



**HAL**  
open science

# Diffusion multiple cohérente avec atomes froids de strontium: Effet de la saturation sur la rétrodiffusion cohérente - Piège magnéto-optique sur raie étroite

Thierry Chaneliere

► **To cite this version:**

Thierry Chaneliere. Diffusion multiple cohérente avec atomes froids de strontium: Effet de la saturation sur la rétrodiffusion cohérente - Piège magnéto-optique sur raie étroite. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00007793

**HAL Id: tel-00007793**

**<https://theses.hal.science/tel-00007793v1>**

Submitted on 16 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

Ecole Doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

## **THESE**

Présentée pour obtenir le titre de

**Docteur en SCIENCES**

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis

Spécialité : **Physique**

par

**Thierry CHANELIÈRE**

### **Diffusion multiple cohérente avec atomes froids de strontium**

Effet de la saturation sur la rétrodiffusion cohérente -  
Piège magnéto-optique sur raie étroite

Soutenue publiquement le 3 novembre 2004 devant le jury composé de :

Pierre LEMONDE      Examineur

Christophe SALOMON      Rapporteur

Guglielmo TINO      Rapporteur

Robin KAISER      Directeur de thèse

Institut Non Linéaire de Nice, CNRS / UMR 6618, Valbonne.



## *Remerciements*

Moment toujours un peu délicat qu'est l'heure des remerciements, il ne faut certes oublier personne mais c'est surtout l'heure du bilan de trois années intenses dont mon mémoire symbolise le souvenir.

Comment oublier les membres de l'équipe en premier lieu ? Face à des expériences lourdes à mettre en place, ils m'ont tous été d'un grand secours. Aux questions parfois saugrenues, j'ai toujours eu une réponse éclairée de Robin Kaiser dont j'ai pu apprécier la grande culture scientifique. Il fut en cela un excellent directeur de thèse et je n'ai très concrètement jamais quitté son bureau sans une remarque constructive de sa part. Dans le cercle restreint de ceux qui m'ont encadré au quotidien, je ne peux oublier David Wilkowski. « Compagnons d'armes » face aux problèmes concrets posés par la *manip*, j'ai pu observer sa *maestria* (puisqu'il fut formé en Italie) dans les techniques expérimentales. Son approche reste pour moi exemplaire et efficace avant tout. J'espère avoir hérité d'une partie de ses « dons » en le côtoyant au jour le jour. Dans un style différent, j'ai beaucoup apprécié les discussions avec Guillaume Labeyrie dont le rigueur n'a d'égale que la persévérance. Pour la partie théorique, j'ai été heureux de partager mon bureau (un peu petit pour deux grand dadais) avec Thomas Wellens. Il m'a initié aux subtilités du spectre de diffusion inélastique, je l'en remercie et lui souhaite bon vent pour la suite de sa carrière. J'ai aussi été à chaque occasion heureux de revoir et de discuter avec Cord Müller que ce soit pour parler de diffusion multiple ou de choses plus intimes. Je remercie aussi du fond du cœur Christian Miniatura pour sa disponibilité et son objectivité. À travers des discussions scientifiques, politiques, de politique scientifique ou personnelles, il a été un interlocuteur de choix. Je retiendrai en exemple sa générosité et son ambition scientifique.

Je tiens à remercier Yannick Bidet. Il m'a livré les secrets que l'on ne se passe que d'étudiant à étudiant et qui constituent une partie de mon savoir-faire. Bien que de style très différent, nous avons été très complémentaire. Sa sérénité exemplaire fut pour moi très rassurante. Bruce Klappauf m'a enseigné les secrets du laser bleu, je crois avoir bien fait fructifier son héritage. J'ai beaucoup apprécié de travailler avec Gian-Luca Gattobigio, sa bonne humeur et son enthousiasme ont été d'un grand réconfort. Les développements qu'il a mis en place sur le laser rouge m'ont permis par la suite de réaliser le piège sur la transition d'intercombinaison. Je remercie Jean-Louis Meunier de l'équipe 3 pour son aide et son investissement dans la compréhension du mécanisme de chauffage supplémentaire. Il a su mettre à notre disposition et à notre niveau toutes ces compétences à travers une collaboration exemplaire et efficace. Je n'oublie pas non plus les étudiants qui pendant des périodes plus courtes ont contribué à l'expérience : merci à Julien, Juan et Florence.

Un aspect marquant de la *manip* est son caractère très technologique. J'ai été grandement épaulé pendant ma thèse par les services techniques du laboratoire.

Jean-Claude Bernard, pour l'électronique, a mis à ma disposition toutes ses compétences, il a été secondé dans sa tâche par Arnaud Dusaucy. J'ai apprécié leur souplesse face à des problèmes parfois mal définis. Je remercie Jean-Charles Bery qui a assuré la réalisation des pièces mécaniques. Nous avons noué une relation de confiance qui m'a permis de voir au jour le jour toute son abnégation et son souci du travail bien fait. Le rôle de technicien est parfois un peu ingrat, je leur témoigne aujourd'hui toute ma reconnaissance.

J'ai beaucoup apprécié d'avoir à mes cotés la bande des joyeux expérimentateurs de l'équipe 5. Ils m'ont prêté volontiers certains de leurs équipements, l'utilisation de leur monochromateur fut souvent pour moi salvatrice. J'espère leur avoir rendu la pareille en leur enseignant mes maigres connaissances *bullistiques* (néologisme subaquatique).

Je remercie sincèrement Pierre Lemonde, Christophe Salomon et Guglielmo Tino d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. À travers les discussions que nous avons eu, j'ai pu entrevoir une véritable reconnaissance scientifique de mon travail qui est pour moi très importante.

Une partie de mon temps a aussi été consacrée à l'enseignement à l'Université de Nice - Sophia Antipolis. Je remercie toutes les enseignants qui m'ont fait confiance en m'associant à leurs enseignements. En particulier, Fabrice Mortesagne et Olivier Legrand m'ont impliqué dans des projets originaux et passionnants, j'espère avoir été digne de leur confiance.

A l'heure des bilans, j'ai aussi une pensée pour les handballeurs, les vététistes de la Valmasque et les plongeurs. Je les remercie pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté dans leurs activités hautement récréatives mais aussi parce qu'ils m'ont obligé à expliquer avec pédagogie des choses complexes : qu'il n'y avait rien de plus simple qu'un atome, qu'on pouvait dans le sud de la France remplacer « photons » par « bélugues » et que la recherche n'a pas pour objectif de développer forcément des applications.

Je remercie pour terminer mon vieux camarade, Stan qui a pris le temps de relire mon mémoire pour corriger les nombreuses fautes de français. Je mesure en pensant à notre amitié le chemin parcouru depuis les bancs du collège jusqu'à mon diplôme de docteur.

Je pars maintenant vers de nouveaux horizons tout en gardant le souvenir de trois très belles années ponctuées par de nombreuses rencontres enrichissantes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Saturation et rétrodiffusion cohérente</b>	<b>15</b>
1.1	Rétrodiffusion cohérente : quelques rappels . . . . .	17
1.1.1	Présentation du phénomène . . . . .	17
1.1.2	Effet de la vitesse résiduelle des diffuseurs atomiques . . . . .	24
1.2	Effets de saturation sur la diffusion des photons . . . . .	28
1.2.1	Réduction de la section efficace . . . . .	28
1.2.2	Apparition du spectre inélastique . . . . .	37
1.3	Mesure de la rétrodiffusion en régime saturé . . . . .	42
1.3.1	Description du nuage . . . . .	42
1.3.2	Dispositif de mesure de la rétrodiffusion . . . . .	46
1.3.3	Résultats des mesures . . . . .	53
1.3.4	Effets « connus » de réduction . . . . .	60
1.4	Réduction du cône par la diffusion inélastique . . . . .	63
1.4.1	Approche « pompe-sonde » . . . . .	65
1.4.2	Approche perturbative . . . . .	68
1.4.3	Limitations des deux approches et conclusion . . . . .	72
<b>2</b>	<b>Refroidissement sur la transition <math>^1S_0 \rightarrow ^1P_1</math></b>	<b>81</b>
2.1	Rappel sur le refroidissement Doppler . . . . .	83
2.1.1	Faible saturation . . . . .	83
2.1.2	Cas général . . . . .	85
2.1.3	Limites de validité . . . . .	88
2.2	Réalisation expérimentale . . . . .	90
2.2.1	Présentation du dispositif . . . . .	91
2.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	99
2.2.3	Influence de la polarisation . . . . .	106
2.2.4	Conclusion . . . . .	110
2.3	Modèle de chauffage supplémentaire . . . . .	111
2.3.1	Introduction . . . . .	111
2.3.2	Présentation du modèle de déséquilibre local des intensités . . . . .	116
2.3.3	Les deux régimes de chauffage . . . . .	120
2.3.4	Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .	129
2.3.5	Simulation Monte-Carlo . . . . .	131

2.3.6	Conclusion . . . . .	136
<b>3</b>	<b>Laser stabilisé à 689nm</b>	<b>145</b>
3.1	Stabilisation du laser sur la cavité ULE . . . . .	146
3.1.1	Présentation du laser en cavité étendu . . . . .	146
3.1.2	Description de la cavité ULE . . . . .	147
3.1.3	Rétroaction sur le laser . . . . .	147
3.1.4	Analyse des performances de l'asservissement . . . . .	150
3.2	Réalisation d'une cellule de référence . . . . .	156
3.2.1	Choix technologique pour une cellule chaude . . . . .	157
3.2.2	Étude de l'absorption linéaire . . . . .	157
3.3	Mesures de la stabilité de la cavité ULE . . . . .	164
3.3.1	Caractérisation de la cavité au moyen de la référence atomique . . . . .	164
3.3.2	Dérives à long terme du laser asservi sur la cavité . . . . .	168
3.4	Montage final du laser rouge . . . . .	175
3.4.1	Description du montage . . . . .	175
3.4.2	Conclusion . . . . .	177
<b>4</b>	<b>Piégeage sur la raie d'intercombinaison</b>	<b>179</b>
4.1	Description du potentiel de piégeage . . . . .	181
4.1.1	Présentation du spectre du laser . . . . .	181
4.1.2	Estimation des paramètres du potentiel de piégeage . . . . .	185
4.2	Deux régimes de limitations du chargement . . . . .	192
4.2.1	Présentation des deux régimes possibles . . . . .	193
4.2.2	Limites du piège dans l'espace des phases . . . . .	194
4.3	Réalisation expérimentale . . . . .	198
4.3.1	Description générale du piège magnéto-optique . . . . .	198
4.3.2	Mesures expérimentales . . . . .	208
4.4	Modèle analytique à force constante . . . . .	212
4.4.1	Dépendance de la force en fonction des paramètres du laser . . . . .	212
4.4.2	Trajectoires dans l'espace des phases . . . . .	220
4.4.3	Confrontation aux résultats expérimentaux . . . . .	228
4.4.4	Proposition d'optimisation des paramètres du potentiel de piégeage . . . . .	233
4.5	Optimisation expérimentale du taux de transfert . . . . .	239
4.5.1	Contrôle du gradient du champ . . . . .	239
4.5.2	Contrôle de la température initiale . . . . .	240
4.5.3	Conclusion . . . . .	242
4.6	Étude sommaire du régime final . . . . .	243
4.6.1	Rappel sur la théorie semi-classique . . . . .	244
4.6.2	Diffusion et friction pour une interaction large bande . . . . .	246
4.6.3	Influence de la gravité sur le refroidissement . . . . .	249
4.6.4	Comparaison aux mesures de taille . . . . .	251

4.6.5	Récapitulatif . . . . .	254
<b>A</b>	<b>Refroidissement Doppler - Formules générales</b>	<b>259</b>
A.1	$lin \parallel lin$ . . . . .	259
A.2	$lin \perp lin$ . . . . .	260
<b>B</b>	<b>Etablissement de l'équation maîtresse</b>	<b>261</b>
<b>C</b>	<b>Laser bleu à 461 nm</b>	<b>265</b>
C.1	Rappel des formules et position du problème . . . . .	266
C.2	Principe de l'analyse des données . . . . .	269
C.3	Mesures des caractéristiques de la cavité . . . . .	270
C.3.1	Pertes, conversion et <i>mode-matching</i> . . . . .	270
C.3.2	Puissance bleue produite . . . . .	272
C.4	Interprétation des résultats . . . . .	272





# Introduction

## Localisation d'Anderson

Le phénomène de diffusion multiple de la lumière est dans la nature excessivement courant. Dans tout milieu diffusant et opaque, la propagation des photons est une succession de rebonds entre des particules ou des molécules. L'opacité, plus justement appelée épaisseur optique  $b$ , illustre la frontière entre diffusion simple ( $b \ll 1$ ) et la diffusion multiple ( $b \gg 1$ ). Dans ce dernier régime, l'approche classique considère une succession de processus microscopiques pour les photons qui subissent alors une marche au hasard. À l'échelle macroscopique, on préfère utiliser des quantités statistiques (l'intensité en l'occurrence) dont la propagation est donnée par l'équation de la diffusion [1]. Ce type d'approche ne permet pas d'expliquer tous les types de propagations quelle que soit la particule se propageant (dont le photon n'est qu'un exemple) et quel que soit le milieu. Parmi les propriétés inhabituelles dans les milieux désordonnés on rencontre la localisation forte (ou d'Anderson [2]).

Elle fut introduite par **P. W. Anderson [2] en 1958 pour expliquer la propagation des électrons dans un milieu désordonné**. Il ouvrit alors un nouveau champ dans la physique des électrons dans les solides. En présence de désordre, la nature quantique des électrons modifie considérablement leur propagation puisqu'il est alors possible que leur fonction d'onde soit localisée dans l'espace. À l'échelle macroscopique, la diffusion et la conduction disparaissent, le milieu est rendu isolant [3]. Il s'agit d'un effet interférentiel qui ne peut être expliqué par l'approche classique type « marche au hasard ».

On peut en donner une image simple qui a l'avantage de regrouper les « ingrédients physiques » caractérisant le phénomène (fig. 1).

Lorsqu'on prend en compte la nature ondulatoire des électrons (ou des photons), on doit alors considérer les interférences entre les diverses trajectoires possibles. Comme on le voit sur la figure 1, les trajectoires fermées (les boucles) ont un statut particulier. Elles peuvent en effet être parcourues dans les deux sens (nommés direct et renversé) et les phases accumulées dans les deux sens seront *a priori* les mêmes. Nous discuterons dans ce mémoire des mécanismes qui peuvent induire des déphasages entre les sens direct et renversé. **Lorsque les interférences sont constructives cela renforce le processus de retour à**

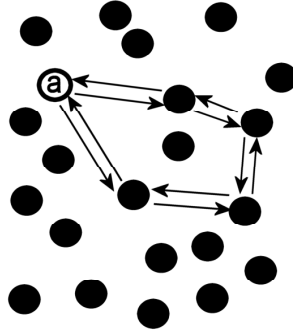


FIG. 1 – Le photon suit une trajectoire fermée : il peut la parcourir dans les deux sens. Si la phase accumulée est la même cela renforce le processus de retour à l’origine (ou rétrodiffusion). L’électron sera localisé puisqu’il a une probabilité plus forte de revenir au point de départ.

**l’origine** (ou rétrodiffusion). L’électron sera localisé puisqu’il revient préférentiellement au point de départ. L’apparition du phénomène dépend fortement de la densité des diffuseurs. Assez intuitivement, il faut que les trajectoires fermées aient une influence non négligeable dans la propagation. Cela n’est possible qu’à forte densité.

Il faut plus précisément comparer la longueur d’onde  $\lambda_{\text{opt}} = 2\pi/k_L$  au libre parcours moyen  $l$ . Ce dernier n’est autre que la distance typique entre deux événements de diffusion et reste un paramètre crucial et caractéristique du phénomène.

**La localisation forte n’apparaîtra que lorsque la densité sera suffisamment grande**, ce que l’on résume par le critère de Ioffe-Regel [4] :

$$\boxed{k_L l \leq 1} \quad (1)$$

**Il est très difficile d’approcher cette frontière pour des ondes lumineuses** alors que leur nature ondulatoire est beaucoup plus évidente que celle des électrons. Il est en effet délicat d’obtenir un échantillon dense de diffuseur ayant une grande section efficace. Des résultats prometteurs ont mis en évidence des effets de localisation dans une géométrie 2D en utilisant des micro-ondes [5]. En 1997, les résultats marquants de D. S. Wiersma relatent la mise en évidence de localisation à 3D dans le domaine optique [6]. À partir de poudre de semi-conducteur finement broyée, l’auteur obtint  $k_L l \sim 1,5$ , ce qui permit d’apporter des preuves expérimentales de la localisation forte. Les mesures furent pourtant sujettes à controverse. F. Scheffold [7] proposa une interprétation différente des résultats. Il montra en effet qu’en incluant de l’absorption dans le milieu, il pouvait s’agir de diffusion classique et non pas de localisation. Aucune mesure plus récente n’a permis de confirmer ou d’infirmer l’une ou l’autre des hypothèses.

## Diffusion multiple cohérente dans un gaz d'atomes

L'utilisation d'une vapeur atomique comme milieu diffusant fut en partie motivée par l'absence d'absorption lors de la propagation. Au moyen de lasers, il est à l'heure actuelle possible de piéger et plus généralement de manipuler un nuage d'atomes [8, 9]. D'un point de vue de la localisation, il fournira un milieu modèle contrôlable dans une large gamme de paramètres.

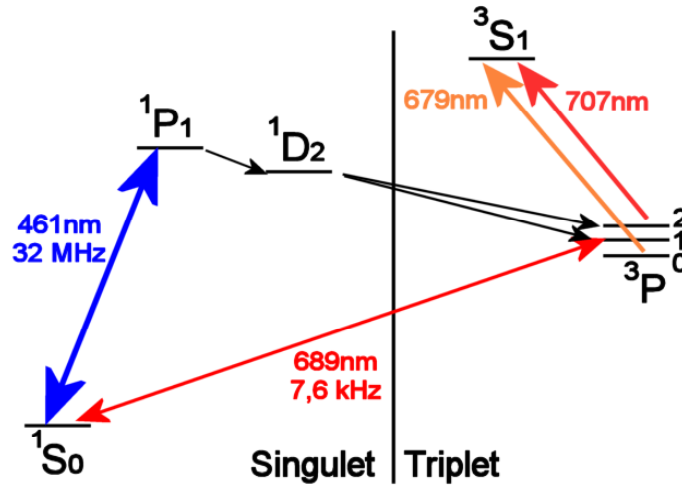
Le diffuseur atomique présente par ailleurs une grande richesse de comportement. Outre **son caractère résonant** qui lui confère **une grande section efficace**, il est par exemple beaucoup plus sensible à un champ magnétique extérieur dont on peut mesurer l'influence sur le transport cohérent [12, 13]. Par ailleurs, la présence de plusieurs niveaux d'énergie parfois proches n'est pas sans conséquence [10] et rend possible l'observation de phénomènes originaux [11]. Nous étudierons en particulier dans ce mémoire un autre élément caractéristique des diffuseurs atomiques : la saturation et son influence sur la diffusion multiple cohérente.

La plupart des mesures qui visent à l'étude de la localisation dans un nuage d'atomes sont basées sur l'observation du cône de rétrodiffusion cohérente. On est dans ce cas loin du régime de localisation forte qui demande des caractéristiques de densité particulières. On est alors en régime de localisation dite faible (puisque  $k_L l \gg 1$ ). L'effet considéré est cependant toujours lié aux interférences entre chemins de diffusion multiple. Nous en rappellerons les caractéristiques dans ce mémoire. Ces observations permirent notamment de mettre en évidence l'influence de la structure interne atomique sur le transport cohérent en régime diffusif [14]. L'utilisation d'un atome ayant un niveau fondamental non-dégénéré permet d'obtenir un contraste maximal des interférences à la propagation entre les chemins direct et renversé [20]. Ce fut une des motivations pour le choix du strontium comme élément diffusant.

## Choix du strontium

Le strontium possède une transition intense à 461 nm ( $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  voir figure 2) qui permet d'exercer une pression de radiation considérable et donc un piégeage efficace. En outre, la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  est bien adaptée aux tests de diffusion multiple cohérente, d'une part car le contraste des interférences est maximal entre chemins de diffusion direct et renversé, d'autre part parce que l'ensemble des interprétations sera grandement simplifié.

La technologie nécessaire au refroidissement des alcalino-terreux est maintenant bien maîtrisée et a permis la réalisation expérimentale de nombreux pièges, essentiellement tournée vers des applications métrologiques. Le strontium semble en particulier un excellent candidat pour la réalisation d'un étalon optique à atomes neutres [15, 16]. Une transition intéressante est celle de l'isotope 87 à

FIG. 2 – Niveaux d'énergie du  $^{88}\text{Sr}$ 

698 nm :  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  [17]. Elle possède en effet un excellent facteur de qualité ( $\sim 10^{17}$ ) et sa largeur de raie est de 1 mHz. De plus, elle relie deux niveaux  $J = 0$  et sera donc peu sensible au champ magnétique. En ce qui nous concerne, nous délaisserons l'isotope 87 qui possède une structure interne à cause d'un spin nucléaire non nul ( $I = 9/2$ ) et n'est donc pas intéressant du point de vue de la localisation. Nous lui préférons l'isotope 88 qui est un diffuseur Rayleigh « idéal ».

On exploitera par ailleurs la richesse du diagramme d'énergie de l'atome en utilisant une transition d'intercombinaison entre le niveau fondamental (singulet) et un état triplet. La densité accessible en transférant le nuage dans un piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  d'intercombinaison doit alors permettre d'approcher le régime de localisation forte [19].

## Plan de ce mémoire

Nous exploiterons dans une première partie un échantillon de strontium refroidi sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  afin d'en étudier la rétrodiffusion cohérente à saturation. Cette étude s'inscrit dans la continuité du travail de Y. Bidet à faible saturation [21, 20]. Dans cette partie, nous rappellerons les éléments caractéristiques du cône de rétrodiffusion.

La seconde partie est dédiée à l'étude du refroidissement sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  bleue à 461 nm. Les alcalino-terreux cadrent bien avec la théorie semi-classique du refroidissement Doppler puisque l'on dispose d'une transition  $J = 0 \rightarrow J' = 1$ . Il s'agit d'un problème en soi puisqu'à l'heure actuelle la plupart des mesures expérimentales dans les conditions d'application de la théorie Dop-

pler montrent des températures plus élevées que la prédiction. Nous présenterons un modèle original ainsi que sa résolution semi-analytique afin d'expliquer l'écart à la théorie. Cette étude nous servira aussi de travail préliminaire au chargement du piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  d'intercombinaison rouge à 689 nm.

Dans une dernière partie, nous détaillerons le transfert du nuage refroidi sur transition bleue vers le piège sur la raie rouge d'intercombinaison. Avant cela, nous décrirons le laser à 689 nm stabilisé sur une cavité ULE<sup>1</sup> afin de pouvoir interagir sur les atomes à l'échelle de la largeur naturelle 7,6 kHz. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir un taux de transfert conséquent (voisin de 50%). Ce résultat expérimental sera étoffé d'une étude systématique détaillée. En ce qui nous concerne, il s'agit d'un premier pas vers la production d'un échantillon diffusant dense.

---

<sup>1</sup>pour *Ultra Low Expansion*



# Chapitre 1

## Effet de la saturation sur la rétrodiffusion cohérente

La propagation à l'intérieur d'un système désordonné semble du point de vue microscopique particulièrement compliquée. Il est en effet difficile de prendre en compte la multitude de chemins que l'on peut alors parcourir dans le milieu. Une approche statistique est donc nécessaire et permet de traiter l'évolution de variables macroscopiques. Le problème du transport cohérent semble alors hors de propos dans un milieu désordonné. À cause sans doute d'une trop grande habitude de la décohérence, on a tendance à supposer que les processus aléatoires viennent « brouiller » la phase qui n'est plus une quantité macroscopique pertinente. Lors d'une succession de processus de diffusion, il n'est cependant pas exclu que la cohérence survive avant d'être brouillée par des interactions qui la détruisent. Lorsqu'on s'intéresse à la propagation d'électrons, le couplage à l'environnement par l'intermédiaire de phonons, d'impuretés magnétiques ou de fluctuations électromagnétiques suffit à détruire la cohérence au bout de quelques processus de diffusion. De façon plus habituelle, on définit la longueur de cohérence [57], qui caractérise l'échelle mésoscopique en-dessous de laquelle le transport reste cohérent.

De ce point de vue-là, la propagation des photons est particulièrement intéressante. Ils sont en effet peu soumis aux processus de *dephasing* [59], terme générique pour désigner les mécanismes qui « brouillent » la phase. Ce fut aussi une motivation pour l'utilisation de diffuseur atomique dont la réponse à une excitation quasi-résonante est bien connue *ab-initio*. Elle reste par exemple plus simple que celle d'une sphère diélectrique [58] dont la taille est inconnue *a priori*.

Un phénomène qui caractérise bien la propagation cohérente en régime de diffusion multiple est la rétrodiffusion cohérente. Cet effet interférentiel a été largement étudié. Autour de la direction arrière et après avoir effectué la moyenne sur les configurations (ce terme sera explicité un peu plus loin), on voit apparaître une figure très piquée nommée cône de rétrodiffusion. Sa hauteur (le facteur d'amplification) traduit directement la cohérence spatiale de l'onde diffusée. L'utilisation



de diffuseur atomique permet un excellent contrôle de l'échantillon et introduit des caractéristiques originales par rapport à des diffuseurs classiques. Nous avons en ce qui nous concerne décidé d'étudier l'effet de la saturation de la transition atomique sur la propagation cohérente en diffusion multiple. On étudiera donc son influence sur le cône de rétrodiffusion.

Nous rappellerons dans un premier temps les concepts-clés qui caractérisent le phénomène de rétrodiffusion. À partir des caractéristiques de la réponse atomique à un champ intense, nous tâcherons de prédire leur influence pour la diffusion multiple cohérente. La troisième partie est dédiée à la présentation du dispositif expérimental et des mesures réalisées. À l'heure actuelle, les calculs théoriques ne prédisent qu'approximativement ces mesures. Malgré cela, nous donnerons dans une dernière partie les ingrédients physiques qui permettent d'interpréter la réduction de la hauteur du cône de rétrodiffusion.

## 1.1 Rétrodiffusion cohérente : quelques rappels

Il peut paraître un peu surprenant d'utiliser un échantillon de strontium pour étudier la diffusion multiple. Il reste en effet plus simple de piéger et refroidir du rubidium par exemple. L'avantage technologique va donc aux alcalins, ce qui en pratique permet de piéger un nombre d'atomes plus important, à des densités plus fortes et des températures plus basses. Du point de vue de la diffusion multiple cohérente, les alcalins ont l'inconvénient de posséder un niveau fondamental dégénéré, ce qui modifie largement les propriétés de transport cohérent. Cette différence est directement visible en comparant les caractéristiques du cône de rétrodiffusion pour différentes transitions atomiques [38].

Nous rappellerons dans un premier temps les éléments-clés du phénomène de rétrodiffusion cohérente. Nous mettrons dans un second temps l'accent sur l'utilisation d'atomes en tant que diffuseurs. Outre la structure interne de la transition utilisée qui influe directement sur le transport cohérent, nous essayerons d'analyser l'effet de la vitesse résiduelle des atomes sur la rétrodiffusion cohérente.

### 1.1.1 Présentation du phénomène

Il s'agit d'un effet d'interférence en diffusion multiple. Interférence et diffusion multiple sont en effet deux points-clés dans tous phénomènes de localisation. Sans en faire une présentation détaillée, nous allons voir sommairement les quelques éléments qui caractérisent le cône de rétrodiffusion. En ce sens-là, il s'agit simplement d'une introduction ; nous resterons donc sur une approche intuitive.

Lorsqu'on éclaire un échantillon diffusant avec un laser, la figure que l'on observe habituellement est celle du speckle [89]. En effet, l'ensemble des diffuseurs répartis aléatoirement diffusent chacun une partie du mode incident. Ils se comportent comme des sources indépendantes dont la phase dépend de la position. L'interférence de toutes ces sources produit dans le champ lointain une figure de speckle. Si l'on change la configuration des diffuseurs, on obtient une nouvelle figure de speckle caractéristique de la nouvelle configuration. Si l'on bouge rapidement l'échantillon, on a tendance à moyenniser sur l'ensemble des configurations possibles. Il suffit que pendant le temps d'intégration du système d'observation les diffuseurs se déplacent d'une longueur d'onde optique. On observe alors un fond de diffusion plat.

### Surintensité dans la direction arrière en diffusion multiple

Le raisonnement précédent n'est pas vrai de façon générale. En effet, en régime de diffusion multiple et après la moyenne sur les configurations, il subsiste une surintensité dans la direction arrière (fig. 1.1).

Pour comprendre un peu mieux ce phénomène, focalisons-nous sur un événement de diffusion multiple particulier comme on le voit sur la figure 1.2. On va

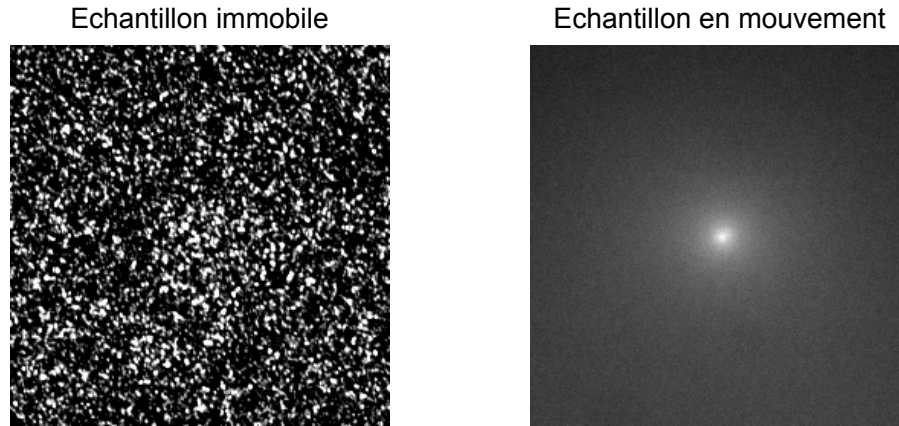


FIG. 1.1 – En régime de diffusion multiple, après avoir effectué une moyenne sur les configurations possibles (en bougeant l'échantillon), on observe le cône de rétrodiffusion. L'image représente le champ lointain, dont la taille totale est de 10 mrad environ.

maintenant s'intéresser à la différence de marche entre deux chemins. Reliant les mêmes événements de diffusion, les deux chemins sont parcourus dans des sens inverses. On parle de chemin direct et renversé.

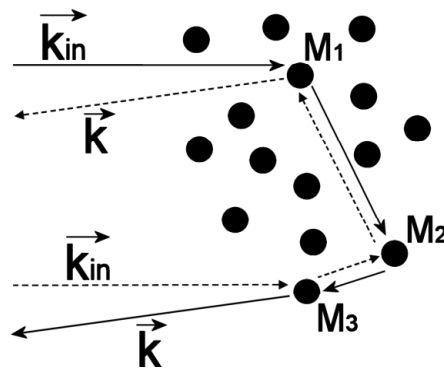


FIG. 1.2 – Pour un événement de diffusion triple, on calcule la différence de marche entre chemins direct et renversé.

La différence de phase est la même que celle de deux trous d'Young distants de  $M_1M_3$  et vaut donc

$$\left[ (\vec{k} + \vec{k}_{in}) \cdot \overline{M_1M_3} \right]$$

D'une part, on constate que cette **différence de marche** qui produira une figure d'interférence dans le champ lointain ne dépend pas de  $M_2$ . Elle **ne dépend que**

des diffuseurs d'« entrée » et de « sortie ». Cela ne veut pas dire que les événements de diffusion double et triple ont par exemple la même contribution. En premier lieu la diffusion triple sera toujours moins probable que la diffusion double. Ensuite la distance entre les diffuseurs d'« entrée » et de « sortie » pour la diffusion double est en moyenne plus petite que pour la diffusion triple.

D'autre part, **la différence de marche est toujours nulle** :

$$\boxed{\vec{k} = -\vec{k}_{\text{in}}}$$

dans la direction arrière quelle que soit la position des diffuseurs. Autrement dit, pour les événements de diffusion multiple, **les interférences sont toujours constructives dans la direction arrière quelle que soit la configuration des diffuseurs**. C'est donc bien un phénomène interférentiel qui explique la présence du pic de rétrodiffusion. Avant de discuter de sa hauteur qui traduit en fait le contraste des interférences, on peut à partir d'un raisonnement simple estimer sa largeur.

### Largeur du cône

On peut en effet exploiter plus avant l'**analogie avec un interféromètre de trous d'Young** représenté par la figure 1.2. Nous ne considérons que des événements de diffusion double. Pour les événements d'ordre supérieur, on remarque que le déphasage entre chemin direct et renversé ne dépend que de la position du premier et dernier diffuseur. Cela nous ramène en partie à une situation de diffusion double, même si la probabilité de réalisation n'est pas la même.

Nous allons en effet apparier les diffuseurs ( $M_1$  et  $M_2$ ) et regarder la figure d'interférence produite par l'événement de diffusion double reliant  $M_1$  et  $M_2$ . Comme nous l'avons représenté sur la figure 1.3 la figure d'interférence est une série de franges d'Young d'interfrange  $1/M_1 M_2$  dans l'espace  $(k_x, k_y)$  où  $k_x$  et  $k_y$  désigne les deux directions perpendiculaires à  $k_{\text{in}}$ .

On viendra ensuite sommer les figures d'interférences en considérant toutes les paires possibles et ce pour diverses configurations (**moyenne sur les configurations**). Le lecteur pourra trouver une justification de cette approche dans l'article [39], qui est une bonne introduction au concept de la diffusion multiple. La figure obtenue sera effectivement un pic centré sur  $(k_x = 0, k_y = 0)$ . **La distance typique entre deux diffusions est par définition le libre parcours moyen  $l$** . On s'attend alors à un interfrange typique de  $1/l$ , et donc à ce que la largeur du pic soit de l'ordre de  $\frac{1}{k_L l}$  en unité d'angle.

Un calcul analytique est possible pour déterminer la forme du cône. En utilisant l'approximation de diffusion dans un milieu semi-infini, on peut montrer que la forme du pic en intensité  $I$  est donnée par l'équation [27] où  $\theta$  désigne l'angle

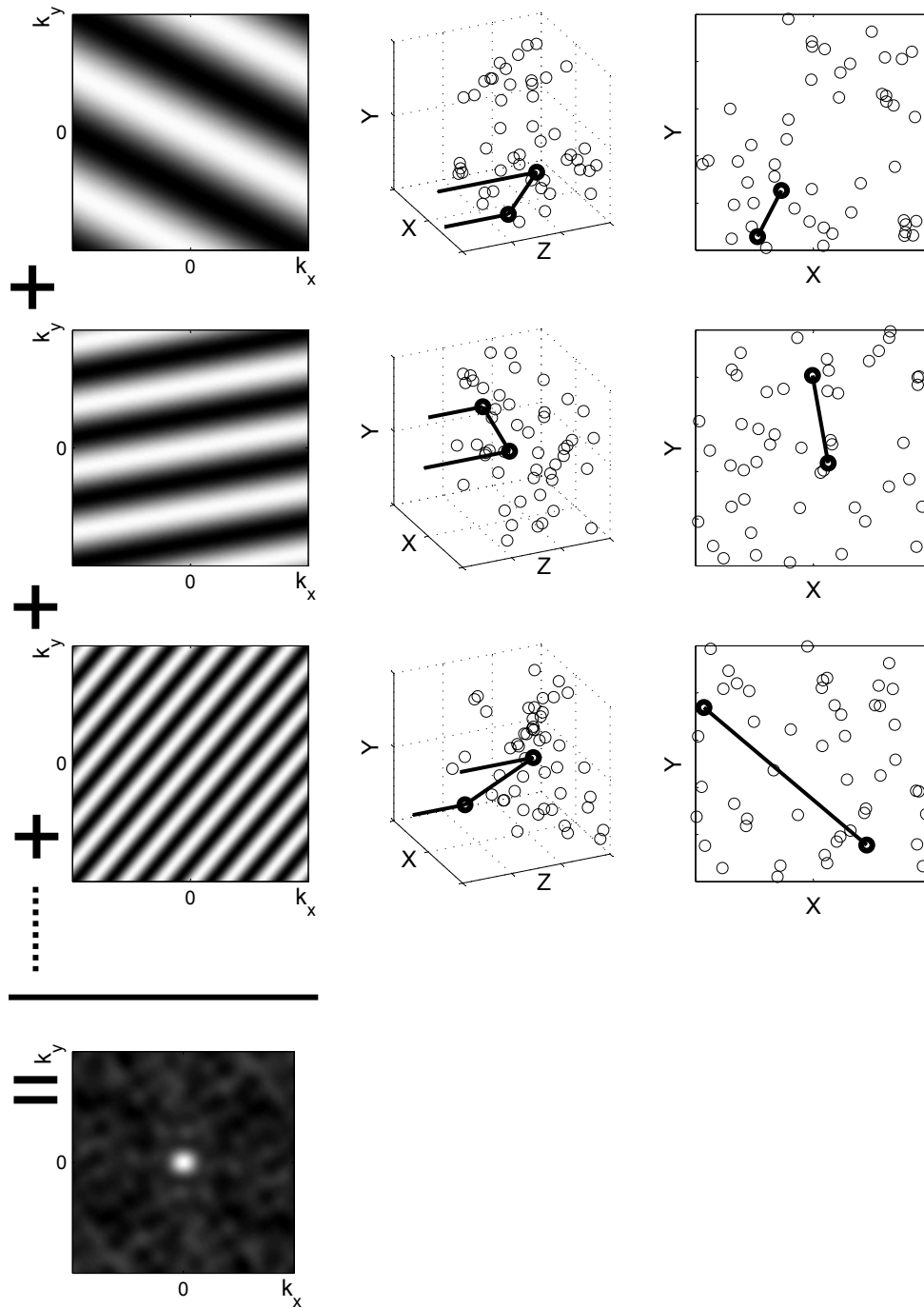


FIG. 1.3 – Somme des franges d'interférence (à gauche) produites en considérant des événements de diffusion double. Au centre et à droite, une configuration avec un événement de diffusion double vue à 3D et projetée sur le plan  $XY$ .

entre  $\vec{k}_{\text{in}}$  et  $\vec{k}$ .

$$I(\theta) = \frac{1}{1 + 2z_0/l} \frac{1}{(1 + k_L l \theta)^2} \left( 1 + \frac{1 - \exp(-2k_L z_0 \theta)}{k_L l \theta} \right) \quad (1.1)$$

$z_0 = 0,71l$  apparaît lorsqu'on prend en compte les conditions de bords par la méthode des « images ». On suppose aussi le diagramme de rayonnement isotrope.

**La largeur totale à mi-hauteur** est

$$\boxed{\frac{0,7}{k_L l}} \quad (1.2)$$

On voit apparaître **une forme très piquée et singulière** en son centre, d'où le nom de cône (fig. 1.4). Ce comportement non trivial est lié à la probabilité d'effectuer des chemins longs pour lesquels diffuseurs d'entrée et de sortie sont éloignés (l'interfrange est alors très court).

On peut relier simplement le libre parcours moyen à la densité de diffuseurs  $n$  :

$$\boxed{l = \frac{1}{n\sigma}} \quad (1.3)$$

$\sigma$  est ici la section efficace de diffusion. La largeur du cône est donc directement proportionnelle à la densité et la section efficace.

Plutôt que par la largeur, on caractérise souvent le cône pas sa hauteur, paramètre certainement plus important : elle traduit en effet le contraste des interférences lors de la propagation dans le milieu.

### Hauteur du cône

À partir de l'analogie avec l'expérience des trous d'Young, il clair que **la hauteur du cône est analogue au contraste des interférences**. Nous avons dans notre raisonnement mis de coté la diffusion simple. **Les événements de diffusion simple participent pourtant au fond de diffusion même s'ils ne produisent pas d'interférences**.

Pour l'intensité diffusée dans la direction arrière, on distinguera l'intensité de diffusion simple  $\gamma_S$  (fig. 1.4).

On définit par la suite l'intensité  $\gamma_L$  qui représente le fond de diffusion multiple et  $\gamma_C$  la hauteur du pic (fig. 1.4). On peut définir par la suite le facteur d'amplification  $A$ , paramètre sans dimension qui représente le contraste des interférences :

$$\boxed{A = 1 + \frac{\gamma_C}{\gamma_S + \gamma_L}} \quad (1.4)$$

Pour que le facteur d'amplification soit maximal et égal à 2, il faut :

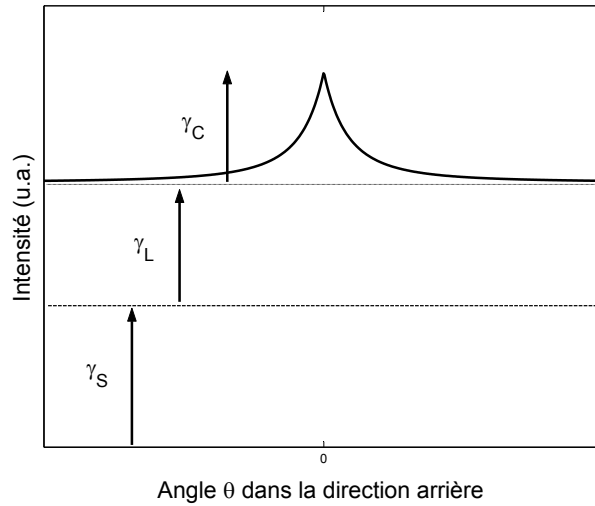


FIG. 1.4 – Cône de rétrodiffusion cohérente calculé à partir de la formule 1.1. On distingue les différentes « intensités »  $\gamma_C$ ,  $\gamma_S$  et  $\gamma_L$  qui permettent de définir le facteur d'amplification.

- **s'affranchir des événements de diffusion simple** : on aura donc  $\gamma_S = 0$  ;
- que  $\gamma_C = \gamma_L$ . Cela n'est possible que si **l'amplitude sur le chemin direct est la même que sur le chemin renversé**. De même que pour les trous d'Young, il faut que les probabilités de passer par les trous soient égales.

Cela n'est pas réalisé de façon générale mais n'est possible uniquement par un choix approprié des polarisations incidentes et de détection. Nous ne les avons pas mentionnées jusqu'ici dans la mesure où nous avons gardé une approche intuitive. Elles jouent pourtant un rôle fondamental. On distingue quatre canaux :

- $lin \parallel lin$  : les polarisations incidente et de détection sont ici **linéaires et parallèles** ;
- $lin \perp lin$  : elles sont alors **linéaires mais orthogonales** ;
- $h \parallel h$  : on utilise des polarisations **circulaires**. On détecte ici suivant la **même hélicité**. Les polarisations étant en fait **orthogonales**, on pourra en effet préférer la notation  $\sigma^+ - \sigma^-$  ;
- $h \perp h$  : les polarisations sont **circulaires et parallèles** ; les **hélicités sont en revanche croisées**.

Revenons maintenant sur les deux critères qui permettent d'observer un facteur d'amplification maximal.

- Afin de **couper la diffusion simple**, il suffit d'utiliser les canaux où les polarisations sont orthogonales :  $lin \perp lin$  et  $h \parallel h$ . Ceci est possible pour des diffuseurs qui ont une symétrie sphérique.
- **L'égalité des amplitudes entre chemin direct et chemin renversé**

**dépend fortement de la polarisation.** Elle est assurée de façon générale que dans les canaux  $lin \parallel lin$  et  $h \parallel h$ . Il faut pouvoir en effet appliquer des arguments de « réciprocité » pour assurer que  $\gamma_C = \gamma_L$ .

**Obtenir un facteur d'amplification égal à 2 n'est finalement possible que dans le canal  $h \parallel h$ .** Mais ce n'est pas suffisant. Sans rentrer dans le détail du théorème de réciprocité, on peut quand même en dire quelques mots. **La réciprocité est fortement liée à des propriétés de renversement du temps.** Il s'agit d'une propriété générale qui s'applique lorsque le milieu diffuseur est invariant par renversement du temps. La probabilité de parcourir un chemin dans un sens ou dans l'autre est la même. Pour des ondes polarisées, outre « renverser le temps », on doit aussi conjuguer les polarisations.

L'ensemble des observations seront donc faites dans le canal  $h \parallel h$ . Dans ce canal, la hauteur du cône traduit directement le contraste des interférences dont nous cherchons à étudier l'évolution à forte saturation. Ce fut une des motivations pour le choix du strontium en tant que diffuseur : on peut en effet assurer qu'à faible saturation le facteur d'amplification vaut 2. L'isotope 88 se comporte comme un dipôle classique car le niveau fondamental est non dégénéré. Ce n'est pas le cas pour le rubidium, ce qui rend l'interprétation des mesures plus délicate.

### Strontium vs Rubidium

Les mesures effectuées sur la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  du  $^{85}\text{Rb}$  [14], historiquement les premières, montrent un facteur d'amplification faible dans le canal  $h \parallel h$ . Le processus de diffusion est largement compliqué par la structure interne de l'atome. Il ne s'agit en effet pas d'un diffuseur Rayleigh (fig. 1.5), à l'inverse du strontium.



FIG. 1.5 – La présence des transitions Raman dégénérées modifie largement la propagation en diffusion multiple dans une nuage de rubidium. Le facteur d'amplification est largement réduit par rapport à un diffuseur Rayleigh ( $^{88}\text{Sr}$ ).

La présence de transition Raman dégénérée (fig. 1.5) complique notablement l'étude de la diffusion multiple. La réciprocité n'est pas applicable tel quel, mais devrait prendre aussi en compte la projection du moment angulaire. Dans le canal



$h \parallel h$ , on ne peut pas assurer que  $\gamma_C = \gamma_L$ . Le cône sera réduit en conséquence. D'autre part, même lorsque les polarisations incidente et de détection sont croisées, on ne peut « éteindre » la diffusion simple ( $\gamma_S \neq 0$ ). Un processus de diffusion simple avec une transition Raman dégénérée suffit pour changer la polarisation : la symétrie du diffuseur n'est en effet pas sphérique. La réduction de la hauteur du cône a en fait deux causes qui sont liées à la structure interne. Le lecteur pourra trouver une analyse comparée des mesures sur les deux atomes dans [38].

La rétrodiffusion cohérente est *a priori* observable sur tout échantillon atomique, même avec un facteur d'amplification réduit pour des raisons fondamentales. L'utilisation d'atomes refroidis par laser est certes commode si l'on souhaite pouvoir changer la densité. Mais elle est surtout essentielle si l'on souhaite s'affranchir des effets de la vitesse résiduelle des diffuseurs.

### 1.1.2 Effet de la vitesse résiduelle des diffuseurs atomiques

**Le mouvement des diffuseurs lors de la propagation ne peut pas toujours être négligé** et peut aller jusqu'à une suppression complète des effets de localisation [34] : on parle alors de brisure dynamique. Historiquement, le cône de rétrodiffusion fut observé sur des diffuseurs classiques. Le mouvement était essentiellement imposé lors de l'expérience pour effectuer la moyenne de configuration. Les vitesses typiques restaient faibles, de l'ordre du cm/s, essentiellement imposé par le déplacement des diffuseurs à l'intérieur d'un liquide. La suppression des interférences entre chemins direct et renversé survient lorsque la distance parcourue par un diffuseur pendant le « temps typique d'un événement de diffusion » est de l'ordre de la longueur d'onde. Pour des diffuseurs classiques, d'une part les vitesses restent faibles et d'autre part les photons passent un temps très court dans l'échantillon (soit quelques  $l/c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière). Ce n'est plus le cas pour des diffuseurs atomiques : d'une part, les vitesses typiques peuvent être grandes même pour des atomes refroidis (quelques mètres par seconde), d'autre part le temps caractéristique d'un événement de diffusion est grand à cause de son caractère résonant. Rentrons un peu plus dans le détail.

Pour prendre en compte un tel effet, il est possible de faire un raisonnement simpliste qui donne cependant un ordre de grandeur réaliste. Considérons pour cela un événement de diffusion double particulier pour lequel un diffuseur est fixe et le second animé d'une vitesse  $\vec{V}$  (fig. 1.6). La vitesse  $\vec{V}$  peut représenter la vitesse relative de deux diffuseurs mouvants, l'un des deux étant pris comme origine du repère dans notre raisonnement. On négligera complètement l'influence de la polarisation de la lumière (on parle d'onde scalaire).

Une des originalités de l'échantillon atomique est le caractère résonant de la diffusion. Il est alors possible d'interpréter  $\Gamma_b^{-1}$  comme le temps typique d'un événement de diffusion,  $\Gamma_b$  désignant la largeur naturelle de la transition. Notons qu'il reste toujours beaucoup plus grand que le temps mis par un photon pour parcourir  $l$ . Si l'on compare la différence de phase entre les deux chemins repré-

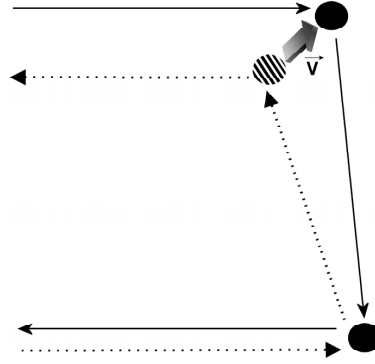


FIG. 1.6 – Présentation du phénomène de brisure dynamique en diffusion double.

sentés sur la figure 1.6, les interférences seront brouillées si pendant le temps typique d'un événement de diffusion la position relative des atomes change de plus de  $\lambda_{opt}$ . Soit la condition

$$k v \ll \Gamma_b \quad (1.5)$$

**La vitesse résiduelle doit donc être inférieure à quelques dizaines de mètres par seconde, ce qui impose d'utiliser des atomes refroidis.** Ce raisonnement est particulièrement simple mais donne un ordre de grandeur correct pour le critère de brisure dynamique.

Il est cependant possible de faire un raisonnement plus précis. On préférera une image fréquentielle dans laquelle on tient compte du décalage Doppler à la diffusion. Cela nous permettra d'estimer quantitativement la réduction du facteur d'amplification du cône. Nous détaillerons donc ce raisonnement que nous réutiliserons par la suite (voir 1.4.1) en exploitant le caractère inélastique de la diffusion par un atome en mouvement.

En considérant la polarisabilité électrique  $\alpha_{at}$ , il est possible de calculer la différence de phase entre les deux chemins représentés sur la figure 1.7. Rappelons l'expression de  $\alpha_{at}(\omega)$  :

$$\alpha_{at}(\omega) = -\frac{3\pi\Gamma_b c^3}{\omega_{at}^3} \left( \frac{1}{\omega - \omega_{at} + i\Gamma_b/2} \right) \quad (1.6)$$

Elle est reliée à la section efficace de diffusion par la relation :

$$\sigma = \frac{2\pi}{\lambda_{opt}} \text{Im}(\alpha_{at}) \quad (1.7)$$

Im désigne la partie imaginaire.

Nous allons maintenant calculer le déphasage entre les deux chemins, direct et renversé, qui relie deux diffuseurs distants de  $l$  (libre parcours moyen)(fig.

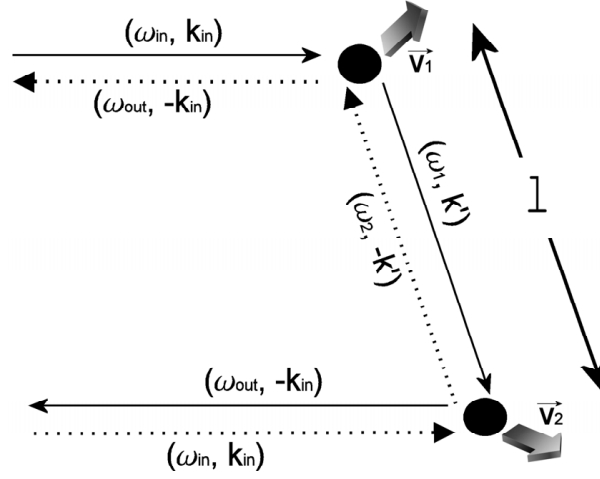


FIG. 1.7 – Calcul du déphasage entre les deux chemins direct et renversé qui relient deux diffuseurs distants de  $l$ .

1.7). À cause de l'effet Doppler les fréquences des photons intermédiaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont différentes de  $\omega_{in} = \omega_{at}$ , fréquence des photons incidents que l'on suppose être résonants. Plus précisément, on aura  $\omega_1 = \omega_{in} - (\vec{k}_{in} - \vec{k}') \cdot \vec{V}_1$  et  $\omega_2 = \omega_{in} - (\vec{k}_{in} + \vec{k}') \cdot \vec{V}_2$ .

Il nous faut pour calculer le déphasage total pour tenir compte de deux contributions, celle de la diffusion même et celle de la propagation dans le milieu.

1. À la diffusion existe un déphasage  $\Delta\Phi_{diff}$  entre le champ incident et le champ diffusé. Lorsqu'une onde à fréquence  $\omega$  (de vecteur d'onde  $\vec{k}_{in}$ ) est diffusée par un atome à vitesse  $\vec{V}_1$  le déphasage est donné par l'argument (noté  $\arg$ ) de  $\alpha_{at}(\omega - \vec{k}_{in} \cdot \vec{V}_1)$ . On peut maintenant calculer  $\Delta\Phi_{diff}$ , la différence de phase entre les deux chemins illustrés par la figure 1.7.

$$\Delta\Phi_{diff} = \arg \left( [\alpha_{at}(\omega - \vec{k}_{in} \cdot \vec{V}_1) + \alpha_{at}(\omega_1 - \vec{k}' \cdot \vec{V}_2)] - [\alpha_{at}(\omega - \vec{k}_{in} \cdot \vec{V}_2) + \alpha_{at}(\omega_2 + \vec{k}' \cdot \vec{V}_1)] \right) \quad (1.8)$$

On a par ailleurs :

$$\arg(\alpha_{at}(\omega)) = -\arctan\left(\frac{\Gamma_b/2}{\omega - \omega_{at}}\right) \quad (1.9)$$

On ne gardera que le premier ordre du développement en vitesse pour  $\Delta\Phi_{diff}$ , soit

$$\Delta\Phi_{diff} \simeq -\frac{4}{\Gamma_b} \vec{k}_{in} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \quad (1.10)$$

2. À la propagation dans le milieu, l'indice qui dépend fortement de la fréquence induit un déphasage  $\Delta\Phi_{\text{prop}}$ .

$$\Delta\Phi_{\text{prop}} = 2\pi (n_r(\omega_1) - n_r(\omega_2)) \frac{l}{\lambda_{\text{opt}}} \quad (1.11)$$

où  $n_r$  est l'indice de réfraction qui dépend directement de la densité des dipôles  $n$  et de la partie réelle  $\text{Re}(\alpha_{\text{at}})$  de la polarisabilité :

$$n_r(\omega) = 1 + \frac{n}{2} \text{Re}(\alpha_{\text{at}}(\omega)) \quad (1.12)$$

Rappelons l'expression du libre parcours moyen  $l$  (expr. 1.3) :

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{\lambda_{\text{opt}}}{2\pi n \text{Im}(\alpha_{\text{at}})} \quad (1.13)$$

Par un développement au premier ordre en vitesse, on montre que :

$$\Delta\Phi_{\text{prop}} \simeq \frac{1}{\Gamma_b} \left( (\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}') \cdot \vec{V}_1 - (\vec{k}_{\text{in}} + \vec{k}') \cdot \vec{V}_2 \right) \quad (1.14)$$

Notons pour résumer qu'autour de la résonance, le déphasage dû à la propagation est en valeur absolue plus faible que celui dû à la diffusion.

**On négligera par ailleurs tout effet d'amplitude** en s'appuyant sur le fait qu'autour de la résonance, la section efficace varie peu. On supposera aussi que la distribution des vitesses (pour  $|\vec{V}_1|$  et  $|\vec{V}_2|$ ) est gaussienne (largeur RMS  $V_{\text{RMS}}$ ), et qu'on peut calculer la valeur moyenne (notée  $\langle \dots \rangle_{v_1, v_2}$ ) du contraste des interférences qui vaut

$$1 + \left\langle \cos(\Delta\Phi_{\text{prop}} + \Delta\Phi_{\text{diff}}) \right\rangle_{v_1, v_2} = 1 + \exp\left(-10 \frac{k_{\text{in}}^2 V_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) \quad (1.15)$$

Rappelons que l'on a  $|\vec{k}_{\text{in}}| \simeq |\vec{k}'|$ .

On attend donc **une réduction du contraste des interférences et donc du cône de rétrodiffusion à cause du déphasage entre les chemins** selon la loi 1.15. Pour assurer un contraste maximal, il faut assurer :

$$k_{\text{in}} V_{\text{RMS}} \ll \Gamma_b \text{ soit pour le strontium : } V_{\text{RMS}} \ll 14,7 \text{ m/s} \quad (1.16)$$

Notons quand même qu'il s'agit d'un **raisonnement en diffusion double**, que nous nous garderons bien de généraliser à des ordres supérieurs. Cependant, dans nos conditions expérimentales, l'épaisseur optique est proche de 3 : on peut s'attendre à ce que la diffusion double domine largement la diffusion multiple. On peut donc négliger dans ces conditions l'effet de réduction du contraste à cause de la vitesse résiduelle, qui reste bien inférieure à 14,7 m/s lors de l'expérience. Il

est plus délicat de prendre cet effet en compte quelle que soit l'épaisseur optique ou dans le régime localisé.

Nous garderons cependant en tête ce raisonnement qui ne tient compte que du déphasage à la diffusion. Il permet de donner une formule analytique de la décroissance du contraste des interférences causée par un processus de diffusion inélastique (à cause du décalage Doppler). Après avoir présenté la rétrodiffusion cohérente et détaillé les spécificités du phénomène dans un gaz d'atomes, nous allons nous intéresser aux effets de saturation en diffusion multiple. Il s'agit d'une originalité de la réponse d'un atome par rapport à un diffuseur « classique ».

## 1.2 Effets de saturation sur la diffusion des photons

La phénomène de saturation d'une transition atomique est bien connu. À la différence d'un dipôle classique, un atome à deux niveaux ne peut diffuser qu'un nombre limité de photons par seconde. Cela traduit la saturation de la population dans l'état excité dont la durée de vie  $\Gamma_b^{-1}$  est finie. Le taux de diffusion est alors fini et vaut  $\Gamma_b/2$ . Tâchons d'exprimer cela en terme de section efficace dont nous avons vu l'importance précédemment.

### 1.2.1 Réduction de la section efficace

L'aspect le plus intuitif de la saturation d'une transition est sans doute la saturation du taux de diffusion. Lorsqu'on augmente l'intensité incidente sur un atome, ce taux va tendre vers une constante. La transition est alors saturée. Rappelons l'expression du paramètre de saturation  $s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$  (avec  $\delta_L = \omega_L - \omega_{\text{at}}$  où  $\omega_{\text{at}}$  est la fréquence de résonance). Le taux de diffusion  $\Gamma_{\text{diff}}$  sera alors :

$$\Gamma_{\text{diff}} = \frac{\Gamma_b}{2} \frac{s}{1+s} = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (1.17)$$

Lorsque la saturation est faible, l'intensité diffusée  $P_{\text{diff}}$  est directement proportionnelle à  $s$  et donc à l'intensité incidente :

$$P_{\text{diff}} \propto \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (1.18)$$

On peut définir sans équivoque la section efficace de diffusion  $\sigma(\delta_L)$  dont l'expression est bien connue. On la déduit sans peine de l'expression de la polarisabilité (expr. 1.7) :

$$\sigma(\delta_L) = \sigma_0 \frac{1}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (1.19)$$

où  $\sigma_0 = \frac{3\lambda_{opt}^2}{2\pi}$  est la section efficace de diffusion à résonance.

À forte saturation, il est possible de généraliser cette expression pour prendre en compte **la saturation du taux de diffusion, ce qui se traduit par une décroissance de la section efficace** :

$$\sigma(\delta_L, I) = \sigma_0 \frac{1}{1 + I/I_{sat} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (1.20)$$

La puissance diffusée devient constante et indépendante de l'intensité incidente :

$$P_{diff} \propto \frac{I/I_{sat}}{1 + I/I_{sat} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \xrightarrow{I/I_{sat} \rightarrow \infty} 1 \quad (1.21)$$

La réduction de la section efficace n'est pas sans conséquence pour la diffusion multiple. À l'échelle microscopique, elle modifie directement le libre parcours moyen (expr. 1.3). À l'échelle macroscopique, cela se traduit par une réduction de l'épaisseur optique  $b$ . Nous allons en rappeler la définition dans un cas simple afin de l'étendre au cas d'un échantillon atomique saturé.

### Transmission d'un nuage d'atomes à saturation - Définition de l'épaisseur optique

L'épaisseur optique est définie à partir de l'atténuation du mode incident le long de l'échantillon diffuseur (caractérisé par  $n$  et  $\sigma$ ). L'équation caractéristique est celle de **Beer-Lambert**.

**Épaisseur optique d'une tranche finie homogène** : rappelons l'expression et la résolution de l'équation de Beer-Lambert dans le cas très simple d'un milieu homogène :

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{I}{l} = -I n \sigma \quad (1.22)$$

Si l'on considère la traversée d'une tranche finie de longueur  $L$  (*slab* en anglais), on intègre facilement l'équation de Beer-Lambert :

$$\ln\left(\frac{I_t}{I_{inc}}\right) = -n \sigma L \quad (1.23)$$

$I_{inc}$  et  $I_t$  sont respectivement les flux incident et transmis.

On peut définir alors l'épaisseur optique  $b_{slab}$  de la tranche :

$$b_{slab} = n \sigma L = -\ln\left(\frac{I_t}{I_{inc}}\right) \quad (1.24)$$

Dans le cas de diffuseur atomique, la saturation a tendance à réduire la section efficace  $\sigma(\delta_L, I)$  : la résolution de 1.22 est donc un peu différente. Il est alors délicat de parler d'un milieu homogène. La densité est fixée et n'est pas modifiée par la saturation. La section efficace est en revanche dépendante de l'intensité qui s'atténue dans le milieu : elle n'est donc pas constante.

**Épaisseur optique d'une tranche finie saturée :** la dépendance en intensité de la section efficace  $\sigma(\delta_L, I)$  modifie la résolution de 1.22 :

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{I}{l} = -I n \sigma(\delta_L, I) = n \sigma_0 \frac{I}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (1.25)$$

On l'intègre cependant sans peine :

$$(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \ln\left(\frac{I_t}{I_{\text{inc}}}\right) + \frac{I_t - I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}} = -n \sigma_0 L \quad (1.26)$$

On lui préférera une expression en fonction de la transmission  $T_{\text{slab}} = I_t/I_{\text{inc}}$  en fonction du flux incident  $I_{\text{inc}}/I_{\text{sat}}$  :

$$(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \ln(T_{\text{slab}}) + \frac{I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}}(T_{\text{slab}} - 1) = -n \sigma_0 L \quad (1.27)$$

La définition de l'épaisseur est ici un peu plus délicate : il n'est plus possible d'identifier  $n \sigma L$  et  $-\ln(T_{\text{slab}})$  qui correspondant au cas faible saturation (expr. 1.24). Il nous faut donc choisir une définition. Nous choisirons donc :

$$\boxed{b = -\ln(T_{\text{slab}})} \quad (1.28)$$

On pourra alors calculer  $b$  à partir des caractéristiques du milieu et du mode incident à partir de l'équation 1.27 que l'on écrira sous la forme suivante :

$$(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) b + \frac{I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}}(1 - \exp(-b)) = n_0 \sigma_0 L \quad (1.29)$$

Le nuage d'atomes piégés n'est pas une tranche de taille finie. On aura plus vraisemblablement une distribution gaussienne pour la densité  $n$ , soit selon l'axe de propagation  $z$  du faisceau.

**Épaisseur optique d'un milieu gaussien saturé :** il n'est pas difficile d'inclure la dépendance gaussienne de la densité des diffuseurs :

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2r_z^2}\right) \quad (1.30)$$

$r_z$  est la largeur RMS du nuage suivant la direction de propagation.

On intègre cette fois l'expression 1.25 entre  $-\infty$  (avec  $I_{\text{inc}}$ ) et  $+\infty$  (avec  $I_t$ ) :

$$(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \ln(T) + \frac{I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}}(T - 1) = -n_0 \sigma_0 \sqrt{2\pi} r_z \quad (1.31)$$

Autrement dit, l'épaisseur optique d'un milieu gaussien de largeur RMS  $r_z$  et de densité au centre  $n_0$  est la même que celle d'un *slab* d'épaisseur  $L = r_z \sqrt{2\pi}$ . Ceci

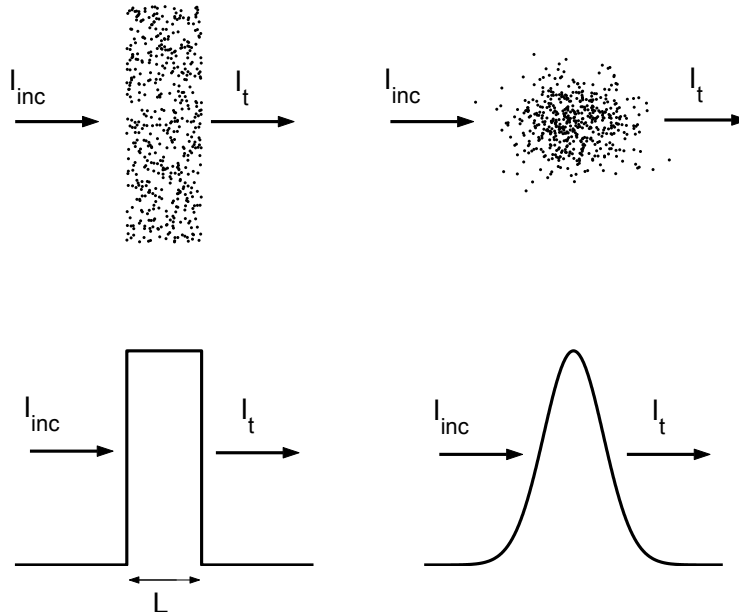


FIG. 1.8 – Comparaison d’un nuage gaussien (largeur RMS  $r_z$ ) et d’une tranche finie (longueur  $L = r_z\sqrt{2\pi}$ ) de même épaisseur optique.

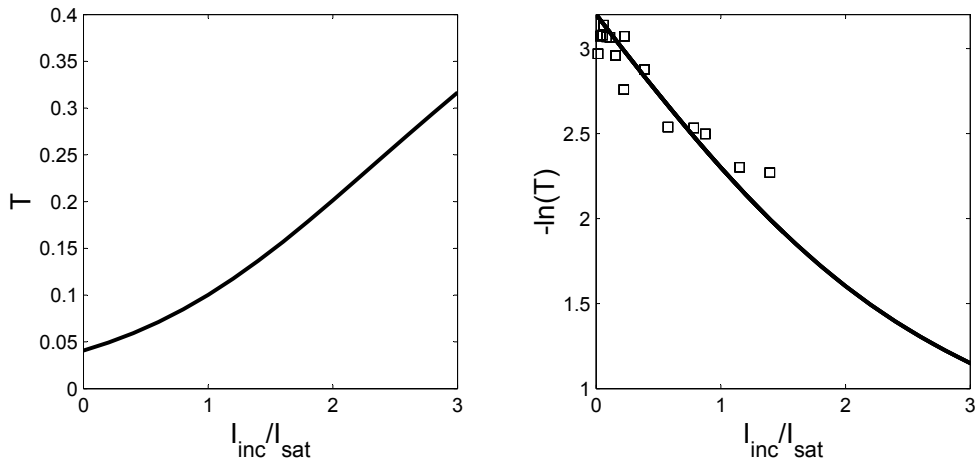


FIG. 1.9 – Transmission  $T$  en fonction du flux incident en unité de saturation. À droite, nous avons représenté  $-\ln(T)$  que nous définissons comme l’épaisseur optique. Les carrés représentent les mesures expérimentales. Nous avons ajusté la valeur de  $n_0 = 1,8 \cdot 10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup> pour correspondre à la mesure de  $T$  lorsque  $I_{inc}/I_{sat} \rightarrow 0$ .

est illustré par la figure 1.8. Nous avons effectué une mesure de la transmission du nuage en fonction de l’intensité incidente comme on peut le voir sur la figure



## 1.9.

Dans l'équation 1.8, seul  $n_0$  est un paramètre libre que nous avons ajusté pour que la courbe théorique coïncide avec les mesures à faible saturation. On constate que l'accord est satisfaisant et traduit bien la décroissance de la section efficace à l'échelle microscopique.

Nous avons présenté la propagation dans le milieu à partir d'une généralisation de l'équation de Beer-Lambert. En supposant connue l'expression de la section efficace  $\sigma(\delta_L, I)$ , nous avons calculé la transmission et défini l'épaisseur optique. Ce raisonnement suppose implicitement que l'on soit en régime de diffusion simple même si cela n'apparaît pas directement dans le calcul. **On a supposé en effet que la section efficace ne dépendait que de l'intensité du mode cohérent** c'est-à-dire que les photons qui viennent interagir avec les atomes sont issus uniquement du mode incident. En régime de diffusion multiple, on doit prendre en compte aussi les photons déjà diffusés qui viennent ensuite interagir avec un atome. Ils modifient le paramètre de saturation au point considéré et ne sont en rien pris en compte dans notre calcul. On peut cependant voir la figure 1.9 comme une justification *a posteriori* de notre étude qui néglige les photons des modes diffus par rapport au mode cohérent. L'accord entre nos mesures et la prédiction est satisfaisant dans la gamme des paramètres utilisés. Même si ces mesures mériteraient d'être affinées, on ne voit pas de déviation expérimentale forte de la prédiction. Il semble donc que la saturation dans le milieu soit essentiellement imposée par le mode incident.

On voit qu'en définitive la saturation modifie grandement les propriétés du milieu. À l'échelle macroscopique, l'épaisseur optique va décroître ce qui nous éloigne *a priori* du régime de diffusion multiple. À l'échelle microscopique, elle modifie la section efficace et donc le libre parcours moyen qui est le paramètre pertinent en diffusion multiple. En ce qui nous concerne, on aura une distribution des libres parcours moyens dans le nuage. C'est cette distribution qui imposera la distribution des ordres de diffusion multiple.

### Distribution des libres parcours moyens dans le nuage

Le poids relatif des divers événements de diffusion multiple (diffusion simple, double, triple, etc.) est appelé distribution des ordres. Il s'agit d'un point-clé qui modifie essentiellement la forme du cône de rétrodiffusion. La formule 1.2 n'est vraie que dans le cas d'un milieu semi-infini homogène. Dans le cadre de notre étude, nous avons cherché à garder la distribution des ordres inchangée au cours des mesures. Cela nous permettra d'étudier en particulier la cohérence lors de la propagation en diffusion multiple en s'affranchissant des artefacts causés par une modification de la distribution des ordres. Avant cela, il nous faut calculer la distribution des libres parcours moyens dans le nuage. Pour des raisons de simplicité nous effectuerons un calcul 1D le long d'un diamètre du nuage.

Le libre parcours moyen  $l = 1/n\sigma$  est du point de vue de la diffusion le seul

paramètre pertinent. **On ne peut pas *a priori* distinguer des distributions  $n(\mathbf{z})$  et  $\sigma(\mathbf{z})$  qui auraient le même le produit  $n(\mathbf{z})\sigma(\mathbf{z})$ .** On a finalement un échantillon polydisperse « particulier » puisque **le libre parcours moyen dépend de la position.** Si l'on souhaite calculer

$$l(z) = \frac{1}{n(z)\sigma(z)} \quad (1.32)$$

il nous faut en premier lieu calculer  $I(z)$  qui impose  $\sigma(z)$ . La distribution  $n(z)$  n'est pas changée à saturation et vaut toujours :

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2r_z^2}\right) \quad (1.33)$$

Pour calculer  $I(z)$ , on intègre cette fois l'expression 1.25 entre  $-\infty$  (avec  $I_{\text{inc}}$ ) et  $z$  (avec  $I(z)$ ) :

$$(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \ln\left(\frac{I(z)}{I_{\text{inc}}}\right) + \frac{I(z) - I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}} = -n_0 \sigma_0 \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{Z^2}{2r_z^2}\right) dZ \quad (1.34)$$

On définit ainsi  $I$  comme fonction implicite de  $z$ , dépendant des caractéristiques du nuage et de l'intensité incidente. L'équation sera résolue numériquement. La figure 1.10 illustre la dépendance de  $I$  en fonction de  $z$  au travers du nuage pour différentes valeurs de  $I_{\text{inc}}/I_{\text{sat}}$ . On a fixé la densité à  $n_0 = 1,4 \cdot 10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup>, ce qui correspond à la valeur utilisée pour les mesures de rétrodiffusion que nous présenterons ensuite.

On ne sera pas surpris de voir qu'avec la saturation la transmission du nuage croît fortement, comme on l'a vu en page 30. On peut maintenant calculer  $l(z)$  connaissant  $I(z)$  :

$$l(z) = \frac{1}{n(z)\sigma(z)} = \frac{1 + I(z)/I_{\text{sat}} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{n(z)\sigma_0} \quad (1.35)$$

Plutôt que représenter  $l(z)$  nous avons préféré tracer

$$\frac{\sqrt{2\pi}r_z}{l(z)} = \frac{n(z)\sigma_0\sqrt{2\pi}r_z}{1 + I(z)/I_{\text{sat}} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$$

qui est **un paramètre sans dimension** que l'on interprète facilement à faible saturation. En effet lorsque  $I(z)/I_{\text{sat}} \rightarrow 0$ ,  $n(z)\sigma_0\sqrt{2\pi}r_z$  est une distribution gaussienne dont la valeur centrale est l'épaisseur optique à résonance.

On constate une modification importante de la distribution des libres parcours à mesure que l'on saturera le milieu. L'écrasement de la distribution de la figure 1.11 est une conséquence de réduction de la section efficace. En choisissant des conditions expérimentales adaptées, il est possible de minimiser la modification de la distribution  $l(z)$ .

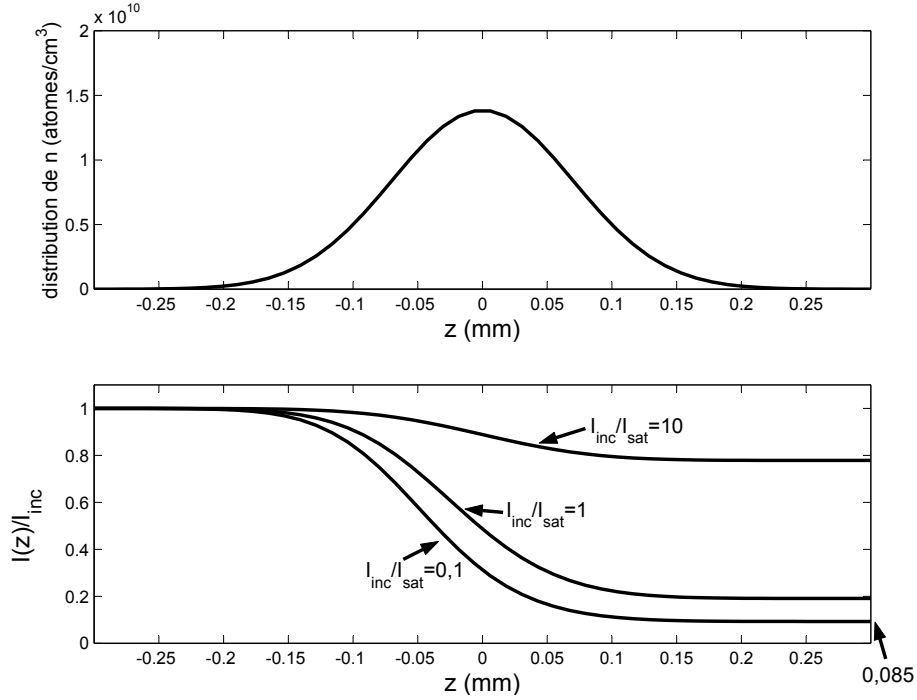


FIG. 1.10 – Nous avons fixé  $n_0 = 1,4 \cdot 10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup> ce qui assure une transmission égale à 8,5% lorsque  $I_{\text{inc}}/I_{\text{sat}} \rightarrow 0$ .

Pour ce faire, **nous allons lors des mesures garder l'épaisseur optique (ou la transmission) constante**. Cela n'est possible qu'en changeant la densité  $n_0$ . Imposons par exemple  $T = 8,5\%$  ( $b = 2,5$ ), ce qui correspond à une valeur réaliste que nous retrouverons par la suite. **Lorsqu'on augmentera la saturation du mode incident, on devra augmenter la densité pour compenser la réduction de la section efficace**. Plus précisément, lorsque  $I_{\text{inc}}/I_{\text{sat}}$  est fixée, on calcule sans peine la densité  $n_0$  qui permet de garder  $T = 8,5\%$  à partir de l'équation 1.31 :

$$n_0 = -\frac{1}{\sigma_0 \cdot \sqrt{2\pi} r_z} \left( (1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \ln(T) + \frac{I_{\text{inc}}}{I_{\text{sat}}} (T - 1) \right) \quad (1.36)$$

On peut ensuite comme précédemment utiliser l'expression 1.34 pour calculer numériquement la distribution  $I(z)$  dans le milieu (fig. 1.12).

Pour représenter la distribution des libres parcours moyens (fig. 1.13), on utilise à nouveau le paramètre sans dimension

$$\frac{\sqrt{2\pi} r_z}{l(z)} = \frac{n(z) \sigma_0 \sqrt{2\pi} r_z}{1 + I(z)/I_{\text{sat}} + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$$

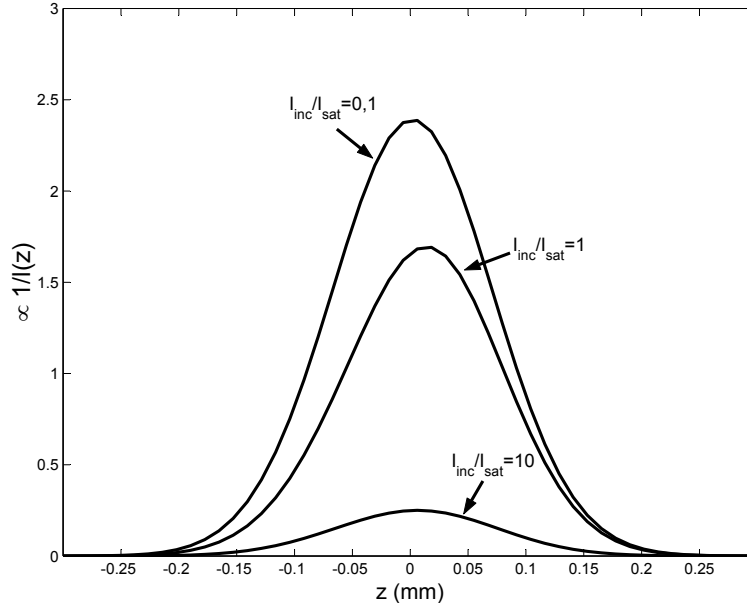


FIG. 1.11 – Distribution  $\sqrt{2\pi}r_z/l(z)$  en fonction de  $z$ , elle est proportionnelle à  $1/l(z)$ . À faible saturation, la distribution est une gaussienne dont la valeur centrale est l'épaisseur optique. On constate une réduction importante de la distribution qui traduit la réduction de la section efficace.

qui est directement proportionnel à  $1/l(z)$ . Dans cette expression, notons que  $n_0$  et donc  $n(z)$  dépendent de  $I_{\text{inc}}$  afin de garder l'épaisseur optique constante, comme on peut le voir sur la figure 1.12.

On constate sur la figure 1.13 que **la distribution garde globalement sa forme gaussienne et son amplitude**, même si elle est légèrement déformée. Au vu de cette analyse, on s'attend à ce que la distribution des ordres ne change pas significativement. On ne peut pourtant pas conclure de façon certaine. Notre calcul est en effet trop restrictif. Il n'est vrai que le long d'un diamètre du nuage  $z$ , ce qui revient à supposer le milieu invariant par translation dans le plan  $(x, y)$ .

On peut utiliser un résultat fort bien que peu intuitif **pour les milieux invariants par translation dans le plan  $(x, y)$** . On peut montrer [26] alors que la distribution des ordres de diffusion est rigoureusement la même que pour un *slab* ayant la même épaisseur optique<sup>1</sup>. En conséquence, même si l'on voit que la distribution est légèrement déformée (fig. 1.13), **pour un milieu invariant par translation dans le plan  $(x, y)$ , on peut conclure : si l'épaisseur optique est gardée constante alors la distribution des ordres de diffusion reste**

<sup>1</sup>Dans l'article [26], l'épaisseur optique est définie comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} n(z)\sigma(z)dz$ . Cette définition est la même que la nôtre. Cela vient d'une simple intégration de l'expression 1.25 entre  $-\infty$  et  $+\infty$

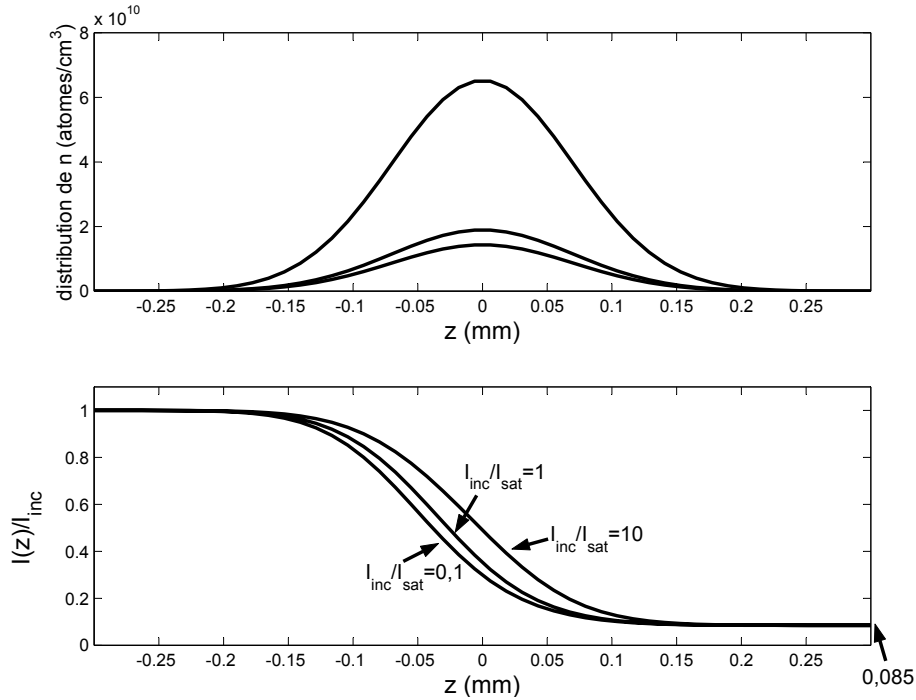


FIG. 1.12 – De façon analogue à la figure 1.10, on calcule la distribution d’intensité dans le milieu. On gardera la transmission constante en ajustant  $n_0$  pour chaque valeur de  $I_{inc}/I_{sat}$ .

inchangée dans le cas de processus élastique. Notre milieu n’étant pas invariant dans le plan  $(x, y)$ , on ne peut pas conclure de façon certaine dans notre situation.

Le seul élément que l’on puisse mettre en avant est **la mesure expérimentale de la largeur du cône**. Changer la distribution des ordres suppose aussi favoriser des chemins de diffusion plus ou moins longs. La largeur du cône devrait changer en conséquence. Comme on le verra sur la figure 1.25, **il n’y a pas de variation significative de la largeur** dans la limite des barres d’erreurs. **Même si notre échantillon n’est pas invariant par translation, nous avons gardé l’épaisseur optique constante : il semble donc que la distribution des ordres de diffusion participant au cône ne soit pas trop perturbée à saturation.** Cette conclusion nous permettra d’écartier les effets triviaux qui induisent une réduction du cône et donc du contraste des interférences. On pourra donc se focaliser sur les mécanismes plus fondamentaux qui brisent la cohérence entre les chemins de diffusion multiple. À saturation, outre la réduction de la section efficace qui traduit la saturation du taux de diffusion des photons, on voit apparaître le phénomène de diffusion incohérente (ou inélastique). Le spectre de la lumière diffusée change notablement à saturation.

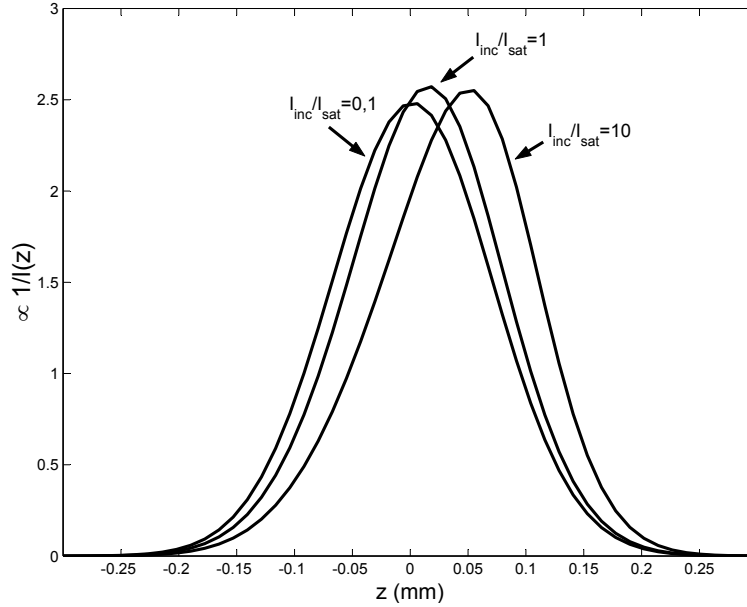


FIG. 1.13 – Distribution  $\sqrt{2\pi}r_z/l(z)$  en fonction de  $z$ . Contrairement à la figure 1.11, on compense la densité au centre  $n_0$  pour garder l'épaisseur optique constante.

## 1.2.2 Apparition du spectre inélastique

Nous donnerons les caractéristiques du spectre dans un premier temps avant de juger de leur influence sur la propagation cohérente en diffusion multiple.

### Spectre de la lumière diffusée à saturation

Le calcul du spectre de fluorescence n'est pas évident dans le cas général pour une excitation quasi-résonante. L'intensité totale diffusée  $\mathcal{I}$  est proportionnelle à la population dans l'état excité :

$$\mathcal{I} = \eta^2 \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \quad (1.37)$$

$\eta$  est un facteur de proportionnalité qui apparaît entre le champ diffusé et le dipôle atomique [29, p. 363] est  $s$  le paramètre de saturation.

On ne connaît *a priori* pas la répartition spectrale des photons diffusés. Le champ rayonné par un dipôle classique possède **une phase bien définie** par rapport au champ incident : on parle alors de **diffusion élastique** (ou cohérente). La mécanique quantique nous conduit à considérer aussi **les fluctuations du dipôle atomique**. Le champ rayonné par la partie fluctuante n'a pas de phase bien définie : on parle alors de **diffusion inélastique** (ou incohérente). Le spectre de fluorescence traduit les fluctuations temporelles du dipôle.

On peut montrer que l'intensité diffusée élastiquement est proportionnelle à  $\frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)^2}$  et la partie inélastique à  $\frac{1}{2} \frac{s^2}{(1+s)^2}$ .

$$\mathcal{I}_{\text{él}} = \eta^2 \frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)^2} \quad (1.38)$$

$$\mathcal{I}_{\text{inél}} = \eta^2 \frac{1}{2} \frac{s^2}{(1+s)^2} \quad (1.39)$$

Le lecteur pourra trouver une démonstration de ces expressions dans [29]. Nous les avons représentées sur la figure 1.14.

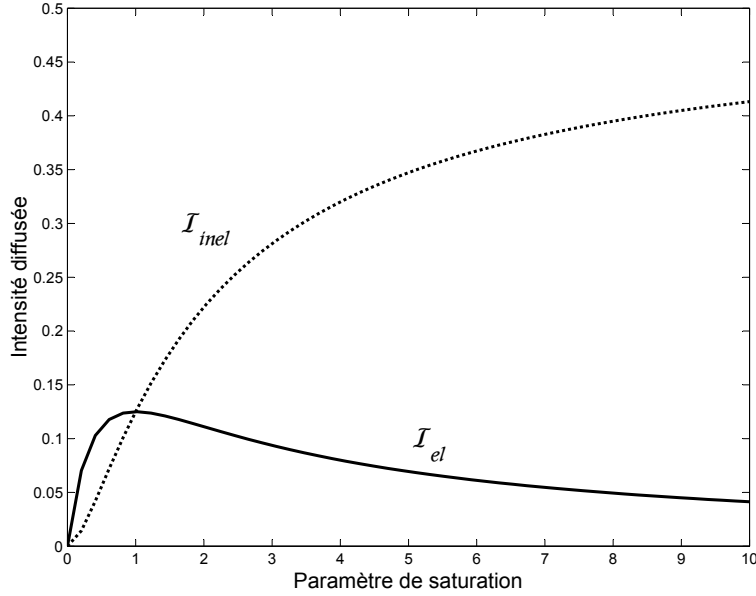


FIG. 1.14 –  $\mathcal{I}_{\text{él}}/\eta^2$  (trait plein) et  $\mathcal{I}_{\text{inél}}/\eta^2$  (tirets) en fonction du paramètre de saturation.

La partie élastique n'est rien de plus que la réponse d'un dipôle classique à une excitation laser de fréquence  $\omega_L$ . C'est donc en régime forcé un rayonnement monochromatique de fréquence  $\omega_L$ . Soit

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\text{él}}(\omega) = \eta^2 \frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)^2} \delta(\omega - \omega_L) \quad (1.40)$$

Il est en revanche beaucoup moins évident de calculer la densité spectrale de puissance de la partie inélastique. Son calcul fait intervenir les moyennes à deux temps du dipôle atomique. Il a été effectué par B. R. Mollow [31] et porte souvent le nom de **triplet de Mollow dans la limite d'un champ intense**. On peut en donner une expression analytique [31] :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{I}}_{\text{inél}}(\omega) = \eta^2 \frac{1}{\Gamma_b} & \frac{\left(\frac{I}{I_{\text{sat}}}\right)^2}{8\pi \left(1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + 4\frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2}\right)} \\
& \times \frac{\frac{\delta^2}{\Gamma_b^2} + \frac{I}{4I_{\text{sat}}} + 1}{\left(\frac{1}{4} + \frac{I}{4I_{\text{sat}}} + \frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2} - 2\frac{\delta^2}{\Gamma_b^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\Gamma_b^2} \left(\frac{5}{4} + \frac{I}{2I_{\text{sat}}} + \frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2} - \frac{\delta^2}{\Gamma_b^2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Avec  $\delta_L = \omega_L - \omega_{\text{at}}$  et  $\delta = \omega - \omega_L$ .

Dans la limite d'un champ intense<sup>2</sup>, cette expression tend vers une formule simple [30] puisque l'on voit apparaître la somme de trois lorentziennes (triplet de Mollow). Elles sont centrées sur  $\omega_L - \sqrt{\frac{\Gamma_b^2}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \delta_L^2}$ ,  $\omega_L$  et  $\omega_L + \sqrt{\frac{\Gamma_b^2}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \delta_L^2}$ .

On reconnaîtra en  $\sqrt{\frac{\Gamma_b^2}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \delta_L^2}$  la fréquence de Rabi généralisée. Elles ont une amplitude relative de 1, 3 et 1 et une largeur de  $3\Gamma_b/2$ ,  $\Gamma_b$  et  $3\Gamma_b/2$  respectivement. On retrouvera ce cas là sur la figure 1.15 (en bas à gauche) pour une excitation résonante avec  $I/I_{\text{sat}} = 100$ .

On y voit (fig. 1.15), plusieurs représentations du spectre pour diverses valeurs des paramètres  $\delta_L/\Gamma_b$  et  $I/I_{\text{sat}}$ . Elles sont toutes centrées sur la résonance atomique. L'intégrale sur tout le spectre est ici normalisée à  $\frac{s^2}{(1+s)^2}$ .

Nous avons fait figurer en pointillés la fréquence du laser où se situera le pic de Dirac correspondant à la partie élastique de la diffusion.

On peut voir très schématiquement deux types de comportement :

- lorsque  $\delta_L/\Gamma_b \gtrsim 1$  et  $I/I_{\text{sat}} \lesssim 1$ , le spectre inélastique est essentiellement constitué de deux pics en  $\omega_{\text{at}}$  et  $2\omega_L - \omega_{\text{at}}$  ;
- lorsque  $\delta_L/\Gamma_b \simeq 0$  et  $I/I_{\text{sat}} \gg 1$ , c'est alors le triplet de Mollow ;

Lors des mesures expérimentales nous utiliserons une sonde quasi-résonante avec  $I/I_{\text{sat}} \leq 1$ . Le spectre inélastique ne fait pas encore apparaître des pics nettement séparés. Cela reste cependant un élément caractéristique de la diffusion à saturation qui devra être pris en compte dans l'interprétation des résultats.

<sup>2</sup>La fréquence de Rabi est alors beaucoup plus grande que la largeur naturelle et que le désaccord.



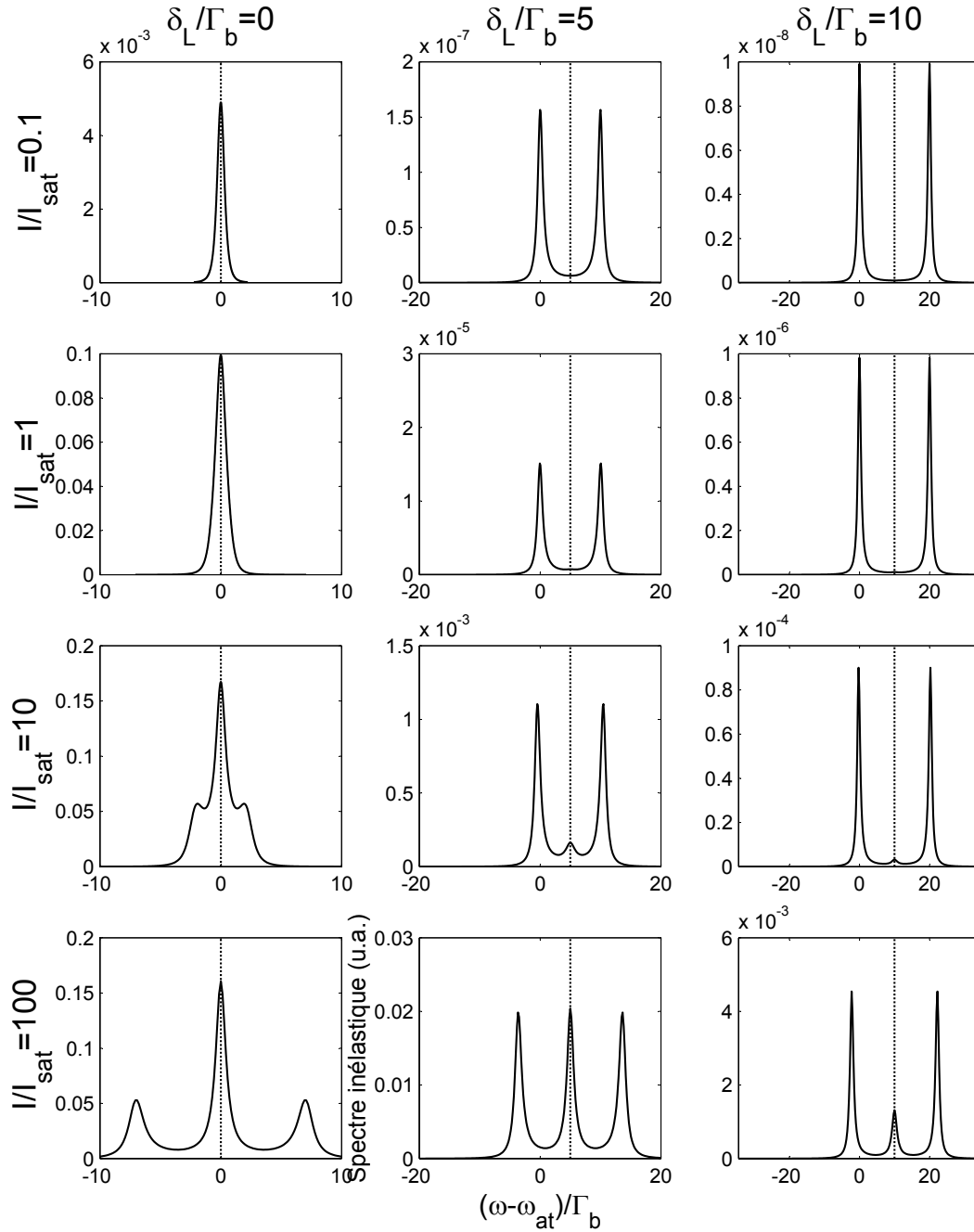


FIG. 1.15 – Densité spectrale de puissance pour la partie inélastique du spectre. Les spectres sont représentés pour différentes valeurs des paramètres  $\delta_L / \Gamma_b$  et  $I / I_{\text{sat}}$ . Pour les 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> colonnes les désaccords sont respectivement  $\delta_L / \Gamma_b = 0$ , 5 et 10 et pour les 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> lignes :  $I / I_{\text{sat}} = 0,1$ , 1, 10 et 100. La droite en pointillés représente le désaccord du laser.

### Influence du spectre inélastique en diffusion multiple

On ne sera pas *a priori* surpris que le phénomène de diffusion inélastique puisse modifier la propagation en diffusion multiple. Pour une sonde désaccordée ( $\delta_L/\Gamma_b \gtrsim 1$  et  $I/I_{\text{sat}} \lesssim 1$ ), le spectre inélastique diffusé est essentiellement constitué de deux pics en  $\omega_{\text{at}}$  et  $2\omega_L - \omega_{\text{at}}$ . Autrement dit, une moitié des photons se retrouveront à résonance et pourront donc facilement être diffusés à nouveau (diffusion double). Les photons diffusés élastiquement seront toujours désaccordés et ont donc peu de chance d’être diffusés à nouveau. On voit à partir d’un raisonnement simpliste que la diffusion inélastique aura une grande influence en diffusion multiple. On vient très qualitativement de juger de la probabilité de subir une seconde diffusion. On imagine l’effet encore plus drastique pour la diffusion triple, quadruple, etc. Il est cependant délicat de quantifier les modifications de la distribution des ordres à cause du spectre inélastique.

On peut à nouveau faire une réponse purement expérimentale. Comme nous l’avons déjà mentionné page 36, il est difficile d’imaginer une modification forte des ordres de diffusion qui contribuent au cône sans changement important de la largeur du cône. Cela ne sera jamais observé en pratique. L’influence du spectre inélastique ne s’arrête pourtant pas là. Nous cherchons à étudier plus précisément le contraste des interférences en diffusion multiple. Avec l’apparition du phénomène inélastique, on s’attend *a priori* à une réduction de la hauteur du cône de rétrodiffusion.

La diffusion inélastique est parfois appelée diffusion incohérente. On aurait cependant tort d’affirmer de façon péremptoire que cette partie du spectre ne produit aucune interférence. De même que des fluctuations de phase sur l’un des bras d’un interféromètre ne détruisent pas complètement le contraste des interférences, on attend une réduction de la longueur de cohérence de la lumière diffusée inélastiquement. Autrement dit, **le spectre inélastique participe aux interférences mais avec un contraste réduit**. On s’attend à ce que cette réduction soit fortement dépendante de la forme du spectre. Si la distribution des fréquences était gaussienne, on pourrait rapprocher directement l’effet de la diffusion inélastique de celui de la vitesse résiduelle des atomes (voir 1.1.2). La forme exacte du spectre de fluorescence est cependant subtile en fonction des paramètres de la sonde (intensité et désaccord). Le processus inélastique n’étant pas gaussien, on ne peut appliquer telle quelle la formule 1.15. On peut en revanche s’intéresser à l’ordre de grandeur de la largeur spectrale de ce processus. La largeur du spectre inélastique est toujours de l’ordre de  $\Gamma_b$  et augmente sensiblement à forte saturation. **On attend donc une réduction significative de la hauteur du cône lorsque que le processus inélastique aura une part importante dans la diffusion. Cela sera vrai dès que le paramètre de saturation sera proche de 1**. Nous allons tâcher de vérifier et de quantifier cet effet par une étude systématique de la hauteur du cône de rétrodiffusion en régime saturé.

Avant de présenter les résultats des mesures, nous allons dans un premier temps présenter le dispositif et le protocole expérimental. Cette réalisation fait l'objet de la partie à suivre.

### 1.3 Mesure de la rétrodiffusion en régime saturé

Faire une mesure de la distribution angulaire d'intensité autour de la direction arrière n'est pas difficile expérimentalement. Elle demande cependant d'être effectuée avec soin si l'on souhaite faire une étude systématique de la hauteur de cône. Nombreuses sont les imperfections expérimentales qui peuvent venir polluer le signal et réduire artificiellement le cône. Nous en donnerons une liste sommaire en 1.3.4. Historiquement, les mesures qui font apparaître un facteur 2 traduisant un contraste maximal des interférences sont rares. Il nous est difficile d'utiliser la technique remarquable mise au point par D. S. Wiersma [56]. Elle consiste en effet à faire tourner l'échantillon alors qu'un détecteur fixe enregistre le signal, ce qui n'est pas réalisable pour notre échantillon. Nous utiliserons plus simplement une caméra qui observe le champ lointain dans la direction arrière. L'ensemble du montage optique servant à l'acquisition sera décrit dans cette partie. Avant cela, nous décrirons comment est produit l'échantillon atomique et nous fournirons les caractéristiques du nuage d'atomes froids. Nous donnerons enfin le résultat des mesures de rétrodiffusion cohérente à saturation.

Notons que l'échantillon d'une part et le montage servant à l'acquisition d'autre part sont peu différents de celui mis en œuvre par Y. Bidel [20, 21]. Il a permis d'observer un facteur d'amplification légèrement inférieur à 2. La mesure était alors limitée par la résolution du système de détection. La situation est un peu différente lorsque la sonde est saturante. Nous avons donc choisi de contrôler d'une part le nombre de photons échangés et d'autre part le nombre d'atomes, comme nous le verrons un peu plus loin. Nous avons aussi essayé de corriger la résolution finie du système de détection en développant une procédure adaptée de traitement des images. Elle sera décrite lors de la présentation des résultats expérimentaux. Décrivons dans un premier temps le nuage d'atomes froids.

#### 1.3.1 Description du nuage

D'un point de vue technologique, le piégeage des alcalino-terreux n'est pas chose facile. Il n'existe pas en effet de source laser à semi-conducteur suffisamment puissante pour ralentir et piéger le strontium. Nous avons donc tâché d'exploiter au mieux la puissance délivrée par notre laser à 461 nm. La configuration de nos modulateurs acousto-optiques (MAO) nous permet en effet d'utiliser toute la puissance disponible soit pour le piégeage soit pour sonder le nuage et mesurer sa rétrodiffusion. Pour cette mesure, les atomes sont interrogés dans une phase de vol libre. Les faisceaux du piège et la sonde ne sont donc jamais allumés en même

temps. Nous présenterons la configuration des MAO dans un premier temps, ce qui nous permettra de résumer les différentes fréquences utilisées pour le piègeage. Nous décrirons ensuite sommairement le piège. Nous terminerons finalement en caractérisant le nuage qui constitue l'échantillon dont nous viendrons de mesurer la rétrodiffusion.

### Configuration des MAO

Nous avons utilisé des MAO centrés sur 80 MHz et 110 MHz<sup>3</sup>. Pour obtenir un désaccord élevé (ralentisseur Zeeman), nous avons décidé d'asservir la laser source hors de résonance avec  $\delta_{\text{Source}} \simeq -130$  MHz. Avec l'ordre +1 d'un MAO travaillant à environ 100 MHz, on produira les faisceaux du piège ( $\delta_{\text{MOT}} \simeq -30$  MHz). Avec l'ordre -1 d'un MAO travaillant à  $\simeq 110$  MHz, on produira le faisceau du ralentisseur Zeeman ( $\delta_{\text{Zeeman}} \simeq -240$  MHz).

Outre le fait qu'on puisse utiliser indépendamment les MAO pour allumer et éteindre les faisceaux, lorsque le piège et le ralentisseur Zeeman sont éteints, toute la puissance pourra être utilisée pour sonder le nuage.

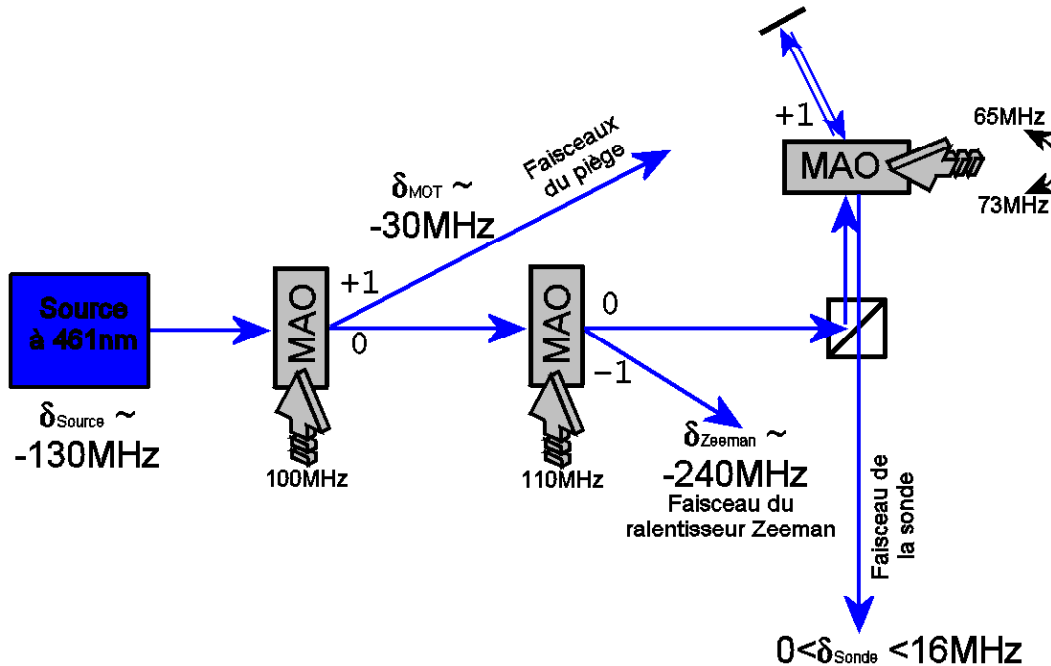


FIG. 1.16 – Résumé schématique de la configuration des MAO.

Sur le trajet qui correspond à l'ordre 0 des deux MAO, celui qui contrôle le piège et celui du ralentisseur Zeeman, nous intercalons dans ce but un MAO en

<sup>3</sup>Crystal Tech 3080-120 et 3110-125

double passage. Nous l'utiliserons en dessous de sa fréquence nominale (80 MHz). En faisant varier la radio-fréquence de 65 à 73 MHz, on obtient pour la sonde une variation du désaccord de  $\delta_{\text{sonde}}$  allant de 0 à 16 MHz. On balayera donc la gamme de 0 à  $+\Gamma_b/2$ . La figure 1.16 résume schématiquement la configuration des MAO.

L'ensemble de ces faisceaux nous permet de ralentir puis piéger les atomes. Lorsque ceux du piège et du ralentisseur Zeeman sont éteints, la puissance totale est alors disponible. Grâce à un MAO en double passage, le faisceau-sonde est proche de résonance. Avant de décrire le montage qui nous permet de mesurer la rétrodiffusion cohérente, il nous faut plus précisément caractériser le nuage.

### Description du piège

Notre piège magnéto-optique sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  à été réalisé par Y. Bidet [20, 21]. Un jet effusif d'atomes est produit à partir d'un four à 500 °C. La vitesse des atomes est ensuite réduite dans un ralentisseur Zeeman de 27 cm de long jusqu'à atteindre la vitesse de capture du potentiel de piégeage. Le piège est constitué par six faisceaux indépendants : leur flux est de 5,2 mW/cm<sup>2</sup> et le waist de 8 mm. Ils sont désaccordés vers le rouge de  $\Gamma_b$  environ. Le gradient du champ magnétique est produit au moyen de deux bobines ; il vaudra 100 G/cm pour cette série d'expérience.

Rappelons pour conclure la fréquence des faisceaux du piège  $\delta_{\text{MOT}} \simeq -30$  MHz  $\simeq \Gamma_b$ . Celle du faisceau du ralentisseur Zeeman devra être plus largement désaccordée afin de ne pas perturber le nuage piégé. Nous avons choisi  $\delta_{\text{Zeeman}} \simeq -240$  MHz  $\simeq 7,5 \Gamma_b$ .

**Le nuage contient avec ces paramètres-là quelque  $10^7$  atomes pour une taille RMS de 0,6 mm.** La durée de vie (22 ms) et le nombre d'atomes sont limités par les fuites par pompage optique. Une atome dans l'état excité  $^1P_1$  a une probabilité non-nulle de se désexciter vers l'état métastable  $^3P_2$  via l'état  $^1D_2$ . Les atomes dans cet état sont invisibles au rayonnement et donc quittent le piège. Il est possible d'éviter cet effet en utilisant deux repompeurs.

### Utilisation des repompeurs

**L'utilisation d'un laser à 707 nm** permet dans notre situation de coupler le niveau  $^3P_2$  avec le  $^3S_1$ . Les atomes peuvent alors se désexciter vers les états  $^3P_1$  et  $^3P_0$ . Le  $^3P_1$  est couplé au fondamental par la transition d'intercombinaison. Les atomes dans le  $^3P_0$  sont perdus, ce qui limite le temps de vie du piège et le nombre d'atomes. Les probabilités de désexcitation permettent de prédire **une augmentation d'un facteur quatre pour le temps de vie et le nombre d'atomes**<sup>4</sup>. On observe expérimentalement un facteur deux environ. Les

<sup>4</sup>On estimera le nombre d'atomes en observant la fluorescence sur la transition bleue

résultats des mesures de temps de vie et du nombre d'atomes sont rassemblés sur la figure 1.17.

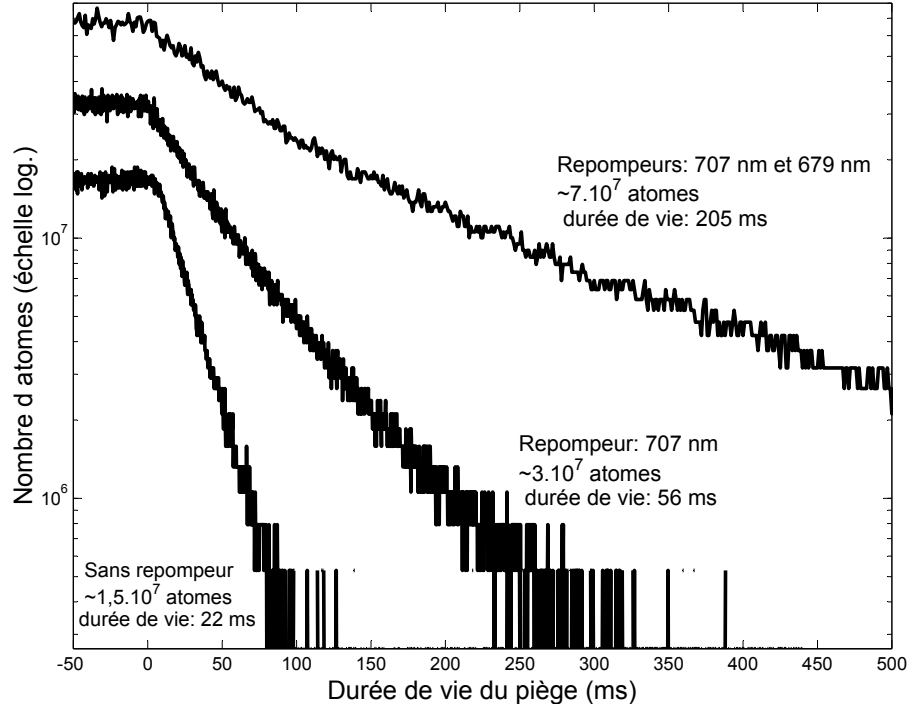


FIG. 1.17 – Durée de vie du piège et nombre d'atomes avec et sans repompeur (707 nm et 679 nm)

La dynamique des atomes dans le  $^3P_2$  en présence d'un quadrupole magnétique est un peu particulière. Les atomes dans les états  $m = 1$  et  $m = 2$  peuvent en effet être piégés dans le gradient de champ magnétique. À l'inverse, pour  $m = -1$  et  $m = -2$ , ils sont expulsés. Cet effet pourrait expliquer pourquoi les atomes sont perdus et ne pourront jamais être repompés, puisqu'ils sont expulsés de la zone d'interaction avec le laser à 707 nm. Il faut quand même noter que le temps typique pour atteindre l'état  $^3P_2$  via le  $^1D_2$  est assez long, soit  $600 \mu\text{s}$ . Pendant ce temps, il paraît pourtant difficile qu'un atome, même rapide, puisse quitter le faisceau du repompeur (dont le waist est de 5 mm) : un atome lancé à 2 m/s ne parcourt que 1,2 mm en  $600 \mu\text{s}$ . Sans entrer dans une étude quantitative, il semble que la présence d'un quadrupole magnétique change notablement l'influence du laser à 707 nm. Outre le fait qu'il constitue un potentiel anti-piégeant pour les états  $m = -1$  et  $m = -2$ , sa présence peut suffire à sortir les atomes de résonance avec le repompeur. L'efficacité de ce premier repompeur est donc limitée puisqu'une partie des atomes dans l'état  $^3P_2$  seront perdus.

Il est possible par ailleurs de repomper les atomes présents dans l'état  $^3P_0$ . Il nous faut dans ce cas ajouter **un second laser à 679 nm**. Le niveau  $^3P_0$

n'est en effet pas couplé au fondamental. En utilisant un laser à 679 nm, on le couple au niveau  $^3S_1$ . L'atome se désexcitera ensuite vers le  $^3P_1$  puis vers le fondamental. La durée de vie sera alors de 205 ms. On augmente donc d'un facteur 9 cette durée par rapport au cas sans repompeur. Dans cette situation, le nombre d'atomes n'est augmenté que d'un facteur 5. Ceci s'explique par la présence de pertes par collisions froides. Le processus dominant les pertes est toujours sujet à discussion [23]. Malgré cette limitation, on obtient quand même **un nombre d'atomes conséquent** ( $7.10^7$ ) qui doit permettre de se placer en régime de diffusion multiple.

Avant de conclure par la caractérisation du nuage, nous avons résumé la configuration des faisceaux du piège sur la figure 1.18.

### Caractérisation du nuage

L'utilisation des repompeurs permet de multiplier par 5 le nombre d'atomes. On obtient typiquement  $7.10^7$  atomes dans le piège. La taille est légèrement plus grande que sans repompeur, soit  $\sigma_r = 0,7$  mm.

On peut à partir de cela calculer la densité au centre du nuage, que l'on supposera isotrope et de forme gaussienne. Notons  $n_0$  sa densité au centre. Le nombre d'atomes  $N$  sera donc :

$$N = \int_0^{+\infty} n_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right) 4\pi r^2 dr = (2\pi)^{\frac{3}{2}} n_0 \sigma_r^3$$

Il vaudra pour cette série d'expériences  $7.10^7$  avec  $\sigma_r = 0,7$  mm. On en déduit  $n_0 = 1,3.10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup>. Nous pouvons en déduire l'épaisseur optique (p. 30) à résonance au centre du nuage :

$$b = n_0 \sigma_{\text{diff}} \sqrt{2\pi} \sigma_r = \frac{N \sigma_{\text{diff}}}{2\pi \sigma_r^2}$$

où  $\sigma_{\text{diff}} = \frac{3\lambda_{\text{opt}}^2}{2\pi} = 1,01.10^{-13}$  m<sup>2</sup> est la section efficace de diffusion à résonance.

À partir du nombre d'atomes, on calcule donc **une épaisseur optique de 2,3**. Elle a été mesurée indépendamment en observant la transmission cohérente  $T = \exp(-b)$ . Avec  $T = 8,5\%$ , on aura  $b = 2,5$ . Au vu de l'incertitude sur le nombre d'atomes, cette valeur est en accord avec la valeur calculée à partir de la densité ( $b = 2,3$ ).

Ayant caractérisé notre échantillon, nous allons maintenant décrire le système d'observation de la rétrodiffusion.

### 1.3.2 Dispositif de mesure de la rétrodiffusion

Même s'il peut sembler relativement simple d'observer la diffusion vers l'arrière, le montage optique d'observation du cône de rétrodiffusion reste délicat en

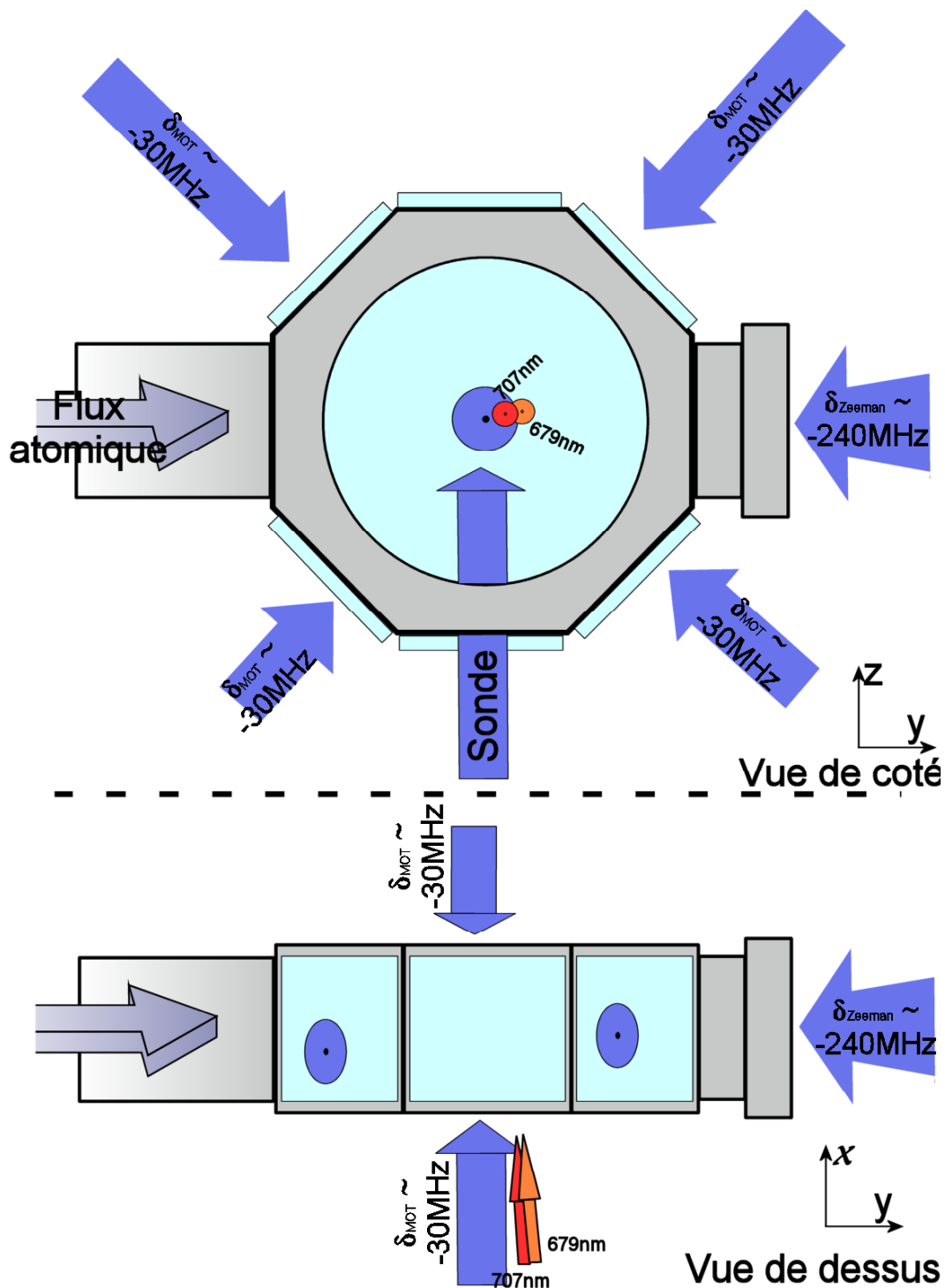


FIG. 1.18 – Vue schématique des faisceaux du piège et de la sonde. Nous avons aussi représenté les repompeurs à 707 nm et 679 nm.



pratique. Dans la mesure où il est un phénomène de diffusion multiple, il faut pour l'observer pouvoir nous isoler de la diffusion simple des atomes. Elle vient masquer notre signal ou, dans une moindre mesure, y ajouter du bruit. Regardons en pratique comment il est possible de s'affranchir de cet effet et ainsi d'observer le cône de rétrodiffusion.

### Montage optique

Comme nous l'avons vu sur la figure 1.18, on vient sonder les atomes alors qu'ils sont dans une phase de vol libre. Cette sonde est proche de la résonance. On l'utilisera pour nos mesures soit à résonance soit désaccordée de  $+\Gamma_b/2$ . Un trou de filtrage spatial nous permet d'assurer qu'il s'agit d'un faisceau gaussien de waist 2 mm.

Sur la figure 1.19, on a représenté le nuage d'atomes (sans les faisceaux du piège) et le système optique permettant d'observer la rétrodiffusion.

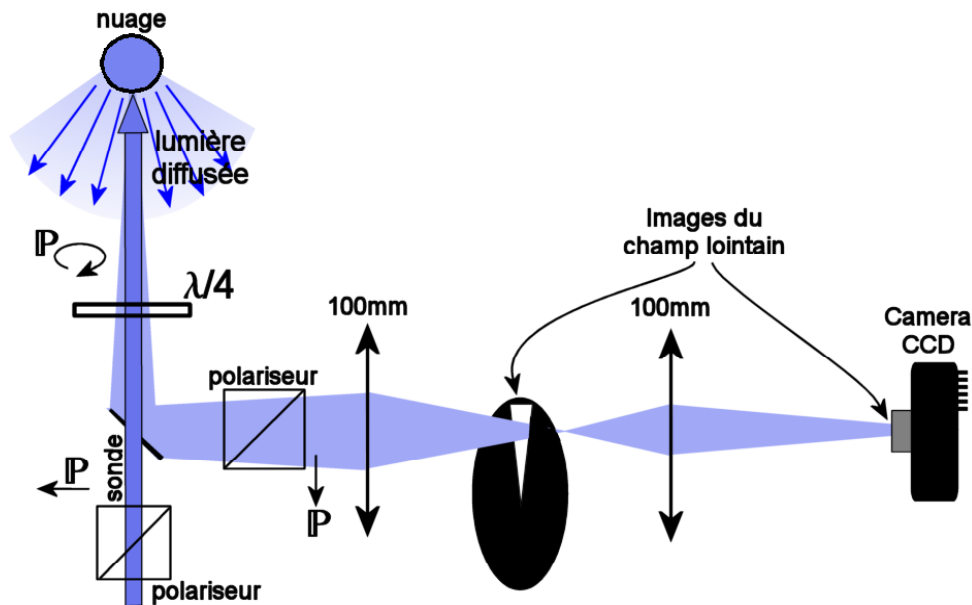


FIG. 1.19 – Montage pour observer la rétrodiffusion.  $\mathbb{P}$  désigne la polarisation.

Outre les éléments qui permettent d'imager le champ lointain sur la caméra dont nous parlerons plus tard, on y voit aussi des éléments polarisants. Il s'agit d'éléments cruciaux si l'on souhaite observer le cône de rétrodiffusion.

Comme nous l'avons rappelé en introduction, le cône étant un phénomène de diffusion multiple, il faut, en observant la rétrodiffusion, éliminer la diffusion simple pour obtenir un bon contraste. Cette fonction est assurée par **les cubes polariseurs** qui permettent d'**éteindre la diffusion simple**. Résumons

à nouveau les contraintes sur la polarisation, qui apparaîtront peut être plus clairement au vu du montage optique. On peut éclairer l'échantillon en polarisation linéaire (on enlève alors la lame  $\lambda/4$  représentée sur la figure 1.18). Pour couper la diffusion simple les deux polariseurs devront être croisés (configuration nommée canal «  $lin \perp lin$  »). Si l'on utilise une sonde polarisée circulairement (avec la lame  $\lambda/4$ ), les polariseurs sont maintenant parallèles. Cette configuration est alors nommée canal «  $h \parallel h$  », puisque les hélicités des faisceaux incident et émergent sont identiques. On parle aussi de  $h \perp h$  (et  $lin \perp lin$ ) lorsque que les hélicités (les polarisations respectivement) sont croisés. On pourrait préférer la notation  $\sigma^+ - \sigma^-$  qui n'est pas utilisée dans le domaine de la diffusion multiple. On pourra trouver une description plus détaillée des différentes configurations possibles dans les références [14] et [24]. La suppression de la diffusion simple n'est pas suffisante si l'on veut obtenir un contraste maximal pour le cône de rétrodiffusion. Il faut en plus que les amplitudes associées à deux chemins reliant les mêmes diffuseurs mais parcourus en sens inverse soient égales. Cela n'est possible que dans le canal  $h \parallel h$  [25] : le cône aura alors son contraste maximal et son facteur d'amplification sera 2. Cela a fait l'objet d'une étude expérimentale antérieure [20, 21], où la sonde était faiblement saturante (0,02 typiquement).

Pour conclure la description des éléments de polarisation, donnons l'**isolation entre les canaux  $h \parallel h$  et  $h \perp h$** . Elle est d'environ 1%. Nous l'avons mesurée en comparant la fluorescence du nuage de faible épaisseur optique entre ces deux canaux. À faible épaisseur optique, on est essentiellement en diffusion simple qui ne dépolarise pas la lumière incidente. On peut donc mesurer l'extinction entre les canaux dans des conditions réalistes. Intéressons-nous maintenant au système d'imagerie.

Le système d'imagerie est légèrement compliqué par la présence du *chopper* mécanique. L'observation de la rétrodiffusion s'effectue dans le champ lointain. Ce dernier est donc dans un premier temps imagé sur le *chopper*, qui sera à son tour imagé sur la caméra CCD<sup>5</sup>. Le capteur possède en réalité  $1024 \times 1536$  pixels mais il sera utilisé en *binning*<sup>6</sup>  $2 \times 2$  pour toutes les mesures sur le cône de rétrodiffusion (ce qui revient à un capteur  $512 \times 768$  pixels). Cela constitue un bon compromis entre la résolution du système d'imagerie et le signal par pixel.

Le *chopper* nous permet de masquer la caméra lorsque les faisceaux de piègeage sont allumés. Le temps nécessaire à son ouverture est de  $250 \mu s$ , ce qui impose d'éteindre les faisceaux  $250 \mu s$  avant de venir sonder les atomes. La séquence de temps est résumée par la figure 1.20.

La durée de la sonde est variable ; nous reviendrons sur ce choix un peu plus loin.

Le signal est ensuite intégré sur plusieurs répétitions de la séquence. Une

---

<sup>5</sup>Apogee 2ep refroidie à  $-20^\circ C$

<sup>6</sup>Le *binning* désigne une intégration du signal sur un carré de 2 pixels de coté. Il ne s'agit pas d'une moyenne numérique effectuée *a posteriori* sur l'image en pleine résolution, mais d'une intégration analogique effectuée par le dispositif amplificateur du capteur CCD.

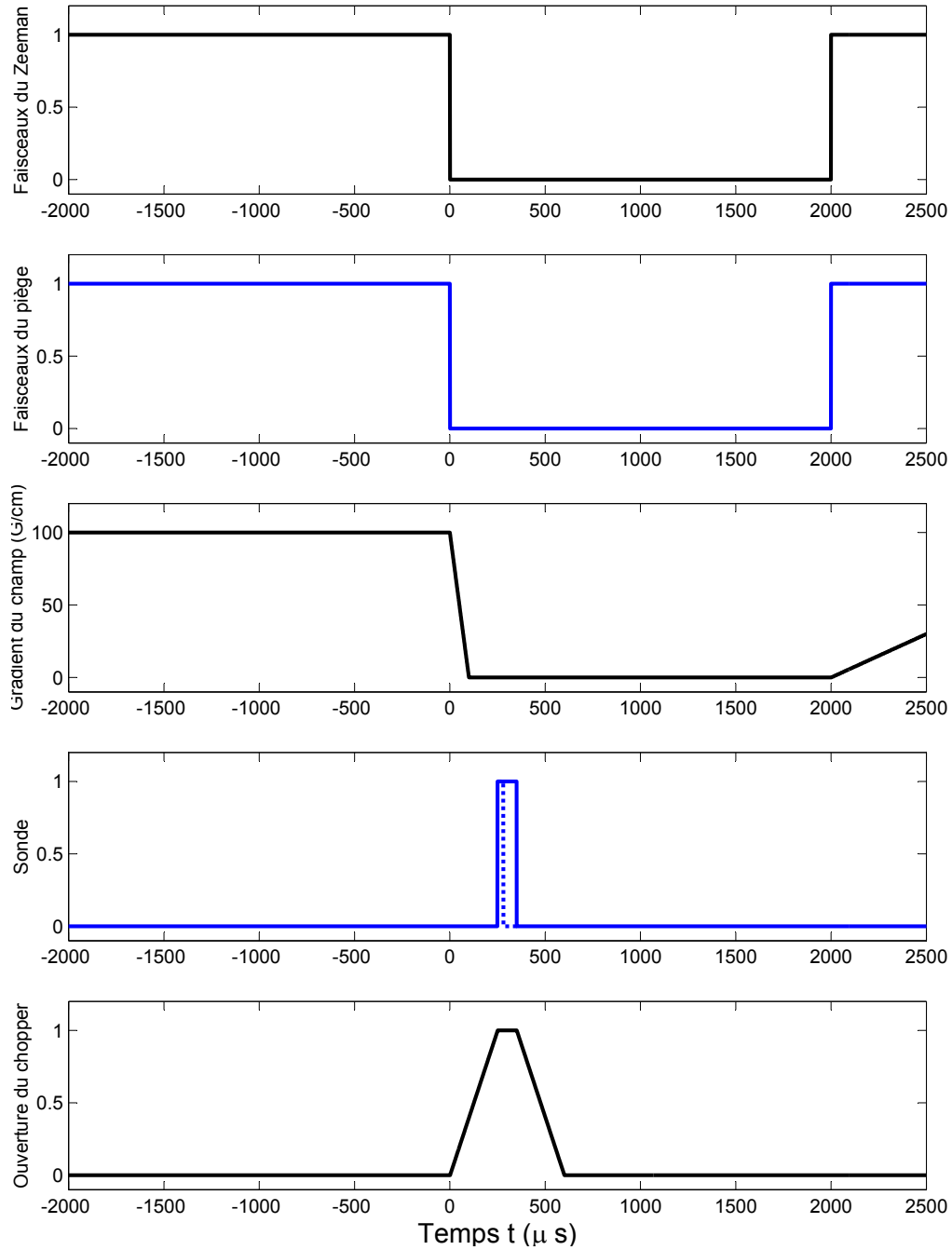


FIG. 1.20 – La durée totale de la séquence de temps est de 30 ms. Après 28 ms dédiées au chargement du piège, on éteint les faisceaux ( $t = 0$ ). On attend ensuite  $250 \mu\text{s}$  (ouverture du *chopper*) avant de sonder les atomes. La durée de la sonde est variable mais reste inférieure à  $\simeq 100 \mu\text{s}$ .

acquisition dure typiquement quelques minutes. Pour une répétition, la configuration des diffuseurs ne peut être considérée comme figée pendant la durée de la sonde ( $100 \mu\text{s}$ ) puisque la distance parcourue est bien plus grande que la longueur d'onde. Un atome à  $1 \text{ m/s}$  parcourt en effet  $100 \mu\text{m}$ . Dans la mesure où l'on reste loin du critère de brisure dynamique (expr. 1.15), cela ne pose pas de problème pour observer le cône. Cela permet en revanche d'effectuer la moyenne des configurations. On observera donc bien le cône de rétrodiffusion et pas une figure de speckle. Cela sera d'autant plus vrai que l'on intègre ensuite sur plusieurs répétitions.

Même si la durée de la sonde reste toujours de l'ordre de  $100 \mu\text{s}$ , elle ne sera pas gardée constante quelle que soit la saturation de la sonde. Si elle est choisie courte ce n'est pas pour des raisons dynamiques, puisque pendant cette durée la configuration des diffuseurs n'est pas figée à l'échelle de la longueur d'onde optique. Nous chercherons essentiellement à échanger un nombre réduit de photons.

### Contrôle du nombre de photons échangés

**Lorsque le nombre de photons échangés est faible, on peut assurer que la sonde n'a pas d'effet mécanique.** Ce dernier suffirait à sortir les atomes de résonance à cause du décalage Doppler. **Nous avons en effet choisi d'échanger 400 photons**; en conséquence  $400 \times k_L v_{\text{rec}} = 400 \times \hbar k_L^2 / m$  où  $v_{\text{rec}} = 9,8 \text{ mm}$  est la vitesse de recul. On aura finalement :

$$400 \times k_L v_{\text{rec}} = 0,27 \times \Gamma_b \quad (1.42)$$

On peut donc considérer que l'effet mécanique de la sonde est négligeable.

Si l'on veut assurer que le nombre de photons échangés est constant, il nous faut aussi prendre en compte la saturation de la transition. Quand la saturation augmente, le taux de diffusion de photons devient constant (définition du paramètre de saturation). C'est ce que nous avons interprété comme une diminution de la section efficace. Le taux de diffusion vaut en effet :

$$\Gamma_{\text{diff}} = \frac{\Gamma_b}{2} \frac{s}{1+s} \quad (1.43)$$

En ce qui nous concerne, nous voulons assurer  $\tau_{\text{sonde}} \times \Gamma_{\text{diff}} = 400$ , d'où une durée variable  $\tau_{\text{sonde}}$  pour la sonde en fonction de  $s$ . Nous l'avons représentée sur la figure 1.21.

Un effet mécanique de la sonde peut avoir des conséquences fâcheuses si l'on souhaite observer le cône. Nous avons donc contrôlé le nombre de photons échangés : on s'affranchit ainsi d'un effet qui peut nuire aux mesures de rétrodiffusion.

Pour terminer la caractérisation du montage, il nous faut connaître un élément important : la résolution du système d'acquisition.

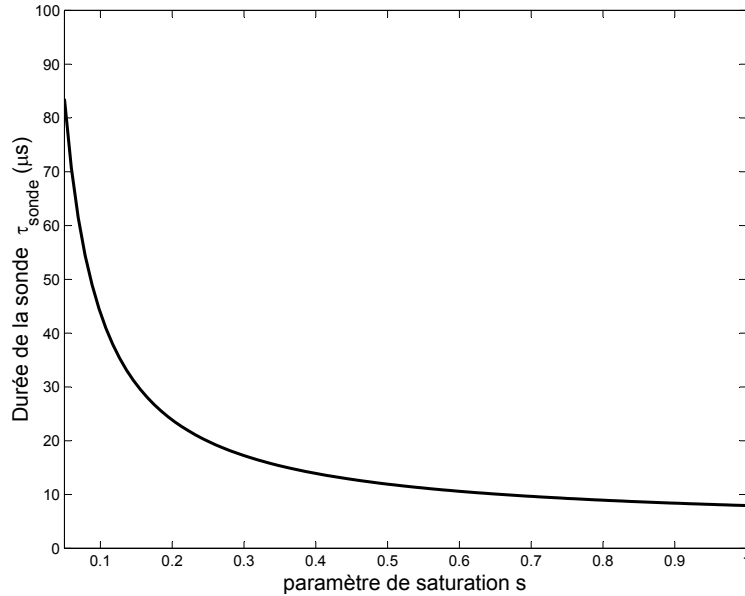


FIG. 1.21 – Durée de la sonde en microsecondes en fonction de sa saturation.

### Résolution du système d’acquisition

Elle est en effet un point-clé puisque que la largeur angulaire du cône de rétro-diffusion est faible, quelques dizaines de milliradians typiquement. La résolution finie du système de détection a tendance à réduire la hauteur du cône par simple effet de convolution. Ce fut effectivement une limitation expérimentale lors des mesures antérieures à faible saturation [20].

La résolution du système de détection est essentiellement limitée par l’extension spatiale finie du faisceau. Pour s’en persuader, on a observé l’image du faisceau-sonde dans le champ lointain. Il vient alors se focaliser sur la caméra. On utilise alors la pleine résolution de la caméra, soit  $1024 \times 1536$  pixels. On observe alors un profil gaussien dont la largeur RMS est de 2,5 pixels. Pour l’acquisition des images du cône, nous utiliserons un *binning*  $2 \times 2$ . Pour déterminer la résolution des images du cône, on doit donc en toute rigueur calculer le produit de convolution d’une gaussienne de largeur RMS 2,5 pixels avec une fonction carré de 2 pixels de coté. Ceci revient à intégrer le signal sur  $2 \times 2$  pixels, ce que fait la procédure de *binning* en pratique. Afin de prendre en compte cela dans le calcul de la résolution, nous avons effectué numériquement ce produit de convolution. Notons bien qu’il s’agit d’un calcul à deux dimensions qui ne donne pas le même résultat que le produit convolution d’une gaussienne et d’un créneau à une dimension. Le résultat est une fonction quasi-gaussienne de largeur RMS 2,56 pixels (pleine résolution de la caméra). On constate en fait que l’effet du *binning* est quasi-négligeable.

Les images du cône seront prises en *binning*  $2 \times 2$ . **La limite de résolution**

est alors donnée par une gaussienne de largeur RMS 1,28 pixel (moitié de 2,56 pixels à cause du *binning*  $2 \times 2$ ).

Le champ couvert par la caméra est de 26,3 mrad dans sa plus petite dimension, soit un pas de  $51,4 \cdot 10^{-3}$  mrad par pixel pour les images du cône. Dans ces unités, **la résolution est finalement de 0,066 mrad**. Cette valeur n'est pas complètement négligeable par rapport à la largeur typique du cône de 0,3 mrad environ.

Dans la partie à suivre, avant de présenter le résultat des mesures expérimentales, nous présenterons une procédure de traitement d'image qui prend en compte la convolution par la résolution angulaire du système. Cela nous paraît d'autant plus justifié que nous connaissons la fonction qui vient convoluer notre image.

### 1.3.3 Résultats des mesures

Après un réglage minutieux des éléments du montage, il est possible d'observer le cône de rétrodiffusion. Nous porterons notre attention tout particulièrement sur le facteur d'amplification. Les raisons expérimentales qui font que la hauteur est sous-estimée sont nombreuses [20]; nous en discuterons un peu plus loin. Nous allons revenir maintenant sur l'influence la résolution angulaire sur la hauteur du cône. On voit par exemple sur la figure 1.22 que le cône ne contient qu'un nombre restreint de pixels (rappelons que la résolution est de 1,28 pixel soit  $66 \cdot 10^{-3}$  mrad).

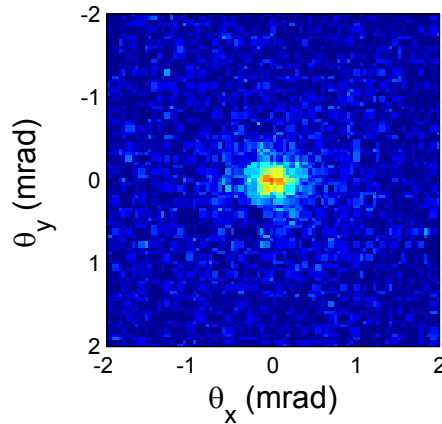


FIG. 1.22 – Image du cône pour une sonde à résonance faiblement saturante ( $I/I_{\text{sat}}=0,05$ ). Cette image comme toutes les autres est issue de la soustraction d'une acquisition avec et sans atomes dans des conditions d'exposition équivalente.

On vient en effet **convoluer le cône par la fonction de réponse du système optique**. Nous allons montrer dans un premier temps qu'il est possible

de prendre en compte cet effet de convolution et de s'en affranchir pour trouver la hauteur du cône.

### Traitement des images

Le traitement des images du cône n'est pas à sous-estimer. D'une part sa largeur n'est pas beaucoup plus grande que la résolution du système d'acquisition. D'autre part le cône possède un sommet très piqué qui est en conséquence très sensible aux effets de convolution. Une procédure de moyenne angulaire a été largement utilisée pour analyser les résultats antérieurs [14, 20]. Elle consiste à faire une moyenne angulaire centrée sur le sommet du cône afin d'extraire une courbe à partir de l'image du cône. Cette procédure a l'inconvénient d'être particulièrement sensible au choix du centre de rotation pour la moyenne angulaire. Ce choix étant subjectif, nous avons choisi de nous tourner vers un traitement plus systématique. Nous garderons donc l'image brute, sans y effectuer de moyenne quelconque. Nous allons ensuite tâcher d'**ajuster directement l'image (à deux dimensions donc) par la forme 2D attendue pour le cône.**

On peut maintenant se poser la question de la forme attendue du cône. Il est *a priori* difficile de connaître sa forme générale. On peut calculer une formule complètement analytique pour des ondes scalaires dans un milieu semi-infini [27]. Ce calcul pionnier n'est en rien adapté à notre échantillon dont la forme est gaussienne et que l'on éclaire avec des ondes vectorielles (polarisées). La distribution gaussienne de la densité impose largement la forme du cône [26] et ne peut être raisonnablement étudiée que par une simulation de Monte-Carlo [26]. À faible saturation, la comparaison de la forme prédite par la simulation et du cône expérimental montre un excellent accord [20]. Cette simulation n'étant pour le moment pas généralisable à forte saturation, nous ne connaissons pas *a priori* de forme théorique qui puisse servir de base à notre ajustement 2D. Nous avons donc choisi d'**utiliser la forme issue de la simulation à faible saturation**, pour laquelle nous gardons **cinq paramètres ajustables : la hauteur du cône, sa largeur, le fond de diffusion et les coordonnées du centre (abscisse et ordonnée).**

Comme nous disposons d'une forme théorique pour le cône ( $\mathcal{C}_{MC}$ ), on peut ensuite prendre en compte la résolution finie du système de détection. On va en effet venir convoluer [26] cette forme par une gaussienne de largeur RMS  $66.10^{-3}$  mrad ( $\mathcal{G}_{66}$ ).

$$\boxed{\mathcal{C}_{\text{obs}}(\theta_x, \theta_y) = \mathcal{C}_{MC}(\theta_x, \theta_y) * \mathcal{G}_{66}(\theta_x, \theta_y)} \quad (1.44)$$

Rappelons que ce calcul est effectué numériquement à 2D : même si les deux formes possèdent une symétrie centrale, cela ne revient pas à faire une convolution 1D sur une coupe suivant un axe. Nous avons représenté (fig. 1.23) en coupe le produit de convolution des deux images.

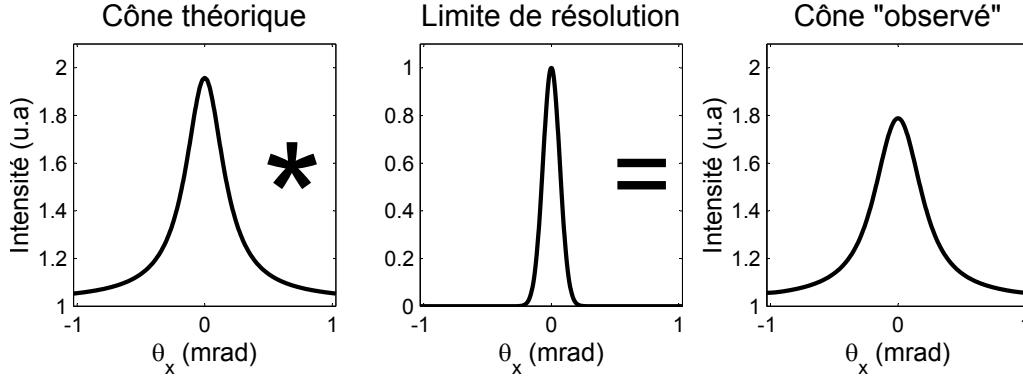


FIG. 1.23 – Convolution du cône issu de la simulation ( $\mathcal{C}_{MC}$ ) par une gaussienne de largeur  $66.10^{-3}$  mrad ( $\mathcal{G}_{66}$ ). La produit de convolution (noté \*) est effectué en 2D. Nous avons pour des raisons de clarté représenté les coupes des deux images. Le résultat est représenté à droite ( $\mathcal{C}_{obs}$ ). On a pris ici arbitrairement un fond de diffusion égal à 1, une hauteur du cône de 2, une largeur de 0,36 mrad. Son centre est positionné en  $(0, 0)$ .

De même que  $\mathcal{C}_{MC}$ ,  $\mathcal{C}_{obs}$  dépend de cinq paramètres essentiellement : la hauteur du cône, sa largeur, le fond de diffusion et les coordonnées du centre. On obtient par cette procédure une forme théorique (calculée numériquement) à 2D qui tient compte de la résolution et qui permet d'ajuster les paramètres caractéristiques du cône.

À partir de l'image brute, on effectue alors un ajustement par une méthode de moindres carrés afin de trouver les paramètres. La figure 1.24 illustre ce traitement à partir de l'image 1.22.

On y voit d'une part l'image brute (en haut à gauche) et l'ajustement 2D par la forme  $\mathcal{C}_{obs}$ . Nous y avons aussi fait figurer les coupes. On a par exemple ici la valeur des paramètres : la hauteur du cône vaut 1,93 et sa largeur 0,33 mrad. L'image est centrée sur  $(\theta_x = 0, \theta_y = 0)$ .

Nous venons de détailler un traitement complet à partir d'une image brute du cône avec un sonde résonance et  $I/I_{sat}=0,05$ . À partir d'une procédure de traitement adaptée, nous nous sommes affranchis de la résolution finie du système d'imagerie. Le contraste est proche de sa valeur maximale. Nous résumerons dans la partie à suivre les effets qui ont tendance à diminuer ce contraste. Nous présenterons avant cela les résultats des mesures.

### Mesures du facteur d'amplification en fonction de la saturation

Après avoir présenté le dispositif expérimental ainsi que la procédure de traitement, nous pouvons maintenant étudier la dépendance du facteur d'amplification avec la saturation. Nous verrons de façon générale une décroissance de la hauteur



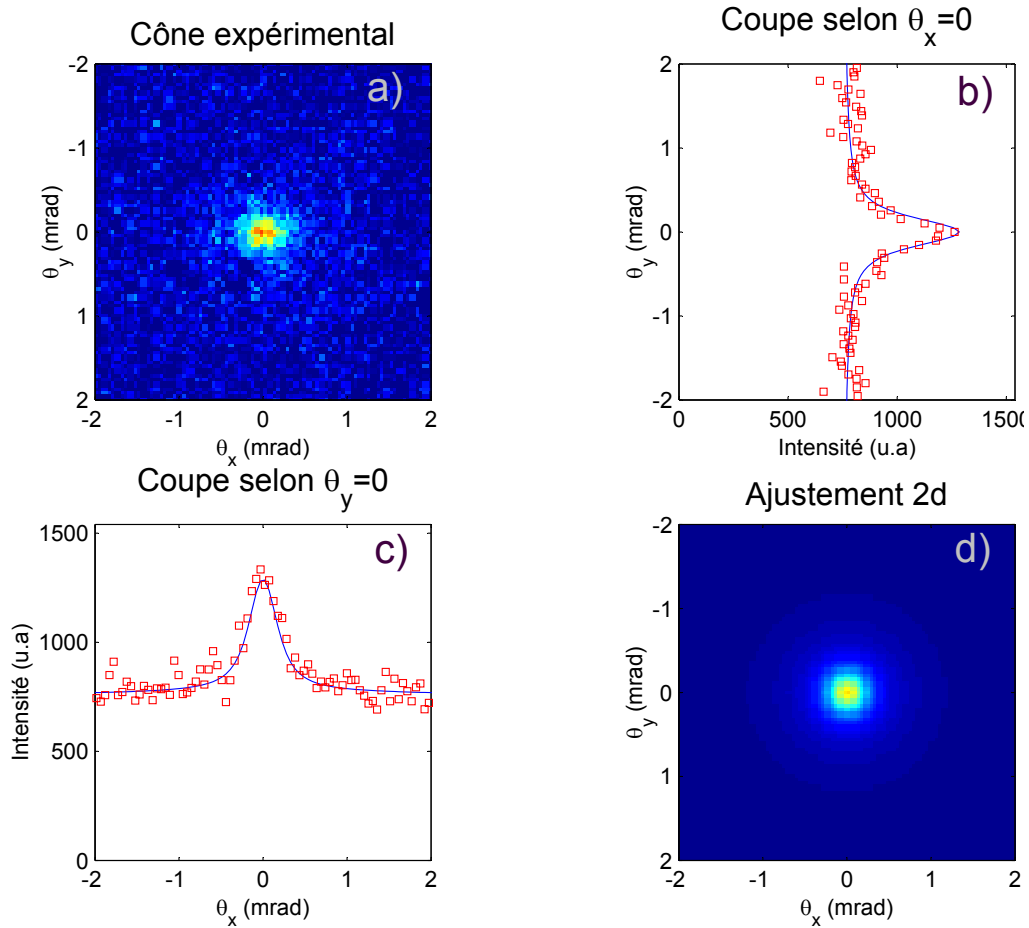


FIG. 1.24 – Ajustement à deux dimensions de l’image brute (en a) voir fig. 1.22) par  $\mathcal{C}_{\text{obs}} = \mathcal{C}_{\text{MC}} * \mathcal{G}_{51,4}$  (d). En b) et c) sont représentées les coupes de l’image brute (carrés) et de  $\mathcal{C}_{\text{obs}}$  (traits pleins) suivant  $\theta_x = 0$  et  $\theta_y = 0$  respectivement.

du cône lorsqu’on sature.

L’acquisition de chaque image (fig. 1.22) demande quelques minutes d’exposition typiquement. On obtient alors un rapport signal à bruit raisonnable. Quelques fluctuations subsistent et peuvent introduire une erreur importante sur la mesure du cône malgré une procédure de traitement optimisée. Le cône reste une figure très « piquée » : l’information de sa forme ne tient en effet que sur quelques pixels. Pour estimer l’erreur des mesures, nous avons mesuré **l’écart-type entre l’image acquise et la forme théorique** ( $\mathcal{C}_{\text{obs}}$ ) pour une zone centrée sur le pic et de taille égale à la largeur du cône. On supposera que cela nous donne une barre d’erreur sur la hauteur du cône. On reportera cette erreur relative sur les mesures de largeur. Elle n’est pas complètement négligeable et reste de l’ordre de quelques pourcent.

Nous avons choisi de faire deux séries de mesures : l'une à résonance, l'autre désaccordée. Les résultats sont assez différents. Les courbes seront représentées en fonction du paramètre de saturation  $s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$ , ce qui permet de mettre en évidence la différence entre  $\delta_L = 0$  et  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ .

Rappelons que pour chaque série, nous avons gardé constant l'épaisseur optique en ajustant le nombre d'atomes. Nous avons vu l'intérêt d'une telle procédure en page 33. Pour les deux séries de mesures que nous présenterons ensuite, nous avons fixé l'épaisseur optique :

- pour les mesures à résonance  $\delta_L = 0$ , on assure  $\mathbf{b} = 2,5$  soit  $\mathbf{T} = 8,5\%$  ;
- pour les mesures à  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ , on assure  $\mathbf{b} = 1,7$  soit  $\mathbf{T} = 19\%$ .

Nous tâcherons de donner la pente à l'origine de la courbe (pour le facteur d'amplification). Elle sera dans un second temps comparée au résultat théorique de l'approche perturbative (p. 68).

**Mesures à résonance :** nous couvrons la gamme  $s \lesssim 0,7$  (idem pour  $I/I_{\text{sat}}$ ). On constate une décroissance nette du facteur d'amplification (fig. 1.25).

L'ajustement linéaire sur les premières mesures donne  $1,97 - 0,89s$ . **La valeur à l'origine est donc très proche de 2** (valeur théorique) même si l'on peut lister plusieurs causes de réduction artificielle du cône (p. 60). En raison de l'incertitude sur les mesures, on garde une forte incertitude sur la pente qui vaut  $-0,89 \pm 0,24$ . Même si, à l'origine, la décroissance est quasi-linéaire, à partir de  $s \gtrsim 0,3$  la pente semble s'infléchir un peu.

La dépendance du fond de diffusion est ici mal comprise. On s'attend plutôt à ce que le fond reste constant puisqu'on a essayé de garder le nombre de photons échangés constant. On observe pourtant une augmentation significative du fond. On peut ici s'interroger sur la procédure expérimentale (p. 51) : le nombre de photons échangés est-il vraiment constant ? Le formule du taux de diffusion 1.43 suppose en effet que tous les atomes sont dans le même état de saturation, ce qui n'est pas vrai *a priori* puisque l'intensité s'atténue à mesure que l'on s'enfonce dans le milieu. La procédure de contrôle du nombre de photons est donc discutable. Elle a cependant l'avantage de prendre en compte la réduction de la section efficace. Il est en définitive délicat d'interpréter l'évolution du fond de diffusion autrement que par une approche numérique [60]. Nous baserons donc l'essentiel de notre analyse sur la hauteur et la largeur du cône.

**La largeur du cône** est visiblement **constante** dans la limite des barres d'erreurs et vaut typiquement  $0,33$  mrad. C'est un fait important. La largeur du cône est fortement dépendante de la distribution des libres parcours moyens. Le choix de garder l'épaisseur optique constante (p. 32) a été fructueux puisqu'il semble bien que la distribution  $l(z)$  ne soit pas modifiée de façon significative.

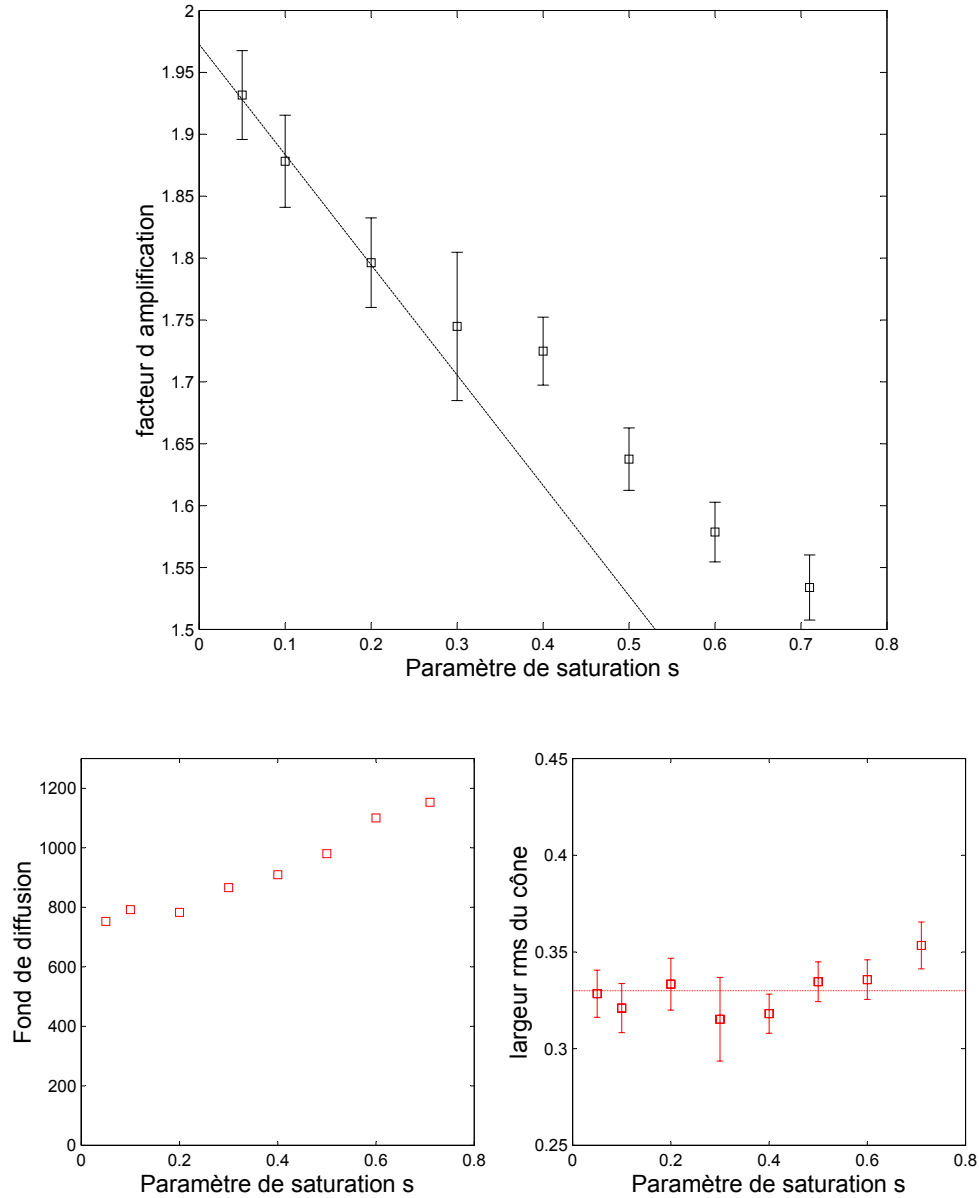


FIG. 1.25 – Mesures du facteur d’amplification et de la largeur du cône en fonction du paramètre de saturation pour  $\delta_L = 0$ . La régression linéaire sur les trois premiers points donne  $1,97 - 0,89s$ .

**Mesures à  $\delta_L = +\Gamma_b/2$  :** on voit des différences notables entre le cas résonant (fig. 1.25) et lorsque la sonde est désaccordée (fig. 1.26). Rappelons que les courbes sont tracées en fonction de  $s$  qui vaut ici  $\frac{I}{2I_{\text{sat}}}$ .

À l’origine la pente vaut  $-1,55 \pm 0,4$  et est donc plus importante que dans la

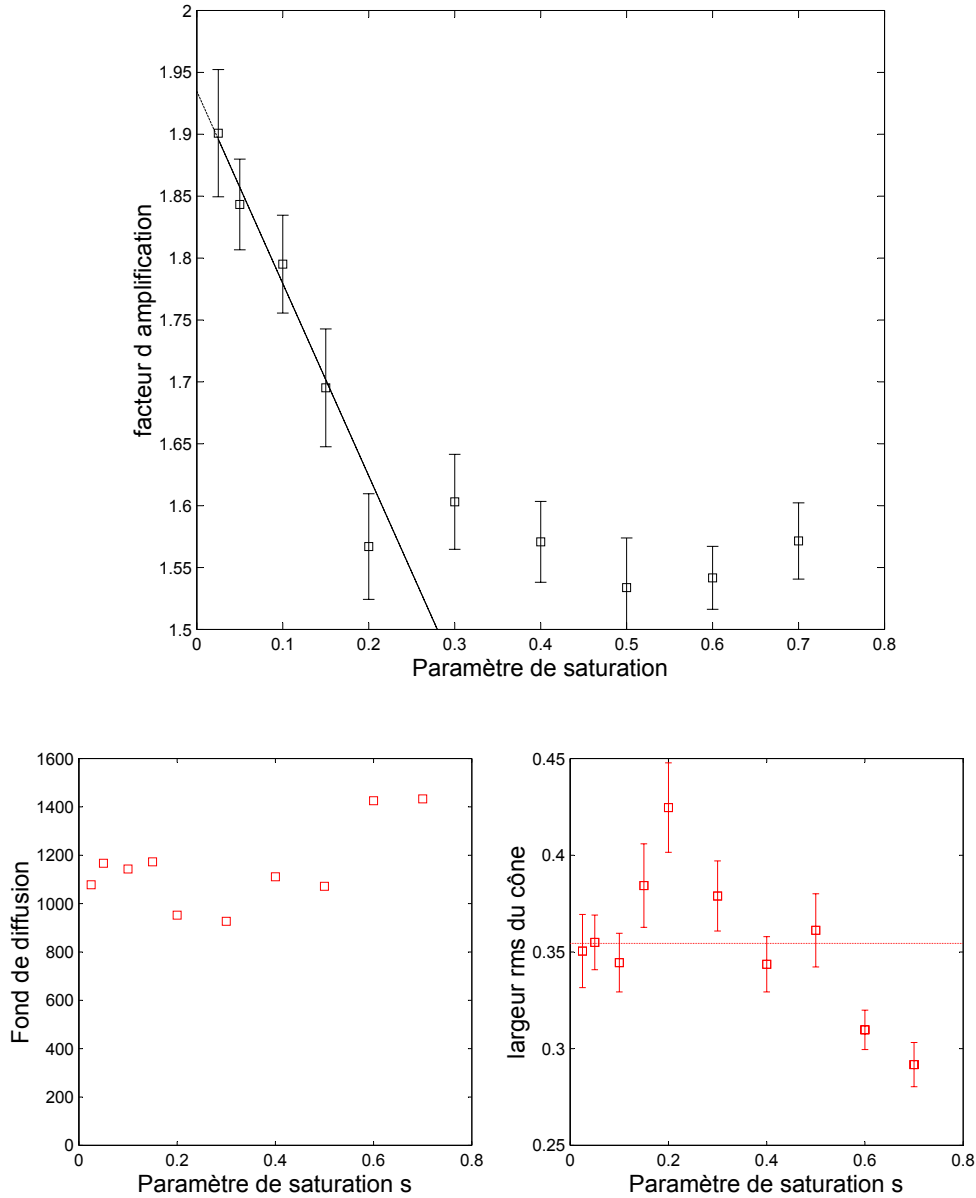


FIG. 1.26 – Mesures du facteur d’amplification et de la largeur du cône en fonction du paramètre de saturation pour  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ . La régression linéaire sur les quatre premiers points donne  $1,93 - 1,55s$ .

cas  $\delta_L = 0$ . On voit ici plus clairement une inflexion de la pente pour  $s \gtrsim 0,3$ .

Les mesures de largeur montrent de plus grandes fluctuations statistiques autour de la valeur moyenne 0,35 mrad. Il est difficile de donner une tendance à cette courbe mais il semble cependant que la largeur décroisse légèrement lorsque  $s$  augmente. Comme précédemment (voir p. 57), la tendance du fond de diffusion

reste délicate à interpréter.

Les deux mesures (hauteur et largeur) correspondant à  $s = 0,2$  s'écartent de façon incompréhensible des autres au delà de limite des barres d'erreur. Même si elles figurent sur les courbes expérimentales nous n'en tiendrons pas compte pour la suite de notre analyse.

Outre le fait que l'on note une **décroissance notable du facteur d'amplification sur les deux courbes** pour des valeurs de  $s$  qui restent relativement faibles ( $s \lesssim 0,7$ ), on peut être surpris par leur différence. Il semble en effet étonnant qu'**une fois le paramètre de saturation fixé, le facteur ne soit pas le même quel que soit le désaccord**. Les effets présentés en 1.2 dépendent *a priori* de  $s$ . Il faut cependant noter que même si les taux de diffusions élastique (expr. 1.38) et inélastique (expr. 1.39) sont imposés par  $s$ , **la forme du spectre inélastique dépend fortement du désaccord**. Comme nous l'avons vu qualitativement en page 41, on s'attend à une réduction du cône par ce mécanisme. **On ne sera donc pas surpris que la décroissance du facteur d'amplification soit aussi fortement dépendante du désaccord**. Avant de faire une analyse quantitative de l'influence que spectre inélastique, nous allons résumer les effets « connus » de réduction de la hauteur de cône (à faible saturation). Nous jugerons de leur influence à forte saturation.

### 1.3.4 Effets « connus » de réduction

Il n'est pas facile d'observer un facteur d'amplification rigoureusement égal à 2 de façon générale [42], alors qu'en pratique la plupart des mesures effectuées ne peuvent pas invoquer une réduction du cône pour des raisons fondamentales (voir [34] et [47]). La valeur mesurée

$$A \xrightarrow[s \rightarrow 0]{} 1,97$$

est compatible avec la valeur attendue à l'incertitude de mesure expérimentale près. Nous allons malgré tout lister les effets qui conduisent à une réduction du cône (à faible saturation). Nous essayerons de considérer leur influence à forte saturation.

#### Influence de la lumière parasite

Il s'agit d'un pur artefact que l'on réduit en isolant le mieux possible le système d'acquisition de la lumière parasite. Cela ne suffit pas à complètement isoler la caméra. On devra donc dans un deuxième temps effectuer une seconde acquisition sans le nuage, pour laquelle on éteint le champ magnétique du piège. Cette dernière image sera soustraite pour obtenir l'image du cône (fig. 1.22). La lumière parasite correspond à environ 15% du signal total. Même si elle peut ajouter du bruit sur les images après « soustraction » cela reste malgré tout un effet anecdotique qui est en tous les cas indépendant de la saturation.

### Effet d'un champ magnétique résiduel

La présence d'un champ magnétique résiduel peut suffire à réduire la hauteur du cône [49]. Elle dépolarise la diffusion simple d'une part. Ceci est pris en compte lors de la mesure de l'extinction entre les canaux d'hélicités croisées et parallèles dont nous verrons la conséquence un peu plus loin. D'autre part, elle déséquilibre les amplitudes entre les chemins direct et renversé par effet Faraday. En utilisant les résultats de [49], on peut quantifier la réduction du cône pour un champ typique de 1 Gauss. **La réduction n'est que de  $\boxed{0,004}$** , ce qui reste négligeable par rapport aux autres effets que nous présenterons.

On ne peut négliger complètement l'effet de la vitesse résiduelle, ce qui est peut-être plus caractéristique de notre échantillon.

### Effet de la vitesse résiduelle

On peut sans peine quantifier la réduction de  $A$  en utilisant la formule 1.15. En ce qui nous concerne, nous avons typiquement  $V_{\text{RMS}} \sim 1$  m/s. Le contraste d'interférence est donc de

$$1 + \exp\left(-10 \frac{k_{\text{in}}^2 V_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) = 1,97$$

**soit une réduction de  $\boxed{0,03}$** . Cette valeur est de l'ordre de l'incertitude expérimentale. Le raisonnement utilisé pour obtenir la formule 1.15 reste cependant simpliste : il n'implique que des ondes scalaires et ne considère que la diffusion double. On retiendra plutôt l'ordre de grandeur de la réduction de  $A$  plutôt que sa valeur exacte.

La température de l'échantillon est *a priori* indépendante de la saturation. Cela peut paraître trivial, mais demande pourtant à être précisé. Nous avons en effet choisi de garder constant le nombre de photons échangés (expr. 1.42). Ayant  $400 \times k_L v_{\text{rec}} = 0,27 \Gamma_b$ , on peut dire que la sonde garde un léger effet mécanique. Elle a en effet tendance à pousser le nuage et à lui attribuer une vitesse d'ensemble  $400 \times v_{\text{rec}}$ . **Cela ne réduit pas le cône car tous les atomes ont la même vitesse**. On peut en revanche imaginer que la diffusion des photons induit une augmentation de la température (diffusion en impulsion de  $\sqrt{400} \times v_{\text{rec}}$ ). L'élargissement de la distribution sera faible ( $20 \times v_{\text{rec}}$ ) et ne peut induire de modification sur le contraste des interférences puisque  $20 \times k_L v_{\text{rec}} = 0,013 \Gamma_b$ . Notons aussi que dans la mesure où le nombre de photons échangés est gardé indépendant de la saturation, on peut dire que la diffusion en impulsion en sera aussi indépendante.

Sans être complètement négligeable (à faible saturation), l'effet de la vitesse résiduelle ne peut pas être invoqué pour expliquer le comportement à saturation. Tournons-nous maintenant vers deux effets plus communs puisqu'ils sont aussi présents avec des échantillons classiques et qu'ils suffisent à réduire de façon drastique la qualité des observations.

### Résolution du système de détection

La résolution du système de détection rentre souvent en ligne de compte. La cône ayant une forme très piquée, tout effet de convolution a rapidement tendance à le réduire. Lors des premières mesures sur strontium [20], la résolution du système suffisait à expliquer la réduction observée. Nous avons donc choisi de le prendre en compte directement dans la procédure de traitement. Puisque nous connaissons la réponse du système optique, cela semble raisonnable.

Cet effet aurait pu avoir une influence drastique sur notre échantillon si l'on avait augmenté la saturation « sans précaution ». Supposons en effet que la densité soit gardée fixe : en augmentant la saturation, on diminue la section efficace (expr. 1.20) et on augmente le libre parcours moyen (expr. 1.3). La largeur du cône sera réduite en conséquence (expr. 1.2), et **sa hauteur suivra la même tendance à cause de la convolution par la résolution du système**. On est cependant loin de cette situation catastrophique.

Nous avons en effet tâché de garder la distribution des libres parcours moyens constante en contrôlant l'épaisseur optique (p. 32). Ceci devrait nous permettre d'éviter une réduction significative de la largeur du cône.

On peut aussi faire une réponse purement expérimentale. On ne voit en effet aucune tendance claire concernant la largeur du cône en fonction de la saturation (fig. 1.25) alors que les largeurs mesurées sont 6 à 7 fois supérieures à la limite de résolution.

Il semble donc pour conclure que **la résolution du système de détection soit correctement compensée par notre procédure de traitement des images**. Elle ne peut en tout cas pas expliquer la réduction de  $A$  à forte saturation.

### Influence de la diffusion simple

Il s'agit d'un problème purement expérimental en ce qui nous concerne. Nous avons vu en effet que la diffusion simple ne participe pas au cône et réduit donc le facteur d'amplification dans les canaux où elle est présente (expr. 1.4). Il est donc important d'avoir une bonne isolation entre les canaux  $h \parallel h$  et  $h \perp h$ . Dans le canal  $h \perp h$ , la diffusion simple n'est pas coupée et l'intensité globale est plus importante. Si les deux canaux d'hélicités parallèles et croisées sont mal isolés, un partie du signal de l'un vient s'ajouter à l'autre et diminue artificiellement le cône.

Il n'est pas facile de connaître *a priori* les intensités dans les différents canaux. Une simulation de Monte-Carlo réalisée par D. Delande nous permet de connaître la répartition de l'intensité dans les divers canaux. Le fond de diffusion  $\gamma_S + \gamma_L$  est environ 12 fois plus important dans le canal  $h \perp h$  que dans  $h \parallel h$ . Avec un taux d'isolation de 1% entre les deux canaux, **la réduction attendue de  $A$  sera  $\boxed{0,06}$** . Cela reste du même ordre que les autres effets de réduction possibles

mentionnés précédemment.

Il reste possible d'atténuer un tel effet en augmentant significativement l'épaisseur optique, ce qui favorise les mécanismes de diffusion multiple par rapport à la diffusion simple. Cela n'est possible qu'en augmentant le nombre d'atomes.

On peut aussi essayer d'augmenter l'extinction entre les deux canaux. Le choix des éléments polarisants ne doit pas être laissé au hasard. Il n'est pas forcément facile d'améliorer l'extinction dans la mesure où le spectre des fréquences spatiales arrivant sur les cubes polariseurs est plutôt large (typique d'un champ diffus). Le spectre peut en plus être accru par le grandissement du système. La réponse des éléments polarisants est souvent assurée pour une certaine gamme de fréquences spatiales (autrement dit, d'angles). Cela peut être un facteur limitant du taux d'extinction qui commercialement peut être garanti à quelques  $10^{-3}$ .

Qu'advient-il de cet artefact lorsque la sonde devient saturante ? On retrouve en fait le problème de la distribution des ordres lorsque la sonde devient saturante. Comme nous l'avons conclu au paragraphe précédent, l'épaisseur optique ayant été gardée constante, on peut supposer que la distribution des ordres (et donc la diffusion simple) ne soit pas modifiée significativement.

On comprend mieux *a posteriori* le choix expérimental qui consiste à garder la transmission constante. On ne peut pas garantir que la distribution des ordres soit rigoureusement inchangée. Cependant à partir de la discussion de la partie 1.2.1 (p. 32), on peut supposer que la distribution est grossièrement inchangée. Ceci est étayé par les mesures de largeur du cône qui reste constante avec la saturation. On pense ainsi avoir rejeté deux artefacts décrits précédemment (résolution du système et diffusion simple) qui suffisent à réduire la hauteur du cône observé. On peut maintenant se tourner vers une étude quantitative des effets de la diffusion inélastique sur le transport cohérent.

## 1.4 Réduction du cône par la diffusion inélastique

Avant d'en détailler l'influence en diffusion multiple, rappelons la forme du spectre inélastique dans les conditions expérimentales. Nous avons utilisé à nouveau l'expression 1.41 pour tracer le spectre avec une sonde à résonance (fig. 1.27) ou désaccordée de  $+\Gamma_b/2$  (fig. 1.28) pour des intensités incidentes comprises entre 0 et  $I_{\text{sat}}$ . On est donc loin des situations « champ intense » et « grand désaccord » présentées sur la figure 1.15. Les spectres observés n'ont dans ce cas pas de forme simple même si l'on en connaît l'expression analytique.

À la résonance, on voit un pic qui croît puisque son intégrale augmente comme  $s_{\text{inc}}^2/(1 + s_{\text{inc}})^2$  (expr. 1.39). Sa largeur augmente aussi.

Sur la figure 1.28, on ne voit pas clairement apparaître trois pics (fig. 1.15) car le désaccord n'est pas assez grand. On voit plus une déformation et un élar-



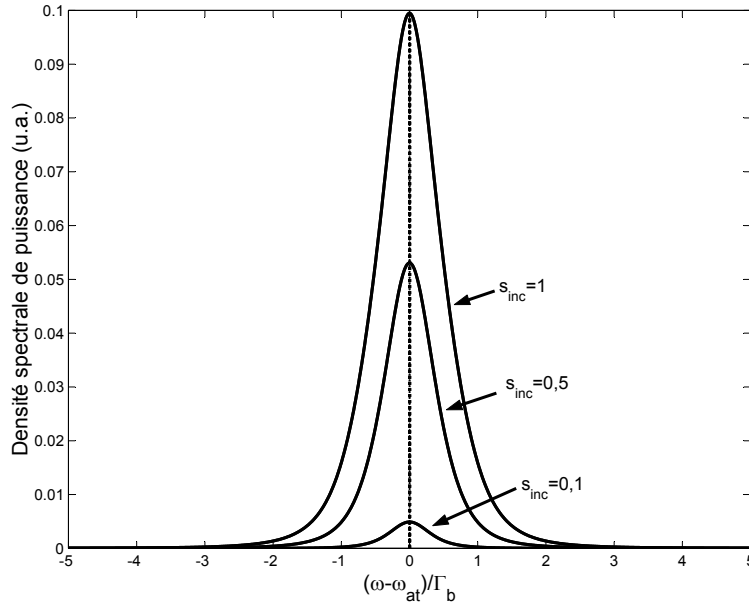


FIG. 1.27 – Spectre inélastique pour une sonde à résonance  $\delta_L = 0$ .  $s_{inc}$  est le paramètre de saturation de la sonde, soit  $I_{inc}/I_{sat}$  à résonance.

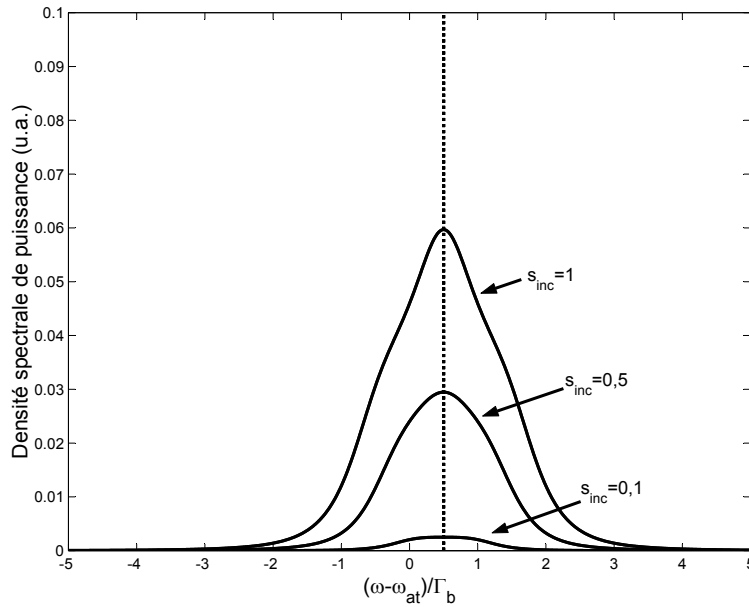


FIG. 1.28 – Spectre inélastique pour une sonde désaccordée de  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ .  $s_{inc}$  vaudra  $I_{inc}/2I_{sat}$ . Le spectre reste symétrique autour de la fréquence du laser.

gisement du spectre.

Interrogeons-nous maintenant sur l'influence de la diffusion inélastique sur la propagation. Par analogie avec le phénomène de brisure dynamique (expr. 1.15), on ne sera pas surpris de voir décroître le cône à saturation. Nous allons tenter de quantifier cet effet en poursuivant l'analogie et en développant une approche type « pompe-sonde ». Nous résumerons ensuite les résultats de l'approche perturbative, qui reste moins intuitive mais plus rigoureuse au premier ordre en saturation. Nous discuterons par ailleurs des limitations des deux approches.

### 1.4.1 Approche « pompe-sonde »

Nous allons ici tâcher de généraliser le calcul illustré par la figure 1.7. Dans le cas précédent, **la diffusion est rendue inélastique (changement de fréquence) par l'effet Doppler**. À saturation, ce sont les fluctuations du dipôle atomique qui produisent le spectre inélastique. De façon analogue à la figure 1.7, nous allons calculer le déphasage entre le chemin direct et le chemin renversé.

Afin de prendre en compte la saturation, on suppose que le milieu est pompé par le faisceau incident qui impose la saturation. Il s'agit d'une supposition très discutable, qui rend notre approche simpliste. Elle nous permettra cependant de nous ramener au cas analogue à celui de la figure 1.7. On va regarder ensuite les différents chemins de diffusion double que peut suivre une fraction du mode incident, une onde « partielle » (la sonde) qui parcourt un chemin de diffusion dans le milieu. On justifie ainsi le terme « pompe-sonde ». On supposera en fait que la pompe impose le paramètre de saturation mais par ailleurs ne modifie pas la réponse de l'atome à la sonde.

Lorsque la sonde arrive sur un diffuseur (nommé  $D_1$  dont la saturation est imposée par  $s_{\text{inc}}$ ), on voit *a priori* deux possibilités : soit elle est diffusée élastiquement, soit inélastiquement. Au vu des taux de diffusion élastique (expr. 1.38) et inélastique (expr. 1.39), la probabilité de faire une diffusion élastique sera de  $\frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})}$  et celle d'un processus inélastique sera  $\frac{s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})}$ .

Intéressons-nous maintenant au deuxième événement de diffusion (le dernier en diffusion double). La sonde déjà diffusée sur  $D_1$  sera ensuite diffusée à nouveau élastiquement ou inélastiquement sur  $D_2$  (le second diffuseur). On ne connaît pas *a priori* l'état de saturation de  $D_2$ . Nous supposons donc pour des raisons de simplicité que c'est aussi  $s_{\text{inc}}$ . Nous reviendrons, dans la discussion finale, sur cette hypothèse qui reste difficile à justifier dans notre situation. On a finalement quatre possibilités pour un même chemin de diffusion reliant  $D_1$  et  $D_2$ , que l'on résume par un tableau.

Probabilité	$D_1$ élastique	$D_1$ inélastique
$D_2$ élastique	$\frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})} \times \frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})}$	$\frac{s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})} \times \frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})}$
$D_2$ inélastique	$\frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})} \times \frac{s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})}$	$\frac{s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})} \times \frac{s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})}$

On aura en fait trois événements possibles en diffusion double :

$$\begin{aligned}
 1 : \text{ élastique - élastique : } & \frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})^2} \\
 2 : \text{ élastique - inélastique : } & \frac{2s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})^2} \\
 3 : \text{ inélastique - inélastique : } & \frac{s_{\text{inc}}^2}{(1 + s_{\text{inc}})^2}
 \end{aligned}$$

On peut maintenant se poser la question du contraste d'interférence que produit chaque événement.

1. La réponse est simple pour un événement **élastique-élastique**, il s'agit du **facteur 2** qui domine à faible saturation.
2. Afin de connaître le contraste des interférences pour la succession **élastique-inélastique**, on peut essayer de la comparer à une situation connue. Nous avons déjà traité le cas d'une diffusion inélastique (changement de fréquence) à cause de l'effet Doppler. La situation est alors schématisée par la figure 1.7. La situation est un peu différente si une des diffusions est élastique : tout se passe alors comme si  $\vec{V}_1 = \vec{0}$ . La réduction du contraste est alors un peu moins drastique. Si l'on reprend le calcul, on trouve un facteur d'amplification (à comparer à 1.15) égal à

$$1 + \exp\left(-5 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right)$$

où  $W_{\text{RMS}}$  désignera de façon générale la largeur du processus inélastique.

3. Pour un événement **inélastique-inélastique**, on se retrouve dans une situation très proche de celle de la figure 1.7. Le contraste d'interférence sera donné par l'expression 1.15 :

$$1 + \exp\left(-10 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right)$$

On peut maintenant estimer le facteur d'amplification pour la diffusion double  $D_1$ - $D_2$ . On va en effet sommer les figures d'interférences produites par les trois événements distingués précédemment comme nous l'avons fait sur la figure 1.3. Chacune sera pondérée par sa probabilité. Ceci donne finalement un facteur d'amplification  $A$  :

$$A(s_{\text{inc}}, W_{\text{RMS}}) = 2 \times \frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})^2} + \left[ 1 + \exp\left(-5 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) \right] \times \frac{2s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})^2} + \left[ 1 + \exp\left(-10 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) \right] \times \frac{s_{\text{inc}}^2}{(1 + s_{\text{inc}})^2} \quad (1.45)$$

$$A(s_{\text{inc}}, W_{\text{RMS}}) = 1 + \frac{1}{(1 + s_{\text{inc}})^2} + \exp\left(-5 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) \frac{2s_{\text{inc}}}{(1 + s_{\text{inc}})^2} + \exp\left(-10 \frac{W_{\text{RMS}}^2}{\Gamma_b^2}\right) \frac{s_{\text{inc}}^2}{(1 + s_{\text{inc}})^2} \quad (1.46)$$

Le facteur  $A$  **dépend dans notre modèle de  $s_{\text{inc}}$  et de  $W_{\text{RMS}}$** , largeur RMS du processus inélastique. Rappelons quand même que l'obtention de la formule 1.15 suppose une redistribution gaussienne des fréquences à la diffusion. La largeur  $W_{\text{RMS}}$  dépend de  $s_{\text{inc}}$  mais aussi du désaccord laser comme on peut le voir en comparant les figures 1.27 et 1.28. Même si le spectre inélastique n'est pas gaussien, nous avons calculé numériquement sa largeur RMS en fonction de  $\delta_L$  et  $s_{\text{inc}}$ . Nous pouvons maintenant comparer notre estimation aux mesures expérimentales, aussi bien à résonance ( $\delta_L = 0$ , fig. 1.29) que désaccordé ( $\delta_L = +\Gamma_b/2$ , fig. 1.30).

Malgré la simplicité du modèle qui reste une prise en compte grossière de la saturation, l'accord sur la figure 1.29 est remarquable.

L'accord sur la figure 1.30 reste excellent à faible saturation, mais diverge notablement pour  $s_{\text{inc}} \gtrsim 0,2$ .

Ce modèle est un peu restrictif puisque **le calcul 1.15 ne tient compte que du déphasage entre les deux chemins de diffusion** (fig. 1.7). Cela suppose que l'amplitude est la même pour les différentes fréquences. Dans le cas qui nous occupe, cela n'est vrai que si  $W_{\text{RMS}} \ll \Gamma_b$ . On constate sur les figures 1.29 et 1.30 que cela est loin d'être vrai. De façon générale, on peut d'autant moins le négliger que la saturation et donc l'élargissement sont grands. Il est possible de faire un calcul qui tient compte de la phase et de l'amplitude en utilisant une approche perturbative.

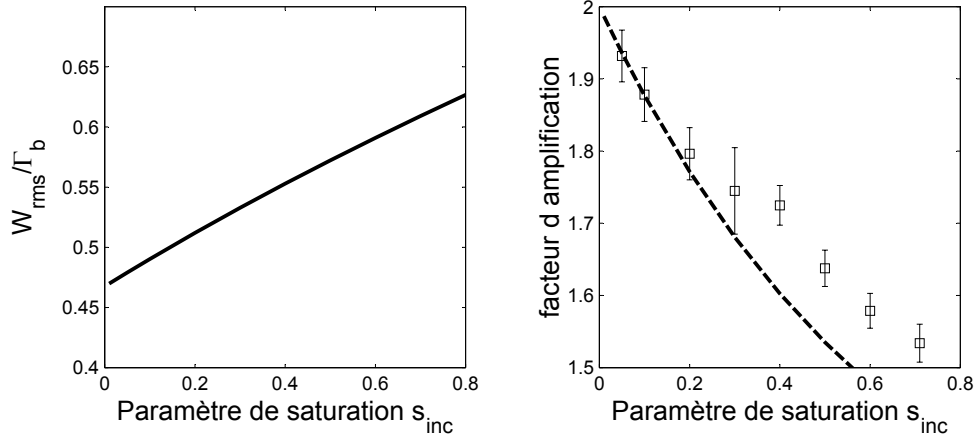


FIG. 1.29 – Estimation du facteur d’amplification (à droite) à partir de la largeur du processus inélastique  $W_{\text{RMS}}$  (à gauche). Nous la comparons aux mesures à résonance de la figure 1.25.

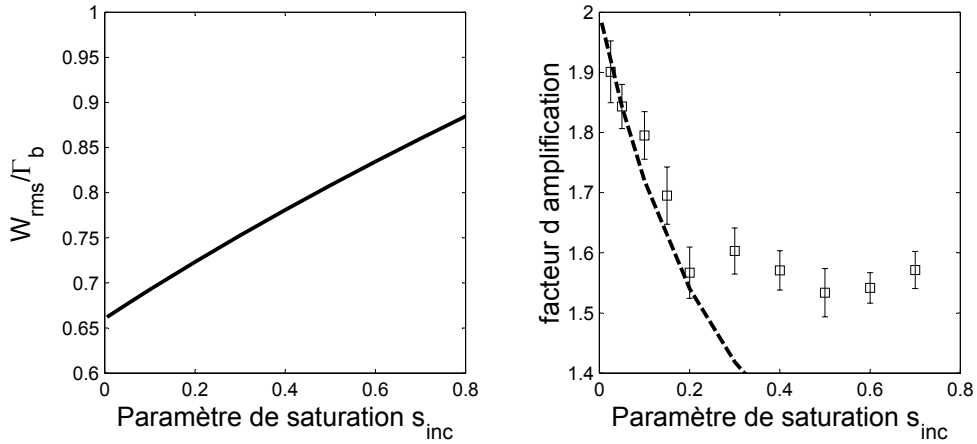


FIG. 1.30 – Estimation du facteur d’amplification à partir de la largeur du processus inélastique  $W_{\text{RMS}}$ . Nous la comparons aux mesures à  $\delta_L = +\Gamma_b/2$  de la figure 1.26.

### 1.4.2 Approche perturbative

Cette approche est particulièrement fructueuse lors du calcul du facteur d’amplification prenant en compte la structure interne sur rubidium [53, 54]. On calcule alors la réponse d’un atome à un photon incident qui se propagera ensuite dans le milieu avant d’être diffusé à nouveau. En chaînant une succession d’événements de ce type, on peut calculer l’intensité diffusée pour les différents ordres de diffusion.

Cette approche suppose intrinsèquement que la saturation est faible puisque

le champ incident n'est constitué que d'un photon, ce qui correspond à l'ordre le plus bas en  $s$ . **Pour tenir compte de la saturation, il faut alors regarder la réponse de l'atome à deux photons incidents** (dans le même mode). La symétrie du spectre autour de la fréquence du laser (fig. 1.31) traduit la conservation de l'énergie de la paire. Les fréquences des photons émergents ( $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) vérifient  $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_L$ .

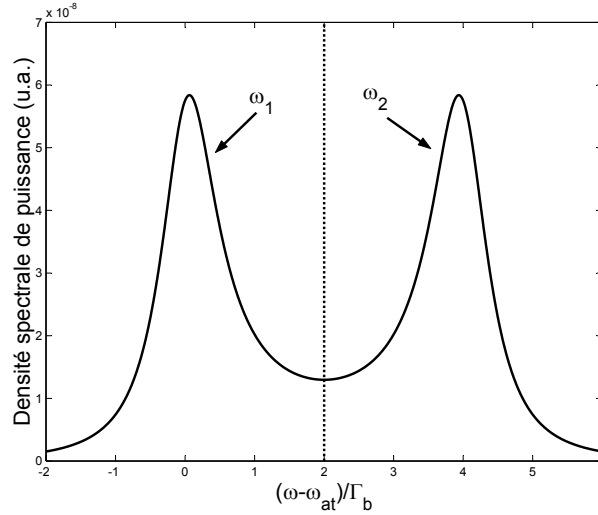


FIG. 1.31 – Réponse spectrale de l'atome à faible saturation ( $\delta_L = 2\Gamma_b$ ).

Un calcul du facteur d'amplification a été réalisé par T. Wellens [55]. Il reste assez restrictif mais montre une décroissance effective du contraste des interférences au premier ordre en saturation. L'auteur ne considère en effet que **deux atomes (diffusion double) dans le vide** et on néglige la propagation dans le milieu effectif. Les événements qui prédominent alors mettent en jeu une diffusion élastique puis inélastique comme nous l'avons considéré par notre approche pompe-sonde (au premier ordre en  $s_{inc}$ ). Si l'on observe l'évolution du spectre dans les deux sens, direct et renversé, on ne sera pas surpris que l'amplitude et la phase ne soient pas égales pour les deux chemins. Du point de vue spectral, il n'est pas équivalent d'effectuer un événement inélastique-élastique ou élastique-inélastique.

Si l'on a d'abord une diffusion inélastique, **le spectre inélastique sera filtré dans un second temps par la réponse élastique de l'atome** aussi bien en amplitude qu'en phase (fig. 1.32). Pour illustrer la réponse élastique, on a représenté la section efficace et la phase acquise à la diffusion ( $\arg(\alpha_{at})$  p. 25). Pour cette représentation de principe, on utilise une sonde désaccordée  $\delta_L = 2\Gamma_b$  (fig. 1.31). On est loin de la situation expérimentale, ce qui permet de faire apparaître l'effet considéré de façon plus flagrante.

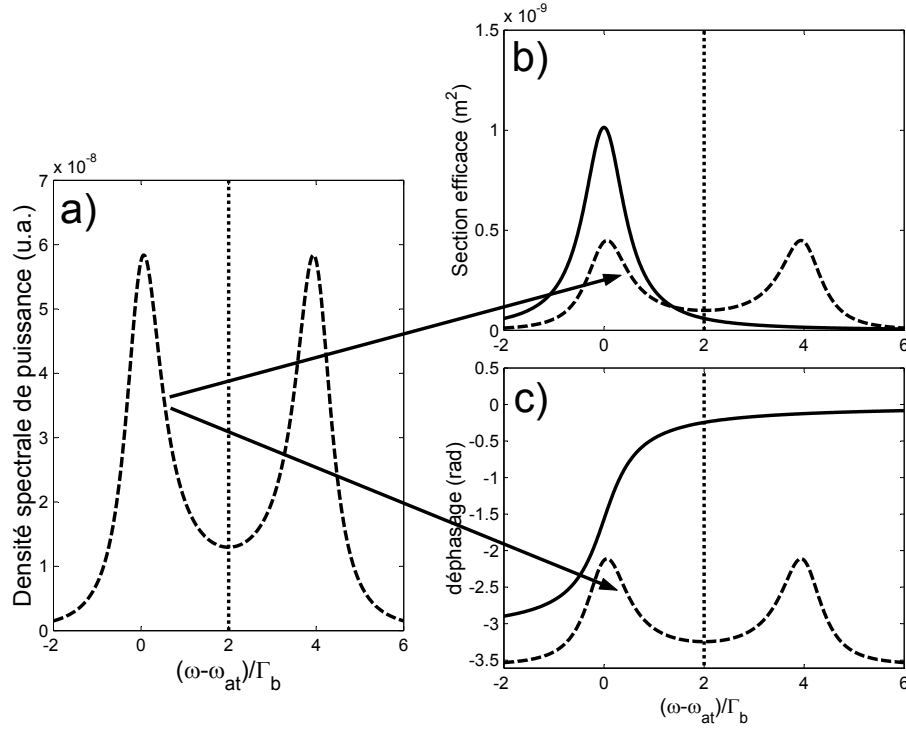


FIG. 1.32 – Illustration du « filtrage spectral » du spectre inélastique représenté en a) ( $\delta_L = 2\Gamma_b$ ) par le réponse élastique à la diffusion suivante. Pour la réponse élastique, on a représenté la section efficace en b), partie imaginaire de la polarisabilité, et le déphasage à la diffusion en c), argument de la polarisabilité. On rappelle en pointillés la forme du spectre inélastique.

Si l'on a d'abord une diffusion élastique, le premier événement ne modifie que la phase de l'onde incidente. Si l'on observe le spectre après la seconde diffusion, il s'agit simplement du spectre inélastique (sans filtrage). À l'inverse, si le premier événement est inélastique, alors une seconde diffusion élastique viendra filtrer le spectre large issu de la première diffusion. Nous représentons cette différence entre chemin direct et renversé sur la figure 1.33.

À partir de cette approche, on attend donc une réduction du facteur d'amplification. Le calcul analytique prend en compte les effets d'amplitude et de phase, que nous tâcherons de quantifier dans la partie suivante. On obtient finalement [55] :

$$A = \frac{8 - (19 - 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) s}{4 - (9 - 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) s} \quad (1.47)$$

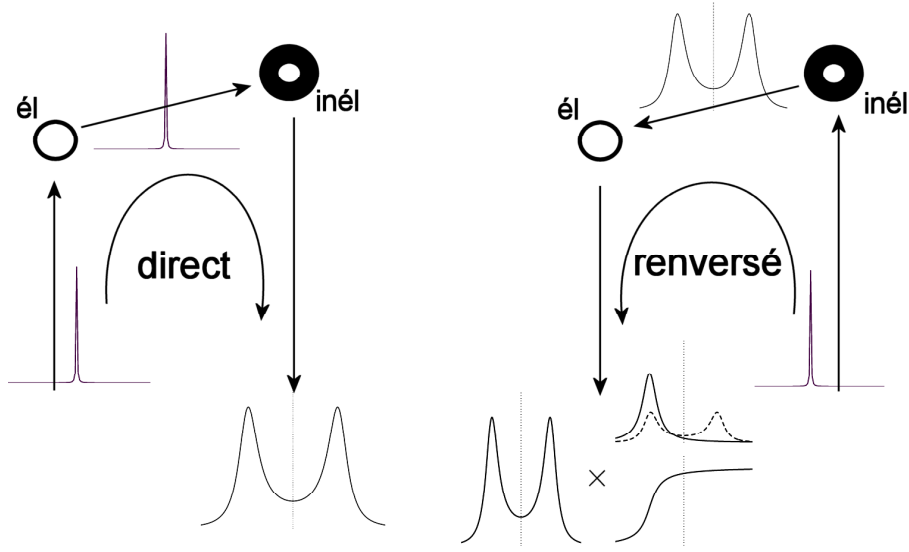


FIG. 1.33 – Illustration du filtrage spectral sur le chemin renversé. Sur le chemin direct, la diffusion élastique (la première) n’induit qu’un déphasage (cas désaccordé). Le rayonnement incident est une onde monochromatique schématisée par sa représentation spectrale (pic de Dirac).

Le résultat n’est valide qu’au premier ordre en  $s$ . Nous ne garderons que ce terme :

$$A \simeq 2 - \left( \frac{1}{4} + \frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2} \right) s \quad (1.48)$$

$$A \simeq 2 - \frac{1}{4} I/I_{\text{sat}} \quad (1.49)$$

On constate que **la décroissance de  $A$  est indépendante du désaccord  $\delta_L$** . On peut être *a priori* surpris par ce fait. Il faut cependant noter que la forme du spectre inélastique est très différente quand le désaccord augmente. Ainsi à  $s$  fixée (les taux de diffusions élastique et inélastique seront alors fixés), l’effet de filtrage spectral sera plus drastique quand  $\delta_L$  augmente. Ceci fera décroître  $A$  plus rapidement. La pente de la décroissance de  $A$  en fonction de  $s$  est alors  $\left( \frac{1}{4} + \frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2} \right)$  : elle augmente avec  $\delta_L$ . Il est assez amusant que cela compense exactement la dépendance de  $s$  en fonction de  $\delta_L$  et donne finalement  $A$  comme fonction de  $I/I_{\text{sat}}$  uniquement.

Sur la figure 1.34, nous avons comparé les résultats expérimentaux à cette prédiction théorique. La pente prédite par l’approche perturbative n’est pas en accord avec les mesures. En revanche, il semble bien que la pente expérimentale en fonction de  $I/I_{\text{sat}}$  (dans le limite de l’incertitude de mesure) ne dépende pas de  $\delta_L$ . Nous avons aussi rappelé les résultats de l’approche « pompe-sonde » (fig. 1.29 et 1.30).



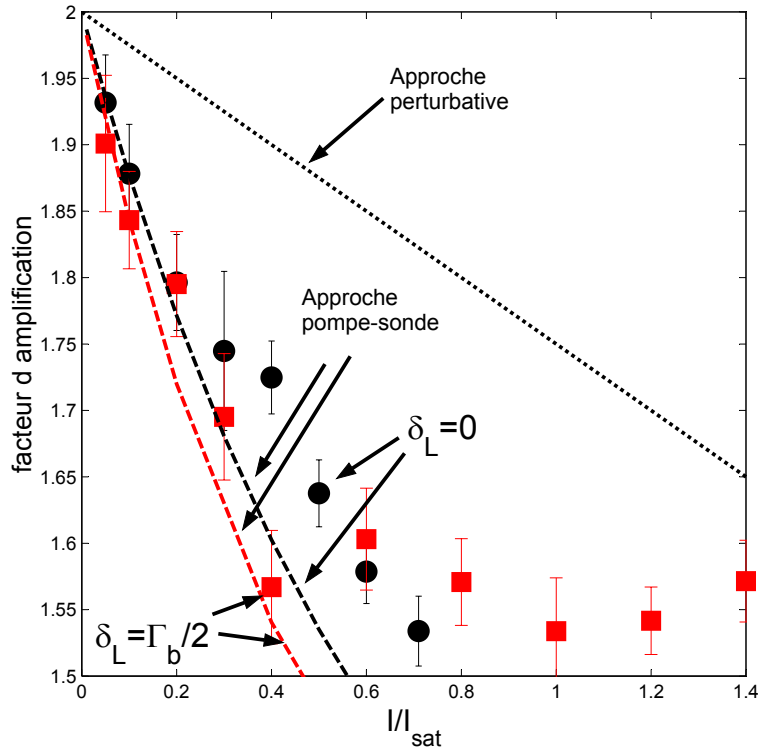


FIG. 1.34 – On trace cette fois le facteur d’amplification en fonction de  $I/I_{\text{sat}}$  (ronds :  $\delta_L = 0$  ; carrés :  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ ). On compare les mesures expérimentales à la prédiction de l’approche perturbative  $A \simeq 2 - \frac{1}{4}I/I_{\text{sat}}$ .

L’approche perturbative permet de faire un calcul exact de l’influence du spectre inélastique à l’ordre le plus bas en  $s$ . Même si le désaccord avec les mesures reste net, **la prédiction d’une dépendance de  $A$  uniquement en fonction de  $I/I_{\text{sat}}$  semble pertinente**. La prise en compte de la diffusion double uniquement semble une large restriction, mais elle correspond pourtant bien à la situation expérimentale puisque l’épaisseur optique n’est pas trop grande (typiquement deux ou trois). Le fait de négliger le milieu effectif est sans doute une limitation plus grande du modèle. On a vu lors du calcul de l’expression 1.15 que son influence était loin d’être négligeable. Des calculs actuellement en cours devraient permettre de le prendre en considération.

### 1.4.3 Limitations des deux approches et conclusion

Les deux approches sont très différentes.

- L’approche « pompe-sonde » est grossière et part du constat qu’une diffusion inélastique induit un déphasage entre chemins de diffusion. En ce rappro-

chant d'un cas connu (expr. 1.15), il est possible de donner une estimation de la décroissance du facteur d'amplification. Le calcul est cependant très restrictif puisqu'il **ne prédit que le déphasage entre les chemins et non la différence d'amplitude**. Nous avons supposé l'atome pompé par le mode cohérent qui impose la saturation (pour les deux diffuseurs). On néglige complètement son atténuation dans le milieu.

- L'approche perturbative est sans doute plus rigoureuse puisqu'elle tient compte des effets de phase et d'amplitude à l'ordre le plus faible en  $s$ . Elle considère « **deux atomes dans le vide** », ce qui permet de considérer la diffusion double. Cela semble pertinent pour une épaisseur optique pas trop grande, ce qui est proche de la situation expérimentale.

Résumons les caractéristiques des deux calculs dans un tableau :

Caractéristiques des deux approches	Déphasage à la propagation	Déphasage à la diffusion	Amplitude à la diffusion
Approche « pompe-sonde »	OUI	OUI	NON
Approche perturbative	NON	OUI	OUI

Même si cela n'a rien d'intuitif, le calcul perturbatif montre que **c'est principalement le déphasage entre les chemins qui réduit le contraste des interférences plutôt que la différence d'amplitude**. On s'attend à ce que le poids des deux effets dépende du désaccord comme on le verra un peu plus loin. Dans le cadre de l'approche perturbative, on calcule indépendamment les contributions aux interférences des parties élastiques et inélastiques [55] pour trouver la hauteur du cône (expr. 1.4). On exprimera donc  $A$  dans le canal  $h \parallel h$  avec  $\gamma_s = 0$  :

$$A = 1 + \frac{\gamma_C^{\text{él}} + \gamma_C^{\text{inél}}}{\gamma_L^{\text{inél}} + \gamma_L^{\text{él}}} \quad (1.50)$$

On peut mettre  $A$  sous une forme différente qui fait apparaître

$$\eta^{\text{inél}} = \frac{\gamma_C^{\text{inél}}}{\gamma_L^{\text{inél}}}$$

qui est directement relié aux contrastes des interférences de la partie inélastique du spectre. On obtient au premier ordre en  $s$  [55, p. 9] :

$$A = 2 + \left( \frac{7}{4} + \frac{\delta_L^2}{\Gamma_b^2} \right) (\eta^{\text{inél}} - 1) s \quad (1.51)$$

Lorsqu'on considère l'événement de diffusion double décrit par la figure 1.32, il est possible de supposer que la réponse spectrale de la diffusion élastique, notée « él », est plate en amplitude. La différence d'amplitude entre les chemins direct et renversé est alors effacée arbitrairement ; on ne prend donc en compte que les effets de déphasage à la diffusion. On change ainsi la valeur de  $\eta^{\text{inél}}$ . Ceci est illustré sur la figure 1.35.

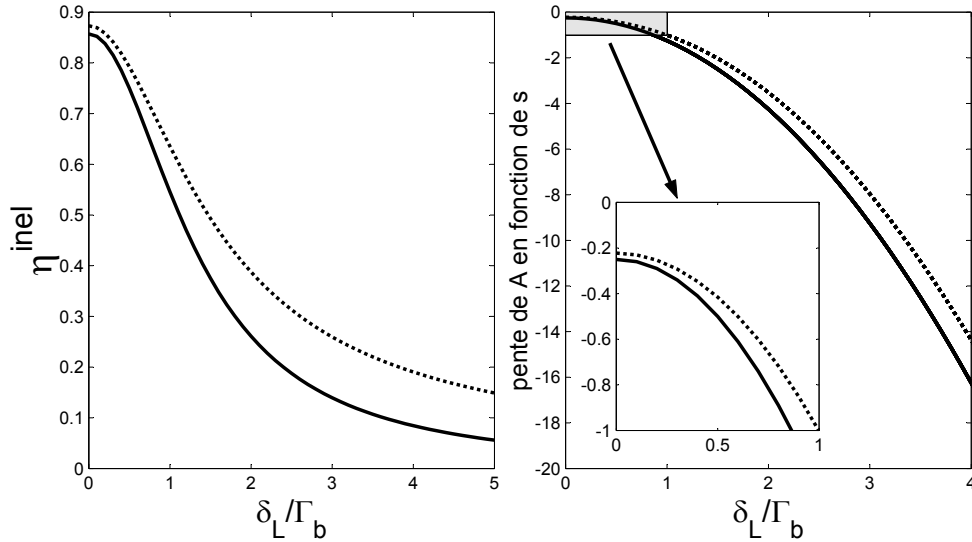


FIG. 1.35 – On calcule dans le cadre de l’approche perturbative l’effet du déphasage à la diffusion. En pointillés : la différence d’amplitude entre les chemins direct et renversé est effacée arbitrairement pour ne prendre en compte que le déphasage. En trait plein : il s’agit du calcul complet incluant phase et amplitude. On a représenté  $\eta^{\text{inél}}$  et  $(7/4 + \delta_L^2/\Gamma_b^2) (\eta^{\text{inél}} - 1)$ , qui est la pente à l’origine de  $A$  en fonction de  $s$ . On a inséré un agrandissement de la gamme  $0 < \delta_L < \Gamma_b$ . Les calculs ont été effectués par T. Wellens.

On constate qu’il n’y a qu’une faible différence entre le calcul complet qui tient compte de la phase et de l’amplitude et celui qui néglige l’amplitude. Par exemple à la résonance pour la pente à l’origine, au lieu de  $1/4$  que donne le calcul complet, on trouve  $0,22$  environ en ne considérant que les effets de phase. **La décroissance du cône est donc essentiellement causée par le déphasage à la diffusion** dans l’approche perturbative.

Même si cela n’est pas évident *a priori*, on peut par un calcul simple montrer cette différence. Lorsqu’on compare le chemin direct et le chemin renversé (fig.

1.32), les différences de phase et d'amplitude sont causées par la présence d'un événement de diffusion élastique. Supposons la sonde à résonance. À cause de la diffusion inélastique, un photon verra par exemple sa fréquence passer de  $\omega_{\text{at}}$  à  $\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b$ . L'amplitude du chemin direct sera proportionnelle à  $\sqrt{\sigma(\omega_{\text{at}})}$  alors que celle du chemin renversé sera proportionnelle à  $\sqrt{\sigma(\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b)}$  ( $\sigma$  est la section efficace de diffusion). Le déphasage entre les deux chemins sera simplement  $\Delta\Phi_{\text{diff}}(\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b) - \Delta\Phi_{\text{diff}}(\omega_{\text{at}})$  où  $\Delta\Phi_{\text{diff}}$  est le changement de phase à la diffusion (expr. 1.9). On peut indépendamment calculer les contrastes des interférences en considérant tour à tour la différence d'amplitude puis celle de phase. On va supposer dans un premier temps que la largeur du processus inélastique est faible devant  $\Gamma_b$  ( $\epsilon \ll 1$ ).

– À cause de la différence d'amplitude, le contraste sera

$$2 \frac{\sqrt{\sigma(\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b)} \sqrt{\sigma(\omega_{\text{at}})}}{\sigma(\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b) + \sigma(\omega_{\text{at}})} = 2 \frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon^2}} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 4\epsilon^2}} \simeq 1 - 2\epsilon^4 \quad (1.52)$$

– À cause du déphasage, le contraste sera

$$\cos(\Delta\Phi_{\text{diff}}(\omega_{\text{at}} + \epsilon \Gamma_b) - \Delta\Phi_{\text{diff}}(\omega_{\text{at}})) \simeq 1 - 2\epsilon^2 \quad (1.53)$$

On constate ici que la réduction du contraste des interférences est beaucoup plus importante par le déphasage que par la différence d'amplitude. Autour de la résonance,  $\sigma$  change peu alors que la variation de  $\Delta\Phi_{\text{diff}}$  est maximale : les deux calculs 1.52 et 1.53 permettent de quantifier cette différence de comportement sur la réduction du contraste des interférences.

On peut extrapoler un tel calcul pour une sonde désaccordée. Par exemple à  $\delta_L = \Gamma_b/2$ , on trouvera que les réductions du contraste par le déphasage et par la différence d'amplitude sont du même ordre de grandeur. Il est cependant très discutable de considérer que le processus inélastique est spectralement plus étroit que  $\Gamma_b$  dans ce cas-là. On voit en effet apparaître deux pics distincts dans le spectre. Cela rend les développements 1.52 et 1.53 caducs. On préférera se fier aux résultats plus rigoureux de l'approche perturbative (fig. 1.35). Rappelons cependant que notre argument ne tient pas compte du milieu effectif.

Comme nous l'avons vu en comparant les expressions 1.11 et 1.9, **le déphasage causé par la propagation** dans le milieu effectif n'est pas négligeable. Il vaut typiquement la moitié du **déphasage à la diffusion** (à résonance) mais est **de signe opposé**. On peut donc s'attendre à ce qu'il compense en partie la réduction du contraste. Déphasage à la diffusion et à la propagation montrent des dépendances différentes en désaccord ce qui peut expliquer la différence de comportement des courbes  $\delta_L = 0$  et  $\delta_L = +\Gamma_b/2$ .

## Conclusion

Malgré une compréhension encore parcellaire du phénomène, **il est clair que la présence du spectre inélastique suffit à expliquer une réduction du facteur d'amplification**. Des calculs en cours **visent à prendre en compte l'influence du milieu**, d'une part pour **prendre en compte l'indice moyen** qui intervient lors de la propagation entre deux événements de diffusion, d'autre part **pour connaître la répartition de l'intensité dans le milieu** qui modifie la section efficace et le spectre diffusé. On pense ainsi comprendre plus quantitativement l'influence de la saturation en régime de diffusion multiple.

Du point de vue du transport cohérent, la saturation **doit être considérée comme un processus de *dephasing*** [59]. Même pour des saturations relativement faibles ( $s \simeq 0,5$ ), la réduction du facteur d'amplification est significative. Il paraît donc important, si l'on souhaite avoir une longueur de cohérence la plus grande possible, **de garder la saturation faible**.

On compare parfois un échantillon diffusant en régime de localisation forte à un cristal photonique. Il s'agit en fait de son équivalent désordonné. Cette analogie laisse penser que l'on peut avoir des facteurs de surintensités locales élevées. On peut aussi voir ce phénomène de *build-up* comme associé à l'apparition des modes localisés. **Pour un échantillon atomique, il paraît alors possible de saturer localement le milieu même si le flux incident n'est pas saturant**. Cet effet de *build-up* peut en effet être subtil puisque l'on ne connaît pas *a priori* la taille caractéristique des modes localisés. Si cette taille est petite, même avec une puissance faible, il sera possible de saturer le milieu et donc de détruire le mode localisé.

Dans un premier temps, on pourrait être déçu par l'influence néfaste de la saturation sur le transport cohérent. Il s'agit pourtant d'une originalité des atomes en tant que diffuseurs. Si l'on passe du régime localisé à faible saturation à un régime diffusif (ou non localisé) à forte saturation, on peut voir alors cette transition d'un isolant vers un conducteur comme induite par la saturation. Cette description ressemble à celle d'un semi-conducteur électronique. On peut poursuivre cette analogie en remarquant que, dans notre situation, la « résistivité » décroît lorsque la température augmente : lorsque l'agitation thermique croît, on s'éloigne bel et bien du régime localisé (isolant), comme on l'a vu en 1.1.2. On voit donc une grande richesse de comportement aussi bien en fonction de la saturation que de la vitesse résiduelle.

Nous avons largement exploité en 1.4.1 le parallèle entre les deux phénomènes puisqu'ils constituent tous deux un processus inélastique. L'effet de la température reste plus simple du point de vue théorique. Il est possible de mener des calculs semi-analytiques pour estimer la réduction du contraste d'interférence causée par l'élargissement Doppler. En ne considérant que l'ordre  $n$  de diffusion multiple, on peut montrer [61] que la réduction du facteur d'amplification correspondante est **fortement dépendante de l'ordre de diffusion**. On peut donc

conclure que les chemins de diffusion seront d'autant plus sensibles au *dephasing* qu'ils sont longs. L'effort expérimental actuel sur le strontium n'est pas porté vers une étude systématique d'une telle dépendance : il est en effet tourné vers une augmentation de la densité en utilisant la transition d'intercombinaison. Nous en décrirons le premier pas dans le chapitre 4 : il consiste à charger efficacement le piège sur cette transition, l'objectif étant d'approcher le régime de localisation forte.

Pour conclure, nous allons tâcher d'exprimer plus quantitativement le critère de Ioffe-Regel (expr. 1) pour un gaz d'atomes. Plutôt que l'expression  $k_L l \leq 1$ , on préférera utiliser la densité<sup>7</sup>.

$$\boxed{k_L l \leq 1 \iff n \lambda_{\text{opt}}^3 \geq \frac{4\pi^2}{3} \simeq 13,16} \quad (1.54)$$

Nous avons mesuré pour notre nuage d'atome une densité de  $1,3 \cdot 10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup> (voir p. 46). On peut alors évaluer  $k_L l$  et/ou  $n \lambda_{\text{opt}}^3$  pour notre échantillon atomique dans le piège magnéto-optique sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  (461 nm) :

$$k_L l \simeq 10^{-4} \iff n \lambda_{\text{opt}}^3 \simeq 1,6 \cdot 10^{-3} \quad (1.55)$$

On est alors bien loin du régime de localisation forte. Il est donc nécessaire d'augmenter la densité de notre nuage.

La course à la forte densité et la basse température furent l'objet de nombreux efforts dans le domaine du piégeage des vapeurs atomiques jusqu'à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein (BEC) [35]. On peut s'étonner de l'analogie entre les critères de condensation et de Ioffe-regel (expr. 1.54) :

$$\boxed{\text{Ioffe-Regel : } n \lambda_{\text{opt}}^3 \geq 13,16 \quad \text{BEC : } n \lambda_{\text{dB}}^3 \geq 2,61} \quad (1.56)$$

On ne doit pas confondre les deux critères : l'un fait intervenir la longueur d'onde optique et l'autre la longueur d'onde de de Broglie. Cette dernière est directement liée à la température  $\lambda_{\text{dB}} = h/\sqrt{2\pi m k_b T}$ . Rappelons que l'expression 1.54 n'est vraie que pour des diffuseurs atomiques à résonance. Il est cependant possible de comparer les deux expressions dans la mesure où nous avons choisi d'utiliser des atomes refroidis par laser. Une échelle « naturelle » de ce type de refroidissement est en effet la température de recul. On peut comparer alors l'impulsion de l'atome à celle d'un photon et donc la longueur d'onde optique à celle de de Broglie. Détaillons un peu cette remarque : pour un échantillon à la température de recul, on aura donc  $\lambda_{\text{dB}} = \lambda_{\text{opt}}/\sqrt{2\pi}$ . Au seuil de condensation et à cette température, on aura  $n \lambda_{\text{dB}}^3 \simeq 2,61$  et par suite  $n \lambda_{\text{opt}}^3 \simeq 41,14$ . On sera donc en régime de localisation forte. Dans le tableau 1.36 nous avons fait un bilan des densités accessibles avec des atomes froids.

<sup>7</sup>Rappelons que  $l = 1/n\sigma$  et  $\sigma = 3\lambda_{\text{opt}}^2/2\pi$

Échantillon	$n$	T	$n \lambda_{\text{opt}}^3$ $\geq 13,16 ?$	$n \lambda_{\text{dB}}^3$ $\geq 2,61 ?$
MOT : $^{133}\text{Cs}$ [81]	$2 \cdot 10^{11}$	$10 \mu\text{K}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Raman Cooling : $^{23}\text{Na}$ [37]	$4 \cdot 10^{11}$	$1 \mu\text{K}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
BEC (1995) : $^{87}\text{Rb}$ [35]	$2,6 \cdot 10^{12}$	170 nK	1	2,61
Katori (1999) : $^{88}\text{Sr}$ [19]	$6 \cdot 10^{11}$	550 nK	$6 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$
« Nous » : $^{88}\text{Sr}$ p. 46	$1,3 \cdot 10^{10}$	3 mK	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-10}$
Nice-Rb : $^{85}\text{Rb}$ [60]	$6 \cdot 10^{10}$	$100 \mu\text{K}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-7}$
« Hypothétique » : $^{88}\text{Sr}$	$1,4 \cdot 10^{14}$	460 nK	13,7	3

FIG. 1.36 – Comparaison des critères de condensation de Bose-Einstein et de Ioffe-Regel pour des vapeurs atomiques refroidies. La densité  $n$  est exprimée en atomes par centimètre cube. « Échantillon » désigne la technique de refroidissement utilisée : MOT pour piège magnéto-optique, BEC pour condensat de Bose-Einstein, Katori (1999) désigne un échantillon de strontium refroidi sur la raie d'intercombinaison [19]. « Nice-Rb » désigne un MOT de rubidium développé dans le laboratoire [60]. « Hypothétique » désigne un échantillon hypothétique de strontium à la température de recul pour la transition d'intercombinaison (689 nm) ; on a choisi sa densité pour franchir le critère de localisation de photons à 461 nm.

Cette comparaison n'a pas pour objectif de démontrer la quasi-équivalence des deux critères pour des atomes refroidis par laser. **Le critère de Ioffe-Regel laisse une grande marge de manœuvre puisqu'il est indépendant de la température.** Il est en effet possible de jouer sur la densité spatiale en gardant la densité dans l'espace des phases constante. En utilisant des potentiels dépendants du temps, **il est possible d'augmenter la densité au prix d'une température plus élevée** [36]. Dans le mesure où l'on ne franchit pas le critère de brisure dynamique (expr. 1.16), il paraît possible d'atteindre le régime de localisation forte.

Nous avons résumé cela sur la figure 1.37. Il s'agit d'un diagramme densité-température.

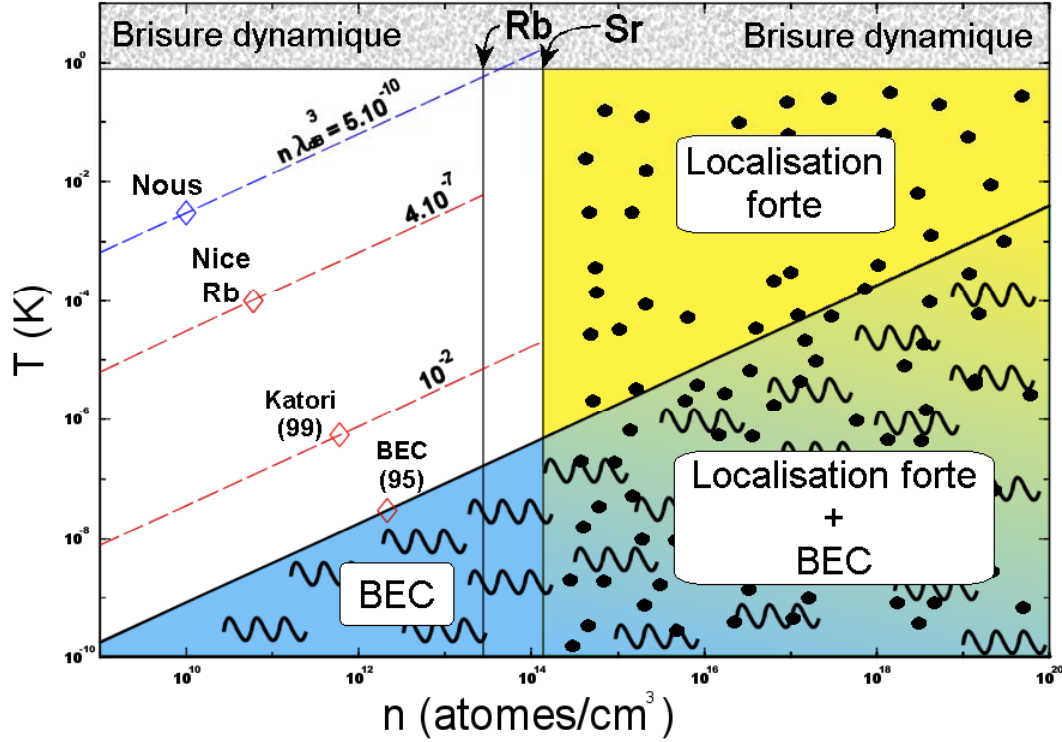


FIG. 1.37 – Représentation des critères de condensation (BEC), de Ioffe-Regel (localisation forte) et de brisure dynamique. Les losanges représentent les échantillons décrits dans le tableau 1.36. On a prolongé chaque point par une droite en pointillés qui correspond à une densité dans l'espace de phase constante.

Nous y avons fait figurer la limite de condensation

$$nT^{-\frac{3}{2}} \geq 2,61 \times (2\pi mk_b)^{3/2} / h^3$$

qui est une droite de pente 3/2 en échelle logarithmique. Le critère de Ioffe-Regel

$$n \geq 13,16 / \lambda_{\text{opt}}^3$$

est une droite verticale qui dépend de la transition considérée. Le critère de brisure dynamique (expr. 1.16) sera représenté par une droite horizontale,

$$T \geq (m/3k_b) (\Gamma_b/k_L)$$

qui dépend aussi de la transition.

Il n'est pas réaliste de continuer à travailler sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  si l'on souhaite accroître la densité spatiale. On constate sur la figure 1.37 qu'essayer d'augmenter la densité en jouant dans l'espace des phases ne permet pas d'accéder au critère de Ioffe-Regel avant de franchir la limite de brisure dynamique.



Comme l'a fait H. Katori, nous nous tournerons donc vers la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  d'intercombinaison qui semble bien plus prometteuse comme nous le verrons au chapitre 4.

## Chapitre 2

# Refroidissement sur la transition

$$^1S_0 \rightarrow ^1P_1$$

La théorie semi-classique du refroidissement Doppler a historiquement utilisé l'image d'un atome à deux niveaux. Elle reste un outil de choix pour introduire les différentes notions mises en jeu pour le refroidissement d'atomes par laser. Expérimentalement elle s'est trouvée rapidement dépassée par la mesure de température bien inférieure à la prédiction [65]. Le refroidissement Sisyphe est interprété en impliquant plusieurs sous-niveaux du fondamental. Les atomes alcalins ne sont donc pas un milieu modèle pour la vérification de la théorie Doppler. Par un choix pertinent des polarisations, D. Weiss [66] a pourtant montré que la température mesurée était plus grande que la limite Doppler. Le piégeage et refroidissement d'alcalino-terreux, qui ne se développa qu'un peu plus tard, permit de nouvelles mesures et remit cette théorie au goût du jour. Certains isotopes possèdent en effet un niveau fondamental non-dégénéré et il n'existe donc pas de mécanisme de refroidissement sub-Doppler. Des mesures de température sur calcium [67] et plus tardivement sur strontium [68] ont mis en évidence des températures plus élevées que la limite théorique. Même si la théorie semi-classique impliquant un atome à deux niveaux fut historiquement la première, les limitations expérimentales en sont encore mal connues à ce jour.

Il semble généralement toujours intéressant d'aller vers de basses températures. Le régime Doppler n'est pas intéressant en lui-même si l'on souhaite aller par exemple vers la dégénérescence quantique. Les températures restent en effet toujours largement supérieures à la limite « naturelle » du refroidissement radiatif que constitue la température de recul. Il est cependant un passage obligé pour le piégeage des alcalino-terreux, qui dans une seconde étape pourront être refroidis sur une autre transition. La phase de transfert demande généralement une température initiale la plus basse possible. Dans le chapitre 4, nous verrons en effet que la température dans le piège  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  est un paramètre crucial pour l'efficacité du transfert vers un piège sur la raie d'intercombinaison.

Du point de vue de la localisation des photons dans le nuage, les effets de

température ne peuvent pas toujours être négligés, comme on l’a vu page 27 (expr. 1.16). Dans les études que nous avons réalisées la vitesse résiduelle dans le piège bleu<sup>1</sup> reste inférieure à la limite de brisure dynamique. On peut cependant imaginer utiliser cet échantillon si l’on souhaite à l’inverse observer cet effet en particulier. Puisqu’il est possible d’augmenter grâce au laser la vitesse résiduelle dans l’échantillon. Mentionnons que l’effet de brisure dynamique n’a été observé expérimentalement que très récemment en utilisant un nuage de rubidium [61].

Nous ne souhaitons pas étudier le phénomène de brisure dynamique en particulier : il est *a priori* négligeable vu la température dans le piège bleu. On préférera en ce qui nous concerne profiter des techniques laser pour accroître la densité pour étudier les effets de localisation dans ce régime. Cela ne sera possible qu’en transférant le nuage dans un piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ .

La motivation de notre analyse a en fait un double objectif : essayer de diminuer la température pour optimiser le transfert vers un piège sur la raie d’intercombinaison, et plus généralement comprendre le mécanisme de refroidissement qui impose la dynamique des atomes dans la mélasse optique (il diffère du mécanisme Doppler et semble en pratique imposer la température).

Pour notre étude, nous avons choisi de rester le plus proche possible des conditions d’application de la théorie Doppler. Il est certes plus facile expérimentalement d’étudier la dynamique du piège à trois dimensions (3D). X. Xu [70] a ainsi étudié la température à partir de mesures de taille du nuage et de constante de raideur du piège. L’ensemble est consistant et montre un désaccord flagrant avec la théorie Doppler. Nous avons préféré en ce qui nous concerne faire des mesures à 1D en absence de champ magnétique : les atomes sont alors en interaction avec une mélasse optique 1D. On mesurera directement la température en mesurant l’expansion balistique. On s’affranchit alors de la dépendance de la force avec le champ magnétique et du théorème d’équipartition qui a permis l’étude de X. Xu[70]. Après un rappel de la théorie semi-classique du refroidissement Doppler, nous présenterons dans une seconde partie le dispositif expérimental et les mesures de température dans une mélasse 1D. De façon générale, les températures mesurées sont plus élevées que la prédiction théorique. Après avoir mis en évidence l’existence d’un chauffage supplémentaire, nous présenterons dans une troisième partie un modèle analytique ainsi qu’une simulation Monte-Carlo qui prennent en compte ce mécanisme. Nous en confronterons les résultats avec les mesures expérimentales.

---

<sup>1</sup>Le terme « bleu » désigne pour des raisons de simplicité la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  à 461 nm du  $^{88}\text{Sr}$ .

## 2.1 Rappel sur le refroidissement Doppler

L'interaction dans une mélasse 1D est la situation la plus simple considérée pour le refroidissement laser. Elle fut historiquement proposée pour des atomes neutres par T.W. Hänsch et A.L. Schawlow en 1975 [71]. La théorie perturbative permet de mener des calculs analytiques et de prédire la dépendance caractéristique de la température avec le désaccord du laser. Qualitativement cette dépendance est en effet très différente pour les refroidissements Doppler et Sisyphé. La situation expérimentale considérée cadre effectivement avec les hypothèses qui sous-tendent cette théorie :

- La transition considérée implique un niveau fondamental avec  $J = 0$  et un niveau excité avec  $J' = 1$ . Par un choix pertinent des polarisations, on est bien dans le cadre du modèle de l'atome à deux niveaux. **Les résultats présentés dans cette partie considèrent que les polarisations sont linéaires et parallèles.** La configuration sera notée  $lin \parallel lin$ . On considérera une configuration différente seulement dans la partie 2.2.3.
- Pour pouvoir considérer classiquement les degrés de liberté externes, il est nécessaire être dans la condition de raie large [62]. On doit comparer la largeur naturelle de la transition  $\Gamma_b$  avec la fréquence de recul  $\omega_b^R$ , on a bien

$$\Gamma_b = 2\pi \times 32 \text{ MHz} \gg \omega_b^R = 2\pi \times 10,7 \text{ kHz}$$

La condition étant vérifiée, on veut pouvoir traiter classiquement les degrés de liberté externes. On suppose donc que l'extension spatiale de la fonction d'onde est petite devant la longueur d'onde et que la dispersion sur le déplacement Doppler est petite devant la largeur naturelle. Nous discuterons de ces deux hypothèses en 2.1.3.

- L'atome est placé dans deux ondes planes progressives (suivant  $\pm \vec{k}_L$ ) se propageant en sens contraire selon l'axe  $X$ .

Nous rappellerons d'abord les résultats à faible saturation en supposant le diagramme de rayonnement isotrope. Ce régime limite a l'avantage de fournir des résultats intuitifs et d'introduire toutes les notions-clés du refroidissement. Nous fournirons ensuite des résultats plus généraux pour un atome à deux niveaux quelle que soit la saturation. L'intérêt de traiter le cas général est d'exhiber la dépendance de la température avec l'intensité de la mélasse. La situation expérimentale est en effet largement épurée puisque dans une situation 1D, il ne reste de deux paramètres expérimentaux : le désaccord et l'intensité.

### 2.1.1 Faible saturation

À faible saturation, il est possible de sommer indépendamment les deux pressions de radiation exercées par les faisceaux. Pour un atome à vitesse  $V_X$ , la force

vaut [9] :

$$F(V_X) = \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L + k_L V_X)^2/\Gamma_b^2} - \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - k_L V_X)^2/\Gamma_b^2} \right) \quad (2.1)$$

$I_{\text{sat}} = 42,5 \text{ mW/cm}^2$  est l'intensité de saturation. Rappelons que le désaccord est défini par  $\delta_L = \omega - \omega_{\text{at}}$  et sera donc **négalif** dans la situation usuelle du refroidissement Doppler.

En linéarisant la force autour de l'origine, il est possible de définir le coefficient de friction  $\gamma$  par  $F(V_X) \simeq -m\gamma V_X$ . On obtient :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2} \quad (2.2)$$

On assimilera la température  $T$  à la largeur RMS de la distribution en vitesse  $\sigma$  à l'aide de la relation :

$$m\sigma_v^2 = k_B T \quad (2.3)$$

Il nous faut maintenant évaluer les fluctuations de la force exercée sur les atomes (autrement dit le coefficient de diffusion). Elles induisent un élargissement de la distribution des vitesses que vient contrecarrer la friction. Ce traitement est identique à celui du mouvement brownien.

$$\frac{d(m\sigma_v)^2}{dt} = -2\gamma (m\sigma_v)^2 + 2D \quad (2.4)$$

$D$  est le coefficient de diffusion en impulsion.

L'état stationnaire nous donne la température :

$$k_B T = m\sigma_v^2 = \frac{D}{m\gamma} \quad (2.5)$$

Le calcul complet de  $D$  n'est pas simple. On retrouve dans le résultat deux contributions, celle du champ quantique  $D_{\text{sp}}$  qui est directement proportionnelle au taux d'émission spontanée et celle du champ laser dont le calcul complet est délicat [72]. A faible saturation, les deux contributions sont égales à  $\hbar^2 k_L^2 \Gamma_b s / 2$  en supposant que le diagramme de rayonnement est isotrope ( $s$  est le paramètre de saturation). Finalement pour  $D$  on obtient :

$$D = \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b s = \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad \text{où } s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (2.6)$$

L'équation 2.5 nous donne la température, à faible saturation pour un diagramme de rayonnement isotrope.

$$T = \frac{\hbar \Gamma_b}{4k_b} \left( \frac{2|\delta_L|}{\Gamma_b} + \frac{\Gamma_b}{2|\delta_L|} \right) \quad (2.7)$$

elle possède un minimum pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  qui est la limite « usuelle » du refroidissement Doppler  $T = \frac{\hbar\Gamma_b}{2k_b}$ .

La dépendance de la température avec le désaccord est caractéristique du mécanisme de refroidissement Doppler. En prenant en compte le diagramme de rayonnement du dipôle, on modifie l'expression du coefficient de diffusion (d'un facteur 7/10). Le cas général que nous allons rappeler maintenant exhibe cette différence. Il montre aussi une dépendance de la température avec la saturation.

### 2.1.2 Cas général

L'atome est placé à l'intérieur de l'onde stationnaire créée par les deux faisceaux contra-propageants. On cherche à calculer analytiquement la dépendance de la température avec le paramètre de saturation d'un faisceau. Il faut pouvoir fournir l'expression de la force pour un atome en mouvement lent dans l'onde stationnaire ainsi que celle du coefficient de diffusion pour un atome au repos. La force est donc développée au premier ordre en vitesse, ce qui nous donne le coefficient de friction d'une part. La diffusion est supposée indépendante de la vitesse d'autre part (mouvement brownien). Nous allons sommairement rappeler la démarche et les résultats pour les deux calculs. Nous en déduirons finalement l'expression de la température.

#### Expression générale du coefficient de friction

Dans l'approximation semi-classique, il est possible de définir la force quelles que soient la vitesse et la position de l'atome. Notons que la vitesse doit rester suffisamment faible pour que  $k_L V_X$  soit très inférieure à  $\Gamma_b$ , ce qui sera discuté en 2.1.3. Pour effectuer un développement au premier ordre, on impose un mouvement rectiligne uniforme lent puis on résout les équations de Bloch optiques dans ce cas. Le paramètre de saturation dépend alors de la position :  $S(X) = 4s_0 \cos^2(k_L X)$ . Ce calcul a été effectué par Ashkin et Gordon [72]. Donnons l'expression de la force :

$$F(X, V_X) = \hbar k_L \delta_L \frac{S(X)}{1 + S(X)} \tan(k_L X) \times \left( 1 + \frac{4(1 - S(X) - 2S(X)^2(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2))}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)\Gamma_b(1 + S(X))^2} V_X k_L \tan(k_L X) \right) \quad (2.8)$$

Pour obtenir le coefficient de friction, on moyenne la force sur une période optique. Le coefficient de  $V_X$  dans le développement nous donne  $m\gamma$  (éq. (23) de [65]) :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{-2\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4s)^{3/2}} \left( \frac{4s(1 + 2s)}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} - 1 - 6s - 6s^2 + (1 + 4s)^{3/2} \right) \quad (2.9)$$

Il nous faut maintenant estimer le coefficient de diffusion en impulsion. Il sera évalué pour un atome au repos ( $D$  indépendant de  $v$ ), l'équation 2.5 restera donc valable et nous permettra de calculer la température.

### Expression générale du coefficient de diffusion

Contrairement au calcul de la friction qui est lié à la valeur moyenne de la force, la diffusion en impulsion est liée à ses fluctuations. Il est nécessaire de connaître les fonctions de corrélation du dipôle atomique en appliquant le théorème de régression quantique. Ce calcul est effectué dans [72] : nous notons à nouveau  $S(X) = 4s_0 \cos^2(k_L X)$  :

$$\begin{aligned}
D(X) &= \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{S(X)}{4(1+S(X))^3} \tan^2(k_L X) \\
&\times \left( S(X)^3 (1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) + 3S(X)^2 + S(X) \left(1 - \frac{4}{3}\delta_L^2/\Gamma_b^2\right) + 1 \right) \\
&+ \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{2}{5} \frac{S(X)}{1+S(X)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

C'est à nouveau en moyennant sur une période optique que l'on obtient l'expression du coefficient de diffusion  $D$ . Ce calcul est effectué dans [73] :

$$\boxed{
\begin{aligned}
D &= \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{1}{32(1+4s)^{3/2}} \times \left[ \begin{aligned}
&(1+4s)^{3/2} (16s (1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) + 96\delta_L^2/\Gamma_b^2 + \frac{16}{5}) \\
&- 32(3 + 20s)\delta_L^2/\Gamma_b^2 \\
&+ 16s^2 \left( \frac{4}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} + 11 - 15(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \right) \\
&- \frac{16}{5}(1 + 4s) \end{aligned} \right]
\end{aligned}
} \tag{2.11}$$

La force n'étant développée qu'au premier ordre et le coefficient de diffusion étant supposé indépendant de la vitesse, l'équation 2.5 reste valable.

### Dépendance de la température avec le désaccord et le paramètre de saturation

En utilisant les équations 2.9 pour  $\gamma$  et 2.11 pour  $D$ , on obtient une formule analytique générale pour la température  $T = \frac{D}{k_B m \gamma}$ .

Vérifions déjà la limite de cette expression à faible saturation afin de comparer au traitement 2.1.1. Au premier ordre en  $s$  :

$$\gamma \sim \frac{\hbar k_L^2 (-2\delta_L)}{m} \frac{s}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (2.12)$$

avec  $s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$ . On reconnaît l'expression 2.2. Ce n'est pas rigoureusement le cas pour  $D$ , au premier ordre :

$$D \sim \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{7}{10} s \quad (2.13)$$

On voit ici apparaître un facteur  $7/10$  qui traduit l'anisotropie du diagramme de rayonnement dipolaire. On le retrouve sur la température

$$T \sim \frac{7}{10} \frac{\hbar \Gamma_b}{4k_b} \left( \frac{2|\delta_L|}{\Gamma_b} + \frac{\Gamma_b}{2|\delta_L|} \right) \quad (2.14)$$

dont le **minimum en fonction du désaccord est atteint pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et vaut  $T_{\text{min}} = \frac{7}{10} \frac{\hbar \Gamma_b}{2k_b}$** . Avec  $\Gamma_b = 2\pi \times 32$  MHz,  $T_{\text{min}} = 0,538$  mK.

Pour conclure, nous allons tracer (fig. 2.1) les deux dépendances caractéristiques de la température. À faible saturation, la dépendance en fonction du désac-

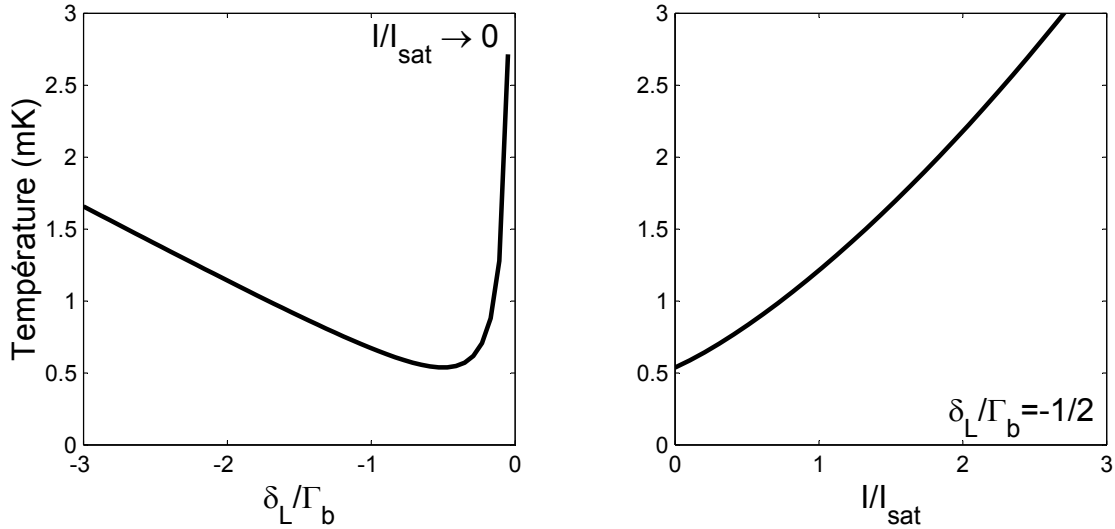


FIG. 2.1 – Température dans le cadre de la théorie Doppler en fonction des deux paramètres de la mélasse 1D.

cord est sans doute la plus significative du refroidissement Doppler : elle montre



en effet un minimum pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . Elle peut être prédite assez intuitivement par un raisonnement simple comme on l'a vu en 2.1.1.

L'évolution en fonction de  $I/I_{\text{sat}}$  est moins connue. Cependant, si on souhaite faire une étude systématique, il n'est pas raisonnable de négliger ce paramètre pour se focaliser uniquement sur le désaccord. Notons par exemple que pour  $I/I_{\text{sat}} = 1$  et  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ , la température attendue est de 1,21 mK à comparer à  $T_{\text{min}} = 0,538$  mK soit  $\sigma_v = 22,5$  cm/s.

Afin de vérifier ces deux prédictions, nous avons réalisé un montage expérimental adéquat. La partie 2.2 est dédiée à sa description ; nous présenterons par ailleurs les résultats des mesures effectuées. Avant cela, nous nous devons de discuter des limites de validité du modèle semi-classique du refroidissement. En pratique, nous serons toujours dans sa gamme de validité. C'est ce que nous allons vérifier en terminant cette partie dédiée aux rappels.

### 2.1.3 Limites de validité

Les expressions 2.9 et 2.11 montrent déjà une grande richesse de comportement. Le point le plus remarquable est que **le coefficient de friction change de signe à forte intensité**, ce qui impose de changer le signe du désaccord. Même s'il s'agit d'un processus connu [74], on ne peut l'expliquer simplement qu'en utilisant le formalisme de l'atome habillé. À forte intensité, les processus de redistribution de photons entre les deux ondes deviennent alors prédominants. La modulation du déplacement lumineux joue le rôle des creux et des bosses que traverse l'atome lors du mécanisme de refroidissement Sisyphe. Plus connu avec des atomes possédant plusieurs sous-niveaux du fondamental et en considérant un gradient de polarisation (à faible intensité), le principe est parfaitement analogue dans une mélasse « désaccordée vers le bleu » à forte intensité. En figure 2.2, nous avons représenté la température dans l'espace des paramètres  $(\delta_L, I/I_{\text{sat}})$ .

Ce type de refroidissement ne sera en pratique jamais utilisé. D'une part, les températures sont plus élevées que dans le cas plus usuel d'une « mélasse rouge ». D'autre part pour obtenir des températures comparables à ce que nous avons pu mesurer (quelques millikelvins), il faudrait disposer de plusieurs dizaines de fois  $I_{\text{sat}}$  inaccessibles expérimentalement. Ce n'est *a priori* pas un régime intéressant, qui est cependant pris en compte par la théorie semi-classique.

Ce modèle reste malgré tout limité. Il ne sera vrai en effet qu'aux faibles vitesses. L'expression du coefficient de friction est issue de la linéarisation de la force autour de la vitesse nulle. On peut donc d'ores et déjà constater qu'une telle approximation ne sera pas réaliste pour des vitesses élevées. Un développement au premier ordre en  $V_X$  n'est alors pas suffisant et il faudrait par suite généraliser l'expression 2.4. Afin de vérifier que l'on est bien dans la plage de linéarité de la force (typiquement  $\Gamma_b/k_L$ ), il faudrait comparer la largeur de la distribution  $\sigma_v$  à  $\Gamma_b/k_L = 14,7$  m/s. En pratique, les vitesses RMS que nous mesurerons seront toujours au moins d'un ordre de grandeur inférieures à 14,7 m/s. Il faut cependant

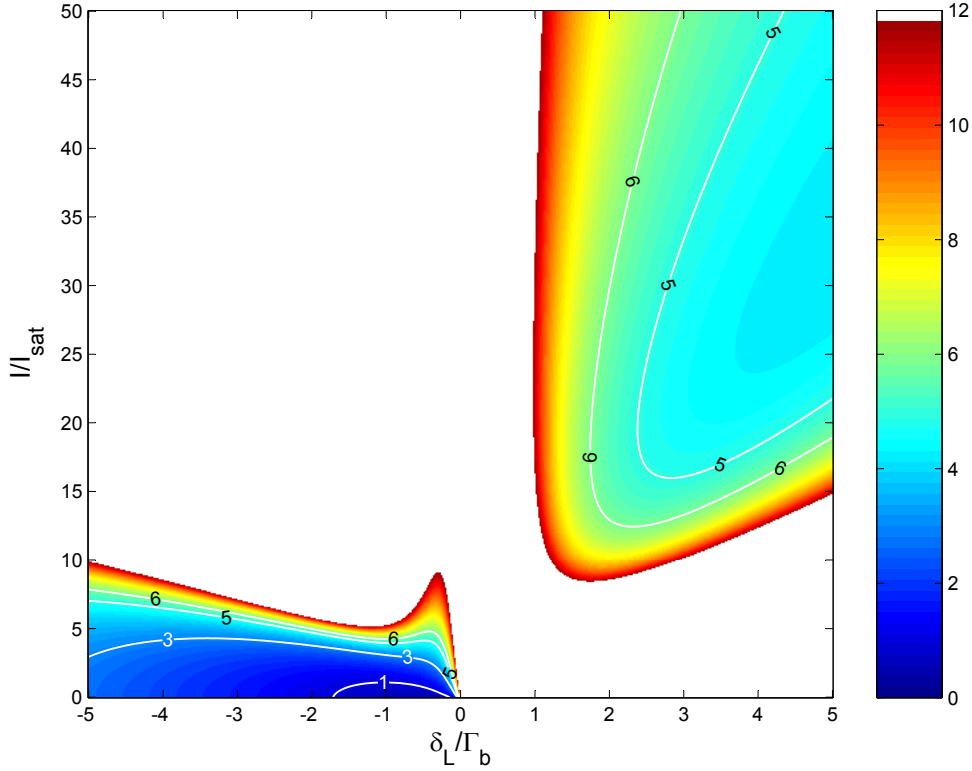


FIG. 2.2 – Température en millikelvin en fonction des deux paramètres  $\delta_L$  et  $I/I_{\text{sat}}$ . En blanc, les zones où le coefficient de friction est « négatif » et où il n'existe pas d'état stationnaire pour la distribution en vitesse.

noter que développer l'expression de la force à des ordres plus élevés n'est pas suffisant si l'on souhaite étendre la théorie Doppler à des vitesses quelconques.

L'expression de la force même sera modifiée lorsque  $k_L V_X \sim \Gamma_b$ . Un tel calcul est possible quelle que soit la vitesse de l'atome en utilisant la méthode des fractions continues afin de trouver le régime forcé pour le vecteur de Bloch [75]. Dans ce cadre là et à forte intensité, les variations de la force avec  $V_X$  sont surprenantes : la force peut en effet changer de signe et a surtout un comportement résonant autour de valeurs remarquables de  $k_L V_X = -\delta_L / (2n + 1)$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Ce comportement est la conséquence de processus multi-photoniques (appelé « **dopplerons** ») qui sont importants à forte intensité. Ce phénomène sort largement du cadre de la théorie développée en 2.1.2, même si en pratique il faut des intensités de saturation plus élevées que celle que nous utiliserons. À l'inverse, il est aussi intéressant de se poser la question des faibles vitesses.

On s'est en effet affranchi de la dépendance spatiale de la force (plus exactement de  $S(X)$  dans l'expression 2.8) en moyennant sur une période optique. Cela n'a de sens que si l'atome se déplace à l'intérieur de l'onde stationnaire et

« explore » plus d'une période optique. Cela n'a *a priori* rien d'évident, en effet aux faibles vitesses il est possible que l'atome vienne se localiser à l'intérieur des puits de potentiel  $U_{\text{dip}}$  créés aux ventres de l'onde stationnaire [63]. Afin de prendre en compte cet effet, il nous faut estimer la profondeur des puits : **le potentiel dipolaire<sup>2</sup> est modulé spatialement dans l'onde stationnaire**; il vaut

$$U_{\text{dip}}(X) = \frac{\hbar}{2} \delta_L \ln(1 + S(X)) \quad (2.15)$$

Dans la gamme de paramètres que nous allons explorer, la profondeur des puits sera au maximum de  $\frac{\hbar}{2} \Gamma_b \frac{\ln(3)}{2}$  (pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et  $I/I_{\text{sat}} = 1$ ) soit  $420 \mu\text{K}$ . Nous mesurerons autour de ce jeu de paramètres des températures qui sont au moins d'un ordre de grandeur supérieures à la profondeur des puits.

Il semble finalement que la théorie Doppler, même si elle n'est pas toujours valide, soit bien adaptée à notre situation expérimentale. Il existe certes **des effets subtils qui sortent du cadre de la théorie semi-classique, mais les ordres de grandeurs mis en jeu nous permettent de les négliger en pratique**. Nous pouvons nous consacrer maintenant à la comparaison de cette théorie à nos mesures expérimentales.

## 2.2 Réalisation expérimentale

Les différentes techniques de mesure de température ont largement été utilisées sur les alcalins. La plus utilisée consiste à observer l'expansion balistique après un certain **temps de vol libre**. On peut par exemple placer un faisceau sous le nuage et mesurer le passage des atomes dans la zone d'interaction. Cette technique de TOF (pour *time of flight*) est particulièrement pratique et confortable : à partir d'un signal temporel, on peut extraire la température. Comme nous souhaitons faire des mesures à 1D, il semble beaucoup plus direct d'observer la taille du nuage suivant l'axe de la mélasse. On suivra alors son évolution après différents temps d'expansion balistique.

L'ordre de grandeur typique **des vitesses dans le piège** et dans la mélasse est  $100 \text{ cm/s}$ . Le temps typique de l'expansion balistique du nuage sera donc la milliseconde. À  $1 \text{ ms}$  correspond un parcours de  $1 \text{ mm}$  à comparer à la taille

---

<sup>2</sup>On connaît sans doute mieux l'expression du **light shift dans l'état fondamental** qui joue un rôle crucial pour le refroidissement sub-doppler [9, p.101] :

$$\Delta E_g = \frac{\hbar}{2} \delta_L S$$

Il s'agit en fait du développement de  $U_{\text{dip}}$  (expr. 2.15) à faible saturation [64].

du piège soit 8 mm en considérant le *waist* des faisceaux<sup>3</sup>. Les différents temps d'expansion balistique ne devront pas dépasser quelques millisecondes. Pour les mesures nous allons procéder comme suit :

1. Le piège magnéto-optique est éteint (faisceaux et gradient du champ magnétique) à l'instant choisi comme origine des temps.
2. Le nuage « libre » est alors mis en interaction avec un mélasse 1D pendant un temps aussi long que possible pour atteindre l'état stationnaire de la distribution des vitesses.
3. Après une phase de vol libre (expansion balistique), on observe à nouveau le nuage pour mesurer son extension spatiale suivant l'axe de la mélasse. Cette mesure sera répétée pour différents temps d'expansion balistique.

Lors de la présentation du dispositif nous donnerons sommairement les caractéristiques du nuage dans le piège bleu. Après avoir détaillé la configuration de faisceaux choisie pour le piège d'une part et pour la mélasse 1D d'autre part, nous présenterons plus précisément la séquence de temps ébauchée ci-dessus. Une seconde partie est dédiée au traitement des mesures et à la présentation des résultats.

### 2.2.1 Présentation du dispositif

Le piégeage et le refroidissement sur la transition bleue a largement été développé dans [21]. Nous allons malgré tout rappeler sommairement les éléments caractéristiques du piège et du nuage. Nous décrirons enfin la séquence de temps qui reste largement tributaire du dispositif d'acquisition. Plus précisément, nous détaillerons la procédure de traitement des données qui nous permettra d'extraire la largeur de la distribution en vitesse. Avant cela, nous allons présenter la configuration des modulateurs acousto-optiques et des faisceaux dédiés au piège et à la mélasse 1D.

#### Configuration des MAO

La configuration des MAO est très proche de celle utilisée pour les mesures de retrodiffusion cohérente (p. 43). Nous la présenterons donc sommairement à l'aide du schéma en figure 2.3

Le MAO produisant le faisceau de la mélasse est utilisé en dessous de sa fréquence nominale (80 MHz), en faisant varier la radio-fréquence de 50 à 65 MHz, on obtient pour la mélasse une variation du désaccord de  $\delta_{\text{Mélasse}} \simeq -30$  MHz à

---

<sup>3</sup>On définit le *waist*  $w$  à partir de la dépendance de l'intensité  $I(r)$  d'un faisceau gaussien :

$$I(r) = I(0) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$$

dans la direction  $r$  perpendiculaire à l'axe de propagation.

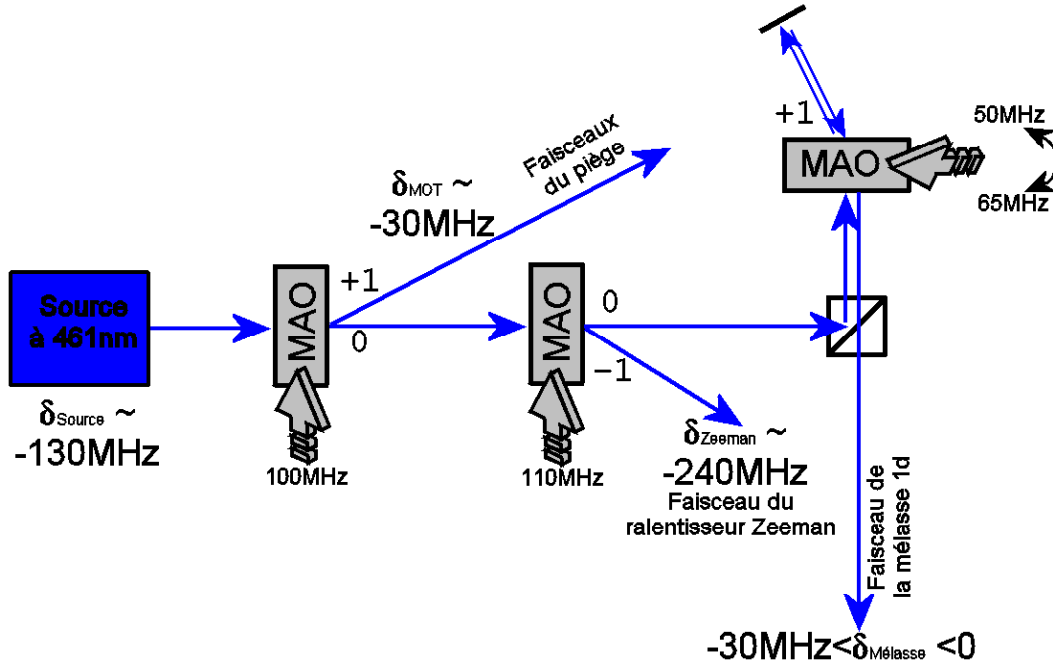


FIG. 2.3 – Résumé schématique de la configuration des MAO

0. On balayera donc **la gamme de  $-\Gamma_b$  à 0**. La mélasse sera donc désaccordée vers le rouge.

Avant de résumer la partie optique concernant la mélasse 1D, rappelons brièvement les caractéristiques du piège bleu.

### Caractérisation du piège

Notons ici simplement les différences par rapport aux caractéristiques présentées en page 44. Le nuage contient avec ces paramètres là environ  $10^7$  **atomes** pour une **taille RMS de 0,6 mm**. Nous avons choisi de travailler avec un faible nombre d'atomes, nous n'utiliserons donc pas les deux repompeurs (p. 44). Nous discuterons plus loin de l'influence du nombre d'atomes sur la température. Le **temps de chargement** du piège est ici relativement faible soit 22 ms.

### Mise en place de la mélasse 1D

Après le MAO en double passage, le faisceau est filtré spatialement pour produire un faisceau gaussien dont le *waist* est de 3,5 mm. Son intensité sera contrôlée en changeant le niveau radio-fréquence du MAO : elle restera inférieure à l'intensité de saturation  $I \leq I_{\text{sat}} = 42,5 \text{ mW/cm}^2$ . Le faisceau est centré sur le nuage dans le piège puis rétro-réfléchi pour produire une mélasse optique.

Nous n'avons pour le moment que brièvement fait mention de la polarisation du champ. Elle est un élément important si l'on souhaite vérifier les calculs de 2.1.2. Nous avons considéré un atome à deux niveaux dans une onde stationnaire. En réalité, la transition considérée  $J = 0 \rightarrow J' = 1$  doit être restreinte aux sous-niveaux  $m = 0 \rightarrow m' = 0$ . Nous gardons donc pour la mélasse **une polarisation linéaire**, qui est la même pour les deux champs. On produit bien **une onde stationnaire**. Il est possible d'étudier diverses configurations des polarisations : linéaire croisées et circulaires  $\sigma^+ - \sigma^-$ . Ces différents cas sont intéressants pour une transition  $J = 0 \rightarrow J' = 1$ . À faible saturation, les deux ondes peuvent être largement considérées comme indépendantes. Leurs polarisations relatives ne changent pas la friction et la diffusion en impulsion, donc la dépendance de la température avec le désaccord (expr. 2.14) reste inchangée. En revanche dans le cas général, la dépendance des coefficients 2.9 et 2.11 avec la saturation dépend des polarisations. Lorsque la saturation augmente, le phénomène de redistribution des photons entre les deux modes présents doit être pris en compte. Si les deux polarisations sont orthogonales, ce phénomène disparaît. Nous avons cependant choisi de « coller » au cas traité ci-dessus d'un atome à deux niveaux dans une onde stationnaire.

La figure 2.4 résume l'ensemble du schéma optique. La polarisation de la mélasse est incluse dans le plan horizontal  $(x, y)$ .

Les faisceaux du piège serviront aussi à illuminer le nuage après la phase de temps de vol libre. On supposera que l'éclairement est uniforme dans la zone d'observation : ainsi une image du nuage représentera la distribution spatiale des atomes. Le *waist* des faisceaux est de 8 mm, il n'est donc pas envisageable d'observer des tailles plus grandes que quelques millimètres. Cette contrainte oriente largement la durée des temps d'expansion balistique, dont nous allons détailler la séquence de temps dans la partie suivante. Mais avant cela, décrivons le système d'imagerie qui permet l'acquisition des données.

### Système d'acquisition

Le système d'imagerie se compose essentiellement d'une caméra<sup>4</sup> et d'un système de lentilles. La caméra observe le plan  $(x, y)$  qui contient la mélasse 1D. Cette dernière est portée par l'axe noté  $X$ .

**La séquence de temps** est en partie imposée par le système d'acquisition. Nous allons maintenant en discuter les différentes étapes déjà énumérées en page 91. Afin de contrôler les phases d'observation et de refroidissement ou piégeage, nous utilisons un chopper mécanique. Il masque la caméra lorsque les faisceaux du piège et de la mélasse sont allumés et reste ouvert lorsque l'on observe la distribution des atomes après le temps de vol. Plus précisément, le nuage est

---

<sup>4</sup>Apogee 2ep refroidie à  $-20^\circ\text{C}$

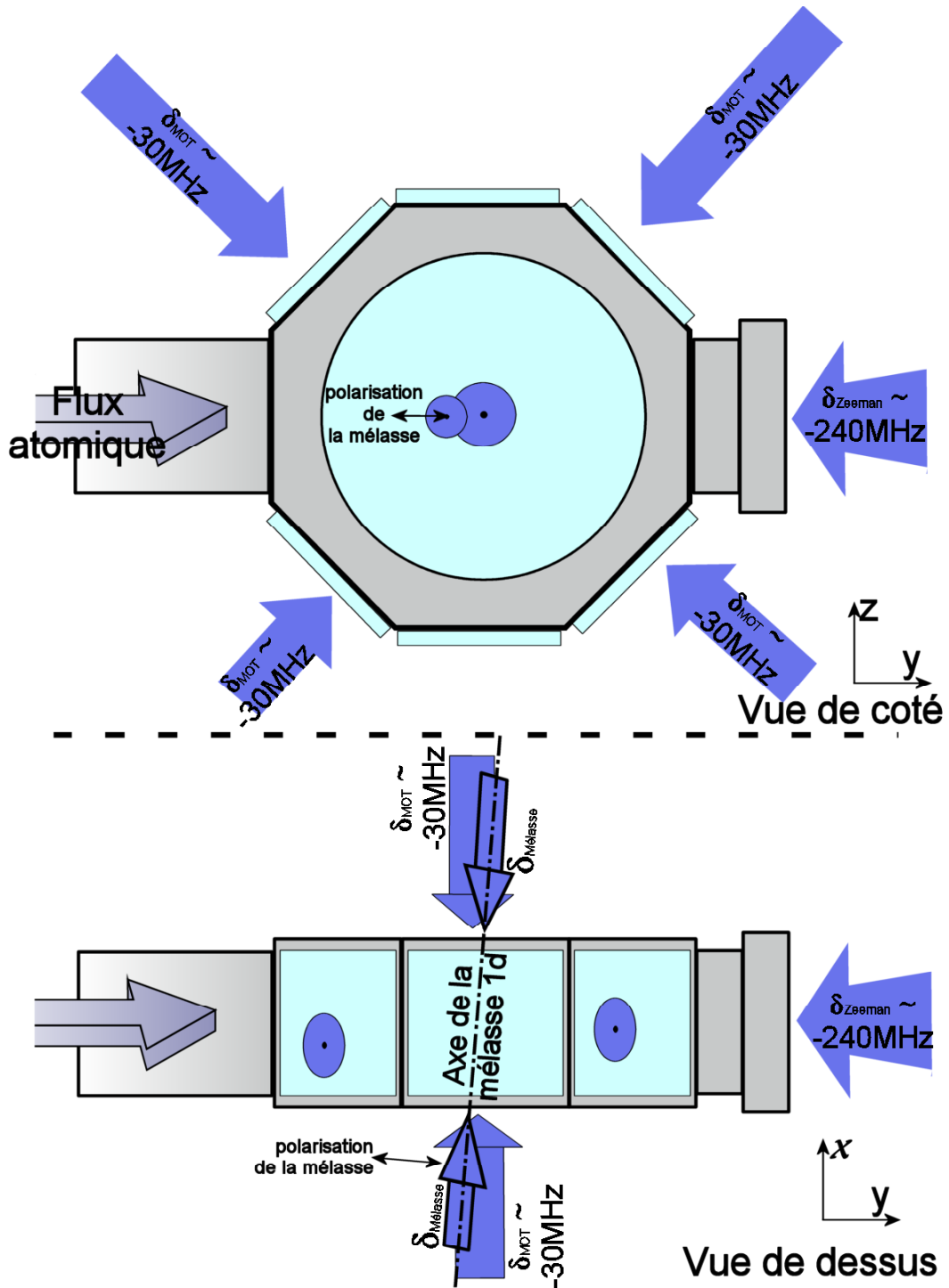


FIG. 2.4 – Vue schématique des faisceaux du piège et de la mélasse 1D.

imagé dans le plan du chopper et ce dernier est à son tour imagé sur la caméra. Le montage ressemble grossièrement à celui de la figure 1.19. On notera que dans le cas présent, le nuage est imagé sur le chopper alors que lors des mesures de rétrodiffusion, il observait le champ lointain. Le système de lentilles est donc différent de la figure 1.19.

Le temps d'ouverture du chopper est de  $250 \mu\text{s}$ , cette dernière valeur impose la durée minimale du temps d'expansion balistique. À l'inverse, la durée maximale dépend de la taille de la zone d'observation. Sa limitation est imposée dans notre montage par deux paramètres : d'une part le grandissement du système d'imagerie, qui est proche de 1, ce qui fait que la camera observe donc une zone d'une dizaine de millimètres. D'autre part la taille de la zone d'éclairement, qui est donnée par le *waist* des faisceaux du piège qui vaut 8 mm. Nous allons supposer que l'éclairement est uniforme sur 2 mm typiquement, ce qui sera le facteur limitant la taille de la zone d'observation. C'est ce dernier critère qui fixe la durée maximale du temps d'expansion balistique. En pratique, **il n'excédera pas  $1500 \mu\text{s}$** , mais nous devons vérifier *a posteriori* que les tailles RMS mesurées n'excèdent pas la taille de la zone d'éclairement.

La durée de l'observation doit rester courte par rapport au temps typique d'évolution du nuage c'est à dire la milliseconde : on allumera les faisceaux du piège pendant  $100 \mu\text{s}$  seulement.

Nous venons ici de déterminer essentiellement **la durée du temps d'expansion balistique** que nous garderons comprise entre  **$250 \mu\text{s}$  et  $1500 \mu\text{s}$** . Il nous faut maintenant déterminer la durée du temps d'interaction avec la mélasse 1D. En toute rigueur, **la durée de l'interaction** devrait dépendre du temps caractéristique d'évolution de la distribution de vitesse, autrement dit  $\gamma^{-1}$ , inverse du coefficient de friction (expr. 2.9). Il dépend donc des paramètres de la mélasse  $s$  et  $\delta_L$ . Pour des raisons de confort d'utilisation, nous **garderons cette durée constante à  $500 \mu\text{s}$** . Cette approche n'est valable que si **la durée de la mélasse est beaucoup plus grande que le temps d'amortissement des vitesses**. Nous verrons que cette hypothèse est le plus souvent réalisée dans la gamme de paramètres explorée. Cependant nous reviendrons sur cette problématique dans la partie 2.2.2. **La valeur choisie pour la durée de la mélasse 1D ( $500 \mu\text{s}$ ) est une valeur réaliste**. Nous pouvons la comparer à titre d'illustration au temps d'amortissement des vitesses pour des valeurs typiques  $I/I_{\text{sat}} = 0,1$  et  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  : on a  $\gamma^{-1} = 90 \mu\text{s}$ . On peut alors supposer  $\gamma^{-1} \ll 500 \mu\text{s}$ .

Nous avons tour à tour estimé la durée de l'interaction et du temps d'expansion balistique dans la séquence de temps. Avant de présenter les éléments de calibration du système d'imagerie, concluons par la figure 2.5 qui résume les différentes étapes de la séquence de temps. La durée totale de la séquence est d'environ 20 ms. La durée de l'interaction dans la mélasse est fixée à  $500 \mu\text{s}$  et le temps de vol sera inférieur à  $1500 \mu\text{s}$ . Nous réservons ainsi 18 ms dans la séquence de temps qui sont dédiées au chargement du piège.



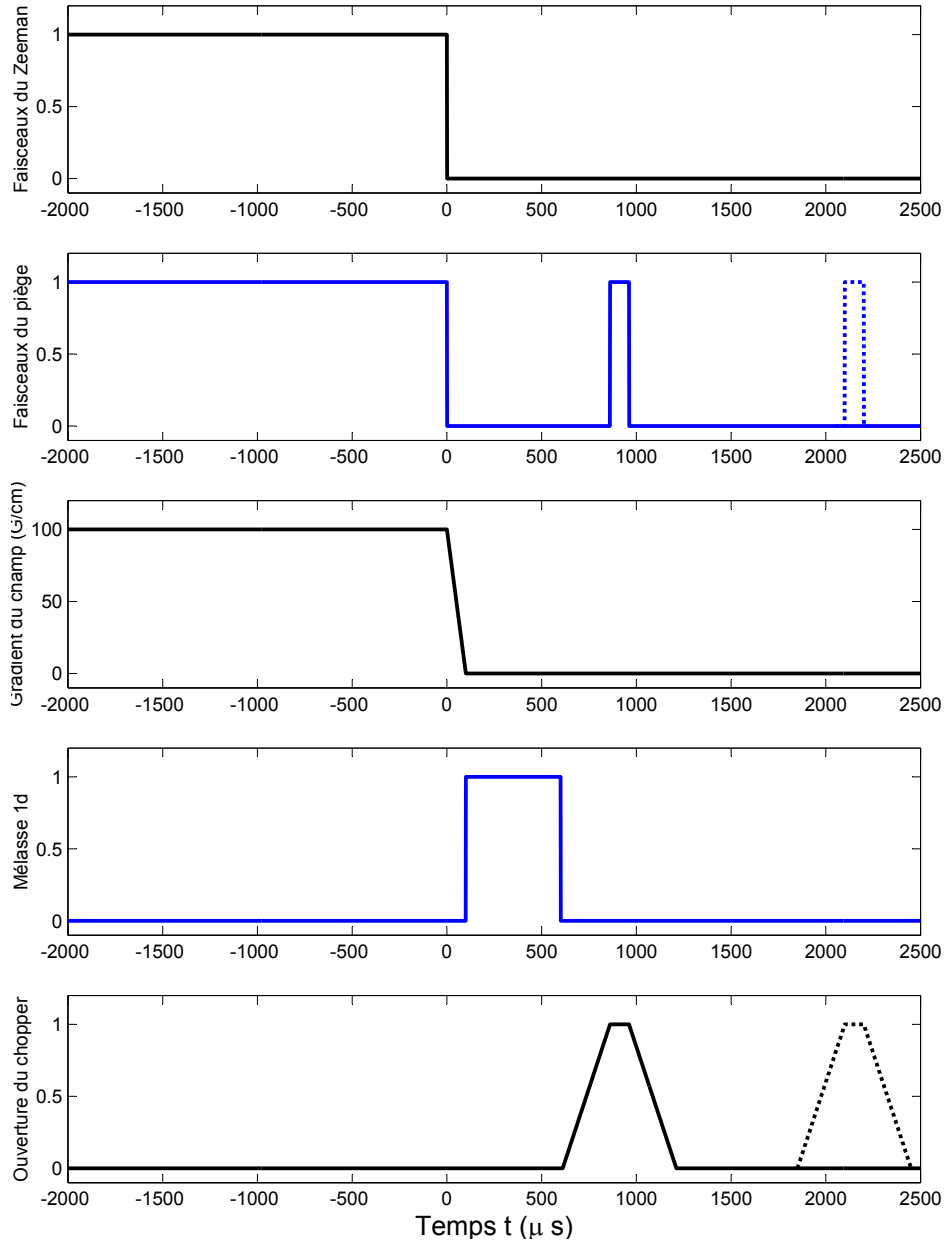


FIG. 2.5 – Après 18ms environ qui servent au chargement du piège ( $t < 0$ ), on coupe ( $t = 0$ ) le potentiel de piégeage (faisceaux et champ magnétique). On attend  $100 \mu\text{s}$  pour laisser décroître le gradient du champ. La phase de  $100 \mu\text{s} < t < 600 \mu\text{s}$  est consacrée à l’interaction dans la mélasse. Nous avons fait figurer deux temps d’expansion balistique différents d’une durée de  $250 \mu\text{s}$  (traits pleins) et  $1500 \mu\text{s}$  (pointillés). Pour observer le nuage, on rallume les faisceaux du piège (le chopper est alors ouvert pour l’acquisition).

**Le système d'imagerie** permet d'observer la distribution des atomes après interaction dans la mélasse. Il nous a fallu effectuer une calibration de la caméra.

D'une part, une calibration spatiale est nécessaire. Même si le grandissement du système d'optique est connu (proche de 1), cela n'est pas suffisant pour assurer une bonne précision des mesures. Nous avons donc imagé sur la caméra une règle graduée à partir du même système d'optique. On en déduit **la calibration** des images :  $9,8 \text{ pixels/mm} \pm 0,2$ . On verra ensuite, que ce n'est pas l'incertitude sur cette calibration qui limitera la précision des mesures.

D'autre part, il est primordial de repérer l'axe  $X$  de la mélasse. C'est en effet suivant cet axe qu'il faudra mesurer la largeur du nuage. Pour ce faire, nous avons désaccordé la mélasse vers le bleu. Les atomes sont alors rapidement expulsés suivant cet axe et la distribution devient très anisotrope et allongée suivant l'axe  $X$ . En observant cette élongation caractéristique, on détermine l'axe de la mélasse.

### Traitement des images

Dans la mesure où sur la camera on a repéré l'axe  $X$  et effectué une calibration spatiale, le traitement n'est plus une étape délicate. Après une phase de temps de vol, on prendra une coupe du nuage le long de l'axe  $X$ . Par **un ajustement gaussien**, on mesurera **la taille RMS du nuage**.

Il n'est pas difficile de prédire l'évolution de la taille RMS du nuage pendant une phase de vol libre de durée  $t$ . En effet, en supposant qu'à la fin de la phase de mélasse, il n'y a pas de corrélation entre la position et la vitesse d'un atome et que les distributions des vitesses et des positions sont gaussiennes, la largeur RMS de la distribution des positions (la taille du nuage) suit la loi :

$$\boxed{\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2(0) + \sigma_v^2 t^2} \quad (2.16)$$

Afin d'observer cette dépendance nous avons donc choisi **trois temps d'expansion balistique différents : 250  $\mu\text{s}$ , 850  $\mu\text{s}$  puis 1450  $\mu\text{s}$** . L'ensemble de cette procédure est résumé par la figure 2.6 qui correspond aux paramètres  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$  et  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ .

On y voit en haut les images obtenues après les trois temps de vol et en bas une coupe de la distribution selon l'axe  $X$ . Sur chaque coupe, nous avons effectué un ajustement gaussien. On obtient donc une mesure de  $\sigma_X$  à  $t = 250, 850, 1450 \mu\text{s}$ . Sur la figure 2.7, nous avons tracé  $\sigma_X^2$  en fonction de  $t^2$ .

Même si l'ajustement par une gaussienne reste bon, on constate un léger écart dans les ailes de la distribution. Un tel effet peut avoir plusieurs origines qui introduisent une dépendance en vitesse pour les coefficients de friction et/ou de diffusion [85]. Les solutions de l'équation de Fokker-Planck ne sont plus des distributions de Maxwell-Boltzmann [9, p. 66]. Nous verrons un peu plus loin (voir 2.3.1) que le mécanisme de chauffage supplémentaire qui régit la dynamique

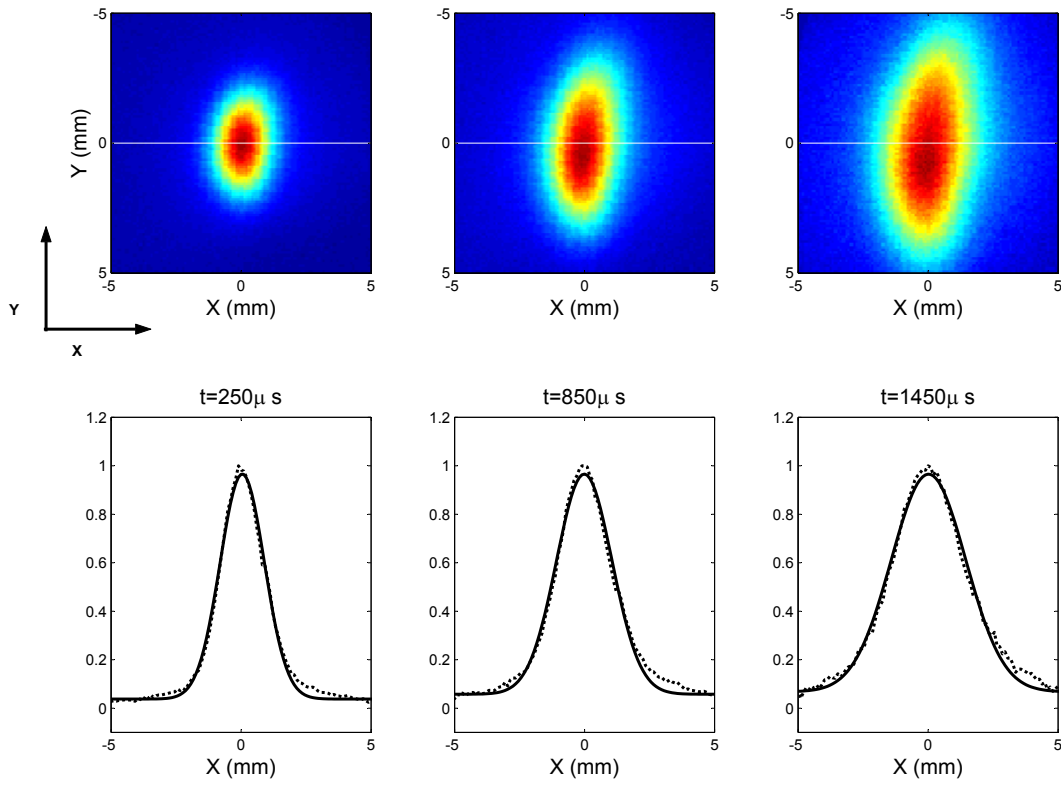


FIG. 2.6 – En haut, trois images du nuage après les temps de vol libre  $t = 250, 850, 1450 \mu\text{s}$ . En bas, les coupes correspondantes sur l’axe  $X$ . La valeur de l’intensité intégrée sur toute l’image est constante à quelques pourcent près. Ce qui est typique des fluctuations temporelles du nombre d’atomes dans le piège.

modifie le coefficient de diffusion. Cela introduit une distribution particulière non-gaussienne (expr. 2.45). Nous allons dans un premier temps négliger cette subtilité en considérant la distribution gaussienne.

On trace  $\sigma_X^2$  en fonction de  $t^2$  puis on extrait  $\sigma_v^2$  en faisant une régression linéaire : sur cet exemple  $\sigma_v = 80 \text{ cm/s}$ .

On constate sur la figure 2.7 que les trois points sont bien alignés. Afin d’estimer l’erreur relative, nous allons utiliser l’incertitude sur l’ajustement gaussien du plus grand temps d’expansion balistique. L’incertitude est en effet plus importante sur les temps d’expansion balistique longs, ce qui nous donne directement une estimation de l’incertitude sur  $\sigma_v^2$ . Pour notre exemple, elle est typiquement de 1%, ce qui donne  $\sigma_v = 80 \text{ cm/s} \pm 1\%$  soit 6,7 mK.

Nous venons de présenter sur un exemple le traitement qui permet de mesurer la température après l’interaction dans la mélasse. On suppose implicitement que la distribution en vitesse atteint un état stationnaire, ce qui n’est pas toujours évident car il faut comparer le temps d’établissement du régime final  $\gamma^{-1}$  et la

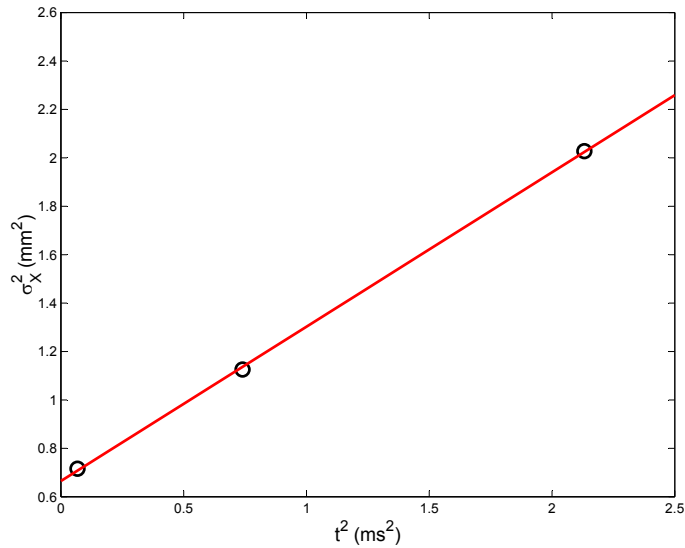


FIG. 2.7 – À partir de trois mesures de taille et d’une régression linéaire, on obtient  $\sigma_v^2$ .

durée de la mélasse. Cette remarque pose en fait deux questions : **le coefficient de friction est-il bien prédit par la théorie Doppler ? La distribution des vitesses atteint-elle l’état stationnaire à la fin de la phase mélasse 1D ?** Nous discuterons de ces deux questions en débutant la partie qui suit. Cette analyse nous permettra de corriger les mesures expérimentales de la température que nous présenterons ensuite.

### 2.2.2 Résultats expérimentaux

Avant de donner les résultats des mesures de température, nous allons discuter sommairement du coefficient de friction. Cette brève étude a un double objectif. Elle va nous permettre d’une part de vérifier les valeurs prédites par l’expression 2.9 à partir de mesures expérimentales de  $\gamma$ . D’autre part, on pourra ensuite vérifier que lors de mesures de température la distribution en vitesse atteint effectivement un état stationnaire.

Il n’est pas question ici de faire une étude détaillée du coefficient de friction. Nous avons en effet fait uniquement quelques mesures de  $\gamma$ . Cela sera suffisant pour incriminer ensuite le coefficient de diffusion afin d’expliquer le désaccord théorie-expérience dans les mesures de température.

Il n’est pas facile de mesurer directement la diffusion en impulsion. Cela demande en effet de pouvoir suivre l’évolution d’une distribution en vitesse très étroite (idéalement un pic de Dirac) et de la voir s’élargir jusqu’à l’état stationnaire. Nous n’avons réalisé aucune expérience de ce type ; notons cependant

qu'elle serait réalisable dans le cas du strontium. Dans le même ordre d'idée, il est possible d'exciter sélectivement une seule classe de vitesse en utilisant la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ . On peut alors imaginer transférer ensuite les atomes vers les niveaux métastables  $^3P_0$  ou  $^3P_2$  (via un niveau intermédiaire,  $^3S_1$  par exemple qui peut servir aussi de niveau relais lors de l'utilisation de repompeurs pour le piège bleu). En utilisant ce schéma, il semble possible de creuser un « trou » dans la distribution en vitesse du nuage : sa taille sera donnée par la largeur de la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  soit 7,6 kHz. L'évolution du « trou » dans la distribution est aussi régie par le processus de diffusion en impulsion. Il s'agit d'une expérience intéressante mais lourde à mettre en œuvre.

### Friction et temps d'amortissement des vitesses

Il est en effet beaucoup plus simple de mesurer le temps d'amortissement des vitesses. Nous avons vu comment à partir de trois images du nuage il était possible de mesurer  $\sigma_v$ . On connaît par ailleurs l'évolution temporelle de  $\sigma_v(t)$  en fonction de la durée  $t_m$  de la mélasse par l'équation 2.4 que l'on intègre sans peine :

$$\sigma_v(t_m)^2 = (\sigma_v(0)^2 - \sigma_v(\infty)^2) \exp(-2\gamma t_m) + \sigma_v(\infty)^2 \quad (2.17)$$

Nous avons donc fait varier la durée de la mélasse :  $t_m = 100, 200, 300, 400, 500 \mu\text{s}$ . Ensuite pour chaque valeur de  $t_m$ , nous avons mesuré  $\sigma_v(t_m)$  par temps de vol. Sachant en plus que  $\sigma_v(0) = 130 \text{ cm/s}$ , on obtient ainsi six points caractérisant l'évolution de  $\sigma_v$  avec  $t_m$ . Nous n'avons pas exploré toute la gamme des paramètres accessibles, mais pris seulement trois exemples présentés sur la figure 2.8.

Les trois courbes correspondent respectivement (de haut en bas) aux jeux de paramètres  $I/I_{\text{sat}} = 0,027$ ;  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  puis  $I/I_{\text{sat}} = 0,05$ ;  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et enfin  $I/I_{\text{sat}} = 0,065$ ;  $\delta_L = -0,9\Gamma_b$ . La dépendance  $\sigma_v^2(t_m)$  est ajustée par une exponentielle décroissante. On peut donc mesurer  $\gamma^{-1}$  puis le comparer avec la valeur prédite par l'expression 2.9.

$\delta_L$	$I/I_{\text{sat}}$	$\gamma^{-1}$ théorique	$\gamma^{-1}$ mesuré
$-\Gamma_b/2$	0,027	291 $\mu\text{s}$	309 $\mu\text{s}$
$-\Gamma_b/2$	0,05	164 $\mu\text{s}$	156 $\mu\text{s}$
$-0,9\Gamma_b$	0,065	304 $\mu\text{s}$	305 $\mu\text{s}$

On constate un bon accord entre les mesures expérimentales et le résultat fourni par la théorie Doppler. Même si nous n'avons effectué que

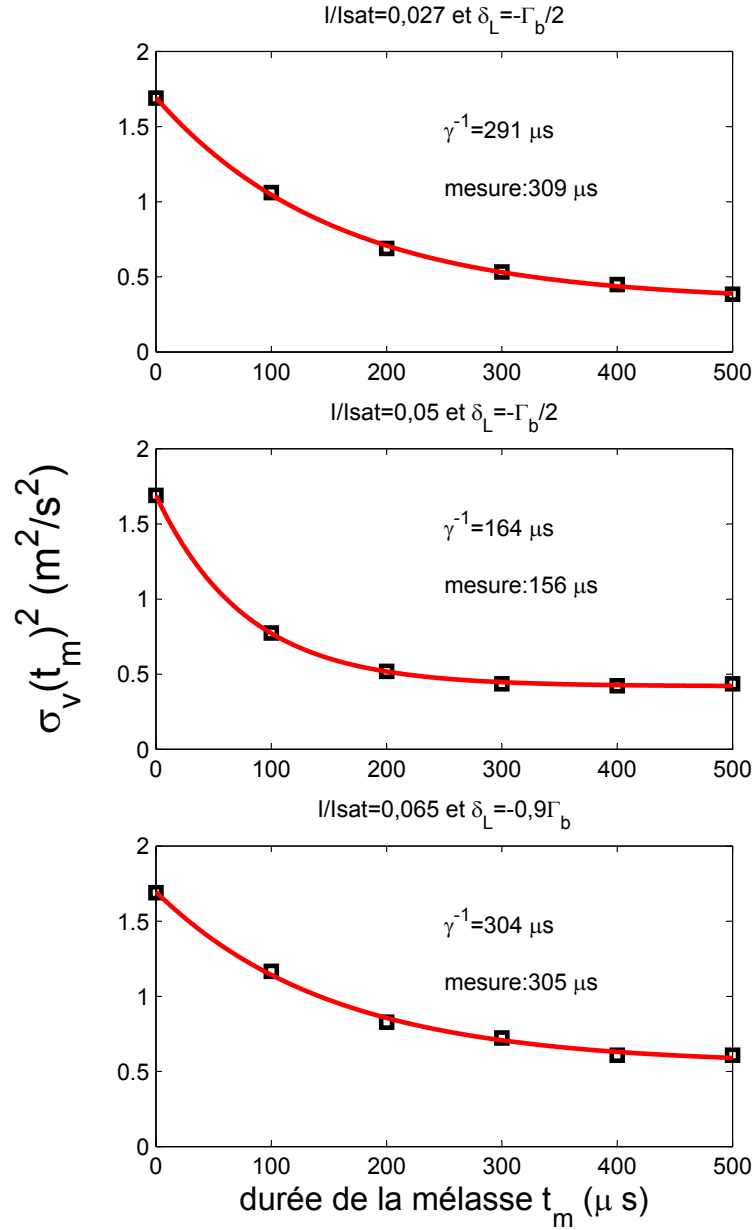


FIG. 2.8 – Mesures du coefficient de friction pour trois jeux de paramètres  $I/Isat = 0,027$ ,  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  puis  $I/Isat = 0,05$ ;  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et enfin  $I/Isat = 0,065$ ;  $\delta_L = -0,9\Gamma_b$ .

trois mesures indépendantes (essentiellement à faible saturation), cela suffit à remplir les deux objectifs présentés en introduction. D'une part, même à faible saturation, la température mesurée sera plus élevée que la prédiction de la partie 2.1.2. On pourra alors conclure en incriminant la diffusion qui doit être sous-

estimée par la formule 2.11. D'autre part, ayant choisi de garder une durée fixée de la mélasse 1D ( $t_m = 500 \mu\text{s}$ ), nous constatons d'après le tableau ci-dessus qu'il n'est pas évident que la distribution des vitesses atteigne l'état stationnaire lors des mesures de température. Un tel effet n'est pas toujours négligeable, essentiellement lorsque le temps d'amortissement est long (à faible saturation). On voit par exemple dans la dernière ligne du tableau ci-dessus que l'on ne peut *a priori* pas négliger  $305 \mu\text{s}$  devant  $t_m = 500 \mu\text{s}$ . On peut malgré tout avoir confiance en la prédiction théorique de  $\gamma$ , puisque nous venons de la vérifier expérimentalement. Cela nous permettra de corriger *a posteriori* les mesures de température comme nous allons le voir maintenant.

### La distribution des vitesses atteint-elle l'état stationnaire ?

Dans le cadre de notre étude de température nous couvrirons deux jeux de paramètres  $-\Gamma_b < \delta_L < 0$  avec  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$  et  $0 < I/I_{\text{sat}} < 1,2$  avec  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . Nous allons maintenant comparer pour ces deux jeux  $\tau_v = \gamma^{-1}$  et  $500 \mu\text{s}$ . Nous avons calculé  $\tau_v = \gamma^{-1}$  à partir de l'équation 2.9 (figure 2.9). Les quelques mesures effectuées ci-dessus, nous permettent de prévoir que la friction est bien prédite par la théorie Doppler. Notons cependant que les trois mesures de  $\gamma$  ont été effectuées à faible saturation : nous n'avons en rien couvert tout l'espace des paramètres accessibles. Ceci pour des raisons techniques liées à l'utilisation de la séquence de temps (fig. 2.5).

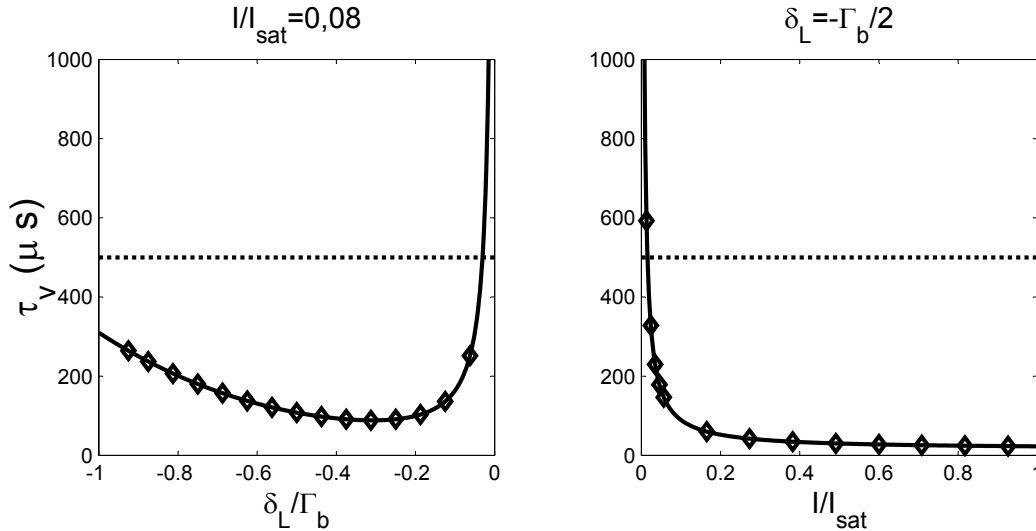


FIG. 2.9 – Temps d'amortissement de la distribution en vitesse comparé à la durée de la mélasse (en tirets  $500 \mu\text{s}$ ). Nous l'avons tracé pour deux jeux de paramètres  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$  et  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  qui correspondent aux mesures de températures effectuées (losanges) que nous verrons ensuite (fig. 2.10 et 2.11).

On constate que **la condition  $\tau_v \ll 500 \mu\text{s}$  n'est pas toujours réalisée**. Il nous paraît donc important de prendre en compte cet élément.

Nous avons expérimentalement accès à  $\sigma_v(t_m)$  après une durée finie de la mélasse  $t_m = 500 \mu\text{s}$  ; nous pouvons cependant utiliser la formule 2.17 pour extrapoler jusqu'à un temps « très long » qui correspond au régime stationnaire  $\sigma_v(\infty)$ .

$$\sigma_v(\infty) = \sqrt{\frac{\sigma_v(t_m)^2 - \sigma_v(0)^2 \exp(-2\gamma t_m)}{1 - \exp(-2\gamma t_m)}} \quad (2.18)$$

$t_m$  est la durée de la mélasse ( $t_m = 500 \mu\text{s}$ ).  $\sigma_v(0)$  est la largeur de la distribution dans le piège ( $\sigma_v(0) = 130 \text{ cm/s}$ ).

La formule 2.18 nous permettra de corriger les mesures expérimentales. On verra qu'en pratique cette correction est faible sauf peut-être pour lorsque  $I/I_{\text{sat}} < 0,05$  avec  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . Elle ne suffira pas à expliquer le désaccord entre la théorie du refroidissement Doppler et les mesures que nous allons maintenant présenter.

### Résultats des mesures en fonction de $\delta_L$

Afin de nous affranchir de l'influence de l'intensité sur la température, nous avons choisi de travailler à faible saturation en prenant  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$ . On est donc dans les conditions d'application de la théorie Doppler à faible saturation dont le résultat est bien connu (voir 2.1.1). On attend un minimum de température pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . C'est ce que nous avons cherché à vérifier en mesurant la largeur de la distribution en vitesse  $\sigma_v$  en fonction de  $\delta_L$ .

Sur la figure 2.10, chaque point est issu du traitement de trois temps de vols comme décrit précédemment.

Pour chaque mesure nous avons estimé les barres d'erreur en calculant l'incertitude sur l'ajustement gaussien du plus grand temps d'expansion balistique. En pratique l'erreur est ici de l'ordre de 1%. Nous avons par ailleurs fait figurer des losanges qui correspondent à la correction de chaque point au moyen de la formule 2.18. Cette correction est visiblement très faible (plus petite que la barre d'erreur). **La durée finie de la mélasse a une influence négligeable dans ce cas**. On peut conclure que **la précision des mesures est de l'ordre du pourcent**.

On constate dans un premier temps que les températures mesurées sont nettement plus élevées que la prédiction. On ne voit pas non plus de minimum de température pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . La largeur  $\sigma_v$  atteint plutôt un plateau à grand désaccord où l'on a  $\sigma_v = 72 \text{ cm/s}$ . Il semble donc qu'**un ingrédient physique échappe à la théorie Doppler**. Afin d'essayer de le mettre en évidence nous avons par ailleurs étudié la dépendance de  $\sigma_v$  avec l'intensité.



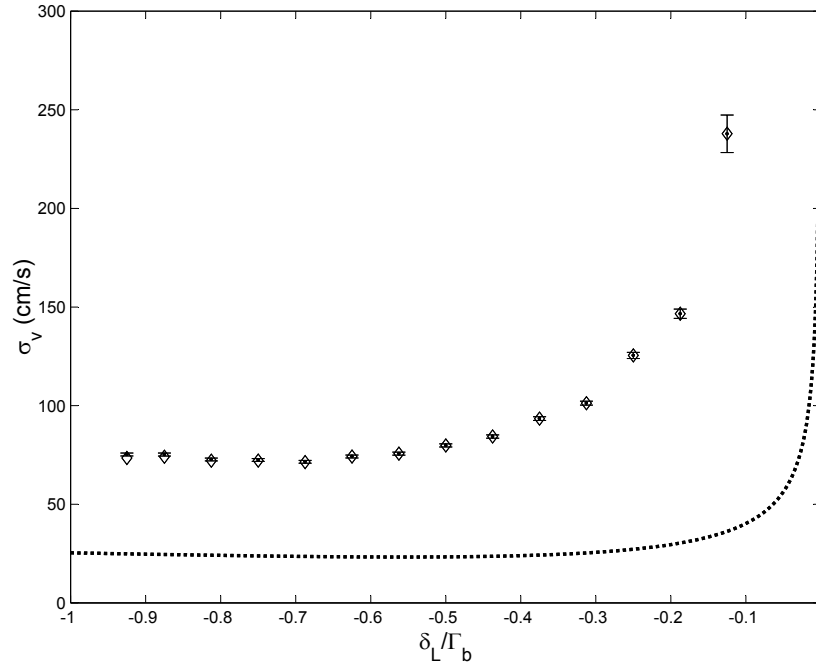


FIG. 2.10 – Mesures de la largeur RMS de la distribution en vitesse en fonction du désaccord pour  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$ . Les losanges représentent les valeurs corrigées par la formule 2.18. On ne voit pas de différence significative avec les mesures brutes. En pointillés, on a tracé la dépendance théorique de  $\sigma_v$  (expr. 2.4) dans le cas général connaissant  $D$  (expr. 2.11) et  $\gamma$  (expr. 2.9).

### Résultats des mesures en fonction de $I/I_{\text{sat}}$

Dans la mesure où nous utilisons des intensités élevées, nous sortons du cadre de la théorie Doppler à faible saturation. Nous connaissons cependant la dépendance de  $\sigma_v$  avec  $I/I_{\text{sat}}$  à partir du rapport de la diffusion sur la friction (équations 2.11 et 2.9). L'évolution de la température (en pointillés fig. 2.1) avec  $I/I_{\text{sat}}$  traduit une dépendance quasi-linéaire de  $\sigma_v$ . La valeur minimum est  $\sigma_v = 22,5$  cm/s pour  $I/I_{\text{sat}} \rightarrow 0$ ;  $\sigma_v$  croît ensuite quasi-linéairement avec une pente de 11 cm/s.

La figure 2.11 met en évidence de grosses différences entre les mesures et la prédiction. Les températures sont globalement plus élevées d'une part et la pente est aussi plus forte d'autre part. La correction apportée par la formule 2.18 (losanges) n'est pas significative sauf à faible saturation ( $I/I_{\text{sat}} < 0,05$ ). Elle nous permet cependant de mettre en évidence une rupture de pente pour  $I/I_{\text{sat}} \simeq 0,05$ . Loin d'atteindre la température minimum prédite par la théorie, il semble pourtant que l'on s'en rapproche à faible saturation.

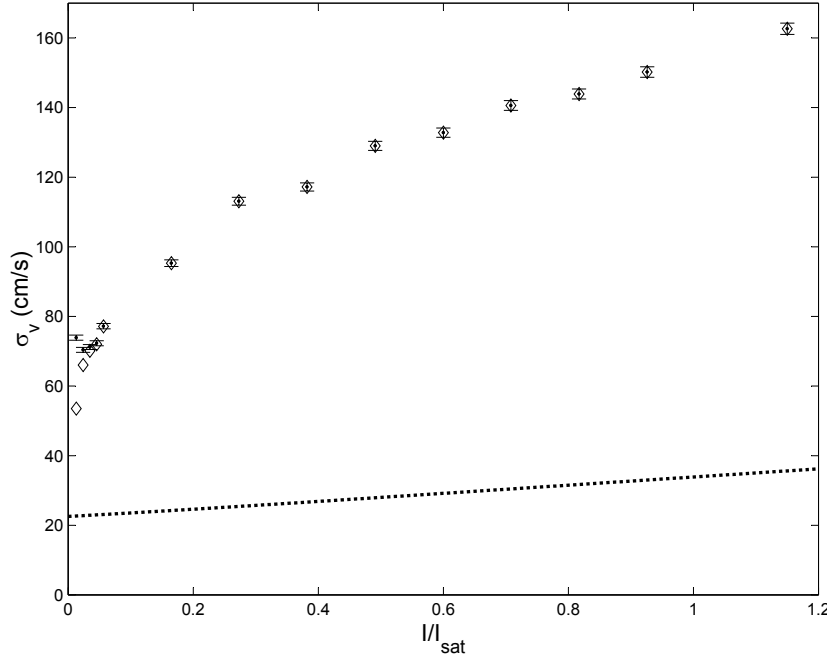


FIG. 2.11 – Mesures de la largeur RMS de la distribution en vitesse en fonction de l’intensité pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . La valeur corrigée (losange) ne diffère pas de la mesure brute sauf à faible saturation où l’on observe une différence notable. En pointillés, on a tracé la dépendance théorique de  $\sigma_v$  (expr. 2.4) dans le cas général connaissant  $D$  (expr. 2.11) et  $\gamma$  (expr. 2.9).

## Récapitulatif

Un analyse globale **des deux courbes montrent** dans un premier temps **que les températures sont beaucoup plus élevées que la prédiction théorique**. Nous avons en effet obtenu **la température la plus basse pour  $I/I_{\text{sat}} = 0,013$  avec  $\sigma_v = 53$  cm/s (3 mK) en valeur corrigée**. Cela reste bien plus grand que la limite de 22,5 cm/s.

Des mesures à trois dimensions sur strontium [68] montrent aussi des températures plus élevées et du même ordre de grandeur. X. Xu a aussi mis en évidence la décroissance de  $\sigma_v$  à faible saturation. Nous nous garderons d’une analyse quantitative puisque nous sommes dans une situation expérimentale assez différente. Notons cependant que les ordres de grandeur et les tendances sont comparables.

On peut en revanche faire une comparaison avec des mesures 1D à partir d’un jet de calcium [67]. Elles montrent un accord satisfaisant (à 10% près) avec la théorie Doppler en utilisant typiquement la même gamme de paramètres que pour nos mesures (fig. 2.6). On peut être surpris puisque les deux protocoles visent à faire des mesures 1D dans des situations expérimentales comparables. Nous verrons plus tard que la vitesse transverse (le long de l’axe perpendiculaire

à la mélasse) est un élément crucial. C'est en effet la seule différence entre le dispositif de A. Witte [67] et le nôtre. Pour conclure cette partie, nous allons étudier l'influence de la polarisation dans la mélasse sur la dynamique du refroidissement.

### 2.2.3 Influence de la polarisation

La polarisation est *a priori* un élément important et caractéristique de la mélasse. Il faut quand même noter qu'en l'absence de champ magnétique, elle semble être un paramètre un peu moins crucial que dans le cas d'un piège magnéto-optique par exemple. En effet, dans une mélasse 1D à faible saturation, la température est indépendante de la polarisation. On voit une « légère » différence cependant à forte saturation et c'est ce que nous développerons dans un premier temps.

#### Configuration de polarisation de la mélasse 1D

La polarisation relative des deux ondes constituant la mélasse n'intervient pas à faible saturation, ce qui n'est en revanche pas le cas à forte saturation. Nous n'avons pas mentionné la polarisation dans la partie 2.1.2. Nous avons seulement insisté sur le fait que cette théorie est basée sur l'hypothèse d'un atome à deux niveaux. La polarisation des deux ondes est donc implicitement la même, ce qui nous permet de parler d'onde stationnaire pour la mélasse. **À forte saturation, le phénomène de redistribution de photons entre les deux ondes devient prédominant** et impose largement la dynamique du refroidissement (comme on l'a vu en 2.1.3). On peut s'en affranchir en utilisant deux polarisations orthogonales pour les deux ondes, par exemple  $\sigma^+ - \sigma^-$  ou deux linéaires perpendiculaires ( $lin \perp lin$ ). Les formules deviennent alors un peu plus simples ; nous en fournissons l'expression en Annexe A. Afin de faire une comparaison des deux configurations, nous avons tracé (fig. 2.12) la température pour deux polarisations linéaires parallèles ( $lin \parallel lin$ ) et pour deux polarisations linéaires orthogonales ( $lin \perp lin$ ). Nous avons choisi des polarisations linéaires parallèles et perpendiculaires mais le traitement est exactement le même pour des polarisations circulaires identiques et orthogonales.

On constate des différences notables sur la température. Lorsque les polarisations sont identiques, elle est en effet plus élevée : 1,21 mK (33,9 cm/s) contre 0,873 mK (28,7 cm/s) pour des polarisations orthogonales avec  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et  $I = I_{sat}$ .

**Nous avons aussi fait des mesures expérimentales dans la configuration  $lin \perp lin$ . Nous n'avons cependant pu observer aucune différence significative avec la configuration  $lin \parallel lin$ .** Nous avons alors mesuré autour de  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et  $I = I_{sat}$ ,  $\sigma_v \sim 150$  cm/s qui est loin de la valeur attendue de 33,9 cm/s. Si l'on suppose que le mécanisme de chauffage « supplémentaire » est indépendante de la polarisation, alors entre les deux configurations ( $lin \parallel lin$  et

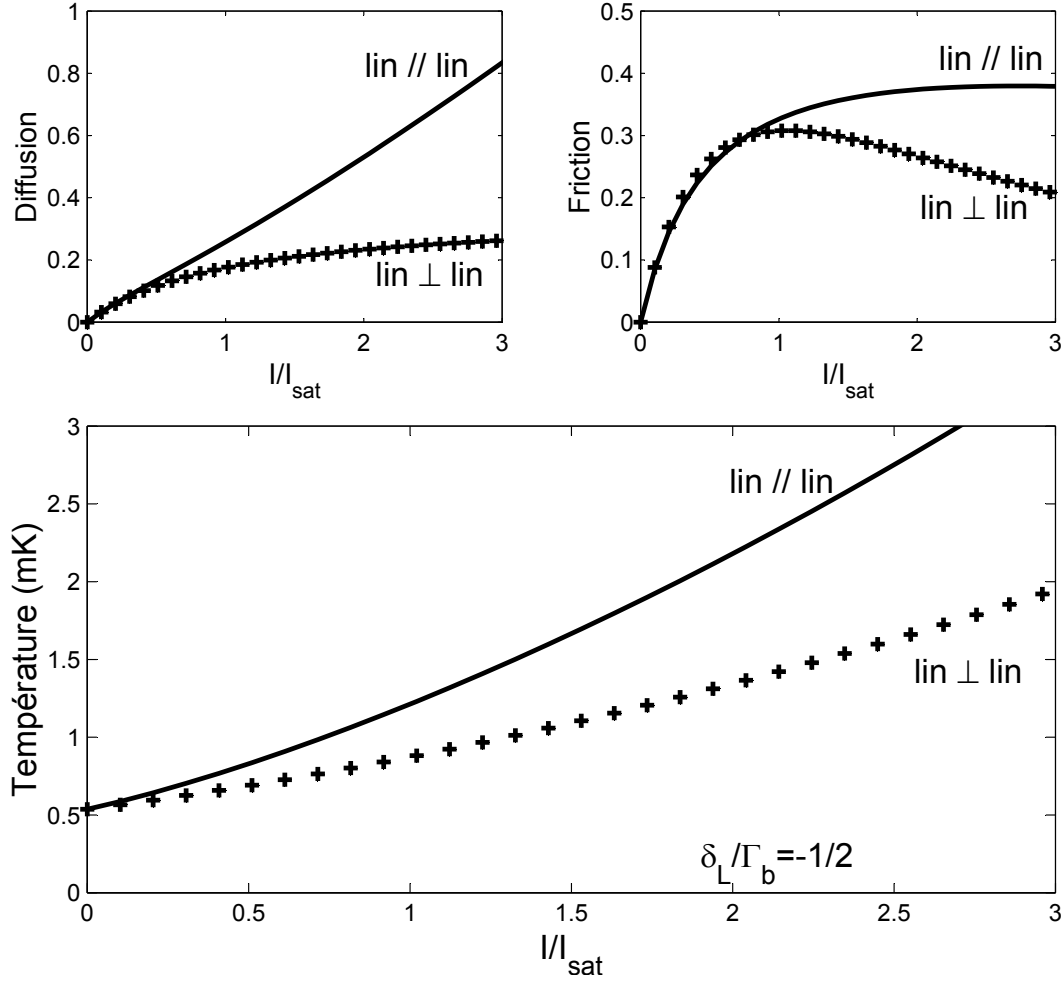


FIG. 2.12 – Température dans le cadre de la théorie Doppler en fonction  $I/I_{\text{sat}}$  pour deux configurations de polarisation avec  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ . Nous avons aussi fait figurer les coefficients de diffusion  $\frac{1}{\hbar^2 k_L^2 \Gamma_b} D$  et de friction  $\frac{m}{\hbar k_L^2} \gamma$ . L'ensemble des formules est rappelé dans l'annexe A.

*lin ⊥ lin*), on attend une différence de 5,2 cm/s pour  $\sigma_v$ . L'incertitude de mesure sur  $\sigma_v$  est typiquement de quelques centimètres par seconde, il apparaît difficile de mettre en évidence une si faible différence de comportement par rapport au mécanisme qui impose une température nettement plus élevée. Même si cela peut paraître un peu décevant, notre conclusion nous permet d'orienter notre réflexion. Il semble en effet que le **chauffage « supplémentaire »**, dont nous allons chercher l'origine, **n'est pas dépendant de la polarisation**.

Le seul effet de polarisation que nous avons pu mettre en évidence est simplement une conséquence du diagramme de rayonnement caractéristique d'une

transition  $J = 0 \rightarrow J' = 1$ .

### Influence du diagramme de rayonnement sur la vitesse transverse à la mélasse

On connaît la forte anisotropie du diagramme de rayonnement du dipôle. Nous allons vérifier qualitativement son influence dans le cas du refroidissement dans une mélasse 1D (en configuration  $lin \parallel lin$ ) :

Supposons que l'on illumine l'atome avec une onde plane selon l'axe  $X$  dont la polarisation est portée par  $Z$ . **Le diagramme de rayonnement du dipôle nous dit que les photons seront diffusés dans le plan  $XY$  de façon privilégiée [93].** En ce qui concerne le refroidissement, dans une mélasse 1D (selon  $X$ ), **si la polarisation est portée par  $Z$ , on s'attend à mesurer une vitesse RMS plus élevée selon  $Y$  que selon  $Z$ .** L'axe  $Z$  étant selon la polarisation, peu de photons seront diffusés selon cet axe et en conséquence la température selon  $Z$  sera plus faible que selon  $Y$ . En pratique, nous n'avons pas fait de mesures indépendantes de la température suivant les deux axes. Nous avons plus simplement tourné la polarisation (la mélasse est toujours portée par  $X$ ) et mesuré la largeur de la distribution en vitesse selon  $Y$ . Cela nous permet de ne pas changer le plan d'observation  $XY$ .

- Si la polarisation est selon  $Z$ , on aura  $\sigma_{vY} > \sigma_{vZ}$ .
- Si la polarisation est selon  $Y$ , on aura  $\sigma_{vZ} < \sigma_{vY}$ .

Nous avons donc pour deux polarisations différentes mesuré la vitesse transverse  $\sigma_{vy}$  : nous vérifions en effet qu'elle est plus importante quand la polarisation est portée par  $Z$  plutôt que par  $Y$ .

Sur la figure 2.13, nous avons représenté les trois temps d'expansion balistique (comme sur la figure 2.6) pour les deux polarisations selon  $Z$  puis selon  $Y$ . Nous avons mesuré la vitesse RMS suivant les deux axes  $X$  et  $Y$  (fig. 2.14) en utilisant la procédure 2.2.1.

Pour conclure :

- polarisation suivant  $Z$  :  $\sigma_{vX} = 77$  cm/s et  $\sigma_{vY} = 147$  cm/s
- polarisation suivant  $Y$  :  $\sigma_{vX} = 72$  cm/s et  $\sigma_{vY} = 198$  cm/s

On ne devrait *a priori* pas trouver de différence significative pour  $\sigma_{vx}$ . La légère différence entre les deux mesures (même si elle est légèrement plus grande que l'incertitude sur chacune d'elle) peut être attribuée aux imperfections expérimentales (alignement un peu différent de la mélasse pour les deux mesures ou un mauvais contrôle des polarisations). En revanche la différence pour  $\sigma_{vy}$  est caractéristique et **traduit « l'échauffement » dans la direction transverse à la mélasse causé par l'anisotropie du diagramme de rayonnement.**

Il reste délicat de faire une analyse quantitative de cet échauffement dans la direction transverse. Selon cet axe, il n'existe aucune force de friction. On est donc clairement dans une situation hors équilibre. Mentionnons ici que l'étalement de la distribution ne peut pas être uniquement expliqué par un mécanisme de diffusion

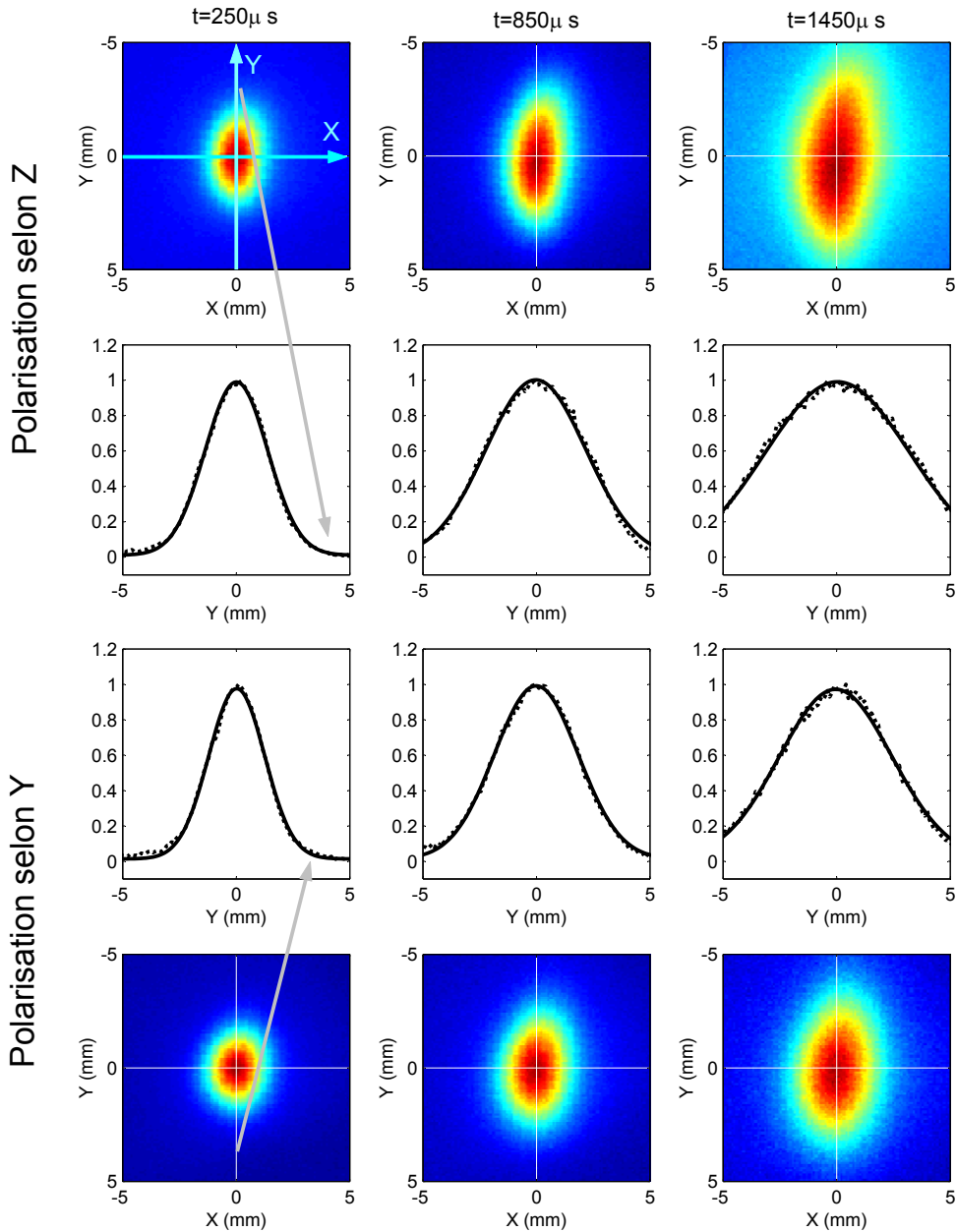
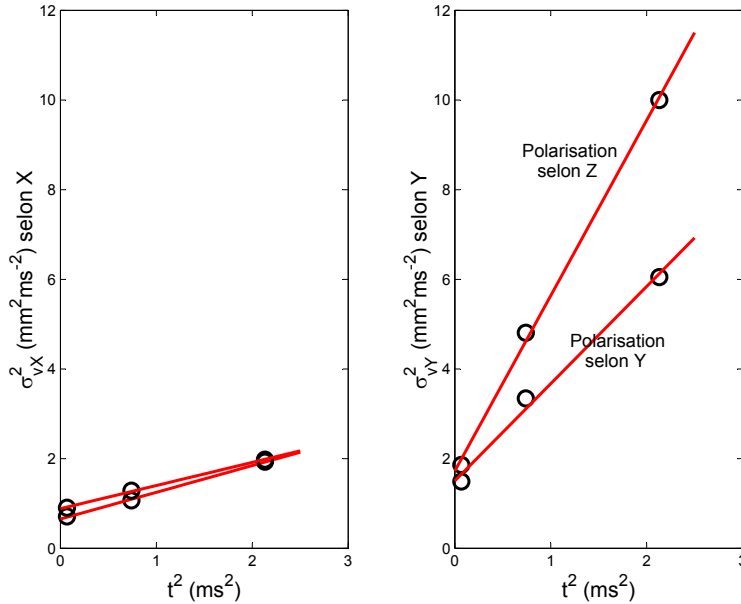


FIG. 2.13 – Trois images du nuage après les temps d’expansion balistique  $t = 250, 850, 1450 \mu\text{s}$  pour deux polarisations de la mélasse suivant  $Z$  (en haut) et suivant  $Y$  (en bas). On a fait figurer les coupes correspondantes suivant la direction transverse à la mélasse.

à cause de la direction aléatoire des photons d’émission spontanée. Sans rentrer dans le détail, on peut incriminer deux effets qui viennent augmenter l’étalement de la distribution. D’une part, le mécanisme de chauffage supplémentaire (que

FIG. 2.14 – Mesure de la vitesse RMS suivant les deux axes  $X$  et  $Y$ .

nous verrons en 2.3.1) possède aussi une composante suivant l'axe transverse. Le coefficient de diffusion qu'il introduit participe à l'expansion dans cette direction. D'autre part, on peut prendre en compte l'influence de la diffusion multiple. Les photons de la mélasse diffusés une première fois, s'ils sont diffusés à nouveau, introduisent une force répulsive qui fait exploser le nuage. Même si les événements de diffusion multiple sont rares, ils introduisent une force moyenne non-nulle. L'effet de cette dernière peut être notablement plus fort sur l'expansion du nuage qu'un mécanisme diffusif (à force moyenne nulle) qui induit aussi un étalement de la distribution. Les effets de diffusion multiple peuvent donc avoir une influence considérable dans la direction transverse. Comme nous le verrons en page 112, ils peuvent être rejetés sans équivoque pour expliquer les températures dans la direction de la mélasse.

Nous nous bornerons finalement à une analyse qualitative qui met clairement en évidence la différence entre les deux directions parallèle et perpendiculaires à l'axe du dipôle atomique. Il s'agit cependant d'un effet moins subtil que la différence entre les configurations  $lin \perp lin$  et  $lin \parallel lin$ , ce qui n'a pu être mis en évidence.

## 2.2.4 Conclusion

Les températures que nous avons mesurées sont beaucoup plus élevées que la théorie le prédit. Il semble en définitive qu'un mécanisme de chauffage « supplémentaire » impose largement la dynamique et vienne masquer tout effet de polarisation. La

partie suivante tente de fournir un modèle simple pour expliquer la dynamique du refroidissement dans la mélasse. On peut d'ores et déjà fournir quelques pistes de réflexion pour déterminer les caractéristiques du mécanisme de chauffage supplémentaire :

1. Il s'agit *a priori* d'un effet fort qui supprime complètement la dynamique du refroidissement Doppler.
2. Les mesures de friction (fig. 2.8) sont en bon accord avec la théorie. Notons aussi que les mesures de constante de raideur faites dans le piège magnéto-optique [70] corroborent celles de friction puisqu'*a priori* le coefficient de friction est directement proportionnel à la constante de raideur (théorème d'équipartition). C'est donc plutôt le coefficient de diffusion qui est sous-estimé. Nous allons donc chercher à modéliser un mécanisme de diffusion « supplémentaire » afin d'expliquer nos mesures.
3. On peut s'interroger sur les mesures faites par A. Witte [67] qui sont proches de la prédiction théorique (quelques dizaines de pourcent). La situation expérimentale est semble-t-il la même puisque les atomes sont en interaction avec une mélasse 1D (en l'absence de champ magnétique). La seule différence vient donc de **la vitesse transverse** par rapport à l'axe de la mélasse. Ce sera **un élément crucial qui interviendra dans notre modèle**.
4. La dynamique du refroidissement est indépendante des polarisations relatives des deux ondes de la mélasse.

Nous allons maintenant développer un modèle de chauffage « supplémentaire » afin d'expliquer les résultats expérimentaux.

## 2.3 Modèle de chauffage supplémentaire

### 2.3.1 Introduction

Le refroidissement et le piégeage des alcalino-terreux qui s'est essentiellement développé dans les années 90 pour des raisons technologiques a remis la théorie Doppler au goût du jour. Les mesures se sont alors succédées aussi bien sur magnésium [78] ou sur calcium [67] que sur strontium [70]. On peut y ajouter celles sur ytterbium [79] dont la structure est en tous points similaires aux atomes du groupe II. **Elles montrent de façon générale des températures plus élevées que la prédiction théorique**. Plusieurs hypothèses ont été développées pour expliquer ce comportement. Aucune à notre connaissance permet de prédire quantitativement les mesures. Nous allons rapidement les passer en revue et tenter de juger de leur pertinence au vue des divers résultats expérimentaux.



### Ondes progressives et onde stationnaire

Même si elles ont été faites dans un cadre assez différent, il faut souligner la rigueur et la qualité des mesures de X. Xu [70]. Elles sont tout à fait complémentaires des nôtres et couvrent une large gamme de paramètres. Elles écartent aussi le coefficient de friction (plus précisément la constante de raideur du piège) comme responsable de l'écart aux prédictions théoriques. L'article [70] ne dégage aucune hypothèse qui chercherait à expliquer l'écart à la théorie. L'auteur mentionne simplement « le chauffage provenant de l'effet d'onde stationnaire ». Nos mesures dans une mélasse 1D nous permettent d'écarter ce genre d'effet. Sans présumer de ce qui peut arriver dans une mélasse 3D (qui devrait être considérée pour les mesures de [70]), la théorie 2.1.2 prend en compte justement la présence d'une onde stationnaire. On peut voir par exemple la figure 2.12 comme une illustration de la différence entre la température dans une onde stationnaire ( $lin \parallel lin$ ) et entre deux ondes progressives ( $lin \perp lin$ ). **L'écart entre les deux modèles ne suffit pas à expliquer les mesures faites par X. Xu.** Nous n'avons par ailleurs vu aucune différence significative entre les deux configurations de polarisations. Ce type d'effet, même s'il est intéressant en lui-même, semble trop fin pour modéliser le chauffage supplémentaire et devra donc être rejeté dans un premier temps.

### Collisions froides

Des mécanismes plus subtils ont été invoqués pour expliquer plus précisément les mesures faites sur magnésium par F.Y. Loo [78]. J. Piilo [80] envisage en effet un chauffage dû aux collisions froides dans le piège magnéto-optique. La forte dépendance d'un tel processus avec la densité du nuage nous pousse à le rejeter aussi. Les prédictions pour le magnésium n'induisent un chauffage significatif qu'à partir de densité de l'ordre de  $10^{11}$  atomes/cm<sup>3</sup>. Cela reste de toutes façons d'un ordre de grandeur inférieur aux conditions expérimentales de F.Y. Loo [78]. Pour expliquer les mesures de X. Xu sur strontium, il faudrait une densité de  $10^{12}$  atomes/cm<sup>3</sup>. La densité expérimentale typique est de trois ordres de grandeur inférieure.

Nous sommes en ce qui nous concerne **loin des densités nécessaires à l'observation d'un tel effet**. Il semble mal adapté à notre situation expérimentale. Le piégeage du  $^{88}\text{Sr}$  ne permet pas d'atteindre une forte densité ( $10^9$  atomes/cm<sup>3</sup> typiquement en refroidissant sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ ). Elle est en revanche plus importante sur Mg et sur Yb (sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ ). On se tournera finalement vers un modèle beaucoup plus simple qui reste valable à faible densité.

### Diffusion multiple

Les effets de diffusion multiple des photons à l'intérieur du nuage piégé sont historiquement bien connus [81]. Ils influencent de façon prédominante la taille du

nuage [77] lorsque la densité est suffisamment grande pour qu'un photon diffusé par un atome puisse être réabsorbé par un autre. Il est difficile de considérer cet effet comme responsable de nos observations. Selon C.G. Townsend [81], il est indispensable de le prendre en compte si l'on veut comprendre l'évolution de la densité en fonction du nombre d'atomes. Cet effet sera aussi responsable d'une augmentation de température [82]. **Nous pouvons dans notre situation expérimentale le rejeter avec certitude.** Nous avons volontairement choisi de travailler avec **un nombre d'atomes faible** ( $\sim 10^7$  atomes). Nous avons indépendamment mesuré l'épaisseur optique à résonance : elle est bien inférieure à 0,1. Pour écarter cet effet définitivement, nous avons comparé **deux mesures d'expansion balistique pour deux nombres d'atomes différents.** Nous avons observé le nuage après 2 ms d'expansion dans les conditions expérimentales ( $\sim 10^7$  atomes) puis en divisant le nombre d'atomes par un facteur 3 environ (fig. 2.15).

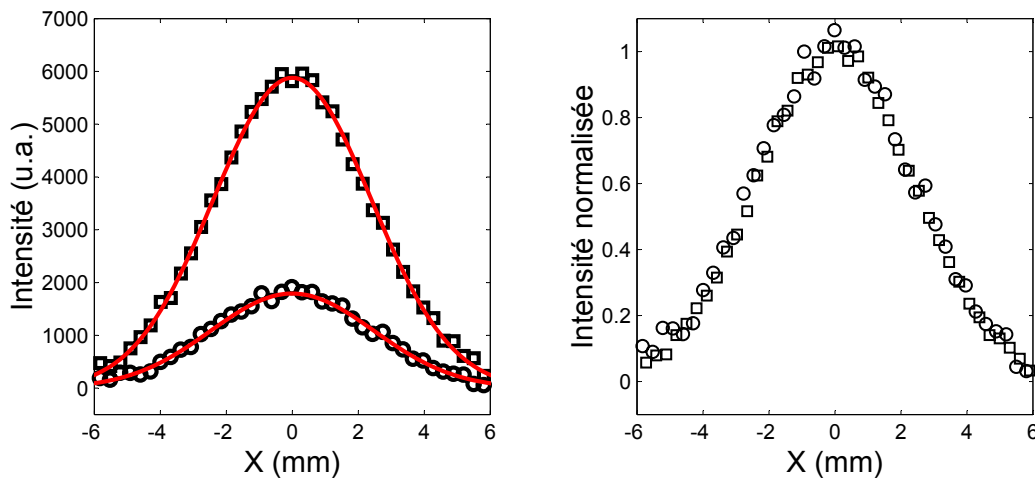


FIG. 2.15 – Coupe selon  $X$  du nuage après une expansion balistique longue (2 ms) avec deux nombres d'atomes différents (carrés :  $\sim 10^7$  atomes ; ronds :  $\sim 0,3 \cdot 10^7$  atomes). À droite, nous avons normalisé les intensités afin de comparer les largeurs des distributions. Les largeurs RMS des deux ajustements gaussiens diffèrent de 3% ce qui est de l'ordre de l'incertitude sur une mesure.

On voit en figure 2.15 les coupes des images selon  $X$ . L'ajustement gaussien ne montre pas de différence significative sur la largeur. **La température n'est donc pas dépendante du nombre d'atomes** : on ne peut pas invoquer un effet collectif pour expliquer les mesures expérimentales (fig. 2.10 et 2.11).

En choisissant des conditions expérimentales adaptées (faibles nombre d'atomes), on s'affranchit donc du phénomène de diffusion multiple qui a déjà été observé dans des conditions différentes.

L'effet de « gonflement » du nuage, mis en évidence par C.G. Townsend [81],

ne peut être dissocié du phénomène de diffusion inélastique (**triplet de Mollow**). Lors d'un processus inélastique, une partie du spectre diffusé se trouvera à résonance avec la transition atomique. C'est précisément ce processus qui permet d'interpréter les mesures de densité. La température sera aussi affectée comme l'a montré M. Drewsen en exhibant une augmentation comme la racine-cubique du nombre d'atomes [82].

Il a cependant été invoqué par F.Y. Loo [78] pour expliquer les mesures sur magnésium. Les conditions expérimentales sont alors très différentes des nôtres. Si l'on considère l'influence du triplet de Mollow, on peut s'étonner alors que la température soit une fonction croissante du désaccord  $|\delta_L|$  [78, fig. 5]. Si l'intensité est fixée, la paramètre de saturation  $s$  va décroître quand  $|\delta_L|$  augmente. D'une part l'intensité diffusée diminuera et donc les effets collectifs en diffusion multiple devraient s'estomper. D'autre part, l'influence du spectre inélastique devrait décroître aussi puisque le rapport entre les intensités diffusées inélastiquement et élastiquement vaut  $1/s$  [29, p.367]. À partir de ces deux arguments, la température devrait se rapprocher de la limite Doppler, ce que l'on observe pas sur la figure 5 de [78].

Il est finalement difficile de rejeter cet effet de façon générale (notamment à forte densité). **Nous pouvons au moins en ce qui nous concerne le négliger en tant qu'effet de diffusion multiple.**

Après avoir énuméré, discuté sommairement puis rejeter quelques modèles possibles, qui mettent en jeu parfois des phénomènes subtils, nous allons maintenant nous tourner vers une explication simple. Nous en détaillerons la résolution dans la partie à suivre.

### Qualité des faisceaux

Il semble plutôt simple d'incriminer **la qualité des faisceaux comme responsable des températures élevées que nous avons mesurées**. Cette proposition a déjà été faite lors de la première tentative de vérification de la théorie Doppler par D.S. Weiss [66]. L'expérience utilisait du sodium refroidi dans une mélasse 3D mis en interaction ensuite dans mélasse 1D en configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$ . Sans présenter d'analyse qualitative, les auteurs mentionnent **la possibilité d'un déséquilibre local (« point à point ») de l'intensité des deux faisceaux de la mélasse**. Un déséquilibre induit en effet une vitesse d'équilibre non nulle pour l'atome en ce point. Si l'on a une certaine distribution de déséquilibre entre les différents points du faisceau, on aura par là même une distribution de vitesse d'équilibre. **De façon intuitive, un tel phénomène vient convoluer la distribution des vitesses attendue** pour des faisceaux parfaitement équilibrés. Il s'agit en quelque sorte d'un élargissement inhomogène de la distribution Doppler. En guise d'introduction, nous pouvons en effet faire un rapide calcul de l'ordre de grandeur d'un tel élargissement. Pour cela revenons sur l'expression semi-classique de la force à faible saturation 2.1 en y ajoutant un déséquilibre des

intensités ( $I_1 \neq I_2$ ) entre les deux ondes :

$$F(V) = \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{I_1/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L + k_L V)^2/\Gamma_b^2} - \frac{I_2/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - k_L V)^2/\Gamma_b^2} \right) \quad (2.19)$$

Nous allons supposer que  $I_1 \sim I_2$  (autrement dit  $(I_1 - I_2) \ll (I_1 + I_2)/2$ ) et faire un développement limité de la force au premier ordre en  $V$  (afin de retrouver le coefficient de friction) et en  $I_1 - I_2$ .

$$F(V) \simeq \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{(I_1 - I_2)/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \right) + m\gamma V \quad (2.20)$$

avec pour  $\gamma$  une expression analogue à la formule 2.2, où l'on remplace simplement  $I$  par  $\frac{I_1 + I_2}{2}$  :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{I_1 + I_2}{2I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2} \quad (2.21)$$

On notera plus simplement  $\gamma = \gamma_I \times (I_1 + I_2)$  où

$$\gamma_I = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{1}{2I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2} \quad (2.22)$$

On voit alors que lorsqu'un déséquilibre existe ( $I_1 \neq I_2$ ), la vitesse d'équilibre  $V_{\text{eq}}$  n'est pas nulle, elle sera donnée par  $F(V_{\text{eq}}) = 0$  et vaudra.

$$V_{\text{eq}} = \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \quad (2.23)$$

En supposant que le déséquilibre  $(I_1 - I_2)/(I_1 + I_2)$  soit typiquement de 10% et le désaccord de  $\delta_L = -\Gamma_b/2$ , on obtient une valeur de  $V_{\text{eq}} = 37$  cm/s. Autrement dit, si l'on suppose une **distribution des déséquilibres de l'ordre de 10%** (pour l'écart-type par exemple), **on obtiendra alors un élargissement inhomogène de 37 cm/s** typiquement. Très schématiquement sur la figure 2.16, nous avons représenté quelques atomes entre deux faisceaux « bruités ». Chacun atteindra une vitesse d'équilibre non nulle qui dépend du déséquilibre local en intensité.

On peut donc conclure que cet effet est du même ordre de grandeur que ce que prédit la théorie Doppler  $\sigma_v = 22,5$  cm/s. Il mérite donc d'être étudié dans le détail **d'autant plus que le raisonnement que nous venons de faire est particulièrement simpliste**. On a en effet imaginé qu'un atome « voit » un déséquilibre des intensités qui dépend du point où il se trouve. L'atome atteindra la vitesse d'équilibre qui correspond à ce déséquilibre. De façon plus réaliste l'atome traverse le profil des faisceaux à cause de sa vitesse résiduelle suivant les axes transverses à la mélasse 1D. Il « voit » un déséquilibre qui dépend du point où il

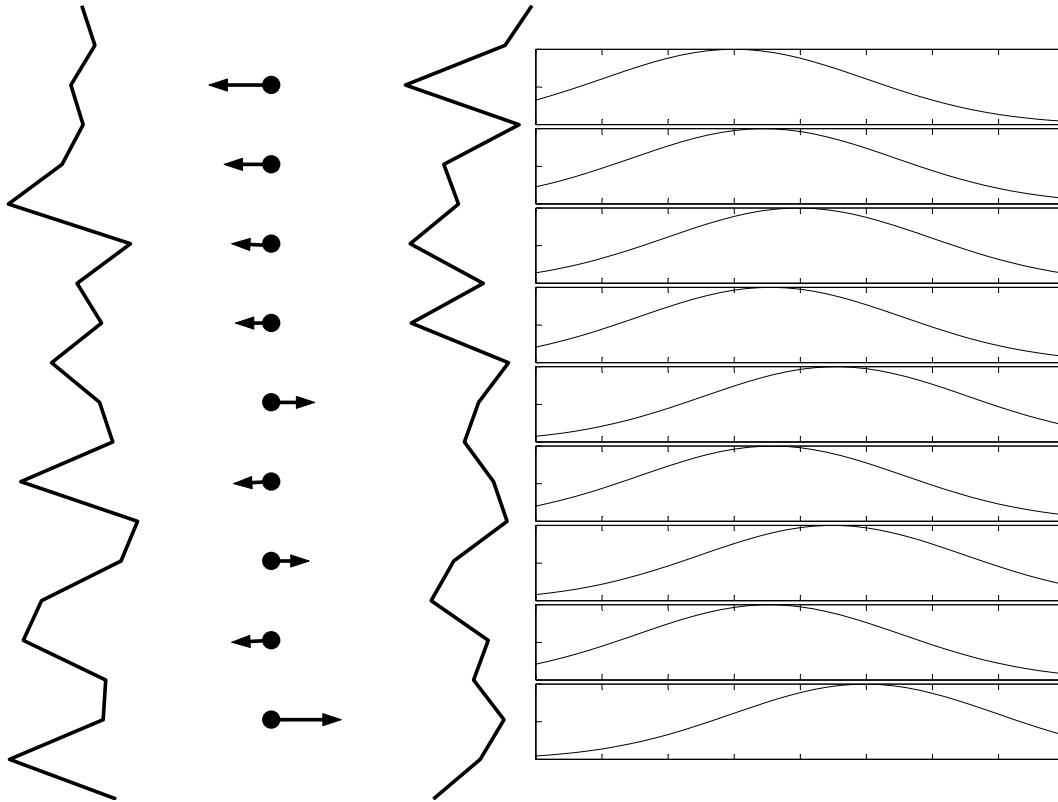


FIG. 2.16 – On a schématisé à gauche une assemblée d’atomes dans le profil des faisceaux. Pour chaque atome, on a représenté la distribution des vitesses possible, soit la distribution Doppler centrée en une valeur non nulle qui dépend du déséquilibre local d’intensité.

se trouve pendant ce trajet. Ce mécanisme semble intéressant et demande sans doute d’être développé. La dynamique de l’atome à l’intérieur de ce potentiel bruité ressemble à un processus de diffusion en impulsion. On rentre dans le cadre de la deuxième des remarques préliminaires énumérées en page 111 en mettant l’accent sur un mécanisme de diffusion supplémentaire.

### 2.3.2 Présentation du modèle de déséquilibre local des intensités

Comme nous venons de l’introduire l’idée d’un profil « torturé » pour les faisceaux ne semble pas irréaliste. Après avoir traversé plusieurs éléments optiques le faisceau sera détérioré par la diffusion par des poussières ou des défauts. Le profil aura une enveloppe gaussienne sur laquelle viendra s’ajouter du bruit. Nous le supposons **aléatoire et indépendant pour les deux faisceaux**. Il semble *a priori* qu’un tel processus puisse expliquer nos mesures et remplit pour le moment

les conditions énumérées page 111. Reprenons-les dans l'ordre :

1. L'ordre de grandeur de l'élargissement à partir d'une estimation simpliste vaut 37 cm/s, c'est donc bien un effet fort.
2. Au regard de l'équation 2.20, on constate que le temps caractéristique d'amortissement des vitesses est toujours  $\gamma^{-1}$  (l'intensité qui intervient au premier ordre en  $I_1 - I_2$  est la moyenne de  $I_1$  et  $I_2$ . La valeur du coefficient de friction n'est pas changée au premier ordre. Il semble bien que l'atome subisse un processus diffusif à l'intérieur d'un potentiel désordonné.
3. La vitesse transverse de l'atome jouera sans doute un rôle important puisqu'il traverse le profil bruité des faisceaux suivant les directions orthogonales à la mélasse. On n'est pas étonné qu'il puisse y avoir une différence entre les mesures sur jet et celles à partir d'un nuage d'atomes froids car les ordres de grandeur des vitesses résiduelles sont très différents.
4. L'effet ne dépend pas de la polarisation.

Il semble donc plausible qu'un tel phénomène puisse expliquer l'écart des mesures avec la théorie.

Avant d'en détailler la résolution, nous allons maintenant présenter un peu plus précisément le phénomène et les simplifications que nous avons choisies.

### Définition des paramètres des faisceaux

L'approche introductive de la page 114, nous a permis de dégager un ordre de grandeur de l'effet considéré. Elle revient à peu de chose près à **convoluer la distribution Doppler avec la distribution des déséquilibres d'intensité**. Cela suppose que la vitesse transverse est nulle puisque l'on fige les atomes en un point où  $I_1$  et  $I_2$  sont fixées. Ce n'est pas le cas en pratique, mais on pourra cependant se ramener à ce cas de figure **si la vitesse transverse est suffisamment faible**. De façon plus générale, l'atome traverse (fig. 2.17) sous l'effet de sa vitesse résiduelle  $v_{\perp}$  le profil des faisceaux.

Avant de discuter des différents régimes possibles suivant la valeur de  $v_{\perp}$ , définissons les paramètres caractérisant les faisceaux et leurs fluctuations d'intensité.

Pour caractériser les fluctuations d'intensité, on utilisera les deux premiers moments à savoir **l'intensité moyenne  $\langle \mathbf{I} \rangle$  et l'écart-type  $\sigma_{\mathbf{I}} = \sqrt{\langle \mathbf{I}^2 \rangle - \langle \mathbf{I} \rangle^2}$** . Cela ne suffit pas à définir les fluctuations. Il nous faut en effet considérer **la longueur de corrélation des fluctuations** qui sera notée  $L_c$ . Elle nous permettra de distinguer deux régimes différents du comportement des atomes dans le potentiel. On retrouve ces définitions sur la figure 2.18.

Nous allons supposer que **les fluctuations d'intensité ont une distribution gaussienne**. On peut raisonnablement supposer que les fluctuations sur les deux faisceaux  $I_1$  et  $I_2$  sont des variables aléatoires indépendantes, même si l'on se place dans le cas d'un faisceau rétro-réfléchi pour lequel les fluctuations sur les deux « bras » de la mélasse seront forcément corrélés. Dans la mesure où

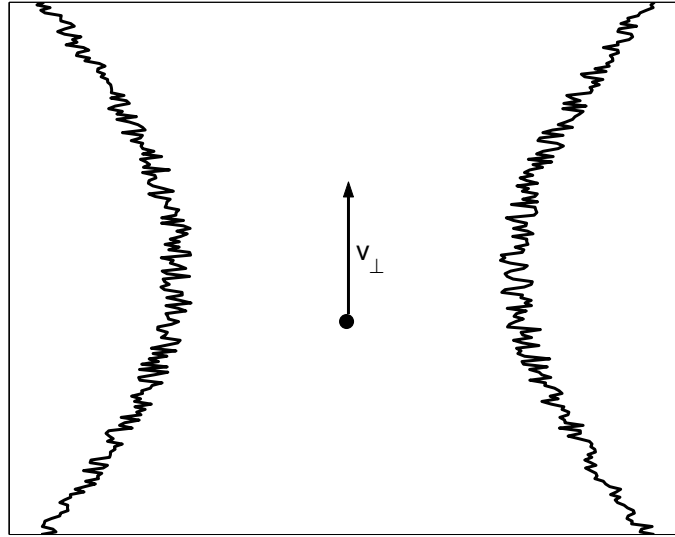


FIG. 2.17 – En interaction dans la mélasse 1D, un atome sous l’effet de sa vitesse résiduelle transverse « explore » le profil des faisceaux. La figure 2.16 mettait en scène une vision simpliste où l’atome est figé dans la direction transverse ; elle nous a permis de donner une estimation de l’effet considéré.

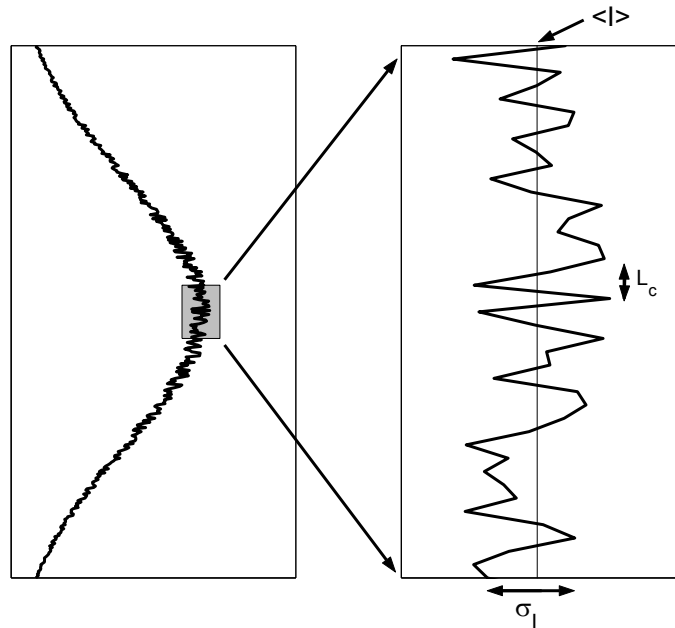


FIG. 2.18 – Caractérisation des paramètres des faisceaux et de leurs fluctuations :  $\langle I \rangle$ ,  $\sigma_I$  et  $L_c$

l'alignement n'est jamais parfait, il doit subsister un déséquilibre local d'intensité que nous modélisons par des variables aléatoires indépendantes. Il est aussi discutable d'attribuer à  $I_1$  et à  $I_2$  une distribution gaussienne. Nous avons mentionné comme origine des fluctuations la diffusion sur les poussières lors de la traversée d'éléments d'optique. La distribution d'intensité dans le speckle n'a pas forcément d'expression simple dans notre cas [89]. Pour simplifier nous supposons donc que  $I_1$  et  $I_2$  sont des variables aléatoires gaussiennes, ce qui nous permettra de mener des calculs analytiques. Nous discuterons du réalisme de cette hypothèse en analysant la figure 2.19.

**On ne doit pas confondre la distribution des fluctuations et l'enveloppe de  $I_1$  et  $I_2$ .** Cette dernière est aussi une gaussienne caractéristique des faisceaux gaussiens. Cependant, comme on a choisi un *waist* (3,5 mm) plus grand que l'expansion typique dans la mélasse, on peut négliger la forme gaussienne de l'enveloppe de  $I_1$  et  $I_2$ .

On définit donc la distribution d'intensité sur  $I_1$  et  $I_2$  par :

$$N(I) = \frac{1}{\sigma_I \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(I - \langle I \rangle)^2}{2\sigma_I^2}\right) \quad (2.24)$$

Nous utiliserons aussi sa transformée de Fourier bien connue pour une distribution gaussienne :

$$\begin{aligned} \tilde{N}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} N(I) \exp(-ikI) dI \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma_I^2 k^2}{2}\right) \exp(-ik \langle I \rangle) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour définir complètement le potentiel dans lequel évolue l'atome, il nous faut aussi déterminer la force. Nous en déduirons une équation maîtresse qui régit l'évolution de la distribution des vitesses.

### Expression de la force

Nous allons ici reprendre le raisonnement de la page 114. On suppose en fait que l'intensité moyenne est faible par rapport à l'intensité de saturation. On utilise alors l'expression semi-classique de la force pour un atome à vitesse  $V$  en un point des faisceaux où les intensités sont respectivement  $I_1$  et  $I_2$  pour les deux ondes. On rappelle alors l'expression 2.19 :

$$F(V, I_1, I_2) = \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{I_1/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L + k_L \cdot V)^2/\Gamma_b^2} - \frac{I_2/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - k_L \cdot V)^2/\Gamma_b^2} \right) \quad (2.26)$$



Nous allons la linéariser en fonction de  $V$ , on ne gardera par ailleurs que le terme d'ordre un en  $\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \ll 1$  :

$$F(V, I_1, I_2) \simeq \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{(I_1 - I_2)/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \right) - \hbar k_L^2 \frac{I_1 + I_2}{2I_{\text{sat}}} \frac{-8\frac{\delta_L}{\Gamma_b}}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2} V \quad (2.27)$$

On préférera définir l'accélération  $a$  fonction de  $V$ ,  $I_1$  et  $I_2$  :

$$\boxed{a(V, I_1, I_2) = b(I_1 - I_2) - \gamma_I (I_1 + I_2)V} \quad (2.28)$$

avec, pour simplifier la notation :

$$\boxed{b = \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2m} \frac{1}{I_{\text{sat}}} \frac{1}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_I = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{1}{2I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2}} \quad (2.29)$$

On peut maintenant **découpler deux échelles de temps** que l'on retrouvera ensuite dans l'interprétation des résultats expérimentaux.

### 2.3.3 Les deux régimes de chauffage

#### Les deux temps caractéristiques

On peut d'ores et déjà dégager le temps caractéristique de l'amortissement des vitesses  $\tau_v$ . En moyennant sur la distribution des intensités, on peut définir un coefficient de friction moyen  $\bar{\gamma}$  :

$$\bar{\gamma} = \gamma_I \langle I_1 + I_2 \rangle = 2\gamma_I \langle I \rangle \quad (2.30)$$

et par suite  $\tau_v$  comme l'inverse de ce coefficient :

$$\boxed{\tau_v = \frac{1}{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2\gamma_I \langle I \rangle}} \quad (2.31)$$

Nous avons déjà tracé  $\tau_v$  (fig.2.9) ; il suffit simplement de remplacer  $I$  par  $\langle I \rangle$ .

En imaginant le mouvement de l'atome dans le profil transverse des faisceaux, on peut construire une autre échelle de temps. Plus précisément, la longueur caractéristique des fluctuations d'intensité étant  $L_c$ , le temps typique qu'il faut à l'atome pour voir des fluctuations décorréliées sera

$$\boxed{\tau_c = \frac{L_c}{v_{\perp}}} \quad (2.32)$$

On connaît expérimentalement  $v_{\perp}$  ; elle est ici donnée par la vitesse typique dans le piège magnéto-optique de l'ordre du mètre par seconde.

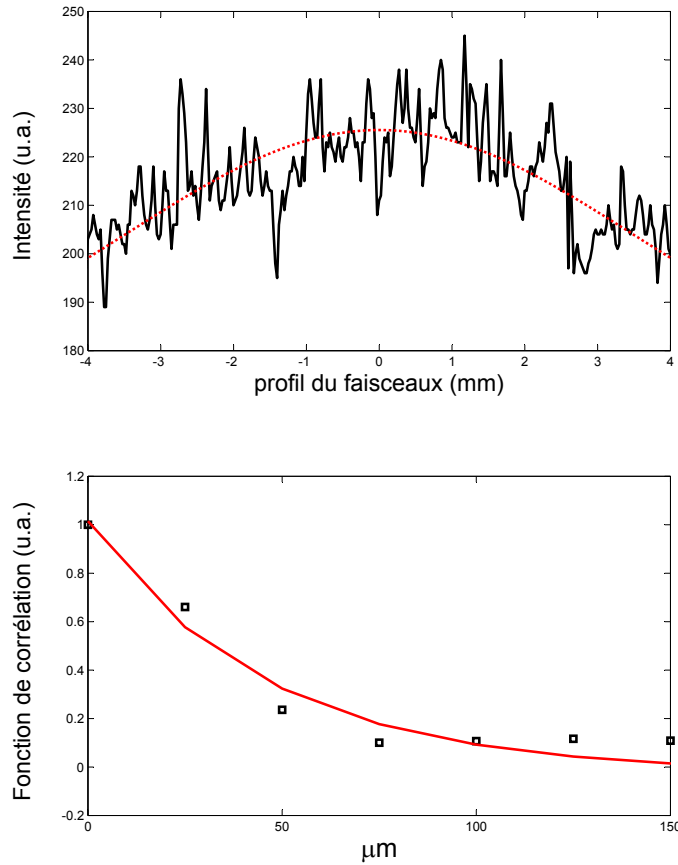


FIG. 2.19 – Estimation de la longueur de corrélation  $L_c$  à partir d’une image du faisceau dont on reconnaît l’enveloppe gaussienne (en haut). Un ajustement par une exponentielle décroissante de la fonction de corrélation (en bas) nous donne  $L_c \sim 50 \mu\text{m}$ .

Afin d’estimer  $L_c$ , nous avons simplement imagé le faisceau gaussien (fig. 2.19). On trace ensuite la fonction de corrélation des fluctuations pour obtenir la longueur de corrélation.

Il ne s’agit que d’une estimation de  $L_c$ . La résolution du système d’imagerie est ici d’environ  $30 \mu\text{m}$  (soit un pixel), ce qui introduit une grande incertitude sur  $L_c$ . Par ailleurs le bruit électronique du système d’imagerie introduit aussi des fluctuations sur l’image à l’échelle du pixel ( $30 \mu\text{m}$ ). Une mesure plus précise demanderait l’utilisation d’un système de meilleure résolution. En définitive, nous garderons en tête l’ordre de grandeur de  $L_c \sim 50 \mu\text{m}$  mais **nous l’utiliserons comme un paramètre ajustable** dans la suite de cette étude.

En observant le figure 2.19, on constate qu’il est difficile de considérer les fluctuations d’intensité comme des variables gaussiennes. Même si une partie du bruit est liée à l’électronique, on observe une prédominance des basses fréquences.

L'hypothèse d'un bruit blanc est donc difficilement justifiable, elle nous permettra cependant de mener des calculs analytiques. Un tel choix restera une limitation de notre modèle.

Dans la dynamique du refroidissement, en considérant la vitesse transverse des atomes, il est clair que les deux échelles de temps interviennent. Cela peut paraître un peu artificiel de les séparer puisqu'il existe une distribution des vitesses transverses et donc une distribution pour  $\tau_c$ . Cela semble pourtant nécessaire si l'on souhaite dégager une interprétation physique du phénomène. **On distinguera donc les deux limites cas possibles :  $\tau_v \ll \tau_c$  puis  $\tau_c \ll \tau_v$ .**

**Cas n°1 :  $\tau_v \ll \tau_c$**

On est ici dans le cas où  $v_\perp$  est faible. Elle est en fait suffisamment faible pour qu'en chaque point la vitesse s'amortisse pour atteindre l'état stationnaire correspondant aux intensités  $I_1$  et  $I_2$  (au point considéré). **L'atome traverse le profil suffisamment lentement pour que sa vitesse suive de façon quasi-statique la vitesse d'équilibre imposée localement par les intensités  $I_1$  et  $I_2$**  ( $V_{\text{eq}}$  expr. 2.23).

Tout se passe comme si les atomes étaient figés suivant la direction transverse. Dans l'état stationnaire, la vitesse de chacun est définie au point considéré. Supposons par exemple que la largeur de la distribution en vitesse soit uniquement donnée par ce phénomène. On néglige ici la distribution des vitesses imposée par le mécanisme de refroidissement Doppler. La largeur de la distribution sera donc directement reliée à la distribution des intensités. Chaque atome atteignant localement la vitesse d'équilibre, la distribution de ces vitesses donnera alors la température. Rappelons l'expression de  $V_{\text{eq}}$  :

$$V_{\text{eq}} = \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \quad (2.33)$$

Pour calculer l'écart-type de  $V_{\text{eq}}$ , il nous faut connaître celui de  $\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$ . Pour cela, nous allons supposer à nouveau que les fluctuations de  $I$  sont faibles devant  $\langle I \rangle$ . L'écart-type de  $\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$  sera donc par un développement au premier ordre  $\frac{\sqrt{2}\sigma_I}{2\langle I \rangle}$ .

En négligeant tout élargissement autre que celui généré par la distribution des vitesses d'équilibre (refroidissement Doppler), on obtient :

$$\sigma_{v1} = \frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{2k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (2.34)$$

Dans le cadre de notre modèle la distribution d'intensité (aussi bien que celle  $I_1$  et  $I_2$ ) est **gaussienne et la distribution des vitesses le sera aussi**. Sa valeur

RMS est donnée par  $\sigma_{v1}$ . Nous utiliserons plus tard sa largeur FWHM :

$$\Delta_{v1} = 2 \ln 2 \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (2.35)$$

**Cas n°2 :**  $\tau_c \ll \tau_v$

On est *a priori* dans une situation où la vitesse transverse  $v_\perp$  est élevée, ce qui permet d'avoir  $\tau_c = L_c/v_\perp$  petit. Dans ce cas, l'atome évolue dans un potentiel bruité. Nous allons dans cette partie établir l'équation maîtresse (type Fokker-Planck) qui régit la dynamique du mouvement. Nous en donnerons ensuite la résolution pour trouver l'état stationnaire.

**Établissement de l'équation maîtresse :** nous allons considérer l'évolution temporelle de la distribution des vitesses  $P(t, v)$  afin de chercher son état stationnaire. Lorsque  $\tau_c \ll \tau_v$ , le temps le plus court à partir duquel sera calculé l'évolution de  $P(t, v)$  sera donc  $\tau_c$ .

La distribution  $P(t + \tau_c, v)$  à l'instant  $t + \tau_c$  est calculé à partir de  $P(t, v')$  à l'instant précédent où  $v$  et  $v'$  sont reliées par l'équation d'évolution classique de la vitesse de l'atome ( $a$  est l'accélération) :

$$\frac{v - v'}{\tau_c} = a(v', I_1, I_2) = b(I_1 - I_2) - \gamma_I (I_1 + I_2)v' \quad (2.36)$$

L'accélération  $a(v', I_1, I_2)$  dépend de  $I_1$  et  $I_2$ , il nous faut donc intégrer aussi sur la distribution de  $I_1$  et  $I_2$ . On obtiendra donc l'équation d'évolution :

$$P(t + \tau_c, v) = \iiint P(t, v') N(I_1) N(I_2) \delta_{v-v'-\tau_c a(v')} dI_1 dI_2 dv' \quad (2.37)$$

À partir de l'équation d'évolution 2.37, il est possible d'obtenir une équation maîtresse. Sans rentrer dans le détail d'un calcul un peu fastidieux, nous en donnons ici l'expression finale. Le lecteur pourra trouver dans l'Annexe B la démonstration de l'équation suivante.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2 \langle I \rangle \gamma_I \frac{\partial (vP)}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \tau_c P \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right] \right) \quad (2.38)$$

Cette équation ressemble à celle de Fokker-Planck avec pour la force

$$F_{\text{fp}} = -m\bar{\gamma}v = -m.2 \langle I \rangle \gamma_I v \quad (2.39)$$

On a ici linéarisé la force autour de la vitesse nulle et on reconnaît en  $\bar{\gamma}$  le coefficient de friction moyen (expr. 2.31). Pour le coefficient de diffusion

$$D_{\text{fp}}(v) = v^2 \tau_c \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \tau_c \sigma_I^2 b^2 \quad (2.40)$$

On assiste donc à un processus de diffusion anormale car le coefficient  $D_{\text{fp}}(v)$  dépend de  $v$ . On est bien dans un processus différent du mécanisme Doppler ( $D_{\text{fp}}$  constant) pour lequel on obtient des distributions gaussiennes. Il n'existe pas toujours un état stationnaire pour des dépendances quelconques de  $D_{\text{fp}}$  (et de  $F_{\text{fp}}$  éventuellement). Dans le cas qui nous occupe, **une solution analytique existe**.

**Résolution :** nous cherchons à calculer la distribution dans l'état stationnaire. Ceci correspond à :

$$2 \langle I \rangle \gamma_I \frac{\partial (vP)}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \tau_c P \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right] \right) = 0 \quad (2.41)$$

On intègre sans peine l'équation précédente, la constante d'intégration vaut<sup>5</sup> 0 pour  $v = 0$ . L'état stationnaire maintenant est défini de façon équivalente par :

$$2 \langle I \rangle \gamma_I v P + \frac{\partial}{\partial v} \left( \tau_c P \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right] \right) = 0 \quad (2.42)$$

On intègre simplement cette équation différentielle du premier ordre en faisant le changement de variable :  $G = \tau_c P \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right]$

On obtient finalement la distribution des vitesses :

$$P(v) \propto \frac{1}{\left( \tau_c \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right] \right)^{1 + \frac{\langle I \rangle}{\gamma_I \tau_c (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2)}}} \quad (2.43)$$

ou plus simplement

$$P(v) \propto \frac{1}{\left( 1 + \frac{\gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2)}{\sigma_I^2 b^2} v^2 \right)^{1 + \frac{\langle I \rangle}{\gamma_I \tau_c (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2)}}} \quad (2.44)$$

On peut enfin simplifier la formule en utilisant à nouveau le fait que les fluctuations sont faibles soit  $\sigma_I \ll \langle I \rangle$ .

$$P(v) \propto \frac{1}{\left( 1 + \frac{2 \gamma_I^2 \langle I \rangle^2}{\sigma_I^2 b^2} v^2 \right)^{1 + \frac{1}{2 \gamma_I \tau_c \langle I \rangle}}} \quad (2.45)$$

---

<sup>5</sup>Dans la mesure où la distribution  $P(v)$  est paire, il est clair que  $\left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_{v=0} = 0$ .

En reconnaissant  $\tau_v = \frac{1}{2\gamma_I \langle I \rangle}$  (expr. 2.31) et en utilisant les expressions de  $b$  et  $\gamma_I$  p. 120, on préférera la notation :

$$\begin{aligned}
 P(v) &\propto \frac{1}{\left(1 + \frac{4v^2}{\omega_v^2}\right)^{1+\alpha}} \\
 &\text{avec} \\
 \omega_v &= \frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \\
 \alpha &= \frac{\tau_v}{\tau_c} = \frac{1}{2\gamma_I \langle I \rangle \tau_c} = \frac{m}{\hbar k_L^2} \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{I/I_{\text{sat}}} \frac{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2}{-8\frac{\delta_L}{\Gamma_b}}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Nous sommes dans le cas où  $\alpha = \frac{\tau_v}{\tau_c} \gg 1$ . La largeur totale à mi-hauteur de la distribution sera dans cette limite  $\Delta_{v2} = \frac{\omega_v \sqrt{\ln(2)}}{\sqrt{\alpha}}$ .

Concluons en donnant l'expression de la largeur FWHM de la distribution :

$$\Delta_{v2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2} \Gamma_b}{\sqrt{\alpha}} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{k_L} \frac{\sigma_I}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{1}{\langle I \rangle} \tag{2.47}$$

En remplaçant  $\alpha$  par son expression, on montre que :

$$\Delta_{v2} \propto \frac{1}{\sqrt{-\delta_L}} \sqrt{\frac{I}{I_{\text{sat}}}} \sqrt{\tau_c} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \tag{2.48}$$

La distribution  $P(v)$  n'est ici pas gaussienne. Nous avons vu sur la figure 2.6 que la forme du nuage après expansion balistique n'était pas gaussienne non plus. Nous ne ferons pas d'étude systématique de la forme des distributions qui reste un problème délicat. Il est par exemple difficile de prédire l'évolution d'une telle distribution après un temps d'expansion balistique : la formule 2.16 n'est pas applicable telle quelle. Nous baserons donc l'ensemble de nos interprétations sur la largeur RMS de  $P(v)$ . Le faible écart des distributions expérimentales (fig. 2.6) nous conforte dans cette assertion.

Nous avons finalement trouvé analytiquement l'expression de la distribution des vitesses dans les deux cas  $\tau_v \ll \tau_c$  puis  $\tau_c \ll \tau_v$ . Rappelons que ce calcul considère uniquement la dynamique de l'atome dans les fluctuations d'intensité des faisceaux : **on néglige ici complètement le mécanisme de diffusion Doppler**. On peut voir en effet que  $\omega_v$  (expr. 2.46) tend vers 0 quand  $\frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \rightarrow 0$ . Cela signifie simplement que le mécanisme de chauffage supplémentaire devient

négligeable par rapport au mécanisme de diffusion Doppler. Dans la partie à suivre nous récapitulerons les résultats et nous discuterons des divers cas limites en fonction des paramètres de la mélasse.

### Récapitulatif

Après avoir dégagé deux régimes limites et calculé la distribution des vitesses, il nous faut maintenant savoir pour quelles valeurs des paramètres expérimentaux chacun des cas est valide. Résumons avant cela les résultats dans un tableau ; :

Cas n°1	Cas n°2
$\tau_v \ll \tau_c$	$\tau_c \ll \tau_v$
$\alpha \ll 1$	$\alpha \gg 1$
distr. gaussienne	$\frac{1}{\left(1 + \frac{4v^2}{\omega_v^2}\right)^{1+\alpha}}$
$\Delta_{v1} = 2 \ln 2 \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$	$\Delta_{v2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$

Il nous faut noter que l'on a toujours  $\Delta_{v2} < \Delta_{v1}$ . Plus précisément :

$$\frac{\Delta_{v1}}{\Delta_{v2}} = \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{\alpha} = 1,18 \sqrt{\alpha} > 1$$

Pour obtenir la température la plus basse, il faut donc se placer dans le cas n°2 où  $\tau_c \ll \tau_v$ . Deux stratégies sont alors possibles.

- On peut faire décroître  $\tau_c = L_c/v_\perp$  : cela signifie que les « petits » défauts sur les faisceaux (pour  $L_c$  petit) n'ont pas tendance à augmenter la température. Plus subtil, pour avoir la température la plus basse dans la mélasse 1D, il faut donc avoir une vitesse transverse élevée.

On sera donc un peu moins étonné de voir que les mesures de A. Witte [67] sont proches de la théorie Doppler. En travaillant sur un jet atomique, les vitesses transverses (dans l'axe du jet) seront de quelques centaines de mètres par seconde, soit au moins un ordre de grandeur plus élevées que dans notre situation expérimentale. Le phénomène de chauffage supplémentaire que nous proposons devient négligeable : c'est le mécanisme Doppler qui domine et impose la température [67].

- On peut augmenter  $\tau_v$  : il dépend fortement des paramètres expérimentaux  $\delta_L$  et  $I/I_{\text{sat}}$ . Nous allons maintenant en détailler l'influence.

Nous allons regarder les différents cas limites pour les valeurs extrêmes de  $\delta_L$  et  $I/I_{\text{sat}}$  :

$\delta_L$	$I/I_{\text{sat}}$	$\gamma_I$	$\alpha = \frac{\tau_v}{\tau_c}$	$\Delta_v$
$\delta_L \rightarrow 0$	-	$\gamma_I \propto \delta_L \rightarrow 0$	$\alpha \propto -1/\delta_L \rightarrow \infty$	$\Delta_{v2} \propto \sqrt{\frac{I/I_{\text{sat}}}{-\delta_L}} \rightarrow \infty$
$-\delta_L \rightarrow \infty$	-	$\gamma_I \propto 1/\delta_L^4 \rightarrow 0$	$\alpha \propto \delta_L^4 \rightarrow \infty$	$\Delta_{v2} \propto \sqrt{\frac{I/I_{\text{sat}}}{-\delta_L}} \rightarrow 0$
-	$I \rightarrow 0$	$\gamma_I$ indép. de $I$	$\alpha \propto 1/I \rightarrow \infty$	$\Delta_{v2} \propto \sqrt{\frac{I/I_{\text{sat}}}{-\delta_L}} \rightarrow 0$
-	$I \rightarrow \infty$	$\gamma_I$ indép. de $I$	$\alpha \propto 1/I \rightarrow 0$	$\Delta_{v1}$ indép. de $I$

Le cas  $I \rightarrow \infty$  n'est *a priori* pas décrit par notre modèle qui suppose la saturation faible. Notons quand même que dans le cas n°1 ( $\tau_v \ll \tau_c$ ), la température est indépendante de l'intensité.

On constate en observant le tableau récapitulatif que **le régime de basse température sera atteint lorsque  $I \rightarrow 0$  et/ou  $\delta_L \rightarrow -\infty$** . La dépendance de la largeur de la distribution en fonction des paramètres de la mélasse est alors  $\sqrt{\frac{I/I_{\text{sat}}}{-\delta_L}}$ . Il est assez amusant de constater qu'il s'agit de la même dépendance que pour le refroidissement Sisyphe [86] qui repose pourtant sur un mécanisme très différent.

Lorsque l'on explore l'espace des paramètres  $(\delta_L, I/I_{\text{sat}})$ , on change de régime. Sur la figure 2.20, nous avons représenté  $\alpha$  : en gris le cas n°1 ( $\tau_v < \tau_c$  avec  $\alpha < 1$ ) et en blanc cas n°2 ( $\tau_c < \tau_v$  avec  $\alpha > 1$ ). En pointillés, les deux droites qui correspondent aux mesures expérimentales  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  (fig. 2.10) et  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$  (fig. 2.11). Rappelons que lorsque  $\tau_v < \tau_c$ , la température prédite est toujours plus élevée que pour  $\tau_c < \tau_v$ .

On peut aussi se poser la question de la généralisation à une mélasse 3D.

### Généralisation à une mélasse 3D

On a vu que la température dans la mélasse 1D est d'autant plus faible que la vitesse transverse est grande. Dans une mélasse 3D, les températures suivant les trois axes seront donc couplées et l'état final doit correspondre à un équilibre entre les trois dimensions. Faisons ce raisonnement pour une mélasse 3D à titre d'exemple : à partir de l'équation 2.48, on peut obtenir trois équations couplées. Sachant que la vitesse transverse à la direction  $X$  sera  $\sqrt{V_Y^2 + V_Z^2}$ , on aura pour  $V_X$  :

$$V_X \propto \frac{1}{\sqrt{\delta_L}} \sqrt{\frac{I}{I_{\text{sat}}}} \frac{1}{\sqrt{V_Y^2 + V_Z^2}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (2.49)$$



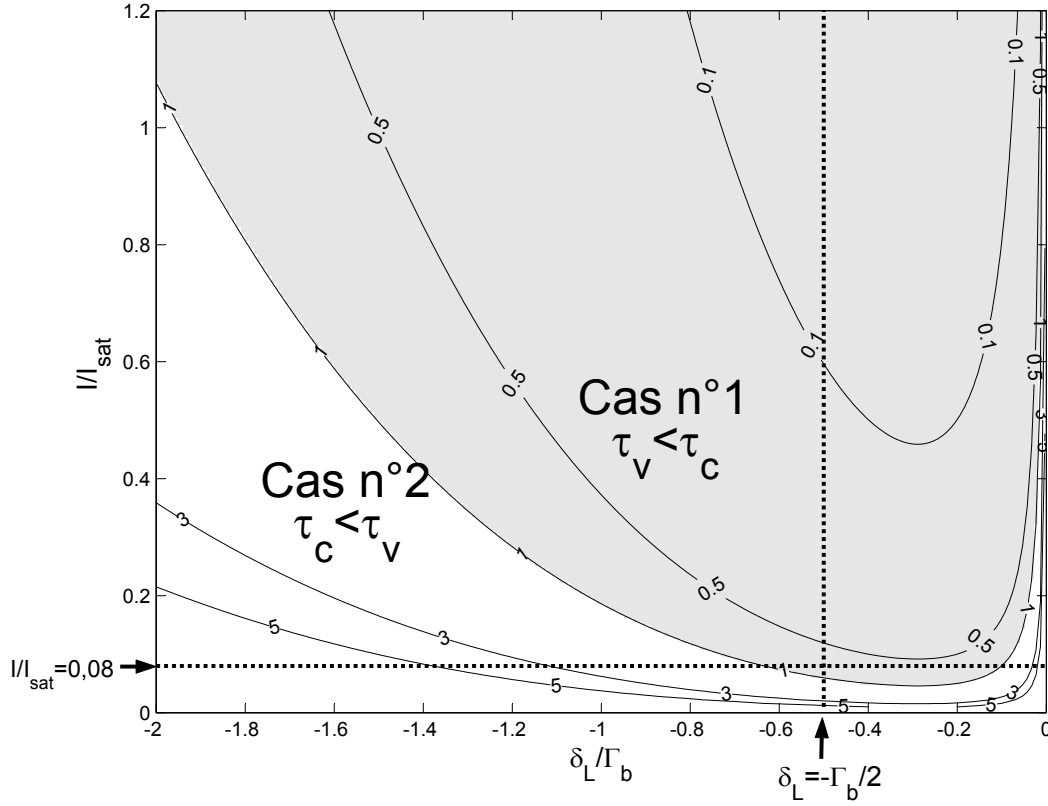


FIG. 2.20 – Représentation de  $\alpha = \frac{\tau_v}{\tau_c}$  dans l'espace des paramètres  $(\delta_L, I/I_{\text{sat}})$ . En gris la zone pour laquelle  $\alpha < 1$  : cas n°1 avec  $\tau_v < \tau_c$ , pour lequel les températures sont les plus élevées. En blanc  $\alpha > 1$  : cas n°2 avec  $\tau_c < \tau_v$ . On voit par ailleurs les contours pour  $\alpha = 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 3 ; 5$ .

Les équations donnant  $V_Y$  et  $V_Z$  sont similaires. On obtient finalement :

$$V_X = V_Y = V_Z \propto \left( \frac{I/I_{\text{sat}}}{\delta_L} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.50)$$

Ce régime semble plutôt original puisque la température dépend fortement de la dimension ; nous n'avons cependant pas fait d'étude systématique à 3D. Même si la loi de puissance est différente du cas 1D, les températures les plus basses sont atteintes lorsque  $I \rightarrow 0$  et/ou  $\delta_L \rightarrow 0$ .

Nous allons maintenant tâcher de comparer la température 1D prédite par notre modèle et les mesures expérimentales. Il nous faut à nouveau rester vigilant sur la valeur de  $\alpha$ . Quand  $\alpha < 1$ , on utilisera la formule 2.35 (cas n°1,  $\tau_v < \tau_c$ ), à l'inverse si  $\alpha > 1$  ce sera la formule 2.47 (cas n°2,  $\tau_c < \tau_v$ ).

### 2.3.4 Comparaison aux résultats expérimentaux

L'expression de  $\alpha$  (expr. 2.46 p. 125) nous permettra de distinguer les deux régimes :

$$\frac{\tau_v}{\tau_c} = \alpha = \frac{m}{\hbar k_L^2} \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{I/I_{\text{sat}}} \frac{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2}{-8\delta_L/\Gamma_b}$$

Les formules du tableau récapitulatif page 126 ne sont *a priori* valables que dans les cas extrêmes  $\tau_v \ll \tau_c$  et  $\tau_c \ll \tau_v$ . On ne sera pas surpris qu'elles ne se raccordent pas pour  $\tau_v = \tau_c$ .

Avant de comparer la largeur FWHM prédite par notre modèle et les mesures expérimentales, il nous faut faire une remarque : dans le cas n°2 ( $\tau_c < \tau_v$ ), la distribution n'est pas gaussienne. Nous l'avons donc caractérisée par sa largeur FWHM (plus facile à calculer). Pour cette raison, nous avons choisi de fournir aussi la largeur FWHM dans le cas n°1, afin de pouvoir comparer les deux. En revanche, les mesures expérimentales sont basées sur les valeurs RMS des distributions supposées gaussiennes. Afin de comparer l'expérience (RMS) et les prédictions (FWHM pour  $\Delta_{v1}$  et  $\Delta_{v2}$ ), nous allons donc diviser  $\Delta_{v1}$  et  $\Delta_{v2}$  par  $2\sqrt{2} \ln 2$ . Cela revient à supposer que dans le cas n°2 ( $\tau_c < \tau_v$ ), la distribution est gaussienne.

Sur la figure 2.21, nous avons donc représenté en losanges les mesures expérimentales pour  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  en c) (analogue à la fig. 2.10) et  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$  en d) (analogue à la fig. 2.11).

Nous avons aussi fait figurer  $\alpha$  et distingué les cas  $\alpha < 1$  ( $\tau_v \ll \tau_c$  en gris) et  $\alpha > 1$  ( $\tau_c \ll \tau_v$  en blanc). Dans la zone grisée ( $\tau_v \ll \tau_c$ , cas n°1), on a tracé  $\Delta_{v1}/2\sqrt{2} \ln 2$  (en tirets) et pour le cas n°2 ( $\tau_c \ll \tau_v$ )  $\Delta_{v2}/2\sqrt{2} \ln 2$  (traits pleins).

Dans le cadre de notre modèle de chauffage supplémentaire nous avons choisi comme valeur numérique  $\sigma_I/\langle I \rangle = 18\%$  et  $\tau_c = 100 \mu\text{s}$ . Ces deux paramètres restent ajustables puisque nous ne les avons pas mesurés indépendamment. Notons que  $\sigma_I/\langle I \rangle$  joue sur les deux valeurs  $\Delta_{v1}$  et  $\Delta_{v2}$  de façon équivalente (directement proportionnelle). En revanche  $\tau_c$  influence uniquement  $\Delta_{v2}$ . Les deux valeurs choisies  $\sigma_I/\langle I \rangle = 18\%$  et  $\tau_c = 100 \mu\text{s}$  permettent d'avoir un accord satisfaisant avec l'expérience. Nous les retrouverons dans la partie à suivre.

On constate (fig. 2.21) finalement que **nos prédictions sont en bon accord avec l'expérience. La courbe théorique en fonction de  $\delta_L$  est proche des mesures de la figure 2.10** même si elle n'est pas continue pour  $\alpha = 1$ . **En fonction de  $I/I_{\text{sat}}$ , l'accord n'est satisfaisant que lorsque  $I/I_{\text{sat}} < 0,1$ .** Notre modèle n'est *a priori* pas valable à faible saturation puisque nous avons choisi une expression de la force linéaire en intensité (expr. 2.26). On ne sera donc pas surpris du désaccord avec l'expérience lorsque  $I \rightarrow I_{\text{sat}}$ .

Il est certes possible de généraliser la formule 2.23 à forte saturation et d'ainsi extrapoler l'expression de  $\Delta_{v1}$ . Nous souhaitons par ailleurs tenir compte du chauffage lié aux fluctuations de la force (théorie Doppler). En effet, dans le cadre

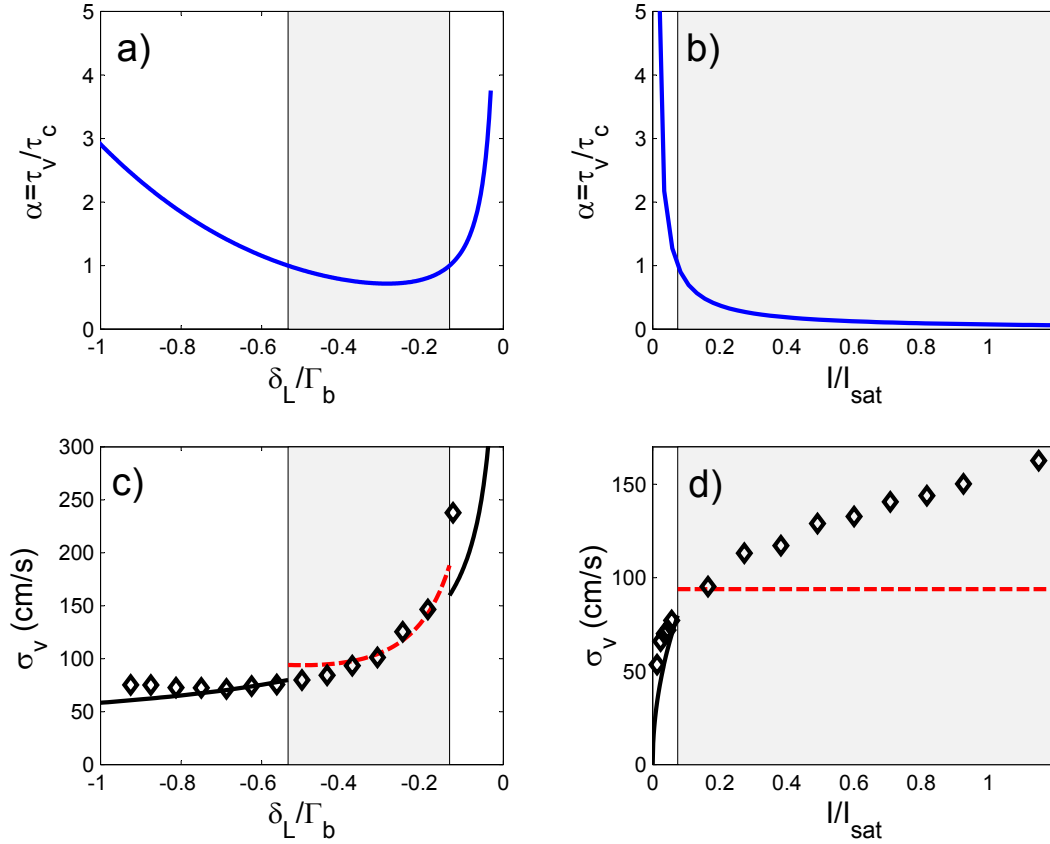


FIG. 2.21 – Comparaison des mesures expérimentales avec notre modèle analytique de chauffage supplémentaire. En a) et b), nous avons tracé  $\alpha = \frac{\tau_v}{\tau_c}$  qui marque la limite entre les deux cas : à nouveau  $\tau_v < \tau_c$  est en gris ( $\alpha < 1$ ) et  $\tau_c < \tau_v$  en blanc ( $\alpha > 1$ ). En c) et d), nous avons repris les mesures de  $\sigma_v$  des figures 2.10 et 2.11 en c) et d) respectivement. Pour ces deux courbes, en tirets apparaît  $\Delta_{v1}/2\sqrt{2}\ln 2$  et en traits pleins  $\Delta_{v2}/2\sqrt{2}\ln 2$  suivant que  $\tau_v < \tau_c$  ( $\alpha < 1$ ) ou  $\tau_c < \tau_v$  ( $\alpha > 1$ ) respectivement.

de nos approximations, la température tend vers 0 quand  $I \rightarrow 0$ . En réalité, elle devra garder une valeur finie, celle prédite par la théorie Doppler.

Plutôt que d'essayer d'adapter notre modèle, nous avons préféré développer une simulation Monte-Carlo afin de prendre en compte tous les ingrédients qui nous semblent pertinents. L'analyse de la figure 2.21 ne sera pas vaine : elle nous a en effet permis de dégager les différents régimes de chauffage et d'interpréter les tendances globales des résultats expérimentaux.

### 2.3.5 Simulation Monte-Carlo

Notre simulation doit prendre en compte **deux sources de « bruits »** : **les fluctuations de la force**, sources de la diffusion en impulsion à la base de la théorie Doppler, et **les fluctuations d'intensité dans le profil des lasers** qui produisent selon le modèle développé ci-dessus un chauffage supplémentaire. Voyons un peu plus dans les détails comment fonctionne la simulation.

#### Présentation

Nous allons successivement présenter les éléments pris en compte dans le programme :

1. les fluctuations d'intensité dans le profil du faisceau ;
2. le bruit quantique à l'origine des fluctuations de la force. On tiendra compte aussi bien des fluctuations du temps d'émission des photons que la direction aléatoire d'émission spontanée des photons ;
3. la saturation de la transition que nous avons pour le moment négligée dans le cadre de notre modèle ;
4. la distribution des vitesses transverses  $v_{\perp}$  qui introduira une distribution des temps de corrélation  $\tau_c$ .

**Fluctuations d'intensité dans le profil du faisceau :** afin de prendre en compte le déplacement d'un atome à vitesse  $v_{\perp}$  dans le profil transverse, nous allons définir l'intensité que verra l'atome comme une fonction du temps  $I_1(t)$  (pour un des faisceaux indicé 1). Son évolution est donnée par une équation d'amortissement (vers la valeur moyenne) à laquelle on vient ajouter une terme de fluctuation :

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{v_{\perp}}{L_c} (I_1(t) - \langle I \rangle) + \text{fluct.}$$

Dans le cadre de notre simulation, le temps le plus court est donné par la durée de vie du niveau excité  $\Gamma_b^{-1}$ , ce qui nous donnera le pas temporel. On aura en effet  $\Gamma_b^{-1} \ll \frac{L_c}{v_{\perp}}$  ou bien  $\frac{v_{\perp}}{\Gamma_b L_c} \ll 1$ . L'équation précédente devient après discrétisation temporelle :

$$\frac{I_1(t + \Gamma_b^{-1}) - I_1(t)}{\Gamma_b^{-1}} = -\frac{v_{\perp}}{L_c} (I_1(t) - \langle I \rangle) + \text{fluct.}$$

À partir de l'intensité à l'instant  $t$ , on calcule celle au pas suivant :

$$I_1(t + \Gamma_b^{-1}) = -\frac{v_{\perp}}{\Gamma_b L_c} (I_1(t) - \langle I \rangle) + I_1(t) + \epsilon r. \quad (2.51)$$

$r$  est choisi selon une loi uniforme dans  $[-0,5; 0,5]$ . On admettra qu'une telle équation permet de simuler une distribution des fluctuations d'intensité gaussienne<sup>6</sup> dont la valeur RMS<sup>7</sup> sera :

$$\sigma_I = \epsilon \left( \frac{\sqrt{\Gamma_b L_c}}{2\sqrt{6V_\perp}} \right) \quad (2.52)$$

**Fluctuations quantiques de la force :** elles seront simulées d'une façon assez standard. On tirera en effet au hasard l'instant d'absorption d'un photon, sachant que la probabilité d'absorption d'un photon du faisceau 1 pendant un temps  $dt$  sera :

$$\frac{\Gamma_b}{2} \frac{I_1(t)/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - k_L \cdot V)^2 / \Gamma_b^2} dt \quad (2.53)$$

Suite à un processus d'absorption, on ajoutera à l'impulsion de l'atome de façon aléatoire  $+\hbar k_L$  (probabilité 1/2) ou  $-\hbar k_L$  (probabilité 1/2) afin de prendre en compte l'émission spontanée.

La probabilité d'absorption d'un photon du faisceau 2 pendant un temps  $dt$  est analogue en remplaçant  $I_1$  par  $I_2$ .

L'évolution temporelle de  $I_1(t)$  est donné par l'équation 2.51. Cela nous permet de prendre en compte les fluctuations d'intensité dans le profil des faisceaux qui sont au cœur de notre modèle de diffusion supplémentaire.

**Saturation de la transition :** il n'est pas difficile d'inclure la saturation de la transition. On modifie la section efficace d'absorption (expr. 2.53) comme suit

<sup>6</sup>La distribution est gaussienne par le théorème de la limite centrale [87].

<sup>7</sup>On peut le montrer facilement en reprenant l'équation 2.51 et en l'élevant au carré comme suit :

$$[I_1(t + \Gamma_b^{-1}) - \langle I \rangle]^2 = \left[ \left( 1 - \frac{v_\perp}{\Gamma_b L_c} \right) (I_1(t) - \langle I \rangle) + \epsilon r \right]^2$$

En développant le membre de droite et en faisant la moyenne sur les fluctuations, on reconnaît la variance (notée Var) des fluctuations d'intensité et celle de  $r$  (loi uniforme).

$$\begin{aligned} \text{Var}(I_1(t + \Gamma_b^{-1})) &= \sigma_I^2 \\ \text{Var}(I_1(t)) &= \sigma_I^2 \\ \text{Var}(r) &= 1/12 \end{aligned}$$

Les variables  $I_1$  et  $r$  étant indépendantes, lorsque l'on effectue la moyenne sur les fluctuations, le terme correspondant à  $(I_1(t) - \langle I \rangle) r$  sera nul. On obtient finalement :

$$\sigma_I^2 = \left( 1 - \frac{v_\perp}{\Gamma_b L_c} \right)^2 \sigma_I^2 + \frac{\epsilon}{12}$$

En se rappelant que  $\frac{v_\perp}{\Gamma_b L_c} \ll 1$ , on obtient sans peine l'expression 2.52.

en ajoutant le terme  $(I_1 + I_2)/I_{\text{sat}}$  :

$$\frac{\Gamma_b}{2} \frac{I_1(t)/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - k_L \cdot V)^2 / \Gamma_b^2 + (I_1 + I_2)/I_{\text{sat}}} dt \quad (2.54)$$

**Distribution des vitesses transverses  $v_{\perp}$  :** la procédure précédente qui consiste à regarder l'évolution de l'impulsion d'un atome dans la mélasse 1D peut être répétée pour plusieurs atomes ayant chacun des vitesses transverses différentes.

Dans un premier temps afin de comparer notre simulation avec les résultats analytiques du tableau page 126, nous avons gardé  $\tau_c$  fixé ( $v_{\perp}$  sera aussi fixée). Cela nous permet d'analyser les premiers résultats de la simulation.

## Résultats

Nous avons dans un premier temps observé l'évolution de la distribution de vitesse d'une assemblée d'atomes ayant tous la même vitesse transverse (ce qui impose  $\tau_c$  précisément). Nous avons tracé (fig. 2.22) l'évolution de la largeur RMS de la distribution (en traits pleins) pour trois temps de corrélation  $\tau_c$  : 0,25, 125 et 1250  $\mu\text{s}$ . En tirets, nous avons fait figurer une exponentielle décroissante qui correspond au régime Doppler. Son temps d'amortissement est donné par l'inverse du coefficient de friction. On constate que la courbe  $\tau_c = 0,25 \mu\text{s}$  suit cette tendance, ce qui n'est pas surprenant, en effet, on est dans le cas où  $\alpha = \tau_v/\tau_c \rightarrow \infty$  et par suite  $\Delta_{v2} \rightarrow 0$ . Dans ce cas, le processus de chauffage supplémentaire lié au bruit d'intensité sur le profil des faisceaux est négligeable. C'est donc le mécanisme Doppler qui domine et impose  $\sigma_v = 22,5 \text{ cm/s}$ .

On constate pour  $\tau_c = 1250 \mu\text{s}$  une évolution plutôt surprenante. **La largeur de la distribution commence par décroître** pour augmenter à nouveau. Nous reviendrons sur cet effet plus tard, **qui apparaît lorsque  $\tau_c \gg \tau_v$** .

Plutôt que l'évolution nous allons nous intéresser à la valeur finale de la largeur de la distribution. Nous avons donc tracé (fig. 2.23)  $\sigma_v$  dans l'état stationnaire pour différentes valeurs de  $\tau_c$ .

Nous venons de voir que **lorsque  $\tau_v/\tau_c \rightarrow \infty$ , le refroidissement est imposé par le mécanisme Doppler** (en pointillés, nous avons fait figurer la limite  $\sigma_v = 22,5 \text{ cm/s}$ ). **À l'inverse quand  $\tau_v/\tau_c \rightarrow 0$ , la largeur est imposée par le mécanisme de chauffage supplémentaire** détaillé en 2.3.3. On est plus précisément dans le cas n°1 (tableau p. 126). En pointillés nous avons tracé la droite  $\sigma_v = \Delta_{v2}/(2\sqrt{2} \ln 2)$  ( $\Delta_{v2}$  étant la largeur FWHM, on la divise par  $2\sqrt{2} \ln 2$  pour obtenir une valeur RMS comparable à  $\sigma_v$ ). On tend visiblement vers cette limite lorsque  $\tau_v/\tau_c \rightarrow 0$ .

On constate par ailleurs une forte dépendance de la température en fonction de  $\tau_c$  lorsque  $\tau_c \sim \tau_v$ .

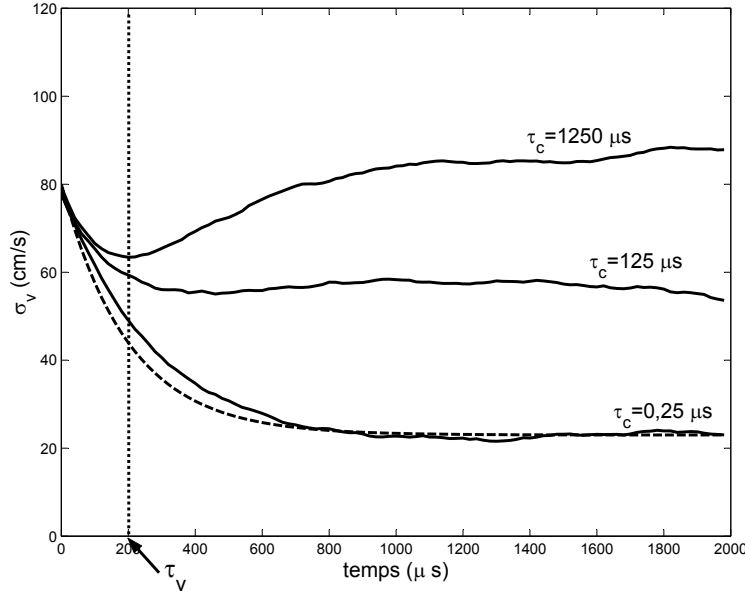


FIG. 2.22 – Évolution temporelle de la largeur RMS de la distribution pour trois temps de corrélation  $\tau_c$  : 0,25 ; 125 et 1250  $\mu\text{s}$ . La largeur de la distribution initiale est de 80 cm/s. Les paramètres choisis sont  $I/I_{\text{sat}} = 0,04$  ;  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et  $\sigma_I/\langle I \rangle = 0,18$ . On aura alors  $\tau_v = 201 \mu\text{s}$ .

Pour simuler complètement le comportement du nuage dans la mélasse 1D, il nous faut maintenant tenir compte de la distribution des  $v_\perp$ . Nous avons supposé que la largeur RMS de celle-ci est de 100 cm/s. On imposera par ailleurs  $L_c = 100 \mu\text{m}$ . Cela introduira une distribution de  $\tau_c$ . La valeur  $L_c = 100 \mu\text{m}$  reste significativement plus élevée que la mesure expérimentale (fig. 2.19) pour laquelle la résolution du système d'imagerie est une limitation forte.

Nous avons ensuite simulé l'évolution de la distribution des vitesses dans la mélasse 1D en tenant compte de tous les effets énumérés en page 131. En ayant fixé les paramètres  $L_c = 100 \mu\text{m}$  avec une distribution gaussienne de  $v_\perp$  (largeur  $\sigma_{v_\perp} = 100 \text{ cm/s}$ ) et  $\sigma_I/\langle I \rangle = 0,18$ , nous avons alors fait varier  $I/I_{\text{sat}}$  et  $\delta_L$ . Les résultats pour la largeur de la distribution dans l'état stationnaire sont présentés sur la figure 2.24.

Sur la figure 2.21, nous avons utilisé les formules analytiques qui restreignaient notre modèle à des cas limites ( $\alpha \ll 1$  ou  $\gg 1$  et  $I/I_{\text{sat}} \ll 1$ ).

Sur la figure 2.24, on voit maintenant que **l'accord est très bon concernant la dépendance de la température avec  $I/I_{\text{sat}}$** . On voit plus nettement que l'on tend vers la limite Doppler  $\sigma_v = 22,5 \text{ cm/s}$  quand  $I \rightarrow 0$ . La dépendance  $\sigma_v \sim \sqrt{I/I_{\text{sat}}}$  que nous avons alors mis en évidence (expr. 2.47) semble confirmée. On a ensuite à forte intensité une croissance quasi-linéaire de  $\sigma_v$ .

**La dépendance avec le désaccord est moins satisfaisante.** Pour expli-

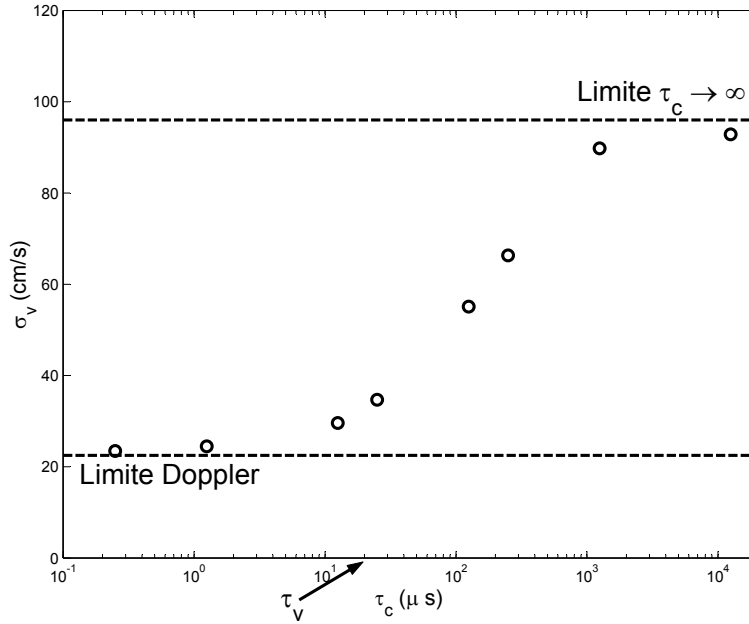


FIG. 2.23 – Valeur finale de la largeur de la distribution des vitesses. En pointillés, les deux limites correspondant aux deux régimes extrêmes du refroidissement :  $\sigma_v = 22,5 \text{ cm/s}$  (mécanisme Doppler) et  $\sigma_v = \Delta_{v2}/(2\sqrt{2} \ln 2)$  (cas n°1  $\tau_v \ll \tau_c$ ). À nouveau  $I/I_{\text{sat}} = 0,04$ ;  $\delta_L = -\Gamma_b/2$  et  $\sigma_I/\langle I \rangle = 0,18$ . On aura alors  $\tau_v = 201 \mu\text{s}$ .

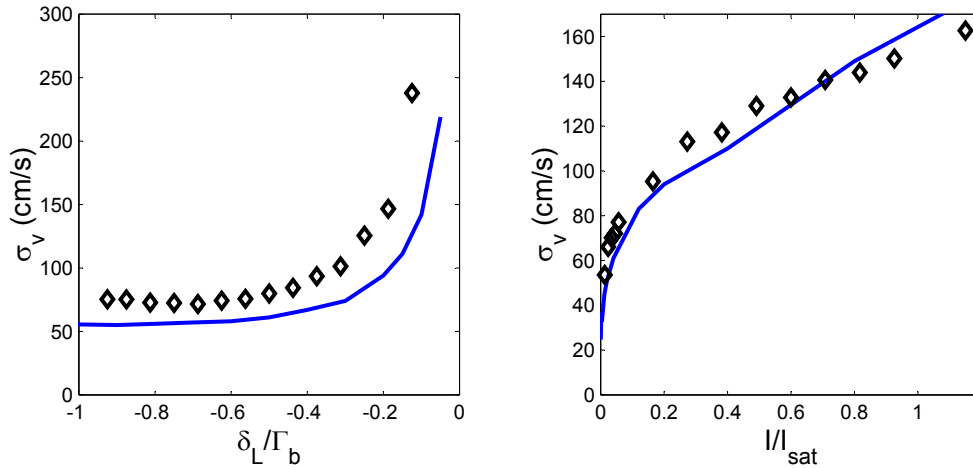


FIG. 2.24 – Comparaison des résultats des simulations (traits pleins) avec les mesures expérimentales (fig. 2.10 et fig. 2.11). On a choisi  $L_c = 100 \mu\text{m}$ ,  $\sigma_{v\perp} = 100 \text{ cm/s}$  et  $\frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = 0,18$ .



quer cet écart, on peut invoquer deux effets que nous n'avons pas pris en compte jusque là :

- Nous n'avons pas pointé avec précision la résonance atomique. L'incertitude estimée est d'environ 2 MHz, soit un décalage possible de 0,05 en unité de  $\Gamma_b$ . **Un tel effet peut introduire un décalage global de la courbe suivant l'axe des abscisses.** Cet artéfact pourrait en partie combler l'écart entre la simulation et les mesures essentiellement à faible désaccord.
- Avec  $I/I_{\text{sat}} = 0,08$ , on est généralement dans le régime  $\alpha = \tau_v/\tau_c \gg 1$ . Dans ce cas (n°2), les distributions ne sont plus gaussiennes, **le traitement des images de temps d'expansion balistique (p. 97) n'est alors plus adapté.** Une procédure prenant en compte le caractère non gaussien des distributions et utilisant l'expression 2.45 est en train d'être développée et devrait faire l'objet d'une publication future [88]. Des résultats préliminaires montrent un meilleur accord avec les simulations pour  $\delta_L < -\Gamma_b/2$ .

### 2.3.6 Conclusion

Il n'est pas toujours facile de façon générale d'interpréter le résultat de simulations Monte-Carlo. On a parfois du mal à distinguer l'influence des différents ingrédients physiques inclus dans la simulation. Il était donc important de résoudre analytiquement une partie du problème. L'interprétation de la figure 2.24 en a été largement facilitée.

### Récapitulatif

La dépendance de la température en fonction de l'intensité est maintenant bien comprise. À forte intensité,  $\sigma_v$  croît quasi-linéairement et la pente ne peut en aucun cas être interprétée par un mécanisme Doppler à forte intensité (qui est prise en compte lors du calcul de 2.9 et 2.11). Les variations causées par ce mécanisme restent faibles (en pointillés fig. 2.7). La pente est directement liée aux fluctuations d'intensité sur le profil du laser (cas n°1 :  $\tau_v \ll \tau_c$ ). Notre expression analytique de la largeur de la distribution finale (expr. 2.34) ne montrait pas une telle tendance (fig. 2.21), simplement parce qu'elle supposait une saturation faible. À l'inverse lorsque  $I \rightarrow 0$ , on observe une rupture de pente (autour de  $I/I_{\text{sat}} \lesssim 0,1$ ) puis  $\sigma_v$  tend vers la limite Doppler. D'un point de vue très pragmatique, il est difficile de faire décroître l'intensité des faisceaux du piège magnéto-optique jusqu'à des valeurs aussi faibles. La force exercée sur les atomes est alors trop faible pour les maintenir dans le piège. Cela est rendu d'autant plus difficile que la variation de  $\sigma_v$  en  $\sqrt{I/I_{\text{sat}}}$  est abrupte autour de l'origine. En pratique les températures mesurées sont toujours supérieures aux prédictions de la théorie Doppler aussi bien sur strontium que sur calcium. À titre d'illustration les mesures sur calcium dans un piège magnéto-optique donnent  $\sigma_v \simeq 70$  cm/s alors que la limite Doppler est de 35 cm/s [108].

La dépendance de la température en fonction du désaccord est bien comprise aussi. Un écart subsiste entre la simulation et les mesures, il peut être en partie imputé à une incertitude lors des mesures et à un traitement inadapté des données expérimentales. Notons aussi que pour cette courbe en particulier, on a  $\tau_v \sim \tau_c$ . On a vu par ailleurs que  $\sigma_v$  est particulièrement sensible au choix de  $\tau_c$  lorsque l'on est proche de  $\tau_v$  (fig. 2.23). Il est donc délicat d'ajuster correctement  $\tau_c$ . Il semble malgré cela que notre modèle fournisse tous les éléments pertinents pour expliquer les mesures de températures.

### Mise en évidence expérimentale du temps de corrélation $\tau_c$

Le temps de corrélation  $\tau_c$  est un concept important dans notre modèle de chauffage supplémentaire. La résolution analytique en 2.3.3 est directement imposée par la comparaison des deux échelles de temps du problème :  $\tau_v$  et  $\tau_c$ . Le temps d'amortissement des vitesses  $\tau_v$  est quantitativement bien prédit par la théorie Doppler (p. 100). Il est revanche difficile de mettre en évidence  $\tau_c$  directement. Pour cela, il est nécessaire de s'intéresser à la dynamique du refroidissement. Nous allons donc nous placer dans la situation décrite par la figure 2.22.

Lorsque  $\tau_v \ll \tau_c$ , en observant l'évolution temporelle de  $\sigma_v$  (fig. 2.22), on voit dans un premier temps ( $t \lesssim \tau_c$ ) que  $\sigma_v$  décroît. Il augmente ensuite à partir de  $t \sim \tau_c$  pour atteindre sa valeur stationnaire. Cet effet dans la dynamique du refroidissement n'est visible que lorsque  $\tau_v \ll \tau_c$ . Dans ce cas, la friction est suffisamment forte pour que la vitesse d'un atome atteigne sa valeur stationnaire ( $V_{\text{eq}}$  expr. 2.23) avant que les intensités  $I_1$  et  $I_2$  ne changent (à cause de la vitesse transverse de ce même atome). Dans la situation initiale de la simulation, il n'y a pas de corrélation entre les intensités locales et la vitesse des atomes en ce point. On peut faire un raisonnement simple pour montrer que la distribution des vitesses commence par s'affiner. Considérons une atome à vitesse  $V$  placé entre deux faisceaux d'intensité  $I_1$  et  $I_2$ . L'évolution de la vitesse sera donnée par l'équation 2.28 que l'on note sous la forme suivante (au premier ordre en  $\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \ll 1$ ) :

$$\frac{dV}{dt} = b(I_1 - I_2) - \frac{1}{\tau_v} V \quad (2.55)$$

qui s'intègre simplement en

$$V(t) = (V(0) - V_{\text{eq}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_v}\right) + V_{\text{eq}} \quad (2.56)$$

$V_{\text{eq}}$  désigne la vitesse d'équilibre (expr. 2.33). Après avoir mis l'expression précédente au carré, on peut ensuite faire la moyenne sur la distribution des vitesses pour trouver l'évolution de sa largeur RMS  $\sigma_v(t)$ . Rappelons que les distributions

de vitesses initiales  $V(0)$  et d'équilibre  $V_{\text{eq}} \propto (I_1 - I_2)$  ne sont pas corrélées. On obtient :

$$\sigma_v(t)^2 = [\sigma_v(0)^2 + \sigma_v(\infty)^2] \exp(-2t/\tau_v) + \sigma_v(\infty)^2 [1 - 2 \exp(-t/\tau_v)] \quad (2.57)$$

$\sigma_v(\infty)^2$  désigne la variance de la distribution des  $V_{\text{eq}}$ . Lorsque  $t \ll \tau_v$ , on aura

$$\sigma_v(t)^2 \sim \sigma_v(0)^2 (1 - 2t/\tau_v) \quad (2.58)$$

On voit ici qu'avant d'atteindre sa valeur stationnaire, la distribution des vitesses commence par s'affiner comme on peut le voir sur la figure 2.25.

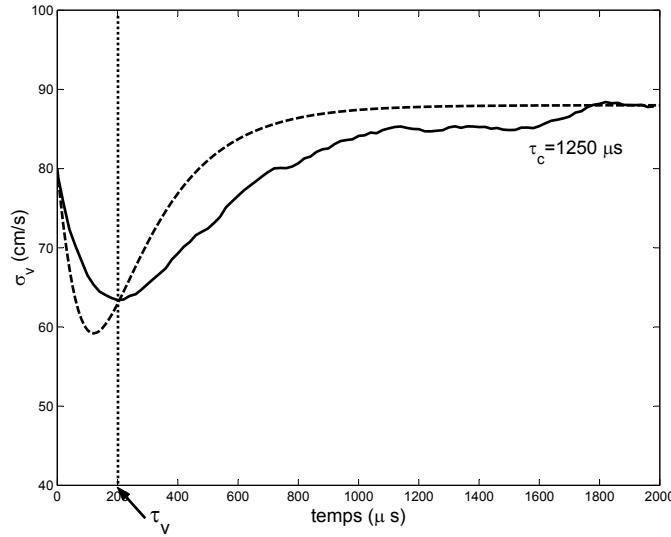


FIG. 2.25 – On a repris ici le résultat de la simulation de Monte-Carlo de la figure 2.22 avec  $\tau_c = 1250 \mu$ s et on le compare à la formule analytique 2.57 (tirets). Le raisonnement qui permet d'obtenir la formule 2.57 néglige le mécanisme Doppler qui est pris en compte dans la simulation. Malgré cette différence, les deux courbes montrent le même comportement.

Dans le cas où  $\tau_v \ll \tau_c$ , cela vient du fait qu'initialement il n'y a pas de corrélation entre les intensités locales et la vitesse des atomes en ce point (ce qui n'est pas vrai dans l'état stationnaire). Il est possible d'observer expérimentalement ce comportement.

Pour ce faire nous allons utiliser une séquence de temps particulière (fig. 2.26). Avant de mesurer la température par temps d'expansion balistique (pour  $t > 0$  de façon analogue à la séquence présentée en 2.5), on éteindra pendant une durée  $T_{\text{off}}$  les faisceaux du piège puis on les allumera à nouveau pendant  $T_{\text{on}} \sim \tau_v \simeq 500 \mu$ s.

Que se passe-t-il après une telle séquence ?

Supposons que  $T_{\text{off}} \gtrsim \tau_c$ . Dans ce cas pendant la phase « éteinte », les vitesses et les intensités ont le temps de se décorrélérer. Les atomes évoluent en effet

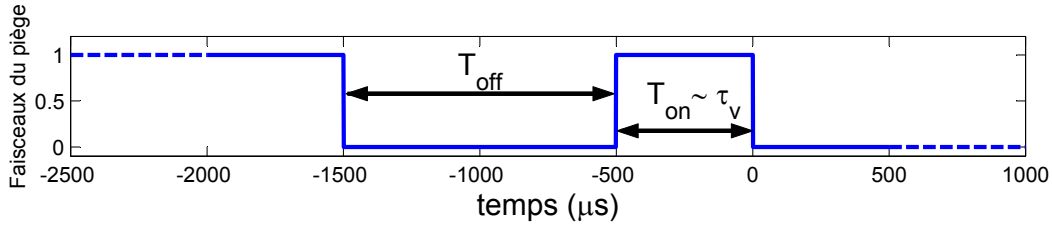


FIG. 2.26 – Afin de mettre en évidence  $\tau_c$ , nous utilisons une séquence de temps particulière : les faisceaux du piège sont d’abord éteints pendant un temps variable  $T_{off}$ , puis allumés pendant un temps fixe  $T_{on}$  que l’on prend de l’ordre de  $\tau_v$ .

librement, pendant un temps  $\tau_c$ , ils parcourent typiquement  $L_c$  : **il n’y a donc plus de corrélation entre la vitesse au point considéré et les intensités locales après la durée  $T_{off}$** . À la fin de cette phase tout se passe comme si l’on était à l’instant initial de notre simulation Monte-Carlo (vitesses et intensités décorréelées). **Quand on allumera de nouveau les faisceaux, la largeur de la distribution va décroître pendant un temps de l’ordre de  $\tau_v$**  comme nous l’avons vu sur la figure 2.22 (dans la situation expérimentale, on a  $\tau_v \simeq 500 \mu s$ ). C’est à ce moment-là ( $t = 0$ ) que nous avons décidé de la mesurer. Il ne faut pas attendre un temps long devant  $\tau_c$  sinon la distribution en vitesse revient à sa valeur stationnaire (température du piège). Après cette séquence de temps et si  $T_{off} \gtrsim \tau_c$  on s’attend donc à une vitesse RMS plus faible. Pour observer une tel effet nous avons mesuré  $\sigma_v$  à  $t = 0$  en gardant  $T_{on} \sim \tau_v \simeq 500 \mu s$  constant et en faisant varier  $T_{off}$ .

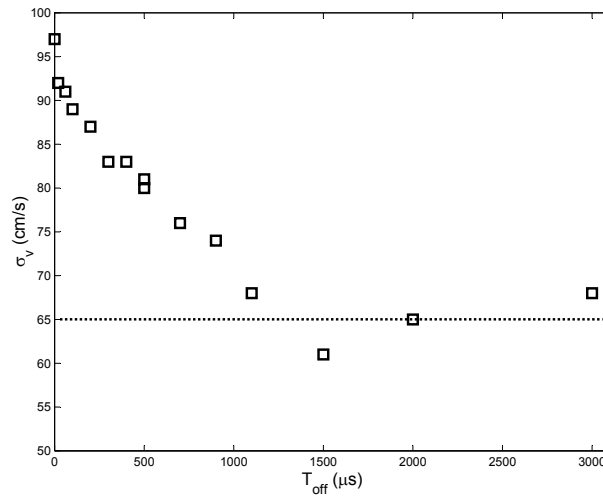


FIG. 2.27 – En suivant la séquence de temps 2.26, on mesure la vitesse RMS à  $t = 0$ . La durée  $T_{on} = 500 \mu s$  est gardée constante. On fait varier  $T_{off}$ .

On constate qu'effectivement (fig. 2.27) en utilisant cette séquence de temps,  $\sigma_v$  décroît quand  $T_{off}$  augmente. On atteint ensuite un plateau vers  $T_{off} \sim 1000 \mu s$  ( $\sigma_v \sim 65 \text{ cm/s}$ ) qui doit correspondre à  $T_{off} \sim \tau_c$ . Sans faire d'étude quantitative de la courbe, elle nous permet de mettre en évidence  $\tau_c$ . Un tel comportement n'est pas intuitif et ne peut être expliqué que par l'existence de deux échelles de temps. En ce sens-là, c'est une validation importante de notre modèle.

On peut imaginer utiliser cet effet dynamique pour faire décroître la température. On notera qu'il est abusif de parler de température puisque l'on atteint jamais l'état stationnaire. Notre séquence de temps permet pourtant d'affiner significativement la distribution en vitesse. Il est possible d'utiliser une telle procédure qui reste simple avant le transfert vers le piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ . Nous avons utilisé une procédure différente qui nous permet en pratique d'optimiser le taux de transfert (voir 4.5.2). De ce point de vue-là, notre démonstration est plus une mise en évidence qu'une application de notre modèle.

## Conclusion

Le choix expérimental que nous avons fait initialement a été fructueux. En mettant en interaction les atomes dans une mélasse 1D, on se place précisément dans le cadre de la théorie Doppler. Il est techniquement plus délicat d'effectuer ce type de mesure : on peut en effet leur préférer des mesures in-situ de la température dans le piège magnéto-optique [68]. Notre protocole nous permet de nous affranchir des effets du champ magnétique, sans parler de la généralisation d'une étude 1D au cas 3D. Les résultats montrent une température plus élevée que la prédiction théorique.

Nous avons cependant, à partir d'un modèle simple de chauffage supplémentaire, réussi à expliquer quantitativement nos mesures de températures. Plusieurs propositions avaient été envisagées pour modéliser le chauffage supplémentaire (résumées en 2.3.1) ; il semble finalement que ce soit la plus simple et historiquement la première qui suffise à expliquer les mesures (D. Weiss [66]). En envisageant le parcours transverse des atomes dans le profil d'intensité bruité des faisceaux (à cause de leur « mauvaise » qualité), nous avons réussi à prédire la forme et la largeur de la distribution des vitesses. Une simulation Monte-Carlo nous permet de prendre en compte la plupart des ingrédients pertinents qui imposent la dynamique du refroidissement. Les résultats sont en bon accord avec les mesures expérimentales.

On ne sera alors pas surpris, dans le cadre de notre modèle, par les mesures de A. Witte [67]. En utilisant un jet atomique de calcium en interaction avec une mélasse 1D, les mesures étaient en bon accord à quelques pourcent près avec la théorie Doppler. Supposons que les faisceaux de A. Witte aient la même longueur de corrélation  $L_c$  que celle de nos propres faisceaux. La vitesse des atomes selon l'axe du jet (transverse à la mélasse) est typiquement de 50 m/s ce qui donne un temps de corrélation  $\tau_c$  de quelques microsecondes seulement. On voit sur la figure 2.23 que l'on est effectivement très proche de la limite Doppler (quelques pourcent près). Il semble donc que l'on puisse au moins en partie expliquer quantitativement les mesures sur jet.

Notre modèle de chauffage supplémentaire est basé sur un mécanisme physique simple. Ses prédictions nous permettent de connaître la dépendance de la température en fonction des paramètres de la mélasse. En pratique, la façon la plus simple d'obtenir de basses températures est de décroître l'intensité. On sera alors limité par le temps d'amortissement des vitesses qui devient très long. Dans un piège magnéto-optique, à faible intensité la constante de raideur sera aussi très faible, ce qui rend le piégeage difficile.

Pour conclure cette partie, **on peut s'étonner que ce processus de chauffage supplémentaire n'ait pas été développé auparavant** alors que le refroidissement d'atomes a été largement étudié. Comme nous l'avons déjà mentionné, la théorie Doppler n'est revenue au goût du jour que récemment avec le piégeage des alcalino-terreux. Elle n'est plus valide pour le refroidissement des

alcalins. Le mécanisme est très différent et les températures mesurées beaucoup plus basses (quelques centimètres par seconde typiquement). Essayons donc d'appliquer notre modèle à un atome subissant un refroidissement sub-Doppler. Les vitesses typiques que l'on peut atteindre dans un piège magnéto-optique sont alors plus faibles (quelques dizaines de centimètres par seconde) [92] et nous donnent une estimation de la vitesse transverse  $v_{\perp} = 10$  cm/s. Si l'on suppose avoir  $L_c = 100 \mu\text{m}$ , alors  $\tau_c = 1$  ms. Concernant  $\tau_v$ , les valeurs typiques du temps d'amortissement des vitesses ne sont dans le cadre du refroidissement Sisyphes que de quelques dizaines de microsecondes. C'est en effet la grande différence avec le mécanisme Doppler. Plus frappant, pour le mécanisme Sisyphes, la friction est indépendante de l'intensité. Revenons un peu plus dans le détail.

On est visiblement dans le cas n°1 puisque  $\tau_c = 1$  ms  $\gg \tau_v$ . Reprenons donc le raisonnement introductif effectué page 114. L'expression de la force en fonction de la vitesse diffère de la formule 2.20. Au premier ordre en  $\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \ll 1$ , on obtient [83, expr. 64] (transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ ) :

$$F(V) \simeq \frac{10}{17} \frac{\hbar k_L \Gamma_b}{2} \left( \frac{(I_1 - I_2)/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \right) + m\gamma V$$

Cette expression est en fait peu différente de l'équation 2.20. Le terme de déséquilibre est plus faible d'un facteur 10/17 par rapport au résultat de la théorie Doppler. En revanche, le coefficient de friction peut être beaucoup plus important pour le mécanisme Sisyphes [90] :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{120}{17} \frac{-\delta_L/\Gamma_b}{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} \quad (2.59)$$

L'expression de la vitesse d'équilibre ( $V_{\text{eq}}$  expr. 2.23) est en conséquence différente :

$$V_{\text{eq}} = \frac{1}{6} \frac{\Gamma_b}{k_L} \frac{I_1 - I_2}{I_{\text{sat}}} \frac{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{(-\delta_L/\Gamma_b)(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)}$$

En faisant la moyenne sur le profil du faisceau, on trouve la largeur RMS de la distribution en vitesse de façon analogue au calcul de  $\sigma_{v1}$  page 122 (expr. 2.34). On aura cette fois :

$$\sigma_{v1} = \frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{12k_L} \frac{\sigma_I}{I_{\text{sat}}} \frac{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{(-\delta_L/\Gamma_b)(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)}$$

La différence cruciale avec l'expression 2.34 est que l'intensité moyenne  $\langle I \rangle$  n'apparaît plus. Le bruit d'intensité est fixé par la valeur de  $\sigma_I/\langle I \rangle$ ; nous préférons donc une formule où apparaissent les paramètres pertinents du refroidissement :

$$\sigma_{v1} = \frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{12k_L} \frac{\langle I \rangle}{I_{\text{sat}}} \frac{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{(-\delta_L/\Gamma_b)(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$$

Prenons maintenant des valeurs réalistes pour les paramètres :  $\sigma_I / \langle I \rangle = 10\%$  et pour la mélasse  $\langle I \rangle / I_{\text{sat}} = 0,1$ ,  $\delta_L = -\Gamma_b$ . Utilisons les caractéristiques du césium :  $\Gamma_b = 2\pi \cdot 5 \text{ MHz}$  et  $k_L = \frac{2\pi}{850 \cdot 10^{-9}}$ . On aura finalement :

$$\sigma_{v1} \simeq 1 \text{ cm/s}$$

Afin de terminer cette comparaison entre les deux mécanismes de refroidissement, résumons les expressions de  $\gamma$  et de  $\sigma_{v1}$  dans un tableau.

	Doppler	Sisyphes
$\gamma$	$\frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)^2}$	$\frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{120}{17} \frac{-\delta_L/\Gamma_b}{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$
$\sigma_{v1}$	$\frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{2k_L} \frac{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-8\delta_L/\Gamma_b} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$	$\frac{\sqrt{2}\Gamma_b}{12k_L} \frac{\langle I \rangle}{I_{\text{sat}}} \frac{5 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}{-(\delta_L/\Gamma_b)(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2)} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$

Notons aussi que dans le cas n°2, la dépendance de  $\sigma_{v2}$  en  $\langle I \rangle$  et  $\delta_L$  est la même que celle prédite par la théorie du refroidissement Sisyphes. Il est donc difficile d'isoler la composante de chauffage supplémentaire par une simple observation qualitative.

La différence majeure entre les deux mécanismes est que la friction est plus forte pour le refroidissement Sisyphes que pour le Doppler (25 fois plus avec  $\langle I \rangle / I_{\text{sat}} = 0,1$ ,  $\delta_L = -\Gamma_b$ ). Dans le cadre de notre mécanisme de chauffage supplémentaire, l'élargissement  $\sigma_{v1}$  sera réduit en conséquence.

Plus marquant,  $\gamma$  est indépendante de  $\langle I \rangle$ . Ainsi **l'élargissement  $\sigma_{v1}$  peut être rendu infiniment petit quand  $\langle I \rangle / I_{\text{sat}} \rightarrow 0$ .**

Pour ces raisons qui sont liées à l'expression de la friction, l'élargissement  $\sigma_{v1}$  sera très faible et inférieur aux vitesses typiques du refroidissement Sisyphes. On comprend alors mieux pourquoi le mécanisme de chauffage que nous avons proposé ne puisse être facilement observé pour des alcalins. On ne peut cependant pas exclure son influence à forte saturation notamment.





# Chapitre 3

## Laser stabilisé à 689nm

Réaliser un laser stable au kilohertz n'est plus un défi technologique. En effet les applications métrologiques se tournent maintenant vers des transitions dont la largeur est inférieure au Hz souvent même de l'ordre du millihertz. Le strontium neutre fait lui aussi partie « des bons candidats » pour des horloges optiques : l'isotope 87 présente une transition fortement interdite,  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  récemment observée expérimentalement [17] dont la largeur calculée est de 1 mHz. Depuis une vingtaine d'années, nombre de lasers ultra-stables ont été développés. Dans cette course à la finesse spectrale, jusqu'à descendre sous le hertz [94].

Loin de tels ordres de grandeurs nous souhaitons disposer d'un laser stabilisé au kHz pour piéger les atomes sur cette raie d'intercombinaison et ainsi créer un échantillon dense.

Les caractéristiques techniques et expérimentales de notre laser stable ont été développées dans le thèse de Y. Bidet [21]. Une partie de son travail a consisté en la stabilisation d'une diode laser en cavité étendue sur une cavité en matériau ULE<sup>1</sup> par la technique de Pound-Drever-Hall (PDH). Dans une première partie, nous effectuerons un rappel des éléments caractéristiques de notre laser et du système de stabilisation sur la cavité. Cet asservissement était bien maîtrisé et a déjà été décrit par Y. Bidet [21]. Il restait à mettre en place et à caractériser son comportement face aux atomes. Nous avons en effet pu repérer la transition d'intercombinaison et caractériser le laser asservi sur la cavité avec une cellule de référence, dont nous présenterons la conception dans une seconde partie. La motivation de ce travail était de connaître la stabilité à long terme du laser et d'éventuellement l'asservir sur la transition atomique. Nous détaillerons dans une troisième partie les mesures de stabilité. En conclusion, nous présenterons la configuration qui a été choisie en vue de l'interaction avec les atomes froids.

---

<sup>1</sup>pour *Ultra Low Expansion*

## 3.1 Stabilisation du laser sur la cavité ULE

La technique de Pound-Drever-Hall [95] est une généralisation dans le domaine optique du principe de stabilisation inventée par R.V. Pound pour des oscillateurs micro-onde. Elle consiste à s’asservir sur un résonateur optique c’est-à-dire une cavité Fabry-Perot à haute finesse en modulant à une fréquence plus grande que la largeur spectrale des pics du résonateur.

Le signal d’asservissement est généré à partir d’une modulation de fréquence du laser et on obtient le signal d’erreur en faisant une détection synchrone de l’intensité réfléchiée par la cavité. Nous décrirons successivement les différents éléments du montage. Outre le laser, nous présenterons la cavité Fabry-Perot et son environnement ainsi que les différentes boucles de rétroaction. Nous concluons en analysant les performances de l’asservissement en vue de son interaction avec les atomes froids.

### 3.1.1 Présentation du laser en cavité étendu

#### La source laser

Ce montage est réalisé à partir d’une diode laser traitée anti-reflet<sup>2</sup> montée en cavité étendue. Elle est injectée par l’ordre -1 d’un réseau<sup>3</sup> de 1800 traits/mm (configuration Littrow). La longueur de cette cavité externe est de 10 cm, ce qui réalise un bon compromis entre une cavité stable mécaniquement (compacte et donc courte) et une cavité avec un faible bruit causé par l’émission spontanée (qui décroît avec la longueur de la cavité). L’ensemble est régulé en température grâce à trois modules à effet Peltier, on estime sa stabilité à 0,01 °C.

Le courant fourni à la diode laser est stabilisé par son alimentation au microampère. Le réseau est fixé sur une cale piézo-électrique (elle se déplace de 6,1  $\mu\text{m}$  pour une tension allant de 0 à 100 V). Ces deux éléments servent à l’ajustement de la fréquence.

#### Génération des bandes latérales

Dans le but d’obtenir une stabilisation au kilohertz nous avons fait le choix d’une modulation à 20 MHz, elle doit rester grande devant la largeur des pics de la cavité ULE. Elle nous assurera ainsi une bande passante de l’asservissement de l’ordre du mégahertz. L’indice de modulation est choisi proche de 1 afin de maximiser l’amplitude du signal d’erreur.

Expérimentalement, on utilise souvent des modulateurs électro-optiques. Cependant dans le but d’alléger le montage optique, nous préférons moduler directement le courant de la diode laser ce qui se traduit par une modulation de

---

<sup>2</sup>Sacher SAL-690-10 Traitée Anti-reflet

<sup>3</sup>avec un coefficient de réflexion 25%

la fréquence. Autrement dit, nous générons dans le spectre optique deux bandes latérales à 20 MHz autour de la fréquence du laser. Solution simple et confortable elle garde cependant l'inconvénient d'introduire aussi une modulation d'amplitude, qui est déphasée d'environ  $\pi/4$  par rapport à la modulation de fréquence. On verra plus loin qu'en ajustant la phase lors de la détection synchrone, on peut annuler l'effet de cette modulation d'amplitude. Intéressons nous pour le moment à la cavité ULE, qui nous permettra de produire le signal d'erreur.

### 3.1.2 Description de la cavité ULE

Il s'agit d'une cavité Fabry-Perot pour laquelle deux miroirs<sup>4</sup> sont en contact avec une cale en ULE de 10 cm de long. Elle aura un intervalle spectral libre de 1,5 GHz et une finesse de 4500. La largeur FWHM des résonances sera donc de 330 kHz.

Afin de réaliser une référence de fréquence stable au kilohertz, il est nécessaire d'isoler la cavité des perturbations extérieures. Elle est donc mise sous vide ( $10^{-6}$  mbar). Ce qui permet de s'affranchir des fluctuations d'indice de l'air avec la pression et la température. Le vide permet aussi de s'isoler des vibrations acoustiques. En posant la cavité sur des supports en viton, on minimise la transmission des vibrations venant du support. L'enceinte à vide est elle-même installée sur un isolant acoustique (Barson); on utilise des transistors de puissance pour asservir sa température. D'une part les fluctuations rapides de température sont moyennées par le vide, d'autre part notre dispositif d'asservissement minimise les fluctuations lentes de la température. Nous avons mesuré des variations d'environ 0,1 °C. Les performances de l'asservissement sont ici limitées par la taille du système, son volume important impose en effet une grande inertie thermique. Nous verrons plus tard l'incidence des variations de température sur la stabilité à long terme de la cavité et par conséquent du laser. Mais intéressons nous pour le moment à sa stabilisation au kilohertz sur la cavité ULE.

### 3.1.3 Rétroaction sur le laser

On obtient dans un premier temps un signal d'erreur en mesurant l'intensité réfléchie par la cavité à la fréquence de modulation. Ce signal sera réinjecté vers le laser au moyen de trois boucles agissant chacune sur des domaines de fréquence différents.

#### Détection du signal d'erreur

Le signal d'erreur de PDH est produit par détection synchrone de l'intensité réfléchie par la cavité à la fréquence de modulation du laser. Le signal recueilli par le détecteur de la figure 3.1, il est multiplié ensuite par la modulation de référence

---

<sup>4</sup>rayon de courbure 50cm, T=0,07%

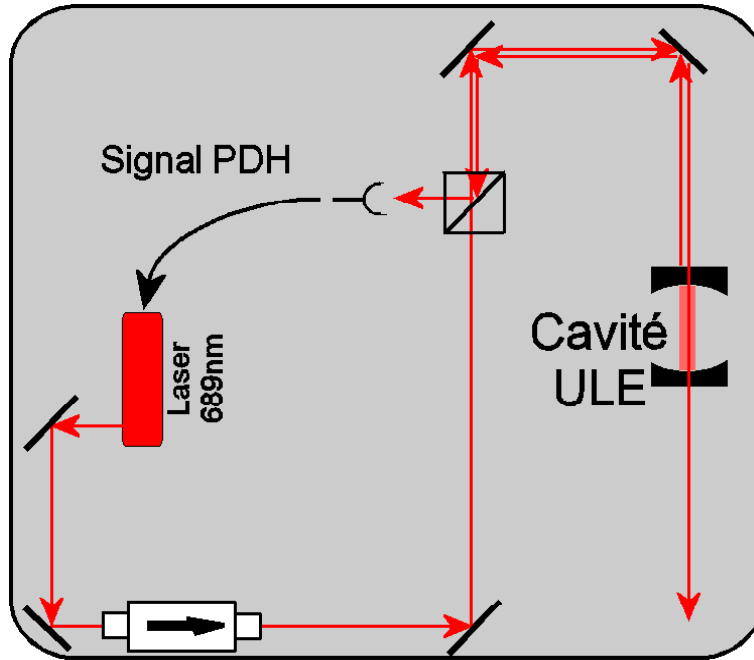


FIG. 3.1 – Le laser et la cavité ULE

(20 MHz) appliquée sur le courant de la diode laser. On vient finalement couper les modulations restant à 20 MHz et 40 MHz par un filtre passe-bas de Bessel du quatrième ordre<sup>5</sup>. On réalise ainsi une détection synchrone à la fréquence de modulation du laser sur l'intensité réfléchiée par la cavité. On ajuste la phase de détection en faisant varier la longueur des cables avant le mélangeur.

Pour un asservissement selon la technique PDH, le signal d'erreur sera détecté en quadrature de phase par rapport à la modulation de fréquence du laser, l'amplitude du signal est alors maximale. Nous avons cependant mentionné plus haut que notre modulation de fréquence, en agissant sur la diode laser, induisait aussi une modulation d'amplitude, les deux étant déphasées de  $\pi/4$ . Cette dernière a pour effet d'introduire une composante continue (*offset*) sur le signal d'erreur. Afin d'éliminer cet *offset*, nous avons choisi de faire une détection en quadrature par rapport à la modulation d'amplitude : l'*offset* est alors nul. En conséquence, puisque l'on détecte avec un déphasage de  $3\pi/4$  par rapport à la modulation de fréquence<sup>6</sup>, le signal d'erreur sera diminué d'un facteur  $\cos(\pi/4) \simeq 0,7$  par rapport à sa valeur maximale (si l'on détectait avec un déphasage de  $\pi/2$ ). Un vue diagrammatique de ces effets est donnée par la figure 3.2.

Le signal ainsi obtenu (figure 3.3) sera réinjecté sur le laser au moyen de trois boucles de rétroaction distinctes. Retenons d'ores et déjà son amplitude crête

<sup>5</sup>Fréquence de coupure 10 MHz

<sup>6</sup>la solution  $-\pi/4$  ne donne pas le bon signe pour le signal d'erreur.

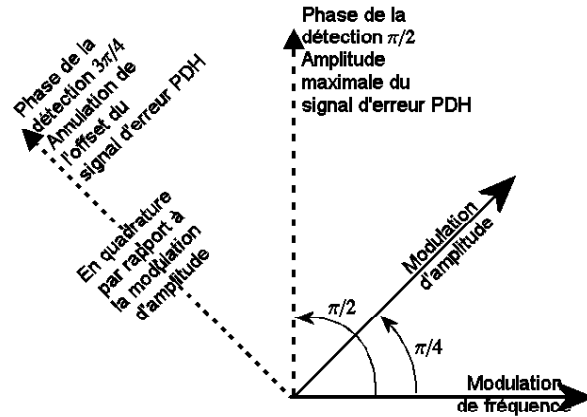


FIG. 3.2 – Résumé du principe de détection

à crête  $s_{cc} = 210 \text{ mV}$ , valeur qui nous sera utile pour connaître les propriétés spectrales du laser asservi. Il s'agit d'une valeur usuelle, limitée par la puissance injectée dans la cavité. Elle réalise un bon compromis entre la puissance dédiée à l'asservissement et celle utilisée pour l'étude de notre cellule de référence.

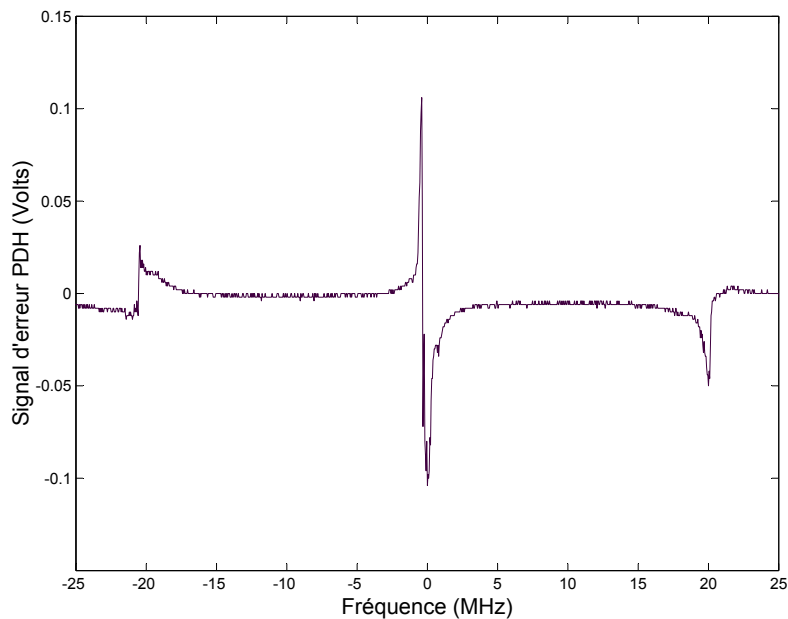


FIG. 3.3 – Signal d'erreur du Pound-Drever-Hall. On voit que la courbe présente un léger *offset* négatif, le déphasage à la détection n'est pas parfaitement ajusté à l'échelle de quelques dizaines de milliradian.

### Description des boucles de rétroaction

Nous pouvons agir sur des **domaines de fréquence différents** grâce à **trois boucles différentes** :

- Une boucle lente agissant jusqu'à 1 kHz, envoie le signal d'erreur sur la cale piézo-électrique. L'essentiel des corrections dans cette gamme de fréquence est assuré par un intégrateur, il corrige les dérives lentes de fréquence du laser
- Une boucle moyenne agissant jusqu'à 50 kHz est appliquée à l'entrée modulation de l'alimentation de courant. Elle est constituée de la somme d'un circuit proportionnel et d'un intégrateur.
- Une boucle rapide agissant à haute fréquence, agit directement sur la diode laser avec comme précédemment la somme d'un proportionnel et d'un intégrateur. Dans la boucle, nous avons placé un filtre passe haut qui compense le déphasage apporté par la cavité [21, p.302]. La rétroaction est par ailleurs limitée à basse fréquence par le filtre de protection de la diode laser (passe-haut à 160 Hz). Ce sont les déphasages présents dans cette boucle qui limitent à haute fréquence la bande passante de correction à environ 1 MHz.

L'ensemble ainsi décrit doit nous permettre de stabiliser notre laser au kilohertz, ce qui sera suffisant en vue de l'interaction avec le système atomique.

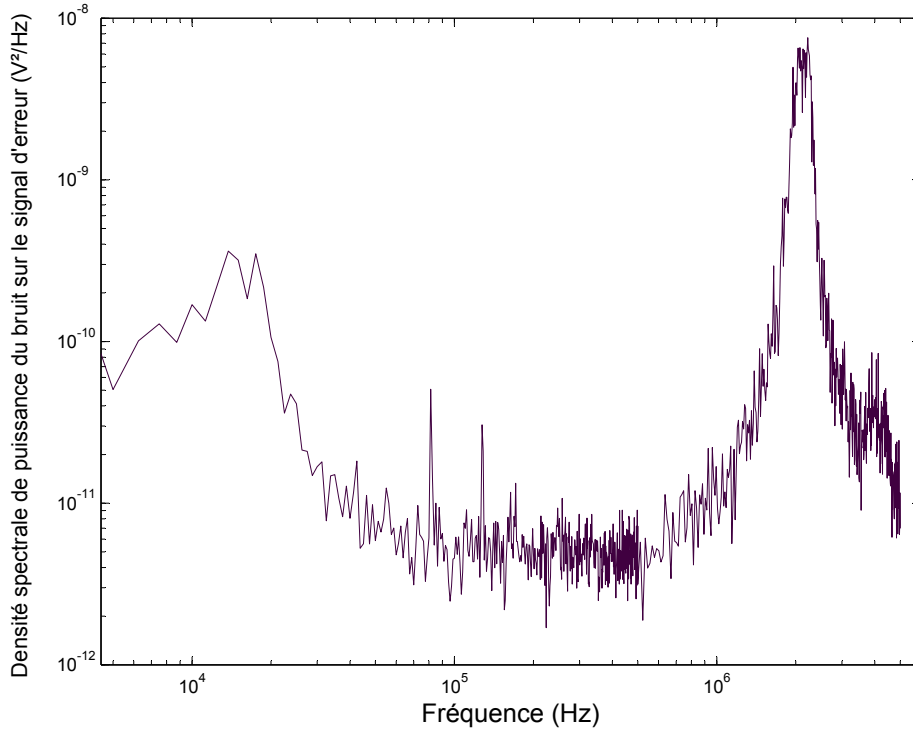
#### 3.1.4 Analyse des performances de l'asservissement

Une méthode sûre d'analyse des propriétés spectrales d'un laser est sans doute de le comparer à une référence, une autre cavité ULE par exemple. Pour cette mesure, nous ne disposons pas d'une référence indépendante, la seule méthode possible est donc d'utiliser le bruit sur le signal d'erreur. Cela nous permettra d'obtenir une estimation de la largeur spectrale du laser.

#### Densité spectrale de puissance de la fréquence

Le bruit sur le signal d'erreur est en effet la manifestation électronique des fluctuations de fréquence du laser agissant sur la cavité. Un fois le laser asservi sur la cavité, nous avons donc mesuré le bruit sur le signal d'erreur au moyen d'un analyseur de spectre. C'est la résolution de l'analyseur (1 kHz) qui limite la courbe vers les basses fréquences. Cependant Y. Bidet ayant montré que pour notre laser le bruit est maximum autour de quelques kilohertz, ce seront ces composantes qui imposeront la largeur spectrale. À partir d'une seule courbe prise avec l'analyseur de spectre, on peut finalement avoir une estimation de la largeur du laser asservi.

Les deux grandeurs qui caractérisent le bruit en fréquence et le bruit sur le signal d'erreur sont respectivement la densité spectrale de puissance de la fréquence instantanée  $S_\nu(f)$  et la densité spectrale de puissance du bruit sur le

FIG. 3.4 – Bruit sur le signal d'erreur  $S_s(f)$ 

signal d'erreur  $S_s(f)$ .

Les deux grandeurs sont reliées par une formule simple dont Y. Bidel fournit une démonstration [21, p.260] :

$$S_\nu(f) = \frac{S_s(f)}{s_{cc}^2} \frac{\Delta\nu_c^2}{4} \left( 1 + \left( \frac{2f}{\Delta\nu_c} \right)^2 \right) \quad (3.1)$$

où  $s_{cc}$  est l'amplitude crête à crête ( $s_{cc} = 210$  mV dans notre cas).

À partir de la mesure de  $S_s(f)$ , on peut maintenant calculer  $S_\nu(f)$ . Le résultat est fourni par la figure 3.5.

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, on peut maintenant calculer le spectre du laser.

### Spectre du laser asservi

Il n'est pas possible de connaître de façon générale le spectre du laser à partir de la densité spectrale de puissance de la fréquence sans faire d'hypothèses sur



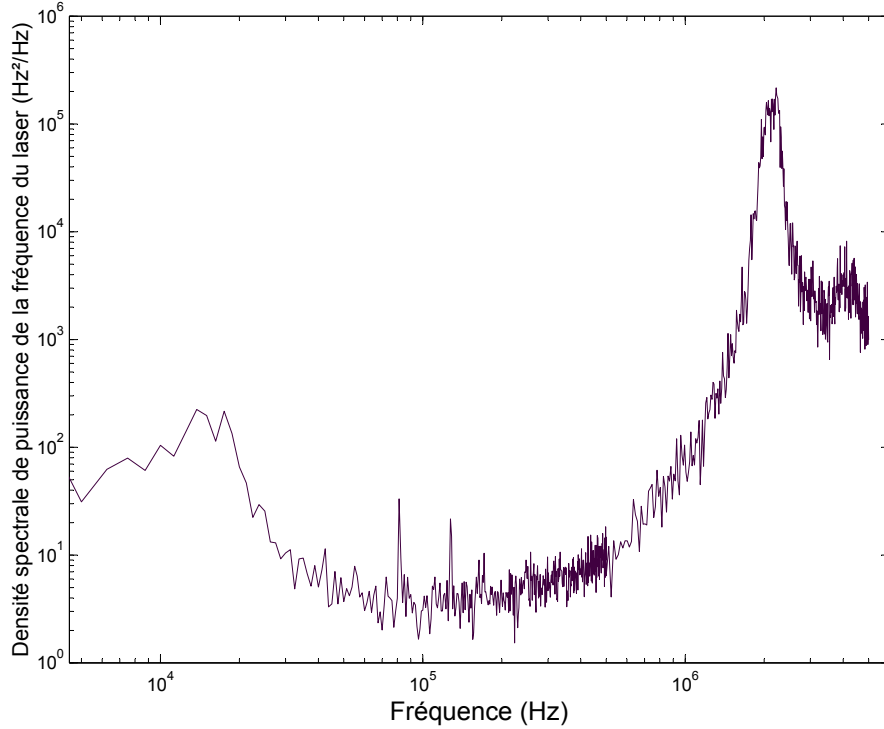


FIG. 3.5 – Densité spectrale de puissance de la fréquence du laser asservi :  $S_\nu(f)$

le type de bruit rencontré. On peut montrer que si l'on a affaire uniquement à un bruit de phase et que la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\varphi(t + \tau) - \varphi(t)$  est gaussienne, la fonction d'autocorrélation du champ  $R_E(\tau)$  s'obtient en intégrant comme suit :

$$R_E(\tau) = E_0^2 e^{i\omega_L \tau} \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int S_\omega(\Omega) \frac{1 - \cos(\Omega\tau)}{\Omega^2} d\Omega\right) \quad (3.2)$$

Ensuite, le spectre du laser s'obtient en réalisant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$S_E(\Omega) = \int R_E(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau \quad (3.3)$$

En général, l'équation 3.2 doit être intégrée numériquement. Dans quelques cas simples, elle peut être calculée analytiquement, ce qui nous permet de donner une estimation grossière du spectre optique du laser.

Dans le cas où la densité spectrale de la fréquence est constante ( $S_\nu^0$ ) et la bande passante du bruit considéré beaucoup plus grande que  $S_\nu^0$ , on peut alors

montrer que le spectre du laser sera une lorentzienne dont la largeur est donnée par  $2\pi S_\nu^0$ . Même si notre spectre de bruit n'est visiblement pas constant, on peut dans un premier temps s'intéresser au spectre dans la bande passante de correction ( $< 1$  MHz), cela nous donnera une idée de la partie centrale du spectre du champ électrique. Typiquement, **la densité spectrale de la fréquence reste toujours inférieure à 200 Hz**, on peut donc s'attendre à **un spectre « plus fin » qu'une lorentzienne de  $2\pi \times 200$  Hz = 1,250 kHz**. Une telle largeur suffirait pour nos expériences. Il est cependant possible de calculer plus précisément le spectre aussi bien à basse fréquence ( $< 1$  MHz) qu'au delà de la bande passante de correction.

### Calcul numérique du spectre du champ électrique à partir de la densité spectrale de la fréquence

Ayant déjà calculé la densité spectrale de la fréquence (figure 3.5), on peut maintenant déduire la fonction d'autocorrélation du champ en appliquant la formule 3.2. Très simplement, les variations rapides de  $R_E(\tau)$  correspondent aux fréquences élevées dans la spectre du champ. À l'inverse les variations lentes de  $R_E(\tau)$ , nous donneront les composantes de basses fréquences.

En haut de la figure 3.6 (fig. 3.6.a et 3.6.b), on voit la fonction d'autocorrélation du champ. Distinguons bien les deux échelles de temps (qui nous donneront deux échelles de fréquence pour le spectre).

- **Sa dépendance lente entre 0 et 2 ms** (fig. 3.6.a) est remarquablement ajustée par une décroissance exponentielle (temps caractéristique 0,8 ms). Cela nous donnera par transformée de Fourier, une partie centrale du spectre à forme **lorentzienne dont la largeur totale à mi-hauteur est de  $1/(\pi \cdot 8 \cdot 10^{-4}) = 399$  Hz**. Il s'agit de la partie basse fréquence du spectre du champ, tracée en 3.6.d).
- **Les variations rapides entre 0 et 20  $\mu$ s** (fig. 3.6.b) auront une incidence sur la partie haute fréquence du spectre<sup>7</sup>. Les oscillations que l'on observe sont en fait une conséquence de **la remontée du bruit au delà de la bande passante de l'asservissement**. Dans le spectre du champ (fig. 3.6.c), elles produisent **un paquet de composantes autour de 2 MHz**. Notons cependant que leur amplitude est d'environ 3 ordres de grandeur inférieure à celle la partie centrale du spectre.

En définitive, le spectre semble bien représenté dans **sa partie centrale par une lorentzienne de largeur 399 Hz. Les composantes autour de 2 MHz gardent une amplitude faible**. Nous discuterons des conséquences de leur

---

<sup>7</sup>Sur cette courbe, on observe des variations brusques (à l'échelle de la résolution numérique). Dans la formule 3.2, on intègre selon  $\Omega$  une fonction fortement oscillante (de période  $1/\tau$ ). Pour l'intégration, nous avons gardé un maillage indépendant de  $\tau$  car cela assure une bonne rapidité de calcul. Il semble cependant que ce maillage conduise pour certaines valeurs de  $\tau$  à des résultats irréalistes. Dans la mesure où cela ne nuit pas à la lisibilité générale de la courbe, nous garderons cette méthode pour son efficacité.

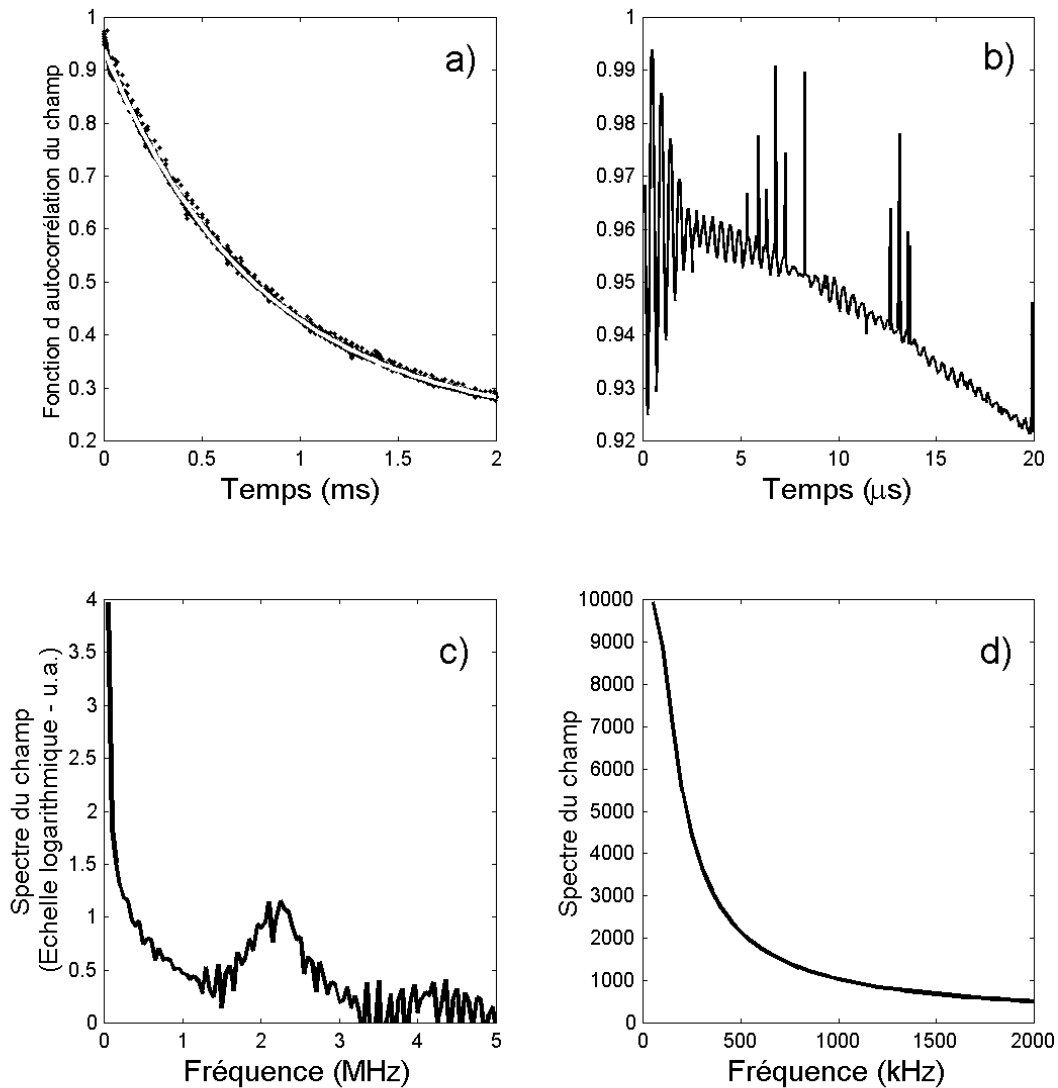


FIG. 3.6 – Calcul du spectre du champ à partir de la densité spectrale de la fréquence. En haut (a et b), la fonction d'autocorrélation du champ. b) est un zoom proche de l'origine. En bas (c et d), le spectre du champ calculé comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. d) est un zoom sur la partie basse fréquence.

présence en conclusion de cette partie.

### Comparaison au spectre expérimental au delà de 1 MHz

Afin d'étudier l'effet de la remontée du bruit au delà de 1 MHz, nous avons mesuré le signal de battement du laser asservi avec le faisceau transmis par la

cavité. Il s'agit certes du même laser, sauf qu'un des deux champs est filtré spectralement par la cavité. Notre cavité agit en effet comme un filtre de largeur 330 kHz.

- Si l'on s'intéresse au spectre du laser au delà de 1 MHz : en supposant que les composantes du spectre transmis par la cavité sont négligeables dans cette gamme de fréquence par rapport à celles du spectre du laser asservi. Alors les composantes présentes dans le spectre d'hétérodynage sont issues du battement de la partie haute-fréquences ( $> 1$  MHz) du spectre du laser asservi avec la partie centrale du spectre plus étroit transmis par la cavité. Dans cette gamme de fréquence, on peut voir le spectre d'hétérodynage comme le produit de convolution des deux spectres. L'un étant nettement plus étroit que l'autre, on observe directement les ailes ( $> 1$  MHz) du spectre du laser asservi.
- Notons bien qu'aux fréquences inférieures à 330 kHz, les deux champs sont parfaitement corrélés et le signal est un pic de Dirac, limité expérimentalement par la résolution de l'analyseur de spectre. À basse fréquence cela ne nous donne finalement aucune information sur la largeur du spectre.

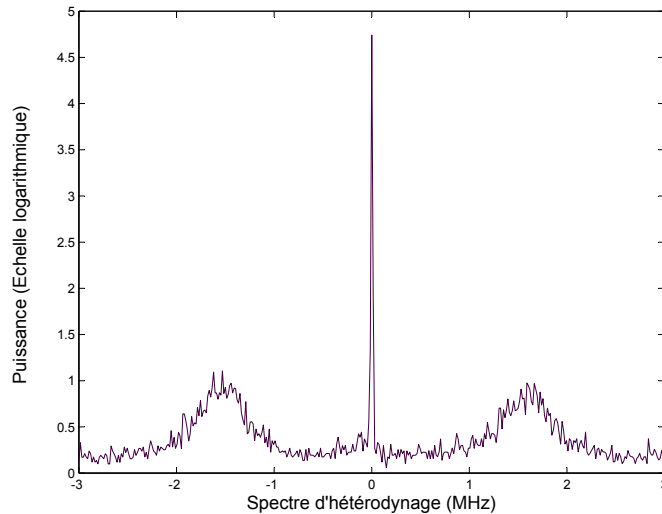


FIG. 3.7 – Signal de battement entre le laser asservi et le faisceau transmis par la cavité ULE. La résolution de l'analyseur de spectre est de 1 kHz, on en déduit que quelques pourcent de la puissance sont inclus dans les remontées à hautes fréquences.

Le résultat sur la figure 3.7 laisse apparaître les mêmes remontées au-delà de 1 MHz que celles calculées à partir de la densité spectrale de la fréquence. Leur amplitude est bien inférieure à celle de la bande centrale et confirme la valeur calculée, c'est à dire trois à quatre ordres de grandeur inférieure (voir fig. 3.6.c).

Leur position dépend essentiellement de l'optimisation de la boucle rapide. Dans le signal d'hétérodynage, elles apparaissent autour de 1,5 MHz et une meilleure optimisation de la phase sur la boucle rapide permet de les repousser autour de 2 MHz comme nous l'avons vu sur le spectre obtenu plus haut.

La puissance dans cette gamme de fréquence est certes négligeable par rapport à la bande centrale. Il faut cependant dans l'absolu la comparer à l'intensité de saturation de la transition ( $3 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ). Nous avons malgré tout déjà observé ces remontées du spectre sur les atomes froids. Des mesures rapides de spectroscopie du nuage atomique utilisant le laser asservi avaient mis en évidence des remontées autour de 1 MHz. Dans cette série de mesures très préliminaires, nous avons choisi d'élargir la transition par saturation<sup>8</sup> afin d'exciter une classe de vitesse plus large dans le profil des vitesses du nuages. Dans une telle situation, il est tout à fait possible d'exciter aussi la transition avec les remontées du spectre à 1,5 MHz

## Conclusion

**La largeur de la partie centrale du spectre est bien adaptée à l'interaction du laser asservi avec les atomes froids.** Les remontées dans les ailes sont suffisamment faibles pour ne pas poser problème à faible saturation et on peut s'en affranchir facilement. La solution choisie que nous développerons dans 3.4 consiste à exploiter le faisceau transmis par la cavité qui agit en fait comme un filtre spectral. C'est donc le spectre du laser transmis par la cavité qui interagira avec les atomes froids, on efface ainsi les remontées au delà de la bande passante de l'asservissement en gagnant encore trois ordres de grandeur environ. Seule subsiste la partie basse fréquence du spectre, c'est à dire une lorentzienne de largeur 399 Hz.

Cette dernière mesure est pleinement satisfaisante. Il est en effet nécessaire d'avoir une largeur de l'ordre du kilohertz pour piéger et refroidir sur la transition d'intercombinaison. Ce n'est cependant pas suffisant : des dérives lentes de la fréquence peuvent sortir le laser de résonance. Afin de les étudier et de les compenser éventuellement par un asservissement, nous avons réalisé une cellule de référence.

## 3.2 Réalisation d'une cellule de référence

Une spécificité des alcalino-terreux, outre les longueurs d'onde des transitions utilisées, est leur faible pression de vapeur saturante. Pour obtenir des densités raisonnables, il est souvent nécessaire de travailler à haute température (entre 200 et 600 °C), ce qui rend leur utilisation délicate en cellule. À de telles températures, leur agressivité chimique face au verre est en effet grande.

---

<sup>8</sup>saturation de l'ordre de  $10^4$

Une solution simple consiste à utiliser un gaz tampon neutre. En effet on peut alors confiner les atomes dans une zone restreinte de la cellule, par exemple dans la partie centrale d'un tube d'inox. Le gaz tampon introduit dans l'enceinte empêchera les atomes de s'approcher des bords du tube fermé par des fenêtres de verre. Ce type de dispositif (connu sous le nom de *heat-pipe*) nous sert à asservir le laser à 461 nm sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  et est décrit en [21]. Une telle solution n'est pas envisageable pour étudier la raie  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  d'intercombinaison, en effet les collisions avec le gaz neutre sont à l'origine d'un élargissement de la transition de plusieurs dizaines de mégahertz par torr [96], ce qui est rédhibitoire si l'on envisage un asservissement au kilohertz. Nous nous sommes donc tourné vers une solution que sera décrite sommairement dans une première partie. Par une étude de l'absorption linéaire, nous caractériserons ensuite la transmission de la cellule en fonction de la température.

### 3.2.1 Choix technologique pour une cellule chaude

Afin de résoudre le problème de l'agressivité chimique du strontium sur le verre nous avons décidé d'utiliser des hublots de saphir. Il faut malgré tout prendre garde au dépôt du métal sur les fenêtres : elles ne doivent pas être plus froides que le gaz dans la cellule. On doit donc par ailleurs conserver un « point froid » qui constituera le réservoir de strontium. Notre dispositif prend la forme d'un T, la base en sera le point froid (température  $T_{\text{froid}}$ ), dans la zone chaude ( $T_{\text{chaud}}$ ) incluant les fenêtres de saphir, la vapeur sera traversée par le laser. Cette partie est surmontée d'une petite pompe ionique (2 L/s).

Ce montage a été réalisé par G.L. Gattobigio [97] et nous reprendrons ici un schéma détaillé (fig. 3.8) qui donne une bonne représentation de cet élément.

Nous possédons avec cet élément un outil performant pour repérer la transition atomique ; il sera d'une aide précieuse lorsque nous interagissons avec le nuage d'atomes froids. Il reste cependant un outil délicat dans son utilisation et nous avons vu ses performances décroître après quelques mois d'utilisation. En effet malgré le soin apporté à sa conception, suite à une erreur de manipulation nous n'avons pu empêcher le dépôt du strontium sur les deux fenêtres en saphir, leur transmission n'est maintenant plus que de quelques %. Afin de compenser cette dégradation, nous avons été contraint d'augmenter l'intensité du faisceau sonde (afin qu'il soit détectable), ce qui n'est malheureusement pas sans conséquence lorsqu'on étudie la transmission de notre cellule.

### 3.2.2 Étude de l'absorption linéaire

Le fait d'augmenter l'intensité n'est pas anodin du point de vue des atomes. En effet, limités par le seuil de détection, nous travaillons à une intensité supérieure à l'intensité de saturation de la transition. Nous verrons dans cette partie que même si la saturation diminue la section efficace des atomes, on peut obtenir un signal

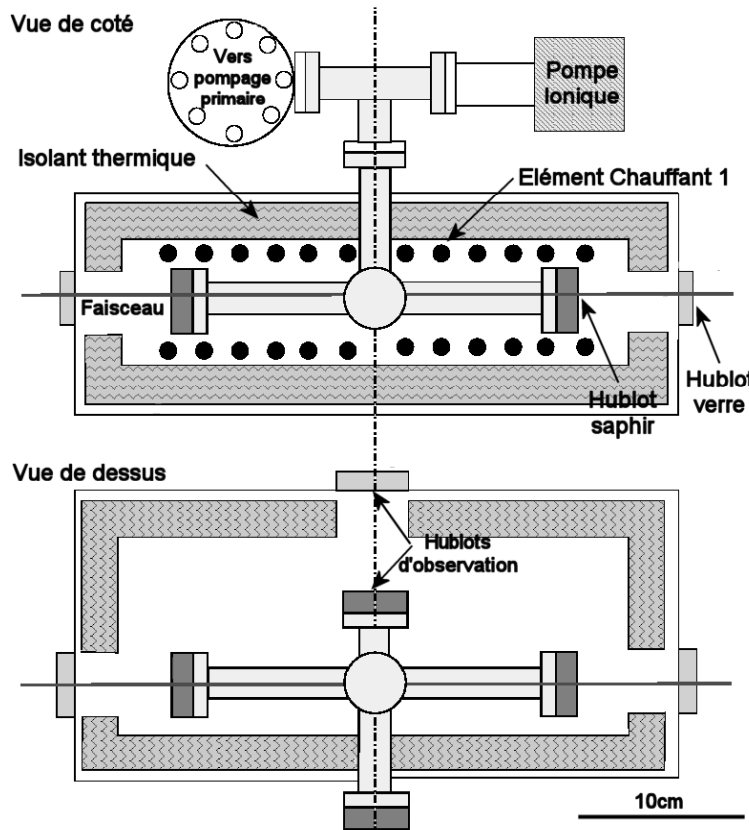


FIG. 3.8 – Extrait de [97]

raisonnable pour l'absorption en augmentant la densité du gaz. Nous rappellerons tout d'abord les paramètres expérimentaux qui contrôlent l'utilisation de la cellule de référence.

### Les paramètres expérimentaux

Sur la figure 3.9 on distingue explicitement deux zones, une zone réservoir et une zone « chaude ». On réalise ainsi la contrainte que nous nous étions imposée en introduction. En effet, nous garderons toujours pour la zone réservoir une température plus froide que celle de la zone « chaude ». On empêche alors le strontium de venir se déposer sur le hublot de saphir qui reste un point chaud du dispositif. Même si en pratique nous avons eu du mal à éviter ce phénomène, nous gardons toujours  $T_{\text{froid}}$  (mesurée par la sonde n°2) inférieure à  $T_{\text{chaud}}$  (sonde n°1).

La distinction entre  $T_{\text{froid}}$  et  $T_{\text{chaud}}$  n'est pas que pragmatique. Puisque  $T_{\text{chaud}}$  est la température de la zone d'interaction du laser avec les atomes, elle imposera la température du gaz en interaction (et en conséquence la largeur de la distribu-

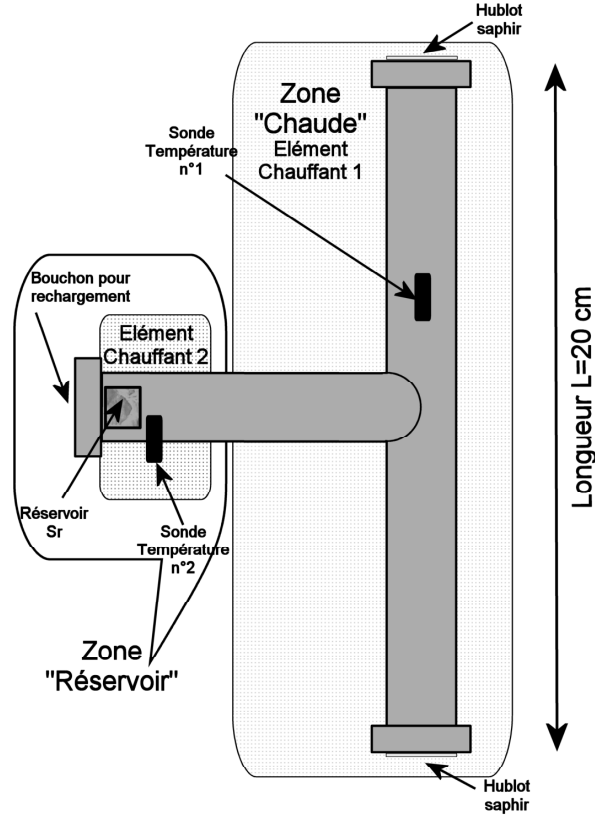


FIG. 3.9 – Vue schématique de la cellule

tion des vitesses). En revanche  $T_{\text{froid}}$  est la température de la zone « réservoir », elle imposera la pression de vapeur saturante du gaz (notée  $P_{\text{Sr}}(T_{\text{froid}})$ ).

La variation de la pression de vapeur saturante avec la température ayant été mesurée expérimentalement [98], on peut faire un ajustement par la loi de Clausius-Clapeyron pour obtenir :

$$P_{\text{Sr}}(T_{\text{froid}}) = 10^{10,477 - \frac{8390}{T_{\text{froid}}}} \text{ Pa} \quad (3.4)$$

Dans la gamme de température que nous utiliserons [21, p.354], l'erreur sur l'ajustement est inférieure à 15 %.

Après avoir dégagé les différents paramètres physiques, intéressons nous maintenant à l'interaction avec le laser.

### Calcul de la transmission à forte saturation

On est ici face à un problème bien connu, un faisceau laser diffusé le long de son parcours dans le gaz atomique. Pour le résoudre, il nous faut de façon



générale connaître la densité des diffuseurs ( $n_0$ ) et leur section efficace ( $\sigma_0$ ). On peut définir alors le libre parcours moyen  $l = 1/n_0\sigma_0$ .

- **Si tous les diffuseurs ont la même section efficace**, la loi de décroissance de l'intensité le long de son trajet dans le milieu est celle de Beer-Lambert :  $I(L) = I(0) \exp(-L/l)$  où  $L$  est la longueur du milieu traversée. On l'obtient par intégration de l'équation :

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{I}{l} = -In_0\sigma_0. \quad (3.5)$$

- **Le cas d'une vapeur atomique chaude est un peu différent** ; en effet les vitesses caractéristiques des atomes sont importantes : plusieurs centaines de mètre par seconde pour 400 °C par exemple. Par conséquent **les décalages Doppler seront le plus souvent bien supérieurs à la largeur naturelle de la transition** (notée  $\Gamma_r$ ) et dans ce cas la section efficace dépend fortement de la vitesse considérée. Pour effectuer le calcul, nous devons introduire la distribution de vitesse. Il s'agit d'une gaussienne dont la largeur RMS est notée  $v_T = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$  avec  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température de la vapeur (autrement dit  $T_{\text{chaud}}$ ) et  $m$  est la masse du strontium.

$$n(v) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} v_T} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right)$$

$n_0$  est la densité totale. La section efficace dépend alors fortement du désaccord vu par les atomes  $\delta_L - kv$  qui tient compte du décalage Doppler. **À faible saturation**, elle prend la forme :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{4(\delta_L - kv)^2}{\Gamma_r^2}}$$

$\sigma_0$  est la section efficace à résonance :  $\sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi}$

Pour calculer la variation de  $I(z)$ , il faut intégrer sur toutes les classes de vitesses. L'équation différentielle 3.5 devient :

$$\frac{dI}{dz} = -I \int_{-\infty}^{+\infty} n(v)\sigma(v)dv \quad (3.6)$$

Notons bien que dans le cas limite  $v_T \ll \Gamma_r$ , on intègre facilement  $\int n(v)\sigma(v)dv$ .

En assimilant  $n(v)$  à un pic de Dirac, on aura  $\int n(v)\sigma(v)dv = n_0 \frac{\sigma_0}{1 + \frac{4\delta_L^2}{\Gamma_r^2}}$ ,

on retrouvera l'équation 3.5 puis la loi de Beer-Lambert.

- **À forte saturation**, la section efficace décroît avec  $s_0(z) = I(z)/I_{\text{sat}}$ . En effet, de façon générale, on peut noter :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + s_0(z) + \frac{4(\delta_L - k \cdot v)^2}{\Gamma_r^2}}$$

L'équation de variation de  $I(z)$  ou plus simplement celle de  $s_0(z) = I(z)/I_{\text{sat}}$  devient :

$$\frac{ds_0}{dz} = -s_0 \int_{-\infty}^{+\infty} n(v) \frac{\sigma_0}{1 + s_0 + \frac{4(\delta_L - k \cdot v)^2}{\Gamma_r^2}} dv \quad (3.7)$$

$$= -\frac{s_0}{1 + s_0} \int_{-\infty}^{+\infty} n(v) \frac{\sigma_0}{1 + \frac{4(\delta_L - k \cdot v)^2}{(1+s_0)\Gamma_r^2}} dv \quad (3.8)$$

Afin de résoudre cette dernière équation, comparons la largeur des deux courbes dont nous cherchons à intégrer le produit. On a d'une part une gaussienne de largeur  $v_T$  (avec typiquement  $kv_T \simeq 400$  MHz) et une lorentzienne de largeur  $\sqrt{1 + s_0} \Gamma_r$ . Nous avons mesuré pour le faisceau un paramètre de saturation de 130 à l'entrée de la cellule : on a donc  $s_0(0) = 130$  (ce sera sa valeur maximale). Nous devons comparer  $kv_T \simeq 400$  MHz et  $\sqrt{1 + 130} \Gamma_r = 87$  kHz.

**Nous sommes donc dans le cas** où  $kv_T \gg \sqrt{1 + s_0} \Gamma_r$ , pour calculer l'intégrale, nous faisons l'approximation que  $\sigma$  tend vers un pic de Dirac (normalisé par  $\sigma_0 \pi \sqrt{1 + s_0} \Gamma_r / 2$ ) :

$$\frac{ds_0}{dz} = -\frac{s_0}{1 + s_0} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} v_T} \sigma_0 \pi \sqrt{1 + s_0} \frac{\Gamma_r}{2} \exp\left(-\frac{\delta_L^2}{2k^2 v_T^2}\right) \quad (3.9)$$

Si on ne s'intéresse qu'à la transmission à résonance ( $\delta_L = 0$ ) :

$$\frac{ds_0}{dz} = -\frac{s_0}{\sqrt{1 + s_0}} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} kv_T} \sigma_0 \pi \frac{\Gamma_r}{2} \quad (3.10)$$

### Confrontation aux mesures expérimentales

Dans le cadre des mesures que nous avons faites, on peut largement simplifier l'équation 3.10. En effet, dans les gammes de températures étudiées (et donc de densités), les transmissions  $T(L) = s_0(L)/s_0(0)$  que nous mesurons sont comprises entre 100% et 50%. Ayant par ailleurs  $s_0(0) = 130$ , on aura donc  $s_0(L) = 65$ , et en définitive  $s_0(z) \geq 65 \gg 1$ . Afin d'intégrer plus facilement 3.10, on peut faire l'approximation  $s_0(z) \gg 1$  pour tous  $z$  et notre équation devient :

$$\frac{ds_0}{dz} \simeq -\frac{s_0}{\sqrt{s_0}} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} kv_T} \sigma_0 \pi \frac{\Gamma_r}{2} = -\sqrt{s_0} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} kv_T} \sigma_0 \pi \frac{\Gamma_r}{2} \quad (3.11)$$

On intègre  $s_0(z)$  le long de son parcours dans la cellule :

$$2 \left( \sqrt{s_0(0)} - \sqrt{s_0(L)} \right) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} kv_T} \sigma_0 \pi \frac{\Gamma_r}{2} \quad (3.12)$$

On extrait finalement la transmission à résonance ( $T(L) = s_0(L)/s_0(0)$ ) au bout d'une longueur  $L$  :

$$T(L) = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} kv_T} \sigma_0 \pi \frac{\Gamma_r}{2} \frac{1}{\sqrt{s_0(0)}} \right)^2 \quad (3.13)$$

Dans la zone d'interaction avec le laser, la température est  $T_{\text{chaud}}$ , ce qui impose la largeur de la distribution des vitesses :  $v_T = \sqrt{\frac{k_B T_{\text{chaud}}}{m}}$ .

Dans cette même zone, la densité est donnée par le rapport de la pression ( $P_{\text{Sr}}(T_{\text{froid}})$ ) par la température « locale » ( $T_{\text{chaud}}$ ) :  $n_0 = \frac{P_{\text{Sr}}(T_{\text{froid}})}{k_B T_{\text{chaud}}}$ . L'équation 3.4 permet de calculer la dépendance de  $P_{\text{Sr}}$ .

Sur la figure 3.10.a), on trace en trait plein  $T(L)$  en fonction de la température  $T_{\text{froid}}$  du réservoir. Les carrés représentent les mesures de la transmission. On voit un écart notable avec la prédiction théorique pour lequel on peut invoquer plusieurs causes.

- **Le profil transverse du faisceau sonde** : il s'agit typiquement d'un profil gaussien (l'intensité décroît quand on s'éloigne du centre du faisceau). Pour les atomes, le bord du faisceau sera moins transmis (parce moins saturant) que le centre, ce qui a pour effet de diminuer globalement la transmission et donc de rapprocher le calcul et les mesures.
- **L'incertitude sur la température** : la sonde n°2 est placée le long du tube réservoir et donne juste une indication la température dans le tube. On a pu noter lors du rechargement de la cellule que le strontium avait tendance à migrer sur le bouchon fermant le réservoir. Cela nous laisse supposer qu'il existe un gradient de température dans le tube, il est donc difficile de prédire avec certitude  $T_{\text{froid}}$ .

Notons cependant que la figure 3.10.b) est en bon accord avec la prédiction  $P_{\text{Sr}}(T_{\text{froid}})$  (en trait plein). Les carrés représentent les mesures de la pression à partir du courant de la pompe ionique<sup>9</sup> surmontant la cellule. Un désaccord flagrant existe à basse pression où le courant mesuré est le courant

<sup>9</sup>2L/s VacIon Varian avec aimant 1200 Gauss

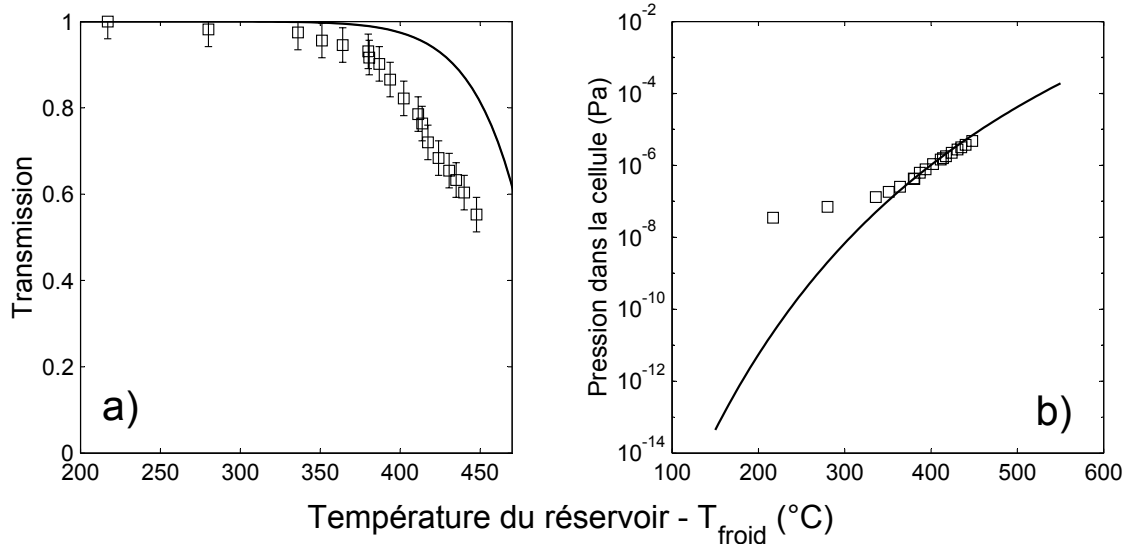


FIG. 3.10 – a) : Transmission à résonance en fonction de la température du réservoir  $T_{\text{froid}}$ . Le trait plein représente l'équation 3.13 et les carrés, les mesures expérimentales. b) : Pression dans la cellule. Les mesures de pression sont faites à partir du courant de la pompe ionique

de fuite de la pompe. Au delà de 350 °C, l'accord sur la figure 3.10.b) ne permet pas d'imaginer un décalage de température suffisant pour expliquer l'écart sur la figure 3.10.a) entre la prédiction et les mesures.

- **L'incertitude sur la pression** : dans la gamme de température utilisée, l'erreur sur l'ajustement des mesures [98] par la loi de Clausius-Clapeyron est inférieure à 15 %. Une telle incertitude n'est pas visible sur la figure 3.10.b), puisqu'elle est en échelle semi-logarithmique ; elle peut cependant introduire une erreur non négligeable sur la transition.

## Conclusion

Même s'il reste des incertitudes, sur la transmission notamment, la densité semble correctement prédite par les données tabulées. La température d'utilisation est limitée par la conception des fenêtres de saphir à 450 °C, à une telle température la transmission est typiquement de 50 %, valeur raisonnable et confortable pour utiliser la cellule comme référence. L'interaction avec les atomes froids demande de repérer la transition par la technique d'absorption saturée. Même s'il reste difficile de mesurer la transition à sa largeur naturelle (7,6 kHz), le signal d'absorption saturée nous permettra de caractériser les dérives à long terme du laser asservi sur la cavité ULE.

### 3.3 Mesures de la stabilité de la cavité ULE

Notre cellule chaude constitue une référence stable et indépendante de la cavité ULE. Elle va nous permettre d'étudier la stabilité de cette dernière qui imposera la stabilité du laser à long terme. Un matériau ULE présente des caractéristiques exceptionnelles de faible dilatation de par sa conception ; le coefficient de dilatation thermique peut même s'annuler pour une certaine température. Ce point de fonctionnement est particulièrement intéressant : en effet, autour de ce point, on minimise les fluctuations de la longueur de la cavité avec la température. Notre cavité est mise sous vide et l'enceinte qui la contient est placée dans une boîte asservie en température : cela minimise les fluctuations rapides qui sont moyennées par l'isolation thermique assurée par le vide.

La comparaison des pics de transmission de notre étalon ULE avec la référence atomique nous permettra de caractériser son expansion thermique sur plusieurs degrés Celsius, on peut espérer trouver le minimum de dilatation proche de la température ambiante. Nous décrirons cette étude dans une première partie. Une fois la température stabilisée, nous étudierons les dérives en fréquence du laser asservi sur la cavité pour des temps longs (de plusieurs heures jusqu'à plusieurs jours).

#### 3.3.1 Caractérisation de la cavité au moyen de la référence atomique

Puisqu'on désire caractériser l'expansion thermique de la cavité sur plusieurs degrés Celsius, il n'est pour le moment pas question d'asservir le laser sur la cavité et de mesurer ses dérives. Nous verrons en effet que sur plusieurs degrés Celsius, l'agilité en fréquence requise est de plusieurs centaines de mégahertz. Dans un premier temps, il nous suffit de comparer les pics de transmission de la cavité et celui d'absorption saturée.

#### Montage d'absorption saturée

Ce montage a été réalisé par G.L. Gattobigio (et est schématisé par la figure 3.11). Il va nous permettre d'isoler la résonance atomique mieux que la largeur du profil Doppler (400 MHz typiquement). Comme dans le cas de la mesure de l'absorption linéaire, on balaye la fréquence du laser en cavité étendue en agissant sur la cale piézo-électrique. Nous cherchons à étudier l'écart entre les pics de la cavité ULE et la résonance atomique et son évolution avec la température ambiante. Rappelons pour cela quelques ordres de grandeur :

- **la largeur du profil d'absorption** est de 400 MHz,
- **l'intervalle spectrale libre de la cavité** est de 1,5 GHz ; il est donc environ trois fois plus grand que la largeur du profil Doppler,

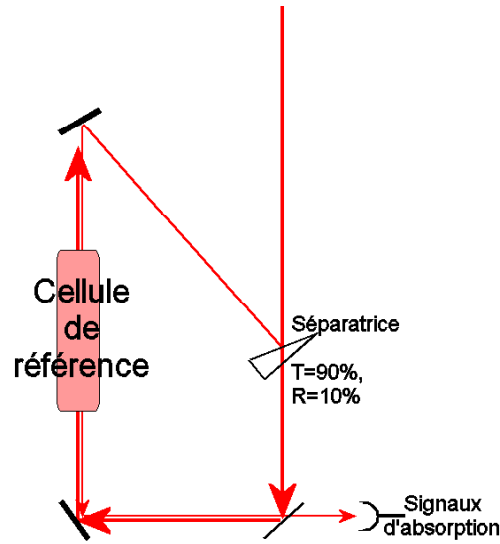


FIG. 3.11 – Montage d’absorption saturée. La polarisation du faisceau et le champ magnétique directeur dans la cellule sont perpendiculaires au plan de la figure

- le **coefficient de dilatation thermique du matériau ULE** est donné par le constructeur : sa valeur typique est de  $\Delta L/L \lesssim 10^{-7} \text{ K}^{-1}$  qui se traduit par une dérive en fréquence de  $43 \text{ MHz.K}^{-1}$ .

On souhaite étudier la cavité en changeant sa température autour de la température ambiante, sur une quinzaine de degrés Celsius avec des pas de  $3^\circ\text{C}$  typiquement. On attend donc des dérives en fréquence d’environ  $120 \text{ MHz}$  par pas de température. Cela reste inférieur à la largeur du profil d’absorption et d’un ordre de grandeur plus petit que l’intervalle spectral libre. On mesure pour notre étude l’écart entre un pic de transmission de la cavité et le pic d’absorption saturée, on regarde ensuite son évolution avec la température.

### Mesures d’absorption saturée

En modulant la tension de la cale piézo-électrique, on obtient simultanément le pic en transmission de la cavité et le pic d’absorption saturé qui pointe la résonance atomique. Ces deux pics ont des largeurs proches, car elles sont limitées par la largeur spectrale du laser en cavité étendue (environ  $1 \text{ MHz}$  lorsqu’il n’est pas asservi). Une courbe typique (figure 3.12) a été obtenue pour une température de consigne pour l’asservissement thermique de l’enceinte contenant la cavité de  $T_{\text{cavité}} = 27^\circ\text{C}$ . Cette température  $T_{\text{cavité}}$  est le paramètre physique que nous allons faire varier pour notre étude de stabilité.

Sur la figure 3.12, la courbe en bas montre la transmission à la cavité Fabry-Perot en ULE, on voit apparaître les deux bandes latérales à  $20 \text{ MHz}$  qui servent

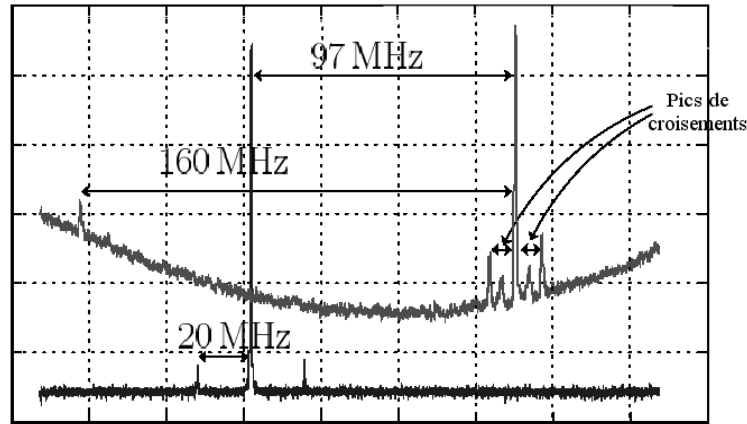


FIG. 3.12 –  $T_{\text{cavité}} = 27^\circ\text{C}$ . En bas, la transmission de la cavité. En haut, le signal d'absorption saturé sur la cellule de référence (une interprétation pour chaque pic est donnée dans le texte)

à l'asservissement du laser, elles nous donnent ici une calibration en fréquence de l'axe des abscisses. La courbe en haut laisse apparaître le pic d'absorption saturée, légèrement décalé par rapport au centre du profil Doppler, à cause d'une légère modulation d'amplitude résiduelle qui déforme le profil en décalant son centre. On voit aussi une paire de pics à  $\pm 10$  MHz, nommés pics de croisement (*cross-over* en anglais); la bande centrale de la pompe sature alors une classe de vitesse qui est à résonance avec une bande latérale de la sonde. Pour cette série de mesures, nous avons utilisé un champ magnétique directeur. On voit en conséquence une paire de « petits » pics qui sont dus à un résidu de polarisation des faisceaux hors de l'axe défini par le champ directeur; ils sont décalés du pic central par effet Zeeman.

L'utilisation des bandes latérales à 20 MHz pour la calibration en fréquence est assez intuitif quand on observe la réponse de la cavité à la variation de fréquence du laser. C'est cependant un choix discutable, car cela suppose que la réponse de la cale piézo-électrique induit une variation linéaire sur la fréquence. On peut s'en persuader en observant un pic isolé à 160 MHz de la résonance atomique : il s'agit du décalage isotopique avec le strontium 86. Déjà observé par G. Tino [100], il a été mesuré avec une précision de 0,3 kHz plus récemment [99] autour de 164 MHz, ce qui nous permet d'estimer l'incertitude sur la calibration à 4 MHz.

On peut donc conclure que pour  $T_{\text{cavité}} = 27^\circ\text{C}$ , le décalage de la cavité par rapport à la référence atomique est de  $97 \pm 4$  MHz.

### Dilatation de la cavité

La mesure que nous venons de détailler a été effectuée pour plusieurs températures de consigne  $T_{\text{cavité}}$ . Pour de petites variations le décalage en fréquence de la cavité est proportionnel à la variation de longueur.

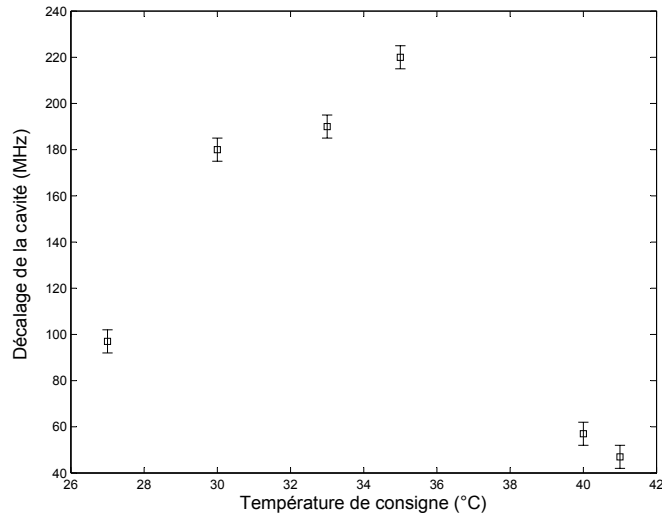


FIG. 3.13 – Décalage en fréquence de la cavité par rapport à la référence atomique en fonction de la température de consigne pour l’asservissement thermique de l’enceinte contenant la cavité ( $T_{\text{cavité}}$ )

On ne peut pas assurer que lors de la mesure la cavité est parfaitement thermalisée avec l’environnement. En effet l’isolation que constitue l’enceinte à vide peut introduire un retard dans l’évolution de la température de la cavité avec celle de la consigne d’asservissement. Entre chaque mesure, on a attendu 24 heures ce qui est sans doute trop court pour une thermalisation complète de l’ensemble. Ceci peut expliquer l’aspect erratique de la courbe 3.13. Malgré tout, la variation dans cette gamme de température sont typiquement de  $30 \text{ MHz.K}^{-1}$  (entre 27 et  $30^\circ\text{C}$ ), ce qui reste inférieure à la valeur fournie par le constructeur ( $43 \text{ MHz.K}^{-1}$ ). Il semble par ailleurs qu’un minimum de dilatation existe autour de  $30^\circ\text{C}$  avec un décalage de 200 MHz entre la cavité et la référence atomique. Cette mesure permet certes de caractériser la stabilité mécanique de la cavité mais elle oriente surtout fortement le montage optique qui est destiné à interagir avec les atomes. En effet, 200 MHz est un décalage facilement accessible en utilisant des modulateurs acousto-optiques (MAO). Plus précisément, on choisit d’utiliser des MAO de 80 MHz en double passage, et de descendre la température de consigne de la cavité vers  $29^\circ\text{C}$  pour avoir un décalage de 160 MHz.

La cavité étant maintenant stabilisée en température, on peut étudier des



dérives plus fines du laser une fois qu'il est asservi sur cette dernière. Elles sont un élément caractéristique important de la stabilité du laser à des échelles de temps plus courtes que l'étude menée en 3.1.4.

### 3.3.2 Dérives à long terme du laser asservi sur la cavité

#### Contrôle de la fréquence

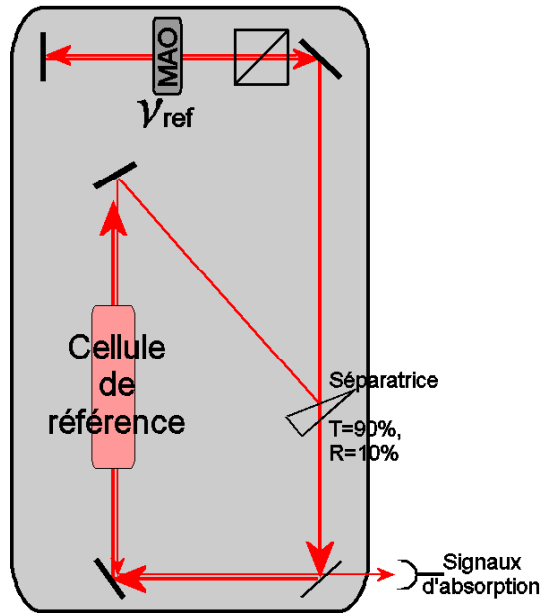


FIG. 3.14 – Montage d'absorption saturée contrôlé par MAO

Le laser étant asservi sur la cavité, on intercale sur le faisceau allant à la cellule de référence un MAO en double passage, sa fréquence sera notée  $\nu_{\text{Réf}}^{10}$ , on a choisi la température de consigne pour avoir  $\nu_{\text{Réf}} \simeq 80$  MHz. On modifie légèrement le montage 3.11 pour aboutir à celui de 3.17. On peut maintenant interroger les atomes avec le laser asservi en balayant  $\nu_{\text{Ref}}$ . On cherche à vérifier ici que le laser asservi est stable sur l'échelle de temps caractéristique d'une expérience et d'une prise de mesures sur les atomes froids. Nous débattons en conclusion de la nécessité d'un asservissement sur la référence atomique.

#### Observation du signal atomique

Notre MAO<sup>11</sup> en double passage, dont l'efficacité est maximale pour 80 MHz, garde de bonnes performances entre 70 et 90 MHz, ce qui nous laisse une gamme

<sup>10</sup>elle est fournie par un générateur de signaux Rhode-Schwarz SMX

<sup>11</sup>Crystal Tech

de 40 MHz après double passage. Elle nous permet de compenser des dérives de 1 K environ (pour une dilatation typique de  $\Delta L/L = 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ ). En pratique, l'asservissement en température de l'enceinte contenant la cavité ainsi que la climatisation de la pièce assure une stabilité de 0,1 K, l'agilité requise n'est alors que de quelques mégahertz.

Une fois le laser asservi, on balaye la fréquence du MAO autour de  $\nu_{\text{Réf}}$  pour repérer la résonance, l'excursion en fréquence est fixée à  $\pm 1,25 \text{ MHz}$  et la fréquence de modulation est de quelques dizaines de Hz. Un oscilloscope numérique enregistre le signal d'absorption saturée (figure 3.15). Il est calibré en fréquence à partir des valeurs connues de la fréquence centrale et de l'excursion. Sur la courbe 3.15, on fait un ajustement par une gaussienne<sup>12</sup> dont le centre nous donne l'écart entre le laser asservi sur la cavité et la résonance atomique. La figure 3.15 est un exemple de ce type de mesure : elle montre le signal d'absorption saturée auquel on superpose un ajustement gaussien. La finalité d'une telle mesure est de connaître les dérives du laser asservi sur la cavité, on conclura sur la nécessité ou non d'un asservissement sur la cellule de référence. Il nous faut cependant estimer la précision d'une telle mesure.

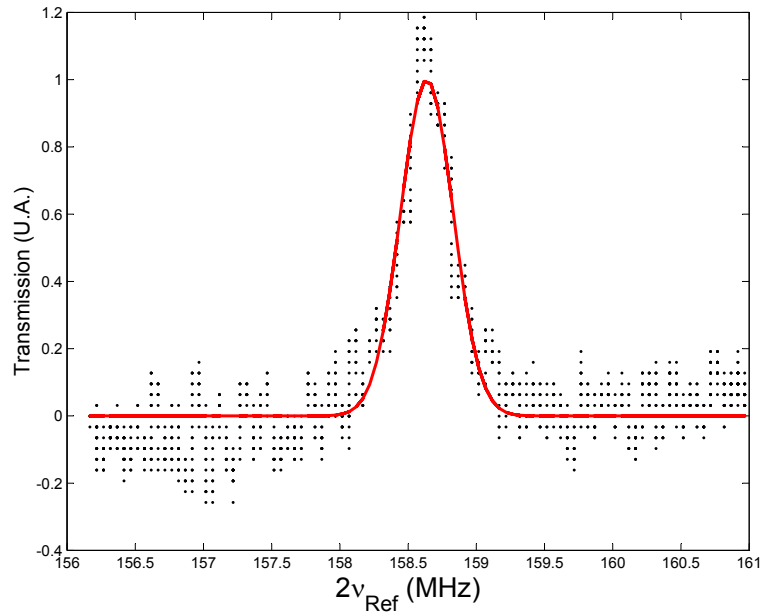


FIG. 3.15 – Signal d'absorption saturée en fonction de  $2\nu_{\text{Réf}}$ . En traits pleins, un ajustement par une gaussienne dont le centre nous donne l'écart en fréquence entre le laser asservi sur la cavité et la résonance atomique.

<sup>12</sup>Ne sachant pas ce qui impose *a priori* la forme de la courbe, nous avons pourtant fait le choix d'une gaussienne plutôt qu'une lorentzienne. Cela suppose en effet un élargissement inhomogène. En pratique, cela ne changera pas les mesures de fréquence que nous effectuerons.

La précision des mesures n'est plus limitée par la largeur du laser comme c'était le cas précédemment pour 3.12. Nous avons en effet vu que le laser une fois asservi sur la cavité a une largeur négligeable devant la largeur naturelle de la transition. La largeur mesurée du pic d'absorption saturée est de 195 kHz (demi-largeur à  $1/e$  de l'ajustement gaussien). Les causes de l'élargissement sont multiples :

- **Saturation de la transition.** Comme pour les mesures d'absorption linéaire 3.2.2, le paramètre de saturation est fort (il vaut 130). Typiquement cela donne un élargissement par saturation de  $\sqrt{1 + 130} \Gamma_r = 87$  kHz (largeur à mi-hauteur).
- **Temps de transit des atomes dans le faisceau.** Les vitesses des atomes pour des températures de 450 °C sont typiquement de 250 m/s. Faisons une estimation rapide de l'élargissement : sachant que le temps de passage dans le diamètre du faisceau (2,5 mm qui est ici le double du *waist*) est de 10  $\mu$ s, l'élargissement donc de  $1/(2\pi \cdot 10^{-6}) = 16$  kHz. Dans une deuxième approche, on devra aussi estimer les conséquences des défauts du front d'onde à des échelles plus petites que la taille du faisceau.
- **L'effet Zeeman du premier ordre.** Pour des raisons d'encombrement de cette partie du montage optique, nous n'avons pas utilisé de champ magnétique directeur. Le champ magnétique résiduel est responsable d'une levée de dégénérescence des sous-niveaux Zeeman. Si cette dernière est plus importante que la largeur du pic d'absorption saturée, le signal se scinde en trois pics. Nous ne sommes visiblement pas dans ce cas, puisque nous ne voyons qu'un seul pic. Cependant, une légère levée de dégénérescence peut apparaître comme un élargissement ; les trois pics ne sont alors pas résolus et se superposent pour former le signal d'absorption saturée. On ne peut certes pas confondre en théorie la somme de trois pics avec un seul pic large, ayant pourtant un rapport signal à bruit médiocre, il reste difficile en pratique de voir de telles déformations. On ne peut dans ce cas pas exclure qu'il existe un champ magnétique perpendiculaire à l'axe de polarisation du laser qui produise un élargissement de 200 kHz (ce qui correspond à un champ de 0,1 Gauss pour la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ ).

La largeur du pic d'absorption saturée est une première limite à la précision sur la mesure de la résonance. Dans un deuxième temps intervient le rapport signal à bruit dont la valeur est de 5 environ pour une bande passante de 1 kHz typiquement. Cette faible valeur est la conséquence de la dégradation déjà mentionnée des fenêtres de saphir : les faisceaux pompe et sonde sont en effet fortement atténués et déformés à leur passage. Lors de l'ajustement, on peut extraire l'incertitude sur la position du centre qui pointe la référence atomique, elle est de 6 kHz à comparer à la demi-largeur à  $1/e$  du pic soit 195 kHz. Des mesures effectuées sur des temps courts de quelques minutes, montrent par ailleurs des fluctuations statistiques du même ordre de grandeur. Notre incertitude est en définitive proche de la largeur naturelle de la transition. Cela sera suffisant pour

caractériser les dérives à l'échelle d'une heure du laser asservi sur la cavité ULE.

### Mesure des dérives

Nous venons de détailler une mesure de fréquence du laser asservi sur la cavité. Intéressons nous maintenant aux dérives lentes de cette fréquence. Nous avons choisi deux échelles de temps :

- **10 heures**, qui correspond à l'évolution sur une journée, temps caractéristique d'une prise de données sur les atomes froids ;
- **Plusieurs jours** : à une échelle plus longue, ces mesures doivent nous permettre de conclure sur ce qui gouverne les dérives du laser.

### Dérives sur une journée

Elles sont un élément important de la caractérisation du laser asservi. En effet si on considère un temps typique d'une prise de données sur les atomes froids, par exemple 5 min, il ne faut pas pendant ce laps de temps que le laser dérive de plus de la largeur naturelle de la transition soit  $7,6 \text{ kHz}/5 \text{ min} \approx 90 \text{ kHz/heure}$ . Dans le cas contraire un asservissement sur la transition est nécessaire.

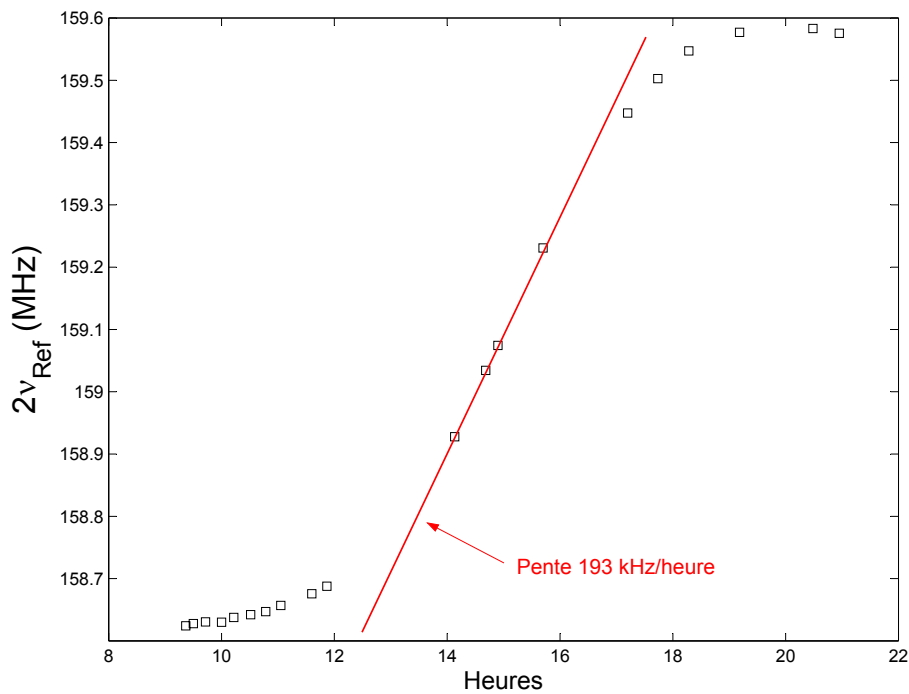


FIG. 3.16 – Dérive du laser asservi sur la cavité ULE à l'échelle d'une journée. L'axe des abscisses est gradué en heures.

La figure 3.16 montre les dérives du laser au cours d'un jour : elles sont

visiblement maximales au milieu de la journée (15h heure locale). Les mesures ont été effectuées lors d'une journée d'utilisation « typique » de la salle d'expérience (une personne présente en continue entre 9h et 18h). On verra un peu plus loin une forte corrélation des dérives du laser avec les variations de température. De telles variations à l'échelle d'une journée semblent ici principalement dus à la présence d'une personne dans la pièce.

**Le maximum des dérives est de 193 kHz/heure au milieu de la journée.** Nous pouvons finalement conclure que toutes mesures sur les atomes froids qui demande une précision proche de la largeur naturelle de la transition devront nécessiter un asservissement du laser sur la résonance atomique. Il reste cependant possible par ailleurs d'améliorer l'asservissement de température de la boîte contenant la cavité ULE, car ce sont en premier lieu les variations de cette température qui imposent les dérives du laser.

### Dérives sur plusieurs jours

Lors de mesures répétées des dérives du laser couvrant une centaine de jours, nous avons pu constater une forte corrélation avec les variations de température à l'intérieur de la boîte entourant la cavité ULE. Les mesures des dérives de fréquence ont dans ce but été répétées sur 2500 heures. En même temps nous avons enregistré la température dans la boîte.

**Sur la figure 3.17, on voit une forte corrélation entre les deux courbes.** Elles présentent toutes deux des variations à l'échelle de 24h, avec en général, une augmentation de température lors du jour et une diminution lors de la nuit. À cela s'ajoute une tendance à l'échelle de plusieurs jours, qui traduit les dérives saisonnières de la température.

Notons bien que l'amplitude typique des fluctuations dans la boîte en température est de  $0,05^\circ\text{C}$  et que celle des fluctuations de la fréquence est de 4 MHz. La figure 3.13 nous donnait un maximum de dilatation de  $30\text{ MHz}\cdot\text{K}^{-1}$ , ainsi des fluctuations de 4 MHz supposent des fluctuations thermiques au minimum de  $0,13^\circ\text{C}$ . Il semble donc que les fluctuations de température sur la cavité ULE sont au moins deux fois plus importantes que celles que nous mesurons dans la boîte. L'ensemble n'est visiblement jamais complètement thermalisé mieux qu'à  $0,05^\circ\text{C}$  visiblement. Plus gênant, l'asservissement corrige mieux la température au niveau des capteurs thermiques qu'au niveau de la cavité ULE. Ceci traduit une conception inadéquate de cet asservissement en température.

Sur la figure 3.18, on a calculé l'écart type d'Allan de la fréquence en valeur relative. Pour ce calcul, on interpole linéairement entre deux points mesurés afin de définir la fréquence quelque soit le temps.

La courbe en traits pleins représente les données brutes de la figure 3.17.a). On y voit en premier lieu une dérive très lente de 1,6 kHz/heure soit 4 MHz sur 2500 heures, qui correspond à une dérive thermique déjà évoquée de  $0,05^\circ\text{C}$  sur 2500 heures. On peut dans un second temps imaginer corriger cette dérive :

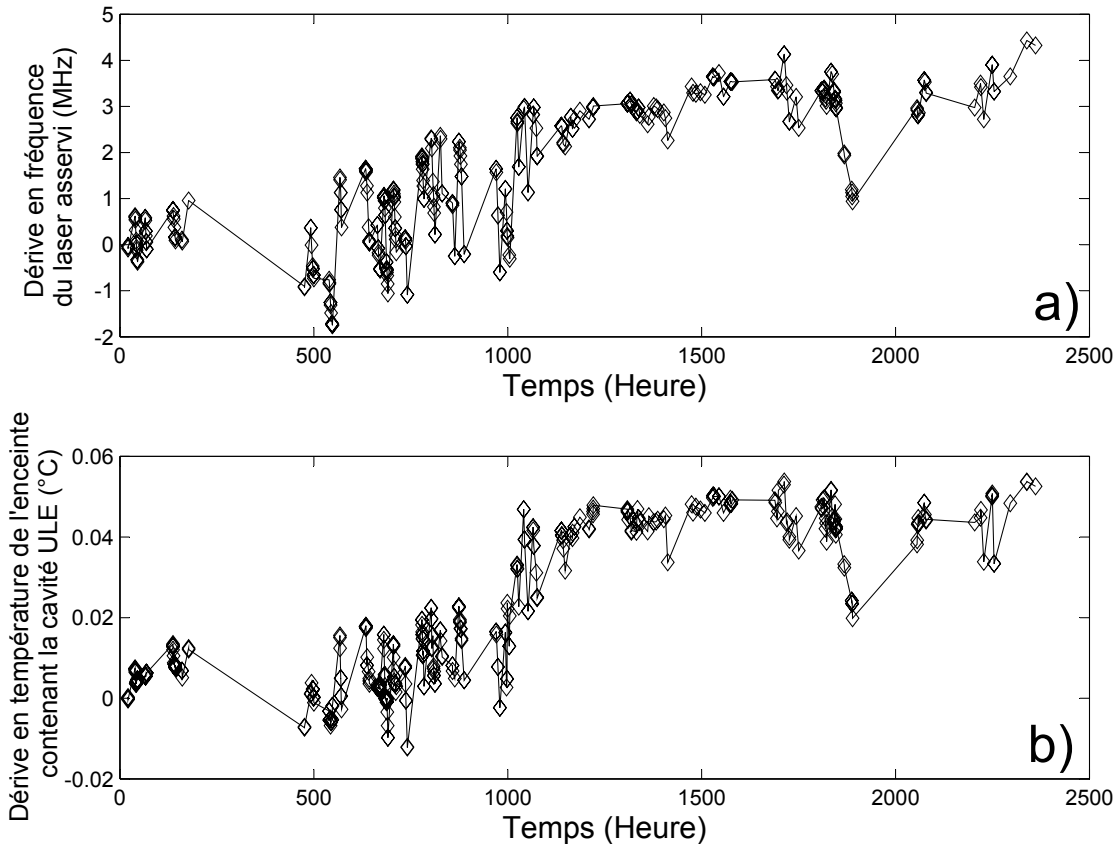


FIG. 3.17 – Comparaisons des dérives en fréquence du laser asservi avec la température à l'intérieur de la boîte entourant la cavité ULE

on pourrait en effet la soustraire et regarder à nouveau l'écart type d'Allan. Il est cependant plus judicieux d'exploiter la corrélation avec la courbe donnant la température (fig. 3.17.b). Nous avons donc tracé l'écart type pour la fréquence corrigée, en soustrayant à la fréquence (fig. 3.17.b) la courbe de température (multipliée par un facteur  $(80 \text{ MHz}/^\circ\text{C})$ ). Le résultat est tracé en pointillés : on a bien corrigé la dérive de  $1,6 \text{ kHz}/\text{heure}$ , puisque le coefficient  $80 \text{ MHz}/^\circ\text{C}$  a été choisi dans ce but. La pente de la courbe a donc globalement diminuée. Notons aussi que la valeur pour des temps caractéristiques d'une journée ( $10^4 \text{ s}$ ) est aussi légèrement plus faible, ceci vient du fait que même à cette échelle de temps fréquence et température sont corrélées. On est malgré cela loin de corriger les fluctuations jusqu'à obtenir un bruit blanc décroissant avec une pente caractéristique (décroissance comme l'inverse de la racine carrée du temps). On obtient plutôt un plateau caractéristique d'un bruit de Flicker.

En conclusion de cette analyse, l'inertie thermique de l'ensemble étant grande, ce n'est pas parce que l'on corrige mieux les fluctuations au niveau du détecteur que l'on annule complètement les fluctuations au niveau de la cavité. Dans le cas

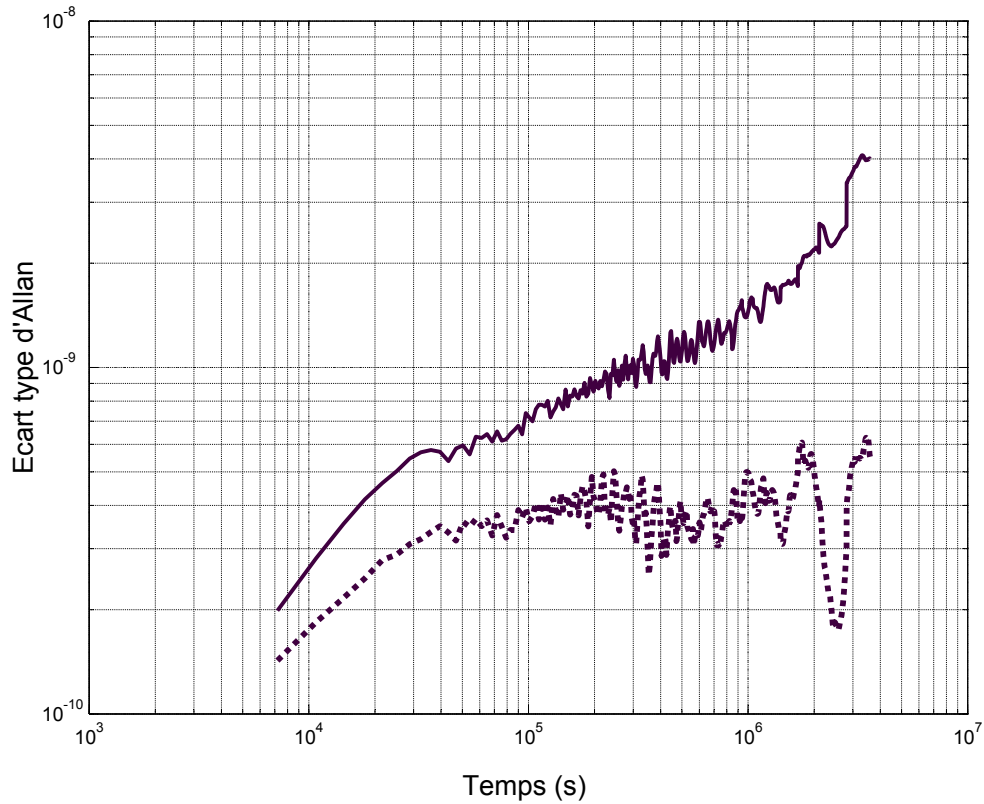


FIG. 3.18 – Écart type d'Allan des fluctuations de fréquence en valeur relative. En traits pleins, les données brutes. En pointillés, en corrigeant la dérive de fréquence.

d'une correction (simulée par le calcul de la fréquence corrigée par la température), l'amélioration serait conséquente à long terme (un ordre de grandeur) mais faible à l'échelle d'une journée (quelques dizaines de %). L'efficacité de notre asservissement est *a priori* limité par le volume important de la boîte : diminuer sa taille nous permettrait de rapprocher l'enceinte à vide contenant la cavité ULE, les sources de chaleur qui assurent sa thermalisation et le détecteur de température qui gouverne l'asservissement. On devra aussi augmenter la conductivité thermique de l'ensemble, ce qui réduira son inertie thermique.

### Conclusion

En définitive, les dérives mesurées sur une journée sont rédhitoires si l'on souhaite interagir avec les atomes froids à l'échelle de la largeur naturelle de la transition. Pour les compenser deux voies sont possibles et devront être développées de concert :

- Une nouvelle conception de l’asservissement en température de la cavité ULE doit permettre de diminuer notablement ses fluctuations thermiques et ainsi augmenter sa stabilité.
- On pourra aussi s’asservir sur la référence atomique. En remplaçant les fenêtres de saphir, on doit gagner notablement sur le rapport signal à bruit. Un champ magnétique directeur devrait permettre de s’affranchir de l’effet Zeeman du premier ordre. Même si nous ne l’avons pas quantifié, l’effet d’un champ magnétique résiduel est *a priori* le seul qui puisse expliquer l’élargissement<sup>13</sup> jusqu’à 195 kHz.

Dans une première série d’expérience, nous étudierons le transfert du gaz d’atomes refroidi vers le piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ . **Dans cette phase de chargement, il n’est pas nécessaire**, comme nous le verrons plus tard, **de contrôler la fréquence du rayonnement à 7,6 kHz près**. Dans un premier temps, nous avons décidé d’asservir uniquement sur la cavité ULE et de compenser « à la main » les dérives du laser. Afin de pouvoir à la fois interroger la cellule de référence et interagir avec les atomes froids, nous avons choisi d’exploiter deux parties indépendantes du faisceau contrôlées chacune par des MAO.

## 3.4 Montage final du laser rouge

La fréquence du faisceau destiné au piégeage sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  doit avoir une agilité de quelques mégahertz autour de la résonance atomique lors de la phase de chargement. Les caractéristiques du MAO dédié à cette tâche (noté MAO<sub>Exp</sub>) sont donc proches de celles du MAO destiné à pointer la résonance sur la cellule de référence (noté MAO<sub>Réf</sub>).

Afin d’exploiter au mieux la puissance disponible, on utilisera pour l’expérience de piégeage le faisceau transmis par la cavité qui procure de multiples avantages : il est en effet filtré spatialement, ce qui nous permet d’injecter un laser esclave avec un bon recouvrement ; il est aussi filtré spectralement, ce qui supprime dans le spectre optique les remontées hors de la bande passante de l’asservissement, qui ont fait l’objet de l’étude 3.1.4.

### 3.4.1 Description du montage

En prenant en considération les éléments précédents, on aboutit au montage illustré par 3.19.

- Notons bien qu’il est l’assemblage des trois modules décrits précédemment :
- **Le laser est asservi sur la cavité Fabry-Perot en ULE.** Les caractéristiques spectrales ont été présentées dans la partie 3.1. La fréquence moyenne du laser est d’environ 160 MHz inférieure à la référence atomique.

<sup>13</sup>À comparer à 87 kHz, largeur FWHM due à l’élargissement par saturation.



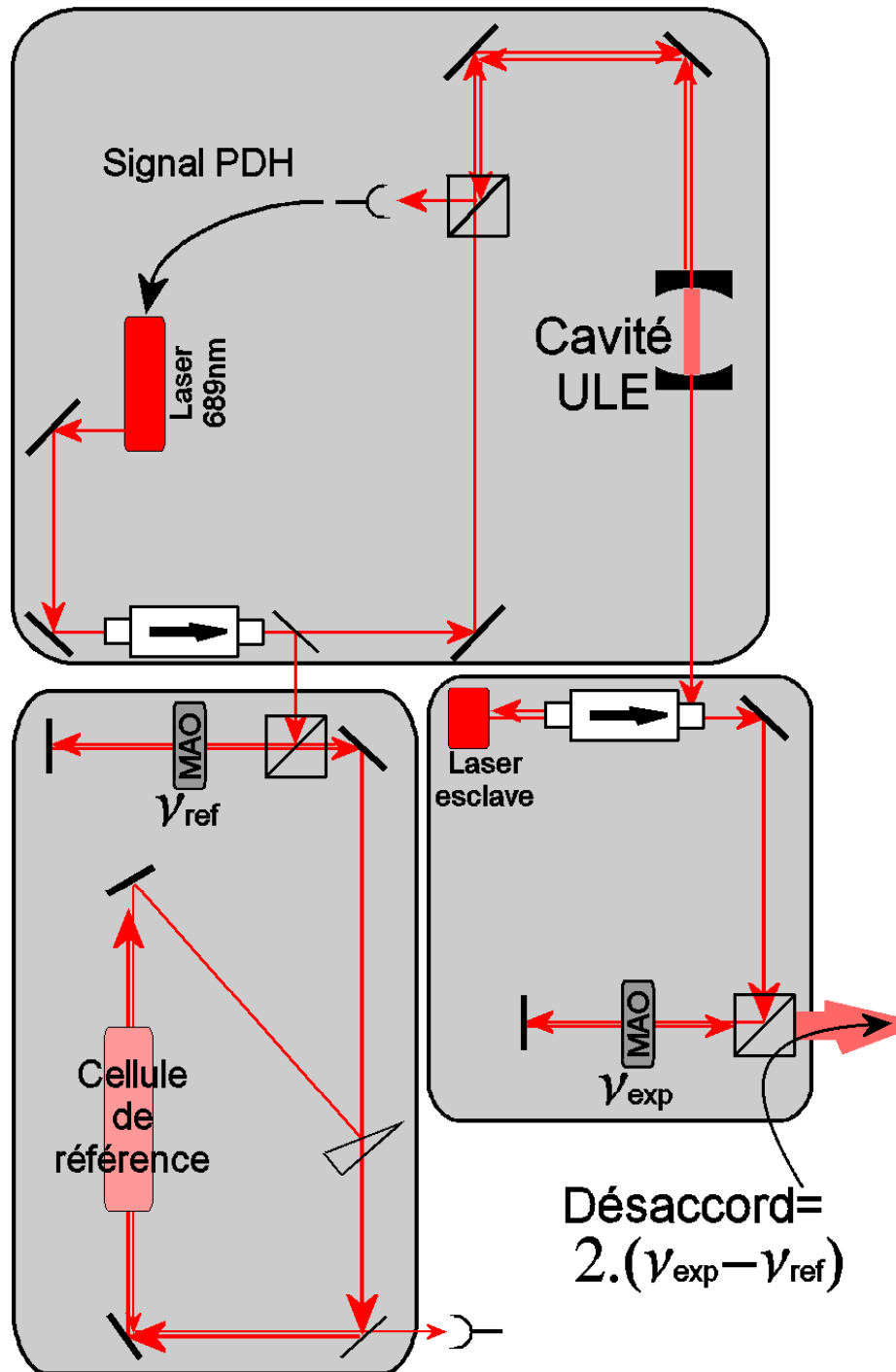


FIG. 3.19 – Schéma du montage complet du laser stabilisé à 689 nm. On distingue trois sous-ensembles qui sont décrits dans le texte.

Nous connaissons par ailleurs les dérives à long terme de cette fréquence par l'étude 3.3.2.

- **On observe en continu le profil d'absorption saturée sur la cellule.** Cela nous assure un contrôle du désaccord de l'ordre de la largeur naturelle de la transition sur quelques minutes comme nous l'avons vu en conclusion de 3.3.2. N'étant pas asservi sur la référence, on sera limité par les dérives lentes de la cavité. Connaissant la fréquence du laser, la fréquence  $\text{MAO}_{\text{Réf}}$  nous donnera celle de la transition atomique  $\nu_{\text{atomique}} = \nu_{\text{laser}} + 2\nu_{\text{Réf}}$ .
- **La transmission de la cavité sert à l'interaction avec les atomes froids.** On injecte un laser esclave <sup>14</sup> qui fournit 12 mW avec les caractéristiques spectrales du maître. Après double passage dans un MAO ( $\text{MAO}_{\text{Exp}}$ ) à  $\nu_{\text{Exp}}$ , le faisceau aura pour fréquence  $\nu_{\text{laser}} + 2\nu_{\text{Exp}}$ . Ainsi, il sera à résonance avec la transition pour  $\nu_{\text{Exp}} = \nu_{\text{Réf}}$  et de façon générale le désaccord sera  $2(\nu_{\text{Exp}} - \nu_{\text{Réf}})$ .

Un tel ensemble semble bien adapté à l'interaction avec le nuage d'atomes froids, mais nous devons malgré tout avoir conscience des limitations qu'imposent les caractéristiques du laser.

### 3.4.2 Conclusion

En définitive, la stabilité à court terme du laser semble suffisante pour interagir au niveau de la largeur naturelle de la transition. La première limitation est due aux dérives lentes de la fréquence. Nous avons montré qu'elles sont largement corrélées aux fluctuations de température de l'enceinte qui contient la cavité ULE (figure 3.17) à l'échelle de plusieurs jours. La valeur à retenir est donnée par la figure 3.16 et concerne la dérive journalière typique de la fréquence soit 193 kHz/heure. Il s'agit certes d'une valeur maximale, mais autour de celle-ci, il suffit d'environ 2 min pour dériver de 7,6 kHz (la largeur naturelle de la transition) et donc sortir de résonance. À l'échelle de quelques dizaines secondes, il semble impératif de contrôler les dérives du laser asservi. En pratique, nous comptons mettre en place un asservissement qui s'inspire largement de la technique de mesure détaillée en 3.3.2. Le système informatique qui nous a permis de repérer la fréquence du laser asservi sur la cavité par rapport à la résonance atomique peut être adapté en vue d'un asservissement lent. La mesure de fréquence après traitement peut être renvoyé vers  $\text{MAO}_{\text{Réf}}$  pour asservir  $\nu_{\text{Réf}}$  sur la résonance. On sera alors limité par le bruit sur l'ajustement de la courbe 3.15, qui détermine l'incertitude sur la position de la fréquence centrale soit 6 kHz.

On constate finalement qu'un tel asservissement ne nous permettrait pas dans les conditions actuelles de pointer la résonance mieux que le kilohertz. Il devra

---

<sup>14</sup>Sacher SAL-690-10 Traitée Anti-reflet

s'accompagner d'une rénovation de la cellule de référence, afin de diminuer le bruit sur la courbe 3.15 et d'affiner le pic d'absorption saturée. Le principe d'un asservissement lent semble en revanche valable. Nous ne l'avons pas mis en place dans la phase d'étude du chargement du piège (chapitre 4) sur la raie d'intercombinaison en partie pour ne pas alourdir l'utilisation du laser.

Même si le laser ne sera pas asservi sur la résonance atomique, la cellule de référence nous sert pourtant à compenser « à la main » les dérives de la fréquence. Très prosaïquement, une prise de données prendra quelques minutes et la fréquence est réajustée avant chaque acquisition. Compte tenu de la largeur du pic (195 kHz demie-largeur à  $1/e$ ) et des dérives journalières maximales (mesurées à 193 kHz/heure), nous estimons donc que l'incertitude sur le désaccord du laser sera typiquement de 50 kHz.

Malgré ces limitations qui nous empêchent d'utiliser le laser avec une précision au niveau de la largeur naturelle de la transition, il reste un outil performant et simple. Il faut cependant noter que la simplicité du montage final est largement assurée par le faible écart entre un pic de la cavité ULE (proche du minimum de dilatation) et la résonance. Celui-ci a été légèrement ajusté pour atteindre environ 160 MHz, il est alors possible d'utiliser des modulateurs acousto-optiques. Le montage optique est en conséquence grandement simplifié.

Nous avons par ailleurs choisi de moduler directement le courant de la diode laser pour générer les bandes latérales. Outre son aspect économique, cette solution permet de ne pas utiliser de modulateur électro-optique. Elle est compatible avec la stabilisation du laser au niveau du kilohertz.

Nous avons en définitive mis en place tous les éléments en vue de l'interaction avec les atomes froids. Dans la phase du chargement du piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ , nous utiliserons pleinement les possibilités du générateur de fonctions<sup>15</sup> qui contrôle MAO<sub>Exp</sub>. Outre sa stabilité intrinsèque qui permet de ne pas altérer celle du laser, il est bien adapté à la production d'un spectre large. Une bonne maîtrise du spectre du laser sera en effet un élément crucial du chargement du piège vers la raie étroite.

---

<sup>15</sup>Rohde-Schwarz SMY01

# Chapitre 4

## Piégeage sur la raie d'intercombinaison

Le piégeage et le refroidissement du strontium sur sa raie d'intercombinaison est particulièrement efficace si l'on veut obtenir à la fois une basse température et une grande densité spatiale. H. Katori a atteint une densité dans l'espace des phases de 0,01 [19]. Cela reste une référence dans le domaine du refroidissement « simple » dans un piège magnéto-optique. Tourné vers des applications métrologiques, le chargement d'un tel échantillon vers un piège dipolaire fournit un système prometteur pour la réalisation d'une horloge optique à atomes piégés [102]. Le contrôle du nombre d'atomes lors des divers étapes de transfert reste un point-clé aussi bien pour l'obtention du régime de dégénérescence quantique [103] que pour la réalisation d'horloge.

Du point de vue de la localisation forte des ondes lumineuses, le piégeage sur la transition d'intercombinaison est particulièrement intéressant. Le critère de localisation concerne uniquement la densité spatiale du nuage 1. La vitesse résiduelle n'est *a priori* pas une limitation dans la gamme des températures que nous utiliserons. Nous allons donc chercher à optimiser dans un premier temps le chargement du piège sur cette transition pour ensuite venir comprimer le nuage afin d'en augmenter la densité. Accroître la densité n'est pour le moment pas d'actualité; nous allons en effet nous focaliser sur le chargement du piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ .

La transition d'intercombinaison, faiblement permise, n'a une largeur que de  $2\pi \times 7,6$  kHz. Elle est typiquement de trois ordres de grandeur plus étroite que la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ ; en conséquence la force que l'on peut exercer sera de plusieurs ordres de grandeur plus faible. Il s'agit donc d'un paramètre fondamental si l'on souhaite piéger sur cette transition.

À titre d'exemple, en cyclant sur la raie d'intercombinaison, il n'est pas possible de piéger directement des atomes de calcium. La transition étant plus étroite que pour le strontium, la force exercée ne pourra pas compenser la gravité. On est dans ce cas obligé d'élargir la transition par *quenching* en utilisant un niveau

intermédiaire ( $5s\ ^1S_0$  [109] ou  $4s\ ^1D_2$  [108]). Le taux de diffusion de photons obtenu sur calcium par « quench cooling » [108] étant comparable à ce qu'on obtient directement sur la raie d'intercombinaison du strontium, on pourrait imaginer utiliser aussi cette technique sur le strontium. Les taux de branchement n'étant *a priori* pas connus, il n'est pas évident que le *quenching* soit réellement efficace et adapté.

Si l'on s'intéresse maintenant plus précisément au régime final obtenu dans un tel piège, il faut comparer la largeur naturelle de la transition à la fréquence de recul. On la qualifie de *transition étroite* car la largeur de raie  $2\pi \times 7,6$  kHz est du même ordre de grandeur que la fréquence de recul  $2\pi \times 4,8$  kHz. Lorsqu'elles sont du même ordre de grandeur, la dynamique des atomes n'est plus décrite par la théorie semi-classique du refroidissement Doppler. Il n'est alors plus possible de découpler l'évolution des degrés de liberté internes et externes pour l'atome, ce qui est à la base de la théorie Doppler. En quantifiant l'impulsion, on peut traiter la dynamique du refroidissement et prédire la température [106], dont l'ordre de grandeur sera la température de recul.

Le régime final est particulièrement prometteur [19] ; une étude expérimentale récente [105] a par ailleurs mis en évidence une grande richesse en fonction des paramètres du refroidissement. Nous allons en ce qui nous concerne porter notre attention sur le chargement du piège, qui reste la phase critique si l'on souhaite optimiser le nombre d'atomes. Après une étude sommaire des ordres de grandeur des forces exercées sur la transition à 689 nm, nous ajusterons grossièrement les paramètres du laser. Dans un deuxième temps, la présentation des résultats expérimentaux, puis leur confrontation avec un modèle analytique simple, nous permettront de comprendre les limitations du chargement du piège sur la transition d'intercombinaison. Nous terminerons par une étude sommaire du régime final.

## 4.1 Description du potentiel de piégeage

L'étroitesse de la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  donne toute sa richesse au refroidissement sur la raie d'intercombinaison. Ce régime a été largement étudié avec différentes approches [114, 106, 21]. Si l'on s'intéresse plus précisément au problème du chargement d'un tel piège, on doit aussi garder en tête la largeur naturelle de la transition :  $\Gamma_r = 2\pi \times 7,6$  kHz. On peut regarder cette valeur selon deux points de vue.

D'une part la largeur de la classe de vitesse qui interagit avec le laser sera faible, en effet  $\Gamma_r/k_r = 0,48$  cm/s. Il apparaît donc illusoire de penser charger le piège à partir d'une vapeur chaude ou d'un jet ralenti dont la largeur de la distribution sera de quelques dizaines ou centaines de mètres par seconde. Pour obtenir un nombre significatif d'atomes dans le piège rouge<sup>1</sup>, il est indispensable de passer par une étape de refroidissement dans le piège bleu. La vitesse RMS des atomes dans celui-ci est  $V_{\text{RMS}} = 80$  cm/s (cette valeur sera justifiée en 4.3), ce qui reste élevé par rapport à  $\Gamma_r/k_r = 0,48$  cm/s. Afin d'impliquer le plus grand nombre d'atomes dans l'interaction avec le laser, il est indispensable de travailler avec un spectre large. Une première partie est dédiée à la définition des paramètres spectraux du laser.

D'autre part la force maximale que l'on peut exercer sera faible. En considérant une suite d'absorptions et d'émissions, elle sera directement proportionnelle à la largeur naturelle de la transition. Si on la compare à celle que subissent les atomes dans le piège bleu, elle sera donc inférieure de plus de trois ordres de grandeur. Cela n'est pas forcément réhibitoire, comme nous allons le démontrer dans l'étude du chargement du piège rouge. Dans une seconde partie, nous tenterons de donner une estimation grossière des paramètres du piège. Nous verrons en effet que par quelques considérations simples et intuitives, il est possible d'ajuster *a priori* ces paramètres et de faire un premier pas vers une étude plus systématique.

### 4.1.1 Présentation du spectre du laser

En comparant  $V_{\text{RMS}} = 80$  cm/s à la largeur de la distribution initiale après une phase de refroidissement dans le piège bleu et  $\Gamma_r/k_r = 0,48$  cm/s, il apparaît irréaliste d'utiliser un rayonnement monochromatique pour capturer les atomes dans le piège rouge. Nous avons donc élargi le spectre du laser par modulation de fréquence (FM).

---

<sup>1</sup>Pour simplifier dans la suite, le terme « rouge » désignera la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ , le terme « bleu » la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ .

**Définition des paramètres du spectre FM**

Dans le cas d'une modulation sinusoïdale, on définit sans ambiguïté l'excursion  $\Delta$ . Si  $A_f$  désigne par ailleurs la fréquence de modulation, alors la fréquence instantanée aura pour expression :

$$\boxed{\omega(T) = \omega_0 + \frac{\Delta}{2} \cos(A_f T)} \quad (4.1)$$

On définit l'indice de modulation par  $\beta = \frac{\Delta}{2.A_f}$ . On peut ensuite développer le champ  $E(t) = E_0 \exp(i 2\pi \int_0^t \omega(T) dT)$  en série de Fourier. On obtient un spectre discret dont l'amplitude de la composante notée  $l$  de fréquence  $\omega_0 + l A_f$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) est donnée par la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $l$  prise en  $\beta$  ( $J_l(\beta)$ ) :

$$\begin{aligned} E(t) = E_0 \left( & J_0(\beta) \exp(i\omega_0 t) \right. \\ & + \sum_{l < 0} (-1)^l J_l(\beta) \exp(i(\omega_0 + l A_f)t) \\ & \left. + \sum_{l > 0} J_l(\beta) \exp(i(\omega_0 + l A_f)t) \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Un exemple avec des valeurs typiques utilisées par la suite est illustré par la figure 4.1.a).

Même si le spectre décroît significativement pour des fréquences supérieures à  $\omega_0 + \Delta/2$  ( $l > \beta$ ) et inférieures à  $\omega_0 - \Delta/2$  ( $l < -\beta$ ), il n'est pas rigoureusement nul. Afin de donner une définition simple du paramètre de saturation moyen, nous allons supposer que la puissance est essentiellement contenue dans la gamme de fréquence  $[\omega_0 - \Delta/2; \omega_0 + \Delta/2]$ . En conséquence le nombre de bandes sera simplement  $2\beta = \frac{\Delta}{A_f}$ . Dans la mesure où  $\beta$  reste grand devant 1, on supposera qu'il ne prend que des valeurs entières. On définit ensuite la saturation moyenne par bande :

$$\boxed{s_{1b} = s_{\text{Totale}} \frac{A_f}{\Delta}} \quad (4.3)$$

L'essentiel du spectre est en fait constitué par les composantes numérotées  $l \in \mathbb{Z}$  avec  $-\beta \leq l \leq \beta$  qui correspond à la gamme  $[\omega_0 - \Delta/2; \omega_0 + \Delta/2]$ . Lors de l'interaction avec les atomes refroidis, on référencera le désaccord de chaque bande par rapport à la résonance atomique. Détaillons un peu cette définition qui dans le cas d'un spectre large n'est pas usuelle.

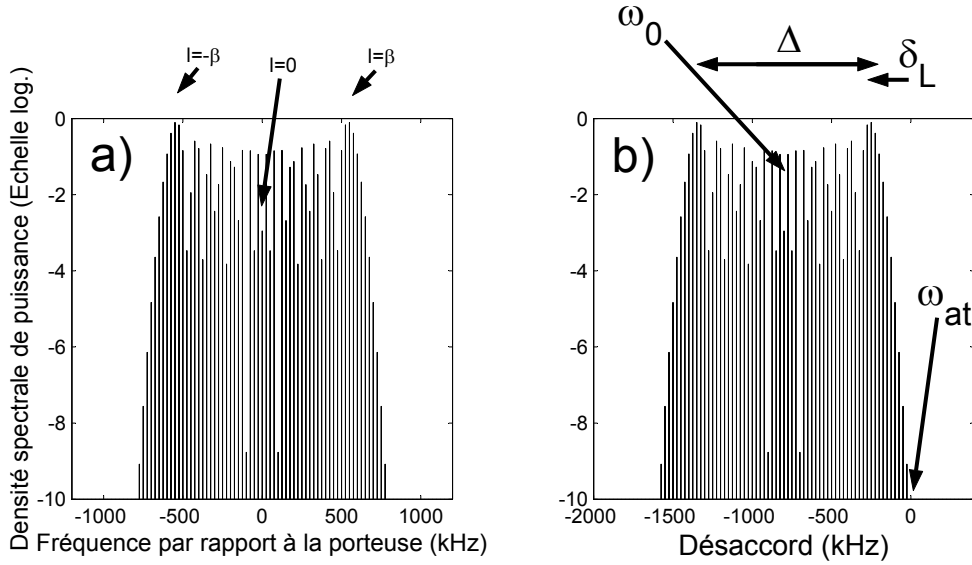


FIG. 4.1 – Spectre issu d’une modulation sinusoïdale de fréquence  $\Delta = 2\pi \times 1,2$  MHz et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz. a) : les fréquences sont référencées par rapport à la porteuse. b) : les fréquences sont référencées par rapport à la résonance atomique ( $\delta_L = -2\pi \times 200$  kHz).

### Définition du désaccord par rapport à la résonance atomique

Dans le cas d’un laser monochromatique, elle est sans équivoque. Pour un spectre de modulation, il nous faudra choisir une composante particulière comme référence. Par analogie, on pourrait la définir comme la différence entre la fréquence de la porteuse et la fréquence de résonance. Il nous semble plus judicieux de référencer le désaccord par rapport aux composantes de fréquences élevées. En effet si l’on souhaite ralentir les atomes, il faut que l’intégralité du spectre soit « décalée vers le rouge » par rapport à la résonance, y compris les composantes de fréquences élevées. Nous posons :

$$\delta_L = (\omega_0 + \Delta/2) - \omega_{at} \quad (4.4)$$

$\omega_0$  est la fréquence de la porteuse et  $\omega_{at}$  la fréquence de résonance.  $\delta_L$  est par définition le désaccord du laser par rapport à la résonance atomique. Sur la figure 4.1.b) le lecteur pourra retrouver ces définitions : nous y avons y représenté le spectre pour  $\delta_L = -2\pi \times 200$  kHz.

Le choix d’une telle définition est guidé par l’analogie avec l’approche classique du refroidissement Doppler dans laquelle le laser est désaccordé vers le rouge ( $\delta_L < 0$ ). Nous avons cependant déjà fait remarquer que le spectre n’est pas nul au delà de  $\omega_0 + \Delta/2$ ; en ce sens là, notre définition est largement discutable.



Elle sera cependant particulièrement adaptée à l'étude du regime final dans un spectre large pour lequel on peut définir l'équivalent d'une constante de raideur. Nous en ferons une étude sommaire en 4.6. Cela ne fait pourtant pas l'objet de notre étude principale : nous allons essentiellement étudier la phase de transfert, pendant laquelle la présence de « quelques » composantes du spectre désaccordées vers le bleu ne semble pas une limitation. Pour simplifier nos notations, nous avons choisi d'exprimer les éléments caractéristiques du spectre en termes de paramètres pertinents en vue de l'interaction avec les atomes. Les fréquences seront exprimées à partir du désaccord. Dans cette même approche, nous allons définir les amplitudes en utilisant la saturation de la transition.

### Saturation par bande et saturation totale

Nous avons déjà défini la saturation moyenne par bande :  $s_{1b} = s_{\text{Totale}} \frac{A_f}{\Delta}$ . Il s'agit d'une définition, qui prend tout son sens puisque l'essentiel de la puissance est contenue dans les  $\Delta/A_f$  composantes réparties autour de la porteuse ( $A_f/\Delta$  étant le nombre de bandes).

Elle suffit en fait à définir l'intensité de saturation « exacte » d'une bande numérotée  $l$  d'amplitude  $|J_l(\beta)|^2$ . Elle vaudra  $s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2 = s_{\text{Totale}} |J_l(\beta)|^2$  qui paraît évident compte tenu de la relation  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |J_l(\beta)|^2 = 1$ .

Il est maintenant possible de calculer la saturation vue par un atome à vitesse  $v$ . La bande numérotée  $l$  est désaccordée de  $\delta(l)$  par rapport à la résonance où :

$$\delta(l) = \delta(0) + l A_f = \delta_L - \Delta/2 + l A_f \quad (4.5)$$

Rappelons que le désaccord du laser est défini comme étant le désaccord de la composante de fréquence « la plus élevée » c'est à dire  $\delta_L = \delta(\beta)$ . Ainsi la saturation d'un atome par la composante  $l$  sera :

$$s(l, v) = s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2 \frac{1}{1 + 4(\delta(l) + k_r v)^2 / \Gamma_r^2} \quad (4.6)$$

Les vecteurs  $\vec{k}_r$  et  $\vec{v}$  sont ici de sens opposé.

Pour calculer la saturation totale  $\mathbb{S}(v)$  vue par un atome à vitesse  $v$ , on somme indépendamment les paramètres de saturation pour les différentes composantes :

$$\mathbb{S}(v) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(l, v) \quad (4.7)$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2 \frac{1}{1 + 4(\delta(l) + k_r v)^2 / \Gamma_r^2} \quad (4.8)$$

Il n'est pas évident que l'on puisse se permettre de sommer indépendamment les paramètres de saturation pour chaque bande. Ce type d'approximation n'est en général valide qu'à faible saturation. Nous travaillerons pourtant le plus souvent avec  $s_{1b} > 1$ . Ce n'est pourtant pas complètement rédhibitoire. Dans la mesure où  $A_f$  est bien supérieure à  $\Gamma_r$ , il est difficile de saturer l'atome « à la fois » avec deux composantes du spectre. On pourra donc dans ce cas sommer indépendamment les deux composantes. Ce ne sera pas toujours vrai en pratique, cela revient à négliger tout processus multi-chromatique de redistribution de photons entre les différents modes (longitudinaux) du laser.

Nous avons dans cette partie défini les paramètres du spectre du laser que nous retrouverons tout au long de notre analyse. Autant que possible ces paramètres sont rapportés aux éléments caractéristiques de l'interaction avec les atomes, à savoir le désaccord et la saturation.

Nous allons maintenant essayer d'estimer grossièrement les valeurs numériques caractérisant le potentiel de piégeage.

### 4.1.2 Estimation des paramètres du potentiel de piégeage

Nous avons d'ores et déjà défini quatre de ces paramètres : l'excursion  $\Delta$ , la fréquence de modulation  $A_f$ , la saturation par bande  $s_{1b}$  et le désaccord  $\delta_L$ . Plus usuel, il nous faudra estimer aussi le *waist*<sup>2</sup> des faisceaux  $w$  et le gradient du champ magnétique  $\mu_G$ . Les paramètres du piège sont en définitive au nombre de six. Nous allons tour à tour en donner une valeur numérique réaliste, ce qui nous a permis en pratique de faire les premières observations du chargement du piège rouge. Avant cela nous allons proposer une expression semi-classique de la force en régime large bande. C'est par exemple en calculant un ordre de grandeur de la force que nous pourrons estimer la taille du piège.

#### Ordre de grandeur et dépendance de la force

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'étroitesse de la transition induit des forces qui restent faibles. En supposant que l'atome soit complètement saturé, le taux de diffusion est donné par  $\Gamma_r/2$  autrement dit la force maximale que l'on peut exercer sera  $\hbar k_r \Gamma_r/2$  soit une accélération  $a_{\max} = 155 \text{ m/s}^2$ . L'accélération est certes faible mais elle reste supérieure à la gravité. Ce n'est par exemple pas le cas pour le calcium et le magnésium. Il faudra malgré tout assurer un niveau de saturation élevé. En supposant en effet qu'un atome soit en interaction avec

---

<sup>2</sup>Rappelons que le *waist*  $w$  est défini à partir de la dépendance spatiale  $\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$  de l'intensité d'un faisceau gaussien

un rayonnement monochromatique, la force exercée prend la forme habituelle :

$$\vec{F} = \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{s}{1+s} \quad \text{où } s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_L - \vec{k}_r \cdot \vec{V}_{\text{at}})^2 / \Gamma_r^2} \quad (4.9)$$

où  $I_{\text{sat}} = 3 \mu\text{W}/\text{cm}^2$  est l'intensité de saturation.

Pour  $I = I_{\text{sat}}$ ,  $\delta_L = 0$  et  $V_{\text{at}} = 1 \text{ cm/s}$  soit un « faible » décalage Doppler, on constate que l'accélération vaut  $10 \text{ m/s}^2$  et est proche de la constante de pesanteur. Notons pourtant que  $V_{\text{at}} = 1 \text{ cm/s}$  est une valeur faible à comparer à la largeur RMS de la distribution en vitesse initiale  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ . Cependant ayant  $k_r V_{\text{at}} \simeq 2\Gamma_r$ , la force devient très faible puisque l'on s'écarte notablement de la résonance. Il est donc important de recouvrir le mieux possible le profil initial des vitesses. Pour nous en persuader nous avons exprimé la force en unité de  $\hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2}$  sur la figure 4.2. Pour la calculer nous nous sommes appuyés sur l'expression de la saturation totale  $\mathbb{S}(v)$  (expr. 4.8). On peut alors supposer que le taux de diffusion de photons sera encore  $\frac{\Gamma_r}{2} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$ , d'où une expression de la force peu différente de la précédente (expr. 4.9), que l'on généralise en

$$F(v) = \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \quad (4.10)$$

$$= \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} s(l, v)}{1 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(l, v)} \quad (4.11)$$

La force exercée par l'onde se propageant dans le sens opposé est donnée par  $-F(-v)$ . Si l'on suppose pouvoir sommer les deux composantes indépendamment la force totale n'est autre que  $F(v) - F(-v)$ . Elle est représentée en fonction de  $v$  sur la figure 4.2. La largeur de la distribution en vitesse en interaction sera typiquement  $\Delta/k_r$ . Elle laisse apparaître une succession de pics espacés de  $A_f/k_r$  qui correspondent aux composantes discrètes du spectre FM.

En observant cette figure, on constate qu'il est possible de donner assez intuitivement des ordres de grandeurs réalistes pour les paramètres spectraux du potentiel de piégeage.

### Excursion en fréquence du laser

La modulation FM du laser a pour objectif d'élargir le spectre pour interagir avec tout le profil initial de vitesse (soit  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ ). C'est l'excursion en fréquence qui donne une estimation de la largeur du spectre, elle devra typiquement correspondre au décalage Doppler pour un atome de vitesse  $V_{\text{RMS}}$  : on aura typiquement  $\Delta \sim 80 \text{ cm/s} \times k_r = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$ . On voit d'ores et déjà que l'on a tout intérêt à augmenter  $\Delta$  si l'on souhaite transférer la totalité des atomes

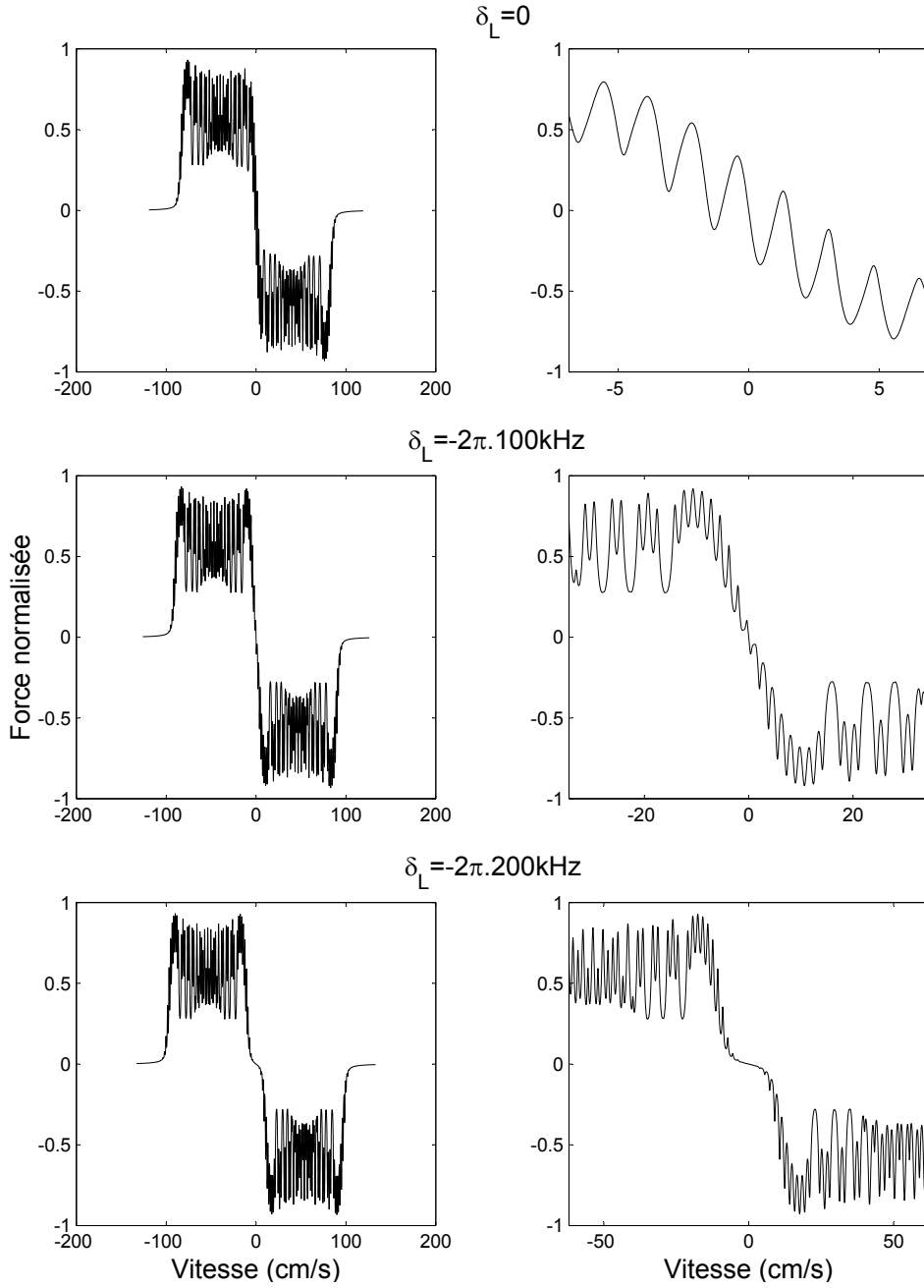


FIG. 4.2 – Force semi-classique normalisée par sa valeur maximale  $\hbar k_r \Gamma / 2$  en fonction de la vitesse. Pour des valeurs typiques de  $s_{1b}, \Delta = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$ ,  $A_f = 2\pi \times 25 \text{ kHz}$ , et différentes valeurs de  $\delta_L = 0$  pour a),  $\delta_L = -2\pi \times 100 \text{ kHz}$  pour b),  $\delta_L = -2\pi \times 200 \text{ kHz}$  pour c). a'), b') et c') sont des agrandissements de a), b) et c) respectivement, autour de l'origine.

vers le piège rouge. Cette idée intuitive n'est vraie qu'en partie, puisqu'*a priori* la saturation totale est limitée expérimentalement. Ce point sera développé en 4.4.4.

Augmenter  $\Delta$  ne suffit en effet pas à assurer une bonne efficacité de piégeage, il faut en plus saturer la transition quelle que soit la vitesse de l'atome considéré. En formulant cette condition, on peut estimer la fréquence de modulation  $A_f$  et la saturation totale.

### Fréquence de modulation et la puissance nécessaire

Le choix de l'excursion est largement imposé par la largeur initiale de la distribution des vitesses. On cherche en effet à impliquer le plus d'atomes possible. Comme on l'a vu, on peut décomposer le spectre en composantes discrètes séparées de  $A_f$ . Si l'on veut interagir avec un grand nombre d'atomes, il faut certes que  $\Delta \sim 80 \text{ cm/s} \times k_r = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$  mais il faut aussi saturer la transition sur la gamme de fréquence couverte par le laser. Si un atome est à résonance avec une composante du spectre, pour le saturer il faut typiquement  $s_{1b} \gtrsim 1$  (saturation moyenne par bande). Dans un cas moins favorable, si le décalage Doppler d'un atome le place exactement « entre deux bandes », le désaccord sera donc  $A_f/2$  par rapport aux deux composantes du spectre. On peut alors saturer la transition seulement si  $A_f \sim \Gamma_r$ .

Il faut cependant se rappeler que  $A_f$  représente aussi la fréquence de modulation du laser : en ce sens là on ne peut prendre  $A_f \ll \Gamma_r$ . Les atomes voient alors **un laser « chirpé »** et non un spectre discret. En effet pour  $A_f \ll \Gamma_r$ , l'évolution du champ est beaucoup plus lente que celle des degrés de liberté internes de l'atome ; la force est alors dépendante du temps. Plus précisément, **si  $A_f \ll \Gamma_r$ , la modulation est alors très lente : la plupart du temps (sur une période de modulation de la fréquence) les atomes sont hors de résonance** et la force est donc en moyenne très faible. Il est donc beaucoup plus raisonnable, si l'on souhaite exercer une force importante et constante, **d'assurer  $A_f \gtrsim \Gamma_r$** . Ce qui nous permet de nous éloigner du régime laser « chirpé ».

Nous venons de dégager un critère qui doit nous permettre d'assurer une saturation élevée sur tout le spectre du laser :  $s_{1b} \gtrsim 1$  avec typiquement  $A_f \gtrsim \Gamma_r$ . Cette condition nous donne la saturation totale typique :  $s_{\text{Totale}} \gtrsim \Delta/\Gamma_r = 153$  (soit  $458 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ) avec  $\Delta = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$  (la valeur fournie par la vitesse RMS de la distribution initiale p.186). La puissance minimale typique sera donc pour trois faisceaux de *waist*  $w \simeq 7 \text{ mm}$  :  $3 \times 458 \mu\text{W}/\text{cm}^2 \times \pi(0,7 \text{ cm})^2 = 2,12 \text{ mW}$ . Nous justifierons indépendamment la valeur du *waist*  $w \simeq 7 \text{ mm}$ . La puissance sera finalement typiquement de l'ordre de quelques milliwatts, valeur facilement accessible expérimentalement. Notons bien qu'il s'agit d'une estimation de la puissance minimale ; nous verrons en pratique qu'il faut assurer une saturation bien supérieure à 1. La description expérimentale du montage optique ainsi que les éléments de contrôle du spectre seront décrits dans la partie 4.3.

L'idée d'utiliser un spectre large pour impliquer une large gamme de vitesse n'est pas uniquement dédiée à l'interaction avec une transition étroite. Le problème de décélération d'atomes à partir d'un spectre large (appelé lumière blanche pour l'occasion) a déjà été étudié [110] afin de réduire avec succès la vitesse d'un jet atomique. En ce qui nous concerne, nous sommes dans le cadre d'une transition étroite ; l'idée reste cependant la même : on cherche à être en résonance avec toutes les classes de vitesse. L'inconvénient d'une telle technique est de demander une puissance plus importante afin de couvrir tout le profil des vitesses. Dans le cadre d'une transition large, on lui préfère donc la technique du ralentissement Zeeman. Dans le cas qui nous occupe, on est capable de saturer tout le spectre avec une puissance raisonnable. On peut donc interagir avec toutes les classes de vitesse en même temps, ce qui simplifiera notablement notre étude du chargement du piège rouge.

L'estimation de  $A_f$  est en définitive comme  $\Delta$  imposée par le recouvrement du spectre du laser avec le profil initial des vitesses. L'excursion  $\Delta$  définit la largeur du « peigne » de fréquence et  $A_f$  sa « densité ». Même si le choix du désaccord est plus arbitraire, il tend à répondre à la même exigence.

### Choix du désaccord

On voit sur la figure 4.2 trois représentations de la force pour des désaccords  $\delta_L$  différents. Les situations  $\delta_L = 0$  et  $\delta_L = -2\pi \times 100$  kHz (fig. 4.2.a et b) sont visiblement peu différentes. Pour des vitesses faibles (fig. 4.2.a' et b'), les deux spectres se recouvrent certes mais la force totale est nulle car les deux forces se compensent. La situation  $\delta_L = -2\pi \times 200$  kHz est un peu différente car proche de la vitesse nulle, les deux forces sont quasi-nulles (et la force totale aussi par conséquent). De façon générale, on peut toujours linéariser la force autour de l'origine et exhiber un coefficient de friction (force en  $-\gamma v$ ). Cela reste grossièrement vrai même si  $\delta_L > 0$  (fig. 4.3). Les atomes seront donc ralentis même si quelques composantes du spectre se trouvent désaccordées vers le bleu.

On conçoit bien que cela change peu la dynamique du chargement, mais influence grandement le régime final lorsqu'interagissent les deux ondes contre-propagatives. Nous cherchons pour l'instant à étudier l'influence des paramètres du spectre sur le taux de transfert uniquement.

Il semble délicat de donner *a priori* une estimation du désaccord optimal, alors que nous avons fourni par des calculs simples les autres paramètres du spectre. Afin de faire une étude expérimentale systématique, nous avons choisi de garder  $\delta_L = 0$ . D'une part, même si cette valeur remarquable ne donne pas forcément l'optimum du taux de transfert, elle a l'avantage d'être caractéristique et indépendante des autres paramètres du spectre  $\Delta$  ou  $A_f$ . D'autre part à partir de la figure 4.2, on peut quand même justifier son ordre de grandeur. En effet, si l'on souhaite couvrir le profil initial des vitesses, il n'est pas raisonnable de laisser un « trou » autour de la vitesse nulle comme on le voit pour  $\delta_L = -2\pi \times 200$  kHz.

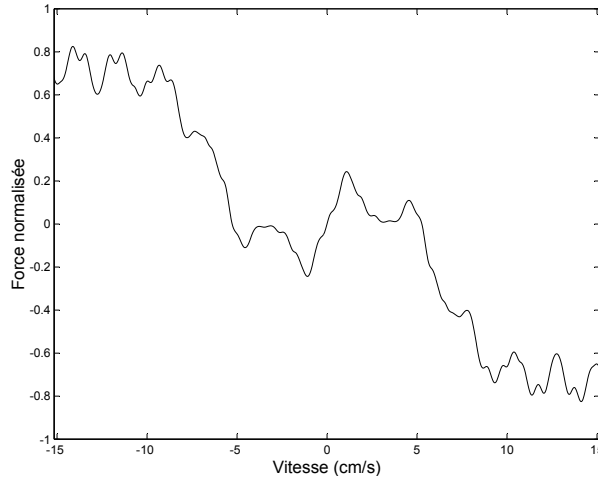


FIG. 4.3 – Exemple de « friction » pour une valeur positive du désaccord  $\delta_L = +2\pi \times 50$  kHz. Même si la force n'exhibe pas une plage simplement linéaire, cela suffira à introduire la dissipation qui assure le piégeage ( $s_{1b} = 5$ ,  $\Delta = 2\pi \times 1,16$  MHz,  $A_f = 2\pi \times 10$  kHz).

Plus généralement il faudra que  $|\delta_L| \ll \Delta$ . Ne pouvant justifier *a priori* une borne inférieure pour  $|\delta_L|$ , nous prendrons donc **la valeur remarquable  $\delta_L = 0$  tout au long de notre étude.**

Nous avons pour le moment étudié les paramètres spectraux du potentiel de piégeage. Il nous faut aussi étudier sa taille spatiale imposée par le *waist* des faisceaux (par analogie avec  $\Delta$  qui représente sa taille spectrale).

### Diamètre des faisceaux

Afin de faire une estimation rapide, supposons qu'un atome soit complètement saturé et qu'il subisse une accélération constante, sa vitesse initiale typique étant 80 cm/s. Nous allons regarder la distance typique que peut parcourir cet atome dans une mélasse à trois dimensions. Il nous faut d'ores et déjà tenir compte de cette dimensionnalité : en effet si les faisceaux saturent l'atome dans les trois directions, cela réduit significativement la force. On va supposer pour l'instant que la force à trois dimensions n'est que le tiers de la force à une dimension. L'accélération vaudra donc  $a_{\max}^{1D} = 52$  m/s<sup>2</sup>, on choisira pour les faisceaux un *waist* (noté  $w$ ) égal à la distance qu'il faut pour arrêter un atome ayant une vitesse initiale de  $V_{\text{RMS}} = 80$  cm/s. On imposera donc :

$$w = \frac{1}{2} \frac{V_{\text{RMS}}^2}{a_{\max}^{1D}} = 6,4 \text{ mm} \quad (4.12)$$

Des faisceaux plus petits réduiront de façon drastique le taux de transfert ; à l'inverse assurer un *waist* de 6,4 mm n'implique pas forcément une efficacité importante du transfert. Il faut en plus saturer la transition comme on l'a déjà vu. Un *waist* « trop grand » imposerait une intensité trop faible pour avoir typiquement  $s_{1b} \gtrsim 1$ . Ce problème a été abordé lors du calcul de la puissance nécessaire qui dépend directement du *waist*.

Nous verrons dans la partie 4.4.4 qu'il est possible de calculer un jeu de paramètres qui optimise le taux de transfert à une puissance du laser donnée. Avant cela, nous étudierons la dépendance expérimentale du taux de transfert avec les paramètres du spectre. Il n'est pas facile de faire varier continûment le *waist* des faisceaux sans changer leur alignement ; nous allons donc fixer cette taille à la valeur fournie par notre estimation : nous fixons pour la suite  $w \simeq 7$  mm et nous garderons  $\delta_L = 0$  comme indiqué plus haut. Il est en revanche plus confortable de changer les autres paramètres du spectre ( $\Delta$ ,  $A_f$  et  $s_{1b}$ ) ainsi que la gradient du champ magnétique et d'étudier alors le taux de transfert. Nous n'avons pour le moment pas discuté du champ magnétique, qui est en pratique un élément crucial du transfert vers le piège rouge. Il est cependant possible d'en trouver dès maintenant un ordre de grandeur.

### Gradient du champ magnétique

La présence d'un champ magnétique quadrupolaire introduit une force de rappel qui permet de piéger les atomes. Dans le cadre de la théorie Doppler, la valeur du gradient influence largement la taille finale du piège. En ce qui nous concerne, nous cherchons dans un premier temps à optimiser la plage de capture. Nous pouvons faire une estimation du gradient du champ comme nous l'avons fait plus haut pour le *waist* des faisceaux.

Nous avons alors calculé la distance d'arrêt d'un atome lancé à  $V_{\text{RMS}} = 80$  cm/s et décéléré à  $a_{\text{max}}^{1D} = 52$  m/s<sup>2</sup>. Cela nous a permis de fixer le *waist*  $w = 6,4$  mm (expr. 4.12). L'atome se trouve alors à vitesse nulle au bord des faisceaux. Il s'agit d'une condition nécessaire pour espérer ramener ensuite l'atome vers le centre (afin de le capturer). Par ailleurs, il doit aussi rester à résonance avec une des bandes du spectre FM pendant cette phase de décélération. Cette dernière remarque, nous permet d'estimer la valeur du gradient du champ magnétique : Le décalage Zeeman pour un atome s'étant arrêté à la position  $\frac{1}{2} \frac{V_{\text{at}}^2}{a_{\text{max}}^{1D}}$  doit être inférieur à l'excursion en fréquence  $\Delta$ . L'atome étant à vitesse nulle son décalage Doppler est alors nul. Numériquement, le décalage Zeeman vaut 2,1 MHz/G (le facteur de Landé vaut 1,5 pour l'état  $^3P_1$ ). Si l'on note  $\mu_F$  le gradient de champ magnétique exprimé en MHz/cm, une estimation est donnée par :

$$\mu_F \times (0,64 \text{ cm}) \simeq \Delta = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$$

Une valeur typique de  $\mu_F$  sera donc  $2\pi \times 1,81$  MHz/cm soit un gradient magnétique



de  $\mu_G \simeq 0,91$  G/cm.

En pratique, nous avons utilisé des excursions plus importantes pour augmenter le taux de transfert ( $\Delta \sim 2\pi \times 2$  MHz), en conséquence le gradient utilisé sera aussi plus grand :  $\mu_G \gtrsim 1$  G/cm.

Nous venons de montrer qu'il était possible d'estimer simplement les six paramètres de contrôle du potentiel de piégeage.

### Récapitulatif

Nous allons résumer dans un tableau l'ensemble des valeurs dont nous avons fourni une estimation (colonne « Estimations ») à comparer aux valeurs expérimentales qui optimisent le taux de transfert (colonne « Valeurs à l'optimum », que nous présenterons en 4.3.2). Nous rappellerons aussi les paramètres qui nous ont permis de faire notre calcul d'ordre de grandeur (colonne « imposée par... »).

Paramètres	Estimations	imposées par...	Valeurs à l'optimum
$\Delta$	$2\pi \times 1,16$ MHz	$V_{\text{RMS}}$	$2\pi \times 2$ MHz
$\delta_L$	0	$\ll \Delta$	$-2\pi \times 200$ kHz
$A_f$	$2\pi \times 7,6$ kHz	$\Gamma_r$	$2\pi \times 25$ kHz
$s_{1b}$	1	$I_{\text{sat}}$	7,5
$w$	6,4 mm	$a_{\text{max}}^{1D}$ et $V_{\text{RMS}}$	7,3 mm
$\mu_G$	0,91 G/cm	$w$ et $\Delta$	1,4 G/cm

On constate globalement que nos estimations sont correctes et réalistes. Elles nous ont permis d'ajuster grossièrement les paramètres du potentiel de piégeage et sont parfois très proches des valeurs qui optimisent le chargement du piège. En balayant les quatre paramètres que nous avons laissés libres ( $\Delta$ ,  $A_f$ ,  $s_{1b}$  et  $\mu_G$ ), nous avons mené une étude systématique du transfert vers le piège rouge. Avant d'en présenter les résultats expérimentaux, nous allons tenter de clarifier l'influence différente des paramètres du potentiel de piégeage.

## 4.2 Deux régimes de limitations du chargement

Même si nous avons choisi de garder fixe quatre des six paramètres, il n'est pas évident de connaître l'influence de chacun sur le chargement du piège et en conséquence de prédire le comportement expérimental. À partir de considérations

générales sur la plage de capture en position et en vitesse, nous allons dans cette partie dégager l'influence des paramètres de contrôle. Nous allons donc déterminer les limites du piège dans l'espace des phases (plage de capture en position et en vitesse). L'étude des trajectoires n'est pas l'objet de cette partie. Les étudier dans le cas  $\delta_L < 0$  est un point intéressant notamment en fonction du gradient du champ  $\mu_G$  ; nous garderons cependant  $\delta_L = 0$  quelles que soient les valeurs des autres paramètres.

Nous verrons finalement qu'on peut regrouper les paramètres en deux catégories :

- $A_f$  et  $s_{1b}$  **qui déterminent les trajectoires dans l'espace des phases ;**
- $w$ ,  $\Delta$  et  $\mu_G$  **qui forment les limites du piège dans l'espace des phases.**

Après cette distinction, nous nous pencherons sur  $w$ ,  $\Delta$  et  $\mu_G$  afin de dégager deux régimes de chargement possibles. Cette distinction est une notion-clé que nous retrouverons tout au long de notre étude.

### 4.2.1 Présentation des deux régimes possibles

Afin de détailler cette distinction, nous allons nous intéresser tour à tour aux plages de capture spatiale et en vitesse.

#### Limitation du chargement par le *waist* des faisceaux

Supposons que le *waist*  $w$  des faisceaux représente un bord net pour le piège. Suivant un axe, un atome dont la position par rapport au centre du piège est plus grande que  $w$  sera perdu, soit :

$$\boxed{|x| > w} \quad (4.13)$$

Nous dirons dans ce cas, que le transfert est « limité par le *waist* » des faisceaux. Il s'agit d'une notion simple que l'on retrouve dans le problème plus classique d'un chargement d'un piège magnéto-optique à partir d'une vapeur atomique. Concernant la plage de capture en vitesse, il nous faut aller un peu plus dans le détail.

#### Limitation du chargement par l'excursion du laser

Supposons pour le moment que le gradient du champ magnétique soit nul. Le piège est donc simplement une mélasse optique. Dans le cas où  $\delta_L$  est petit ou tout au moins tant que  $\delta_L \ll \Delta$ , en observant la figure 4.2.a) p.187, on constate par exemple qu'un atome à vitesse  $-100$  cm/s sera *a priori* perdu car la force de

rappel est quasi-nulle. En effet, en supposant cette fois que  $\Delta$  représente un bord net dans l'espace des vitesses : si  $|k_r v| > \Delta$  alors l'atome sera perdu.

On peut généraliser cette condition au cas d'un piège magnéto-optique avec  $\mu_G \neq 0$  : si la somme des décalages Doppler et Zeeman (notée  $\delta_{\text{at}}(x, v)$ ) est plus grande que  $\Delta$ , il sera perdu.

$$\boxed{\delta_{\text{at}}(x, v) = k_r v + \mu_F x} \quad (4.14)$$

La condition de perte s'écrit :

$$\boxed{|k_r v + \mu_F x| > \Delta} \quad (4.15)$$

Les deux conditions 4.13 et 4.15 seront au cœur de notre analyse et ont largement orienté les différentes mesures expérimentales que nous avons faites. Il peut apparaître décevant d'avoir fixé définitivement le *waist* des faisceaux car on aurait pu, en le faisant varier, étudier plus spécialement le chargement dans le régime « limité par le *waist* ». Nous allons cependant voir qu'il est possible de le mettre en évidence en faisant varier  $\Delta$  et/ou  $\mu_G$ . Nous allons pour cela raisonner à partir des trajectoires dans l'espace des phases.

## 4.2.2 Limites du piège dans l'espace des phases

Regardons maintenant comment l'on peut représenter les limites du piège dans l'espace des phases  $(x, v)$ . La limite  $|x| > w$  donne deux droites verticales, leurs abscisses sont  $\pm w$ . La limite  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  est représentée par deux droites d'ordonnée à l'origine  $\pm \Delta/k_r$  et de pente  $-\mu_F/k_r$ .

Nous avons représenté dans l'espace des phases (fig. 4.5 et 4.4), les deux limites 4.13 et 4.15. Nous avons fait varier respectivement  $\Delta$  (fig. 4.5) et  $\mu_G$  (fig. 4.4).

Les deux figures 4.5 et 4.4 représentent uniquement les limites de l'espace des phases. On n'y a pas fait apparaître de trajectoires qui dépendront de la force appliquée. On peut malgré tout donner une estimation qualitative de l'efficacité du chargement.

Supposons d'abord que le potentiel de piégeage soit seulement une mélasse optique ( $\mu_G = 0$ ). Les atomes viennent s'arrêter dans la zone d'interaction avec les faisceaux. On les trouve donc à vitesse nulle dans la zone  $|x| < w$ . Nous les avons représentés par des ronds sur l'axe  $v = 0$  de l'espace des phases. Nous allons maintenant reprendre le raisonnement de la page 191 qui nous avait permis d'estimer  $\mu_G$ .

### Limites du piège pour différentes valeurs de $\mu_G$

En effet partant d'une situation hypothétique où les atomes sont au repos dans une mélasse optique, on va augmenter  $\mu_G$ . Les atomes immobiles sont supposés

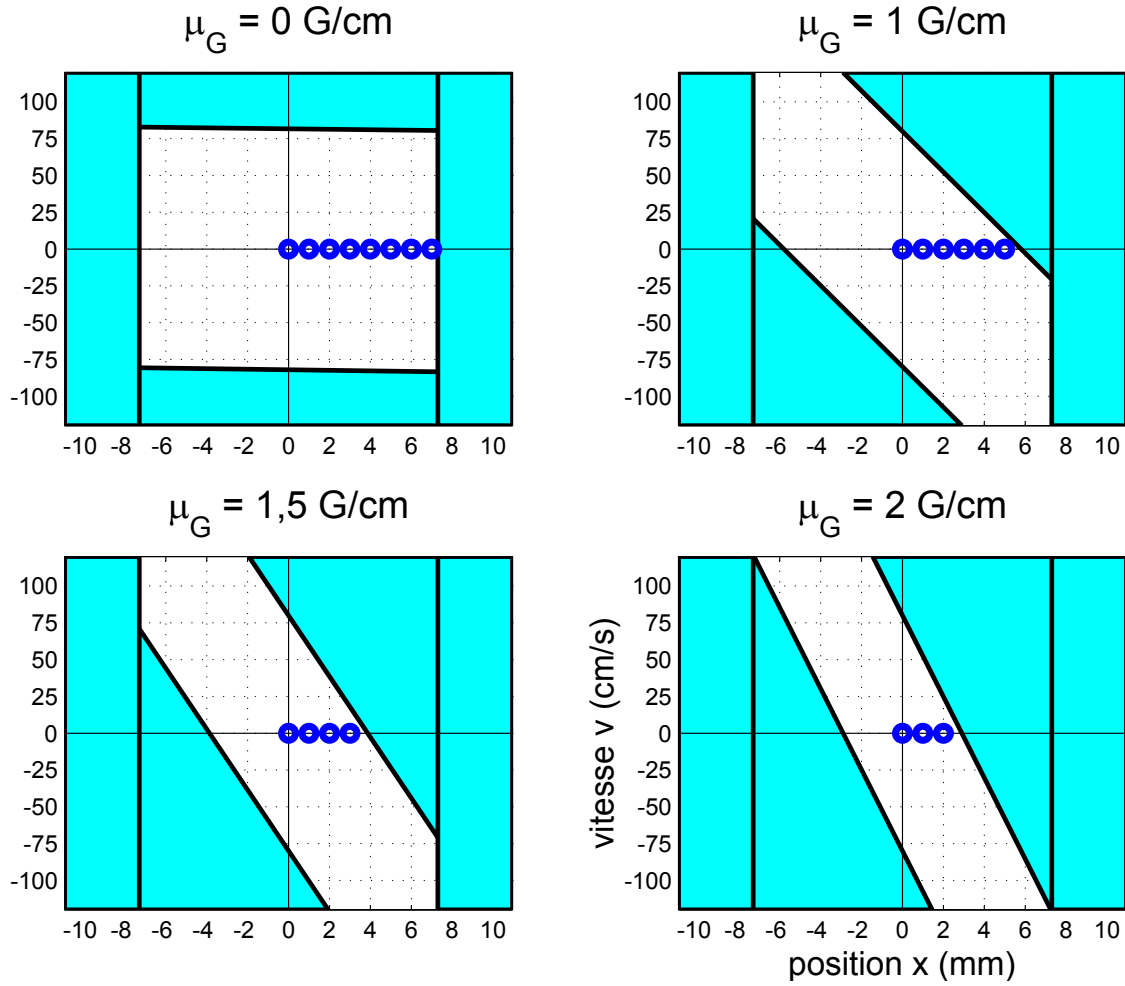


FIG. 4.4 – Limites du piège dans l'espace des phases pour différentes valeurs de  $\mu_G$ . ( $\Delta = 2\pi \times 1,16$  MHz et  $w = 7,3$  mm)

répartis sur l'axe  $v = 0$  de l'espace des phases (fig. 4.6). On déplace alors les droites  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  et l'on vient tronquer l'espace des phases. Les atomes ne sont plus en interaction avec le laser et quittent le piège. Sur la figure 4.6, nous avons tracé le nombre d'atomes restants dans le piège quand on augmente  $\mu_G$ .

Il s'agit d'une situation hypothétique puisque les atomes ne sont pas initialement répartis dans une mélasse. Le chargement s'effectue à  $\mu_G \neq 0$ . En réalité ce n'est pas l'espace des phases que l'on vient tronquer mais les trajectoires des atomes que l'on vient couper avec les droites  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$ . Ce raisonnement à l'avantage d'être simple. Il nous avait permis d'une part d'estimer correctement  $\mu_G$  (p. 191) et nous permet d'autre part de donner une estimation qualitative de l'efficacité du chargement.

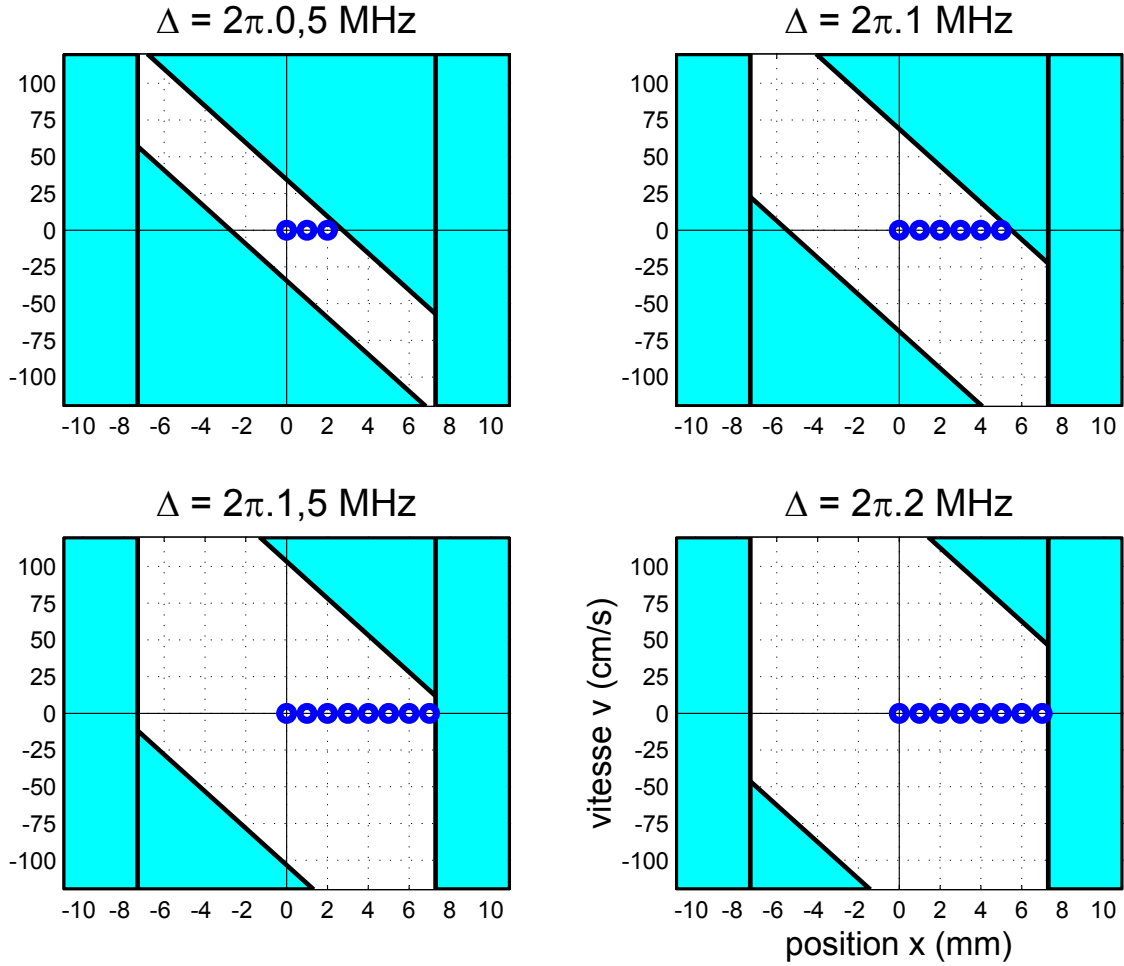


FIG. 4.5 – Limites du piège dans l'espace des phases pour différentes valeurs de  $\Delta$ . ( $\mu_G = 0,91$  G/cm et  $w = 7,3$  mm)

En analysant la figure 4.6, on distingue bien les deux régimes de chargement. À gradient faible, l'espace des phases est limité par le *waist*. Quand  $\mu_G$  augmente on vient tronquer petit à petit l'espace des phases et l'efficacité du chargement doit donc diminuer. En faisant varier  $\Delta$ , il est aussi possible de dégager qualitativement ce même type de dépendance.

### Limites du piège pour différentes valeurs de $\Delta$

En partant à nouveau d'une situation hypothétique où les atomes sont placés le long de l'axe  $v = 0$  (fig. 4.7), nous allons diminuer  $\Delta$ . La droite  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  vient couper les trajectoires des atomes dans l'espace des phases. Ces atomes-là sont perdus et quittent le piège. De façon analogue à la figure 4.6 nous avons

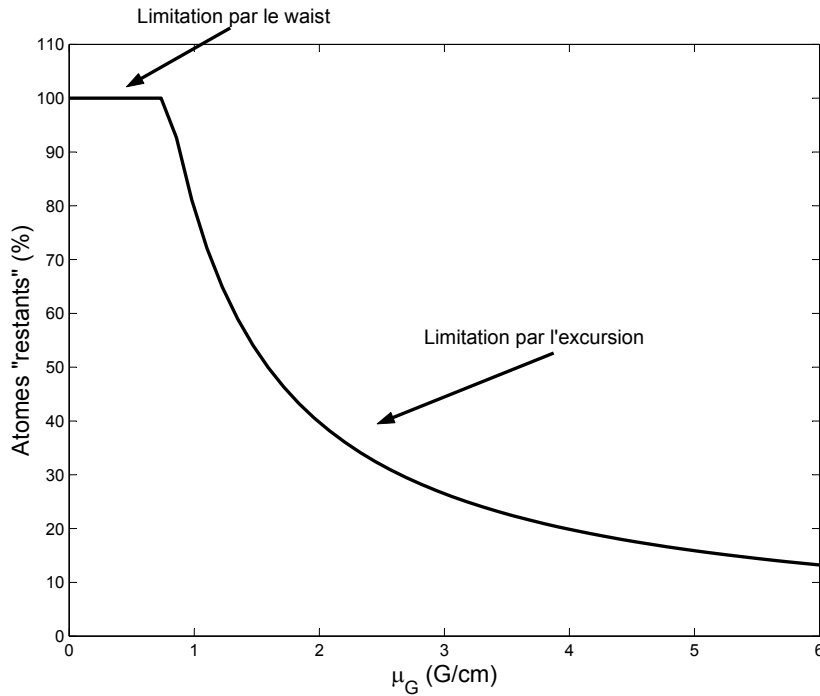


FIG. 4.6 – En partant d’une situation hypothétique où les atomes (100% au total) sont uniformément répartis dans une mélasse optique. On observe le nombre d’atomes restants lorsque  $\mu_G$  augmente.

représenté le nombre d’atomes restant dans le piège.

On constate à nouveau la distinction entre les deux régimes de chargement. Lorsque l’excursion est grande, on sera dans le régime « limité par le *waist* », ce qui apparaît plutôt intuitif. À l’inverse, lorsque l’on fait décroître  $\Delta$ , on passe dans le régime « limité par l’excursion ».

## Conclusion

Dans cette partie nous avons dégagé les différentes influences des paramètres du piégeage. En l’étudiant dans l’espace des phases, on constate qu’il est borné par les deux conditions  $|x| > w$  et  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  qui dépendent donc de  $w$ ,  $\Delta$  et  $\mu_G$ . En revanche  $A_f$  et  $s_{1b}$  agiront directement sur les trajectoires dans l’espace des phases.

Un étude quantitative de l’efficacité du chargement en fonction de  $\Delta$  et  $\mu_G$  devrait nous permettre d’observer les deux régimes de chargement du piège. On confirmera ainsi le raisonnement qualitatif qui nous a permis de tracer les figures 4.7 et 4.6.

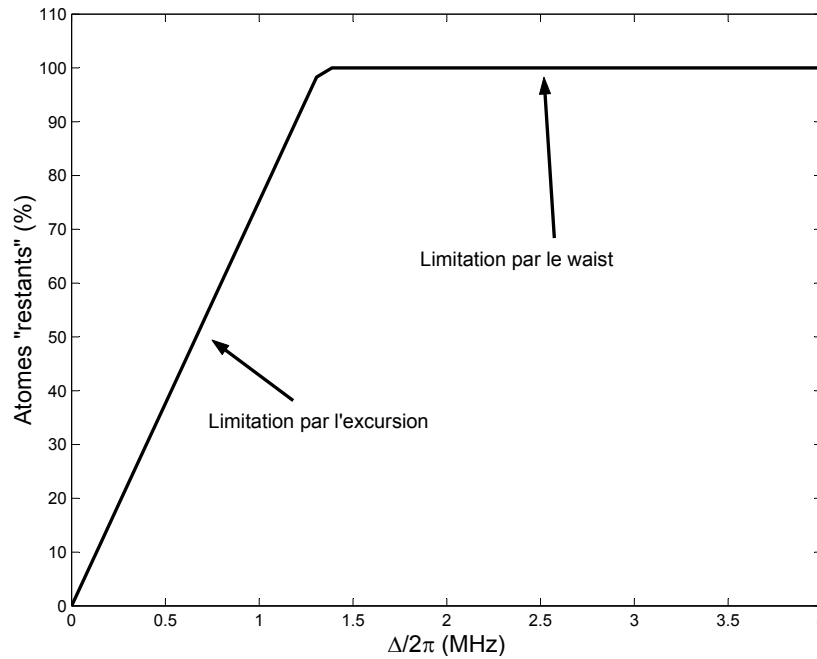


FIG. 4.7 – On observe le nombre d’atomes restants lorsque  $\Delta$  augmente.

## 4.3 Réalisation expérimentale

Avant de présenter les résultats expérimentaux du chargement du piège, ce qui consiste à mesurer le taux de transfert du piège bleu vers le piège rouge, nous allons décrire le dispositif expérimental.

### 4.3.1 Description générale du piège magnéto-optique

La partie optique du dispositif est tout à fait comparable à celle d’un piège magnéto-optique « standard ». Nous en ferons donc une description sommaire. Nous discuterons ensuite de la compensation du champ magnétique.

Nous avons déjà décrit le spectre attendu du laser qui constitue l’originalité du piège rouge. À partir de mesures par hétérodynage, **nous n’avons vu aucune différence significative entre le spectre FM calculé et le spectre expérimental** (figure 4.8).

Nous pouvons considéré qu’il est bien décrit par l’étude 4.1.1, qui suffit donc à sa caractérisation. Nous détaillerons malgré tout la production du spectre FM d’un point de vue technique, ce qui fut un élément important lors de la prise de données.

Nous concluons en présentant la séquence de temps qui nous a permis de transférer les atomes vers le piège rouge et de mesurer le taux de transfert. Nous terminerons par les mesures expérimentales.

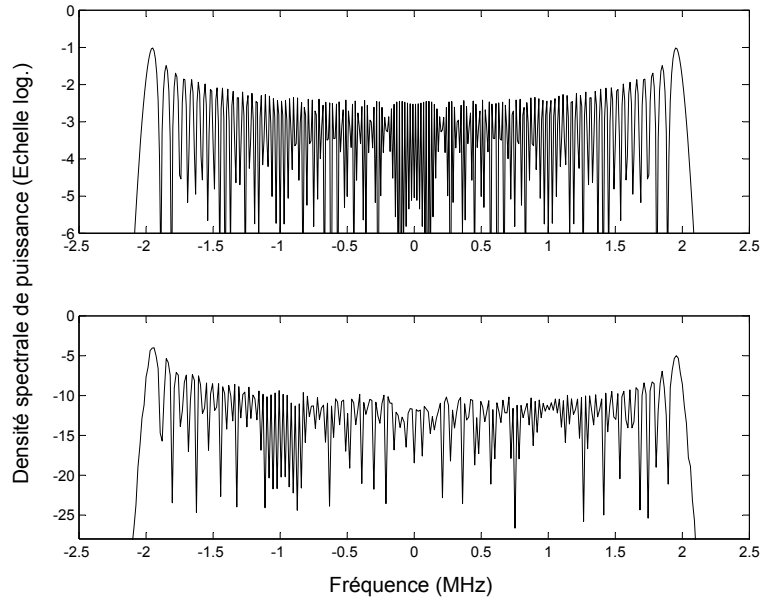


FIG. 4.8 – Comparaison des spectres calculé (expr. 4.2) et mesuré par battement pour des valeurs typiques des paramètres du laser. Le spectre mesuré est convolué par la résolution de l’appareil (1 kHz).

### Les faisceaux du piège

Ils sont produits à partir de l’injection de notre laser stabilisé (décrit en 3.4) dans un laser esclave. La puissance délivrée dans le mode du laser maître est typiquement de 12 mW. Le contrôle de la fréquence et de la puissance des faisceaux du piège se fait grâce à un modulateur acousto-optique en double-passage (noté comme précédemment  $MAO_{Exp}$ ). Le faisceau possède alors un *waist* de 1,9 mm, il est séparé en trois bras de puissance égale (1,59 mW). Avant d’arriver vers la cellule, les trois faisceaux sont agrandis ( $\times 3,8$ ) et ont alors un *waist* de 7,3 mm pour former le piège rouge. La saturation  $s_{Totale}$  **au centre de chaque faisceau** est donc de 633 soit un flux de  $1900 \mu W/cm^2$ . Pour obtenir une mélasse optique, on rétro-réfléchit chaque faisceau. La figure 4.9 résume la configuration du montage.

Il n’est pas évident d’effectuer ensuite l’alignement des faisceaux rouges sur le nuage. En effet, la force exercée par le laser rouge est négligeable par rapport aux forces en jeu pendant la piégeage sur la transition bleue. Il est donc difficile de voir un effet mécanique, le laser rouge n’est cependant pas complètement sans influence.

### Alignement des faisceaux du piège

Un signal fiable qui va nous permettre d’aligner les faisceaux rouges consiste à observer la fluorescence du nuage dans le piège bleu (« allumé » en continu).



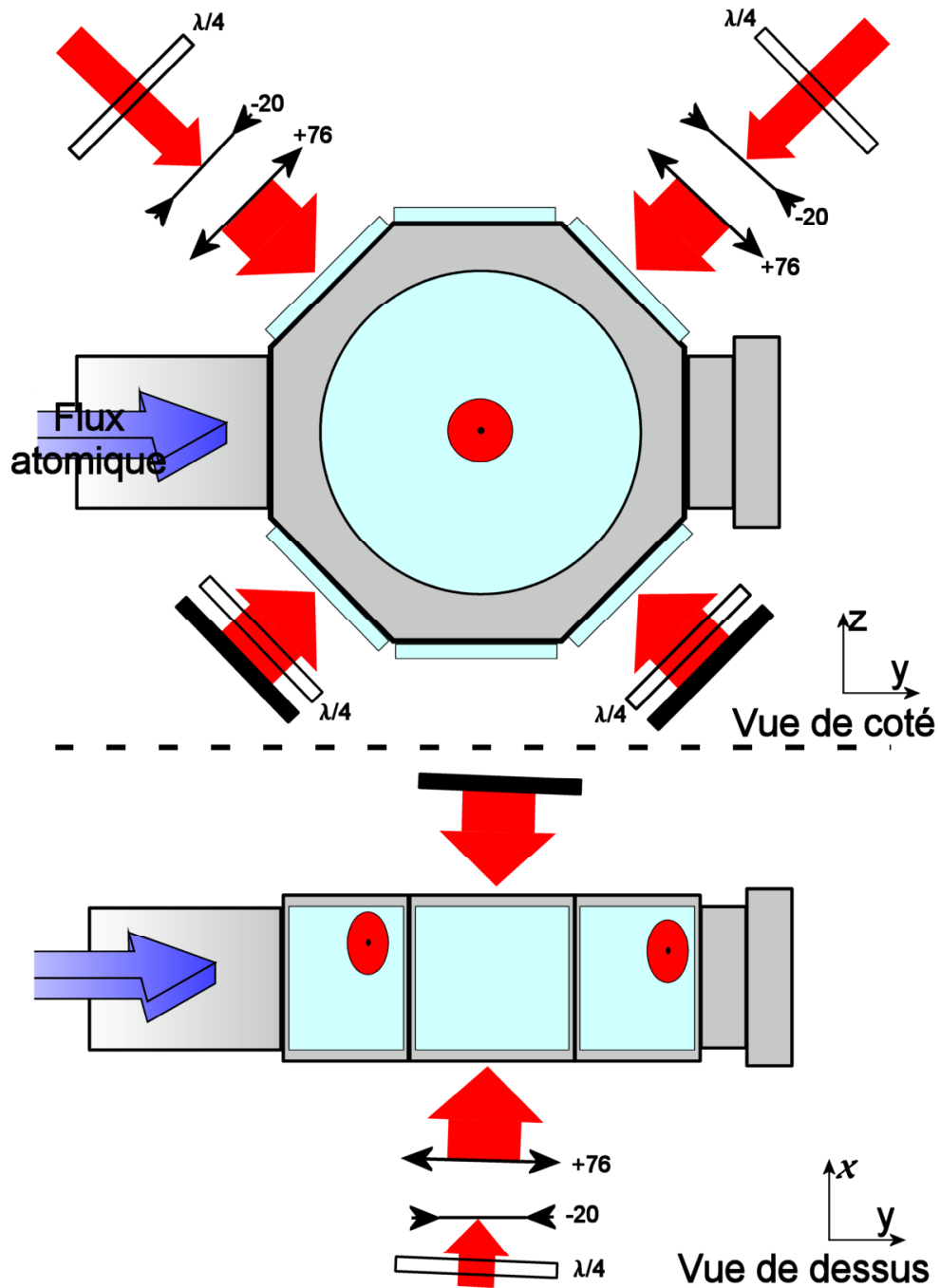


FIG. 4.9 – Vue générale du piège rouge. Chaque faisceau est rétro-réfléchi pour former une mélasse optique. Les faisceaux sont légèrement inclinés par rapport aux axes de symétrie de la cellule afin de partager l'accès optique avec le piège bleu.

Elle est directement proportionnelle à la population d'atome dans l'état  $^1P_1$ . Lorsque l'on envoie un faisceau rouge à résonance sur le piège bleu, on observe une diminution de la fluorescence sur la transition bleue. On a en partie peuplé l'état  $^3P_1$ . Sans faire une étude quantitative du phénomène, notons qu'il est significatif (quelques %) pour des intensités de saturation de l'ordre de 1000 pour la transition à 689 nm (avec un spectre monochromatique).

Pour effectuer l'alignement, on diaphragme le diamètre des faisceaux jusqu'à 1 mm. On optimise l'alignement des trois faisceaux rouges indépendamment en observant la fluorescence sur la transition bleue (qui est minimale quand les faisceaux croisent le centre du nuage). On peut conclure que la mélasse optique rouge est centrée sur le nuage d'atomes froids à mieux que 1 mm près. Pour assurer que le nuage soit positionné au centre du piège rouge, il faut aussi contrôler la valeur du champ magnétique.

### Position du piège et compensation du champ magnétique

Nous avons rapidement estimé le gradient du champ magnétique :  $\mu_G \simeq 0,91$  G/cm. Remarquons que notre estimation étant de deux ordres de grandeur inférieure au gradient du piège bleu, le positionnement du piège rouge est donc beaucoup plus sensible à un champ magnétique résiduel. Afin de compenser la présence d'un champ uniforme, nous avons installé trois paires de bobines (en configuration Helmholtz) orientées dans trois directions orthogonales de l'espace. La position du piège rouge est largement dépendante de la valeur du courant dans ces bobines. Afin d'optimiser le transfert d'un piège à l'autre, nous avons superposé le piège rouge avec le nuage initial en utilisant les bobines de compensation. Cette procédure n'est *a priori* pas équivalente à la compensation d'un champ résiduel. Elle peut permettre de compenser un déséquilibre d'intensité des faisceaux de piégeage. Nous cherchons simplement à optimiser dans un premier temps le transfert. Cette procédure, nous a permis de superposer les centres des pièges bleu et rouge. **On ne peut en revanche pas assurer que le champ magnétique soit rigoureusement nul.**

### Contrôle du spectre du laser

La réalisation pratique du spectre est rendu très confortable par l'utilisation d'un synthétiseur<sup>3</sup> radio-fréquence (RF) qui pilote le modulateur acousto-optique MAO<sub>Exp</sub>. On impose directement et indépendamment l'excursion  $\Delta$  et la fréquence de modulation  $A_f$ . Dans la gamme de fréquence porteuse utilisée, l'excursion est limitée par l'appareil à  $2\pi \times 5$  MHz et la fréquence de modulation à 500 kHz, ce qui est pour nous suffisant. La saturation totale dépendra de la puissance RF fournie au modulateur.

---

<sup>3</sup>Rohde-Schwarz SMY01

Afin de pouvoir régler rapidement les paramètres du spectre, nous avons mesuré la réponse du modulateur (figure 4.10).

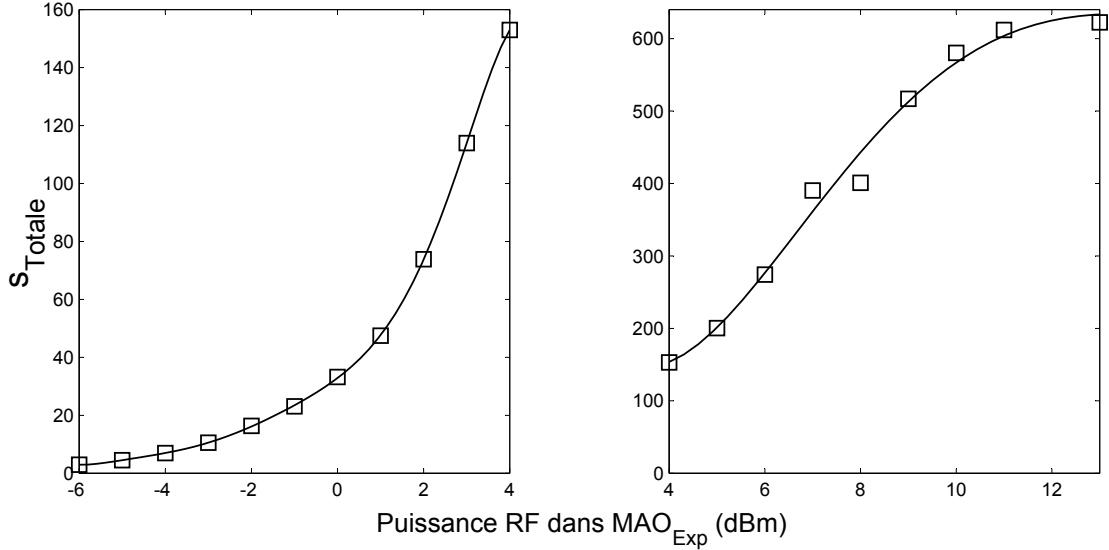


FIG. 4.10 – Contrôle de la saturation du faisceau par un ajustement polynomial de la réponse du  $\text{MAO}_{\text{exp}}$ . Nous avons séparé la réponse en deux gammes : de  $-6$  à  $4$  dBm soit une saturation de  $3$  à  $153$  et de  $4$  à  $13$  dBm soit une saturation de  $153$  à  $633$ . Les carrés représentent les mesures d'intensité **au centre** du faisceau exprimées en unité de saturation. La courbe pleine est un ajustement polynomial des mesures. La gamme RF utilisée étant restreinte à quelques kilohertz, nous n'attendons pas de changement significatif de la réponse du MAO en fonction de la fréquence porteuse.

Pour un jeu de paramètre donné  $(\Delta, A_f, s_{1b})$ , on déduit la saturation totale à imposer sachant  $s_{\text{Totale}} = s_{1b} \frac{\Delta}{A_f}$ . L'ajustement polynomial nous permet de calculer numériquement la puissance RF correspondante. En utilisant les relations suivantes pour les deux gammes de puissance RF correspondant à la figure 4.10 :

$$\begin{aligned}
 s_{\text{Totale}} = 633 \cdot 10^{-2} \times & \left( -9,7 \cdot 10^{-5} P^7 - 1,2 \cdot 10^{-3} P^6 - 2,7 \cdot 10^{-3} P^5 \right. \\
 & + 2,4 \cdot 10^{-2} P^4 + 1,4 \cdot 10^{-1} P^3 + 4,0 \cdot 10^{-1} P^2 \\
 & \left. + 1,86 \cdot P + 5,2 \right) \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

pour  $P$  de  $-6$  à  $4$  dBm.

$$\begin{aligned}
 s_{\text{Totale}} = 633 \times & \left( -9,3 \cdot 10^{-6} P^5 + 6,3 \cdot 10^{-4} P^4 - 1,6 \cdot 10^{-2} P^3 \right. \\
 & \left. + 1,7 \cdot 10^{-1} P^2 - 7,5 \cdot 10^{-1} \cdot P + 1,3 \right) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

pour  $P$  de  $4$  à  $13$  dBm.

On envoie ensuite la valeur calculée de la puissance RF, l'excursion et la fréquence de modulation au synthétiseur au moyen d'une connexion GPIB. Une telle procédure nous sera d'un grand confort d'utilisation et réduira notablement le temps d'acquisition des courbes expérimentales. Mais revenons à la problématique du chargement du piège rouge ou plus exactement au transfert du nuage vers le piège rouge. Si l'on veut étudier le transfert, il nous faut avant tout avoir une idée des échelles de temps caractéristiques.

### Séquence temporelle

Une façon simple de résumer la problématique du transfert consiste à le séparer en deux étapes distinctes. D'abord le nuage explose sous l'effet de sa température, la mélasse rouge devra ralentir cette expansion. Finalement les atomes encore présents dans la zone des faisceaux seront rassemblés au centre du piège rouge. Examinons les deux échelles temporelles associées à chaque étape. Même si l'on ne connaît pas le temps qu'il faut pour atteindre l'état stationnaire dans la mélasse rouge, on peut calculer :

- l'échelle temporelle typique de l'explosion du nuage qui est donnée par le temps que met un atome (à vitesse  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ ) pour sortir des faisceaux rouges (taille  $w = 7,3 \text{ mm}$ ). On a simplement :

$$\frac{w}{V_{\text{RMS}}} \simeq \mathbf{9} \text{ ms} \quad (4.18)$$

- le temps qu'il faut pour arrêter un atome dans la mélasse rouge (décéléré à  $a_{\text{max}}^{1D}$ ). De manière tout à fait analogue au calcul 4.12, on trouve :

$$\frac{V_{\text{RMS}}}{a_{\text{max}}^{1D}} \simeq \mathbf{15} \text{ ms} \quad (4.19)$$

Le temps qu'il faut pour atteindre l'état stationnaire est donc supérieur à 15 ms. Les atomes trop rapides pour être capturés auront déjà quitté la zone d'interaction avec la mélasse rouge. Ne sachant pas *a priori* le temps typique de chargement, nous avons choisi de faire une observation directe du transfert dans le piège. En observant l'évolution du nuage (fig. 4.11) dans le piège, on peut déterminer un temps caractéristique.

Pour réaliser cette série d'observation, on a utilisé en fait la séquence de temps qui sera présentée dans la partie suivante. On vient illuminer avec les faisceaux de la mélasse bleue les atomes présents au centre du piège au bout de 10, 20, 30, ..., 130 et 140 ms d'interaction avec les faisceaux rouges. On réalise ainsi une série d'images (fig. 4.11).

On y voit qu'effectivement le nuage explose dans un premier temps (quelques ms). Ensuite les atomes sont ramenés au centre par la force de rappel.

Sur la figure 4.12, nous avons tracé l'évolution de la largeur du nuage au cours du chargement (fig. 4.11). On constate que 100 ms est l'échelle de temps caractéristique du chargement. On ne voit pas clairement la courbe 4.12 s'infléchir vers

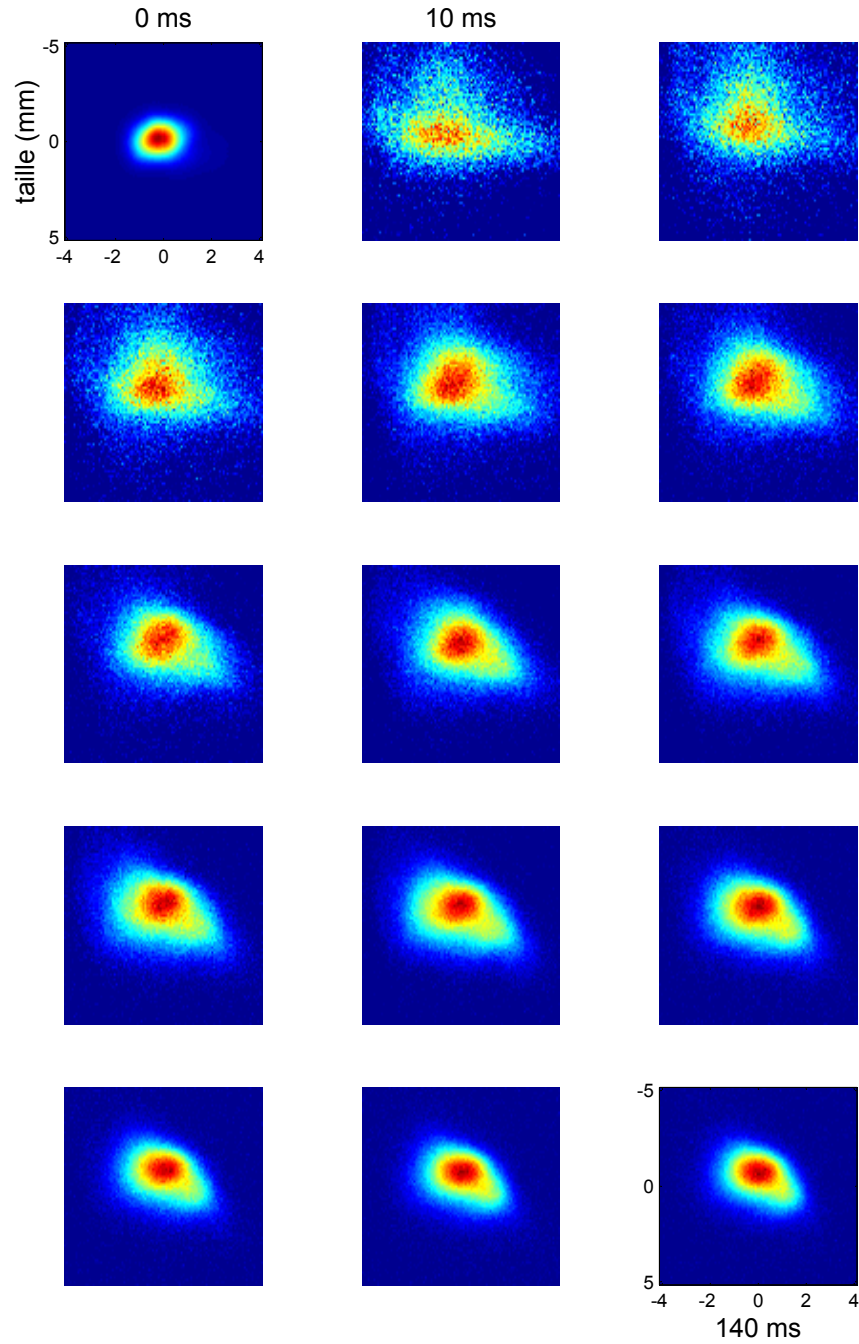


FIG. 4.11 – Chargement du piège rouge (une image toutes les 10 ms). Les paramètres sont  $\mu_G = 1,4 \text{ G/cm}$ ,  $\Delta = 2\pi \times 2 \text{ MHz}$ ,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25 \text{ kHz}$ . La taille finale du piège est de  $500 \mu\text{m}$  pour une température estimée de  $5 \mu\text{K}$  (voir 4.6). Dans les conditions expérimentales, il contient  $10^7$  atomes environ.

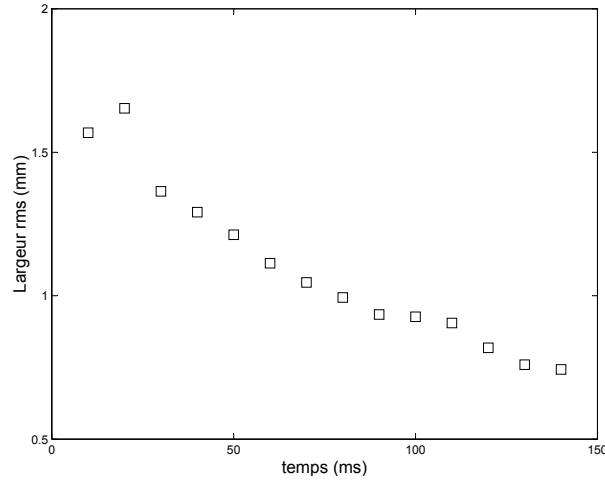


FIG. 4.12 – Evolution de largeur du nuage au cours du chargement. Il s’agit de la largeur RMS suivant les coupes horizontales des images de la figure 4.11.

l’état stationnaire. Au bout de 100 ms, les atomes sont cependant tous rassemblés dans la zone d’observation, ce qui est expérimentalement satisfaisant si l’on souhaite mesurer le taux de transfert. Il faut quand même noter que cette observation correspond à un jeu de paramètres donné  $\mu_G = 1,4 \text{ G/cm}$ ,  $\Delta = 2\pi \times 2 \text{ MHz}$ ,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25 \text{ kHz}$ . On ne sait pas *a priori* comment varie le temps de chargement en fonction des paramètres du potentiel de piégeage. Nous allons donc supposer qu’au bout de 100 ms, le piège est complètement chargé. Ce temps oriente largement la séquence temporelle choisie pour mesurer le taux de transfert.

Nous avons en effet utilisé une séquence de temps de 150 ms (fig. 4.13). Les 50 premières ms sont dédiées au chargement des atomes dans le piège bleu. Les autres 100 ms sont consacrées au transfert dans le piège rouge.

Le chargement du piège bleu est rapide, 20 ms typiquement, il s’effectue avec un gradient de 70 G/cm. Pour cette étude, nous n’utilisons pas les deux repompeurs à partir des états  $^3P_2$  et  $^3P_0$  (voir 1.3.1). Le temps de chargement est donc court mais le nombre d’atomes restreint à quelques  $10^7$ . Nous avons jusqu’alors admis la valeur numérique de la largeur de la distribution en vitesse dans le piège bleu soit  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ . Pour le justifier, nous avons pu effectuer une mesure spectroscopique de cette distribution : au moyen d’une photodiode à avalanche, nous avons observé la fluorescence des atomes sur la transition rouge. Lors de la mesure, les faisceaux bleus et le champ magnétique sont éteints. Les atomes sont donc interrogés pendant une courte phase de vol libre (quelques centaines de  $\mu\text{s}$ ) avant qu’ils ne quittent la zone d’observation. En balayant la fréquence du laser (en monofréquence), on obtient directement la distribution en vitesse représentée sur la figure 4.14. Cette mesure nous permet de connaître la largeur de la dis-

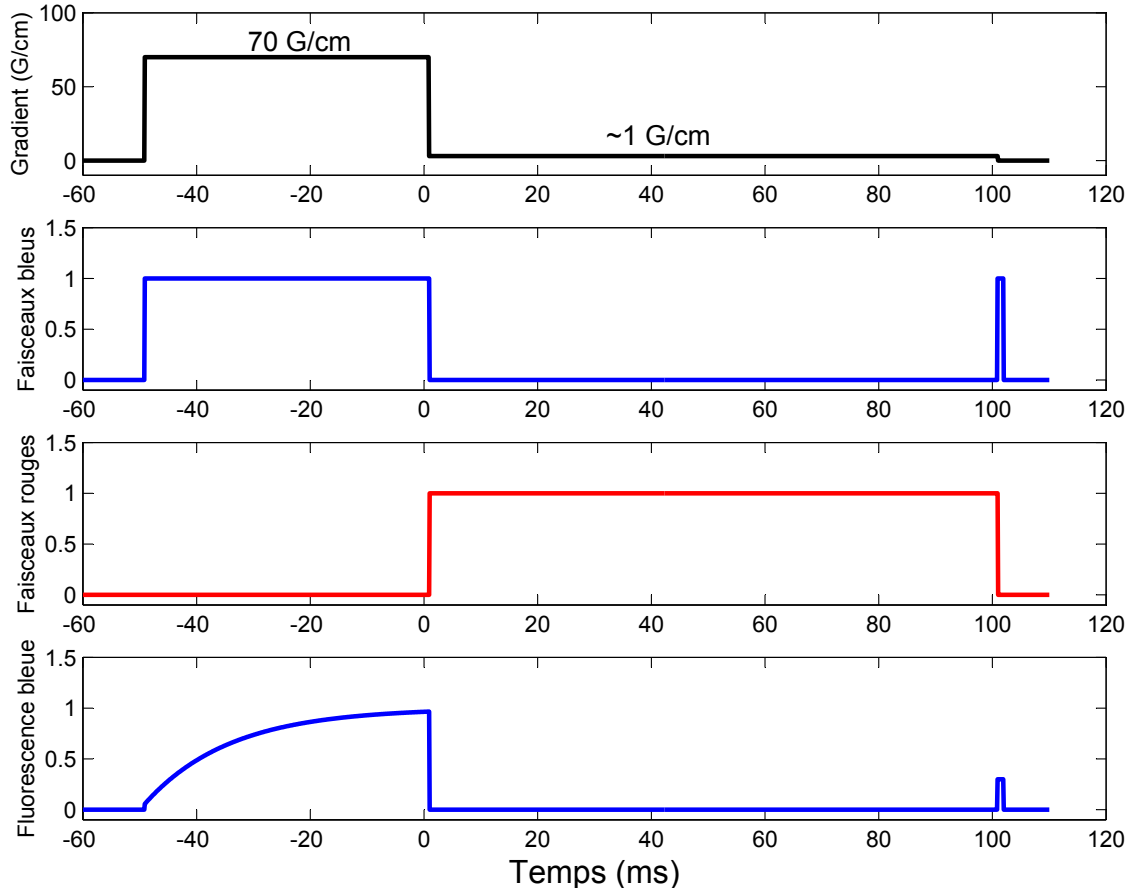


FIG. 4.13 – Résumé de la séquence de temps pour le transfert du nuage vers le piège rouge

tribution en vitesse à l'instant choisi comme origine  $t = 0$  soit  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ . La taille RMS du nuage est de  $0,7 \text{ mm}$  (fig. 4.11 pour  $t = 0$ ). Ayant résumé les caractéristiques du nuage dans le piège bleu, décrivons plus en détail la séquence de temps.

Après  $50 \text{ ms}$  soit  $t = 0$ , les faisceaux bleus sont éteints (en quelques  $\mu\text{s}$ ), et le champ magnétique décroît jusqu'à quelques  $G/cm$  (en  $100 \mu\text{s}$  environ). Les faisceaux rouges sont allumés pendant toute la phase de transfert que l'on a supposé terminée après  $100 \text{ ms}$ . Afin de mesurer le nombre d'atomes transférés dans le piège rouge, on allume à nouveau les faisceaux bleus pour observer la fluorescence des atomes présents au centre du piège. Pendant cette courte période (de  $1 \text{ ms}$ ), les faisceaux rouges sont éteints (la présence d'atome dans l'état  $^3P_1$  diminuerait la fluorescence sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ ).

En comparant le nombre d'atomes entre les instants  $t = 0$  et  $t = 100 \text{ ms}$ , on doit maintenant pouvoir mesurer le taux de transfert. Cette mesure à cause du

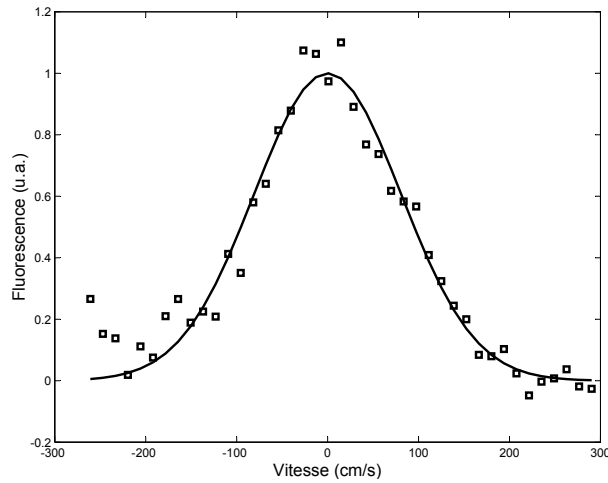


FIG. 4.14 – Mesure de la largeur de la distribution en vitesse dans le piège bleu :  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ .

temps de vie fini du piège rouge sous-estime sans doute le taux de transfert réel d'un piège à l'autre. N'ayant pas étudié particulièrement le temps de vie du piège rouge, nous garderons les données brutes sans en faire une correction *a posteriori*. Une mesure expérimentale très préliminaire nous a permis d'estimer le temps de vie à 500 ms environ limité par le vide dans la cellule. Sans être négligeable, cet effet ne semble pas significatif au vue de la précision des mesures expérimentales.

### Dispositif de mesure

Afin de faire les mesures du taux de transfert, nous avons donc choisi d'observer la fluorescence bleue qui est proportionnelle au nombre d'atomes dans la zone d'observation. Ainsi le rapport de la fluorescence à  $t = 100 \text{ ms}$  et à  $t = 0$ , nous donne directement le taux de transfert. Plus dans le détail, à l'aide d'une carte Analogique-Digital, on calcule la moyenne de la fluorescence entre  $t = 100 \text{ ms}$  et  $t = 100,2 \text{ ms}$  afin de s'affranchir des fluctuations d'intensité. Ceci nous donne une mesure du nombre d'atomes. Cette valeur est moyennée sur 16 répétitions de la séquence de temps, ce qui prend quelques secondes. Indépendamment, on extrait la valeur de la fluorescence à  $t = 0$ , que l'on moyenne aussi sur 16 répétitions. Le temps d'acquisition pour une dizaine de valeurs est typiquement de 1 min.

La précision des mesures est largement limitée par les fluctuations de la fluorescence sur la durée des mesures. Elle est typiquement de  $\pm 5\%$ . Le rapport de deux mesures aura en conséquence une incertitude estimée de  $\pm 10\%$ .

Nous allons maintenant présenter l'ensemble des mesures effectuées. Notons que toutes les barres d'erreurs seront calculées à partir de cette dernière estimation de l'incertitude.



### 4.3.2 Mesures expérimentales

Même si nous n'avons pas fait de prédiction quantitative, les courbes 4.7 et 4.6 exhibent des tendances qualitatives que nous espérons retrouver expérimentalement. Nous avons pour ce faire tracé la dépendance du taux de transfert en  $\Delta$  puis en  $\mu_G$ . Nous tenterons d'analyser sa dépendance en fonction de  $s_{1b}$  et  $A_f$ .

#### Mesure du taux de transfert en fonction de $\Delta$

La figure 4.15 fournit une courbe typique de dépendance du taux de transfert avec  $\Delta$ . Les autres paramètres ( $\mu_G = 1,4 \text{ G/cm}$ ,  $s_{1b} = 3$  et  $A_f = 2\pi \times 20 \text{ kHz}$ ) sont choisis afin d'obtenir un transfert significatif (entre 0 et 15 %). Nous sommes limités expérimentalement par la puissance du laser. Nous avons montré sur la figure 4.10 qu'il était possible d'imposer une saturation totale  $s_{\text{Totale}} \leq 633$  ou  $s_{1b}\Delta/A_f \leq 633$ . Pour la mesure 4.15, nous avons choisi de faire varier l'excursion jusqu'à  $2\pi \times 4 \text{ MHz}$  avec  $A_f = 2\pi \times 20 \text{ kHz}$ , ce qui impose  $s_{1b} \leq 633 \times 20/4000 \sim 3$ .

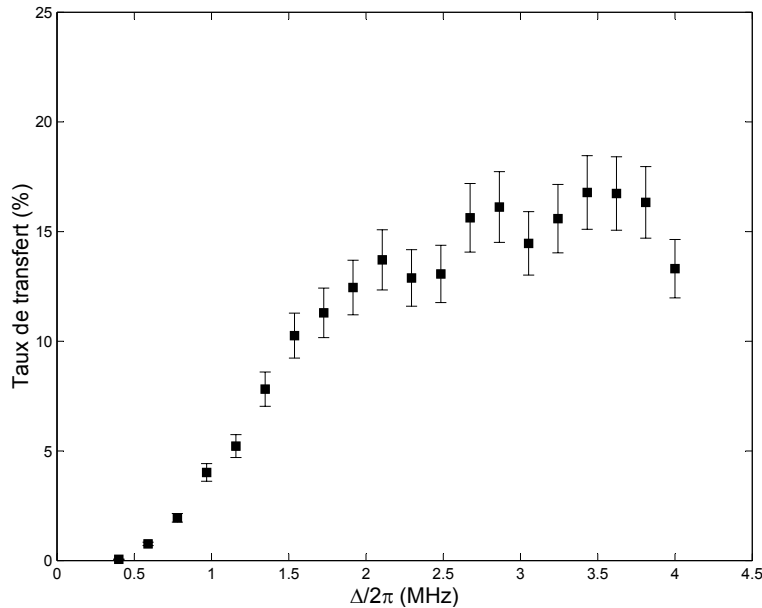


FIG. 4.15 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $\Delta$ . ( $\mu_G = 1,4 \text{ G/cm}$ ,  $s_{1b} = 3$  et  $A_f = 2\pi \times 20 \text{ kHz}$ )

Remarquons d'ores et déjà qu'en utilisant les estimations faites pour les paramètres du spectre, il est possible d'obtenir un chargement significatif (environ 10 %). Regardons maintenant la tendance : comme attendu, **la courbe est croissante pour  $\Delta \lesssim 2\pi \times 2 \text{ MHz}$  (régime « limité par l'excursion »)**, au delà on atteint un plateau. Il semble bien que **pour  $\Delta \gtrsim 2\pi \times 2 \text{ MHz}$ , on atteint le régime « limité par le *waist* »** comme nous l'avons vu sur la courbe 4.7.

Cette analyse doit aussi nous permettre d'améliorer le transfert (qui vaut 13% pour  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz). En effet, comme il n'est pas utile d'augmenter l'excursion au delà de  $2\pi \times 2$  MHz, il doit être possible alors d'augmenter la saturation. Nous avons choisi  $s_{1b} = 3$  pour satisfaire  $s_{1b} \leq 633 \times 20 / 4000 \sim 3$  pour  $\Delta = 2\pi \times 4$  MHz. Si nous limitons  $\Delta$  à  $2\pi \times 2$  MHz, on peut alors doubler la saturation. Pour les mesures qui suivent, où  $\mu_G$  varie, nous garderons  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz avec une saturation environ deux fois plus forte (plus précisément nous prendrons  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz). Le taux de transfert vaut alors 20%.

Pour conclure, il est plutôt satisfaisant de constater qu'à partir de notre estimation des paramètres du potentiel de piégeage, nous avons obtenu un chargement significatif. Mieux, en observant les bornes de l'espace des phases, nous avons réussi à prédire la dépendance qualitative du taux de transfert avec  $\Delta$ . Nous espérons en faire de même pour sa dépendance en  $\mu_G$ .

#### Mesure du taux de transfert en fonction de $\mu_G$

En gardant constant  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz (qui nous assure un taux de transfert de 20% pour la valeur du gradient du champ déjà utilisée  $\mu_G = 1,4$  G/cm), nous avons fait varier  $\mu_G$ .

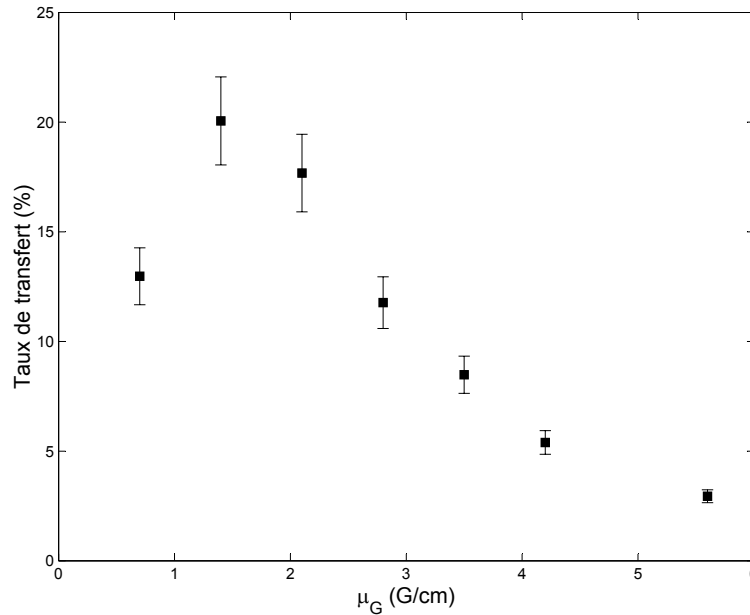


FIG. 4.16 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $\mu_G$ . ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz)

Sur la courbe 4.16, on observe bien la **décroissance du taux de transfert pour des valeurs élevées de  $\mu_G$**  analogue à ce que nous observions sur la courbe

**4.6. On est alors dans le regime « limité par excursion ».** À l'inverse, **on n'observe pas le regime « limité par le *waist* » pour de faibles valeurs de  $\mu_G$**  : on devrait voir un plateau pour lequel le transfert est indépendant du gradient. Du point de vue du chargement, la vitesse de capture devrait être constante pour de faibles valeurs de  $\mu_G$ . Il n'est pourtant pas étonnant que le chargement soit rendu impossible quand  $\mu_G \rightarrow 0$ .

Il n'est en effet pas possible de créer un piège stable si  $\mu_G = 0$ . La force de rappel étant nulle [111], il n'y a alors pas de potentiel de piégeage. D'un point de vue plus didactique : que se passe-t-il quand  $\mu_G$  décroît vers 0 ? De façon très pragmatique, la taille du piège augmente comme  $1/\sqrt{\mu_G}$ . Sans détailler cette assertion, on peut la justifier en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie entre les différents degrés de liberté. Nous en rappellerons la formulation en p.248. Lorsque  $\mu_G$  décroît, la taille du nuage finit par atteindre celle des faisceaux, et les atomes fuient alors par les bords du piège. Le potentiel de piégeage n'est alors plus assez confinant pour maintenir les atomes. A l'extrême quand  $\mu_G = 0$ , il n'y a plus de potentiel de piégeage. En pratique, lorsque  $\mu_G$  décroît, nous avons en effet pu observer une augmentation de taille du nuage mais aussi un déplacement. **L'augmentation de taille suit la décroissance de la constante de raideur. Le déplacement du piège est sans doute la conséquence d'un déséquilibre des intensités laser ou d'un champ magnétique résiduel**(voir p. 201). Ce déséquilibre induit une dérive du centre du piège et le décalage Zeeman vient alors compenser le déséquilibre des intensités. Ce déplacement sera prédominant pour la stabilité du piège, puisque le nuage va dériver jusqu'à atteindre les bords du piège. Il s'agit certes d'un problème purement expérimental, mais ce phénomène devient visible justement parce que le potentiel est de moins en moins piégeant. On comprend alors un peu mieux pourquoi **le taux de chargement décroît aux faibles valeurs de  $\mu_G$**  : il s'agit d'un problème de stabilité qui est amplifié par les déséquilibres d'intensité entre les différents faisceaux. Ceci est indépendant du calcul de la plage de capture du piège et n'a pas été estimé quantitativement.

Nous allons donc pour la suite de notre étude garder la valeur  $\mu_G = 1,4 \text{ G/cm}$  qui correspond à un maximum pour le taux de transfert où l'on suppose aussi s'être affranchi des problèmes de stabilité intrinsèque du piège.

Nous venons de faire varier les deux paramètres ( $\mu_G$  et  $\Delta$ ) qui imposent les limites dans l'espace des phases. Reste à faire varier  $s_{1b}$  et  $A_f$  qui déterminent les trajectoires.

### Mesure du taux de transfert en fonction de $s_{1b}$ et $A_f$

En pratique, nous choisirons une valeur de  $s_{1b}$  et nous étudierons le transfert en fonction de  $A_f$ . On peut à nouveau donner une estimation qualitative de la forme de la courbe.

**Le cas  $A_f \ll \Gamma_r$  (laser « chirpé »)** a déjà été mentionné lorsque nous avons cherché à estimer  $A_f$  en p. 188. Dans ce cas extrême, la fréquence de modulation

est très faible et la force dépendante du temps. Si  $A_f \ll \Gamma_r$ , sur un cycle de modulation, la plupart du temps l'atome n'est pas à résonance. En moyenne la force sera très faible. **On s'attend donc à voir le taux de transfert tendre vers 0 quand  $A_f \rightarrow 0$ .**

Dans le cas contraire ( $A_f \gg \Gamma_r$ ), le recouvrement du spectre avec la distribution initiale des vitesses est largement modifié. En effet, si l'on s'intéresse à la force, l'écart entre les pics est  $A_f$  alors que la largeur de chaque pic est donné par  $\sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$  (élargissement par saturation). Ce raisonnement suppose que les pics sont bien séparés, ce qui n'est pas toujours vrai. Cette image à l'avantage de fournir une interprétation simple et intuitive. Ainsi **le recouvrement** qui va typiquement comme  $\sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r / A_f$  (rapport de la largeur d'un pic sur l'écart entre deux pics) **va décroître quand  $A_f$  augmente et la vitesse de capture suivra la même tendance.**

Nous avons tracé (fig. 4.17) l'évolution expérimentale du taux de transfert en fonction de  $A_f$  pour différentes valeurs de  $s_{1b}$ . De façon systématique, on observe la décroissance du taux lorsque  $A_f \gg \Gamma_r$ . Nous avons fait figurer en pointillés la limite  $A_f = \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$ . On constate que cette limite donne une bonne estimation du maximum du taux de transfert. Il semble donc que notre interprétation en terme de recouvrement entre les pics soit valide en première approximation.

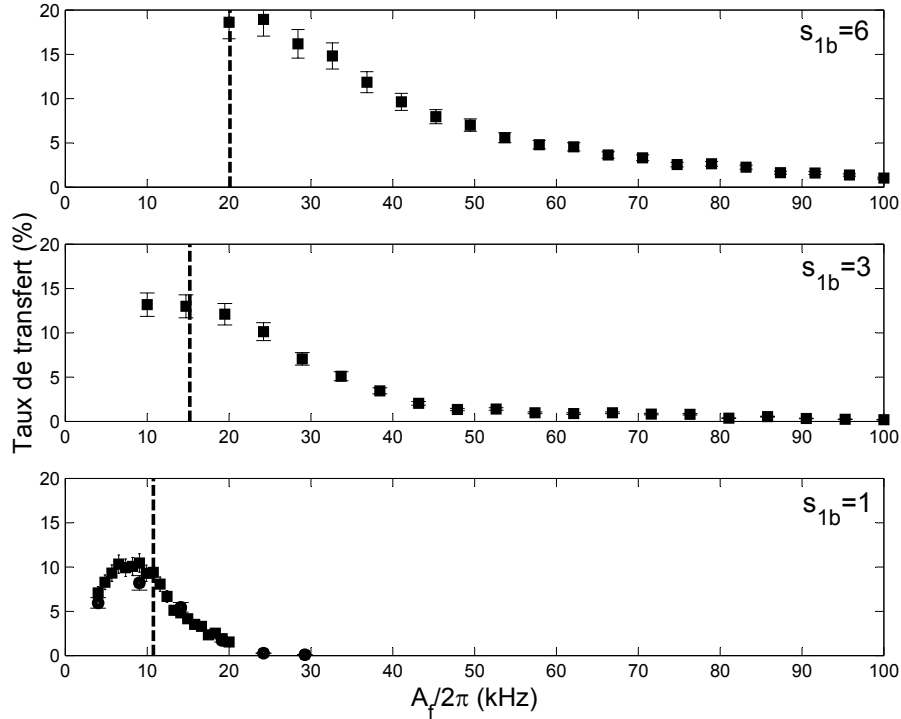


FIG. 4.17 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $A_f$  pour trois valeurs de  $s_{1b}$  : 6, 3 et 1. La droite en pointillés représente la limite  $\sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$

Il est plus délicat de mettre en évidence la tendance pour  $A_f \ll \Gamma_r$ . En effet, on reste limité par  $s_{1b}\Delta/A_f \leq 633$  : par exemple pour  $s_{1b} = 6$ , on aura  $A_f \geq 2\pi \times 19 \text{ kHz}$ . Pour  $s_{1b} = 1$ , on aura  $A_f \geq 2\pi \times 3 \text{ kHz}$  : on est loin du régime  $A_f \ll \Gamma_r$  mais on voit cependant nettement la décroissance du taux de transfert pour les faibles valeurs de  $A_f$  (sur la courbe où  $s_{1b} = 1$ ). Dans ce cas-là, on ne peut définir la force exercée sur un atome à vitesse  $v$  et à la position  $x$  comme seule fonction de  $v$  et  $x$  : on a en plus une dépendance temporelle. Ce régime n'est pas intéressant en lui-même, cependant entre les deux régimes extrêmes on aura bel et bien un maximum du taux de transfert. Pour  $1 \leq s_{1b} \leq 6$ , l'optimum se trouve entre  $2\pi \times 10 \text{ kHz} \leq A_f \leq 2\pi \times 25 \text{ Hz}$ .

Il semble au travers de ces trois analyses que nous ayons tous les ingrédients physiques pour faire une prédiction quantitative du taux de transfert. Les critères 4.13 et 4.15, nous permettent de borner l'espace des phases. Cependant, tant que nous ne donnons pas une estimation de la force, il n'est pas possible de tracer les trajectoires dans l'espace des phases. L'approche la plus simple consiste à supposer que la force est constante, c'est ce que nous allons développer dans un premier temps. Nous confronterons les résultats de ce modèle simple avec les mesures expérimentales. Nous concluons en montrant que le *waist* des faisceaux est un paramètre crucial du chargement et que le choix de celui-ci sera dans une deuxième approche dépendant de la puissance totale disponible.

## 4.4 Modèle analytique à force constante

Modéliser l'interaction du laser avec les atomes par une force constante apparaît comme une simplification drastique du problème. Cependant si l'on veut avoir un bon chargement, il faudra justement assurer une force constante et importante quelle que soit la vitesse et la position de l'atome. En ce sens là, notre modèle sera donc d'autant plus justifié que l'on tendra vers la situation idéale où tous les atomes sont saturés. C'est en estimant d'abord la saturation que nous calculerons la force.

### 4.4.1 Dépendance de la force en fonction des paramètres du laser

#### Estimation de la saturation vue par les atomes

Nous avons déjà défini et utilisé largement la saturation moyenne d'une bande du spectre  $s_{1b}$ . Notre étude qualitative semble confirmer qu'elle est un paramètre pertinent de la caractérisation du spectre. On ne peut cependant pas dire qu'elle est la saturation moyenne vue par un atome. D'une part parce qu'en toute rigueur, un atome à résonance avec la bande  $l$  subit une saturation de  $s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2 \neq s_{1b}$ , comme nous l'avons vu avec l'équation 4.6. D'autre part parce que comme un

atome n'est pas forcément à résonance avec une bande mais peut être « entre deux bandes », la saturation subie sera inférieure à  $s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2$ .

Nous allons chercher d'ores et déjà à simplifier l'expression de la saturation par bande. Pour alléger la notation, nous ne garderons que la dépendance du paramètre de saturation en fonction de la vitesse de l'atome. Pour prendre en compte la position, il suffira de remplacer  $k_r v$  par  $k_r v + \mu_F x$ . On peut maintenant estimer la saturation d'un atome à vitesse  $v$  :

$$\mathbb{S}(v) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1b} \frac{\Delta}{A_f} |J_l(\beta)|^2 \frac{1}{1 + 4(\delta(l) - k_r v)^2 / \Gamma_r^2} \quad (4.20)$$

Afin de nous ramener à un calcul simple par la suite, nous allons remplacer le spectre de modulation par un peigne de fréquence entre  $-\Delta/2$  et  $\Delta/2$  où chaque pic aura une amplitude  $s_{1b}$ . Cela revient à remplacer  $|J_l(\beta)|^2$  par sa valeur moyenne sur le spectre soit  $A_f/\Delta$  puisque  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |J_l(\beta)|^2 = 1$  (fig. 4.18). La dépendance de  $\mathbb{S}(v)$  devient :

$$\mathbb{S}(v) \simeq \sum_{-\beta \leq l \leq \beta} s_{1b} \frac{1}{1 + 4(\delta(l) - k_r v)^2 / \Gamma_r^2} \quad (4.21)$$

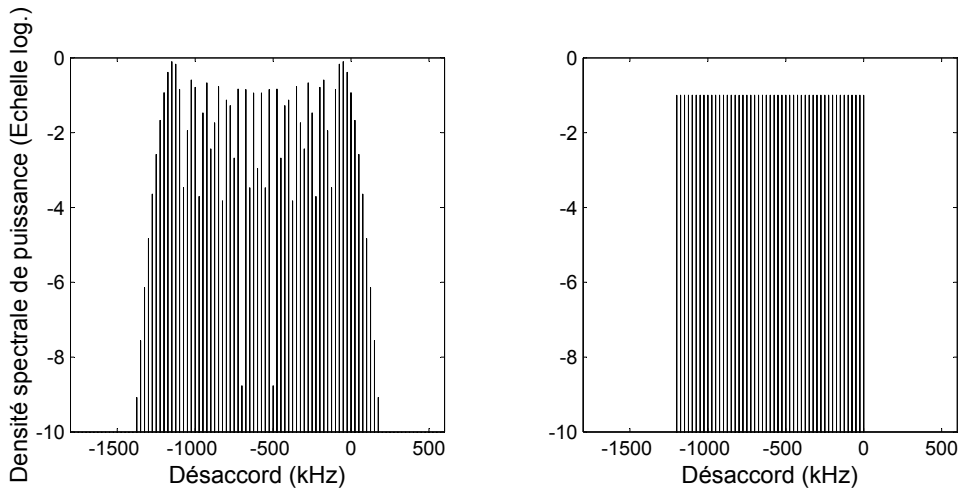


FIG. 4.18 – Comparaison du spectre de modulation et d'un peigne de fréquence d'amplitude  $s_{1b}$  entre  $-\Delta/2$  et  $\Delta/2$

Le calcul de la valeur moyenne de la force et les diverses interprétations sont maintenant largement simplifiés.

### Estimation de la force moyenne

Nous venons de simplifier largement l'expression du spectre. Pour le moment, la saturation n'est en rien constante puisqu'elle dépend de la vitesse  $v$  de l'atome. Afin de s'affranchir de cette dépendance, nous effectuerons finalement une moyenne sur tout le spectre, ce qui correspond à  $\delta_L - \Delta \leq k_r v \leq \delta_L$ . Avant cela, nous souhaitons prendre en compte deux éléments : d'une part le chargement s'effectuant dans une mélasse 3D, il faut tenir compte de cette dimensionnalité. D'autre part la forme gaussienne des faisceaux indique que l'intensité décroît rapidement à l'échelle du *waist*  $w$ . Nous avons un peu arbitrairement fixé le choix du *waist* comme limite du piège (expr. 4.13). Nous souhaitons tenir compte de ces deux effets-là. Nous avons introduit de façon usuelle l'expression 4.11 de la force :

$$F(v) = \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \quad (4.22)$$

Cette expression n'est vraie qu'en interaction avec une mélasse 1D. Même si dans notre analyse nous cherchons à découpler les trois dimensions, il faut dans un premier temps prendre en compte la saturation les trois faisceaux. Désignons par  $\mathbb{S}_X$  la saturation d'un atome à vitesse  $V_X$  le long de l'axe  $X$  et de façon analogue  $\mathbb{S}_Y$  et  $\mathbb{S}_Z$  suivant les deux autres axes. *A priori* la force selon  $X$  faudra :

$$F_X = \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{\mathbb{S}_X}{1 + \mathbb{S}_X + \mathbb{S}_Y + \mathbb{S}_Z} \quad (4.23)$$

Nous allons maintenant préférer exprimer la force en termes d'accélération :

$$a_X = a_{\max} \frac{\mathbb{S}_X}{1 + \mathbb{S}_X + \mathbb{S}_Y + \mathbb{S}_Z} \quad (4.24)$$

Rappelons que  $a_{\max} = 155 \text{ m/s}^2$ .

Nous souhaitons maintenant prendre en compte la dépendance spatiale des différents faisceaux. Pour trouver une expression générique qui soit réaliste et ne dépende que de la vitesse, nous allons supposer que  $\mathbb{S}_X$ ,  $\mathbb{S}_Y$  et  $\mathbb{S}_Z$  ont la même dépendance en vitesse  $\mathbb{S}(v)$  et une dépendance gaussienne en  $\exp(-2X^2/w^2)$ ,  $\exp(-2Y^2/w^2)$  et  $\exp(-2Z^2/w^2)$  respectivement. Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_X &= \mathbb{S}(v) \exp(-2X^2/w^2) \\ \mathbb{S}_Y &= \mathbb{S}(v) \exp(-2Y^2/w^2) \\ \mathbb{S}_Z &= \mathbb{S}(v) \exp(-2Z^2/w^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Afin d'obtenir l'accélération uniquement comme fonction de  $v$ , nous allons maintenant faire la moyenne des profils selon  $-w \leq X \leq w$  (notée  $\langle \dots \rangle_X$ ),  $-w \leq Y \leq w$  (notée  $\langle \dots \rangle_Y$ ) et  $-w \leq Z \leq w$  (notée  $\langle \dots \rangle_Z$ ). Nous gardons  $w$  comme limite des

faisceaux et donc du piège, ce qui nous conduit à faire la moyenne uniquement entre les deux limites  $-w$  et  $w$ . Sur la figure 4.19, nous avons finalement tracé l'accélération  $a(v)$  pour les valeurs typiques de la saturation  $\mathbb{S}(v)$  (comprise entre 1 et 10). Les valeurs moyennes sont calculées numériquement :

$$a(v) = a_{\max} \left\langle \left\langle \left\langle \frac{\mathbb{S}_X}{1 + \mathbb{S}_X + \mathbb{S}_Y + \mathbb{S}_Z} \right\rangle \right\rangle \right\rangle_{X,Y,Z} \quad (4.26)$$

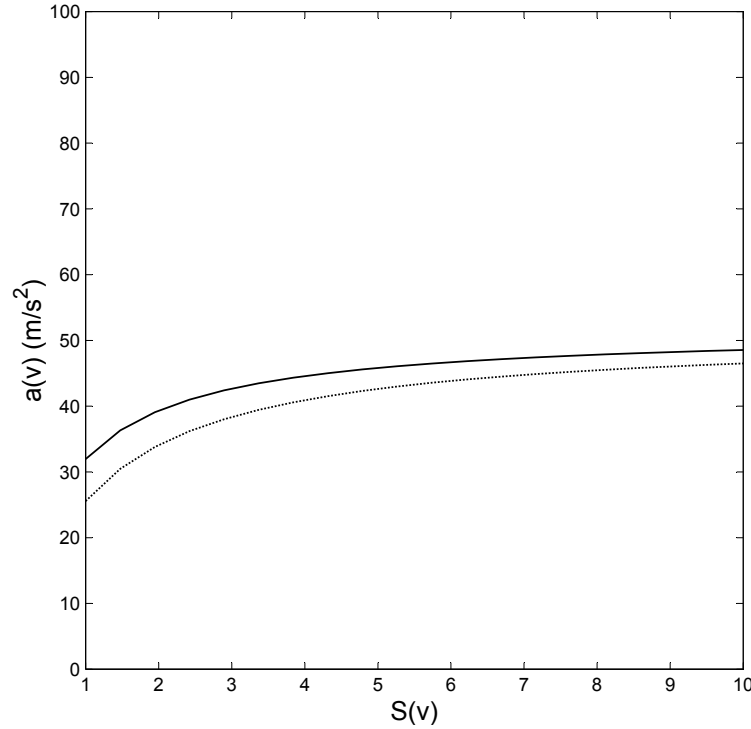


FIG. 4.19 – Calcul de l'accélération en prenant en compte le profil gaussien des faisceaux selon les trois axes :  $a_{\max} \left\langle \left\langle \left\langle \frac{\mathbb{S}_X}{1 + \mathbb{S}_X + \mathbb{S}_Y + \mathbb{S}_Z} \right\rangle \right\rangle \right\rangle_{X,Y,Z}$  (traits pleins). En pointillés, nous avons fait figurer l'accélération calculée à partir de la formule analytique  $\frac{a_{\max}}{3} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$ .

Il apparaît difficile de calculer  $a(v)$  à partir de l'expression précédente. Nous avons donc choisi de la comparer à une expression plus simple. Sur la figure 4.19, nous avons aussi tracé  $\frac{a_{\max}}{3} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$ . On constate que les deux courbes sont proches d'autant plus que la saturation est forte. L'accélération vaut alors  $a_{\max}^{1D} = 52 \text{ m/s}^2$  puisque la transition est totalement saturée. La force selon un axe n'est que le tiers de la force maximale. À  $\mathbb{S}(v) = 1$ , l'erreur relative est de



20%. Cela nous paraît raisonnable dans la mesure où nous cherchons à utiliser une dépendance simple de la l'accélération en fonction des paramètres du laser. Le terme  $\frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$  permet notamment d'exprimer l'élargissement par saturation d'un pic comme  $\sqrt{1 + s_{1b}}\Gamma_r$ . Cette interprétation en terme d'élargissement nous a déjà permis de comprendre qualitativement la courbe 4.17 et semble donc pertinente. Nous ferons finalement le choix d'utiliser l'expression :

$$a(v) \simeq a_{\max}^{1D} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \quad (4.27)$$

Cette formule prend en compte la dimensionnalité du problème et le profil des faisceaux. De façon très pragmatique, elle ressemble fortement à l'expression 4.11 pour une mélasse 1D. La dimensionnalité et le profil gaussien des faisceaux revient à diviser l'accélération maximale par trois. Nous verrons qu'en pratique, elle permet d'estimer correctement le taux de transfert.

Après avoir pris en compte la dépendance spatiale de l'intensité dans le piège, il nous reste uniquement la dépendance en vitesse. Pour véritablement obtenir un modèle simple, nous souhaitons aussi nous en affranchir. Nous allons donc calculer la valeur moyenne de l'accélération sur tout le spectre du laser. Le spectre s'étendant de  $\delta_L - \Delta$  à  $\delta_L$ , nous prendrons une moyenne sur les vitesses  $v$  telles que  $\delta_L - \Delta \leq k_r v \leq \delta_L$  (notée  $\langle \dots \rangle_v$ ). Nous obtenons maintenant une expression de l'accélération constante :

$$a \simeq a_{\max}^{1D} \left\langle \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \right\rangle_v \quad (4.28)$$

Le calcul de la valeur moyenne  $\langle \dots \rangle_v$  est effectué numériquement. Dans la gamme des paramètres utilisés, la fonction est quasiment périodique, il suffit donc de calculer sa valeur moyenne sur une période (entre deux pics du spectre). En conséquence, l'accélération moyenne  $a$  dépendra uniquement des paramètres  $s_{1b}$  et  $A_f$ . Nous utiliserons maintenant la notation  $a(s_{1b}, A_f)$ .

Sur la figure 4.20, nous avons tracé  $\frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$  en fonction de  $v$ . En pointillés apparaît la valeur moyenne  $\left\langle \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \right\rangle_v$ .

Pour des valeurs élevées de  $A_f$ , les pics de la force (et du paramètre de saturation) sont largement disjoints, leur largeur est donnée par l'élargissement par saturation de la transition soit  $\sqrt{1 + s_{1b}}\Gamma_r$ . Cela nous donne une première idée de la limite de validité de notre approximation que nous verrons par la suite.

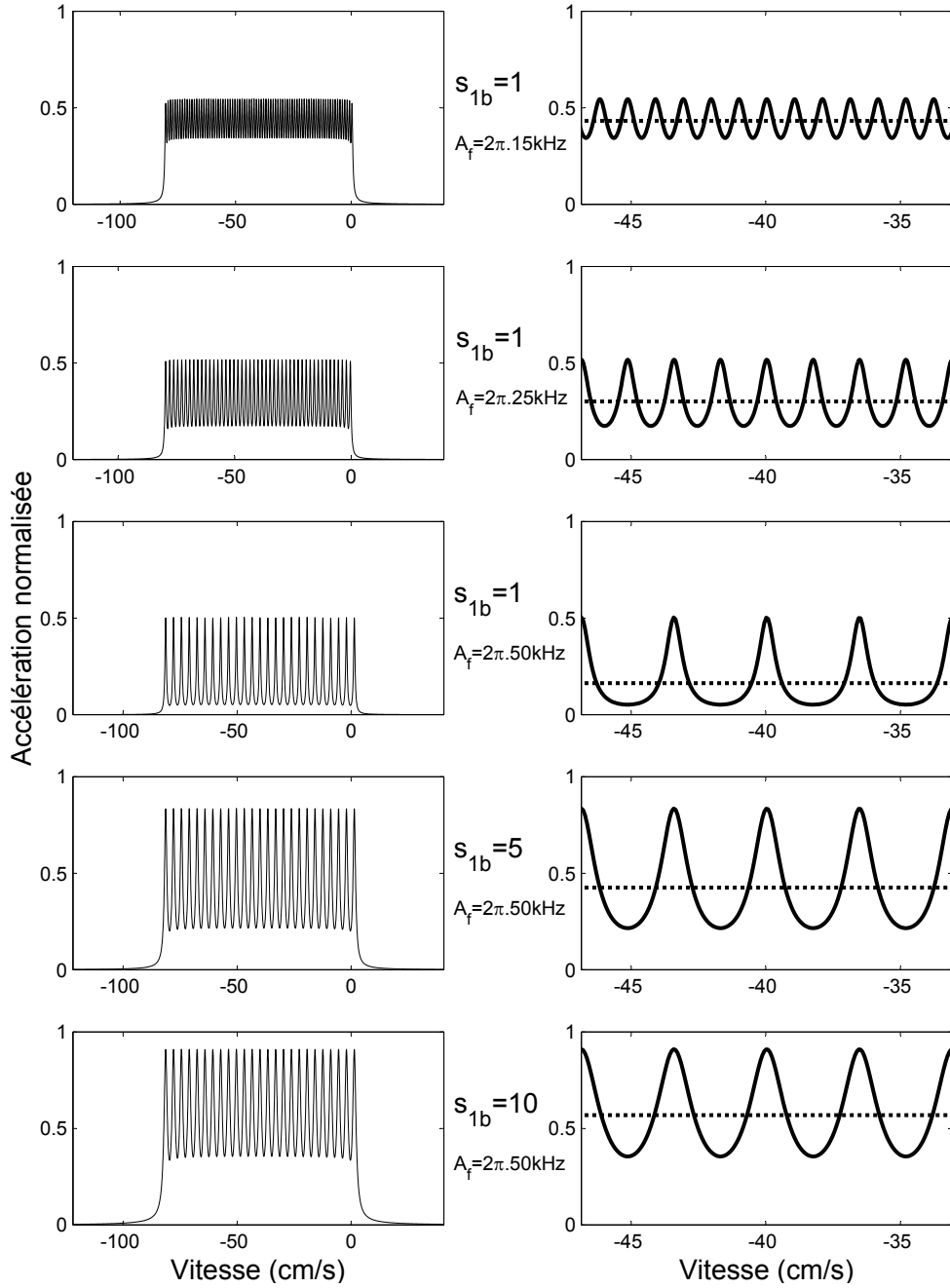


FIG. 4.20 – Accélération normalisée :  $\frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$  en fonction de  $v$  avec  $\Delta = 2\pi \times 1,16 \text{ MHz}$  et  $\delta_L = 0$ . À droite, un agrandissement sur la partie centrale du spectre. En pointillés, la valeur moyenne sur le spectre.

**Tout d'abord, récapitulons :** Nous nous sommes affranchis de la dépendance spatiale de l'intensité à 3D en approchant l'accélération par la formule  $a_{\max}^{1D} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}$  qui ne dépend pas de la vitesse. On fait enfin la valeur moyenne sur  $v$  pour obtenir une expression de l'accélération constante qui ne dépende que des paramètres  $A_f$  et  $s_{1b}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(v) &\simeq \sum_{-\beta \leq l \leq \beta} s_{1b} \frac{1}{1 + 4(\delta(l) - k_r v)^2 / \Gamma_r^2} \\ \text{avec } \delta(l) &= \delta_L - \Delta/2 + l A_f \\ a &\simeq a_{\max}^{1D} \left\langle \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \right\rangle_v \end{aligned} \tag{4.29}$$

#### Limite de validité en fonction $s_{1b}$ et $A_f$

À partir de la figure 4.17 nous avons dégagé deux cas extrêmes pour analyser qualitativement la courbe. On les retrouve dans le cadre de notre discussion sur la validité de l'approximation « force constante ».

Le cas  $A_f \ll \Gamma_r$  (laser « chirpé ») n'est clairement pas représenté par notre modèle. Comme nous l'avons mentionné, il n'est alors pas possible de définir la force comme dépendant de  $v$  uniquement. Nous avons tracé (fig. 4.21) l'accélération à partir des expressions 4.29 en fonction de  $A_f$  pour trois valeurs de  $s_{1b}$ . La partie en gris sombre pour les valeurs de  $A_f < \Gamma_r = 2\pi \times 7,6$  kHz représente une limite de validité de notre modèle lui-même.

**Pour des valeurs plus élevées de  $A_f$ , notre calcul de  $\mathbb{S}(v)$  est valide mais il est en revanche discutable de considérer la force comme constante.** Comparons par exemple sur la figure 4.20, les cas ( $A_f = 2\pi \times 15$  kHz,  $s_{1b} = 1$ ) et ( $A_f = 2\pi \times 50$  kHz,  $s_{1b} = 1$ ) : on voit que pour  $A_f = 2\pi \times 50$  kHz, les pics sont largement séparés (à l'échelle de  $\Gamma_r$ , la force n'est alors clairement pas constante. Afin de se donner un critère comparant la valeur moyenne à l'amplitude crête-à-crête, nous avons choisi de comparer simplement l'écart entre chaque pic de la force et la largeur d'un pic (qui est donné par l'élargissement par saturation). Notre approximation semble donc raisonnable pour  $A_f < \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$ . Afin de prendre un critère un peu moins drastique nous prendrons en pratique comme limite  $A_f/2 = \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$ . La seconde zone grisée (gris clair) sur la figure 4.20 correspond au cas  $A_f/2 > \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$ .

Il peut paraître décevant de voir la faible zone de validité de notre approximation. Il faut noter cependant que les paramètres qui assurent un chargement significatif sont inclus dans cette zone. En ce sens là, notre approximation est orientée vers l'optimisation du taux de transfert. **Comme nous l'avons men-**

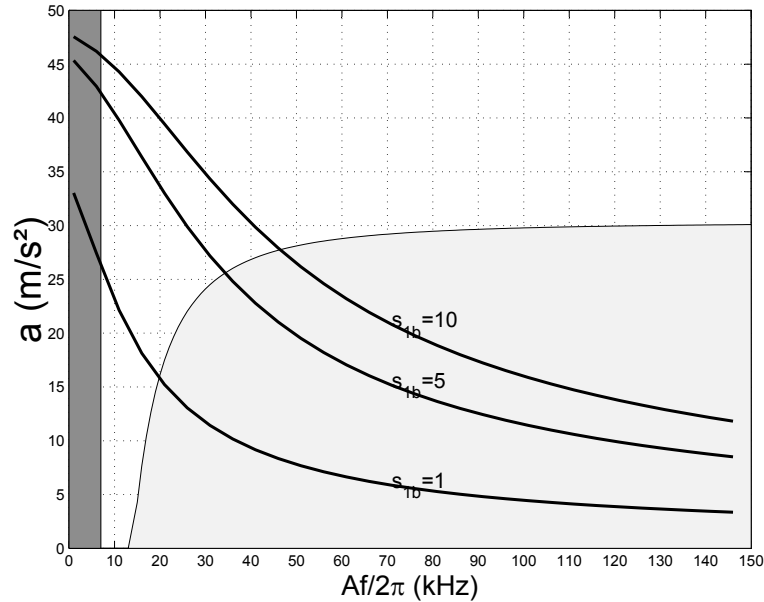


FIG. 4.21 – Calcul de l'accélération moyenne à partir de la formule 4.29, en fonction de  $A_f$  pour trois valeurs de  $s_{1b}$ . Dans les zones grisées, notre approximation n'est plus valide : en gris foncé, le laser est « chirpé » et la force dépendante du temps ; en gris clair, l'accélération est fortement modulée en fonction de  $v$  et ne peut être considérée comme constante.

tionné, elle sera d'autant plus valide que l'on sature l'atome quelle que soit sa vitesse (et de façon plus générale, quelles que soient sa vitesse et sa position).

## Conclusion

Même si le domaine de validité de l'approximation est restreint, la formule 4.29 nous fournit une expression de l'accélération en fonction des paramètres du laser. Plus précisément comme nous l'avions introduit en 4.2 (p. 193), on peut maintenant découpler nettement les différents paramètres :

- $\mu_G$  et  $\Delta$  déterminent les limites du pièges dans l'espace des phases, comme nous l'avions vu en 4.2, en prenant une condition de bord net pour le spectre et pour les faisceaux ;
- $s_{1b}$  et  $A_f$ , nous permettent d'estimer l'accélération subie par les atomes.

On peut maintenant tracer les trajectoires dans l'espace des phases. Dans le cas présent, avec une force constante, les trajectoires sont des paraboles. Leurs intersections avec les limites du piège doivent nous permettre d'estimer la vitesse de capture puis le taux de transfert.

### 4.4.2 Trajectoires dans l'espace des phases

L'évolution complète dans l'espace des phases jusqu'à atteindre l'état stationnaire sort du cadre de cette étude. La forme générale de la force étant peu habituelle (fig. 4.2), il reste difficile de prédire la trajectoire d'un atome jusqu'au centre ( $x = 0, v = 0$ ). Sur la figure 4.11, nous avons distingué une première phase où le nuage explose alors que la force exercée par le laser rouge tente de le ramener vers le centre. Les atomes entament alors un aller-retour dans le potentiel de piégeage. Nous allons pour le moment ne considérer que cette phase, autrement dit, avant que la force ne change de signe. On suppose en effet que lorsque la force change de signe, l'atome subira dans cette zone une force de friction comme on peut le voir sur la figure 4.2. Cela permettra à terme de la ralentir. Il n'est pas évident que l'on soit dans un régime sur-amorti comme c'est généralement le cas dans un piège magnéto-optique. Une telle discussion sort du cadre de l'étude du chargement du piège proprement dit. Nous allons donc regarder la trajectoire d'un atome jusqu'à ce que la force change de sens.

#### Mouvement uniformément accéléré

Afin de savoir si la force change de signe, il faut calculer l'évolution du décalage total  $\delta_{\text{at}}$  (Zeeman + Doppler, expr. 4.14). C'est aussi cette quantité que l'on devra comparer à  $\Delta$  pour savoir si l'atome est toujours en interaction avec le laser.

Sous accélération constante (on utilisera  $a > 0$  même si l'accélération est négative) l'évolution de  $v$  et  $x$  est simplement :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}at^2 + v(0)t + x(0) \\ v(t) &= -at + v(0) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Nous connaissons les distributions initiales des positions  $x(0)$  et des vitesses  $v(0)$ . Celle des vitesses (nous la noterons dorénavant  $v_0$ ) est bien représentée par une gaussienne de largeur  $V_{\text{RMS}} = 80$  cm/s. Celle des positions est connue aussi : la taille RMS initiale du nuage est de 0,7 mm. Dans la mesure où elle est d'un ordre de grandeur inférieure à la taille des faisceaux, nous allons supposer que  $x(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}at^2 + v(0)t \\ v(t) &= -at + v(0) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Connaissant l'accélération, il est maintenant possible de tracer la trajectoire d'un atome dans l'espace des phases. L'intersection avec les deux limites du potentiel  $|x| > w$  et  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  nous permettra d'estimer la vitesse de capture.

Regardons pour le moment la condition  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$  afin de connaître la limite du transfert par l'excursion.

### Limitation du transfert par l'excursion

Les expressions 4.31 nous permettent de calculer le décalage total  $\delta_{\text{at}}$  :

$$\begin{aligned} \delta_{\text{at}}(x, v) &= k_r v + \mu_F x \\ \delta_{\text{at}}(t) &= -\frac{1}{2}\mu_F a t^2 + (\mu_F v_0 - k_r a).t + k_r v_0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Une série d'évolutions typiques est représentée sur la figure 4.22.

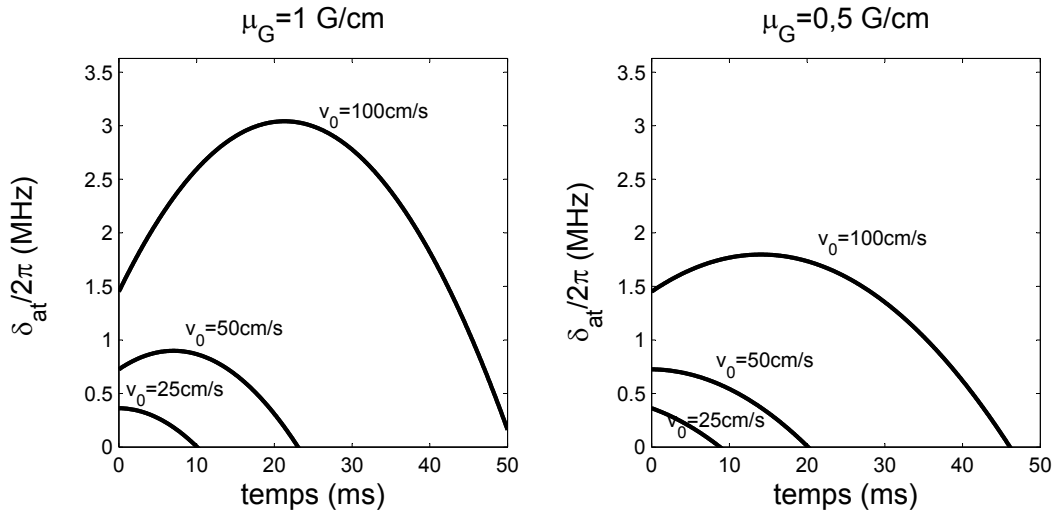


FIG. 4.22 – Évolution de  $\delta_{\text{at}}$  sous l'effet d'une accélération constante,  $a = 35 \text{ m/s}^2$ .

On y voit de façon générale deux comportements :

- soit  $\delta_{\text{at}}$  **décroit immédiatement** (il est donc maximum en  $t = 0$ ) ;
- soit  $\delta_{\text{at}}$  **possède un maximum pour  $t \neq 0$** ).

Pour savoir si un atome sera perdu, il nous faut considérer ce maximum (noté  $\max_t(\delta_{\text{at}})$ ) en fonction de  $v_0$ . Nous allons retrouver les deux cas précédents, que l'on représente sur la figure 4.23 :

$$\max_t(\delta_{\text{at}}) = \begin{cases} \delta_{\text{at}}(0) = k_r \cdot v_0 & \text{si } v_0 \leq k_r \cdot a / \mu_F \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_F v_0^2}{a} + \frac{k_r^2 a}{\mu_F} \right) & \text{si } v_0 \geq k_r \cdot a / \mu_F \end{cases} \quad (4.33)$$

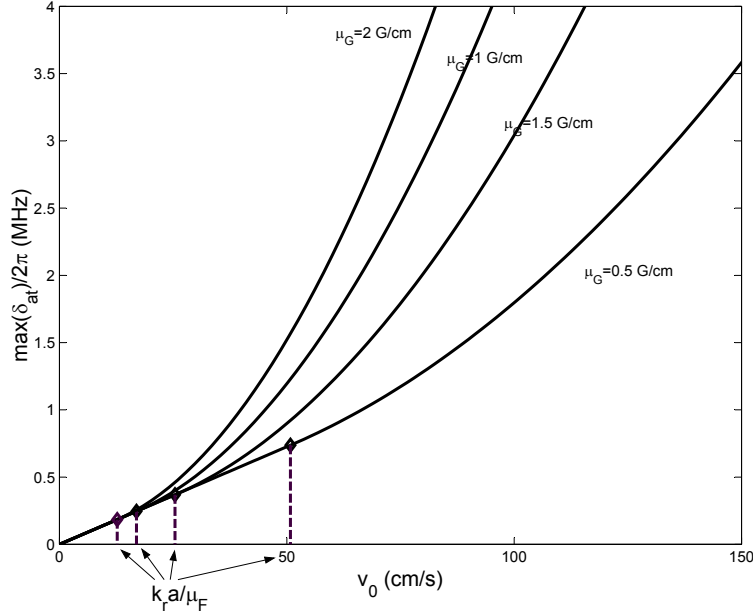


FIG. 4.23 – Décalage maximal d'un atome par rapport à la résonance, en fonction de sa vitesse initiale pour différentes valeurs du champ magnétique,  $a = 35 \text{ m/s}^2$ .

Connaissant  $\max_t(\delta_{\text{at}})$ , il est facile de savoir si  $|k_r v + \mu_F x| > \Delta$ . En effet, un atome sera perdu si  $\max_t(\delta_{\text{at}}) > \Delta$ . D'un point de vue géométrique  $\delta_{\text{at}}(t) - \Delta$  représente la distance à la droite  $|k_r v + \mu_F x| = \Delta$  qui limite l'espace des phases.

Nous pouvons calculer maintenant la vitesse de capture dans le régime de chargement limité par l'excursion. Notée  $V_\Delta$ , elle correspond à une trajectoire tangente à la limite de l'espace des phases  $|k_r v + \mu_F x| = \Delta$ .

Sur la figure 4.24, nous avons représenté en 4.24.a) la limite  $\max_t(\delta_{\text{at}}) = \Delta$  qui correspond à  $V_0 = 68 \text{ cm/s}$ . 4.24.b représente l'espace des phases avec la limite  $|k_r v + \mu_F x| = \Delta$  et nous y avons fait figurer trois trajectoires :

- Pour  $V_0 = 50 \text{ cm/s}$ , l'atome reste dans le piège ;
- Pour  $V_0 = 68 \text{ cm/s}$ , il s'agit de la vitesse de capture, l'atome vient « toucher » la limite du potentiel de piégeage ;
- Pour  $V_0 = 100 \text{ cm/s}$  sera perdu, il n'est plus en interaction avec le laser.

On conclura par l'expression analytique de  $V_\Delta$  en inversant la relation 4.33 :

$$V_\Delta = \begin{cases} \Delta/k_r & \text{si } \Delta \leq \frac{a}{\lambda_r^2 \mu_F} \\ \sqrt{\frac{2a\Delta}{\mu_F} - \frac{a^2}{\mu_F^2 \lambda_r^2}} & \text{si } \Delta \geq \frac{a}{\lambda_r^2 \mu_F} \end{cases} \quad (4.34)$$

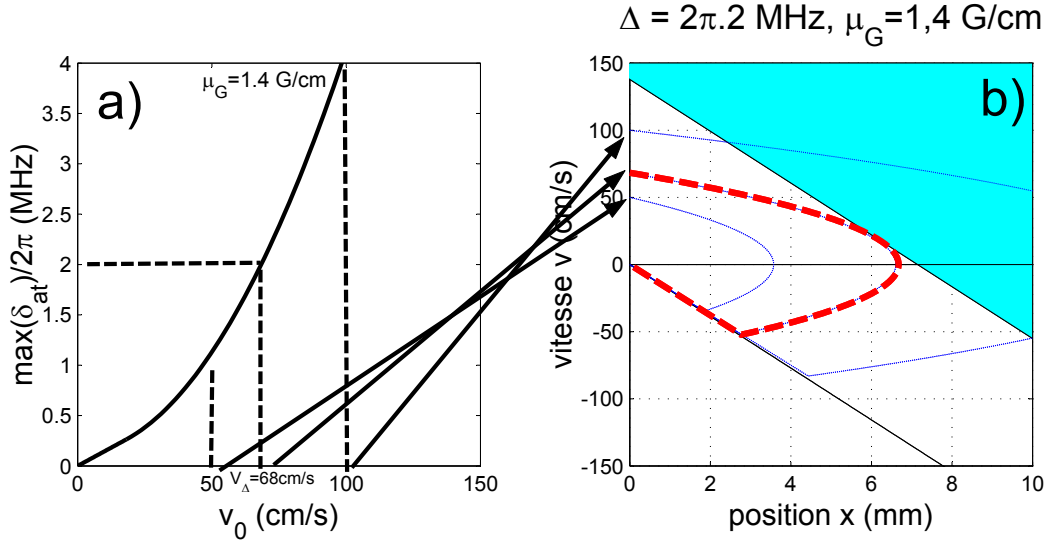


FIG. 4.24 – Calcul de la plage de capture dans le régime de chargement limité par l'excursion. a) : la condition  $\max_t(\delta_{at}) = \Delta = 2\pi \times 2$  MHz nous permet de calculer  $V_\Delta = 68$  cm/s (pour  $a = 35$  m/s<sup>2</sup> et  $\mu_G = 1,4$  G/cm). En b) sont représentées trois trajectoires dans l'espace des phases pour  $V_0 = 50$  cm/s,  $V_0 = V_\Delta$  et  $V_0 = 100$  cm/s

### Cas particulier d'une rampe de champ magnétique

La mise en évidence de deux cas de figure (soit  $\delta_{at}$  décroît immédiatement, soit  $\delta_{at}$  possède un maximum pour  $t \neq 0$ ) impose une formule double pour l'expression de  $V_\Delta$ . On peut s'affranchir de cela en utilisant une rampe de champ magnétique  $\mu_F = \eta t$ . Nous montrerons plus loin qu'il s'agit d'une situation particulièrement intéressante. Détaillons avant cela le calcul de  $V_\Delta$  dans le cas d'une rampe de champ magnétique.

La rampe est caractérisée par  $\eta$  avec  $\mu_F = \eta t$ . Il est alors possible d'assurer que  $\delta_{at}$  soit toujours décroissant. La dérivée temporelle de  $\delta_{at}(t)$  doit donc être négative, soit :

$$-\frac{3}{2}\eta a t^2 + 2\eta v_0 t - k_r a < 0 \quad (4.35)$$

L'expression précédente sera vérifiée uniquement si le maximum (pour  $t = 3v_0/2a$ ) de la parabole est négatif. Cette condition devient :

$$\frac{2}{3}\eta v_0^2 - k_r a < 0 \iff \eta < \frac{3k_r a^2}{2v_0^2} \quad (4.36)$$

Le décalage total étant toujours décroissant, on aura simplement pour  $V_\Delta$  :



$$\boxed{V_{\Delta} = \Delta/k_r} \quad (4.37)$$

Du point de vue de la vitesse de capture (formule 4.34), tout se passe comme si l'on chargeait avec  $\mu_G = 0$ , ce qui représente l'optimum théorique pour la plage de capture.

Précisons l'ordre de grandeur de  $\eta$ , pour  $a = 35 \text{ m/s}^2$  (valeur typique que nous retrouverons plus loin) et  $v_0 = V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ , on doit vérifier

$$\boxed{\eta < \frac{3a^2}{2v_0^2\lambda_r} \simeq 2\pi \times 100 \text{ MHz.cm}^{-1}.\text{s}^{-1} \text{ soit } 50 \text{ G.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}} \quad (4.38)$$

Nous vérifierons en 4.5.1 que la rampe utilisée expérimentalement satisfait ce critère.

### Limitation du transfert par le *waist*

Nous allons maintenant traiter le second critère de sortie du piège. Beaucoup plus simplement 4.13 devient :

$$\max_t(x) \leq w$$

Le maximum de  $x(t)$  est donné par l'équation 4.31 et vaut  $\max_t(x) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$ . La condition  $\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \leq w$ , nous permet de calculer une seconde vitesse de capture (notée  $V_w$ ) qui correspond à la limitation du transfert par le *waist*.

$$\boxed{V_w = \sqrt{2aw}} \quad (4.39)$$

La trajectoire correspondant à  $V_0 = V_w$  sera tangente à la limite du potentiel de piégeage  $|x| = w$  (fig. 4.25).

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer à partir de 4.34 et 4.39 la vitesse de capture du piège : soit

$$\boxed{V_c = \min(V_w, V_{\Delta})} \quad (4.40)$$

suivant ce qui limite le transfert vers le piège.

Nous sommes donc capable de **donner analytiquement une estimation de la vitesse de capture**, en fonction de  $\Delta$ ,  $w$  et  $a$ . Nous avons vu en 4.4.1, qu'en supposant la force constante, on pouvait donner une estimation de l'accélération  $a$  comme fonction de  $s_{1b}$  et  $A_f$ . Les paramètres sont bien découplés avec ces approximations successives. Cela nous permet de calculer le taux de transfert à trois dimensions, qui sera la quantité mesurée expérimentalement.

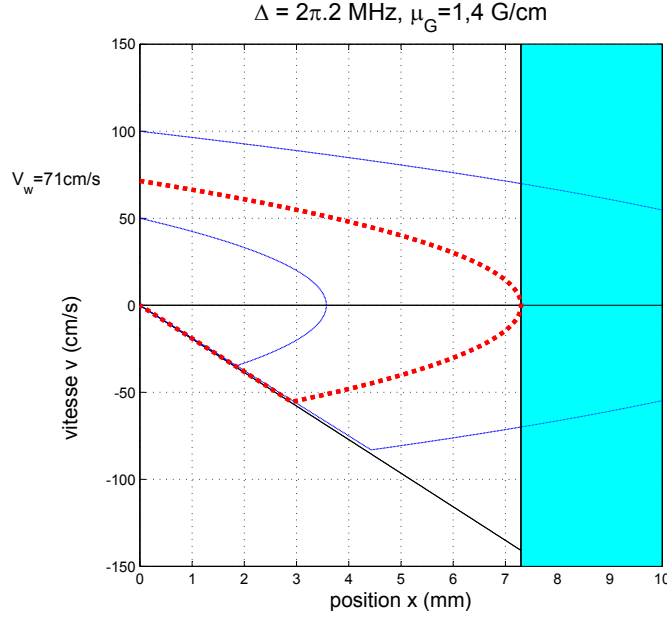


FIG. 4.25 – Calcul de la plage de capture dans le régime de chargement limité par le *waist*. La condition  $\max_t(x) = w$  nous permet de calculer  $V_w = \sqrt{2aw} = 71 \text{ cm/s}$  (pour  $a = 35 \text{ m/s}^2$ ). Nous avons représenté trois trajectoires dans l'espace des phases pour  $V_0 = 50 \text{ cm/s}$ ,  $V_0 = V_w$  et  $V_0 = 100 \text{ cm/s}$

### Estimation du taux de transfert

On connaît *a priori* la distribution de vitesse initiale caractérisée par  $V_{\text{RMS}}$ . Il n'est alors pas difficile de calculer le nombre d'atomes capturés en intégrant cette distribution jusqu'à  $V_c$ . Pour tenir compte de la dimensionnalité du problème, nous prendrons le cube du taux de transfert à une dimension. Une estimation (à trois dimensions) du taux de transfert est donc :

$$\tau(a(s_{1b}, A_f), \Delta, \mu_G, w) = \left[ \frac{\int_0^{V_c} \exp\left(-\frac{v^2}{2V_{\text{RMS}}^2}\right) dv}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2V_{\text{RMS}}^2}\right) dv} \right]^3 \quad (4.41)$$

À titre d'illustration, le taux de transfert vaut 32% lorsque  $V_c = V_{\text{RMS}}$ .

Plutôt que fournir une série d'abaques donnant  $a$ ,  $V_c$  puis  $\tau$  nous allons plutôt tracer quelques évolutions dans l'espace des phases pour des paramètres pertinents du piège.

## Trajectoires dans l'espace des phases

Pour les deux représentations 4.26 et 4.27, nous garderons  $s_{1b} = 7, 5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz, ce qui donne  $a(s_{1b}, A_f) = 35$  m/s<sup>2</sup>. Cela impose les trajectoires dans l'espace des phases. Pour chaque jeu de paramètres, on a tracé deux trajectoires particulières pour les vitesses initiales  $V_w$  (pointillés) et  $V_\Delta$  (tirets). Elles sont tangentes aux deux droites fixées comme conditions de sortie du piège. La plus petite des deux vitesses, nous donne par définition la vitesse de capture  $V_c$ .

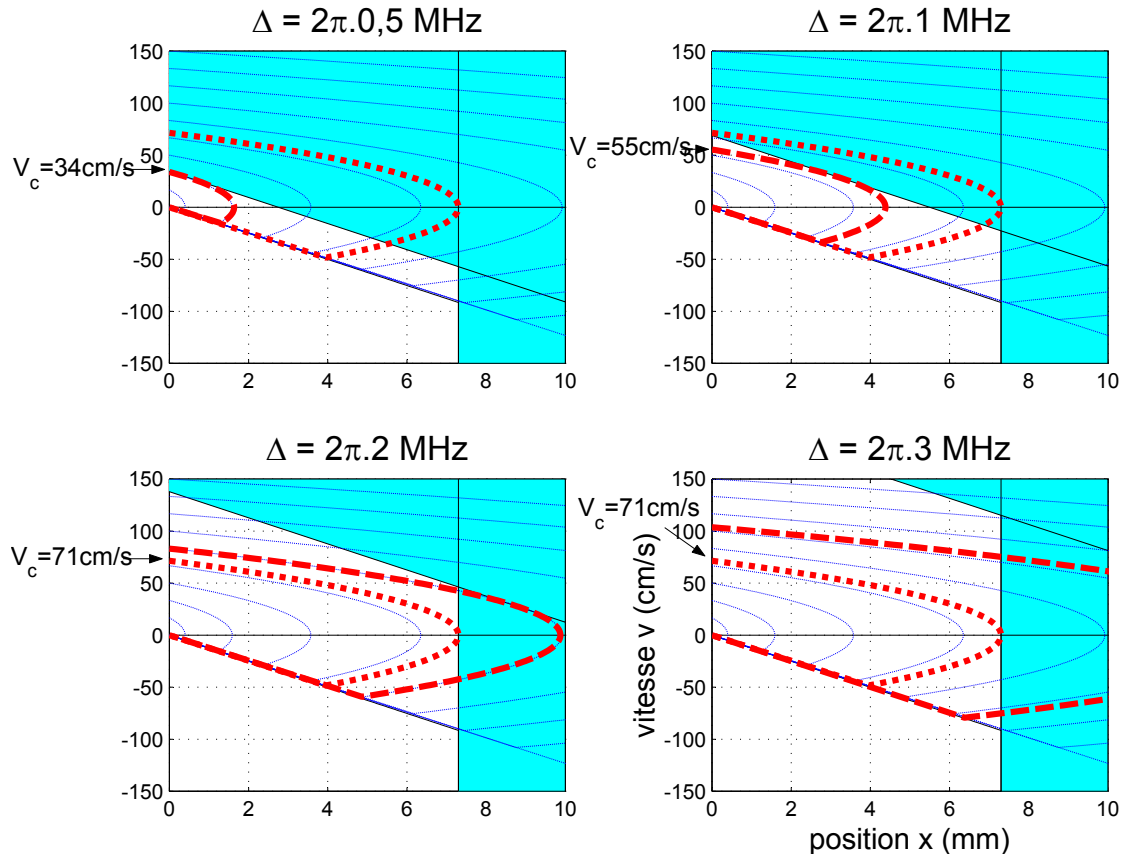


FIG. 4.26 – Trajectoires et limites du piège dans l'espace des phases pour différentes valeurs de  $\Delta$  ( $\mu_G = 0,91$  G/cm)

L'analyse de 4.26, nous permet de reprendre quantitativement la prédiction qualitative faite à partir de la figure 4.5. Pour des faibles valeurs de  $\Delta$ , la vitesse de capture croît quasi-linéairement avec l'excursion  $\Delta$ . Pour  $\Delta = 2\pi \times 1,55$  MHz, les deux vitesses critiques sont égales. Pour  $\Delta > 2\pi \times 1,55$  MHz, la vitesse est constante  $V_c = 71$  cm/s imposée par  $V_w = \sqrt{2aw}$  qui est indépendante de  $\Delta$ .

On peut faire une analyse similaire de 4.27, à comparer à celle de la figure 4.4. Pour de faibles valeurs de  $\mu_G$ , la vitesse de capture  $V_c = 71$  cm/s est imposée

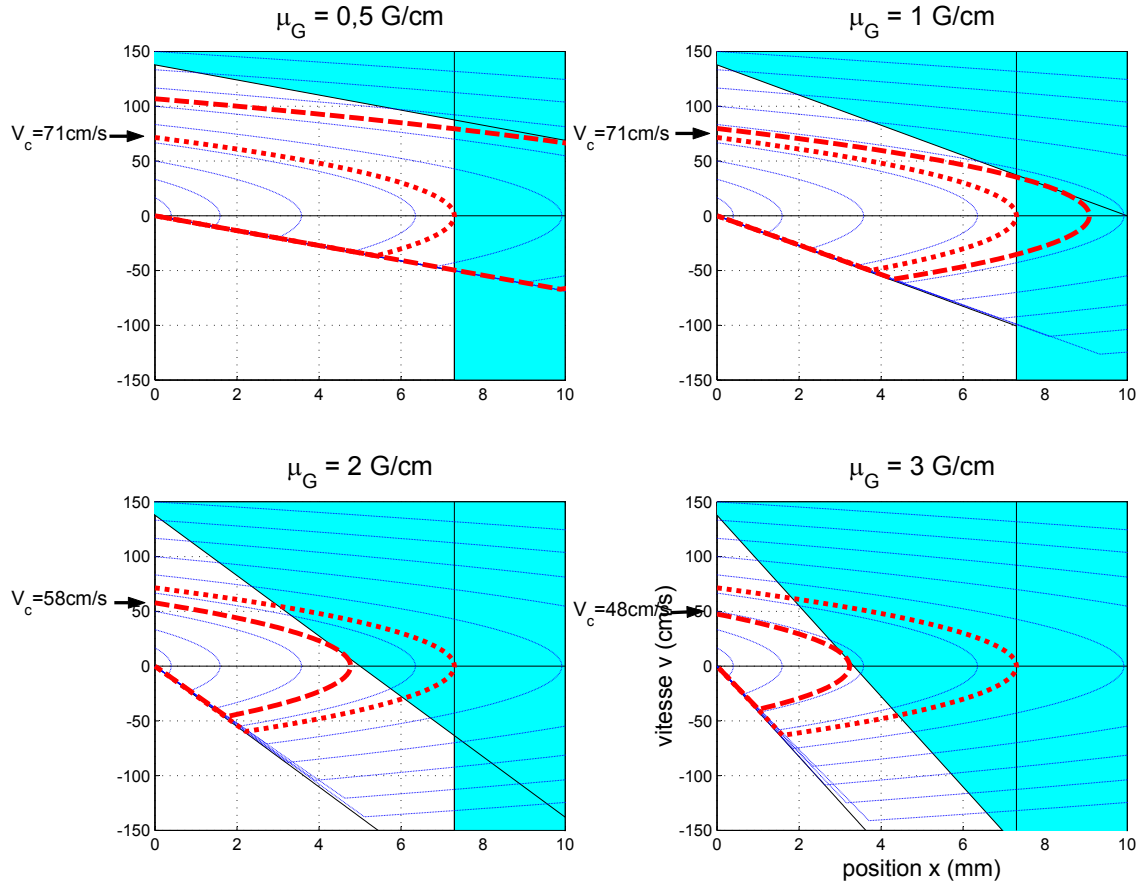


FIG. 4.27 – Trajectoires et limites du piège dans l'espace des phases pour différentes valeurs de  $\mu_G$  ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz)

par  $V_w$ . Lorsque  $\mu_G$  augmente au delà de  $\mu_G = 1,3$  G/cm,  $V_c$  décroît comme

$$\sqrt{\frac{2a\Delta}{\mu_F} - \frac{a^2}{\mu_F^2 \lambda_r^2}}.$$

## Conclusion

Nous avons présenté un modèle simple, qui nous permet de donner une estimation du taux de transfert. L'ensemble des approximations rendant le modèle simpliste, il faut discuter leur validité.

Afin de calculer la vitesse de capture, nous avons considéré les limites du piège comme des bords nets. **Pour le calcul de  $V_\Delta$ , il n'est pas déraisonnable de prendre un bord net pour la force.** Sur la figure 4.2, on constate en effet que la force décroît rapidement sur les bords du spectre. À l'inverse, il est plus discutable de considérer les faisceaux du piège comme une limite franche.

L'intensité décroît en effet lentement à l'échelle de  $w$  et notre assertion est donc une large simplification, puisque  $w$  **n'est pas un bord net**. La formule proposée pour l'accélération (expr. 4.29) tient en partie compte du profil gaussien des faisceaux (par l'intégration 4.26).

Enfin, nous n'avons pas tenu compte de la stabilité du piège lui-même. Nous avons cependant vu que pour des faibles valeurs de  $\mu_G$  (figure 4.16) cela conditionne largement le nombre d'atomes présents après 100 ms. Pour en tenir compte, il faut pouvoir estimer la taille finale du nuage et la comparer au *waist* des faisceaux. C'est ce que nous ferons sommairement en 4.6.

Malgré ces limitations, comme nous allons le voir, ce modèle donne une bonne estimation des taux de transfert mesurés.

### 4.4.3 Confrontation aux résultats expérimentaux

#### Mesure en fonction de $\Delta$

Nous allons reprendre ici les résultats des figures 4.15 (étouffés par d'autres mesures pour des jeux de paramètres différents). Pour chaque courbe,  $s_{1b}$  et  $A_f$  sont gardées fixes et l'accélération dans le cadre de notre modèle est alors fixée.

Un analyse rapide de la figure 4.28 nous permet de faire deux remarques :

- malgré la simplicité de notre modèle, l'estimation donne un ordre de grandeur correct du taux de transfert.
- on reconnaît sur toutes les courbes **une rupture de pente, prédite par notre estimation, qui traduit deux modes de chargement du piège** : « limité par l'excursion » et « limité par le *waist* ».

Plus précisément, pour les paramètres  $s_{1b} = 3$ ,  $A_f = 2\pi \times 20$  kHz (courbe en haut à gauche), notre estimation prédit bien les résultats expérimentaux dans le régime « **limité par l'excursion** » (formule 4.34) pour  $0 \leq \Delta \lesssim 2\pi \times 2$  MHz. Il semble donc que **l'accélération soit correctement estimée au moins dans ce régime**. Comme nous l'avions déjà mentionné, la limite de « bord net » pour l'excursion apparaît plutôt réaliste. Dans ce cas, si l'accélération est effectivement constante, il n'est pas surprenant que notre estimation donne la bonne évolution. Pour  $\Delta \gtrsim 2\pi \times 2$  MHz, nous surestimons visiblement le taux de transfert. La limite de bord net pour le *waist* est beaucoup plus discutable et on aurait pu remplacer le *waist* expérimental par un paramètre ajustable (le *waist* effectif) afin de prédire au mieux les mesures. Nous préférons garder les valeurs mesurées, notre modèle ayant ainsi l'avantage d'être une prédiction *ab-initio*.

Les quatres autres courbes montrent **un désaccord plus flagrant entre les mesures et le calcul**, ceci pour les deux régimes de chargement. Pour les différents jeux de paramètres, il semble bien que l'accélération soit sur-estimée. Cela n'est pas surprenant dans la mesure où **l'on se rapproche des limites de validité du calcul de la force** soit  $A_f/2 \simeq \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$  d'une part et  $A_f \simeq \Gamma_r$  (laser « chirpé ») d'autre part.

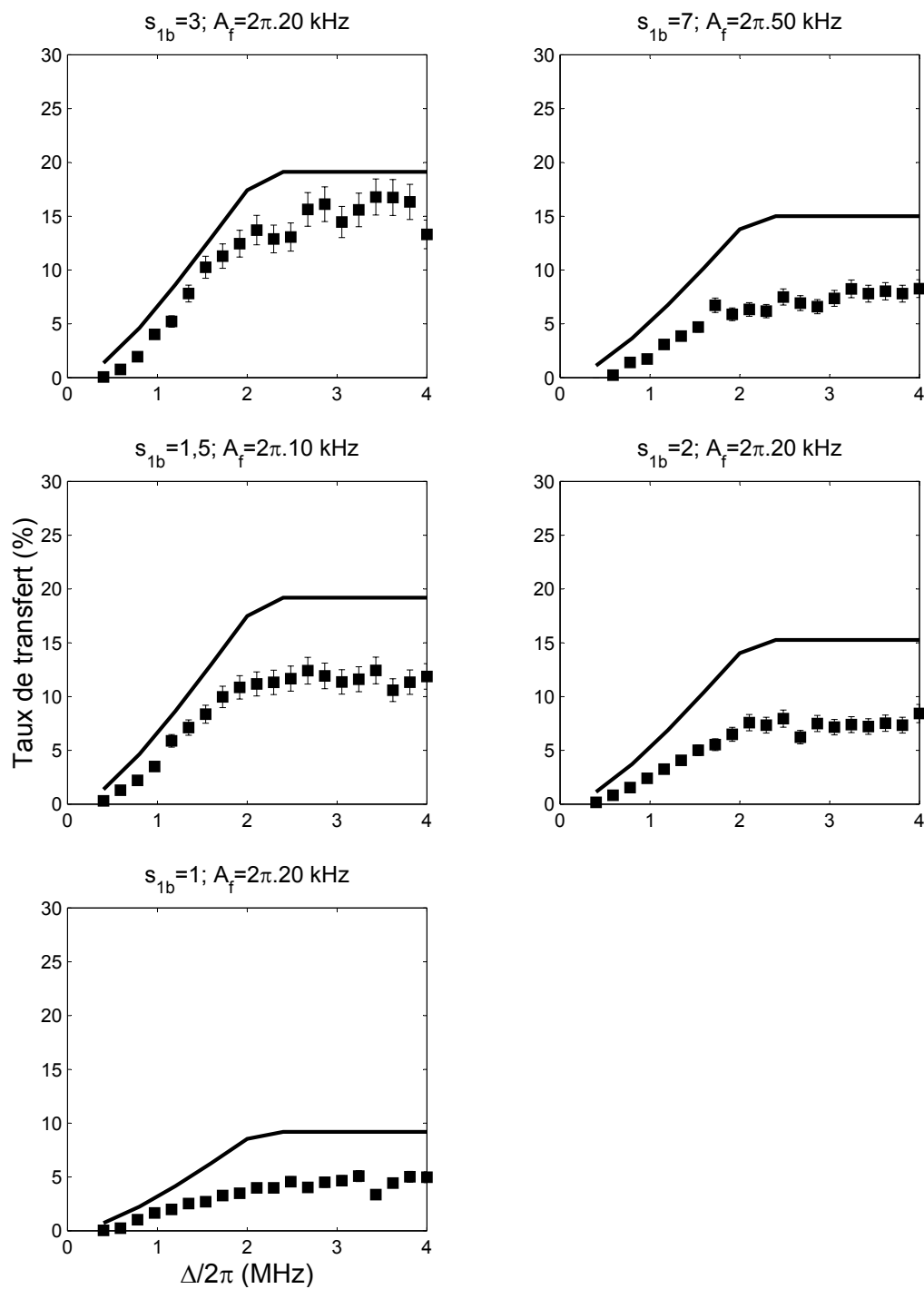


FIG. 4.28 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $\Delta$ . ( $\mu_G = 1,4$  G/cm). En trait plein, notre estimation de  $\tau$ .

En conclusion, dans la gamme de validité de notre approximation, **l'accélération semble bien prédite par notre calcul et  $V_\Delta$  sera en conséquence correctement estimée.**

### Mesure en fonction de $\mu_G$

Dans le régime « limité par l'excursion », on voit sur la figure 4.29 un bon accord des mesures avec nos prédictions pour des valeurs élevées de  $\mu_G$  (qui correspondent à ce régime). On a repris ici les valeurs de la figure 4.16. Avec  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz, l'accélération semble bien prédite dans le cadre de notre approximation (qui est d'autant plus valide que la saturation est forte).

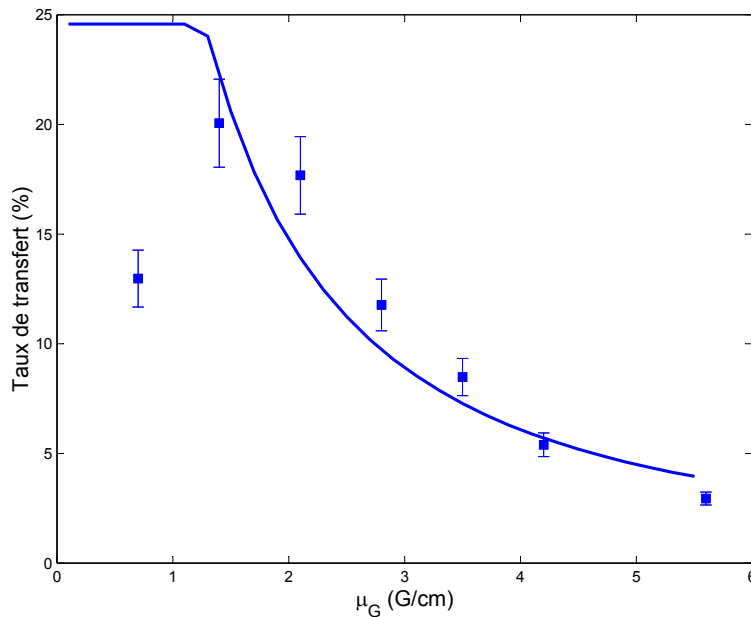


FIG. 4.29 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $\mu_G$ . ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz). En trait plein, notre estimation de  $\tau$ .

On ne voit cependant pas clairement le régime de chargement limité par le *waist*. Comme nous l'avons mentionné, le gradient du champ magnétique est alors trop faible pour assurer la stabilité du piège lui-même. La valeur  $\mu_G = 1,4$  G/cm apparaît comme un optimum expérimental. Pour  $\tau = 20\%$ , cette valeur correspond à un compromis entre la stabilité du piège et un gradient « trop grand » qui diminue la vitesse de capture. Dans le cadre de notre approximation, ce point est aussi à la limite entre les deux régimes de chargement, même si la limitation du transfert par le *waist* n'est pas visible sur la courbe. La valeur  $\mu_G = 1,4$  G/cm est donc assez remarquable.

Elle a déjà été utilisée pour les mesures illustrées par la figure 4.28. Associée à  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz, on est encore dans le régime de chargement limité par l'excursion

pour lequel notre modèle semble bien prédire le taux de transfert. Nous allons garder ces deux valeurs pour regarder l'évolution du taux de transfert en fonction de  $A_f$  pour différentes valeurs de  $s_{1b}$ , qui dans le cadre de notre approximation imposent l'accélération.

### Mesure en fonction de $s_{1b}$ et $A_f$

Sur la figure 4.30, on reprend en partie les courbes 4.17. Pour revenir sur la limite de validité de notre approximation, nous avons représenté en gris clair la zone  $A_f/2 > \sqrt{1 + s_{1b}}\Gamma_r$  et en gris sombre  $A_f < \Gamma_r$  (laser « chirpé »). On y voit de façon générale que **notre estimation est d'autant plus correcte que l'on s'approche de la zone de validité** (quand  $A_f$  décroît). Cet effet est particulièrement visible pour  $s_{1b} = 10$  et  $s_{1b} = 6$ . Avec  $s_{1b} = 3$ ,  $s_{1b} = 2$  et  $s_{1b} = 1$ , on voit pour  $A_f \rightarrow \Gamma_r$  que le taux de transfert décroît à nouveau. Cette décroissance a déjà fait l'objet de l'interprétation de la figure 4.17.

### Conclusion

Malgré la simplicité de notre modèle, il décrit bien les résultats expérimentaux. L'approximation d'une force constante semble pertinente dans la zone de validité prédite lors du calcul de  $a(s_{1b}, A_f)$  car elle explique quantitativement le plupart des mesures.

En conclusion de la partie 4.4.2, nous avons discuté des critères choisis comme limite du piège. Nous avons pris deux limites de bords nets. Le fait que  $V_\Delta$  prédise bien la vitesse de capture pour le régime de chargement limité par excursion n'est pas surprenant. En effet, comme nous l'avons fait remarquer, **le spectre du laser décroît rapidement au delà de l'excursion, ce qui justifie de le prendre comme bord net**. À l'inverse, même si le plateau que l'on voit sur les figures 4.28 décrit qualitativement bien **le régime de chargement limité par le *waist***, **notre estimation est assez significativement en désaccord quantitatif avec l'expérience. Le *waist* n'est effectivement pas un bord net** pour les faisceaux du piège et il n'est donc pas surprenant que l'accord quantitatif soit approximatif.

**Notre modèle ne prend par ailleurs pas en compte le problème de la stabilité du piège.** Cet aspect est visiblement prédominant à faible gradient qui correspond au régime « limité par le *waist* ». **La mauvaise stabilité du piège nous empêche d'atteindre ce régime**, comme nous le dit notre prédiction *a priori*. Il est pourtant possible de s'affranchir de ce problème, ce qui en pratique permet d'augmenter le taux de transfert. C'est ce que nous verrons en 4.5.



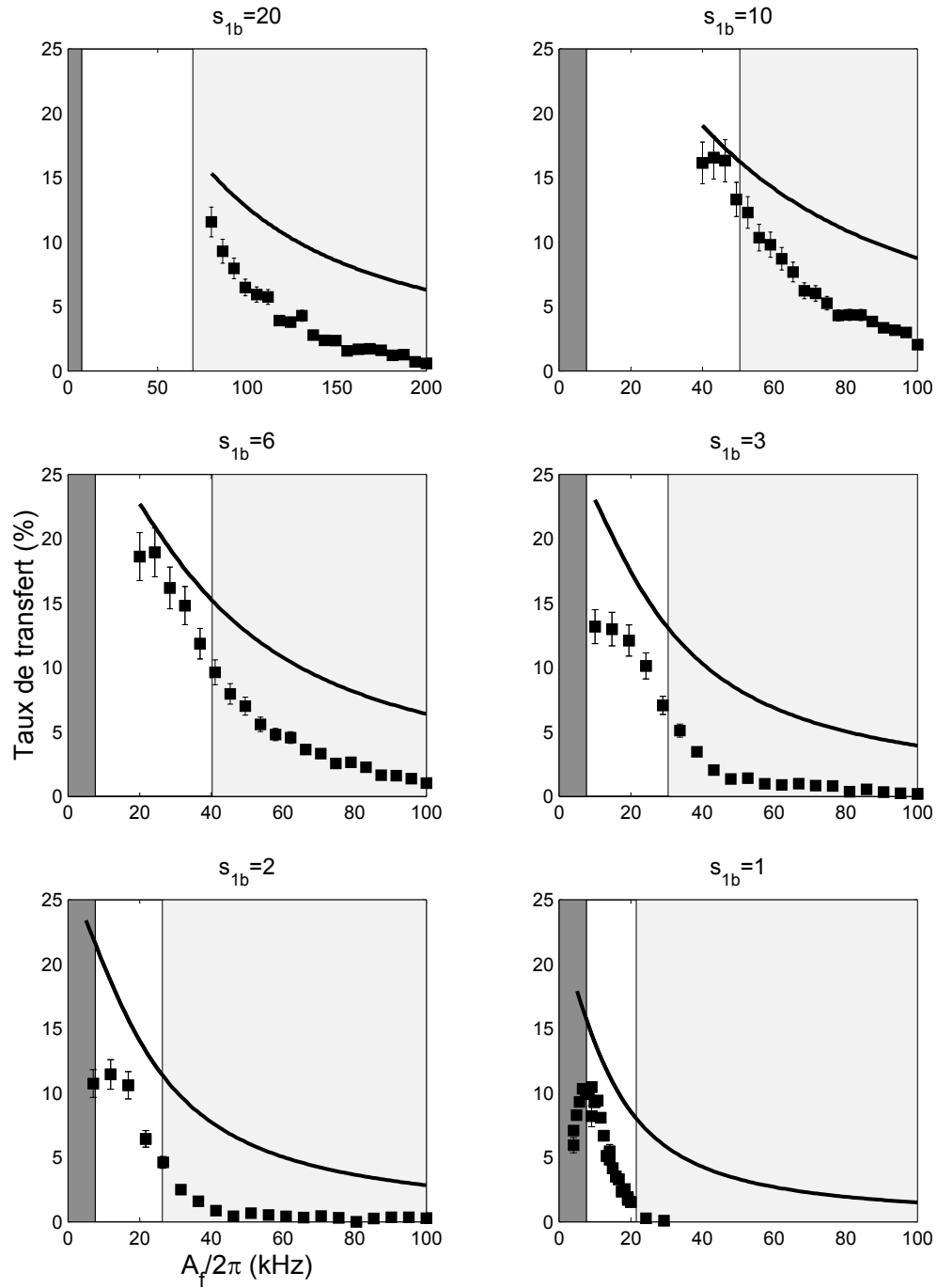


FIG. 4.30 – Mesure du taux de transfert en fonction de  $A_f$ . Les zones grisées correspondent à la zone de validité représentée sur la figure 4.21 ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz et  $\mu_G = 1,4$  G/cm). En trait plein, notre estimation de  $\tau$ .

#### 4.4.4 Proposition d'optimisation des paramètres du potentiel de piégeage

Optimiser le taux de transfert paraît simple : si l'on est dans le régime « limité par l'excursion », il suffit d'augmenter  $\Delta$  ; si l'on est dans le régime « limité par le *waist* », il suffit d'augmenter  $w$ . Ce raisonnement est un peu naïf. Dans les deux cas on diminuera la saturation par bande  $s_{1b}$  et par suite l'accélération puisque la puissance totale disponible est limitée en pratique. Il semble donc qu'**un optimum existe**.

En effet, si le *waist* est très petit, dans ce cas la saturation sera très forte (elle va comme la puissance totale  $\mathcal{P}$  divisée par le *waist* au carré  $w^2$ ) et par suite l'accélération aura sa valeur maximale  $a_{\max}^{1D}$ . Finalement  $V_c \propto \sqrt{a_{\max}^{1D} w}$  pour  $w \rightarrow 0$ . **A contrario**, si le *waist* est grand, l'accélération va décroître. Très grossièrement si elle décroît comme la saturation (ce qui est vrai à faible saturation en principe), alors  $a \propto \mathcal{P}/w^2$  et par suite  $V_c \propto \sqrt{\mathcal{P}/w}$  pour  $w \rightarrow \infty$ . Finalement :

$$V_c \propto \begin{cases} \sqrt{a_{\max}^{1D} w} & \text{pour } w \rightarrow 0 \\ \sqrt{\mathcal{P}/w} & \text{pour } w \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.42)$$

Entre ces deux régimes extrêmes on s'attend à trouver un optimum.

Même si notre modèle décrivant le transfert est simple, il est mal adapté à la résolution d'un problème d'optimisation. Nous ne disposons pas d'une formule analytique pour  $a(s_{1b}, A_f)$  puisque dans la formule 4.29 la moyenne est calculée numériquement. Nous allons chercher une formule approchant notre estimation de  $a(s_{1b}, A_f)$ .

#### Formule analytique approchée pour l'accélération

Nous avons largement interprété la force comme une somme de lorentziennes espacées de  $A_f$  élargies par saturation ( $\sqrt{1 + s_{1b}\Gamma_r}$ ). En observant la figure 4.20, on constate que la force est assez faiblement modulée à forte saturation essentiellement. À partir de cela, on peut faire un développement à l'ordre zéro du paramètre de saturation  $\mathbb{S}(v)$  autour de sa valeur moyenne  $\langle \mathbb{S}(v) \rangle_v$ . À l'ordre zéro, on aura donc une approximation assez simple pour la force :

$$a = a_{\max}^{1D} \left\langle \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)} \right\rangle_v \quad (4.43)$$

$$\simeq a_{\max}^{1D} \frac{\langle \mathbb{S}(v) \rangle_v}{1 + \langle \mathbb{S}(v) \rangle_v} \quad (4.44)$$

Afin de fournir une formule approchée pour la force, il nous faut avant tout estimer  $\langle \mathbb{S}(v) \rangle_v$ , qui est une somme de lorentziennes de largeur  $\Gamma_r$  et d'amplitude

$s_{1b}$  écartées de  $A_f$ . Au lieu d'une lorentzienne. Si l'on suppose qu'il s'agit d'une somme de créneaux, dans ce cas la valeur moyenne est particulièrement facile à calculer :  $\langle \mathbb{S}(v) \rangle_v \simeq \frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}$ . Cette expression n'a aucune justification *a priori*, si ce n'est qu'elle donne la tendance et la bonne dimension pour le paramètre de saturation. Nous avons comparé (fig. 4.31) cette estimation grossière de la force,

$$a \simeq a_{\max}^{1D} \frac{\frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}}{1 + \frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}}$$

avec l'expression 4.29 (où la moyenne  $\langle \dots \rangle_v$  est calculée numériquement). **La cor-**

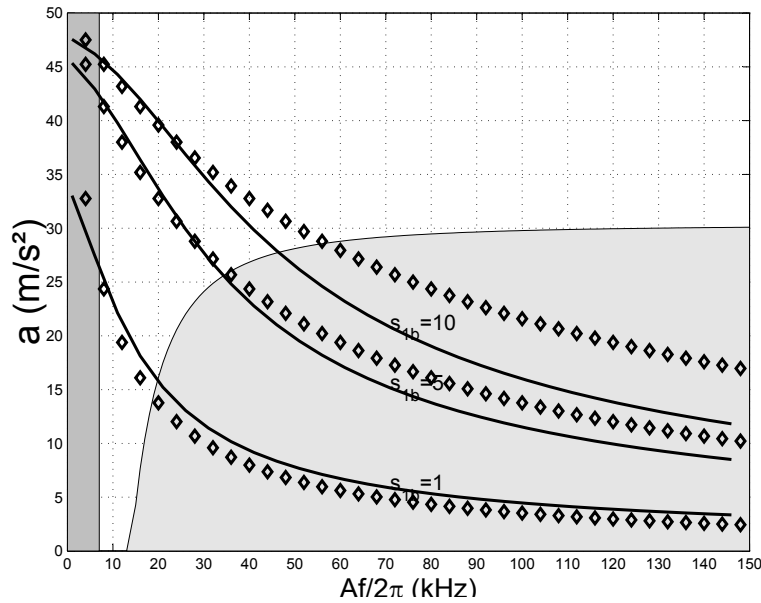


FIG. 4.31 – Comparaison du calcul de la force à partir de la formule 4.29 (traits pleins comparable à la figure 4.21) et de l'expression  $a \simeq a_{\max}^{1D} \frac{\frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}}{1 + \frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}}$  (losanges).

**respondance des deux méthodes de calcul est bonne essentiellement dans la zone de validité de notre approximation « force constante » ; on peut voir cette concordance comme une justification *a posteriori* des approximations. Nous utiliserons donc l'expression analytique.**

$$a \simeq a_{\max}^{1D} \frac{\frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}}{1 + \frac{s_{1b}\Gamma_r}{A_f}} \quad (4.45)$$

Le *waist*, qui est l'élément que l'on cherche à optimiser, n'apparaît pas directement dans l'expression de  $a$ . Il est en fait sous-jacent dans le calcul de  $s_{1b}$ . L'intensité incidente est en effet proportionnelle à cette quantité comme nous l'avons mentionné en introduction. La saturation par bande  $s_{1b}$  est un paramètre pertinent concernant le piégeage. Cela dit, d'un point de vue pratique, c'est la puissance totale pour trois faisceaux ( $\mathcal{P}$ ) que nous contrôlons. Nous allons à partir de maintenant plutôt utiliser les paramètres  $\mathcal{P}$ ,  $A_f$  et  $\Delta$  afin de remplacer  $s_{1b}$  et  $A_f$ .

### Répartition de la puissance disponible

La puissance disponible ( $\mathcal{P}$ ) impose en premier lieu la saturation totale au centre d'un faisceau ( $s_{\text{Totale}}$ ).

$$s_{\text{Totale}} I_{\text{sat}} = \frac{\mathcal{P}/3}{\pi w^2/2}$$

puis

$$s_{1b} = \frac{A_f}{\Delta} \frac{2\mathcal{P}}{3\pi w^2 I_{\text{sat}}} \quad (4.46)$$

On peut maintenant exprimer l'accélération en fonction des paramètres expérimentaux  $\mathcal{P}$ ,  $A_f$  et  $\Delta$  :

$$a = a_{\text{max}}^{1D} \frac{2\mathcal{P}\Gamma_r}{2\mathcal{P}\Gamma_r + 3\pi I_{\text{sat}} w^2 \Delta} \quad (4.47)$$

On retrouve les tendances présentées en introduction pour  $w \rightarrow 0$  et  $w \rightarrow \infty$ . Il faut cependant noter un fait remarquable :  $a$  ne dépend plus  $A_f$ . Ce qui peut paraître surprenant. L'accélération dépend maintenant uniquement de  $\mathcal{P}$  et  $\Delta$  dans le cadre de notre approximation, autrement dit la valeur moyenne de la force ne dépend pas de l'écart entre les pics du spectre. Est-elle pour autant complètement indépendante de  $A_f$  ? En réalité, **le choix de  $A_f$  n'est pas arbitraire** puisqu'on est fortement contraint par le domaine de validité de notre approximation. Pour être dans cette gamme de validité, on devra garder typiquement  $A_f \simeq \sqrt{1 + s_{1b}} \Gamma_r$  avec  $s_{1b} = \frac{A_f}{\Delta} \frac{2\mathcal{P}}{3\pi w^2 I_{\text{sat}}}$ . Le choix de  $A_f$  n'est donc pas arbitraire mais sera donné par l'équation :

$$A_f^2 = \left( 1 + \frac{A_f}{\Delta} \frac{2\mathcal{P}}{3\pi w^2 I_{\text{sat}}} \right) \Gamma_r^2 \quad (4.48)$$

Le choix de  $\mathcal{P}$  et  $\Delta$  impose en fait celui de  $A_f$ . En optimisant la vitesse de capture, on peut maintenant trouver les valeurs de  $\Delta$  et  $w$  qui correspondent au maximum du taux de transfert.

### Optimisation de la vitesse de capture

Si l'on souhaite maximiser la vitesse de capture  $V_c$ , il faudra se placer entre les deux régimes pour à la fois être limité par l'excursion et par le *waist* : supposons par exemple que l'on soit limité par l'excursion : dans ce cas, une partie de la puissance contenue dans le faisceau sera perdue. En diminuant le *waist*, on aurait augmenté le flux incident et par suite l'accélération.

Supposons dans un autre cas de figure que l'on soit limité par le *waist* : de façon analogue, une partie du spectre est donc sans effet sur les atomes (l'excursion est trop grande). En diminuant l'excursion, on augmenterait le flux.

Il s'agit de deux façons différentes de formuler que pour optimiser le chargement il faut  $V_\Delta = V_w$ . On doit donc maintenant **maximiser  $V_c$  sous la contrainte  $V_\Delta = V_w$**  :

$$\boxed{\max_w (V_c) \text{ avec } V_\Delta = V_w} \quad (4.49)$$

La formule fournissant  $V_\Delta$  (expression 4.34) est délicate à manipuler, contrairement à celle de  $V_w = \sqrt{2aw}$ . Concernant  $V_\Delta$ , nous avons cependant montré qu'en utilisant une rampe de champ magnétique, la formule 4.34 devenait simplement  $V_\Delta = \Delta/k_r$  (expr. 4.37). Dans ce cas-là, il est possible de résoudre notre problème d'optimisation.

$$\max_w (V_c) \text{ avec } V_\Delta = \Delta/k_r = \sqrt{2aw} = V_w \quad (4.50)$$

La contrainte  $V_\Delta = V_w$  nous permet en fait d'éliminer  $\Delta$  et de trouver ensuite le *waist* qui maximise  $V_c$ . On cherche :

$$\max_w (V_c) \text{ avec } \Delta = k_r \cdot V_c \quad (4.51)$$

Connaissant l'expression 4.47 de  $a$ , on peut remplacer  $a$  par  $\frac{V_c^2}{2w}$  puis  $\Delta$  par  $k_r \cdot V_c$ . On obtient une équation où  $V_c$  devient une fonction implicite de  $w$  :

$$\boxed{\left(\frac{3\pi I_{\text{sat}} k_r}{2\Gamma_r}\right) w V_c^3 + (\mathcal{P}\Gamma_r) \frac{V_c}{w} = 2a_{\text{max}}^{1D} \mathcal{P}\Gamma_r} \quad (4.52)$$

Nous avons calculé numériquement la fonction implicite  $V_c$  de  $w$ . A partir de l'expression 4.41, nous calculerons le taux de transfert  $\tau$  (fig. 4.32). Très prochainement,  $\mathcal{P}$  agit comme un paramètre. Si l'on fixe  $w$ ,  $V_c$  sera donné par la résolution d'un polynôme de degré trois.

Avant d'analyser la courbe résumons la procédure complète qui nous permet de trouver l'ensemble des paramètres du potentiel de piégeage :

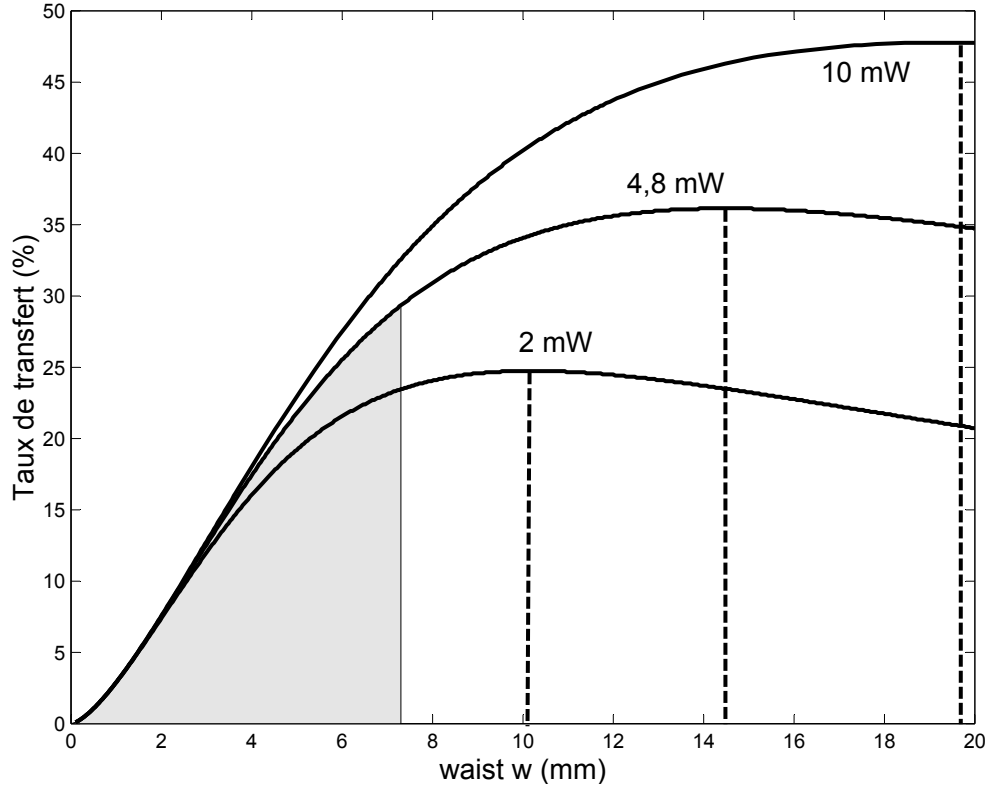


FIG. 4.32 – Calcul du taux de transfert optimal en fonction du *waist* pour différentes valeurs de la puissance disponible (avec  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ ). En gris, la zone de paramètre qui nous sont expérimentalement accessibles : le *waist* est limité à 7,3 mm par l'accès optique de la cellule, la puissance totale du laser est de 4,8 mW.

1. L'équation

$$\left( \frac{3\pi I_{\text{sat}} k_r}{2\Gamma_r} \right) w V_c^3 + (\mathcal{P}\Gamma_r) \frac{V_c}{w} = 2a_{\text{max}}^{1D} \mathcal{P}\Gamma_r$$

nous permet de calculer  $V_c$  comme fonction implicite de  $w$  et de trouver son maximum  $V_c^{\text{opt}}$  pour  $w^{\text{opt}}$ . Si l'on ne peut atteindre  $w^{\text{opt}}$  pour des raisons expérimentales (accès optique par exemple), on prendra alors le *waist* le plus grand possible et on calculera  $V_c^{\text{opt}}$  à partir de la fonction implicite donnant  $V_c$ .

2. On calcule  $\Delta$  à partir de la contrainte  $V_{\Delta} = V_w$  :

$$\Delta^{\text{opt}} = k_r \cdot V_c^{\text{opt}}$$

3.  $A_f$  sera choisi pour satisfaire  $A_f \simeq \sqrt{1 + s_{1b}}\Gamma_r$  en résolvant l'équation

$$(A_f^{opt})^2 = \left( 1 + \frac{A_f^{opt}}{\Delta^{opt}} \frac{2\mathcal{P}}{3\pi(w^{opt})^2 I_{sat}} \right) \Gamma_r$$

Sur la figure 4.32, on voit comme attendu un optimum pour le taux de transfert en fonction du *waist*. De façon générale, le *waist* optimal  $w^{opt}$  est une fonction croissante de la puissance. Il est par exemple de **10 mm pour 2 mW** et de **14,5 mm pour 4,8 mW** (qui est la puissance totale dont nous disposons). Pour notre étude expérimentale, nous avons un *waist* de 7,3 mm, qui est bien inférieur à notre prédiction pour l'optimum. **En pratique, il est très difficile d'utiliser des faisceaux d'un *waist* supérieur à 10 mm**, en ce sens notre analyse est difficile à tester expérimentalement. On peut quand même garder en tête qu'augmenter la puissance du laser n'est pertinent que si l'on peut aussi augmenter le *waist*.

Nous avons fait figurer une zone grisée qui représente notre situation expérimentale ( $\mathcal{P} \leq 4,8$  mW et  $w \leq 7,3$  mm). Le taux maximum attendu est de 29%. Rappelons cependant que nous ne sommes pas dans la situation décrite par le calcul d'optimisation, puisque nous avons en effet supposé utiliser une rampe de champ magnétique afin de pouvoir utiliser la formule 4.37. Cette procédure sera utilisée un peu plus tard, les résultats en seront décrits en 4.5.1.

## Conclusion

Nous venons de fournir un calcul *ab-initio* qui doit permettre de choisir **tous les paramètres du piège** suivant la puissance disponible. Le taux attendu pour une puissance  $\mathcal{P} = 10$  mW est de 48%, ce qui nous permettrait de quasiment doubler le chargement. Cependant, en pratique il est difficile d'utiliser des faisceaux de 19,5 mm pour des raisons d'accès optique dans la cellule.

Si le *waist* est fixé, on se retrouve dans le cadre notre étude systématique. Dans ce cas, la vitesse de capture reste majorée par  $\sqrt{2a_{max}^{1D}w}$ , soit un taux de 38% ( $w = 7,3$  mm et  $V_{RMS} = 80$  cm/s).

Le *waist* est donc un paramètre crucial, même avec une puissance faible  $\mathcal{P} = 2$  mW, il doit avoir une taille typique du *cm*. On a donc dans un premier temps intérêt à le choisir le plus grand possible en fonction de l'accès optique dans la cellule. La puissance n'est plus alors une limitation, on dispose en général de quelques milliwatts qui suffisent à s'approcher de l'optimum.

Notre étude nous permet de prédire le taux de transfert et de fixer tous les paramètres du piège. Au-delà de cette approche théorique, il est possible d'augmenter significativement le taux de transfert en adaptant la procédure expérimentale.

## 4.5 Optimisation expérimentale du taux de transfert

Pour obtenir les résultats présentés en 4.3.2 nous avons choisi de garder les paramètres constants pendant les 100 ms que nous considérons nécessaire au chargement. Cela nous a permis par une étude systématique de dégager les ingrédients physiques qui gouvernent la phase de transfert. En les faisant varier au cours du temps, on peut sans doute optimiser le chargement.

### 4.5.1 Contrôle du gradient du champ

Nous avons déjà traité le cas d'une rampe de champ magnétique en p. 223. Elle simplifie notablement l'étude du régime « limité par l'excursion » puisque dans ce cas la vitesse de capture est simplement  $V_{\Delta} = \Delta/k_r$ . Ce n'est pourtant pas le seul avantage : une rampe nous permet en effet de terminer avec un gradient fort **qui assure au piège d'être stable**. Il apparaît donc naturel de faire croître le champ magnétique à partir de  $\mu_G = 0$  jusqu'à une valeur plus élevée (en pratique quelques  $G/cm$ ).

Pour caractériser la rampe il nous faut ajuster deux paramètres, la valeur finale du champ et la durée de la rampe. Pour la valeur finale, nous avons choisi  $\mu_G = 1,4 G/cm$ , pour laquelle le piège est stable. En pratique, nous avons pu constater que le taux de transfert n'est pas affecté pour des valeurs plus élevées du champ ; ce n'est donc pas un paramètre critique pour le chargement. En ce qui concerne la durée de la rampe, nous avons utilisé une séquence de 50 ms. Il s'agit d'un choix un peu arbitraire, nous avons constaté qu'il faut environ 100 ms pour atteindre le régime final ; nous avons choisi de faire une rampe de champ magnétique durant la moitié de ce temps afin de ne pas être gênés par la stabilité intrinsèque du piège dans la phase finale du chargement.

Nous avons donc utilisé une rampe pour le champ magnétique partant de  $\mu_G = 0$  pour  $t = 0$  jusqu'à  $\mu_G = 1,4 G/cm$  pour  $t = 50$  ms. On réalisera bien la condition énoncée en p. 223 puisque **la pente vaut  $28 G.cm^{-1}.s^{-1}$** , ce qui est en effet inférieur à  $50 G.cm^{-1}.s^{-1}$ . Dans ces conditions, **nous avons obtenu un taux de transfert de 25%**.

Nous pouvons faire essentiellement deux remarques. D'une part, il est possible d'augmenter le chargement par cette technique. D'autre part, il semble que l'on s'affranchisse alors du problème de stabilité du piège puisque dans la phase finale le gradient est suffisamment fort. Dans ce cas ayant  $V_w < V_{\Delta} = \Delta/k_r$ , on sera dans le régime « limité par le *waist* ». Notons par ailleurs que l'on retrouve la valeur prédite par notre estimation (légèrement inférieure à  $25 \pm 3\%$ ), qui correspond à la valeur du plateau sur la figure 4.29.

La rampe du champ magnétique pour le chargement n'a pas fait l'objet d'une étude systématique en fonction des différents paramètres. Elle complète notre



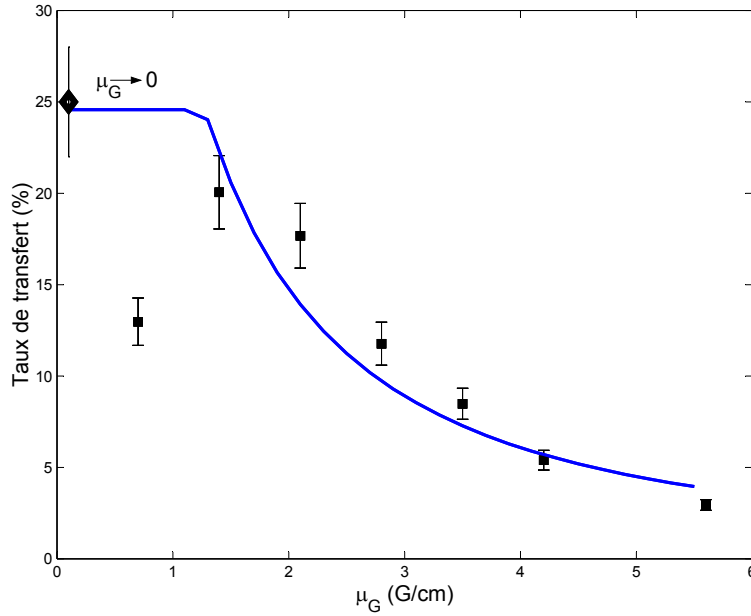


FIG. 4.33 – On reprend ici la figure 4.29. On représente aussi la mesure du taux de transfert avec une rampe de champ magnétique (losange) qui correspond à la situation  $\mu_G \rightarrow 0$ .

analyse et nous permet d'accéder surtout au régime de limitation du transfert par le *waist*, ce qui n'était pas évident à gradient faible. Le gain par rapport au chargement avec gradient constant reste modéré. À la limite de stabilité du piège ( $\mu_G \simeq 1,4$  G/cm), on est en effet déjà proche du régime « limité par le *waist* ». On montre ici qu'il est possible d'atteindre ce régime à gradient faible alors que nous l'avions mis en évidence à forte excursion (fig. 4.28). Si le *waist* était plus grand, on aurait sans doute un gain plus significatif.

Le *waist* est essentiellement imposé par l'accès optique dans la cellule ; ayant par ailleurs une puissance limitée, il nous apparaît maintenant difficile d'explorer d'autres gammes de paramètres. Pour augmenter le taux de chargement, il semble plus prometteur d'agir sur la distribution initiale que sur les paramètres du piège proprement dits.

## 4.5.2 Contrôle de la température initiale

Le taux de transfert  $\tau$  dépend directement de la température initiale donnée par  $V_{\text{RMS}}$ . La vitesse de capture est imposée par les paramètres du piège et vaut 68 cm/s à l'optimum du chargement  $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz soit  $\tau = 25\%$  dans le régime de chargement limité par le *waist* en utilisant une rampe pour le champ magnétique. Autour de cet optimum, nous pouvons étudier l'influence de  $V_{\text{RMS}}$  sur le taux de transfert : à  $V_c$  fixée, on calcule la

variation de  $\tau$  (expr. 4.41).

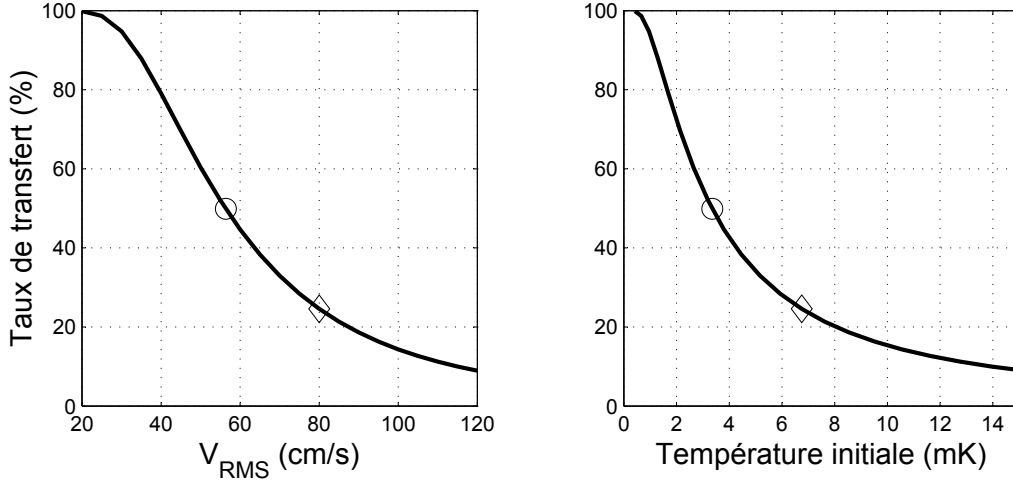


FIG. 4.34 – Taux de transfert en fonction de  $V_{\text{RMS}}$  et de la température initiale ( $M_{Sr} V_{\text{RMS}}^2 / k_b$ ). Les valeurs indépendamment mesurées du taux 25% et de  $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$  (6,7 mK) sont représentées sur la courbe par un losange. Nous avons aussi placé un rond pour la valeur mesurée du taux 50% (en utilisant une rampe décroissante d'intensité), ce qui correspond à une température estimée de 3,3 mK (soit  $V_{\text{RMS}} = 56 \text{ cm/s}$ ).

On voit sur les deux courbes de la figure 4.34, une dépendance forte du chargement avec la température. Il est donc particulièrement intéressant de la diminuer avant de commencer le transfert. Pour ce faire nous avons choisi de faire décroître rapidement l'intensité du piège bleu pour  $t < 0$ . Cette rampe sur l'intensité des faisceaux a été optimisée empiriquement (sa durée et son niveau final le plus bas). L'intensité de saturation totale au centre passe donc de 0,42 pour  $t = -3 \text{ ms}$  à 0 pour  $t = 0$ . Nous avons alors pu noter **une augmentation nette du taux de transfert qui passe de  $25 \pm 3\%$  à  $50 \pm 5\%$ !**

Nous n'avons pas fait de mesure indépendante de la température initiale à  $t = 0$ , nous savons uniquement que la température initiale imposée par le piège bleu est de 6,7 mK ( $V_{\text{RMS}} = 80 \text{ cm/s}$ ). Dans ce cas, nous avons effectivement mesuré un taux de transfert de 25% dans le régime « limité par le *waist* » qui correspond aussi à notre estimation (représenté par un losange sur la figure 4.34). Il n'est pas facile de calculer la distribution des vitesses **après une rampe d'intensité décroissante de 3 ms**. Comme nous l'avons vu en p.105 (fig. 2.11), lorsque l'intensité décroît, on doit tendre vers la vitesse Doppler. En pratique ce n'est pas réalisable avec une rampe décroissante d'intensité car le temps d'amortissement vers le régime stationnaire devient très long à mesure que l'intensité décroît. À la fin de notre séquence de 3 ms, on s'attend donc à une vitesse inter-

médiaire inférieure à 80 cm/s mais qui reste plus grande que la vitesse Doppler (22,5 cm/s).

Un aspect non négligeable, qui intervient sans doute au moins pour l'optimisation empirique de la séquence, est l'expansion spatiale du nuage. En diminuant l'intensité, on décroît aussi la raideur du piège bleu et le nuage s'étale en conséquence. Tant que sa taille reste très inférieure au *waist* des faisceaux du piège rouge on peut négliger cet effet. On peut cependant prévoir qu'elle atteigne quelques *mm* (à comparer au *waist* des faisceaux  $w = 7,3$  mm). Notre approche empirique réalise *a priori* un compromis entre la diminution de température et l'expansion du nuage. Sur la figure 4.34, nous avons placé un second point (rond) qui correspond au taux de transfert de 50% que nous avons mesuré. **La température estimée correspondant à un taux de 50% sera 3,3 mK** (soit  $V_{\text{RMS}} = 56$  cm/s). Cette valeur de  $V_{\text{RMS}}$  est réaliste au vu des mesures indépendantes présentées dans la partie 2.

### 4.5.3 Conclusion

Par deux techniques faciles à mettre en œuvre, nous avons réussi à accroître significativement le taux de transfert. Un meilleur contrôle du gradient du champ magnétique nous permet de nous affranchir des problèmes de stabilité du piège et d'accéder quantitativement aux limites du chargement par le *waist*. Dans un deuxième temps, en faisant décroître l'intensité des faisceaux bleus qui impose largement la température initiale du nuage, nous avons réussi à obtenir un taux de transfert de 50%. **Cette valeur est supérieure aux meilleurs taux observés** (de l'ordre de 40% pour K. Vogel [112]).

Sans doute plus délicat à réaliser, il est possible de répartir différemment la puissance dans le spectre de modulation. On pourra ainsi privilégier les bandes fortement désaccordées qui agissent sur des vitesses plus élevées. Il faut en effet pouvoir transférer sur la porteuse optique un spectre *ad-hoc* au moyen d'un MAO en double passage dont la réponse à une onde RF n'est pas linéaire. Du point de vue technologique, il ne s'agit pas d'un problème simple.

À partir d'une étude systématique et d'un modèle simple nous avons dégagé les différents ingrédients physiques qui gouvernent le transfert du nuage vers le piège rouge. Cette analyse, nous a permis d'expliquer l'ensemble des résultats expérimentaux et de connaître les limitations du chargement. Les améliorations proposées comme une augmentation conjointe du *waist* et de la puissance restent difficiles à mettre en œuvre. Il a été beaucoup plus fructueux de diminuer la température initiale du nuage, ce qui nous a permis de transférer 50% des atomes dans le piège rouge. En ce qui nous concerne, il s'agit d'un premier pas vers la production d'un échantillon dense. Nous nous devons quand même de distinguer le nombre d'atomes final et le taux de transfert. Nous avons en effet travaillé avec un nombre d'atomes initial faible,  $10^7$  typiquement. Il n'est pas évident que l'on conserve un taux de transfert de 50% avec un nombre d'atomes initial plus

important. Nous avons pu observer la forte dépendance du transfert avec la température initiale du nuage. On s'attend à ce que cette température augmente avec le nombre d'atomes [82]. En conséquence le taux de transfert doit décroître. Ne connaissant pas l'exacte dépendance de la température avec le nombre d'atomes, nous ne pouvons extrapoler notre modèle pour prédire le nombre d'atomes final. On peut cependant espérer garder un taux de transfert significatif et ainsi concentrer un nombre important d'atomes dans le piège sur la raie d'intercombinaison.

## 4.6 Étude sommaire du régime final

La dynamique dans un piège sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  est particulièrement riche comme l'a montré récemment T. Loftus [105]. À l'issue de l'étape de chargement, nous ne sommes pas précisément dans cette situation. En effet, le laser présente encore un spectre large (FM) alors que l'essentiel des prédictions [106] considère l'interaction avec un rayonnement monochromatique. Les différentes études expérimentales mettent donc en jeu après l'étape de chargement « large bande », une étape de piégeage et de refroidissement avec un laser monofréquence. Afin de conclure notre étude dans le cas « large bande », nous allons sommairement étudier le régime final à l'intérieur du piège. Cette étude peut être vue tour à tour comme une présentation des limitations du piégeage laser avec un spectre large ou comme une étude préalable au transfert vers un spectre monofréquence.

Notons qu'il est possible de faire un traitement quantique dans le cas d'un spectre large [113]. H. Wallis considère un spectre large idéal, somme finie de composantes d'amplitudes égales (spectre multi-chromatique à bords nets). Les résultats en sont prometteurs : la température est en effet plus basse qu'avec un spectre monofréquence. Il paraît même possible d'effectuer directement le chargement avec un tel spectre et de simplifier ainsi la séquence de temps. Dans l'étude du chargement, nous avons supposé que le spectre FM (fig. 4.18) pouvait être approché par une somme finie de composantes d'amplitudes égales. Dans l'étude du régime final une telle assertion n'est pas réaliste. Les basses températures prédites par H. Wallis [113] sont accessibles lorsque le désaccord est proche de la largeur naturelle de la transition. Avec un spectre issu d'une modulation de fréquence, les composantes du spectre décalées vers le bleu commencent à se recouvrir, comme on l'a vu sur la figure 4.2. Une approche semi-classique semble justifiée pour des désaccords élevés dans le cas d'un spectre monofréquence [105]. Nous allons donc tenter de la généraliser au cas du spectre large issu d'une modulation de fréquence. Nous rappellerons d'abord les résultats de cette approche pour une interaction monochromatique (théorie Doppler). Nous la généraliserons au calcul de diffusion et de friction pour un spectre de modulation. En nous basant sur l'analyse de T. Loftus [105], nous discuterons de l'influence de la gravité sur le coefficient de diffusion. En conclusion, nous comparerons les différents modèles aux mesures expérimentales de la taille du nuage.

Rappelons en préambule que **l'approche semi-classique n'est pas adaptée pour une transition étroite** par rapport à la fréquence de recul. Les résultats de la partie 4.6.1 nous permettent simplement de faire un rappel et de donner quelques ordres de grandeur. Dans la situation large bande, le traitement semi-classique semble mieux adapté puisque le désaccord et l'excursion restent généralement plus grands que la fréquence de recul. Cette approche qui reste plus simple analytiquement devra cependant **être considérée avec précautions** et ne pourra être étendue quelques soient l'excursion et le désaccord.

### 4.6.1 Rappel sur la théorie semi-classique

Cette partie n'est qu'un rappel des principaux résultats de la théorie semi-classique du refroidissement Doppler. Le lecteur pourra en trouver un développement un peu plus détaillé dans le chapitre 2.

Dans le cadre de cette théorie, on considère que l'impulsion ( $P$ ) subit une marche au hasard décrite par un coefficient de diffusion ( $D$ ). Par ailleurs, en linéarisant la force autour de la position d'équilibre, on montre l'existence d'une force de friction. L'équation donnant la dynamique ( $\frac{dV}{dt} = -\gamma V$ ) fait apparaître un coefficient de friction ( $\gamma$ ). La compétition entre diffusion et friction est régie par une équation de type mouvement brownien dont l'état stationnaire définit la température :

$$\frac{dP^2}{dt} = -2\gamma P^2 + 2D \quad (4.53)$$

A l'état d'équilibre, on peut associer une distribution de Maxwell-Boltzmann  $P_{eq}^2/2m = (3/2)k_B T$  où  $P_{eq}^2$  désigne la variance de la distribution des impulsions.

$$T = \frac{D}{3k_B m \gamma} \quad (4.54)$$

Au cœur du modèle, on suppose pouvoir traiter classiquement la position et l'impulsion de l'atome. Cela n'est possible que lorsque la largeur naturelle de la transition est beaucoup plus grande que la fréquence de recul.

On donne généralement une expression analytique des coefficients de diffusion et de friction à faible saturation.

- Pour la diffusion : dans une mélasse 1D, ce coefficient est proportionnel au paramètre de saturation et vaut  $\hbar^2 k_r^2 \Gamma_r \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_r^2}$  ( $I$  est l'intensité par faisceau). On suppose ici que le diagramme de rayonnement est isotrope, ce qui n'est pas réaliste pour une transition  $J = 0 \rightarrow J' = 1$ . Notre étude restant assez sommaire, cette dernière hypothèse n'est pas drastique et permet malgré tout de comparer les différents modèles : monofréquence noté

par l'indice  $mf$ , spectre large indicé  $sl$ . Que l'on généralise à 3D :

$$D_{mf} = 3\hbar^2 k_r^2 \Gamma_r \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_r^2} \quad (4.55)$$

- Pour la friction : à faible saturation, on somme indépendamment les forces exercées par les deux faisceaux de la mélasse. En linéarisant cette somme autour de l'origine, on obtient :

$$\gamma_{mf} = \frac{\hbar k_r^2}{m} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{-8\delta_L/\Gamma_r}{(1 + 4\delta_L^2/\Gamma_r^2)^2} \quad (4.56)$$

On peut maintenant calculer la température à partir de la formule 4.54 :

$$T_{mf} = \frac{\hbar\Gamma_r}{4k_b} \left( \frac{2|\delta_L|}{\Gamma_r} + \frac{\Gamma_r}{2|\delta_L|} \right) \quad (4.57)$$

La dépendance de  $T_{mf}$  avec  $\delta_L$  est tracée sur la figure 4.35. Elle présente un minimum bien connu pour  $\delta_L = -\Gamma_r/2$ , la température est alors de  $\frac{\hbar\Gamma_r}{2k_b} = 180 \text{ nK}$ . Pour une transition étroite cela n'est pas réaliste. La température de recul vaut en effet 460 nK ce qui revient à comparer la largeur de la transition et la fréquence de recul.

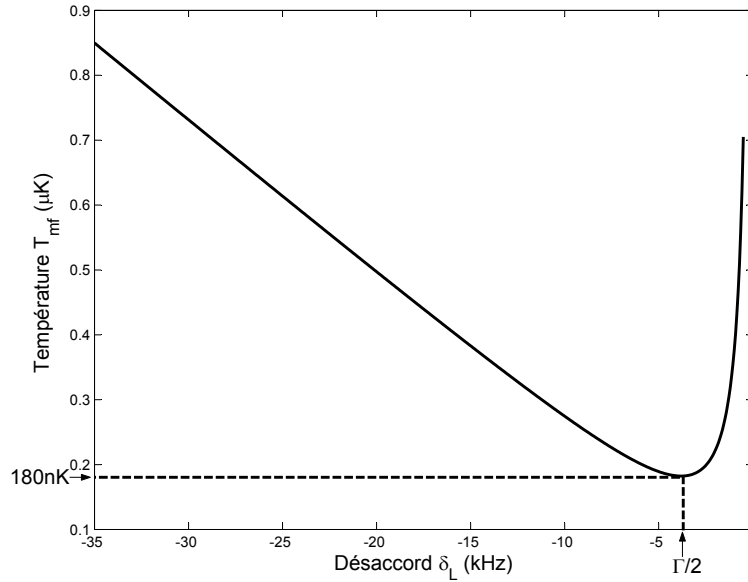


FIG. 4.35 – Température dans le cadre de la théorie semi-classique avec un spectre monochromatique

Avec une interaction monochromatique, les coefficients de diffusion et de friction sont facilement calculables. Cependant, en connaissant l'expression générale de la saturation  $\mathbb{S}(v)$  et de la force, on peut aussi calculer ces deux coefficients dans le cas d'un spectre large.

### 4.6.2 Diffusion et friction pour une interaction large bande

Nous avons déjà fourni une expression pour la saturation  $\mathbb{S}(v)$  et la force (équation 4.11 pour un faisceau) dans un spectre large produit par modulation de fréquence.

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(v) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(l, v) \\ F(v) &= \hbar k_r \frac{\Gamma_r}{2} \frac{\mathbb{S}(v)}{1 + \mathbb{S}(v)}\end{aligned}\quad (4.58)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, il n'est pas *a priori* possible de sommer indépendamment les forces exercées par les deux faisceaux. Cependant si  $\mathbb{S}(v)$  est faible (pour tous  $v$ ) alors il est justifié de sommer  $F(v)$  et  $-F(-v)$  pour trouver la force totale. Plus généralement si  $\delta_L \ll 0$  alors les deux spectres sont bien disjoints et près de l'origine  $\mathbb{S}(v)$  est faible (même si  $\mathbb{S}(v)$  peut être élevé lorsqu'un atome est à résonance avec une composante du spectre). En conclusion, il est possible de sommer  $F(v)$  et  $-F(-v)$  indépendamment soit si  $\mathbb{S}(v)$  est faible (pour tous  $v$ ) soit si  $\delta_L \ll 0$ . Nous ferons une vérification *a posteriori* de cette condition en comparant la largeur de la distribution des vitesses obtenue avec la plage de linéarité de la force totale. Nous garderons donc l'expression de la force 4.11.

On généralise donc l'expression 4.55, en prenant comme paramètre de saturation  $\mathbb{S}(0)$  :

$$D_{sl} = 3\hbar^2 k_r^2 \Gamma_r \mathbb{S}(0) \quad (4.59)$$

La friction sera calculée en linéarisant  $F(v) - F(-v)$  autour de 0. Des exemples de linéarisation de la force sont présentés sur la figure 4.36 pour différentes valeurs du désaccord. Pour calculer  $\gamma_{sl}$ , on ne prendra pas la pente de  $F(v) - F(-v)$  en  $v = 0$  qui est fortement imposée par les pics de la force (espacés de  $k_r A_f$ ). On calculera la pente moyenne (qui ne tient pas compte des pics du spectre) en linéarisant la force sur la plage  $[-\frac{1}{2}|\delta_L|/k_r; \frac{1}{2}|\delta_L|/k_r]$ .

Nous avons utilisé des valeurs réalistes des paramètres du spectre du laser ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz). Regardons plus en détail le cas  $\delta_L = -2\pi \times 100$  kHz. On voit qu'alors les deux spectres se recouvrent en partie. Au voisinage de l'origine l'approximation linéaire a pour effet de lisser les pics encore visibles de la force. Ces pics séparés de  $A_f$  changent peu la forme du potentiel de piégeage.

Il est plus inquiétant de voir que dans la plage de linéarité la saturation est plutôt forte : elle vaut typiquement 1 pour  $v = \pm 5$  cm/s. On est alors en limite de validité du modèle qui n'est valable qu'à faible saturation. Pour des désaccords ( $|\delta_L|$ ) plus grands, dans la partie linéaire la saturation est faible. Il nous faudra alors malgré tout vérifier *a posteriori* que la distribution des vitesses est bien incluse dans la plage de linéarité.

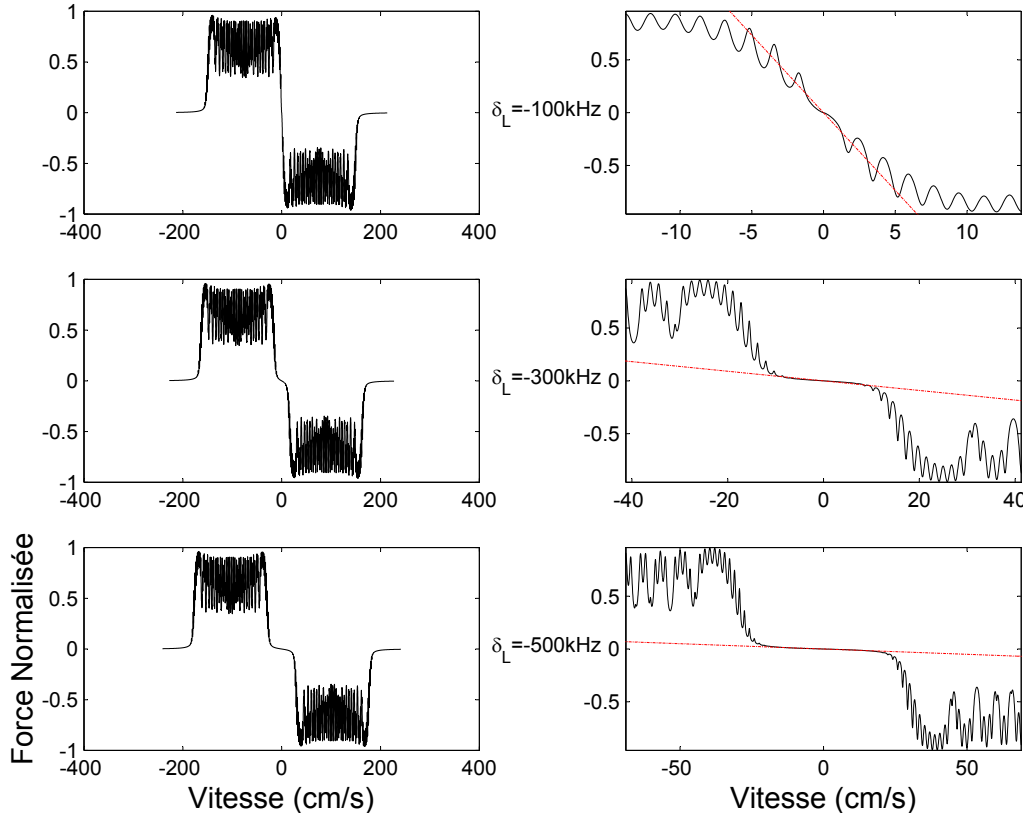


FIG. 4.36 – Exemples de linéarisation de la force pour des paramètres réalistes du spectre du laser ( $\Delta = 2\pi \times 2$  MHz,  $s_{1b} = 7,5$  et  $A_f = 2\pi \times 25$  kHz) avec de haut en bas respectivement  $\delta_L = -2\pi \times 100$  kHz;  $\delta_L = -2\pi \times 300$  kHz et  $\delta_L = -2\pi \times 500$  kHz

Il est finalement possible à partir d'un **calcul numérique d'estimer le coefficient de diffusion (à partir de la saturation) et la friction (en linéarisant la force autour de l'origine)**. N'ayant effectué expérimentalement que des mesures de taille du nuage, il nous faut aussi estimer la constante de raideur ( $\kappa$ ) et supposer l'équipartition de l'énergie sur les différents degrés de liberté.

La dépendance de la force en fonction des décalages Doppler et Zeeman est parfaitement similaire. En conséquence  $\kappa$  et  $\gamma$  seront proportionnels, plus précisément [9, p.158] :

$$\kappa = \gamma \frac{\mu_F}{k_r} \quad (4.60)$$

Le théorème d'équipartition nous permet de relier simplement la largeur de la distribution des vitesses ( $v_x$  taille RMS de la distribution des vitesses selon l'axe<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Nous noterons  $x$  et  $y$  les deux axes horizontaux,  $x$  portant l'axe de bobines du champ



$x$ ) et des positions ( $r_x$ ) :

$$k_B T_x = m v_x^2 = \kappa r_x^2 \quad (4.61)$$

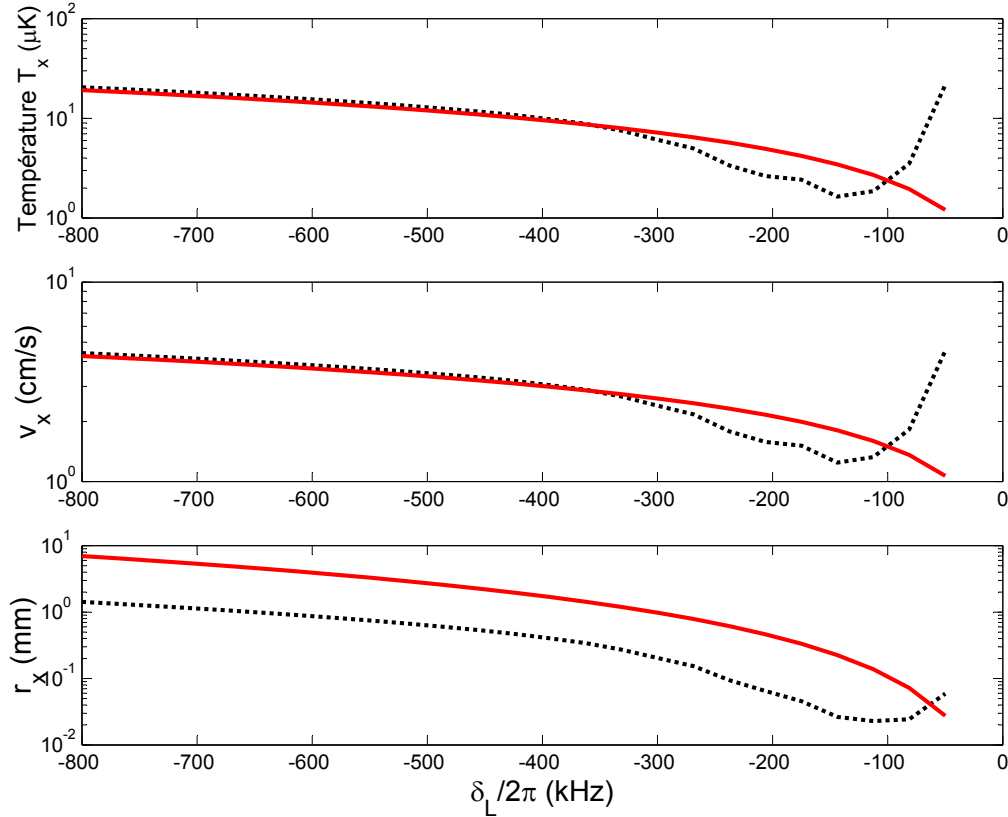


FIG. 4.37 – Comparaison de la théorie semi-classique avec un spectre monochromatique ( $T_{mf}$  en haut en traits pleins) ou un spectre large ( $T_{sl}$  en haut en pointillés) selon le même axe (noté  $x$ ). Nous avons représenté également les largeurs des distributions en vitesse ( $v_x$ ) et en position ( $r_x$ ) pour les deux spectres (monochromatique en traits pleins et spectre large en pointillés).

Pour résumer, nous avons calculé numériquement  $D_{sl}$  (expr. 4.59) et  $\gamma_{sl}$  en linéarisant la force autour de l'origine (fig. 4.36). Le rapport des deux nous donne la température (4.54) et par suite la largeur de la distribution des vitesses. On calcule ensuite simplement  $\kappa_{sl}$  (4.60) puis la taille RMS du nuage (4.61).

La figure 4.37 est une comparaison de la théorie semi-classique avec un spectre monochromatique ou un spectre large. Pour  $\delta_L \lesssim -2\pi \times 100$  kHz, température et vitesse sont très proches pour les deux spectres. Cela n'est pas étonnant à

---

magnétique.  $z$  est l'axe vertical.

la réflexion. En effet, dans le cas du spectre large, quand les deux parties sont bien séparées, la présence d'un nombre élevé de bandes a pour effet d'augmenter la saturation à l'origine (qui reste faible malgré tout). La diffusion et la friction augmentent en proportion. La température étant le rapport des deux, elle est indépendante de la saturation. En conséquence, les températures pour les deux spectres sont peu différentes. *A contrario*, la taille RMS du nuage est proportionnelle à  $T_x/\gamma$  (sachant  $\kappa \propto \gamma$ ). On n'est donc pas surpris qu'à température comparable, les deux spectres ne prédisent pas la même taille du nuage : la saturation est plus importante pour un spectre large ( $\gamma$  aussi dans les mêmes proportions). La taille RMS sera donc plus faible.

Pour  $\delta_L \gtrsim -2\pi \times 100$  kHz, les deux courbes de températures sont très différentes. On peut encore justifier la validité de la théorie Doppler monofréquence : pour  $\delta_L \sim -2\pi \times 100$  kHz un atome à vitesse nulle subit une saturation très faible (pour les valeurs expérimentales de la saturation à résonance). À l'inverse comme nous l'avons vu sur la figure 4.36, les deux parties du spectre large se recouvrent. Comme nous l'avons mentionné, la saturation n'est plus faible et le modèle n'est *a priori* plus valide. On peut malgré tout s'attendre à une augmentation de la température puisque quand  $\delta_L \rightarrow 0$  une partie du spectre « débordera » vers les désaccords positifs, ce qui chauffera le nuage.

**L'interaction avec un spectre large n'est sans doute pas un régime prometteur** en ce qui concerne le refroidissement.

- **À faible désaccord** ( $|\delta_L| \lesssim 2\pi \times 100$  kHz), **la température prédite est plus importante** que pour un spectre monofréquence.
- **À grand désaccord, les deux résultats sont comparables.**

T. Loftus [105] a montré qu'à grand désaccord, la gravité joue un rôle primordial que nous avons pour le moment négligé. Nous allons montrer maintenant qu'elle influence largement le coefficient de diffusion.

### 4.6.3 Influence de la gravité sur le refroidissement

Sur la figure 4.36 apparaît la force normalisée par rapport à son maximum, soit  $m \times a_{\max} = m \times 155$  m/s<sup>2</sup>. Ainsi autour de l'origine ( $-20$  cm/s  $< v < 20$  cm/s), la saturation est typiquement de 0,01 pour  $\delta_L \sim -2\pi \times 500$  kHz et la force sera de l'ordre de  $m \times 1,5$  m/s<sup>2</sup>. On ne peut donc plus négliger l'influence de la gravité.

Il nous faut corriger l'expression de la force **suivant l'axe vertical** : elle vaudra  $F_z(v, z) - F_z(-v, -z) - m.g$  (l'axe  $z$  est orienté verticalement vers le haut). Nous l'avons représentée sur la figure 4.38 en fonction de  $z$  (pour  $v = 0$ ). On constate que la position d'équilibre du piège est non nulle et négative (notée  $z_0$ ). Autrement dit, la gravité « tire » le nuage vers le bas. Si on linéarise la force autour de la position d'équilibre ( $v = 0, z = z_0$ ), on trouve alors un coefficient de friction bien différent de celui calculé autour de l'origine ( $v = 0, z = 0$ ). N'ayant pas mesuré la taille du nuage selon  $z$ , on pourrait naïvement penser que cet effet n'influence pas la taille suivant  $x$ . Il est certes vrai que, la force

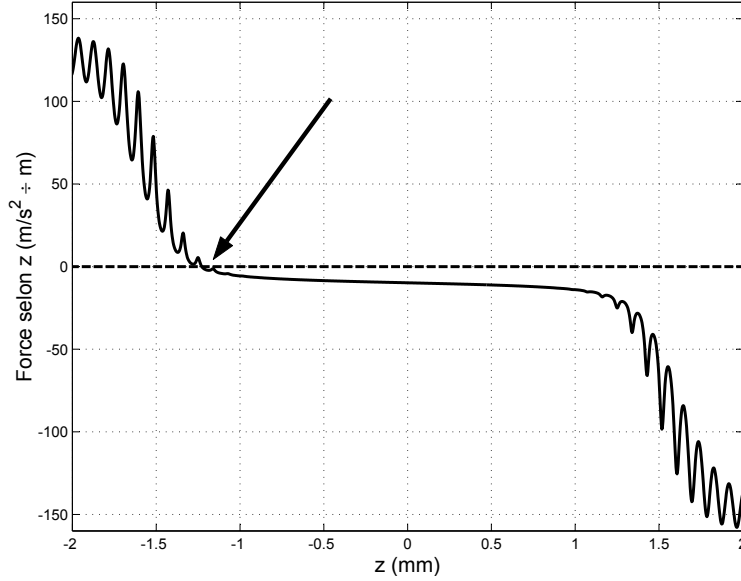


FIG. 4.38 – Influence de la gravité sur la position d'équilibre suivant selon l'axe  $z$ .

$F_x(x, v) - F_x(-x, -v)$  ne dépendant pas de  $g$ , le coefficient de friction est toujours  $\gamma_{sl}$  selon  $x$ . En revanche, le coefficient de diffusion sera largement imposé par la saturation du faisceau orienté selon  $z$  (vers le haut). Nous corrigeons l'expression de  $D_{sl}$  (4.59) pour prendre en compte la saturation suivant les trois axes :

$$D'_{sl} = \hbar^2 k_r^2 \Gamma_r (\mathbb{S}(v=0, z=z_0) + \mathbb{S}(v=0, y=0) + \mathbb{S}(v=0, x=0))$$

$$\boxed{D'_{sl} = \hbar^2 k_r^2 \Gamma_r \mathbb{S}(0, z_0) + \frac{2}{3} D_{sl}} \quad (4.62)$$

D'où  $\mathbb{S}(0, z_0)$  est facilement calculable, d'autant plus que  $|\delta_L|$  est grand. Dans ce cas-là, les deux parties du spectre sont bien séparées. Plus précisément, **la gravité vient compenser la force exercée par le faisceau orienté de bas en haut**. Le faisceau orienté de haut en bas est hors résonance puisque les deux parties du spectre ne se recouvrent pas. L'équation donnant  $z_0$  se résume à :

$$F_Z(0, z_0) = m \cdot g \Leftrightarrow \frac{\mathbb{S}(0, z_0)}{1 + \mathbb{S}(0, z_0)} = \frac{g}{a_{\max}} \simeq \frac{1}{16} \quad (4.63)$$

$\mathbb{S}(0, z_0)$  est alors indépendant du désaccord. Dans l'équation 4.62, **quand  $|\delta_L|$  est grand,  $D_{sl}$  devient négligeable : le coefficient de diffusion reste alors constant et imposé par la gravité**. On attend donc des températures  $T'_{sl}$

plus élevées car la friction continue à décroître. Sur la figure 4.39, on compare la température et la taille du nuage suivant  $x$ . En pointillés, on retrouve la courbe de la figure 4.37 pour laquelle la diffusion  $D_{sl}$  ne tient pas compte de la gravité. En traits pleins,  $D'_{sl}$  est calculée à partir de l'expression 4.62.

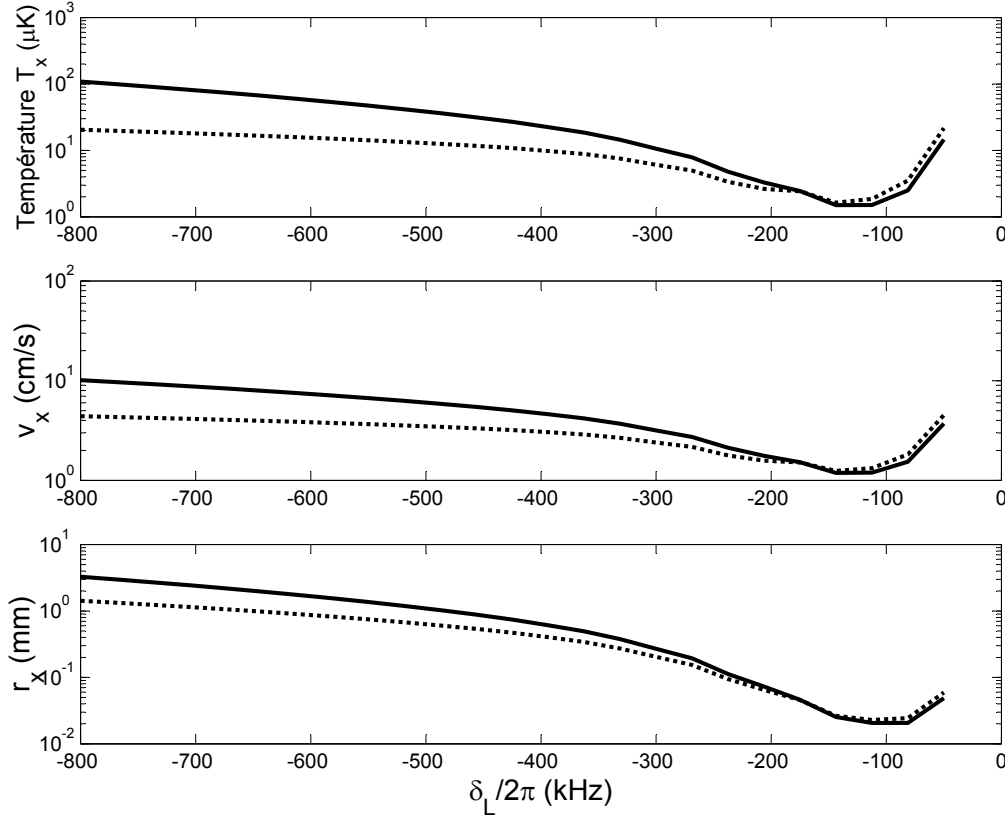


FIG. 4.39 – Influence de la gravité sur la température suivant les axes horizontaux. En pointillés :  $D_{sl}$  (voir fig. 4.37) ; on ne tient pas compte de la gravité. En traits pleins :  $D'_{sl}$  (expr. 4.62).

En définitive, la gravité a une grande importance. **À grand désaccord, elle impose une température élevée.** Le nuage soumis à des forces radiatives plus faibles descendra, il est alors en lévitation grâce à la force exercée par le faisceau orienté vers haut. **Le taux de diffusion est alors largement imposé par ce phénomène et devient indépendant du désaccord.** Afin de valider ce modèle, nous avons effectué des mesures de taille du nuage.

#### 4.6.4 Comparaison aux mesures de taille

Nous avons en effet fait des mesures de la taille RMS du nuage suivant un axe horizontal ( $x$ ) présentées sur la figure 4.40 (losanges). Nous y avons reporté  $T'_{sl}$

et  $T_{sl}$  (déjà présentées sur la figure 4.39) ainsi que les tailles et vitesses attendues pour les deux modèles.

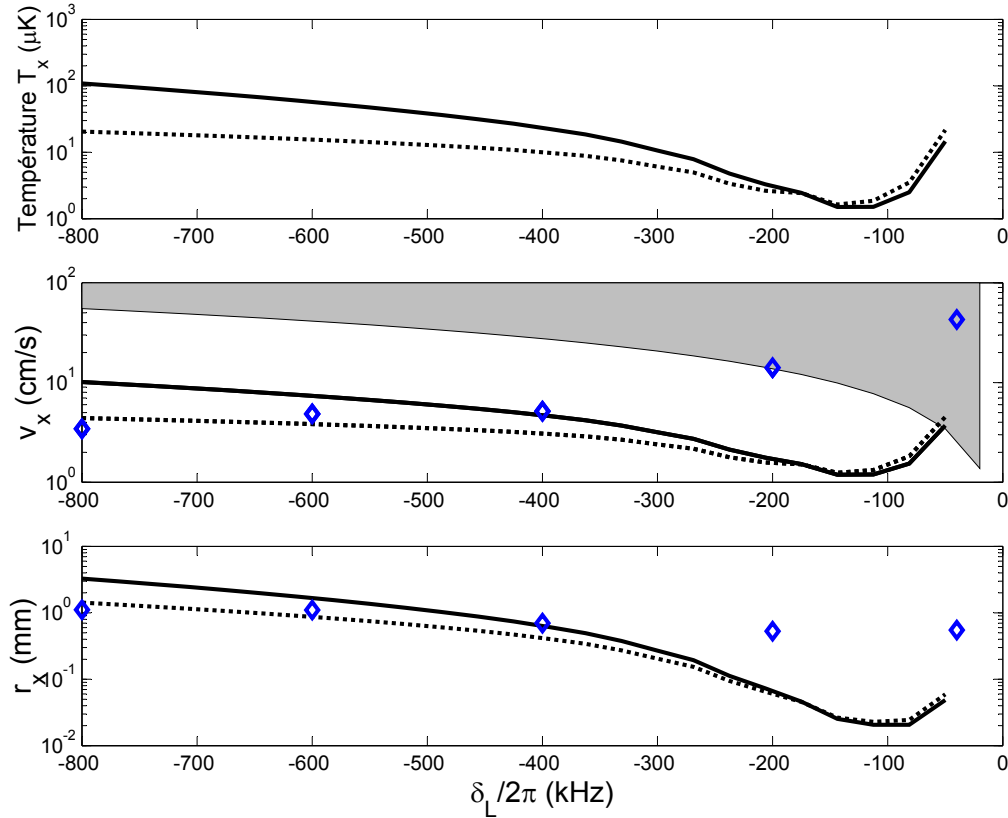


FIG. 4.40 – Nous reprenons ici les courbes de la figure 4.39 : en négligeant la gravité (en pointillés) et en l’incluant (traits pleins). Les losanges représentent les mesures expérimentales de la taille RMS du nuage. À partir de la valeur calculée de la constante de rappel et du théorème d’équipartition, elles sont comparées aux prédictions de la vitesse RMS. La partie grisée représente la limite de la zone de linéarité de la force : nous avons choisi la limite  $v_x > |\delta_L|/k_r$ . Hors de cette zone, on ne peut définir un coefficient de friction indépendant de la vitesse.

Même si les deux modèles donnent un ordre de grandeur réaliste pour la taille du nuage, on constate des différences notables avec nos prédictions.

Essentiellement à faible désaccord, la taille est beaucoup plus importante que prévue. Afin de vérifier la validité de notre modèle *a posteriori*, nous avons fait figurer une zone grisée pour laquelle la largeur de distribution est plus large que la plage de linéarité de la force autour de l’origine (fig. 4.36). Pour nous fixer un critère, nous avons choisi la zone  $[-|\delta_L|/k_r; |\delta_L|/k_r]$  comme plage de linéarité. Hors de cette intervalle, on est confronté à un double problème. D’une part, la force ne peut plus être considérée comme linéaire. Il faudra pousser le

développement à un ordre supérieur ( $\gamma$  est le coefficient du premier ordre) puis généraliser l'équation 4.53. D'autre part au delà de la gamme  $[-|\delta_L|/k_r; |\delta_L|/k_r]$ , la saturation augmente rapidement jusqu'à des valeurs élevées et on ne peut plus sommer indépendamment  $F(v)$  et  $-F(-v)$ . Pour ces deux raisons, on doit prendre la théorie énoncée plus haut avec précautions. On s'attend cependant à avoir des températures plus élevées, **typiquement quelques dizaines de  $\mu K$** .

L'accord à grand désaccord est un peu plus satisfaisant. Il est en revanche surprenant de voir que les points expérimentaux suivent plutôt la courbe en pointillés, pour laquelle on ne tient pas compte de la gravité. Il est malheureusement difficile de conclure de façon certaine sur la tendance expérimentale. À désaccord élevé, le nuage est visiblement largement déformé.

Pour  $\delta_L = -2\pi \times 800$  kHz, l'image du nuage montre une large anisotropie dans les directions  $x$  et  $y$  (fig. 4.41).

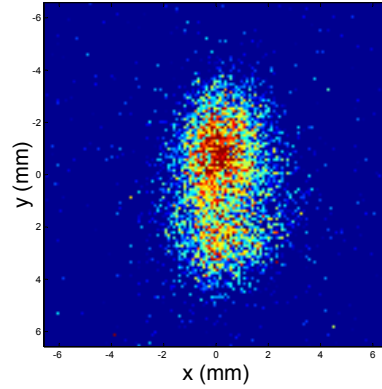


FIG. 4.41 – Image du piège pour  $\delta_L = -2\pi \times 800$  kHz. On observe une forte anisotropie.

Si l'on prend en compte la gravité, la taille attendue est  $r_x = 3,3$  mm. Nous mesurons  $1,1 \text{ mm} \pm 0,3 \text{ mm}$ . Deux explications sont possibles. D'une part, les forces mises en jeu étant alors très faibles, on peut imaginer qu'un léger déséquilibre entre les deux côtés de la mélasse suffisent à déplacer le nuage. On peut prévoir qu'il sera alors localisé sur des tailles plus petites que celle prédite par le modèle. D'autre part, il nous faut comparer  $3,3$  mm à la taille du piège  $7,3$  mm. Les deux étant du même ordre de grandeur, on peut donc penser que la taille mesurée soit imposée par la taille finie des faisceaux. Notons que le nuage est alors très étendu suivant  $y$ . Cela n'est pas étonnant puisque que la constante de rappel suivant  $y$  est deux fois plus faible que celle suivant  $x$  (axe de la bobine). On attend donc suivant  $y$  une taille de  $\sqrt{2} \times 3,3$  mm, plus proche de la taille des faisceaux. Les atomes peuvent alors fuir préférentiellement dans cette direction. À cause de ces deux limitations expérimentales, il est en définitive très délicat d'interpréter les résultats à grand désaccord.

### 4.6.5 Récapitulatif

L'interaction avec un spectre large bande est un passage obligé au moins dans la phase de chargement. Concernant le régime final, il diffère notablement du régime monofréquence à faible désaccord : en effet, le bord du spectre n'est pas un bord net. La présence de composantes spectrales proches de résonance a pour effet d'augmenter fortement la diffusion de photons. Les températures attendues seront de plusieurs dizaines de microkelvins.

À grand désaccord, on voit peu de différences dans les prédictions pour les deux spectres (fig. 4.37, en négligeant la gravité). Ce n'est cependant pas le régime le plus intéressant, puisque la taille et la température du nuage sont grandes.

On peut cependant voir notre étude comme préalable au transfert vers un spectre à bords nets. Un spectre monofréquence a montré des résultats particulièrement remarquables [19]. Nous comptons plutôt nous tourner vers une interaction large bande avec des bords nets. Les prédictions théoriques [113] mettent en évidence un affinement de la distribution des vitesses par rapport à une excitation monochromatique. La présence de plusieurs bandes dans le spectre assure un repompage (en impulsion) des atomes vers les vitesses faibles. Il est en théorie possible d'utiliser un spectre à bords nets pour la phase de chargement ; on se rapproche ainsi du spectre simplifié (fig. 4.18) considéré lors de notre étude analytique. En pratique, il n'est pas facile de produire un spectre avec des bords abrupts. Il s'agit d'un point technologique qui sort du cadre de notre étude.

## Conclusion

La largeur de la raie d'intercombinaison  $2\pi \times 7,6$  kHz est un excellent compromis du point de vue du piégeage sur cette transition. Elle est suffisamment étroite pour pousser le refroidissement jusqu'à ces limites. Elle reste par ailleurs assez large pour exercer une force conséquente, c'est à dire compenser la gravité dans un premier temps et assurer un chargement significatif dans le piège. Notons aussi que le temps typique de la dynamique du chargement dans le piège est la dizaine de millisecondes. Hormis la stabilisation du laser à l'échelle de la largeur naturelle, les techniques mises en jeu sont connues et diffèrent en apparence peu des techniques habituelles du refroidissement laser.

À partir d'un modèle analytique simple du chargement du piège, nous avons interprété la plupart des résultats expérimentaux. Les deux procédures détaillées en 4.5 permettent d'optimiser significativement le transfert. L'utilisation d'une rampe de champ magnétique n'apporte pas d'augmentation flagrante du nombre d'atomes mais permet un bon contrôle de la stabilité du piège même. Il sera toujours avantageux de finir à gradient fort si l'on souhaite tout spécialement obtenir une densité élevée. Plus marquant sans doute, on assure un taux de transfert de 50% par une simple décroissance de l'intensité des faisceaux avant de transférer le nuage dans le piège rouge. Ceci est directement lié à une réduction de la température du nuage dans la mélasse bleue jusqu'à  $V_{\text{RMS}} = 56$  cm/s selon notre estimation. On ne sera pas surpris par cette valeur au vu de l'analyse du chapitre 2. Cette technique avait déjà été mise en œuvre par K.R. Vogel [112], ce qui a permis de transférer environ 40% des atomes dans le piège. La différence avec notre dispositif est la taille des faisceaux : le *waist* est en effet un paramètre crucial du transfert. Comme nous l'avons vu en 4.4.4, on dispose sans peine d'une puissance suffisante (quelques milliwatts) pour atteindre une taux de transfert conséquent même avec un *waist* grand. En pratique, il sera limité par l'accès optique dans la cellule.

Le chargement du piège est une étape importante puisqu'elle conditionne directement le nombre d'atomes dans le piège. Elle n'est pourtant pas une fin en soi. Nous cherchons en ce qui nous concerne à augmenter la densité. L'effort actuel se porte sur la réalisation du protocole proposé par H. Wallis [113]. Le nuage est alors en interaction avec un spectre large bande à bords nets. En ce qui concerne la dynamique des atomes, ce type de potentiel est particulièrement intéressante puisque pour résumer il intègre les caractéristiques du spectre FM (large bande) sans en posséder les inconvénients dans le régime final. Plus précisément, les meilleurs résultats aussi bien pour la densité que pour la température sont obtenus pour une interaction avec un spectre monochromatique. Lorsque que l'on décroît le désaccord  $|\delta_L|$ , comme le spectre FM n'a pas de bords nets, ses composantes viennent interagir « petit à petit » avec les atomes. On assiste alors à une augmentation de la température (fig. 4.37) bien avant d'atteindre le désaccord optimal correspondant au refroidissement monofréquence qui reste proche de  $\Gamma_r$ .



On contourne cet inconvénient avec un spectre large à bords nets.

L'utilisation d'un spectre large n'est pas uniquement nécessaire pour le chargement. Elle est aussi prometteuse pour l'état stationnaire dans piège. L'interaction avec un spectre monofréquence reste en effet limitée. La distribution des vitesses n'est en effet pas toujours normalisable quelque soit le désaccord. Lorsque que ce dernier est trop faible (de l'ordre de 10 kHz), sous l'effet du recul les atomes peuvent se retrouver hors de résonance. La plage de capture est en effet très faible par rapport à la fréquence de recul. Ce n'est plus le cas avec un spectre large bande à bords nets : même si un atome s'écartent de résonance sous l'effet du recul, la présence de nombreuses composantes du spectre devrait permettre de le conserver dans le piège. Le calcul de H. Wallis [113] montre alors des températures plus faibles que dans la cas monofréquence. La réalisation technique d'un spectre à bords nets n'est pas complètement évidente et demande un dispositif électronique adapté. Ce travail est en cours de réalisation. Il devrait alors être possible directement de charger et de refroidir le nuage dans un spectre large à bords nets avec des performances optimisées pour les deux phases.

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons présenté les résultats obtenus avec un nuage de strontium refroidis par laser. Tournés vers l'étude des effets de localisation, nous avons étudié les conséquences de la saturation de la transition sur le transport cohérent. En observant la décroissance du facteur d'amplification de la rétrodiffusion cohérente lorsque la saturation augmente, on peut conclure que la diffusion inélastique est bien un processus de *dephasing* [40]. La longueur de cohérence sera donc réduite à forte intensité. Ce processus inélastique est subtil puisqu'il ne dépend pas uniquement du paramètre de saturation mais aussi du désaccord laser. Il est pour le moment difficile de prédire l'influence de ce phénomène à forte densité. Les calculs actuels, résultats de l'approche perturbative « deux atomes dans le vide », même s'ils sont grandement restrictifs, permettent de prédire quantitativement la réduction de la hauteur du cône. Il est difficile d'y inclure l'influence du milieu qui modifie l'indice effectif pour la propagation ainsi que la réponse d'un atome au point considéré. Des calculs numériques sont en cours pour prendre en compte cet effet.

De façon un peu moins reliée à l'étude du transport, nous avons ensuite mené une analyse systématique du refroidissement dans le cadre de la théorie Doppler. Même si l'on a vu que la température de l'échantillon peut avoir une influence sur le transport cohérent, nous n'avons pas spécialement décidé de tester le régime de brisure dynamique. Cela demande en l'occurrence de chauffer le nuage, ce qui reste délicat si l'on souhaite garder l'épaisseur optique constante. Nous avons en effet plutôt essayé de comprendre le désaccord flagrant entre les mesures expérimentales et la prédiction théorique. **Le modèle de chauffage supplémentaire simple et original que nous proposons permet d'expliquer l'ensemble des résultats.** À partir d'une bonne compréhension du phénomène, **nous avons pu réduire la température** ( $\sim 3$  mK) même si l'on reste loin de la limite du refroidissement Doppler ( $\sim 0,5$  mK).

Comme on l'a vu finalement, **la température du nuage est un paramètre critique lors du transfert du nuage vers un piège sur la transition d'intercombinaison.** La dernière partie est dédiée à l'étude de son chargement. Le résultat final en est un taux de transfert conséquent, ce qui nous permet de **charger 50% des atomes dans le piège rouge.** Plutôt que de développer une simulation numérique du chargement, nous avons préféré comparer le résultat

des mesures à un modèle analytique simple. Cela nous permet d'avoir une bonne compréhension des limitations du chargement. Cette étape est un premier pas vers l'utilisation d'un échantillon dense et froid.

À ce stade, la proposition de H. Wallis [113] semble particulièrement séduisante. À partir d'un spectre large avec des bords nets, qui demande un bon contrôle de la modulation radio-fréquence envoyée au modulateur acousto-optique, il est possible d'optimiser les performances du piège. On dispose d'une part d'une large plage de capture. D'autre part, il est possible de mettre les atomes en interaction avec le bord du spectre : les performances sont alors comparables au cas monofréquence. Les performances attendues sont très intéressantes du point de vue de la localisation des photons dans l'échantillon. En ce sens-là, le strontium est élément remarquable.

On a vu en premier lieu que pour l'isotope 88, l'absence de dégénérescence du niveau fondamental permet d'obtenir un contraste maximal des interférences. Dans un second temps, les densités obtenues ( $10^{12}$  atomes/cm<sup>3</sup>) après piégeage sur la transition d'intercombinaison devraient permettre d'approcher le régime de localisation forte. Même s'il paraît difficile de franchir le critère de Ioffe-Regel, il semble possible d'observer des effets précurseurs. Outre l'élargissement du cône de rétrodiffusion qui traduit l'augmentation de densité, il sera sans doute possible de mettre en évidence de la diffusion récurrente [25]. À forte densité, les chemins de diffusion multiple incluant des boucles deviennent non négligeables. Une analyse fine du sommet du cône de rétrodiffusion permet de mettre en évidence ce phénomène précurseur à la localisation. On peut aussi choisir d'exploiter l'aspect « basse température » de l'échantillon.

Le nuage à une température proche du recul peut aussi être considéré comme une source partiellement cohérente d'onde de matière [115]. L'utilisation d'onde matérielle permet par exemple d'observer la transition métal-isolant pour une gaz de bosons en interaction [116]. Il semble alors possible d'observer la transition de phase vers la localisation d'onde de matière à l'intérieur d'un milieu désordonné comme une figure de speckle.

Le chargement du piège sur la transition d'intercombinaison n'est pas une fin en soi. Il constitue plutôt le premier pas vers la production d'un échantillon particulièrement bien adapté à l'étude du transport cohérent des photons ou, ce qui est sans doute plus ambitieux, des ondes de matière.

# Annexe A

## Refroidissement Doppler - Formules générales

Nous avons rappelé sommairement en 2.1.2 l'expression générale du coefficient de friction et de diffusion dans une mélasse 1D. Nous avons vu aussi que la température dépend de la polarisation des faisceaux (fig. 2.12). Afin de résumer les formules caractéristiques pour différentes polarisations, nous les rassemblons donc en annexe :

1.  $lin \parallel lin$  désigne les polarisations des deux faisceaux lorsqu'elles sont linéaires et parallèles. On a alors une onde stationnaire.
2.  $lin \perp lin$  désigne les polarisations des deux faisceaux lorsqu'elles sont perpendiculaires. Ce cas est parfaitement similaire au cas des polarisations circulaires croisées  $\sigma^+ - \sigma^-$ .

Rappelons l'expression du paramètre de saturation :

$$s = \frac{I/I_{sat}}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2}$$

### A.1 $lin \parallel lin$

Friction :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{-2\delta_L/\Gamma_b}{(1 + 4s)^{3/2}} \left( \frac{4s(1 + 2s)}{1 + 4\delta_L^2/\Gamma_b^2} - 1 - 6s - 6s^2 + (1 + 4s)^{3/2} \right) \quad (\text{A.1})$$

Diffusion :

$$\begin{aligned}
 D = \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{1}{32(1+4s)^{3/2}} \times & \left[ (1+4s)^{3/2} \left( 16s(1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2) + 96\delta_L^2/\Gamma_b^2 + \frac{16}{5} \right) \right. \\
 & - 32(3+20s)\delta_L^2/\Gamma_b^2 \\
 & + 16s^2 \left( \frac{4}{1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2} + 11 - 15(1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \right) \\
 & \left. - \frac{16}{5}(1+4s) \right] \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

## A.2 $lin \perp lin$

Friction :

$$\gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} \frac{-8s\delta_L/\Gamma_b}{(1+2s)(1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \left( 1+s + \frac{s^2}{4}(1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \right)} \quad (A.3)$$

Diffusion :

$$D = \hbar^2 k_L^2 \Gamma_b \frac{7}{10} \frac{s}{1+2s} \quad (A.4)$$

Température :

$$T = \frac{7}{10} \frac{\hbar \Gamma_b}{4k_b} \left( \frac{2|\delta_L|}{\Gamma_b} + \frac{\Gamma_b}{2|\delta_L|} \right) \left( 1+s + \frac{s^2}{4}(1+4\delta_L^2/\Gamma_b^2) \right) \quad (A.5)$$

## Annexe B

# Etablissement de l'équation maîtresse dans le cas $\tau_c \ll \tau_v$ .

Comme nous l'avons vu en page 123, il est possible à partir de l'équation d'évolution 2.37

$$P(t + \tau_c, v) = \iiint P(t, v') N(I_1) N(I_2) \delta_{v-v'-\tau_c a(v')} dI_1 dI_2 dv' \quad (\text{B.1})$$

d'obtenir l'équation maîtresse 2.38.

Afin de l'obtenir, on préfère calculer la transformée de Fourier de  $P(t, v)$  (suivant la variable  $v$ ) :

$$\tilde{P}(t + \tau_c, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t + \tau_c, v) \exp(-ikv) dv$$

On peut maintenant utiliser l'équation B.1 :

$$\tilde{P}(t + \tau_c, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iiint P(t, v') \exp(-ikv) N(I_1) N(I_2) \delta_{v-v'-\tau_c a(v')} dI_1 dI_2 dv' dv \quad (\text{B.2})$$

On intègre dans un premier temps sur  $v$  qui vérifie  $v = v' + \tau_c a(v', I_1, I_2) = v' + \tau_c (b(I_1 - I_2) - \gamma_I (I_1 + I_2)v')$

$$\tilde{P}(t + \tau_c, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iiint P(t, v') \exp(-ik(v' + \tau_c a(v'))) N(I_1) N(I_2) dI_1 dI_2 dv' \quad (\text{B.3})$$

que l'on préfère regrouper comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t + \tau_c, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t, v') \exp(-ikv') \\ &\quad \times \left[ \int N(I_1) \exp(-ikI_1\tau_c(b - \gamma_I v')) dI_1 \right] \\ &\quad \times \left[ \int N(I_2) \exp(-ikI_2\tau_c(-b - \gamma_I v')) dI_2 \right] dv' \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Entre crochets, on reconnaît (à un facteur  $\sqrt{2\pi}$  près) respectivement la transformée de Fourier de  $N$  au point  $(b - \gamma_I\tau_c v')$  et au point  $(-b - \gamma_I\tau_c v')$  soit  $\sqrt{2\pi}\tilde{N}(b - \gamma_I\tau_c v')$  et  $\sqrt{2\pi}\tilde{N}(-b - \gamma_I\tau_c v')$ . Simplifions d'abord la formule précédente en remplaçant  $\tilde{N}$  par son expression 2.25 :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}^2 \tilde{N}(\tau_c(b - \gamma_I v')) \times \tilde{N}(\tau_c(-b - \gamma_I v')) &= \\ &\quad \exp\left(-\frac{\sigma_I^2}{2} k^2 \tau_c^2 [(\gamma_I v' + b)^2 + (\gamma_I v' - b)^2]\right) \\ &\quad \times \exp(-ik \langle I \rangle \tau_c [-(\gamma_I v' + b) - (\gamma_I v' - b)]) \\ &= \exp(2ik \langle I \rangle \tau_c \gamma_I v') \exp(-\sigma_I^2 k^2 \tau_c^2 (\gamma_I^2 v'^2 + b^2)) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Nous ne garderons que les deux premiers termes du développement en  $\tau_c$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}^2 \tilde{N}(\tau_c(b - \gamma_I v')) \times \tilde{N}(\tau_c(-b - \gamma_I v')) &\simeq \\ &\quad 1 + 2ik \langle I \rangle \gamma_I v' \tau_c - k^2 \tau_c^2 (v'^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2) \end{aligned}$$

Revenons à l'équation B.4 qui devient :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t + \tau_c, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t, v') \exp(-ikv') \\ &\quad \times \left[ 1 + 2ik \langle I \rangle \gamma_I v' \tau_c - k^2 \tau_c^2 (v'^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2) \right] dv' \\ &= \tilde{P}(t, k) + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t, v') \exp(-ikv') \left[ 2ik \langle I \rangle \gamma_I v' \tau_c - k^2 \tau_c^2 (v'^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2) \right] dv' \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Et que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{P}(t + \tau_c, k) - \tilde{P}(t, k)}{\tau_c} &= \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t, v') \exp(-ikv') \left[ 2ik \langle I \rangle \gamma_I v' - k^2 \tau_c (v'^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2) \right] dv' \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Lorsque  $\tau_c$  est suffisamment petit, on peut assimiler  $\frac{\tilde{P}(t + \tau_c, k) - \tilde{P}(t, k)}{\tau_c}$  à  $\frac{\partial P(t, v)}{\partial t}$ .

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}(t, k)}{\partial t} = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(t, v') \exp(-ikv') \left[ 2ik \langle I \rangle \gamma_I v' - k^2 \tau_c (v'^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2) \right] dv' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

On fait maintenant la transformée de Fourier inverse pour revenir dans l'espace direct et obtenir l'équation 2.38 de la page 123 :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = 2 \langle I \rangle \gamma_I \frac{\partial (vP)}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \tau_c P \left[ v^2 \gamma_I^2 (2 \langle I \rangle^2 + \sigma_I^2) + \sigma_I^2 b^2 \right] \right)} \quad (\text{B.9})$$





## Annexe C

# Réalisation d'une source bleue par doublage de fréquence dans une cavité semi-monolithique

Nous joignons ici l'article [117] qui décrit dans le détail la réalisation de la source à 461 nm utilisée lors des expériences.

L'article sera suivi d'une série de commentaires basés sur une analyse plus récente de mesures expérimentales.

# Detailed study of an efficient blue laser source by second-harmonic generation in a semimonolithic cavity for the cooling of strontium atoms

Bruce G. Klappauf, Yannick Bidel, David Wilkowski, Thierry Chanelière, and Robin Kaiser

We have constructed a blue laser source consisting of an amplified, grating tuned diode laser that is frequency doubled by a  $\text{KNbO}_3$  crystal in a compact standing wave cavity and produces as much as 200 mW of internal second-harmonic power. We have analyzed the unusual characteristics of this standing wave cavity to clarify the advantages and disadvantages of this configuration as an alternative to a ring cavity for second-harmonic generation. We emphasize its efficiency and stability and the fact that it has an inherent walk-off compensation, similar to twin crystal configurations. We demonstrate its utility for laser cooling and trapping of earth alkalis by stabilizing the laser to the 461-nm transition of strontium, using a heat pipe, and then forming a magneto-optic trap of strontium from a Zeeman-slowed atomic beam. © 2004 Optical Society of America

*OCIS codes:* 020.0020, 140.0140, 190.0190, 230.0230.

## 1. Introduction

The advancement of laser cooling and trapping has progressed to include an increasing variety of elements that involve a broad spectrum of wavelengths. In particular, there has been a great deal of interest lately in the earth alkalis because of the existence both of narrow intercombination transitions to the triplet states (interesting for metrology and laser cooling) and for the  $J = 0$  ground state of some abundant isotopes (interesting for collision and scattering studies).<sup>1–10</sup> For Ca and Sr, however, the primary cooling transition is in the blue spectral region, and Mg uses both blue and UV transitions. In addition, the relatively large scattering rate of these primary trapping transitions, with the associated high saturation intensities, means that higher powers would be needed to optimize the magneto-optic trap (MOT). Whereas

many alkalis can be trapped with diode lasers or Ti:sapphire lasers, there are few powerful, reliable, and tunable single-mode sources in the shorter wavelengths. It is therefore common to perform second-harmonic generation (SHG) on these more readily available sources, but to obtain enough second-harmonic power one must either have a highly efficient SHG process or have enough fundamental power to compensate for the low SHG efficiency.

Because of the low value of second-order nonlinearity, even in the best crystals high single-pass efficiency demands either extremely high intensities or unfeasible interaction lengths. This problem is overcome by use of a buildup cavity that allows even modest fundamental powers to generate high intensities and relatively efficient SHG, which are most commonly seen in the form of ring cavities such as the familiar bow-tie cavity. Commercial examples of these tunable cavities are available, but generally less efficiency is claimed for them than for the system presented here. Additionally, there are many new solid-state systems with intracavity frequency doubling, but these systems are available only at specific wavelengths. Perhaps it is because of the familiarity of ring cavities that the advantages of a small, single-exit, monolithic or semimonolithic standing wave cavity have been largely overlooked, despite the demonstration of record efficiency (>80%) and cw

---

B. G. Klappauf (bgk@orc.soton.ac.uk) is with the Optoelectronic Research Centre, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, England. Y. Bidel, D. Wilkowski, T. Chanelière, and R. Kaiser are with the Laboratoire Ondes et Désordre, 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France.

Received 19 August 2003; revised manuscript received 22 December 2003; accepted 2 February 2004.

0003-6935/04/122510-18\$15.00/0

© 2004 Optical Society of America

second-harmonic (SH) power ( $>500$  mW at 473 nm).<sup>11,12</sup>

We have constructed and analyzed such a cavity at 461 nm for our Sr MOT, using a  $\text{KNbO}_3$  crystal, and have found it well suited for laser cooling experiments in the blue spectral region. We describe our design of this cavity and of its performance. Its tuning and output field characteristics are quite different from those of unidirectional single crystal (ring cavities), a bidirectional standing wave,<sup>13</sup> or even bicrystal systems<sup>14</sup> and could be quite confusing for a nonspecialist who may be constructing such a cavity. To our knowledge, in fact there are only a few journal publications that briefly allude to the full range of behavior that one can expect in this case.<sup>12,15</sup> Therefore we also present an analysis of the design both to clarify the possible advantages of a single-sided semimonolithic standing wave cavity in terms of stability, efficiency, and cost and to aid the nonspecialist reader in reproducing and understanding such a cavity for similar applications.

The main drawback of this configuration is the possibility of a large relative phase shift introduced between the fundamental and the SH wavelengths by the high-reflection (HR) coating on the crystal<sup>15</sup> and the lobed output when the crystal is tuned away from phase matching. It has been shown, however, that this problem can be avoided by the use of properly designed coatings, and, as we reiterate here, whereas a nonzero phase shift of the cavity mirror may reduce the ideal performance, it can be compensated for to a large degree by minor temperature tuning of the crystal to maintain an advantage even in the worst case.<sup>12,16,17</sup> Finally, we point out that this cavity inherently includes a walk-off compensation mechanism similar to those of the two crystal systems extensively studied by others but without the complicated alignment and orientation issues.<sup>14,18–21</sup>

This paper is organized as follows: Section 2 gives a general description of the cavity for reference in the rest of the paper. It includes basic formulas with which we analyze and optimize the cavity. In Section 3 we compare calculations based on integration of the coupled paraxial-wave equations to those of a greatly simplified approximation. The approximations are shown to give reasonable results for practical cases (if the angular bandwidth of the system is not too small) and, because of their simplicity, provide a simple means of predicting and understanding the tuning and power characteristics of the cavity. In Section 4 we describe the experimental setup and show the results of measurements of the cavity output characteristics. We put our actual values into the general discussions of Sections 2 and 3 and compare these with our measurements. We conclude in Section 5 with a summary and suggestions for extending this research, and we include an appendix designed to provide all the information necessary for calculating parameters for similar cavities.

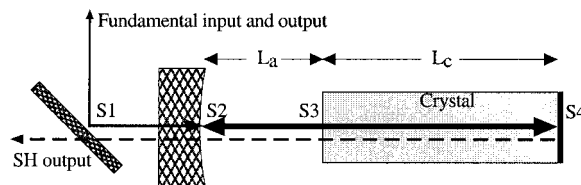


Fig. 1. Schematic of singly resonant cavity design, showing the path of the fundamental and the SH waves. Surfaces are S1, dichroic beam splitter; S2, spherical mirror input coupler; S3, AR surface coated for both wavelengths; S4, HR surface coated for both wavelengths.

## 2. Description of the Cavity

The semimonolithic standing wave cavity, resonant for the fundamental wavelength, was chosen both because of its demonstrated efficiency and because of its economy in terms of space and costs. It consists of a  $\text{KNbO}_3$  crystal and a spherical mirror configured as shown in Fig. 1 to build up the fundamental field intensity and hence the conversion efficiency. The SHG in the resonating cavity can then be treated as a single-pass case but with an enhanced fundamental circulating power,  $P_c$ .<sup>22,23</sup> Specific parameters for our setup are given in Section 4.

### A. Behavior

One of the polished ends of the crystal (S4; Fig. 1) is HR, coated and the other end (S3) is antireflection (AR) coated; each coating is for both the fundamental and the SH wavelengths. The spherical mirror input coupler (S2) facing the AR face of the crystal has a reflectivity  $R_c$  for the fundamental and is AR coated for the SH. The flat face is doubly AR coated. A similarly treated beam splitter (S1) before the mirror directs the fundamental into the cavity and again allows the SH to exit. Unlike in ring cavities, the fundamental passes through the crystal twice per cavity round trip, allowing for the possibility of nearly four times the round-trip conversion efficiency, even in walk-off limited cases, as we detail in Section 3.

The power transmission and reflection equations for this cavity with respect to round-trip parasitic loss  $\mathcal{L}$ , round-trip SH conversion factor  $C = P_{2\omega}/P_c = \gamma P_c$ , and input coupler reflectivity  $R_c$  are equivalent to that of a ring cavity with an effective optical path of  $2L_p$ , where  $L_p = L_a + nL_c$  (see Fig. 1).  $P_c$  is the circulating fundamental power entering the crystal at S3 (i.e., one of the counterpropagating waves that compose the standing wave),  $n$  is the index of refraction, and  $\gamma$ , normally expressed in inverse kilowatts, is a power-independent figure of merit for a given geometric SHG configuration (i.e., including the crystal parameters and fundamental beam parameters). One readily arrives at equations for the relative reflectivity  $R \equiv P_r/P_{in}$  and transmission  $T \equiv P_t/P_{in}$ , where  $P_{in}$ ,  $P_r$ , and  $P_t$  are, respectively, the incoming fundamental power, the reflected fundamental power, and the transmitted fundamental power.  $T_m = 1 - R_m \approx 0$  is the transmission of mirror face

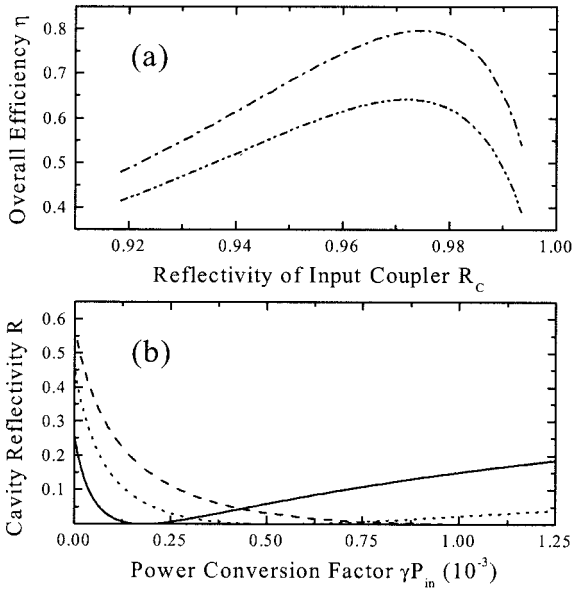


Fig. 2. Typical on-resonance reflection coefficients,  $R$  versus  $\gamma P_{\text{in}}$  for  $\mathcal{L} = 0.5\%$  and input couplers  $R_c = 96.5\%$  (dashed curves),  $97.5\%$  (dotted curve), and  $98.5\%$  (solid curve). (a) Dependence of overall conversion efficiency  $\eta = P_{2\omega}/P_{\text{in}}$  on input coupler reflectivity for  $\gamma P_{\text{in}} = 0.522 \times 10^{-3}$  and  $\mathcal{L} = 0.5\%$  (dashed-dotted curve) and  $\mathcal{L} = 1.0\%$  (dashed-double-dotted curve).

S4, and we assume that  $\mathcal{L} \ll 1$  and  $C \ll 1$ , resulting in

$$R = \left| \frac{(1 - \mathcal{L} - C)^{1/2} \exp(i2k_0 L_p) - R_c^{1/2}}{1 - [R_c R_m (1 - \mathcal{L} - C)]^{1/2} \exp(i2k_0 L_p)} \right|^2, \quad (1)$$

$$T = \left| \frac{[(1 - R_c) T_m (1 - \mathcal{L} - C)^{1/2}]^{1/2}}{1 - [R_c (1 - \mathcal{L} - C)]^{1/2} \exp(i2k_0 L_p)} \right|^2, \quad (2)$$

where  $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$  is the fundamental vacuum wave vector. The definitions and approximations given above can be solved numerically for any parameter from the equation

$$C\{1 - [R_c R_m (1 - \mathcal{L} - C)]^{1/2}\}^2 = \gamma P_{\text{in}} (1 - R_c), \quad (3)$$

where we treat the power-conversion factor  $\gamma P_{\text{in}}$  as a convenient dimensionless parameter for graphing cavity behavior, allowing one more easily to generalize and compare different experiments.

By measuring scans of the transmission and reflection as a function of the input power we determine the actual values of  $\mathcal{L}$  and  $C$  as well as the fraction  $\epsilon$  of  $P_{\text{in}}$  that is mode matched to the cavity. Figure 2(a) shows the dependence of total efficiency  $\eta = P_{2\omega}/P_{\text{in}} = C^2/\gamma P_{\text{in}}$  on the input coupler's reflectivity and Fig. 2(b) shows cavity reflectivity  $R$  versus the power-conversion factor. The  $y$  intercepts in Fig. 2(b) give the parasitic loss, and the power dependence gives  $\gamma$ , either by curve fitting or by passing the minimum where  $R_c^{\text{opt}} \sim 1 - (\mathcal{L} + C)$ . For an experimental curve, a nonzero value of the minimum would indicate that  $\epsilon < 1$ , as one can see from our data in Subsection 4.D below. Additional nonlinear losses

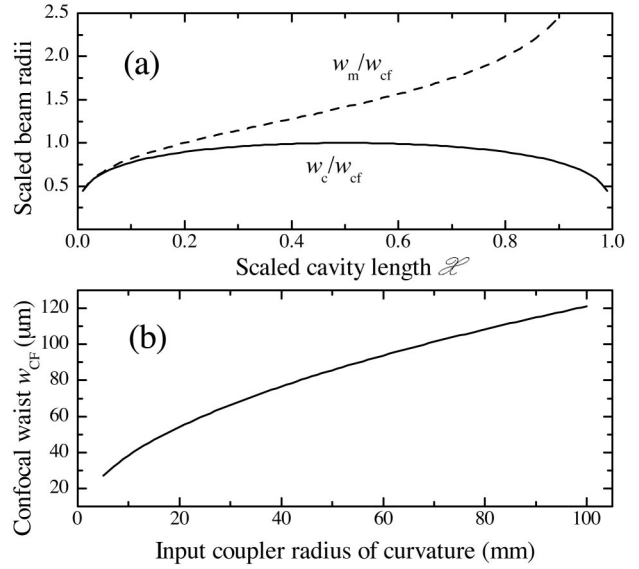


Fig. 3. (a) Beam radii at the crystal face and at the input coupler scaled to confocal value  $w_{\text{cf}}$  at the crystal face as a function of scaled cavity length  $\mathcal{L}$ . (b) Corresponding confocal waist versus  $\mathcal{R}$ .

may need to be added to  $\mathcal{L}$  as well (see Subsection 4.B). Figure 2 indicates that deviations from  $R_c^{\text{opt}}$  of  $\leq 0.5\%$  are not critical.

#### B. Mode

The radii of the beam (radius where the intensity drops to  $e^{-2}$  of the central intensity) at crystal face S4 and at input mirror S2 are given, respectively, by

$$w_c = \left\{ \frac{\lambda \mathcal{R}}{\pi} [\mathcal{L}(1 - \mathcal{L})]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

$$w_m = \left[ \frac{\lambda \mathcal{R}}{\pi} \left( \frac{\mathcal{L}}{1 - \mathcal{L}} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

where  $\mathcal{L} = (L_a + L_c/n)/\mathcal{R}$  is the scaled cavity length and  $\mathcal{R}$  is the input coupling mirror's radius of curvature (ROC). The confocal waist at crystal face S4 is given by  $w_{\text{cf}} = w_c(\mathcal{L} = 0.5) = [\lambda \mathcal{R}/2\pi]^{1/2}$ . Figure 3(a) shows the scaled beam radii  $w_c/w_{\text{cf}}$  and  $w_m/w_{\text{cf}}$  versus  $\mathcal{L}$ . We see that over most of the stable range of the cavity the beam radius at S4 remains near  $w_{\text{cf}}$ , whose dependence on  $\mathcal{R}$  is shown in Fig. 3(b). Additionally, operation on the two extremes where  $w_{\text{cf}}$  would decrease significantly is impeded by increasing instability as  $\mathcal{L} \rightarrow 1$  and by the crystal length itself as  $\mathcal{L} \rightarrow 0$ .

This makes cavity design extremely simple because no  $ABCD$  matrix analysis need be done, nor does one have to worry about coma as for ring cavities.<sup>24</sup> The desired waist determines the mirror's ROC; then one can simply change the cavity length to adjust almost independently the beam diameter on the input coupler, the cavity's free spectral range (FSR), the level of transverse mode degeneracy (degenerate at  $\mathcal{L} = 0.5$  and  $\mathcal{L} = 1$ ), or the crystal beam waist to some degree. Note that for this cavity the



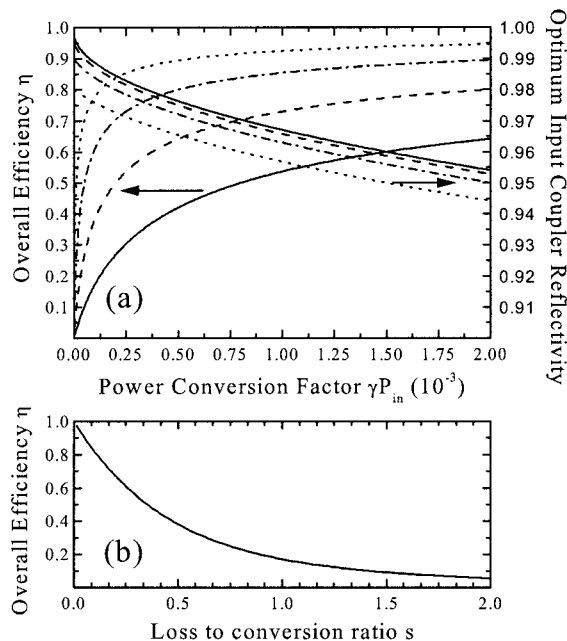


Fig. 4. (a) Comparison of overall efficiency (rising curves, left scale) and optimum input coupler reflectivity (descending curves, right scale) versus power-conversion factor for various parasitic loss values:  $\mathcal{L} = 0.25\%$  (dotted curves),  $0.5\%$  (dashed-dotted curves),  $1.0\%$  (dashed curves), and  $2\%$  (solid curves). (b) Ratio  $s$  of efficiency versus loss to conversion [from Eq. (6)].

transverse mode spacing at  $\mathcal{L} = 0.5$  is  $FSR/4 = c/8L_p$ , so all modes designated  $TEM_{mn}$  with indices  $m + n = 4q$ , where  $m$ ,  $n$ , and  $q$  are the transverse  $y$ , transverse  $z$ , and longitudinal mode indices of the resonant field, respectively, will be superimposed on the  $TEM_{00}$  resonance. Therefore a value of  $\mathcal{L}$  on either side of  $0.5$  will separate the modes that are visible in a scan of the cavity without changing the other parameters drastically, thus permitting easier mode matching of the input beam.

### C. Optimization

Whereas the equations above are useful for analyzing cavity operation, for optimization purposes we assume optimum coupling conditions and perfect mode matching ( $R = 0$  and  $\epsilon = 1$ ) such that all the power is absorbed by loss or conversion ( $\mathcal{L} + C$ ) in the cavity. The finesse is then given approximately by the Fabry-Perot equation  $F = \pi(R_c^{opt})^{1/2}/(1 - R_c^{opt})$  from the full width at half-maximum (FWHM) of the transmission equation. In this case the total efficiency is

$$\eta = [(s^2 + 1)^{1/2} - s]^2, \quad (6)$$

where  $s \equiv \mathcal{L}/[2(\gamma P_{in})^{1/2}] = \mathcal{L}\eta^{1/2}/(2C)$ , which can be approximated for  $\mathcal{L} + C \ll 1$  by

$$\eta \approx \frac{C}{\mathcal{L} + C} \stackrel{\mathcal{L} \ll C}{\approx} \frac{1}{1 + s}. \quad (7)$$

From relation (7) it is clear that loss and the power-conversion factor are the key parameters for resonant

cavity SHG. Equation (6) is shown versus  $s$  in Fig. 4(b), where we see that high efficiency ( $>80\%$ ) requires the loss of less than one fifth of the conversion, which generally means  $\mathcal{L} < 1\%$ . It is a bit easier to see the effect of experimental parameters ( $\mathcal{L}$ ,  $\gamma P_{in}$ ) if we plot the efficiency versus  $\gamma P_{in}$  for various losses as shown in Fig. 4(a). The associated optimum coupling value for each case is shown as well. Figure 4 shows that increasing  $\gamma P_{in}$  at the cost of higher loss (for example, by lengthening the crystal or decreasing the waist at the cost of increased linear or nonlinear absorption) may actually decrease overall efficiency.

To account for this maximum in the overall efficiency an initial optimization procedure might be first to determine the expected input power available, to choose a target value for  $\gamma$  of, for example,  $10^{-3}/P_{in}$ , and then, based on information in Subsections 4.B and 4.C below, choose a length and a waist to minimize the loss while we use the calculations of Section 3 to ensure that  $\gamma$  remains above the chosen value. Once the desired beam waist and crystal length have been chosen, the coupler is determined and the length can be fixed or adjusted as necessary based on information in this section and Subsection 4.C below.

Figure 4 highlights the advantages of the semimonolithic cavity. First, with only two exposed intracavity optical surfaces, the potential for passive loss is much less. Second, the potential for enhanced nonlinear conversion described in Section 3 may increase the efficiency directly for  $\gamma P_{in} \ll 10^{-3}$  or indirectly by relaxing the length or the waist constraints, which could reduce the overall loss (increasing  $\eta$ ) for  $\gamma/P_{in} > 10^{-3}$ . Note that if linear absorption ( $\mathcal{L} \propto L_c$ ) were the only loss, the semimonolithic cavity would not improve the efficiency compared with that for a single-pass cavity. Because the double-pass cavity will at best quadruple  $\gamma$  while it doubles the length, we can see that  $s = \mathcal{L}/[2(\gamma P_{in})^{1/2}] = 2\mathcal{L}/[2(4\gamma P_{in})^{1/2}]$ , and hence the efficiency, will remain the same. Such is seldom the case, but the point is clear that the often highlighted  $4\times$  increase in  $\gamma$  does not mean a  $4\times$  increase in SH power.

The optimization of  $\gamma$  for a Gaussian beam has been thoroughly treated by Boyd and Kleinman,<sup>22</sup> with implications for cavities given by Ashkin *et al.*<sup>23</sup> We need include only the effects of the interference between the forward- and backward-generated SH fields, as they are now superimposed.

This interference has been the subject of several studies.<sup>11,15,16,25</sup> It has been noted that the phase shift between the forward and backward fields can reduce or enhance  $\gamma$  by a factor of 0 to 4 times that of the single-pass value. To our knowledge no one has pointed out the connection between this configuration and the much-studied effect of walk-off compensation with reverse oriented crystal pairs.<sup>14,19-21</sup> If we unfold the cavity in Fig. 1 we see that it appears as in Fig. 5 as two crystals that are (apart from the dielectric coating between them) in optical contact, with the

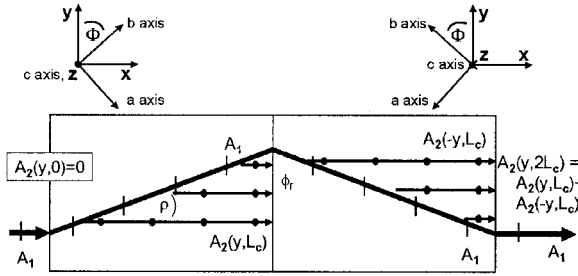


Fig. 5. Effective propagation path for the circulating fundamental and the SH in the unfolded cavity with relative phase shift  $\phi_r$ , fundamental walk-off angle  $\rho$ , and crystal cut angle  $\Phi$ .  $A_1$  is the approximately constant, vertically polarized fundamental (slanted, barred lines).  $A_2(y, x)$  are horizontally polarized SH (solid lines with filled circles) fields at various points in the propagation as referred to in the text. The output SH field at  $x = 2L_c$  is the coherent sum of the contribution produced in each half. Axes show relative orientations of crystal's principal axes for each half.

sign of the walk-off reversed as in the walk-off compensation configuration of Fève *et al.*<sup>21</sup> However, in this case one needs only to buy, cut, and coat one crystal; then alignment is automatic. Thus, in addition to the other advantages discussed, this configuration is particularly useful when large walk-off is a problem.

We show that, whereas one would ideally like to eliminate the phase shift at the reflective crystal face (through either proper coating or an adjustable compensator), one can always compensate for this phase shift with the overall temperature-dependent phase mismatch  $\Delta k$  to achieve better than double the conversion of the single-pass case.

We consider KNbO<sub>3</sub> in detail because, although it is somewhat delicate, its temperature sensitivity makes it easily tunable and it has been widely used for high-power doubling throughout the blue and green spectra.<sup>11</sup> Details of this crystal and of how to calculate the parameters associated with SHG are given in Appendix A.

### 3. Theory

#### A. Coupled-Wave Equation

The derivation of the paraxial-wave equation and its application to SHG of Gaussian beams can be found in many nonlinear optics texts.<sup>26,27</sup> We follow the sign convention of Boyd in that our linearly polarized fundamental and SH fields and the wave-vector mismatch are defined by

$$E_m = \frac{A_m}{2} \exp[i(k_m x - m\omega t)] + \text{c.c.} \quad (m = 1, 2), \quad (8)$$

$$\Delta k = 2k_1 - k_2, \quad (9)$$

respectively, such that the intensity is given in MKS units by

$$I_m = \frac{\epsilon_0 n_m c}{2} |A_m|^2. \quad (10)$$

Choices of coordinate axes are shown in Fig. 5 for each half of the unfolded cavity.  $A_m(\mathbf{r})$  is assumed to be slowly varying relative to length scales of  $\lambda$ ,  $k_m = m\omega n_m/c$  is the  $x$ -aligned wave vector, and  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  is the standard position vector. Applying Maxwell's equations to a nonlinear, anisotropic medium (with the approximation of zero absorption), we find the nonlinear coupled-wave equations for the fundamental and SH fields, respectively, at a position  $\mathbf{r}$  in the nonlinear medium given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1(\mathbf{r})}{\partial x} &= \frac{i}{2k_1} \left[ \nabla_t^2 A_1(\mathbf{r}) + i2k_{1\rho} \frac{\partial A_1(\mathbf{r})}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{ik_1}{n_1^2} dA_1^*(\mathbf{r})A_2(\mathbf{r})\exp(-i\Delta kx), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial A_2(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{i}{2k_2} \nabla_t^2 A_2(\mathbf{r}) + \frac{ik_2}{2n_2^2} dA_1(\mathbf{r})^2 \exp(i\Delta kx), \quad (12)$$

where the transverse Laplacian is given by  $\Delta_t^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  and \* indicates a complex conjugate. These equations are valid for the type I phase-matching interactions (in this case two extraordinary beams giving one ordinary beam,  $e + e = o$ ) described in this paper. Type II equations are dealt with elsewhere.<sup>14,21</sup>

The equations contain four constants that need to be calculated or measured: the indices for the fundamental and the harmonic,  $n_1$  and  $n_2$ ; walk-off angle  $\rho$ ; and second-order nonlinearity  $d \equiv d_{\text{eff}}$ . These constants will all depend on the crystal orientation, which will be determined by phase-matching angle  $\Phi$  for the chosen temperature and wavelength. Appendix A shows the calculations of these constants as functions of temperature and wavelength so the reader can determine them for various situations.

These equations are integrated through twice the crystal length, as depicted in Fig. 5, with variable phase shift  $\phi_r$ , and reversal of the walk-off inserted at the half-way point.  $\phi_r$  accounts for the relative phase shift between  $A_1$  and  $A_2$  that is due to the dielectric mirror. Note that, as opposed to cavities with the mirrors independent of the crystal, angle tuning in this cavity is not possible, and the position of the waist is fixed at the mirrored surface (the center point in Fig. 5). Another difference from other cases is that  $d_{\text{eff}}$  (Ref. 20) and  $\Delta k$  do not change sign on reflection: Only the sign of the walk-off changes. The relation of the lab coordinates to the crystallographic axes for the forward and reflected halves is indicated by the two insets of Fig. 5. See Appendix A for further details. The integration routine follows the example of Fève *et al.*<sup>21</sup> Recall that  $A_1$  will

be the field associated with fundamental power  $P_c$  entering the crystal at surface S3.

### B. Semianalytic Equation

In most practical cases, with Gaussian beams and low single-pass pump depletion (<5%), actual integration of the coupled-wave equations is not necessary for reasonable reproduction of experimental results. One often replaces these equations with heuristic equations that involve a single integral.<sup>21,22</sup> We find that, in our case, because we intentionally work in the weak-focusing regime [ $L_c < z_0 = \lambda/(\pi w_0^2)$ ] for reasons discussed in Subsections 4.B and 4.C below, further approximations allow for an even simpler single-integral solution. In addition to reasonably reproducing both the power and the beam profile by use of any standard math software, it also provides some analytical insight to help in understanding the important characteristics of this SHG process.

The nondepleted pump approximation with the assumption of a Gaussian pump beam allows us to eliminate Eq. (11) and use for  $A_1(\mathbf{r})$  the well-known analytical function for Gaussian propagation. One must account for the walk-off by replacing  $y$  in  $A_1(\mathbf{r})$  with  $y \rightarrow y - \rho x$ . This results essentially in what is known as a heuristic equation. To simplify it even further, we make the approximation that weak focusing allows us to ignore diffraction and assume the same Gaussian profile (apart from the translation in  $y$ ) for propagation through the crystal. Thus

$$A_1(\mathbf{r}) = E_0 \exp\left\{-\frac{z^2}{w_0^2} - \frac{[y - \rho x + (\rho L/2)]^2}{w_0^2}\right\} \quad (13)$$

can be put directly into Eq. (12) (from which the  $\nabla^2$  diffraction term has been removed) and the result integrated over  $x$ ,  $y$ , and  $z$ . Before continuing it is important to point out here that this formulation was chosen such that the translation effects that are due to walk-off are centered about  $y = 0$ , so a positive walk-off will produce the same beam profile as a negative walk-off but with the sign of  $y$  inverted. So, referring to Fig. 5, field  $A_2^-$  from the second half is the same as  $A_2^+$  inverted from the first half and so need not be calculated separately. Putting these conditions together means that the final SH field after the forward and backward passes is just the sum of single-pass field  $A_2^+ \equiv A_2(y, z, L_c)$  and its  $y$  inversion  $A_2^- \equiv A_2(-y, z, L_c)$  with two added phase shifts. Because the phase of the generated SH field is tied directly to the phase of the generating fundamental field, both phase shifts are given in terms of the relative phase shift between the fundamental and  $A_2^+$  that was generated in the first pass. The first phase shift,  $\phi_r$ , was discussed above. The second,  $i\Delta k L_c$ , accounts for the phase difference accumulated as  $A_2^+$  traverses the crystal a second time relative to the

phase picked up by the fundamental on the first pass. The result is

$$A_2(y, z, 2L_c) = A_2(y, z, L_c) + \exp[i(\Delta k L_c + \phi_r)]A_2(-y, z, L_c). \quad (14)$$

From this, one might expect the resultant power output to have a phase-mismatch tuning curve with a  $1 + \cos(\Delta k L_c + \phi_r)$  dependence similar to that described by Fève *et al.*,<sup>21</sup> and indeed the intensity variation at  $y = 0$  does follow, because  $A_2^+ = A_2^-$  there. We shall see, however, that this configuration results in an intensity modulation in  $y$  that, when it is integrated, gives a more-complex dependence of the total power on the phase mismatch.

Before continuing, we do some scaling and substitutions. We scale the transverse coordinates by fundamental beam waist  $w_0$  and the propagation coordinate by crystal length  $L_c$ :

$$\frac{y}{w_0} \rightarrow y, \quad \frac{z}{w_0} \rightarrow z, \quad \frac{x}{L_c} \rightarrow x. \quad (15)$$

Then we define a characteristic parameter  $\beta$ , which is the ratio of the walk-off translation across the crystal  $\rho L_c$  to SH beam diameter ( $2^{1/2}w_0$ ), integration parameters  $r$  and  $p$ , and horizontal transverse amplitude function  $\mathcal{H}(z)$ :

$$\beta = \frac{\rho L_c}{2^{1/2}w_0}, \quad (16)$$

$$r = 8^{1/2}\beta \left(x - \frac{y}{2^{1/2}\beta} - \frac{1}{2}\right), \quad (17)$$

$$p = \frac{\Delta k L_c}{8^{1/2}\beta}, \quad (18)$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\kappa L_c}{8^{1/2}\beta} \exp(-2z^2), \quad \kappa = \frac{iE_0^2 k_1 d}{n_1^2}. \quad (19)$$

With these substitutions we have for a single pass through the crystal

$$A_2(y, z, L_c) = \mathcal{H}(z) \exp\left(i \frac{\Delta k L_c}{2} + i2yp\right) \times \int_{r_-}^{r_+} dr \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \exp(ipr), \quad (20)$$

where

$$r_{\pm} = \pm 2^{1/2}\beta - 2y. \quad (21)$$

We can see that the result comprises three parts: Gaussian horizontal transverse amplitude function  $\mathcal{H}(z)$ , phase function  $\Psi(y, \Delta k) = \exp[i\Delta k L_c/2 + i2yp]$  in the exponent, and vertical modulation function  $F(y, \Delta k) = \int_{r_-}^{r_+} dr \exp(-r^2/2) \exp(ipr)$  in the form of an easy integral. A simple analysis of this function will help us to understand the results that we shall see below.

To understand the importance of  $\beta$  in this result we



can modify the integral to look like the Fourier transform of a square function  $\Theta$  of width  $8^{1/2}\beta$ , offset by  $2y$ , multiplied by a Gaussian:

$$F(y, \Delta k) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \Theta(r, \beta, y) \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \exp(ipr), \quad (22)$$

where

$$\Theta(r, \beta, y) = \begin{cases} 1 & |r + 2y| \leq 2^{1/2}\beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (23)$$

Equation (22) presents three characteristic cases for us to examine:  $\beta \ll 1$ ,  $\beta \gg 1$ , and  $\beta \approx 1$ .

### 1. Case I: $\beta \ll 1$

In the limit  $\beta \ll 1$ , where we have a large beam waist and the translation that is due to walk-off is small, we approximate the plane-wave results found in textbooks. The width of the square function is much smaller than Gaussian width  $2^{1/2}$ , so we can treat the Gaussian as a constant,  $\exp[-(2y/2^{1/2})^2]$ . Thus, removing it from the integral, we have the Fourier transform of the offset square function, which is a phase-shifted sinc function [ $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$ ]:

$$\begin{aligned} F(y, \Delta k) &= \exp(-2y^2) \exp(-i2yp) \frac{2 \sin(2^{1/2}\beta p)}{p} \\ &= 8^{1/2}\beta \exp(-2y^2) \exp(-i2yp) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L_c}{2}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

giving for the SH field

$$\begin{aligned} A_2(y, z, L_c) &= \kappa L_c \exp[-2(y^2 + z^2)] \\ &\times \exp\left(i \frac{\Delta k L_c}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L_c}{2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Notice that the  $y$ -dependent phase was canceled, leaving, as expected, a Gaussian field of waist  $w_0/2^{1/2}$ , a flat phase front, and a sinc function phase-matching dependence. The associated intensity has a FWHM of  $2\Delta k_{1/2} L_c / \pi = 1.77$ .

### 2. Case II: $\beta \gg 1$

When  $\beta \gg 1$  there will be a large walk-off or crystal length, tight focusing, or both. This is a practical case because optimal focusing may easily approach this limit. But we must use caution, as the accuracy of the approximation breaks down somewhat for tight focusing, where  $L_c > z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$ , the Rayleigh length, but this breakdown can be compensated for to a large degree, as we discuss in Subsection 3.D below. For our approximation case II gives a square function much larger than the Gaussian, so for most values of  $y$  we simply have the integral of the Gaussian with only a small contribution from the square function near  $y = \pm\beta/2^{1/2}$ , outside of which the field drops

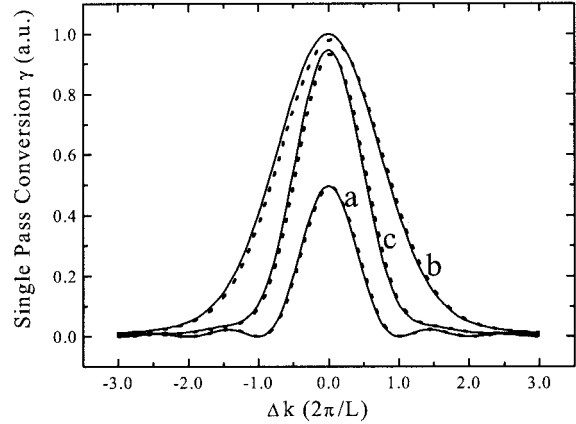


Fig. 6. Comparison of relative SH conversion factor  $\gamma$  calculated by the semianalytic result (solid curves) with that of the heuristic equation (dotted curves) for a single pass through length  $L_c$  of the crystal for (a) case I with  $\beta = 0.1$ , (b) case II with  $\beta = 2$ , and (c) case III with  $\beta = 1$ . The vertical scale is arbitrary and serves only to show the change in form because for a given  $\beta$ ,  $L_c$  and  $\rho$  can be chosen to make all three cases visible in the same figure.

rapidly to zero. As the Fourier transform of a Gaussian is a Gaussian, we have (for  $|y| < \beta/2^{1/2}$ )

$$\begin{aligned} F(y, \Delta k) &= (2\pi)^{1/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right) \\ &= (2\pi)^{1/2} \exp\left[-\left(\frac{\Delta k L_c}{4\beta}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A_2(y, z, L_c) &= (2\pi)^{1/2} \mathcal{K}(z) \exp\left(i \frac{\Delta k L_c}{2}\right. \\ &\left. + i2yp\right) \exp\left[-\left(\frac{\Delta k L_c}{4\beta}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (27)$$

with a FWHM intensity width  $2\Delta k_{1/2} L_c = 8\beta(\ln 2/2)^{1/2} \Rightarrow 2\Delta k_{1/2} L_c / \pi \approx 1.5\beta$ , roughly  $\beta$  times larger than in case I. Also, notice that the  $y$ -dependent phase remains intact; it is this that will produce the multiple lobes along the  $y$  axis for nonzero values of  $\Delta k$ . These lobes are shown in the intensity profiles in Subsection 4.D below.

### 3. Case III: $\beta \approx 1$

For  $\beta \approx 1$  we have the convolution of the Gaussian and the sinc functions, smoothly widening the sinc function and eliminating its distinct minima. Our example is in this regime with  $\beta = 1.7$ . Considering the two limits, we may suppose a standard convolution function for the width and use  $2\Delta k_{1/2} L_c / \pi = [(1.77)^2 + (1.5\beta)^2]^{1/2}$ , which seems to work well.

Figure 6 shows the single-pass tuning curve for the three values  $\beta = 0.17$ ,  $\beta = 0.43$ , and our case  $\beta = 1.7$ , calculated both with Eq. (20) and with the heuristic equation of Boyd and Kleinman<sup>22</sup> (in which they include a waist position parameter  $\mu$  that we set as 1). We can see the smoothing of the nodes and the enlargement of the tuning bandwidth as  $\beta$  increases. We can also see that in this range our approximation

works quite well. Thus we can quite simply understand what the double-pass power tuning curve will be for each case.

### C. Second-Harmonic Power-Tuning Curves

Now we consider the interference effects that the reflection will have on the tuning curve that one would obtain by measuring the total SH output power as a function of the crystal temperature or, equivalently, of phase mismatch  $\Delta k$ . We integrate analytically the output intensity profile  $I_2$  from Eq. (10) over  $y$  and  $z$  for cases I and II, using the appropriate equations for the fields in each case. We apply case III to our experiment in Section 4.

For case I the single-pass field is symmetric in  $y$  and therefore  $A_2^+ = A_2^-$ , so from Eqs. (10), (14), and (25) we get a power function of the form

$$P^I(\Delta k L_c) = P_0^I \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L_c}{2}\right) 2[1 + \cos(\Delta k L_c + \phi_r)], \quad (28)$$

where  $P_0^I = (\epsilon_0 n_m c / 2) |\kappa L_c w_0 \pi^{1/2} / 2|^2$  is the maximum single-pass power at  $\Delta k = \phi_r = 0$  and the cosine term has the same oscillation period  $\Delta k L_c = 2\pi$  as the  $\text{sinc}^2$  term, except at  $\Delta k = 0$ , where the  $\text{sinc}^2$  function has a missing node. Indeed, in this case we see 100% modulation of the power as in Ref. 21 and the same  $\text{sinc}^2$  envelope width because they result from the single-pass field but with only half of the frequency in the interference modulation. This is so because by temperature tuning we keep the same  $\Delta k$  in both halves, where in the angle-tuning case the change in the sign of  $\Delta k$  doubles the relative phase shift between the two halves that appears in the cosine.

For case II, by replacing Eq. (25) with Eq. (27) we have  $A_2^+ = A_2^- \exp(-i4yp)$ , which then gets directly subtracted from the phase in Eq. (14), so integrating over  $|y| \leq \beta/2^{1/2}$  and  $z$  gives

$$P^{II}(\Delta k L_c) = P_0^{II} \exp\left[-\left(\frac{\Delta k L_c}{2\beta}\right)^2\right] 2[1 + \text{sinc}(\Delta k L_c) \times \cos(\Delta k L_c + \phi_r)], \quad (29)$$

where  $P_0^{II} = P_0^I (2\pi)^{1/2} / 2\beta$  (if the large  $\beta$  is due to tight focusing, one should include the correction factor from Subsection 3.D for quantitative accuracy). Equation (29) now has the same modulation frequency as case I, but the modulation amplitude is damped by the sinc function and the overall envelope is the much wider Gaussian. A comparison of the two cases is shown in Fig. 7. Because the sinc and the Gaussian are similar near  $\Delta k = 0$ , the form is nearly identical in the center region. Only the magnitude changes. Also shown is the single-pass case, demonstrating that although the single-pass SHG determines the width of the tuning curve, it remains one half to one fourth smaller than in the double-pass case. In fact, the ratio of the double-pass maximum to the single-pass maximum is plotted in Fig. 8 versus

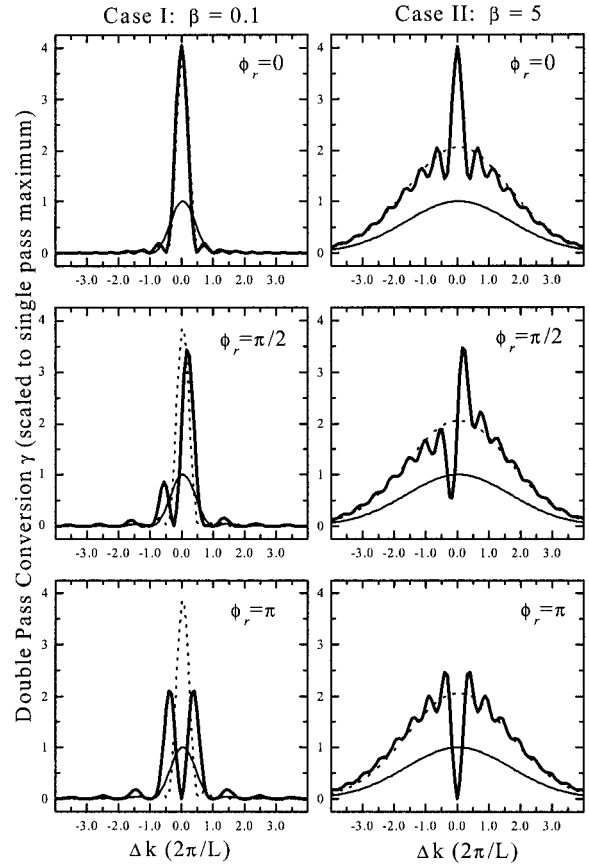


Fig. 7. Comparison of SH conversion double-pass tuning curves (solid curves) for case I ( $\beta = 0.1$ ) and case II ( $\beta = 5$ ) for three reflection phase shifts ( $\phi_r = 0, \pi/2, \pi$ ). Each figure is normalized to the single-pass case of length  $L_c$  (dashed curve) and shown with the single-pass case of length  $2L_c$  (dotted curve).

the reflection phase shift  $\phi_r$ , which we can see is always greater than 2. The effect of the walk-off compensation is most evident when one compares the case II double-pass curve to the case of crystal length  $2L_c$  also shown in Fig. 7. Clearly the backreflection does much more than just double the effective length of the crystal, because the double-pass maximum is a factor of 2 higher for  $\phi_r = 0$ .

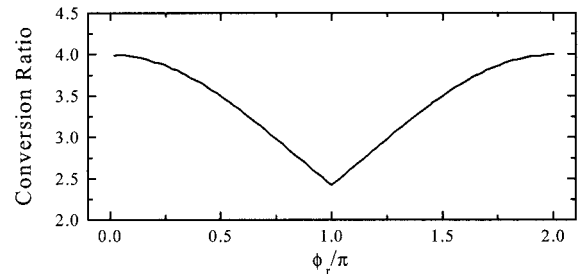


Fig. 8. Ratio of maximum double-pass SHG conversion to the single pass versus relative phase mismatch  $\phi_r$ , caused by the HR crystal coating for  $\beta = 2$ .

#### D. Effects of Focusing

The small error shown in Fig. 6 between the semi-analytic result and the heuristic equation consists of an amplitude increase and a negative phase shift, both of which are results of our assumption of a constant beam diameter. This error can be significant when one is operating near optimum focusing parameter  $L_c/2z_0 \gtrsim 1$ , as many people do. We have ignored these focusing effects for simplicity and ease of interpretation, but we can easily correct for them for a more quantitatively precise result.

The phase shift comes from the Guoy phase lag of  $\phi(x) \equiv \arctan(x/z_0)$  that a Gaussian beam passing through its waist sees relative to a plane wave. The application to SHG was discussed by Boyd and Kleinman.<sup>22</sup> It is a linear shift near the waist, and for our purposes we can account for it by simply subtracting it from the relative phase such that  $\Delta k \rightarrow \Delta k - \phi_f/L_c$ , where  $\phi_f = \arctan(L_c/z_0)$ . It is important to note that to do so amounts to translating the horizontal axis ( $\Delta k L_c$ ) of our power-tuning curves by this fixed offset. Therefore our not including this offset does not really affect our results. Even though it may look initially as if the new argument ( $\Delta k L_c - \phi_f + \phi_r$ ) in Eqs. (28) and (29) would shift the interference pattern in Fig. 7 in a manner similar to  $\phi_r$ , this shift is also in all the single-pass arguments, so the form of the tuning curve in fact remains the same in the end.

The amplitude error is dominated by an unaccounted-for intensity reduction as the beam expands away from the beam waist at the mirror. Because the SHG is highly sensitive to this reduction and the contribution of each small length of crystal is proportional to the inverse area of the fundamental beam, we can reduce the final power simply by a factor of the average squared waist:

$$\begin{aligned} \wp &= \left( \frac{w}{w_0} \right)^2 = \frac{z_0}{L_c} \int_0^{L_c/z_0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{z_0}{L_c} \arctan(L_c/z_0) \\ &= \frac{z_0}{L_c} \phi_f \end{aligned} \quad (30)$$

which clearly goes to unity for small focusing parameters.

We mention two final issues regarding focusing: First, if there are no other constraints on the cavity beam waist [thermal lensing, blue-light-induced infrared absorption (BLIIRA), optical damage limits, angular bandwidth], there is the question of choosing the optimum focusing parameter for the double-pass system. For a single pass this choice was dealt with thoroughly by Boyd and Kleinman,<sup>22</sup> but for the double pass it may not be immediately clear: Does one optimize each single pass of length  $L_c$ , as would seem appropriate from Eq. (14), or optimize the double pass of length  $2L_c$ , as Fig. 5 would seem to suggest. It turns out that it makes no difference. The optimum waist calculated from Ref. 22 for length  $2L_c$  with the waist at the center, or for  $L_c$  with the waist at the end

face, is the same, so one can just use the graph in Ref. 22 for length  $2L_c$  and the waist at the center.

The second issue is that these calculations do not take into account the effect of angular bandwidth on a focused beam. If angular bandwidth  $\delta\Phi$  (FWHM of the power-tuning curve) owing to the dependence of  $\Delta k$  on  $\Phi$  is less than angular divergence  $2\phi_0 = 2\lambda/(\pi n w_0)$  of the fundamental beam, then the phase-matching condition is not met for all Fourier components of the beam. This issue is addressed in several places for certain circumstances; usually a sort of weighted average is taken of the contributions of all Fourier components that compose the beam.<sup>28,29</sup> We do not present any simple approximation or even estimation for this effect but simply point out that this condition exists both for our experiment and that of Bode *et al.*<sup>11</sup> and seems to be the most likely explanation for the lower-than-expected conversion efficiency.

## 4. Experiment

### A. Cavity Details

Our need for more than 100 mW of power at the Sr resonance of 461 nm meant converting a strong, longer-wavelength pump laser through a dye or a nonlinear cavity. It was clear, because SHG cavities commonly achieve greater than 50% conversion, that we could get by with several hundred milliwatts of power at 922 nm, which could most cheaply and reliably be obtained from a semiconductor tapered amplifier. We used an SDL TD444 tapered amplifier whose gain spectrum at room temperature covered roughly 900–950 nm. We injected it with a grating stabilized diode master laser at 922 nm with two 35-dB optical isolators needed to prevent feedback from the input facet of the amplifier. For amplifier drive currents of 1–1.4 A, and injected powers of <1 to 13 mW, the amplifier output reached greater than 500 mW. The strongly astigmatic output was collimated with an  $f = 8$  mm lens for one axis, followed by a cylindrical lens for the other axis. This beam passed through two more isolators and a telescope before being directed to the cavity. Despite the apparently square shape of the amplifier output, we typically coupled 80–85% of the remaining light into the TEM<sub>00</sub> mode of the cavity.

The actual cavity that we built was a little larger than indicated in Fig. 1 to accommodate temperature control, cavity alignment, and modulation. Our values for the surfaces shown in Fig. 1 are described as follows:

**S1** is a 45° dichroic beam splitter with reflection coefficients  $R = \text{HR}$  (922 nm) and  $R = 7\%$  (461 nm).

**S2** is a spherical mirror with a ROC of 35 mm and reflection coefficients  $R = 96.7\%$  (922 nm) and  $R = 4.7\%$  (461 nm).

**S3** is a double AR-coated crystal surface with  $R < 0.25\%$  (922 nm) and  $R < 0.5\%$  (461 nm).

**S4** is a double-HR-coated crystal surface with  $R > 99.9\%$  (922 nm) and  $R < 99.5\%$  (461 nm). Direct

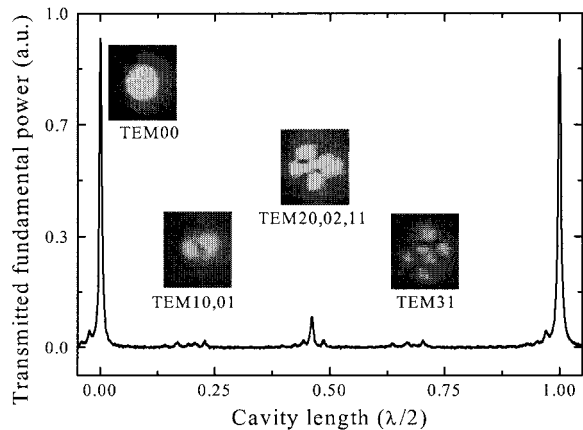


Fig. 9. Typical cavity scan of a slightly nondegenerate cavity, showing two TEM<sub>00</sub> modes with the higher-order modes separated by roughly FSR/4.

transmission measurements indicate that  $R > 99.9999\%$  at 922 nm.

From Eq. (4), the 35-mm ROC gives a confocal waist of 72  $\mu\text{m}$ , where for  $\mathcal{R} = 0.5$ ,  $L_a = 13$  mm. We generally operated the cavity in a slightly nondegenerate mode with  $0.5 < \mathcal{R} < 0.6$ .

Figure 9 shows a typical sweep over one free spectral range of the cavity in which the transverse modes can be clearly seen to have the nearly  $c/8L_p$  spacing that was described in Section 2. We chose a mode radius much larger than the optimum waist of 31  $\mu\text{m}$  to try to avoid the power-limiting effects of thermal lensing and BLIIRA that was a concern of previous work,<sup>11,14,30–34</sup> which we discuss in Subsection 4.C below. The shorter cavity and larger waist may also mean that the beam diameter at the mirrors can be smaller than in longer cavities, increasing the need for quality coatings that can hold up to higher intensities. Our first input coupler was found to have degraded during the first year of use.

Our KNbO<sub>3</sub> crystal is 10 mm  $\times$  3 mm  $\times$  3 mm and is cut as indicated in Fig. 5, with the orientation specified at  $\Phi = 48^\circ \pm 0.5^\circ$ . The phase-matching temperature of  $27.3^\circ \pm 1^\circ\text{C}$  at 921.7 nm indicates a cut of  $48.56^\circ \pm 0.16^\circ$ . This gives a walk-off of  $\rho = 0.99^\circ$  and should produce a  $d_{\text{eff}}$  of approximately 18 pm/V. Though we were not able to measure this value directly, the unexpectedly low conversion described in Subsection 4.A may indicate a lower value for  $d_{\text{eff}}$  as a partial factor. It is well known that crystal quality can vary and that KNbO<sub>3</sub> can be damaged by thermal or mechanical stress. It could be that the daily temperature cycling that is done in initial operation of the cavity has caused the crystal to depole. It is recommended that one vary the temperature more slowly than 0.5  $^\circ\text{C}/\text{min}$  (Ref. 35) to prevent this degradation or, better yet, keep the crystal at one temperature continuously.

To minimize the chance of sudden temperature changes, we maintained the entire cavity on an en-

closed, heated base held near the phase-matching temperature. The large thermal mass ensured that failure of the temperature control system would not permit a sudden drop in the crystal's temperature. Fine control of the crystal's temperature was done with a small Peltier cooler underneath the Cu crystal mount. The crystal was held in place by spring-loaded Cu foil on the top and one side that pushed gently into a square corner to give it thermal contact on all sides while still preventing stress from thermal expansion. A thermally conductive pad surrounded the crystal for better contact, providing a time constant of the order of a second.

Although it is possible to operate at 922 nm with noncritical phase matching, a crystal temperature of 150  $^\circ\text{C}$  is required. We chose to work at room temperature, which has several advantages:

- First, it is technically much easier to design, construct, maintain, and use a cavity at room temperature. Because of the compact size of our cavity, we would otherwise be required to maintain the entire apparatus at the same high temperature as the crystal.
- Second, 150  $^\circ\text{C}$  is very near the phase transition temperature of 180  $^\circ\text{C}$ , and thus is less stable against depoling.
- Finally, as we discuss in Subsection 4.C below, the thermal effects that can limit SHG can be much reduced at room temperature. A ring cavity operating at 150  $^\circ\text{C}$  was unstable for  $P_{2\omega} > 180$  mW because of thermal problems.<sup>36</sup>

Under the Peltier cooler was a five-axis NewFocus stage that facilitated angular alignment of the cavity as well as three-axis control of the crystal position to permit the use of different parts of the crystal or of the coating if there were defects, without misaligning the cavity. The input coupler was mounted onto a Piezo Mechanik 500 V piezoelectric stack tube offering nominally 5  $\mu\text{m}$  of translation along the axis. This coupler was screwed into an Al mount that held the dichroic beam splitter such that both could easily be removed or replaced. An amplified photodiode was mounted behind the crystal for monitoring of the transmission signal, though care had to be taken because both the fundamental and the SH could contribute to the signal.

Stabilization of the cavity resonance to the fundamental frequency could be accomplished either by use of the fundamental wavelength transmitted or, for operation at high enough powers, of the SH output. We found the latter to work well for daily use (especially if the problem in transmission mentioned above is considered), allowing us to lock to the maximum of the blue output. We used a modulation of 20 kHz on the piezo mirror, which we detected on a small SH signal transmitted through a dielectric mirror following the dichroic beam splitter.

With the cavity, and hence within the SH, we used the output slaved to the master laser to provide a saturated-absorption signal from a Sr heat pipe,



which was then used to stabilize the master laser to the  $5^1S_0-5^1P_1$  transition. The saturated-absorption error signal from the counterpropagating pump-probe pair was again obtained through a modulation, this time at 30 kHz, introduced by an acousto-optic modulator to the pump beam. The heat pipe was made from standard C25 ultrahigh-vacuum tubing roughly 20 cm long with a sapphire conflate window on either end and a 5-cm-long section of heating coil welded to the center. A vacuum cross was added to one end for a gauge and a pumping port. It was loaded with Sr in an Ar atmosphere, then pumped down to vacuum, reloaded with approximately 100 kPa of Ar, and sealed. By varying the temperature near 300 °C we obtained a well-controlled absorption, such that the cell could go from almost transparent to nearly opaque. The Ar collision rate is high enough to act as a buffer, ensuring that the Sr vapor reached a cold section of the pipe before reaching a window but low enough to ensure that the collisional broadening and frequency shift were well within the transition linewidth. Based on the noise in the error signal of the cavity feedback loop, we put an upper bound of 2 MHz on the laser linewidth. The result was a stable, tunable or frequency-stabilized output that supplied sufficient power for both the Zeeman slower and the MOT described by Bidet *et al.*<sup>3</sup>

#### B. Blue-Light-Induced Infrared Absorption

BLIIRA is generally regarded as the limiting factor in SHG to the blue wavelengths with KNbO<sub>3</sub>. Although the precise mechanisms are uncertain, the most popular model suggests that the presence of blue light depopulates low-level traps through photoionization, which then allows for increased infrared absorption.<sup>30</sup> We can then describe the total power (blue and IR) absorbed  $P_{\text{abs}}$  in the crystal for blue and IR linear absorption coefficients  $\alpha_{2\omega}$  and  $\alpha_{\omega}$  by

$$P_{\text{abs}} = [\alpha_{\omega}P_c + \alpha_{2\omega}P_{2\omega} + \alpha_b(I_{2\omega})P_c]2L_c. \quad (31)$$

This additional, blue-intensity-dependent IR absorption [ $\alpha_b(I_{2\omega})$ ] is often considered to explain the deviation from the theoretical SHG efficiency curves at higher powers.<sup>11,33,36</sup> Although the time scales and effects can be similar to those that one might expect from thermal problems through simple absorption, BLIIRA combined with the thermal sensitivity of KNbO<sub>3</sub> can cause complicated and dramatic effects.<sup>32</sup> Some focused quantitative studies have been done to characterize both linear absorption and BLIIRA as a function of wavelength, temperature, doping, and power.<sup>30,32,34</sup> One can summarize these as follows:

- Parameters vary greatly from crystal to crystal.
- Undoped crystals tend to have higher absorption in the IR but lower absorption in the blue and less temperature dependence for BLIIRA.
- Higher temperatures reduce absorption greatly in doped crystals and slightly in undoped crystals.

- Undoped KNbO<sub>3</sub> tends to have very low  $\alpha_{\omega}$ , in the range 0.05–0.3% cm<sup>-1</sup>, and very high wavelength-dependent  $\alpha_{2\omega}$ , in the range 2–10% cm<sup>-1</sup>.
- Undoped KNbO<sub>3</sub> seems to have a BLIIRA threshold near 5 kW cm<sup>-2</sup>, above which it becomes linear in  $I_{2\omega}$  with a slope of 2–300 cm MW<sup>-1</sup> (increasing inversely to blue wavelength), and below which it goes as  $\log(I_{2\omega})$  with a maximum of approximately 0.3–0.5% cm<sup>-1</sup>.

The last point seems consistent with published results, which generally show the deviation from non-BLIIRA theory near this 5-kW cm<sup>-2</sup> value, above which the absorption can reach several percent per centimeter. Below this value one can expect BLIIRA to be roughly 2–3 times the linear IR absorption, and therefore, without precise measurements, it could easily be mistaken for larger passive cavity losses and larger conversion factors.

The BLIIRA, even when it is small relative to the conversion factor, can still reduce efficiency, as shown in Fig. 4, and this will be even more dramatic above the threshold. Because the absorption can vary significantly one must take care in increasing the crystal length or reducing the beam waist to increase  $\gamma$  because both of these changes are likely to increase the total loss. For example, we can see that  $\gamma \propto L_c/w_0$ . If we write the loss as a fixed loss plus absorption,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \alpha_{\omega}L_c$ , then Eq. (6) will show that when  $\alpha_{\omega}L_c > \mathcal{L}_0$  the efficiency will start to decrease with increasing  $L_c$ . This condition is quite possible with BLIIRA and a low loss semimonolithic cavity.

To reduce BLIIRA effects we chose our waist to be 72  $\mu\text{m}$ , such that we would expect a maximum blue intensity to be well below 5 kW cm<sup>-2</sup> (assuming  $\sim 300$  mW of blue), and still predicting a power-conversion factor of greater than  $10^{-3}$  (assuming that  $P_{\text{in}} = 400$  mW and  $\gamma = 8 \text{ kW}^{-1}$  calculated for our parameters with  $d_{\text{eff}} = 18 \text{ pm/V}$  and worst case  $\phi_r = \pi$ ). Except by selecting larger beam waists, and perhaps operating at a higher temperature, one may be unable to avoid BLIIRA.

#### C. Thermal Effects

The detrimental effects of BLIIRA can go well beyond that of simply increasing the losses as described above. Increased absorption at large intracavity intensities can cause significant transverse and longitudinal thermal gradients inside the crystal, which can lead to reduced mode matching or mode quality as a result of thermal lensing,<sup>14,31</sup> variation in phase mismatch caused by longitudinal gradients,<sup>32</sup> or even cavity instability.<sup>36</sup> Sorting out which effects are present can be difficult, but some values can easily be estimated with some simple models.

Similarly to Polzik and Kimble,<sup>31</sup> we can analyze this cavity, deriving equations that describe the steady-state thermal gradients in the crystal by approximating the crystal as an infinite cylinder of radius  $a$  and solving the heat diffusion equation assuming a constant heat source from the beam absorption at the center. Although we do include

the SH absorption in the heat source, we simply consider that all the power is confined in a Gaussian beam of fixed waist  $w_0$ . Temperature  $T(a)$  at the crystal boundary is fixed by a stabilized feedback loop, which results in the following temperature-difference profile:

$$T(r) - T(a) = \Delta T \left[ 1 - \frac{\mathcal{F}(r)}{\mathcal{F}(a)} \right], \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r) &= \gamma_E + \ln(\tilde{r}) + \int_{\tilde{r}}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt \\ &= - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-\tilde{r})^t}{t!t} \sim \tilde{r}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{r} \equiv 2 \left( \frac{r}{w_0} \right)^2, \quad (34)$$

$$\Delta T \equiv T(0) - T(a) = \frac{P_{\text{abs}} \mathcal{F}(a)}{4\pi L_c k_{\text{th}}}, \quad (35)$$

where  $k_{\text{th}} = 0.4 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  is the thermal conductivity of undoped  $\text{KNbO}_3$  (Ref. 32) and  $\gamma_E = 0.577215 \dots$  is Euler's constant.

Obviously the most important parameter for thermal effects is temperature dependence of the index of refraction, where fundamental index  $n_1$  is relevant for thermal lensing and difference  $n_1 - n_2$  is relevant for the thermally induced phase mismatch. We denote the dependence on temperature of  $n_1$  by  $\dot{n}_T = \partial n_1 / \partial T$  and the phase-mismatch dependence by  $\Delta \dot{k}_T = \partial \Delta k / \partial T$ . These dependencies are calculated and graphed in Appendix A for various fundamental wavelengths and temperatures. We can see that for our parameters the calculated values of  $\Delta \dot{k}_T = -15 \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  and  $\dot{n}_T = 6 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$  are factors of 2 and 50 times smaller, respectively, than those expected at  $150 \text{ }^\circ\text{C}$  by Vogel,<sup>36</sup> for which thermal problems were seen. One can see that for the 50 nm from 920 to 970 nm one can choose the temperature for critical phase matching at which  $\dot{n}_T = 0$ . Although  $\Delta \dot{k}_T$  increases with temperature for a given wavelength, we shall see that this increase will be less critical in our configuration because both the fundamental (because of its larger waist) and the SH (because of its symmetric reflection) beams are longitudinally distributed nearly evenly through the crystal, thus greatly reducing the phase-mismatch gradient problems discussed by Busse *et al.*<sup>32</sup>

One can compensate for uniform longitudinal heating during continuous wave operation by adjusting the temperature set point for maximum SHG after the cavity is locked to the resonance. Comparison of the difference between the optimum set temperatures of low average power operation (continuous wave at low input powers or pulsed operation) and those at high average power operation can be used to approximate a measured  $\Delta T$  value for Eq. (32). For our measurements we found  $\Delta T$  values as high as  $1.4 \text{ }^\circ\text{C}$ . This value can also be estimated for compar-

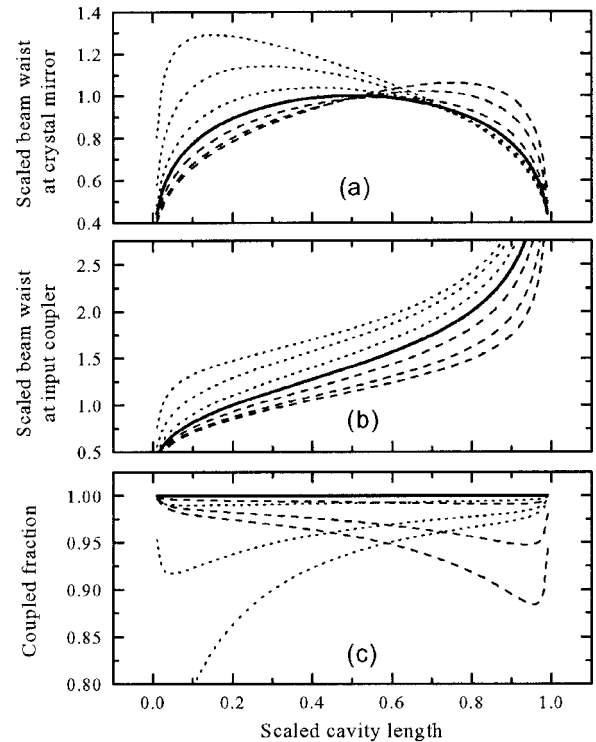


Fig. 10. Effect of thermal lensing on (a) the waist in the crystal, (b) the beam radius at the input coupler, and (c) the fraction of the cold-cavity mode that will still couple to the thermally altered modes versus scaled cavity length for various thermal index gradients  $\dot{n}$ . Solid curves, the cold cavity ( $\dot{n} = 0$ ) case shown in Fig. 3. Dashed (dotted) curves, positive (negative) thermal index gradients of values  $\dot{n} = +(-)0.1, +(-)0.2$ , and  $+(-)0.25 \text{ cm}^{-2}$  moving out from the solid curves.

ison by use of Eq. (32) and expected values for  $\alpha_\omega, \alpha_{2\omega}, \alpha_b, P_{2\omega}$ , and  $P_c$ . Assuming typical values of 0.2%, 5%, and  $0.5\% \text{ cm}^{-1}$  and of 180 mW and 6 W, respectively, we get  $\Delta T = 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

To evaluate the significance of thermal lensing with the *ABCD* matrix formalism, we approximate the induced transverse index profile with a quadratic index profile, using the approximation for  $T(r)$  given by relation (33) (Refs. 27 and 31):

$$n(r) = n(a) + \dot{n}_T [T(r) - T(a)] \quad (36)$$

$$= n(a) + \dot{n}_T \Delta T - \frac{2\dot{n}_T \Delta T}{\Gamma(a)w_0^2} r^2 \quad (37)$$

$$= n(0) - \frac{\dot{n}}{2} r^2, \quad (38)$$

$$\dot{n} = \frac{4\dot{n}_T \Delta T}{\mathcal{F}(a)w_0^2}. \quad (39)$$

Figure 10 shows, for our input coupler, the effect that heating of the crystal will have on the mode, and hence on input coupling and SHG efficiency, versus the scaled cavity length, defined as in Section 2 for various values of  $\dot{n}$ . The solid curves show the unperturbed cavity as in Fig. 3, with the variations that

are due to positive (negative) index gradients shown by the dashed (dotted) curves. The quadratic index profile is of course a rough approximation, but this figure shows us, first, that for both positive and negative thermal index gradients there are cavity lengths just slightly greater than the confocal length that can minimize the effect of thermal lensing on the waist in the crystal, thus giving stability to the SHG process. Second, we can see that the beam radius error at the input mirror increases in proportion to the index gradient for all cavity lengths, meaning that some error in mode matching is inevitable. The mode-matching fraction still remains above 90% near the confocal region, even for the largest perturbations shown. Although cavities with smaller waists are less sensitive to  $\dot{n}$ , the  $w_0^{-2}$  dependence overcomes this advantage, making the overall effect more pronounced.

For our parameters,  $\dot{n} \sim 10^{-2} \text{ cm}^{-2}$  is an order of magnitude smaller than the values shown, so we expect no effect from thermal lensing. Recall that this is so largely because we are working near the zero of the  $\dot{n}_T$  curve. In general one should consider carefully the cavity length for compensation. Another effect to consider is that of longitudinal gradients caused by the longitudinal buildup of blue power (contributing both directly through  $\alpha_{2\omega}$  and indirectly by BLIIRA) and by the natural diffraction of the beam. We can largely resolve the diffraction problem by working in the weak-focusing regime, but in addition the  $ABCD$  analysis shows that this effect can be reduced further for small, positive index gradients, as thermal lensing counteracts the beam diffraction. Although our  $ABCD$  calculation supposes constant  $\dot{n}$  values for each curve, self-consistent calculations made elsewhere have shown little difference.<sup>31</sup> For the blue power buildup, the retroreflection in the crystal ensures that the SH intensity will change by less than a factor of 2 along the length of the crystal, which is much more nearly uniform than single-pass systems.

#### D. Results

As stated in Section 1, the output of the SHG is unusual. It will in general show neither the  $\text{sinc}^2[\Delta k(T)L_c]$  temperature dependence in the power that one typically associates with plane-wave SHG nor the Gaussian or elongated Gaussian intensity profile that one sees in single-crystal unidirectional SHG. Instead, one sees in the temperature-tuning curve the complex modulation described in Subsection 3.C that is uniquely characteristic of the situation reflected in Fig. 5 and the associated lobed forms in the output intensity profiles as shown in Fig. 11. Indeed, one can even use the tuning curve to measure the reflection phase shift. In this section we compare our experimentally measured tuning curve and beam form dependence, for the parameters given above, with that predicted in Section 3 for both the analytic equation and the numerical integration.

Figure 12 shows the measured SH output (diamonds), as we varied the temperature of the crystal

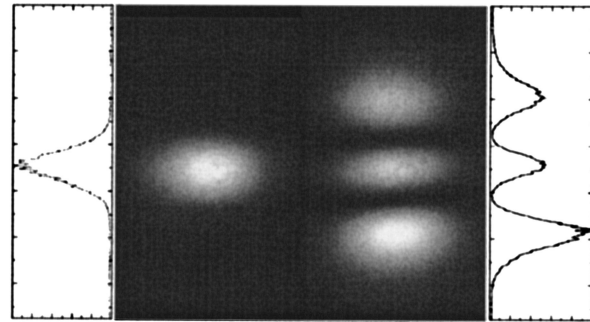


Fig. 11. Example of CCD images of the SH far-field intensity profile along with curves that show the  $y$  axis cut through the center for  $\Delta kL_c/2\pi \sim 1.72$  (right) and for the maximum at  $\Delta kL_c/2\pi \sim 0.47$  (left).

from 24.4 to 29.2 °C, overlaid on the theoretical curves that correspond to Eq. (20) (dotted curve) and to the numerical integration (solid curve) for a measured coupled input power of 10.7 mW, corresponding to a circulating power  $P_c$  of 750 mW (assuming a cavity buildup of approximately 70, based on finesse measurements). This low power allows us to minimize thermal effects and to make a simple comparison to the theoretical curves by assuming a constant circulating power related to the input by the low-power cavity finesse. This is so because at small powers the cavity finesse is dominated by the constant parasitic loss and thus the SH output is just proportional to  $\gamma$  by  $P_2 = \gamma P_1^2$ . The temperature was measured with a digital thermometer with a type-K thermocouple to be accurate to less than 1 °C. The horizontal axis is given both in temperature and in units of  $\Delta k(T)L_c/\pi$  as calculated in Appendix A,

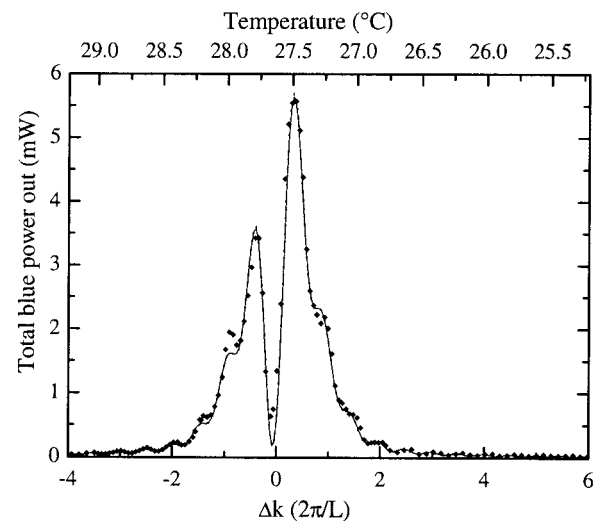


Fig. 12. Comparison of temperature-tuning curve  $P[\Delta k(T)L_c]$  for the adjusted experimental data (diamonds), the analytic equation (solid curve), and the nearly indistinguishable numerical integration (dashed curve). Upper and lower axes, measured temperature and associated phase mismatch, respectively, as related in Appendix A. Data are multiplied by 6 to permit a qualitative comparison with the calculations.



with the  $\Delta k = 0$  point left as an adjustable parameter with which to align the data horizontally with the theoretical curve. For the calculations we use values of  $d = 18$  pm/V and  $\phi_r = 0.75\pi$ ; the latter is chosen by eye to give the best fit. Although these parameters predict a factor-of-6 more SH power, we attribute this discrepancy largely to the effects of the small angular bandwidth and perhaps to a smaller value of  $d$  because  $d$  was not measured. Our beam divergence of  $2\phi_0 = 3.68$  mrad is significantly larger than the  $\Phi$  angular bandwidth  $\delta\Phi = 1.04$  mrad but smaller than the  $\Theta$  angular bandwidth,  $\delta\Theta = 23.2$  mrad. Nonetheless, by scaling the data in Fig. 12 we can see that the complex structure in the temperature-tuning curve is well described by this simple analysis.

We additionally made at each temperature a CCD image of the output beam illuminating a spinning paper card at a distance of 90 cm from the cavity entrance. Two examples of such CCD images are shown in Fig. 11, with the corresponding intensity slices shown above and below. The left-hand image was taken at the peak of the tuning curve. The ratio of the  $y$  and  $z$  widths is  $\sim 2/5$ , which is actually less elliptical than a single pass would be. Recalling that this is the far field, one would expect the visible ellipticity in the left-hand spot to be opposite the walk-off direction and hence opposite the  $y$ -axis modulation (shown vertical in these images).

A similar slice was taken at each temperature to show the modulation of the  $y$ -axis beam profile as a function of  $\Delta k$ . The experimental slices are shown in Fig. 13(a) below the corresponding calculated profiles. Each slice was normalized by its maximum intensity to show the structure better, as the power dependence versus  $\Delta k$  was already shown in Fig. 12. We can see that the semianalytic Fig. 13(b) and the full numerical integration Fig. 13(c) are almost indistinguishable and that both reproduce the experimental beam profiles, though again discrepancies may be expected because of the angular bandwidth problem.

Finally, in Fig. 14(a) we present the measured efficiency versus input power, which shows as much as 75% efficiency, along with the associated reflection data in Fig. 14(b). These data were taken with a spatial filter in place, reducing the maximum power available to 180 mW while only slightly improving the mode-matching efficiency. For the measured points (diamonds), 85% mode matching of the measured input power and a 14.65% loss of the blue power are assumed. The blue loss includes the input coupler (5%) and the dichroic beam splitter (7%) and assumes the lowest absorption (1.5%/cm) reported by Busse *et al.*<sup>32</sup> Higher absorption or inclusion of small losses at HR- and AR-coated surfaces would indicate even better efficiency. Comparing Fig. 14 with Fig. 4 suggests losses of less than 1% in the IR. For the solid curve presented for comparison we suppose that  $\gamma = 4.0$  kW<sup>-1</sup>,  $\mathcal{L} = 0.2\%$  cm<sup>-1</sup>, and  $\alpha_b = 0.13\%$  cm<sup>-1</sup> at the maximum. The dotted curve is for no BLIIRA and with  $\gamma = 4.6$  kW<sup>-1</sup>.

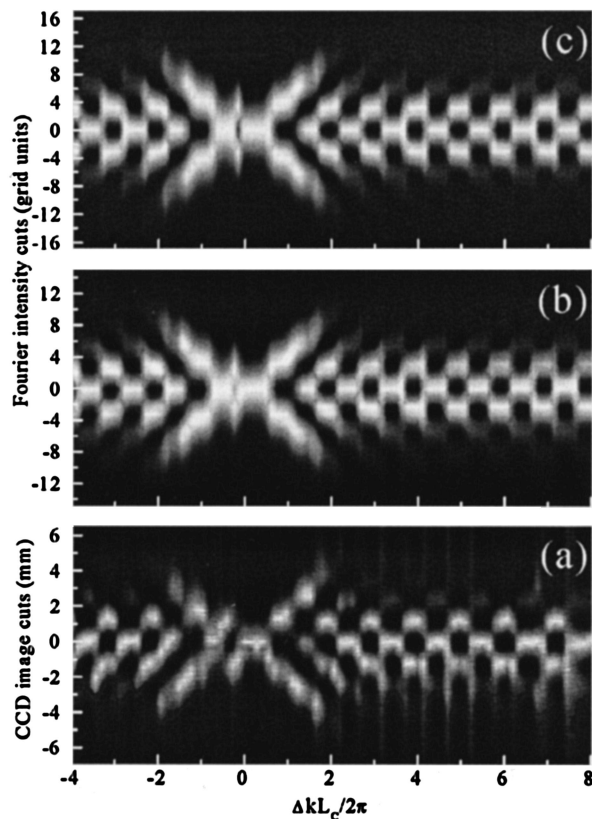


Fig. 13. Comparison of (a) the  $y$ -axis modulation of SH intensity profiles measured by a CCD camera in the far field with the profiles predicted by (b) Eq. (14) and by (c) numerical integration of Eqs. (11) and (12) as we vary  $\Delta k$ . The camera image plane is  $\sim 90$  cm from the waist in the crystal, and profiles in (b) and (c) were obtained from the Fourier transform of the near-field calculations.

These values have not been precisely measured: The curves are simply intended to show qualitative agreement for reasonable values. We can see that although both curves match equally well in reflection, the BLIIRA makes a big difference in lowering the efficiency. In this regime,  $\gamma P_{\text{in}} \sim 0.5 \times 10^{-3}$ , we would gain some efficiency by shortening the crystal to reduce the overall loss and increase the angular bandwidth. This is especially true when more input power is available. We have achieved as much as 200 mW of internal SH power at 461 nm for a raw input of 404 mW of IR radiation and no spatial filter. This shows reduced efficiency ( $\eta \approx 58\%$ , assuming that  $\epsilon = 0.85$ ) despite the higher powers. We have not considered resonant effects caused by the 5% reflection of the SH light, which could increase the BLIIRA slightly owing to enhanced internal SH intensity, but we have not noticed any problem in maintaining stable operation.

## 5. Conclusions

We have presented an analysis of a semimonolithic standing wave cavity for second-harmonic generation, considering the effects of this configuration on design, tuning, thermal effects, and optimization. We have attempted to present this analysis in a prac-



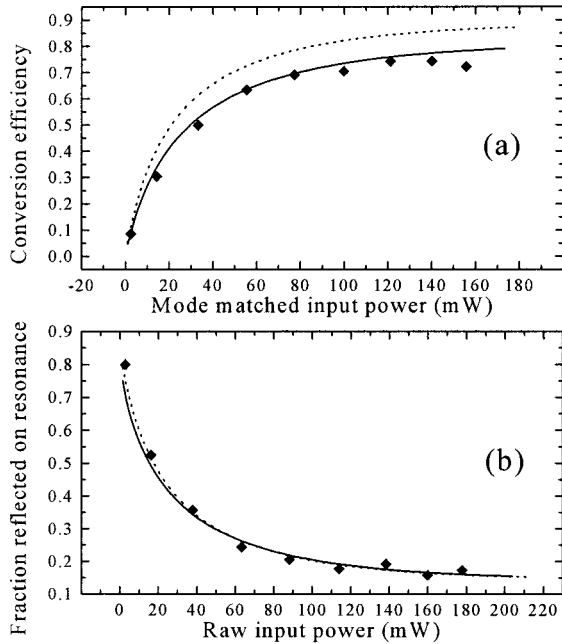


Fig. 14. Experimental data (diamonds) for (a) conversion efficiency  $\eta = P_{2\omega}/P_{in}$  versus mode-matched power  $P_{in}$  and (b) the experimental reflected power ratio (on resonance to off resonance) versus total power in  $P_{in}/\epsilon$ . Shown for comparison are curves calculated with (solid curves, see text) and without (dotted curves) BLIIRA.

tical manner to aid any researcher in need of such a device to build and understand it. The advantages of this standing wave cavity relative to a traditional ring cavity center about its compact monolithic construction, which reduces cost and loss while it enhances stability and simplicity, and its single-output standing wave design, which offers automatically aligned walk-off compensation and reduced longitudinal intensity gradients. Additionally, the on-axis design is coma free and allows one to easily vary the input mode diameter by more than a factor of 2 with little effect on the SHG. We have shown a SHG efficiency of  $>70\%$  at input powers of 120 mW, whereas other researchers, who used a shorter crystal (less loss), achieved 81% efficiency at  $\sim 340$  mW input, despite the fact that in neither case was the HR coating phase shift on the crystal optimized (in fact, our phase shift was nearly a worst case).

We have focused primarily  $\text{KNbO}_3$  because of its wide range of compatibility for SHG, its large nonlinear coefficient, and its adaptability to critical or noncritical phase matching. Although we have emphasized and demonstrated its advantages as a tunable, high power source that is suitable for laser cooling and atomic spectroscopy in the blue-green spectral region, it should work even better at longer wavelengths, where BLIIRA will not be a problem, a fact that becomes increasingly more interesting as more solid-state sources develop in the 1.1–1.4  $\mu\text{m}$  range, where for  $\text{KNbO}_3$  the walk-off is  $2^\circ$ – $4^\circ$ .<sup>37</sup> When they are combined with efficient SHG these sources could provide convenient sources for trapping

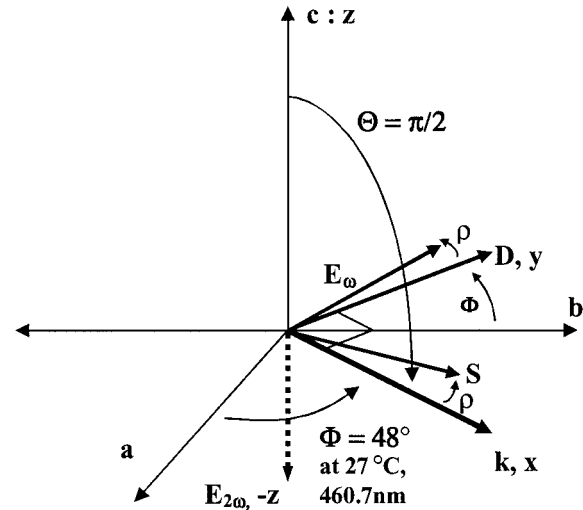


Fig. 15. Depiction of axis definition for relating crystallographic axes ( $a, b, c$ ) to lab axes ( $x, y, z$ ) defined by the chosen polarization ( $y$ ) and propagation ( $x$ ) directions. This example is appropriate for  $\text{KNbO}_3$  of type I ( $e + e = o$ ) phase matching described in the text. Here  $\Phi$  is the phase-matching angle in the  $a$ - $b$  plane,  $\rho$  is the walk-off angle,  $\mathbf{S}$  is the Poynting vector,  $\mathbf{k}$  is the wave vector,  $\mathbf{D}$  is the displacement vector, and  $\mathbf{E}_\omega$  and  $\mathbf{E}_{2\omega}$  are the fundamental and the SH electric field vectors, respectively. All vectors are in the  $a$ - $b$  plane, except for  $\mathbf{E}_{2\omega}$ , which lies along the  $-z$  axis.

or spectroscopy in the red–yellow region (for example, for lithium or sodium).

The principal advantages of this crystal can be applied to other crystals as well. Retroreflecting SHG with a separate reflecting mirror has even been done with periodically poled structures, for which walk-off is not a problem.<sup>25,38</sup> Juwiler *et al.*<sup>25</sup> showed that wedge structuring can control the reflection phase mismatch, which, by this analysis, could mean that higher efficiencies would be achieved with shorter crystal lengths. Although Juwiler *et al.* suggested putting an input coupler on the crystal, we calculate that it would also be possible to use the wedged facet as the high reflector, thus combining this phase control in exactly the cavity form that we have been discussing.

#### Appendix A. Calculation of Constants

We wish to be able to calculate the crystal parameters used in this paper as functions of wavelength, temperature, and polarization. The starting point is necessarily index of refraction  $\tilde{n}_j(\lambda, T)$ , where  $j \in \{a, b, c\}$  is one of the three crystallographic axes as defined by Biaggio *et al.*<sup>35</sup> and shown in Fig. 15. For any chosen propagation direction given by unit vector  $\mathbf{k}$  there are two possible polarization directions in the perpendicular plane (axes  $y$  and  $z$  in Fig. 15) for displacement vector  $\mathbf{D}$  on which the polarization propagates unchanged. Once we have the appropriate direction we can get the phase-matching angles and nonlinear coefficients used in Section 3 and the temperature derivatives used in Section 4 for any case. For a thorough explanation of such calculations and complete figures one should see Zysset *et al.*<sup>39</sup> and Biaggio *et al.*<sup>35</sup>; however, to provide a stand-alone

Table 1. Sellmeier Coefficients for KNbO<sub>3</sub><sup>a</sup>

<i>ij</i>	Coefficient				
	<i>S</i> 1 <sub><i>ij</i></sub> (μm <sup>-2</sup> )	<i>S</i> 2 <sub><i>ij</i></sub> (μm <sup>-2</sup> )	λ1 <sub><i>ij</i></sub> (nm)	λ2 <sub><i>ij</i></sub> (nm)	<i>D</i> <sub><i>ij</i></sub> (×10 <sup>10</sup> m <sup>-2</sup> )
1 <i>a</i>	20.05519	149.8408	258.157447	129.092177	2.517432
2 <i>a</i>	20.27475	152.338	258.664256	127.592234	2.514857
3 <i>a</i>	19.33691	150.4971	260.77236	129.504923	2.514893
4 <i>a</i>	16.60832	142.0508	265.628822	137.103137	2.51586
5 <i>a</i>	16.04692	140.7942	267.779572	137.395507	2.508202
6 <i>a</i>	13.89662	137.2157	273.698261	143.185689	2.511282
1 <i>b</i>	19.37347	135.4992	272.74569	137.003919	2.845018
2 <i>b</i>	20.6625	144.1607	271.398899	130.593449	2.827127
3 <i>b</i>	20.06891	142.7868	272.5307	131.949874	2.80751
4 <i>b</i>	14.37713	123.3481	281.956034	151.431231	2.79633
5 <i>b</i>	18.87445	138.8675	274.864168	135.282114	2.771253
6 <i>b</i>	22.1202	162.8852	271.016254	119.793115	2.762299
1 <i>c</i>	16.0917	165.4431	255.227833	119.71423	1.943289
2 <i>c</i>	18.24447	181.1303	252.752642	111.742295	1.945428
3 <i>c</i>	17.56954	176.6712	254.675941	113.973036	1.95288
4 <i>c</i>	14.0194	158.4156	262.219822	125.100075	1.968455
5 <i>c</i>	16.48284	167.7579	258.712779	118.491217	1.982648
6 <i>c</i>	21.47866	215.6493	252.773409	98.801194	2.004523

<sup>a</sup>Ref. 39. *T*<sub>*i*=1, 2, 3, 4, 5, 6</sub> = 22°, 50°, 75°, 100°, 140°, 180 °C, respectively.

reference for reproducing this cavity with KNbO<sub>3</sub> at other temperatures and wavelengths we have organized the necessary equations and material coefficients in compact form in this appendix.

1. Index

Zysset *et al.*<sup>39</sup> provided an excellent analyses of the refractive indices of KNbO<sub>3</sub> and of the way to calculate  $\tilde{n}_j(\lambda, T)$ . We summarize the calculation:

1. One uses the Sellmeier equation [Eq. (A1)] to model the wavelength dependence of *n* at a given temperature, given the Sellmeier coefficients for that temperature. Zysset *et al.*<sup>39</sup> measured the five coefficients (*S*1<sub>*ij*</sub>, *S*2<sub>*ij*</sub>, λ1<sub>*ij*</sub>, λ2<sub>*ij*</sub>, *D*<sub>*ij*</sub>) for six temperatures *T*<sub>*i*</sub> (*i* = 1 . . . 6) on each axis, thus providing for each axis *j*

$$n_j(\lambda, T_i)^2 = [S1_{ij}(\lambda^2\lambda1_{ij}^2/\lambda^2 - \lambda1_{ij}^2) + S2_{ij}(\lambda^2\lambda2_{ij}^2/\lambda^2 - \lambda2_{ij}^2) - D_{ij}\lambda^2 + 1] \tag{A1}$$

for six measured temperatures. The coefficients and associated temperatures are provided in Table 1.

2. Next one assumes a quadratic dependence on temperature for a given wavelength of the form

$$n_j(\lambda, T) = C0_j(\lambda) + C1_j(\lambda)T + C2_j(\lambda)T^2. \tag{A2}$$

Given the six data pairs {*T*<sub>*i*</sub>,  $\tilde{n}_j(\lambda, T_i)$ } from Eq. (A1) for each axis, one can fit the quadratic equation for any desired wavelength. The results are accurate to ±1.5 × 10<sup>-4</sup>.

With these functions, one can calculate the needed crystal properties: walk-off angles; critical and non-critical phase-matching angles and temperatures for any wavelength; thermal lensing effects; and Δ*k* ver-

sus angle, temperature, or wavelength for finding tuning bandwidths. A direct application of these functions lies in finding the noncritical phase-matching temperatures for various wavelengths when *n*<sub>*c*</sub>(2ω) = *n*<sub>*b*</sub>(ω) or *n*<sub>*c*</sub>(2ω) = *n*<sub>*a*</sub>(ω).

2. Walk-Off

Solving Maxwell’s equations for the propagation of a plane wave in an anisotropic medium with dielectric tensor ε<sub>*ij*</sub>, we find that

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 n^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{k}}. \tag{A3}$$

As the Poynting vector is by definition perpendicular to **E**, and **D** is perpendicular to **k** by Eq. (A3), we can see that the walk-off results from the second term on the right-hand side of Eq. (A3). Its value can be obtained by inspection of Fig. 15 and the relation **D** = ε**E** once we get ε. By taking the dot product of Eq. (A3) with **D** and choosing the crystallographic basis, we can connect  $\hat{\mathbf{n}}$  with the diagonalized dielectric tensor by ε<sub>*jj*</sub> = ε<sub>0</sub> $\tilde{n}_j^2$ . Then from Fig. 15 we can see that, in terms of  $\tilde{n}_a$ ,  $\tilde{n}_b$ , and Θ, the walk-off is given by

$$\rho = \arctan \left[ \frac{\tilde{n}_b}{\tilde{n}_a} \tan(\Theta) \right] - \Theta. \tag{A4}$$

From Eq. (A4) it is clear that the propagation will walk off in the direction of the larger index, as shown in Fig. 15.

3. Effective Index and Phase Matching

For critical phase matching, for which we use the crystal birefringence to match the indices of the fundamental and SH waves, we need to calculate an effective index in the *y-z* plane from  $\hat{\mathbf{n}}$ . Equation (A3) readily gives the equation for an index ellipsoid formed by use of  $\tilde{n}_j^2$  as the major axes of three-

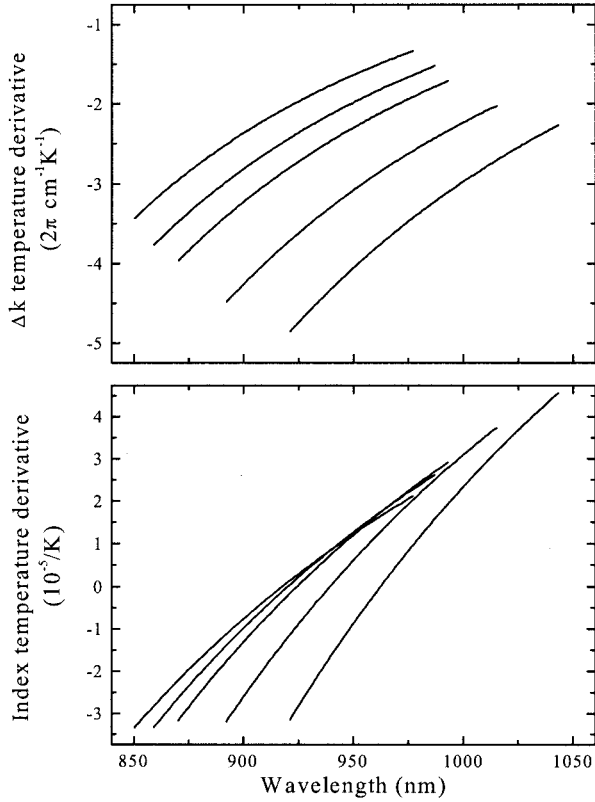


Fig. 16. Temperature dependencies of (top) the phase mismatch  $(1/2\pi)\partial\Delta k/\partial T$  and (bottom) the effective index of refraction  $\partial n_y/\partial T$  on wavelength for five temperatures,  $T = 0^\circ, 27^\circ, 50^\circ, 100^\circ, 150^\circ \text{ C}$  (left to right). Each point was calculated for the phase-matching angle for that temperature and wavelength.

dimensional ellipsoid. From this equation one can deduce geometrically the formula for  $n$  in any given direction that, for propagation in a principal plane such as in Fig. 15, gives a simple ellipse such as

$$\frac{n_y^2 \sin^2(\Theta)}{\tilde{n}_a^2} + \frac{n_y^2 \cos^2(\Theta)}{\tilde{n}_b^2} = 1. \quad (\text{A5})$$

For phase matching we want  $n_c(\lambda/2) = n_y(\lambda)$ , which we substitute into Eq. (A5) to solve for  $\Theta$ . Alternatively, we can rewrite Eq. (A3) as  $\{\tilde{n}_i^2\}\mathbf{D} = n^2(1 - \mathbf{K})\mathbf{D}$ , where  $K_{i,j} \equiv \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j$  and  $\{\tilde{n}_i^2\}$  is a diagonal matrix, and solve it more generally for  $D_y, D_z, n_y$ , and  $n_z$  for a given  $\lambda$  and  $T$ .

Now we can numerically calculate the derivatives at any point as well, which can then be used for evaluating thermal effects as in Subsection 4.C. Figure 16 shows the temperature gradients of  $\Delta k$  and  $n_y$  versus wavelength for five temperatures; each point was calculated for the appropriate phase-matching angle. The wavelength range for each curve represents the phase-matching range for that temperature in this configuration.

#### 4. Effective Nonlinear Coefficient

Coupled-wave equations Eqs. (11) and (12) are derived from vector equations: one for each polarization-frequency pair involved  $(\hat{\mathbf{a}}, \omega)$ . We want

to eliminate the tensor nature of each equation by defining a scalar  $d_{\text{eff}}$  that accounts for the configuration geometry. If we write each field as a complex scalar amplitude times a unit polarization direction  $A_m \hat{\mathbf{a}}_m$ , we can make each associated nonlinear polarization component  $\hat{\mathbf{a}}_m \cdot \mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 [\hat{a}_m]_i d_{ijk} [A_{m'}]_j [A_{m''}]_k$  into a product of scalars by the definition

$$\begin{aligned} [\hat{a}_m]_i d_{ijk} [A_{m'}]_j [A_{m''}]_k &= [\hat{a}_m]_i d_{ijk} A_{m'} [\hat{a}_{m'}]_j A_{m''} [\hat{a}_{m''}]_k \\ &= A_{m'} A_{m''} [d_{ijk} [\hat{a}_m]_i [\hat{a}_{m'}]_j [\hat{a}_{m''}]_k] \\ &\equiv A_{m'} A_{m''} d_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Thus we can find  $d_{\text{eff}}$  for any chosen coupled polarization directions once we have  $d_{ijk}$  for the chosen frequency and temperature. The temperature- and frequency-dependent components can be approximated from Miller's rule<sup>35,40</sup>:

$$\begin{aligned} d_{ijk}(\lambda, T) &= \epsilon_0 \delta_{ijk} \{ [n_i^{(2\omega)}]^2 - 1 \} \{ [n_j^{(\omega)}]^2 - 1 \} \\ &\quad \times \{ [n_k^{(\omega)}]^2 - 1 \}. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

We need just  $n_j(\lambda, T_i)$  and the nearly constant Miller indices  $\delta_{ijk}$ , given by<sup>35</sup>

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} ijk = & \delta(m^2/C) \\ 311 & -3.0 \times 10^{-2} \\ 322 & -3.2 \times 10^{-2} \\ 333 & -6.6 \times 10^{-2} \\ 223, 232 & -2.9 \times 10^{-2} \\ 113, 131 & -3.0 \times 10^{-2} \end{cases}$$

Finally, we point out that nonlinear coefficients can vary from crystal to crystal, depending on the crystals' quality or history. Poorly grown, damaged, or depoled crystals can have lower nonlinearities, so it is best to measure the nonlinearity for each crystal. The calculation of  $d$  above is most valuable for comparison of various configurations and for rough or upper-bound values of the nonlinear conversion.

We acknowledge financial support from the Centre National de la Recherche Scientifique (France) and the Provence-Alpes-Côtes-d'Azur Region. We thank J. C. Bernard for his technical contributions and Jean-Jacques Zondy for helpful discussions.

#### References

1. H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, and M. Kuwata-Gonokami, "Magneto-optical trapping and cooling of strontium atoms down to the photon recoil temperature," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1116–1119 (1999).
2. H. Katori, M. Takamoto, V. G. Pal'chikov, and V. D. Ovsianikov, "Ultra-stable optical clock with neutral atoms in an engineered light shift trap," *Phys. Rev. Lett.* **91**, 173005 (2003).
3. Y. Bidet, B. Klappauf, J. C. Bernard, D. Delande, G. Labeyrie, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser, "Coherent light transport in a cold strontium cloud," *Phys. Rev. Lett.* **88**, 203902 (2002).
4. U. Sterr, K. Sengstock, J.-H. Müller, and W. Ertmer, "High-resolution isotope shift measurement of the MgI  $^1S_0$ - $^3P_1$  intercombination transition," *Appl. Phys. B* **56**, 62–64 (1993).
5. C. E. Simien, Y. C. Chen, P. Gupta, S. Laha, Y. N. Martinez, P. G. Mickelson, S. B. Nagel, and T. C. Killian, "Using absorp-

- tion imaging to study ion dynamics in an ultracold neutral plasma," <http://arxiv.org/abs/physics/0310017>, accessed 20 December, 2003.
6. Th. Udem, S. A. Diddams, K. R. Vogel, C. W. Oates, E. A. Curtis, W. D. Lee, W. M. Itano, R. E. Drullinger, J. C. Bergquist, and L. Hollberg, "Absolute frequency measurements of the  $\text{Hg}^+$  and Ca optical clock transitions with a femtosecond laser," *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4996–4999 (2001).
  7. Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, and Y. Takahashi, "Spin-singlet Bose–Einstein condensation of two-electron atoms," *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040404 (2003).
  8. T. P. Dinneen, K. R. Vogel, E. Arimondo, J. L. Hall, and A. Gallagher, "Cold collisions of  $\text{Sr}^*$ –Sr in a magneto-optical trap," *Phys. Rev. A* **59**, 1216–1222 (1999).
  9. T. Kurosu and F. Shimizu, "Laser cooling and trapping of alkaline earth atoms," *Jpn. J. Appl. Phys.* **31**, 908–912 (1992).
  10. X. Xu, T. H. Loftus, J. L. Hall, A. Gallagher, and J. Ye, "Cooling and trapping of atomic strontium," *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 968–976 (2003).
  11. M. Bode, I. Freitag, A. Tünnermann, and H. Welling, "Frequency-tunable 500-mW continuous-wave all-solid-state single-frequency source in the blue spectral region," *Opt. Lett.* **22**, 1220–1222 (1997).
  12. R. Paschotta, P. Kürz, R. Henking, S. Schiller, and J. Mlynek, "82% Efficient continuous-wave frequency doubling of 1.06  $\mu\text{m}$  with a monolithic  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$  resonator," *Opt. Lett.* **19**, 1325–1327 (1994).
  13. W. J. Kozlovsky, C. D. Nabors, and R. L. Byer, "Efficient second harmonic generation of a diode-laser-pumped cw Nd:YAG laser using monolithic  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$  external resonant cavities," *IEEE J. Quantum Electron.* **24**, 913–919 (1988).
  14. J.-J. Zondy, "Experimental investigation of single and twin  $\text{AgGaSe}_2$  crystals for cw 10.2  $\mu\text{m}$  SHG," *Opt. Commun.* **119**, 320–326 (1995).
  15. V. D. Volosov, A. G. Kalintsev, and V. N. Krylov, "Phase effects in a double-pass frequency doubler," *Sov. Tech. Phys. Lett.* **5**, 5–7 (1979).
  16. M. Bode, "Abstimmbare Einfrequenz-Strahlquellen hoher Stabilität im infraroten, sichtbaren und ultravioletten Spektralbereich," Ph.D. dissertation (Universität Hannover, Hannover, Germany, 1999).
  17. R. Paschotta, "Einfach und doppeltresonante monolithische, Frequenzverdoppler für Experimente, in der Quantenoptik," Ph.D. dissertation (Universität Konstanz, Konstanz, Germany, 1994).
  18. V. D. Volosov and A. G. Kalintsev, "Optimum optical second-harmonic generation in tandem crystals," *Sov. Tech. Phys. Lett.* **2**, 373–375 (1976).
  19. L. K. Samanta, T. Yanagawa, and Y. Yamamoto, "Technique for enhanced second harmonic output power," *Opt. Commun.* **76**, 250–252 (1990).
  20. D. J. Armstrong, W. J. Alford, T. D. Raymond, and A. V. Smith, "Parametric amplification and oscillation with walkoff-compensating crystals," *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 460–474 (1997).
  21. J. P. Fève, J. J. Zondy, B. Boulanger, R. Bonnenberger, X. Cabirol, B. Ménaert, and G. Marnier, "Optimized blue light generation in optically contacted walk-off compensated  $\text{RbTiO}_3$ – $\text{AsO}_4$  and  $\text{KTiOP}_{1-y}\text{As}_y\text{O}_4$ ," *Opt. Commun.* **161**, 359–369 (1999).
  22. G. D. Boyd and D. A. Kleinman, "Parametric interaction of focused Gaussian light beams," *J. Appl. Phys.* **39**, 3597–3639 (1968).
  23. A. Ashkin, G. D. Boyd, and J. M. Dziedzic, "Resonant optical second harmonic generation and mixing," *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-2**, 109–123 (1966).
  24. M. H. Dunn and A. I. Ferguson, "Coma compensation in off-axis laser resonators," *Opt. Commun.* **20**, 214–218 (1977).
  25. I. Juwiler, A. Arie, A. Skliar, and G. Rosenman, "Efficient quasi-phase-matched frequency doubling with phase compensation by a wedged crystal in a standing-wave external cavity," *Opt. Lett.* **24**, 1236–1238 (1999).
  26. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic, San Diego, Calif., 1993).
  27. A. Yariv, *Quantum Electronics* (Wiley, New York, 1989).
  28. I. Jovanovic, B. J. Comaskey, and D. M. Pennington, "Angular effects and beam quality in optical parametric amplification," *J. Appl. Phys.* **90**, 4328–4337 (2001).
  29. S. K. Wong, G. Fournier, P. Mathieu, and P. Pace, "Beam divergence effects on nonlinear frequency mixing," *J. Appl. Phys.* **71**, 1091–1101 (1991).
  30. H. Mabuchi, E. S. Polzik, and H. J. Kimble, "Blue-light-induced infrared absorption in  $\text{KNbO}_3$ ," *J. Opt. Soc. Am. B* **11**, 2023–2029 (1994).
  31. E. S. Polzik and H. J. Kimble, "Frequency doubling with  $\text{KNbO}_3$  in an external cavity," *Opt. Lett.* **16**, 1400–1402 (1991).
  32. L. E. Busse, L. Goldberg, and M. R. Surette, "Absorption losses in  $\text{MgO}$ -doped and undoped potassium niobate," *J. Appl. Phys.* **75**, 1102–1110 (1994).
  33. P. Lodahl, J. L. Sørensen, and E. S. Polzik, "High efficiency second harmonic generation with a low power diode laser," *Appl. Phys. B* **64**, 383–386 (1997).
  34. L. Shiv, J. L. Sørensen, and E. S. Polzik, "Inhibited light-induced absorption in  $\text{KNbO}_3$ ," *Opt. Lett.* **20**, 2270–2272 (1995).
  35. I. Biaggio, P. Kerkoc, L.-S. Wu, B. Zysset, and P. Günter, "Refractive indices of orthorhombic  $\text{KNbO}_3$ . II. Phase-matching configurations for nonlinear-optical interactions," *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 507–517 (1992).
  36. K. R. Vogel, "Laser cooling on a narrow atomic transition and measurement of the two-body cold collision loss rate in a strontium magneto-optical trap," Ph.D. dissertation (University of Colorado, Boulder, Colo., 1999).
  37. C. Batchelor, W. J. Chung, S. Shen, and A. Jha, "Enhanced room-temperature emission in  $\text{Cr}^{4+}$  ions containing aluminosilicate glasses," *Appl. Phys. Lett.* **82**, 4035–4037 (2003).
  38. J. Zimmermann, J. Struckmeier, M. R. Hofmann, and J.-P. Meyn, "Tunable blue laser based on intracavity frequency doubling with a fan-structured periodically poled  $\text{LiTaO}_3$  crystal," *Opt. Lett.* **27**, 604–606 (2002).
  39. B. Zysset, I. Biaggio, and P. Günter, "Refractive indices of orthorhombic  $\text{KNbO}_3$ . I. Dispersion and temperature dependence," *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 380–386 (1992).
  40. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley, New York, 1991).



La réalisation d'une source bleue intense fut longtemps une limitation au piégeage des alcalino-terreux<sup>1</sup>. Même à l'heure actuelle où des diodes lasers sont disponibles pour cette région spectrale, il semble difficile d'obtenir suffisamment de puissance pour exercer une force conséquente en utilisant ces semi-conducteurs. Il est alors plus réaliste d'exploiter la gamme infra-rouge pour laquelle la puissance disponible est conséquente (de l'ordre du watt). La longueur d'onde sera divisée par deux en utilisant un cristal non-linéaire. Nous avons réalisé cela en insérant le cristal dans une **cavité linéaire**. Ceci permet, grâce à l'effet de *build-up* du rayonnement fondamental, d'obtenir une conversion importante de la puissance incidente pour générer le rayonnement bleu. L'utilisation d'une cavité linéaire rend le montage optique particulièrement simple [117, fig. 1] assure une bonne stabilité mécanique de l'ensemble. Un traitement réfléchissant (pour les deux longueurs d'onde) sur la face arrière du cristal assure la fonction de miroir de sortie. Le montage est finalement très simple puisqu'il se constitue d'un coupleur d'entrée et du cristal non-linéaire (cavité semi-monolithique). Le fait d'avoir une onde stationnaire dans le cristal introduit des caractéristiques originales [117, fig.7]. Nous ne reviendrons pas dessus; le lecteur pourra se référer à l'article [117] s'il souhaite une analyse de ces effets en particulier. Nous préférons considérer comme données les caractéristiques physiques de la cavité afin de faire une étude systématique des performances du doublage.

Dans une première partie, nous rappellerons les différentes caractéristiques de la cavité (en utilisant les mêmes notations que B. G. Klappauf [117]). Nous verrons qu'il n'est pas forcément facile de les mesurer précisément. Nous présenterons ensuite une méthode d'analyse des mesures qui nous permet de les déterminer indépendamment. La dernière partie est dédiée à leur interprétation. Elle nous permettra de conclure un peu plus précisément que ne le fait l'article [117].

## C.1 Rappel des formules et position du problème

De façon habituelle, on caractérise la cavité par les pertes produites après un aller-retour. Elles sont un élément crucial dans notre situation puisque pour produire le bleu, il faut avoir un facteur de surintensité ou de *build-up* élevé pour obtenir une conversion efficace. On ne peut cependant pas dissocier *a priori* les pertes parasites (sur les miroirs ou par absorption) et la génération de seconde harmonique, puisque **la production du bleu n'est rien d'autre qu'une perte en puissance pour le fondamental**. L'analyse suivante vise précisément à faire une mesure indépendante des pertes parasites  $\mathcal{L}$  et des pertes par conversion  $\mathcal{C}$

---

<sup>1</sup>On y ajoutera l'ytterbium dont la structure est similaire et qui peut être piégé sur une transition violette à 399 nm.

que l'on suppose proportionnelles à la puissance intracavité  $P_c$  [117, p. 2511] :

$$\mathcal{C} = \gamma P_c \quad (\text{C.1})$$

On peut alors définir la réflexion et la transmission de la cavité pour  $\mathcal{C}, \mathcal{L} \ll 1$  :

$$R = \left( \frac{\sqrt{(1 - \mathcal{L} - \mathcal{C})} - \sqrt{R_c}}{1 - \sqrt{R_c} \sqrt{(1 - \mathcal{L} - \mathcal{C})}} \right)^2 \quad (\text{C.2})$$

$$(\text{C.3})$$

$$T = \frac{(1 - R_c) T_m (1 - \mathcal{L} - \mathcal{C})}{\left(1 - \sqrt{R_c} (1 - \mathcal{L} - \mathcal{C})\right)^2} \quad (\text{C.4})$$

$R_c$  est le coefficient de réflexion du coupleur d'entrée et  $T_m$  le coefficient de transmission de la face de sortie du cristal. Ce dernier n'est pas connu avec certitude. Cela peu paraître surprenant *a priori*, mais comme il est très faible, on ne peut en donner qu'une estimation :  $T_m \simeq 10^{-6}$ . Il est en définitive **difficile d'exploiter les mesures absolues de la transmission de la cavité**. En revanche, la mesure directe de  $R_c$  donne 96,7%, ce qui est en accord avec la valeur fournie par le constructeur. Posons par ailleurs  $T_c = 1 - R_c = 3,3\%$ .

Dans la suite, on ne gardera que les termes au premier ordre en  $\mathcal{C}, \mathcal{L}$  et  $T_c$ , ce qui simplifie notablement les expressions C.2 et C.4. On obtient :

$$R = \left( \frac{T_c - \mathcal{L} - \mathcal{C}}{T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C}} \right)^2 \quad (\text{C.5})$$

$$(\text{C.6})$$

$$T = T_m \frac{4T_c}{(T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C})^2} \quad (\text{C.7})$$

Si l'on souhaite connaître la puissance intracavité  $P_c$ , qui permettra par suite de calculer la puissance bleue produite, on préférera utiliser l'expression du facteur de surintensité<sup>2</sup>  $Q$  qui s'obtient facilement à partir de l'expression C.7 de  $T$  :

$$Q = \frac{4T_c}{(T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C})^2} \quad (\text{C.8})$$

Les pertes par conversion dépendent de  $P_c$ . Nous les avons supposées proportionnelles, mais notre raisonnement est généralisable à tout type de dépendance  $\mathcal{C}(P_c)$ . L'équation C.8 est en fait **une équation d'état** pour la cavité puisqu'**avec une**

<sup>2</sup>On évitera d'utiliser le terme de *finesse* qui désigne généralement la largeur des pics de transmission par rapport à l'intervalle spectral libre de la cavité. Le facteur de surintensité et la finesse sont égaux pour une cavité symétrique. Ce n'est pas le cas dans notre situation.

puissance incidente effectivement couplée dans la cavité  $P_{\text{in}}^0$ , on peut calculer  $P_c$  en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{P_c}{P_{\text{in}}} = \frac{4T_c}{(T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C}(P_c))^2} \quad (\text{C.9})$$

Pour une dépendance linéaire  $\mathcal{C} = \gamma P_c$ , on résoudra

$$P_c (T_c + \mathcal{L} + \gamma P_c)^2 - 4T_c P_{\text{in}}^0 = 0 \quad (\text{C.10})$$

Il s'agit d'une équation polynomiale du troisième ordre [117, expr. 3, p. 2512].

Le rapport de la puissance incidente couplée dans la cavité  $P_{\text{in}}^0$  sur la puissance incidente totale  $P_{\text{in}}$  définit le *mode-matching*  $M$  :

$$M = \frac{P_{\text{in}}^0}{P_{\text{in}}} \quad (\text{C.11})$$

L'objectif de notre analyse est en fait de connaître la dépendance  $\mathcal{C}(P_c)$  ; on vérifiera ainsi l'efficacité de la conversion vers la seconde harmonique. Ceci est possible en effectuant des mesures de réflexion et de transmission de la cavité.

Il n'est cependant pas facile de mesurer les pertes de la cavité avec précision. Lors de la conception, **on cherche à optimiser le coefficient de réflexion du coupleur d'entrée pour que les pertes totales  $\mathcal{L} + \mathcal{C}$  soient égales à  $T_c$**  [117, C. p. 2513]. Autour de cet optimum, **le coefficient de réflexion étant minimal [117, fig. 2b. p. 2512], la mesure des pertes est rendue très incertaine** : l'incertitude de mesure des pertes à partir du coefficient de réflexion diverge autour de l'optimum de la cavité.

En pratique,  $R$  n'est jamais rigoureusement nul, car le *mode-matching* n'est pas parfait. On distinguera donc la valeur du coefficient de réflexion théorique  $R$  (qui suppose un *mode-matching* parfait) et la valeur mesurée  $R_{\text{exp}}$  :

$$R_{\text{exp}} = M \times R + (1 - M) \quad (\text{C.12})$$

$M$  est le *mode-matching*.

Il est intéressant de faire une mesure indépendante du *mode-matching*, ce que nous justifierons *a posteriori* dans la partie C.4.

Nous souhaitons en définitive connaître les pertes dans la cavité  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$ , ainsi que le *mode-matching*  $M$ , soit trois paramètres. Cela se fera par des mesures expérimentales de réflexion et de transmission. On devrait ainsi pouvoir caractériser complètement les performances de la cavité. **La contrainte majeure pour notre analyse est que le coefficient de transmission de la face arrière du cristal  $T_m$  n'est pas connu.** On ne peut donc pas faire de mesure absolue de la transmission. Nous tâcherons donc d'exploiter des mesures relatives de  $T$  qui dépend fortement de la température.

## C.2 Principe de l'analyse des données

Comme on peut le voir [117, fig. 12, p. 2522], la conversion vers la seconde harmonique est fortement dépendante de la température. Ceci traduit la sensibilité thermique de l'accord de phase. En changeant la température de quelques degrés Celsius, il est possible de sortir de l'accord de phase. Il est donc possible de mesurer la transmission et la réflexion dans deux situations :

- À l'accord de phase, où la conversion est maximale et les pertes totales valent donc  $\mathcal{L} + \mathcal{C}$ . La transmission et la réflexion sont notées  $T_{\text{acc}}$  et  $R_{\text{acc}}$ .
- Hors accord de phase, la conversion sera nulle : les pertes se résument à  $\mathcal{L}$ .

On mesure cette fois  $T_{\text{désac}}$  et  $R_{\text{désac}}$ .

L'expression du coefficient de réflexion mesuré dépend directement de trois paramètres que nous cherchons à connaître  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $M$ . À partir des expressions C.12 et C.5, on a

$$R_{\text{exp}} = M \times \left( \frac{T_c - \mathcal{L} - \mathcal{C}}{T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C}} \right)^2 + (1 - M) \quad (\text{C.13})$$

Ayant mesuré  $R_{\text{acc}}$  et  $R_{\text{désac}}$  dans des conditions différentes, on aura

$$R_{\text{acc}} = M \times \left( \frac{T_c - \mathcal{L} - \mathcal{C}}{T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C}} \right)^2 + (1 - M) \quad (\text{C.14})$$

$$R_{\text{désac}} = M \times \left( \frac{T_c - \mathcal{L}}{T_c + \mathcal{L}} \right)^2 + (1 - M) \quad (\text{C.15})$$

Ne pouvant exploiter les mesures absolues de la valeur du coefficient de friction, on utilisera plutôt le rapport  $T_{\text{désac}}/T_{\text{acc}}$  noté  $\mathbb{T}$ . Ce dernier est indépendant de  $T_m$  et vaut

$$\mathbb{T} = \frac{T_{\text{désac}}}{T_{\text{acc}}} = \left( \frac{T_c + \mathcal{L} + \mathcal{C}}{T_c + \mathcal{L}} \right)^2 \quad (\text{C.16})$$

On dispose donc de trois mesures expérimentales qui doivent nous permettre de calculer  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $M$  pour différentes valeurs de la puissance incidente  $P_{\text{in}}$ .

Les équations C.14, C.15 et C.16 constituent un système de trois équations non-linéaires où  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $M$  sont les inconnues et  $R_{\text{acc}}$ ,  $R_{\text{désac}}$ ,  $\mathbb{T}$  les paramètres. Le système sera résolu numériquement.



## C.3 Mesures des caractéristiques de la cavité

### C.3.1 Mesures des pertes, de la conversion et du *mode-matching*

En faisant varier  $P_{\text{in}}$  la puissance incidente totale, nous avons mesuré les paramètres  $R_{\text{acc}}$ ,  $R_{\text{désac}}$  et  $\mathbb{T}$ , comme on peut le voir sur la figure C.1.

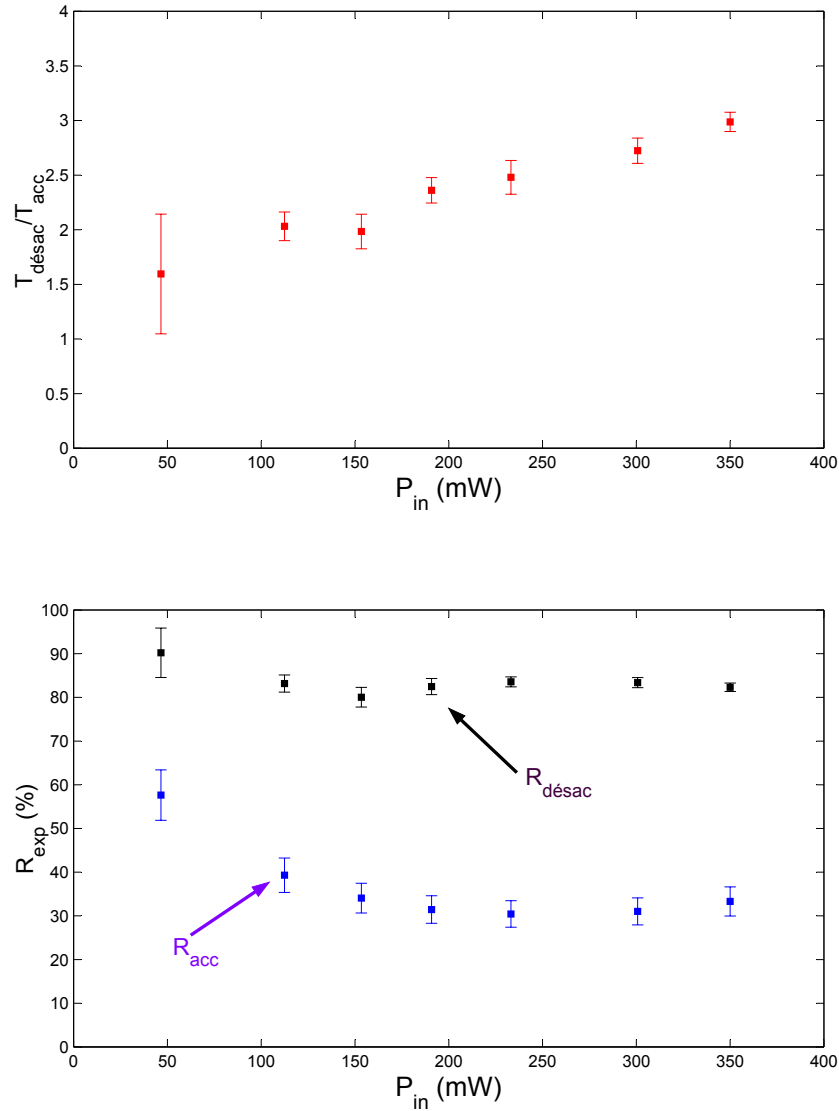


FIG. C.1 – Mesures de  $\mathbb{T}$ ,  $R_{\text{acc}}$  et  $R_{\text{désac}}$  en fonction de la puissance incidente  $P_{\text{in}}$ . On passe du régime « acc » au régime « désac » en changeant la température pour sortir de l'accord de phase.

Pour le calcul des barres d'erreurs, on a mesuré l'écart-type des fluctuations

sur les mesures de réflexion et de transmission, qui nous donne des valeurs maximum et minimum pour  $R_{\text{acc}}$ ,  $R_{\text{désac}}$  et  $\mathbb{T}$ .

Pour chaque valeur de  $P_{\text{in}}$ , nous avons ensuite résolu le système d'équations C.14, C.15 et C.16. On peut ainsi caractériser complètement la cavité avec  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $M$ .

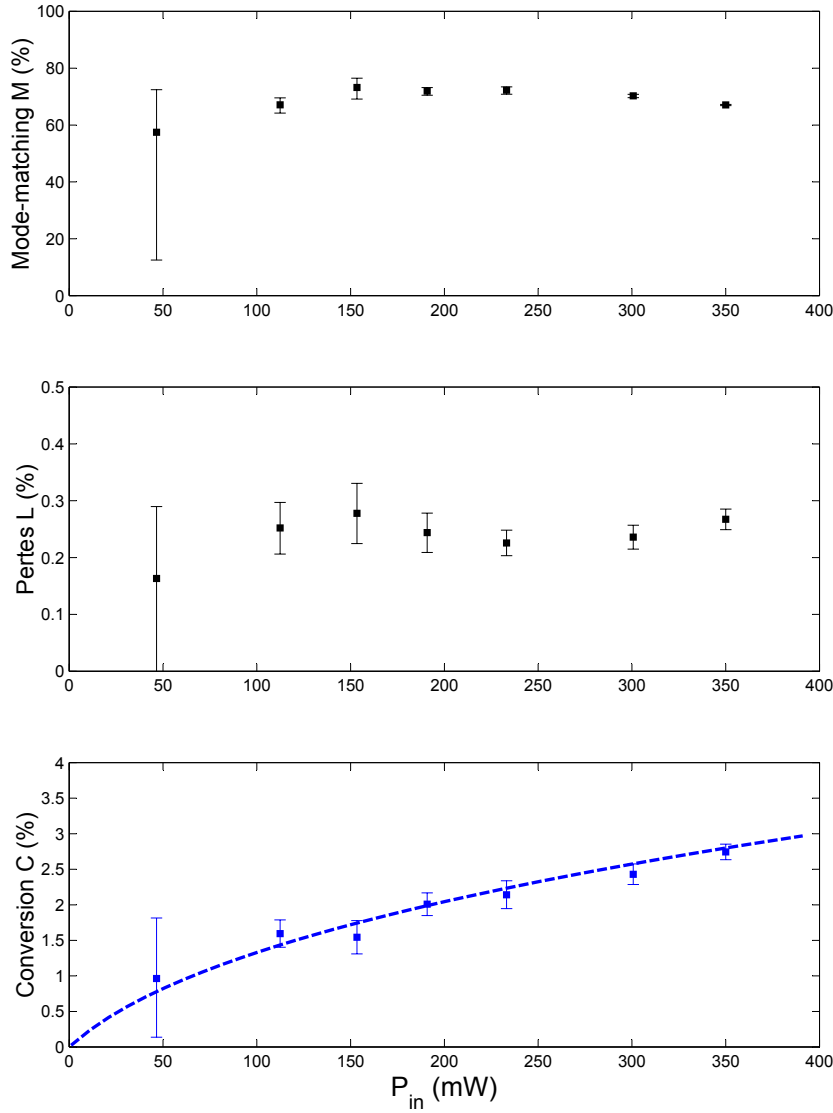


FIG. C.2 – Valeurs calculées de  $M$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  en résolvant numériquement le système d'équations C.14, C.15 et C.16. On a comparé les mesures expérimentales de la conversion  $\mathcal{C}$  au calcul théorique pour  $\gamma = 3,5 \text{ kW}^{-1}$ . Pour plus de détails, voir le texte.

On calcule les barres d'erreurs sur  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $M$  en résolvant à nouveau le système (C.14, C.15 et C.16) pour les valeurs maximum et minimum de  $R_{\text{acc}}$ ,  $R_{\text{désac}}$  et  $\mathbb{T}$ .

Les résultats sont représentés sur la figure C.2. On a comparé les mesures de conversion  $\mathcal{C}$  avec la courbe théorique. Pour cela, on résout l'équation C.10, en la mettant sous la forme

$$\frac{1}{\gamma} \mathcal{C}^3 + 2 \frac{T_c + \mathcal{L}}{\gamma} \mathcal{C}^2 + \frac{(T_c + \mathcal{L})^2}{\gamma} \mathcal{C} - 4T_c \underbrace{M P_{\text{in}}}_{P_{\text{in}}^0} = 0 \quad (\text{C.17})$$

Pour ajuster les valeurs expérimentales, on prendra pour  $\mathcal{L}$  et  $M$  les valeurs mesurées (fig. C.2),  $\mathcal{L} \simeq 0,25\%$  et  $M \simeq 70\%$ , qui sont visiblement indépendantes de  $P_{\text{in}}$  en première approximation. On a choisi  $\gamma = 3,5 \text{ kW}^{-1}$ , ce qui permet un bon ajustement des mesures de  $\mathcal{C}$ . On fera une interprétation plus quantitative des courbes dans la partie C.4.

### C.3.2 Comparaison aux mesures de la puissance bleue

On a ici complètement caractérisé la cavité d'un point de vue énergétique. Il semble bien que  $\mathcal{C}$  ait la dépendance attendue, c'est-à-dire linéaire :  $\mathcal{C} = \gamma \mathbf{P}_c$  avec  $\gamma \simeq 3,5 \text{ kW}^{-1}$ .

Puisque  $\mathcal{C}$  désigne les pertes par conversion, on peut calculer la puissance bleue attendue soit

$$P_b^{\text{att}} = \gamma P_c^2 = \frac{\mathcal{C}^2}{\gamma} \quad (\text{C.18})$$

Nous avons donc tracé, sur la figure C.3, la puissance bleue attendue que l'on compare aux mesures expérimentales directes sur le faisceau bleu en sortie de la cavité.

On constate sur la figure C.3 que la puissance attendue  $\mathbf{P}_b^{\text{att}}$  est supérieure à la puissance mesurée  $\mathbf{P}_b^{\text{exp}}$ . Cette dernière est ajustée par la courbe en pointillés, c'est-à-dire  $P_b^{\text{exp}} = \gamma_b P_c^2$  avec  $\gamma_b \simeq 2,7 \text{ kW}^{-1}$ . Notons quand même que les mesures de  $P_b^{\text{exp}}$  s'écartent sensiblement de la prédiction dès que  $P_{\text{in}} \gtrsim 300 \text{ mW}$ . Cette puissance « manquante » est une limitation de notre dispositif. À partir de notre analyse, on peut aller plus loin que B. G. Klappauf [117] en son temps.

## C.4 Interprétation des résultats

Notre étude nous permet de connaître l'ensemble des caractéristiques de la cavité. Il peut paraître assez surprenant d'avoir choisi de calculer indépendamment  $M$  et  $\mathcal{L}$  pour chaque valeur de  $P_{\text{in}}$ . On peut penser qu'*a priori* les pertes parasites et le *mode-matching*<sup>3</sup> sont indépendants de  $P_{\text{in}}$ . Au vu de la figure C.2, cela semble

<sup>3</sup>La valeur relativement faible du *mode-matching* s'explique par la présence d'un *tapered amplifier* avant la cavité qui déforme en partie le faisceau gaussien lors de l'amplification.

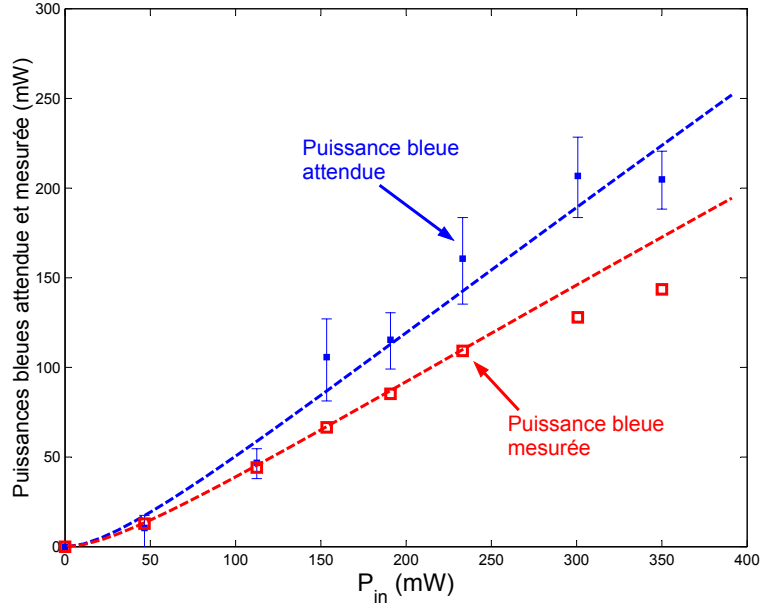


FIG. C.3 – Calcul de la puissance bleue attendue à partir de la valeur de  $\mathcal{C}$  et comparaison aux mesures directes  $P_b^{\text{exp}}$  sur le faisceau bleu. L'incertitude de mesure sur  $P_b^{\text{exp}}$  est inférieure au pourcent ; nous ne l'avons pas représentée.

vrai en première approximation dans la limite des barres d'erreurs :  $M \simeq 70\%$  et  $\mathcal{L} = 0,25\%$ . On voit notamment que  $M$  semble décroître légèrement (quelques pourcent) lorsque  $P_{in} \rightarrow 0$ . Il s'agit sans doute d'un effet thermique qui modifie légèrement le *mode-matching* [117, p. 2520]. Nous avons calculé indépendamment  $M$  et  $\mathcal{C}$  : la valeur des pertes par conversion tient donc compte du *mode-matching*. **On ne peut donc pas invoquer un effet thermique (*thermal-lensing* par exemple) pour expliquer une valeur réduite des performances de la cavité.** De toutes façons, la modification du *mode-matching* n'est pas significative et ne suffirait pas à expliquer la réduction des performances.

Grâce à notre analyse, nous avons mis en évidence la dépendance des pertes par conversion. En première approximation, elles varient linéairement avec la puissance intracavité :

$$\mathcal{C} = \gamma_b P_c + \gamma_{\text{abs}} P_c \quad (\text{C.19})$$

avec  $\gamma_b \simeq 2,7 \text{ kW}^{-1}$  qui désigne le coefficient de conversion vers la seconde harmonique obtenu à partir de la puissance bleue mesurée. On a distingué  $\gamma_{\text{abs}} P_c$  qui désigne les pertes supplémentaires. Cette dépendance demanderait sans doute d'être affinée puisque l'on observe (fig. C.3) un écart significatif entre la prédiction et les mesures directes de la puissance bleue pour  $P_{in} \gtrsim 300 \text{ mW}$ .

Insistons sur un point : les pertes  $\gamma_{\text{abs}} P_c$  existent uniquement lorsqu'on est à l'accord de phase. Le coefficient  $\mathcal{C}$  désigne par définition les pertes supplémentaires

lorsqu'on est à l'accord de phase (expr. C.14 et C.15). Elles ne sont donc présentes que lorsque de la puissance bleue est générée. **Les pertes supplémentaires  $\gamma_{\text{abs}}P_c$  sont donc clairement induites par la génération de rayonnement bleu**, autrement dit un processus de BLIIRA<sup>4</sup>. La dépendance en fonction de  $P_c$  est un peu surprenante. Si l'on écrit la puissance totale absorbée dans la cavité :

$$P^{\text{abs}} = (\mathcal{L} + \gamma_b P_c + \gamma_{\text{abs}} P_c) P_c \quad (\text{C.20})$$

Puisque les pertes en puissance  $\gamma_{\text{abs}}P_c$  sont induites par le bleu (avec  $P_b^{\text{exp}} = \gamma_b P_c^2$ ), on préfère les noter  $(\gamma_{\text{abs}}/\sqrt{\gamma_b}) \sqrt{P_b^{\text{exp}}}$ . On obtient finalement

$$P^{\text{abs}} = \left( \mathcal{L} + \gamma_b P_c + \frac{\gamma_{\text{abs}}}{\sqrt{\gamma_b}} \sqrt{P_b^{\text{exp}}} \right) P_c \quad (\text{C.21})$$

Cette expression est différente de celle proposée par B. G. Klappauf [117, expr. 31, p. 2520]. **Les pertes**<sup>5</sup>

$$\frac{\gamma_{\text{abs}}}{\sqrt{\gamma_b}} \sqrt{P_b^{\text{exp}}} \quad (\text{C.22})$$

**induites par le bleu (BLIIRA) ne sont pas proportionnelles à la puissance bleue  $P_b^{\text{exp}}$** . Il faut cependant noter que la dépendance du BLIIRA en fonction de la puissance bleue n'est pas simple, comme l'a montré H. Mabuchi [118, fig. 5]. Sur la figure 5 de [118], on voit par exemple que la pente du coefficient d'absorption change notablement autour de  $1000 \text{ W/cm}^2$ , qui est typiquement l'intensité à laquelle nous travaillons ( $100 \text{ mW}$  pour un waist de  $70 \mu\text{m}$ ). Il n'est donc pas étonnant que l'on observe pas la dépendance linéaire qui n'apparaît qu'à des intensités très supérieures à  $1000 \text{ W/cm}^2$ . On a observé notamment que les mesures de la figure C.3 s'écartent sensiblement de la courbe en  $\gamma_b P_c^2$  ce qui traduit une dépendance plus subtile du BLIIRA.

Inclure une dépendance différente (notée  $f(P_c)$ ) des pertes par BLIIRA suppose généraliser l'expression C.19.

$$\mathcal{C} = \gamma_b P_c + f(P_c)$$

Cela modifie alors l'ensemble du calcul réalisé ici puisqu'on change l'équation C.1 qui est à la base de notre analyse. Nous retiendrons donc l'expression C.22 qui reste une bonne approximation au premier ordre en  $P_c$ .

## Conclusion

À partir d'une analyse basée sur des mesures de transmission et de réflexion pour différentes puissances incidentes, nous avons mené une étude systématique caractérisant complètement la cavité du point de vue énergétique.

<sup>4</sup>Blue-Light-Induced Infrared Absorption

<sup>5</sup>On prendra garde à ne pas confondre la dépendance linéaire des pertes  $\mathcal{C}$  avec  $P_c$  et la dépendance du BLIIRA ( $\gamma_{\text{abs}}P_c$ ) en fonction de la puissance bleue.

Outre le fait d'avoir vérifié que les pertes parasites  $\mathcal{L}$  et le *mode-matching*  $M$  étaient indépendants de la puissance incidente, nous avons pu montrer la dépendance des pertes induites par la conversion  $\mathcal{C}$  vers la seconde harmonique. Elles sont proportionnelles à la puissance intracavité. Des mesures directes de la puissance bleue en sortie nous ont permis de distinguer (dans les pertes  $\mathcal{C}$ ) les trois quarts qui généraient effectivement la seconde harmonique alors qu'un quart n'était que des pertes sur le fondamental causées par le bleu (BLIIRA). On notera que la dépendance du coefficient de pertes supplémentaires n'est pas simple, ce qui traduit la complexité du processus de BLIIRA.



# Bibliographie



- [1] J. Sajeev dans *Scattering and Localization of Classical Wave in Random Media*, eds par Ping Sheng, World Scientific (1990).
- [2] P.W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* 109, p.1492-1505 (1958).
- [3] D.J. Thouless : *Electrons in Disordered Systems and the Theory of Localization*, *Phys. Rep.* 13, p.93 (1974).
- [4] N.F. Mott : *Metal-Insulator Transitions* (Taylor & Francis, London, 1974).
- [5] R. Dalichaouch, J.P. Armstrong, S. Schultz, P.M. Platzman, S.L. McCall : Microwave localization by two-dimensional random scattering, *Nature* 354, p.53-55 (1991).
- [6] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijkt, R. Righini : Localization of light in a disordered medium, *Nature*, Vol. 390, p. 671, (1997).
- [7] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, G. Maret : Localization or classical diffusion of light, *Nature*, Vol. 398, p. 206, (1999).
- [8] S. Chu, C. Cohen Tannoudji, W.D. Phillips : Nobel lectures in physics 1997, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 70, No. 3, p. 685-741, (1998).
- [9] H.J. Metcalf, P. van der Straten, *Laser cooling and trapping*, Springer, (1999).
- [10] D.V. Kupriyanov, I.M. Sokolov, M.D. Havey : Antilocalization in Coherent Backscattering of Light in a Multi-Resonance Atomic System, soumis à *Opt. Com.* (2004).
- [11] D.V. Kupriyanov, I.M. Sokolov, N.V. Larionov, P. Kulatunga, C.I. Sukenik, S. Balik, M.D. Havey : Spectral dependence of coherent backscattering of light in a narrow-resonance atomic system, *Phys. Rev. A* 69 033801 (2004).
- [12] G. Labeyrie, C. Miniatura, C. A. Müller, O. Sigwarth, D. Delande, R. Kaiser : Hanle effect in coherent backscattering, *Phys. Rev. Lett.* 89, 163901 (2002)
- [13] O.Sigwarth, G.Labeyrie, T.Jonckheere, D.Delande, R.Kaiser, C.Miniatura : Magnetic field enhanced coherence length for light mesoscopy in cold atomic gases, à paraître dans *Phys. Rev. Lett.*
- [14] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C.A. Müller, Ch. Miniatura, R. Kaiser : Coherent backscattering of light by cold atoms, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 5266 (1999).
- [15] H. Katori, M. Takamoto, V. G. Pal'chikov, V. D. Ovsianikov : Ultrastable Optical Clock with Neutral Atoms in an Engineered Light Shift Trap, *Phys. Rev. Lett.* 91, 173005 (2003).
- [16] H. Katori : Spectroscopy of Strontium Atoms in the Lamb-Dicke Confinement, in *Proc. 6th Symposium Frequency Standards and Metrology*, ed. P. McGill (World Scientific, Singapore, 2002), p.323-330.

- [17] I. Courty, A. Quessada, A. Bruschi, D. Kolker, R.P. Kovachich, J.-J. Zondy, G. D. Rovera, P. Lemonde : Clock Transition for a future optical frequency standard with trapped atoms, *Phys. Rev. A* 68 030501 (2003)
- [18] J. L. Hall, M. Zhu, P. Buch : Prospects for using laser-prepared atomic fountains for optical frequency standards applications, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 6, Issue 11, p.2194 (1989).
- [19] H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, M. Kuwata-Gonokami, Magneto-optical trapping and cooling of strontium atoms down to the photon recoil temperature, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 82, No. 6, p.1116, (1999).
- [20] Y. Bidet, B. Klappauf, J.C. Bernard, D. Delande, G. Labeyrie, C. Miniatura, D. Wilkowski, R. Kaiser : Coherent light transport in a cold Strontium cloud, *Phys. Rev. Lett.* 88, 203902 (2002).
- [21] Y. Bidet : Piégeage et refroidissement laser du strontium-Etude de l'effet des interférences en diffusion multiple, thèse de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (2002).
- [22] S. B. Nagel, C. E. Simien, S. Laha, P. Gupta, V. S. Ashoka, T. C. Killian : Magnetic trapping of metastable  $^3P_2$  atomic strontium, *Phys. Rev. A* 67, 011401 (2003).
- [23] T. P. Dinneen, K. R. Vogel, E. Arimondo, J. L. Hall, A. Gallagher : Cold collisions of  $Sr^*$ -Sr in a magneto-optical trap, *Phys. Rev. A* 59, p.1216-1222 (1999).
- [24] G. Labeyrie, C.A. Müller, D.S. Wiersma, Ch. Miniatura, R. Kaiser : Observation of coherent backscattering of light by cold atoms, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt* 2, p.672-685 (2000).
- [25] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk : Experimental Evidence for Recurrent Multiple Scattering Events of Light in Disordered Media, *Phys. Rev. Lett.* 74, p.4193-4196 (1995).
- [26] G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura, R. Kaiser : Coherent backscattering of light by an inhomogeneous cloud of cold atoms, *Phys. Rev. A* 67, 033814 (2003).
- [27] E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard : Coherent Backscattering of Light by Disordered Media : Analysis of the Peak Line Shape, *Phys. Rev. Lett.* 56, p.1471-1474 (1986).
- [28] E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, G. Maret : Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media, *J. Phys. (Paris)* 49, p.77-98 (1988).
- [29] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, "Processus d'interaction entre photons et atomes", CNRS Editions, 1988.
- [30] Principles of Optics, Born&Wolf, Pergamon press (1989)

- [31] B. R. Mollow : Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems, Phys. Rev. 188, p.1969-1975 (1969).
- [32] B.R. Mollow : Pure-state analysis of resonant light scattering : Radiative damping, saturation, and multiphoton effects, Phys. Rev. A 12, p.1919-1943 (1975).
- [33] R. E. Grove, F. Y. Wu, S. Ezekiel : Measurement of the spectrum of resonance fluorescence from a two-level atom in an intense monochromatic field, Phys. Rev. A 15, p.227-233 (1977).
- [34] A. A. Golubentsev : Suppression of interference effects in multiple scattering of light, Sov. Phys. JETP, Vol. 59, p.26, (1984).
- [35] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, Science, Vol. 269, p.198, (1995).
- [36] W. Ketterle, D. E. Pritchard : Atom cooling by time-dependent potentials, Phys. Rev. A 46, p.4051-4054 (1992).
- [37] M. Kasevich, S. Chu : Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms, Phys. Rev. Lett., Vol. 69, p.1741, (1992).
- [38] D. Wilkowski, Y. Bidet, T. Chanelière, D. Delande, T. Jonckheere, B. Klapauf, G. Labeyrie, C. Miniatura, C.A. Müller, O. Sigwarth, R. Kaiser : Coherent backscattering of light by resonant atomic dipole transitions, J. Opt. Soc. Am. B, 21, 183 (2004).
- [39] R. Lenke, G. Maret dans Scattering in Polymeric and Colloidal Systems : Multiple Scattering of Light : Coherent Backscattering and Transmission, W. Brown, Gordon and Breach Science Publishers, (2000).
- [40] E. Akkermans, G. Montambaux : Mesoscopic physics of photons, J. Opt. Soc. Am. B 21, 101 (2004)
- [41] E. Akkermans, G. Montambaux, Coherent multiple scattering in disordered media, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0104013>.
- [42] E. Akkermans, R. Maynard : Weak localization of waves, J. Phys. (Paris), Lett. 46, L-1045 (1985).
- [43] Y. Kuga, J. Ishimaru, Retroreflection of a dense distribution of spherical particles, J. Opt. Soc. Am. A 1, p.831-835 (1984).
- [44] M.P. Albada, A. Lagendijk : Observation of weak localization of light in a random medium, Phys. Rev. Lett. 55, p.2692-2695 (1985).
- [45] P.E. Wolf, G. Maret : Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media, Phys. Rev. Lett. 55, p.2696-2699 (1985).
- [46] P. E. Wolf, G. Maret dans Scattering in Volumes and Surfaces : Dynamics of Brownian particles from strongly multiple light scattering, M. Nieto-Vesperinas & J. C. Dainty, ed. (North-Holland, Amsterdam, 1990).

- [47] T. Jonckheere, C.A. Müller, R. Kaiser, Ch. Miniatura, D. Delande : Multiple scattering of light by atoms in the weak localization regime, *Phys. Rev. Lett.* 85, 4269 (2000).
- [48] F. A. Erbacher, R. Lenke, G. Maret, "Multiple Light Scattering in Magneto-optically active Media", *Europhys. Lett.*, Vol. 21, p.551, (1993).
- [49] R. Lenke, G. Maret, "Magnetic field effects on coherent backscattering of light", *Eur. Phys. J. B*, Vol. 17, p. 171, 2000.
- [50] V. Agranovich and V. Kravtsov : Nonlinear backscattering from opaque media, *Phys. Rev. B* 43 , 13691 (1991).
- [51] A. Heiderich, R. Maynard, B. van Tiggelen : Coherent Backscattering in Non-linear Media, *Opt. Comm.* 115, 392 (1995);
- [52] S.E. Skipetrov, R. Maynard dans *Wave Scattering in Complex Media : from theory to applications*, NATO Science Series II 107, eds. B.A. van Tiggelen and S.E. Skipetrov, Kluwer, Dordrecht (2003).
- [53] C. A. Müller, "Localisation faible de la lumière dans un gaz d'atomes froids : rétrodiffusion cohérente et structure quantique interne", thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, (2001).
- [54] C. A. Müller, T. Jonckheere, C. Miniatura, D. Delande *Phys. Rev. A* 64, 053804 (2001).
- [55] T. Wellens, B. Gremaud , D.Delande, C.Miniatura : Coherent backscattering of light by atoms in the saturated regime à paraître dans *Phys. Rev. A*.
- [56] D.S. Wiersma, M.P. van Albada, A. Lagendijk : An Accurate Technique to Record the Angular Distribution of Backscattered Light, *Rev. of Sci. Instrum.* 66, 5473 (1995).
- [57] *Mesoscopic Quantum Physics*, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session LXI, ed. par E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, J. Zinn-Justin, Elsevier, Amsterdam, (1995).
- [58] H.C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Dover, New York, (1981).
- [59] A. Stern, Y. Aharonov, Y. Imry : Phase uncertainty and loss of interference : A general picture, *Phys. Rev. A* 41, 3436 (1990).
- [60] G.Labeyrie, D.Delande, C.A.Müller, C.Miniatura, R.Kaiser : Multiple Scattering of light in a resonant medium, à paraître dans *Opt. Com.* (2004).
- [61] G. Labeyrie en préparation :   
<http://www-lod.inln.cnrs.fr/Rb/Rb2004.html#DynBreak>
- [62] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji : Atomic motion in laser light : connection between semi-classical and quantum descriptions, *J. Phys. B* 18, 1661 (1985).
- [63] N. P. Bigelow, M. Prentiss : Decreased damping of ultracold atoms in optical molasses : predictions and a possible solution, *Optics Letters*, Vol. 15, No. 24, (1990).

- [64] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji : Dressed-atom approach to atomic motion in laser light : the dipole force revisited, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.2, p.1707 (1985)
- [65] P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts, C. I. Westbrook : Optical molasses, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 6, Issue 11, p.2084 (1989).
- [66] D.S. Weiss, E. Riis, Y. Shevy, P.J. Ungar, S. Chu : Optical molasses and multilevel atoms : experiment, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 6, Issue 11, p. 2072 (1989).
- [67] A. Witte, Th. Kisters, F. Riehle, J. Helmcke : Laser cooling and deflection of a calcium atomic beam, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 9 Issue 7, p.1030 (1992).
- [68] X. Xu, T. H. Loftus, J. L. Hall, A. Gallagher, J. Ye : Cooling and trapping of atomic strontium, *J. Opt. Soc. Am. B* 20, p.968-976 (2003).
- [69] D. Wilkowski, Y. Bidet, T. Chanelière, R. Kaiser, B. Klappauf, G. Labeyrie, C.A. Müller, C. Miniatura : Light transport in cold atoms : the fate of coherent backscattering in the weak localization regime, *Physica B*, 328, 157 (2003).
- [70] X. Xu, T. H. Loftus, M. J. Smith, J. L. Hall, A. Gallagher, J. Ye : Dynamics in a two-level atom magneto-optical trap, *Phys. Rev. A* 66, 011401(R)/1-4 (2002).
- [71] T.W. Hänsch, A.L. Schawlow : Cooling of gases by laser radiation, *Opt. Comm.*, Vol. 13, p.68, (1975).
- [72] J. Gordon, A. Ashkin : Motion of atoms in a radiation trap, *Phys. Rev. A* 21, 1606 (1980).
- [73] M.R. Doery, E.J.D. Vredenburg, T. Bergeman : Quantum dynamics and cooling of atoms in one-dimensional standing-wave laser fields : Anomalous effects in Doppler cooling, *Phys. Rev. A* 51, p.4881-4899 (1995).
- [74] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji : Cooling Atoms with Stimulated Emission, *Phys. Rev. Lett.* 57, p.1688-1691 (1986).
- [75] V. G. Minogin, O. T. Serimaa : Resonant light pressure forces in a strong standing laser wave, *Opt. Commun.* 30, 373 (1979).
- [76] C. I. Westbrook, R. N. Watts, C. E. Tanner, S. L. Rolston, W. D. Phillips, P. D. Lett, P. L. Gould : Localization of atoms in a three-dimensional standing wave, *Phys. Rev. Lett.* 65, p.33-36 (1990).
- [77] C.J. Cooper, G. Hillenbrand, J. Rink, C.G. Townsend, K. Zetie, C.J. Foot, C. J. : The temperature of atoms in a magneto-optical trap, *Europhys. Lett.* 28, 397 (1994).

- [78] F. Y. Loo, A. Bruschi, S. Sauge, M. Allegrini, E. Arimondo, N. Andersen, J.W. Thomsen : Investigations of a two-level atom in a magneto-optical trap using magnesium, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* 6, p.81-85 (2004).
- [79] R. Maruyama, R. H. Wynar, M. V. Romalis, A. Andalkar, M. D. Swallows, C. E. Pearson, E. N. Fortson : Investigation of sub-Doppler cooling in an ytterbium magneto-optical trap, *Phys. Rev. A* 68, 011403 (2003).
- [80] J. Piilo, E. Lundh, K.A. Suominen : Radiative collisional heating at the Doppler limit for laser-cooled magnesium atoms, *Phys. Rev. A* 70, 013410 (2004).
- [81] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, J. Dalibard : Phase-space density in the magneto-optical trap, *Phys. Rev. A* 52, p.1423-1440 (1995).
- [82] M. Drewsen, P. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, C. Salomon : Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap, *Appl. Phys. B* 59, 283 (1994).
- [83] A. M. Steane, M. Chowdhury, C. J. Foot : Radiation force in the magneto-optical trap, *J. Opt. Soc. Am. B* 9, 12, p.2142 (1992).
- [84] D. W. Sesko, T. G. Walker, C. E. Wieman : Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap, *J. Opt. Soc. Am. B* 8, 5, p. 946 (1991).
- [85] A.P. Kazantsev, V.S. Smirnov, G.I. Surdutovitch, D.O. Chudesnikov, V.P. Yakolev : Kinetic phenomena of atomic motion in a light field, *J. Opt. Soc. Am. B* 2, p.1731 (1985).
- [86] C. Cohen-Tannoudji, "Atomic motion in laser light", Les Houches Session LIII (1990), *Systèmes Fondamentaux en Optique Quantique*, Elsevier Science Publishers B. V., (1991).
- [87] F. Roddier : *Distributions et transformation de Fourier*, eds McGraw-Hill (1978).
- [88] T. Chanelière, R. Kaiser, C. Miniatura, J.L. Meunier, D. Wilkowski : 1D cooling on a  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  transition, en préparation.
- [89] *Topics in applied physics Vol.9, Laser speckle and related phenomena*, Editor : J.C. Dainty, Springer-Verlag.
- [90] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 6, Issue 11, p.2023 (1989).
- [91] X. Xu, T. H. Loftus, J. W. Dunn, C. H. Greene, J. L. Hall, A. Gallagher, J. Ye : Single-Stage Sub-Doppler Cooling of Alkaline Earth Atoms, *Phys. Rev. Lett.* 90, 193002 (2003).
- [92] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, H. J. Metcalf : Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit, *Phys. Rev. Lett.* 61, p.169-172 (1988).

- [93] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Second Edition, ed. by Wiley, (1975).
- [94] B.C Young, F.C. Cruz, W.N. Itano, J.C. Berquist : Visible Lasers with Subhertz linewidths, Phys. Rev. Lett., Vol. 82, No 19, p.3799, (1999).
- [95] R.W.P. Drever, J.L. Hall, F.V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, H. Ward : Laser Phase and Frequency Stabilization Using Resonator, Appl. Phys. B 31, 97 (1983).
- [96] Y.C. Chan, J.A. Gelbwachs : Broadening shifting and asymetry of the strontium resonance line induced by rare gas perturbers, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys., Vol. 25, p. 3601-3612, (1992).
- [97] G.L. Gattobigio : Coherent Back-scattering e atomi freddi di Stronzio, Tesi di Laurea, (2002)
- [98] Vapor Pressure Data for the Solid and Liquid Elements, ed. Richard E. Honig & Dean A. Kramer, RCA Review 30, p. 285-305, 1969.
- [99] G. Ferrari, P. Cancio, R. Drullinger, G. Giusfredi, N. Poli, M. Prevedelli, C. Toninelli, G. M. Tino : Precision Frequency Measurement of Visible Intercombination Lines of Strontium, Phys. Rev. Lett. 91, 243002 (2003)
- [100] G. M. Tino, M. Barsanti, M. de Angelis, L. Gianfrani, M. Inguscio : Spectroscopy of the 689nm intercombination line of strontium using a extend cavity InGaP/InGaAlP diode laser, Appl. Phys. B 55, 397 (1994).
- [101] A. Schoof, J. Grünert, S. Ritter, A. Hemmerich : Reducing the linewidth of a diode laser below 30 Hz by stabilization to a reference cavity with a finesse above  $10^5$ , Optics Letters, Vol. 26, No. 20, (2001).
- [102] T. Mukaiyama, H. Katori, T. Ido, Y. Li, M. Kuwata-Gonokami : Recoil-Limited Laser Cooling of  $^{87}\text{Sr}$  Atoms near the Fermi Temperature, Phys. Rev. Lett. 90, 113002 (2003).
- [103] T. Ido, Y. Isoya, H. Katori : Optical-dipole trapping of Sr atoms at a high phase-space density, Phys. Rev. A 61, 061403 (2000)
- [104] I. Courtillot : Première observation de la transition fortement interdite  $^1S_0 - ^3P_0$  du strontium, pour une horloge optique à atomes piégés. Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie - PARIS VI.
- [105] T. H. Loftus, T. Ido, A. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye : Narrow Line Cooling : Finite Photon Recoil Dynamics, Phys. Rev. Lett. 93, 073003 (2004).
- [106] Y. Castin, H. Wallis, J. Dalibard : Limit of Doppler cooling, J. Opt. Soc. Am. B, 6, 2046 (1989).
- [107] T.E. Mehlstäubler, J. Keupp, A. Douillet, N. Rehbein, E.M. Rasel, W. Ertmer : Modelling three-dimensional-quench cooling for alkaline-earth atoms, J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt. 5 S183-S189 (2003).

- [108] T. Binnewies, G. Wilpers, U. Sterr, F. Riehle, J. Helmcke, T. E. Mehlstäubler, E. M. Rasel, W. Ertmer : Doppler Cooling and Trapping on Forbidden Transitions, *Phys. Rev. Lett.* 87, 123002 (2001).
- [109] E. A. Curtis, C. W. Oates, L. Hollberg : Quenched narrow-line laser cooling of  $^{40}\text{Ca}$  to near the photon recoil limit, *Phys. Rev. A* 64, 031403 (2001)
- [110] J. Hoffnagle : Proposal for continuous white-light cooling of an atomic beam, *Opt. Lett.* 13, 102 (1988)
- [111] A. Ashkin, J. P. Gordon : Stability of radiation-pressure particle traps : an optical Earnshaw theorem, *Opt. Lett.* Vol.8, Issue 10, p.511 (1983).
- [112] K.R. Vogel : Laser cooling on a narrow atomic transition and measurement of the two-body cold collision loss rate in a strontium magneto-optical trap, Thesis, University of Colorado, (1999).
- [113] H. Wallis, W. Ertmer : Broadband laser cooling on narrow transitions, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 6, Issue 11, p.2211 (1989)
- [114] V. Zehnlé, and J.C. Garreau : Doppler cooling to the recoil limit using sharp atomic transitions with controlled quenching *J. Opt. Soc. Am. B*, 20, 931-936 (2003)
- [115] J. R. Anglin, W. Ketterle dans Nature insight ultracold matter, *Nature*, Vol. 416, p.20511 (2002).
- [116] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, I. Bloch Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms, *Nature* 415, p.39-44 (2002).
- [117] B. G. Klappauf, Y. Bidet, D. Wilkowski, T. Chanelière, R. Kaiser : Detailed Study of an Efficient Blue Laser Source by Second-Harmonic Generation in a Semimonolithic Cavity for the Cooling of Strontium Atoms, *Appl. Opt.* 43, p. 2510 (2004).
- [118] H. Mabuchi, E. S. Polzik, H. J. Kimble : Blue-light induced infrared absorption in  $\text{KNbO}_3$ , *J. Opt. Soc. Am. B* 11, p. 2023-2029 (1994).



## Résumé

Dans cette thèse, nous avons utilisé un nuage d'atomes de strontium refroidis par laser sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  à 461 nm afin d'étudier les effets de diffusion multiple cohérente en fonction de la saturation. Nous avons observé une décroissance nette du facteur d'amplification du cône de rétrodiffusion cohérente en fonction de la saturation.

Nous avons mené ensuite une étude systématique du refroidissement Doppler sur la transition bleue dans une configuration 1D. Ceci nous a permis de mettre en évidence et de caractériser un phénomène de diffusion supplémentaire pour l'impulsion, causé par des déséquilibres locaux dans le profil d'intensité des faisceaux.

Le nuage a enfin été transféré significativement vers un piège magnéto-optique sur la transition  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  d'intercombinaison à 689 nm. L'objectif étant d'augmenter la densité spatiale pour observer les effets de localisation des photons dans ce nouveau régime.

**Mots clés :** strontium, refroidissement Doppler, diffusion multiple, rétrodiffusion cohérente, piégeage sur transition étroite.

## Abstract

### Coherent multiple scattering with cold atoms of strontium :

Effect of the saturation on the coherent backscattering -  
Magneto-optical trap on a narrow transition

In this thesis we have used a cloud of atomic strontium cooled on the  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  transition at 461 nm in order to study the effects of coherent multiple scattering as a function of saturation. We have observed a clear decrease of the enhancement factor of the coherent backscattering cone as a function of saturation.

We have then studied in detail the Doppler cooling in a 1d configuration on this blue transition. It allowed us to highlight a supplementary diffusion phenomenon for the momentum. It's due to local intensity imbalance within the beam profil.

The cloud have been finally transfered significantly to a magneto-optical trap on the  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  intercombinaison line at 689 nm . The goal is to increase the spatial density to observe the effects of photon localisation in this new regime.

**Keywords :** strontium, Doppler cooling, multiple scattering, coherent backscattering, trapping on a narrow transition.