



Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides

Gonzague Agez

► To cite this version:

Gonzague Agez. Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides. Physique [physics]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2005. Français. $\langle$ NNT : $\rangle$. $\langle$ tel-00010207 $\rangle$

HAL Id: tel-00010207

<https://theses.hal.science/tel-00010207v1>

Submitted on 19 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

N° d'ordre :3644

THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

dans la discipline :

LASERS, MOLECULES ET RAYONNEMENT ATMOSPHERIQUE

soutenue le 29/06/2005 par

Gonzague AGEZ

Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides

Co-Directeurs de thèse :

Pierre GLORIEUX

Eric LOUVERGNEAUX

Christophe SZWAJ

Membres du jury :

Jorge R. Tredicce	Institut Non Linéaire de Nice	Président
William J. Firth	University of Strathclyde, Glasgow	Rapporteur
Pier Luigi Ramazza	Istituto Nazionale di Ottica Applicata, Firenze	Rapporteur
Thorsten Ackemann	University of Strathclyde, Glasgow	Examineur
Jean Pierre Huignard	Thalès Research and Technology, Orsay	Examineur

Remerciements

Cette thèse s'est effectuée au sein du laboratoire Phlam de l'Université de Lille 1 qui nous a accueillis (mes collègues thésards et moi) dans des conditions exceptionnelles. Je tiens donc à remercier tout d'abord tous les membres du laboratoire, représenté par Jean-Michel Robbe, qui ont participé à mon intégration.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Willie Firth et à Pier Luigi Ramazza d'avoir accepté le rôle de rapporteur. Je remercie également Thorsten Ackemann et Jean-Pierre Hui-gnard qui m'ont fait le plaisir de poser un regard critique sur ces travaux en assurant la charge d'examineur, ainsi que Jorge Tredicce qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Une thèse étant avant tout le fruit du travail de toute une équipe, ma plus grande gratitude va aux personnes qui m'ont encadré et qui ont donné de leur temps et usé de patience pour me former et m'accompagner durant toute cette période. Un grand merci donc à Pierre Glorieux, Eric Louvergneaux, Christophe Sz waj et Majid Taki. J'espère qu'ils savent à quel point j'ai apprécié de travailler avec eux, que ce soit d'un point vue scientifique ou relationnel. La liberté d'action dont j'ai joui durant cette thèse, et qui trouve son origine dans la confiance qu'ils ont eue en moi, a réellement contribué à mon émancipation. J'ai du mal à imaginer une thèse qui se passe dans de meilleures conditions que celles dont j'ai bénéficié. Merci pour tout.

Special thanks à Mél et Kiko pour la préparation du pot, aux masquelourds qui se reconnaîtront et à tous ceux qui sont venus fêter la thèse au bar le soir de la soutenance. Vous n'imaginez pas comme ça m'a fait plaisir...

Enfin, mille merci à ma p'tite Co qui m'a accompagné pendant toutes ces années d'études et qui a réussi l'exploit de me supporter jusqu'au bout !

A mes parents,

Table des matières

Introduction	8
I Position du problème	15
1 La morphogénèse	17
1.1 En optique	19
1.2 La boucle Kerr.	21
2 Le système cristal liquide avec miroir de renvoi.	25
2.1 Les cristaux liquides	25
2.1.1 L'organisation structurelle	26
2.1.2 Action d'un champ électrique sur un cristal liquide nématique ancré . .	27
2.1.2.1 Réorientation moléculaire	27
2.1.2.2 Modélisation de la variation d'indice	29
2.2 Modélisation	31
2.2.1 Le modèle théorique	31
2.2.2 Analyse de stabilité linéaire	33
2.2.3 Analyse non-linéaire. Diagramme de bifurcation	36
2.2.4 Influence du profil gaussien sur les résultats de l'analyse de stabilité linéaire	37
2.2.4.1 Seuil d'instabilité.	38
2.2.4.2 Nombre d'onde.	39
2.2.4.3 Instabilités secondaires.	39
3 Le dispositif expérimental	41
3.1 La boucle de rétroaction	41
3.1.1 La source lumineuse	41
3.1.2 Le dispositif "4f"	42
3.1.3 L'imagerie	43
3.1.4 Les paramètres et constantes du système	43

3.2	Le milieu Kerr	44
3.2.1	Technique d'ancrage homéotrope	44
3.2.2	Mesure du coefficient Kerr de l'échantillon	45
3.2.3	Orientation de l'échantillon	46
 II Effets du bruit sur la formation des structures : les précurseurs, la transition précurseurs-structures et les constantes dynamiques		49
4	Les précurseurs ($\mu \lesssim \mu_c$)	53
4.1	Prise en compte du bruit dans le modèle	54
4.1.1	Caractéristiques du bruit	54
4.1.2	Modification de l'équation du système	54
4.2	Expression analytique des précurseurs	55
4.2.1	Grandeurs accessibles expérimentalement	55
4.2.2	Expression analytique de la TF optique sous le seuil	57
4.2.3	Expression analytique de l'indice sous le seuil	59
4.3	Le cas mono-dimensionnel	60
4.3.1	Simulations numériques	60
4.3.2	Résultats expérimentaux	62
4.4	Le cas bi-dimensionnel	65
4.4.1	Observations expérimentales	65
4.4.2	Récapitulatif	68
5	Transition précurseurs - structures ($\mu \approx \mu_c$)	71
5.1	Le cas 2D : corrélation angulaire dans la TF optique.	71
5.1.1	Observation expérimentale	72
5.1.2	Analyse numérique	73
5.2	Le cas 1D : Localisation de la phase spatiale en champ proche.	76
6	Utilisation du bruit pour déterminer les constantes dynamiques expérimentales l_d et τ ($\mu \ll 1$)	83
6.1	Approche théorique	84
6.2	Validation de la méthode par les simulations numériques	87
6.3	Détermination expérimentale	89
 III Effet d'une dérive transverse : les instabilités convectives et absolues,		

<i>la génération de nouvelles structures</i>	93
7 Mise en évidence expérimentale de l'instabilité convective dans un système optique 1D.	101
7.1 Approche théorique	101
7.1.1 Réponse impulsionnelle	101
7.1.2 Méthode du point selle	102
7.1.3 Les seuils convectif et absolu	104
7.1.3.1 Le seuil convectif	104
7.1.3.2 Le seuil absolu	106
7.2 Application à la boucle Kerr 1D avec dérive transverse	107
7.2.1 La relation de dispersion $\Omega(k)$ exacte	108
7.2.2 Relation de dispersion approchée $\Omega^{app}(k)$ pour dériver des expressions analytiques des seuils	108
7.2.3 Résolution numérique de $\Omega(k)$ pour obtenir les seuils	111
7.2.4 Validité des méthodes	112
7.3 Mise en évidence expérimentale en présence de bruit et avec une pompe gaussienne	114
7.3.1 Influence de la pompe gaussienne	115
7.3.2 Influence du bruit sur le régime convectif : les structures entretenues par le bruit	116
7.3.3 Définition d'une signature des régimes convectif et absolu dans les conditions expérimentales	118
7.3.4 Mise en évidence expérimentale des régimes convectif et absolu	120
8 Les structures dans le système 1D à dérive	121
8.1 Structures obtenues au seuil d'instabilité primaire	121
8.2 Effet de la dérive sur les précurseurs 1D	129
9 Les structures dans le système 2D à dérive	133
9.1 Les structures convectives et leur seuil d'instabilité	133
9.1.1 Conditions de seuil convectif à 2D	134
9.1.2 Les structures	134
9.1.2.1 Les structures type 1D : $k_{cy} = 0$	135
9.1.2.2 Les structures type Vraies 2D (V2D) : $k_{cx(n)} = \frac{n\pi}{h}$	135
9.1.2.3 Synthèse des structures observées au premier seuil d'instabilité	139
9.1.2.4 Structures au delà du seuil d'instabilité primaire	140
9.2 Régime absolu des structures V2D	141
9.2.1 Les rouleaux horizontaux RH	142
9.2.2 Les réseaux rectangulaires RR.	144

9.3	Les précurseurs à 2D en présence d'une dérive	145
9.4	Structures hyper-réseaux et quasi-cristaux entretenues par le bruit	148
9.4.1	Construction géométrique d'un hyper-réseau	149
9.4.2	Observation expérimentale d'un hyper-réseau stationnaire entretenu par le bruit	152
9.4.3	Influence du bruit sur les hyper-réseaux	153
9.4.4	Exemples d'hyper-réseaux et de quasi-cristaux réalisables dans le sys- tème à dérive	154
Conclusion		157
Bibliographie		161
A Etablissement de la longueur d'auto-reproduction de Talbot l_T.		169
B Etablissement de l'équation d'onde paraxiale		171
C Calcul de la fonction de corrélation temporelle de la TF de l'indice $\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \rangle$		173
D Méthode de calcul de la corrélation angulaire		175
E Termes du développement de Taylor de la relation de dispersion $\Omega^{app}(k)$		177
F Publications		179
F.1	Noisy precursors in one-dimensional patterns, <i>G. Agez, C. Sz waj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, Phys. Rev. A 66, 063805 (2002).</i>	179
F.2	Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics, <i>E. Louvergneaux, C. Sz waj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, Phys. Rev. Lett. 92 (4), 043901 (2004).</i>	180
F.3	Using noise speckle pattern for the measurements of director reorientational relaxation time and diffusion length of aligned liquid crystals, <i>G. Agez, P. Glorieux, C. Sz waj, and E. Louvergneaux, Opt. Comm. 245, 243 (2005)</i>	181

“Les miroirs feraient bien de réfléchir un peu avant de renvoyer les images”

Jean Cocteau

Introduction

Il n'est pas rare de voir, dans la nature, des formes et structures plus ou moins régulières telles le pyjama rayé du zèbre, les ridules sur le sable, etc... Dans de nombreux cas, que l'on observe dans des domaines aussi variés que la biologie [1], la chimie [2], l'hydrodynamique [3] pour n'en citer que quelques-uns, ces organisations particulières naissent spontanément à partir d'un état spatialement homogène qui est porté hors de son équilibre. On parle alors de *morphogénèse*. Le caractère universel de la morphogénèse a motivé de nombreuses études scientifiques. Celles-ci ont permis de poser les bases théoriques des modèles de dynamique spatio-temporelle [4] et ainsi d'appréhender les mécanismes mis en jeu dans l'auto-organisation de ces formes multiples que chacun d'entre nous a déjà eu l'occasion d'admirer.

En optique, l'apparition des sources lumineuses puissantes et cohérentes a dévoilé des phénomènes d'auto-organisation spatiale d'une très grande richesse, autant dans leur diversité (réseaux hexagonaux, rectangulaires, zigzags, structures localisées, quasi-cristaux...) que dans leur dynamique (chaos spatio-temporel, intermittence, propagation de fronts...) [5]. Parallèlement à ces observations, depuis une quinzaine d'année, des études analytiques et théoriques ont tiré parti à la fois des travaux dans les autres domaines scientifiques et des progrès de l'optique non-linéaire pour développer des modèles adaptés à la morphogénèse optique. Notre travail est une contribution à la compréhension de ces instabilités spatio-temporelles. Il s'appuie sur un système composé d'un cristal liquide soumis à une rétro-action optique réalisée par un miroir. Notre apport s'inscrit autour de deux axes principaux : les effets du bruit sur la formation des structures et les effets d'une dérive (un flot) transverse sur leur dynamique.

La *première partie* de ce mémoire est un positionnement du problème. Elle regroupe les chapitres 1 à 3. Son introduction est destinée à fournir aux lecteurs une vision d'ensemble des mécanismes responsables des instabilités spatio-temporelles et de situer notre travail dans le contexte scientifique global. Nous y présentons tout d'abord le système étudié, d'une relative simplicité, composé d'un milieu de Kerr, d'un miroir et d'un laser. Nous proposons une approche qualitative qui explique pourquoi ce milieu fait l'objet d'un phénomène d'auto-organisation lorsqu'il est soumis à une rétro-action optique (Chap. 1). Ensuite, nous ramenons, comme dans [6], l'équation dynamique de réorientation des molécules de cristal liquide (utilisé comme milieu Kerr) sous l'effet d'un champ optique à celle proposée par Akhmanov *et al.* [7] et Firth [8] pour générer des structures spatio-temporelles. Ceci nous permet alors de présenter

l'analyse de stabilité linéaire qui définit le seuil d'instabilité ainsi que le nombre d'onde de la structure émergeant au seuil (Chap. 2). Enfin, les caractéristiques complètes du dispositif expérimental sont détaillées dans le chapitre 3.

La *deuxième partie* rassemble les chapitres 4 à 6. Elle est consacrée à l'étude des effets du bruit sur l'apparition des structures. Cette étude est motivée par des observations expérimentales dans notre système qui diffèrent de manière qualitative des simulations numériques intégrant les équations sans bruit. En effet, alors que le bruit – omniprésent dans tout système réel – n'induit généralement que de faibles modifications ou fluctuations de la solution prévue par le modèle idéal, dans certains cas il peut engendrer des phénomènes non triviaux qui n'ont pas d'équivalent dans le système sans bruit. En particulier, nous nous intéressons à un phénomène appelé *précurseurs induits par le bruit* qui se manifeste sous le seuil d'apparition des structures [9, 10]. Pour cela nous proposons tout d'abord de caractériser le type de bruit présent dans notre système afin de le prendre en compte dans le modèle. Ceci nous permet alors d'établir une expression analytique de la transformée de Fourier du champ lumineux en sortie du système en présence de bruit. Une comparaison entre résultats analytiques, numériques et expérimentaux dans les configurations uni-dimensionnelle (1D) et bi-dimensionnelle (2D) nous permet alors de caractériser entièrement l'effet précurseur. En particulier nous montrons que le bruit anticipe sous le seuil le nombre d'onde critique à venir au delà du seuil dans la TF optique (alors que le faisceau de sortie reste en moyenne totalement homogène) (Chap. 4). Comme cet effet diverge en théorie à l'approche du seuil, il n'est valable que pour des intensités inférieures à la valeur critique. Nous nous sommes donc intéressés dans le chapitre 5 aux effets du bruit lors de la traversée du seuil, c'est à dire lors de la transition des précurseurs vers les structures purement dynamiques. Enfin, nous tirons parti de cette étude pour proposer une méthode originale de détermination de paramètres expérimentaux – la longueur de diffusion et le temps de relaxation du cristal liquide nématique ancré. Celle-ci est basée sur l'analyse de l'empreinte des fluctuations des molécules de cristal liquide enregistrée par le faisceau laser qui le traverse (Chap. 6).

La *troisième et dernière partie*, réunissant les chapitres 7 à 9, propose une étude sur la dynamique des structures lorsque la symétrie d'inversion du système $r \rightarrow -r$ est perdue, en particulier lorsqu'une dérive transverse (un flot) est présente dans le système. Dans ce cas, une analyse de stabilité linéaire classique n'est plus suffisante. Il devient nécessaire d'étudier la manière dont une perturbation localisée – en temps et en espace – envahit l'espace. Deux régimes dynamiques appelés convectif et absolu apparaissent alors [11]. Dans le cas convectif, une instabilité croît en amplitude à partir de la perturbation mais elle est emportée par la dérive si bien qu'elle disparaît du système au bout d'un certain temps. Dans le cas absolu, l'instabilité envahit l'intégralité du système. Dans notre dispositif expérimental, un simple désalignement du miroir de renvoi permet d'induire la dérive transverse [12]. Nous développons dans un premier temps une étude analytique de chacun des régimes convectif et absolu. Ceci

nous permet de mettre en évidence expérimentalement – pour la première fois en optique – l’existence d’une instabilité convective (Chap. 7). Cette dernière est caractérisée, en présence de bruit, par un régime de structures entretenues par le bruit. Nous étudions ensuite la dynamique du système à forte dérive pour montrer, entre autre, qu’il peut constituer une source de structures stationnaires (Chap. 8). Dans le dernier chapitre, nous étendons cette analyse au système à 2D en classifiant les différentes structures pouvant exister en trois familles, ce qui nous permettra de démontrer analytiquement que deux d’entre-elles sont stationnaires au seuil et purement convectives (i.e. elles n’ont pas de seuil absolu). Pour finir, nous proposons une méthode qui utilise ces familles comme briques de base pour construire de nouvelles structures hyper-réseaux ou quasi-cristallines en présence de dérive (Chap. 9).

Première partie

Position du problème

Chapitre 1

La morphogénèse

Les manifestations de la morphogénèse¹ sont courantes dans la nature et s’observent dans des domaines très variés. La figure 1.1 regroupe quelques exemples d’organisations issues du monde animal, atmosphérique, géologique et astronomique. La fascination dont elles font l’objet vient peut-être du contraste entre la contrainte de désordre maximal dictée par la seconde loi de la thermodynamique (“*dans tout processus spontané, le désordre de l’univers augmente*”) et la régularité qui apparaît lors de leur formation. Malgré le constat apparent de l’existence de telles structures, leur organisation, leur évolution dans le temps ainsi que leur caractère universel sont longtemps restés inexpliqués par la science moderne. Ce n’est que lorsque des structures spatialement organisées ont été obtenues en laboratoire que l’on a vu apparaître un intérêt croissant de la communauté scientifique pour ce type de phénomènes [4]. En 1952, la compréhension de la morphogénèse connaît une avancée majeure avec l’étude, réalisée par Turing [13], d’un système chimique composé de deux réactants – un activateur et un inhibiteur – où apparaît une structuration. Il explique alors la formation des structures spatiales dans ce système par l’action combinée d’une réaction chimique et de la diffusion de chaque réactant (qui possède des coefficients de diffusion différents). Ce concept de *réaction-diffusion* est fondamental et est impliqué dans de nombreux processus chimiques et probablement biologiques. On impute, entre-autre, à ce phénomène le pelage particulier du léopard ou du zèbre (Fig. 1.1c et f).

Le modèle relativement simple de Turing met en évidence les ingrédients indispensables à la morphogénèse en général, premièrement la *non-linéarité* (la cinétique chimique contrôlée par le produit des concentrations des réactants) et deuxièmement la présence de *gradients spatiaux* assurant un transport spatial de l’information (la diffusion des réactants).

¹morphogénèse :

- Développement de structures dissipatives auto-adaptatives.
- Développement des formes et des structures d’un organisme (biologie).
- Elaboration des formes de terrain sous l’action des agents exogènes (air, eau, glace, etc.) ou des processus endogènes (volcanisme, orogénèse, etc.). (géologie)

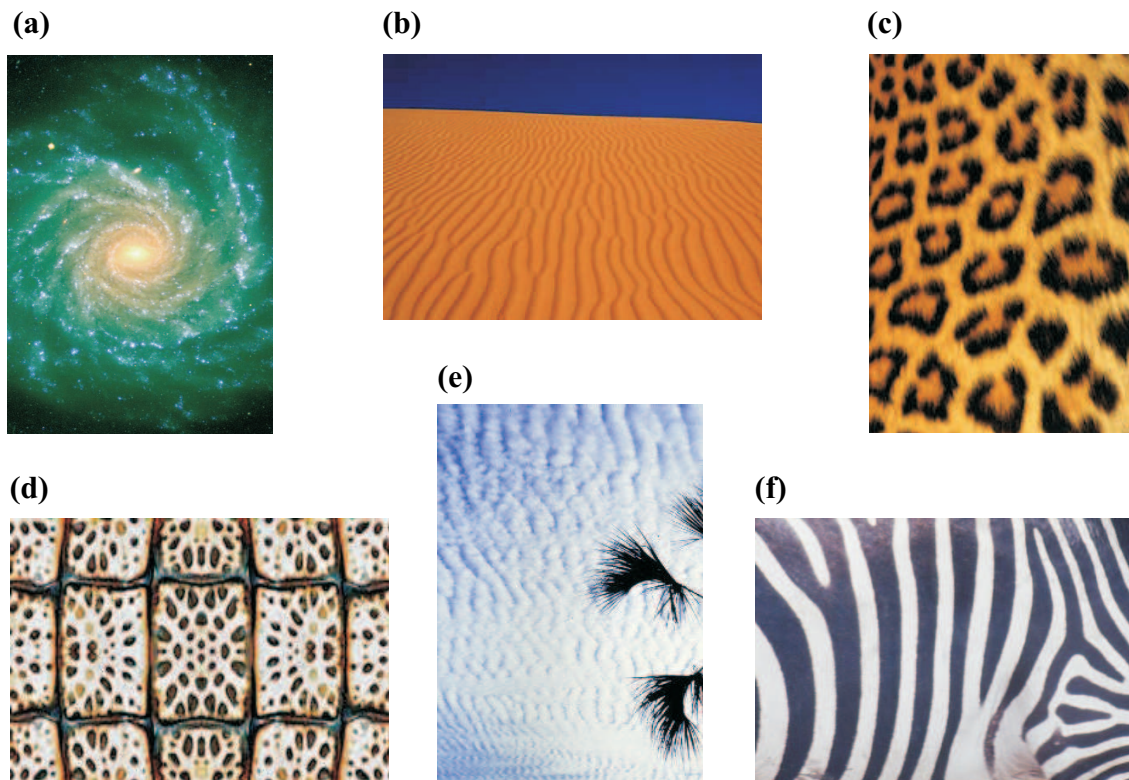


FIG. 1.1 – *Exemples de résultats de morphogénèses naturelles. (a) galaxie spirale NGC 1232, (b) ridules sur le sable saharien (c) taches du pelage d'un léopard, (d) cuirasse d'un alligator, (e) altocumulus stratiformis, (f) pelage d'un zèbre.*

Parallèlement à la chimie, l'hydrodynamique est une branche de la science qui joua – et joue encore – un rôle primordial dans la compréhension des instabilités spatio-temporelles. En particulier, les études sur les phénomènes de convection de Rayleigh-Bénard [14, 15] ont apporté des outils théoriques puissants qui possèdent également un caractère universel comme les *équations aux amplitudes* [16]. Ces dernières décrivent l'évolution spatio-temporelle du ou des modes dominants de la structure et constitue le pendant des *formes normales* en dynamique temporelle.

Les instabilités de Rayleigh-Bénard existent également dans la nature, on les rencontre par exemple dans les mouvements de convection du manteau terrestre ou encore dans les couches moyennes de l'atmosphère lors de formation de stries nuageuses (altocumulus stratiformis, Fig. 1.1e). En dépit de leur caractère universel, il existe toutefois une différence remarquable entre les instabilités de Turing et la convection de Rayleigh-Bénard : dans le premier cas, la période caractéristique de la structure ne dépend pas de l'étendue spatiale du dispositif alors que dans le second, elle est fixée par cette dimension du système. Il est proposé à ce sujet de réserver le terme d'*auto-organisation* [17] aux instabilités "type Turing" et d'appeler toutes morphogénèses menant à des structures dont les caractéristiques sont fixées par une contrainte spatiale

extérieure *hétéro-organisation*. De plus, ces phénomènes ne peuvent apparaître qu'en présence de dissipation, indispensable pour que le système tende vers une solution asymptotique (un attracteur) quelles que soient les conditions initiales, c'est à ce titre qu'en 1977 Prigogine et Nicolis [18] nommèrent ces instabilités *structures dissipatives* [19].

La formation spontanée de structures est toujours issue de la déstabilisation d'un état entièrement contrôlé par cette dissipation. Ce dernier possède donc les mêmes caractéristiques, en particulier les symétries spatiale et temporelle, que la contrainte appliquée communément appelée *paramètre de contrôle* (noté μ). Lorsque μ augmente et dépasse une certaine valeur critique μ_c , la solution de base continue d'être un état d'équilibre mais instable, elle n'est plus robuste aux perturbations omniprésentes dans tout système réel et n'est donc plus observable directement. On dit alors qu'en $\mu = \mu_c$, le système *bifurque* vers une autre solution généralement spatialement et/ou temporellement oscillante, marquant une *brisure de symétrie*. De manière générale, l'état issu de cette instabilité primaire est régulier (i.e. périodique). Si μ augmente encore, le système peut alors rencontrer d'autres instabilités, soit par déstabilisation de la première solution, soit par interaction avec de nouvelles solutions. La dynamique peut alors devenir très compliquée et donner lieu à du chaos spatial et/ou temporel ou encore de la turbulence.

En résumé, les ingrédients indispensables à la formation de structures spatiales sont, d'une part la non-linéarité nécessaire à la brisure de symétrie et d'autre part, la présence de gradients spatiaux (diffusion, diffraction) assurant un transport spatial de l'information dans le système. L'apparition de l'instabilité est conséquente à une bifurcation marquée par la brisure de symétrie et a lieu lorsque le paramètre de contrôle μ atteint une valeur critique μ_c .

1.1 En optique

Les raisons d'étudier la morphogénèse en optique sont multiples. Premièrement les analogies avec d'autres branches de la science permettent d'élargir les notions d'universalité et de diversité : des processus microscopiques différents mènent aux mêmes manifestations macroscopiques. Le domaine général de la science de la morphogénèse est un très bel exemple de transversalité entre les disciplines, ce qui a sans nul doute permis à l'optique en particulier de profiter des travaux antérieurs et de progresser aussi vite. En effet, les systèmes optiques ont déjà montré une très grande diversité de structures (carrés, hexagones, spirales, labyrinthes...), et les similitudes avec celles obtenues en dynamique des fluides ou de réaction-diffusion sont remarquables, autant dans leur organisation que dans leur dynamique. Deuxièmement, les expériences d'optique offrent une large palette d'échelles de temps permettant des études dynamiques à différents niveaux – on peut citer par exemple les OPO² comme système très rapide (temps caractéristique $\sim 10^{-9}$ s), contrairement à certains cristaux photoréfractifs

²OPO : oscillateurs paramétriques optiques

comme le BaTiO_3 dont le temps de réponse est de l'ordre de la seconde. Les expériences d'optique fournissent également un accès direct à la transformée de Fourier (TF) de la structure dans le plan focal d'une lentille. Cette propriété constitue un outils très puissant qui offre la possibilité d'analyser la dynamique des instabilités, d'investiguer par exemple leur mécanisme de formation, leur composition spectrale mais aussi de contrôler la structure en choisissant les nombres d'onde k qui prennent part au processus en filtrant, par exemple, certaines composantes de Fourier. Par ailleurs, les équations de Maxwell forment un cadre théorique bien établi permettant une comparaison très poussée entre modèle théorique et expérience. Toutes ces propriétés sont autant de raisons qui rendent attractive l'étude de la morphogénèse en optique. Mais plus concrètement, les phénomènes d'auto-organisation existent naturellement dans les systèmes optiques et il est nécessaire de les comprendre, que ce soit pour les éliminer dans certains dispositifs technologiques lorsqu'ils sont indésirables (e.g. les lasers [20]), ou pour les maîtriser dans le but d'applications diverses [21, 22, 23]. Le travail présenté dans ce rapport n'a pas un objectif technologique premier, il est avant tout une participation à la compréhension et l'explication de phénomènes du domaine de l'optique non-linéaire transverse et de la morphogénèse optique.

Pour voir apparaître les premières expériences d'auto-organisations structurales en optique, il a fallu attendre l'émergence de sources suffisamment puissantes et cohérentes ainsi que de matériaux aux propriétés non-linéaires adaptées. Les premières observations de telles organisations sont (peut-être) celles des modes transverses dans les lasers. Il faut en effet être prudent dans cette affirmation car ces structures sont entièrement définies par la géométrie du système et en particulier par la cavité de résonance. Elles pourraient à ce titre entrer dans la catégorie d'hétéro-organisations définie plus haut mais le débat semble ouvert quant à la qualification de ces structures comme phénomènes de morphogénèse. En 1988, deux groupes publient des résultats sur les premières observations (indiscutables) d'auto-organisation : Akhmanov *et al.* [7] observent la formation de spirales dans la section transverse d'un faisceau laser grâce à un système appelé valve optique à cristaux liquides et Giusfredi *et al.* [24] enregistrent diverses structurations dynamiques du faisceau après interaction avec une cellule de vapeur de sodium. Depuis, de multiples systèmes ont permis de générer des structures optiques. Parmi les dispositifs déjà réalisés on compte par exemple les couches de cristaux liquides (voir par exemple [25, 26]), les valves optiques (LCLV) (par ex. [7, 27]), les cristaux photo-réfractifs (par ex. [28, 29]), la vapeur de sodium (par ex. [24, 30]), les dispositifs à semi-conducteurs (VCSEL) (par ex. [31, 32]), ou encore les lasers à électrons libres (par ex. [33]). La liste n'est pas exhaustive. Parmi les dispositifs développant des structures, on distingue deux grandes catégories de systèmes optiques selon qu'ils sont actifs ou passifs. C'est la présence (ou l'absence) de gain qui les distingue, les exemples les plus connus de systèmes actifs sont le laser [34], l'OPO et l'oscillateur à gain photo-réfractif [29]. Dans les passifs le champ lumineux ne gagne pas en intensité, le système le plus basique est la propagation d'un champ lumineux

dans un milieu non-linéaire, où des phénomènes de filamentation du faisceau ou encore de formation de solitons spatiaux ont été observés.

1.2 La boucle Kerr.

Nous nous intéressons dans ce rapport à un système passif schématisé sur la figure 1.2, il s'agit d'un milieu non-linéaire placé devant un miroir et irradié par un faisceau laser. Ce système présente l'avantage d'être l'un des plus simple pour l'investigation de la formation de structures. Le couplage spatial est assurée par deux phénomènes distincts : (i) la diffraction opérée entre le milieu et le miroir et (ii) la diffusion spatiale intrinsèque au matériau tandis que la non-linéarité provient de la réponse du milieu Kerr de susceptibilité $\chi^{(3)}$ dont l'indice de réfraction dépend linéairement de l'intensité lumineuse qu'il reçoit ($n = n_0 + n_2 I$). Dans cette

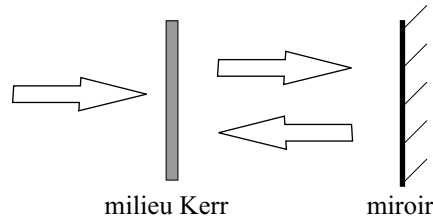


FIG. 1.2 – Schéma de la boucle Kerr.

configuration, que nous nommerons dans la suite *boucle Kerr*, le faisceau initial d'irradiation traverse le milieu non-linéaire puis se propage jusqu'au miroir qui le réfléchit et le renvoie sur le milieu. Cette disposition se montre très avantageuse si le milieu non-linéaire est suffisamment fin pour négliger les effets de diffraction à l'intérieur de la couche Kerr. L'expérience d'Akhmanov *et al.* avec une valve optique [7] suit cette propriété ($\sim \mu\text{m}$), contrairement à celle de Giusfredi *et al.* [24] où l'interaction entre le champ optique et la vapeur de sodium se fait sur des distances plus longues ($\sim \text{cm}$). De plus, le temps de réponse du milieu Kerr ($\sim \text{s}$ dans notre cas) est largement supérieur au temps de parcours libre de la lumière jusqu'au miroir ($\sim 10^{-10}\text{s}$), ce qui permet de négliger le délai entre les faisceaux aller et retour lors de la modélisation [8].

L'apparition d'une périodicité dans ce dispositif peut s'expliquer facilement de manière qualitative à partir d'un phénomène connue sous le nom d'*effet Talbot*. Nous verrons comment cet effet permet aussi d'expliquer la sélection du nombre d'onde.

H. F. Talbot est un mathématicien anglais également intéressé par l'astronomie et la physique. En 1836, il remarque dans une expérience de diffraction [35], où un réseau³ est irradié par un faisceau de lumière blanche, que les franges obtenues changent de couleurs en fonction

³Notons que, dans l'expérience de Talbot, le pas du réseau était trop large pour créer une diffraction de Raman-Nath. Le réseau était en fait une lame de verre recouverte d'une feuille d'or sur laquelle étaient gravées plusieurs stries parallèles.

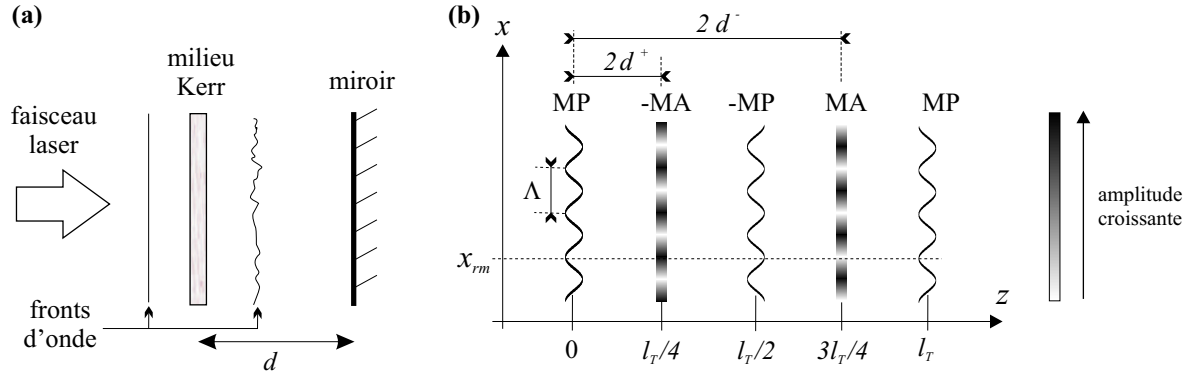


FIG. 1.3 – (a) Schéma de la boucle Kerr : perturbation du front d’onde après traversée du milieu Kerr. (b) Représentation schématique de la modulation portée par une onde au cours de la propagation (effet Talbot). l_T , distance d’auto-reproduction de Talbot ; $2d^{(+)}$, distance de propagation nécessaire à la condition d’amplification pour un milieu focalisant (non-linéarité positive) ; $2d^{(-)}$, pour un milieu défocalisant (non-linéarité négative). x_{rm} , exemple de point de retard maximal ; MA : Modulation d’Amplitude ; MP : Modulation de Phase.

de la position du plan d’observation. Il interprète alors cet effet en considérant qu’une onde spatialement modulée en amplitude se convertit progressivement en onde modulée en phase – et réciproquement – par simple propagation dans le vide. En effet dans son expérience Talbot ne pouvait voir sur son écran que les modes modulés en amplitude. Lorsque la distance d’observation changeait, la condition de modulation d’amplitude était vérifiée pour des longueurs d’onde différentes changeant ainsi la couleur des franges. La figure 1.3b illustre cette transformation pour une onde initialement modulée en phase et notamment l’alternance des modulations de phase et d’amplitude ainsi que de leur signe. Au terme de la propagation sur une distance l_T , appelée *distance d’auto-reproduction de Talbot*, l’onde redevient identique à elle même. Cette distance l_T dépend de la longueur d’onde de la modulation transverse initiale Λ et de la longueur d’onde (longitudinale) λ_0 de la porteuse (cette formule est redémontrée dans l’annexe A à partir de quelques outils simples de l’optique ondulatoire) :

$$l_T = 2 \frac{\Lambda^2}{\lambda_0}. \quad (1.1)$$

Si on suit ce raisonnement alors on comprend qu’une seule modulation transverse Λ est amplifiée de manière préférentielle. En effet, lors de la traversée du milieu Kerr, le front d’onde du faisceau incident est perturbé dans une très large gamme de longueurs d’onde transverses (Fig. 1.3a). Parmi toutes celles-ci, examinons l’évolution d’une modulation de phase de longueur d’onde Λ . Les zones les plus retardées en phase sont celles qui ont traversées les zones d’indice le plus élevé (la ligne en pointillé repérée par la coordonnée transverse x_{rm} sur la figure 1.3b). Après un parcours de $l_T/4$, la modulation de phase initiale est complètement convertie en

modulation d'amplitude. Les maxima d'amplitude correspondent aux zones les plus retardées de la modulation de phase. Si ce parcours libre ($l_T/4$) correspond à un aller-retour $2d$, le milieu va réagir à cette modulation d'intensité par une accentuation de son indice aux endroits précis où il était déjà le plus élevé. Ce système se comporte comme un amplificateur sélectif pour cette longueur d'onde transverse particulière Λ donnant ainsi lieu à une instabilité spatiale de même période.

Suivant le signe de n_2 , la relation donnant l'expression de Λ en fonction des paramètres du système d et λ_0 est différente, on distingue le cas d'un effet Kerr positif de celui de l'effet Kerr négatif. Dans le premier cas, l'amplification des effets de modulation spatiale est obtenue pour $2d^+ = (p+1)l_T/4$ (avec $p \in \mathbb{N}^+$) qui donne :

$$\Lambda^+ = \sqrt{\frac{2\lambda_0 d^+}{2p + \frac{1}{2}}} \quad (1.2)$$

Le signe “+” rappelle que cette relation est donnée pour un milieu de non-linéarité positive (focalisant) : les zones où l'onde aller est la plus retardée en phase voient au retour les intensités les plus élevées, ce qui augmente encore l'indice et engendre l'amplification du phénomène (Fig. 1.4a). En revanche, si le milieu possède une non-linéarité négative, il faut que les zones où l'onde est la plus retardée voient en retour des minima d'amplitude (Fig. 1.4b). La distance de propagation nécessaire à cette conversion est donc de $3l_T/4$ comme on peut le voir sur la figure 1.3b. La condition d'amplification s'écrit alors $2d^- = (p+3)l_T/4$ et les longueurs d'onde

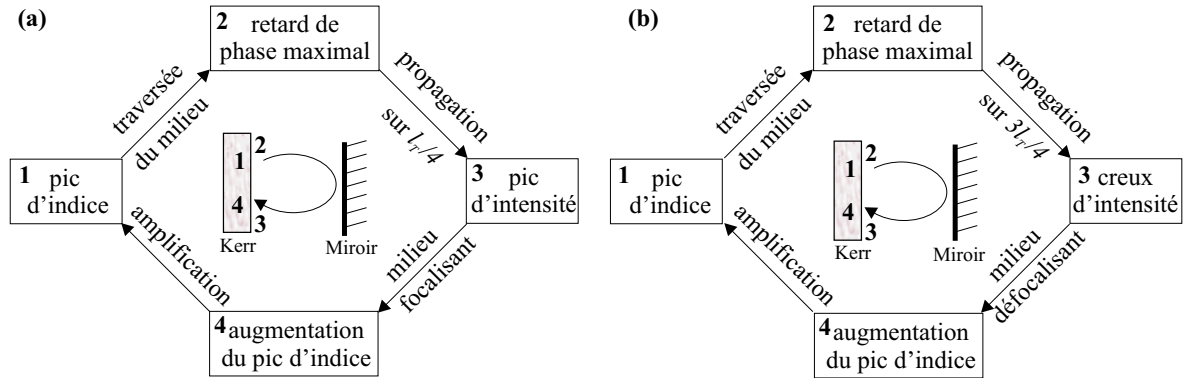


FIG. 1.4 – Processus d'amplification d'une modulation de phase observée par une onde traversant le milieu Kerr (1-2) puis effectuant un aller-retour dans la boucle Kerr (3-4). (a) milieu focalisant; (b) défocalisant. La numérotation permet de situer chaque étape dans la boucle de rétro-action. L'évolution considère une perturbation localisée transversalement en $x = x_{rm}$ sur la figure 1.3b.

transverses les plus amplifiées sont :

$$\Lambda^- = \sqrt{\frac{2\lambda_0 d^-}{2p + \frac{3}{2}}} \quad (1.3)$$

L'effet Talbot est un phénomène périodique : pour une distance d fixée, la condition d'amplification est réalisée pour une infinité de longueurs d'onde transverses énumérées par l'entier p . Cependant si le milieu Kerr est diffusif – et c'est généralement le cas – les instabilités de grandes longueurs d'onde sont favorisées par rapport aux faibles longueurs d'onde qui nécessitent plus d'énergie pour se développer. En pratique, la modulation qui apparaît à partir de l'état homogène lorsque le paramètre de pompe augmente (instabilité primaire), est celle associée à $p = 0$.

Chapitre 2

Le système cristal liquide avec miroir de renvoi.

Dans notre réalisation expérimentale du système de boucle Kerr, nous avons choisi d'utiliser comme milieu non-linéaire un échantillon de cristal liquide. Avant d'expliquer comment et sous quelles conditions un tel matériau peut se comporter comme un milieu Kerr, nous rappelons quelques généralités sur cet état de la matière possédant des propriétés intermédiaires – comme son nom l'indique – entre celles d'un cristal et celles d'un liquide [36]. Nous montrons qu'en réécrivant l'équation d'orientation des molécules de CL sous l'effet d'un champ optique, celle-ci correspond au modèle dynamique proposé Akhmanov *et al.* [7] et Firth [37] pour générer des structures transverses. L'analyse de stabilité linéaire donnant accès aux seuils d'instabilités ainsi qu'aux nombres d'ondes transverses associés est rappelée. Enfin, les résultats de l'analyse non-linéaire sont résumés dans le diagramme de bifurcation des différentes structures observables dans ce système.

2.1 Les cristaux liquides

La découverte des cristaux liquides au milieu du XIX^{ème} siècle est liée à leurs propriétés optiques. Virchow, Mettenheimer et Valentin remarquent que la fibre nerveuse qu'ils étudient forme une substance fluide qui montre un état étrange lorsqu'on l'observe sous lumière polarisée. Ils ne réalisent alors pas que c'est une phase inconnue de la matière (mais la première observation des cristaux liquides leur est tout de même attribuée). Plus tard, on s'aperçoit qu'il est très facile d'agir sur leur structure par des agents physiques extérieurs et que le comportement de la lumière qui les traverse s'en trouve modifié.

2.1.1 L'organisation structurelle

La phase cristal liquide ou mésomorphe s'observe lors d'une transition induite par la chaleur entre l'état cristallin solide et l'état liquide (Fig. 2.1), transition modifiant l'ordre au sein du milieu. Dans un cristal, les molécules sont contraintes à occuper certaines positions : c'est l'*ordre positionnel*. Ces positions spécifiques contraignent les molécules à s'orienter en fonction des autres : c'est l'*ordre orientationnel*. Lorsque le solide transite directement vers le

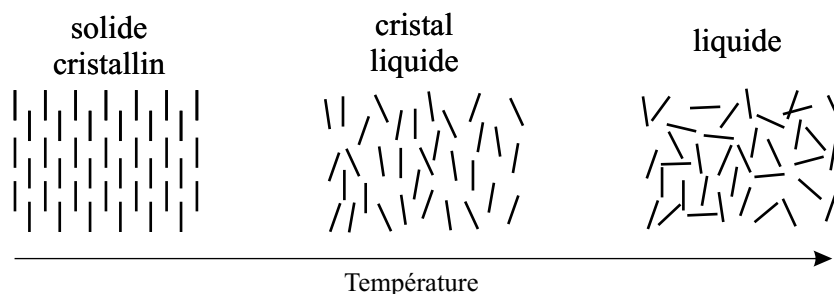


FIG. 2.1 – Schéma de l'organisation moléculaire des phases solides, cristal liquide et liquide de la matière.

liquide, ces deux ordres disparaissent. Lorsque le solide transite vers le cristal liquide, l'ordre positionnel est perdu mais l'ordre orientationnel peut rester. Les molécules sont alors libres de bouger presque comme dans un liquide, mais elles conservent une certaine organisation spatiale. Toutes les molécules ne présentent pas un état "cristal liquide" et ce sont souvent les molécules organiques les meilleures candidates. De manière générale, la molécule doit être de forme allongée significativement plus longue que large, rigide en son centre (généralement dû à une paire de groupes aromatiques) et de préférence flexible sur ses extrémités. Si leur géométrie globale joue un rôle évident dans l'organisation inter-moléculaire, à plus petite échelle, la présence de certains groupes chimiques et de leurs propriétés électriques impliquent trois types d'organisation appelées mésophases (Fig. 2.2) :

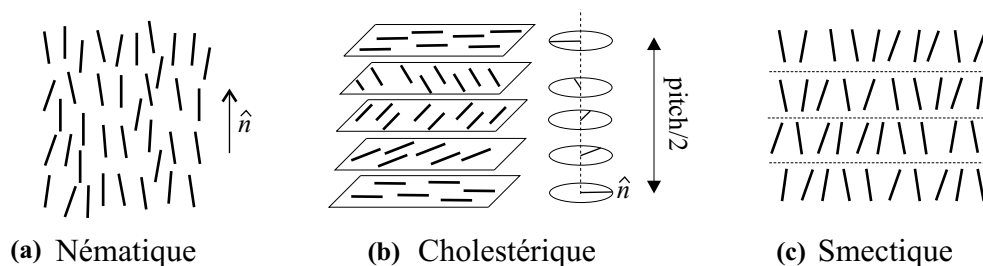


FIG. 2.2 – Organisation moléculaire des 3 mésophases des cristaux liquides

– la phase nématique

C'est une phase fluide où les molécules s'alignent parallèlement les unes par rapport aux autres tout en se déplaçant aléatoirement (Fig. 2.2a). Un ordre orientationnel existe mais pas d'ordre positionnel. Ce type de milieu est biréfringent uniaxe, c'est à dire qu'il possède un axe extraordinaire d'indice n_e le long de la molécule différent de l'indice ordinaire n_o dégénéré dans le plan orthogonal. L'orientation moyenne des molécules définit *le directeur* noté $\hat{n}$. C'est ce type de cristal liquide qui est le plus communément utilisé dans les systèmes électro-optiques comme les écrans LCD. C'est également celui que nous utiliserons dans nos expériences.

– **la phase cholestérique**

Cette phase est aussi appelée nématique chirale car les molécules sont chirales, elles possèdent des forces intermoléculaires qui favorisent leur alignement, avec un léger angle entre elles (Fig. 2.2b). Le directeur $\hat{n}$ n'est pas fixé dans l'espace comme dans une phase nématique mais pivote progressivement à travers l'échantillon en décrivant un mouvement hélicoïdal, on parle alors de champ de vecteur des axes directeurs $\hat{n}(\mathbf{r})$ ¹. Le pas de l'hélice, appelé aussi le pitch, est d'un ordre de grandeur bien supérieur aux dimensions moléculaires (≈ 3000 Å). Cet effet de rotation présent dans les cristaux cholestériques produit des propriétés optiques intéressantes (pouvoir rotatoire, réflexion sélective).

– **la phase smectique**

L'organisation smectique est la plus visqueuse, i.e. la plus proche du solide. En plus de l'ordre orientationnel, il existe aussi un ordre positionnel : les molécules s'orientent approximativement vers la même direction et s'arrangent en couches qui peuvent glisser les unes par rapport aux autres (Fig. 2.2c). L'épaisseur entre ces couches est de l'ordre de 20 à 30 Å (soit la longueur d'une molécule). Notons aussi qu'il existe deux phases légèrement différentes : la A et la C qui diffèrent par l'orientation de $\hat{n}$ dans les plans.

2.1.2 Action d'un champ électrique sur un cristal liquide nématique ancré

2.1.2.1 Réorientation moléculaire

Comme nous l'avons vu, les molécules d'un cristal liquide nématique tendent à s'aligner les unes par rapport aux autres selon une direction qui fixe le directeur $\hat{n}$ (le champ de vecteur $\hat{n}(\mathbf{r})$ est alors rectiligne). La direction de $\hat{n}$ peut être imposée par un traitement du substrat enserrant le cristal liquide. Les molécules au niveau de la surface sont alors figées et orientées par ce traitement. Les autres molécules dans l'épaisseur de l'échantillon s'orientent alors parallèlement à celles de la surface en raison de la propriété d'orientation des nématiques. Cette disposition correspond à un état d'équilibre qui minimise la densité d'énergie libre élastique F_d . Cette grandeur mesure l'énergie par unité de volume qu'il est nécessaire de fournir au cristal liquide pour perturber cet arrangement. On différencie trois principaux types de déformations du directeur nommées communément “splay”, “twist” et “bend” et présentées

¹cette définition est générale, $\hat{n}(\mathbf{r})$ ne décrit pas forcément une hélice

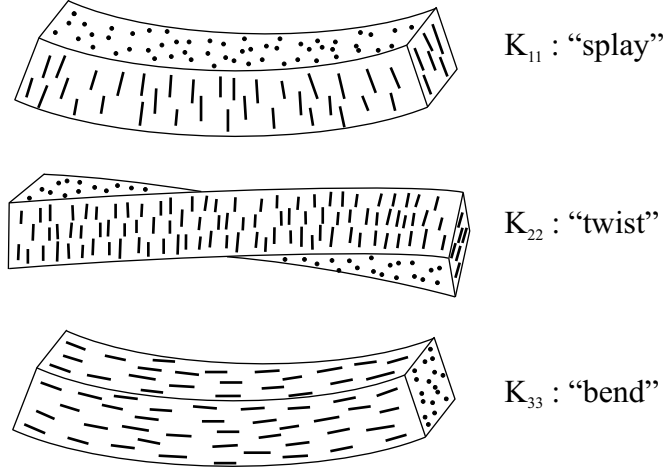


FIG. 2.3 – Illustration des trois différents types de déformations d'un nématique et leur coefficient élastiques associés.

sur la figure 2.3. A chacune de ces déformations est associée un coefficient d'élasticité (ou coefficient de Frank) K_{11} , K_{22} et K_{33} respectivement tels que la densité d'énergie libre s'écrit :

$$F_d = \frac{1}{2}K_{11}(\nabla \cdot \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_{22}(\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_{33}(\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2 \quad (2.1)$$

L'équation 2.1 décrit la déformation du champ $\hat{n}(\mathbf{r})$ dans la masse du cristal liquide. Une description complète devrait prendre en compte les interactions de surface dues à l'ancrage des molécules sur les parois².

Sous l'influence d'un champ électrique $\vec{E}_{in}$ statique ou lumineux, les molécules interagissent soit via le dipôle permanent des molécules (si elles en possèdent un), soit via le dipôle induit par ce propre champ [38]. Le résultat est identique, elles subissent un couple qui tend à aligner le directeur $\hat{n}$ suivant les lignes de champ. Si ce champ électrique est fourni par un champ lumineux, ce dernier va traverser un milieu dont l'indice effectif n_{eff} (i.e. vu par le champ) change sous sa propre influence (à cause de l'action combinée de la polarisabilité et de la biréfringence). Un couple d'origine électrostatique s'oppose donc aux forces élastiques discutées plus haut. La densité d'énergie libre totale est alors la somme de F_d et de la densité d'énergie libre électrostatique F_e . Un équilibre s'instaure qui correspond à la minimisation de l'énergie totale. En conséquence, plus l'intensité lumineuse incidente I_0 est intense, plus la réorientation du directeur est importante et plus l'indice effectif du milieu change. Tout ce mécanisme peut être assimilé à un effet Kerr optique ($n = f(I)$) sous certaines conditions :

- l'échantillon doit être éclairé avec une polarisation rectiligne et doit la laisser inchangée ;

²L'ancrage d'un cristal liquide nématique permet d'orienter le directeur dans une direction choisie. Il existe principalement deux sortes d'ancrage : *planaire* lorsque les molécules sont alignés parallèlement au substrat et *homéotrope* lorsqu'elles sont disposées perpendiculairement à la paroi. La densité totale d'énergie inclut alors une composante liée à ce processus : $F_{tot} = F_d + F_{surface}$.

- la direction de polarisation doit être différente de l'axe moléculaire (couple non nul) afin de basculer les molécules et de changer l'indice effectif du milieu ;
- l'éclairement ne doit pas être trop intense pour ne pas atteindre le régime de saturation, ce qui correspondrait dans le cas des cristaux liquides à la situation où $\hat{n}$ et $\vec{E}_{in}$ sont colinéaires.

La configuration choisie pour nos expériences remplit ces conditions : c'est une couche de cristal liquide nématique orienté de façon homéotrope et inclinée d'un angle α par rapport à la direction de propagation du champ (Fig. 2.4a). Toutes les caractéristiques techniques du dispositif seront présentées dans la section 3.2.

2.1.2.2 Modélisation de la variation d'indice

Selon la configuration illustrée sur la figure 2.4, le champ lumineux polarisé rectilignement suivant l'axe y fait pivoter le directeur $\hat{n}$ dans le plan yOz . La conséquence est que l'indice effectif n_{eff} vu par le champ augmente comme le montrent les ellipsoïdes des indices des figures 2.4b et c. Un équilibre s'instaure alors entre les forces élastiques et la force électrostatique.

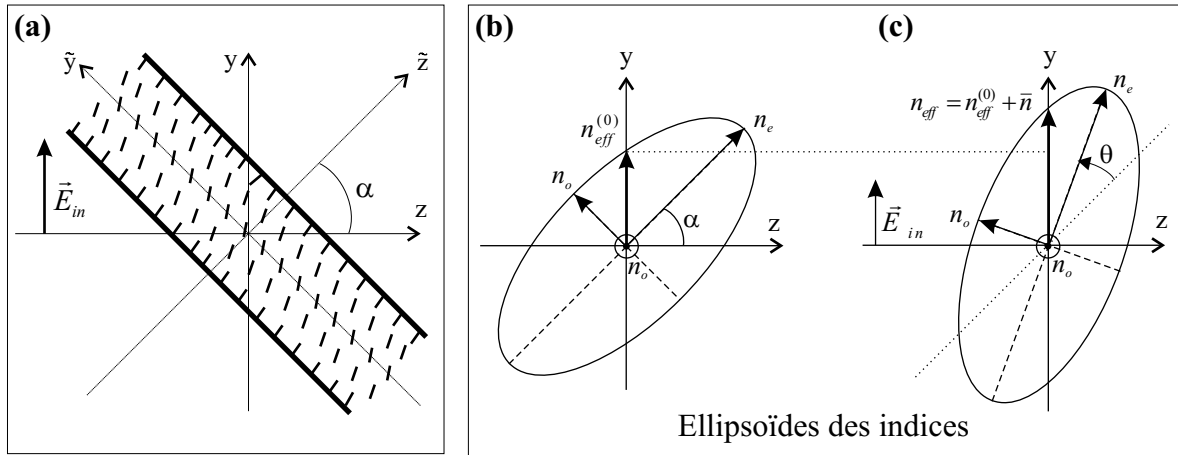


FIG. 2.4 – (a) Schéma de l'échantillon de cristal liquide. Ellipsoïde des indices (b) sans champ incident et (c) avec champ incident. L'indice effectif vu par un faisceau polarisé suivant y est n_{eff} . En absence de champ l'indice effectif vaut $n_{eff}^{(0)}$. $\bar{n}$ est l'indice réfractif tel que $n_{eff} = n_{eff}^{(0)} + \bar{n}$ (i.e. indice induit uniquement par le champ); n_o et n_e sont respectivement les indices ordinaire et extraordinaire du nématique; α , angle d'inclinaison de l'échantillon; θ , angle de réorientation induite par le champ.

Si on note θ l'angle de réorientation moyen entre le directeur et l'axe $\hat{z}$ orthogonal au plan de l'échantillon (axe d'ancrage), l'équation d'équilibre des couples pour θ suffisamment petit

s'écrit [39] :

$$\gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - K_{22} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} - K_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} - K_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} = a |E_{in}^2| \quad (2.2)$$

où γ_1 est le coefficient de viscosité du cristal liquide et a le coefficient de proportionnalité caractérisant l'effet Kerr optique. Le déphasage induit par cette réorientation des molécules sur le champ optique $\vec{E}_{in}$ s'obtient en intégrant l'équation 2.2 sur l'épaisseur L de l'échantillon [39]. L'équation gouvernant l'évolution de l'indice réfractif $\bar{n} = \lambda_0 \phi / 2\pi L$ dans le repère (xyz) est alors :

$$\tau \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} - l_d^2 \nabla_{\perp}^2 \bar{n} + \bar{n} = n_2 |E^2| \quad (2.3)$$

avec

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

τ est le temps de relaxation, i.e. la constante de temps du retour à l'équilibre après une perturbation locale de l'orientation d'un groupe de molécules. Le coefficient de diffusion spatiale l_d représente la distance caractéristique à laquelle une perturbation locale de l'orientation s'estompe. Il traduit le fait que le basculement d'une molécule se répercute sur ses voisines avec une portée de l_d . Notons que l'équation 2.3 gouverne le comportement de l'indice réfractif $\bar{n}$, c'est à dire la variation d'indice induite par l'intensité incidente à distinguer de l'indice effectif n_{eff} défini antérieurement ($n_{eff} = n_{eff}^{(0)} + \bar{n}$).

On trouve dans le membre de droite de l'équation 2.3 le coefficient n_2 , appelé "coefficient Kerr" et exprimé en m^2/W . Il dépend des caractéristiques du cristal liquide et de l'angle d'inclinaison α . Son expression est donnée par [39] :

$$n_2 = \frac{\varepsilon_0 (n_e^2 - n_o^2)^2 L^2}{24 n_e^3 K_{33}} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (2.5)$$

où ε_0 est la permittivité du vide. En renormalisant $\bar{n}$ par le coefficient n_2 dans l'équation 2.3 ($n = \bar{n}/n_2$), on obtient l'équation de diffusion pour l'indice réfractif normalisé :

$$\tau \frac{\partial n}{\partial t} - l_d^2 \nabla_{\perp}^2 n + n = |E_{in}^2| \quad (2.6)$$

où $|E_{in}^2|$ apparaît comme un terme de forçage pour l'équation de diffusion sur n .

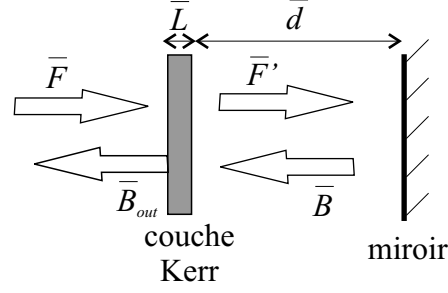


FIG. 2.5 – Schéma du dispositif. Notations pour le modèle théorique.

2.2 Modélisation

2.2.1 Le modèle théorique

Le système que nous étudions est composé d'un échantillon de cristal liquide (couche Kerr) soumis à un champ optique placé devant un miroir de renvoi (2.5). Nous reprenons ici le développement théorique proposée par D'Alessandro et Firth et présenté dans les références [40, 8, 37].

L'équation 2.6 reste valide si on remplace E_{in} par $\mathcal{F} + \mathcal{B}$ où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ représentent les champs optiques aller et retour. Dans l'équation de diffusion 2.6, le terme E_{in} devient :

$$E_{in} = \bar{F}e^{i(k_0z - w_0t)} + \bar{B}e^{i(k_0z + w_0t)} + c.c. \quad (2.7)$$

où $\bar{F}(x, y)$ et $\bar{B}(x, y)$ sont les amplitudes lentement variables. Le champ $\bar{B}$ n'est autre que $\bar{F}$ ayant subi un déphasage lors de la traversée de l'échantillon, une réflexion et une propagation libre sur une distance $2\bar{d}$ correspondant à l'aller retour entre l'échantillon et le miroir (idem pour le $c.c.$). Le milieu Kerr (i.e. la couche de cristal liquide) est supposé non absorbant et suffisamment fin pour ne pas prendre en compte la diffraction sur l'épaisseur de l'échantillon (ce qui est correct si $\bar{L} \ll \bar{d}$)³. Dans ces conditions, le champ $\bar{F}$ subit simplement un déphasage lié à n et $\bar{L}$ lors de la traversée de l'échantillon. L'équation de Maxwell gouvernant la traversée de l'échantillon se réduit à :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = i\chi_0 n \bar{F} \quad (2.8)$$

où $\chi_0 \equiv k_0 n_2 / 2$ mesure la non-linéarité Kerr et son signe la nature du milieu : focalisant pour $\chi_0 > 0$ et défocalisant pour $\chi_0 < 0$. La propagation dans l'espace libre est déterminée par l'équation paraxiale (c.f. annexe B) :

$$\frac{\partial \bar{F}'}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \bar{F}'. \quad (2.9)$$

³C'est le cas dans nos expériences où $d \approx 1$ à 3 cm et $L \approx 50 \times \sqrt{2} \mu\text{m}$.

Dans la mesure où $l_d \gg \lambda_0$ ($l_d \approx 10\mu\text{m}$ et $\lambda_0 = 532\text{nm}$), la diffusion empêche la formation d'une modulation d'indice longitudinale pouvant être créée par l'interférence entre les champs aller et retour à l'intérieur de l'échantillon. Ceci permet d'écrire $|E|^2 \equiv |\bar{F} + \bar{B}|^2 = |\bar{F}|^2 + |\bar{B}|^2$. Les équations 2.6, 2.8 et 2.9 prennent alors la forme :

$$\tau \frac{\partial n}{\partial t} - l_d^2 \nabla_\perp^2 n + n = |\bar{F}|^2 + |\bar{B}|^2, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = i\chi_0 n \bar{F}, \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial \bar{F}'}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_\perp^2 \bar{F}', \quad (2.10c)$$

Pour obtenir $\bar{B}$ juste avant son retour dans le milieu Kerr, exprimons d'abord $\bar{F}'$ en sortie de milieu Kerr qui s'obtient par intégration de l'équation 2.10b sur l'épaisseur $\bar{L}$:

$$\bar{F}' = e^{i\chi_0 n \bar{L}} \bar{F}. \quad (2.11)$$

L'amplitude $B(x, y, t)$ du champ F' réfléchi par le miroir (R) et ayant parcouru la distance $2\bar{d}$ s'obtient par intégration de l'équation 2.10c :

$$\bar{B}(x, y, t) = \sqrt{R} e^{i\frac{\bar{d}}{k_0} \nabla_\perp^2} (\bar{F}') = \sqrt{R} e^{i\frac{\bar{d}}{k_0} \nabla_\perp^2} \left[e^{i\chi_0 \bar{L} n(x, y, t)} \bar{F}_0(x, y) \right]. \quad (2.12)$$

R est le coefficient de réflexion en intensité du miroir et $\bar{F}_0$ l'amplitude de l'onde incidente. Notons que cette expression suppose que le temps de propagation sur $2\bar{d}$ est négligeable devant le temps de relaxation τ – condition largement remplie dans le cadre de nos expériences où τ est de l'ordre de la seconde. Le système d'équations 2.10a, 2.10b et 2.10c se réduit alors à l'équation unique :

$$\tau \frac{\partial n}{\partial t} - l_d^2 \nabla_\perp^2 n + n = |\bar{F}_0|^2 + \left| \sqrt{R} e^{i\frac{\bar{d}}{k_0} \nabla_\perp^2} \left(e^{i\chi_0 \bar{L} n(x, y, t)} \bar{F}_0(x, y) \right) \right|^2. \quad (2.13)$$

Cette expression 2.13 est l'équation d'évolution de notre système. Une renormalisation de l'espace par rapport au coefficient de diffusion spatiale l_d ($(x, y, z) = (x, y, z)l_d^{-1}$) et du temps par rapport au coefficient de relaxation temporelle τ ($t = \bar{t}\tau^{-1}$) :

$$\begin{aligned} |F|^2 &= |\bar{F}|^2 l_d^3, \quad |B|^2 = |\bar{B}|^2 l_d^3, \\ n &= n l_d^3, \quad d = \bar{d} l_d^{-1}, \quad L = \bar{L} l_d^{-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

permet de travailler en grandeurs adimensionnées (F^2 , B^2 , et n s'expriment maintenant dans la même unité). L'équation 2.13 s'écrit alors :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla_\perp^2 n + n = |F_0|^2 + \left| \sqrt{R} e^{i\sigma \nabla_\perp^2} \left(e^{i\chi n(x, y, t)} F_0(x, y) \right) \right|^2 \quad (2.15)$$

où $\chi \equiv \chi_0 L l_d^{-2}$ et $\sigma \equiv d / (k_0 l_d^2)$. σ est une grandeur sans dimension traduisant la compétition entre le régime de diffusion ($\sigma \ll 1$) et celui de diffraction ($\sigma \gg 1$). Dans l'ensemble de ce travail, nous nous placerons dans un régime dominé par la diffraction.

2.2.2 Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire détermine, à partir du système d'équations dynamiques, les nombres d'onde des structures autorisées, leurs domaines de stabilité, les fréquences temporelles associées ainsi que le type de bifurcations rencontrées. Cette technique traite de la stabilité d'une solution par rapport à de petites perturbations. Si ces dernières croissent, c'est que la solution considérée n'est pas stable et que le système s'écarte de cet état. Comme on ne s'intéresse qu'à la tendance de l'évolution de la perturbation, il est possible de se restreindre uniquement aux termes linéaires du modèle qui restent bien supérieurs aux termes non-linéaires dans la mesure où les amplitudes restent faibles.

En dynamique spatio-temporelle, la première étape consiste à chercher une solution uniforme et stationnaire. En annulant les dérivées spatiales et temporelle dans l'équation 2.15 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\nabla_{\perp}^2 = 0$), on trouve la solution caractérisée par :

$$n_0 = I_0 (1 + R), \quad |F_0|^2 = I_0, \quad |B_0|^2 = R I_0, \quad (2.16)$$

Remarquons que, bien que n_0 ne soit pas rigoureusement uniforme en espace (puisque'il possède la même dépendance transverse que le faisceau incident) nous nommerons cet état *état homogène*, il faudra comprendre *état dépourvu de structuration particulière*.

La seconde étape consiste à perturber cet état homogène stationnaire afin d'en déterminer la stabilité avec le paramètre de contrôle du système, ici I_0 . Pratiquement, on pose $n(x, y, t) = n_0 + \delta n(x, y, t)$ avec $\delta n(x, y, t) \ll n_0$. L'équation linéarisée s'obtient alors en gardant uniquement les termes du premier ordre⁴ en δn :

$$\frac{\partial \delta n(x, y, t)}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 \delta n(x, y, t) + \delta n(x, y, t) = -2 R I_0 \chi \sin(\sigma \nabla_{\perp}^2) \delta n(x, y, t) \quad (2.17)$$

La perturbation peut être décomposée en une infinité de composantes de Fourier⁵ $\delta n(x, y, t) \propto e^{\Omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}} d^2 \mathbf{k}$. Pour un nombre d'onde $\mathbf{k}$ donné la relation de dispersion qui relie Ω et $\mathbf{k}$ est obtenue en remplaçant cette expression de δn dans l'équation 2.17 :

$$\Omega + \mathbf{k}^2 + 1 = 2 R I_0 \chi \sin(\sigma \mathbf{k}^2) \quad (2.18)$$

⁴ par exemple $e^{i \chi \delta n(x, y, t)} = 1 + i \chi \delta n(x, y, t) + o(\delta n^2)$

⁵ Afin d'alléger la notation, les grandeurs vectorielles seront notées en caractères gras : $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$

où Ω est le taux d'accroissement linéaire temporel. Une perturbation de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ croît si $\Omega > 0$, dans ce cas l'état homogène est instable par rapport à cette perturbation. Si $\Omega < 0$, l'état homogène est stable. Le cas limite $\Omega = 0$ pour lequel la perturbation appliquée au système ne croît, ni ne décroît correspond au seuil d'instabilité. En posant $\Omega = 0$ dans l'équation 2.18, on obtient l'inégalité donnant le seuil de déstabilisation $I_s(\mathbf{k})$ de l'état homogène en fonction du nombre d'onde $\mathbf{k}$: (Fig. 2.6) :

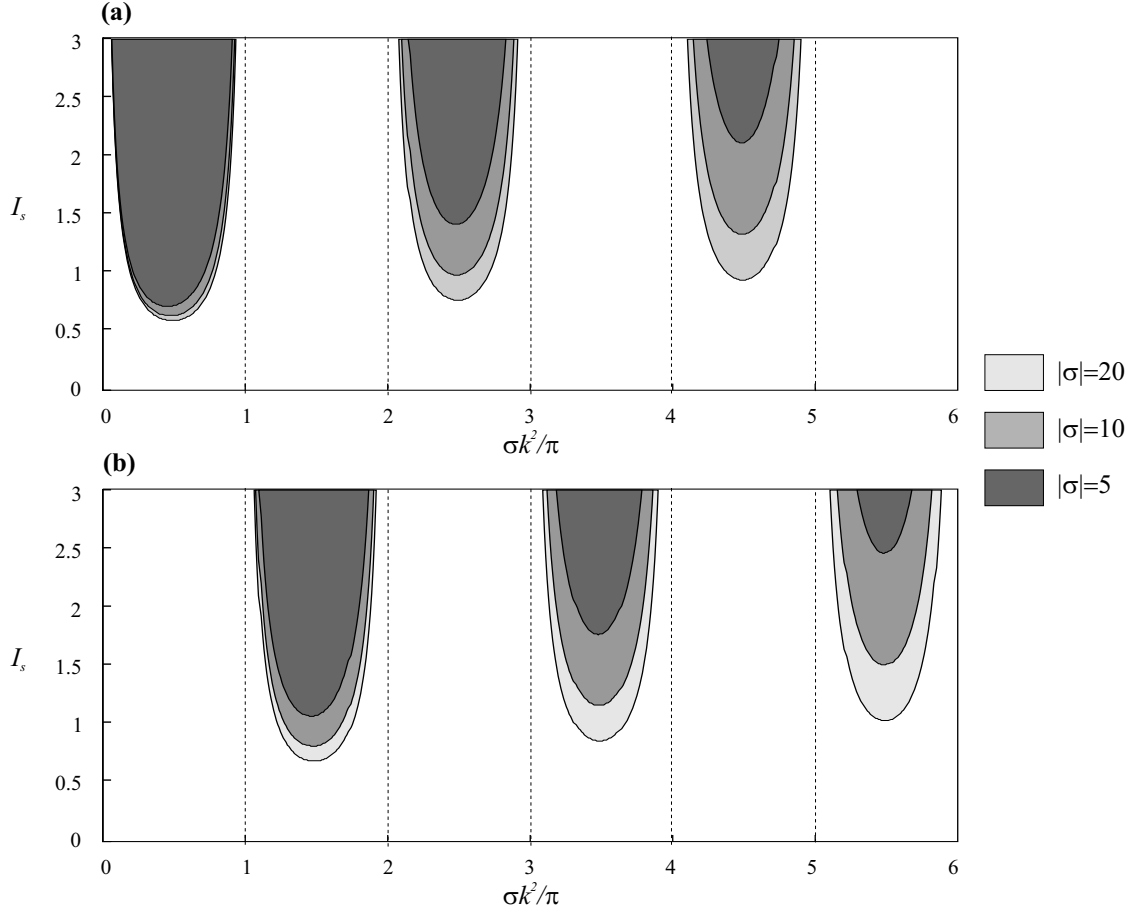


FIG. 2.6 – Courbes de stabilité marginale pour une non-linéarité (a) positive, (b) négative ; $|\chi| = 1$; $R = 0.9$; En grisée, les zones structurées.

$$I_s(\mathbf{k}) = \frac{1 + \mathbf{k}^2}{2R\chi \sin(\sigma \mathbf{k}^2)}, \quad \chi \sin(\sigma \mathbf{k}^2) > 0. \quad (2.19)$$

La courbe représentant l'évolution de $I_s(\mathbf{k})$ s'appelle la *courbe de stabilité marginale*. Comme on peut le voir sur la figure 2.6, elle présente plusieurs “langues” qui séparent dans le plan (k, I_s) les zones où la solution homogène est stable (zone blanche) des zones où une modulation d'indice peut être amplifiée (zones grisées). Le nombre d'onde correspondant à l'intensité la plus basse est celui qui sera sélectionné au seuil d'instabilité, on le note $\mathbf{k}_c$ pour *nombre d'onde*

critique. On voit (Fig. 2.6) qu'il est différent selon le signe de la non-linéarité χ (à cause de la condition d'inégalité) et qu'il existe un grand nombre de minima locaux correspondant à autant de nombres d'onde possibles, numérotés $\mathbf{k}_c^{[p]}$ ($\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_c^{[1]}$). Ceux-ci sont donnés par l'équation implicite :

$$\tan\left(\sigma \mathbf{k}_c^{[p]2}\right) = \sigma \left(1 + \mathbf{k}_c^{[p]2}\right). \quad (2.20)$$

Si σ est suffisamment grand (régime de diffraction), alors $\sigma \mathbf{k}_{c(+)}^2 \simeq \pi/2$ pour une non-linéarité positive et $\sigma \mathbf{k}_{c(-)}^2 \simeq 3\pi/2$ pour une non-linéarité négative. A titre d'exemple, pour $\sigma = 10$,

$$\sigma \mathbf{k}_{c(+)}^2 \simeq 0.942 \frac{\pi}{2} \text{ et } \sigma \mathbf{k}_{c(-)}^2 \simeq 0.986 \frac{3\pi}{2} \quad (2.21)$$

ce qui est déjà bien proche de leur valeur asymptotique. Les longueurs caractéristiques correspondantes de la modulation sont, en grandeurs dimensionnées :

$$\Lambda_{\infty}^{+} \simeq \sqrt{4\lambda_0 d}, \chi > 0 \quad (2.22a)$$

$$\Lambda_{\infty}^{-} \simeq \sqrt{\frac{4}{3}\lambda_0 d}, \chi < 0 \quad (2.22b)$$

où l'indice “ ∞ ” indique que le développement est réalisé pour des ondes planes (de largeur infinie). Notons qu'on retrouve les valeurs obtenues à partir de l'approche utilisant l'effet Talbot (c.f. 1.2), méthode ne prenant en compte que la diffraction ($\sigma \gg 1$).

Par ailleurs, dans l'inégalité 2.19, il y a la condition $\chi \sin(\sigma \mathbf{k}^2) > 0$. Comme le sinus est impair on peut écrire $\chi \cdot \text{sign}(\sigma) \cdot \sin(|\sigma| \mathbf{k}^2) > 0$ ce qui implique que pour avoir par exemple $\chi \cdot \text{sign}(\sigma) < 0$ il est équivalent d'avoir ($\chi > 0; \sigma < 0$) et ($\chi < 0; \sigma > 0$). En d'autres termes pour changer le signe de la non-linéarité il suffit de changer le signe de σ (et donc de d). Dans notre cas pour obtenir une non-linéarité négative dans le cristal liquide il suffit de réaliser $d < 0$ (obtenue en réalisant une distance optique négative). Ainsi en passant d'une distance de propagation positive à négative le signe de la non-linéarité est inversé. Cette manipulation est aisément réalisable expérimentalement grâce au dispositif “4f” détaillé dans la section 3.1.2. Le cristal liquide, dans la configuration choisie, est un milieu intrinsèquement focalisant (fixant $\chi > 0$). Réaliser un montage expérimental avec $d < 0$ équivaut à changer le signe de χ . Dorénavant, nous utiliserons donc cette convention, à savoir, $\sigma > 0$ ($d > 0$) pour un système focalisant et $\sigma < 0$ ($d < 0$) pour un défocalisant.

En conclusion, l'analyse de stabilité linéaire donne accès aux seuils d'instabilités en fonction du nombre d'onde spatial de la modulation. Le minimum absolu de la courbe de stabilité marginale fixe la modulation qui se déstabilise la première à partir de l'état homogène. Pour un système 1D, l'instabilité primaire correspond à une modulation spatiale de pas $\Lambda = 2\pi/k_c$

suivant l'unique dimension du système, mais pour un système 2D, l'analyse précédente est insuffisante. En effet, le nombre d'onde $\mathbf{k}_c$ est défini mais aucune relation ne donne l'orientation des vecteurs d'ondes au seuils, i.e. il est impossible, à ce stade, de connaître la structure émergeant au seuil. Ceci nécessite une analyse de stabilité non-linéaire.

2.2.3 Analyse non-linéaire. Diagramme de bifurcation

L'analyse non-linéaire permet de prendre en compte les termes non-linéaires qui assurent à la fois le couplage entre modes linéairement indépendants menant à la formation de *structures complexes* et la saturation de ces modes. Dans la référence [37], la méthode utilisée est une *analyse multi-échelle* où l'injection de solutions prédéfinies dans le système donne accès aux "équations aux amplitudes" pour chacune des structures observables. Ici la superposition de trois ondes orientées à $2\pi/3$ les unes des autres avec des relations de phase fixes permet de traiter les cas d'hexagones positifs, négatifs (nid d'abeille) et de rouleaux :

$$n \propto Ae^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + Be^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} + Ce^{i\mathbf{k}_3\mathbf{r}} + c.c. \quad (2.23)$$

Les $\mathbf{k}_i$ ont pour module $|\mathbf{k}_c|$ trouvé par l'analyse linéaire et obéissent à la condition $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$. Ce développement mène à des équations aux amplitudes couplées de type Ginzburg-Landau à partir desquelles est obtenu le diagramme de bifurcation présenté sur la figure 2.7 [37]. On remarque que les rouleaux comme les hexagones négatifs (nid d'abeilles) apparaissent

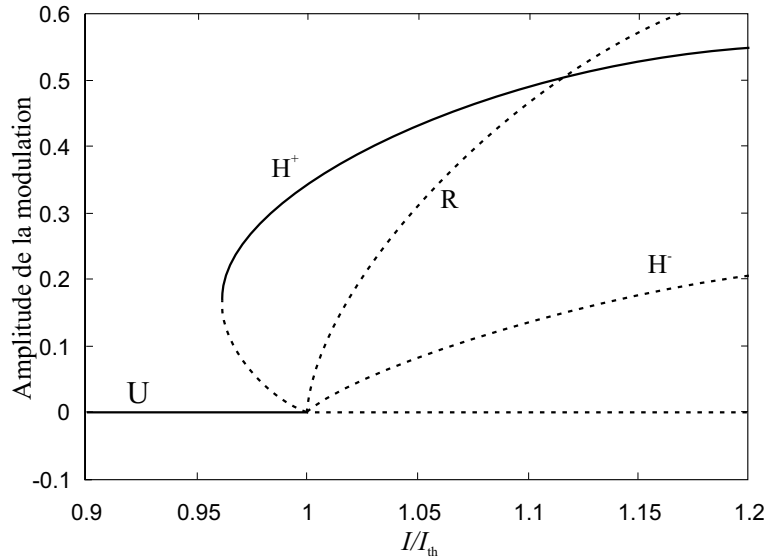


FIG. 2.7 – Diagramme de bifurcation, $\chi = 1, R=0.9$ et $\sigma = 10$. U : uniforme ; H^+ : hexagones positifs ; H^- : hexagones négatifs ; R : rouleaux. Les traits pleins indiquent les solutions stables, les tirets indiquent les instables.

via une bifurcation super-critique mais sont instables. Les hexagones positifs, quant à eux,

sont stables et se développent via une bifurcation sous-critique. Le diagramme présente donc une bistabilité dans une zone relativement étroite entre la solution uniforme d'amplitude nulle et une "branche haute" développant une structure hexagonale. Entre les deux, la "branche basse" est instable. Ces scénarios ont été comparés à des simulations numériques montrant une bonne correspondance qualitative. Quantitativement, cette analyse non-linéaire est satisfaisante lorsque $\sigma \geq 10$ [37], c'est à dire pour un régime où la diffraction domine par rapport à la diffusion.

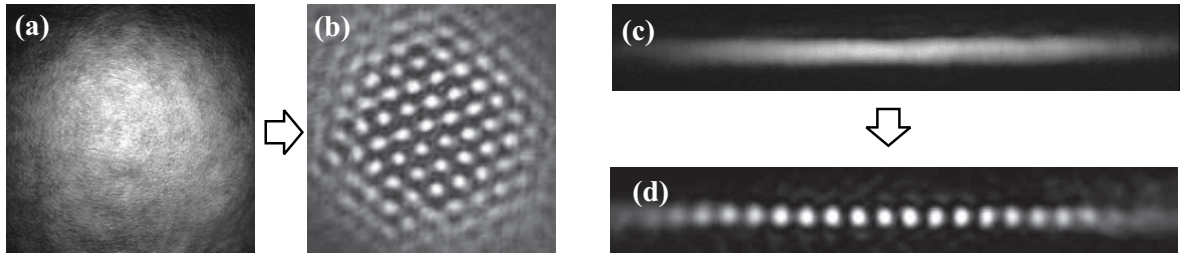


FIG. 2.8 – Sections transverses du faisceau incident E_{in} (a) en configuration 2D et (c) en configuration 1D; (b) et (d) Structures développées au seuil de déstabilisation de la structure homogène. (b) hexagones, (d) rouleaux.

La figure 2.8b présente un exemple d'hexagones positifs obtenus à l'aide de notre dispositif expérimental. La partie droite de la figure (Fig.2.8d) montre la structure stationnaire type "rouleaux" qui se déstabilise de manière supercritique dans la situation mono-dimensionnelle.

2.2.4 Influence du profil gaussien sur les résultats de l'analyse de stabilité linéaire

La grande majorité des études, tant analytiques que numériques, sur la formation spontanée de structures en dynamique spatio-temporelle considère des paramètres spatialement uniformes et d'extension infinie tel que le pompage. En effet, cette simplification permet de mener à bien les développements analytiques souvent impossibles dans le cas contraire. De plus, cette première approche permet d'appréhender qualitativement une bonne partie de la dynamique du système étudié comme nous venons de le faire jusqu'ici. Cependant, dans la majorité des systèmes réels, la taille du système est finie et/ou varie en fonction des coordonnées spatiales. Par exemple, dans des expériences de réaction-diffusion en chimie [2], de convection de Rayleigh-Bénard en hydrodynamique [9], les conditions aux limites fixent la dérivée du flux à une valeur nulle sur les bords.

En optique, ce sont les effets de diffraction sur les bords et la limitation transverse des faisceaux qu'il faut considérer. Dans notre cas, c'est la dépendance gaussienne du profil de pompe que nous avons occultée pour mener à bien les analyses de stabilité. Nous déterminons donc maintenant l'impact de ce profil sur la dynamique des structures, la modification des $\mathbf{k}_c$,

des seuils... L'étude est effectuée grâce à des simulations numériques intégrant l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 n + n = |F_0|^2 + \left| \sqrt{R} e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi n(x,y,t)} F_0 g(\mathbf{r}) \right) \right|^2 \quad (2.24)$$

où le terme $g(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/w^2)$ a été inséré pour rendre compte du profil gaussien du faisceau laser de rayon w . Il est alors utile d'introduire une grandeur caractéristique en dynamique spatio-temporelle mesurant le rapport entre la taille du faisceau ($2w$) et la longueur d'onde caractéristique de la structure étudiée (Λ_{∞}), appelée rapport d'aspect :

$$\eta = \frac{2w}{\Lambda_{\infty}} \quad (2.25)$$

où Λ_{∞} est défini dans les équations 2.22a et 2.22b. Ce rapport mesure l'inhomogénéité dans le système, en onde plane, $\eta = \infty$ alors que le cas extrême correspond à $\eta \approx 1$.

2.2.4.1 Seuil d'instabilité.

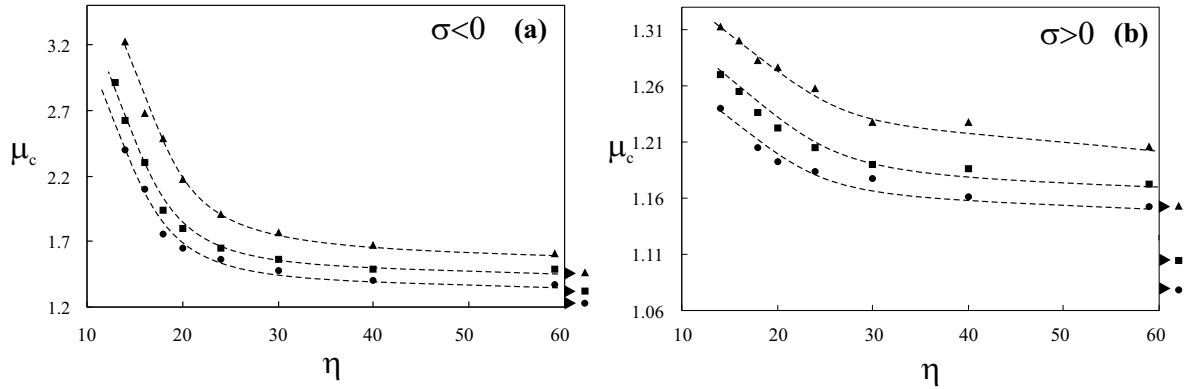


FIG. 2.9 – Dépendance du seuil d'instabilité μ_c en fonction du rapport d'aspect η obtenue par simulation numérique 1D. (a) défocalisant ▲ : $\sigma = -10$; ■ : $\sigma = -15$; ● : $\sigma = -20$. (b) focalisant ▲ : $\sigma = 10$; ■ : $\sigma = 15$; ● : $\sigma = 20$. Les triangles à l'extérieur droit du cadre indiquent la position des seuils calculés à partir du développement en ondes planes ($\eta \rightarrow \infty$). Les lignes en tirets sont des courbes de tendance pour aider à la lecture des graphes.

Les graphes de la figure 2.9 montrent la dépendance du seuil d'apparition μ_c des structures 1D en fonction du rapport d'aspect η pour différentes valeurs de σ . La tendance générale – quel que soit σ – est une augmentation des seuils lorsque le rapport d'aspect diminue, ce qui traduit la présence d'une contrainte "hostile" à la formation d'une modulation. Cependant ce décalage reste faible pour les milieux focalisants avec un écart d'environ +15% entre $\mu_c(\eta \rightarrow \infty)$ et $\mu_c(\eta = 15)$, alors qu'il est beaucoup plus important pour les milieux défocalisants puisqu'il double la valeur de μ_c pour les mêmes paramètres.

Ces observations montrent clairement les limites du développement en ondes planes réalisé

pour l'analyse de stabilité linéaire. En effet, ce type de développement ne permet pas d'effectuer une étude quantitative des seuils d'instabilité, cependant il reste qualitativement très performant.

2.2.4.2 Nombre d'onde.

Lorsque le paramètre de pompe μ est supérieur à μ_c , le nombre d'onde de la modulation évolue légèrement par rapport à sa valeur critique k_c . En d'autres termes, $k = f(\mu)$ ce qui implique que si le profil transverse du faisceau incident est inhomogène alors le profil transverse de k l'est aussi. La figure 2.10 montre un parallèle entre l'amplitude de la modulation et le nombre d'onde de cette même modulation. Notons que lorsque la non-linéarité est négative, k diminue avec μ (c'est le cas de la figure 2.10) tandis que lorsque la non-linéarité est positive, k augmente avec μ .

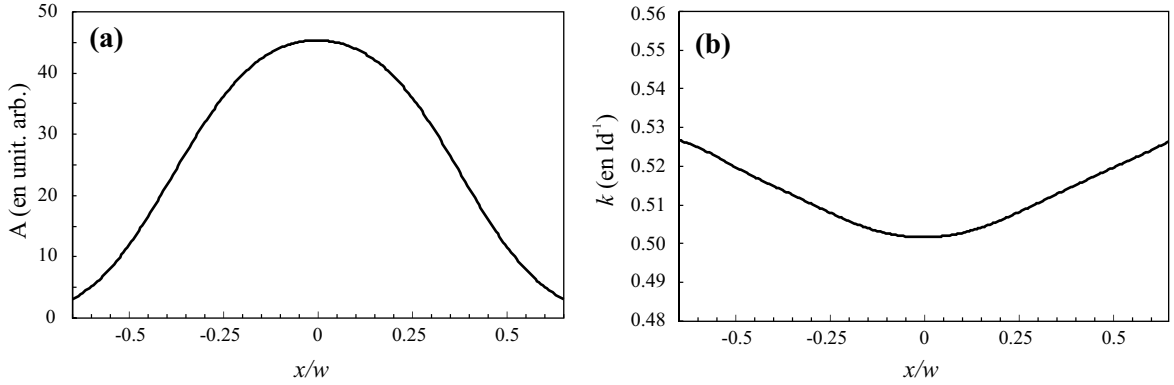


FIG. 2.10 – Dépendance spatiale de (a) l'amplitude de la modulation A et (b) du nombre d'onde k . $\sigma = -17$. $\mu = 1$. $\eta = 30$.

2.2.4.3 Instabilités secondaires.

Nous avons vu que la présence d'un faisceau incident inhomogène décale les seuils de formation des structures mais ne change pas la nature de l'instabilité au premier seuil : en configuration 1D le faisceau transverse s'organise en un alignement de spots lumineux stationnaires (Fig. 2.8b). Une étude [41] a montré cependant que, lorsque l'intensité incidente augmente encore, on voit apparaître une instabilité secondaire (Fig. 2.11) qui n'est pas celle prévue dans l'analyse du système uniforme. Ceci est une conséquence directe de l'inhomogénéité du nombre d'onde k .

Dans cette thèse nous développerons des analyses dans le cas uniforme pour appréhender les comportements dominants de notre système. Puis, de manière systématique, nous étudierons l'influence de l'inhomogénéité de la pompe sur ces comportements afin d'obtenir la dynamique

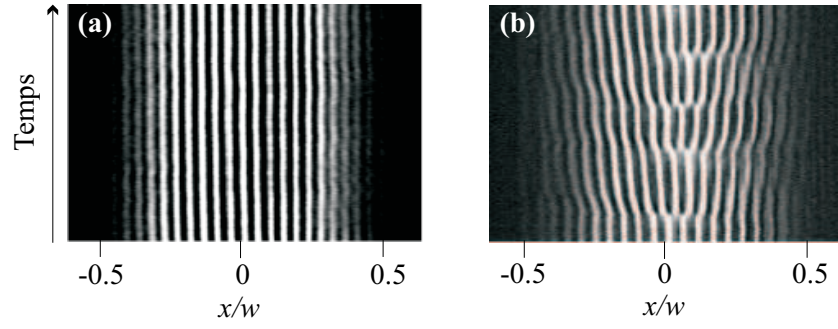


FIG. 2.11 – *Diagrammes spatio-temporels expérimentaux des structures 1D en configuration défocalisante, (a) $\mu/\mu_c = 1.3$, structures stationnaires ; (b) $\mu/\mu_c = 1.6$, structures instables. $\eta = 36$*

réelle observée expérimentalement. Plus généralement, nous nous placerons, dans l'expérience, dans le cas où $\eta \gtrsim 30$ afin de minimiser ces effets.

Chapitre 3

Le dispositif expérimental

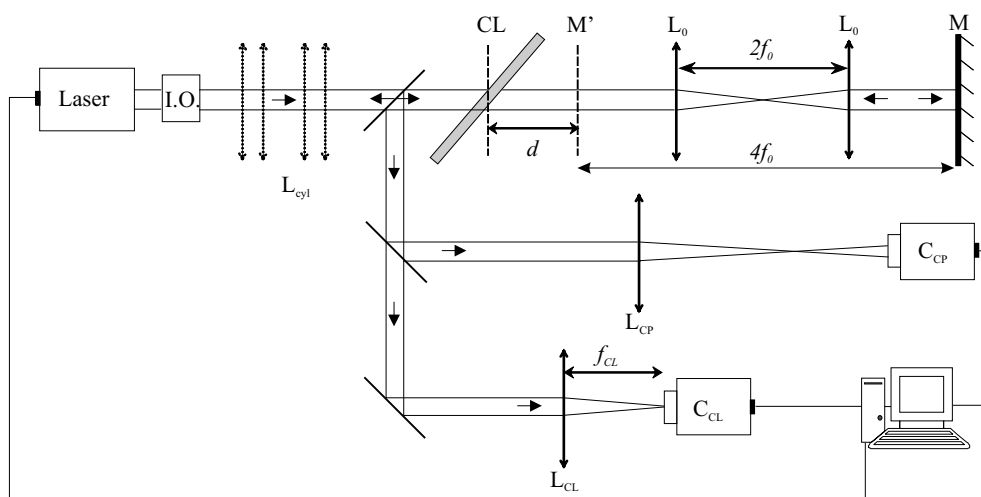


FIG. 3.1 – Schéma du dispositif expérimental ; CL échantillon de cristal liquide ; L_0 lentilles de focale f_0 du dispositif “4f” ; M miroir de renvoi ; M’ image du miroir M à travers le dispositif “4f” ; L_{CP} lentille d’imagerie du champ proche ; L_{CL} lentille d’imagerie du champ lointain ; L_{cyl} lentilles cylindriques (uniquement dans la configuration 1D) ; I.O. isolateur optique.

3.1 La boucle de rétroaction

3.1.1 La source lumineuse

Dans les expériences, le champ incident est fourni par un laser $\text{Nd}^{3+}:\text{YVO}_4$ doublé, de longueur d’onde dans le vide $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ et polarisé linéairement. Il délivre un rayonnement continu d’une puissance maximale de 8W , un isolateur optique (I.O.) est placé à sa sortie afin d’éviter tout retour du faisceau dans la cavité. Le faisceau laser, mono-mode TEM_{00} (Fig. 3.2a), possède un profil transverse d’intensité gaussien avec une demi-largeur à $1/e^2$ $w \approx$

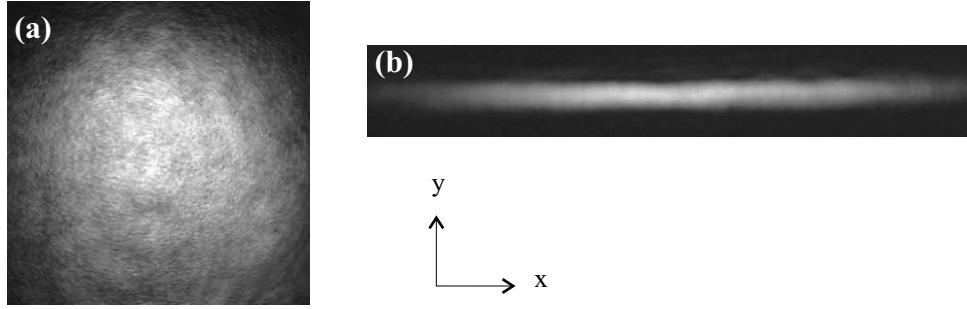


FIG. 3.2 – *Faisceaux de pompe ; (a) mode TEM_{00} dans la configuration à deux dimensions, (b) faisceau “cigare” pour l’étude à une dimension*

1400 μm au niveau du mileu Kerr. Afin de réaliser les études du système réduit à une dimension transverse, un couple de télescopes constitués de lentilles cylindriques L_{cyl} assure la mise en forme du faisceau en configuration "quasi-1D" (Fig. 3.1). Les deux télescopes agissant chacun pour une seule direction (x ou y) transverse permettent de choisir les dimensions w_x et w_y du faisceau désiré. Ainsi, il est possible d’aplatir ou d’élargir le faisceau jusqu’à obtenir une ellipse telle que $w_x \times w_y \approx 2800 \times 200 \mu\text{m}$ (Fig. 3.2b). Ces dimensions sont telles qu’aucune structure ne se développe suivant la direction y sans diffraction (le pas des structures qui se développent est de l’ordre de $100 \mu\text{m}$). Dans ce cas les structures peuvent être considérées comme mono-dimensionnelles. Enfin, le laser ainsi que les systèmes d’acquisition vidéo sont contrôlés par une unité centrale afin de réaliser des balayages de paramètre qui peuvent aller jusqu’à plusieurs heures d’enregistrement compte tenu de la dynamique très lente du système (temps de réponse $\tau \sim \text{s}$).

3.1.2 Le dispositif “4f”

Afin de pouvoir réaliser expérimentalement des distances d’aller-retour positives comme négatives pour simuler un changement de signe de la non-linéarité du milieu (c.f. sous-section 2.2.2), un dispositif composé de 2 lentilles convergentes de même focale (dispositif “4f”) est introduit dans la boucle de rétro-réaction. Il permet de créer un miroir virtuel placé à une distance égale à 4 fois la focale des lentilles du dispositif par rapport au miroir réel (Fig. 3.3a). Il suffit donc de placer ce dernier à une distance inférieure à $4f_0$ pour que le miroir virtuel se retrouve devant l’échantillon et ainsi obtenir un chemin optique échantillon-miroir négatif (Fig. 3.3b). Accessoirement, ce dispositif permet également de créer un plan de Fourier spatial au milieu des deux lentilles f_0 (Fig. 3.1) qui s’avère très utile lorsqu’on veut effectuer des filtrages spatiaux dans l’espace réciproque.

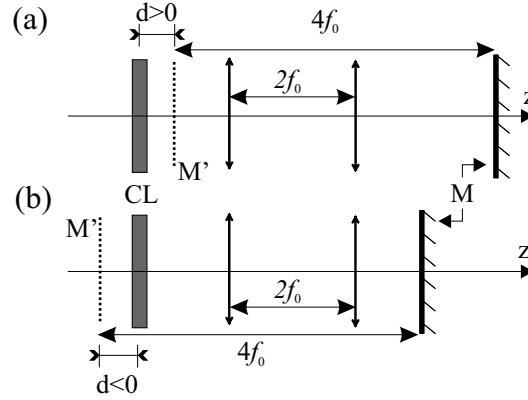


FIG. 3.3 – *dispositif 4f*. (a) $d > 0$, (b) $d < 0$. M miroir de renvoi; M' miroir virtuel, image de M ; CL échantillon de cristal liquide; f distance focale des lentilles.

3.1.3 L'imagerie

Deux caméras CCD (C_{CL} et C_{CP} sur la figure 3.1) permettent l'enregistrement simultané du champ proche (i.e. à la sortie de l'échantillon) grâce à la lentille L_{CP} et du champ lointain observé au foyer de la lentille L_{CL} (i.e. la transformée de Fourier optique du champ proche) de la section transverse du faisceau laser. Elles sont reliées à un ordinateur qui numérise les images au format 768×574 pixels, codées sur 256 niveaux de gris avec un taux maximal de rafraîchissement de 10Hz.

3.1.4 Les paramètres et constantes du système

Dans ce dispositif, trois paramètres de contrôle sont facilement accessibles :

1. l'intensité I_0 du faisceau laser incident. Ce sera ici le paramètre de contrôle de la dynamique de notre système. Elle varie de 0 à 142 W/cm^2 pour la configuration 2D et de 0 à 1384 W/cm^2 pour la configuration 1D.
2. la distance d entre le miroir de renvoi et l'échantillon de cristal liquide. Elle fixe la périodicité de la structure Λ_∞ et définit le rapport entre la diffraction et la diffusion par la quantité σ . La mesure de d difficile à réaliser techniquement puisque le miroir est virtuel mais une observation expérimentale, dérivée des précurseurs induits par le bruit présent dans le système (c.f. Chap. 4), permet de trouver la position $d = 0$ avec une précision inférieure à 1%. En effet, lorsque $d \neq 0$, le champ lointain est composé de cercles concentriques dont le rayon varie avec d . Lorsque $d \rightarrow 0$, le rayon des cercles tend vers l'infini de manière critique.
3. la taille du faisceau de pompe laser $2w$. Ce dernier, avec Λ_∞ , fixe la valeur du rapport d'aspect η du système (dans notre cas entre 20 et 40). Ce rapport fixe le couplage entre les effets intrinsèques à la dynamique et les effets de bords.

Les grandeurs suivantes sont constantes dans notre dispositif expérimental :

1. la longueur d'onde du rayonnement $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ (un joli vert) ;
2. La longueur de diffusion $l_d = 9.95 \pm 0.31 \text{ } \mu\text{m}$ et le temps de relaxation $\tau = 2.28 \pm 0.18 \text{ s}$. Ces deux grandeurs sont caractéristiques de l'échantillon de cristal liquide, leur détermination est l'objet du chapitre 6.
3. Le coefficient Kerr $n_2 \simeq 2.45 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$ lui aussi fixé par la nature de l'échantillon de cristal liquide (épaisseur, ancrage, type de cristal liquide...) et dont la mesure est détaillée dans la section suivante.

3.2 Le milieu Kerr

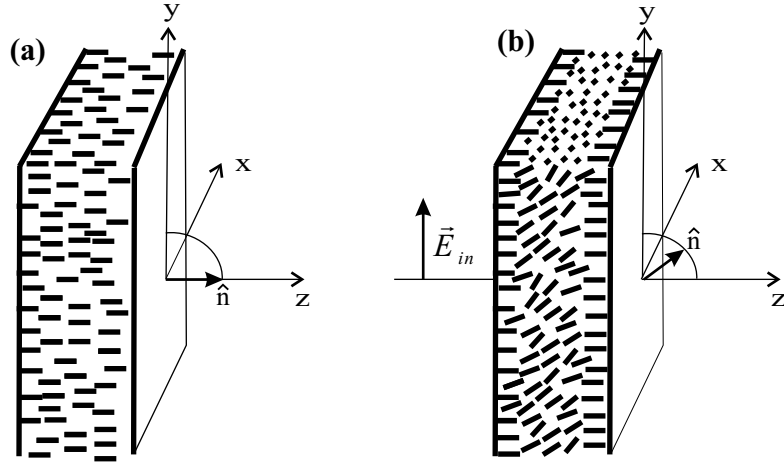


FIG. 3.4 – (a) Schéma d'un échantillon nématique en ancrage homéotrope, (b) le même échantillon sous l'influence d'un champ optique E_{in} polarisé rectilignement. $\hat{n}$: directeur indiquant l'orientation moyenne des molécules.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.1, les cristaux liquides peuvent, sous certaines conditions, être assimilés à un milieu Kerr. Le cristal liquide utilisé dans l'expérience est un nématique composé d'un mélange de trois différentes molécules référencé E₇ d'indices ordinaire $n_o = 1.524$ (dans le plan (x, y) de la figure 3.4a) et extraordinaire $n_e = 1.732$ (suivant $\vec{e}_z$). Le directeur $\hat{n}$ désigne l'orientation moyenne des molécules. La configuration est une orientation homéotrope, c'est à dire que les molécules sont ancrées perpendiculairement aux lames de verre (Fig. 3.4a).

3.2.1 Technique d'ancrage homéotrope

Afin de forcer les molécules de cristal liquide à s'ancrer perpendiculairement aux parois, nous avons utilisé une méthode appelée *silanisation* [42]. Cela consiste à traiter les lames de

verre avec un surfactant (obtenu à partir d'un mélange de $C_{16}H_{34} + CCl_4 + SiCl_4$) afin que celui-ci soit adsorbé sur le verre. Les longues chaînes carbonées du polymère dressées perpendiculairement aux parois forcent les molécules de cristal liquide (de forme allongée) à adopter une configuration homéotrope.

3.2.2 Mesure du coefficient Kerr de l'échantillon

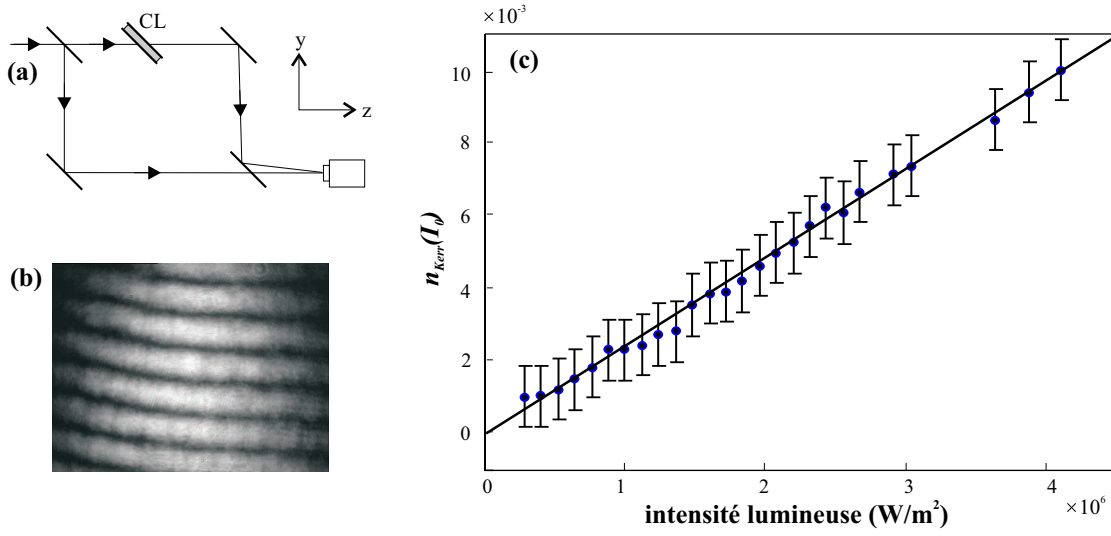


FIG. 3.5 – (a) Schéma du dispositif d'interférence Mach-Zender; (b) exemple de figure d'interférence; (c) dépendance linéaire entre l'indice réfractif et l'intensité incidente; les points correspondent aux valeurs expérimentales, la droite en trait plein est issue d'une régression linéaire.

Le coefficient n_2 est mesuré grâce à un interféromètre Mach-Zender schématisé sur la figure 3.5a. Le faisceau laser est d'abord séparé en deux puis, dans l'un des bras, est inclus l'échantillon de cristal liquide. A la sortie du dispositif, les deux faisceaux sont recombinaés avec un léger désalignement angulaire afin de réaliser une figure d'interférence dont un exemple est présenté sur la figure 3.5b. Le champ E_{tot} arrivant sur la caméra peut alors s'écrire comme la somme des deux champs :

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_0 e^{i(\omega t - k_{\parallel} z + k_{\perp} y)} + E_0 e^{i(\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y - \Delta\phi(I_0))} \\ &= 2E_0 e^{i(\omega t - k_{\parallel} z - \frac{\Delta\phi(I_0)}{2})} \cos\left(k_{\perp} y + \frac{\Delta\phi(I_0)}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$ sont les composantes, respectivement suivant z et y , du nombre d'onde optique et $\Delta\phi(I_0)$ le déphasage subi par le faisceau traversant l'échantillon. Ce déphasage dépend donc de l'intensité incidente I_0 et il est relié à l'indice du milieu par la relation simple $\Delta\phi(I_0) = k_0 n_{Kerr}(I_0) L$, où k_0 est le nombre d'onde optique et L l'épaisseur de cristal liquide traversée.

3.2. Le milieu Kerr

L'intensité lumineuse détectée par la caméra s'écrit alors :

$$I = E_{tot} E_{tot}^* = 2I_0 [1 + \cos(2k_{\perp}y + k_0 n_{Kerr}(I_0)L)] \quad (3.2)$$

La figure d'interférence obtenue est constituée de franges parallèles espacées de $\Delta y = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}$ qui vont défiler lorsque I_0 va varier. En effet le deuxième terme dans l'argument du cosinus introduit un déphasage induit par la réorientation des molécules de l'échantillon. Le graphe de la figure 3.5c présente les résultats expérimentaux réalisés sur un échantillon d'épaisseur $71 \mu m$ (éclairé par un rayonnement de longueur d'onde $532 nm$). On remarque que la variation d'indice est proportionnelle à l'intensité incidente comme prévue par la théorie. On peut en conclure que l'échantillon de cristal liquide nématique E₇ homéotrope se comporte bien comme un milieu Kerr, c'est à dire $n_{Kerr}(I_0) = n_2 I_0$, où n_2 est appelé le "coefficient Kerr". Il est déterminé par la pente de la droite de la figure 3.5c et vaut

$$n_2 \simeq 2.45 \cdot 10^{-9} m^2/W. \quad (3.3)$$

De plus, n_2 est positif, le milieu est donc intrinsèquement focalisant.

3.2.3 Orientation de l'échantillon

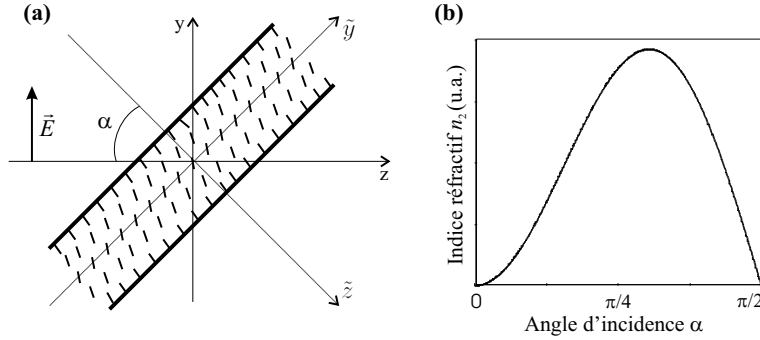


FIG. 3.6 – influence de l'angle d'incidence sur la non linéarité.

Dans le dispositif, l'échantillon n'est pas placé orthogonalement à l'axe z comme c'est le cas dans la figure 3.4 mais incliné à 45° . Deux raisons sont à l'origine de ce choix :

1. le coefficient Kerr n_2 varie en $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ [39], α étant l'angle d'incidence avec l'échantillon (Fig.3.6a). Il présente un maximum autour de 54° (Fig.3.6b). Pour $\alpha = 0$, les molécules peuvent basculer dans un sens comme dans l'autre de manière équiprobable et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le couple électrostatique est nul. L'indice réfractif est donc nul pour ces deux valeurs. Par contre dès que l'échantillon est incliné ($\alpha \neq 0$), tout se passe comme si la transition Fréederickz était déjà amorcée et le milieu peut se comporter comme un milieu Kerr.

2. les longueurs caractéristiques de diffusion l_x et l_y , respectivement suivant les axes x et y du plan transverse, s'égalisent pour $\alpha \simeq 45^\circ$ [39]. Ce qui permet d'avoir un milieu isotrope d'un point de vue dynamique.
3. Enfin, cet angle est proche de l'angle de Brewster qui minimise la réflexion sur la surface de l'échantillon.

Deuxième partie

Effets du bruit sur la formation des
structures : *les précurseurs, la*
transition précurseurs-structures et
les constantes dynamiques

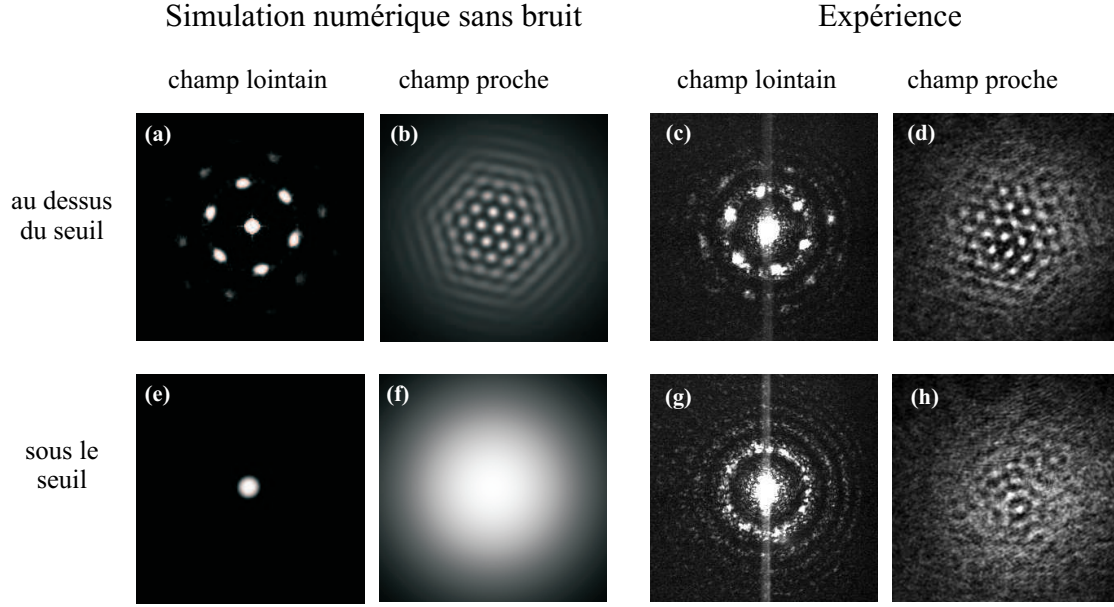


FIG. 3.7 – Comparaison entre les structures transverses prédites numériquement sans bruit (a,b,e,f) et celles obtenues expérimentalement (c,d,g,h) pour une intensité incidente supérieure au seuil (a-d) et inférieure au seuil (e-f).

Commençons la seconde partie de ce rapport consacrée aux *effets du bruit sur la formation des structures spatiales* par une simple observation expérimentale. La figure 3.7 présente une comparaison entre un enregistrement expérimental et son équivalent prévue par simulation numérique. Les figures 3.7a-d sont enregistrées pour une valeur du paramètre de pompe μ supérieure au seuil d'instabilité. Elles confirment la formation d'un réseau hexagonal dans la section transversale du faisceau (Figs. 3.7b et 3.7d) ainsi que sa signature en champ lointain composée de six spots lumineux disposés au sommet d'un hexagone régulier (Figs. 3.7a et 3.7c). On note la très bonne correspondance entre expérience et simulation numérique. Par contre, sous le seuil d'instabilité (Fig. 3.7e-h) La prédiction numérique ne correspond plus du tout à l'observation expérimentale. La figure en champ lointain expérimentale (Fig. 3.7g) est constituée de cercles concentriques alors que la figure numérique (Fig. 3.7e) est réduite à la simple tache centrale. De même en champ proche, alors que l'expérience montre une structuration désordonnée, la simulation n'affiche que le profil gaussien.

Cette différence fondamentale de comportement dynamique est due aux perturbations aléatoires présentes dans le système réel qu'on appelle communément le *bruit*. En ne prenant pas en compte ce bruit dans les simulations numériques présentées sur la figure 3.7, le comportement obtenu n'est pas réaliste. La prise en compte de ces sources perturbatives est souvent absente dans la modélisation des phénomènes physiques. La plupart du temps ceci n'implique que de faibles fluctuations par rapport à la solution du système non bruité. Expérimentalement on peut retrouver la solution sans bruit par exemple, par moyennage ou filtrage fréquentiel. Tou-

tefois, comme le montre l'exemple ci-dessus, dans certaines situations *la présence de processus stochastiques au niveau microscopique peut entraîner des effets macroscopiques non triviaux*, i.e. qui n'ont pas d'équivalent dans le système sans bruit. Ici, le bruit entraîne la formation d'anneaux concentriques dans la TF optique non prévus par le modèle classique.

Dans les systèmes dynamiques, les zones de bifurcations (proches du point critique) sont particulièrement sensibles au bruit puisque la stabilité même d'un état est définie par sa robustesse vis à vis des perturbations. En dynamique purement temporelle, une unique réalisation du bruit plus forte que les autres peut suffire à faire basculer le système d'un état vers un autre [43]. Le diagramme de bifurcation s'en trouve alors modifié. Le point critique n'est plus localisable (bifurcation imparfaite) et la perte de stabilité peut être avancée ou retardée [44, 45]. Dans les systèmes spatialement étendus, le nombre de degrés de liberté est accru, la complexité de la dynamique aussi et la présence de bruit peut impliquer des effets inattendus. Par exemple, la présence de perturbations aléatoires peut induire des transitions de phase [46], des séparations spatiales de phase [47], des propagations de fronts [48], des structures entretenues par le bruit [9] ou des effets de précurseurs sous le seuil d'instabilité [49]. Dans certains cas, le bruit peut même permettre la détection de signaux très faibles grâce au processus de résonance stochastique, phénomène utilisé maintenant dans des domaines scientifiques très divers, de la biologie aux systèmes quantiques [50]. D'autres exemples sont présentés dans la référence [51]. Des travaux menés sur des phénomènes d'électro-convection dans les cristaux liquides nématiques [52] ont montré que le bruit joue un rôle d'autant plus important dans ces milieux que l'échantillon est épais. L'épaisseur de $50\mu\text{m}$ de notre échantillon de nématique fait de notre système un très bon candidat pour l'étude des effets non triviaux du bruit sur la formation des structures. Cette deuxième partie est donc consacrée à l'analyse de la dynamique de la boucle Kerr en présence de bruit, et plus particulièrement autour de la bifurcation marquant le seuil d'instabilité primaire. Après avoir modifié le modèle "idéal" [8] par l'addition d'un terme stochastique adapté à notre système, nous proposons une analyse détaillée des effets de ce bruit sur la dynamique des systèmes 1D et 2D sous le seuil d'instabilité (chapitre 4) puis lors de la traversée de ce dernier (chapitre 5). Enfin, nous tirons parti de cette étude pour déterminer deux constantes du milieu : le temps de relaxation et la longueur de diffusion du cristal liquide ancré (chapitre 6).

Chapitre 4

Les précurseurs ($\mu \lesssim \mu_c$)

Ce chapitre est consacré à l’analyse des phénomènes induits par la présence de bruit présentés en introduction (Fig. 3.7). Cette manifestation particulière du bruit sous le seuil est communément appelée *précurseurs induits par le bruit*. En effet, pour des puissances théoriquement sous le seuil où le système sans bruit ne révèle aucune structuration, la présence de bruit entraîne l’apparition de formes (précurseurs) contenant déjà certaines informations sur la structure attendue au dessus du seuil. Ces précurseurs ont d’abord été observés en dynamique purement temporelle : en hydrodynamique [9], en optique [53], ou encore avant une bifurcation de doublement de période dans des jonctions p-n [54]. Plus tard, ils furent mis en évidence dans le domaine spatio-temporel lors d’expériences d’électro-convection dans les cristaux liquides [10, 55], puis de convection de Rayleigh-Bénard [56]. En optique, de tels précurseurs ont été étudiés uniquement de manière théorique dans des systèmes où la source de bruit provient des fluctuations quantiques. Par exemple, dans les oscillateurs paramétriques optiques, il est prédit que la fonction de corrélation des fluctuations du signal et la structure du champ lointain anticipent le seuil d’apparition d’instabilités dans la section transverse du faisceau [57, 58]. En vertu de leur origine quantique, de tels phénomènes sont appelés “images quantiques”.

Dans ce chapitre on analyse les précurseurs dans un système optique en présence de bruit d’origine classique, en confrontant simulations numériques et expressions analytiques avec les observations expérimentales. Par ailleurs, cette étude constitue la contre-partie classique des “images quantiques” et fournit ainsi un outil de comparaison pour distinguer les processus purement quantiques des effets classiques dans de tels systèmes. Les configurations 1D et 2D sont traitées successivement après avoir démontré analytiquement la présence de précurseurs dans le système de boucle Kerr.

4.1 Prise en compte du bruit dans le modèle

4.1.1 Caractéristiques du bruit

Afin de modéliser correctement le bruit dans notre système, il convient de se poser quelques questions quant à ses caractéristiques, c'est à dire son origine (interne ou externe), son caractère additif ou multiplicatif, ses propriétés de corrélation temporelle, spatiale, etc...

Nous considérons que la *principale source de bruit* dans notre système est l'*agitation thermique* impliquant des fluctuations aléatoires des molécules de cristal liquide autour de leur position d'équilibre (ces mouvements induisent des variations erratiques sur l'indice à cause de la biréfringence). Cette agitation thermique est un phénomène dicté par le second principe de la thermodynamique qui affirme qu' "un élément simple d'un système macroscopique, dans un environnement thermostaté, est sujet à des fluctuations d'énergie de l'ordre de $k_B T$, où k_B est la constante de Boltzman et T la température environnante". Ce type de processus est appelé fluctuations internes, car le seul paramètre régissant leurs propriétés (en l'occurrence la température) est intrinsèque au système. Cette hypothèse d'une origine essentiellement interne semble raisonnable sachant que les fluctuations du faisceau laser, qui pourraient représenter une *source externe* de bruit, sont extrêmement faibles. De plus, l'origine thermique des fluctuations s'appuie aussi sur des travaux concernant les effets du bruit dans des expériences d'électro-hydrodynamique sur des cristaux liquides [59, 10]. Au regard de ces résultats, nous posons les hypothèses suivantes que nous confronterons ensuite aux observations expérimentales dans une démarche de vérification a posteriori. Nous supposons donc un processus :

- **gaussien** : la statistique de réalisation des amplitudes suit une loi normale centrée sur zéro, l'écart type des réalisations fixe le niveau de bruit ;
- **additif** : le bruit ne dépend pas des propriétés locales de l'indice réfractif, les fluctuations d'une molécule autour d'une position d'équilibre θ_0 ne dépendent pas de θ_0 lui-même ;
- **blanc** : toutes les fréquences de fluctuations temporelles et spatiales sont équiprobables (spectre plat comme pour la lumière blanche). En d'autres termes, pour un problème discrétisé (e.g. une simulation numérique), une réalisation particulière est complètement décorrélée de la réalisation voisine ou suivante. Cette approximation est raisonnable dans le cas continu (e.g. l'expérience) si la longueur de corrélation du bruit (resp. temps de corrélation) est très inférieure à la longueur de diffusion l_d (resp. temps de relaxation τ).

4.1.2 Modification de l'équation du système

L'équation 2.13 devient en présence de bruit une équation stochastique aux dérivées partielles de type Fokker-Planck [60] :

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 n(\mathbf{r}, t) + n(\mathbf{r}, t) = |F_0|^2 + \left| \sqrt{Re} e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi n(\mathbf{r}, t)} F_0 g(\mathbf{r}) \right) \right|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \quad (4.1)$$

où ε caractérise l'amplitude des fluctuations et $\xi(\mathbf{r}, t)$ le processus stochastique décrit ci-dessus. ε étant une constante, $\xi(\mathbf{r}, t)$ intervient bien comme un terme additif¹ à $n(r, t)$. La fonction d'auto-corrélation spatio-temporelle de $\xi(r, t)$ s'écrit [61] :

$$\langle \xi^*(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \delta(\Delta\mathbf{r}) \delta(\Delta t). \quad (4.2)$$

Cette relation traduisant la décorrélation dans l'espace et le temps du terme stochastique ξ n'implique pas que l'indice évolue lui aussi de manière complètement décorrélée. En effet, chaque molécule reste couplée à ses voisines par le terme de diffusion ($\nabla_{\perp}^2$) et à sa position à l'instant $t - dt$ par le terme de relaxation ($\partial/\partial t$). Ce dernier, par exemple, empêche les molécules de vibrer à des fréquences temporelles typiquement $\gtrsim \tau^{-1}$.

Les simulations numériques intégrant l'équation 4.1 nécessitent la génération de nombres aléatoires distribués suivant une statistique gaussienne et une méthode d'intégration adaptée aux équations stochastiques. Nous avons utilisé une méthode détaillée dans la référence [62] permettant de générer des séquences de nombres aléatoires avec les propriétés désirées à partir de nombres aléatoires classiques. L'intégration est ensuite réalisée avec un algorithme de type Runge-Kutta stochastique d'ordre 2 [63]. Les dérivées spatiales sont calculées par une méthode pseudo-spectrale. L'utilisation d'une méthode de type "split-step" n'est pas adaptée ici en raison de la présence du Laplacien dans l'exponentielle (Eq. 4.1).

4.2 Expression analytique des précurseurs

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette partie, les précurseurs sont observés dans la TF optique. Après avoir rappelé les grandeurs accessibles dans l'expérience, nous établirons l'expression analytique de la TF optique sous le seuil d'instabilité primaire afin de la comparer aux résultats expérimentaux.

4.2.1 Grandeurs accessibles expérimentalement

Dans l'expérience, nous n'avons pas accès directement à l'indice mais seulement à une lecture de l'indice par le faisceau laser. Les grandeurs accessibles expérimentalement et que nous utiliserons donc dans la suite sont :

1. l'intensité $|B_{out}|^2$ du champ proche, c'est à dire une image de la section transverse du faisceau à la sortie de l'échantillon (Fig. 4.1) ;
2. l'intensité $|\mathcal{F}(B_{out})|^2$ du champ lointain, qui est l'intensité de la TF optique de B_{out} et que l'on enregistre au foyer d'une lentille convergente ;

¹L'action de la boucle de rétro-action (termes $e^{i\sigma\nabla_{\perp}^2} e^{i\chi n(r,t)}$) pourrait introduire un terme de bruit multiplicatif. Nous estimons que les fluctuations de l'indice sont faibles devant l'indice moyen, ce qui permet de considérer que le terme de bruit apporté par la boucle reste additif et est pris en compte dans le coefficient $\sqrt{\varepsilon}$.

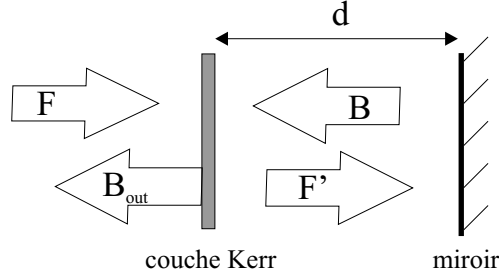


FIG. 4.1 – Schéma du dispositif, B_{out} est le champ juste après la 2ème traversée du milieu Kerr.

$\mathcal{F}(f)$ désigne la transformée de Fourier spatiale de f telle que :

$$\mathcal{F}(f(\mathbf{r}, t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Chacune de ces grandeurs peut être obtenue analytiquement à partir de l'expression du champ B donnée dans l'équation 2.12.

Premièrement, le champ B_{out} s'obtient à partir de B (Eq. 2.12) après une seconde traversée du milieu Kerr :

$$B_{out}(\mathbf{r}, t) = e^{i\chi\Delta n(\mathbf{r}, t)} B(\mathbf{r}, t). \quad (4.4)$$

où $\Delta n(\mathbf{r}, t)$ représente de petites variations d'indice réfractif autour de la valeur uniforme n_0 qui n'apporte qu'un déphasage constant ($\Delta n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) - n_0$). L'intensité en champ proche est le module au carré de cette expression :

$$|B_{out}(\mathbf{r}, t)|^2 = R \left| e^{i\chi\Delta n(\mathbf{r}, t)} e^{i\sigma\nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi\Delta n(\mathbf{r}, t)} F_0 \right) \right|^2 \quad (4.5)$$

où le premier terme peut être simplifié ($|e^{i\chi\Delta n(\mathbf{r}, t)}|^2 = 1$) mais pas le suivant ($e^{i\sigma\nabla_{\perp}^2}$) qui est l'opérateur de propagation sur l'aller-retour $2d$ agissant sur l'expression entre parenthèses. Notons que nous avons fait l'approximation d'une pompe homogène ($g = 1$) pour mener les calculs analytiques, ceci fera également l'objet d'une vérification a posteriori.

Un développement au premier ordre en Δn de l'équation 4.5 donne la forme approchée de l'intensité en champ proche :

$$|B_{out}(\mathbf{r}, t)|^2 = RI_0 [1 - 2\chi \sin(\sigma\nabla_{\perp}^2) \Delta n(\mathbf{r}, t)] \quad (4.6)$$

Le champ lointain est la TF optique du champ proche, son intensité en est le module au carré. Il est nécessaire ici de pousser le développement de l'équation 4.5 au second ordre en Δn pour

obtenir l'expression :

$$|\mathcal{F}(B_{out})|^2(k, t) = RI_o \left(C\delta^2(0) + 2\chi^2 \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) (1 + \cos(\sigma \mathbf{k}^2)) \right) \quad (4.7)$$

où C regroupe tous les termes exprimés en $k = 0$ ($\widetilde{\Delta n}(k = 0) \dots$) et où l'on a adopté la notation :

$$\widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \equiv \mathcal{F}(\Delta n(\mathbf{r}, t)). \quad (4.8)$$

Remarque :

Notons que l'intensité du champ lointain est différente de la TF de l'intensité du champ proche obtenue directement à partir de l'équation 4.6 :

$$\mathcal{F}(|B_{out}|^2)(k, t) = RI_o \left(C\delta^2(0) + 2\chi \sin(\sigma \mathbf{k}^2) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \right) \quad (4.9)$$

Cette grandeur est souvent utilisée dans le traitement des images mais comporte moins d'information que la TF optique. En particulier, elle est nécessairement symétrique en $\mathbf{k}$ puisqu'elle issue de la TF d'une grandeur réelle (l'intensité $|B_{out}|^2$), toute information sur la phase instantanée est donc perdue.

4.2.2 Expression analytique de la TF optique sous le seuil

L'évaluation de la TF optique nécessite la connaissance de $\widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t)$ (Eq. 4.7). Cependant seule sa fonction d'auto-corrélation temporelle :

$$\left\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) dt \quad (4.10)$$

peut être déterminée analytiquement. Son expression pour $\Delta t = 0$ s'écrit (Eq. C.12 établie dans l'annexe C) :

$$\left\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \right\rangle = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2)}. \quad (4.11)$$

Pour voir apparaître ce terme dans l'équation 4.7, il faut également considérer la fonction de corrélation temporelle du membre de gauche de cette même équation :

$$\left\langle \widetilde{B_{out}^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{B_{out}}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{B_{out}^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{B_{out}}(\mathbf{k}, t + \Delta t) dt. \quad (4.12)$$

En reprenant la notation $\mathcal{F}(B_{out}(\mathbf{r}, t)) = \widetilde{B_{out}}(\mathbf{k}, t)$, en $\Delta t = 0$, l'équation 4.12 s'écrit :

$$\left\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2(\mathbf{k}, t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{B_{out}^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{B_{out}}(\mathbf{k}, t) dt. \quad (4.13)$$

qui devient, compte tenu de 4.7 :

$$\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2(\mathbf{k}, t) \rangle = \langle \widetilde{B_{out}^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{B_{out}}(\mathbf{k}, t) \rangle = RI_o \left(C\delta^2(0) + 2\chi^2 \langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \rangle (1 + \cos(\sigma \mathbf{k}^2)) \right) \quad (4.14)$$

Sur un enregistrement expérimental ou une simulation numérique, l'intégration s'effectue sur un temps T fini. L'équation 4.13 exprime alors – à un coefficient $\frac{1}{T}$ près – la moyenne temporelle de l'intensité du champ lointain².

A partir de l'équation 4.11, l'expression analytique de la TF optique moyenne sous le seuil prend finalement la forme suivante :

$$\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2(\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{\mu}{2\chi} \left(C\delta^2(0) + \varepsilon 2\pi\chi^2 \frac{(1 + \cos(\sigma \mathbf{k}^2))}{1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2)} \right) \quad (4.15)$$

L'évolution du profil de la TF optique est représentée sur la figure 4.2 en fonction du paramètre de pompe μ sous le seuil (la composante $C\delta^2(0)$ n'est pas représentée). Pour $\mu = 0$, le spectre moyen est plat puisqu'aucune puissance laser n'est fournie. Quand le paramètre de pompe augmente, des oscillations se dessinent centrées sur $k = 0$. Lorsque μ approche de μ_c , deux pics divergent. Leur maximum coïncide alors avec le minimum absolu des langues de la courbe de stabilité marginale (voir Fig. 4.3a-b), définissant le nombre d'onde de la structure apparaissant au seuil ($k_c = 0.68$). On note toutefois un léger décalage dû au terme $1 + \cos(\sigma k^2)$ au numérateur, d'autant moins fort que μ approche de μ_c .

Cette grandeur $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle$ anticipe donc, sous le seuil, le nombre d'onde qui se déstabilise au dessus du seuil. L'intensité du précurseur est directement proportionnelle à celle du bruit sans lequel le spectre ne présenterait qu'une tache centrale sans aucune autre information.

Les graphes de la figure 4.3 résument les prédictions théoriques avancées par cette analyse. On remarque que $\sqrt{\langle |\widetilde{\Delta n}|^2 \rangle}$ et $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle$ présentent essentiellement la même dépendance avec le nombre d'onde k , et en particulier un maximum très marqué – le précurseur – autour de $\mathbf{k}_c$.

Remarque :

Le terme $\mathbf{k}$ intervient toujours au carré dans l'équation 4.15, ce qui signifie que seule la norme du vecteur d'onde peut être fixée mais pas son orientation. Ce résultat est valable à une comme à deux dimensions. La distribution d'intensité lumineuse dans le plan de Fourier (k_x, k_y) se présente alors sous forme d'anneaux lumineux concentriques (correspondant aux oscillations latérales) et l'intensité du premier anneau augmente lorsque le paramètre de pompe approche de sa valeur critique avec une loi asymptotique en $(\mu - \mu_c)^{-1}$. Quand le seuil μ_c est

²Pour les résultats expérimentaux et numériques, $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2(\mathbf{k}, t) \rangle$ sera toujours obtenue en effectuant la moyenne temporelle de $|\mathcal{F}(B_{out})|^2(\mathbf{k}, t)$.

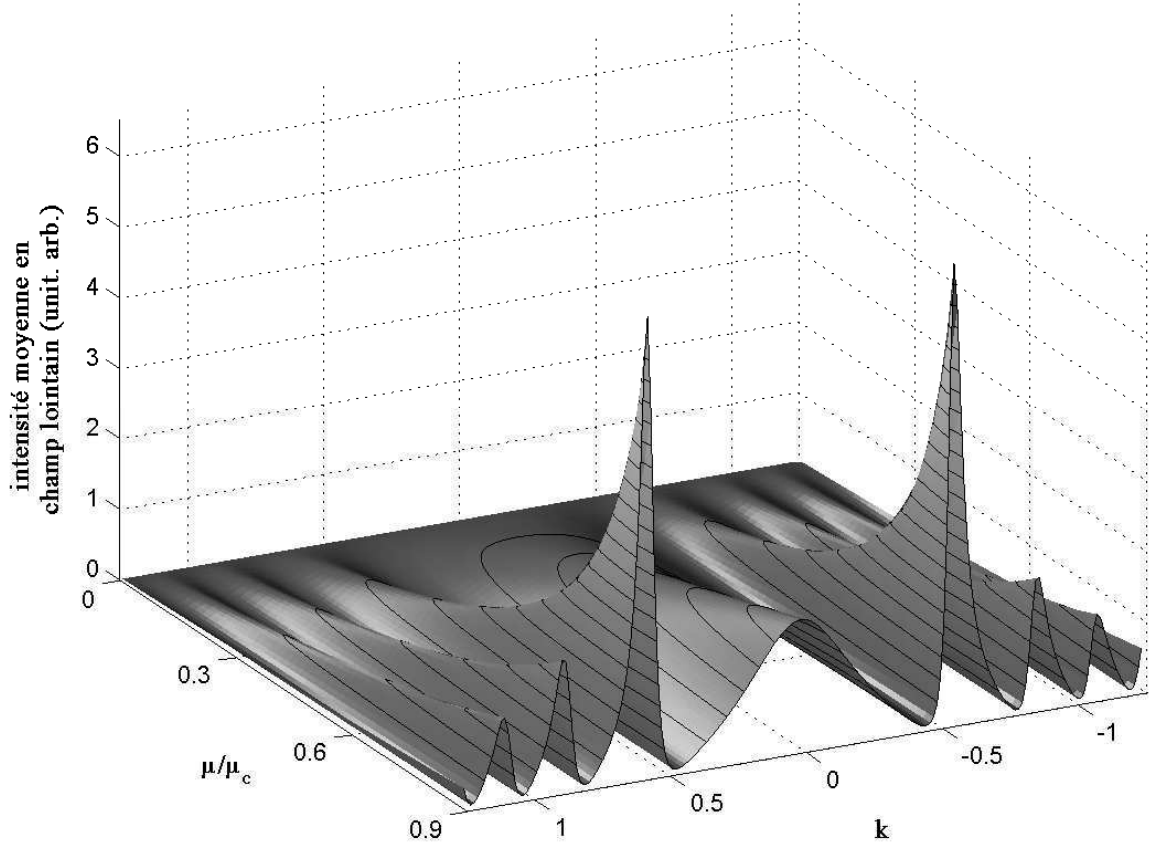


FIG. 4.2 – Représentation en 3 dimensions de l'intensité de la TF optique $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle$ en fonction du nombre d'onde k et du paramètre de pompe μ . $\sigma = -15$, tous les autres paramètres sont égaux à 1, l'axe des ordonnées est en unité arbitraire. La composante $C\delta^2(0)$ n'est pas représentée.

atteint, le traitement n'est plus valable car l'expression diverge, i.e. l'approximation de faibles variations ($\Delta n \ll n_0$) n'est plus satisfaite (les termes non-linéaires assurément ne sont pas pris en compte).

4.2.3 Expression analytique de l'indice sous le seuil

Dans l'espace réel, la variation moyenne de l'indice $\langle \Delta n(\mathbf{r}) \Delta n(\mathbf{r}') \rangle$ peut s'obtenir à partir de la TF inverse de l'équation 4.11 :

$$\langle \Delta n(\mathbf{r}) \Delta n(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\pi \varepsilon}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2)} d\mathbf{k}. \quad (4.16)$$

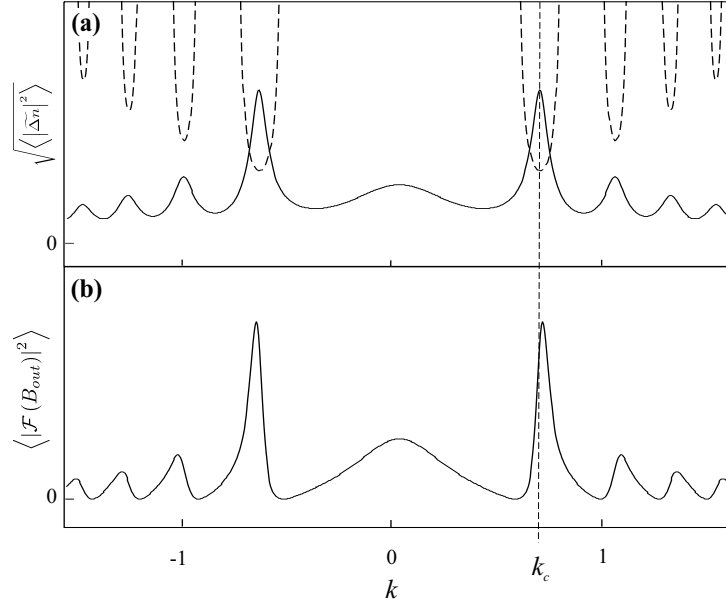


FIG. 4.3 – Précurseurs induits par le bruit dans l'espace réciproque transverse. (a) moyenne quadratique de l'indice réfractif (trait plein) et ballons de stabilité (tirets); (b) moyenne temporelle de la TF optique. Les paramètres sont $\mu/\mu_c = 0.89$, $\sigma = -10$, $\chi = 1$ pour lesquels $k_c = 0.681$. Les échelles en ordonnée sont en unités arbitraires.

Cette fonction d'autocorrélation dépend de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, elle perd alors sa dépendance spatiale lorsque $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ce qui signifie que le profil moyen $\langle \Delta n(\mathbf{r}) \rangle$ est une constante de $\mathbf{r}$. Le profil moyen du champ proche est alors spatialement uniforme. En conséquence, la bifurcation marquant la naissance de l'instabilité en présence de bruit est conforme à la bifurcation prévue sans bruit pour les grandeurs moyennes dans l'espace réelle mais pas dans l'espace réciproque.

4.3 Le cas mono-dimensionnel

4.3.1 Simulations numériques

Afin de tester la validité de ces prédictions théoriques et des différentes approximations, chacune des grandeurs discutées est comparée à la même grandeur calculée à partir de simulations numériques obtenues par intégration des équations de départ. En particulier, ces simulations constituent un puissant outil pour déterminer la manière dont le caractère gaussien du faisceau modifie les résultats analytiques obtenus en ondes planes. Si les observations finales sont équivalentes, alors les expressions analytiques restent satisfaisantes pour décrire les phénomènes réalistes tels qu'on les observe dans les conditions expérimentales. La figure 4.4 montre les évolutions temporelles de l'intensité en champs proche (a) et lointain (b) obtenues par intégration numérique de l'équation 4.1 à 1D. Le profil gaussien du champ de pompe cor-

respond aux conditions expérimentales. Le diagramme (x, t) dévoile une alternance entre des

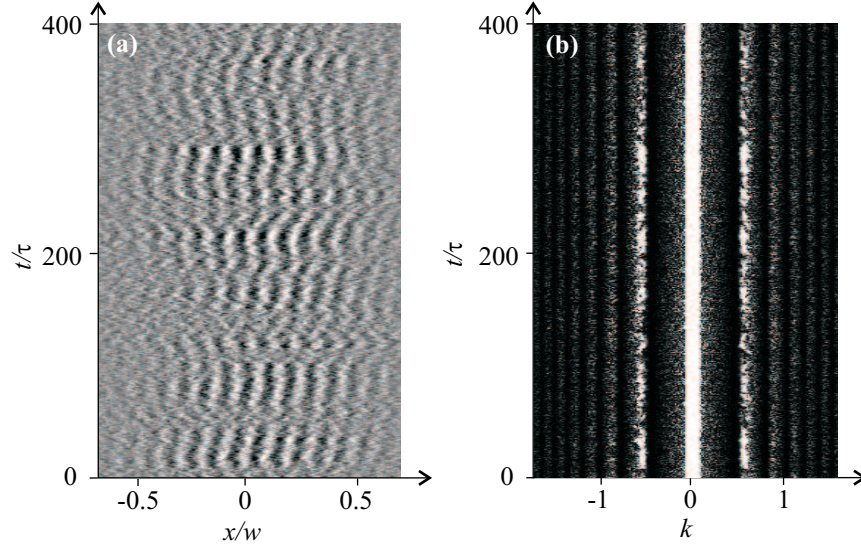


FIG. 4.4 – *Simulations numériques à 1D : (a) diagramme (x, t) de l'intensité en champ proche (b) diagramme (k, t) de l'intensité en champ lointain (en négatif). $\mu = 0.9\mu_c$; pompe gaussienne : $\eta = 28$; $\sigma = -15$; $\varepsilon = 0.08$*

états brouillés et des “rouleaux”³. De plus, ces structures évoluent de manière complètement erratique (dans le prochain chapitre, nous étudions la transition entre ce régime et le régime établi au dessus du seuil) si bien que la moyenne temporelle ne présente plus de modulation transverse (Fig.4.5a), seul demeure le profil gaussien de la pompe. Cette grandeur moyennée ne porte donc pas de trace de précurseurs comme cela était prévu par l'étude analytique. A l'inverse, le diagramme (k, t) de la figure 4.4b affiche clairement des bandes lumineuses correspondant à des pics d'intensité à k constants et non nuls⁴. Un vis-à-vis entre les figures 4.4a et 4.4b révèle la concordance entre l'apparition de rouleaux sur le champ proche et les regains d'intensité de la composante spectrale correspondante en champ lointain (dans la première bande latérale). Le profil moyen de la TF optique est tracé sur la figure 4.5b, il montre clairement la prédominance des premiers pics témoignant de la présence d'une modulation d'indice du cristal liquide. On remarque également une très bonne correspondance quantitative entre ce profil et la représentation graphique de l'expression analytique des précurseurs 4.15 ce qui justifie les différentes approximations effectuées dans l'approche théorique. De plus, cela prouve que l'inhomogénéité transverse du faisceau incident n'influe que peu sur le résultat. Le rapport d'aspect utilisé ($\eta = 28$) est donc suffisamment grand pour considérer que l'enveloppe

³On appelle communément ces structures des rouleaux par analogie avec ceux observables en hydrodynamique formant également des franges lumineuses lors de leur détection. Cependant, dans notre cas, ces franges sont issues d'une modulation périodique de l'indice et non de mouvements de convection comme on en rencontre souvent en hydrodynamique.

⁴La zone centrale saturée correspond à la TF de l'enveloppe gaussienne.

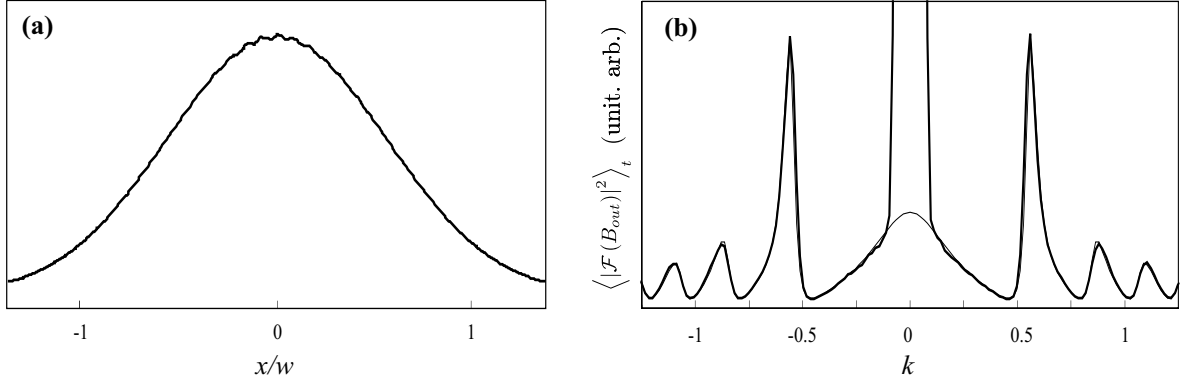


FIG. 4.5 – Moyennes temporelles des profils d'intensité de la figure 4.4 : (a) en champ proche; (b) en champ lointain. Le trait fin sur (b) correspond à l'expression analytique 4.15. Les moyennes sont effectuées sur une durée de 1000τ .

gaussienne évolue spatialement très lentement par rapport à la structure.

En résumé, les simulations numériques nous ont permis de valider les différentes approximations du développement analytique de l'expression de la TF optique sous le seuil ainsi que de définir la très faible influence de l'inhomogénéité de la pompe sur le résultat (pour le rapport d'aspect utilisé : $\eta = 28$). En conséquence, nous nous focaliserons dans les observations expérimentales sur la TF optique.

4.3.2 Résultats expérimentaux

Les diagrammes (x, t) et (k, t) présentés sur la figure 4.6 sont issus d'expériences réalisées dans la configuration 1D. Les paramètres sont $\sigma = -15$, $\eta = 28$ et $I_0 = 145 \text{ W/cm}^2$, ce qui correspond à $\mu \approx 0.9\mu_c$. Sur la figure 4.6a, l'accentuation du contraste dévoile la présence d'une modulation transverse à un nombre d'onde préférentiel qui s'établit et s'éteint de manière aléatoire. La figure 4.6b montre l'évolution temporelle de la TF optique recueillie simultanément au foyer d'une lentille convergente avec un taux de répétition d'une ligne par unité de temps τ . Le profil moyen correspondant est présenté sur la figure 4.7b sur laquelle est superposée la courbe de l'expression analytique 4.15 avec les paramètres ajustés afin de correspondre aux conditions expérimentales. On peut alors remarquer le bon accord entre le profil expérimental et celui donné par l'étude analytique. Pour plus de lisibilité, la composante centrale – très saturée – du spectre n'est pas représentée. On retrouve bien les caractéristiques du profil attendu, c'est à dire deux pics proéminents (situés à $k_1 = \pm 0.054 \mu\text{m}^{-1}$) de forme légèrement asymétrique résultant de la modulation préférentielle, ainsi que des "rebonds" également asymétriques et d'amplitude décroissante lorsque $|k|$ augmente. Chacun de ces pics concorde avec une langue du diagramme de stabilité linéaire pour $\sigma = -15$. Le profil moyen d'intensité en champ proche tracé sur la figure 4.7a ne montre pas de modulations. Seules des

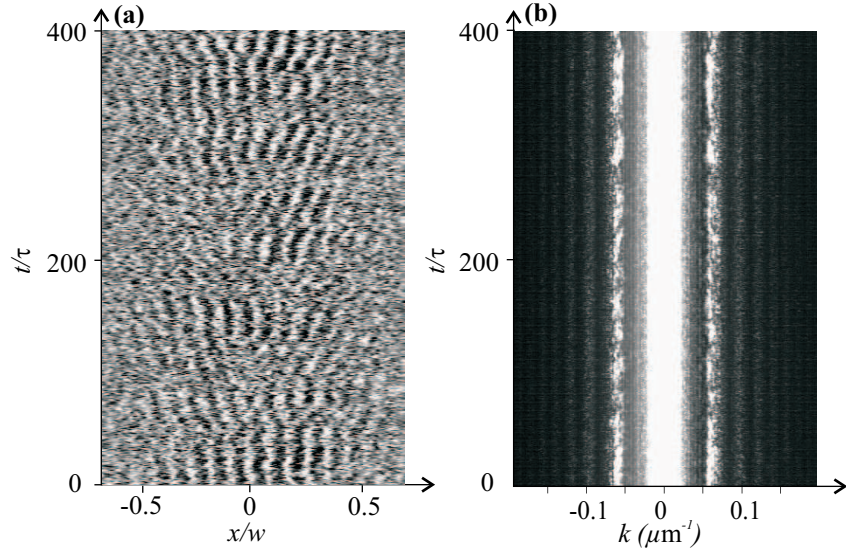


FIG. 4.6 – *Précurseurs à 1D* : (a) diagramme (x, t) de l'intensité en champ proche (b) diagramme (k, t) de l'intensité en champ lointain (en négatif). $\mu \approx 0.9\mu_c$; $\eta = 28$; $\sigma = -15$; $\tau = 2.3s$.

imperfections provenant de défauts immobiles dans le cristal ou sur les optiques perturbent la distribution gaussienne de la pompe.

Pour des puissances plus élevées ($\mu \approx 1.1\mu_c$), le seuil d'instabilité est nettement dépassé et le profil affiche des franges stationnaires de grande amplitude (Fig.4.7c). Leur signature dans l'espace des k est signifiée par la présence de 2 grands pics localisés au même endroit que ceux déjà présents sous le seuil ($k_1 = \pm 0.053\mu m^{-1}$). On observe également la croissance de deux autres pics plus petits et situés à $k_2 = \pm 0.106\mu m^{-1}$: ce sont les harmoniques non-linéaires $k_2 = 2k_1$ quasi-résonants avec la troisième langue dont le minimum est situé à $k = \pm 0.112\mu m^{-1}$. Cette quasi-résonance participe d'ailleurs à la stabilisation de la structure stationnaire.

En résumé, le développement analytique décrit très bien la signature expérimentale des précurseurs dans la configuration 1D, en particulier la TF optique moyenne. Les pics prédominants de cette dernière anticipent le nombre d'onde qui se déstabilise au dessus du seuil. En revanche, le champ proche se caractérise par la présence de rouleaux dérivant aléatoirement de sorte que le profil moyen ne révèle aucune structuration. Nous allons maintenant étudier le pendant de ce phénomène dans la configuration 2D.

4.3. Le cas mono-dimensionnel

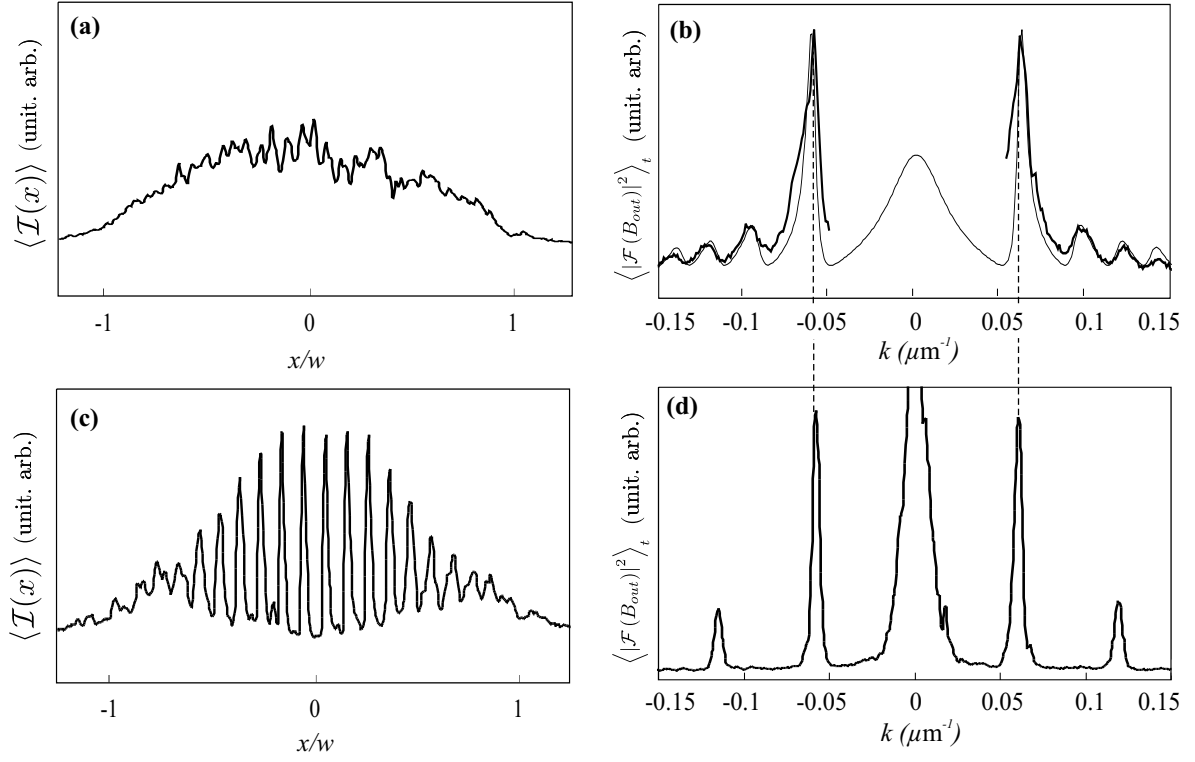


FIG. 4.7 – *Profils d'intensité moyennés sur 1000τ . (a) et (b) sous le seuil $\mu \approx 0.9\mu_c$; (c) et (d) au dessus du seuil $\mu \approx 1.1\mu_c$; $\eta = 28$; $\sigma = -15$. (a) et (b) champ proche. (c) et (d) champ lointain.*

4.4 Le cas bi-dimensionnel

4.4.1 Observations expérimentales

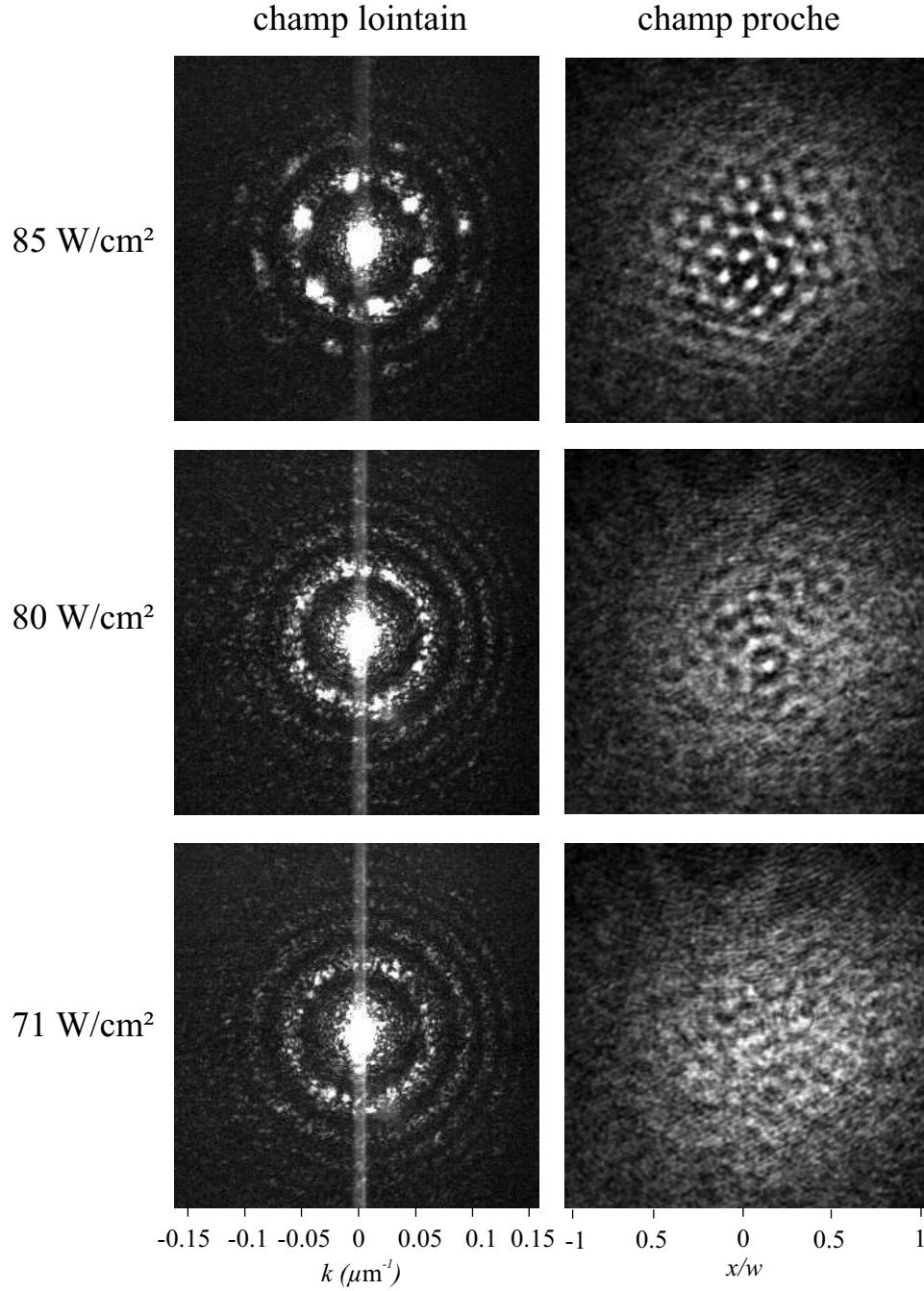


FIG. 4.8 – Expériences pour des intensités incidentes proches du seuil ($I_{\text{seuil}} \simeq 82 \text{ W/cm}^2$) dans la configuration 2D. Les paramètres sont $\sigma = -14.5$, $\eta = 25$, $w = 1400 \mu\text{m}$.

4.4. Le cas bi-dimensionnel

La figure 4.8 présente des images de la distribution transverse d'intensité des champs proche et lointain au voisinage du seuil d'instabilité, localisé vers $I = 82 W/cm^2$. Les autres paramètres de l'expérience sont $\sigma = -14.5$ et $\eta = 25$. Notons que l'acquisition est effectuée dans le sens des intensités décroissantes, le seuil défini ici est donc celui correspondant à la branche haute du diagramme de bifurcation présenté sur la figure 2.7 ($\mu = 0.95\mu_c$). Pour une intensité de pompe de $85 W/cm^2$, le champ proche se structure suivant un réseau hexagonal. La TF montre six spots intenses répartis aux sommets d'un hexagone. On peut donc légitimement affirmer que la structure est établie et que la puissance laser est supérieure à la puissance critique de seuil. On distingue également des spots plus faibles près du 2ème cercle qui sont des combinaisons linéaires des nombres d'onde primaires (i.e. associés au premier anneau). Ceci confirme que des processus non-linéaires sont déjà perceptibles, signe supplémentaire que le seuil est bien franchi. Lorsque la puissance décroît ($I = 80 W/cm^2$), la structure du champ proche se désordonne et les spots de la TF s'étalent sur un cercle de rayon égal au nombre d'onde de l'hexagone précédent. La figure n'expose alors plus que des cercles concentriques conformément aux prédictions théoriques. Si la puissance diminue encore ($I = 75 W/cm^2$), la brillance du premier de ces cercles diminue et s'homogénéise davantage. La figure 4.9 pré-

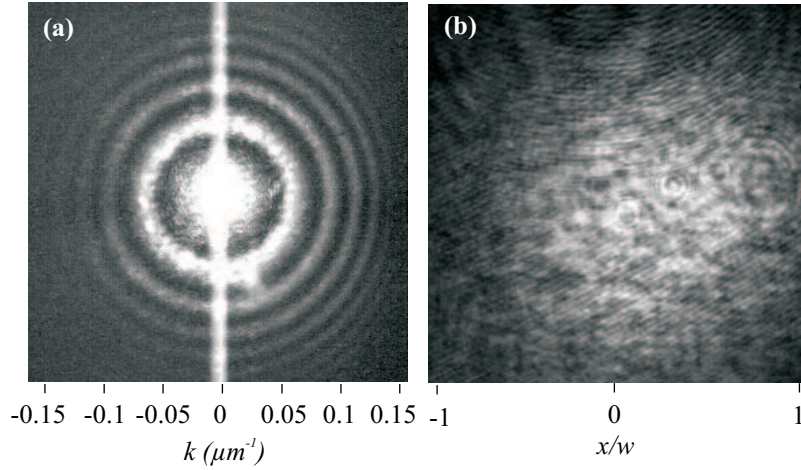


FIG. 4.9 – Moyennes temporelles effectuées sur 200 images, à raison d'une image par unité de temps τ . (a) intensité en champ lointain, (b) intensité en champ proche. Les paramètres sont $I_0 = 80 W/cm^2$, $\sigma = -14.5$, $\eta = 25$, $w = 1400 \mu m$.

sente des moyennes temporelles réalisées à partir de 200 images, à raison d'une image par unité de temps τ et pour une intensité lumineuse de $80 W/cm^2$. On voit clairement les cercles concentriques se dessiner et se lisser de telle manière qu'aucune direction pour les vecteurs d'onde ne soit privilégiée (Fig. 4.9a). L'étude du champ proche mène au même constat, les spots visibles sur une image instantanée disparaissent lorsqu'on intègre l'image sur le temps (Fig. 4.9b). Comme dans le cas 1D, le champ proche ne fournit aucun indice sur la structure sous-jacente tandis que la TF optique affiche distinctement le module du nombre d'onde qui

apparaît au dessus du seuil. Cependant, aucune information ne peut être extraite sur la phase, c'est à dire sur l'orientation des "futurs" vecteurs d'ondes. L'évolution expérimentale du profil de ces anneaux avec la puissance de pompe est tracée en représentation 3D sur la figure 4.11, pour des intensités incidentes allant de 35 à 80 W/cm^2 . La méthode utilisée pour extraire chaque profil comporte deux étapes : le calcul de l'image moyenne à partir de 200 images successives séparées d'une durée τ puis la moyenne azimutale (afin d'obtenir un profil ne dépendant uniquement du module de $\mathbf{k}$). Cette méthode donne de meilleurs résultats que pour la configuration 1D car elle n'est pas sensible aux défauts ponctuels et elle permet à la fois un moyennage temporel et spatial. En atteste le comportement observé, très fidèle à la prédiction théorique représentée sur la figure 4.2. A l'approche du seuil, les deux pics correspondant à l'anneau de plus petit rayon divergent avec une croissance en $(\mu - \mu_c)^{-1}$ comme on peut le voir sur la figure 4.10. De plus, la courbe théorique en sur-imposition pour une intensité de 80 W/cm^2 témoigne de la bonne concordance entre le modèle et la réalité. Certaines différences visibles peuvent être discutées : (i) les creux de la courbe expérimentale ne redescendent pas au niveau de la courbe théorique. Cela peut être attribué à de la diffusion résiduelle du pic central (ailes de la gaussienne) ; (ii) les pics expérimentaux sont légèrement plus larges que ceux prévus analytiquement, ce qui peut provenir de la convolution des pics par l'enveloppe gaussienne de la pompe ou encore de l'incertitude sur la position du point $\mathbf{k} = (0, 0)$ lors de la moyenne azimutale.

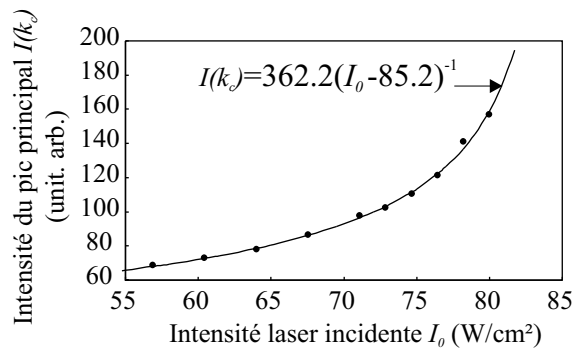


FIG. 4.10 – Evolution expérimentale du pic principal de la TF optique moyenne avec l'intensité lumineuse de pompe. Les points marquent les acquisitions expérimentales (correspondant au max de l'évolution présentée sur la figure 4.11). La courbe représente la divergence théorique du pic principal ($\propto (\mu - \mu_c)^{-1}$). Les paramètres sont $I_0 = 35 - 80 \text{ W/cm}^2$, $\sigma = -14.5$, $\eta = 25$, $w = 1400 \mu\text{m}$.

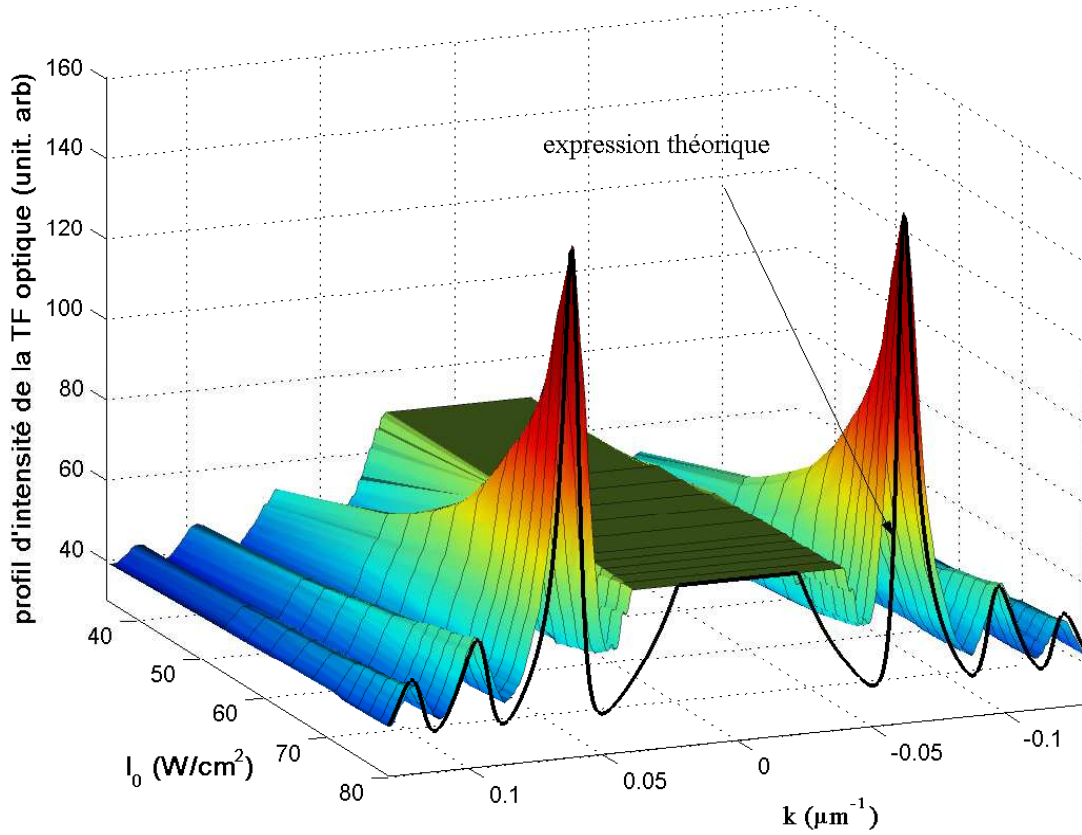


FIG. 4.11 – Evolution expérimentale du profil d'intensité en champ lointain avec l'intensité lumineuse de pompe. Les paramètres sont $I_0 = 35 - 80 \text{ W/cm}^2$, $\sigma = -14.5$, $\eta = 25$, $w = 1400 \mu\text{m}$. Les traits fins marquent les acquisitions expérimentales. La courbe en trait gras est une courbe théorique ajustée. La composante centrale a été soustraite pour plus de visibilité.

4.4.2 Récapitulatif

Les résultats sont présentés sur la figure 4.12 sont des simulations numériques réalisées dans les mêmes conditions que l'expérience. Elles confirment en tout point les observations expérimentales. Nous en profitons donc pour résumer les principaux résultats de ce chapitre. Sous le seuil et en présence de bruit, la TF optique affiche des cercles concentriques dévoilant le module du nombre d'onde le plus instable du système qui se déstabilise une fois le seuil franchi. Cependant, aucune information ne peut être extraite sur l'orientation des vecteurs d'onde associés. Le champ proche moyen ne fournit aucune information puisque la faible structuration visible sur l'image 4.12b n'est pas stationnaire. Sa moyenne temporelle ne révèle que le profil gaussien du champ incident.

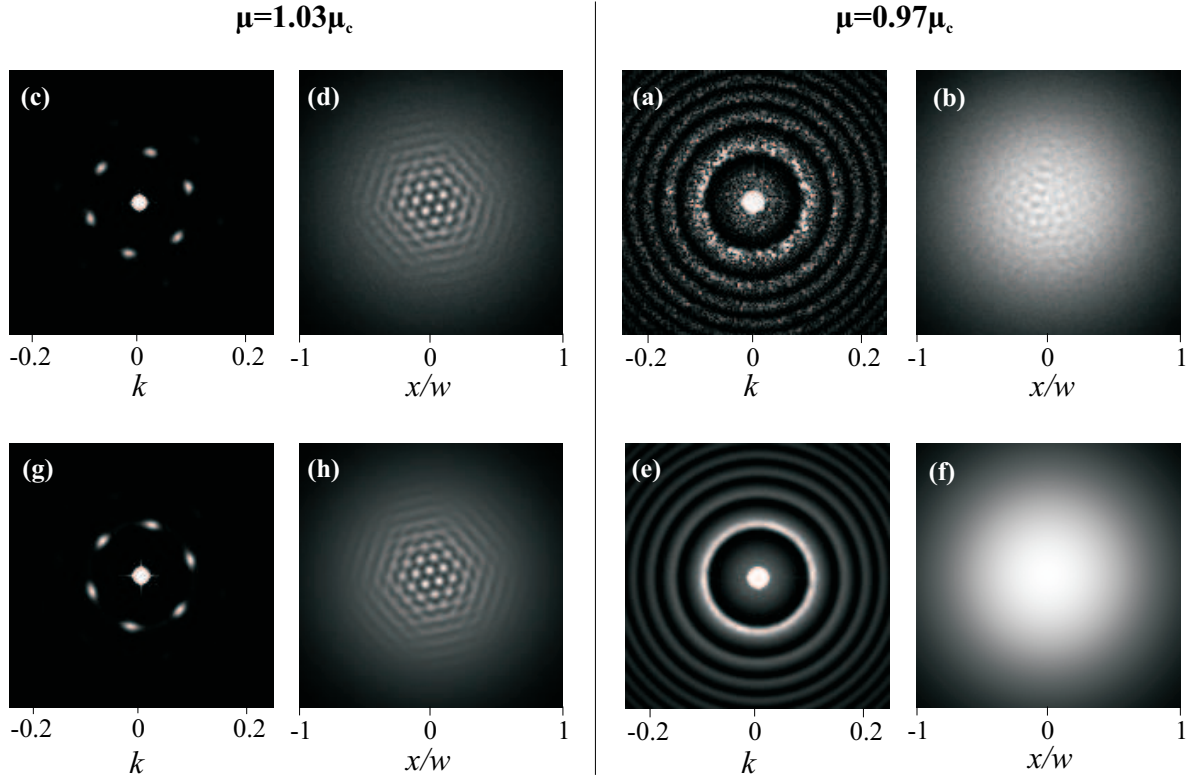


FIG. 4.12 – Simulations numériques sous et au dessus du seuil; ligne supérieure : photos instantanées; ligne inférieure : moyennes temporelles correspondantes sur 400τ . Les paramètres sont $\sigma = -14.5$, $\eta = 25$, $\xi = 0.08$

Chapitre 5

Transition précurseurs - structures

$$(\mu \approx \mu_c)$$

L'apparition d'une instabilité est consécutive à une bifurcation marquée par une brisure de symétrie. En théorie, dans notre système, les rouleaux 1D se déstabilisent via une bifurcation supercritique alors que les hexagones (2D) via une bifurcation souscritique. Cependant, il est bien connu qu'en présence de bruit ces bifurcation deviennent imparfaites [64]. Ce chapitre est dédié à leur étude où nous analysons la traversée du seuil d'instabilité dans les configuration 1D et 2D.

Nous montrons que le passage du seuil, dans le cas 1D, s'accompagne d'une localisation de la phase spatiale des rouleaux [49]. L'analyse de l'évolution de cette grandeur nous permettra de redéfinir un seuil en présence de bruit et également de mesurer quantitativement le niveau de bruit expérimental.

Dans le cas 2D, nous montrons que pour une plage de valeur de μ située avant la transition des cercles concentriques vers six spots, la TF optique possède déjà l'information sur le caractère hexagonal de la structure à venir. Cette anticipation est mise en évidence par la présence de pics dans la fonction de corrélation effectuée le long de l'anneau principal de la TF optique. Cette observation modifie – sur une plage de μ – ce qui a été avancé dans le chapitre précédent, à savoir que les anneaux précurseurs n'anticipent que le nombre d'onde k_c et non le caractère hexagonal de la structure qui est le fruit d'interactions non-linéaires. Nous allons montrer que cet effet est entièrement lié à la présence de la zone de bistabilité et qu'il n'est pas une manifestation d'un processus non-linéaire existant sous le seuil.

5.1 Le cas 2D : corrélation angulaire dans la TF optique.

La mise en évidence d'une anticipation de la structure hexagonale nécessite un calcul de corrélation angulaire dans la TF optique. Plus précisément, ce calcul est réalisé sur les

fluctuations d'intensité le long du premier anneau de cette TF optique. La procédure complète permettant d'obtenir la fonction de corrélation angulaire $\mathcal{C}(\phi)$ est détaillée dans l'annexe D.

5.1.1 Observation expérimentale

La figure 5.1a montre une TF optique moyenne expérimentale comportant toutes les caractéristiques d'un précurseur 2D, et en particulier un premier anneau intense et homogène. Le graphique 5.1b représente la fonction $\mathcal{C}(\phi)$ associée¹. Elle présente plusieurs pics :

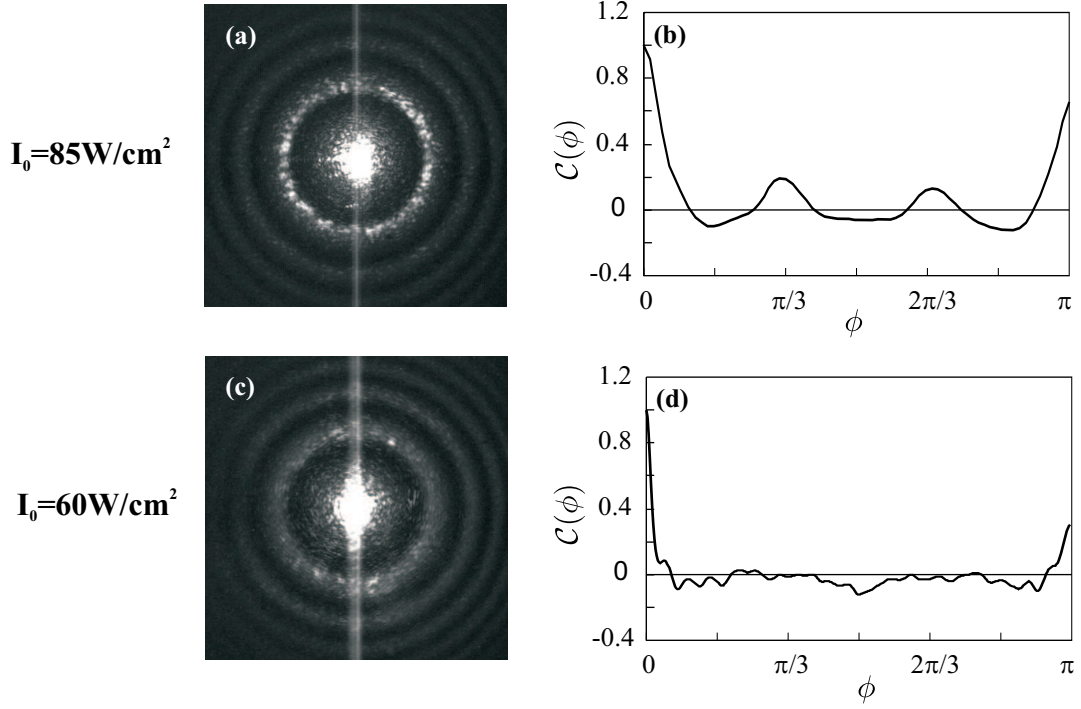


FIG. 5.1 – (a) et (c) TF optiques moyennes expérimentales ; (b) et (d) Fonctions de corrélation angulaire du premier anneau précurseur. Les paramètres sont $\sigma = -13$, $\eta = 28$.

- un principal en $\phi = 0$ lié à la procédure d'autocorrélation ;
- un pic en $\phi = \pi$ qui monte jusqu'à 75%, il mesure la forte corrélation entre les ondes transverses contra-propagatives, indispensable à la formation de modulations stationnaires.
- deux pics à $\phi = \pi/3$ et $\phi = 2\pi/3$ qui sont la signature d'une structure hexagonale. En effet, une telle structure nécessite la combinaison de trois modulations orientées à 120° les unes des autres et reliées entre elles par des couplages non linéaires. Ces deux pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$ témoignent du lien privilégié déjà existant entre ces ondes [65]. Pour des intensités plus faibles, le précurseur tel qu'il a été défini dans le chapitre précédent

¹ Rappelons que ces corrélations sont induites par le bruit car elles sont observées sur les fluctuations du champ lointain.

existe toujours (Fig. 5.1c) mais on n'observe plus les pics caractérisant l'anticipation de la structure hexagonale.

La question ouverte est de savoir s'il existe un couplage non-linéaire sous le seuil responsable des pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$ ou si cet effet est lié au caractère souscritique de la bifurcation. Ce qui revient dans notre cas à répondre à la question suivante : ***Les pics de corrélation à $\pi/3$ et $2\pi/3$ existent-ils avant le premier seuil d'instabilité (i.e. avant le cycle) ou uniquement dans la zone de bistabilité ?***

En raison de l'amplitude du bruit dans notre système, il n'est pas possible expérimentalement de localiser les limites de la boucle d'hystérésis. Pour répondre à cette question, nous avons recours aux simulations numériques. Celles-ci nous permettront de faire varier les deux paramètres importants dans cette étude, à savoir le paramètre de pompe μ et le niveau de bruit ε .

5.1.2 Analyse numérique

Pour effectuer ces simulations numériques, σ a été choisi de sorte que le domaine de bistabilité soit suffisamment étendu, et dans une zone expérimentalement accessible. Pratiquement pour $\sigma = -10$ et en absence de bruit, ce domaine s'étend de $\mu_c^H = 2.00$ à $\mu_c^B = 2.10$ (Fig. 5.2a). Les calculs numériques sont donc réalisés pour plusieurs intensités incidentes sur une plage couvrant l'ensemble du cycle d'hystérésis (de $\mu = 1.91$ à $\mu = 2.10$) et un paramètre de bruit ε variant de 0.04 à 0.14. Les corrélations sont calculées sur une durée totale de 150τ après un transitoire de 50τ . Les grilles ont une taille de 256×256 pixels pour une résolution spatiale transverse de $0.89l_d$. Trois scénarios correspondant à trois intensités incidentes distinctes sont présentés sur la figure 5.2 :

- (i) $\mu = 1.97$, soit avant le premier seuil d'instabilité où il n'existe, en théorie, qu'une seule branche stable, la solution homogène ;
- (ii) $\mu = 2.03$ dans la zone de bistabilité ;
- (iii) $\mu = 2.1$ à la limite haute de la boucle d'hystérésis.

Dans le cas (iii) (Fig. 5.2(iii)), les pics de corrélation à $\pi/3$ et $2\pi/3$ sont présents. Même pour des niveaux de bruit très faibles le système reste au voisinage de la branche haute. La section transverse du faisceau se structure suivant un réseau hexagonal bruité.

Dans la zone de bistabilité (ii) (Fig. 5.2(ii)), pour $\varepsilon = 0.04$ on observe plusieurs petits pics. Lorsque le niveau de bruit augmente, deux pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$ prédominent et leur amplitude augmente avec ε . Le premier cercle de la TF optique moyenne reste homogène (signe que la structure n'est pas établie) alors que la corrélation angulaire annonce déjà la présence de couplage à $2\pi/3$. La présence de bruit entraîne le système sur la solution de la branche haute du cycle par intermittence, ce qui explique les pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$.

Le cas (i) est le plus intéressant car on remarque clairement la présence de pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$ pour une valeur de μ inférieure au premier seuil μ_c^H . Cependant ceux-ci ne s'observent qu'à

5.1. Le cas 2D : corrélation angulaire dans la TF optique.

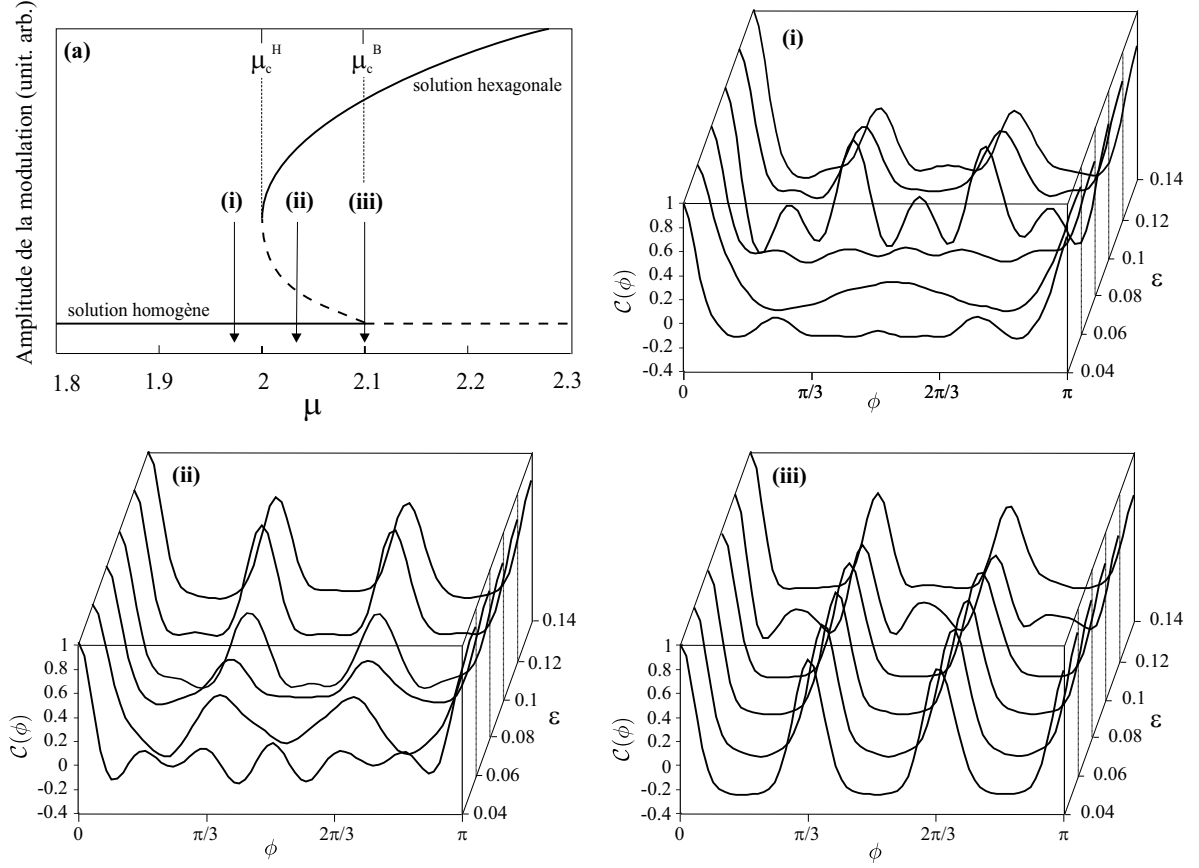


FIG. 5.2 – (a) Diagramme de bifurcation schématisé entre état homogène et structure hexagonale. Les flèches localisent les 3 valeurs de μ correspondant aux 3 diagrammes (i)-(iii) de corrélation. (i)-(iii) courbes de corrélation angulaire $C(\phi)$ pour différents niveaux de bruit. (i) $\mu = 1.97$; (ii) $\mu = 2.03$; (iii) $\mu = 2.1$. $\sigma = -10$. $\eta = 30$.

partir d'un certain niveau de bruit. Dans notre cas où $\mu = 1.97$, le niveau de bruit minimum nécessaire est de $\varepsilon = 0.1$. Ceci nous permet de définir une largeur de zone $\Delta\mu^{pic}$ pour $\mu < \mu_c^H$ à l'intérieur de laquelle les pics à $\pi/3$ et $2\pi/3$ sont observables. Elle est reliée au niveau de bruit et vaut dans notre cas $\Delta\mu^{pic} = 0.3\varepsilon$.

En conclusion, ces corrélations révèlent la nature de la structure – en l'occurrence hexagonale – avant qu'elle ne soit réellement formée. Cependant les pics de corrélations à $\pi/3$ et $2\pi/3$ ne sont perceptibles que dans une zone restreinte du paramètre μ . Cette plage de valeur comprend l'intégralité du domaine bistable plus une zone de valeurs légèrement inférieures à μ_c^H . La largeur $\Delta\mu^{pic}$ de cette dernière étant directement reliée à l'intensité du bruit dans le système tel que $\Delta\mu^{pic} = 0.3\varepsilon$.

Remarques :

- Des fluctuations sur l'indice sont équivalentes à des fluctuations² sur μ . Il est donc possible de mesurer la répercussion des fluctuations d'indice sur l'écart type σ_μ de la valeur de la pompe μ en fonction du niveau de bruit ε :

$$\sigma_\mu = 0.3\varepsilon \quad (5.1)$$

Cette valeur se trouve être identique à la largeur de la zone $\Delta\mu^{pic}$ définie ci-dessus.

- Dans le cas 1D (cf. section suivante), la largeur de la transition L entre le régime stationnaire et le régime où la phase spatiale évolue de manière totalement erratique évolue avec le niveau de bruit (Fig. 5.9a) en suivant la même loi de proportionnalité :

$$L = 0.3\varepsilon \quad (5.2)$$

- Pour certaines réalisations expérimentales et numériques, on remarque la présence de maxima intermédiaires à $\pi/6$, $3\pi/6$ et $5\pi/6$ révélant la possibilité de formation de “quasi-structure” dont la TF arbore 12 spots rangés au sommet d'un dodécagone régulier. Cette solution peut exister dans le système [66], et nous en avons observée une expérimentalement (Fig. 5.3). S'il est rare que ces dodécagones émergent une fois le seuil franchi, il semble plus courant de détecter leur existence dans la corrélation angulaire.

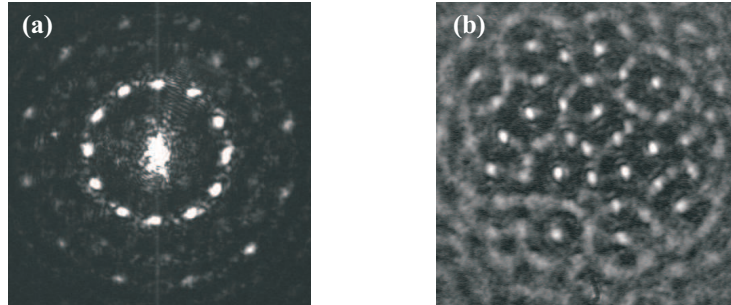


FIG. 5.3 – *Exemple expérimental d'une quasi-structure dodécagonale. (a) TF optique, (b) champ proche.*

- Pour des intensités plus faibles, nettement sous le seuil, seuls persistent les pics à $\phi = 0$ et $\phi = \pi$. Ce dernier correspond à un couplage entre les vecteurs d'onde $\vec{k}$ et $-\vec{k}$, c'est à dire que la croissance de l'un favorise celle de l'autre. De tels résultats ont été observés numériquement dans les OPO [57]. En raison de l'origine exclusivement quantique du bruit dans ce dernier système, ce pic dans la fonction de corrélation est une signature d'images quantiques. La comparaison avec nos observations expérimentales est délicate mais il est intéressant de noter qu'une telle corrélation existe déjà pour un bruit d'origine

²Pour la solution homogène : $n_0 = I_0(1 + R) = \frac{1+R}{2R\chi}\mu$.

classique.

5.2 Le cas 1D : Localisation de la phase spatiale en champ proche.

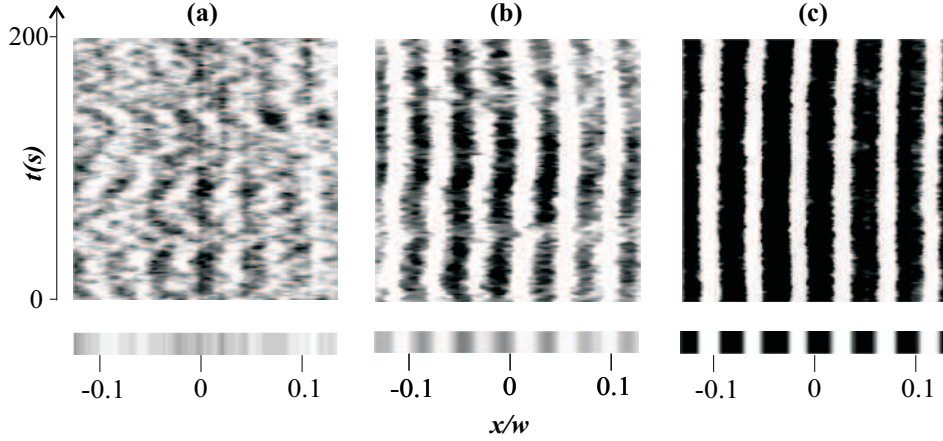


FIG. 5.4 – *Evolution temporelle des structures 1D expérimentales ($\sigma \approx -10$, $\eta \approx 35$) autour du seuil d'instabilité pour différentes valeurs d'intensité I_0 . (a) 130 W/cm^2 , (b) 170 W/cm^2 , et (c) 205 W/cm^2 . Les rectangles sous les figures sont les moyennes temporelles sur 500 s .*

Au chapitre 4, nous avons vu que les précurseurs anticipent sous le seuil certaines caractéristiques (comme le nombre d'onde) de la structure apparaissant au seuil. Ainsi dans une configuration 2D, on observe en champ lointain un anneau dont le rayon correspond au nombre d'onde k_c . Cet anneau se réduit à six spots lorsque le seuil est franchi ce qui fixe l'orientation relative des vecteurs d'onde à $\frac{\pi}{3}$ pour former un réseau hexagonal. Cette transition anneau - 6 spots donne donc un critère pour définir le seuil.

Toutefois dans la configuration 1D, un tel changement qualitatif n'est pas observable puisque la structure en rouleaux est caractérisée par 2 spots dans le champ lointain aussi bien sous le seuil qu'au dessus du seuil. Le but de cette section est donc de caractériser la traversée du seuil et de définir un critère de seuil pour les structures 1D en présence de bruit en nous appuyant sur l'étude précédente sur les précurseurs.

La figure 5.4 montre le comportement de la structure au voisinage du seuil : en dessous (Fig. 5.4a), la phase spatiale des rouleaux précurseurs fluctue aléatoirement dans le temps tandis qu'elle se verrouille une fois la structure largement établie (Fig. 5.4c). L'idée est donc d'analyser le comportement de cette phase spatiale lorsque le paramètre de contrôle μ traverse la zone d'établissement de la structure et de montrer qu'elle constitue un outil pertinent dans la caractérisation du seuil.

La méthode consiste à détecter la phase des rouleaux par rapport à une référence arbitraire

et d'analyser son évolution au cours du temps. Les étapes successives du traitement pour un temps donné t_0 sont scénarisées sur la figure 5.5 : (i) le profil d'intensité transverse instantané

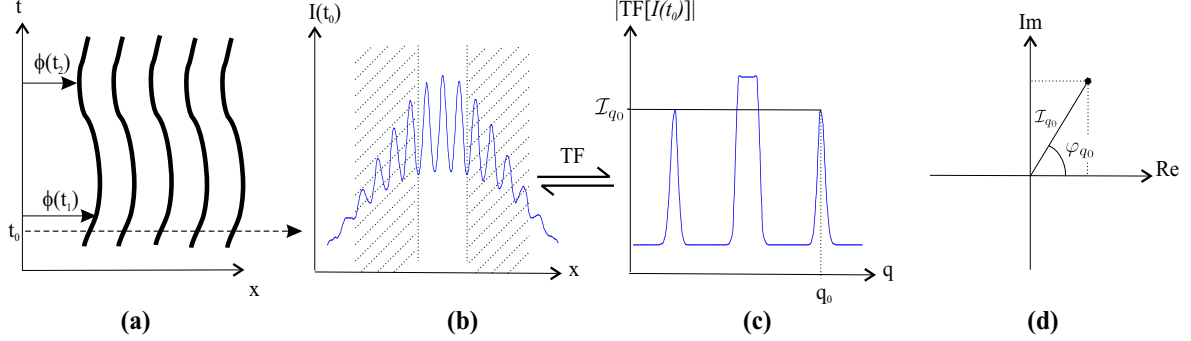


FIG. 5.5 – Scénario du traitement pour obtenir la représentation de la phase dans le plan complexe à partir du diagramme (x, t) .

est extrait du diagramme (x, t) (Fig. 5.5b), (ii) une TF numérique (Fig. 5.5c) est réalisée sur la partie centrale (Fig. 5.5b) afin de s'affranchir d'éventuels effets liés à l'inhomogénéité de la pompe, (iii) une recherche du maximum de la composante principale q_0 permet d'extraire les parties réelle $\Re[I_{q_0}]$ et imaginaire $\Im[I_{q_0}]$ de la TF pour finalement (iv) représenter celle-ci dans le plan complexe (Fig. 5.5d). La phase correspondante – pour un temps donné – est donnée par l'angle entre le segment qui relie ce point à l'origine et l'axe des réels. Ce traitement est répété pour chaque pas de temps du diagramme (x, t) de manière à obtenir un nuage de point dans le plan complexe. L'étalement de ce nuage permet alors une visualisation du comportement temporel de la phase spatiale.

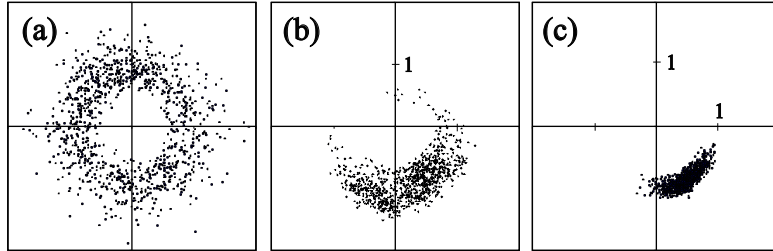


FIG. 5.6 – Représentation dans le plan complexe de la composante $I_{q_0}(t)$ pour les structures de la figure 5.4, (a) 130 W/cm^2 , (b) 170 W/cm^2 , (c) 205 W/cm^2 . Les observations s'étalent sur une durée de 500 s avec un point par 0.5 s. Les amplitudes ont été normées par rapport à leur valeur moyenne.

La figure 5.6 montre l'évolution de la composante de Fourier principale q_0 à travers les variables $\mathcal{I}$ et φ de la modulation transverse telle que $I_{q_0}(t) = \mathcal{I}_{q_0}(t) \exp[i\varphi_{q_0}(t)]$ pour différentes valeurs d'intensité du faisceau de pompe. Pour les faibles intensités (Fig. 5.6a) la phase occupe tout l'espace disponible tandis que son amplitude est déjà localisée, ce qui traduit

une évolution complètement aléatoire des rouleaux. Lorsque l'intensité augmente le nuage de point se rétracte progressivement pour atteindre un élargissement limite révélant la formation de structures stationnaires³. Afin de quantifier ce phénomène, nous avons choisi de mesurer la dispersion angulaire (écart type de φ) du nuage en fonction de l'intensité incidente. Les

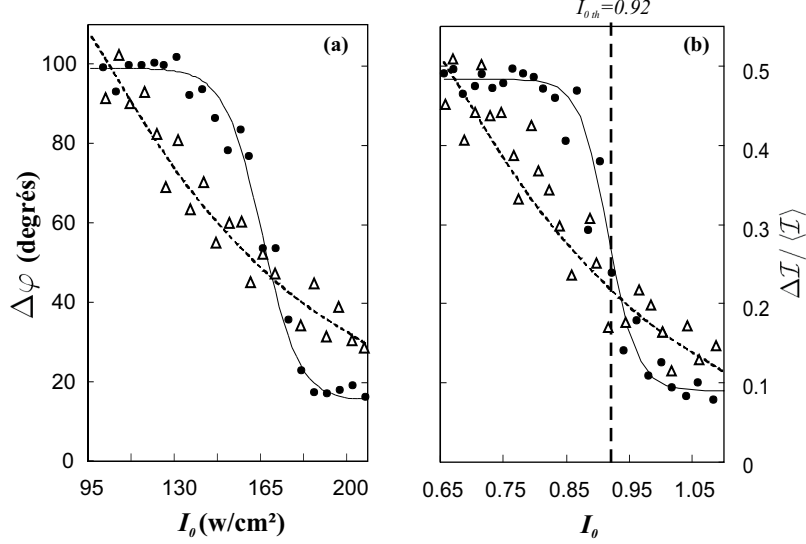


FIG. 5.7 – Evolution en fonction de l'intensité incidente de l'écart type temporel de la phase $\Delta\varphi$ (●) et de l'écart type normalisé de l'intensité $\Delta I / \langle I \rangle$ (△). (a) expérience, (b) simulation numérique, les tirets verticaux localisent le seuil en l'absence de bruit .

acquisitions ont été effectuées dans la configuration 1D avec une vitesse de 0.5 s par ligne pour une durée totale de 500 s par diagramme. L'intensité varie entre ~ 100 et $\sim 200 \text{ W/cm}^2$ avec un pas de 5 W/cm^2 . Sur la figure 5.7a est représentée l'évolution de cette dispersion $\Delta\varphi$ en fonction de l'intensité incidente réalisée à partir des diagrammes (x, t) expérimentaux. Elle met en évidence deux régimes distincts correspondant à des dynamiques différentes :

- un premier autour de 100° traduisant une distribution uniforme dans le plan complexe (une distribution parfaitement uniforme dans un plan de 0 à 360° a un écart type $\Delta\varphi = 104^\circ$), signature d'un régime fluctuant ;
- un deuxième autour de 20° révélant un comportement de phase stationnaire.

Ces deux états bien déterminés sont connectés par une transition relativement brusque correspondant à la traversée du seuil d'instabilité. En comparaison, l'évolution des fluctuations de l'amplitude des rouleaux $\Delta I / \langle I \rangle$ ne présente pas de transition aussi nette (Fig.5.7a). La localisation spatiale de la phase des structures 1D est donc le pendant de la transition cercle/six spots du système 2D. La courbe de tendance en trait plein dans la figure 5.7 quantifie ce saut

³L'azimut du nuage dans le plan est complètement relatif au référentiel choisi et n'apporte donc aucune information.

dans l'évolution de $\Delta\varphi$, son équation est :

$$\Delta\varphi = \frac{A}{1 + \exp\left(\frac{I_0 - I_s}{L}\right)} + h \quad (5.3)$$

Cette expression est choisie de manière purement phénoménologique. Chacun des paramètres introduits renseigne sur la forme de la transition :

- I_s : point d'inflexion de la courbe ;
- L : largeur caractéristique de la transition ;
- h : écart type de la phase en régime établi ;
- A : amplitude de la transition.

Ces résultats expérimentaux ont été comparés à ceux obtenues pour des simulations numériques effectuées avec des paramètres comparables à ceux de l'expérience. Les diagrammes

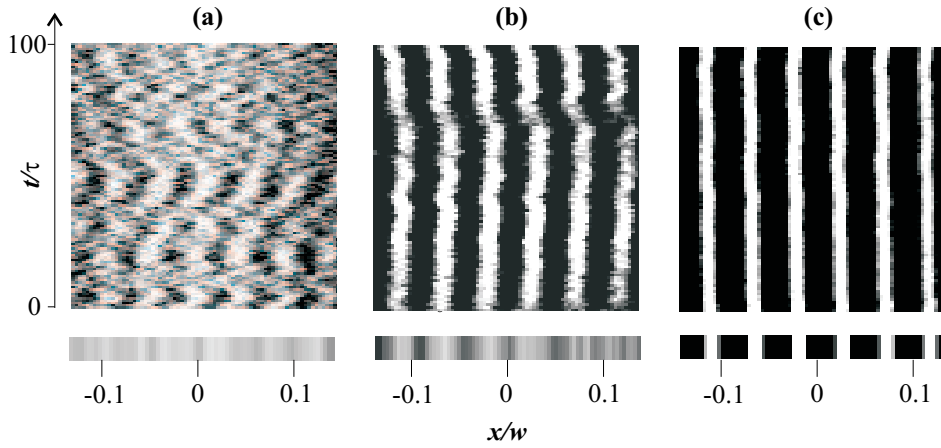


FIG. 5.8 – Diagrammes (x,t) obtenus par simulation numérique : $\chi = 1, \sigma = -10, R = 0.9, \eta = 35, \xi = 0.08, I_0 = 0.79$ (a), 0.9 (b), 1.09 (c). Les rectangles de moyenne sont effectués sur une durée totale de 220τ .

spatio-temporels obtenus sont présentés sur la figure 5.8 et montrent un comportement similaire aux expériences comme le confirme le graphique de la figure 5.7b . De plus, des simulations intégrées avec les mêmes paramètres mais cette fois-ci sans bruit ($\xi = 0$) permettent de localiser sans ambiguïté le seuil d'instabilité, repéré dans la figure 5.7b par les tirets verticaux à $I_{0th} = 0.92$. Cette valeur est très proche du paramètre I_s de l'équation 5.3 ajustée sur les données numériques : $I_s = 0.912$. Cette technique a été testée numériquement pour différents paramètres, taux d'échantillonnage et durées d'observation avec succès, elle se montre donc robuste aux changements de configurations. La position du point d'inflexion peut donc légitimement être utilisée pour définir *un seuil en présence de bruit* dans le système monodimensionnel. Utilisant cette méthode pour les signaux expérimentaux, on trouve une intensité au seuil $I_{0th} = 164 \text{ W/cm}^2$ pour les paramètres utilisés (voir légende de la Fig. 5.4).

Evaluation du niveau de bruit expérimental

Les caractéristiques de la transition dans l'évolution de $\Delta\varphi$ dépendent du niveau de bruit présent dans le système. Si la forme générale de cette transition reste identique (elle peut toujours être approchée par l'équation 5.3), les valeurs des différents paramètres de l'équation 5.3 évoluent avec ε . Par exemple, dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$, la largeur de transition $L \rightarrow 0$: sous le seuil l'effet précurseur disparaît, et au dessus du seuil une très faible modulation est aussitôt stationnaire car non perturbée par les fluctuations. La figure 5.9 montre la dépendance

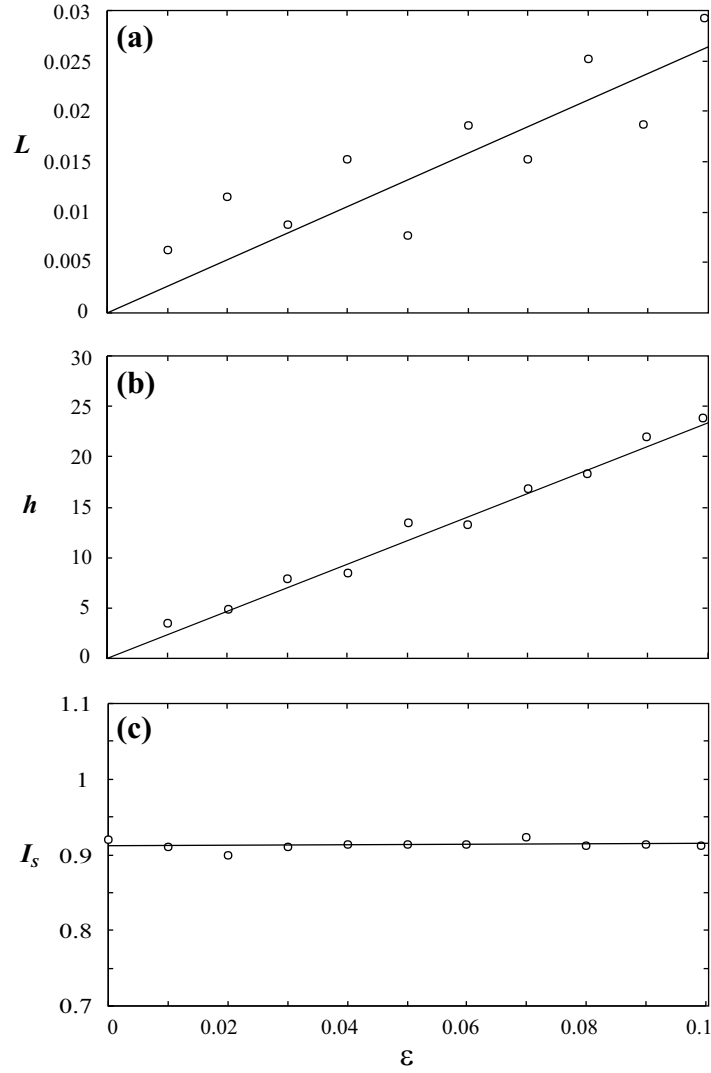


FIG. 5.9 – dépendance avec le niveau de bruit ε des paramètres L , h et I_s de l'équation 5.3. Les droites sont des obtenues par régressions linéaires (contraintes à passer par zéro pour L et h).

de chacun des paramètres (mis à part A) avec ε obtenue par simulations numériques. Les conditions sont les mêmes que précédemment, seul le niveau de bruit varie de (0 à 0.1), au

dessus de cette dernière valeur l'ajustement de la transition par l'équation 5.3 devient plus difficile.

On remarque premièrement que la position du point d'inflexion I_s ne dépend pas du niveau de bruit ce qui renforce la pertinence de ce critère comme localisation du seuil (Fig. 5.9c). Les paramètres L et h ont une dépendance linéaire comme le montrent les régressions linéaires des figures 5.9a et 5.9b. La transition s'élargit donc de part et d'autre du point d'inflexion : l'effet précurseur est effectif de plus en plus tôt quand ε augmente et la structure tarde à se stabiliser après le passage du seuil. De plus, l'évolution de h montre que plus le bruit est important, plus la dispersion de phase de la structure établie est élevée, ce qui signifie que les rouleaux ne sont pas parfaitement stationnaires mais fluctuent autour d'une valeur moyenne. Compte tenu de cette évolution, une comparaison avec le comportement de la structure expérimentale peut nous apporter des informations sur le niveau de bruit présent dans la couche de cristal liquide. Par ailleurs, la corrélation entre les données et les régressions est bien meilleure pour h que pour L comme en témoigne la répartition des points autour des droites (Fig. 5.9a-b). L'utilisation de la valeur de h est donc plus précise. Le graphe de la figure 5.7a donne une valeur $h_{exp} = 17.2^\circ$ qui correspond, si on se réfère aux simulations, à un niveau de bruit $\varepsilon \approx 0.075$. La même comparaison avec le paramètre L donne $\varepsilon \approx 0.1$ avec une incertitude beaucoup plus élevée. Ce résultat explique, a posteriori, le choix de $\varepsilon = 0.08$ utilisé depuis le début de ce rapport dans les simulations numériques.

Chapitre 6

Utilisation du bruit pour déterminer les constantes dynamiques expérimentales l_d et τ ($\mu \ll 1$)

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons étudié l'effet du bruit sur la formation des structures spatiales. Nous allons voir maintenant que cette analyse de type fondamentale peut être à la base d'une étude beaucoup plus appliquée sur la détermination expérimentale de certaines constantes du cristal liquide. En effet, la principale source de bruit dans nos expériences est l'agitation thermique des molécules de cristal liquide autour de leur position d'équilibre, fixée par les forces élastiques. Un faisceau laser qui traverse ce milieu en ressort donc perturbé. Nous proposons dans ce chapitre d'analyser ce faisceau afin d'en déduire certaines propriétés du cristal liquide. Plus précisément, nous nous intéressons aux grandeurs qui fixent les échelles de temps et d'espace du système, à savoir, respectivement, la constante de relaxation temporelle τ et le coefficient de diffusion spatiale l_d . La détermination de ces deux constantes est en effet cruciale pour des comparaisons quantitatives entre modèles et expériences.

La longueur de diffusion l_d peut être mesurée directement par la relaxation de perturbations locales appliquées [67], ou de manière indirecte par la détermination des coefficients élastiques *via* différentes méthodes (transition Fréederickz [68, 69], biréfringence [70], diffraction [71]...). La mesure des phénomènes de relaxation temporelle implique les nonlinéarités optiques [72, 73] ou encore l'influence de champs électriques appliqués [74]. Ces méthodes donnent accès aux temps de réponse optiques dépendant de paramètres expérimentaux tels que l'intensité optique utilisée, le nombre d'onde de la modulation appliquée, etc... Mais ces méthodes ne mesurent pas directement la constante de relaxation temporelle τ , liée au processus de réorientation du directeur $\hat{n}$. Celle-ci dépend uniquement de grandeurs intrinsèques à l'échantillon étudié comme la viscosité rotationnelle γ , la constante élastique de pliage K_{33} (bend) et l'épaisseur de l'échantillon L , et non d'un quelconque paramètre extérieur. Même si dans certains cas, ces

6.1. Approche théorique

temps de réponse optique peuvent être corrélés au temps de relaxation du directeur, il n'existe pas, à notre connaissance, de méthode directe pour la mesure de $\tau = \gamma L^2 / K_{33} \pi^2$.

Nous proposons ici une approche optique simple et purement linéaire utilisant l'analyse du speckle induit par le bruit présent dans l'échantillon de cristal liquide ancré de manière homéotrope et qui donne accès à la fois à l_d et à τ . Dans la référence [75], une étude théorique sur les fluctuations dans les cristaux liquides suggère déjà d'extraire des informations sur les propriétés dynamiques des cristaux liquides. La méthode proposée ici a l'avantage d'être facilement réalisable, adaptable à différentes géométries d'échantillons de cristal liquide et surtout, elle ne nécessite pas l'utilisation de tension appliquée, de faisceaux puissants ou d'effets non linéaires. Seul un très faible faisceau de sonde est utilisé : le dispositif expérimental est présenté sur la figure 6.1. En traversant le milieu soumis aux fluctuations thermiques, le

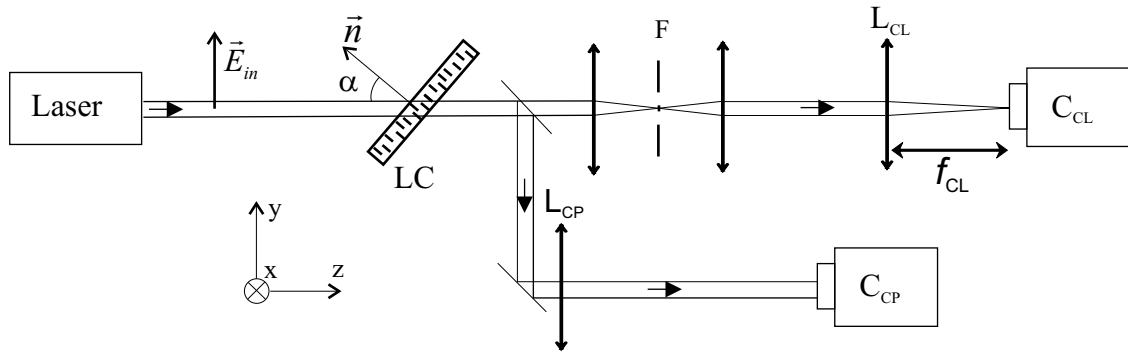


FIG. 6.1 – *Dispositif expérimental pour la mesure des constantes l_d et τ . F est un filtre, placée au centre d'un télescope de grandissement 1, qui permet de bloquer la composante centrale de la TF.*

faisceau de sonde subit un déphasage aléatoire lié aux fluctuations d'orientation des molécules. Ces modulations de la phase de l'onde optique se convertissent en modulations d'amplitude par simple propagation (effet Talbot) et peuvent alors être enregistrées sur des caméras CCD. La lentille L_{CP} permet d'imager le champ proche (CP), c'est-à-dire le champ optique juste à la sortie de l'échantillon (la propagation sur l'épaisseur L suffit à la conversion phase/amplitude). Simultanément, le champ lointain (CL) est détecté au foyer de la lentille L_{CL} . A partir des propriétés conjointes des champs proche et lointain, on peut déduire les valeurs de τ et l_d .

6.1 Approche théorique

Nous nous appuyons ici sur les résultats obtenus dans le chapitre sur les précurseurs avec comme différences que : (i) une seule traversée du milieu est effectuée et (ii) le paramètre μ peut être négligé puisqu'à faible champ l'effet est purement linéaire et indépendant de μ (aucune réorientation des molécules par le champ n'est nécessaire dans la manipulation). Dans

ces conditions, l'expression de l'amplitude du champ électrique à la sortie du cristal liquide s'écrit :

$$E(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{u} = e^{i\sigma_p \nabla_\perp^2} \left(e^{i\chi_L n_{\vec{u}}(\mathbf{r}, t)} E_{in}(\mathbf{r}) \cdot \vec{u} \right) \quad (6.1)$$

où $n_{\vec{u}}(\mathbf{r}, t) = n_m(\mathbf{r}) + \Delta n(\mathbf{r}, t)$ est la somme de l'indice moyen n_m et de ses fluctuations Δn correspondant à la direction de polarisation $\vec{u}$ choisie dans l'expérience¹. $\chi_L n(\mathbf{r}, t)$ exprime le changement de phase induit par la traversée avec $\chi_L = 2\pi \frac{L}{\lambda_0}$. E_{in} est l'amplitude du champ incident. La propagation dans le cristal est prise en compte par l'opérateur $e^{i\sigma_p \nabla_\perp^2}$, avec $\sigma_p = n_m L \lambda_0 / 4\pi$ (à ne pas confondre avec le paramètre σ utilisé jusqu'ici et associé à la propagation sur l'aller-retour échantillon - miroir). Notons que pour obtenir l'expression de $E(\mathbf{r}, t)$ à une distance d derrière l'échantillon, il suffit de remplacer L par le chemin optique complet $n_m L + d$ dans σ_p . Ceci implique un simple changement de variable dans l'équation 6.1, il n'est donc pas nécessaire de connaître précisément le plan d'imagerie du champ proche.

L'évolution temporelle de l'indice du cristal liquide peut se déduire de l'équation 4.1. En posant $n = n_0 + \Delta n$, où $n_0 = F_0^2$ et Δn traduit les fluctuations aléatoires causées par le bruit. Le simple passage à travers une couche mince en présence de fluctuations aléatoires d'indice est alors décrit par l'équation :

$$\tau \frac{\partial \Delta n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \left(1 - l_{dx}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - l_{dy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta n(\mathbf{r}, t) + \sqrt{\varepsilon} \xi(\mathbf{r}, t) \quad (6.2)$$

où ont été rétablies les grandeurs d'espace et de temps dimensionnées afin de faire apparaître τ , l_{dx} et l_{dy} longueurs de diffusion dans les directions x et y respectivement.

La longueur de diffusion l_d

Dans un premier temps, notre but est d'extraire la valeur de la constante l_d à partir de l'analyse du faisceau après la traversée du cristal liquide. La démarche consiste à trouver une expression analytique d'une grandeur expérimentalement accessible et dépendant de la constante l_d .

Les caméras CCD utilisées dans l'expérience ne sont sensibles qu'aux intensités EE^* . L'intensité correspondante en champ lointain $I_{CL}(\mathbf{k}, t)$ est le module de la transformée de Fourier spatiale (TF) du champ proche $E(\mathbf{r}, t)$ (Eq. 6.1) :

$$TF[E(\mathbf{r}, t)] \equiv E(\mathbf{k}, t) = e^{-i\sigma_p \mathbf{k}^2} \left(e^{i\chi_L \widetilde{n_{\vec{u}}}(\mathbf{k}, t)} E_{in} \right) \quad (6.3)$$

d'où se déduit $I_{CL}(\mathbf{k}, t)$ au plus petit ordre non nul en $\widetilde{\Delta n}$:

$$I_{CL}(\mathbf{k}, t) = I_0 \left\{ C\delta(0) + 2\chi_L^2 \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) [1 + \cos(\sigma_p \mathbf{k}^2)] \right\}. \quad (6.4)$$

¹Dans la configuration présentée sur la figure 6.1, l'indice $n_{\vec{u}}$ est une combinaison des indices ordinaire et extraordinaire du cristal liquide, fonction de l'orientation de l'échantillon[38].

$\delta(0)$ représente la composante de fréquence nulle qui peut être éliminée par un filtrage spatial², et que nous ne prenons donc plus en compte (Fig. 6.3b). $\widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t)$ est la TF spatiale de $\Delta n(\mathbf{r}, t)$. Comme dans le chapitre précédent, seule sa fonction de corrélation temporelle $\langle \widetilde{\Delta n}^*(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \rangle$ est connue analytiquement. Il faut donc considérer l'intensité moyennée dans le temps qui s'exprime de la manière suivante :

$$\langle I_{CL}(\mathbf{k}, t) \rangle = 4I_0 \chi_L^2 \langle \widetilde{\Delta n}^*(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \rangle. \quad (6.5)$$

où nous avons approximé³ $\cos(\sigma_p \mathbf{k}^2) \approx 1$. Ce qui est justifiée dans la mesure où $\sigma_p k^2 \ll 1$. Le terme $\langle \widetilde{\Delta n}^*(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \rangle$ a déjà été rencontré dans le chapitre 4, à la différence près qu'ici, il faut considérer l'équation d'évolution suivante :

$$\tau \frac{\partial \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = - (1 + l_d^2 \mathbf{k}^2) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\xi}(\mathbf{k}, t) \quad (6.6)$$

qui est la transformée de Fourier de l'équation 6.2. $\tilde{\xi}(\mathbf{k}, t)$ est la TF spatiale du terme stochastique $\xi(\mathbf{r}, t)$. L'opérateur $\mathcal{L}(\mathbf{k})$ s'écrit pour ce problème :

$$\mathcal{L}(\mathbf{k}) = 1 + l_d^2 \mathbf{k}^2 \quad (6.7)$$

Les calculs détaillés dans l'annexe C aboutissent alors à l'expression pour la TF optique moyenne :

$$\langle I_{CL}(\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{\varepsilon \chi_L^2 I_0}{\pi^2 (1 + l_d^2 \mathbf{k}^2)}, \quad (6.8)$$

qui est une lorentzienne de demi largeur à mi-hauteur (HWHM) dans l'espace des $\mathbf{k}$ égale à l_d^{-1} . L'analyse de la figure de diffraction à l'infini créée par l'agitation des molécules de l'échantillon nous renseigne donc sur la longueur de diffusion du cristal liquide.

La constante de relaxation temporelle τ

En ce qui concerne le temps de relaxation, la méthode consiste également à trouver une grandeur dépendant de τ et expérimentalement accessible dont on connaisse l'expression analytique. Partant de l'expression de l'intensité du champ proche à la sortie de la lame de cristal liquide, au premier ordre en Δn :

$$|E(\mathbf{r}, t)|^2 = I_0 \{ 1 - 2\chi_L \sin(\sigma_p \nabla_\perp^2) \Delta n(\mathbf{r}, t) \} \quad (6.9)$$

²Cette manipulation permet en outre de s'affranchir d'effet de saturation sur les caméras CCD.

³Compte tenu de la finesse de l'échantillon ($50\mu\text{m}$), la valeur maximale $\sigma_p k_{max}^2$ atteint 0.1 dans nos conditions expérimentales, où k_{max} est la valeur maximale de k délimitant la fenêtre d'observation dans le plan de Fourier. Si l'épaisseur de l'échantillon est plus grande, il est possible de réduire la fenêtre d'observation afin de garder la condition $\sigma_p k^2 \ll 1$.

il est possible de calculer la double transformée de Fourier, spatiale et temporelle :

$$\widetilde{|E|^2}(\mathbf{k}, \Omega) = I_0 \left\{ \delta(\mathbf{k} = 0) + 2\chi_L \sin(\sigma_p \mathbf{k}^2) \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, \Omega) \right\}. \quad (6.10)$$

La double TF (spatiale et temporelle) des fluctuations de l'indice de réfraction $\widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, \Omega)$ se déduit directement de l'équation 6.2 en utilisant les relations $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow i\Omega$ et $\nabla_{\perp} \Rightarrow i\mathbf{k}$:

$$\widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, \Omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \Omega)}{1 + \mathbf{k}^2 l_d^2 - i\Omega\tau} \quad (6.11)$$

où $\widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \Omega)$ est la double TF du bruit blanc. Comme pour la détermination de l_d , la composante en $k = 0$ peut être filtrée, elle est donc abandonnée dans ce calcul. L'expression 6.10 s'écrit alors :

$$\widetilde{|E|^2}(\mathbf{k}, \Omega) = I_0 2\chi_L \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin(\sigma_p \mathbf{k}^2) \widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \Omega)}{1 + \mathbf{k}^2 l_d^2 - i\Omega\tau}. \quad (6.12)$$

En prenant le module au carré de cette dernière expression 6.12, on fait apparaître le terme $\widetilde{\xi}^*(\mathbf{k}, \Omega) \widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ (Eq. C.8). Finalement, la grandeur expérimentalement accessible qui nous intéresse s'exprime de manière analytique de la façon suivante :

$$\left\| \widetilde{|E|^2}(\mathbf{k}, \Omega) \right\|^2 = \frac{I_0^2 \chi^2 \varepsilon}{\pi^2} \frac{\sin^2(\sigma_p \mathbf{k}^2)}{(1 + \mathbf{k}^2 l_d^2)^2 + \Omega^2 \tau^2} \quad (6.13)$$

Il est possible d'en extraire une information sur τ à condition de fixer $\mathbf{k}$ à une valeur particulière $\mathbf{k}_i$. $\left\| \widetilde{|E|^2}(\mathbf{k}_i, \Omega) \right\|^2$ affiche alors une dépendance lorentzienne en Ω avec une HWHM valant $(1 + \mathbf{k}_i^2 l_d^2) / \tau$. La connaissance du l_d (par la méthode précédente) et du $\mathbf{k}_i$ (choisi) donne donc accès à la constante recherchée τ . Notons qu'ici le terme $\sigma_p \mathbf{k}^2$ est primordial pour obtenir l'expression 6.13. En d'autres termes, la propagation représentée par le terme σ_p est fondamentale dans l'observation de cette grandeur. L'empreinte du bruit inscrite sur la phase spatiale doit se propager (sur l'épaisseur L de l'échantillon ou plus : $L + d$) pour se transformer en modulations sur l'amplitude et ainsi être détectée. Par ailleurs, afin d'optimiser le rapport signal sur bruit, il ne faut pas choisir un $\mathbf{k}_i$ qui annule le sinus du numérateur mais au contraire privilégier les $\mathbf{k}_i$ qui le maximisent.

6.2 Validation de la méthode par les simulations numériques

Avant d'utiliser la méthode sur notre dispositif expérimental, nous nous assurons de sa validité par le biais des simulations numériques dans lesquelles les constantes l_d et τ sont connues. Dans un premier temps, pour vérifier si la méthode proposée permet bien de retrouver les

6.2. Validation de la méthode par les simulations numériques

coefficients l_d et τ . Dans un second temps, pour montrer que la présence d'un profil gaussien ne modifie absolument pas les résultats obtenus par l'analyse développée dans le système uniforme. La procédure de test est la suivante : des images de champs lointains $I_{CL}(\mathbf{k}, t)$ sont générées et enregistrées à une cadence de 0.2τ . Après avoir soustrait la composante centrale ($k = 0$) correspondant au fond continu, la moyenne temporelle de ces images est calculée afin d'obtenir la grandeur $\langle I_{CL}(\mathbf{k}, t) \rangle_t$. Selon la formule 6.8, le profil d'intensité a une dépendance lorentzienne en $\mathbf{k}$ dont la demi-largeur à mi-hauteur (HWHM) permet de remonter à la valeur de l_d . Des simulations ont été réalisées avec deux types de profils de pompe : l'un, gaussien, de largeur $\simeq 300l_d$ correspondant aux conditions expérimentales et l'autre super-gaussien d'ordre cinq ($e^{-\left(\frac{x^2}{w^2}\right)^5}$) de largeur à mi hauteur également de $300l_d$. Les valeurs des paramètres sont $E_{in} = 0.1$, $\varepsilon = 0.08$, $l_d = 1$ et $\tau = 1$. Les grilles utilisées ont une taille de 512×512 pixels avec une résolution spatiale de $0.76l_d$ (Fig. 6.2a).

Les valeurs obtenues pour l_d dans chacun des cas sont très similaires, ce qui montre que l'inhomogénéité transverse du laser de pompe ne perturbe pas la méthode. De plus, et heureusement, nous retrouvons les valeurs d'entrées :

- profil gaussien : $l_d = 0.998 \pm 0.007$;
- profil super-gaussien : $l_d = 1.003 \pm 0.005$.

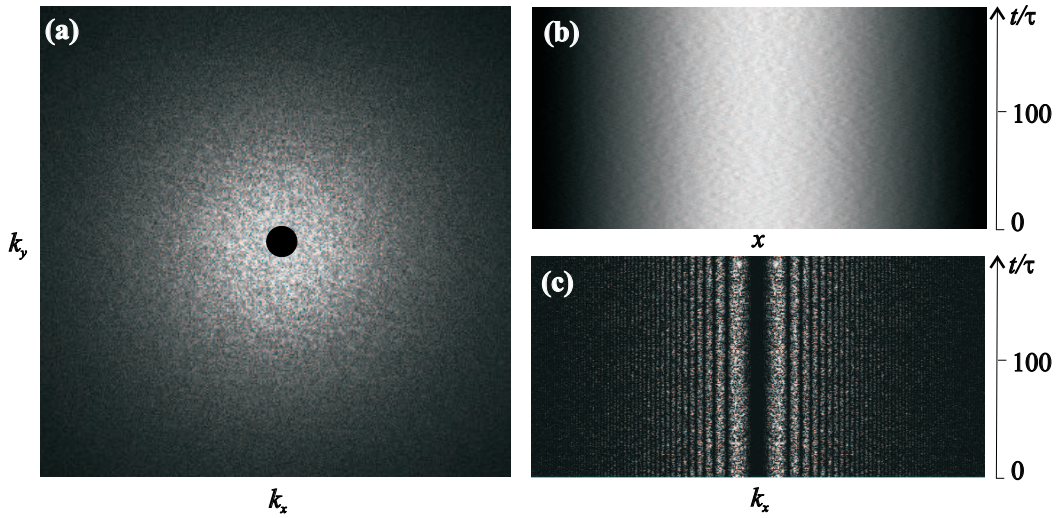


FIG. 6.2 – Images issues des simulations numériques en profil gaussien, voir le texte pour les valeurs de paramètres ; (a) TF optique moyenne, (b) diagramme (x, t) et (c) diagramme (k, t) correspondant.

Les mêmes simulations permettent par ailleurs de construire des diagrammes spatio-temporels $|E|^2(x, t)$ (Fig. 6.2b) en enregistrant l'évolution temporelle d'un profil d'intensité (le pas de temps est ici de 0.2τ pour un enregistrement total de 200τ). Une transformée de Fourier spatiale effectuée ligne par ligne sur le diagramme (x, t) permet d'obtenir le diagramme (k, t)

(Fig. 6.2c). On peut y voir les franges correspondant au terme en $\sin(\sigma \mathbf{k}^2)$ de l'équation 6.10. Notons que celles-ci ne sont pas liées à un effet précurseurs mais sont simplement une manifestation de l'effet Talbot. En effet, les maxima des franges brillantes correspondent aux nombres d'onde transverses k_i pour lesquels les modulations de phase sont entièrement converties en modulations d'amplitude. Il est donc préférable, pour effectuer la TF temporelle $\widetilde{|E|^2}(k_i, \Omega)$, de sélectionner pour k_i un maximum d'intensité. Afin de lisser la courbe (très perturbée) obtenue, ce scénario est répété 50 fois puis moyenné. Un ajustement – par une méthode classique de moindres carrés – d'un profil lorentzien sur la courbe obtenue permet d'obtenir la HWHM correspondant au coefficient $(1 + l_d^2 k_i^2) / \tau$. Connaissant l_d et le k_i choisi, les valeurs de τ extraites sont :

- $\tau = 1.002 \pm 0.015$ avec le profil gaussien.
- $\tau = 1.003 \pm 0.014$ avec le profil super-gaussien.

Cette étape numérique valide donc la méthode de détermination des constantes de diffusion spatiale et de relaxation temporelle. De plus, elle montre que le caractère gaussien du faisceau sonde n'altère pas les résultats.

6.3 Détermination expérimentale

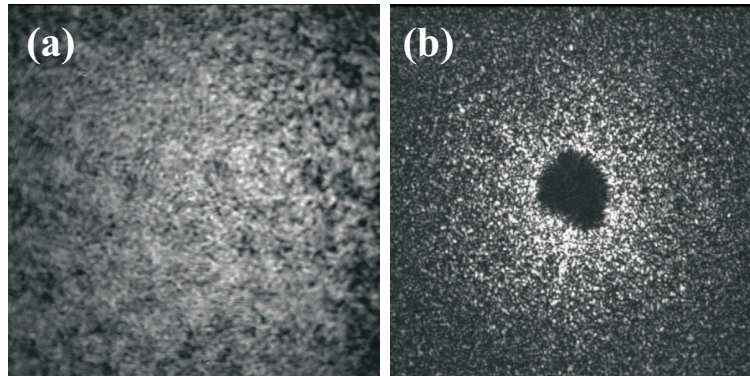


FIG. 6.3 – (a) Section transverse du faisceau laser en champ proche $|E(\mathbf{r}, t_0)|^2$; (b) image de l'intensité en champ lointain $I_{CL}(\mathbf{k}, t_0)$, la tache centrale est due au filtrage spatial des faibles fréquences (TF de l'enveloppe gaussienne)

Le mode opératoire est identique à celui explicité pour les simulations numériques. L'intensité du champ lointain $I_{CL}(\mathbf{k}, t)$ est directement enregistrée par les caméras CCD fournissant des images de dimensions 768×576 pixels avec une résolution de $0.0016 \mu\text{m}^{-1}$ (Fig. 6.3(b)). La moyenne temporelle est effectuée sur une série de 1024 images avec un pas de 0.3 s. Simultanément, une ligne est arbitrairement choisie dans la section transverse du faisceau en champ proche (Fig. 6.3a) afin d'enregistrer le diagramme (x, t) . La résolution spatiale est de $3.38 \mu\text{m}/\text{pixel}$ pour un taux de répétition de 0.3 s. Les courbes expérimentales correspondant

6.3. Détermination expérimentale

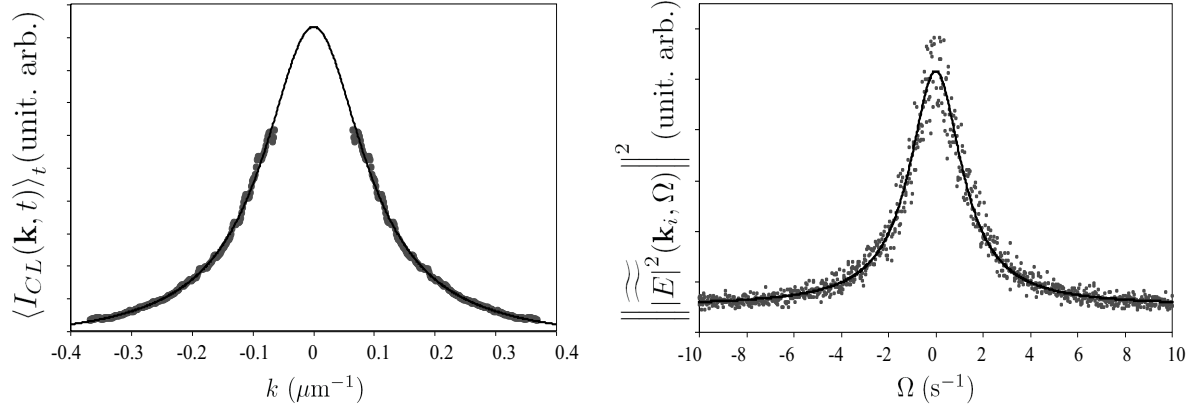


FIG. 6.4 – Courbes expérimentales ; (a) dépendance radiale de l'intensité du champ lointain en fonction du nombre d'onde k (points gris), courbe lorentzienne ajustée (ligne noire) ; (b) carré du module de la double TF du champ proche en fonction de la pulsation Ω (points gris), courbe lorentzienne ajustée (ligne noire).

aux grandeurs des équations 6.8 et 6.13 sont représentées sur la figure 6.4. Elles peuvent toutes deux être approchées par des lorentziennes avec une très bonne correspondance, ce qui nous permet d'extraire les deux grandeurs qui nous intéressent :

$$l_{dy} = 9.95 \pm 0.31 \mu\text{m} \quad (6.14a)$$

$$\tau = 2.28 \pm 0.18 \text{ s} \quad (6.14b)$$

où l'incertitude sur l_{dy} est calculée à partir de 2 sources d'erreurs : $\pm 0.20 \mu\text{m}$ sur la calibration de l'image transverse et $\pm 0.11 \mu\text{m}$ d'erreur apportée par la corrélation entre la courbe expérimentale et un profil lorentzien parfait. Pour le coefficient τ , il faut reporter la propagation de l'erreur sur l_d ($\pm 0.07 \text{ s}$) à laquelle nous avons ajouté une erreur statistique calculée par la méthode de Student sur 10 mesures successives réalisées à partir de k_i différents ($\pm 0.11 \text{ s}$).

Les valeurs de l_d et τ peuvent être comparées aux valeurs calculées à partir de la littérature. Les références [39] et [76] proposent les formules suivantes :

$$l_d = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{33}}} \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\gamma_1 L^2}{\cos^2(\alpha) K_{33} \pi^2}. \quad (6.15)$$

Avec $K_{11} = 12.1 \cdot 10^{-7} \text{ dyne}$, $K_{33} = 15.3 \cdot 10^{-7} \text{ dyne}^4$ et $\gamma_1 = 0.07 \text{ Pa}$ pour le cristal liquide nématique E_7 , on retrouve $l_d = 10 \mu\text{m}$ et $\tau = 2.32 \text{ s}$ ce qui est en excellent accord avec nos mesures expérimentales et qui montre la bonne précision de la méthode.

Notons que, dans les conditions de notre expérience, le faisceau sonde est p-polarisé (suivant l'axe y), la longueur de diffusion mesurée est donc l_{dy} qui fait intervenir les déformations

⁴dyne : unité de force dans le système C.G.S., 1 dyne = 10^{-5} N .

“splay” (K_{11}) et “bend” (K_{33}). En conséquence, et réciproquement à la vérification effectuée ci-dessus, la méthode peut également être utilisée pour déterminer chacun des deux coefficients d’élasticité de Frank K_{11} et K_{33} . Ils ont respectivement été calculés à $K_{11} = 12.16 \cdot 10^{-7}$ dyne et $K_{33} = 15.55 \cdot 10^{-7}$ dyne. Remarquons qu’une polarisation suivant l’axe x aurait sollicité les déformations “twist” (k_{22}) et “bend” (k_{33}). Cependant, compte tenu de l’angle d’incidence du champ $\vec{E}$ par rapport au directeur $\hat{n}$ dans le dispositif, $l_{dy} \simeq l_{dx}$. Enfin, cette manipulation effectuée sur des images à 2 dimensions transverses (2D) peut être réalisée de manière équivalente sur des images 1D. Néanmoins, la configuration 2D offre quelques avantages, comme la moyenne azimutale sur $I_{CL}(\mathbf{k}, t)$ qui permet d’augmenter significativement le rapport signal/bruit (surtout pour les k grands, là où le signal est faible), ou encore de s’affranchir de défauts ponctuels.

Troisième partie

Effet d'une dérive transverse : *les instabilités convectives et absolues, la génération de nouvelles structures*

Abécédaire des notations dans la troisième partie

Chapitre 7

k^*	nombre d'onde dominant la réponse impulsionnelle $G(x, t)$ suivant le rayon (x/t) .
k_c	nombre d'onde critique (et convectif), premier nombre d'onde à se déstabiliser. ($k_c \in \mathfrak{R}$)
μ_c	valeur du paramètre de pompe associée à k_c
k_a	nombre d'onde déstabilisé au seuil absolu et associé au rayon $(\frac{x}{t})_L = 0$. ($k_a \in \mathbb{C}$).
μ_a	valeur du paramètre de pompe associée à k_a .

Chapitre 8

k_c	nombre d'onde critique, premier nombre d'onde à se déstabiliser
$k_c^{[p]}, \mu_c^{[p]}$	nombre d'onde correspondant au minimum de la $p^{\text{ième}}$ langue et paramètre de pompe correspondant.
μ_c	$= \min \left(\mu_c^{[p]} \right)$
langues ₀	langues de la courbe de stabilité marginale pour $h = 0$.
langues _{h}	langues de la courbe de stabilité marginale pour $h \neq 0$.

Chapitre 9

$\mathbf{k}_c$	vecteur d'onde 2D critique de composantes (k_{c_x}, k_{c_y}) .
$\mathbf{k}_{c(n)}^{[p]}$	l'indice n se rapporte à $k_{c_x(n)} = \frac{n\pi}{h}$, l'exposant $[p]$ se rapporte à la $p^{\text{ième}}$ langue ₀ pour $\sigma > 0$ (resp. $\sigma < 0$) lorsque n est pair (resp. impair).
mode	désigne une solution de l'équation de dispersion (rouleaux verticaux RV, horizontaux RH, réseau rectangulaire RR).

Les méthodes d'analyse de stabilité présentées et utilisées jusqu'à présent dans ce rapport sont des méthodes dites *globales*⁵, c'est à dire qu'elles traitent de l'évolution d'une perturbation d'étendue infinie. Elles sont employées lorsque la symétrie d'inversion $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ est présente dans le système, comme c'était le cas jusqu'ici. Seul le signe du taux d'accroissement temporel est alors utile pour renseigner sur la stabilité d'une solution.

Par contre, lorsque cette symétrie $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ est brisée (par la présence d'une dérive transverse, d'une rotation...) il devient nécessaire d'étudier la croissance à la fois temporelle *et* spatiale de cette perturbation. En effet, le taux de croissance ne dépend plus seulement du temps, comme c'était le cas précédemment, mais aussi de la coordonnée spatiale considérée. L'évolution d'une perturbation résulte désormais de la balance entre le taux de croissance temporelle et le taux de croissance spatiale. L'idée étant de regarder, aux temps longs, dans une zone *localisée* de l'espace où a été initiée la perturbation, le devenir de celle-ci.

L'étude se fait en considérant la vitesse de propagation du front reliant l'état de base (souvent homogène et stationnaire) à l'état instable, qui se propage à partir de la perturbation. L'étude des fronts dans les systèmes spatialement étendus permet de rendre compte de la coexistence simultanée de plusieurs états répartis en domaines délimités (par ces fronts). En absence de dérive, leur vitesse de propagation résulte de la compétition entre les deux solutions connectées. Par exemple, en dynamique des populations où ces phénomènes sont très étudiés, l'évolution (croissance ou décroissance spatiale) du domaine de chacune des espèces dépend de leur capacité à envahir l'espace, qu'il soit libre (croissance d'une solution stable à partir d'une solution devenue instable) ou déjà occupé (compétition entre deux solutions stables).

Pour les systèmes en présence d'une dérive, l'étalement de l'instabilité dépend de son taux de croissance mais aussi de la vitesse d'entraînement du courant de dérive. En d'autres termes, lorsqu'une perturbation croît dans le temps et l'espace deux situations sont possibles : soit la dérive l'emporte sur l'accroissement spatiale et l'instabilité est rejetée hors des limites spatiales du système – le régime dynamique est dit *convectif* ; soit l'instabilité croît assez vite pour dominer la dérive et envahir l'intégralité de l'espace disponible – le régime dynamique est dit *absolu*.

Pour rendre concret cette discussion, attardons nous un peu sur une situation de la vie courante qui présente de tels régimes et qui n'est autre que le trafic routier. Cet exemple nous permettra d'introduire les différents outils et processus impliqués dans l'étude de ces instabilités particulières. Cette discussion s'appuie sur un travail réalisé par N. Mitarai et H Nakanishi publié en 2000 [77]. Le modèle utilisé est appelé *modèle de la vitesse optimale* [78] et considère une voie unique (système mono-dimensionnel) sur laquelle roulent des voitures. La solution de base, i.e. l'état d'équilibre stationnaire de ce système, est une file de voitures régulièrement espacées les unes des autres et roulant à la même vitesse. En choisissant comme variable la densité linéique de véhicules, cette solution est homogène. Si, maintenant, un conducteur distrait

⁵selon la terminologie employée par Huerre et Monkevitz dans [11]

fait un petit écart de conduite (accélération ou décélération), ses voisins vont devoir réagir en conséquence. Deux situations peuvent alors se présenter (dépendant à la fois de l'espacement entre les voitures et de leur vitesse) : soit cette perturbation n'a pas d'influence sur le trafic total auquel cas l'ensemble du système retourne dans son état stationnaire uniforme (système stable), soit cette perturbation se répercute sur les voitures voisines et s'étale dans l'espace (suivant la file). Dans ce dernier cas, la solution stationnaire n'est plus stable par rapport aux petites perturbations, et une instabilité apparaît sous la forme d'une modulation spatiale de la densité de voitures : c'est le fameux effet accordéon. Le trafic est alors perturbé mais les véhicules continuent à avancer. Les travaux de Mitarai et Nakanishi ont montré que si une zone

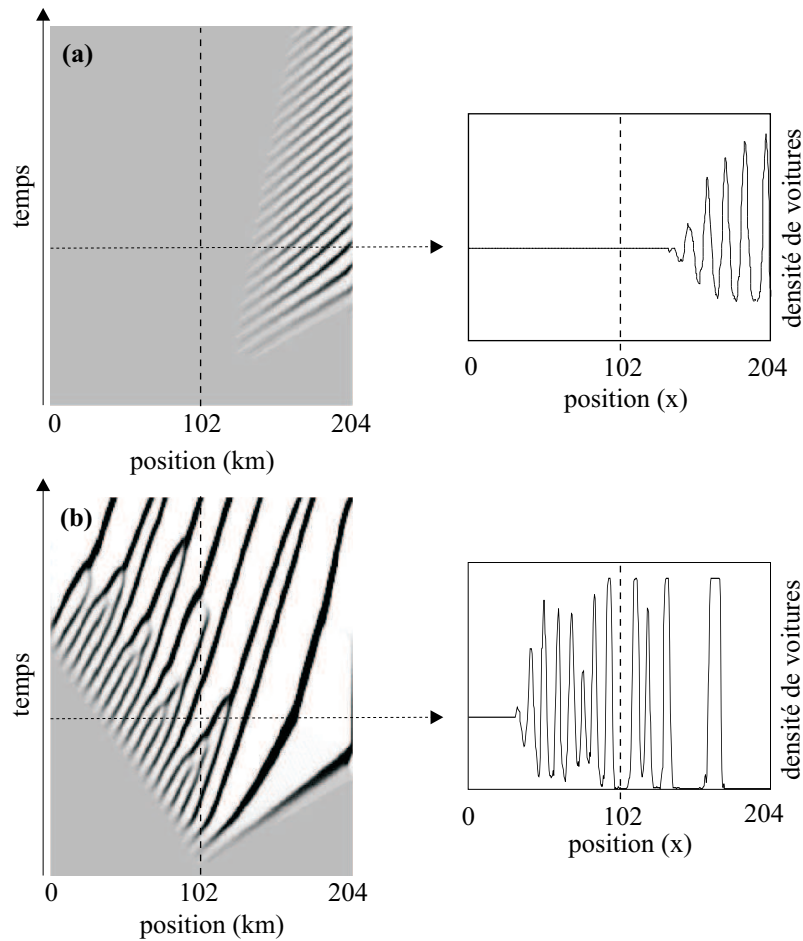


FIG. 6.5 – *Effet accordéon observé dans la densité du trafic routier, créé par une perturbation à $t = 0$ au kilomètre 102. (a) instabilité convective, la perturbation disparaît pour un temps suffisamment long. (b) instabilité absolue, la perturbation envahit tout l'espace. Les graphes de droite présentent des coupes des diagrammes spatiotemporels de la densité de voitures à un instant donné repéré par les flèches. (reproduit avec l'accord des auteurs [77])*

d'accordéon apparaît, elle s'élargit toujours dans l'espace mais deux types de comportement

peuvent être distingués en fonction des deux paramètres du système (vitesse et espacement). Ces deux régimes sont illustrés sur la figure 6.5 où le conducteur distrait crée la perturbation au kilomètre 102 de la route. Dans le premier cas l'effet accordéon se déplace dans le sens de la marche (tout en s'étalant) de telle manière que le trafic redevient normal à la borne 102 (Fig. 6.5a). Aux temps longs, l'effet accordéon a totalement disparu de la route : c'est *l'instabilité convective*. Dans le deuxième cas, illustré sur la figure 6.5b, l'accordéon envahit l'espace plus vite qu'il n'avance si bien qu'aux temps longs l'intégralité des 204km de la route est perturbée : c'est *l'instabilité absolue*.

Comme le montre cet exemple, un système en présence d'une dérive peut présenter un nouveau type d'instabilité, *l'instabilité convective*, qui ne peut exister dans un système où la symétrie d'inversion $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ est préservée. La présence d'un tel régime dynamique est prédite théoriquement dans de nombreux champs scientifiques tels que la biochimie [79], l'hydrodynamique [80], les phénomènes de croissance cristalline [81] et également l'optique non-linéaire [82, 83]. Pour mettre en évidence cette instabilité il suffit d'appliquer localement une perturbation au système et d'observer la réponse de ce dernier – c'est la démarche suivie en hydrodynamique, dans la physique des plasma, etc... Par contre, certains dispositifs expérimentaux possèdent un niveau de bruit non négligeable devant la perturbation locale à appliquer, ce qui a pour effet d'ensemencer de manière continue (en x et t) le système en perturbation. La distinction des différents régimes par la méthode de perturbation locale n'est donc plus possible car, en présence de processus stochastiques, l'instabilité convective donne lieu à un régime développant des *structures entretenues par le bruit* (SEB) [84]. Ce phénomène, observé dans l'expérience de Taylor-Couette [85], est prévu en optique [86] mais n'a encore jamais été mis en évidence expérimentalement. En effet, dans ce domaine, la question de la persistance du régime convectif (ou entretenu par le bruit) aux conditions expérimentales reste ouverte. Concrètement, les systèmes optiques possèdent une forte dépendance spatiale, liée à la variation gaussienne des faisceaux, ainsi que des niveaux de bruit non négligeables. Les critères et théories établis pour les systèmes uniformes en absence de bruit ne sont donc plus applicables.

Dans cette 3^{ème} partie, nous examinons les différents effets liés à la présence d'une dérive transverse dans notre système. Certains de ces effets ont été étudiés en optique notamment par le groupe de Florence [12, 87, 88, 89] sur les structures alors obtenues et leur sélection avec la dérive. Nous proposons ici de recenser l'ensemble des structures pouvant être déstabilisées, leurs seuils d'instabilité, leurs propriétés dynamiques telles que la stationnarité, les SEB, etc... à partir de l'étude des instabilités convectives et absolues. Nous commencerons par mettre en évidence expérimentalement – pour la première fois en optique – un régime d'instabilité convective caractérisé par des oscillations entretenues par le bruit. Ensuite, nous montrerons que la dérive engendre différentes familles de structures que nous définirons et pour lesquels nous établirons les seuils convectif et absolu. Nous verrons alors que dans ces conditions le

système peut se comporter comme un générateur de structures stationnaires dont certaines sont uniquement convectives. Puis en combinant ces structures de base nous montrerons qu'il est aisé de composer des hyper-structures et quasi-structures. Enfin, nous verrons que les précurseurs dans ce cas possèdent toutes les caractéristiques de la structure à apparaître au seuil (nombre d'onde, orientation des vecteurs d'onde, vitesse de phase).

Chapitre 7

Mise en évidence expérimentale de l'instabilité convective dans un système optique 1D.

7.1 Approche théorique

7.1.1 Réponse impulsionnelle

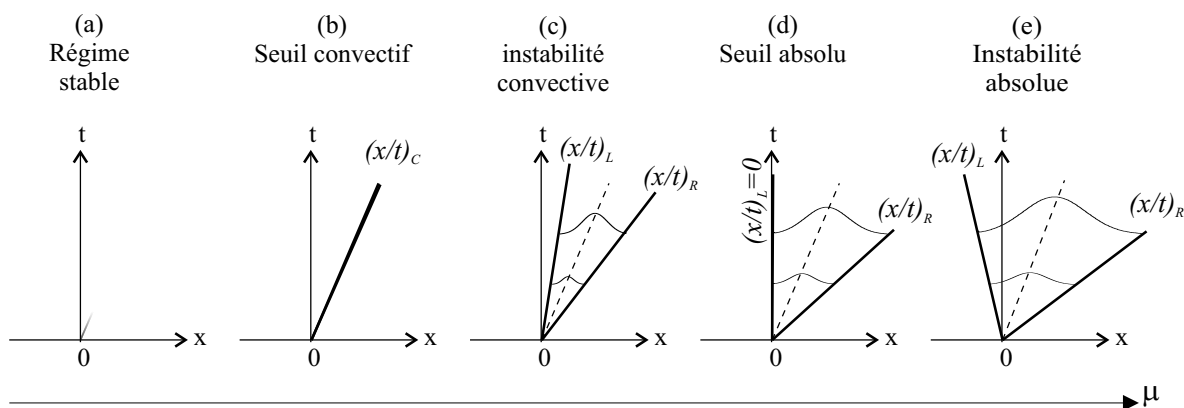


FIG. 7.1 – Diagrammes (x, t) des différents régimes (a) stable, (c) convectif, (e) absolu, et des deux cas critiques (b) et (d) marquant les changements de régime. Le paquet d'onde est symbolisé par des enveloppes gaussiennes, il est limité spatialement par les rayons (x/t) critiques (de croissance temporelle nulle) : $(x/t)_L$ pour le front le plus lent, $(x/t)_R$ pour le plus rapide. μ croît de (a) à (e).

Nous avons vu dans l'introduction que pour mettre en évidence les régimes convectif et absolu, il "suffisait" d'appliquer une perturbation locale et de suivre son étalement au cours du temps. Pour déterminer mathématiquement les seuils de ces deux régimes, une analyse de

stabilité linéaire classique n'est plus suffisante. En effet, on ne s'intéresse plus uniquement à la réponse temporelle à une perturbation, mais à la manière dont elle envahit l'espace. Lorsque le système est dans un état instable, une perturbation appliquée en $x = 0$ à l'instant $t = 0$ va entraîner les points voisins hors de leur état homogène stationnaire. Afin d'étudier le devenir spatial de cette perturbation, on introduit la fonction de Green causale $G(x, t)$, qui est la réponse impulsionnelle de l'instabilité considérée [11], définie par :

$$D \left[i \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial t}; \mu \right] G(x, t) = \delta(x) \delta(t) \quad (7.1)$$

où $D[i\partial/\partial x, -i\partial/\partial t; \mu]$ est un opérateur différentiel de l'espace physique directement associé à la relation de dispersion (Eq. 7.19) définie dans l'espace spectral (k, w) . δ est la fonction delta de Dirac.

On dit alors que le système est :

- linéairement **stable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$ le long de tous les rayons ($x/t = \text{constante}$) (Fig. 7.1a) ;
- linéairement **instable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$ suivant au moins un rayon ($x/t = \text{constante}$) (Fig. 7.1b-e).

En d'autres termes, ceci revient à explorer toutes les directions d'étalement de la perturbation dans l'espace (x, t) – appelées ici rayons (x/t) – et identifier s'il y a amplification suivant un de ces rayons. Parmi les situations linéairement instables, on distingue deux types de réponses impulsionnelles différentes définissant une solution :

- **convectivement instable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$ suivant le rayon $x/t = 0$ (Fig. 7.1b-c) ;
- **absolument instable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$ suivant le rayon $x/t = 0$ (Fig. 7.1d-e) ;

L'évaluation de la fonction de Green nécessite une démarche mathématique décrite pour la première fois en 1961 dans le cadre de la physique des plasmas par Sturrock [90]. Un développement rigoureux et complet de cette méthode dans le cadre de l'hydrodynamique a été donné par Huerre et Monkewitz [11].

7.1.2 Méthode du point selle

L'expression formelle de $G(x, t)$ se présente sous la forme d'une intégrale sur k rarement calculable. Cependant son comportement aux temps longs – et c'est ce qui nous intéresse – peut être évalué par la méthode du point selle [91]. Dans ce cas, pour chaque rayon (x/t) , la réponse du système à une perturbation localisée est dominée par la valeur de $G(x, t)$ évaluée en un nombre d'onde complexe spécifique k^* . Le premier terme du développement asymptotique s'écrit :

$$G(x, t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i(k^* x - \Omega(k^*) t)}}{\left. \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \Omega} \right|_{k^*} \sqrt{\left. \frac{d^2 \Omega}{dk^2} \right|_{k^*}}} t \quad (7.2)$$

où $\tilde{D}(k, w; \mu)$ est la double TF, spatiale et temporelle, de $D[i\partial/\partial x, -i\partial/\partial t; \mu]$. Suivant chaque rayon (x/t) , le terme dominant de la réponse impulsionnelle prend la forme d'une onde plane de nombre d'onde k^* défini par la condition de stationnarité :

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{k^*} = \frac{x}{t}. \quad (7.3)$$

Cette condition n'est autre que celle découlant de la stationnarité de la phase. En effet, la constance de la phase s'exprime comme :

$$\Omega t - kx = \text{constante} \quad \forall k. \quad (7.4)$$

et sa stationnarité $\frac{\partial}{\partial k}(\Omega t - kx) = 0$ redonne directement la condition 7.3. En résumé, à chaque rayon x/t est associé un nombre d'onde dominant k^* , et l'ensemble des rayons (x/t) (et donc des k^*) où la réponse $G(x, t)$ est non nulle forme un paquet d'onde.

Compte tenu du caractère complexe¹ de $\Omega = \Omega^r + i\Omega^i$ et $k = k^r + ik^i$, cette condition peut se développer de deux manières différentes grâce aux conditions de Cauchy² [92] :

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{k^*} = \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^r} \right|_{k^*} + i \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \right|_{k^*} = \frac{x}{t} \quad (7.5a)$$

$$= \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \right|_{k^*} - i \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^i} \right|_{k^*} = \frac{x}{t} \quad (7.5b)$$

Or, la grandeur $(\frac{x}{t})$ est purement réelle puisqu'elle représente la vitesse de groupe. On déduit donc immédiatement que les parties imaginaires des équations 7.5a-b sont nulles quel que soit le système :

$$\left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \right|_{k^*} = \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^i} \right|_{k^*} = 0 \quad (7.6a)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^r} \right|_{k^*} = \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \right|_{k^*} = \frac{x}{t} \quad (7.6b)$$

L'écriture d'un mode particulier peut s'effectuer de la manière suivante :

$$e^{i(kx - \Omega(k)t)} = e^{(-k^i \frac{x}{t} + \Omega^i(k))t} \cdot e^{i(k^r x - \Omega^r(k)t)} = e^{\lambda(k)t} \cdot e^{i(k^r x - \Omega^r(k)t)}, \quad (7.7)$$

qui permet de mettre en évidence le taux de croissance temporelle $\lambda(k)$, grandeur centrale dans l'analyse des régimes convectif et absolu :

$$\lambda(k) = -k^* \frac{x}{t} + \Omega^i(k^*). \quad (7.8)$$

¹Les parties réelles seront notées avec l'exposant "r", par exemple $\Re[\Omega] \equiv \Omega^r$, et les parties imaginaires avec l'exposant "i", par exemple $\Im[k] \equiv k^i$.

²L'application des conditions de Cauchy suppose que la relation de dispersion est une fonction holomorphe.

7.1. Approche théorique

La figure 7.2 met en relation la dépendance de λ avec la vitesse de groupe (x/t) et l'évolution correspondante, sur un diagramme (x, t) , d'une perturbation appliquée en $(x, t) = (0, 0)$. Nous allons déterminer les conditions de chacun des 2 seuils à partir des caractéristiques de $\lambda(x/t)$ visibles sur la figure 7.2.

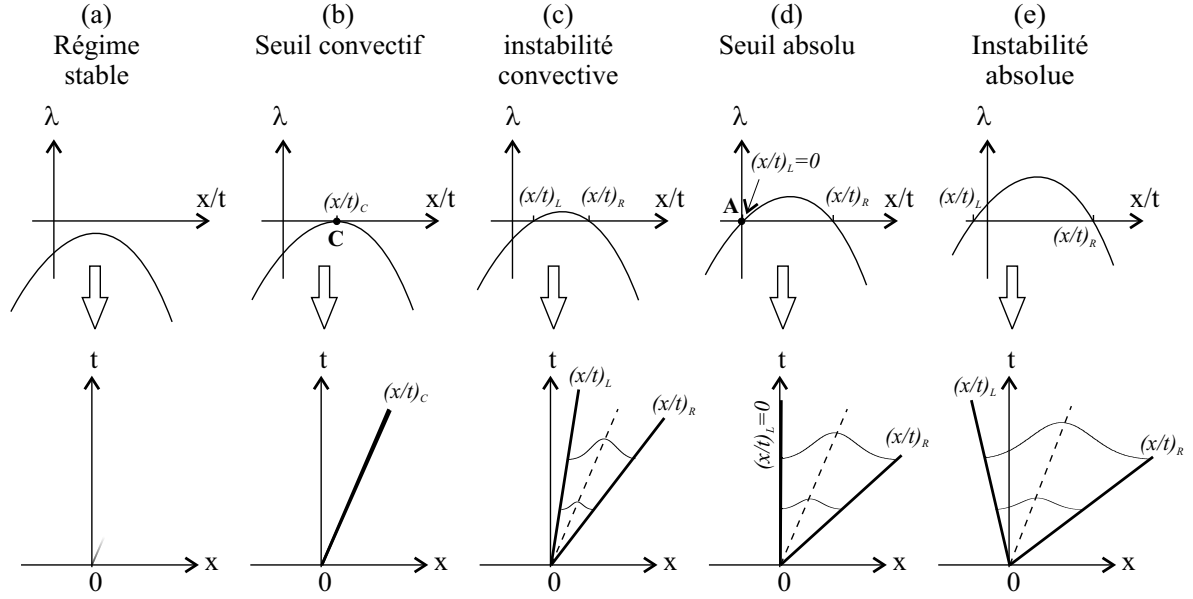


FIG. 7.2 – En haut : dépendance du taux d'accroissement temporel λ avec la vitesse de groupe (x/t) pour différentes valeurs du paramètre de pompe μ . En bas : évolutions correspondantes dans le diagramme (x, t) de l'enveloppe du paquet d'onde, symbolisées par des gaussiennes et limitées spatialement par les rayons $(x/t)_{L,R}$ critiques. μ croît de (a) à (e).

7.1.3 Les seuils convectif et absolu

7.1.3.1 Le seuil convectif

L'instabilité convective apparaît lorsqu'au moins un mode k^* (associé à une vitesse de groupe x/t) possède un taux de croissance temporel λ positif. Le mode critique $k^* = k_c$ (associé à $(x/t)_c$) repéré par la lettre **C** dans la figure 7.2b est le premier à atteindre $\lambda = 0$ (maximum de la courbe λ). Dans ces conditions, une perturbation localisée en $(x, t) = (0, 0)$ va se propager avec la vitesse $(x/t)_c$ sans s'atténuer ni s'amplifier.

Ainsi, le mode qui apparaît au seuil d'instabilité convective vérifie :

1. un taux de croissance maximal : $\frac{\partial \lambda}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} = 0$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} &= - \frac{\partial k^i}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} \cdot \frac{x}{t} - k^{*i} + \frac{\partial \Omega^i}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} = 0 \\ &= - \underbrace{k^{*i} - \frac{\partial k^i}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} \cdot \frac{x}{t} + \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \Big|_{k^*} \cdot \frac{\partial k^i}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \Big|_{k^*}}_{=0} \cdot \frac{\partial k^r}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} = 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

En effet, d'après les relations de Cauchy, nous avons l'égalité $\frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \Big|_{k^*} = \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^r} \Big|_{k^*} \equiv \frac{x}{t}$. De plus, d'après la condition 7.6a, $\frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \Big|_{k^*} = 0$. Il ne reste alors qu'un seul terme dans l'expression de la dérivée du taux de croissance :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial(x/t)} \Big|_{k^*} = k^{*i} = 0 \quad (7.10)$$

Le nombre d'onde du mode critique k_c , i.e. l'unique mode qui se déstabilise au seuil convectif est donc purement réel³ :

$$k^* = k_c \in \mathbb{R} \quad (7.11)$$

2. la stationnarité de la phase : $\frac{\partial \Omega}{\partial k} \Big|_{k_c} = \left(\frac{x}{t}\right)_c$, c'est à dire

$$\frac{\partial \Omega^r}{\partial k} \Big|_{k_c} + i \frac{\partial \Omega^i}{\partial k} \Big|_{k_c} = \left(\frac{x}{t}\right)_c \Rightarrow \frac{\partial \Omega^r}{\partial k} \Big|_{k_c} = \left(\frac{x}{t}\right)_c \quad (7.12a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Omega^i}{\partial k} \Big|_{k_c} = 0 \quad (7.12b)$$

3. un taux de croissance nul : $\lambda = 0$, ce qui implique, compte tenu de 7.8 et 7.10,

$$\Omega^i(k_c) = 0. \quad (7.13)$$

La démarche analytique pour déterminer le seuil convectif μ_c consiste à définir d'abord le nombre d'onde critique k_c à partir de 7.12a ou 7.12b puis d'injecter sa valeur dans l'équation 7.13.

Notons que les valeurs de k_c et μ_c caractérisant l'apparition de l'instabilité convective sont identiques à celles qui eut été obtenues par une analyse de stabilité linéaire classique.

La situation est différente lorsque le paramètre μ augmente : un ensemble de modes dont le taux de croissance est positif est déstabilisé. Ils sont inclus dans la bande spatio-temporelle comprise entre $(x/t)_L$ et $(x/t)_R$ pour lesquels le taux est nul. Les indices “ L ” et “ R ” se rapportent aux

³Nous noterons k_c le nombre d'onde k^* qui se déstabilise au seuil convectif, aussi appelé nombre d'onde critique.

modes de vitesses de groupes extrêmes : “L” pour le mode qui dérive le plus lentement et “R” pour le plus rapide. La perturbation initiale donne alors naissance à un paquet d’onde borné dans le diagramme (x, t) par les deux rayons $(x/t)_L$ et $(x/t)_R$ (Fig. 7.2c) qui représentent les fronts de l’enveloppe. Tant que $(x/t)_L$ et $(x/t)_R$ restent de même signe (positif dans notre exemple), aux temps longs le paquet d’onde s’éloignera à l’infini de sa position initiale, ce qui dans des conditions réelles reviendra à quitter les limites spatiales du système.

7.1.3.2 Le seuil absolu

Comme pour l’effet accordéon, le régime est absolu dès que l’effet se propage aussi dans le sens opposé à l’écoulement (ou à la dérive). Ceci correspond au moment où le front lent remonte la dérive à partir du point où la perturbation a été initiée. Exprimé en terme de vitesse de front, cela se traduit par $(x/t)_L = 0$: la vitesse du front d’onde lent s’annule pour changer de signe. Cette situation est repérée par le point “A” sur la figure 7.2d et, comme pour le cas convectif, ses caractéristiques nous permettent de définir le seuil absolu :

1. Contrairement au cas convectif, le taux de croissance du point “A” n’est plus maximal, le nombre d’onde correspondant reste donc complexe⁴ :

$$k^* \equiv k_a \in \mathbb{C}. \quad (7.14)$$

2. Compte tenu de $(\frac{x}{t})_L = 0$, la condition de stationnarité implique :

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^i} \right|_{k_a} = \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \right|_{k_a} = 0 \quad (7.15a)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^r} \right|_{k_a} = \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \right|_{k_a} = 0 \quad (7.15b)$$

Deux de ces 4 relations suffisent à définir $k_a^* = k_a^r + ik_a^i$, néanmoins il faut en choisir une dans chaque ligne pour ne pas avoir d’informations redondantes (celles qui appartiennent à la même ligne sont reliées par les conditions de Cauchy sur les fonctions complexes [92]).

3. Le taux de croissance du mode lent est nul $\lambda((x/t)_L = 0) = 0$ d’où :

$$\Omega^i(k_a) = 0 \quad (7.16)$$

De cette dernière condition, on tire le seuil d’instabilité absolue μ_a .

4. Une dernière condition doit être vérifiée pour s’assurer de la causalité de la réponse

⁴Nous noterons k_a le nombre d’onde k^* associé au rayon $(\frac{x}{t})_L = 0$, marquant le seuil d’instabilité absolue.

impulsionnelle, elle découle directement du dénominateur de l'expression 7.2 de $G(x, t)$:

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} \right|_{k_a} \geq 0 \quad (7.17)$$

Le tableau 7.1 résume l'ensemble des relations définissant les critères de seuils convectif et absolu.

	convectif	absolu
domaine de définition de k^*	$k^* = k_c \in \mathbb{R}$	$k^* = k_a \in \mathbb{C}$
stationnarité de la phase (obtention de k^*)	$\left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k} \right _{k_c} = 0; \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k} \right _{k_c} = \left(\frac{x}{t} \right)_c$	$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^r} \right _{k_a} = 0; \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^i} \right _{k_a} = 0$ $\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k^i} \right _{k_a} = 0; \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k^r} \right _{k_a} = 0$
taux de croissance nul (obtention de $\mu_{c,a}$)	$\Omega^i(k_c) = 0$	$\Omega^i(k_a) = 0$
causalité	-	$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} \right _{k_a} \geq 0$

TAB. 7.1 – Récapitulatif des relations déterminant les seuils convectif et absolu

7.2 Application à la boucle Kerr 1D avec dérive transverse

Nous allons dans cette section utiliser les critères développés précédemment pour montrer l'existence de deux seuils caractérisant la formation d'instabilités convective et absolue. La mise en évidence de l'instabilité convective en optique nécessite de posséder un système présentant une dérive. C'est à dire un système transportant l'information du point $\mathbf{r}$ au point $\mathbf{r} + \mathbf{d}$ ($\mathbf{d}$ étant le déplacement induit par la dérive). Ceci peut être réalisé par une translation, une rotation, ou une homothétie [93].

Nous avons choisi ici de mener notre étude dans la boucle Kerr dans laquelle nous avons induit une dérive de translation transverse. Celle-ci est obtenue en inclinant le miroir de renvoi (Fig. 7.3), ce qui a pour effet de faire dériver les structures [12, 87, 88, 89].

Dans cette configuration, le faisceau de retour est décalé d'une distance h par rapport au faisceau aller dans le plan transverse. Techniquement, il suffit de pivoter légèrement le miroir sur lui-même d'un angle α tel que $h = d \tan 2\alpha$.

La démarche suivie sera la suivante : premièrement, nous déterminons l'expression analytique de chacun des seuils pour le système 1D à partir d'un développement de Taylor de la relation de dispersion. Nous verrons que ces expressions sont en très bon accord avec les valeurs obtenues par une résolution numérique (exacte). A ce stade la prévision de l'existence de l'instabilité convective sera établie pour le système uniforme. Nous mettrons alors en évidence grâce à des simulations numériques la persistance des deux types d'instabilité dans les conditions réalistes de notre expérience (pompage gaussien et présence de bruit).

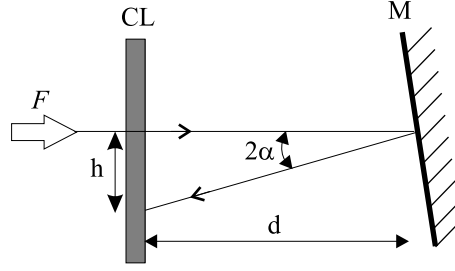


FIG. 7.3 – Schéma du dispositif expérimental à dérive. *CL*, échantillon de cristal liquide ; *M*, miroir de renvoi ; *F*, champ incident ; α , angle d'inclinaison du miroir ; *h*, décalage transverse du faisceau retour par rapport à l'aller.

7.2.1 La relation de dispersion $\Omega(k)$ exacte

Le modèle 1D développé dans le chapitre 2 est modifié pour tenir compte du décalage h entre les faisceaux aller F et retour B :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 n + n = |F|^2 + |B|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi(x, t) \quad (7.18a)$$

$$B(x, t) = \sqrt{R} F_0 e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi n(x-h, t)} g(x) \right) \quad (7.18b)$$

Pour mettre en évidence la présence d'une instabilité convective, nous partons du système idéal, c'est à dire sans bruit ($\varepsilon = 0$) et avec une excitation spatialement homogène ($g(x) = 1$).

Pour mener les calculs analytiques des seuils μ_c et μ_a , il est nécessaire de posséder la relation de dispersion $\Omega(k)$. Celle-ci s'obtient en appliquant une perturbation du type $\delta n(x, t) \propto e^{i(kx - \Omega t)}$ à la solution uniforme $n_0 = I_0(1 + R)$. Dans ce cas l'équation est :

$$\Omega(k) \equiv \Omega^r(k) + i\Omega^i(k) = i \left(-1 - k^2 + \mu \sin(\sigma k^2) \exp(ihk) \right). \quad (7.19)$$

Cette expression sera la base de notre analyse. On remarque la présence du terme h traduisant le décalage transverse, qui rend la relation de dispersion complexe. L'introduction d'un nombre d'onde k complexe, permet de prendre en compte l'amplification spatiale (caractérisée par k^i) en plus de la modulation spatiale (caractérisée par k^r). Notons que, bien que cette relation de dispersion contienne des termes en sinus et en exponentielle, elle reste holomorphe (car composée de fonctions elles-mêmes holomorphes). Cette propriété est indispensable à l'application des conditions du tableau 7.1.

7.2.2 Relation de dispersion approchée $\Omega^{app}(k)$ pour dériver des expressions analytiques des seuils

Si on applique les relations du tableau 7.1 à la relation de dispersion 7.19, il n'est pas possible d'obtenir d'expression analytique des seuils μ_c et μ_a compte tenu de la présence

du sinus et de l'exponentielle. Un moyen pour contourner ce problème consiste à écrire une relation de dispersion approchée qui dépendra de façon polynomiale des paramètres k et μ [94].

Pour cela nous réalisons un développement de Taylor de la relation de dispersion complexe 7.19 autour du mode critique, i.e. le mode le plus instable caractérisant l'apparition du régime convectif, défini par $k_c(h)$ et $\mu_c(h)$:

$$\Omega^{app}(k, \mu) = \Omega(k_c, \mu_c) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \Big|_c (\mu - \mu_c) + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \Big|_c (k - k_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} \Big|_c (k - k_c)^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu \partial k} \Big|_c (\mu - \mu_c) \cdot (k - k_c) \quad (7.20)$$

Un développement au premier ordre en μ est suffisant car la relation 7.19 est linéaire en μ , par contre il est nécessaire d'aller au moins au deuxième ordre en k afin de rendre compte des effets de diffusion et de diffraction. Le dernier terme de ce développement prend en compte les variations du nombre d'onde en fonction de μ . Nous verrons qu'il devient notoire pour certaines zones de paramètres (typiquement quand $\frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$ et $\frac{k - k_c}{k_c}$ ne sont plus petit devant 1). Afin de simplifier les notations, dans la suite nous réécrivons le développement 7.20 sous la forme suivante :

$$\Omega^{app} = \Omega_r(k_c) + i\Omega_i(k_c) + (d_2 - id_1)(\mu - \mu_c) + (v_g + iw_g)q + (a_r + ia_i)q^2 + (\gamma_r + i\gamma_i)q(\mu - \mu_c) \quad (7.21)$$

où $q = k - k_c$. L'expression de chacun des termes du développement est donnée dans l'annexe E. Notons que la partie réelle du coefficient devant q notée v_g est, par définition, la vitesse de groupe du mode critique. Ce terme disparaît bien lorsque $h = 0$. Ce développement ne pose aucune restriction sur la valeur de h . Enfin, les conditions 7.10 et 7.12b impliquent que $\Omega_i(k_c)$ et w_g sont nuls.

Le mode critique $k_c(h)$ ainsi que le seuil convectif $\mu_c(h)$ sont obtenus à partir des relations du tableau 7.1 qui ne sont autres que les conditions de stabilité marginale données par l'analyse de stabilité linéaire classique. Celles-ci définissent $k_c(h)$ à partir de l'égalité :

$$\tan(\sigma k^2) \left[1 + \frac{h(1 + k_c^2)}{2k_c} \tan(hk_c) \right] = \sigma(1 + k_c^2) \quad (7.22)$$

et μ_c à partir de :

$$\mu_c(k_c, h) = \frac{1 + k_c^2}{\sin(\sigma k_c^2) \cos(hk_c)}. \quad (7.23)$$

Pour l'instabilité absolue, k_a est donné par la condition $\frac{\partial \Omega}{\partial q} \Big|_{k_a} = 0$, donnant les expressions pour les parties réelle et imaginaire :

$$\Re(k_a) = k_c - \frac{v_g a_r + (\gamma_r a_r + \gamma_i a_i)(\mu - \mu_c)}{2(a_r^2 + a_i^2)} \quad \text{et} \quad \Im(k_a) = \frac{v_g a_i + (\gamma_r a_i - \gamma_i a_r)(\mu - \mu_c)}{2(a_r^2 + a_i^2)} \quad (7.24)$$

7.2. Application à la boucle Kerr 1D avec dérive transverse

En injectant ces deux expressions dans la condition 7.16 pour trouver la valeur du paramètre de contrôle au seuil absolu, on obtient un polynôme du second degré en $(\mu_a - \mu_c)$:

$$A(\mu_a - \mu_c)^2 + B(\mu_a - \mu_c) + C = 0 \quad (7.25)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \gamma_r^2 a_i - 2\gamma_r \gamma_i a_r - \gamma_i^2 a_i \\ B &= -4d_1(a_i^2 + a_r^2) + 2v_g(\gamma_r a_i - \gamma_i a_r) \\ C &= -v_g^2 a_r \end{aligned} \quad (7.26)$$

La solution n'est autre que :

$$\mu_a - \mu_c = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (7.27)$$

qui donne une expression très complexe de μ_a et surtout deux solutions possibles. Afin de choisir la solution physique nous allons nous placer dans un cas particulier. Lorsque h est proche de zéro les seuils μ_c et μ_a sont quasiment confondus ($\mu_c(0) = \mu_a(0)$) et on peut donc considérer que le terme croisé du développement 7.21 est négligeable. Dans ce cas A s'annule et l'écart entre les seuils convectif et absolu prend la forme suivante :

$$\mu_a = \mu_c + \frac{v_g^2 a_r}{4d_1(a_r^2 + a_i^2)} \quad (7.28)$$

Au premier ordre non nul en h , le seuil absolu s'écrit :

$$\mu_a = \mu_c \left[1 + \frac{1}{8\sigma^2 k_c^2} \left(\frac{1 + 3k_c^2}{1 + k_c^2} \right)^2 h^2 \right] \quad (7.29)$$

Pour des valeurs de h légèrement plus grandes, le terme A peut alors être considéré comme un terme perturbatif. Parmi les deux solutions possibles, il faut choisir celle qui assure une continuité avec la solution 7.28 lorsque A tend vers zéro. Le choix dépend alors du signe de B , son expression étant très compliquée, nous nous sommes contentés d'en vérifier le signe pour les valeurs de σ utilisées dans ce rapport. Il est apparu que B était toujours positif, la solution assurant la continuité est donc celle associée au signe +.

En conclusion, cette analyse prouve donc l'existence des 2 instabilités convective et absolue dans le système de boucle Kerr avec miroir incliné et fournit une expression analytique pour chacun des seuils. Rappelons qu'elle est issue d'un développement de Taylor et qu'elle n'est donc valable dans les domaine de h où $(k - k_c)$ et $(\mu - \mu_c)$ restent de l'ordre de perturbations devant k_c et μ_c .

7.2.3 Résolution numérique de $\Omega(k)$ pour obtenir les seuils

La validité de la méthode approchée que nous venons d'utiliser et des résultats qui ont été obtenus peut être vérifiée grâce à la résolution du système de trois équations à trois inconnues (k^r, k^i, μ) obtenu à partir des relations du tableau et appliquée à la relation de dispersion exacte 7.19. Une fois la solution obtenue, il faut vérifier que celle-ci correspond à un point selle. En effet, seul un tel point peut assurer l'annulation simultanée des dérivées $\partial\Omega^i/\partial k^i$ et $\partial\Omega^i/\partial k^r$ (conditions 7.15a) compte tenu qu'une fonction holomorphe ne peut accepter d'extremum (Le lecteur pourra se référer à l'article très complet de Huerre et Monkevitz [11] pour une analyse plus approfondie du problème). La figure 7.4 présente un exemple de surface marginale

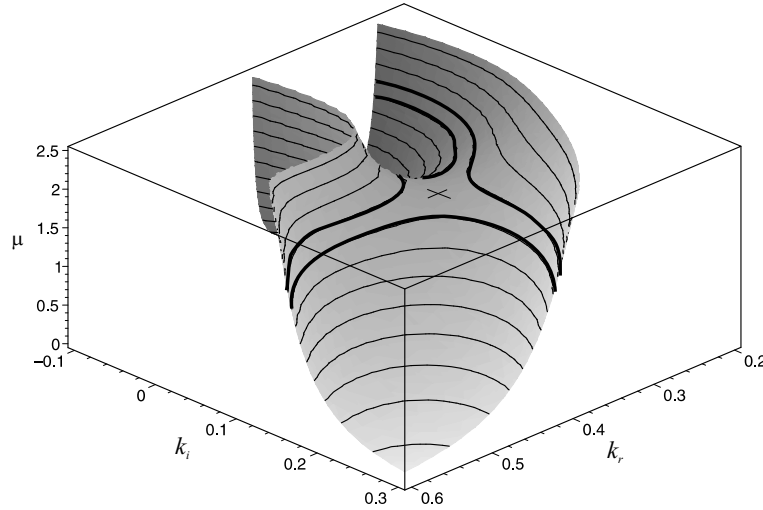
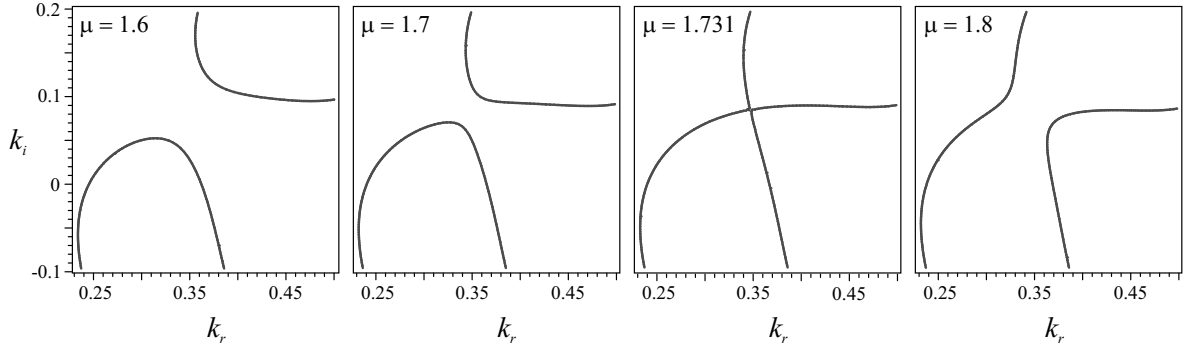
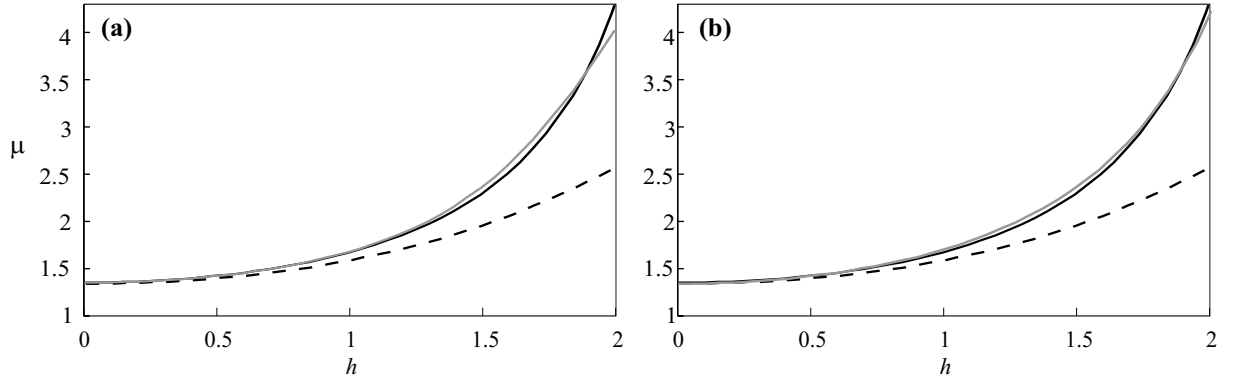


FIG. 7.4 – Visualisation du point selle :

Surface $\Omega_i = 0$ en fonction de k_i, k_r et μ pour $\sigma = -17$ et $h = 10$. Les lignes de niveau en gras correspondent à $\mu = 1.6$ (sous le seuil absolu) et $\mu = 1.8$ (au dessus du seuil absolu).

d'équation $\Omega_i = 0$ en fonction des trois variables k_i, k_r et μ où l'on reconnaît une forme de selle à cheval. L'existence du point selle assure la condition de pincement dans l'espace complexe de k scénarisée sur la figure 7.5 : les premier et dernier graphes ($\mu = 1.6$ et $\mu = 1.8$) correspondent aux courbes de niveaux surlignées en gras sur la surface 3D de la figure 7.4. D'un point de vue mathématique, lorsque les branches haute et basse se pincent ($\mu = 1.731$), l'intégrale donnant la réponse impulsionnelle $G(x, t)$ du système à une perturbation locale n'est plus calculable, il se produit un changement de nature de l'instabilité, le régime devient absolu. C'est autour de ce processus que découlent toutes les conditions utilisées précédemment pour calculer le seuil correspondant.


 FIG. 7.5 – Condition de pincement : courbes d'équation $\Omega_i = 0$ pour $\sigma = -17$ et $h = 10$.

 FIG. 7.6 – Courbes des seuils convectif (en pointillés), et absolu obtenu par résolution numérique de la relation de dispersion exacte (en noir) et absolu obtenu analytiquement (en gris) (a) sans le terme croisé (Eq. 7.28) et (b) avec le terme croisé (Eq. 7.27). $\sigma = 4.23$ (paramètre utilisé dans l'expérience avec $h = 1.3$)

7.2.4 Validité des méthodes

La figure 7.6 permet de comparer les courbes de seuil obtenues d'une part, à partir de la résolution du système de trois équations à trois inconnues (k^r , k^i , μ) obtenu à partir des relations du tableau 7.1 et appliquée à la relation de dispersion exacte 7.19 (en trait noir) et d'autre part, à partir du développement analytique avec (Eq. 7.27) et sans (Eq. 7.28) le terme croisé. Ils confirment premièrement la présence de 2 seuils distincts et donc d'une zone d'instabilité purement convective dans le système de la boucle Kerr avec dérive. La courbe du seuil convectif (en pointillés) est unique. Sa variation avec h traduit le fait que le minimum de la courbe de stabilité marginale, i.e. le point bas de la langue d'instabilité (voir Fig. 2.6) évolue avec le décalage transverse. Les courbes en traits gris représentent les valeurs obtenues par la méthode analytique basée sur la relation de dispersion approchée sans (Fig. 7.6a) et avec le terme croisé (Fig. 7.6b). On remarque que :

- La méthode analytique donne des résultats très satisfaisant dans la zone de paramètres

explorée ($\sigma = 4.23$ et $h = [0; 2]$).

- Le terme croisé a ici une influence assez négligeable, cependant des calculs semblables menés pour d'autres zones de paramètres telles que $\sigma = -17$ et $h = [7; 10]$ montrent qu'il n'en est pas toujours ainsi (cf figure 7.7). Notre intérêt pour ce terme vient du fait qu'à notre connaissance, les travaux classiques [94] utilisant l'approximation polynomiale de la relation de dispersion n'incluent jamais ce terme croisé. L'exemple de notre étude montre que pour de fortes dérivés, ce terme peut devenir fondamental pour garder un bon accord avec la résolution numérique de μ_a , et donc la validité du développement de Taylor..

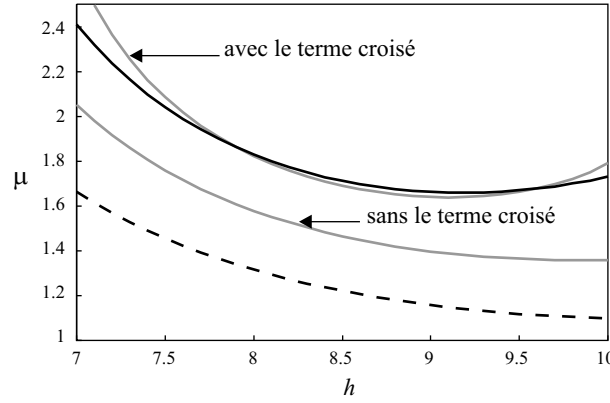


FIG. 7.7 – Influence du terme croisé dans le développement 7.20. Courbes des seuils convectif (en pointillés) et absolu obtenu numériquement (en trait plein noir) et absolu obtenu par le développement 7.20 (en traits gris). $\sigma = -17$.

Enfin, pour vérifier la validité des résultats obtenus par la résolution numérique du système d'équations réunies dans le tableau 7.1, nous avons réalisé des simulations numériques intégrant directement le système de boucle Kerr avec dérive (Eq. 7.18a-b) dans la zone de paramètres étudiée précédemment ($\sigma = 4.23$, $h = 1.3$). Celles-ci permettent d'observer directement le devenir d'une perturbation locale appliquée en $(x, t) = (0, 0)$. La figure 7.8 présente les diagrammes spatio-temporels obtenus avec un pompage spatialement homogène (onde plane) pour chacun des deux régimes. On observe bien dans chaque cas que la perturbation croît dans le temps et s'élargit dans l'espace pour donner lieu à une instabilité sous forme de modulation d'intensité dont les limites spatiales, i.e. les fronts d'enveloppe, sont repérées par les lignes en pointillés. Pour le diagramme 7.8a, les deux fronts se propagent vers les x positifs : le régime est convectif. Dans le cas 7.8 b, les deux fronts partent dans des directions opposées : le régime est absolu. Ces simulations confirment également l'analyse et notamment la validité de l'approche perturbative. Au delà de la concordance qualitative on constate aussi un excellent accord quantitatif, les seuils détectés par simulation concordent parfaitement avec ceux déterminés par l'analyse : $\mu_c = 1.79$ et $\mu_a = 1.93$ pour $\sigma = 4.23$ et $h = 1.3$.

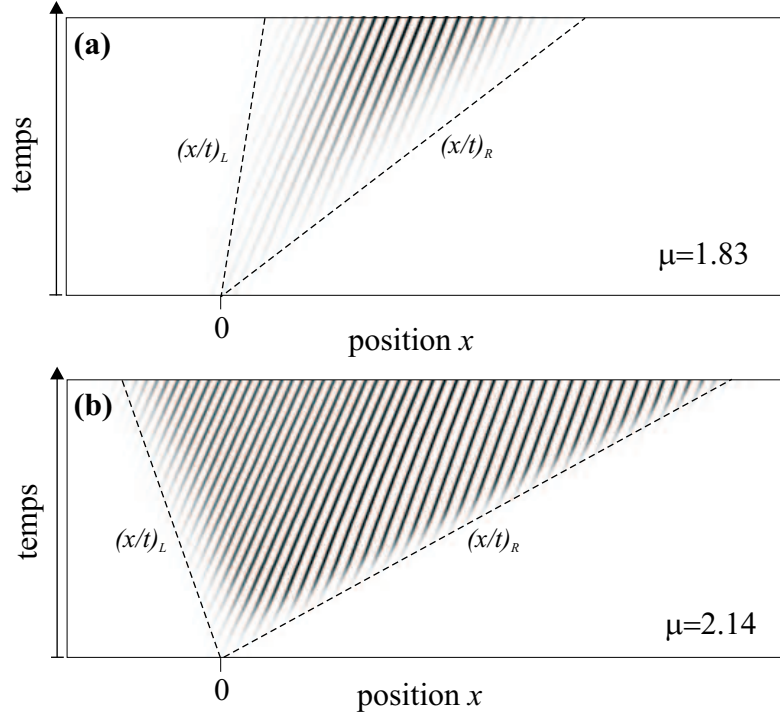


FIG. 7.8 – Réponse à une perturbation localisée en $x = 0$ pour une pompe homogène sans bruit. (a) instabilité convective ; (b) instabilité absolue. $\sigma = 4.23$, $h = 1.3$.

En conclusion, le système de boucle Kerr avec dérive présente donc les instabilités convectives et absolues dont nous pouvons prédire les seuils d'apparition *en absence de bruit et en pompe uniforme*. Nous allons maintenant voir comment mettre en évidence ces instabilités dans le système réel après avoir montré qu'elles subsistaient en dépit des conditions expérimentales de bruit et de pompage gaussien.

7.3 Mise en évidence expérimentale en présence de bruit et avec une pompe gaussienne

L'objectif est maintenant d'observer et de caractériser expérimentalement les deux régimes d'instabilité. Pour cela, il faut d'abord vérifier que les seuils convectif et absolu subsistent aux contraintes expérimentales, à savoir le profil gaussien du faisceau de pompe qui décale les seuils d'instabilité (c.f. section 2.2.4) et l'agitation thermique, source de bruit, qui affecte la dynamique de manière drastique, tout particulièrement pour le régime convectif. Heureusement, les simulations numériques vont nous permettre de montrer que ces caractéristiques expérimentales ne modifient pas qualitativement le scénario des instabilités. Menées dans la zone de paramètres de nos expériences, ces simulations vont nous permettre de découpler les effets de chacun de ces ingrédients. Nous procéderons comme suit :

1. Tester si le régime purement convectif persiste en présence d'une pompe gaussienne (sans bruit). Nous examinerons aussi la modification des seuils dans ces conditions.
2. Ajouter le bruit et établir un critère pour distinguer les trois différents régimes (sous le seuil, régime convectif et régime absolu) et vérifier si l'addition de bruit affecte ou non la valeur des seuils trouvés à l'étape précédente.
3. Appliquer le critère, alors défini, aux données expérimentales pour mettre en évidence expérimentalement les instabilités convective et absolue.

7.3.1 Influence de la pompe gaussienne

La méthode la plus directe pour vérifier si les deux régimes restent distincts en présence d'une pompe gaussienne consiste à simuler numériquement – à défaut de pouvoir la calculer – la réponse impulsionnelle du système. Nous analysons donc l'évolution spatio-temporelle d'une petite perturbation localisée au sommet de la gaussienne (en $(x, t) = (0, 0)$) en observant, en cas d'amplification, le comportement du front d'onde le plus lent (rayon $(x/t)_L$).

La figure 7.9 présente des diagrammes spatio-temporels (x, t) pour $\sigma = 4.23$ et un rapport d'aspect $\eta = 28$, calculés dans la zone de μ correspondant à la transition entre les différents régimes. En absence de bruit, pour $\mu = 1.76$ (Fig. 7.9a), la perturbation s'estompe, le taux de croissance temporelle est négatif, la solution homogène est stable. Pour $\mu = 2.00$ (Fig. 7.9b), il y a amplification de la perturbation, mais le paquet d'onde déstabilisé dérive plus vite qu'il ne s'étale. Aux temps longs l'intégralité de l'instabilité atteint des zones où l'intensité est trop faible. La structuration finit par disparaître totalement : le régime est convectif. Enfin, dans le cas où $\mu = 2.18$ (Fig. 7.9c), l'intégralité de l'espace disponible est envahi par la solution modulée : le régime est absolu.

Rappelons que la coordonnée spatiale sur la figure 7.9 est donnée ici en unité de w (demi-largeur à $1/e$ du profil gaussien du champ de pompe). On remarque que l'effet d'entraînement de la vitesse de groupe décale la structure finale dans le sens de la dérive (x positifs). Les encadrés des figures 7.9b et 7.9c représentent les profils d'intensité, ils permettent de visualiser l'étalement de la structuration sur le profil global. En particulier, en régime absolu (Fig. 7.9c), le paquet d'onde est limité du côté négatif par l'effet de seuil à partir duquel il y a amplification tandis que du côté positif, le front est repoussé par l'effet combiné de la décroissance temporelle et de la dérive. En conséquence, du côté positif, on observe une zone de structuration sous le seuil d'amplification.

Des simulations effectuées pour différentes valeurs du rapport d'aspect montrent que l'écart entre seuils convectif et absolu augmente quand η diminue (Fig. 7.10), aboutissant à un plus large domaine de μ où l'instabilité convective est observable.

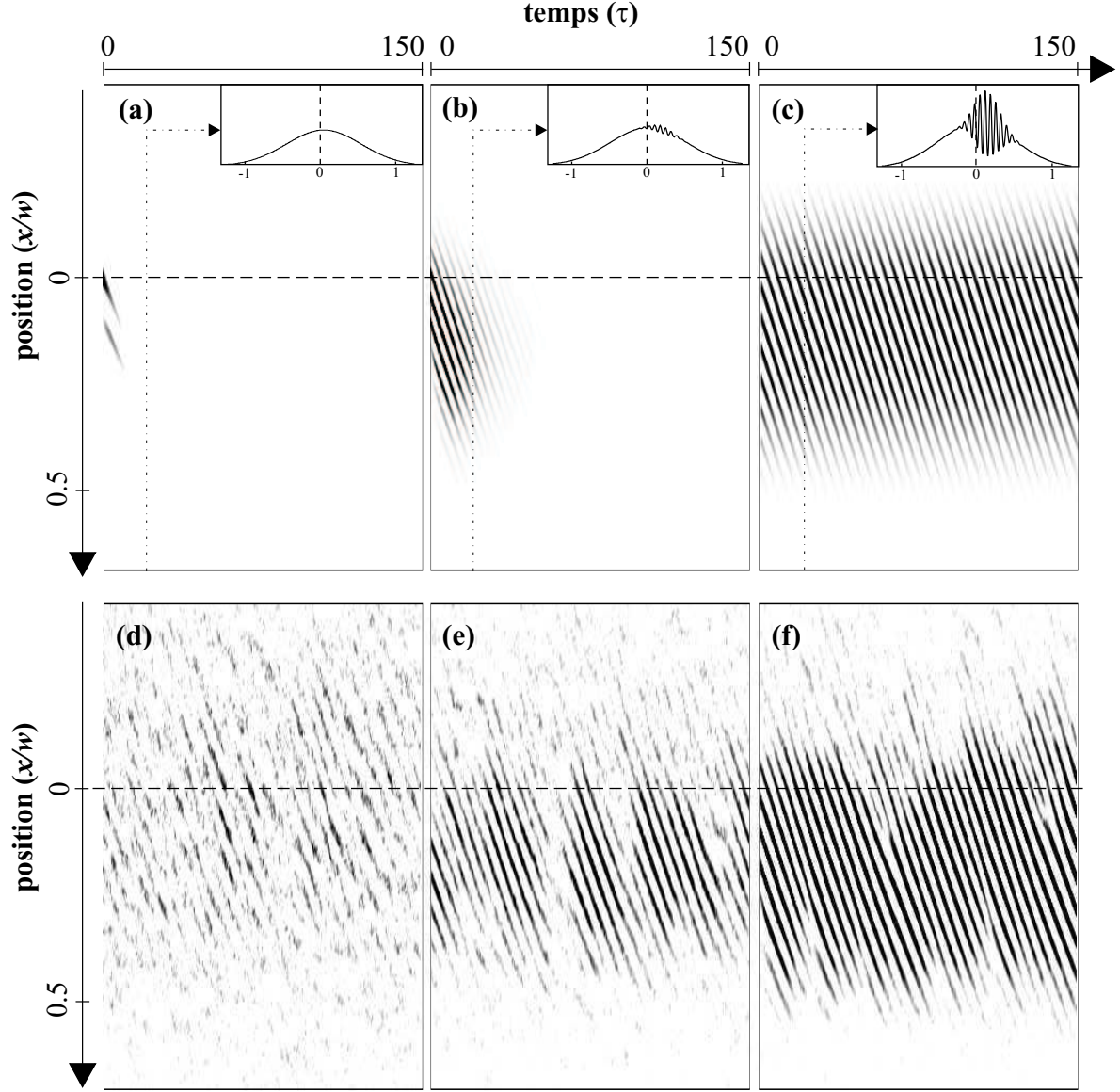


FIG. 7.9 – (a)-(c) Simulations numériques de l'évolution d'une perturbation appliquée en $(x, t) = (0, 0)$ dans le cas d'un faisceau de pompe gaussien sans bruit. (d)-(f) Simulations numériques dans les mêmes conditions que (a)-(c) mais en présence de bruit. (a) et (d) $\mu = 1.76$: régime stable. (b) et (e) $\mu = 2.00$: régime convectif. (c) et (f) $\mu = 2.18$: régime absolu. $\eta = 28$, $\sigma = 4.23$, $h = 1.3$, $\varepsilon = 0.08$.

7.3.2 Influence du bruit sur le régime convectif : les structures entretenues par le bruit

Lorsqu'un état d'équilibre est instable, une perturbation appliquée au système croît et entraîne celui-ci vers un état différent. En absence de bruit, l'instabilité convective est une instabilité éphémère dès que le système est spatialement fini (e.g. pompe gaussienne) puisqu'aux

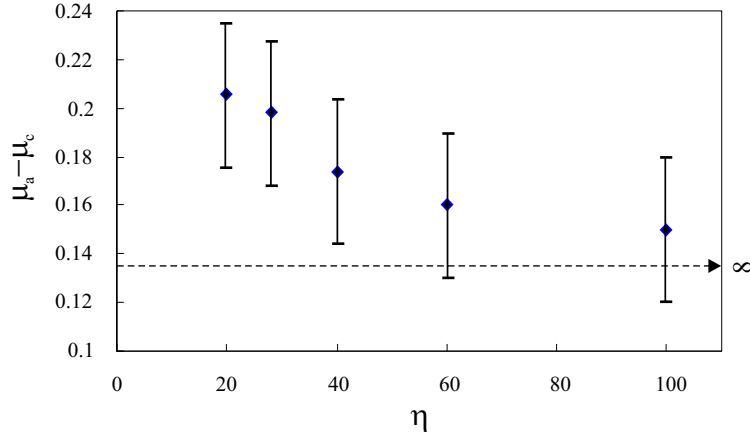


FIG. 7.10 – Dépendance de la largeur $\mu_a - \mu_c$ en fonction du rapport d'aspect η pour $\sigma = 4.23$ et $h = 1.3$.

temps longs, il retourne à son état d'origine. En quelque sorte, l'état de base est asymptotiquement stable. En présence de bruit, la situation est très différente car celui-ci constitue une source de perturbations permanentes dans l'espace et le temps, de sorte que le système ne revient finalement jamais à son état homogène. C'est pour cela que l'instabilité convective en présence de bruit engendre la formation de *structures entretenues par le bruit* (SEB) aussi appelé *régime d'amplification microscopique*.

Nous prenons maintenant en compte le bruit dans nos simulations numériques ($\varepsilon \neq 0$) afin d'obtenir les SEB telles que nous nous attendons à les observer dans nos expériences. Les figures 7.9d-f présentent des diagrammes (x, t) obtenus avec les mêmes paramètres que pour les figures 7.9a-c mais en ajoutant le bruit. Sous le seuil convectif – défini sans bruit – le diagramme décrit une intermittence de rouleaux de très faible amplitude dérivant vers les x positifs. Ces structures sont associées aux précurseurs induits par le bruit décrits dans le chapitre 4, leur phase spatiale est aléatoire puisqu'ils apparaissent et disparaissent de manière erratique. Ces précurseurs en présence de dérive seront décrits plus en détails dans la section 8.2.

En régime convectif, les diagrammes spatio-temporels sont modifiés de manière significative (Fig. 7.9e). Les rouleaux prennent naissance dans la zone centrale de la gaussienne et sont amplifiés en même temps qu'ils dérivent. Le bruit entraîne de manière continue la formation d'instabilités générant une SEB. Au dessus du seuil absolu (défini sans bruit) le domaine d'existence des rouleaux s'étend sur une plus large zone mais il n'existe plus de différence qualitative entre les régimes convectif et absolu permettant de les distinguer sans ambiguïté. L'idée est donc de déterminer un critère, si possible quantitatif, qui permette de les identifier.

7.3.3 Définition d'une signature des régimes convectif et absolu dans les conditions expérimentales

Dynamiquement, la différence entre les deux régimes réside dans la manière avec laquelle l'instabilité envahit (ou non) l'espace. Parmi plusieurs tests basés sur l'évolution de la largeur de la zone structurée, l'évolution de la position moyenne de la limite de la structure du côté "contre-courant" $\bar{u}_f$ en fonction de μ s'est montré le plus pertinent⁵. Plus précisément, cette valeur $\bar{u}_f$ est définie comme la position moyenne où l'amplitude des rouleaux atteint 10% de sa valeur maximale pour un μ donné. La position de $\bar{u}_f$ est repérée par la ligne en tirets sur la figure 7.11 pour un exemple de régime convectif et de régime absolu. La position $u_f(t)$ calculée à chaque pas de temps est obtenue à partir de l'amplitude de la modulation au temps t . Cette dernière est fournie par la transformée de Hilbert effectuée sur une fenêtre, dans l'espace des k , incluant tous les nombres d'ondes spatiaux du paquet d'ondes. L'évolution de

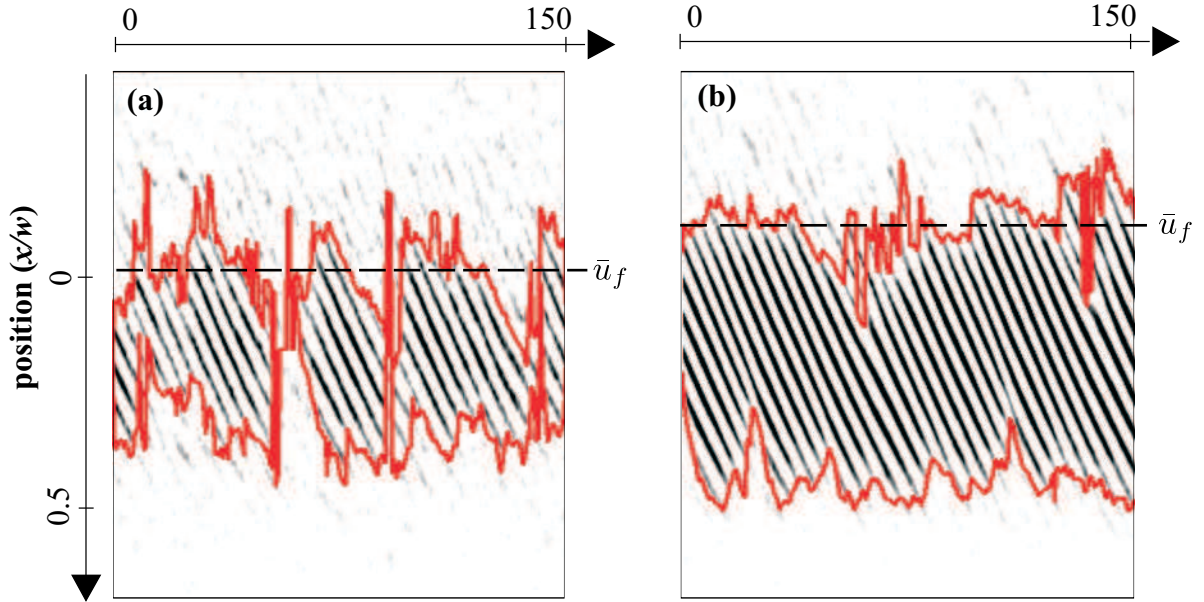


FIG. 7.11 – Position des frontières (en points rouges) de la zone structurée. $\bar{u}_f$, position moyenne de la frontière à contre courant (a) régime convectif (b) régime absolu.

$\bar{u}_f$ en fonction du paramètre de pompe μ est tracée sur la figure 7.12a. La position des seuils en absence de bruit μ_c et μ_a est repérée par les droites verticales en pointillés. On remarque qu'elles coïncident avec les ruptures de pente dans l'évolution de $\bar{u}_f$ séparant les trois types de régime.

La première zone correspond à la formation de précurseurs, leur apparition étant aléatoire, les valeurs de $\bar{u}_f$ correspondantes n'ont pas de signification particulière. La transition vers

⁵l'affinement du pic principal de la TF temporelle a également été étudié et confirme la présence d'une zone convective.

la deuxième zone est marquée par un saut dans l'évolution de $\bar{u}_f$ correspondant au seuil d'instabilité convective ($\mu = 1.89$). Dans cette zone (notée C) les structures naissent dans la zone centrale de la gaussienne, là où le taux de croissance est positif, et sont ensuite entraînées par la dérive (fig.7.11b). Enfin, dans la dernière zone ($\mu > 2.09$), notée A, $\bar{u}_f$ augmente de manière quasi-linéaire avec μ , ce qui signifie que l'étalement de l'instabilité gagne de l'espace à contre-courant : l'instabilité est absolue. La concordance entre la rupture de pente dans l'évolution de $\bar{u}_f$ et les seuils μ_c et μ_a définis sans bruit confirme la pertinence de l'indicateur $\bar{u}_f$. Mais surtout, les sauts dans l'évolution de la pente de $\bar{u}_f$ fournit un critère de mise en évidence du régime convectif dans les conditions expérimentales.

Le tableau 7.2 rassemble les valeurs des différents seuils obtenus dans les différentes situations. Il confirme que la présence de bruit dans le système ne perturbe pas la valeur des seuils ni le scénario des instabilités.

	μ_c	μ_a	$\Delta\mu$	méthode de détection
profil plat sans bruit (=analytique)	1.796	1.931	-	perturbation locale
profil gaussien sans bruit	1.89	2.09	0.03	perturbation locale
profil gaussien avec bruit	1.89	2.09	0.03	détection du front

TAB. 7.2 – Comparaison des valeurs numériques des seuils convectif (μ_c) et absolu (μ_a). $\sigma = 4.23$, $h = 1.3ld$, $\eta = 28$. L'incertitude $\Delta\mu$ sur les valeurs de seuils vient de l'incrément sur μ .

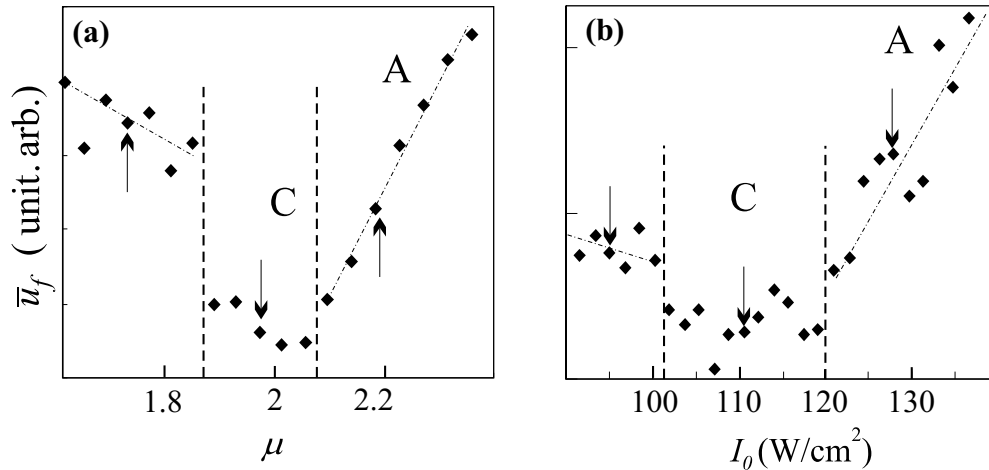


FIG. 7.12 – Evolution de la position moyenne de la frontière à contre courant $\bar{u}_f$ en fonction du paramètre de pompe μ . (a) Simulations numériques ; (b) expériences. $\sigma = 4.23$, $h = 1.3ld$, $\eta = 28$.

7.3.4 Mise en évidence expérimentale des régimes convectif et absolu

Les expériences correspondantes ont été réalisées dans la configuration 1D et pour les mêmes conditions (paramètres σ et h) que celles des simulations [95]. L'angle α (Fig.7.3) nécessaire pour obtenir un décalage transverse $h = 1.3l_d$ est de 1.3 mrad ce qui nous permet de négliger la légère inclinaison du faisceau retour par rapport à l'aller. Les diagrammes enregistrés pour des intensités incidentes croissantes sont présentés sur la figure 7.13. Le scénario est identique à celui obtenu par les simulations numériques : une zone de précurseurs (Fig. 7.13a), une zone de structures entretenues par le bruit (Fig. 7.13b), puis une zone où l'instabilité croît même à contre-courant (Fig. 7.13c). L'analyse de l'évolution du front $\bar{u}_f$ (Fig. 7.12b) déterminée à partir des données expérimentales confirme la présence des trois régimes distincts comportant les mêmes caractéristiques que ceux obtenus par les simulations numériques incluant bruit et pompe gaussienne. Nous pouvons donc conclure à l'existence d'un régime convectif (région marquée d'un C sur la figure 7.12) et localiser approximativement chacun des deux seuils (pointillés verticaux sur la figure 7.12b). Quantitativement, l'accord entre simulation et expérience est bon puisque les rapports μ_a/μ_c sont de 1.1 (pour l'expérience) et 1.07 (pour les simulations).

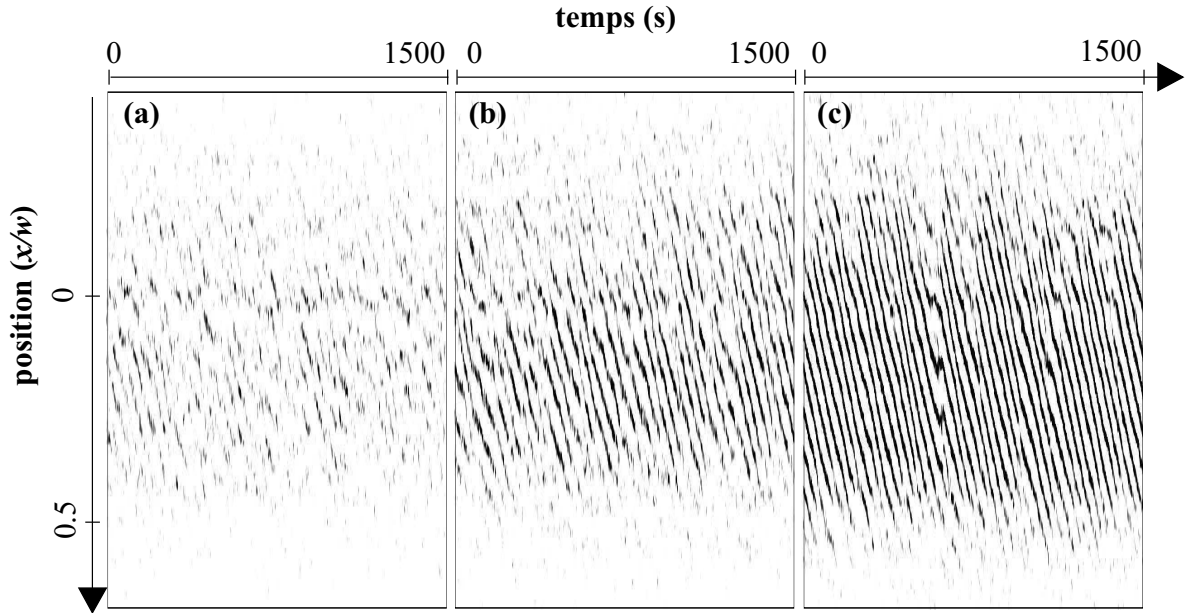


FIG. 7.13 – Acquisitions expérimentales de diagrammes (x,t) dans le régime : (a) précurseurs ($I_0 = 95 \text{ W/cm}^2$); (b) convectif ($I_0 = 110 \text{ W/cm}^2$); (c) absolu. ($I_0 = 128 \text{ W/cm}^2$); $\sigma = 4.23$, $h = 1.3l_d$, $w = 1400\mu\text{m}$. Chaque diagramme correspond à un régime différent révélé par le comportement de $\bar{u}_f$ en fonction de l'intensité laser incidente, repérée sur le graphe de la figure 7.12b par des flèches verticales.

Chapitre 8

Les structures dans le système 1D à dérive

Jusqu'ici, nous avons caractérisé le comportement du système pour de faibles décalages transverses, plus spécifiquement $h < 2l_d$, valeurs suffisantes pour mettre en évidence expérimentalement la présence de chacun des régimes instables convectif et absolu. Nous proposons dans ce chapitre une étude de la dynamique du système pour de larges décalages transverses ($h > 2l_d$). En nous appuyant sur une étude du système 1D avec dérive présentée dans la référence [12, 89] dont la résolution analytique a été établie à partir de l'analyse de stabilité marginale, nous présentons une approche plus générale basée sur la théorie des instabilités convectives et absolues développée dans le chapitre précédent (théorie qui n'impose aucune limite sur la valeur du paramètre de dérive h). Nous étudions les différentes structures pouvant être déstabilisées à partir de l'équation de dispersion 7.19, leurs régimes convectif et absolu, l'évolution de leur nombre d'onde, etc... En particulier, nous mettons l'accent sur la dynamique induite par le décalage à travers les notions de vitesse de groupe et de phase. Ceci nous permet de montrer, par exemple, que les différentes structures existantes peuvent toutes être obtenues dans un état stationnaire. Le système peut alors être assimilé à un générateur de structures stationnaires sélectionnables par simple modification du paramètre de dérive h (par analogie à un laser pouvant émettre à plusieurs longueurs d'ondes et dont la sélection de la fréquence d'émission se fait par inclinaison du réseau intracavité). Enfin, nous terminons par l'étude des précurseurs en présence de dérive mettant en évidence leur pouvoir de prédiction sur la dynamique même des structures qui se développent au dessus du seuil.

8.1 Structures obtenues au seuil d'instabilité primaire

Dans cette section, nous nous intéressons à l'évolution et à la sélection des structures qui apparaissent au seuil d'instabilité primaire avec la dérive h . Pour cela nous étudions l'évolution du nombre d'onde $k_c(h)$ et du seuil convectif $\mu_c(h)$ associé en examinant le comportement des

8.1. Structures obtenues au seuil d'instabilité primaire

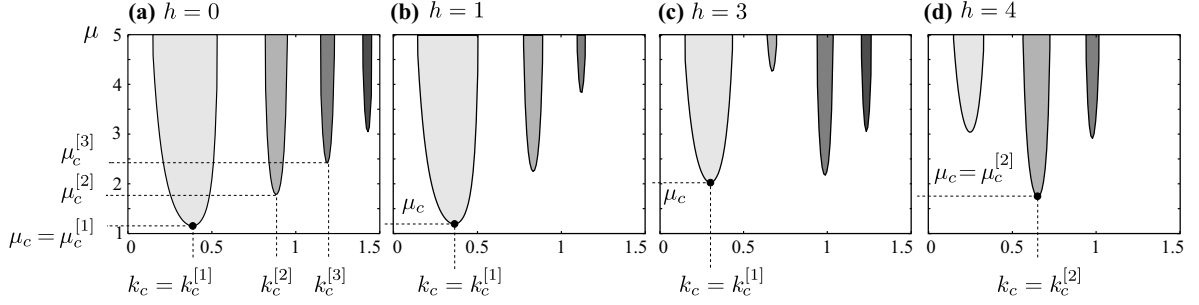


FIG. 8.1 – *Evolution des courbes de stabilité marginale avec h . $\sigma = 10$. Les valeurs de h sont en unité de l_d . Chaque courbe est repérée par un niveau de gris différent.*

courbes de stabilité marginale avec h . La figure 8.1 montre l'évolution des quatre premières courbes pour $\sigma = 10$. Les parties grisées indiquent les zones d'existence des nombres d'ondes transverses pouvant apparaître dans le système. Compte tenu de leur forme nous appellerons ces courbes des *langues*. Le premier mode déstabilisé, correspondant à l'instabilité primaire, est déterminé par le minimum absolu des ces langues (repéré par un point noir sur les graphes de la figure 8.1). On remarque que lorsque h reste petit, ce minimum μ_c appartient toujours à la première langue, i.e. la langue de nombre d'onde k le plus faible. Ceci est dû aux forces élastiques du cristal liquide qui s'opposent moins à la formation de modulations de longues périodes spatiales que de courtes périodes. Par contre, lorsque h augmente, les courbes de stabilité marginale évoluent jusqu'à ce que le minimum global de ces courbes ne soit plus associé à la première langue mais par exemple à la deuxième comme c'est le cas sur la figure 8.1d. Il y a alors discontinuité dans l'évolution de k_c et μ_c . Rappelons que k_c correspond au premier nombre d'onde déstabilisé (mode critique) pour une valeur de h donnée et μ_c au paramètre de pompe associé. Ainsi pour obtenir l'intégralité de la courbe de seuil convectif minimale μ_c en fonction de h , il faut tenir compte de l'ensemble des langues susceptibles d'être associées au minimum global. La figure 8.2a montre l'évolution de chacun des minima $\mu_c^{[p]}$ des cinq premières langues¹ pour $\sigma = 10$, le trait gras insiste sur les minima globaux et dessine ainsi la courbe d'instabilité convective primaire $\mu_c(h)$.

¹Nous utiliserons l'exposant $[p]$ pour désigner la $p^{\text{ième}}$ langue comptée par ordre croissant du nombre d'onde correspondant et l'indice c pour désigner le minimum de la langue. Par exemple $\mu_c^{[2]}(h)$, $k_c^{[2]}(h)$ et $\Lambda_c^{[2]}(h)$ désignent les valeurs de μ , k et Λ associées au minimum de la deuxième langue. Les caractéristiques du mode critique (associé au minimum global des $\mu_c^{[p]}$) sont notés μ_c , k_c et Λ_c .

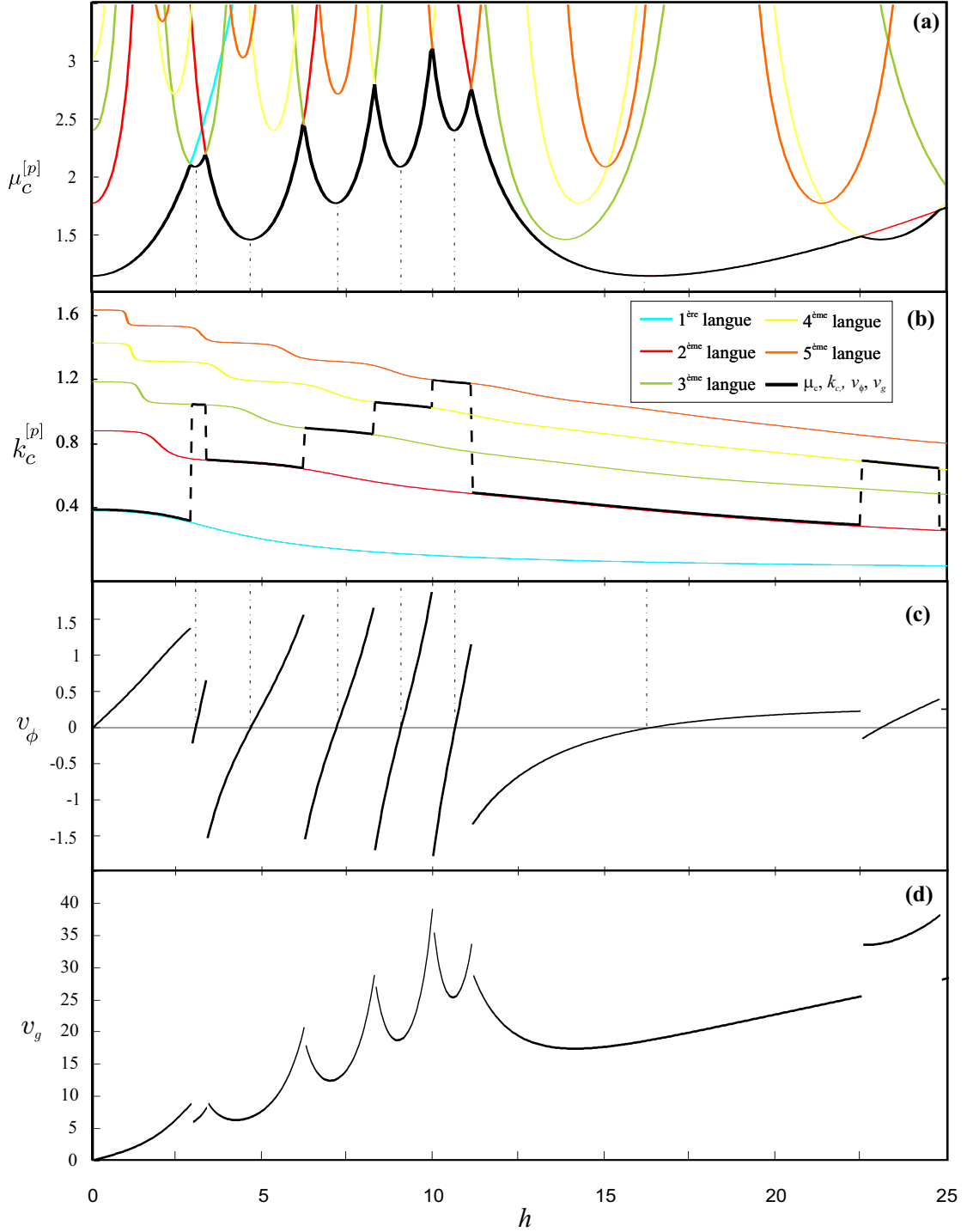


FIG. 8.2 – Evolution en fonction du décalage latéral h (a) des $\mu_c^{[p]}$ associés aux minima des cinq premières langues de la courbe de stabilité marginale et des (b) nombres d'onde $k_c^{[p]}$ associés ; (c) Evolution de la vitesse de phase v_ϕ du mode critique ; (d) Evolution de la vitesse de groupe v_g du mode critique. Le mode critique est surligné en trait gras noir sur les graphes (a) et (b). $\sigma = 10$.

L'évolution de la structure obtenue au seuil convectif correspond donc à une modification du nombre d'onde k_c qui évolue par paliers tout en diminuant constamment sur chaque palier (Fig.8.2b). Son seuil d'apparition μ_c quant à lui suit une succession de "rebonds inversés" dont chaque rupture de pente correspond à une discontinuité dans l'évolution de $k_c(h)$ et dont chaque extrema correspond à une inversion de la vitesse de phase², i.e. de l'inclinaison des rouleaux dans le diagramme spatio-temporel (Fig. 8.2c). Ainsi, chaque minimum local de la courbe $\mu_c(h)$ correspond à une vitesse de phase nulle $v_\phi = 0$.

Des structures stationnaires en présence d'une dérive

Ce système offre donc la possibilité, non seulement de sélectionner des structures de nombres d'onde différents, mais surtout de générer des structures stationnaires – en dépit de la dérive. L'explication de ce phénomène de stationnarité est assez simple. Pour illustrer notre propos reportons nous au schéma de la figure 8.3 qui représente le décalage de l'onde modulée en amplitude (MA) après l'aller retour par rapport à l'onde incidente modulée en phase (MP). On remarque que pour les cas des figures 8.3b et 8.3d les deux ondes se retrouvent en opposition ou en phase ($MP \rightarrow -MA$ ou $MP \rightarrow +MA$) ce qui, compte tenu de la non-linéarité Kerr donne une amplification maximale "en place" (c.f. l'effet Talbot Fig.1.3). La structure est alors stationnaire ($v_\phi = 0$) dès que le décalage h est un multiple de la demi-périodicité spatiale Λ , $h = n\frac{\Lambda}{2}$. Dans les deux autres cas (a) et (c) l'amplification est maximale là où les courbes MP/MA se croisent (tirets verticaux sur le schéma), i.e. décalée par rapport à la modulation initiale. Ainsi, à l'instant $t + dt$ la nouvelle modulation de phase vue par l'onde aller sera décalée dans le sens de la dérive pour le cas (a) (dans le sens inverse pour le cas (c)) par rapport à la modulation à l'instant t .

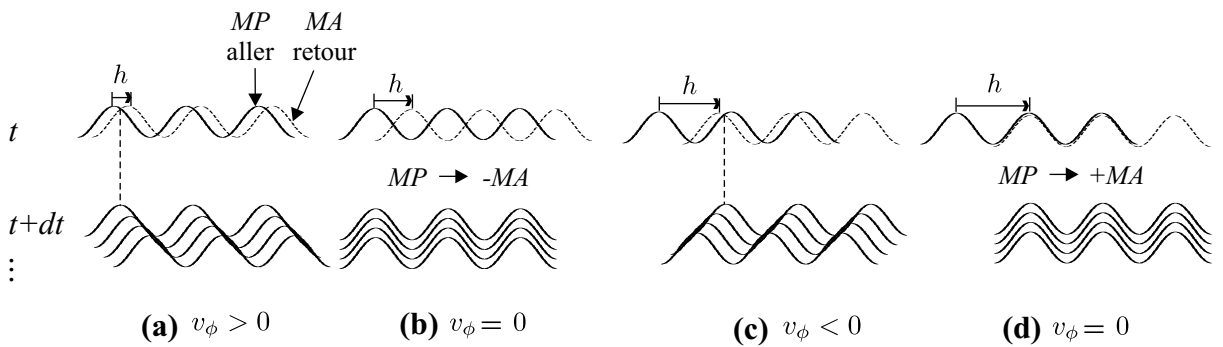


FIG. 8.3 – Parallèle entre la vitesse de phase des structures et le recouvrement des modulations de phase du faisceau aller (MA) et des modulations d'amplitude du faisceau retour (MP) pour quatre valeurs de h distinctes.

²la vitesse de phase est définie comme $v_\phi = \frac{\Re[\Omega_c]}{\Re[k_c]}$.

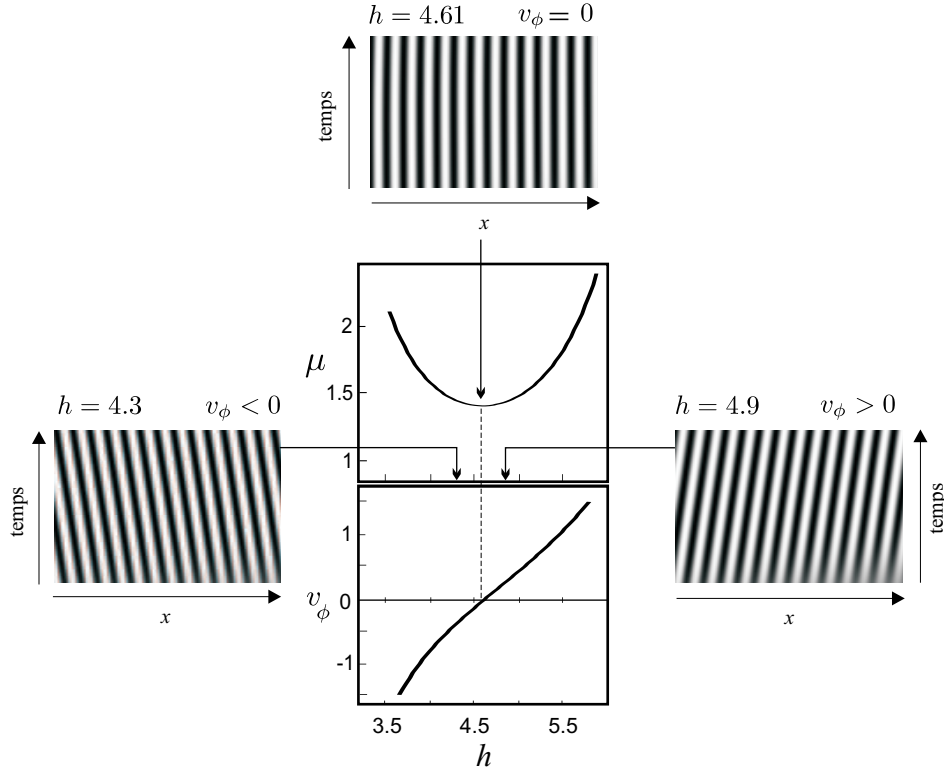


FIG. 8.4 – Inversion de la vitesse de phase v_ϕ au voisinage d'un minimum de $\mu_c(h)$. $\sigma = 10$.

La figure 8.4 met en évidence ce phénomène autour de la valeur $h = 4.61$ correspondant à un minimum de μ_c . Pour $h = 4.3$, les rouleaux dérivent vers les x négatifs (v_ϕ est négatif), pour $h = 4.61$ alors que pour $h = 4.9$, ils dérivent vers la droite (v_ϕ est positif). Les rouleaux stationnaires sont obtenus pour les minima locaux de la courbe $\mu_c = f(h)$. En effet, dans ces cas particuliers, le recouvrement MP/MA offre une efficacité maximale d'amplification, contrairement aux autres cas (Fig. 8.3 a et c) où le recouvrement – et donc l'efficacité – n'est que partiel, ce qui implique des seuils plus élevés. Le franchissement d'un minimum de μ_c correspond donc à un changement de signe de v_ϕ .

Comment la dérive peut diminuer les seuils d'instabilité primaire

Une autre originalité de ce système est de pouvoir générer des structures pour des seuils plus bas que celui du système sans dérive. Cet effet qui est rapporté dans [12] n'est pas intuitif et le but de cette section est d'en donner une explication. En effet, l'idée première est de penser qu'il faut plus d'énergie pour maintenir une modulation lorsqu'on lui applique un flot transverse plutôt que quand on ne lui en applique pas. Cette diminution de seuil est illustrée sur la figure 8.6a où l'on peut constater que pour $7.5 < h < 13$ la structure primaire observée est obtenue pour des valeurs de seuil plus basses que celle du système sans dérive ($h = 0$).

8.1. Structures obtenues au seuil d'instabilité primaire

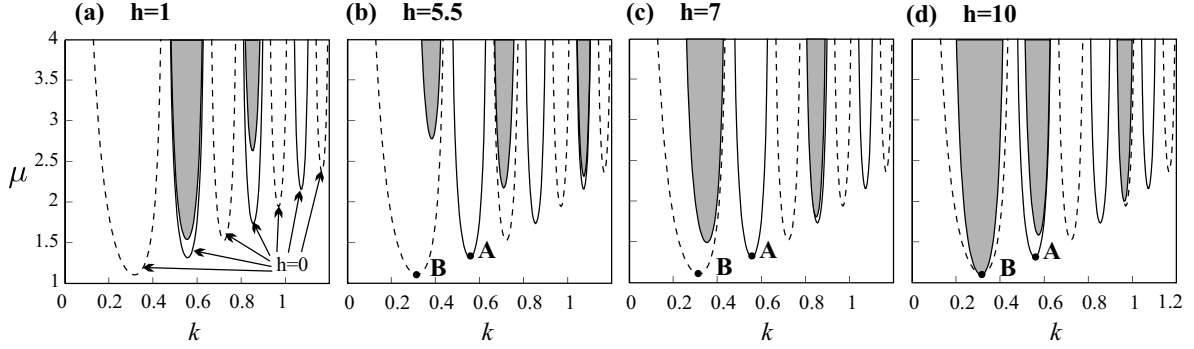


FIG. 8.5 – Evolution avec h pour $\sigma = -15$ des courbes de stabilité marginale "langues $_h$ " (en gris) à l'intérieur des langues $_0$ définies pour $h = 0$ pour $\sigma = -15$ (en trait plein) et $\sigma = 15$ (en tirets). Les paramètres de l'instabilité primaire (k_c, μ_c) sont définis par le minimum global des langues $_h$.

Cet effet provient de l'évolution des langues avec h , que l'on nommera langues $_h$ pour les différencier des langues $_0$ définies pour $h = 0$. En effet, pour $h \neq 0$, les langues $_h$ sont plus étroites que celles pour $h = 0$ et évoluent à l'intérieur des langues $_0$ (Fig. 8.5) en explorant toutes ces dernières à la fois pour $\sigma > 0$ et pour $\sigma < 0$. Ainsi, lorsque le système à $h = 0$ est dans une configuration de non-linéarité négative, μ_c correspond au minimum global des langues définies pour $\sigma < 0$ (i.e. le point A sur la Fig. 8.5b). On comprend alors que les langues $_h$, parcourant l'intégralité des langues $_0$ avec h , il va advenir des valeurs de h où une langue $_h$ va explorer la 1^{ère} langue $_0$ ayant un seuil (point B) plus bas que celui associé au point A, comme c'est le cas sur la figure 8.5d.

Physiquement, cette situation (A $\rightarrow$ B) correspond à un décalage $h = \frac{\Lambda(h)}{2}$ illustré sur la figure 8.3b avec un système où σ est négatif. En effet, dans ce cas particulier le décalage est tel que la conversion initialement $MP \rightarrow +MA$ pour $h = 0$ devient $MP \rightarrow -MA$ (la modulation d'amplitude revient en opposition par rapport à la modulation de phase du faisceau aller). L'opération équivaut alors à un changement de signe de la non-linéarité en terme de condition d'amplification (c.f. Fig. 1.4). En l'occurrence on passe ici d'une non-linéarité négative à une positive. Or une conversion complète $MP \rightarrow -MA$ sur une distance $2d$ restée inchangée n'est réalisable, selon l'effet Talbot, que pour un nombre d'onde transverse vérifiant :

$$\Lambda^+ = \sqrt{\frac{2\lambda_0 d}{2p + \frac{1}{2}}} \quad (8.1)$$

Le système, choisissant naturellement la solution la moins coûteuse en énergie, va développer la modulation transverse associée à $p = 0$, qui n'est autre que celle associée à la première langue du système pour $\sigma > 0$ (le point B sur la Fig. 8.5d), et dont le seuil d'instabilité est plus faible que pour $h = 0$.

Confirmation expérimentale des propriétés de stationnarité et d'abaissement de seuil

Les propriétés citées précédemment sont observées expérimentalement dans notre système comme on peut le voir sur la figure 8.6 où est représentée l'évolution de $\frac{\mu_c(h) - \mu_c(0)}{\mu_c(0)}$ en fonction de h .

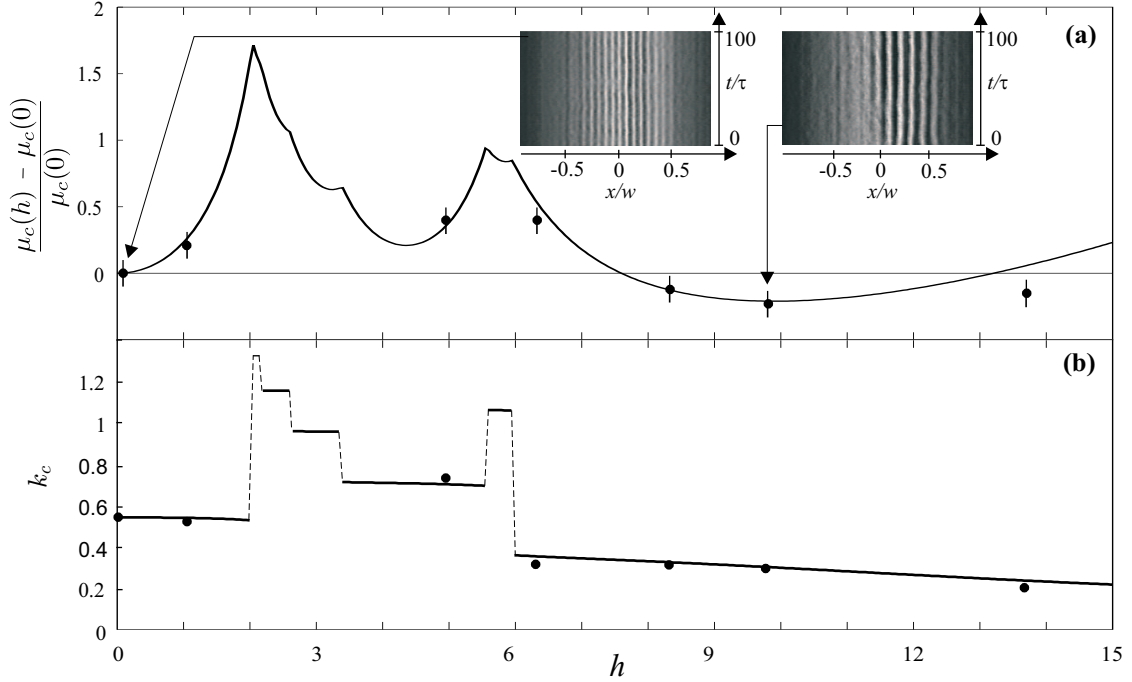


FIG. 8.6 – Evolution théorique en fonction du paramètre h (a) du seuil convectif et (b) du nombre d'onde critique pour $\sigma = -15$ (trait noir). Les points noirs sont des données expérimentales renormalisées par rapport à $\mu_c(0)$ pour (a) et $k_c(0)$ pour (b). Le rapport d'aspect à $h = 0$ est $\eta = 28$. Les barres verticales sur les données expérimentales sont des estimations d'incertitudes sur la valeur du seuil.

Les points noirs sont issus d'acquisitions expérimentales réalisées pour $\sigma = -15$, la méthode de détection du seuil convectif utilisée est celle basée sur l'évolution de $\bar{u}_f$ (section 7.3.3). Ces résultats confirment qualitativement et quantitativement le comportement de diminution du seuil convectif provoqué par la non-localité. Seule la dernière valeur (vers $h = 14$) est significativement plus faible que les prédictions théoriques. Ceci est probablement dû à une baisse du rapport d'aspect lié au recouvrement des gaussiennes aller et retour. On remarque aussi surtout la très bonne concordance dans l'évolution de k_c et μ_c (Fig. 8.6) et donc dans l'obtention de structures de différentes longueurs d'onde transverses visibles sur les diagramme (x, t) de la figure 8.6a. Ceux-ci confirment par ailleurs la stationnarité des structures lorsqu'elles sont associées à un minimum de la courbe d'instabilité primaire.

Seuils absolus

L'étude menée dans la section précédente a permis d'appréhender les structures observées au seuil d'instabilité le plus bas. Si on continue d'augmenter la valeur de μ pour un h donné, d'autres nombres d'onde peuvent être déstabilisés compte tenu de la présence de plusieurs langues de stabilité. Pour être complet dans le recensement des domaines d'existence des différentes structures possibles, il convient d'y ajouter les seuils d'instabilité absolue associés à chaque structure. De même que pour les seuils convectifs, le calcul des seuils d'apparition des structures absolument instables nécessite la prise en compte des multiples modes susceptibles de se déstabiliser. Prenons l'exemple $\sigma = -15$ et appliquons la méthode de détection du point selle détaillée dans la section 7.2.3 à chacun des 4 premiers modes. Les courbes de seuils absolus (traits pleins) sont présentées avec les courbes de seuils convectifs correspondantes (tirets) sur la figure 8.7.

Pour un mode donné, le domaine de régime purement convectif (zone entre tirets et traits pleins d'une même couleur) peut atteindre des écarts relatifs de 50% (Fig. 8.7 vers $h = 11$ pour le mode $\mu^{[1]}$). Ainsi, un autre mode peut alors se déstabiliser et atteindre un régime absolu avant même que le mode primaire n'ait atteint le sien. Un exemple de cette situation est repérée par les tirets verticaux sur la figure 8.7.

De plus, notons que lorsque $\mu > \mu_c$, le nombre d'onde principal du paquet d'onde déstabilisé s'annulent évolue légèrement ($k \neq k_c$). Comme la vitesse de phase dépend du nombre d'onde considéré $v_\phi = f(k)$, une structure stationnaire au seuil peut dériver lorsque $\mu > \mu_c$. Inversement, une structure qui dérive au seuil convectif peut devenir stationnaire pour des intensités incidentes plus élevées.

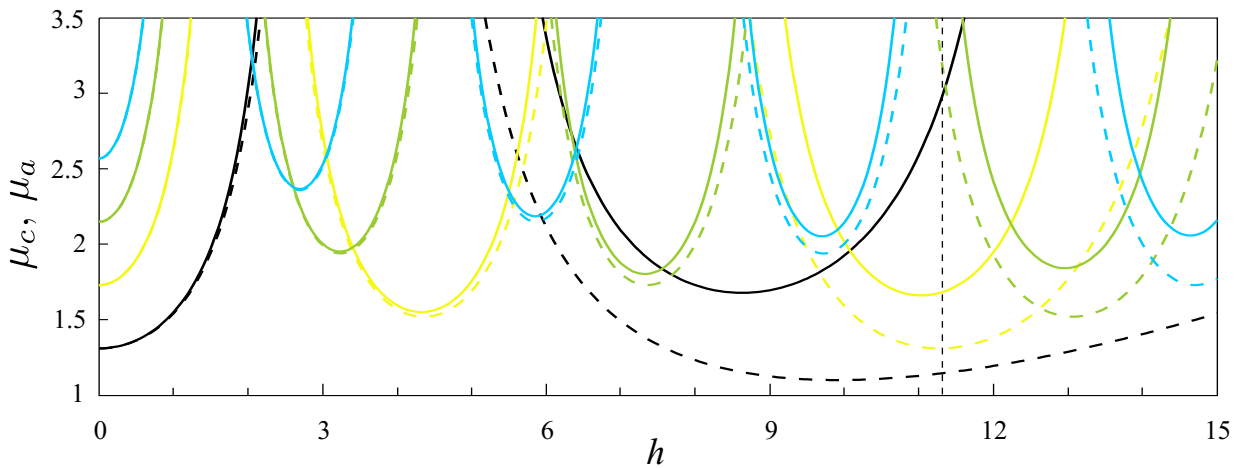


FIG. 8.7 – Evolution théorique en fonction du paramètre h des seuils convectifs (tirets) et absolus (traits pleins) des 4 principaux modes $\sigma = -15$. A une langue correspond une couleur, de 1 à 4 : noir, jaune, vert, bleu.

8.2 Effet de la dérive sur les précurseurs 1D

Nous avons vu dans le chapitre 4 de la deuxième partie que les précurseurs induits par le bruit anticipent le nombre d'onde de l'instabilité primaire, c'est à dire le nombre d'onde le plus instable qui émerge de l'état homogène. Le but de cette section est d'analyser le comportement de ces précurseurs en présence de la dérive et plus spécifiquement de caractériser leur évolution en fonction du paramètre h . Parmi les question ouvertes, on peut se demander s'ils annoncent par exemple les discontinuités de nombre d'onde correspondant aux changements de langues et plus généralement s'ils peuvent fournir des informations complémentaires sur la structure qui apparaît lorsque le seuil est atteint.

Notre analyse se base comme dans le chapitre 4 sur la TF optique, grandeur directement accessible expérimentalement.

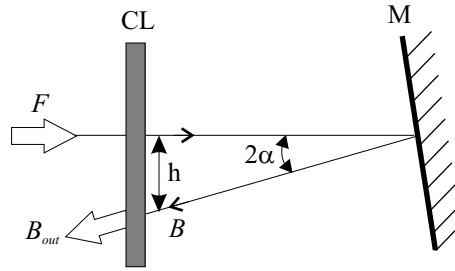


FIG. 8.8 – Schéma du dispositif en présence d'une non-localité

En présence d'un décalage transverse, l'expression du champ $B_{out}(x)$ défini à la sortie du dispositif (Fig. 8.8) prend la forme suivante :

$$B_{out}(x) = \underbrace{e^{i\chi\Delta n(x)}}_{2^{eme} \text{ traversée du CL}} \cdot \underbrace{\sqrt{R}e^{i\sigma\nabla_{\perp}^2}}_{\text{propagation}} \cdot \underbrace{e^{i\chi\Delta n(x-h)}}_{1^{ere} \text{ traversée du CL}} \cdot F \quad (8.2)$$

Ce champ est exprimé en x , la première traversée du cristal liquide est donc exprimée en $x - h$ afin de tenir compte de l'inclinaison du miroir de renvoi. Le passage dans l'espace de Fourier spatial entraîne l'apparition d'un terme de phase e^{-ikh} pour $\widetilde{\Delta n}(k, t)$. La TF optique s'écrit alors :

$$|\mathcal{F}(B_{out})|^2 = RI_0 \left| e^{i\chi\widetilde{\Delta n}(k,t)} \cdot e^{-i\sigma k^2} \cdot e^{i\chi\widetilde{\Delta n}(k,t)} \cdot e^{-ikh} \right|^2 \quad (8.3)$$

Un développement au second ordre³ en $\widetilde{\Delta n}$ aboutit à l'équation :

$$|\mathcal{F}(B_{out})|^2 = RI_0 \left[C\delta(0) + 2\chi^2 \widetilde{\Delta n}(k, t) \widetilde{\Delta n}^*(k, t) (1 + \cos(\sigma k^2 + kh)) \right]. \quad (8.4)$$

³Les termes du premier ordre s'annulent.

8.2. Effet de la dérive sur les précurseurs 1D

où C regroupe tous les termes exprimés en $k = 0$ ($\widetilde{\Delta n}(k = 0) \dots$). Comme cela a été vu dans le chapitre 4, seule la fonction de corrélation temporelle $\langle \widetilde{\Delta n}(k, t) \widetilde{\Delta n}^*(k, t) \rangle$ possède une expression analytique (annexe C). En présence de la dérive cette dernière s'écrit :

$$\langle \widetilde{\Delta n}(k, t) \widetilde{\Delta n}^*(k, t) \rangle = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{1 + k^2 - \mu \sin(\sigma k^2) \cos(kh)}. \quad (8.5)$$

où l'on peut remarquer la présence de la dérive à travers le terme $\cos(kh)$. Injectée dans la moyenne temporelle de l'équation 8.4, cette fonction d'autocorrélation donne accès à l'expression analytique de la moyenne temporelle de la TF optique sous le seuil $\mu_c(h)$:

$$\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle = \frac{\mu}{2\chi} \left(C\delta(0) + \frac{\varepsilon\chi^2}{2\pi} \frac{1 + \cos(\sigma k^2 + kh)}{1 + k^2 - \mu \sin(\sigma k^2) \cos(kh)} \right) \quad (8.6)$$

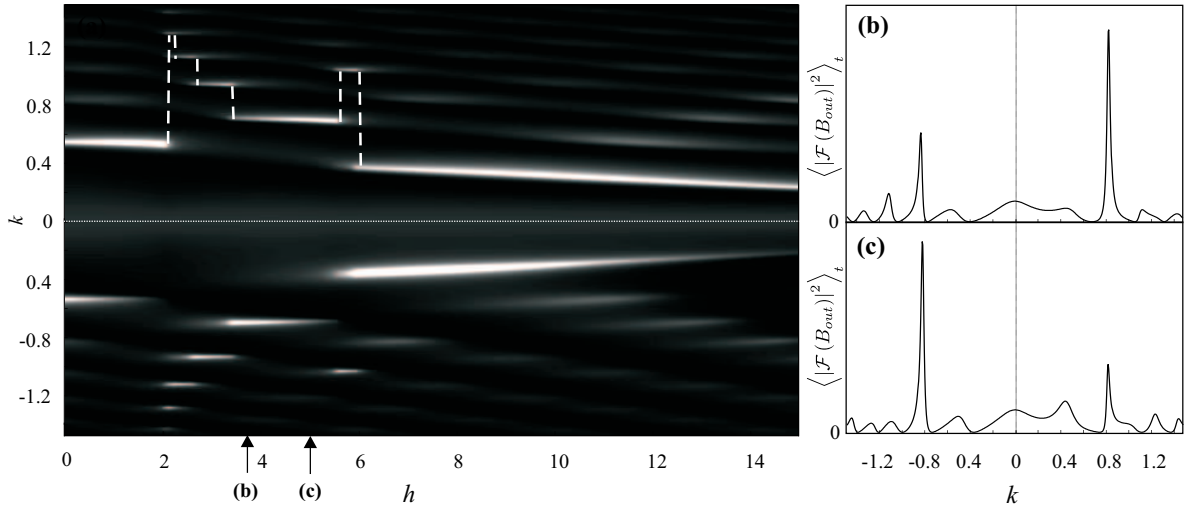


FIG. 8.9 – (a) Diagramme (h, k) de $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle$ pour $\mu = 0.95\mu_c$ réalisé à partir de l'expression analytique 8.6; (b) profil du diagramme pour $h = 3.75$; (c) profil du diagramme pour $h = 5$. $\sigma = -15$. Les ordonnées des graphes (b) et (c) sont en unités arbitraires.

La figure 8.9a est un diagramme (h, k) de la TF optique $\langle |\mathcal{F}(B_{out})|^2 \rangle$ réalisé à partir de l'équation 8.6 pour $\sigma = -15$ et $\mu = 0.95\mu_c$. En présence d'une dérive, la TF optique présente donc toujours des précurseurs sous forme de pics d'intensité localisés aux nombres d'ondes qui apparaissent au dessus du seuil. Les tirets verticaux situent les discontinuités prévues par l'analyse de stabilité linéaire (c.f. Fig. 8.6) et souligne la très bonne concordance entre la localisation du pic prédominant et le changement de langue discuté dans la section précédente. En plus de porter l'information du nombre d'onde le plus instable, la TF optique sous le seuil possède une information sur la vitesse de phase de la structure émergente. En effet, cette vitesse qui traduit la dérive négative ou positive des rouleaux, se traduit par une asymétrie

de l'intensité des pics de la TF pour $+k_c$ et $-k_c$. Chacun des pics de la TF représente une onde progressive dans l'espace réel. Lorsque le pic $-k_c$ est plus intense (faible) que son homologue de signe opposé $+k_c$, la structure en intensité dérive vers les x positifs (négatifs). Cette caractéristique est déjà perceptible sous le seuil grâce aux effets du bruit sur la TF optique : pour $h = 3.75$ le pic à $+k_c$ est plus intense que celui à $-k_c$ (Fig. 8.9b) ce qui correspond à une vitesse de phase négative (la courbe $\mu_c(h)$ décroît, c.f. Fig. 8.6) ; pour $h = 5$ le pic à $+k_c$ est moins intense que celui à $-k_c$ (Fig. 8.9c), v_ϕ est positive. Notons que la TF de l'indice $\Delta\tilde{n}$ ne contient pas cette information car l'indice est une grande réelle, le module de sa TF ne peut donc pas être asymétrique. La TF moyenne du champ optique – grandeur complexe – reflète donc la dynamique du système.

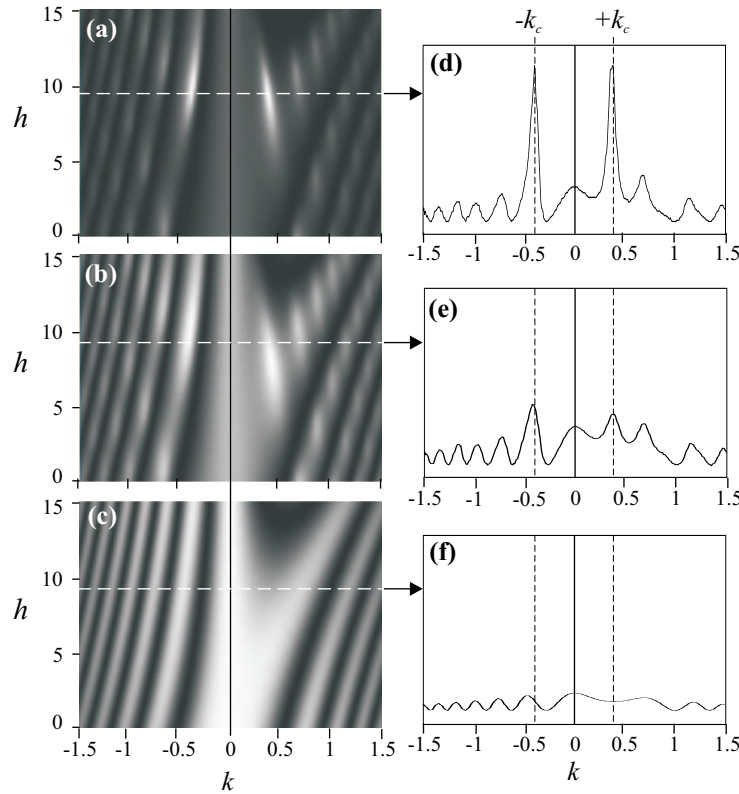


FIG. 8.10 – Diagrammes (h, k) des précurseurs pour (a) $\mu = 0.9\mu_c$, (b) $\mu = 0.7\mu_c$, (c) $\mu = 0.01\mu_c$ tracés à partir de l'équation 8.6. Les figures d-f sont des coupes transverses d'intensité pour $h = 9$. $\sigma = -17$.

Notons que pour $\mu \ll \mu_c$, la figure de la TF optique est dominée par un phénomène de diffraction (traduit par le terme en cosinus au numérateur de l'équation 8.6). Dans ce régime, la position des maxima d'intensité n'est pas symétrique par rapport à $k = 0$ car l'ensemble de la structure dérive dans le même sens comme on peut le voir sur la figure 8.10c. La tran-

8.2. Effet de la dérive sur les précurseurs 1D

sition vers le régime de précurseurs est visible sur les figures 8.10a-c. Celle-ci est marquée par l'émergence de pics dominants localisés en $\pm k_c$ (Fig. 8.10a).

Le diagramme expérimental présenté sur la figure 8.11a confirme l'évolution particulière de la figure de diffraction. Il a été réalisé à partir de 60 profils moyens (50τ) d'intensité $\langle I(k) \rangle$ enregistrés pour 60 inclinaisons différentes du miroir de renvoi⁴. Ce diagramme permet quelques observations complémentaires : (i) pour $h = \sqrt{4\pi\sigma} = 17.37$ on observe, du côté de la dérive, la naissance d'un nouveau pic qui ensuite se divise en deux pics distincts (Fig. 8.11b) (ce scénario se répète pour $h = \sqrt{4(2p+1)\pi\sigma}$ avec $p \in \mathbb{N}^+$) ; (ii) La création des nouveaux pics s'effectue le long de la droite d'équation $h = 2\sigma k$, représentée par une flèche sur les figures 8.11a (expérience) et 8.11b (analytique)⁵.

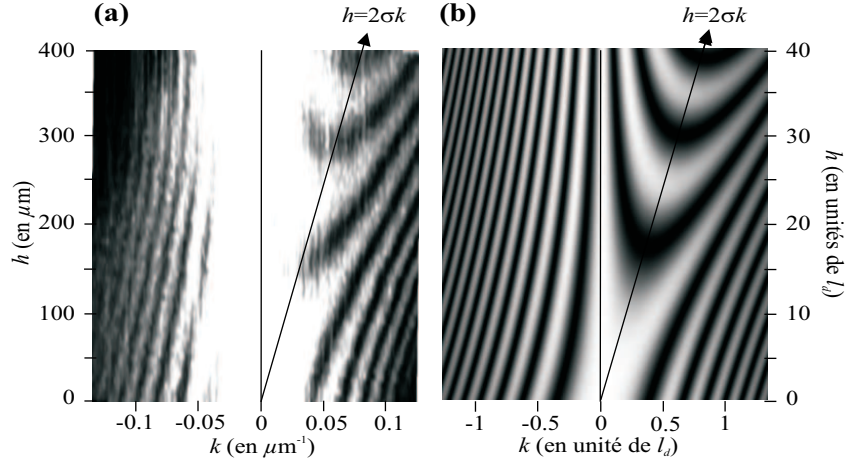


FIG. 8.11 – Diagrammes (h, k) des précurseurs .(a) acquisition expérimentale pour $\mu \ll \mu_c$; (b) Représentation de l'expression analytique 8.6 pour $\mu \ll \mu_c$. $\sigma = 24$.

⁴L'intensité de la tache centrale est beaucoup plus élevée que celle des rebonds, il est donc nécessaire de saturer fortement les caméras pour les détecter. De plus, il est très difficile de filtrer spatialement cette tache car elle dérive transversalement avec l'inclinaison du miroir.

⁵Ces deux observations proviennent de la recherche des nouveaux minima qui apparaissent avec h dans la fonction $1 + \cos(\sigma k^2 + kh)$ dominant l'expression de la TF optique dans ce régime.

Chapitre 9

Les structures dans le système 2D à dérive

Dans ce dernier chapitre, nous suivons la même démarche que l'étude des structures 1D du système en présence de dérive. Nous recensons l'ensemble des structures de base solutions de l'équation de dispersion, déterminons leurs régimes d'instabilité convective et absolue, leur propriétés dynamiques telle que la stationnarité, etc... Nous verrons alors que, similairement au cas 1D, le système peut se comporter comme un générateur de structures stationnaires. Parmi celles-ci, nous mettrons en évidence que certaines d'entre elles ne possèdent pas de régime absolu et sont donc purement convectives (ou entretenues par le bruit). Ces dernières possèdent en plus la propriété d'être toujours stationnaires. En combinant les structures de base (modes) nous montrerons qu'il est aisé de générer des hyper-structures et de quasi-structures. enfin, nous verrons que les précurseurs dans ce cas possèdent toutes les caractéristiques de la structure à apparaître au seuil (nombre d'onde, orientation des vecteurs d'onde, vitesse de phase).

9.1 Les structures convectives et leur seuil d'instabilité

Pour la description du système de boucle Kerr en géométrie 2D, nous utilisons les vecteurs position $\mathbf{r} = (x, y)$ et nombre d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Choissant l'axe des x suivant la direction de la dérive, l'équation du système s'écrit :

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 n(\mathbf{r}, t) + n(\mathbf{r}, t) = |F(\mathbf{r})|^2 + |B(\mathbf{r}, t)|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi(\mathbf{r}, t) \quad (9.1)$$

$$\text{avec} \quad B(\mathbf{r}, t) = \sqrt{R} F_0 e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi n(x-h, y, t)} g(\mathbf{r}) \right). \quad (9.2)$$

Comme dans le cas unidimensionnel, nous développons l'étude analytique dans l'approximation d'un pompage homogène et en l'absence de bruit. Considérant une perturbation de l'état stationnaire $n_0 = F_0^2(1 + R)$ de la forme $\delta n(\mathbf{r}, t) \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \Omega t)}$, la relation de dispersion du

système linéarisé s'écrit alors :

$$\Omega(\mathbf{k}) \equiv \Omega^r(\mathbf{k}) + i\Omega^i(\mathbf{k}) = i(-1 - \mathbf{k}^2 + \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2) \exp(ikh_x)). \quad (9.3)$$

9.1.1 Conditions de seuil convectif à 2D

Les conditions définissant le seuil convectif sont une simple généralisation à deux dimensions de celles développées dans la section 7.2.2 :

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}}(\Omega^i) \Big|_{\mathbf{k}_c} = \vec{0}; \quad (9.4a)$$

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}}(\Omega^r) \Big|_{\mathbf{k}_c} = \vec{V}_g; \quad (9.4b)$$

$$\Omega^i(\mathbf{k}_c) = 0. \quad (9.4c)$$

avec $\mathbf{k}_c \in \mathbb{R}$. $\vec{V}_g$ est le vecteur vitesse de groupe. Compte tenu de la direction de la dérive (suivant les x positifs) sa composante suivant l'axe y doit être nulle ($V_{gy} = 0$). L'application des conditions 9.4a et 9.4b à la relation de dispersion 9.3 mène au système de quatre équations :

$$\frac{\partial \Omega^i}{\partial k_x} \Big|_{\mathbf{k}_c} = \mu_c [2k_{cx} \sigma \cos(\sigma \mathbf{k}_c^2) \cos(hk_{cx}) - h \sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(hk_{cx})] - 2k_{cx} = 0; \quad (9.5a)$$

$$\frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y} \Big|_{\mathbf{k}_c} = \mu_c 2k_{cy} \sigma \cos(\sigma \mathbf{k}_c^2) \cos(hk_{cx}) - 2k_{cy} = 0; \quad (9.5b)$$

$$\frac{\partial \Omega^r}{\partial k_x} \Big|_{\mathbf{k}_c} = -\mu_c [2k_{cx} \sigma \cos(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(hk_{cx}) + h \sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) \cos(hk_{cx})] = V_{gx}; \quad (9.5c)$$

$$\frac{\partial \Omega^r}{\partial k_y} \Big|_{\mathbf{k}_c} = -\mu_c 2k_{cy} \sigma \cos(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(hk_{cx}) = V_{gy} = 0. \quad (9.5d)$$

9.1.2 Les structures

L'équation 9.5b donne directement :

$$k_{cy} = 0; \quad (9.6a)$$

$$\text{ou} \quad \mu_c \sigma \cos(\sigma \mathbf{k}_c^2) \cos(hk_{cx}) = 1. \quad (9.6b)$$

En injectant (9.6b) dans (9.5a), on obtient la condition $\sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(hk_{cx}) = 0$ offrant deux cas possibles :

$$\sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) = 0; \quad (9.7a)$$

$$\text{ou} \quad \sin(hk_{cx}) = 0. \quad (9.7b)$$

Cependant, le premier des deux cas est physiquement impossible puisqu'il donne $\mathbf{k}_c^2 = -1$ compte tenu de 9.4c.

Finalement, les deux familles de structures convectives qui peuvent être observées dans le système 2D sont définies par :

$$k_{cy} = 0; \quad (9.8a)$$

$$k_{cx(n)} = \frac{n\pi}{h} \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \quad (9.8b)$$

Notons que chacune d'entre elles implique une vitesse de groupe V_{gy} nulle (Eq. 9.5d), en accord avec la symétrie $y \rightarrow -y$ présente dans le système.

9.1.2.1 Les structures type 1D : $k_{cy} = 0$

L'équation 9.8a définit une famille de structures pour lesquelles aucune modulation n'apparaît le long de l'axe des y , elle se présente donc comme des rouleaux verticaux (RV). Cette situation est rigoureusement équivalente – en terme de seuil d'instabilité, de nombre d'onde critique ($|\mathbf{k}_c| = |k_{cx}|$), de vitesse de phase et de vitesse de groupe – au cas 1D développé dans les deux chapitres précédents et n'est donc pas reprise ici.

9.1.2.2 Les structures type Vraies 2D (V2D) : $k_{cx(n)} = \frac{n\pi}{h}$

Nous présentons ici les caractéristiques de la deuxième famille de structures, vérifiant la condition 9.8b, ainsi qu'une étude de leurs seuils convectifs.

Seuil convectif

En injectant la condition 9.8b dans l'équation 9.4c, l'expression du paramètre de pompe au seuil convectif est :

$$\mu_{c(n)} = (-1)^n \frac{1 + \mathbf{k}_{c(n)}^2}{\sin\left(\sigma \mathbf{k}_{c(n)}^2\right)} \quad (9.9)$$

avec

$$\mathbf{k}_{c(n)}^2 = k_{cx(n)}^2 + k_{cy(n)}^2 = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + k_{cy(n)}^2 \quad (9.10)$$

On remarque ici la particularité du seuil convectif qui est indépendant de h . En effet, l'équation 9.9 est la même que celle définissant le seuil sans dérive ($h = 0$), au terme $(-1)^n$ près. La conséquence est que la valeur du seuil sera définie par les solutions du système sans dérive de non-linéarité positive ou négative suivant la parité de n :

– n pair : $\mu_c(h, \sigma) = \mu_c(0, \sigma)$.

La valeur du paramètre de pompe au seuil est identique à celle du système sans dérive.

– n impair : $\mu_c(h, \sigma) = \mu_c(0, -\sigma)$.

La valeur du seuil correspond également à celui du système sans dérive mais avec un

changement de signe de la non-linéarité .

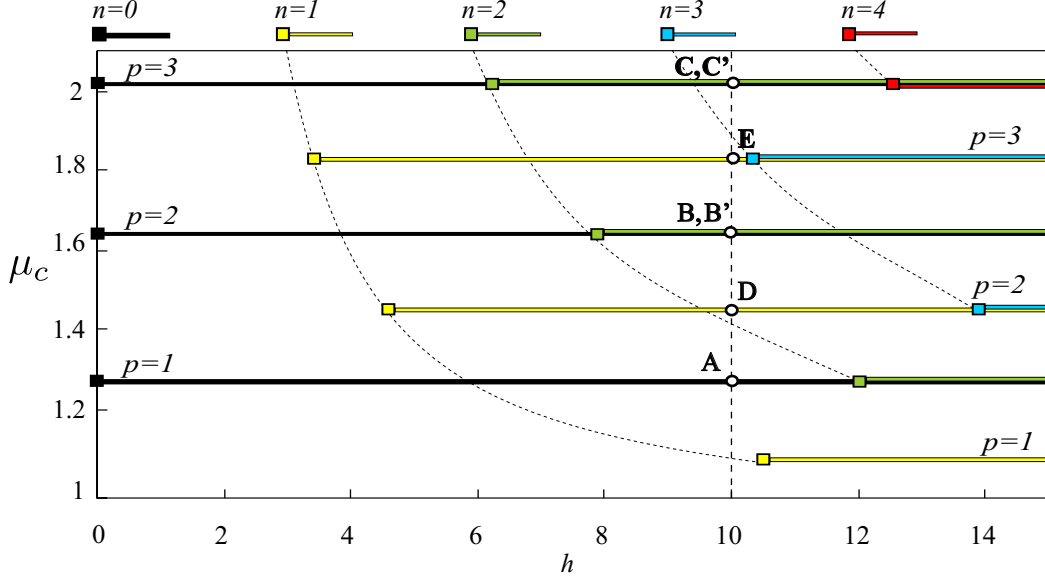


FIG. 9.1 – (a) Evolution avec h des seuils convectifs 2D $\mu_{c(n)}^{[p]}$ pour les 5 premières valeurs de n (de 0 à 4) représentées par 5 couleurs différentes et les 3 premières valeurs de p (de 1 à 3). $\sigma = -17$. Pour un n donné, la valeur de p augmente avec la valeur des seuils. Le domaine d'existence des structures se situe à droite des $h_{(n)}^{[p]}$ repérés par des carrés. Les lettres permettent de localiser les seuils des premières structures pouvant être déstabilisées pour $h = 10$ (A, B, B', C, C' pour n pair et D, E pour n impair) et dont la composition est représentée sur la figure 9.3.

Composition des structures

L'entier n , qui résulte directement de la condition 9.7b, joue également un rôle très important dans la composition de la structure. En effet, compte tenu de la relation sur les normes 9.10, elle discrétise les valeurs de $k_{c_x(n)}$ et donc de $k_{c_y(n)}$ composant le vecteur d'onde $\mathbf{k}_{c(n)}$. Pour une valeur de n fixée, le module de $\mathbf{k}_{c(n)}$ est solution de l'équation du système sans dérive :

$$\tan\left(\sigma \mathbf{k}_{c(n)}^2\right) = (-1)^n \sigma \left(1 + \mathbf{k}_{c(n)}^2\right). \quad (9.11)$$

obtenue en dérivant l'expression de $\mu_{c(n)}$. L'équation 9.11 possède de multiples solutions pour $\mathbf{k}_{c(n)}$ (c.f. Fig. 2.6) que l'on différenciera par l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ correspondant à la langue considérée. Nous noterons par la suite ces vecteurs d'onde critiques $\mathbf{k}_{c(n)}^{[p]}$ et les valeurs de paramètre de pompe associées $\mu_{c(n)}^{[p]}$. Ainsi, selon l'équation 9.11, lorsque n est pair (resp. impair) l'exposant $[p]$ se réfère à la $p^{\text{ième}}$ langue pour une nonlinéarité positive (resp. négative). Leur domaine de validité est conditionné par l'égalité 9.10. En effet, le nombre d'onde $k_{c_y(n)}^{[p]} = \sqrt{\mathbf{k}_{c(n)}^{2[p]} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$

ne peut exister que si la quantité sous la racine est positive et donc si :

$$h > h_{(n)}^{[p]} = \frac{n\pi}{\mathbf{k}_{c(n)}^{[p]}}. \quad (9.12)$$

Pour illustrer cette propriété, nous avons représenté sur la figure 9.1 en fonction de μ et h le domaine d'existence des structures V2D pour $\sigma = -17$. Dans ce plan, les courbes de seuils se réduisent à des demi-droites horizontales délimitées à gauche par les valeurs de $h_{(n)}^{[p]}$ (représentés par des carrés de couleurs). Ainsi pour $h = 10$, par exemple, on peut déstabiliser successivement les structures de base suivantes (ligne verticale en tiret sur la figure 9.1) :

1. La structure repérée par la lettre **A** ($n = 0$ et $p = 1$) qui est la première à se déstabiliser, et dont ses caractéristiques sont $k_{c_x(0)}^{[1]} = 0$, $k_{c_y(0)}^{[1]} = 0.524$, $\mu_{c(0)}^{[1]} = 1.276$. Elle forme des rouleaux horizontaux (RH) (Fig. 9.2A).
2. La structure **D** ($n = 1$, $p = 2$) dont les caractéristiques sont $k_{c_x(1)}^{[2]} = \frac{\pi}{10} = 0.314$, $k_{c_y(1)}^{[2]} = 0.600$, $\mu_{c(1)}^{[2]} = 1.646$ (Fig. 9.2D) qui est de type réseau rectangulaire.
3. Les structures **B** ($n = 0$ et $p = 2$) et **B'** ($n = 2$ et $p = 2$) qui ont le même seuil d'instabilité car défini par la même langue de stabilité marginale (n pairs et $m = 2$). La structure **B** forme des rouleaux horizontaux (RH) (Fig. 9.2B) alors que **B'** forme un réseau de rectangles (RR) (Fig. 9.2B').

Les points noirs sur la figure 9.3 localisent le sommet des vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_{c(n)}^{[p]}$ des structures **A** à **E** dans le plan de Fourier (k_x, k_y) pour $\sigma = -17$ et $h = 10$. Ils se trouvent à l'intersection d'un cercle en trait plein (tirets) et d'une droite verticale en trait plein (tirets) pour les solutions associées à un n pairs (impairs). Les droites verticales traduisent la condition $k_{c_x(n)} = n\frac{\pi}{h}$ (les n impairs en tirets et les n pairs en trait plein).

9.1. Les structures convectives et leur seuil d'instabilité

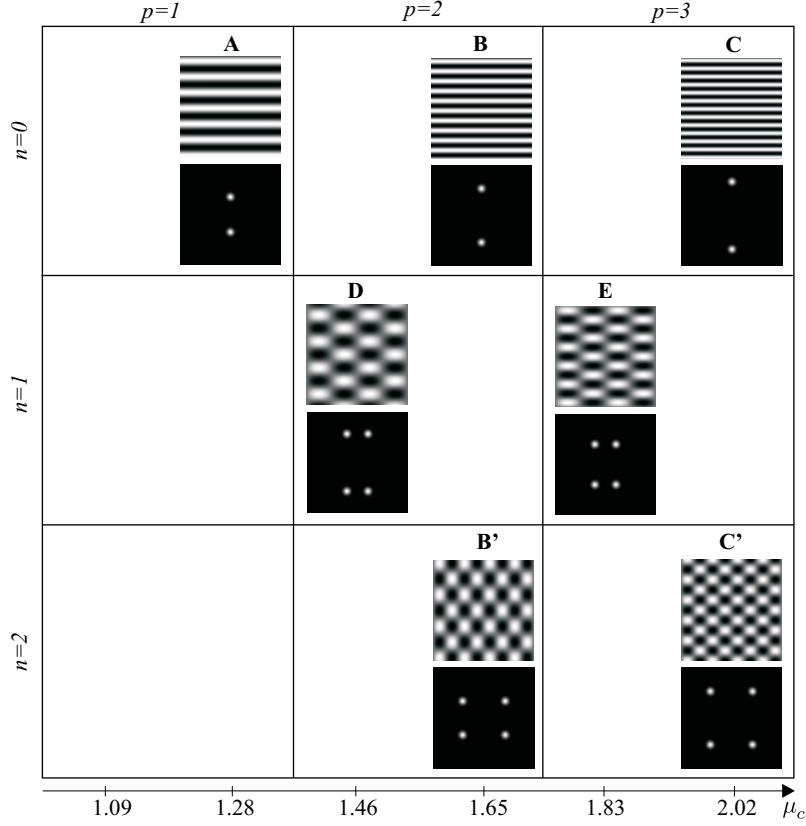


FIG. 9.2 – Structures en champ proche (haut) et lointain (bas) obtenues en augmentant μ pour $h = 10$ et $\sigma = -17$ (Fig. 9.1). Les structures correspondent aux vecteurs d'ondes repérés sur la figure 9.3.

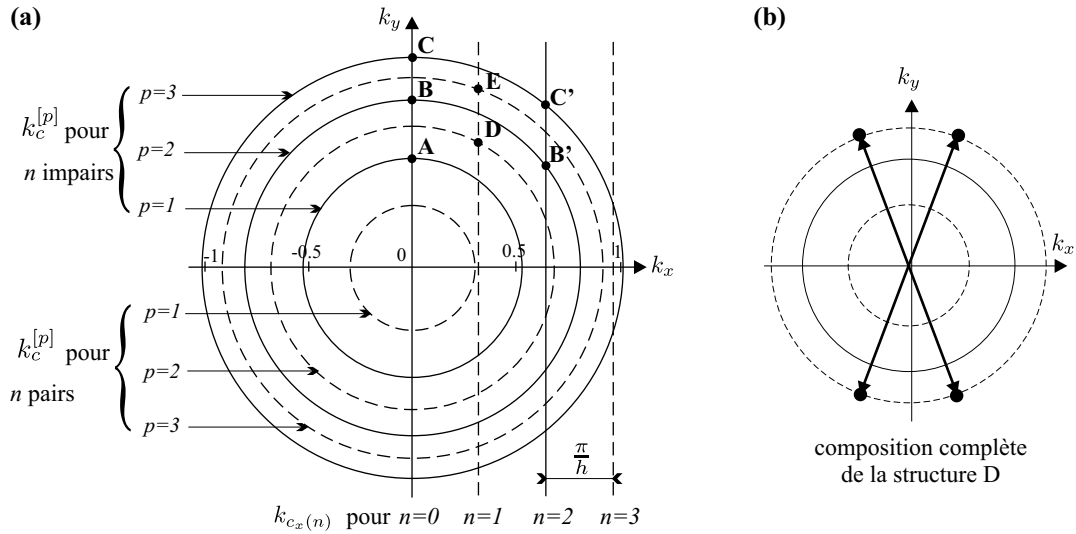


FIG. 9.3 – (a) Composition des structures "V2D" **A** à **E** dont les seuils sont repérés sur la figure 9.1. Les cercles ont pour rayon les solutions $k_c^{[p]}$ de l'équation 9.11 (les n impairs en tirets et les n pairs en trait plein). (b) Composition complète pour l'exemple de la structure **D**.

Stationnarité des structures V2D

En examinant l'expression de la partie réelle de $\Omega(k)$:

$$\Omega^r(k_c) = \mu \sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(h k_{cx}), \quad (9.13)$$

on remarque que, compte tenu de la condition $k_{cx(n)} = \frac{n\pi}{h}$, cette grandeur est toujours nulle ($\Omega^r(k) = 0 \forall h$). Ceci implique que la vitesse de phase de ces structures au seuil convectif, définie par $v_\phi = \frac{\Omega^r(k_c)}{k_c}$ est aussi tout le temps nulle. Ainsi les structures V2D observées en présence d'une dérive sont des structures *stationnaires* au seuil convectif ($\forall h$).

9.1.2.3 Synthèse des structures observées au premier seuil d'instabilité

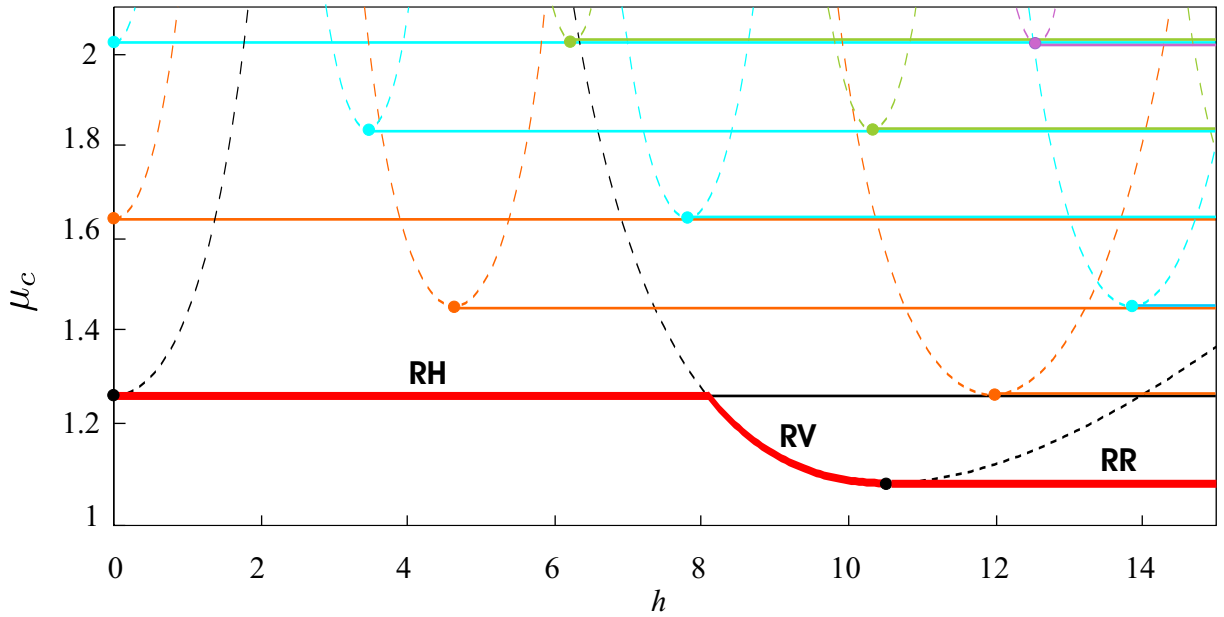


FIG. 9.4 – Synthèse des courbes de seuil convectif des structures rouleaux verticaux (en tirets) et des structures V2D (en traits pleins). Le seuil d'instabilité primaire est marqué par un trait gras rouge.

La synthèse des seuils convectifs obtenus pour le système 2D est présenté sur la figure 9.4 (pour plus de lisibilité, les seuils absolus ne sont pas représentés). Elle permet d'appréhender les structures observées au seuil d'instabilité primaire en fonction de h . Ce dernier est repéré par le trait gras rouge et se décompose en 3 partie : pour $0 < h < 8$ il est associé à une structure RH ; pour $8 < h < 10.5$ à une structure RV (équivalente aux structures 1D) ; puis pour $h > 10.5$ à une structure RR.

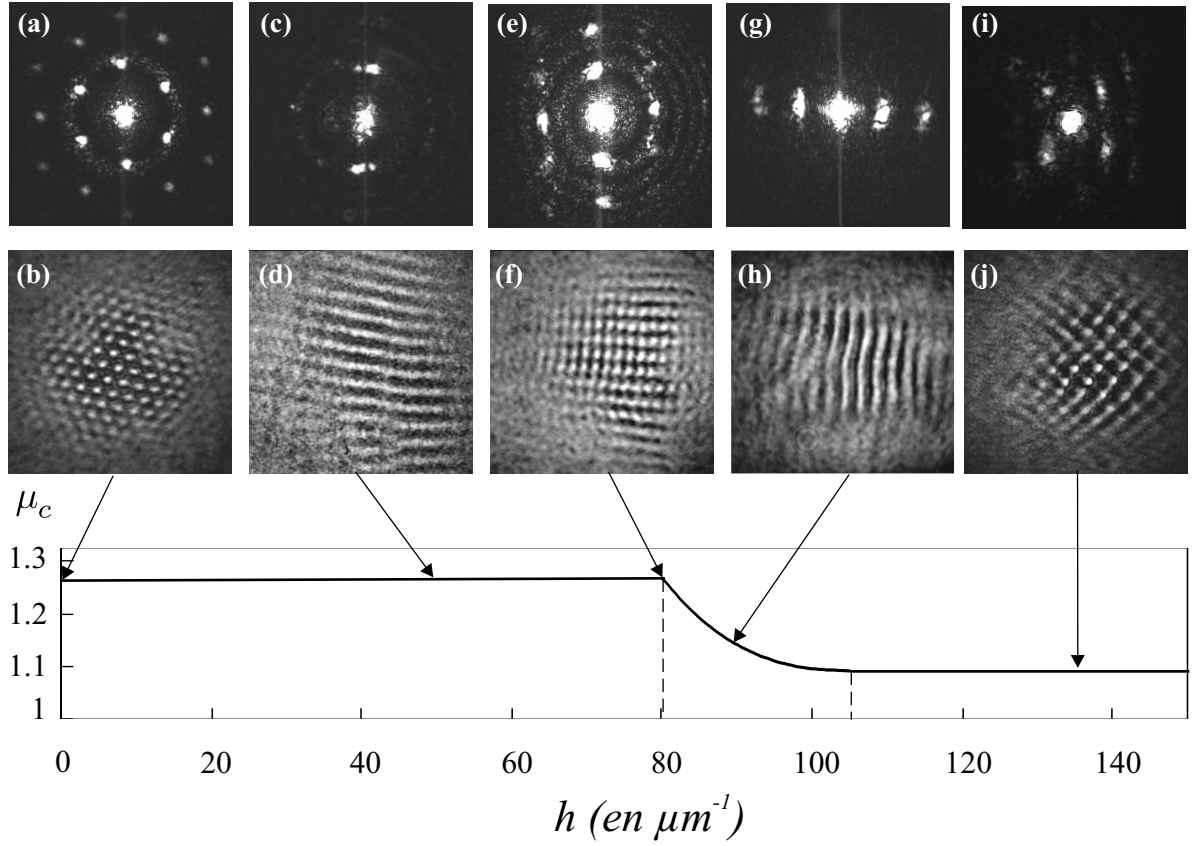


FIG. 9.5 – Structures expérimentales observées en champ lointain (en haut) et en champ proche (en bas) au seuil d'instabilité primaire en fonction de h . Les flèches repèrent le paramètre h de chaque enregistrement sur la courbe de seuil primaire globale.

Les structures expérimentales correspondantes sont présentées sur la figure 9.5. On observe une succession de structures de différentes configurations : hexagones (Fig. 9.5a-b), rouleaux horizontaux "RH" (Fig. 9.5c-d), carrés résultant de la superposition de rouleaux horizontaux et verticaux (Fig. 9.5e-f), rouleaux verticaux "RV" (Fig. 9.5g-h) puis réseau rectangulaire "RR" (Fig. 9.5i-j). Certaines ont un nombre d'onde fixe avec h (RH, RR) et sont stationnaires, d'autres (RV) ont une périodicité qui évolue avec h comme cela a été vu dans le chapitre 8 et ne sont stationnaires que pour des valeurs de h particulières (correspondant aux minima des courbes de $\mu_c(h)$).

9.1.2.4 Structures au delà du seuil d'instabilité primaire

Les structures présentées sur la figure 9.5 sont prévues dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire menée dans la situation où l'état de départ est homogène. Si on augmente le paramètre de pompe, un processus complexe de combinaison / compétition entre ces structures se met en place au fur et à mesure que chacune d'entre-elles se déstabilise. Cependant, il est

possible de les sélectionner indépendamment les uns des autres par des processus de ciblage. Deux types de techniques peuvent alors être mis en place : le filtrage spatial dans le plan de Fourier [96, 97, 98] et le forçage externe [99, 100].

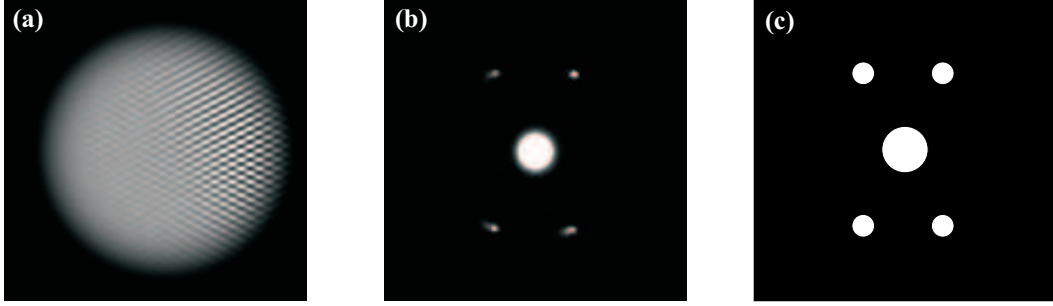


FIG. 9.6 – Structure (a) en champ proche et (b) en champ lointain correspondant à la structure *D* sur la figure 9.3 ; (c) schéma du filtre utilisé.

Nous avons utilisé la première méthode en simulation numérique afin de stabiliser la structure *D* qui n'est pas une structure associée au premier seuil d'instabilité (Fig. 9.2D). Le filtre construit à partir des prévisions théoriques (Fig. 9.6c) a permis la formation de la structure en réseau rectangulaire attendue (Fig. 9.6a) avec les bons vecteurs d'onde (Fig. 9.6b). Cet exemple confirme la possibilité d'observer chacune d'entre elles indépendamment par une méthode de filtrage. De plus, le caractère stationnaire de la majorité des structures observables fait du système 2D à dérive une extension du “générateur à structures stationnaires”.

9.2 Régime absolu des structures V2D

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de seuil de l'instabilité absolue associée à chacune des structures de base traitées dans la section précédente afin de cartographier les zones de régimes convectif et absolu. Nous avons vu dans la section 7.2.2 que pour rendre compte de l'étalement spatial d'un paquet d'onde, i.e. la propagation de ses fronts, il est nécessaire de considérer les nombres d'onde spatiaux complexes. Dans la configuration bi-dimensionnelle le vecteur $\mathbf{k}$ se décompose comme suit :

$$\mathbf{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y = (k_x^r + ik_x^i) \cdot \vec{e}_x + (k_y^r + ik_y^i) \cdot \vec{e}_y \quad (9.14)$$

et la grandeur $\mathbf{k}^2$ s'écrit :

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \underbrace{(k_x^{r2} + k_y^{r2} - k_x^{i2} - k_y^{i2})}_A + i \underbrace{2(k_x^r k_x^i + k_y^r k_y^i)}_B = A + iB. \quad (9.15)$$

9.2. Régime absolu des structures V2D

En injectant ces deux dernières expressions dans l'équation de dispersion bi-dimensionnelle 9.3, les parties réelle et imaginaire de Ω prennent les formes suivantes¹ :

$$\Omega^r = B - \mu \exp(-k_x^i h) [\cos(\sigma A) \sinh(\sigma B) \cos(k_x^r h) + \sin(\sigma A) \cosh(\sigma B) \sin(k_x^r h)] \quad (9.16a)$$

$$\Omega^i = -1 - A + \mu \exp(-k_x^i h) [\sin(\sigma A) \cosh(\sigma B) \cos(k_x^r h) - \cos(\sigma A) \sinh(\sigma B) \sin(k_x^r h)] \quad (9.16b)$$

Les équations 9.16a et 9.16b sont les points de départ de l'analyse qui a pour but de trouver les grandeurs μ_a , $k_{x_a}^r$, $k_{x_a}^i$, $k_{y_a}^r$ et $k_{y_a}^i$ caractérisant l'instabilité absolue. Les conditions de seuils absolus 7.14-7.17 se présentent alors comme un système de cinq équations à cinq inconnues :

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k_y} \right|_{\mathbf{k}_a} \equiv \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} + i \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \quad (9.17a)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \quad (9.17b)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k_x} \right|_{\mathbf{k}_a} \equiv \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} + i \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \quad (9.17c)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0 \quad (9.17d)$$

$$\Omega^i(\mathbf{k}_a) = 0 \quad (9.17e)$$

Les quatre premières équations traduisent la condition de stationnarité (c.f. 7.2.2) suivant les directions x et y . La dernière est issue de la condition de taux de croissance nul du mode $\mathbf{k}_a$. Nous possédons déjà les seuils absolus des solutions de type "1D" (c.f. section 7.2.3). Il nous reste à déterminer les seuils des solutions V2D qui peuvent être classées en deux grandes familles, les rouleaux horizontaux RH et les réseaux rectangulaires RR, que nous traitons séparément.

9.2.1 Les rouleaux horizontaux RH

Nous cherchons une expression analytique des valeurs de μ_a et du nombre d'onde $\mathbf{k}_a^*$ caractérisant le seuil d'instabilité absolue des rouleaux horizontaux. Les propriétés de symétrie de cette structure nous permettent de réduire la complexité du problème. En effet, l'absence de modulation suivant l'axe des x implique :

$$k_{x_a}^r = 0 \quad (9.18)$$

¹on utilise les formules suivantes pour séparer les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} \cos(a + ib) &= \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b) \\ \sin(a + ib) &= \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b) \end{aligned}$$

De plus, l'absence de dérive suivant y élimine toute propagation suivant cet axe et par la même toute notion de croissance spatiale. Ainsi le nombre d'onde suivant y est réel comme dans le système classique sans dérive :

$$k_{y_a}^i = 0 \quad (9.19)$$

Ces deux relations 9.18 et 9.19 impliquent que $B = 0$. Dans le système d'équations 9.17a-e, deux d'entre-elles (9.17a et 9.17d) s'éliminent donc directement. Pratiquement, il reste :

$$\Omega^i = \mu_a \sin(\sigma A) \exp(-k_{x_a}^i h) - 1 - A = 0 \quad (9.20a)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{abs} = 2k_{y_a}^r [-1 + \mu_a \sigma \exp(-k_{x_a}^i h) \cos(\sigma A)] = 0 \quad (9.20b)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{abs} = 2k_{x_a}^i - \mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) [2\sigma \cos(\sigma A) k_{x_a}^i - h \sin(\sigma A)] = 0 \quad (9.20c)$$

Les deux premières peuvent être réécrites respectivement (si $k_{y_a}^r \neq 0$) :

$$\mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) \sin(\sigma A) = 1 + A \quad (9.21a)$$

et

$$\mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) \sigma \cos(\sigma A) = 1 \quad (9.21b)$$

En injectant ces deux relations dans 9.20c, il vient directement :

$$h(1 + A) = 0 \quad (9.22)$$

C'est à dire $h = 0$ ou $A = -1$. Puisque $h \neq 0$ ici, il reste $A = -1$ qui donne lieu à un système ne possédant pas de solution² pour μ_a et $k_{x_a}^i$. Ainsi, le système 9.20a-c n'a pas de solution, ce qui implique que ***toute instabilité du type "rouleaux horizontaux" observée dans ce système reste purement convective***. L'absence de point selle sur la surface d'équation $\Omega^i(k_x^i, k_y^r, \mu) = 0$ présentée sur la figure 9.7 confirme ce résultat sur un cas particulier ($\sigma = -17$, $h = 0.1$). Le choix d'une faible valeur de h permet de visualiser cette surface dans une fenêtre centrée sur les valeurs caractéristiques du seuil convectif ($k_{x_c}^i = 0$, $k_{y_c}^r = 0.56$, $\mu_c = 1.28$) – s'il existe un point selle, ses caractéristiques seraient nécessairement proches de celles du seuil convectif tant que $h \ll 1$. Les lignes de niveaux montrent un relief de vallée sans aucun col, ce qui mathématiquement implique que les équations 9.20a-c ne sont jamais vérifiées en même temps. La recherche du seuil μ_a à partir de l'équation de dispersion approchée à 2D développée comme à la section 7.2.2 conduit au même résultat : aucun point selle n'est trouvé. Enfin, des simulations numériques ont été réalisées pour s'assurer du résultat. Afin d'éviter toute interaction avec d'autres types de structures (rouleaux verticaux, rectangles),

²En réinjectant ce résultat dans 9.21a ou 9.21b, il vient immédiatement des conditions physiquement irréalisables comme $k_{x_a}^i$ infiniment grand ou encore $\tan(-\sigma) = 0$.

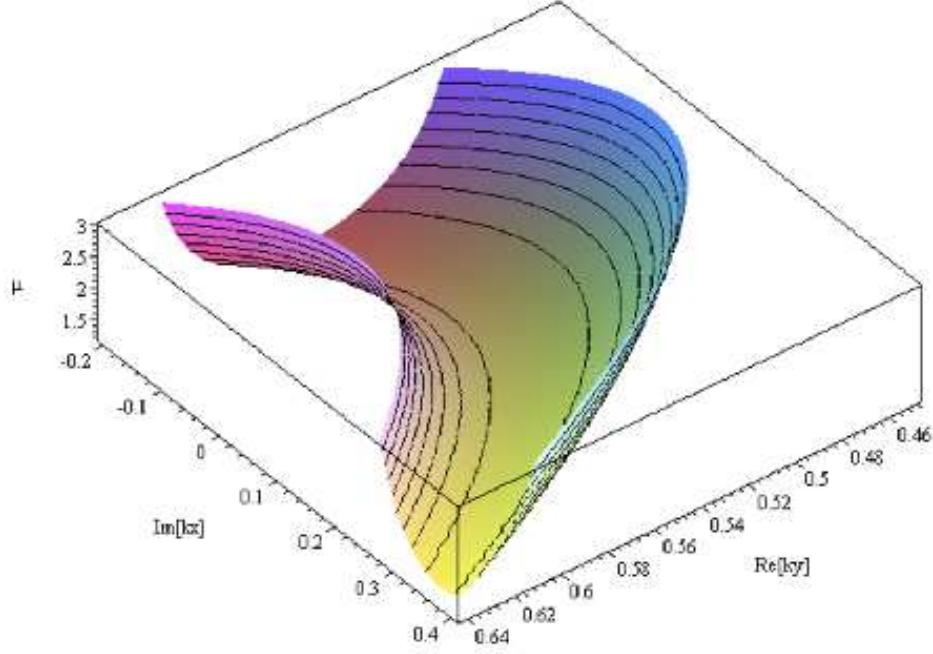


FIG. 9.7 – Absence de point selle sur la surface d'équation $\Omega^i(k_x^i, k_y^r, \mu) = 0$ pour la structure en rouleaux horizontaux. Les paramètres sont $\sigma = -17$ et $h = 0.1$.

ces simulations ont été réalisées dans une zone de paramètres où seuls sont prévus les rouleaux horizontaux entretenus par le bruit, ce qui permet d'augmenter le paramètre de pompe jusqu'à $2\mu_c$ (Fig. 9.8a). Les rouleaux visibles sur la gauche de la figure 9.8b correspondent bien à une instabilité convective (si elle était absolue, elle s'étendrait sur toute la largeur du profil) confirmant l'absence d'instabilité absolue jusqu'à $2\mu_c$.

9.2.2 Les réseaux rectangulaires RR.

Le nombre d'onde d'une structure RR possède une composante sur chacun des axes x et y donc, contrairement au cas précédent, k_x^r et k_y^r sont tous les deux non nuls. Seul l'argument sur l'absence de propagation du paquet d'onde suivant l'axe y demeure :

$$k_y^i = 0. \quad (9.23)$$

Ce problème comporte quatre inconnues, une méthode directe de visualisation du point selle n'est donc pas possible car la surface $\Omega^i = 0$ se déploie dans un espace à 4 dimensions. Seule une résolution du système 9.17a-d peut apporter l'information sur l'existence et la localisation du régime absolu.

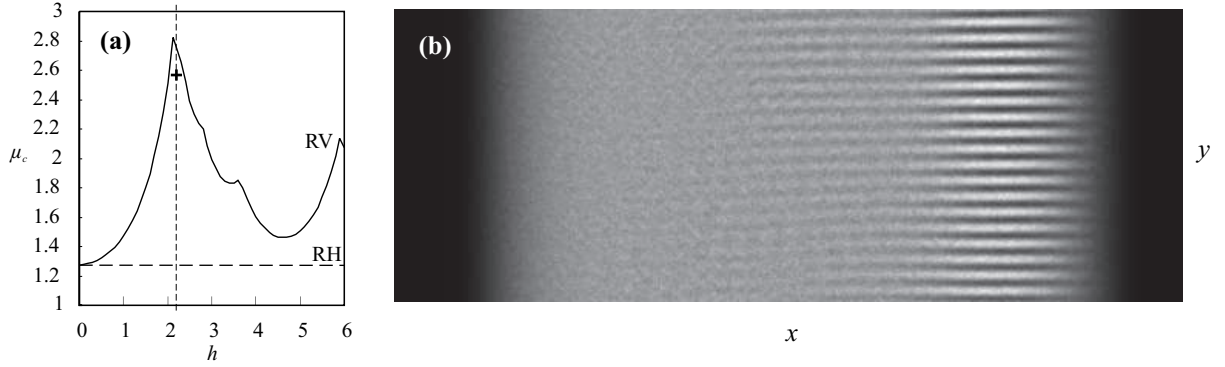


FIG. 9.8 – (a) Courbes de seuil convectif des rouleaux horizontaux (pointillés) et verticaux (trait plein). La pointe de la flèche fixe les paramètres utilisés pour la simulation numérique en profil plat et en présence de bruit (b) . $\sigma = -17$.

Lorsqu'on substitue les expressions 9.17a, 9.17b et 9.17c dans 9.17d, on obtient la même relation que pour les rouleaux horizontaux à savoir $A = -1$ ($\forall h \neq 0$). En réinjectant ce résultat dans 9.17a et 9.17b, il vient la condition $\tanh^2(\sigma B) = 1$, qui ne peut être vérifiée que si $B = 2k_x^r k_x^i = \pm\infty$, situation évidemment impossible. Aucun point selle n'existe donc non plus pour ces structures RR, comme pour les rouleaux horizontaux il n'existe pas de régime absolu.

Ainsi, les structures V2D sont des structures purement convectives.

9.3 Les précurseurs à 2D en présence d'une dérive

En présence d'une dérive et d'une source de bruit, l'expression analytique de la TF optique sous le seuil d'instabilité primaire est une extension à deux dimensions de l'équation 8.6 :

$$\left\langle |\mathcal{F}(B_{out}, k_x, k_y)|^2 \right\rangle_t = \frac{\mu}{2\chi} \left(C\delta(0)^2 + \varepsilon\chi^2 \frac{1 + \cos(\sigma\mathbf{k}^2 + k_x h)}{1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma\mathbf{k}^2) \cos(k_x h)} \right) \quad (9.24)$$

Régime de diffraction

A très faible puissance du faisceau incident ($\mu \ll 1$), cette TF se présente sous forme d'anneaux lumineux concentriques dont les rayons ainsi que la position du centre dépendent de h (Fig. 9.9). En effet, les maxima d'intensité de la TF optique sont obtenus dans ce cas pour $\cos(\sigma\mathbf{k}^2 + k_x h) = 1$, ce qui implique :

$$\left(k_x + \frac{h}{2\sigma} \right)^2 + (k_y)^2 = \frac{2\pi}{\sigma} m + \left(\frac{h}{2\sigma} \right)^2 \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \quad (9.25)$$

9.3. Les précurseurs à 2D en présence d'une dérive

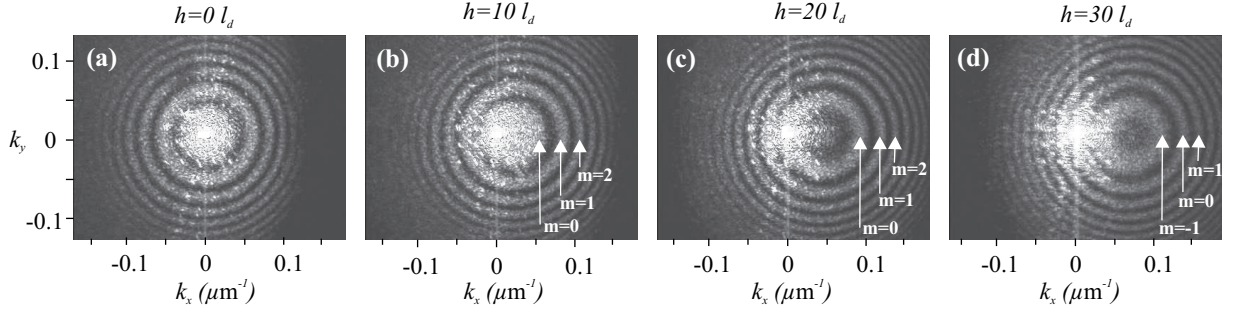


FIG. 9.9 – Décalage avec h des anneaux induit par le bruit dans la TF optique expérimentale pour $\mu \ll \mu_c$ et $\sigma = -17$.

Cette dernière expression est l'équation de cercles concentriques de centre $\mathbf{k} = (\frac{h}{2\sigma}, 0)$ et de rayons $\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}m + (\frac{h}{2\sigma})^2}$ numérotés par l'entier m . Comme le rayon doit être une grandeur positive, c'est la valeur de h qui détermine le domaine de définition de ces anneaux.

Suivons l'évolution de ces anneaux en fonction du paramètre h en nous appuyant sur les acquisitions expérimentales (Fig. 9.9). Lorsque $h = 0$, on retrouve les cercles concentriques centrés sur $\mathbf{k} = (0, 0)$ (Fig. 9.9a) ; pour $0 < h < \sqrt{8\pi\sigma}$, m ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles (Fig. 9.9b-c) ; dès que $h \geq \sqrt{8\pi\sigma}$, m peut prendre la valeur -1 , on voit alors apparaître un nouveau cercle correspondant à la nouvelle valeur de m permise (Fig. 9.9d). Ce phénomène se répète au fur et à mesure que h augmente (chaque fois que $h > \sqrt{8\pi\sigma m}$), donnant naissance à d'autres cercles.

Régime de précurseurs

Nous proposons maintenant d'analyser le comportement des précurseurs et de comparer les observations expérimentales avec les prédictions théoriques. Rappelons qu'en absence de décalage transverse ($h = 0$) le premier cercle de la TF optique devient de plus en plus lumineux lorsque μ augmente renseignant sur le nombre d'onde de la structure à venir (section 4.4). Cependant aucune information ne peut être extraite concernant l'orientation du vecteur d'onde à venir et donc sur le type de structure qui va apparaître. Dans le cas où $h \neq 0$, le comportement de la TF optique moyenne est très différent. Les acquisitions expérimentales réalisées pour différentes valeurs de h (Fig. 9.10a-c) en attestent et valident la prédiction théorique, dont une représentation graphique réalisée à partir de l'équation 9.24 pour les mêmes valeurs de h est présentée sur les figures 9.10a'-c'. Le graphique (Fig. 9.10d) permet de localiser les paramètres μ et h des 3 exemples choisis. En dehors de l'excellent accord entre expérience et théorie, on voit distinctement que les précurseurs induits par le bruit microscopique possèdent toutes les informations sur la structure à venir au seuil de l'instabilité primaire. Il prévoient même les changements de nature de l'instabilité en fonction de h . Pour $h = 3l_d$ (Fig. 9.10a), les taches lumineuses les plus intenses sont celles situées en $\mathbf{k} = (0, \pm k_{yc})$ annonçant l'apparition de rou-

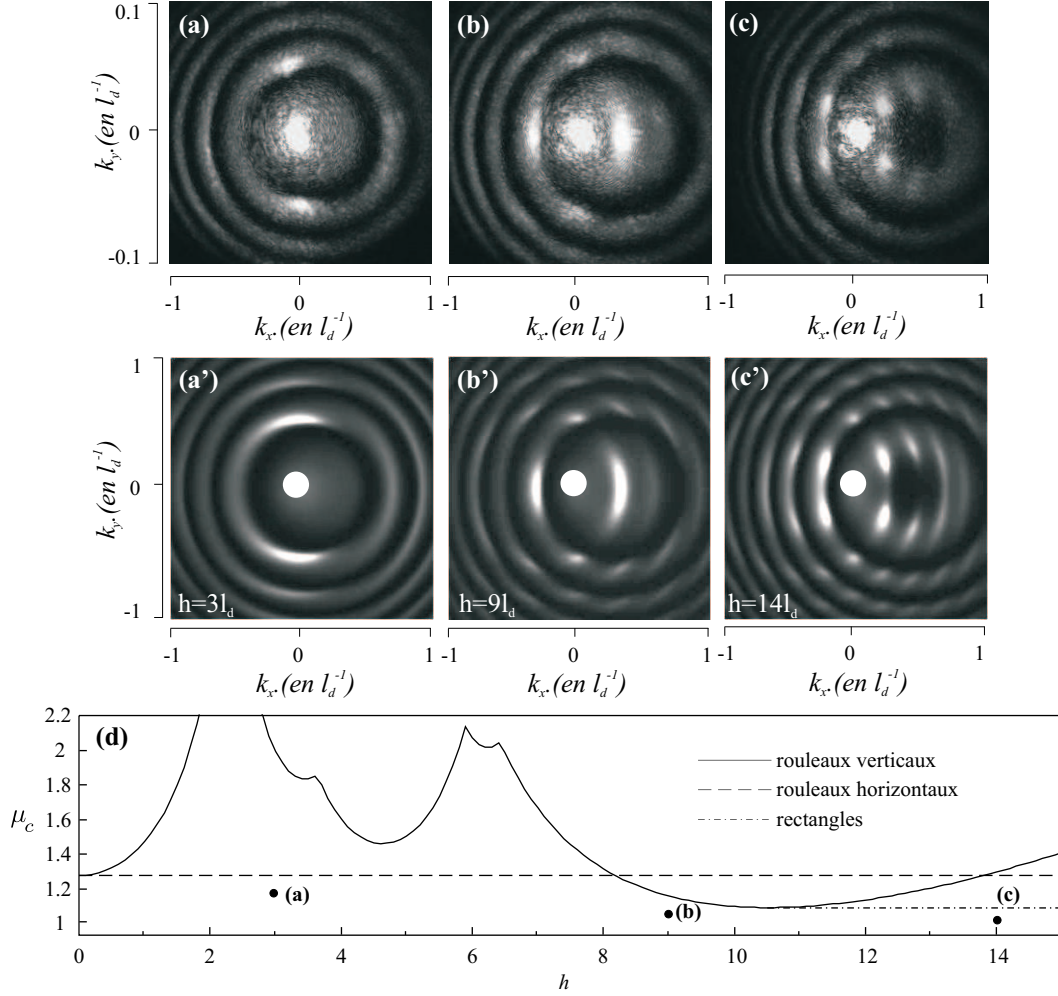


FIG. 9.10 – Précurseurs observées dans la TF optique expérimentale (a-c) et calculée à partir de l'équation 9.24 (a'-c') pour $\mu = 0.95\mu_c$, $\sigma = -17$, $h = 3l_d$ (a,a'), $9l_d$ (b,b') et $14l_d$ (c,c'); (d) Localisation des précurseurs dans le diagramme (μ_c, h) .

leaux horizontaux. Pour $h = 9l_d$, on peut voir que les taches les plus intenses sont maintenant en $\mathbf{k} = (\pm k_x, 0)$ (Fig. 9.10b). Enfin, pour $h = 14l_d$, les quatre spots prédominants prédisent la formation d'un réseau rectangulaire de nombres d'onde $\mathbf{k} = (0.22, 0.20)$. Ainsi nous possédons les informations du module des nombres d'onde, de leur orientation et même certaines informations sur la dynamique de la structure. Concernant ce dernier point, l'amplitude des pics renseigne sur la vitesse de phase de la structure qui va apparaître au dessus du seuil. En particulier, pour le cas de la figure 9.10c, chacun des 4 pics principaux possède la même intensité, ce qui signifie que, même s'il existe une vitesse de groupe transverse non nulle, la structure est stationnaire.

En conclusion, lorsque le système 2D présente une dérive transverse, les précurseurs en

champ lointain conduisent à un pouvoir de prédiction complet des structures à venir en champ proche. Ainsi, l'existence de bruit dans le système entraîne, sous le seuil, l'apparition d'une distribution d'intensité en champs lointain contenant toutes les informations (nombre d'onde, orientation des vecteurs d'onde, stationnarité) sur l'instabilité primaire qui apparaît une fois le seuil franchi, contrairement au cas classique ($h = 0$) où seul le module du vecteur d'onde était prédit. De plus, la très bonne concordance entre les acquisitions expérimentales et les images réalisées à partir de l'expression de la TF optique 9.24 permettent de valider l'approche analytique.

9.4 Structures hyper-réseaux et quasi-cristaux entretenues par le bruit

Nous venons de voir dans ce chapitre 9 que la présence de dérive dans notre système donnait lieu à la naissance de toute une série de nouvelles structures périodiques absentes dans le système classique où seule la structure hexagonale existe. Ces structures de base, encore appelées modes, font partie des structures périodiques typiques largement étudiées dans les systèmes dissipatifs telles que les rouleaux, les carrés, les hexagones observés dans les différents domaines de la physique [4].

Un autre classe de structures plus complexes existe lorsqu'au moins deux modes coexistent ou lorsqu'une rotation est appliquée dans le système. Deux types de structures peuvent alors être obtenues : les structures *quasi-périodiques* et les structures de type *hyper-réseaux*. Les premières, apériodiques, font référence à l'ordre quasi-cristallin observé dans la physique de l'état solide [101] et se présentent sous forme par exemple d'ordre à 8 ou 12 spots répartis sur un anneau dans le plan de Fourier. Plusieurs de ces structures ont été mises en évidence d'abord en hydrodynamique [102, 103] puis ensuite en optique [104, 105, 106, 107]. Le second type de structures (hyper-réseaux) s'obtient en présence d'au moins deux modes qui doivent alors vérifier une *condition de résonance* pour que cette structure soit stationnaire. Dans le cas contraire, les modes rentrent en compétition et une dynamique complexe se met en place qui peut donner lieu par exemple à une dynamique d'alternance [108], de "winner takes all" [65], ou plus complexe [109].

Nous nous intéressons ici au cas des structures stationnaires. Ces dernières sont composées de modes dont les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_i$ vérifient la condition de résonance :

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{k}_i = 0 \quad (9.26)$$

Au même titre que l'hexagone dans le système classique est le résultat de cette combinaison, les hyper-réseaux se construisent à partir de cette relation vectorielle à la différence près que les vecteurs d'onde en jeu n'ont pas tous le même module.

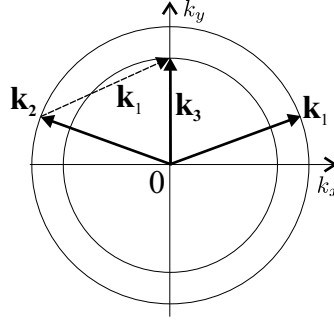


FIG. 9.11 – Exemple de résonance entre deux vecteurs d'onde de même module $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ et un vecteur d'onde de module différent $\mathbf{k}_3$ tel que $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$.

Un exemple de cette interaction constructive est donné sur la figure 9.11 : les vecteurs d'onde composant la structure en champ proche se retrouvent tous par simple combinaison linéaire de deux autres. Ainsi, deux vecteurs créent une modulation qui va coïncider avec celle d'un troisième vecteur, l'amplifiant et la stabilisant. De nombreux travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux ont mis en évidence ces hyper-réseaux ainsi que les conditions à remplir pour les obtenir [110, 111, 112, 113, 114, 115].

Nous allons montrer ici qu'il est possible de générer de tels hyper-réseaux ainsi que des quasi-cristaux à partir des modes obtenus dans notre système grâce à la dérive. En effet, notre système possède tous les ingrédients requis :

1. des modes de différents modules $k_i \neq k_j$;
2. des rapports entre les nombres d'onde qui vérifient la condition de résonance (Eq. 9.26).

Nous proposons ici une méthode simple de construction de ces structures particulières à partir de différents modes du système. Nous nous limiterons à vérifier, à travers un exemple expérimental, que ces structures sont stationnaires et qu'elles sont entretenues par le bruit en régime convectif (grâce aux simulations numériques).

9.4.1 Construction géométrique d'un hyper-réseau

Nous avons vu dans la section 9.1 que trois types de modes existaient dans le système à dérive : des rouleaux horizontaux stationnaires de nombres d'onde constants $k_{c(n=0)}^{[p]}$ (indépendants de h), des réseaux rectangulaires stationnaires dont les nombres d'onde $k_{c(n \neq 0)}^{[p]}$ dépendent de h , et des rouleaux verticaux non stationnaires.

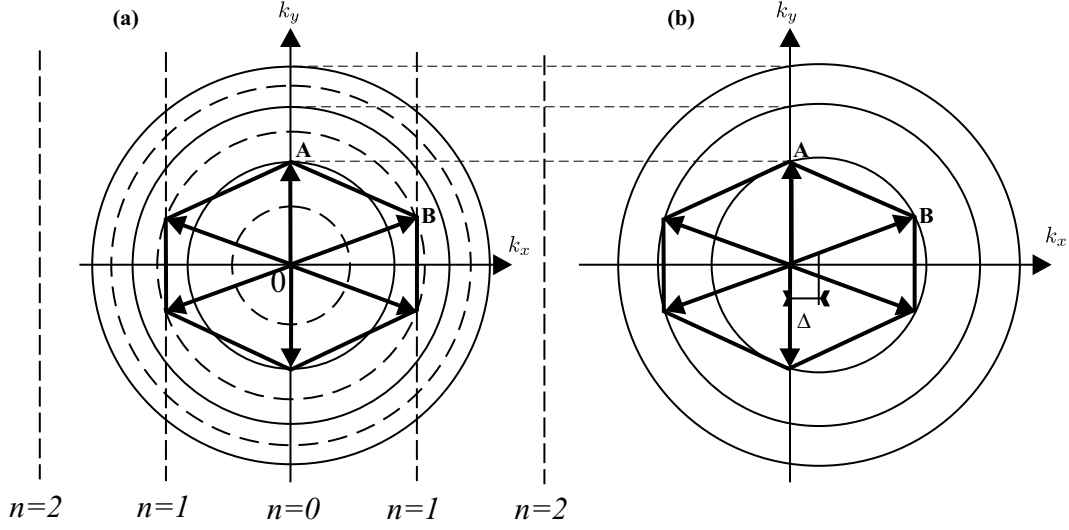


FIG. 9.12 – (a) Construction d'un hyper-réseau dans l'espace des $\mathbf{k}$ de l'indice $\tilde{n}$; (b) TF optique correspondante, le centre des anneaux est décalé de $\Delta = \frac{h}{2\sigma}$ comme prévu par l'équation 9.25. Les vecteurs d'ondes utilisés sont $\mathbf{k}_{(1)}^{[2]}$ pour $\mathbf{B}$ et $\mathbf{k}_{(0)}^{[1]}$ pour $\mathbf{A}$. $\sigma = -17$.

La réalisation d'hyper-réseaux à partir de ces modes s'effectue grâce à la construction géométrique de la figure 9.12a basée sur le modèle de la figure 9.3 proposée précédemment. Rappelons les étapes de la détermination des modes susceptibles de se déstabiliser :

1. Tracer les cercles concentriques dans l'espace réciproque de rayons $k_c^{[p]}$ pour $\sigma > 0$ (en tirets) et $k_c^{[p]}$ pour $\sigma < 0$ (en traits pleins) centrés sur $\mathbf{k} = (0, 0)$. Le rapport entre chacun des rayons étant quasi constant dès que $|\sigma| \gg 1$ (typiquement $|\sigma| > 10$) ces cercles concentriques peuvent être utilisés comme une base commune à toutes les compositions de structures (d'autant plus que la valeur de σ affecte surtout le rayon du premier anneau).
2. Tracer dans le même repère des droites verticales d'équations $k_{cx}^{(n)} = n \frac{\pi}{h}$ avec $n \in \mathbb{N}$, en tirets pour n impairs et en traits pleins pour n pairs³.
3. Chaque intersection entre un cercle et une droite du même trait (plein ou tirets) marque le sommet d'un vecteur d'onde susceptible de se déstabiliser dans le système.

Pour déterminer les paramètres favorables à la formation d'un hyper-réseau, il suffit, une fois les cercles tracés (étape 1), d'ajuster et fixer la position des droites verticales (étape 2) qui vont permettre de construire des combinaisons de vecteurs résonnants. La construction géométrique réalisée donne alors la valeur du décalage transverse h nécessaire à la formation de la structure suivant la relation 9.8b. Pour l'exemple de la figure 9.12, il faut que $h = \frac{\pi}{k_{cx(1)}} = 5$. Les vecteurs d'ondes utilisés sont alors $\mathbf{k}_{(1)}^{[2]}$ et $\mathbf{k}_{(0)}^{[1]}$ et la structure est composée d'un RH et d'un RR .

³Pour le cas σ positif, il suffit de tracer en tirets les droites associées aux n pairs et en traits pleins celles associées aux n impairs, le reste de la méthode est rigoureusement identique.

Notons que cette construction détermine les conditions optimales de résonance, c'est à dire pour les nombres d'ondes critiques. En effet, lorsque le paramètre de pompe μ augmente, une bande plus large de nombres d'onde est autorisée, ce qui autorise une relative incertitude sur les paramètres nécessaire à la formation des hyper-réseaux. Cependant, une intensité incidente trop forte peut amener d'autres effets comme la déstabilisation de modes non désirés ou encore la perte de la stationnarité.

9.4.2 Observation expérimentale d'un hyper-réseau stationnaire entretenu par le bruit

La structure construite sur la figure 9.12 pour $\sigma = -17$ et $h = 5$ a été observée expérimentalement sur notre dispositif (Fig. 9.13a). Les vecteurs d'onde composant sa TF optique (Fig. 9.13b) correspondent bien à ceux prévus par la construction géométrique : les taches principales s'inscrivent au sommet d'un hexagone aplati. La condition de résonance entre les vecteurs d'onde des structures RH et RR permettent la coexistence des 3 modulations spatiales qui forment la structure observée en champ proche. Notons que cette dernière est stable, son orientation est fixée par le sens de la dérive et elle est stationnaire comme en atteste l'évolution spatiale du profil d'intensité présentée sur la figure 9.13c. Ce dernier point découle du fait que les modes composant la structure sont eux-même stationnaires. La condition de résonance entre vecteurs d'onde est nécessaire pour obtenir l'hyper-réseau mais elle n'est pas suffisante pour que celui-ci n'évolue pas au cours du temps. En effet, si les modes en jeu possèdent des vitesses de phase différentes, la structure en champ proche risque fortement d'afficher une dynamique non stationnaire.

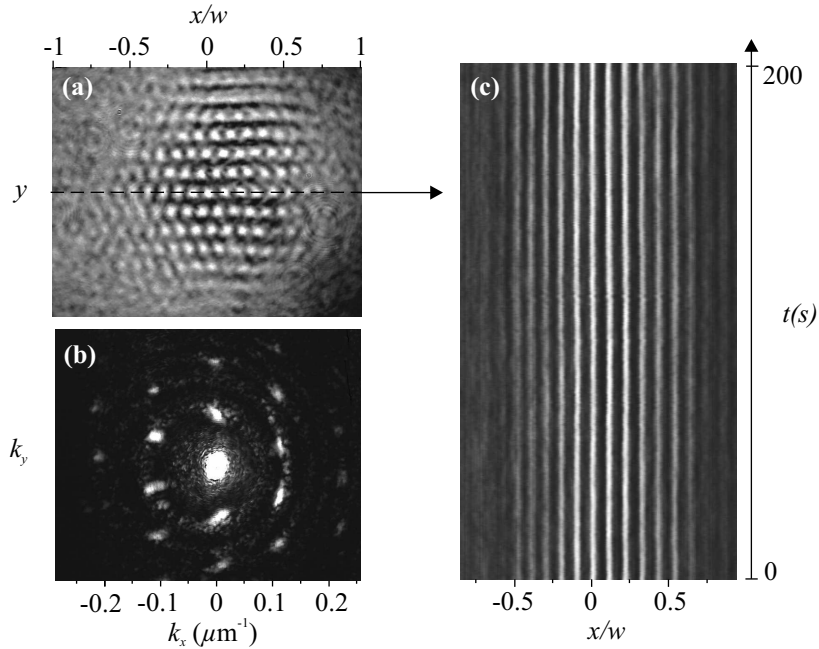


FIG. 9.13 – Structure hyper-réseau expérimentale obtenue pour $\sigma = -17$ et $h = 5$ en champ (a) proche et (b) lointain . (c) diagramme spatio-temporel d'un profil transverse du champ proche repéré par la ligne en tirets sur (a). $w = 1400\mu\text{m}$.

Remarque :

La construction géométrique de cette structure est réalisée sur la grandeur d'indice $\tilde{n}(k)$, cependant nos observations expérimentales sont faites sur le champ lointain après la seconde traversée du cristal liquide $B_{out}(k)$. Il est possible de représenter les vecteurs d'onde en jeu dans le plan (k_x, k_y) de la TF optique en se basant sur l'étude des anneaux décalés du régime de diffraction (c.f. section 9.3). En effet, si on trace des anneaux concentriques de centre C et de rayons $k_h^{[p]}$, avec $C = (\frac{h}{2\sigma}; 0)$ et $k_h^{[p]}(h) = \sqrt{(k^{[p]})^2 - (\frac{h}{2\sigma})^2}$, on remarque que chaque sommet des vecteurs d'onde participant à la structure se situe sur ces anneaux⁴ (Fig. 9.12b).

9.4.3 Influence du bruit sur les hyper-réseaux

On peut remarquer deux effet non-triviaux du bruit sur l'hyper-réseau présenté sur la figure 9.13 :

1. Cette structure hyper-réseau est composée de modes purement convectifs. Des simulations numériques montrent qu'en absence de bruit la structure dérive et quitte le système (Fig. 9.14c), ce qui signifie que *l'hyper-réseau observé expérimentalement est entretenu par le bruit*.
2. Pour des intensités incidentes où seul existe le mode RH convectif sans bruit (on peut voir la structure RH quelques instant avant qu'elle ne disparaisse sur les figures 9.14c-d), le système bruité affiche déjà l'hyper-réseau (Fig. 9.14a-b). La présence de perturbations aléatoires entraîne un couplage (condition de résonance) entre le mode RH super-actif (dont le taux croissance temporel est positif [65]) et le précurseur du mode RR passif (dont le taux de croissance est négatif) qui a pour effet d'"avancer" l'apparition de l'hyper-réseau.

⁴Notons la modification apportée dans l'expression des rayons des anneaux. Le terme $\frac{2\pi}{\sigma}m - (\frac{h}{2\sigma})^2$ définissant les maxima du cosinus traduisant la diffraction dans l'équation 9.24 est remplacé par la grandeur $k^{[p]2} - (\frac{h}{2\sigma})^2$ dans le cas des structures établies.

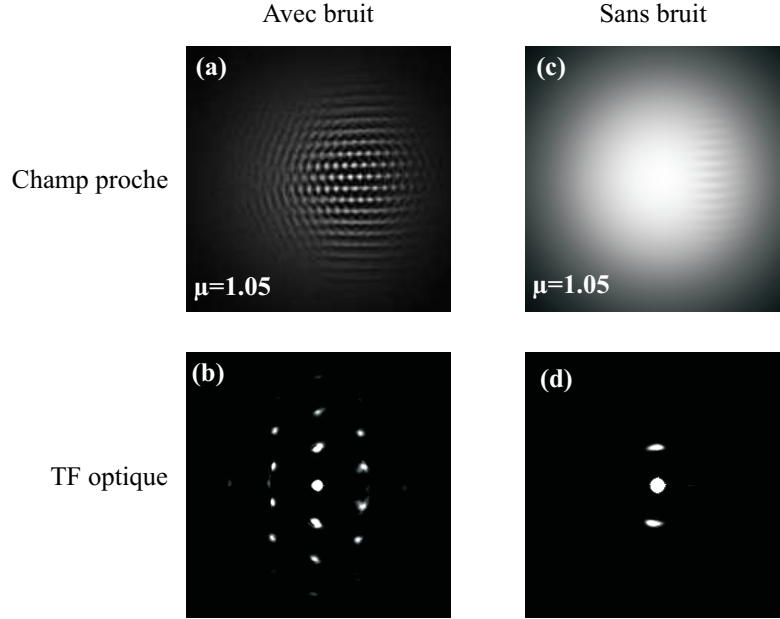


FIG. 9.14 – (a,b) Structures hyper-réseaux en champ proche (a) et lointain (b) en présence de bruit $h = 5$, $\sigma = -17$, $\eta = 30$. (c,d) Structures convectives obtenues pour les mêmes paramètres mais sans bruit en champ proche (c) et lointain (d). Les images (c) et (d) montrent des régimes transitoires issue d’une perturbation locale, pour des temps plus longs le système ne montre plus aucune structuration.

9.4.4 Exemples d’hyper-réseaux et de quasi-cristaux réalisables dans le système à dérive

La figure 9.15 montre d’autres exemples d’hyper-réseaux construits à partir de la méthode développée précédemment et obtenues par simulations numériques. Nous n’effectuons pas d’analyse détaillée de ces structures cependant nous notons quelques remarques :

- Pour garder la stationnarité des structures, il est préférable d’utiliser une valeur de $|\sigma|$ assez grande afin que les différents modes en jeu dans la formation de la structures n’aient pas des valeurs de seuil trop différentes. Rappelons que la valeur des seuils pour les modes utilisés ici (RH et RR) ne dépend pas de h .
- Des simulations numériques avec une pompe spatialement homogène montrent que les hyper-réseaux se forment sans l’aide d’un filtrage spatial dans le plan de Fourier et qu’ils sont stationnaires au voisinage de leur seuil d’apparition. Néanmoins, lorsque la pompe est gaussienne, le filtrage spatiale est nécessaire pour stabiliser la structure et ainsi garder la stationnarité (Fig. 9.15a-c) .
- Il est également possible de former des hyper-réseaux à partir de modes associés aux langues $p > 1$, qui ne sont pas des modes primaires. Dans ce cas, un filtrage spatiale dans le plan de Fourier qui ne laisse passer que les vecteurs d’onde désirés est nécessaire

- (filtre du même type que celui la figure 9.6). Un exemple est donné sur la figure 9.15d.
- Enfin, plus le paramètre h est grand, plus les possibilités de construction sont nombreuses car l'écart $(k_{c_x(n)} - k_{c_x(n-1)})$ est proportionnel à $\frac{1}{h}$. Ainsi, il est possible, par exemple de construire une quasi-structure à douze spots comme le montre la figure 9.16. L'utilisation d'un filtre "passe bande" (Fig. 9.16b) est nécessaire pour stabiliser la structure.

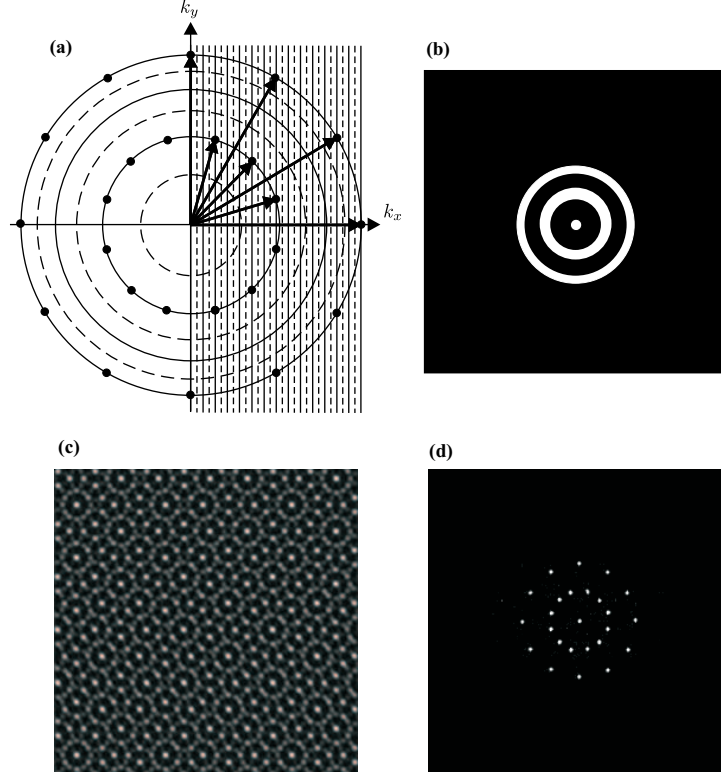


FIG. 9.16 – (a) Construction d'une quasi-structure pour $\sigma = -17$ et $h = 87.35$; (b) filtre spatial utilisé (c) structure obtenue en champ proche par simulation numérique (conditions aux limites périodiques) (d) structure en champ lointain

En conclusion, il est possible d'obtenir des hyper-réseaux et quasi-cristaux à partir de combinaisons résonantes de modes de base obtenues grâce à la dérive. Ceux-ci ont la particularité d'être stationnaires (en dépit de la dérive) et d'être entretenus par le bruit. Dans certains cas, nous avons vu que l'utilisation de filtres spatiaux dans le plan de Fourier peut être nécessaire pour stabiliser ces structures, en particulier lorsque la pompe est spatialement inhomogène ou lorsque les modes de base sont associés aux langues d'indice $p > 1$.

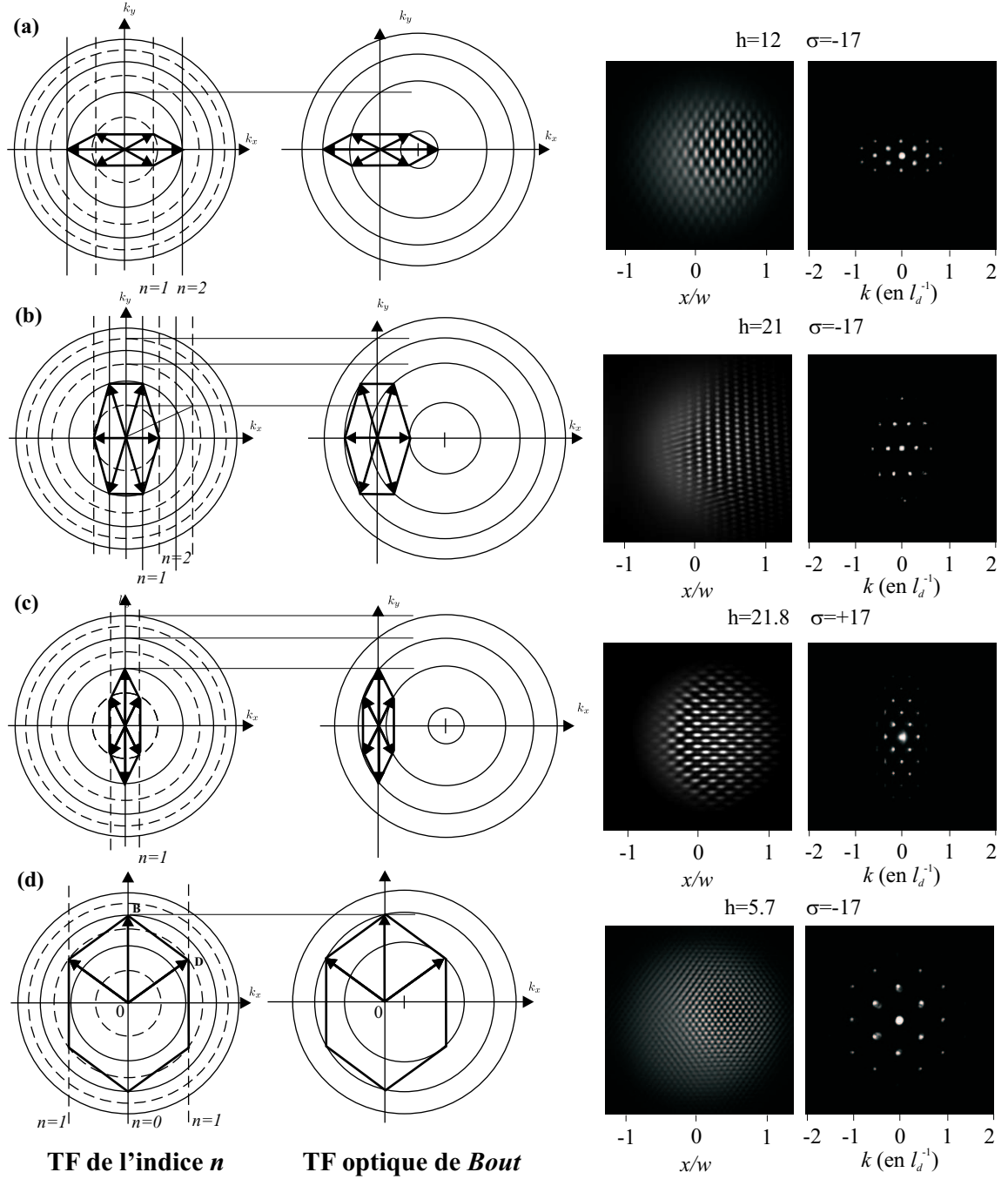


FIG. 9.15 – Exemples de structures hyper-réseaux réalisables. Les images de droites sont les simulations numériques correspondantes avec un faisceau incident gaussien. (a-c) avec filtre passe-bas dans le plan de Fourier coupant tous les $k > \max(k_i)$ où les k_i sont les nombres d'onde participant à la structure. (d) avec filtre dans le plan de Fourier du même type que pour la figure 9.6.

Conclusion

Notre travail s'inscrit autour de deux axes principaux : les effets du bruit et les effets d'une dérive transverse sur la formation des structures et leur dynamique. Les résultats que nous avons présentés s'appuient sur un système optique particulier appelé boucle Kerr, connu pour sa relative simplicité et sa capacité à développer des instabilités spatio-temporelles. Cependant, comme nous l'avons souligné, ce système possède un caractère universel qui permet une transversalité des résultats vers d'autres disciplines.

Premièrement, nous avons proposé une étude à la fois analytique, numérique et expérimentale des effets du bruit autour du seuil (défini sans bruit) d'apparition des structures. L'ajout d'un terme stochastique au modèle théorique a permis de rendre compte de l'agitation thermique interne au cristal liquide. Nous avons ainsi mis en évidence la présence, sous le seuil, de précurseurs induits par le bruit qui anticipent certaines propriétés de la structure apparaissant au dessus du seuil (une ligne de spots en configuration 1D et un réseau hexagonal en 2D). Ces précurseurs sont observables dans l'intensité moyenne du champ lointain (TF optique). A 1D, ceux-ci se présentent comme une succession de pics d'intensité dont le plus important est localisé au nombre d'onde critique k_c qui apparaît au dessus du seuil. A 2D, ce sont des anneaux concentriques. Le rayon de l'anneau le plus intense coïncidant également avec la valeur du k_c . On note une très bonne correspondance entre l'expression analytique de ces précurseurs et les observations expérimentales, aussi bien dans leur dépendance transverse (en k) que dans leur évolution avec le paramètre de pompe μ .

L'étude de la transition entre le régime de précurseurs et le régime établi montre que, dans le cas 1D, le passage du seuil s'accompagne d'une localisation de la phase spatiale de la structure. La comparaison avec les simulations numériques sans bruit montre que le comportement de cette phase fournit à la fois un indicateur robuste de la valeur du seuil dans les conditions expérimentales ainsi qu'une évaluation du niveau de bruit expérimental. A 2D, les six spots dans la TF optique traduisant la structure hexagonale évoluent, sous le seuil, vers des anneaux concentriques. Ceci indique que les précurseurs portent l'information du nombre d'onde k_c mais pas de la composition structurelle (hexagones, carré, rouleaux...) du régime établi. L'étude des corrélations angulaires dans la TF optique révèle que ces anneaux peuvent porter l'information de la formation d'hexagone mais dans une zone restreinte qui correspond à la zone bistable de la bifurcation sous-critique. Il n'existe donc pas de couplage non-linéaire,

CONCLUSION

responsable des pics de corrélation angulaire à $\pi/3$ et $2\pi/3$, avant la zone bistable. Enfin, nous avons montré que cette première étude à caractère fondamental sur les précurseurs pouvait être utilisée dans une perspective plus appliquée. En effet, celle-ci nous a permis de proposer une nouvelle méthode de mesure de la longueur de diffusion l_d et de la constante de relaxation temporelle τ du cristal liquide. Basée sur l'analyse d'un simple faisceau de sonde traversant le cristal liquide, elle s'avère être la seule méthode permettant une mesure directe de τ et non un temps de réponse à un champ optique ou électrique. Elle constitue une méthode supplémentaire pour déterminer les constantes élastiques du cristal liquide.

Dans la dernière partie de ce rapport, nous nous sommes intéressés à la dynamique des instabilités lorsqu'une dérive est présente dans le système. En particulier, nous avons démontré expérimentalement que des structures entretenues par le bruit (rouleaux) peuvent survivre dans un système réel avec des paramètres lentement variables dans l'espace (pompe gaussienne). La présence de l'instabilité convective souligne le rôle crucial du bruit sur la dynamique des structures. En effet, ces structures macroscopiques entretenues par le bruit résultent d'un processus d'amplification sélective de perturbations microscopiques.

La condition nécessaire pour observer un régime convectif est la brisure de symétrie $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ produit dans notre système par un désalignement du miroir de renvoi. Des rouleaux en régime absolu ont également été observés, ils sont quant à eux auto-entretenus par la non-linéarité du système. Les expériences et simulations ont montré que le meilleur indicateur de la nature de l'instabilité est fourni par l'évolution des frontières de la zone structurée. Celle-ci affiche distinctement un comportement différent pour chacun des régimes convectif et absolu.

Cette mise en évidence expérimentale est basée sur un travail théorique préalable pour la détermination des seuils d'instabilité convective et absolue adapté à la boucle Kerr. Un développement de Taylor de la relation de dispersion nous fournit une expression analytique du seuil absolu. Cette approche est validée par une résolution numérique de la relation de dispersion exacte basée sur la recherche du point selle.

A partir de cette étude théorique qui n'impose aucune restriction sur la vitesse de dérive, nous avons généralisé l'étude du groupe de Florence sur ce système par la détermination des seuils absolus. Par ailleurs, nous discutons et complétons les caractéristiques des structures étudiées par ce groupe sur la génération de structures stationnaires et d'abaissement du seuil en présence de dérive.

Pour la configuration 2D, nous avons effectué un recensement des différentes classes de structures pouvant être déstabilisées. Ceci nous permet de montrer non seulement que les familles de structures de type "rouleaux horizontaux" et "réseaux rectangulaires" sont stationnaires au seuil convectif mais aussi qu'elles ne possèdent pas de régime absolu. Ces modes particuliers obtenus expérimentalement sont donc toujours des structures purement entretenues par le bruit. De plus, nous montrons qu'en combinant ces modes stationnaires, il est possible de générer dans le système à dérive des hyper-réseaux et quasi-structures entretenus par le bruit.

Enfin, parallèlement à cette deuxième partie, nous montrons expérimentalement et analytiquement que les précurseurs en présence de dérive possèdent non seulement l'information du nombre d'onde k_c mais aussi celle de l'orientation des vecteurs d'onde et de la vitesse de phase de la structure qui apparaît au seuil convectif.

Bibliographie

- [1] J.D. Murray. *Mathematical biology*. Springer Verlag, New York, 1989.
- [2] D. Fein, P. Ortúvela, W. Scalf, S. Schmidt, and M. Wolff. *spontaneous pattern formation in precipities systems*. J. Chem Phys. **69**(27) (1978).
- [3] M. Faraday. *On the form and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces*. Phil. Trans. R. Soc. London **52**, 319 (1831).
- [4] M.C. Cross and P.C. Hohenberg. *Pattern formation outside equilibrium*. Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [5] F.T. Arrechi, S. Boccaletti, and P.L. Ramazza. *Pattern formation and competition in nonlinear optics*. Physics Reports **318**, 1 (1999).
- [6] R. Macdonald and H. Danlewski. *Transverse pattern in optical reorientation of nematic liquid crystals with a single feedback mirror*. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **251**, 145 (1994).
- [7] S.A. Akhmanov, M.A. Vorontsov, and V Yu. Ivanov. *Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams; new types of nonlinear waves; onset of optical turnulence*. Pis'ma Zh Eskp Teor Fiz **47**(12), 611 (1988).
- [8] W.J. Firth. *Spatial instabilities in Kerr medium with single feedback mirror*. J. Mod. Opt. **37**, 151 (1990).
- [9] R.C. DiPrima, H.L. Swinney, and J.P. Gollub. *Hydrodynamic instabilities and transition to turbulence*. Springer, Berlin, 1981.
- [10] I. Rehberg, S. Rasenat, de la Torre Juárez, W. Schöpf, F. Hörner, G. Ahlers, and H.R. Brand. *Thermally induced hydrodynamic fluctuations below the onset of electroconvection*. Phys. Rev. Lett. **67**(5), 596 (1991).
- [11] P. Huerre and P.A. Monkewitz. *Local and global instabilities in spatially developing flows*. Ann. Rev. Fluid. Mech. **22**, 473 (1990).
- [12] P.L. Ramazza, P. Bigazzi, E. Pampaloni, S. Residori, and F.T. Arrechi. *One-dimensional transport-induced instabilities in an optical system with nonlocal feedback*. Phys. Rev. E **52**(5), 5524 (1995).
- [13] A.M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. R. Soc. London **237**, 37 (1952).

- [14] Lord. Rayleigh. *On the dynamics of revolving fluids*. Proc. R. Soc. London Ser **93**, 148 (1916).
- [15] H. Bénard. *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent*. Ann. Chim. Phys. **7**(23), 62 (1900).
- [16] A.C. Newell and J.A. Whitehead. *Finite bandwidth, finite amplitude convection*. J. Fluid. Mech. **38**, 279 (1969).
- [17] F.T. Arrechi. *Optical morphogenesis : pattern formation and competition in nonlinear optics*. Physica D **86**, 297 (1995).
- [18] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self-organization in nonequilibrium systems, from dissipative structures to order through fluctuations*. Wiley, New York, 1977.
- [19] P. Manneville. *Structures dissipatives chaos et turbulence*. Aléa, Saclay, 1990.
- [20] D.E. Spence, D.N. Kean, and W. Sibbett. *60 f-sec pulse generation from a self-mode-locked Ti :sapphire laser*. Opt. Lett. **16**(1), 42 (1991).
- [21] W.L. Barnes, A. Dereux, and T.W. Ebessen. *Surface plasmon subwavelength optics*. Nature **424**, 824 (2003).
- [22] C.O. Weiss. Processing of information by arrays of non-linear optical solitons. In *Esprit project 28235 PIANOS*. Cordis (1998).
- [23] M.A. Vorontsov and W.B. Miller. *Self-organization in optical systems and applications in information technology*. Springer, Berlin, 1995.
- [24] G. Giusfredi, F.J. Valley, R. Pon, G.. Khitrova, and H.M. Gibbs. *Optical instabilities in sodium vapor*. J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1181 (1988).
- [25] R. Macdonald and H.J. Eicher. *Spontaneous optical pattern formation in a nematic liquid crystal with feedback mirror*. Opt. Comm. **89**, 289 (1992).
- [26] E. Santamato, E. Ciamarella, and M. Tamburrini. *Talbot assisted hexagonal beam patterning in a thin liquid crystal film with a single feedback mirror at negative distance*. Appl. Phys. Lett. **63**(12), 1604 (1993).
- [27] R. Neubecker, G.L. Oppo, B. Thuerling, and T. Tschudi. *Pattern formation in a liquid-crystal light valve with feedback*. Phys. Rev. A **52**(1), 791 (1995).
- [28] T. Honda. *Hexagonal pattern formation due to counterpropagation in KNbO₃*. Opt. Lett. **18**, 598 (1993).
- [29] L. Dambly. *Etudes des instabilités spatio-temporelles dans les oscillateurs à gain photo-réfractif*. PhD thesis Université des Sciences et Technique de Lille (France) (1994).
- [30] T. Ackemann and W. Lange. *Non- and nearly hexagonal patterns in sodium vapor generated by single-mirror feedback*. Phys. Rev. A **50**, R4468 (1994).
- [31] M. Brambilla, L.A. Lugiato, F. Prati, L. Spinelli, and W.J. Firth. *Spatial soliton pixels in semiconductor devices*. Phys. Rev. Lett. **79**, 2042 (1997).

-
- [32] T. Ackemann. *Spontaneous formation of spatial structures in dissipative nonlinear optical systems with external feedback and time-dependant driving*. PhD thesis Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (2002).
 - [33] S. Bielawski, C. Szwaj, C. Bruni, M.E. Couprie, D. Garzella, and G.L. Orlandi. *Spectral properties of FEL oscillators : new theoretical and experimental results on the Super-ACO FEL*. FEL 2004 page 44 (2004).
 - [34] C. Green, G.B. Mindlin, E.J. D'Angelo, H.G. Solari, and J.R. Tredicce. *Spontaneous symmetry breaking in a laser : the experimental side*. Phys. Rev. Lett. **65**(25), 3124 (1990).
 - [35] W.H.F. Talbot. *Facts relating to optical science*. Philos. Mag. **9**(56), 401 (1836).
 - [36] P.G. de Gennes and J. Prost. *The physics of liquid crystal*. Clarendon, New York, 1993.
 - [37] G. D'Alessandro and W.J. Firth. *Hexagonal spatial patterns for a Kerr slice with a feedback mirror*. Phys. Rev. A **46**(1), 537 (1992).
 - [38] I.C. Khoo and S.T. Wu. *Optics and nonlinear optics of liquid crystals*. World Scientific, Singapore, 1993.
 - [39] E. Santamato, E. Ciamarella, and M. Tamburrini. *Talbot assisted pattern formation in a liquid crystal film with single feedback mirror*. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **251**, 127 (1994).
 - [40] G. D'Alessandro and W.J. Firth. *Spontaneous hexagon formation in a nonlinear medium with optical feedback mirror*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2597 (1991).
 - [41] E. Louvergneaux. *Pattern-dislocation-type dynamical instability in a 1D optical feedback Kerr media with gaussian transverse pumping*. Phys. Rev. Lett. **87**(24), 24450 (2001).
 - [42] J.B. Brzoska, I Ben. Azouz, and F. Rondelez. *Silanization of solid substrates : a step toward reproducibility*. Langmuir **10**, 4367 (1994).
 - [43] M. Loecher. *Noise sustained patterns* vol. 70 page 3. World Scientific Publishing Singapore (2003).
 - [44] F.T. Arrechi, G.S. Rodari, and A.Sona. *Statistics of the laser radiation at threshold*. Phys. Lett. A **25**, 59 (1967).
 - [45] K.M. Jansons and G.D. Lythe. *Stochastic calculus : application to dynamic bifurcations and threshold crossings*. J. Stat. Phys. **90**, 227 (1998).
 - [46] A. Becker and L. Kramer. *Linear stability analysis for bifurcations in spatially extended systems with fluctuating control parameter*. Phys. Rev. Lett. **73**, 955 (1994).
 - [47] J.M.R. Parrondo, C Van. den Broeck, J. Buceta, and J. de la Rubia. *Noise induced spatial patterns*. Physica A **224**, 153 (1996).
 - [48] M.A. Santos and J.M. Sancho. *Noise induced fronts*. Phys. Rev. E **59**, 98 (1999).
 - [49] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux. *noisy precursors in one-dimensional pattern*. Phys. Rev. A **66**, 063805 (2002).

- [50] K. Wiesenfeld and F. Moss. *Stochastic resonance and the benefits of noise : ice ages to crayfish and SQUIDS*. Nature **373**, 33 (1995).
- [51] J. García-Ojalvo and J.M. Sancho. *Noise in spatially extended systems*. Springer-New York (1999).
- [52] M. Treiber and L. Kramer. *Stochastic envelope equations for nonequilibrium transitions and application to thermal fluctuations in electroconvection in nematic liquid crystals*. Phys. Rev. E **49**(4), 48 (1994).
- [53] N.B. Abraham. *Proceeding of the Workshop on fluctuations and sensitivity in nonequilibrium systems*. Springer, Berlin, 1984.
- [54] C. Jeffries and K. Wiesenfeld. *Observation of noisy precursors of dynamical instabilities*. Phys. Rev. A **31**(2), 1077 (1985).
- [55] U. Bisang and G. Ahlers. *Thermal fluctuations*. Phys. Rev. Lett. **80**(14), 3061 (1998).
- [56] M. Wu, G. Alhers, and D.S. Cannell. *Thermaly induced fluctuations below the onset of Rayleigh-Bénard convection*. Phys. Rev. Lett. **75**(9), 1743 (1995).
- [57] A. Gatti, H. Wiedemann, L. Lugiato, and I. Marzoli. *Langevin treatment of quantum fluctuations and optical patterns in optical parametric oscillators below threshold*. Phys. Rev. A **52**(1), 877 (1997).
- [58] C. Sz waj, G.L. Oppo, A. Gatti, and L.A. Lugiato. *Quantum images in non degenerate optical parametric oscillators*. Eur. Phys. J. D **10**, 433 (2000).
- [59] M. Treiber. *Thermal fluctuations in pattern forming instabilities* page 307. Springer - Verlag New York (1996).
- [60] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [61] C.W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*. Springer, New York, 1990.
- [62] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teulolsky, and W. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986, ou online à l'adresse www.nr.com.
- [63] R.L. Honeycutt. *Stochastic Runge-Kutta algorithms. I. White noise*. Phys. Rev. A **45**, 600 (1992).
- [64] R. Neubecker and E. Benkler. *Empirical bifurcation analysis of optical pattern formation*. Phys. Rev. E **65**, 066206 (2002).
- [65] M.A. Vorontsov and W. J. Firth. *Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two dimensional feedback*. Phys. Rev. A **49**, 2891 (1994).
- [66] E.V. Degtiarev and M.A. Vorontsov. *Dodecagonal patterns in a Ker-slice/feedback-mirror type optical system*. J. Mod. Opt. **43**(1), 93 (1996).
- [67] E. Santamato, E. Ciamarella, and M. Tamburrini. *A new nonlinear optical method to measure the elastic anisotropy of liquid crystals*. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **241**, 205 (1994).

-
- [68] H.L. Ong. *Optically induced Freedericksz transition and bistability in a nematic liquid crystal*. Phys. Rev. A **28**, 2393 (1983).
 - [69] W.K. Bajdecki, L. Calero, and R. Meucci. *Nonlinear infared optical measurements of elastic constants in nematic liquid crystals*. Opt. Commun. **176**, 473 (2000).
 - [70] G.P. Crawford, J.A. Mitcheltree, E.P. Boyko, W. Fritz, S. Zumer, and J.W. Doane. *K33/K11 determination in nematic liquid crystals : an optical birefringence technique*. Appl. Phys. Lett. **60**(26), 3226 (1992).
 - [71] E. Miraldi, L. Trossi, P.T. Valagrega, and C. Oldano. *Absolute measurements of the elastic constants of nematic liquid crystals by light scattering*. Il Nuovo Cimento B **60**, 165 (1980).
 - [72] W.K. Bajdecki and M.A. Karpierz. *Influence of external electric field on time of non-linear optical reorientational effect in nematics*. Acta Phys. Polonica A **103**(2), 188 (2003).
 - [73] A. Parfenov and A. Chrzanowska. *Enhanced photoinduced nematic reorientation in mixture with azo-dye-substituted polymer*. In *Liquid Crystals Materials, Devices and Flat Panel Display* page 3955 San Jose CA (2000). Procc. of SPIE.
 - [74] P.L. Papadopoulos, H.M. Zenginoglou, and J.A. Kosmopoulos. *Optical measurement of the director relaxation time in a periodically reoriented nematic liquid crystal*. J. Apl. Phys. **86**, 3042 (1999).
 - [75] Orsay Liquid Crystal. Group. *Quasielectric rayleigh scattering in nematic liquid crystals*. Phys. Rev. Lett. **22**(25), 1362 (1969).
 - [76] H. Wang, T. Wu, X. Zhu, and S-T. Wu. *Correlations between liquid crystal director reorientation and optical response time of homeotropic cell*. J. Appl. Phys. **95**(10) (2004).
 - [77] N. Mitarai and H. Nakanishi. *Convective instability and structure formation in traffic flow*. Phys. Rev. Lett. **85**, 1766 (2000).
 - [78] M. Bando, H. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. *Dynamical model of traffic congestion iand numerical simulation*. Phys. Rev. E **51**, 1035 (1995).
 - [79] P.N. McGraw and M. Menzinger. *Pattern formation by boundary forcing in convectively unstable, oscillatory media with and without differential transport*. arXiv :nlin.PS page 0410017 (2004).
 - [80] R. Tagg, W.S. Edwards, and H.L. Swinney. *Convective versus absolute intability in flow between counterrotating cylinders*. Phys. Rev. A **42**(2), 831 (1990).
 - [81] N. Israeli, D. Kandel, M.F. Schatz, and A. Zangwill. *Convective instability of strained layer step*. Surf. Sci. **494**, L735 (2001).
 - [82] H. Ward, M.N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux. *Influence of walkoff on pattern formation in nondegenerate optical parametric oscillators*. Phys. Rev. E **63**, 016604 (2000).

- [83] P. Colet, D. Walgraef, and M San. Miguel. *Convective and absolute instabilities in the subcritical Ginzburg-Landau equation*. Eur. Phys. J. B **11**, 517 (1999).
- [84] R.J. Deissler. *Spatially growing waves, intermittency, and convective chaos in a open-flow system*. Physica D **25**, 233 (1987).
- [85] K.L. Babcock, G. Ahlers, and D.S. Cannell. *Noise amplification in open Taylor-Couette flow*. Phys. Rev. E **50**(5), 3670 (1994).
- [86] M. Santagiustina, P. Colet, M San. Miguel, and D. Walgraef. *Noise sustained convective structures in nonlinear optics*. Phys. Rev. Lett. **79**, 3633 (1997).
- [87] P.L. Ramazza, S. Boccaletti, and F.T. Arrechi. *Transport induced patterns in a optical system with focussing nonlinearity*. Opt. Comm. **136**, 267 (1997).
- [88] P.L. Ramazza, S. Ducci, and F.T. Arrechi. *Optical diffraction free patterns induced by a discrete translational transport*. Phys. Rev. Lett. **81**(19), 4128 (1998).
- [89] P.L. Ramazza, S. Boccaletti, A. Giaquinta, E. Pampaloni, S. Soria, and F.T. Arrechi. *Pattern formation in a nonlinear optical system : the effects of nonlocality*. Chaos, Solitons and Fractals (4).
- [90] P.A. Sturrock. *Amplifying and evanescent waves, convective and non-convective instabilities* page 124. MacGraw-Hill New York (1961).
- [91] C. Bender and S. Orszag. *Advance mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York, 1978.
- [92] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics I*. McGraw Hill New York (1953).
- [93] Une revue complète est donnée dans la section 3.6 de. *Pattern formation and competition in nonlinear optics*. Phys. Reports **318**, 1 (1999).
- [94] A.D.D. Craik. *The development of wavepackets in unstable flows*. Proc. R. Lond. A **373**, 457 (1981).
- [95] E. Louvergneaux, C. Szwarz, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki. *Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics*. Phys. Rev. Lett. **92**(4), 043901 (2004).
- [96] E. Benkler, M. Kreuzer, R. Neubecker, and T. Tshudi. *Experimental control of unstable pattern and elimination of spatiotemporal disorder in nonlinear optics*. Phys. Rev. Lett. **84**(5), 879 (2000).
- [97] R. Martin, A J. Scroggie, G.L. Oppo, and W.J. Firth. *Stabilization, selection and tracking of unstable patterns by Fourier space techniques*. Phys. Rev. Lett. **77**(19), 4007 (1996).
- [98] A.V. Mamaev and M. Saffman. *Selection of unstable patterns and control of optical turbulence by Fourier Plane filtering*. Phys. Rev. Lett. **80**(16), 3499 (1998).
- [99] R. Neubecker and A. Zimmermann. *Spatial forcing of spontaneous optical patterns*. Phys. Rev. E **65**, 035205 (2002).

-
- [100] L. Pastur, L. Gostiaux, U. Bortolozzo, S. Boccaletti, and P.L. Ramazza. *Experimental targeting and control of spatiotemporal chaos in nonlinear optics*. arXiv page 0401001v1 (2004).
 - [101] D.S. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*. Phys. Rev. Lett. **53**, 1951 (1984).
 - [102] B. Christiansen, P. Alstrom, and M.T. Levinsen. *Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves*. Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992).
 - [103] W.S. Edwards and S. Fauve. *Parametrically excited quasicrystalline surface waves*. Phys. Rev. E **47**, R788 (1993).
 - [104] E. Pampaloni, P.L. Ramazza, S. Residori, and F.T. Arecchi. *Two-dimensional crystals and quasicrystals in nonlinear optics*. Phys. Rev. Lett. **74**, 258 (1995).
 - [105] D. Leduc, M. Le. Berre, E. Ressayre, and A. Tallet. *Quasipatterns in a polarization instability*. Phys. Rev. A **53**(2), 1072 (1996).
 - [106] T. Ackemann and W. Lange. *Optical pattern formation in alkali metal vapors : Mechanism, phenomena and use*. Appl. Phys. B **72**(1) (2001).
 - [107] A. Aumann, T. Ackemann, E. Große. Westhoff, and W. Lange. *Eightfold quasipatterns in a optical pattern-forming system*. Phys. Rev. E **66**, 046220 (2002).
 - [108] B. Thüring, A. Schreiber, M. Kreuzer, and T. Tschudi. *Spatio-temporal dynamics due to competing spatial instabilities in a coupled LCLV feedback system*. Physica D **96**, 282 (1996).
 - [109] S.. Residori, P.L. Ramazza, E. Pampaloni, S. Boccaletti, and F.T. Arecchi. *Domain coexistence in two-dimensional optical patterns*. Phys. Rev. Lett. **76**, 1063 (1996).
 - [110] M.A. Vorontsov and A. Yu. Karpov. *Pattern formation due to interballon spatial mode coupling*. J. Opt. Soc. Am. B **14**, 34 (1997).
 - [111] M.A. Vorontsov and B.A. Samson. *Nonlinear dynamics in a optical system with controlled two-dimensional feedback black-eye patterns and related phenomena*. Phys. Rev. A **57**, 3040 (1998).
 - [112] H.W. Muller. *Model equation for two-dimensional quasipattern*. Phys. Rev. E **49**, 1273 (1994).
 - [113] H. Arbell and J. Fineberg. *Pattern formation in two-frequency forced parametric waves*. Phys. Rev. E **65**, 036224 (2002).
 - [114] Yu A. Logwin, T. Ackemann, and W. Lange. *Subhexagons and ultrahexagons as a result of a secondary instability*. Phys. Rev. A **55**, 4538 (1997).
 - [115] F.T. Arecchi, S. Boccaletti, S. Ducci, E. Pampaloni, P.L. Ramazza, and S. Residori. *The liquid crystal light valve with optical feedback : a case study in pattern formation*. J. Nonlinear Optical Physics and Materials **9**, 183 (2000).

- [116] W. Schöpf and W. Zimmermann. *Convection in binary fluids : Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations*. Phys. Rev. E **47**, 1739 (1993).

Annexe A

Etablissement de la longueur d'auto-reproduction de Talbot l_T .

Afin d'analyser l'évolution de l'amplitude de l'onde lumineuse, on introduit un développement de $\vec{E}$ sur le mode d'émission du laser caractérisé par sa pulsation w_0 et son nombre d'onde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \vec{E}_0(\mathbf{r}, t) \exp[i(k_0 z - w_0 t)] + c.c. \}.$$

où $\vec{E}_0(\mathbf{r}, t)$ décrit l'écart par rapport à l'onde plane. L'amplitude correspondante est supposée lentement variable par rapport aux échelles de temps et d'espace associées à k_0 et w_0 . Dans l'approximation paraxiale où le champ se propage suivant l'axe z , l'équation d'onde pour l'enveloppe¹ E_0 s'écrit (le développement de cette équation à partir des relations de Maxwell est détaillé dans l'annexe B) :

$$\frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 E_0(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

où $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien transverse (par souci de simplification, nous nous limiterons maintenant à une seule dimension transverse ($\mathbf{r} \rightarrow x$)). En transposant l'équation A.1 dans l'espace transverse réciproque $(x, z) \rightleftharpoons (q, z)$, l'effet de la propagation libre sur la composante de Fourier $\tilde{E}_0(q_0, z)$ (où $q_0 = 2\pi/\Lambda$) se résume à une simple multiplication :

$$\tilde{E}_0(q_0, z + \Delta z) = \tilde{E}_0(q_0, z) \cdot \exp\left(i \frac{q_0^2}{2k_0} \Delta z\right).$$

¹Le passage en grandeur scalaire suppose une projection sur l'axe de polarisation.

L'exponentielle imaginaire, fonction 2π -périodique, fournit directement la condition d'auto-reproduction définissant la longueur l_T :

$$\frac{q_0^2}{2k_0} l_T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad l_T = 2 \frac{\Lambda^2}{\lambda_0}.$$

De plus, lorsque $z = (p+1)l_T/4$ et $z = (p+3)l_T/4$ avec $p \in \mathbb{N}^+$, l'exponentielle prend les valeurs $\pm i$ ce qui implique, pour ces distances précises, qu'une modulation en amplitude est entièrement convertie en modulation de phase et réciproquement.

Appendix B

Etablissement de l'équation d'onde paraxiale

Rappelons tout d'abord les relations de Maxwell sur l'électromagnétisme utiles au développement.

Loi de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Action de l'opérateur nabla sur la loi de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{B.1})$$

Théorème d'Ampère-Maxwell en absence de déplacement de charge:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dérivée par rapport au temps de la loi de Maxwell-Ampère:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

Sachant que $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$, la comparaison entre les équations B.1 et B.2 mène à l'égalité suivante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (\text{B.3})$$

Par ailleurs, le premier membre de cette équation peut s'écrire $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$, or en absence de charge, le théorème de Gauss pour le champ $\vec{E}$ donne $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. De plus, si on fixe le repère de manière à ce que l'onde électromagnétique se propage suivant l'axe z , il est possible de séparer l'évolution longitudinale (z) et transverse (x, y) du champ dans le

Laplacien:

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

où $\mu_0 \varepsilon_0$ a été remplacé par $1/c^2$. c est la vitesse de propagation de l'onde et l'indice “ $\perp$ ” désigne les coordonnées transverses x et y .

Le champ $\vec{E}$ peut être écrit en séparant l'amplitude $\vec{E}_0(r)$ lentement variable et la partie oscillant à la fréquence optique:

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}_0 \exp [i (w_0 t - k_0 z)] + c.c. \right\}.$$

L'équation B.4 se développe alors:

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} - k_0^2 \vec{E}_0 + \frac{w_0^2}{c^2} \vec{E}_0 = 0.$$

Connaissant la relation $c = w_0/k_0$ pour les ondes planes, les deux derniers éléments de cette relation s'annulent. Par ailleurs, l'approximation de l'enveloppe lentement variable consiste à dire que les amplitudes varient lentement dans l'espace et le temps, à l'échelle de la longueur d'onde et de la fréquence optique, ce qui justifie l'inégalité suivante:

$$\left| k_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} \right|.$$

L'expression finale de l'équation d'onde paraxiale est donc:

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} = 0$$

Annexe C

Calcul de la fonction de corrélation temporelle de la TF de l'indice $\left\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \right\rangle$

Le calcul développé ici suit celui de l'annexe B de la référence [116].
 Pour calculer la fonction de corrélation temporelle :

$$\left\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) dt \quad (\text{C.1})$$

il est nécessaire de passer dans l'espace réciproque ($t \Rightarrow \omega$) où la fonction de corrélation s'exprime comme une simple multiplication :

$$\left\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \right\rangle \Rightarrow \widetilde{\widetilde{\Delta n^*}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{C.2})$$

Cette grandeur s'obtient à partir de l'équation stochastique 4.1 linéarisée en $\Delta n(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \Delta n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = (-1 - \nabla_{\perp}^2 + \mu \sin(\sigma \nabla_{\perp}^2)) \Delta n(\mathbf{r}, t) + \sqrt{\varepsilon} \xi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{C.3})$$

dont la double transformée de Fourier (spatiale et temporelle) s'écrit :

$$i\omega \widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) = -\mathcal{L}(\mathbf{k}) \widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) + \sqrt{\varepsilon} \widetilde{\widetilde{\xi}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{C.4})$$

avec $\mathcal{L}(\mathbf{k}) = 1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2)$

qui donne :

$$\widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \widetilde{\widetilde{\xi}}(\mathbf{k}, \omega)}{i\omega + \mathcal{L}(\mathbf{k})}. \quad (\text{C.5})$$

On déduit alors directement l'expression suivante :

$$\widetilde{\widetilde{\Delta n^*}}(\mathbf{k}, \omega) \widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\varepsilon \widetilde{\xi^*}(\mathbf{k}, \omega) \widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \mathcal{L}^2(\mathbf{k})}. \quad (\text{C.6})$$

Or, le terme stochastique ξ est un bruit blanc, ses propriétés de corrélation sont :

$$\langle \xi^*(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \delta(\Delta \mathbf{r}) \delta(\Delta t) \quad (\text{C.7})$$

ce qui implique que :

$$\widetilde{\xi^*}(\mathbf{k}, \omega) \widetilde{\xi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}. \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, l'équation C.6 devient :

$$\widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \widetilde{\widetilde{\Delta n^*}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega^2 + \mathcal{L}^2(\mathbf{k})}. \quad (\text{C.9})$$

Pour obtenir l'expression finale de la fonction de corrélation temporelle $\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \rangle$, il suffit de faire une transformée de Fourier inverse :

$$\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\widetilde{\Delta n}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \widetilde{\widetilde{\Delta n^*}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \exp(i\omega \Delta t) d\omega. \quad (\text{C.10})$$

Grâce au théorème des résidus, cette intégrale donne :

$$\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t + \Delta t) \rangle = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{\mathcal{L}(\mathbf{k})} \exp(-\mathcal{L}(\mathbf{k}) \Delta t). \quad (\text{C.11})$$

Pour $\Delta t = 0$, la fonction de corrélation temporelle recherchée s'écrit :

$$\langle \widetilde{\Delta n^*}(\mathbf{k}, t) \cdot \widetilde{\Delta n}(\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma \mathbf{k}^2)} \quad (\text{C.12})$$

Annexe D

Méthode de calcul de la corrélation angulaire

L'analyse consiste à extraire le signal le long de l'anneau précurseur de rayon k_c (Fig. D.1a) afin de construire un diagramme $(I_{k_c}(\varphi), t)$ où φ est l'angle polaire compris entre 0 et 2π (Fig. D.1b). Après soustraction de la moyenne temporelle pour ne garder que les fluctuations, un calcul de corrélation est réalisé sur φ tel que :

$$\mathcal{C}(\phi) = \left\langle \int_0^{2\pi} I_{k_c}(\varphi) I_{k_c}(\varphi + \phi) d\varphi \right\rangle_t$$

où ϕ est défini sur l'intervalle $[0; \pi]$ (Fig. D.1c). Le traitement est détaillé dans la légende de la figure D.1.

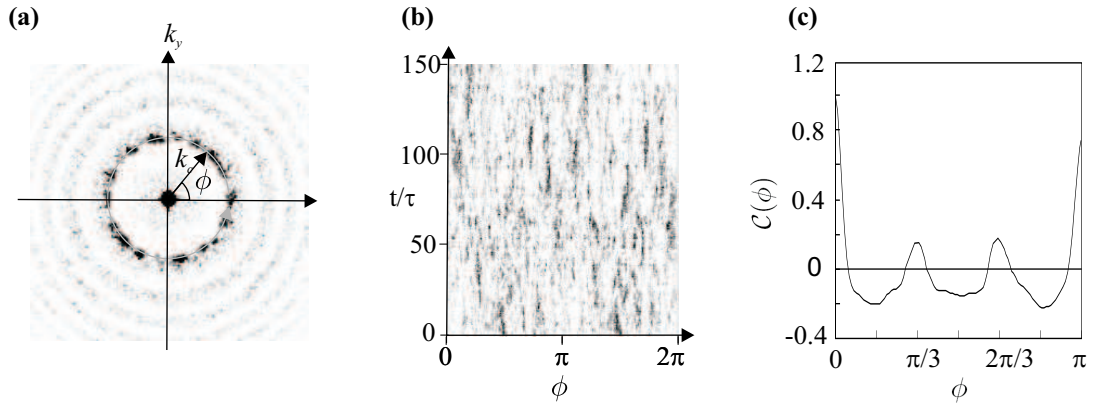


FIG. D.1 – *Etapes du calcul de la corrélation angulaire.* (a) exemple d'une TF optique instantanée. La valeur de l'intensité le long de l'anneau de rayon k_c est enregistrée et correspond à une ligne (un temps donné) du diagramme $(I_{k_c}(\phi), t)$ contenant 150 lignes. La moyenne temporelle est ensuite soustraite à ce diagramme afin d'éliminer les défauts expérimentaux statiques sur l'image Puis la moyenne en ϕ est soustraite ligne par ligne afin que $C(\phi) \rightarrow 0$ lorsqu'il y a absence totale de corrélation. Le diagramme résultant est présenté en (b). Enfin, un calcul de corrélation en ϕ est effectué à chaque pas de temps. $C(\phi)$ est ici la moyenne de chacun de ces 150 calculs.

Annexe E

Termes du développement de Taylor de la relation de dispersion $\Omega^{app}(k)$

L'expression de chacun des termes du développement de la relation de dispersion 7.21 est :

$$\begin{aligned}\Omega_R &= -(1 + k_c^2) \tan(k_c h) \\ \Omega_I &= 0 \\ d_2 &= \sin(\sigma k_c^2) \sin(h k_c) \\ d_1 &= \sin(\sigma k_c^2) \cos(h k_c) \\ v_g &= (1 + k_c^2) \left[h + 2\sigma k_c \frac{\tan(h k_c)}{\tan(\sigma k_c^2)} \right] \\ w_g &= 0 \\ a_r &= -(1 + k_c^2) \tan(h k_c) \left[4\sigma^2 k_c^2 - \frac{2\sigma}{\tan(\sigma k_c^2)} - h^2 \right] + 4h k_c \\ a_i &= (1 + k_c^2) \left[4\sigma^2 k_c^2 + h^2 + \tan(h k_c) \left(\frac{4\sigma k h}{\tan(\sigma k_c^2)} - \frac{h}{k_c} \right) \right] \\ \gamma_r &= -2 \cos(\sigma k_c^2) \sigma k_c \sin(h k_c) - \sin(\sigma k_c^2) \cos(h k_c) h \\ \gamma_i &= 2 \cos(\sigma k_c^2) \sigma k_c \cos(h k_c) - \sin(\sigma k_c^2) \sin(h k_c) h\end{aligned}$$

Annexe F

Publications

- F.1** Noisy precursors in one-dimensional patterns, *G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, Phys. Rev. A* **66**, 063805 (2002).

F.2 Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics, *E. Louvergneaux, C. Sz waj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (4), 043901 (2004).

- F.3** Using noise speckle pattern for the measurements of director reorientational relaxation time and diffusion length of aligned liquid crystals, *G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, Opt. Comm. 245, 243 (2005)*