



HAL
open science

Dynamique quantique dans les potentiels lumineux

Quentin Thommen

► **To cite this version:**

Quentin Thommen. Dynamique quantique dans les potentiels lumineux. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2004. Français. NNT : . tel-00009871

HAL Id: tel-00009871

<https://theses.hal.science/tel-00009871>

Submitted on 1 Aug 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'université de Lille I
Lasers, Molécules et Rayonnement
Atmosphérique

présentée par :

Quentin Thommen

pour le grade de Docteur de l'Université de Lille I

Sujet de la thèse :

**Dynamique quantique dans les potentiels
lumineux**

Soutenue le 8 décembre 2004 devant le jury composé de :

Mme Véronique Zehnlé Directrice de thèse
M. Christophe Salomon Examineur
M. Ennio Arimondo Rapporteur
M. Dominique Delande Rapporteur
M. Jean-Michel Robbe Examineur
M. Jean-Claude Garreau Directeur de thèse

Table des matières

Avant propos	2
Introduction	2
1 Dynamique quantique d'un atome froid dans un réseau incliné	4
2 Modulation harmonique du réseau incliné	15
3 Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein	26
4 La mesure de la fonction d'onde	39
Compléments	46
Bibliographie	61

Avant propos

Cet exposé relate les résultats des travaux de recherche auxquels j'ai participé durant mon D.E.A et mon doctorat au sein du laboratoire PhLAM de l'université de Lille entre septembre 2000 et septembre 2004. La première partie est un exposé complet en quatre chapitres présentant les résultats de recherche sur

- la dynamique quantique d'une particule dans un réseau incliné modulé
- la dynamique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné
- la mesure de la fonction d'onde dans un réseau parabolique,

le premier chapitre rassemblant les prérequis. L'accent a été mis sur une présentation claire plutôt qu'exhaustive afin de mettre en évidence les phénomènes essentiels. C'est pourquoi les points plus techniques ainsi que les détails de calculs ont été écrits sous forme de compléments indépendants et rassemblés dans une partie séparée afin de ne pas hacher la lecture de l'exposé.

Introduction

La mécanique quantique est une mécanique ondulatoire. Elle décrit l'évolution dynamique des corps matériels par l'évolution spatio-temporelle d'une fonction d'onde qui correspond à une amplitude de probabilité de présence. L'équation d'évolution de la fonction d'onde – l'équation de Schrödinger – est linéaire, elle est donc soumise au principe de superposition. Cependant, les grandeurs physiques observables – comme la probabilité de présence – dépendent du module carré de la fonction d'onde. Considérons par exemple une observable physique A , si le système est dans l'état $|1\rangle$, une mesure de l'observable A donne $A_1 = \langle 1|A|1\rangle$ alors que si le système est dans l'état $|2\rangle$ on obtient $A_2 = \langle 2|A|2\rangle$; si maintenant le système est dans une superposition d'état :

$$|\theta\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

la mesure de l'observable A est

$$A_\theta = \frac{A_1 + A_2}{2} + \langle 1|A|2\rangle \cos(\theta) \neq \frac{A_1 + A_2}{2}$$

le terme en $\cos(\theta)$ traduit l'interférence entre les mesures dans l'état $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Nous voyons ainsi que les mesures des observables physiques ne sont pas soumises au principe de superposition. Les phénomènes d'interférences sont conceptuellement similaires à ceux de l'optique ondulatoire où le champ électromagnétique est soumis au principe de superposition mais pas l'intensité lumineuse.

Comme l'équation de Schrödinger est linéaire, une méthode d'analyse incontournable est la recherche des modes propres du système. Cette méthode est souvent utilisée en mécanique classique pour étudier la dynamique d'une chaîne d'oscillateurs linéaires couplés. En mécanique quantique, les modes propres sont les fonctions d'onde, solutions de l'équation de Schrödinger, évoluant en chaque point de l'espace avec la même fréquence. Ces modes propres correspondent alors aux états propres d'un opérateur – le hamiltonien – traduisant l'énergie du système, les valeurs propres associées correspondent donc aux énergies des différents modes propres. L'ensemble des valeurs propres du hamiltonien forme le *spectre d'énergie*. Une fois les états propres connus, la dynamique est entièrement décrite par le principe de superposition puisque toutes les fonctions d'onde peuvent être décomposées sur la base des modes propres dont la dynamique est parfaitement connue.

Dans de nombreux cas, le spectre d'énergie est discret. Cet aspect essentiel est historiquement à l'origine de l'élaboration de la mécanique quantique pour expliquer les raies fines des spectres optiques d'émission et d'absorption des atomes – le modèle de l'atome de Bohr. En effet, une perturbation extérieure peut permettre des transitions entre deux modes propres d'énergie E_n et E_l si la fréquence ν de l'excitation est telle que

$$E_l - E_n \simeq h\nu.$$

L'absorption et l'émission d'énergie se produisent ainsi autour de séries discrètes de fréquences appelées *fréquences de Bohr*.

Si la présentation de la nature ondulatoire de la mécanique quantique et des phénomènes d'interférences associés existe dans tous les manuels de mécanique quantique, elle est malheureusement trop souvent cantonnée aux chapitres introductifs, le reste de l'ouvrage étant consacré – ce qui constitue déjà un bien vaste programme – à la recherche et à l'étude du spectre d'énergie ainsi que des transitions entre les états. L'origine de cette forme de présentation vient de la difficulté de mettre en oeuvre expérimentalement les phénomènes d'interférences alors qu'une lampe à vapeur de sodium et un prisme suffisent à mettre en évidence le spectre d'énergie discret. Aux échelles macro et mésoscopique, les phénomènes d'interférences quantiques sont en effet quasi-inexistants.

Depuis l'avènement des techniques de refroidissement d'atomes par lasers, il est possible d'obtenir des gaz de très faible densité à des températures de l'ordre de quelques micro-kelvin. Les atomes interagissent alors si peu entre eux que nous pouvons les considérer comme indépendants. Pour un gaz parfait, la température est directement reliée à

l'impulsion quadratique moyenne $\Delta p = \sqrt{3mk_B T}$ où m est la masse atomique. Les très basses températures – de l'ordre du μK – impliquent alors une très faible dispersion des impulsions. La relation d'incertitude espace-impulsion de Heisenberg nous indique alors que la fonction d'onde atomique est localisée sur une distance $\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_B T}}$ qui compte tenu des faibles températures sont de l'ordre du μm . La faible dispersion des impulsions atomiques, implique aussi une faible dispersion de phase des fonctions d'onde atomiques dans l'espace réel, ce qui permet la manifestation des interférences quantiques.

La réalisation expérimentale de la condensation de Bose Einstein d'un gaz atomique ultra-froid a ouvert de nouvelles perspectives pour l'étude de la dynamique quantique. Le gaz atomique condensé est en effet correctement décrit à des températures suffisamment basses par une méthode de champ moyen, ce qui permet d'établir une équation d'évolution pour la fonction d'onde du condensat. Un des aspects fondamentalement nouveaux est que cette équation est non-linéaire. Nous ne pouvons donc plus déterminer de modes propres du système dynamique et la fonction d'onde du condensat ne se soumet plus au principe de superposition. L'étude de l'influence de la non-linéarité sur la dynamique quantique nécessite donc la mise en place de nouveaux outils théoriques.

Le travail présenté dans ce manuscrit utilise les propriétés des systèmes d'atomes refroidis par lasers pour mettre en évidence les phénomènes dynamiques liés aux interférences quantiques dans l'espace réel. Pour cela, nous nous intéressons à l'étude de la dynamique quantique d'une particule en présence d'un potentiel périodique et soumise à une force constante. Le choix de ce type de potentiel – appelé *réseau incliné* – peut paraître bien compliqué au premier abord, mais nous verrons qu'il est réalisable expérimentalement et permet de décrire la dynamique du centre de masse atomique par un système de niveaux d'énergie équidistants dont les fonctions d'ondes sont identiques à une translation près. Les symétries des fonctions d'onde nous permettent alors de simplifier l'étude. D'autre part ce système revêt un intérêt historique puisqu'il constitue, comme nous le verrons un modèle naïf de la conduction électrique dans les solides cristallins.

Le premier chapitre introduit très brièvement la physique du refroidissement atomique par lasers et montre comment il est expérimentalement possible de “synthétiser” des potentiels à l'aide de champs lasers. Nous présentons ensuite en détail la base des états de Wannier Stark qui va nous servir dans tout ce travail pour modéliser la dynamique quantique dans un réseau incliné. Le cas de la dynamique quantique d'une particule en présence d'un réseau incliné statique est ensuite revisité à l'aide de la base des états de Wannier Stark et met en évidence un phénomène bien connu de la physique des solides : *les oscillations de Bloch*.

Le chapitre suivant envisage l'effet d'une modulation harmonique de l'inclinaison du réseau. Cette modulation met en évidence des phénomènes de résonances entre la fréquence de modulation et les différentes fréquences de Bohr qui se traduisent par des couplages entre états d'énergie. Nous pouvons alors montrer l'effet fondamental des cohérences quantiques sur la dynamique et visualiser des phénomènes de transport cohérent atomique dans le réseau.

Le troisième chapitre se propose de revenir sur la dynamique dans un réseau incliné statique, mais cette fois nous utilisons, non pas des atomes indépendants mais un *condensat de Bose Einstein*. Après avoir brièvement introduit la physique des condensats de Bose Einstein et en particulier la théorie de champ moyen qui permet de les décrire simplement, nous montrons que cette dynamique est analysable à l'aide des outils de la physique non-linéaire en établissant un lien étroit entre la dynamique d'un condensat de Bose Einstein et celle d'une chaîne classique d'oscillateurs non-linéaires couplés. En effet, les collisions entre particules traitées par une théorie de champ moyen conduisent à une équation d'évolution non-linéaire. Ce rapprochement permet d'identifier des états initiaux correspondant à *des dynamiques chaotiques au sens classique d'un objet quantique!* Nous verrons alors que les cohérences quantiques ont aussi un rôle fondamental sur la dynamique.

Le dernier chapitre enfin, constitue une application des oscillations de Bloch. Nous montrons en effet qu'elles permettent par une simple mesure de la population d'une classe de vitesse de déterminer complètement la fonction d'onde atomique. Cette méthode est aussi appliquée au cas d'un condensat de Bose Einstein et permet de déterminer outre la fonction d'onde du condensat, le paramètre non-linéaire traduisant les collisions entre particules dans l'approche de champ moyen.

1.1	Le refroidissement d'atomes par lasers et les potentiels lumineux . . .	4
1.2	La base de Wannier Stark .	7
1.3	Les Oscillations de Bloch . .	10
1.4	Conclusion	14

L'étude de la dynamique quantique d'une particule soumise à un potentiel périodique est un sujet ancien. Initiée dès la genèse de la mécanique quantique, elle ambitionne de décrire le mouvement des électrons de conduction d'un cristal. Les travaux pionniers de Bloch [1], qui introduisirent en 1928 les états propres du potentiel périodique, sont aujourd'hui encore à la base de la théorie électronique des solides et permettent en particulier d'expliquer le caractère isolant ou conducteur de l'électricité des solides cristallisés. Rapidement, on s'intéressa à l'influence d'une force constante sur la dynamique quantique dans un potentiel périodique pour décrire la conduction électrique. Les travaux de Zener [2] mirent alors en évidence un mouvement d'oscillation de la particule nommé *oscillation de Bloch*. Cette dynamique contre-intuitive devint elle-même le sujet d'une vaste littérature, bien que son observation dans les solides cristallisés usuels soit impossible car la période d'oscillation est bien plus grande que le temps de libre parcours moyen des électrons.

La maîtrise du refroidissement d'atomes par lasers et des potentiels optiques ouvrit de nouvelles perspectives d'étude de la dynamique quantique dans un potentiel périodique. Ces techniques offrent, en effet, un outil expérimental de choix car elles permettent de faire varier sur large gamme les paramètres expérimentaux en maîtrisant la dissipation, elles permettent de plus des mesures très précises. C'est ainsi que les oscillations de Bloch furent observées en 1996 avec des atomes de Césium dans un potentiel optique [3].

Dans ce premier chapitre, nous commençons par introduire brièvement la physique du refroidissement d'atomes par lasers qui constituera durant tout ce travail notre système expérimental de référence pour l'observation de la dynamique quantique dans un réseau. Nous montrons en particulier comment l'utilisation de sources lasers permet de générer expérimentalement de manière souple et variée, des potentiels variés agissant sur le centre de masse des atomes froids. Bien que l'approche standard des oscillations de Bloch utilise les états propres du potentiel périodique, nous montrons que leurs descriptions sont grandement simplifiées par l'utilisation de la base des états de Wannier Stark que nous présentons au préalable de manière détaillée. Nous montrons en particulier que les oscillations de Bloch sont une conséquence naturelle des propriétés des états de Wannier Stark qui permettent de les interpréter comme le fait d'une interférence quantique. Nous montrons ainsi que l'étude de la dynamique dans un réseau incliné utilisant la base de Wannier Stark permet de mettre simplement en évidence l'impact des cohérences quantiques sur la dynamique.

Les récents développements des techniques de refroidissement d'atomes par lasers rendent expérimentalement possible l'observation de dynamiques quantiques jusqu'alors difficilement accessibles. Ces systèmes expérimentaux présentent les avantages suivants :

- Les atomes refroidis peuvent être placés dans des potentiels mécaniques générés de manière souple et variée par des champs lasers, permettant ainsi l'étude d'une grande variété de dynamique quantique.
- La forte dilution du gaz d'atome refroidis (10^{12} atomes/m³) permet de négliger les interactions entre atomes.
- La vitesse des atomes peut être mesurée de manière très précise à l'aide des techniques spectroscopiques.
- La dissipation peut être maîtrisée et considérée comme nulle sur des temps de l'ordre de la milli-seconde.

Nous commençons par présenter de manière très générale le refroidissement d'atomes par laser. Les potentiels optiques sont ensuite introduits de manière détaillée, enfin nous montrons comment ce système expérimental permet d'étudier la dynamique quantique et introduisons les unités réduites que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

1.1.1 Le refroidissement d'atomes par lasers

De manière générale, refroidir une assemblée d'atomes consiste à ralentir les atomes rapides sans accélérer les atomes lents. Le but est donc d'introduire une force dissipative \vec{F}_D agissant sur le centre de masse atomique, de type "frottement visqueux" c'est à dire de la forme $\vec{F}_D = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de l'atome et α est un coefficient d'amortissement positif. Les méthodes de refroidissement lasers créent cette force en couplant les niveaux électroniques internes de l'atome par un champ électromagnétique. Dans l'étude du refroidissement atomique par lasers, il faut donc traiter séparément les dynamiques atomiques interne et externe. Par simplicité, nous ne présentons ici que le refroidissement Doppler d'un atome à deux niveaux. Nous commençons par décrire la dynamique interne de l'atome, puis la méthode de refroidissement.

Atome à deux niveaux dans un champ laser Nous modélisons la dynamique interne de l'atome par un système à deux niveaux que nous notons $|a\rangle$ et $|b\rangle$ dont une représentation schématique est donnée sur la figure 1. Nous supposons que l'état excité a une durée de vie finie, le taux d'émission spontanée de ce niveau est alors caractérisé par sa largeur naturelle Γ_b . L'atome est "plongé" dans un champ laser de fréquence ω_L , quasi-résonnant avec la fréquence de transition atomique ω_{ab} et nous introduisons alors le désaccord en fréquence

$$\delta_L = \omega_L - \omega_{ab},$$

avec $|\delta_L| \ll |\omega_L|, |\omega_{ab}|$. Nous assimilons enfin le champ électrique de l'onde laser à une onde plane d'intensité I_0 se propageant suivant un axe noté x

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon} \frac{\sqrt{I_0}}{2} \left[e^{i(\omega_L t - k_L x)} + c.c. \right]$$

où $\vec{\varepsilon}$ est le vecteur unitaire de polarisation, $k_L = \omega_L/c = 2\pi/\lambda_L$ est le nombre d'onde et λ_L la longueur d'onde du laser.

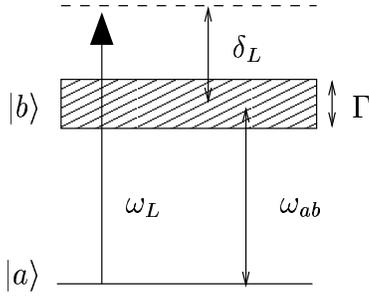


FIG. 1: Atome à deux niveaux dans un champ laser quasi-résonnant avec une transition atomique

L'interaction atome-laser est décrite ici dans l'approximation dipolaire électrique¹ et l'on note \vec{d} le moment dipolaire atomique. Si l'on note H_I le hamiltonien d'interaction alors le couplage entre les états atomiques est

$$\langle a | H_I | b \rangle = \hbar \Omega_1 / 2,$$

où

$$\Omega_1 = \frac{2 \langle a | \vec{d} \cdot \vec{\varepsilon} | b \rangle}{\hbar} \sqrt{I_0} \quad (1)$$

est la fréquence de Rabi [4]. Ce couplage est proportionnel au produit scalaire entre l'élément de matrice du dipôle atomique entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et le champ électrique incident.

Si la fréquence de Rabi est faible comparée à la largeur du niveau excité $|b\rangle$ ($|\Omega_1| \ll \Gamma_b$), les états couplés – que nous noterons $|1\rangle$ et $|2\rangle$ – sont peu différents des états non couplés et l'on a [5]

$$\begin{aligned} |1\rangle &\simeq |a\rangle + \frac{\Omega_1}{2\delta_L - i\Gamma_b} |b\rangle \\ |2\rangle &\simeq |b\rangle - \frac{\Omega_1}{2\delta_L - i\Gamma_b} |a\rangle. \end{aligned}$$

L'effet du couplage sur le niveau atomique fondamental $|a\rangle$, que l'on peut assimiler à $|1\rangle$, est de :

- Le déplacer en énergie d'une quantité

$$\Delta = -\hbar \frac{\delta_L}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{\delta_L^2 + \Gamma_b^2/4} \quad (2)$$

- Lui donner une largeur

$$\Gamma = \frac{\Gamma_b}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{\delta_L^2 + \Gamma_b^2/4}. \quad (3)$$

La largeur Γ du niveau, donnée par (3), correspond à la probabilité pour un atome initialement dans l'état $|a\rangle$ d'effectuer une absorption stimulée d'un photon laser suivie d'une émission spontanée le ramenant dans le même état $|a\rangle$. Pour un atome au repos, cette probabilité varie avec le désaccord δ_L comme une Lorentzienne centrée en $\delta_L = 0$. Elle est donc maximale quand la fréquence du champ laser est résonnante avec la fréquence de transition atomique.

¹Le terme dipolaire électrique apparaît comme le terme dominant dans l'approximation des grandes longueurs d'onde qui suppose le champ homogène à l'échelle de l'atome.

Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment cette déstabilisation de l'état fondamental permet de refroidir un nuage atomique en prenant l'exemple du refroidissement Doppler. Nous verrons ensuite au paragraphe 1.1.2 que le déplacement Δ permet de générer des potentiels mécaniques à l'aide de champs lasers.

Refroidissement Doppler Lorsqu'un atome au repos de masse m , absorbe un photon de vecteur d'onde \vec{k}_L , il subit un effet de recul provenant de la conservation de l'impulsion. Sa vitesse est alors modifiée d'une quantité $\vec{v}_{rec} = \hbar \vec{k}_L / m$ appelée . Les atomes dans une onde laser absorbent toujours les photons dans une direction déterminée et les émettent par un processus d'émission spontanée. Lorsque l'on moyenne sur un grand nombre de cycles d'absorption-émission, les contributions des émissions spontanées au transfert d'impulsion s'annulent tandis que celles des absorptions stimulées s'additionnent. Un cycle transmet alors, en moyenne, au centre de masse de l'atome, une quantité de mouvement $\hbar \vec{k}_L$. L'atome subit donc une force moyenne dans la direction de l'onde laser, appelée force de pression de radiation. Les méthodes de refroidissement par lasers utilisent en grande partie cette pression de radiation pour ralentir les atomes.

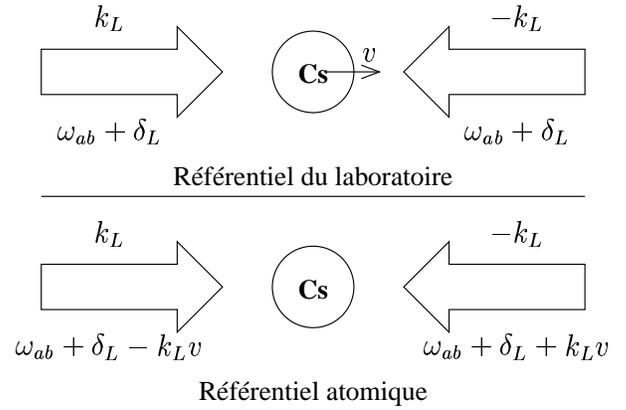


FIG. 2: Effet Doppler

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous plaçons dans le cadre d'une description à une dimension spatiale noté x . La première méthode historiquement envisagée, qui consiste à utiliser l'effet Doppler, a été proposée en 1975 pour les atomes neutres [6]. L'idée est de placer les atomes dans le rayonnement formé par deux ondes lasers contre-propageantes de vecteurs d'onde respectifs k_L et $-k_L$, de même fréquence et désaccordées vers le rouge par rapport à la transition atomique ($\delta_L < 0$). Un atome se déplaçant avec une vitesse v voit, dans son référentiel, deux fréquences lasers effectives $\omega_{ab} - |\delta_L| \pm k_L v$ décalées par effet Doppler – cette situation est représentée schématiquement sur la figure 2. Dans le référentiel atomique, les photons se déplaçant dans une direction opposée à celle de l'atome ont donc une fréquence plus proche de la fréquence atomique que dans le référentiel du laboratoire et les photons se déplaçant dans la même direction, une fréquence plus éloignée. La probabilité d'absorption étant fonction du désaccord de fréquence $-|\delta_L| \pm k_L v$, l'atome absorbe plus de photons dans la direction opposée à sa vitesse. Il subit donc une

force opposée à sa vitesse : il est ralenti.

Le traitement qui précède, se généralise sans difficulté à deux et trois dimensions. Cette méthode de refroidissement Doppler est à la base de très nombreuses expériences comme première phase de refroidissement d'une assemblée d'atomes. Dans le champ laser, le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse atomique est très court (typiquement $100 \mu\text{s}$ pour des atomes de rubidium), l'atome est comme englué dans un bain visqueux de photons, que l'on appelle une *mélasse optique*. La première mélasse optique tridimensionnelle a été observée en 1985 [7] avec une température de $240 \mu\text{K}$.

Dans la plupart des expériences actuelles de refroidissement d'atomes par lasers, la mélasse optique issue du refroidissement Doppler est simultanément piégée par un *piège magnéto-optique* – combinant pression de radiation et effet Zeeman – qui permet de confiner spatialement les atomes. Nous donnons ici quelques valeurs caractéristiques typiques pour un nuage d'atomes de Rubidium refroidis par laser à la sortie d'un piège magnéto-optique. Le nuage d'atomes a un volume de $0,1 \text{ mm}^3$ pour environ 10^8 atomes soit une densité de 10^{12} atomes/ m^3 . La vitesse moyenne des atomes est de l'ordre de 10 mm/s pour une énergie typique de 0.1 neV soit une température de l'ordre du μK . À cette température, les atomes ont une longueur d'onde de De Broglie de l'ordre du μm .

1.1.2 Les potentiels optiques

Nous avons vu que l'interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ laser quasi résonnant induit un déplacement des niveaux atomiques (2) qui est proportionnel au carré de la fréquence de Rabi. Compte-tenu de l'expression (1), nous voyons que *le déplacement du niveau fondamental (2) est proportionnel à l'intensité lumineuse I_0* . Si le désaccord de fréquence δ_L est beaucoup plus grand que la largeur Γ_b du niveau excité – $|\delta_L| \gg \Gamma_b$ – ce déplacement est approximativement

$$\begin{aligned} \Delta &\approx -\frac{\hbar |\Omega_1|^2}{4\delta_L} \\ &\approx -I_0 \frac{|\langle a | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon} | b \rangle|^2}{\hbar \delta_L}. \end{aligned}$$

Si le désaccord de fréquence δ_L est aussi beaucoup plus grand que la fréquence de Rabi $\Omega_1 - |\delta_L| \gg |\Omega_1|$ – alors l'état couplé $|1\rangle$ est presque identique à l'état fondamental $|a\rangle$: nous pouvons considérer que l'atome est à chaque instant dans son état fondamental. Si l'intensité du champ électrique varie spatialement, alors le déplacement du niveau fondamental dépend de la position de l'atome. Ceci étant, la variation spatiale du niveau fondamental peut être interprétée comme le fait d'un potentiel mécanique ressenti par le centre de masse atomique. Les potentiels générés à l'aide de champs lasers sont appelés *potentiels optiques* ou *potentiels lumineux*.

Un cas simple qui nous servira abondamment dans la suite de ce travail est le cas du *réseau optique* : la superposition de deux ondes contra-propageantes de même fréquence ω_L et de même intensité I_0 , crée une onde lumineuse

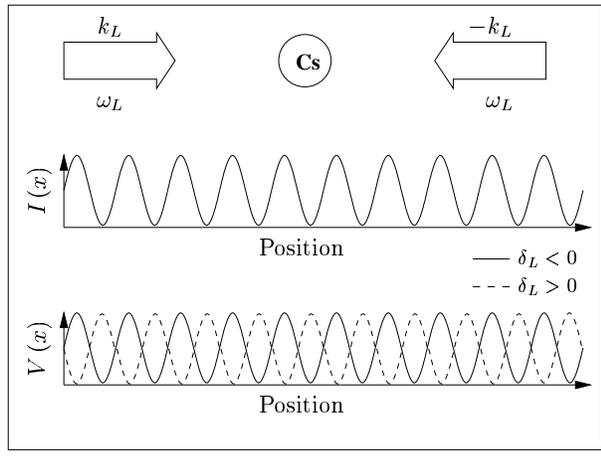


FIG. 3: Réalisation d'un réseau optique

stationnaire d'intensité

$$I(x) = 4I_0 \cos^2(k_L x).$$

Un atome plongé dans ce champ laser subit un déplacement d'énergie de son niveau fondamental qui varie avec sa position dans l'onde stationnaire. Son centre de masse ressent alors un potentiel à l'image de l'intensité laser, c'est-à-dire un potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = V_0 [1 + \cos(2k_L x)]$$

de période spatiale $\frac{\lambda_L}{2}$ et d'amplitude $V_0 \equiv -I_0 \frac{|\langle a | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon} | b \rangle|^2}{\hbar \delta_L}$ – cette situation est représentée schématiquement sur la figure 3. Il est ainsi possible de générer de manière optique un potentiel mécanique parfaitement périodique. Remarquons que le signe de V_0 dépend du signe de δ_L . Ainsi si $\delta_L > 0$ (désaccord vers le bleu), l'atome est attiré vers les zones où l'intensité laser est minimale (zones sombres), tandis que pour $\delta_L < 0$ (désaccord vers le rouge), l'atome est attiré vers les zones où l'intensité laser est maximale (zones brillantes).

Les techniques d'ingénierie laser permettent de créer, de façon extrêmement souple, une grande variété de potentiels optiques. Par exemple, il est possible d'introduire un déphasage dépendant du temps $k_L \varphi(t)$ entre les deux ondes lasers contra-propageantes. L'intensité lumineuse résultante est alors

$$\begin{aligned} I(x, t) &= I_0 \left| e^{ik_L x} + e^{-ik_L(x + \varphi(t))} \right|^2 \\ &= 4I_0 \cos^2 \left[2k_L \left(x + \frac{1}{2} \varphi(t) \right) \right]. \end{aligned}$$

L'effet du déphasage $\varphi(t)$ est donc d'induire une translation dépendante du temps de l'onde stationnaire. Si nous nous plaçons dans le référentiel dans lequel l'onde stationnaire est immobile, le déphasage agit alors comme une force d'inertie

$$F = \frac{m}{2} \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}.$$

où m est la masse de l'atome.

Prenons le cas simple $\varphi(t) = at^2$: l'onde stationnaire est uniformément accélérée. Dans le référentiel au repos

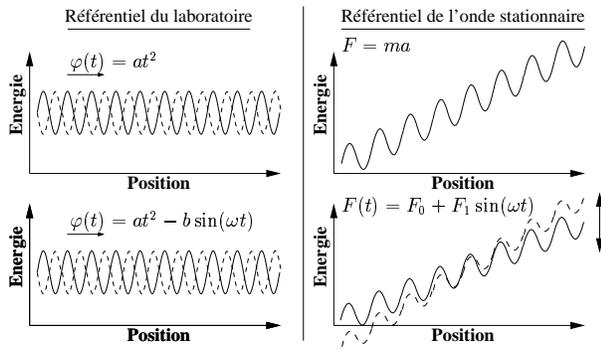


FIG. 4: Potentiel optique induit par déphasage

de l'onde, l'atome subit une force constante $F = ma$. Si maintenant $\varphi(t) = at^2 - b \sin(\omega t)$, dans le référentiel au repos l'atome subit une force oscillante dans le temps et de moyenne non nulle : $F(t) = F_0 + F_1 \sin(\omega t)$ avec $F_0 = ma$ et $F_1 = \frac{1}{2}mb\omega^2$. Ces situations simples sont représentées sur la figure 4. Nous voyons ainsi que le déplacement de niveau nous permet de générer expérimentalement des potentiels mécaniques variés.

1.1.3 Dynamique quantique

Dans la suite, nous nous intéressons à la dynamique du centre de masse d'un atome sous l'effet de potentiels optiques variés. Si l'atome est suffisamment refroidi, sa longueur d'onde de De Broglie est de l'ordre de la longueur caractéristique de variation du potentiel et sa dynamique doit être décrite dans le cadre de la mécanique quantique. La dynamique du centre de masse atomique est décrite par une fonction d'onde, notée Ψ , dont le module au carré $|\Psi|^2$ exprime la densité de probabilité de présence et dont l'évolution est déterminée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r}, t)}{dt} = H\Psi(\vec{r}, t) \quad (4)$$

$$= \left(\frac{P^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (5)$$

où H est le hamiltonien du système, m est la masse de l'atome, \vec{r} est le vecteur position, t le temps et la fonction V représente le potentiel ressenti par la particule.

Dans la suite de ce travail, nous développerons l'étude de la dynamique à une dimension. Expérimentalement, les faisceaux lasers ne sont pas des ondes planes mais ont une extension transverse limitée. Néanmoins, si le faisceau est beaucoup plus large que la longueur d'onde de De Broglie de l'atome, nous pouvons négliger la variation transverse du faisceau et nous approcher expérimentalement du cas à une dimension.

Unités réduites Les unités du système international ont des étalons qui sont adaptés à la description quotidienne que nous avons de la nature et qui sont sans commune mesure avec les échelles d'énergie, de longueur et de temps d'un système d'atomes refroidis. Pour éviter d'avoir en permanence des facteurs d'échelle liés au choix des étalons de mesure, il est très utile d'utiliser des unités réduites bien adaptées à notre système atomique.

Toutes les situations envisagées dans la suite de ce manuscrit comportent un potentiel périodique. Celui-ci détermine une longueur caractéristique par sa période spatiale $d = \lambda_L/2 = \pi/k_L$. Nous introduisons une longueur réduite $\bar{x} = x/d$. Nous imposons $\hbar = 1$ de sorte qu'il y ait équivalence entre fréquence et énergie réduites. Cela implique l'introduction un temps réduit $\bar{t} = \frac{t}{t_0}$ et une énergie réduite $\bar{E} = \frac{E}{E_0}$. Nous définissons enfin l'impulsion réduite $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$ et la vitesse réduite $\bar{v} = \frac{v}{v_0}$. L'ensemble des paramètres caractéristiques est rassemblé dans le tableau 1.

E_0	$\frac{4\hbar^2}{m\lambda_L^2}$
t_0	$\frac{m\lambda_L^2}{4\hbar}$
d	$\frac{\lambda_L}{2}$
v_0	$\frac{2\hbar}{m\lambda_L}$
p_0	$\frac{\hbar k_L}{\pi}$

TAB. 1: Unités réduites

Pour l'aisance de la lecture, nous nous notons dans la suite x , t et E les unités réduites. Finalement l'équation de Schrödinger unidimensionnelle devient dans ces nouvelles unités :

$$i \frac{d\Psi(x, t)}{dt} = \frac{P^2}{2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t)$$

L'opérateur impulsion a alors pour expression en représentation x : $P = -i \frac{\partial}{\partial x}$.

Nous donnons ici les valeurs numériques des unités caractéristiques pour une expérience utilisant des atomes de ^{137}Cs avec $\lambda_L = 852 \text{ nm}$

E_0	1,25 peV
t_0	52,6 μs
d	0,426 μm
v_0	0,12 mm/s

1.2 La base de Wannier Stark

Lorsque l'on adjoint au potentiel périodique, un potentiel linéaire, nous obtenons ce que nous appelons un "réseau incliné" (ce potentiel est aussi dit de type "washboard" en anglais, car cette forme rappelle les anciennes planches à laver). Nous avons vu qu'un tel potentiel est facilement réalisable en utilisant des potentiels lumineux. Nous verrons au fil de ce travail que la dynamique dans un réseau incliné met très simplement en évidence l'influence des cohérences quantiques sur la dynamique.

Nous introduisons ici, de manière détaillée, la base des états de Wannier Stark – initialement décrite par Wannier [8]. Nous montrons en particulier que sous certaines approximations les états de Wannier Stark peuvent être considéré comme les états propres du réseau incliné. La suite de ce travail repose entièrement sur une modélisation de la dynamique quantique à partir des états de Wannier Stark².

²Une description détaillée de cette base d'états peut aussi être trouvé dans [9] et dans [10].

1.2.1 Les états de Wannier Stark

La dynamique atomique dans un réseau incliné est décrite par le hamiltonien suivant³

$$H_F \equiv \frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + Fx. \quad (6)$$

Le potentiel incliné est constitué d'une infinité de puits de potentiel, nous montrons ici qu'il admet des états propres localisés dans les puits de potentiel, rappelant ceux de l'oscillateur harmonique. Ces états localisés sont appelés *états de Wannier Stark*.

Pour un système d'extension spatiale infini, le potentiel linéaire Fx diverge, le spectre d'énergie de H_F est alors continu [11]. Cela implique, en toute rigueur, que le hamiltonien H_F n'a pas d'états propres : un état initial localisé dans un puits de potentiel se dépeuple alors exponentiellement vers le continuum d'états.

Afin de contourner cette difficulté, nous pouvons considérer le système dans une "boîte" de taille finie. Cela suppose que nous rajoutons au hamiltonien H_F un potentiel de confinement

$$B(x) = 0 \quad \text{si } |x| < L$$

$$B(x) = \infty \quad \text{si } |x| > L$$

avec $L \gg 1$ afin que la boîte contienne de nombreuses mailles du réseau. Le spectre d'énergie est alors discret et le potentiel admet des états propres.

Les états propres correspondant à des distributions de probabilité de présence éloignées des bords de la "boîte", sont alors très peu affectés par le potentiel de confinement. Dans la suite nous nous placerons toujours dans des cas où la dynamique n'est pas affectée par la taille de boîte choisie.

États localisés Le réseau incliné est composé d'une série de puits de potentiel périodiquement espacés. Si ces puits de potentiel sont suffisamment profonds (nous donnerons le critère quantitatif ultérieurement), ils peuvent accueillir des états propres localisés à l'intérieur des puits appelés *états de Wannier Stark*. Pour repérer un état localisé, il nous faut donc un indice pour repérer le numéro de l'état dans le puits et un indice pour repérer le puits de potentiel autour duquel il est centré. Nous notons $|\varphi_n^l\rangle$ le l -ième état centré autour du puits n , E_n^l son énergie et $\varphi_n^l(x)$ la fonction d'onde de cet état. Nous avons alors

$$H_F \varphi_n^l(x) = E_n^l \varphi_n^l(x).$$

Les fonctions $\varphi_n^l(x)$ étant les états propres du hamiltonien H_F elles sont ortho-normées entre elles, c'est à dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^l(x) \varphi_{n'}^{l'}(x) dx = \delta_{n,n'} \delta_{l,l'}. \quad (7)$$

Notons que les états de Wannier Stark ne forment pas une base complète, car le réseau incliné dans une boîte admet aussi des états propres délocalisés dépendant de la taille de la boîte. Dans la suite, nous travaillerons exclusivement avec les états localisés, ce qui se justifie par la faible température des atomes.

³Nous choisissons directement le potentiel périodique de forme sinusoidal car cela correspond au cas d'une réalisation expérimentale avec des atomes refroidis par laser et à un potentiel optique formé par une onde stationnaire accélérée.

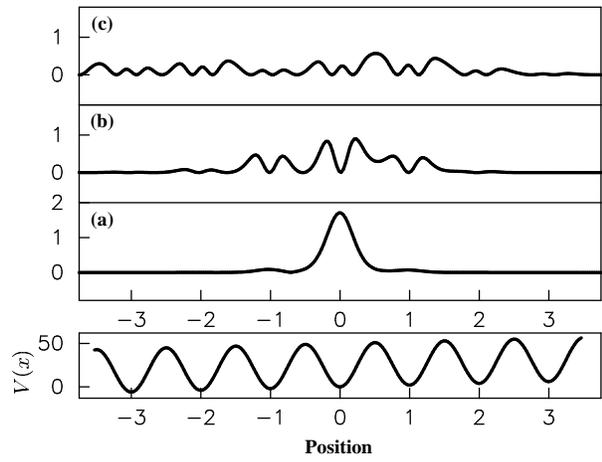


FIG. 5: **Quelques états propres du réseau incliné** : Représentation de la probabilité de présence de différents états propres pour $V_0 = 25$ et $F = 2$ mis en regard avec le potentiel (partie inférieure de la figure) : (a) état de la première échelle ($l = 0$) $|\varphi_0^0(x)|^2$, (b) état de la deuxième échelle ($l = 1$) $|\varphi_0^1(x)|^2$ et (c) un état délocalisé.

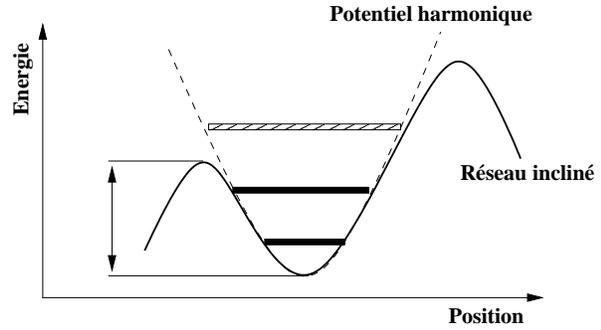


FIG. 6: **Approximation harmonique des puits de potentiels**

La figure 5 représente les probabilités de présence de quelques états propres du réseau incliné calculées numériquement pour $V_0 = 25$ et $F = 2$. Nous y mettons en évidence deux états localisés 5-a et 5-b dans les puits de potentiel, l'état 5-c correspond quant à lui à un état délocalisé.

Lorsque l'on fait varier la taille de la boîte (non représentée ici), les états localisés 5-a et 5-b restent invariants tandis que l'état 5-c se déforme. Lorsque la taille de boîte augmente, la densité d'énergie associée aux états délocalisés augmente, ceux-ci tendant à former un continuum d'états lorsque $L \rightarrow \infty$. Dans la suite de ce travail nous ne tiendrons pas compte de ces états et travaillerons exclusivement avec les états propres localisés en nous intéressant principalement aux états fondamentaux de chaque puits de potentiel.

La dynamique décrite par les états localisés 5-a et 5-b est indépendante de la taille de la boîte et nous pouvons les assimiler aux états propres du système infini.

Si, comme le suggère la figure 6 nous assimilons le fond des puits de potentiel à des puits harmoniques, le théorème Virial nous dit qu'il y a équipartition entre l'énergie cinétique $\langle T \rangle$ et l'énergie potentielle $\langle V \rangle$: $\langle T \rangle \sim \langle V \rangle \sim \frac{E}{2}$ (où E est l'énergie de l'état mesurée par rapport au fond du puits). Or, la fonction d'onde de l'état fondamental du

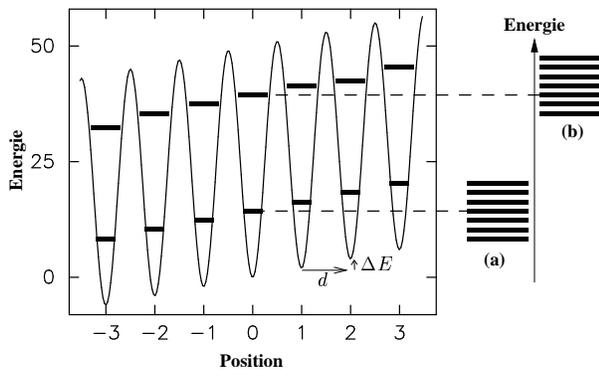


FIG. 7: **Représentation symbolique des états localisés** : Les états localisés sont représentés symboliquement par des traits dont la position reflète l'énergie de chaque état et le puits de potentiel autour duquel il est localisé. La figure a été réalisée par un calcul numérique des états du réseau incliné pour $V_0 = 25$ et $F = 2$. Pour les paramètres choisis, deux échelles d'états localisés, notées (a) et (b), existent et sont reportées à droite de la figure. L'échelle (a) correspond aux états de plus basse énergie de chaque puits de potentiel, tandis que l'échelle (b) correspond aux premiers états excités.

puits varie spatialement avec une période double de celle du potentiel, elle correspond donc à une impulsion quadratique moyenne de $\langle p \rangle^2 \sim \pi^2$ et donc à une énergie $E \sim \pi^2$. Cet état est localisé dans le réseau incliné si son énergie est inférieure à la hauteur du puits de potentiel c'est à dire si

$$2V_0 - \frac{F}{2} \geq \pi^2.$$

Ceci montre, comme on peut s'y attendre, que l'existence des états localisés suppose que V_0 doit être grand et F suffisamment faible.

De manière générale, il peut exister plusieurs états localisés d'énergie différentes dans un même puits de potentiel. Nous pouvons alors généraliser l'approche précédente et montrer que le réseau incliné possède n états localisés si

$$2V_0 - F/2 > (n\pi)^2.$$

Le nombre d'états localisés dans un puits de potentiel augmente donc avec la profondeur du réseau et diminue avec la force.

Échelles d'énergie Le réseau incliné, loin des bords de la boîte, possède une propriété de symétrie particulière : il est invariant par une translation conjointe espace-énergie correspondant à une translation d'un pas du réseau et à une translation d'énergie égale à F . Cette symétrie doit se retrouver dans les états propres. Cela implique directement que l'état $\varphi_n^l(x)$ localisé dans le puits n et d'énergie E_n^l , si il existe, est directement relié à l'état $\varphi_{n+1}^l(x)$ par une translation espace-énergie, c'est à dire que

$$E_{n+1}^l = E_n^l + F \quad (8)$$

et

$$\varphi_{n+1}^l(x) = \varphi_n^l(x - 1). \quad (9)$$

Ainsi, de proche en proche, les états localisés $\varphi_n^l(x)$ se répartissent sur une échelle linéaire d'énergie, de pas F . Ces échelles d'énergie sont appelées *échelles de Wannier Stark*.

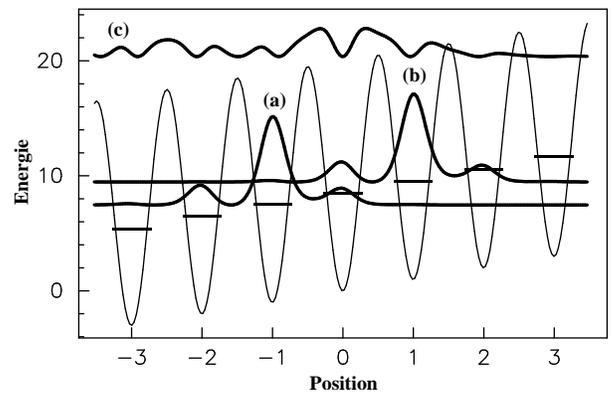


FIG. 8: **États de Wannier Stark** : Les probabilités de présence de deux états de l'échelle fondamentale (a) et (b) sont représentées, positionnées en énergie, dans le réseau incliné. A titre de comparaison, nous avons aussi représenté celle d'un état délocalisé (c). La figure correspond à $V_0 = 10$ et $F = 1$.

Elles sont caractérisées par un pas donné par la pente du potentiel F .

Les deux relations (8) et (9) de symétrie sont fondamentales et ont des conséquences très importantes sur la dynamique que nous verrons apparaître au fil de cette étude.

La figure 7 représente de manière symbolique l'ensemble des états localisés d'un réseau incliné calculés numériquement. La répartition en échelles d'énergie apparaît alors clairement. Pour les paramètres choisis ($V_0 = 25$ et $F = 2$) deux échelles de Wannier Stark notées (a) et (b) existent et sont reportées à droite de la figure.

La figure 8 synthétise ces différents résultats en représentant les probabilités de présence de deux états de Wannier Stark de l'échelle fondamentale (a) et (b) et d'un état délocalisé (c) dans le réseau incliné, positionnées par rapport à l'énergie de l'état. Les autres états localisés sont représentés symboliquement par des traits. Pour les paramètres de réseau choisis ($V_0 = 10$ et $F = 1$), il n'y a qu'une seule échelle d'états localisés. Les deux probabilités de présence (a) et (b) représentées mettent en évidence la symétrie (9) entre les états localisés d'une même échelle.

Si l'on restreint la description de la dynamique quantique dans un réseau incliné aux seuls états localisés, la dynamique est alors celle d'un système quantique d'états d'énergie équidistants (comme ceux de l'oscillateur harmonique) ayant tous une fonction d'onde identique à une translation près. Nous verrons que ce système très simple permet de mettre en évidence des phénomènes dynamiques remarquables dus aux cohérences quantiques.

1.2.2 Résonances

L'existence des échelles d'états de Wannier Stark a longtemps été remise en cause⁴ car l'existence d'un état localisé pour un système d'extension spatiale infinie est un problème mathématiquement ouvert. Dans ce cas en effet, le spectre continu de H_F implique que les états propres ne sont pas de carré sommable⁵ donc a priori non localisés. Cependant

⁴Un historique de la controverse lié à l'existence des états de Wannier Stark ainsi qu'une importante bibliographie, peut être trouvé dans [10]

⁵Cela provient de la condition d'orthonormalisation, supposons une base continue $\{|f_\varepsilon\rangle\}$, cette condition s'écrit $\langle f_\varepsilon | f_{\varepsilon'} \rangle = \delta(\varepsilon - \varepsilon')$

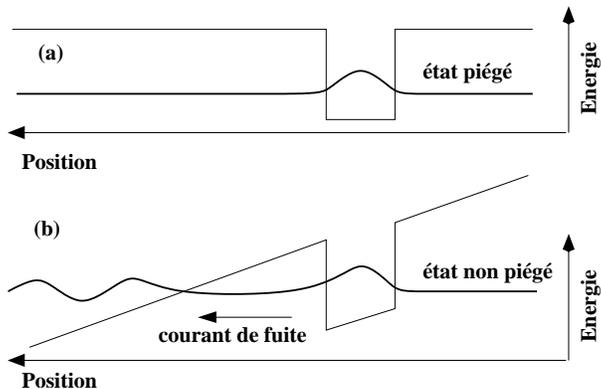


FIG. 9: Influence du potentiel linéaire : le cas du puits carré

l'observation expérimentale des échelles de Wannier Stark dans les réseaux de semi-conducteurs [12, 13] d'abord puis dans les systèmes d'atomes refroidis par lasers [14] a levé le doute sur leurs existences. Nous expliquons ici, le consensus prévalant actuellement autour de cette ambiguïté. Nous étudions donc ici le cas d'un système de taille infinie, c'est à dire sans le potentiel de confinement $B(x)$.

Comme nous l'avons déjà signalé, la difficulté majeure vient du terme linéaire Fx . En effet, même si F est petit, $Fx \rightarrow \pm\infty$ pour $x \rightarrow \pm\infty$. Cela implique qu'il ne peut y avoir d'états propres dans un tel potentiel : il y aura donc toujours un courant de fuite par effet tunnel.

Une illustration de ce phénomène est présentée sur la figure 9 pour un puits de potentiel de forme carré. La figure 9-a représente un puits de potentiel carré ainsi que la probabilité de présence associée à un état propre localisé. La probabilité de présence de cet état localisé décroît rapidement en dehors du puits de potentiel traduisant la localisation de l'état propre. Sur la figure 9-b, nous avons adjoint au potentiel carré un potentiel linéaire. Un courant de fuite apparaît et l'état se dépeuple exponentiellement. Il ne s'agit plus alors d'un état propre du potentiel. Bien entendu, la valeur du courant de fuite dépend de la largeur de la barrière de potentiel à franchir et donc de la force appliquée. Si ce courant de fuite est très faible, nous pouvons assimiler l'état propre du potentiel de la figure 9-a – qui est localisé et de carré sommable – à un état propre du potentiel de la figure 9-a et traiter la décroissance exponentielle de manière phénoménologique en introduisant une partie complexe à l'énergie traduisant le courant de fuite. Ainsi bien que le spectre du potentiel de la figure 9-b soit continu, il est possible d'identifier des états discrets, localisés et de carré sommable mais avec une durée de vie finie. Un tel état est appelé *résonance*.

De la même manière, dans le cas qui nous intéresse, un état initialement localisé dans un des puits du potentiel périodique se dépeuple exponentiellement au cours du temps du fait de la largeur finie de la barrière de potentiel. Un calcul détaillé du courant de fuite peut être trouvé dans [15].

Cependant, si le temps caractéristique de ce processus est extrêmement long (au moins un ordre de grandeur supérieur) comparé à la durée d'une expérience, alors pour le temps de cette expérience, cet état pourra être considéré

donc en particulier $:\langle f_e | f_e \rangle = \infty$

comme un état localisé. Bien entendu ces états auront une durée de vie finie, mais pourvu qu'elle soit bien supérieure à la durée de l'expérience envisagée, nous pouvons les traiter comme de vrais états propres. Du fait de la durée de vie finie, les énergies propres, notées alors ε_n^l , seront complexes et l'on notera :

$$\varepsilon_n^l = E_n^l - i\Gamma^l.$$

La partie imaginaire traduisant la décroissance exponentielle de l'état ne dépend bien entendu que de l'échelle considérée. Dans la suite de ce travail, nous ne tiendrons pas compte de la durée de vie finie des états de Wannier Stark, ce qui est équivalent à considérer le système dans une boîte.

1.3 Les Oscillations de Bloch

Dans ses travaux relatif à la théorie quantique de la conduction électrique en 1934, Clarence Zener [2] suppose les électrons d'un cristal aux bornes duquel une différence de potentiel est appliquée, soumis à un potentiel périodique incliné. Utilisant les états propres introduits quelques années auparavant par Felix Bloch [1], il démontre que dans le cas de faible différence de potentiel, les électrons effectuent un mouvement d'oscillation nommé *oscillation de Bloch*.

Cette dynamique est longtemps restée un concept théorique, et ce n'est que très récemment, en 1993, que l'utilisation de super-réseaux de semi-conducteurs permit enfin une mise en évidence expérimentale des oscillations de Bloch⁶ [17]. Trois ans plus tard elles furent observées avec des atomes refroidis par lasers dans un réseau optique [3]. Plus récemment, des *oscillations de Bloch optiques* ont aussi été mises en évidence dans un réseau de guide d'ondes [18] : en effet, la similarité entre l'équation de propagation d'un champ électromagnétique (dans l'approximation paraxiale) et l'équation de Schrödinger permet de transposer les résultats de la dynamique quantique à l'évolution du champ électromagnétique transverse le long de l'axe de propagation, l'analogie du potentiel mécanique est alors créé par la variation transverse de l'indice de réfraction du milieu.

Nous montrons ici que les états de Wannier Stark introduits à la section 1.2, grâce à leurs propriétés de symétrie, permettent de décrire très simplement les oscillations de Bloch en terme d'interférences quantiques. L'approche "standard" des oscillations Bloch n'est cependant pas effectuée à l'aide de ces états mais avec les états propres du réseau périodique. A titre de comparaison, nous présentons cette approche dans le complément D.

1.3.1 Un mouvement d'oscillation

Nous considérons ici, pour simplifier, un état atomique initial formé par une superposition d'états localisés fondamentaux de chaque puits. Nous notons alors pour alléger les écritures $\varphi_n(x) \equiv \varphi_n^{l=0}(x)$ les fonctions de Wannier Stark centrées autour du puits n de la première échelle. L'état initial s'écrit alors :

⁶Pour une description théorique exhaustive et illustrée des oscillations de Bloch dans un super-réseau de semi-conducteurs, nous renvoyons le lecteur à [16].

$$\psi(x, t = 0) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \quad (10)$$

où les coefficients c_n sont les amplitudes des états. Au cours du temps, chaque état évolue avec son énergie propre de sorte que à l'instant t nous avons :

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \varphi_n(x) e^{-iE_n t}. \quad (11)$$

Les états de Wannier Stark étant les états propres du réseau incliné, nous obtenons très simplement l'évolution temporelle de la fonction d'onde.

Bien que contenant toute l'information sur la dynamique, l'expression (11) ne fait pas apparaître clairement l'évolution temporelle. Par contre elle nous permet de calculer analytiquement les grandeurs caractéristiques du paquet d'ondes à chaque instant.

Regardons par exemple l'évolution temporelle de la position moyenne de l'atome en étudiant la quantité :

$$\langle X \rangle (t) = \int |\psi(x, t)|^2 x dx. \quad (12)$$

En introduisant l'expression (11) et en utilisant la structure d'échelle des états de Wannier Stark (8), nous obtenons :

$$\langle X \rangle (t) = \sum_{l, m} \chi_{l, m} c_l^* c_m e^{i(m-l)Ft}. \quad (13)$$

Cette expression fait apparaître l'ensemble des fréquences de Bohr

$$\begin{aligned} \omega_{l, m} &\equiv E_l - E_m \\ &= (l - m) Ft \end{aligned}$$

de l'échelle des états fondamentaux de chaque puits de potentiel.

Dans l'expression (13) nous avons introduit les éléments de matrice de l'opérateur position X , définis comme :

$$\chi_{l, m} \equiv \int \varphi_l(x) x \varphi_m(x) dx. \quad (14)$$

Ils correspondent à un recouvrement entre deux fonctions de Wannier Stark et l'opérateur X et caractérisent la localisation des états de Wannier Stark⁷.

En utilisant la propriété de symétrie (9) des fonctions de Wannier Stark, nous pouvons remarquer que

$$\chi_{l, l+p} = \int \varphi_0(x-l) x \varphi_p(x-l) dx \quad (15)$$

ce qui permet d'obtenir en posant le changement de variable $x' = x - l$ et en utilisant la propriété d'ortho-normalisation (7) d'établir une relation entre les coefficients $\chi_{l, m}$:

$$\chi_{l, l+p} = \chi_p + l \delta_{p, 0} \quad (16)$$

où nous notons par souci de simplicité : $\chi_p \equiv \chi_{0, p}$.

⁷Les fonctions de Wannier Stark étant considérées comme des états propres, elles sont définies à une phase global près, nous les choisissons ici réelles, il est donc logique qu'il n'y ai pas de symbole de conjugaison complexe dans la définition des grandeurs $\chi_{l, m}$ qui de ce fait sont elles aussi réelles et l'on a de plus $\chi_{l, m} = \chi_{m, l}$.

Les fonctions de Wannier Stark étant fortement localisées, les intégrales de recouvrement χ_p décroissent rapidement avec l'indice p . Cela implique que l'intégrale de recouvrement entre états de Wannier Stark premiers voisins χ_1 domine les autres termes *i.e.* $\chi_1 \gg \chi_{p>1}$ – où $\chi_{p>1}$ désigne l'ensemble des χ_p avec $p > 1$.

La valeur de χ_0 dépend du choix de l'origine des coordonnées, ce terme ne caractérise donc pas un effet physique et peut être omis⁸ pour simplifier les expressions analytiques. Pour le choix fait ici, ce terme qui représente la dissymétrie de parité de la probabilité de présence $|\varphi_0(x)|^2$ est de toute façon très faible (*i.e.* $\chi_1 \gg \chi_0$). Une étude numérique détaillée de ces intégrales de recouvrement est présentée dans le complément B.

Nous pouvons donc en première approximation ne garder dans (13) que les termes proportionnels à χ_1 – cette restriction est appelée *l'approximation du couplage aux premiers voisins*. En posant le changement d'indice $m = l + p$, nous obtenons alors :

$$\langle X \rangle (t) = \sum_l l |c_l|^2 + \chi_1 \left\{ \sum_l c_l^* c_{l+1} e^{-iFt} + \text{c.c.} \right\}. \quad (17)$$

Seul le terme en χ_1 de (17) caractérise l'évolution dynamique de la position moyenne, et indique un mouvement d'oscillation de fréquence égale à la force

$$\omega_B \equiv F.$$

Cette oscillation est appelée *oscillation de Bloch*, la fréquence ω_B est la *fréquence de Bloch* et la période associée $T_B \equiv \frac{2\pi}{F}$ est bien sûr la *période de Bloch*⁹. Le caractère mono-fréquentiel du mouvement d'oscillation est dû à la dégénérescence des fréquences de Bohr entre états voisins qui permet la factorisation de l'exponentielle imaginaire dans (17). Nous voyons ainsi que les oscillations de Bloch sont une conséquence directe de la structure d'échelle des états de Wannier Stark.

Remarquons que l'amplitude des oscillations est proportionnelle à un terme traduisant la *cohérence initiale moyenne* entre les états voisins

$$\sigma_1 \equiv \sum_l c_l^* c_{l+1}.$$

Cette quantité rassemble toute l'influence de l'état initial sur la dynamique. En particulier, la phase initiale de l'oscillation dépend de la phase de la cohérence moyenne σ_1 , ce que nous pouvons mettre en évidence en notant $\sigma_1 = \rho e^{i\theta}$ dans l'expression (17) :

$$\langle X \rangle (t) = \sum_l l |c_l|^2 + 2\rho \chi_1 \cos(\theta - \omega_B t). \quad (18)$$

Le terme proportionnel à χ_1 dans (18) traduit un phénomène d'interférence quantique entre les états de Wannier Stark dû à l'imparfaite localisation des fonctions d'onde dans le puits de potentiel. Si celles-ci étaient parfaitement

⁸Attention, négliger χ_0 ne veut pas dire négliger $\chi_{l, l}$! Cela revient en fait à poser $\chi_{l, l} = l$

⁹Notons que l'égalité entre force et fréquence de Bloch est due au choix particulier de nos unités réduites ; dans les unités standards on a $\omega_B = \frac{Fd}{\hbar}$ et $T_B = \frac{\hbar}{Fd}$ où d est le pas du réseau.

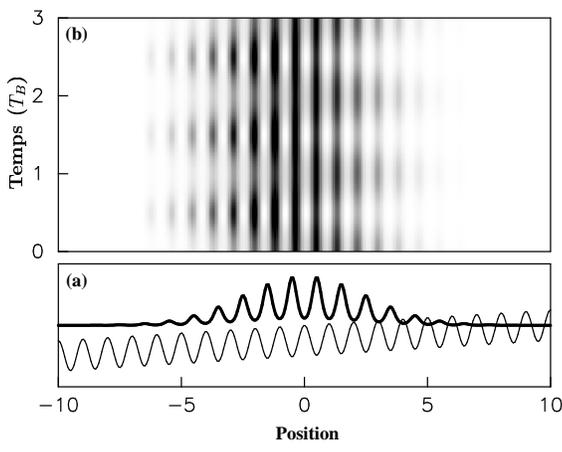


FIG. 10: **Oscillations de Bloch** : La dynamique spatio-temporelle de la probabilité de présence est représentée dans la partie supérieure (b) sur trois périodes de Bloch, le mouvement d'oscillation est clairement visible. La partie inférieure (a) représente la probabilité de présence de l'état initial et le réseau incliné.

localisées, alors l'opérateur position serait diagonal dans la base des fonctions de Wannier Stark (i.e $\chi_1 = 0$) et la position moyenne du paquet d'ondes serait constante.

Nous voyons donc que l'amplitude des oscillations de Bloch dépend :

- de la localisation des états de Wannier Stark, à travers l'intégrale de recouvrement χ_1 ,
- de l'état initial à travers la cohérence quantique moyenne σ_1 initiale entre les états voisins.

La fréquence des oscillations dépend quant à elle uniquement de la force F appliquée. Dans le complément B nous montrons que l'évolution de l'intégrale de recouvrement χ_1 en fonction des paramètres du potentiel est de la forme

$$\chi_1 = \frac{a_1}{F} e^{-\frac{V_0}{b_1}} \quad (19)$$

où les paramètres numériques positifs a_1 et b_1 sont donnés dans le tableau 4. L'amplitude des oscillations décroît donc quand la force ou l'amplitude du réseau augmente.

La figure 10-b représente l'évolution spatio-temporelle de la probabilité de présence de la particule. Elle a été calculée par une intégration numérique de l'équation de Schrödinger pour $V_0 = 10$ et $F = 1$ avec comme état initial une superposition d'états de Wannier Stark formant un état délocalisé sur dix puits de potentiel dont la probabilité de présence est représentée sur la figure 10-a.

Une vision alternative des oscillations de Bloch peut être obtenue en regardant l'évolution temporelle de la cohérence quantique moyenne entre états voisins $\sigma_1(t) = \sum_l c_l^*(t) c_{l+1}(t)$. Elle se calcule très simplement en introduisant les amplitudes des états de Wannier Stark à l'instant t : $c_l(t) = c_l(0) e^{-iE_l t}$, nous obtenons alors

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(0) e^{-i\omega_B t},$$

le phénomène d'oscillation de Bloch correspond alors à une rotation de phase de la cohérence quantique moyenne instantanée entre états voisins.

Nous pouvons maintenant regarder l'effet des intégrales de recouvrement d'ordres supérieurs $\chi_{p>1}$; leurs prise en compte fait apparaître dans l'expression de la position moyenne les harmoniques de la fréquence de Bloch

$$\langle X \rangle(t) = \sum_l l |c_l|^2 + \sum_{p>0} \chi_p \{ \sigma_p e^{ip\omega_B t} + \text{c.c.} \}.$$

L'amplitude de la p -ième harmonique est alors proportionnelle à la cohérence moyenne initiale entre puits distant de p site :

$$\sigma_p \equiv \sum_l c_l^* c_{l+p}.$$

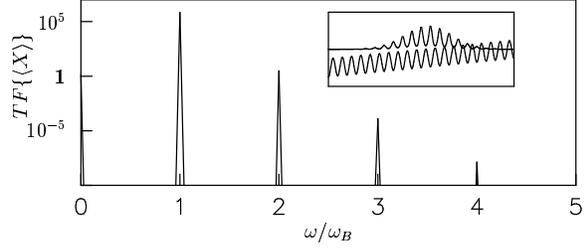


FIG. 11: **Spectre de la position moyenne** : Le spectre de puissance de la position moyenne, calculé à partir de l'intégration numérique de l'équation de Schrödinger pour $V_0 = 10$ et $F = 1$, est représenté en échelle logarithmique. La décroissance exponentielle des harmoniques de la fréquence de Bloch justifie ici l'approximation du couplage aux premiers voisins. L'encart représente la probabilité de présence de l'état initial et le potentiel.

La figure 11 représente le spectre de puissance de la position moyenne d'un atome effectuant une oscillation de Bloch. La faible importance des harmoniques est ici mise en évidence, justifiant l'approximation du couplage aux premiers voisins.

Une fois la position moyenne (18) obtenue, il n'est pas difficile d'en déduire, par dérivation par rapport au temps, l'expression de la vitesse moyenne du paquet d'ondes. Dans le cadre de l'approximation du couplage aux premiers voisins, nous obtenons ainsi :

$$\langle v \rangle(t) = 2\omega_B \chi_1 \rho \sin(\theta - \omega_B t). \quad (20)$$

Cette expression traduit bien évidemment une oscillation de la vitesse moyenne du paquet d'ondes et permet de relier simplement la phase θ de la cohérence moyenne à la vitesse moyenne du paquet d'ondes.

En remplaçant χ_1 à l'aide de la forme approchée (19), nous voyons que *les bornes supérieure et inférieure de la vitesse moyenne ne dépendent pas de la force F et l'on a*

$$|\langle v \rangle(t)| < 2a_1 e^{-V_0/b_1}. \quad (21)$$

En conséquence, nous pouvons dire que la décomposition (10) qui est à la base des résultats présentés est correcte pour les atomes ayant une vitesse moyenne initiale vérifiant l'inégalité (21). Pour $V_0 = 10$ nous obtenons une vitesse maximale de $0,86 v_0$ soit, en unités standards $0,1 \text{ mm/s}$.

1.3.2 Un paradoxe pour la conductivité électrique ?

Dans ces premiers travaux relatifs à la théorie quantique de la conduction électrique, Zener [2] en 1934 étudie la dynamique quantique d'une particule dans un potentiel périodique soumise à l'action d'une force constante. En effet on

peut supposer en première approximation que chaque électron de valence d'un cristal soumis à l'action d'un champ électrique E subi une force constante égale à eE où e est la charge de l'électron (les interactions entre particules sont ici négligées). L'interaction électrostatique avec l'ensemble des noyaux et des électrons de coeur produit sur les électrons de conduction un potentiel périodique. Ainsi la dynamique dans un réseau incliné décrit (en l'absence d'interaction entre les électrons) la dynamique d'un électron de valence d'un cristal de longueur l aux bornes duquel une différence de potentiel lE est appliquée.

L'expérience de la conductivité électrique nous montre que la dynamique électronique correspond à un transport d'électron vers les zones de faible potentiel créant ainsi un courant continu, or cela est en contradiction avec la dynamique dans un réseau incliné qui correspond à une oscillation donc à un courant alternatif. Pour lever ce paradoxe, observons les ordres de grandeurs. Un électron dans un champ de 1Vm^{-1} subit une force de $F = 1\text{eVm}^{-1}$, le pas d'un réseau cristallin étant de l'ordre de l'angstrom, nous en déduisons l'ordre de grandeur de la période de Bloch : $T_B \simeq 40\mu\text{s}$. Or le temps de décohérence τ_c , qui correspond à l'intervalle de temps séparant deux collisions successives entre électrons est de l'ordre de 10 fs [19] soit 9 ordres de grandeur inférieur !

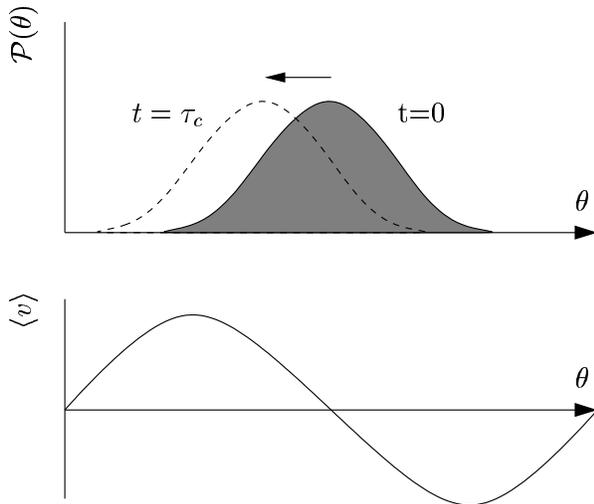


FIG. 12: Vitesse moyenne d'un électron de conduction

En fait, le gaz des électrons de conduction peut être décrit de manière statistique, par une fonction de répartition de leurs vitesses moyennes. La relation entre la vitesse moyenne et la phase de la cohérence moyenne σ_1 de chaque électron (20) permet alors de les décrire par une fonction de distribution de phase¹⁰ $\mathcal{P}(\theta)$ de la cohérence moyenne σ_1 . Comme les électrons de conduction ont, en moyenne et en l'absence de force, une vitesse nulle, cette fonction est initialement centrée sur $\theta = 0$. La force introduit alors un glissement de la phase $\theta(t) = \theta(0) + Ft$ de la cohérence moyenne σ_1 et donc une translation de la fonction de distribution $\mathcal{P}(\theta)$. Au bout d'un temps équivalent à τ_c , les collisions entre électrons modifient la fonction de distribution de phase et la recentrent sur $\theta = 0$. La distribution

¹⁰Les électrons étant des fermions, la fonction de distribution de phase doit tenir compte du principe d'exclusion de Pauli.

glisse de nouveau avant d'être recentrée par collisions et ainsi de suite. Les électrons ont donc une vitesse moyenne non nulle qui se traduit par un courant continu : c'est la conduction électrique.

Dans les réseaux de semi-conducteurs, il a été montré théoriquement [20] et expérimentalement [21], qu'en jouant sur le rapport entre τ_c et T_B il est possible d'obtenir une conductivité négative.

A titre indicatif, nous pouvons comparer sur le tableau 2 les ordres de grandeurs relatifs aux oscillations de Bloch, dans les cristaux, dans les super-réseaux de semi-conducteurs et dans les atomes refroidis par lasers.

Il est fascinant de voir qu'un même phénomène puisse se manifester sur des échelles de temps aussi diverses.

1.3.3 Les oscillations de Bloch avec les atomes froids

Nous souhaitons discuter ici des difficultés expérimentales liées à l'observation des oscillations de Bloch avec des atomes refroidis par lasers. Une description détaillée du dispositif expérimental typique peut être trouvée dans [22]. Nous avons déjà indiqué le moyen de réaliser un potentiel équivalent à un réseau incliné au paragraphe 1.1.2. Dans ce paragraphe, nous n'utilisons pas, par convenance, les unités réduites.

Le nuage d'atomes refroidis produit dans un piège magnéto-optique¹¹ a typiquement une distribution d'impulsion gaussienne de mi-largeur à mi hauteur $4\hbar k_L$ (soit une température approximative de $3\mu\text{K}$). Cette distribution est beaucoup plus large que la distribution d'impulsion des états de Wannier Stark de l'échelle fondamentale puisque les états de Wannier Stark – étant localisés dans un puits de potentiel – ont une distribution d'impulsion de l'ordre de $\hbar k_L$. Un nuage atomique à la sortie d'un piège magnéto-optique se projette donc inévitablement sur plusieurs échelles de Wannier Stark.

Réaliser un paquet d'ondes formé exclusivement d'états de l'échelle fondamentale implique donc de savoir refroidir encore plus le nuage atomique afin que la largeur de la distribution d'impulsion soit inférieure à $\hbar k_L$. Les deux techniques standards pour la phase de refroidissement supplémentaire sont le refroidissement Raman [24] et le refroidissement par bande latérale [25] (*side band cooling*), nous ne les détaillons pas ici et renvoyons le lecteur intéressé aux références citées. Ces méthodes permettent d'obtenir des nuages atomiques dont la distribution à une mi-largeur à mi-hauteur de l'ordre de $\hbar k_L/20$. En sélectionnant le vecteur d'onde central de la distribution, il est alors possible de sélectionner la vitesse moyenne du gaz atomique et donc la phase moyenne de cohérence moyenne σ_1 . Une solution alternative consiste à employer un condensat de Bose-Einstein. Nous étudions plus en détail ce cas au chapitre 3.

La principale source de décohérence dans les expériences d'atomes refroidis par lasers est l'émission spontanée. Or, si le désaccord en fréquence des lasers par rapport à la fréquence de transition atomique est grand devant la largeur du niveau excité (*i.e.* $|\delta_L| \gg \Gamma_b$), le taux d'émission spontanée Γ varie comme $\frac{1}{\delta_L^2}$ tandis que le déplacement de

¹¹Voir [23] pour les détails techniques relatifs au piégeage et au refroidissement d'atomes par lasers

TAB. 2: Ordres de grandeurs relatifs aux oscillations de Bloch

Ordres de grandeurs	cristaux	super-réseau	atomes froids
Pas de réseau	0.1 nm	10 nm	0.5 nm
Champ électrique	100 V/cm	10 kV/cm	-
Accélération	-	-	10 m.s ⁻²
Force	2 10 ⁻¹⁹ N	10 ⁻¹³ N	10 ⁻²⁵ N
Période de Bloch	40 μ s	1 ps	1 ms
Fréquence de Bloch	25 kHz	1 THz	1 kHz
Temps de relaxation	10 fs	0.1 ps	10 ms

niveaux Δ varie comme $\frac{I}{\delta_L}$ où I est l'intensité du champ laser incident. Le taux d'émission spontanée peut donc être arbitrairement réduit en désaccordant la fréquence du laser par rapport à la fréquence de transition atomique sans diminuer l'amplitude du potentiel optique (à condition de pouvoir augmenter l'intensité laser incidente).

Le temps d'expérimentation accessible ne dépend donc pas de l'émission spontanée. Il dépend de la configuration expérimentale. En effet, à la fin de la phase de refroidissement, le piège est coupé et les atomes tombent du fait de la gravité. Le nuage transverse alors le faisceau laser disposé horizontalement et subit le potentiel optique. La durée de l'expérience est donc limitée par le temps de traversé du faisceau laser. Certains auteurs s'affranchissent de cette contrainte en plaçant les faisceaux laser verticalement, mais la force due à la gravité est alors imposée.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons posé les bases nécessaires à la compréhension des résultats exposés dans la suite de ce travail. Nous avons donc brièvement introduit les idées physiques liées au refroidissement d'atomes par lasers et montré comment ceux-ci permettent d'étudier expérimentalement la dynamique quantique dans un réseau incliné. Les états de Wannier Stark ont ensuite été introduits de manière détaillée. Nous avons alors montré que les états de Wannier Stark permettent une interprétation très simple des oscillations de Bloch comme une interférence quantique et mettent en exergue le rôle fondamental de la cohérence moyenne entre puits voisins. Nous avons aussi discuté des contraintes expérimentales liées à l'observation des oscillations de Bloch avec des atomes refroidis par lasers.

2 Modulation harmonique du réseau incliné

Contents

2.1	Dynamique à faible énergie	15
2.2	Dynamique d'un "paquet doux"	17
2.3	Solution exacte au voisinage de la résonance	20
2.4	Conclusion	25

Dans le chapitre 1, nous avons montré qu'une particule dans un réseau incliné effectue un mouvement d'oscillation nommé *oscillation de Bloch*. Cette dynamique purement quantique traduit l'existence d'une fréquence naturelle dans le réseau incliné, notée ω_B et dépendant de pente du réseau – de la force appliqué à la particule. Nous étudions dans ce chapitre la dynamique quantique de la particule dans le réseau incliné lorsque qu'une modulation harmonique de la pente du réseau est appliquée. Nous nous intéressons en particulier au cas où la fréquence de modulation, notée ω , est proche de la fréquence naturelle du réseau incliné ($\omega \simeq \omega_B$); nous montrons alors qu'il existe un phénomène de résonance entre la fréquence de modulation et la fréquence naturelle induisant un transport cohérent de la particule dans le réseau incliné. Pour décrire la dynamique, nous développons une modélisation utilisant la base de Wannier Stark précédemment introduite qui permet d'interpréter simplement la dynamique, en terme d'interférences quantiques.

Dans un premier temps, nous dérivons les équations d'évolution de la modélisation en introduisant de manière détaillée les différentes approximations. Puis nous mettons en évidence, et de manière très simple, les comportements dynamiques généraux en utilisant une classe particulière d'états initiaux correspondant à des paquets d'ondes très délocalisés dans le réseau et ayant une enveloppe lentement variable (forme dite de "paquet doux"). Enfin nous montrons, dans un cadre plus mathématique, l'existence d'une expression analytique générale et exacte pour l'évolution de la fonction d'onde, qui nous permet d'interpréter la richesse dynamique en terme d'interférences quantiques; celle-ci nous permet de plus, de calculer l'évolution des grandeurs caractéristiques de la dynamique pour un paquet d'ondes de forme quelconque.

2.1 Dynamique à faible énergie

Si l'atome – la particule – est décrit par la fonction d'onde $\Psi(x, t)$, alors sa dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger suivante

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + F_0 x + F_1 x \sin(\omega t) \right] \Psi(x, t) \quad (22)$$

dans laquelle nous avons utilisé les unités réduites rassemblées dans le tableau 1 et où V_0 caractérise la profondeur du réseau, F_0 la valeur moyenne de la pente et F_1 l'amplitude de la modulation.

Pour décrire la dynamique, nous allons utiliser la base des états de Wannier Stark – voir section 1.2 – du potentiel moyen, que nous considérerons comme les états propres du Hamiltonien

$$H_{F_0} = \frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + F_0 x.$$

Les atomes froids ayant une faible énergie, ils peuplent principalement la première échelle contenant les états de plus faible énergie de chaque puits de potentiel. Pour simplifier l'étude, nous restreignons notre description à cette échelle et notons $\varphi_n(x) \equiv \varphi_n^{l=0}(x)$ l'état de Wannier Stark centré autour du puits n et d'énergie $E_n = E_0 + nF_0$. Nous avons alors

$$H_{F_0} \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x).$$

2.1.1 Description à l'aide de l'échelle des états fondamentaux de Wannier Stark

La restriction de la description à l'échelle des états fondamentaux de chaque puits de potentiel impose

- que la modulation soit suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les transitions entre les différentes échelles¹²
- que l'état initial puisse être entièrement décrit par cette échelle¹³

Si ces conditions sont satisfaites, alors nous pouvons poser :

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(x). \quad (23)$$

les coefficients c_n sont les amplitudes associées à ces états.

L'introduction de l'hypothèse (23) dans l'équation (22) permet en projetant sur chaque état et en utilisant la propriété d'ortho-normalisation (7) des états de Wannier Stark, d'obtenir un système d'équations différentielles portant sur les coefficients $c_m(t)$:

$$i \frac{dc_m(t)}{dt} = E_m c_m(t) + F_1 \sin(\omega t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \chi_{m,m+p} c_{m+p}(t) \quad (24)$$

où les coefficients $\chi_{p,q}$, définis par (14), correspondent aux éléments de matrice de l'opérateur X dans la base des états Wannier Stark. Ceux-ci traduisent donc le couplage des différents états de l'échelle de Wannier Stark par la modulation du potentiel linéaire.

Si nous négligeons temporairement, dans les équations (24), les termes de couplage entre les différents états de Wannier Stark, elles se découplent les unes des autres et l'évolution des amplitudes se traduit par une dépendance temporelle de la phase :

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-i(\phi_n(t) - \phi_n(0))} \quad (25)$$

où nous avons posé

$$\phi_n(t) \equiv E_n t - F_1 \chi_{n,n} \frac{\cos(\omega t)}{\omega}. \quad (26)$$

¹²Nous verrons cependant que cela n'impose pas forcément $F_1 \ll F_0$.

¹³Cela est expérimentalement réalisable comme nous l'avons expliqué au paragraphe 1.3.3

Lorsque nous tenons compte de l'ensemble des couplages du système complet (24), il est alors utile d'introduire de nouvelles variables prenant en compte la contribution des termes dominants en intégrant le changement de phase (25). Nous posons donc¹⁴ :

$$c_n(t) \equiv d_n(t)e^{-i\phi_n(t)}$$

et le système d'équations différentielles (24) devient alors¹⁵ :

$$\dot{d}_m = -iF_1 \sin(\omega t) \sum_{p \neq 0} \chi_{m,m+p} d_{m+p} e^{-i(\phi_{m+p}(t) - \phi_m(t))}. \quad (27)$$

Les propriétés de translation (16) des coefficients $\chi_{p,q}$, nous permettent alors d'établir que :

$$\phi_{m+p}(t) - \phi_m(t) = p\phi(t)$$

avec

$$\phi(t) \equiv \omega_B t - \frac{F_1}{\omega} \cos(\omega t). \quad (28)$$

Les équations (27) deviennent alors :

$$\dot{d}_m = -\frac{F_1}{2} \sum_{p \neq 0} \chi_p d_{m+p} \left[e^{i(\omega - p\omega_B)t} e^{ip\frac{F_1}{\omega} \cos(\omega t)} - e^{-i(\omega + p\omega_B)t} e^{ip\frac{F_1}{\omega} \cos(\omega t)} \right]. \quad (29)$$

Nous pouvons enfin développer les exponentielles en utilisant les fonctions de Bessel¹⁶ pour obtenir finalement :

$$\dot{d}_m = -\frac{F_1}{2} \sum_{p \neq 0} \chi_p d_{m+p} \sum_l (i)^l J_l(p\frac{F_1}{\omega}) \left\{ e^{i[(l+1)\omega - p\omega_B]t} - e^{i[(l-1)\omega - p\omega_B]t} \right\}, \quad (30)$$

qui est l'expression la plus générale traduisant le couplage dynamique entre états de Wannier Stark d'une même échelle d'énergie. Remarquons que *la seule approximation effectuée jusque ici est de supposer la dynamique entièrement contenue dans une échelle de Wannier Stark*. Les transitions inter-échelles dues à la modulation sont donc négligées.

Les ordres de grandeurs des problèmes physiques qui nous concernent ici permettent d'introduire deux approximations simplificatrices :

L'approximation des termes séculaires consiste à ne prendre en compte que les termes séculaires ou "lentement variables" dans (30), c'est à dire l'ensemble des termes de couplage variant lentement par rapport un temps caractéristique de la dynamique du système (ici la période

¹⁴Il est important de garder en tête pour la suite que ce changement de variable introduit un déphasage de l'état initial $c_n(0) \neq d_n(0)$.

¹⁵En notant $\dot{c}_n \equiv \frac{dc_n}{dt}$.

¹⁶Nous utilisons pour cela la relation bien connue [26]

$$e^{iz \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\omega t} e^{in\frac{\pi}{2}}$$

de Bloch)¹⁷. De tels couplages apparaissent lorsque la fréquence de modulation est proche d'un rapport rationnel avec la fréquence de Bloch, $q\omega \simeq p\omega_B$, où p et q sont des entiers premiers entre eux.

*L'approximation du couplage aux premiers voisins*¹⁸ provient de la forte localisation des fonctions de Wannier Stark. Les coefficients χ_p décroissant rapidement avec l'indice p , celle-ci consiste à ne tenir compte que des termes de plus faible indice p .

2.1.2 Voisinage de la résonance

Il ressort de la discussion précédente que les effets les plus importants sont attendus lorsque les états premiers voisins seront couplés de manière résonante *i.e.* lorsque $\omega \simeq \omega_B$. Dans la suite de ce chapitre, nous nous focalisons sur l'étude de la dynamique au voisinage de la résonance. Nous introduisons donc le désaccord en fréquence δ défini par

$$\delta \equiv \omega - \omega_B \quad (31)$$

dans les équations (30)

$$\dot{d}_m = -\frac{F_1}{2} \sum_{p \neq 0} \chi_p d_{m+p} \sum_l (i)^l J_l(p\frac{F_1}{\omega}) \left\{ e^{i[(l+1-p)\omega_B - (l+1)\delta]t} - e^{i[(l-1-p)\omega_B - (l-1)\delta]t} \right\}. \quad (32)$$

Comme nous nous intéressons au proche voisinage, nous posons $|\delta| \ll |\omega_B|, |\omega|$.

Les couplages oscillants avec une fréquence petite devant la fréquence de Bloch apparaissent lorsque $l \pm 1 = p$. En pratiquant l'approximation des termes séculaires nous ne gardons que ces couplages, nous obtenons donc

$$\dot{d}_m = -\frac{F_1}{2} \sum_{p \neq 0} (i)^{p-1} \chi_p d_{m+p} \left[J_{p-1}(p\frac{F_1}{\omega}) + J_{p+1}(p\frac{F_1}{\omega}) \right] e^{-ip\delta t}. \quad (33)$$

Enfin, l'approximation du couplage aux premiers voisins implique de ne garder que les termes proportionnels à χ_1 soit finalement :

$$\dot{d}_m = \Omega (d_{m-1} e^{-i\delta t} - d_{m+1} e^{i\delta t}) \quad (34)$$

où nous avons introduit le coefficient

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \frac{F_1 \chi_1}{2} \left[J_0\left(\frac{F_1}{F_0}\right) + J_2\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \right] \\ &= F_0 \chi_1 J_1\left(\frac{F_1}{F_0}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Nous verrons dans la suite que ces équations décrivent parfaitement la dynamique du paquet d'ondes.¹⁹

¹⁷Les termes de couplage variant rapidement auront un effet moyen nul.

¹⁸Notons au passage que l'approximation du couplage aux premiers voisins n'est pas indispensable mais permet d'alléger considérablement la résolution tout en gardant l'essentiel des résultats.

¹⁹Notons que dans les équations (34), le paramètre Ω qui traduit le couplage entre états voisins peut être intégré dans une redéfinition de l'échelle temporelle en introduisant le temps réduit $\tau \equiv \Omega t$. Lors d'une telle redéfinition, le seul paramètre caractéristique du système est le désaccord réduit $\delta' \equiv \frac{\delta}{\Omega}$. Nous n'utilisons pas le temps réduit τ mais verrons qu'il apparaît explicitement dans les expressions analytiques exactes dérivées à la section 2.3.

A la résonance, $\omega = \omega_B$ et donc $\delta = 0$, le système d'équations (30) se réduit à la forme autonome :

$$\dot{d}_m = \Omega (d_{m-1} - d_{m+1}). \quad (36)$$

Les équations (36) nous indiquent que la modulation résonante couple les états de Wannier Stark par un terme de type "couplage dipolaire électrique". Nous pouvons en effet faire l'analogie avec un atome dont les niveaux sont équidistants, plongé dans un champ électromagnétique résonant avec la fréquence de transition atomique. Dans cette analogie, les amplitudes $d_n(t)$ correspondraient à l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ niveau et Ω à la fréquence de Rabi.

Nous allons voir dans la suite que les couplages résonants – $\delta = 0$ – entre états de Wannier Stark génèrent des dynamiques de grande amplitude. L'état initial étant de manière générale délocalisé plusieurs états de Wannier Stark, nous verrons que, comme dans le cas des oscillations de Bloch vues au paragraphe (1.3.1, les cohérences quantiques initiales jouent un rôle déterminant dans la dynamique du paquet d'ondes.

2.2 Dynamique d'un "paquet doux"

Nous pouvons, à partir de l'équation d'évolution (34), obtenir rapidement les comportements dynamiques du paquet d'ondes en considérant le cas particulier d'un état initial constitué d'une superposition d'état de Wannier Stark avec une enveloppe variant lentement par rapport au pas du réseau et un rapport de phase constant entre états voisins. Dans ce cas, la dynamique peut être aisément décrite en utilisant les concepts de la physique des ondes. Nous commençons par étudier la résonance exacte puis le proche voisinage.

2.2.1 Le cas résonant : $\delta = 0$

Commençons par considérer le cas d'un état initial complètement délocalisé dans le réseau. Nous cherchons donc des solutions de la forme d'ondes planes progressives :

$$d_n(t) = A e^{i(kn - \tilde{\omega}t)} \quad (37)$$

où A est un facteur de normalisation dépendant de la taille du réseau. Le paramètre k traduit la différence de phase entre puits voisins tandis que $\tilde{\omega}$ est la fréquence de l'onde. Cette solution se déplace à une vitesse $V = \tilde{\omega}/k$.

En insérant la solution d'onde plane (37) dans (36) nous obtenons une relation de dispersion entre la fréquence $\tilde{\omega}$ et le déphasage k entre puits voisins

$$\tilde{\omega} = 2\Omega \sin(k) \quad (38)$$

qui assujettit la vitesse de propagation de l'onde au déphasage relatif entre puits voisins.

La solution d'onde plane (37) ne correspond pas à une situation physique réaliste. Cependant, les équations (36) étant linéaires, tout état initial peut être décomposé sur une base d'ondes planes. La vitesse du paquet d'ondes est alors déterminée en utilisant la notion de vitesse de groupe – voir [27] pour une présentation générale de cette notion – qui est la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes planes.

Si nous supposons que la décomposition de l'état initial sur la base des ondes planes corresponde à une distribution étroite²⁰ centrée autour de la valeur k_0 , la vitesse de groupe v_g du paquet d'ondes est alors

$$v_g = \left. \frac{d\tilde{\omega}}{dk} \right|_{k=k_0}$$

soit

$$v_g = 2\Omega \cos(k_0). \quad (39)$$

Ce résultat important indique que *la vitesse du paquet d'ondes ne dépend que de la phase relative entre états voisins*. Ainsi, lorsque les états initiaux voisins sont en quadrature deux à deux, $k_0 = \pm\pi/2$ et donc $v_g = 0$: il n'y a pas de mouvement global du paquet d'ondes. Lorsque par contre tous les états sont initialement en phase $k_0 = 0$, $v_g = 2\Omega$: l'atome se déplace vers les régions de potentiel plus important (pour $\Omega > 0$), il grimpe le potentiel avec une vitesse constante ; on observe un transfert d'énergie de la modulation vers l'atome. *A contrario*, lorsque les états initiaux voisins sont deux à deux en opposition de phase $k_0 = \pi$ et $v_g = -2\Omega$: l'atome se déplace vers les zones de potentiel plus faible, il dévale le potentiel. Il est surprenant de constater que la valeur absolue de la vitesse ne dépend pas du sens de déplacement, l'atome grimpe et dévale le potentiel à la même vitesse.

Supposons maintenant que l'état initial corresponde à une superposition d'ondes planes progressives variant lentement à l'échelle d'un puits de potentiel. Nous pouvons alors déterminer l'équation d'évolution de l'enveloppe. Posons donc

$$d_n(t) = f_n(t) e^{i(k_0 n - \tilde{\omega}t)} \quad (40)$$

où les coefficients f_n sont des amplitudes complexes que nous supposons varier lentement dans le temps, en comparaison à la période de Bloch, et dans l'espace, au pas du réseau. En introduisant cette hypothèse dans les équations (36), nous obtenons en utilisant la relation de dispersion (38) l'équation d'évolution de l'enveloppe f_n

$$\dot{f}_n = \Omega [\cos(k_0) (f_{n-1} - f_{n+1}) + i \sin(k_0) (f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n)]. \quad (41)$$

Nous pouvons tout d'abord remarquer que, comme généralement $\Omega \ll \omega_B$, la variation lente de l'enveloppe dans l'espace implique directement la variation lente dans le temps ; nous pouvons donc finalement ne retenir que la condition spatiale pour la validité du développement.

Comme $f_n(t)$ varie lentement dans l'espace, nous pouvons passer à la limite continue $f_n(t) = f(x = n, t)$ et faire les approximations suivantes

$$f_{n+1}(t) - f_{n-1}(t) \simeq 2 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

et

$$f_{n-1} + f_{n+1} - 2f_n \simeq \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2},$$

²⁰Il est indispensable pour pouvoir utiliser le concept de vitesse de groupe que la largeur de la distribution en onde plane Δk soit beaucoup plus petite que la longueur de l'espace k relevant (ici 2π). La condition $\Delta k \ll 2\pi$ impose une restriction sur l'ensemble des états initiaux. Cela correspond en effet à des états délocalisés sur de nombreux puits ($\Delta n \gg 1$) ayant de plus un rapport de phase bien défini entre les états.

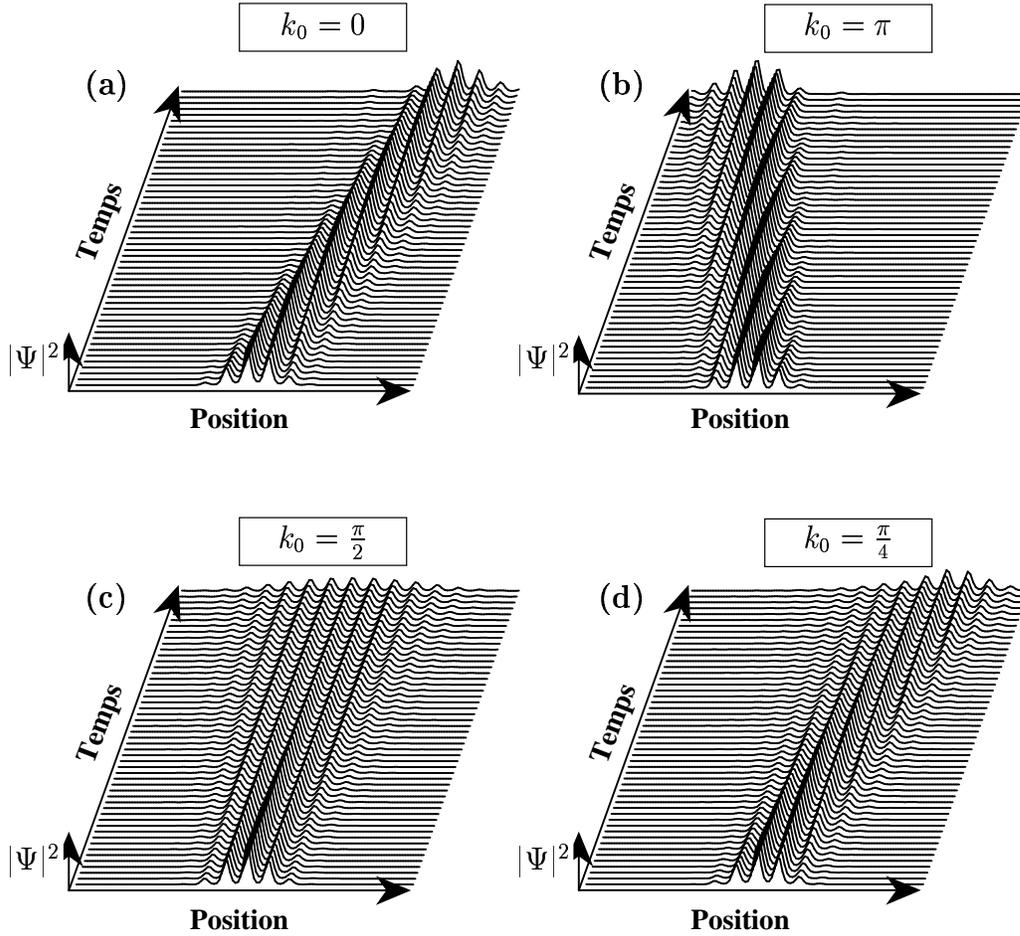


FIG. 13: **Pilotage de la dynamique par la phase initiale** : Les enveloppes du paquet d'ondes initial sont des gaussiennes délocalisées sur 4 puits environ : $f_n(0) \propto e^{-n^2/4}$. Selon la différence de phase entre puits voisins k_0 , nous obtenons des régimes dynamiques très différents : des translations (a) $k_0 = 0$ et (b) $k_0 = \pi$, de la diffusion (c) $k_0 = \pi/2$, ou encore un mélange de translation et de diffusion (d) $k_0 = \pi/4$. Les figures ont été réalisées par une intégration numérique de l'équation de Schrödinger (22) sur $50T_B$ avec un pas de T_B pour les paramètres suivants $V_0 = 12$, $F_0 = 2$ et $F_1 = 0, 2$.

ce qui conduit à l'équation suivante pour l'enveloppe

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \underbrace{-2\Omega \cos(k_0) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}}_{\text{Transport}} - \underbrace{i\Omega \sin(k_0) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}}_{\text{Diffusion}}. \quad (42)$$

L'équation (42) est une équation classique de la physique des ondes qui traduit l'existence de deux phénomènes dynamiques différents :

- Un transport de l'enveloppe à la vitesse $v_g = 2\Omega \cos(k_0)$
- Un étalement de l'enveloppe avec une "constante de diffusion" $D = \Omega \sin(k_0)$

Nous pouvons donc dire que *le déphasage initial entre puits voisins* k_0 "pilote" la dynamique dans le sens où il impose une dynamique soit diffusive, soit de transport, soit encore un mélange des deux. Il est remarquable de constater que lorsque la vitesse est maximale ($k_0 = 0, \pi$) la diffusion est nulle et que l'on a juste un phénomène de transport, alors qu'il n'y pas de transport lorsque la diffusion est maximale ($k_0 = \pm\pi/2$). Tout aussi remarquable est la symétrie des vitesses de transport, *l'atome ne semble ainsi nullement affecté par la pente du potentiel* qu'il remonte ($k_0 = 0$) ou dévale ($k_0 = \pi$) avec la même vitesse.

Nous voyons ainsi que la modulation harmonique de la pente du réseau incliné résonante avec la fréquence de Bloch, permet de "manipuler" le paquet d'ondes atomique soit en le déplaçant soit en l'étalement.

La figure 13 illustre ces différents comportements en présentant quatre simulations numériques correspondant à quatre rapports de phase k_0 différents et confirme parfaitement les prédictions du modèle. Les valeurs des vitesses de groupe obtenues analytiquement sont en bon accord avec les vitesses observées numériquement, une comparaison entre ces deux valeurs est représentée sur la figure 19 page 24.

2.2.2 Modulation quasi-résonante

Dans le même état d'esprit, nous regardons ici l'influence d'un faible désaccord entre la fréquence de modulation et la fréquence de Bloch. Le couplage entre puits voisins dépend maintenant du temps et nous rappelons les équations d'évolution du système :

$$\dot{d}_m = \Omega (d_{m-1} e^{-i\delta t} - d_{m+1} e^{i\delta t}).$$

Nous introduisons alors de nouveau une solution délocalisée de la forme

$$d_n(t) = A e^{i(kn - \phi(t))}$$

qui conduit à l'expression de la fréquence instantanée de l'onde :

$$\dot{\phi}(t) = 2\Omega \sin(k + \delta t).$$

Si nous supposons l'état initial décrit par un paquet d'ondes planes centré autour de la valeur k_0 , la vitesse du paquet d'ondes est assimilable à la vitesse de groupe

$$v_g(t) = \left. \frac{d\phi}{dk} \right|_{k=k_0}$$

soit

$$v_g(t) = 2\Omega \cos(k_0 + \delta t). \quad (43)$$

Nous voyons ici une différence fondamentale avec le cas résonant, le paquet d'ondes ne se déplace plus à vitesse constante mais oscille dans le temps avec une fréquence égale au désaccord de fréquence δ .

Nous pouvons alors de nouveau définir l'équation d'évolution de l'enveloppe du paquet d'ondes en posant

$$d_n(t) = f_n(t) e^{i(k_0 n - \phi(t))} \quad (44)$$

où f_n est une fonction, lentement variable dans le temps comparée à la fréquence de Bloch, et dans l'espace, au pas du réseau. L'introduction de l'hypothèse (44) dans les équations (34) conduit aux équations différentielles portant sur l'enveloppe f_n :

$$\dot{f}_n = \Omega (f_{n-1} - f_{n+1}) \cos(k_0 + \delta t) - i\Omega (f_{n-1} + f_{n+1} - 2f_n) \sin(k_0 + \delta t). \quad (45)$$

La fonction f_n étant supposée lentement variable, nous pouvons passer à la limite continue, nous obtenons alors

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -2\Omega \cos(k_0 + \delta t) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} - i\Omega \sin(k_0 + \delta t) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}. \quad (46)$$

Cette équation traduit *un mouvement d'oscillation de fréquence δ de l'enveloppe du paquet d'ondes*. Ce mouvement est caractérisé par un déplacement périodique de la position moyenne ainsi qu'un étalement périodique du paquet d'ondes. Lorsque le désaccord de fréquence tend vers zéro, nous retrouvons les comportements de la section précédente.

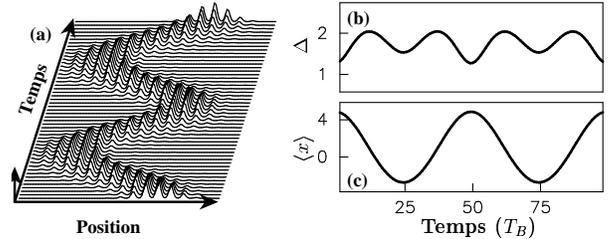


FIG. 14: **Dynamique hors résonance** : La figure (a) représente la dynamique spatio-temporelle pour un désaccord $\delta = 0,02\omega_B$, les figures (b) et (c) représentent respectivement la position moyenne et l'écart quadratique moyen du paquet d'ondes. Ces figures ont été obtenues par une intégration numérique de l'équation de Schrödinger pour $V_0 = 12, F_0 = 2, F_1 = 1$.

La figure 14 présente le résultat d'une simulation numérique de l'équation de Schrödinger (22) pour $\delta = 0,02\omega_B$, la dynamique spatio-temporelle de la probabilité de présence 14-a mets clairement en évidence le mouvement d'oscillation du paquet d'ondes ; la position moyenne et l'étalement du paquet d'ondes, représentés sur les figures 14-b et 14-c, oscillent avec une fréquence correspondant parfaitement à δ .

Cette approche analytique simple nous a permis de mettre aisément en évidence les comportements dynamiques induits par une modulation harmonique de la pente

du potentiel quasi résonante avec la fréquence de Bloch. Néanmoins, elle n'est valable que pour une classe particulière d'états initiaux correspondant à un paquet d'ondes délocalisé sur plusieurs puits de potentiel de forme "douce" et ayant un rapport de phase constant entre puits voisins. Notons tout de même que de tels états sont expérimentalement accessibles avec des atomes ultra-froids.

2.3 Solution exacte au voisinage de la résonance

Dans ce paragraphe, nous reprenons l'étude de l'équation (34) décrivant la dynamique au voisinage de la résonance et montrons que l'on peut en donner une solution analytique exacte. A partir de celle-ci, nous pouvons interpréter et caractériser les différents comportements dynamiques en termes d'interférences quantiques. Nous pouvons, de plus, calculer l'évolution temporelle de la position moyenne et de la largeur du paquet d'ondes permettant de caractériser quantitativement l'évolution atomique. Cette étude généralise les résultats de la section (2.2) à un état initial quelconque.

2.3.1 Solution analytique

La dynamique est décrite, dans le cadre de l'approximation aux premiers voisins, par le système d'équations différentielles couplées (34) que nous rappelons ici :

$$\dot{d}_m = \Omega (d_{m-1}e^{-i\delta t} - d_{m+1}e^{i\delta t}).$$

Nous démontrons dans le complément (H) que la solution générale du système d'équations (34) se met sous la forme

$$d_n(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} d_{n+q}(0) J_q(Q(t)) e^{iq\delta t/2} \quad (47)$$

où J_q est la fonction de Bessel entière d'ordre q et où l'on a posé

$$Q(t) \equiv -\frac{4\Omega}{\delta} \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right). \quad (48)$$

A la résonance, $\delta = 0$, $Q(t) \rightarrow -2\Omega t$ et la solution analytique (47) se simplifie²¹

$$d_n(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} d_{n+q}(0) J_q(-2\Omega t). \quad (49)$$

Remarquons que la solution (47) peut s'écrire de manière équivalente en posant $m = n + q$ comme

$$d_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{m-n}(t) d_m(0) \quad (50)$$

où nous avons posé

$$U_p(t) \equiv J_p(Q(t)) e^{ip\delta t/2}.$$

L'expression (50) nous indique que les phénomènes d'interférence sont à la base de la dynamique. L'amplitude d'un état à l'instant t est en effet calculée par une sommation pondérée des amplitudes à l'instant initial. Le facteur de pondération $U_{m-n}(t)$ traduit l'évolution de la phase et de

l'amplitude de la contribution de l'amplitude initiale $d_m(0)$ à l'amplitude de l'état n à l'instant t . Les contributions des amplitudes initiales peuvent alors selon les facteurs de pondération soit s'additionner, nous parlerons alors d'interférences constructives soit s'annuler et nous parlerons d'interférence destructives.

Lorsque le désaccord δ n'est pas nul, la fonction $Q(t)$ oscille dans le temps avec une fréquence $\delta/2$. Il n'est pas difficile de montrer alors que la dynamique est périodique de période $T = 2\pi/\delta$. En effet

$$d_n(t+T) = \sum_q d_{n+q}(0) J_q(Q(t+T)) e^{iq\delta(t+T)/2} e^{iq\pi}, \quad (51)$$

or $Q(t+T) = -Q(t)$ et l'on sait que les fonctions de Bessel sont de même parité que leurs indices (i.e. $J_q(-x) = (-1)^q J_q(x)$). Nous avons donc directement d'après (51) :

$$d_n(t + \frac{2\pi}{\delta}) = d_n(t)$$

ce qui démontre bien la périodicité de la dynamique et correspond au résultat de la section (2.2.2).

Nous pouvons illustrer cette solution analytique en considérant le cas simple où un seul état est initialement peuplé :

$$d_n(t=0) = \delta_{n,0}.$$

L'amplitude de l'état n à l'instant t est alors simplement

$$\begin{aligned} d_n(t) &= J_{-n} \left(-\frac{4\Omega}{\delta} \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right) \right) e^{-in\delta t/2} \\ &= J_n \left(\frac{4\Omega}{\delta} \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right) \right) e^{-in\delta t/2} \end{aligned}$$

et la dynamique est caractérisée par une alternance d'élargissements et de regroupements du paquet d'ondes, semblable à un mouvement de respiration. La figure 15-a représente la dynamique spatio-temporelle de la probabilité de présence pour une modulation non résonante, le mouvement de respiration est alors clairement visible.

Comme la fonction de Bessel $J_n(x)$ d'ordre n est très petite lorsque $x \ll n$ et qu'elle atteint son premier maximum pour $x \simeq n$, l'état n se trouve significativement peuplé si $\frac{4\Omega}{\delta} \geq n$. L'amplitude du mouvement de respiration est donc inversement proportionnelle au désaccord de fréquence δ .

A la résonance ($\delta = 0$) :

$$d_n(t) = J_n(2\Omega t) \quad (52)$$

la dynamique est une diffusion uniforme dans tout le réseau comme le montre la figure 15-b. Au cours du temps, le nombre de puits peuplés augmente indéfiniment, ce qui traduit le fait que *la modulation résonante couple l'ensemble des états de Wannier Stark entre eux*. Nous voyons qu'il n'y

²¹Nous utilisons les relations de symétrie entre fonctions de Bessel : $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ et $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, soit en les combinant :

$$J_{-n}(-x) = J_n(x).$$

²²Nous voyons directement apparaître le temps réduit $\tau = \Omega t$.

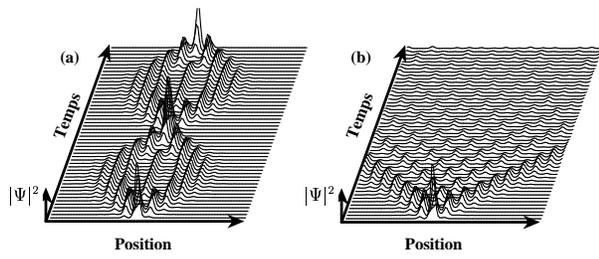


FIG. 15: **Dynamique spatio-temporelle d'un état de Wannier Stark** : L'état initial correspond à un état de Wannier Stark. Hors résonance (a) – $\delta = 0,04\omega_B$ – la dynamique est périodique et correspond à une succession d'élargissements et de regroupements du paquet d'ondes. A la résonance (b) – $\delta = 0$ – la dynamique correspond à une diffusion uniforme. La figure est réalisée par intégration numérique de l'équation de Schrödinger (22) sur un intervalle de temps de $50T_B$ avec un échantillonnage de T_B pour les paramètres suivants $V_0 = 12$, $F_0 = 2$, $F_1 = 1$.

a pas dans ce cas simple – non décrit par l'approche précédente – de transport du paquet d'ondes, ce qui montre bien que le phénomène de transport est dû à l'interférence des dynamiques diffusives de chaque état initialement peuplé et donc de nature essentiellement *cohérente* et *quantique*. Dans le paragraphe suivant, nous approfondissons cette idée.

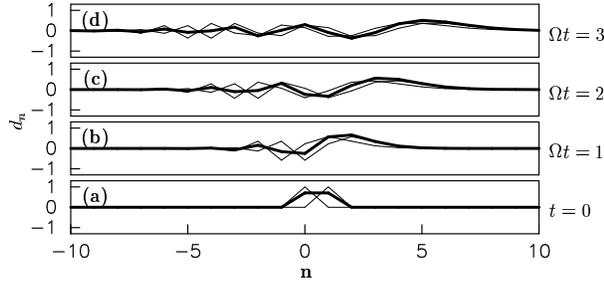


FIG. 16: **Interférences entre deux puits initialement peuplés à divers instants** : Le trait gras correspond aux amplitudes des états de Wannier Stark (53) pour $\theta_0 = 0$, somme des deux amplitudes individuelles $d_n(t) = J_n(2\Omega t)$ et $d_n(t) = J_{n-1}(2\Omega t)$ représentées en traits fins. L'interférence des deux dynamiques individuelles de diffusion forme une dynamique de translation. Les différentes figures correspondent à divers instants de la dynamique : (a) $t = 0$, (b) $\Omega t = 1$, (c) $\Omega t = 2$, (d) $\Omega t = 3$.

2.3.2 Dynamique et interférences quantiques : le cas résonant

Comme nous l'avons déjà mentionné, la dynamique est le fruit d'interférences quantiques. Nous essayons dans ce paragraphe d'illustrer ce propos dans le cas résonant. Prenons un cas concret et supposons que l'état initial corresponde à deux états de Wannier Stark voisins, également peuplés :

$$d_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_{n,0} + \delta_{n,1} e^{i\theta_0}].$$

Chacun de ces états diffuse uniformément dans le réseau sur la figure 15-b, la dynamique du paquet d'ondes est le résultat de l'interférence des deux dynamiques individuelles. L'amplitude des états à l'instant t est simplement

$$d_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [J_n(2\Omega t) + J_{n-1}(2\Omega t) e^{i\theta_0}]. \quad (53)$$

Nous pouvons calculer la population de l'état n à l'instant t :

$$|d_n(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[J_n^2(2\Omega t) + J_{n-1}^2(2\Omega t) + \underbrace{2J_n(2\Omega t) J_{n-1}(2\Omega t) \cos(\theta_0)}_{\text{terme d'interférence}} \right]. \quad (54)$$

Les deux premiers termes de l'expression (54) sont les populations de l'état n pour un état initialement peuplé et le troisième terme traduit l'interférence entre les deux états initialement peuplés. La figure 16 illustre ce phénomène en représentant à différents instants les deux dynamiques individuelles et leurs interférences pour $\theta_0 = 0$. La relation de phase initiale conduit à un état de translation car pour $n > 0$ les dynamiques individuelles s'additionnent tandis que pour $n < 0$, elles s'opposent.

Lorsque le nombre d'états initialement peuplés augmente, la figure d'interférence devient plus complexe et par là même, plus ardue à cerner. Néanmoins, nous pouvons mieux comprendre la dynamique en utilisant une approximation sur les fonctions de Bessel [26] :

$$\frac{J_{q+m}(z)}{J_q(z)} \simeq \left(\frac{z}{q}\right)^m \text{ pour } q \gg |m| \geq 0. \quad (55)$$

Nous pouvons alors en utilisant (55) faire les approximations suivantes (pour $q > 0$)

$$d_q(t) \simeq \left[\sum_m d_m(0) \left(\frac{q}{2\Omega t}\right)^m \right] J_{-q}(-2\Omega t)$$

$$d_{-q}(t) \simeq \left[\sum_m (-1)^m d_m(0) \left(\frac{2\Omega t}{q}\right)^m \right] J_q(-2\Omega t). \quad (56)$$

En considérant $\Omega > 0$, $\frac{2\Omega t}{q} > 0$ on déduit que :

- Si les puits sont initialement en phase : l'amplitude $d_q(t)$ sera une interférence constructive – les amplitudes s'additionnent – tandis que l'amplitude $d_{-q}(t)$ présentera une interférence destructive – les amplitudes s'opposent deux à deux ; le puits q aura alors une population supérieure au puits $-q$ traduisant un état de translation vers les puits positifs.
- Si les puits voisins sont initialement en opposition de phase : la situation inverse se produit.
- Si les puits voisins sont initialement en quadrature : les puits q et $-q$ auront sensiblement la même population ce qui traduit une diffusion dans le réseau.

Nous retrouvons ainsi qualitativement les résultats du paragraphe 2.2 par un jeu d'interférences constructives ou destructives entre les amplitudes de l'état initial.

Les figures 17 et 18 représentent la dynamique spatio-temporelle du paquet d'ondes mis en regard avec la population de l'état $\varphi_{10}(x)$ pour des états initiaux de plus en plus large. Nous voyons nettement la figure d'interférence se lisser au fur et à mesure que le nombre d'états initialement peuplés augmente. Lorsque les puits sont initialement en phase – figure 17 – le mouvement de translation apparaît de plus en plus nettement tandis que l'état initial devient plus large, la diffusion disparaissant progressivement. Lorsque les puits voisins sont initialement en quadrature de

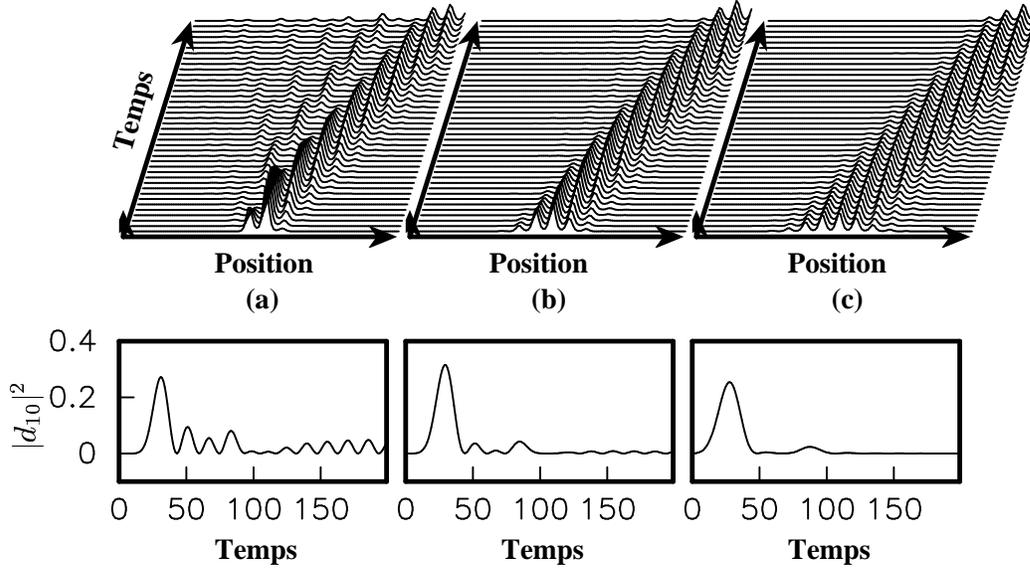


FIG. 17: **Dynamique spatio-temporelle et évolution de la population $|d_{10}(t)|^2$** : Les états initiaux sont des distributions gaussiennes de largeurs différentes $d_n(0) = \sigma\sqrt{\pi}e^{ink_0} \exp(-(n-0.5)^2/\sigma^2)$ avec (a) $\sigma = 1$, (b) $\sigma = 2$, (c) $\sigma = 3$. Les états sont initialement en phase ($k_0 = 0$). L'intégration numérique de l'équation de Schrödinger (22) est effectuée pour $V_0 = 12$, $F_0 = 2$ et $F_1 = 0, 2$.

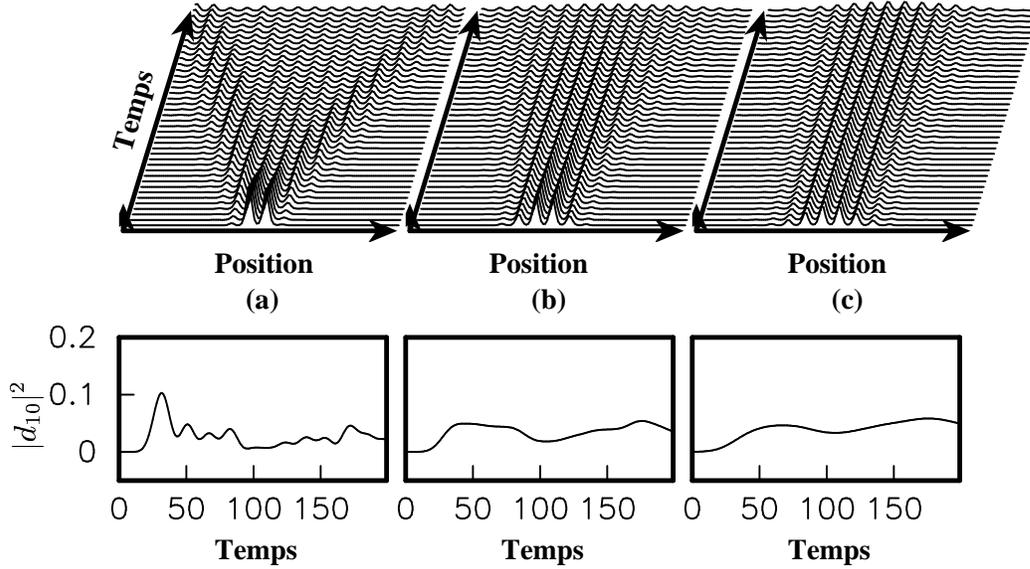


FIG. 18: **Dynamique spatio-temporelle et évolution de la population $|d_{10}(t)|^2$** : Les états initiaux sont des distributions gaussiennes différentes $d_n(0) = \sigma\sqrt{\pi}e^{ink_0} \exp(-(n-0.5)^2/\sigma^2)$ avec (a) $\sigma = 1$, (b) $\sigma = 2$, (c) $\sigma = 3$. Les états voisins sont initialement en quadrature ($k_0 = \pi/2$). L'intégration numérique de l'équation de Schrödinger (22) est effectuée pour $V_0 = 12$, $F_0 = 2$ et $F_1 = 0, 2$.

phase – figure 18 – la diffusion est d’autant plus lente que le paquet d’ondes initial est large. Ces figures permettent d’illustrer l’interprétation interférentielle de la dynamique.

2.3.3 Calcul des moments pour une modulation résonante

Nous avons vu que l’évolution temporelle du système dépend à la fois de la différence de phase entre puits voisins et de la distribution initiale des états de Wannier Stark. Pour caractériser cette dépendance, nous déterminons l’évolution temporelle de la position moyenne et de l’écart quadratique moyen du paquet d’ondes.

Position moyenne La position moyenne du paquet d’ondes se calcule en évaluant l’expression

$$\langle x \rangle (t) = \langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle .$$

Développée sur la base de Wannier Stark, nous obtenons dans l’approximation aux premiers voisins :

$$\langle x \rangle (t) = \sum_n X_{nn} |c_n(t)|^2 + \chi_1 \sum_n \left(d_n(t) d_{n+1}^*(t) e^{i\phi(t)} + \text{c.c.} \right) . \quad (57)$$

Comme nous nous intéressons à la dynamique à long terme, nous moyennons l’expression (57) sur une période de vibration de la force $T_V = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle \bar{x} \rangle (t) = \frac{1}{T_V} \int_{t-T_V/2}^{t+T_V/2} \langle x \rangle (\tau) d\tau .$$

En remplaçant les amplitudes $d_n(t)$ par leurs expressions exactes (47) et après quelques manipulations algébriques reportées dans le complément I, nous obtenons

$$\langle \bar{x} \rangle (t) = \sum_n n |d_n(0)|^2 + \left\{ \left[-\frac{Q(t)}{2} + i \frac{\Omega}{F_0} \right] \sum_n d_n(0) d_{n+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} . \quad (58)$$

L’expression (58) de la position fait, comme pour les oscillations de Bloch, apparaître la cohérence moyenne initiale entre puits voisins :

$$\sigma_1 \equiv \sum_n d_n(0) d_{n+1}^*(0) . \quad (59)$$

Si l’on pose

$$\sigma_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$$

l’expression de l’évolution la position moyenne au temps longs (58) peut se mettre, en remplaçant $Q(t)$ par son expression (48), sous la forme

$$\langle \bar{x} \rangle (t) = \langle \bar{x} \rangle_0 + \frac{2\rho_1\Omega}{\delta} (\sin(\delta t - \theta_1) + \sin(\theta_1)) - \frac{2\rho_1\Omega}{\omega_B} \sin\left(\theta_1 + \frac{\delta t}{2}\right) \quad (60)$$

où l’on a posé :

$$\langle \bar{x} \rangle_0 = \sum_n n |d_n(0)|^2 .$$

L’évolution temporelle (58) traduit un mouvement global d’oscillation à la fréquence δ . Comme $\delta \ll \omega_B$, le mouvement d’oscillation de fréquence $\delta/2$ a une amplitude beaucoup plus faible que celui de fréquence δ .

A la résonance, en posant $\delta = 0$ dans l’expression (60) nous trouvons simplement :

$$\langle \bar{x} \rangle (t) = \langle \bar{x} \rangle (0) + \underbrace{v_g t}_{\text{translation}} \quad (61)$$

où l’on a posé :

$$v_g = 2\Omega\rho_1 \cos(\theta_1) \quad (62)$$

et

$$\langle \bar{x} \rangle (0) = \langle \bar{x} \rangle_0 - \frac{2\rho_1\Omega}{\omega_B} \sin(\theta_1) .$$

L’expression (61) traduit un mouvement de translation du paquet d’ondes à la vitesse v_g . Nous voyons ici que la vitesse de translation ne dépend pas uniquement de la phase θ_1 de la cohérence moyenne σ_1 mais aussi de son amplitude ρ_1 . *Le résultat (62) constitue une généralisation de l’expression (39) à une forme quelconque de paquet d’ondes.* Soulignons une nouvelle fois que la translation peut s’effectuer dans les deux sens avec la même vitesse. Le couplage dynamique entre les états permet à l’état initial de “remonter” la pente ou de la “dévaler” sans ressentir de direction privilégiée.

Dans le cas d’une distribution initiale douce ayant un rapport de phase constant entre puits voisins : $d_n = f(n) e^{ik_0 n}$ (avec $\left| \frac{df}{dn} \right| \ll |f|$), nous avons simplement²³ $\sigma_1 \simeq e^{ik_0}$ soit $\rho_1 \simeq 1$ et $\theta_1 = k_0$. L’expression approchée (39) est alors bien identique à l’expression générale (62).

Pour conclure ce paragraphe, regardons l’influence de l’amplitude de la modulation sur la vitesse de translation du paquet d’ondes. En remplaçant Ω par son expression (35) l’expression (62) devient :

$$v_g = 2F_0\chi_1 J_1\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \rho_1 \cos(\theta_1) . \quad (63)$$

Nous pouvons remarquer qu’elle ne varie pas linéairement avec l’amplitude de la modulation F_1 , mais à travers une fonction de Bessel entière d’ordre 1. Il existe donc des maxima de l’amplitude de modulation correspondant aux maxima de la fonction de Bessel, le premier d’entre eux étant atteint pour $F_1 \approx 1.8F_0$ [26]. Il existe de même des valeurs de modulation qui annulent cette fonction de Bessel, gelant ainsi la dynamique.²⁴

La figure 19 représente l’évolution de la vitesse de translation du paquet d’ondes en fonction du rapport $\frac{F_1}{F_0}$. Les croix représentent le résultat du calcul numérique obtenu

²³On déduit facilement $\sigma_1 = [\sum_n f(n)f(n+1)] e^{ik_0}$, le calcul de $\sum_n f(n)f(n+1)$ peut se faire en développant $f(n+1)$ en série de Taylor : $f(n)f(n+1) = f^2(n) + \frac{d}{dn}(f^2(n)) + \frac{1}{4}\frac{d^2}{dn^2}(f^2(n)) - \left(\frac{d}{dn}f(n)\right)^2$ on obtient alors $\sum_n f(n)f(n+1) = 1 - \sum_n \left(\frac{d}{dn}f(n)\right)^2 \simeq 1$ du fait de la condition $f(x) \gg \frac{df}{dx}$.

²⁴Bien entendu les termes de couplage suivants vont permettre une évolution du paquet d’ondes mais celle ci sera très faible.

en intégrant l'équation de Schrödinger (22), le trait plein correspond à l'expression (62) calculée à partir de la solution exacte et le trait tiré correspond à l'expression approchée (39) obtenue en utilisant la notion de vitesse de groupe. Nous pouvons observer un excellent accord quantitatif entre le calcul numérique et la solution analytique exacte (62). La vitesse calculée à l'aide de l'expression approchée (39) surestime la vitesse de translation réelle mais est qualitativement correcte. La projection de la fonction d'onde sur l'échelle de Wannier Stark $\sum_n |d_n|^2$ est représentée sur la partie supérieure de la figure 19. Il est remarquable de constater que même pour des amplitudes de modulation fortes (jusqu'à six fois la pente initiale pour les paramètres ici choisis), la dynamique reste correctement décrite par notre approche (approximation à une échelle de Wannier Stark) puisque à peine 2% de la fonction a quitté l'échelle initiale au bout d'une période de Bloch. La modulation résonante ne semble pas coupler efficacement les différentes échelles d'états de Wannier Stark.

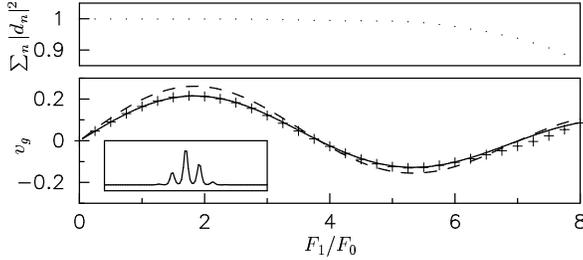


FIG. 19: **Variation de la vitesse maximale avec l'amplitude de la modulation** : La vitesse de translation en fonction de l'amplitude de modulation ($V_0 = 16$, $F_0 = 2$ et $F_1 = 1$) est représentée dans la partie inférieure de la figure. Le trait plein correspond au calcul exact (63) avec $\chi_1 \simeq 0.11$ et $\rho_1 \simeq 0.82$, le trait tiré au calcul approché (39) et les croix au calcul numérique. L'état initial est une distribution gaussienne $d_n(0) \propto e^{-n^2/4}$, le module de la fonction d'onde initiale est représenté en encart. La partie supérieure correspond à la probabilité de présence dans l'ensemble des états de l'échelle fondamentale au bout d'une période de Bloch.

Écart quadratique moyen Après avoir étudié l'évolution de la position moyenne du paquet d'ondes, il est intéressant d'observer l'évolution de l'écart quadratique moyen $\Delta^2(t) = \langle x^2 \rangle(t) - \langle x \rangle^2(t)$ nous renseignant ainsi sur l'étalement du paquet d'ondes.

Le calcul, bien que long, est sans difficulté, il est reporté au complément I. Nous y montrons que l'écart quadratique peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degrés deux en $Q(t)$. Par souci de simplicité, nous ne considérons ici que le cas de la résonance. Le terme quadratique en $Q(t)$ est alors dominant et permet de rendre compte de l'étalement du paquet d'ondes. Nous obtenons :

$$\Delta^2(t) - \Delta^2(0) \simeq D^2 t^2$$

avec le facteur de diffusion D^2 :

$$D^2 = \Omega^2 \left(2 - \left[\sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) + \text{c.c.} \right]^2 + \left[\sum_p d_p(0) d_{p+2}^*(0) + \text{c.c.} \right] \right). \quad (64)$$

L'étalement est asymptotiquement linéaire en temps, il est entièrement caractérisé par le facteur de diffusion D . Comme dans l'étude de la position moyenne, nous introduisons les cohérences entre premiers voisins (59) et entre seconds voisins

$$\sigma_2 \equiv \sum_n d_n(0) d_{n+2}^*(0)$$

et posons $\sigma_1 \equiv \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $\sigma_2 \equiv \rho_2 e^{i\theta_2}$.

Le facteur de diffusion s'écrit alors plus simplement

$$D^2 = 2\Omega^2 [1 - 2\rho_1^2 \cos^2(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)]. \quad (65)$$

La diffusion du paquet d'ondes ne dépend donc pas uniquement de la cohérence moyenne entre proches voisins σ_1 mais aussi de la cohérence moyenne entre seconds voisins σ_2 . Pour comprendre le rôle des cohérences, prenons deux exemples.

Forme carrée Supposons que la distribution initiale d'états soit sous forme d'une fonction porte avec un déphasage constant entre états voisins

$$\begin{cases} d_n(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ink_0} & \text{si } 0 < n < N \\ d_n(0) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (66)$$

Les cohérences se calculent simplement $\sigma_1 = \frac{N-1}{N} e^{ik_0}$ et $\sigma_2 = \frac{N-2}{N} e^{i2k_0}$. Le facteur de diffusion est alors donné par :

$$D^2 = 2\Omega^2 \left[\frac{2N-1}{N^2} - \frac{1}{N^2} \cos(2k_0) \right].$$

Asymptotiquement, l'étalement est linéaire de constante

$$D = \left| \frac{2\Omega}{N} \right| \sqrt{N - \cos(k_0)^2}. \quad (67)$$

Lorsque le nombre N d'états initialement peuplés augmente, la diffusion diminue et devient moins sensible à la phase initiale. Nous avons déjà illustré ce fait sur la figure 18. La figure 20-a représente l'évolution du coefficient de diffusion D , en fonction du nombre d'états initialement peuplés, calculée numériquement par une intégration de l'équation de Schrödinger, à l'aide des expressions (65) et (67). On observe un parfait accord entre résultats analytiques et simulation numérique.

Le cas $N = 1$ correspond à un seul état de Wannier Stark initialement peuplé. Dans ce cas, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ et l'on a simplement $\Delta^2(t) - \Delta_0^2 \simeq 2(\Omega t)^2$: nous retrouvons le mouvement de diffusion déjà décrit et représenté sur la figure 14.

Forme douce Supposons maintenant que la distribution initiale d'états soit une forme douce avec un déphasage constant entre états voisins

$$d_n(0) = f(n)e^{-ink_0}, \quad (68)$$

la forme douce implique qu'il y ait une faible variation de puits en puits *i.e.* $f(n) \gg \frac{df}{dn}$. Les cohérences se calculent alors simplement²⁵ en posant

$$\varepsilon^2 \equiv \sum_n \left(\frac{d}{dn} f(n) \right)^2$$

et nous obtenons : $\sigma_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) e^{ik_0}$ et $\sigma_2 = (1 - 2\varepsilon^2) e^{i2k_0}$, soit :

$$D^2 = 4\Omega^2 \varepsilon^2 \sin(k_0)^2.$$

Asymptotiquement, l'étalement est linéaire en temps $\Delta(t) = Dt$ de constante

$$D = |2\Omega\varepsilon \sin(k_0)|. \quad (69)$$

L'étalement est alors maximal pour $k_0 = \pm\pi/2$ et nul pour $k_0 = 0, \pi$. Le paramètre ε caractérise ici l'aspect doux et lisse de l'état initial. Contrairement au cas précédent, la diffusion peut être gelée par un choix judicieux du rapport de phase initiale entre états voisins.

La figure 20-b montre l'évolution du coefficient de diffusion D pour une distribution initiale gaussienne : $f(n) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi/2}}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$ en fonction de σ . L'accord quantitatif est ici aussi très bon. Il n'est pas difficile de montrer que pour une telle distribution, $\varepsilon = \frac{1}{\sigma}$; le trait tiré correspond au coefficient de diffusion calculé avec l'expression (69).

Dans ces deux cas, nous remarquons que le coefficient de diffusion, contrairement à la vitesse de translation, dépend

²⁵ On déduit facilement $\sigma_1 = [\sum_n f(n)f(n+1)] e^{ik_0}$ le calcul de $\sum_n f(n)f(n+1)$ peut se faire en développant $f(n+1)$ en série de Taylor : $f(n)f(n+1) = f^2(n) + \frac{d}{dn}(f^2(n)) + \frac{1}{4} \frac{d^2}{dn^2}(f^2(n)) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dn}f(n)\right)^2$ on obtient alors $\sum_n f(n)f(n+1) = 1 - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{d}{dn}f(n)\right)^2 \simeq 1$ du fait de la condition $f(x) \gg \frac{df}{dx}$. On obtient de même $\sigma_2 = \left(1 - 2 \sum_n \left(\frac{d}{dn}f(n)\right)^2\right) e^{i2k_0} \simeq e^{i2k_0}$.

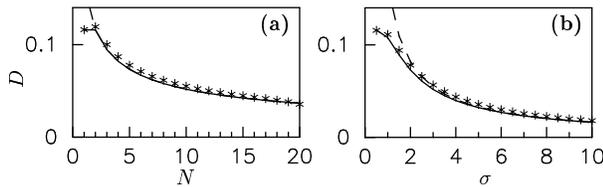


FIG. 20: **Coefficient de diffusion en fonction de la largeur de la distribution initiale** : Le coefficient de diffusion est représenté pour $k_0 = \pi/2$, sur (a) pour une distribution initiale carrée (66) en fonction du nombre de puits N , sur (b) pour distribution initiale gaussienne $f(n) \propto e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$ en fonction de la largeur σ de la distribution. Le trait plein correspond à la solution analytique (65) et les étoiles correspondent au calcul numérique ($V_0 = 12$, $F_0 = 2$ et $F_1 = 1$). Le trait tiré correspond à (a) à (67) et (b) l'approximation de forme douce (69).

de l'étalement initial du paquet d'ondes : plus l'état initial est large, plus la diffusion est lente. De plus, si l'état initial présente une variation brutale de population – cas de la forme carrée – alors la dynamique sera toujours diffusive, par contre si la variation de population est douce alors un choix judicieux du rapport de phase entre états voisins permet d'augmenter ou au contraire d'annuler la diffusion.

Le calcul de la position moyenne et du coefficient de diffusion nous a ainsi permis de caractériser parfaitement la dynamique du paquet d'ondes.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié de manière analytique la dynamique d'un paquet d'ondes dans un réseau incliné soumis à une modulation harmonique de la pente du réseau. Cette étude a été menée en utilisant la base des états de Wannier Stark présentée au chapitre 1 et qui est bien adaptée à la description de l'état d'un atome refroidi par laser. Nous avons pu ainsi mettre en évidence des dynamiques cohérentes variées selon la fréquence de la modulation et la préparation initiale du paquet d'ondes.

L'étude de la dynamique dans le cas particulier, mais néanmoins réaliste, d'un état initial "doux" en utilisant les outils standards de la physique des ondes, nous a révélé la richesse dynamique de la modulation résonnante. Des phénomènes de translation et de diffusion du paquet d'ondes dans le réseau incliné ont ainsi pu être mis en exergue, le paquet d'ondes peut, par exemple, grimper et dévaler le potentiel avec la même vitesse.

La solution analytique du système nous a permis, au prix d'un développement plus mathématique, de généraliser ces résultats à un état initial de forme arbitraire et de mettre clairement en évidence l'influence fondamentale des cohérences quantiques initiales sur la dynamique. Une interprétation simple de la dynamique en terme d'interférences quantiques a alors été dégagée. La dynamique dans un réseau incliné modulé constitue ainsi une illustration simple des phénomènes d'interférence quantiques conduisant ici au transport ou à la diffusion atomique.

Notons pour conclure que certains éléments du cadre d'étude ne sont pas restrictifs. En particulier, les résultats ne dépendent pas qualitativement, de la forme du puits de potentiel, tant que celui-ci accueille au moins un état localisé et le choix d'un réseau de forme sinusoidale n'a été fait que par simplicité. De même, les résultats ne dépendent pas de l'échelle des états de Wannier Stark utilisée et sont généralisables tant que l'état initial est décrit par une seule échelle d'états. Le cas d'un état initial décrit par plusieurs échelles d'états peut néanmoins être interprété à la lumière des précédents résultats à condition que des résonances accidentelles ne conduisent pas à des couplages entre états de différentes échelles. Enfin, moduler la pente du réseau n'est pas l'unique moyen pour obtenir des résonances, dans le complément G nous envisageons la modulation d'autre paramètre du réseau incliné.

3 Dynamique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné

Contents

3.1	La condensation de Bose Einstein	26
3.2	Modélisation d'un condensat dans un réseau incliné .	29
3.3	Un seul état initialement peuplé	32
3.4	Une dynamique hamiltonienne classique ?	35
3.5	Résonances et chaos	37
3.6	Conclusion	38

La condensation de Bose Einstein est l'accumulation macroscopique de particules bosoniques – de spin entier – dans l'état fondamental d'un puits de potentiel. Cet effet, prédit en 1924 par Albert Einstein pour un gaz parfait, a été observé en 1995 dans une série d'expériences utilisant des vapeurs de Rubidium [28] et de sodium [29] confinées dans un piège magnétique et refroidis à très basse température, de l'ordre d'une fraction de micro-kelvin.

Le comportement non classique de hélium liquide en dessous de 2,2K démontré expérimentalement par J.F. Allen et A.D. Misener en 1938 [30] a rapidement été interprété par F. London [31] comme une conséquence de la condensation de Bose Einstein. Bien que l'hélium liquide soit très loin du gaz parfait de bosons dans la mesure où les interactions entre atomes sont extrêmement importantes, la superfluidité de l'hélium fut durant plusieurs décennies la manifestation expérimentale de référence de la condensation de Bose-Einstein, présentée dans tous les manuels de physique statistique.

Depuis 1995, de très nombreuses études, tant théoriques qu'expérimentales, portant sur les condensats de Bose Einstein atomiques, ont été publiées. Un tel engouement traduit l'immense attrait des gaz atomiques condensés dû au fait qu'ils possèdent une cohérence quantique macroscopique. Or, comme nous l'avons illustré dans les chapitres précédents, ce sont les cohérences quantiques qui induisent les interférences et génèrent en grande partie la richesse de la dynamique quantique. Les condensats atomiques ayant une dimension de l'ordre de quelques μm , ils permettent ainsi d'étudier expérimentalement des dynamiques quantiques avec un objet 10000 fois plus gros qu'un atome.

Comme le gaz atomique est dilué, la dynamique du gaz condensée est correctement décrite à très basse température par une approche de champ moyen. Cette approche, qui prend en compte les collisions entre bosons, décrit le gaz condensé par une fonction d'onde unique. Son évolution est décrite par une équation de Schrödinger à laquelle un terme non-linéaire est adjoint. La présence de ce terme est hautement intéressante car elle place le domaine d'étude au carrefour de la mécanique quantique et de la physique non-linéaire. Ainsi par exemple, l'existence de solitons – phénomène purement non linéaire – a-t-elle pu être mise en évidence expérimentalement et théoriquement dans des condensats de Bose Einstein [32].

Dans ce chapitre, après avoir brièvement introduit la théorie de champ moyen, nous l'utilisons pour étudier en détail la dynamique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné. Récemment, l'utilisation des potentiels lumineux a permis la mise en évidence d'oscillations de Bloch avec une vapeur de Rubidium condensé [33]. Nous avons en effet vu au chapitre 1 que la dynamique dans ce potentiel, décrit dans la base des états de Wannier-Stark, illustre parfaitement l'impact des cohérences quantiques. Nous nous proposons donc ici d'étudier dans ce système simple l'influence du terme non linéaire sur la dynamique cohérente. Nous montrons que l'étude de la dynamique quantique de ce système peut être ramenée à l'étude d'un *système dynamique hamiltonien classique*. Cette conclusion originale nous permet de disposer alors de toute la panoplie des outils standards de la mécanique hamiltonienne classique pour caractériser la dynamique quantique.

Nous montrons en particulier l'existence d'une *dynamique quantique chaotique au sens classique* caractérisée par une évolution chaotique des amplitudes des états de Wannier Stark. Ce résultat est interprété à l'aide d'une image physique très simple qui considère que les niveaux d'énergie des états sont déplacés proportionnellement à la population de l'état.

3.1 La condensation de Bose Einstein

Ce paragraphe n'a comme ambition que de donner un aperçu rapide de la condensation d'un gaz de bosons pour les besoins des paragraphes suivants. Pour un exposé plus complet nous invitons le lecteur à consulter les références [34, 35, 36] dont ce paragraphe s'inspire largement.

3.1.1 De la prédiction d'Einstein aux condensats atomiques gazeux

L'étude d'un gaz parfait²⁶ de N bosons dans une boîte cubique de volume L^3 avec des conditions aux limites périodiques, révèle l'existence d'une transition de phase à la limite thermodynamique [36] ($L, N \rightarrow \infty$ avec $\rho = N/L^3$ constant). Cette transition de phase se produit à une température T_c définie par

$$\rho \lambda_{dB}^3(T_c) \simeq 2,612 \quad (70)$$

où l'on a défini la longueur de de Broglie thermique $\lambda_{dB}(T) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$. Le critère de transition (70) a une interprétation géométrique simple, ρ est en effet lié à la distance moyenne $\langle d \rangle$ entre particules : $\rho = \langle d \rangle^{-3}$; ce critère traduit donc le recouvrement des fonctions d'onde atomiques.

Le paramètre d'ordre de cette transition est la fraction N_0/N de particules dans l'état fondamental. Pour des températures inférieures à T_c , cette fraction reste finie à la limite thermodynamique alors qu'elle tend vers zéro pour les températures supérieures. Pour $T < T_c$ le nombre de particules dans l'état fondamental est macroscopique. L'accumulation macroscopique de particules dans l'état fondamental est ce que l'on appelle une condensation de Bose-Einstein. La principale difficulté pour démontrer expérimentalement la prédiction d'Einstein est qu'aux conditions de densité et

²⁶C'est-à-dire sans interaction entre les particules

de température requises, la plupart des éléments sont dans une phase solide.

Pour maintenir un état gazeux à basse température, il faut travailler avec une densité extrêmement faible; le prix à payer se lit alors directement sur le critère (70), la température critique T_c est très basse. Il faut donc pour réaliser la condensation, obtenir un gaz à très faible température. Les valeurs typiques pour les condensats atomiques sont

$$\rho < 10^{15} \text{ atomes/cm}^3$$

et

$$T < 1\mu\text{K}.$$

Pour atteindre des températures aussi faibles on utilise un refroidissement évaporatif d'un gaz préalablement refroidi par lasers. Le refroidissement évaporatif consiste à évacuer du piège les atomes de vitesse élevée et à laisser se re-thermaliser le gaz puis à recommencer jusqu'à obtenir la température désirée [37]. Cette méthode conceptuellement simple induit malheureusement, une perte considérable du nombre d'atomes piégés.

Très rapidement après la condensation du Rubidium, Wolfgang Ketterle obtient un gaz de sodium condensé [29] puis Randy Hulet réussit à réaliser un condensat d'atomes de lithium [38]. Depuis, des condensats d'atomes d'hydrogène ont été obtenues par Daniel Kleppner [39] et de césium par Rudolf Grimm [40]. Aujourd'hui, de nombreuses équipes de par le monde maîtrisent les techniques de condensation d'un gaz atomique.

3.1.2 Description dans le cadre d'une théorie de champ moyen

L'étude d'un gaz de boson réel implique nécessairement la prise en compte des interactions entre particules. La dynamique du gaz est donc de manière générale un problème à N corps insoluble. Or comme le milieu est dilué, les atomes interagissent faiblement entre eux. Une approche de champ moyen est donc possible et permet de dériver des équations simples permettant de décrire en grande partie la dynamique des condensats de Bose Einstein. Nous décrivons ici les fondements de la théorie de champ moyen, un exposé plus complet peut être trouvé dans [36].

Pour décrire le gaz de bosons, il est plus simple d'utiliser le formalisme de la seconde quantification. Nous devons alors introduire les opérateurs de champs bosonique $\hat{\Psi}(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ qui respectivement, annihile et crée une particule au point \vec{r} [41]. Cet opérateur permet d'écrire le hamiltonien du système de N bosons

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} \\ & + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V_{\text{bin}}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \\ & \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r}' d\vec{r} \end{aligned} \quad (71)$$

où m est la masse d'un atome, $V(\vec{r})$ est le potentiel extérieur et $V_{\text{bin}}(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ le potentiel d'interaction binaire. Le premier terme de (71) correspond à l'énergie de chaque

particule séparément dans le potentiel extérieur $V(\vec{r})$; le second est l'énergie de collision entre deux particules.

L'étude de l'évolution de l'état d'un système à N particules est extrêmement compliquée et nécessite des méthodes d'approximations. La plus simple mais néanmoins fructueuse est la théorie de champ moyen. Celle-ci consiste ici à étudier non pas l'évolution de l'état du système mais de la valeur moyenne $\Phi(\vec{r}, t)$ de l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\vec{r})$ définie par

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) & \equiv \langle \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle \\ & = \langle \Psi | \hat{\Psi}(\vec{r}) | \Psi \rangle, \end{aligned}$$

où $|\Psi\rangle$ est l'état du gaz à l'instant t . La fonction $\Phi(\vec{r}, t)$, qui décrit la distribution de probabilité de population des états d'énergie du potentiel, est souvent appelée "*la fonction d'onde du condensat*". Le module au carré de la fonction $\Phi(\vec{r}, t)$ est alors la densité locale du gaz de bosons.

L'étude de la fonction d'onde $\Phi(\vec{r}, t)$ décrit les particules dans la phase condensée du gaz, elle n'a donc de sens que lorsque la grande majorité des atomes est dans la phase condensée, c'est à dire lorsque la température du gaz atomique et bien en deçà de la température critique - *i.e.* lorsque $T \ll T_c$. Elle permet néanmoins de décrire correctement les comportements dynamiques reproduits expérimentalement.

La description des interactions entre particules n'est pas chose aisée dans la mesure où l'on ne connaît pas avec précision le potentiel d'interaction. Le problème peut néanmoins être simplifié en prenant en considération les conditions particulières de ces interactions [36] :

- Premièrement le gaz de bosons est peu dense ($10^{15} \text{ atomes/cm}^3$), les collisions à trois particules sont donc peu probables et on peut se limiter aux collisions binaires.
- Les collisions sont élastiques.
- Enfin, les collisions ayant lieu à très basse énergie, les amplitudes de diffusion sont dominantes dans l'onde s [4].

Pour des collisions dans l'onde s , un seul paramètre suffit à décrire la collision : la longueur de diffusion a . Cependant une faible erreur sur le potentiel d'interaction peut donner des erreurs importantes sur ce paramètre essentiel. La démarche usuelle est donc d'utiliser un potentiel d'interaction *ad hoc* dont les paramètres sont ajustés pour reproduire la longueur de diffusion mesurée expérimentalement. Le potentiel effectif le plus simple est un potentiel de forme delta :

$$V_{\text{bin}}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = k\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (72)$$

qui modélise les collisions binaires comme des collisions de sphères dures. Il n'y a alors qu'un unique paramètre à ajuster k . Pour obtenir la longueur de diffusion voulue, il faut poser :

$$k \equiv \frac{4\pi\hbar^2}{m} a. \quad (73)$$

La longueur de diffusion a est directement reliée à la section totale de collision $\sigma = 4\pi a^2$.

La longueur de collision dépend de l'atome et de son état interne. Nous donnons dans le tableau 3 des valeurs de longueur de diffusion pour les atomes les plus fréquemment

TAB. 3: Longueur de diffusion atomique

	H	⁷ Li	²³ Na	⁸⁷ Rb
a	0,06 nm	-1,35 nm	2,65 nm	5,4 nm

condensés. Nous voyons en particulier que la longueur de diffusion peut être négative comme positive; conduisant à un potentiel (72) attractif ou répulsif.

Nous allons maintenant déterminer l'équation d'évolution de la fonction d'onde du condensat. En substituant au potentiel d'interaction, le potentiel effectif (72), dans l'expression du hamiltonien (71), nous avons :

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} + \frac{1}{2} k \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (74)$$

L'évolution temporelle de la fonction d'onde du condensat s'obtient comme l'évolution de la valeur moyenne d'un opérateur [4] :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = \left\langle \left[\hat{H}, \hat{\Psi}(\vec{r}) \right] \right\rangle.$$

En utilisant les relations de commutation de l'opérateur champ $[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r}, \vec{r}')$, $[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}')] = 0$ et $[\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0$, nous obtenons :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Phi(\vec{r}, t) + k \left\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right\rangle. \quad (75)$$

Cette équation n'est pas auto-cohérente dans la mesure où l'évolution de la valeur moyenne $\left\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right\rangle$ n'est pas déterminée. L'idée est donc de rendre l'équation (75) auto-cohérente en pratiquant l'approximation simplifiée "standard" :

$$\left\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right\rangle \simeq \left\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \right\rangle \left\langle \hat{\Psi}(\vec{r}) \right\rangle \left\langle \hat{\Psi}(\vec{r}) \right\rangle \simeq |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t).$$

L'approximation (76) se justifie ici car le gaz atomique est dilué, c'est à dire que la distance moyenne entre particule $\langle d \rangle$ est bien supérieure à la longueur de diffusion a i.e. $n_0 a^3 \ll 1$.

Pour comprendre cette approximation, il faut revenir sur la théorie des collisions. Pour simplifier, nous supposons que le potentiel extérieur est nul $-V(\vec{r}) = 0$ - c'est à dire que nous traitons le cas des particules libres - et nous travaillons à une dimension spatiale notée x . Supposons alors qu'une particule 1 assimilable à une onde plane de nombre d'onde k entre en collision avec une particule 2 décrite par une onde plane de nombre d'onde k' en $x = 0$. Le résultat de la collision est un déphasage de la fonction d'onde de la particule 1 de $(k - k')a$ où a est la longueur de diffusion.

La prochaine collision de la particule 1 aura lieu autour de $x \simeq \langle d \rangle$, mais comme $\langle d \rangle \gg a$, lors de cette collision, le déphasage dû à la collision précédente sera extrêmement faible comparé au déphasage dû à l'évolution libre kx . Et comme il y a une incertitude sur la position x de la collision, aucune distinction ne pourra être faite entre les nombres d'onde k' . Lors de la collision suivante, l'atome aura perdu "la mémoire" de la collision précédente. Le système possède donc une faible corrélation entre particules ce qui justifie l'approximation (76).

Utilisant l'approximation (76), nous obtenons une équation auto-cohérente pour l'évolution de la fonction d'onde du condensat :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \phi(\vec{r}, t) + k |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t). \quad (76)$$

Cette équation est appelée *équation de Gross-Pitaevskii*. Nous pouvons immédiatement remarquer que les termes linéaires en ϕ correspondent à l'équation de Schrödinger; le terme non-linéaire décrit les collisions binaires comme un potentiel, répulsif ou attractif selon le signe de la longueur de diffusion, proportionnel à la densité de présence $|\phi(\vec{r}, t)|^2$.

Dans le formalisme de la seconde quantification, l'opérateur nombre de particules \hat{N} s'écrit en fonction du champ quantique

$$\hat{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (77)$$

la valeur moyenne de l'opérateur nombre est alors le nombre de particules N :

$$\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N.$$

En utilisant l'hypothèse de faible corrélation entre particules, nous voyons immédiatement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = N.$$

La fonction d'onde du condensat n'est donc pas normée à l'unité comme une fonction d'onde atomique usuelle. Pour se ramener à cette situation habituelle, nous introduisons une nouvelle fonction d'onde du condensat $\bar{\phi}$, définie par

$$\phi = \sqrt{n_0} \bar{\phi}$$

où n_0 est la densité atomique moyenne. Dans la suite, nous omettons cette distinction et noterons ϕ la fonction d'onde du condensat normée à l'unité. Son évolution est alors donnée par

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \phi(\vec{r}, t) + n_0 k |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t). \quad (78)$$

Nous voyons alors que le terme non-linéaire dépend de la longueur de diffusion et de la densité atomique moyenne. Cette équation est semblable à l'équation de propagation d'un champ électrique dans un milieu Kerr.

3.1.3 Condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné

Dans la suite, nous nous intéressons à la dynamique d'un condensat dans un réseau incliné unidimensionnel. Expérimentalement, il est possible de se rapprocher de ce cas théorique en introduisant un potentiel de confinement dans la direction transverse à celle du réseau incliné. Le potentiel mécanique de l'équation de Gross Pitaevskii (78) est alors de la forme

$$V(r, z) = V_0 \cos(2k_L x) + Fx + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2$$

où nous avons noté x la direction du réseau incliné et r la direction transverse; le potentiel de confinement a été choisi de forme parabolique conformément aux expériences standards. Le condensat est ainsi confiné dans la direction transverse par rapport à son étalement longitudinal, il est alors dans une configuration dite en "forme de cigare".

Si le potentiel transverse est "raide" :

$$\hbar\omega_\perp \gg \frac{1}{2}n_0k, \quad (79)$$

la différence d'énergie entre les états transverse est très supérieure à l'énergie d'interaction entre particules. Nous pouvons alors supposer que le couplage par collisions des états transverse est négligeable, et que l'état transverse correspond à chaque instant à l'état fondamental du potentiel de confinement

$$\beta_\perp(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}n_0^{-1/3}a_{ho}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_{ho}}\right)^2}$$

où nous avons introduit la longueur caractéristique de variation du potentiel transverse :

$$a_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}.$$

Nous posons donc

$$\phi(r, x, t) = \Psi(x, t)\beta_\perp(r).$$

L'évolution de la fonction d'onde du condensat se réduit ainsi à une évolution unidimensionnelle

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \left(\frac{p^2}{2m} + V_0 \cos(2k_L x) + Fx\right)\Psi(z, t) \\ &+ n_0k \left(\int |\beta(r)|^4 r dr\right) |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t) \\ &+ E_\perp \Psi(z, t) \end{aligned}$$

où $E_\perp \equiv \frac{1}{2}\hbar\omega_\perp$ est l'énergie de l'état transverse qui est éliminée dans la suite en introduisant la transformation unitaire suivante : $\Psi(x, t) \leftarrow \Psi(x, t) e^{-i\frac{E_\perp}{\hbar}t}$.

En introduisant les unités réduites définies au tableau 1 nous obtenons alors l'équation d'évolution adimensionnée

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \left(\frac{p^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + Fx\right)\Psi(x, t) \\ &+ g|\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$g \equiv \frac{1}{4\pi^2} \frac{k n_0^{1/3}}{E_0 a_{ho}^2}.$$

En remplaçant E_0 par l'expression du tableau 1, et k par l'expression (73) nous obtenons alors

$$g = \frac{1}{4\pi} n_0^{1/3} a \frac{\lambda_L^2}{a_{ho}^2} \quad (80)$$

où a est la longueur de diffusion atomique dans l'état considéré. Le paramètre (80) caractérise l'importance des collisions entre particules traitées par la théorie de champ moyen, il est très important, car il va provoquer les phénomènes dynamiques nouveaux. D'un point de vue mathématique, il traduit la non-linéarité du système. En effet, pour $g = 0$, nous retrouvons exactement l'équation de Schrödinger. Le paramètre non-linéaire peut ainsi être modifié en faisant varier la raideur du potentiel transverse. Nous pouvons de plus remarquer que, étant donnée la condition (79) sur la raideur du potentiel, notre description est valable pour $g \gg n_0^{4/3} a^2 \lambda_L^2$, les densités atomiques étant de l'ordre de 10^{21} atomes/m³ et les longueurs d'onde des lasers de l'ordre du μm , nous avons $g \gg 10^{-2}$. Nous voyons ainsi que notre description correspond à des paramètres non-linéaires pas trop faibles.

3.2 Modélisation d'un condensat dans un réseau incliné

Nous avons vu au chapitre 1 que la dynamique quantique dans un réseau incliné, s'interprétait très facilement en introduisant la base des états de Wannier Stark. Ces états étant les états propres du réseau incliné, l'évolution temporelle de la fonction d'onde est alors immédiate dès que l'on connaît les amplitudes initiales de chaque état. La description des oscillations de Bloch nous avait permis de mettre clairement en évidence l'importance des cohérences quantiques entre états voisins. L'étude de la dynamique d'un condensat dans un réseau incliné permet donc de caractériser l'apport du terme non-linéaire, dû aux collisions entre particules, à la dynamique cohérente. Dans ce paragraphe, nous introduisons une modélisation de la dynamique d'un condensat dans un réseau incliné à l'aide des états de Wannier Stark.

Nous supposons pour commencer, que la dynamique du condensat est correctement décrite par l'équation de Gross Pitaevskii unidimensionnelle (80). Nous supposons de plus que la dynamique puisse être décrite par l'échelle des états de Wannier Stark fondamentaux de chaque puits de potentiel φ_n – cela se justifie ici car l'énergie du condensat est très basse – qui sont considérés comme les états propres du réseau incliné pour $g = 0$. *Nous négligeons de fait les transitions dues aux collisions binaires entre particules vers les autres échelles d'états de Wannier Stark.* Ces approximations nous amènent à poser :

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(x) \quad (81)$$

où les coefficients $c_n(t)$ sont les amplitudes instantanées de chaque état de Wannier Stark. Dans le même état d'esprit que dans le chapitre 2, nous allons décrire l'évolution de la dynamique quantique par un système dynamique portant sur les amplitudes c_n . Dans le chapitre 2, des couplages linéaires entre états apparaissaient du fait de la modulation

de la pente du réseau; nous verrons ici que les couplages entre états sont le fait du potentiel attractif ou répulsif généré par les collisions entre particules, la nouveauté introduite étant que ces couplages sont ici non-linéaires.

Nous introduisons donc (81) dans l'équation (80) :

$$i \sum_p \dot{c}_p \varphi_p(x) = \sum_p E_p c_p \varphi_p(x) + g \sum_{o,p,q} c_o c_p^* c_q \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x). \quad (82)$$

L'équation d'évolution de chaque amplitude est obtenue en projetant sur l'ensemble des états de Wannier-Stark et en utilisant la propriété ortho-normalisation (7) des états. Nous obtenons alors un système d'équations différentielles non-linéaires couplées portant sur les amplitudes $c_n(t)$:

$$i\dot{c}_n = E_n c_n + g \sum_{o,p,q} c_o c_p^* c_q \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx. \quad (83)$$

Les termes non-linéaires dépendent d'une intégrale de recouvrement entre quatre fonctions d'onde de Wannier Stark.

La compréhension des effets non-linéaires implique l'étude de ces intégrales de recouvrement. Ce paragraphe démontre quelques propriétés simples de ces intégrales tandis qu'une étude plus détaillée est présentée dans le complément J. Dans la suite, nous utilisons la notation suivante :

$$X_{n,p}^{o,q} \equiv g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx. \quad (84)$$

En comparant l'expression (84) avec (71) et en prenant en compte les approximations effectuées – potentiel de forme delta, théorie de champ moyen et décomposition dans la base de Wannier Stark – il est clair que l'intégrale $X_{n,p}^{o,q}$ traduit l'amplitude de probabilité que deux atomes initialement dans les états φ_o et φ_q transitent vers les états φ_p et φ_n sous l'effet d'une collision binaire.

Les intégrales de recouvrement (84) sont invariantes par permutation d'indice *i.e.*

$$X_{n,p}^{o,q} = g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx = X_{o,q}^{p,n} = X_{n,q}^{p,o}. \quad (85)$$

Nous avons vu précédemment que les propriétés de symétrie des états de Wannier Stark (9) permettent de fortement simplifier l'étude de la dynamique, c'est encore valable ici puisque en introduisant (9) dans (84), nous trouvons :

$$X_{n,p}^{o,q} = X_{0,p-n}^{o-n,q-n} = g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x-n) \varphi_{o-n}(x-n) \varphi_{p-n}(x-n) \varphi_{q-n}(x-n) dx \quad (86)$$

ce qui traduit l'invariance par translation de ces amplitudes de probabilité : un atome a la même probabilité de transiter

par collision d'un état vers son $l^{\text{ème}}$ voisin, quel que soit son état d'origine. Nous pouvons alors réécrire (83) comme

$$i\dot{c}_n = E_n c_n + \sum_{k,l,m} X_{0,k}^{l,m} c_{n+l} c_{n+k}^* c_{n+m}. \quad (87)$$

D'autre part, les fonctions d'onde des états de Wannier Stark étant fortement localisées dans le réseau incliné, il est évident que les intégrales de recouvrement (84) impliquant des fonctions d'onde localisées dans des puits éloignés seront faibles comparées à celles impliquant quatre fonctions d'onde localisées dans le même puits $X_{n,n}^{n,n}$. Or, en utilisant la propriété de symétrie (86), nous avons directement $X_{n,n}^{n,n} = X_{0,0}^{0,0}$. Nous pouvons alors formaliser cette évidence en notant que

$$X_{0,0}^{0,0} \gg X_{0,k}^{l,m} \text{ avec } |k| + |l| + |m| > 0, \quad (88)$$

ce qui revient à dire que les collisions binaires entre particules dans le même état de Wannier Stark sont dominantes.

Ayant mis en évidence la hiérarchie des intégrales de recouvrement (88), il est naturel de chercher à caractériser en premier lieu, l'effet des collisions entre particules dans un même état. Nous considérons donc temporairement que ces collisions, ce qui revient à poser

$$X_{0,k}^{l,m} = X_{0,0}^{0,0} \delta_{0,k} \delta_{k,l} \delta_{l,m}.$$

Le système dynamique (87) devient alors très simple puisque les équations se découpent les unes des autres :

$$i\dot{c}_n = E_n c_n + X_0 |c_n|^2 c_n \quad (89)$$

où nous avons noté pour alléger l'écriture :

$$X_0 \equiv X_{0,0}^{0,0}.$$

Le système (89) se résout alors sans peine et les solutions sont de la forme

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-i\omega_n t}$$

avec

$$\omega_n \equiv E_n + X_0 |c_n(0)|^2. \quad (90)$$

Nous pouvons remarquer que comme dans le cas de la dynamique atomique, la population de chaque état est constante au cours du temps. Le terme non-linéaire n'agit donc pas sur les populations des états mais sur leurs phases. Dans le cas de la dynamique atomique, la phase évolue linéairement dans le temps, proportionnellement à l'énergie de l'état. Nous remarquons ici que l'évolution de la phase est toujours linéaire mais que le coefficient de proportionnalité (90) est corrigé d'un terme traduisant l'effet des collisions entre particules du même état. Nous pouvons ainsi caractériser l'effet du terme dominant comme un déplacement du niveau d'énergie, proportionnel à la population de l'état, par rapport à l'énergie propre E_n .

La caractéristique nouvelle est que, *le déplacement de niveau dépend de la population de l'état*. Cet effet nouveau provient de la non-linéarité du terme de collision, il est similaire à l'effet Kerr optique qui modifie l'indice de réfraction du milieu proportionnellement à l'intensité lumineuse. Nous verrons dans la suite que cette image des niveaux

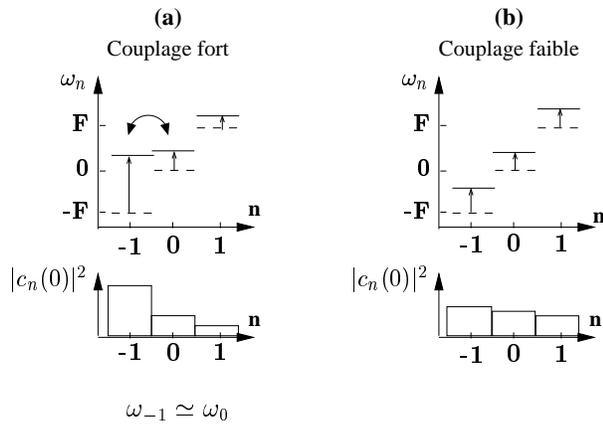


FIG. 21: **Exemples de niveaux déplacés** : les fréquences déplacées (en traits pleins) par rapport aux états propres (en traits tirets) sont représentées pour deux distributions de population. Dans le premier cas (a), deux fréquences déplacées sont quasi-dégénérées $\omega_{-1} \simeq \omega_0$: les termes de collisions entre les états φ_{-1} et φ_0 comme $X_{0,0}^{0,1}$ vont fortement coupler ces deux états. Dans le second cas (b), les fréquences déplacées sont éloignées les unes des autres, le couplage entre les états sera de faible importance.

d'énergie ou des fréquences déplacées (90) va souvent intervenir comme une interprétation physique essentielle de la dynamique. Pour une dynamique atomique, les énergies des états propres du potentiel caractérisent entièrement le spectre des fréquences de Bohr, et l'état initial influe par le biais des cohérences quantiques sur la dynamique. Ici, l'état initial, en plus d'influer par le biais de ses cohérences quantiques, modifie les niveaux d'énergie en fonction de ses populations, il modifie donc le spectre des fréquences de Bohr.

Or, il faut se rappeler que nous ne considérons ici que l'effet du terme dominant caractérisant les collisions entre particules d'un même état. Une description correcte doit en plus intégrer les collisions entre particules de différents états. Nous pouvons ici entre-apercevoir la richesse dynamique potentielle en nous remémorant la théorie des perturbations indépendantes du temps utilisée en dynamique atomique [4]. Celle-ci nous montre que des petits couplages linéaires ont un effet majeur lorsque deux états ont des énergies proches, de l'ordre du terme de couplage. Or ici, non seulement les termes de couplage sont non-linéaires, mais les énergies des états dépendent des populations initiales des états. En clair, selon les populations initiales, les termes de collision suivants auront plus ou moins d'importance.

La figure 21 envisage schématiquement deux cas de figure : sur la figure 21-a deux fréquences déplacées d'états voisins sont quasi dégénérées

$$\omega_0 - \omega_{-1} = F + X_0 \left[|c_0(0)|^2 - |c_1(0)|^2 \right] \ll 1,$$

il semble alors clair que les termes de (87) traduisant les collisions entre particules dans les états φ_0 et φ_{-1} – soit $X_{0,1}^{0,0}$, $X_{0,1}^{0,1}$ ou encore $X_{0,1}^{1,1}$ – vont fortement coupler ces deux états induisant un transfert de population entre eux. Par contre, sur la figure 21-b, les populations des états sont sensiblement identiques et les fréquences déplacées sont distinctement séparées, il semble fort probable que les termes supplémentaires de (87) vont alors avoir une faible impor-

tance, les populations des états seront dans ce cas sensiblement constantes.

Qualitativement, nous pouvons dès lors distinguer deux régimes différents, celui d'une distribution de population initiale des états de Wannier Stark "douce" et celui d'une distribution "accidentée".

- Si la distribution initiale est douce, la répartition des niveaux d'énergie en échelle sera faiblement déformée puisque les niveaux voisins auront sensiblement la même population et donc le même décalage d'énergie. Les niveaux d'énergie resteront bien séparés si bien que l'influence des termes de perturbation sera a priori faible.
- Si par contre la distribution initiale est "accidentée", cela implique de fortes disparités de population entre états voisins, il peut alors arriver que deux fréquences déplacées ω_n soient accidentellement dégénérées. Dans un tel cas, les termes de perturbation vont fortement contribuer en couplant les niveaux dégénérés.

Pour aller plus loin, nous voyons qu'il faut prendre en compte dans notre description les termes de collision entre particules dans des états de Wannier Stark différents. Cependant, les fonctions de Wannier Stark étant bien localisées autour d'un puits de potentiel, les intégrales de recouvrement $X_{0,1}^{0,0}$ et $X_{0,-1}^{0,0}$, comme le montre le complément J, dominent le plus souvent les autres termes. Ces intégrales traduisent la probabilité qu'un atome transite sous l'effet d'une collision vers l'état voisin et induit donc des couplages entre états voisins. Nous pouvons donc en première approximation n'ajouter que ces termes principaux au modèle (89), nous obtenons alors notre système modèle²⁷ :

$$\begin{aligned} i\dot{c}_n = & E_n c_n + X_0 |c_n|^2 c_n \\ & + \kappa X_- \left[|c_{n+1}|^2 c_{n+1} + c_n^2 c_{n-1}^* + 2 |c_n|^2 c_{n-1} \right] \\ & + \kappa X_+ \left[|c_{n-1}|^2 c_{n-1} + c_n^2 c_{n+1}^* + 2 |c_n|^2 c_{n+1} \right], \end{aligned} \quad (91)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} X_0 & \equiv X_{0,0}^{0,0} \\ \kappa X_- & \equiv X_{0,-1}^{0,0} \\ \kappa X_+ & \equiv X_{0,1}^{0,0} \end{aligned} \quad (92)$$

pour alléger les notations et mettre en évidence un "petit paramètre" κ définit par

$$\kappa \equiv \frac{|X_{0,1}^{0,0}| + |X_{0,-1}^{0,0}|}{2 |X_{0,0}^{0,0}|} \ll 1.$$

Les deuxième et troisième lignes de l'expression (91) sont alors constituées de termes de perturbation par rapport aux termes de la première ligne qui correspondent au système (89). Il est important de remarquer que *le caractère perturbatif ne dépend pas du paramètre non-linéaire g mais uniquement des paramètres du réseau incliné* à travers le rapport des intégrales de recouvrement.

²⁷Nous avons utilisé les propriétés de translation des intégrales de recouvrements (86) : $X_{1,1}^{1,0} = X_{0,0}^{0,-1}$ et $X_{-1,-1}^{-1,0} = X_{0,0}^{0,1}$.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions la dynamique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné dans le cadre du modèle (91). L'adéquation de ce modèle à la dynamique de l'équation de Gross Pitaevskii (80) est excellente comme nous le montrerons dans la suite par une comparaison directe des résultats numériques.

Nous avons vu en utilisant le modèle (89) que, si l'on néglige les termes de perturbation dans (91), le système est intégrable et les populations des états sont constantes. Il est donc intéressant d'introduire un changement de variable faisant apparaître explicitement ces populations, nous posons donc

$$c_n(t) \equiv \sqrt{I_n(t)} e^{i\theta_n(t)}, \quad (93)$$

les variables I_n et θ_n représentant alors la population et la phase de l'état $\varphi_n(x)$. Les équations d'évolution de ces nouvelles variables se dérivent sans peine :

$$\begin{aligned} \dot{I}_n &= 2\kappa\sqrt{I_n I_{n+1}} (X_+ I_n + X_- I_{n+1}) \sin(\theta_{n+1} - \theta_n) + \\ & 2\kappa\sqrt{I_n I_{n-1}} (X_+ I_{n-1} + X_- I_n) \sin(\theta_{n-1} - \theta_n) \\ \dot{\theta}_n &= -E_n - \frac{1}{2} X_0 I_n \\ & - \kappa\sqrt{\frac{I_{n+1}}{I_n}} (3X_+ I_n + X_- I_{n+1}) \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \\ & - \kappa\sqrt{\frac{I_{n-1}}{I_n}} (3X_+ I_{n-1} + X_- I_n) \cos(\theta_{n-1} - \theta_n). \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le fait que l'évolution des intensités est du premier ordre en κ . Nous pouvons remarquer facilement dans le système (94) que la population totale des états $\sum_n I_n(t)$ est constante.

3.3 Un seul état initialement peuplé

Nous avons vu, dans la section précédente, que la distribution initiale de population des états de Wannier Stark influe considérablement sur la dynamique du système en modifiant le spectre des fréquences de Bohr. Pour caractériser cette influence, et mettre en évidence les couplages entre états dûs aux collisions entre particules peuplant des états voisins, nous considérons ici le cas très simple où l'état initial correspond à un unique état de Wannier Stark. Cet état initial particulier nous permet d'étudier l'influence des populations des états en excluant celles des phases. Nous verrons alors que la dynamique peut s'interpréter simplement en utilisant un modèle à deux états.

Considérons donc le cas simple où, à l'instant initial, un seul état de Wannier Stark est peuplé :

$$I_n(t=0) = \delta_{n,0}. \quad (94)$$

Les termes de perturbation du système (94) couplent entre eux les différents états de Wannier Stark et, de manière générale, les populations des états ne sont plus des constantes, mais oscillent dans le temps. Les effets les plus importants sont attendus lorsque les fréquences déplacées ω_n voisines sont quasiment dégénérées. Compte tenu de la distribution

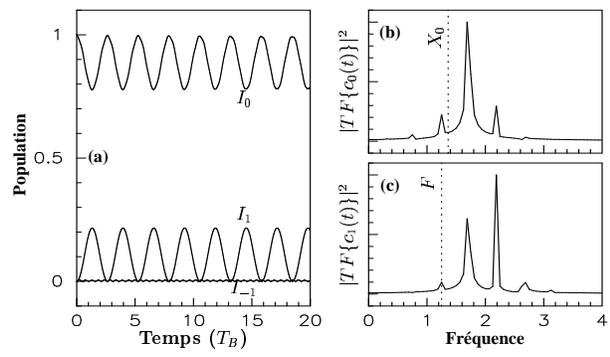


FIG. 22: **Évolution des intensités** : La partie (a) représente l'évolution temporelle des intensités de trois états voisins $I_{-1}(t)$, $I_0(t)$ et $I_1(t)$ avec pour condition initiale $I_n(t=0) = \delta_{n,0}$. Les parties (b) et (c) représentent le spectre des amplitudes de ces deux états couplés respectivement c_0 et c_1 , les traits en pointillés représentent les fréquences déplacées. La figure a été réalisée par une intégration numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii (80) pour les paramètres suivant $V_0 = 25$, $F = 1,25$ et $g = 0,68 - X_{0,0}^{0,0} = 2,004$ - soit $X_0 = 1,35$.

initiale (94), nous avons simplement :

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \omega_{-1} &= -F \\ \omega_0 &= X_0 \\ \omega_1 &= F \\ & \vdots \end{aligned}$$

Selon le signe de g il y a deux possibilités de dégénérescence entre fréquences déplacées voisines :

$$\begin{aligned} g > 0 & \quad \omega_0 \simeq \omega_1 \quad X_0 \simeq -F \\ g < 0 & \quad \omega_0 \simeq \omega_{-1} \quad X_0 \simeq F. \end{aligned}$$

En faisant varier X_0 , on déplace la fréquence ω_0 . Nous pouvons alors contrôler la dynamique en faisant varier ce paramètre.

La figure 22-a représente l'évolution temporelle des intensités pour $F = 1,25$ et $X_0 = 1,35$, les fréquences déplacées ω_0 et ω_1 sont alors quasi dégénérées ($\omega_0 - \omega_1 = 0,08\omega_0$) tandis que ω_0 et ω_{-1} sont bien séparées ($\omega_0 - \omega_{-1} = 2,08\omega_0$). Nous voyons d'une part, une importante oscillation de population entre $I_0(t)$ et $I_1(t)$ ce qui démontre indubitablement que les états φ_0 et φ_1 sont fortement couplés entre eux et d'autre part que la population $I_{-1}(t)$ est quasi constante, il y a donc très peu de couplage entre les états φ_0 et φ_{-1} .

Il est alors très intéressant de comparer les spectres de Fourier des amplitudes des états couplés $c_0(t)$ et $c_1(t)$ représentés sur les figures 22-b et 22-c. En l'absence de termes de perturbation - $\kappa = 0$ - ceux-ci correspondraient à des distributions très "piquées" chacune autour de la fréquence déplacée indiquée par un trait en pointillé sur les figures. Deux constatations s'imposent, d'une part, les spectres sont plus riches que dans le cas non perturbé et les fréquences d'évolution ne correspondent pas aux fréquences déplacées. D'autre part, ces spectres comportent les mêmes fréquences, il y a donc un *accrochage de fréquence* entre les deux états couplés : en l'absence de couplage, les deux états

ont des fréquences d'évolution différentes, le couplage synchronise l'évolution des deux états. Nous reviendrons sur cette notion importante plus loin mais écartons tout de suite une fausse interprétation, il ne s'agit pas d'un phénomène de battement entre les fréquences déplacées mais bien d'une modification du spectre due à un accrochage de fréquence entre les deux états, la fréquence d'évolution des populations n'est donc pas la fréquence de battement entre fréquences déplacées.

Les phénomènes de transfert de population et d'accrochage de fréquence dépendent du paramètre X_0 . Une manière commode de représenter les différentes évolutions dynamiques en fonction d'un paramètre est de tracer un *diagramme de bifurcation* qui représente les maxima ou les minima locaux de la population de chaque état. La figure 23 représente pour diverses valeurs de X_0 , les maxima locaux des populations des états voisins initialement non peuplés et les minima locaux de la population de l'état initialement peuplé $I_0(t)$. Pour faire varier X_0 , nous avons choisi de faire varier g , ce qui ne modifie pas le paramètre de perturbation κ .

Pour le moment, nous nous intéressons aux figures tracées en intégrant numériquement le modèle (91). Nous voyons d'abord que le sens du couplage dépend du signe de g : lorsque g est positif, l'état initialement peuplé $\varphi_0(x)$ est fortement couplé avec l'état suivant $\varphi_1(x)$ alors pour g négatif, il est couplé avec l'état précédent $\varphi_{-1}(x)$. Nous remarquons ainsi qu'il existe une symétrie $g \rightarrow -g$, $n \rightarrow -n$, ce qui se comprend très bien à l'aide des niveaux déplacés. Nous voyons de plus que l'amplitude maximale de l'oscillation de population n'est pas obtenue à la résonance entre fréquences déplacées. L'évolution de l'amplitude des oscillations présente une discontinuité autour de $|X_0/F| \simeq 1, 8$.

La figure 23 permet de juger de la pertinence de la modélisation (91) en comparant les diagrammes de bifurcation obtenus en intégrant numériquement le système d'équations discret (91) et ceux obtenus par une intégration numérique de l'équation de Gross Pitaevskii (80).²⁸

Modèle à deux états Comme le couplage a lieu principalement entre deux états, nous pouvons essayer de caractériser la dynamique en réduisant le système (94) à deux états en posant

$$I_n(t) = 0 \text{ si } n \neq 0, 1;$$

nous considérons alors le cas $g > 0$. La population totale des états

$$J \equiv I_0 + I_1 = 1$$

est constante : nous introduisons la variable différence de population

$$\Delta(t) \equiv I_0(t) - I_1(t).$$

²⁸Il faut tout de même noter le léger écart de comportement autour de $|X_0/F| = 2, 2$: les diagrammes de bifurcation calculés avec l'équation de Gross Pitaevskii (80) montre une oscillation de population de l'état $\varphi_0(x)$ n'apparaissant pas dans la modélisation. Il n'est pas difficile de se convaincre que cette oscillation provient d'un couplage entre les états seconds voisins dû aux termes de collisions du type $X_{0,0}^{0,2}$ qui se manifeste lorsque les fréquences déplacées ω_0 et ω_2 ou ω_{-2} sont quasi-dégénérées. Ces termes n'apparaissent pas dans la modélisation, ces couplages y sont absents. Notons tous de même que l'importance relative de ce couplage est extrêmement faible, ce qui justifie sa non prise en compte.

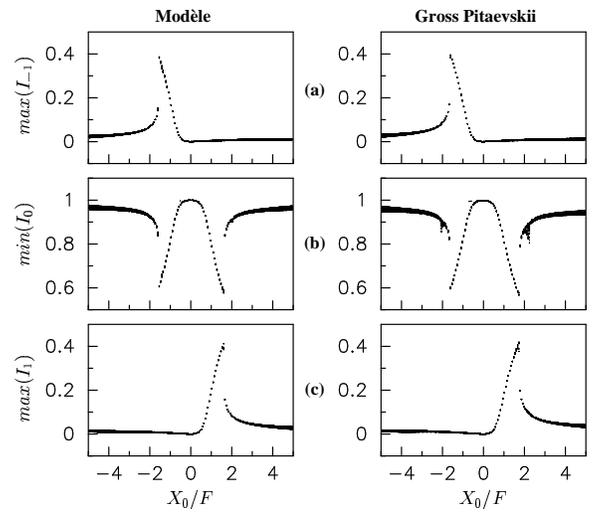


FIG. 23: **Extréma locaux des populations** : Les extréma locaux des populations des états sont représentés en fonction du paramètre X_0/F . Les figures comparent deux à deux les résultats des intégrations numériques de l'équation de Gross Pitaevskii (80) et du modèle (94) pour $V_0 = 25$, $F = 1, 25$ et $-4 < g < 4$ ($\kappa = 0, 074$). L'adéquation du modèle au système complet est excellente. Les figures (a) et (c) représentent les minima locaux de la population de l'état $\varphi_{-1}(x)$ et $\varphi_1(x)$ respectivement. La figure (b) représente les maxima locaux de la population de l'état initialement peuplé $\varphi_0(x)$. Ces figures montrent un couplage prédominant entre deux puits voisins qui peut devenir important lorsque $|X_0/F| \simeq 1$, c'est à dire lorsque les fréquences déplacées sont quasiment dégénérées.

La phase globale des états n'ayant pas de signification physique, nous introduisons également la différence de phase entre les deux états

$$\Theta(t) = \theta_0(t) - \theta_1(t).$$

La dynamique du système se réduit alors à l'évolution de la différence de population $\Delta(t)$ et de la différence de phase $\Theta(t)$. L'état du système à deux états est donc décrit par un point dans le plan (Δ, Θ) appelé *espace de phase*. L'ensemble des trajectoires dans le plan (Δ, Θ) représentant la dynamique du système à deux états est appelé, le *portrait de phase* du système.

Il n'est pas difficile d'obtenir le système d'équations différentielles régissant les évolutions temporelles de $\Delta(t)$ et de $\Theta(t)$ c'est un système non-linéaire sur lequel nous pouvons appliquer les méthodes standards d'analyse des systèmes d'équations différentielles couplées, notamment la recherche des points fixes²⁹ et l'analyse de leur stabilité.³⁰ Cette étude – présentée dans le complément K – montre que le point

$$C_1 \equiv \begin{bmatrix} \Delta \simeq F/X_0 \\ \Theta = 0 \end{bmatrix}$$

est un point centre du système à deux états, et le point

$$C_2 \equiv \begin{bmatrix} \Delta \simeq F/X_0 \\ \Theta = \pi \end{bmatrix}$$

un point col. La position $\Delta \simeq F/X_0$ de ces points fixes correspond exactement à la condition de dégénérescence entre fréquences déplacées.

²⁹Les points fixes correspondent aux points du plan de phase restant invariants au cours de l'évolution temporelle.

³⁰L'analyse de stabilité détermine l'évolution des trajectoires au voisinage des points fixes.

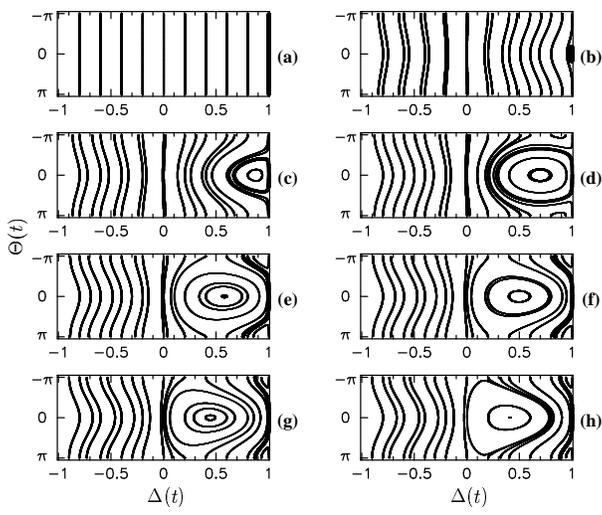


FIG. 24: **Portraits de phases du modèle à deux états** : La figure représente le portrait de phase du système à deux états pour différentes valeurs de g : (a) $g = 0$, (b) $g = 0,3$, (c) $g = 0,6$, (d) $g = 0,9$, (e) $g = 1,2$, (f) $g = 1,5$, (g) $g = 1,8$, (h) $g = 2,1$. Les trajectoires en gras correspondent à celles du diagramme de bifurcation 23 et permettent d'expliquer l'abrupte transition de l'amplitude des oscillations de population observée dans cette figure comme la transition entre trajectoire de résonance et trajectoire passante.

La figure 24 représente plusieurs portraits de phase du présent système pour différentes valeurs du paramètre g . Lorsque $g = 0$ – figure 24-a – les trajectoires dans le plan de phase sont des droites qui traduisent une différence de population Δ entre les états constante.

Lorsque g augmente – de 24-b à 24-h – les populations oscillent et les trajectoires de l'espace des phases s'incurvent. Lorsque g est suffisamment grand – quand $F \leq JX_0$ – des trajectoires fermées entourant le points centre apparaissent. Ces trajectoires fermées correspondent à une différence de phase Θ entre les états qui oscille en étant bornée, elles caractérisent donc un accrochage de la phase des deux états dû aux collisions binaires de particules entre les états couplés. Les régions du plan de phase composées de trajectoires fermées sont appelées des *îlots de résonance*. En dehors des îlots de résonance, la différence de phase Θ est non-bornée et l'on parle de *trajectoires passantes*.

Remarquons que, comme nous l'avons déjà suggéré par l'étude des niveaux déplacés, lorsque les deux états ont sensiblement la même population, c'est à dire lorsque $|\Delta|$ est petit, l'oscillation de population est très faible.

Les portraits de phase du modèle à deux états nous permet de comprendre la brusque transition de l'amplitude de l'oscillation de population vu sur la figure 23. Sur les portraits de phase 24, la trajectoire correspondant à l'état initial de la figure 23 ($\Delta(0) = 1$ et $\Theta(0) = 0$) est représentée en gras. Nous pouvons alors clairement identifier la brusque transition de l'amplitude de l'oscillation de population observée sur la figure 23 comme le fait du passage d'une trajectoire de la résonance à une trajectoire passante – entre 24-d et 24-e. Cette bifurcation est analogue à la bifurcation du pendule en mécanique classique qui passe d'un état de rotation où l'angle du pendule avec la verticale – la phase de l'oscillateur – augmente où diminue indéfiniment, à un état d'oscillation où l'angle du pendule oscille.

La dynamique particulière de la figure 22 s'explique simplement à l'aide du modèle à deux états. L'idée est d'appliquer le modèle successivement aux couples d'états φ_0 et φ_{-1} puis aux états φ_0 et φ_1 . Dans le premier cas, $\Delta(0) = -1$ et $\Theta(0) = 0$, nous voyons que la trajectoire dans l'espace des phases correspond à une trajectoire passante, la fréquence d'évolution de la différence de phase Θ est donc proche de $\omega_0 - \omega_{-1} \simeq 2,6$. Dans le second cas, $\Delta(0) = 1$ et $\Theta(0) = 0$, la trajectoire appartient à l'îlot de résonance, nous pouvons alors déterminer la fréquence ω d'évolution de la différence de phase en utilisant l'analyse de stabilité linéaire du point centre : $\omega \simeq 0,44$. La figure 25 représente les spectres de Fourier des phases relatives entre états voisins, nous remarquons que les fréquences d'évolution principales correspondent parfaitement à celles établies dans le cadre du modèle à deux états, les fréquences secondaires correspondent à des combinaisons linéaires des fréquences principales. Nous voyons ainsi que le modèle à deux états permet non seulement une bonne compréhension qualitative de la dynamique mais aussi une caractérisation quantitative.

Le modèle à deux états permet enfin d'avoir un aperçu de l'influence de la phase sur la dynamique. Nous avons vu effectivement que lorsque les fréquences déplacées des deux états sont quasi-dégénérées – ce qui dépend des populations des états – un phénomène d'accrochage de fréquences à lieu et la trajectoire dans le plan de phase appartient à l'îlot de résonance. Cependant, comme nous pouvons le voir sur les figures 24, l'îlot de résonance est bien plus large lorsque les états sont en phase ($\Theta = 0$) que lorsqu'ils sont en opposition de phase ($\Theta = \pi$). Par conséquent pour réaliser un accrochage de phases, une plus grande liberté sur les populations initiales des états est permise si les états sont initialement en phase. La phase initiale relative entre les états favorise ou au contraire empêche l'accrochage de fréquences. Nous voyons donc que les dynamiques non-linéaires – tel que l'accrochage de phases – sont elles aussi fortement sensible aux cohérences initiales du paquet d'ondes.

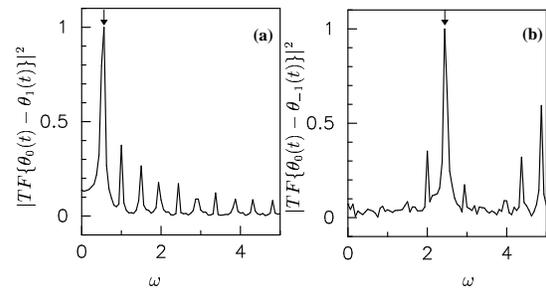


FIG. 25: **Spectre de fréquence des phases relative** : Les figures représentent les spectres Fourier des phases relatives $\theta_0 - \theta_1$ (a) et $\theta_0 - \theta_{-1}$ (b) pour la dynamique représentée sur la figure 22. Les fréquences principales (indiquées par des flèches) correspondent aux fréquences d'évolution prédites en appliquant le modèle à deux états successivement aux états φ_0 et φ_1 : $\omega \simeq 0,44$ et aux états φ_0 et φ_{-1} : $\omega \simeq 2,4$. Les fréquences secondaires correspondent aux combinaisons linéaires des fréquences principales.

Ce paragraphe, nous a montré sur un exemple simple que les fréquences déplacées (90) jouent un rôle majeur dans la dynamique du système : l'image des niveaux déplacés constitue donc une bonne représentation physique

pour étudier la dynamique du système. Le modèle à deux états permet de compléter cette interprétation en incluant l'effet de la phase relative entre les états sur la dynamique ainsi que des prédictions quantitatives sur les évolutions dynamique. Il permet de plus, par la représentation dans le plan de phase, une visualisation globale de la dynamique.

Nous avons ainsi pu, grâce à notre modélisation en termes d'états de Wannier Stark, étudier une dynamique quantique – celle d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné – par le biais d'outils de la dynamique non-linéaire classique comme les points fixes et les portraits de phases.

3.4 Une dynamique hamiltonienne classique ?

Dans ce paragraphe, nous montrons que la dynamique du condensat dans un réseau incliné peut être décrite, dans le cadre d'une théorie de champ moyen, par un système hamiltonien classique. Qui plus est, le hamiltonien décrivant le système correspond à la forme standard, pour κ petit, des systèmes dits *quasi-intégrables* ; nous pouvons alors interpréter la dynamique dans le cas général à la lumière du fameux théorème Kolmogorov-Arnold-Moser de la dynamique classique. Cette démarche originale constitue un exemple de la passionnante physique des gaz quantiques condensés, entre mécanique quantique et dynamique non-linéaire.

3.4.1 Formulation hamiltonienne et théorème Kolmogorov Arnold Moser

Le principal intérêt du changement de variables (93) va maintenant apparaître. En effet, l'ensemble des populations I_n et des phases θ_n forme un *espace des phases classique*, c'est à dire un espace dans lequel le système est représenté à tout instant par un point unique, qui décrit des trajectoires au fur et à mesure de l'évolution temporelle. La dynamique dans cet espace des phases est décrite par le système d'équations différentielles couplées (94). Il n'est pas difficile de montrer que le système (94) peut se mettre sous une forme canonique³¹ :

$$\begin{aligned}\frac{dI_n}{dt} &= \frac{dH}{d\theta_n} \\ \frac{d\theta_n}{dt} &= -\frac{dH}{dI_n}\end{aligned}$$

où l'on a introduit le hamiltonien

$$\begin{aligned}H(I_n, \theta_n) &= \sum_n (E_n I_n + X_0 I_n^2) \\ &+ \kappa \sum_n \sqrt{I_n I_{n+1}} (X_- I_n + X_+ I_{n+1}) \cos(\theta_n - \theta_{n+1}).\end{aligned}$$

Dans cette formulation les populations et les phases forment un ensemble canonique de variables conjuguées. Ainsi, l'introduction d'une base d'états adaptées, permet d'étudier la dynamique quantique dans un cadre identique à celui d'un système hamiltonien classique. Il existe ainsi

³¹Pour une référence générale sur la dynamique des systèmes hamiltoniens nous renvoyons le lecteur à [42] et à [43] pour un exposé plus "mathématique".

une analogie possible entre la dynamique quantique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné et la dynamique classique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires couplés.

Si l'on note \mathbf{I} le vecteur colonne des populations I_n et θ le vecteur colonne des phases θ_n , nous remarquons que l'on peut écrire (??) sous la forme

$$H(\mathbf{I}, \theta) = H_0(\mathbf{I}) + \kappa V(\mathbf{I}, \theta) \quad (95)$$

avec

$$H_0(\mathbf{I}) \equiv \sum_n (E_n I_n + X_0 I_n^2) \quad (96)$$

et

$$V(\mathbf{I}, \theta) \equiv \sum_n f_n(\mathbf{I}) \cos(\theta_n - \theta_{n+1})$$

où l'on a posé

$$f_n(\mathbf{I}) \equiv \sqrt{I_n I_{n+1}} (X_- I_n + X_+ I_{n+1}).$$

Les paramètres X_0 , X_+ et X_- sont donnés par les relations (92).

Le hamiltonien $H_0(\mathbf{I})$ ne dépend que des populations et correspond au hamiltonien du système global lorsque $\kappa = 0$. Il décrit donc l'évolution du système sous l'influence exclusive des termes de collisions entre particules d'un même état et conduit aux expressions des fréquences déplacées (90) par les relations :

$$\omega_n = \frac{\partial H_0}{\partial I_n}. \quad (97)$$

Le système dynamique décrit par $H_0(\mathbf{I})$ admet pour solution

$$\begin{aligned}I_n(t) &= I_n(0) \\ \theta_n(t) &= \theta_n(0) - \omega_n I_n(0) t.\end{aligned}$$

Les populations sont constantes car H_0 ne dépend pas des phases des états ; on dit alors que H_0 est *intégrable* et que les populations I_n sont des intégrales premières du mouvement. Le paramètre κ traduit le caractère perturbatif du second terme du hamiltonien (95). Lorsque κ est petit le système est donc proche d'un système intégrable, il est alors qualifié de *quasi-intégrable*.

Une intense activité de recherche théorique a été menée par des physiciens et des mathématiciens, sur les systèmes quasi-intégrables depuis les travaux pionniers de Poincaré. Une des préoccupations principales des scientifiques est l'existence de trajectoires régulières et stables. En effet, le premier exemple de système quasi-intégrable est apparu en mécanique céleste lors de l'étude du mouvement Terre-Lune-Soleil, de l'existence de trajectoires stables dépend donc la stabilité du système solaire.

Ces recherches ont conduit à un théorème fondamental de la dynamique hamiltonienne appelé *théorème Kolmogorov Arnold Moser* (souvent désigné par l'acronyme KAM) présenté plus en détail dans le complément L³². Ce théorème démontre l'existence dans un système hamiltonien du type

³²Le lecteur plus exigeant est invité à consulter l'article original d'Arnold [44] reproduit dans [45]. Une introduction aux travaux de Kolmogorov, incluant le théorème KAM, pourra elle être trouvée dans [46].

(95) de trajectoires stables et régulières identifiables aux trajectoires faiblement déformées du système intégrable décrit par H_0 . La condition d'existence de ces trajectoires dépend d'un critère de non dégénérescence entre les fréquences (97) du système intégrable H_0 .

Le théorème KAM est basé sur un développement en série de perturbation – dont une ébauche est présentée dans le complément L. Il démontre la convergence de la série de perturbation lorsque

$$\left| \sum_i l_i \omega_i \right| \geq \frac{C}{(\sum_i |l_i|)^\tau} \quad (98)$$

où les coefficients l_i sont des entiers et les coefficients C et τ des réels positifs dépendant du système. L'intérêt du théorème KAM réside en partie dans le fait que pour κ "suffisamment petit", la grande majorité des conditions initiales remplit la condition (98).

Dans notre système, les fréquences ω_n sont les fréquences déplacées par les collisions et la condition (98) correspond à la généralisation du critère de non-dégénérescence entre fréquences déplacées. La convergence de la série de perturbation signifie que les trajectoires sont voisines des trajectoires du système décrit par H_0 , c'est à dire des trajectoires passantes où la différence de phase entre états voisins est non-bornée. Nous retrouvons ainsi le fait déjà plusieurs fois exposé ici que lorsque les fréquences déplacées sont non-dégénérées, les termes de perturbations ont une faible influence. Notons tout de même que la condition (98) est plus restrictive que la condition de non-dégénérescence entre fréquences déplacées car elle fait apparaître l'ensemble des combinaisons linéaires entre fréquences déplacées et non juste les différences entre fréquences déplacées voisines. Néanmoins (98) indique que plus les combinaisons linéaires font intervenir des coefficients élevés, plus le domaine de non-convergence est petit. Ainsi, les plus vastes domaines de l'espace des phases ne remplissant pas la condition (98) correspondent à ceux où les fréquences déplacées sont quasi-dégénérées.

3.4.2 Oscillations de Bloch

Regardons maintenant la dynamique correspondant à une trajectoire passante de l'espace des phases ; nous supposons donc la condition (98) remplie. Dans ce cas, l'évolution dans l'espace des phases est voisine de celle du système non perturbé H_0 et nous pouvons, en première approximation, traiter l'effet des collisions binaires entre atomes à l'aide des niveaux déplacés (90). Cette approximation suppose que les populations des états restent constantes.

Dans le cadre du modèle à deux états, nous avons vu que les termes de perturbation influent peu sur les populations des états lorsque ceux-ci sont également peuplés. Nous pouvons donc en déduire que, dans le cas d'un état initial étalé sur plusieurs états de Wannier Stark avec une distribution douce, les populations de chaque état sont presque constantes. Nous montrons alors qu'il est possible d'observer des oscillations de Bloch sur un temps fini car elles décroissent au temps long du fait de la dispersion des fréquences de Bohr du système.

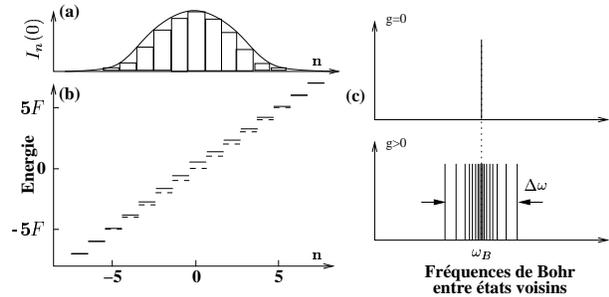


FIG. 26: **Déplacement de niveaux** : La figure (b) représente schématiquement les niveaux d'énergie déplacés (en trait plein) par rapport aux états propres d'énergie (en trait tiré) pour un état initial ayant une variation de population douce (a). Les fréquences de Bohr du système (c) présente alors une dispersion typique de $\Delta\omega$.

Dans ce cadre, l'état du gaz est à tout instant :

$$\Psi(x, t) = \sum_n \sqrt{I_n} e^{i\theta_n} e^{-i(E_n + X_0 |c_n|^2)t} \varphi_n(x) + O(\kappa). \quad (99)$$

L'évolution n'est plus mono-fréquentielle comme dans le cas d'une dynamique atomique, car les fréquences de Bohr entre puits voisins ne sont plus dégénérées. Nous pouvons en effet calculer la position moyenne du condensat dans l'approximation du couplage aux premiers voisins :

$$\langle x \rangle(t) = \sum_n n I_n^2 + \chi_1 \left\{ e^{-iFt} \sum_n \sqrt{I_{n+1} I_n} e^{i(\theta_{n+1} - \theta_n)} e^{-iX_0(I_{n+1} - I_n)t} + \text{c.c.} \right\} + O(\kappa). \quad (100)$$

Le déplacement de fréquence, dû aux collisions entre particules dans un même état, induit une dispersion des fréquences de Bohr entre états voisins autour de la fréquence de Bloch. Cela implique qu'il n'existe pas en toute rigueur d'oscillations de Bloch d'un condensat de Bose-Einstein.

Cependant, si le temps de mesure est petit comparé à l'inverse de la dispersion $\Delta\omega$ des fréquences de Bohr entre puits voisins,

$$T \ll \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

le caractère multi-fréquentiel n'est pas clairement visible et la dynamique semble être une oscillation mono-fréquentielle du type oscillation de Bloch. A long terme, ces oscillations décroissent. Un tel comportement a déjà été observé numériquement [47] mais n'a jamais à notre connaissance été expliqué. De telles oscillations ont été mises en évidence expérimentalement en chargeant un réseau incliné avec un condensat de Bose Einstein [33].

La dispersion des fréquences de Bohr $\Delta\omega$ entre états voisins dépend de la répartition initiale des atomes sur les différents états de Wannier Stark et est schématiquement représentée sur la figure 26. Elle est proportionnelle au plus grand écart de population entre états voisins. Si nous supposons la fonction d'onde initialement étalée sur N états de Wannier Stark, alors nous pouvons supposer que la dispersion des fréquences est de l'ordre de

$$\Delta\omega \simeq \frac{X_0}{N}.$$

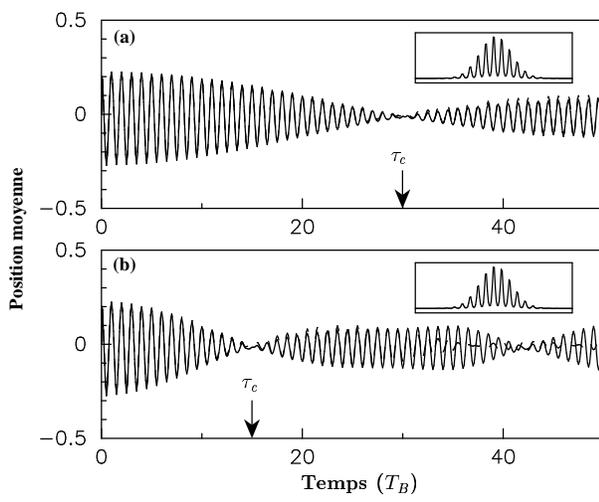


FIG. 27: **Position moyenne du paquet d'ondes** : La position moyenne est représentée en fonction du temps pour une distribution initiale gaussienne $I_n \propto e^{-\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2}$ pour $V_0 = 12$ et $F = 2$ avec (a) $g = 0,25$ ($X_0 = 0,42$) et (b) $g = 0,5$ ($X_0 = 0,84$). Le trait plein correspond au calcul numérique et le trait tiré au calcul approché (100). La flèche indique le temps critique qui est en bon accord avec les résultats numériques. L'encart correspond à la distribution de probabilité de présence de l'état initial.

Ainsi, plus l'état initial est étalé, moins les variations de population entre états voisins sont importantes et plus les fréquences de Bohr entre états voisins sont proches de la fréquence de Bloch. L'oscillation de la position moyenne (100) ressemble alors à une oscillation de Bloch amortie jusqu'à un temps critique défini par

$$\tau_c \equiv \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\pi}{2X_0} N.$$

La figure 27 représente l'évolution temporelle de la position moyenne pour deux valeurs du paramètre g . Les oscillations sont clairement visibles et le temps caractéristique de décroissance est en bon accord avec le temps critique τ_c . Cette description de la dynamique à l'aide des fréquences déplacées reproduit fidèlement le comportement numériquement observé jusqu'à un temps de l'ordre de $\frac{2\pi}{X_0\kappa}$ qui est ici supérieur à τ_c .

3.5 Résonances et chaos

Au paragraphe précédent, nous avons montré à l'aide du théorème KAM, que l'espace des phases du système (91) se compose de trajectoires passantes lorsque les fréquences déplacées (90) sont linéairement indépendantes. Nous regardons maintenant le cas des trajectoires de l'espace des phases qui ne remplissent pas la condition (98), nous parlons alors de trajectoires résonantes. Nous allons voir que, outre les phénomènes d'accrochage de phases déjà présents dans le modèle à deux états, il apparaît ici de nouveaux comportements dynamiques qui correspondent à des dynamiques quasi-périodiques ou même chaotiques. *Nous pouvons ainsi mettre en évidence du chaos au sens classique dans la dynamique d'un objet quantique!*

Concrètement, les trajectoires résonantes apparaissent lorsque les fréquences déplacées – qui correspondent aux fréquences d'évolution du système intégrable H_0 – sont

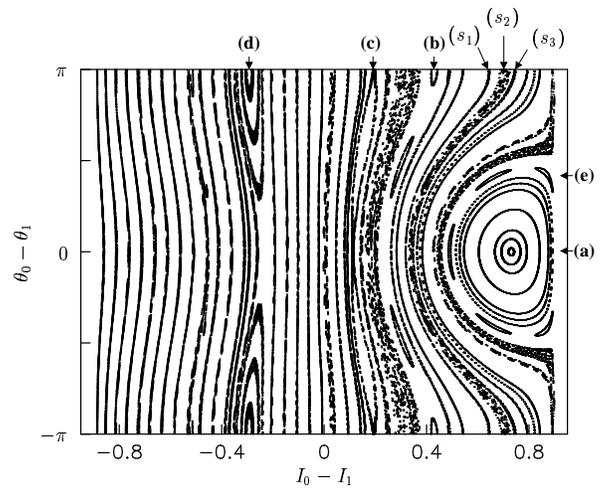


FIG. 28: **Section de Poincaré** : La figure représente les intersections des trajectoires de l'espace des phases avec le plan défini par $I_{-1} = 0, 1$, $\theta_0 - \theta_{-1} = 0$ et $I_{|m|>1} = 0$. La figure a été réalisée par une intégration numérique du système modèle (91) pour les paramètres de potentiel suivants $V_0 = 25$, $F = 1,25$ et $g = 0,75$; soit $X_0 = 1,503$, $\kappa = 0,074$, $X_+ = -1,563$ et $X_- = 1,430$.

presque linéairement dépendantes c'est à dire lorsque

$$\sum_i l_i \omega_i \simeq 0$$

où les coefficients l_i sont des entiers. Remarquons que le théorème KAM ne contient aucune conclusion sur la dynamique de telles trajectoires. Nous pouvons cependant utiliser en partie le modèle à deux états pour guider notre étude. Dans ce paragraphe, nous considérons exclusivement $g > 0$.

3.5.1 Îlots de résonance

Lorsque le nombre d'états est grand, il n'est pas possible de représenter la trajectoire dans l'espace des phases, cependant nous pouvons obtenir une représentation de la dynamique en observant les intersections de cette trajectoire avec un plan défini, réalisant ainsi une *section de Poincaré*. La représentation de la section de Poincaré permet de visualiser les comportements dynamiques du système en fonction de l'état initial de la même manière que le plan de phase nous permettrait de visualiser globalement la dynamique dans le cadre du modèle à deux états. Un exemple de section de Poincaré est représenté sur la figure 28, elle a été établie pour $V_0 = 25$, $F = 1,25$ et $g = 0,75$ en considérant les intersections des trajectoires de l'espace des phases avec le plan défini par $I_{-1} = 0, 1$, $\theta_0 - \theta_{-1} = 0$, $I_0 + I_1 = 0,9$ et $I_{|n|>1} = 0$, ce qui correspond au cas de trois états voisins initialement peuplés. Ce plan d'intersection nous permet d'étudier les comportements dynamiques lorsque la différence de populations $I_0 - I_1$ ainsi que la phase relative $\theta_0 - \theta_1$ varient tandis que les populations et les phases des autres états sont fixées. Nous pouvons alors faire le parallèle avec l'étude de la dynamique dans le plan de phase du modèle à deux états en tenant compte du fait que ici $J = 0,9$.

Nous pouvons remarquer sur la section de Poincaré 28 que la plupart des points d'intersections se répartissent sur des courbes régulières, identifiables aux trajectoires passantes et résonantes du système à deux états. Nous retrouvons

vons en particulier l'îlot de résonance – repéré par l'étiquette (a) sur la figure 28 – correspondant à la dégénérescence entre les fréquences déplacées

$$\omega_1 - \omega_0 = 0$$

soit pour

$$I_0 - I_1 = \frac{F}{X_0}.$$

Mais nous découvrons aussi de nouveaux îlots de résonance (b), (c) et (d), plus étroits que (a), qui correspondent à des combinaisons linéaires plus complexes entre les fréquences déplacées :

- pour (b) il s'agit de $(\omega_0 - \omega_{-1}) + 3(\omega_0 - \omega_1) = 0$
- pour (c) il s'agit de $\omega_{-1} - \omega_0 + \omega_1 = 0$
- pour (d) il s'agit de $(\omega_0 - \omega_{-1}) + (\omega_0 - \omega_1) = 0$.

Ces îlots ne sont pas décrits par le modèle à deux états puisqu'ils caractérisent des couplages entre trois états³³.

L'ensemble des îlots de résonance caractérise les zones de l'espace des phases correspondant à un accrochage de fréquence des amplitudes des états de Wannier Stark. Dans ce cas les populations et les phases des états couplés oscillent de manière synchrone. Lorsque ces îlots correspondent à une dégénérescence entre fréquences déplacées, nous pouvons utiliser le modèle à deux états comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent pour déterminer les fréquences d'évolution.

3.5.2 Trajectoires chaotiques

Mise à part l'apparition de nouveaux îlots de résonance, la principale et fondamentale différence entre la section de Poincaré 28 présentée et les portraits de phase du modèle à deux états réside dans l'apparition sur la section de Poincaré 28 de nuées de points irrégulièrement répartis – comme par exemple celle indiquée par l'étiquette (s_2). La dispersion des points d'intersection n'est pas le fait d'une imprécision numérique mais traduit une dynamique quasi-périodique – voir le complément M.

Lorsque la force F diminue, l'îlot de résonance principale rentre plus dans le plan de la section et les nuées de points s'enroulent autour de la résonance. Parallèlement, l'influence des termes de perturbation augmente, couplant de manière plus forte les îlots de résonance secondaires, le nombre et la taille des nuées de points croît jusqu'à se rejoindre et former une vaste "mer" de points d'intersection comme le représente la figure 29 qui correspond à la même section de Poincaré que 28 mais pour $F = 0,75$. Nous pouvons alors représenter sur la figure 30 l'évolution temporelle de $I_0(t)$ ainsi que le spectre de Fourier de l'amplitude $c_0(t)$ correspondant à une trajectoire de la "mer" de points. Ces courbes mettent clairement en évidence le caractère chaotique des trajectoires issues de la mer de points par l'évolution aléatoire de la population $I_0(t)$ et le spectre de Fourier continue de l'amplitude $c_0(t)$.

Le caractère chaotique de la dynamique est le fait d'une "hésitation" du système entre deux trajectoires possibles : passante, contournant la résonance et résonante, entourant la résonance. Ces trajectoires chaotiques apparaissent donc à l'interface entre îlots de résonance et trajectoires

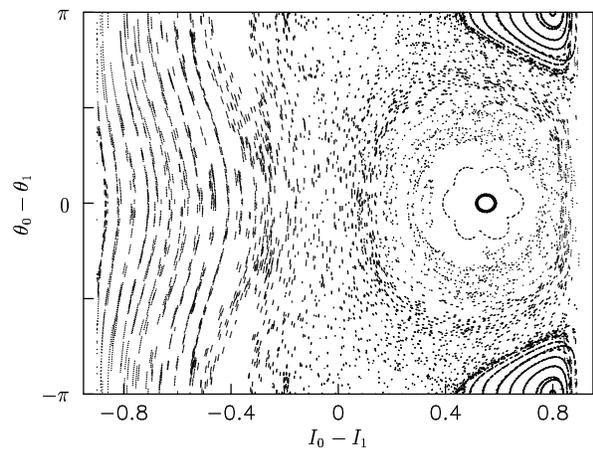


FIG. 29: **Section de Poincaré** : Intersections des trajectoires de l'espace des phases avec le plan défini par $I_{-1} = 0,1$, $\theta_0 - \theta_{-1} = 0$ et $I_{|n|>1} = 0$. La figure a été réalisée par une intégration numérique du système modèle (91) pour les paramètres de potentiel suivants $V_0 = 25$, $F = 0,78$ et $g = 0,75$; soit $X_0 = 1,453$, $\kappa = 0,117$, $X_+ = -1,495$ et $X_- = 1,411$.

passantes. L'alternance aléatoire entre ces deux comportements génère la dynamique chaotique. L'évolution temporelle des populations pour une trajectoire chaotique est donc une succession aléatoire de grandes et de petites oscillations, les grandes oscillations correspondent à l'enroulement autour de la résonance et les petites, au contournement de la résonance.

Sur la figure 30 nous pouvons une nouvelle fois remarquer la parfaite adéquation de la modélisation (91) à la dynamique de l'équation de Gross Pitaevskii (80) en comparant l'évolution temporelle calculée numériquement à l'aide du modèle (91) à celle calculées à l'aide de l'équation de Gross Pitaevskii.

Il est intéressant de remarquer en conclusion que la mise en évidence d'évolutions chaotiques des amplitudes des états quantiques du condensat est un phénomène nouveau, preuve de la passerelle lancée entre mécanique quantique et physique non-linéaire par l'étude des gaz atomiques quantiques.

3.6 Conclusion

En conclusion, nous avons montré dans ce chapitre que l'étude de la dynamique d'un condensat dans un réseau incliné permet de comprendre l'influence des termes non-linéaires de l'équation de Gross-Pitaevskii sur la dynamique quantique. La modélisation en termes d'états de Wannier Stark nous a permis de réduire l'étude de la dynamique quantique à celle d'un système de N états d'énergie équidistants. Nous avons pu alors montrer que, au premier ordre, les termes non-linéaires déplacent les niveaux d'énergie proportionnellement à leurs populations en introduisant la représentation dites des fréquences déplacées.

En prenant en compte les termes de couplage non-linéaire à l'ordre suivant, nous avons montré l'analogie formelle entre la dynamique quantique du condensat dans un réseau incliné et la dynamique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires classiques couplés. Ce rapprochement, qui est le point clef de notre description, nous a permis d'étudier la dynamique du condensat en utilisant les outils standards

³³Une description générale de la formation des îlots de résonance est présenté dans [48]

Contents

4.1	Les états propres, échelle parabolique d'énergie	40
4.2	Reconstruction de la fonction d'onde du centre de masse atomique	40
4.3	Reconstruction de la fonction d'onde d'un condensat de Bose Einstein	42
4.4	Conclusion	43

la mesure de la fonction d'onde

Nous montrons dans ce chapitre comment utiliser les oscillations de Bloch pour déterminer la fonction d'onde atomique. Si le principe d'indétermination de Heisenberg nous interdit de définir conjointement position et vitesse de manière exacte il n'y a, en effet, aucune limite à la connaissance de la fonction d'onde. L'expression de la fonction d'onde dans l'espace réel joue un rôle prépondérant dans notre compréhension de la mécanique quantique, et la mise en oeuvre d'une technique expérimentale permettant de la reconstruire est d'un grand intérêt. Mais, alors que la distribution de probabilité spatiale est souvent facilement mesurable, la mesure de la phase nécessite généralement l'emploi d'une méthode annexe et souvent incompatible, car la mesure de la position d'un système quantique efface généralement l'information sur la phase.

Néanmoins, certaines méthodes permettent d'obtenir une information complète sur l'état d'un système quantique. Par exemple, une reconstruction "tomographique" de sa fonction de Wigner à partir de transformation intégrale inverse du type transformation de Radon [49]. L'application de cette méthode aux systèmes atomiques et moléculaires a été proposée récemment [50, 51] et démontrée expérimentalement [52, 53]. Cependant, les méthodes de tomographie nécessitent un grand nombre de mesures ainsi qu'un algorithme complexe. Parallèlement, d'autres auteurs [54] proposent d'utiliser des mesures d'interférométrie atomique pour déterminer l'état atomique. Cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter l'utilisation de transformations compliquées mais nécessite deux mesures différentes pour la phase et l'amplitude.

Nous proposons ici une nouvelle méthode pour reconstruire la fonction d'onde du centre de masse de l'atome qui permet de déterminer simultanément phase et amplitude de la fonction d'onde du centre de masse atomique, à partir d'une série de mesure de la population d'une classe de vitesse.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que la dynamique d'un atome dans un réseau incliné correspond à un mouvement d'oscillation, appelé oscillation de Bloch, dont la fréquence dépend de la force appliquée et du pas du réseau ; nous avons vu de plus que l'amplitude de l'oscillation de la vitesse moyenne est indépendante de cette force. Dans l'espace des impulsions, seule la fréquence caractérise les oscillations de Bloch ; c'est à dire la force F si nous considérons le pas du réseau fixé.

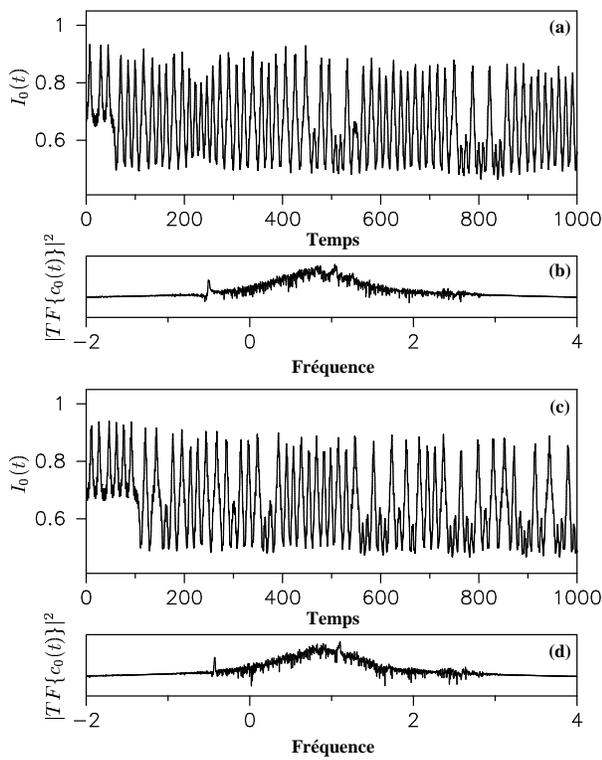


FIG. 30: **Évolution chaotique de l'intensité** : Les figures (a) et (c) représentent l'évolution temporelle de $I_0(t)$ calculée respectivement par une intégration numérique du modèle (91) et de l'équation de Gross Pitaevskii. Les figures (b) et (d) représentent les spectres de puissance de l'amplitude $c_0(t)$. L'évolution chaotique de l'intensité se traduit par un spectre de fréquence continu. Les figures sont réalisées pour les paramètres suivants : $V_0 = 25$, $F = 0,78$ et $g = 0,75$ avec comme condition initiale : $c_{-1}(0) = \sqrt{0,1}$, $c_0(0) = \sqrt{0,665}$, $c_1(0) = -\sqrt{0,235}$, $c_{|n|>1}(0) = 0$.

de la dynamique hamiltonienne classique. Dans le cadre de cette démarche originale, nous avons pu mettre en évidence des phénomènes purement non-linéaires de la dynamique quantique tels que l'accrochage de phase entre états voisins où l'évolution chaotique au sens classique des populations des états. Ces dynamiques ont alors pu être en partie interprétées à l'aide de la représentation simple des niveaux déplacés et du modèle à deux états.

L'observation de dynamique chaotique classique avec un condensat de Bose Einstein n'est sûrement pas particulière au réseau incliné, l'image des fréquences déplacées doit permettre d'identifier de tels comportements dynamiques dans bien d'autres configurations de potentiel. Il n'est pas difficile d'imaginer par exemple des dynamiques chaotiques dues aux couplages entre les états du potentiel harmonique transverse de confinement.

Si maintenant la force varie spatialement ($F = F(x)$), le potentiel n'est plus un réseau incliné et la fréquence de Bloch est différente dans chaque puits du réseau, réciproquement à chaque puits est associé une fréquence de Bloch locale $\omega_B(x)$. La vitesse moyenne d'un paquet d'ondes délocalisé sur plusieurs puits a alors une évolution temporelle caractérisée par l'ensemble des fréquences de Bloch locales. La transformée de Fourier d'une mesure de la population d'une classe de vitesse révèle ce caractère multi-fréquentiel et le spectre de fréquence est composé d'une série de raies localisées autour des fréquences de Bloch locales et dont l'intensité est proportionnelle à la population du puits correspondant. Nous montrons ici que l'on peut, en utilisant le spectre de Fourier d'une mesure de la population d'une classe de vitesse, accéder expérimentalement en une unique série de mesures à la population et à la phase de chaque état de Wannier Stark, ce qui permet de reconstruire la fonction d'onde de l'état initial.

4.1 Les états propres, échelle parabolique d'énergie

L'idée la plus simple expérimentalement pour faire varier localement la fréquence de Bloch est d'employer un potentiel parabolique. Nous supposons donc que le potentiel est formé de l'addition d'un réseau et d'une parabole soit :

$$V(x) = V_0 \sin(2\pi x) + \frac{1}{2}a_0 x^2$$

et nous allons chercher les états propres $|\alpha\rangle$ du hamiltonien $H_p = \frac{P^2}{2} + V(x)$:

$$H_p |\alpha\rangle = \varepsilon |\alpha\rangle .$$

Encore une fois, nous nous intéressons aux états localisés. Pour qu'ils existent, le potentiel parabolique doit varier lentement sur la période du potentiel périodique et le réseau doit être profond³⁴, c'est à dire qu'il faut que $2V_0 - \frac{1}{8}a_0 x \geq \pi^2$. Cette condition n'est valable que dans une région limitée de l'espace. Nous considérons dans la suite cette condition remplie dans un intervalle $[-L, L]$ avec $L \gg 1$ et appelons le puits numéro n le puits centré en $x = (n + \frac{1}{4})$.

Les états fondamentaux localisés dans chaque puits de potentiel se répartissent sur une distribution d'énergie parabolique. Nous notons alors $\alpha_n(x)$ l'état propre fondamental dans le n -ième puits de potentiel. Cet état est associé à l'énergie propre

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}a_0 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2 .$$

Le choix particulier de la position du minimum du potentiel parabolique par rapport au réseau permet ici d'éviter une dégénérescence d'énergie entre les états $\alpha_n(x)$ et $\alpha_{-n}(x)$.

De manière générale, plusieurs états localisés peuvent exister dans un même puits, cependant nous ne considérerons ici, dans un souci de simplicité, que les états fondamentaux de chaque puits. Outre les états localisés dans les puits de potentiel, le réseau parabolique possède aussi

des états propres délocalisés, à l'échelle de la largeur d'un puits de potentiel, rappelant les états propres du potentiel parabolique. Nous ne tenons pas compte dans cette étude de ces états délocalisés.

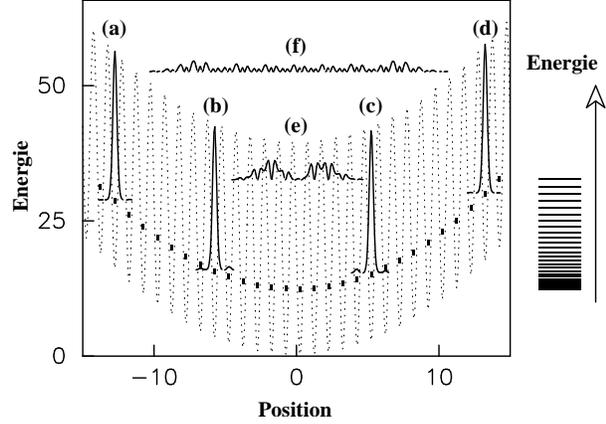


FIG. 31: États propres du réseau parabolique : La figure représente quelques états propres du réseau parabolique calculés numériquement pour $V_0 = 20$ et $a_0 = 0,2$. Les niveaux d'énergie correspondant aux états fondamentaux de chaque puits de potentiel sont schématiquement représentés dans le potentiel et sont reportés à droite mettant en évidence la distribution parabolique.

La figure 31 représente schématiquement les états propres du réseau parabolique calculés numériquement. Les états localisés apparaissent distinctement et l'échelle parabolique d'énergie associée a été représentée à droite de la figure. Les probabilités de présence de quelques états propres ont aussi été représentées, positionnées dans le potentiel en fonction de l'énergie de l'état. Nous pouvons alors distinguer nettement les états localisés (a), (b), (c) et (d) des états délocalisés (e) et (f). Nous voyons en particulier que la forme des fonctions d'onde des états localisés varient très peu avec l'indice du puits.

4.2 Reconstruction de la fonction d'onde du centre de masse atomique

Nous envisageons ici la reconstruction de la fonction d'onde du centre de masse atomique à partir d'une série de mesures de la population d'une classe de vitesse. Si le réseau parabolique est "branché" de manière adiabatique, les atomes ayant une faible vitesse se projettent entièrement sur les états localisés fondamentaux de chaque puits de potentiel. La mesure de la population d'une classe de vitesse peut alors être réalisée par une mesure de sélection de vitesse Raman [55] – pour les atomes de césium la précision de mesure d'impulsion est de $\hbar k_L/5$ [56].

Considérons un paquet d'ondes initial formé à partir des états localisés α_n :

$$\psi(t=0) = \sum_n c_n \alpha_n$$

son évolution est alors simplement donnée par :

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \alpha_n e^{-i\varepsilon_n t} .$$

³⁴Cette condition s'obtient par le même raisonnement que pour les états de Wannier Stark (cf section 1.2)

Nous admettrons dans la suite que nous nous plaçons dans une région du potentiel où les états localisés α_n sont tous quasiment identiques à une translation près. La distribution de probabilité d'impulsion $P(p, t)$ est donnée par,

$$P(p, t) = |\Psi(p, t)|^2 = \sum_{l, n} c_l c_n^* \alpha_l(p) \alpha_n(p) e^{-i \frac{a_0}{2} (l^2 - n^2) t}.$$

Comme la forme des fonctions d'onde α_n varie très peu de puits en puits, nous avons :

$$\alpha_l(p) \simeq \alpha_n(p) e^{i(l-n)p}.$$

Nous obtenons alors l'expression suivante pour la distribution de vitesse :

$$P(p, t) = |\alpha_{n_0}(p)|^2 \sum_{m, n} c_{n+m} c_n^* e^{imp} e^{-iam(n + \frac{m}{2})t}.$$

Le terme correspondant à $m = 0$ ne donnant aucune évolution temporelle, nous l'extrayons de la somme

$$P(p, t) = |\alpha_{n_0}(p)|^2 \left\{ 1 + \sum_{m \neq 0} e^{imp} \sum_n \sigma_{m, n} e^{-i\omega_{m, n} t} \right\}. \quad (101)$$

Pour simplifier l'étude, nous posons pour le reste de ce chapitre $p = 0$, ce qui suppose que l'on mesure la population de la classe de vitesse correspondant à une vitesse nulle dite la *probabilité de vitesse nulle*. L'évolution de la distribution de probabilité (101) a un caractère multi-fréquentiel et le spectre de fréquence comporte toutes les fréquences de Bohr des états α_n

$$\begin{aligned} \omega_{m, n} &\equiv \varepsilon_{m+n} - \varepsilon_n \\ &= a_0 m \left(n + \frac{2m+1}{4} \right), \end{aligned}$$

$\omega_{m, n}$ est la fréquence de transition entre l'état α_{n+m} et l'état α_n . L'amplitude de chaque fréquence est proportionnelle pour $p = 0$ à la cohérence

$$\sigma_{m, n} = c_{n+m} c_n^*$$

entre l'état α_{n+m} et l'état α_n . Ainsi, le spectre de puissance d'une série de mesures de la probabilité de vitesse nulle permet de déterminer l'ensemble des cohérences $\sigma_{m, n}$ et donc de déterminer les amplitudes c_n qui caractérisent totalement la fonction d'onde.

Lorsque l'on fixe m , la répartition des fréquences de Bohr $\omega_{m, n}$ est une distribution linéaire de pas am . Nous notons Ω_m l'ensemble des fréquences de Bohr avec m fixé : $\Omega_m = \{\omega_{m, 1}, \omega_{m, 2}, \dots\}$. La contribution d'une fréquence de l'ensemble Ω_m à la distribution de probabilité d'impulsion est alors proportionnelle aux cohérences $\sigma_{m, n}$ entre un état et son $m^{\text{ième}}$ voisin.

Nous pouvons alors introduire la distribution de fréquence $\mathcal{P}(\omega)$ définie par

$$\mathcal{P}(\omega) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(0, t) e^{i\omega t} dt,$$

ou T est le temps de mesure expérimentale. En remplaçant $P(0, t)$ par l'expression (101), nous obtenons

$$\mathcal{P}(\omega) = |\alpha_{n_0}(0)|^2 \left\{ \delta_T(\omega) + \underbrace{\sum_n \sigma_{1, n} \delta_T(\omega - \omega_{1, n})}_{\Omega_1} + \underbrace{\sum_n \sigma_{2, n} \delta_T(\omega - \omega_{2, n}) + \dots}_{\Omega_2} \right\} \quad (102)$$

où nous avons introduit la fonction

$$\delta_T(\omega) \equiv \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}.$$

La distribution de fréquence est donc composée d'une infinité de raies centrées autour des fréquences de Bohr $\omega_{m, n}$.

La fonction $\delta_T(\omega)$ qui décrit la forme des raies, dépend du temps de mesure T et tend asymptotiquement, aux temps longs, vers la distribution de Dirac. Si le temps T est suffisamment long, les différentes fonctions δ_T intervenant dans la somme (102) sont suffisamment étroites pour avoir un recouvrement négligeable ; les raies les plus proches étant celles de l'ensemble Ω_1 , le critère de non recouvrement impose que

$$T \gg \frac{\pi}{a_0}.$$

Chaque ensemble Ω_m forme un peigne de fréquences dans la distribution $\mathcal{P}(\omega)$. Comme nous verrons plus loin, la reconstruction utilise les deux premiers peignes de fréquence Ω_1 et Ω_2 . Il est donc important de s'affranchir d'un chevauchement accidentel entre les deux peignes. Ceci peut être réalisé en les séparant distinctement : si l'on connaît à priori l'extension spatiale de la fonction d'onde atomique, il suffit en effet que la plus grande fréquence contribuant significativement de la première échelle soit inférieure à la plus petite de la deuxième échelle. Par exemple, si l'atome est centré autour du puits n_0 avec une extension spatiale Δn , cette condition s'exprime $\omega_{1, n_0 + \Delta n/2} < \omega_{2, n_0 - \Delta n/2}$ soit

$$n_0 > \frac{3}{2} \Delta n.$$

Si, donc, le paquet d'onde est suffisamment "haut" dans la branche de parabole, les deux premiers peignes seront découplés.

La figure 32 représente le module de la transformée de Fourier d'une mesure de la probabilité de vitesse nulle, l'état initial est représenté ainsi que le potentiel en encart. Sur cette figure, les différents peignes Ω_n apparaissent séparément. En utilisant le spectre représenté sur la figure 32 nous pouvons reconstruire la fonction d'onde atomique. La population $|c_n|^2$ de l'état α_n peut se calculer en remarquant que :

$$|c_n|^2 = \frac{c_{n-1}^* c_n c_n^* c_{n+1}}{c_{n-1}^* c_{n+1}} = \frac{\sigma_{n-1, 1} \sigma_{n, 1}}{\sigma_{n-1, 2}}.$$

Si les raies des deux premiers peignes ont un chevauchement négligeable, nous avons alors simplement

$$|c_n|^2 = \frac{\mathcal{P}(\omega_{n-1, n}) \mathcal{P}(\omega_{n, n+1})}{\mathcal{P}(\omega_{n-1, n+1})}.$$

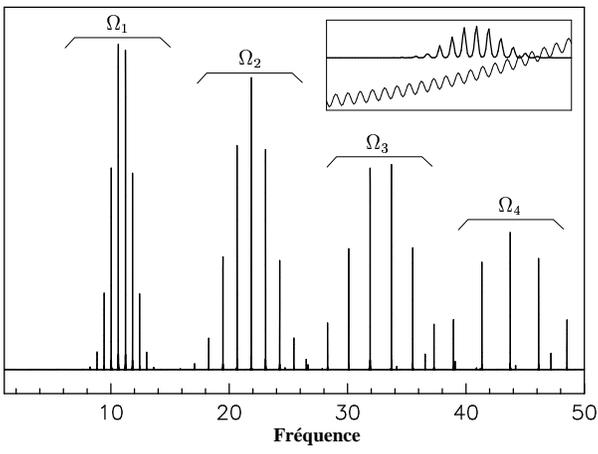


FIG. 32: **Spectre de puissance d'une mesure de la probabilité de vitesse nulle** : La figure représente le spectre de puissance d'une mesure de la probabilité de vitesse nulle calculé numériquement pour $V_0 = 20$ et $a_0 = 0, 2$. Les différentes échelles linéaires Ω_n de fréquence de Bohr sont distinctement visibles. L'amplitude de chaque raie $\omega_{m,n}$ est proportionnelle à la cohérence $\sigma_{m,n}$.

Comme l'amplitude de $\mathcal{P}(\omega_{n,n+1})$ est proportionnelle à la cohérence $\sigma_{n,n+1}$, la phase de $\mathcal{P}(\omega_{n,n+1})$ est simplement la différence de phase initiale entre les états α_n et α_{n+1} . Nous pouvons donc de proche en proche, en fixant arbitrairement une des phases, les obtenir toutes. Un exemple de reconstruction est présenté sur la figure 33. Nous pouvons remarquer que les populations $|c_n|^2$ et les phases relatives $\theta_{n+1} - \theta_n$ reconstruites à partir de la transformée de Fourier d'une mesure de la probabilité de vitesse nulle dont le module est représenté sur la figure 32 sont en très bon accord avec les valeurs initiales.

Expérimentalement, nous avons rarement accès à la mesure de vitesse d'un atome individuel mais à celle d'une collection d'atomes. Il est alors clair que la méthode évoquée ne peut fonctionner que si tous les atomes, ou au moins une très large majorité, sont dans le même état. Cependant, si ce n'est pas le cas mais que les atomes peuvent être considérés comme des particules indépendantes alors l'application de cette méthode permet de mesurer les cohérences moyennes de la matrice densité du gaz atomique mais elle ne permet pas de déterminer les populations moyennes des états. Remarquons enfin, que si les atomes ont tous le même rapport de phase entre états voisins, alors cette méthode permet de déterminer et les cohérences et les populations de l'opérateur densité.

4.3 Reconstruction de la fonction d'onde d'un condensat de Bose Einstein

Après avoir développé la méthode de reconstruction de la fonction d'onde atomique, nous montrons ici qu'elle peut aussi être appliquée à la fonction d'onde d'un condensat de Bose Einstein. Nous supposons ici que la dynamique du condensat est correctement décrite par l'équation de Gross Pitaevskii (78). De la même façon qu'au chapitre précédent, nous pouvons nous ramener à l'étude d'un problème unidimensionnel en introduisant un potentiel de confinement transverse. Nous avons alors vu que l'effet des collisions peut être décrit à l'ordre zéro comme un déplacement de

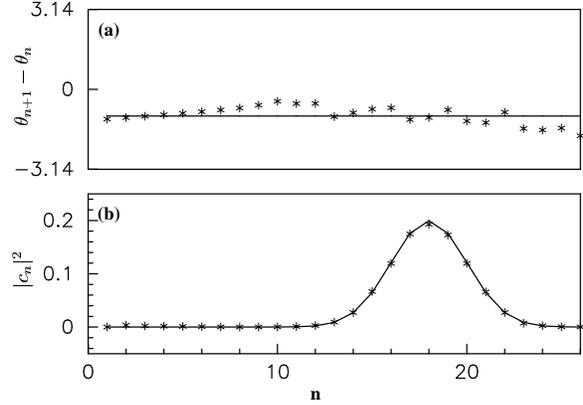


FIG. 33: **Reconstruction de la fonction d'onde** : La figure représente les phases relatives $\theta_{n+1} - \theta_n$ (a) et les populations $|c_n|^2$ (b). Le trait plein correspond aux valeurs initiales et les étoiles aux valeurs reconstruites à partir de la transformée de Fourier de la probabilité de vitesse nulle dont le module est représenté sur la figure 32.

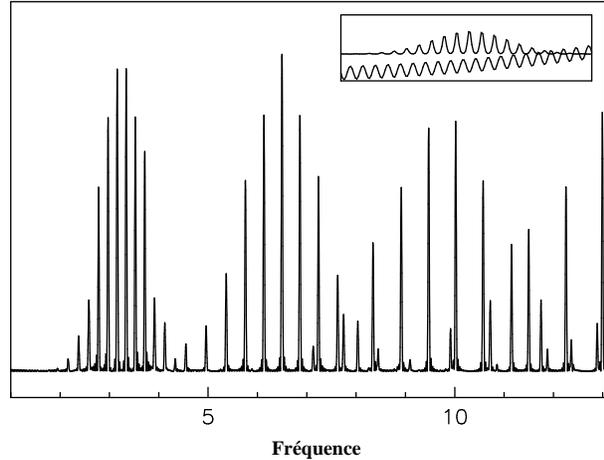


FIG. 34: **Spectre de puissance d'une mesure de probabilité de vitesse nulle** : La figure représente le spectre de fréquence, calculé numériquement pour $V_0 = 20$, $a_0 = 0, 2$ et $g = 0, 7 \rightarrow X_0 = 1, 95$. Les différentes échelles linéaires Ω_n de fréquences de Bohr s'identifient très bien.

niveaux proportionnel à leurs populations et que des dynamiques complexes, impliquant des couplages importants entre états voisins, apparaissent lorsque deux niveaux déplacés voisins sont dégénérés. Dans le cas où l'écart d'énergie entre les états propres localisés dans des puits voisins est suffisamment grand pour éviter toute dégénérescence, la dynamique est régulière. La description au premier ordre est alors satisfaisante.

Dans ce cadre, il est alors possible d'envisager la reconstruction de l'état superfluide du gaz. La technique est alors en tous points identique si ce n'est que les raies de la distribution de fréquence seront déplacées par rapport aux fréquences de Bohr du potentiel parabolique.

Si la fonction d'onde initiale du gaz superfluide est une superposition d'états α_n :

$$\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \alpha_n$$

son évolution temporelle est simplement au premier ordre

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \alpha_n e^{-i(\epsilon_n + X_n |c_n|^2)t} \quad (103)$$

où l'on a posé $X_n = g \int |\alpha_n|^4$. Comme le profil spatial des états propres varie peu avec l'indice du puits, nous pouvons en première approximation considérer $X_n \approx X_0$.

Pour éviter les dégénérescences entre états voisins, il faut que ³⁵

$$\left| |c_{n+1}|^2 - |c_n|^2 \right| < \frac{a_0}{X_0} (n+1).$$

Une manière certaine de satisfaire cette condition est de placer le condensat suffisamment haut dans la parabole pour avoir

$$\frac{a_0}{X_0} (n+1) > 1,$$

c'est à dire après les puits X_0/a_0 . Cependant, si le condensat est étalé sur un grand nombre de puits, il est très peu probable qu'il y ait de grandes disparités de populations entre puits voisins, l'écart de population caractéristique est de l'ordre de $\Delta I \sim \frac{1}{N}$ où N est le nombre d'états peuplés. Il suffit dans ce cas de placer le condensat après les puits $n_{min} = \frac{a_0}{N X_0}$.

Nous pouvons alors, en utilisant (103), calculer la probabilité de vitesse nulle :

$$P(0, t) = |\alpha_{n_0}(0)|^2 \left\{ 1 + \sum_{m \neq 0} \sum_n \sigma_{m,n} e^{-i(\omega_{m,n} + \Delta\omega_{m,n})t} \right\} \quad (104)$$

où l'on a posé

$$\Delta\omega_{m,n} = X_0 \left(|c_{n+m}|^2 - |c_n|^2 \right)$$

qui représente le déplacement par rapport aux fréquences de Bohr dû aux collisions binaires entre particules peuplant le même état. La figure 34 représente le spectre de Fourier de (104), les différentes fréquences $\omega_{m,n} + \Delta\omega_{m,n}$ sont aisément identifiables. La reconstruction peut donc être effectuée de manière identique à celle présentée dans la section

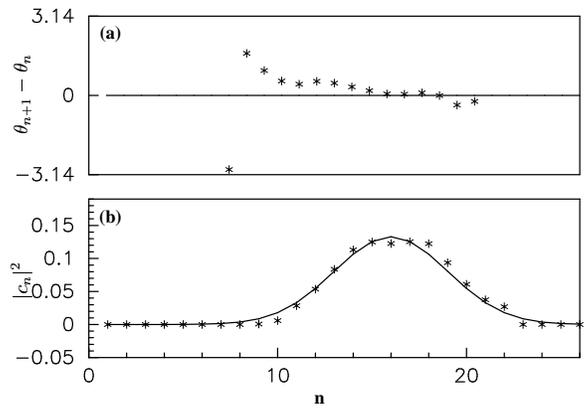


FIG. 35: **Reconstruction de la fonction d'onde** : La figure représente les phases relatives $\theta_{n+1} - \theta_n$ entre états voisins (a) et les populations I_n (b). Le trait plein correspond aux valeurs initiales et les étoiles aux valeurs reconstruites à partir du spectre de vitesse dont le module est représenté sur la figure 34.

4.2, et le résultat est présenté sur la figure 35. La méthode est moins précise que pour la fonction d'onde du centre de masse atomique mais reste tout de même correcte. La détermination des différences de phases entre les états faiblement peuplés est en particulier peu fiable, cela est dû à notre approche qui néglige les couplages par collision entre les états.

Si nous regardons les différents peignes avec plus de détail, nous voyons que les fréquences sont effectivement déplacées par rapport aux fréquences de Bohr du réseau parabolique. Le déplacement de la fréquence est proportionnel à la différence de population entre les états voisins. Or cette différence de population est connue par la méthode de reconstruction, nous pouvons donc utiliser ce déplacement pour mesurer la probabilité de collision entre particule dans un même état, et donc indirectement, la section efficace de collision.

4.4 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, décrit une méthode conceptuellement simple, pour reconstruire l'état d'un atome refroidi par lasers. Cette méthode s'applique aux atomes individuels où elle permet de déterminer la fonction d'onde du centre de masse, aux gaz atomiques où elle permet de déterminer les cohérences de l'opérateur densité et enfin et surtout aux condensats de Bose Einstein où elle permet de déterminer la fonction d'onde du condensat.

Contrairement aux autres méthodes envisagées, elle ne nécessite pas de nombreuses mesures ni d'algorithmes de reconstruction compliqué puisqu'une mesure de la population d'une classe de vitesse et une transformation de Fourier suffisent pour déterminer les amplitudes et les phases simultanément.

³⁵ Attention a_0 est la raideur du potentiel parabolique à ne pas confondre avec la longueur de diffusion a

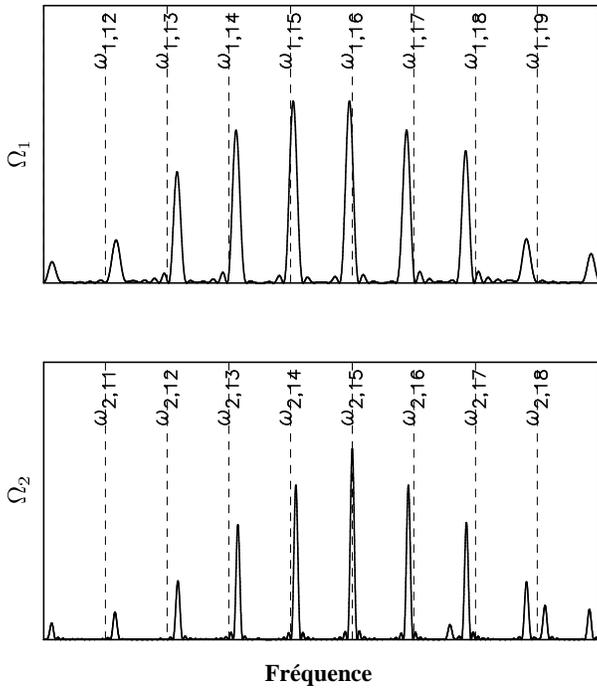


FIG. 36: **Déplacement des fréquences** : La figure représente un zoom sur les échelles Ω_1 et Ω_2 . Les traits tirés représentent les positions des fréquences de Bohr $\omega_{1,n}$ et $\omega_{2,n}$. L'écart par rapport à ces fréquences dépend du déplacement collisionnel $\Delta\omega_{1,n}$ et $\Delta\omega_{2,n}$. Comme nous connaissons du fait de la reconstruction les populations des différents états, nous pouvons en mesurant le déplacement déterminer le paramètre g connaissant X_0 .

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques résultats théoriques relatifs à la dynamique quantique dans un réseau optique incliné. Nous avons montré au chapitre 1 que les états propres fondamentaux de chaque puits de potentiel – appelés états de Wannier Stark – ont des niveaux d'énergie qui se répartissent sur une échelle linéaire et des fonctions d'onde localisées dans l'espace réel, à l'échelle d'un puits de potentiel. Ce potentiel particulier introduit pour les particules de faible impulsion une discrétisation de l'espace réel et des niveaux d'énergie. Cette double discrétisation a une conséquence directe sur la dynamique, elle est à la l'origine du phénomène d'oscillation de Bloch. Ce chapitre nous a permis d'illustrer l'intérêt de l'étude de la dynamique quantique dans un réseau incliné à l'aide de la base des états de Wannier Stark pour mettre en évidence les phénomènes d'interférences quantiques.

Nous avons alors montré que l'introduction d'une modulation harmonique de la pente du réseau incliné permettait de coupler entre eux les états de Wannier Stark. L'étude de la dynamique, présentée au chapitre 2, a mis en évidence des phénomènes de résonances entre la fréquence de modulation et la fréquence des oscillations de Bloch. En particulier, à la résonance, des dynamiques de transport et de diffusion du paquet d'ondes ont été analytiquement démontrées et numériquement observées. La sélection entre les différentes dynamiques dépend des cohérences moyennes de l'état initial mettant ainsi en évidence le caractère quantique de la dynamique.

Dans la continuité de cette étude, nous avons étudié l'impact d'une modulation de grande amplitude, couplant alors les états localisés aux états du continuum. Un résultat préliminaire intéressant est que la durée de vie des états de Wannier Stark dépend de la fréquence de modulation et présente des phénomènes de résonance avec la fréquence de Bloch. La cohérence quantique moyenne initiale entre états premiers voisins joue de nouveau ici un rôle déterminant sur la durée de vie des états. Cette étude n'ayant pas totalement abouti, nous ne l'avons pas reportée dans ce mémoire. Un des objectifs du futur proche sera donc de la terminer.

Dans le cas où l'état initial est un condensat de Bose Einstein que l'on peut décrire par une approche de champ moyen, la dynamique quantique dans un réseau incliné statique présente des caractéristiques nouvelles dues à la non-linéarité de l'équation d'évolution de la fonction d'onde du condensat. Dans le chapitre 3, nous avons étudié cette dynamique en utilisant une décomposition de la fonction d'onde dans la base des états de Wannier Stark. L'étude de l'évolution temporelle des amplitudes des états a alors pu être décrite comme l'évolution d'un système d'oscillateurs classique non-linéaires couplés. En particulier, nous avons dégagé une formulation hamiltonienne des équations d'évolution décrivant un système quasi-intégrable. L'utilisation des théorèmes généraux de la dynamique classique nous a alors permis de déterminer des conditions sur l'état initial du condensat conduisant à des dynamiques régulières permettant l'observation des oscillations de Bloch sur un temps fini. Par ailleurs, nous avons montré, à l'aide des outils standards de la dynamique non-linéaire, l'existence de dynamiques d'accrochage de phase entre les amplitudes

des états de Wannier Stark. Enfin et surtout, nous avons pu mettre en évidence des dynamiques chaotiques dans l'évolution temporelle des amplitudes des états. Cette étude nous a permis d'étudier l'influence de la non-linéarité sur la dynamique quantique.

Dans un futur proche, deux pistes de recherche nous semblent dès lors intéressantes à explorer. La première est d'étudier la possibilité de coupler les états entre eux à l'aide d'une modulation harmonique de la pente du réseau afin de générer des dynamiques de transport cohérent. Nous devons alors déterminer l'influence de la non-linéarité sur la dynamique cohérente. La seconde est d'étudier l'influence de la décohérence sur les dynamiques particulières observées notamment les dynamiques chaotiques.

Dans le dernier chapitre, nous avons vu comment l'utilisation des oscillations de Bloch pouvait permettre d'élaborer une méthode de mesure de la fonction d'onde à l'aide d'une mesure de la population d'une classe de vitesse. Cette méthode a été appliquée successivement à une fonction d'onde atomique et à un condensat de Bose Einstein. Nous avons montré qu'elle permettait d'obtenir des résultats très satisfaisants compte tenu de la simplicité conceptuelle de la méthode. Il semble aujourd'hui peu probable que cette thématique de recherche conduise à de futurs développements théoriques.

A	Étalement du paquet d'ondes lors d'une oscillation de Bloch	46
B	Étude numérique des intégrales de recouvrement χ_n et $\chi_n^{(2)}$	47
C	Influence de la durée de vie des états de Wannier Stark	48
D	Les ondes de Bloch	48
E	Les super-réseaux de semi-conducteurs	51
F	Modulation du réseau incliné : résonances secondaires	52
G	Modulation de la phase ou de l'amplitude du réseau	53

A Étalement du paquet d'ondes lors d'une oscillation de Bloch

L'expression analytique de l'étalement du paquet d'ondes durant une oscillation de Bloch est ici obtenue dans le cadre du couplage aux premiers voisins. Nous supposons que l'atome est initialement décrit par une superposition d'états de Wannier Stark de la première échelle. L'évolution de la fonction d'onde atomique est donc de la forme (11). L'étalement $\Delta(t)$ du paquet d'ondes, qui implique les deux premiers moments de l'opérateur position X , a pour expression :

$$\Delta^2(t) = \langle X^2 \rangle(t) - \langle X \rangle^2(t).$$

Le premier moment $\langle X \rangle$ a déjà été calculé (17) et l'on obtient en ne gardant que les termes dominant en χ_1 (nous supposons ici $\chi_1 < 1$ et donc $\chi_1 \gg \chi_1^2$)

$$\begin{aligned} \langle X \rangle(t)^2 &= \left(\sum_n n |c_n|^2 \right)^2 + \\ &2\chi_1 \left(\sum_n n |c_n|^2 \right) \left(\sum_n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right). \end{aligned} \quad (105)$$

Le calcul du second moment $\langle X^2 \rangle(t)$ se fait dans le même esprit

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle(t) &= \int |\Psi(x, t)|^2 x^2 dx \\ &= \sum_{l, m} \chi_{l, m}^{(2)} c_l^* c_m e^{i(l-m)\omega_B t} \end{aligned} \quad (106)$$

où nous avons noté $\chi_{l, m}^{(2)} \equiv \langle \phi_l | X^2 | \phi_m \rangle$. Les intégrales de recouvrement $\chi_{l, m}^{(2)}$ possèdent elles aussi des propriétés de translation :

$$\chi_{l, l+p}^{(2)} = \chi_p^{(2)} + 2l\chi_p + l^2\delta_{p,0} \quad (107)$$

qui se démontrent sans difficulté à partir des propriétés de translation (9) et d'ortho-normalisation (7) des états de

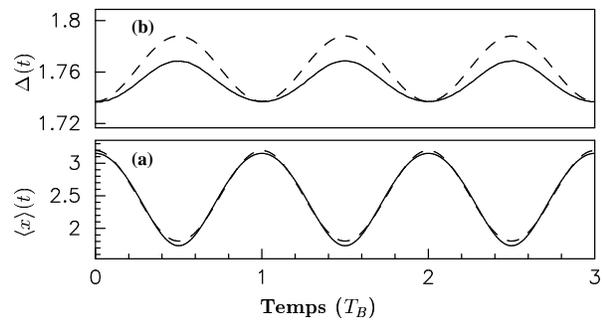


FIG. 37: **Position moyenne et étalement** : Les évolutions temporelles (calculées numériquement) de la position moyenne (a) et de l'étalement (b) sont représentées pour une distribution initiale carrée avec $N = 6$ et $k_0 = 0$. Le trait plein correspond à un calcul numérique à partir de l'équation de Schrödinger alors que le trait tiré correspond aux formules analytiques.

Wannier Stark. Dans l'expression (107) nous avons utilisé la notation contractée $\chi_p^{(2)} = \chi_{0,p}^{(2)}$.

En introduisant (107) dans (106) et en ne gardant que les termes dominants en χ_1 et $\chi_1^{(2)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle(t) &= \sum_n \left(\chi_0^{(2)} + n^2 \right) |c_n|^2 \\ &+ 2\chi_1 \left(\sum_n n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right) \\ &+ \chi_1^{(2)} \left(\sum_n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right) \end{aligned} \quad (108)$$

et donc pour l'étalement :

$$\begin{aligned} \Delta^2(t) &= \sum_n \left(\chi_0^{(2)} + n^2 \right) |c_n|^2 - \left(\sum_n n |c_n|^2 \right)^2 \\ &+ 2\chi_1 \left(\sum_n n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right) \\ &- 2\chi_1 \left(\sum_n n |c_n|^2 \right) \left(\sum_n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right) \\ &+ \chi_1^{(2)} \left(\sum_n c_n^* c_{n+1} e^{-i\omega_B t} + \text{c.c.} \right). \end{aligned} \quad (109)$$

Cette expression traduit un étalement périodique du paquet d'ondes de fréquence ω_B qui est parfois appelé mouvement de respiration. Une étude détaillée et largement illustrée de ce mouvement de respiration peut être trouvée dans [16].

Pour donner un sens à cette expression, nous prenons le cas d'une distribution initiale de forme carrée de N puits également peuplés avec un déphasage constant entre les puits voisins *i.e.*

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ink_0} \quad \text{si } 1 \leq n \leq N \\ c_n(0) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

L'expression (109) prend alors la forme simple si $N \geq 2$

$$\Delta(t)^2 = \chi_0^{(2)} + \frac{N^2 - 1}{12} + 2 \frac{N - 1}{N} \left(\chi_1^{(2)} - \chi_1 \right) \cos(k_0 - \omega_B t)$$

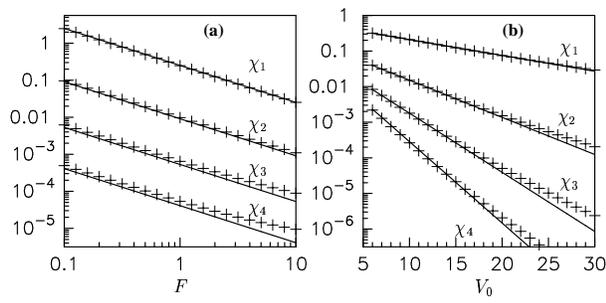


FIG. 38: **Premiers éléments non diagonaux de l'opérateur X dans la base de Wannier Stark** : Les croix correspondent aux intégrales de recouvrement χ_1 , χ_2 , χ_3 et χ_4 calculées numériquement et les traits pleins, aux expressions approchées (110) pour (a) $V_0 = 15$ et (b) $F = 2$.

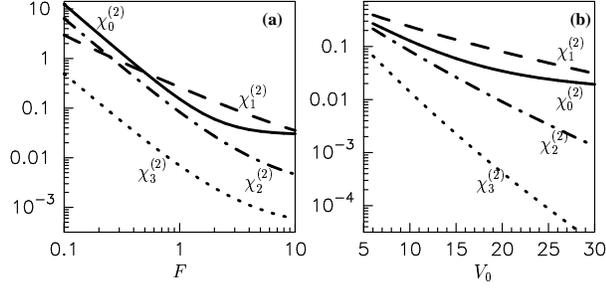


FIG. 39: **Premiers élément de l'opérateur X^2 dans la base de Wannier Stark** : Les intégrales de recouvrement $\chi_0^{(2)}$ en trait plein, $\chi_1^{(2)}$ en trait interrompu et $\chi_2^{(2)}$ en trait mixte et $\chi_3^{(2)}$ en pointillé sont calculées numériquement pour (a) $V_0 = 15$ et (b) $F = 2$.

qui traduit un étalement périodique de fréquence ω_B . La figure 37 met en évidence cette l'oscillation de l'étalement. Les résultats analytiques y sont comparés au calcul numérique et montrent un bon accord.

B Étude numérique des intégrales de recouvrement χ_n et $\chi_n^{(2)}$

Nous présentons ici quelques résultats numériques relatif aux intégrales de recouvrement χ_n et $\chi_n^{(2)}$ de l'échelle de Wannier Stark fondamentale, dont nous rappelons ici les définitions :

$$\chi_n \equiv \int \varphi_0(x) x \varphi_n(x) dx$$

et

$$\chi_n^{(2)} \equiv \int \varphi_0(x) x^2 \varphi_n(x) dx.$$

B.1 Intégrales de recouvrement χ_n

Éléments non-diagonaux $n \neq 0$ Nous pouvons montrer, par une régression linéaire, que la relation entre les intégrales de recouvrement et les paramètres du potentiel (amplitude du réseau V_0 et force F) pour les états de Wannier Stark fondamentaux de chaque puits de potentiel, est approximativement de la forme :

$$\chi_n \simeq \frac{a_n e^{-V_0/b_n}}{F} \quad (110)$$

où les paramètres a_n et b_n sont donnés dans le tableau 4. Ces relations ne sont bien vérifiées que pour les faibles amplitudes du réseau ($V_0 < 30$), ce qui correspond au cas que nous considérons dans ce manuscrit. En effet, dans le cas d'un réseau très profond ($V_0 > 30$), l'amplitude spatiale des oscillations de Bloch ne devient conséquente que pour des forces très faibles ($F < 0,05$), ce qui induit un temps d'observation expérimentale long (pour une expérience typique avec des atomes de Césium, $F = 0,05$ implique $T_B \approx 6,6$ ms), de l'ordre du temps de relaxation, celles-ci sont donc difficilement observables avec des atomes refroidis par laser. La figure 38 compare pour les premières intégrales de recouvrement χ_n les valeurs calculées numériquement aux formes approchées (110).

TAB. 4: **Paramètres numériques** pour le calcul de la forme approchée (110) des intégrales de recouvrement

n	1	2	3	4
a_n	1,17	0,33	0,17	0,11
b_n	10	4,2	2,4	1,9

Éléments diagonaux $n = 0$ Il n'est pas difficile de constater que l'intégrale de recouvrement χ_0 dépend du choix de l'origine des coordonnées. Ce terme ne traduit donc aucun comportement physique et peut sans restriction être éliminé afin de simplifier les expressions analytiques. Qui plus est, dans le cas présent celui-ci correspond à la position moyenne de l'état fondamental localisé autour de l'origine $\varphi_0(x)$, il caractérise donc la dissymétrie de parité de la distribution de probabilité de cet état. Or, comme nous pouvons le voir sur la figure 8, cette dissymétrie est très faible et donc ici $\chi_0 \ll \chi_1$.

B.2 Intégrales de recouvrement $\chi_n^{(2)}$

La figure 39 représente l'évolution des premières intégrales de recouvrement $\chi_n^{(2)}$ en fonction de la force F et de l'amplitude du réseau V_0 . Le trait plein correspond à $\chi_0^{(2)}$, qui caractérise la dynamique de l'étalement de la fonction d'onde de l'état de Wannier Stark. Celui-ci décroît avec la force et l'amplitude du réseau ; la saturation correspond à un état fortement localisé dans un puits de potentiel. Lorsque l'état de Wannier Stark est bien localisé dans un puits de potentiel - $\chi_0^{(2)} < 1$ - le terme $\chi_1^{(2)}$ domine les termes d'ordre supérieur $\chi_{p>1}^{(2)}$.

Nous pouvons aussi par une régression linéaire obtenir une forme approchée de ces intégrales de recouvrement

$$\begin{aligned} \chi_0^{(2)} &= \frac{c_0}{F^2} e^{-2V_0/d_0} + e_0 \\ \chi_1^{(2)} &= \frac{c_1}{F} e^{-V_0/d_1} \\ \chi_2^{(2)} &= \frac{c_2}{F^2} e^{-2V_0/d_2} \end{aligned}$$

où les paramètres numériques sont donnés dans le tableau suivant :

n	0	1	2
c_n	3,3	1,5	3,49
d_n	10	8,9	8,5
e_n	0,018		

Nous voyons ainsi en particulier que les intégrales de recouvrement $\chi_1^{(2)}$ et χ_1 dépendent des paramètres du potentiel de manière similaire, avec des coefficients numériques très proches. Ces deux quantités sont donc peu différentes l'une de l'autre.

C Influence de la durée de vie des états de Wannier Stark sur les Oscillations de Bloch

Dans ce complément, nous étudions temporairement le cas d'un système infini – sans boîte – en nous intéressant tout particulièrement au cas où les états de Wannier Stark fondamentaux de chaque puits de potentiel ont une durée de vie de l'ordre de la période de l'oscillation de Bloch.

Les atomes soumis à un potentiel linéaire (c'est à dire soumis à une force constante) sont uniformément accélérés. Or, nous venons de voir que lorsqu'un réseau est ajouté, ils oscillent dans l'espace réel. Ce changement de dynamique n'est pas soudain, mais se fait de manière continue. Pour le décrire, il faut tenir compte de la durée de vie finie des états de Wannier Stark.

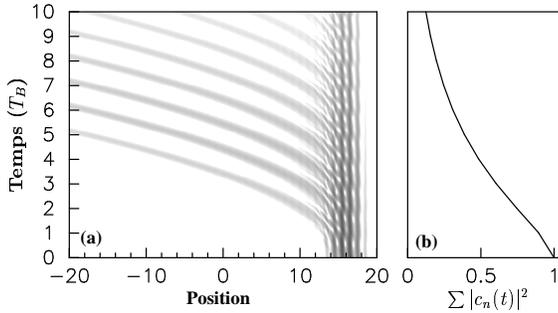


FIG. 40: **Oscillations de Bloch avec couplage vers le continuum** : La partie gauche de la figure représente l'évolution spatio-temporelle de la probabilité de présence codée en niveaux de gris (Les zones sombres traduisent une forte probabilité de présence) tandis que la partie droite représente l'évolution temporelle de la probabilité de présence dans l'échelle de Wannier Stark fondamentale. La figure a été réalisée pour $V_0 = 12$ et $F = 15$.

Lorsque la profondeur des puits de potentiel diminue, le courant de fuite augmente, et la durée de vie des états de Wannier Stark diminue. La figure 40 représente l'évolution spatio-temporelle dans le cas d'un important courant de fuite. Les oscillations de Bloch sont toujours visibles, mais le courant de fuite couple les états de Wannier Stark au continuum d'états délocalisés. Ce couplage se traduit par l'émission périodique de petits paquets d'ondes dont les trajectoires paraboliques (caractéristique d'une accélération uniforme) indiquent qu'ils sont principalement sensibles au potentiel linéaire et donc qu'ils appartiennent aux continuum d'états.

Le fait que l'émission soit discrète et non continue peut paraître surprenant de prime abord mais s'explique en fait très simplement. Chaque état de Wannier Stark se dépeuple exponentiellement vers le continuum et peut donc être vu

comme une source continue d'onde de matière. Comme les énergies de ces états se répartissent sur une échelle linéaire, les fréquences des différentes sources de matière varient aussi linéairement avec l'indice du puits. L'interférence des ondes de matière forme alors des paquets d'ondes localisés répartis avec une période spatiale de $2\pi/F$.

Cet effet a été expérimentalement mis en évidence à l'aide d'un condensat de Bose Einstein [57] et permet de réaliser un "laser à atomes".

D Les ondes de Bloch

Historiquement, les oscillations de Bloch n'ont pas été étudiées à l'aide des états de Wannier Stark. Dans son article de 1934 [2], Zener utilise les états propres du potentiel périodique. De tels états sont appelés *états de Bloch*. Bien que dans la suite de ce travail nous n'utiliserons pas cette approche, nous rappelons ici la description des oscillations de Bloch dans le formalisme "standard" utilisant les ondes de Bloch [19].

D.1 Les états de Bloch

Cherchant à définir les états propres d'un potentiel périodique, Félix Bloch montre que les états d'énergie se structurent en bandes distinctes, séparées par des "bandes interdites" [1]. Il existe donc des états d'énergie ne correspondant à aucun état propre. Ce résultat essentiel permet l'explication de nombreuses propriétés électroniques des solides comme le caractère isolant ou conducteur d'électricité, le spectre d'absorption optique, les phénomènes de transport électronique [58]. Un résultat important des travaux de Bloch concerne les fonctions d'onde associées à ces états propres ; on peut effectivement montrer que celles-ci sont délocalisées sur l'ensemble du cristal.

Théorème de Bloch Pour caractériser les états de Bloch, il nous faut deux indices, un indice discret n qui repère le "numéro" de la bande d'énergie à laquelle appartient l'état et un indice continu k qui repère l'état à l'intérieur de la bande d'énergie. Ces états sont donc notés $\phi_{n,k}(x)$ et sont associés à une énergie $E_n(k)$. Nous avons alors pour un potentiel sinusoïdal :

$$\left(\frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x)\right) \phi_{n,k}(x) = E_n(k) \phi_{n,k}(x). \quad (111)$$

Dans son article de 1928, Bloch démontre que ces états peuvent se mettre sous la forme particulière :

$$\phi_{n,k}(x) = u_{n,k}(x) e^{ikx} \quad (112)$$

où les fonctions $u_{n,k}(x)$ ont la même périodicité que le réseau, c'est à dire

$$u_{n,k}(x+1) = u_{n,k}(x)$$

L'ensemble de ces résultats constitue le *théorème de Bloch*. Remarquons que lorsque $V_0 = 0$, les états propres sont des particules libres représentées par des ondes planes e^{ikx} qui satisfont bien au théorème de Bloch. Il y a dans ce cas une seule bande continue d'énergie : la parabole des particules libres $E(k) = \frac{1}{2}k^2$. C'est pourquoi l'indice continu k est

appelé par analogie avec le cas des particules libres, le *quasi-moment*.

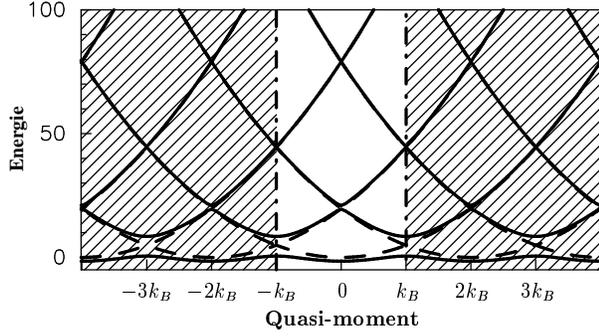


FIG. 41: Repli des bande d'énergie dans la zone de Brillouin

En introduisant la forme (112) dans l'équation aux valeurs propres (111) nous obtenons une équation aux valeurs propres pour les fonctions $u_{n,k}(x)$:

$$\left(\frac{(P+k)^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) \right) u_{n,k}(x) = E_n(k) u_{n,k}(x). \quad (113)$$

Nous pouvons montrer de plus que, du fait de la périodicité du potentiel, les bandes d'énergie sont des fonctions périodiques de k toutes de même période $2k_B = 2\pi$. C'est à dire que

$$E_n(k + k_r) = E_n(k)$$

et

$$\phi_{n,k+k_r}(x) = \phi_{n,k}(x).$$

La connaissance des états de Bloch sur un intervalle $[-\pi, \pi]$ de l'espace des quasi-moment k est donc suffisante et contient toute l'information sur la dynamique de la particule. Ce domaine particulier est connu sous le nom de zone de Brillouin et l'on note $k_B \equiv \pi$. La figure 41 représente les bandes d'énergie calculées numériquement pour un potentiel sinusoïdal d'amplitude $V_0 = 8$, les zones redondantes sont hachurées mettant en évidence la *zone de Brillouin*. Le trait tiré représente la parabole des électrons libres $V_0 = 0$.

La largeur des bandes interdites diminue lorsque l'énergie augmente ; les bandes d'énergie élevée sont quasiment connectées et forment un continuum alors que les bandes de basse énergie (notamment celles dont l'énergie est inférieure à la profondeur du réseau) sont distinctement séparées.

Les fonctions $u_{n,k}$ ayant la périodicité du réseau, cela implique que les fonctions d'onde $\phi_{n,k}$ sont délocalisées sur l'ensemble du réseau, c'est pourquoi on parle souvent d'onde de Bloch. Cependant, il est bien évident qu'une particule n'est généralement pas dans un unique état de Bloch, ce qui imposerait qu'elle soit totalement délocalisée dans le réseau, mais dans une superposition d'états de manière à former un "paquet" d'ondes (de Bloch) localisé en position.

La partie droite de la figure 42 représente des états de Bloch de différentes bandes d'énergie calculées numériquement pour $V_0 = 8$ tandis que la structure de bande est reportée à gauche de la figure. Nous pouvons remarquer que l'état de la bande fondamentale présente un maximum de probabilité de présence au centre du puits et aucun "nœud" et que les états de bandes supérieures ont un nombre

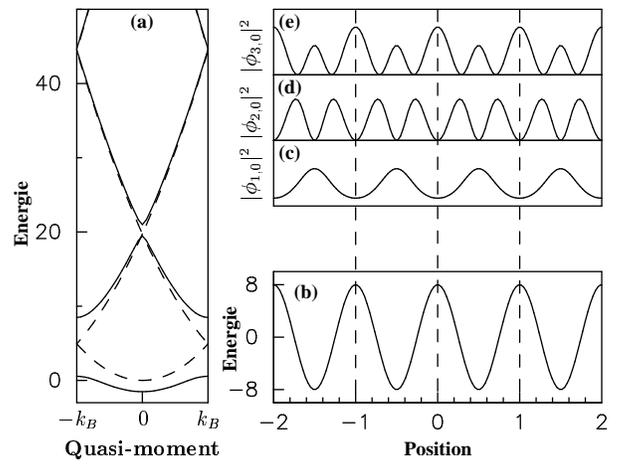


FIG. 42: Bandes d'énergie et fonctions de Bloch : La figure (a) représente les premières bandes d'énergie pour $V_0 = 8$ en trait plein et pour $V_0 = 0$ (particule libre) en pointillé. La figure (b) représente le potentiel périodique avec en regard la probabilité de présence de particule dans des états de Bloch de différentes bandes ((c), (d), (e) respectivement $|\phi_{n=1,k=0}|^2$, $|\phi_{n=2,k=0}|^2$, $|\phi_{n=3,k=0}|^2$).

de nœuds croissant rappelant ainsi les fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

D.2 Les états de Wannier

Les états de Bloch sont délocalisés sur l'ensemble du réseau et sont mal adaptés à la description de phénomènes locaux. Nous pouvons néanmoins définir à l'aide des états de Bloch, une base d'états localisés nommés états de Wannier et définis par

$$w_l^n(x) \equiv \int \phi_{n,k}(x) e^{ikl} dx.$$

Ces fonctions sont alors exponentiellement localisées autour du puits l et possèdent la propriété de translation suivante

$$w_l^n(x) = w_0^n(x - l).$$

Chaque bande d'énergie est donc caractérisée par une unique fonction de Wannier. Par contre, les fonctions de Wannier ne sont pas des états propres du potentiel périodique.

Si l'on suppose que le potentiel linéaire ne couple pas les différentes bandes d'énergie et que l'on s'intéresse à une bande profonde dans le potentiel, nous pouvons montrer [59] qu'il existe une relation simple entre les états de Wannier et les états de Wannier Stark :

$$\varphi_l^n(x) = \sum_m J_{m-l} \left(\frac{W_n}{2F} \right) w_m^n(x). \quad (114)$$

Cette relation permet en particulier d'obtenir une relation entre la largeur de la bande d'énergie fondamentale W_1 et l'intégrale de recouvrement χ_1 . En remplaçant les fonctions de Wannier Stark par l'expression (114) dans la définition de χ_1 , nous obtenons :

$$\chi_1 = \sum_{o,p} J_o \left(\frac{W_1}{2F} \right) J_{p-1} \left(\frac{W_1}{2F} \right) \int w_o^1(x) w_p^1(x) x dx.$$

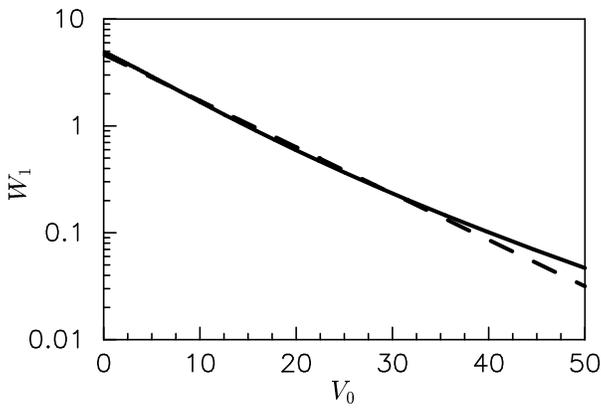


FIG. 43: **Largeur de la bande fondamentale** : L'évolution de la largeur de la première bande d'énergie est représentée en fonction de l'amplitude du réseau. Le trait plein correspond au calcul numérique et le trait tiré à la forme approchée $4a_1 e^{-V_0/b_1}$. L'adéquation est bonne pour les réseaux pas trop profond, typiquement pour $V_0 < 30$

Comme les fonctions de Wannier sont exponentiellement localisées, nous pouvons considérer que l'opérateur position est diagonal dans la base de Wannier, c'est à dire que $\int w_o^1(x) w_p^1(x) x dx = p \delta_{o,p}$, soit

$$\chi_1 = \sum_p p J_p \left(\frac{W_1}{2F} \right) J_{p-1} \left(\frac{W_1}{2F} \right)$$

ce qui se simplifie en utilisant la relation de récurrence entre les fonction de Bessel $p J_p(z) = \frac{z}{2} [J_{p-1}(z) + J_{p+1}(z)]$ et le théorème d'addition $J_\nu(u-v) = \sum_k J_{\nu+k}(u) J_k(v)$ [26] soit

$$\chi_1 = \frac{W_1}{4F}. \quad (115)$$

Nous en déduisons donc que la variation de la largeur de bande avec l'amplitude V_0 du réseau est de la forme $W_1 = 4a_1 e^{-V_0/b_1}$. La figure 43 compare cette expression au calcul numérique de la largeur de la bande fondamentale et montre un bon accord pour les petites valeurs de l'amplitude du réseau ($V_0 < 30$).

De la même façon, nous pouvons calculer simplement l'expression des intégrales de recouvrement $\chi_0, \chi_0^{(2)}, \chi_1^{(2)}$. Nous donnons ici directement les résultats³⁶ :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 0 \\ \chi_0^{(2)} &= 2(\chi_1)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |w_o^1(x)| x^2 dx \\ \chi_1^{(2)} &= \chi_1. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les résultats exposés dans le complément B.

D.3 Les oscillations de Bloch

Nous pouvons maintenant présenter la description standard des oscillations de Bloch à l'aide des ondes de Bloch.

³⁶Nous avons pour le calcul utilisé la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_o^1(x) w_p^1(x) x^2 dx = p \delta_{o,p} + \int_{-\infty}^{\infty} |w_o^1(x)| x^2 dx$$

qui découle directement des propriétés de translation des fonctions de Wannier.

Nous supposons donc la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ constituée d'une superposition d'ondes de Bloch, son évolution est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\Psi(x, t)}{dt} = \left(\frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + Ft \right) \Psi(x, t). \quad (116)$$

L'idée maitresse de la description est de procéder par une analogie avec la mécanique classique. En mécanique classique, une force constante F induit une accélération uniforme $a = \frac{F}{m}$ et donc une impulsion variant linéairement avec le temps $p(t) = Ft + p(0)$. L'idée est alors dans notre problème quantique de traiter la force dans (116) comme une variation d'impulsion. Nous pouvons pour cela effectuer une transformation unitaire, qui revient à poser dans l'équation (116) :

$$\Psi(x, t) = \Phi(x, t) e^{i(q+Ft)x}$$

La fonction Φ vérifie alors l'équation suivante :

$$i \frac{d\Phi(x, t)}{dt} = \left(\frac{(P + q + Ft)^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) \right) \Phi(x, t)$$

correspondant à une équation de Schrödinger où l'opérateur P est remplacé par l'opérateur $P + q + Ft$. Or d'après (113), les états propres d'une telle équation sont les fonctions $u_{n,k}(x)$ de quasi-moment $k = q + Ft$.

L'effet de la force s'exprime donc par une variation temporelle du quasi-moment k . En remarquant que le quasi-moment est relié directement à l'impulsion, nous pouvons formuler cet effet comme :

$$\frac{dk}{dt} = F$$

La force induit donc une évolution temporelle du quasi-moment semblable à celle de l'impulsion du problème classique. Ce résultat porte le nom de *théorème quasi-classique*.

Le mouvement d'oscillation apparaît alors en premier lieu dans l'espace réciproque, c'est à dire dans la bande d'énergie.

Pour commencer étudions le cas d'un réseau de profondeur nulle, les bandes d'énergie sont alors des morceaux de parabole connectés entre eux. Lorsque l'on branche la force F , un état d'impulsion k voit son impulsion croître linéairement avec le temps en passant de bande en bande de manière à explorer une moitié de la parabole.

Par contre, lorsque le réseau à une profondeur non nulle, des bandes interdites sont ouvertes et l'état se retrouve piégé à l'intérieur de sa bande d'énergie, contraint à la parcourir indéfiniment. Du fait de la périodicité en k des états de Bloch, la particule parcourt périodiquement les mêmes états de Bloch ce qui donne naissance à un mouvement d'oscillation. La période d'oscillation se déduit simplement comme le temps nécessaire pour parcourir la zone de Brillouin *i.e.* $T_B = \frac{2\pi}{F}$. Le phénomène d'oscillation de Bloch est ainsi une conséquence directe de la structure de bande. La figure 44 représente l'évolution d'un état de Bloch dans la bande d'énergie et permet d'illustrer le théorème quasi classique. La condition de validité du théorème

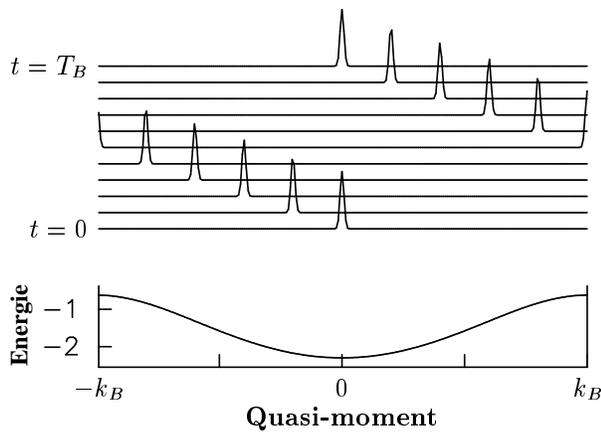


FIG. 44: **Oscillations de Bloch dans la zone de Brillouin** : Sous l'effet de la force, un état de Bloch de la bande fondamentale (b) parcourt périodiquement la bande d'énergie (a). La figure a été obtenue par une intégration numérique de l'équation de Schrödinger pour $V_0 = 10$ et $F = 1$.

est que la force soit suffisamment faible pour ne pas introduire de transitions entre les différentes bandes d'énergie. Pour un critère quantitatif rudimentaire nous pouvons comparer le gain d'énergie par puits de potentiel dû au potentiel linéaire $Fd - d = 1$ est le pas du réseau – à la largeur de la bande interdite E_G ; les transitions entre bandes d'énergie sont négligeables alors si $Fd \ll E_G$.

Nous pouvons alors interpréter la dynamique dans l'espace réel en remarquant que les fonctions de Bloch étant délocalisées sur l'ensemble du réseau, elles ne correspondent pas à un paquet d'ondes réaliste. Pour créer un paquet d'ondes localisé en position, il faut constituer une superposition d'ondes de Bloch. La dynamique dans l'espace réel peut être appréhendé grâce à la notion de vitesse de groupe [27] du paquet d'ondes. Si l'état initial est constitué d'états de Bloch de la même bande d'énergie n_0 et si la distribution initiale d'états est très "piquée" autour d'une valeur k_0 ³⁷, alors la vitesse du paquet d'ondes est assimilable à la vitesse de groupe :

$$v_g(t) = \left[\frac{dE_{n_0}}{dk} \right]_{k=k_0+ Ft}$$

La bande d'énergie étant périodique en k sa dérivée l'est aussi; la vitesse de groupe est donc périodique en temps, ce qui traduit de manière évidente un mouvement d'oscillation.

Lorsque les bandes d'énergie sont bien isolées les unes des autres, il est possible d'introduire une forme approchée de la bande d'énergie

$$E_n(k) \simeq \frac{W_n}{2} \cos(k) \quad (117)$$

nous obtenons alors simplement l'expression de la vitesse :

$$v_g(t) = \frac{W_{n_0}}{2} \sin(k_0 + Ft)$$

et nous pouvons aisément en déduire l'expression de la position moyenne du paquet d'ondes

³⁷On exige en particulier que sa largeur soit petite devant la longueur de la zone de Brillouin.

$$\langle x \rangle(t) = \frac{W_{n_0}}{2F} (\cos(k_0 + Ft) - \cos(k_0)) \quad (118)$$

Nous retrouvons donc bien l'oscillation de la position moyenne du paquet d'ondes mise en évidence à l'aide de la base de Wannier Stark. Cette expression montre que dans le formalisme des ondes de Bloch, l'amplitude des oscillations dépend non pas d'une intégrale de recouvrement mais de la largeur de la bande d'énergie W_{n_0} . Nous retrouvons aussi le fait que les bornes de la vitesse ne dépendent pas de l'amplitude de la force.

Nous pouvons enfin montrer que cette approche donne bien les mêmes résultats que celle développée au paragraphe 1.3.1. L'utilisation de la vitesse de groupe suppose que l'état initial est délocalisé sur plusieurs puits de potentiel avec une enveloppe lentement variable et un déphasage k_0 constant en puits voisins. Dans l'approche Wannier Stark un tel état correspond à une cohérence entre premier voisin de module unité et de phase k_0 : $\sigma_1 = e^{ik_0}$. Si nous introduisons cette valeur dans l'expression (13) et que nous remplaçons l'intégrale de recouvrement χ_1 à l'aide de l'expression (115) alors nous retrouvons exactement (118), ce qui traduit la compatibilité des deux approches.

Nous pouvons néanmoins remarquer que la description en terme d'états de Bloch est plus complexe que celle utilisant les états de Wannier Stark, la fréquence d'oscillation apparaît en effet indirectement et la dynamique dans l'espace réel est décrite en effectuant des approximations sur la forme du paquet d'ondes. Enfin cette description ne met en pas clairement en évidence les phénomènes d'interférences quantique et borne le rôle de la cohérence initiale σ_1 en ne prenant en compte que sa phase.

E Les super-réseaux de semi-conducteurs

Nous terminons les compléments de ce premier chapitre par un aperçu de la physique des super-réseaux de semi-conducteurs. Il s'agit en fait du premier "dispositif" expérimental qui permis la mise en évidence des oscillations de Bloch.

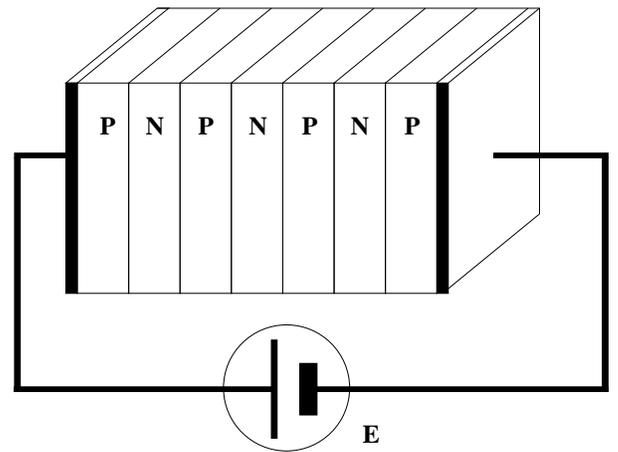


FIG. 45: **Super-réseau de semi-conducteurs**

Un super-réseau est constitué d'une alternance de couche de semi-conducteurs alternativement dopés positivement

(P) et dopés négativement (N). Un dopant N apporte un électron supplémentaire dans la maille cristalline alors qu'un dopant P apporte un déficit en électron. Les niveaux d'énergie dûs aux impuretés sont situés entre la bande de valence et la bande de conduction mais à des positions différentes selon qu'il s'agisse d'un dopant P ou d'un dopant N. Les niveaux P vont se placer juste au dessus de la bande de valence et les niveaux N juste en dessous de la bande de conduction. Or dans un semi-conducteur, le niveau de Fermi, traduisant le remplissage des couches électroniques, se situe entre la bande de conduction et de valence, la présence d'impuretés modifie le niveau de Fermi : les impuretés P "absorbent" des électrons de la bande de conduction : elles le diminuent ; par contre les impuretés N augmentent la population de la bande de conduction : elles l'augmentent. Lorsque l'on accole deux morceaux d'un même semi-conducteur dopé différemment, les niveaux de Fermi s'équilibrent, pour cela le morceau dopé N se dépeuple en électrons vers le morceau P créant alors un potentiel de P vers N qui déplace les bandes d'énergie. La figure 46 représente schématiquement le déplacement des bandes d'énergie.

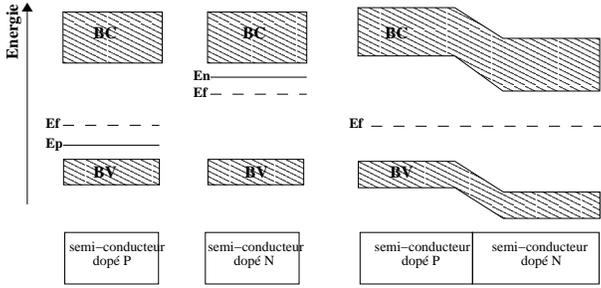


FIG. 46: **Dopage des semi-conducteurs** : La figure représente schématiquement les bandes de valence (BV) et de conduction (BC) de semi-conducteurs dopés P et N. Les niveaux dopant E_p et E_n sont placés par rapport au niveau de Fermi (E_f). Lorsque l'on accole deux morceaux dopés différemment, les niveaux de Fermi s'équilibrent et les bandes d'énergie sont déplacées.

Les électrons de conduction subissent un potentiel différent lorsqu'ils changent de couche et la succession de couches crée alors un potentiel périodique modélisable par un potentiel de forme rectangulaire. La force constante est alors le fait d'un champ électrique appliqué. Ainsi, en étudiant la dynamique des électrons appartenant à la bande de conduction, on peut reproduire la situation de conductivité électrique et observer les états de Wannier Stark par spectroscopie [13] par exemple, ou encore les oscillations de Bloch [17]. Notons que les paramètres du potentiel dépendent dans ce cas du champ électrique appliqué et de la densité de dopant des semi-conducteurs pour la profondeur du réseau. Si la force peut être modifiée facilement, changer l'amplitude de réseau nécessite de changer de super-réseau.

L'intérêt de l'utilisation des super-réseaux de semi-conducteurs pour l'observation des oscillations de Bloch est que la période spatiale du réseau périodique obtenue est environ 100 fois plus grande que celle d'un réseau cristallin. Or, comme la période de Bloch est inversement proportionnelle au pas du réseau, il est ainsi possible d'obtenir des périodes de Bloch qui soient inférieures au temps de relaxation.

F Modulation du réseau incliné : résonances secondaires

Les possibilités de modulation résonante ne se limitent pas à la résonance fondamentale. Le phénomène de résonance apparaît dès lors que la fréquence de modulation est en rapport rationnel avec la fréquence de Bloch i.e. $q\omega = p\omega_B$ où p et q sont deux entiers premiers entre eux. Une telle résonance est appelée résonance $p : q$. Nous montrons dans ce complément, comment l'on peut interpréter la dynamique lors d'une résonance secondaire à partir des résultats de la résonance fondamentale développés dans le chapitre 2. Dans un souci de simplicité, nous ne considérons ici que les cas parfaitement résonants.

Si l'on applique de nouveau l'approximation séculaire et que l'on ne garde que les termes de couplage entre premiers voisins, le système d'équations couplées (30), devient simplement :

$$\dot{d}_n = (-i)^{q-1} \Omega_{p,q} (d_{n+p} - d_{n-p}) \quad (119)$$

où l'on a posé

$$\Omega_{p,q} \equiv F_0 \chi_p J_q \left(q \frac{F_1}{F_0} \right).$$

Ainsi une résonance $p : q$ couple les états de Wannier Stark distants de p sites. Il n'est pas difficile de trouver une solution analytique en notant l'analogie de (119) avec (36). Comme la modulation ne couple que les états distants de p sites, le système comporte p sous-ensembles d'états dynamiquement indépendants. Le déplacement du paquet d'ondes fait apparaître les cohérences moyennes entre puits distants de p sites

$$\sigma_p^r \equiv \sum_n c_{pn+r}(0) c_{p(n+1)+r}^*(0)$$

de chaque sous-ensemble d'indice r avec $0 \leq r < p$. La position moyenne va notamment dépendre de la phase de cette cohérence, permettant la remontée ou la descente du potentiel. Chaque sous-ensemble dynamique r se déplace alors indépendamment avec la vitesse

$$v_g^r(p : q) = 2F_0 \chi_p J_q \left(q \frac{F_1}{F_0} \right) \text{Re}(\sigma_p^r)$$

où $\text{Re}(\sigma_p^r)$ désigne la partie réelle de la cohérence σ_p^r .

Les résonances secondaires permettent de générer des paquets d'ondes de forme très particulière ; supposons une modulation $2 : 1$ i.e. $\omega = 2\omega_B$, elle définit deux sous-ensembles dynamiquement distincts, le sous-ensemble des états d'indice impair et le sous-ensemble des états d'indice pair.

Prenons l'exemple d'un état initial constitué d'un seul état de Wannier Stark. La modulation couple alors cet état à tous ceux du même sous-ensemble et le paquet d'ondes se diffuse dans les états de ce sous-ensemble. La figure 47-a représente une telle diffusion, la diffusion ne peuple qu'un puits sur deux.

Imaginons maintenant, que le sous-ensemble pair ait une cohérence moyenne qui correspondent à une vitesse de groupe positive, et le sous ensemble impair, une cohérence qui correspondent à une vitesse négative. Une partie du paquet d'ondes grimpe le potentiel tandis que l'autre le dévale : on obtient une séparation du paquet d'ondes. Cette situation est représentée sur la figure 47-b.

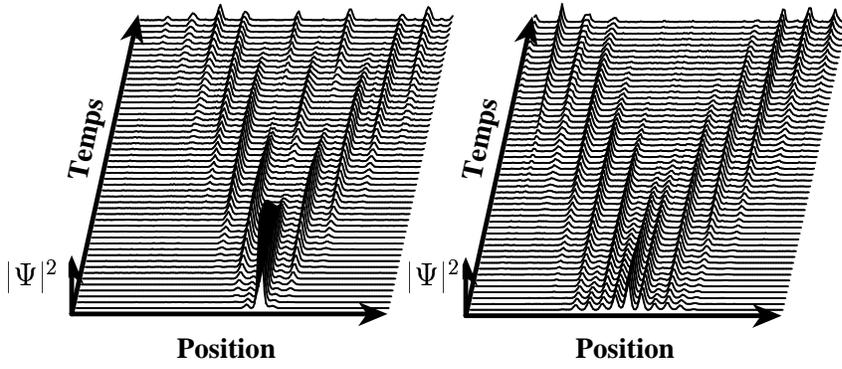


FIG. 47: **Résonance 2 : 1** : Dynamique spatio-temporelle pour une résonance 2 : 1 ($V_0 = 20$, $F_0 = 3$ et $F_1 = 6$) : (a) diffusion d'un état initial peuplant un puits sur deux (b) séparation du paquet d'ondes, les états pairs remontent le potentiel tandis que les états impairs le dévalent. L'intégration est effectuée sur $100T_B$ avec un échantillonnage de $2T_B$.

Nous pouvons ainsi préparer des paquets d'ondes atypiques peuplant un puits sur p ou scindé en des parties éloignées l'une de l'autre.

Remarquons enfin que la résonance 1 : 2 (i.e. $2\omega = \omega_B$) couple les états premiers voisins et donne des développements en tous points similaires à la résonance 1 : 1 à condition de remplacer le coefficient Ω par $\Omega' = F_0\chi_1 J_2\left(2\frac{F_1}{F_0}\right)$

G Modulation de la phase ou de l'amplitude du réseau

Nous avons établi tous les résultats du chapitre 2 en considérant une modulation de la pente du réseau incliné. Ce paragraphe présente rapidement les différences introduites lorsque l'on module la phase ou l'amplitude du réseau.

G.1 La modulation de phase

Moduler la phase du réseau revient à donner un mouvement harmonique aux noeuds de l'onde stationnaire. Nous montrons ici que cela est strictement équivalent à moduler l'amplitude de la force à condition d'effectuer un changement de repère. La dynamique, lors d'une modulation de phase du réseau, est décrite par l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi[x + x_0(t)]) + F_0x \right] \Psi(x,t)$$

avec

$$x_0(t) = x_0 \sin(\omega t).$$

Ce système est en fait strictement équivalent au cas de la pente modulée si l'on effectue un changement de repère pour se transporter dans le repère solide du potentiel périodique. Pour réaliser ce changement de repère, la transformation unitaire :

$$U = e^{ix_0(t)P} e^{-i2\dot{x}_0(t)X} e^{i\gamma(t)}$$

qui a pour effet de translater les positions d'une grandeur $x_0(t)$ et les impulsions de $2\dot{x}_0(t)$ est utilisée. Nous obtenons alors, en posant

$$\dot{\gamma} = F_0x_0(t) + \ddot{x}_0(t)x_0(t) + \frac{1}{2}\dot{x}_0(t)^2,$$

l'équation de Schrödinger suivante pour la fonction d'onde $\Phi = U\Psi$

$$i\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{P^2}{2} + V_0 \cos(2\pi x) + F_0x + F_0\omega^2 x_0 \sin(\omega t)x \right] \Phi(x,t) \quad (120)$$

ce qui correspond bien au cas de la pente modulée avec une amplitude

$$F_1 = F_0\omega^2 x_0.$$

G.2 La modulation d'amplitude

La modulation d'amplitude est, quant à elle, légèrement différente. La dynamique est alors décrite par l'équation de Schrödinger suivante

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{P^2}{2} + (V_0 + V_1 \sin(\omega t)) \cos(2\pi x) + F_0x \right] \Psi(x,t) \quad (121)$$

Si l'on suppose que la dynamique peut, comme dans le cas de la modulation d'amplitude, être restreinte à une seule échelle d'énergie, la décomposition de la fonction d'onde Ψ sur une échelle de Wannier Stark

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n(t)\varphi_n(x)$$

induit le système dynamique suivant

$$i\dot{c}_m = E_m c_m + V_1 \sin(\omega t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{m,m+p} c_{m+p},$$

où l'on a défini les coefficients

$$R_{m,m+p} \equiv \langle \varphi_m | \cos(2\pi x) | \varphi_{m+p} \rangle$$

Il n'est pas difficile de voir que ces coefficients vérifient la relation simple :

$$R_{m,m+p} = R_{0,p} \equiv R_p$$

On peut alors de la même façon introduire un changement de variable permettant de tenir compte des termes en R_0 ,

on pose donc ³⁸

$$d_m(t) \equiv c_m(t) e^{im\omega_B t + \frac{V_1 R_0}{\omega} \cos(\omega t)}$$

Le système d'équations différentielles devient alors :

$$\dot{d}_m = -iV_1 \sin(\omega t) \sum_{p \neq 0} R_p d_{m+p} e^{ip\omega_B t}.$$

Soit encore :

$$\dot{d}_m = -\frac{1}{2} V_1 \sum_{p \neq 0} R_p d_{m+p} \left(e^{i[p\omega_B + \omega]t} - e^{i[p\omega_B - \omega]t} \right) \quad (122)$$

Ce système conduit donc à des résonances pour $\omega = p\omega_B$ de manière similaire à (30). Remarquons qu'il existe moins de résonances que dans le cas d'une modulation de la pente. Voyons cependant le cas de la résonance fondamentale $p = 1$.

Au voisinage de la résonance $\omega = \omega_B$ (on pose de nouveau $\omega = \omega_B + \delta$ avec $|\delta| \ll 1$), les mêmes équations que (34) sont obtenues, à condition de remplacer le coefficient Ω par $\Omega' = \frac{V_1 R_1}{2}$, le couplage dépend linéairement de l'amplitude de modulation, il n'y donc plus d'optimum de couplage ni de gel de la dynamique.

H Modulation du réseau incliné : solution analytique

Dans ce complément, nous présentons le calcul de la solution analytique de l'évolution des amplitudes des états de Wannier Stark pour une modulation de la pente du réseau de fréquence quasi-résonante avec la fréquence de Bloch. Nous rappelons les équations d'évolution (34) obtenues au paragraphe 2.1.2 :

$$\dot{d}_m = \Omega (d_{m-1} e^{-i\delta t} - d_{m+1} e^{i\delta t}).$$

Pour chercher la solution analytique générale donnant l'évolution des amplitudes $d_n(t)$, nous utilisons les séries de Fourier formées à partir des amplitudes $d_n(t)$:

$$F_k(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(t) e^{ikn}. \quad (123)$$

Inversement, les amplitudes $d_n(t)$ peuvent être obtenues à partir des états $F_k(t)$ par la relation :

$$d_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_k(t) e^{-ikn} dk. \quad (124)$$

En dérivant l'expression (123) et en remplaçant la dérivée des amplitudes à l'aide de l'équation (34), nous obtenons l'évolution temporelle des états $F_k(t)$:

$$\dot{F}_k = -2i\Omega \sin(\delta t - k) F_k$$

dont la solution s'obtient immédiatement

³⁸Remarquons que ce changement de variable n'introduit pas de translation de phase des cohérences de l'état initial, on a en effet $\sum_n c_n(0) c_{n+p}^*(0) = \sum_n d_n(0) d_{n+p}^*(0)$

$$F_k(t) = F_k(0) \exp \left\{ -\frac{2i\Omega}{\delta} [1 - \cos(\delta t)] \cos(k) \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{2i\Omega}{\delta} \sin(\delta t) \sin(-k) \right\}. \quad (125)$$

Une fois l'évolution de F_k obtenu, il faut faire le lien avec l'évolution des amplitudes $d_n(t)$. Pour cela, on développe l'expression de $F_k(t)$ à l'aide des fonctions de Bessel

$$F_k(t) = F_k(0) \sum_{p,l} J_p \left(-\frac{2\Omega}{\delta} [1 - \cos(\delta t)] \right) \\ \times J_l \left(-\frac{2\Omega}{\delta} \sin(\delta t) \right) e^{ip\frac{\pi}{2} + i(p-l)k} \quad (126)$$

ce qui se simplifie en utilisant le théorème d'addition des fonctions de Bessel ³⁹

$$F_k(t) = F_k(0) \sum_q J_q(Q) e^{-iqk} e^{iq\delta t/2}$$

où l'on a posé

$$Q(t) \equiv -\frac{4\Omega}{\delta} \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right). \quad (127)$$

On revient alors simplement aux amplitudes d_n ⁴⁰ en utilisant (124) :

$$d_n(t) = \sum_q d_{n+q}(0) J_q(Q) e^{iq\delta t/2} \\ = \sum_m d_m(0) J_{m-n}(Q) e^{i(m-n)\delta t/2}. \quad (128)$$

I Calcul des moments : déplacement et étalement du paquet d'ondes

Nous reportons ici les détails du calcul de la position position moyenne et de l'étalement du paquet d'ondes lors d'une modulation de la pente du réseau incliné. Ces calcul sont effectués à partir de la solution analytique (47).

I.1 Position moyenne

Le calcul de la position moyenne s'effectue en décomposant sur la base de Wannier Stark

$$\langle x \rangle(t) = \langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle \\ = \sum_{m,n} \chi_{m,n} c_m^*(t) c_n(t)$$

³⁹Nous rappelons ici le théorème d'addition

$$\sum_p J_p(r_0) e^{-ip\theta_0} J_{p+q}(r_1) e^{-i(p+q)\theta_1} = J_q(Q) e^{iq\Theta}$$

avec

$$Q e^{i\Theta} = r_1 e^{i\theta_1} - r_0 e^{i\theta_0}.$$

Soit ici $r_0 = -\frac{2\Omega}{\delta} [1 - \cos(\delta t)]$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_1 = -\frac{2\Omega}{\delta} \sin(\delta t)$ et $\theta_1 = 0$.

⁴⁰Remarquons que les amplitudes recherchées sont en toute rigueur les amplitudes des fonction des Wannier Stark $c_n(t)$ mais celle-ci sont simplement reliées aux amplitudes $d_n(t)$ par une translation de phase on peut très bien raisonner sur les amplitudes d_n

où les coefficient $\chi_{m,n}$ sont définis par (15). La relation (16) soit encore nous permet d'obtenir alors

$$\langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle = \sum_n n |c_n(t)|^2 + \chi_1 \sum_n (c_n(t)c_{n+1}^*(t) + c.c.).$$

En utilisant les expressions (47), le premier terme devient :

$$\begin{aligned} \sum_n n |c_n(t)|^2 &= \sum_n n |d_n(t)|^2 \\ &= \sum_n n \sum_m d_{n+m}^*(0) J_m(Q) e^{-im\frac{\delta t}{2}} \\ &\quad \times \sum_l d_{n+l}(0) J_l(Q) e^{il\frac{\delta t}{2}} \quad (129) \end{aligned}$$

qui se transforme par le changement d'indice $q = m - l$ et $p = n + l$ en :

$$\sum_n n |c_n(t)|^2 = \sum_{p,q,l} d_{p+q}^*(0) d_p(0) (p-l) J_l(Q) J_{l+q}(Q) e^{-iq\frac{\delta t}{2}}$$

Nous pouvons alors nous débarrasser de la sommation sur l'indice l en utilisant conjointement le théorème d'addition des fonctions de Bessel et la relation de récurrence [26], on trouve en effet que

$$\begin{aligned} \sum_l J_l(Q) J_{l+q}(Q) &= \delta_{q,0} \\ \sum_l l J_l(Q) J_{l+q}(Q) &= \frac{Q}{2} (\delta_{q+1,0} + \delta_{q-1,0}) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \sum_n n |c_n(t)|^2 &= \sum_p p |d_p(0)|^2 - \\ &\quad \frac{Q(t)}{2} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + c.c. \right\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_n c_n(t) c_{n+1}^*(t) &= \sum_{n,l,m} d_{n+1+m}^*(0) d_{n+l}(0) \\ &\quad J_m(Q) J_l(Q) e^{i(l-m-1)\frac{\delta t}{2}} e^{i(l-m+1)\Phi(t)} \end{aligned}$$

et avec les même changement d'indices :

$$\begin{aligned} \sum_n c_n(t) c_{n+1}^*(t) &= \sum_{p,q,l} d_{p+1+q}^*(0) d_p(0) \\ &\quad J_{l+q}(Q) J_l(Q) e^{-i(q-1)\frac{\delta t}{2}} e^{i(q-1)\Phi(t)} \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\sum_n c_n(t) c_{n+1}^*(t) = \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)}.$$

L'expression de la position moyenne est donc

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle &= \sum_p p |d_p(0)|^2 \\ &\quad - \frac{Q(t)}{2} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + c.c. \right\} \\ &\quad + \chi_1 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + c.c. \right\} \end{aligned}$$

$$\langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle = \sum_p p |d_p(0)|^2 +$$

$$\left\{ \left[-\frac{Q(t)}{2} e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \chi_1 e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i(\omega_B t - \frac{F_0}{\omega} \cos(\omega t))} \right] \right. \\ \left. \times \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) + c.c. \right\}.$$

Le terme en χ_1 oscille rapidement comparé au terme en $Q(t)$. Il est alors utile d'introduire la grandeur moyennée une période de vibration de la force $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle \bar{x} \rangle (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \langle x \rangle (\tau) d\tau.$$

Comme $|\delta| \ll |\omega|, |\omega_B|$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} \rangle (t) &= \sum_p p |d_p(0)|^2 + \\ &\quad \left\{ \left[-\frac{Q(t)}{2} e^{-i\frac{\delta t}{2}} - i\chi_1 J_1 \left(\frac{F_0}{\omega} \right) e^{-i\frac{\delta t}{2}} \right] \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) \right. \\ &\quad \left. + c.c. \right\} \quad (130) \end{aligned}$$

soit en utilisant la relation (35)

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} \rangle (t) &= \sum_p p |d_p(0)|^2 + \\ &\quad \left\{ \left[-\frac{Q(t)}{2} e^{-i\frac{\delta t}{2}} - i\frac{\Omega}{\omega_B} e^{-i\frac{\delta t}{2}} \right] \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) \right. \\ &\quad \left. + c.c. \right\}. \quad (131) \end{aligned}$$

I.2 Étatement

Pour calculer l'évolution de l'étalement du paquet d'ondes, il faut déterminer l'écart quadratique moyen

$$\Delta^2(t) = \langle \Psi(t) | X^2 | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle^2$$

Le second terme correspond aux carré de la position moyenne calculée précédemment. Le premier terme se calcul en décomposant la fonction d'onde sur la base de Wannier Stark

$$\langle \Psi(t) | X^2 | \Psi(t) \rangle = \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) \chi_{m,n}^{(2)}.$$

Dans le cadre du couplage aux premiers voisins, les coefficients $\chi_{m,n}^{(2)} = \langle \varphi_m | X^2 | \varphi_n \rangle^{41}$ ont pour expression

$$\chi_{m,n}^{(2)} = m^2 \delta_{m,n} + \chi_1^{(2)} (\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1})$$

(nous rappelons la notation $\chi_1^{(2)} \equiv \langle \varphi_0 | X^2 | \varphi_1 \rangle$) soit :

$$\langle \Psi(t) | X^2 | \Psi(t) \rangle = \sum_l l^2 |c_l(t)|^2 + \chi_1^{(2)} \sum_l \{ c_l(t) c_{l+1}^*(t) + \text{c.c.} \}. \quad (132)$$

Le calcul de la deuxième somme du membre de droite à déjà été effectué plus haut aussi reste-t-il à évaluer la première somme. En remarquant que

$$\sum_l l^2 |c_l(t)|^2 = \sum_n n^2 |d_n(t)|^2$$

et en remplaçant les amplitudes $d_l(t)$ par leurs expressions (128) nous obtenons

$$\sum_l l^2 |c_l(t)|^2 = \sum_n n^2 \sum_p d_p^*(0) J_{p-n}(Q) e^{-ip\frac{\delta t}{2}} \sum_q d_q(0) J_{q-n}(Q) e^{iq\frac{\delta t}{2}} \quad (133)$$

qui, par le changement d'indice $q = m - l$ et $p = n + l$, devient

$$\sum_l l^2 |c_l(t)|^2 = \sum_{p,q} d_p^*(0) d_q(0) \left(\sum_n n^2 J_{p-n}(Q) J_{q-n}(Q) \right) e^{i(q-p)\frac{\delta t}{2}}. \quad (134)$$

Nous pouvons alors nous débarrasser de la sommation sur l'indice l en utilisant conjointement le théorème d'addition des fonctions de Bessel et la relation de récurrence, en remarquant que

$$\begin{aligned} \sum_n n^2 J_{p-n}(Q(t)) J_{q-n}(Q(t)) &= p^2 \delta_{p,q} - \frac{Q(t)}{2} (\delta_{p,q+1} + \delta_{p,q-1}) \\ &+ \frac{Q(t)^2}{4} (\delta_{p,q+2} + \delta_{p,q-2} + 2\delta_{p,q}) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \sum_l l^2 |c_l(t)|^2 &= \sum_p p^2 |d_p(0)|^2 - \frac{Q(t)}{2} \left\{ \sum_p (2p+1) d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} \\ &+ \frac{Q(t)^2}{4} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+2}^*(0) e^{-i\delta t} + \text{c.c.} \right\} + \frac{Q(t)^2}{2}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | X^2 | \Psi(t) \rangle &= \sum_p p^2 |d_p(0)|^2 + \chi_1^{(2)} \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\} \\ &- \frac{Q(t)}{2} \left\{ \sum_p (2p+1) d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} \\ &+ \frac{Q(t)^2}{4} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+2}^*(0) e^{-i\delta t} + \text{c.c.} \right\} + \frac{Q(t)^2}{2} \end{aligned}$$

⁴¹Le terme $\chi_{0,0}^{(2)}$ est très faible et ne donne aucun comportement physique, il a été éliminé pour simplifier les calculs.

L'expression de la position moyenne au carré vaut :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(t) | X | \Psi(t) \rangle^2 &= \left(\sum_p p |d_p(0)|^2 \right)^2 + \chi_1^2 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\}^2 + 2\chi_1 \sum_p p |d_p(0)|^2 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\} \\
&\quad - Q(t) \sum_p p |d_p(0)|^2 \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} - \chi_1 Q(t) \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} \\
&\quad + \frac{Q(t)^2}{4} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\}^2.
\end{aligned}$$

L'écart quadratique moyen peut donc se mettre sous la forme d'un polynôme de degrés 2 en $Q(t)$:

$$\Delta^2(t) = \Delta_0^2 + A \frac{Q(t)}{2} + B \frac{Q(t)^2}{4}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta_0^2 &= \sum_p p^2 |d_p(0)|^2 - \left(\sum_p p |d_p(0)|^2 \right)^2 + \chi_1^{(2)} \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\} - \chi_1^2 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\}^2 \\
&\quad - 2\chi_1 \sum_p p |d_p(0)|^2 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= - \sum_p \left\{ (2p+1) d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} + 2 \sum_p p |d_p(0)|^2 \left[\sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right] \\
&\quad + \chi_1 \left\{ \sum_p d_{p+1}^*(0) d_p(0) e^{i\frac{\delta t}{2}} e^{i\Phi(t)} + \text{c.c.} \right\} \left\{ \sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right\} \\
B &= 2 + \left[\sum_p d_p(0) d_{p+2}^*(0) e^{-i\delta t} + \text{c.c.} \right] \left[\sum_p d_p(0) d_{p+1}^*(0) e^{-i\frac{\delta t}{2}} + \text{c.c.} \right]^2
\end{aligned} \tag{135}$$

Nous rappelons que cette expression est valable dans le cadre de l'approximation aux proches voisins.

J Intégrales de recouvrement $X_{n,p}^{o,q}$

Nous nous intéressons ici aux intégrales de recouvrement entre quatre fonctions de Wannier-Stark :

$$X_{n,p}^{o,q} \equiv g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx. \quad (136)$$

. En utilisant la relation entre les fonctions de Wannier Stark et les fonctions de Wannier (114), nous pouvons établir un calcul approché des intégrales de recouvrement, nous avons en effet

$$X_{n_1, n_2}^{n_3, n_4} = g \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} J_{l_1 - n_1} J_{l_2 - n_2} J_{l_3 - n_3} J_{l_4 - n_4} \times \int w_{l_1} w_{l_2} w_{l_3} w_{l_4} \quad (137)$$

ou l'on a noté $J_q \equiv J_q\left(\frac{W_1}{2F}\right)$ la fonction de Bessel entière d'ordre q , $w_n(x) \equiv w_n^1(x)$ la fonction de Wannier de la bande fondamentale et W_1 la largeur de la bande d'énergie. L'intérêt d'un tel développement est que les fonctions de Wannier ne dépendent que de l'amplitude de potentiel périodique, nous pouvons ainsi aisément étudier l'influence de la force F sur les intégrales de recouvrement.

Si nous considérons le cas de fonctions de Wannier Stark fortement localisées autour d'un puits de potentiel alors cela implique que $J_0 \gg J_1 \gg J_2 \dots$ soit en fait $W_1 \ll 2F$. Les fonctions de Wannier étant exponentiellement localisées autour d'un puits de potentiel, nous pouvons ne garder, en première approximation dans la somme (137) que les intégrales portant sur quatre fonctions de Wannier identiques

$$K \equiv \int (w_n^1(x))^4 dx.$$

En combinant ces deux approximations, nous obtenons simplement les formes approchées suivante :

$$\begin{aligned} X_{0,0}^{0,0} &\approx gK (J_0)^4 \\ X_{0,0}^{0,1} &\approx gK (J_0)^3 J_{-1} \\ X_{0,0}^{1,1} &\approx gK (J_0)^2 (J_{-1})^2 \\ X_{0,0}^{0,2} &\approx gK (J_0)^3 J_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (138)$$

Nous pouvons ainsi mettre en évidence une hiérarchie entre les intégrales de recouvrement en utilisant un développement limité au premier ordre pour les fonctions de Bessel⁴² :

$$\left| \frac{X_{0,0}^{0,1}}{X_{0,0}^{0,0}} \right| \simeq \left| \frac{X_{0,0}^{1,1}}{X_{0,0}^{0,1}} \right| \simeq 2 \left| \frac{X_{0,0}^{0,2}}{X_{0,0}^{0,1}} \right| \simeq 3 \left| \frac{X_{0,0}^{0,3}}{X_{0,0}^{0,2}} \right| \dots \simeq \frac{W_1}{4F} \ll 1.$$

La figure 48 représente, en fonction de la force, l'évolution de quelques intégrales de recouvrement, la hiérarchie est alors clairement visible.

Dans le cadre des approximations (138), nous voyons qu'il y a une symétrie entre les intégrales de recouvrement : $X_{0,0}^{0,1} = -X_{0,0}^{0,-1}$. Or le calcul numérique montre un léger écart – pour $V_0 = 25$, $F = 1, 5$ et $g = 1$ $X_{0,0}^{0,-1} \simeq 0, 141$

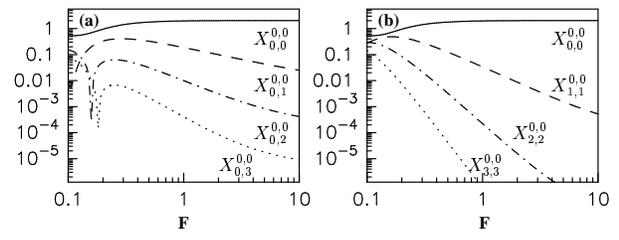


FIG. 48: **Intégrales de recouvrement** : L'évolution de quelques intégrales de recouvrement est représentée en fonction de la force pour $V_0 = 25$ et $g = 1$.

et $X_{0,0}^{0,1} \simeq -0, 154$. Nous pouvons rendre compte aisément de cette dissymétrie en prenant en compte dans (137) les intégrales de recouvrement du type

$$K_1 = \int (w_n^1(x))^3 w_{n+1}^1(x) dx$$

(le calcul numérique indique $K_1 < 0$), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} X_{0,0}^{0,\pm 1} &= g (J_0)^3 [K_1 J_0 + K J_{\mp 1}] \\ &\simeq g \left[K_1 \mp \frac{W_1}{4F} K \right] \end{aligned}$$

ce qui la met en évidence.

Avec les approximations (138), nous pouvons exprimer simplement le paramètre de perturbation lorsque les fonctions de Wannier Stark sont bien localisées – i.e. pour $F \gg W_1$:

$$\kappa \approx \frac{J_1}{J_0} \approx \frac{W_1}{4F}. \quad (139)$$

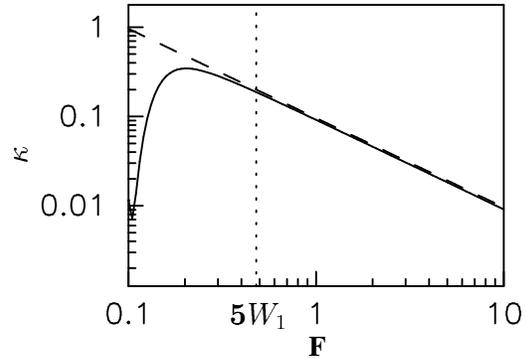


FIG. 49: **Paramètre de perturbation** : Le paramètre de perturbation κ calculé numériquement est représenté en trait plein en fonction de la force F pour $V_0 = 25$. Le trait tiré correspond à l'expression approchée (139), celle-ci est en bon accord quantitatif lorsque $F > 5W_1$ ce qui correspond à des fonctions de Wannier Stark fortement localisées.

La figure 49 représente l'évolution du paramètre de perturbation κ en fonction de la force calculé numériquement (en trait plein). Nous pouvons vérifier le bon accord avec la forme approchée (139) (en trait tiré).

K Points fixes du modèle à deux états.

Nous présentons ici le calcul détaillé de la recherche de quelques points fixes et de leurs stabilités pour le modèle à deux états. Les équations d'évolution pour la différence de

⁴² $J_n(z) \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ quand $z \rightarrow 0$.

population entre les états Δ et pour la différence de phase Θ , sont obtenues à partir des équations générales 94 :

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{dt} &= g(\Delta, \Theta) \\ \frac{d\Theta}{dt} &= h(\Delta, \Theta)\end{aligned}\quad (140)$$

avec

$$g(\Delta, \Theta) \equiv -2\kappa\sqrt{J^2 - \Delta^2} \times \left((X_+ + X_-) \frac{J}{2} + (X_+ - X_-) \frac{\Delta}{2} \right) \sin(\Theta) \quad (141)$$

et

$$h(\Delta, \Theta) \equiv F - X_0\Delta + \kappa \frac{\Delta}{\sqrt{J^2 - \Delta^2}} \times \left((3X_+ + X_-) \frac{J}{2} + (3X_+ - X_-) \frac{\Delta}{2} \right) \cos(\Theta). \quad (142)$$

J est la population totale des états.

Les points fixes du système à deux états (140) correspondent aux couples (Δ^*, Θ^*) tels que

$$\begin{aligned}g(\Delta^*, \Theta^*) &= 0 \\ h(\Delta^*, \Theta^*) &= 0.\end{aligned}$$

Lorsque le système est sur un point fixe, il n'évolue plus. On peut alors étudier la stabilité du point fixe en étudiant la dynamique à son voisinage. Pour cela, on pose

$$\Delta = \Delta^* + \delta\Delta \text{ et } \Theta = \Theta^* + \delta\Theta \quad (143)$$

où les quantités $\delta\Delta$ et $\delta\Theta$ sont de petits écarts par rapport à la position du point fixe. En introduisant les expressions (143) dans le système (140) et en linéarisant les fonctions g et h autour du point fixe, nous obtenons un système linéaire qui peut se mettre sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\Delta \\ \delta\Theta \end{pmatrix} = M(\Delta^*, \Theta^*) \begin{pmatrix} \delta\Delta \\ \delta\Theta \end{pmatrix}$$

où l'on a introduit la matrice des dérivées partielles

$$M(\Delta, \Theta) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \Delta} & \frac{\partial g}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \Delta} & \frac{\partial h}{\partial \Theta} \end{pmatrix}.$$

La stabilité du point fixe dépend alors des valeurs propres de la matrice M . Si nous notons $\lambda_1(\Delta, \Theta)$ et $\lambda_2(\Delta, \Theta)$ les valeurs propres de la matrice $M(\Delta, \Theta)$, nous avons directement en utilisant l'invariance de la trace

$$\text{Tr}(M) = \frac{\partial g}{\partial \Delta} + \frac{\partial h}{\partial \Theta}$$

et du déterminant

$$\text{Det}(M) = \frac{\partial g}{\partial \Delta} \frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{\partial h}{\partial \Delta} \frac{\partial g}{\partial \Theta}$$

deux relations les reliant :

$$\begin{aligned}\lambda_1(\Delta, \Theta) + \lambda_2(\Delta, \Theta) &= \text{Tr}(M) \\ \lambda_1(\Delta, \Theta) \lambda_2(\Delta, \Theta) &= \text{Det}(M).\end{aligned}$$

Or, en remplaçant les fonctions h et g par leurs expressions, nous obtenons après calcul

$$\lambda_1(\Delta, \Theta) + \lambda_2(\Delta, \Theta) = 0$$

soit

$$\lambda_1(\Delta, \Theta)^2 = -\text{Det}(M).$$

Selon le signe du déterminant, les valeurs propres seront soit complexes conjuguées, soit réelles et opposées. Si le déterminant est positif, les valeurs propres sont complexes conjuguées et la trajectoire de la dynamique est une oscillation autour du points fixe : on dit que le point fixe est alors un *point centre*. Si le déterminant est négatif, alors une des valeurs propres est réelle positive et l'autre est réelle négative, la dynamique est alors une contraction vers le point fixe dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative et un éloignement dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre positive : on dit que le points fixe est alors un *point col* (ou selle). Si le système est initialement au voisinage d'un point centre, la dynamique sera une oscillation autour de la valeur du point centre et la trajectoire dans l'espace des phases, une courbe fermée entourant le point centre. Si par contre le système est initialement au voisinage d'un point col, la trajectoire va s'éloigner du point col.

Dans notre système à deux états, le calcul de la position exacte des points fixes, n'est pas possible, par contre nous pouvons effectuer un calcul approché en tirant parti du fait que $\kappa \ll 1$. Nous voyons en particulier qu'il existe deux points fixes pour $\Theta^* = 0$ et $\Theta^* = \pi$ autour de $\Delta^* = F/X_0 + \theta(\kappa)$ - un calcul plus précis de Δ^* peut être effectué sans difficulté par une méthode de perturbation mais n'a ici aucun intérêt.

Pour étudier la stabilité, nous devons étudier le signe du déterminant de M . Nous obtenons alors

$$\lambda_1\left(\frac{F}{X_0}, 0\right)^2 = 2\kappa X_0 \sqrt{J^2 - \frac{F^2}{X_0^2}} \times \left((X_+ + X_-) J + (X_+ - X_-) \frac{F}{X_0} \right) \quad (144)$$

et

$$\lambda_1\left(\frac{F}{X_0}, \pi\right)^2 = -2\kappa X_0 \sqrt{J^2 - \frac{F^2}{X_0^2}} \times \left((X_+ + X_-) J + (X_+ - X_-) \frac{F}{X_0} \right). \quad (145)$$

Pour $g > 0$, $X_0 > 0$ et pour $F > 0$, $(X_+ - X_-) < 0$, le point $\left(\frac{F}{X_0}, 0\right)$ est alors un point centre et le point $\left(\frac{F}{X_0}, \pi\right)$ un point col. Pour $g < 0$, la situation est inversée. Cette méthode nous permet de plus de déterminer la fréquence d'oscillation ω au voisinage du point centre :

$$\omega = \text{Im}(\lambda_1),$$

où $\text{Im}(\lambda_1)$ est la partie imaginaire de la valeur propre complexe.

L Petits dénominateurs et théorème Kolmogorov Arnold Moser

L'idée du développement de perturbation arrive naturellement dès lors qu'il existe une hiérarchie des coefficients de couplage dans le système d'équations (94). Nous allons cependant montrer que le développement de perturbation fait apparaître des termes divergents menaçant la convergence de la série de perturbation et donc son sens physique.

Système intégrable, variables action-angles Le hamiltonien H_0 , qui ne dépend que des populations des états, constitue un système intégrable. En effet, la population de chaque état est une intégrale première indépendante des autres⁴³, en même temps qu'une constante du mouvement. Dans la terminologie de la dynamique hamiltonienne, les variables dynamiques qui correspondent aux intégrales premières sont appelées *variables d'action*. Les populations de chaque état sont donc les variables d'actions. Les variables conjuguées, ici les phases de chaque états, sont quant à elles appelées *variables angles*. L'intérêt du changement de variable (93) est donc de faire apparaître directement les variables action-angles du hamiltonien H_0 .

Développement de perturbation La méthode la plus générale pour effectuer un développement de perturbation dans un système hamiltonien quasi-intégrable, est de rechercher par une succession de changements canoniques de variables, les intégrales premières. Cette méthode porte le nom de théorie canonique des perturbations.

Un changement de variable canonique, se définit par une fonction génératrice $\Phi(\mathbf{I}', \theta)$ qui dépend ici des nouvelles actions \mathbf{I}' et des anciennes phases θ . Nous posons alors :

$$\begin{aligned} I_n &= I'_n + \kappa \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_n} \\ \theta'_n &= \theta_n + \kappa \frac{\partial \Phi}{\partial I'_n}. \end{aligned} \quad (146)$$

Avec ce changement de variable, le hamiltonien (95) devient :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{I}', \theta) &= H_0(\mathbf{I}') + \kappa \left[\sum_n \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_n} \frac{\partial H_0}{\partial I'_n} + V(\mathbf{I}', \theta) \right] \\ &+ \kappa^2 \sum_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_n} \frac{\partial V}{\partial I'_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial I'_n} \frac{\partial V}{\partial \theta_n} \right) \end{aligned} \quad (147)$$

et la fonction génératrice est choisie de façon à annuler le terme linéaire en κ i.e.

$$\Phi(\mathbf{I}', \theta) = \sum_n \frac{f_n(\mathbf{I}')}{\omega_n(\mathbf{I}') - \omega_{n+1}(\mathbf{I}')} \sin(\theta_n - \theta_{n+1}) \quad (148)$$

où nous avons posé $\omega_n(\mathbf{I}') \equiv \frac{\partial H_0}{\partial I'_n}$. Le hamiltonien avec les nouvelles variables est maintenant du deuxième ordre en κ , il est donc encore plus proche que (95) du système intégrable défini par $H_0(\mathbf{I}')$. Nous pouvons alors itérer indéfiniment le processus dans l'espoir de tendre asymptotiquement vers le système intégrable $H_0(\mathbf{I}^\infty)$ où \mathbf{I}^∞ représente le

vecteur des intégrales premières. Cependant, lorsque deux fréquences voisines $\omega_n(\mathbf{I}')$ et $\omega_{n+1}(\mathbf{I}')$ sont dégénérées, la fonction Φ n'est plus définie et l'algorithme précédent ne fonctionne plus. Remarquons que la condition de dégénérescence porte sur les nouvelles actions qui ne sont en pratique pas connues, il est donc à priori impossible de définir des domaines de validité de la méthode. Cette difficulté, qui porte le nom de "*problème des petits dénominateurs*" [44], est apparue dans les calculs de mécanique céleste du système Terre-Lune-Soleil.

Théorème Kolmogorov-Arnold-Moser Le théorème Kolmogorov-Arnold-Moser propose une solution partielle au problème des petits dénominateurs. Proposé par Kolmogorov en 1954, démontré par Arnold sous certaines conditions étendues par Moser, il fait jouer aux fréquences ω_n un rôle central. L'idée novatrice est de considérer les fréquences ω_n comme fixées, d'étudier la convergence de la série de perturbation et d'en déduire la zone de validité pour les actions.

Si \mathbf{I}_0 est le vecteur des populations initiales de chaque état, ω_0 le vecteur des fréquences $\omega_n(\mathbf{I}_0)$ associées et \mathbf{m} un vecteur d'entiers, alors le théorème KAM assure la convergence de la méthode de perturbation pourvu que le vecteur ω_0 satisfasse à la condition suivante :

$$|\mathbf{m} \cdot \omega_0| \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^\tau} \quad (149)$$

où C et τ sont des constantes positives. Il stipule de plus que si κ est suffisamment faible, le domaine de fréquence défini par (149) est non nul. La condition (149) définit des domaines dans l'espace des fréquences qui correspondent à des résonances entre les fréquences $\omega_n(\mathbf{I}_0)$, dont la taille diminue avec l'ordre $|\mathbf{m}|$ de la résonance et dans lesquels nous n'avons aucune certitude quant à la convergence de la série de perturbation. L'intérêt pratique du théorème KAM est que si la perturbation est suffisamment faible, la majorité des conditions initiales remplit la condition (149). Notons toutefois que la détermination analytique des constantes C et τ n'est en général pas possible.

M Naissance d'une trajectoire quasi-périodique

L'apparition de trajectoires chaotique dans un système quasi-intégrable est un sujet qui a déjà été intensivement étudié et qui est bien connu des familiers de la dynamique hamiltonienne. Nous souhaitons ici illustrer qualitativement cette apparition. sujet

Sur la section de Poincaré 28, nous pouvons remarquer les cinq petits îlots de résonance répartis régulièrement autour (a) et repéré par l'étiquette (e), ces îlots ne correspondent pas à une résonance entre fréquences déplacées. Pour comprendre leurs origines il faut rapidement revenir sur le développement en série de perturbation – voir le complément L. Celui-ci permet au premier ordre de déterminer les fréquences d'évolution des trajectoires des îlots de résonance, ces fréquences peuvent alors jouer le même rôle que les fréquences déplacées, et lorsque deux de ces fréquences sont dégénérées, des îlots de résonance secondaire apparaissent, c'est le cas des cinq îlots mentionnés plus haut. Le processus d'apparition d'îlots de résonance peut ainsi être

⁴³ Une intégrale première est une fonction F dont le crochet de Poisson avec le hamiltonien H est nul i.e. $\{F, H\} = 0$

mis en abîme et il est possible de faire apparaître de nouveau îlots de résonance autour des îlots secondaires et ainsi de suite. Bien entendu, étant donné le minuscule espace de paramètre permettant d'atteindre ces îlots secondaires, ils ont extrêmement peu d'importance pratique. Cependant il faut considérer que chaque îlot de résonance est entouré d'un cortège d'îlots secondaire

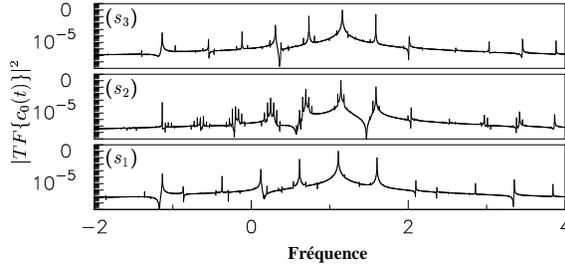


FIG. 50: **Spectre de Fourier des amplitudes** : Les modules des spectres de Fourier de l'amplitude de l'état φ_0 , calculés numériquement à partir du modèle discret (91), sont représentés pour des populations initiales voisines : (s_1) $I_0 = 0,77$ (s_2) $I_0 = 0,795$ et (s_3) $I_0 = 0,82$, $I_{-1} = 0,1$, $I_{|n|>1} = 0$, $\theta_1 = \pi$ et $\theta_{n \neq 1} = 0$. Les paramètres sont les mêmes que pour la section de Poincaré 28 où les intersections de ces trois trajectoires sont représentées et indiquées avec les mêmes étiquettes. La figure (s_2) représente un spectre riche caractérisant une dynamique quasi-périodique alors que les figures (s_1) et (s_3) correspondent à des dynamiques périodiques associées aux trajectoires passantes.

Sur la section de Poincaré 28, nous pouvons remarquer que les étroites bandes constituées de nuées de points d'intersection – comme par exemple (s_2) – sont encadrées par des trajectoires passantes – (s_1) et (s_3) dans l'exemple précédent. Pour comprendre la différence de dynamique entre trajectoires passantes et nuées de points, nous comparons sur la figure 50 les modules des spectres de Fourier des amplitudes des trajectoires formant une nuée de points d'intersections 50- s_2 et des trajectoires passantes l'encadrant 50- s_1 et 50- s_3 . Les spectres des trajectoires passantes traduisent indubitablement une dynamique périodique. Le spectre associé à la nuée de points, comporte quant à lui un grand nombre de fréquences n'ayant aucun rapport simple entre elles, il traduit une dynamique quasi-périodique. Nous pouvons en particulier remarquer que le spectre 50- s_2 contient toutes les fréquences des spectres 50- s_1 et 50- s_3 .

Il est intéressant de remarquer que la position de la nuée de points (s_2) de la section de Poincaré 28 correspond en fait à une dépendance linéaire des fréquences déplacées : $(\omega_0 - \omega_{-1}) + 7(\omega_0 - \omega_1) = 0$ avec des coefficients élevés et devrait donc être normalement une série d'îlots de résonance. En fait, ces îlots absents étant dans le voisinage de l'îlot (a), il sont fortement perturbé ; ces perturbations induisent des couplages entre les îlots absents et leurs îlots secondaires qui mélangent les fréquences d'évolution, détruisent la structure d'îlots de résonance et génère des dynamiques quasi périodiques. l'apparition de dynamique quasi-périodique est donc une conséquence du recouvrement d'îlots de résonance. Dans ce cas, les îlots d'ordre le plus élevé sont détruits. Les nuées de points sont donc la manifestation de la présence d'îlots de résonance fantômes. Nous pouvons d'ailleurs remarquer sur la section de Poincaré 28 que les nuées de points se situent toujours au

voisinage d'îlots de résonance important (a), (b) ou (c). Les nuées de points entre (b) et (c) sont ainsi dues à l'influence conjointe des îlots important (b) et (c) sur les îlots pris entre les deux comme $2(\omega_0 - \omega_{-1}) + 5(\omega_0 - \omega_1)$. Une étude plus détaillée de la destruction des îlots de résonance dans un système quasi-intégrable peut-être trouvé dans [60].

Références

- [1] F. Bloch. *Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern*. Z. Phys. **52**, 555 (1928).
- [2] C. Zener. *A theory of electrical breakdown of solid dielectrics*. Proc. R. Soc. (London) A **145**, 523 (1934).
- [3] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*. Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*. Hermann, 1998.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions, 1996.
- [6] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow. *Cooling of gases by laser radiation ?* Opt. Commun. **13** (1975).
- [7] S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin. *Observation of radiation-pressure trapping of particles by alternating light beams*. Phys. Rev. Lett. **55**, 48 (1985).
- [8] G. H. Wannier. *Wave Functions and Effective Hamiltonian for Bloch Electrons in an Electric Field*. Phys. Rev. **117**(2), 432–439 (1960).
- [9] M. Glück, A. R. Kolovsky, and H. J. Korsch. *Wannier-Stark resonances in optical and semiconductor superlattices*. Phys. Rep. **366**(3), 103–182 (2002).
- [10] G. Nenciu. *Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : rigorous justification of the effective Hamiltonians*. Rev. Mod. Phys. **63**(1), 91–127 (1991).
- [11] J. E. Avron, J. Zak, A. Grossmann, and L. Gunther. *Instability of the continuous spectrum. the N-Band Stak ladder*. Math. Phys. **18**, 918 (1977).
- [12] P. Voisin, J. Bleuse, C. Bouche, S. Gaillard, C. Alibert, and A. Regreny. *Observation of the Wannier-Stark Quantization in a Semiconductor Superlattice*. Phys. Rev. Lett. **61**(14), 1639–1642 (1988).
- [13] J. Bleuse, G. Bastard, and P. Voisin. *Electric-field-induced localization and oscillatory electro-optical properties of semiconductor superlattices*. Phys. Rev. Lett. **60**, 220 (1988).
- [14] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen. *Observation of atomic Wannier-Stark ladders in an accelerating optical potential*. Phys. Rev. Lett. **76**, 4512 (1996).
- [15] M. C. Chang and Q. Niu. *Local density of states and level width for Wannier-Stark ladders*. Phys. Rev. B **48**(4), 2215 (1993).
- [16] A. M. Bouchard and M. Luban. *Bloch oscillations and other dynamical phenomena of electrons in semiconductor superlattices*. Phys. Rev. B **52**(7), 5105 (1995).

- [17] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler. *Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice*. Phys. Rev. Lett. **70**(21), 3319 (1993).
- [18] T. Persch, P. Dannberg, W. Elfein, A. Brauer, and F. Lederer. *Optical Bloch oscillation in temperature-tuned waveguide arrays*. Phys. Rev. Lett. **83**(23), 4752 (1999).
- [19] G. Epifanov and Y. Moma. *Electronique des Solides*. Editions Mir Moscou, 1986.
- [20] L. Esaki and R. Tsu. *Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors*. IBM J. Res. Develop. **14**, 432 (1970).
- [21] H. T. Grahn, K. v. Klitzing, K. Ploog, and G. H. Döler. *Electrical transport in narrow-miniband semiconductor superlattices*. Phys. Rev. B **43**, 12094 (1991).
- [22] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon. *Bloch oscillation of atoms, adiabatic rapid passage and monokinetic atomic beams*. Phys. Rev. A **55**, 2989 (1997).
- [23] H. J. Metcalf and P. v. Straten. *Laser cooling and trapping*. Springer-Verlag, New York, Inc. edition, 1999.
- [24] M. Kasevich and S. Chu. *Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms*. Phys. Rev. Lett. **69**, 1741 (1992).
- [25] S. E. Hamann, D. L. Haycock, G. Llose, P. H. Pax, I. H. Deutsch, and P. S. Jessen. *Resolved-sideband Raman cooling to the ground state of an optical lattice*. Phys. Rev. Lett. **80**, 4149 (1998).
- [26] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Edition, 1972.
- [27] F. S. Crawford. *Cours de physique de Berkeley, tome 3 : Ondes*. Dunod, 1999.
- [28] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell. *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*. Science **269**, 198 (1995).
- [29] K. Davis, M. O. Mewes, M. Andrew, N. J. van Druten, D. Kurn, and W. Ketterle. *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*. Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [30] J. F. Allen. *Flow of liquid helium II*. Nature **141**, 74 (1938).
- [31] F. London. *The lambda-phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy*. Nature **141**, 643 (1938).
- [32] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Anper, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. *Dark solitons in Bose-Einstein condensate*. Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [33] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, and E. Arimondo. *Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensate in 1d optical lattices*. Phys. Rev. Lett. **87**, 140402 (2001).
- [34] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [35] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [36] Y. Castin. *Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results* (2000). www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/.
- [37] H. F. Hess. *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*. Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
- [38] C. Bradley, C. Cackett, J. Tollett, and R. Hulet. *Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions*. Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [39] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak. *Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen*. Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
- [40] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm. *Bose-Einstein condensation of cesium*. Science **0**, 10796991-0 (2002).
- [41] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique Théorique tome 3 : Mécanique Quantique*. MIR, 1964.
- [42] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique Théorique tome 1 : Mécanique*. MIR, 1964.
- [43] V. I. Arnold. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Editions de Moscou, 1974.
- [44] V. I. Arnold. *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*. Rus. Math. Surv. **18**, 85 (1963).
- [45] R. S. Mackay and J. D. Meiss. *Hamiltonian Dynamical Systems, A reprint selection*. Adam Hilger, 1987.
- [46] R. Livi and A. Vulpiani, editors. *L'héritage de Kolmogorov en physique*. Belin, 2003.
- [47] M. Holthaus. *Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice*. J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt. **2**, 589 (2000).
- [48] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [49] T. J. Dunn, I. A. Walmsley, and S. Mukamel. *Experimental determination of the quantum-mechanical state of a molecular vibrational mode using fluorescence tomography*. Phys. Rev. Lett. **74**, 884 (1995).
- [50] S. Wallentowitz and W. Vogel. *Reconstruction of the quantum mechanical state of a trapped ion*. Phys. Rev. Lett. **75**, 2932 (1995).
- [51] A. Zucchetti, W. Vogel, D. G. Welsch, and I. A. Walmsley. *Heterodyne measurement of vibrational wave packets of diatomic molecules*. Phys. Rev. A **60**, 2716 (1999).
- [52] C. Kurtsiefer, T. Pfau, and J. Mlynek. *Measurement of the Wigner function of an ensemble of helium atoms*. Nature **386**, 150 (1997).
- [53] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, and D. J. Wineland. *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).

- [54] I. A. Walmsley and N. P. Bigelow. *Measuring the quantum state of cold atoms using momentum-shearing interferometry*. Phys. Rev. A **57**, R713 (1998).
- [55] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu. *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2297 (1991).
- [56] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. *Subrecoil Raman spectroscopy of cold cesium atoms*. Phys. Rev. A **65**(1), 013403 (2002).
- [57] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. *Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays*. science **282**, 1686 (1998).
- [58] C. Kittel. *Physique de l'état solide*. Dunod, Paris, 1998.
- [59] H. Fukuyama, R. A. Bari, and H. C. Fogedby. *Tightly bound electrons in a uniform electric field*. Phys. Rev. B **8**, 5579 (1973).
- [60] B. V. Chirikov. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. Phys. Rep. **52**, 263–379 (1979).

Résumé

La dynamique quantique dans un potentiel périodique a fait l'objet de nombreuses études depuis les travaux de Bloch, dans les années 30, portant sur la dynamique des électrons dans un solide cristallin. Cette dynamique est expérimentalement observable à l'aide d'**atomes refroidis**. L'utilisation de **potentiels optiques** permet de synthétiser, de façon très souple, des formes variées de potentiels, périodique, stationnaire ou dépendant du temps. Outre la grande variété de potentiels accessibles, l'atout majeur présenté par ces systèmes est l'absence de dissipation et de processus de décohérence. Le travail présenté s'inscrit dans cette perspective et propose une description théorique, simple et analytique, de la dynamique quantique dans un potentiel périodique dépendant du temps.

Il est connu depuis les travaux de Zener (1934), que la dynamique quantique dans un potentiel périodique en escalier, contrairement à l'intuition classique, est un mouvement d'oscillations nommé **Oscillations de Bloch**. Nous montrons que lors d'une modulation harmonique du potentiel des phénomènes de résonance apparaissent entre la fréquence de modulation et la fréquence des oscillations de Bloch et engendrent un transport de la particule dans le réseau. Cette dynamique est alors interprétée comme une **interférence quantique** mettant ainsi en exergue le rôle fondamental des cohérences quantiques de l'état initial.

La réalisation expérimentale récente (1995) de la **condensation de Bose Einstein** d'un gaz atomique permet d'obtenir un état quantique cohérent mésoscopique. Récemment, des oscillations de Bloch ont été observées à l'aide de tels états. Nous montrons que, outre ces oscillations, le condensat dans un potentiel périodique en escalier présente des régimes **dynamiques chaotiques**. Notre description introduit une base d'états adaptée et nous pouvons alors décrire la dynamique comme une **évolution hamiltonienne** classique portant sur les amplitudes et phases des états introduits. Les couplages non-linéaires entre les différents états engendrent, pour certains états initiaux, des dynamiques chaotiques au sens classique bien que le condensat de Bose Einstein soit un objet quantique.

Mots clefs

MECANQUE QUANTIQUE, ATOMES FROIDS, CONDENSATS DE BOSE EINSTEIN, CHAOS HAMILTONIEN