

Graphes parfaits : structure et algorithmes

Nicolas Trotignon

▶ **To cite this version:**

Nicolas Trotignon. Graphes parfaits : structure et algorithmes. Autre [cs.OH]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00008558

HAL Id: tel-00008558
https://theses.hal.science/tel-00008558

Submitted on 23 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Présentée par Nicolas Trotignon

pour obtenir le grade de docteur
de l'université Grenoble I, Joseph Fourier

Spécialité : Mathématiques Informatique
Formation doctorale : Recherche Opérationnelle,
Combinatoire et Optimisation

Graphes parfaits : Structure et algorithmes

Soutenue le 28 septembre 2004

Michel Burlet (co-directeur de thèse)
Gérard Cornuéjols (rapporteur)
Jean Fonlupt (examinateur)
Jean-Luc Fouquet (examinateur)
Frédéric Maffray (directeur de thèse)
Bruce Reed (rapporteur)

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **5**

1 Notions de base **9**
1.1 Les graphes 9
1.1.1 Chaînes, chemins, cycles, trous et antitrous 11
1.1.2 Pyramides, prismes et quasi-prismes 13
1.1.3 Quelques graphes particuliers 15
1.2 Les algorithmes 18
1.2.1 Problèmes, algorithmes, complexité 19
1.2.2 Les problèmes P, NP, CoNP et NP-complets 20
1.3 Résumé des définitions les plus importantes 22

2 Graphes parfaits **25**
2.1 Les graphes basiques 27
2.2 Les travaux de Lovász 28
2.3 Les théorèmes de décomposition 29
2.4 Le théorème fort des graphes parfaits 33
2.5 Problèmes ouverts et questions 37

3 Paires d'amis **39**
3.1 Graphes de quasi-parité 40
3.1.1 Les graphes sans taureau 41
3.1.2 Les conjectures de Hougardy 41
3.1.3 Les graphes bipartisans 42
3.1.4 Détection des paires d'amis dans les line-graphes . . . 42
3.2 Les graphes parfaitement contractiles 44
3.2.1 Les graphes de Meyniel 48
3.2.2 Les graphes faiblement triangulés 51
3.2.3 Les graphes parfaitement ordonnables 52
3.2.4 Les graphes avec moins de 10 sommets 53

3.3 Généralisations de la notion de paire d'amis 54
3.3.1 Partitions paires 55
3.3.2 Cliques ennemies 56

4 Le lemme de Roussel et Rubio 65
4.1 Différentes preuves 65
4.2 Restriction à des classes de graphes particuliers 72
4.3 Corollaires et variantes utiles 73

5 Graphes d'Artemis 79
5.1 Paires d'amis spéciales 80
5.2 Preuve du théorème 5.2 81
5.3 Conséquences algorithmiques 92
5.4 Conséquences pour des sous-classes d'Artémis 97
5.5 Théorèmes de décomposition et paires d'amis 98

6 Problèmes de reconnaissance 103
6.1 État de l'art 104
6.1.1 Graphes faiblement triangulés 104
6.1.2 Reconnaissance des graphes de Berge 105
6.2 Détection de sous-graphes 106
6.2.1 Prisme ou Pyramide 106
6.2.2 Prismes pairs 113
6.2.3 Line-graphes de subdivisions de K_4 115
6.2.4 Prismes impairs 124
6.3 Des problèmes NP-complets 127
6.4 Reconnaissance et coloration 133
6.5 Questions ouvertes 135

Annexes 137

A Bibliographie 137

B Index 145

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Gérard Cornuéjols et Bruce Reed d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie également mes deux examinateurs, Jean Fonlupt et Jean-Luc Fouquet.

Je tiens à remercier mon employeur, l'Université Pierre Mendès-France, et plus particulièrement son Conseil Scientifique qui m'a déchargé d'une partie de mes enseignements pour me permettre de mener à bien ce travail.

Je remercie les institutions suivantes qui m'ont permis, par leur soutien financier, d'assister à des conférences internationales :

- Mathematisches Forschungsinstitut à Oberwolfach : Conférence "Geometric Convex Combinatorics" organisée par B. Gerards, A. Sebő et R. Weismantel en juin 2002.
- American Institute of Mathematics, à Palo Alto : "Perfect Graphs Workshop" organisé par P. Seymour et R. Thomas en novembre 2002.
- Caesarea Edmond Benjamin de Rothschild Foundation Institute for Interdisciplinary Applications of Computer Science, Haifa : "Expert workshop on graph classes and algorithms" organisé par M. Golumbic, A. Berry et F. Maffray en avril 2004.

Je remercie l'équipe du laboratoire Leibniz, et tout d'abord Sylvain Gravier qui m'a fait faire mes premiers pas au laboratoire en encadrant mon stage de DEA. J'ai pu bénéficier du soutien et des conseils d'autres membres de son équipe, Michel Mollard, Charles Payan et Xuong Nguyen, ainsi que des membres de l'équipe "Recherche Opérationnelle", Nadia Brauner, Gerd Finke et Maurice Queyranne.

L'équipe "graphes et optimisation combinatoire" m'a accueilli : András Sebő et son enthousiasme constant et communicatif ; Myriam Preissmann, avec qui j'ai passé de longues heures à lire la preuve du théorème fort des graphes parfaits ; Michel Burlet, qui a co-encadré cette thèse, et m'a orienté vers les graphes parfaits.

La bonne ambiance du laboratoire ne le serait pas sans mes condisciples thésards, présents et passés : Prakash Countcham, David Defossez, Éric Du-

chène, Haris Gravanovic, Vincent Jost, Yann Kieffer, Mohamed Kobeissi, Marie Lalire, Pierre Lemaire, Benjamin Lévêque, Medhi Mallah, Frédéric Meunier, Julien Moncel, Simon Perdrix, Éric Tannier. J'ai eu des contacts enrichissants avec des visiteurs : Nicola Apollonio, Hein Van der Holst, Celina de Figueiredo, Cláudia Linhares Sales, Giacomo Zambelli notamment.

Je remercie aussi mon ami Jérôme Renault, toujours prêt à attaquer de nouvelles énigmes, et souvent à les résoudre. Le travail effectué avec lui pendant la durée de cette thèse m'a beaucoup aidé.

Je remercie tous mes relecteurs : en premier lieu Frédéric Maffray qui a participé à tous les résultats présentés ici. Bruce Reed a proposé des améliorations de fond qui ont permis de raccourcir des démonstrations fastidieuses, et d'accélérer certains algorithmes. Michel Burlet a lui aussi proposé de nombreuses améliorations. Myriam Preissmann, Benjamin Lévêque, David Defossez, Yann Kieffer, Isabelle Rave et Jérôme Renault ont corrigé pas mal de défauts. Mes discussions avec Pierre Lemaire sur LaTeX, Bibtex et Metapost (excellent langage gratuit pour dessiner des graphiques), ont apporté beaucoup à la présentation.

Enfin, mon épouse Christelle Petit, non mathématicienne mais lettrée, a eu le courage de relire l'ensemble du document pour l'expurger d'une quantité de fautes d'orthographe et de maladresses d'expression. Je veux lui dire que je n'aurais jamais pu mener à bien ce travail sans son soutien, ni sans nos enfants Émile, Alice et Coline.

Je tenais à dédier ce travail aux nombreux excellents professeurs de mathématiques que j'ai rencontrés tout au long de mes longues études, au nombre desquels : Mme Ma et Pelissou, MM Moscovici, Danset, Cori et Burlet.

Dernier d'entre eux en date, Frédéric Maffray, mon directeur de thèse, ne saura jamais assez ma gratitude pour la manière dont il a encadré mon travail, sa patience et sa disponibilité. J'ai eu la chance de bénéficier de sa connaissance profonde des graphes parfaits durant une période critique. Entre mille bienfaits, je tiens à le remercier dans le détail d'un épisode de notre travail commun, pour sa valeur exemplaire et morale (ne lui en déplaise) : son insistance à ce qu'avec Myriam Preissmann nous lisions les 148 pages de la preuve du théorème fort des graphes parfaits : travail fastidieux mais hautement bénéfique.

Introduction

Considérons un pays dont la station nationale de radiodiffusion veut affecter une fréquence à chaque ville. Quand deux villes sont éloignées de moins de 50 km, il faut leur attribuer des fréquences différentes afin d'éviter les interférences. On peut modéliser le problème par un *graphe* : on représente chaque ville par un point (en théorie des graphes, on dit plutôt *sommet*), et on relie deux sommets par une ligne (on dit plutôt *arête*) dès que les deux villes correspondantes sont éloignées de moins de 50 km. Cela pourrait donner l'un des graphes représentés ci-dessous :

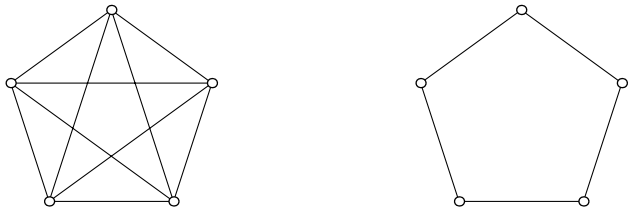


FIG. 1 – Deux graphes

Il faut bien noter que sur la figure ci-dessus, l'endroit où est représenté un sommet et la forme effective des arêtes n'ont aucune importance. Seul compte le fait que deux sommets sont reliés ou non reliés par une arête. Notre problème d'affectation des fréquences radio revient alors à associer à chaque sommet d'un graphe un nombre entier (correspondant à une fréquence) de sorte que deux sommets reliés par une arête ne reçoivent jamais le même nombre. Il est toujours possible d'affecter à chaque sommet du graphe un nombre différent, mais on souhaite généralement minimiser le nombre d'entiers utilisés — les fréquences radio sont précieuses.

En théorie des graphes, plutôt que d'associer un nombre à chaque sommet, il est coutumier d'associer une *couleur* : rouge, bleu ... Cette habitude un peu curieuse provient sans doute de la première apparition historique du problème : en 1852 un mathématicien amateur, Francis Guthrie, avait demandé combien de couleurs étaient nécessaires pour colorier les pays sur un atlas afin que les cartes fussent lisibles, c'est-à-dire que deux pays ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur. Cette question difficile

n'a reçu sa réponse définitive qu'en 1977, quand Appel et Haken ont démontré que dans ce cas particulier des graphes planaires, quatre couleurs suffisent toujours. Sur la figure ci-dessous, on montre une coloration des graphes de la figure 1 avec un nombre minimal de couleurs :



Ce graphe nécessite 5 couleurs

Ce graphe nécessite 3 couleurs

FIG. 2 – Exemples de graphes coloriés optimalement

Le problème général de la coloration des graphes consiste donc en l'affectation à chaque sommet d'une couleur, de sorte que deux sommets reliés par une arête ne reçoivent jamais la même couleur, et en utilisant un nombre minimal de couleurs. Ce problème a de nombreuses applications pratiques : conception d'emplois du temps, affectation de fréquences radio ... Depuis une quarantaine d'années, on soupçonne qu'il n'existe aucune méthode pour le résoudre efficacement et en toute généralité, même à l'aide d'ordinateurs très rapides. Pour contourner cette difficulté, plusieurs approches ont été essayées : résolution du problème de manière rapide mais approximative, accélération des méthodes lentes, ou enfin résolution efficace en se restreignant à des graphes particuliers. Notre travail se place dans le cadre de cette dernière approche.

Les graphes parfaits

Au début des années 1960, Claude Berge a défini la classe des *graphes parfaits* qui est apparue par la suite comme une classe assez générale pour laquelle le problème de la coloration pouvait être résolu efficacement. De nombreux travaux ont été consacrés aux graphes parfaits : on rencense plus de 500 articles scientifiques sur le sujet. En 1984, Martin Grötschel, László Lovász et Alexander Schrijver ont démontré qu'il est possible de colorier les graphes parfaits en temps polynomial. Ils utilisent à cette fin la méthode dite des ellipsoïdes, difficile à implémenter en pratique à cause de problèmes d'instabilité numérique.

En même temps que Claude Berge définissait les graphes parfaits, il proposait une conjecture les caractérisant par interdiction de sous-graphes induits : la conjecture forte des graphes parfaits. Celle-ci s'est avérée récalcitrante à la preuve : pendant 40 ans, les approches les plus diverses ont été

tentées sans succès. L'une d'elle fut promue par Vašek Chvátal : pour démontrer la perfection de certains types de graphes, il proposait de les "casser" en plusieurs sous-graphes plus simples par des strucures ne pouvant pas apparaître dans des graphes imparfaits minimaux, voire quand c'est possible, de "recoller les morceaux" par des moyens préservant la perfection. Cette approche a permis à de nombreux auteurs, (Michel Burlet, Jean Fonlupt, et d'autres ont suivi) de prouver la perfection de certaines classes de graphes, mais ce n'est qu'à la fin des années 1990, qu'un groupe de trois chercheurs (Michele Conforti, Gérard Cornuéjols et Kristina Vušković) a proposé un plan précis et réaliste pour appliquer cette méthode en toute généralité, espérant ainsi démontrer la conjecture forte des graphes parfaits. Ces trois chercheurs ne sont toutefois pas parvenus à faire aboutir leurs idées, malgré de nombreux résultats. Lorsque j'ai commencé ma thèse, les choses en étaient là : la conjecture forte des graphes parfaits était l'un des grands problèmes ouverts de la théorie des graphes.

En mai 2002, un groupe de chercheurs (Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas) a démontré la conjecture forte des graphes parfaits en suivant la méthode proposée par Cornuéjols *et al.*. Cette percée théorique n'a pas eu de retombée directe sur le problème de la coloration des graphes parfaits. En novembre 2002, Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour et Vušković ont résolu une autre question ouverte : ils ont décrit un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe est parfait.

C'est une chance exceptionnelle d'avoir pu réaliser une thèse dans un climat de recherche aussi actif et riche en idées nouvelles, au moment précis où des questions difficiles et anciennes trouvaient leurs réponses. Les nouvelles idées dégagées par l'équipe de Paul Seymour, associées aux tentatives précédentes de mon directeur de thèse, Frédéric Maffray, nous ont permis de résoudre une conjecture proposée au début des années 1990 par Hazel Everett et Bruce Reed. Cette conjecture affirme qu'une sous-classe des graphes parfaits, les graphes d'Artémis, peut être coloriée rapidement en utilisant la notion de paire d'amis d'un graphe. Nous avons également trouvé un algorithme de reconnaissance pour les graphes d'Artémis, et aussi pour d'autres classes similaires. On trouvera ci-après un résumé de cette thèse.

L'ensemble de ce travail a été réalisé en collaboration avec Frédéric Maffray.

Chapitre 1 : Notions de base

Nous rappelons toutes les définitions de théorie des graphes utiles pour la suite. Nous donnons un aperçu rapide et informel de la théorie de la complexité algorithmique. Le lecteur connaissant bien ces sujets pourra consulter la dernière section où sont rappelées les quelques définitions utiles à notre travail ne figurant pas dans les ouvrages classiques. L'index en fin de document permet aussi de retrouver les définitions de tous les termes employés.

Chapitre 2 : Graphes parfaits

Nous donnons un historique des principaux résultats concernant les graphes parfaits, des premiers travaux de Claude Berge jusqu'à la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas.

Chapitre 3 : Paires d'amis

Nous rappelons les définitions et résultats principaux concernant une notion importante pour les algorithmes efficaces de coloration : la notion de paire d'amis d'un graphe. Nous donnons un algorithme original de détection des paires d'amis dans les line-graphes. La dernière section présente des résultats originaux sur des généralisations possibles de la notion de paire d'amis.

Chapitre 4 : Le lemme de Roussel et Rubio

Nous rappelons un résultat important : le lemme de Roussel et Rubio. Nous en donnons une preuve originale, puis nous donnons quelques corollaires et variantes qui nous serviront par la suite.

Chapitre 5 : Graphes d'Artemis

Nous prouvons une conjecture de Reed et Everett, affirmant qu'une certaine classe de graphes parfaits (les graphes d'Artémis) peut être coloriée efficacement en utilisant la notion de paires d'amis (complexité : $O(mn^2)$). Nous donnons un théorème de décomposition des graphes d'Artémis (nous n'avons pas démontré nous-même ce théorème : il est énoncé implicitement et démontré dans la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas). Les résultats de ce chapitre sont en révision favorable au *Journal of Combinatorial Theory, Series B* [82].

Chapitre 6 : Problèmes de reconnaissance

Grâce à des techniques utilisées par Chudnovsky et Seymour pour la reconnaissance des graphes de Berge, nous donnons un algorithme en temps polynomial de reconnaissance des graphes d'Artémis. Nous donnons également des algorithmes pour les autres classes de graphes intéressantes du point de vue de la notion de paire d'amis. Nous montrons que nos algorithmes de reconnaissance peuvent être utilisés à des fins de coloration. Nos algorithmes sont fondés sur des méthodes de détection de sous-graphes induits par calcul de plus courts chemins dans les graphes sans trou impair. Nous montrons que ces mêmes problèmes de détection sont NP-complets dans les graphes généraux. Les résultats de ce chapitre sont soumis au *SIAM Journal of Discrete Mathematics* [83].

Chapitre 1

Notions de base

Nous présentons ici les notions de bases utilisées dans cette thèse : les graphes et les algorithmes. Le lecteur habitué au sujet peut se dispenser de lire ce chapitre, mais devrait consulter sa dernière section qui rappelle les rares points où nos conventions peuvent paraître inhabituelles. Ce chapitre n'a aucune prétention pédagogique, et bien que toutes les définitions de théorie des graphes utiles à la compréhension de cette thèse soient données rigoureusement, le lecteur novice préfèrera sans doute consulter un ouvrage classique [8, 42]. Pour ce qui est des algorithmes, nous ne donnons pas d'exposé rigoureux, mais un simple aperçu des définitions et des résultats les plus classiques.

1.1 Les graphes

Si V est un ensemble quelconque et si k est un entier positif, alors on note $\binom{V}{k}$ l'ensemble des parties de V qui ont exactement k éléments. Un *graphe* est un couple d'ensembles (V, E) tel que $E \subset \binom{V}{2}$. Les éléments de V sont appelés les *sommets* de G, et les éléments de E sont appelés les *arêtes* de G. Afin d'alléger les notations, on notera uv la paire contenant u et v (au lieu de $\{u, v\}$). Si G est un graphe, alors $V(G)$ désignera l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes.

Soit G un graphe. Soient u et v deux sommets de G. Si $uv \in E(G)$ alors on dit que u et v sont *adjacents*, que u et v sont les *extrémités* de l'arête uv, que u est un *voisin* de v ; on dit aussi que u *voit* v. Si $uv \notin E(G)$, alors on dit que u et v sont *non adjacents*, que u est un *non-voisin* de v ; on dit aussi que u *manque* v. Si u est un sommet et e une arête, on dit que e est *incidente* à u si et seulement si $u \in e$. Soient e et f deux arêtes de G. On dit que e et f sont *incidentes* si et seulement si e et f ont une extrémité commune, autrement dit si $e \cap f \neq \emptyset$.

Notons que, par définition, nos graphes sont *sans boucle*, c'est-à-dire qu'un sommet v ne peut jamais être son propre voisin (car $\{v, v\}$ ne possé-

dant qu'un seul élément, il n'appartient pas à $\binom{V}{2}$). Notons que par définition nos graphes ne sont pas *orientés*, c'est-à-dire que pour tous sommets u et v, $uv = vu$. Notons enfin que nos graphes sont *simples*, c'est-à-dire qu'entre deux sommets u et v, il existe 0 ou 1 arête, et non un nombre quelconque d'arêtes. Notons enfin que tous les graphes que nous considérerons seront *finis*, c'est-à-dire que nous supposerons toujours que V possède un nombre fini d'éléments. On notera en général n le nombre de sommets d'un graphe, et m son nombre d'arêtes. On appelle *taille* d'un graphe son nombre de sommets.

Soit G un graphe. Si $v \in V(G)$, alors on note $N(v)$ l'ensemble des voisins de v. Notons que $v \notin N(v)$. On note $d(v)$ le *degré* de v défini par $d(v) = |N(v)|$. Si $A \subset V(G)$, alors $N(A)$ désigne l'ensemble des sommets de G ayant au moins un voisin dans A. Notons que A et $N(A)$ ne sont pas nécessairement disjoints.

Soit G un graphe. On appelle *complémentaire* de G le graphe noté $\overline{G}$ défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv; u \in V(G) \text{ et } v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$. Soient F et G deux graphes. On appelle *isomorphisme* entre F et G toute fonction φ bijective, associant à chaque sommet de F un sommet de G et telle que $uv \in E(F) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$. S'il existe un isomorphisme entre F et G, alors on dit que F et G sont *isomorphes*. On appelle graphe *autocomplémentaire* tout graphe isomorphe à son complémentaire.

Soient G un graphe et W un ensemble de sommets de G. On note $G[W]$ le graphe dont l'ensemble des sommets est W et dont l'ensemble des arêtes est $\binom{W}{2} \cap E(G)$. On dit que $G[W]$ est le *sous-graphe de G induit par W*. Pour ne pas trop alourdir les notations, on s'autorise certains abus : si F est un sous-graphe induit de G, on note $G \setminus F$ le graphe qu'on devrait noter $G[V(G) \setminus V(F)]$. Si F est un ensemble de sommets de G, on note $G \setminus F$ le graphe qu'on devrait noter $G[V(G) \setminus F]$.

On appelle *clique* ou *graphe complet* tout graphe vérifiant $E(G) = \binom{V(G)}{2}$. On appelle *triangle* toute clique ayant trois sommets. Il est coutumier de noter K_n une clique avec n sommets. On appelle *stable* tout graphe dont le complémentaire est une clique. On appelle *clique de G* tout graphe K qui est une clique et qui est un sous-graphe induit de G. Plus généralement, chaque fois qu'on définira un type de graphe "bidule" (clique, stable, trou ...), on appellera *"bidule" de G* tout graphe qui est un "bidule" (ou qui est isomorphe à un "bidule") et qui est un sous-graphe induit de G. On dira que G *contient* un "bidule" si et seulement s'il existe un sous-graphe induit de G qui est un "bidule" de G. On dira que G est *sans "bidule"* si et seulement s'il n'existe aucun "bidule" qui soit un sous-graphe induit de G.

Soit v un sommet de G. On dit que v est *simplicial* si et seulement si $N(v)$ induit une clique de G. On dit qu'un graphe G est *biparti* si et seulement s'il est possible de partitionner $V(G)$ en deux ensembles A et B tels que $G[A]$ et $G[B]$ sont des stables. Si de plus il existe une arête entre tout sommet de A et tout sommet de B, alors on dit que G est un graphe *biparti complet*. Dans ce cas, la bipartition est unique. Si G est un graphe biparti complet

avec $|A| = a$ et $|B| = b$, alors on le note habituellement $K_{a,b}$.

Soit k un entier. On appelle *k-coloration* de G toute partition de $V(G)$ en k ensembles $A_1, \ldots, A_k$ tels que pour tout $1 \leq i \leq k$, $G[A_i]$ est un stable. Notons que tout graphe avec n sommets possède une n-coloration. Les ensembles A_i sont appelés des *couleurs*. Si $v \in A_i$, on dit qu'on a *donné à v la couleur i*. Parfois, on désigne les numéros des couleurs par des adjectifs bizarres comme "rouge", "bleu" ... ou même "rose" ou "vert". On appelle *nombre chromatique* de G le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration. On note $\chi(G)$ le nombre chromatique de G. Une coloration de G avec $\chi(G)$ sommets est dite *optimale*. On note $\omega(G)$ la taille d'une clique de G de taille maximale. On note $\alpha(G)$ la taille d'un stable de G de taille maximale. Le lemme suivant est trivial :

Lemme 1.1 *Soit G un graphe.*
- *G est un stable si et seulement si $\chi(G) = 1$.*
- *G est un stable si et seulement si $\omega(G) = 1$.*
- *G est une clique si et seulement si $\chi(G) = n$.*
- *G est une clique si et seulement si $\omega(G) = n$.*
- *G est biparti si et seulement si $\chi(G) \leq 2$.*

Soit G un graphe. On appelle *line-graphe* de G le graphe noté $L(G)$ dont l'ensemble des sommets est $E(G)$, et dont deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux arêtes de G qui leur correspondent sont incidentes. Formellement, $V(L(G)) = E(G)$ et $E(L(G)) = \{ef; e \in E(G) \text{ et } f \in E(G) \text{ et } e \cap f \neq \emptyset\}$.

Si G est un graphe et si v est un sommet de G ayant exactement deux voisins non adjacents v' et v'', alors on note G/v le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G)\backslash\{v\}$, et dont l'ensemble des arêtes est $(E(G)\backslash\{vv', vv''\}) \cup \{v'v''\}$. Intuitivement, le graphe G/v est le graphe obtenu en "lissant" le sommet v. Si G et F sont des graphes, alors on dit que G est une *subdivision* de F si et seulement s'il existe une suite de graphes $G = G_0, G_1, \ldots, G_k = F$ et une suite $v_0, \ldots v_{k-1}$ tel que pour tout $0 \leq i \leq k-1$, v_i est un sommet de G_i de degré 2 et $G_{i+1} = G_i/v_i$.

Il est coutumier de dessiner les graphes en associant à chaque sommet un point du plan que l'on symbolise par un petit cercle (vide ou plein), puis en reliant par une ligne toutes les paires de points qui sont des arêtes. Pour représenter un graphe biparti, on représente parfois les sommets de la première partie de la partition en "plein" et les autres en "creux".

1.1.1 Chaînes, chemins, cycles, trous et antitrous

Dans tout ce travail, il sera beaucoup question de "chemins". Or il existe en théorie des graphes plusieurs notions de chemins, variant selon les auteur.

Il nous semble qu'aucune notation n'est vraiment standard. Nous présentons ici nos propres notations, que nous espérons claires, intuitives et rigoureuses.

Soit G un graphe. On appelle *chaîne* de G toute suite $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de sommets deux à deux distincts de G vérifiant pour tout $1 \leq i \leq k-1$: $v_i v_{i+1} \in E(G)$. Les arêtes de G de la forme $v_i v_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq k-1$, sont alors appelées les *arêtes de la chaîne*. Les arêtes de G de la forme $v_i v_j$ avec $|i-j| > 1$ sont appelées les *cordes de la chaîne*. Les sommets v_1 et v_k sont appelés les *extrémités de la chaîne*. La longueur de la chaîne est égale à son nombre d'arêtes.

On appelle *cycle* de G toute suite $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de sommets deux à deux distincts de G vérifiant pour tout $1 \leq i \leq k$: $v_i v_{i+1} \in E(G)$, où l'addition des indices est entendue modulo n. Les arêtes de G de la forme $v_i v_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq k$, sont alors appelées les *arêtes du cycle*. Les arêtes de G de la forme $v_i v_j$ avec $|i-j| > 1$ sont appelées les *cordes du cycle*.

On appelle *chemin* tout graphe P dont l'ensemble des sommets peut être ordonné de manière à former une chaîne sans corde de P, et on appelle *trou* tout graphe H avec au moins quatre sommets dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde de H. Notons qu'il existe au plus deux manières d'ordonner les sommets d'un chemin de manière à former une chaîne. Pour ces ordres, les extrémités sont les mêmes, et on les appelle les *extrémités du chemin* ; les autres sommets du chemin sont dits *intérieurs*. On note P^* le sous-chemin de P induit par les sommets intérieurs de P. On note $\lg(P)$ la *longueur* de P, c'est-à-dire son nombre d'arêtes. On appelle *antichemin* tout graphe qui est le complémentaire d'un chemin, et *antitrou* tout graphe qui est le complémentaire d'un trou. On dit qu'un trou (ou un antitrou) est *pair* (resp. *impair*) s'il contient un nombre pair d'arêtes (resp. impair). On dit qu'un trou ou un antitrou est *long* s'il contient au moins 5 sommets.

Si $n \geq 1$ est un entier et si $v_1, v_2 \ldots v_n$ sont des objets mathématiques quelconques, on note $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$ le graphe dont les sommets sont v_1, v_2, ..., v_n et dont l'ensemble des arêtes est $\{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Le graphe $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$ est donc un chemin d'extrémités v_1, v_n et de longueur $n-1$. Si P est un chemin et si u, v sont des sommets de P, alors, on note $u - P - v$ le *sous-chemin* de P d'extrémités u et v, c'est-à-dire l'unique sous-graphe induit de P qui est un chemin d'extrémités u et v. Il est coutumier de noter P_n un chemin avec n sommets, $\overline{P_n}$ un antichemin avec n sommets, C_n un trou avec n sommets et $\overline{C_n}$ un antitrou avec n sommets. On appelle *carré* le trou avec quatre sommets, noté C_4.

On définit une relation entre les sommets d'un graphe G : on note $u \sim v$ si et seulement s'il existe un chemin de G d'extrémités u et v. On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence. On appelle *composantes connexes* de G les graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$. Si G possède une seule composante connexe alors on dit que G est *connexe*. Si $\overline{G}$ est connexe, alors on dit que G est *anticonnexe*. On appelle *composantes anticonnexes*

de G les complémentaires des composantes connexes de $\overline{G}$. Notons que pour tout graphe G, l'un au moins de G, $\overline{G}$ est connexe. On appelle *ensemble d'articulation* de G tout ensemble de sommets F tel que $G \setminus F$ n'est pas connexe. Si pour tout ensemble F de $k-1$ sommets de G, le graphe $G \setminus F$ est connexe, alors on dit que G est *k-connexe*.

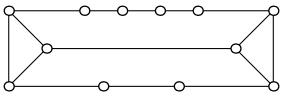
Soit G un graphe, et u, v deux sommets de G. La *distance* de u à v est la longueur d'un chemin de G de longueur minimale (on dit souvent *plus court chemin*), d'extrémités u et v. Si P est un chemin de G ayant une extrémité u, si on parle du sommet u' de P *le plus proche* de u ayant une certaine propriété, alors il s'agira du sommet u' minimisant la distance entre u et u' calculée dans le chemin P et non pas dans le graphe G.

Nous terminons par un théorème bien connu :

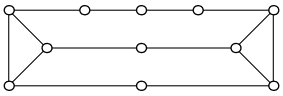
Théorème 1.2 (Cf [42]) *Un graphe est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycle impair.*

1.1.2 Pyramides, prismes et quasi-prismes

Un prisme impair :



Un prisme pair :



Le plus petit prisme :

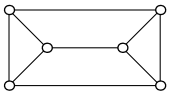


FIG. 1.1 – Des prismes

On appelle *prisme* tout graphe F dont les sommets se partitionnent en trois ensembles induisant des chemins P_1, P_2, P_3 tels que pour $i = 1, 2, 3$, P_i est de longueur au moins 1, d'extrémités a_i et b_i, tels que $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$ induisent des triangles, et tels qu'il n'y ait aucune arête entre des sommets de P_i et P_j $(1 \leq i < j \leq 3)$ autre que celles des triangles. Si F est sous-graphe induit d'un graphe G, alors on dit que les trois chemins P_1, P_2,

et P_3 *forment* un prisme de G. On dit que les sommets a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ sont les *coins* du prisme. On dit que F est *pair* (resp. *impair*) si les trois chemins P_1, P_2, P_3 sont de longueur paire (resp. impaire). On dit qu'un prisme est *long* s'il possède au moins sept sommets, c'est-à-dire si l'un au moins de ses chemins est de longueur supérieure ou égale à 2.

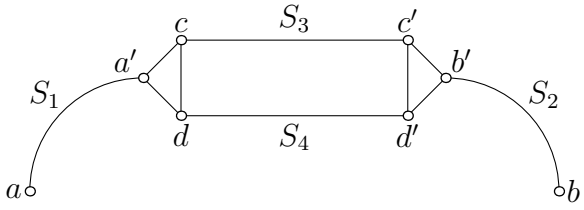
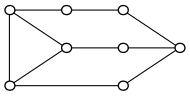


FIG. 1.2 – Un quasi-prisme

On appelle *quasi-prisme* tout graphe S dont les sommets se partitionnent en quatre ensembles induisant des chemins $S_1 = a-\cdots-a'$, $S_2 = b-\cdots-b'$, $S_3 = c-\cdots-c'$ et $S_4 = d-\cdots-d'$, où S_1 et S_2 peuvent être de longueur 0 mais où S_3, S_4 sont de longueur au moins 1, et tels que $E(S) = E(S_1) \cup E(S_2) \cup E(S_3) \cup E(S_4) \cup \{a'c, a'd, cd, b'c', b'd', c'd'\}$. Notons que $\{a', c, d\}$ et $\{b', c', d'\}$ sont des triangles de S. On appelle a et b les *extrémités* du quasi-prisme. Le quasi-prisme est dit *strict* si l'un au moins de S_1 et S_2 est de longueur au moins 1.

Une pyramide :



La plus petite pyramide :

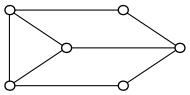


FIG. 1.3 – Des pyramides

On appelle *pyramide* tout graphe F dont l'ensemble des sommets est l'union de trois ensembles induisant des chemins P_1, P_2, P_3 tels que pour $i = 1, 2, 3$, P_i est de longueur au moins 1, d'extrémités a et b_i, et tels que $\{b_1, b_2, b_3\}$ induit un triangle, tels que a est l'unique sommet commun aux trois chemins, et tels qu'il n'y ait aucune arête entre des sommets de P_i et P_j $(1 \leq i < j \leq 3)$ autre que celles du triangle et celles d'extrémité a. De plus, un seul chemin parmi P_1, P_2, P_3 est autorisé à être de longueur 1, les deux autres doivent être de longueur au moins 2. Si F est sous-graphe induit

d'un graphe G, alors on dit que les trois chemins P_1, P_2, et P_3 *forment* une pyramide de G. On dit que le sommet a est le *coin* de la pyramide.

Le lemme suivant est souvent très pratique pour prouver qu'un graphe contient un trou impair :

Lemme 1.3 *Soit F une pyramide. Alors F contient un trou impair.*

PREUVE — Il existe deux chemins de F qui sont de même parité, sans perte de généralité, P_1 et P_2. Parmi eux, il y en a au maximum un de longueur 1 et $V(P_1) \cup V(P_2)$ induit un trou impair. □

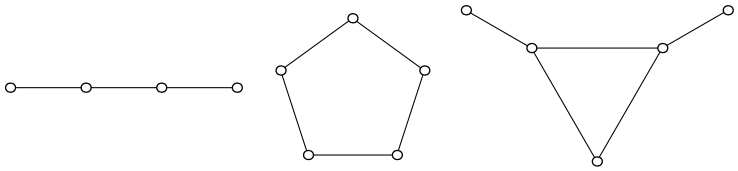
Le lemme suivant montre que dans les graphes sans trou impair, les prismes sont tous pairs ou impairs :

Lemme 1.4 *Soit F un prisme ni pair ni impair. Alors F contient un trou impair.*

PREUVE — Soit F un prisme. Si l'un des chemins P_1 de F est de longueur paire et un autre chemin P_2 de longueur impaire, alors $V(P_1) \cup V(P_2)$ induit un trou impair. □

1.1.3 Quelques graphes particuliers

Nous présentons ici quelques graphes particuliers qui vont tous jouer un rôle dans la suite de ce travail. De manière assez curieuse (et non préméditée), beaucoup de ces graphes sont autocomplémentaires. Pour une étude des graphes autocomplémentaires, nous renvoyons à la thèse de Master très complète de Alastair Farrugia [47].



P_4 C_5 Le taureau

FIG. 1.4 – Les trois graphes autocomplémentaires avec 4 ou 5 sommets

Le graphe $a{-}b{-}c{-}d$ est souvent appelé P_4 (voir figure 1.4). C'est le plus petit graphe autocomplémentaire (à part le cas trivial du graphe vide et du graphe réduit à un sommet). C'est aussi, avec le carré et son complémentaire, le plus grand graphe qui soit à la fois biparti et complémentaire de biparti. Notons qu'il est aussi le line-graphe d'un graphe biparti, et le complémentaire du line-graphe d'un graphe biparti. La *griffe*, parfois notée $K_{1,3}$, est le plus petit graphe qui ne soit pas un line-graphe : voir figure 1.5.

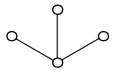


FIG. 1.5 – La griffe

Le C_5 est représenté figure 1.4. C'est un graphe autocomplémentaire. C'est le plus petit trou impair. Le *taureau* est le graphe contenant un triangle représenté figure 1.4. C'est encore un graphe autocomplémentaire. Le taureau et le C_5 sont les seuls graphes autocomplémentaires avec cinq sommets (voir [47]).

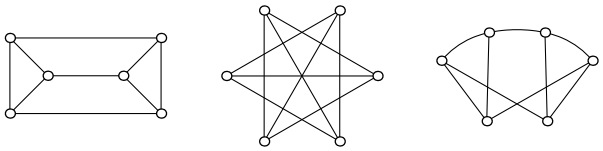


FIG. 1.6 – Trois représentations de $\overline{C_6}$

Le graphe $\overline{C_6}$ est représenté de diverses manières sur la figure 1.6. La première représentation le fait apparaître comme le plus petit prisme. Sur la deuxième représentation, on le voit comme le plus petit antitrou pair connexe. Sur la troisième représentation, on le voit apparaître comme un chemin de longueur 3 (en haut) dont les extrémités voient deux sommets non adjacents (en bas), et cela sans que le chemin de longueur 3 ne possède d'arête dont les extrémités voient les deux sommets en bas.

Le *diamant* est le graphe à quatre sommets dont le complémentaire ne contient qu'une seule arête. Le *double-diamant* est le graphe avec huit sommets représenté figure 1.8. C'est un graphe autocomplémentaire.

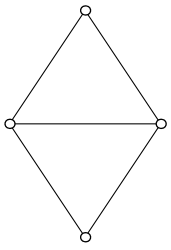


FIG. 1.7 – Le diamant

Figure 1.9, on a représenté K_4 et son line-graphe, noté $L(K_4)$. Figure 1.10, on a représenté $K_{3,3}$.

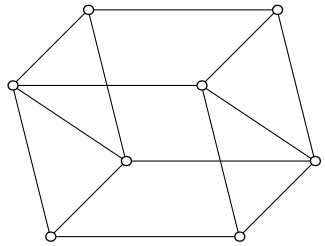


FIG. 1.8 – Le double-diamant

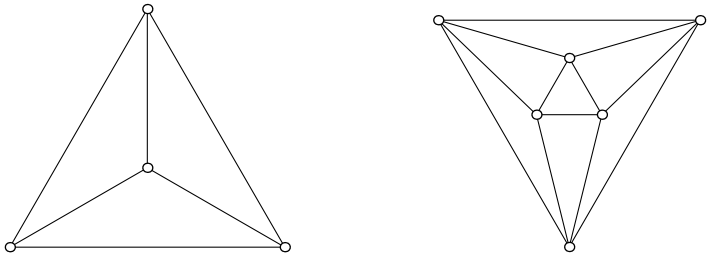


FIG. 1.9 – K_4 et $L(K_4)$

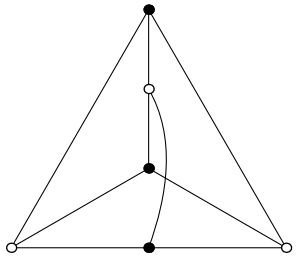


FIG. 1.10 – $K_{3,3}$

Figure 1.11, on a représenté le line graphe de $K_{3,3}$ avec une numérotation naturelle des sommets. À côté, on a représenté son complémentaire de manière à faire apparaître un isomorphisme avec le graphe de départ, montrant ainsi que $L(K_{3,3})$ est autocomplémentaire. Il faut bien noter que les deux graphes représentés côte à côte sont *différents*, que chaque arête de l'un est une non-arête de l'autre. On remarquera (fait anecdotique !) que les numéros des sommets du complémentaire forment alors un *carré magique*, c'est-à-dire que si l'on additionne les trois chiffres d'une colonne, d'une ligne, ou d'une diagonale du carré, on obtient toujours la constante "magique" : 15. Pour

plus d'informations sur les carrés magiques, voir [41]. Il est habituel de noter $K_{3,3} \setminus e$ le graphe biparti représenté figure 1.12. C'est le plus petit graphe biparti qui soit une subdivision de K_4. Son line-graphe représenté sur la même figure est un graphe autocomplémentaire, que l'on désigne par $L(K_{3,3} \setminus e)$. Beineke [4] a prouvé que les seuls line-graphes autocomplémentaires sont K_1, P_4, C_5, le taureau, $L(K_{3,3} \setminus e)$ et $L(K_{3,3})$.

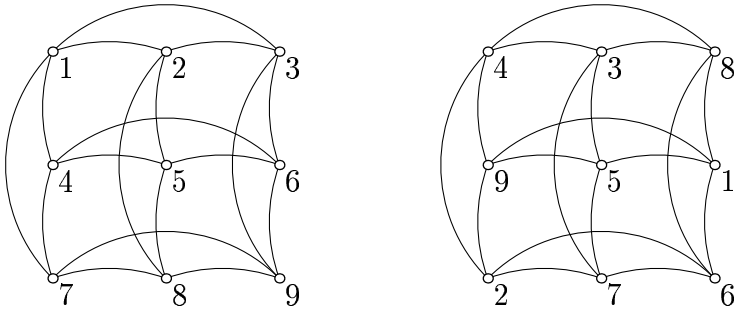


FIG. 1.11 – $L(K_{3,3})$ et son complémentaire

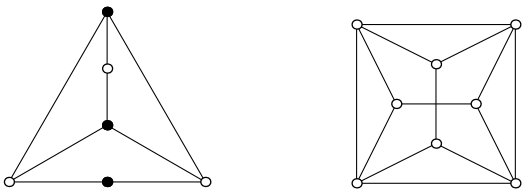


FIG. 1.12 – $K_{3,3} \setminus e$ et $L(K_{3,3} \setminus e)$

1.2 Les algorithmes

La notion d'algorithme est malaisée à définir formellement, mais cela est tout à fait possible (cf. [91]) : un algorithme est un objet mathématique tout aussi clair qu'un nombre entier ou un graphe. La notion de rapidité d'un algorithme est très importante si l'on envisage des applications pratiques. De plus, depuis des temps très reculés, on sait que la recherche d'algorithmes rapides enrichit globalement les mathématiques pures — nous voulons dire ici pures d'algorithmes. Citons comme exemple l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD de deux entiers qui en plus de son intérêt pratique permet de prouver des théorèmes importants (Bezout, théorème de Gauss ...). Toutefois, jusqu'au milieu du XX$^{\text{e}}$ siècle, la notion de rapidité d'un algorithme était vague et ne faisait pas l'objet de recherches pour elle-même. Finalement le développement de la théorie de la complexité algorithmique depuis le milieu des années 1960 a placé la notion de rapidité d'un algorithme au cœur de questions très difficiles et profondes.

1.2.1 Problèmes, algorithmes, complexité

Un *problème* est défini par la donnée d'un objet mathématique représenté par un nombre fini de symboles (*l'instance* ou *l'entrée*) et d'une *question* dont la réponse dépend uniquement de l'instance. Si la réponse à la question ne peut être que "oui" ou "non", on parle de *problème de décision*. Naïvement, un algorithme est une description de longueur finie, dans un *langage de programmation*, d'une suite finie d'opérations élémentaires (*le calcul*) ne dépendant que de l'instance et fournissant une réponse à la question (*la sortie*). Tous nos algorithmes auront pour instance des graphes, ou des graphes avec quelques objets supplémentaires (sommets, chemins du graphe ...).

On appelle *taille* de l'instance le nombre de symboles nécessaires à sa représentation. Pour chaque algorithme, et pour chaque entier n, nous chercherons à évaluer la *complexité* de l'algorithme, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution de l'algorithme pour une instance de taille n dans le pire des cas. Nos estimations de complexité seront toujours données à une constante multiplicative près à l'aide de la notation de Landau : $O(\dots)$. Dire qu'un algorithme est de complexité $O(n^{23})$ par exemple, veut dire qu'il existe une constante c telle que le nombre d'opérations pour exécuter l'algorithme sur une instance de taille n est inférieur à $c \times n^{23}$.

Nous considérons qu'un algorithme est *efficace* s'il est en *temps polynomial*, c'est-à-dire si sa complexité est majorée par un polynôme dans la taille de l'instance. Un algorithme dont la complexité est $O(2^n)$ sera donc par définition non-efficace. Le premier à avoir remarqué que beaucoup d'algorithmes classiques s'exécutent en temps polynomial, indépendamment de tout choix raisonnable de représentation des données, semble être Cobham [27], mais l'idée d'en faire un critère de classification est due à Jack Edmonds [45]. Ce dernier a aussi le premier formulé l'idée souvent vérifiée que la découverte d'un algorithme en temps polynomial pour un problème va généralement de pair avec une meilleure compréhension de celui-ci.

Pour certains problèmes (les problèmes *indécidables*), il n'existe aucun algorithme. Mais pour tous les problèmes que nous traiterons dans cette thèse, l'existence d'un algorithme non-efficace sera triviale. Notre souci sera donc de rechercher des algorithmes efficaces.

On considère généralement que la taille d'un graphe, en tant qu'instance d'un algorithme, est la somme de son nombre de sommets et de son nombre d'arêtes : $n+m$. Si l'on admet qu'un algorithme dont l'entrée est un graphe doit au moins prendre connaissance de l'instance, on voit que pour pour tout problème non-trivial, il est vain d'espérer une complexité meilleure que $O(n+m)$. Un algorithme ayant une telle complexité est dit *en temps linéaire* ou parfois *optimal*. Nous nous soucierons assez peu de la représentation de nos données. Les représentations classiques des graphes par matrice d'incidence ou liste d'adjacences sont essentiellement équivalentes pour la complexité de

nos algorithmes, dans la mesure où nous ne donnerons aucun algorithme en temps linéaire.

Nous tenons à préciser que notre point de vue sur la complexité des algorithmes, qui est d'ailleurs le point de vue conventionnel et majoritaire, est par certains aspects critiquable. Tout d'abord, un algorithme mauvais dans le pire des cas peut être intéressant pour beaucoup d'instances, voire en moyenne. De plus, même si chacun convient qu'un algorithme en temps exponentiel sera toujours plus lent qu'un algorithme en temps polynomial *à partir d'une certaine taille t de l'instance*, il se peut que t soit suffisamment grand pour que seules les instances de taille très inférieure à t soient traitables en pratique par l'une ou l'autre des méthodes. En pratique, un algorithme en temps $O(2^n)$ peut donc être préférable à un algorithme en $O(n^{23})$ par exemple. En outre, pour les applications pratiques, la constante multiplicative est loin d'être négligeable. Finalement, la complexité algorithmique telle que nous la donnons n'est qu'une indication de la performance effective de l'algorithme : l'implémentation finale de l'algorithme et des tests empiriques sont à mon avis indispensables si l'on se préoccupe d'applications concrètes. En dépit de ces critiques, la classification des algorithmes présentée ci-dessus reste un outil simple et puissant, qui a l'avantage d'être peu dépendant des représentations de données et des langages de programmation.

Nous utiliserons souvent l'algorithme fondamental ci-dessous. Notons que cet algorithme parfois appelé "parcours en largeur d'abord" est souvent attribué à Dijkstra, parce qu'il a été le premier à résoudre un problème plus général (le chemin de poids minimum). Nous renvoyons au livre de Alexander Schrijver ([104], page 87) pour des éclaircissements historiques.

Algorithme 1.5 (Berge [5], Moore [88])
ENTRÉE : Un graphe G et deux sommets s et t de G.
SORTIE : Un plus court chemin de G d'extrémités s et t.
COMPLEXITÉ : $O(n+m)$.

1.2.2 Les problèmes P, NP, CoNP et NP-complets

On dit qu'un problème appartient à la *classe P* s'il existe un algorithme en temps polynomial pour le résoudre. Un *certificat du oui* (resp. du *non*) pour un problème de décision est un objet représentable par une suite finie de symboles, dépendant seulement de l'instance et qui existe si et seulement si la réponse au problème est "oui" (resp. "non"). Un *bon certificat* est un certificat dont la taille est bornée par un polynôme en la taille de l'instance, et qui est *vérifiable en temps polynomial*. C'est-à-dire qu'il doit exister un algorithme en temps polynomial, prenant en entrée l'instance et le certificat, et qui répond "oui" (resp. "non") si et seulement si l'entrée est un certificat du oui (resp. du "non") pour cette instance. On dit qu'un problème appartient à la *classe NP* (resp. *CoNP*) s'il existe pour ce problème un bon certificat

du "oui" (resp. "non"). Les notions de certificats pour un problème ont été introduites par Jack Edmonds [44]. Il est clair qu'un problème P est toujours NP et CoNP. Une conjecture célèbre affirme que la réciproque est également vraie :

Conjecture 1.6 (P = NP∩coNP) *Si un problème admet un bon certificat du oui et un bon certificat du non, alors il existe un algorithme en temps polynomial pour le résoudre.*

Rappelons qu'une fonction booléenne à n variables est une fonction f de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$. Un vecteur booléen $\xi \in \{0,1\}^n$ *satisfait* f si $f(\xi) = 1$. Pour toute variable booléenne x sur $\{0,1\}$, on écrit $\overline{x} := 1 - x$, et on appelle x et $\overline{x}$ des *littéraux*. Une instance de 3-SAT est une fonction booléenne f donnée comme un produit booléen de clauses, chaque clause étant la somme booléenne de trois littéraux. La question de 3-SAT est de décider si on peut satisfaire f. Steve Cook a démontré un extraordinaire théorème :

Théorème 1.7 (Cook, [32]) *Si l'on dispose d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre* 3-SAT*, alors, pour n'importe quel problème NP, on peut donner un algorithme en temps polynomial.*

On dit que le problème 3-SAT est *NP-complet*. Plus généralement, tout problème Π de la classe NP est dit *NP-complet* si pour chaque problème Π' de NP, il existe une *réduction de Turing* au problème Π. C'est-à-dire que pour chaque problème Π' de NP, on doit pouvoir fournir un algorithme en temps polynomial invoquant une sous-routine de résolution de Π. Si un problème n'appartenant pas à la classe NP peut être réduit de la sorte, on dit qu'il est *NP-difficile*. En pratique, pour montrer qu'un problème est NP-complet ou NP-difficile, il suffit de supposer qu'on dispose d'un algorithme en temps polynomial pour le résoudre, puis de montrer qu'on peut utiliser cet algorithme comme sous-routine pour résoudre en temps polynomial un problème qu'on sait déjà être NP-complet, comme 3-SAT par exemple. À la suite du théorème de Cook, fondateur de la théorie de la complexité algorithmique, on a prouvé que de nombreux problèmes de décision sont NP-complets (voir [51]). Le premier exemple en théorie des graphes a été donné par Cook lui-même :

Problème 1.8 (Clique)
ENTRÉE : Un graphe G et un entier k.
QUESTION : Existe-t-il une clique de G de taille k ?
COMPLEXITÉ : NP-complet (Cook [32]).

Évidemment, l'existence d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre 3-SAT est une question fondamentale, mais encore ouverte à ce jour. L'opinion majoritaire est qu'un tel algorithme n'existe sans doute pas :

Conjecture 1.9 (P $\neq$ NP) *Il n'existe pas d'algorithme en temps polynomial pour résoudre* 3-SAT.

1.3 Résumé des définitions les plus importantes

Contient : On dit qu'un graphe G contient un graphe H si H est un sous-graphe induit de G.

Sans : On dit qu'un graphe G est sans "bidule" (trou, diamant ...) s'il ne contient aucun "bidule".

Chaîne : Une chaîne est une suite de sommets d'un graphe telle que chaque sommet (sauf le dernier) voit le suivant. Dans le graphe, il peut y avoir d'autres arêtes que celles nécessaires pour satisfaire la définition : les *cordes*.

Chemin : Un chemin est un graphe dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former une chaîne sans corde. La notation $v_1{-}\cdots{-}v_n$ désigne le chemin sur lequel les sommets apparaissent dans l'ordre v_1, ..., v_n. Ce graphe est un chemin par définition, mais même si les sommets v_i sont dans un graphe G, ce n'est pas forcément un chemin de G. Si P est un chemin, si u et v sont des sommets de P, alors $u{-}P{-}v$ désigne le sous-chemin de P d'extrémités u et v.

Cycle : Un cycle est une suite de sommets d'un graphe telle que chaque sommet voit le suivant (le suivant du dernier étant le premier). Dans le graphe, il peut y avoir d'autres arêtes : les *cordes*.

Trou : Un trou est un graphe avec au moins 4 sommets dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde . On appelle trou long tout trou ayant au moins 5 sommets.

Anti : Le préfixe "anti" désigne une propriété ou une structure du complémentaire (à une exception près : les partitions antisymétriques).

Prisme : Parfois appelé 3PC(Δ, Δ), ou stretcher. Les prismes sont des graphes obtenus à partir de deux triangles disjoints $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$ en reliant pour tout i les sommets a_i et b_i par un chemin P_i. Les seules arêtes sont celles des chemins et des triangles. Les sommets des triangles sont appelés les *coins* du prisme. Un prisme est dit *pair* (resp. *impair*) si les trois chemins sont pairs (resp. impairs). Un prisme est dit *long* si au moins l'un des trois chemins est de longueur au moins 2 (le seul prisme qui n'est pas long est $\overline{C_6}$).

Quasi-prisme : Les quasi-prismes sont des graphes obtenus à partir de deux triangles disjoints $\{a', c, d\}$ et $\{c', d', b'\}$ en reliant les sommets c et c' par un chemin S_3 de longueur au moins 1 et les sommets d et d' par un chemin S_4 de longueur au moins 1. Il y a en plus un chemin S_1 reliant a' à un sommet a et un chemin S_2 reliant b' à un sommet

b. Il n'y a aucune autre arête que celles des chemins et des triangles ci-dessus. Les sommets a et b sont appelés *extrémités* du quasi-prisme. Les chemins S_1 et S_2 peuvent être de longueur 0. Si l'un de S_1, S_2 est de longueur au moins 1, on dit que le quasi-prisme est *strict*.

Pyramide : Parfois appelée 3PC(Δ, P). Les pyramides sont des graphes obtenus à partir d'un sommet a et d'un triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ en reliant pour tout i les sommets a et b_i par un chemin P_i. Les seules arêtes sont celles des chemins et du triangle. Par définition, un seul des chemins est autorisé à être de longueur 1, les autres doivent être de longueur au moins 2. Le sommet a est appelé le *coin* de la pyramide. L'intérêt des pyramides est qu'elles contiennent toujours un trou impair.

Chapitre 2

Graphes parfaits

Les graphes parfaits ont été introduits par Claude Berge au début des années 1960 à la suite d'un cheminement assez complexe qu'il raconte lui-même dans un article agréable [9]. Pour une synthèse complète des recherches sur les graphes parfaits nous renvoyons à quatre références : un article un peu ancien de L. Lovász [81], un ouvrage collectif publié sous la direction de C. Berge et V. Chvátal [10], un ouvrage collectif plus récent, publié sous la direction de L. Ramírez Alfonsín et B. Reed [94] et un article récent de M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour et R. Thomas [20]. De manière un peu anachronique, on peut ajourd'hui motiver l'introduction des graphes parfaits par la théorie de la complexité. Le problème qui nous occupe est celui de la coloration, reformulé ci-dessous comme un problème de décision :

Problème 2.1 (Coloration)
ENTRÉE : Un graphe G et un entier k.
QUESTION : Existe-t-il une k-coloration de G ?
COMPLEXITÉ : NP-complet (Karp, [69]).

Il est clair que si un graphe G contient une clique de taille k, il faut au moins k couleurs pour le colorier. Donc, pour tout graphe on a : $\chi(G) \geq \omega(G)$. Une plus grande clique apparaît donc comme un bon candidat pour être un certificat du non du problème de la coloration. Il est donc naturel de se demander s'il y a toujours égalité entre le nombre chromatique et la taille d'une plus grande clique. Ce n'est pas le cas et le plus petit contre-exemple est C_5 : $\chi(C_5) = 3$ et $\omega(C_5) = 2$. Plus généralement, n'importe quel trou impair H vérifie $\chi(H) = 3$ et $\omega(H) = 2$. Alain Ghouila-Houri [53] a également remarqué que n'importe quel antitrou impair $\overline{H}$ avec $2n+1$ sommets vérifie $\chi(\overline{H}) = n+1$ et $\omega(\overline{H}) = n$. Donc, l'égalité $\chi = \omega$ est fausse en général, mais on peut se demander pour quels graphes elle demeure exacte. Dès les origines, Claude Berge s'est intéressé aux graphes vérifiant $\chi = \omega$ (ou ayant comme il disait "la belle propriété") pour tous leurs sous-graphes induits. En effet, sans cette restriction, n'importe quel graphe peut être muni artificiellement

de la belle propriété par l'ajout d'une grande clique par exemple. L'étude des graphes ayant la belle propriété risque donc de se ramener à celle des graphes ayant quelque part une grande clique.

Définition 2.2 (Berge, [6]) *Un graphe G est dit parfait si et seulement si pour chacun de ses sous-graphes induits G' on a $\chi(G') = \omega(G')$.*

Pour la classe des graphes parfaits, on dispose d'un bon certificat du non et aussi du oui pour le problème de la coloration. Il est donc naturel de se demander s'il existe un algorithme en temps polynomial pour colorier les graphes parfaits. C'est bien le cas :

Algorithme 2.3 (Gröstchel, Lovász, Schrijver, [54])
ENTRÉE : Un graphe parfait G.
SORTIE : Une coloration optimale de G.
COMPLEXITÉ : Polynomiale.

Il faut noter que les recherches ayant conduit à l'algorithme ci-dessus ont joué un rôle central dans le développement de branches importantes de l'optimisation, comme la programmation semi-définie (Cf. [96]). Il utilise la méthodes des ellipsoïdes qui a la réputation d'être très difficile à implémenter en raison de problèmes d'instabilité numérique. La recherche d'un algorithme performant ou conceptuellement simple pour colorier les graphes parfaits reste donc d'actualité.

Nous avons vu que les trous impairs et les antitrous impairs sont des graphes imparfaits. Donc, dès qu'un graphe contient l'un d'eux, il est lui aussi imparfait. Les graphes sans trou impair et sans antitrou impair sont donc la plus grande classe de graphes dont on peut espérer la perfection. Cela justifie la définition suivante :

Définition 2.4 *Un graphe G est dit de Berge si et seulement s'il ne contient ni trou impair ni antitrou impair.*

Au début des années 1960, Claude Berge a énoncé deux conjectures célèbres [7]. La première, dite *conjecture faible des graphes parfaits*, a été étudiée par Fulkerson [49], ce qui l'a conduit à la théorie des polyèdres antibloquants (que nous n'évoquerons pas ici). Finalement, László Lovász l' a démontrée en 1971 :

Théorème 2.5 (Théorème des graphes parfaits, Lovász, [79, 80])
Un graphe G est parfait si et seulement si $\overline{G}$ est parfait.

La deuxième conjecture de Claude Berge, *la conjecture forte des graphes parfaits*, a fait l'objet de nombreuses recherches (Vašek Chvátal recense plus de 500 articles sur le sujet, voir [25]) avant d'être finalement démontrée en mai 2002 :

Théorème 2.6 (Théorème fort des graphes parfaits, Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas [21])
Un graphe est parfait si et seulement s'il est de Berge.

À la fin de l'année 2002, la principale question ouverte sur les graphes parfaits restait celle de leur reconnaissance en temps polynomial. Ce problème a été finalement résolu par Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour et Kristina Vušković [19, 22, 34]. Au chapitre 6, nous donnerons quelques détails sur leurs méthodes.

Finalement, les *trois grands problèmes* sur les graphes parfaits, à savoir la conjecture forte, le problème de la coloration et celui de la reconnaissance des graphes parfaits, sont aujourd'hui résolus. De nombreuses questions demeurent cependant ouvertes, l'existence d'algorithmes de coloration plus rapide que celui utilisant la méthode de l'éllipsoïde notamment. On souhaiterait également des algorithmes qui tirent parti de propriétés combinatoires des graphes de Berge. On considère donc que la recherche d'un algorithme "combinatoire" de coloration des graphes parfaits est une question ouverte. Notons que la notion d'algorithme "combinatoire" n'a pas de définition formelle.

Nous présentons dans ce chapitre un certain nombre de résultats sur les graphes parfaits, parfois assez anciens. Notre choix est subjectif et ne prétend pas à l'exhaustivité. Outre notre ignorance et nos besoins spécifiques pour la suite de ce travail, le critère retenu est celui de la pertinence des résultats au vu de la résolution des trois problèmes, et notamment de la preuve du théorème fort des graphes parfaits par Chudnovsky *et al.*.

2.1 Les graphes basiques

Nous mentionnons ici les quatre classes dites *basiques* de graphes parfaits : les graphes bipartis, les line-graphes de bipartis, et leurs complémentaires. La perfection des graphes bipartis est triviale (elle résulte par exemple du lemme 1.1). La perfection des complémentaires de bipartis, des line-graphes de bipartis et des complémentaires de line-graphes de bipartis résultent de trois théorèmes de König (voir [81, 50, 71, 72]).

Dans notre travail, nous aurons parfois besoin d'informations sur la structure des line-graphes de bipartis. Signalons que Lowell Beineke [3] a prouvé un théorème caractérisant les line-graphes en général (il affirme que sa caractérisation par sous-graphes induits interdits était en fait déjà connue de Neil Robertson). Indépendamment l'un de l'autre, Philippe Lehot et Nicholas Roussopoulos ont ensuite donné l'algorithme suivant :

Algorithme 2.7 (Lehot [73], Roussopoulos [101])
INSTANCE : Un graphe G.

SORTIE : Un graphe R tel que $G = L(R)$. Si un tel graphe n'existe pas, l'algorithme retourne "G n'est pas un line-graphe".
Complexité : $O(n+m)$.

Nul n'a semble-t-il songé à spécialiser cet algorithme aux line-graphes de bipartis. Il y a de bonnes raisons à cela. Un théorème ancien de Hassler Whitney [107] affirme qu'en dehors du cas trivial de la griffe et du triangle, deux graphes différents ont toujours des line-graphes différents. Donc si on donne à l'algorithme de Lehot un line-graphe de biparti différent du triangle, on est certain que le graphe R retourné sera biparti. Autrement dit, l'algorithme de Lehot se spécialise de lui-même aux line-graphes de bipartis, et comme il est déjà en temps linéaire, il est impossible d'améliorer sa complexité. Il existe cependant un théorème sur la structure des line-graphes de graphes bipartis :

Théorème 2.8 (Harary et Holzmann, [55]) *Soit G un graphe. G est un line-graphe de biparti si et seulement si G est sans griffe, sans diamant et sans trou impair.*

2.2 Les travaux de Lovász

Nous avons déjà rencontré les principaux théorèmes de László Lovász, donnés au début des années 1970, et fondamentaux pour la compréhension des graphes parfaits. Nous avons besoin pour la suite de notre travail de détails supplémentaires sur ses travaux : un outil essentiel dans la preuve du théorème des graphes parfaits est le *lemme de réplication* :

Lemme 2.9 (Lovász, [80]) *Soit G un graphe parfait et $v \in V(G)$. Soit G' le graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet v' et en le reliant à v et à tous les voisins de v. Alors, G' est parfait.*

Pour démontrer le théorème des graphes parfaits, Lovász montre en fait le théorème suivant qui est plus fort. Mentionnons que G. Gasparian [52] a donné une preuve simplifiée de ce théorème :

Théorème 2.10 (Lovász, [79]) *Un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe G' de G on a $\alpha(G')\omega(G') \geq |V(G')|$.*

Lovász a également introduit une notion importante. Soient $\alpha, \omega \geq 1$ des entiers et G un graphe. On dit que G est (α,ω)-*partitionnable* si et seulement si pour tout sommet v de G, le graphe $G \setminus v$ peut être partitionné en α cliques de taille ω et en ω stables de taille α. On appelle *graphe minimalement imparfait* tout graphe qui n'est pas parfait et tel que chacun de ses sous-graphes induits est parfait. Notons que la conjecture forte des

graphes parfaits dit simplement que les trous impairs et les antitrous impairs sont les seuls graphes minimalement imparfaits. Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème 2.10 :

Théorème 2.11 (Lovász, [79]) *Soit G un graphe imparfait minimal. Alors G est partitionnable.*

Les graphes partitionnables ont de très nombreuses propriétés intéressantes (voir [93]). Notons que pour prouver le théorème fort des graphes parfaits, il suffit de montrer que tout graphe partitionnable contient un trou impair ou un antitrou impair. Le théorème suivant montre les principales propriétés des graphes partitionnables. Notons que Padberg [90] avait déjà démontré ce théorème dans le cas plus restreint des graphes minimalement imparfaits.

Théorème 2.12 (Bland, Huang, Trotter [14]) *Soit G un graphe (α, ω)-partitionnable avec $n = \alpha\omega + 1$ sommets. Alors :*

(a) G possède exactement n cliques de taille ω.

(b) G possède exactement n stables de taille α.

(c) Chaque sommet de G appartient à exactement ω cliques de taille ω.

(d) Chaque sommet de G appartient à exactement α stables de taille α.

(e) Chaque clique de G de taille ω est disjointe d'exactement un stable de G de taille α.

(f) Chaque stable de G de taille α est disjoint d'exactement une clique de G de taille ω.

(g) Pour chaque sommet v de G, il existe une unique coloration de $G \setminus v$ avec ω couleurs.

2.3 Les théorèmes de décomposition

Par théorème de décomposition, nous entendons ici tout résultat affirmant que pour tout graphe G d'une certaine classe $\mathcal{C}$, ou bien G appartient à une sous-classe $\mathcal{C}'$ ou bien G peut être cassé (décomposé) d'une manière *ad hoc* en plusieurs "morceaux". Un tel résultat sera d'autant plus intéressant que la sous-classe $\mathcal{C}'$ sera simple et que l'opération de décomposition préservera de bonnes propriétés, comme par exemple l'appartenance à la classe $\mathcal{C}$.

On peut débattre longtemps pour savoir si tel ou tel théorème est ou non un véritable théorème de décomposition. Certains résultats ont de bonnes propriétés algorithmiques (2-joint, clique d'articulation ...), d'autres permettent de montrer beaucoup de théorèmes (étoile d'articulation), d'autres enfin ont l'avantage de s'appliquer à des classes de graphes très larges (partition antisymétrique, étoile double ...). Nous avons choisi la solution de facilité, consistant à ne pas entrer dans ce débat et à inclure dans cette section

tous les résultats nous semblant nécessaires. À la section 2.5 consacrée aux problèmes ouverts, nous expliquerons pourquoi la partition antisymétrique n'a pas de bonnes propriétés algorithmiques.

L'utilisation de théorèmes de décomposition pour l'étude de classes de graphes parfaits a commencé avant même que Berge ait formulé clairement sa célèbre conjecture (voir [9] et [95] pour un historique détaillé des origines). Mais ce n'est qu'à la fin des années 1970 qu'est apparu le projet de prouver la conjecture forte des graphes parfaits par des techniques de décomposition. Lors de la conférence en l'honneur de Claude Berge qui s'est tenue à Paris en juillet 2004, Vašek Chvátal a raconté que la première personne ayant à sa connaissance formulé ce projet est Sue Whitesides, à l'automne 1977. Le premier résultat dans cette direction fut l'étude de la décomposition par *amalgame* des graphes de Meyniel par Burlet et Fonlupt [15]. Une autre étape importante fut la conférence de Princeton en 1993, où Chvátal et Reed ont compris que les théorèmes de décomposition des matrices équilibrées de Conforti, Cornuéjols, Kapoor et Vušković pouvaient avoir des analogies avec les graphes parfaits. Puis sont venus d'autres résultats que nous allons examiner ici.

L'exemple le plus ancien et le plus simple d'utilisation de décompositions provient d'un théorème de Dirac. On appelle *graphe triangulé* tout graphe qui ne contient aucun trou. Si G est un graphe, on appelle *clique d'articulation* de G tout ensemble d'articulation K de G, qui induit une clique de G. On appelle alors *pièces* de G les graphes $G[G_1 \cup K]$, ..., $G[G_k \cup K]$ où G_1, ..., G_k sont les composantes connexes de $G \setminus K$.

Théorème 2.13 (Dirac, [43]) *Soit G un graphe triangulé. Alors ou bien G est une clique, ou bien G possède une clique d'articulation.*

Théorème 2.14 (Gallai, [50]) *Soit G un graphe possédant une clique d'articulation. Si les pièces de G sont parfaites, alors G est parfait.*

Ce dernier théorème a pour conséquence immédiate que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de clique d'articulation. Claude Berge [6] a donc remarqué la perfection des graphes triangulés, que l'on peut prouver par une récurrence évidente : les cliques sont des graphes parfaits. Si un graphe triangulé n'est pas une clique, il a une clique d'articulation par le théorème 2.13, ses pièces sont parfaites par hypothèse de récurrence, et il est parfait par le théoreme 2.14. Depuis les années 1960, de nombreux théorèmes sur les graphes parfaits ont été démontrés sur ce modèle (voir [103]), l'idée étant de trouver des décompositions interdites dans les graphes minimalement imparfaits, ou mieux, préservant la perfection. On appelle *étoile* tout graphe qui possède un sommet voyant tous les autres sommets du graphe. L'étoile d'articulation est l'une des décompositions les plus connues. Son intérêt provient entre autres du théorème suivant :

Théorème 2.15 (Chvátal, [24]) *Dans un graphe partitionnable (et donc dans un graphe minimalement imparfait) il n'y a pas d'étoile d'articulation.*

L'étoile d'articulation a permis de prouver la perfection de nombreuses classes de graphes. Chvátal [24] a aussi introduit une autre décomposition qui s'est avérée importante par la suite : on appelle *partition antisymétrique* d'un graphe G toute partition des sommets de G en deux ensembles A et B tels que $G[A]$ n'est pas connexe et $G[B]$ n'est pas anticonnexe. Notons qu'une étoile d'articulation est un cas particulier de partition antisymétrique. Chvátal a conjecturé que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de de partition antisymétrique :

Conjecture 2.16 (Chvátal, [24]) *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors G ne possède pas de partitition antisymétrique.*

Cette conjecture s'est révélée difficile, et de nombreux cas particuliers ont été étudiés. Cornuéjols et Reed [35] ont montré qu'un graphe minimalement imparfait ne peut pas contenir d'ensemble d'articulation induisant un graphe multiparti complet avec au moins deux composantes anticonnexes (un graphe *multiparti complet* est un graphe dont le complémentaire a pour composantes connexes des cliques). Mentionnons les travaux de Chính Hoàng [63] ainsi que ceux de Florian Roussel et Philippe Rubio qui ont eu des prolongements inattendus (voir chapitre 4) :

Théorème 2.17 (Roussel et Rubio, [99]) *Soit G un graphe minimalement imparfait possédant une partition antisymétrique (X, Y). Alors aucune composante anticonnexe de $G[Y]$ n'est un stable.*

Une autre décomposition importante est le *2-joint* définit par G. Cornuéjols et W. H. Cunningham [33]. Notons que la définition précise du 2-joint varie selon les auteurs. Nous donnons une définition provisoire, qui sera précisée ensuite. Soit G un graphe. On appelle *2-joint* de G toute partition des sommets de G en deux ensembles X_1 et X_2 tels qu'il existe $A_i, B_i \subseteq X_i$ $(i = 1, 2)$ vérifiant certaines conditions parmi les suivantes :

1. Pour $i = 1, 2$, $A_i \cap B_i = \emptyset$;
2. Chaque sommet de A_1 voit chaque sommet de A_2 ;
3. Chaque sommet de B_1 voit chaque sommet de B_2 ;
4. Il n'y a aucune arête entre X_1 et X_2 autres que celles entre A_i et B_i $(i = 1, 2)$;
5. Pour $i = 1, 2$, si $|A_i| = |B_i| = 1$ et si $G[X_i]$ est un chemin joignant l'unique sommet de A_i à l'unique sommet de B_i, alors ce chemin est de longueur au moins 3 ;
6. Pour $i = 1, 2$, chaque composante connexe de $G[X_i]$ comporte des sommets de A_i et de B_i ;

7. Pour $i = 1, 2$, si $|A_i| = |B_i| = 1$, alors $G[X_i]$ n'est pas un chemin joignant l'unique sommet de A_i à l'unique sommet de B_i ;
8. Pour $i = 1, 2$, il existe un chemin de $G[X_i]$ ayant une extrémité dans A_i et une extrémité dans B_i ;
9. Les ensembles X_1 et X_2 sont de cardinal au moins 3.

Dans les articles de Chudnvovsky *et al.* dans [21], les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 6. En l'absence d'indications supplémentaire, c'est cette définition que nous utilisons. Dans les articles de Cornuéjols *et al*, des définitions légerement différentes sont utilisées, que nous précisons pour chaque théorème.

Les 2-joints sont en un certain sens interdits dans les graphes minimalement imparfaits. Plus précisément, ils sont interdits dans les contre-exemple minimaux à la conjecture forte des graphes parfaits. Notons que ce théorème est valable pour toutes les définitions du 2-joints.

Théorème 2.18 (Cornuéjols et Cunningham [33]) *Soit G un graphe minimalement imparfait. Si G possède un 2-joint, alors G est un trou impair.*

En 2001, Gérard Cornuéjols, Michelangelo Conforti et Kristina Vušković ont formulé une conjecture qui, si l'on admet que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas de partition antisymétrique, implique la conjecture forte des graphes parfaits :

Conjecture 2.19 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [30]) *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique.*

Cette conjecture apparaît aujourd'hui comme l'idée décisive conduisant à la preuve du théorème fort des graphes parfaits. Ses trois auteurs ont pu la démontrer dans des cas particuliers, ou en relaxant quelque peu la conclusion. Dans le théorème suivant, les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 4, 7 et 8.

Théorème 2.20 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [30]) *Soit G de Berge sans C_4. Alors ou bien G est basique, ou bien G possède un 2-joint ou bien G possède une étoile d'articulation. En conséquence, G est parfait.*

On appelle *étoile double* tout graphe G réduit à un sommet ou possédant une arête e telle que chaque sommet de G est adjacent à au moins l'une des extrémités de e. Dans le théorème suivant, les 2-joints doivent seulement vérifier les conditions 1 à 4, 7 et 9.

Théorème 2.21 (Conforti, Cornuéjols, Vušković [31]) *Soit G sans trou impair. Alors ou bien G est basique, ou bien G possède un 2-joint ou bien G possède une étoile double d'articulation.*

Les antitrous impairs d'au moins 7 sommets possèdent des étoiles doubles d'articulation. Il est donc impossible de montrer que les graphes minimalement imparfaits n'ont pas d'étoile double d'articulation. On pourrait en déduire un peu vite que le théorème de décomposition des graphes sans trou impair est totalement inutile pour prouver le théorème fort des graphes parfaits. Cela n'est pas tout à fait exact : on sait aujourd'hui que la conjecture ci-dessous est vraie — c'est une conséquence du théorème fort des graphes parfaits. Une preuve directe (dont nous n'avons pas la moindre idée) fournirait une alternative à l'article de Chudnovsky et al. :

Conjecture 2.22 *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors l'un de G et $\overline{G}$ ne possède pas d'étoile double d'articulation.*

Voici comment on montre le théorème fort des graphes parfaits en admettant la conjecture ci-dessus : soit G un contre-exemple minimal au théorème fort des graphes parfaits. Notons que G est de Berge. Donc G et $\overline{G}$ sont sans trou impair. D'après le théorème 2.5, $\overline{G}$ est aussi un contre-exemple minimal. Appliquons le théorème 2.21 à G et $\overline{G}$. Si l'un de G, $\overline{G}$ est basique, on contredit la perfection des graphes basiques ; si l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, on contredit le théorème 2.18 ; donc G et $\overline{G}$ possèdent une étoile double d'articulation, ce qui contredit la conjecture 2.22.

2.4 Le théorème fort des graphes parfaits

Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas sont parvenus à prouver des versions légèrement plus faibles, mais suffisantes, des conjectures 2.16 et 2.19, prouvant ainsi le théorème fort des graphes parfaits et répondant à l'une des grandes questions ouvertes de la théorie des graphes. Leur preuve est longue (le premier manuscrit diffusé, daté du 28 octobre 2002, comporte 148 pages) et technique. Nous en présentons très brièvement les étapes principales. Nous mettons l'accent sur les résultats intermédiaires susceptibles de nous servir par la suite, qui ne sont pas forcément les plus importants selon d'autres critères.

Nous avons besoin de quelques notions supplémentaires. Soit G un graphe. Si $X, Y \subset V(G)$, on dit que le couple (X, Y) est *complet* (ou que X est complet à Y) si chaque sommet de X voit chaque sommet de Y. On dit que (X, Y) est *anticomplet* si chaque sommet de X manque chaque sommet de Y. On appelle *paire homogène* toute partition des sommets de G en 6 ensembles non vides (A, B, C, D, E, F) tels que :

- Chaque sommet de A a un voisin et un non-voisin dans B. Chaque sommet de B a un voisin et un non-voisin dans A.
- Les couples (C, A), (A, F), (F, B), (B, D) sont complets.
- Les couples (D, A), (A, E), (E, B), (B, C) sont anticomplets.

Notons que notre définition de la paire homogène est celle donnée sous le nom de M-joint par Chudnovsky *et al.* Mais que la notion a été inventée par Chvátal et Sbihi [26], qui ont montré le théorème suivant :

Théorème 2.23 (Chvátal et Sbihi [26]) *Soit G un graphe minimalement imparfait. Alors G ne contient pas de paire homogène.*

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de théorèmes démontrés par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas dans [21]. Nous donnons en référence le numéro du théorème et la page à laquelle on peut le trouver dans le manuscrit daté du 28 octobre 2002. On dit qu'une partition antisymétrique (A, B) est *paire* si tous les chemins ayant leurs extrémités dans B et leur intérieur dans A sont de longueur paire et si tous les antichemins ayant leurs extrémités dans A et leur intérieur dans B sont de longueur paire. Le théorème suivant est une version affaiblie de la conjecture de Chvátal (conjecture 2.16) :

Théorème 2.24 ([21], n° 4.9, page 16) *Soit G un graphe de Berge, non parfait, et de taille minimum avec ces propriétés. Alors G ne possède pas de partition antisymétrique paire.*

Nous devons maintenant définir une nouvelle classe de graphes. On appelle *bicographe* tout graphe G tel que $V(G)$ peut se partitionner en quatre ensembles de taille au moins 2 : $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $\{b_1, \ldots, b_m\}$, $\{c_1, \ldots, c_n\}$, $\{d_1, \ldots, d_n\}$, tels que :

- Pour tout $1 \leq i \leq m$, a_i voit b_i et pour tout $1 \leq j \leq n$, c_j manque d_j.
- Pour tout $1 \leq i < i' \leq m$, il n'y a aucune arête entre $\{a_i, b_i\}$ et $\{a_{i'}, b_{i'}\}$. Pour tout $1 \leq j < j' \leq m$, il y a toutes les arêtes possibles entre $\{c_j, d_j\}$ et $\{c_{j'}, d_{j'}\}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, il y a exactement deux arêtes entre $\{a_i, b_i\}$ et $\{c_j, d_j\}$, et ces deux arêtes sont non incidentes.

Quels sont les plus petits bicographes ? Les plus petits bicographes ont 8 sommets : $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$. L'ensemble $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ induit un C_4. Le sommet a_1 voit une arête de ce C_4, et b_1 voit l'arête opposée. De même, a_2 voit une arête du C_4 et b_2 l'arête opposée. À isomorphisme près, il n'y a donc que 2 cas : a_1, a_2 voient la même arête du C_4 ou a_1, a_2 voient des arêtes incidentes du C_4. Dans le premier cas, on obtient un double-diamant, et dans le deuxième, $L(K_{3,3} \setminus e)$. Le théorème suivant est facile :

Théorème 2.25 ([21], page 1) *Soit G un bicographe. Alors G est parfait.*

La preuve du théorème de structure des graphes de Berge utilise une technique classique, d'ailleurs déjà mise en œuvre par Conforti, Cornuéjols et Vušković pour prouver le cas sans carré. On part d'un graphe de Berge

G, et on suppose que G contient un certain sous-graphe G' d'une certaine classe $\mathcal{C}$. On montre alors que tout le graphe s'organise autour de G', et qu'il possède la décomposition souhaitée. On recommence alors avec les graphes ne contenant aucun sous-graphe de la classe $\mathcal{C}'$... Voyons cela plus en détails avec la suite de théorèmes ci-dessous :

Théorème 2.26 ([21], n° 9.7, page 58) *Soit G un graphe de Berge. Si G contient le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4, alors ou bien l'un de G, $\overline{G}$ est un line-graphe de biparti, ou bien G est un bicographe, ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème 2.27 ([21], n° 10.6, page 62) *Soit G un graphe de Berge ne contenant aucun line-graphe de subdivision bipartie de K_4. Si G contient un prisme pair, alors ou bien G est un prisme pair avec 9 sommets, ou bien G possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème 2.28 ([21], n° 13.4, page 86) *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni $\overline{G}$ ne contient de line-graphe de subdivision bipartie de K_4. Si G contient un prisme impair long, alors ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G possède une paire homogène.*

Théorème 2.29 ([21], n° 14.3, page 92) *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni $\overline{G}$ ne contient de line-graphe de subdivision bipartie de K_4 ou de prisme long. Si G contient un double-diamant, alors ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire.*

Théorème 2.30 ([21], n° 1.3.7 à 1.3.11, page 4) *Soit G un graphe de Berge tel que ni G ni $\overline{G}$ ne contient de line-graphe de subdivision bipartie de K_4, de prisme long ou de double-diamant. Alors ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G ne contient aucun antitrou long, ou bien $\overline{G}$ ne contient aucun antitrou long.*

Théorème 2.31 ([21], n° 1.3.7 à 1.3.12, page 4) *Soit G un graphe de Berge sans antitrou long et tel que ni G ni $\overline{G}$ ne contient de line-graphe de subdivision bipartie de K_4, de prisme long ou de double-diamant. Alors ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G est une clique ou bien G est biparti.*

De cette liste de théorèmes, on déduit facilement le théorème de décomposition des graphes de Berge :

Théorème 2.32 *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien G est un bicographe, ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique paire, ou bien G possède une paire homogène.*

En admettant tous les théorèmes de ce chapitre, il est facile de démontrer le théorème fort des graphes parfaits : soit G un contre-exemple de taille minimum au théorème fort des graphes parfaits. Notons que G est de Berge. D'après le théorème 2.5, $\overline{G}$ est aussi un contre-exemple de taille minimum. Appliquons le théorème 2.32 à G. Si G est basique, on contredit la perfection des graphes basiques, si G est un bicographe, on contredit le théorème 2.25, si G ou $\overline{G}$ possède un 2-joint, on contredit le théorème 2.18, si G possède une paire homogène, on contredit le théorème 2.23 et si G possède une partition antisymétrique paire, on contredit le théorème 2.24. Dans tous les cas, on a une contradiction.

Trigraphes

La thèse de Maria Chudnovsky [17] est consacrée à la preuve de la conjecture 2.19 proprement dite, qui, notons le, n'est pas démontrée dans [21]. Le premier problème à résoudre est trivial : tous les bicographes ont une partition antisymétrique (pas forcément paire), et on peut donc facilement les éliminer du théorème de décomposition (théorème 2.32). Reste l'élimination des paires homogènes qui semble être un détail, puisqu'elles sont très peu utilisées dans la preuve du théorème 2.32 : elles n'apparaissent que dans le théorème 2.28. Toutefois leur élimination semble être un problème difficile.

Les explications données ici proviennent de notes personnelles prises lors d'un exposé de Maria Chudnovsky à Palo Alto en novembre 2002. La technique qu'elle utilise n'est rien moins qu'une relaxation de la notion de graphe : un trigraphe G est un triplet (V, E_1, E_2). Les ensembles E_1 et E_2 sont des sous-ensembles disjoints de l'ensemble $\binom{V}{2}$. L'ensemble E_1 représente l'ensemble des arêtes *obligatoires* de G, tandis que E_2 est l'ensemble des arêtes *optionnelles*. Plus formellement, on appelle *réalisation* de G tout graphe $G' = (V, E)$ vérifiant $E_1 \subseteq E \subseteq E_1 \cup E_2$. Un trigraphe est dit *de Berge* si toutes ses réalisations sont des graphes de Berge. Notons qu'un graphe de Berge peut être vu comme un trigraphe de Berge ne comportant aucune arête optionnelle, et n'ayant donc pour seule réalisation que lui-même. Maria Chudnovsky démontre alors un théorème de structure pour les trigraphes de Berge, qui, appliqué au cas particulier d'un graphe de Berge, donne exactement la conjecture 2.19. Formellement, le théorème de structure des trigraphes est plus difficile à prouver que le théorème de structure des graphes, mais, comme il arrive parfois, démontrer quelque chose de plus difficile permet de disposer d'hypothèses d'induction plus fortes, et s'avère finalement plus facile. Au total, la preuve en passant par les trigraphes est aussi longue

et complexe que celle par les graphes, mais elle donne un résultat un peu plus fort :

Théorème 2.33 (Chudnovsky [17, 18]) *Soit G un graphe de Berge. Alors ou bien G est basique, ou bien l'un de G, $\overline{G}$ possède un 2-joint, ou bien G possède une partition antisymétrique.*

2.5 Problèmes ouverts et questions

Comme on l'a déjà dit, de nombreuses questions concernant les graphes parfaits sont encore ouvertes, la plus importante étant peut-être la recherche d'un algorithme combinatoire de coloration. D'autres questions apparaîtront au fil de ce travail. Mais le problème de la décomposition des graphes de Berge est en un sens encore ouvert.

En effet, on attend en général d'un théorème de décomposition qu'il permette de démontrer des théorèmes par induction. En ce sens, les théorèmes 2.32 et 2.33 remplissent leur mission. Mais on attend aussi que les décompositions fournissent des algorithmes en temps polynomial fonctionnant sur le modèle suivant : on donne un graphe G, on vérifie s'il est basique. S'il ne l'est pas, on cherche une décomposition qui permette de "casser" le graphe, puis on réapplique l'algorithme récursivement sur les "morceaux". Pour autant qu'on sache, le théorème 2.33 ne permet pas de mettre en œuvre cette stratégie en temps polynomial. Pour s'en convaincre, on va essayer de résoudre le problème de la reconnaissance des graphes de Berge :

On nous donne un graphe G. Il est facile de tester si G est basique — en utilisant entre autre l'algorithme de reconnaissance des line-graphes (algorithme 2.7). S'il ne l'est pas, on recherche un 2-joint dans G. Cela est possible en temps polynomial grâce à un algorithme de Cornuéjols et Cunningham [33]. S'il y a un 2-joint (X, Y), on parvient à "casser" le graphe en deux morceaux et les choses se passent bien (voir [34] par exemple pour des détails). S'il n'y a pas de 2-joint, on recherche une partition antisymétrique. Il existe pour cela un algorithme en temps polynomial dû à C. de Figueiredo, S. Klein, Y. Kohayakawa et B. Reed [36].

L'ensemble $V(G)$ est donc partitionné en deux ensembles X et Y, où $G[X]$ n'est pas connexe et $G[Y]$ n'est pas anticonnexe. On choisit A, composante connexe de $G[X]$ et on pose $B = X \setminus A$. On choisit C, composante anticonnexe de $G[Y]$, et on pose $D = Y \setminus C$. Il n'y a aucune arête entre A et B, mais toutes les arêtes possibles entre C et D. Il se peut très bien que G contienne un trou impair alors que $G[A]$, $G[B]$, $G[C]$ $G[D]$, $G[X]$ et $G[Y]$ sont de Berge. Donc, pour reconnaître les graphes de Berge, il est inutile de relancer récursivement l'algorithme sur A, B, C, D, X, Y. Par contre, il est facile de vérifier que G est de Berge si et seulement si $G[A \cup B \cup C]$, $G[A \cup B \cup D]$, $G[A \cup C \cup D]$ et $G[B \cup C \cup D]$ sont de Berge. Donc on peut

relancer l'algorithme récursivement sur ces quatre graphes. Finalement dans le cas extrême où trois des ensembles A, B, C, D sont de taille 1, on voit que si on donne à l'algorithme un graphe avec n sommets, il risque de lancer 3 appels récursifs sur des graphes de taille $n-1$. Au pire, il rique d'y avoir 3^{n-3} appels, ce qui donne une complexité exponentielle.

Comme on le voit, la partition antisymétrique n'est pas une véritable décomposition, au sens algorithmique et pour le problème de la reconnaissance des graphes de Berge tout du moins. Pour autant que nous le sachions, nul n'a la moindre idée aujourd'hui de ce que pourrait être un théorème de décomposition des graphes de Berge ayant de bonnes propriétés algorithmiques.

Chapitre 3

Paires d'amis

Nous présentons ici la notion de paire d'amis d'un graphe introduite par Meyniel [86] :

Définition 3.1 *On appelle* paire d'amis *d'un graphe G toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G telle que tous les chemins reliant x à y sont de longueur paire.*

Nous verrons que les paires d'amis sont un outil efficace pour prouver la perfection de certaines classes de graphes de Berge, bien qu'historiquement nous n'ayons connaissance d'aucune classe de graphe dont la perfection ait d'abord été prouvée par les paires d'amis. Les graphes de Berge eux-même ne font pas exception à la règle puisque Chudnovsky *et al.* n'utilisent pas les paires d'amis, peut-être par insuffisance de l'outil, mais peut-être aussi parce que leur but était de prouver la conjecture 2.19 sur la structure des graphes de Berge. Dans cette optique, il ne fallait pas recourir aux paires d'amis. Notons toutefois que la notion de partition antisymétrique paire fait appel à des contraintes de parité de chemins, que l'on peut formuler en termes de paires d'amis de sous-graphes. Dans un sens Chudnovsky *et al.* font donc peut-être un usage implicite de la notion de paire d'amis. Mais jusqu'à présent, aucun de leurs résultats n'a permis de trouver une paire d'amis dans un graphe de Berge. Il reste que les paires d'amis pourraient être un outil pour simplifier certaines parties de la preuve du théorème fort des graphes parfaits.

Dans ce chapitre, nous nous contenterons de mentionner certaines classes de graphes dont la perfection peut se prouver grâce aux paires d'amis. Nous donnerons des résultats sur la détection des paires d'amis et présenterons à cette occasion un nouvel algorithme de détection de paires d'amis dans les line-graphes. Nous mentionnerons une conjecture de R. Thomas et F. Maffray sur les graphes bipartisans, dont une démonstration pourrait remplacer les 50 dernières pages de la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits. Puis nous montrerons l'intérêt des paires d'amis pour la coloration en présentant les graphes parfaitement contractiles. Nous nous concentrerons sur

les résultats les plus éclairants pour la suite de ce mémoire et nous renvoyons au chapitre sur les paires d'amis du livre *Perfect graphs* publié sous la direction de Bruce Reed et Jorge Ramírez Alfonsín [46] pour une synthèse plus générale (mais un peu moins récente). Nous terminerons par des tentatives de généralisation de la notion de paire d'amis.

3.1 Graphes de quasi-parité

Henri Meyniel a prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.2 (Meyniel, [86]) *Un graphe minimalement imparfait n'a pas de paire d'amis.*

Les trous impairs n'ont pas de paire d'amis, les antitrous longs non plus (entre deux sommets non-adjacents, il existe toujours un chemin de longueur 3). Le théorème de Meyniel est donc aujourd'hui une conséquence triviale du théorème fort des graphes parfaits mais, évidemment, Meyniel l'avait prouvé directement. Le théorème de Meyniel et le théorème des graphes parfaits de Lovász (théorème 2.5) ont pour conséquence directe la perfection des classes de graphes suivantes : on dit qu'un graphe G est de *quasi-parité* si tout sous-graphe induit H de G non réduit à un sommet contient une paire d'amis de H ou une paire d'amis de $\overline{H}$. Par exemple, les graphes bipartis et les complémentaires de bipartis sont des graphes de quasi-parité. On dit qu'un graphe est de *quasi-parité stricte* si tout sous-graphe induit H de G différent d'une clique contient une paire d'amis de H. Par exemple, les graphes bipartis sont des graphes de quasi-parité stricte. Tout graphe de quasi-parité stricte est un graphe de quasi-parité.

On peut se demander s'il est facile de trouver des paires d'amis dans un graphe. Dan Bienstock a montré que ce problème est en général difficile :

Problème 3.3
INSTANCE : Un graphe G et deux sommets a et b de G.
QUESTION : La paire $\{a, b\}$ est-elle une paire d'amis de G ?
COMPLEXITÉ : CoNP-complet (Bienstock, [13]).

Mais la recherche de paires d'amis peut être réalisée en temps polynomial si l'on se restreint aux graphes de Berge, grâce à l'algorithme de reconnaissance des graphes de Berge (algorithme 6.4, page 106) : si G est un graphe de Berge et si $\{a, b\}$ est une paire de sommet de G, alors on construit le graphe G' obtenu en ajoutant à G un sommet qui ne voit que a et b. On constate alors que $\{a, b\}$ est une paire d'amis de G si et seulement si G' est de Berge.

Nous allons maintenant présenter une classe de graphes parfaits de quasi-parité, et d'autres classes que l'on soupçonne telles. Nous présenterons plus tard des classes de graphes de quasi-parité stricte car il s'avère que toutes

les classes que nous mentionnerons seront en fait contenues dans une classe aux propriétés plus riches : les graphes parfaitement contractiles.

3.1.1 Les graphes sans taureau

On rappelle que le *taureau* est un graphe particulier à cinq sommets représenté ci-dessous :

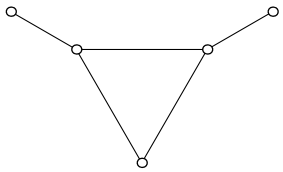


FIG. 3.1 – Le taureau

Vašek Chvátal et Najiba Sbihi [26] ont démontré que les graphes de Berge sans taureau sont parfaits. Par la suite, Celina de Figueiredo, Frédéric Maffray et Oscar Porto ont montré que les graphes de Berge sans taureau sont des graphes de quasi-parité [39]. C'est la classe la plus générale de graphes de quasi-parité connue à ce jour.

Bruce Reed et Najiba Sbihi [97] ont donné un algorithme en temps polynomial pour reconnaître les graphes de Berge sans taureau. Celina de Figueiredo et Frédéric Maffray [38] ont donné des algorithmes en temps polynomial pour résoudre les problèmes classiques d'optimisation sur ces graphes, la coloration notamment. Leurs algorithmes n'utilisent pas les paires d'amis.

3.1.2 Les conjectures de Hougardy

Stephan Hougardy [67] a étudié les paires d'amis dans les line-graphes de bipartis. Il a donné un algorithme en temps polynomial pour décider si le line-graphe d'un graphe biparti possède une paire d'amis. Le théorème suivant montre que de nombreux line-graphes de bipartis ne possèdent pas de paires d'amis.

Théorème 3.4 (Hougardy, [67]) *Soit R un graphe biparti 3-connexe. Alors $L(R)$ et $\overline{L(R)}$ n'ont pas de paire d'amis.*

Hougardy a également proposé des conjectures pour caractériser les graphes de quasi-parité et les graphes de quasi-parité stricte :

Conjecture 3.5 (Hougardy, [66]) *Tout graphe qui n'est pas de quasi-parité stricte, et qui est minimal pour l'inclusion avec cette propriété, est ou bien un trou impair, ou bien un antitrou long, ou bien le line-graphe d'un graphe biparti.*

La conjecture ne précise pas quels line-graphes de bipartis sont minimalement non de quasi-parité stricte. Elle est encore ouverte, mais un certain nombre de cas particuliers ont été résolus : dans le cas des graphes sans taureau par C. de Figueiredo, Maffray et Porto [39], dans le cas des graphes sans diamant par Kézdy et Scobee [70], dans le cas des graphes sans griffe par Linhares et Maffray [75], dans le cas des graphes planaires par Linhares, Maffray et Reed [78]. Hougardy a également proposé la conjecture suivante :

Conjecture 3.6 (Hougardy, voir [46]) *Soit G un graphe qui n'est pas de quasi-parité et qui est minimal pour l'inclusion avec cette propriété. Alors l'un de G, $\overline{G}$ est un trou impair ou le line-graphe d'un graphe biparti.*

3.1.3 Les graphes bipartisans

Les graphes bipartisans sont définis implicitement dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits [21], et explicitement dans l'article de synthèse de Chudnovsky *et al.* [20]. On appelle graphe *bipartisan* tout graphe de Berge sans prisme long, sans complémentaire de prisme long, sans double-diamant et sans $L(K_{3,3} \setminus e)$. Une conjecture, proposée indépendamment par Frédéric Maffray et Robin Thomas (à la conférence de Palo-Alto, novembre 2002), stipule que les graphes bipartisans sont des graphes de quasi-parité. À la dernière section du chapitre 5, nous verrons que les théorèmes 2.30 et 2.31 page 35 ne sont rien d'autre qu'un théorème de décomposition des graphes bipartisans. Une preuve de leur quasi-parité, et donc de leur perfection, permettrait de prouver la conjecture forte des graphes parfaits sans recours à ces deux théorèmes, dont la preuve occupe les 50 dernières pages de [21]. Au chapitre 6, nous donnerons un algorithme de reconnaissance des graphes bipartisans (algorithme 6.27 page 135, complexité $O(n^9)$).

Conjecture 3.7 (Maffray et Thomas) *Soit G un graphe bipartisan. Alors G est de quasi-parité.*

Notons que la réciproque de la conjecture est fausse : le double diamant n'est pas bipartisan, et pourtant, il est de quasi-parité ; les prisme longs sont des graphes de quasi-parité stricte, et donc de quasi-parité, sans être bipartisans.

3.1.4 Détection des paires d'amis dans les line-graphes

Nous nous proposons ici d'étendre quelque peu l'algorithme de Hougardy qui détecte les paires d'amis dans les line-graphes de bipartis. Nous donnons un algorithme qui décide si un line-graphe *quelconque* contient une paire d'amis. Il suffit pour cela de rassembler deux résultats assez éloignés : l'algorithme 2.7, qui permet de reconstruire la racine d'un line-graphe, et une

application peu connue des algorithmes de couplage due à Jack Edmonds, et qu'András Sebő m'a signalée :

Algorithme 3.8 (Edmonds, Cf. [104], pages 515 et 458)
INSTANCE : Un graphe G et deux sommets a et b de G.
SORTIE : Une chaîne de G, de longueur paire, reliant a et b et de longueur minimale avec ces propriétés — si une telle chaîne existe. Sinon, "pas de chaîne de longueur paire".
COMPLEXITÉ : n^3.

Notre algorithme repose aussi sur le lemme suivant qui traduit l'idée bien connue que les chaînes d'un graphe, même si elles ont des cordes, deviennent des chemins quand on passe au line-graphe :

Lemme 3.9 *Soit R un graphe et $G = L(R)$. Soit F un ensemble d'arêtes de R. Alors F est l'ensemble des arêtes d'une chaîne de R si et seulement si F induit un chemin de G.*

PREUVE — Si F est l'ensemble des arêtes d'une chaîne de R, alors on note $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ses arêtes, dans l'ordre où elles apparaissent sur la chaîne. Ces arêtes de R constituent aussi une suite de sommets de G qui est clairement une chaîne de G. Cette chaîne est sans corde car une éventuelle corde entre des sommets de G, e_i et e_j avec $|i-j| > 1$, impliquerait que les arêtes de R, e_i et e_j, soient incidentes bien que non consécutives dans la chaîne, ce qui est impossible. On a montré que F induit bien un chemin de G.

Réciproquement, si F (vu comme un ensemble de sommets de G) induit un chemin de G, alors on note $v_1, \ldots v_k$ les sommets de F, dans l'ordre où ils apparaissent sur F. Les sommets v_i, $i = 1, \ldots, k$, sont aussi des arêtes de R. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, il est clair que les arêtes de R, v_i et v_{i+1}, sont incidentes. On note $u_i \in V(R)$ leur extrémité commune. On note u_0 l'extrémité de v_1 qui n'est pas u_1 et on note u_k l'extrémité de v_k qui n'est pas u_{k-1}. S'il existe $0 \leq i < j \leq k$ avec $u_i = u_j$ alors, ou bien il y a au moins trois arêtes de R incidentes en un même sommet qui donnent un triangle dans P (absurde), ou bien $u_0 = u_k$, et il y a un cycle dans P (également absurde). On voit donc que les sommets u_i, $0 \leq i \leq k$, sont deux à deux distincts. Autrement dit, F peut être vu comme l'ensemble des arêtes d'une chaîne de R. □

Voici notre algorithme. Son principe est très simple, l'idée étant que si on sait faire quelque chose avec des chaînes dans les graphes en général, alors on sait faire la même chose avec des chemins dans les line-graphes.

Algorithme 3.10
INSTANCE : Un line-graphe G et deux sommets a et b de G.
SORTIE : Un chemin de longueur impaire reliant a et b, s'il existe un tel chemin. Sinon, "$\{a, b\}$ est une paire d'amis de G".

CALCUL : Grâce à l'algorithme 2.7, calculer un graphe R tel que $G = L(R)$. On peut donc voir a et b comme des arêtes de R. On note $u_{a,1}$ et $u_{a,2}$ les deux extrémités de l'arête a, on note $u_{b,1}$ et $u_{b,2}$ les deux extrémités de l'arête b. Grâce à l'algorithme 3.8, pour tout $i \in \{1,2\}$ et pour tout $j \in \{1,2\}$, on calcule une chaîne de $R \setminus \{u_{a,i+1}, u_{a,j+1}\}$ notée $C_{i,j}$, de longueur paire et reliant $u_{a,i}$ à $u_{b,j}$ (l'addition des indices s'entend modulo 2). Si aucune de ces chaînes n'existe, stopper et répondre "$\{a,b\}$ est une paire d'amis de G". Sinon, considérer l'ensemble P des arêtes de l'une de ces chaînes, qui est aussi un ensemble de sommets de G. Stopper et retourner le sous-graphe de G induit par $Q = P \cup \{a,b\}$.
COMPLEXITÉ : n^3.

PREUVE — Si l'algorithme d'Edmonds trouve une chaîne $C_{i,j}$ de longueur paire, alors on note $e_1, e_2, \ldots, e_{2\alpha}$ ses arêtes, dans l'ordre où elles apparaissent sur $C_{i,j}$. On note $e_0 = a$, $e_{2\alpha+1} = b$ et $Q = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2\alpha+1}\}$. Comme les sommets de $C_{i,j}$ sont choisis dans $R \setminus \{u_{a,i+1}, u_{a,j+1}\}$, l'ensemble Q est l'ensemble des arêtes d'une chaîne de R qui comporte $2\alpha+2$ arêtes. D'après le lemme 3.9, Q est aussi un ensemble de sommets de G qui induit un chemin de G de longueur impaire reliant a à b : l'algorithme donne la bonne réponse.

Réciproquement, si l'algorithme d'Edmonds ne trouve pas de chaîne $C_{i,j}$, alors on va montrer que $\{a,b\}$ est une paire d'amis de G. Pour cela, on suppose en vue d'une contradiction l'existence dans G d'un chemin P' de longueur impaire entre a et b. On note $v_0 = a$, v_1, ..., $v_{2\alpha}$, $v_{2\alpha+1} = b$ les sommets de P', dans l'ordre où ils apparaissent sur P'. Les sommets v_k, $k = 0, \ldots, 2\alpha+1$, sont aussi des arêtes de R qui, d'après le lemme 3.9, peuvent être vues comme les arêtes d'une chaîne de longueur paire de R. Mais alors $\{v_1, \ldots, v_{2\alpha}\}$ est l'ensemble des arêtes d'une chaîne $C_{i,j}$ de longueur paire que l'algorithme aurait dû détecter : une contradiction.

Donc l'algorithme donne la bonne réponse. Sa complexité est bien dominée par celle de l'algorithme 3.8. □

3.2 Les graphes parfaitement contractiles

Étant donnés deux sommets x, y d'un graphe G, on définit l'opération de *contraction* de x et y : on enlève x et y de V, et on ajoute un nouveau sommet noté xy et relié à chaque sommet de $V \setminus \{x,y\}$ qui voit l'un au moins de x et y. On note G/xy le graphe obtenu. On dit que xy *représente* x dans G/xy (notons que xy représente aussi y). Il est clair que pour tout graphe G et toute paire de sommets non adjacents $\{x,y\}$, on a $\chi(G) \leq \chi(G/xy)$. En effet, étant donnée une $\chi(G/xy)$-coloration de G/xy, on peut facilement obtenir une $\chi(G/xy)$-coloration de G : on garde la couleur des sommets différents de x et y, puis on donne à x et y la couleur du sommet contracté. On obtient de même l'inégalité $\omega(G) \leq \omega(G/xy)$. Ces inégalités peuvent être strictes : si G

est un chemin avec quatre sommets, si x et y sont les extrémités de ce chemin, alors $\chi(G) = 2$ et $\omega(G) = 2$ tandis que $\chi(G/xy) = 3$ et $\omega(G/xy) = 3$. Jean Fonlupt et Jean-Pierre Uhry [48] ont prouvé le théorème suivant dont nous rappelons la preuve classique, car il nous semble que l'argument d'échange bichromatique utilisé pour prouver la conclusion (a) a des chances d'être exploité dans un contexte plus général (nous nous expliquerons sur ce point à la section 3.3.1 consacrée aux partitions paires).

Théorème 3.11 (Fonlupt et Uhry [48]) *Soit G un graphe et $\{x, y\}$ une paire d'amis de G. Alors :*

(a) Il existe une coloration optimale de G qui donne la même couleur à x et y.

(b) G et G/xy ont le même nombre chromatique.

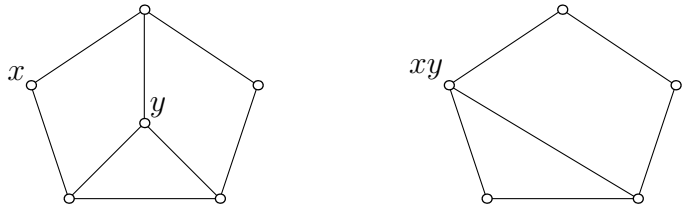
(c) G et G/xy ont des cliques maximum de même taille.

(d) Si G est parfait, alors G/xy est parfait.

PREUVE — Soit A une coloration optimale de G ne donnant pas la même couleur à x et y (disons que x est rouge et y bleu). On appelle X l'ensemble des sommets rouges et Y l'ensemble des sommets bleus. L'ensemble $X \cup Y$ induit dans G un sous-graphe biparti, et les sommets x et y ne sont pas du même côté de la bipartition (X, Y). Cela signifie que tous les chemins de $G[X \cup Y]$ reliant x à y sont de longueur impaire. Or, $\{x, y\}$ étant une paire d'amis de G, on conclut qu'il n'existe aucun chemin reliant x à y dans $G[X \cup Y]$. Donc x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de $G[X \cup Y]$, et dans celle de x, on peut échanger les couleurs rouge et bleue. On obtient alors une $\chi(G)$-coloration de G dans laquelle x et y sont bleus. Ceci prouve (a).

Pour prouver (b), il suffit de vérifier $\chi(G) \geq \chi(G/xy)$. Pour cela, il suffit de trouver une $\chi(G)$-coloration de G/xy. Soit A une $\chi(G)$-coloration de G donnant la même couleur à x et y, dont l'existence est garantie par (a). On obtient alors facilement une $\chi(G)$ coloration de G/xy en conservant la couleur de tous les sommets et en donnant au sommet contracté la couleur commune de x et y.

Pour prouver (c), il suffit de vérifier : $\omega(G) \geq \omega(G/xy)$. Pour cela, il suffit de trouver une $\omega(G/xy)$-clique dans G. Si G/xy possède une $\omega(G/xy)$-clique ne contenant pas le sommet contracté, il est clair que c'est aussi une $\omega(G/xy)$-clique dans G. Sinon, soit K une $\omega(G/xy)$-clique de G/xy contenant le sommet contracté xy. Le graphe $K \setminus \{xy\}$ est une clique de G. Si x possède un non-voisin a dans $K \setminus \{xy\}$ et si y possède un non-voisin b dans $K \setminus \{xy\}$, alors x voit b et y voit a car K est une clique de G/xy. Donc $x-b-a-y$ est chemin de longueur 3 reliant x à y : une contradiction. L'un au moins de x et y voit entièrement $K \setminus \{xy\}$ (dans G), ce qui montre que G possède bien une $\omega(G/xy)$-clique.



Un graphe G imparfait avec une paire d'amis $\{x, y\}$

Pourtant le graphe G/xy est parfait.

FIG. 3.2 – Exemple de contraction d'une paire d'amis

Pour prouver (d), il suffit de remarquer que pour tout sous-graphe induit H de G/xy, il existe un sous-graphe induit H' de G vérifiant : $H = H'/xy$ (si x ou y n'appartient pas à $V(H')$, on adopte la convention naturelle $H'/xy = H'$). Comme H' est parfait par hypothèse, il résulte par (b) et (c) que : $\chi(H) = \chi(H') = \omega(H') = \omega(H)$ ce qui montre la perfection de G/xy. □

Il faut noter que la contraction d'une paire d'amis peut transformer un graphe imparfait en un graphe parfait (voir figure 3.2). Ceci montre que les contractions de paires d'amis sont apparemment un mauvais outil pour reconnaître les graphes parfaits.

Le théorème ci-dessus permet de définir un algorithme simple de coloration pour les graphes parfaits. Si G est parfait et si G possède une paire d'amis $\{x, y\}$, ce qui précède montre qu'à partir d'une coloration optimale de G/xy, on déduit immédiatement une coloration optimale de G en donnant à x et y la couleur du sommet contracté xy. L'algorithme fonctionne comme suit : tant qu'on trouve dans le graphe G une paire d'amis, on la contracte. On peut donc suivre la trace de tout sommet v de G au cours des contractions successives et chaque sommet de G est représenté par un unique sommet dans le graphe résultant. On colorie le graphe résultant (qui ne possède pas de paire d'amis), et l'on en déduit immédiatement une coloration du graphe de départ en donnant à chaque sommet la couleur de son représentant dans le graphe résultant. On peut aussi définir sur le même modèle un algorithme de recherche de clique maximum. L'idée, qui apparaît dans la preuve du théorème de Fonlupt et Uhry, est que si $\{a, b\}$ est une paire d'amis de G, et que si on connait une clique maximum K de G/ab, alors on peut calculer une clique maximum de G : si K ne contient pas le sommet contracté ab, alors K est aussi une clique maximum de G. Sinon l'un des deux ensembles $(K \setminus ab) \cup \{a\}$ ou $(K \setminus ab) \cup \{b\}$ induit une clique maximum de G.

Ces algorithmes posent deux problèmes : tout d'abord, comment trouver une paire d'amis dans un graphe ? On a déjà vu que la recherche de paire d'amis était un problème difficile (problème 3.3), mais que leur détection

dans les graphes de Berge est réalisable en temps polynomial. Le deuxième problème posé par l'algorithme est encore ouvert : comment colorier efficacement un graphe de Berge sans paire d'amis ? Résoudre ce problème ouvert permettrait de colorier tout graphe parfait en temps polynomial.

Évidemment, à la suite de diverses contractions de paires d'amis, on peut espérer tomber par chance sur un graphe trivial à colorier. Pour toute classe $\mathcal{C}$ de graphes faciles à colorier, on peut définir la classe des graphes G tels qu'en partant de G et que par une suite de contraction de paires d'amis on puisse parvenir à un graphe de $\mathcal{C}$. À notre connaissance une approche aussi générale n'a jamais donné de résultat intéressant, et seul le cas où $\mathcal{C}$ est la classe des cliques a été sérieusement étudié dans la littérature.

Ainsi Marc Bertschi [12] a-t-il proposé les définitions suivantes. Un graphe G est dit *contractile* si G est une clique ou s'il existe une suite $G_0, \ldots, G_k$ de graphes telle que $G = G_0$, et que pour $i = 0, \ldots, k-1$, le graphe G_i possède une paire d'amis $\{x_i, y_i\}$ telle que $G_{i+1} = G_i/x_iy_i$, et que G_k est une clique. Le graphe G est dit *parfaitement contractile* si tout sous-graphe induit de G est contractile.

Quels sont les graphes non parfaitement contractiles minimaux ? On a déjà vu que les trous impairs et les antitrous longs n'ont pas de paires d'amis. Les prismes impairs peuvent avoir des paires d'amis, mais pour tout choix de séquence de contraction, on arrive au graphe $\overline{C_6}$ qui est un antitrou long (ce fait n'est pas trivial, voir [77] pour des détails). Les prismes impairs sont donc des graphes non parfaitement contractiles, dont on montre facilement qu'ils sont minimaux. En résumé, les trous impairs, les antitrous longs et les prismes impairs sont les seuls graphes non parfaitement contractiles minimaux connus à ce jour.

Bruce Reed a proposé d'appeler *graphes de Grenoble* les graphes sans trou impair, sans antitrou long et sans prisme impair. Craignant la concurrence de la noix de Grenoble, nous proposons pour notre part de les appeler *graphes d'Artémis pairs*. Nous suivons en revanche cet auteur pour appeler *graphes d'Artemis* les graphes sans trou impair, sans antitrou long et sans prisme. Notons que tout graphe d'Artémis est un graphe d'Artémis pair. La conjecture suivante peut sembler triviale alors qu'elle est en fait encore ouverte :

Conjecture 3.12 (Everett et Reed [98]) *Soit G un graphe parfaitement contractile différent d'une clique. Alors G possède une paire d'amis dont la contraction redonne un graphe parfaitement contractile.*

Hazel Everett et Bruce Reed ont proposé une autre conjecture pour caractériser les graphes parfaitement contractiles :

Conjecture 3.13 (Everett et Reed [98]) *Un graphe est parfaitement contractile si et seulement s'il est un graphe d'Artémis pair.*

Une conjecture plus faible a également été proposée :

Conjecture 3.14 (Everett et Reed [98]) *Si un graphe est d'Artémis, alors il est parfaitement contractile.*

Des cas particuliers de ces conjectures ont été démontrés : dans le cas des graphes planaires par Linhares, Maffray et Reed [78], dans le cas des graphes sans griffe par Linhares et Maffray [75] et dans le cas des graphes sans taureau par de Figueiredo, Maffray et Porto [39]. Irena Rusu à donné des conditions suffisantes pour qu'un graphe d'Artémis possède une paire d'amis [102]. Mais le pas, selon nous décisif, vers la preuve de la conjecture 3.14 a été franchi par Linhares et Maffray qui ont prouvé le théorème suivant :

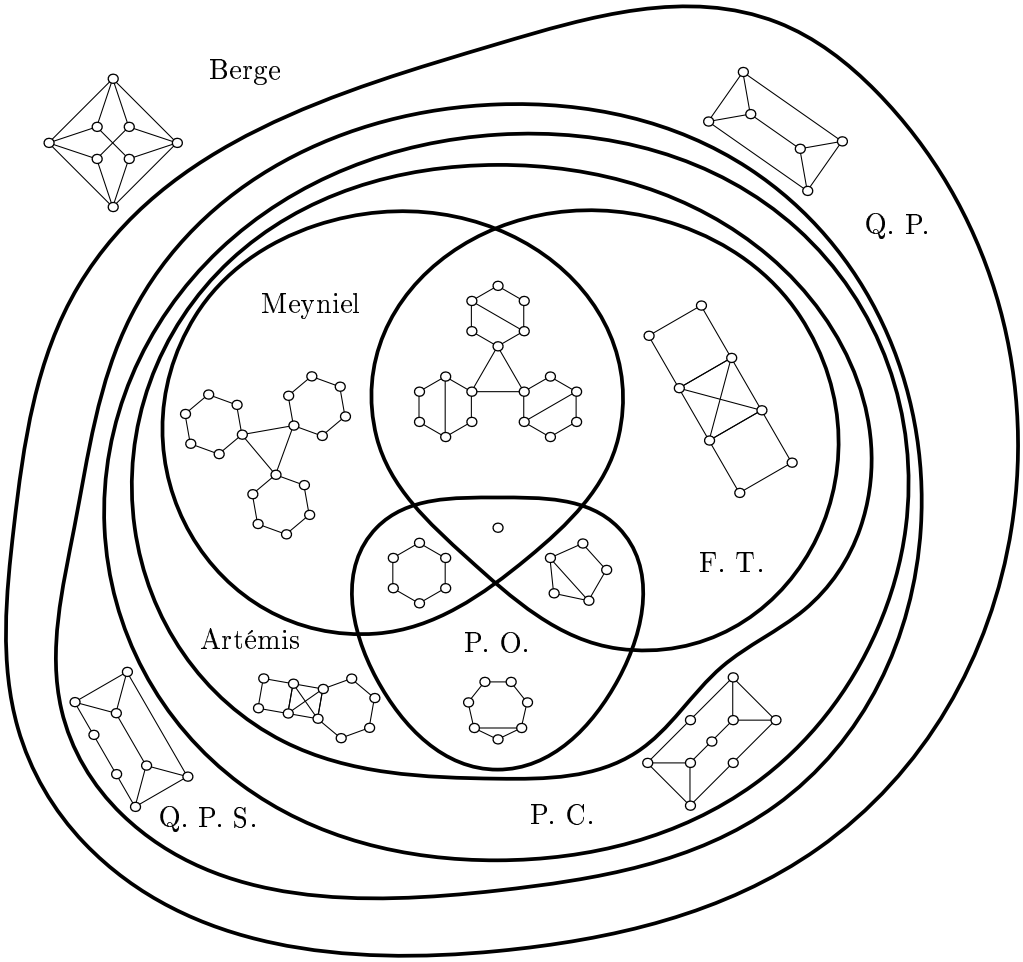
Théorème 3.15 (Linhares et Maffray, [76]) *Soit G un graphe d'Artémis sans carré. Alors G possède une paire d'amis.*

Nous démontrerons la conjecture 3.14 au chapitre 5. Notons que nous prouverons par là-même la perfection des graphes d'Artémis indépendamment du théorème fort des graphes parfaits. Notre preuve ressemble à celle du cas sans carré, à l'exception notable de l'usage d'un lemme fameux dû à Roussel et Rubio — voir chapitre 4. Elle donnera un algorithme de coloration des graphes d'Artémis de complexité $O(mn^2)$ (algorithme 5.14 page 96). La conjecture la plus forte reste quant à elle ouverte. Au chapitre 6, consacré aux problèmes de reconnaissance, nous donnerons un algorithme de reconnaissance des graphes d'Artémis (algorithme 6.24 page 133, complexité $O(n^9)$), et un algorithme de reconnaissance des graphes d'Artémis pairs (algorithme 6.25 page 134, complexité $O(n^{20})$). Nous en déduirons un algorithme en temps polynomial donnant une coloration *non nécessairement optimale* des graphes d'Artémis pairs (algorithme 6.26 page 135, complexité $O(n^{23})$). Si les conjectures de Reed et Everett (conjectures 3.13 et 3.12) sont vraies, alors il sera immédiat que cet algorithme donne une coloration *optimale* des graphes d'Artémis pair.

Nous allons maintenant passer en revue quelques classes de graphes parfaitement contractiles. Tous ces graphes sont des graphes d'Artémis et notre preuve de la conjecture 3.14 est donc une alternative pour prouver leur parfaite contractilité. La figure 3.2 page 49 donne un exemple de graphe pour chaque possiblilité concernant l'appartenance aux classes suivantes : Berge, quasi-parité stricte, quasi-parité, parfaitement contractile, Artémis, Meyniel, faiblement triangulés et parfaitement ordonnables.

3.2.1 Les graphes de Meyniel

Henri Meyniel a défini la classe des graphes dont tous les cycles impairs de longueur au moins 5 possèdent au moins deux cordes. Ces graphes portent aujourd'hui son nom. Il a démontré que ces graphes sont parfaits [85]. De



F. T.	:	Faiblement triangulé.
P.O.	:	Parfaitement ordonnable.
Q.P.	:	Quasi-parité.
Q.P.S.	:	Quasi-parité stricte.
P. C.	:	Parfaitement contractile.

FIG. 3.3 – Relations d'intersections et d'inclusions pour huit classes de graphes parfaits

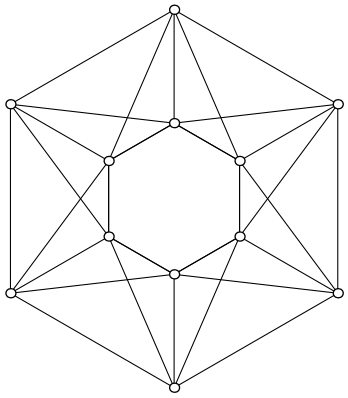


FIG. 3.4 – Un graphe de Meyniel ne contenant aucune paire d'amis dont la contraction redonne un graphe de Meyniel.

manière indépendante, S.E. Markosian et I.A. Karapetian [84] sont parvenus au même résultat. Meyniel a montré que ses graphes sont des graphes de quasi-parité stricte [86] par une preuve assez simple et astucieuse qui repose sur un petit lemme (nous le verrons au chapitre suivant : lemme 4.5) qu'on peut voir aujourd'hui comme un cas particulier du fameux lemme de Roussel et Rubio (lemme 4.1) Notre preuve de la conjecture 3.14 (chapitre 5) met en œuvre des idées déjà présentes dans le cas des graphes de Meyniel — la preuve de Meyniel sera alors rappelée pour illustrer le propos (section 5.4). Michel Burlet et Jean Fonlupt [15] ont donné un théorème de décomposition des graphes de Meyniel qui permet de les reconnaître en temps polynomial. Chính Hoàng [61] a démontré qu'un graphe est de Meyniel si et seulement si il est fortement parfait, c'est-à-dire si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G, chaque sommet de H appartient à un stable qui rencontre toutes les cliques maximales de H.

Hertz [59] a démontré que les graphes de Meyniel sont parfaitement contractiles et en a déduit un algorithme de coloration de complexité $O(nm)$. Une difficulté mérite d'être mentionnée : Bertschi [11] a remarqué que dans un graphe de Meyniel, il n'existe pas toujours de paire d'amis dont la contraction donne un graphe de Meyniel (voir figure 3.4 un exemple dû à Sarkossian mentionné dans [46]). Hertz a donc défini une classe plus large que les graphes de Meyniel, les graphes de quasi-Meyniel (voir [46]), et a montré que tout graphe de quasi-Meyniel contient une paire d'amis dont la contraction donne un graphe de quasi-Meyniel. Celina de Figueiredo et Kristina Vušković [40] ont donné un algorithme qui reconnait les graphes de quasi-Meyniel. Florian Roussel et Irena Rusu [100] ont donné un algorithme de complexité $O(n^2)$ pour colorier les graphes de Meyniel. Tout récemment, Benjamin Lévêque et Frédéric Maffray [74] ont simplifié et perfectionné cet algorithme pour parvenir à un algorithme en temps linéaire.

3.2.2 Les graphes faiblement triangulés

Vašek Chvátal et Ryan Hayward [58] ont défini la notion de graphe faiblement triangulé. Un graphe est *faiblement triangulé* si et seulement s'il ne contient ni trou long (c'est-à-dire de longueur au moins 5) ni antitrou long. Hayward a donné un théorème de décomposition pour les graphes faiblement triangulés qui, à cause du théorème 2.15, entraîne leur perfection :

Théorème 3.16 (Hayward, [58]) *Un graphe G est faiblement triangulé si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G on a ou bien :*
- *H est une clique.*
- *H est le complémentaire d'un couplage parfait.*
- *H possède une étoile d'articulation.*

Chính Hoàng et Frédéric Maffray [65] ont montré que les graphes faiblement triangulés sont des graphes de quasi-parité stricte. Leur preuve utilise le théorème de décomposition ci-dessus. Par la suite, Hayward, Hoàng et Maffray ont prouvé un théorème plus fort, nécessitant une nouvelle définition : on dit que $\{x, y\}$ est une *2-paire* de G si tout chemin reliant x à y est de longueur 2. Les 2-paires ont l'avantage par rapport aux paires d'amis d'être faciles à détecter : $\{x, y\}$ est une 2-paire d'un graphe G si et seulement si x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de $G[V \setminus N(x) \cap N(y)]$. Arikati et Pandu Rangan [2] ont donné un algorithme de complexité $O(nm)$, qui prend en entrée un graphe et qui en retourne une 2-paire s'il y en a une. Voici le théorème de Hayward *et. al.* :

Théorème 3.17 (Hayward, Hoàng, Maffray, [56]) *G est faiblement triangulé si et seulement si tout sous-graphe induit de G différent d'une clique possède une 2-paire.*

Ce théorème a pour conséquence immédiate la parfaite contractilité des graphes faiblement triangulés car la contraction d'une 2-paire dans un graphe faiblement triangulé redonne un graphe faiblement triangulé. C'est aussi à notre connaissance le seul théorème de type "paire d'amis" qui permette de reconnaître une classe de graphes parfaits. En effet, Spinrad et Sritharan [105] ont remarqué que si un graphe G possède une 2-paire, alors le graphe obtenu en reliant les deux sommets de la paire est faiblement triangulé si et seulement si G est faiblement triangulé. Pour reconnaître un graphe faiblement triangulé, il suffit donc d'y rechercher une 2-paire, et le cas échéant d'en relier les deux sommets, puis de recommencer sur le graphe obtenu jusqu'à trouver une clique. Si à une étape il n'y a pas de 2-paire, c'est que le graphe de départ n'était pas faiblement triangulé. En perfectionnant ce principe, Hayward, Spinrad et Sritharan [57] ont proposé un algorithme de reconnaissance de complexité $O(n + m^2)$ qui repose sur l'existence de 2-paires. Il faut noter qu'il existe un algorithme pour reconnaître les graphes faiblement triangulés, moins performant (de complexité $O(n^5)$), mais reposant sur des idées

naïves : nous rappellerons cet algorithme à titre d'illustration au chapitre sur les problèmes de reconnaissance (sous-section 6.1.1). Le meilleur algorithme à ce jour pour la coloration des graphes faiblement triangulés a pour complexité $O(n + m^2)$ (Hayward, Spinrad et Sritharan [57]).

En nous restreignant aux graphes faiblement triangulés, nous pourrons donner une version plus forte (lemme 4.6) du fameux lemme de Roussel et Rubio (lemme 4.1). Ceci nous permettra de spécialiser notre preuve de la conjecture 3.14 au cas des graphes faiblement triangulés, ce qui donnera une nouvelle preuve du théorème d'existence d'une 2-paire (théorème 3.17), qui sera présentée section 5.4.

3.2.3 Les graphes parfaitement ordonnables

Vašek Chvátal [23] a défini les graphes parfaitement ordonnables et a démontré qu'ils sont parfaits (voir [64] pour une synthèse sur le sujet). Étant donné un graphe quelconque G et un ensemble de couleurs $\{1, 2, \ldots\}$, il est possible de colorier le graphe de manière gloutonne, c'est à dire en définissant un ordre sur les sommets, puis en coloriant les sommets dans cet ordre, en affectant à chaque sommet la plus petite couleur disponible en tenant compte de ses voisins déjà coloriés. Pour n'importe quel graphe, il existe d'ailleurs un ordre sur les sommets qui donne ainsi une coloration optimale, et calculer cet ordre est donc NP-difficile. Mais existe-t-il un ordre sur les sommet de G qui, restreint à n'importe quel sous-graphe induit H, donne une coloration optimale de H ? Si tel est le cas, on dit que l'ordre est *parfait* et que G est *parfaitement ordonnable*.

Il n'existe pas de moyen simple pour décider si un graphe est parfaitement ordonnable : Middendorf et Pfeiffer [87] ont démontré que la reconnaissance des graphes parfaitement ordonnables est un problème NP-difficile. En fait, Hoàng [62] a montré que ce problème reste NP-difficile, même si on le restreint aux graphes faiblement triangulés. Cependant, Chvátal [23] a trouvé un moyen de certifier qu'un graphe est parfaitement ordonnable : un graphe G est parfaitement ordonnable si et seulement s'il est possible d'orienter les arêtes de G de manière acyclique et sans obstruction, une *obstruction* étant un P_4 $a-b-c-d$, sous-graphe induit de G, avec l'arête ab orientée de a vers b et l'arête cd orientée de d vers c. Ce critère ne donne évidemment pas d'algorithme en temps polynomial pour décider qu'un graphe est parfaitement ordonnable, mais dans de nombreux cas particuliers, il permet de s'en convaincre rapidement par une suite de forçages. C'est le cas pour les graphes non-parfaitement ordonnables de la figure 3.2. Si un graphe G possède une orientation sans obstruction (mais avec peut-être des cycles orientés) alors on dit qu'il est *parfaitement orientable*. Arikati et Peled [1] ont donné un algorithme de détection des paires d'amis dans les graphes parfaitement orientés.

Meyniel [86] a démontré que les graphes parfaitement ordonnables sont des graphes de quasi-parité stricte. Hertz et de Werra [60] on démontré que

Classe $n=$	5	6	7	8	9	10
Graphes quelconques	34	156	1 044	12 346	274 668	12 005 168
Berge	33	148	906	8 887	136 756	3 269 264
Quasi-parité	33	148	906	8 886	136 735	3 268 600
Quasi-parité stricte	33	147	896	8 684	131 363	3 066 504
Parfaitement contractile	33	147	896	8 683	131 333	3 065 118
Parfaitement ordonnable	33	147	896	8 682	131 299	3 062 755
Faiblement triangulé	33	146	886	8 483	126 029	2 866 876
Meyniel	32	130	622	3 839	28 614	258 660

TAB. 3.1 – Dénombrements pour certaines classes de graphes. Dans toutes les classes dont il est question, il y a 1 graphe à un sommet, 2 graphes à deux sommets, 4 graphes à trois sommets et 11 graphes à quatre sommets.

les graphes parfaitement ordonnables sont parfaitement contractiles. Il faut noter que l'existence de la paire d'amis est démontrée en présupposant connu un ordre parfait sur les sommets de G. Or calculer un tel ordre est sans doute NP-difficile, puisque, comme on l'a vu, décider si un graphe est parfaitement ordonnable est NP-difficile. Il y a donc de grandes chances que la méthode de Hertz et de Werra ne donne pas d'algorithme de coloration en temps polynomial. Cela n'est toutefois pas prouvé rigoureusement.

Notre algorithme de coloration des graphes d'Artémis (algorithme 5.14) fonctionne en particulier sur les graphes parfaitement ordonnables. En dehors de l'algorithme général de coloration des graphes parfaits par la méthode de l'ellipsoïde (algorithme 2.3), c'est à notre connaissance le premier algorithme en temps polynomial pour colorier les graphes parfaitement ordonnables.

3.2.4 Les graphes avec moins de 10 sommets

Pour finir, mentionnons que Stephan Hougardy [68] a recensé 117 classes de graphes parfaits, pour chacune desquelles il a pu calculer par ordinateur le nombre des graphes à k sommets, $k = 1, \ldots, 10$. Nous avons extrait de son article les dénombrements concernant les classes étudiées dans ce chapitre (voir tableau 3.1). Ceci permet de se faire une idée de l'importance quantitative des classes, idée peut-être trompeuse d'ailleurs pour qui s'intéresse aux graphes de plus de dix sommets. Selon Hougardy, il y a 3 065 118 graphes parfaitement contractiles à 10 sommets parmi les 3 269 264 graphes de Berge de cette taille. Seules cinq classes, parmi lesquelles les "quasi-parité" et les "quasi-parité stricte", sont plus nombreuses. La classe des graphes parfaitement contractiles réalise donc un assez bon score à cet étrange concours.

Selon Hougardy, il y a 8 887 graphes de Berge avec 8 sommets, parmi lesquels 8 886 sont de quasi-parité, et 8 est le plus petit nombre de sommets pour lequel il y ait une différence. On en déduit que le line-graphe de $K_{3,3} \setminus e$ représenté figure 3.2 est le plus petit graphe de Berge qui ne soit pas de

quasi-parité.

Par un raisonnement similaire et en utilisant uniquement les dénombrements de Hougardy, on montre que le plus petit graphe de quasi-parité et non parfaitement contractile est le $\overline{C_6}$ représenté figure 3.2, et aussi que la conjecture 3.13 est vraie pour les graphes à 6 sommets ! Le prisme impair à 8 sommets représenté figure 3.2 est le plus petit graphe de quasi-parité stricte qui n'est pas parfaitement contractile. Le prisme pair à 9 sommets représenté figure 3.2 est le plus petit graphe parfaitement contractile qui n'est pas d'Artémis. Le graphe à 8 sommets de la patate "F. T." représenté figure 3.2 est le plus petit graphe non parfaitement ordonnable et parfaitement contractile. Le plus petit graphe de quasi-parité stricte qui n'est pas faiblement triangulé est le C_6 représenté figure 3.2, et on voit que ce graphe est le seul graphe à 6 sommets avec ces propriétés. Donc il est impossible de remplacer le graphe parfaitement ordonnable à 7 sommets de la figure 3.2 par un graphe plus petit. Le plus petit graphe de Berge à 5 sommets qui n'est pas de Meyniel est la maison représentée figure 3.2.

Finalement, il ne reste que trois graphes sur la figure 3.2 dont nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'ils soient les plus petits possibles à leur place (les deux graphes avec 18 sommets, et le graphe d'Artémis qui n'appartient à aucune sous-classe d'Artémis). Nous croyons qu'ils le sont, mais le prouver nécessiterait des vérifications selon nous assez pénibles.

3.3 Généralisations de la notion de paire d'amis

Pourquoi consacrer une section à la généralisation de la notion de paire d'amis tant il vrai que toute notion est suceptible de généralisation et qu'aucune section n'est consacrée à la géneralisation de la notion de 2-joint, ni à celle de partition antisymétrique par exemple ? Les raisons à cela sont multiples. Tout d'abord cette question est souvent posée, par exemple par Paul Seymour lors de la session de problèmes ouverts sur les paires d'amis à la conférence de Palo Alto sur les graphes parfaits en novembre 2002, ou par Yann Kieffer, à la suite d'un exposé de Frédéric Maffray à la conférence ROADEF à Avignon en mars 2003. Le lecteur souhaite peut-être une réponse plus convaincante.

La paire d'amis est une notion qui permet simultanément de prouver la perfection et d'envisager des algorithmes de coloration. Dans le cas très particulier des graphes faiblement triangulés, elle fournit même un algorithme de reconnaissance. Pour qui rêve d'une preuve du théorème fort des graphes parfaits donnant simultanément un algorithme de coloration, la paire d'amis est donc un outil prometteur. Mais on sait que l'outil fonctionne très mal pour de nombreux graphes parfaits (certains lines-graphes de bipartis par exemple) qui n'ont pas de paires d'amis. Il est donc naturel de se demander si une notion plus faible permettrait de garder l'essentiel des propriétés pour

tous les graphes parfaits. Nous donnons ici deux pistes possibles (les partitions paires et les cliques ennemies), avec quelques lemmes encourageants.

3.3.1 Partitions paires

La notion de partition antisymétrique paire, déjà définie page 34, n'est pas sans rapport avec la notion de paire d'amis. Nous proposons ici une notion encore plus générale définie dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits [21] : soit G un graphe et (A, B) une partition des sommets de V en deux ensembles non vides. On dit que la partition est *paire* si et seulement si :

- Tous les chemins ayant leurs extrémités dans B et leur intérieur dans A sont de longueur paire.
- Tous les antichemins ayant leurs extrémités dans A et leur intérieur dans B sont de longueur paire.

Soit G un graphe quelconque avec au moins 3 sommets et x, y deux sommets non adjacents de G. Alors $\{x, y\}$ est une paire d'amis de G si et seulement si $(V \setminus \{x, y\}, \{x, y\})$ est une partition paire de G. En ce sens, la partition paire est bien une généralisation de la notion de paire d'amis.

Soit G est un graphe de Berge. On vérifie immédiatement qu'une partition (A, B) de ses sommets est paire si et seulement l'ajout d'un sommet v complet à B et manquant entièrement A donne à nouveau un graphe de Berge. En fait, par le lemme de réplication de Lovász (lemme 2.9), on peut dupliquer ce sommet v et même ajouter à G une clique K en reliant tous les sommets de K à tous les sommets de B, pour encore obtenir un graphe de Berge. Le lemme suivant utilise cette construction pour généraliser la conclusion (a) du théorème de Fonlupt et Uhry (théorème 3.11). Rappelons que ce théorème affirme que si $\{x, y\}$ est une paire d'amis d'un graphe, alors il existe une coloration optimale de G qui donne la même couleur à x et y, c'est-à-dire une coloration de G dont la trace sur $\{x, y\}$ donne une coloration optimale de $G[\{x, y\}]$.

Lemme 3.18 *Soit G un graphe parfait et (A, B) une partition paire de G. Alors il existe une coloration optimale de G dont la trace sur B donne une coloration optimale de $G[B]$.*

PREUVE — On construit le graphe G' en ajoutant à G une clique K avec $\chi(G) - \chi(G[B])$ sommets, disjointe de G. On relie tous les sommets de la clique K aux sommets de B. On obtient un graphe de Berge vérifiant $\omega(G') = \omega(G)$. D'après le théorème fort des graphes parfaits, on sait que G' est parfait, ce qui implique $\chi(G) = \chi(G')$. Soit alors une coloration optimale de G'. Sa trace sur G donne une coloration optimale de G. On utilise $\chi(G) - \chi(G[B])$ couleurs pour colorier K, et donc $\chi(G[B])$ couleurs pour colorier $G[B]$. On

a donc bien trouvé une coloration optimale de G dont la trace sur B donne une coloration optimale de $G[B]$. □

La preuve du lemme précédent peut très bien remplacer la preuve de la conclusion (a) du théorème de Fonlupt et Uhry (théorème 3.11). Évidemment, cette nouvelle preuve est nettement moins intéressante puisqu'elle utilise le théorème fort des graphes parfaits. Son seul mérite est donc de prouver un résultat plus général. Nous avons tenté sans succès de garder la conclusion générale tout en nous débarrassant du recours au théorème fort des graphes parfaits.

Les partitions antisymétriques paires sont des cas particuliers de partitions paires. Donc, par le théorème de décomposition des graphes de Berge (théorème 2.32), on sait que certains des graphes de Berge les plus difficiles à colorier, à savoir ceux qui ne sont pas basiques et qui n'ont ni 2-joint ni complément de 2-joint, possèdent de telles partitions. Une preuve algorithmique du lemme ci-dessus pourrait donc peut-être ouvrir une piste pour colorier certains graphes parfaits, reposant peut-être sur des échanges bichromatiques, à la manière de la preuve classique du théorème 3.11. Là encore, nous n'avons pas de résultat.

3.3.2 Cliques ennemies

On sait que les line-graphes de bipartis sont souvent sans paire d'amis. Ce phénomène est bien compris grâce au théorème 3.4, dû à Hougardy. Michel Burlet a donc cherché une nouvelle notion ayant vocation à remplacer la paire d'amis dans le cas des line-graphes de bipartis. On sait que, sauf cas trivial d'un graphe de moins de trois sommets, les graphes bipartis ont toujours des paires d'amis. Pourquoi alors ne pas regarder ce que devient cette paire après passage au line-graphe ? Michel Burlet est ainsi parvenu à la notion de cliques ennemies : on dit que deux cliques sont *ennemies* si tous les chemins allant de l'une à l'autre et minimaux pour l'inclusion avec cette propriété sont de longueur impaire. Plus précisément, si K_1 et K_2 sont deux cliques d'un graphe G, on appelle *chemin sortant reliant* K_1 *et* K_2 tout chemin P ayant une extrémité dans K_1, l'autre extrémité dans K_2 et tel que $V(P^*) \subseteq V(G) \setminus (V(K_1) \cup V(K_2))$. En fait, deux cliques sont *ennemies* si tous les chemins sortants allant de l'une à l'autre sont de longueur impaire. On notera que deux cliques ennemies sont par définition disjointes, car un éventuel sommet commun constituerait à lui seul un chemin sortant de longueur 0. On définit de même la notion de *cliques amies* : deux cliques sont *amies* si tous les chemins sortants allant de l'une à l'autre sont de longueur paire.

Justification de la notion de cliques ennemies

Nous allons voir que les cliques ennemies jouent dans les line-graphes de bipartis un rôle similaire à celui des paires d'amis dans les graphes bipartis.

Pour bien faire, il nous faut des informations précises sur la structure des line-graphes de bipartis. Le lemme suivant est dans l'esprit des travaux plus généraux de Beineke [3]. Il appartient au folklore, n'étant à notre connaissance publié nulle part. Notons qu'il ne donne pas d'algorithme rapide de reconnaissance des line-graphes de graphes sans triangle. En effet, pour reconnaître de tels graphes, il est plus rapide de calculer la racine en temps linéraire par l'algorithme de Lehot ou Roussopoulos (algorithme 2.7), pour ensuite y tester l'existence d'un triangle, que de rechercher directement des griffes et des diamants. Notons aussi que notre lemme est une étape naturelle pour démontrer le théorème de Harary et Holzmann (théorème 2.8) sur les line-graphes de bipartis. Il est donc probable que Harary et Holzmann ont démontré ce lemme, mais malheureusement, leur article est très difficile à se procurer, peut-être parce que publié dans le premier numéro d'une revue chilienne en 1974, année qui suit le coup d'État du général Pinochet. Nous prouvons finalement ce lemme pour ne rien laisser dans l'ombre.

Lemme 3.19 *Soit G un graphe. Il existe un graphe R sans triangle tel que $G = L(R)$ si et seulement si G est sans griffe et sans diamant.*

PREUVE — Il est clair que le line-graphe d'un graphe sans triangle ne possède pas de griffe ni de diamant. Réciproquement, on considère un graphe G sans griffe et sans diamant. On va construire un graphe R sans triangle tel que G soit isomorphe à $L(R)$.

(1) Soit $v \in V(G)$. Alors ou bien $G[N(v)]$ est une clique, ou bien $G[N(v)]$ possède deux composantes connexes, et ces deux composantes connexes sont des cliques.

Supposons que $G[N(v)]$ n'est pas une clique. Alors il existe $v_1 \in N(v)$ et $v_2 \in N(v)$ tels que v_1 manque v_2. Si u est un sommet de $N(v) \setminus \{v_1, v_2\}$, alors u voit exactement l'un des sommets v_1 et v_2. En effet, si u manque v_1 et v_2, alors $\{v, u, v_1, v_2\}$ induit une griffe et si u voit v_1 et v_2, alors $\{v, u, v_1, v_2\}$ induit un diamant. Donc les voisins de v se partitionnent en deux ensembles K_1 et K_2 avec $K_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap N(v))$, $i = 1, 2$. On voit que K_1 induit une clique de G car si K_1 contient deux sommets non adjacents u et w, alors l'ensemble $\{v, u, w, v_2\}$ induit une griffe. De même K_2 induit une clique. De plus, il n'y a aucune arête entre les sommets de K_1 et les sommets de K_2. En effet, si une telle arête existe entre un sommet $u_1 \in K_1$ et un sommet $u_2 \in K_2$, alors on ne peut pas avoir simultanément $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. On suppose sans perte de généralité $u_2 \neq v_2$. On constate alors que u_1 voit v_2 car sinon $\{u_1, v, v_2, u_2\}$ induit un diamant. Comme u_1 voit v_2, on sait que $u_1 \neq v_1$. Donc v_1 voit u_2 car sinon $\{u_2, v, v_1, u_1\}$ induit un diamant. Mais alors $\{v_1, u_1, v_2, u_2\}$ induit un diamant : une contradiction. Donc K_1 et K_2 induisent les deux composantes connexes de $G[N(v)]$. Ceci prouve (1).

De (1), on déduit facilement deux petits corollaires pratiques :

(2) Deux cliques distinctes et maximales de G s'intersectent en au plus un sommet.

(3) Soit v un sommet de G. Alors ou bien v appartient à exactement une clique maximale de G ou bien v appartient à exactement deux cliques maximales de G.

À partir de G, on construit le graphe R. Les sommets de R sont de deux types : les sommets de type *clique*, qui sont les cliques maximales de G et les sommets de type *pendant* qui sont les sommets de G n'appartenant qu'à une seule clique maximale de G. On ajoute une arête entre deux sommets de type clique quand les deux cliques qui leur correspondent dans G s'intersectent. On ajoute une arête entre un sommet de type pendant et le sommet représentant l'unique clique maximale à laquelle il appartient. Les sommets de type pendant sont par construction de degré 1 et ont pour seul voisin un sommet de type de clique.

(4) Le graphe R est sans triangle.

En effet, si R possède un triangle $\{a, b, c\}$, alors ses sommets sont de type clique et il leur correspond dans G trois cliques maximales distinctes K_a, K_b, K_c s'intersectant deux à deux. S'il existe $u \in K_a \cap K_b \cap K_c$, alors $G[N(u)]$ contient au moins trois cliques maximales, ce qui contredit (1). Donc $K_a \cap K_b \cap K_c = \emptyset$. Soit alors $u \in K_a \cap K_b$, $v \in K_a \cap K_c$ et $w \in K_b \cap K_c$. D'après (1), l'ensemble $N(u)$ se partitionne en deux cliques qui sont les composantes connexes de $G[N(u)]$. Ces deux composantes connexes ne peuvent être que $K_b \setminus u$ et $K_c \setminus u$ et l'arête vw montre que $G[N(u)]$ est connexe : une contradiction avec (1). Ceci prouve (4).

On définit une fonction f de $V(G)$ vers $E(R)$. Si v est un sommet appartenant à deux cliques maximales de G, alors on lui associe l'unique arête de R qui relie ces deux cliques. Si v n'appartient qu'à une seule clique maximale de G, alors on lui associe l'unique arête de R incidente à v. D'après (3), f est bien définie pour tout sommet de G.

(5) La fonction f est bijective. De plus, pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de G, $f(u)$ et $f(v)$ sont incidentes dans R si et seulement si u et v sont adjacents dans G.

La fonction f est injective. En effet, si u appartient à deux cliques maximales de G alors d'après (2), le sommet u est l'unique sommet commun à ces deux cliques. Donc aucun autre sommet de G n'aura pour image $f(u)$. Si u n'appartient qu'à une seule clique, alors $f(u) = u$ et là encore, aucun autre sommet de G n'aura pour image $f(u)$.

La fonction f est surjective. En effet, soit ab une arête de R. Si a et b sont de type clique, alors les deux cliques a et b de G ont un sommet commun dont l'image par f est justement ab. Si a est de type clique et b de type pendant, alors ab est l'image de b par f.

Supposons u et v adjacents dans G. Si u appartient à deux cliques maximales de G notées K_u et K'_u alors d'après (1) on sait que $G[N(u)]$ a pour composantes connexes $K_u \setminus u$ et $K'_u \setminus u$. On suppose sans perte de généralité $v \in V(K_u)$. Si v n'appartient qu'à une seule clique maximale de G, alors cette clique est K_u. L'arête de R égale à $f(u)$ est alors l'arête reliant K_u et K'_u tandis que l'arête de R égale à $f(v)$ est l'arête reliant K_u à v. Ces deux arêtes sont bien incidentes. Si v appartient à deux cliques maximales de G, alors d'après (1), l'une de ces deux cliques est K_u et on note l'autre K_v. L'arête de R égale à $f(u)$ est alors l'arête reliant K_u et K'_u tandis que l'arête de R égale à $f(v)$ est l'arête reliant K_u à K_v. Ces deux arêtes sont bien incidentes. Si u appartient à une seule clique maximale de G notée K_u, alors on peut supposer que v n'appartient aussi qu'à une seule clique maximale de G notée K_v (sinon, en échangeant les rôles de u et v, on se ramène à un cas déjà traité). En fait, d'après (2), $K_u = K_v$ et $f(u)$ est l'arête de R reliant u à K_u, tandis que $f(v)$ est l'arête de R reliant v à K_u : ces deux arêtes sont bien incidentes.

Réciproquement, si les arêtes $f(u)$ et $f(v)$ sont incidentes, alors leur sommet commun est nécessairement un sommet de degré au moins deux, donc un sommet de type clique correspondant à une clique de G contenant u et v, qui sont donc bien adjacents dans G. Ceci prouve (5).

Les propriétés de la fonction f montrent bien que G est isomorphe au line-graphe de R. □

Le lemme suivant est à notre connaissance original, mais il ne devrait pas surprendre un lecteur habitué au sujet. Il montre que les notions de cliques amies et ennemies sont pertinentes dans les line-graphes de bipartis :

Lemme 3.20 *Soit G un graphe sans griffe et sans diamant. Alors G est un line-graphe de biparti si et seulement si ses cliques maximales pour l'inclusion peuvent être partitionnées en deux ensembles A et B tels que pour toutes cliques maximales K_1 et K_2 de G :*

- *Si $K_1 \in A$ et $K_2 \in A$, alors K_1 et K_2 sont ennemies.*
- *Si $K_1 \in B$ et $K_2 \in B$, alors K_1 et K_2 sont ennemies.*
- *Si $K_1 \in A$ et $K_2 \in B$, alors K_1 et K_2 sont amies.*

PREUVE — On adopte les notations de la preuve du lemme 3.19. D'après ce lemme, G est isomorphe au line-graphe d'un graphe sans triangle R. On peut donc supposer qu'il existe un graphe sans triangle R tel que $G = L(R)$. Il apparaît dans la preuve du lemme 3.19 que les cliques maximales de G sont des sommets de R appelés sommets de type clique.

Si R est biparti, alors les sommets de type clique de R se partitionnent en deux stables A et B. Cette partition est aussi une partition des cliques maximales de G. Soit $K_1 \in A$ et $K_2 \in A$ deux cliques maximales de G. Notons que K_1 et K_2 sont en même temps des sommets de R non adjacents.

On sait donc que K_1 et K_2 sont des cliques disjointes de G. S'il existe un chemin de G, de longueur paire, sortant et reliant K_1 et K_2, alors d'après le lemme 3.9, les sommets intérieurs de ce chemin (qui est de longueur au moins 2) sont les arêtes de l'intérieur d'une chaîne de R de longueur impaire reliant le sommet K_1 au sommet K_2. Ceci contredit la bipartition de R. Donc tous les chemins sortants reliant K_1 et K_2 sont de longueur impaire : K_1 et K_2 sont ennemies. On démontre de même que si $K_1 \in B$ et $K_2 \in B$, alors K_1 et K_2 sont ennemies. Soient maintenant $K_1 \in A$ et $K_2 \in B$ deux cliques maximales de G. S'il existe un chemin de G, de longueur impaire, sortant et reliant K_1 et K_2, alors par un raisonnement similaire, on trouve une chaîne de R de longueur paire reliant le sommet K_1 au sommet K_2. Là encore, on contredit la bipartition de R : K_1 et K_2 sont amies.

Si R n'est pas biparti, alors R possède un trou impair H de longueur au moins 5 (car R est sans triangle). Notons $v_1, v_2, \ldots v_{2k+1}$ les sommets d'un tel trou dans l'ordre où ils y apparaissent. Chaque sommet de H est de degré au moins 2, et est donc de type clique. Donc chaque sommet v_i est en fait une clique maximale de G. Si on arrive à partitionner l'ensemble des cliques maximales en deux ensembles A et B comme indiqué dans le lemme, il advient que deux cliques consécutives v_i et v_{i+1} ne sont pas disjointes, ne peuvent donc être ennemies, et ne peuvent être toutes les deux dans A ou toutes les deux dans B. Les cliques v_i doivent donc être alternativement dans A et B, ce qui est impossible étant donné leur nombre impair. □

Conjectures et résultats partiels

Si l'on admet que les cliques ennemies sont l'extension des paires d'amis aux line-graphes de bipartis, alors il est assez naturel de proposer la conjecture suivante :

Conjecture 3.21 (Burlet, 2001) *Soit G un graphe de Berge non réduit à un sommet. Alors ou bien :*

(a) G ou $\overline{G}$ possède une paire d'amis.

(b) G ou $\overline{G}$ possède une paire de cliques ennemies.

Nous n'avons pas d'idée bien précise pour prouver cette conjecture. Ce qui précède montre qu'elle est vraie pour les graphes basiques. Elle est vraie également pour tous les graphes de quasi-parité. Pour les graphes de Berge plus généraux, le théorème de décomposition de Chudnovsky, Seymour, Robertson et Thomas (théorème 2.32) ne donne rien de facilement exploitable.

Il est clair qu'entre deux cliques maximales d'un trou impair, il existe toujours un chemin pair sortant. Entre deux cliques maximale d'un antitrou impair, il existe toujous un chemin sortant de longueur 2. Si l'on admet que les seuls graphes imparfaits minimaux sont les trous impairs et les antitrous impairs, on constate donc que la conjecture suivante est vraie :

Conjecture 3.22 (Burlet, 2001) *Dans un graphe imparfait minimal G, il n'y a pas de paire de cliques ennemies $\{K_1, K_2\}$, telle que K_i, $i = 1, 2$, est une clique maximale de G*

On pourrait souhaiter une preuve n'utilisant pas le théorème fort des graphes parfaits. Nous présentons ici quelques résultats partiels allant dans ce sens.

On sait que la contraction d'une paire d'amis $\{x, y\}$ d'un graphe G est une opération intéressante. Quel serait l'opération équivalente pour les cliques ennemies ? Les arêtes incidentes à x forment une clique K_x de $L(G)$, et celles incidentes à y forment une clique K_y. Le sommet contracté xy reçoit toutes les arêtes incidentes à x ou y, et donne donc dans $L(G)$ une clique obtenue en reliant les sommets de K_x à ceux de K_y. Dans un graphe G avec deux cliques ennemies K_1 et K_2, on définit donc l'opération consistant à relier chaque sommet de K_1 à chaque sommet de K_2. On obtient un nouveau graphe noté $G_{K_1 \equiv K_2}$. Nous allons voir que cette opération préserve la perfection. Au préalable, on vérifie que l'opération consistant à relier deux cliques ennemies K_1 et K_2 d'un graphe G ne peut créer aucune autre grande clique que celle induite par $V(K_1) \cup V(K_2)$. Plus précisément :

Lemme 3.23 *Soit K_1 et K_2 deux cliques ennemies d'un graphe G. Soit K une clique de $G_{K_1 \equiv K_2}$. Deux cas seulement se présentent :*
- *K est une clique de G.*
- *$V(K) \subseteq V(K_1) \cup V(K_2)$.*

PREUVE — Si K n'est pas une clique de G, alors K contient au moins un sommet v_1 de K_1 et un sommet v_2 de K_2 qui ne sont pas reliés dans G. Si en outre $V(K)$ n'est pas inclus dans $V(K_1) \cup V(K_2)$, alors K contient un sommet v qui n'est ni dans K_1, ni dans K_2, et qui est relié à v_1 et v_2. Mais alors, $v_1 - v - v_2$ est un chemin sortant de G, de longueur paire, reliant K_1 à K_2, ce qui est absurde. □

Voici notre résulat principal sur les cliques ennemies :

Théorème 3.24 *Soit G un graphe parfait avec deux cliques ennemies K_1 et K_2. Alors $G_{K_1 \equiv K_2}$ est lui aussi parfait.*

PREUVE — Soit H' un sous-graphe de $G_{K_1 \equiv K_2}$. On considére H le sous-graphe de G qui a les mêmes sommets que H'. Il est clair que $V(K_1) \cap V(H)$ et $V(K_2) \cap V(H)$ induisent des cliques ennemies de H et que $H' = H_{(K_1 \cap H) \equiv (K_2 \cap H)}$. Donc, pour parvenir à nos fins, il nous suffit de vérifier que $\chi(G_{K_1 \equiv K_2}) = \omega(G_{K_1 \equiv K_2})$ sans nous soucier des sous-graphes. Pour cela, on montre qu'à partir d'une coloration de G avec $\omega(G)$ couleurs, on trouve une coloration de $G_{K_1 \equiv K_2}$ avec $\omega(G_{K_1 \equiv K_2})$ couleurs :

On commence par colorier les sommets qui ne sont ni dans K_1 ni dans K_2. Si $\omega(G_{K_1 \equiv K_2}) > \omega(G)$, alors on sait d'après le lemme 3.23 que

$V(K_1) \cup V(K_2)$ induit l'unique clique maximum de $G_{K_1 \equiv K_2}$. On a donc le droit à $\omega(G_{K_1 \equiv K_2}) - \omega(G)$ nouvelles couleurs que l'on utilise pour colorier $\omega(G_{K_1 \equiv K_2}) - \omega(G)$ sommets quelconques de $V(K_1) \cup V(K_2)$. Il reste au maximum $\omega(G)$ sommets dans $V(K_1) \cup V(K_2)$ dont on garde provisoirement l'ancienne couleur dans G. On peut supposer qu'il existe un sommet v_1 de K_1 et un sommet v_2 de K_2 ayant la même couleur (disons rouge) car sinon on a obtenu une $\omega(G_{K_1 \equiv K_2})$-coloration de $G_{K_1 \equiv K_2}$ et la conclusion du lemme est satisfaite. Il y a alors une ancienne couleur (disons bleue) qui n'est utilisée ni dans K_1 ni dans K_2. On considère l'ensemble C des sommets de G qui sont rouges ou bleus. L'ensemble C induit un sous-graphe biparti de G et on appelle C_1 la composante connexe de v_1 dans ce sous-graphe. Si $v_2 \in C_1$, alors un plus court chemin de C_1 reliant v_1 à v_2 est un chemin de G, de longueur paire reliant K_1 et K_2. Ce chemin est sortant car il n'y a aucun sommet de couleur bleue dans $V(K_1) \cup V(K_2)$. Ceci contredit la définition des cliques ennemies, et on a montré que v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe C_1. Donc il est possible d'échanger les couleurs rouge et bleue dans C_1 pour affecter à v_1 la couleur bleue, sans changer la couleur du sommet v_2. On recommence cette opération tant qu'il reste des sommets de même couleur dans $K_1 \cup K_2$ pour finalement obtenir une $\omega(G_{K_1 \equiv K_2})$-coloration de $G_{K_1 \equiv K_2}$. □

Si K_1 et K_2 sont deux sous-cliques disjointes d'une clique K, alors elles sont ennemies. Dans ce cas, on dit qu'elle sont *trivialement* ennemies. Le lemme suivant va dans le sens de le conjecture 3.22 :

Lemme 3.25 *Soit G un graphe imparfait minimal. Soient K_1 et K_2 deux cliques ennemies mais non trivialement ennemies dans G. Alors $|K_1|+|K_2| \neq \omega(G)$.*

PREUVE — Supposons $|K_1|+|K_2| = \omega(G)$. Remarquons d'abord que d'après le lemme 3.23, $\omega(G_{K_1 \equiv K_2}) = \omega(G)$. Il est clair d'autre part que $\alpha(G_{K_1 \equiv K_2}) \leq \alpha(G)$. Enfin, d'après le théorème 2.10, on a $\alpha(G)\omega(G) < |V(G)|$.

Par définition, tous les sous-graphes de G sont parfaits. Donc, d'après le théorème 3.24, tous les sous-graphes de $G_{K_1 \equiv K_2}$ sont parfaits. Pourtant, comme G est partitionnable, en raison de la ω-clique $K_1 \cup K_2$ (qui n'est pas une clique de G car K_1 et K_2 sont non trivialement ennemies), $G_{K_1 \equiv K_2}$ n'est pas partitionnable. Par le théorème 2.11, on en déduit qu'il est parfait. Mais on a $\alpha(G_{K_1 \equiv K_2})\omega(G_{K_1 \equiv K_2}) \leq \alpha(G)\omega(G) < |V(G)| = |V(G_{K_1 \equiv K_2})|$ ce qui contredit le théorème 2.10. □

D'après le lemme précédent, si K_1 et K_2 sont deux cliques ennemies d'un graphe minimal imparfait G, alors deux cas se présentent :

1. $|K_1| + |K_2| < \omega(G)$

   Dans ce cas, on peut remarquer que les arêtes que l'on ajoute en reliant

K_1 à K_2 ne créent aucune ω-clique d'après le lemme 3.23. De plus, ces arêtes ne détruisent aucun α-stable. Ce fait mérite une preuve :

PREUVE — Supposons en vue d'une contradiction qu'on détruit un α-stable de G en reliant K_1 et K_2. Il existe alors deux sommets $v_1 \in K_1$ et $v_2 \in K_2$ qui sont dans un certain α-stable S. D'après la conclusion (f) du théorème 2.12, il existe donc une ω-clique K disjointe de S. Soit $v \in V(K)$. D'après la définition des graphes partitionnables, $G \setminus v$ peut être partitionné en ω stables de taille α. Au moins l'un de ces stables (notons le S') est disjoint de K, car $K \setminus v$ contient $\omega - 1$ sommets. D'après la conclusion (e) du théorème 2.12, on sait que $S' = S$. Donc on a trouvé dans G un sommet v tel qu'on puisse colorier optimalement $G \setminus v$ en donnant à v_1 et v_2 la même couleur, disons rouge. Comme $|K_1| + |K_2| < \omega(G)$, il existe une couleur (disons bleu) qui n'est pas utilisée dans $K_1 \cup K_2$. Par un échange bichromatique identique à celui de la preuve du théorème 3.24, on peut trouver une coloration de $G \setminus v$ qui donne la couleur rouge à v_1 et la couleur bleue à v_2 (si un tel échange échoue, rappelons qu'on trouve un chemin sortant de longueur paire reliant K_1 et K_2 ce qui est contradictoire). Finalement, on a trouvé deux colorations différentes de $G \setminus v$, ce qui contredit la conclusion (g) du théorème 2.12. □

Donc, quand on relie K_1 à K_2, on garde un graphe partitionnable, et on ne voit pas apparaître de contradiction.

2. $|K_1| + |K_2| > \omega(G)$
   Dans ce cas, en reliant K_1 à K_2 on obtient un graphe avec une clique maximum unique : $K_1 \cup K_2$. Ce graphe n'étant pas partitionnable, et tous ses sous-graphes étant parfaits, il est parfait. Dans ce cas on parvient donc à un graphe assez extravagant, sans qu'aucune contradiction ne semble vouloir apparaître ...

Le lemme suivant et son corollaire montrent que si K_1 et K_2 sont ennemies dans un graphe partitionnable, alors une sous-clique de K_1 a peu de chance d'être ennemie de K_2. Nous n'avons pas trouvé d'application à ce petit fait, peut-être bon à connaître malgré tout :

Lemme 3.26 *Soient K_1 et K_2 deux cliques ennemies maximales et distinctes d'un graphe G. Soit K_1' une sous-clique (stricte) de K_1. Si K_1' et K_2 sont ennemies, alors il y a dans G une étoile d'articulation.*

PREUVE — Soit $a \in K_1'$ et $b \in K_2$ non reliés (ils existent, car K_2 est maximale). Soit c un sommet quelconque de $V(K_1) \setminus V(K_1')$. On va montrer que $\{a\} \cup N(a) \setminus \{c\}$ est un ensemble d'articulation G déconnectant c et b. Pour cela, on vérifie que tout chemin P reliant c à b sans passer par K_1 contient un voisin de a différent de c. En effet :

Si P^* ne contient aucun sommet de K_2, alors P est de longueur impaire car K_1 et K_2 sont ennemies. Comme K_1' et K_2 sont ennemies, il y a une corde dans la chaîne de longueur paire $(a, c, \ldots, b)$, et cette corde relie forcément a et un sommet de P^*, ce qu'on voulait montrer.

Si P^* contient un sommet de K_2, alors ce sommet est nécessairement le voisin de b dans P, que l'on note d. On voit alors que $c-P-d$ est de longueur impaire car K_1 et K_2 sont ennemies. Donc la chaîne $(a, c, \ldots, d)$ est de longueur paire, et encore une fois, on trouve une corde de a vers un sommet de P^* (cette corde peut d'ailleurs être ad). □

Corollaire 3.27 *Soit K_1 et K_2 deux cliques ennemies maximales, et distinctes d'un graphe G partitionnable. Soit K_1' une sous-clique stricte et non vide de K_1. Alors K_1' et K_2 ne sont pas ennemies.*

PREUVE — Clair d'après le théorème 2.15 □

On peut remarquer que le lemme ci-dessus n'est pas très encourageant en vu de la conjecture 3.21. En effet, pour prouver cette dernière, on pourrait penser suivre la même démarche que celle qui a fonctionné pour décomposer les graphes de Berge : on commence par supposer que G contient F, line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4. D'après le lemme 3.20, il est clair que F contient des cliques ennemies. On peut alors espérer faire "grossir" ces cliques jusqu'à trouver une paire de cliques ennemies de G. On peut continuer ainsi avec les prismes, puis, une fois que les prismes sont exclus, on est quasiment raméné à des graphes bipartisans (aux double-diamants près ...), et on peut espérer trouver une paire d'amis. Le lemme ci-dessus montre que cette idée risque de ne pas fonctionner, car il y a des chances qu'on puisse pas faire "grossir" les cliques ennemies, ou alors seulement dans des graphes trop simples (ceux qui ont une étoile d'articulation).

Chapitre 4

Le lemme de Roussel et Rubio

Dans un article consacré aux partitions antisymétriques [99], Florian Roussel et Philippe Rubio ont présenté un lemme d'apparence assez anodine. Ce lemme montre que d'un certain point de vue, les ensembles anticonnexes des graphes de Berge se comportent comme de simples sommets. Peu de temps après, ce lemme a été redécouvert indépendamment par l'équipe de Paul Seymour (en collaboration avec Carsten Thomassen), qui l'a rebaptisé le *wonderful lemma*[1] en raison des applications multiples qu'ils lui ont trouvées dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits (ils n'ont pas publié leur preuve du lemme). Nous nous étendrons un peu sur différentes manières de prouver ce lemme important. Nous énoncerons ensuite des versions plus fortes du lemme pour des classes particulières (graphes d'Artémis, graphes de Meyniel, graphes faiblement triangulés). Nous terminerons par des corollaires qui nous seront utiles au chapitre suivant.

4.1 Différentes preuves

Si T est un ensemble de sommets d'un graphe G, on dit qu'un sommet x est *T-complet* si x voit tous les sommets de T. On appelle *T-arête* de G toute arête dont les deux extrémités sont T-complètes. Il est trivial que, dans un graphe de Berge, si un sommet t voit les extrémités d'un chemin P de longueur impaire (au moins 3), alors ce sommet doit voir au moins un sommet de P^* — rappelons que P^* désigne l'intérieur de P. En fait, si on appelle *intervalle* de P les sous-chemins de P dont les extrémités voient t et dont les sommets intérieurs manquent t, on voit que P se partitionne en intervalles (au sens des arêtes), que les intervalles sont de longueur paire ou de longueur 1, et donc que P possède un nombre impair de $\{t\}$-arêtes. Le fameux lemme de Roussel et Rubio est une généralisation de ce fait : le sommet t est remplacé par un ensemble anticonnexe T. Nous donnons une preuve simplifiée par rapport à la preuve originale qui séparait déjà les cas "$G[T]$ stable" et

[1] En français : le lemme merveilleux.

"$G[T]$ non stable". La première simplification provient d'une reformulation de la conclusion (b) du lemme : là où Roussel et Rubio écrivaient "Le chemin P possède un sommet T-complet" nous écrivons l'assertion plus forte : "Le chemin P comporte un nombre impair de T-arêtes". Ce renforcement, qui n'avait évidemment pas échappé au groupe de Seymour, permet de disposer d'une hypothèse de récurrence formellement plus forte, ce qui débarrasse la preuve de détails fastidieux, notamment pour le cas où $G[T]$ n'est pas stable.

Nous proposons aussi deux nouvelles preuves pour le cas "$G[T]$ stable", plus simples à notre avis que la preuve originale. La première est due à Ajai Kapoor, Kristina Vušković et Giacomo Zambelli [108], ce dernier me l'ayant aimablement communiquée. Il a découvert l'argument astucieux de comptage par la formule du crible dans des brouillons non publiés de Kapoor et Vušković concernant des recherches sur le nettoyage des trous impairs, et s'est rendu compte que cet argument pouvait presque sans changement s'appliquer au cas "stable" du lemme de Roussel et Rubio. Nous présenterons aussi notre propre preuve de ce cas "$G[T]$ stable", moins spectaculaire, mais qui a peut-être quelques mérites dont le lecteur jugera.

Lemme 4.1 (Roussel et Rubio, [99]) *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T-complètes. Alors ou bien :*

(a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T-arêtes.

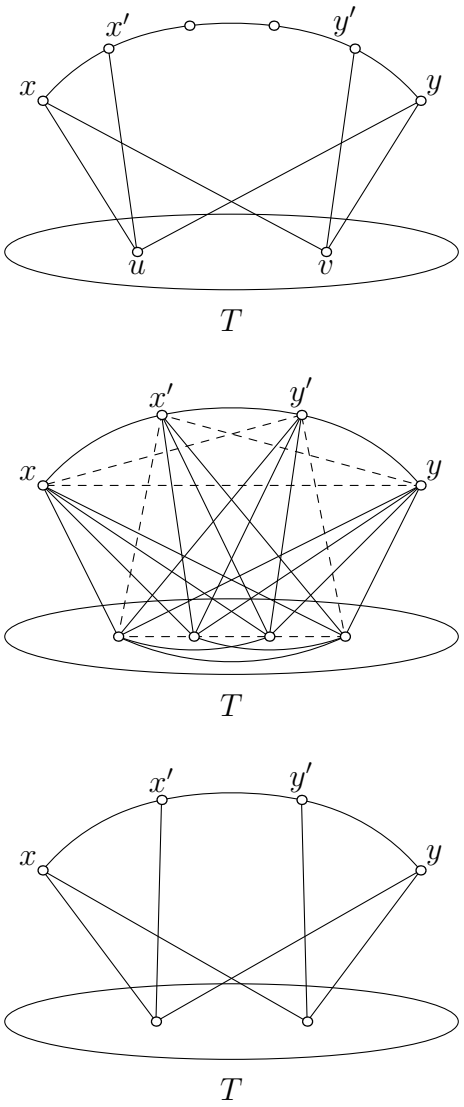
(b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T-arêtes.

(c) P est de longueur impaire, supérieure ou égale à 3, et si on le note $P = x$–x'–$\cdots$–y'–y, alors il existe dans T deux sommets non adjacents u et v tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, y', y\}$.

(d) P est de longueur 3 et ses deux sommets intérieurs sont les extrémités d'un antichemin de longueur impaire dont l'intérieur est dans T.

PREUVE — On démontre le lemme par récurrence sur $|V(P) \cup T|$. Si P est de longueur 0, 1 ou 2, l'une des conclusions (a) ou (b) est satisfaite, ce qui montre que le lemme est vrai si $|V(P) \cup T| \leq 4$. On peut donc supposer que P est de longueur au moins 3. On note $P = x$–x'–$\cdots$–y'–y. Supposons qu'aucune des conclusions (c) et (d) ne soit satisfaite. Ces conclusions ne seront pas non plus satisfaites pour un sous-ensemble de T. Donc, par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout U, sous-ensemble strict et anticonnexe de T, il y a un nombre de U-arêtes dans P qui a même parité que la longueur de P. On distingue deux cas :

Cas 1 : Il n'y a pas de sommet T-complet dans P^*. Si P est de longueur paire, on a bien la conclusion (a). Donc on peut supposer que P est de longueur impaire. On distingue deux sous-cas qui conduisent tout deux à des contradictions :



Nous avons représenté trois graphes de Berge où le lemme de Roussel et Rubio s'applique :
- Dans le premier, on a la conclusion (c) et le graphe entier est un prisme impair avec 8 sommets.
- Dans le deuxième, on a la conclusion (d) et le graphe entier est un antitrou avec 8 sommets.
- Dans le troisième graphe, on a simultanément la conclusion (c) et la conclusion (d). Le graphe entier est un $\overline{C_6}$.

FIG. 4.1 – Lemme de Roussel et Rubio : différents cas.

Cas 1.1 : T induit un stable (preuve de Kapoor, Vušković et Zambelli). On marque les sommets de P qui ont au moins un voisin dans T. On appelle *intervalle* tout sous-chemin de P, de longueur au moins 1, dont les extrémités sont marquées et dont les sommets intérieurs sont non marqués. Puisque x et y sont marqués, les intervalles de P forment une partition de P (au sens des arêtes).

Nous prétendons que chaque intervalle de P est de longueur paire ou de longueur 1. Car supposons qu'il y ait un intervalle de longueur impaire (au moins 3) noté $P' = x''-\cdots-y''$ avec x'' du côté de x et y'' du côté de y. Soit u un voisin de x'' dans T et v un voisin de y'' dans T. Si $u = v$ alors $V(P')\cup\{u\}$ induit un trou impair. Donc $u \neq v$. Si $x'' \neq x'$ alors $V(P')\cup\{u, x, v\}$ induit un trou impair. Donc $x'' = x'$. De même, $y'' = y'$. Mais alors u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Puisque P est de longueur impaire, il y a un nombre impair d'intervalles de longueur 1. De plus, pour chacun de ces intervalles $x''-P-y''$, x'' et y'' ont un voisin commun dans T. Car sinon, soit $u \in T$, voisin de x'' manquant y'', et $v \in T$, voisin de y'' manquant x''. Si $x'' \neq x'$ alors $\{x, u, x'', y'', v\}$ induit un trou impair. Donc $x'' = x'$. De même, $y'' = y'$. Mais alors u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Pour tout $t \in T$ on note $f(t)$ l'ensemble des $\{t\}$-arêtes de P. On note $t_1, t_2, \ldots, t_\alpha$ les éléments de T. On sait d'après ce qui précède que $|f(t_1) \cup f(t_2) \cup \cdots \cup f(t_\alpha)|$ est le nombre d'intervalles de longueur 1 de P. Ce nombre est impair et par la formule du crible on a :

$$\begin{aligned} |f(t_1) \cup f(t_2) \cup \cdots \cup f(t_\alpha)| \;=\; & \sum_i |f(t_i)| \\ & - \sum_{i \neq j} |f(t_i) \cap f(t_j)| \\ & \vdots \\ & + (-1)^{(k+1)} \sum_{I \subset T, |I|=k} |\cap_{i \in I} f(t_i)| \\ & \vdots \\ & + (-1)^{(\alpha+1)} |f(t_1) \cap f(t_2) \cap \cdots \cap f(t_\alpha)| \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $I \subsetneq T$ le nombre $|\cap_{i \in I} f(t_i)|$ est impair. De plus, le nombre de termes additionnés dans le membre droit de l'égalité ci-dessus est égal à $2^\alpha - 1$ (nombre de parties non vides d'un ensemble avec α éléments). Donc l'égalité ci-dessus peut être réécrite modulo 2 :

$$|f(t_1) \cup f(t_2) \cup \cdots \cup f(t_\alpha)| = 2^\alpha - 2 + (-1)^{(\alpha+1)} |f(t_1) \cap f(t_2) \cap \cdots \cap f(t_\alpha)|$$

Donc $|f(t_1) \cap f(t_2) \cap \cdots \cap f(t_\alpha)|$ est impair ce qui veut dire que P possède un nombre impair de T-arêtes, et donc que P^* possède au moins un sommet T-complet : une contradiction.

Cas 1.1 : T induit un stable (notre preuve). Si $|T| = 1$, alors $T \cup V(P)$ induit un trou impair. Donc $|T| \geq 2$. Soit t un sommet de T. Nous prétendons que $N(t) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ ou $N(t) \cap P = \{x, y', y\}$. Notons que, pour tout $t \in T$, les sommets $T \setminus \{t\}$-complets de P^* manquent t. On appelle *intervalle* de P tout sous-chemin de P dont les extrémités voient t et dont les sommets intérieurs manquent t. Puisque x et y voient t, les intervalles de P forment une partition de P au sens des arêtes. D'autre part nous savons qu'il y a un nombre impair de $T \setminus \{t\}$-arêtes dans P. Donc il y a un intervalle de P noté $r-P-s$ qui possède un nombre impair de $T \setminus \{t\}$-arêtes. Supposons que x, r, s, y apparaissent dans cet ordre sur P. Notons que $r-P-s$ est de longueur au moins 2 car sinon, l'un au moins de r ou de s serait un sommet T-complet de P^*. Donc $V(r-P-s) \cup \{t\}$ induit un trou pair et $r-P-s$ est de longueur paire. Soit r' le sommet $T \setminus \{t\}$-complet de $r-P-s$ le plus proche de r, et s' le plus proche de s. Notons que $r'-P-s'$ contient toutes les $T \setminus \{t\}$-arêtes de $r-P-s$ et que ces arêtes sont en nombre impair. Donc, par hypothèse de récurrence, $r'-P-s'$ est de longueur impaire. On en déduit qu'exactement l'un des chemins $r-P-r'$ et $s'-P-s$ est de longueur impaire. On suppose d'abord que $r-P-r'$ est de longueur impaire. En particulier, $r \neq r'$ et $x \neq r$.

Si r' manque y, alors $P_1 = r'-P-r-t-y$ est un chemin de G de longueur impaire dont les extrémités sont $T \setminus \{t\}$-complètes. Or P_1 n'a pas de $T \setminus \{t\}$-arête. Donc, par hypothèse de récurrence, l'une des conclusions (c) ou (d) est satisfaite pour P_1 et $T \setminus \{t\}$. Mais cela est impossible car t n'a pas de voisin dans $T \setminus \{t\}$. Donc r' doit voir y, ce qui implique $s' = s = y$ et $r' = y'$.

Si r manque x, alors $P_2 = r'-P-r-t-x$ est un chemin de G de longueur impaire dont les extrémités sont $T \setminus \{t\}$-complètes. Or P_2 n'a pas de $T \setminus \{t\}$-arête. Donc, par hypothèse de récurrence, l'une des conclusions (c) ou (d) est satisfaite pour P_2 et $T \setminus \{t\}$. Mais cela est encore impossible car t n'a pas de voisin dans $T \setminus \{t\}$. Donc r doit voir x, ce qui implique $r = x'$. On a donc bien $N(t) \cap P = \{x, x', y\}$. De même, si $s'-P-s$ est de longueur impaire, alors on montre $N(t) \cap P = \{x, y', y\}$. On a bien montré que $N(t) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ ou $N(t) \cap P = \{x, y', y\}$.

Maintenant, puisque y' n'est pas T-complet, il y a un sommet $u \in T$ tel que $N(u) \cap P = \{x, x', y\}$, et puisque x' n'est pas T-complet il y a un sommet $v \in T$ tel que $N(v) \cap P = \{x, y', y\}$. Donc u et v permettent de satisfaire la conclusion (c) : une contradiction.

Cas 1.2 : T n'induit pas un stable (preuve de Roussel et Rubio un peu simplifiée). Soit $Q = \overline{u-\cdots-v}$ un plus long antichemin de $G[T]$. Comme $G[T]$ est anticonnexe avec au moins une arête, Q est de longueur au moins 2. De

plus, par le choix de Q, $G[T \setminus \{u\}]$ et $G[T \setminus \{v\}]$ sont anticonnexes. Donc on sait que P possède un nombre impair de $T \setminus \{u\}$-arêtes et un nombre impair de $T \setminus \{v\}$-arêtes. Notons qu'une $T \setminus \{u\}$-arête et une $T \setminus \{v\}$-arête n'ont pas de sommet commun car il y aurait alors un sommet T-complet dans P^*. En particulier, les $T \setminus \{u\}$-arêtes et les $T \setminus \{v\}$-arêtes sont deux à deux distinctes.

Supposons que Q soit de longueur paire. Soit $x_u x'_u$ une $T \setminus \{u\}$-arête de P et $y'_v y_v$ une $T \setminus \{v\}$-arête de P telles que, sans perte de généralité, $x, x_u, x'_u, y'_v, y_v, y$ apparaissent dans cet ordre sur P. Si x'_u manque y'_v alors $\{x'_u, y'_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Si $x \neq x_u$ alors $\{x_u, y'_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Si $y_v \neq y$ alors $\{x'_u, y_v\} \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Donc $P = x_u - x'_u - y'_v - y_v$, et $V(P) \cup V(Q)$ induit un antitrou impair. Donc Q est de longueur impaire (au moins 3).

Supposons que $G[T \setminus \{u, v\}]$ ne soit pas anticonnexe. Puisque $G[T]$ est anticonnexe, il existe un sommet w dans une composante connexe de $\overline{G}[T \setminus \{u, v\}]$ qui ne contient pas Q^* et tel que w voit dans $\overline{G}$ au moins l'un de u et v. Mais alors $V(Q) \cup \{w\}$ induit dans $\overline{G}[T]$ un chemin plus long que Q ou un trou impair : une contradiction. Donc $G[T \setminus \{u, v\}]$ est anticonnexe.

Nous savons qu'il y a un nombre impair de $T \setminus \{u, v\}$-arêtes dans P. Rappelons que P possède un nombre impair de $T \setminus \{u\}$-arêtes, et un nombre impair de $T \setminus \{v\}$-arêtes, qui sont différentes, et qui totalisent un nombre pair de $T \setminus \{u, v\}$-arêtes. Donc P possède au moins une $T \setminus \{u, v\}$-arête $x''y''$ qui n'est ni une $T \setminus \{u\}$-arête ni une $T \setminus \{v\}$-arête. On suppose sans perte de généralité que x, x'', y'', y apparaissent dans cet ordre sur P et que $y'' \in P^*$. Donc y'' manque u ou v, par exemple v. Alors y'' voit u, car sinon $V(Q) \cup \{y''\}$ induirait un antitrou impair ; et x'' manque u, car sinon, $x''y''$ serait une $T \setminus \{v\}$-arête ; et x'' voit v, car sinon $V(Q) \cup \{x''\}$ induirait antitrou impair ; et $x'' = x'$ car sinon $V(Q) \cup \{x'', y'', x\}$ induirait un antitrou impair, et de même $y'' = y'$. Donc $P = x - x'' - y'' - y$ et $V(Q) \cup \{x'', y''\}$ est un antichemin de longueur impaire de G : la conclusion (d) est satisfaite, une contradiction.

Cas 2 : Il y a un sommet T-complet dans P^*. Soit z un tel sommet. Par hypothèse de récurrence, on applique le lemme au chemin $x - P - z$ et à T. Si on obtient la conclusion (d), alors $x - P - z$ est de longueur impaire, au moins 3, on le note $x - x' - P - z' - z$ et il existe deux sommets $u \in T$ et $v \in T$ tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', z\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, z', z\}$. Mais alors $V(x' - P - z') \cup \{u, v, y\}$ induit un trou impair. Si on obtient la conclusion (c) alors $x - P - z$ est de longueur 3 et ses deux sommets intérieurs sont les extrémités d'un antichemin Q de G dont l'intérieur est dans T. Mais alors $V(Q) \cup \{y\}$ induit un antitrou impair. Donc on obtient l'une des conclusions (a) ou (b), et le nombre de T-arêtes dans $x - P - z$ et la longueur de $x - P - z$ sont de même parité. On obtient une conclusion similaire pour $z - P - y$. Au total, le nombre de T-arêtes dans P et la longueur de P sont de même parité et l'une des conclusions (a) ou (b) est satisfaite. □

Nous donnons maintenant deux variantes du lemme de Roussel et Rubio. La première, qui n'a, à notre connaissance, aucune application, montre que si T est stable alors on peut étendre le lemme aux graphes sans trou impair et abandonner la conclusion (d) :

Lemme 4.2 *Soient G un graphe sans trou impair, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est stable, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T-complètes. Alors ou bien :*

(a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T-arêtes.

(b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T-arêtes.

(c) P est de longueur impaire, supérieure ou égale à 3, et si on le note $P = x$–x'–$\cdots$–y'–y, alors il existe dans T deux sommets non adjacents u et v tels que $N(u) \cap V(P) = \{x, x', y\}$ et $N(v) \cap V(P) = \{x, y', y\}$.

PREUVE — Il suffit de reprendre la preuve du lemme principal en se retreignant au cas "T stable". □

La deuxième variante que nous présentons ci-dessous est celle de l'article original. Elle donne une conclusion moins forte mais présente l'avantage d'être plus symétrique et de bien montrer la similitude qui ne saute pas aux yeux entre les conclusions (c) et (d) de la version principale. Nous avons recherché des versions encore plus symétriques du lemme, en essayant par exemple de remplacer le chemin P par un ensemble connexe quelconque. C'est sans doute possible au prix d'artifices divers qui n'ont — nous semble-t-il — pas de meilleures motivations que le culte de la symétrie.

Lemme 4.3 (Roussel et Rubio, [99]) *Soient G un graphe de Berge, T un ensemble de sommets de G et P un chemin de G tels que $G[T]$ est anticonnexe, T est disjoint de $V(P)$ et les extrémités de P sont T-complètes. Alors ou bien :*

(a) P est de longueur paire et possède un nombre pair de T-arêtes.

(b) P est de longueur impaire et possède un nombre impair de T-arêtes.

(c) Il existe un chemin de longueur impaire (au moins 3) dont les extrémités sont dans T et dont l'intérieur est dans $V(P)$.

(d) Il existe un antichemin de longueur impaire (au moins 3) dont les extrémités sont dans $V(P)$ et dont l'intérieur est dans T.

Cette version est une conséquence directe de la version principale. Réciproquement, il est assez facile de prouver la version principale en supposant connue la version ci-dessus.

4.2 Restriction à des classes de graphes particuliers

Le lemme de Roussel et Rubio reste évidemment vrai dans toute sous-classe des graphes de Berge, mais dans certaines d'entre elles, on obtient une version plus forte. Nous examinerons les graphes d'Artémis pairs, les graphes de Meyniel et les graphes faiblement triangulés. Au chapitre suivant, les trois lemmes ci-dessous seront utilisés pour démontrer l'existence de paires d'amis.

Lemme 4.4 *Soit G un graphe d'Artémis pair. Soit P un chemin de G et $T \subset V(G)$ disjoint de $V(P)$ tels que $G[T]$ est anticonnexe et que les extrémités de P sont T-complètes. Alors le nombre de T-arêtes de P a même parité que la longueur de P. En particulier, si P est de longueur impaire, alors P contient au moins un sommet T-complet.*

PREUVE — On applique le lemme 4.1. Dans la conclusion (c), l'ensemble $V(P) \cup \{u, v\}$ induit un prisme impair, un sous-graphe interdit. Dans la conclusion (d), si on note Q l'antichemin de G dont l'intérieur est dans T et dont les extrémités sont les deux sommets intérieurs de P, alors $V(P) \cup V(Q)$ induit un antitrou de G de taille au moins 6, encore un sous-graphe interdit. Donc, comme annoncé, seules les conclusions (a) et (b) peuvent être satisfaites. □

Le lemme suivant était déjà connu de Meyniel sous une présentation un peu différente. Il montre que dans les graphes de Meyniel on peut relaxer l'hypothèse d'anticonnexité de T tout en donnant une conclusion beaucoup plus forte :

Lemme 4.5 (Meyniel, [85]) *Soit G un graphe de Meyniel. Soit P un chemin de G de longueur impaire et $T \subset V(G)$ disjoint de $V(P)$ tels que les extrémités P soient T-complètes. Alors tout sommet de P est T-complet.*

PREUVE — Soit t un sommet de T. On appelle *intervalle* de P tout sous-chemin de P dont les extrémités voient t et dont les sommets intérieurs manquent t. Comme les extrémités de P voient t, on sait que les intervalles de P forment une partition de P au sens des arêtes. De plus tout intervalle P' est de longueur 1 ou de longueur paire, sans quoi $V(P') \cup \{t\}$ induirait un trou impair. Donc, P étant de longueur impaire, il contient au moins un intervalle de longueur 1. Si t manque un sommet de P, alors il existe dans P des intervalles de longueur paire et des intervalles de longueur 1. Donc on peut trouver sur P des sommets x, y, z vérifiant $x - y$ est un intervalle de longueur 1 et $y - P - z$ est un intervalle de longueur paire. Mais alors $V(x-P-z) \cup \{t\}$ induit un cycle impair avec une seule corde, un sous-graphe interdit. Donc t voit tous les sommets de P. □

Le lemme de Roussel et Rubio peut également être renforcé pour les graphes faiblement triangulés. Cette fois, on peut relaxer l'hypothèses de

parité de P.

Lemme 4.6 *Soit G un graphe faiblement triangulé. Soit $P = x-\cdots-y$ un chemin de G de longueur au moins 3 et $T \subset V(G)$ disjoint de $V(P)$ tels $G[T]$ est anticonnexe et tel que les extrémités de P sont T-complètes. Alors il existe un sommet intérieur de P qui est T-complet.*

PREUVE — Remarquons d'abord qu'aucun sommet $t \in T$ ne manque deux sommets consécutifs de P, car sinon, $V(P) \cup \{t\}$ contient un trou de taille au moins 5, un sous-graphe interdit. Soit alors z un sommet de $V(P^*)$ qui voit un maximum de sommets de T. On peut supposer qu'il existe un sommet $u \in T \setminus N(z)$ car sinon, z permet de satisfaire la conclusion du lemme. Soient alors x' et y' les voisins de z sur P, choisis de sorte que x, x', z, y', y apparaissent dans cet ordre sur P. Alors, d'après la remarque initiale, u voit x' et y'. Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer $x' \neq x$. D'après le choix de z, puisque u voit x' et manque z, il existe un sommet $v \in T$ qui voit z et qui manque x'. Puisque $G[T]$ est anticonnexe, il existe un antichemin Q de $G[T]$ reliant u et v, et on chosit u et v de manière à minimiser la longueur de cet antichemin. D'après la remarque initiale, les sommets intérieurs Q voient chacun l'un de x' ou de z, et d'après le choix de Q, les sommets intérieurs de Q voient tous x' et z. Si x' manque x alors $V(Q) \cup \{x, x', z\}$ induit un antitrou de taille au moins 5. Donc x' voit x. Si z manque y, alors $V(Q) \cup \{z, x', y\}$ induit un antitrou de taille au moins 5. Donc z voit y et $y = y'$. Mais alors $V(Q) \cup \{x, x', z, y\}$ induit un antitrou de taille au moins 5 : une contradiction. □

Nous laissons ouverte la question suivante : existe-t-il une version du lemme de Roussel et Rubio pour les graphes parfaitement ordonnables ? Cela serait assez surprenant car on ne connait pas de caractérisation des graphes parfaitement ordonnables par sous-graphes induits interdits.

4.3 Corollaires et variantes utiles

Ici, nous présentons des corollaires et des variantes de la version "Artémis" du lemme de Roussel et Rubio qui révèleront leur utilité au chapitre suivant. Nous proposons tout d'abord un lemme technique suggéré par Bruce Reed. Dans la première version de ce travail, ce lemme était démontré et utilisé implicitement à de nombreuse reprises. Le formuler à part permet donc de simplifier certaines preuves (toutes les preuves où on l'invoque).

Lemme 4.7 *Soit G un graphe, et $\{a, b, c\}$ un triangle de G. Supposons que $G \setminus \{a, b, c\}$ est connexe, que chaque sommet de $G \setminus \{a, b, c\}$ voit au plus un sommet de $\{a, b, c\}$, et que chaque sommet de $\{a, b, c\}$ possède exactement un voisin dans $G \setminus \{a, b, c\}$. Alors, G possède un prisme ou une pyramide de triangle $\{a, b, c\}$.*

PREUVE — Soit P un chemin de $G \setminus \{a, b, c\}$ reliant un voisin u de a et un voisin v de b, de longueur minimale avec ces propriétés. Soit Q un chemin de $G \setminus \{a, b\}$ reliant c à un sommet w ayant des voisins dans P, de longueur minimale avec ces propriétés. Notons que P et Q existent par connexité. Notons que u, v et w sont distincts car chaque sommet de $G \setminus \{a, b, c\}$ voit au plus un sommet de $\{a, b, c\}$. On examine trois cas :

- Si w possède un unique voisin w' sur P, alors, les trois chemins $w'-w-Q-c$, $w'-P-u-a$ et $w'-P-v-b$ induisent une pyramide de coin w' et de triangle $\{a, b, c\}$.
- Si w possède exactement deux voisins adjacents w', w'' sur P, alors on suppose que u, w', w'', v apparaissent dans cet ordre sur P. Les trois chemins $w-Q-c$, $w'-P-u-a$ et $w''-P-v-b$ induisent un prisme de triangles $\{a, b, c\}$ et $\{w, w', w''\}$ (notons que $w \neq c$ car c voit exactement un sommet de $G \setminus \{a, b, c\}$).
- Si w possède au moins deux voisins non adjacents sur P, alors on appelle w' le voisin de w sur P le plus proche de u, et w'' le plus proche de v. Les trois chemins $w-Q-c$, $w-w'-P-u-a$ et $w-w''-P-v-b$ induisent une pyramide de coin w et de triangle $\{a, b, c\}$ (notons que $w \neq c$ car c voit exactement un sommet de $G \setminus \{a, b, c\}$).

□

Lemme 4.8 *Soit G un graphe d'Artémis pair, soit H un trou de G et $T \subset V(G)$ tels que $V(H)$ est disjoint de T et que H comporte au moins deux sommets T-complets non adjacents. Alors H possède un nombre pair de T-arêtes.*

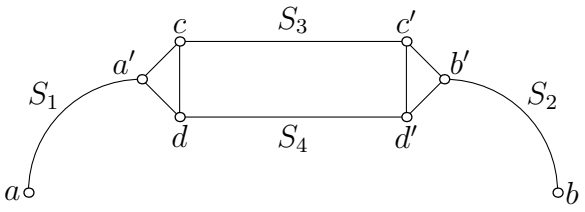
PREUVE — Soient x et y deux sommets non-adjacents et T-complets de H. Comme H est un trou pair, les deux chemins de H ayant pour extrémités x et y sont de même parité. Donc, d'après le lemme 4.4, leurs nombres de T-arêtes sont égaux modulo 2. Donc, au total, H possède bien un nombre pair de T-arêtes. □

On rappelle que les *quasi-prismes* sont des graphes particuliers définis formellement à la section 1.1.2 (voir aussi figure 4.2).

Lemme 4.9 *Soient G un graphe d'Artémis, S un quasi-prisme de G d'extrémités a et b, et $T \subset V(G)$ un ensemble de sommets de G disjoint de $V(S)$, tels que $G[T]$ est anticonnexe et a, b sont T-complets. Alors dans chaque triangle de S, il y a au moins deux sommets T-complets.*

PREUVE — On note les sommets et les chemins du quasi-prisme S comme indiqué sur la figure 4.2.

(1) Chaque sommet $t \in T$ voit au moins deux sommets du triangle $\{a', c, d\}$



- S_1 est le chemin reliant a et a'.
- S_2 est le chemin reliant b et b'.
- S_3 est le chemin reliant c et c' sans passer par d.
- S_4 est le chemin reliant d et d' sans passer par c.

FIG. 4.2 – Notations pour les quasi-prismes d'extrémités a et b

Supposons qu'il existe un sommet $t \in T$ ayant au plus un voisin dans $\{a', c, d\}$. Si t manque entièrement le triangle $\{a', c, d\}$ ou si $a = a'$ et $N(t) \cap \{a', c, d\} = \{a\}$, alors on applique le lemme 4.7 au graphe induit par $V(S) \cup \{t\}$. Sinon, t a un unique voisin v dans le triangle $\{a', c, d\}$, on note v' l'unique voisin de v dans $S \setminus \{a', c, d\}$, et on applique le lemme 4.7 au graphe induit par $(V(S) \cup \{t\}) \setminus \{v'\}$. Dans les deux cas les hypothèses du lemme sont bien satisfaites grâce au triangle $\{a', c, d\}$, d'où une contradiction car un graphe d'Artémis ne contient ni prisme ni pyramide. Ceci prouve (1).

Supposons maintenant que le lemme soit faux pour le triangle $\{a', c, d\}$, c'est-à-dire qu'il existe deux sommets $\alpha, \beta \in \{a', c, d\}$ et deux sommets $u, v \in T$ tels que u manque α et v manque β. D'après (1), u voit β et v voit α. Puisque $G[T]$ est anticonnexe, il y a un antichemin Q d'extrémités u et v dans $G[T]$, et on peut choisir u et v de manière à rendre Q aussi court que possible. Cela entraîne que les sommets de Q^* voient tous α et β. Mais alors $V(Q) \cup \{\alpha, b, \beta\}$ induit un antitrou de G : contradiction. Donc au moins deux des sommets a', c et d sont T-complets. On traite de la même façon l'autre triangle du quasi-prisme. □

Lemme 4.10 *Soient G un graphe d'Artémis, H un trou de G, P un chemin de G d'extrémités x et y, et $T \subset V(G)$ tels que T, $V(H)$, et $V(P)$ sont deux à deux disjoints et $G[T]$ est anticonnexe. Soient ab et cd deux arêtes disjointes de H tels que l'ensemble des arêtes entre P et H est $\{ay, by\}$. Si c, d et x sont T-complets, alors au moins l'un de a et b est T-complet.*

PREUVE — On pourra consulter la figure 4.3 page 78. On suppose, quitte à échanger c et d, que a, c, d, b apparaissent dans cet ordre sur H. On appelle P_1 le chemin d'extrémités a et c, contenu dans $V(H) \setminus \{b, d\}$, et P_2 le chemin d'extrémités b et d contenu dans $V(H) \setminus \{a, c\}$. Supposons que le lemme soit faux : il existe un sommet $u \in T$ qui manque a et un sommet $v \in T$ qui manque b.

(1) Le sommet u voit b et y. Le sommet v voit a et y.

Supposons que u ait au plus un voisin dans $\{a, b, y\}$. Si u manque entièrement le triangle $\{a, b, y\}$ ou si $x = y$ et $N(u) \cap \{a, b, y\} = \{y\}$, alors on applique le lemme 4.7 au graphe induit par $V(P) \cup V(H) \cup \{u\}$. Sinon, u a un unique voisin u' dans le triangle $\{a, b, y\}$, on note u'' l'unique voisin de u' dans $(V(P) \cup V(H)) \setminus \{a, b, y\}$, et on applique le lemme 4.7 au graphe induit par $(V(P) \cup V(H) \cup \{u\}) \setminus \{u''\}$. Dans les deux cas les hypothèses du lemme sont bien satisfaites grâce au triangle $\{a, b, y\}$, d'où une contradiction car un graphe d'Artémis ne contient ni prisme ni pyramide. Ceci prouve (1).

Puisque $G[T]$ est anticonnexe, il existe un antichemin Q d'extrémités u et v dans $G[T]$. On choisit u et v de manière à minimiser la longueur de cet antichemin. Donc les éventuels sommets intérieurs de Q voient tous a et b. Si un sommet $w \in \{y, c, d\}$ manque a et b, alors $V(Q) \cup \{a, b, w\}$ induit un antitrou de longueur au moins 5 : une contradiction. Donc on doit avoir $x = y$, $ac \in E(G), bd \in E(G)$. Mais alors $V(Q) \cup \{a, b, c, d, x\}$ induit un antitrou de longueur au moins 7 : une contradiction. □

Lemme 4.11 *Soit G un graphe d'Artémis, H un trou de G, P un chemin de G d'extrémités x et y et $T \subset V(G)$ tels que T est disjoint de $V(P) \cup V(H)$, $G[H \cup P]$ est connexe, x est T-complet et il existe deux sommets T-complets adjacents $u, v \in V(H)$. Alors ou bien il existe un sommet de P qui voit au moins l'un de u et v, ou bien il existe un sommet T-complet dans $V(H) \setminus \{u, v, x\}$.*

PREUVE — On pourra consulter la figure 4.4. Notons qu'on ne suppose pas H et P disjoints. En fait $V(P) \subset V(H)$ est même possible. Suposons que le lemme soit faux, et considérons un contre-exemple avec $|H \cup P|$ minimal. On note H_u le chemin induit par $V(H) \setminus \{v\}$ et H_v le chemin induit par $V(H) \setminus \{u\}$.

Soit x' le sommet de P le plus proche de x ayant un voisin dans H. Soit u' le voisin de x' sur H_u le plus proche de u et v' le voisin de x' sur H_v le plus proche de v.

Comme H, P et T forment un contre-exemple, $u' \neq u$ et $v' \neq v$. Si $x \in H$ alors d'après le lemme 4.8, H possède un nombre pair de T-arêtes et donc $H \setminus \{u, v, x\}$ possède un sommet T-complet et H, P, T ne forment pas un contre-exemple. Donc on peut supposer $x \notin H$, ce qui entraîne $V(x-P-x') \cap V(H) = \emptyset$.

Supposons $u' = v'$. L'un des chemins x–P–x'–u'–H_u–u et x–P–x'–v'–H_v–v est de longueur impaire. D'après le lemme 4.4, ce chemin possède un nombre impair de T-arêtes. Donc il y a au moins un sommet T-complet x'' dans $(V(x-P-x') \cup V(H)) \setminus \{u, v, x\}$. Si x'' est dans H, alors H, P et T ne forment pas un contre-exemple. Sinon, c'est-à-dire si $x'' \in V(x-P-x') \setminus \{x\}$,

alors le trou H et le chemin $x''-P-x'$ forment un contre-exemple avec $|V(H) \cup V(x''-P-x')| < |H \cup P|$: une contradiction.

Supposons $u' \neq v'$ et $u'v' \in E(G)$. On peut appliquer le lemme 4.10 au trou H et au chemin $x-P-x'$: au moins l'un de u', v' est T-complet : une contradiction.

Supposons enfin $u' \neq v'$ et $u'v' \notin E$. On définit H', trou induit par $V(u-H_u-u') \cup V(v-H_v-v') \cup \{x'\}$. Alors H', $x-P-x'$ et T forment un contre-exemple au lemme avec $|V(H') \cup V(x-P-x')| < |V(H) \cup V(P)|$: une contradiction. □

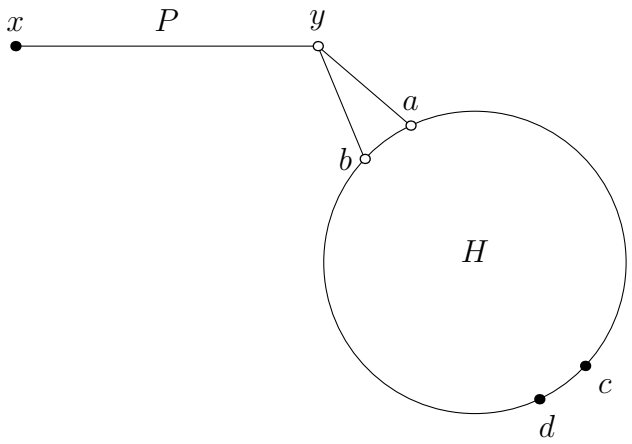


FIG. 4.3 – Lemme 4.10. Les sommets "pleins" sont dans $C(T)$

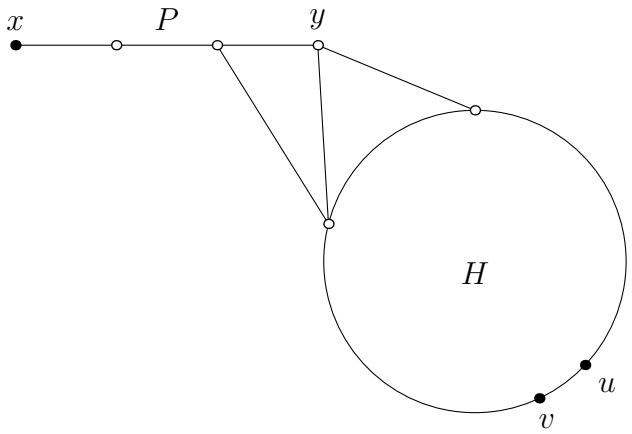


FIG. 4.4 – Lemme 4.11. Les sommets "pleins" sont dans $C(T)$

Chapitre 5

Graphes d'Artemis

Ce chapitre est consacré à la preuve de la conjecture 3.14 : tout graphe d'Artémis est parfaitement contractile. À l'exception notable de l'usage du lemme de Roussel et Rubio, l'essentiel des idées était déjà présent dans l'étude par Linhares et Maffray du cas restreint aux graphes sans carré [76]. Notre preuve donne un algorithme de complexité $O(n^2m)$ pour colorier les graphes d'Artémis. Nous spécialiserons notre preuve à des classes restreintes de graphes d'Artémis. Nous verrons que pour les graphes de Meyniel, notre preuve peut être vue comme une généralisation de la preuve classique de l'existence d'une paire d'amis. Pour les graphes faiblement triangulés, notre preuve donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une 2-paire (théorème 3.17). Dans la dernière section, nous verrons que le théorème 2.31 peut être vu comme un théorème de décomposition des graphes d'Artémis. Nous ferons le point sur les liens pouvant exister entre théorèmes de décomposition et paires d'amis.

Les résultats de ce chapitre ont été soumis au *Journal of Combinatorial Theory, Series B* [82].

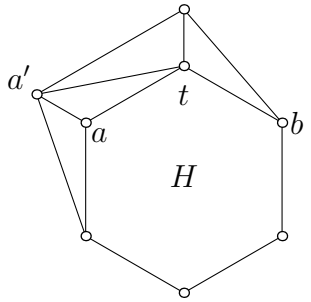


FIG. 5.1 – Un graphe d'Artémis sans carré.

Avant de rentrer dans les détails, nous donnons un aperçu des idées qui ont conduit à la preuve. Ces idées, antérieures au début de mes travaux, sont dues à Frédéric Maffray. Pour trouver une paire d'amis dans un graphe,

pourquoi ne pas considérer un plus court trou H et deux sommets u, v à distance 2 sur H, c'est-à-dire voisins d'un sommet t de H ? Évidemment, même dans une classe aussi restreinte que les graphes d'Artémis sans carré, cette idée ne fonctionne pas immédiatement, comme le montre le graphe représenté figure 5.1 : $\{a, b\}$ n'est pas une paire d'amis à cause du sommet a' qui est le deuxième sommet d'un P_4 reliant a et b. Cependant, on peut légitimement se plaindre d'avoir manqué de chance : si au lieu de H nous avions choisi comme plus court trou le trou H' obtenu en remplaçant, dans H, a par a', alors, l'idée aurait fonctionné : $\{a', b\}$ est bien une paire d'amis de G. En ce sens, a' est "meilleur" que a. Dans le cas des graphes sans carré, Linhares et Maffray ont montré qu'en fait le voisinage de t comporte deux cliques A et B, A étant un ensemble de sommets "pouvant remplacer a", et B étant un ensemble de sommets "pouvant remplacer B". Sur A (et aussi sur B), on peut alors définir une relation d'ordre partiel (correspondant à l'idée déjà évoquée de sommet "meilleur" qu'un autre). Un élément maximal de A et un élément maximal de B (la "meilleure" paire) forment alors une paire d'amis de G.

Dans notre preuve, le sommet t est remplacé par un ensemble anticonnexe T. Dans l'esprit du lemme de Roussel et Rubio, les ensembles A et B sont des ensembles de sommets T-complets. Les sommets de $V(H) \setminus \{a, t, b\}$ sont les sommets d'un chemin appelé Z dont une extrémité est A-complète, et l'autre B-complète. Avant la preuve proprement dite, la section suivante introduit quelques notions préliminaires.

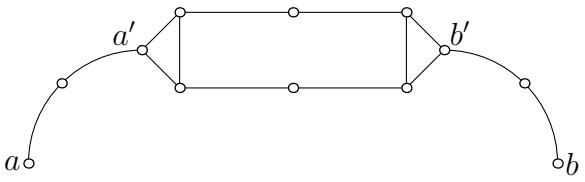
5.1 Paires d'amis spéciales

Soit G un graphe. On note $C(T)$ l'ensemble des sommets T-complets de $V(G)$. Remarquons que par définition, T et $C(T)$ sont disjoints. On dit qu'un ensemble non vide $T \subseteq V(G)$ est *intéressant* si $G[T]$ est anticonnexe et si $G[C(T)]$ n'induit pas une clique (ce qui implique d'ailleurs $|C(T)| \geq 2$ puisque le graphe vide et le graphe réduit à un sommet sont des cliques). Il se peut très bien qu'un graphe G n'ait aucun ensemble intéressant. Dans ce cas, pour tout sommet v, l'ensemble $N(v)$ induit une clique (sans quoi $\{v\}$ serait un ensemble intéressant). Cela implique donc que G est une réunion disjointe de cliques sans aucune arête entre elles.

Rappelons que les *quasi-prismes* ont été définis à section 1.1.2. Une paire d'amis $\{a, b\}$ de G est dite *spéciale* si G ne contient ancun quasi-prisme strict d'extrémités a et b (voir figure 5.2). L'intérêt des paires d'amis spéciales provient d'un lemme facile que voilà :

Lemme 5.1 (Cf. [46]) *Soit G un graphe et $\{x, y\}$ une paire d'amis de G. Alors on a :*

(a) Si G ne contient pas de trou impair, alors G/xy ne contient pas de



On a représenté un graphe d'artémis G. La paire $\{a, b\}$ est une paire d'amis de G qui n'est pas spéciale et la paire $\{a', b'\}$ est une paire d'amis spéciale de G.

FIG. 5.2 – Paires d'amis spéciales et non spéciales.

trou impair.

(b) Si G ne contient pas d'antitrous, alors, G/xy ne contient aucun antitrou différent de $\overline{C_6}$.

(c) Si G ne contient ni prismes ni quasi-prismes d'extrémités x et y, alors, G/xy ne contient aucun prisme.

(d) Si G est d'Artémis et si $\{x, y\}$ est une paire d'amis spéciale de G, alors G/xy est d'Artémis.

Notre théorème principal est le suivant :

Théorème 5.2 *Soit G un graphe d'Artémis. Si T est un ensemble intéressant de G alors $C(T)$ contient une paire d'amis spéciale de G.*

En admettant ce théorème, la conjecture de Reed et Everett est très simple à démontrer :

Corollaire 5.3 *Tout graphe d'Artémis différent d'une clique possède une paire d'amis spéciale. Tout graphe d'Artémis est parfaitement contractile.*

PREUVE — Si G est une réunion disjointe d'au moins deux cliques alors, toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents est une paire d'amis spéciale de G. Si G n'est pas une réunion disjointe de cliques alors il existe au moins un ensemble intéressant, et donc, d'après le théorème 5.2, une paire d'amis spéciale $\{x, y\}$. Dans tous les cas, on obtient une paire d'ami spéciale $\{x, y\}$. D'après le lemme 5.1, G/xy est d'Artémis et par une récurrence évidente, on voit que G est parfaitement contractile. □

5.2 Preuve du théorème 5.2

Soit G un graphe d'Artémis et T un ensemble intéressant de G. Notons alors que G n'est pas une réunion disjointe de cliques. On démontre le théorème par récurrence sur $|V(G)|$. La plus petite valeur possible pour $|V(G)|$

est 3, correpondant au cas où G est un chemin à 3 sommets, graphe pour lequel le théorème est vrai. On suppose donc $|V(G)| \geq 4$, et on suppose que le théorème est vrai pour tous les graphes de taille strictement inférieure à $|V(G)|$.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème pour les ensembles intéressants maximaux pour l'inclusion. Car si T est un ensemble intéressant de G, alors tout ensemble intéressant T' avec $T \subset T'$ vérifiera $C(T') \subseteq C(T)$. Donc une paire d'amis spéciale de G dans $C(T')$ sera aussi dans $C(T)$.

Soit donc T un ensemble intéressant maximal. Remarquons que pour tout sommet $z \in V(G) \backslash (T \cup C(T))$, l'ensemble $N(z) \cap C(T)$ induit une clique de G, car sinon, $T \cup \{z\}$ serait un ensemble intéressant plus grand. En effet, $T \cup \{z\}$ serait anticonnexe (puisque T l'est et $z \notin C(T)$) et $C(T \cup \{z\}) = C(T) \cap N(z)$.

Appelons *chemin sortant* tout chemin P reliant deux sommets non adjacents de $C(T)$ et dont les sommets intérieurs sont dans $V(G) \setminus (T \cup C(T))$. D'après le lemme 4.4, il n'y a pas de chemin sortant de longueur impaire. De plus, si P est un chemin sortant de longueur paire, alors sa longueur est au moins 4. En effet l'unique sommet intérieur z d'un éventuel chemin sortant de longueur 2 serait tel que $N(z) \cap C(T)$ n'induit pas une clique, contredisant la maximalité de T. On distingue maintenant deux cas :

Cas 1 : *Il n'y a aucun chemin sortant.*
Soit $\{a, b\}$ une paire d'amis spéciale du graphe $G[C(T)]$. Rappelons que $G[C(T)]$ n'est pas une clique ce qui implique l'existence d'une telle paire, par hypothèse de récurrence si $G[C(T)]$ n'est pas une réunion disjointe de cliques, trivialement si $G[C(T)]$ est une réunion disjointe de cliques.

Soit P un chemin de G d'extrémités a et b. Si P contient un sommet $t \in T$ alors $P = a-t-b$, et P est de longueur 2. Si $V(P) \cap T = \emptyset$, alors $V(P) \subset C(T)$, car sinon, P contiendrait un chemin sortant. Donc P est de longueur paire et $\{a, b\}$ est une paire d'amis de G. De plus, s'il existe un quasi-prisme strict S d'extrémités a et b dans G, alors $V(S) \subset C(T)$ car sinon, tous les sommets de S se trouvant sur un chemin reliant a et b, il en résulterait que S contient un chemin sortant. Mais cela contredit que $\{a, b\}$ est une paire d'amis spéciale de $G[C(T)]$. Finalement, $\{a, b\}$ est bien une paire d'amis spéciale de G.

Cas 2 : *Il existe un chemin sortant.*
Soit $\alpha - z_1 - \cdots - z_n - \beta$ un plus court chemin sortant. Sa longueur est $n+1$. Notons que d'après ce qui précède, n est impair et $n \geq 3$. On note $Z = z_1 - \cdots - z_n$. On définit :

$$\begin{aligned} A &= \{v \in C(T) \mid vz_1 \in E(G), vz_i \notin E(G)\ (i = 2, \ldots, n)\}, \\ B &= \{v \in C(T) \mid vz_n \in E(G), vz_i \notin E(G)\ (i = 1, \ldots, n-1)\}. \end{aligned}$$

Notons que A est non vide, car $\alpha \in A$, et que A induit une clique, car

$A \subseteq N(z_1) \cap C(T)$. De même, B induit une clique non vide. Par définition, $A \cap B = \emptyset$. De plus, il n'y a pas d'arête uv avec $u \in A, v \in B$, car alors $\{u, z_1, \ldots, z_n, v\}$ induirait un trou impair.

Nous allons maintenant montrer par les lemmes 5.4 à 5.8 que des sommets $a \in A$, $b \in B$ bien choisis forment une paire d'amis spéciale de G. À partir d'ici, les raisonnements sont assez proches de la preuve du cas sans carré [76].

Lemme 5.4 $C(T) \cap N(Z) \subseteq A \cup B \cup C(T \cup A \cup B)$.

PREUVE — Soit $w \in C(T) \cap N(Z)$. Il existe donc une arête $z_j w$ avec $z_j \in Z$ $(1 \leq j \leq n)$. Supposons $w \notin C(T \cup A \cup B)$: il existe donc un sommet $u \in A \cup B$ avec $uw \notin E(G)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $u \in A$. Soit i le plus petit entier i tel que $z_i w \in E(G)$. Alors u–z_1–$\cdots$–z_i–w est un chemin sortant de longueur $i+1$, donc on doit avoir $i = n$, et $w \in B$.□

Lemme 5.5 *Soit $P = u$–u'–$\cdots$–v'–v un chemin de longueur impaire avec $u \in A$ et $v \in B$. Alors $u' \in A$ ou $v' \in B$.*

PREUVE — Notons que P est de longueur au moins 3 car il n'y a aucune arête entre A et B. De plus P ne contient aucun sommet de T ni aucun sommet de $C(T \cup A \cup B)$ (sinon, P serait de longueur 2). Supposons que le lemme 5.5 soit faux : $u' \notin A$ et $v' \notin B$. Nous allons voir que cela entraîne une contradiction.

(1) Les seules arêtes entre Z et $P \cap C(T)$ sont $z_1 u$ et $z_n v$.

En effet, si zw est une arête avec $z \in Z$ et $w \in P \cap C(T)$, alors, puisque $w \notin C(T \cup A \cup B)$ comme on l'a déjà remarqué, et d'après le lemme 5.4, on a : $w \in A \cup B$. Puisque A est une clique, le cas $w \in A$ entraîne $w = u$ (et donc $zw = z_1 u$ comme souhaité) ou $w = u'$ (et donc $u' \in A$, cas exclu par hypothèse). Le cas $w \in B$ est similaire. Ceci prouve (1).

On marque les sommets de P qui ont un voisin dans Z — en particulier les sommets de $V(P) \cap V(Z)$ sont marqués. Appelons *intervalle* de P tout sous-chemin de P, de longueur au moins 1, dont les extrémités sont marquées et dont les sommets intérieurs ne le sont pas. D'après (1), les sommets marqués de $V(P) \setminus \{u, v\}$ sont tous dans $V(P) \setminus C(T)$. Puisque u et v sont marqués, les intervalles de P forment une partition de P au sens des arêtes. Remarquons qu'au moins un sommet intérieur de P doit être marqué, car sinon $V(Z) \cap V(P) = \emptyset$ et $V(Z) \cup V(P)$ induirait un trou impair. Donc *P possède au moins deux intervalles.* De plus, par le lemme de Roussel et Rubio (lemme 4.4), on sait que *P possède un nombre impair de T-arêtes.* Donc :

(2) Il existe dans P un intervalle Q qui contient un nombre impair de T-arêtes.

Notons que comme P possède au moins deux intervalles, Q ne contient pas à la fois u et v. Sans perte de généralité, on suppose $v \notin V(Q)$. Soient w

et x les extrémités de Q. Appelons w' (resp. x'), le sommet de Q appartenant à $C(T)$ et choisi aussi proche que possible de w (resp. x). On peut supposer que u, w, w', x', x, et v apparaissent dans cet ordre sur P. On a $w' \neq x'$ car Q contient au moins une T-arête. Pour que tout soit bien clair, notons que $V(Q) \cap V(Z) = \emptyset$ car si un sommet Q était dans Z il serait, lui ainsi que ses voisins dans Q, marqué. Donc on aurait $Q = wx = w'x'$. Mais alors, l'un de w', x' serait à la fois dans Z et dans $C(T)$, deux ensembles par définition disjoints. Notons aussi que si $w' = w$, alors ce sommet est dans $P \cap C(T) \cap N(Z)$ et donc, d'après (1), $w' = w = u$. D'autre part, $x' = x$ est impossible car x serait alors dans $N(Z) \cap C(T)$, ce qui d'après (1) entraînerait $v = x$: une contradiction. Il s'ensuit que Q est de longueur au moins 2.

D'après la définition des sommets marqués, il existe un sous-chemin Z' de Z d'extrémités z_i et z_j, tel que $z_i w$ et $z_j x$ sont des arêtes ($i < j$, $i = j$ ou $i > j$ sont possible). On choisit Z' minimal avec ces propriétés, ce qui fait que ses éventuels sommets intérieurs manquent w et x. Par conséquent, $H = G[V(Q) \cup V(Z')]$ est un trou, évidemment pair. Notons qu'il n'y a pas de sommets de $C(T)$ dans $V(H) \setminus V(w'-Q-x')$, par définition de w' et x' et parce que $Z \subseteq V(G) \setminus (T \cup C(T))$. En fait, les T-arêtes de H sont exactement les T-arêtes de Q.

Si w' et x' ne sont pas des sommets consécutifs de P, alors H possède deux sommets non adjacents de $C(T)$ et possède pourtant un nombre impair de T-arêtes : une contradiction au lemme 4.8. Donc w' et x' sont consécutifs sur P.

Notons $k = \max\{i, j\}$ ($k \geq 1$). On définit un chemin Y en posant $Y = z_{k+1}-Z-z_n-v$ si $k < n$ et $Y = v$ si $k = n$. Notons que $H \cup Y$ est connexe car z_k est un sommet de H adjacent à Y. Nous prétendons que chaque sommet $z \in Y$ manque w' et x'. En effet, v lui même manque ces deux sommets car w', x', x, v sont quatre sommets distincts apparaissant dans cet ordre sur P ; et si $z \in V(z_{k+1}-Z-z_n)$, alors z manque x' car x' n'est pas marqué. De plus, si z voit w', alors w' est marqué et $w' = w$, et donc $w' \in P \cap C(T)$. Mais alors, comme $z \neq z_1$ et $w' \neq v$, l'arête zw' contredit (1). Donc il est bien vrai que z manque w' et x'. Finalement, le triplet formé du trou H, du chemin Y et de l'ensemble T contredit le lemme 4.11 puisqu'il n'y a pas de sommet de $C(T)$ dans $H \setminus \{w', x'\}$. □

Poursuivons la preuve du théorème 5.2. On définit une relation $<_A$ sur A en posant $u <_A u'$ si et seulement s'il existe un chemin de longueur impaire de u vers un sommet de B tel que u' est le deuxième sommet de ce chemin. Nous allons montrer que $<_A$ est une relation d'ordre (partiel).

Lemme 5.6 *La relation $<_A$ est antisymétrique.*

PREUVE — Supposons en vue d'une contradiction qu'il existe des sommets $u, v \in A$ tels que $u <_A v$ et $v <_A u$. Donc il existe un chemin de longueur

impaire $P_u = u_0 - \cdots - u_p$ avec $u = u_0$, $v = u_1$, $u_p \in B$, $p \geq 3$, p impair, et il existe un chemin de longueur impaire $P_v = v_0 - \cdots - v_q$ avec $v = v_0$, $u = v_1$, $v_q \in B$, $q \geq 3$, q impair. On peut avoir $u_p = v_q$, et sinon u_p voit v_q puisque B est une clique.

(1) Aucun sommet de $V(P_u) \cup V(P_v) \setminus \{u, v\}$ n'est dans A.

En effet, un sommet de $V(P_u) \cup V(P_v) \setminus \{u, v\}$ manque au moins l'un de u et v, et ne peut donc être dans A qui est une clique. Ceci prouve (1).

(2) Aucun sommet de $V(P_u) \cup V(P_v) \setminus \{u_p, v_q\}$ n'est dans B.

En effet, puisque B est une clique, un sommet de $(P_u \cup P_v \setminus \{u_p, v_q\}) \cap B$ ne peut qu'être u_{p-1} ou v_{q-1}. Mais, si $u_{p-1} \in B$ alors $u_1 - P_u - u_{p-1}$ est un chemin de longueur impaire de A vers B, et le lemme 5.5 implique ou bien $u_2 \in A$ (ce qui contredit (1)) ou bien $u_{p-2} \in B$ (ce qui contredit que B est une clique). Le cas $v_{q-1} \in B$ est similaire. Ceci prouve (2).

Soit r le plus petit entier tel que $u_r \in V(P_u) \setminus \{u_0, u_1\}$ a un voisin dans P_v, et soit s le plus petit entier tel que $u_r v_s$ est une arête, avec $2 \leq s \leq q$. De tels entiers existent puisque v_q lui-même a un voisin dans P_u. Notons que les sommets $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ induisent un trou H, et que r et s ont de ce fait même parité.

(3) On peut supposer que ou bien :

(a) $r = p$ et $s = q$,

(b) $r < p$, $s < q$ et $u_{r+1} - P_u - u_p = v_{s+1} - P_v - v_q$.

Soit t le plus grand entier tel que $u_r v_t \in E(G)$, avec $2 \leq s \leq t \leq q$.

Si $t - s$ est pair alors $u_1 - P_u - u_r - v_t - P_v - v_q$ est un chemin de longueur impaire de A vers B. Son dernier sommet est u_2, et son avant-dernier sommet w est v_{q-1} (si $t < q$) ou u_r (si $t = q$). D'après le lemme 5.5, appliqué à ce chemin, nous avons ou bien $u_2 \in A$ (mais cela contredit (1)) ou bien $w \in B$. D'après (2) ce dernier cas n'est possible que si $w = u_r = u_p$ (et donc $t = q$). Dans ce cas, $v_1 - P_v - v_s - u_p$ est un chemin de longueur impaire de A vers B, et d'après le lemme 5.5, on doit avoir $v_2 \in A$ (mais cela contredit (1)) ou $v_s \in B$. Ce dernier cas n'est possible que si $v_s = v_q$ et la conclusion (a) de (3) est bien satisfaite.

Si $t - s$ est impair avec $t \geq s + 3$ alors $v_1 - P_v - v_s - u_r - v_t - P_v - v_q$ est un chemin de longueur impaire de A vers B. Son deuxième sommet est v_2, et son avant-dernier sommet w est v_{q-1} (si $t < q$) ou u_r (si $t = q$). D'après le lemme 5.5 appliqué à ce chemin, on doit avoir $v_2 \in A$ (mais cela contredit (1)) ou $w \in B$. D'après (2) ce dernier cas n'est possible que si $w = u_r = u_p$ (et donc $r = p$ et $t = q$). Donc r et t sont impairs, ce qui est impossible car $t - s$ est impair et $r - s$ est pair.

Le seul cas restant est $t = s+1$, ce qui entraîne que $u_0 - P_u - u_r - v_{s+1} - P_v - v_q$ est un chemin de longueur impaire, qui peut jouer le rôle de P_u. Cette fois,

la conclusion (b) de (3) est satisfaite. Ceci prouve (3).

On appelle *intervalle* tout chemin de H, de longueur au moins 1, dont les extrémités voient z_1 et dont les sommets intérieurs manquent z_1.

(4) Les intervalles de H sont au nombre de 3 au moins et ils forment une partition de H au sens des arêtes.

Soit P un chemin défini de la sorte : Si la conclusion (a) de (3) est satisfaite, on pose $P = z_2{-}Z{-}z_n$. Si la conclusion (b) de (3) est satisfaite, on définit P comme étant un chemin d'extrémités z_2 et u_{r+1}, contenu dans $\{z_2, \ldots, z_n\} \cup \{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_p\}$ (P existe car l'ensemble où ses sommets sont tenus de se trouver est connexe). On remarque que le lemme 4.11 peut s'appliquer au triplet $H, P, \{z_1\}$: H est un trou, P est un chemin, $\{z_1\}$ induit un graphe anticonnexe disjoint de $H \cup P$, $G[H \cup P]$ est connexe, tout sommet $z \in V(P)$ manque u et v (si $z \in Z[z_2, z_n]$ parce que $u, v \in A$, si $z \in V(u_{r+1}{-}P_u{-}u_p)$ parce que P_u et P_v sont des chemins et $r, s \geq 2$), et enfin u, v, z_2 sont dans $C(\{z_1\})$. Donc le lemme 4.11 montre qu'un sommet de $V(H) \setminus \{u, v\}$ est dans $C(\{z_1\}) = N(z_1)$. Donc z_1 possède au moins 3 voisins dans H. Ceci prouve (4).

(5) H possède un nombre pair de T-arêtes.

Rappelons que u et v sont dans $C(T)$. Si la conclusion (a) de (3) est satisfaite, alors u_r et v_s sont dans $C(T)$. Si la conclusion (b) de (3) est satisfaite, alors on applique le lemme 4.10 au trou H, au chemin $u_{r+1}{-}P_u{-}u_p$ et à l'ensemble T. À cause des arêtes uv et $u_r v_s$, le lemme 4.10 implique qu'au moins l'un de u_r et v_s est dans $C(T)$. Donc, que la conclusion de (3) soit (a) ou (b), on peut affirmer que H contient au moins trois sommets de $C(T)$. Par le lemme 4.8, on obtient la conclusion souhaitée. Ceci prouve (5).

À partir d'ici, on peut consulter la figure 5.3. Remarquons que $u{-}v$ est un intervalle qui contient une T-arête. Donc, d'après (4) et (5), il existe un intervalle Q de H, différent de $u{-}v$, qui contient un nombre impair de T-arêtes. On appelle x et y les extrémités de Q, et on appelle x' le sommet de $Q \cap C(T)$ le plus proche de x et y' le sommet de $Q \cap C(T)$ le plus proche de y, de manière que u, x, x', y', y, v apparaissent dans cet ordre sur H. Puisque H contient au moins trois intervalles, on peut supposer qu'au moins l'un de x et y, par exemple et sans perte de généralité y, est différent de u et de v. Par conséquent, y manque l'un de u et v.

Si Q est de longueur 1, on a $Q = x{-}y = x'{-}y'$, et $y \in N(z_1) \cap C(T)$. Le lemme 5.4 implique $y \in A \cup B \cup C(T \cup A \cup B)$. Mais $y \in A \cup C(T \cup A \cup B)$ est impossible car y manque l'un de u et v, et $y \in B$ est impossible car $y \in N(z_1)$. Donc Q est de longueur au moins 2, $V(Q) \cup \{z_1\}$ induit un trou H_1 contenant un nombre impair de T-arêtes, et le lemme 4.8 appliqué à la paire H_1, T implique que $x'{-}Q{-}y'$ est de longueur 1. Donc x' et y' sont les seuls sommets de $C(T)$ dans H_1.

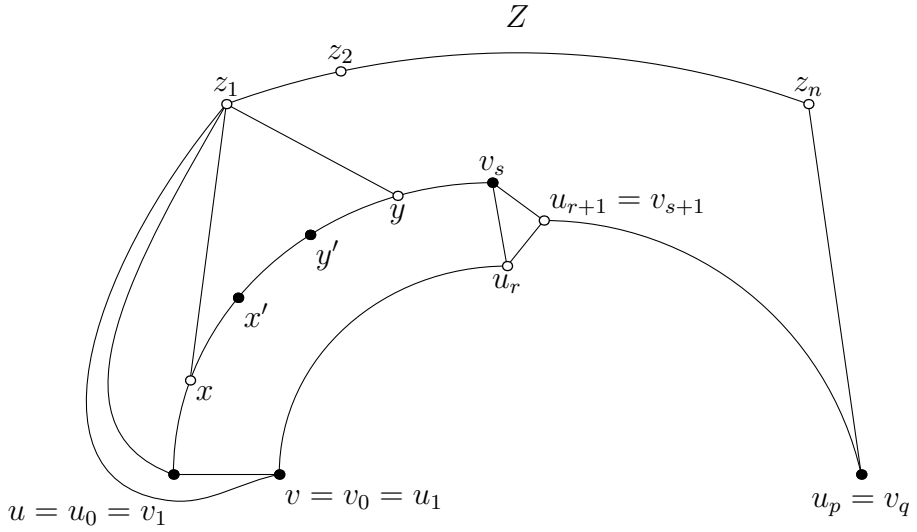


FIG. 5.3 – Lemme 5.6, sommets x, x', y' et y. Les sommets "pleins" sont dans $C(T)$.

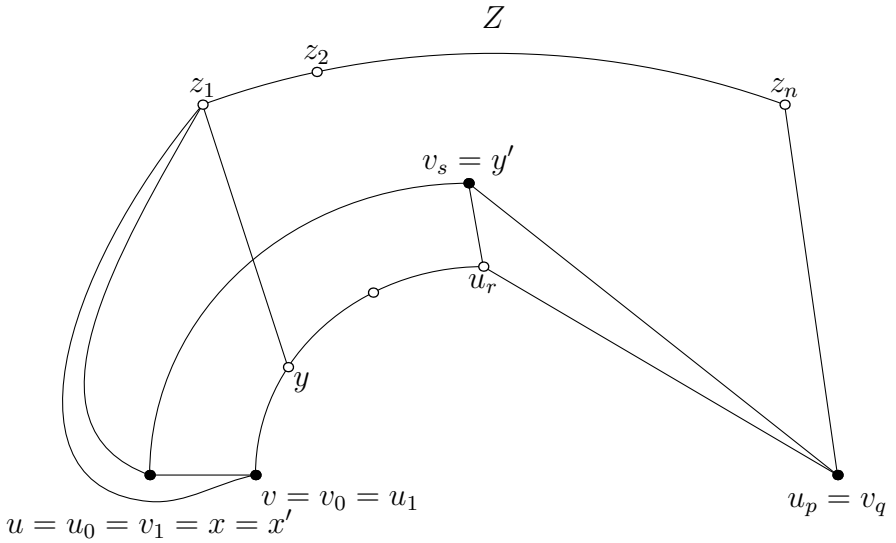


FIG. 5.4 – Lemme 5.6, fin de la preuve. Les sommets "pleins" sont dans $C(T)$.

Supposons $x \neq u$. Le lemme 4.11 appliqué au trou H_1, au chemin réduit à u et à l'ensemble T montre que u doit voir x', ce qui implique $x = x' = v_2$. On a alors $x \in N(Z) \cap C(T)$, ce qui contredit le lemme 5.4. Donc $x = u$ et comme x est dans $C(T)$, $x' = x = u$. On applique maintenant le lemme 4.11 au trou H_1, au chemin $u_p - z_n - Z - z_2$, et à l'ensemble T. Ceci montre qu'il existe un sommet de $u_p - z_n - Z - z_2$ qui voit l'un de x' et y'. Ce sommet ne peut pas être un $z_i, (i = 2, \ldots, n)$, car ces z_i manquent $x' = x = u$ par définition de Z et manquent y' à cause du lemme 5.4. Ce sommet ne peut donc être que u_p, ce qui entraîne $s = 2$ et u_p voit v_s. Cela n'est possible que si $s = q - 1$ ou $s = q$. Mais $s = q$ est impossible car on aurait alors $x' \in A$, $y' \in B$ et $x'y'$ serait une arête entre un sommet de A et un sommet de B : une contradiction. Donc $s = q-1$. À partir de maintenant, la situation ressemble plutôt à celle représentée figure 5.4. Le chemin u–z_1–y–P_u–u_r est de longueur paire car H_1 est un trou pair. Donc le chemin $u - z_1 - y - P_u - u_r - u_p$ est un chemin de longueur impaire, reliant deux sommets de $C(T)$ et ne comportant aucune T-arête : une contradiction au lemme 4.4. □

Lemme 5.7 *La relation $<_A$ est transitive.*

PREUVE — Soient u, v, w trois sommets de A tels que $u <_A v <_A w$. Puisque $v <_A w$, il existe un chemin $P = v_0 - v_1 - \cdots - v_q$ avec $v_0 = v$, $v_1 = w$, $v_q \in B$, q est impair, $q \geq 3$.

Si u n'a pas de voisin sur $v_2 - P - v_q$ alors $u - v_1 - P - v_1 - v_q$ est un chemin de longueur impaire de u vers v_q qui montre que $u <_A w$ comme souhaité. On peut donc supposer que u possède un voisin v_i sur $v_2 - P - v_q$, et on choisit i le plus grand possible avec cette propriété $(2 \leq i \leq q)$. On a $i < q$ car il n'y a pas d'arêtes entre A et B.

Si i est impair $(3 \leq i \leq q - 2)$, alors $u - v_i - P - v_q$ est un chemin impair de A vers B. D'après le lemme 5.5, nous avons alors $v_i \in A$ ou $v_{q-1} \in B$. Le premier de ces cas est impossible car A est une clique et donc $v_{q-1} \in B$. Mais alors, $v_0 - u - v_i - P - v_{q-1}$ est un chemin de longueur impaire de v vers B, qui montre $v <_A u$, contredisant l'antisymétrie de $<_A$ (lemme 5.6).

Si i est pair $(2 \leq i \leq q - 1)$ alors $v - u - v_i - P - v_q$ est un chemin de longueur impaire de v vers un sommet de B qui montre $v <_A u$ contredisant à nouveau l'antisymétrie de $<_A$ (lemme 5.6). □

Les deux lemmes précédents montrent bien que $<_A$ est une relation d'ordre (partiel). On définit de même une relation sur B : si $u, u' \in B$, on pose $u <_B u'$ si et seulement s'il existe un chemin de longueur impaire de u vers un sommet de A tel que u' est le deuxième sommet de ce chemin. Les ensembles A et B jouant des rôles symétriques, on voit que la relation $<_B$ est aussi une relation d'ordre. Notons que A et B étant des ensembles finis, on sait qu'il existe dans A et dans B des éléments maximaux.

Lemme 5.8 *Soit a un sommet maximal de $(A, <_A)$ et b un sommet maximal de $(B, <_B)$. Alors $\{a, b\}$ est une paire d'amis spéciale de G.*

PREUVE — Supposons qu'il existe un chemin de longueur impaire $Q = a-a'-\cdots-b'-b$. Ce chemin est de longueur au moins 3 car il n'y a aucune arête entre A et B. Le lemme 5.5 montre que $a' \in A$ (et donc $a <_A a'$) ou $b' \in B$ (et donc $b <_B b'$), dans tous les cas on a une contradiction à la maximalité de a et b. Donc $\{a, b\}$ est bien une paire d'amis de G.

Supposons que $\{a, b\}$ ne soit pas spéciale, c'est-à-dire qu'il existe un quasi-prisme strict S d'extrémités a et b (on note les sommets et les chemins du quasi-prisme comme indiqué figure 4.2). On pourra se reporter à la figure 5.5 page 91 qui représente certains des sommets que nous définirons au long de la preuve qui suit. Par symétrie on peut supposer que S_1 est de longueur au moins 1, et on appelle a_1 le voisin de a' sur S_1. Puisqu'aucun sommet de S ne voit à la fois a et b, aucun sommet de S n'est dans T. Notons que $a-S_1-a'-c-S_3-c'-b'-S_2-b$ et $a-S_1-a'-d-S_4-d'-b'-S_2-b$ sont des chemins de longueur paire car $\{a, b\}$ est une paire d'amis. Appelons H le trou induit par $V(S_3) \cup V(S_4)$.

(1) Aucun sommet de $S \setminus \{a, b\}$ n'est dans $N(Z) \cap C(T)$.

Supposons qu'il existe un sommet $u \in V(S) \setminus \{a, b\}$ dans $N(Z) \cap C(T)$. D'après le lemme 5.4, $u \in A \cup B \cup C(T \cup A \cup B)$. Mais $u \in C(T \cup A \cup B)$ est impossible car aucun sommet de S ne voit à la fois a et b. Donc $u \in A \cup B$. Si $u \in A$, u doit être le voisin de a sur S_1 (car A induit une clique). Donc $(V(S_1) \setminus \{a\}) \cup V(S_3) \cup V(S_2)$ induit un chemin de longueur impaire P_u de $u \in A$ vers b (rappelons que $\{a, b\}$ est une paire d'amis). Puisque le voisin de u sur P_u n'est pas dans A (car A induit une clique), le lemme 5.5 implique que le voisin de b sur P_u est dans B. Mais cela contredit la maximalité de b pour l'ordre $<_B$. Si $u \in B$, u doit être le voisin de b sur S_2 (si S_2 est de longueur au moins 1) ou l'un de c', d' (si S_2 est de longueur 0), mais dans l'un ou l'autre des cas, un argument similaire à la situation $u \in A$ conduit à une contradiction. Ceci prouve (1).

D'après le lemme 4.9 appliqué à S et T, on sait que :

(2) Au moins deux des sommets a', c, d et deux des sommets b', c', d' sont dans $C(T)$.

Puisque $a \neq a'$ (souvenons nous que $b = b'$ est possible), de (1) et (2) on peut déduire les deux fait suivants :

(3) Si l'un de a', c, d est dans $N(Z)$, alors il est dans $N(Z) \setminus C(T)$ et les deux autres sont dans $C(T) \setminus N(Z)$.

(4) Si l'un de c', d' est dans $N(Z)$, alors il est dans $N(Z) \setminus C(T)$, l'autre est dans $C(T) \setminus N(Z)$, et $b' \in C(T)$.

Notons que $a' \notin Z$ car sinon l'un de c, d serait dans $N(Z) \cap C(T)$.

On définit un chemin P comme suit : soit a'' le sommet de $N(Z)$ le plus proche de a_1 sur $a-S_1-a_1$, et soit b'' le sommet de $N(Z)$ le plus proche de b' sur S_2 (les sommets a'' et b'' existent à cause de a et b). Soient $z_i \in V(Z) \cap N(a'')$ et $z_j \in V(Z) \cap N(b'')$ tels que z_i-Z-z_j est aussi court que possible (notons que $i < j$, $i = j$ ou $i > j$ sont possibles). Posons $P = a_1$–S_1–a''–z_i–Z–z_j–b''–S_2–b'. On vérifie que P est un chemin de G d'extrémités a_1 et b'. D'après le lemme 4.11 appliqué à H , P et $\{a'\}$, il existe un sommet z de P qui voit l'un de c ou d, et on choisit un tel z aussi proche que possible de a_1 sur P. Quitte à échanger S_3 et S_4, on suppose que z voit c. La définition des quasi-prismes entraîne $z \notin V(a_1$–S_1–$a'') \cup V(S_2)$, et donc $z \in V(z_i$–Z–$z_j)$. D'après (3), on a $c \in N(z) \setminus C(T)$ et $a', d \in C(T) \setminus N(Z)$. Donc a' n'a pas de voisins dans $V(P) \setminus \{a_1\}$, car un tel voisin devrait obligatoirement se trouver dans z_i-Z-z_j sous peine de contredire la définition des quasi-prismes, ce qui entraînerait $a' \in N(Z)$: une contradiction. Autrement dit :

(5) $a'-a_1-P-b'$ *est un chemin de* G.

On note b_1 le voisin de b' sur P (b_1 peut être z_j ou un sommet de S_2). D'après le lemme 4.11 appliqué à H, b_1-P-z et $\{b'\}$, il existe un sommet y du chemin b_1-P-z qui voit l'un de c', d'. Sous peine de contredire la définition des quasi-prismes, on a $y \in z-P-z_j = z-Z-z_j$ Donc, d'après (4), on sait que :

(6) Exactement l'un de c', d' *est dans* $C(T) \setminus N(Z)$, *l'autre est dans* $N(Z) \setminus C(T)$, *et* $b' \in C(T)$.

De plus :

(7) $cc' \notin E(G)$.

Supposons $cc' \in E(G)$. Si $c' \in C(T)$ alors $a'-c-c'$ est un chemin sortant de longueur 2 : une contradiction. Si $c' \notin C(T)$, alors d'après (6), a'–c–c'–b' est un chemin sortant de longueur impaire : une contradiction. Ceci prouve (7).

Appelons H_1 le cycle induit par $V(a_1-P-z) \cup \{a', c\}$, qui possède au moins 4 sommets. D'après (5) et d'après la définition de z, H_1 est un trou. On pose $S_4' = d-S_4-d'-c'$.

(8) Il n'y aucune arête entre a_1-P-z *et* S_4'.

Supposons qu'il existe une arête xw avec $x \in V(a_1-P-z)$ et $w \in V(S_4')$. On a $w \neq d$ car $d \notin N(Z)$ et d manque tous les sommet de $V(S_1) \setminus \{a'\}$. Aucun sommet de $V(S_4') \setminus \{d\}$ n'est adjacent à a' ou c à cause de la définition des quasi-prismes et de (7). Mais alors le lemme 4.11 appliqué à H_1, $S_4' \setminus \{d\}$ et $\{d\}$ entraîne une contradiction. Ceci prouve (8).

On sait qu'il existe un sommet z' de $z-P-z_j$ qui a un voisin $\delta \in V(S_4')$ (à cause de y). On choisit z' aussi proche que possible de z sur $z-Z-z_j$ et on choisit $\delta \in V(S_4') \cap N(z')$ aussi proche que possible de d sur S_4'. Par ces choix, $z-Z-z'-\delta-S_4'-d$ est un chemin de G. On a $\delta \neq d$ car $z' \in Z$ et

$d \notin N(Z)$. Considérons le cycle H_2 induit par $V(a_1-P-z'-\delta-S'_4-d) \cup \{a'\}$, qui possède au moins 4 sommets. Supposons que H_2 possède une corde. Les définitions de S, P, z', δ et le fait que $a'-a_1-P-b'$ et $z-P-z'-\delta-S'_4-d$ soient des chemins de G impliquent que les seules cordes possibles dans H_2 sont des arêtes de type wx avec $w \in V(S_4)$ et $x \in V(z_i-Z-z)$. Mais de telles arêtes sont interdites d'après (8). Donc H_2 est un trou pair. Le sommet c possède trois voisins sur H_2 (a', d et z). Donc, d'après le lemme 4.8, H_2 possède un nombre pair de c-arêtes, l'une d'elle étant $a'd$. Manifestement, il n'y a pas de c-arête sur $d-S'_4-\delta$. De plus, $\delta z'$ ne peut pas être une c-arête, car cela impliquerait $\delta = c'$ et $cc' \in E(G)$: une contradiction avec (7). Donc les c-arêtes de H_2 différentes de $a'd$ (et il y en a un nombre impair) sont dans $z-P-z'$. Appelons z'' le voisin de c le plus proche de z' sur $z-P-z'$, de sorte que les c-arêtes de H_2 différentes de $a'd$ se trouvent dans $z-P-z''$. D'après le lemme 4.4 appliqué à $z-P-z''$ et $\{c\}$, on obtient :

(9) $z-P-z''$ est de longueur impaire.

D'après le lemme 4.8, le nombre de T-arêtes de H_1 est pair ou égal à 1. Dans ce dernier cas, les sommets $V(H_1) \cap C(T)$ sont a' et a_1 puisque $c \notin C(T)$. D'après le lemme 4.11 appliqué à H_1, $(b'-P-z) \setminus \{z\}$ et T, certains sommets de $(b'-P-z) \setminus \{z\}$ voient l'un de a' et a_1. Mais cela contredit (5). Donc :

(10) H_1 possède un nombre pair de T-arêtes.

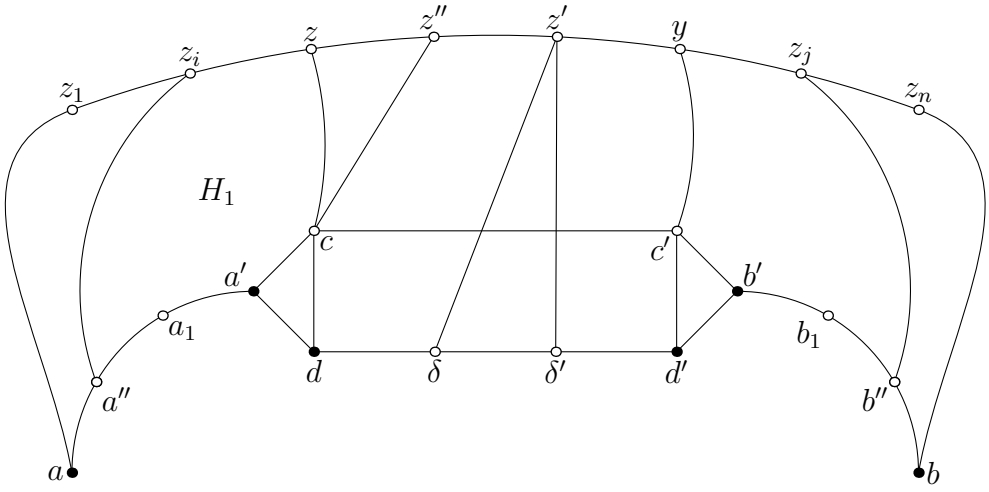


FIG. 5.5 – Lemme 5.8 dans le cas $d' \in C(T)$. Les sommets "pleins" sont dans $C(T)$.

D'après (6), l'un de c', d' est dans $C(T)$: on le note γ'. On définit un chemin S''_4 comme suit. Si $\delta = c'$ (ce qui entraîne $\gamma' = d'$), on pose $S''_4 = c'-d'$

et $\delta' = c'$. Si $\delta \in S_4$ alors soit δ' le voisin de z' sur S_4 qui est le plus proche de d'. On pose alors $S_4'' = \delta' - S_4' - \gamma'$. On pose $Q_1 = a' - c - z'' - P - z' - \delta' - S_4'' - \gamma'$ et $Q_2 = a' - a_1 - P - z' - \delta' - S_4'' - \gamma'$. Ces chemins sont bien des chemins de G d'après (5), (7), (8) et d'après les définitions de z', z'' et δ'. Leurs extrémités sont a' et γ', qui sont tous les deux dans $C(T)$. Puisque H_1 est un trou pair et puisque $z - P - z''$ est de longueur impaire, les chemins Q_1 et Q_2 ont des longueurs de parités différentes. Le nombre de T-arêtes de Q_1 et celui de Q_2 sont de même parité, car H_1 possède un nombre pair de T-arêtes dont cz et $a'c$ ne font pas partie (car $c \notin C(T)$), et car $z - P - z''$ ne contient pas de T-arêtes (car Z ne contient pas de sommets de $C(T)$). Donc l'un des chemins Q_1 et Q_2 contredit le lemme 4.4. □

La conclusion du lemme 5.8 montre bien que le théorème 5.2 est vrai.

5.3 Conséquences algorithmiques

Nous allons donner ici une série d'algorithmes fondés sur la preuve du théorème 5.2. Le dernier d'entre eux permettra de colorier les graphes d'Artémis en temps polynomial : $O(n^2m)$. Notre version originale de l'algorithme avait pour complexité $O(n^6)$, mais Bruce Reed a remarqué de nombreuses améliorations. Nous lui devons notamment l'analyse "amortie" de l'algorithme, c'est-à-dire l'idée de comptabiliser globalement tous les appels récursifs. Nous rappelons que nous donnerons également un algorithme de reconnaissance des graphes d'Artémis au chapitre 6. Cet algorithme n'utilisera pas l'existence d'une paire d'amis mais détectera directement les prismes dans les graphes de Berge.

Algorithme 5.9

ENTRÉE : Un graphe G.

SORTIE : Un ensemble intéressant maximal de G, ou une paire d'amis spéciale de G, ou "G est une clique".

CALCUL :

Phase 1 : recherche d'un sommet t non simplicial.

Si G n'est pas connexe, stopper et retourner une paire $\{a, b\}$ avec a et b dans 2 composantes connexes distinctes de G. Si G est connexe, calculer le degré de chaque sommet. Si tous les sommets sont de degré $n-1$, stopper et retourner "G est une clique". Sinon, considérer un sommet u de degré strictement inférieur à $n-1$. Marquer tous les voisins de u. Parmi les sommets marqués, rechercher un sommet ayant un voisin non marqué. Nommer t un tel sommet.

Phase 2 : Initialisation des marques.

Donner à t la marque "T", donner aux voisins de t la marque "$C(T)$". Considérer tous les autres sommets comme non-marqués.

Phase 3 : recherche de l'ensemble intéressant maximal T.

Tant qu'il existe un sommet u non marqué faire :
Si $N(u) \cap C(T)$ est une clique, donner à u la marque "clique". Si $N(u) \cap C(T)$ n'est pas une clique, donner à u la marque "T". Pour chaque non-voisin de u marqué "C(T)", effacer la marque "C(T)" et considérer u comme non-marqué. Fin du "faire".
Stopper et retourner l'ensemble des sommets marqués "T".

COMPLEXITÉ : $O(\max(n+m, m(n-k)))$ où k est le nombre de sommets de $C(T)$ pour l'ensemble T retourné (si aucun ensemble T n'est retourné, on adopte la convention $k = n$ et la complexité est alors $O(n+m)$).

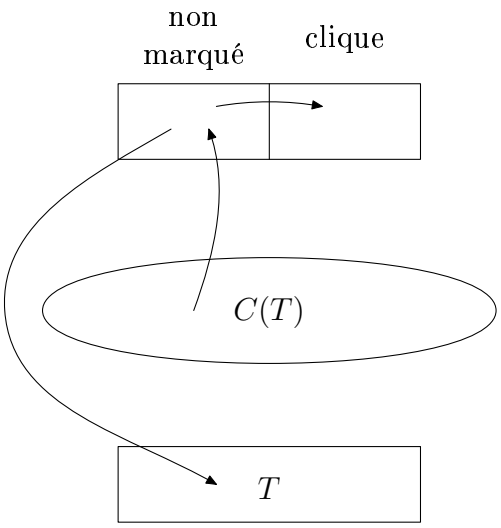


FIG. 5.6 – Algorithme 5.9 : changements de marques possibles pour les sommets lors de l'augmentation de T.

PREUVE — Il est clair que notre algorithme est conforme aux spécifications. Reste à analyser sa complexité.

La phase 1 nécessite au pire $n+m$ étapes de calcul. La phase 2 également. Pour la phase 3, chaque itération de la boucle nécessite au plus m pas de calculs. En effet, décider si $N(u) \cap C(T)$ est une clique nécessite au plus m pas (c'est un processsus qui s'arête dès qu'on rencontre une non-arête). L'effaçage des marques "$C(T)$" pose problème dans la mesure où on travaille sur des non-arêtes. Mais on peut remarquer que le nombre de pas est majoré par le degré du sommet t initial car l'ensemble $C(T)$ ne fait que décroître à partir de sa valeur initiale $N(t)$.

Donc, chaque itération "tant que" nécessite au plus m étapes. La figure 5.6 montre à l'aide de flèches la façon dont les sommets peuvent changer de marque. Il apparaît qu'un sommet peut être au plus une fois non marqué. De

plus, les k sommets restant à la fin dans $C(T)$ ne sont à aucun moment non-marqués, et n'ont de ce fait jamais compté pour une itération de la boucle. Donc, la boucle nécessite bien au pire $n-k$ itérations. D'où la complexité annoncée. □

Algorithme 5.10

ENTRÉE : Un graphe connexe G et T, ensemble intéressant maximal de G.

SORTIE : Si $C(T)$ possède un chemin sortant, "il existe un chemin sortant", sinon "pas de chemin sortant".

CALCUL : Pour chaque sommet u de $G \setminus (T \cup C(T))$ faire :

À partir de u et dans $G \setminus T$, marquer les sommets à l'aide d'un parcours en largeur d'abord. Si l'ensemble des sommets marqués de $C(T)$ n'est pas une clique, stopper et retourner "il existe un chemin sortant". Fin du "faire".

Si aucun sommet u n'a permis de stopper, stopper et retourner "pas de chemin sortant"

COMPLEXITÉ : $O(m(n-k))$ où k est le nombre de sommets de $C(T)$.

PREUVE — Il est clair que notre algorithme est conforme aux spécifications. Considérer tous les sommets u de $G \setminus (T \cup C(T))$ nécessite au pire $O(n-k)$ étapes. Le parcours en largeur d'abord nécessite au pire $O(m)$ étapes. Tester si l'ensemble des sommets marqués de $C(T)$ n'est pas une clique nécessite au pire $O(m)$ étapes. D'où la complexité annoncée. □

Algorithme 5.11

ENTRÉE : Un graphe G et T, ensemble intéressant maximal de G tel qu'il existe un chemin sortant pour $C(T)$.

SORTIE : Un plus court chemin sortant.

CALCUL : Pour tout sommet $u \in C(T)$, on calcule dans $G \setminus (T \cup (N(u) \cap C(T)))$ un plus court chemin à partir de u et dont l'autre extrémité v est dans $C(T)$ (si un tel chemin existe). On retourne un chemin de longueur minimale parmi ces chemins.

COMPLEXITÉ : $O(nm)$.

PREUVE — Il est clair que notre algorithme est conforme aux spécifications (notons que par hypothèse, il existe un chemin sortant). Considérer tous les sommets de $C(T)$ nécessite au pire n étapes. Le calcul du plus court chemin nécessite au pire $O(m)$ étapes, d'où la complexité annoncée. □

Algorithme 5.12

ENTRÉE : Un graphe G d'Artémis, T, ensemble intéressant maximal de G et Z chemin sortant de longueur minimale pour $C(T)$.

SORTIE : Une paire d'amis spéciale de G.

CALCUL : On note z_1 l'une des extrémités du chemin sortant, et z_k l'autre extrémité. On calcule les ensembles A et B : A est l'ensemble des sommets de $C(T)$ qui de Z ne voit que z_1, B que z_k.
Pour tout sommet a de A calculer un plus court chemin de a vers B dans $G \setminus (T \cup (N(a) \setminus A))$. Si un tel chemin n'existe pas, retenir "a est maximal". De même, pour tout sommet b de B calculer un plus court chemin de $B \setminus b$ vers A dans $G \setminus (T \cup (N(b) \setminus B))$. Si un tel chemin n'existe pas, retenir "b est maximal". On retourne une paire $\{a, b\}$ où a est un élément maximal de A, et b de B.
COMPLEXITÉ : $O(nm)$.

PREUVE — D'après la preuve du théorème 5.2, un élément $a \in A$ est maximal pour la relation $<_A$ si et seulement s'il n'existe pas de chemin P de a vers B dans $G \setminus (T \cup (N(a) \setminus A))$. En effet, d'après le lemme 5.5, un tel chemin P choisi de longueur minimale est de longueur impaire, et son unique sommet a' voyant a vérifie $a' >_A a$. Donc, si a est maximal, un tel chemin n'existe pas, et réciproquement, si un tel chemin n'existe pas, a est maximal. Notons que d'après la preuve du théorème 5.2, il existe bien un élément maximal pour $<_A$, que l'algorithme détectera forcément. De même, l'algorithme détectera bien un sommet b maximal pour $<_B$. Et d'après le lemme 5.8, $\{a, b\}$ est bien une paire d'amis spéciale de G. Donc notre algorithme est conforme à ses spécifications.

Calculer les ensembles A et B nécessite au plus $O(m)$ étapes. Le calcul des plus courts chemins prend lui aussi au plus m étapes, et au pire ce calcul est à faire n fois. La complexité est donc bien $O(nm)$. □

Algorithme 5.13

ENTRÉE : Un graphe d'Artémis G.
SORTIE : Une paire d'amis spéciale de G ou "G est une clique".
CALCUL : On invoque l'algorithme 5.9. S'il retourne "G est une clique", on retourne la même chose. S'il retourne une paire d'amis spéciale de G, on la retourne également. S'il retourne un ensemble intéressant maximal T, alors on invoque l'algorithme 5.10. S'il répond "Pas de chemin sortant", alors on invoque récursivement l'algorithme 5.13 sur le graphe $G[C(T)]$, qui nous retournera une paire d'amis spéciale de $G[C(T)]$ que l'on retourne. S'il retourne "il existe un chemin sortant", alors on invoque l'algorithme 5.11 qui nous fournit un chemin sortant de longueur minimale, puis l'algorithme 5.12 qui nous retourne une paire d'amis spéciale de G, que l'on retourne.
COMPLEXITÉ : $O(nm)$.

PREUVE — Dans la preuve du théorème 5.2, on a montré que s'il y a un ensemble intéressant maximal T et pas de chemin sortant pour $C(T)$, alors une paire d'amis spéciale de $G[C(T)]$ est également une paire d'amis spéciale

de G. Donc notre algorithme est bien conforme à ses spécifications.

On va montrer par induction sur n qu'un appel à l'algorithme 5.13 nécessite au pire $O(nm)$ étapes de calcul. Supposons que cela soit vrai pour tous les graphes avec au plus $n-1$ sommets. On appelle l'algorithme sur un graphe avec n sommets. Si le graphe est une clique, ou s'il a un chemin sortant, alors il n'y a pas d'appel récursif, et l'appel aux algorithmes 5.11 et 5.12 nécessite au pire $O(nm)$ étapes. S'il n'y a pas de chemin sortant, alors on note k la taille de $C(T)$. L'appel aux algorithmes 5.9 et 5.10 nécessite au pire $O((n-k)m)$ étapes, et par hypothèse d'induction, l'appel récursif à l'algorithme 5.13 nécessite au pire $O(km)$ étapes, ce qui totalise bien $O(nm)$ étapes. □

Algorithme 5.14

ENTRÉE : Un graphe d'Artémis G.

SORTIE : Une coloration optimale de G et une clique de taille maximale de G.

CALCUL :

Coloration : on invoque l'algorithme 5.13. Si celui-ci répond "G est une clique", on colore G trivialement. Sinon, tant qu'on n'obtient pas une clique, on contracte la paire d'amis retournée par l'algorithme 5.13, et on appelle à nouveau l'algorithme 5.13 sur le graphe contracté. Quand on arrive à une clique de taille ω, on donne à chaque sommet de G la couleur de son représentant dans la clique.

Clique maximale : on marque tous les sommets de la clique, puis on redécontracte chaque paire d'amis $\{a, b\}$, en ne laissant marqué que celui des deux sommets qui avec les autres sommets marqués induit une clique taille ω. Une fois toutes les paires décontractés, on retourne l'ensemble des sommets marqués.

COMPLEXITÉ : $O(n^2m)$.

PREUVE — D'après les propriétés des paires d'amis spéciales (lemme 5.1), les contractions de paires d'amis spéciales conduisent bien à une clique. D'après les explications de la section d'introduction aux graphes parfaitement contractiles (section 3.2), le théorème de Fonlupt et Uhry notamment (théorème 3.11), l'algorithme conduit bien à une coloration optimale de G et à une clique de taille maximale de G. L'ensemble des sommets marqués retournés à la fin de l'exécution induit bien une clique de taille maximale de G.

Au pire, il faut $O(n)$ contractions de paires d'amis pour parvenir à une clique, d'où la complexité annoncée. □

Nous avons donc bien un algorithme de coloration des graphes d'Artémis de compléxité $O(n^2m)$. On peut facilement modifier cet algorithme de manière à lui faire accepter n'importe quel graphe en entrée. Le seul problème

est que sur un graphe qui n'est pas d'Artémis, il risque de ne pas exister d'élément maximal pour les ordres $<_A$ et $<_B$. Mais alors on peut toujours retourner une paire quelconque de sommets (tant mieux si c'est une paire d'amis). La phase finale de l'algorithme risque alors de contracter des paires qui ne sont pas des paires d'amis, ce qui aura pour conséquence que la coloration finale ne sera pas forcément optimale, et que l'ensemble retourné à la fin ne sera pas forcément une clique. Mais il se peut très bien que malgré tout l'algorithme retourne une coloration avec ω couleurs et une clique de taille ω, auquel cas on aura la certitude que c'est bien une coloration optimale et une plus grande clique (sans être sûr que le graphe de départ est d'Artémis). Notre algorithme est donc robuste : ou bien il donne une coloration optimale et une clique de taille maximale, ou bien il donne il donne autre chose, et on a la certitude que le graphe donné en entrée n'était pas d'Artémis. Dans ce dernier cas, une trace complète de l'exécution est un objet de taille polynomiale qui certifie que le graphe en entrée n'était pas d'Artémis. Une question intéressante serait de savoir si à partir de cet objet complexe, on peut retrouver facilement un trou impair, un antitrou ou un prisme (en tout cas cela peut être fait directement grâce aux algorithmes du chapitre 6).

5.4 Conséquences pour des sous-classes d'Artémis

Nous analysons ici notre preuve dans le cadre restreint des trois classes de graphes parfaitement contractiles définies pages 48 à 52.

Graphes de Meyniel

Notre preuve du théorème 5.2 ressemble beaucoup à la preuve classique de l'existence d'une paire d'amis dans les graphes de Meyniel. Nous redonnons cette preuve avec nos notations.

Théorème 5.15 (Meyniel, [86]) *Soit G un graphe de Meyniel. Si G n'est pas une clique, alors G possède une paire d'amis.*

PREUVE — On procède par récurrence. Si G a moins de trois sommets, si G est une clique ou une réunion disjointe de cliques, le lemme est trivial. Sinon, soit T un ensemble intéressant quelconque de G. Par hypothèse de récurrence, il existe une paire d'amis de $G[C(T)]$. Mais d'après le lemme 4.5, cette paire d'amis est aussi une paire d'amis de G. □

Notons que si on exécute l'algorithme 5.13 sur un graphe de Meyniel, la contraction de la paire d'amis retournée ne redonne pas toujours un graphe de Meyniel (voir figure 3.4). Pour les graphes de quasi-Meyniel, nous ne savons pas ce qu'il en est.

Graphes faiblement triangulés

Si on spécialise notre preuve aux graphes faiblement triangulés, alors on obtient une nouvelle preuve d'un ancien résultat : l'existence d'une 2-paire.

Théorème 5.16 (Hayward, Hoàng, Maffray, [56]) *Soit G un graphe faiblement triangulé qui n'est pas une clique. Alors G possède une 2-paire.*

PREUVE — Si G est une réunion disjointe d'au moins deux cliques, alors toute paire de sommets non adjacents forme une 2-paire. Sinon, on considère un ensemble intéressant maximal T. D'après le lemme 4.6, il n'y a pas de chemin sortant pour $C(T)$. Par hypothèse de récurrence, on trouve une 2-paire $\{u, v\}$ de $G[C(T)]$. Mais $\{u, v\}$ est aussi une 2-paire de G, puisque tout chemin entre u et v passant par T est de longueur 2 et puisqu'il n'y a pas de chemin sortant pour $C(T)$. □

La preuve du théorème ci-dessus montre que si on applique l'algorithme 5.13 à un graphe faiblement triangulé, alors l'algorithme de recherche des éléments maximaux pour les ensembles A et B (algorithme 5.12) n'est jamais appelé puisqu'il n'y a pas de chemin sortant. Il est en fait inutile d'appeler les algorithmes de recherche de chemin sortant (algorithmes 5.10 et 5.11). On est donc obligé quoi qu'il arrive d'appeler récursivement l'algorithme 5.13. À chaque fois, on doit rechercher un ensemble intéressant maximal (algorithme 5.9). Donc la complexité totale de l'algorithme 5.13 est inchangée même si on le restreint aux graphes faiblement triangulés. On notera cependant que la paire d'amis retournée est toujours une 2-paire, puisque toute paire de sommets non-adjacents d'une réunion disjointe de cliques est une deux-paire. Rappelons également à titre de comparaison que l'algorithme le plus performant à ce jour pour colorier les graphes faiblement triangulés a pour complexité $O(n + m^2)$ (Hayward, Spinrad et Sritharan [57]).

Graphes parfaitement ordonnables

Notre preuve de la parfaite contractilité des graphes d'Artémis donne une preuve totalement nouvelle pour le cas particulier des graphes parfaitement ordonnables. À notre connaissance, cette preuve ne généralise aucun ancien résultat. Notons que si nous appliquons l'algorithme 5.13 à un graphe parfaitement ordonnable, alors nous ne pouvons pas garantir que la contraction de la paire d'amis retournée donne un nouveau graphe parfaitement ordonnable.

5.5 Théorèmes de décomposition et paires d'amis

Nous donnons ici des théorèmes de décomposition pour les classes de graphes intéressantes du point de vue des paires d'amis. Ces théorèmes sont tous énoncés presque explicitement (et bien sûr démontrés) dans la preuve

du théorème fort des graphes parfaits [21], et nous ne pouvons donc pas les revendiquer pour nôtres. Nous avons tout d'abord besoin d'un petit lemme technique :

Lemme 5.17 *Soit G le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4. Alors ou bien G est $L(K_{3,3} \setminus e)$ et G contient un prisme ($\overline{C_6}$), ou bien G contient un prisme long.*

PREUVE — On suppose que G est le line-graphe d'un graphe R et que R est une subdivision bipartie d'un K_4 dont on note les sommets a, b, c, d. On choisit une arête du K_4 subdivisée en un chemin de longueur maximale — sans perte de généralité, on suppose que ab est choisie. L'arête ab du K_4 est donc subdivisée en un chemin de longueur au moins 2. Dans R, il existe un unique chemin de a vers b qui ne passe pas par c, d : on note l'ensemble de ses arête E_0. Il existe un unique chemin de a vers b qui passe par c sans passer par d : on note l'ensemble de ses arêtes E_c. Enfin on note E_d l'ensemble des arêtes de l'unique chemin de R passant par d sans passer par c. On vérifie que $E_0 \cup E_c \cup E_d$, qui peut être vu comme un ensemble de sommets de G, induit un prisme de G. Si ce prisme n'est pas $\overline{C_6}$, on satisfait une conclusion du lemme. Si ce prisme est $\overline{C_6}$, alors les seules arête subdivisées du K_4 sont ab et cd, l'arête ab n'est subdivisée qu'une seule fois, et, d'après le choix initial de ab, l'arête cd n'est elle aussi subdivisée qu'une seule fois. Donc, $R = K_{3,3} \setminus e$, et on satisfait l'autre conclusion du lemme. □

Voici un théorème qui résume les propriétés des graphes d'Artémis :

Théorème 5.18 *Soit G un graphe. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) G est d'Artémis.

(b) G ne contient ni trou impair, ni antitrou long, ni prisme.

(c) Pour tout sous-graphe induit G' de G, pour tout ensemble T anticonnexe de G', ou bien $C(T)$ est une clique, ou bien il existe une paire d'amis spéciale de G' dans $C(T)$.

(d) Pour tout sous-graphe induit G' de G, ou bien G' possède une partition antisymétrique paire, ou bien G' est biparti, ou bien G' est une clique.

PREUVE — Les propriétés (a) et (b) sont équivalentes par définition. La propriété (b) implique la propriété (c) d'après le théorème 5.2. La réciproque est plus facile : les antitrous longs et les trous impairs n'ont pas de paire d'amis ; quant aux prismes, ils peuvent en avoir, mais le voisinage d'un coin n'en contient jamais.

Notons qu'un graphe d'Artémis ne contient jamais de line-graphe de subdivision bipartie de K_4 (d'après le lemme 5.17, ils contiennent des prismes), ni de double diamant (qui contient un $\overline{C_6}$). Donc le théorème 2.31 page 35

montre que la propriété (b) implique la propriété (d). La réciproque est plus directe : on vérifie facilement que les antitrous longs, les trous impairs et les prismes ne sont pas bipartis, ne sont pas des cliques, et n'ont pas de partition antisymétrique paire. □

Le théorème ci-dessus suggère que, de fait, les paires d'amis s'héritent d'une certaine manière par partition antisymétrique paire, bien que nous n'arrivions pas à savoir pourquoi et comment. Il serait donc intéressant d'avoir une preuve de l'existence de paire d'amis dans les graphes d'Artémis par le théorème de décomposition. S'il est bien vrai que les partitions antisymétriques paires préservent les paires d'amis, alors le théorème de décomposition suivant est un encouragement à rechercher des paires d'amis dans les graphes bipartisans :

Théorème 5.19 *Soit G un graphe. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) G est bipartisan.

(b) G et $\overline{G}$ ne contiennent ni trou impair, ni $L(K_{3,3}\backslash e)$, ni double-diamant, ni prisme long.

(c) Pour tout sous-graphe induit G' de G, ou bien G' possède une partition antisymétrique paire, ou bien G est biparti, ou bien G est complémentaire de biparti.

PREUVE — Les propriétés (a) et (b) sont équivalentes par définition. Le lemme 5.17 montre que les graphes bipartisans sont sans line-graphe de subdivision bipartie de K_4. Les théorème 2.31 et 2.30 montrent alors que la propriété (b) implique la propriété (c). La réciproque est plus directe : on vérifie facilement que les trous impairs, les prismes longs, $L(K_{3,3} \setminus e)$ et le double diamant ne sont pas bipartis, ne sont pas complémentaires de bipartis, et n'ont pas de partition antisymétrique paire. □

Pour les graphes d'Artémis pairs, la situation est un peu plus compliquée. Il est facile de vérifier que ces graphes ne contiennent pas de line-graphe de subdivision bipartite de K_4 : de tels sous-graphes contienne toujours un prisme impair (ce fait bien connu est démontré un peu plus loin : lemme 6.14 page 117). Les théorèmes de décomposition des graphes de Berge (théorèmes 2.27 et 2.31) indiquent alors que les graphes d'Artémis pairs sont soit bipartis, soit des cliques, soit un prisme pair avec 9 sommets, soit ont une partition antisymétrique paire, ou bien ont un deux-joint. Toutefois, il doit y avoir un théorème un peu plus fort qui nécessite une nouvelle définition.

Soit (X_1, X_2) un 2-joint d'un graphe G (on reprend les notations habituelles pour les 2-joints, voir page 31). On appelle *chemin sortant* pour le 2-joint tout chemin de $G[X_i]$ ayant une extrémité dans A_i, l'autre extrémité dans B_i, tous les autres sommets hors de A_i, B_i $(i = 1, 2)$. On dit

qu'un 2-joint est *pair* (resp. *impair*) si tous ses chemins sortants sont pairs (resp. impairs). Il est clair qu'un 2-joint (X_1, X_2) d'un graphe de Berge G est toujours pair ou impair, sans quoi G contient un trou impair.

Il doit être possible de montrer qu'un graphe d'Artémis pair qu'on ne peut décomposer que par 2-joint peut toujours se décomposer par 2-joint pair. En effet, les 2-joints pairs apparaissent naturellement dans les prismes pairs, structure à partir de laquelle on peut décomposer le graphe tout entier dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits (voir théorème 2.27). Pour donner un théorème de décomposition des graphes d'Artémis pairs, il devrait donc suffire de recopier le chapitre de la preuve du théorème fort des graphes parfaits consacré au prisme pair, en remplaçant partout "2-joint" par "2-joint pair". Ce travail n'est peut-être pas insurmontable, mais n'a d'intérêt que si on parvient à utiliser le théorème de décomposition obtenu.

Chapitre 6

Problèmes de reconnaissance

Reconnaître une classe de graphes, c'est donner un algorithme permettant de décider si un graphe appartient ou non à la classe. Il est toujours intéressant de disposer de ce genre d'algorithme. En effet, est-il vraiment utile de disposer d'algorithmes performants de coloration pour une classe si l'on est même pas capable de décider si l'algorithme fonctionne pour un graphe donné ?

Nous débuterons ce chapitre par un état de l'art en rappelant tout d'abord à titre d'illustration un algorithme naïf de reconnaissance des graphes faiblement triangulés et en donnant des indications très succintes sur la résolution récente du problème de la reconnaissance des graphes de Berge. Nous donnerons ensuites des algorithmes en temps polynomial pour détecter certains types de sous-graphes induits (prismes, prismes pairs, prismes impairs, line-graphes de subdivision de K_4). À chaque fois, nous serons obligés de restreindre le champs d'application de nos algorithmes à des classes de graphes particuliers (graphes sans pyramide ou sans trou impair selon les cas). Nous justifierons cette restriction en prouvant que nos problèmes de détection deviennent NP-complets lorsqu'on essaye de les résoudre pour tout graphe. En conclusion, nous parviendrons à reconnaître en temps polynomial les classes de graphes suivantes : graphes d'Artémis, d'Artémis pairs et bipartisans. Nous donnerons un algorithme de coloration en temps polynomial pour les graphes d'Artémis pairs, dont nous ne sommes pas parvenu à prouver l'optimalité. Toutefois, nous montrons qu'il donne bien une coloration optimale, à condition que la conjecture de Everett et Reed soit vraie (conjecture 3.13).

Les résultats de ce chapitre ont été soumis au *SIAM Journal of Discrete Mathematics* [83].

6.1 État de l'art

Calculer des plus courts chemins pour trouver des sous-graphes induits paraît assez naïf en première analyse. Par exemple, si on cherche un prisme dans un graphe, si on connait les deux triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$ d'un prisme du graphe, alors il n'y a aucune raison *a priori* pour que des plus courts chemins P_i reliant a_i à b_i forment un prisme. Pourtant, un algorithme bien connu de reconnaissance des graphes faiblement triangulés fontionne sur ce principe. Maria Chudnovsky et Paul Seymour ont montré que ce type de techniques peut aider à reconnaître les graphes de Berge, moyennant de multiples précautions.

6.1.1 Graphes faiblement triangulés

Le lemme et l'algorithme ci-dessous sont faciles et bien connus. Ils ne sont publiés nulle part pour autant que nous ayons pu le vérifier, et on peut considérer qu'ils appartiennent au folklore. Ils sont néanmoins utiles et donnent une bonne idée de ce qui va suivre. Pour chaque type de sous-graphe à détecter, nous donnerons un lemme affirmant qu'en calculant des plus courts chemins entre des sommets d'un sous-graphe donné de ce type (un prisme par exemple), on obtient à nouveau un sous-graphe induit de même type. Ce lemme permettra la mise en œuvre d'un algorithme qui "devine" un nombre fixé de sommets du sous-graphe puis qui en retrouve le reste par des calculs de plus courts chemins.

On rappelle qu'un *long trou* dans un graphe est un cycle induit de taille au moins 5.

Lemme 6.1 *Soit G un graphe et H un long trou de G de taille minimale. Soit $a-u-b$ un chemin de H. Soit P un plus court chemin de a vers b ne contenant ni voisin de u ni voisin commun de a et b. Alors $\{u\} \cup V(P)$ induit un long trou de G de taille minimale.*

PREUVE — Clair. □

Algorithme 6.2

ENTRÉE : Un graphe G.

SORTIE : Si G possède un long trou, alors l'algorithme retourne un long trou de G de taille minimale. Sinon, il retourne "Pas de long trou".

CALCUL :

- Considérer tous les triplets (a, u, b) de G. Pour chacun d'eux calculer par l'algorithme 1.5 un plus court chemin P de a vers b parmi les sommets de $V \backslash (N(u) \cup (N(a) \cap N(b)))$. Si $\{u\} \cup V(P)$ induit un trou de G, de taille inférieure à un éventuel trou déjà rencontré, alors stocker ce trou en mémoire.

– Une fois tous les triplets énumérés, retourner l'eventuel trou de taille minimale. S'il n'y en a pas, retourner "pas de trou".

COMPLEXITÉ : $O(n^5)$.

PREUVE — Clair. □

L'algorithme 6.2 peut être utilisé à des fins multiples. Par exemple pour reconnaître les graphes faiblement triangulés : il suffit de l'exécuter sur G puis sur $\overline{G}$. En fait, on a déjà vu page 51 qu'il existe un algorithme dû à Hayward, Spinrad et Sritharan [57] pour reconnaître les graphes faiblement triangulés en $O(n+m^2)$. Notons que cet algorithme ne détecte pas directement les trous. Récemment, S. Nikolopoulos et L. Pallios [89] ont donné un algorithme de complexité $O(n+m^2)$ qui détecte directement les trous.

6.1.2 Reconnaissance des graphes de Berge

Comme on l'a dit plus haut, le problème de la reconnaissance des graphes parfaits est resté ouvert jusqu'en 2002. Puis, Maria Chudnovsky, Paul Seymour, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu et Kristina Vušković ont simultanément proposé deux algorithmes de reconnaissance des graphes de Berge en temps polynomial [19, 22, 34]. Ce problème semble après coup moins difficile que la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits, et il a pourtant été résolu postérieurement et sans que le théorème de structure des graphes de Berge n'apporte aucune aide (voir section 2.5 pour des détails sur ce point). Il faut noter que les deux algorithmes reconnaissent les graphes *de Berge*, et ne reconnaissent donc les graphes parfaits que dans la mesure où le théorème fort des graphes parfaits est vrai. Il faut également noter que le problème de la reconnaissance des graphes sans trou impair est encore ouvert.

Pour fournir un aperçu des méthodes employées, il nous faut deux définitions. Soient G un graphe et C un trou de G. On dit qu'un sommet v de G est *majeur* sur C si l'ensemble de ses voisins sur C n'est inclu dans aucun P_3 de C. On appelle *raquette* pour C un sommet majeur sur C qui voit exactement trois sommets de C. On remarquera que si v est une raquette pour un trou impair C de G de taille minimale, alors l'ensemble $V(C) \cup \{v\}$ induit une pyramide.

Les deux algorithmes reposent sur une première phase commune dite de *nettoyage* du graphe [19]. Cette première phase permet soit de conclure en temps polynomial que le graphe n'est pas de Berge, soit de fournir une liste d'au plus $O(n^8)$ sous-ensembles de $V(G)$ avec la propriété suivante : si C est un trou impair de taille minimale de G, et si C est sans raquette, alors l'un des ensembles est disjoint de C et contient tous les sommets majeurs de C. On dit alors que le trou C est *nettoyé* (de ses voisins majeurs), et on dit que le graphe G est *nettoyé*.

La phase de nettoyage permet donc de ramener la reconnaissance des graphes de Berge à deux problèmes plus simples : la détection des trous im-

pairs possèdant une raquette, puis la détection des trous impairs nettoyés de taille minimale. Ces problèmes ont été résolus de deux manières différentes. D'une part, Chudnosky et Seymour ont proposé un algorithme direct de recherche de pyramides dans un graphe quelconque, puis de trou impair dans un graphe nettoyé [22]. Cet article a été notre source d'inspiration principale pour ce chapitre. D'autre part, Cornuéjols, Liu et Vušković [34] ont proposé un algorithme de reconnaissance fondé sur leur théorème de décomposition des graphes sans trou impair (théorème 2.21 page 32). Nous avons aussi essayé d'adapter cette deuxième méthode à des problèmes non résolus mais cette fois sans succès.

Nous mentionnons pour mémoire l'algorithme suivant qui utilise des techniques de plus courts chemins.

Algorithme 6.3 (Chudnovsky et Seymour [22].)
ENTRÉE : Un graphe G.
SORTIE : Si G est sans pyramide, l'algorithme retourne "Pas de pyramide". Sinon, il retourne une pyramide de G de taille minimale.
COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

Enfin nous citons le principal résultat sur la reconnaissance des graphes de Berge :

Algorithme 6.4 ([19, 22])
(Chudnovsky, Seymour & Cornuéjols, Liu, Vušković)
ENTRÉE : Un graphe G.
SORTIE : Si G est de Berge, l'algorithme retourne BERGE. Sinon, il retourne NON BERGE.
COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

6.2 Détection de sous-graphes

Nous allons maintenant voir une série d'algorithmes de détection de sous-graphes. Nous utiliserons intensivement la technique des plus courts chemins mise en œuvre par Chudnovsky et Seymour pour la détection des pyramides. Signalons aussi que les articles de Conforti, Cornuéjols et Vušković sur les graphes de Berge sans carré et la décomposition des graphes sans trou impair [30, 31] contiennent de nombreux résultats sur la manière dont un sommet peut voir un prisme. Les lemmes qui suivent utilisent des résultats du même type, mais beaucoup plus simples.

6.2.1 Prisme ou Pyramide

Nous donnons ici deux algorithmes de détection des prismes ou des pyramides. Appliqués à des graphes sans pyramide, ces algorithmes deviennent simplement des algorithmes de détection de prismes. Le premier d'entre eux

s'inspire directement des techniques utilisées par Chudnovsky et Seymour pour la détection des pyramides, mais possède une complexité bien meilleure car lorsque l'on cherche simultanément un prisme ou une pyramide dans un graphe, la technique des plus courts chemins se simplifie. Le deuxième algorithme est un peu plus performant et ne repose plus aussi directement sur les plus courts chemins.

On dit qu'un sous-graphe de G est *optimal* si son nombre de sommets est inférieur ou égal au nombre de sommets de tout prisme de G, et inférieur ou égal au nombre de sommets de toute pyramide de G.

Lemme 6.5 *Soit G un graphe quelconque. Soient P_1, P_2, P_3, trois chemins de G formant une pyramide optimale F de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$. On note a_1 le coin de F et on suppose que pour $i = 1, 2, 3$, P_i a pour extrémités a_1 et b_i.*

Soit P_1' un plus court chemin de a_1 vers b_1 dont les sommets intérieurs manquent b_2 et b_3. Alors ou bien :

(a) L'ensemble $V(P_1') \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme optimal de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$

(b) Les chemins P_1', P_2, P_3 forment une pyramide optimale de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.

On a un résultat similaire pour P_2 et P_3.

PREUVE — Si a_1 voit b_1, le lemme est trivial. On suppose donc $a_1b_1 \notin E$. Notons qu'alors (P_1') est de longueur au moins 2. On note H le trou induit par $V(P_2) \cup V(P_3)$. On note c le sommet de $P_1'^*$, le plus proche de b_1, et ayant un voisin dans H. Notons que c existe car $a_1 \in V(H)$ et car P_1' est de longueur au moins 2. Restent à examiner quatre cas conduisant à une contradiction ou à ce qu'avance le lemme :

- Si c ne voit de H que a_1, alors P_1', P_2, P_3 forment une pyramide optimale de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.
- Si c ne voit de H que a_1 et un voisin de a_1, alors $V(P_1') \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme optimal de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.
- Si c manque a_1 alors le graphe F' induit par $V(H) \cup V(b_1 - P_1' - c)$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$ (il manque les sommets de P_1' entre c et a_1).
- Si c voit a_1 et au moins un non-voisin de a_1 sur H, alors il existe un chemin Q de H de longueur au moins 2, et dont les extrémités sont a_1 et un voisin de c. Mais alors le graphe F' induit par $(V(H) \cup V(P_1')) \setminus V(Q^*)$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$ (il manque les sommets de Q^*).

Si c voit de H un autre sommet que a_1 alors le graphe F' induit par $V(H) \cup V(P'_1) \setminus \{a_1\}$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$: il manque à F' le sommet a_1. Donc, c ne voit de H que le sommet a_1, exactement ce qu'on voulait montrer. □

Lemme 6.6 *Soit G un graphe quelconque. Soient P_1, P_2, P_3, trois chemins de G formant un prisme optimal F de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$. On suppose pour $i = 1, 2, 3$ que P_i a pour extrémités a_i et b_i.*

Soient :

- *P'_1 un plus court chemin de a_1 vers b_1 dont les sommets intérieurs manquent b_2 et b_3.*
- *P'_2 un plus court chemin de a_1 vers b_2 dont les sommets intérieurs manquent b_1 et b_3.*
- *P'_3 un plus court chemin de a_1 vers b_3 dont les sommets intérieurs manquent b_1 et b_2.*

Alors :

(a) Les chemins P'_1, P_2, P_3 forment un prisme optimal de G de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.

(b) Ou bien $V(P_1) \cup V(P'_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme optimal de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$, ou bien P_1, P'_2, P_3 forment une pyramide optimale de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.

(c) Ou bien $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P'_3)$ induit un prisme optimal de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$, ou bien P_1, P_2, P'_3 forment une pyramide optimale de G de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.

PREUVE — On utilisera sans mention explicite le fait que (P_i) est au moins aussi long que (P'_i).

On commence par prouver la conclusion (a). On note H le trou de G induit par $V(P_2) \cup V(P_3)$. Si les sommets intérieurs de P'_1 manquent entièrement H, alors P'_1, P_2, P_3 forment un prisme optimal de G. Donc on peut supposer l'existence d'un sommet intérieur c de P'_1 qui voit H et choisi aussi proche que possible de b_1. Montrons que l'existence de ce sommet entraîne une contradiction : le graphe F' induit par $V(H) \cup V(P'_1) \setminus \{a_1\}$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$. Ceci prouve la conclusion (a).

Prouvons la conclusion (b). On note H le trou de G induit par $V(P_1) \cup V(P_3)$. Comme a_1 manque b_2, on sait que P'_2 possède des sommets intérieurs. Soit c le sommet intérieur de P'_2 qui voit $V(H)$, et choisi aussi proche que possible de b_2. Notons que c existe car $a_1 \in H$. Restent à examiner quatre cas conduisant à une contradiction ou à ce qu'avance le lemme :

- Si c ne voit de H que a_1, alors P_1, P'_2, P_3 forment une pyramide optimale de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.
- Si c ne voit de H que a_1 et un voisin de a_1, alors $V(P_1) \cup V(P'_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme optimal de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.
- Si c manque a_1 alors le graphe F' induit par $V(H) \cup V(b_2 - P'_2 - c)$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$ (il manque les sommets de P'_2 entre c et a_1).
- Si c voit a_1 et au moins un non-voisin de a_1 sur H, alors il existe un chemin Q de H de longueur au moins 2, et dont les extrémités sont a_1 et un voisin de c. Mais alors le graphe F' induit par $(V(H) \cup V(P'_2)) \setminus V(Q^*)$ et le triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ satisfont toutes les hypothèses du lemme 4.7, ce qui montre que F' contient un prisme ou une pyramide. Mais cela contredit l'optimalité de F car $|F'| < |F|$ (il manque les sommets de Q^*).

Ceci prouve la conclusion (b). La preuve de la conclusion (c) est semblable à celle de la conclusion (b). □

Nous donnons un lemme qui est une variante du précédent, mais qui concerne cette fois les prismes longs (c'est-à-dire les prismes différents de $\overline{C_6}$). Un prisme long *minimal* dans un graphe G est un prisme long dont le nombre de sommets est inférieur ou égal à celui de tout autre prisme long du graphe.

Lemme 6.7 *Soit G un graphe sans pyramide. Soient P_1, P_2, P_3, trois chemins de G formant un prisme long minimal F de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$. On suppose pour $i = 1, 2, 3$ que P_i a pour extrémités a_i et b_i. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Soit P'_i un plus court chemin de a_1 vers b_i dont les sommets intérieurs manquent b_{i+1} et b_{i+2} (l'addition des indices s'entend modulo 3). Alors, l'ensemble $V(P'_i) \cup V(P_{i+1}) \cup V(P_{i+2})$ induit un prisme long optimal de G de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$.*

PREUVE — La preuve est en tout point similaire à la preuve du lemme 6.6. Notons qu'ici, le graphe G est par hypothèse sans pyramide ce qui fait qu'on ne peut jamais trouver de pyramide. □

Nous proposons l'algorithme suivant pour détecter les pyramides ou les prismes :

Algorithme 6.8

ENTRÉE : Un graphe G.

SORTIE : Si le graphe est sans pyramide et sans prisme : "Ni prisme, ni pyramide". Sinon : un prisme optimal ou une pyramide optimale de G.

CALCUL :

- Considérer successivement tous les quadruplets $(a_1, b_1, b_2, b_3) \in V^4$. Calculer pour $i = 1, 2, 3$ un plus court chemin P_i de a_1 vers b_i dont les sommets intérieurs manquent le reste du quadruplet. Si l'ensemble $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme ou une pyramide, alors le stocker en mémoire.
- Si aucun quadruplet n'a donné de prisme ou de pyramide, retourner "Ni prisme, ni pyramide". Sinon, retourner un prisme ou une pyramide de taille minimale parmi ceux stockés en mémoire.

COMPLEXITÉ : $O(n^4 m)$.

PREUVE — Si G est sans prisme et sans pyramide, alors il est clair que l'algorithme répond "Ni prisme, ni pyramide".

Si G possède une pyramide ou un prisme, alors G possède un prisme optimal ou une pyramide optimale, que l'on note F. À une certaine étape, l'algorithme considère un quadruplet (a_1, b_1, b_2, b_3), tel que $\{b_1, b_2, b_3\}$ est un triangle de F et $a_1 \notin \{b_1, b_2, b_3\}$ est un coin de F. L'algorithme calcule alors des plus courts chemins P_i de a_1 vers b_i. Par trois applications consécutives des lemmes 6.5 et 6.6, on voit que $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme ou une pyramide optimale de G, de coin a_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$. Donc l'algorithme retourne ce sous-graphe, ou un sous-graphe *ad hoc* de même taille.

Dans le pire des cas, tester tous les quadruplets nécessite $O(n^4)$ étapes. Calculer les plus courts chemins et vérifier que le sous-graphe obtenu est un prisme ou une pyramide nécessite $O(m)$ étapes. Donc, au pire, l'algorithme se termine en $O(n^4 m)$ étapes. □

En remplaçant partout dans l'énoncé ci dessus "prisme" par "prisme long" et en invoquant le lemme 6.7 à la place du lemme 6.6, on arrive à détecter les prismes longs dans les graphes sans pyramide :

Algorithme 6.9

ENTRÉE : Un graphe G sans pyramide.

SORTIE : Si le graphe est sans prisme long : "Pas de prisme long". Sinon : un prisme long minimal de G.

CALCUL : Similaire à l'algorithme précédent.

COMPLEXITÉ : $O(n^6)$.

Voici maintenant l'algorithme le plus rapide que nous ayons trouvé pour détecter les prismes ou les pyramides. Notons que l'usage du lemme suggéré par Bruce Reed (lemme 4.7) a permis de raccourcir très sensiblement sa preuve.

Algorithme 6.10

ENTRÉE : Un graphe G.

SORTIE : Si le graphe est sans pyramide et sans prisme : "Ni prisme ni pyramide". Sinon, "Il y a un prisme ou une pyramide".

CALCUL :

Pour tous les triangles $T = \{b_1, b_2, b_3\}$ de G faire :

0. Calculer X_1, ensemble des sommets de G qui voient b_1 et manquent b_2, b_3. Calculer de même X_2, X_3. Calculer X l'ensemble des sommets de G qui ne voient aucun sommet de T. Calculer les composantes connexes de X.
1. Si pour $i = 1$, 2 ou 3, il existe un sommet de X_i voyant à la fois un sommet de X_{i+1} et un sommet de X_{i+2}, alors stopper et retourner "Il y a un prisme ou une pyramide". (L'addition des indices s'entend modulo 3.)
2. On marque ainsi composantes connexes de X. Donner à chaque composante H la marque i s'il existe un sommet de H voyant un sommet de X_i. Si une composante H reçoit les trois marques $1, 2, 3$, stopper et retourner "Il y a un prisme ou une pyramide".
3. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, pour chaque composante H de X possèdant les deux marques i, j et pour chaque sommet x de X_i possèdant un voisin dans H, donner à x la marque j. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, et pour chaque sommet x de X_i ayant un voisin dans X_j $(i \neq j)$, donner à x la marque j. Si un sommet de $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ possède deux marques différentes, stopper et répondre "Il y a un prisme ou une pyramide".

Si aucun triangle n'a permis de stopper pour retourner "Il y a un prisme ou une pyramide", stopper et retourner "Ni prisme ni pyramide".

COMPLEXITÉ : $O(n^3(n+m))$.

PREUVE — Montrons d'abord :

(1) Si G possède un prisme ou une pyramide F, alors l'algorithme retourne "Il y a un prisme ou une pyramide".

Soit $\{b_1, b_2, b_3\}$ un triangle de F. On note c_1 le voisin de b_1 dans $F \setminus \{b_2, b_3\}$ et on définit de même c_2, c_3. Pour $i = 1, 2, 3$, notons que l'algorithme met c_i dans X_i.

Si F n'a que 6 sommets, alors on constate que l'un de c_1, c_2, c_3 voit les deux autres. Donc l'algorithme stoppe à l'étape 1 et retourne "Il y a un prisme ou une pyramide".

Si F a plus de 6 sommets, et si F n'est pas une pyramide possèdant un chemin de longueur 1, alors on constate que $F \setminus \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ est un graphe connexe qui voit X_1, X_2, X_3. Donc, l'algorithme met les sommets de $F \setminus \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ dans une composante de X qui reçoit les 3 marques, puis stoppe à l'étape 2 et retourne "Il y a un prisme ou une pyramide".

Si F a plus de 6 sommets et si F est une pyramide avec un chemin de longueur 1, alors on suppose à une symétrie près que c_1 est le coin de la pyramide. Si $c_2c_1 \in E$ et $c_3c_1 \in E$ alors F a six sommets : l'algorithme

aurait déjà stopper. On peut donc supposer à une symétrie près que c_2 manque c_1. Donc, dans le chemin de la pyramide reliant b_2 à c_1, il existe des sommets entre c_2 et c_1, qui appartiennent à une composante connexe H de X recevant les marques 1 et 2. Le sommet c_1 est alors un sommet de X_1 recevant la marque 2 (car il a un voisin dans H). Si c_1 voit c_3, alors c_1 reçoit la marque 3. Sinon, il existe des sommets sur le chemin de F reliant b_3 à c_1, qui sont entre c_3 et c_1, et qui appartiennent à une composante connexe H' de X recevant les marques 1 et 3. Donc, c_1 reçoit encore la marque 3. Finalement, c_1 reçoit les marques 2 et 3, donc l'algorithme stoppe à l'étape 3 et retourne "Il y a un prisme ou une pyramide". Ceci prouve (1).

(2) Si l'algorithme retourne "Il y a un prisme ou une pyramide", alors G possède un prisme ou une pyramide.

Soit $T = \{b_1, b_2, b_3\}$ le triangle à l'étude duquel l'algorithme stoppe.

Si l'algorithme stoppe à l'étape 1, alors il existe à une symétrie près un sommet c_1 de X_1, qui voit deux sommets $c_2 \in X_2$ et $c_3 \in X_3$. Si c_2 voit c_3, alors l'ensemble $\{c_1, c_2, c_3, b_1, b_2, b_3\}$ induit un prisme. Si c_2 manque c_3, alors l'ensemble $\{c_1, c_2, c_3, b_1, b_2, b_3\}$ induit une pyramide.

Si l'algorithme stoppe à l'étape 2, alors l'ensemble X possède une composante connexe H comprenant des sommets marqués 1, des sommets marqués 2 et d'autres marqués 3. Il existe dans G trois sommets $c_1 \in X_1$, $c_2 \in X_2$ et $c_3 \in X_3$, tel que pour $i = 1, 2, 3$, c_i voit un sommet de H. On applique alors le lemme 4.7 au graphe induit par $\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\} \cup H$ et au triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$. On constate que G possède bien un prisme ou une pyramide.

Si l'algorithme stoppe à l'étape 3, alors, à une symétrie près, il existe un sommet c_1 de X_1 qui a des voisins marqués 2 et 3. Notons qu'il est impossible que c_1 ait des voisins dans X_2 et X_3, car alors l'algorithme aurait stoppé à l'étape 1. On suppose donc sans perte de généralité que c_1 n'a pas de voisin dans X_2. Donc, c_1 a reçu la marque 2 en raison d'une composante connexe H de X comprenant des sommets marqués 1 et des sommets marqués 2. Notons qu'il n'y a aucune arête entre H et X_3, car sinon H aurait reçu les 3 marques et l'algorithme aurait stoppé à l'étape 2. Soit alors un chemin P de H reliant un voisin d_1 de c_1 à un sommet d_2 ayant un voisin c_2 dans X_2, de longueur minimal avec ces propriétés. Si c_1 a reçu la marque 3 en raison d'une arête entre c_1 et un sommet c_3 de X_3, alors les trois chemins $b_1 - c_1$, $b_2 - c_2 - d_2 - P - d_1 - c_1$ et $b_3 - c_3 - c_1$ forment une pyramide de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ et de coin c_1. Sinon, c_1 a reçu la marque 3 en raison d'une composante connexe H' de X comprenant des sommets marqués 1 et des sommets marqués 3. Notons qu'il n'y a aucune arête entre H et H', car ce sont des composantes connexes de X, ni entre H' et X_2 car sinon H' aurait les 3 marques et l'algorithme aurait stoppé à l'étape 2. Soit alors un chemin Q de H' reliant un voisin e_1 de c_1 à un sommet e_3 ayant un voisin c_3 dans X_3, de longueur minimal avec ces propriétés. Alors les trois chemins

b_1–c_1, b_2–c_2–d_2–P–d_1–c_1 et b_3–c_3–e_3–Q–e_1–c_1 forment une pyramide de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ et de coin c_1. Ceci prouve (2).

D'après (1) et (2), l'algorithme est conforme à ses spécifications. Énumérer tous les triangles de G nécessite au pire $O(n^3)$ étapes. Reste à vérifier que chacune des autres étapes peut être réalisée par un parcours de l'ensemble des arêtes de G. Pour l'étape 0, il suffit pour chaque arête de vérifier si l'une des extrémité est b_i, et de marquer l'autre extrémité "X_i". Les sommets ayant une et une seule marque "X_i" seront les élément de X_i. Les sommets n'ayant reçu aucune marque seront les éléments de X (on risque de devoir parcourir $V(G)$ pour les prendre en compte). Pour les étapes 1 et 2, un parcours des arêtes suffit. Notons qu'on peut vérifier au fur et à mesure des marquages si une composante H a trois marques, sans qu'il y ait besoin de les reparcourir après coup. Pour l'étape 3, il suffit pour chaque arête xy avec $x \in X_i$ et $y \in H$ de marquer x_i. On vérifie au fur et à mesure si sommet x possède deux marques.

Donc, dans le pire des cas, l'algorithme nécessite $O(n^3(n+m))$ étapes.□

On constate que les deux algorithmes ci-dessus sont relativement performants comparés à l'algorithme 6.3. Ce dernier semble d'ailleurs difficile à améliorer.

6.2.2 Prismes pairs

Nous donnons ici un algorithme de détection des prismes pairs dans les graphes sans trou impair. Nous n'avons pas trouvé d'utilisation à cet algorithme, mais il est potentiellement intéressant pour au moins deux raisons : les prismes pairs jouent un rôle important dans la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits — voir le théorème 2.27. De plus, il peut être intéressant, en vue d'algorithmes futurs, de savoir détecter les seuls sous-graphes à la fois autorisés dans les graphes d'Artémis pairs et interdits dans les graphes d'Artémis.

On peut ici encore appliquer les méthodes de plus courts chemins, mais cette fois, le cheminement est moins direct. On doit considérer des sommets "au milieu des chemins", pour des raisons qui apparaîtront dans la preuve du lemme 6.11. L'algorithme de Chudnovsky et Seymour [22] pour la détection des pyramides utilise cette même ruse des sommets "au milieu", qui ont pour conséquence fâcheuse mais sans doute inévitable de multiplier par n^3 la complexité de notre algorithme.

Soit P un chemin de longueur paire et d'extrémités a et b. On appelle *milieu* de P l'unique sommet m de P vérifiant $\lg(a\text{–}P\text{–}m) = \lg(m\text{–}P\text{–}b)$. Soit F un prisme pair formé par les chemins P_1, P_2, P_3, et de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$, de sorte que pour $i = 1, 2, 3$, le chemin P_i soit d'extrémités a_i et b_i. Soit m_i le sommet au milieu du chemin P_i. On dit alors que le 9-uplet $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3)$ est la *trame* de F.

Lemme 6.11 *Soit G un graphe sans trou impair et soit F un prisme pair de taille minimale de G. Supposons que F soit de trame $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3)$ et formé par les chemins P_1, P_2, P_3 avec $a_i, m_i, b_i \in V(P_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Soit R un chemin de G d'extrémités a_1, m_1, dont les sommets intérieurs manquent a_2, a_3, b_2 et b_3, et de longueur minimale avec ces propriétés.*
Alors, $a_1-R-m_1-P_1-b_1$ est un chemin de G que l'on note R_1, et R_1, P_2, P_3 forment un prisme pair de G de taille minimale.

PREUVE — Soit k la longueur de P_1, qui est paire par hypothèse. Notons que $|E(R)| \leq k/2$. On note H le trou de G induit par $V(P_2) \cup V(P_3)$. Si les sommets intérieurs de R manquent entièrement H, alors soit R_1 un plus court chemin de a_1 vers b_1 contenu dans $V(R) \cup V(m_1 - P_1 - b_1)$. On a $|E(R_1)| \leq k$ et les chemins R_1, P_2, P_3 forment un prisme F' avec $|V(F')| \leq |V(F)|$. Puisque G est sans trou impair, R_1 est de longueur paire (sinon $V(R_1) \cup V(P_2)$ induirait un trou impair), et F' est un prisme pair minimal. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité, ce qui montre qu'en fait R_1 est égal à $a_1-R-m_1-P_1-b_1$: la conclusion du lemme est satisfaite.

On peut donc supposer qu'il existe un sommet intérieur c de R ayant des voisins dans H. Nous allons montrer que l'existence de ce sommet entraîne une contradiction. On choisit c aussi proche que possible de m_1. On va voir que l'existence de c entraine une contradiction. Soit S un plus court chemin de c vers b_1 contenu dans $V(c-R-m_1) \cup V(m_1-P_1-b_1)$. On a $|E(S)| < k$ car $|E(R)| \leq k/2$ et $c \neq a_1$. D'après la définition de c, aucun sommet de $S \setminus b_1$ n'a de voisin dans H. On définit deux sous-chemins de H : $H_2 = H \setminus a_3$ et $H_3 = H \setminus a_2$. Pour $i = 2, 3$, on note c_i le sommet de H_i voisin de c le plus proche de a_i.

(1) On peut supposer que c_2c_3 est une arête de P_2.

Si $c_2 = c_3$ alors $V(S) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit une pyramide de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ et de coin c_2 : une contradiction. Donc $c_2 \neq c_3$. Si c_2 manque c_3, alors $V(S) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ contient une pyramide de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$ et de coin c : une contradiction. Donc c_2c_3 est bien une arête de G, et, quitte à échanger P_2 et P_3, on peut supposer que c_2c_3 est une arête de P_2. Ceci prouve (1).

Donc $V(S) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme F' de triangles $\{b_1, b_2, b_3\}$ et $\{c, c_2, c_3\}$ avec $|V(F')| < |V(F)|$ puisque $|E(S)| < k$. Donc F' est un prisme impair, ce qui implique que $c_3 - P_2 - b_2$ est un chemin de longueur impaire, et donc $a_2 - P_2 - c_2$ un chemin de longueur paire. Soit R' un plus court chemin de c vers a_1 contenu dans $V(c-R-m_1) \cup V(m_1-P_1-a_1)$. On a $|E(R')| < k$ car $|E(R)| \leq k/2$. D'après la définition de c, aucun sommet de $R' \setminus a_1$ n'a de voisin dans H. Donc R' est de longueur paire car sinon, $V(R') \cup V(a_2-P_2-c_2)$ induirait un trou impair. Donc $V(R') \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ induit un prisme F'' de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{c, c_2, c_3\}$, et F'' est un prisme

pair vérifiant $|V(F'')| < |V(F)|$ car $|E(R')| < k$. Ceci est une contradiction.□

On peut maintenant donner un algorithme de détection des prismes pairs :

Algorithme 6.12

ENTRÉE : Un graphe G sans trou impair.

SORTIE : Si le graphe est sans prisme pair : "Pas de prisme pair". Sinon : un prisme pair minimal de G.

CALCUL :

- Considérer successivement tous les 9-uplets $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3) \in V(G)^9$.
  Calculer pour $i = 1, 2, 3$ un plus court chemin R_i de a_i vers m_i dont les sommets intérieurs manquent le reste du 9-uplet, et un plus court chemin S_i de m_i vers b_i dont les sommets intérieurs manquent le reste du 9-uplet. Si l'ensemble $\cup_{i=1,2,3}(V(R_i) \cup V(S_i))$ induit un prisme pair, le stocker en mémoire.
- Si aucun 9-uplet n'a donné de prisme pair, "Pas de prisme pair". Sinon, retourner un prisme pair de taille minimale parmi ceux stockés en mémoire.

COMPLEXITÉ : $O(n^{11})$.

PREUVE — Si G est sans prisme pair, alors il est clair que l'algorithme répond "Pas de prisme pair".

Si G possède un prisme pair, alors G possède un prisme pair minimal, que l'on note F. À une certaine étape, l'algorithme considère un 9-uplet $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3) \in V(G)^9$ qui est la trame de F. L'algorithme calcule alors des plus courts chemins R_i, S_i. Par six applications consécutives du lemme 6.11, on voit que $\cup_{i=1,2,3}(V(R_i) \cup V(S_i))$ induit un prisme pair. Donc l'algorithme retourne ce sous-graphe, ou un sous-graphe *ad hoc* de même taille.

Dans le pire des cas, tester tous les 9-uplets nécessite $O(n^9)$ étapes. Calculer les plus courts chemins et vérifier que le sous-graphe obtenu est un prisme ou une pyramide nécessite $O(n^2)$ étapes. Donc, au pire, l'algorithme se termine en $O(n^{11})$ étapes. □

6.2.3 Line-graphes de subdivisions de K_4

Les line-graphes de subdivisions biparties de K_4 jouent un rôle important dans la preuve du théorème des graphes parfaits — voir par exemple le théorème 2.26. Détecter ce type de sous-graphe peut donc être intéressant en soi. Ensuite, et cela fut notre motivation initiale, l'algorithme donné ci-dessous est essentiel pour la détection des prismes impairs, et donc pour la reconnaissance des graphes d'Artémis pairs.

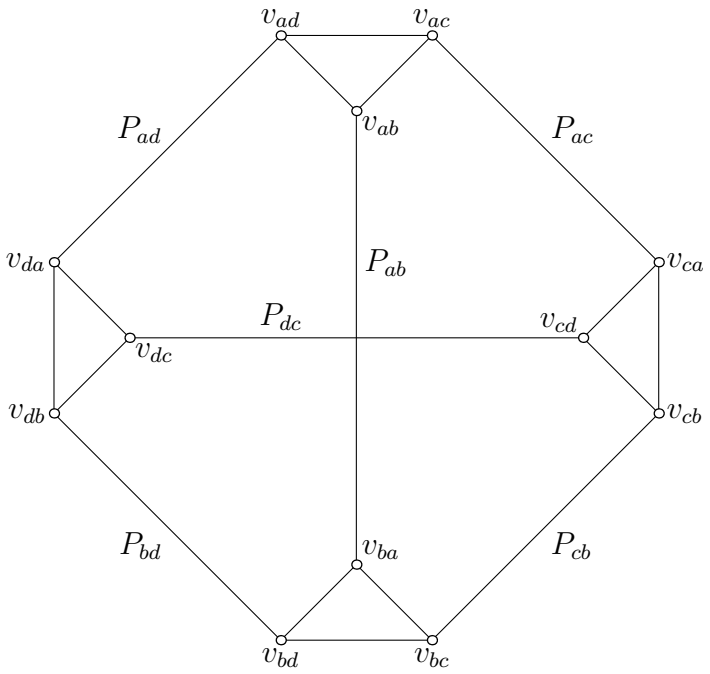


FIG. 6.1 – Line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4

Pour ce qui suit, on pourra consulter la figure 6.1. Si F est le line-graphe d'une subdivision bipartie R de K_4, alors on convient de noter a, b, c et d les quatre sommets du K_4 correspondant. On ordonne arbitrairement a, b, c et d : $a < b < c < d$. À chaque arête ij, $i < j$, de K_4, correspond donc un chemin de F qu'on note P_{ij}. On note v_{ij} et v_{ji} les extrémités de P_{ij}, de sorte que pour $i = a, b, c, d$ l'ensemble $T_i = \{v_{ij}; j \in \{a, b, c, d\}\ , j \neq i\}$ induise un triangle. Finalement, on obtient que les six chemins P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}, P_{bc}, P_{bd}, P_{cd}, et les douze sommets v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}, v_{ba}, v_{bc}, v_{bd}, v_{ca}, v_{cb}, v_{cd}, v_{da}, v_{db} et v_{dc} vérifient :

- Les chemins P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}, P_{bc}, P_{bd}, P_{cd} sont disjoints.
- $F = P_{ab} \cup P_{ac} \cup P_{ad} \cup P_{bc} \cup P_{bd} \cup P_{cd}$
- Pour $i \in \{a, b, c, d\}$, $j \in \{a, b, c, d\}$, $i < j$, le chemin P_{ij} a pour extrémités v_{ij} et v_{ji}.
- Les ensembles $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$, $\{v_{ba}, v_{bc}, v_{bd}\}$, $\{v_{ca}, v_{cb}, v_{cd}\}$ et $\{v_{da}, v_{db}, v_{dc}\}$ sont des triangles de F.
- Les seules arêtes de F sont celles des chemins et triangles précédement décrits.

On remarquera que certains des chemins peuvent être de longueur nulle, ce qui correspond à une arête de K_4 non subdivisée. Par exemple, P_{ab} pourrait être de longueur nulle, auquel cas les sommets v_{ab} et v_{ba} seraient confondus. Modulo le choix initial de l'ordre sur $\{a, b, c, d\}$, les sommets et chemins

ci-dessus sont définis sans ambiguïté. Les sommets v_{ij} sont appelés les *coins* de F. Les chemins P_{ij} sont appelés *chemins de base* de F. Chaque sommet i du K_4 donne un triangle T_i de F. On appelle ces triangle *triangles de base* de F. Il faut noter que F peut posséder d'autres triangles, lorsque des arêtes du K_4 de départ ne sont pas subdivisées.

Les trois lemmes à suivre sont bien connus mais ne sont publiés nulle part sous la forme exacte dont nous avons besoin. C'est pourquoi nous donnons leur preuve pour ne rien laisser dans l'ombre. Le lemme suivant montre en quoi la détection des line-graphes de subdivision bipartie de K_4 peut aider à détecter des prismes impairs.

Lemme 6.13 *Soit G le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4. Alors G contient un prisme impair.*

PREUVE — On suppose sans perte de généralité que a et b sont du même côté de la bipartition du K_4. Donc l'arête ab du K_4 est subdivisée en un chemin de longueur paire. Les arêtes incidente à a et b donnent, dans le line-graphe G, les deux triangles d'un prisme, et le chemin de a vers b dans la subdivision de K_4 donne, dans le line-graphe, un chemin de longueur impaire. Comme G est de Berge, on sait que F est un prisme impair. □

Le lemme suivant nous permettra par la suite de montrer que les subdivisions de K_4 que nous détecterons sont bien des subdivisions *biparties*. On dit qu'une subdivision R de K_4 est *triviale* si $R = K_4$. Le line-graphe de K_4 est représenté figure 1.9 page 17.

Lemme 6.14 *Soit R une subdivision quelconque de K_4. Alors on a l'un et l'un seulement des cas suivants :*
- *R est triviale, c'est-à-dire $R = K_4$.*
- *$L(R)$ contient un trou impair.*
- *R est une subdivision bipartie de K_4.*

PREUVE — Si R est triviale, alors $R = K_4$ et il est clair que $L(R)$ ne contient pas de trou impair et que R n'est pas biparti. On peut donc supposer $R \neq K_4$. Il est clair également que les deux dernières suppositions ne peuvent être satisfaites simultanément, car les line-graphes de graphes bipartis sont des graphes de Berge. Il reste juste à prouver qu'on ne peut avoir simultanément $L(R)$ sans trou impair et R non biparti. Supposons donc, en vue d'une contradiction, qu'il en soit ainsi.

Appelons a, b, c et d les quatre sommets du K_4, et pour $i < j \in \{a, b, c, d\}$ notons C_{ij} la subdivision de l'arête ij. Puisque $L(R)$ est sans trou impair et R non biparti, alors R contient un cycle impair (non nécessairement induit). Si ce cycle impair n'est pas un triangle, alors il donne dans $L(R)$ un trou impair : une contradiction. Si c'est un triangle, alors on peut supposer sans perte de généralité que ce triangle est $\{a, b, c\}$. Comme $R \neq K_4$, on sait qu'au moins

une arête du K_4 est subdivisée, par exemple ad sans perte de généralité. Mais alors l'un des ensembles $E(C_{ad}) \cup \{cd\} \cup E(C_{cd})$ et $E(C_{ad}) \cup \{bd\} \cup \{bc\} \cup C_{cd}$ est l'ensemble des arêtes d'un cycle impair de R de longueur au moins 5, qui donne dans $L(R)$ un trou impair, encore une contradiction. □

En combinant les deux lemmes précédents, on obtient :

Lemme 6.15 *Soit R une subdivision quelconque de K_4. Alors ou bien :*
- *R est triviale, c'est-à-dire $R = K_4$.*
- *$L(R)$ contient un trou impair.*
- *$L(R)$ contient un prisme impair.*

Pour des raisons qui apparaîtront dans la preuve du prochain lemme, on a besoin de prendre en compte les sommets au milieu des chemins des line-graphes. Or ces chemins peuvent être de longueur impaire, et n'avoir pas de ce fait de sommet central. On est donc amené à la définition suivante :

Soit F le line-graphe d'une subdivision de K_4 avec les notations ci-dessus. Soient m_{ab}, m_{ac}, m_{ad}, m_{bc}, m_{bd} et m_{cd} six sommets de F. Si pour tout $i < j$, le sommet m_{ij} est dans P_{ij} et vérifie $d_{P_{ij}}(v_{ij}, m_{ij}) - d_{P_{ij}}(v_{ji}, m_{ij}) \in \{-1, 0, 1\}$, alors on dit que le 18-uplet $(v_{ab}, v_{ac}, \ldots, v_{cd}, m_{ab}, \ldots, m_{cd}) \in V^{18}$ est une *trame* de F. Les six sommets m_{ab}, m_{ac}, m_{ad}, m_{bc}, m_{bd} et m_{cd} s'interprètent comme des sommets "proches des milieux des chemins" P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}, P_{bc}, P_{bd} et P_{cd}. Voici maintenant le lemme principal :

Lemme 6.16 *Soit G un graphe sans pyramide. Soit F un sous-graphe induit de G qui est une subdivision non triviale de K_4. On suppose F de taille minimale et de trame $(v_{ab}, v_{ac}, \ldots, v_{cd}, m_{ab}, \ldots, m_{cd})$. Soit P un plus court chemin de v_{ab} vers m_{ab} dont les sommets intérieurs manquent tous les v_{ij} autres que v_{ab}. Alors :*
L'ensemble $(F \backslash v_{ab} P_{ab} m_{ab}) \cup P$ induit un line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4 de taille minimale.
On a un résultat similaire pour les cinq autres couples (v_{ij}, m_{ij}) et les six couples (v_{ji}, m_{ij}).

PREUVE — On pourra consulter la figure 6.2 page 119. On note $F' = F \backslash P_{ab}$. Si $v_{ab} = m_{ab}$, ou si v_{ab} voit m_{ab}, alors la conclusion du lemme est trivialement satisfaite. On peut donc supposer que v_{ab} et m_{ab} sont des sommets distincts et non adjacents, ce qui implique en outre $m_{ab} \neq v_{ba}$.

(1) Si les sommets intérieurs de P manquent entièrement F', la conclusion du lemme est satisfaite.

Soit u le sommet de $v_{ab}-P-m_{ab}$ le plus proche de v_{ab} et ayant des voisins dans $m_{ab}-P_{ab}-v_{ba}$. Soit u' le voisin de u dans $m_{ab}-P_{ab}-v_{ba}$ le plus proche de v_{ba}. Alors, $v_{ab}-P-u-u'-P_{ab}-v_{ba}$ est un chemin sans corde que l'on note P'. On constate que $V(P') \cup V(F')$ induit le line-graphe d'une subdivision non

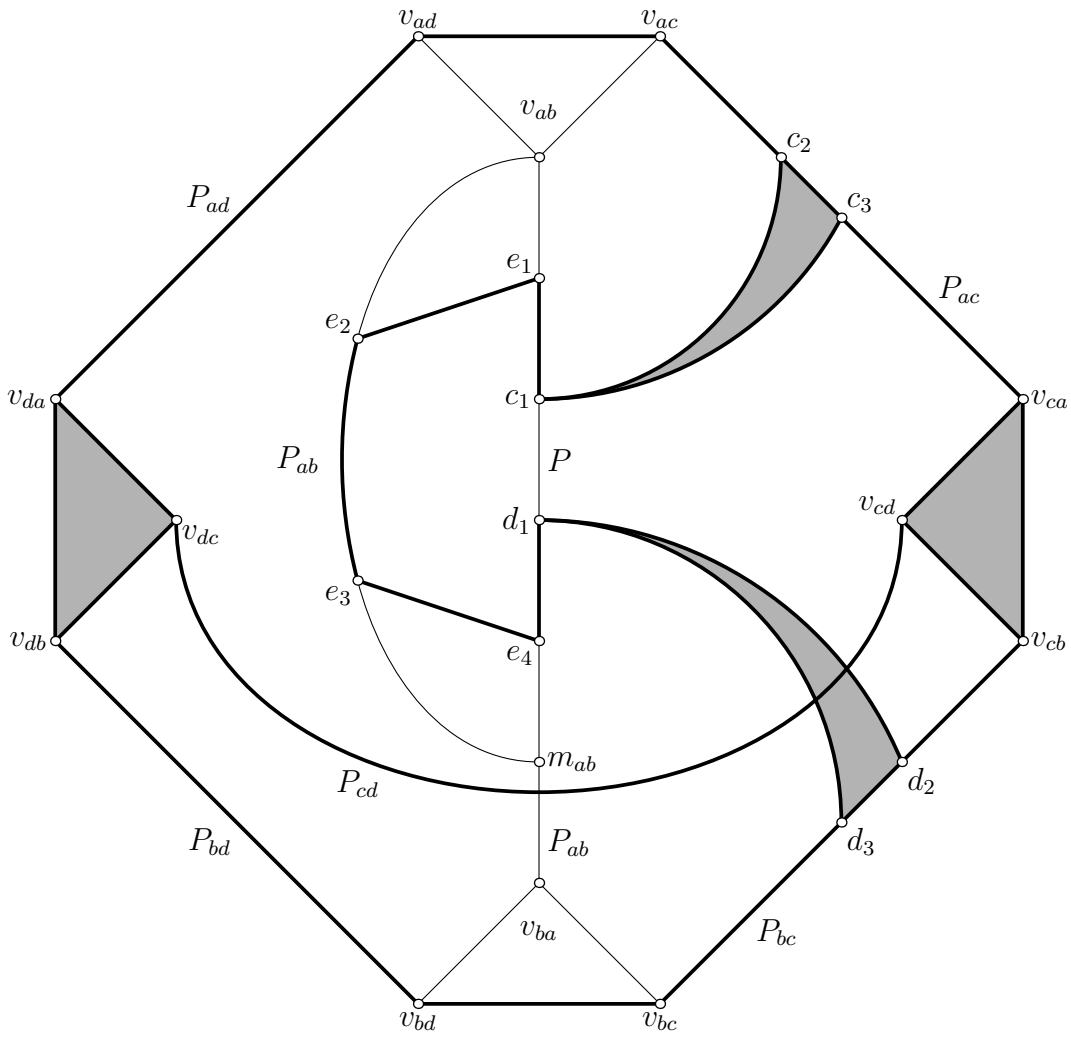


FIG. 6.2 – F et P (preuve de 6.16). Les chemins en gras et les triangles grisés constituent le sous-graphe induit E défini avant (7).

triviale de K_4. Donc $V(P') \cup V(F')$ a une taille supérieure ou égale à celle de F, ce qui est possible seulement si $u = m_{ab}$ car P est un plus court chemin. Mais dans ce cas, $(V(F) \setminus V(v_{ab} - P_{ab} - m_{ab}) \cup V(P)$ induit le line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4 de taille minimale, et la conclusion du lemme est bien satisfaite. Ceci prouve (1).

On peut donc supposer l'existence d'un sommet c_1 de P ayant des voisins dans F', et choisi aussi proche que possible de v_{ab}. On définit de même d_1, sommet de P ayant des voisins dans F', et choisi aussi proche que possible de m_{ab}. Nous allons voir que l'existence de ces sommets entraîne une contradiction.

(2) $N(c_1) \cap V(F')$ est une arête de F' et $N(d_1) \cap V(F')$ est une arête de F'

On pose $H = P_{ac} \cup P_{bc} \cup P_{bd} \cup P_{ad}$. On suppose d'abord que le sommet c_1 a des voisins dans le trou H.

On définit deux chemins de H : $H_{ac} = H \setminus v_{ad}$ et $H_{ad} = H \setminus v_{ac}$. On définit c_2 le sommet de H_{ac} le plus proche de v_{ac} et voisin de c_1. On définit c_3 le sommet de H_{ad} le plus proche de v_{ad} et voisin de c_1. Si $c_2 = c_3$, alors l'ensemble $V(H) \cup V(c_2 - c_1 - P - v_{ab})$ induit une pyramide de coin c_2 et de triangle $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$: une contradiction. Donc $c_2 \neq c_3$. Si c_2 manque c_3, alors on suppose sans perte de généralité que v_{ac}, c_2, c_3 et v_{ad} apparaissent dans cet ordre sur H. Et on voit que les trois chemins c_1–P–v_{ab}, c_1–c_2–H_{ac}–v_{ac} et c_1–c_3–H_{ad}–v_{ad} induisent une pyramide de coin c_1 et de triangle $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$: une contradiction. Donc le sommet c_1 a pour seuls voisins dans H les deux sommets c_2 et c_3 qui sont en outre adjacents. On suppose sans perte de généralité que c_2c_3 est une arête de $P_{ac} \cup P_{bc}$.

Si c possède, en plus de ses voisins sur H, des voisins sur P_{cd}, alors on note c_4 le voisin de c_1 sur P_{cd} le plus proche de v_{dc}. On voit que les chemins $c_1 - P - v_{ab}$, $c_1 - c_4 - P_{cd} \cup P_{ad}$ et $c_1 - c_2 - H_{ac} - v_{ac}$ induisent une pyramide de coin c_1 et de triangle $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$: une contradiction. Donc c_1 manque P_{cd}.

Finalement, si c_1 voit des sommets de H alors il ne voit de F' qu'une arête, ainsi que le prévoit (2). On peut donc supposer que c_1 manque H. Dans ce cas, d'après (1), on peut supposer que c_1 a des voisins dans P^*_{cd}.

Si c_1 n'a qu'un seul voisin $c \in P_{cd}$, alors les chemins $c - c_1 - P - v_{ab}$, c–P_{cd}–$v_{cd} \cup P_{ac}$ et c–P_{cd}–$v_{dc} \cup P_{ad}$ induisent une pyramide de coin c et de triangle $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$: une contradiction. Donc c_1 a plusieurs voisins dans P^*_{cd}. On note c_2 le voisin de c_1 dans P^*_{cd} le plus proche de v_{cd} et c_3 le voisin de c_1 dans P^*_{cd} le plus proche de v_{dc}. Si c_2 et c_3 ne sont pas adjacents, alors les chemins c_1–P–v_{ab}, c_1–c_2–P_{cd}–$v_{cd} \cup P_{ac}$ et c_1–c_3–P_{cd}–$v_{dc} \cup P_{ad}$ induisent une pyramide de coin c_1 et de triangle $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$: une contradiction. Donc les sommets c_2 et c_3 se comportent encore ainsi que l'annonce (2). La preuve pour d_1 est similaire. Ceci prouve (2).

On note donc c_2, c_3 les deux voisins de c_1 dans F', et d_2, d_3 les deux voisins

de d_1 dans F'. Avant de poursuivre, il faut vérifier que les line-graphes que nous allons trouver ne dégénèrent pas en $L(K_4)$:

(3) Soit J un sous-graphe de $F' \cup P$ qui est le line-graphe d'une subdivision quelconque *de K_4. Si l'un des triangles de J contient c_1, alors J est non trivial.*

En général, pour vérifier qu'un line-graphe J d'une subdivision de K_4 est non trivial, il suffit de vérifier que J possède un coin qui n'appartient qu'à un seul triangle de base de J. C'est bien le cas ici : J ne peut pas être le line-graphe de K_4 car c_1 ne peut appartenir qu'à un seul triangle de J. Ceci prouve (3).

(4) On peut supposer que c_2c_3 est une arête de P_{ac} et d_2d_3 une arête de $P_{cb} \cup P_{bd}$.

Si c_2c_3 est une arête de P_{cd}, alors l'ensemble $V(c_1{-}P{-}v_{ab}) \cup V(P_{ac}) \cup V(P_{ad}) \cup V(P_{cd})$ induit le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4 de taille strictement inférieure à celle de F, qui est non-triviale d'après (3) : une contradiction. Si c_2c_3 est une arête de P_{bc}, alors l'ensemble $V(c_1{-}P{-}v_{ab}) \cup V(F')$ induit le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4 de taille strictement inférieure à celle de F, qui est non-triviale d'après (3) :une contradiction.

Donc c_2c_3 est une arête de $P_{ac} \cup P_{ad}$. On montre de même que d_2d_3 est une arête de $P_{bc} \cup P_{bd}$. Par symétrie et sans perte de généralité, on peut supposer que c_2c_3 est une arête de P_{ac}. Ceci prouve (4).

On suppose sans perte de généralité que v_{ac}, c_2, c_3 et v_{ad} apparaissent dans cet ordre sur H. On suppose également que d_2, d_3 et v_{ad} apparaissent dans cet ordre sur H.

(5) c_1 et d_1 sont des sommets distincts et non adjacents.

Par (2) et (4), on sait que c_1 et d_1 sont distincts. Si c_1 voit d_1, alors l'ensemble $\{c_1, d_1\} \cup V(H')$ induit un line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4 de taille strictement inférieure à F, qui est non-triviale d'après (3) : une contradiction. On sait donc que c_1 manque d_1. Ceci prouve (5).

On note alors e_1 le sommet de $c_1{-}P{-}v_{ab}$ ayant des voisins dans $(m_{ab}{-}P_{ab}{-}v_{ab})^*$, et choisi aussi proche que possible de c_1. On note e_4 le sommet de $d_1{-}P{-}m_{ab}$ ayant des voisins dans $(m_{ab}{-}P_{ab}{-}v_{ab})^*$, et choisi aussi proche que possible de d_1. On choisit alors e_2 dans $(m_{ab}{-}P_{ab}{-}v_{ab})^*$, voisin de e_1, et e_3 dans $(m_{ab}{-}P_{ab}{-}v_{ab})^*$, voisin de d_1. Les sommets e_2 et e_3 sont choisis aussi proches que possible l'un de l'autre.

(6) $e_1 \neq v_{ab}$.

Sinon, les chemins $v_{ab}{-}P{-}c_1$, $v_{ab}{-}v_{ac}{-}P_{ac}{-}c_2$ et $v_{ab}{-}P_{ab}{-}e_3{-}e_4{-}P{-}d_1{-}d_2{-}H_{ac}{-}c_3$ forment une pyramide de coin v_{ab} et de triangle $\{c_1, c_2, c_3\}$. Ceci prouve (6).

Les critères pour le choix des sommets ci-après impliqués, les propriétés (5) et (6) et le fait, signalé en début de preuve, que m_{ab} et v_{ba} sont distincts, montrent que $c_1-P-e_1-e_2-P_{ab}-e_3-e_4-P-d_1$ est un chemin de G dont les sommets intérieurs manquent F'. On note ce chemin P'. On constate que l'ensemble $E = V(P') \cup V(F')$ induit le line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4 (non triviale par (3)).

(7) La taille de E est strictement inférieure à la taille de F.

Il suffit de montrer que les six chemins de base de E ont strictement moins d'arêtes que les six chemins de base de F. On note α le nombre d'arêtes du chemin $v_{ab}-P_{ab}-m_{ab}$. On note β le nombre d'arêtes de $v_{ba}-P_{ab}-m_{ab}$. On note δ le nombre des arêtes e de F' appartenant à des chemins de base F.

Le nombre d'arêtes des chemins de E est inférieur ou égal à $\delta + 2\alpha - 3$. Cette borne correspond au pire des cas, celui où e_4 et m_{ab} sont confondus, où il existe un unique sommet de P_{ab} entre c_1 et d_1, où e_1 voit v_{ab}, où e_2 voit v_{ab} et où P et $v_{ab}-P_{ab}-m_{ab}$ sont de même longueur. Dans ce cas, le nombre d'arêtes du chemin de E allant de c_1 à d_1 est bien égal à $2\alpha - 3$.

Le nombre d'arêtes des chemins de F est égal à $\alpha+\beta+\delta = 2\alpha-\varepsilon+\delta$ avec $\varepsilon \in \{0,1\}$ car, d'après la définition de m_{ab}, il existe ε tel que $\alpha = \beta + \varepsilon$. Et donc le nombre d'arêtes des chemins de base de E est strictement inférieur à celui des chemins de base de F. Donc la taille de E est strictement inférieure à celle de F. Ceci prouve (7).

Nous arrivons donc à une contradiction. □

On peut maintenant donner un algorithme de détection des line-graphes de subdivision non triviale de K_4 dans les graphes sans pyramide. Il faut noter que cette restriction aux subdivisions *non triviales* n'est aucunement indispensable pour que l'algorithme fonctionne correctement. Nous avons choisi ce point de vue restrictif pour pouvoir facilement traiter ensuite les line-graphes de subdivision *bipartie* de K_4 (rappelons que K_4 est un graphe quelque peu pathologique, en ce qu'il est la seule sudivision non bipartie de K_4 dont le line-graphe est de Berge, voir figure 1.9 page 17).

Algorithme 6.17

ENTRÉE : Un graphe G sans pyramide.

SORTIE : Si le graphe est sans line-graphe de subdivision non triviale de K_4 : "Pas de LGSNTK4". Sinon, l'algorithme retourne un line-graphe de subdivision non triviale de K_4.

CALCUL :

- Considérer successivement tous les 18-uplets $(v_{ab}, v_{ac}, \ldots, v_{cd}, m_{ab}, \ldots, m_{cd}) \in V^{18}$.
  Calculer pour tout $i \in \{a,b,c,d\}$ et tout $j \in \{a,b,c,d\}$ tel que $i < j$ un plus court chemin P_{ij} de v_{ij} vers m_{ij} dont les sommets intérieurs manquent le reste du 18-uplet, et un plus court chemin Q_{ij} de v_{ji}

vers m_{ij} dont les sommets intérieurs manquent le reste du 18-uplet. Si $\cup_{i,j}(V(P_{ij}) \cup V(Q_{ij}))$ induit le line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4, alors stocker ce sous-graphe en mémoire et considérer les 18-uplets suivants.
- Retourner l'un des sous-graphes stockés de taille minimale. Si aucun 18-uplet n'a donné de line-graphe de subdivision non triviale de K_4, retourner "Pas de LGSNTK4".

COMPLEXITÉ : $O(n^{20})$.

PREUVE — Si G est sans line-graphe de subdivision non triviale de K_4, alors il est clair que l'algorithme n'en trouve pas et qu'il retourne "Pas de LGSNTK4".

Si G contient un line-graphe d'une subdivision non-triviale de K_4, alors G en contient un de taille minimale, que l'on note F.

À une certaine étape, l'algorithme considère un 18-uplet $(v_{ab}, v_{ac}, \ldots, v_{cd}, m_{ab}, \ldots, m_{cd}) \in V^{18}$, qui est une trame de F. Notons que les douze plus courts chemins recherchés par l'algorithme existent. Par douze applications consécutives du lemme 6.16, on voit que $\cup_{i,j}(V(P_{ij}) \cup V(Q_{ij}))$ est un line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4 de taille minimale. Donc l'algorithme retourne ce sous-graphe, ou peut-être un autre sous-graphe de même taille et ayant les mêmes coins.

Dans le pire des cas, tester tous les 18-uplets nécessite $O(n^{18})$ étapes. Calculer les plus courts chemins et vérifier que le sous-graphe obtenu est le line-graphe de subdivision bipartie de K_4 prend $O(n^2)$ étapes. Donc, au pire, l'algorithme se termine en $O(n^{20})$ étapes. □

Nous pouvons maintenant donner un algorithme détectant les line-graphes de subdivision *bipartie* de K_4 dans les graphes sans trous impairs.

Algorithme 6.18

ENTRÉE : Un graphe G sans trou impair.

SORTIE : Si le graphe est sans line-graphe de subdivision bipartie de K_4 : "Pas de LGSBK4". Sinon, l'algorithme retourne un line-graphe de subdivision bipartie de K_4 de taille minimale.

CALCUL : Exécuter l'algorithme 6.17.

COMPLEXITÉ : $O(n^{20})$.

PREUVE — D'après le lemme 6.14 on sait que, dans G, les line-graphes de subdivision *non-triviales* de K_4 sont exactement les line-graphes de subdivision *bipartie* de K_4. Ces dernières configurations sont donc correctement détectées par l'algorithme 6.17. □

6.2.4 Prismes impairs

Nous pouvons désormais fournir un algorithme en temps polynomial pour détecter les prismes impairs. Il faut se montrer prudent car dans ce cas la technique des plus courts chemins fonctionne mal :

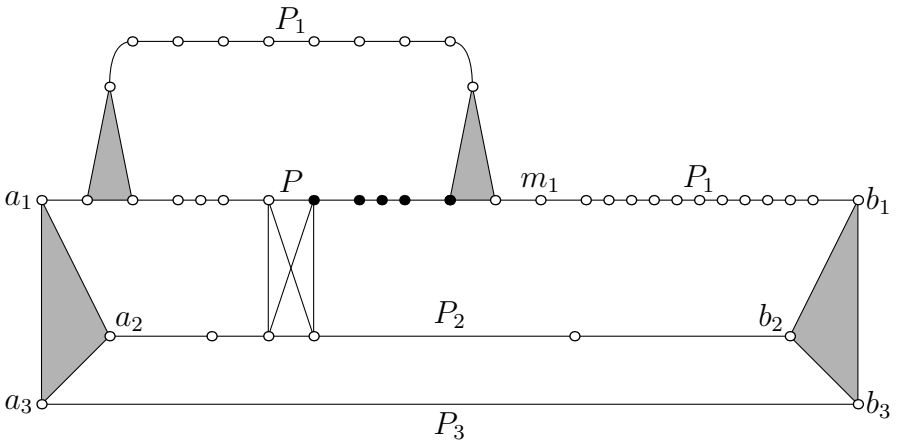


FIG. 6.3 – Graphe contenant six prismes impairs

Le graphe G représenté figure 6.3 comporte 5 cliques maximales de taille au moins trois. On vérifie que les quatre cliques grisées sont deux à deux ennemies (voir sous-section 3.3.2 page 56 pour de plus amples explications sur les cliques ennemies). Tous les chemins sortants les reliant à la clique non grisée sont de longueur paire. On en déduit que G est le line-graphe d'un graphe biparti, et qu'il est de Berge (pour s'en convaincre, on peut utiliser le lemme 3.20, qui aura finalement servi à quelque chose !). Pour toute paire de cliques grisées, il existe un unique prisme impair de G qui ait ces cliques pour triangles. On constate que les chemins P_1, P_2 et P_3 induisent un prisme impair de G de taille minimale. Pourtant, si on remplace P_1, ou même simplement le sous-chemin $a_1 - P_1 - m_1$ par un plus court chemin P, on n'a pas la garantie d'obtenir à nouveau un prisme impair. Un algorithme naïf par plus courts chemins risque donc d'échouer. En fait un tel algorithme (calculer les plus courts chemins pour chaque sextuplet $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in V^6$) executé sur G finirait bien par détecter un prisme impair : celui contenant les deux triangles les plus en haut sur le dessin. Mais il ne trouverait pas un prisme de taille minimale de G, ce qui fait qu'on ne voit comment prouver qu'il fonctionne (s'il fonctionne !).

On peut cependant remarquer que G contient le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4 : le sous-graphe induit en oubliant les sommets "pleins". Si ce type de configuration est interdite, il y a donc encore un espoir que les techniques de plus courts chemins fonctionnent. Le lemme suivant montre que cet espoir est fondé. On remarquera qu'il n'est même plus nécessaire de partir d'un prisme de taille minimale, ni de plus courts chemins, ce qui montre

que l'interdiction des line-graphes de subdivision de K_4 est une contrainte très forte dont on a déjà eu une illustration dans la preuve du théorème fort des graphes parfaits (voir les théorèmes 2.27 à 2.31).

Lemme 6.19 *Soit G un graphe sans trou impair et sans line-graphe de subdivision bipartie de K_4. Soit F un prisme de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$ et formé par trois chemins P_i ($i = 1, 2, 3$) ayant pour extrémités a_i et b_i. Soit P un chemin de a_1 vers b_1 dont les sommets intérieurs manquent a_2, a_3, b_2 et b_3. Alors :*

P, P_2, P_3 forment un prisme de G de même parité que F.

PREUVE — On pose $H = P_2 \cup P_3$. Si les sommets de P^* manquent entièrement le trou H, alors P, P_2, P_3 forment un prisme impair de G (impair car G est sans trou impair). On peut donc supposer qu'il existe un sommet de P^* qui a des voisins dans H.

On note c_1 le sommet de P^* ayant des voisins dans H et choisi aussi proche que possible de a_1. On définit les chemins $H_2 = H \setminus \{b_3\}$ et $H_3 = H \setminus \{b_2\}$. Pour $i = 2, 3$, on note c_i le sommet de H_i, voisin de c_1, choisi aussi proche que possible de b_i.

(1) On peut supposer que c_2c_3 est une arête de P_2^*.

Si $c_2 = c_3$, alors les trois chemins $c_2 - c_1 - P - a_1$, $c_2 - P_2 - a_2$ et $c_2 - P_2 - b_2 - b_3 - P_3 - a_3$ forment une pyramide de coin c_2 et de triangle $\{a_1, a_2, a_3\}$: une contradiction. On peut donc supposer $c_2 \neq c_3$. Si c_2 et c_3 ne sont pas adjacents, alors les trois chemins $c_1 - P - a_1$, $c_1 - c_2 - P_2 - a_2$ et $c_1 - c_3 - P_2 - b_2 - b_3 - P_3 - a_3$ forment une pyramide de coin c_1 et de triangle $\{a_1, a_2, a_3\}$: une contradiction. Ceci prouve (1).

(2) c_1 manque b_1.

Sinon, les trois chemins $c_1 - b_1$, $c_1 - c_3 - P_2 - b_2$ et $c_1 - P - a_1 - a_3 - P_3 - b_3$ forment une pyramide de coin c_1 et de triangle $\{b_1, b_2, b_3\}$. Ceci prouve (2).

On note a_1' le voisin de a_1 dans P_1. On définit alors d_1 le sommet de $a_1' - P - c_1$ le plus proche possible de c_1 et ayant des voisins dans P_1. On définit $d_2 \in P_1$, voisin de d_1 aussi proche que possible de a_1 et $d_3 \in P_1$, voisin de d_1 aussi proche que possible de b_1.

(3) d_2d_3 est une arête de P_1.

Si $d_2 = d_3$, alors les trois chemins $d_2 - d_1 - P - c_1$, $d_2 - P_1 - a_1 - a_2 - P_2 - c_2$ et $d_2 - P_1 - b_1 - b_2 - P_2 - c_3$ forment une pyramide de coin d_2 et de triangle $\{c_1, c_2, c_3\}$: une contradiction. On peut donc supposer $d_2 \neq d_3$. Si d_2 et d_3 ne sont pas adjacents, alors les trois chemins d_1–d_2–P_1–a_1, d_1–d_3–P_1–b_1–b_3–P_3–a_3 et $d_1 - P - c_1 - c_2 - P_2 - a_2$ forment une pyramide de coin d_1 et de triangle $\{a_1, a_2, a_3\}$: une contradiction. Ceci prouve (3).

On remarque maintenant que les quatre triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$, $\{c_1, c_2, c_3\}$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ et les six chemins P_3, a_2–P_2–c_2, a_1–P_1–d_2, b_2–P_2–c_3, b_1–P_1–d_3, c_1–P–d_1 induisent le line-graphe d'une subdivision *quelconque* de K_4 qui n'est pas le line-graphe de K_4, car $a_3 \neq b_3$. Donc, d'après le lemme 6.14, G contient le line-graphe d'une subdivision *bipartie* de K_4, ce qui est contradictoire.

□

Voici maintenant un algorithme de détection des prismes impairs dans les graphes sans trou impair.

Algorithme 6.20

ENTRÉE : Un graphe G sans trou impair.

SORTIE : Si G est sans prisme impair : "Pas de prisme impair". Sinon : "Il y a un prisme impair"

CALCUL :

- À l'aide de l'algorithme 6.17, tester si G possède un line-graphe de subdivision non triviale de K_4. Si tel est le cas, stopper et répondre "Il y a un prisme impair". Sinon poursuivre.
- Considérer successivement tous les sextuplets $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in V^6$. Calculer pour $i = 1, 2, 3$ un plus court chemin P_i de a_i vers b_i dont les sommets intérieurs manquent a_{i+1}, a_{i+2}, b_{i+1} et b_{i+2} (les indices sont calculés modulo 3). Si P_1, P_2, P_3 forment un prisme impair, alors stopper l'algorithme et répondre "Il y a un prisme impair".
- Si aucun sextuplet n'a donné de prisme, répondre "Pas de prisme impair".

COMPLEXITÉ : $O(n^{20})$.

PREUVE — Si G est sans prisme impair, alors G ne peut pas contenir de line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4 car d'après le lemme 6.15, un tel line-graphe serait trivial, ou contiendrait un trou impair, ou contiendrait un prisme impair : dans tous les cas une contradiction. Donc l'algorithme donne la bonne réponse : "Pas de prisme impair".

Si G possède un prisme impair et un line-graphe d'une subdivision non triviale de K_4, alors cela est détecté à la deuxième étape, et l'algorithme retourne "Il y a un prisme impair" comme il se doit.

Si G possède un prisme impair et ne possède aucun line-graphe de subdivision *non triviale* de K_4, alors, en particulier, G ne possède aucun line-graphe de subdivision *bipartie* de K_4, et on peut appliquer le lemme 6.19. Soit alors F un prisme impair quelconque de G, de triangles $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{b_1, b_2, b_3\}$. À une certaine étape, l'algorithme considère le sextuplet formé par ces six sommets et calcule pour $i = 1, 2, 3$ les plus courts chemins P_i (qui existent). Par trois applications consécutives du lemme 6.19, on voit que $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ induit un prisme impair, qui sera donc bien détecté : l'al-

gorithme retourne "Il y a un prisme impair". □

6.3 Des problèmes NP-complets

Nous avons résolu dans ce chapitre un certain nombre de problèmes de détection de sous-graphes induits dans les graphes sans pyramide ou dans les graphes sans trou impair. Nous allons voir dans cette section que si l'on cherche à les étendre aux graphes quelconques, ces problèmes deviennent NP-complets. Nous montrerons que les problèmes de détection des prismes, des prismes pairs, des prismes impairs et des line-graphes de subdivision de K_4 sont tous NP-complets.

Notre preuve s'inspire directement de la construction de Bienstock dans son article sur la NP-complétude de la recherche des paires d'amis. Dans [13], Bienstock parvient à réduire le problème 3-SAT à la recherche de paire d'amis dans un graphe. Il parvient également à réduire 3-SAT au problème suivant :

Problème 6.21 (Π')
INSTANCE : Un graphe G et deux sommets a et b de G.
QUESTION : Y a-t-il un trou de G passant par a et b ?
COMPLEXITÉ : NP-complet, (Bienstock, [13]).

En adaptant la preuve de Bienstock, nous allons montrer que le problème Π' demeure NP-complet même si l'on se restreint au cas des graphes sans triangle. Pour alléger notre propos, il aurait été préférable d'utiliser les *résultats* de Bienstock plutôt que d'adapter sa preuve, mais nous n'y sommes pas parvenus. Notons que notre construction est plus simple que celle de Bienstock car ce dernier prouvait des propriétés plus difficiles (NP-complétude de la recherche de paires d'amis). On notera qu'*a priori* il n'y a pas de rapport directe entre la recherche de prismes et la recherche de paires d'amis. Il est donc remarquable que ces deux structures soient liés à la fois par des théorèmes (paire d'amis dans les graphes d'Artémis, où les prismes sont interdits) et par la preuve de NP-complétude à suivre.

Problème 6.22 (Π)
INSTANCE : Un graphe G sans triangle. Deux sommets a et b de G, non adjacents et de degré 2.
QUESTION : Y a-t-il un trou de G passant par a et b ?
COMPLEXITÉ : NP-complet.

PREUVE — Pour un rappel de la définition du problème 3-SAT, voir 1.2.2 page 20. Il est clair que Π est un problème NP. Soit f une instance de 3-SAT, consistant en m clauses $C_1, \ldots, C_m$ sur n variables $x_1, \ldots, x_n$. Nous allons construire un graphe sans triangle G_f dont la taille sera majorée par un

polynôme en la taille de f et contenant deux sommets distingués a et b de degré deux, tels que G_f contient un trou passant par a et b si et seulement si f est satisfaisable. Ceci prouvera le théorème. Les étapes de la construction de G_f sont représentées figure 6.4.

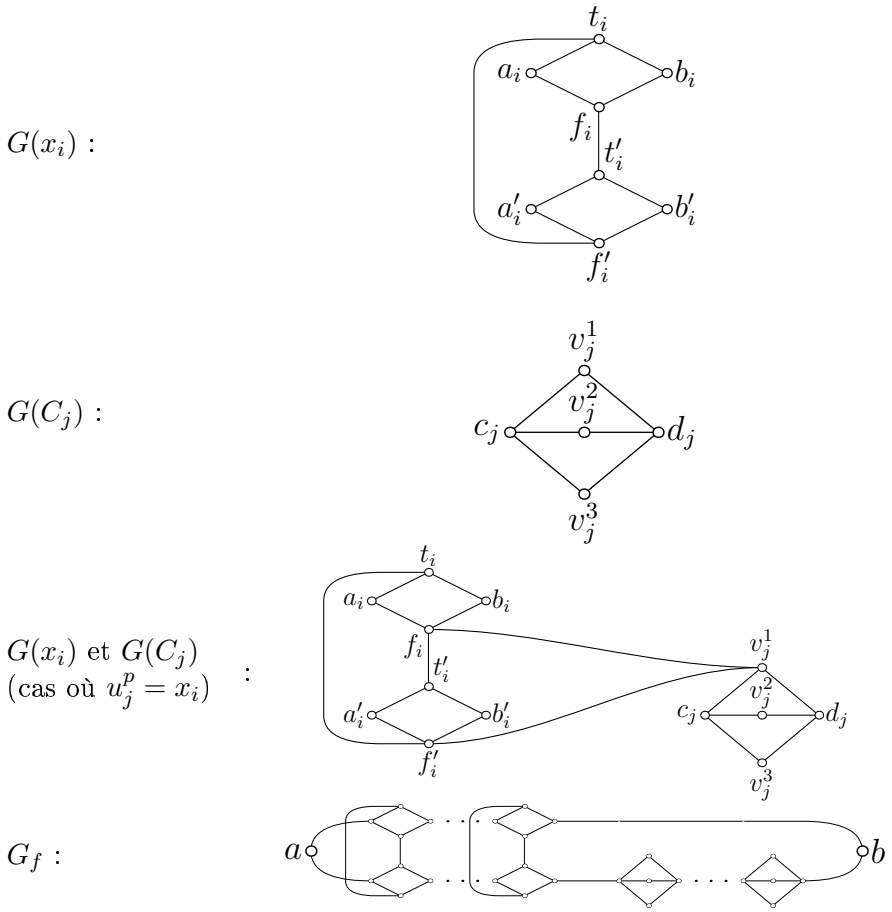


FIG. 6.4 – Étapes de la construction de G_f

- Pour chaque variable x_i $(i = 1, \ldots, n)$, on définit le graphe $G(x_i)$ avec huit sommets a_i, b_i, t_i, f_i, a'_i, b'_i, t'_i, f'_i et dix arêtes a_it_i, a_if_i, b_it_i, b_if_i, $a'_it'_i$, $a'_if'_i$, $b'_it'_i$, $b'_if'_i$, $t_if'_i$, t'_if_i.
- Pour chaque clause C_j $(j = 1, \ldots, m)$, avec $C_j = u_j^1 \vee u_j^2 \vee u_j^3$, où chaque u_j^p $(p = 1, 2, 3)$ est un littéral de $\{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, on définit un graphe $G(C_j)$ avec cinq sommets $c_j, d_j, v_j^1, v_j^2, v_j^3$ et six arêtes de sorte que chaque c_j, d_j voit chaque v_j^1, v_j^2, v_j^3.
- Pour $p = 1, 2, 3$, si $u_j^p = x_i$ alors on ajoute deux arêtes $v_j^p f_i$ et $v_j^p f'_i$. Si au contraire $u_j^p = \overline{x}_i$ alors on ajoute deux arêtes $v_j^p t_i$ et $v_j^p t'_i$.

Le graphe G_f est obtenu à partir de l'union disjointe des $G(x_i)$ et des

$G(C_j)$ de la manière suivante. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, on ajoute les arêtes $b_i a_{i+1}$ et $b'_i a'_{i+1}$. On rajoute l'arête $b'_n c_1$. Pour $j = 1, \ldots, m-1$, on ajoute l'arête $d_j c_{j+1}$. On introduit les deux sommets distingués a et b, puis on ajoute les arêtes aa_1, aa'_1, bd_m, bb_n. La taille de G_f est un polynôme en la taille f (en fait la taille de G_f est $O(n+m)$). On constate que G_f ne contient pas de triangle, et que a et b sont de degré 2.

On va montrer que si l'on dispose d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre Π, alors on dispose d'un algorithme en temps polynomial pour résoudre 3-SAT. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'une instance f de 3-SAT est satisfaisable si et seulement si le graphe G_f contient un trou passant par a et b.

(1) Si f est satisfaisable, alors G_f contient un trou passant par a et b.

Soit $\xi \in \{0,1\}^n$ un vecteur booléen qui satisfait f. On trouve un trou dans G en sélectionnant les sommets comme suit. On sélectionne a et b. Pour $i = 1, \ldots, n$, on sélectionne a_i, b_i, a'_i, b'_i ; de plus, si $\xi_i = 1$, on sélectionne t_i, t'_i, tandis que si $\xi_i = 0$, on sélectionne f_i, f'_i. Pour $j = 1, \ldots, m$, puisque ξ satisfait f, au moins l'un des trois littéraux de C_j est égal à 1. Donc il existe $p \in \{1,2,3\}$ tel que $u_j^p = 1$. On sélectionne alors c_j, d_j et v_j^p. Il est clair que les sommets sélectionnés appartiennent à un cycle Z qui contient a et b. On vérifie que Z est sans corde. Le seul point délicat est que Z ne contient aucune corde entre un sommet de $G(C_j)$ et un sommet de $G(x_i)$, car une telle corde serait ou bien une arête $t_i v_j^p$ (ou $t'_i v_j^p$) avec $u_j^p = x_i$ et $\xi_i = 1$, ou bien, symétriquement, une arête $f_i v_j^p$ (ou $f'_i v_j^p$) avec $u_j^p = \overline{x}_i$ et $\xi_i = 0$. Dans tous les cas, on aurait une contradiction avec la méthode de sélection. Ceci prouve (1).

Réciproquement, supposons que G_f contienne un trou Z avec $a, b \in V(Z)$. Alors Z contient a_1 et a'_1 puisque ce sont les seuls voisins de a dans G_f.

(2) Pour $i = 1, \ldots, n$, Z contient exactement six sommets de G_i : quatre d'entre eux sont a_i, a'_i, b_i, b'_i, et les deux autres sont ou bien t_i et t'_i, ou bien f_i et f'_i.

On étudie d'abord le cas $i = 1$. Puisque $a, a_1 \in Z$ et que a_1 n'a que trois voisins a, t_1, f_1, exactement l'un de t_1, f_1 est dans Z. De même exactement l'un de t'_1, f'_1 est dans Z. Si t_1 et f'_1 sont dans Z, alors les sommets a, a_1, a'_1, t_1, f'_1 sont tous dans Z et ils induisent un trou qui ne contient pas b : une contradiction. De même on n'a pas simultanément t'_1 et f_1 dans Z. Donc, par symétrie, on peut supposer que t_1, t'_1 sont dans Z tandis que f_1 et f'_1 n'y sont pas. S'il existe un sommet $u_j^p \in G(C_j)$ (avec $1 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq 3$) dans Z et que ce sommet est adjacent à t_1, alors, puisque ce sommet u_j^p est aussi adjacent à t'_1, on voit que les sommets $a, a_1, a'_1, t_1, t'_1, u_j^p$ sont tous dans Z et induisent un trou qui ne contient pas b : une contradiction. Donc le voisin de t_1 sur Z qui est différent de a_1 n'est pas dans l'un des $G(C_j)$ $(1 \leq j \leq m)$, donc ce voisin

est b_1. De même, $b'_1 \in Z$. On a donc prouvé (2) pour $i = 1$. Puisque $b_1 \in Z$ et qu'exactement l'un de t_1 et f_1 est dans Z, puisque b_1 est de degré 3, on conclut que a_2 est dans Z. De même, on conclut que b_2 est dans Z. Pour $i = 2$, la preuve est essentiellement identique au cas $i = 1$, et par récurrence on parvient à $i = n$. Ceci prouve (2).

(3) Pour $j = 1, \ldots, m$, Z contient c_j, d_j et un sommet exactement parmi v_j^1, v_j^2, v_j^3.

On étudie d'abord le cas $j = 1$. D'après (2), $b'_n \in Z$ et un sommet exactement parmi t'_n, f'_n est dans Z. Donc, puisque b'_n est de degré 3, c_1 est dans Z. Par conséquent, exactement un sommet parmi v_1^1, v_1^2, v_1^3 est dans Z, par exemple, sans perte de généralité, v_1^1. Le voisin de v_1^1 dans Z qui est différent de c_1 ne peut pas être un sommet de $G(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$, car ce serait alors t_i (ou f_i). Or, on sait d'après (2) que les deux voisins de t_i (ou f_i) dans Z sont des sommets de $G(x_i)$. Le sommet t_i (ou f_i) aurait alors trois voisins dans Z : une contradiction avec l'état de trou. Finalement, l'autre voisin de u_1^1 dans Z est d_1, et on a démontré (3) pour $j = 1$. Puisque d_1 est de degré 4 et qu'exactement l'un de v_1^1, v_1^2, v_1^3 est dans Z, on constate que c_2 est dans Z. La preuve est essentiellement identique pour $j = 2$, et par récurrence on parvient à $j = m$. Ceci prouve (3).

À partir de Z, on construit maintenant un vecteur booléen ξ comme suit. Pour $i = 1, \ldots, n$, si Z contient t_i et t'_i, on pose $\xi_i = 1$; si Z contient f_i et f'_i on pose $\xi_i = 0$. D'après (2), cela a bien un sens.

Soit C_j $(1 \leq j \leq m)$ une clause de f. D'après (3) et sans perte de généralité, on peut supposer que v_j^1 est dans Z. Si $u_j^1 = x_i$ avec $i \in \{1, .., n\}$, alors la construction de G_f entraîne que ni f_i ni f'_i ne sont dans Z. Donc, t_i et t'_i sont dans Z, et donc $\xi_i = 1$ et la clause C_j est satisfaite par x_i. De même, si $u_j^1 = \overline{x}_i$ avec $i \in \{1, .., n\}$, alors la construction de G_f entraîne que ni t_i ni t'_i ne sont dans Z. Donc, f_i et f'_i sont dans Z, donc $\xi_i = 0$ et la clause C_j est satisfaite par $\overline{x}_i$. Finalement, ξ satisfait f. □

La NP-complétude de Π entraîne directement celle de plusieurs problèmes. Nous pourrions peut-être écrire un problème générique de détection de sous-graphes induits formés de cliques et de chemins les reliant, mais cela serait d'un formalisme un peu lourd. Nous préférons nous restreindre ici aux problèmes pertinents pour notre étude. Nous espérons convaincre le lecteur que, pour des usages futurs, le problème Π est assez facile à réduire à divers problèmes.

Théorème 6.23 *Les cinq problèmes suivants sont NP-complets :*

1. INSTANCE : *Un graphe G contenant exactement deux triangles.*
   QUESTION : *G contient-il un prisme ?*
2. INSTANCE : *Un graphe G contenant exactement deux triangles.*

QUESTION : *G contient-il un prisme impair ?*

3. INSTANCE : *Un graphe G contenant exactement deux triangles.*
   QUESTION : *G contient-il un prisme pair ?*
4. INSTANCE : *Un graphe G contenant exactement quatre triangles.*
   QUESTION : *G contient-il le line-graphe d'une subdivision de K_4 ?*
5. INSTANCE : *Un graphe G contenant exactement quatre triangles.*
   QUESTION : *G contient-il le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4 ?*

PREUVE — Pour chacun des cinq problèmes, on va supposer que l'on connaît un algorithme de décision en temps polynomial. Puis, on va en réduire polynomialement le problème considéré au problème Π, ce qui prouvera le théorème. Soit donc (G, a, b) une instance du problème Π. On rappelle que par définition G est sans triangle, que a et b sont non adjacents et de degré 2.

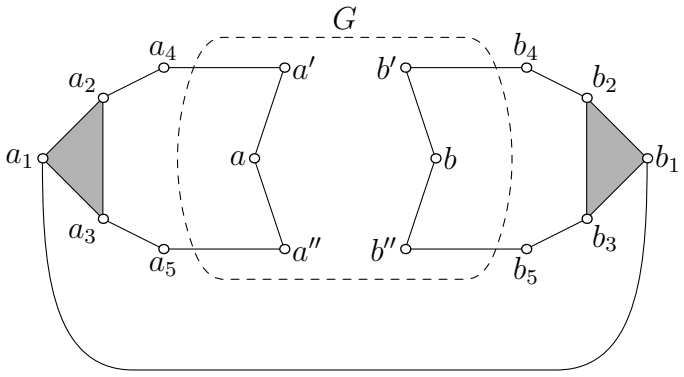


FIG. 6.5 – G et G', réduction de Π à la recherche de prismes

1. À partir de G, on construit le graphe G' ainsi (voir figure 6.5) : on remplace le sommet a par le graphe avec cinq sommets a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et cinq arêtes a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_5. On relie a_4 à l'un des voisins de a et a_5 à l'autre voisin de a. On remplace de même le sommet b par le graphe avec cinq sommets b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et cinq arêtes b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_5. On relie b_4 à l'un des voisins de b et b_5 à l'autre voisin de b. On relie a_1 et b_1. Comme G est sans triangle, on voit que G' possède un prisme si et seulement si G possède un trou passant par a et b. Il est en outre évident que G' ne possède que deux triangles. Donc, si l'on sait détecter un prisme en temps polynomial, alors on sait résoudre Pi en temps polynomial.
2. À partir de G, on construit le graphe G' comme ci-dessus. Puis on construit huit graphes auxiliaires $G(i, j, k)$ avec $(i, j, k) \in \{0, 1\}^3$ de la manière suivante : selon que $i = 1$ ou $i = 0$, on subdivise ou non l'arête a_2a_4 en lui ajoutant un sommet. De même, selon que $j = 1$ ou $j = 0$

pour l'arête a_3a_5. De même, selon que $k = 1$ ou $k = 0$ pour l'arête a_1b_1. On constate alors que G possède un trou passant par a et b si le graphe obtenu par réunion disjointe des $G_{i,j,k}$ posssède un prisme impair.

3. À partir de G, on construit les huit graphes auxiliaires $G(i, j, k)$ comme ci-dessus. On vérifie alors que G possède un trou passant par a et b si et seulement si le graphe obtenu par réunion disjointe des $G_{i,j,k}$ posssède un prisme pair.

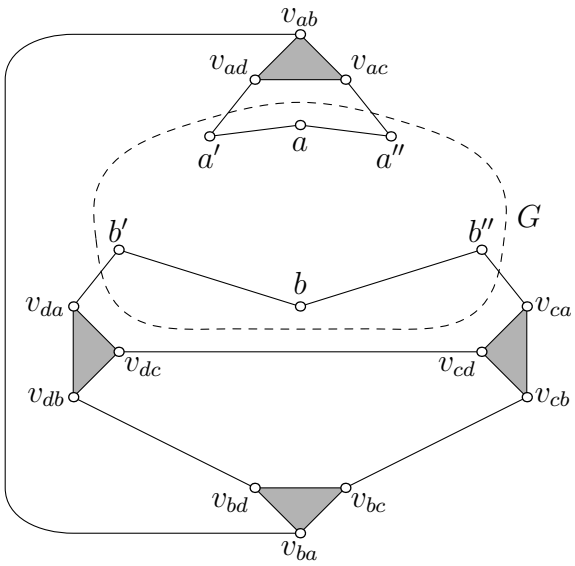


FIG. 6.6 – Réduction de Π à la recherche de line-graphes de subdivision de K_4

4. À partir de G, on construit un graphe G' de la manière suivante (voir figure 6.6) : on enlève les sommets a et b et on ajoute douze sommets v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}, v_{ba}, v_{bc}, v_{bd}, v_{ca}, v_{cb}, v_{cd}, v_{da}, v_{db} et v_{dc}. On ajoute des arêtes de sorte que chaque ensemble $\{v_{ab}, v_{ac}, v_{ad}\}$, $\{v_{ba}, v_{bc}, v_{bd}\}$, $\{v_{ca}, v_{cb}, v_{cd}\}$ et $\{v_{da}, v_{db}, v_{dc}\}$ soit un triangle. On ajoute les arêtes $v_{ab}v_{ba}$, $v_{dc}v_{cd}$, $v_{bd}v_{db}$ et $v_{bc}v_{cb}$. On relie v_{ad} à l'un des voisins de a dans G, et v_{ac} à l'autre voisin de a dans G. On relie v_{da} à l'un des voisins de b dans G et v_{ca} à l'autre voisin de b dans G. On vérifie que G possède un trou passant par a et b si et seulement si G' contient le line-graphe d'une subdivision bipartie de K_4.

5. À partir de G, on construit un graphe G' comme ci-dessus. Puis on construit quatre graphes auxiliaires $G(i, j)$ avec $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ de la manière suivante : selon que $i = 1$ ou $i = 0$, on subdivise ou non l'arête $v_{ad}a'$ en lui ajoutant un sommet. De même selon que $j = 1$ ou $j = 0$ pour l'arête $v_{ac}a''$. On constate alors que G possède un trou passant

par a et b si et seulement si le graphe obtenu par réunion disjointe des $G_{i,j}$ posssède un line-graphe de subdivision bipartie de K_4.

□

6.4 Reconnaissance et coloration

Nous pouvons résumer les résultats de ce chapitre dans le tableau 6.1. Chaque ligne correspond à un problème de détection que l'on analyse dans une classe de graphes correspondant à une colonne. Pour trois problèmes de détection dans les graphes sans pyramide (signalés par " ?"), nous ne sommes pas parvenus à déterminer de complexité. Si nous devions risquer une conjecture, nous dirions que ces problèmes ont la même complexité que le problème de la détection des trous impairs (conjecture peu aventureuse).

	Graphes généraux	Graphes sans pyramide	Graphes sans trou impair
Prisme ou Pyramide	n^5	n^5	n^5
Pyramide	n^9 [22]	1	1
Prisme	NPC	n^5	n^5
LGSNTK_4	NPC	n^{20}	n^{20}
LGSBK_4	NPC	?	n^{20}
Prisme impair	NPC	?	n^{20}
Prisme pair	NPC	?	n^{11}

TAB. 6.1 – Complexité de divers problèmes de détection

Grâce à nos algorithmes de détection, nous pouvons donner des algorithmes de reconnaissance pour les classes de graphes étudiées dans les chapitres précédents :

Algorithme 6.24
ENTRÉE : Un graphe G.
SORTIE : Si le graphe est d'Artémis : OUI. Sinon, NON.
CALCUL :
- Vérifier que G ne possède pas d'antitrou long à l'aide de l'algorithme 6.2 exécuté sur $\overline{G}$.
- Vérifier que G est de Berge à l'aide de l'algorithme 6.4.
- Vérifier que G est sans prisme et sans pyramide à l'aide de l'algorithme 6.8.
- Si toutes les vérifications ont donné OUI, retourner OUI. Sinon, retourner NON.

COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

PREUVE — Quasiment évidente. Il faut juste noter que les graphes de Berge n'ont pas de pyramide. Donc, si G est de Berge, l'algorithme 6.8 vérifie simplement que G est sans prisme. □

L'algorithme de reconnaissance des graphes d'Artémis permet également de colorier les graphes d'Artémis en temps polynomial. On énumère toutes les paires d'amis de G, que l'on contracte (rappelons qu'on sait vérifier qu'une paire de sommets d'un graphe de Berge est une paire d'amis). Pour chaque paire, on vérifie que le graphe obtenu est bien d'Artémis (grâce à l'algorithme ci-dessus). Si c'est le cas, on recommence sur le graphe contracté juqu'à obtenir une clique. Par le théorème 5.2, on sait que cela fonctionnera. Au pire, il faudra appeler n^3 fois l'algorithme 6.24 : car dans un graphe à n sommets, il y a au pire $O(n^2)$ paires à tester, et au pire, il faudra faire n contractions avant d'obtenir une clique. La complexité de cet algorithme est finalement $O(n^{12})$, ce qui est assez médiocre par rapport à l'algorithme 5.14 qui est de complexité $O(n^2m)$.

Algorithme 6.25

ENTRÉE : Un graphe G.
SORTIE : Si le graphe est d'Artemis pair : OUI. Sinon, NON.
CALCUL :
- À l'aide de l'algorithme 6.24, verifier que G est d'Artémis. Si tel est le cas poursuivre, sinon stopper et répondre NON.
- À l'aide de l'algorithme 6.20 vérifier que G est sans prisme impair. Si tel est le cas, retourner OUI sinon, stopper et répondre NON.

COMPLEXITÉ : $O(n^{20})$.

PREUVE — Il faut simplement remarquer que les graphes d'Artémis ne possèdent pas de trou impair, condition requise pour pouvoir exécuter l'algorithme 6.20. □

Si les conjectures de Everett et Reed (conjecture 3.12 et 3.13, page 47) devaient être prouvées, alors cela impliquerait l'existence d'un algorithme par contraction de paires d'amis pour colorier les graphes parfaitement contractiles. Il faut bien noter que ce fait, certes plausible, n'a rien d'évident même une fois connu l'algorithme de recherche d'une paire d'amis dans les graphes de Berge. Si la conjecture 3.13 est vraie, alors les graphes d'Artémis pairs sont exactement les graphes parfaitement contractiles. Dans ce cas, tout graphe d'Artémis pair différent d'une clique possède une paire d'amis dont la contraction redonne un graphe d'Artémis pair (d'après la conjecture 3.12). Le principe de l'algorithme est donc simple : pour toute paire d'amis du graphe, vérifier que sa contraction donne à nouveau un graphe parfaitement contractile. Si les conjectures de Reed et Everett sont vraies, cette vérification est possible grâce à l'algorithme 6.25. Une fois la paire trouvée, recommencer sur le graphe contracté jusqu'à obtenir une clique. Au pire, il faut $O(n^3)\times O(n^{20})$

étapes, ce qui donne une complexité de $O(n^{23})$. En résumé :

Algorithme 6.26
ENTRÉE : Un graphe d'Artémis pair G.
SORTIE : Une coloration de G, qui est optimale si les conjectures 3.12 et 3.13 sont vraies.
CALCUL : Voir ci-dessus.
COMPLEXITÉ : $O(n^{23})$.

Voilà une motivation supplémentaire pour chercher une preuve à la conjecture de Everett et Reed, car quelle que soit cette preuve, algorithmique ou non, on sait déjà qu'elle permettra de colorier tous les graphes parfaitement contractiles en temps polynomial. On peut toutefois espérer, comme pour les graphes d'Artémis, une preuve donnant un algorithme de coloration plus efficace.

On peut aussi donner un algorithme de reconnaissance des graphes bipartisans :

Algorithme 6.27
ENTRÉE : Un graphe G.
SORTIE : Si le graphe est bipartisan : OUI. Sinon, NON.
CALCUL :
- Vérifier que G est de Berge à l'aide de l'algorithme 6.4.
- Vérifier que G est sans prisme long à l'aide de l'algorithme 6.9.
- Vérifier que G ne possède ni double diamant ni $L(K_{3,3}\backslash e)$ en étudiant systématiquement tous les 8-uplets de sommets de G.
- Si toutes les vérifications ont donné OUI, retourner OUI. Sinon, retourner NON.

COMPLEXITÉ : $O(n^9)$.

PREUVE — Clair. □

6.5 Questions ouvertes

La question ouverte la plus évidente (non pas à résoudre, mais à se poser) est celle de la reconnaissance des graphes sans trou impair. Notons que Conforti, Cornuéjols, Kapoor et Vušković ont résolu un problème similaire : la reconnaissance des graphes sans trou pair [28, 29]. Mais de nombreux autres problèmes demeurent.

Reconnaissance rapide des graphes d'Artémis

Les sections précédentes semblent indiquer que la reconnaissance des graphes d'Artémis est plus facile que celle des graphes de Berge. Tout

d'abord, l'interdiction simultanée des prismes et des pyramides facilite leur détection. La section de l'article de Chudnovsky et Seymour [22] consacrée à la détection des pyramides est donc simplifiée, et leur algorithme accéléré. De plus pour la partie "nettoyage", on n'a plus à se soucier des "raquettes" des plus petits trous impairs : elles donnent des pyramides. L'interdiction des antitrous facilite la preuve du lemme sur les composantes anticonnexes de sommets majeurs d'un trou impair de taille minimale (lemme 4.1 de [19]). Malgré toutes ces simplifications, certaines étapes essentielles de l'algorithme de reconnaissance des graphes de Berge ne sont pas accélérées dans le cas des graphes d'Artémis, notamment le spectaculaire lemme 5.1 de [19], qui permet de "deviner" en $O(n^9)$ les sommets majeurs d'un trou dans l'étape du nettoyage.

Plus courts chemins impairs

Il existe un algorithme de plus courte *chaîne* impaire, découvert par J. Edmonds (nous l'avons déjà mentionné, algorithme 3.8 page 43). Mise à part son application directe pour la détection de paire d'amis dans les line-graphes (algorithme 3.10), nous n'avons pas réussi à utiliser cet algorithme pour résoudre des problèmes de reconnaissance. La difficulté, c'est qu'à cause des cordes, une plus courte chaîne impaire ne donne pas toujours un plus court chemin impair.

On sait grâce à Bienstock [13] que le problème de décider si une paire de sommets d'un graphe quelconque est une paire d'amis est NP-complet. Donc le problème de la recherche d'un plus court chemin impair entre deux sommets donnés d'un graphe quelconque est lui aussi clairement NP-difficile. Mais comme on l'a déjà dit, le problème de la paire d'amis devient polynomial dans le cas particulier des graphes de Berge. András Sebő m'a donc posé la question suivante :

Question 6.28 Existe-t-il un algorithme de plus court *chemin* de longueur impaire dans les graphes sans trou impair ?

Notons que s'il existait un jour un algorithme de recherche de plus court trou impair, alors cet algorithme permettrait facilement de répondre positivement à la question ci-dessus. Mais réciproquement, une réponse positive à la réponse ci-dessus n'impliquerait pas nécessairement qu'on sache détecter les trous impairs dans un graphe quelconque. Signalons la thèse d'Éric Tannier [106], dont le dernier chapitre est consacré à une vue d'ensemble de la littérature sur les problèmes de recherche de chemins avec contraintes de parité.

Trigraphes de Berge

Dans sa thèse, Maria Chudnovsky a introduit la notion de trigraphe de Berge que nous avons déja évoquée page 36. Rappelons qu'un trigraphe G est un triplet (V, E_1, E_2). Les ensembles E_1 et E_2 sont des sous-ensembles disjoints de l'ensemble des paires de V. L'ensemble E_1 représente l'ensemble des arêtes "obligatoires" de G, tandis que E_2 est l'ensemble des arêtes "optionnelles". Plus formellement, on appelle *réalisation* de G tout graphe $G' = (V, E)$ vérifiant $E_1 \subseteq E \subseteq E_1 \cup E_2$. Un trigraphe est dit *de Berge* si toutes ses réalisations sont des graphes de Berge. On peut naturellement s'interroger sur la reconnaissance des trigraphes de Berge, problème que nous soupçonnons NP-difficile, sans avoir pu le prouver.

Nous avons trouvé deux articles ([37] et [16]) portant sur des questions similaires, appelées par leurs auteures (Maria Cerioli, Hazel Everett, Celina de Figueiredo, Sulamita Klein et Kristina Vušković), "problèmes de sandwichs". Reformulé dans le vocabulaire des trigraphes, un problème de sandwich consiste à se demander, étant donné un trigraphe G et un graphe H, si l'une au moins des réalisations de G contient H. Reconnaître les trigraphes de Berge, c'est donc se poser le problème du sandwich pour les trous impairs et les antitrous impairs.

Lecture algorithmique de la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits

Les algorithmes de détection de sous-graphes présentés dans ce chapitre étaient à l'origine motivés par la reconnaissance des graphes d'Artémis. Par une curieuse coïncidence, ils conduisent à détecter la majorité des sous-graphes utilisés dans la preuve de la conjecture forte des graphes parfaits. On peut donc se demander s'il est possible de lire cette preuve comme un algorithme en temps polynomial qui étant donné un graphe de Berge montre qu'il est basique, ou alors le décompose. Répondre à cette question nécessiterait probablement des vérifications fastidieuses pour un résultat assez maigre, puisqu'on sait directement détecter les 2-joints et les partitions antisymétriques dans n'importe quel graphe. Mentionnons toutefois qu'un tel travail permettrait peut-être de résoudre (pour les graphes de Berge) une question ouverte pour autant que nous le sachions :

Question 6.29 Existe-t-il un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe possède une partition antisymétrique paire ?

Bibliographie

[1] S. R. Arikati and U.N. Peled. A polynomial algorithm for the parity path problem on perfectly orientable graphs. *Discrete Appl. Math.*, 65 :5–20, 1996.

[2] S. R. Arikati and C. Pandu Randan. An efficient algorithm for finding a two-pair and its applications. *Discrete Appl. Math.*, 31 :71–74, 1991.

[3] L. W. Beineke. Characterisation of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9 :129–135, 1970.

[4] L. W. Beineke. Derived graphs with derived complements. In *Lecture Notes in Math. (Proc. Conf., New York, 1970)*, pages 15–24. Springer, 1971.

[5] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.

[6] C. Berge. Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung). Technical report, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Math.-Natur. Reihe (Halle-Wittenberg), 1961.

[7] C. Berge. Some classes of perfect graphs. In *Six papers on Graph Theory*, Calcutta, 1963. Indian Statistical Institute.

[8] C. Berge. *Graphs*. North-Holland, 1985.

[9] C. Berge and J. L. Ramírez Alfonsín. Origins and Genesis. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 1–12.

[10] C. Berge and V. Chvátal, editors. *Topics on perfect graphs*, volume 21 of *Ann. Discrete Math.* North Holland, Amsterdam, 1984.

[11] M.E. Bertschi. *La colorabilité unique dans les graphes parfaits*. PhD thesis, Institut de Mathématiques, Université de Lausanne, 1988.

[12] M.E. Bertschi. Perfectly contractile graphs. *J. Comb. Th. B*, 50 :222–230, 1990.

[13] D. Bienstock. On the complexity of testing for odd holes and induced odd paths. *Discrete Math.*, 90 :85–92, 1991. See also *corrigendum* by B. Reed, Discrete Mathematics, 102, (1992), p. 109.

[14] R. G. Bland, H. C. Huang, and L. E. Trotter, Jr. Graphical properties related to minimal imperfection. *Discrete Math.*, 27 :11–22, 1979.

[15] M. Burlet and J. Fonlupt. Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph. In *Progress in Combinatorial Optimization, Waterloo, Ont. (1982)*, pages 69–99. Academic Press, 1984.

[16] M. Cerioli, H. Everett, C. M. H. de Figueiredo, and S. Klein. The homogeneous set sandwich problem. *Inf. Process. Lett. 67*, 1 :31–35, 1998.

[17] M. Chudnovsky. *Berge trigraphs and their applications.* PhD thesis, Princeton University, 2003.

[18] M. Chudnovsky. Berge trigraphs. Manuscript, 2004.

[19] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour, and K. Vušković. Cleaning for Bergeness. Manuscript, 2003.

[20] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Progress on perfect graphs. Manuscript, 2002.

[21] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. Manuscript, 2002.

[22] M. Chudnovsky and P. Seymour. Recognizing Berge graphs. Manuscript, 2002.

[23] V. Chvátal. Perfectly ordered graphs. In Berge and Chvátal [10], pages 63–65.

[24] V. Chvátal. Star-cutsets and perfect graphs. *J. Combin. Ser. B*, 39 :189–199, 1985.

[25] V. Chvátal. A bibliography on perfect graphs. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 329–358.

[26] V. Chvátal and N. Sbihi. Bull-free Berge graphs are perfect. *Graphs and Combinatorics*, 3 :127–139, 1987.

[27] A. Cobham. The intrinsic computational difficulty of function. In *Proc. 1964 International Congress for Logic Methodoloy and Philosophy of Science*, volume 10, pages 24–30. North Holland, 1964.

[28] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor, and K. Vušković. Even-hole-free graphs Part I : Decomposition theorem. *Journal of graph theory*, 39 :6–49, 2002.

[29] M. Conforti, G. Cornuéjols, A. Kapoor, and K. Vušković. Even-hole-free graphs Part II : Recognition algorithm. *Journal of graph theory*, 40 :238–266, 2002.

[30] M. Conforti, G. Cornuéjols, and K. Vušković. Square-free perfect graphs. *Jour. Comb. Th. Ser. B*, 90 :257–307, 2004.

[31] M. Conforti, G. Cornuéjols, and K. Vušković. Decomposition of Berge graphs by double star cutsets and 2-joins. Manuscript, March 2001.

[32] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pages 151–158, New York, 1971.

[33] G. Cornuéjols and W. H. Cunningham. Composition for perfect graphs. *Disc. Math.*, 55 :245–254, 1985.

[34] G. Cornuéjols, X. Liu, and K. Vušković. A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs. Manuscript, 2002.

[35] G. Cornuéjols and B. Reed. Complete multipartite cutsets in minimal imperfect graphs. *J. Com. Th. Ser. B*, 59 :191–198, 1993.

[36] C. M. H. de Figueiredo, S. Klein, Y. Kohayakawa, and B. Reed. Finding skew partitions efficiently. *J. Algorithms*, 37 :505–521, 2000.

[37] C. M. H. de Figueiredo, S. Klein, and K. Vušković. The graph sandwich problem for 1-join composition is NP-complete. *Discrete Applied Math.*, 121 :73–82, 2002.

[38] C. M. H. de Figueiredo and F. Maffray. Optimizing bull-free perfect graphs. To appear in SIAM J. Disc. Math.

[39] C. M. H. de Figueiredo, F. Maffray, and O. Porto. On the structure of bull-free perfect graphs. *Graphs Combin.*, 13 :31–55, 1997.

[40] C. M. H. de Figueiredo and K. Vušković. Recognition of quasi-Meyniel graphs. *Disc. Appl. Math.*, 113 :255–260, 2001.

[41] R. Descombes. *Les carrés magiques.* Vuibert, 2000.

[42] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer, New York, second edition, 2000.

[43] G. A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hambourg*, 25 :71–76, 1961.

[44] J. Edmonds. Minimum partition of a matroid into independent subsets. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69 :67–72, 1965.

[45] J. Edmonds. Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.*, 17 :449–467, 1965.

[46] H. Everett, C.M.H. de Figueiredo, C. Linhares Sales, F. Maffray, O. Porto, and B.A. Reed. Even pairs. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 67–92.

[47] A. Farrugia. Self-complementary graphs and generalisations : a comprehensive reference manual. Master's thesis, University of Malta, 1999.

[48] J. Fonlupt and J.P. Uhry. Transformations which preserve perfectness and h-perfectness of graphs. *Ann. Disc. Math.*, 16 :83–85, 1982.

[49] D. R. Fulkerson. Anti-blocking polyhedra. *J. Comb. Th. Ser. B*, 12 :50–71, 1972.

[50] T. Gallai. Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, 7 :3–36, 1962.

[51] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computer and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, San Fransisco, 1979.

[52] G. S. Gasparian. Minimal imperfect graphs : a simple approach. *Combinatorica*, 16 :209–212, 1996.

[53] A. Ghouila-Houri. Sur une conjecture de Berge (mimeo). 1960.

[54] M. Gröstchel, L. Lovász, and A. Schrijver. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. Springer Verlag, 1988.

[55] F. Harary and C. Holzmann. Line graphs of bipartite graphs. *Rev. Soc. Mat. Chile*, 1 :19–22, 1974.

[56] R. Hayward, C.T. Hoàng, and F. Maffray. Optimizing weakly triangulated graphs. *Graphs and Combin.*, 5 :339–349, 1989. See also Erratum in vol. 6 (1990), 33–35.

[57] R. Hayward, J. Spinrad, and R. Sritharan. Weakly chordal graphs algorithms via handles. In *Proceedings of the eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 42–49, 2000.

[58] R. B. Hayward. Weakly triangulated graphs. *J. Comb. Th. B*, 39 :200–209, 1985.

[59] A. Hertz. A fast algorithm for coloring Meyniel graphs. *J. Comb. Th. B*, 50 :231–240, 1990.

[60] A. Hertz and D. de Werra. Perfectly orderable graphs are quasi-parity graphs : a short proof. *Discrete Math.*, 68 :111–113, 1988.

[61] C. T. Hoàng. On a conjecture of meyniel. *J. Comb. Th. Ser. B*, 42 :302–312, 1987.

[62] C. T. Hoàng. On the complexity of recognizing a class of perfectly orderable graphs. *Discrete App. Math.*, 66(3) :219–226, 1996.

[63] C. T. Hoàng. Some properties of minimal imperfect graphs. *Disc. Math.*, 160 :165–175, 1996.

[64] C. T. Hoàng. Perfectly ordorable graphs : a survey. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 139–166.

[65] C. T. Hoàng and F. Maffray. Weakly triangulated graphs are strict quasi-parity graphs. Technical Report Rutcor Research Report 6-86, Rutgers University, 1986.

[66] S. Hougardy. *Perfekte Graphen*. PhD thesis, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Rheinische Friedrich Wilhelms Universität, Bonn, Germany, 1991.

[67] S. Hougardy. Even and odd pairs in line-graphs of bipartite graphs. *European J. Combin.*, 16 :17–21, 1995.

[68] S. Hougardy. Classes of perfect graphs. Manuscript, 2003.

[69] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, 1972.

[70] A. E. Kézdy and M. Scobee. A proof of Hougardy's conjecture for diamond-free graphs. *Disc. Math.*, 240 :83–95, 2001.

[71] D. König. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletében. *Mat. Természettud. Értesitő*, 34 :104–119, 1916.

[72] D. König. Graphen und Matrizen. *Mat. Fiz. Lapok*, 38 :116–119, 1931.

[73] P. G. H. Lehot. An optimal algorithm to detect a line graph and outpout its root graph. *J. of the Association for Computing Machinery*, 21(4) :569–575, 1974.

[74] B. Lévêque and F. Maffray. A linear time algorithm for coloring Meyniel graphs. Cahier du laboratoire Leibniz, 105, 2004.

[75] C. Linhares Sales and F. Maffray. Even pairs in claw-free perfect graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 74 :169–191, 1998.

[76] C. Linhares Sales and F. Maffray. Even pairs in square-free Berge graphs. *Matemática Contemporânea*, 25 :161–176, 2003.

[77] C. Linhares Sales, F. Maffray, and B.A. Reed. On planar perfectly contractile graphs. *Graphs and Combin.*, 13 :167–187, 1997.

[78] C. Linhares Sales, F. Maffray, and B.A. Reed. On planar strict quasi-parity graphs. Manuscript, 1999.

[79] L. Lovász. A characterization of perfect graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 13 :95–98, 1972.

[80] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 2 :253–267, 1972.

[81] L. Lovász. Perfect graphs. In L.W. Beineke and R.L. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 55–87. Academic Press, 1983.

[82] F. Maffray and N. Trotignon. A class of perfectly contractile graphs. *Soumis au Jour. Comb. Th. Ser. B*, 2003.

[83] F. Maffray and N. Trotignon. Algorithms for perfectly contractile graphs. Soumis au *SIAM J. of discrete math.*, 2004.

[84] S.E. Markosian and I.A. Karapetian. On perfect graphs. *Akad. Nauk. Armjan. SSR Dokl*, 63 :292–296, 1976.

[85] H. Meyniel. On the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 16 :339–342, 1976.

[86] H. Meyniel. A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *European J. Comb.*, 8 :313–316, 1987.

[87] M. Middendorf and F. Pfeiffer. On the complexity of recognizing perfectly orderable graphs. *Discrete Math.*, 80(3) :327–333, 1990.

[88] E. F. Moore. The shortest path through a maze. In *Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, 2–5 april 1957*, pages 285–292, Baton Rouge, 1959.

[89] S. D. Nikolopoulos and L. Palios. Hole and antihole detection in graphs. Manuscript, 2004.

[90] M. W. Padberg. Almost integral polyhedra related to certain combinatorial optimization problems. *Math. Programming*, 6 :180–196, 1974.

[91] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, Reading, 1994.

[92] G. Perec. Experimental demonstration of the tomatotopic organization in the soprano (*Cantatrix sopranica L.*). In *Cantatrix sopranica L. et autres écrits scientifiques*. Seuil, 1991.

[93] M. Preissmann and A. Sebő. Some aspects of minimal imperfect graphs. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 185–214.

[94] J. L. Ramírez Alfonsín and B. A. Reed, editors. *Perfect graphs*. Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 2001.

[95] B. Reed. From conjecture to theorem. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 13–24.

[96] B. Reed. A gentle introduction to semi-definite programming. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 233–259.

[97] B. A. Reed and N. Sbihi. Recognizing bull-free perfect graphs. *Graphs and Combinatorics*, 11 :171–178, 1995.

[98] B.A. Reed. Problem session on parity problems (public communication). 1993.

[99] F. Roussel and P. Rubio. About skew partitions in minimal imperfect graphs. *J. Comb. Th. B*, 83 :171–190, 2001.

[100] F. Roussel and I. Rusu. Holes and dominoes in Meyniel graphs. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 10 :127–146, 1999.

[101] N. D. Roussopoulos. A max $\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G. *Information Processing Letters*, 2 :108–112, 1973.

[102] I. Rusu. Even pairs in artemis graphs. *Discrete Math*, 218 :185–197, 2000.

[103] I. Rusu. Cutsets in perfect and minimal imperfect graphs. In Ramírez Alfonsín and Reed [94], pages 167–183.

[104] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency*, volume A. Springer, 2003.

[105] J. Spinrad and R. Sritharan. Algorithms for weakly triangulated graphs. *Discrete Applied Math.*, 59 :181–191, 1995.

[106] É. Tannier. Sur quelques problèmes de recouvrement et empilement dans les graphes et les matroïdes. Thèse, Université Joseph Fourier — Grenoble I, 2002.

[107] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 54 :150–168, 1932.

[108] G. Zambelli. *On Perfect Graphs and Balanced Matrices.* PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2004.

Index

$\alpha(G)$, 11
$\chi(G)$, 11
$\omega(G)$, 11
2-joint, 31
    détection, 37
    impair, 101
    pair, 101
2-paire, 51
    détection, 51
    graphes faiblement triangulés, 51, 98
3-SAT, 21

$*$, dans P^*, 12
$-$, dans $u-P-v$, 12
$/$, dans G/v, 11
$/$, dans G/xy, 44
$[\dots]$ dans $G[\dots]$, 10
$\overline{\dots}$ dans $\overline{G}$, 10
$\setminus$, dans $G \setminus F$, 10
$\binom{V}{k}$, 9

adjacent, 9
algorithme, 18, 19
amis, voir paire d'amis
antichemin, 12
anticomplet, 33
anticonnexe, 12
antisymétrique, voir partition antisymétrique
antitrou, 12
arête, 9
    T-arête, 65
    d'un cycle, 12
    d'une chaîne, 12
Artémis (graphe d'—), 47
    caractérisation, 99
    coloration, 96, 134
    conjecture, 48
    décomposition, 99
    lemme de Roussel et Rubio, 72
    paire d'amis, 48, 81, 99
    reconnaissance, 133
    reconnaissance rapide, 135
Artémis pair (graphe d'—), 47
    coloration, 135
    conjecture, 47
    décomposition, 100
    paire d'amis, 47
    reconnaissance, 134
articulation, 13
autocomplémentaire, 10

basique, 27
Berge (graphe de —)
    décomposition, 32
Berge (graphe de —), 26
    décomposition, 32, 35, 37
    reconnaissance, 106
Berge (trigraphe de —), 36, 137
bicographe, 34, 36
biparti, 10
bipartisan (graphe —), 42
    conjecture, 42
    décomposition, 100
    paire d'amis, 42
    reconnaissance, 135
bon certificat, 20
booléen, 21
boucle, 9

$C(T)$, 80
C_n, 12
calcul, 19
carré, 12
    — magique, 17
    graphes de Berge sans —, décomposition, 32
    graphe d'Artémis sans —, 48, 79
certificat, 20
chaîne, 12

algorithme de plus courte — de longueur paire, 43, 136
chemin, 12
— sortant entre 2 cliques, 56
— sortant pour $C(T)$, 82
plus court —, 13, 20
plus court — de longueur impaire, 43, 136
chromatique, 11
clique, 10
d'articulation, 30
NP-complétude, 21
Co-NP, 20
coin
d'un prisme, 14
d'une pyramide, 15
coloration, 6, 11
graphes de Meyniel, 50
graphes d'Artémis, 96
graphes d'Artémis pairs, 135
graphes parfaits, 26
graphes d'Artémis, 134
graphes faiblement triangulés, 98
graphes parfaitement ordonnables, 53, 98
NP-complétude, 25
complémentaire, 10
complet
biparti —, 10
couple —, 33
ensemble — à, 33
graphe —, 10
NP- —, 21
complexité, 19
composante, 12
connexe, 12
k-connexe, 13
contient, 10
contractile (graphe —), 47
contraction, 44
corde
d'un cycle, 12
d'une chaîne, 12
couleur, 5, 11
cycle, 12

décision, 19
décomposition, 29
graphes bipartisans, 100
graphes d'Artémis, 99
graphes de Berge, 32, 35, 37
graphes de Berge sans carré, 32
graphes de Meyniel, 48
graphes faiblement triangulés, 51
graphes triangulés, 30
graphes d'Artémis pairs, 100
graphes sans trou impair, 32
par 2-joint, 31, 99
par 2-joint pair, 101
par étoile double, 32
par clique d'articulation, 30
par paire homogène, 33
par partition antisymétrique, 31, 37, 99
décomposition et paires d'amis, 100
décomposition et reconnaissance, 37, 106
détection
2-joints, 37
2-paires, 51
line-graphes de subdivision bipartie de K_4, 115, 130
paire d'amis, 40–42
partition antisymétrique, 37, 137
prismes, 130
prismes longs, 110
prismes ou pyramides, 109, 110
prismes impairs, 126, 130
prismes pairs, 115, 130
pyramides, 106
résumé des résultats, 133
sous-graphes, 106–127
trous, 105
degré, 10
diamant, 16
distance, 13
double, voir étoile double
double-diamant, 16
décomposition, 35

$E(\dots)$, 9
efficace, 19
entrée, 19
étoile, 30
étoile double, 32
extrémités
d'un chemin, 12
d'un quasi-prisme, 14
d'une arête, 9
d'une chaîne, 12

faiblement triangulé (graphe —)
coloration, 98
décomposition, 51
existence d'une 2-paire, 51, 98
lemme de Roussel et Rubio, 73
paire d'amis, 51
reconnaissance, 51, 104
fini, 10
former
un prisme, 14
une pyramide, 15

graphe, 9
Grenoble (graphe de —), 47
griffe, 15

homogène, voir paire homogène

impair
2-joint —, 101
prisme —, 14
imparfait, voir minimalement imparfait
incident, 9
indécidable, 19
induit, 10
instance, 19
taille d'une —, 19
intéressant (ensemble —), 80
intérieur, 12
isomorphisme, 10

2-joint, 31

K_n, 10
$K_{a,b}$, 11

$L(\dots)$, 11
$L(K_4)$, 17
$L(K_{3,3} \setminus e)$, 18
$L(K_{3,3})$, 18
$\lg(\dots)$, 12
Landau (notation de —), 19
lemme de Roussel et Rubio, 65
corollaires, 73
graphes de Meyniel, 72
graphes d'Artémis, 72
graphes d'Artémis pairs, 72
graphes faiblement triangulés, 73
line-graphe, 11
calcul de la racine, 27
line-graphe de biparti, 27
caractérisation, 28
line-graphe de graphe sans triangle
caractérisation, 57
line-graphe de subdivision bipartie de K_4
contient un prisme impair, 117
contient un prisme long, 99
décomposition, 35
détection des —, 115, 130
figure, 115
long
détection des prismes —, 110
prisme —, 14
trou ou antitrou —, 12
longueur
d'un chemin, 12
d'une chaîne, 12

manquer, 9
Meyniel (graphe de —), 48
coloration, 50
décomposition, 48
lemme de Roussel et Rubio, 72
paire d'amis, 50, 97
reconnaissance, 48
milieu (— d'un chemin), 113
minimalement imparfait (graphe —), 28
étoile d'articulation, 30
2-joint, 32
cliques ennemies, 60, 62–63
double étoile, 33
paire d'amis, 40
partition antisymétrique, 31, 34
M-joint, voir paire homogène

$N(\dots)$, 10
nettoyage, 105, 135
nombre chromatique, 11
NP, 20
NP-complet, 21
NP-difficile, 21

$O(\dots)$, 19
optimal
algorithme —, 19
coloration —, 11
sous-graphe —, 107

ordonnable (graphe parfaitement —), 52
orienté, 10
orientable (graphe parfaitement —), 52

P_n, 12
pair
  2-joint —, 101
  partition —, 55
  partition antisymétrique —, 34
  prisme —, 14
2-paire, 51
  détection, 51
  graphes faiblement triangulés, 51, 98
paire d'amis, 39
  — spéciale, 80
  coloration, 45
  contraction, 44
  détection dans les line-graphes, 42, 43
  détection dans line-graphes de biparti, 41
  détection en général, 40
  graphes bipartisans, 42
  graphes d'Artémis, 48, 81, 99
  graphes d'Artémis pairs, 47
  graphes de Meyniel, 50, 97
  graphes faiblement triangulés, 51
  graphes minimalement imparfaits, 40
  graphes parfaitement ordonnables, 52
  outil de reconnaissance, 46
paire homogène, 33
parfaitement contractile (graphe —), 47, 48
parfaitement ordonnable (graphe —), 52
  coloration, 53, 98
  paire d'amis, 52
  reconnaissance, 52
parfaitement orientable (graphe —), 52
parfait (graphe —), 26
partitionnable (graphe —), 28
partition antisymétrique, 31
  détection, 37, 137
partition antisymétrique paire, 34
partition paire, 55
pièce, 30
polynomial, 19
prisme, 13
  détection des —, 106, 109, 110, 130
  détection des — impairs, 126, 130
  détection des — longs, 110
  détection des — pairs, 115, 130
  quasi - —, 14
problème, 19
problème de décision, 19
pyramide, 14
  contient un trou impair, 15
  détection des —, 106, 110

quasi-Meyniel (graphe de —), 50, 97
quasi-parité (graphe de —), 40
  caractérisation, 42
  graphes sans taureau, 41
quasi-parité stricte (graphe de —), 40
  caractérisation, 41
quasi-prisme, 14
question, 19

réplication (lemme de —), 28
raquette, 105, 135
reconnaissance
  graphes bipartisans, 135
  graphes de Meyniel, 48
  graphes d'Artémis, 133, 135
  graphes d'Artémis pairs, 134
  graphes de Berge, 106
  graphes faiblement triangulés, 51, 104
  graphes parfaitement ordonnables, 52
  lien avec la coloration, 133
représentation d'un graphe, 11
représenter un sommet, 44
robuste (algorithme —), 97
Roussel et Rubio, voir lemme de Roussel et Rubio

sans, 10
3-SAT, 21
satisfaire, 21
simple, 10
simplicial, 10

sommet, 9
sortant
    chemin — entre 2 cliques, 56
    chemin — pour $C(T)$, 82
sortie, 19
sous-chemin, 12
sous-graphe, 10
spéciale (paire d'amis —), 80
stable, 10
strict
    quasi-parité —, voir quasi-parité stricte
    quasi-prisme —, 14
subdivision, 11
    — triviale, 40, 117

taille
    d'un graphe en tant qu'instance, 19
    d'une instance, 19
    d'un graphe, 10
taureau, 16
    graphe sans —, 41
temps
    linéaire, 19
    polynomial, 19
trame
    d'un line graphe de subdivision de K_4, 118
    d'un prisme pair, 113
triangle, 10
    line-graphe d'un graphe sans —, 57
triangulé, 30
trigraphe, 36, 137
triviale, 40, 117
trou, 12

$V(\dots)$, 9
voir, 9
voisin, 9

Résumé : Ce travail a pour motivation une meilleure compréhension des graphes parfaits. La preuve en 2002 de la conjecture des graphes parfaits de Claude Berge par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas a jeté une lumière nouvelle sur ce domaine de la combinatoire, mais a laissé plusieurs questions en suspens, notamment l'existence d'un algorithme combinatoire de coloration des graphes parfaits.

Une paire d'amis d'un graphe est une paire de sommets telle que tous les chemins les reliant sont de longueur paire. Comme l'ont montré Fonlupt et Urhy, la contraction d'une paire amis préserve le nombre chromatique du graphe, et appliquée récursivement, permet dans certains cas de colorier optimalement le graphe. Nous prouvons une conjecture de Everett et Reed affirmant que cette approche fonctionne pour une classe de graphes parfaits : les graphes d'Artémis. Nous en déduisons un algorithme de coloration des graphes Artémis de complexité $O(n^2m)$.

Nous donnons un algorithme de complexité $O(n^9)$ pour la reconnaissance des graphes d'Artémis. D'autres algorithmes de reconnaissance sont donnés, tous fondés sur des routines de détection de sous-graphes dans des graphes de Berge. Nous montrons que ces problèmes de détection sont NP-complets si on cherche à les étendre aux graphes quelconques.

Mots-clef : Graphe parfait, algorithme, paire d'amis, coloration, reconnaissance, graphe parfaitement contractile.

Abstract : This work is motivated by the desire for a better understanding of perfect graphs. The proof of the Claude Berge's perfect graph conjecture in 2002 by Chudnovsky, Robertson, Seymour and Thomas has shed a new light on this field of combinatorics. But some questions are still unsettled, particulary the existence of a combinatorial algorithm for the coloring of perfect graphs.

An even pair of a graph is a pair of vertices such that every path joining them has even length. As proved by Fonlupt and Uhry, the contraction of an even pair preserves the chromatic number, and when applied recursively may lead to an optimal coloring. We prove a conjecture of Everett and Reed saying that this method works for a class of perfect graphs : Artemis graphs. This yields a coloring algorithm for Artemis graphs with complexity $O(n^2m)$.

We give an $O(n^9)$ algorithm for the recognition of Artemis graphs. Other recognition algorithms are also given, each of them based on subgraph detection routines for Berge graphs. We show that these subgraph detection problems are NP-complete when extended to general graphs.

Key-words : Perfect graph, algorithm, even pair, coloring, recognition, perfectly contractile graph.

Discipline : Mathématiques Informatique.
Formation doctorale : Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation.