuls et nuls à partir d'un certain rang.

Démonstration:

Soit $n(h)$ le nombre minimal de z_{2k+1} nécessaires pour écrire h en fonction des générateurs y_{2i} et z_{2k+1} .

Si $n(h) = 0$, h est dans \overline{F}_3 et donc h s'écrit bien sous forme normale (cf [1]).

On suppose que tout élément tel que $n(h) < n$ s'écrit sous forme normale, et soit h tel que $n(h) = n$.

Considérons le plus petit indice des lettres y et z apparaissant dans h ; on distingue deux cas :

- Si cet indice est pair, i.e y_{2i} apparaît, et aucune lettre d'indice inférieur. Alors on peut grâce aux relations précédentes faire passer à gauche toutes les apparitions de y_{2i}^{-1} et à droite toutes les apparitions de y_{2i} , sans changer le nombre de lettres z , et en ne faisant apparaître aucune lettre d'indice inférieur ou égal à $2i$, et ainsi écrire $h = y_{2i}^{-\alpha} h' y_{2i}^{\beta}$ avec $\alpha, \beta \geq 0$, $n(h') = n(h)$ et h' ayant toutes ses lettres d'indice strictement supérieur à $2i$.

On peut recommencer cette opération tant que l'indice minimal apparaissant dans le nouveau mot h' est pair.

- Si l'indice minimal apparaissant dans h est impair, i.e z_{2k+1} apparaît, et aucune lettre d'indice inférieur. Alors comme pour $2k+1 < 2i$ et $k < l$,

$$\begin{aligned} z_{2k+1} y_{2i} &= y_{2i+8} z_{2k+1} \\ z_{2k+1} y_{2i}^{-1} &= y_{2i+8}^{-1} z_{2k+1} \\ z_{2k+1} z_{2l+1} &= z_{2l+9} z_{2k+1} \\ z_{2k+1} z_{2l+1}^{-1} &= z_{2l+9}^{-1} z_{2k+1}, \end{aligned}$$

on peut écrire $h = z_{2k+1}^{-\alpha} h' z_{2k+1}^{\beta}$ avec $n(h') < n(h)$.

Cela nous permet de conclure par récurrence. ■

L'existence de cette forme semi-normale implique alors l'injectivité de l'application canonique de $\mathcal{H}_{3,4}$ dans $H_{3,4}$. En effet, soit $h \in \mathcal{H}_{3,4}$ différent de l'élément neutre. Alors h a une forme semi-normale non triviale; soit k le premier indice tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. h est conjugué dans $\mathcal{H}_{3,4}$ à un élément de la forme

$$\theta_k^{-\alpha_k + \beta_k} h'$$

avec $\theta_k = y_k$ si k est pair, z_k si k est impair, et h' s'exprimant uniquement en fonction de y_{2i} et z_l d'indices strictement supérieurs à k . Mais l'image de h' dans $H_{3,4}$ est l'identité sur $[0, k+1]$, et $\theta_k^{-\alpha_k + \beta_k}$ n'est pas l'identité sur $[k, k+1]$: ainsi, l'image de h ne peut pas être l'identité de $[0, \infty[$: l'application $\mathcal{H}_{3,4} \rightarrow H_{3,4}$ est injective.

Comme la proposition 23 montrait la surjectivité, nous avons prouvé :

Théorème B (cas particulier $a = 3$)

Le groupe $H_{3,4}$ peut être présenté par les générateurs y_{2i} et z_k et les relations (R) :

$$\begin{array}{ll}
 k < l : & (R_{k,l}^1) & z_k z_l & = & z_{l+8} z_k \\
 i < j : & (R_{i,j}^2) & y_{2i} y_{2j} & = & y_{2j+4} y_{2i} \\
 \\
 k < 2i : & (R_{k,i}^3) & z_k y_{2i} & = & y_{2i+8} z_k \\
 2i+1 < k : & (R_{i,k}^4) & y_{2i} z_k & = & z_{k+4} y_{2i} \\
 \\
 \forall i : & (R_i^5) & z_{2i+9} z_{2i} & = & y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2 \\
 \\
 \forall i : & (R_i^6) & y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i} & = & z_{2i+18} z_{2i+9} z_{2i} y_{2i} \\
 \\
 \forall i : & (R_i^7) & y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i+1} & = & z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}
 \end{array}$$

V.2.2 Deux présentations finies de $H_{3,4}$

On va montrer que la présentation $\langle y_0, y_2, \dots, z_0, z_1, z_2, \dots \mid R \rangle$ se ramène à une présentation finie.

Pour cela on définit à partir de y_0, y_2, y_4 et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$, pour $n \geq 1$, $y_{4n+2} = y_0^n y_2 y_0^{-n}$ et $y_{4n+4} = y_0^n y_4 y_0^{-n}$, et de même, pour $\alpha = 1, 2, \dots, 8$, $z_{8n+\alpha} = z_0^n z_\alpha z_0^{-n}$. Il est facile de vérifier que $z_0 z_k z_0^{-1} = z_{k+8}$ et $y_0 y_{2i} y_0^{-1} = y_{2i+4}$ pour tous $k, i \geq 1$.

On considère le groupe défini par les générateurs $y_0, y_2, y_4, z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$ et les relations :

- $R_{k,l}^1$ pour $k < l, l \leq 17$
- $R_{i,j}^2$ pour $i < j, j \leq 5$
- $R_{k,i}^3$ pour $k < 2i, i \leq 7$
- $R_{i,k}^4$ pour $2i+1 < k, k \leq 15$
- R_i^5, R_i^6, R_i^7 pour $i \leq 3$.

[en toute rigueur ce ne sont pas directement ces relations que l'on prend, mais les relations obtenues en remplaçant formellement toutes les occurrences de $y_{2i}, i > 2$ et $z_k, k > 8$ par leur définition en fonction de y_0, y_2, y_4 et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$]

On va montrer que dans ce groupe, toutes les relations R sont vérifiées.

- R^1 est vraie :

$R_{k,l}^1$ l'est par hypothèse pour $l \leq 17, k < l$.

Fixons $l > 17$ et $k < l$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^1$ vraie pour $\lambda < l, \kappa < \lambda$.

Si $k \leq 8$ on a

$$\begin{aligned}
 z_k z_l z_k^{-1} &= z_k (z_9 z_{l-8} z_9^{-1}) z_k^{-1} && (R_{9,l-8}^1) \\
 &= (z_k z_9 z_k^{-1}) (z_k z_{l-8} z_k^{-1}) (z_k z_9^{-1} z_k^{-1}) \\
 &= (z_0 z_9 z_0^{-1}) (z_0 z_{l-8} z_0^{-1}) (z_0 z_9^{-1} z_0^{-1}) && (R_{*,l-8}^1, R_{*,9}^1) \\
 &= z_0 (z_9 z_{l-8} z_9^{-1}) z_0^{-1} \\
 &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{9,l-8}^1) \\
 &= z_{l+8}
 \end{aligned}$$

Si $k > 8$:

$$\begin{aligned} z_k z_l z_k^{-1} &= z_0 (z_{k-8} z_{l-8} z_{k-8}^{-1}) z_0^{-1} \\ &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{k-8, l-8}^1) \\ &= z_{l+8} \end{aligned}$$

Donc $R_{k,l}^1$ est vérifiée.

– R^2 est vraie :

$R_{i,j}^2$, l'est par hypothèse pour $j \leq 5, i < j$.

Fixons $j > 5, i < j$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^2$ vraie pour $\lambda < j, \kappa < \lambda$.

Si $i = 0, 1, 2$ on a

$$\begin{aligned} y_{2i} y_{2j} y_{2i}^{-1} &= y_{2i} (y_6 y_{2j-4} y_6^{-1}) y_{2i}^{-1} && (R_{3,j-2}^2) \\ &= (y_{2i} y_6 y_{2i}^{-1}) (y_{2i} y_{2j-4} y_{2i}^{-1}) (y_{2i} y_6^{-1} y_{2i}^{-1}) \\ &= (y_0 y_6 y_0^{-1}) (y_0 y_{2j-4} y_0^{-1}) (y_0 y_6^{-1} y_0^{-1}) && (R_{*,j-2}^2, R_{*,3}^2) \\ &= y_0 (y_6 y_{2j-4} y_6^{-1}) y_0^{-1} \\ &= y_0 y_{2j} y_0^{-1} && (R_{3,j-2}^2) \\ &= y_{2j+4} \end{aligned}$$

Si $i \geq 3$:

$$\begin{aligned} y_{2i} y_{2j} y_{2i}^{-1} &= y_0 (y_{2i-4} y_{2j-4} y_{2i-4}^{-1}) y_0^{-1} \\ &= y_0 y_{2j} y_0^{-1} && (R_{i-2, j-2}^2) \\ &= y_{2j+4} \end{aligned}$$

Donc $R_{i,j}^2$ est vérifiée.

– R^3 est vraie :

$R_{k,i}^3$, l'est par hypothèse pour $i \leq 7, k < 2i$.

Fixons $i \geq 8$ et $k < 2i$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^3$ vraie pour $\lambda < i, \kappa < 2\lambda$.

Si $k \leq 8$ on a

$$\begin{aligned} z_k y_{2i} z_k^{-1} &= z_k (y_{10} y_{2i-4} y_{10}^{-1}) z_k^{-1} \\ &= (z_k y_{10} z_k^{-1}) (z_k y_{2i-4} z_k^{-1}) (z_k y_{10}^{-1} z_k^{-1}) \\ &= y_{18} y_{2i+4} y_{18}^{-1} && (R_{k,5}^3, R_{k,i-2}^3) \\ &= y_{2i+8} \end{aligned}$$

Si $k \geq 9$:

$$\begin{aligned} z_k y_{2i} z_k^{-1} &= z_0 (z_0^{-1} z_k z_0) (z_0^{-1} y_{2i} z_0) (z_0^{-1} z_k^{-1} z_0) z_0^{-1} \\ &= z_0 (z_{k-8} y_{2i-8} z_{k-8}^{-1}) z_0^{-1} && (R_{0,i-4}^3) \\ &= z_0 y_{2i} z_0^{-1} && (R_{k-8, i-4}^3) \\ &= (z_0 y_2) (y_2^{-1} y_{2i} y_2) (y_2^{-1} z_0^{-1}) \\ &= y_{10} z_0 y_{2i-4} z_0^{-1} y_{10}^{-1} && (R_{0,1}^3) \\ &= y_{10} y_{2i+4} y_{10}^{-1} && (R_{0,i-2}^3) \\ &= y_{2i+8} \end{aligned}$$

Donc $R_{k,i}^3$ est vérifiée.

– R^4 est vraie :

$R_{i,k}^4$ l'est par hypothèse pour $k \leq 15, 2i + 1 < k$.

Fixons $k > 15, 2i + 1 < k$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^4$ vraie pour $\lambda < k, 2\kappa + 1 < \lambda$.

Si $i = 0, 1, 2$ on a

$$\begin{aligned} y_{2i} z_k y_{2i}^{-1} &= y_{2i} (z_7 z_{k-8} z_7^{-1}) y_{2i}^{-1} \\ &= (y_{2i} z_7 y_{2i}^{-1}) (y_{2i} z_{k-8} y_{2i}^{-1}) (y_{2i} z_7^{-1} y_{2i}^{-1}) \\ &= z_{11} z_{k-4} z_{11}^{-1} && (R_{i,7}^4, R_{i,k-8}^4) \\ &= z_{k+4} \end{aligned}$$

Si $i \geq 3$:

$$\begin{aligned} y_{2i} z_k y_{2i}^{-1} &= y_0 (y_0^{-1} y_{2i} y_0) (y_0^{-1} z_k y_0) (y_0^{-1} y_{2i}^{-1} y_0) y_0^{-1} \\ &= y_0 y_{2i-4} z_{k-4} y_{2i-4}^{-1} y_0^{-1} && (R_{0,k-4}^4) \\ &= y_0 z_k y_0^{-1} && (R_{i-2,k-4}^4) \\ &= (y_0 z_4) (z_4^{-1} z_k z_4) (z_4^{-1} y_0^{-1}) \\ &= y_0 z_4 z_{k-8} z_4^{-1} y_0^{-1} \\ &= z_8 (y_0 z_{k-8} y_0^{-1}) z_8^{-1} && (R_{0,4}^4) \\ &= z_8 z_{k-4} z_8^{-1} && (R_{0,k-8}^4) \\ &= z_{k+4} \end{aligned}$$

Donc $R_{i,k}^4$ est vérifiée.

– R^5 est vraie :

R_i^5 l'est par hypothèse pour $i \leq 3$.

Fixons $i > 3$ et supposons R_λ^5 vraie pour $\lambda < i$.

Alors

$$\begin{aligned} z_{2i+9} z_{2i} &= (y_0 z_{2i+5} y_0^{-1}) (y_0 z_{2i-4} y_0^{-1}) \\ &= y_0 z_{2i+5} z_{2i-4} y_0^{-1} \\ &= y_0 y_{2i+8} y_{2i+2} y_{2i-4}^{-1} y_0^{-1} && (R_{i-2}^5) \\ &= y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2 \end{aligned}$$

Donc R_i^5 est vérifiée.

– R^6 est vraie :

R_i^6 l'est par hypothèse pour $i \leq 3$.

Fixons $i > 3$ et supposons R_λ^6 vraie pour $\lambda < i$.

Alors

$$\begin{aligned} y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i} &= y_0 y_{2i+20} y_{2i+14} y_{2i+8} y_{2i+2} y_{2i-4} z_{2i-4} y_0^{-1} \\ &= y_0 z_{2i+14} z_{2i+5} z_{2i-4} y_{2i-4}^{-1} y_0^{-1} \\ &= z_{2i+18} z_{2i+9} z_{2i} y_{2i} \end{aligned}$$

Donc R_i^6 est vérifiée.

– R^7 est vraie :

R_i^7 l'est par hypothèse pour $i \leq 3$.

Fixons $i \geq 3$ et supposons R_λ^7 vraie pour $\lambda < i$.

Alors

$$\begin{aligned} y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i+1} &= y_0 y_{2i+20} y_{2i+14} y_{2i+8} y_{2i+2} y_{2i-4} z_{2i-3} y_0^{-1} \\ &= y_0 z_{2i+17} z_{2i+8} z_{2i-1} y_{2i-4}^{-1} y_0^{-1} (R_{i-2}^7) \\ &= z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i} \end{aligned}$$

Donc R_i^7 est vérifiée.

On a donc prouvé :

Théorème C (cas particulier $a = 3$)

Le groupe $H_{3,4}$ est de présentation finie.

On peut diminuer le nombre de générateurs et relations nécessaires pour définir le groupe : un autre système de présentation infinie du groupe est de donner les générateurs y_{2i} et z_{2k+1} avec les relations R^1, R^2, R^3, R^4 où apparaissent des indices impairs des z , et R^6 et R^7 , où, pour ces deux dernières, on remplace avec R^5 les z_{2i} par leur expression dans notre nouveau système de générateurs.

Un raisonnement analogue à ce qui précède permet alors de voir que $H_{3,4}$ a une présentation par les générateurs y_0, y_2, y_4 et z_1, z_3, z_5, z_7 .

Ainsi,

Proposition 27 $H_{3,4}$ admet une présentation finie à 7 générateurs

V.3 Le cas général : $H_{a,a+1}$ est de présentation finie

V.3.1 Relations et notations

Rappelons que l'on a défini $A = \frac{a+1}{2}$.

Tout comme dans le cas $a = 3$, une identification entre deux manières d'obtenir la même expansion de la forêt triviale permet de trouver des relations entre les y_{Ai} et les z_k :

Proposition 28 Dans le groupe $H_{a,a+1}$ on a les relations (R) :

$$\begin{aligned}
 (R_{k,l}^1) \quad k < l : \quad z_k z_l &= z_{l+a^2-1} z_k \\
 (R_{i,j}^2) \quad i < j : \quad y_{Ai} y_{Aj} &= y_{A(j+a-1)} y_{Ai} \\
 (R_{k,i}^3) \quad k < Ai : \quad z_k y_{Ai} &= y_{A(i+2a-2)} z_k \\
 (R_{i,k}^4) \quad A(i+1) \leq k : \quad y_{Ai} z_k &= z_{k+A(a-1)} y_{Ai} \\
 (R_i^5) \quad \forall i : \quad z_{Ai} z_{Ai+1} \cdots z_{A(i+1)-1} \\
 &= y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+a-1)} y_{Ai} \\
 (R_i^{6,\lambda}) \quad \forall i, \lambda = 0, \dots, A : \quad y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+2a-3)} y_{A(i+2a-2)} z_{Ai+\lambda} \\
 &= z_{Ai+\lambda a} z_{Ai+\lambda a+1} \cdots z_{Ai+\lambda a+a-1} y_{Ai}
 \end{aligned}$$

Et ici aussi, on va montrer qu'il n'y a pas d'autre relation, c'est-à-dire que le groupe $H_{a,a+1}$ est défini par les générateurs y_{Ai}, z_k et les relations (R) .

Pour cela on introduit le groupe $\mathcal{H}_{a,a+1}$ défini par ses générateurs y_{Ai} et $z_k, i, k \in \mathbb{N}$ et les relations (R) : $\mathcal{H}_{a,a+1}$ est le quotient du groupe libre sur l'ensemble $\{y_{Ai}, z_k \mid i, k \in \mathbb{N}\}$ par le sous-groupe normal engendré par les relations (R) .

On appelle ϕ la surjection canonique de $\mathcal{H}_{a,a+1}$ dans $H_{a,a+1}$.

On définit aussi les sous-groupes \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_{a^2} de $\mathcal{H}_{a,a+1}$ engendrés respectivement par les y_{Ai} et les z_k , \mathcal{F}^+ le sous-monoïde de $\mathcal{H}_{a,a+1}$ constitué des mots en les lettres y_{Ai} et z_k , et de la même manière les sous-monoïdes \mathcal{F}_a^+ engendré par les y_{Ai} et $\mathcal{F}_{a^2}^+$ engendré par les z_k .

V.3.2 La démonstration

Nous allons montrer que le groupe $H_{a,a+1}$ est bien défini par les générateurs et relations ci-dessous, c'est-à-dire qu'il est isomorphe par φ à $\mathcal{H}_{a,a+1}$. Il suffira pour cela de montrer que φ est injective.

Commençons par énoncer une série de lemmes techniques (relativement intuitifs si on les visualise grâce aux forêts) dont la démonstration sera donnée dans la partie suivante :

Lemme 0 L'application φ réalise un isomorphisme entre \mathcal{F}_a et \overline{F}_a , et de même entre \mathcal{F}_{a^2} et F_{a^2} .

Lemme 1 Soit $w \in \mathcal{F}_{a^2}^+$. Alors il existe v dans \mathcal{F}_a^+ tel que vw soit dans \mathcal{F}_a^+ .

Lemme 2 Soit w_1, w_2 dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$. Alors il existe v_1, v_2 dans \mathcal{F}_a^+ tels que $v_1w_1 = v_2w_2$.

Lemme 3 Soit $w \in \mathcal{F}^+$. Alors il existe v dans \mathcal{F}_a^+ tel que vw soit dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$.

Lemme 4 Si $w \in \mathcal{H}_{a,a+1}$, il existe w_1, w_2 dans \mathcal{F}^+ tels que $w = w_1^{-1}w_2$.

Lemme 5 Soit $w \in \mathcal{F}_{a^2}^+$ tel que $\varphi(w) \in \overline{F}_a$. Alors w est un produit d'éléments de la forme $z_{Ai}z_{Ai+1} \dots z_{Ai+A-1}$ et en particulier, grâce à la relation R^5 , w est dans \mathcal{F}_a^+ .

Ces lemmes étant momentanément admis, démontrons le résultat principal, l'injectivité de φ .

Pour cela on fixe $w \in \mathcal{H}_{a,a+1}$ tel que $\varphi(w) = Id$; on va montrer que $w = 1$.

Le lemme 4 nous permet d'écrire $w = w_1^{-1}w_2$, avec w_1 et w_2 dans \mathcal{F}^+ . Alors $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$.

Le lemme 3 nous fournit w_1^y et w_2^y dans \mathcal{F}_a^+ tels que $w_1^y w_1$ et $w_2^y w_2$ sont dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$.

Par le lemme 2, on peut trouver w_1^z et w_2^z dans \mathcal{F}_a^+ tels que $w_1^z w_1^y w_1 = w_2^z w_2^y w_2$. Ainsi $\varphi(w_1^z w_1^y w_1) = \varphi(w_2^z w_2^y w_2)$, et comme $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, $\varphi(w_1^z w_1^y) = \varphi(w_2^z w_2^y)$.

Mais alors, si l'on note $Z = (w_2^z)^{-1}w_1^z \in \mathcal{F}_{a^2}$ et $Y = w_2^y(w_1^y)^{-1} \in \mathcal{F}_a$, on a $\varphi(Y) = \varphi(Z)$.

Il existe, par le lemme 1, $u \in \mathcal{F}_{a^2}^+$ tel que $uw_1^z \in \mathcal{F}_a^+$. On a alors $\varphi(uw_1^z) \in \overline{F}_a$ et $Z = (uw_1^z)^{-1}uw_1^z$.

Comme $\varphi(Z) = \varphi(Y)$, $\varphi(Z) \in \overline{F}_a$, et par conséquent, $\varphi(uw_1^z) \in \overline{F}_a$. Ainsi par le lemme 5, uw_1^z et uw_1^z sont dans \mathcal{F}_a^+ , et donc Z est dans \mathcal{F}_a .

Mais comme, par le lemme 0, φ est injective sur \mathcal{F}_a , on a $Z = Y$, et ainsi $w_1^z w_1^y = w_2^z w_2^y$, et $w_1 = w_2$. Ce qui prouve que φ est injective.

Ainsi nous venons de prouver notre théorème principal dans le cas général :

Théorème B (cas général)

Le groupe $H_{a,a+1}$ est défini par les générateurs y_{Ai} , $i \geq 0$, z_k , $k \geq 0$, et les relations (R) :

$$\begin{aligned}
 (R_{k,l}^1) \quad k < l : \quad & z_k z_l = z_{l+a^2-1} z_k \\
 (R_{i,j}^2) \quad i < j : \quad & y_{Ai} y_{Aj} = y_{A(j+a-1)} y_{Ai} \\
 (R_{k,i}^3) \quad k < Ai : \quad & z_k y_{Ai} = y_{A(i+2a-2)} z_k \\
 (R_{i,k}^4) \quad A(i+1) \leq k : \quad & y_{Ai} z_k = z_{k+A(a-1)} y_{Ai}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_i^5) \quad \forall i : & \quad z_{Ai} z_{Ai+1} \cdots z_{A(i+1)-1} \\
& \quad = y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+a-1)} y_{Ai} \\
(R_i^{6,\lambda}) \quad \forall i, \lambda = 0, \dots, A : & \quad y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+2a-3)} y_{A(i+2a-2)} z_{Ai+\lambda} \\
& \quad = z_{Ai+\lambda a} z_{Ai+\lambda a+1} \cdots z_{Ai+\lambda a+a-1} y_{Ai}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer les lemmes utilisés ici.

V.3.3 Preuve des lemmes

Preuve du lemme 0 : On va montrer que ϕ réalise un isomorphisme entre les groupes \mathcal{F}_a et \overline{F}_a (on prouverait de manière analogue qu'il réalise un isomorphisme entre \mathcal{F}_{a^2} et F_{a^2}).

Pour cela on rappelle que le groupe de Thompson F_a défini par les générateurs x_i et les relations $x_i x_j = x_{j+a-1} x_i$ pour $i < j$ est isomorphe au groupe \overline{F}_a par l'application $\psi : x_i \mapsto y_{Ai}$

On peut définir un morphisme surjectif $\theta : F_a \rightarrow \mathcal{F}_a$ par $x_i \mapsto y_{Ai}$, et on constate que l'application $\phi \circ \theta, F_a \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}_a \xrightarrow{\phi} \overline{F}_a$, est égale à ψ .

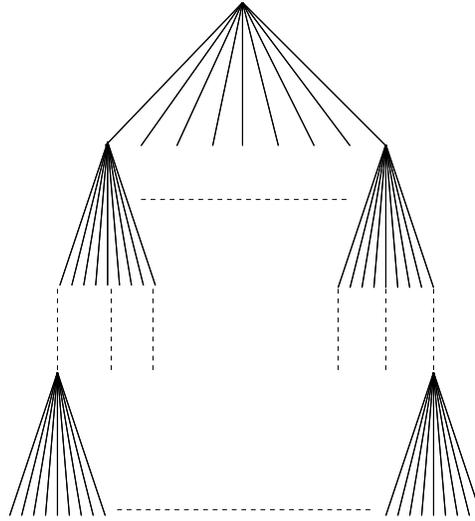
ψ étant un isomorphisme, ψ est injective ; par conséquent, θ est injectif, et comme ψ est par construction un morphisme surjectif, θ est un isomorphisme.

Par conséquent, $\phi : \mathcal{F}_a \rightarrow \overline{F}_a$ est à son tour un isomorphisme, et le lemme est prouvé.

Preuve du lemme 1 : Fixons w dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$; on peut représenter w , via $\phi(w)$, comme un couple (F_0, F) où F_0 est la forêt triviale et F une a^2 -forêt : une forêt obtenue par expansion, en rajoutant des a^2 -bouquets, à partir de la forêt triviale.

On fixe alors i tel que la forêt F n'ait aucune expansion faite sur les racines d'ordre supérieur ou égal à i , et j tel que les intervalles correspondant aux feuilles de j soient de longueur supérieure ou égale à $1/a^{2j}$ (on demande donc que tout les a^2 -bouquets de la forêt F proviennent soient obtenus par expansion des i premières racines, et que toutes les feuilles soient obtenues en au plus j expansions à partir d'une racine).

On peut trouver v , produit de z_k , tel que la forêt expansion de F correspondant à vw , soit égale à la forêt où l'on accole i fois consécutives l'arbre suivant de hauteur j :



Il suffit pour cela de prendre pour v un produit de z_k correspondant aux expansions nécessaires pour transformer la forêt F en cette forêt “pleine”, qui correspond à l’application

$$\varphi((z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2j-1}}) \dots (z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2-1}}) (z_0 z_1 \dots z_{Ai-1})),$$

envoyant chacun des Aia^{2j+2} intervalles de longueur $1/a^{2j+2}$, $[0, 1/a^{2j+2}]$, \dots , $[Ai - 1/a^{2j+2}, Ai]$, sur les intervalles $[0, 1]$, \dots , $[Aia^{2j+2} - 1, Aia^{2j+2}]$, et les intervalles $[Ai + l, Ai + l + 1]$ sur $[Aia^{2j+2} + l, Aia^{2j+2} + l + 1]$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Ainsi on a trouvé v tel que $\varphi((z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2j-1}}) \dots (z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2-1}}) (z_0 z_1 \dots z_{Ai-1})) = \varphi(v)\varphi(w)$; mais on a montré avec le lemme 0 que φ est injective sur \mathcal{F}_{a^2} , et on en déduit donc que $vw = (z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2j-1}}) \dots (z_0 z_1 \dots z_{Aia^{2-1}}) (z_0 z_1 \dots z_{Ai-1})$.

En appliquant la relation R^5 on constate alors que vw est dans \mathcal{F}_a^+ .

Preuve du lemme 2 : Pour obtenir ce lemme, il suffit de choisir à l’aide du lemme 1 des expansions de w_1 et w_2 , $v_1 w_1$ et $v_2 w_2$, avec des paramètres i et j communs : c’est bien sûr possible pour tout choix de i et j suffisamment grands.

Preuve du lemme 3 : On veut montrer que si $w \in \mathcal{F}^+$, il existe v dans \mathcal{F}_a^+ tel que vw soit dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$.

Remarquons tout d’abord qu’il suffit de prouver ce résultat pour w de la forme $u y_{Ai}$, avec $u \in \mathcal{F}_{a^2}^+$. En effet, si le résultat est vrai dans ce cas particulier, et si w est dans \mathcal{F}^+ , on peut l’écrire sous la forme $w = u_1 y_{Ai_1} u_2 y_{Ai_2} \dots u_n y_{Ai_n} u_{n+1}$, u_i dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$ (avec éventuellement $u_i = 1$), et alors on trouve successivement v_1, v_2, \dots, v_n tels que $v_1 u_1 y_{Ai_1}$, $v_2 (v_1 u_1 y_{Ai_1} u_2) y_{Ai_2}$, \dots , $v_n v_{n-1} \dots v_1 w$ sont dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$, et ainsi $v = v_n v_{n-1} \dots v_1$ convient.

Traisons donc ce cas particulier : soit $w = u y_{Ai}$, avec $u \in \mathcal{F}_{a^2}^+$.

L’idée de la démonstration est la suivante : on va multiplier (à gauche) l’élément $u y_{Ai}$ par un produit de y choisi de manière à pouvoir regrouper tous les termes y en produits nous permettant, avec les relations R^5 et R^6 , de les remplacer par des produits de termes z .

Pour comprendre ce procédé il peut être utile de visualiser sur les forêts les transformations que l'on applique de manière formelle aux mots en y et z .

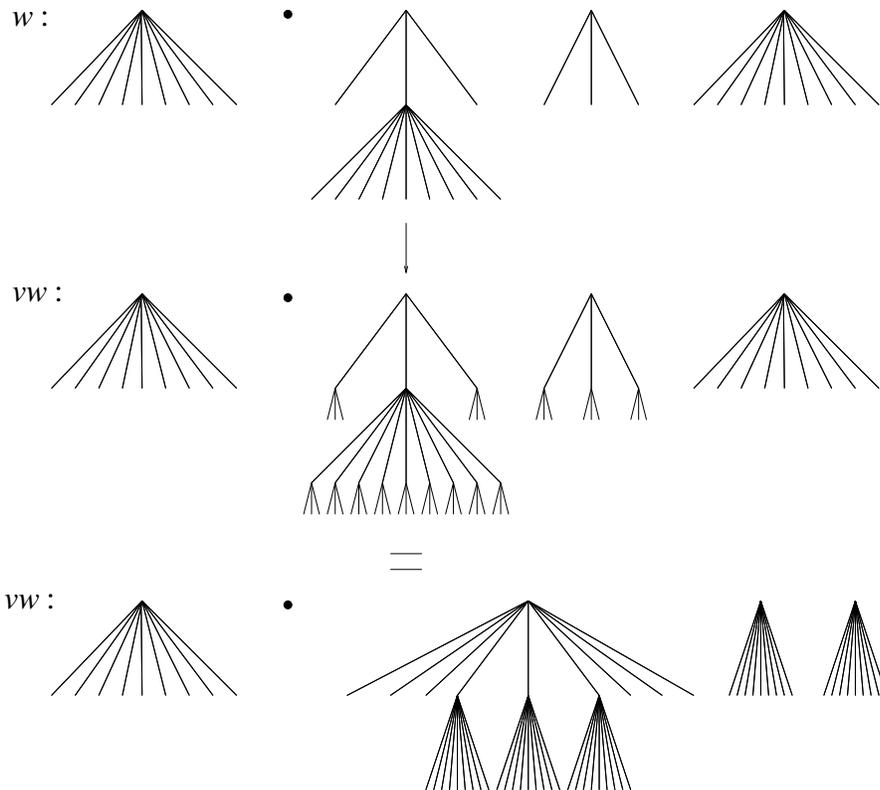
Une forêt correspond à un élément de $F_{a^2}^+$ si et seulement si pour chaque feuille, le chemin depuis une racine jusqu'à cette feuille est constitué d'un nombre pair de a -expansions (et d'un nombre quelconque de a^2 -expansions). En effet chaque feuille correspond à une application affine envoyant l'intervalle correspondant à cette feuille sur un intervalle de longueur 1, et cette longueur peut se calculer à l'aide des expansions réalisées : on part d'un intervalle de longueur 1 (la racine), et on divise la longueur par a pour chaque a -expansion (correspondant à un y) et par a^2 pour chaque a^2 expansion (correspondant à un z); cette longueur est donc une puissance de $1/a^2$ si et seulement si le nombre de a -expansions est pair.

Considérons donc la forêt associée à un mot uy_{Ai} , $u \in \mathcal{F}_{a^2}^+$.

On constate que les feuilles obtenues comme expansions des racines Ai , $Ai+1$, ..., $Ai+A-1$ sont consécutives et en nombre multiple de A : y_{Ai} a Aa feuilles, et chaque expansion éventuelle (par des a^2 -bouquets, correspondant à des termes z), rajoute $a^2 - 1 = 2(a-1)A$ feuilles qui sont des expansions de l'une des A racines Ai , $Ai+1$, ..., $Ai+A-1$.

On peut par conséquent subdiviser en a chacune de ces feuilles (cela correspond à la multiplication par des termes y); la forêt ainsi obtenue correspond bien à un élément de F_{a^2} : chaque feuille est obtenue depuis une racine par 0 ou 2 subdivisions en a et un nombre quelconques de subdivision en a^2 .

Avec $a = 3$, prenons l'exemple $w = z_0z_3z_8y_2$; si on prend $v = y_{10}y_{12}y_{14}y_{16}y_{18}y_{20}y_{22}$ on peut décrire la transformation associée sur les forêts :



Toute l'idée de la démonstration se trouve ci-dessus, mais bien sûr, nous allons devoir

remplacer ces raisonnements sur les expansions de forêts et les longueurs d'intervalles représentés par des feuilles par un raisonnement plus formel, dans le cadre du groupe $\mathcal{H}_{a,a+1}$, avec les mots en y_{Ai} et z_k et les relations (R).

Soit donc $i \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{F}_{a^2}^+$, que l'on écrit $u = z_{a_1} \dots z_{a_0}$ avec $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l$.

Si $a_0 < Ai$, $z_{a_0} y_{Ai} = y_{A(i+2a-2)} z_{a_0}$, et en répétant cette opération on peut se ramener à prouver le résultat pour $a_0 \geq Ai$, donc supposer que $i = 0$ (l'ensemble des relations est invariant par la translation de A sur les indices).

Ainsi, on étudie $w = z_{a_l} \dots z_{a_0} y_0$, $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l$.

Si $a_0 \geq Aa$, $w = y_0 z_{a_l - A(a-1)} \dots z_{a_0 - A(a-1)}$, et la relation (R^5) donne

$$(y_0 y_A \dots y_{A(a-1)}) w = (z_0 z_1 \dots z_{A-1}) (z_{a_l - A(a-1)} \dots z_{a_0 - A(a-1)}),$$

qui est dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$, et le résultat est donc prouvé avec $v = y_0 y_A \dots y_{A(a-1)}$.

Dans le cas contraire, on peut écrire $w = (z_{a_l} \dots z_{a_{m+1}}) (z_{a_m} \dots z_{a_0}) y_0$, avec $a_0 < Aa$, $a_1 < 3A(a-1) + A$, ..., $a_m < A(a-1)(2m+1) + A$ et soit $m = l$, soit $a_{m+1} \geq A(a-1)(2m+3) + A$.

On prend alors $v = y_0 y_A y_{2A} \dots y_{A(a-1+2(m+1)(a-1))}$ (produit de $k = a + 2(m+1)(a-1)$ termes), et comme $A(a-1 + 2(m+1)(a-1)) + A = A(a-1)(2m+3) + A \leq a_{m+1}$, on a par R^4 $vw = (z_{a_l + A(a-1)k} \dots z_{a_{m+1} + A(a-1)k}) v (z_{a_m} \dots z_{a_0}) y_0$.

Écrivons $a_m = A\mu + \lambda$, $0 \leq \lambda < A$, $0 \leq \mu \leq (a-1)(2m+1)$; on a

$$\begin{aligned} v z_{a_m} &= (y_0 \dots y_{A(\mu+2a-2)}) (y_{A(\mu+2a-1)} \dots y_{A(a-1+2(m+1)(a-1))}) z_{A\mu+\lambda} \\ &= (y_0 \dots y_{A(\mu-1)}) (y_{A\mu} \dots y_{A(\mu+2a-2)}) z_{A\mu+\lambda} (y_{A(\mu+1)} \dots y_{A(a-1+2m(a-1))}) \\ &= (y_0 \dots y_{A(\mu-1)}) (z_{A\mu+\lambda a} \dots z_{A\mu+\lambda a + a - 1} y_{A\mu}) (y_{A(\mu+1)} \dots y_{A(a-1+2m(a-1))}) \\ &\quad (\text{par la relation } R^{6,\lambda}) \\ &= (z_{A\mu+\lambda a + A\mu(a-1)} \dots z_{A\mu+\lambda a + a - 1 + A\mu(a-1)}) (y_0 y_A \dots y_{A(a-1+2m(a-1))}) \end{aligned}$$

et peut conclure par récurrence sur m que vw est bien de la forme souhaitée : le terme $v z_{a_m} z_{a_{m-1}} \dots z_{a_0}$ est le produit d'un produit de z par $y_0 y_A \dots y_{A(a-1)}$, donc, grâce à la relation R^5 , vw s'exprime uniquement à l'aide des termes z .

Preuve du lemme 4 : Commençons par traiter le cas particulier $w = uv^{-1}$: soit u, v dans \mathcal{F}^+ . Grâce au lemme 2, il existe u^y et v^y dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$ tels que $u^y u$ et $v^y v$ sont dans $\mathcal{F}_{a^2}^+$, et donc avec le lemme 3, u^z et v^z tels que $u^z u^y u = v^z v^y v$.

Mais alors, $uv^{-1} = (u^z u^y)^{-1} v^z v^y$ est de la forme $u'^{-1} v'$ avec u', v' dans \mathcal{F}^+ .

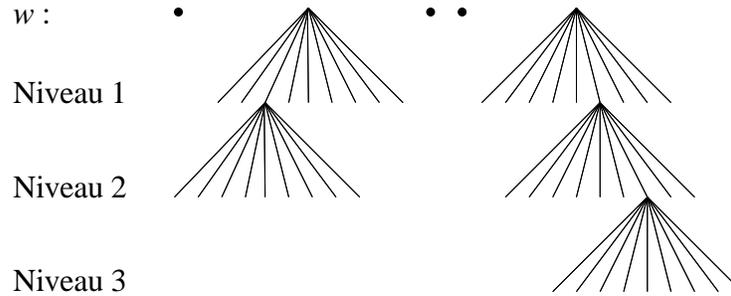
Si maintenant on prend w quelconque dans $\mathcal{H}_{a,a+1}$, on peut l'écrire comme un produit $u_1 v_1^{-1} u_2 v_2^{-1} \dots u_n v_n^{-1}$, chaque u_i et v_i étant dans \mathcal{F}^+ (u_i ou v_n pouvant valoir 1), et conclure par une récurrence sur n . En effet on vient de traiter le cas $n = 1$; on peut donc l'appliquer à $u_1 v_1^{-1}$ et écrire $w = u_1'^{-1} v_1' u_2 v_2^{-1} \dots u_n v_n^{-1}$. Le résultat est vrai par hypothèse de récurrence pour le mot $(v_1' u_2) v_2^{-1} \dots u_n v_n^{-1}$, que l'on peut donc écrire $r^{-1} s$. Ainsi, $w = u_1'^{-1} r^{-1} s$ est bien de la forme voulue.

Preuve du lemme 5 : On fixe $w \in \mathcal{F}_{a^2}^+$.

Commençons par étudier la forêt associée à l'application $\varphi(w)$, c'est à dire la forêt F telle que $\varphi(w)$ s'écrive (F_0, F) , F_0 étant la forêt triviale.

$\varphi(w)$ est une forêt de type a^2 , c'est à dire une forêt construite à partir de la forêt triviale en rajoutant des a^2 -bouquets.

On peut regarder une telle forêt "niveau par niveau"; par exemple pour $a = 3$, $w = z_{31}z_{25}z_{20}z_3z_1$, écrire



En regardant cette forêt associée à $\varphi(w)$, on peut se convaincre que l'on peut la construire ainsi : on réalise d'abord toutes les expansions de niveau 1, puis toutes celles de niveaux 2, et ainsi de suite. Mais cette construction correspond à un certain produit "formel" d'expansions z . Comme on sait que le groupe F_{a^2} peut se représenter par générateurs et relations $\langle z_k | z_k z_l = z_{l+a^2-1} z_k (k < l) \rangle$, et, grâce au lemme 0, que F_{a^2} et \mathcal{F}_{a^2} sont isomorphes, on a aussi une telle décomposition dans \mathcal{F}_{a^2} .

Ainsi, il existe une écriture de $w = w_n \dots w_2 w_1$ correspondant à cette description par niveau, w_i représentant les éléments de niveau i (dans notre exemple, on prend ainsi $w_1 = z_1 z_4$, $w_2 = z_3 z_{17}$, $w_3 = z_{31}$, et on peut écrire $w = (z_{31})(z_3 z_{17})(z_1 z_4)$).

On remarque que l'ensemble des points de rupture de $\varphi(w)$ est la réunion (non disjointe !) de l'ensemble des points de rupture de chaque $\varphi(w_i)$; d'autre part, comme $\varphi(w)$ est dans \overline{F}_a , tous ses points de rupture sont multiples de A (de la forme $A \frac{p}{a^q}$).

Il nous suffit donc d'étudier le cas d'un tel élément w_i , autrement dit de montrer que chaque w_i , dont tous les points de rupture sont multiples de A , peut s'écrire comme un produit de termes de la forme $z_{Ai} \dots z_{Ai+A-1}$.

La forêt associée à chaque w_i peut-être construite ainsi : on fixe un nombre fini d'intervalles $[n, n+1]$ et on en réalise une expansion élémentaire ; on obtient ainsi une forêt sur un seul niveau où alternent des racines et un nombre fini de a^2 -bouquets.

Mais on sait que les deux points de rupture correspondant à z_k (i.e à un a^2 -bouquet d'indice k), k et $k+1$, ne sont jamais multiples de A , sauf le premier point de rupture des z_{Ai} et le deuxième point de rupture des z_{Ai+A-1} .

Par conséquent, si un a^2 -bouquet d'indice $Ai+r$, $0 \leq r < A$, intervient dans l'écriture de la forêt, on a nécessairement aussi tous les a^2 -bouquets d'indice Ai , $Ai+1$, \dots , $Ai+A-1$, sinon apparaîtrait un point de rupture non multiple de A .

Ainsi, w_i est bien un produit de termes $z_{Ai} z_{Ai+1} \dots z_{Ai+A-1}$.

Cela termine la preuve des lemmes ; le théorème A est donc maintenant entièrement démontré.

V.3.4 $H_{a,a+1}$ est de présentation finie

On vient de trouver une présentation infinie, mais relativement régulière, de $H_{a,a+1}$:

Théorème B

Le groupe $H_{a,a+1}$ est défini par les générateurs $y_{Ai}, i \in \mathbb{N}, z_k, k \in \mathbb{N}$, et les relations (R).

Pour montrer que $H_{a,a+1}$ est de présentation finie, il nous suffit donc de réduire cette présentation $\langle y_0, y_A, \dots, z_0, z_1, z_2, \dots \mid R \rangle$ à une présentation finie.

Pour cela on se donne des éléments $y_0, y_A, y_{2A}, \dots, y_{A(a-1)}$ et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{a^2-1}$, et on définit à partir de là, pour $1 \leq i \leq a-1$ et $n \geq 1$, $y_{Ai+nA(a-1)} = y_0^n y_{Ai} y_0^{-n}$ et de même, pour $\alpha = 1, 2, \dots, a^2-1, n \geq 1$, $z_{(a^2-1)n+\alpha} = z_0^n z_\alpha z_0^{-n}$.

Il est facile de vérifier avec cette définition que $z_0 z_k z_0^{-1} = z_{k+a^2-1}$ et $y_0 y_{Ai} y_0^{-1} = y_{Ai+A(a-1)}$ pour tous $k, i \geq 1$.

On considère alors le groupe défini par les générateurs $y_0, y_A, \dots, y_{A(a-1)}$ et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{a^2-1}$, et l'ensemble fini de relations :

- $R_{k,l}^1$ pour $k < l, l \leq 2a^2-1$
- $R_{i,j}^2$ pour $i < j, j \leq 2a-1$
- $R_{k,i}^3$ pour $k < Ai, i \leq 3a-2$
- $R_{i,k}^4$ pour $A(i+1) \leq k, k \leq a(a+A)$
- R_i^5 pour $i \leq a$
- $R_i^{6,\lambda}$ pour $0 \leq \lambda < A, i \leq a$.

[en toute rigueur ce ne sont pas directement ces relations que l'on prend, mais les relations obtenues en remplaçant formellement toutes les occurrences de $y_{Ai}, i > a-1$ et $z_k, k > a^2-1$ par leur définition en fonction de $y_0, y_A, \dots, y_{A(a-1)}$ et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{a^2-1}$]

On va montrer que dans ce groupe, qui est par construction de présentation finie, toutes les relations R sont vérifiées.

- R^1 est vraie :

$R_{k,l}^1$ l'est par hypothèse pour $l \leq 2a^2-1, k < l$.

Fixons $l > 2a^2-1$ et $k < l$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^1$ vraie pour $\lambda < l, \kappa < \lambda$.

Si $k \leq a^2-1$ on a

$$\begin{aligned} z_k z_l z_k^{-1} &= z_k (z_{a^2} z_{l-a^2+1} z_{a^2}^{-1}) z_k^{-1} && (R_{a^2, l-a^2+1}^1) \\ &= (z_k z_{a^2} z_k^{-1}) (z_k z_{l-a^2+1} z_k^{-1}) (z_k z_{a^2}^{-1} z_k^{-1}) \\ &= (z_0 z_{a^2} z_0^{-1}) (z_0 z_{l-a^2+1} z_0^{-1}) (z_0 z_{a^2}^{-1} z_0^{-1}) && (R_{*, l-a^2+1}^1, R_{*, a^2}^1) \\ &= z_0 (z_{a^2} z_{l-a^2+1} z_{a^2}^{-1}) z_0^{-1} \\ &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{a^2, l-a^2+1}^1) \\ &= z_{l+a^2-1} \end{aligned}$$

Si $k \geq a^2$:

$$\begin{aligned} z_k z_l z_k^{-1} &= z_0 (z_{k-a^2+1} z_{l-a^2+1} z_{k-a^2+1}^{-1}) z_0^{-1} \\ &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{k-a^2+1, l-a^2+1}^1) \\ &= z_{l+a^2-1} \end{aligned}$$

Donc $R_{k,l}^1$ est vérifiée.

– R^2 est vraie :

$R_{i,j}^2$ l'est par hypothèse pour $j \leq 2a - 1, i < j$.

Fixons $j > 2a - 1, i < j$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^2$ vraie pour $\lambda < j, \kappa < \lambda$.

Si $i \leq a - 1$ on a

$$\begin{aligned}
y_{Ai}y_{Aj}y_{Ai}^{-1} &= y_{Ai}(y_{Aa}y_{Aj-A(a-1)}y_{Aa}^{-1})y_{Ai}^{-1} && (R_{a,j-a+1}^2) \\
&= (y_{Ai}y_{Aa}y_{Ai}^{-1})(y_{Ai}y_{Aj-A(a-1)}y_{Ai}^{-1})(y_{Ai}y_{Aa}^{-1}y_{Ai}^{-1}) \\
&= (y_0y_{Aa}y_0^{-1})(y_0y_{Aj-A(a-1)}y_0^{-1})(y_0y_{Aa}^{-1}y_0^{-1}) && (R_{*,j-a+1}^2, R_{*,a}^2) \\
&= y_0(y_{Aa}y_{Aj-A(a-1)}y_{Aa}^{-1})y_0^{-1} \\
&= y_0y_{Aj}y_0^{-1} && (R_{a,j-a+1}^2) \\
&= y_{Aj+A(a-1)}
\end{aligned}$$

Si $i \geq a$:

$$\begin{aligned}
y_{Ai}y_{Aj}y_{Ai}^{-1} &= y_0(y_{Ai-A(a-1)}y_{Aj-A(a-1)}y_{Ai-A(a-1)}^{-1})y_0^{-1} \\
&= y_0y_{Aj}y_0^{-1} && (R_{i-a+1,j-a+1}^2) \\
&= y_{Aj+A(a-1)}
\end{aligned}$$

Donc $R_{i,j}^2$ est vérifiée.

– R^3 est vraie :

$R_{k,i}^3$ l'est par hypothèse pour $i \leq 3a - 2, k < Ai$.

Fixons $i \geq 3a - 1$ et $k < Ai$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^3$ vraie pour $\lambda < i, \kappa < A\lambda$.

Si $k \leq a^2 - 1$ on a

$$\begin{aligned}
z_k y_{Ai} z_k^{-1} &= z_k (y_{A(2a-1)} y_{Ai-A(a-1)} y_{A(2a-1)}^{-1}) z_k^{-1} && (R_{2a-1,i-a+1}^2) \\
&= y_{A(4a-3)} y_{Ai+A(a-1)} y_{A(4a-3)}^{-1} && (R_{k,2a-1}^3, R_{k,i-a+1}^3) \\
&= y_{Ai+A(2a-2)}
\end{aligned}$$

Si $k \geq a^2$:

$$\begin{aligned}
z_k y_{Ai} z_k^{-1} &= z_0 (z_0^{-1} z_k z_0) (z_0^{-1} y_{Ai} z_0) (z_0^{-1} z_k^{-1} z_0) z_0^{-1} \\
&= z_0 (z_{k-a^2+1} y_{Ai-A(2a-2)} z_{k-a^2+1}^{-1}) z_0^{-1} && (R_{0,i-2a+2}^3) \\
&= z_0 y_{Ai} z_0^{-1} && (R_{k-a^2+1,i-2a+2}^3) \\
&= (z_0 y_A) (y_A^{-1} y_{Ai} y_A) (y_A^{-1} z_0^{-1}) \\
&= y_{A(2a-1)} z_0 y_{Ai-A(a-1)} z_0^{-1} y_{A(2a-1)}^{-1} && (R_{0,1}^3) \\
&= y_{A(2a-1)} y_{Ai+A(a-1)} y_{A(2a-1)}^{-1} && (R_{0,i-a+1}^3) \\
&= y_{Ai+A(2a-2)}
\end{aligned}$$

Donc $R_{k,i}^3$ est vérifiée.

– R^4 est vraie :

$R_{i,k}^4$ l'est par hypothèse pour $k \leq a(a+A), A(i+1) \leq k$.

Fixons $k > a(a+A), A(i+1) \leq k$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^4$ vraie pour $\lambda < k, A(\kappa+1) \leq \lambda$.

Si $i < a$ on a

$$\begin{aligned}
 y_{Ai} z_k y_{Ai}^{-1} &= y_{Ai} (z_{Aa+1} z_{k-a^2+1} z_{Aa+1}^{-1}) y_{Ai}^{-1} \\
 &= (y_{Ai} z_{Aa+1} y_{Ai}^{-1}) (y_{Ai} z_{k-a^2+1} y_{Ai}^{-1}) (y_{Ai} z_{Aa+1}^{-1} y_{Ai}^{-1}) \\
 &= z_{A(2a-1)+1} z_{k-A(a-1)} z_{A(2a-1)+1}^{-1} \quad (R_{i,Aa+1}^4, R_{i,k-a^2+1}^4) \\
 &= z_{k+A(a-1)}
 \end{aligned}$$

Si $i \geq a$:

$$\begin{aligned}
 y_{Ai} z_k y_{Ai}^{-1} &= y_0 (y_0^{-1} y_{Ai} y_0) (y_0^{-1} z_k y_0) (y_0^{-1} y_{Ai}^{-1} y_0) y_0^{-1} \\
 &= y_0 y_{Ai-A(a-1)} z_{k-A(a-1)} y_{Ai-A(a-1)}^{-1} y_0^{-1} \quad (R_{0,k-A(a-1)}^4) \\
 &= y_0 z_k y_0^{-1} \quad (R_{i-a+1,k-A(a-1)}^4) \\
 &= (y_0 z_{A(a-1)}) (z_{A(a-1)}^{-1} z_k z_{A(a-1)}) (z_{A(a-1)}^{-1} y_0^{-1}) \\
 &= y_0 z_{A(a-1)} z_{k-a^2+1} z_{A(a-1)}^{-1} y_0^{-1} \\
 &= z_{a^2-1} (y_0 z_{k-a^2+1} y_0^{-1}) z_{a^2-1}^{-1} \quad (R_{0,A(a-1)}^4) \\
 &= z_{a^2-1} z_{k-A(a-1)} z_{a^2-1}^{-1} \quad (R_{0,k-a^2+1}^4) \\
 &= z_{k+A(a-1)}
 \end{aligned}$$

Donc $R_{i,k}^4$ est vérifiée.

– R^5 est vraie :

R_i^5 l'est par hypothèse pour $i \leq a$.

Fixons $i > a$ et supposons R_λ^5 vraie pour $\lambda < i$.

Alors

$$\begin{aligned}
 z_{Ai} \cdots z_{A(i+1)-1} &= (y_0 z_{Ai-A(a-1)} y_0^{-1}) \cdots (y_0 z_{A(i+1)-1-A(a-1)} y_0^{-1}) \\
 &= y_0 (z_{Ai-A(a-1)} \cdots z_{A(i+1)-1-A(a-1)}) y_0^{-1} \\
 &= y_0 (y_{Ai-A(a-1)} \cdots y_{A(i+1)-1-A(a-1)}) y_0^{-1} \quad (R_{i-a+1}^5) \\
 &= y_{Ai} y_{A(i+1)} \cdots y_{A(i+a-1)}
 \end{aligned}$$

Donc R_i^5 est vérifiée.

– $R^{6,\lambda}$ est vraie :

Soit $0 \leq \lambda < A$.

$R_i^{6,\lambda}$ est vérifiée par hypothèse pour $i \leq a$.

Fixons $i > a$ et supposons $R_l^{6,\lambda}$ vraie pour tout $l < i$.

Alors

$$\begin{aligned}
 y_{Ai} \cdots y_{A(i+2a-2)} z_{Ai+\lambda} &= y_0 (y_{A(i-a+1)} \cdots y_{A(i+a-1)} z_{Ai+\lambda-A(a-1)}) y_0^{-1} \\
 &= y_0 (z_{A(i-a+1)+\lambda a} \cdots z_{A(i-a+1)+\lambda a+a-1} y_{A(i-a+1)}) y_0^{-1} \\
 &= z_{Ai+\lambda a} \cdots z_{Ai+\lambda a+a-1} y_{Ai}
 \end{aligned}$$

Donc $R_i^{6,\lambda}$ est vérifiée.

Ainsi, la présentation infinie que l'on a trouvée au chapitre précédent se ramène à une présentation finie, et donc on a démontré le

Théorème B (cas général) $H_{a,a+1}$ est de présentation finie.

La démonstration ci-dessus donne une présentation finie avec pour générateurs $y_0, y_A, \dots, y_{A(a-1)}$ et $z_0, z_1, \dots, z_{a^2-1}$ soit $a + a^2$ générateurs. On peut aussi calculer le nombre de relations nécessaires : on a ainsi utilisé $(2a^2 - 1)(2a^2)/2$ relations R^1 , $(2a - 1)(2a)/2$ relations R^2 , $A(3a - 2)(3a - 1)/2$ relations R^3 , $A(a + 1)(a + 2)/2$ relations R^4 , $a + 1$ relations R^5 et $A(a + 1)$ relations R^6 , soit au total $(4a^4 + 5a^3 + 5a^2 + a + 5)/2$ relations.

On peut compléter en montrant (grâce à R^5) que les z_{Ai} se déduisent des y_{Ai} et des z_k pour k non-multiples de A , ce qui nous permet d'écrire une présentation finie avec pour générateurs les $y_0, y_A, \dots, y_{A(a-1)}$ et les $z_k, 0 \leq k < a^2, k$ non multiple de A , soit $a + (a^2 - 2a + 1) = a^2 - a + 1$ générateurs.

V.3.5 Existence d'une forme semi-normale

La démonstration de la présentation de $H_{a,a+1}$ se fait par une étude directe des relations, contrairement à la première démonstration, dans le cas $a = 3$, où l'on commençait par prouver une sorte de forme normale. Mais ici aussi, on peut espérer prouver un résultat analogue :

Problème :

Tout élément de $\mathcal{H}_{a,a+1}$ a une écriture de la forme :

$$\begin{aligned} & (y_0^{-\alpha_0} z_1^{-\alpha_1} z_2^{-\alpha_2} \dots z_{A-1}^{-\alpha_{A-1}}) \dots (y_{Ai}^{-\alpha_{Ai}} z_{Ai+1}^{-\alpha_{Ai+1}} \dots z_{Ai+A-1}^{-\alpha_{Ai+A-1}}) \dots \\ & \quad * \\ & \dots (z_{Ai+A-1}^{\beta_{Ai+A-1}} \dots z_{Ai+1}^{\beta_{Ai+1}} y_{Ai}^{\beta_{Ai}}) \dots (z_{A-1}^{\beta_{A-1}} \dots z_1^{\beta_1} y_0^{\beta_0}), \end{aligned}$$

avec tous les α_k et β_k positifs ou nuls, et nuls à partir d'un certain rang,

V.4 Présentations de F_Γ

V.4.1 F_Γ est de présentation finie

Fixons Γ de genre 0. Si $n = v(\Gamma)$, on a déjà vérifié que F_Γ est isomorphe à $F_{2n-3, 2n-2}$.

Mais celui-ci est un sous-groupe d'indice 2 de $H_{2n-3, 2n-2}$, qui est de présentation finie. Par conséquent,

Proposition 29 *Si Γ est de genre 0, F_Γ est de présentation finie*

V.4.2 Présentations explicites de F_Γ

Pour calculer des présentations explicites de $F_{a,a+1}$ à partir de celles de $H_{a,a+1}$ on va utiliser le théorème de Reidemeister-Schreier, démontré par exemple dans [11].

Un cas particulier de ce théorème, pour un sous-groupe d'indice 2 qui est le cas qui nous intéresse, est la suivante :

Proposition 30 (Reidemeister-Schreier)

Soit G un groupe de présentation $\langle x \in X \mid r \in R \rangle$.

On se donne H un sous-groupe de G d'indice 2 et y_0 un élément de G tel que $G = H \cup y_0 H$.

On pose $I = \{0, 1\}$, $H_0 = H$ et $H_1 = y_0H$, $\overline{H_0} = 1$, $\overline{H_1} = y_0$, et on définit, pour $i \in I$ et $x \in X$, $\theta_{i,x} = \overline{H_i x} (\overline{H_i x})^{-1}$.

On définit aussi pour $x \in X$, $i \in I$, $e \in \{+1, -1\}$ et $w \in G$:

$$\begin{aligned} 1^{H_i} &= 1 \\ x^{H_i} &= \theta_{i,x} \\ (x^{-1})^{H_i} &= (x^{H_i x^{-1}})^{-1} \\ (wx^e)^{H_i} &= w^{H_i} (x^e)^{H_i w}. \end{aligned}$$

Enfin Θ est l'ensemble $\{\theta_{i,x} \mid \theta_{i,x} = 1 \text{ dans } G\}$.

Alors le groupe H a la présentation

$$\langle \theta_{i,x} (i \in I, x \in X) \mid \Theta, r^{H_i} (i \in I, r \in R) \rangle$$

Dans notre cas on prend $H = F_{a,a+1}$, $X = \{y_{Ai}, z_k, i, k \in \mathbb{N}\}$ et les relations R données précédemment.

Alors

$$y_{0,x} = \begin{cases} x & \text{si } x \in F_{a,a+1} \\ xy_0^{-1} & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$y_{1,x} = \begin{cases} y_0 x y_0^{-1} & \text{si } x \in F_{a,a+1} \\ y_0 x & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pose $Z_k = y_{0,z_k}$, $Z'_k = y_{1,z_k}$, $Y_{Ai} = y_{1,y_{Ai}}$, $Y'_{Ai} = y_{0,y_{Ai}}$.

Vus comme éléments du groupe $H_{a,a+1}$, $Z_k = z_k$, $Z'_k = y_0 z_k y_0^{-1}$, $Y_{Ai} = y_0 y_{Ai}$ et $Y'_{Ai} = y_{Ai} y_0^{-1}$.

On a $\theta_{i,x} = 1$ dans $H_{a,a+1}$ si et seulement si $i = 0$, $x = y_0$, donc $\Theta = \{Y'_0\}$.

Ainsi,

Proposition 31 $F_{a,a+1}$ admet la présentation :

Générateurs :

$$Y_{Ai}, Y'_{Ai} \text{ pour } i \in \mathbb{N}$$

$$Z_k, Z'_k \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

Relations :

$$Y'_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
k < l : \quad & (R_{k,l}^1) \quad Z_k Z_l = Z_{l+a^2-1} Z_k \\
& (R_{k,l}^1) \quad Z'_k Z'_l = Z'_{l+a^2-1} Z'_k \\
i < j : \quad & (R_{i,j}^2) \quad Y_{Ai} Y'_{Aj} = Y_{A(j+a-1)} Y'_{Ai} \\
& (R_{i,j}^2) \quad Y'_{Ai} Y_{Aj} = Y'_{A(j+a-1)} Y_{Ai} \\
k < Ai : \quad & (R_{k,i}^3) \quad Z_k Y'_{Ai} = Y'_{A(i+2a-2)} Z'_k \\
& (R_{k,i}^3) \quad Z'_k Y_{Ai} = Y_{A(i+2a-2)} Z_k \\
A(i+1) \leq k : \quad & (R_{i,k}^4) \quad Y'_{Ai} Z'_k = Z_{k+A(a-1)} Y'_{Ai} \\
& (R_{i,k}^4) \quad Y_{Ai} Z_k = Z'_{k+A(a-1)} Y_{Ai} \\
\forall i : \quad & (R_i^5) \quad Z_{Ai} Z_{Ai+1} \cdots Z_{A(i+1)-1} \\
& \quad \quad \quad = Y'_{Ai} Y_{A(i+1)} \cdots Y'_{A(i+a-1)} Y_{Ai} \\
& (R_i^5) \quad Z'_{Ai} Z'_{Ai+1} \cdots Z'_{A(i+1)-1} \\
& \quad \quad \quad = Y_{Ai} Y'_{A(i+1)} \cdots Y_{A(i+a-1)} Y'_{Ai} \\
\forall i, 0 \leq \lambda < a : \quad & (R_i^{6,\lambda}) \quad Y'_{Ai} Y_{A(i+1)} \cdots Y_{A(i+2a-3)} Y'_{A(i+2a-2)} Z'_{Ai+\lambda} \\
& \quad \quad \quad = Z_{Ai+\lambda} Z_{Ai+\lambda+1} \cdots Z_{Ai+\lambda+a-1} Y'_{Ai} \\
& (R_i^{6,\lambda}) \quad Y_{Ai} Y'_{A(i+1)} \cdots Y'_{A(i+2a-3)} Y_{A(i+2a-2)} Z_{Ai+\lambda} \\
& \quad \quad \quad = Z'_{Ai+\lambda} Z'_{Ai+\lambda+1} \cdots Z'_{Ai+\lambda+a-1} Y_{Ai}
\end{aligned}$$

De manière analogue, à partir des présentations finies de $H_{a,a+1}$, on montre aussi :

Proposition 32 $F_{a,a+1}$ admet une présentation finie de générateurs $Y_0, Y_A, \dots, Y_{A(a-1)}$ et $Z_k, 0 \leq k < a^2, k$ non multiple de A .

Démonstration:

On sait que $H_{a,a+1}$ admet une présentation finie avec pour générateurs $y_0, y_A, \dots, y_{A(a-1)}$ et les $z_k, 0 \leq k < a^2, k$ non multiple de A .

Donc par le théorème de Reidemeister-Schreier, $F_{a,a+1}$ admet une présentation finie avec générateurs $Y_0, Y_A, \dots, Y_{A(a-1)}, Y'_0, Y'_A, \dots, Y'_{A(a-1)}$ et $Z_k, Z'_k, 0 \leq k < a^2, k$ non multiple de A .

Mais en utilisant $Y'_0=1, R^2$ nous donne $Y'_{Aj} = Y_{A(j+a-1)} Y_0^{-1}$ pour tout $j \geq 1$, et R^3 nous donne $Z'_k = Y_{A(i+2a-2)} Z_k Y_{Ai}^{-1}$ pour tout k . ■

Chapitre VI

Le groupe T_Γ

VI.1 Rappel des définitions

On rappelle la définition du groupe T_Γ :

Définition 9 T_Γ est le sous-groupe de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ constitué des éléments qui, sur chacun des intervalles entre les points de rupture, coïncident avec un élément de Γ .

C'est donc la même définition que pour le groupe F_Γ sans la condition de fixer l'infini.

Le cercle S^1 est vu comme l'espace $[0, 1]$ où l'on identifie 0 et 1. Dans ce cadre affine, on a défini de manière analogue le groupe $T_{a,a+1}^{[0,1]}$:

Définition 10 $T_{a,a+1}^{[0,1]}$ est le groupe des homéomorphismes de S^1 , affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{a+1}\mathbb{Z}[1/a]$ et des pentes puissances de a , de la forme $a^n x + \frac{p}{a^q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, sur chaque intervalle où ils sont affines,

et on a la propriété de conjugaison :

Proposition 33 Si Γ est de genre 0, T_Γ est conjugué à $T_{2n-3, 2n-2}^{[0,1]}$, où n désigne le nombre de cusps de \mathbb{H}/Γ .

Dans tout ce qui suit, on abrège $T_{a,a+1}^{[0,1]}$ et $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ en $T_{a,a+1}$ et $F_{a,a+1}$ respectivement.

VI.2 Propriétés de transitivité

Si I est un intervalle de \mathbb{R} , de manière analogue au cas $I = [0, 1]$, $F_{a,a+1}^I$ est défini comme le groupe des homéomorphismes de I affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{a+1}\mathbb{Z}[1/a]$ et de la forme $x \rightarrow a^n x + \frac{p}{a^q}$ sur chaque intervalle où ils sont affines ; on définit aussi $\Omega_I = \mathbb{Z}[1/a] \cap I$.

On va ici chercher à décrire l'action de $F_{a,a+1}^I$ sur Ω_I .

On commence bien sûr par remarquer que :

Proposition 34 Ω_I est stable par $F_{a,a+1}^I$

Démonstration:

Par définition I est stable par $F_{a,a+1}^I$, et si $\omega = u/a^v \in \Omega_I$, $f(\omega)$ est de la forme $a^n \frac{u}{a^v} + \frac{p}{a^q} = \frac{a^{n+q}u + a^v p}{a^{v+q}}$ qui est bien dans $\mathbb{Z}[1/a]$. Donc $f(\omega) \in \Omega_I$. ■

Soient maintenant $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}[1/a]$ avec $0 < \alpha < \alpha'$.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k(a-1)\alpha > \alpha' - \alpha$. Posons $\beta = \alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{a^k}$; $\alpha < \beta < \alpha'$ et $\frac{a\alpha - \beta}{a-1} = \alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{(a-1)a^k}$, donc $\alpha < \frac{a\alpha - \beta}{a-1} < \alpha'$.

Soient

$$f_1(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < \frac{a\alpha - \beta}{a-1} \\ a(t - \alpha) + \beta & \text{si } \frac{a\alpha - \beta}{a-1} \leq t \leq \alpha \\ t + \beta - \alpha & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

et

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < \alpha \\ a^k(t - \beta) + \alpha' & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta \\ t + \alpha' - \beta & \text{si } t > \beta. \end{cases}$$

Alors f_1 et f_2 sont dans $F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$, et on a $f_1(0) = 0, f_1(\alpha) = \beta$ et $f_2(0) = 0, f_2(\beta) = \alpha'$; par conséquent $f = f_2 \circ f_1 \in F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ est telle que $f(0) = 0, f(\alpha) = \alpha'$.

Si $\alpha > \alpha'$, on prend l'inverse de la fonction f correspondant à $\alpha' < \alpha$, ce qui nous donne aussi bien une fonction de $F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0, f(\alpha) = \alpha'$. Et bien entendu si $\alpha = \alpha', f = Id_{\mathbb{R}}$ convient.

Soient maintenant u, v, u', v' dans $\mathbb{Z}[1/a]$ tels que $u < v, u' < v'$. Comme $v - u > 0$ et $v' - u' > 0$, par ce qui précède il existe $f \in F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0, f(v - u) = v' - u'$. Si on définit $g_{u,v,u',v'}$ par $g_{u,v,u',v'}(t) = u' + f(t - u)$, alors $g_{u,v,u',v'} \in F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ et $g_{u,v,u',v'}(u) = u', g_{u,v,u',v'}(v) = v'$.

On peut maintenant prouver :

Proposition 35 Pour tout $l \geq 1$, $F_{a,a+1}^I$ agit l -transitivement sur Ω_I .

Démonstration:

Soient $u_1 < u_2 < \dots < u_l$ et $u'_1 < u'_2 < \dots < u'_l$ dans Ω_I .

D'après ce qui précède, f définie sur I par :

$$f(t) = \begin{cases} g_{0,u_1,0,u'_1}(t) & \text{si } t \leq u_1 \\ g_{u_1,u_2,u'_1,u'_2}(t) & \text{si } u_1 \leq t \leq u_2 \\ \dots & \\ g_{u_{l-1},u_l,u'_{l-1},u'_l}(t) & \text{si } u_{l-1} \leq t \leq u_l \\ g_{u_l,1,u'_l,1}(t) & \text{si } u_l \leq t \end{cases}$$

est un élément de $F_{a,a+1}^I$ qui envoie u_i sur u'_i pour tout $1 \leq i \leq l$, d'où le résultat. ■

On peut au passage noter que si $u, v \in \mathbb{Z}[1/a]$, $u < v$, $g_{0,1,u,v}$ conjugue les deux groupes $F_{a,a+1}^{[u,v]}$ et $F_{a,a+1}$, et on a donc prouvé le résultat :

Proposition 36 *Pour tout intervalle I d'extrémités dans $\mathbb{Z}[1/a]$, $F_{a,a+1}^I$ est isomorphe à $F_{a,a+1}$.*

On peut montrer pour les groupes T un résultat analogue de transitivité ; on note Ω' l'image dans S^1 de $\mathbb{Z}[1/a]$:

Proposition 37 *Pour tout $n \geq 1$, $T_{a,a+1}$ agit transitivement sur les parties à n éléments de Ω' .*

Démonstration:

- Si $u \in \Omega'$, τ_u la translation par u , $\tau_u(x) = x + u$ est un élément de $T_{a,a+1}$ qui envoie 0 sur u . $\tau_{u,v} = \tau_v \circ \tau_u^{-1}$ envoie u sur v , ce qui prouve le résultat pour $n = 1$.
- Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_1$ et $b_1 < b_2 < \dots < b_n < b_1$ dans Ω' (on fixe des représentants dans \mathbb{R} de ces points qui sont contenus dans un intervalle de longueur 1).
Alors par la proposition 35, il existe $f \in F_{a,a+1}$ telle que f envoie $a_2 - a_1$ sur $b_2 - b_1, \dots, a_n - a_1$ sur $b_n - b_1$.
Mais alors, $\tau_{b_1} \circ f \circ \tau_{a_1}^{-1} \in T_{a,a+1}$ envoie a_1 sur b_1, \dots, a_n sur b_n .

Cela prouve le résultat de n -transitivité ■

VI.3 T_Γ est de type fini

On démontrera de manière indépendante que T_Γ est de présentation finie, mais on peut facilement prouver que T_Γ est de type fini, en utilisant une fois de plus l'isomorphisme avec $T_{a,a+1}^{[0,1]}$.

En effet, soit φ la translation de $1/a$ sur $[0, 1]$: $\varphi = \tau_{1/a}$. Si $\alpha \in \mathbb{Z}[1/a] \cap]0, 1[$, il existe f_α dans $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ telle que $f_\alpha(1/a) = \alpha$. Soit alors $g_\alpha = f_\alpha \circ \varphi$. Alors $g_\alpha \in \langle \varphi, F_{a,a+1}^{[0,1]} \rangle \subset T_{a,a+1}^{[0,1]}$, et $g_\alpha(0) = \alpha$.

Si maintenant on se donne $f \in T_{a,a+1}^{[0,1]}$, $g_{f(0)}^{-1} \circ f(0) = 0$ donc $g_{f(0)}^{-1} \circ f \in F_{a,a+1}^{[0,1]}$. Ainsi, $f \in \langle \varphi, F_{a,a+1}^{[0,1]} \rangle$.

On a donc montré que φ et $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ engendrent $T_{a,a+1}^{[0,1]}$. Mais comme $F_{a,a+1}^{[0,1]}$ est de type fini, on a prouvé que $T_{a,a+1}^{[0,1]}$ est de type fini.

Ainsi, $T_{a,a+1}^{[0,1]}$ et T_Γ étant isomorphes,

Proposition 38 *T_Γ est de type fini.*

VI.4 Calculs de stabilisateurs

Dans cette partie nous étudions certains stabilisateurs de l'action de $T_{a,a+1}$ sur Ω' , ce qui nous sera utile pour montrer que $T_{a,a+1}$ est de présentation finie.

Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit sur un groupe G , on rappelle que le produit semi-direct $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des couples (g, u) , $g \in G, u \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec le produit $(g, u)(h, v) = (gu.h, u + v)$. G est un sous-groupe d'indice fini de $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc G et $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont simultanément de présentation finie ou non.

- Soit Stab_{α} le sous-groupe de $T_{a,a+1}$ formé des éléments qui laissent fixe $\alpha \in \Omega'$. L'application $F_{a,a+1} \rightarrow \text{Stab}_{\alpha}$ qui à f associe $\tau_{\alpha} \circ f \circ \tau_{\alpha}^{-1}$ est un isomorphisme, et donc

$$\text{Stab}_{\alpha} \simeq F_{a,a+1}.$$

En particulier, Stab_{α} est de présentation finie.

- Soit $\text{Stab}_{\alpha,\beta}$ le sous-groupe de $T_{a,a+1}$ formé des éléments qui laissent fixes α et $\beta \in \Omega'$. Par la conjugaison par τ_{α} , on peut supposer que $\alpha = 0$.

Considérons alors l'application $F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \times F_{a,a+1}^{[\beta,1]} \rightarrow \text{Stab}_{0,\beta}$ qui envoie (f_1, f_2) sur l'application qui à x associe $f_1(x)$ sur $[0, \beta]$ et $f_2(x)$ sur $[\beta, 1]$. C'est clairement un isomorphisme, et comme $F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \simeq F_{a,a+1}^{[\beta,1]} \simeq F_{a,a+1}$, on a prouvé que

$$\text{Stab}_{\alpha,\beta} \simeq F_{a,a+1} \times F_{a,a+1} = F_{a,a+1}^2.$$

En particulier, $\text{Stab}_{\alpha,\beta}$ est de présentation finie.

- Soit $\text{Stab}_{\alpha,\beta,\gamma}$ le sous-groupe de $T_{a,a+1}$ formé des éléments qui laissent fixes α, β et $\gamma \in \Omega'$. Par la conjugaison par τ_{α} , on peut supposer que $\alpha = 0$.

Considérons alors l'application $F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \times F_{a,a+1}^{[\beta,\gamma]} \times F_{a,a+1}^{[\gamma,1]} \rightarrow \text{Stab}_{0,\beta,\gamma}$. Elle envoie (f_1, f_2, f_3) sur l'application qui à x associe $f_1(x)$ sur $[0, \beta]$, $f_2(x)$ sur $[\beta, \gamma]$ et $f_3(x)$ sur $[\gamma, 1]$. C'est clairement un isomorphisme, et comme $F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \simeq F_{a,a+1}^{[\beta,\gamma]} \simeq F_{a,a+1}^{[\gamma,1]} \simeq F_{a,a+1}$, on a prouvé que

$$\text{Stab}_{\alpha,\beta,\gamma} \simeq F_{a,a+1} \times F_{a,a+1} \times F_{a,a+1} = F_{a,a+1}^3.$$

En particulier, $\text{Stab}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est de présentation finie.

- Soit $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta\}}$ le sous-groupe de $T_{a,a+1}$ formé des éléments qui laissent fixe globalement $\{\alpha, \beta\}$, α, β distincts dans Ω' . En conjuguant par τ_{α} , on peut supposer que $\alpha = 0$.

Soit ψ dans $F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ qui envoie 0 sur β et β sur 1 ; ψ permet de définir une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \times F_{a,a+1}^{[\beta,1]}$ par $0.(f, g) = (f, g)$ et $1.(f, g) = (\psi^{-1}g\psi, \psi f\psi^{-1})$.

Si

$$A : \begin{cases} F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \times F_{a,a+1}^{[\beta,1]} & \rightarrow \text{Stab}_{\{0,\beta\}} \\ (f, g) & \mapsto \begin{cases} f \text{ sur } [0, \beta] \\ g \text{ sur } [\beta, 1] \end{cases} \end{cases},$$

on définit B de $(F_{a,a+1}^{[0,\beta]} \times F_{a,a+1}^{[\beta,1]}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\text{Stab}_{\{0,\beta\}}$ par $((f, g), 0) \rightarrow A(f, g)$ et $((f, g), 1) \rightarrow A(g\psi, f\psi^{-1})$. Alors B est un morphisme injectif.

Fixons un élément s dans $\text{Stab}_{\{0,\beta\}}$. Si il fixe 0 et β , $s = B((s|_{[0,\beta]}, s|_{[\beta,1]}), 0)$. Si il échange 0 et β , si Ψ désigne l'élément valant ψ sur $[0, \beta]$ et ψ^{-1} sur $[\beta, 1]$, $\Psi = B((Id, Id), 1)$, et $\Psi \circ s$ fixe 0 et β donc a un antécédent par B : s est donc bien dans l'image de B . Ainsi, B est surjectif : B est un isomorphisme, et on a donc :

$$\text{Stab}_{\{\alpha,\beta\}} \simeq (F_{a,a+1} \times F_{a,a+1} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq F_{a,a+1}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En particulier, $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta\}}$ est de présentation finie.

- Soit $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ le sous-groupe de $T_{a,a+1}$ formé des éléments qui laissent fixe globalement $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, α, β, γ distincts dans Ω' .

Si on se donne φ dans $T_{a,a+1}$ qui envoie $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ sur $\{0, 1/3, 2/3\}$ (φ existe par la proposition 37), φ conjugue $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ et $\text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}}$; il suffit donc d'étudier ce dernier groupe.

On définit une action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $F_{a,a+1}^{[0,1/3]} \times F_{a,a+1}^{[1/3,2/3]} \times F_{a,a+1}^{[2/3,1]}$ par

$$\begin{aligned} 0.(f, g, h) &= (f, g, h) \\ 1.(f, g, h) &= (\tau_{-2/3} \circ h \circ \tau_{2/3}, \tau_{1/3} \circ f \circ \tau_{-1/3}, \tau_{1/3} \circ g \circ \tau_{-1/3}) \\ 2.(f, g, h) &= (\tau_{-1/3} \circ g \circ \tau_{1/3}, \tau_{-1/3} \circ h \circ \tau_{1/3}, \tau_{2/3} \circ f \circ \tau_{-2/3}) \end{aligned}$$

(τ_a désigne la translation de a dans $F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$).

Si A est donnée par

$$A : \begin{cases} F_{a,a+1}^{[0,1/3]} \times F_{a,a+1}^{[1/3,2/3]} \times F_{a,a+1}^{[2/3,1]} & \rightarrow \text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}} \\ (f, g, h) & \mapsto \begin{cases} f \text{ sur } [0, 1/3] \\ g \text{ sur } [1/3, 2/3] \\ h \text{ sur } [2/3, 1], \end{cases} \end{cases}$$

on définit un morphisme B de $(F_{a,a+1}^{[0,1/3]} \times F_{a,a+1}^{[1/3,2/3]} \times F_{a,a+1}^{[2/3,1]}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\text{Stab}_{\{0,\beta\}}$ par

$$\begin{aligned} ((f, g, h), 0) &\mapsto A(f, g, h) \\ ((f, g, h), 1) &\mapsto A(g \circ \tau_{1/3}, h \circ \tau_{1/3}, f \circ \tau_{-2/3}) \\ ((f, g, h), 2) &\mapsto A(h \circ \tau_{2/3}, f \circ \tau_{-1/3}, g \circ \tau_{-1/3}). \end{aligned}$$

Alors B est clairement injectif.

Fixons un élément s dans $\text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}}$.

Si s fixe 0, 1/3 et 2/3, $s = B((s|_{[0,1/3]}, s|_{[1/3,2/3]}, s|_{[2/3,1]}), 0)$.

Dans le cas contraire : aucun des trois points 0, 1/3 et 2/3 n'est fixe, car si (par exemple) 0 est fixe, s est dans $F_{a,a+1}$, et il n'y a aucun élément de $F_{a,a+1}$ qui échange deux points. Par conséquent, s permute circulairement les trois points.

Soit $\Psi = B((Id, Id, Id), 1)$; Ψ envoie 0 sur 1/3, 1/3 sur 2/3 et 2/3 sur 0.

Alors $\Psi \circ s$ ou $\Psi^{-1} \circ s$ fixe 0, 1/3 et 2/3, donc a un antécédent par B , de même que Ψ par construction : s est donc bien dans l'image de B . Ainsi, B est surjectif : B est un isomorphisme, et on a donc :

$$\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}} \simeq (F_{a,a+1} \times F_{a,a+1} \times F_{a,a+1}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = F_{a,a+1}^3 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

En particulier, $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ est de présentation finie.

- On montrerait de même, mais cela ne nous sera pas utile, que pour tout n et toute partie X_n de Ω' de cardinal n ,

$$\text{Stab}_{X_n} \simeq F_{a,a+1}^n \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

et donc que Stab_{X_n} est de présentation finie.

VI.5 T_Γ est de présentation finie

On utilise un résultat déjà utilisé par K.Brown ([4], [6]) et T.Tsuboi ([27]) dans leur étude des groupes de Thompson :

Proposition 39 *Soit \tilde{X} est un 2-complexe simplicial simplement connexe sur lequel le groupe T agit sans inversion. Si $X = \tilde{X}/T$ est fini et que les groupes d'isotropie associés aux sommets, arêtes et triangles sont de présentation finie, T est de présentation finie.*

On va ici considérer d'abord le 2-complexe simplicial \tilde{Y} des triangles à sommets dans Ω' . Ω' étant infini, \tilde{Y} est simplement connexe. Mais l'action de $T_{a,a+1}$ est avec inversion : pour éviter cela on considère l'action sur la subdivision barycentrique \tilde{X} de \tilde{Y} : \tilde{X} est un 2-complexe simplicial simplement connexe sur lequel le groupe $T_{a,a+1}$ agit sans inversion.

$X = \tilde{X}/T_{a,a+1}$ est fini : comme l'action de $T_{a,a+1}$ est transitive sur les ensembles à 1, 2 et 3 éléments de Ω' , X comporte trois sommets, p_0 orbite des sommets de \tilde{Y} , p_1 orbite des milieux de deux sommets \tilde{Y} et p_2 orbite des milieux des triangles de \tilde{Y} .

X a trois types d'arêtes, p_0p_1 , p_1p_2 et p_0p_2 , et deux types de triangles, $(p_0p_1p_2)$ et $(p_0p_2p_1)$.

Si on se donne un simplexe de \tilde{X} , son groupe d'isotropie ne dépend que de l'image du simplexe dans X , et on a grâce aux résultats de la partie précédente :

$$\begin{aligned} \text{Stab}(p_0) &\simeq F_{a,a+1} \\ \text{Stab}(p_1) &\simeq F_{a,a+1}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Stab}(p_2) &\simeq F_{a,a+1}^3 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \text{Stab}(p_0p_1) &\simeq F_{a,a+1}^2 \\ \text{Stab}(p_0p_2) &\simeq F_{a,a+1}^3 \\ \text{Stab}(p_1p_2) &\simeq F_{a,a+1}^3 \\ \text{Stab}((p_0p_1p_2)) &\simeq F_{a,a+1}^3 \\ \text{Stab}((p_0p_2p_1)) &\simeq F_{a,a+1}^3. \end{aligned}$$

Tous ces stabilisateurs étant de présentation finie, on en conclut que $T_{a,a+1}$ est de présentation finie, et par conséquent :

Proposition 40 T_Γ est de présentation finie.

VI.6 Le groupe V_Γ

En s'inspirant de la construction classique des groupes de Thompson F , T et V , on cherche à prolonger la définition de ces groupes F_Γ et T_Γ à des groupes de type V .

Reprenons les définitions de F_Γ et T_Γ : avec III.1.4, on voit que l'on peut représenter un élément de F_Γ par un couple d'arbres ayant le même marquage de leurs feuilles, et un élément de T_Γ par un triplet (T_1, T_2, σ) où σ est une permutation cyclique de $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ - f étant le nombre de feuilles des arbres T_1 et T_2 - tels que les marquages des feuilles de T_2 correspondent aux marquages de l'image par σ des feuilles de T_1 .

Avec ces notations, on peut définir V_Γ comme groupe de triplets (T_1, T_2, σ) où σ est une permutation quelconque, et non plus cyclique. Alors la démonstration ci-dessus du fait que T_Γ est de présentation finie se généralise, et le groupe V_Γ est lui-aussi de présentation finie.

Chapitre VII

Quelques compléments

On rappelle que le groupe F_Γ est isomorphe au groupe affine par morceaux groupe $F_{a,a+1}$ avec $a = 2n - 3$, n étant le nombre de cusps de \mathbb{H}/Γ . On utilisera dans ce qui suit, selon les cas, le groupe $F_{a,a+1}$ ou directement le groupe F_Γ .

Dans ce chapitre sont réunis quelques résultats complémentaires sur les groupes F_Γ .

On commence par montrer que le centre de F_Γ est trivial, que $[F_\Gamma, F_\Gamma]$ est simple.

On s'intéresse ensuite à l'abélianisé du groupe F_Γ : après l'avoir décrit par un système de générateurs et relations, on le calcule explicitement pour les premières valeurs du nombre de cusps.

Si Γ est un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ quelconque, une application définie sur F_Γ et liée à ces questions d'abélianisation, suggère une piste pour prouver directement le résultat de Peter Greenberg : en genre strictement positif, F_Γ n'est pas de présentation finie.

VII.1 Centre de F_Γ

Le centre de F_Γ (ensemble des éléments commutant avec tous les autres) se détermine comme pour les groupes classiques F_n :

Proposition 41 *Le centre de F_Γ est trivial.*

Il suffit de montrer le résultat pour $F_{a,a+1}$, a impair.

Soit f dans le centre de $F_{a,a+1}$, et x dans $\mathbb{Z}[1/a]$. On définit $g \in F_{a,a+1}$ par

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, x] \\ a^2t + (1 - a^2)x & \text{sur } [x, x + 1] \\ t + (a^2 - 1) & \text{sur } [x + 1, +\infty[. \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants par g est $[0, x]$; comme f et g commutent, on a $f(x) = f(g(x)) = g(f(x))$, donc $f(x)$ est un point invariant par g , et donc $f(x) \leq x$.

f^{-1} étant aussi dans le centre de g , g et f^{-1} commutent et on montre de même que $f^{-1}(x) \leq x$, donc $x \leq f(x)$.

Ainsi, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Z}[1/a]$. Mais, $\mathbb{Z}[1/a]$ étant dense dans $[0, +\infty[$, on en déduit que $f = Id_{[0, +\infty[}$, d'où le résultat.

VII.2 F'_Γ est simple

On veut montrer que le groupe dérivé $F'_\Gamma = [F_\Gamma, F_\Gamma]$ formé des commutateurs de F_Γ , $\{[f, g] = fgf^{-1}g^{-1} \mid f, g \in F_\Gamma\}$, est simple.

VII.2.1 Le groupe $B_{a,a+1}$

On rappelle qu'il existe a impair tel que F_Γ est isomorphe à $F_{a,a+1}^{[0,1]}$; il suffit donc de montrer que $[F_{a,a+1}^{[0,1]}, F_{a,a+1}^{[0,1]}]$ est simple.

$F_{a,a+1}$ désigne ici toujours $F_{a,a+1}^{[0,1]}$, et $\Omega, \Omega_{[0,1]}$.

Le sous-groupe de $F_{a,a+1}$ constitué des applications coïncidant avec l'identité au voisinage de 0 et 1 sera noté $B_{a,a+1}$.

On a le résultat :

Proposition 42 *Pour tout $l \geq 1$, $B_{a,a+1}$ agit l -transitivement sur Ω .*

Démonstration:

On reprend les notations de la démonstration de la proposition 35.

Si l'on prend $u_0, v \in \Omega$ tels que $0 < u_0 < u_1, 0 < u_0 < u'_1$ et $1 > v > u_l, 1 > v > u'_l$, on a $g_{0,u_0,0,u_0} = Id$, $g_{v,1,v,1} = Id$, et la fonction f associée aux deux $l+2$ -uplets $(u_0, u_1, \dots, u_l, v)$ et $(u_0, u'_1, \dots, u'_l, v)$ est un élément de $B_{a,a+1}$ qui envoie u_i sur u'_i pour tout $1 \leq i \leq l$, d'où le résultat pour $B_{a,a+1}$. ■

Un résultat de G.Higman [17] affirme :

Proposition 43 *Si Ω est un ensemble totalement ordonné et B un groupe ordonné de permutations bornées de Ω , 2-transitif, alors $[B, B]$ est un groupe simple différent de $\{1\}$.*

Une conséquence de ce qui précède et de ce théorème est donc que $[B_{a,a+1}, B_{a,a+1}]$ est simple.

VII.2.2 Simplicité de $F'_{a,a+1}$

Il nous suffit maintenant de montrer que $[F_{a,a+1}, F_{a,a+1}] = [B_{a,a+1}, B_{a,a+1}]$.

Commençons par définir une application $m : F_{a,a+1} \rightarrow B_{a,a+1}$. Soient $0 < \varepsilon_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \varepsilon_2 < 1$ dans $\mathbb{Z}[1/a]$.

Alors il existe $\varphi \in F_{a,a+1}^{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi(0) = \varepsilon_1$, φ est l'identité sur $[\alpha_1, \alpha_2]$ et $\varphi(1) = \varepsilon_2$.

Si on définit, pour $f \in F_{a,a+1}$, $m(f)$ dans $B_{a,a+1}$ par

$$m(f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon_1 \\ (\varphi f \varphi^{-1})(x) & \text{si } \varepsilon_1 \leq x \leq \varepsilon_2 \\ x & \text{si } \varepsilon_2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

on a $m(f \circ g) = m(f) \circ m(g)$ pour toutes $f, g \in F_{a,a+1}$, et m est un morphisme de groupes. De plus

Proposition 44 *Si $f = Id$ sur $[0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, 1]$, on a $m(f) = f$.*

Démonstration:

- Si $x \leq \varepsilon_1$ ou $x \geq \varepsilon_2$, $m(f)(x) = x = f(x)$.
- Si $\varepsilon_1 \leq x \leq \alpha_1$ ou $\varepsilon_2 \geq x \geq \alpha_2$, $\varphi^{-1}(x) \in [0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, 1]$ donc $f(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x)$ et $m(f)(x) = \varphi\varphi^{-1}(x) = x = f(x)$.
- Si $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$, $\varphi^{-1}(x) = x$ et $\alpha_1 \leq f(x) \leq \alpha_2$, donc $m(f)(x) = f(x)$,

d'où le résultat. ■

Maintenant, donnons nous $f, g \in F_{a,a+1}$. Alors il existe α_1 et α_2 dans $\mathbb{Z}[1/a]$ tels que $[f, g]$ est l'identité sur $[0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, 1]$.

On fixe ε_1 et ε_2 dans $\mathbb{Z}[1/a]$ tels que $0 < \varepsilon_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \varepsilon_2$ et on définit le m correspondant.

Alors, par la proposition précédente,

$$m([f, g]) = [f, g],$$

et, m étant un morphisme de groupes,

$$\begin{aligned} m([f, g]) &= m(fgf^{-1}g^{-1}) \\ &= m(f)m(g)m(f)^{-1}m(g)^{-1} \\ &= [m(f), m(g)], \end{aligned}$$

et donc $[f, g] \in [B_{a,a+1}, B_{a,a+1}]$: on a montré que $[F_{a,a+1}, F_{a,a+1}] = [B_{a,a+1}, B_{a,a+1}]$.

Finalement on a bien prouvé :

Proposition 45 $[F_\Gamma, F_\Gamma]$ est un groupe simple.

VII.3 Abélianisation de F_Γ

On rappelle que $A = \frac{a+1}{2}$; on pose $b = A(a-1) = (a^2 - 1)/2$.

On va ici définir une application \mathcal{A} de $F_{a,a+1}$ dans \mathbb{Z}^{A^2} , et prouver pour les premières valeurs de a qu'elle permet de déterminer l'abélianisé de $F_{a,a+1}, F_{a,a+1}^{ab}$.

VII.3.1 L'application \mathcal{A}

\mathbb{Z} agit sur $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ par $n \cdot [u] = [a^n u]$, $[u]$ désignant la classe dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ de l'élément u de \mathbb{Z} . On note I l'ensemble des orbites pour cette action.

Pour x et y dans \mathbb{Z} on notera $x = y(I)$ pour dire que les éléments $[x]$ et $[y]$ de $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ sont dans la même orbite sous l'action de \mathbb{Z} , i.e représentent le même élément de I .

Comme $[a^2] = [1]$, l'orbite d'un $[u] \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est de cardinal 1 ou 2, et elle est de cardinal 1 si et seulement si $[au] = [u]$, i.e $b|(a-1)u$, soit encore $[u] = [0], [A], \dots, [A(a-2)]$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{card}(I) &= (b - (a-1))/2 + (a-1) \\ &= (b + (a-1))/2 \\ &= (A(a-1) + (a-1))/2 \\ &= (A+1)(a-1)/2 \\ &= (A+1)(A-1) \\ &= A^2 - 1 \end{aligned}$$

Si on note, pour $i \in I$, $C_i = \{\frac{p}{a^q} \mid p \neq 0 \text{ et } p = i(I)\}$, chaque C_i est bien définie et est stable par $F_{a,a+1}$.

En effet, soit $f \in F_{a,a+1}$ et $x = \frac{u}{a^v} \in C_i$. Alors il existe n, p, q tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= a^n x + bp/a^q \\ &= \frac{a^{n+q}u + bpa^v}{a^{v+q}}, \end{aligned}$$

et modulo I , $a^{n+q}u + bpa^v = a^{n+q}u = u(I)$. Ainsi, $f(x) \in C_i$. De même $f^{-1}(x) \in C_i$, d'où le résultat.

On définit, pour $i \in I$, $\alpha_i : F_{a,a+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$\alpha_i(f) = \sum_{x \in C_i} (\ln_a f'_d(x) - \ln_a f'_g(x))$$

(f'_d et f'_g désignent les dérivées à droite et à gauche de f ; le nombre de points de rupture de f étant fini cette expression est bien définie).

Alors

$$\begin{aligned} \alpha_i(f \circ g) &= \sum_{x \in C_i} [\ln_a (f \circ g)'_d(x) - \ln_a (f \circ g)'_g(x)] \\ &= \sum_{x \in C_i} [\ln_a (f'_d(g(x))g'_d(x)) - \ln_a (f'_g(g(x))g'_g(x))] \\ &= \sum_{x \in C_i} [\ln_a f'_d(g(x)) - \ln_a f'_g(g(x)) + \ln_a g'_d(x) - \ln_a g'_g(x)] \\ &= \sum_{y \in g(C_i)} [\ln_a f'_d(y) - \ln_a f'_g(y)] + \alpha_i(g) \\ &= \alpha_i(f) + \alpha_i(g). \end{aligned}$$

On définit aussi $\beta_0(f) = \ln_a f'_d(0)$ et, pour $f \in F_{a,a+1}$, de la forme $f(x) = x + (a^2 - 1)n$ à l'infini, on pose $\beta_\infty(f) = n$. β_0 et β_∞ sont aussi des morphismes de $F_{a,a+1}$ dans \mathbb{Z}

De plus, si $\text{bk}(f)$ désigne l'ensemble des points de rupture de f :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_i} \alpha_i(f) &= \sum_{x \in]0, +\infty[} (\ln_a f'_d(x) - \ln_a f'_g(x)) \\ &= \sum_{x \in \text{bk}(f), x \neq 0} (\ln_a f'_d(x) - \ln_a f'_g(x)) \\ &= -\beta_0(f). \end{aligned}$$

On peut énumérer $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{A^2-1}\}$ et définir

$$\mathcal{A} : \begin{array}{ccc} F_{a,a+1} & \rightarrow & \mathbb{Z}^{A^2} \\ f & \mapsto & (\alpha_{i_1}(f), \dots, \alpha_{i_{A^2-1}}(f), \beta_\infty(f)). \end{array}$$

\mathcal{A} passe au quotient en un morphisme $\overline{\mathcal{A}} : F_{a,a+1}^{ab} \rightarrow \mathbb{Z}^{A^2}$.

VII.3.2 Une description de $F_{a,a+1}^{ab}$

On considère les relations définissant $F_{a,a+1}$, vues dans $F_{a,a+1}^{ab}$.

R^2 s'écrit $Y_{Ai}Y'_{Aj} = Y'_{Ai}Y_{A(j+a-1)} = Y_{Ai}Y'_{A(j+2a-2)}$, donc en particulier pour tout $j \geq 1$, $Y'_{Aj} = Y'_{A(j+2a-2)}$, et de même $Y_{Aj} = Y_{A(j+2a-2)}$.

La relation R^3 donne alors

$$Z_k = Z'_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par R^4 on a, pour $k > A$, $Z_k = Z_{k+A(a-1)}$. Comme R^1 donnait $Z_k = Z_{k+2A(a-1)}$ pour $k \geq 1$, on a finalement

$$\forall k \geq 1, Z_k = Z_{k+A(a-1)}.$$

$Y'_0 = 1$, donc pour tout $j \geq 1$,

$$\begin{cases} Y_{Aj} &= Y'_{A(j+a-1)} Y_0 \\ Y'_{Aj} &= Y_{A(j+a-1)} Y_0^{-1} \end{cases}$$

Si on fixe $i \geq 1$ et $j > i$, $Y'_{Ai} Y_{Aj} = Y'_{A(j+a-1)} Y_{Ai} = Y_{A(j+2(a-1))} Y_0^{-1} Y_{Ai}$, d'où pour tout $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} Y'_{Ai} &= Y_0^{-1} Y_{Ai}, \text{ et :} \\ Y_{Ai} &= Y_{A(i+a-1)}. \end{aligned}$$

Avec ce qui précède, la relation R^5 devient alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$Z_{Ai} Z_{Ai+1} \cdots Z_{A(i+1)-1} = Y_0^{-(a+1)/2} Y_{Ai}^2 Y_{A(i+1)} \cdots Y'_{A(i+a-1)},$$

et R_λ^6 devient :

$$\begin{aligned} Z_{Ai+\lambda}^{-1} Z_{Ai+\lambda a} \cdots Z_{Ai+\lambda a+a-1} &= Y_{A(i+1)} Y_{A(i+2)} \cdots Y_{A(i+2a-2)} Y_0^{-(a-1)} \\ &= Y_{A(i+1)}^2 Y_{A(i+2)}^2 \cdots Y_{A(i+a-1)}^2 Y_0^{-(a-1)}. \end{aligned}$$

Si on pose $\tilde{Y}_i = Y_0^{-(a-1)/2} Y_{A(i+1)} \cdots Y_{A(i+a-1)}$, on obtient alors les relations :

$$\begin{aligned} R^5 : \quad & Z_{Ai} Z_{Ai+1} \cdots Z_{A(i+1)-1} = Y_0^{-1} Y_{Ai}^2 \tilde{Y}_i \\ (0 \leq \lambda < a) R_\lambda^6 : \quad & Z_{Ai+\lambda}^{-1} Z_{Ai+\lambda a} Z_{Ai+\lambda a+1} \cdots Z_{Ai+\lambda a+a-1} = \tilde{Y}_i^2. \end{aligned}$$

Finalement :

Proposition 46 $F_{a,a+1}^{ab}$ est le groupe abélien de générateurs Y_{Ai} et Z_k , $i, k \in \mathbb{N}$, avec les relations

$$\begin{aligned} k > 0 : \quad & r_k^1 \quad & Z_k &= Z_{k+A(a-1)} \\ i > 0 : \quad & r_i^2 \quad & Y_{Ai} &= Y_{A(i+a-1)} \\ i \in \mathbb{N} : \quad & r_i^3 \quad & Z_{Ai} Z_{Ai+1} \cdots Z_{A(i+1)-1} &= Y_0^{-1} Y_{Ai}^2 \tilde{Y}_i \\ i \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda < a : \quad & r_{\lambda,i}^4 \quad & Z_{Ai+\lambda}^{-1} Z_{Ai+\lambda a} Z_{Ai+\lambda a+1} \cdots Z_{Ai+\lambda a+a-1} &= \tilde{Y}_i^2. \end{aligned}$$

(avec $\tilde{Y}_i = Y_0^{-(a-1)/2} Y_{A(i+1)} \cdots Y_{A(i+a-1)}$)

VII.3.3 Calcul de $F_{3,4}^{ab}$

La proposition 46 montre que $F_{3,4}^{ab}$ est engendré par $Y_0, Y_2, Y_4, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$. On peut préciser ce résultat :

Lemme: $F_{3,4}^{ab}$ est engendré par les 4 éléments Y_0, Y_2, Y_4, Z_1 .

Démonstration:

Soit G le groupe engendré par Y_0, Y_2, Y_4 et Z_1 . r^2 montre que tout Y_{2i} est dans G . $r_{0,0}^4$ donne $Z_1 Z_2 = \tilde{Y}_0$, donc $Z_2 \in G$. r_0^3 et r_1^3 donnent $Z_0 Z_1$ et $Z_2 Z_3 \in G$, donc Z_0 et Z_3 sont dans G . $r_{0,1}^3$ donne $Z_3 Z_4$, donc $Z_4 \in G$. En utilisant r^1 on voit alors que chaque Z_k est dans G , et donc que $G = F_{3,4}^{ab}$, d'où le résultat. ■

Écrivons $I = \{[0], [1] = [3], [2]\}$.

On vérifie alors (pour effectuer les calculs on peut remarquer que chaque α_i peut se définir sur $H_{a,a+1}$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(Y_0) &= \mathcal{A}(y_0^2) \\ &= (0, 0, -2, 1) \\ \mathcal{A}(Y_2) &= \mathcal{A}(y_0 y_2) \\ &= (-1, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Y_4) &= \mathcal{A}(y_0 y_4) \\ &= (1, 0, -2, 1) \\ \mathcal{A}(Z_1) &= \mathcal{A}(z_1) \\ &= (0, 2, -2, 1),\end{aligned}$$

et ces éléments engendrent un sous-groupe de \mathbb{Z}^4 isomorphe à \mathbb{Z}^4 .

Ainsi $\bar{\mathcal{A}}$ est une application surjective d'un groupe (abélien) à quatre générateurs dans \mathbb{Z}^4 : elle est injective.

On a donc :

Proposition 47 $F_{3,4}^{ab} \simeq \mathbb{Z}^4$, et $F'_{3,4} = [F_{3,4}, F_{3,4}] = \ker(\mathcal{A})$.

On peut, par des calculs analogues, prouver que l'abélianisé de $H_{3,4}$ est aussi \mathbb{Z}^4 . Plus généralement, V.Guba et M.Sapir nous ont communiqué qu'ils peuvent montrer que $H_{3,4}$ est un groupe de diagrammes ayant l'homologie, en toute dimension, de F_4 .

VII.3.4 Calcul de $F_{5,6}^{ab}$

La proposition 46 montre que $F_{5,6}^{ab}$ est engendré par $Y_0, Y_3, \dots, Y_9, Y_{12}$ et $Z_0, Z_1, \dots, Z_{11}, Z_{12}$. On peut préciser ce résultat :

Lemme: $F_{5,6}^{ab}$ est engendré par les 9 éléments $Y_0, Y_3, Y_6, Y_9, Y_{12}, Z_1, Z_2, Z_4, Z_7$.

Démonstration:

Soit G le groupe engendré par $Y_0, Y_3, Y_6, Y_9, Y_{12}, Z_1, Z_2, Z_4, Z_7$; r^2 montre que tout Y_{3i} est dans G .

Alors par r_0^3 et r_4^3 , Z_0 et Z_{12} sont dans G .

$r_{0,0}^4$ montre que $Z_3 \in G$, r_3^3 et $r_{4,0}^4$ que $Z_8 \in G$.

$r_{3,0}^4$ et r_2^3 donnent $Z_5 \in G$, $r_{1,0}^4$ et r_2^3 donnent $Z_9 \in G$.

$r_{2,3}^4$ donne alors $Z_{11} \in G$, et enfin $r_{2,0}^4$ fournit $Z_{10} \in G$.

En utilisant r^1 on voit alors que chaque Z_k est dans G , et donc que $G = F_{5,6}^{ab}$, d'où le résultat. ■

Écrivons $I = \{[0], [1], [2], [3], [4], [6], [7], [9], [12]\}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(Y_0) &= (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Y_3) &= (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Y_6) &= (0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 1) \\ \mathcal{A}(Y_9) &= (-1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ \mathcal{A}(Y_{12}) &= (1, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Z_1) &= (0, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Z_2) &= (0, 0, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Z_4) &= (0, -2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1) \\ \mathcal{A}(Z_7) &= (0, 0, 0, 0, -2, 0, 2, 0, 1)\end{aligned}$$

et ces éléments engendrent un sous-groupe de \mathbb{Z}^9 isomorphe à \mathbb{Z}^9 .

Ainsi $\overline{\mathcal{A}}$ est surjective d'un groupe abélien à neuf générateurs dans \mathbb{Z}^9 : elle est injective.

On a donc :

Proposition 48 $F_{5,6}^{ab} \simeq \mathbb{Z}^9$, et $F'_{5,6} = [F_{5,6}, F_{5,6}] = \ker(\mathcal{A})$.

VII.3.5 Calcul de $F_{a,a+1}^{ab}$

On fixe $J \subset \mathbb{N}$ tel que $\{[j] | j \in J\}$ soit l'ensemble des éléments de I de cardinal 2 (si $a = 3$ on peut par exemple prendre $J = \{1\}$, si $a = 5$, $J = \{1, 2, 4, 7\}$).

Les cas $a = 3$ et $a = 5$ suggèrent :

Proposition 49

$$F'_{a,a+1} = [F_{a,a+1}, F_{a,a+1}] = \ker(\mathcal{A}),$$

$$F_{a,a+1}^{ab} \simeq \mathbb{Z}^{A^2} = \mathbb{Z}^{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}, \text{ et}$$

$F_{a,a+1}^{ab}$ est engendré par les éléments $Y_0, Y_A, \dots, Y_{A(a-1)}, Z_j, j \in J$.

Une autre idée pour déterminer $F_{a,a+1}^{ab}$, serait d'exprimer (grâce à r^1 et r^2) les relations r^3 et r^4 en fonction des $a + A(a-1) + 1$ générateurs $Y_0, Y_A, \dots, Y_{A(a-1)}, Z_0, Z_1, \dots, Z_{A(a-1)}$. On peut alors voir r^3 et r^4 comme un système linéaire (S), le rang de $F_{a,a+1}^{ab}$ étant égal au nombre de générateurs, $a + A(a-1) + 1$, moins le rang de ce système S .

Nous ne savons pas prouver ce résultat en toute généralité ; mais on peut cependant remarquer qu'un calcul informatique du rang de S nous donne bien, pour les premières valeurs de a (3, 5, 7, ..., 31) que $F_{a,a+1}^{ab} \simeq \mathbb{Z}^{A^2}$. D'autre part, dans [13], P.Greenberg prouve directement que si Γ est tel que si \mathbb{H}/Γ est une surface de genre 0 à v cusps, $H^1(F_\Gamma) = \mathbb{Z}^{(v-1)^2}$, ce qui correspond à notre hypothèse (et résultat, pour $a = 3, 5, \dots, 31$ soit $v = 3, 4, \dots, 16$) ; il serait cependant intéressant d'obtenir ici ce résultat de façon élémentaire.

VII.4 Une remarque générale sur les groupes F_Γ

On se donne un groupe Γ tel que \mathbb{H}/Γ est une surface de genre g avec v cusps. On fixe x_1, x_2, \dots, x_v des représentants des cusps, et si x appartient à l'un des cusps, \tilde{x} désigne le représentant (parmi les x_i) de ce cusp.

Alors pour tout x , il existe γ_x dans Γ tel que $\gamma_x(\tilde{x}) = x$. Si γ'_x est un autre élément de Γ tel que $\gamma'_x(\tilde{x}) = x$, on a $(\gamma'_x{}^{-1}\gamma_x)(\tilde{x}) = \tilde{x}$, donc l'élément $\gamma'_x{}^{-1}\gamma_x$ est un parabolique.

Si N désigne le sous-groupe de Γ engendré par les paraboliques, on a donc $\gamma'_x = \gamma_x \pmod{N}$.

Sur $p(\Gamma)$ on peut alors définir une relation d'équivalence par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{y} \\ \gamma_x = \gamma_y \pmod{N} \end{cases}$$

Proposition 50 Si $f \in F_\Gamma$, $x \in p(\Gamma)$, on a $x \sim f(x)$.

Démonstration:

si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les points de rupture de f sur $] \infty, x[$, on peut trouver des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans Γ tels que :

$$f : \begin{array}{ccc} [\infty, \alpha_1] & \xrightarrow{\gamma_1} & [\infty, f(\alpha_1)] \\ [\alpha_1, \alpha_2] & \xrightarrow{\gamma_2} & [f(\alpha_1), f(\alpha_2)] \\ & \dots & \\ [\alpha_{n-1}, x] & \xrightarrow{\gamma_n} & [f(\alpha_{n-1}), f(x)], \end{array}$$

et par conséquent $f(x) = \gamma_n(x) = [(\gamma_n \gamma_{n-1}^{-1})(\gamma_{n-1} \gamma_{n-2}^{-1}) \dots (\gamma_2 \gamma_1^{-1}) \gamma_1](x)$.

On remarque que $\gamma_n \gamma_{n-1}^{-1}$ fixe $f(\alpha_{n-1})$, ..., $\gamma_2 \gamma_1^{-1}$ fixe $f(\alpha_1)$, γ_1 fixe ∞ , donc tous ces éléments sont dans N . Alors $\gamma_n = (\gamma_n \gamma_{n-1}^{-1})(\gamma_{n-1} \gamma_{n-2}^{-1}) \dots (\gamma_2 \gamma_1^{-1}) \gamma_1$ est dans N , et comme on peut choisir $\gamma_{f(x)} = \gamma_n \gamma_x$, $\gamma_{f(x)} = \gamma_x \pmod{N}$. ■

Si p est un parabolique en x , on note $e(p) = \gamma_x^{-1} p \gamma_x$.

$e(p)$ ne dépend pas du choix de γ_x modulo N ; en effet le groupe Γ_x des paraboliques en \tilde{x} est isomorphe à \mathbb{Z} , donc commutatif, et ainsi $(\gamma'_x)^{-1} p \gamma'_x = (\gamma'_x)^{-1} \gamma_x e(p) \gamma_x^{-1} \gamma'_x = (\gamma'_x)^{-1} \gamma_x \gamma_x^{-1} \gamma'_x e(p) = e(p)$.

Si f est dans F_Γ et x dans $p(\Gamma)$, on note f_x^+ l'élément de Γ qui coïncide avec f sur un intervalle $[x, \dots]$ et de même f_x^- l'élément de Γ qui coïncide avec f sur un intervalle $[\dots, x]$; alors si $f \in F_\Gamma$, $p_x(f) = (f_x^+)^{-1} f_x^-$ est un parabolique en x .

On peut alors définir, pour chaque classe d'équivalence C de la relation \sim , et $f \in F_\Gamma$, le parabolique en \tilde{x} :

$$\alpha_C(f) = \prod_{x \in C} e(p_x(f)).$$

α_C est un morphisme de groupe entre F_Γ et le groupe $\Gamma_{\tilde{x}} \simeq \mathbb{Z}$ des paraboliques en \tilde{x} . En effet on a :

$$\begin{aligned} e(p_x(g \circ f)) &= \gamma_x^{-1} (g \circ f)_x^{+ -1} (g \circ f)_x^- \gamma_x \\ &= \gamma_x^{-1} (f_x^+)^{-1} (g_{f(x)}^+)^{-1} g_{f(x)}^- f_x^- \gamma_x \\ &= \gamma_x^{-1} (f_x^+)^{-1} (g_{f(x)}^+)^{-1} g_{f(x)}^- f_x^+ \gamma_x \gamma_x^{-1} (f_x^+)^{-1} f_x^- \gamma_x \\ &= \gamma_{f(x)}^{-1} (g_{f(x)}^+)^{-1} g_{f(x)}^- \gamma_{f(x)}^+ \gamma_x^{-1} (f_x^+)^{-1} f_x^- \gamma_x \\ &= e(p_{f(x)}(g)) e(p_x(f)) \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f(C) = C$, on a $\alpha_C(g \circ f) = \alpha_C(g) \alpha_C(f)$.

L'application

$$\mathcal{B} : F_\Gamma \rightarrow \prod_C \alpha_C(f)$$

est alors à son tour un morphisme de groupe.

L'intérêt de cette application, dont la définition est proche de l'application \mathcal{A} de la section précédente, est qu'en genre 0 elle nous fournit une application de F_Γ dans $\mathbb{Z}^{\text{card}(C)}$, et qu'en genre strictement positif, $\text{card}(C)$ est infini. Il "suffirait" donc de prouver que cette application est surjective, ou au moins que son image est de dimension infinie - par exemple en exhibant un nombre suffisant d'applications de F_Γ - pour obtenir une démonstration directe du résultat de Greenberg affirmant qu'en genre strictement positif, F_Γ n'est pas de type fini.

VII.5 En guise de conclusion...

Nous avons comme annoncé complété l'étude des groupes F_Γ : pour \mathbb{H}/Γ de genre strictement positif, on savait que F_Γ n'est pas de type fini ; en revanche nous avons dans le cas du genre 0 prouvé que le groupe est de présentation finie, et explicité une telle présentation. Notre démonstration est en fait valable pour tout groupe fuchsien Γ tel que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes de genre nul.

Ce résultat amène quelques réflexions et questions complémentaires.

VII.5.1 Aspects linéaires

Partant d'un groupe fuchsien Γ tel que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes de genre 0, nous avons commencé par conjuguer F_Γ aux groupes $F_{a,a+1}^1$ et $F_{a,a+1}^\infty$. En étudiant ces groupes d'homéomorphismes affines par morceaux sur $[0, 1]$ et $[0, +\infty[$ on obtient les propriétés de F_Γ qui nous intéressent : générateurs, présentation, abélianisé, etc..

L'observation du domaine fondamental de Γ fournit un plongement "naturel" de F_Γ dans le groupe $\mathcal{F}_{a,a+1}^1$ des homéomorphismes croissants affines par morceaux de $[0, 1]$, de pentes puissances de a et à points de rupture dans $\frac{1}{a+1}\mathbb{Z}[1/a]$. Ce plongement n'est pas lié au genre 0 : partant d'un groupe fuchsien Γ avec un domaine fondamental polygonal à a cotés, on obtient en toute généralité un plongement du groupe F_Γ dans le groupe $\mathcal{F}_{a,a+1}^1$. En fait ce n'est pas le domaine fondamental, mais la tessellation de \mathbb{H} associée qui fournit le plongement : ainsi, dans le cas du groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$, la tessellation de Farey fournit aussi un plongement de $F_{PSL_2(\mathbb{Z})}$ dans $\mathcal{F}_{2,3}^1$ bien que les triangles de la tessellation ne soient pas des domaines fondamentaux pour $PSL_2(\mathbb{Z})$.

C'est la détermination précise de l'image de ce plongement qui pose problème : les éléments de $\mathcal{F}_{a,a+1}^1$ sont décrits par des couples d'arbres, et un marquage sur ces arbres caractérise précisément l'image du groupe F_Γ . Mais contrairement au cas des surfaces de genre 0, dans le cas général ce marquage ne semble pas fournir une description utilisable en tant que groupe d'applications affines par morceaux.

On peut cependant se demander si, comme dans le cas des surfaces de genre 0, il existe dans le cas général (groupes Γ tels que \mathbb{H}/Γ est une surface à pointes de genre $g > 0$, ou même un orbifold), une manière simple de décrire et étudier des groupes d'homéomorphismes affines par morceaux conjugués à F_Γ ; ceci permettrait de (re)trouver le fait que le groupe n'est pas de type fini.

VII.5.2 Présentations infinies

Pour prouver que les groupes F_Γ sont, en genre 0, de présentation finie, nous avons commencé par déterminer une présentation infinie. Il serait intéressant de déterminer une telle présentation de F_Γ dans tous les cas (surfaces à pointes, pour lesquelles la question de la présentation finie est résolue, ou orbifold, pour lesquels la question reste ouverte). Pour cela on peut envisager deux angles d'approche :

- linéariser, comme expliqué précédemment, les groupes F_Γ pour essayer de se ramener à un problème sur des groupes de Thompson linéaires, plus maniables et à ce jour plus étudiés ;
- tenter une approche liée à la géométrie des groupes Γ , le quotient \mathbb{H}/Γ et en particulier son genre apparaissant naturellement. Notons qu'une présentation conjec-

turale dans ce sens se trouve déjà chez P.Greenberg ([13]). Malheureusement les générateurs proposés ne sont pas dans F_Γ mais seulement dans $PPSL_2(\mathbb{Z})$, et la question reste entière.

VII.5.3 Questions homologiques

F a été le premier exemple connu de groupe sans torsion, de dimension cohomologique infinie et ayant la propriété FP_∞ (cf.[5]). Cette propriété FP_∞ est partagée par la plupart des groupes de Thompson et on peut donc se demander si les groupes F_Γ la possèdent également.

Pour cela on peut s'inspirer des méthodes classiques pour l'étude de ce problème :

- Ceci devrait découler de l'interprétation de $H_{3,4}$ comme groupe de diagrammes déjà mentionnée (VII.3.3).

- K.Brown ([7]) relie cette propriété de l'existence d'une forme normale.

Mais dans notre cas nous n'avons qu'un résultat partiel : dans le cas des surfaces à trois pointes nous avons une forme semi-normale (cf.V.2.1) qui n'est que conjecturée dans le cas général. Dans tous les cas, il nous manque l'unicité d'une telle forme pour pouvoir utiliser les résultats de K.Brown.

- Enfin la méthode la plus générale pour l'étude de ce problème, due à K.Brown et M.Stein, est topologique : on détermine un complexe simplicial sur lequel agit le groupe et dont des propriétés de n -connexité sont équivalentes à la propriété FP_n pour le groupe.

Dans notre cas, nous savons construire un tel complexe ; mais les propriétés de n -connexité s'avèrent plus compliquées à obtenir que dans les cas classiques.

Bibliographie

- [1] Bieri R., Strebel R. **On groups of PL-homeomorphisms of the real line**, Notes, Math. Sem. der Univ. Frankfurt, 1985.
- [2] Burillo J., Cleary S., Stein M. **Metrics and embeddings of generalizations of Thompson's group**, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 1677-1689.
- [3] Brin M.G, Squier C.C. **Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line**, Invent.math.79, 485-498 (1985).
- [4] Brown K.S. **Presentation for groups acting on simply connected complexes**, Journal of Pure and Applied Algebra 32 (1984), 1-10.
- [5] Brown K.S., Geoghegan **An infinite-dimensional torsion-free FP_∞ group**, Invent.math. 77, 367-381 (1984).
- [6] Brown K.S. **Finiteness properties of groups**, Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987), 45-75.
- [7] Brown K.S. **The geometry of rewriting systems : a proof of the Anick-Groves-Squier theorem**, Algorithms and classification in combinatorial group theory, G.Baumslag, C.F Miller III editors, Springer-Verlag, 137-163.
- [8] Belk J.M, Brown K.S. **Forest diagrams for elements of Thompson's group F**, arXiv :math.GR/0305412
- [9] Brown K.S, Geoghegan R. **An infinite dimensional torsion-free FP_∞ group**, Invent.Math. 77 (1984), 367-381.
- [10] Cannon J.W, Floyd W.J, Parry W.R. **Introductory notes on Richard Thompson's groups**, L'enseignement mathématique, t.42 (1996), p.215-256.
- [11] Cohen D.E. **Combinatorial group theory : a topological approach**, London Mathematical Society Student Texts 14.
- [12] Ghys E., Sergiescu V. **Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle**, Comment.Math.Helvetici 62 (1987) 185-239
- [13] Greenberg P. **Projective aspects of the Higman-Thompson group**, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 633–644, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [14] Guba V., Sapir M. **Diagram groups**, Memoirs of the AMS, 1997
- [15] Haefliger A. **Complexes of groups and orbihedra**, Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990, World Scientific, 1991, 504-540.
- [16] Higman G. **Finitely presented infinite simple groups**, Notes on Pure Mathematics 8, Australian National University, Canberra, 1974.

- [17] Higman G. **On infinite simple permutation groups**, Publ.Math.Debrecen 3 (1954), 221-226
- [18] Imbert M. **Sur l'isomorphisme du groupe de Richard Thompson avec le groupe de Ptolémée**, Geometric Galois Actions (tome 2), edited by L.Schneps & P.Lochak, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 243 (1997) 313-324.
- [19] Kapoudjian C. **Simplicity of Neretin's group of spheromorphisms**, Ann. Ins. Fourier, Grenoble, 49, 4 (1999), 1225-1240
- [20] Kulkarni R.S. **Hyperbolic geometry and the subgroups of the modular group**, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 645-686, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991
- [21] Kulkarni R.S. **An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group**, American Journal of Mathematics 113 (1991), 1053-1133
- [22] Laget G **Le groupe $T_{\Gamma(2)}$** , Prépublication de l'Institut Fourier n° 629 (2003).
- [23] Massey W.S. **Algebraic topology : an introduction**, GTM 56, Springer Verlag.
- [24] Quillen D. **Homotopy properties of the poset of non-trivial p -subgroups of a group**, Advances in Math.28 (1978), 101-128.
- [25] Serre J.P. **Arbres, amalgames, SL_2** , Astérisque 46, 1997.
- [26] Stein M. **Groups of piecewise linear homeomorphisms**, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 332, Number 2, August 1992, 477-514
- [27] Tsuboi T. **Group generated by half transvections**, preprint Univ.Tokyo 2001