



**HAL**  
open science

# Etude de propriétés thermodynamiques de structures hybrides métal normal ou ferromagnétique / supraconducteur

Jérôme Cayssol

► **To cite this version:**

Jérôme Cayssol. Etude de propriétés thermodynamiques de structures hybrides métal normal ou ferromagnétique / supraconducteur. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. NNT : . tel-00008723

**HAL Id: tel-00008723**

**<https://theses.hal.science/tel-00008723v1>**

Submitted on 8 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS-7

JUSSIEU

## **THESE**

présentée par

Jérôme CAYSSOL

### **Etudes de propriétés thermodynamiques de structures hybrides métal normal/métal ferromagnétique - supraconducteur**

Soutenance prévue le 19 novembre 2003 devant la Commission d'examen :

MM.	H. BOUCHIAT	
	M. BÜTTIKER	
	B. DOUCOT	
	F.W.J. HEKKING	Rapporteur
	T. MARTIN	Rapporteur
	G. MONTAMBAUX	Directeur de thèse



*A mes parents*

## Remerciements

Ces trois dernières années, j'ai travaillé au Laboratoire de Physique des Solides (LPS) à Orsay pour la recherche et à l'Université Paris 7 (Denis Diderot) pour l'enseignement. Je tiens d'abord à remercier Jean Charvolin et Jean-Paul Pouget pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire, ainsi que Luc Valentin pour l'UFR de Physique de Paris 7.

Je remercie Frank Hekking et Thierry Martin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et d'être venus respectivement de Grenoble et de Marseille pour la soutenance. Je remercie également Markus Büttiker dont une des nombreuses contributions à la physique mésoscopique constitue le point de départ de cette thèse. Enfin, j'exprime toute ma gratitude à Hélène Bouchiat et à Benoît Douçot pour leur participation active à ce jury bien sûr, mais aussi pour le caractère "dopant" et très plaisant des interactions que nous avons eues au cours de ces trois années.

Cette évocation de personnalités scientifiques à l'enthousiasme communicatif me conduit tout naturellement à exprimer ma grande sympathie et ma gratitude envers mon directeur de thèse Gilles Montambaux. J'ai beaucoup admiré sa capacité à mener en parallèle plusieurs activités de recherche, d'encadrement, d'organisation de conférences, d'enseignement, de gestion du laboratoire et d'écriture. Malgré son emploi du temps compact, il a toujours été disponible pour répondre à mes questions ou pour me suggérer des idées. De plus, il m'a offert la chance de participer à de nombreuses conférences et écoles. Pour cela, je remercie aussi le groupe théoricien et le LPS d'offrir ce type d'opportunité à un jeune thésard. J'ai également bénéficié de l'entourage des membres du "groupe théoriciens" au LPS, en particulier Gilles Abramovici, Nicolas Dupuis, Marc Gabay, Michel Héritier, Inès Safy, Anu Jaganathan, Pascal Lederer, KV Pham et Frederic Piéchon. Je remercie également Christophe Texier du LPTMS/LPS et l'ensemble de l'"Helene's group", Sophie Guéron, Richard Deblock et Meydi Ferrier pour nos discussions scientifiques avant et après soutenance. Enfin mon copain de DEA, Takis Kontos avec qui Gilles et moi avons eu le plaisir de collaborer de manière fructueuse.

Parmi les thésards et les post-docs, j'ai fait de nombreuses rencontres agréables. Nous avons bientôt formé un groupe à la fois très uni et très métissé. Merci donc à Mahassine, Imen, Nada, Jeanne, Aurélie, Sielke, Jan-Christoph, Patrick, Karol, Mark-Olivier, Eric, Luca, Samy, Ken-Ishiro,... Je remercie mes marraines Catherine Even et Carole Vouille ainsi que le mentor Gilles Abramovici de nous avoir accompagné pendant de nombreux repas. Hors LPS, je pense aussi à Piotr à Kasia que je remercie pour leur amitié et l'aide logistique lors de ma soutenance et de celle de Fenglei. Merci à Benjamin, Isabelle, Hans

Nikolas, Marjolaine Andrea, Bertrand, Li-Ting. Merci à Laure-Hélène Reydellet et sa famille pour leur soutien. Enfin, les conditions de travail doivent beaucoup à l'ensemble du personnel technique et administratif de la grosse machine qu'est le LPS. Je remercie tout particulièrement Yvette Dufour pour avoir assuré les travaux de reprographie de ce manuscrit et pour son aide les veilles de départs en conférence.

Pour l'enseignement, j'ai eu le plaisir de rencontrer la joyeuse équipe de PH255 (Electromagnétisme en DEUG) et de la préparation aux ENSI : Yves Delaval, Claude Klapish, Caroline Terquem, Cyrille Flament, Claude Guthmann, Jean-Marc Esteva, Philippe Delannoy, Galliano Valent, Janet Borg. Merci à Bernard Diu pour son cours de mécanique quantique, Alain Laverne pour la relativité et Galliano Valent pour la théorie des groupes en physique.

Enfin en remontant un peu dans le temps, je remercie Alain Sacuto, Philippe Monod, Nicole Bontemps et Yannick de Wilde qui ont guidé mes premiers pas en recherche. A ce propos, je salue le petit joyeux petit groupe de l'ENS formé autour de Sophie Djorjevitch, d'Andres Santander et de Yannick de Wilde.

Je dédie cette thèse à mes parents qui m'ont offert la chance de poursuivre des études longues en toute liberté. Merci encore à eux et à mon frère, à Martine, à Charlotte, à Loïc et au petit Mathieu pour m'avoir toujours entouré de leur affection malgré un certain éloignement géographique.

Merci à Fenglei d'être...Fenglei. Mais Nathan m'appelle alors bonne lecture!

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Supraconductivité mésoscopique</b>	<b>5</b>
1.1 Supraconductivité inhomogène . . . . .	5
1.2 Formalisme des quasiparticules . . . . .	7
1.2.1 Equations de Bogoliubov-de Gennes . . . . .	8
1.2.2 Approximation quasiclassique . . . . .	10
1.2.3 Géométrie annulaire . . . . .	12
1.3 Théorie de Gor'kov . . . . .	16
1.3.1 Fonctions de Green . . . . .	16
1.3.2 Géométrie annulaire . . . . .	17
1.4 Comparaison des deux formalismes . . . . .	18
1.4.1 Représentations de Källen-Lehmann . . . . .	18
1.4.2 Avantages et inconvénients des formalismes des quasiparticules et des fonctions de Green . . . . .	19
1.5 Conclusion . . . . .	19
<b>2 Equations quasiclassiques</b>	<b>21</b>
2.1 Théorie quasiclassique d'Eilenberger . . . . .	21
2.2 Théorie d'Usadel . . . . .	27
2.3 Calcul du courant . . . . .	30
2.4 Conclusion . . . . .	31
<b>3 Réflexion d'Andreev sur une interface NS</b>	<b>33</b>
3.1 Réflexion d'Andreev dans le formalisme des quasiparticules . . . . .	33
3.2 Fonctions de Gor'kov et effet de proximité . . . . .	39
3.3 Méthodes quasiclassiques sans barrière . . . . .	41
3.4 Méthodes quasiclassiques avec barrière . . . . .	42
3.5 Conclusion . . . . .	43
<b>4 Anneau NS mésoscopique</b>	<b>45</b>
4.1 Effet Josephson et échelles d'énergie . . . . .	47
4.2 Théorie quasiclassique des jonctions SNS balistiques . . . . .	50
4.3 Spectre d'excitation de l'anneau NS propre . . . . .	54

4.4	Méthode de calcul du courant . . . . .	60
4.5	Spectres et courants de l'anneau NS . . . . .	63
4.6	Conclusion . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Jonctions SFS</b>	<b>75</b>
5.1	Effet de proximité FS . . . . .	76
5.2	Théorie quasiclassique des jonctions SFS balistiques . . . . .	81
5.3	Spectre SFS par la méthode de Bogoliubov-de Gennes . . . . .	85
5.4	Faible polarisation de spin : phase effective . . . . .	87
5.5	Forte polarisation de spin : étude numérique . . . . .	94
5.6	Conclusion . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Interface NS et théorie de perturbation</b>	<b>99</b>
6.1	Systèmes normaux diffusifs . . . . .	100
6.2	Développement des solutions des équations d'Usadel . . . . .	103
6.2.1	Cas uniforme . . . . .	103
6.2.2	Interface NS . . . . .	103
6.3	Théorie de perturbation . . . . .	106
6.4	Supraconducteur uniforme . . . . .	108
6.5	Interface NS : effet de proximité . . . . .	109
6.6	Diagrammes aux ordres suivants . . . . .	112
6.7	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>
	<b>Annexe 1 : paramètres <math>r_\epsilon</math> et <math>\Theta_\epsilon</math></b>	<b>119</b>
	<b>Annexe 2 : détail du calcul de <math>f_\omega^{(3)}(x)</math></b>	<b>121</b>

# Introduction générale

Le sujet de cette thèse est issu de la rencontre de deux domaines de la physique quantique de la matière condensée : **la supraconductivité et la physique mésoscopique des conducteurs cohérents de phase**. Les trois études menées dans ce travail concernent **l'effet de proximité entre un métal supraconducteur (S) et un métal normal (N) ou ferromagnétique (F)**.

## Supraconductivité inhomogène et propriétés de paires

En 1957, la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) [1] permettait enfin de comprendre l'essentiel des propriétés d'équilibre des métaux supraconducteurs homogènes telles que la conductivité infinie, l'effet Meissner, la chaleur spécifique,... En revanche, les mêmes propriétés dans des systèmes inhomogènes, comme la conduction à travers un contact métal normal-métal supraconducteur NS, l'effet Meissner dans un bicouche NS, la chaleur spécifique de la phase mixte d'un supraconducteur de type II, etc... ne découlent pas trivialement de la connaissance de l'état fondamental BCS et des propriétés d'un métal normal. En effet, de nouveaux effets apparaissent dont le plus spectaculaire est sans doute *l'effet Josephson [2] : lorsque deux supraconducteurs sont séparés par une barrière isolante et portés à des phases différentes, un courant non dissipatif de paires de Cooper traverse la couche isolante*. Pour pouvoir étudier ces systèmes inhomogènes, Bogoliubov-de Gennes et Gor'kov ont reformulé la théorie BCS en termes d'équations différentielles (cf. chapitre 1). La plupart des travaux ultérieurs sur l'effet Josephson stationnaire ou alternatif utilisent le cadre de la simplification quasiclassique des équations de Gor'kov réalisée par Eilenberger pour les systèmes balistiques, et par Usadel pour les systèmes diffusifs (cf. chapitre 2).

## Physique mésoscopique et propriétés monoélectroniques

En général, un échantillon mésoscopique est un "petit" objet cohérent de phase connecté à des électrodes macroscopiques. Ici, "petit" signifie de taille inférieure à la distance moyenne  $L_\phi$  entre deux événements d'interaction inélastique de l'électron avec son environnement constitué des autres électrons, du bain de phonons,...

L'approche de Landauer-Büttiker [3],[4] consiste à concevoir les électrodes comme des réservoirs qui émettent des ondes électroniques vers l'échantillon (états "in" ou entrants). Ces ondes sont diffusées (au sens de "scattering") par le petit objet et "captées" par les

électrodes (états "out" ou sortants). Les propriétés thermodynamiques et de transport s'expriment en fonction de la matrice de diffusion du système mésoscopique qui connecte les amplitudes des états sortants à celles des états entrants. Cette approche est particulièrement efficace pour étudier les systèmes balistiques mais permet aussi d'accéder à la physique du désordre grâce aux matrices aléatoires [5].

Une autre façon de voir un système mésoscopique consiste à imaginer que l'électron peut traverser l'échantillon en empruntant diverses trajectoires. Dans cette approche d'intégrale de chemin adoptée par Altshuler et Aronov au début des années 80, les amplitudes associées aux diverses trajectoires peuvent interférer et produire des effets mesurables comme les oscillations de conductance d'un anneau mésoscopique sous champ magnétique. De plus, même dans les systèmes désordonnés, certains effets d'interférences subsistent comme les corrections de localisation faible ou les fluctuations universelles de conductance [6], [7] et [8]. Ces propriétés sont alors reliées à la probabilité de retour à l'origine d'un paquet d'onde électronique. Cette approche est bien adaptée à la description des conducteurs normaux diffusifs [9], [10] et [11].

### Coexistence d'ordres antagonistes : effet de proximité

Nous connaissons divers états de la matière électronique : le liquide de Fermi paramagnétique, l'état supraconducteur résultant de la condensation de paires d'électrons, l'état ferromagnétique dans lequel les spins des électrons s'alignent entre eux, ainsi que de nombreux états exotiques (supraconducteurs à haute température critique),... Les propriétés de ces divers "états fondamentaux ou d'équilibre" de la matière semblent parfois complètement inconciliables. *Comment peut-on essayer de faire coexister deux ordres antagonistes ?*

La première idée consiste à imaginer une situation dans laquelle la compétition a lieu dans un même matériau homogène. Par exemple, un métal supraconducteur juste au-dessus de sa température de transition va présenter une conductance finie de métal normal corrigée par les fluctuations supraconductrices. Un autre exemple est la coexistence du ferromagnétisme et de la supraconductivité qui conduit à un état Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov dans lequel le paramètre d'ordre supraconducteur est modulé spatialement ainsi que la densité de spin [12],[13]. Hélas, cet état n'a jamais été observé expérimentalement sans doute à cause de son domaine de stabilité très réduit dans le diagramme de phase température-champ d'échange.

Une seconde voie consiste à contacter un métal normal ou un métal ferromagnétique avec un supraconducteur. Le métal normal ou ferromagnétique peut alors acquérir certaines caractéristiques de la supraconductivité : on parle d'effet de proximité. Le contrôle expérimental et la compréhension théorique des mécanismes de couplage à la frontière des deux matériaux est évidemment essentielle. Les progrès dans la réalisation de contacts semiconducteur-supraconducteur ont permis de varier la nature du couplage de la limite du contact tunnel à celle du contact parfait. Grâce aux techniques de réfrigération à dilution, les parties normales d'échantillons submicroniques peuvent être rendues cohérentes de phase. Dans ce contexte de progrès expérimental, on a alors assisté à un renouveau de

l'étude de l'effet de proximité dans les structures métal normal-supraconducteur (structures NS), puis métal ferromagnétique-supraconducteur (FS) au cours des années 1990. Beenakker a réinterprété la supraconductivité inhomogène en termes de matrice S de diffusion des quasiparticules [5]. L'originalité de la supraconductivité mésoscopique réside dans l'existence de deux espèces de quasiparticules, les électrons et les trous, couplées par un mécanisme de conversion aux interfaces NS : la réflexion d'Andreev (cf. chapitre 3).

### Plan du manuscrit

Les trois premiers chapitres sont pédagogiques. Dans le premier, je présente le formalisme des quasiparticules et les équations de Gor'kov. Dans le second, je décris la théorie quasiclassique de la supraconductivité. J'insiste chaque fois sur la géométrie annulaire et le calcul du courant. Dans le troisième chapitre, j'introduis le concept de réflexion d'Andreev en appliquant ces trois formalismes à une interface NS avec une barrière de potentiel de force variable. Les trois derniers chapitres présentent nos travaux personnels.

- **Anneau NS mésoscopique (chapitre 4)** : en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes, nous avons obtenu le spectre d'excitation complet et le magnétisme orbital d'un anneau NS. La motivation initiale était de comprendre le passage de la propriété monoélectronique de courant permanent de période  $\phi_o$  dans un anneau métallique cohérent de phase à la propriété de supercourant de paires de Cooper de période  $\phi_o/2$  dans une jonction SNS.

- **Jonction SFS (chapitre 5)** : nous avons étudié l'effet de la compétition entre la réflexion d'Andreev et la réflexion ordinaire dans une jonction SFS balistique monocanal. Largement admis, le calcul quasiclassique de Buzdin [14] suppose que la réflexion d'Andreev est totale dans le cas SFS propre tandis qu'on sait que c'est faux dans une interface FS propre [15]. En utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes, nous avons amélioré la connaissance du spectre de la jonction SFS balistique en traitant à la fois réflexion d'Andreev et réflexion ordinaire. La réflexion ordinaire induit des ouvertures de gap à certains croisements de niveaux. Ces gaps peuvent être importants, mais comme ils se situent toujours en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$ , leur effet sur le courant Josephson est faible. Il faut considérer des énergies d'échange très élevées pour observer un écart important entre notre estimation du courant et l'estimation quasiclassique qui néglige la réflexion ordinaire.

- **Interface NS diffusive (chapitre 6)** : nous avons comparé le développement en série des solutions de l'équation d'Usadel pour une interface NS avec les premiers termes de la série de perturbation issue des équations de Gor'kov. Le but recherché était de retrouver les processus microscopiques de réflexions d'Andreev habillés par des cooperons qui apparaissent dans la physique mésoscopique des systèmes normaux diffusifs.

*Conventions traditionnelles : dans la physique des anneaux normaux, on a l'habitude de compter positivement un courant qui correspond à un moment magnétique de même sens que le champ magnétique. En revanche, tous les articles sur les jonctions SNS utilisent la convention inverse.*

Comme nous traitons à la fois des systèmes hybrides NS et des jonctions SNS, **nous avons choisi d'utiliser la même convention dans toute cette thèse : courant positif pour un anneau paramagnétique et négatif pour un anneau diamagnétique.**

# Chapitre 1

## Supraconductivité mésoscopique

L'intérêt pour les systèmes hybrides combinant supraconducteurs et parties normales remonte aux lendemains de l'explication théorique de la supraconductivité par Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) [1]. Ce domaine connaît un renouveau expérimental et théorique depuis 1990. En effet, les techniques de nanofabrication et de cryogénie actuelles permettent de fabriquer des échantillons hybrides et de les étudier dans un domaine de température où les parties normales sont cohérentes de phase. Conceptuellement, il s'agit de comprendre comment *les propriétés mésoscopiques des métaux normaux cohérents se combinent à la supraconductivité*.

Le but de ce chapitre pédagogique est de présenter deux cadres théoriques pour aborder la supraconductivité inhomogène : *le formalisme des quasiparticules du à Bogoliubov et à de Gennes et le formalisme des fonctions de Green de Gor'kov* [16]. Il s'agit de deux reformulations de la théorie BCS sous forme d'équations différentielles.

Après une brève introduction présentant les systèmes hybrides et rappelant les éléments essentiels de la théorie BCS, je décris le formalisme des quasiparticules en insistant sur *les propriétés d'invariance de jauge en géométrie annulaire* et sur les deux méthodes de *calcul du courant* basées respectivement sur *l'opérateur courant* et sur *le potentiel thermodynamique*. Ensuite, je donne les équations de Gor'kov et rappelle comment calculer le courant à partir des fonctions de Green. Enfin, je conclus sur les avantages et les inconvénients respectifs du formalisme des quasiparticules et des fonctions de Green.

### 1.1 Supraconductivité inhomogène

#### Bref rappel de la théorie BCS

Considérons un système électronique décrit par l'hamiltonien effectif suivant :

$$H = \int d^3r \left[ \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \hat{H}_0 \Psi_{\sigma}(r) + g(r) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}(r) \Psi_{\uparrow}(r) \right] \quad (1.1)$$

contenant :

- un hamiltonien à un corps  $\hat{H}_o = \hat{\xi} + V(r)$  regroupant les termes d'énergie cinétique  $\hat{\xi}$  et d'énergie potentielle  $V(r)$  :

$$\hat{\xi} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r - q\vec{A}(r) \right)^2 - \mu \quad (1.2)$$

où  $\vec{A}(r)$  est le potentiel vecteur et  $\mu = E_F$  le potentiel chimique ou énergie de Fermi.

- et une interaction effective attractive de contact véhiculée par l'échange de phonons entre les électrons. Dans un système inhomogène, l'amplitude  $g(r) \leq 0$  de cette interaction varie avec la position. En particulier, elle est nulle dans les parties de l'échantillon constituées de métal normal.

Le modèle BCS consiste à traiter en champ moyen l'interaction entre les électrons en considérant que les amplitudes de paire du type  $\langle \Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r) \rangle$  ou  $\langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r)\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \rangle$  peuvent être non nulles. La dynamique du système est alors gouvernée par *l'hamiltonien BCS de champ moyen* :

$$\hat{H}_{BCS} = \int d^3r \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) H_o \Psi_{\sigma}(r) - \int d^3r [\Delta(r) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) + \Delta^*(r) \Psi_{\downarrow}(r) \Psi_{\uparrow}(r)] \quad (1.3)$$

complété par *la condition d'autocohérence* :

$$\Delta(r) = |g(r)| \langle \Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r) \rangle = - |g(r)| \langle \Psi_{\uparrow}(r)\Psi_{\downarrow}(r) \rangle \quad (1.4)$$

Les crochets  $\langle \dots \rangle$  désignent une moyenne sur l'état fondamental du système à  $T = 0$  et une moyenne statistique sur la distribution de Gibbs grand-canonique à température non nulle.

La présence d'une interaction attractive produit *un état fondamental corrélé dans lequel les amplitudes de paires  $\langle \Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r) \rangle$  ou  $\langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r)\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \rangle$  sont effectivement non nulles.*

### Supraconductivité inhomogène, systèmes hybrides

Dans un système comprenant un métal non supraconducteur en contact avec un métal supraconducteur, il faut distinguer les amplitudes de paires d'une part et le paramètre d'ordre supraconducteur  $\Delta(r)$  d'autre part. En effet, il peut exister des corrélations supraconductrices non nulles dans le métal normal alors que le paramètre d'ordre  $y$  est nul : *c'est l'effet de proximité*. Ceci ne contredit pas la relation d'autocohérence (1.4) parce que  $g(r)$  est nulle dans le métal normal.

Dans un métal normal infini, il y a une seule échelle d'énergie : l'énergie de Fermi  $\mu = E_F$ . Dans les systèmes hybrides métal normal-métal supraconducteur, il existe toujours au moins deux énergies pertinentes :  $E_F$  et le gap  $\Delta$  du supraconducteur. Pour la supraconductivité conventionnelle, il y a toujours une séparation très marquée entre ces deux

énergies conduisant à une séparation nette des échelles de longueurs. D'une part, "*les propriétés monoélectroniques*", comme le courant permanent, font intervenir *la longueur de De Broglie*  $\lambda_F = 2\pi/k_F$  qui est de l'ordre de quelques angströms dans un métal et peut atteindre quelques centaines d'angströms dans un semiconducteur. D'autre part, "*les propriétés de paires*", comme l'effet de proximité ou le courant Josephson, varient sur des longueurs de l'ordre de *la longueur de cohérence supraconductrice*  $\xi_o$ . Dans un supraconducteur conventionnel, la longueur de cohérence est de l'ordre du micron.

Afin d'étudier la physique d'objets hybrides, comme une interface NS, un vortex, une jonction SNS, etc... il est nécessaire de reformuler la théorie BCS en termes d'équations différentielles. Ce travail a été effectué par Bogoliubov-de Gennes [17] et par Gor'kov [16]. Nous allons présenter ces deux formalismes. Puis, nous les utiliserons pour décrire la physique de l'effet de proximité au chapitre 3.

Ces deux méthodes peuvent se déduire de l'évolution temporelle des opérateurs de création et d'annihilation d'électrons  $\Psi_\sigma^\dagger(r, \tau)$  et  $\Psi_\sigma(r, \tau)$  en représentation d'Heisenberg. En omettant par commodité les dépendances en  $r$  et  $\tau$  des opérateurs, celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} i\partial_\tau \Psi_\uparrow &= [\Psi_\uparrow, \hat{H}_{BCS}] = \hat{H}_o \Psi_\uparrow - \Delta(r) \Psi_\downarrow^\dagger \\ i\partial_\tau \Psi_\downarrow^\dagger &= [\Psi_\downarrow^\dagger, \hat{H}_{BCS}] = -\hat{H}_o \Psi_\downarrow - \Delta^*(r) \Psi_\uparrow^\dagger \end{aligned} \quad (1.5)$$

Tout d'abord, on constate que l'évolution d'un opérateur de création d'électron  $\Psi_\downarrow^\dagger$  est influencée par celle d'un opérateur de création de trou (annihilation d'un électron)  $\Psi_\uparrow$  à cause du terme en  $\Delta(r)$ . Ensuite, il y a deux voies différentes selon que l'on cherche comme Bogoliubov-de Gennes *les excitations propres* correspondant à l'hamiltonien (1.3) ou *les propagateurs de ces excitations* en suivant la démarche de Gor'kov.

## 1.2 Formalisme des quasiparticules

Dans cette partie, j'introduis le formalisme des quasiparticules. L'idée générale consiste à *trouver une base d'excitations propres (les quasiparticules) qui diagonalise l'hamiltonien BCS*, qui est non diagonal dans la base de départ des électrons nus. Cette diagonalisation due à Bogoliubov-Valatin-De Gennes étant traitée dans de nombreux ouvrages [17],[18],[19], j'insiste ici surtout sur les points utiles pour comprendre nos propres travaux.

D'une part, j'explique comment *l'approximation d'Andreev* permet de simplifier les équations de Bogoliubov-de Gennes. Cette approximation est basée sur la séparation des échelles d'énergie  $\Delta \ll E_F$  et réapparaîtra dans le formalisme des fonctions de Green quasiclassiques au chapitre 2.

D'autre part, je décris les spécificités des *systèmes hybrides en géométrie annulaire* en détaillant les conséquences de *l'invariance de jauge* sur les équations de Bogoliubov-de Gennes. Pour calculer *le courant dans un anneau hybride*, il existe deux méthodes basées respectivement sur *l'opérateur courant* et sur *la dérivation du potentiel thermodynamique*

du système de quasiparticules. Nous utiliserons ces propriétés et ces méthodes dans nos études de l'anneau NS au chapitre 4 et de la jonction SFS au chapitre 5.

### 1.2.1 Equations de Bogoliubov-de Gennes

#### Diagonalisation de $H_{BCS}$

L'idée de Bogoliubov [20],[21] et de Valatin [22] consiste à diagonaliser l'hamiltonien BCS (1.3) au moyen d'une transformation unitaire des opérateurs de création et d'annihilation de particules. Bogoliubov et de Gennes ont généralisé cette transformation en incluant une dépendance spatiale des coefficients  $u$  et  $v$  de la matrice de passage :

$$\begin{aligned}\Psi_{\uparrow}(r) &= \sum_n u_n(r)\gamma_{n\uparrow} + v_n^*(r)\gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \\ \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) &= \sum_n u_n^*(r)\gamma_{n\downarrow}^{\dagger} - v_n(r)\gamma_{n\uparrow}\end{aligned}\quad (1.6)$$

En termes d'opérateurs de création et d'annihilation des quasiparticules  $\gamma_{n\sigma}^{\dagger}$  et  $\gamma_{n\sigma}$ , le hamiltonien diagonalisé doit s'écrire :

$$H_{BCS} = E_o + \sum_n \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \epsilon_n \gamma_{n\sigma}^{\dagger} \gamma_{n\sigma} \quad (1.7)$$

ce qui correspond à une évolution temporelle gouvernée par les commutateurs :

$$\begin{aligned}[\gamma_{n\sigma}, H_{BCS}] &= \epsilon_n \gamma_{n\sigma} \\ [\gamma_{n\sigma}^{\dagger}, H_{BCS}] &= -\epsilon_n \gamma_{n\sigma}^{\dagger}\end{aligned}\quad (1.8)$$

En injectant la transformation (1.6) dans l'équation du mouvement (1.5) des électrons nus et en comparant le résultat à l'équation du mouvement (1.8) des quasiparticules, on obtient les *équations de Bogoliubov-de Gennes* :

$$\begin{pmatrix} H_o & \Delta \\ \Delta^* & -H_o^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \epsilon_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

La relation d'autocohérence (1.4) s'écrit :

$$\Delta(r) = |g(r)| \sum_n v_n^*(r) u_n(r) [1 - 2f(\epsilon_n)] \quad (1.10)$$

où  $f(\epsilon) = (1 + e^{\beta\epsilon})^{-1}$  est la fonction de Fermi.

**Commentaires :**

- Les équations de Bogoliubov-de Gennes (1.9) sont des équations du type Schrödinger pour des fonctions d'ondes spinorielles de la forme :

$$\Psi_\sigma(x) = \begin{pmatrix} u_\sigma(x) \\ v_{-\sigma}(x) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Notons  $|0\rangle$  le vide de quasiparticules. Par construction, une quasiparticule de Bogoliubov  $\gamma_\sigma^\dagger |0\rangle$  est un mélange cohérent d'un électron nu  $\Psi_\sigma^\dagger |0\rangle$  affecté d'une amplitude  $u_\sigma$  et d'un trou nu  $\Psi_{-\sigma} |0\rangle$  d'amplitude  $v_{-\sigma}$ . Dans la suite, les fonctions  $u_\sigma(x)$  et  $v_{-\sigma}(x)$  seront appelées fonctions d'onde du canal électron et du canal trou respectivement.

Les équations de Bogoliubov-de Gennes sont donc la traduction dans le langage de la première quantification de l'hamiltonien de champ moyen BCS exprimé au départ en seconde quantification (1.3).

- Ces équations donnent directement le spectre d'excitation et les fonctions d'ondes des quasiparticules d'une structure hybride une fois connus  $V(r)$  et  $\Delta(r)$ .

La structure matricielle des équations de Bogoliubov-de Gennes montre que :

- Un potentiel à un corps  $V(r)$  ne peut coupler que les canaux du même type (électron-électron ou trou-trou) par un *processus de réflexion ordinaire*.
- Le paramètre d'ordre  $\Delta(r)$  non diagonal couple des canaux de types différents, i.e. électron et trou. Le processus correspondant est *la réflexion d'Andreev* et sera décrit en détail dans le chapitre 3.

Il est clair que les équations de Bogoliubov-de Gennes permettent d'étudier l'effet combiné de ces deux types de réflexion. Nous développerons plus précisément ces notions au chapitre 3 en l'étudiant une interface NIS, I étant par exemple une couche diélectrique modélisée par une barrière de potentiel  $V(r)$ .

- On a deux types de fonctions d'ondes spinorielles :

$$\Psi_\uparrow(x) = \begin{pmatrix} u_\uparrow(x) \\ v_\downarrow(x) \end{pmatrix} \quad \Psi_\downarrow(x) = \begin{pmatrix} u_\downarrow(x) \\ v_\uparrow(x) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Si le métal normal ne présente pas un ordre magnétique particulier, chaque énergie d'excitation est doublement dégénérée selon les deux types d'états ci-dessus. En présence d'un ferromagnétique, cette dégénérescence est levée mais les deux spineurs (1.12) obéissent encore à des équations de Bogoliubov-de Gennes découplées avec un potentiel  $V(r) = V_\sigma(r)$  dépendant du spin. En revanche, les processus de spin flip couplent ces deux types d'états et il faut alors introduire des 4-vecteurs et des éléments de matrice de spin flip :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} u_\uparrow(x) \\ v_\downarrow(x) \\ v_\uparrow(x) \\ u_\downarrow(x) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

## 1.2.2 Approximation quasiclassique

### Equations d'Andreev

Nous introduisons maintenant l'approximation quasiclassique qui permet de simplifier les équations de Bogoliubov-de Gennes. Dans des supraconducteurs conventionnels, on a l'inégalité  $\Delta \ll E_F$  qui correspond en termes de longueurs à  $\xi_o \gg \lambda_F$  où  $\xi_o = \hbar v_F / \Delta$  est la longueur de cohérence du supraconducteur (supposé propre). Dans le cas  $V(r) = 0$ , on peut donc chercher les solutions des équations de Bogoliubov-de Gennes sous la forme du produit d'une onde plane de vecteur d'onde  $k_F$  par une enveloppe plus lentement variable dans l'espace :

$$\Psi_\alpha(x) = e^{i\alpha k_F x} \begin{pmatrix} f_u(x) \\ f_v(x) \end{pmatrix}_\alpha \quad (1.14)$$

Les valeurs  $\alpha = \pm 1$  correspondent respectivement à une onde se propageant vers les  $x$  croissants ou vers les  $x$  décroissants. On a :

$$\frac{\hbar}{i} \partial_x u = \frac{\hbar}{i} (i\alpha k_F f_u + \partial_x f_u) e^{i\alpha k_F x} \quad (1.15)$$

En négligeant le terme  $\partial^2 f_u$  devant  $k_F \partial f_u$ , on obtient la linéarisation de l'hamiltonien cinétique :

$$\hat{\xi} u(x) = \left( -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} - \mu \right) u(x) = \alpha \frac{\hbar v_F}{i} (\partial_x f_u) e^{i\alpha k_F x} \quad (1.16)$$

Cette approximation est basée sur l'inégalité  $\lambda_F \ll \xi_o$  car on a en ordres de grandeur :

$$| \partial^2 f_u | \simeq f_u / \xi_o^2 \quad | k_F \partial f_u | \simeq f_u / (\lambda_F \xi_o)$$

On obtient alors *les équations d'Andreev* pour les enveloppes des fonctions d'ondes :

$$\begin{pmatrix} -i\alpha \hbar v_F \partial_x + V & \Delta \\ \Delta^* & i\alpha \hbar v_F \partial_x - V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}_\alpha = \epsilon \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}_\alpha \quad (1.17)$$

Ce sont des équations différentielles du premier ordre avec des relations de dispersion de type relativiste ( $c = v_F$ ).

Cherchons maintenant les solutions des équations d'Andreev pour les deux cas simples du métal normal et du supraconducteur uniforme, tous deux propres  $V(x) = 0$  et placés en champ nul  $A(x) = 0$ .

### Métal normal propre

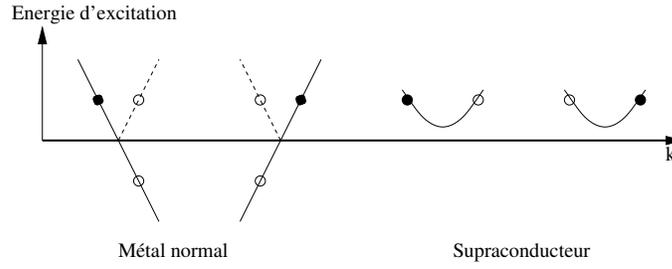


FIG. 1.1 – A gauche : spectre d'excitation linéarisé d'un métal normal. Excitations de type purement électronique (disques noirs) avec  $|k_e| \geq k_F$  et excitations du type trou pur (disques blancs)  $|k_h| \leq k_F$ . A droite : excitations propagatives dans un supraconducteur, composées d'une partie électronique et d'une partie trou.

Comme le paramètre d'ordre supraconducteur est identiquement nul, les canaux électron et trou sont découplés. On a donc deux types de solutions linéairement indépendantes :

- Les "électrons purs"

A une énergie propre  $\epsilon \geq 0$ , il correspond un premier couple de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} f_u(x) \\ f_v(x) \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iq_\alpha x} \quad \text{avec} \quad q_\alpha = \alpha\epsilon/\hbar v_F \quad (1.18)$$

Une excitation électron a donc pour vecteur d'onde :

$$k_e = \alpha(k_F + \epsilon/\hbar v_F) \quad (1.19)$$

- Les "trous purs"

Pour cette même énergie d'excitation  $\epsilon \geq 0$ , il existe un second couple de vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} f_u(x) \\ f_v(x) \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iq_\alpha x} \quad \text{avec} \quad q_\alpha = -\alpha\epsilon/\hbar v_F \quad (1.20)$$

Une excitation trou a donc un vecteur d'onde inférieur à  $k_F$  :

$$k_h = \alpha(k_F - \epsilon/\hbar v_F) \quad (1.21)$$

### Supraconducteur uniforme propre

Le paramètre d'ordre couple les électrons et les trous.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} u_o \\ v_o \end{pmatrix}_\alpha e^{i(\alpha k_F + q_\alpha)x} \quad (1.22)$$

On trouve alors que  $(\hbar v_F q_\alpha)^2 = \epsilon^2 - \Delta^2$ . Les solutions diffèrent selon que l'énergie d'excitation est inférieure ou supérieure à  $\Delta$ .

- *Solutions évanescentes* sous le gap  $\epsilon \leq \Delta$  :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\eta_\epsilon + i\chi} \\ e^{-i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F - \lambda_\epsilon)x} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\eta_\epsilon + i\chi} \\ e^{i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F + \lambda_\epsilon)x} \quad (1.23)$$

où  $e^{2i\eta_\epsilon} = (\epsilon + i\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2})/\Delta$  et  $\lambda_\epsilon = \sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}/\hbar v_F$ .

- *Solutions propagatives au-dessus du gap*  $\epsilon \geq \Delta$  :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\delta_\epsilon + i\chi} \\ e^{\delta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F - \delta k_\epsilon)x} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\delta_\epsilon + i\chi} \\ e^{-\delta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F + \delta k_\epsilon)x} \quad (1.24)$$

où  $e^{2\delta_\epsilon} = (\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2})/\Delta$  et  $\delta k_\epsilon = \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}/\hbar v_F$ .

### Tableau récapitulatif des solutions

champs	vecteur d'onde	$u_o$	$v_o$
Electron	$k_e = \alpha \left( k_F + \frac{\epsilon}{\hbar v_F} \right)$	1	0
Trou	$k_h = \alpha \left( k_F - \frac{\epsilon}{\hbar v_F} \right)$	0	1
Evanescente	$\alpha k_F + i\lambda_\epsilon$	$e^{i\alpha\eta_\epsilon + i\chi}$	$e^{-i\alpha\eta_\epsilon}$
Evanescente	$\alpha k_F - i\lambda_\epsilon$	$e^{-i\alpha\eta_\epsilon + i\chi}$	$e^{i\alpha\eta_\epsilon}$
Propagative électron	$\alpha (k_F + \delta k_\epsilon)$	$e^{\alpha\delta_\epsilon + i\chi}$	$e^{-\alpha\delta_\epsilon}$
Propagative trou	$\alpha (k_F - \delta k_\epsilon)$	$e^{-\alpha\delta_\epsilon + i\chi}$	$e^{\alpha\delta_\epsilon}$

### 1.2.3 Géométrie annulaire

Dans une géométrie annulaire, les fonctions d'ondes et les énergies propres dépendent du flux magnétique traversant l'anneau. Cette sensibilité au flux magnétique se traduit par *un courant non dissipatif circulant dans l'anneau*. Je commence par rappeler comment *l'invariance de jauge* permet de déduire les fonctions d'ondes stationnaires et les énergies d'excitation d'un système sous champ à partir des mêmes quantités en champ nul. Ensuite, je décris les deux méthodes de calcul du courant : la première étant basée sur l'opérateur courant et la seconde sur le potentiel thermodynamique d'un système hybride.

#### Invariance de jauge

On reprend les équations de Bogoliubov-de Gennes exactes (1.9) avec un potentiel vecteur  $A(r)$  non nul et des conditions aux limites périodiques :

$$\begin{aligned} u(r+L) &= u(r) \\ v(r+L) &= v(r) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le paramètre d'ordre supraconducteur  $\Delta(r) = |\Delta(r)| \exp i\chi(r)$  est complexe et sa phase  $\chi(r)$  est modifiée par le champ magnétique.

L'idée d'invariance de jauge locale consiste à décrire la présence d'un champ électromagnétique par une modification de la phase de la fonction d'onde du système. Si on transforme la phase des fonctions d'onde électron et trou selon :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r) &= u(r) \exp -i \frac{q}{\hbar} \int^r A \cdot dl \\ \tilde{v}(r) &= v(r) \exp +i \frac{q}{\hbar} \int^r A \cdot dl \end{aligned} \quad (1.26)$$

D'après la relation d'autocohérence (1.10), le paramètre d'ordre se transforme selon :

$$\Delta(r) \rightarrow \tilde{\Delta}(r) = \Delta(r) \exp -i \frac{2q}{\hbar} \int^r A \cdot dl \quad (1.27)$$

$\tilde{\Delta}(r)$  est le paramètre d'ordre du système en champ nul  $A(r) = 0$ .

On vérifie facilement que :

$$\left( \frac{\hbar}{i} \vec{\partial} - q \vec{A}(r) \right)^2 \cdot u(r) = \left( \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\partial} \right)^2 \tilde{u}(r) \right) \cdot \exp i \frac{q}{\hbar} \int^r A \cdot dl \quad (1.28)$$

Les nouvelles fonctions d'onde obéissent aux équations :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m} + V - \mu & \tilde{\Delta} \\ \tilde{\Delta}^* & \frac{\hbar^2 \partial^2}{2m} - V + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

complétées par des conditions aux limites modifiées :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r+L) &= \tilde{u}(r) e^{+2\pi i \phi / \phi_o} \\ \tilde{v}(r+L) &= \tilde{v}(r) e^{-2\pi i \phi / \phi_o} \end{aligned} \quad (1.30)$$

où  $\phi_o = h/e$  est le quantum de flux magnétique.

Il est donc équivalent de résoudre le problème en champ non nul avec des conditions aux limites périodiques ou le problème en champ nul avec les conditions aux limites modifiées

(1.30). Par conséquent et de manière très générale, *toutes les propriétés d'un anneau sont inchangées par ajout d'un nombre entier de  $\phi_0$* . On a parfois une  $\phi_0/2$  périodicité comme dans le cas d'un anneau purement supraconducteur.

Nous utiliserons les conditions aux limites (1.30) au chapitre 4 pour obtenir le spectre d'excitation d'un anneau NS hybride.

### Magnétisme orbital : opérateur courant

On considère l'opérateur densité de courant local :

$$\vec{j} = \frac{q}{m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\partial}_r - q \vec{A}(r) \right)$$

En omettant par commodité de noter les dépendances en  $r$  des fonctions d'ondes et de l'opérateur courant, la moyenne de ce dernier est :

$$\langle \vec{j} \rangle = 2 \sum_n \int d^3r \left[ f(\epsilon_n) u_n^* \vec{j} u_n + (1 - f(\epsilon_n)) v_n \vec{j} v_n^* \right] \quad (1.31)$$

où le facteur 2 exprime la dégénérescence de spin.

Cette méthode nécessite l'utilisation des énergies d'excitations  $\epsilon_n$  et des fonctions d'ondes correspondantes  $u_n$  et  $v_n$ .

### Magnétisme orbital : énergie libre

Le courant non dissipatif est aussi la dérivée du potentiel thermodynamique par rapport au flux magnétique :

$$I(\phi) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \quad (1.32)$$

Bardeen *et al.* ont obtenu une expression de l'énergie libre [23]. Dans les systèmes traités dans cette thèse, c'est la phase qui est bien définie et non le nombre de particules dans la partie supraconductrice. Nous raisonnons donc sur le potentiel thermodynamique de Gibbs qui s'écrit :

$$\Omega = \frac{1}{|g|} \int d^3r |\Delta(r)|^2 + \Omega_B \quad (1.33)$$

$\Omega_B$  est le potentiel thermodynamique de Gibbs du système de quasiparticules de Bogoliubov libres décrites par l'hamiltonien (1.7) qui vaut :

$$\begin{aligned}
\Omega_B &= -\frac{1}{\beta} \ln \text{Tr} e^{-\beta H_{BCS}} \\
&= E_o - \frac{1}{\beta} \ln \text{Tr} e^{-\beta \sum_n \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \epsilon_n \gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{n\sigma}} \\
&= E_o - \frac{2}{\beta} \sum_n \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_n}) \\
&= E_o + \sum_n \epsilon_n - \frac{2}{\beta} \sum_n \ln \left( 2 \cosh \frac{\beta \epsilon_n}{2} \right)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Par ailleurs, en utilisant la valeur de  $E_o$  qui apparaît lors de la diagonalisation de l'hamiltonien BCS, on obtient :

$$E_o + \sum_n \epsilon_n = \sum_n \int d^3r [u_n^*(r) \hat{H}_o u_n(r) + v_n(r) \hat{H}_o v_n^*(r)] \tag{1.35}$$

$$= \text{Tr} \hat{H}_o \tag{1.36}$$

Finalement, le potentiel de Gibbs du supraconducteur inhomogène s'écrit :

$$\Omega(T, \mu, \phi) = \frac{1}{g} \int d^3r |\Delta(r)|^2 + \text{Tr} \hat{H}_o - \frac{2}{\beta} \sum_n \ln \left( 2 \cosh \frac{\beta \epsilon_n}{2} \right) \tag{1.37}$$

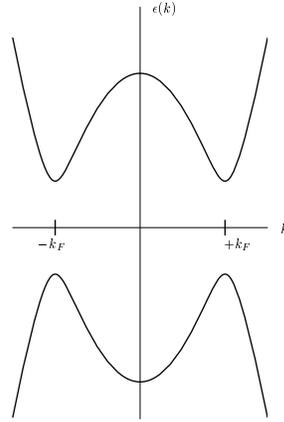


FIG. 1.2 – Spectre d'excitation (courbe  $\epsilon > 0$ ) et modèle du semiconducteur (courbes  $\epsilon > 0$  et  $\epsilon < 0$ ) d'un anneau supraconducteur.

Examinons les 3 termes ci-dessus :

- Le premier prend en compte le double comptage dans la méthode de champ moyen. Il peut dépendre du flux car  $\Delta(r)$  contient des produits non diagonaux  $u_n v_n^*$ .

- Le second terme  $Tr\hat{H}_o$  ne dépend pas du flux magnétique en géométrie annulaire car il contient uniquement des produits diagonaux  $u_n u_n^*$  ou  $v_n v_n^*$  comme le montre l'équation (1.35).

- Le troisième terme peut *s'interpréter formellement comme le potentiel d'un système d'électrons dans un semiconducteur* dont la bande de conduction serait constitué des énergies d'excitation du système hybride normal-supraconducteur et dont la bande de valence serait faite des énergies opposées, i.e. obtenue par symétrie miroir à partir du spectre d'excitation. Chaque niveau du semiconducteur étant occupé une fois en spin, alors que chaque énergie d'excitation est dégénérée deux fois.

Si la correction d'autocoherence à  $\Delta$  est faible, la dépendance en flux du premier terme de double comptage est négligeable : cela correspond à des échantillons grands devant  $\xi_o$ .

*Le courant non dissipatif porté par l'anneau supraconducteur est alors donné par :*

$$I(\phi) = - \sum_n \tanh\left(\frac{\beta\epsilon_n}{2}\right) \frac{d\epsilon_n}{d\phi} \quad (1.38)$$

## 1.3 Théorie de Gor'kov

La physique des systèmes supraconducteurs inhomogènes peut aussi être étudiée au moyen de fonctions de Green décrivant la propagation des quasiparticules. Cette reformulation de la théorie BCS est due à Gor'kov. Nous utiliserons les équations de Gor'kov au chapitre 6.

### 1.3.1 Fonctions de Green

#### Equations de Gor'kov

Nous adoptons les définitions suivantes des propagateurs de Gor'kov :

$$G(x_1, x_2) = \langle T_\tau \Psi_\uparrow(x_1) \Psi_\uparrow^\dagger(x_2) \rangle \quad (1.39)$$

$$F^\dagger(x_1, x_2) = \langle T_\tau \Psi_\downarrow^\dagger(x_1) \Psi_\uparrow^\dagger(x_2) \rangle \quad (1.40)$$

$$F(x_1, x_2) = \langle T_\tau \Psi_\uparrow(x_1) \Psi_\downarrow(x_2) \rangle \quad (1.41)$$

$$\bar{G}(x_1, x_2) = -\langle T_\tau \Psi_\downarrow^\dagger(x_1) \Psi_\downarrow(x_2) \rangle = -G(x_2, x_1) \quad (1.42)$$

où  $x = (r, \tau)$  repère un évènement par ses coordonnées d'espace  $r$  et de temps imaginaire  $\tau$ . On regroupe ces quatre propagateurs dans une matrice 2x2 définie dans l'espace de Nambu :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G(x_1, x_2) & F(x_1, x_2) \\ -F^\dagger(x_1, x_2) & \bar{G}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

A partir des équations du mouvement (1.5) pour les opérateurs  $\Psi_\sigma$  et  $\Psi_\sigma^\dagger$ , Gor'kov a obtenu les équations pour les fonctions de Green :

$$\hat{G}_{x_1}^{-1} \cdot \hat{G}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) \hat{1} \quad (1.44)$$

où :

$$\hat{G}_x^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \hat{H}_o & -\Delta(r) \\ \Delta^*(r) & -\partial_\tau + \hat{H}_o^* \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Complétée par la relation d'autocohérence (1.4), cette équation matricielle est *une reformulation de la théorie BCS tout à fait équivalente à celle de Bogoliubov-de Gennes*.

### Propagateurs BCS d'un supraconducteur propre infini

Dans le cas uniforme et propre, on peut résoudre simplement les équations de Gor'kov par une transformation de Fourier :

$$G(x_1, x_2) = T \sum_\omega \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G_{i\omega}(\vec{p}) e^{i\vec{p}(r_1 - r_2) - i\omega(\tau_1 - \tau_2)} \quad (1.46)$$

où  $\omega = (2n + 1)\pi T$  sont les fréquences de Matsubara fermioniques.

On obtient :

$$\begin{aligned} G_\omega(p) &= \frac{\xi_p + i\omega}{\xi_p^2 + \Omega^2} & \bar{G}_\omega(p) &= \frac{\xi_p - i\omega}{\xi_p^2 + \Omega^2} \\ F_\omega(p) &= \frac{\Delta}{\xi_p^2 + \Omega^2} & F_\omega^\dagger(p) &= \frac{\Delta^*}{\xi_p^2 + \Omega^2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

avec :  $\Omega^2 = |\Delta|^2 + \omega^2$  et  $\xi_p = p^2/2m - \mu$ .

Ces expressions permettent de calculer toutes les propriétés thermodynamiques d'un supraconducteur massif en champ nul [24].

### 1.3.2 Géométrie annulaire

Mous considérons à nouveau un anneau traversé par un flux magnétique.

#### Invariance de jauge

Les transformations de jauge des fonctions de Green de Gor'kov sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{i\omega}(r_1, r_2) &= G_{i\omega}(r_1, r_2) \exp\left(i \int_{r_1}^{r_2} A \cdot dl\right) \\
\tilde{F}_{i\omega}^\dagger(r_1, r_2) &= F_{i\omega}^\dagger(r_1, r_2) \exp\left(i \int_{r_o}^{r_1} A \cdot dl + i \int_{r_o}^{r_2} A \cdot dl\right)
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Elles découlent naturellement des transformations de jauge pour les fonctions d'ondes  $u$  et  $v$  décrites par (1.26) en suivant les définitions (1.6) et (1.39).

### Calcul du courant

En tenant compte de la double dégénérescence due au spin, l'opérateur courant s'écrit :

$$\vec{j}(r) = \left[ \frac{iq\hbar}{m} (\vec{\nabla}_{r_2} - \vec{\nabla}_{r_1}) \Psi^\dagger(r_2) \Psi(r_1) - \frac{2q^2}{m} \Psi^\dagger(r_2) \Psi(r_1) \vec{A}(r_1) \right]_{r_1, r_2 \rightarrow r} \tag{1.49}$$

On peut donc calculer la densité de courant locale à partir de la fonction de Green  $G$  :

$$\langle \vec{j}(r) \rangle = \left[ -\frac{iq\hbar}{2m} (\vec{\nabla}_{r_2} - \vec{\nabla}_{r_1}) G(r_1\tau, r_2\tau + 0) + \frac{q^2}{m} G(r_1\tau, r_2\tau + 0) \vec{A}(r) \right]_{r_1, r_2 \rightarrow r} \tag{1.50}$$

L'expression du courant en fonction de  $\tilde{G}$  est plus simple car le terme *diamagnétique proportionnel au potentiel vecteur et la densité d'électrons* disparaît :

$$\langle \vec{j}(r) \rangle = \left[ -\frac{iq\hbar}{m} (\vec{\nabla}_{r_2} - \vec{\nabla}_{r_1}) \tilde{G}(r_1\tau, r_2\tau + 0) \right]_{r_1, r_2 \rightarrow r} \tag{1.51}$$

## 1.4 Comparaison des deux formalismes

### 1.4.1 Représentations de Källen-Lehmann

Les propagateurs de Gor'kov peuvent être développés sur la base des fonctions d'ondes des quasiparticules :

$$G_{i\omega}(r_1, r_2) = - \sum_n \left[ \frac{u_n(r_1) u_n^*(r_2)}{i\omega - \epsilon_n} + \frac{v_n^*(r_1) v_n(r_2)}{i\omega + \epsilon_n} \right] \tag{1.52}$$

$$F_{i\omega}^\dagger(r_1, r_2) = \sum_n \left[ \frac{v_n(r_1) u_n^*(r_2)}{i\omega - \epsilon_n} - \frac{u_n^*(r_1) v_n(r_2)}{i\omega + \epsilon_n} \right] \tag{1.53}$$

La fonction de Green retardée  $G_\epsilon^R(r_1, r_2)$  est la fonction analytique dans le demi-plan complexe supérieur qui coïncide avec  $G_{i\omega_m}$  pour les valeurs  $\epsilon = i\omega_m$  dans ce même demi-plan  $\omega_m > 0$ .

$$G_\epsilon^R(r_1, r_2) = - \sum_n \left[ \frac{u_n(r_1)u_n^*(r_2)}{\epsilon + i0 - \epsilon_n} + \frac{v_n^*(r_1)v_n(r_2)}{\epsilon + i0 + \epsilon_n} \right] \quad (1.54)$$

En bref, les fonctions retardées s'obtiennent en substituant  $\epsilon + i0$  à  $i\omega_m$  dans les représentations de Källén-Lehmann du type (1.52,1.53).

*Les énergies d'excitations correspondent aux pôles en énergie des fonctions de Green retardées situées sous l'axe réel. Le spectre d'excitation est donc contenu dans les propagateurs de Gor'kov.*

### 1.4.2 Avantages et inconvénients des formalismes des quasiparticules et des fonctions de Green

Tout d'abord, le contenu physique des équations Bogoliubov-de Gennes et de Gor'kov est le même, à savoir celui du modèle BCS.

#### Inconvénients des équations de Gor'kov

- Les solutions des équations de Gor'kov sont des fonctions de Green  $G_{i\omega}(r_1, r_2)$  à deux points. Elles sont donc plus compliquées à manier que les fonctions d'ondes de quasiparticules  $u(r)$  et  $v(r)$  à un point. Dans le cas uniforme, cette difficulté disparaît complètement car les fonctions de Green dépendent seulement de la différence  $r_1 - r_2$ . Mais hélas (ou plutôt heureusement), les systèmes qui nous intéressent ne sont pas homogènes.
- Si on veut résoudre les équations de Gor'kov, il faut fixer  $r_1$ , et résoudre en  $r_2$  des équations qui sont semblables aux équations de Bogoliubov-de Gennes.
- Il n'est pas du tout immédiat de faire une approximation quasiclassique sur les fonctions de Gor'kov, contrairement au passage des équations de Bogoliubov-de Gennes à celles d'Andreev qui est trivial. Pour tenir compte de  $\Delta \ll E_F$ , il faut introduire de nouvelles fonctions de Green obtenues par un procédé de "coarse graining" à partir des fonctions de Gor'kov.

#### Avantage des équations de Gor'kov

La formulation de Gor'kov est le point de départ vers les méthodes diagrammatiques. Celles-ci permettent de calculer certains effets moyens du désordre. Grâce aux travaux de Eilenberger et Larkin-Ovchinnikov, on dispose d'une version simplifiée de la théorie de Gor'kov qui permet de calculer les grandeurs physiques de paires des systèmes inhomogènes.

## 1.5 Conclusion

En résumé, le formalisme des quasiparticules est très pratique pour calculer le spectre d'excitation d'un système hybride supraconducteur et les propriétés qui en découlent comme par exemple le courant dans un anneau. En revanche, le formalisme des équations de Gor'kov est peu maniable et nécessite d'être simplifié dans le cadre d'une approximation

quasiclassique  $\Delta \ll E_F$ . Dans ce chapitre, une telle approximation a permis de passer facilement des équations de Bogoliubov-de Gennes à celles d'Andreev. En revanche, la même approximation est nettement moins triviale sur les équations de Gor'kov.

Le chapitre 2 décrit en détail comment Eilenberger, Larkin, Ovchinnikov et Usadel y sont parvenus en définissant de nouveaux propagateurs. Par ailleurs, le chapitre 3 montre que les équations de Bogoliubov-de Gennes sont essentielles pour comprendre le mécanisme fondamental de réflexion d'Andreev.

Dans nos propres travaux, nous avons utilisé les deux formalismes : les équations de Bogoliubov-de Gennes pour calculer les spectres d'excitation d'un anneau NS (chapitre 4) et d'une jonction SFS (chapitre 5), et les équations de Gor'kov pour obtenir la série de perturbation en  $\Delta$  au chapitre 6.

# Chapitre 2

## Equations quasiclassiques

Les fonctions de Green de Gor'kov contiennent trop d'informations microscopiques rendant difficile le calcul de grandeurs physiques dans les systèmes inhomogènes, comme le courant Josephson ou l'effet Meissner dans un bicouche NS. En 1968, Eilenberger et Larkin-Ovchinnikov ont développé une théorie qui réalise une approximation semiclassique de la théorie de Gor'kov fondée sur la séparation des échelles d'énergie  $\Delta \ll E_F$  [25],[26]. Dans le cas diffusif, ces équations se simplifient et deviennent les équations d'Usadel [27].

Ces travaux ont permis d'accéder au régime *des basses températures* alors que les approches par les équations de Ginzburg-Landau se limitaient à des températures proches de la température critique. En effet, les équations de Ginzburg-Landau sont le développement à petit  $\Delta$  de la théorie de Gor'kov. Aujourd'hui, les équations d'Eilenberger et d'Usadel servent de cadre d'interprétation pour la plupart des expériences en physique mésoscopique des systèmes hybrides NS.

Dans les deux premières parties de ce chapitre, je présente une "démonstration" des équations d'Eilenberger, puis je montre comment on en déduit les équations d'Usadel. Dans chaque cas, je donne les solutions élémentaires pour le métal normal et pour le supraconducteur uniforme de taille finie, semi-infinie ou infinie. La dernière section est consacrée au calcul du courant dans ce cadre quasiclassique.

D'une part, nous avons utilisé cette théorie comme point de comparaison à nos travaux basés sur le formalisme plus exact des quasiparticules dans les chapitres 4 et 5. D'autre part, nous avons étudié le contenu physique des équations d'Usadel au moyen de développements perturbatifs dans le chapitre 6.

### 2.1 Théorie quasiclassique d'Eilenberger

#### "Coarse graining" et fonctions de Green intégrées.

L'objet central de la théorie de Gor'kov est la fonction de Green matricielle :

$$\hat{G}(x_1, x_2) = T \sum_{\omega} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{G}_{\omega}(p_{\oplus}, p_{\ominus}) e^{ip_{\oplus}r_1 - ip_{\ominus}r_2 - i\omega\tau} \quad (2.1)$$

Comme le système est inhomogène, il faut deux impulsions  $\vec{p}$  et  $\vec{k}$ , ou encore  $\vec{p}_\oplus = \vec{p} + \vec{k}/2$  et  $\vec{p}_\ominus = \vec{p} - \vec{k}/2$  pour définir le propagateur dans l'espace des impulsions. La transformation de Wigner est utile pour repérer les points de départ et d'arrivée des propagateurs par leur centre  $\vec{R}$ , conjugué du vecteur d'onde  $\vec{k}$  et leur coordonnée relative  $\vec{\rho}$  conjuguée du vecteur d'onde  $\vec{p}$  :

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.2)$$

$$\tau_1, \tau_2 \rightarrow T = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \tau = \tau_1 - \tau_2 \quad (2.3)$$

$$\hat{G}(\vec{r}_1, \tau_1, \vec{r}_2, \tau_2) \rightarrow \hat{G}(\vec{R}, \vec{\rho}, \tau) \quad (2.4)$$

Je commence par donner deux remarques qui permettent de comprendre l'esprit du travail de simplification effectué par Eilenberger et Larkin-Ovchinnikov sur la théorie de Gor'kov :

- *les propriétés de paires*, dues à la présence de supraconductivité, varient sur la longueur de cohérence  $\xi_o$  qui est beaucoup plus grande que la longueur d'onde de Fermi  $\lambda_F$  pour tous les supraconducteurs conventionnels. On s'attend à une dépendance des propagateurs en la coordonnée relative  $\vec{\rho}$  consistant principalement en oscillations de période  $\lambda_F$  et à une dépendance en  $\vec{R}$  correspondant à l'échelle de longueur  $\xi_o$ . Ceci est montré précisément dans le cas d'une interface NS dans la partie 3.2 du chapitre suivant. Il semble intéressant d'adopter *une description de "coarse-graining" qui ignore les détails de tailles très inférieures à la longueur de cohérence  $\xi_o$ .*

- les observables telles que le courant ou le nombre de particules s'expriment à partir de propagateurs de Gor'kov pris en des points identiques  $r_1 = r_2$ . *On peut donc se satisfaire de fonctions de Green prises en des points coïncidents  $r_1 = r_2$ .*

Eilenberger [25] et Larkin-Ovchinnikov [26] ont défini *des fonctions de Green dépendant seulement de la coordonnée moyenne  $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$  et lissées par rapport à la coordonnée relative  $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .*

La procédure de "lissage" retenue consiste à intégrer la fonction de Green  $\hat{G}_\omega(\vec{R}, \vec{\rho})$  par rapport au vecteur d'onde rapide  $\vec{p}$  conjugué de  $\vec{\rho}$ . Plus précisément, on intègre sur l'énergie cinétique  $\xi_p = p^2/2m - \mu$  correspondant au vecteur d'onde  $\vec{p}$  et mesurée le long d'un rayon  $\vec{v}_F$  de la surface de Fermi.

On obtient ainsi *l'objet central de la théorie quasiclassique* :

$$\hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\pi} \hat{G}_\omega(\vec{R}, \vec{\rho}) \quad (2.5)$$

Ce propagateur dépend d'un seul vecteur position  $\vec{R}$ , d'une direction  $\vec{v}_F$  et de l'énergie  $\omega$ . La théorie quasiclassique de la supraconductivité est aussi appelée *"théorie des fonctions de Green intégrées en  $\xi_p$ "*.

### Exemple du supraconducteur uniforme.

Comme premier exemple, nous calculons les fonctions de Green quasiclassiques d'un *supra-conducteur infini homogène et isotrope*. En appliquant la définition (2.5) aux propagateurs BCS (1.47), on obtient :

- la fonction normale :

$$g_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\pi} \frac{\xi_p + i\omega}{\xi_p^2 + \Omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\pi} \frac{i\omega}{(\xi_p + i\Omega)(\xi_p - i\Omega)} = \frac{\omega}{\Omega}$$

où  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + |\Delta|^2}$ .

- la fonction anormale :

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\pi} \frac{\Delta}{\xi_p^2 + \Omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\pi} \frac{\Delta}{(\xi_p + i\Omega)(\xi_p - i\Omega)} = \frac{\Delta}{i\Omega}$$

- et de manière similaire les deux autres fonctions :

$$\hat{g}_\omega = \begin{pmatrix} g_\omega & f_\omega \\ -f_\omega^\dagger & \bar{g}_\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega & \Delta \\ -\Delta^* & -i\omega \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Ce sont des objets plus simples que les propagateurs BCS (1.47).

La fonction de Green quasiclassique du *métal normal* s'écrit simplement :

$$\hat{g}_\omega = \frac{\omega}{|\omega|} \hat{\tau}_3 \quad (2.7)$$

cette expression ne contient plus l'information sur le spectre à une particule contrairement à la fonction de Green libre exacte :

$$\hat{G}_\omega(p) = \frac{1}{i\omega - \xi_p} \hat{\tau}_3 \quad (2.8)$$

On remarque que  $Tr \hat{g}_\omega = 0$  et surtout  $\hat{g}_\omega^2 = \hat{1}$ . Nous verrons que *cette relation  $\hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F)^2 = \hat{1}$  reste valable dans les systèmes inhomogènes.*

### Equations d'Eilenberger

Après avoir défini les nouvelles fonctions de Green  $\hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F)$ , il faut établir leurs équations d'évolution.

Au départ, on écrit les équations de Gor'kov sous les deux formes adjointes :

$$\begin{aligned} \hat{G}_{x_1}^{-1} \cdot \hat{G}(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2) \hat{1} \\ \hat{G}(x_1, x_2) \cdot \hat{G}_{x_2}^{-1} &= \delta(x_1 - x_2) \hat{1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{G}_{x_1}^{-1} &= \hat{\tau}_3 \partial_{\tau_1} + (\xi_1 + V_1) \hat{1} + \hat{\Delta}_1 \\ \hat{G}_{x_2}^{-1} &= -\hat{\tau}_3 \partial_{\tau_2} + (\xi_2^* + V_2) \hat{1} + \hat{\Delta}_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

et :

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(r) \\ \Delta^*(r) & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eilenberger et Larkin-Ovchinnikov ont soustrait les équations de Gor'kov gauche et droite (2.9) entre elles afin de faire disparaître l'énergie cinétique  $\xi_p$ . Sans cette opération astucieuse, les équations contiendraient des objets comme  $\int d\xi_p \xi_p G_\omega(\vec{R}, \vec{p})$  et pas seulement des fonctions de Green "intégrées en  $\xi_p$ "  $\int d\xi_p G_\omega(\vec{R}, \vec{p})$ . Le résultat de cette soustraction s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial G}{\partial R \partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \tau} [\tau_3, \hat{G}] + [\hat{\Delta}, \hat{G}] = 0 \quad (2.11)$$

On fait maintenant la transformée de Fourier sur les variables relatives  $\tau$  et  $\rho$  en gardant la dépendance en  $\vec{R}$ . On obtient la représentation mixte : espace réel pour les coordonnées du centre de masse et espace des impulsions pour les coordonnées relatives :

$$\hat{G}(\vec{R}, \vec{\rho}, \tau) \rightarrow \hat{G}_\omega(\vec{R}, \vec{p}) \quad (2.12)$$

$$-i \frac{\hbar^2 \vec{p}}{m} \frac{\partial \hat{G}_\omega}{\partial \vec{R}} - i\omega [\hat{\tau}_3, \hat{G}_\omega] + [\hat{\Delta}, \hat{G}_\omega] = 0 \quad (2.13)$$

Comme  $\xi_p$  a disparu des équations, on peut intégrer sur  $\xi_p$  dans une direction donnée par  $\vec{v}_F$  et obtenir des équations pour les fonctions de Green intégrées en  $\xi_p$  définies par (2.5) :

$$\hat{G}_\omega(R, \vec{p}) \rightarrow \hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F) = \int \frac{d\xi_p}{i\pi} \hat{G}_\omega(\vec{R}, \vec{p}) \quad (2.14)$$

On obtient l'équation matricielle de Eilenberger :

$$-i\hbar \vec{v}_F \frac{\partial \hat{g}}{\partial \vec{R}} - i\omega_m [\hat{\tau}_3, \hat{g}] + [\hat{\Delta}, \hat{g}] = 0 \quad (2.15)$$

L'équation d'Eilenberger est une équation de transport du type Landau-Boltzmann pour la fonction de Green quasiclassique matricielle. Il est utile d'écrire le système d'équations en composantes. En se plaçant pour simplifier dans une situation à une dimension, on a :

$$\begin{aligned} i\hbar v_x \partial g &= f^\dagger \Delta - f \Delta^* \\ i\hbar v_x \partial f &= -2i\omega f + 2\Delta g \\ i\hbar v_x \partial f^\dagger &= 2i\omega f^\dagger - 2\Delta^* g \end{aligned} \quad (2.16)$$

### Désordre gaussien

Dans "la démonstration" des équations d'Eilenberger, nous avons supposé que  $V(r_1) - V(r_2) \rightarrow 0$  quand  $r_1 \rightarrow r_2$ . Cette hypothèse cruciale de régularité du potentiel à un corps  $V(r)$  à l'échelle de  $\lambda_F$  est violée dans le cas d'une barrière de potentiel à l'interface de deux matériaux différents. Zaitsev a résolu ce problème comme nous l'expliquerons dans la partie 3.4 du chapitre suivant. Une autre situation est celle d'une impureté ou d'une distribution d'impuretés au sein d'un matériau.

On s'intéresse aux propriétés moyennées sur les positions des impuretés. La longueur caractéristique du désordre est la distance moyenne entre les collisions élastiques : *le libre parcours élastique* défini par  $l_e = 1/n\sigma$  où  $n$  est la densité de diffuseurs et  $\sigma$  leurs section efficace. Si la condition  $l_e \gg \lambda_F$  est vérifiée, l'effet des impuretés peut être décrit par une sorte de potentiel, en anglais self-energy, variant tout aussi lentement dans l'espace que les fonctions de Green quasi-classiques [24]. L'équation d'Eilenberger devient :

$$-i\hbar\vec{v}_F \frac{\partial \hat{g}}{\partial \vec{R}} - i\omega_m [\hat{\tau}_3, \hat{g}] + [\hat{\Delta} - \hat{\Sigma}, \hat{g}] = 0 \quad (2.17)$$

avec :

$$\hat{\Sigma}(r) = i \frac{\hat{g}(r)}{2\tau_e} \quad (2.18)$$

Ici, je me suis contenté d'énoncer le résultat (2.18). Le calcul de cette quantité est exposé dans la partie 6.1 du chapitre 6.

### Supraconducteur balistique de taille finie ou semi-infinie

Comme exemple d'application des équations d'Eilenberger, nous traitons le cas d'un supraconducteur uniforme de taille finie ou semi-infinie. Cette situation se rencontre souvent en physique mésoscopique des systèmes hybrides car seulement une partie de l'échantillon est supraconductrice. On peut songer à un grain supraconducteur ou aux électrodes supraconductrices d'une jonction SNS. On se limite à une situation unidimensionnelle suivant  $Ox$  avec invariance par translation suivant les directions  $Oy$  et  $Oz$ . On note  $v_x$  la composante du vecteur  $\vec{v}_F$  suivant  $Ox$ . Si le paramètre d'ordre  $\Delta(x) = \Delta$  est indépendant de la position, les fonctions de Green quasiclassiques satisfont le système différentiel du premier ordre à coefficients constants :

$$i\hbar v_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta^* & \Delta \\ 2\Delta & -2i\omega & 0 \\ -2\Delta^* & 0 & 2i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Il y a trois types de solutions :

- la solution constante déjà obtenue :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

- une solution exponentielle réelle croissante pour  $v_x > 0$  et décroissante pour  $v_x < 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega+\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega-\Omega)} \end{pmatrix} e^{k_S x} \quad \text{avec} \quad k_S = 2\Omega/(\hbar v_x) \quad (2.21)$$

- et une solution exponentielle réelle décroissante pour  $v_x > 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega-\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega+\Omega)} \end{pmatrix} e^{-k_S x} \quad (2.22)$$

Ce sont les solutions mathématiques. Physiquement, elles doivent rester bornées. Ainsi, seule la première solution uniforme est acceptable dans un supraconducteur infini.

Pour une électrode supraconductrice s'étendant par exemple de  $x = -\infty$  à 0, on prendra comme ansatz :

- pour  $v_x > 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + \alpha_\oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega+\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega-\Omega)} \end{pmatrix} e^{k_S x} \quad (2.23)$$

- pour  $v_x < 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + \alpha_\ominus \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega-\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega+\Omega)} \end{pmatrix} e^{-k_S x} \quad (2.24)$$

Ces expressions tiennent aussi compte du fait qu'à l'infini, ici  $x = -\infty$ , on doit retrouver la solution du supraconducteur massif.

### Métal normal de taille quelconque

Dans le cas du métal normal, le système différentiel est découplé et présente trois types de solutions :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{k_N x} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-k_N x} \quad (2.25)$$

$$k_N = \frac{2\omega}{\hbar v_x}$$

### Loi de conservation

Si on calcule la dérivée de la quantité  $Tr\hat{g}^2 = g^2 - ff^\dagger$  par rapport à  $x$  en tenant compte des équations d'Eilenberger, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x}(Tr\hat{g}^2) = 0 \quad (2.26)$$

Ainsi,  $Tr\hat{g}^2$  est constante et vaut l'unité sur tout l'échantillon.

Revenons au cas du supraconducteur balistique. On a  $\hat{g}^2 = g^2 - ff^\dagger = 1$  pour la solution constante, tandis que  $\hat{g}^2 = g^2 - ff^\dagger = 0$  pour les solutions exponentielles. Cela signifie que la solution physique complète contiendra toujours la solution constante pour assurer la normalisation. Par ailleurs, *c'est cette même solution constante qui réalise la condition asymptotique de retrouver le supraconducteur massif ou le métal normal massif à l'infini.*

### Paramétrisation de Schopohl-Maki pour $\hat{g}_o$

Schopohl et Maki ont introduit la paramétrisation suivante pour les fonctions de Green quasiclassiques [28] :

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_\omega & f_\omega \\ -f_\omega^\dagger & -g_\omega \end{pmatrix} = (1 - ab)^{-1} \begin{pmatrix} 1 + ab & -2a \\ 2b & -(1 + ab) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

dans laquelle les équations d'Eilenberger prennent la forme :

$$i\hbar v_x \partial_x a = \Delta^* a^2 - 2\omega a + \Delta \quad (2.28)$$

$$-i\hbar v_x \partial_x b = \Delta b^2 - 2\omega b + \Delta^* \quad (2.29)$$

Cette paramétrisation a plusieurs avantages :

- elle découple les équations et facilite les calculs numériques.
- les fonctions  $a$  et  $b$  sont très proches des amplitudes d'électrons et de trous ce qui fait le lien avec les équations de Bogoliubov-de Gennes et les coefficients de réflexion d'Andreev [29].

## 2.2 Théorie d'Usadel

### Diffusion et supraconductivité

Expérimentalement, les échantillons contiennent des impuretés. Jusqu'en 1990, la plupart des expériences étaient effectuées avec des échantillons désordonnés. Depuis 1990, l'utilisation des semiconducteurs permet d'étudier des échantillons balistiques. Cependant, la supraconductivité mésoscopique des systèmes sales est sans doute encore plus riche que celle des systèmes propres. Parmi les questions posées : comment le désordre influe la supraconductivité ? comment le mouvement diffusif des quasiparticules électrons et trous est modifié par la présence de bords supraconducteurs ? Avant le travail d'Usadel, les études

théoriques utilisaient les équations de Ginzburg-Landau. Elles étaient donc limitées au température proches de  $T_c$  ou aux champs magnétiques proches du champ critique. Les équations d'Usadel ont permis d'explorer le reste du diagramme de phase.

### Equation d'Usadel

Prenons l'exemple d'une interface NS entre un supraconducteur et un métal diffusif. L'interface est invariante par translation selon les directions  $y$  et  $z$ . Pour alléger les écritures, on omet l'énergie  $\omega$  dans la notation de  $\hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F)$  qui devient  $\hat{g}(x, \theta)$  où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{v}_F$  et la normale  $Ox$  à l'interface NS.

Même si ce système est fortement anisotrope au niveau macroscopique, on comprend intuitivement qu'un désordre important pour lequel  $1/\tau_e \gg \Delta$  puisse restaurer microscopiquement et en moyenne l'isotropie du système, c'est à dire rendre les fonctions de Green quasiclassiques  $\hat{g}_\omega(\vec{R}, \vec{v}_F)$  très peu dépendantes de la direction  $\vec{v}_F$ . C'est pourquoi, on cherche alors les solutions des équations d'Eilenberger sous la forme :

$$\hat{g}(x, \theta) = \hat{g}_o(x) + \hat{g}_1(x) \cos \theta \quad (2.30)$$

Les matrices  $\hat{g}_o(x)$  et  $\hat{g}_1(x)$  sont indépendantes de l'angle  $\theta$  et les éléments de matrice de  $g_1$  beaucoup plus petits que ceux de  $g_o$ . Dans ce cas, la condition de normalisation quasiclassique générale  $\hat{g}^2 = \hat{1}$  implique :

$$\hat{g}_o \hat{g}_o = \hat{1} \quad \hat{g}_o \hat{g}_1 + \hat{g}_1 \hat{g}_o = 0 \quad (2.31)$$

Usadel a réussi à simplifier les équations d'Eilenberger en les projetant sur les deux premiers harmoniques sphériques 1 et  $\cos \theta$  [27]. On part de l'équation (2.17) :

$$iv_F \cos \theta \partial_x \hat{g} + [\hat{H}, \hat{g}] = \left[ -\frac{i}{2\tau} \langle \hat{g} \rangle, \hat{g} \right] \quad (2.32)$$

avec :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} i\omega_m & \Delta(r) \\ -\Delta^*(r) & -i\omega_m \end{pmatrix} = i\omega_m \hat{\tau}_3 - \hat{\Delta} \quad (2.33)$$

• *Projection sur 1* : on moyenne l'équation d'Eilenberger (2.32) sur toutes les directions de l'espace :

$$\frac{iv_F}{3} \partial_x \hat{g}_1 + [H, \hat{g}_o] = 0 \quad (2.34)$$

• *Projection sur  $\cos \theta$*  : on multiplie par  $\cos \theta$  l'équation d'Eilenberger (2.32) :

$$iv_F \cos^2 \theta \partial_x \hat{g} + [H, \hat{g} \cos \theta] = \left[ -\frac{i}{2\tau} \langle \hat{g} \rangle, \hat{g} \cos \theta \right] \quad (2.35)$$

et on moyenne à nouveau sur  $\theta$  :

$$iv_F \partial_x \hat{g}_o + [H, \hat{g}_1] = -\frac{i}{2\tau} [\hat{g}_o, \hat{g}_1] \quad (2.36)$$

Les égalités de normalisation (2.31) donnent  $[\hat{g}_o, \hat{g}_1] = 2\hat{g}_o\hat{g}_1$ .

Le caractère fortement désordonné du système permet de négliger le commutateur  $[H, \hat{g}_1]$  à condition de vérifier :

$$\frac{1}{2\tau_e} \gg \Delta \quad \frac{1}{2\tau_e} \gg \omega_m \quad (2.37)$$

En multipliant à droite par la matrice  $\hat{g}_o$ , on obtient la partie anisotrope  $\hat{g}_1$  de la fonction de Green en fonction de la dérivée spatiale de la partie isotrope  $\hat{g}_o$  :

$$\hat{g}_1 = -v_F\tau\hat{g}_o\partial_x\hat{g}_o \quad (2.38)$$

En injectant la relation ci-dessus dans (2.34), on obtient l'équation matricielle d'Usadel :

$$iD\frac{\partial}{\partial x}(\hat{g}_o\partial_x\hat{g}_o) + [H, \hat{g}_o] = 0 \quad (2.39)$$

C'est une équation "fermée" pour la partie isotrope  $\hat{g}_o$ .

Les éléments non-diagonaux donnent le système :

$$\begin{aligned} iD\partial_x [g_o\partial_x f_o - f_o\partial_x g_o] &= -2\Delta g_o + 2i\omega f_o \\ iD\partial_x [f_o^\dagger\partial_x g_o - g_o\partial_x f_o^\dagger] &= 2\Delta^* g_o - 2i\omega f_o^\dagger \end{aligned} \quad (2.40)$$

### Supraconducteur homogène infini

En tenant compte de la normalisation  $g_o^2 - f_o f_o^\dagger = 1$ , on trouve :

$$\hat{g}_o = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega & \Delta \\ -\Delta^* & -i\omega \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

c'est à dire la même chose que dans le cas sans désordre (2.6) : *les propriétés d'un supraconducteur conventionnel ne sont pas modifiées par l'ajout d'impuretés non magnétiques, conformément au "théorème" d'Anderson.*

### Paramétrisation angulaire de $\hat{g}_o$

On peut décomposer  $\hat{g}_o$  sur les matrices de Pauli :

$$\begin{aligned} \hat{g}_o &= \sum_{i=1,3} a_i \hat{\tau}_i \\ &= \sin\theta \cos\chi \hat{\tau}_1 - \sin\theta \sin\chi \hat{\tau}_2 + \cos\theta \hat{\tau}_3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

La matrice identité n'apparaît pas dans la décomposition (2.42) parce que  $Tr\hat{g} = 0$ . On doit avoir par conséquent  $\sum a_i^2 = 1$ . On peut repérer l'état local, en un point  $x$  de l'espace, par un point sur la sphère unité donné par  $\theta, \chi$ .

–  $\theta = 0$  représente l'état normal.

–  $\theta = \arctan \Delta/\omega$ , c'est à dire  $\pi/2$  à basse énergie, représente l'état supraconducteur.

On obtient l'équation d'Usadel en représentation angulaire :

$$\frac{D}{2} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right] - \omega \sin \theta + |\Delta| \cos \theta = 0 \quad (2.43)$$

Le régime d'effet de proximité faible correspond à un angle  $\theta$  proche de zéro et conduit à une linéarisation de l'équation ci-dessus.

## 2.3 Calcul du courant

Le but de la théorie quasiclassique est de calculer des grandeurs physiques comme le courant Josephson d'une jonction SNS, l'effet Meissner dans un bicouche NS, etc... Ici, nous nous intéressons au courant Josephson.

### Formule générale

Dans le formalisme de Gor'kov, la densité locale de courant s'écrit :

$$\vec{j}(r) = T \sum_{i\omega} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{j}(k, \omega) e^{ikr} \quad (2.44)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{k}, \omega) &= -\frac{iq\hbar}{m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2i\vec{p} G_\omega(p_\oplus, p_\ominus) \\ &= 2q\nu_o \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \vec{v}_F G_\omega(p_\oplus, p_\ominus) \\ &= 2qi\pi\nu_o \int \frac{d\Omega}{4\pi} \vec{v}_F g(\vec{k}, \vec{v}_F) \end{aligned}$$

où  $\nu_o$  est la densité d'états du métal normal au niveau de Fermi par direction de spin  $\nu_o = mp_F/(2\pi^2\hbar^2)$  et  $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$  est l'angle solide autour de la direction  $\vec{v}_F$  repéré par les angles  $\theta$  et  $\varphi$ . On a utilisé :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(p, \theta, \varphi) &= \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int dp p^2 f(p, \theta, \varphi) \\ &= \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int \frac{d\xi}{\hbar v_F} p_F^2 f(\xi, \theta, \varphi) \\ &= \frac{mp_F}{2\pi^2\hbar^2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi f(\xi, \theta, \varphi) \\ &= \nu_o \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi f(\xi, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Le passage de la première à la seconde ligne nécessite que la fonction  $f(p, \theta, \varphi)$  soit piquée en  $p$  au voisinage de la sphère de Fermi du métal normal  $p = p_F$ .

### Echantillon à symétrie de révolution

On va préciser cette formule pour le cas d'un système à symétrie de révolution autour de l'axe  $Ox$  comme une jonction SNS représentée sur la figure. La composante de la densité de courant selon  $Ox$  s'écrit en notant  $v_x = v_{Fx} = v_F \cos \theta$  :

$$\begin{aligned}
 j_x(x, \omega) &= 2qi\pi\nu_o \int \frac{d\Omega}{4\pi} v_x g_\omega(x, v_x) \\
 &= i\pi\nu_o q \int_0^\pi d\theta \sin \theta v_F \cos \theta g_\omega(x, v_x) \\
 &= i\pi\nu_o v_F q \int_0^1 d(\cos \theta) \cos \theta [g_\omega(x, v_x) - g_\omega(x, -v_x)] \\
 &= i\frac{q}{\hbar} \frac{k_F^2}{2\pi} \int_0^1 d(\cos \theta) \cos \theta [g_\omega(x, v_x) - g_\omega(x, -v_x)]
 \end{aligned}$$

D'où le courant :

$$I(x) = i\frac{q}{\hbar} \frac{k_F^2 S}{2\pi} T \sum_\omega \int_0^1 d(\cos \theta) \cos \theta [g_\omega(x, v_x) - g_\omega(x, -v_x)] \quad (2.45)$$

*Interprétation* : On a envie d'interpréter cette expression du courant comme la somme des courants "individuels" portés par chaque état transverse. En effet, le nombre d'états transverses correspondant à une trajectoire quasiclassique d'inclinaison comprise entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est précisément :

$$dN(\theta) = \frac{k_F^2 S}{2\pi} d(\cos \theta) \cos \theta \quad (2.46)$$

Ainsi, la "limite monocanal" de l'expression du courant est :

$$I(x) = i\frac{q}{\hbar} T \sum_\omega [g_\omega(x, v_x) - g_\omega(x, -v_x)] \quad (2.47)$$

est le courant monocanal.

## 2.4 Conclusion

En résumé, la théorie quasiclassique de la supraconductivité est plus efficace que la théorie de Gor'kov car plus simple : les objets de base sont des fonctions de Green à un point et non à deux points. Il faut cependant nuancer cela car les fonctions quasiclassiques dépendent de trois coordonnées d'espace et de deux angles, soit 5 paramètres au lieu des six coordonnées d'espace des fonctions de Gor'kov. On a donc éliminé seulement un paramètre. Cette élimination correspond à l'intégration sur  $\xi_p$ .

Historiquement, la plupart des résultats sur les jonctions SNS, NS, SNIS, SFS ont été obtenu pour la première fois en utilisant les équations d'Eilenberger pour les systèmes balistiques et celles d'Usadel pour les systèmes diffusifs.

Dans la suite de ce manuscrit, nous allons essentiellement utiliser les équations d'Eilenberger pour retrouver :

- *la relation courant-phase d'une jonction SNS balistique à l'aide de la formule du courant (2.47). Nous pourrons alors comparer à notre propre méthode basée sur le formalisme de Bogoliubov-de Gennes(chapitre 4).*
- *la relation courant-phase d'une jonction SFS balistique et comparer à notre étude de l'effet de la réflexion ordinaire dans une jonction SFS au chapitre 5.*

Nous travaillerons sur les équations d'Usadel elles-mêmes en analysant le contenu physique de certaines de leurs solutions (supraconducteur infini, marche NS) en termes de processus microscopiques de réflexions d'Andreev multiples (chapitre 6).

# Chapitre 3

## Réflexion d'Andreev sur une interface NS

En étudiant la chaleur spécifique de la phase mixte d'un supraconducteur de type II, Andreev a d'abord constaté qu'un électron d'énergie inférieure au gap du supraconducteur est forcément confiné au sein d'un vortex [30]. Il a ensuite établi qu'un tel électron est réfléchi sous forme de trou par les bords du vortex. De plus, le trou réfléchi est émis dans la direction opposée à l'électron incident et la fonction d'onde de ce trou porte l'information sur la phase du supraconducteur.

Ces propriétés sont en fait valables pour toute interface NS et *les propriétés thermodynamiques et de transport des systèmes hybrides normal-supraconducteur* s'interprètent en terme de réflexion d'Andreev de quasiparticules, éventuellement en compétition avec la réflexion ordinaire électron-électron. Ce chapitre a pour but d'introduire la notion de réflexion d'Andreev dans le langage naturel des quasiparticules, puis de montrer comment cette notion se décline dans les formalismes de Gor'kov et de la théorie quasiclassique de la supraconductivité.

Le système de base de l'effet de proximité est l'interface métal normal-métal supraconducteur (NS) unidimensionnelle. Lorsqu'on fabrique une jonction NS, on peut obtenir un "bon contact", dit ohmique ou un "mauvais contact" dit tunnel. Dans le premier cas, nous montrons que la réflexion d'Andreev est totale tandis que dans le second cas il y a compétition entre réflexion d'Andreev et réflexion ordinaire. Ce chapitre n'est pas une revue des phénomènes d'effet de proximité. Il présente simplement les concepts nécessaires à la compréhension de notre travail sur l'anneau NS balistique (chapitre 4) et sur les jonctions SFS (chapitre 5).

### 3.1 Réflexion d'Andreev dans le formalisme des quasiparticules

Dans ce paragraphe, j'introduis en détail le concept de réflexion d'Andreev en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes. J'explique le principe de la compétition entre la

réflexion d'Andreev et la réflexion ordinaire des quasiparticules. Enfin, je montre comment Blonder *et al.* (BTK par la suite) ont utilisé le formalisme des quasiparticules pour répondre au problème de la conductance d'un contact NS balistique.

### Solutions des équations de Bogoliubov-de Gennes

On se place dans la situation unidimensionnelle simple d'un métal normal occupant le demi-espace  $x \leq 0$  et d'un supraconducteur conventionnel de symétrie s situé dans le demi-espace  $x \geq 0$  et de paramètre d'ordre uniforme  $\Delta e^{i\chi}$ . Les deux matériaux sont sans désordre et ont même fermiologie. En vertu de l'invariance par translation selon les directions  $y$  et  $z$ , on peut rechercher les solutions des équations de Bogoliubov-de Gennes (1.9) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = e^{ik_y y + ik_z z} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Les fonctions d'onde  $u(x)$  et  $v(x)$  obéissent aux équations de Bogoliubov-de Gennes dans lesquelles on a transformé le potentiel chimique et le vecteur d'onde de Fermi selon :

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \mu(k_y, k_z) = \mu - \frac{\hbar^2(k_y^2 + k_z^2)}{2m} \\ k_F &\rightarrow k_F(k_y, k_z) = \sqrt{k_F^2 - k_y^2 - k_z^2} = k_F \cos \theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

En se plaçant dès le départ dans l'approximation d'Andreev introduite en (1.2.2), on peut écrire les fonctions d'ondes dans chaque demi-espace :

- Dans le métal normal  $x \leq 0$  :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_e x} + r_{eh} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_h x} + r_{ee} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_e x} \quad (3.3)$$

où  $k_e$  et  $k_h$  sont respectivement les vecteurs d'onde d'un électron et d'un trou d'énergie  $\epsilon \geq 0$  :

$$\begin{aligned} k_e &= k_F \cos \theta + \frac{\epsilon}{\hbar v_F \cos \theta} \\ k_h &= k_F \cos \theta - \frac{\epsilon}{\hbar v_F \cos \theta} \end{aligned}$$

Les coefficients  $r_{ee}$  et  $r_{eh}$  sont les coefficients de réflexion électron-électron et électron-trou.

- Dans le métal supraconducteur  $x \geq 0$  :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} e^{i\eta_\epsilon + i\chi} \\ e^{-i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{(ik_F \cos \theta - \lambda_\epsilon)x} \quad (3.4)$$

où  $e^{2i\eta_\epsilon} = (\epsilon + i\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2})/\Delta$  et  $\lambda_\epsilon = \sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}/\hbar v_F \cos \theta$ .

$t$  est le coefficient de transmission d'un électron en une excitation de Bogoliubov dans le supraconducteur.

### Conditions aux limites

Comme les équations Bogoliubov-de Gennes contiennent des dérivées secondes par rapport aux variables spatiales, les fonctions d'onde et leurs dérivées sont continues pour des potentiels suffisamment réguliers, i.e. des potentiels continus ou présentant uniquement des sauts finis.

Cependant pour la modélisation de la barrière interfaciale à l'aide d'un potentiel  $V(\vec{r}) = V_s \delta(x)$ , les dérivées des fonctions d'onde  $u$  et  $v$  subissent une discontinuité en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(+0) - \frac{du}{dx}(-0) &= \frac{2mV_s}{\hbar^2}u(0) \\ \frac{dv}{dx}(+0) - \frac{dv}{dx}(-0) &= \frac{2mV_s}{\hbar^2}v(0) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Il faut donc distinguer les cas de l'interface parfaite  $V_s = 0$  et de l'interface présentant une barrière de potentiel  $V_s \neq 0$ .

#### Interface NS sans barrière : réflexion d'Andreev totale

Commençons par exprimer la continuité de la composante "électron" et de sa dérivée en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} 1 + r_{ee} &= te^{i\eta_\epsilon + i\chi} \\ 1 - r_{ee} &= te^{i\eta_\epsilon + i\chi} \end{aligned}$$

On en conclut immédiatement qu'il n'y a pas de réflexion ordinaire d'électron en électron :

$$r_{ee} = 0$$

La continuité de la composante "trou"  $v(x)$  et de sa dérivée donne alors :

$$r_{eh} = e^{-2i\eta_\epsilon - i\chi}$$

L'amplitude de réflexion d'Andreev est un nombre complexe de module unité et de phase :  $-\chi - \arccos \epsilon/\Delta$ . Autrement dit, *la réflexion d'Andreev est totale et le trou réfléchi porte l'information de la phase du supraconducteur  $\chi$ .*

*Interprétation en terme d'état stationnaire :*

Du côté supraconducteur, la fonction d'onde d'une excitation d'énergie bien définie  $\epsilon$  est un mélange d'une partie électron et d'une partie trou avec un poids relatif trou/électron  $e^{-2i\eta_\epsilon - i\chi}$  fixé. L'existence d'une amplitude "électron" non nulle dans le métal normal entraîne par continuité une amplitude "trou" non nulle avec  $r_{eh} = e^{-2i\eta_\epsilon - i\chi}$ .

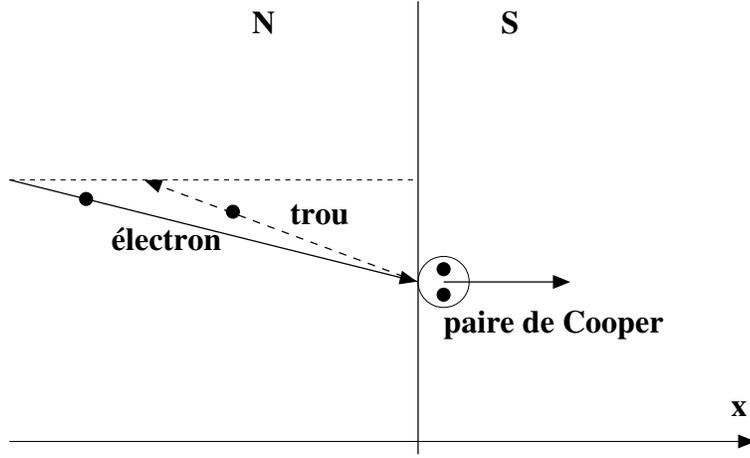


FIG. 3.1 – Dans le métal normal  $N$ , les vecteurs d'onde de l'électron et du trou ont la même projection parallèlement à l'interface  $x = 0$ . En revanche, leurs composantes selon  $Ox$  sont "proches" mais décalées de  $\Delta k_\epsilon = 2\epsilon/\hbar v_F \cos\theta$  qui est l'impulsion de la paire de Cooper émise dans le supraconducteur lors d'un tel processus. La flèche oblique vers la gauche représente la vitesse de groupe du trou. La paire de Cooper est émise parallèlement à l'axe  $Ox$ . Il y a un transfert de charge  $-2e$  du métal normal vers le supraconducteur. Dans le cas  $V_s = 0$ , ceci explique que la conductance  $G_{NS} = 2G_N$  du contact  $NS$  soit le double de celle du contact normal-normal  $G_N$ . Il s'agit de conductance sous le gap  $V \leq \Delta$  [31].

On peut ensuite interpréter la fonction d'onde complète comme décrivant un processus de scattering dans lequel un électron incident venant de  $x = -\infty$  est réfléchi en trou avec une amplitude  $r_{eh}$  et transmis dans le supraconducteur avec une amplitude  $t$ . Le trou réfléchi associé à l'électron incident est situé sur la même branche d'excitations, ici autour de  $+k_F$ . Le transfert d'impulsion est très faible contrairement à une réflexion ordinaire d'un électron  $\pm\hbar k_F$  en un électron  $\mp\hbar k_F$  dans lequel le transfert d'impulsion est de l'ordre de  $2\hbar k_F$ .

Enfin, la paire de Cooper injectée dans le supraconducteur apparie un électron de vecteur d'onde  $k_F + \epsilon/\hbar v_F \cos\theta$  et un électron de vecteur d'onde  $-k_F + \epsilon/\hbar v_F \cos\theta$ . Elle possède donc une quantité de mouvement  $2\epsilon/v_F \cos\theta$  selon la direction  $Ox$ .

*Interprétation en termes de paquets d'ondes :*

Pour décrire le phénomène de réflexion d'Andreev, fabriquons un paquet d'onde localisé en un instant initial  $t_o = -\infty$  dans le métal normal et se dirigeant vers l'interface. Le paquet d'onde a la forme :

$$\Psi(x, t) = \int_0^\Delta d\epsilon g(\epsilon) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_\epsilon x - i\frac{\epsilon}{\hbar}t} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{ik_h x - i\frac{\epsilon}{\hbar}t} \right] \quad (3.6)$$

Le premier terme décrit le paquet d'onde de l'électron incident. La méthode de la phase stationnaire permet de localiser la position  $x(t)$  du centre de ce paquet d'onde. En supposant que  $g(\epsilon)$  dépend peu de l'énergie, on trouve :

$$x = v_F \cos\theta t \quad (3.7)$$

Le second terme représente le paquet d'onde du trou réfléchi dont le centre se déplace selon :

$$\begin{aligned}
x &= -v_F \cos \theta t - 2\hbar v_F \cos \theta \frac{d\eta_\epsilon}{d\epsilon} \\
&= -v_F \cos \theta \left( t - \frac{\hbar}{\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}} \right) \\
&= -v_F \cos \theta (t - \tau_\epsilon)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On voit que pour  $t < 0$ , le paquet d'onde trou doit interférer destructivement dans le métal normal puisqu'on ne peut pas vérifier (3.8). En revanche pour  $t > \tau_\epsilon$ , c'est le paquet électronique qui disparaît laissant place au paquet d'onde de trou qui se déplace en sens opposé à l'électron incident. Entre  $t = 0$  et  $t = \tau_\epsilon$ , il y a des interférences compliquées au voisinage de  $x = 0$  donnant un paquet d'onde hybride électron/trou. On voit qu'il y a rétrodiffusion bien que les paquets d'ondes soient tous deux fabriqués d'ondes planes de vecteurs d'onde voisins de  $k_F$ .

La formule (3.8) montre qu'il y a un retard  $\tau_\epsilon = \hbar/\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}$  à la réflexion d'Andreev. Ce phénomène est général et bien connu dans la rétrodiffusion ordinaire sur une barrière de potentiel. Il est lié à l'existence d'une onde évanescente de l'autre côté de la barrière. Ici, l'onde évanescente est une excitation de Bogoliubov d'énergie  $\epsilon < \Delta$  qui s'atténue exponentiellement dans le supraconducteur.

On peut faire la même construction avec des ondes prises autour de  $-k_F$  : on trouve alors qu'un trou se déplaçant aux instants négatifs vers l'interface est rétrodiffusé en un électron aux instants positifs.

### Interface NS avec une barrière de potentiel

En présence d'une impureté sur l'interface, une excitation peut subir un changement de vecteur d'onde important et sauter de la branche de quasiparticules voisines de  $+k_F$  à celle des quasiparticules voisines de  $-k_F$ . Il devient ainsi possible qu'une excitation de type électron soit réfléchiée en partie sous forme électronique et en partie sous forme de trou. Pour être plus précis, écrivons le système :

$$\begin{aligned}
u(0) &= 1 + r_{ee} = e^{i\chi} (t + \gamma_\epsilon t') \\
v(0) &= r_{eh} = \gamma_\epsilon t + t' \\
ik_F (e^{i\chi} (t - \gamma t') - (1 - r_{ee})) &= \frac{2mV_s}{\hbar^2} u(0) \\
ik_F ((\gamma t - t') - r_{eh}) &= \frac{2mV_s}{\hbar^2} v(0)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous avons utilisé la notation  $\gamma_\epsilon = e^{-2i\eta_\epsilon}$ . En résolvant ce système, on obtient les coefficients de réflexion et transmission en amplitude  $r_{ee}$ ,  $r_{eh}$ ,  $t$  et  $t'$  en fonction de l'énergie  $\epsilon$ , du gap  $\Delta$  et du paramètre  $Z = V_s/\hbar v_F$ .

Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) ont montré que la conductance d'un contact NS peut être calculée à partir des coefficients de réflexion ordinaire et d'Andreev définis à partir des courants de probabilité [31]. Dans le cas présent, ces derniers sont simplement les modules au carré des coefficients de réflexion en amplitude  $r_{ee}$  et  $r_{eh}$  :

$$R_{ee} = |r_{ee}|^2 \quad R_{eh} = |r_{eh}|^2$$

Ces coefficients vérifient une loi de conservation du courant de probabilité :

$$R_{ee} + R_{eh} = 1 \quad (3.10)$$

qui exprime que *l'électron incident est soit réfléchi en trou par le mécanisme d'Andreev soit réfléchi en électron.*

*La probabilité de réflexion d'Andreev sous le gap s'écrit :*

$$R_{eh} = \frac{\Delta^2}{\epsilon^2 + (\Delta^2 - \epsilon^2)(1 + 2Z^2)^2} \quad (3.11)$$

$R_{eh}$  vaut bien l'unité lorsque  $Z = 0$  et tend vers zéro pour une hauteur de barrière infinie  $Z \rightarrow \infty$ .

### Conductance NS

BTK donnent le courant traversant un contact NS, c'est à dire un réservoir normal et un réservoir supraconducteur séparé par un petit étranglement d'aire  $A$  :

$$I_{NS} = 2\nu_o e v_F A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} (-eV) (1 + R_{eh} - R_{ee}) \quad (3.12)$$

Cette formule constitue la nouveauté apportée par BTK et sera plus tard réexprimée par Beenakker en terme de matrice  $S$  avec une structure à 2 canaux électron/trou [32].

En utilisant la loi de conservation (3.10), on peut exprimer le courant en fonction de la probabilité de réflexion d'Andreev uniquement :

$$I_{NS} = 2\nu_o e v_F A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} (-eV) 2R_{eh} \quad (3.13)$$

On compare le courant du contact NN constitué de deux réservoirs macroscopiques reliés par une constriction :

$$I_{NN} = \frac{2\nu_o e^2 v_F A}{1 + Z^2} V \quad (3.14)$$

au courant dans un contact NS de même géométrie :

$$I_{NS} = 2\nu_o e^2 v_F A 2R_{eh}(\epsilon = 0) V \quad (3.15)$$

Donc à petite différence de potentiel  $V$ , le rapport des conductances est :

$$\frac{G_{NS}}{G_{NN}} = 2 \frac{1 + Z^2}{(1 + 2Z^2)^2} \quad (3.16)$$

En résumé :

- Si le contact entre le supraconducteur et le métal normal est parfait  $V_S = 0$ , la conductance  $G_{NS}$  est le double de la conductance  $G_{NN}$ . En effet pour chaque électron de basse énergie incident, deux électrons traversent l'interface.
- Pour un contact NS tunnel  $V_S \rightarrow \infty$ , la conductance  $G_{NS}$  tend vers zéro car il n'y a plus de réflexion d'Andreev.

### Conclusion

Grâce au concept de réflexion d'Andreev et à la formule de BTK, on peut répondre à la question de la conductance d'un métal normal balistique connecté en série à un supraconducteur. La réponse dépend de la nature du contact. Pour un contact ohmique, la conductance est le double de la conductance de Sharvin car le passage simple d'une quasi-particule est remplacé par le passage d'une paire électronique. Pour un contact tunnel, le mécanisme d'Andreev disparaît et la conductance sous le gap est exponentiellement nulle.

## 3.2 Fonctions de Gor'kov et effet de proximité

Nous utilisons maintenant les résultats du paragraphe précédent pour écrire certaines solutions des équations de Gor'kov.

### Interface sans barrière $V_s = 0$

La fonction de Green anormale  $F^\dagger(x_1\tau_1, x_2\tau_2)$  sonde le recouvrement entre deux états du système à  $N$  et à  $N + 2$  particules. Le premier état est l'état fondamental du système auquel on a ajouté un électron en  $(x_2\tau_2)$  et qui a évolué entre  $\tau_2$  et  $\tau_1$  en interagissant avec les autres électrons. Le second état est le fondamental du système auquel on enlève un électron en  $(x_1\tau_1)$ .

$$\begin{aligned} F^\dagger(x_1\tau_1, x_2\tau_2) &= \sum_n v_n(x_1)u_n^*(x_2) f(\epsilon_n) e^{\epsilon_n(\tau_1-\tau_2)} \\ &- u_n^*(x_1)v_n(x_2) (1 - f(\epsilon_n)) e^{-\epsilon_n(\tau_1-\tau_2)} \end{aligned}$$

En incluant uniquement les excitations autour du vecteur d'onde  $+k_F$ , on a :

$$\begin{aligned} F^\dagger(r_1\tau_1, r_2\tau_2) &= \sum_n \gamma_{\epsilon_n} e^{k_h x_1 - k_e x_2} e^{\epsilon_n(\tau_1-\tau_2)} f(\epsilon_n) \\ &- \gamma_{\epsilon_n} e^{-ik_e x_1 + ik_h x_2} e^{-\epsilon_n(\tau_1-\tau_2)} (1 - f(\epsilon_n)) \end{aligned}$$

En introduisant les coordonnées relatives spatiale  $x = x_1 - x_2$  et temporelle  $\tau = \tau_1 - \tau_2$  ainsi que la coordonnée du centre de masse  $X = (x_1 + x_2)/2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F^\dagger(X, x) &= \sum_n \gamma_{\epsilon_n} e^{i(k_F x - \Delta k_\epsilon X)} e^{\epsilon_n \tau} f(\epsilon_n) \\ &- \gamma_{\epsilon_n} e^{i(-k_F x - \Delta k_\epsilon X)} e^{-\epsilon_n \tau} (1 - f(\epsilon_n)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où :

$$\Delta k_\epsilon = k_e - k_h = \frac{2\epsilon}{\hbar v_F} \quad (3.18)$$

On peut facilement identifier :

- une dépendance en  $x$  de période  $\lambda_F$ .
- une dépendance en  $X$  de période  $2\pi/\Delta k_\epsilon$  qui est de l'ordre de la longueur de cohérence  $\xi_o$  pour  $\epsilon = \Delta$  et qui tend vers l'infini quand l'énergie tend vers zéro.

La fonction de paire prise en deux points coïncidents à la même date vaut :

$$F^\dagger(X, x = 0, \tau = 0) = \sum_n \gamma_{\epsilon_n} e^{-i\Delta k_{\epsilon_n} X} [2f(\epsilon_n) - 1]$$

Sous certaines approximations, dans le métal normal  $X < 0$  :

$$F^\dagger(X, x = 0, \tau = 0) = \frac{\hbar v_F}{2X} \nu_o \quad (3.19)$$

A  $T = 0$ , la fonction de Green anormale ne décroît donc pas exponentiellement dans le métal normal. Une paire de Cooper issue du supraconducteur pénètre dans le métal normal et y induit des corrélations en  $1/X$  à longue portée [33].

A température non nulle ou en présence d'interaction dans la partie normale, il existe des mécanismes qui limitent la pénétration des corrélations supraconductrices. En termes de paires d'Andreev associant un électron et son trou réfléchi, on voit que les corrélations s'éteignent lorsque le déphasage  $\Delta k_\epsilon X$  dépasse  $2\pi$ .

*Dans un système balistique, ceci permet d'associer à toute échelle d'énergie  $E$ , une longueur caractéristique  $\xi_E = \hbar v_F/E$  sur laquelle les corrélations de paire s'évanouissent exponentiellement.*

### Interface avec barrière

La présence simultanée de réflexion d'Andreev électron-trou et de réflexion électron-électron implique des oscillations supplémentaires en  $(k_e + k_h)X \simeq 2k_F X$  de la fonction  $F(X, x, \tau)$ . Ceci est à l'origine des difficultés que rencontre la théorie quasiclassique en présence de barrières de potentiel. Nous en reparlerons brièvement dans le chapitre suivant.

### 3.3 Méthodes quasiclassiques sans barrière

En l'absence de barrière de potentiel à l'interface, il suffit de résoudre les équations quasiclassiques (Eilenberger ou Usadel) séparément dans le métal normal et dans le supraconducteur puis de raccorder les solutions par continuité.

#### Interface NS balistique : Eilenberger

Nous avons écrit les solutions au chapitre 2. Pour  $v_x > 0$ , on a :

- Dans le métal normal  $x \leq 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha e^{k_N x} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

- Dans le métal supraconducteur  $x \geq 0$  :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{i\Omega} \begin{pmatrix} i\omega \\ \Delta \\ \Delta^* \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{i(\omega-\Omega)} \\ \frac{\Delta^*}{i(\omega+\Omega)} \end{pmatrix} e^{k_S x} \quad (3.21)$$

La continuité en  $x = 0$  de ces deux expressions donne  $\alpha$  et  $\beta$ . On a finalement :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2\Delta^*}{i(\omega+\Omega)} e^{k_N x} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Pour  $v_x < 0$ , on trouve :

$$\begin{pmatrix} g_\omega \\ f_\omega \\ f_\omega^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\Delta}{i(\omega+\Omega)} e^{k_N x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Signalons que la dérivée de  $g(x, v_x)$  n'est pas continue en  $x = 0$ . Rien n'oblige cette continuité puisque les équations différentielles d'Eilenberger sont seulement du premier ordre en  $x$ .

#### Interface NS diffusive : Usadel

Dans la paramétrisation angulaire, on a :

$$\begin{aligned} g_\omega(x, v_x) &= \cos \theta(\omega, x) \\ f_\omega(x, v_x) &= \sin \theta(\omega, x) \end{aligned}$$

avec :

- dans le métal normal [34] :

$$\theta(\omega, x) = 4 \arctan \left[ \tan \frac{\theta_o}{4} e^{-\kappa_N x} \right] \quad \text{avec} \quad \kappa_N = \sqrt{2\omega/D_N} \quad (3.24)$$

• dans le supraconducteur

$$\theta(\omega, x) = \theta_s + 4 \arctan \left[ \tan \left( \frac{\theta_o - \theta_s}{4} \right) e^{\kappa_S x} \right] \quad \text{avec} \quad \kappa_S = \sqrt{2\Omega/D_S} \quad (3.25)$$

et  $\theta_s = \arctan(\Delta/\omega)$ .

### 3.4 Méthodes quasiclassiques avec barrière

L'approche quasiclassique que nous avons exposée au chapitre 2 est fondée sur le fait que les potentiels sont lisses. Ils ne varient de manière significative que sur des distances bien supérieures à la distance entre atomes, ou plus généralement très supérieures à la longueur d'onde de Fermi. Nous avons vu que la présence d'impuretés viole cette condition. Cependant, on peut décrire un désordre gaussien par une correction de "self-energy" variant de manière douce dans l'espace. Le cas d'une barrière de potentiel à l'interface de deux métaux normaux ou supraconducteurs est beaucoup plus délicat.

#### Condition de passage effective de Zaitsev (1983)

Contrairement aux équations Bogoliubov-de Gennes, une analyse directe des équations quasiclassiques ne permet pas d'obtenir les conditions de passage car ces équations sont fausses près de l'interface. L'idée de Zaitsev consiste à séparer l'espace en trois zones :

*Les régions  $x < -\delta$  et  $x > \delta$  qui sont respectivement occupées par des matériaux homogènes  $i = 1, 2$  caractérisés chacun par une vitesse de Fermi  $v_{Fi}$ .*

*La zone interfaciale  $|x| < \delta$  dans laquelle le potentiel  $V(x)$  varie en formant éventuellement une barrière.*

Zaitsev a montré que les équations quasiclassiques restent valables hors de la zone interfaciale. Ensuite, il exprime la relation entre la fonction de Gor'kov pour des points coincidents tous deux à gauche et la même fonction pour des points tous deux à droite en éliminant les fonctions de Gor'kov décrivant la propagation à travers la barrière. Cette relation est reliée aux propriétés de "scattering" des quasiparticules par la barrière de potentiel.

De chaque côté de l'interface, on peut définir des combinaisons des propagateurs quasiclassiques symétrisées et antisymétrisées par rapport au sens de la projection de la vitesse  $v_{xi}$ , avec  $i = 1, 2$  respectivement pour  $x < -\delta$  et  $x > \delta$  :

$$\hat{g}_{s,a}(x, v_{xi}) = \frac{1}{2} [\hat{g}(x, v_{xi}) \pm \hat{g}(x, -v_{xi})] \quad (3.26)$$

Nous avons déjà rencontré l'objet antisymétrisé dont la composante diagonale sert à calculer le courant.

Les conditions de passage de Zaitsev sont :

- *une première équation* de continuité pour la fonction antisymétrisée  $\hat{g}_a(x, v_{xi})$  de part et d'autre de l'interface :

$$\hat{g}_a(x = -\delta, v_{x1}) = \hat{g}_a(x = +\delta, v_{x2}) = \hat{g}_a(x = 0, v_x) \quad (3.27)$$

ce qui exprime la continuité du courant.

- *une seconde équation* reliant les  $\hat{g}_s(x = \pm\delta, v_{xi})$  et  $\hat{g}_a$ . Cette relation dépend des propriétés de diffusion, au sens "scattering", de l'interface. Pour une interface décrite comme un objet diffuseur de coefficients de transmission et réflexion respectifs  $T$  et  $R = 1 - T$ , elle s'écrit :

$$\hat{g}_a [R(\hat{g}_s^+)^2 + (\hat{g}_s^-)^2] = T \hat{g}_s^- \hat{g}_s^+ \quad (3.28)$$

La structure non linéaire de cette relation rend déjà peu commode l'étude de la simple interface NS balistique avec une impureté. Dans le cas de réseaux NS, il faut réexaminer ce genre de relations de passage et les comparer à des approches plus exactes basées sur les équations de Bogoliubov-de Gennes [29],[35],[36].

### Travail de Nazarov

L'adaptation des conditions de Zaitsev pour les équations d'Usadel donne les équations de passage de Kuprianov et Lukichev [37]. Le travail de Nazarov donne une prescription pour évaluer la conductance d'un circuit comportant des éléments diffusifs et des barrières tunnel [38]. Dans le cas du contact NIS avec N métal diffusif et I barrière tunnel, on trouve expérimentalement un pic de conductance différentielle à énergie nulle : c'est le phénomène de *reflectionless tunneling* [39], [40], [32] et [41]. Signalons que ce problème a aussi été étudié sous l'angle de la méthode de l'hamiltonien tunnel [42].

## 3.5 Conclusion

Ainsi l'effet de proximité observé dans un métal normal en contact avec un supraconducteur s'explique par les réflexions d'Andreev, comme beaucoup d'autres propriétés : conductance NS, effet Josephson, effet Meissner etc... Par ailleurs, la présence d'une barrière tunnel à l'interface NS introduit de la réflexion ordinaire et diminue donc la réflexion d'Andreev. Nous avons expliqué que les équations de Bogoliubov-de Gennes permettent de traiter simplement cette compétition entre ces deux mécanismes de réflexion.

En revanche, le phénomène de réflexion d'Andreev n'apparaît plus clairement dans le traitement quasiclassique de l'interface NS, rendant difficile l'étude des systèmes où se mêlent les effet de proximité et désordre. Ceci a motivé en partie notre étude des équations d'Usadel en lien avec les réflexions d'Andreev multiples au chapitre 6. De plus, les équations quasiclassiques sont difficiles à mettre en oeuvre dans les systèmes présentant une barrière tunnel à cause de la relation de passage (3.28).



# Chapitre 4

## Anneau NS mésoscopique

Un anneau métallique mésoscopique traversé par un flux magnétique est le siège d'un courant permanent de période  $\phi_o = h/e$  [43], [44], [45]. Dans une jonction SNS, le supercourant Josephson est  $\phi_o/2$  périodique. En termes de quasiparticules, le phénomène physique est le même dans les deux systèmes. Il s'agit du magnétisme orbital causé par la dépendance en flux des fonctions d'onde des quasiparticules et de leurs énergies. C'est la nature des quasiparticules qui diffère selon le cas. Dans un anneau normal, celles-ci sont des électrons nus (ou des trous nus) indépendants. On peut d'ailleurs décrire la physique du courant permanent à l'aide d'états électroniques sans faire appel à la notion de quasiparticule [44]. En revanche, dans la partie centrale normale d'une jonction SNS, les quasiparticules sont couplées par les réflexions d'Andreev sur les bords supraconducteurs.

Pour mieux comprendre ce passage du supercourant au courant permanent, nous avons étudié un anneau NS dans lequel la partie supraconductrice peut être rendue petite afin de tendre vers un anneau normal [46]. Ce système est composé d'une partie conductrice normale de longueur  $d_N$  et d'une partie supraconductrice de longueur  $d_S$ , comme le montre la figure (4.1). On se place à suffisamment basse température et à petit  $d_N$  pour que l'échantillon soit mésoscopique :  $d_N < L_\phi(T)$ .

- *l'anneau NS a beaucoup été étudié dans la limite  $d_S$  macroscopique.* On a alors une jonction SNS refermée sur elle-même dont la différence de phases supraconductrices  $\chi = \chi_1 - \chi_2 = 4\pi\phi/\phi_o$  est ajustable en variant le flux magnétique  $\phi$ . La théorie quasiclassique de la supraconductivité s'est avérée très utile pour calculer le supercourant Josephson  $I(\chi)$  dans les jonctions SNS.

- *L'anneau NS a été peu étudié dans la limite  $d_S \rightarrow 0$  qui correspond au passage vers l'anneau normal.* En effet, la théorie quasiclassique ne permet pas de réaliser le passage du courant Josephson vers le courant permanent. Il y a deux raisons à cet échec. D'une part, l'intégration sur l'énergie  $\xi_p$  dans la définition des fonctions de Green quasiclassiques efface l'information sur le spectre à une particule libre du gaz électronique. D'autre part, les grandeurs quasiclassiques sont toujours obtenues par référence à celles de l'état normal [19]. Ceci impose l'utilisation des équations de Bogoliubov-de Gennes qui ont l'avantage de posséder une limite bien définie quand le gap supraconducteur  $\Delta$  tend vers zéro : l'équation de Schrödinger.

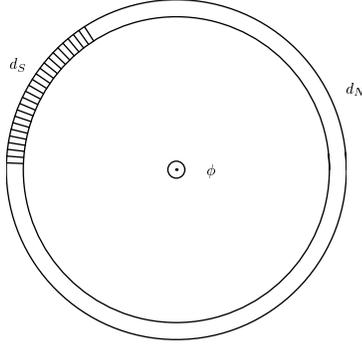


FIG. 4.1 – Anneau hybride métal normal-supraconducteur (NS) traversé par un flux magnétique  $\phi$ . Les longueurs respectives de métal normal et de supraconducteur sont  $d_N$  et  $d_S$ .

A notre connaissance, le seul travail portant sur le courant non dissipatif dans un anneau NS isolé est celui de Büttiker et Klapwijk [47]. Il contient le spectre des états d’Andreev sous le gap et une évaluation du courant en fonction de  $d_S$  pour une longueur normale  $d_N$  très grande devant la longueur de cohérence du supraconducteur  $\xi_o = \hbar v_F / \Delta$  [47].

Nous avons étendu le travail de BK en obtenant *le spectre discret complet de l’anneau NS pour des énergies inférieures et supérieures au gap, ainsi que pour des valeurs arbitraires de  $d_S$  et  $d_N$* . Ce spectre diffère essentiellement de celui d’une jonction SNS macroscopique par son caractère discret au-dessus du gap.

Nous avons introduit *une nouvelle méthode de calcul des harmoniques du courant  $I(\phi)$  adaptée à un spectre composé uniquement de niveaux discrets*. Les méthodes déjà développées pour les jonctions SNS traitent différemment le courant porté par les états d’Andreev discrets sous le gap et le courant porté par le continuum [48], [49], [50]. Dans le cas d’un anneau de longueur finie, cette distinction n’existe plus. *Notre méthode distingue les contributions venant de régions où les énergies des quasiparticules dépendent linéairement du flux  $\phi$  et les contributions associées aux régions où cette dépendance est non linéaire*.

D’une part, cette nouvelle méthode nous permet de retrouver facilement des résultats déjà connus comme la relation  $I(\phi)$  :

- des jonctions SNS longues  $d_N \gg \xi_o$  [51], [52], [53].
- des jonctions courtes  $d_N \ll \xi_o$  [54], [55], [56].
- d’un anneau NS avec  $d_N \gg \xi_o$  [47].

Ces résultats sont ici obtenus dans *un cadre unique*. De plus, notre méthode permet de contrôler les approximations faites sur le spectre comme celle de Bardeen et Johnson [51].

D’autre part, nous obtenons aussi de nouveaux résultats sur l’anneau NS en traitant l’effet de la température, le cas de l’anneau NS multicanal et la répartition spectrale du courant.

Après une introduction consacrée à l’effet Josephson stationnaire SNS (partie 4.1), je décris comment la théorie quasiclassique (cf. chapitre 2) permet de calculer le supercourant

Josephson à très basse température dans des jonctions SNS sans barrière tunnel (partie 4.2). La partie 4.3 décrit le spectre d'excitation de l'anneau NS que nous avons obtenu en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes. Ensuite, j'introduis notre méthode originale de calcul des harmoniques du courant Josephson (partie 4.4). Enfin, cette méthode est appliquée à la physique de l'anneau NS (partie 4.5).

## 4.1 Effet Josephson et échelles d'énergie

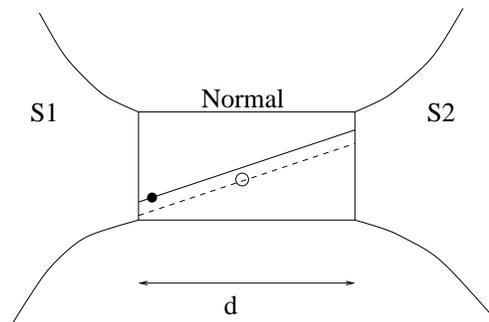


FIG. 4.2 – *Jonction SNS. Dans la partie centrale normale, les mouvements des électrons (trait plein) et des trous (trait en pointillés) sont couplés par le mécanisme d'Andreev. On parle de "paire d'Andreev" pour désigner ce couplage d'un électron et de son trou réfléchi.*

Cette partie commence par une brève introduction à l'effet Josephson SNS interprété en termes de quasiparticules. Ensuite, je présente les différentes catégories de jonctions SNS : jonctions tunnels et "weak links", "weak links" classiques ou quantiques. Enfin, je discute des énergies pertinentes dans le problème de l'anneau NS.

### Effet Josephson

Lorsque deux métaux normaux (N) sont séparés par une couche isolante (I) et portés à une différence de potentiel  $V$ , un courant peut traverser l'isolant par effet tunnel d'électrons.

Lorsqu'un des métaux est supraconducteur (S), cet effet tunnel d'électrons ne peut exister que pour  $V > \Delta$  car dans le supraconducteur il n'y a pas d'état électronique disponible sous le gap. Nous avons présenté ce problème de la conduction dans la structure NIS au chapitre 3. Dans le cas N balistique, le mécanisme d'Andreev introduit une conduction électrique pour  $V < \Delta$  et ajoute un courant supplémentaire au courant tunnel ordinaire aux grandes tensions  $V \gg \Delta$  [31].

Lorsque les deux métaux sont supraconducteurs (jonction tunnel SIS), Josephson a prédit l'existence de phénomènes radicalement différents qui ont rapidement été mis en évidence expérimentalement [2] :

- Si  $V = 0$ , il apparaît un courant non dissipatif de paires de Cooper traversant la barrière isolante. Ce courant est  $2\pi$ -périodique dans la différence  $\chi = \chi_1 - \chi_2$  entre les phases des deux électrodes supraconductrices (effet Josephson stationnaire) :

$$I(\chi) = I_C \sin \chi \quad (4.1)$$

- Si  $V$  est non nul, on a un courant oscillant à la pulsation  $2eV/\hbar$ .

Si on remplace la couche isolante mince par un segment de métal normal, on obtient *un effet similaire à l'effet Josephson SIS même pour des longueurs de métal normal  $d_N$  bien plus grandes que  $\xi_o$* . Cependant, nous allons voir que cet effet Josephson SNS diffère de l'effet SIS par la relation courant-phase  $I(\chi)$  en particulier à basse température et en l'absence de désordre.

Cet "effet Josephson SNS" s'interprète à l'aide des propriétés des quasiparticules. Les excitations électroniques d'énergie  $\epsilon$  inférieures au gap sont réfléchies avec une probabilité unité sur les bords supraconducteurs. Par conséquent, *on a formation d'états liés, appelés états d'Andreev, à des énergies discrètes comprises entre 0 et  $\Delta$* .

Le spectre de ces états peut s'obtenir simplement à l'aide d'une image à la Bohr-Sommerfeld. Une quasiparticule de type électron de vecteur d'onde  $k_e$  part de l'électrode gauche, traverse le métal normal de longueur  $d_N$ , subit une réflexion d'Andreev en prenant la phase  $\chi_2 - \arccos(\epsilon/\Delta)$ ; le trou réfléchi de vecteur d'onde  $k_h$  traverse le métal normal jusqu'à l'électrode de gauche où il est finalement transformé en électron en prenant la phase  $-\chi_1 - \arccos(\epsilon/\Delta)$ . La condition de quantification s'écrit :

$$(k_e - k_h)d_N + \chi_2 - \chi_1 - 2 \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} = 2\pi m \quad (4.2)$$

qui conduit au spectre obtenu par Kulik [57] :

$$\epsilon_{\pm}(m, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{2d_N} \left[ m \pm \frac{\chi_1 - \chi_2}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} \right] \quad (4.3)$$

Comme les énergies des états d'Andreev dépendent de  $\chi = \chi_1 - \chi_2$ , ceux-ci peuvent véhiculer un courant non dissipatif. Cependant, il ne faut pas oublier que les énergies des états de diffusion du continuum  $\epsilon > \Delta$  dépendent aussi de  $\chi$  et donc portent aussi une partie du courant Josephson. *A priori, le courant Josephson est porté à la fois par les niveaux d'Andreev et par les niveaux du continuum*. En effet, c'est une quantité thermodynamique qui implique l'ensemble du spectre d'excitation à la différence de la conductance NS. *Dans la partie 4.5 de ce chapitre, nous étudierons quelles sont les contributions relatives des états du gap et des états au-dessus du gap au courant non dissipatif dans un anneau NS.*

### Jonctions tunnel et "weak links"

Pour avoir des échantillons balistiques, il est avantageux d'utiliser un semiconducteur pour la partie normale de la jonction SNS. La combinaison InAs pour N et Nb pour le supraconducteur est souvent utilisée. Lorsqu'on contacte le semiconducteur à l'une des

électrodes supraconductrices, on obtient une barrière de potentiel de type Schottky dont la transmission peut être modulée de 0 (contact tunnel isolant I) à 1 (contact ohmique parfait) en variant le dopage. *Dans notre travail, nous avons étudié uniquement des jonctions SNS et des anneaux NS ayant deux contacts parfaits.*

### Jonctions classiques et quantiques

Parmi "les weak links", Beenakker distingue [56] :

- les "**weak links**" **classiques** possédant un grand nombre  $2M$  de canaux de conduction car les dimensions transverses du segment normal sont très supérieures à la longueur d'onde de de Broglie. C'est le cas traité par Kulik et Omel'yanchuk dans le cadre de la théorie quasiclassique [54], [55].
- les "**weak links**" **quantiques**, encore appelés points quantiques supraconducteurs dans lesquels la largeur de la constriction est de l'ordre de  $\lambda_F$ . Comme ces constriction possèdent peu de canaux transverses, Beenakker a remis en question l'utilisation de la théorie quasiclassique et a résolu le problème à partir des équations de Bogoliubov-de Gennes [56].

La conclusion du travail de Beenakker est que le résultat quasiclassique reste vrai même pour un nombre de canaux faible.

En revanche, nous considérerons toujours que la partie supraconductrice est suffisamment large pour éviter la formation de "sauts de phases", phase slips en anglais.

### Echelles d'énergies de l'anneau NS

Les différentes énergies intervenant dans la thermodynamique d'un anneau NS sont :

- **l'énergie de Fermi**  $E_F$ . C'est la plus grande énergie du système et il lui correspond donc la plus petite échelle de longueur : la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_F = 2\pi/k_F$  de l'ordre de *l'angström* pour un métal et de la centaine de *angströms* pour un semiconducteur.
- **le gap  $\Delta$  du supraconducteur** auquel on associe la longueur de cohérence  $\xi_o = \hbar v_F/\Delta$  dans le cas balistique et  $\xi_o = (\hbar D/\Delta)^{1/2}$  dans le cas diffusif. Dans les supraconducteurs "conventionnels", la longueur  $\xi_o$  est de l'ordre du *micron* et donc beaucoup plus grande que  $\lambda_F$ .
- **l'énergie de Thouless** associée au temps de transit d'un électron dans la partie normale. Cette énergie s'écrit  $E_N = \hbar v_F/d_N$  dans le cas balistique et  $E_N = \hbar D/d_N^2$  dans le cas diffusif. Selon la taille  $d_N$  de la partie normale, l'énergie de Thouless peut être plus grande ou plus petite que  $\Delta$ .
- **une seconde énergie de Thouless** balistique plus petite que  $E_N$ , correspondant à la longueur totale de l'anneau  $L = d_N + d_S$  et valant  $E_L = \hbar v_F/L$  dans le cas balistique.
- **la température**  $k_B T$ . On associe à la température une longueur de cohérence  $\hbar v_F/k_B T$  dans le cas balistique.

Généralement, nous nous intéresserons plutôt au régime des basses températures. Enfin, nous nous placerons toujours dans l'approximation quasiclassique ou d'Andreev  $\Delta/E_F \rightarrow 0$  et négligerons les effets de "backscattering" (la réflexion d'Andreev n'est plus totale) dus à un rapport  $\Delta/E_F$  fini [58], [59].

## 4.2 Théorie quasiclassique des jonctions SNS balistiques

Nous présentons le calcul du courant Josephson stationnaire dans une jonction SNS balistique dont les contacts NS sont parfaits (transmission unité). Nous utilisons les équations d'Eilenberger et les formules (2.45) et (2.47) qui permettent respectivement d'obtenir les courants monocanal et multicanal. Dans cette partie, nous notons par commodité  $d = d_N$  la longueur de la partie normale de la jonction. Par ailleurs, les électrodes supraconductrices sont macroscopiques :  $d_S \rightarrow \infty$ .

### Fonction quasiclassique

A l'aide du chapitre 2, nous pouvons écrire les fonctions de Green quasiclassiques dans les différentes régions de la structure SNS. Pour  $v_x > 0$ , on a :

- Dans la partie centrale normale :

$$g_\omega(x, v_x) = A \quad (4.4)$$

$$f_\omega(x, v_x) = B e^{-k_N(x+d/2)} \quad (4.5)$$

avec  $k_N = 2\omega/\hbar v_x$ .

- Dans l'électrode supraconductrice de gauche  $x < -d/2$  :

$$g_\omega(x, v_x) = \frac{\omega}{\Omega} + C_1 e^{k_S(x+d/2)} \quad (4.6)$$

$$f_\omega(x, v_x) = \Delta e^{-i\chi/2} \left[ \frac{1}{\Omega} + \frac{C_1}{\omega + \Omega} e^{k_S(x+d/2)} \right] \quad (4.7)$$

avec  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$  et  $k_S = 2\Omega/\hbar v_x$ .

- Dans l'électrode de droite  $x > d/2$  :

$$g_\omega(x, v_x) = \frac{\omega}{\Omega} + C_2 e^{-k_S(x+d/2)} \quad (4.8)$$

$$i f_\omega(x, v_x) = \Delta e^{i\chi/2} \left[ \frac{1}{\Omega} + \frac{C_2}{\omega - \Omega} e^{-k_S(x+d/2)} \right] \quad (4.9)$$

La continuité des fonctions de Green en  $x = \pm d/2$  impose  $C_1 = C_2 = C$  et permet de déterminer :

$$C = \frac{\Delta^2}{\Omega} \frac{\sinh(i\chi/2 + \omega d/\hbar v_x)}{\omega \sinh(i\chi/2 + \omega d/\hbar v_x) + \Omega \cosh(i\chi/2 + \omega d/\hbar v_x)} \quad (4.10)$$

Par conséquent dans la partie centrale normale, la fonction de Green quasiclassique  $g_\omega(x, v_x)$  est une constante relativement à  $x$  et vaut :

$$g_\omega(v_x) = \frac{\omega}{\Omega} + \frac{\Delta^2}{\Omega} \frac{\sinh(\omega d/\hbar v_x + i\chi/2)}{\omega \sinh(\omega d/\hbar v_x + i\chi/2) + \Omega \operatorname{sign}(v_x) \cosh(\omega d/\hbar v_x + i\chi/2)} \quad (4.11)$$

Cette fonction de Green contient toute l'information quasiclassique sur la jonction SNS.

### Courant Josephson

En particulier, nous pouvons obtenir le courant Josephson à travers la jonction en utilisant la formule (2.45) établie au chapitre 2 :

$$I(x) = i \frac{q}{\hbar} \frac{k_F^2 S}{2\pi} T \sum_{\omega} \int_0^1 d(\cos \theta) \cos \theta \delta g_\omega(x, v_x > 0) \quad (4.12)$$

reliant le courant à l'anisotropie de la fonction  $g_\omega(v_x)$  par rapport à la direction de la vitesse de la quasiparticule sur sa trajectoire classique :

$$\delta g_\omega(x, v_x > 0) = g_\omega(x, v_x) - g_\omega(x, -v_x) \quad (4.13)$$

Comme le courant traversant la jonction est le même de partout à cause de l'équation de continuité stationnaire  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , on peut utiliser l'expression de la fonction  $g_\omega(x, v_x) = g_\omega(v_x)$  dans la région centrale  $-d/2 < x < d/2$ . On a alors :

$$\delta g_\omega(v_x) = \frac{i\Delta^2 \sin \chi}{(\omega \cosh \omega d/\hbar v_x + \Omega \sinh \omega d/\hbar v_x)^2 + \Delta^2 \cos^2(\chi/2)} \quad (4.14)$$

Cette équation a été obtenue pour la première fois par Svidsinski [52] en utilisant des fonctions de Green de Gor'kov.

A température nulle  $T = 0$ , la somme sur les fréquences de Matsubara devient une intégrale sur l'axe réel des fréquences :

$$T \sum_{\omega} \delta g_\omega = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\Delta^2 \sin \chi}{(\omega \cosh \omega d/\hbar v_x + \Omega \sinh \omega d/\hbar v_x)^2 + \Delta^2 \cos^2(\chi/2)} \quad (4.15)$$

Nous allons calculer cette intégrale pour une jonction courte ( $d = d_N \ll \xi_o$ ) et pour une jonction longue ( $d \gg \xi_o$ ) :

#### La jonction courte $d = 0$

Dans un anneau monocanal, le courant vaut :

$$\begin{aligned} I(\chi) &= i \frac{q}{\hbar} T \sum_{\omega} \delta g_\omega \\ &= -\frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\Delta^2 \sin \chi}{\omega^2 + \Delta^2 \cos^2(\chi/2)} \\ &= 2\pi \frac{\Delta}{\phi_o} \sin \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

La dernière expression est valable pour  $-\pi < \chi < \pi$  et détermine complètement le courant puisque celui-ci est  $2\pi$ - périodique (et de plus impair) en  $\chi$ . Il s'agit du courant pour un canal deux fois dégénéré en spin. *L'expression ci-dessus correspond à la convention traditionnelle dans la littérature des jonctions SNS :  $I(\chi)$  positif pour une aimantation diamagnétique de la boucle SNS.* Dans les représentations graphiques comme (4.8.d) nous utiliserons toujours la convention opposée.

**Dans le cas multicanal**, on a :

$$\begin{aligned} I(\chi) &= 2\pi \frac{\Delta}{\phi_o} \frac{k_F^2 S}{2\pi} \int_0^1 dX X \sin \frac{\chi}{2} \\ &= 2\pi M \frac{\Delta}{\phi_o} \sin \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, le courant multicanal est  $M$  fois le courant monocanal.  $M = k_F^2 S / 4\pi$  est le nombre de canaux sans tenir compte de la dégénérescence de spin. Ce résultat a été obtenu la première fois par Kulik et Omel'yanchuck en utilisant les équations d'Eilenberger comme nous venons de le faire [54]. Beenakker [56] l'a redémontré en utilisant une approche de "scattering" basée sur le formalisme de Bogoliubov-de Gennes.

**En résumé, dans une jonction courte balistique à  $T = 0$  :**

- le supercourant  $I(\chi)$  est une fonction sinusoidale de  $\chi$  entre  $-\pi$  et  $\pi$  avec des sauts en  $\chi = (2p + 1)\pi$ .
- le courant critique est quantifié en unités de  $2\pi\Delta/\phi_o$ . Il est proportionnel aux nombres de canaux de conduction ouverts dans la constriction normale :

$$I_C = 2\pi M \Delta / \phi_o \quad (4.18)$$

Cette quantification a été mise en évidence expérimentalement par Takayanagi *et al.* [60] : leur jonction est constituée d'un gaz d'électron bidimensionnel InAs contacté à des électrodes en niobium et une grille permet de varier la largeur de la constriction et donc le nombre de canaux ouverts. Le courant critique mesuré a une dépendance "en marches d'escalier" en fonction de la tension de grille.

- et on a la relation :  $eR_N I_C = \pi\Delta$ . En utilisant une jonction courte ( $0.3\mu m < d < 0.8\mu m$ ) et balistique du type Nb/InAs/Nb, Heida *et al.* [61] ont mesuré un produit  $R_N I_C$  au moins un ordre de grandeur plus faible que la prédiction théorique ci-dessus. Ceci est surprenant dans la mesure où les contacts NS sont vraiment idéaux. Ces auteurs attribuent ce désaccord expérience-théorie à la présence d'une région diffusive (par des raisons technologiques) sous les contacts parfaits de niobium-semiconducteur. Cette interprétation est contestée par Bastian [62] dans une réponse à l'article de Heida *et al.*

Rappelons que la conductance est quantifiée selon  $1/R_N = 2Me^2/h$  car ici chacun des  $2M$  canaux a une transparence unité.

## La jonction longue

Pour  $d \gg \xi_o$ , l'intégrand de (4.15) est rendu exponentiellement faible par les fonctions hyperboliques dès que leur argument  $\omega d/\hbar v_x$  dépasse quelques unités, ce qui correspond à des énergies  $\omega > \hbar v_F/d$  excédant l'énergie de Thouless balistique. Donc si  $d \gg \xi_o$ , seules les énergies très proches de zéro et très inférieures au gap  $\Delta$  contribuent à l'intégrale. On peut donc remplacer l'intégrand de (4.15) par une approximation à  $\omega \ll \Delta$ .

**Dans le cas monocanal**, on obtient le courant :

$$\begin{aligned} I(x) &= i \frac{q}{\hbar} T \sum_{\omega} \delta g_{\omega} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sin \chi}{\sinh^2 \omega d/\hbar v_x + \cos^2(\chi/2)} \\ &= -\frac{q}{\hbar} \frac{\hbar v_x}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sin \chi}{\sinh^2 \omega' + \cos^2(\chi/2)} \\ &= \frac{ev_x \chi}{d \pi} \end{aligned}$$

Cette expression est valable pour  $-\pi < \chi < \pi$ . *A nouveau, cette expression correspond à la convention traditionnelle  $I(\chi)$  positif pour une aimantation diamagnétique de la boucle SNS.* Dans les représentations graphiques, comme (4.7.g) et (4.7.h), nous utiliserons toujours la convention opposée.

**Dans le cas multicanal**, le courant total est :

$$\begin{aligned} I(\chi) &= \frac{ev_F \chi}{d} \frac{k_F^2 S}{\pi 2\pi} \int_0^1 dX X^2 \\ &= \frac{2M}{3} \frac{ev_F \chi}{d \pi} \end{aligned} \tag{4.19}$$

**Dans une jonction SNS longue à  $T = 0$  :**

- le supercourant  $I(\chi)$  est linéaire en  $\chi$  entre  $-\pi$  et  $\pi$  et présente des sauts en  $\chi = (2p+1)\pi$ .
- le courant critique est inversement proportionnel à la longueur de la jonction et proportionnel au nombre de canaux :

$$I_C = \frac{2M}{3} \frac{ev_F}{d} \tag{4.20}$$

- et on a :

$$R_N I_C = \frac{\hbar v_F}{3d} = \frac{2\pi}{3} E_N \tag{4.21}$$

## Conclusions

- A température nulle et dans des jonctions SNS balistiques, la relation  $I(\chi)$  est très anharmonique et présente des sauts se produisant lorsqu'un niveau d'Andreev traverse le niveau de Fermi. Lorsqu'on augmente la température ou que l'on introduit du désordre, ces sauts sont effacés et l'anharmonicité laisse place à une dépendance sinusoïdale en  $\chi$  comparable à celle de l'effet Josephson SIS [50].

- le produit  $e R_N I_C$  est égal à la plus petite des énergies parmi le gap  $\Delta$  et l'énergie de Thouless balistique  $E_N$ . Ceci reste vrai pour des jonctions diffusives à condition d'adopter la définition "diffusive" de l'énergie de Thouless [63].
- tout se passe comme si on pouvait utiliser le formalisme quasiclassique et notamment la formule (2.47) même dans un cas à faible nombre de canaux, voire monocanal. On retrouve alors les mêmes expressions que par le formalisme des quasiparticules de Bogoliubov-de Gennes.
- pour les jonctions courtes, toutes les fréquences de Matsubara contribuent de manière significative au courant. Les hautes fréquences étant coupées en  $\omega^{-2}$ . Pour les jonctions longues, la coupure est exponentielle et élimine toutes les énergies supérieures à d'énergie  $E_N$ . Ceci ne veut pas dire que dans les jonctions longues, le courant est uniquement porté par des états de basse énergie mais plutôt que l'information nécessaire à ce calcul est entièrement contenue dans le comportement de basse énergie de  $\delta g_\omega(v_x)$ . En revanche, pour obtenir le courant dans une jonction courte, il faut connaître la dépendance en énergie complète de  $\delta g_\omega(v_x)$ . Nous retrouverons cette idée dans notre propre méthode de calcul des harmoniques du courant dans la partie 4.4 [46].
- la théorie quasiclassique de la supraconductivité permet ainsi d'obtenir le courant Josephson stationnaire pour des jonctions balistiques longues ou courtes. Elle a aussi permis l'étude des jonctions diffusives grâce aux équations d'Usadel. Le tableau suivant donne les divers cas et les références correspondantes :

$l_e, d_N$	Jonction courte $d_N \ll \xi_o$	Jonction longue $d_N \gg \xi_o$
Sale $\xi_o \gg l_e$	Kulik-Omel'yanchuck [54], [55]	Zaikin [64]
Propre $\xi_o \ll l_e$	Kulik-Omel'yanchuck [54] Beenakker [56] $I_C = M\Delta/\phi_o$	Bardeen-Johnson [51] Svidsinski [52], Ishii [53] $I_C = ME_N/\phi_o$

Dans notre étude de l'anneau NS (partie suivante), nous devons retrouver les résultats "propres" ci-dessus comme la limite de longueur supraconductrice infinie ( $d_S \rightarrow \infty$ ) de nos propres résultats.

### 4.3 Spectre d'excitation de l'anneau NS propre

Dans cette partie, je présente notre calcul du spectre d'excitation complet de l'anneau NS balistique en fonction des deux longueurs  $d_N$  et  $d_S$ . Comme il s'agit d'un système

de taille finie, l'ensemble du spectre est formé de niveaux discrets. La plupart des études concernent des jonctions SNS pour lesquelles les spectres forment un continuum au-dessus du gap  $\Delta$  ou ne s'intéressent qu'aux niveaux d'énergie sous le gap dans la limite  $\epsilon \ll \Delta$ .

Nous avons étudié en détail la dépendance en flux magnétique des niveaux d'énergie. A très basse énergie, nous retrouvons les résultats de Büttiker et Klapwijk (BK) [47]. Aux énergies proches du gap, nous obtenons des dépendances non linéaires en flux. Pour des énergies très supérieures à  $\Delta$ , nous retrouvons un spectre d'anneau normal de longueur  $d_N + d_S$ .

### Mise en équation

Nous considérons un anneau NS balistique avec des contacts NS ohmiques parfaits. L'absence de désordre  $V(x) = 0$  se traduit par des fonctions d'onde de quasiparticules de type ondes planes. L'absence de barrière de potentiel aux interfaces implique que les quasiparticules de vecteur d'onde proche de  $+k_F$  ne se mélangent pas aux quasiparticules définies aux environs de  $-k_F$ , cf. chapitre 3.

Nous traitons le cas monocanal unidimensionnel dans lequel les fonctions d'onde des quasiparticules s'écrivent :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

• **dans le segment normal**, les quasiparticules sont des excitations électroniques pour lesquelles  $v(x) = 0$  et  $|k| > k_F$  ou des excitations trous pour lesquelles  $u(x) = 0$  et  $|k| < k_F$ . On a donc :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_e x} + r_{eh} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_h x} \quad (4.23)$$

avec  $k_{e,h} = k_F \pm \epsilon/\hbar v_F$ .

• **dans le segment supraconducteur pour  $0 < \epsilon < \Delta$** , il faut choisir parmi les solutions du chapitre 1 celles qui correspondent à un vecteur d'onde proche de  $k_F$ . Contrairement au cas de l'interface NS traité au chapitre 3, il faut garder les deux types de d'ondes, exponentiellement croissante et décroissante, car le segment supraconducteur est de longueur finie :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} e^{i\eta_\epsilon} \\ e^{-i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{(ik_F - \lambda_\epsilon)x} + t' \begin{pmatrix} e^{-i\eta_\epsilon} \\ e^{i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{(ik_F + \lambda_\epsilon)x} \quad (4.24)$$

où  $e^{2i\eta_\epsilon} = (\epsilon + i\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2})/\Delta$  et  $\lambda_\epsilon = \sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}/\hbar v_F$ .

La quantité  $1/\lambda_\epsilon$  représente la longueur de pénétration d'une quasiparticule d'énergie  $\epsilon < \Delta$  au sein du supraconducteur. Pour  $\epsilon \ll \Delta$ , cette longueur s'identifie à la longueur de cohérence  $\xi_o$ , tandis qu'elle diverge pour  $\epsilon \rightarrow \Delta$ .

• **dans le supraconducteur pour  $\epsilon > \Delta$** , les solutions deviennent propagatives :

$$\Psi(x) = t \begin{pmatrix} e^{-\delta_\epsilon} \\ e^{\delta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F - \delta k_\epsilon)x} + t' \begin{pmatrix} e^{\delta_\epsilon} \\ e^{-\delta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_F + \delta k_\epsilon)x} \quad (4.25)$$

$$\text{où } e^{2\delta_\epsilon} = (\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2})/\Delta.$$

En notant  $\varphi = \phi/\phi_o$  le flux réduit en unités de quantum de flux  $\phi_o = h/e$ , la continuité des fonctions d'onde en  $x = 0$  et  $x = d_S$  s'écrit d'après la partie 1.2.3 :

$$\begin{aligned} u(L) &= u(0) e^{2\pi i \varphi} \\ v(L) &= v(0) e^{-2\pi i \varphi} \\ u(d_S^-) &= u(d_S^+) \\ v(d_S^-) &= v(d_S^+) \end{aligned}$$

Le supraconducteur et le métal normal occupent respectivement les régions  $0 < x < d_S$  et  $d_S < x < L$  dans notre choix d'origine. Evidemment, le spectre est indépendant de ce choix.

En imposant aux fonctions d'ondes (4.23) et (4.24)-(4.25) de respecter les conditions aux limites ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{ik_e L} &= e^{2\pi i \varphi} (e^{i\eta_\epsilon t} + e^{-i\eta_\epsilon t'}) \\ r_{eh} e^{ik_h L} &= e^{-2\pi i \varphi} (e^{-i\eta_\epsilon t} + e^{i\eta_\epsilon t'}) \\ e^{ik_e d_S} &= e^{(ik_F - \lambda_\epsilon) d_S} e^{i\eta_\epsilon t} + e^{(ik_F + \lambda_\epsilon) d_S} e^{-i\eta_\epsilon t'} \\ r_{eh} e^{ik_h d_S} &= e^{(ik_F - \lambda_\epsilon) d_S} e^{-i\eta_\epsilon t} + e^{(ik_F + \lambda_\epsilon) d_S} e^{i\eta_\epsilon t'} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ce système admet des solutions si :

$$2i \sin 2\eta_\epsilon \cos k_F L = e^{2\pi i \varphi - i \frac{\epsilon d_N}{\hbar v_F}} \sinh(\lambda_\epsilon d_S + 2i\eta_\epsilon) - c.c. \quad (4.27)$$

Nous écrirons cette équation aux valeurs propres sous la forme :

$$\cos k_F L = r_\epsilon \cos \left( \frac{\epsilon d_N}{\hbar v_F} - 2\pi\varphi + \Theta_\epsilon \right) \quad (4.28)$$

avec les fonctions  $r_\epsilon$  and  $\Theta_\epsilon$  définies par :

• **sous le gap**  $\epsilon < \Delta$  :

$$\begin{aligned} r_\epsilon e^{i\Theta_\epsilon} &= \frac{\sinh(2i\eta_\epsilon - \lambda_\epsilon d_S)}{\sinh 2i\eta_\epsilon} \\ &= \cosh \lambda_\epsilon d_S + i \cot 2\eta_\epsilon \sinh \lambda_\epsilon d_S \end{aligned} \quad (4.29)$$

- **au-dessus du gap**  $\epsilon > \Delta$  :

$$\begin{aligned} r_\epsilon e^{i\Theta_\epsilon} &= \frac{\sinh(2\delta_\epsilon + i\delta k_\epsilon d_S)}{\sinh 2\delta_\epsilon} \\ &= \cos \delta k_\epsilon d_S + i \coth 2\delta_\epsilon \sin \delta k_\epsilon d_S \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ainsi, le spectre au-dessus du gap peut s'obtenir à partir du spectre au-dessous du gap en effectuant le remplacement  $-i\eta_\epsilon \rightarrow \delta_\epsilon$  et  $\lambda_\epsilon \rightarrow i\delta k_\epsilon$ .

### Spectre d'excitation

Les énergies d'excitation sont les solutions positives de l'équation trigonométrique (4.28). Pour résoudre cette équation, il faut introduire deux nombres quantiques  $n$  entier relatif et  $j = \pm 1$  :

$$\epsilon^j(n, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{d_N} \left[ n \pm \varphi - \frac{\Theta_\epsilon}{2\pi} + \frac{j}{2\pi} \arccos \left( \frac{\cos k_F L}{r_\epsilon} \right) \right] \quad (4.31)$$

- $\Theta_\epsilon$  est **une différence de phase liée à la présence du supraconducteur** qui s'ajoute à la différence de phase  $(k_e - k_h)d_N$  due à la propagation dans la partie normale.
- La fonction  $r_\epsilon$  définit **une renormalisation du paramètre  $k_F L$  selon  $\cos k_F L \rightarrow \cos k_F L / r_\epsilon$ .**

Ce spectre ressemble à la fois au spectre de la jonction SNS et aussi au spectre d'un anneau normal par la présence du facteur  $k_F L$ . La présence de  $k_F L$  est un effet non quasiclassique puisque lié au rapport de la longueur totale du système sur la longueur d'onde de de Broglie. Pour être plus précis, nous allons déduire de ce spectre les deux limites de l'anneau normal et des jonctions SNS.

- **Spectre d'excitation de l'anneau normal** :  $d_S = 0$ .

Naturellement, le déphasage  $\Theta_\epsilon = 0$  lié à la présence d'un supraconducteur s'annule et les effets de renormalisation disparaissent  $r_\epsilon = 1$ . Le spectre (4.31) devient :

$$\epsilon_\pm^j(n, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{L} \left[ n \pm \varphi + \frac{j}{2\pi} \arccos(\cos k_F L) \right] \quad (4.32)$$

C'est le spectre  $\phi_o$ -périodique d'un anneau normal dans la linéarisation  $\epsilon \ll E_F$  [65],[66]. Dans l'équation (4.32), les signes  $\pm \varphi$  réfèrent aux excitations ayant une impulsion  $\pm k_F$ . L'indice  $j = 1$  désigne ici les excitations de type électron  $|k| < k_F$  et  $j = -1$  celles de type trou  $|k| > k_F$ .

- **Spectre d'excitation des jonctions SNS** :  $d_S \gg \xi_o$ .

La fonction  $1/r_\epsilon$  est alors nulle sous le gap et le déphasage  $\Theta_\epsilon$  est lié très simplement au déphasage apparaissant lors d'une réflexion d'Andreev par :  $\Theta_\epsilon = \pi/2 - \arccos(\epsilon/\Delta)$ . Le spectre des niveaux d'Andreev (4.31) devient alors :

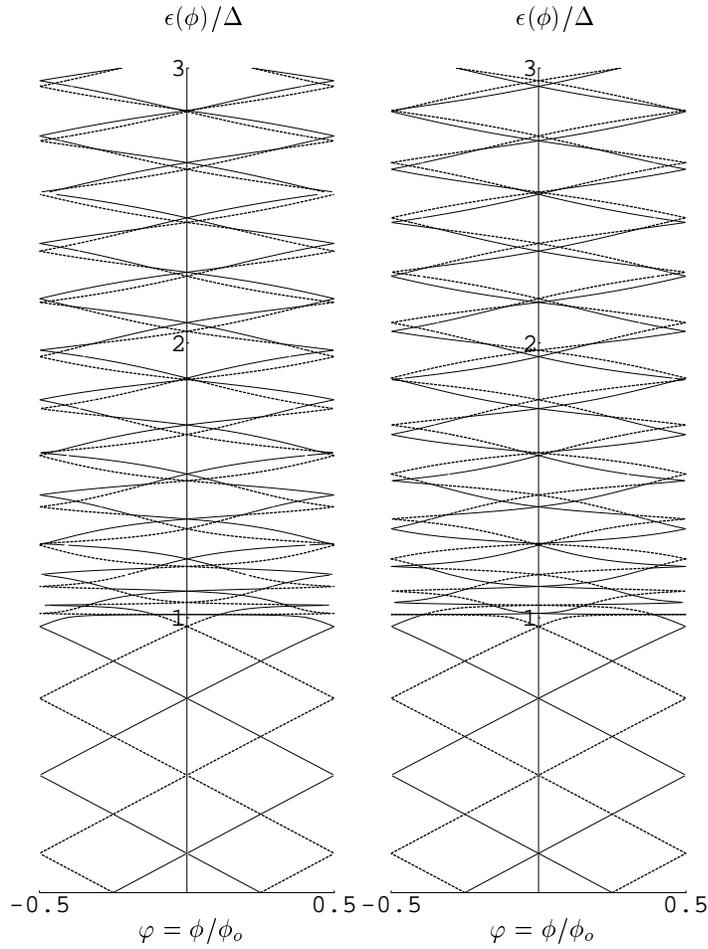


FIG. 4.3 – Spectre d'un anneau NS  $\epsilon_{\pm}^j(n, \varphi)$  avec  $j = +1$  (trait fin) and  $j = -1$  (trait gras)  $d_S = 20\xi_o$ ,  $d_N = 10\xi_o$  pour un nombre pair (gauche) ou impair (droite) d'électrons  $N$  par direction de spin. Au grandes énergies, les deux branches  $j = \pm 1$  tendent à se rejoindre. Le spectre de haute énergie montre un effet de parité semblable à celui du spectre d'un anneau normal. Les niveaux d'Andreev sont indépendants de la parité de  $N$ .

$$\epsilon_{\pm}^j(n, \varphi) = \frac{hv_F}{d_N} \left[ n \pm \varphi + \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} + \frac{j-1}{4} \right] \quad (4.33)$$

On peut décrire plus simplement ce spectre en introduisant un nouveau nombre quantique  $m = 2n + (j-1)/2$ . Les premiers états excités correspondent maintenant à  $m = 0, 1, 2, \dots$  etc dans l'expression

$$\epsilon_{\pm}(m, \varphi) = \frac{hv_F}{2d_N} \left[ m \pm 2\varphi + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} \right] \quad (4.34)$$

On reconnaît le spectre obtenu par Kulik pour les états liés dans une jonction SNS [57]. Ce spectre est  $\phi_o/2$ -périodique.

Les fonctions  $r_\epsilon$  and  $\Theta_\epsilon$  sont représentées en annexe 1.

### Description des spectres

La figure (4.3) représente le spectre d'un anneau de dimensions  $d_S = 20\xi_o$  et  $d_N = 10\xi_o$ . A flux nul, les niveaux d'énergie les plus bas  $\epsilon^j(n, \varphi = 0)$  sont obtenus pour les valeurs  $(n, j) = (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), \text{etc...}$  des nombres quantiques  $n$  et  $j$ .

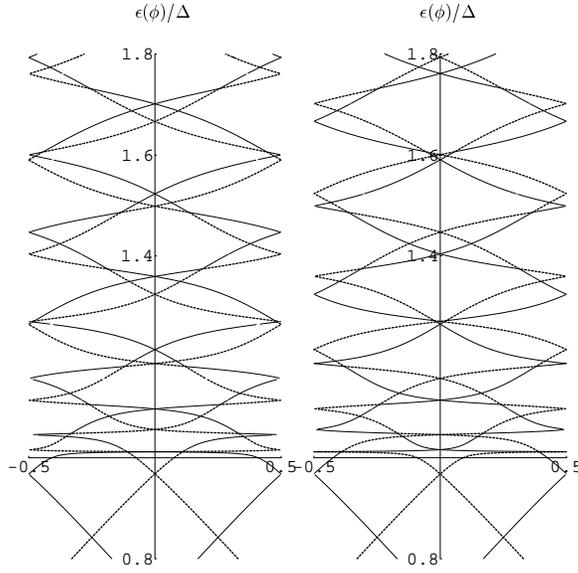


FIG. 4.4 – Spectre  $\epsilon_{\pm}^j(n, \varphi)$  autour de  $\Delta$  pour  $j = +1$  (trait fin) et  $j = -1$  (trait gras)  $d_S = 20\xi_o$ ,  $d_N = 10\xi_o$ .

On distingue trois régions :

- **Le spectre de basse énergie  $\epsilon \ll \Delta$**

On a  $r_\epsilon \simeq \cosh \lambda d_S$  et  $\Theta_\epsilon \simeq \epsilon/\Delta \cdot \tanh \lambda d_S$ .

L'équation du spectre (4.28) devient alors

$$\frac{\cos k_F L}{\cosh \lambda d_S} \simeq \cos \left( \frac{\epsilon d^*}{\hbar v_F} \mp 2\pi\varphi \right) \quad (4.35)$$

ce qui donne des *niveaux d'énergie variant linéairement avec le flux magnétique.*

$$\epsilon_{\pm}^j(n, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{d^*} \left[ n \pm \varphi + \frac{j}{2\pi} \arccos \left( \frac{\cos k_F L}{\cosh \lambda d_S} \right) \right] \quad (4.36)$$

où  $d^* = d_N + \xi_o \tanh \lambda d_S$  est la longueur effective de la partie normale.

Si on prend en compte le spin, il y a  $4d^*/\pi\xi_o$  états d'Andreev sous le gap. Ce sont des états liés d'Andreev piégés dans la partie normale à cause des réflexions d'Andreev sur les deux interfaces NS.

• **le spectre de haute énergie  $\epsilon \gg \Delta$**

On a :  $\Theta_\epsilon \simeq \delta k_\epsilon d_S \simeq \epsilon d_S / \hbar v_F$  et  $r_\epsilon \simeq 1$ .

L'équation du spectre (4.28) devient :

$$\cos k_F L \simeq \cos \left( \frac{\epsilon L}{\hbar v_F} \mp 2\pi\varphi \right) \quad (4.37)$$

et le spectre est à nouveau linéaire en flux :

$$\epsilon_\pm^j(n, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{L} \left[ n \pm \varphi + \frac{j}{2\pi} \arccos(\cos k_F L) \right] \quad (4.38)$$

Les excitations d'énergies supérieures au gap sont étendues sur la totalité de la circonférence de l'anneau et non plus sur la partie normale seulement. Par conséquent, l'écart entre niveaux est plus petit au-dessus du gap qu'en-dessous. Pour une jonction SNS, le spectre au-dessus de  $\Delta$  forme un continuum car  $d_S \rightarrow \infty$ .

• **le spectre autour du gap**

Au voisinage du gap et juste au dessus du gap, les fonctions  $r_\epsilon$  et  $\Theta_\epsilon$  varient fortement, cf. annexe 1. La conséquence sur le spectre est une dépendance des niveaux d'énergie très non linéaire en flux. La figure (4.4) détaille la structure du spectre dans cette région.

## 4.4 Méthode de calcul du courant

Au chapitre 1, nous avons vu que le formalisme des quasiparticules donne une prescription pour calculer le courant non dissipatif dans un anneau à partir du spectre d'excitation : il "suffit" d'additionner les courants individuels portés par chaque excitation. La principale difficulté consiste à sommer une grande quantité de courants individuels du même ordre de grandeur et qui alternent en signe. Comme les courants s'annihilent quasiment deux à deux, le courant total porté par le spectre est du même ordre de grandeur que le courant porté par un niveau d'énergie. De plus pour les énergies proches de  $\Delta$ , la dépendance en flux des niveaux d'énergie est très non linéaire et compliquée.

Dans cette partie, nous allons développer une méthode qui permet d'exprimer les harmoniques du courant  $I(\phi)$  en fonction des caractéristiques du spectre de très basse énergie et d'un terme correctif lié aux nonlinéarités de la dépendance en flux des niveaux d'énergie. La formule obtenue est générale des systèmes balistiques quasi unidimensionnels. Nous en commenterons les différents termes et comparerons leurs valeurs relatives en fonction de  $d_N$  et  $d_S$  dans le cas plus spécifique de l'anneau NS.

### Cas général

Comme expliqué dans le paragraphe 1.2.3, le courant non dissipatif circulant dans l'anneau s'obtient en dérivant le potentiel thermodynamique

$$I(\phi) = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right)_{\mu, T} \quad (4.39)$$

Le potentiel thermodynamique  $\Omega$  peut s'écrire en fonction de la densité d'états de quasi-particules  $\rho(\epsilon, \phi) = \rho_{exc}(|\epsilon|, \phi)$  du modèle du semiconducteur obtenue par symétrisation du spectre d'excitation, voir la figure (1.2) :

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu, \phi) &= -T \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \ln(1 + e^{-\beta\epsilon}) \rho(\epsilon, \phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon N(\epsilon, \phi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nous avons introduit la densité d'états intégrée deux fois :

$$N(\epsilon, \phi) = \int_{-\infty}^{\epsilon} d\epsilon' \int_{-\infty}^{\epsilon'} d\epsilon'' \rho(\epsilon'', \phi) \quad (4.41)$$

Le courant est donc :

$$I(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{4T \cosh^2 \epsilon/2T} \left( \frac{\partial N(\epsilon, \phi)}{\partial \phi} \right)_{\mu} \quad (4.42)$$

$N(\epsilon, \phi)$  est une fonction paire et  $\phi_o$  périodique. Son développement en série de Fourier est du type :

$$N(\epsilon, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m(\epsilon) \cos 2\pi m\phi \quad (4.43)$$

en omettant le terme constant inutile pour l'évaluation du courant. La densité d'état du semiconducteur est la somme :

$$\rho(\epsilon, \phi) = \sum_{n=-\infty, \sigma=\pm 1}^{n=\infty} \delta(\epsilon - \epsilon(n + \sigma\phi)) \quad (4.44)$$

La formule de sommation de Poisson donne les coefficients de Fourier de la densité de  $\rho(\epsilon, \phi)$  :

$$\rho_m(\epsilon) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos 2\pi my \delta(\epsilon - \epsilon(y)) \quad (4.45)$$

à partir de la fonction  $\epsilon(y)$  définie par  $\epsilon(n + \phi) = \epsilon(n, \phi)$ . La figure (4.5) montre un exemple de fonction  $\epsilon(y)$ .

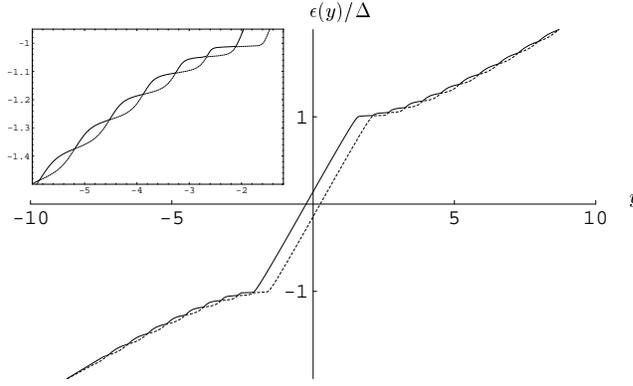


FIG. 4.5 –  $\epsilon^j(y)$  pour  $j = +1$  (en trait continu) et  $j = -1$  (en pointillés) pour  $d_S = 20\xi_o$ ,  $d_N = 10\xi_o$ , avec  $\cos k_F L = 1$ .

Après une double intégration sur l'énergie, on obtient les coefficients de Fourier  $N_m(\epsilon)$  :

$$N_m(\epsilon) = 4 \int_{-\infty}^{y(\epsilon)} dy' \frac{\sin 2\pi m y'}{2\pi m} \frac{d\epsilon(y')}{dy'} \quad (4.46)$$

Le développement de Fourier du courant est donc :

$$I(\phi) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m \sin 2\pi m \phi \quad (4.47)$$

dans lequel les harmoniques du courant sont données par :

$$I_m(T) = -\frac{2\pi m}{\phi_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{4T \cosh^2 \epsilon/2T} N_m(\epsilon) \quad (4.48)$$

En particulier à  $T = 0$ , les harmoniques du courant sont  $I_m(T = 0) = -2\pi m N_m(\epsilon = 0)/\phi_o$ . En intégrant par parties l'équation (4.46) prise à  $\epsilon = 0$ , on trouve **l'expression des harmoniques du courant à température nulle** :

$$I_m(T = 0) = \frac{2}{\pi m} \frac{1}{\phi_o} \left[ \frac{d\epsilon}{dy}(y_o) \cos 2\pi m y_o - \int_{-\infty}^{y_o} dy \frac{d^2 \epsilon}{d^2 y} \cos 2\pi m y \right] \quad (4.49)$$

On a noté  $y_o = y(\epsilon = 0)$ . Nous avons supposé que la pente  $d\epsilon/dy$  s'annule pour  $y \rightarrow -\infty$ . Il faut donc connaître la pente et l'endroit où le niveau d'Andreev le plus bas croise le niveau de Fermi.

**Commentaires :**

Pour comprendre ce résultat, il faut se rappeler que la variable muette  $y$  joue le rôle du flux réduit  $\varphi = \phi/\phi_o$ .

- Le premier terme contient  $-\partial\epsilon/\partial\varphi(\epsilon = 0)$ , c'est à dire *le courant individuel porté par le niveau d'Andreev le plus bas lorsqu'il franchit le niveau de Fermi  $\epsilon = 0$* . Il ne fait intervenir que la connaissance du spectre à très basse énergie  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- *le second terme est une intégrale sur tout le spectre de la courbure  $\partial^2\epsilon/\partial^2\phi$ .*

La décomposition ci-dessus isole donc la contribution due aux nonlinéarités qui apparaissent dans la dépendance en flux des niveaux d'énergie.

Dans l'exemple du spectre de l'anneau NS représenté sur la figure (4.3), la plus grande contribution à cette intégrale proviendra de la zone des énergies juste au-dessus de  $\Delta$ , zoomée dans la figure (4.4). Dans le paragraphe suivant, nous étudions en fonction de  $d_N$  et  $d_S$ , le poids relatif du premier terme de l'équation (4.49) et du second terme du aux nonlinéarités.

### Application à l'anneau NS

Le premier terme de (4.49) peut être calculé analytiquement très facilement

$$I_m = \frac{2}{\pi m} \frac{1}{\phi_o} \frac{d\epsilon}{dy}(y_o) \cos 2\pi m y_o \quad (4.50)$$

La difficulté principale est l'évaluation du second terme de cette même équation. Comme il s'agit d'une intégrale sur tout le spectre, on ne peut pas faire une approximation sur celui-ci. En revanche, on peut se demander dans quels cas ce terme correctif est négligeable par rapport à (4.50).

Pour cela, nous avons calculé numériquement cette contribution pour des anneaux de longueurs  $d_N$  et  $d_S$  comprises entre 0 et  $10\xi_o$ . Sur la figure (4.6), nous comparons la variation des deux premiers harmoniques  $I_{m=1}(d_N)$  et  $I_{m=2}(d_N)$  en fonction de la longueur normale  $d_N$  pour différentes valeurs de  $d_S$ . Les courbes en tirets correspondent à la contribution (4.50) et les traits pleins à l'estimation complète de  $I_m(d_N)$ .

Cette étude numérique montre clairement que le second terme est négligeable pour  $d_N \geq 2$ . Pour les valeurs plus petites de  $d_N$ , les deux termes de l'équation (4.49) deviennent du même ordre de grandeur. Le second terme seul est représenté dans le coin de la figure (4.6) pour  $I_{m=2}$  il décroît de manière monotone lorsque  $d_N$  augmente.

## 4.5 Spectres et courants de l'anneau NS

### Passage de la jonction SNS à l'anneau normal pour $d_N$ long

Dans cette partie nous retrouvons les résultats de Büttiker et Klapwijk [47] sur l'anneau NS avec  $d_N \geq 2\xi_o$ . Ces auteurs ont étudié le spectre d'états d'Andreev sous le gap d'un

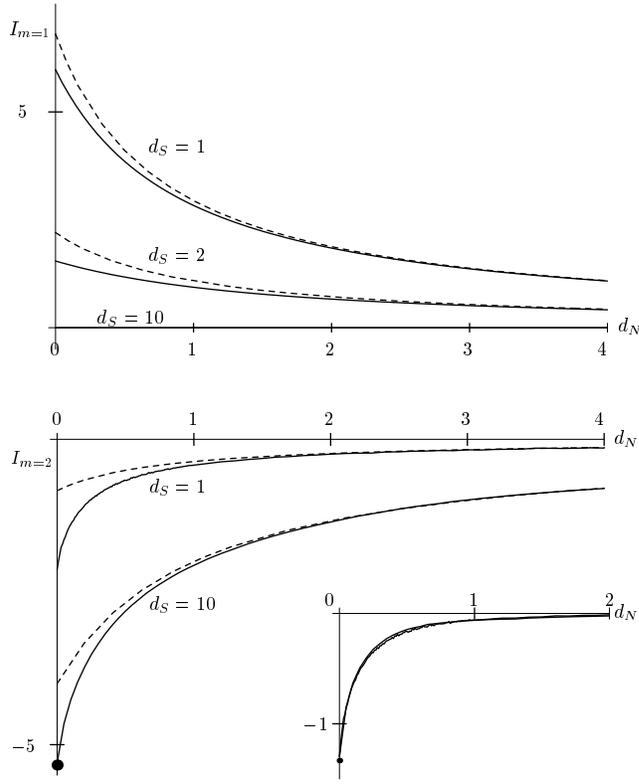


FIG. 4.6 – Première harmonique  $I_{m=1}$  (en haut) et seconde harmonique  $I_{m=2}$  (en bas) en unités  $\Delta/\phi_o$  en fonction de  $d_N$  pour différentes  $d_S$ . Les tirets représentent l'approximation de Bardeen et Johnson [51]. La figure en coin montre le terme correctif à BJ pour  $d_S = \xi_o$  and  $d_S = 10\xi_o$ . Le point représente la valeur attendue pour  $d_N = 0$  et  $d_S \gg \xi_o$ .

anneau NS et le passage de la jonction SNS  $d_S \gg \xi_o$  au spectre de l'anneau normal  $d_S = 0$ . L'effet physique important est l'apparition d'un effet tunnel des quasiparticules d'Andreev à travers le supraconducteur lorsque  $d_S$  se rapproche de  $\xi_o$ .

Pour calculer le courant, BK utilisent une analogie entre l'anneau NS et le calcul de Bardeen et Johnson des jonctions SNS longues [51]. Ils supposent que comme pour les jonctions SNS, le courant va dépendre linéairement du flux entre les sauts et ils évaluent les sauts à partir du courant porté par une paire électron-trou, ce qui achève de déterminer  $I(\phi)$ .

Notre formule (4.49) permet d'éviter ce genre d'astuce. Grâce à l'étude numérique du terme correctif, nous savons que lorsque  $d_N \geq 2\xi_o$ , les harmoniques du courant s'écrivent :

$$I(\varphi) = \frac{4 e v_F}{\pi d^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m(X)}{m} \sin 2\pi m \varphi \quad (4.51)$$

avec :

$$X = \frac{\cos k_F L}{\cosh \lambda d_S} \quad (4.52)$$

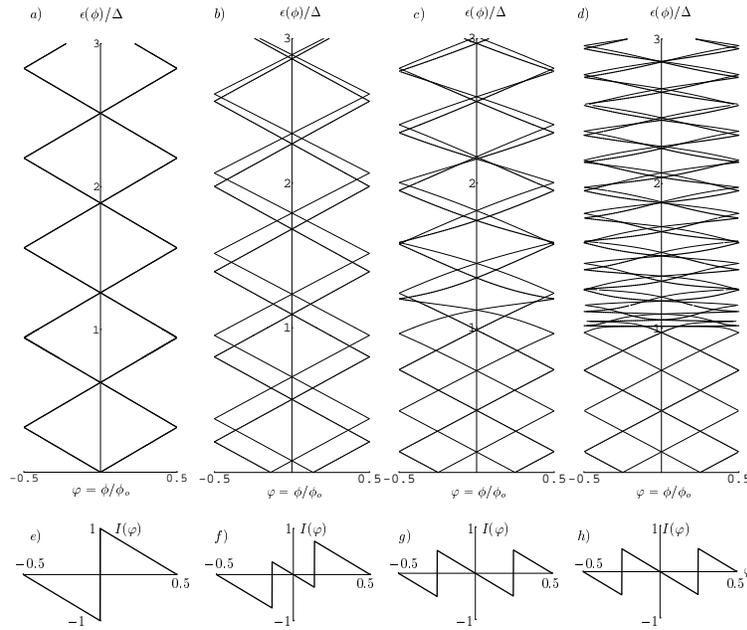


FIG. 4.7 – Spectre d'un anneau NS pour a)  $d_S = 0$ , b)  $d_S = \xi_0$ , c)  $d_S = 5\xi_0$  et d)  $d_S = 20\xi_0$ , en gardant  $d_N$  égal à  $10\xi_0$ . Le nombre d'électrons par direction de spin  $N$  est pair.  $j = +1$  en traits fins et  $j = -1$  en trait plus large. Les courants  $I(\varphi)$  en unités de  $I_0 = 2ev_F/d^*$  sont portés en e), f), g), h) sous les spectres correspondants a), b), c), d).

et

$$T_m(X) = \cos(m \arccos X) \quad (4.53)$$

Les coefficients  $T_m(X)$  sont les polynômes de Tchebychev de degré  $m$ . Le paramètre  $X$  dépend à la fois du remplissage et du paramètre  $\lambda d_S = d_S/\xi_0$ . Les premiers polynômes de Tchebychev sont  $T_1(X) = X$ ,  $T_2(X) = 2X^2 - 1$ ,  $T_3(X) = 4X^3 - 3X$ , ....

La série de Fourier (4.51) donne une courbe  $I(\varphi)$  constituée de sections linéaires. Nous avons représenté l'évolution de  $I(\varphi)$  avec  $d_S$  pour une valeur commune élevée de  $d_N$  sur la figure (4.7).

Résumons :

Longueur du supraconducteur	$d_S$	Courant	$I(\phi)$
Jonction SNS	$d_S \gg \xi_o$		$\frac{2}{\pi} \frac{ev_x}{d_N + \xi_o} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin 4\pi p\varphi$
Anneau NS	$d_S$ arbitraire		$\frac{4}{\pi} \frac{ev_F}{d^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m(X)}{m} \sin 2\pi m\varphi$
Anneau normal	$d_S = 0$		$\frac{4}{\pi} \frac{ev_F}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mk_F L}{m} \sin 2\pi m\varphi$

• **Limite jonction Josephson**  $d_S \gg \xi_o$  :

Le courant monocanal est constitué uniquement d'harmoniques paires

$$\begin{aligned}
I(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \frac{ev_x}{d_N + \xi_o} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin 4\pi p\varphi \\
&= -\frac{ev_F}{d_N + \xi_o} \frac{\chi}{\pi}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

où  $\chi = 4\pi\varphi$ .

• **Limite courants permanents**  $d_S = 0$

Le modèle de l'anneau NS permet d'obtenir le courant permanent dans un anneau de longueur  $L = d_N$  [44] :

$$I(\varphi) = \frac{4}{\pi} \frac{ev_F}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mk_F L}{m} \sin 2\pi m\varphi \tag{4.55}$$

ce courant  $I(\varphi)$  comprend la dégénérescence de spin. C'est un résultat correct dans l'approximation  $k_F L \gg 1$ .

### Passage des jonctions courtes au jonctions longues

Nous considérons maintenant uniquement des jonctions SNS et nous étudions le passage des jonctions longues  $d_N \gg \xi_o$  aux jonctions courtes  $d_N \ll \xi_o$ . La figure (4.8) montre qu'à mesure qu'on diminue  $d_N$ , les niveaux d'Andreev s'écartent et leur dépendance en flux devient nonlinéaire. Le cas de la jonction longue  $d_N \gg \xi_o$  a déjà été traité dans le paragraphe précédent.

Pour une jonction SNS courte  $d_N \ll \xi_o$  monocanal, il y a un seul niveau d'Andreev deux fois dégénéré en spin sous le gap. L'énergie de ce niveau s'écrit :

$$\epsilon(\phi) = \Delta \left| \cos 2\pi\phi/\phi_o \right| \tag{4.56}$$

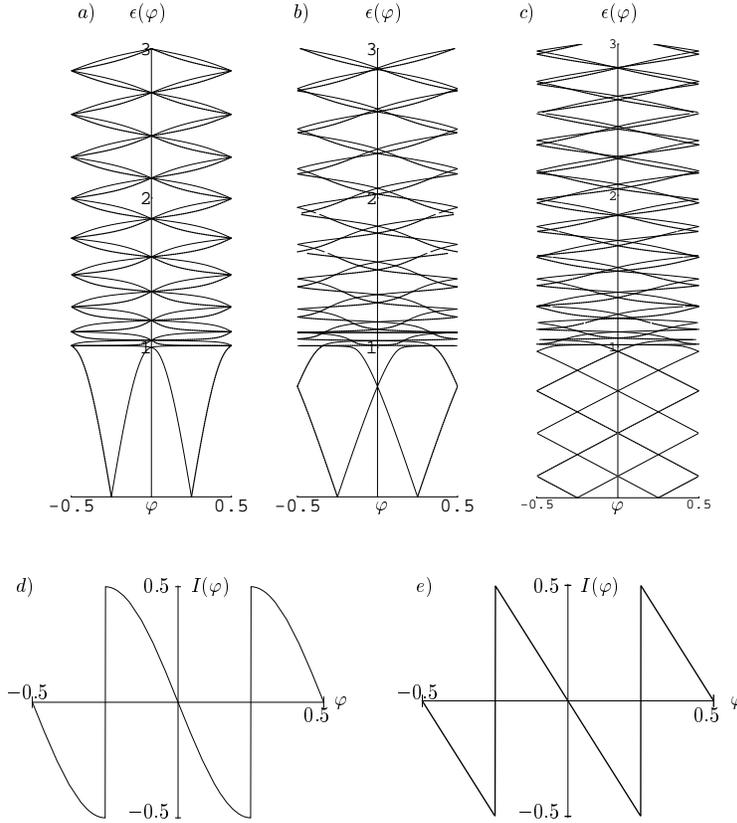


FIG. 4.8 – Spectre NS pour  $d_S = 20\xi_o$  et a)  $d_N = 0$ , b)  $d_N = \xi_o$ , c)  $d_N = 10\xi_o$ . Les courants d) and e) sont donnés en unités de  $I_o = 2ev_F/d^*$  et correspondent respectivement aux spectres a) et c). Les niveaux  $j = +1$  sont représentés en trait fin et ceux à  $j = -1$  en trait gras.

At  $T = 0$ , le courant porté par cet unique niveau est :

$$I(\varphi) = -2\pi \frac{\Delta}{\phi_o} \sin 2\pi\varphi \quad (4.57)$$

pour  $|\varphi| < 1/4$ , voir figure (4.8(d)).

Ce résultat coïncide avec le courant total obtenu par Beenakker [56]. Donc dans le cas du "weak link" court, le continuum ne véhicule pas de courant.

Dans notre méthode, on peut aussi obtenir ce résultat mais avec des calculs plus longs. Il est cependant intéressant de noter que c'est un cas où on peut évaluer analytiquement le terme correctif de non linéarité que nous avons étudié numériquement jusqu'ici. Détaillons donc ce calcul :

L'équation aux valeurs propres pour  $d_N = 0$  s'écrit :

$$2\pi y^j(\epsilon) = -\arccos \frac{\epsilon}{\Delta} + (1-j) \frac{\pi}{2} \quad (4.58)$$

Pour  $j = 1$ , on obtient  $\epsilon = \Delta \cos 2\pi y$  dans l'intervalle  $-1/2 < y < -1/4$  et pour  $j = -1$ , on a  $\epsilon = -\Delta \cos 2\pi y$  dans l'intervalle  $0 < y < 1/4$ . Ces fonctions sont représentées  $\epsilon^j(y)$  sur la figure (4.9).

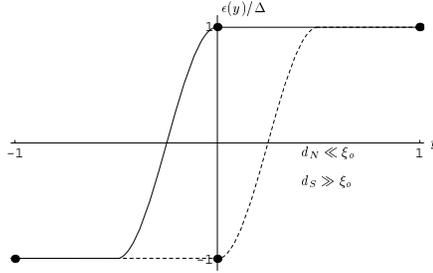


FIG. 4.9 – Les fonctions  $\epsilon^j(y)$  pour  $j = +1$  (trait plein) et  $j = -1$  (pointillés)  $d_S = \infty$ ,  $d_N = 0$ .

Détaillons le calcul pour  $j = 1$ . L'équation (4.49) donne

$$I_m^{j=1} = \frac{4\Delta}{\phi_o} \frac{1}{m} \left[ \cos \frac{\pi m}{2} + 2\pi \int_{-1/2}^{-1/4} dy \cos 2\pi m y \cos 2\pi y \right] \quad (4.59)$$

Les harmoniques impairs  $m \geq 3$  s'annulent. Les harmoniques pairs  $m = 2p$  valent

$$I_{2p}^{j=1} = \frac{4\Delta}{\phi_o} (-1)^p \frac{2p}{4p^2 - 1} \quad (4.60)$$

Pour  $j = -1$  donne le même résultat pour  $m \geq 2$ . Le cas du premier harmonique  $m = 1$  doit être considéré à part, mais il est facile de voir que  $j = +1$  et  $j = -1$  s'annulent et que la première harmonique est nul comme les autres harmoniques impairs. Par suite, le courant est donné par

$$I(\varphi) = \frac{4\Delta}{\phi_o} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p}{p^2 - 1/4} \sin 4\pi p \varphi \quad (4.61)$$

qui est la série de Fourier de la fonction Eq. (4.57).

Pour  $d_S = 10\xi_o$ , notre évaluation numérique (partie 4.4) représentée sur la figure (4.6) est en bon accord avec la valeur  $I_{m=2} = -16\Delta/3\phi_o$  attendue pour une jonction SNS courte,  $d_N = 0$  et  $d_S \gg \xi_o$ .

### Effet de la température

Nous avons vu qu'à température nulle, l'aimantation à petit flux  $\phi > 0$  d'un anneau NS est toujours diamagnétique quelles que soient les longueurs  $d_N$  et  $d_S$ . En utilisant notre méthode de calcul du courant, nous allons montrer qu'à température non nulle, certains anneaux sont paramagnétiques.

Nous considérons le cas des anneaux NS ayant une partie normale longue  $d_N \gg \xi_o$ . Le courant à température  $T$  est :

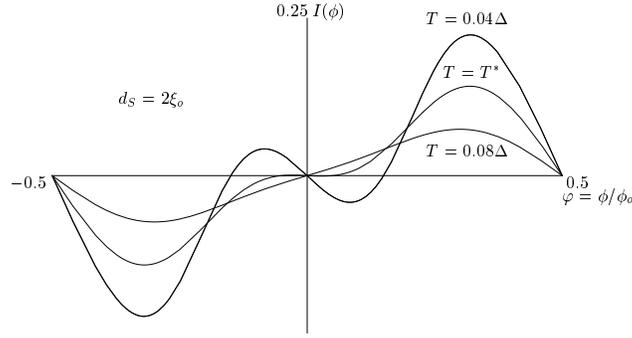


FIG. 4.10 – Relations courant-flux pour un anneau de dimensions  $d_S = 2\xi_o$  et  $d_N = 10\xi_o$  avec  $\cos k_F L = 1$ . A la température  $T = T^* = 0.056\Delta$ , la pente  $\partial I/\partial\phi$  à l'origine  $\phi = 0$  change de signe. Le courant est donné en unités de  $I_o = \Delta/\phi_o$ .

$$I(\varphi, T) = 8\pi \frac{T}{\phi_o} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m(X)}{\sinh \pi m \frac{T}{\Delta} \frac{d^*}{\xi_o}} \sin 2\pi m \varphi \quad (4.62)$$

où  $X$  et  $T_m(X)$  sont donnés par les équations (4.52,4.53).

Pour  $\cos k_F L = +1$ , la première harmonique est paramagnétique tandis que la seconde est diamagnétique. Si on augmente la température en partant de  $T = 0$ , la seconde harmonique est davantage atténuée que la première et il existe une température de passage  $T^*$  pour laquelle les deux harmoniques se compensent. Cette température  $T^*$  est une fonction croissante de  $d_S$  et décroissante de  $d_N$  donnée par :

$$T^* = \frac{\Delta d_S}{\pi d^*} \quad (4.63)$$

Sur la figure (4.10), on voit que la pente à l'origine  $\partial I/\partial\phi(\phi = 0)$  s'annule à  $T = T^*$ .

Résumons

$T < T^*(d_S)$	diamagnétisme à petit flux
$T > T^*(d_S)$	paramagnétisme à petit flux

Le courant devient sinusoidal avec une amplitude de plus en plus faible à haute température.

En revanche si  $\cos k_F L = -1$ , les deux premières harmoniques sont diamagnétiques et il en va de même pour le courant total.

### Effet multicanal

Jusqu'à présent, nous avons présenté nos résultats sur l'anneau NS monocanal. En réalité, un anneau NS a une certaine section et il existe un certain nombre des modes transverses correspondant à la quantification dans les directions  $y$  et  $z$ . Chaque mode est caractérisé par les valeurs de  $k_y$  et  $k_z$  qui sont quantifiées selon

$$\begin{aligned} k_y &= \pi n_y / a \\ k_z &= \pi n_z / b \end{aligned}$$

pour une section rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ .

En l'absence de désordre, ces modes sont indépendants et leurs énergies d'excitation peuvent donc être déduites de l'étude précédente en remplaçant  $v_F \rightarrow v_x = v_F \cos \theta$  et  $k_F \rightarrow k_x = k_F \cos \theta$  dans l'équation (4.31).

Pour des raisons de lisibilité, nous ne représentons que certains modes sur la figure (4.11) parmi les  $M = k_F^2 S / 4\pi$  modes.

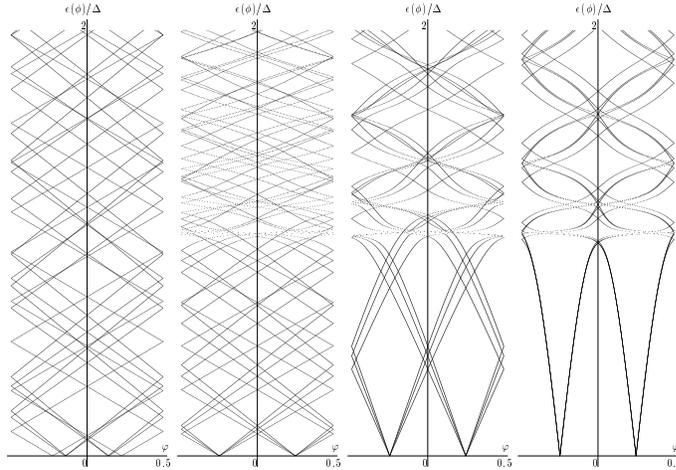


FIG. 4.11 – Spectre multicanal. La section est un carré  $(2\lambda_F)^2$ . Nous avons représenté quelques canaux parmi les  $M = k_F^2 S / 4\pi$  canaux. a)  $d_S = \xi_o$  and  $d_N = 10\xi_o$ , b)  $d_S = 10\xi_o$  and  $d_N = 10\xi_o$ , c)  $d_S = 10\xi_o$  and  $d_N = \xi_o$ , d)  $d_S = 10\xi_o$  and  $d_N = 0$ .

Le comportement de ces modes indépendants est très différent selon la longueur du segment normal. Ceci est lié à l'influence de l'inclinaison.

- **Pour une jonction SNS courte  $d_N \rightarrow 0$ .**

Les spectres de chaque canal se rapprochent et ne forment plus qu'un seul spectre  $M$  fois dégénéré quand  $d_N = 0$ . En effet, dans ce cas le spectre est insensible à l'inclinaison de la "trajectoire" et la dépendance en flux est due seulement à la phase acquise lors des réflexions d'Andreev. Le courant total est donc  $M$  fois le courant monocanal

$$I(\phi) = -2M\pi \frac{\Delta}{\phi_o} \sin 2\pi\phi \quad (4.64)$$

• **Pour une jonction SNS longue**  $d_N \gg \xi_o$  **et**  $d_S \gg \xi_o$ .

Les spectres dépendent de l'angle  $\theta$  mais tous partent du point ( $\phi = \phi_o/4, \epsilon = 0$ ).

Le courant porté par un canal dans une jonction SNS longue est :

$$I(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{ev_{Fx}}{d_N + \xi_o} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin 4\pi p\varphi \quad (4.65)$$

Le nombre de canaux transverses correspondant à cette valeur de l'inclinaison comprise entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est :

$$dN(\theta) = \frac{k_F^2 S}{2\pi} \cos \theta d(\cos \theta) \quad (4.66)$$

L'expression du courant monocanal est donc modifiée par un facteur

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{k_F^2 S}{2\pi} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{S k_F^2}{6\pi} \quad (4.67)$$

Le courant total traversant une jonction de section rectangulaire  $S$  est

$$I(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{k_F^2 S}{6\pi} \frac{ev_F}{d_N + \xi_o} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin 4\pi p\varphi \quad (4.68)$$

• **Pour un anneau NS avec**  $d_S \rightarrow 0$ .

Quand la partie supraconductrice est réduite, les niveaux de très basses énergies commencent à dépendre du vecteur d'onde suivant  $x$  : le spectre "perd de sa rigidité". La conséquence est une réduction du courant qui va s'annuler dans la limite de l'anneau normal multicanal [67]. La figure (4.12) montre l'évolution du courant critique, ou courant maximal, en fonction de  $d_S$ .

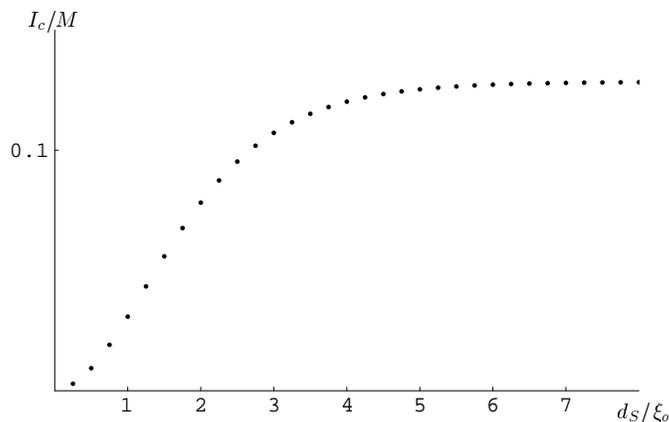


FIG. 4.12 – Courant critique par canal transverse en fonction de  $d_S$  pour  $d_N = 10$  et  $k_F \xi_o \gg 1$  à  $T = 0.03\Delta$ .

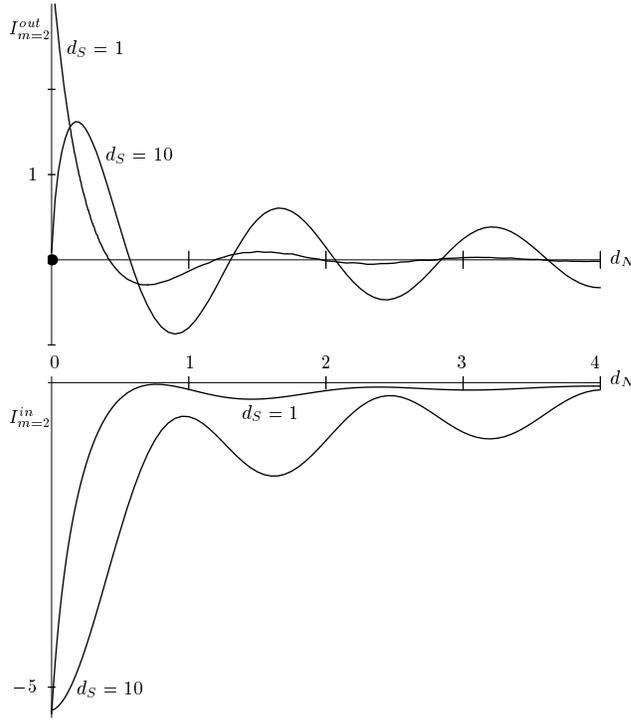


FIG. 4.13 – Contributions au second harmonique de la part des niveaux hors du gap  $I_{m=2}^{out}$  et de la part des niveaux dans le gap  $I_{m=2}^{in}$  en unités  $\Delta/\phi_o$  pour  $d_S = \xi_o$  et pour  $d_S = 10\xi_o$  en fonction de  $d_N$ . Le point gras insiste sur l'annulation du courant porté par les états hors du gap lorsque  $d_N$  s'annule et que  $d_S \gg \xi_o$ .

### Quels états portent le courant ?

Le courant d'équilibre dans une structure hybride NS peut être vu comme la superposition de courants individuels porté par chacune des excitations possibles du système. On peut alors se demander quelles excitations contribuent le plus au courant total. Dans le modèle du semiconducteur, nous pouvons ainsi séparer dans l'équation (4.49), d'une part l'intégration sur les énergies de  $-\infty$  à  $-\Delta$  et d'autre part l'intégration sur les énergies comprises entre  $-\Delta$  et 0. Nous avons étudié le comportement de chaque harmonique en fonction de  $d_N$  et de  $d_S$ . Le résultat est représenté pour les premières harmoniques sur la figure (4.13).

Nous avons vu que les harmoniques du courant total sont des fonctions monotones décroissantes de  $d_N$ . Cependant bien que leur somme soit monotone, les contributions respectives des états d'Andreev dans le gap et des états au-dessus du gap sont oscillantes. Ces oscillations du courant porté par les états sous le gap correspondent à de nouveaux états d'Andreev qui apparaissent sous le gap quand  $d_N$  augmente. Le nombre d'états d'Andreev est  $4d^*/\pi\xi_o$ , donc la période des oscillations est  $\pi\xi_o/2$ . [50].

Pour les jonctions courtes ( $d_N = 0$  and  $d_S = \infty$ ), le courant est porté par l'unique niveau d'Andreev. Quand  $d_S$  est suffisamment proche de  $\xi_o$ , les états au-dessus du gap

commencent à porter une partie du courant. Quand  $d_N \gg \xi_o$ , le courant est porté à la fois par les états d'Andreev et par les états au-dessus du gap bien que le calcul implique seulement une connaissance du comportement du spectre de très basse énergie.

### Effet d'une impureté : anneau NIS.

Signalons enfin que nous avons essayé de décrire l'effet d'une impureté  $V(x) = V_s \delta(x)$  placée dans la partie normale de l'anneau. Une impureté introduit de la réflexion électron-électron et mélange les excitations définies respectivement au voisinage de  $\pm k_F$ . On obtient alors un système linéaire de 8 équations à 8 inconnues. Le spectre correspondant donne celui obtenu par Zaikin et Zharkov [68] et Bagwell [50] dans la limite  $d_S \rightarrow \infty$  de la jonction SNIS. Malheureusement, dans le cas  $d_S$  arbitraire, nous ne sommes pas parvenus à simplifier le spectre.

## 4.6 Conclusion

En résumé, nous avons obtenu *le spectre d'excitation complet de l'anneau NS* et nous avons développé une méthode générale de calcul du courant valable pour les systèmes balistiques.

Appliquée à l'anneau NS, cette méthode permet d'une part de *retrouver très simplement et dans un cadre unique* les caractéristiques courant-flux  $I(\phi)$  des jonctions SNS balistiques longues ou courtes, les résultats de Büttiker et Klapwijk sur les anneaux NS avec  $d_N \gg \xi_o$  ainsi que le courant permanent dans un anneau purement normal.

D'autre part, ce cadre nous a permis d'améliorer la connaissance de la physique de l'anneau NS en étudiant :

- **l'effet de la température.** Dans le cas monocanal, nous avons mis en évidence une transition entre le comportement diamagnétique des jonctions SNS et le comportement paramagnétique des anneaux normaux pour lesquels  $\cos k_F L = 1$ . Cependant, cet effet n'existe pas pour les anneaux avec  $\cos k_F L = -1$  et par conséquent ne subsiste pas au moyennage sur un grand nombre de canaux.
- **l'anneau multicanal sans désordre.** Nous avons obtenu l'évolution du courant critique en fonction de  $d_S$  pour un anneau NS comprenant un très grand nombre de canaux transverses.
- **la répartition spectrale du courant.** Nous avons retrouvé que dans la limite  $d_S \rightarrow \infty$  la répartition spectrale du courant varie fortement en fonction de  $d_N$ . Dans une jonction courte  $d_N \ll \xi_o$ , le courant Josephson est porté entièrement par le niveau d'Andreev sous le gap. Dans une jonction longue, le courant est aussi en partie véhiculé par les états au-dessus du gap  $\Delta$ .



# Chapitre 5

## Jonctions SFS

Supraconductivité et ferromagnétisme sont deux phénomènes qui semblent difficiles à concilier dans un même matériau. Par exemple, un métal supraconducteur expulse le champ magnétique (effet Meissner) tandis qu'un matériau ferromagnétique concentre les lignes de champ. Au niveau microscopique, l'interaction attractive à l'origine de la supraconductivité apparie les électrons en singulets (supraconductivité "s") alors que le champ d'échange favorise l'alignement des spins au sein d'un matériau ferromagnétique. Fulde-Ferrell et Larkin-Ovchinnikov (FFLO) ont étudié la coexistence de ces deux tendances antagonistes au sein d'un même matériau massif [12],[13]. Leurs travaux prévoient un condensat d'impulsion non nulle, l'état FFLO, qui n'a toujours pas été observé expérimentalement sans doute en raison de son existence dans une région très restreinte du diagramme de phase température-champ d'échange. Une autre manière d'étudier cette compétition entre supraconductivité et ferromagnétisme consiste à juxtaposer matériau(x) ferromagnétique(s) et supraconducteur(s) au sein d'une structure hybride : bicouche FS, jonction SFS, réseau FS [69]. On a alors accès à toute une classe de phénomènes relevant de l'effet de proximité : température critique d'une bicouche FS, effet Josephson dans une jonction SFS, transport à travers un contact FS, etc... En particulier, Bulaevskii *et al.* [70] ont prédit l'existence d'un état d'équilibre de la jonction SFS dans lequel la différence de phase est spontanément  $\pi$ . Cet "état  $\pi$ ", apparenté à celui de FFLO, a été observé expérimentalement très récemment par Ryazanov [71], Kontos [72],[73] et Guichard [74].

Il s'agit de comprendre comment la présence d'un ferromagnétique modifie l'effet de proximité. Comme les électrons d'une paire de Cooper forment un singulet de spin, un électron de spin  $\sigma$  est transformé en un trou de spin  $-\sigma$  lors d'une réflexion d'Andreev. Ceci a deux conséquences : d'une part l'existence d'un effet d'interférence supplémentaire entre l'électron et le trou réfléchi d'Andreev et d'autre part l'apparition d'une réflexion ordinaire d'un électron en électron. Autrement dit la réflexion d'Andreev FS est incomplète même en l'absence de barrière de potentiel.

Le spectre de la jonction SFS balistique a été obtenu par Kuplevakhskii et Fal'ko en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes mais en se limitant à de faibles champs d'échange [75]. Le courant Josephson correspondant a été calculé dans le cadre de la théorie quasiclassique de la supraconductivité en traitant uniquement l'effet d'interférence lié

au décalage des vecteurs d'onde [14],[76]. *Dans cette partie de ma thèse, j'ai repris l'étude de la jonction SFS balistique en incluant d'une part le décalage des vecteurs d'onde du à l'énergie d'échange et d'autre part la compétition entre la réflexion ordinaire et la réflexion d'Andreev.* J'ai obtenu les spectres pour des champs d'échange arbitraires. Notre travail concerne une jonction SFS balistique quasi-unidimensionnelle présentant des contacts parfaits entre ses différentes parties. Contrairement aux études sur les jonctions SFIS, la compétition entre réflexion d'Andreev et réflexion ordinaire est ici intrinsèquement liée au champ d'échange du ferromagnétique. A priori, on peut s'attendre à un comportement semblable à une jonction SFIS présentant une barrière de potentiel effective liée à la polarisation de spin du ferromagnétique. *Nous allons voir qu'il n'en est rien. D'une part, nous avons trouvé que des gaps importants s'ouvrent en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  alors qu'un seul gap existe en  $\chi = \pi$  dans une jonction SFIS. D'autre part, le courant Josephson et donc la transition  $0 - \pi$  sont en revanche peu affectés, même à de très fortes polarisations de spin.*

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la première partie, j'explique brièvement comment l'effet de proximité est modifié par la présence d'un ferromagnétique itinérant en étudiant une interface FS. La deuxième partie est consacrée à la jonction SFS et aux calculs de Buzdin utilisant la théorie quasiclassique de la supraconductivité [14],[76]. Ensuite, je présente notre traitement de la jonction SFS qui va au-delà des travaux de Buzdin en incluant la compétition entre la réflexion d'Andreev et la réflexion ordinaire. Dans l'exposition de nos résultats, je distingue successivement la jonction faiblement polarisée en spin et la jonction fortement polarisée. Dans chaque cas, je présente des spectres SFS accompagnés du le courant  $I(\chi)$  correspondant à  $T = 0$ , et une discussion sur la transition  $0 - \pi$  avec comparaison avec la transition  $0 - \pi$  dans SFIS [77]. *Le résultat surprenant est le suivant : même pour des polarisations de spin très élevées, l'effet Josephson stationnaire est très robuste contrairement à d'autres propriétés comme la conductance FS ou le bruit de grenaille qui sont fortement affectées [15].*

## 5.1 Effet de proximité FS

Dans le chapitre 3, nous avons vu que la réflexion d'Andreev est parfaite sur une interface propre entre un métal balistique (N) et un supraconducteur (S) : ceci conduit à une conductance du contact NS double de celle du contact NN :  $G_{NS} = 2G_{NN} = 4e^2/h$  par canal. Ceci n'est plus vrai si on remplace le métal normal par un ferromagnétique : l'électron incident est alors réfléchi en partie sous forme d'un trou et en partie sous forme d'un électron. De Jong et Beenakker [15] ont montré que l'existence de cette réflexion ordinaire réduit la conductance  $G_{FS}$  du contact ferromagnétique propre par rapport à la conductance du contact non magnétique propre  $G_{NS} = 4e^2/h$ .

### Réflexion d'Andreev FS

On considère une interface FS unidimensionnelle. Le ferromagnétisme est décrit par le modèle de Stoner qui traite les interactions en champ moyen à l'aide d'un potentiel à un

corps  $V_\sigma(x) = \sigma E_{ex}$  dépendant de l'état de spin de la particule. Il en résulte un décalage en énergie  $2E_{ex}$  entre la bande des électrons de spin vers le haut  $\uparrow$  ( $\sigma = 1$ ) et la bande des électrons de spin vers le bas  $\downarrow$  ( $\sigma = -1$ ). On modélise cette interface FS en utilisant les potentiels d'échange et de paire "en marches d'escalier" suivants :

$$V_\sigma(x) = E_{ex} \Theta(-x) \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \Delta e^{\pm ix} \Theta(x).$$

où  $\Theta(x)$  est la fonction de Heaviside. Nous considérons ici des systèmes "inactifs" du point de vue du spin. Autrement dit, nous négligeons tous les phénomènes de "spin flip". Il existe alors deux canaux de spin parfaitement indépendants dont les fonctions d'ondes sont les spineurs  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  :

$$\Psi_\sigma(x) = \begin{pmatrix} u_\sigma(x) \\ v_{-\sigma}(x) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

obéissant aux équations de Bogoliubov-de Gennes découplées suivantes :

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi} + V_\sigma(x) & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & -\hat{\xi}^* - V_\sigma(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\sigma(x) \\ v_{-\sigma}(x) \end{pmatrix} = \epsilon_\sigma \begin{pmatrix} u_\sigma(x) \\ v_{-\sigma}(x) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

On peut écrire les fonctions d'ondes dans chaque demi-espace :

- **Dans le métal ferromagnétique**  $x \leq 0$ , la fonction d'onde contient *a priori* l'électron incident, le trou réfléchi d'Andreev avec une amplitude relative  $r_{eh}$  et l'électron réfléchi avec une amplitude relative  $r_{ee}$  :

$$\Psi_\sigma(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_\sigma x} + r_{eh} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ih_{-\sigma} x} + r_{ee} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_\sigma x} \quad (5.3)$$

Les vecteurs d'ondes  $k_\sigma$  et  $h_{-\sigma}$  sont respectivement ceux d'un électron d'énergie  $\epsilon$  et du trou réfléchi d'Andreev correspondant. En notant  $\eta = E_{ex}/E_F$  le rapport de l'énergie d'échange sur l'énergie de Fermi, on a :

$$k_{e\sigma} = k_F \sqrt{1 + \sigma\eta + \frac{\epsilon}{E_F}}$$

$$h_{h-\sigma} = k_F \sqrt{1 - \sigma\eta - \frac{\epsilon}{E_F}}$$

- **Dans le métal supraconducteur**  $x \geq 0$ , les fonctions d'onde sont les mêmes que dans le cas NIS vu au chapitre 3 :

$$\Psi_\sigma(x) = t \begin{pmatrix} e^{-i\eta_\epsilon} \\ e^{i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{(ik_F - \lambda_\epsilon)x} + t' \begin{pmatrix} e^{i\eta_\epsilon} \\ e^{-i\eta_\epsilon} \end{pmatrix} e^{(-ik_F - \lambda_\epsilon)x} \quad (5.4)$$

où  $e^{2i\eta_\epsilon} = (\epsilon + i\sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2})/\Delta$  et  $\lambda_\epsilon = \sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2}/\hbar v_F$ .

$t$  et  $t'$  sont respectivement les amplitudes des excitations de Bogoliubov définies autour de  $+k_F$  et  $-k_F$  et s'annulant en  $x \rightarrow \infty$ .

En exprimant la continuité de  $\Psi_\sigma(x)$  et de sa dérivée en  $x = 0$ , on obtient le système :

$$\begin{aligned}
1 + r_{ee} &= e^{i\chi} (t + t') \\
1 - r_{ee} &= \gamma_\epsilon t + \gamma_\epsilon^* t' \\
k_\sigma (1 - r_{ee}) &= k_F e^{i\chi} (t - t') \\
h_{-\sigma} r_{eh} &= k_F (\gamma_\epsilon t - \gamma_\epsilon^* t')
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Nous avons utilisé la notation  $\gamma_\epsilon = e^{-in_\epsilon}$  et noté par commodité  $k_\sigma = k$  et  $h_{-\sigma} = h$ .

En résolvant ce système, on trouve un coefficient de réflexion électron-électron  $r_{ee}$  non nul, contrairement au cas NS. En particulier, on a le tableau suivant :

	Réflexion électron-électron $r_{ee}$	Réflexion d'Andreev $r_{eh}$
$\epsilon = 0$	$\frac{kh - k_F^2}{kh + k_F^2}$	$-\frac{2ikk_F e^{-i\chi}}{kh + k_F^2}$
$\epsilon = \Delta$	$\frac{k-h}{k+h}$	$-\frac{2ke^{-i\chi}}{k+h}$

Les lois de conservation s'expriment, non pas sur les coefficients de réflexion et transmission en amplitude  $r_{ee}$  et  $r_{eh}$ , mais sur les coefficients  $R_{ee}$  et  $R_{eh}$  définis par rapport aux courants :

$$R_{ee} = r_{ee}^2 \quad R_{eh} = \frac{h}{k} |r_{eh}|^2$$

On vérifie immédiatement que pour les énergies  $\epsilon = \Delta$  et  $\epsilon = 0$ , on a :

$$R_{ee} + R_{eh} = 1$$

On peut montrer que cette relation est valable pour toutes les énergies. Elle est identique à celle obtenue par Blonder *et al.* (BTK) pour une interface NS avec une impureté "delta"  $V(x) = V_s \delta(x)$  [31]. Or, nous avons considéré une interface FS "propre", i.e. sans impureté. Donc, *le caractère incomplet de la réflexion d'Andreev est une propriété intrinsèque de l'interface FS, le rapport  $\eta = E_{ex}/E_F$  jouant un rôle semblable à celui que tient la "force" de l'impureté  $Z = mV_s/\hbar k_F$  dans la théorie BTK.*

Nous avons tracé les probabilités de réflexions ordinaire et Andreev pour une quasiparticule d'énergie nulle  $\epsilon = 0$  et pour une quasiparticule d'énergie  $\epsilon = \Delta$  en fonction du champ d'échange dans la figure (5.1).

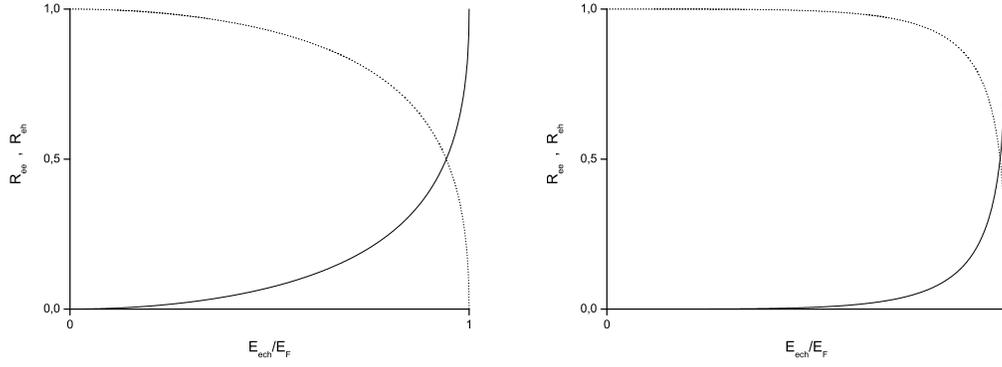


FIG. 5.1 – Probabilité de réflexion ordinaire  $R_{ee}$  et de réflexion d’Andreev  $R_{eh}$  en fonction de  $\eta = E_{ex}/E_F$  à énergie nulle (à gauche) et à  $\epsilon = \Delta$  (à droite).

On peut comprendre intuitivement pourquoi les coefficients de réflexion d’Andreev s’anulent pour  $\eta = E_{ex}/E_F \rightarrow 1$ . En effet, si l’énergie d’échange est égale à l’énergie de Fermi, l’une des bandes ne fournit plus d’états situés au niveau de Fermi et donc il ne peut pas y avoir formation d’une paire d’Andreev. Dit autrement, les paires de Cooper du supraconducteur ne peuvent pas pénétrer dans le ferromagnétique car il n’y a plus d’état pour accueillir l’un des électrons.

Qualitativement, l’effet du ferromagnétisme est donc comparable à celui d’une impureté sur l’interface NS. Il faut déjà nuancer ce parallèle car les dépendances des probabilités de réflexion d’Andreev dans le cas NIS et dans le cas FS sont différentes. Par exemple aux énergies  $\epsilon = 0$  et  $\epsilon = \Delta$  :

	$R_{ee}$ Interface NIS	$R_{ee}$ Interface FS
$\epsilon = 0$	$\frac{1}{(1+2Z^2)^2}$	$\left(\frac{kh-k_F^2}{kh+k_F^2}\right)^2$
$\epsilon = \Delta$	1	$\left(\frac{k-h}{k+h}\right)^2$

### Conductance FS

La conductance d’un contact hybride est déterminée par les coefficients  $R_{ee}$  et  $R_{eh}$  à énergie nulle  $\epsilon = 0$ . De Jong et Beenakker [15] ont utilisé la formule de Takane [78] (une reformulation de la formule (3.12) de BTK [31]) :

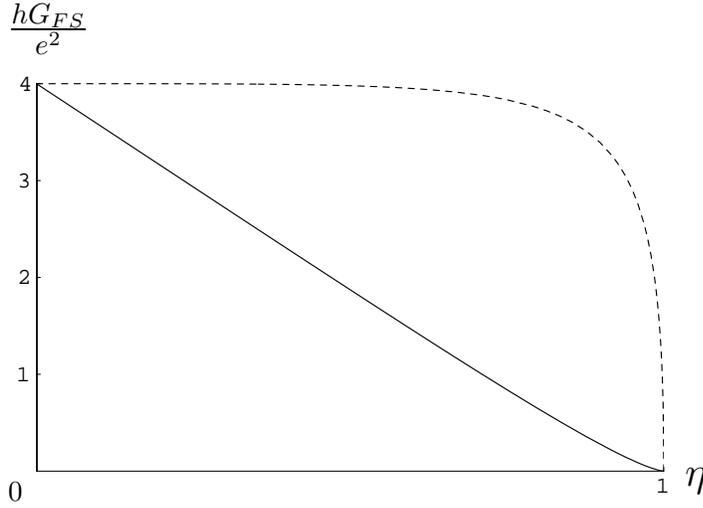


FIG. 5.2 – Conductance  $G_{FS}$  (en unités de quantum de conductance  $e^2/h$ ) d'un contact balistique entre un supraconducteur et un ferromagnétique de champ d'échange  $E_{ex}$  en fonction de  $\eta = E_{ex}/E_F$ . Dans le cas multicanal traité par Beenakker (en traits pleins) l'effet du champ d'échange sur la conductance est très net sur toute la gamme de champs d'échange. Dans le cas monocanal (en pointillés) l'effet de réduction de la conductance se produit brusquement pour des énergies d'échange très proches de  $E_F$ .

$$G_{FS} = \frac{2e^2}{h} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} Tr R_{eh}(\epsilon = 0) \quad (5.6)$$

En sommant sur un très grand nombre  $M$  de canaux, ils ont obtenu la conductance :

$$G_{FS} = \frac{4e^2}{h} M \frac{4}{15\eta^4} \left[ \sqrt{1-\eta^2}(6-7\eta^2+\eta^4) - 6 + 10\eta^2 - 4\eta^5 \right] \quad (5.7)$$

Pour comparaison, nous écrivons la conductance dans le cas monocanal. Celle-ci reproduit simplement le comportement du coefficient de réflexion d'Andreev :

$$G_{FS} = R_{eh} G_{NS} = \frac{4e^2}{h} \frac{(1-\eta^2)^{1/2}}{1+(1-\eta^2)^{1/2}} \quad (5.8)$$

La figure (5.2) montre  $G_{FS}$  en fonction de  $\eta$  dans les cas multicanal (trait plein) et monocanal (en pointillés). Dans les deux cas, la conductance  $G_{FS}$  est toujours inférieure à la conductance du même contact en l'absence de ferromagnétisme :  $G_{NS} = 4e^2/h$ . Cette loi (multicanal) a été vérifiée expérimentalement. On peut donc mesurer la polarisation de spin ou l'énergie d'échange d'un ferromagnétique en le contactant à un métal normal et en mesurant la conductance de l'échantillon FS obtenu [79].

## Conclusion

Le ferromagnétisme introduit de la réflexion ordinaire qui induit une diminution de la conductance. Nous allons étudier l'effet de ce phénomène sur le courant Josephson d'une jonction SFS. A la différence de la conductance, l'effet Josephson implique toutes les énergies entre 0 et  $\Delta$  et même parfois les états au-dessus de  $\Delta$ .

## 5.2 Théorie quasiclassique des jonctions SFS balistiques

Je présente ici le traitement quasiclassique  $\lambda_F \rightarrow 0$  de la jonction SFS propre à partir des équations d'Eilenberger. Buzdin, Bulaevskii et Panyukov [14] ont calculé le courant Josephson dans le cas multicanal. Je me focalise sur le cas monocanal et la jonction courte  $d \ll \xi_o$  pour décrire la physique de base de la transition  $0 - \pi$ . J'insiste sur le fait que *cette approche largement admise de la jonction SFS balistique ne traite pas l'effet de réflexion ordinaire décrit dans la section précédente.*

### Fonction de Green quasiclassique

En présence de ferromagnétisme, les équations d'Eilenberger (2.16) s'écrivent :

$$\begin{aligned} i\hbar v_x \partial g^\sigma &= f^{\sigma\dagger} \Delta - f^\sigma \Delta^* \\ i\hbar v_x \partial f^\sigma &= -2(i\omega + V_\sigma(x)) f^\sigma + 2\Delta(x) g^\sigma \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$i\hbar v_x \partial f^{\sigma\dagger} = 2(i\omega + V_\sigma(x)) f^{\sigma\dagger} - 2\Delta^*(x) g^\sigma \quad (5.10)$$

Buzdin, Bulaevskii et Panyukov ont résolu ces équations [14]. Remarquons que les solutions s'obtiennent immédiatement à partir de celles de la jonction SNS [54] en opérant la substitution  $\omega \rightarrow \omega - i\sigma E_{ex}$  dans les fonctions de Green quasiclassiques. Ceci revient à ne considérer que l'effet de décalage en énergie des excitations de spin opposés tout en supposant que la réflexion d'Andreev est parfaite. La fonction de Green quasiclassique  $g_\omega^\sigma(x, v_x)$  de la jonction SFS conserve la structure décrite au chapitre précédent (4.11) :

$$g_\omega^\sigma(v_x) = \frac{\omega}{\Omega} + \frac{\Delta^2}{\Omega} \frac{\sinh(\omega d / \hbar v_x + i\chi_\sigma / 2)}{\omega \sinh(\omega d / \hbar v_x + i\chi_\sigma / 2) + \Omega \operatorname{sign}(v_x) \cosh(\omega d / \hbar v_x + i\chi_\sigma / 2)} \quad (5.11)$$

mais avec une phase décalée différemment pour chacun des deux modes de spin :

$$\chi \rightarrow \chi_\sigma = \chi + \sigma \frac{2E_{ex}d}{\hbar v_F X} = \chi + \sigma \frac{a}{X} \quad (5.12)$$

On a introduit le facteur d'inclinaison  $X$  défini par  $X = v_x / v_F$ . Dans la suite, je discute le cas monocanal pour lequel  $X = 1$ .

Le décalage de phase  $a$  est donné par :

$$a = 2E_{ex}d / \hbar v_F = 2d / \xi_F \quad (5.13)$$

où on a introduit une longueur caractéristique  $\xi_F = \hbar v_F / E_{ex}$  associée à l'énergie d'échange du ferromagnétique. Le décalage de phase s'exprime aussi comme le rapport des énergies de Thouless et d'échange  $a = 2E_{ex} / E_N$ .

*Il existe donc deux longueurs de cohérence  $\xi_o$  et  $\xi_F$  associées respectivement à la supraconductivité et au ferromagnétisme. Pour les ferromagnétiques "purs" comme Fe, Co, Ni, la longueur  $\xi_F$  est de l'ordre de quelques angströms. Pour des alliages comme PdNi et CuNi, les champs d'échange peuvent être plus faibles et la longueur  $\xi_F$  atteindre quelques nanomètres.*

### Spectre

Le spectre est constitué des pôles de la fonction de Green de la jonction. Or dans le passage de SNS à SFS, la fonction de Green conserve la même structure analytique mis à part le changement  $\chi \rightarrow \chi + \sigma a$ . Donc, le spectre quasiclassique SFS s'obtient à partir du spectre SNS de Kulik (4.34) :

$$\epsilon_{\pm}(m, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{2d_N} \left[ m \pm \frac{\chi}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} \right] \quad (5.14)$$

en opérant la même substitution sur la phase supraconductrice :

$$\epsilon_{\pm, \sigma}(m, \varphi) = \frac{\hbar v_F}{2d_N} \left[ m \pm \frac{(\chi \pm a)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} \right] \quad (5.15)$$

Nous avons vu au chapitre 4 que le spectre d'une jonction SNS est doublement dégénéré (quel que soit le flux magnétique) selon les deux types de "paires d'Andreev" ( $u_{\uparrow}, v_{\downarrow}$ ) et ( $u_{\downarrow}, v_{\uparrow}$ ). L'expression ci-dessus montre comment cette dégénérescence est levée par le champ d'échange. Nous avons représenté le spectre d'une jonction courte  $d_S \ll \xi_o$  pour un décalage  $a = \pi/4$  sur la figure (5.3).

Ainsi, on peut facilement obtenir le spectre SFS connaissant les rapports  $d/\xi_o$  et  $d/\xi_F$  :

- le rapport  $d/\xi_o = \Delta/E_N$  indique l'allure du spectre en l'absence de champ d'échange (cas SNS étudié au chapitre 4). Si ce rapport est grand, il y a beaucoup de niveaux d'Andreev avec une dépendance en flux linéaire et le courant est en dents de scie. Si ce rapport est très inférieur à l'unité, il y a deux états d'Andreev qui ont une dépendance sinusoïdale en flux.
- le rapport  $d/\xi_F = E_{ex}/E_N$  détermine ensuite le décalage de phase à appliquer au spectre SNS.

### Courant Josephson

La relation entre le courant Josephson et la phase supraconductrice  $\chi$  s'obtient également en décalant la relation  $I(\chi)$  de la jonction SNS correspondante selon :

$$I_{SFS}(\chi, a) = \frac{1}{2} (I_{SNS}(\chi + a) + I_{SNS}(\chi - a)) \quad (5.16)$$

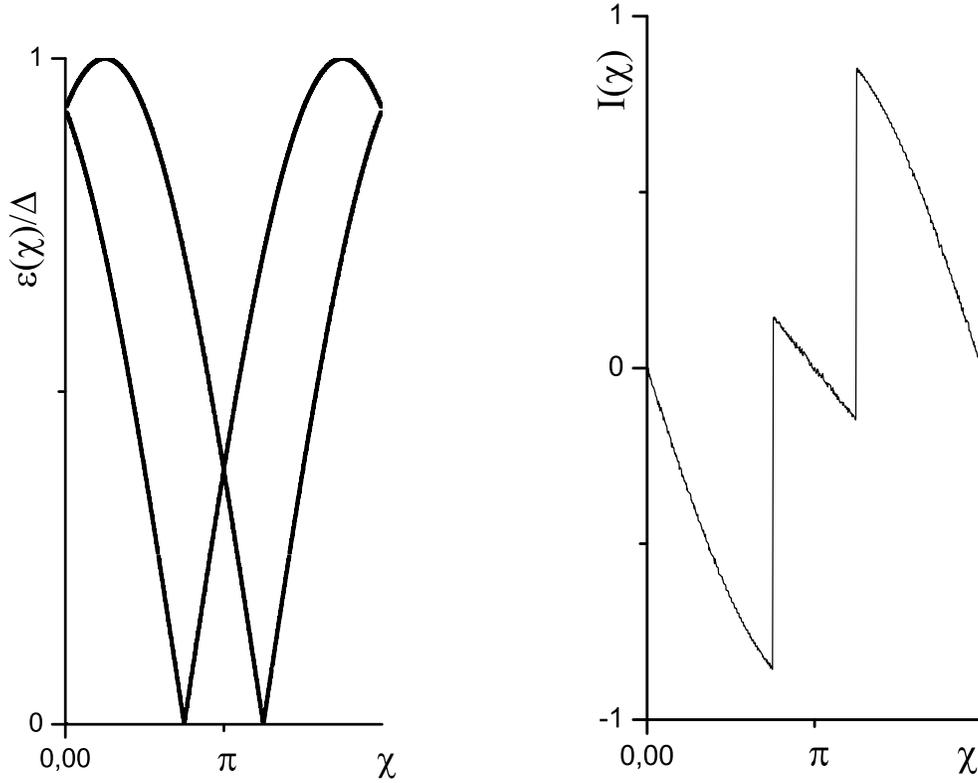


FIG. 5.3 – Spectre et courant d'une jonction courte pour  $a = 2E_{ex}/E_N = 2d/\xi_F = \pi/4$ . . Chacun des deux niveaux d'Andreev croise le niveau de Fermi  $\epsilon = 0$  en  $\pi \pm a$  donnant lieu à deux discontinuités dans la relation courant phase  $I(\chi)$ .

En utilisant la relation (4.57) donnant  $I_{SNS}(\chi)$  pour la jonction courte, on obtient le courant dans une jonction SFS courte :

$$I_{SFS}(\chi, a) = - \sum_{\sigma} \pi \frac{\Delta}{\phi_o} \sin\left(\frac{\chi + \sigma a}{2}\right) \tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2} \cos\left(\frac{\chi + \sigma a}{2}\right)\right) \quad (5.17)$$

Sur la figure (5.3), nous avons représenté le courant dans une jonction courte à décalage  $a = \pi/4$ .

D'après la formule (5.17), le courant Josephson varie périodiquement en fonction de  $a$ . Selon la situation expérimentale, cela peut se traduire par des oscillations en fonction de l'épaisseur à champ d'échange fixé ou par l'inverse . Dans les cas multicanaux balistiques ou diffusif, ces oscillations survivent mais s'accompagnent d'un amortissement exponentiel sur l'échelle de longueur  $\xi_F$  [80],[81].

Les sauts de courant se produisent à des phases  $\chi = \pi \pm a$  correspondant chacune au passage de l'un des deux états d'Andreev "à travers" le niveau de Fermi.

Comme pour des jonctions balistiques SNS à  $T = 0$ , on a toujours une pente  $\partial I/\partial\chi$  négative. Cette pente reste toujours négative dans le cas SFS puisqu'on ne fait que décaler les courbes. Par conséquent, le courant Josephson est toujours diamagnétique à petit flux quel que soit le décalage  $a$ , mis à part dans le cas particulier  $a = \pi$ . Pour  $a = \pi$ , le saut de courant se produit exactement en  $\chi = 0$ .

### Cas de la jonction courte et transition $0 - \pi$

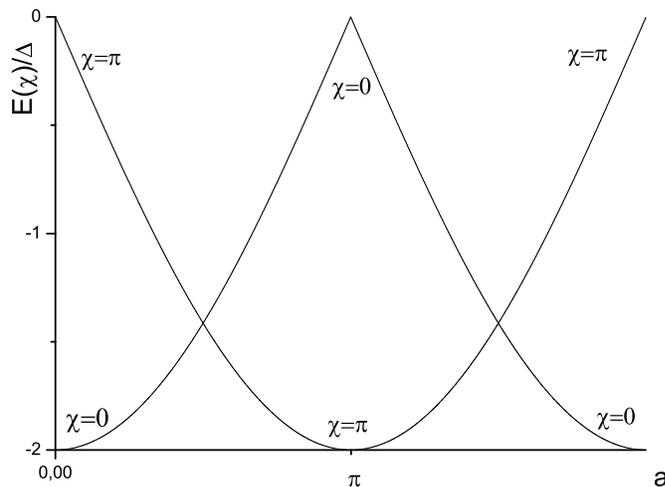


FIG. 5.4 – Energies de l'état  $\chi = 0$  et de l'état  $\chi = \pi$  en fonction du paramètre de décalage de phase  $a = 2E_{ex}/E_N = 2d/\xi_F$ . L'état " $\pi$ " est plus stable dans les régions  $(2n + 1/2)\pi < a < (2n + 3/2)\pi$ .

Pour savoir si l'état d'équilibre de la jonction correspond à une différence de phase  $\chi = 0$  ou  $\chi = \pi$  [70], il faut comparer l'énergie de la jonction à  $\chi = 0$  et à  $\chi = \pi$  en fonction du décalage  $a$ . La figure (5.4) montre clairement que l'état  $\pi$  est plus stable à  $T = 0$  quand  $(2n + 1/2)\pi < a < (2n + 3/2)\pi$ . En revanche, le courant Josephson est toujours diamagnétique (sauf en  $a = \pi$ ) et lorsque la jonction passe de l'état 0 à l'état  $\pi$ , le courant critique de s'annule pas.

### Conclusion :

Les spectre et courant quasiclassiques de la jonction SFS longue ou courte s'obtiennent facilement par un simple décalage sur la phase qui correspond à l'impulsion  $\Delta k_{\epsilon=0} = a = 2d/\xi_F$  acquise par la paire d'Andreev dans le champ d'échange du ferromagnétique. *Cependant ce traitement ignore le second aspect du problème : la nature imparfaite de la réflexion d'Andreev. Il semble étonnant que cette propriété puisse être totalement ignorée dans le traitement de la jonction SFS propre alors qu'elle a des répercussions très fortes sur la conductance FS.* Naïvement, on imagine que l'existence de réflexion ordinaire est qualitativement comparable à l'effet d'une impureté.

### 5.3 Spectre SFS par la méthode de Bogoliubov-de Gennes

Nous nous sommes donc demandé comment le spectre et le courant de la jonction SFS balistique sans barrière tunnel est modifié lorsqu'on traite rigoureusement le caractère imparfait de la réflexion d'Andreev. Nous avons donc décidé de revenir sur le problème SFS en utilisant les équations plus exactes de Bogoliubov-de Gennes. L'avantage de ce formalisme est double :

- les conditions aux limites sont sans équivoque : les fonctions d'onde et leurs dérivées sont toujours continues tant que la barrière de potentiel est de hauteur finie.
- les différents types de réflexion à l'interface sont décrits simultanément.

#### Mise en équation

Nous allons résoudre les équation Bogoliubov-de Gennes pour une jonction SFS balistique dans laquelle :

- Le potentiel d'échange  $V_\sigma(x)$  est constant dans le ferromagnétique et nul ailleurs.
- Le potentiel de paire  $\Delta(x) = \Delta e^{\pm i\chi/2}$  est constant dans chacune des électrodes supraconductrices et nul ailleurs.

Ce problème est plus compliqué que celui de la jonction SNS balistique car les excitations définies au voisinage de  $+k_F$  et de  $-k_F$  peuvent se mélanger.

Par rapport au cas SNS, les vecteurs d'onde sont modifiés selon :

$$\begin{aligned} k &\rightarrow k_{e\sigma} = k_F \sqrt{1 + \sigma\eta + \frac{\epsilon}{E_F}} \\ h &\rightarrow h_{h-\sigma} = k_F \sqrt{1 - \sigma\eta - \frac{\epsilon}{E_F}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

On définit :

$$\begin{aligned} \Delta k &= k_\uparrow - h_\downarrow \\ \Sigma k &= k_\uparrow + h_\downarrow \end{aligned} \quad (5.19)$$

On dénombre huit amplitudes inconnues. En effet, il existe :

- quatre types de solutions dans le ferromagnétique correspondant à un électron/trou allant vers la droite/gauche  $\pm k_F$ .
- deux solutions par électrode. Ce sont les deux solutions qui s'annulent à l'infini et qui correspondent à une propagation vers la droite/gauche  $\pm k_F$ .

En écrivant la continuité des fonctions d'ondes et de leurs dérivées en  $x = \pm d/2$ , on obtient un système homogène de huit équations linéaires reliant ces huit amplitudes.

## Spectre général SFS

Le déterminant de ce système fournit l'équation aux énergies propres suivante :

$$\begin{aligned}
16kh \cos \chi = & - 2(k^2 - k_F^2)(h^2 - k_F^2) [\cos(\Delta k \cdot d) - \cos(\Sigma k \cdot d)] \\
& - (k - k_F)^2 (h + k_F)^2 \cos(\Sigma k \cdot d + 2\varphi_\epsilon) \\
& - (k + k_F)^2 (h - k_F)^2 \cos(\Sigma k \cdot d - 2\varphi_\epsilon) \\
& + (k + k_F)^2 (h + k_F)^2 \cos(\Delta k \cdot d - 2\varphi_\epsilon) \\
& + (k - k_F)^2 (h - k_F)^2 \cos(\Delta k \cdot d + 2\varphi_\epsilon)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

avec  $\varphi_\epsilon = \arccos \frac{\epsilon}{\Delta}$

### Commentaires

Nous allons analyser les principaux paramètres présents dans l'équation (5.20) et donner leur signification :

- **le paramètre de décalage** qui dans la limite  $\eta \rightarrow 0$  s'identifie au décalage  $a$  de la théorie quasiclassique introduit précédemment.

$$\Delta k_{\epsilon=0} d = \frac{2E_{ex}d}{\hbar v_F} = \eta k_F d = a \tag{5.21}$$

Dans le formalisme de Bogoliubov-de Gennes, cette grandeur prend tout son sens : il s'agit de la différence de marche entre un électron et un trou de spin opposés placés dans le ferromagnétique. En effet, on peut reprendre l'argument de quantification des états d'Andreev à la "Bohr-Sommerfeld" (5.22) :

$$(k_e - k_h)d_N + \chi_D - \chi_G - 2 \arccos \frac{\epsilon}{\Delta} = 2\pi m \tag{5.22}$$

avec  $(k_e - k_h)d = 2\epsilon d / \hbar v_x + a$ .

- **le rapport  $\eta = E_{ex}/E_F$  rendant compte de la polarisation de spin.**

La plupart des études [75],[77] réalisent le passage à la limite  $\eta \rightarrow 0$  et  $k_F d \rightarrow \infty$  de sorte que le produit  $a = \eta k_F d$  reste fini. **Notre but est d'étudier la jonction SFS balistique monocanal en conservant les deux paramètres  $k_F d$  et  $\eta$ .** A petit  $\eta$ , on s'attend seulement à de légères variations par rapport à la situation dans laquelle la réflexion d'Andreev est parfaite et sensible au champ d'échange via uniquement le décalage  $a$ . A grand  $\eta$ , on s'attend à des effets liés à la forte diminution de l'amplitude de réflexion d'Andreev.

L'équation (5.20) n'est hélas pas très simple à résoudre. Pour les petites énergies d'échange  $\eta = E_{ex}/E_F \ll 1$ , nous allons simplifier cette équation (partie 5.4) et montrer que des gaps apparaissent dans le spectre. Pour des valeurs de  $\eta$  arbitraires, une étude numérique sera nécessaire (5.5).

## 5.4 Faible polarisation de spin : phase effective

### Introduction

Dans cette partie, je simplifie l'équation du spectre (5.20) grâce à un développement à petit champ d'échange, c'est à dire dans lequel *l'énergie d'échange est très inférieure à l'énergie de Fermi* :  $\eta = E_{ex}/E_F \ll 1$ . L'effet du ferromagnétisme peut alors être décrit par une phase effective qui remplace la vraie différence de phase  $\chi$  entre les électrodes. Le spectre et le courant en fonction de cette phase effective sont ceux de la théorie quasiclassique décrits dans la partie 5.2.

### Phase effective

Comme dans cette approximation, on a à la fois  $\eta \ll 1$  et  $\epsilon/E_F \ll 1$ , on peut développer les vecteurs d'onde (5.18) selon :

$$\begin{aligned} k &= k_F \left( 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\epsilon}{2E_F} \right) \\ h &= k_F \left( 1 - \frac{\eta}{2} - \frac{\epsilon}{2E_F} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

On a donc pour les paramètres intervenant dans l'équation du spectre (5.20) :

$$\begin{aligned} \Delta k \cdot d &= a + \frac{2\epsilon d}{\hbar v_F} \\ \Sigma k \cdot d &= 2k_F d \end{aligned} \quad (5.24)$$

L'équation aux énergies propres (5.20) devient :

$$\begin{aligned} (16 - 8\eta^2) \cos \chi &= (16 - 6\eta^2) \cos(\Delta k_\epsilon d - 2\varphi_\epsilon) \\ &- 4\eta^2 \frac{\epsilon^2}{\Delta^2} \cos 2k_F d \\ &+ 2\eta^2 \cos \Delta k_\epsilon d \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pour  $\eta = 0$ , on retrouve naturellement l'équation d'une jonction SNS balistique :

$$\cos \chi = \cos(\Delta k_\epsilon d - 2\varphi_\epsilon) \quad \Delta k_\epsilon = \frac{2\epsilon}{\hbar v_F} \quad (5.26)$$

Pour  $\eta$  non nul, l'équation (5.25) peut se mettre sous la forme :

$$\cos \alpha(\chi, \epsilon) = \cos(\Delta k_\epsilon d - 2\varphi_\epsilon) \quad (5.27)$$

$\alpha(\chi, \epsilon)$  est une phase effective qui dépend de l'énergie et de la vraie phase  $\chi$  selon :

$$\cos \alpha(\chi, \epsilon) = A_\eta \cos \chi + B_\eta \frac{\epsilon^2}{\Delta^2} \cos 2k_F d + C_\eta \cos \Delta k_\epsilon d \quad (5.28)$$

$$\text{avec } A_\eta = 1 - \eta^2/8 \quad B_\eta = \eta^2/4 \quad C_\eta = -\eta^2/8$$

Puisque  $A_\eta + B_\eta + C_\eta = 1$ , le second membre de (5.28) est toujours compris dans l'intervalle  $[-1, 1]$  et donc la phase effective  $\alpha(\chi, \epsilon)$  est toujours définie.

Cette équation est valable pour des longueurs  $d$  de ferromagnétique arbitraires.

### Courant dans la méthode de phase effective

On peut calculer le courant à partir du spectre et de l'expression de la phase effective comme l'a montré Bagwell [50] dans un autre contexte faisant intervenir une phase effective : celui des jonctions SINS. Ici, on obtient :

$$I(\chi, a) = I_{qc}(\alpha, a) A_\eta \frac{\sin \chi}{\sin \alpha + 2I(\alpha) \frac{\epsilon(\chi)}{\Delta^2} \cos 2k_F d} \quad (5.29)$$

$I_{qc}(\alpha, a)$  est le courant quasiclassique. Cette expression est difficile à utiliser à cause du facteur  $\epsilon(\chi)$ . Cependant ce facteur de "feedback" introduit par la dépendance en énergie de la phase effective est faible. Si on le néglige, on obtient :

$$I(\chi, a) = A_\eta \cdot I_{qc}(\alpha, a) \cdot \frac{\sin \chi}{\sin \alpha} \quad (5.30)$$

Ainsi, le paramètre  $\eta$  induit d'une part une très faible diminution du courant, d'un facteur  $A_\eta = 1 - \eta^2/8$ . D'autre part, on a une annulation forcée en  $\chi = \pi$ . Nous allons maintenant voir que cela est dû à l'ouverture de gaps dans la spectre. Distinguons les jonctions longues et courtes :

### Spectre de jonction longue $d \gg \xi_o$ à petit $\eta$ .

Nous avons vu dans l'étude des jonctions longues SNS que la connaissance du spectre de basse énergie  $\epsilon \ll \Delta$  est suffisante pour obtenir le courant Josephson d'équilibre  $I(\chi)$ . Comme  $2\varphi_\epsilon \rightarrow \pi$  quand  $\epsilon \ll \Delta$ , il est facile de montrer que le spectre (5.25) devient simplement :

$$\cos \chi = \cos(\Delta k_\epsilon d - \pi) \quad \text{avec} \quad \Delta k_\epsilon = \frac{2\epsilon}{\hbar v_F} + a \quad (5.31)$$

Pour l'autre canal  $(u_\downarrow, v_\uparrow)$ , on obtient la même équation avec un changement de signe sur  $a$ . Donc :

$$\cos \chi = \cos \left( \frac{2\epsilon d}{\hbar v_F} - \pi + \sigma a \right) \quad (5.32)$$

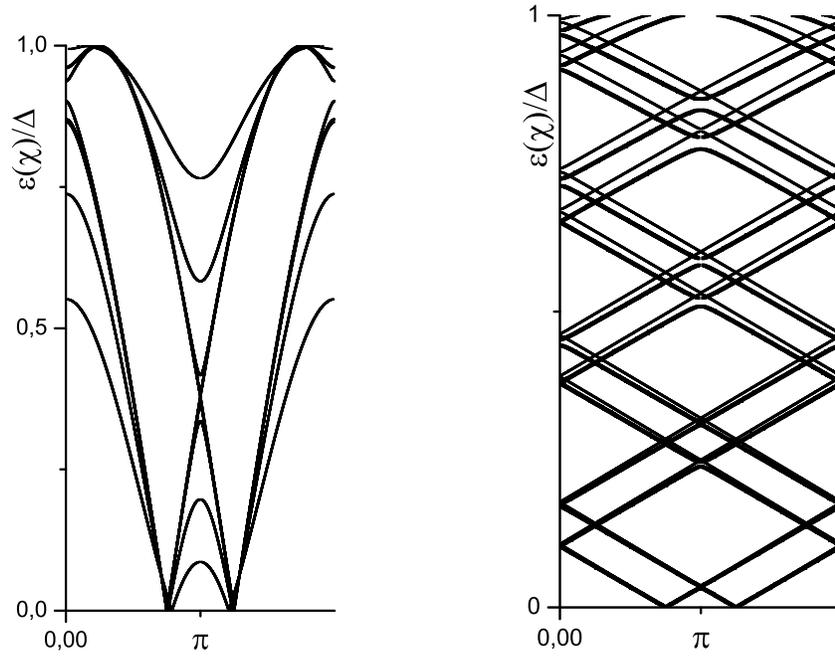


FIG. 5.5 – A gauche : spectre d'une jonction SFS courte  $d = 0.01\xi_o$  avec décalage fixé  $\Delta k_{\epsilon=0} = \pi/4$  et  $\eta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ . La taille des gaps s'ouvrant en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  croît avec  $\eta$ . A droite : spectre d'une jonction SFS longue  $d = 10\xi_o$  avec décalage fixé  $\Delta k_{\epsilon=0} = \pi/4$  et  $\eta = 0.1, 0.3$ . On constate que les gaps s'ouvrent plus facilement à haute qu'à très basse énergie.

Ainsi à très basse énergie, le paramètre  $\eta$  disparaît et l'effet du champ d'échange se résume effectivement à un simple décalage sur la phase du spectre selon :

$$\chi \rightarrow \chi - \sigma a \quad (5.33)$$

En revanche, lorsqu'on se rapproche de l'énergie  $\Delta$ , les croisements de niveaux donnent lieu à des ouvertures de gaps. Ce phénomène est très clair sur la figure (5.5) qui représente (partie droite) le spectre d'une jonction longue  $d = 10\xi_o$  à décalage  $a = \pi/4$  pour  $\eta = 0.1$  et  $\eta = 0.3$ .

*En conclusion, la rétrodiffusion ordinaire des électrons affecte très peu le spectre de basse énergie  $\epsilon \ll \Delta$  et se manifeste par des ouvertures de gap aux croisements de niveaux situés à des énergies plus hautes. Or nous avons vu que le courant Josephson peut être déterminé à partir du spectre de très basse énergie dans le cas des jonctions longues. On comprend donc que l'estimation quasiclassique du courant soit très peu affectée par un faible champ d'échange.*

### Jonction courte

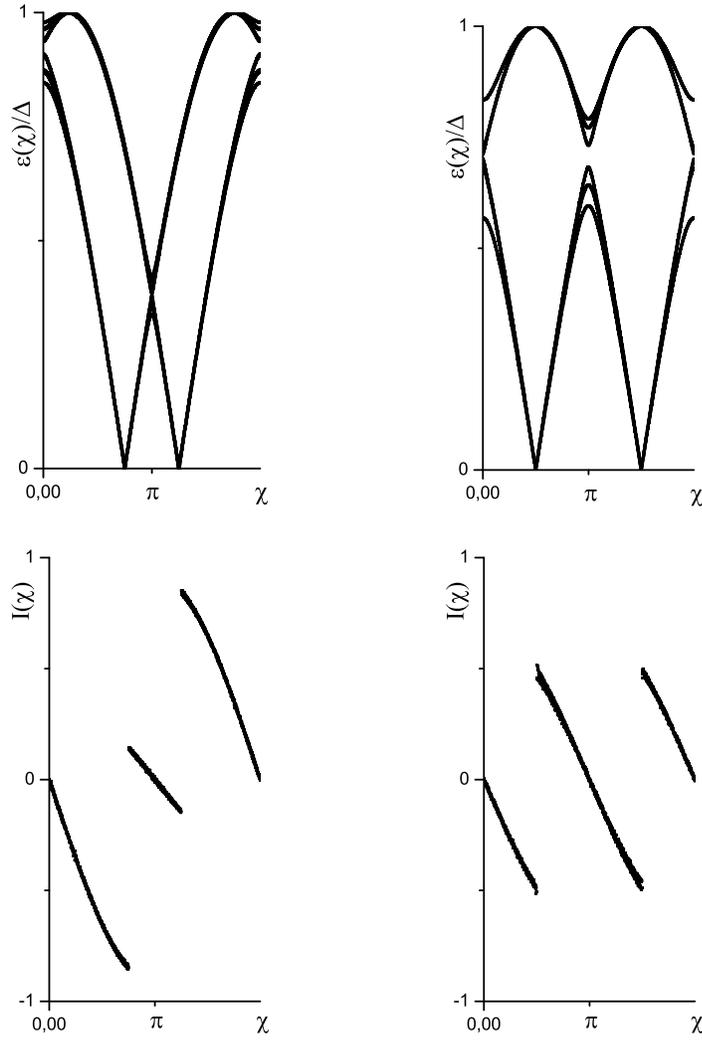


FIG. 5.6 – Spectre et courant d'une jonction SFS ultra-courte avec un décalage fixe  $a = \pi/4$  (à gauche) et  $a = \pi/2$  (à droite) pour des valeurs de  $\eta = 0.1, 0.3, 0.5$ . Le niveau d'Andreev croise toujours le niveau de Fermi au même endroit :  $a$  est le bon paramètre de "décalage" pour ces petites valeurs de  $\eta$ .

Dans une jonction SNS courte, nous savons que la connaissance détaillée du spectre sous le gap est nécessaire pour évaluer le courant Josephson . On ne peut plus se contenter d'étudier la région  $\epsilon \ll \Delta$  .

Comme ici  $d \ll \xi_o$ , on a une première simplification des équations du spectre (5.25) et de la phase effective (5.28) car le terme en facteur de  $C_\eta$  ne dépend plus de l'énergie. On peut encore simplifier cette phase effective en la rendant complètement indépendante de l'énergie. Pour cela, il suffit de se limiter dans un premier temps à  $\cos 2k_F d = 0$ . Dans le cas usuel, on a  $\lambda_F \ll d \ll \xi_o$  de sorte que la jonction est "courte" par rapport à  $\xi_o$  mais "longue" par rapport à  $\lambda_F$ . On peut alors résoudre l'équation (5.28) qui ne contient plus

l'énergie  $\epsilon$  que dans  $\varphi_\epsilon$ . On obtient deux niveaux d'Andreev  $\sigma = \pm 1$  :

$$\epsilon_\sigma(\alpha) = \Delta \left| \cos \left( \frac{\alpha + \sigma a}{2} \right) \right| \quad (5.34)$$

avec  $\cos \alpha(\chi) = A_\eta \cos \chi + C_\eta \cos a$ .

Il apparaît des ouvertures de gap en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  d'amplitudes croissantes quand  $\eta$  augmente à décalage  $a$  fixé. On voit cette ouverture progressive sur la figure (5.5) qui représente une jonction courte pour  $\eta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  (nous avons représenté également des valeurs assez élevés de  $\eta$  en utilisant l'étude numérique décrite au paragraphe suivant).

### Transition $0 - \pi$

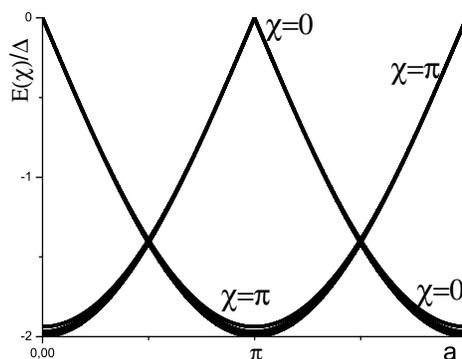


FIG. 5.7 – Energie de l'état "zéro"  $E(\chi = 0, a)$  et de l'état " $\pi$ "  $E(\chi = \pi, a)$  à des champs d'échange correspondant à  $\eta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ . Signalons que les dernières valeurs sont hors du domaine de validité de l'approche phase effective. Nous les avons représentées pour voir que même dans cette extrapolation, l'intersection des courbes reste au voisinage de  $a = \pi/2$  et  $a = 3\pi/2$ .

Pour comparer les stabilités respectives des états de la jonction  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$ , on calcule l'énergie de la jonction SFS :

$$E(\chi, a) = -\Delta \sum_{\sigma=\pm} \left| \cos \left( \frac{\alpha(\chi) + \sigma a}{2} \right) \right| \quad (5.35)$$

pour les phases supraconductrices  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  en utilisant :

$$\begin{aligned} \cos \alpha(\chi = 0) &= A_\eta + C_\eta \cos a \\ \cos \alpha(\chi = \pi) &= -A_\eta + C_\eta \cos a \end{aligned} \quad (5.36)$$

On a représenté le résultat  $E(0, a)$  et  $E(\pi, a)$  sur la figure (5.7). On voit que les courbes restent dans un fuseau étroit. Les courbes sont sensiblement modifiées en  $a = 0$  et  $a = \pi$ ,

mais elles se croisent toujours aux mêmes points  $a = \pi/2$  et  $a = 3\pi/2$ . Cela signifie que la transition  $0 - \pi$  est peu affectée.

### Comparaison avec SIFS

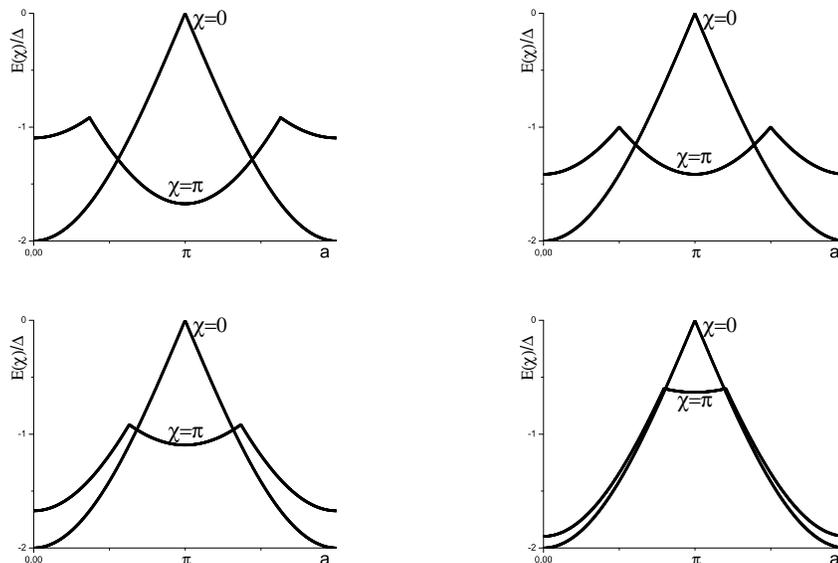


FIG. 5.8 – Energie de l'état "zéro"  $E(\chi = 0, a)$  et énergie de l'état " $\pi$ "  $E(\chi = \pi, a)$  d'une jonction SFIS courte. Le coefficient de transmission de l'impureté ( $I$ ) prenant les valeurs  $D = 0.7$ ,  $D = 0.5$ ,  $D = 3$  et  $D = 0.1$  (de gauche à droite et du haut vers le bas). On voit que le domaine de stabilité de l'état " $\pi$ " est fortement réduit quand la transmission chute.

Considérons une jonction SFIS présentant un seul canal dont le coefficient de transmission est  $D$ . Dans la limite  $\eta \rightarrow 0$  et  $k_F d \rightarrow \infty$ , cette jonction SIFS est aussi décrite par une phase effective [77] :

$$\cos \alpha(\chi) = 1 - 2D \sin^2 \frac{\chi}{2} \quad (5.37)$$

On utilise à nouveau l'expression (5.35) mais avec :

$$\begin{aligned} \cos \alpha(\chi = 0) &= 1 \\ \cos \alpha(\chi = \pi) &= 1 - 2D \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ainsi l'énergie à phase nulle est indépendante de  $D$  et vaut  $E(0, a) = -2 |\cos a|$  tandis que la courbe  $E(\pi, a)$  évolue avec  $D$  comme le montre la figure (6.13). Par conséquent, le point d'intersection qui définit le passage de l'état 0 et l'état  $\pi$  se déplace aussi avec  $D$ . On voit sur les courbes de la figure (6.13) que quand  $D$  passe de 1 à 0 la phase  $\pi$  se "rétrécit". Celle-ci disparaît même lorsque  $D \rightarrow 0$ .

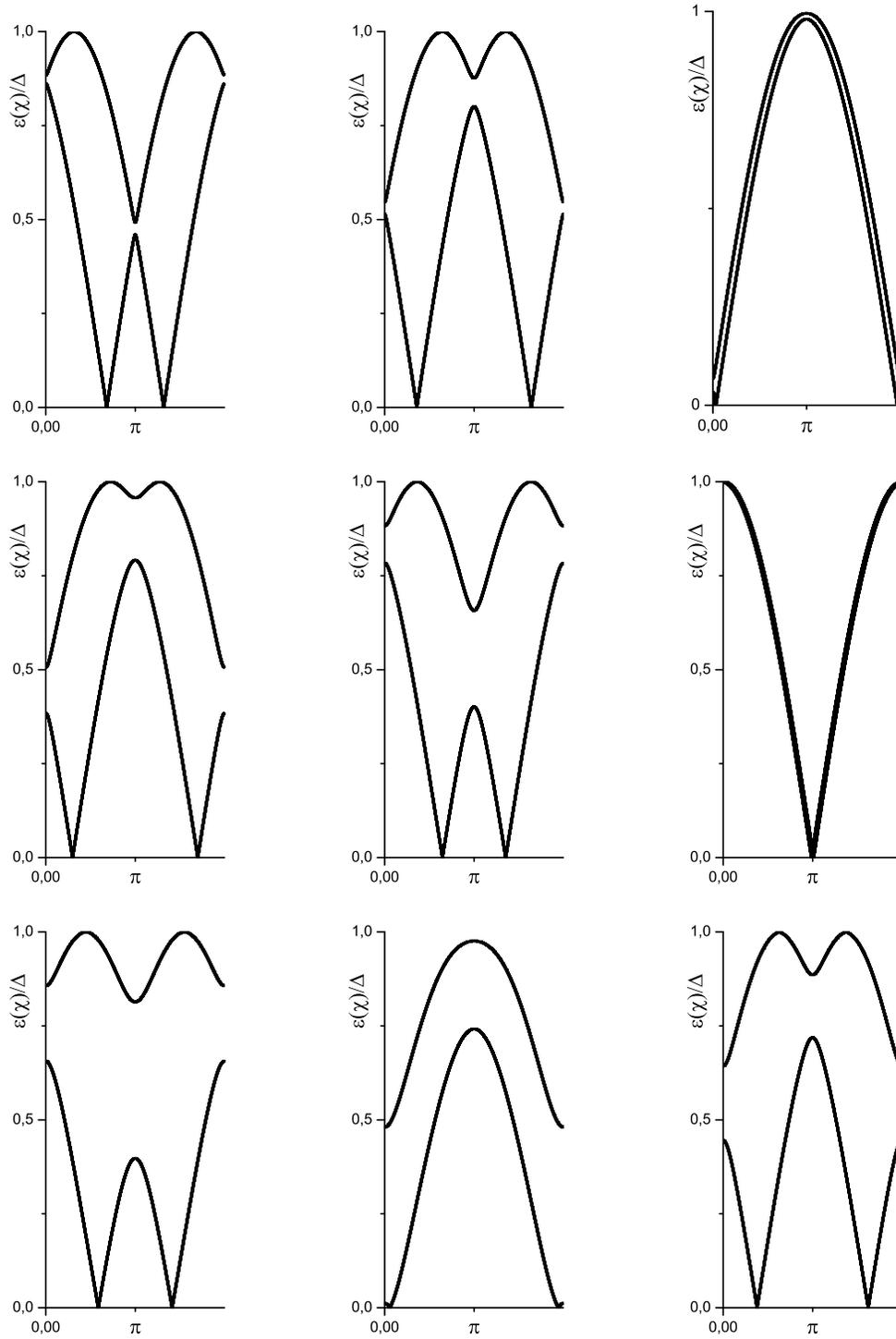


FIG. 5.9 – Spectre d'une jonction SFS ultra-courte avec  $k_F d = 10$ ,  $d = 0.01\xi_o$  et  $r = 2 \cdot 10^{-3}$  pour  $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  et  $0.9$  (lire de gauche à droite et du haut vers le bas). On voit un double effet de décalage des spectres et d'ouverture de gaps.  $a$  n'est pas le bon paramètre de décalage.

## Conclusion

Pour les énergies d'échange inférieures à  $E_F/2$ , nous venons de montrer que la transition  $0 - \pi$  est très peu affectée par la présence de réflexion ordinaire des électrons malgré les ouvertures de gaps dans le spectre. Pour des champs plus élevés, il est nécessaire de faire une étude numérique du spectre "exact" (5.20) qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 5.5 Forte polarisation de spin : étude numérique

### introduction

Pour des valeurs de l'énergie d'échange proches de l'énergie de Fermi, l'approche de phase effective développée dans la partie précédente ne marche plus. Nous allons reprendre l'étude du spectre (5.20) sans faire l'approximation  $\eta \ll 1$ . Il est manifestement difficile d'essayer d'obtenir le spectre dépendant du flux  $\epsilon(\chi)$  en résolvant (5.20). Néanmoins, on peut tracer le spectre en calculant la phase  $\chi = \chi(\epsilon)$  pour les valeurs de l'énergie inférieures au gap. Nous avons essayé de dégager qualitativement le comportement de ces spectres lorsqu'on se rapproche de  $\eta \rightarrow 1$ .

### Spectres en fonction du champ d'échange $E_{ex}$

Ce spectre et le courant dépendent de plusieurs énergies : l'énergie de Thouless  $E_N$ , le gap  $\Delta$ , l'énergie d'échange  $E_{ex}$  et l'énergie de Fermi  $E_F$ . On peut imaginer diverses situations expérimentales consistant à faire varier l'une ou l'autre de ces énergies. Nous avons choisi de varier le champ d'échange à géométrie fixée. Une première façon de présenter nos spectres consiste à varier le champ d'échange en fixant la taille de la jonction, le gap  $\Delta$  du supraconducteur et l'énergie de Fermi  $E_F$ . J'ai pris comme exemple une jonction courte pour laquelle  $k_F d = 10$  et  $d = 0.01\xi_o$ . La figure (5.9) montre la dépendance du spectre par rapport à  $\eta = E_{ex}/E_F$ . Nous voyons qu'il y a un double effet de décalage et d'ouverture de gaps en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$ .

### Nouvelle variable de décalage

Contrairement au cas  $\eta \ll 1$ , la variable  $a = 2d/\xi_F$  n'est plus adaptée pour décrire l'effet de décalage des phases. En effet, la grandeur pertinente est le décalage de phase acquis à énergie nulle par une paire d'Andreev placée dans le champ d'échange du ferromagnétique :

$$\Delta k_{\epsilon=0} = (\sqrt{1+\eta} - \sqrt{1-\eta}) \cdot k_F d \quad (5.39)$$

On a intérêt à représenter les spectres d'une jonction SFS :

- d'une part à  $d/\xi_o$  fixé, afin d'avoir un nombre constant d'états d'Andreev et que le spectre de référence de la jonction SNS correspondante soit toujours le même.
- d'autre part pour une valeur fixée du décalage  $\Delta k_{\epsilon=0}$ .

Pour cela, on varie  $k_F d$  et  $r = \Delta/E_F$  selon la loi :

$$k_F d(\eta) = \frac{\Delta k_{\epsilon=0}}{\sqrt{1+\eta} - \sqrt{1-\eta}}$$

$$r = 2 \frac{d}{\xi_o} \frac{1}{k_F d} = 2 \frac{d}{\xi_o} \cdot \frac{\sqrt{1+\eta} - \sqrt{1-\eta}}{\chi(\epsilon=0)}$$

Pour une jonction longue  $d = 10\xi_o$ , on obtient la figure (5.5).

Pour une jonction courte  $d = 0.01\xi_o$ , la figure (5.5) montre que le gap à  $\chi = 0$  et le gap à  $\chi = \pi$  se développent quand on augmente  $\eta$ .

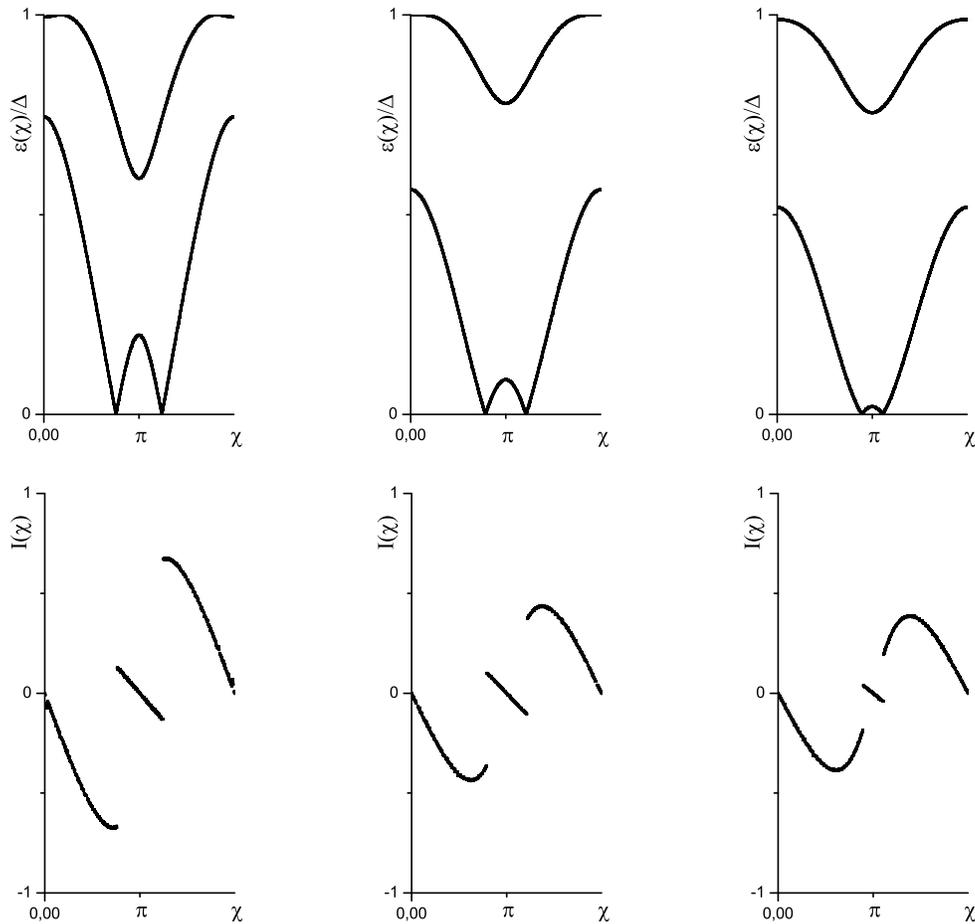


FIG. 5.10 – Régime de forte polarisation de spin : spectres et courants d'une jonction SFS ultra-courte avec un décalage fixe  $\Delta k_{\epsilon=0} = \pi/4$  pour  $\eta = 0.7$ ,  $\eta = 0.9$  et  $\eta = 0.92$  (de gauche à droite). Les gaps sont presque égaux au gap du supraconducteur. L'effet de réduction du courant est donc très net.

### Classement des spectres de jonctions courtes

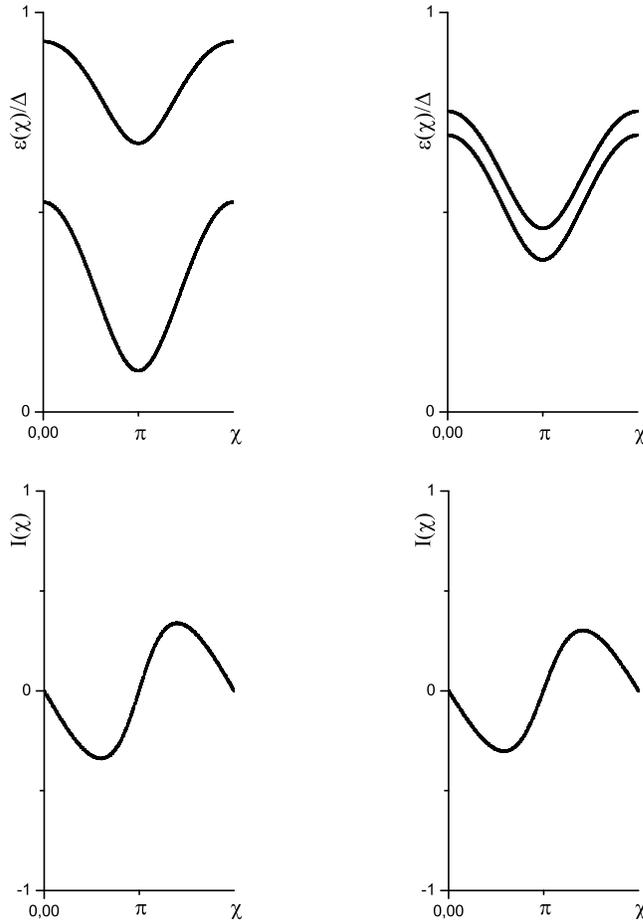


FIG. 5.11 – Régime  $\eta \rightarrow 1$ . Spectres et courants d'une jonction SFS ultra-courte avec un décalage fixe  $\Delta k_{\epsilon=0} = \pi/4$  et pour  $\eta = 0.95$  et  $\eta = 0.99$  (de gauche à droite). Les spectres "deviennent sinusoïdaux".

On voit qu'il existe trois domaines de champs d'échanges donnant lieu à des spectres qualitativement différents :

- **"Domaine des petits champs d'échange"**  $0 < \eta < 0.5$  Les spectres s'écartent très légèrement du spectre quasiclassique par de faibles ouvertures de gaps en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$ . C'est le régime étudié par l'approche de phase effective du paragraphe précédent.

- **"Domaine des grands champs d'échange"**  $0.7 < \eta < 0.9$

Le niveau d'Andreev croise encore le niveau de Fermi. On a donc toujours une discontinuité dans la relation courant-phase  $I(\chi)$ . Cependant, les gaps deviennent comparables à  $\Delta$  (mais inférieurs), ce qui produit une diminution sensible du courant critique.

- **"Domaine sinusoïdal"**  $0.9 < \eta$

Le niveau le plus bas ne croise plus le niveau de Fermi  $\epsilon = 0$  et donc le courant est une fonction continue de la phase. Pour les plus grandes valeurs de  $\eta$ , la relation  $I(\phi)$  devient

sinusoïdale comme dans le cas SIFS.

• "Limite  $\eta \rightarrow 1$ "  $\eta > 0.9$

On a un spectre indépendant de la phase, mais seulement pour les grandes valeurs de  $k_F d$ .

### Transition $0 - \pi$

On peut comparer les énergies  $E(\chi = 0)$  et  $E(\chi = \pi)$  en fonction décalage  $\Delta k_{\epsilon=0} = (\sqrt{1+\eta} - \sqrt{1-\eta})k_F d$ . On obtient que la transition dans une jonction SFS à très fort d'échange est beaucoup moins affectée par la réflexion ordinaire des électrons que dans le cas SFIS. Comme le montre la figure (5.12), le domaine d'existence de la phase " $\pi$ " reste sensiblement le même à condition d'utiliser le paramètre de décalage adéquat  $\Delta k_{\epsilon=0}$  et non  $a = \eta k_F d$ .

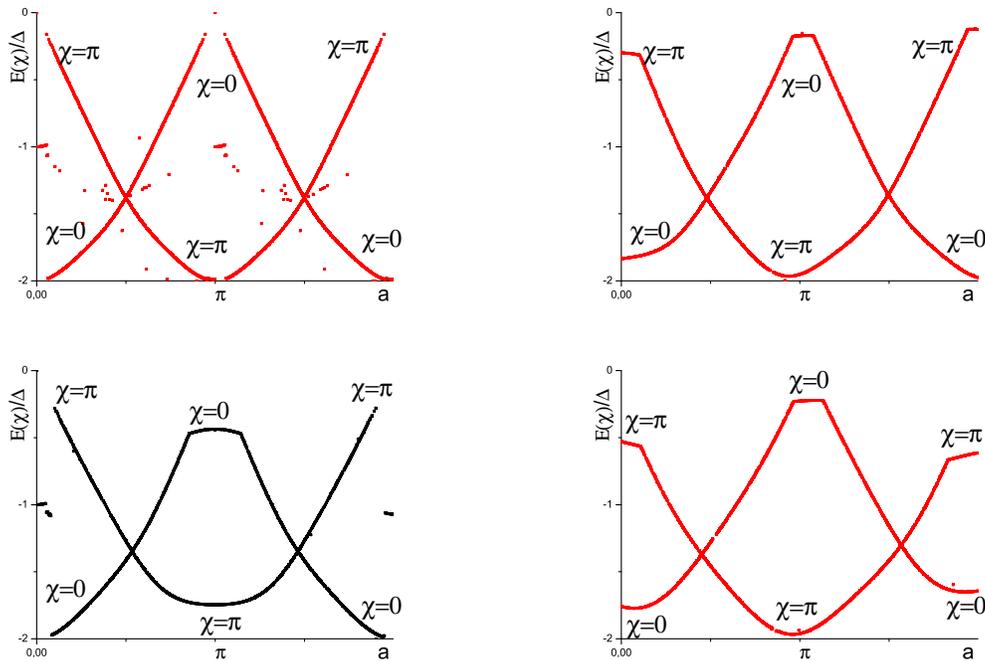


FIG. 5.12 – Energie de l'état "zéro"  $E(\chi = 0, a = \Delta k_{\epsilon=0})$  et de l'état " $\pi$ "  $E(\chi = \pi, a = \Delta k_{\epsilon=0})$  pour des grandes valeurs de l'énergie d'échange :  $\eta = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  (de gauche à droite et du haut vers le bas). Les courbes sont déformées par rapport aux courbes aux petites valeurs de  $\eta$ , mais leurs intersections restent aux alentours de  $a = \pi/2$  et  $a = 3\pi/2$ .

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai étudié la transition " $0 - \pi$ " dans une jonction SFS monocanal balistique en l'absence de barrière tunnel. Dans le premier paragraphe, j'ai rappelé les

deux effets nouveaux qui apparaissent dans une interface FS par rapport à l'interface NS : d'une part, l'électron incident et le trou réfléchi à  $\epsilon = 0$  n'ont pas les mêmes vecteurs d'onde ( $k_{F\uparrow} \neq k_{F\downarrow}$ ) et d'autre part, la réflexion d'Andreev est incomplète ( $R_{eh} < 1$ ). Le paragraphe (5.2) expose la théorie quasiclassique de la jonction SFS propre qui traite le premier effet et ignore complètement le second.

Pour pallier à cette lacune, j'ai obtenu le spectre des états d'Andreev d'une jonction SFS balistique en tenant compte des deux types de réflexion : électron-électron et électron-trou. Dans le paragraphe (5.4), j'analyse ce spectre dans la limite perturbative des petits  $\eta = E_{ex}/E_F$ . On observe déjà des ouvertures de gap en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  mais les écarts à la situation quasiclassique restent très petits. Dans le dernier paragraphe (5.4), j'ai exploré le domaine des forts champs d'échange pour le cas de la jonction ultra-courte présentant seulement deux niveaux d'Andreev. Les résultats "perturbatifs à petit  $\eta \ll 1$ " persévèrent quasiment jusqu'aux environs de la valeur  $\eta = 0.5$  montrant une robustesse de l'effet Josephson. Ensuite pour  $\eta > 0.5$ , les gaps deviennent très importants et le courant est fortement réduit tout en conservant une discontinuité dans la relation  $I(\chi)$ . Pour les valeurs  $\eta > 0.9$ , la dépendance en flux des deux niveaux d'Andreev devient quasiment sinusoïdale avant de s'aplatir complètement à  $\eta = 1$ . La relation courant-phase  $I(\chi)$  correspondante perd sa discontinuité avant de s'annuler complètement. Enfin, la transition  $0 - \pi$  est très peu affectée par l'effet de réflexion électron-électron ordinaire alors qu'elle est considérablement "déplacée" dans le cas d'une réflexion électron-électron causée par une impureté (jonction SFIS).

# Chapitre 6

## Interface NS et théorie de perturbation

La théorie quasiclassique est utilisée intensivement pour décrire les expériences d'effet de proximité. Par exemple, les mesures du groupe de Saclay [82] de la densité d'états locale le long d'un fil diffusif connecté à un supraconducteur peuvent être parfaitement ajustées par des solutions des équations d'Usadel [34]. Cependant, ces équations différentielles ne donnent pas une image physique en termes de processus microscopiques. Une description plus parlante de l'effet de proximité est donnée par le formalisme des quasiparticules qui décrit les réflexions d'Andreev et les réflexions normales des électrons et des trous au sein d'une structure hybride supraconductrice. Nous avons vu que ce formalisme est facile à mettre en oeuvre dans des structures purement balistiques ou balistiques avec une barrière de potentiel  $V(x)$  connue. En revanche dans le cas désordonné, il faut faire des simulations numériques : résoudre les équations de Bogoliubov-de Gennes pour chaque tirage au sort du potentiel décrivant le désordre, puis moyenner sur un grand nombre de tirages. Par ailleurs, les systèmes diffusifs purement normaux ont été étudiés à partir de la théorie de perturbation traditionnelle [24] incluant des resommations de diagrammes en échelle et croisés respectivement connues sous les noms de diffuson et de cooperon. Quelques travaux seulement ont envisagé la jonction SNS du point de vue de la région centrale normale et diffusive soumise à des conditions aux limites appropriées rendant compte de l'effet de proximité [83]. De nouvelles classes d'universalités pour des systèmes désordonnés en contact avec un supraconducteur ont été proposées [84],[85].

Dans ce travail, nous avons voulu répondre à 2 questions :

- Peut-on reconstruire perturbativement les fonctions de Green solutions des équations d'Usadel en modifiant les expressions du cooperon et du diffuson et/ou l'expression du vertex de réflexion d'Andreev ? La difficulté principale est que le point de départ de la théorie perturbative, le métal normal, est très éloigné de la situation de l'interface NS. Pour tenir compte de l'effet combiné de la supraconductivité et du désordre, il faut dans un premier temps habiller les diagrammes par des impuretés, puis opérer les resommations correspondant à des pôles de diffusion.
- Même si on ne peut pas resommer tous les diagrammes, peut-on donner une image plus qualitative de la physique contenue dans les équations d'Usadel ? On peut se demander comment la diffusion au sein du métal normal affecte l'amplitude de réflexion d'Andreev en lien avec le phénomène de "reflectionless tunneling".

Je commence par introduire succinctement les notions de fonction de Green moyennée sur le désordre et de cooperon. La partie 6.2 est consacrée au développement en série de solutions analytiques connues des équations d'Usadel : supraconducteur uniforme et marche NS. Dans la suite de ce chapitre, nous essayons de reconstruire ces développements à partir de la théorie de perturbation en  $\Delta$  (présentée au paragraphe 6.3) correctement habillée par le désordre. Nous y parvenons complètement dans le cas du supraconducteur uniforme (partie 6.4). Dans le cas de l'interface NS, nous identifions les premiers diagrammes (partie 6.5). Enfin, nous décrivons la structure des diagrammes aux ordres plus élevés et les difficultés en comparant aux corrections de localisation faible et aux fluctuations de conductance dans les systèmes purement normaux.

## 6.1 Systèmes normaux diffusifs

Dans ce paragraphe, nous comparons la propagation à un électron/à un trou décrite par une fonction de Green moyenne et la propagation à deux électrons (ou d'une paire électron-trou) en s'inspirant des connaissances acquises dans le domaine des systèmes diffusifs normaux cohérents de phase.

### • Propagation d'un électron dans un potentiel aléatoire

On veut savoir comment la propagation d'une particule libre est affectée en moyenne par un potentiel statique aléatoire  $V(\vec{r})$ . Commençons par fixer un modèle de désordre en choisissant le plus simple et le plus couramment utilisé : le désordre local gaussien.

$$\begin{aligned}\langle V(r) \rangle &= 0 \\ \langle V(r)V(r') \rangle &= n_i |V|^2 \delta(r - r')\end{aligned}\tag{6.1}$$

Physiquement, ce modèle décrit bien un ensemble de diffuseurs faibles, ponctuels et isotropes de concentration  $n_i$ . On a noté  $V$  l'élément de matrice du potentiel diffuseur d'une impureté entre deux ondes planes quelconques. Celui-ci est indépendant du moment transféré dans la limite du potentiel de portée quasi-nulle.

En l'absence de potentiel externe ( $V(r) = 0$ ), la fonction de Green d'un électron libre est simplement :

$$G^o(\omega, p) = \frac{1}{i\omega - \xi_p}\tag{6.2}$$

avec  $\xi_p = p^2/2m - \mu$ .

Les termes de la série de perturbation en  $V(r)$  doivent être moyennés sur le désordre gaussien selon (6.1). Les diagrammes d'ordre impair sont tous nuls. Parmi les diagrammes d'ordre pair, Abrikosov a montré que les diagrammes non croisés dominent.

Cette classe de diagrammes, représentée sur la figure (6.1), est engendrée par la "self-

$$\begin{aligned} \bar{G} &= G_o + \text{diagramme à une croix} + \text{diagramme à deux croix} + \dots \\ \Sigma &= \text{diagramme à une croix} \end{aligned}$$

FIG. 6.1 – Après moyennage sur le désordre, les diagrammes non croisés sont dominants. Chaque croix symbolise un corrélateur  $n_i |V|^2$  en représentation d'impulsion. Cette classe de diagrammes est engendrée par la "self-energy"  $\Sigma$ .

energy" suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma &= n_i |V|^2 \int d^3p G^o(\omega, p) \\ &= n_i |V|^2 \nu_o \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_p}{i\omega - \xi_p} \\ &= -i\pi n_i \nu_o |V|^2 \frac{\omega}{|\omega|} \\ &= -\frac{i}{2\tau} \frac{\omega}{|\omega|} \end{aligned} \quad (6.3)$$

où la dernière ligne est une définition de  $\tau$  :

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi n_i \nu_o |V|^2 \quad (6.4)$$

Ce temps de relaxation  $\tau$  peut être retrouvé par la règle d'or de Fermi en considérant le taux de désintégration d'une onde plane (de vecteur d'onde bien défini) dans le continuum des autres ondes planes sous l'influence du potentiel  $V(r)$ .

En conclusion, la fonction de Green d'un électron moyennée sur le désordre est donnée par ( $\omega > 0$ ) :

$$\bar{G}_e(\omega, p) = \frac{1}{i\omega - \xi_p - \Sigma} = \frac{1}{i\omega - \xi_p + i/2\tau} \quad (6.5)$$

Dans le contexte de l'effet de proximité, nous aurons besoin de la fonction de Green d'un trou moyennée sur le désordre qui s'écrit simplement :

$$\bar{G}_h(\omega, p) = \frac{1}{i\omega + \xi_p + i/2\tau} \quad (6.6)$$

Dans l'espace réel, ces fonctions sont exponentiellement amorties sur une distance de l'ordre de  $v_F\tau = l_e$ .

### • Propagation d'une paire électron trou dans un potentiel aléatoire

Pour étudier l'effet de proximité, nous aurons aussi besoin de savoir comment une paire d'Andreev se propage au sein d'un milieu diffusif. Dans les systèmes diffusifs purement

normaux, on considère les corrélations induites par le désordre entre un propagateur électronique et son complexe conjugué dans le but de calculer des conductivités moyennes ou des statistiques de niveaux.

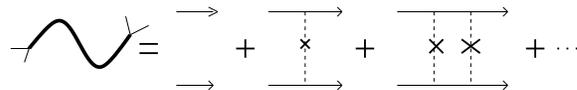


FIG. 6.2 – Série géométrique du cooperon. Chaque croix représente un corrélateur  $n_i | V |^2$ . Les lignes horizontales représentent des fonctions de Green moyennées  $\bar{G}_e(\omega, p)$  ou  $\bar{G}_h(\omega, p - q)$

On sait qu'alors le propagateur à deux particules moyen n'est pas simplement le produit des propagateurs à une particule moyens. En effet, le désordre peut corrélérer les deux fonctions de Green entre-elles comme sur la figure (6.2). En additionnant tous les diagrammes représentés sur la figure (6.2), on obtient une série géométrique dont la raison est :

$$\begin{aligned} n_i | V |^2 \int d^3p \bar{G}_e(\omega, p) \bar{G}_h(\omega, p) &= n_i | V |^2 \nu_o \int \frac{d\xi_p}{(i\omega - \xi_p + i/2\tau)(i\omega + \xi_{p+q} + i/2\tau)} \\ &= n_i | V |^2 2\pi\nu_o\tau(1 - 2\omega\tau - Dq^2\tau) \\ &= 1 - 2\omega\tau - Dq^2\tau \end{aligned}$$

Celle-ci est très proche de l'unité dans la limite  $\omega \rightarrow 0$  et  $q \rightarrow 0$  : ainsi, chaque fois que l'on ajoute un corrélateur de désordre entre la ligne d'électron  $G_e$  et d'électron conjugué/trou  $G_h$ , on obtient un diagramme du même ordre de grandeur que le précédent. La somme de la série géométrique est donc :

$$\begin{aligned} \langle \bar{G}_e(\omega, p) \bar{G}_h(\omega, p + q) \rangle &= \frac{\bar{G}_e(\omega, p) \bar{G}_h(\omega, p + q)}{1 - (1 - 2\omega\tau - Dq^2\tau)} \\ &= \frac{\bar{G}_e(\omega, p) \bar{G}_h(\omega, p)}{(2\omega + Dq^2)\tau} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

C'est une contribution singulière de type "pôle de diffusion" dans la limite "hydrodynamique"  $\omega \rightarrow 0$  et  $q \rightarrow 0$ . Dans la suite, nous appellerons cet objet un cooperon. Nous le noterons :

$$P_C(\omega, q) = \frac{1}{(2\omega + Dq^2)\tau} \quad (6.9)$$

Sa transformée de Fourier spatiale est :

$$\begin{aligned} P_C(\omega, x) &= \frac{1}{D\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-iqx}}{q^2 + \kappa^2} \\ &= \frac{1}{2\kappa\tau} e^{-\kappa|x|} \end{aligned} \quad (6.10)$$

où on a introduit la longueur caractéristique  $\kappa^{-1}$  définie par  $D\kappa^2 = 2\omega$ .

Le cooperon ci-dessus est une fonction à longue portée. La portée  $\kappa^{-1} = \sqrt{D/2\omega}$  tend vers l'infini si  $\omega \rightarrow 0$ . En pratique, elle est limitée par la longueur de cohérence de phase  $L_\phi(T)$  ou la longueur thermique  $L_T = \sqrt{D/2T}$ , mais elle reste supérieure à la portée  $l_e$  des fonctions de Green moyennes à une particule  $\bar{G}_e$  et  $\bar{G}_h$ .

## 6.2 Développement des solutions des équations d'Usadel

Dans le but de comprendre qualitativement l'effet de proximité, il est instructif de développer certaines solutions connues des équations d'Usadel. Nous allons le faire pour le supraconducteur uniforme et pour une interface NS unidimensionnelle (invariance par translation dans les deux directions transverses). C'est ce dernier cas qui nous intéresse principalement. Nous partirons des solutions des équations d'Usadel données au chapitre 3 et montrerons que le développement des fonctions de Green présente *une double hiérarchie en puissances de  $\Delta$  d'une part et en puissances du cooperon  $P_C(x)$  d'autre part.*

### 6.2.1 Cas uniforme

On peut développer les fonctions de Green quasiclassiques en  $\delta = \Delta/2\omega$  :

$$\begin{aligned} g_\omega &= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} = 1 - 2\delta^2 + 6\delta^4 - \dots \\ if_\omega &= \frac{\Delta}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} = 2\delta - 4\delta^3 + 12\delta^5 - \dots \end{aligned} \tag{6.11}$$

Nous utiliserons ce développement comme guide dans l'habillage par le désordre des diagrammes de la théorie de perturbation en  $\Delta$ . Il faudra d'abord reproduire les expressions (6.11), ce que nous ferons au paragraphe 6.4 avant d'étudier des systèmes inhomogènes comme l'interface NS dans la partie 6.5.

### 6.2.2 Interface NS

On modélise l'interface par une marche d'escalier du potentiel de paire  $\Delta(x)$  (sans traiter le problème de l'autocohérence). Le métal normal occupe le demi-espace  $x > 0$ . Dans cette géométrie déjà traitée au chapitre 3, les fonctions de Green quasiclassiques normale et anormale s'écrivent respectivement  $g_\omega(x) = \cos \theta_\omega(x)$  et  $f_\omega(x) = \sin \theta_\omega(x)$  avec [34] :

$$\theta_\omega(x) = 4 \arctan \left[ \tan \frac{\theta_o}{4} e^{-\kappa x} \right] \tag{6.12}$$

avec  $\kappa = \sqrt{2\omega/D}$  et  $\theta_o = \theta_\omega(x=0)$

En l'absence de barrière tunnel à l'interface, l'angle d'appariement  $\theta_o$  en  $x = 0$  s'exprime en fonction de l'angle dans le supraconducteur massif  $\theta_s = \arctan(\Delta/\omega)$  par la formule :

$$\sin \theta_o = \tan \frac{\theta_s}{2} \quad (6.13)$$

### Développement en $\tan(\theta_o/4) e^{-\kappa x}$

Nous avons développé les fonctions de Green en puissances successives de  $\tan(\theta_o/4)e^{-\kappa x}$ .

$$g_\omega(x) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \left( \tan \frac{\theta_o}{4} e^{-\kappa x} \right)^{2n} \quad (6.14)$$

et :

$$if_\omega(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) \left( \tan \frac{\theta_o}{4} e^{-\kappa x} \right)^{2n+1} \quad (6.15)$$

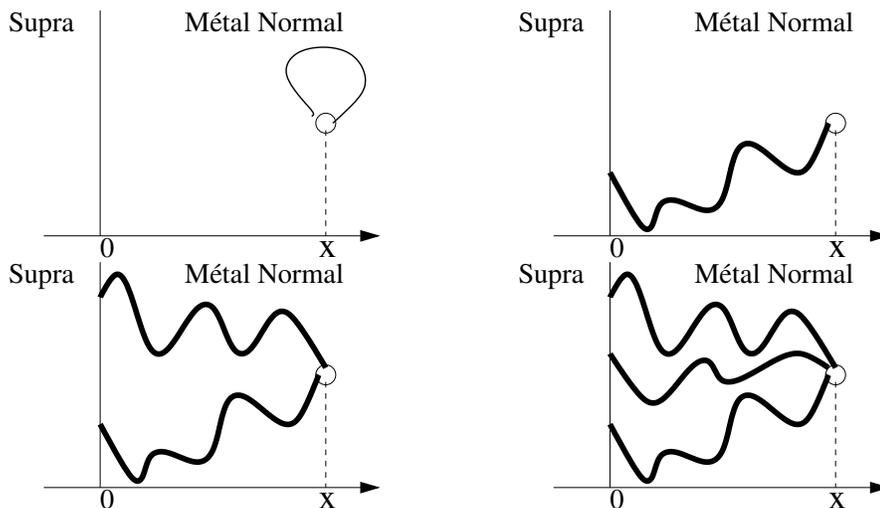


FIG. 6.3 – Structure schématique du développement perturbatif (6.14) de  $g_\omega(x)$  et (6.15) de  $f_\omega(x)$ . Le disque blanc représente "le point d'observation" situé à une distance  $x$  de l'interface. Les "zig-zags épais" symbolisent chacun un facteur  $e^{-\kappa x}$  lié à la diffusion et leurs intersections avec l'interface  $x = 0$  sont les amplitudes  $\tan(\theta_o/4)$ .

Le développement de la fonction de Green  $g_\omega(x)$  normale est constitué des puissances paires de  $\tan(\theta_o/4)e^{-\kappa x}$  tandis que le développement de  $f_\omega(x)$  ne contient que des puissances impaires. Cela suggère d'interpréter les expressions ci-dessus comme *des développements en nombre de réflexions d'Andreev habillées*, dont nous représentons schématiquement la structure sur la figure (6.3).

- La quantité  $\tan(\theta_o/4)$  est définie à l'interface  $x = 0$  et dépend de  $\Delta$  et  $\omega$ . Elle représente une amplitude de réflexion d'Andreev habillée par le désordre.

• la présence de la fonction  $e^{-\kappa x}$  indique que *le mouvement des électrons/trous est diffusif entre les évènements de réflexion d'Andreev*. Dans chaque terme, la puissance à laquelle est élevé ce facteur est la même que celle de  $\tan(\theta_o/4)$ . Tout ce passe comme si *un chemin diffusif de longueur  $x$  était affecté à chaque amplitude de réflexion d'Andreev habillée*

Malheureusement, il est difficile d'interpréter les facteurs de comptage  $(-1)^n(2n+1)$  et  $(-1)^n 2n$ . De plus, on ne sait pas comment les amplitudes  $\tan(\theta_o/4)$  sont construites microscopiquement à partir des électrons nus, du potentiel de paire  $\Delta(x)$  et du potentiel de désordre  $V(x)$ . Même si  $\theta_o$  ne contient pas explicitement des paramètres liés au désordre comme le libre parcours moyen  $l_e$  ou la constante de diffusion  $D$ , la présence de désordre doit jouer un rôle dans la fabrication de cet objet. Ainsi, le désordre semble intervenir à la fois "à l'intérieur" des vertex  $\tan(\theta_o/4)$  et "à l'extérieur" de ces objets. Afin de mieux comprendre le "contenu microscopique", nous sommes allés plus loin dans la décomposition des solutions des équations d'Usadel.

### Développement en $\delta = \Delta/2\omega$

On développe les vertex  $\tan(\theta_o/4)$  en  $\Delta/\omega$ . Nous traitons le contact idéal pour lequel  $\gamma = 1$ . En insérant l'expression de  $\theta_o$  donnée par l'équation (6.13) et en développant en  $\delta = \Delta/2\omega$  (facteur 2 pour obtenir des coefficients plus simples dans le développement ci-dessous), on obtient dans la partie normale  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} g_\omega(x) &= 1 \\ &+ \left( -\frac{1}{2} \cdot \delta^2 + \frac{13}{16} \cdot \delta^4 + \dots \right) e^{-2\kappa x} \\ &+ \left( \frac{1}{16} \cdot \delta^4 + \dots \right) e^{-4\kappa x} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} if_\omega(x) &= \left( \delta - \frac{13}{16} \cdot \delta^3 + \frac{195}{128} \cdot \delta^5 + \dots \right) e^{-\kappa x} \\ &+ \left( -\frac{3}{16} \cdot \delta^3 + \frac{117}{256} \cdot \delta^5 + \dots \right) e^{-3\kappa x} \\ &+ \left( \frac{5}{256} \cdot \delta^5 + \dots \right) e^{-5\kappa x} \end{aligned} \quad (6.17)$$

On a un double développement en série entière en puissances des paramètres  $\delta = \Delta/2\omega$  et  $e^{-\kappa x}$ . Le premier paramètre  $\delta$  est lié à la présence du supraconducteur :  $\delta$  est petit pour un gap  $\Delta$  petit (températures proches de la température critique) ou à haute énergie  $\omega$ . Dans la limite des basses énergies  $\omega \rightarrow 0$ , tous les termes sont divergents. Ceci indique *la nature non perturbative des solutions des équations d'Usadel dans l'infrarouge*. On retrouve les facteurs  $e^{-\kappa x}$  reliés à *la nature diffusif du mouvement des quasiparticules dans le métal désordonné*.

On voit apparaître la double hierarchie suivante :

- *Si on lit verticalement les formules (6.16) et (6.17), on fixe une puissance de  $\delta$  et on a différentes puissances de  $e^{-\kappa x}$  (en nombre fini). Par exemple, considérons la fonction anormale  $f_\omega(x)$  :*

A l'ordre 1 en  $\delta$ , on a une dépendance spatiale exponentielle décroissante en  $e^{-\kappa x}$ .

A l'ordre  $\delta^3$ , on a des décroissances spatiales en  $e^{-\kappa x}$  et  $e^{-3\kappa x}$ .

A l'ordre  $\delta^{2n+1}$ , on a une combinaison des exponentielles  $e^{-(2j+1)\kappa x}$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

- *Si on lit horizontalement ces mêmes expressions (6.16) et (6.17), on fixe une puissance de  $e^{-\kappa x}$  et on a un développement infini en puissances de  $\delta$ .*

On peut résumer cette double structure par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} g_\omega(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(e^{-2\kappa x}) \delta^{2n} \\ f_\omega(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\kappa x} P_n(e^{-2\kappa x}) \delta^{2n+1} \end{aligned} \quad (6.18)$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes de degré  $n$ .

Notre intention est d'interpréter les termes de ce développement comme des processus microscopiques de réflexion d'Andreev renormalisés par le désordre. *Il est tentant d'interpréter les puissances de  $\delta$  comme le nombre de processus de "réflexion d'Andreev nues" et les puissances de  $e^{-\kappa x}$  comme indiquant la longueur du chemin diffusif reliant ces événements d'Andreev.* C'est une image différente de celle de la figure (6.1) dans laquelle le nombre de chemin diffusifs ("zig-zags" représentant le facteur  $e^{-\kappa x}$ ) était égal à celui de "réflexions d'Andreev habillées"  $\tan(\theta_0/4)$ .

Avant de savoir si cette intuition est correcte, il faut commencer par vérifier si les premiers termes du développement peuvent être reconstruits par une technique perturbative standard. Dans un premier temps, nous allons écrire la théorie de perturbation en  $\Delta$  (partie 6.3). Ensuite, il faudra identifier les pôles de diffusion du type (6.9) pour le cas uniforme (partie 6.4) et pour une interface NS (6.5).

## 6.3 Théorie de perturbation

Dans ce paragraphe, nous construisons la théorie de perturbation issue des équations de Gor'kov.

Le système non perturbé est le métal normal remplissant tout l'espace. La perturbation est le potentiel de paire  $\Delta(x)$ . Le point de départ est l'équation de Dyson pour la fonction de Green à 2 points [24],[19] :

$$\hat{G}_o^{-1}(\omega, p_\oplus) \hat{G}(\omega, p_\oplus, p_\ominus) - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hat{\Delta}(q) \hat{G}(\omega, p_\oplus - q, p_\ominus) = \delta(p_\oplus - p_\ominus) \hat{1} \quad (6.19)$$

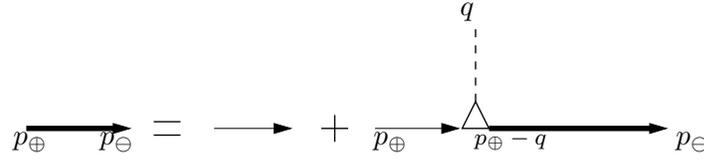


FIG. 6.4 – Equation de Dyson. Fonctions de Green matricielles

Nous avons représenté cette équation sur la figure (6.4). Les fonctions de Green sont des matrices 2 par 2 agissant dans l'espace de Nambu. Elles dépendent de deux moments  $p_{\oplus} = p + k/2$  et  $p_{\ominus} = p - k/2$  à cause de la brisure de l'invariance par translation provoquée par  $\Delta(x)$ . Les deux ingrédients de la théorie de perturbation sont :

- **La fonction de Green libre moyennée sur le désordre**, représentée par un trait continu fin sur la figure (6.4) :

$$\hat{G}_o^{-1}(\omega, p_{\oplus}) = \begin{pmatrix} i\omega - \xi_{p_{\oplus}} + i/2\tau & 0 \\ 0 & i\omega + \xi_{p_{\oplus}} + i/2\tau \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

avec  $\xi_p = p^2/2m - \mu$ . Nous prenons ainsi en compte dès le départ, la correction de "self-energy" de la fonction de Green du au désordre. Signalons pour éviter toute confusion que l'effet du désordre ne consiste *pas seulement* en cette correction et que pour être complet il nous restera à identifier les cooperons dans les deux paragraphes suivants.

- **La perturbation non-diagonale due à la supraconductivité** symbolisée par un triangle sur la figure (6.4) :

$$\hat{\Delta}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(q) \\ -\Delta^*(q) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Dans le cas d'un supraconducteur massif, l'invariance par translation est restaurée :

$$\Delta(\vec{q}) = \Delta\delta(\vec{q}) \quad (6.22)$$

Dans le cas de l'interface NS avec  $\Delta(x) = \Delta\Theta(-x)$ , on a :

$$\Delta(\vec{q}) = \frac{i\Delta}{q_x + i0}\delta(q_y)\delta(q_z) \quad (6.23)$$

Comme la perturbation est purement non diagonale et le propagateur libre purement diagonal, les diagrammes contenant un nombre pair de vertex  $\Delta$  contribuent sur la diagonale de  $\hat{G}$  (fonction de Green normale  $G$ ) tandis que les diagrammes à nombre impair de vertex  $\Delta$  contribuent à la partie non diagonale de  $\hat{G}$  (fonction anormale  $F$ ).

Pour obtenir les fonctions de Green quasiclassiques  $g_{\omega}(k)$  et  $f_{\omega}(k)$ , il faut sommer sur le moment interne  $p$  à transfert  $k$  fixé, puis diviser par  $i\pi\nu_o$  conformément à la définition (2.5) introduite au chapitre 2. Les fonctions  $g_{\omega}(x)$  et  $f_{\omega}(x)$  sont les transformées de Fourier de  $g_{\omega}(k)$  et  $f_{\omega}(k)$ .

## 6.4 Supraconducteur uniforme

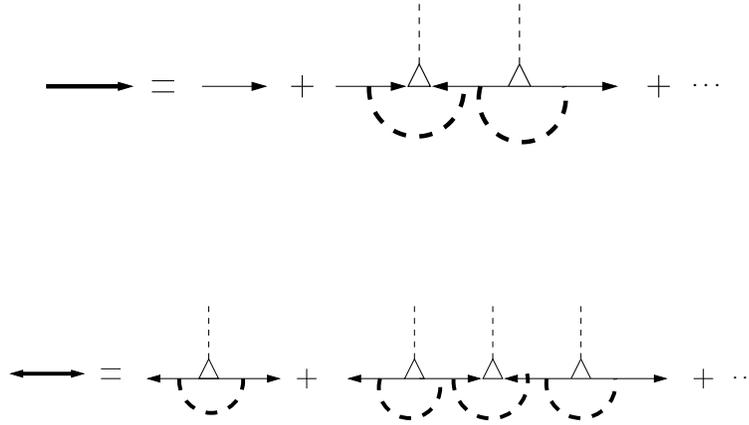


FIG. 6.5 – Diagrammes pour  $g_\omega$  et  $f_\omega$  dans le cas uniforme. Les pointillés représentent un cooperon dont la définition est donnée dans la figure (6.6)

Chaque vertex du potentiel de paire  $\Delta(q)$  (symbolisé par un triangle) connecte une ligne d'électron  $G_e(\omega, p)$  et une ligne de trou  $G_h(\omega, p - q)$ . Si on ajoute des impuretés connectant cet électron et ce trou, on peut construire un cooperon  $P_C(\omega, q)$ . Dans le cas du supraconducteur uniforme, le bloc obtenu, regroupant un vertex de réflexion d'Andreev et un cooperon, s'écrit :

$$P_C(\omega, q = 0)\Delta = \frac{\Delta}{2\omega\tau} \quad (6.24)$$

pour une conversion électron  $\rightarrow$  trou et :

$$-P_C(\omega, q = 0)\Delta^* = -\frac{\Delta^*}{2\omega\tau} \quad (6.25)$$

pour une conversion trou  $\rightarrow$  électron.

Le cooperon est pris à  $q = 0$  car un potentiel de paire uniforme (6.22) ne peut pas transférer de quantité de mouvement.

Pour la fonction normale  $g_\omega$ , les diagrammes possèdent un nombre pair  $2n$  de vertex  $\Delta$ , chacun étant habillé par un cooperon. Ces "blocs" sont reliés par  $n + 1$  fonctions  $\bar{G}_e$  et  $n$  fonctions  $\bar{G}_h$ .

$$\begin{aligned} g_\omega^{(2n)} &= \frac{1}{i\pi\nu_o} (-1)^n \left( \frac{\Delta}{2\omega\tau} \right)^{2n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{G}_e^{n+1}(\omega, p) \bar{G}_h^n(\omega, p) \\ &= \frac{1}{i\pi\nu_o} (-1)^n \left( \frac{\Delta}{2\omega\tau} \right)^{2n} \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} 2\pi\nu_o i\tau^{2n} \\ &= 2(-1)^n \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \delta^{2n} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Le facteur  $(-1)^n$  est du à l'alternance des conversions électron  $\rightarrow$  trou décrites par (6.24) et trou  $\rightarrow$  électron décrites par (6.25). On a divisé par  $i\pi\nu_o$  pour être conforme à la définition (2.5) introduite au chapitre 2.

Pour la fonction anormale  $f_\omega$ , les diagrammes contiennent un nombre impair  $2n + 1$  de vertex  $\Delta$  toujours habillés de la même manière et reliés par  $n + 1$  fonctions  $\bar{G}_e$  et  $n + 1$  fonctions  $\bar{G}_h$ .

$$\begin{aligned}
f_\omega^{(2n+1)} &= \frac{1}{i\pi\nu_o} (-1)^n \left( \frac{\Delta}{2\omega\tau} \right)^{2n+1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{G}_e^{n+1}(\omega, p) \bar{G}_h^{n+1}(\omega, p) \\
&= \frac{1}{i\pi\nu_o} (-1)^n \left( \frac{\Delta}{2\omega\tau} \right)^{2n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2\pi\nu_o\tau^{2n+1} \\
if_\omega^{(2n+1)} &= 2(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \delta^{2n+1}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Nous obtenons à chaque ordre, une simplification des facteurs  $\tau$  qui s'éliminent entre le numérateur et le dénominateur. De plus, on constate que l'on obtient exactement le développement (6.11). *La classe de diagrammes considérée permet donc de reconstruire exactement les fonctions de Green quasiclassiques d'un supraconducteur uniforme :*

$$\begin{aligned}
g_\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} g_\omega^{(2n)} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \\
if_\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} if_\omega^{(2n+1)} = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

## 6.5 Interface NS : effet de proximité

Nous considérons maintenant le cas de l'interface NS en se concentrant sur les fonctions de Green du côté normal  $x > 0$ .

Dans le paragraphe précédent, nous avons isolé une classe de diagrammes (représentée sur la figure 6.5) qui semble complète puisqu'elle reproduit les fonctions de Green d'un supraconducteur uniforme. Naïvement, on peut reprendre ces diagrammes en remplaçant simplement  $\Delta(\vec{q}) = \Delta\delta(\vec{q})$  par  $\Delta(\vec{q}) = i\Delta/(q + i0)$ . Nous allons voir que cette procédure ne donne pas les développements corrects (6.16) et (6.17). Il existe une contribution supplémentaire qui s'annule dans la limite uniforme mais doit être prise en compte pour traiter l'interface NS.

### • A l'ordre 1 en $\Delta$

La fonction de Green anormale est donnée par le diagramme de la figure (6.5) possédant

un seul "triangle"  $\Delta$  :

$$\begin{aligned}
 i f_{\omega}^{(1)}(x) &= \frac{1}{\pi \nu_o} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{G}(\omega, p) G(\omega, p) \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{\Delta(q_1) e^{iq_1 x}}{(Dq_1^2 + 2\omega)\tau} \\
 &= \frac{1}{\pi \nu_o} \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{i\Delta e^{iq_1 x}}{(q_1 + i0)(Dq_1^2 + 2\omega)\tau} \\
 &= \frac{2}{D} \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{i\Delta e^{iq_1 x}}{(q_1 + i0)(q_1^2 + \kappa^2)} \\
 &= \delta \cdot e^{-\kappa x}
 \end{aligned}$$

On a posé  $\kappa^2 = 2\omega/D$ .

On reconnaît le premier terme de la série (6.17).

• A l'ordre 2 en  $\Delta$

La fonction de Green normale est donnée par le diagramme de la figure (6.5) "à deux triangles" :

$$\begin{aligned}
 g_{\omega}^{(2)}(x) &= \frac{1}{i\pi \nu_o} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{G}(\omega, p) G^2(\omega, p) \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} \frac{\Delta(q_1) \tilde{\Delta}(q_2) e^{i(q_1+q_2)x}}{(Dq_1^2 + 2\omega)(Dq_2^2 + 2\omega)\tau^2} \\
 &= \frac{2}{D^2} \left[ \int \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta e^{iqx}}{(q + i0)(q^2 + \kappa^2)} \right]^2 \\
 &= -\frac{\delta^2}{2} \cdot e^{-2\kappa x}
 \end{aligned}$$

On reconnaît le second terme de la série (6.17).

• A l'ordre 3 en  $\Delta$

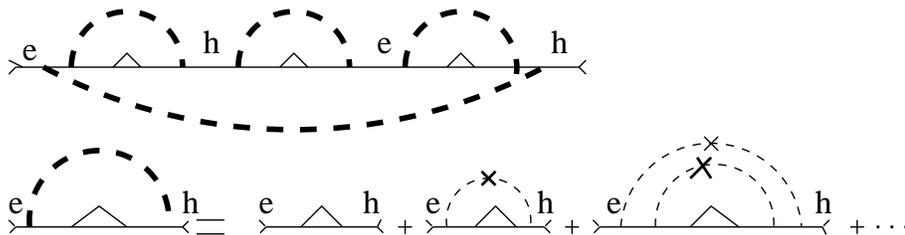


FIG. 6.6 – Diagramme  $f_{\omega}^{(3)}$  pour la fonction anormale à l'ordre 3 en  $\Delta$  (en haut) et série du cooperon construite sur une ligne d'électron (e) et une ligne de trou (h) (en bas).

Le diagramme de la figure (6.5) avec 3 vertex  $\Delta(q_i)$  et à 3 cooperons n'est plus suffisant. En effet, il est possible de construire une contribution singulière en  $q = 0$  et  $\omega = 0$  en

reliant par des impuretés les deux fonctions de Green terminales. On obtient ainsi un quatrième cooperon qui "couvre" les trois premiers comme le montre la figure (6.6). Ce diagramme à 3 vertex  $\Delta(q_i)$  et à 4 cooperons donne une contribution à la fonction de Green anormale :

$$if_{\omega}^{(3)}(x) = \frac{1}{\pi\nu_o} \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} \frac{dq_3}{2\pi} \frac{\Delta(q_1)\Delta^*(q_2)\Delta(q_3)H^{(4)}(\omega, q_i)e^{i(q_1+q_2+q_3)x}}{(Dq_1^2 + 2\omega)(Dq_2^2 + 2\omega)(Dq_3^2 + 2\omega)(Dq_4^2 + 2\omega)\tau^4} \quad (6.29)$$

avec  $q_4 = -q_1 - q_2 - q_3$ .

Le diagramme (6.30) ci-dessus contient :

- Trois vertex de potentiel de paire  $\Delta(q_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ .
- Quatre cooperons  $P_C(\omega, q_i)$  avec  $i = 1, \dots, 4$  et  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$ .
- Une boîte de Hikami  $H^{(4)}(\omega, q_i)$  reliant les cooperons entre eux [86].

Il existe une représentation plus "parlante" que la figure (6.6) qui montre comment les cooperons à longue portée et les fonctions de Green moyennes à courte portée se combinent au sein de ce diagramme, figure (6.7). Les lignes épaisses noires symbolisent les quatre cooperons et le carré hachuré les reliant est la boîte de Hikami  $H^{(4)}$ .

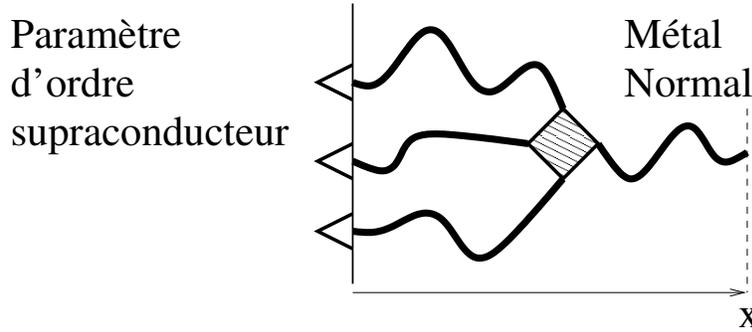


FIG. 6.7 - Diagramme  $f_{\omega}^{(3)}$  pour la fonction anormale à l'ordre 3 en  $\Delta$  en représentation espace réel.

Nous détaillons le calcul de ce diagramme dans l'annexe 2. Finalement, on trouve :

$$if_{\omega}^{(3)}(x) = \left( -\frac{13}{16}e^{-\kappa x} - \frac{3}{16}e^{-3\kappa x} \right) \left( \frac{\Delta}{2\omega} \right)^3 \quad (6.30)$$

On reconnaît la deuxième colonne du développement (6.17). Nous avons donc identifié "l'habillage par les cooperons" correct pour l'ordre 3 de la théorie de perturbation en  $\Delta$ .

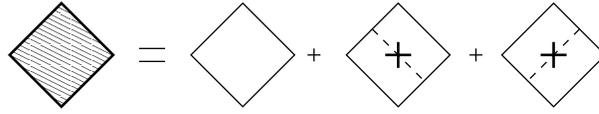


FIG. 6.8 – Boîte de Hikami habillée. Elle est la somme de la boîte de nue et de deux boîtes contenant chacune une impureté.

### Boîtes de Hikami

La boîte de Hikami (6.8) relie quatre fonctions de Green à courte portée :

$$H^{(4)}(\kappa, q_i) = \pi\nu_o D\tau^4 \left[ \sum_{i=1}^4 (q_i^2 + \kappa^2) - 2q_1q_2 - 2q_2q_4 \right] \quad (6.31)$$

On peut comprendre le passage du diagramme (6.30) à 4 cooperons à celui du cas uniforme à 3 cooperons. Comme dans le cas uniforme  $q_i = 0$ , la boîte de Hikami ci-dessus devient  $H^4(\kappa, 0) = 4\pi\nu_o D\kappa^2\tau^4$  et s'élimine avec un des 4 cooperons  $2\omega\tau$  : il reste alors 3 cooperons.

## 6.6 Diagrammes aux ordres suivants

Dans ce dernier paragraphe, nous décrivons ce qu'il se passe aux ordres plus élevés, toujours pour une interface NS décrite par "une marche d'escalier" du potentiel de paire  $\Delta(x)$ .

### • A l'ordre 4 en $\Delta$

Le diagramme pour  $g_\omega(x)$  est le produit des diagrammes d'ordre 1 et 3.

### • A l'ordre 5 en $\Delta$

La fonction de Green anormale est donnée par le diagramme à 6 diffusons de la figure qui se scinde en 1 diagramme à une boîte de Hikami hexagonale et 1 diagramme avec 2 boîtes de Hikami carrées.

- Un diagramme avec 6 cooperons tous reliés à une boîte de Hikami centrale hexagonale. Voir figure (6.9).
- Un diagramme avec 2 boîtes de Hikami carrées reliant 7 cooperons comme indiqué sur la figure (6.9).

On voit que la difficulté de cette approche diagrammatique réside dans la prolifération des cooperons. Il faut donc se demander s'il existe une règle, par exemple un argument dimensionnel, permettant d'isoler les diagrammes dominants et si possible de se limiter aux diagrammes contenant le plus petit nombre de cooperons. Dans les conducteurs diffusifs

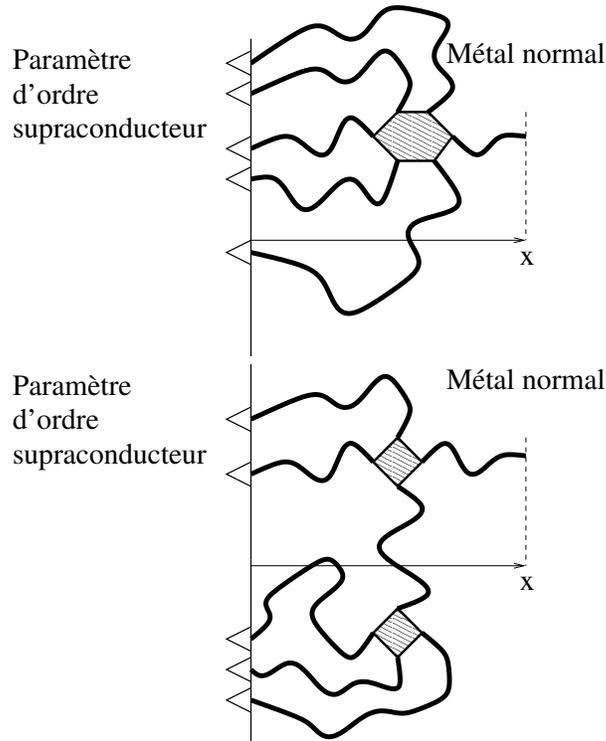


FIG. 6.9 – Diagrammes  $f_{\omega}^{(5)}$  pour la fonction anormale à l'ordre 5 en  $\Delta$  en représentation d'espace réel

normaux, il existe une telle classification basée sur un développement en l'inverse de la conductance sans dimension. Nous allons l'illustrer sur les exemples de la correction de localisation faible et sur celui des fluctuations universelles de conductance, avant de revenir au problème de l'interface NS.

### Corrections de localisation faible

En physique mésoscopique des systèmes purement normaux, la conductance de Landauer est décrite par un développement en nombre de diffusons (et/ou de cooperons) connectés par des boîtes de Hikami. Si on note  $G$  la conductance du métal diffusif et  $g = Gh/e^2$  la conductance sans dimension correspondante, on peut montrer qu'on doit associer à chaque diffuson un facteur  $g$  et à une boîte de Hikami à  $n$  sommets un facteur  $1/g^{n-1}$ .

Considérons les diagrammes de localisation faible de la figure (6.10). Selon la règle ci-dessus, le premier diagramme (a) est d'ordre  $g$ , le second diagramme (b) est d'ordre  $g^3/g^3 = 1$ , le troisième (c) est en  $g^5/g^6 = 1/g$ , etc... Ainsi, pour des échantillons suffisamment bons conducteurs  $g \gg 1$ , on peut se contenter du diagramme central (b) qui représente la correction dite de "localisation faible".

### Fluctuations de conductance

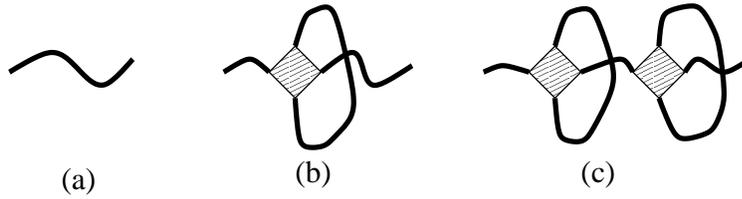


FIG. 6.10 – Diagrammes de localisation faible respectivement d'ordres  $g$  pour a),  $O(g)$  pour b) et  $1/g$  pour c). Le diagramme b) représente la correction de localisation faible.

En étudiant les fluctuations de conductance d'un métal diffusif pour  $g \gg 1$ , Al'tshuler *et al.* [7], [8] ont calculé le diagramme représenté schématiquement sur la figure (6.11.a). La contribution de ce diagramme avec 6 diffusons/cooperons et deux boîtes de Hikami carrées est en  $g^6/(g^3 \cdot g^3) = 1$  : cette indépendance vis à vis de  $g$  constitue le "caractère universel" des fluctuations de conductance [6]. Le diagramme suivant (6.11.b) est d'ordre  $g^8/g^9 = 1/g$  et donc négligeable pour des échantillons suffisamment "bons conducteurs".

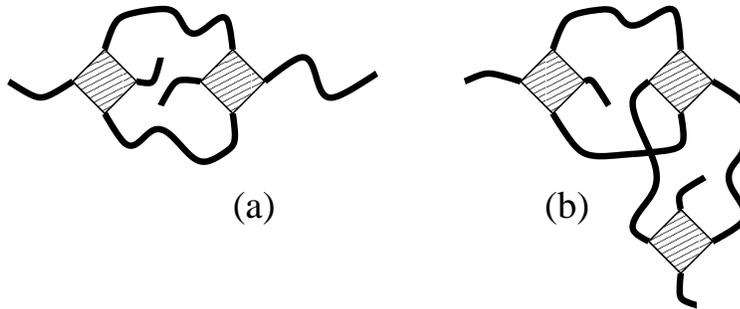


FIG. 6.11 – Diagrammes de fluctuations de conductance. Le diagramme a) est d'ordre  $O(g)$  et le diagramme b) d'ordre  $1/g$ .

### • Retour sur l'interface NS

Dans le cas de l'interface NS, les diagrammes à  $n$  vertex  $\Delta$  sont d'ordre  $(\Delta/\omega)^n$ . On pourrait penser que le rajout de boîtes de Hikami implique l'apparition de préfacteurs devant  $(\Delta/\omega)^n$  contenant des puissances croissantes de  $1/g$ . Contrairement à ce qu'il se passe pour la correction de localisation faible et les fluctuations de conductance, chaque ajout d'une boîte carrée par exemple, est accompagné de l'apparition de 3 cooperons. Les diagrammes en  $(\Delta/\omega)^n$  sont donc tous en  $O(g)$  indépendamment du nombre de cooperons et de boîtes de Hikami. De plus, comme on s'intéresse à la physique de basse énergie  $\omega < \Delta$ , il faut considérer tous les ordres  $n$ . Cette absence de "petit paramètre" rend le problème

aussi complexe que l'étude d'un conducteur normal proche de la transition métal-isolant  $g \simeq 1$ .

Techniquement, les difficultés sont liées à :

- l'apparition de boîtes de Hikami de plus en plus grandes et dont il faudrait connaître une expression valable à tous les ordres.
- les boîtes de Hikami suffisamment grandes peuvent se scinder en boîtes plus petites séparées par un cooperon : par exemple, la boîte à 6 côtés se transforme en deux boîtes à 4 cotés reliées par un cooperon.

## 6.7 Conclusion

La physique de l'effet de proximité à couplage parfait entre le supraconducteur et le métal normal est dite "non perturbative". Grâce à ce travail, on peut se rendre compte précisément en quoi le contenu des équations d'Usadel est non perturbatif. Tout d'abord, on sait écrire les diagrammes contenus dans ces équations. Ensuite, nous avons identifié les difficultés qui apparaissent dans leur resommation :

- nécessité de sommer tous les ordres  $n$  en  $(\Delta/\omega)^n$  car  $\omega/\Delta \rightarrow 0$ .
- absence d'un petit paramètre  $1/g$  pour limiter le nombre de cooperons dans chaque diagramme d'ordre  $n$ .

Cependant, si l'on connaissait la combinatoire systématique des boîtes de Hikami, on pourrait en principe resommer la totalité de la série de perturbation.



## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'effet de proximité dans des structures SNS, SFS et NS.

Dans les trois premiers chapitres pédagogiques, nous avons présenté les différents outils théoriques nécessaires à l'étude de l'effet de proximité. Le premier chapitre est consacré aux reformulations "exactes" de la théorie BCS sous forme d'équations différentielles : les équations de Bogoliubov-de Gennes pour les fonctions d'onde des quasiparticules et les équations de Gor'kov pour les fonctions de Green. Dans le chapitre 2, nous avons présenté la théorie quasiclassique de la supraconductivité. Enfin, le chapitre 3 introduit la notion clef de réflexion d'Andreev et montre comment elle se décline dans les formalismes de Bogoliubov-de Gennes, de Gor'kov et quasiclassique.

Ce travail de thèse comprend trois contributions distinctes décrites dans les chapitres 4, 5 et 6.

**Le chapitre 4** est consacré à l'étude d'un anneau hybride métal normal-métal supraconducteur. D'une part, nous avons obtenu le spectre d'excitation complet de l'anneau NS pour des valeurs arbitraires des longueurs normale et supraconductrice. D'autre part, nous avons introduit une méthode générale de calcul du courant valable pour tous les systèmes balistiques sans interaction. Appliquée à l'anneau NS, cette méthode permet de retrouver dans un cadre unique : les caractéristiques courant-flux  $I(\phi)$  des jonctions SNS balistiques longues ou courtes, les résultats de BK sur les anneaux NS avec  $d_N \gg \xi_0$  ainsi que le courant permanent dans un anneau purement normal. Grâce à cette méthode, nous avons amélioré la connaissance de l'anneau NS en étudiant l'effet de la température, l'anneau multicanal sans désordre et la répartition spectrale du courant.

**Le chapitre 5** traite de l'influence du caractère incomplet de la réflexion d'Andreev sur le spectre et le courant Josephson d'une jonction SFS balistique monocanal, ainsi que sur la physique de la transition de "l'état 0" de cette jonction à "l'état  $\pi$ ". Nous avons obtenu le spectre des états d'Andreev d'une jonction SFS balistique en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes qui permettent de tenir compte des deux types de réflexion : électron-électron et électron-trou. Pour les petites énergies d'échange, on observe déjà des ouvertures de gap en  $\chi = 0$  et  $\chi = \pi$  mais les écarts à la situation quasiclassique restent très petits. Par une étude numérique de la jonction courte, nous avons aussi exploré le domaine des fortes énergies d'échange. Les résultats "perturbatifs à petit  $\eta \ll 1$ " persévèrent quasiment jusqu'aux environs de la valeur  $\eta = 0.5$  montrant une robustesse de l'effet Josephson. Ensuite pour  $\eta > 0.5$ , les gaps deviennent très importants

et le courant est fortement réduit tout en conservant une discontinuité dans la relation  $I(\chi)$ . Pour les valeurs  $\eta > 0.9$ , la dépendance en flux des deux niveaux d'Andreev devient quasiment sinusoïdale avant de s'aplatir complètement à  $\eta = 1$ . La relation courant-phase  $I(\chi)$  correspondante perd sa discontinuité avant de s'annuler complètement. Enfin, la transition  $0 - \pi$  est très peu affectée par l'effet de réflexion électron-électron ordinaire alors qu'elle est considérablement "déplacée" dans le cas d'une réflexion électron-électron causée par une impureté (jonction SFIS). Nous pensons prolonger ce travail en considérant le cas multicanal pour lequel nous nous attendons à une réduction du courant Josephson plus marquée, même pour des énergies d'échange assez faibles devant  $E_F$ .

**Le chapitre 6** décrit la structure de la théorie de perturbation en  $\Delta$  habillée par des Cooperons dans le cas d'une interface NS avec couplage idéal. Grâce à ce travail, on sait écrire les diagrammes "contenus" dans les équations d'Usadel. La difficulté principale est l'absence d'un petit paramètre qui limiterait le nombre de diagrammes à resommer. Comme prolongement de ce travail, il serait intéressant de comprendre comment l'introduction d'une barrière de potentiel sur l'interface modifie la structure de cette série de perturbation.

## Annexe 1 : paramètres $r_\epsilon$ et $\Theta_\epsilon$

Dans cette annexe, je représente les fonctions  $r_\epsilon$  et  $\Theta_\epsilon$  qui interviennent dans l'expression générale (4.28) du spectre de l'anneau NS obtenue au chapitre 4 :

$$\cos k_F L = r_\epsilon \cos \left( \frac{\epsilon d_N}{\hbar v_F} - 2\pi\varphi + \Theta_\epsilon \right) \quad (6.32)$$

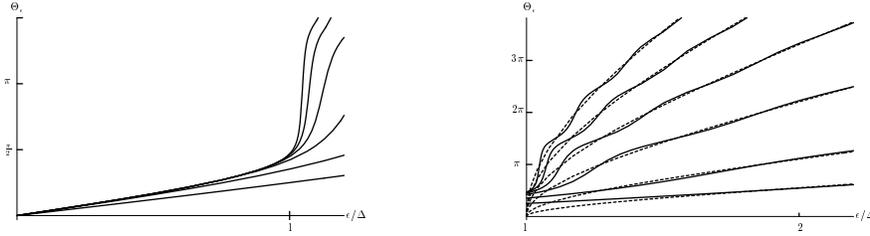


FIG. 6.12 – La figure de gauche représente le déphasage  $\Theta_\epsilon$  pour diverses valeurs de la longueur  $d_S$ . On a tracé  $d_S/\xi_o = 1, 2, 4, 6, 8, 10$  de la courbe du haut vers celle du bas. On voit que pour  $d_S \gg \xi_o$ , les courbes tendent vers la fonction  $\Theta_\epsilon \rightarrow \pi/2 - \arccos(\epsilon/\Delta)$ . A droite, on a représenté  $\Theta_\epsilon$  toujours pour les mêmes valeurs de  $d_S$  mais à des énergies plus élevées. A haute énergie, toutes les courbes tendent vers la fonction  $\delta k_\epsilon d_S$  que nous avons tracé en pointillés pour chaque valeur de  $d_S$ . Ce déphasage asymptotique correspond au déphasage entre un électron et le trou réfléchi d'Andreev correspondant lors d'une traversée du supraconducteur à l'énergie  $\epsilon \gg \Delta$

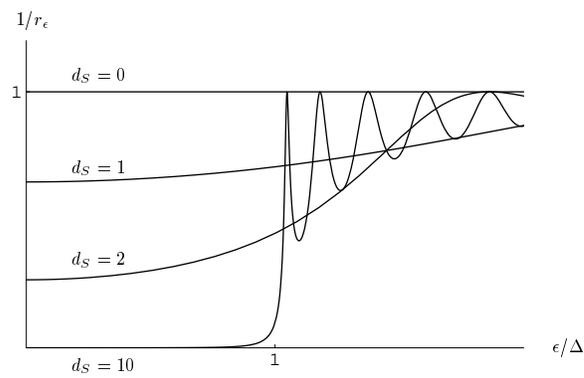


FIG. 6.13 – On a représenté  $1/r_\epsilon$  pour  $d_S/\xi_o = 0, 1, 10$ . Il faut remarquer que  $1/r_\epsilon$  est identiquement nul en-dessous du gap pour les jonctions SNS ce qui élimine  $\cos k_F L$  de l'expression du spectre. En revanche pour l'anneau normal, ce facteur est égal à 1 pour toutes les énergies, ce qui restaure  $k_F L$ , essentiel pour la quantification des électrons dans un anneau normal.

## Annexe 2 : détail du calcul de $f_\omega^{(3)}(x)$

Pour évaluer le diagramme (6.30), on introduit une variable réelle  $y$  afin de découpler les impulsions  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) :

$$f_\omega^{(3)}(x) = \frac{1}{D^3} \int dy \int \left( \prod_{i=1}^4 \frac{dq_i}{2\pi} \right) \Delta(q_1) \Delta(q_2) \Delta(q_3) e^{i(q_1+q_2+q_3)(x-y)} e^{-iq_4 y} \quad (6.33)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^4 (q_i^2 + \kappa^2) - 2q_1 q_2 - 2q_2 q_4}{(q_1^2 + \kappa^2)(q_2^2 + \kappa^2)(q_3^2 + \kappa^2)(q_4^2 + \kappa^2)}$$

avec la notation  $D\kappa^2 = 2\omega$ .

Donnons quelques intégrales utiles dans les calculs qui seront les briques élémentaires du diagramme considéré :

– **le cooperon ordinaire** dans les métaux normaux désordonnés :

$$P_C(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-iqy}}{q^2 + \kappa^2}$$

$$= \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|y|} \quad (6.34)$$

Par rapport à la définition habituelle du cooperon, nous omettons facteur  $\tau$ , car nous avons remarqué que les temps  $\tau$  s'éliminent systématiquement entre les numérateur et dénominateur des diagrammes et cela à tous les ordres de la série de perturbation.

– **un cooperon modifié** par la présence de la supraconductivité inhomogène.

$$P_\Delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta(q) e^{iq(x-y)}}{q^2 + \kappa^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{i\Delta e^{iq(x-y)}}{(q+i0)(q^2 + \kappa^2)}$$

$$= \frac{\Delta}{2\kappa^2} [\theta(x-y) e^{-\kappa(x-y)} + \theta(y-x) (2 - e^{\kappa(x-y)})]$$

– sa dérivée spatiale :

$$\partial_x P_\Delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{iq\Delta(q) e^{iq(x-y)}}{q^2 + \kappa^2}$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{q\Delta e^{iq(x-y)}}{(q+i0)(q^2 + \kappa^2)}$$

$$= - \frac{\Delta}{2\kappa} e^{-\kappa|x-y|} \quad (6.35)$$

– La représentation intégrale de la fonction de Heaviside :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{i\Delta e^{iq(x-y)}}{q+i0} = \Delta\theta(y-x) = \Delta(y-x) \quad (6.36)$$

Notre expression (6.30) pour la fonction de Green anormale à l'ordre 3 en  $\Delta$  se scinde en 4 termes qu'il faut évaluer séparément :

1. **Le terme qui contient  $q_i^2 + \kappa^2$  au numérateur (pour  $i = 1, 2, 3$ )** donne une contribution à  $f_\omega^{(3)}(x)$  :

$$\begin{aligned} if_\omega^{(3,1)}(x) &= \frac{i\Delta^3}{D^3} \int dy \left[ \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iq(x-y)}}{(q+i0)(q^2+\kappa^2)} \right]^2 \int \frac{dq_3}{2\pi} \frac{e^{iq_3(x-y)}}{q_3+i0} \int \frac{dq_4}{2\pi} \frac{e^{-iq_4y}}{q_4^2+\kappa^2} \\ &= \frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy P_\Delta(x-y) \tilde{P}_\Delta(x-y) \Delta\theta(y-x) P_N(y) \\ &= -\frac{7}{24} \left( \frac{\Delta}{D\kappa^2} \right)^3 e^{-\kappa x} \end{aligned} \quad (6.37)$$

2. **Le terme contenant  $q_4^2 + \kappa^2$  au numérateur** donne une contribution encore plus simple :

$$\begin{aligned} if_\omega^{(3,2)}(x) &= \frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta(q) e^{iq(x-y)}}{q^2+\kappa^2} \right]^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{2\pi} e^{-iq_4y} \\ &= \frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy P_\Delta(x-y) \tilde{P}_\Delta(x-y) P_\Delta(x-y) \delta(y) \\ &= \frac{1}{D^3} P_\Delta(x) \tilde{P}_\Delta(x) P_\Delta(x) \\ &= -\frac{1}{8} \left( \frac{\Delta}{D\kappa^2} \right)^3 e^{-3\kappa x} \end{aligned} \quad (6.38)$$

3. **Le terme contenant  $q_1q_3$  au numérateur** va donner les 2 sortes d'exponentielles :

$$\begin{aligned} if_\omega^{(3,3)}(x) &= \frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{q\Delta(q) e^{iq(x-y)}}{q^2+\kappa^2} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{2\pi} \Delta(q_2) e^{iq_2(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \frac{e^{-iq_4y}}{q_4^2+\kappa^2} \\ &= -\frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy (\partial_x P_\Delta(x-y))^2 P_\Delta(x-y) P_C(y) \\ &= -\frac{1}{16} \left( \frac{\Delta}{D\kappa^2} \right)^3 \left[ \frac{1}{4} e^{-3\kappa x} - \frac{11}{12} e^{-\kappa x} \right] \end{aligned}$$

4. Le terme contenant  $q_2q_4$  au numérateur va donner les 2 sortes d'exponentielles :

$$\begin{aligned}
if_{\omega}^{(3,4)}(x) &= \frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{\Delta(q) e^{iq(x-y)}}{q^2 + \kappa^2} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_1}{2\pi} \Delta(q_1) e^{iq_1(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \frac{q_4 e^{-iq_4 y}}{q_4^2 + \kappa^2} \\
&= -\frac{1}{D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{\Delta}(x-y) \tilde{P}_{\Delta}(x-y) \partial_x P_{\Delta}(x-y) \partial_y P_C(y) \\
&= -\frac{1}{16} \left( \frac{\Delta}{D\kappa^2} \right)^3 \left[ -\frac{3}{4} e^{-3\kappa x} + \frac{17}{12} e^{-\kappa x} \right]
\end{aligned}$$

Lorqu'on ajoute les 4 morceaux  $f_{\omega}^{(3,i)}(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), on trouve :

$$\begin{aligned}
f_{\omega}^{(3)}(x) &= 3 \cdot f_{\omega}^{(3,1)}(x) + f_{\omega}^{(3,2)}(x) - 2 \cdot f_{\omega}^{(3,3)}(x) - 2 \cdot f_{\omega}^{(3,4)}(x) \\
&= \left( -\frac{13}{16} e^{-\kappa x} - \frac{3}{16} e^{-3\kappa x} \right) \left( \frac{\Delta}{2\omega} \right)^3
\end{aligned}$$

(6.39)



# Bibliographie

- [1] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer. *Phys. Rev.*, 108 :1175, 1957.
- [2] B. D. Josephson. *Phys. Lett.*, 1 :251, 1962.
- [3] R. Landauer. *Philos. Mag.*, 21 :863, 1957.
- [4] M. Büttiker. *Phys. Rev. B*, 46 :12485, 1992.
- [5] C.W.J. Beenakker and H. van Houten. *Rev. Mod. Phys.*, 69 :731, 1997.
- [6] P.A. Lee, D. Stone, and H. Fukuyama. *Phys. Rev. B*, 35 :1039, 1987.
- [7] B.L. Al'tshuler. *JETP Lett.*, 41 :648, 1985.
- [8] B.L. Al'tshuler and B. Shklovskii. *Sov. Phys. JETP*, 64 :127, 1986.
- [9] P.A. Lee and T.V. Ramakrishnan. *Rev. Mod. Phys.*, 57 :287, 1985.
- [10] B.L. Al'tshuler. *Electron-electron interaction in disordered conductors*, A.L. Efros and M. Pollak eds :1, 1985.
- [11] E. Akkermans and G. Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*, CNRS Editions(A paraître), 2004.
- [12] P. Fulde and R.A. Ferrell. *Phys. Rev.*, 135 :550, 1964.
- [13] A. I. Larkin and Y.N. Ovchinnikov. *Sov. Phys. JETP*, 20 :762, 1965.
- [14] A. I. Buzdin, L.N. Bulaevskii, and S.V. Panyukov. *JETP Lett.*, 35(4) :178, 1982.
- [15] M.J.M de Jong and C.W.J. Beenakker. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :1657, 1995.
- [16] L.P. Gor'kov. *Sov. Phys. JETP*, 9 :1364, 1960.
- [17] P.G. de Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*, Frontiers in Physics, 1966.
- [18] A.M. Zagoskin. *Quantum Theory of Many-Body Systems*, Springer Verlag, 1998.
- [19] N. Kopnin. *Theory of Non Equilibrium Superconductivity*, Clarendon Press. Oxford, 2001.
- [20] N.N. Bogoliubov. *Sov. Phys. JETP*, 7 :41, 1958.
- [21] N.N. Bogoliubov. *Nuovo Cimento*, 7 :794, 1958.
- [22] J.G. Valatin. *Nuovo Cimento*, 7 :843, 1958.
- [23] J. Bardeen, R. Kümmel, A.E. Jacobs, and L. Tewordt. *Phys. Rev.*, 187 :556, 1969.
- [24] A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dhyalozinsky. *Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover New York, 1963.

- [25] G. Eilenberger. *Z. Phys.*, 214 :195, 1968.
- [26] A. I. Larkin and Y.N. Ovchinnikov. *Sov. Phys. JETP*, 26 :1200, 1968.
- [27] K.D. Usadel. *Phys. Rev. Lett.*, 25 :507, 1970.
- [28] N. Schopohl and K. Maki. *Phys. Rev. B*, 52 :490, 1995.
- [29] A. Shelankov and M. Ozana. *Phys. Rev. B*, 61 :7077, 2000.
- [30] K. G. Andreev. *Sov. Phys. JETP*, 19 :1228, 1964.
- [31] G. Blonder, M. Tinkham, and T.M. Klapwijk. *Phys. Rev. B*, 25 :4515, 1982.
- [32] C.W.J. Beenakker. *Phys. Rev. B*, 46 :12841, 1992.
- [33] D.S. Falk. *Phys. Rev.*, 132 :1576, 1963.
- [34] W. Belzig, C. Bruder, and G. Schön. *Phys. Rev. B*, 54 :9443, 1996.
- [35] M. Ozana and A. Shelankov. *Phys. Rev. B*, 65 :14510, 2001.
- [36] M. Ozana, A. Shelankov, and J. Tobiska. 2002.
- [37] M. Yu. Kuprianov and V.F. Lukichev. *Sov. Phys. JETP*, 67 :1163, 1988.
- [38] Yu.V. Nazarov. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :1420, 1994.
- [39] A. Kastalsky, A.W. Kleinsasser, L.H. Greene, R. Bhat, F.P. Milliken, and J.P. Harbison. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :3026, 1991.
- [40] B.J. van Wees, P. de Vries, P. Magnée, and T.M. Klapwijk. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :510, 1992.
- [41] I.K. Marmoros, C.W.J. Beenakker, and R.A. Jalabert. *Phys. Rev. B*, 48 :2811, 1993.
- [42] F.W.J. Hekking and Yu.V. Nazarov. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :1625, 1993.
- [43] M. Büttiker, Y. Imry, and R. Landauer. *Phys. Lett. A*, 96 :365, 1983.
- [44] H.F. Cheung, Y. Gefen, E.K. Riedel, and W.H. Shih. *Phys. Rev. B*, 37 :6050, 1988.
- [45] O. Entin-Wohlman and Y. Gefen. *Europhys. Lett.*, 8 :477, 1989.
- [46] J. Cayssol, T. Kontos, and G. Montambaux. *Phys. Rev. B*, 67 :184508, 2003.
- [47] M. Büttiker and T.M. Klapwijk. *Phys. Rev. B*, 33 :5114, 1986.
- [48] B.J. van Wees, K.-M.H. Lenssen, and C.J.P.M. Harmans. *Phys. Rev. B*, 44 :470, 1991.
- [49] A. Furusaki, H. Takayanagi, and M. Tsukada. *Phys. Rev. B*, 45 :10563, 1992.
- [50] P.F. Bagwell. *Phys. Rev. B*, 46 :12573, 1992.
- [51] J. Bardeen and J.L. Johnson. *Phys. Rev. B*, 5 :72, 1972.
- [52] A.V. Svidzinskii, T.N. Antsygina, and E.N. Bratus. *Sov. Phys. JETP*, 34 :860, 1972.
- [53] C. Ishii. *Prog. Theor. Phys.*, 44 :1525, 1970.
- [54] I.O. Kulik and A.N. Omel'yanchuk. *Sov. J. Low. Temp. Phys.*, 3 :459, 1977.
- [55] I.O. Kulik and A.N. Omel'yanchuk. *Sov. J. Low. Temp. Phys.*, 4 :142, 1978.
- [56] C.W.J. Beenakker and H. van Houten. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :3056, 1991.

- [57] I.O. Kulik. *Sov. Phys. JETP*, 30(5) :944, 1970.
- [58] M. Hurd and G. Wendin. *Phys. Rev. B*, 49 :15258, 1994.
- [59] N.M. Chtchelkatchev, G.B. Lesovik, and G. Blatter. *Phys. Rev. B*, 62 :3559, 2000.
- [60] H. Takayanagi, T. Akazaki, and J. Nitta. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3533, 1995.
- [61] J.P. Heida, B.J. van Wees, T.M. Klapwijk, and G. Borghs. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :1625, 1993.
- [62] G. Bastian. *Phys. Rev. B*, 62 :9840, 2000.
- [63] K.K. Likharev. *Rev. Mod. Phys.*, 51(1) :101, 1979.
- [64] A.D. Zaikin and G.F. Zharkov. *Sov. J. Low. Temp. Phys.*, 7 :184, 1981.
- [65] F. Bloch. *Phys. Rev.*, 137 :787, 1965.
- [66] F. Bloch. *Phys. Rev.*, 166 :415, 1968.
- [67] H.F. Cheung, Y. Gefen, and E.K. Riedel. *IBM J. Res. Develop.*, 32(3), 1988.
- [68] A.D. Zaikin and G.F. Zharkov. *Sov. Phys. JETP*, 54 :944, 1981.
- [69] Izyumov. *Physics-USpekhi*, 45 :109, 2002.
- [70] L.N. Bulaevskii, V. V. Kuzii, and A.A. Sobyenin. *JETP Lett.*, 25 :290, 1977.
- [71] V.V. Ryazanov, V.A. Oboznov, A.V. Veretennikov, A.Yu. Rusanov, A.A. Golubov, and J. Aarts. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :2427, 2001.
- [72] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, and X. Grison. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :304, 2001.
- [73] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genet, B. Stephanidis, and R. Boursier. *Phys. Rev. B*, 89 :137007, 2002.
- [74] W. Guichard, M. Aprili, O. Bourgeois, T. Kontos, J. Lesueur, and P. Gandit. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :167001, 2003.
- [75] S.V. Kuplevakhskii and I.I. Fal'ko. *JETP Lett.*, 52(6) :343, 1990.
- [76] L.N. Bulaevskii, A. I. Buzdin, and S.V. Panyukov. *Sol. State Comm.*, 44(4) :539, 1982.
- [77] N.M. Chtchelkatchev, W. Belzig, Yu.V. Nazarov, and C. Bruder. *JETP Lett.*, 74 :323, 2001.
- [78] Y. Takane and H. Ebisawa. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 61 :1685, 1992.
- [79] R.J. Soulen, Jr., J.M. Byers, M.S. Osofsky, B. Nadgorny, T. Ambrose, S.F. Cheng, P.R. Broussard, C. T. Tanaka, J. Nowak, J.S. Moodera, A. Barry, and J.M.D. Coey. 282 :85, 1998.
- [80] A. I. Buzdin and M. Yu Kupriyanov. *JETP Lett.*, 53 :321, 1991.
- [81] A. I. Buzdin, B. Vuiichich, and M. Yu Kupriyanov. *Sov. Phys. JETP*, 74 :124, 1992.
- [82] S. Guéron, H. Pothier, N.O. Birge, D. Estève, and M.H. Devoret. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3025, 1996.
- [83] B.Z. Spivak and D.E. Kmel'nitskii. *JETP Lett.*, 35(8) :412, 1982.
- [84] R. Berkovits. *J. Phys. : Condens. Matter*, 7 :4105, 1995.
- [85] A. Altland and M. Zirnbauer. *Phys. Rev. B*, 55 :1142, 1997.
- [86] S. Hikami. *Phys. Rev. B*, 24 :2671, 1981.