



**HAL**  
open science

# Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion

Mathias Legrand

► **To cite this version:**

Mathias Legrand. Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes; Université de Nantes, 2005. Français. NNT : . tel-00011631

**HAL Id: tel-00011631**

**<https://theses.hal.science/tel-00011631v2>**

Submitted on 9 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License



**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2005*

N° B.U. :

**Thèse de Doctorat**

***Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

**MATHIAS LEGRAND**

LE 25 MARS 2005  
A L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

**MODELES DE PREDICTION DE L'INTERACTION ROTOR/STATOR DANS UN MOTEUR D'AVION**

**JURY**

Président	Etienne BALMES	Professeur, Ecole Centrale de Paris
Rapporteurs	Bruno COCHELIN	Professeur, Ecole Généraliste des Ingénieurs de Marseille
	Fabrice THOUVEREZ	Professeur, Ecole Centrale de Lyon
Examineurs	Jean-Pierre LOMBARD	Ingénieur, SNECMA Villaroche
	Bernard PESEUX	Professeur, Ecole Centrale de Nantes
	Christophe PIERRE	Professeur, University Of Michigan

---

Directeur de thèse : Bernard PESEUX  
Laboratoire : GeM  
Co-encadrant : Christophe PIERRE  
Laboratoire : Vibrations and Acoustics Laboratory, University of Michigan  
0367-171

N° ED

# Remerciements

La véritable différence entre un travail de thèse et l'impertinence d'une sombre rêverie dominicale reste insoupçonnée. On s'y confronte sans crier gare pour n'en réchapper qu'après de tumultueux retournements de situation, extrêmes souvent et complètement involontaires la plupart du temps. Cette expérience fondatrice s'accompagne de péripéties irréversibles et déconcertantes; la bataille est rude et le dénouement, frontispice d'une nouvelle journée, totalement inattendu. Bien évidemment, seule une assistance offerte contre les éléments rend possible un réveil optimiste.

Vient donc le temps de la reconnaissance. Le voici, par obligeance sans doute, au décompte des innombrables occasions où l'idée d'une erreur grossière traverse oisivement l'esprit.

Je souhaite donc remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu au cours de ces années, à commencer par mes deux « mentors », les Professeurs Bernard PESEUX de l'École Centrale de Nantes et Christophe PIERRE de l'Université du Michigan pour qui la recherche s'accompagne de clairvoyance, d'humanité et de bonne humeur.

Il va sans dire que Donatien LE HOUÉDEC, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, y est évidemment associé.

Ma profonde gratitude s'adresse aussi aux ingénieurs de SNECMA moteurs, Jérôme BONINI pour avoir initié le projet et Jean-Pierre LOMBARD pour l'avoir poursuivi.

Je remercie également les membres du jury, le Professeur Étienne BALMÈS de l'École Centrale, Président, et les professeurs Bruno COCHELIN de l'École Généraliste des Ingénieurs de Marseille et Fabrice THOUVEREZ de l'École Centrale de Lyon pour l'intérêt et le regard constructif portés à mon travail.

Une part non négligeable de ma reconnaissance va aux membres du LMM puis du GeM pour l'ambiance agréable et joyeuse qu'ils ont maintenu au cours de ces trois années et plus particulièrement à Gilles MARCKMANN pour les interrogatoires sans fin qu'il a du subir.

Enfin, que tous ces mots s'envolent aussi pour les USA où mes amis de tout bord et des souvenirs inaltérables auront émerveillé cette expérience humaine.



# Palindrome bizarre

## L'âge légal

ivresse tu t'es servi  
un rêve de ver nu ;

étiage de gâité  
trace, note ton écart ;  
sec, algue, feu, glaces,  
ce manger régna, mec !

saut, né zen, tu as  
emmêlé le lemme ;

rue, dupe de pudeur,  
éruptive, se vit pure  
et native lévitante...

# Résumés

Ces travaux ont pour objectif le développement de modèles de prédiction d'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion. En effet, afin de rester un acteur compétitif, un motoriste a un objectif principal: augmenter le rendement d'un moteur d'avion en accord avec les normes en vigueur. La minimisation du jeu entre l'extrémité des aubes des différents composants en rotation et le carter qui leur fait face est une réponse à cette contrainte. Malheureusement, la diminution de cette distance augmente sensiblement les possibilités de contact entre les deux parties. Les conséquences d'un tel phénomène pouvant être dramatiques pour le moteur, le bureau d'études doit concevoir des structures capables de résister à ces différentes sollicitations dynamiques: il est donc primordial de comprendre l'origine et l'action de ces forces de contact pour réduire de façon optimale le jeu entre les deux parties sans compromettre la sécurité des passagers. Dans cette étude, nous nous concentrons plus particulièrement sur l'interaction entre deux modes de vibration à diamètres, caractéristiques des structures à symétrie axiale, pendant laquelle les structures se touchent légèrement pour atteindre des régimes permanents potentiellement dangereux. A cet effet, trois modèles de complexité croissante sont proposés et analysés, en plus de deux méthodes de résolution complémentaires développées dans les domaines fréquentiel et temporel. Ces trois modèles prédisent une vitesse de rotation critique au-dessus de laquelle, sous certaines conditions qui restent difficiles à déterminer, les amplitudes de vibrations deviennent importantes. Ils ont aussi permis une meilleure compréhension du phénomène d'interaction modale et de ses caractéristiques physiques.

## **Mots-clés:**

mécanique du contact - méthode de synthèse modale - fonctions splines - éléments finis - turboréacteurs - interaction modale - modes à diamètres - symétrie cyclique



This research work aimed at developing models of rotor/stator interaction in aircraft engines. Actually, in order to be competitive, a manufacturer has one main objective: increasing the engine efficiency in agreement with current regulations. To fulfill this condition, it is desirable to reduce the clearance between stationary and rotating parts. Consequently, reduced clearance highly increases the possibility of violent contact between the structures. Such a nonlinear phenomenon may result in severe damage to the engine and engineers

must design structures capable of withstanding this kind of dynamical loads: then, it is a primary concern to get a full insight of the physical mechanisms in order to optimize the gap between the two structural parts without jeopardizing passengers' safety. In this study, we focus on the interaction of two nodal diameter modes, typical of axisymmetric structures, during which, structures slightly touch each other leading to a steady-state behavior potentially dangerous. To this aim, three models with growing complexity are detailed in conjunction with two complementary numerical approaches in the time and frequency domains. Respective results predict a critical rotational velocity of the engine above which, under certain circumstances, vibration amplitudes become large. They also allowed for a better understanding of the modal interaction phenomenon.

**Keywords :**

contact mechanics - component mode synthesis - spline functions - finite element method  
- turbomachine - modal interaction - nodal diameter mode - cyclic symmetry

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Interaction modale dans un moteur d'avion</b>	<b>5</b>
1.1 Structures à symétrie axiale . . . . .	6
1.2 L'interaction modale . . . . .	9
1.3 Repère bibliographique . . . . .	13
Conclusion . . . . .	14
<b>2 Mécanique du contact</b>	<b>17</b>
2.1 Définitions et notations . . . . .	18
2.2 Loi de contact unilatéral . . . . .	19
2.3 Loi de frottement . . . . .	20
2.4 Équations du mouvement . . . . .	21
2.5 Éléments de résolution . . . . .	24
Conclusion . . . . .	28
<b>3 Méthodes numériques</b>	<b>29</b>
3.1 Discrétisation spatiale: les éléments finis . . . . .	29
3.2 Discrétisation temporelle . . . . .	32
3.3 Discrétisation fréquentielle . . . . .	38
3.4 Validation des algorithmes . . . . .	43
Conclusion . . . . .	49
<b>4 Application à un modèle simple de symétrie cyclique</b>	<b>51</b>
4.1 Modélisation des structures . . . . .	51
4.2 Procédure temporelle . . . . .	53
4.3 Procédure fréquentielle . . . . .	62
Conclusion . . . . .	66
<b>5 Modèle planaire évolué</b>	<b>69</b>
5.1 Modélisation des structures . . . . .	69
5.2 Procédure temporelle . . . . .	75
5.3 Procédure fréquentielle . . . . .	91

Conclusion . . . . .	96
----------------------	----

**6 Étude de l'interaction rotor stator dans une soufflante industrielle 99**

6.1 Caractéristiques du modèle éléments finis . . . . .	100
6.2 Réduction du modèle : synthèse modale . . . . .	103
6.3 Fonctions splines . . . . .	104
6.4 Choix des méthodes . . . . .	107
6.5 Gestion du contact . . . . .	116
6.6 Résultats . . . . .	118
Conclusion . . . . .	126

**Références 135**

**A Loi d'usure 139**

A.1 Généralités . . . . .	139
A.2 Principe de la loi . . . . .	140
A.3 Comportement mécanique . . . . .	141
A.4 Perspectives . . . . .	142

**B Poutre non-linéaire 145**

B.1 Motivations . . . . .	145
B.2 Formulation . . . . .	145
B.3 Cas test . . . . .	147

**C Notions d'algèbre linéaire 149**

C.1 Produit de Kronecker . . . . .	149
C.2 Matrices circulantes . . . . .	149
C.3 Matrices circulantes par bloc . . . . .	150
C.4 Matrices anti-symétriques . . . . .	151

**D Matrices élémentaires 153**

D.1 Élément fini poutre droit . . . . .	153
D.2 Élément fini poutre courbe . . . . .	155

**E Algorithmes de gestion du contact en statique 159**

E.1 Position du problème . . . . .	159
E.2 Méthode des contraintes actives . . . . .	160
E.3 Méthode de la pénalité . . . . .	161
E.4 Méthode du lagrangien augmenté . . . . .	161
E.5 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	162



# Introduction

Les travaux de cette thèse, financés par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre SNECMA (Société Nationale d'Étude et de Construction de Moteurs d'Avion), l'Équipe Structures et Simulations du laboratoire GeM à l'École Centrale de Nantes et le Laboratoire de Vibration et d'Acoustique de l'Université du Michigan.

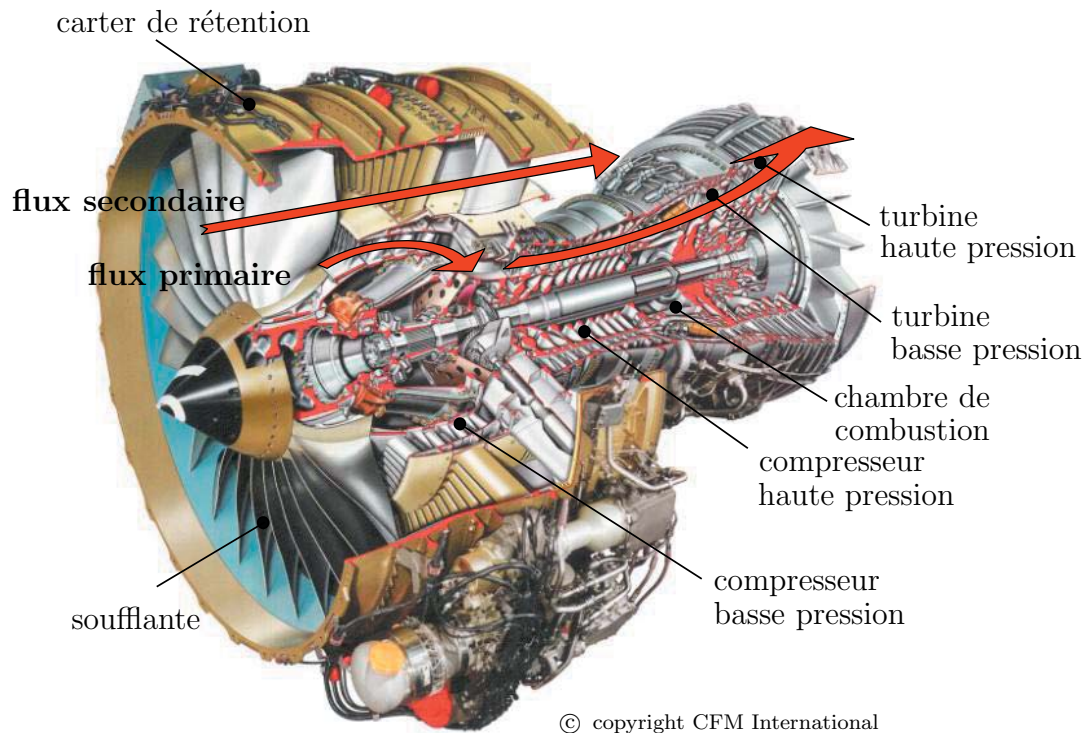
## Contexte industriel

La poussée d'un moteur d'avion obéit au principe action/réaction de Newton. Ceci est rendu possible grâce à la conception d'un turbo-réacteur (cf. figure 1), qui résulte de l'utilisation d'une turbo-machine à des fins de propulsion. Il tire sa puissance de trois éléments, un compresseur, une chambre de combustion et une turbine, qui font subir à l'air un cycle thermodynamique au cours duquel il acquiert de l'énergie. Actuellement dans le domaine civil, la géométrie des machines, dite à double flux du fait de la partition entre l'air qui part en éjection directe après compression dans la soufflante et celle qui subit le cycle décrit ci-dessus, a permis d'augmenter considérablement le rendement. Ce dernier, défini simplement comme le rapport entre l'énergie en entrée et l'énergie en sortie, ainsi que la masse des composants, sont deux paramètres primordiaux lors de la phase de conception. Pour rester compétitif en termes de consommation et de prix, il est crucial d'augmenter le rendement du moteur d'avion en associant réduction de masse et respect des normes en vigueur, dans le domaine sonore par exemple. Pour répondre à la première contrainte, il est possible de minimiser la distance entre les différents composants en rotation, dont l'ensemble est nommé rotor, et le carter qui les entourent. Ce dernier, partie fixe encore appelée stator et dont le rôle est de toute première importance, permet à la fois de garantir la rétention des éléments mécaniques en cas d'accident et de diriger de manière optimale l'écoulement d'air qui traverse le moteur. La réduction de la masse passe, elle, par l'utilisation de matériaux plus légers et plus résistants et par la conception de structures moins volumineuses.

Il est aisément concevable que la diminution du jeu entre l'extrémité des aubes et le carter augmente sensiblement les risques de contact entre les deux parties. Leurs origines sont multiples :

- apparition d'un balourd au niveau du rotor après ingestion d'oiseaux ou de glace ;
- orbitage du rotor induit par des charges de manœuvre de l'avion ;





**figure 1** – Coupe d'un réacteur CFM56-7

- déformation thermique du carter du fait d'un gradient de température ;
- vibrations des structures.

Il va de soi que la dynamique des contacts est intimement liée aux caractéristiques mécaniques des structures en jeu et que les conséquences d'un tel phénomène peuvent être dramatiques pour un moteur d'avion. Le bureau d'études doit concevoir des structures capables de résister à ces différentes sollicitations dynamiques, en ne perdant pas de vue, d'une part, que les vitesses tangentielles en extrémité d'aube de soufflante sont de l'ordre de 500 m/s et en acceptant, d'autre part, le fait que de tels événements sont inévitables [SIN 05]. Il faut donc maîtriser l'origine et l'action de ces forces de contact pour réduire de façon optimale le jeu entre les deux parties sans compromettre la sécurité des passagers.

## Objectifs de la thèse

Dans ce mémoire, les problèmes de contact qui génèrent des comportements transitoires de quelques millisecondes suite à une perte d'aube par exemple ou à l'ingestion d'un oiseau ne sont pas abordés. Le sujet proposé par SNECMA concerne plus spécifiquement les phénomènes d'interaction roue aubagée/carter qui s'étendent sur des échelles de temps plus longues, pendant lesquelles les structures se touchent légèrement pour atteindre des régimes permanents. Il est possible de classer ces phénomènes de la façon suivante :

- excitation forcée des modes propres d'une aube conduisant à son endommagement ;
- couplage entre les modes du carter et ceux de la roue aubagée, entraînant l'apparition d'une coïncidence vibratoire et une possible augmentation des amplitudes de



vibration.

Ces deux points font actuellement l'objet d'études approfondies à SNECMA et notre travail de recherche s'inscrit dans le cadre du second problème. Comprendre l'interaction modale dans son ensemble en développant des outils numériques modélisant les phénomènes de façon simple mais réaliste et un dispositif expérimental visant à identifier les différents paramètres nécessaires aux modèles numériques.

Le premier objectif de cette thèse concerne l'amélioration des modèles de prédiction d'une interaction modale rotor-stator. À cette fin, deux modèles simples et complémentaires ont été développés et des méthodes temporelle et fréquentielle dédiées à la résolution des problèmes sont mises en œuvre. La généralisation à un cas industriel est ensuite permise et représente le second objectif.

## Organisation du mémoire

Le **chapitre 1** concerne le développement mathématique simple du phénomène d'interaction modale rotor-stator pouvant survenir dans un moteur d'avion en exploitant les caractéristiques mécaniques des structures à symétrie axiale. Une rapide analyse théorique des échanges d'énergie liés à cet événement et fondée sur des hypothèses simplificatrices ainsi que quelques repères bibliographiques rappelant les études déjà menées sur ce thème sont donnés en parallèle. Il s'avère que la littérature correspondante est relativement pauvre. Néanmoins, les études concernant certains types de contact dynamique rotor/stator sont d'actualité : en effet, l'augmentation de la puissance des ordinateurs permet aujourd'hui de modéliser des problèmes d'une grande complexité. D'autre part, une meilleure compréhension du contact dynamique est stratégique pour le développement rapide de moteurs performants.

Le **chapitre 2** aborde la mécanique du contact en tenant compte des hypothèses restrictives des petites perturbations qui nous intéressent. Les équations du mouvement sont présentées dans un cadre général où deux solides viennent en contact, en formulation forte en tenant compte des contraintes d'inégalité du contact puis en formulation faible équivalente propice à la programmation en utilisant la méthode des éléments finis. Les procédures de résolution de cet ensemble d'équations fortement non-linéaires découlent de l'optimisation mathématique dont le fondement est expliqué succinctement.

Différentes procédures pour la résolution numérique de notre problème sont ensuite discutées dans le **chapitre 3**. Tout d'abord est présentée la méthode des éléments finis, très utilisée dans le domaine des structures. Ensuite, les algorithmes temporels, implicites ou explicites, plébiscités en mécanique du contact, sont détaillés. Ceci conduit à définir le choix ainsi que la structure de l'algorithme retenu dans ce travail. Toutefois, les méthodes temporelles, malgré leur puissance et leur généralité, sont particulièrement sensibles au pas de temps et il a été jugé utile de s'intéresser à une démarche permettant la résolution des équations dans le domaine fréquentiel et capable de prendre en compte toute non-linéarité. Enfin, deux exemples valident l'ensemble des approches proposées.



Les projets des chapitres 4, 5 et 6 sont similaires : développer des modèles d'interaction rotor-stator par l'intermédiaire de contacts structuraux à partir des méthodes numériques présentées dans le chapitre 3 et en se concentrant plus particulièrement sur le phénomène d'interaction modale.

Le **chapitre 4** porte sur une modélisation très simple de turbo-machine développée en tout début de thèse et remplissant les conditions géométriques de symétrie cyclique. Les deux méthodes temporelle et fréquentielle sont adaptées à ce cas d'étude et leurs résultats, comparés.

Le **chapitre 5** décrit la seconde modélisation dont l'objectif est de pallier les limitations de la première et ce, pour détecter le phénomène d'interaction modale. Cette modélisation est nécessairement plus riche et demande des développements théoriques et numériques élaborés, notamment en ce qui concerne la gestion du contact. Les algorithmes généraux précisés dans le chapitre 3 sont approfondis. Dans le domaine temporel, une étude paramétrique du comportement de l'ensemble rotor-stator est réalisée en fonction de la vitesse de rotation du moteur. Afin de clarifier l'analyse de ce type de système oscillant mais apériodique, une méthode multi-fréquentielle à deux dimensions (c'est-à-dire avec deux fréquences sans dénominateur commun) est présentée. Un rapprochement avec la notion de mode propre non-linéaire paraît d'actualité.

L'atout principal de ces deux premiers modèles réside dans leur faible taille. Ils sont propices à des études académiques pour une meilleure compréhension phénoménologique mais d'un intérêt restreint pour un industriel. Ils n'offrent pour ainsi dire aucune perspective réaliste quant à l'analyse des efforts de contact, des niveaux de déformations et de contraintes subis par les structures, lorsque le phénomène apparaît dans un moteur d'avion. Pour cette raison, un modèle 3D livré par notre partenaire SNECMA a été adapté et enrichi. Deux concepts connus des mécaniciens sont alors mis en œuvre dans le **chapitre 6** : (1) tout d'abord une réduction du modèle par une méthode de synthèse modale cohérente, pour partie, avec le phénomène de contact étudié et (2) un enrichissement fonctionnel de la surface de contact par des éléments splines afin de faciliter la gestion du contact et la rendre indépendante de la finesse du maillage. La résolution des équations est réalisée seulement dans le domaine temporel. Des résultats de convergence modale, de pas de temps optimal et d'interaction sont commentés.

Le mémoire se termine par cinq annexes pour compléter certaines notions et préciser quelques algorithmes.



# 1

# Interaction modale dans un moteur d'avion

---

<b>1.1 Structures à symétrie axiale</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1.1 Structures à symétrie cyclique . . . . .	6
1.1.2 Structures à symétrie de révolution . . . . .	9
<b>1.2 L'interaction modale</b> . . . . .	<b>9</b>
1.2.1 Mécanismes physiques . . . . .	10
1.2.2 Description simplifiée des échanges d'énergie . . . . .	11
<b>1.3 Repère bibliographique</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>14</b>

---

Dans toute turbo-machine, l'existence de forces de couplage entre le rotor et le stator peut conduire dans certains cas à des amplitudes de déformation considérables. Plus spécifiquement dans un moteur d'avion, plusieurs mécanismes mécaniques différents sont à l'origine de tels phénomènes. Il est possible de les classer en trois grandes catégories selon la nature des forces d'interaction entre les deux structures :

1. les forces d'interaction proviennent de variations de pression aérodynamique sans contact ;
2. les forces d'interaction se réduisent à un unique point de contact mécanique sur la circonférence entre rotor et stator ;
3. les forces d'interaction se situent simultanément en plusieurs points de contact mécanique sur la circonférence entre rotor et stator.

Les deux premières catégories sont plus ou moins bien connues et ne font pas partie intégrante de notre travail de recherche. La deuxième a notamment fait l'objet de nombreuses études dans le cadre de la dynamique des rotors. Ces études considèrent généralement des disques rigides fixés sur un arbre élastique, lui-même supporté par des paliers lisses ou des roulements. Pour exemples, plusieurs travaux (cf. [VAN 87], [LEE 93] ou [CHI 93]) expliquent les méthodes de modélisation, de résolution et donnent des éléments d'analyse. Les différents modèles vont de l'arbre sans masse à l'arbre avec amortissement interne soumis à un balourd et où les équations de la dynamique des fluides et les conditions de contact et de frottement sont incluses. Il est important de faire la différence entre ce champ d'investigation et le notre, qui se propose d'étudier le troisième type d'interaction.

Ce chapitre présente donc la problématique initialement proposée par SNECMA. Il s'agit de l'étude de l'interaction modale rotor-stator dans un moteur d'avion. La première partie explique le phénomène physique en termes mathématiques très simples pour jeter les bases d'un développement numérique afin de mettre à la disposition de SNECMA, un



outil informatique prédictif. La présentation de l'état actuel des connaissances de l'entreprise [BER 91] précède une analyse critique d'un travail sur un sujet similaire entrepris à l'université de Londres et détaillé en fin de chapitre.

## 1.1 Structures à symétrie axiale

Le phénomène physique qui est présenté dans cette partie ne peut exister que pour une certaine classe de structures dites à « symétrie axiale ». Ce type de structure comprend un sous-ensemble qui contient les structures à périodicité (ou symétrie) cyclique et il est important de bien comprendre leurs caractéristiques mathématiques et mécaniques particulières. DAVIS est l'auteur d'un ouvrage de référence en la matière [DAV 94].

### 1.1.1 Structures à symétrie cyclique

Une structure est dite à symétrie cyclique si elle est constituée d'une répétition adjacente et fermée autour d'un axe de symétrie, d'une entité minimale appelée secteur. Dans le domaine aéronautique, une roue aubagée de moteur d'avion constitue l'exemple typique d'une telle structure. Les matrices masse et raideur de toute structure à périodicité cyclique sont telles que le problème aux valeurs propres associé prend la forme circulante par bloc suivante :

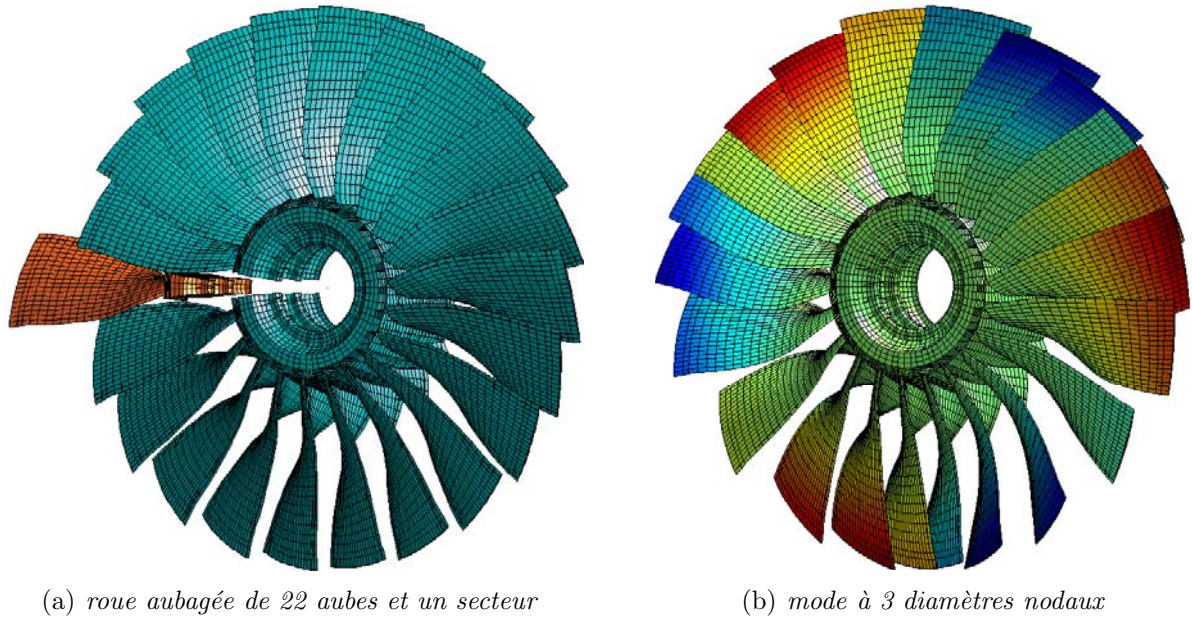
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1^T & \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1^T & \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1^T & \mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{Y}_i = \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M}_i \text{ et } i = [0, 1] \quad (1.1)$$

La taille des blocs  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbf{Y}_1$  est égale au nombre de degrés de liberté d'un secteur et il y a autant de blocs que de secteurs. Les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}_0$  sont déduites des matrices masse et raideur du secteur fondamental. Les matrices  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{K}_1$  sont construites en tenant compte des connections entre secteurs. On démontre qu'il existe un espace mathématique dont les éléments sont notés  $\mathbf{x}$ , appelé espace des coordonnées cycliques réelles, dans lequel la matrice  $\mathbf{Y}$  est transformée en une matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , diagonale par bloc [JOS 81]. Excepté le premier, et le dernier si le nombre de secteurs est pair, chaque bloc s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{n_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^T) \cos n_d \alpha & (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_1^T) \sin n_d \alpha \\ (\mathbf{Y}_1^T - \mathbf{Y}_1) \sin n_d \alpha & \mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^T) \cos n_d \alpha \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où  $n_d$  est l'harmonique considéré, aussi dit nombre de diamètres nodaux, et où  $\alpha$  est l'angle minimal de répétitivité, c'est-à-dire la taille angulaire d'un secteur. En notant  $\mathbf{u}$ ,





(a) roue aubagée de 22 aubes et un secteur

(b) mode à 3 diamètres nodaux

**figure 1.1** – Exemple de structure à symétrie cyclique

les éléments de l'espace physique, le problème aux valeurs propres initial :

$$\mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

est découpé en une série de sous-problèmes aux valeurs propres, de taille plus petite et dépendante de l'harmonique :

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{n_d} \mathbf{x}^{n_d} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Chaque nouveau sous-problème appartient à une classe particulière de problèmes aux valeurs propres réelles et (presque toutes) doubles (cf. annexe C) et dont les deux modes respectifs ont une forme bien spécifique. Ainsi, afin de faciliter la compréhension, la matrice  $\mathbf{x}^{n_d}$  des modes propres est scindée en ses moitiés supérieure et inférieure, dont les notations sont définies plus tard, comme suit :  $\mathbf{x}^{n_d} = [\mathbf{x}^{c,n_d}, \mathbf{x}^{s,n_d}]^T$ . Les deux modes consécutifs à fréquence identique  $\omega$  deviennent :

$$\mathbf{x}_{\omega,1}^{n_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{c,n_d} \\ \mathbf{x}^{s,n_d} \end{bmatrix}_{\omega,1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{\omega,1}^{c,n_d} \\ \mathbf{x}_{\omega,1}^{s,n_d} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{\omega,2}^{n_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{c,n_d} \\ \mathbf{x}^{s,n_d} \end{bmatrix}_{\omega,2} = \pm \begin{Bmatrix} -\mathbf{x}_{\omega,1}^{s,n_d} \\ \mathbf{x}_{\omega,1}^{c,n_d} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Dans ce nouvel espace cyclique, il y a autant de modes propres associés à un harmonique qu'il y a de degrés de liberté par secteur et le nombre d'harmoniques est limité par le nombre de secteurs. La figure 1.1(b) illustre par exemple le premier mode de flexion des aubes selon le troisième harmonique. Comme il y a bijection entre les coordonnées physiques définies sur la roue complète et les coordonnées cycliques définies sur un seul secteur fondamental, il est ensuite possible de reconstruire les modes propres de la structure globale en repassant dans l'espace physique initial grâce à la relation suivante [BLA 01] :



$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{x}^0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n_d=1}^K [\mathbf{x}^{c,n_d} \cos(n-1)n_d\alpha + \mathbf{x}^{s,n_d} \sin(n-1)n_d\alpha] + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{N}} \mathbf{x}^{\frac{N}{2}} \quad (1.6)$$

Dans l'équation (1.6), l'exposant  $N/2$  n'est pas nécessairement entier et le dernier terme n'existe que pour un nombre pair de secteurs: le paramètre  $K$  admet alors les valeurs suivantes :

$$K = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{N-2}{2} & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases} \quad (1.7)$$

Toujours dans l'équation (1.6),  $\mathbf{u}_n$  représente le déplacement physique du  $n^e$  secteur et  $\mathbf{x}^{c,n_d}$  (respectivement  $\mathbf{x}^{s,n_d}$ ), le déplacement du secteur dans les coordonnées cycliques selon l'harmonique  $n_d$  en projection sur la fonction cosinus (respectivement sinus): c'est donc par l'intermédiaire de ces fonctions sinusoïdales qui dépendent à la fois de l'harmonique et du numéro du secteur que s'explique la forme en « pétale » dite à diamètres nodaux des modes propres des structures à symétrie cyclique et par extension, des structures à symétrie de révolution comme le montrent les figures 1.1(b) et 1.2(b). Le parallèle peut être fait entre cette opération et la transformée de Fourier inverse usuelle souvent utile en traitement du signal. On remarque que les deux modes  $\mathbf{x}^{c,n_d}$  et  $\mathbf{x}^{s,n_d}$  associés au secteur fondamental n'ont pas la même forme sauf si la matrice  $\mathbf{Y}_1$  est symétrique, ce qui n'est généralement pas le cas. Les déformées du secteur  $n$  selon les modes à  $n_d$  diamètres dans l'espace physique se déduisent des équations (1.5) et (1.6) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^1 &= \mathbf{x}^{c,n_d} \cos(n-1)n_d\alpha - \mathbf{x}^{s,n_d} \sin(n-1)n_d\alpha \\ \mathbf{u}_n^2 &= \mathbf{x}^{s,n_d} \cos(n-1)n_d\alpha + \mathbf{x}^{c,n_d} \sin(n-1)n_d\alpha \end{aligned} \quad (1.8)$$

En les combinant de façon judicieuse, ce qui est possible puisque leur pulsation  $\omega$  est identique, il est possible de construire un mode tournant dans le sens direct (avec un exposant  $a$  pour avance) :

$$\mathbf{u}_n^a(t) = \mathbf{u}_n^1 \cos \omega t + \mathbf{u}_n^2 \sin \omega t \quad (1.9)$$

et un mode tournant dans le sens indirect (avec un exposant  $r$  pour rétrograde) :

$$\mathbf{u}_n^r(t) = \mathbf{u}_n^1 \cos \omega t - \mathbf{u}_n^2 \sin \omega t \quad (1.10)$$

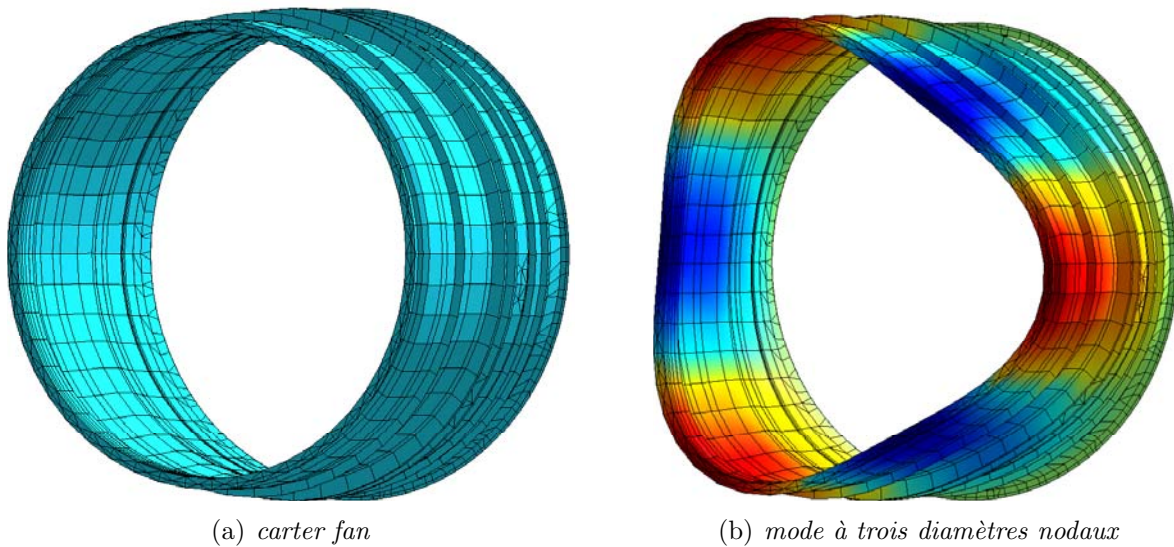
Le déplacement de tout point de chaque secteur étant connu, la reconstruction sur la structure totale est évidente.

La vitesse de propagation de ces deux modes tournants vaut  $\pm\omega/n_d$  dans le référentiel lié à la structure. Elle devient alors  $\Omega \pm \omega/n_d$  par rapport à un référentiel fixe si la structure est en rotation dans le sens direct à la vitesse angulaire  $\Omega$ .





### 1.1.2 Structures à symétrie de révolution



(a) carter fan

(b) mode à trois diamètres nodaux

**figure 1.2** – Exemple de structure à symétrie de révolution

Les structures à symétrie de révolution sont des cas limites des structures à symétrie cyclique : dans le domaine continu, la taille des secteurs tend vers zéro et leur nombre vers l'infini. Par passage à la limite, les mécanismes présentés pour les structures à périodicité cyclique agissent de la même façon sur ce type d'entité qui présentent donc des modes doubles [LEI 73]. Ces propriétés mathématiques sont intrinsèquement liées à l'invariance de la structure par rapport à son axe de révolution et à l'absence de direction privilégiée. Tout mode propre doit pouvoir subir une rotation par rapport à cet axe et est donc nécessairement une combinaison linéaire de deux modes orthogonaux mais à forme et à fréquence identiques. Comme pour la roue aubagée, le carter admet, dans le domaine continu, une infinité de modes à  $n_d$  diamètres, leur forme étant entre autres, déterminée par la géométrie de la structure.

Ainsi, toute déformation linéaire d'une structure à symétrie axiale peut être vue, non pas comme une superposition de modes propres « statiques » mais comme une combinaison de modes propres « tournants », de fréquence  $\omega$ . La vitesse de propagation de ces deux modes tournants sur un carter immobile dans un référentiel fixe vaut alors  $\pm\omega/n_d$ .

## 1.2 L'interaction modale

*Remarque* : Dans un souci de généralité, aucun indice ou exposant n'a été utilisé dans les paragraphes précédents. Dans le suite de ce chapitre, toutes les grandeurs (notamment vectorielles et matricielles) relatives à la roue aubagée seront indicées  $_{ra}$ , et celles relatives au carter,  $_c$ . Afin d'éviter toute surcharge, ces notations pourront évoluer au cours de ce mémoire et seront explicitées en fonction.



## 1.2.1 Mécanismes physiques

D'après ce qui vient d'être dit, dans un moteur d'avion, les deux structures qui se font face présentent des caractéristiques géométriques favorisant l'apparition de modes propres tournants. Puisque les amplitudes de vibration d'une structure peuvent devenir très importantes si cette dernière est excitée selon ses modes propres, le fait que le carter et la roue aubagée soient proches l'un de l'autre motive l'étude de l'interaction par l'intermédiaire de contacts de ces modes tournants. L'apparition de cette interaction, qualifiée de « modale », nécessite plusieurs conditions [BER 91] :

- les deux structures acquièrent des déformées propices à un échange d'énergie, c'est-à-dire qu'elles vibrent toutes les deux selon un ou deux modes à même diamètre ;
- chaque structure vibre à la fréquence propre du mode considéré ;
- les vitesses de propagation des modes tournants dans le repère fixe coïncident.

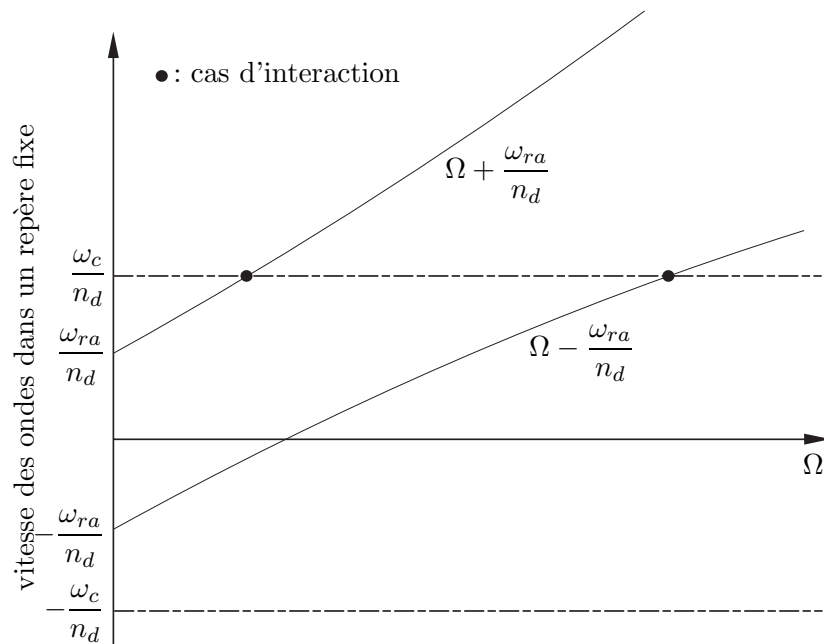


figure 1.3 – Définition des zones d'interaction potentielle

Dans la pratique, seul le premier mode de flexion des aubes présente un intérêt. Généralement pour un même nombre de diamètres nodaux, le mode de la roue aubagée associé au premier mode de flexion des aubes a une fréquence à l'arrêt, inférieure à celle du carter. Physiquement, deux solutions remplissent les conditions d'interaction modale définies ci-dessus comme précisé sur la figure 1.3 :

$$\omega_c = n_d \Omega \pm \omega_{ra} \quad (1.11)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation propre du mode considéré du carter et  $\omega_{ra}$ , celle de son homologue de la roue aubagée. La roue aubagée étant sujette au raidissement centrifuge,  $\omega_{ra}$  dépend en réalité de la vitesse de rotation de la structure et les équations  $\Omega \mp \omega_{ra}/n_d$  ne sont pas



des droites. Dans notre étude, ce raidissement centrifuge n'est pas pris en compte et la vitesse de rotation  $\Omega$  pour laquelle il y aurait interaction est légèrement modifiée.

Puisque la vitesse de rotation de la roue aubagée est importante face aux vitesses de propagation des modes tournants, les forces de frottement entre les deux structures modifient la relation (1.11). Ces dernières sont en effet dirigées dans le sens inverse de rotation du rotor sur les aubes et dans le sens de rotation du rotor sur le carter. Le mode tournant direct sur le carter et rétrograde sur la roue aubagée apparaissent donc préférentiellement, ce qui permet d'affirmer que seule la vitesse de rotation du moteur  $\Omega$  vérifiant l'équation suivante est dangereuse en terme d'instabilité :

$$\omega_c = n_d \Omega - \omega_{ra} \quad (1.12)$$

Dans la théorie, cette relation analytique ne représente qu'une condition nécessaire pour l'apparition d'une interaction modale.

## 1.2.2 Description simplifiée des échanges d'énergie

Une description simplifiée est possible en considérant le transfert d'énergie du mouvement de rotation de la roue vers le mouvement vibratoire du carter par l'intermédiaire des forces de contact et de frottement en extrémité d'aubes. La force de frottement exercée est, pour des vitesses de rotation suffisantes, dans le sens opposé à la vitesse de rotation. Elle diminue donc l'amplitude du mouvement vibratoire d'une aube pendant la demi-période où la vitesse de celle-ci est de direction opposée à la force de frottement et l'amplifie pendant l'autre demi-période.

### 1.2.2.1 Équations du mouvement

Pour simplifier, le mouvement  $u_c$  d'un point matériel du carter est seulement radial et  $u_{ra}$ , celui d'un point en extrémité d'aube, seulement tangentiel. Il est admis que pour des amplitudes faibles, la forme sinusoïdale des déplacements n'est pas modifiée par les efforts de contact. En reprenant les notations de l'équation (1.10), le déplacement d'un point appartenant au secteur  $n$  de la roue aubagée s'écrit pour un mode tournant rétrograde :

$$u_{ra}^r = U_{ra} \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n + \beta) \quad (1.13)$$

où  $\Phi_n = n_d(n-1)\alpha$  est la phase du secteur  $n$  dans son mouvement selon un mode à  $n_d$  diamètres. L'angle  $\beta$  représente son déphasage par rapport au mode tournant avance du carter pour lequel le déplacement d'un point repéré par le paramètre  $\theta$  s'écrit :

$$u_c^a = U_c \sin(\omega_c t - n_d \theta) \quad (1.14)$$

Cet angle est atteint par le  $n^e$  secteur de la roue aubagée au temps  $t$  de telle façon que :

$$\theta = (n-1)\alpha + \Omega t \quad (1.15)$$



ce qui entraîne :

$$u_c^a = U_c \sin(\omega_c t - n_d((n-1)\alpha + \Omega t)) \quad (1.16)$$

En tenant compte de la condition d'interaction (1.12), il vient :

$$u_c^a = -U_c \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) \quad (1.17)$$

et l'effort radial  $N$  sur cette portion de carter vaut alors :

$$\begin{aligned} N &= 0 && \text{si } u_c^a \geq 0 \\ N &= \bar{N} \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) && \text{si } u_c^a \leq 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

En utilisant la loi de frottement de Coulomb décrite dans la partie 2.3, il est possible de déduire l'effort tangentiel exercé par le carter sur l'extrémité d'une aube, c'est-à-dire  $F = \mu N$  en considérant la vitesse de rotation de la roue aubagée suffisante pour interdire tout contact collant entre les deux parties :

$$\begin{aligned} F &= 0 && \text{si } \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) \leq 0 \\ F &= \mu \bar{N} \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) && \text{si } \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le travail élémentaire du frottement  $F$  dans le déplacement vibratoire élémentaire  $du_{ra}^r$  de l'extrémité d'une aube vaut alors :

$$\begin{aligned} \delta W &= F du_{ra}^r \\ \delta W &= F \dot{u}_{ra}^r dt \\ \delta W &= F U_{ra} \omega_{ra} \cos(\omega_{ra} t + \Phi_n + \beta) dt \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le travail total sur une période  $T_{ra}$  liée au mouvement de la roue aubagée s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= \int_{T_{ra}} F \dot{u}_{ra}^r dt \\ W &= \omega_{ra} U_{ra} \mu \bar{N} \int_{-\frac{\Phi_n}{\omega_{ra}}}^{\frac{\pi - \Phi_n}{\omega_{ra}}} \sin(\omega_{ra} t + \Phi_n) \cos(\omega_{ra} t + \Phi_n + \beta) dt \\ W &= -\frac{\omega_{ra} U_{ra} \mu \bar{N} \pi}{2} \sin \beta \end{aligned} \quad (1.21)$$

Pour l'ensemble de la roue, le travail des forces de frottement dans le mouvement vibratoire des  $N$  aubes devient :

$$\begin{aligned} W &= \sum_{j=1}^N W_j \\ W &= -\frac{N \omega_{ra} U_{ra} \mu \bar{N} \pi}{2} \sin \beta \end{aligned} \quad (1.22)$$



### 1.2.2.2 Commentaires qualitatifs

D'après l'équation (1.22), il est possible de différencier deux cas :

- si  $\beta$  est compris entre 0 et  $\pi$ ,  $W$  est négatif et les forces de frottement amortissent le mouvement vibratoire des aubes ;
- si  $\beta$  est compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ ,  $W$  est positif et les forces de frottement amplifient le mouvement vibratoire des aubes.

L'énergie  $W$  peut être, selon les cas, supérieure à l'énergie dissipée par amortissement interne qui est proportionnelle, sur une période, au carré de l'amplitude du mouvement. On est alors en présence d'une instabilité. Cette « théorie simplifiée » ne représente toutefois qu'une première approche et rien ne prouve physiquement que la condition  $\beta \geq \pi$  puisse être vérifiée. En l'absence d'une connaissance plus approfondie du phénomène, le critère actuel de dimensionnement utilisé au bureau d'études consiste à garantir une marge de 10% par rapport aux points de coïncidence fréquentielle donnés par la formule (1.12). Ceci est réalisé en pratique par le raidissement des carters, entraînant l'augmentation de leur masse et de leur encombrement : compromis inacceptable dans le cas d'aubes à large corde.

## 1.3 Repère bibliographique

Une thèse intitulée « Travelling Wave Speed Coincidence », encadrée par D.J. EWINS et financée, en partie, par l'Union Européenne dans le cadre du projet Rostadyn, a été réalisée au collège Impérial de Londres (Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London) et soumise en mai 1997 par P. SCHMIECHEN [SCH 97]. C'est le seul travail élaboré sur ce sujet de recherche trouvé dans la littérature. Cependant, aucun article n'a, à notre connaissance, été publié dans des journaux scientifiques.

Cette recherche présente une analyse de l'instabilité due à une coïncidence des vitesses de propagation d'onde, plus précisément de modes tournants, entre une roue aubagée en rotation et un carter flexible. Il y est expliqué dans un premier temps qu'en terme d'efficacité aérodynamique, il faut réduire le jeu entre l'extrémité des aubes et le carter qui les entoure. Cela favorise donc les chances de contact entre ces deux structures et il est donc nécessaire de bien comprendre les phénomènes d'interaction qui peuvent survenir pendant un vol. Pour mener cette étude, les deux structures sont modélisées indépendamment l'une de l'autre et accompagnées d'une dynamique linéaire. Dans un souci de diminution des temps de calcul, les équations du mouvement sont ensuite projetées dans l'espace modal. Le contact entre les deux structures est ramené à une loi d'impact et de frottement fondée sur la méthode des pénalités. Afin de faciliter la mise au point d'une expérience et contrairement à la situation d'un moteur réel, le carter est en rotation et la roue aubagée, fixe. Les résultats de cette recherche montrent d'une part, qu'il y a accord entre l'expérience et les prédictions numériques et d'autre part, que le risque d'instabilité due à une coïncidence vibratoire existe bel et bien pour ce type d'ensemble mécanique et qu'il doit être traité en connaissance de cause. L'étude bibliographique donnée par



l'auteur sur la recherche actuelle dans le domaine des machines tournantes de tout type, détaille de façon quasi-exhaustive les différents champs d'investigation déjà ouverts. L'auteur apparaît être le premier à étudier une interaction de ce type entre deux structures déformables. Les bases mathématiques nécessaires à la compréhension du phénomène et à l'établissement des équations sont très proches de ce qui a été présenté au début de ce chapitre. Rétrospectivement par rapport à notre propre démarche, voici quelques points qui méritent d'être signalés ou critiqués :

- la présentation de la mécanique du contact est très succincte et reste finalement très floue. Nous nous sommes aperçus, au cours de ce travail, que les résultats étaient très sensibles à la loi de contact et pour ce qui nous concerne, une attention toute particulière y a été apportée ;
- le désaccordage (caractéristique due aux imperfections de la géométrie des structures, des matériaux. . . rompant la symétrie axiale de la structure) est pris en compte dans les simulations pour déterminer son rôle dans le phénomène d'interaction modale. Ceci reste à intégrer dans notre travail ;
- la résolution des équations du mouvement est exclusivement temporelle et basée sur un schéma de Runge-Kutta avec correction. Nous verrons, dans la suite, que les résultats sont aussi très sensibles à la taille du pas de temps et que c'est pour cette raison qu'une méthode fréquentielle a été développée. Elle représente d'ailleurs une approche originale pour la résolution de ce type de problème tout autant que pour sa compréhension ;
- enfin, et c'est certainement le point fort du travail de P. SCHMIECHEN, les résultats numériques ont été confrontés à des résultats expérimentaux. Même si les structures sont très éloignées d'un carter et d'une roue aubagée d'un turbo-réacteur, elles permettent de confirmer la présence d'une coïncidence modale par l'intermédiaire de contacts entre structures à symétrie axiale. Une expérience avait initialement été prévue dans le cadre de cette thèse afin de poursuivre les travaux d'E. ARNOULT [ARN 00]. Cette étape a malheureusement dû être abandonnée pour cause de manque de moyens expérimentaux et de temps. Elle pourrait cependant constituer une suite à ce travail.

## Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter la thématique qui nous intéresse et qui constituera la ligne directrice de ce mémoire. Les spécificités liées aux caractéristiques vibratoires des structures à symétrie axiale en général (fréquences propres doubles et concept de modes tournants à diamètres) sont abordées pour définir la notion d'interaction modale de manière analytique très simple. La théorie, fondée sur quelques hypothèses simplificatrices, suggère l'existence de vitesses de rotation dangereuses. En notant  $\omega_{ra}$  et  $\omega_c$ , respectivement, la pulsation propre des deux modes à  $n_d$  diamètres de la roue aubagée et du carter,



cette vitesse critique  $\Omega_c$  est solution de l'équation suivante :

$$\omega_c = n_d \Omega_c - \omega_{ra}$$

Selon l'agencement des structures et des forces de contact, les amplitudes de vibrations peuvent devenir très importantes menant à la destruction des composants. Un travail de P. SCHMIECHEN s'avère être une référence bibliographique de choix sur le sujet et nous a aidé dans la compréhension du phénomène et dans la façon de développer nos modèles numériques pour les confronter de manière cohérente à la théorie. Ces derniers constituent l'objet des chapitres suivants mais auparavant la mécanique du contact ainsi que les méthodes numériques utilisées sont présentées.







# 2

## Mécanique du contact

<b>2.1 Définitions et notations</b>	<b>18</b>
<b>2.2 Loi de contact unilatéral</b>	<b>19</b>
<b>2.3 Loi de frottement</b>	<b>20</b>
<b>2.4 Équations du mouvement</b>	<b>21</b>
2.4.1 Formulation forte	22
2.4.2 Formulation faible	23
<b>2.5 Éléments de résolution</b>	<b>24</b>
2.5.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	25
2.5.2 Méthode de la pénalité	26
2.5.3 Méthode du lagrangien augmenté	27
<b>Conclusion</b>	<b>28</b>

L'augmentation continue de la puissance des outils informatiques permet de rendre de plus en plus réalistes les simulations numériques dédiées, par exemple, à la modélisation de phénomènes mécaniques. À ce titre, la résolution de problèmes incluant des conditions de contact, de frottement et même d'usure, fortement non-linéaires et donc coûteux en temps de calcul, devient systématique dans le monde de la recherche et de l'industrie. Les lois phénoménologiques et les algorithmes sont régulièrement améliorés.

Dans le cas particulier de la mécanique du contact, la première difficulté est liée à la formulation mathématique dans un cadre continu. Elle doit prendre en compte deux lois fondamentales :

- le non-interpénétrabilité de la matière ;
- l'existence d'une contrainte de cisaillement pour provoquer le glissement.

Le contact structurel est une composante importante de notre problème d'interaction. Ce chapitre concerne la mise en œuvre d'approches pour en faciliter le traitement. Il n'est cependant pas question ici de proposer une formulation complète en grands déplacements et grandes déformations, d'une part parce qu'elle rend difficile l'écriture et la compréhension des équations et d'autre part parce qu'elle dépasserait l'objectif de ce mémoire. Ainsi, nous nous limitons dans la suite à l'hypothèse des petites perturbations et au formalisme linéaire pour développer notre propos ; c'est en effet le cadre fixé pour l'étude de l'interaction *modale* rotor-stator.



## 2.1 Définitions et notations

En mécanique, le contact est dit unilatéral quand il est maintenu seulement si les efforts extérieurs l'autorisent. Dans la plupart des cas, les études impliquent des structures en mouvement dont la position dépend du temps. Suivant les conditions d'interaction, le terme contact peut se transformer en « impact » qui évoque l'aspect dynamique du phénomène et qui est souvent lié aux termes « choc » ou « collision ». Généralement, les phénomènes de contact incluent le frottement, l'usure, l'adhésion voire la lubrification, entre autres et sont couplés à des processus thermiques, physiques et chimiques. En tout état de cause, le contact entre deux structures déformables reste complexe et encore incompris aujourd'hui parce qu'il est expérimentalement très difficile d'avoir accès aux grandeurs physiques en présence. En effet, plusieurs processus différents apparaissent au niveau des surfaces communes tels que les déformations élastiques ou plastiques et même l'abrasion des aspérités. Seule une vision géométrique très détaillée permettrait une prise en compte de tous ces phénomènes. Dans le domaine, plusieurs lois de contact normal et de frottement macroscopiques ont été développées. Certaines d'entre elles, les plus communes, sont présentées dans ce qui suit.

La figure 2.1 illustre toutes les notations nécessaires à l'établissement des équations du mouvement dans le cadre de la mécanique du contact et de l'hypothèse des petites perturbations. Une généralisation peut être trouvée dans [LAU 02] et [WRI 02]. Nous

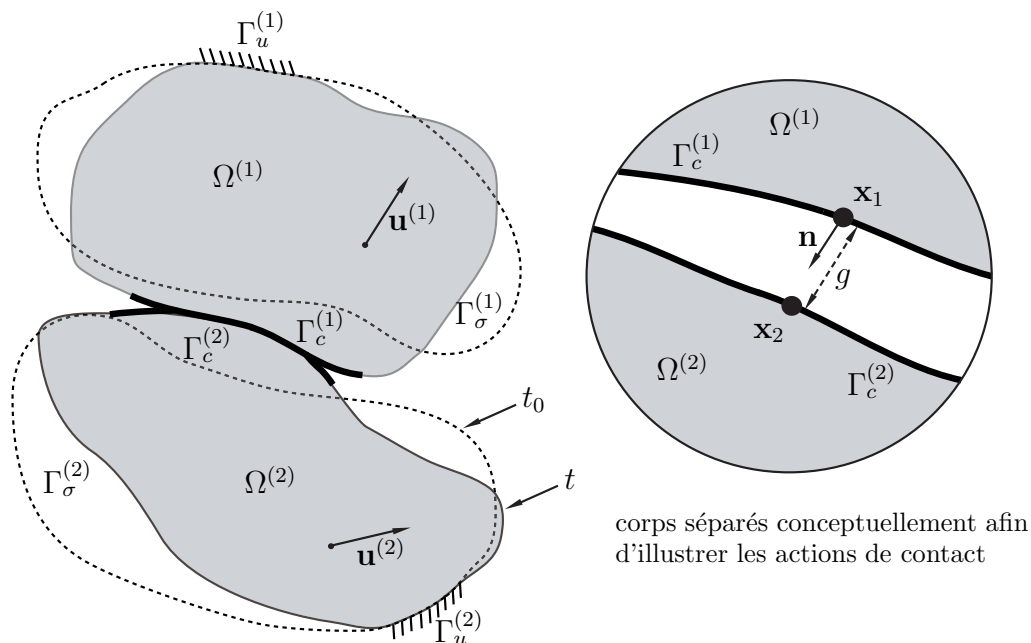


figure 2.1 – Définition des notations pour la formulation des équations du contact

considérons, pour simplifier, un problème impliquant deux corps déformables  $\Omega_{i=1,2}^{(i)}$  sous-ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^3$  potentiellement en contact dans la configuration courante dont les déplacements  $\mathbf{u}^{(i)}$  sur un intervalle de temps  $[0, T]$  sont les inconnues. La frontière respective de chaque corps  $\partial\Omega^{(i)}$  est partitionnée en trois sous-régions  $\Gamma_c^{(i)}$ ,  $\Gamma_\sigma^{(i)}$  et  $\Gamma_u^{(i)}$



vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \partial\Omega^{(i)} = \Gamma_{\sigma}^{(i)} \cup \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_c^{(i)} \\ \Gamma_{\sigma}^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} = \Gamma_{\sigma}^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \Gamma_c^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} = \emptyset \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $\Gamma_u^{(i)}$  est la partition de la frontière soumise à un déplacement imposé  $\mathbf{u}_d^{(i)}$  et  $\Gamma_{\sigma}^{(i)}$ , à une densité d'efforts surfaciques imposée  $\mathbf{t}_d^{(i)}$ . Ces corps sont de plus soumis à une densité d'efforts volumiques  $\mathbf{f}_d^{(i)}$  dans  $\Omega^{(i)}$ .  $\Gamma_c^{(i)}$  est la partition comprenant tous les points potentiellement en contact avec l'autre corps pendant l'intervalle de temps. Par commodité pour la suite de l'exposé, les domaines communs à ces deux corps déformables sont introduits :

$$\left| \begin{array}{l} \Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \\ \partial\Omega = \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} \\ \Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\sigma}^{(1)} \cup \Gamma_{\sigma}^{(2)} \\ \Gamma_c = \Gamma_c^{(1)} \cup \Gamma_c^{(2)} \\ \Gamma_u = \Gamma_u^{(1)} \cup \Gamma_u^{(2)} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

et le sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad (2.3)$$

## 2.2 Loi de contact unilatéral

Toute surface observée au microscope présente une succession de bosses et de creux, aussi petits soient-ils. Pour une section de matière, un plan moyen peut être défini de telle façon que la surface des creux sous ce plan soit égale à la surface des bosses au dessus de ce plan. Les déviations par rapport à ce plan moyen sont nommées aspérités et la surface réelle de contact est inférieure à la surface de contact apparente. Pendant le processus de mise en contact, les aspérités se déforment, élastiquement ou plastiquement suivant les propriétés des matériaux, jusqu'à ce que la surface réelle puisse supporter les efforts normaux de contact. Différentes approches ont été développées pour tenter de modéliser les surfaces de contact avec leurs aspérités et obtenir la relation entre la charge normale  $f_N$  et la surface de contact réelle  $S_R$ . Mathématiquement, les conditions de non-pénétration entre deux solides sont écrites en choisissant l'un maître et l'autre, esclave. Dans ce qui suit,  $\Omega^{(1)}$  sera le solide maître et  $\Omega^{(2)}$ , le solide esclave, tout en notant que ces rôles, distribués de façon arbitraire, sont nécessairement interchangeables. Il est alors possible de décrire la position du solide esclave par rapport au solide maître. L'application mathématique du mouvement des deux structures s'écrit alors dans le formalisme Lagrangien Total, que nous utilisons dans tout ce travail, comme suit :

$$\varphi : \bar{\Omega} \times [0, T](\mathbf{X}, t) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$



C'est-à-dire que l'on associe à tout point  $\mathbf{X}$  de la configuration initiale, un déplacement  $\mathbf{u}$  dépendant de ce point et du temps pour obtenir la position actuelle  $\mathbf{x}$  dans la configuration déformée. Pour chaque point de la frontière esclave, les conditions de contact sont écrites en fonction de la frontière maître. Sur  $\Gamma_c^{(1)}$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure au point  $\mathbf{x}^{(1)}$  à l'instant  $t$ . Le point appartenant à  $\Gamma_c^{(2)}$  le plus proche de  $\mathbf{x}^{(1)}$  est noté  $\mathbf{x}^{(2)}$  et calculé de la manière suivante [CUR 95] :

$$\mathbf{x}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_c^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{y}\|_2 \quad (2.5)$$

Cette définition permet de calculer la fonction distance entre les deux solides aux points  $\mathbf{x}^{(1)}$  de  $\Omega^{(1)}$  et  $\mathbf{x}^{(2)}$  de  $\Omega^{(2)}$  :

$$g(\mathbf{u}) = g_0 + (\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{X}^{(2)}) - \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}^{(1)})) \cdot \mathbf{n} \quad (2.6)$$

où  $g_0$  désigne la distance entre les deux points  $\mathbf{X}^{(1)}$  et  $\mathbf{X}^{(2)}$  à  $t_0$  et représente, en fait, la distance minimale entre le solide maître et le solide esclave à l'instant initial :

$$g_0 = \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma_c^{(2)}} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{Y}\|_2 \quad (2.7)$$

En notant  $t_N$ , l'effort surfacique de contact dans la direction normale  $\mathbf{n}$ , il est possible d'écrire les conditions de Kuhn et Tucker caractéristiques des problèmes incluant des inégalités et analogues aux conditions de Lagrange dans le cas des contraintes d'égalité :

$$\begin{aligned} t_N &\geq 0 && \text{condition de compression} \\ g &\leq 0 && \text{condition de non-pénétration} \\ t_N g &= 0 && \text{condition de comptabilité} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ces inégalités doivent rester vraies pour tout point appartenant aux surfaces de contact et pendant l'intervalle de temps considéré.

L'équation (2.8)<sub>3</sub> indique que lorsqu'il y a décollement, les efforts normaux sont nuls et que lorsque ces efforts normaux sont non nuls, il n'y a pas décollement.

## 2.3 Loi de frottement

Le frottement peut être défini comme l'ensemble des phénomènes qui naissent à l'interface entre deux corps soumis à des forces tendant forcer un mouvement de l'un par rapport à l'autre en l'absence de lubrification. Il fait toujours l'objet d'innombrables travaux, aussi bien sur le plan mécanique que sur le plan de la formulation mathématique. Malgré l'ancienneté de l'intérêt porté à ce domaine, aucune loi universelle des processus dynamiques de frottement n'a encore été proposée et celle de Coulomb reste la plus utilisée aujourd'hui. Même si elle manque de sens physique, c'est elle que nous adoptons dans ce travail. Elle utilise deux propriétés fondamentales : la dépendance entre les contraintes normale et



tangentielle impliquant un coefficient de frottement  $\mu$  et la notion de seuil de glissement, toutes deux reportées sur la figure 2.2. De façon classique, cette loi s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_T\| &\leq \mu t_N \\ \|\mathbf{t}_T\| < \mu t_N &\Rightarrow \mathbf{v}_g = 0 \\ \|\mathbf{t}_T\| = \mu t_N &\Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathbf{v}_g = \alpha \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} \end{aligned} \quad (2.9)$$

pour laquelle, l'effort tangentiel entre les deux entités est noté  $\mathbf{t}_T$  et la vitesse relative de glissement,  $\mathbf{v}_g$ . Cette loi peut être reformulée en utilisant le concept du potentiel de la théorie de la plasticité [GIA 89]. Elle prend alors une forme plus simple à programmer :

$$\begin{aligned} \phi &= \|\mathbf{t}_T\| - \mu t_N \leq 0 \\ \mathbf{v}_g &= \alpha \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} \\ \alpha &> 0 \\ \alpha \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

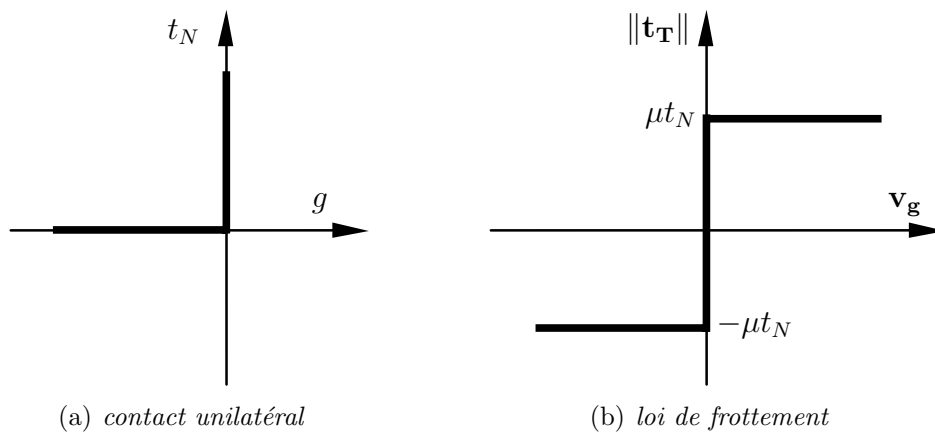


figure 2.2 – Illustration de la loi de contact de Coulomb

## 2.4 Équations du mouvement

Habituellement en mécanique, deux formulations permettent de mettre en équations un problème. L'une, dite « forte », est la formulation vraie du problème et sa solution est la solution recherchée. Sous cette forme, peu de solutions analytiques existent, sauf pour des situations académiques simples. Des discrétisations directes de cette formulation (méthode des différences finies) restent limitées. Une formulation équivalente sous certaines hypothèses et dite « faible », autorise la mise au point de méthodes numériques très puissantes et très générales telles que la méthode des éléments finis. Ces deux formulations, dont la différence réside dans la régularité de la solution, sont présentées ici dans le cadre de la mécanique du contact. La configuration de référence est confondue avec la configuration

déformée et tous les tenseurs de contraintes usuels sont indiscernables.

## 2.4.1 Formulation forte

En utilisant les théorèmes généraux de la mécanique des milieux continus et les notations définies dans la section 2.1, les équations régissant le mouvement des structures en présence s'énoncent de la manière suivante :

1. équations d'équilibre dynamique dans  $\Omega$  :

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{f}_d = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

2. conditions aux limites en déplacement sur  $\Gamma_u$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad (2.12)$$

3. conditions aux limites en force sur  $\Gamma_\sigma$  :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{t}_d \quad (2.13)$$

4. conditions initiales dans  $\bar{\Omega}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

5. loi de comportement :

elle relie le tenseur de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  au tenseur de Green-Lagrange  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \iff \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}^T(\mathbf{u}) \right) \\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \iff \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{D}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

6. contraintes de contact unilatéral :

$$\begin{aligned} t_N &\geq 0 \\ g &\leq 0 \\ t_N g &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

7. loi de frottement :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_T\| &\leq \mu t_N \\ \|\mathbf{t}_T\| < \mu t_N &\Rightarrow \mathbf{v}_g = 0 \\ \|\mathbf{t}_T\| = \mu t_N &\Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathbf{v}_g = \alpha \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} \end{aligned} \quad (2.17)$$



## 2.4.2 Formulation faible

### 2.4.2.1 Inégalités variationnelles

Le problème de contact peut aussi être interprété comme un système physique gouverné par une inégalité variationnelle qui naît des contraintes de contact [CEZ 01]. La solution recherchée ainsi que les espaces de solutions sont alors restreints par des contraintes physiques qui dépendent elles-mêmes de la solution. Une telle formulation en grandes déformations incluant du frottement n'est toujours pas très bien comprise. Toutefois, l'inégalité variationnelle décrivant la solution pour un problème d'élastodynamique doit satisfaire (i) les équations de la dynamique, (ii) les conditions aux limites en déplacement et en force, (iii) les conditions initiales, (iv) la loi de comportement et (v) les conditions de contact. Le cadre fonctionnel approprié pour ce type de problème fait intervenir un cône convexe fermé :

$$K(\Omega) = \{ \mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \text{ et } g(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \} \quad (2.18)$$

En notant  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , la formulation faible sous forme d'inégalité variationnelle consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} \in K(\Omega)$  tel que pour tout  $\mathbf{v} \in K(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV + \int_{\Gamma_c} \mu t_N(\mathbf{u}) (\|\mathbf{v}_T\| - \|\mathbf{u}_T\|) dS \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_d \delta \mathbf{u} dS \quad (2.19)$$

Ce problème est profondément non-linéaire du fait de l'inégalité et de la non-différentiabilité des termes liés au frottement qui imposent à la solution de passer soudainement de l'état de collement à celui de glissement. L'existence et l'unicité de la solution à cette équation n'est pas démontrée dans tous les cas et il n'y a actuellement aucune méthode numérique capable de la trouver en conservant tous les termes de l'équation (2.19). Des hypothèses simplificatrices sont alors nécessaires.

### 2.4.2.2 Principe des travaux virtuels

Construisons l'ensemble des pressions admissibles  $C_N$  [CHA 01] :

$$C_N = \{ t_N : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } t_N \geq 0 \} \quad (2.20)$$

puis l'ensemble des efforts tangentiels admissibles  $C_T$  :

$$C_T(t_N) = \{ \mathbf{t}_T : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } \|\mathbf{t}_T\| \leq \mu t_N \} \quad (2.21)$$

L'inégalité variationnelle équivalente à la loi de contact normal s'écrit :

$$t_N \in C_N, \int_{\Gamma_c} g_N(r_N - t_N) dS \geq 0 \quad \forall r_N \in C_N \quad (2.22)$$



et celle liée à la loi de frottement :

$$\mathbf{t}_T \in C_T(t_N), \int_{\Gamma_c} \mathbf{v}_g \cdot (\mathbf{r}_T - \mathbf{t}_T) dS \geq 0 \quad \forall \mathbf{r}_T \in C_T(t_N) \quad (2.23)$$

La différence principale entre les égalités variationnelles et les inégalités variationnelles réside dans la définition des espaces dans lesquels les solutions en déplacement sont recherchées. Les deux espaces fonctionnels, notés  $U$  et  $V$ , nécessaires à l'établissement du Principe des Travaux Virtuels en mécanique du contact sont définis :

$$U(\Omega) = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}\} \text{ et } V(\Omega) = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_d\} \quad (2.24)$$

Le problème de contact consiste alors à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} \in V(\Omega)$  tel que pour tout  $\delta \mathbf{u} \in U(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \int_{\Gamma_c} t_N \delta g + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{u}_T dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_d \delta \mathbf{u} dS \quad (2.25)$$

où les pressions de contact  $t_N$  et les efforts de frottement  $\mathbf{t}_T$  sont contraints par les conditions (2.22) et (2.23). En fait, les contraintes sur l'espace des solutions en déplacement apparaissent ici, sur les efforts de contact et de frottement.

## 2.5 Éléments de résolution

Les formulations en égalités ou inégalités variationnelles d'un problème de contact sont très générales et les méthodes de résolution diffèrent selon les cas. Pour la plupart, elles sont issues du domaine de l'optimisation sous contraintes. En effet, un problème de contact peut être écrit, sous certaines hypothèses, comme un problème de minimisation sous contraintes d'égalité et d'inégalité [CUL 94]. Les méthodes les plus couramment utilisées en mécanique sont les méthodes dites de régularisation incluant principalement la méthode de pénalisation et la méthode du lagrangien augmenté. Cette dernière, à l'image de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, est une méthode duale, où la solution cherchée dans l'espace primal (les déplacements) est un sous-produit de la résolution du problème dans l'espace dual (les efforts de contact). Les méthodes du point fixe, de relaxation avec projection, de gradient conjugué [HEI 99] ou encore de Gauss-Seidel [CHA 98] apparaissent aussi dans la littérature mais restent rarement appliquées. Les méthodes de régularisation permettent d'exprimer les lois non-linéaires du contact et du frottement en fonction des déplacements seulement. Le fait que les contraintes de contact normal et de frottement soient actives ou non *a priori* rend le problème difficile à résoudre. Ces régularisations permettent de contourner cette difficulté et de retrouver l'exacte description du contact par passage à la limite. Toutes ces méthodes peuvent être intégrées directement dans le Principe des Travaux Virtuels mais il est intéressant d'entrevoir leurs fondements sous l'angle de la théorie de l'optimisation.

Dans cette partie, le parallèle est fait entre la théorie de l'optimisation sous contraintes





et son utilisation en mécanique du contact pour une formulation en statique. Cette démarche n'est pas restrictive puisqu'un problème dynamique, une fois discrétisé en temps, se transforme en une succession de sous-problèmes pseudo-statiques auxquels il est possible d'appliquer ces méthodes. Ceci dit, pour que ce parallèle soit possible, il faut définir une fonctionnelle énergétique à minimiser, en tenant compte des contraintes de contact. Malheureusement, une telle formulation variationnelle (dans le sens « variation d'une fonctionnelle ») n'existe pas pour tout système d'équations différentielles. Par exemple, l'introduction de plasticité nécessite un traitement spécial et une généralisation de la procédure pourra être effectuée en ajoutant artificiellement les termes manquants. Qui plus est, afin que la quantité manipulée soit une différentielle totale, seules les contraintes de contact dans la direction normale sont considérées : le frottement, en tant que processus dissipatif dans la phase glissante, peut être inclus ultérieurement dans la description du phénomène.

L'énergie de déformation d'un système mécanique déformable peut s'écrire sous la forme :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\varepsilon} : \bar{\mathbf{D}} : \bar{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_d \mathbf{u} dS \quad (2.26)$$

Le problème peut alors être formulé comme minimisation de cette fonctionnelle en tenant compte des contraintes de contact :

$$\min_{\mathbf{u} \in K} E_d(\mathbf{u}) \quad (2.27)$$

Karush, Kuhn et Tucker ont formulé les conditions d'optimalité de (2.27) :

*soit  $\mathbf{u}_*$  un minimum local de  $E_d(\mathbf{u})$ . Supposons en plus que  $E_d(\mathbf{u})$  et  $g(\mathbf{u})$  soient dérivables en  $\mathbf{u}_*$  et que les contraintes soient qualifiées en  $\mathbf{u}_*$ , alors il existe  $\lambda$  tel que :*

$$\delta E_d(\mathbf{u}_*) + \int_{\Gamma_c} \lambda \delta g(\mathbf{u}_*) dS = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(\mathbf{u}_*) \leq 0, \\ \lambda \geq 0, \\ \lambda g(\mathbf{u}_*) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c$$

Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker s'écrivent sous une forme compacte et agréable mais ne doivent pas faire oublier qu'elles sont de type combinatoire à cause de la condition de complémentarité. Elles deviennent rapidement inexploitables de façon analytique.

### 2.5.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode duale exploite la notion de point selle du théorème de Kuhn et Tucker et permet de simplifier la résolution du problème initial. Dans un premier temps, une



fonction indicatrice est construite :

$$\phi(\mathbf{u}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathbf{u} \notin K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.28)$$

Le problème primal (2.27) est équivalent à :

$$\min_{\mathbf{u}} (E_d(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u})) \quad (2.29)$$

La restriction sur les déplacements  $\mathbf{u}$  a disparu au profit de la fonction  $\phi(\mathbf{u})$  non différentiable, qui n'évite pas la difficulté dans la résolution. Il est cependant possible de construire une fonction  $\phi(\mathbf{u})$  qui remplit les conditions (2.28) de la manière suivante :

$$\phi(\mathbf{u}) = \max_{\lambda \in C_N} \int_{\Gamma_c} \lambda g(\mathbf{u}) \, dS \quad (2.30)$$

*en définissant le lagrangien associé au problème primal  $L(\mathbf{u}, \lambda)$  alors s'il existe un couple  $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$  tel que :*

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = E_d(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c} \lambda g(\mathbf{u}) \, dS$$

$$L(\mathbf{u}_*, \lambda) \leq L(\mathbf{u}_*, \lambda_*) \leq L(\mathbf{u}, \lambda_*)$$

*$\mathbf{u}_*$  est solution du problème primal et  $\lambda_*$  est le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé.*

Ce point  $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ , appelé point-selle du lagrangien, est solution du problème d'origine et est trouvé en résolvant le problème dual pour lequel les contraintes sont plus simples et appliquées sur la variable duale. En statique, il s'agit d'exprimer la stationnarité par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $\lambda$  du lagrangien associé à la fonctionnelle d'énergie :

$$\delta L(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (2.31)$$

en y ajoutant les conditions de Karush, Kuhn et Tucker. Ces dernières permettent, entre autres, de déterminer la surface de contact  $\Gamma_c$  qui est inconnue *a priori* et plusieurs algorithmes sont capables de les prendre en compte, comme par exemple les méthodes de programmation quadratique [JOH 89].

## 2.5.2 Méthode de la pénalité

La pénalisation est un concept simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un problème ou une suite de problèmes d'optimisation sans contrainte. D'un point de vue numérique, cette transformation en séquence de sous-problèmes autorise la mise en œuvre d'algorithmes d'optimisation sans contrainte pour



obtenir la solution de problèmes dont l'ensemble admissible peut avoir une structure complexe. Cette approche est très utilisée dans la plupart des logiciels éléments finis actuels parce qu'elle est dépourvue de l'algorithmique sophistiquée de l'optimisation sous contraintes. Malheureusement, elle échange une plus grande simplicité théorique contre une efficacité douteuse puisque la solution dépend du paramètre de pénalisation choisi [PAP 93].

Il existe deux types de pénalisation : les pénalités intérieure et extérieure. Pour la première, on pénalise une solution qui s'approche de la frontière du domaine admissible par l'intérieur alors que pour la seconde, on pénalise une solution qui est sortie du domaine admissible en utilisant une approximation de la fonction indicatrice (2.28). La fonction suivante, différentiable et donc inexacte, est très souvent utilisée pour pénaliser les déplacements qui sortiraient du domaine admissible [BEL 91] :

$$P(\mathbf{u}) = \frac{\varepsilon}{2} \|g(\mathbf{u})^+\|^2 \quad (2.32)$$

L'exposant  $^+$  indique que la fonction  $P(\mathbf{u})$  est non nulle uniquement quand la solution  $\mathbf{u}$  est sortie de l'ensemble admissible  $K$  et peut être vu aussi comme la positivité des efforts de contact. La recherche de la solution  $\mathbf{u}$  se fait sur un domaine admissible qui n'est plus contraint. On écrit alors la stationnarité par rapport à  $\mathbf{u}$  de la fonctionnelle augmentée du terme pénalisant :

$$L(\mathbf{u}) = E_d(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c} P(\mathbf{u}) dS \quad (2.33)$$

Plus le coefficient  $\varepsilon$  est grand, meilleure est l'approximation de la fonction indicatrice. Malheureusement, il faudrait le faire tendre vers l'infini pour que la solution exacte soit retrouvée : numériquement, cela revient à créer une singularité qui fait diverger le processus itératif de résolution. Cependant, en statique et quand  $\varepsilon$  n'est pas trop élevé, cette méthode permet d'obtenir rapidement une solution acceptable. Par contre, couplée à un schéma dynamique de type explicite, elle peut provoquer des phénomènes de rebond n'ayant pas de sens physique et dont les résultats doivent être analysés avec attention.

### 2.5.3 Méthode du lagrangien augmenté

Cette approche augmente le multiplicateur de Lagrange usuel d'un terme pénalisant et offre deux avantages principaux :

- elle rend convexe la fonctionnelle de contact autour de la solution, facilitant ainsi la résolution du problème sans en modifier la solution ;
- le coefficient de pénalisation  $\varepsilon$ , même faible, permet d'approcher la solution exacte autant que l'on souhaite sans générer de singularité numérique.

Comme pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, deux méthodes principales de résolution existent. Une résolution directe [ALA 97] où la non-différentiabilité de la fonctionnelle est appréhendée par un jacobien généralisé, extension de la notion de diffé-



rentielle. Quant à l'algorithme d'Uzawa [SIM 92], il minimise, par un processus itératif, la fonctionnelle totale selon les variables primales et la maximise selon les variables duales (cf. équation (2.30)) en tenant compte de la contrainte sur leur signe, approchant ainsi le point-selle du lagrangien. Même si la définition du terme augmenté n'est pas unique et dépend des auteurs, sa forme la plus simple est la suivante :

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = E_d(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c} \left( \lambda g(\mathbf{u}) + \frac{\varepsilon}{2} \|g(\mathbf{u})^+\|^2 \right) dS \quad (2.34)$$

Lors de la minimisation de cette fonctionnelle, l'effort de contact est constant et soumis, dans un processus itératif extérieur (en opposition au processus itératif intérieur sur la solution en déplacement à  $\lambda^k$  constant) à :

$$\lambda_n^{k+1} = [\lambda_n^k + \varepsilon g(\mathbf{u})]^+ \quad (2.35)$$

La projection sur le cône positif  $\mathbb{R}^+$  de l'équation (2.35) est beaucoup plus simple que la projection sur l'ensemble des déplacements admissibles et c'est ce qui fait le succès de la méthode. Malheureusement, d'un point de vue numérique, la vitesse de convergence du processus peut être sensible au paramètre  $\varepsilon$  qui doit être choisi prudemment.

## Conclusion

Ce chapitre porte sur la théorie de la mécanique du contact combinée à l'hypothèse des petites perturbations ainsi que sur les trois méthodes principalement utilisées en statique dans les codes de calcul dédiés à la gestion du contact.

La méthode de la pénalité reste la plus connue et sa simplicité fait son succès. Malheureusement, elle est inexacte et doit être remplacée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode du lagrangien augmenté pour des études plus précises. Cette dernière est la plus facile à mettre en œuvre grâce à la régularisation des lois de contact unilatéral et de frottement qu'elle contient. Elle est cependant plus lente que la méthode de la pénalité. En fait, chaque cas d'étude offre des particularités qu'il faut analyser pour connaître laquelle parmi ces trois méthodes sera la plus à même de répondre aux critères de qualité, de précision et de rapidité.

Cette formulation du contact est, dans le chapitre suivant, discrétisée et résolue par différents algorithmes afin de statuer sur un choix final pour nos simulations d'interaction rotor-stator.



# 3

## Méthodes numériques

<b>3.1</b>	<b>Discrétisation spatiale : les éléments finis</b>	<b>29</b>
3.1.1	Généralités	30
3.1.2	Application à la mécanique	30
<b>3.2</b>	<b>Discrétisation temporelle</b>	<b>32</b>
3.2.1	Méthodes issues d'un développement de Taylor	33
3.2.2	Méthodes de type résidu pondéré	34
3.2.3	Algorithme temporel retenu	36
<b>3.3</b>	<b>Discrétisation fréquentielle</b>	<b>38</b>
3.3.1	Méthode de l'équilibrage harmonique	39
3.3.2	Généralisation à $n$ dimensions	41
<b>3.4</b>	<b>Validation des algorithmes</b>	<b>43</b>
3.4.1	Comparaison des méthodes fréquentielle et temporelle	44
3.4.2	Résolution d'un problème statique de contact	46
	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

Après avoir établi les équations de la dynamique avec contraintes de contact dans un cadre continu sous l'hypothèse des petites perturbations, ce chapitre s'articule autour de trois parties dédiées à la présentation de méthodes numériques permettant de résoudre ces équations de manière approchée :

- la méthode des éléments finis ;
- les méthodes explicites et implicites en intégration temporelle ;
- la procédure de l'équilibrage harmonique dans le domaine fréquentiel.

À propos des méthodes temporelles, une discussion propose un choix et définit la structure de l'algorithme que nous avons retenu pour les simulations. Pour terminer, deux exemples concrets illustrent et comparent les méthodes d'intégration temporelle et fréquentielle puis quelques algorithmes de gestion du contact pour un problème statique.

### 3.1 Discrétisation spatiale : les éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement les problèmes d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites pour lesquels il n'existe pas de solution analytique. Cette méthode est particulièrement bien adaptée au calcul des structures sous sollicitations mécaniques même si elle reste très générale [BAT 96].



### 3.1.1 Généralités

Dans un premier temps, le problème à résoudre est exprimé sous forme variationnelle. La méthode consiste alors à projeter ce problème, défini dans un espace fonctionnel  $V$  de dimension infinie, sur un sous-espace  $V_h$  de dimension finie dans lequel une solution approchée (du fait de la perte d'information lors de la projection) sera recherchée. Le problème continu aux dérivées partielles initial est en fait transformé en un système discret d'équations différentielles ordinaires, non-linéaires dans le cas le plus général, dont la solution est une solution approchée de l'équation initiale. Lors de la discrétisation, le domaine est partitionné en sous-domaines de forme simple munis de fonctions d'interpolation, les éléments finis, reliés entre eux en un nombre fini de points, les nœuds, qui constituent un maillage dont le rôle est d'approcher au mieux la géométrie continue du problème. Ainsi, la structure est subdivisée en un nombre fini de segments de droite dans le cas monodimensionnel, de triangles ou de quadrangles dans le cas bidimensionnel et de tétraèdres, de pentaèdres ou d'hexaèdres dans le cas tridimensionnel. Sur un élément fini ( $i$ ), le champ inconnu est approché par un ensemble de fonctions, dont le poids donné à chacune est contrôlé par les valeurs nodales  $\mathbf{u}_{(i)}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)_{(i)} = \mathbf{N}(\mathbf{X})^T \mathbf{u}_{(i)}(t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions d'interpolation. Ces dernières sont la plupart du temps

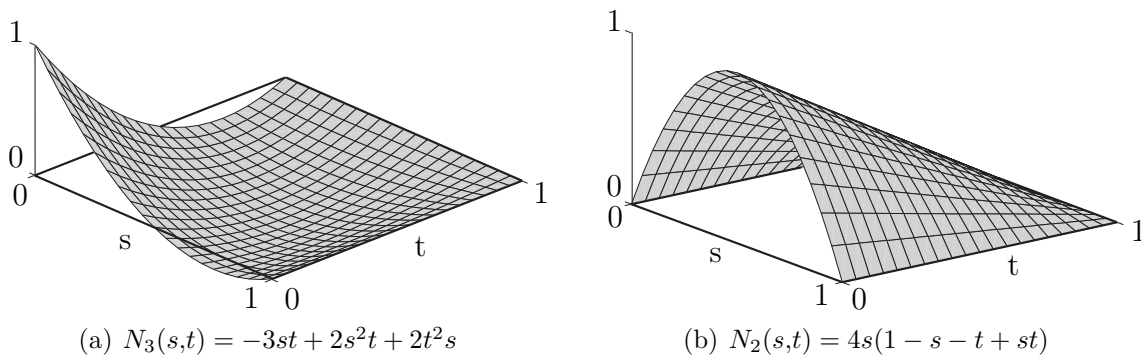


figure 3.1 – Fonctions de forme de l'élément quadrilatère  $Q8$

des polynômes. Pour certains problèmes à symétrie de révolution, les fonctions trigonométriques peuvent être préférées. Plus les fonctions sont riches, plus il sera facile d'approcher le champ inconnu avec une précision élevée. La figure 3.1 présente deux fonctions de forme de l'élément quadratique  $Q8$  à 8 nœuds d'utilisation courante en mécanique.

### 3.1.2 Application à la mécanique

Lorsque la méthode des éléments finis est appliquée à la mécanique, la formulation variationnelle du Principe des Travaux Virtuels (2.25) est utilisée [BAT 90]. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et en utilisant une loi de comportement élastique linéaire, les contraintes s'expriment en fonction des déformations et donc des déplacements :



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} &= \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{u}_{(i)}(t) \\ \boldsymbol{\sigma}_{(i)} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}\end{aligned}\quad (3.2)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  contient les opérateurs différentiels qui permettent de passer du champ de déplacement au champ de déformation. La relation contraintes-déformations est écrite sous la forme usuelle par l'intermédiaire de l'opérateur  $\mathbf{D}$ . La compatibilité des déplacements entre les éléments contigus du maillage conduit à l'équation matricielle du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (3.3)$$

Selon les méthodes de discrétisation, la structure de la matrice masse  $\mathbf{M}$ , de la matrice raideur  $\mathbf{K}$  et des vecteurs des forces extérieures  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ , et de contact  $\mathbf{f}^c$ , diffère. La méthode de Galerkin, cohérente par construction d'un point de vue énergétique, qui consiste à discrétiser par les mêmes fonctions de forme, le champ de pondération  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$  et le champ inconnu  $\mathbf{u}$  de l'équation (2.25) est généralement plébiscitée. Les différents vecteurs et matrices s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{N_{ele}} \int_{\Omega_i} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dV; & \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^{N_{ele}} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV; \\ \mathbf{f}^{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^{N_{ele}} \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_d \, dV + \sum_{i=1}^{N_{ele}} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_d \, dS\end{aligned}\quad (3.4)$$

où  $N_{ele}$  est le nombre d'éléments qui discrétisent le domaine spatial total, lui-même partitionné en sous-domaines volumiques  $\Omega_i$  et surfaciques  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_i^c$ . Les matrices masse et raideur ont alors des propriétés de symétrie, ce qui permet d'assurer le bon déroulement de la résolution numérique. Cette méthode n'est pas applicable à toute forme variationnelle : il faut que les dérivées des fonctions  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$ , identiques, soient d'un ordre tel qu'elles ne s'annulent pas partout sur le domaine.

Dans l'équation (3.3), l'expression du vecteur des forces de contact  $\mathbf{f}^c$  prête à discussion. En reprenant les développements du chapitre 2, la fonction  $g(\mathbf{u})$ , distance au sens près entre les deux structures, peut être linéarisée par rapport à une configuration et discrétisée pour être représentée par le vecteur  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_N^T \mathbf{u} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{C}_N$  est la matrice de contact dans la direction normale : elle contient les fonctions de forme calculées au point vérifiant l'équation (2.6). De cette manière, il est possible de déterminer les distances en tout point en fonction des déplacements nodaux. Si, pendant la résolution itérative du problème de contact, une pénétration a été détectée, le vecteur  $\mathbf{f}^c$  acquiert une forme différente selon les trois méthodes présentées dans la section 2.5 :

- méthode de la pénalité :  $\mathbf{f}^c = \varepsilon \mathbf{C}_N \mathbf{g}^+$
- multiplicateur de Lagrange :  $\mathbf{f}^c = \mathbf{C}_N \boldsymbol{\lambda}^+$



- Lagrangien augmenté :  $\mathbf{f}^c = \mathbf{C}_N (\boldsymbol{\lambda} + \varepsilon \mathbf{g})^+$

L'exposant  $^+$  exprime le fait que le terme de contact est non nul seulement s'il est positif. Plusieurs algorithmes ont été développés pour prendre cette non-linéarité en compte et certains d'entre eux sont explicités au dernier paragraphe de ce chapitre.

Afin de diminuer les temps d'exécution, le calcul des matrices et vecteurs liés à la discrétisation du problème est en fait effectué en utilisant des méthodes d'intégration numérique de type Gauss ou Simpson sur des éléments de référence de forme simple, la valeur exacte étant retrouvée grâce au jacobien de la transformation entre la base locale (forme simple) et la base globale (forme réelle), comme décrit sur la figure 3.2. La formulation pré-

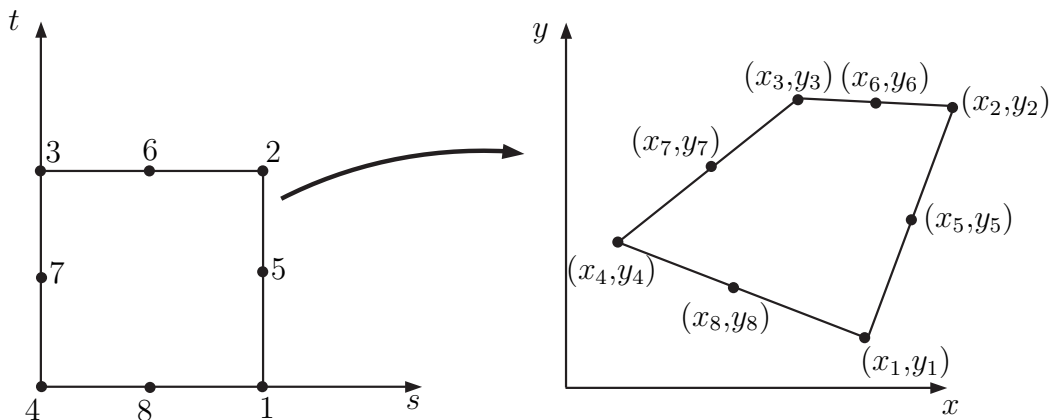


figure 3.2 – Transformation entre base locale et globale

sentée dans ce paragraphe est dite en déplacement, c'est-à-dire que les seules inconnues du problème sont les déplacements aux nœuds du maillage. La loi de comportement est alors respectée au sens « fort » du terme sur le domaine. Il existe d'autres formulations dites « mixtes » à deux (type Hellinger-Reissner) ou trois (type Hu-Washizu) champs qui permettent d'enrichir la qualité fonctionnelle de la formulation (continuité, différentiabilité...). Les relations entre ces différents champs sont alors respectées au sens « faible » sur le domaine défini. Cela a pour effet d'assouplir la formulation et d'éviter des problèmes de blocage numérique qui peuvent survenir dans certains domaines de la mécanique. Dans la suite de ce mémoire, seule la formulation en déplacement a été considérée.

## 3.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation spatiale conduit à un système d'équations différentielles, la plupart du temps du second ordre en mécanique et propres au mouvement. La résolution analytique d'un tel système est difficile pour les problèmes linéaires simples et pratiquement impossible pour les problèmes non-linéaires. De ce fait, pour approcher la (les) solution(s), il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques dont les domaines de compétence, les limites de validité et la précision font naturellement l'objet de nombreux travaux. Il existe deux approches principales pour résoudre ce système :

- la méthode de décomposition modale pour laquelle les matrices masse et raideur





sont diagonalisées dans un même espace, nommé espace modal. On obtient alors un système d'équations différentielles découplées d'autant plus rapide à résoudre qu'il est possible de tronquer la réponse si elle est dominée par les modes fondamentaux. Cette méthode trouve très vite ses limites pour des systèmes de grande taille ou quand les problèmes sont non-linéaires ;

- les méthodes d'intégration directe appelées ainsi parce qu'aucune manipulation préalable des équations n'est effectuée. Leur simplicité et leur efficacité dans la résolution de problèmes non-linéaires ont fait leur popularité dans le domaine du calcul des structures.

Comme pour une discrétisation spatiale, les méthodes d'intégration directe permettent d'approcher la solution exacte par une fonction dérivable par morceau. Les fonctions d'interpolation sont plus ou moins riches et la précision plus ou moins grande selon les formulations, ces dernières devant être stables et surtout convergentes.

Afin d'expliquer les différentes approches temporelles, l'équation (3.3) que l'on souhaite résoudre est modifiée en y ajoutant les termes d'amortissement structural  $\mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}$  et en omettant les termes de contact pour des questions de simplicité. Ces derniers seront réintroduits par la suite :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{u}(t = t_0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(t = t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

L'intégration directe consiste en l'utilisation d'un schéma numérique pas à pas qui permet de construire les vecteurs déplacement, vitesse et accélération aux instants  $t_0, t_1, \dots, t_n$  et par extension, grâce aux fonctions de forme, partout sur l'intervalle temporel considéré. Le pas de temps  $\Delta t$  sépare deux de ces instants et peut être constant ou variable pendant la procédure de calcul. Les deux catégories principales, fondées sur la troncature d'un développement de Taylor ou sur la méthode des éléments finis sont présentées dans ce qui suit.

### 3.2.1 Méthodes issues d'un développement de Taylor

Toutes les quantités connues à l'instant  $t_n$  sont indicées  $_n$ . Les vecteurs déplacement  $\mathbf{u}_n$ , vitesse  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et accélération  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  sont supposés connus à l'instant  $t_n$ . Le but est de rechercher ces inconnues à l'instant  $t_{n+\tau} = t_n + \tau = t_n + \theta\Delta t$  avec  $\theta > 0$ . En utilisant la théorie des développements limités, il est possible de calculer jusqu'à un rang donné les vecteurs inconnus à l'instant  $t_n + \tau$  en fonction des vecteurs connus à l'instant  $t_n$ . En ne conservant que les termes du second ordre en vitesse et du troisième ordre en déplacement pour une écriture cohérente, il vient en notation indicielle :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{u}_n + \tau\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^3}{6}\ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_n + \tau\ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}_n \end{cases} \quad (3.7)$$



Il existe alors plusieurs manières d'éliminer les dérivées temporelles troisièmes en déplacement. De façon générale, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  étant à choisir, cette élimination peut s'écrire sous la forme [GÉR 92] :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{u}_n + \tau \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2} ((1-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_n + \tau((1-\alpha)\ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau}) \end{cases} \quad (3.8)$$

- pour un schéma à accélération constante,  $\ddot{\mathbf{u}}$  est nulle sur l'intervalle  $[t_n, t_n + \tau]$  et l'accélération s'exprime comme suit :  $\ddot{\mathbf{u}}_n = \ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} = (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau})/2$ . Les paramètres correspondants sont  $\alpha = \beta = 1/2$ ;
- si l'accélération est linéaire sur l'intervalle  $[t_n, t_n + \tau]$ , telle que  $\ddot{\mathbf{u}} = (\ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} - \ddot{\mathbf{u}}_n)/\tau$  alors  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/3$ .

À l'instant  $t_n + \tau$ , le système matriciel (3.6) prend la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{f}_{n+\tau}^{\text{ext}} \quad (3.9)$$

et devient, après utilisation des équations (3.8) :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{M} + \alpha\tau\mathbf{D} + \frac{\beta\tau^2}{2}\mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+\tau} &= \frac{\beta\tau^2}{2}\mathbf{f}_{n+\tau}^{\text{ext}} + \mathbf{M} \left( \mathbf{u}_n + \tau\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2}(1-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n \right) \\ &+ \mathbf{D} \left( \alpha\tau\mathbf{u}_n + \frac{\tau^2}{2}(2\alpha-\beta)\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^3}{2}(\alpha-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

On obtient alors deux familles importantes de schémas d'intégration temporelle :

- $\theta = 1$  soit  $\tau = \Delta t$  correspond à la famille des schémas d'intégration de NEWMARK [NEW 59] pour lesquels les inconnues sont calculées au pas de temps  $t_{n+1}$ . Suivant la valeur des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , les schémas sont conditionnellement ou inconditionnellement stables comme rappelé sur la figure 3.4;
- si  $\theta > 1$ , il s'agit du schéma d'intégration temporelle de WILSON. Classiquement,  $\theta$  prend la valeur 1,4 et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent au cas d'accélération linéaire. Ce schéma est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1,32$ .

### 3.2.2 Méthodes de type résidu pondéré

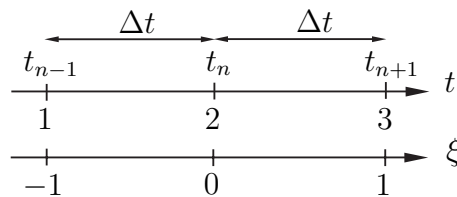


figure 3.3 – Discrétisation temporelle (globale et intrinsèque)

Il est possible de retrouver les résultats établis au paragraphe précédent en utilisant la



méthode des résidus pondérés sur une interpolation temporelle à trois points en fonction des instants  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  et  $t_{n+1}$  comme illustré par la figure 3.3. En construisant une variable  $\xi = (t - t_n)/\Delta t$ , dite intrinsèque ou locale, l'approximation du vecteur déplacement (par exemple) s'écrit :  $\mathbf{u}_t = \mathbf{N}(\xi)^T \bar{\mathbf{u}}$ , où le vecteur  $\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}]^T$  contient les variables nodales et  $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]^T$ , les fonctions de forme en temps. Puisqu'il a été choisi trois variables nodales par élément, l'approximation est un polynôme du second degré :  $\mathbf{u}_t = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$ . Les fonctions de forme sont calculées en appliquant la procédure usuelle :  $\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_t(\xi = -1)$ ,  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_t(\xi = 0)$  et  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_t(\xi = 1)$ . Elles s'écrivent [ZIE 91] :

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} ; \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2 ; \quad N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \quad (3.11)$$

Tout ceci conduit à écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_t = \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{u} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \mathbf{u}_{n-1} + (1 - \xi^2) \mathbf{u}_n + \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \mathbf{u}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{N}_{,t}(\xi)^T \mathbf{u} = \frac{1}{\Delta t} ((\xi - 1/2) \mathbf{u}_{n-1} - 2\xi \mathbf{u}_n + (\xi + 1/2) \mathbf{u}_{n+1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{N}_{,tt}(\xi)^T \mathbf{u} = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{f}_t^{\text{ext}} = \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{f}^{\text{ext}} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \mathbf{f}_{n-1}^{\text{ext}} + (1 - \xi^2) \mathbf{f}_n^{\text{ext}} + \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

En introduisant ces approximations dans le système (3.6), l'équilibre n'est pas vérifié et il faut annuler le résidu, ce qui conduit à utiliser la méthode des résidus pondérés :

$$\int_{-1}^1 W(\xi) (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t - \mathbf{f}_t^{\text{ext}}) d\xi = 0, \quad \forall W(\xi) \quad (3.13)$$

Afin de simplifier les écritures deux grandeurs sont introduites :

$$\theta_1 = \frac{\int_{-1}^1 W(\xi)(\xi + 1/2) d\xi}{\int_{-1}^1 W(\xi) d\xi} ; \quad \theta_2 = \frac{\int_{-1}^1 W(\xi)\xi(\xi + 1) d\xi}{\int_{-1}^1 W(\xi) d\xi} \quad (3.14)$$

et le système (3.13) devient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \theta_1 \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \frac{\theta_2}{2} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+1} &= \frac{\theta_2}{2} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} + \left( \frac{1}{2} - \theta_2 + \theta_1 \right) \mathbf{f}_n^{\text{ext}} + \left( \frac{1}{2} - \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \right) \mathbf{f}_{n-1}^{\text{ext}} \\ &+ \left( 2 \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (2\theta_1 - 1) \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} \right) \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n \\ &- \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (\theta_1 - 1) \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \left( \frac{\theta_2}{2} - \theta_1 + \frac{1}{2} \right) \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette formulation de type élément fini est très générale et permet de restituer tous les



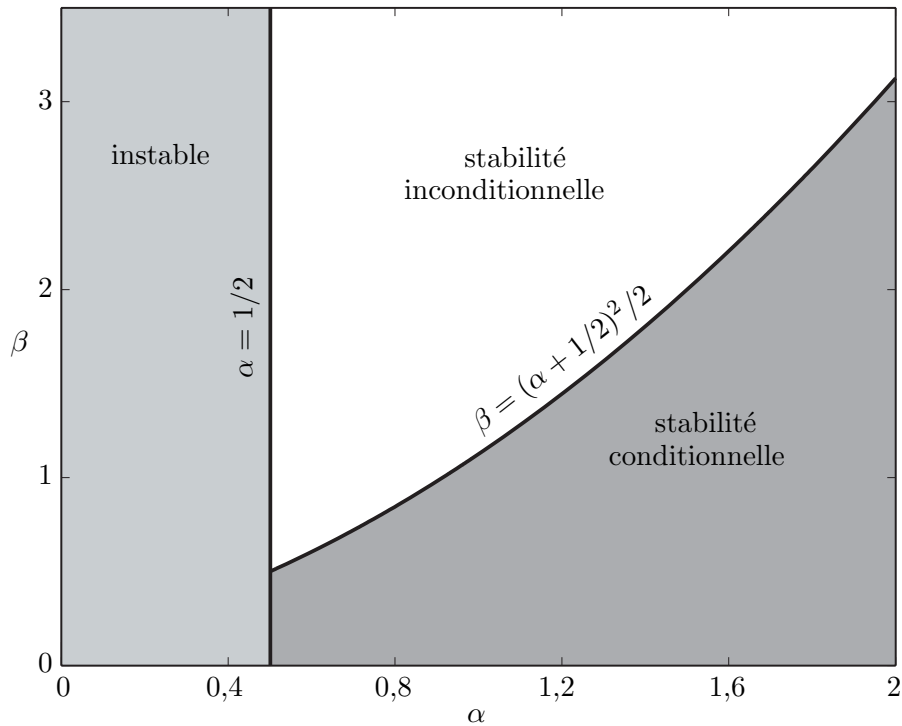


figure 3.4 – Domaines de stabilité des schémas temporels

schémas d'intégration classiques à trois points [GÉR 92], explicites ou implicites, suivant la valeur des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , c'est-à-dire suivant la fonction de pondération  $W$  choisie. Ces différents résultats sont rappelés dans le tableau 3.1. Même si dans la littérature quelques variations subsistent au niveau du paramètre  $\beta$  de (3.10) pour  $\theta = 1$ , il est intéressant de remarquer que dans la formulation développée ci-dessus,  $\theta_1 = \alpha$  et  $\theta_2 = \beta$ .

nom	paramètres	fonction de pondération	type
accélération linéaire	$\alpha = 1/2, \beta = 1/3$	$W = 1$	implicite
accélération constante	$\alpha = 1/2, \beta = 1/2$	$W =  \xi $	implicite
Fox Goodwin	$\alpha = 1/2, \beta = 1/6$	$W = 1 -  \xi $	explicite
différences finies centrées	$\alpha = 1/2, \beta = 0$	$W = \delta(\xi)$	explicite
différences finies à droite	$\alpha = 3/2, \beta = 2$	$W = \delta(\xi - 1)$	implicite

tableau 3.1 – Caractéristiques de quelques schémas temporels

### 3.2.3 Algorithme temporel retenu

#### 3.2.3.1 Discussion préalable

Le choix pour la résolution de notre problème porte à la fois sur le schéma d'intégration temporelle et sur la méthode de prise en compte du contact. Une étude préalable [LEG 03], sur un cas très simple de roue aubagée et de carter entre lesquels le contact était géré par une méthode des pénalités modifiée et associée à un schéma temporel explicite, montre que des coïncidences modales instables entre les deux structures étaient prédites correc-



tement par rapport à la théorie. Cependant, elles disparaissaient quand la méthode des multiplicateurs de Lagrange était implantée dans l'algorithme. Cette remarque nous interdit donc la méthode des pénalités à cause des trop importantes approximations qu'elle engendre.

À propos de l'intégration temporelle en mécanique du contact, les schémas implicites ont l'intérêt d'être parfaitement rigoureux au sens mathématique puisque tous les termes de l'équation du mouvement sont pris au même instant. Cependant, le caractère de stabilité inconditionnelle pour un problème linéaire devient alors obsolète à cause de la difficulté liée à la prise en compte des efforts de contact. Une étude intéressante [GG 99] prouve de façon analytique que les paramètres de NEWMARK ont un rôle primordial sur la qualité des résultats. Il est aussi démontré que le schéma explicite des différences finies centrées basé sur l'algorithme de CARPENTER [CAR 91], en plus de sa simplicité de programmation, conduit à un respect parfait des conditions de non-pénétration ainsi qu'à la compatibilité des vitesses et des accélérations. L'inconvénient principal réside dans le décalage d'un pas de temps entre l'estimation de l'accélération et la prise en compte des efforts de contact. Il est cependant mineur et le comportement, de type dynamique rapide, de l'ensemble motive l'utilisation de ce schéma.

### 3.2.3.2 Algorithme général

La résolution du problème se fait en trois étapes. Elles sont détaillées ci-dessous pour un contact nœud-ligne. Dans cette procédure, le vecteur  $\mathbf{u}$  contient les variables en déplacement des deux structures, et les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  regroupent les matrices respectives des deux composants mécaniques :

#### 1. prédiction des déplacements :

Dans cette étape, les déplacements sont prédits (et indicés  $p$ ) sans prendre en compte de quelconques contacts. D'après l'équation (3.15) et le tableau 3.1, il est possible d'écrire pour le schéma des différences finies centrées :

$$\mathbf{u}_{n+1,p} = \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \left( \mathbf{f}_n^{\text{ext}} + \left[ \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \mathbf{K} \right] \mathbf{u}_n + \left[ \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right] \mathbf{u}_{n-1} \right) \quad (3.16)$$

#### 2. calcul des pénétrations :

On utilise l'équation (3.5). La matrice de contact  $\mathbf{C}_N$  est initialisée à  $\mathbf{0}$ . Lorsqu'une pénétration est détectée entre les deux structures, des termes non nuls apparaissent dans la matrice  $\mathbf{C}_N$  au niveau des degrés de liberté qui doivent être corrigés.

#### 3. correction des déplacements :

Le vecteur des déplacements corrigés au pas de temps  $n + 1$  est noté  $\mathbf{u}_{n+1,c}$ . L'annulation des pénétrations détectées, qui s'écrit à partir de l'équation (3.5) :

$$\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{C}_N^T \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{g}_{n+1,p} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

est effectuée simultanément à la correction des déplacements restituant ainsi les



efforts de contact. Une nouvelle matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{NT}}$  comprenant à la fois les corrections dans les directions normale et tangentielle est construite. Elle est identique à  $\mathbf{C}_{\mathbf{N}}$  mais contient, en plus, le coefficient de frottement  $\mu$  au niveau des degrés de liberté adéquats en utilisant la loi de Coulomb dans sa phase glissante, qui s'écrit d'un point de vue discrétisation éléments finis  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T},n+1} = \mu\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N},n+1}$  :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right] \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{C}_{\mathbf{NT}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N},n+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^T \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{g}_{n+1,p} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.18)$$

Cette méthode présente l'avantage de permettre une correction exacte des déplacements mais l'inconvénient d'inverser, à chaque itération temporelle, une matrice, certes de faible taille mais non symétrique. En effet, l'équation (3.18) peut être réécrite sous une forme plus parlante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N},n+1} = \left[ \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^T \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{NT}} \right]^{-1} \mathbf{g}_{n+1,p} \\ \mathbf{u}_{n+1,c} = - \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{NT}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N},n+1} \end{cases} \quad (3.19)$$

Enfin, le temps est incrémenté d'un pas et la procédure reprend à la première étape.

*remarque 1* : Les forces surfaciques de contact normal notées  $t_N$  dans le domaine continu deviennent le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N}}$  après discrétisation. De la même façon, les efforts de frottement  $\mathbf{t}_{\mathbf{T}}$  sont écrits de façon vectorielle  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}}$ . Cette différence de notation intervient parce que dans la plupart des algorithmes, un procédé itératif implique les variables discrètes  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{N}}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}}$  qui convergent vers  $t_N$  et  $\mathbf{t}_{\mathbf{T}}$ .

*remarque 2* : Même si dans le chapitre 2, le domaine admissible est défini par la condition  $g(\mathbf{u}) \leq 0$ , il est possible de trouver des formulations pour lesquelles  $g(\mathbf{u}) \geq 0$ . Le signe des efforts de contact dans la direction normale est modifié pour conserver la cohérence mathématique : cette approche est programmée dans toutes les simulations décrites dans ce mémoire.

### 3.3 Discrétisation fréquentielle

Les méthodes fréquentielles sont de plus en plus d'actualité dans l'analyse des phénomènes vibratoires fortement non-linéaires [NAY 79]. Malgré le fait qu'elles demandent une élaboration algébrique préalable sophistiquée et un choix *a priori* des harmoniques retenus, elles sont utilisées avec succès dans de nombreux champs d'investigation. Suivant le type de non-linéarité rencontré dans la formulation du problème (prise en compte de contact unilatéral et de frottement ou non-linéarité en cube du déplacement par exemple), différentes variantes ont été développées récemment. En général, ce type de méthode trouve toute son efficacité dans la prédiction de réponses périodiques sous excitation forcée même si



des systèmes plus complexes sont rencontrés. La formulation la plus générale, qui permet d'étudier des systèmes oscillants apériodiques sujets au contact, l'une des non-linéarités les plus contraignantes, nécessite le concept d'*hyper-temps* [LAU 83]. En effet, ces systèmes font intervenir un nombre fini de fréquences sans dénominateur commun. Il n'y a donc pas de période commune au système dans sa totalité et il est alors nécessaire de construire un espace de *pseudo-temps* (au pluriel) dont la dimension est égale au nombre de fréquences sans dénominateur commun retenues. Théoriquement, il n'y a pas de limitation sur la dimension de l'*hyper-temps* pourvu qu'un nombre suffisant d'harmoniques soit associé aux fréquences adéquates afin d'atteindre une précision donnée. La procédure alterne domaine fréquentiel et domaine temporel et peut ainsi prendre en compte tout type de non-linéarité mais nécessite alors les transformées de Fourier rapides à  $n$  dimensions pour assurer le passage d'un domaine à l'autre [VG 01]. Une méthode fréquentielle générale fondée sur le concept décrit ci-dessus a été développée et est présentée dans ce qui suit en généralisant les travaux de PUŠENJAK [PUJ 04]. Cette étape dans notre travail a eu plusieurs effets bénéfiques :

- une meilleure compréhension physique du phénomène d'interaction modale grâce aux questions qui se sont posées lors de la mise en équations du problème dans le domaine fréquentiel ;
- la possibilité de faire des études paramétriques très rapides ;
- l'obtention de résultats indépendants du temps et par conséquent insensibles à la taille du pas de temps, souvent à l'origine de difficultés dans la mise au point des schémas temporels.

### 3.3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

Les équations de la dynamique d'un problème mécanique non-linéaire quelconque sont réécrites de la manière suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (3.20)$$

où le vecteur  $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  rassemble tous les types de non-linéarités du problème. L'idée générale est de représenter l'historique du vecteur déplacement généralisé  $\mathbf{u}$  par son contenu fréquentiel et obtenir ainsi un système couplé d'équations algébriques en « équilibrant » les termes à composante fréquentielle identique. L'utilisation d'une procédure itérative afin de trouver les racines de ces équations est l'étape suivante. Les déplacements  $\mathbf{u}$  sont développés en séries de Fourier tronquées au  $N_h^e$  harmonique :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} (\mathbf{a}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{b}_n \sin(n\omega t)) \quad (3.21)$$



ainsi que les forces non-linéaires:  $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ :

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\mathbf{c}_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} (\mathbf{c}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{d}_n \sin(n\omega t)) \quad (3.22)$$

et le chargement externe  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ :

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \frac{\mathbf{a}_0^{\text{ext}}}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} (\mathbf{a}_n^{\text{ext}} \cos(n\omega t) + \mathbf{b}_n^{\text{ext}} \sin(n\omega t)) \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{c}_{|n=0, N_h}$  et  $\mathbf{d}_{|n=1, N_h}$  sont des fonctions explicites (par exemple pour une non-linéarité dépendant du cube du déplacement) ou implicites (conditions de contact) non-linéaires des  $\mathbf{a}_{|n=0, N_h}$  et  $\mathbf{b}_{|n=1, N_h}$ . Les  $2N_h + 1$  coefficients de Fourier  $\mathbf{a}_{|n=0, N_h}$  et  $\mathbf{b}_{|n=1, N_h}$  sont alors les « seules » inconnues du problème puisque les  $2N_h + 1$  coefficients  $\mathbf{a}_{|n=0, N_h}^{\text{ext}}$  et  $\mathbf{b}_{|n=1, N_h}^{\text{ext}}$  représentent le chargement extérieur connu. Du remplacement de chaque vecteur de (3.21) dans l'équation du mouvement résulte un vecteur résidu  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})) \quad (3.24)$$

La méthode de Galerkin utilisée dans cette formulation requiert l'orthogonalité de ce résidu à chaque fonction de l'expansion sur une période  $T = 2\pi/\omega$ :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{R}, 1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{R}, \cos(n\omega t) \rangle = 0, & n = 1, \dots, N_h \\ \langle \mathbf{R}, \sin(n\omega t) \rangle = 0, & n = 1, \dots, N_h \end{cases} \quad (3.25)$$

où le produit scalaire  $\langle f(t), g(t) \rangle$  de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  est défini comme suit:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t)g(t) dt \quad (3.26)$$

Pour les problèmes linéaires, l'équation (3.25) peut se mettre sous forme matricielle et la solution est atteinte en une itération. La prise en compte de non-linéarités fait appel à des méthodes itératives de type quasi-Newton. Alors que dans le cas des non-linéarités explicites, la résolution du système algébrique est directement effectuée dans le domaine fréquentiel des  $\mathbf{a}_{|n=0, N_h}$  et  $\mathbf{b}_{|n=1, N_h}$ , les non-linéarités implicites n'ont de sens que dans le domaine temporel. Il convient alors d'alterner entre les deux domaines, (1) pour leur donner un sens physique puis (2) pour connaître leur contenu fréquentiel, grâce à une transformée de Fourier rapide directe et inverse à chaque itération de la procédure de résolution non-linéaire. Une fois le point de départ donné, le processus s'arrête quand la norme du vecteur  $\mathbf{R}$  devient suffisamment faible.





### 3.3.2 Généralisation à $n$ dimensions

L'application de la méthode décrite ci-dessus se généralise à des systèmes oscillants aperiodiques contenant  $M_s$  fréquences sans dénominateur commun. Dans un premier temps, il est nécessaire de définir  $M_s$  variables pseudo-temps associées à ces fréquences :

$$\tau_m = \omega_m t \text{ pour } m = 1, 2, \dots, M_s \quad (3.27)$$

pour construire un domaine *hyper-temps* tel que :

$$0 \leq \tau_m \leq 2\pi \quad (3.28)$$

où  $\omega_m$  représente les fréquences sans dénominateur commun de la réponse. Les équations de la dynamique sont ensuite projetées dans le domaine fréquentiel. Auparavant, les différents opérateurs différentiels qui agissent sur le vecteur  $\mathbf{u}$  doivent être réécrits en prenant en compte les changements de variables :

$$\frac{d\bullet}{dt} = \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \frac{\partial \bullet}{\partial \tau_m} \text{ et } \frac{d^2\bullet}{dt^2} = \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{n=1}^{M_s} \omega_m \omega_n \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \tau_m \partial \tau_n} \quad (3.29)$$

Ceci conduit à reformuler l'équation (3.20) :

$$\sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \left( \sum_{n=1}^{M_s} \omega_n \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau_m \partial \tau_n} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau_m} \right) + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}^{\text{nl}} \left( \mathbf{u}, \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau_m} \right) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (3.30)$$

La solution en  $\mathbf{u}$  est alors recherchée sous la forme d'une série de Fourier multiple :

$$\mathbf{u} = \sum_{j_1=-N_h}^{N_h} \sum_{j_2=-N_h}^{N_h} \cdots \sum_{j_{M_s}=-N_h}^{N_h} \mathbf{a}_{j_1, j_2, \dots, j_{M_s}} \cos \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m \right) + \mathbf{b}_{j_1, j_2, \dots, j_{M_s}} \sin \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m \right) \quad (3.31)$$

L'expression (3.32) :

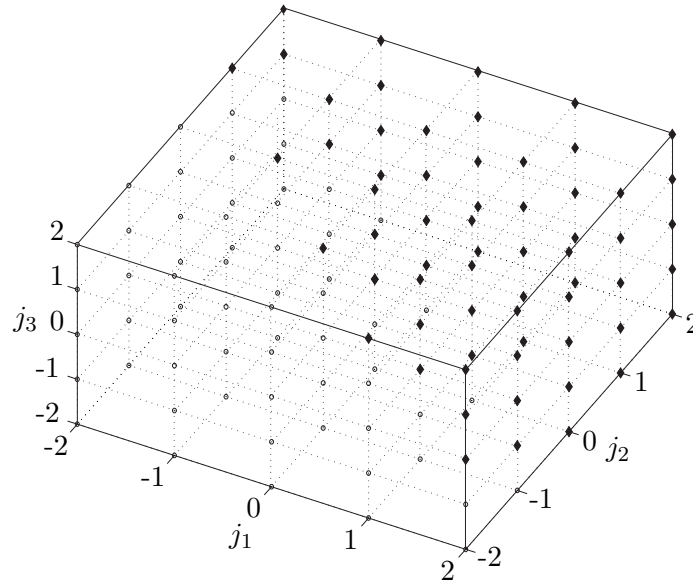
$$\mathbf{a}_{j_1, j_2, \dots, j_{M_s}} \cos \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m \right) + \mathbf{b}_{j_1, j_2, \dots, j_{M_s}} \sin \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m \right) \quad (3.32)$$

permet d'exprimer toutes les combinaisons possibles entre les différentes directions de l'*hyper-temps* par l'intermédiaire de la somme  $\sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m$  avec  $j_m \in \mathbb{Q}$ . Cette combinaison de pseudo-temps  $\tau_{|m=1, M_s}$  est la pierre angulaire de la méthode puisqu'elle autorise la présence, dans le spectre de Fourier, de fréquences sans dénominateur commun. La parité des fonctions trigonométriques interdit toute redondance et permet de diminuer le nombre d'inconnues. Il faut donc s'assurer que la condition (3.33) soit bien satisfaite :

$$\sum_{m=1}^{M_s} j_m \tau_m \geq 0 \quad (3.33)$$



Cette condition est illustrée sur la figure 3.5 pour trois fréquences sans dénominateur



**figure 3.5** – *Interprétation géométrique des composantes fréquentielles satisfaisant (3.33) avec  $N_h = 2$  et  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ . Il y a 63 coefficients indépendants (♦) sur 125 possibles.*

commun : tous les triplets notés (♦) la vérifient et le nombre d'harmoniques dans le modèle est alors maximal, les autres étant redondants et donc inutiles. Une fois la sélection des harmoniques effectuée, il est possible d'écrire l'équation (3.31) sous forme matricielle où  $u_j$  est la  $j^e$  coordonnée du vecteur  $\mathbf{u}$  :

$$u_j = \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.34)$$

avec  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}^{\cos}, \mathbf{t}^{\sin}]$  et  $\mathbf{a}_j = [\mathbf{a}_{\cos}^j, \mathbf{a}_{\sin}^j]^T$ . Il est opportun de noter qu'à ce stade, le vecteur  $\mathbf{a}_j$  est un réarrangement non redondant des coefficients  $a_{|j_1, j_2, \dots, j_{M_s}}$  et  $b_{|j_1, j_2, \dots, j_{M_s}}$  définis dans l'équation (3.31). Le nombre total d'harmoniques est  $N_h = N_{\cos} + N_{\sin}$ .  $\mathbf{t}$  est un vecteur ligne, combinaison de deux sous-vecteurs  $\mathbf{t}^{\cos}$  et  $\mathbf{t}^{\sin}$  composés respectivement des  $N_{\cos}$  termes en cosinus et des  $N_{\sin}$  termes en sinus :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{\cos} &= \left[ \cos \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^1 \tau_m \right), \cos \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^2 \tau_m \right), \dots, \cos \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^{N_{\cos}} \tau_m \right) \right] \\ \mathbf{t}^{\sin} &= \left[ \sin \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^1 \tau_m \right), \sin \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^2 \tau_m \right), \dots, \sin \left( \sum_{m=1}^{M_s} j_m^{N_{\sin}} \tau_m \right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

où les coefficients  $j_{|m=1, M_s}^{i=1, N_{\cos}}$  sont des entiers. Généralement,  $N_{\cos} = N_{\sin} + 1$  puisque le terme constant y est implicitement contenu en considérant l'égalité  $\cos(0) = 1$ . Le vecteur  $\mathbf{a}_j$  est une colonne des coefficients harmoniques associés à la  $j^e$  composante du vecteur déplacement et construit à l'image du vecteur  $\mathbf{t}$  :

$$\mathbf{a}_{\cos}^j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{N_{\cos}j}], \quad \mathbf{a}_{\sin}^j = [b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{N_{\sin}j}] \quad (3.36)$$

■

La matrice  $\mathbf{Y}$  se développe par  $N_h$  répétitions de  $\mathbf{t}$  le long de la diagonale :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{diag}_{N_h}(\mathbf{t}) \quad (3.37)$$

et en assemblant tous les vecteurs colonnes dans un même vecteur  $\mathbf{a}_{|j=1,N}$  de coefficients harmoniques :

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_N^T]^T \quad (3.38)$$

$\mathbf{u}$  et ses dérivées par rapport au temps s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \left( \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau_m} \right) \cdot \mathbf{a} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \left( \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{n=1}^{M_s} \omega_m \omega_n \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \tau_m \partial \tau_n} \right) \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cette expansion du vecteur  $\mathbf{u}$  peut alors être introduite dans l'équation (3.20) suivie de la procédure usuelle de Galerkin sur le domaine entier de l'*hyper-temps* défini par l'équation (3.28). Il en résulte un ensemble d'équations non-linéaires couplées à résoudre selon les coefficients harmoniques  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{f}_a^{\text{nl}}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_a^{\text{ext}} \quad (3.40)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}^T \left[ \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \left( \sum_{n=1}^{M_s} \omega_n \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \tau_m \partial \tau_n} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau_m} \right) + \mathbf{K}\mathbf{Y} \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{M_s} \\ \mathbf{f}_a^{\text{nl}}(\mathbf{a}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{M_s} \\ \mathbf{f}_a^{\text{ext}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{M_s} \end{aligned}$$

L'annulation du résidu  $\mathbf{R}$  avec un solveur itératif non-linéaire signifie que l'état d'équilibre est atteint.

## 3.4 Validation des algorithmes

Afin de s'assurer que l'implantation des différentes méthodes est correcte, deux exemples représentatifs ont été imaginés. Ils permettent de comparer d'une part l'approche temporelle à l'approche fréquentielle sur un cas de contact, et d'autre part, certains algorithmes de gestion du contact de la littérature à celui que nous avons choisi pour la suite des



développements.

### 3.4.1 Comparaison des méthodes fréquentielle et temporelle

#### 3.4.1.1 Présentation du système

Une poutre, discrétisée par quatre éléments finis de type poutre de Bernoulli (cf. figure 3.6), est soumise à une excitation externe apériodique composée de deux fréquences sans dénominateur commun :  $f^{ext} = 100(\cos(\pi t) + \cos(e^1 t))$ . Le déplacement central de cette poutre est contraint par un mur. La méthode des différences finies centrées en temps est comparée à la méthode de l'équilibrage harmonique à deux dimensions pour ce cas de contact unilatéral apériodique. En tenant compte des conditions aux limites en appui simple, le vecteur déplacement devient  $\mathbf{u} = [\theta_1, v_2, \theta_2, v_3, \theta_3, v_4, \theta_4, \theta_5]^T$ . L'équation du

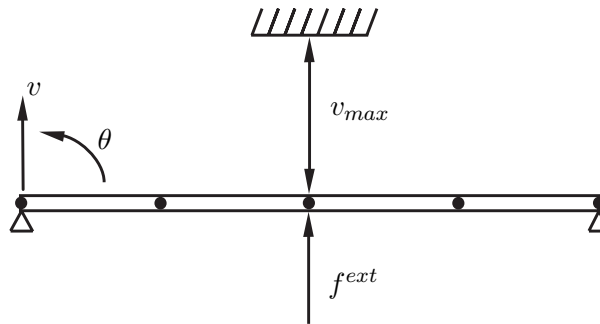


figure 3.6 – Schéma de la poutre contactant un mur

mouvement se met sous la forme :

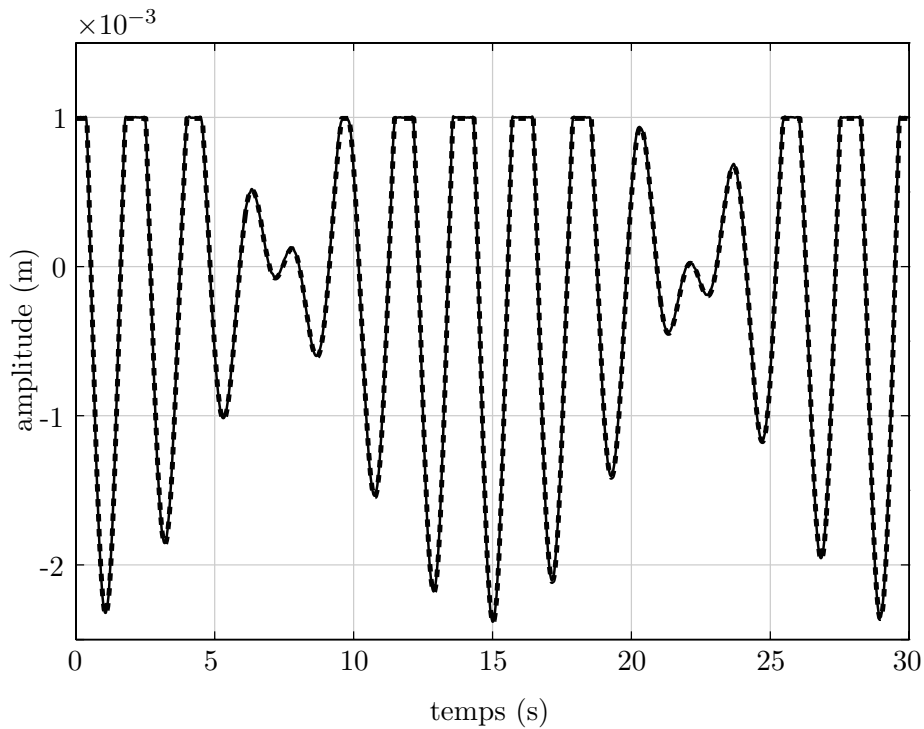
$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \\ v_3 \leq v_{max}, \quad \forall t \end{cases} \quad (3.41)$$

Pour ce cas précis, la prise en compte de la condition de contact dans la procédure fréquentielle est la suivante : si une violation de cette contrainte est détectée dans le domaine temporel, on lui impose la valeur  $v_{max}$  avant une projection de ce déplacement corrigé dans le domaine fréquentiel. Notons, toutefois, qu'il existe d'autres manières de tenir compte des efforts de contact dans ces approches fréquentielles [POU 04].

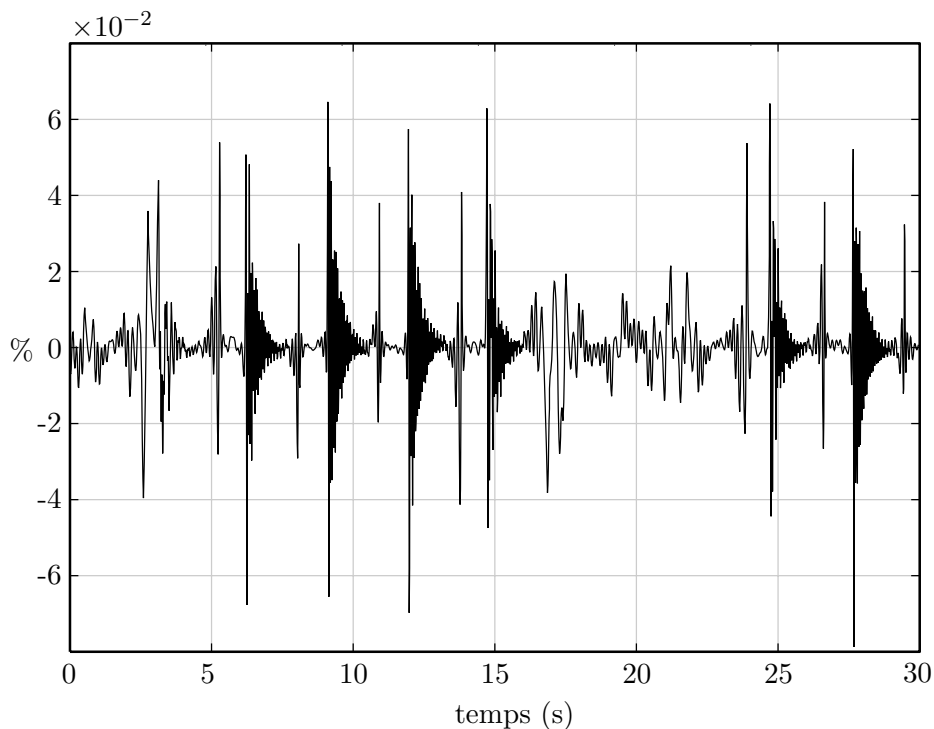
#### 3.4.1.2 Résultats

Pour bien approximer ce type de non-linéarité dans le domaine fréquentiel, il est nécessaire de considérer un grand nombre d'harmoniques. Par conséquent, douze harmoniques dans chaque direction sont conservés dans la simulation. Le temps de calcul de la méthode fréquentielle reste rédhibitoire à cause des transformées de Fourier directe et inverse en deux dimensions exécutées à chaque itération lors de la résolution non-linéaire. Néanmoins, ce calcul montre que la méthode fréquentielle est capable de résoudre ce type de problème. Les deux solutions, temporelle et fréquentielle, sont indiscernables comme illustré sur la figure 3.7. Afin d'apprécier leur écart, la figure 3.8 montre l'erreur relative entre les deux





**figure 3.7** – Comparaison entre les résultats issus de l'intégration temporelle des différences finies centrées (- -) et ceux issus de la méthode de l'équilibrage harmonique en deux dimensions pour  $N_h = 12$  (—)



**figure 3.8** – Erreur relative en % entre l'intégration temporelle des différences finies centrées et la méthode de l'équilibrage harmonique en deux dimensions pour  $N_h = 12$

méthodes. Les résultats sont pratiquement identiques. Des oscillations subsistent, dues essentiellement à la troncature au douzième terme du développement du déplacement en double série de Fourier dans la méthode fréquentielle.

### 3.4.2 Résolution d'un problème statique de contact

L'algorithme temporel développé dans la section 3.2.3.2 est confronté à quatre algorithmes différents souvent rappelés dans la littérature et permettant la résolution de problèmes de contact. Tous ces algorithmes sont donnés en annexe E en langage Matlab.

#### 3.4.2.1 Présentation du système

Le système étudié, (cf. figure 3.9) est une poutre soumise à son poids propre dont la déformée est contrainte par un obstacle rigide. Le frottement n'est pas pris en compte et

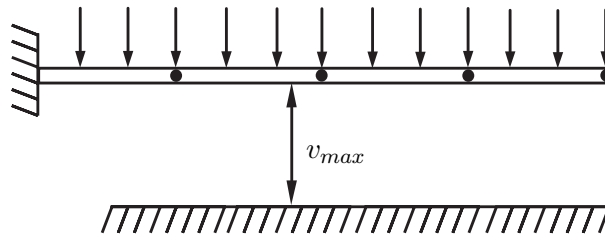


figure 3.9 – Schéma de la poutre contactant un mur

l'hypothèse des petites perturbations est utilisée. Le tableau 3.2 récapitule les caractéristiques du modèle. La poutre est très souple afin de compliquer la résolution. Le nombre d'éléments, du même type que ceux de l'étude précédente, est élevé pour mettre en lumière les temps de calcul des différents algorithmes. Un tel problème de statique peut se mettre

nombre d'éléments	200
masse volumique	$\rho = 0,1 \text{ kg/m}^3$
module d'Young	$E = 300 \text{ MPa}$
hauteur de la poutre	$h = 3 \text{ mm}$
largeur de la poutre	$l = 3 \text{ cm}$
longueur de la poutre	$L = 10 \text{ cm}$
gravité	$g = 10 \text{ m/s}^2$
position du mur	$v_{max} = -1 \text{ mm}$

tableau 3.2 – Caractéristiques du modèle

sous la forme décrite dans le chapitre 2, c'est-à-dire comme minimisation d'une énergie de déformation en restreignant l'espace des solutions admissibles. Les contraintes sur les déplacements sont appliquées seulement aux nœuds des éléments. Il s'agit là d'une simplification classique. Les conditions d'encastrement à l'extrémité de la poutre permettent d'écrire le vecteur des déplacements sous la forme :

$$\mathbf{u} = [v_2, \theta_2, \dots, v_{N_{ele}}, \theta_{N_{ele}}]^T \quad (3.42)$$



et le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \text{sc. } \forall n \in [2, N_{\text{ele}}], v_n \geq v_{\text{max}} \end{cases} \quad (3.43)$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \text{sc. } \mathbf{A} \mathbf{u} \geq \mathbf{b} \end{cases} \quad (3.44)$$

Deux algorithmes, à savoir la méthode des contraintes actives et la méthode des pénalités extérieures, permettent de résoudre ce problème directement sur les déplacements alors que les deux autres utilisent la notion de dualité des multiplicateurs de Kuhn et Tucker. Pour ces derniers, on adopte la méthode d'Uzawa qui consiste à minimiser la fonctionnelle augmentée selon des variables primales et à la maximiser selon les variables duales afin de trouver le point-selle, solution du problème original. Selon la forme du terme augmenté, on parle soit de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, soit de la méthode du lagrangien augmenté.

La méthode des contraintes actives trouve une direction admissible en ne rendant active qu'une contrainte par itération, ce qui permet la convergence de l'algorithme. Les contraintes d'inégalité sont en fait transformées en une séquence de contraintes d'égalité. La solution de cet algorithme est considérée comme solution de référence du problème et les autres, comme solutions approchées. Ceci résulte à la fois de la théorie et des tests d'arrêt de l'algorithme.

### 3.4.2.2 Résultats

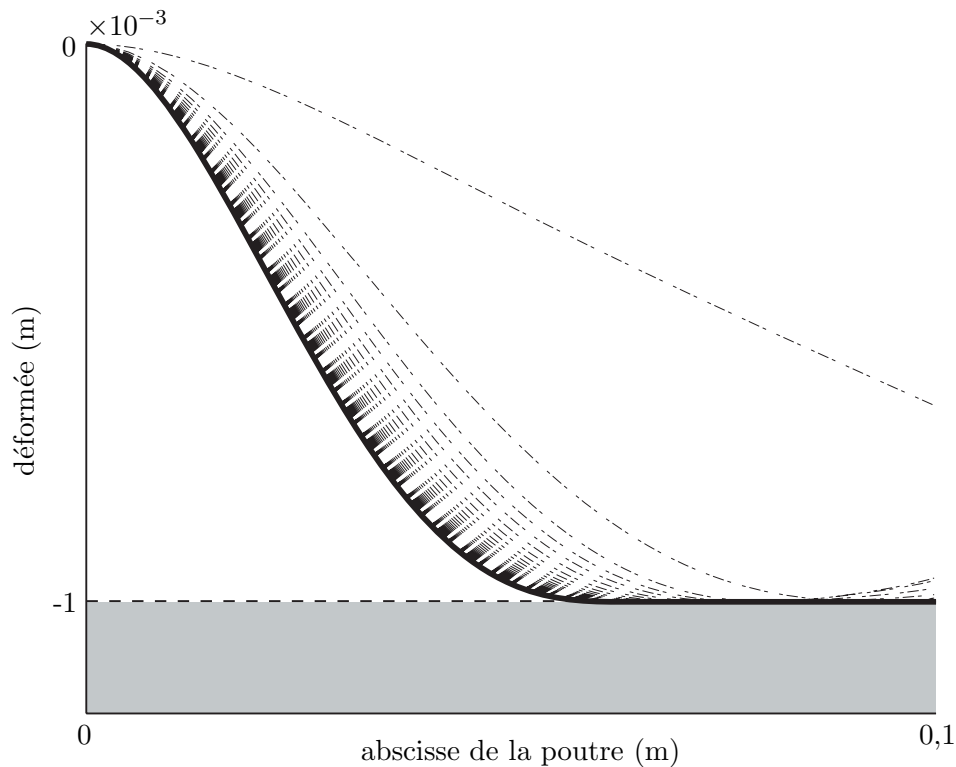
Dans le cas de notre algorithme en dynamique, un coefficient d'amortissement structural important est introduit pour que la solution converge rapidement vers la solution statique. La solution de référence de notre problème est reportée sur la figure 3.10. Afin de comparer la qualité des autres méthodes implantées, une erreur relative a été définie :

$$\text{erreur}(\%) = \frac{1}{n_{\text{elem}}} \sum_{i=2}^{n_{\text{elem}}} \left| \frac{v_i^{\text{ref}} - v_i^{\text{approx}}}{v_i^{\text{ref}}} \right| \times 100 \quad (3.45)$$

Elle quantifie par un pourcentage, la différence pondérée des déplacements aux nœuds entre la solution vraie et la solution approchée. Les algorithmes autres que celui des contraintes actives et dynamique s'arrêtent quand la norme euclidienne  $\sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{R}}$  du résidu  $\mathbf{R}$  de l'équation de la mécanique incluant les efforts de contact est inférieure à  $10^{-12}$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^{\text{ext}} + \mathbf{f}^{\text{c}} \quad (3.46)$$





**figure 3.10** – Déformées statique et dynamique d'une poutre soumise à son poids propre et contactant un mur

Le tableau 3.3 donne les erreurs relatives ainsi que les temps de calcul normés par rapport à la méthode des contraintes actives. Il souligne la précision de l'algorithme en dynamique

méthode	paramètres	temps (s)	erreur (%)
contraintes actives	/	1	/
pénalités	$\varepsilon = 10^4$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
	$\varepsilon = 10^5$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
	$\varepsilon = 10^6$	$8,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$
lagrangiens augmentés	$\varepsilon = 10$	1,8	$6,2 \cdot 10^{-8}$
	$\varepsilon = 10^2$	0,38	$9,6 \cdot 10^{-9}$
	$\varepsilon = 10^3$	0,14	$4,4 \cdot 10^{-9}$
multiplicateurs de Lagrange	$\rho = 2,27 \cdot 10^{-5}$	37	$5,2 \cdot 10^{-4}$
schéma explicite	/	/	$6,1 \cdot 10^{-3}$

**tableau 3.3** – Comparaison des algorithmes de gestion du contact

explicite et confirme certains commentaires de la littérature dans ce domaine :

- la méthode des pénalités est très simple d'implantation et très rapide en comparaison des autres algorithmes et sa précision augmente avec  $\varepsilon$  jusqu'à une valeur limite pour laquelle l'algorithme diverge ;
- la méthode des lagrangiens augmentés associée à l'algorithme d'Uzawa permet d'ob-





tenir une excellente précision pour un temps d'exécution très intéressant mais fluctuant en fonction de  $\varepsilon$  ;

- la méthode des multiplicateurs de Lagrange combinée à l'algorithme d'Uzawa se révèle fastidieuse et doit être évitée.

Il semble intéressant de préciser que tous ces algorithmes se généralisent à la dynamique non-linéaire et sont capables de tenir compte de grands déplacements, de grandes déformations et de loi de comportement plastiques moyennant quelques modifications simples.

## Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes numériques en espace, temps et fréquence nécessaires à nos simulations ont été présentées : il s'agit de la méthode des éléments finis, d'un schéma temporel fondé sur les différences finies centrées couplé à la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la gestion du contact et enfin, d'une procédure fréquentielle très générale permettant de simuler des systèmes oscillants et apériodiques sujets au contact. Deux exemples simples et représentatifs ont permis de démontrer le bon comportement des algorithmes développés. Ces trois méthodes sont utilisées dans les chapitres suivants avec certaines variantes selon les besoins de chaque modèle.





# 4

## Application à un modèle simple de symétrie cyclique

<b>4.1</b>	<b>Modélisation des structures</b>	<b>51</b>
4.1.1	Roue aubagée	51
4.1.2	Carter	52
<b>4.2</b>	<b>Procédure temporelle</b>	<b>53</b>
4.2.1	Gestion du contact	53
4.2.2	Algorithme	55
4.2.3	Résultats	56
<b>4.3</b>	<b>Procédure fréquentielle</b>	<b>62</b>
4.3.1	Équations du mouvement	62
4.3.2	Méthode de résolution	63
4.3.3	Résultats	64
	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>

Le but premier de ce chapitre est de mettre en œuvre les méthodes développées précédemment sur des structures très simples vérifiant les critères de symétrie cyclique, en espérant qu'une coïncidence modale puisse être détectée. La modélisation retenue, qui est décrite dans une première partie, reste imparfaite et ne permet pas une vision très réaliste du phénomène que l'on souhaite étudier mais sa simplicité supporte des études paramétriques rapides et une validation des algorithmes. Dans une seconde partie, les équations de la dynamique sont exposées. Ensuite, on adapte les deux méthodes d'intégration temporelle et fréquentielle en fonction des besoins spécifiques au phénomène d'interaction modale recherché. Enfin, une comparaison et une analyse des résultats respectifs œuvrent pour le développement d'un second modèle plus performant.

### 4.1 Modélisation des structures

#### 4.1.1 Roue aubagée

Lors de cette première étude, la roue aubagée a été modélisée le plus simplement possible. Elle est constituée de poutres rigides fixées au disque du rotor et connectées entre elles par des ressorts de torsion : sur la figure 4.1, les raideurs  $k_a$  et  $k_{ia}$  agissent directement sur les paramètres  $\alpha_i$ , positions angulaires des aubes. Comme expliqué dans le chapitre 1, la raideur centrifuge due à la vitesse de rotation de la roue aubagée n'est pas prise en compte. Pour faciliter la compréhension du modèle du rotor, le rayon du disque de la figure 4.1 n'est pas nul. Cependant, dans les algorithmes proposés par la suite, ce rayon est pris égal à zéro : les aubes vibrent donc autour d'une de leurs extrémités ce qui simplifie



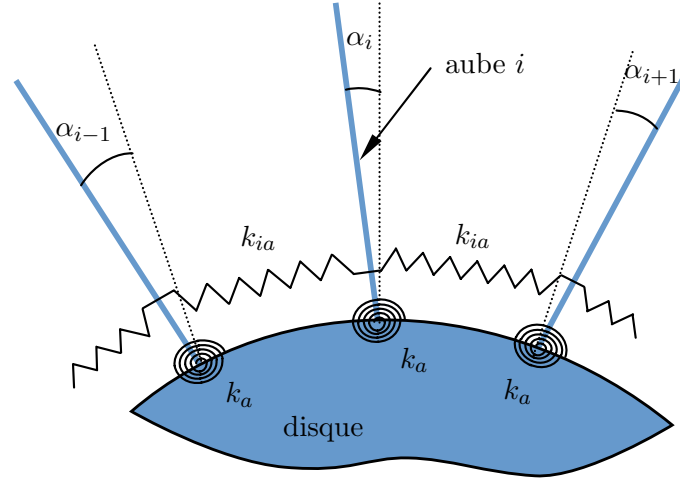


figure 4.1 – Schéma d'une partie du modèle simplifié de la roue aubagée

l'expression de la fonction distance entre les deux structures. L'équation de la mécanique associée au paramètre angulaire  $\alpha_i$  s'écrit :

$$m_a \ddot{\alpha}_i + (k_a + 2k_{ia})\alpha_i - k_{ia}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1}) = f_{\alpha_i} \quad (4.1)$$

où  $m_a = ml_a^2/3$  est le moment quadratique de l'aube par rapport à l'une de ses extrémités. Sa masse est notée  $m$  et sa longueur  $l_a$ . La généralisation de l'équation (4.1) à toute la roue aubagée conduit à une matrice raideur circulante et une matrice masse diagonale :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ra}} \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}_{\mathbf{ra}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}_{\mathbf{ra}}^{\text{ext}} \quad (4.2)$$

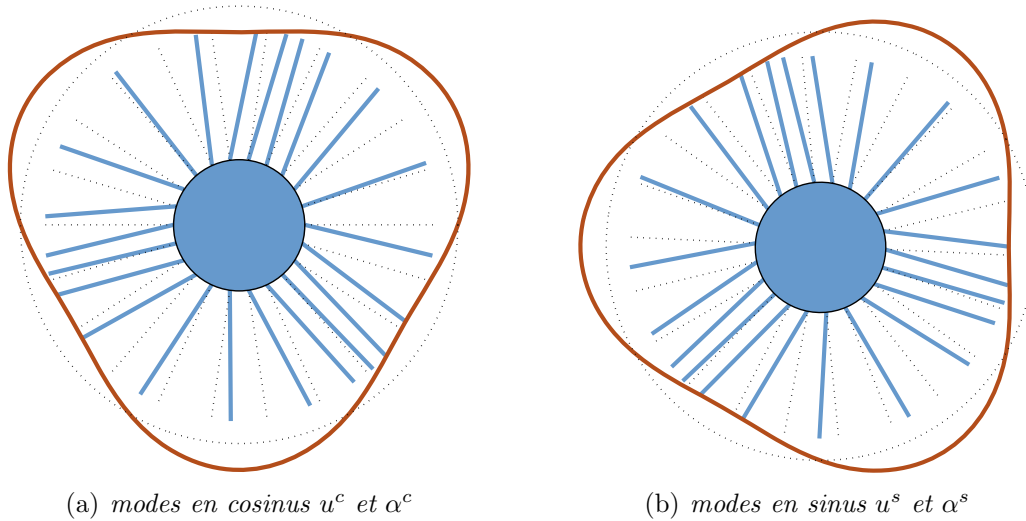
où  $\mathbf{M}_{\mathbf{ra}} = \text{diag}_N(m_a)$  et  $\mathbf{K}_{\mathbf{ra}} = \text{circ}_N(k_a + 2k_{ia}, -k_{ia}, 0, \dots, 0, -k_{ia})$ . Le vecteur contenant les angles de vibration de toutes les aubes est noté :  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  et  $\mathbf{f}_{\mathbf{ra}}^{\text{ext}} = [f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_N}]^T$  représente le vecteur d'excitation extérieure sans tenir compte d'éventuelles forces de contact. Les modes propres de la roue aubagée sont calculés à partir de ce modèle. Le vecteur des contributions  $\alpha^c$  et  $\alpha^s$  des deux modes à  $n_d$  diamètres nodaux  $\mathbf{p}_{\mathbf{ra}}^c$  et  $\mathbf{p}_{\mathbf{ra}}^s$  est noté  $\boldsymbol{\alpha}^m$ . Le champ de déplacement retenu est alors donné par la relation :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\mathbf{ra}}^c & \mathbf{p}_{\mathbf{ra}}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^c \\ \alpha^s \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_{\mathbf{ra}} \boldsymbol{\alpha}^m \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Carter

Le carter est directement discrétisé sur ses modes propres à  $n_d$  diamètres et son champ de déplacement est exclusivement radial. Les masses et raideurs modales sont déterminées grâce à un modèle éléments finis. Le système matriciel de chaque structure n'est pas normé par rapport à sa matrice masse respective afin de conserver le vrai rapport massique lors





**figure 4.2** – Les deux modes à trois diamètres nodaux du carter et de la roue aubagée

de la gestion du contact. On note  $\mathbf{u} = [u^c, u^s]^T$ , les contributions des deux modes à  $n_d$  diamètres nodaux du carter. Tout point matériel appartenant au carter et dont la position angulaire est paramétrée par l'angle  $\theta$  subit le champ de déplacement :

$$u(\theta, t) = u^c(t) \cos(n_d(\theta - \theta_0)) + u^s(t) \sin(n_d(\theta - \theta_0)) \quad (4.4)$$

$\theta_0$  est indéterminé du fait de l'invariance de la structure par rapport à son axe de révolution. Les équations de la dynamique du carter se mettent sous la forme d'un système matriciel diagonal de dimension  $2 \times 2$  dans lequel apparaissent la masse modale  $m_c$  et raideur modale  $k_c$  de la structure :

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_c \mathbf{u} = \mathbf{f}_c^{\text{ext}} \quad (4.5)$$

À l'image de la roue aubagée, aucun effort de contact n'est inclus dans l'équation (4.5).

Le nombre de diamètres nodaux est un paramètre du problème et doit être fixé par l'utilisateur. La figure 4.2 indique les déformées modales pour  $n_d = 3$ . Le rayon du carter est noté  $R_c$ . De l'amortissement structural est ajouté aux deux structures, par l'intermédiaire de la matrice  $\mathbf{D}$  définie grâce à l'hypothèse de Basile :  $\mathbf{D} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$  où les deux coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés pour retrouver les valeurs d'amortissement modal  $\zeta$  de l'ordre de 0,05% pour la roue aubagée et 0,3% pour le carter, données proposées par SNECMA.

## 4.2 Procédure temporelle

### 4.2.1 Gestion du contact

Les degrés de liberté angulaires retenus pour la roue aubagée ne permettent pas d'écrire le déplacement en sommet d'aube selon une direction normale et une direction tangentielle, indépendantes et nécessaires à une gestion correcte du contact. Il n'est donc pas possible



d'utiliser directement la méthode présentée dans le chapitre 2 qui s'appuyait sur une description réaliste des déplacements. Le modèle de contact est malgré tout fondé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, ce qui confère à l'ensemble un sens plus mathématique que physique. Aucun frottement n'est pris en compte et la mise en équations est effectuée en amont d'une réduction modale de la roue aubagée. Les énergies cinétique et potentielle du système ainsi que la fonctionnelle de contact doivent alors être calculées afin d'appliquer le principe d'Hamilton [MEI 67] :

$$\forall [t_1, t_2], \int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) - \delta E_d(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) + \delta W(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \delta E_\lambda(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})) dt = 0 \quad (4.6)$$

$$\forall (\delta \boldsymbol{\alpha}, \delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\lambda}) \text{ tel que } \delta \boldsymbol{\alpha}(t_1) = \delta \boldsymbol{\alpha}(t_2) = \delta \mathbf{u}(t_1) = \delta \mathbf{u}(t_2) = 0$$

L'ensemble des énergies et travaux virtuels des forces dissipatives s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{M}_{ra} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{énergie cinétique}$$

$$E_d = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_c \mathbf{u} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K}_{ra} \boldsymbol{\alpha} \quad \text{énergie de déformation}$$

$$\delta W = -\delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{u}} - \delta \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{D}_{ra} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{travail virtuel des forces dissipatives}$$

$$E_\lambda = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{énergie de contact}$$

On rappelle que le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  correspond aux multiplicateurs de Lagrange et le vecteur  $\mathbf{g}$ , aux distances entre les aubes et le carter. Le paramètre  $\theta_i$  indique la position angulaire de l'aube  $i$  pour tout  $t > 0$  comme défini sur la figure 4.3 :

$$\theta_i = \Omega t + \Phi_i + \alpha_i \quad (4.7)$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la roue aubagée,  $\Phi_i$ , l'angle initial entre l'aube  $i$  et l'axe  $\mathbf{e}_x$  et enfin  $\alpha_i$ , l'angle de vibration de l'aube  $i$ . Ceci conduit à écrire le vecteur  $\mathbf{g}$  dont les composantes sont les distances entre les structures :

$$g_i = R_c - l_a + u^c \cos(n_d \theta_i) + u^s \sin(n_d \theta_i) \quad (4.8)$$

qui, différencié et inclus dans le principe d'Hamilton, permet le calcul des efforts de contact :

$$\delta E_\lambda = \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{g} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g} \quad (4.9)$$

où les composantes du vecteur  $\delta \mathbf{g}$  observent la forme suivante :

$$\delta g_i = \delta u^c \cos(n_d \theta_i) + \delta u^s \sin(n_d \theta_i) + \delta \alpha_i n_d (u^s \cos(n_d \theta_i) - u^c \sin(n_d \theta_i)) \quad (4.10)$$



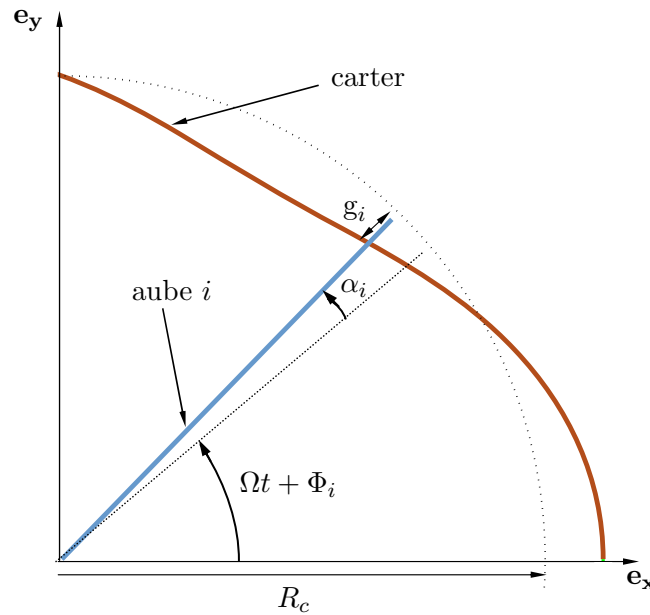


figure 4.3 – Schéma de la fonction  $g_i$

## 4.2.2 Algorithme

L'algorithme présenté dans la section 3.2.3.2 est repris mais adapté pour permettre la résolution des équations dans l'espace modal. Pour préciser à nouveau les notations, l'indice  $i$  représente le numéro de l'aube, l'indice  $n$ , le pas de temps en cours, l'indice  $p$ , que l'on a affaire aux variables prédites et enfin, l'indice  $c$  indique l'étape de correction des variables :

**prédiction :** à la fin de cette étape, les prédictions des déplacements modaux des deux structures notées  $\alpha_{n+1,p}^m$  et  $\mathbf{u}_{n+1,p}$ , sont connues.

**calcul des pénétrations :** il est alors possible de calculer les composantes de  $\mathbf{g}$  linéarisé par rapport à l'étape de prédiction au pas de temps  $n$  :

$$g_i = R_c - l_a + u_{n+1,p}^c \cos(n_d \theta_{i,n}) + u_{n+1,p}^s \sin(n_d \theta_{i,n}) + A_{i,n} \alpha_{i,n+1,p} \quad (4.11)$$

où  $\theta_{i,n} = \Omega t_n + \Phi_i + \alpha_{i,n}$  et  $A_{i,n} = n_d (u_n^s \cos(n_d \theta_{i,n}) - u_n^c \sin(n_d \theta_{i,n}))$ . L'angle de vibration de chaque aube est nécessaire et c'est la raison pour laquelle on effectue une projection de  $\alpha_{n+1,p}^m$  dans l'espace physique en utilisant l'équation (4.3) :

$$\alpha_{n+1,p} = \mathbf{P}_{ra} \alpha_{n+1,p}^m \quad (4.12)$$

**correction :** la correction se résume à la résolution d'un système linéaire de dimension  $(2N_c + 2) \times (2N_c + 2)$  où  $N_c$  est le nombre total d'aubes en contact détectées. Pour



$N_c = 2$  (les aubes 1 et 4 sont en contact) et en notant  $\beta_i = n_d \theta_i$ , le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_c & 0 & 0 & 0 & \cos \beta_{1,n} & \cos \beta_{4,n} \\ 0 & M_c & 0 & 0 & \sin \beta_{1,n} & \sin \beta_{4,n} \\ 0 & 0 & M_{ra} & 0 & A_{1,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{ra} & 0 & A_{4,n} \\ \cos \beta_{1,n} & \sin \beta_{1,n} & A_{1,n} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_{4,n} & \sin \beta_{4,n} & 0 & A_{4,n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1,c}^c \\ u_{n+1,c}^s \\ \alpha_{1,n+1,c} \\ \alpha_{4,n+1,c} \\ \lambda_1 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g_1 \\ -g_4 \end{pmatrix}$$

Dans l'équation précédente, les notations suivantes ont été utilisées :

$$M_c = \frac{m_c}{\Delta t^2} + \frac{d_c}{2\Delta t} \text{ et } M_{ra} = \frac{m_a}{\Delta t^2} + \frac{d_a}{2\Delta t} \quad (4.13)$$

Jusqu'à l'instant final, le temps est incrémenté avant un retour à la première étape.

En reprenant l'algorithme développé dans le chapitre 2, nous retrouvons l'expression de la matrice de contact :

$$\mathbf{C}_N^T = \begin{bmatrix} \cos \beta_{1,n} & \cos \beta_{4,n} & A_{1,n} & 0 \\ \sin \beta_{1,n} & \sin \beta_{4,n} & 0 & A_{4,n} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Cependant, pour éviter des problèmes numériques de mauvais conditionnement de matrice, c'est l'équivalent de l'équation (3.19) qui est en fait résolu.

## 4.2.3 Résultats

### 4.2.3.1 Choix du pas de temps et distances de pénétration

Le tableau 4.1 récapitule les caractéristiques mécaniques utilisées dans les simulations. Celles-ci ont été choisies afin de mettre au point un cas d'étude académique avec le plus de sens physique possible. Un algorithme explicite est très sensible à la taille du pas de

roue aubagée	carter	autres
$l_a = 0,499 \text{ m}$	$R_c = 0,5 \text{ m}$	$n_d = 3$
$m_a = 0,21 \text{ kg}$	$m_c = 2 \text{ kg}$	$N = 22$
$k_a = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$	$k_c = 1,544 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	$\Delta t_c = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
$k_{ia} = 3 \cdot 10^3 \text{ N/m}$	$\zeta_c = 0,05$	
$\zeta_{ra} = 0,04$	$\omega_c = 878,63 \text{ rad/s}$	
$\omega_{ra} = 286,3 \text{ rad/s}$		

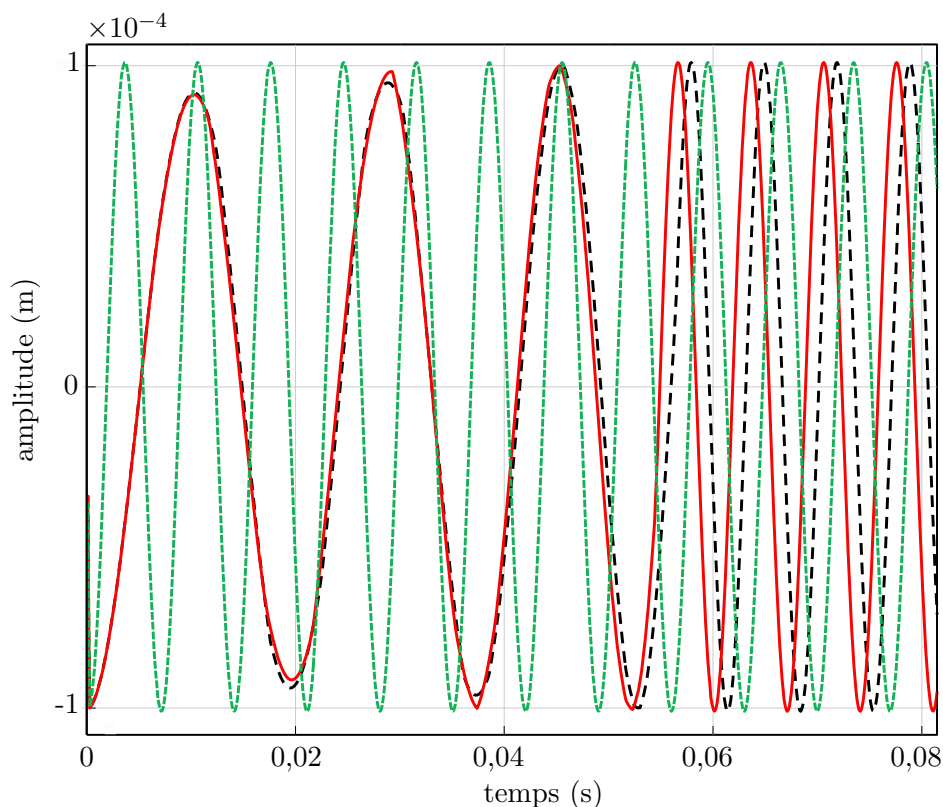
tableau 4.1 – Caractéristiques mécaniques du modèle

temps, surtout quand les équations sont fortement non-linéaires à l'image du cas présent. Il n'existe pas de méthode déterminant un pas de temps critique et seul un majorant peut être calculé :  $\Delta t \leq \Delta t_c$  (cf. tableau 4.1). Il est alors nécessaire d'effectuer plusieurs





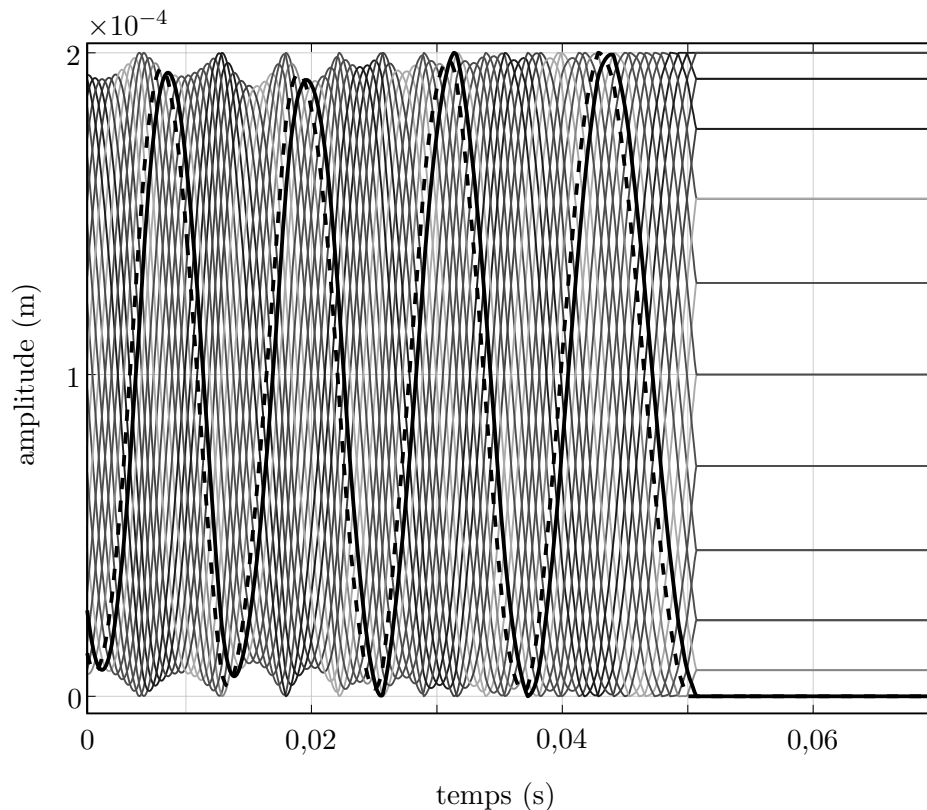
simulations en diminuant le pas de temps jusqu'à convergence (dans le sens où les résultats sont identiques entre deux simulations avec des pas de temps différents). Cette étude de convergence de  $\Delta t$  montre que les simulations sont quantitativement équivalentes pour  $\Delta t = 10^{-6}$  s et  $\Delta t = 10^{-7}$  s malgré le fait que les résultats soient qualitativement différents comme illustré sur la figure 4.4. Cette différence est due à la très forte dépendance de l'algorithme au pas de temps et ceci pour une raison principale : la discrétisation des deux structures dans l'espace modal interdit toute propagation d'onde locale à vitesse finie. Quand une des structures se déforme localement sous chargement extérieur, la réduction modale impose une déformation immédiate sur toute la structure et cohérente avec la forme du mode, ce qui est physiquement impossible. Cette singularité introduite par la modélisation ne peut être qu'approchée par l'algorithme temporel et une diminution du pas, même très importante, reste insuffisante. Nous avons donc privilégié des temps de calcul raisonnables pour une précision acceptable en conservant un pas de temps de  $10^{-6}$  s tout en ayant bien conscience que la réduction modale des deux structures, qui a pour but initial de provoquer l'apparition d'une coïncidence, limite fortement la résolution des équations pour le cas considéré. Ce pas de temps peut être comparé au critère de Courant  $\Delta t_c$  du problème linéaire associé. La vérification des distances de pénétration entre les



**figure 4.4** – Évolution de  $u^c$  pendant le phénomène d'interaction modale pour trois pas de temps différents :  $\Delta t = 10^{-5}$  s (---),  $\Delta t = 10^{-6}$  s (—) et  $\Delta t = 10^{-7}$  s (---).

structures en contact représente une méthode de validation de l'algorithme. Si l'étape de correction remplit normalement son rôle, les distances entre les aubes et le carter doivent être positives ou nulles et c'est ce qu'expose la figure 4.5. Il y a donc confirmation que la procédure de correction fonctionne normalement pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-6}$  s :





**figure 4.5** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes : deux aubes, la n°6 (- -) et la n°21 (—), restent en contact permanent avec le carter pendant le phénomène d'interaction.

aucune aube ne pénètre le carter au cours du calcul. Il semble pertinent de noter qu'un modèle très simple à quatre degrés de liberté est capable de restituer correctement les conditions de contact.

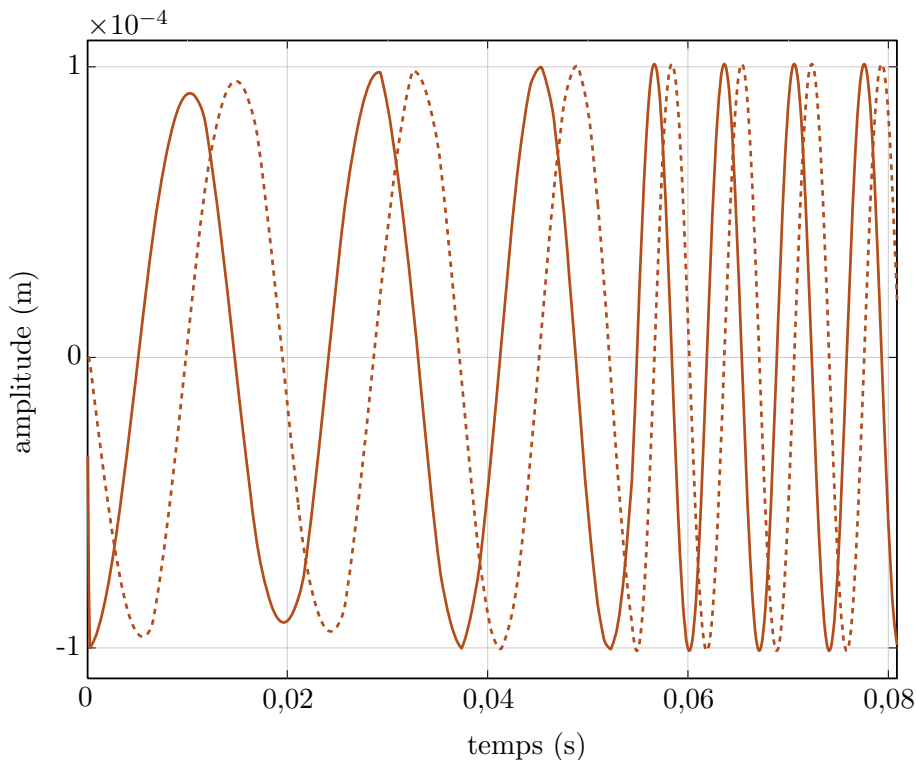
#### 4.2.3.2 Comportement du système

Pour les différentes simulations, le contact entre les deux structures est initié par une impulsion de 100  $\mu\text{s}$  sur le premier mode  $u^c$  du carter. Les structures sont ensuite laissées libres d'interagir ou non. Suivant l'amplitude de cette excitation initiale, de l'amortissement structural, du nombre de diamètres nodaux des modes considérés et de la vitesse de rotation du moteur, deux types de réponse ressortent :

1. les impacts initiaux entre la roue aubagée et le carter sont suivis d'une décroissance des vibrations jusqu'à disparition à cause de l'amortissement interne. Ce comportement est sans intérêt et n'est pas étudié ;
2. à la suite de plusieurs impacts, les deux structures acquièrent des déformées qui s'embrassent : un échange d'énergie s'instaure pour lequel l'amortissement des structures n'a alors plus d'influence. Les vibrations modales de la roue aubagée disparaissent mais certaines aubes restent en contact permanent avec le carter, excitant ainsi ses deux modes de vibration qui combinés, sont équivalents à un mode tournant avance (cf. figure 4.6 à partir de 0,055 s). Ce cas d'interaction est analysé dans le paragraphe suivant et nommé « mouvement bloqué ».

### 4.2.3.3 Régime de mouvement bloqué

Lorsque certaines conditions, assez difficiles à définir avec les seuls résultats issus de l'intégration temporelle, sont réunies, le carter et la roue aubagée interagissent : le comportement de l'ensemble est caractérisé par deux aubes en contact permanent avec le carter alors que tout contact est perdu au niveau des aubes restantes comme reporté sur la figure 4.5. Une de ces deux aubes pousse le mode tournant alors que l'autre est poussée



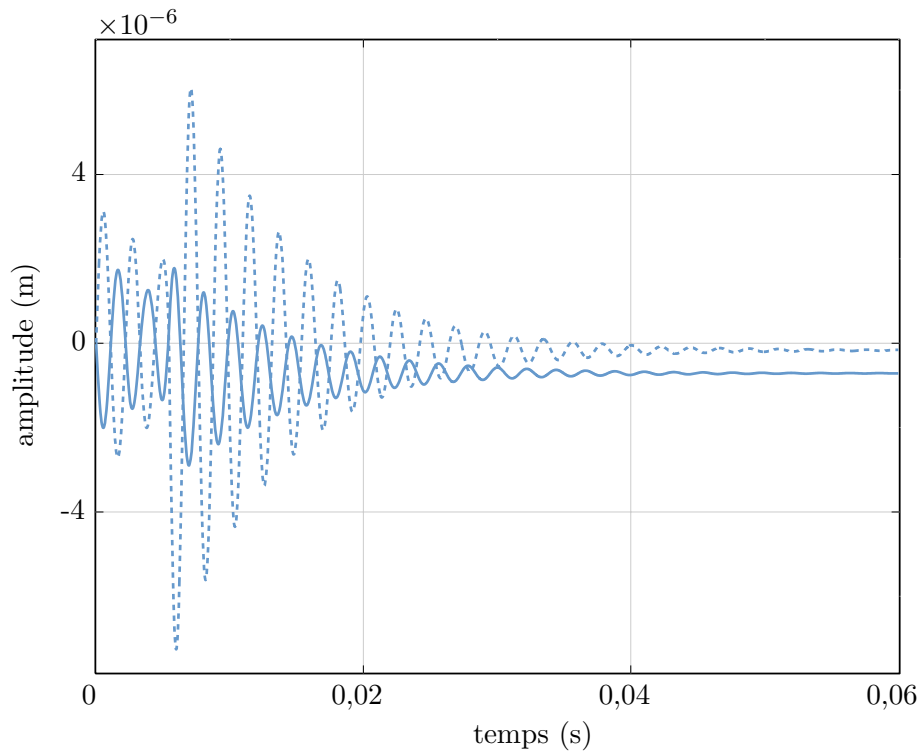
**figure 4.6** – Vibrations modales du carter  $u^c$  (—) et  $u^s$  (- - -) pour  $\Omega = 300$  rad/s et  $n_d = 3$ . Un mode tournant avance apparaît vers 0,055 s.

par ce mode tournant aboutissant ainsi à l'équilibre dynamique de l'ensemble. La vitesse de propagation de ce mode tournant est égale à la vitesse de rotation de la roue aubagée. Les figures 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 présentent des résultats pour  $n_d = 3$  puis  $n_d = 4$  mais des résultats similaires ont été obtenus pour  $n_d = 2$  et  $n_d = 5$ .

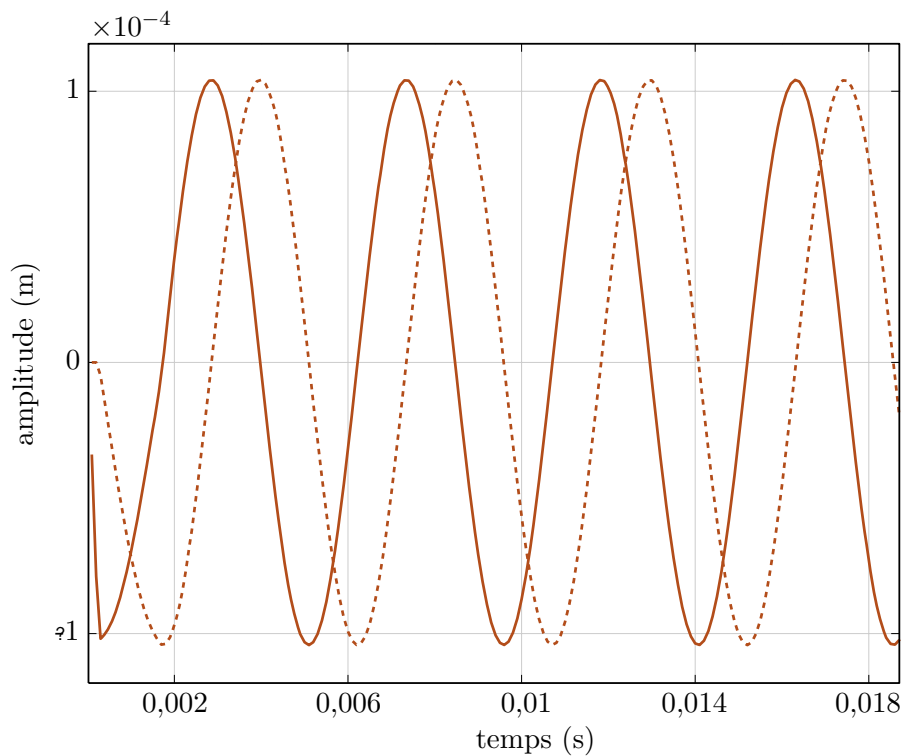
### 4.2.3.4 Conditions d'interaction

Une étude a été menée pour aider à la compréhension du rôle de certains paramètres dans l'apparition de ce phénomène d'interaction : vitesse de rotation du moteur, amplitude de l'excitation initiale, nombre de diamètres nodaux, amortissement structural. Ce dernier paraît fondamental puisque selon sa valeur, les structures sont plus ou moins amorties et atteignent ou non ce mouvement bloqué. La figure 4.10 illustre la zone pour laquelle le mouvement bloqué peut prendre naissance dans l'espace 'amplitude de l'impulsion initiale - vitesse de rotation'. La condition requise porte sur la vitesse de rotation du rotor et





**figure 4.7** – Vibrations modales de la roue aubagée  $\alpha_c$  (—) et  $\alpha_s$  (---) pour  $\Omega = 300 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 3$ . La structure atteint une déformée statique.

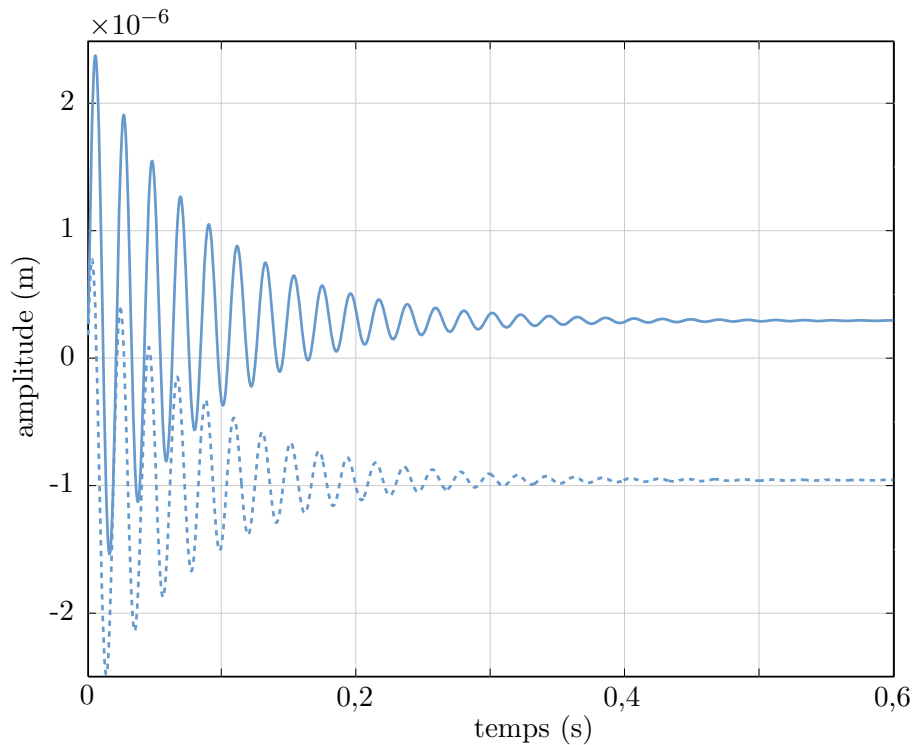


**figure 4.8** – Vibrations modales du carter  $u^c$  (—) et  $u^s$  (---) pour  $\Omega = 350 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 4$ . Un mode tournant avance apparaît immédiatement.

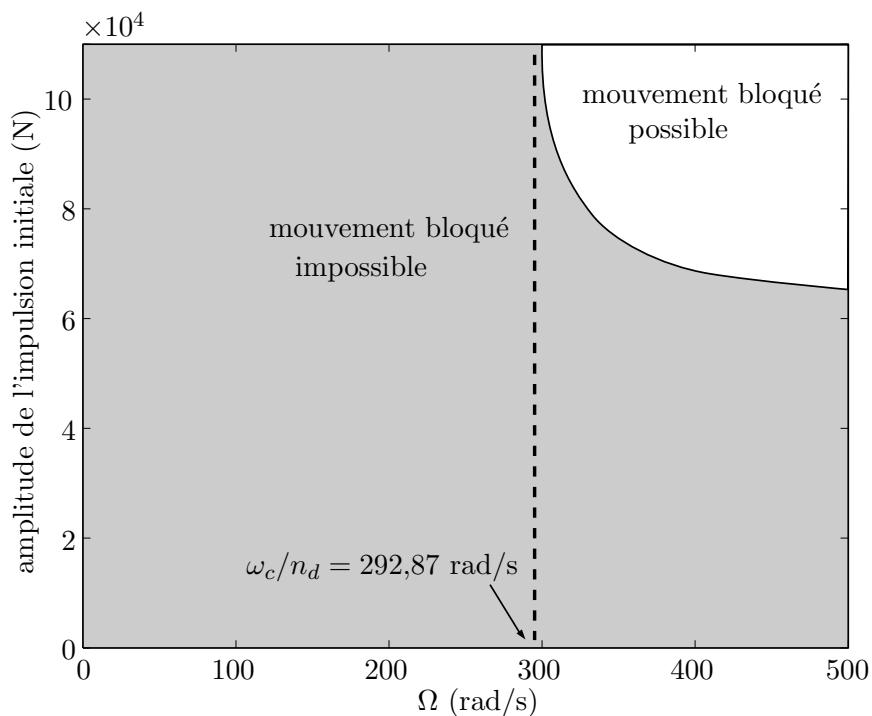
semble être la suivante :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c}{n_d} \quad (4.15)$$





**figure 4.9** – Vibrations modales de la roue aubagée  $\alpha_c$  (—) et  $\alpha_s$  (- - -) pour  $\Omega = 350 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 4$ . La structure atteint une déformée statique.



**figure 4.10** – Zones d'interaction dans l'espace 'amplitude de l'impulsion - vitesse de rotation'

Toutefois, en plus de la condition (4.15), l'amplitude de l'excitation initiale doit dépasser une valeur seuil dépendante de la vitesse de rotation de façon à ce que le phénomène apparaisse. Il faut cependant admettre que ces résultats, peu répétitifs, restent peu précis à cause de la limitation déjà évoquée. Un algorithme dans le domaine fréquentiel a donc



été développé d'après la procédure indiquée dans le chapitre 3, et ceci pour deux raisons : (1) les résultats temporels présentent des comportements harmoniques et statiques très simples et (2) cette méthode est insensible aux erreurs numériques inhérentes aux schémas temporels et très problématiques dans notre étude.

### 4.3 Procédure fréquentielle

Pour certaines conditions initiales très spécifiques, la solution temporelle est une interaction entre le carter et la roue aubagée. Cet état comprend un mode tournant du carter qui se propage à la vitesse de rotation de la roue aubagée et un contact permanent entre quelques aubes et le carter. Cette partie étudie ce phénomène de manière analytique par la méthode de l'équilibrage harmonique.

#### 4.3.1 Équations du mouvement

Le cas avec deux aubes en contact permanent est repris : elles sont indicées  $i_1$  et  $i_2$  et leurs positions angulaires sont paramétrées  $\alpha_{i_1}$  et  $\alpha_{i_2}$ . Il vient ( $\beta = n_d(\Omega t + \Phi + \alpha)$ ) :

– pour le carter :

$$\begin{cases} m_c \ddot{u}^c + k_c u^c + \lambda_1 \cos \beta_{i_1} + \lambda_2 \cos \beta_{i_2} = 0 \\ m_c \ddot{u}^s + k_c u^s + \lambda_1 \sin \beta_{i_1} + \lambda_2 \sin \beta_{i_2} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

– pour les deux aubes en contact :

$$\begin{cases} (k_a + 2k_{ia})\alpha_{i_1} - k_{ia}(\alpha_{i_1-1} + \alpha_{i_1+1}) + n_d \lambda_1 (u^s \cos \beta_{i_1} - u^c \sin \beta_{i_1}) = 0 \\ (k_a + 2k_{ia})\alpha_{i_2} - k_{ia}(\alpha_{i_2-1} + \alpha_{i_2+1}) + n_d \lambda_2 (u^s \cos \beta_{i_2} - u^c \sin \beta_{i_2}) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

– pour les autres aubes :

$$\begin{cases} (k_a + 2k_{ia})\alpha_1 - k_{ia}(\alpha_N + \alpha_2) = 0 \\ (k_a + 2k_{ia})\alpha_i - k_{ia}(\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}) = 0 \quad \forall i \in [2, N-1] - \{i_1, i_2\} \\ (k_a + 2k_{ia})\alpha_N - k_{ia}(\alpha_{N-1} + \alpha_1) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

– pour les conditions de contact permanent entre les aubes  $i_1$  et  $i_2$  et le carter :

$$\begin{cases} R_c - l_a + u^c \cos \beta_{i_1} + u^s \sin \beta_{i_1} = 0 \\ R_c - l_a + u^c \cos \beta_{i_2} + u^s \sin \beta_{i_2} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Dans les équations précédentes, l'amortissement structural a disparu : en effet, il n'est pas nécessaire à l'étude fréquentielle d'un mouvement forcé qui est étudié de façon intrinsèque sans tenter de connaître les conditions qui le font apparaître.



Pour diminuer le nombre d'inconnues, les équations relatives à la roue aubagée sont projetées dans l'espace modal par inversion de l'équation (4.3). Cette substitution permet de former un système de six équations : deux pour le carter, deux pour les aubes en contact et deux pour les contraintes de contact, d'inconnues respectives :  $u^c$ ,  $u^s$ ,  $\alpha_c$ ,  $\alpha_s$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette mise en équations démontre qu'il ne peut y avoir plus de deux aubes en contact permanent puisque seulement deux degrés de liberté sont disponibles par structure.

### 4.3.2 Méthode de résolution

Rien ne prouve que la solution temporelle soit une solution de référence à cause du problème du pas de temps. Cependant, s'il est possible de trouver une solution équivalente par une autre procédure, elle prendra tout son sens. C'est pourquoi nous utilisons les résultats temporels pour faciliter l'étude fréquentielle du mouvement bloqué :

- une seule harmonique est suffisante pour les contributions modales du carter ;
- les multiplicateurs de Lagrange sont constants ;
- les angles de vibration des aubes sont constants.

Le mode tournant se propageant à la vitesse de rotation  $\Omega$  du moteur, il vient alors pour le champ de déplacement du carter :

$$\begin{cases} u^c = a_1^c \cos(n_d \Omega t) + b_1^c \sin(n_d \Omega t) \\ u^s = a_1^s \cos(n_d \Omega t) + b_1^s \sin(n_d \Omega t) \end{cases} \quad (4.20)$$

L'intégration sur une période du mouvement de la pondération de (4.16), (4.17), (4.18) et (4.19) par le vecteur  $\{1, \cos(n_d \Omega t), \sin(n_d \Omega t)\}$  après substitution de (4.20) conduit à un système de huit équations à huit inconnues ( $a_1^c$ ,  $a_1^s$ ,  $b_1^c$ ,  $b_1^s$ ,  $\alpha_{i_1}$ ,  $\alpha_{i_2}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ).

Parce que les amplitudes de déformation sont très faibles pendant le phénomène d'interaction, les approximations suivantes sont légitimes :  $\cos(n_d \alpha_{i_j}) \simeq 1$  et  $\sin(n_d \alpha_{i_j}) \simeq n_d \alpha_{i_j}$ . Le système d'équations découlant de l'application de la procédure de Galerkin s'écrit en notant  $c_1 = \cos(n_d \Phi_{i_1})$ ,  $c_2 = \cos(n_d \Phi_{i_2})$ ,  $s_1 = \sin(n_d \Phi_{i_1})$  et  $s_2 = \sin(n_d \Phi_{i_2})$  :

- pour le carter :

$$\begin{cases} (k_c - n_d^2 \Omega^2 m_c) a_1^c + \lambda_1 (c_1 - n_d \alpha_{i_1} s_1) + \lambda_2 (c_2 - n_d \alpha_{i_2} s_2) = 0 \\ (k_c - n_d^2 \Omega^2 m_c) b_1^c - \lambda_1 (s_1 + n_d \alpha_{i_1} c_1) - \lambda_2 (s_2 + n_d \alpha_{i_2} c_2) = 0 \\ (k_c - n_d^2 \Omega^2 m_c) a_1^s + \lambda_1 (s_1 + n_d \alpha_{i_1} c_1) + \lambda_2 (s_2 + n_d \alpha_{i_2} c_2) = 0 \\ (k_c - n_d^2 \Omega^2 m_c) b_1^s + \lambda_1 (c_1 - n_d \alpha_{i_1} s_1) + \lambda_2 (c_2 - n_d \alpha_{i_2} s_2) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$



– pour les deux aubes en contact :

$$\begin{cases} \lambda_1 n_d s_1 (b_1^s + a_1^c + n_d \alpha_{i_1} (a_1^s - b_1^c)) + \lambda_1 n_d c_1 (b_1^c - a_1^s + n_d \alpha_{i_1} (b_1^s + a_1^c)) \\ \quad + (k_a + 2k_{ia}) \alpha_{i_1} - k_{ia} (\alpha_{i_1-1} + \alpha_{i_1+1}) = 0 \\ \lambda_2 n_d s_2 (b_1^s + a_1^c + n_d \alpha_{i_2} (a_1^s - b_1^c)) + \lambda_2 n_d c_2 (b_1^c - a_1^s + n_d \alpha_{i_2} (b_1^s + a_1^c)) \\ \quad + (k_a + 2k_{ia}) \alpha_{i_2} - k_{ia} (\alpha_{i_2-1} + \alpha_{i_2+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

– pour le contact permanent entre les aubes  $i_1$  et  $i_2$  et le carter :

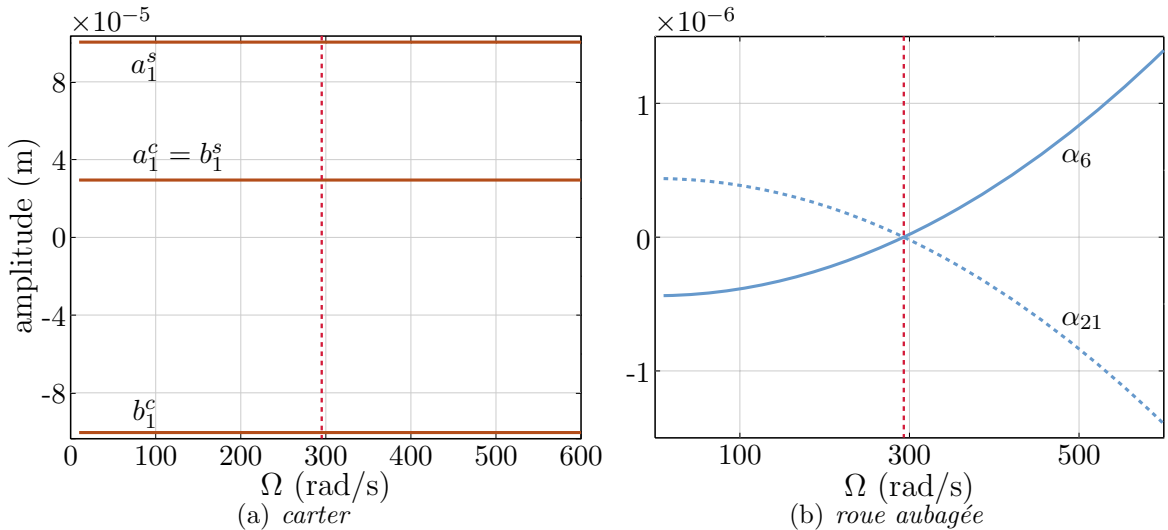
$$\begin{cases} 2(R_c - l_a) + s_1 (a_1^s - b_1^c - n_d \alpha_{i_1} (b_1^s + a_1^c)) \\ \quad + c_1 (b_1^s + a_1^c + n_d \alpha_{i_1} (a_1^s - b_1^c)) = 0 \\ 2(R_c - l_a) + s_2 (a_1^s - b_1^c - n_d \alpha_{i_2} (b_1^s + a_1^c)) \\ \quad + c_2 (b_1^s + a_1^c + n_d \alpha_{i_2} (a_1^s - b_1^c)) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

où les angles  $\alpha_{i_1-1}$ ,  $\alpha_{i_1+1}$ ,  $\alpha_{i_2-1}$  et  $\alpha_{i_2+1}$  sont calculés grâce à l'expression (4.3) :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{i_1-1} \\ \alpha_{i_1+1} \\ \alpha_{i_2-1} \\ \alpha_{i_2+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ra}^c(i_1-1) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_1-1) \\ \mathbf{p}_{ra}^c(i_1+1) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_1+1) \\ \mathbf{p}_{ra}^c(i_2-1) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_2-1) \\ \mathbf{p}_{ra}^c(i_2+1) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_2+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ra}^c(i_1) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_1) \\ \mathbf{p}_{ra}^c(i_2) & \mathbf{p}_{ra}^s(i_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_{i_1} \\ \alpha_{i_2} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

L'ensemble des nouvelles équations (4.21), (4.22) et (4.23) complété par (4.24) forme un système qui est résolu par un solveur numérique non-linéaire de type quasi-Newton (solveur de Matlab dans notre cas).

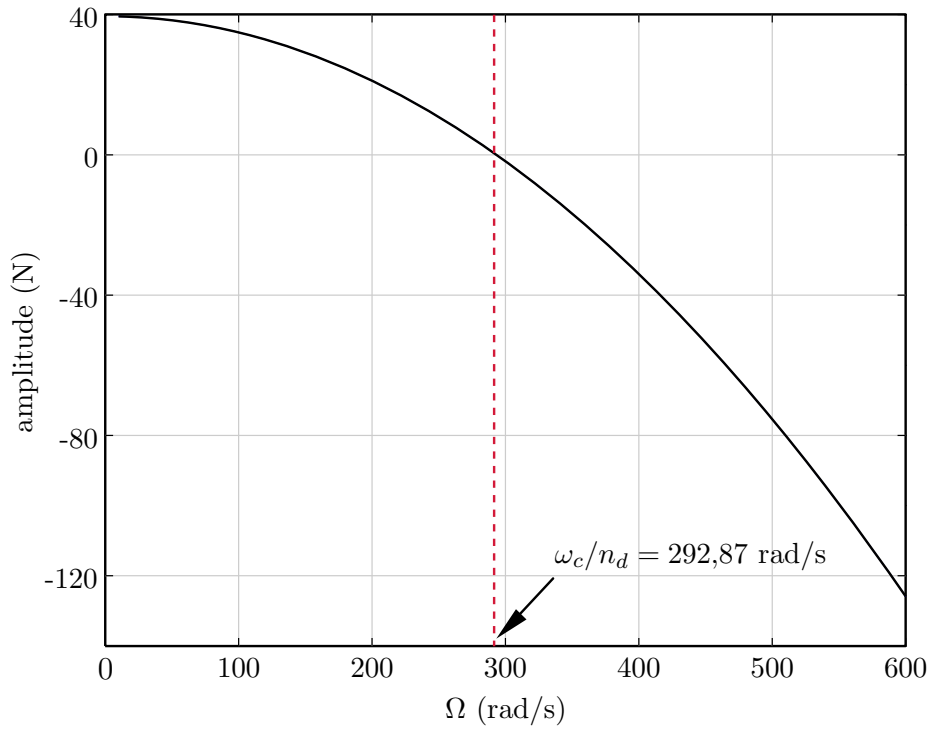
### 4.3.3 Résultats



**figure 4.11** – Évolution des amplitudes de déplacement des deux structures (harmoniques pour le carter et constantes pour la roue aubagée) en fonction de  $\Omega$  pour  $n_d = 3$

La figure 4.11(a) précise que les résultats sont tous dépendants de  $\Omega$  sauf ceux relatifs aux





**figure 4.12** – Évolution de l'amplitude des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_6$  et  $\lambda_{21}$  (ils sont égaux) en fonction de  $\Omega$  pour  $n_d = 3$

vibrations du carter. Ces dernières sont cohérentes avec l'apparition d'un mode tournant puisque les contributions modales sont en fait équivalentes au champ :

$$\begin{cases} u^c = a_1^c \cos(n_d \Omega t) + b_1^c \sin(n_d \Omega t) \\ u^s = -b_1^c \cos(n_d \Omega t) + a_1^c \sin(n_d \Omega t) \end{cases} \quad (4.25)$$

$\Omega = \omega_c/n_d$  semble être une vitesse de rotation particulière, confirmant ainsi les résultats issus de l'intégration temporelle. La modification des caractéristiques mécaniques du carter provoquant un déplacement de  $\omega_c$  dans le domaine fréquentiel pour  $n_d$  fixé montre que la vitesse du rotor pour laquelle le phénomène d'interaction apparaît est modifiée en conséquence. L'état de déformée statique acquis par la roue aubagée est en accord avec les forces de contact déduites de l'équation (4.17) :

$$\begin{cases} F_{21} = -n_d \lambda_{21} (u^s \cos(\beta_{21}) - u^c \sin(\beta_{21})) \\ F_6 = -n_d \lambda_6 (u^s \cos(\beta_6) - u^c \sin(\beta_6)) \end{cases} \quad (4.26)$$

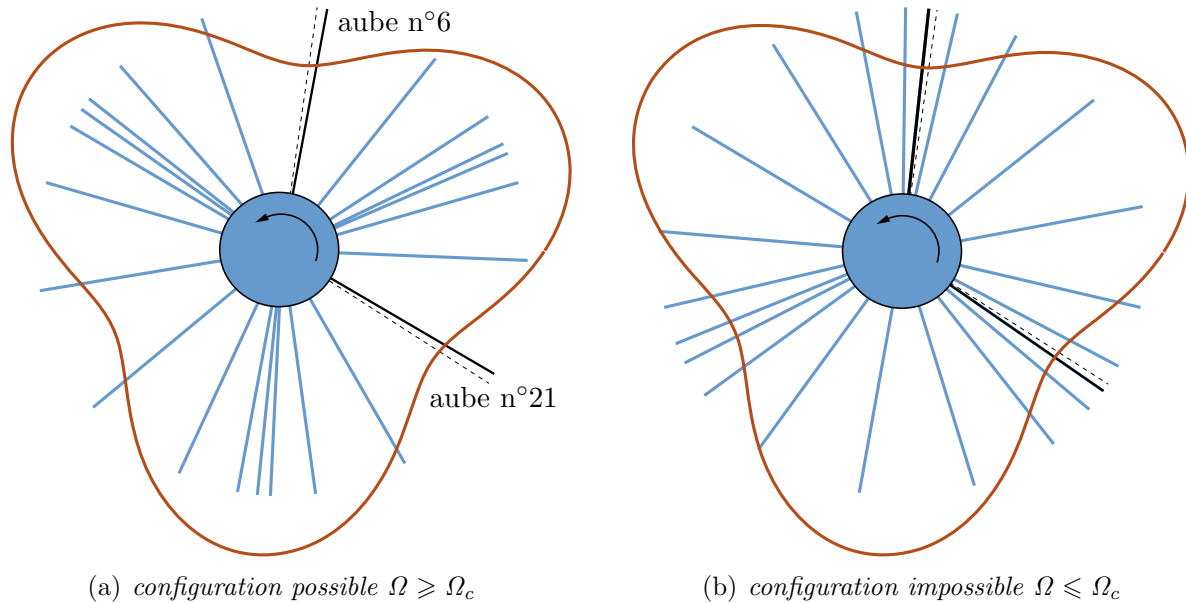
L'introduction de l'expression (4.25) dans l'équation (4.26) prouve que ces efforts sont constants sur une période du mouvement :

$$\begin{cases} F_{21} = -n_d (b_1^c \cos(n_d(\Phi_{21} + \alpha_{21})) - a_1^c \sin(n_d(\Phi_{21} + \alpha_{21}))) \\ F_6 = -n_d (b_1^c \cos(n_d(\Phi_6 + \alpha_6)) - a_1^c \sin(n_d(\Phi_6 + \alpha_6))) \end{cases} \quad (4.27)$$

Deux principaux états de l'ensemble rotor/stator ressortent sur les figures 4.11(b) et 4.12



et sont séparés par la vitesse de rotation critique  $\Omega_c = \omega_c/n_d$ . Une étude approfondie de la direction des forces de contact en jeu indique que pour  $\Omega_c \leq \omega_c/n_d$ , la configuration des structures est en contradiction avec les efforts de contact et n'a par conséquent pas de sens physique. Elle est effectivement comparable à une situation où c'est le mode



**figure 4.13** – Configurations amplifiées adoptées par les structures en fonction de  $\Omega$ . Les positions d'équilibre des aubes 6 et 21 sont mentionnées en pointillés.

tournant avance sur le carter qui provoque une rotation de la roue aubagée. Par contre, si  $\Omega_c \geq \omega_c/n_d$ , l'aube n°6 est poussée par le mode tournant et l'aube n°21 le pousse et c'est bien la rotation du moteur qui est à l'origine de son apparition, le tout étant en équilibre dynamique : les multiplicateurs  $\lambda_6$  et  $\lambda_{21}$  sont égaux parce qu'il n'y a pas d'amortissement structural dans le modèle et donc aucune dissipation d'énergie.

La méthode de l'équilibrage harmonique confirme que quelles que soient les conditions initiant le contact entre ces deux composants mécaniques, ce phénomène de « mouvement bloqué » existe uniquement si  $\Omega \geq \omega_c/n_d$ , en accord avec l'intégration temporelle.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a examiné les vitesses de rotation du moteur pour lesquelles les potentielles interactions modales deviennent dangereuses à partir d'un modèle planaire très simple de deux structures à symétrie cyclique. Les équations de la mécanique sont résolues dans les domaines temporel puis fréquentiel. Ces deux méthodes ont montré qu'un cas d'interaction, nommé mouvement bloqué à cause des caractéristiques propres à son comportement, peut survenir si la condition suivante, nécessaire mais pas suffisante, est satisfaite :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c}{n_d}$$



Cependant, ce premier modèle se révèle inapte à représenter les phénomènes physiques escomptés à cause de sa simplicité. Il souligne notamment les grosses lacunes dans la loi de contact sans frottement, laquelle interdit l'excitation d'un mode tournant rétrograde sur la roue aubagée. Les conclusions que l'on peut en tirer restent donc limitées et ne sont pas toujours en accord avec l'intuition théorique de coïncidence modale. C'est pour cette raison majeure que l'étude de ce modèle n'est pas approfondie. Il a cependant l'avantage de mettre en lumière ses manquements et permet d'envisager des améliorations pour un second modèle. Elles sont énumérées ici :

1. ajouter du frottement afin d'exciter le mode rétrograde sur la roue aubagée et le mode avance sur le carter grâce aux seules forces de contact ;
2. enrichir le champ de déplacement des deux structures pour que la remarque précédente puisse être prise en compte ;
3. coupler les déplacements tangentiels et normaux en sommet d'aube pour que les formes des modes propres des deux structures s'embrassent. Adopter des aubes à géométrie courbe semble être une solution intéressante.

Un deuxième modèle a été conçu de façon à mieux répondre aux exigences du phénomène étudié et en tenant compte des remarques précédentes. Il est présenté dans le chapitre suivant.





# 5

## Modèle planaire évolué

---

<b>5.1</b>	<b>Modélisation des structures</b>	<b>69</b>
5.1.1	Roue aubagée	70
5.1.2	Carter	72
<b>5.2</b>	<b>Procédure temporelle</b>	<b>75</b>
5.2.1	Gestion du contact	75
5.2.2	Algorithme général	77
5.2.3	Résultats	78
<b>5.3</b>	<b>Procédure fréquentielle</b>	<b>91</b>
5.3.1	Discussions préalables	91
5.3.2	Application à notre système	93
	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

---

Le modèle planaire très simple de roue aubagée et de carter examiné dans le chapitre précédent a permis de démontrer que certains phénomènes particuliers pouvaient survenir entre deux structures ayant des propriétés de symétrie cyclique. Cependant, sa simplicité n'a pas permis d'aboutir aux résultats escomptés au niveau de la prédiction d'une interaction modale comme définie dans le chapitre 1. Des conclusions, basées sur la compréhension du phénomène et sur les limitations de la modélisation appellent à des recommandations, énumérées en conclusion du chapitre 4 et qui sont mises en œuvre dans un nouveau modèle. Celui-ci est décrit dans le présent chapitre.

Dans un premier temps, les nouvelles structures ainsi que les choix qui motivent leurs caractéristiques mécaniques sont explicités. L'algorithme de contact dans le domaine temporel est adapté en conséquence et nécessairement plus riche : sa présentation fait l'objet d'une seconde partie. Les résultats sont ensuite donnés selon différents modes à diamètres et en fonction de la vitesse de rotation du moteur. La dernière partie propose une résolution multi-fréquentielle dont les bases théoriques ont été présentées dans le chapitre 3.

### 5.1 Modélisation des structures

La modélisation des structures tient compte de toutes les conclusions du chapitre précédent. Aboutir à un rotor constitué d'aubes à géométrie courbe et développer un carter pour lequel la gestion du contact est possible sur toute section dans les directions normale et tangentielle.



## 5.1.1 Roue aubagée

Une aube de géométrie droite ne peut pas répondre de façon satisfaisante aux recommandations énumérées en conclusion du chapitre précédent. Afin de coupler les degrés de liberté en flexion et en traction sous l'hypothèse des petites perturbations, la géométrie des aubes est rendue légèrement courbe. Cette courbure n'est pas artificielle et permet d'obtenir de manière simple un comportement de la structure proche des modèles 3D où tous les degrés de liberté sont couplés par la complexité de la géométrie. Dans ce modèle, la roue aubagée est constituée de  $N = 22$  aubes.

### 5.1.1.1 Formulation

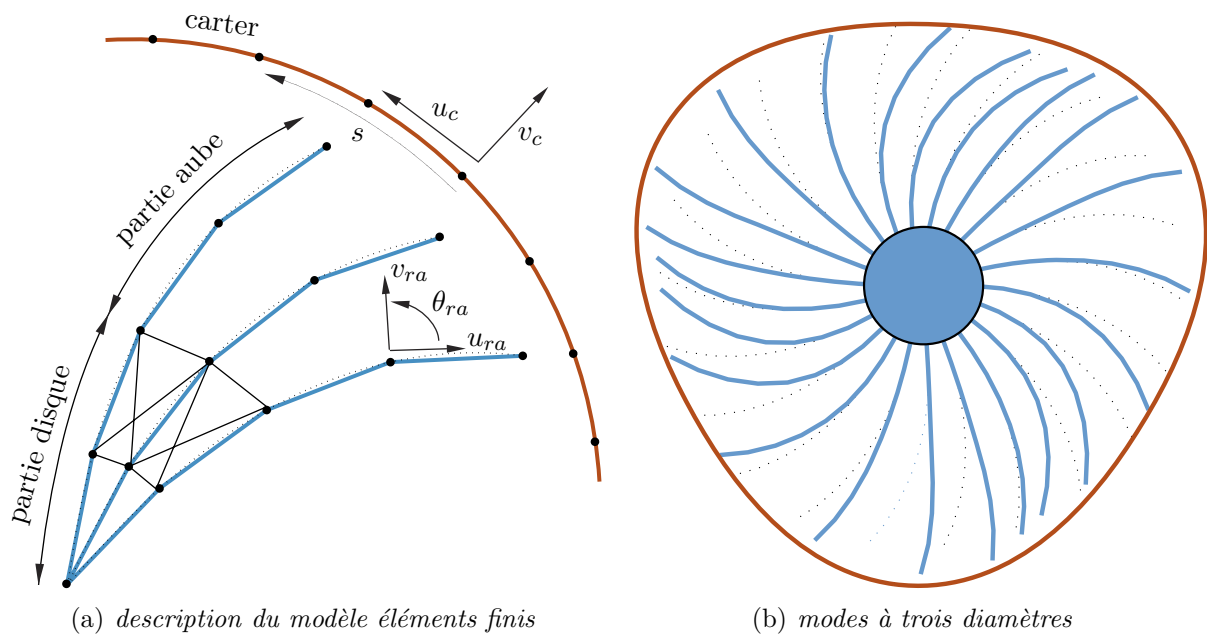


figure 5.1 – Caractéristiques de l'ensemble roue aubagée/carter

Les aubes améliorées sont discrétisées en éléments finis poutre droit de type Euler-Bernoulli. Il y a trois degrés de liberté par nœud,  $u_{ra}$  (traction),  $v_{ra}$  (flexion) et  $\theta_{ra}$  (rotation) et l'indice  $ra$  fait référence à la roue aubagée tout au long du chapitre. La figure 5.1(a), en plus d'illustrer les notations précédentes, montre un réseau de barres dont la fonction est d'assurer le vrai comportement d'un disque de roue aubagée. En effet, c'est par son intermédiaire que la symétrie cyclique de la structure intervient. Il est évident que tout autre type de connection ayant un sens mécanique et conservant la nature circulante des matrices masse et raideur est acceptable. En plus des caractéristiques mécaniques des aubes, le nombre d'éléments finis associés, le rayon du disque ainsi que la valeur des raideurs qui connectent les aubes sont au choix de l'utilisateur. La courbure des aubes est engendrée par une fonction de récurrence sur les angles  $a_j$  décrits sur la figure 5.2.

Dans la base locale de l'aube, les fonctions d'interpolation sont les fonctions de forme usuelles des éléments poutre-barre. Une fois les matrices masse et raideur élémentaires calculées, elles sont projetées dans la base globale associée à chaque aube: toutes ces



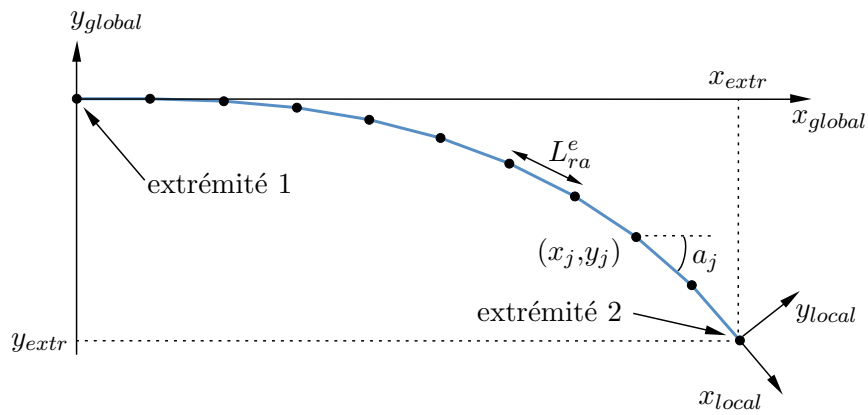


figure 5.2 – Caractéristiques de l'aube à géométrie courbe

matrices sont données dans l'annexe D. Le travail des forces internes du disque est ensuite ajouté de façon à ce que l'équilibre soit satisfait sur la structure globale.

Chaque aube est encastrée à l'extrémité 1 et le nœud positionné en extrémité 2 a pour coordonnées  $(x_{extr}, y_{extr})$  dans la base globale de l'aube.

tel-00011631, version 2 - 9 Nov 2006

### 5.1.1.2 Quelques modes propres

Les caractéristiques mécaniques utilisées lors des simulations sont récapitulées dans le tableau 5.1. Certaines valeurs, comme  $l_{ra}$  et  $l_c$ , peuvent sembler étranges puisque l'on

paramètres	roue aubagée	carter
module d'Young (MPa)	$E_{ra} = 2,1 \cdot 10^{11}$	$E_c = 7 \cdot 10^{11}$
masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho_{ra} = 7,8 \cdot 10^3$	$\rho_c = 2,8 \cdot 10^3$
hauteur (m)	$h_{ra} = 0,01$	$h_c = 0,01$
largeur (m)	$l_{ra} = 0,1$	$l_c = 0,1$
amortissement modal	$\xi_{ra} = 5 \cdot 10^{-3}$	$\xi_c = 3 \cdot 10^{-2}$
ddl	660	160

tableau 5.1 – Caractéristiques mécaniques du modèle complet

obtient pour notre étude des aubes d'une largeur équivalente à celle du carter. Cette remarque étant faite, on espère seulement que la condition évoquée sur la figure 1.3 et qui veut que les pulsations propres de la roue aubagée à l'arrêt soient inférieures à leurs homologues du carter pour un nombre de diamètres donné soit vérifiée.

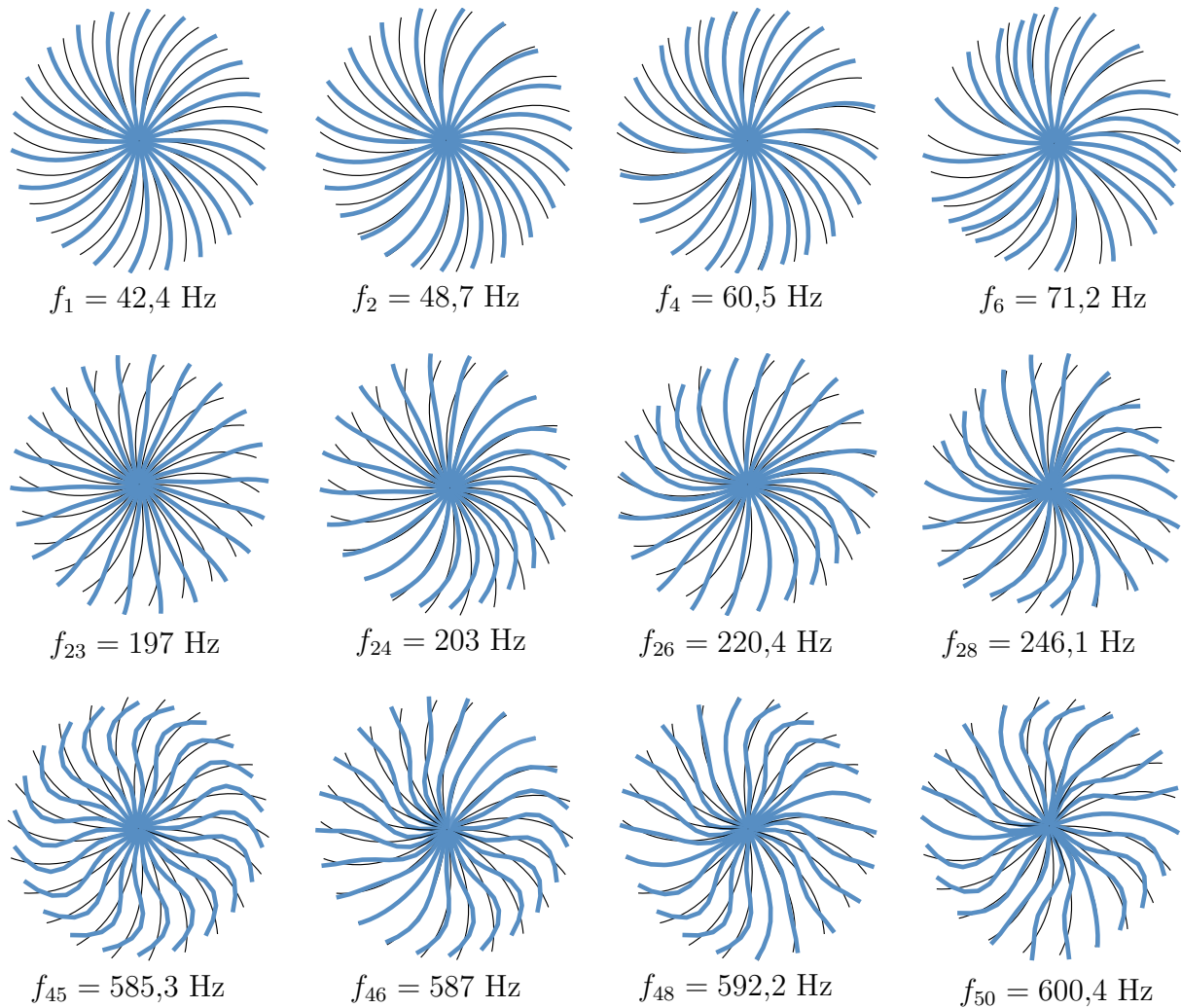
Une fois les matrices masse et raideur construites dans l'espace physique, elles sont diagonalisées afin d'obtenir les modes propres :

$$\mathbf{u}_{ra} = \mathbf{P}_{ra} \mathbf{u}_{ra}^m \quad (5.1)$$

où le vecteur  $\mathbf{u}_{ra}$  contient tous les degrés de liberté de la roue aubagée dans l'espace physique. La matrice des modes est notée  $\mathbf{P}_{ra}$  et contient les modes de la structure en



colonnes; les contributions modales associées sont rassemblées dans le vecteur  $\mathbf{u}_{ra}^m$ . La figure 5.3 montre clairement la notion d'harmonique associée à plusieurs types de mode d'aube sur cette modélisation planaire.



**figure 5.3** – Quelques modes propres de la roue aubagée avec de gauche à droite, de zéro à trois diamètres et de haut en bas, du premier mode de flexion au troisième. L'indice des fréquences indique le numéro du mode.

### 5.1.2 Carter

Afin d'éviter tout problème numérique lors de la gestion du contact, la construction d'un élément fondé sur la théorie des milieux curvilignes s'impose naturellement, à la fois à cause de la géométrie courbe du carter que du mouvement supposé circulaire de l'extrémité des aubes: le rayon apparent diffère selon la discrétisation utilisée et la normale à une structure cylindrique n'est pas définie de façon unique si la discrétisation, par exemple avec des éléments linéaires ou plans à l'équilibre, facétise la surface de contact. Toutes ces considérations sont résumées sur la figure 5.4(a).





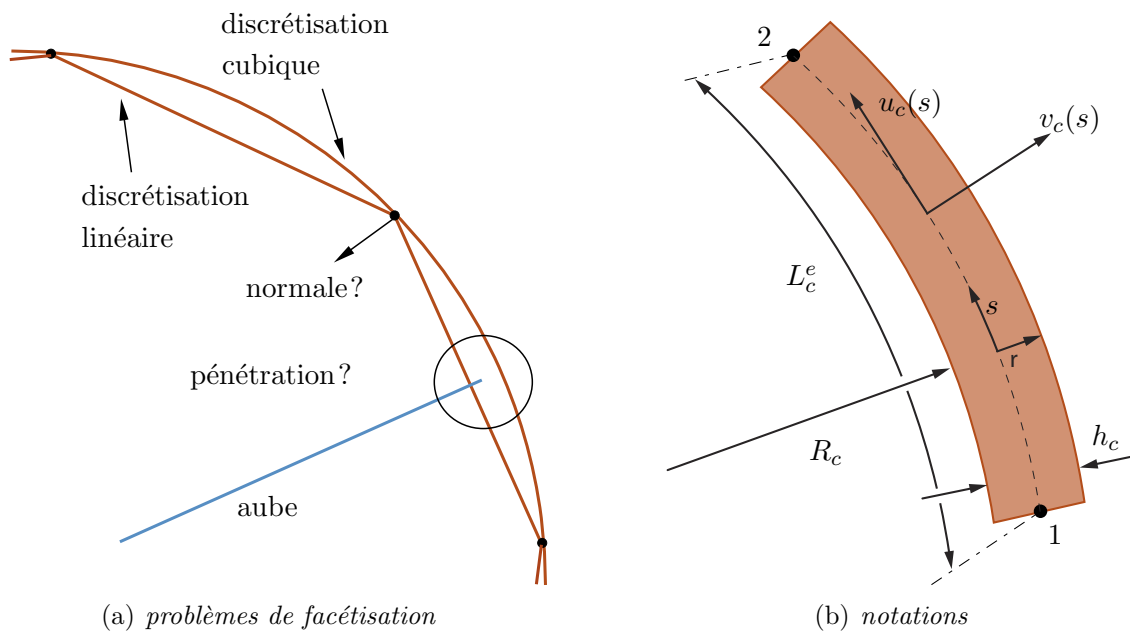


figure 5.4 – Élément poutre courbe constituant le carter

### 5.1.2.1 Formulation

Des compléments de ce qui est expliqué ci-dessous concernant la mécanique des milieux curvilignes sont disponibles, par exemple, dans [DUB 98] ou [PES 89]. Les notations pour la mise en équations sont données sur la figure 5.4(b). Nous adoptons les hypothèses simplificatrices de Bernoulli qui négligent les cisaillements sur l'axe neutre. Sous ces hypothèses, seules les déformations  $\varepsilon_{ss}$  travaillent :

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{R_c + r} (v_c + (R_c + r)u_{c,s} - R_c r v_{c,ss}) \quad (5.2)$$

où  $u_c$  et  $v_c$  représentent les déplacements dans le plan, respectivement selon les directions normale et perpendiculaire à une section droite de la poutre courbe. En considérant que  $r$  est très faible devant  $R_c$ , un développement limité au premier ordre en  $r$  de l'expression (5.2) conduit à :

$$\varepsilon_{ss} = \left( \frac{v_c}{R_c} + u_{c,s} \right) - \left( \frac{v_c}{R_c^2} + v_{c,ss} \right) r + O(r^2) \quad (5.3)$$

La matrice raideur élémentaire d'un élément fini poutre courbe se calcule alors en différenciant le travail de déformation dû à  $\varepsilon_{ss}$  sur le volume total de l'élément :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_c \varepsilon_{ss}^2 dV = \frac{E_c}{2} \int_{s_1}^{s_2} I_{cz} \left( \frac{v_c}{R_c^2} + v_{c,ss} \right)^2 + S_c \left( \frac{v_c}{R_c} + u_{c,s} \right)^2 ds \quad (5.4)$$

où  $E_c$  est le module d'Young du matériau constituant le carter.  $I_{cz}$  et  $S_c$  représentent respectivement le moment quadratique et la surface d'une section droite de la poutre courbe. Les effets inertiels de rotation d'une tranche infinitésimale de poutre sont négligés



et l'énergie cinétique d'un élément fini devient :

$$E_{cin} = \frac{\rho_c S_c}{2} \int_{s_1}^{s_2} (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2) ds \quad (5.5)$$

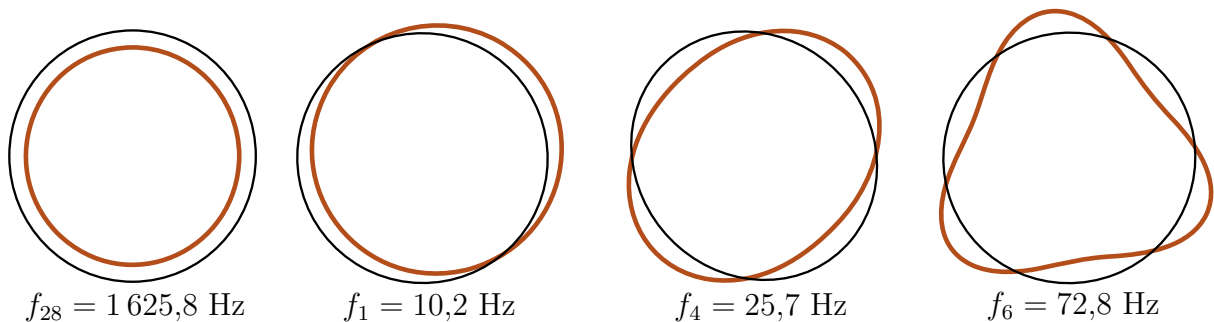
Plusieurs études ont rapporté que ce type de formulation curviligne était très sensible aux fonctions de forme choisies lors de la discrétisation du problème. Il est notamment connu qu'une discrétisation de  $u_c$  linéaire en  $s$  et de  $v_c$  cubique en  $s$  provoque un phénomène de blocage numérique, ce qui est confirmé par notre expérience. Nous avons donc retenu une discrétisation plus riche, cubique en  $s$  pour les deux variables de déplacement. Les variables nodales associées sont  $u_c$ ,  $u_{c,s}$ ,  $v_c$  et  $v_{c,s}$  : les matrices masse et raideur élémentaires de cet élément sont données en annexe D. Cette formulation admet un mode rigide de « rotation ». Il est éliminé en ajoutant artificiellement des raideurs sur les degrés de liberté en  $u_c$  du modèle.

### 5.1.2.2 Quelques modes propres

Le rayon du carter dépend de la valeur du jeu entre les deux structures. De façon générale, il s'écrit :

$$R_c = \sqrt{x_{extr}^2 + y_{extr}^2} + \epsilon \quad (5.6)$$

Dans cette étude et sur la base de modèles 3D, le paramètre  $\epsilon$  est pris égal à un centimètre.



**figure 5.5** – Quelques modes propres du carter avec de gauche à droite, de zéro à trois diamètres. L'indice des fréquences indique le numéro du mode.

Il peut être modifié en fonction des besoins. Comme pour la roue aubagée, les notations suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{P}_c \mathbf{u}_c^m \quad (5.7)$$

où le vecteur  $\mathbf{u}_c$  contient tous les degrés de liberté du carter dans l'espace physique. La matrice des modes est notée  $\mathbf{P}_c$  et contient les modes de la structure en colonnes ; les contributions modales associées sont rassemblées dans le vecteur  $\mathbf{u}_c^m$ .



## 5.2 Procédure temporelle

### 5.2.1 Gestion du contact

L'intérêt principal de ce nouveau modèle est de permettre, comme le montre la figure 5.1(b), un couplage de forme des deux structures impossible auparavant. En outre, ce modèle est beaucoup plus souple et réaliste d'un point de vue mécanique. Cependant, cette formulation plus riche complique la gestion du contact, qui doit être possible sur toute section du carter et de ce fait entre les nœuds du maillage.

Afin de faciliter la présentation de la stratégie adoptée pour appréhender cette difficulté, la figure 5.6 précise toutes les notations nécessaires à la mise en équations du traitement du contact entre l'extrémité d'une aube  $j$  et la section de l'élément  $i$  du carter qui lui fait face. Une portion de la roue aubagée est présentée en traits pointillés dans sa configuration non déformée et en traits pleins dans sa configuration prédite pendant le  $n^e$  pas de temps, de la même façon que pour le carter. L'angle  $\Phi_j$  donne accès à la position angulaire de de

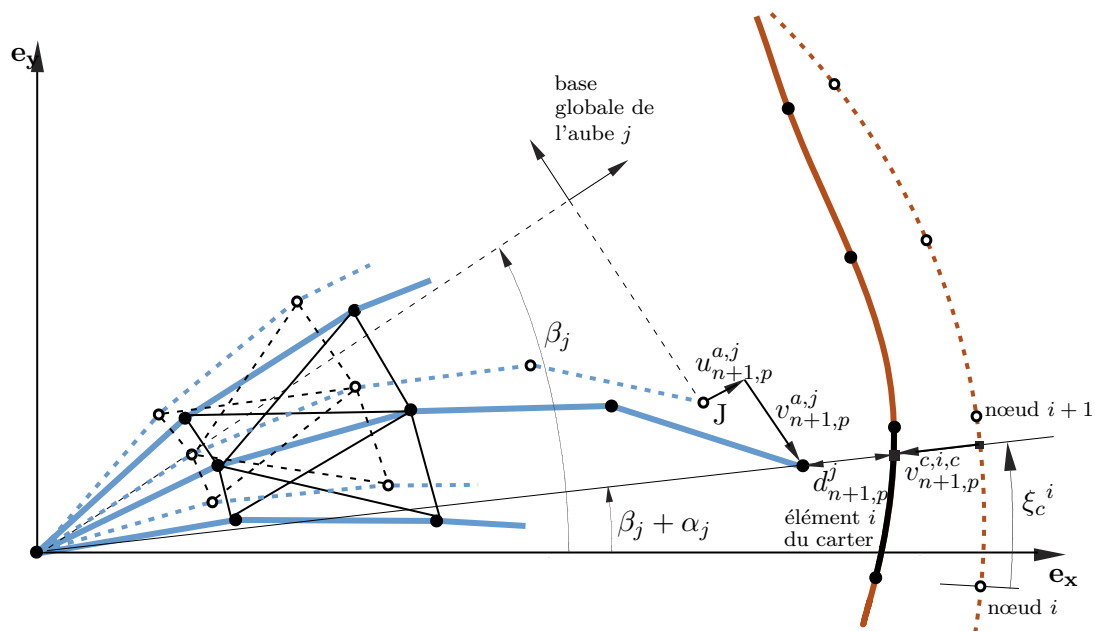


figure 5.6 – Configurations initiale et déformée d'une portion de l'ensemble rotor-stator

la base globale liée à la  $j^e$  aube par rapport à un repère total lié à la roue aubagée. La détection de l'élément du carter qui est potentiellement contacté par une aube est effectuée par l'intermédiaire de  $\beta_n^{j=1,N}$ , position angulaire de la base globale liée à l'aube  $j$  dans son mouvement de rotation à l'instant  $n$  par rapport au repère fixe  $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y$  :

$$\beta_n^j = \Omega t_n + \Phi^j \quad (5.8)$$

Même si cette méthode n'est pas générale, elle reste simple et rapide pour ce type de mouvement. L'angle  $\alpha_{n+1,p}^j$  est construit pour connaître la position prédite et indiquée  $p$ , prenant en compte la courbure initiale de l'aube ainsi que le déplacement de son extrémité,

le tout exprimé dans le repère  $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y$  :

$$\alpha_{n+1,p}^j = \beta_{n+1}^j + \tan^{-1} \left( \frac{y_{extr}^j + v_{ra,n+1,p}^j}{x_{extr}^j + u_{ra,n+1,p}^j} \right) \quad (5.9)$$

### 5.2.1.1 Contact normal

Dans l'équation (5.9),  $u_{ra,n+1,p}^j$  et  $v_{ra,n+1,p}^j$  indiquent les composantes du déplacement prédit au pas de temps  $n + 1$ , respectivement en traction et en flexion, de l'extrémité de l'aube  $j$  dans son propre repère. Puisque les positions angulaires initiales des nœuds du carter sont connues, le calcul de  $\alpha_{n+1,p}^j$  permet de trouver très rapidement  $i$ , le numéro de l'élément faisant face à l'extrémité de l'aube  $j$ . On déduit alors  $\xi_c^i$ , abscisse curviligne rapportée à la longueur  $L_c^e$  où se situe exactement l'extrémité de l'aube. Il s'agit ensuite de construire la matrice de contact  $\mathbf{C}_N$  en écrivant les distances inter-structures en fonction des déplacements nodaux, au moyen, au niveau du carter, des fonctions de forme de l'élément poutre courbe :

$$v_{c,n+1,p}^{i,c} = v_{c,n+1,p}^i(\xi_c^i) = \left[ N_1(\xi_c^i), N_2(\xi_c^i), N_3(\xi_c^i), N_4(\xi_c^i) \right] \left\{ \begin{array}{c} v_{c,n+1,p}^i \\ v_{c,s,n+1,p}^i \\ v_{c,n+1,p}^{i+1} \\ v_{c,s,n+1,p}^{i+1} \end{array} \right\}_{nodal} \quad (5.10)$$

L'exposant  $i$  de l'expression (5.10) est fonction de l'exposant  $j$  : ceci résume le fait que le numéro de l'élément du carter potentiellement impacté par l'aube  $j$  dépend de la position de cette aube. L'indice  $c$  indique que l'on a affaire au déplacement du carter alors que l'exposant  $c$  rapporte que l'élément en question est potentiellement en contact. À partir de cette équation, il est possible de calculer de manière rigoureuse, la distance qui sépare les deux structures :

$$d_{n+1,p}^j = R_c + v_{c,n+1,p}^{i,c} - \sqrt{(x_{extr}^j + u_{ra,n+1,p}^j)^2 + (y_{extr}^j + v_{ra,n+1,p}^j)^2} \quad (5.11)$$

Lors de l'étape de correction du mouvement, la distance de pénétration, si elle est négative, doit être annulée. L'expression non-linéaire (5.11) est donc linéarisée par rapport au pas de temps de prédiction pour former la matrice de contact  $\mathbf{C}_N$ . Il s'agit là d'une démarche classique puisque la taille du pas de temps du schéma explicite choisi est naturellement très faible. Implicitement donc, les déplacements de correction  $u_{ra,n+1,c}^j$ ,  $v_{ra,n+1,c}^j$  et  $v_{c,n+1,c}^{i,c}$  sont linéaires et nous avons retenu l'expression suivante de la distance aube-carter corrigée :

$$\begin{aligned} d_{n+1}^j &= d_{n+1,p}^j + v_{c,n+1,c}^{i,c} - \frac{\partial d_{ra}^j}{\partial u_{ra}^j} \Big|_{n+1,p} u_{ra,n+1,c}^j - \frac{\partial d_{ra}^j}{\partial v_{ra}^j} \Big|_{n+1,p} v_{ra,n+1,c}^j \\ d_{n+1}^j &= d_{n+1,p}^j + v_{c,n+1,c}^{i,c} - \frac{x_{extr}^j + u_{ra,n+1,p}^j}{d_{ra}^j} u_{ra,n+1,c}^j - \frac{y_{extr}^j + v_{ra,n+1,p}^j}{d_{ra}^j} v_{ra,n+1,c}^j \end{aligned} \quad (5.12)$$



avec

$$d_{ra}^j = \sqrt{(x_{extr}^j + u_{ra}^j)^2 + (y_{extr}^j + v_{ra}^j)^2} \quad (5.13)$$

Généralisée à l'ensemble et en reprenant l'écriture du vecteur déplacement définie au chapitre 2, les distances (5.12)<sub>3</sub> se mettent alors sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{C}_N^T \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{d}_{n+1,p} \quad (5.14)$$

Dans  $\mathbf{d}_{n+1,p}$ , seules les composantes où une pénétration a été détectée sont conservées pendant que les autres sont réinitialisées à zéro.

La matrice  $\mathbf{C}_N$  est alors de dimension  $2N \times (nddl_c + nddl_{ra})$  où  $nddl_c$  et  $nddl_{ra}$  représentent respectivement le nombre total des degrés de liberté du carter et de la roue aubagée. Chaque colonne de la matrice  $\mathbf{C}_N$  respective au carter est complétée par les fonctions  $[N_1(\xi_c^i), N_2(\xi_c^i), N_3(\xi_c^i), N_4(\xi_c^i)]$  situées au niveau des quatre degrés de liberté impliqués dans le calcul des distances pour chaque élément potentiellement impacté.

### 5.2.1.2 Contact tangentiel

Les conditions de fonctionnement du moteur nous autorisent à affirmer que le contact est glissant uniquement. Il n'est donc pas nécessaire de tester où se situent les efforts de contact par rapport au cône de Coulomb. Il suffit d'ajouter les efforts de frottement dans l'étape de correction comme expliqué dans la section 3.2.3.2. Pour ce cas précis, les efforts de contact dans la direction normale (respectivement tangentielle) ne travaillent pas exactement selon les déplacements  $u_{ra}^j$  (respectivement  $v_{ra}^j$ ) en sommet d'aube à cause de sa géométrie courbe et un ajustement est nécessaire dans la construction de la matrice  $\mathbf{C}_{NT}$ .

## 5.2.2 Algorithme général

La structure de la procédure est la suivante :

**prédiction :** les déplacements des deux structures sont calculés dans l'espace modal. Pour le calcul des pénétrations, ces déplacements sont projetés dans l'espace physique :

$$\mathbf{u}_{n+1,p} = \mathbf{P} \mathbf{u}_{n+1,p}^m \quad (5.15)$$

où la matrice  $\mathbf{P}$  rassemble les deux matrices  $\mathbf{P}_{ra}$  et  $\mathbf{P}_c$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}_{n+1,p}$  et  $\mathbf{u}_{n+1,p}^m$  contiennent les déplacements prédits des deux structures respectivement dans l'espace physique et et dans l'espace modal ;

**calcul des pénétrations :** la distance entre chaque aube et l'élément du carter qui lui fait face est déterminée d'après la procédure exposée dans le paragraphe précédent.

Les deux matrices de contact  $\mathbf{C}_N$  et  $\mathbf{C}_{NT}$  sont alors assemblées ;

**correction :** les multiplicateurs de Lagrange sont calculés de façon à annuler les pénétra-



tions détectées et à prendre en compte le frottement. En fin d'étape, les déplacements corrigés sont projetés dans l'espace modal.

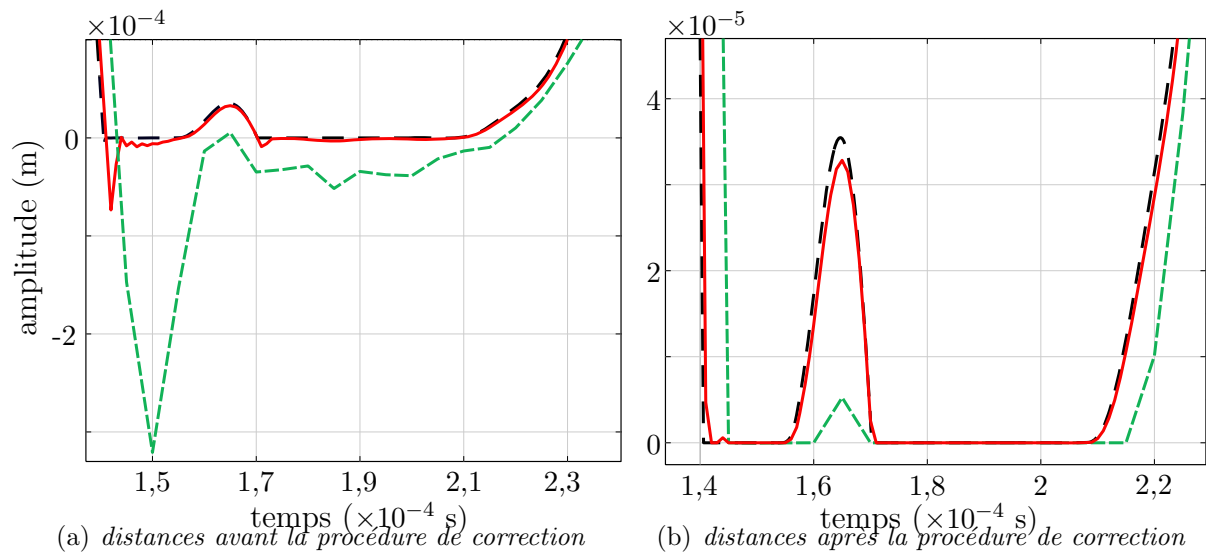
Jusqu'à l'instant final, le temps est incrémenté avant un retour à la première étape.

## 5.2.3 Résultats

### 5.2.3.1 Traitement du contact

Cette partie a pour but de démontrer la qualité de l'algorithme de gestion du contact quand les déplacements sont décrits dans l'espace physique. Dans l'algorithme, les matrices masse, amortissement et raideur sont donc écrites dans l'espace physique et l'alternance (5.15) entre les coordonnées physiques et modales n'a plus lieu d'être.

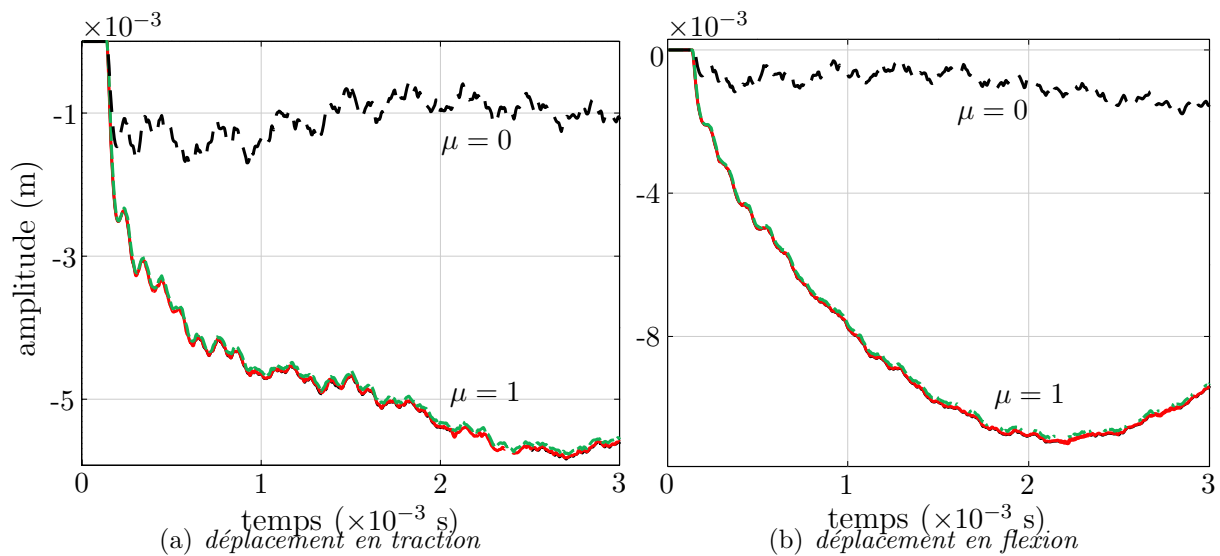
Lors de cette simulation, une force impulsionnelle de 100  $\mu\text{s}$  d'amplitude suffisante initie le contact entre une partie du carter et certaines aubes. Par la suite, le carter et la roue aubagée demeurent non chargés. On observe sur la figure 5.7 que la procédure de



**figure 5.7** – Procédure de correction avec  $\mu = 1$  et  $\Omega = 360 \text{ rad/s}$  pour trois pas de temps différents :  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  (—),  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$  (—) et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$  (—).

correction des déplacements dépend de la taille du pas de temps. Ce constat est cohérent puisqu'une étape de linéarisation des distances aubes-carter intervient dans la formulation. La correction est très bien prise en compte pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$  où la pénétration résiduelle après correction est de l'ordre de  $10^{-9} \text{ m}$ , distance à comparer au déplacement en extrémité d'aube de l'ordre du centimètre mais elle reste tout aussi satisfaisante pour un pas de temps cinquante fois plus grand. Pour autant, les calculs montrent que  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  est un pas de temps critique au dessus duquel les amplitudes divergent : pour un pas de temps égal ou inférieur, l'algorithme converge vers une solution identique. Cette dernière remarque est illustrée sur les figures 5.8 où la différence entre les trois résultats est pratiquement indiscernable.

Sur ces mêmes figures, le rôle du coefficient de frottement ainsi que le couplage géomé-

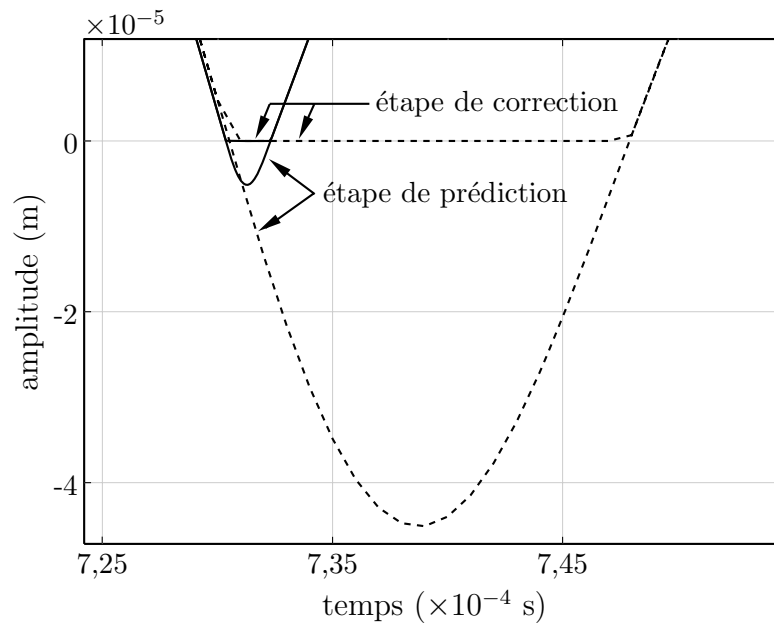


**figure 5.8** – Comparaison du déplacement en extrémité d’aube 1 pour trois pas de temps différents :  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  (—),  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$  (—) et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$  (—) avec  $\mu = 1$  et  $\Omega = 360 \text{ rad/s}$ . Une courbe est tracée pour  $\mu = 0$  afin d’illustrer le rôle du frottement.

trique sont flagrants : les résultats sont cohérents avec la physique du mouvement puisque l’amplitude en flexion augmente avec  $\mu$ .

### 5.2.3.2 Problème du pas de temps

Quand les équations sont résolues dans l’espace modal, la taille du pas de temps pose problème. En effet, même si le contact dans le domaine physique est bien pris en compte comme démontré dans le paragraphe précédent, l’alternance entre le domaine physique et le domaine modal contraint sévèrement le problème. Afin de mettre en évidence ce point précis, les deux structures sont discrétisées selon leurs deux modes à  $n_d$  diamètres. La procédure temporelle est celle détaillée dans la partie 5.2.2. Sur la figure 5.9, les déplacements après la procédure de correction diffèrent avec la taille du pas de temps alors qu’ils sont identiques dans l’espace physique (cf. figure 5.7(b)). Il semble que cette limite du modèle soit essentiellement due au problème de discrétisation globale dans les coordonnées modales déjà évoqué pour le premier modèle. De la même façon, il est nécessaire de faire un choix quasi-empirique sur la taille du pas de temps. Ce modèle étant plus lourd que le précédent, surtout pendant la phase de projection dans l’espace physique puis de retour dans l’espace modal, notre choix s’est porté sur  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$ , un pas plus petit devenant pratiquement prohibitif en temps de calcul : pour le pas de temps choisi, une simulation de 0,25 s sur un processeur de type Pentium cadencé à 2,66 MHz dure environ trois heures avec un code écrit en langage Matlab, code qui avait été préféré en début de thèse pour sa simplicité.



**figure 5.9** – Procédure de correction des déplacements pendant le gestion du premier contact entre les structures avec :  $\Delta t = 10^{-6}$  s (---) et  $\Delta t = 10^{-7}$  s (—). La prédiction des déplacements est effectuée dans l'espace modal.

### 5.2.3.3 Étude de l'interaction modale

Ce choix fait, les amplitudes de vibration sont étudiées en fonction de deux paramètres : la vitesse de rotation  $\Omega$  de la roue aubagée et le nombre de diamètres nodaux. L'amplitude de l'impulsion initiale appliquée sur le premier mode du carter doit, comme pour le premier modèle, dépasser une valeur seuil afin qu'un phénomène d'interaction apparaisse. Lors de la campagne de calculs menée avec  $n_d = 2, 3, 4$  et  $5$ , cette amplitude est calculée de façon à répondre à cette condition. Deux types de comportement bien distincts ont été détectés. Il est possible de regrouper d'un côté,  $n_d = 2$  et d'un autre,  $n_d = 3, 4$  et  $5$ .

#### premier cas d'étude : $n_d = 2$

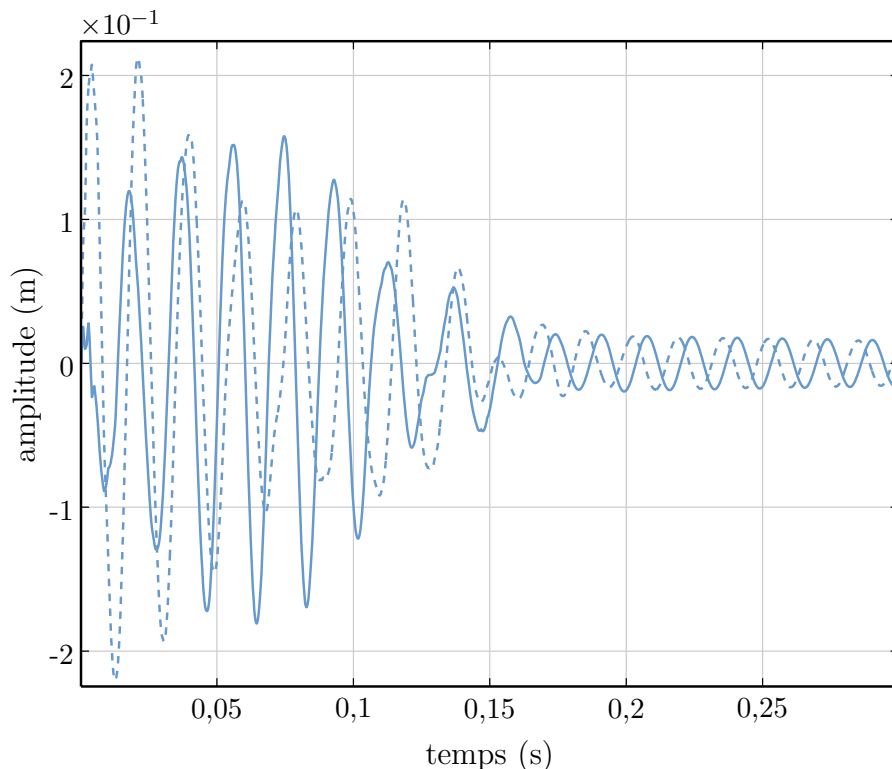
Le comportement des structures dans ce cas d'étude ressemble sensiblement à celui du premier modèle, d'ailleurs identique quel que soit le nombre de diamètres nodaux retenus. Il existe, en effet, une vitesse critique  $\Omega_c$  qui délimite deux fonctionnements bien différents :

- pour des vitesses de rotation inférieures à  $\Omega_c$ , le contact entre les deux entités est perdu après quelques impacts en début de simulation comme illustré sur la figure 5.12. Les figures 5.10 et 5.11 montrent que les amplitudes de vibration pendant ce régime diminuent à cause de l'amortissement structural jusqu'à disparaître ;
- pour des vitesses de rotation supérieures à  $\Omega_c$ , quelques aubes viennent en contact permanent avec le carter (cf. figure 5.15) occasionnant l'apparition d'un mode tournant avance au niveau de cette entité, reconnaissable grâce au déphasage entre les deux participations modales sur la figure 5.14. S'instaure alors un régime de type mouvement bloqué.



Cette vitesse critique reste difficile à déterminer mais il semble qu'elle n'engage pas la dynamique de la roue aubagée. Celle-ci admet une déformée statique (cf. figure 5.13) durant ce régime de mouvement bloqué et les amplitudes de déformation des deux structures restent bornées. Toutes ces similarités avec les résultats issus du premier modèle nous font supposer que la vitesse critique est donnée par une condition identique :

$$\Omega_c \simeq \frac{\omega_c}{n_d} \quad (5.16)$$



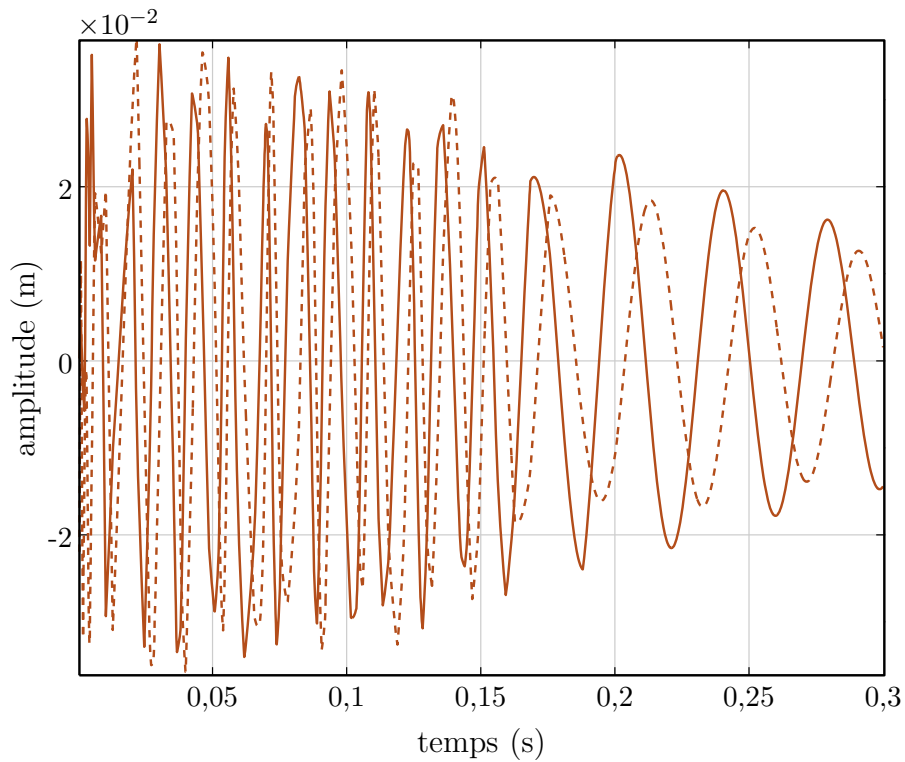
**figure 5.10** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (----) pour  $\Omega = 80 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 2$ . Après la perte de contact vers 0,2 s, les amplitudes diminuent lentement à cause de l'amortissement structural jusqu'à disparaître.

Cependant, lors de cette campagne de calculs, la limite basse obtenue pour  $\Omega_c$  est de l'ordre de 110 rad/s au lieu de 80 rad/s, solution de l'équation (5.16). Même si en référence à la figure 1.3 et par expérience, la valeur de cette vitesse critique diminue avec l'augmentation de l'amplitude de l'impulsion initiale dont elle dépend fortement, le jugement précédent reste flou et mérite d'être confirmé par une étude complémentaire.

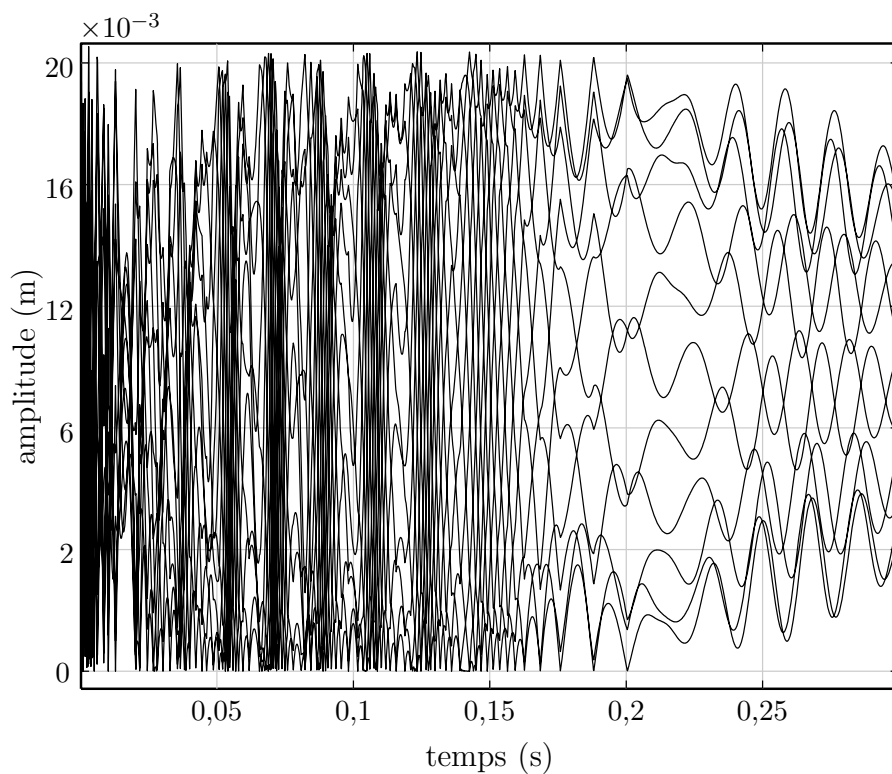
#### deuxième cas d'étude : $n_d = 4$

Ce cas est particulièrement intéressant parce qu'il met à jour un comportement global complètement nouveau par rapport à ce qui a déjà été présenté. Ce dernier est caractérisé par trois zones de fonctionnement du moteur bien distinctes, dont une zone de fonctionnement limite pour un domaine très restreint de vitesses de rotation critiques  $\Omega_c$  :

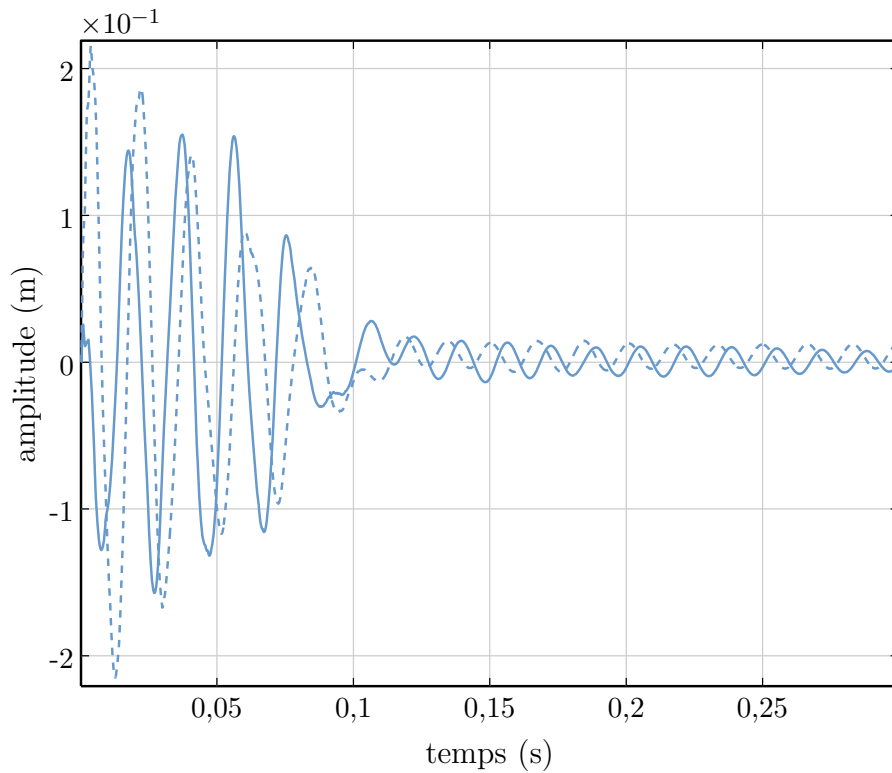
- comme pour le premier cas d'étude, si la vitesse du rotor est inférieure à  $\Omega_c$ , l'in-



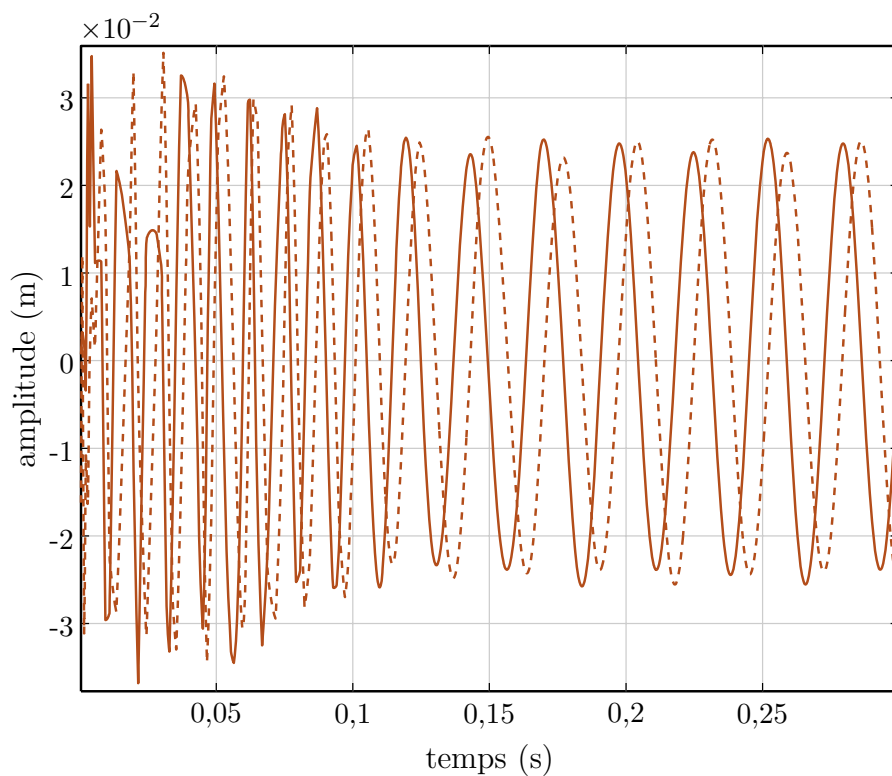
**figure 5.11** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (- - -) pour  $\Omega = 80$  rad/s et  $n_d = 2$ . Après la perte de contact vers 0,2 s, les amplitudes diminuent lentement à cause de l'amortissement structural jusqu'à disparaître.



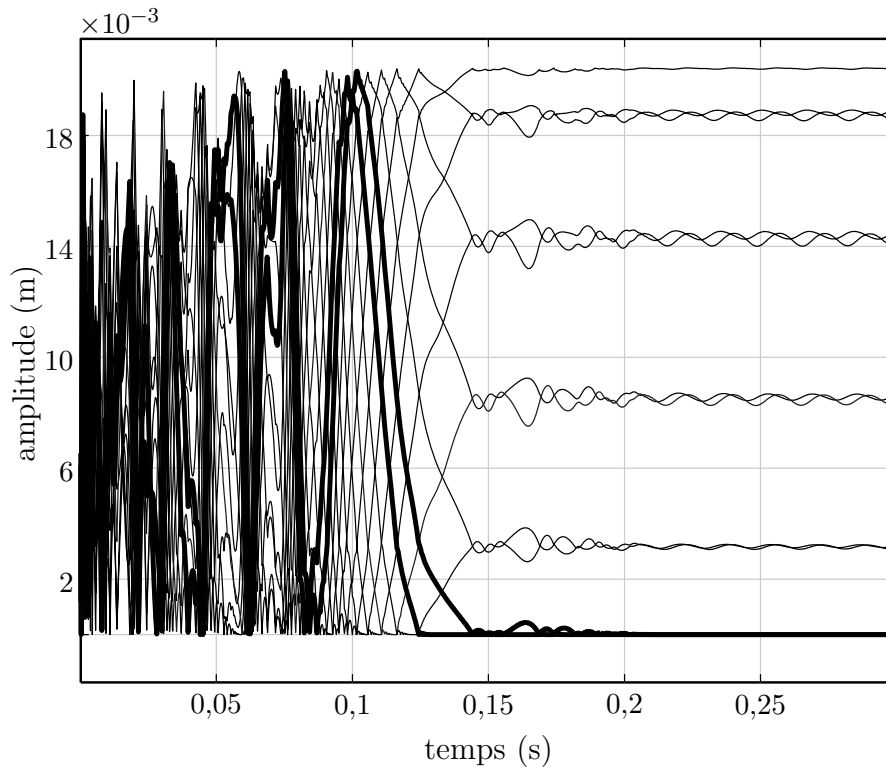
**figure 5.12** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes pour  $\Omega = 80$  rad/s et  $n_d = 2$ . Après quelques impacts initiaux le contact entre les deux structures est perdu définitivement vers 0,2 s.



**figure 5.13** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 110$  rad/s et  $n_d = 2$ . Vers 0,14 s, quatre aubes viennent en contact permanent avec le carter. La structure atteint par la suite un état statique non nul.



**figure 5.14** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 110$  rad/s et  $n_d = 2$ . Vers 0,14 s, un mode tournant avance, entraîné par quatre aubes en contact permanent avec la structure, apparaît au niveau du carter.



**figure 5.15** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes pour  $\Omega = 110 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 2$ . Après 0,14 s, un mode tournant avance, entraîné par quatre aubes en contact permanent avec la structure, apparaît au niveau du carter

teraction se limite à quelques impacts en début de simulation suivis d'une perte de contact définitive. Par la suite, l'amplitude des mouvements de chaque structure tend vers zéro à cause de l'amortissement structural (cf. figures 5.16 et 5.17) ;

- aux alentours de la vitesse critique, les deux structures acquièrent chacune un état vibratoire quasi-harmonique. Un mode tournant avance apparaît (cf. figure 5.19) au niveau du carter et son homologue rétrograde, au niveau de la roue aubagée (cf. figure 5.18). Leur vitesse respective répond, avec une légère différence, à la condition d'interaction établie dans le premier chapitre. Les transformées de Fourier des réponses rappelées sur les figures 5.23 et 5.24 confirment qu'il existe, pour chaque structure, une composante fréquentielle principale faiblement supérieure à la pulsation propre respective. Bien sûr la condition d'embrassement géométrique des formes modales, qui va de pair avec (1.12), est respectée. La comparaison entre les conditions d'interaction théorique et numérique associées au modèle prouve que l'outil est prédictif :

- valeur théorique :  $\Omega_c = 343,58 \text{ rad/s}$

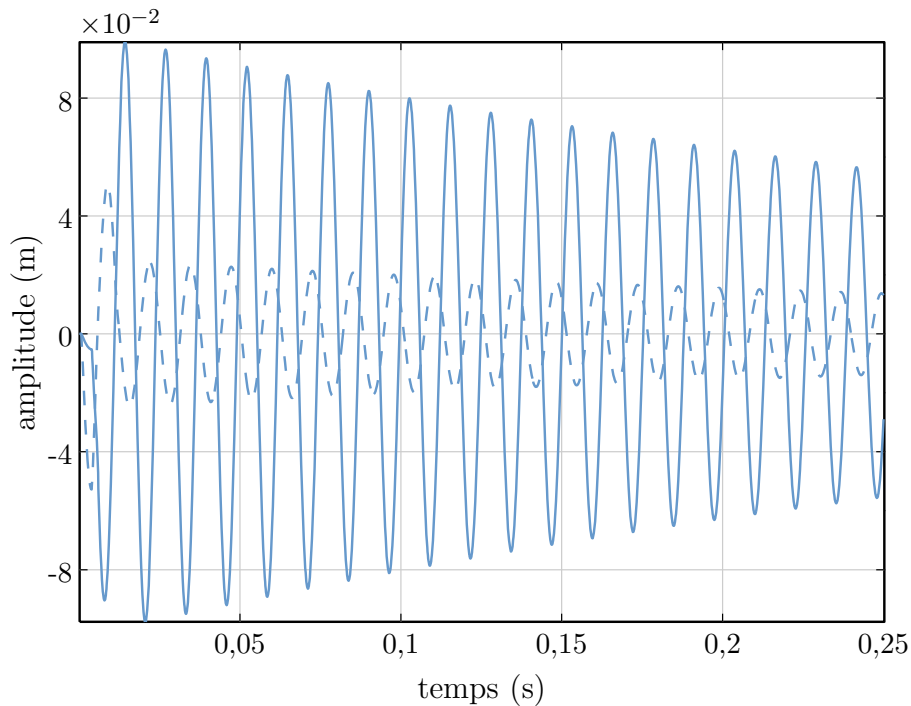
- valeur numérique :  $\Omega_c = 351,85 \text{ rad/s}$

Ceci équivaut à un écart en fréquence de l'ordre de 2%. Pendant cet état particulier d'interaction, les contacts structuraux sont intermittents ;

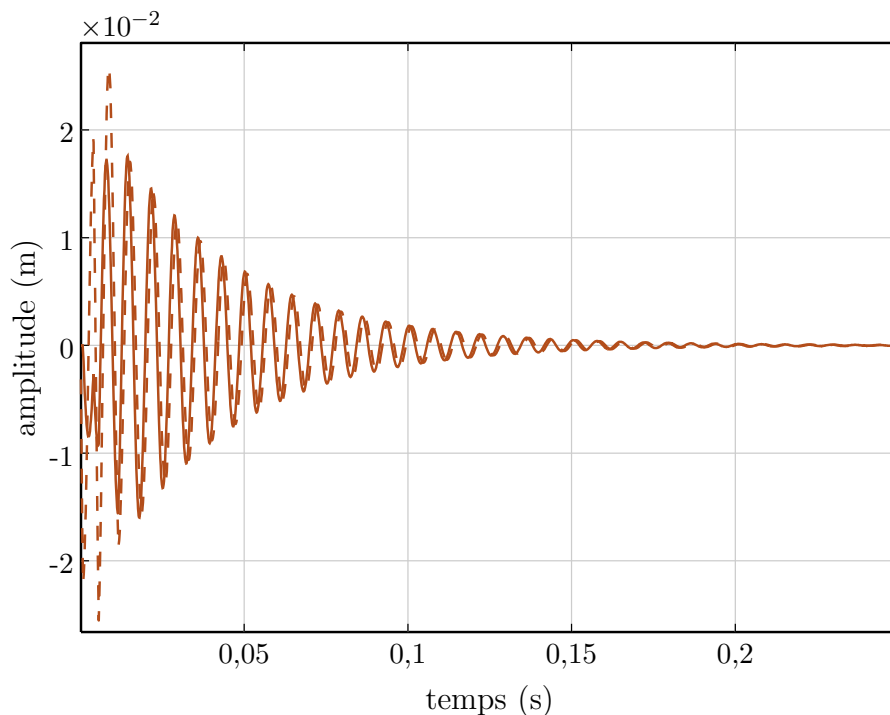
- sur les figures 5.22 et 5.21, c'est-à-dire pour des vitesses de rotation supérieures à  $\Omega_c$ , les amplitudes de vibration divergent au bout de quelques dixièmes de seconde, temps équivalent à quelques centaines de tours pour les vitesses de rotation consi-



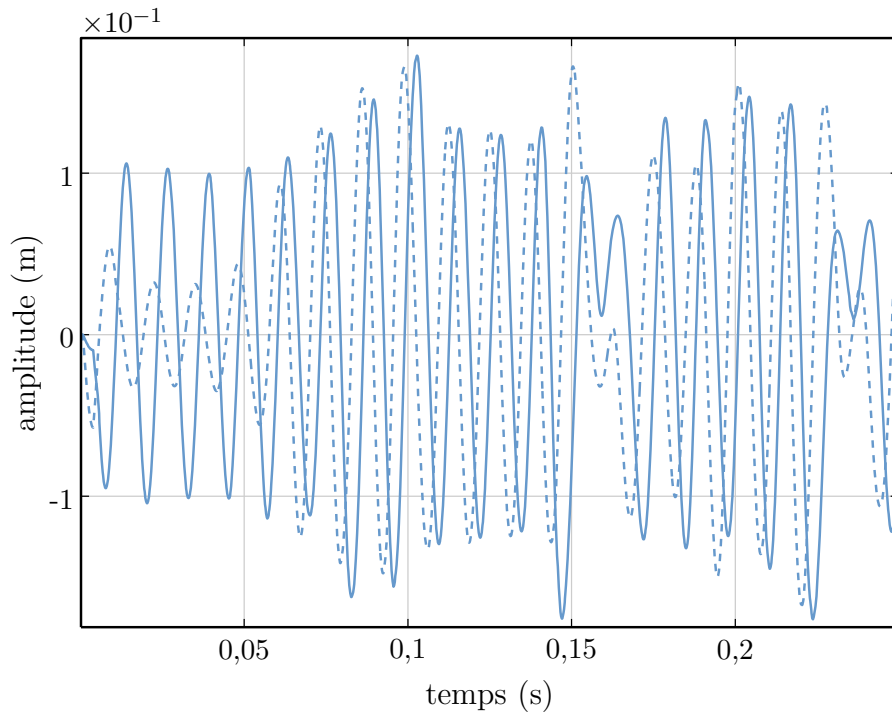
dérées. L'énergie apportée par le couple de rotation n'est plus dissipée de manière suffisante par l'amortissement structural et l'enchaînement des contacts successifs est trop rapide pour être compensé.



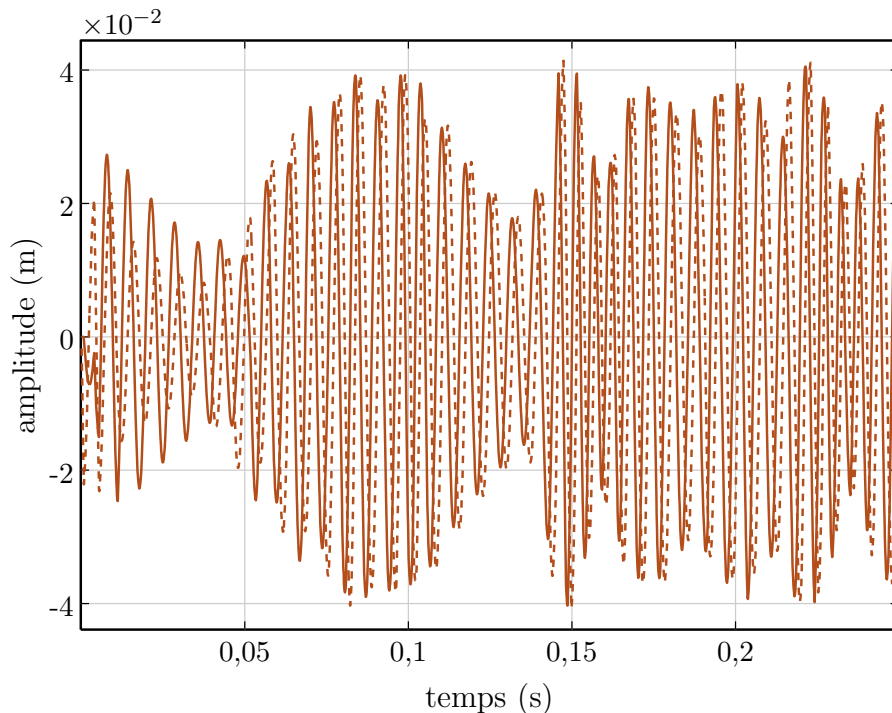
**figure 5.16** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (- - -) pour  $n_d = 4$  et  $\Omega = 350,2$  rad/s. Après quelques impacts, le contact est définitivement perdu et l'amortissement structural fait disparaître les vibrations.



**figure 5.17** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (- - -) pour  $\Omega = 350,2$  rad/s et  $n_d = 4$ . Après quelques impacts, le contact est définitivement perdu et l'amortissement structural fait disparaître les vibrations.



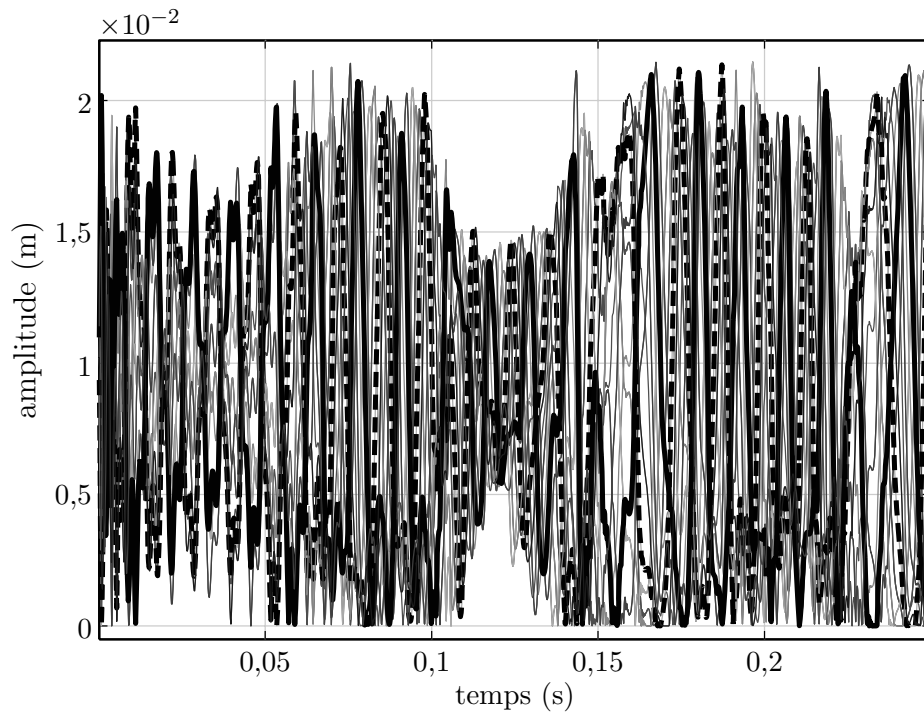
**figure 5.18** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (- - -) pour  $n_d = 4$  et  $\Omega = 351,4$  rad/s. Cette vitesse critique engendre un cas d'interaction modale limite pour lequel un mode tournant rétrograde apparaît au niveau de la structure.



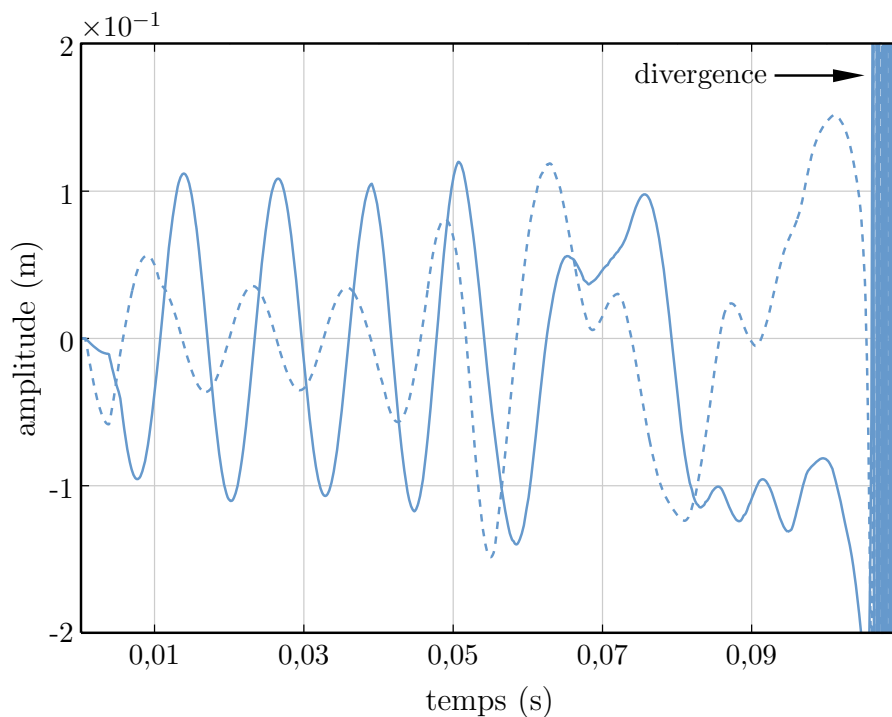
**figure 5.19** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (- - -) pour  $\Omega = 351,4$  rad/s et  $n_d = 4$ . Cette vitesse critique engendre un cas d'interaction modale limite pour lequel un mode tournant avance apparaît au niveau du carter.

#### 5.2.3.4 Commentaires et généralisation

Lorsqu'une interaction modale limite est atteinte, les contacts structuraux sont dits intermittents. Ce phénomène particulier reporté sur la figure 5.20 s'explique par l'enchaî-



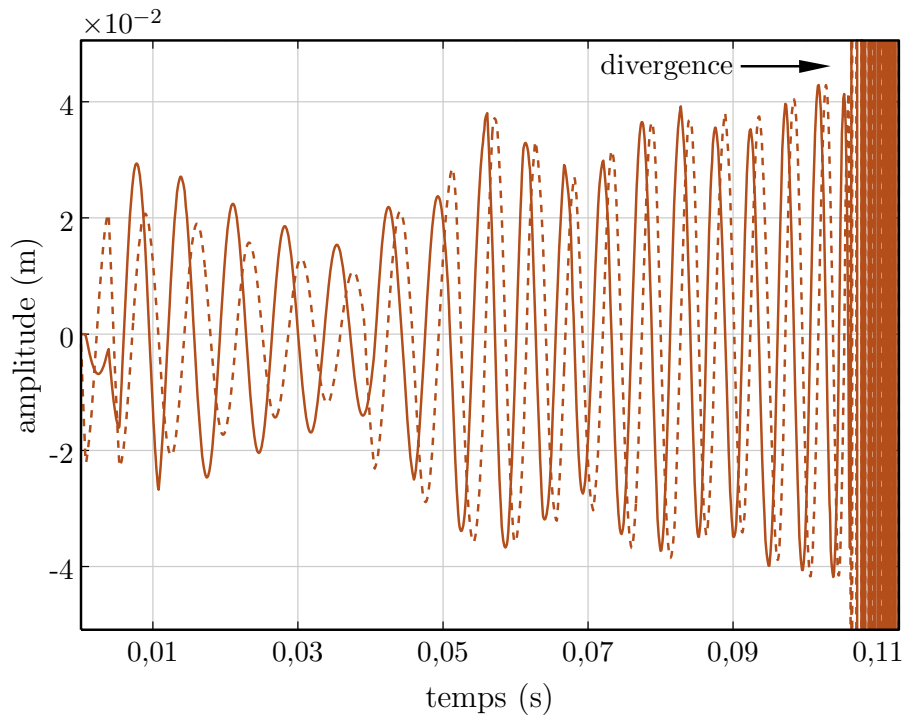
**figure 5.20** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes pour  $\Omega = 351,4$  rad/s et  $n_d = 4$ . Cette vitesse critique engendre un cas d'interaction modale limitée pendant lequel les contacts, décrits pour deux aubes (—) et (- -), sont intermittents.



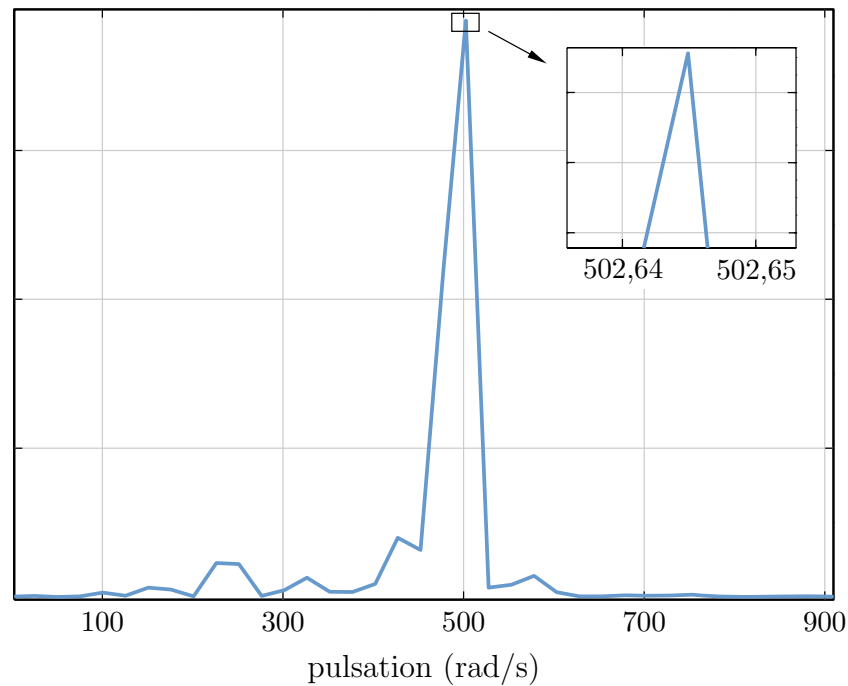
**figure 5.21** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (- - -) pour  $n_d = 4$  et  $\Omega = 351,8$  rad/s. Pour cette vitesse de rotation légèrement supérieure à la vitesse critique, il y a divergence des déplacements après quelques tours moteur.

nement des événements. En effet, à l'inverse du cas à deux diamètres, un mode tournant rétrograde survient au niveau de la roue aubagée. Les aubes viennent, les unes après les autres, frapper le carter avant d'être entraînées dans le mouvement du mode rétrograde





**figure 5.22** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 351,8 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 4$ . Pour cette vitesse de rotation légèrement supérieure à la vitesse critique, il y a divergence des déplacements après quelques tours moteur.

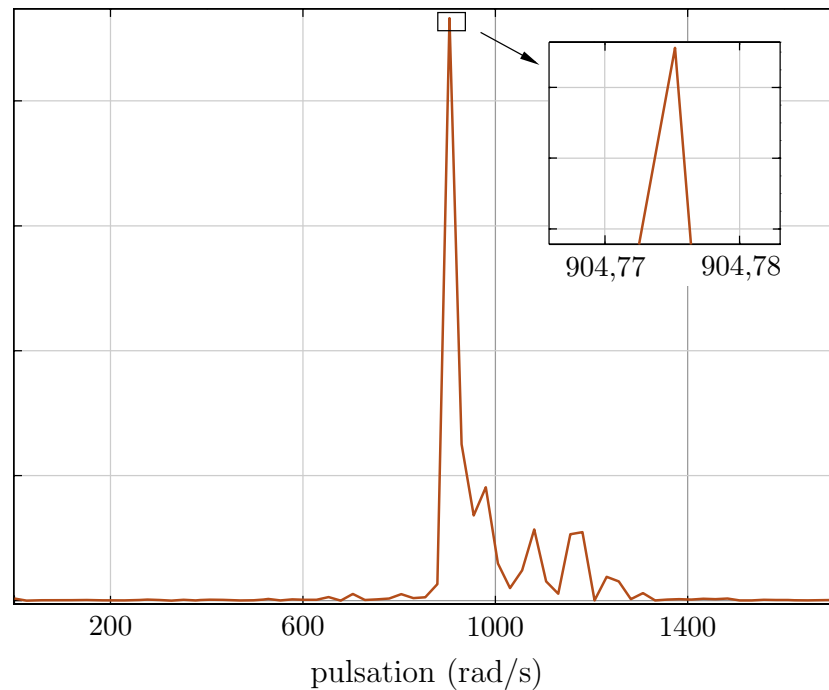


**figure 5.23** – Contenu fréquentiel de la réponse de la roue aubagée pendant le cas limite d'interaction modale.

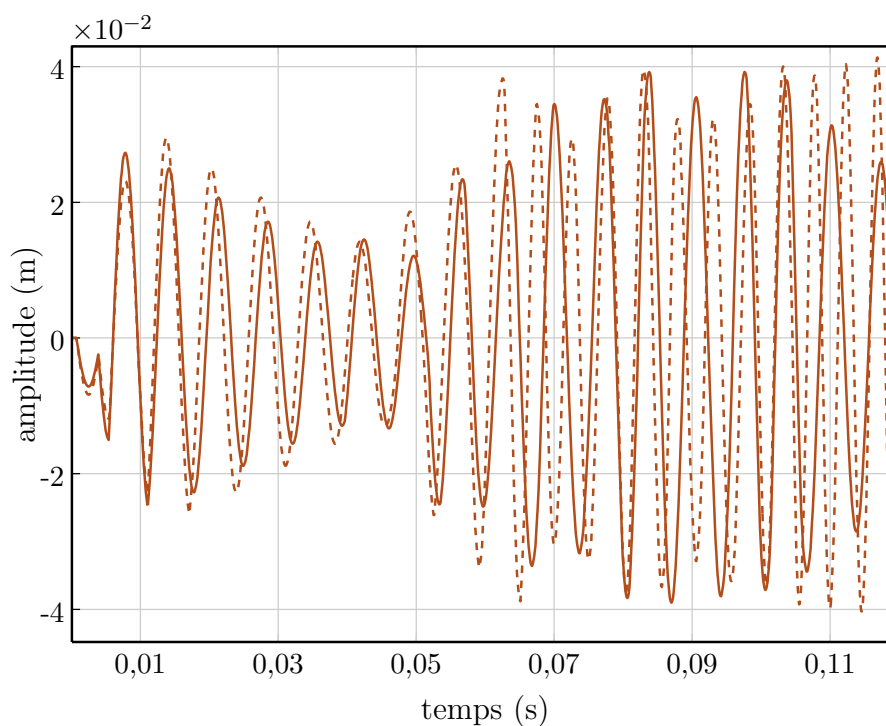
jusqu'à retrouver une nouvelle position de contact. Tout ceci est résumé par la vue stroboscopique d'une interaction modale parfaite sur la figure 5.28 où la séquence « perte de contact-contact » entre les aubes (voir l'exemple de l'aube noire) et le carter se répète indéfiniment.







**figure 5.24** – Contenu fréquentiel de la réponse du carter pendant le cas limite d'interaction modale.

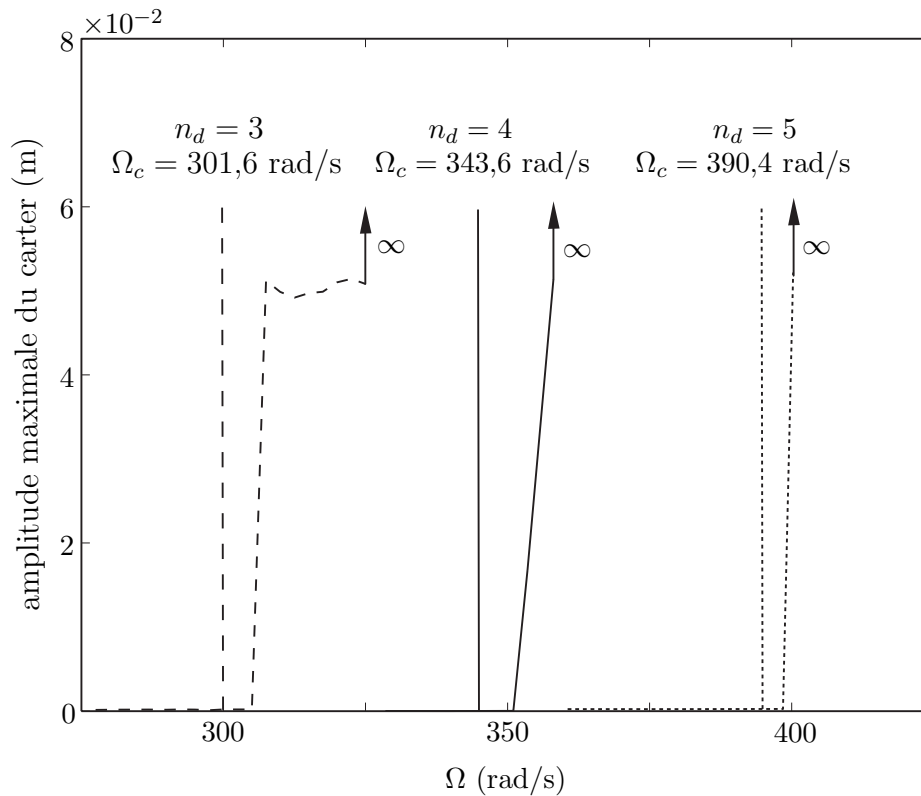


**figure 5.25** – Contribution du premier mode du carter lors d'un cas d'interaction modale limite pour deux pas de temps différents :  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$  (—) et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$  (---).

Toutes les vitesses de rotation pour lesquelles une interaction est prédite sont récapitulées sur la figure 5.26 en faisant cas à part de  $n_d = 2$ . En l'état actuel des choses, le phénomène d'interaction modale n'est pas compris puisque plusieurs questions restent en suspend :

- pourquoi le comportement diffère-t-il en fonction du nombre de diamètres?





**figure 5.26** – Vitesses critiques de rotation en fonction de  $n_d$  avec, à gauche, la valeur théorique et à droite, la valeur numérique. Dans le cas numérique, les amplitudes de vibrations du carter sont prises à  $t = 0,25$  s.

- pourquoi la vitesse critique numérique d’interaction est-elle légèrement supérieure à la vitesse critique théorique?
- quel est alors le rôle exact joué par l’amortissement structural?
- pourquoi les amplitudes de vibrations divergent-elles si la vitesse de rotation est supérieure à la vitesse critique, phénomène non prédit par la théorie?
- serait-il possible de retrouver ces interactions en enrichissant le champ de déplacement des deux entités mécaniques?

Toutefois, la figure 5.26 démontre la qualité prédictive de l’algorithme et du modèle et promet des perspectives multiples pour une meilleure compréhension du phénomène. Cependant une limitation importante à notre problème subsiste à cause de la très forte sensibilité du schéma d’intégration temporelle à la taille du pas de temps. Néanmoins, il est possible de démontrer que le pas de temps choisi  $\Delta t = 10^{-6}$  s est suffisant et représente un bon compromis. À cet effet, un calcul a été effectué pour lequel la condition d’interaction limite est respectée, cas le plus pénalisant en termes de gestion du contact de par son caractère intermittent, avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-7}$  s. Les résultats sont présentés sur la figure 5.25. Même si quantitativement les courbes ne se superposent pas, qualitativement, il est tout à fait possible de défendre notre choix pour la taille du pas de temps et de donner du crédit aux résultats présentés ci-dessus. On constate cependant une légère différence dans le contenu fréquentiel des deux signaux, celui respectif de  $\Delta t = 10^{-7}$  s étant plus rapide.

Pour conclure, un régime limite, quasi-harmonique et multi-fréquentiel, apparaît pour certaines vitesses de rotation et il semble intéressant d'essayer de le détecter par une procédure fréquentielle adaptée afin de clarifier l'analyse du phénomène.

## 5.3 Procédure fréquentielle

L'intégration temporelle atteste, sous certaines conditions portant notamment sur la vitesse de rotation du moteur, qu'un échange d'énergie s'instaure entre les deux structures même quand toute sollicitation extérieure a disparu. Dans l'optique de s'affranchir, à la fois de l'influence des conditions initiales et de la taille du pas de temps inhérentes à une résolution temporelle et particulièrement problématiques dans le cas présent, nous proposons une résolution multi-fréquentielle pour une étude intrinsèque de ce type de comportement.

### 5.3.1 Discussions préalables

#### 5.3.1.1 Système mécanique libre

Le fait qu'une interaction persiste précisément quand toute sollicitation extérieure a disparu justifie le caractère homogène des équations différentielles régissant le comportement du carter et de la roue aubagée. Toutefois, cette remarque prête à discussion puisqu'une source d'énergie existe bel et bien dans notre étude : c'est le couple imposé au rotor qui ressort de manière implicite dans l'ensemble des équations par l'intermédiaire du terme de vitesse de rotation durant l'étape de la gestion du contact. On notera seulement que, sans autre excitation extérieure des structures, la solution nulle (aucune vibration des structures) est solution de notre problème pour une vitesse de rotation non nulle. Toutes ces remarques prises en compte, la méthode multi-fréquentielle fondée sur la procédure de l'équilibrage harmonique généralisée évoquée lors du chapitre 3 doit être légèrement modifiée. Par substitution du vecteur des forces extérieures par le vecteur nul, l'équation (3.30) se transforme en :

$$\sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \left( \sum_{n=1}^{M_s} \omega_n \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau_m \partial \tau_n} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau_m} \right) + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}^{nl} \left( \mathbf{u}, \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau_m} \right) = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Après discrétisation fréquentielle et par abus de langage, on obtient l'équivalent d'un problème aux valeurs propres non-linéaire. Exprimé tel quel, la solution nulle est solution du problème mais n'est pas d'un grand intérêt. Par analogie avec les systèmes linéaires, afin de trouver une solution non nulle, il suffit d'inclure les pulsations aux inconnues du problème. Malheureusement, le système d'équations devient de ce fait indéterminé puisqu'il contient plus d'inconnues que d'équations. La démarche habituelle consiste à considérer libre, la phase du mouvement associé à une fréquence inconnue. En termes simples, comme aucune phase n'est imposée par une quelconque excitation harmonique extérieure, la solution n'a pas d'origine temporelle préférentielle et il est donc possible de la choisir. Mathématiquement, une redondance entre deux équations survient et doit être éliminée.



La plupart du temps, l'amplitude du premier harmonique de la fréquence inconnue en sinus du mouvement est fixé. Ceci revient à modifier, dans notre cas, l'équation (3.40) par :

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{a} + \mathbf{f}_a^{\text{nl}}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) \quad (5.18)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}^T \left[ \sum_{m=1}^{M_s} \omega_m \left( \sum_{n=1}^{M_s} \omega_n \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \tau_m \partial \tau_n} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau_m} \right) + \mathbf{K} \mathbf{Y} \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{M_s}$$

$$\mathbf{f}_a^{\text{nl}}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{M_s}$$

Le vecteur  $\mathbf{a}$  est alors diminué d'autant de composantes en première harmonique en sinus qu'il y a de fréquences sans dénominateur commun dans le système. Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  contient toutes les fréquences du système qui doivent être déterminées lors de la recherche d'une solution non nulle. Dans la notation précédente, ces fréquences apparaissent en multiplication des matrices masse et amortissement.

### 5.3.1.2 Compléments sur la notion d'hyper-temps

Une fois les équations de la mécanique projetées dans l'espace multi-fréquentiel, la notion de temps « vrai » a disparu. Quand le domaine fréquentiel est réduit à une dimension, il suffit de se rapporter à une période pour le retrouver. Dans le cas où l'espace fréquentiel dépasse une dimension, il est intéressant d'essayer de visualiser le temps vrai sur ce domaine. En s'aidant des relations entre le temps « vrai » et les différentes composantes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de l'hyper-temps restreint à deux dimensions par simplicité, il vient :

$$\begin{cases} \tau_1 = \omega_1 t \\ \tau_2 = \omega_2 t \end{cases} \Rightarrow \omega_1 \tau_2 = \omega_2 \tau_1 \quad (5.19)$$

La figure 5.27 illustre le passage du temps dans l'hyper-temps. Son origine est représenté par le point (0,0) et il suit la pente donnée par l'équation  $\omega_1 \tau_2 = \omega_2 \tau_1$ . Il traverse les deux périodes respectives des deux fréquences. Il y a, en fait, une bijection entre le carré  $(\tau_1, \tau_2) \in [0, 2\pi]^2$  et la demi-droite  $t \in [0, +\infty[$ . Cela signifie qu'à tout point de l'ensemble  $[0, 2\pi]^2$ , il est possible d'associer de manière unique un point de  $[0, +\infty[$  et inversement même si le passage d'un espace à l'autre n'est pas simple en pratique. On s'aperçoit par construction, que deux points infiniment proches dans  $[0, 2\pi]^2$  peuvent correspondre à des instants très éloignés sur l'échelle du temps vrai. Aucune méthode d'approximation ne peut donc être employée pour retrouver un instant  $t$  à partir de sa position dans  $(\tau_1, \tau_2)$ . La seule méthode rigoureuse réside dans l'adimensionnalisation, au sens de l'équation (5.19), de tous les termes explicitement multiplicateurs du temps  $t$  dans les équations puis dans l'utilisation de transformées de Fourier rapides à  $n$  dimensions ( $n$  étant alors le nombre de fréquences sans dénominateur commun détectées), directe et inverse. Malheureusement,

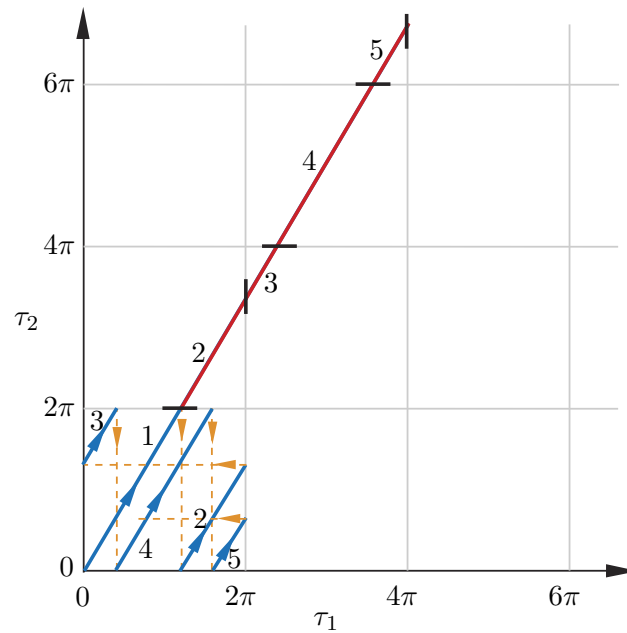


figure 5.27 – Passage du temps dans l'espace hyper-temps

ces opérations coûtent très cher en temps de calcul et cette méthode fréquentielle, habituellement formulée en une dimension et puissante pour sa rapidité, peut rapidement s'avérer très lourde et inutilisable.

## 5.3.2 Application à notre système

### 5.3.2.1 Présentation du cas d'étude

L'analyse précise de notre système réduit dans l'espace modal montre que le temps apparaît au niveau de trois termes bien distincts : le terme de vibration de la roue aubagée, celui relatif au carter et le terme  $\Omega t$  présent lors de la détection du contact (cf. équation (5.8)). Notre système est donc composé de trois pulsations *a priori* sans dénominateur commun,  $\Omega$ ,  $\omega_c$  et  $\omega_{ra}$ . Afin de réduire les temps de calcul, l'équation de coïncidence modale est retenue :

$$\omega_{ra} = n_d \Omega - \omega_c \quad (5.20)$$

et nous nous retrouvons alors dans un espace fréquentiel à deux dimensions. La figure 5.28 dépeint le comportement de notre système dans cet espace : un comportement harmonique de pulsation  $\omega_c$  est imposé au carter et de pulsation  $\omega_{ra}$  à la roue aubagée, déterminée par la condition (5.20). Le petit carré noir ■ suit artificiellement la propagation du mode tournant avance sur le carter alors que l'aube noire renseigne sur la progression du mode tournant rétrograde sur la roue aubagée. On y remarque que quand le mode avance du carter a effectué un tour complet (une durée de  $3T_c$  s'est alors écoulée), l'aube noire n'est pas revenue à sa position initiale, ce qui résume le caractère apériodique de l'ensemble. Tous les éléments nécessaires à la résolution du problème d'interaction dans le domaine



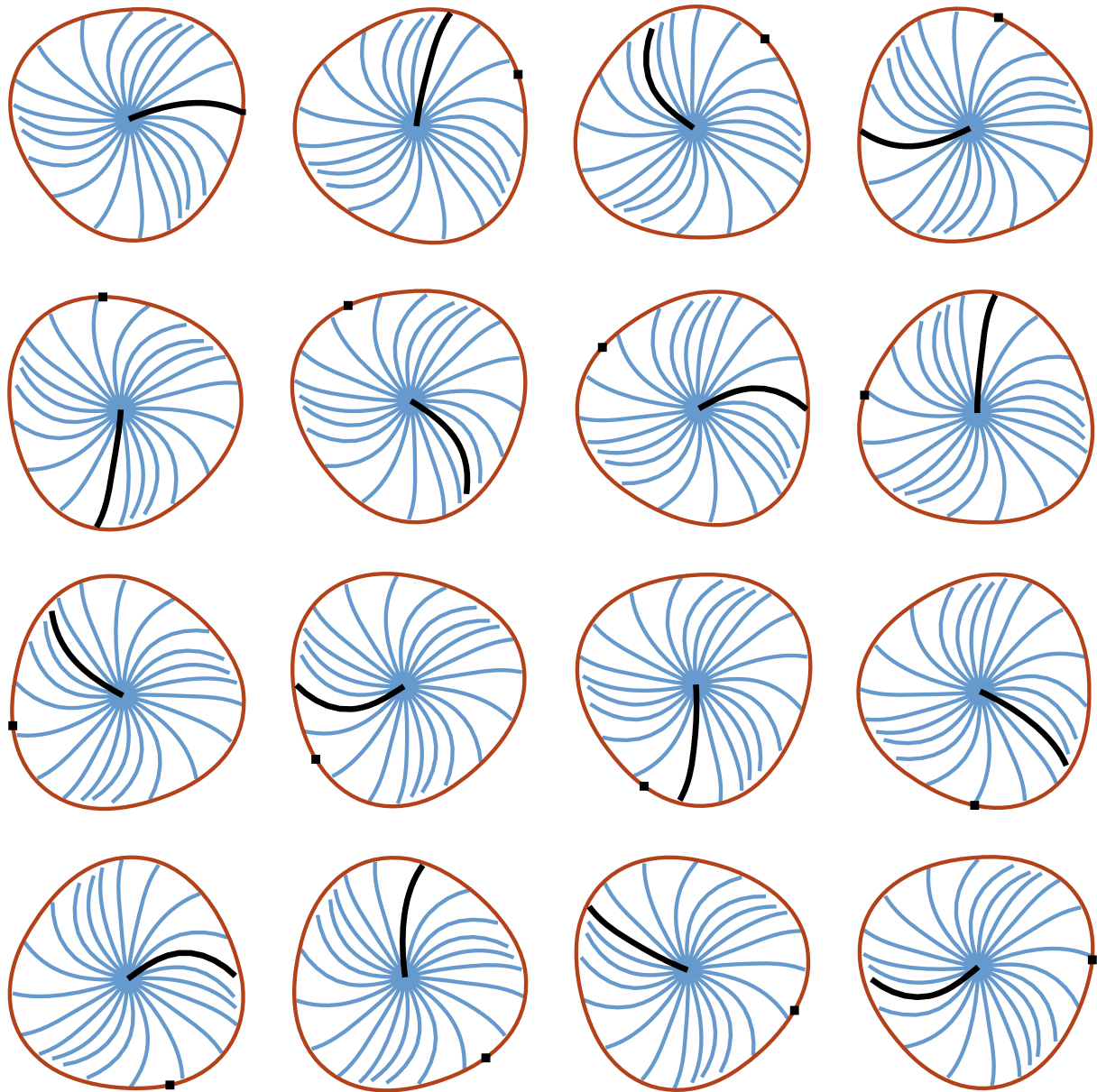


figure 5.28 – Évolution de l'ensemble roue aubagée - carter sur trois périodes  $T_c$

fréquentiel à deux dimensions sont maintenant à notre disposition. Il suffit alors de donner la forme supposée des vibrations des deux structures sachant que le but final des développements présents est de retrouver le comportement limite obtenu pour une vitesse critique du système et d'en étudier la stabilité. En considérant les résultats temporels du cas limite qui nous intéresse et pour lequel la vitesse de rotation du rotor est proche de la vitesse critique théorique, il semble cohérent d'imposer un mode tournant avance dont la phase est fixée sur le carter grâce à un champ de déplacement adéquat, par exemple :

$$\begin{cases} u_c^{m,1} = c_1 \cos \omega_c t \\ u_c^{m,2} = c_1 \sin \omega_c t \end{cases} \quad (5.21)$$



Les inconnues  $u_c^{m,1}$  et  $u_c^{m,2}$  (par l'intermédiaire de  $c_1$ ) représentent les contributions temporelles des deux modes à  $n_d$  diamètres retenus du carter. En ce qui concerne la roue aubagée, un mode tournant rétrograde de pulsation solution de l'équation (5.20) est imposé en autorisant une phase libre par rapport au mouvement du carter :

$$\begin{cases} u_{ra}^{m,1} = b_1 \cos((n_d\Omega - \omega_c)t) + b_2 \sin((n_d\Omega - \omega_c)t) \\ u_{ra}^{m,2} = b_1 \cos((n_d\Omega - \omega_c)t) - b_2 \sin((n_d\Omega - \omega_c)t) \end{cases} \quad (5.22)$$

C'est lors de la gestion du contact, si celle-ci est couronnée de succès, que les deux structures devront s'embrasser convenablement. Afin de simplifier un peu plus la procédure, la méthode des pénalités est retenue pour la prise en compte des contraintes de contact. Les multiplicateurs de Lagrange pourraient être approchés à une précision par extension au domaine multi-fréquentiel de l'algorithme développé par S. NACIVET *et al.* [NAC 03], par exemple. La procédure suivie dans notre cas est résumée sur le diagramme de la figure 5.29. La formulation de notre problème est bien posée puisque l'on obtient un système à quatre équations (les quatre équations de la mécanique liées aux déplacements modaux des deux structures) pour quatre inconnues :  $c_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $\omega_c$ . Il ne faut pas perdre d'esprit que la vitesse de rotation du moteur est alors un paramètre fixé par l'utilisateur. À cause du caractère non-linéaire du problème, la solution dépendra des conditions initiales et c'est en les choisissant prudemment qu'il sera possible de trouver une solution non nulle.

### 5.3.2.2 Premiers résultats

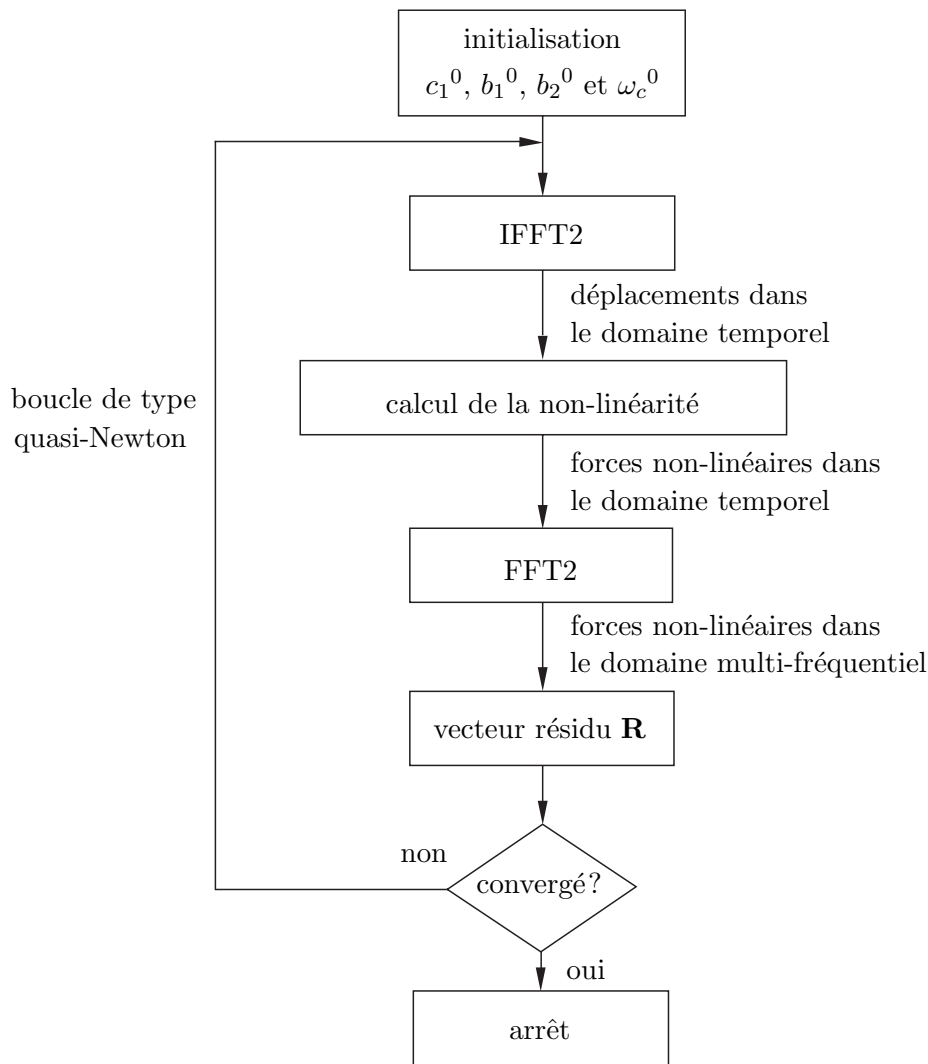
Dans l'état actuel du développement, la résolution itérative converge très difficilement pour trois raisons principales :

1. la prise en compte du contact étant approchée par la méthode des pénalités, les résultats sont différents de ceux issus de l'intégration temporelle : il est donc difficile de prévoir la vitesse de rotation critique, paramètre d'entrée crucial de l'algorithme, pour laquelle une solution harmonique est supposée avoir cours ;
2. la vitesse de rotation n'étant pas une variable, il se peut qu'entrée par l'utilisateur, elle soit toujours trop éloignée de la vitesse critique et complique ainsi la résolution ;
3. les temps de calcul étant particulièrement importants à cause de l'alternance temps-fréquence, les transformées de Fourier sont calculées sur trente-deux points par période au détriment de la précision.

Malgré toutes ces remarques, un essai a permis de tester la bonne prise en compte des forces de contact. Pour ce faire, la taille du système est réduite aux deux inconnues  $b_1$  et  $b_2$  et un mode tournant avance est imposé sur le carter de façon à ce qu'une interaction se manifeste. Pour une vitesse de rotation donnée, l'algorithme converge vers un mouvement (il y en a en effet plusieurs définis à un angle près) de la roue aubagée compatible avec celui du carter.

Il faut reconnaître que les résultats dans le domaine fréquentiel restent succincts mais les bases théoriques nécessaires à la résolution sont établies et la compréhension du phé-





**figure 5.29** – Implantation de la généralisation à deux dimensions de la méthode de l'équilibrage harmonique pour notre système libre avec solveur de type quasi-Newton

nomène, précisée. Plusieurs évolutions doivent poursuivre ces premiers développements numériques :

- s'assurer que l'algorithme de type quasi-Newton utilisé est assez robuste pour la résolution de ce problème ;
- généraliser la prise en compte des contraintes de contact à la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
- ajouter la vitesse de rotation du moteur aux inconnues du problème en y joignant l'équation de la mécanique supplémentaire associée ;
- optimiser le code afin de réduire les temps de calcul.

## Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle planaire évolué d'une turbo-machine, prenant en compte les conclusions d'un précédent modèle, a été présenté. Afin d'étudier les vitesses de rotation





du moteur pour lesquelles les potentielles interactions modales deviennent dangereuses, son carter est constitué d'éléments poutres courbes et un ensemble de poutres connectées entre elles et à géométrie courbe forme la roue aubagée. La résolution des équations de la mécanique dans le domaine temporel révèle deux types de comportement en fonction du nombre de diamètres nodaux. Un premier sous-ensemble pour  $n_d = 2$  adopte une réponse très proche de celles trouvées pour le premier modèle :

- pour des vitesses de rotation inférieures à une vitesse critique  $\Omega_c$ , aucun régime d'interaction durable n'existe ;
- pour des vitesses supérieures, le comportement de l'ensemble est sensiblement identique au « mouvement bloqué » défini pour le premier modèle.

Il s'avère que la vitesse critique est donnée par la relation suivante :

$$\Omega_c \simeq \frac{\omega_c}{n_d} \quad (5.23)$$

Pour le second sous-ensemble composé des cas  $n_d = 3$ ,  $n_d = 4$  et  $n_d = 5$ , l'analyse est légèrement plus complexe. De la même façon, une vitesse critique existe :

$$\Omega_c \simeq \frac{\omega_c + \omega_{ra}}{n_d} \quad (5.24)$$

Cette vitesse est à la fois fonction des caractéristiques vibratoires du carter et de la roue aubagée. Sa détection a été rendue possible grâce à la géométrie et à la formulation adoptées au cours du développement des deux structures. Elle délimite trois types de comportement bien différents :

- si la vitesse du rotor est inférieure à  $\Omega_c$ , l'interaction se limite à quelques impacts en début de simulation suivis d'une perte de contact définitive entre les deux structures ;
- aux alentours de la vitesse critique, les deux structures acquièrent chacune un état vibratoire quasi-harmonique. Un mode tournant avance apparaît au niveau du carter et son homologue rétrograde, au niveau de la roue aubagée ;
- pour des vitesses de rotation supérieures à  $\Omega_c$ , les amplitudes de vibration divergent après quelques centaines de tours moteur.

La vitesse critique prédite par l'outil numérique est donc très proche de celle déterminée par la théorie mais dépend du pas de temps. Cette légère différence peut être due à la présence d'amortissement structural ou à la dynamique des contacts qui n'est pas prise en compte dans la théorie. Cependant, il est intéressant de remarquer que dans tous les cas, l'ensemble rotor-stator d'une turbo-machine présente deux ou trois zones distinctes de fonctionnement par rapport au paramètre « vitesse de rotation ».

Ce nouveau modèle a démontré, par son efficacité dans le domaine temporel, la cohérence des recommandations qui font suite à l'analyse du modèle précédent mais sa sensibilité à la taille du pas de temps reste problématique. Pour éliminer cet inconvénient et clarifier les résultats, il est admis après une analyse fine du phénomène d'interaction modale, qu'une



méthode multi-fréquentielle est nécessaire. Les bases mathématiques de cette approche originale sont expliquées et une mise en œuvre numérique a été débutée. Même s'il n'est pas encore fonctionnel, cet outil semble prometteur.

Il ne faut cependant pas oublier que ces approches académiques d'un problème industriel ne peuvent satisfaire complètement un motoriste. Elles sont bien évidemment nécessaires d'un point de vue phénoménologique pour une première appréhension d'un tel problème mais d'aucune aide dans la prédiction des efforts de contact, des taux de déformation et de contrainte subis par des structures réelles. Ces données sont pourtant primordiales pour un bureau d'études dans la phase de conception. C'est pour toutes ces raisons que l'étude d'un modèle 3D développé par SNECMA constitue le sujet du prochain chapitre.



# 6

# Étude de l'interaction rotor stator dans une soufflante industrielle

<b>6.1</b>	<b>Caractéristiques du modèle éléments finis</b>	<b>100</b>
6.1.1	Roue aubagée	100
6.1.2	Carter	101
<b>6.2</b>	<b>Réduction du modèle : synthèse modale</b>	<b>103</b>
6.2.1	Méthode à interface fixe: Craig-Bampton	103
6.2.2	Méthode à interface libre: Craig-Chang	104
<b>6.3</b>	<b>Fonctions splines</b>	<b>104</b>
6.3.1	Courbes paramétriques	104
6.3.2	B-splines	105
<b>6.4</b>	<b>Choix des méthodes</b>	<b>107</b>
6.4.1	Type de spline	107
6.4.2	Réduction du modèle	109
<b>6.5</b>	<b>Gestion du contact</b>	<b>116</b>
6.5.1	Transformations préalables	116
6.5.2	Algorithme général	118
<b>6.6</b>	<b>Résultats</b>	<b>118</b>
6.6.1	Vérification du modèle	118
6.6.2	Cas n°1: excitation extérieure à deux diamètres	119
6.6.3	Cas n°2: interaction modale à trois diamètres	122
	<b>Conclusion</b>	<b>126</b>

SNECMA a souhaité une généralisation de l'étude de l'interaction à des structures industrielles. Les causes de l'apparition de ce phénomène sont multiples : il s'agit, par exemple, de contacts structuraux dus à une déformation thermique du carter, à une excitation vibratoire du carter lors de phases d'envol ou de manœuvre ou encore à une excitation à diamètres de la roue aubagée par couplage fluide-structure avec l'air ambiant.

Pour effectuer des simulations numériques, un modèle 3D proposé par le bureau d'études de SNECMA a été adapté. Une première hypothèse permet de conserver des temps de calcul raisonnables : on suppose que le contact se produit entre un point unique de la corde en sommet d'aube et la circonférence du carter qui lui fait face et que seuls les déplacements dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du moteur ont un rôle dans le calcul des distances rotor-stator. Cette approche est clairement grossière mais permet de réduire la taille des modèles par des méthodes de synthèse modale et ensuite de simplifier le traitement du contact grâce à un enrichissement fonctionnel du maillage par une seule spline linéique. Tous ces points sont présentés dans ce chapitre et pour clore l'étude, l'intérêt et la performance de la méthode sont illustrés sur deux exemples pertinents.



## 6.1 Caractéristiques du modèle éléments finis

### 6.1.1 Roue aubagée

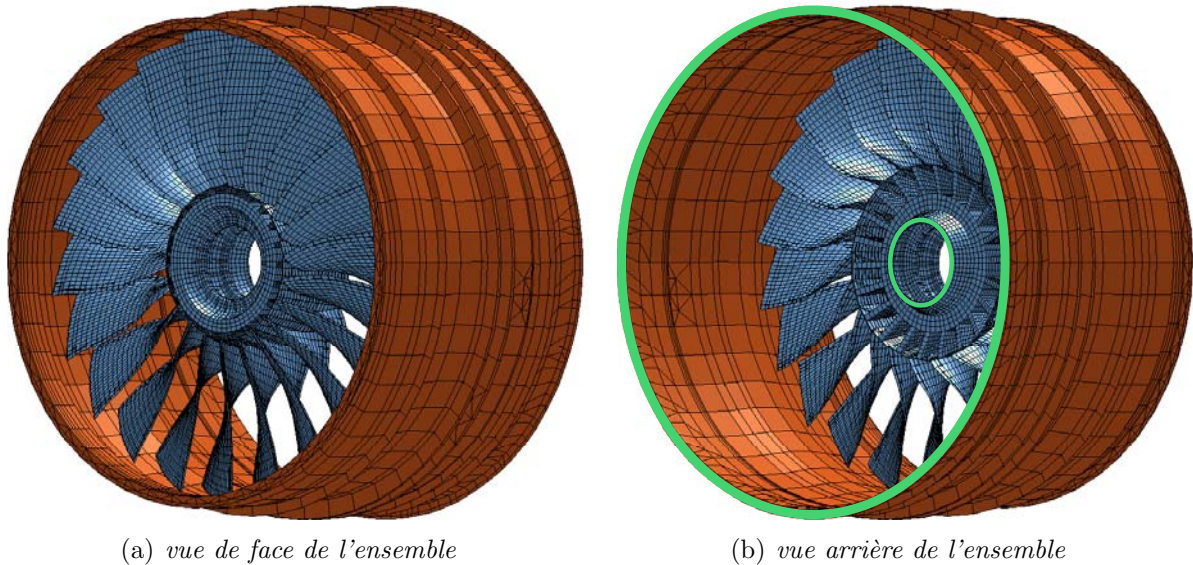
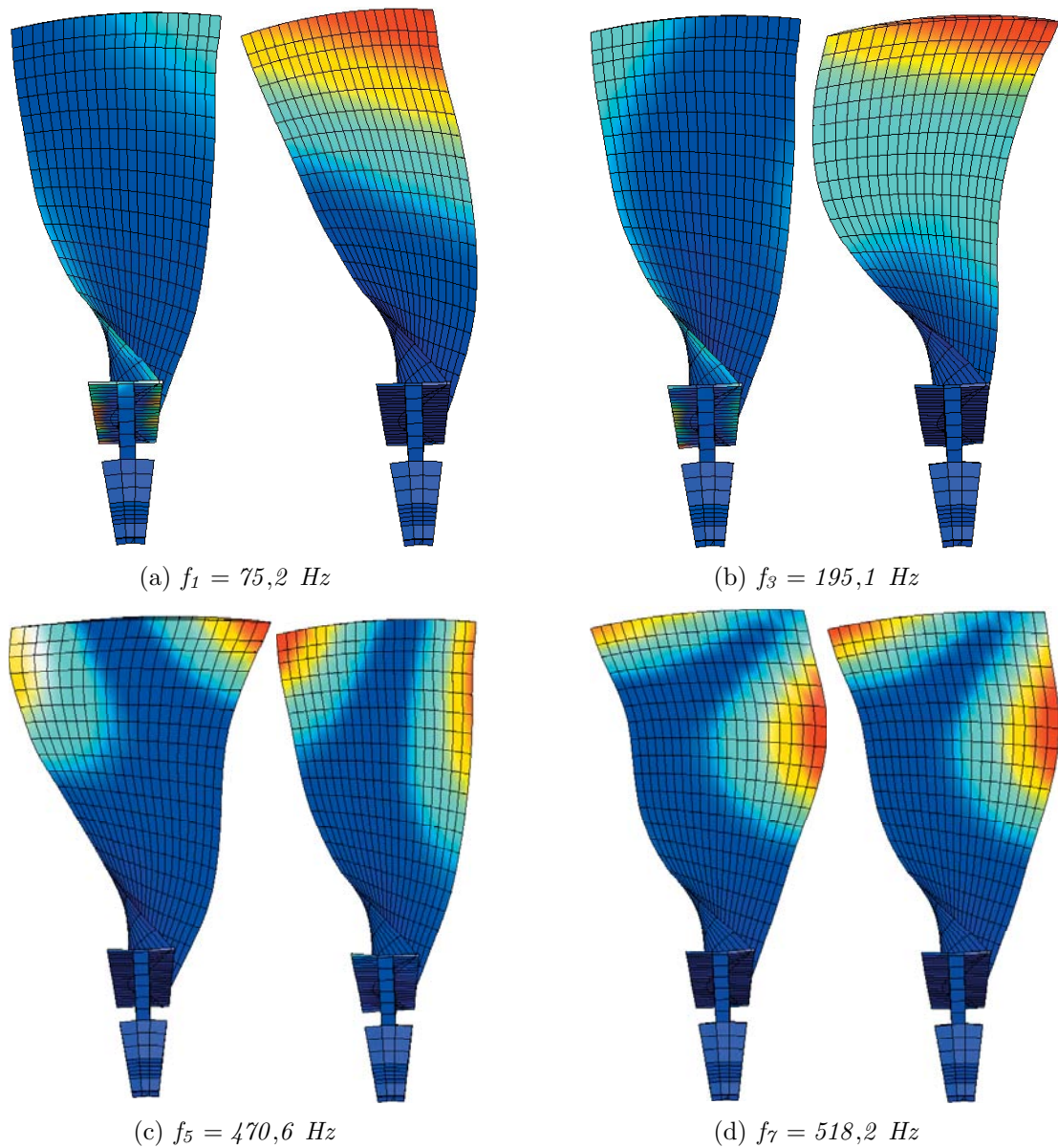


figure 6.1 – Structures carter fan et roue aubagée 3D

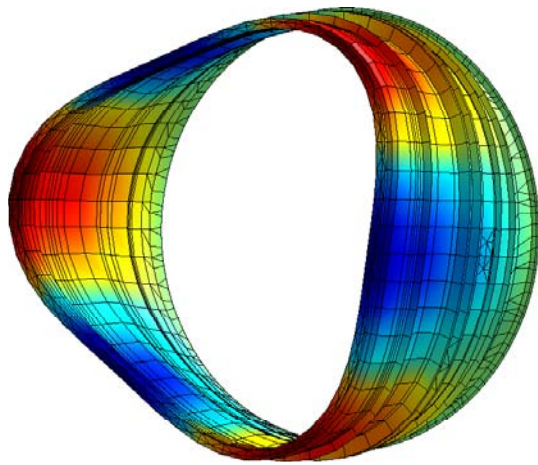
La technologie des aubes fan à grande corde se révèle être la solution adoptée par tous les constructeurs de moteurs d'avion pour gagner en performances et en poids. Dans ce modèle SNECMA, la roue aubagée est constituée de 22 aubes et maillée par 31 856 éléments finis de type pentaèdre et hexaèdre du second ordre qui se joignent en 166 452 nœuds. Cet ensemble de 466 356 degrés de liberté (ddl) constitue donc un modèle de grande taille qui devra être réduit ultérieurement. Cette structure est encastrée sur une couronne d'éléments appartenant au disque de la roue aubagée et indiquée en vert sur la figure 6.1(b). Le diamètre d'une telle soufflante s'élève à 1,812 m. Aucun excentrement n'est considéré, l'équilibrage dynamique de la structure est supposé parfait et l'effet gyroscopique ainsi que le raidissement centrifuge, conséquences de la rotation de la structure, ne sont pas pris en compte dans cette étude. Les fréquences propres de ce type de structure sont souvent exprimées en fonction du nombre de diamètres nodaux. Cette analyse permet de comprendre le rôle mutuel du disque et des aubes dans la forme des modes, de classer les modes et de déceler des situations de virement (veering locus dans la littérature anglaise). Celles-ci sont fréquentes pour des roues aubagées de compresseur où le disque est prépondérant face aux aubes. Dans notre étude, ce diagramme ne présente pas beaucoup d'intérêt et n'est par conséquent pas présenté. Il faut seulement retenir que les fréquences sur un mode donné d'aube (première flexion, première torsion. . .) évolue peu avec le nombre de diamètres nodaux. Certains d'entre eux selon la troisième harmonique sont présentés sur la figure 6.2.



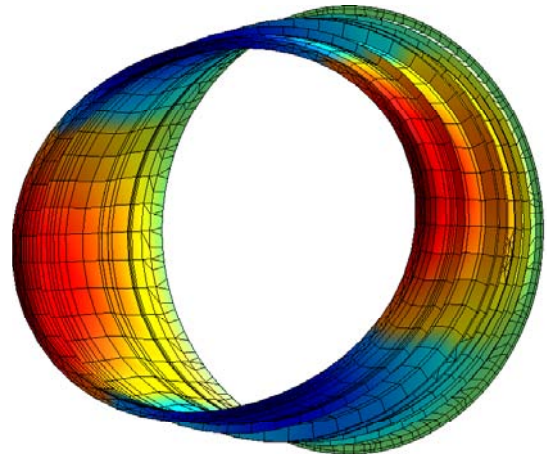
**figure 6.2** – *Les premiers modes de la roue aubagée selon la troisième harmonique, avec à gauche la contribution en cosinus et à droite, celle en sinus*

## 6.1.2 Carter

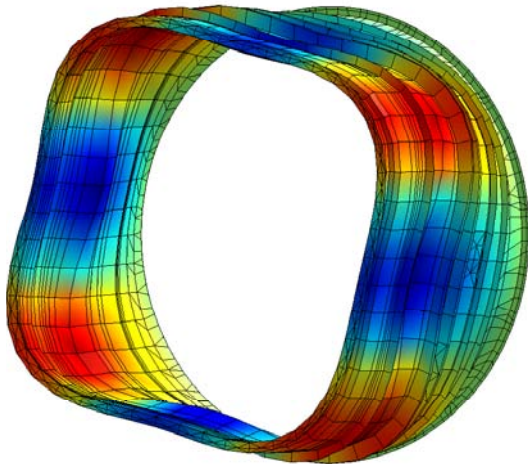
Cette structure est constituée de 2 131 éléments finis de type triangle et quadrangle connectés entre eux en 2 086 nœuds. Tous ces éléments sont planaires à l'équilibre même s'ils sont interpolés par des polynômes du second ordre. Avec six degrés de liberté par nœud, l'ensemble constitue un modèle de 12 516 inconnues. Cette structure est encastree sur la circonférence d'éléments colorés en vert sur la figure 6.1(b), à l'image de la roue aubagée. La symétrie de révolution de cette structure n'est pas parfaite puisque quelques éléments modélisant les attaches pour les équipements et la nacelle la rompent mais leur rôle reste négligeable. Le jeu entre l'extrémité des aubes, en milieu de corde, et le carter est de l'ordre de quelques millimètres.



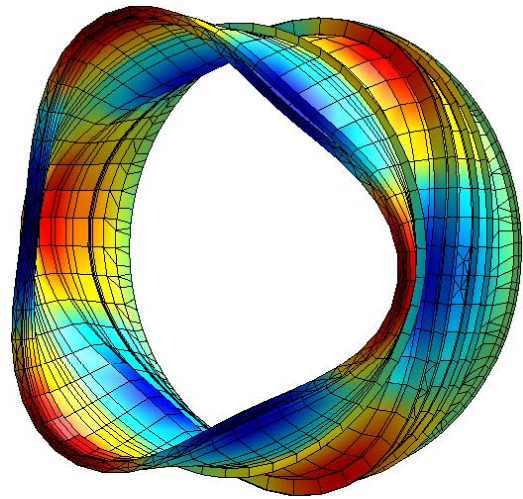
(a)  $f_1 = 160$  Hz (3 diamètres)



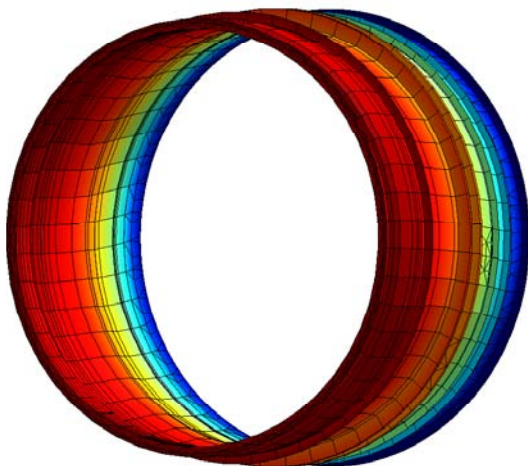
(b)  $f_3 = 173,9$  Hz (2 diamètres)



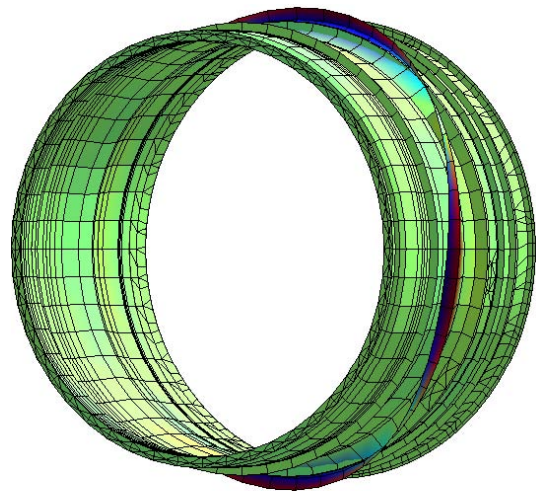
(c)  $f_5 = 224,5$  Hz (4 diamètres)



(d)  $f_{13} = 325,8$  Hz (3 diamètres)



(e)  $f_{19} = 456,4$  Hz (0 diamètre)



(f)  $f_{28} = 550,3$  Hz (2 diamètres)

**figure 6.3** – Quelques modes propres du carter. L'indice en fréquence indique le numéro du mode. Tous les modes illustrés sont doubles.



## 6.2 Réduction du modèle : synthèse modale

Une structure peut être vue comme un assemblage de sous-structures dont on connaît le comportement dynamique grâce à une étude préalable. Le problème est de savoir comment étudier ces entités séparément pour les regrouper ensuite afin de comprendre le comportement global de la structure complète. Ainsi, cette démarche offre par exemple l'avantage de pouvoir modifier une sous-structure sans remettre en cause le reste des composants. Plusieurs méthodes ont été mises au point pour répondre à cette interrogation et deux notions importantes ressortent : la sous-structuration et la condensation [CRA 00]. La sous-structuration consiste à réarranger les équations de la mécanique en partitionnant la structure d'étude en sous-structures connectées entre elles au niveau de frontières communes. Chaque sous-structure peut être étudiée séparément tout en sachant qu'il sera possible de faire le chemin inverse en fin de procédure. Des frontières sont donc définies et les ddl qui les constituent sont nommés degrés de liberté frontières et notés  $\mathbf{u}_f$ . Les autres, intérieurs à chaque sous-structure, prennent l'appellation de degrés de liberté intérieurs et sont notés  $\mathbf{u}_i$ . La condensation permet de définir une nouvelle base sur laquelle est projetée l'équation du mouvement respective à chaque sous-structure puis d'éliminer les degrés de liberté qui n'auront pas d'influence dans la solution finale de façon à réduire la taille du système. Les méthodes existantes se classent souvent en quatre catégories : les méthodes à interface fixe, à interface libre, à interface mixte et à interface chargée. Deux d'entre elles ont retenu notre attention et sont succinctement présentées avant d'être discutées ultérieurement pour un choix final.

### 6.2.1 Méthode à interface fixe : Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [CRA 68] utilise comme base de modes composants de contribution  $\mathbf{q}^{(j)}$ , un ensemble tronqué  $\Phi_L^{(j)}$  de modes normaux de vibration de chaque sous-structure  $^{(j)}$  où les ddl frontières sont fixés et un ensemble complet  $\Phi_R^{(j)}$  de modes frontières statiques construits en appliquant un déplacement unitaire sur chaque ddl frontière tout en maintenant les autres ddl frontières fixés. Ce procédé est résumé par l'équation suivante où le changement de base est fait pour chaque sous-structure :

$$\mathbf{u}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f^{(j)} \\ \mathbf{u}_i^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(j)} & \mathbf{0}^{(j)} \\ \Phi_R^{(j)} & \Phi_L^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f^{(j)} \\ \mathbf{q}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Dans l'équation ci-dessus, une permutation des ddl du vecteur  $\mathbf{u}^{(j)}$  a été effectuée lors de l'étape de sous-structuration de manière à avoir les ddl frontières  $\mathbf{u}_f^{(j)}$  en début et les ddl intérieurs  $\mathbf{u}_i^{(j)}$  en fin de vecteur.  $\mathbf{I}^{(j)}$  est la matrice identité et sa taille dépend du nombre de ddl frontières associés à la sous-structure  $^{(j)}$ . Le vecteur  $\mathbf{q}^{(j)}$  représente la contribution des modes normaux de vibration retenus pour chaque sous-structure. En fin de procédure, toutes les structures sont assemblées en tenant compte des compatibilités de déplacement des ddl frontières entre sous-structures contiguës.



## 6.2.2 Méthode à interface libre : Craig-Chang

La méthode de Craig-Chang [CRA 76] utilise comme base de modes composants, un ensemble tronqué de modes normaux de vibration de chaque sous-structure où les ddl frontières sont libres et un ensemble complet de modes d'attaches résiduels construits en appliquant un chargement unitaire sur chaque degré de liberté frontière, les autres ddl frontières étant libres. Ce procédé est résumé par l'équation suivante où le changement de base est fait pour chaque sous-structure  $^{(j)}$  :

$$\mathbf{u}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f^{(j)} \\ \mathbf{u}_i^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_p^{(j)} & \Phi_p^{(j)} \\ \Psi_q^{(j)} & \Phi_q^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{(j)} \\ \mathbf{q}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Le contenu de la matrice de changement de base ne nous intéresse pas dans cette étude. Notons seulement qu'elle est pleine. Lors du calcul de ces modes d'attache, il est nécessaire de faire la distinction entre ceux qui sont contraints et ceux qui ne le sont pas : ces derniers présentent des mouvements de solide rigide puisqu'ils sont à interface libre. La matrice raideur respective n'est donc pas inversible. Pour contourner cette difficulté, des degrés de liberté (six pour un problème en trois dimensions) qui ne se situent pas sur l'interface doivent être artificiellement contraints pour éliminer les translations et rotations de solide rigide. Finalement, l'assemblage est réalisé en satisfaisant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces à l'interface.

## 6.3 Fonctions splines

Comme il a déjà été précisé lors de sa présentation, le carter affiche un problème de facétisation lié à la discrétisation en éléments plans. Des éléments à géométrie courbe de type coque auraient facilité la gestion du contact mais ils ne sont actuellement pas disponibles dans les codes utilisés par l'entreprise. Il est possible de se contenter de ces éléments plans à l'équilibre mais dès lors, des problèmes de blocage numérique sont à redouter notamment à cause de la discontinuité de la normale à la surface de contact entre deux éléments. Des méthodes de régularisation fonctionnelle (au sens continuité et dérivabilité) de ces surfaces ont été développées dernièrement [CHA 04], [PAD 01]. En s'affranchissant des problèmes de facétisation, elles autorisent un traitement du contact même pour des maillages assez grossiers et améliorent la convergence des algorithmes de résolution. Pour notre part, nous avons choisi de reprendre les travaux engagés par E. ARNOULT [ARN 00] sur les éléments splines.

### 6.3.1 Courbes paramétriques

Les approximations polygonales sont des approximations linéaires par morceaux. Elles nécessitent un nombre important de points pour obtenir une bonne précision et souffrent, en certains points, de la non unicité de la normale à la courbe qu'elles forment. Une approche différente consiste à utiliser des modèles d'ordre supérieur pour représenter les courbes et les surfaces. Les représentations paramétriques répondent à ce besoin ; dans le





plan, elles prennent la forme  $(x(t), y(t))$ . Dans le contexte de ce travail, il faut construire une courbe continûment dérivable à partir d'un nombre fini de points qui sont les nœuds du maillage considéré. Pour cela, on utilise les courbes de la forme :

$$c(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i B_{ni}(t) \quad (6.3)$$

qui est une somme de produits de fonctions de pondération  $B_{ni}(t)$  et de points de contrôle  $Q_i = (x_i, y_i)$ . Cette définition englobe une famille de courbes dont en particulier, les courbes de Bézier, les B-splines et les NURBS. Pour notre étude, les B-splines cubiques uniformes ont été choisies pour leur souplesse d'utilisation.

## 6.3.2 B-splines

### 6.3.2.1 Définition

Soient  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega_{npt} = (t_i)_{i=0, npt}$  une partition, appelée vecteur de nœuds, de cet intervalle telle que  $t_0 = a$ ,  $t_{npt} = b$  et  $t_0 < \dots < t_{npt}$ . La fonction  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction spline polynomiale de degré  $n$  ( $n > 0$ ) si elle vérifie les deux conditions :

- $s \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])^2$
- $\forall i \in [0, \dots, npt - 1], \forall t \in [t_i, t_{i+1}], s \in \mathcal{P}_n^1$

Parmi toutes les bases possibles de  $\mathcal{S}_n(\Omega_{npt})$ , notation qui définit l'ensemble des splines de degré  $n$  sur  $\Omega_{npt}$ , il en est une particulière constituée des B-splines de degré  $n$ . Une B-spline de degré  $n$  est un élément de  $\mathcal{S}_n(\Omega_\infty)^2$  :

$\exists i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

- $s(t) = 0$  sauf sur  $[t_i, t_{i+n+1}]$
- $\forall t \in [t_i, t_{i+n+1}], s(t) \geq 0$
- $s \in \mathcal{C}^{n-1}([t_i, t_{i+n+1}])$

### 6.3.2.2 Algorithme de construction

Une relation de récurrence, dite de Cox-de Boor, permet de construire une B-spline de n'importe quel degré sur un vecteur quelconque de nœuds :

$$B_{00}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0, t_1] \end{cases} \quad (6.4)$$

$$B_{ni}(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} B_{n-1,i}(t) + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} B_{n-1,i+1}(t) & \text{si } t \in [t_i, t_{i+n+1}] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_i, t_{i+n+1}] \end{cases}$$

1.  $\mathcal{P}_n$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$

2.  $\mathcal{S}_n(\Omega_\infty)$  est une partition particulière telle que:  $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$  et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = +\infty$



Parmi toutes les B-splines existantes, nous nous intéressons aux B-splines cubiques uniformes, courbes polynomiales de continuité  $\mathcal{C}^2$ . Elles permettent d'approximer un ensemble de points de contrôle  $Q_{|i=0,m}$  avec une courbe de  $m - 2$  segments polynomiaux. Chaque segment de courbe est fonction d'un paramètre  $t$  variant de  $t_i$  à  $t_{i+1}$  et de quatre points de contrôle. Le qualificatif « uniforme » signifie que les paramètres  $t_i$  et  $t_{i+1}$  sont uniformément répartis, c'est-à-dire  $t_i = t_{i-1} + 1$ . En appliquant la relation de Cox-de Boor pour trouver l'expression d'une spline cubique uniforme, il vient :

$$\begin{aligned}
 B_{30}(t) &= \frac{(t - t_0)^3}{6h^3} \text{ si } t \in [t_0, t_1] \\
 B_{30}(t) &= \frac{h^3 + 3h^2(t - t_1) + 3h(t - t_1)^2 - 3(t - t_1)^3}{6h^3} \text{ si } t \in [t_1, t_2] \\
 B_{30}(t) &= \frac{h^3 + 3h^2(t_3 - t) + 3h(t_3 - t)^2 - 3(t_3 - t)^3}{6h^3} \text{ si } t \in [t_2, t_3] \\
 B_{30}(t) &= \frac{(t_4 - t)^3}{6h^3} \text{ si } t \in [t_3, t_4]
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

### 6.3.2.3 Propriétés

Les B-splines uniformes ont les propriétés suivantes :

- le contrôle et le support sont locaux : chaque segment de courbe est défini par quatre points de contrôle et chaque point de contrôle affecte quatre segments de courbe ;
- la courbe approxime mais n'interpole pas les points de contrôle. Il est possible d'attirer la courbe vers les points de contrôle jusqu'à l'interpolation si la multiplicité du point est de trois ;
- la courbe est de classe  $\mathcal{C}^2$  et contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle ;
- elles répondent à la partition de l'unité.

### 6.3.2.4 Méthodes d'interpolation

Trois méthodes principales permettent d'interpoler un champ de points par une spline. Pour éclaircir l'exposé, le jeu de données comporte  $npt$  points ordonnés  $P_i$  et l'expression de la courbe gauche est reprise :

$$c(t) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i B_{ni}(t) \tag{6.6}$$

Le choix des  $N$  points de contrôle  $Q_i$  peut s'effectuer selon l'une des méthodes suivantes :

1. prendre pour  $Q_i$  les points du jeu de données  $P_i$  : c'est la méthode *directe* pour laquelle  $N = npt$ . Cette méthode est la plus simple à mettre en place et la plus rapide en temps de calcul ;



2. calculer les  $Q_i$  afin que la courbe passe par les points  $P_i$  : il s'agit alors de la méthode d'*interpolation*. Il faut résoudre un système linéaire de taille  $N \times N$  avec  $N = n_{pt} + 2$  pour un paramétrage uniforme ;
3. calculer les  $Q_i$  pour qu'il existe  $n_{pt}$  valeurs  $t_1, \dots, t_{n_{pt}}$  du paramètre minimisant la quantité  $\sum_{i=0}^{n_{pt}-1} (c(t_i) - P_i)^2$  : c'est la méthode de *lissage* au sens des moindres carrés et la valeur de  $N$  est alors indépendante de  $n_{pt}$ . Cette méthode nécessite la résolution d'un système linéaire de taille  $N \times N$ .

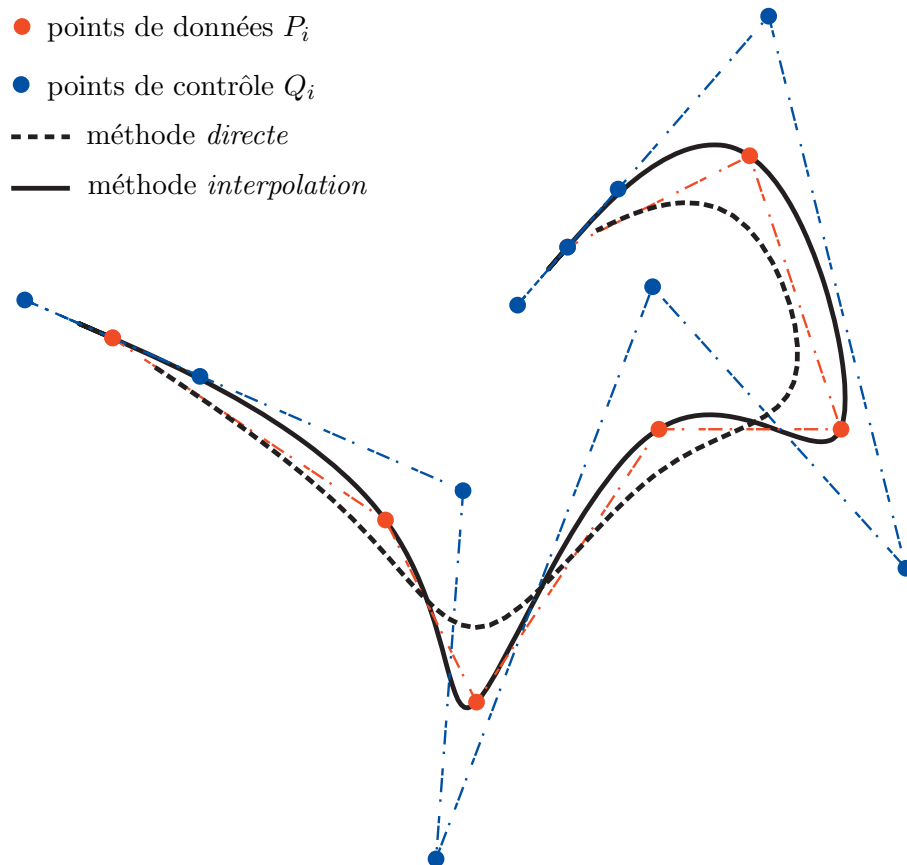


figure 6.4 – Comparaison de deux méthodes de construction de spline pour le jeu de données suivant : (0; 3) (0; 3) (1,5; 2) (2; 1) (3; 2,5) (4; 2,5) (3,5; 4) (2,5; 3,5) (2,5; 3,5)

## 6.4 Choix des méthodes

### 6.4.1 Type de spline

Dans notre étude, les éléments splines sont exploités pour simplifier la gestion du contact entre deux structures facétisées en leur donnant un degré de régularité plus élevé. Pour un meilleur contrôle des distances de pénétration en fonction de la position de la structure, il semble plus cohérent d'utiliser la formulation des splines permettant à la courbe gauche de traverser les nœuds du maillage, ce qui justifie l'utilisation de la méthode d'*interpolation* par la suite.

Il s'agit donc de déterminer les  $N = n_{pt} + 2$  points de contrôle  $Q_i$  de façon à ce que la spline passe exactement par les  $n_{pt}$  points de donnée  $P_i$  avec la condition  $P_0 = P_{n_{pt}-1}$ .



Dans le cas du carter, la courbe générée étant fermée, il est indispensable de gérer le point de jonction du maillage de manière appropriée. La solution adoptée consiste à imposer les deux conditions de continuité (portant sur les dérivées spatiales première et seconde de la courbe) en ce point de jonction. Par conséquent, aux  $n_{pt}$  points de contrôle classiques  $Q_{|i=0, n_{pt}-1}$ , viennent s'ajouter deux nouveaux points de contrôle notés  $Q_{-1}$  et  $Q_{n_{pt}}$ . Le problème est bien posé puisqu'il y a bien  $n_{pt} + 2$  inconnues pour  $n_{pt} + 2$  équations et l'expression de la spline s'écrit alors :

$$c(t) = \sum_{i=-1}^{n_{pt}} Q_i B_{ni}(t) \quad (6.7)$$

En reprenant l'expression (6.5) pour une subdivision régulière  $h = t_{i+1} - t_i = 1$  et en effectuant le changement de variable  $t = t - t_i$ , la position du point  $c(t)$  devient :

$$c(t) = \frac{1}{6} ((1-t)^3 Q_i + (3t^3 - 6t^2 + 4) Q_{i+1} + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) Q_{i+2} + t^3 Q_{i+3}) \quad (6.8)$$

La courbe  $c(t)$  est alors contrainte à passer par les points  $P_i$ . Quand l'un de ces points est atteint, la paramètre intrinsèque  $t$  prend soit la valeur 0, soit la valeur 1, suivant le segment de courbe considéré et ses extrémités, notées  $P_0$  et  $P_1$ , sont données par :

$$\begin{aligned} P_0 = c(0) &= \frac{1}{6} (Q_{-1} + 4Q_0 + Q_1) \\ P_1 = c(1) &= \frac{1}{6} (Q_1 + 4Q_2 + Q_3) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Les deux inconnues supplémentaires  $Q_{-1}$  et  $Q_{n_{pt}+1}$  sont déterminées en ajoutant les conditions de continuité aux points extrêmes  $P_0$  et  $P_{n_{pt}}$  :

$$\begin{aligned} c'_0(0) = c'_{n_{pt}}(1) &\Leftrightarrow -Q_{-1} + Q_1 = -Q_{n_{pt}-1} + Q_{n_{pt}+1} \\ c''_0(0) = c''_{n_{pt}}(1) &\Leftrightarrow Q_{-1} - 2Q_0 + Q_1 = Q_{n_{pt}-1} - 2Q_{n_{pt}} + Q_{n_{pt}+1} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Pour un jeu de données où les points extrêmes sont identiques  $P_0 = P_{n_{pt}}$ , toutes ces équations peuvent être regroupées dans un système matriciel :

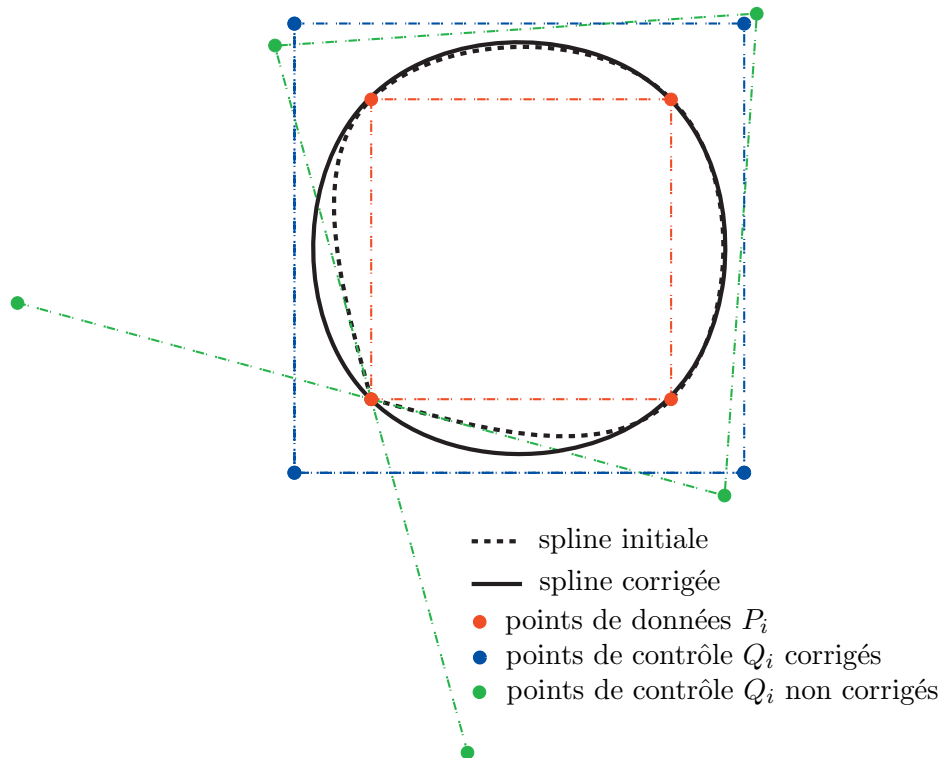
$$\begin{pmatrix} 0 \\ P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n_{pt}-1} \\ P_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & 4 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_{-1} \\ Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{n_{pt}-1} \\ Q_{n_{pt}} \\ Q_{n_{pt}+1} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$



qui s'écrit sous forme compacte :

$$\mathbf{P} = \mathcal{A}\mathbf{Q} \quad (6.12)$$

L'étape suivante consiste à inverser ce système pour obtenir les coordonnées des points  $Q_i$ . Un exemple de spline tenant compte des conditions de régularité est donné sur la figure 6.5.



**figure 6.5** – *Prise en compte des conditions de continuité au point de jonction d'un jeu de données fermé et carré : (0;0) (0;1) (1;1) (1;0) (0;0)*

## 6.4.2 Réduction du modèle

Même si dans la plupart des cas, les méthodes de synthèse modale sont précédées d'une sous-structuration, elles peuvent être utilisées seules à des fins de réduction de modèles. Dans notre cas d'étude, il s'agit de diminuer la taille de la roue aubagée et du carter tout en autorisant la gestion du contact entre les deux structures. À première vue, la méthode à interface libre s'avère naturelle puisqu'elle contient les modes frontières préférentiellement excités lors d'un contact dynamique. Cependant, la prise en compte du contact entre ces deux structures nécessite la connaissance des déplacements à l'interface pour le calcul des distances et représente, de ce fait, une contrainte importante en termes de temps de calcul : en effet, la matrice de changement de base de l'équation (6.2) est pleine et sa multiplication avec le vecteur des contributions modales doit être effectuée à chaque itération temporelle dans l'algorithme général. À l'inverse, la méthode de Craig-Bampton permet un accès direct à ces grandeurs puisqu'elles sont retenues dans la réduction et le changement de

base devient inutile. En contrepartie, pour assurer la convergence de la synthèse modale selon une norme à définir, un nombre plus important de modes à interface fixe que de modes à interface libre est nécessaire. À précision identique donc, le choix porte sur une méthode qui présente une matrice de passage plus petite mais à laquelle il faut faire appel à chaque itération temporelle (méthode à interface libre) et une méthode impliquant une matrice de passage plus grosse (méthode à interface fixe) mais utilisée une seule fois lors du calcul des matrices masse, amortissement et raideur dans le nouvel espace.

Tout ceci en mains, c'est la méthode de Craig-Bampton qui présente le meilleur compromis. En plus d'être plus robuste numériquement et d'offrir des propriétés de convergence intéressantes, elle était la seule disponible dans les laboratoires où a été menée cette étude. Pour toutes ces raisons, c'est cette dernière qui a été préférée.

#### 6.4.2.1 Choix des degrés de liberté frontières

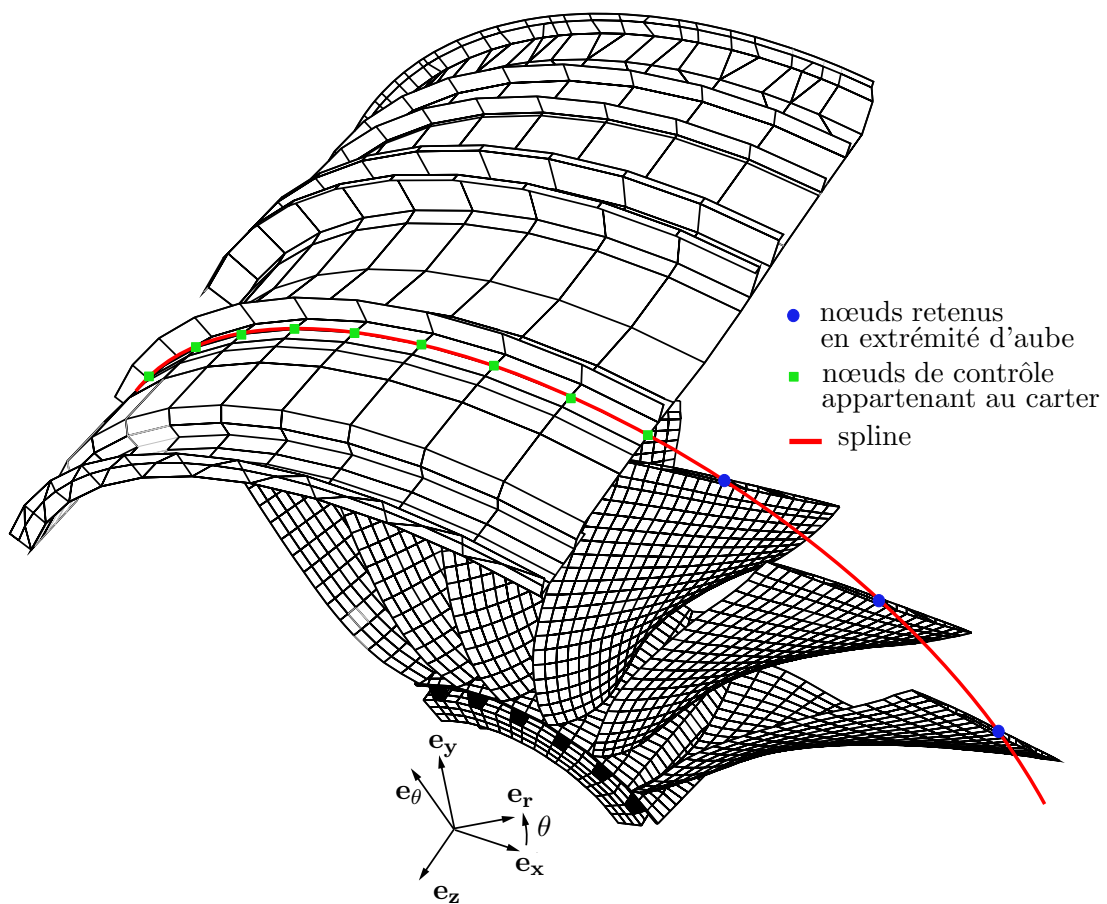


figure 6.6 – Passage de la spline au niveau du carter et des aubes.

La méthode de synthèse modale étant adoptée pour la réduction de l'ensemble roue aubagée-carter, il faut ensuite faire un choix sur les nœuds et ddl frontières retenus. Pour la résolution, en première approximation, les deux structures viennent en contact sur une circonférence faisant face au milieu de corde en sommet d'aube. Ce choix n'est qu'un premier pas afin de tester la faisabilité de la méthode et pourra évoluer. En second lieu, on considère que seuls les déplacements dans le plan ( $e_x e_y$ ), mentionné sur la figure 6.6

et perpendiculaire à l'axe de rotation du moteur, jouent un rôle dans la détection du contact. Les ddl frontières sont donc les déplacement nodaux contenus dans ce plan et la spline est par conséquent de type linéique. Finalement, le modèle réduit comprend cent quarante ddl frontières : quatre-vingt-seize au niveau du carter et quarante-quatre pour la roue aubagée. Il faut bien évidemment ajouter les modes composants dont le nombre varie selon les besoins de la simulation.

### 6.4.2.2 Domaine de validité du modèle réduit

Plusieurs indicateurs ont été développés pour mesurer « l'erreur », en donnant un sens à ce terme, entre un modèle et son homologue réduit dans une base particulière de vecteurs de Ritz. L'un d'entre eux, le MAC (Modal Assurance Criterion), associé à la déviation de fréquence  $\Delta f$ , mesure la corrélation entre les deux ensembles de vecteurs propres (exprimés dans un même espace) et fréquences propres : pour deux vecteurs propres  $\mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_j$  auxquels correspondent respectivement deux fréquences propres  $f_i$  et  $f_j$ , on a :

$$\text{MAC}_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \frac{\mathbf{V}_i^T \mathbf{W} \mathbf{V}_j}{(\mathbf{V}_i^T \mathbf{W} \mathbf{V}_i)(\mathbf{V}_j^T \mathbf{W} \mathbf{V}_j)} \text{ et } \Delta f = \frac{f_i - f_j}{f_i} (\%) \quad (6.13)$$

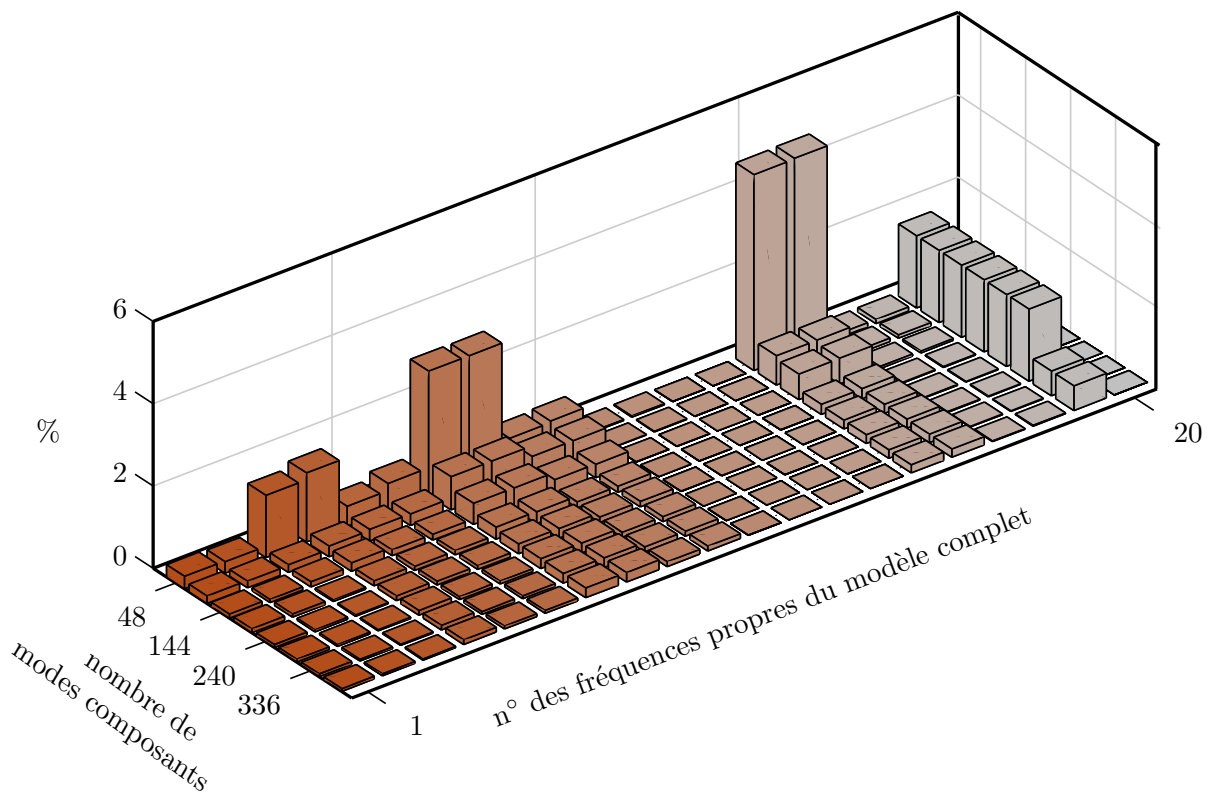
La matrice carrée de pondération  $\mathbf{W}$  peut être la matrice identité ou la matrice masse par exemple. Si le MAC de deux vecteurs est égal à l'unité, ces deux derniers sont parallèles. Il existe d'autres manières de mesurer la corrélation entre deux modèles, notamment dans les domaines fréquentiel ou temporel pour les systèmes non-linéaires.

Lors de ce travail, nous nous sommes limités à la mesure de déviation des fréquences entre le modèle complet initial et le modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton en fonction du nombre de modes composants conservés. En effet, il est difficile de savoir *a priori* lequel de ces critères est le plus adapté pour valider un modèle réduit associé à un problème dynamique comprenant du contact pour lequel les hautes fréquences sont présentes. Une comparaison n'a vraiment de sens qu'entre des résultats temporels de la simulation en fonction de la richesse du modèle réduit et il n'est pas certain que le choix des modes composants préconisés par le MAC soit efficace pour tout problème de dynamique. Cette comparaison intervient donc plus tard dans la section 6.6.

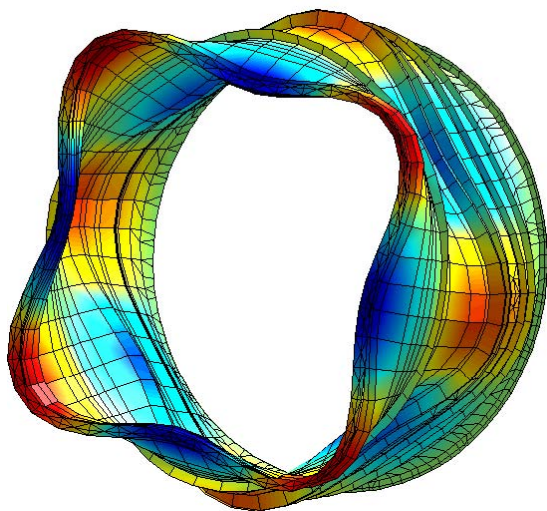
#### **carter**

Le fait que les modes propres et les modes composants du carter soient (pour la plupart) doubles est mis en évidence sur la figure 6.7 où la déviation des fréquences se manifeste par couples. Sur les vingt premières fréquences propres, l'approximation du modèle complet par un modèle réduit constitué de 384 modes composants en plus des 96 modes frontières, environ trente fois plus petit en nombre d'inconnues, est acceptable puisque l'erreur en fréquence est égale ou inférieure à 0,2% pour la plupart des modes. On constate que c'est la présence de certains modes qui diminue de manière significative la déviation des fréquences. Ceci est particulièrement visible au niveau des modes (3 ; 4), (7 ; 8), (15 ; 16) et 19 pour lesquels l'erreur diminue de façon soudaine. C'est d'ailleurs pour ce dernier,

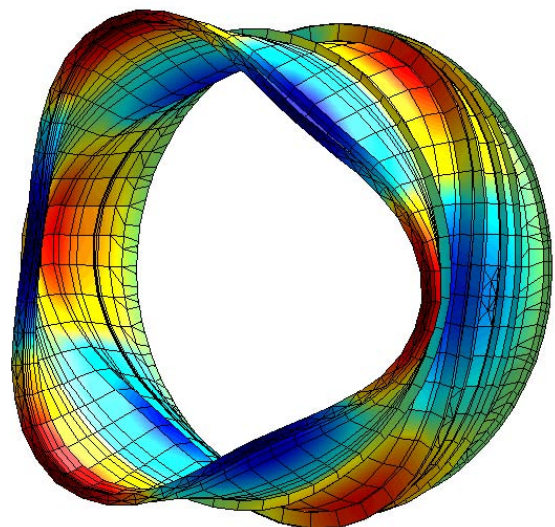




**figure 6.7** – Déviations des vingt premières pulsations propres du carter en fonction du nombre de composants retenus lors de la réduction, en plus des quatre-vingt-seize modes frontières déjà contenus dans le modèle réduit.

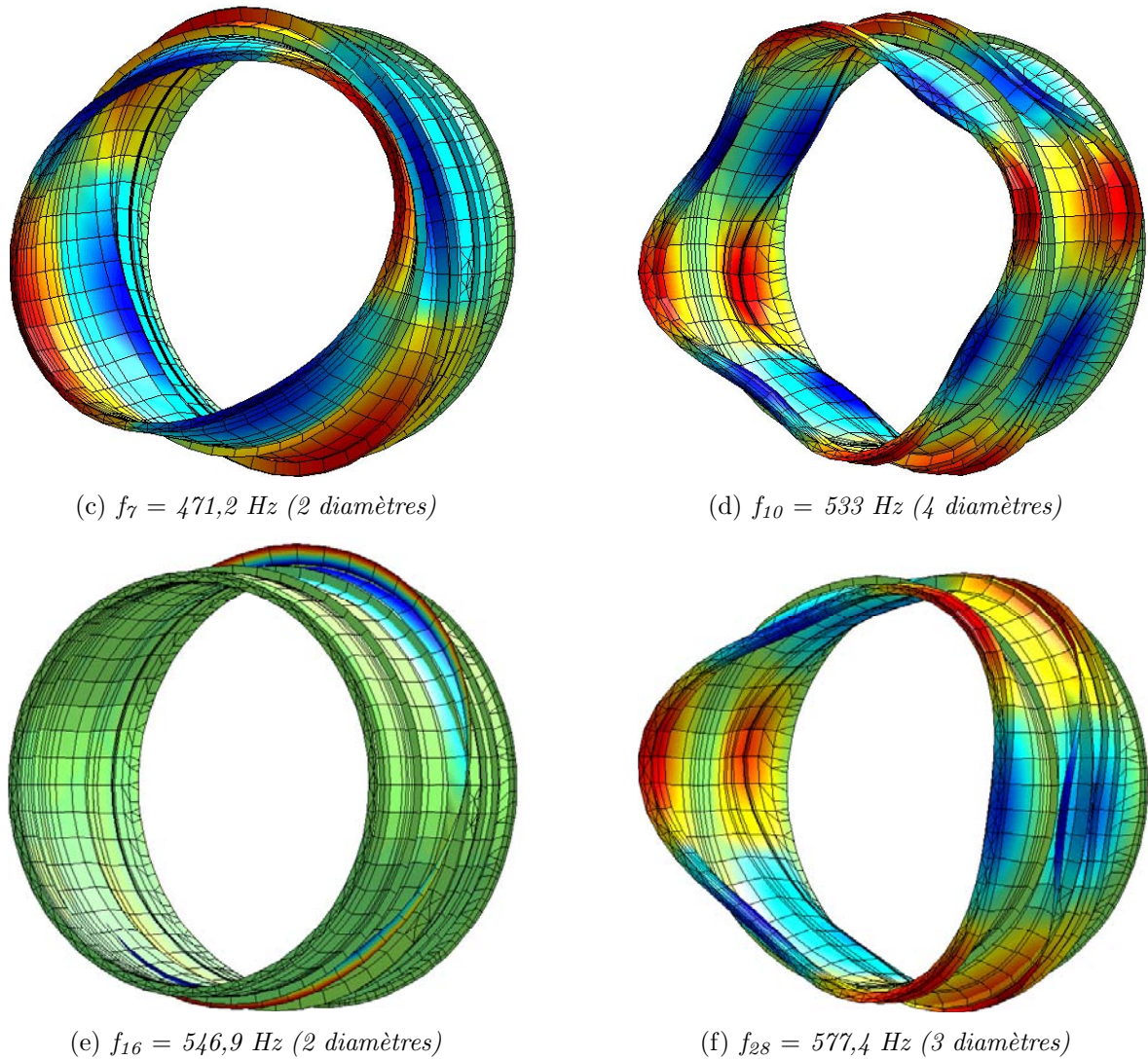


(a)  $f_1 = 316,9 \text{ Hz}$  (4 diamètres)



(b)  $f_3 = 326,5 \text{ Hz}$  (3 diamètres)





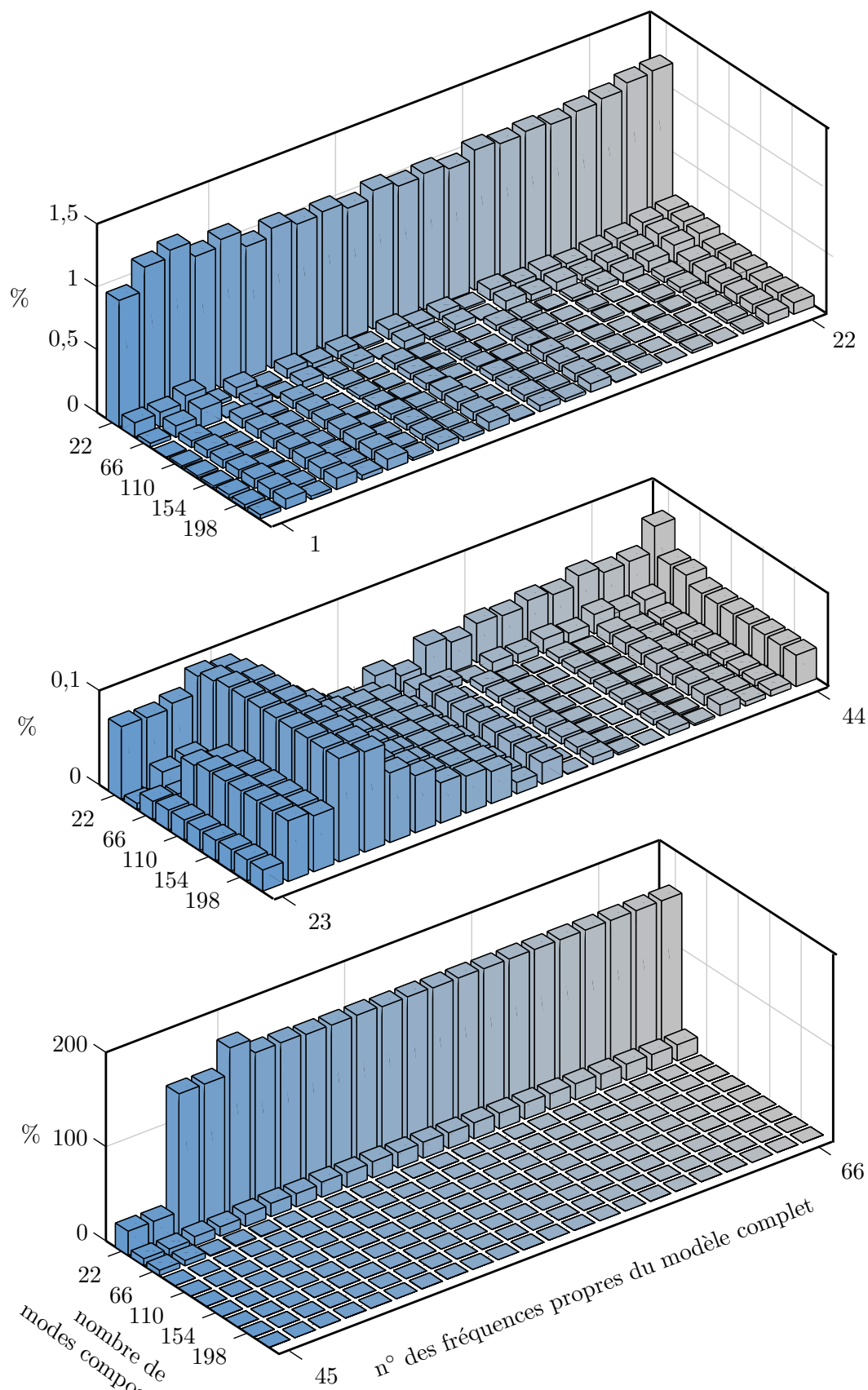
**figure 6.8** – Quelques modes composants du carter. L'indice en fréquence indique le numéro du mode. Tous les modes montrés sont doubles.

de type traction-torsion à zéro diamètre que l'erreur est maximale. Ceci s'explique en fait parce qu'il est difficile d'approcher la dynamique d'un tel mode par des modes à diamètres calculés en fixant des déplacements dans les directions  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  d'une couronne de nœuds. Le MAC entre ce mode et les premiers modes composants serait faible.

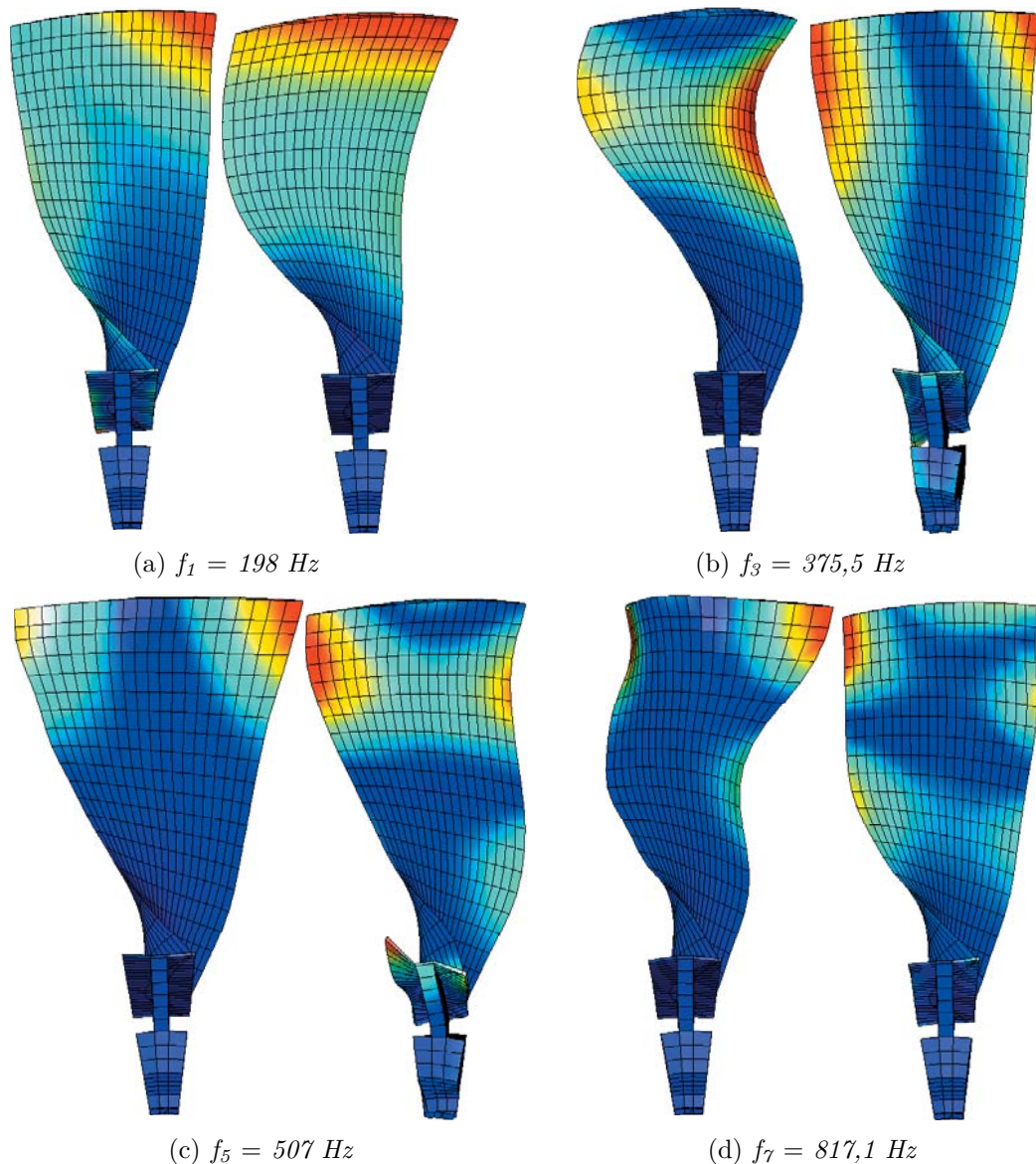
### roue aubagée

L'étude de la convergence du modèle réduit de cette structure suit une méthodologie spécifique. En effet, pour qu'elle ait un sens, il faut considérer des familles complètes de vingt-deux modes propres et des familles complètes de vingt-deux modes composants afin qu'aucun harmonique ne soit omis. En effet, Le premier diagramme de la figure 6.9 montre l'évolution des déviations fréquentielles du premier mode de flexion de l'aube sur les onze harmoniques de la roue aubagée et l'ensemble représente donc les vingt-deux premiers modes propres de la structure totale. Le deuxième diagramme illustre l'évolution des déviations fréquentielles du deuxième mode de flexion de l'aube. Ce cas est intéressant :





**figure 6.9** – Déviations des soixante-six premières pulsations propres de la roue aubagée en fonction du nombre de modes composants retenus lors de la réduction, en plus des quarante-quatre modes frontières déjà contenus dans le modèle réduit.



**figure 6.10** – Quelques modes composants de la roue aubagée selon le troisième harmonique, avec à gauche la contribution en cosinus et à droite, en sinus. L'indice en fréquence indique le numéro du mode. Tous les modes illustrés sont doubles.

on remarque en effet que l'erreur est très faible, environ 0,1% avec très peu de modes composants (22) et n'évolue plus beaucoup avec l'ajout de modes composants supérieurs. Cela s'explique facilement par la forme (presque) identique des modes propres et des modes composants : le MAC est alors proche de l'unité. Les vingt-deux premiers modes composants sont donc suffisants pour approcher la dynamique (dans le sens des valeurs propres) des modes propres vingt-trois à quarante-quatre du modèle complet. Tout ceci est vrai dans une moindre mesure pour les autres familles de modes. Le fait que la convergence des fréquences se fasse par couple est moins évident que pour le carter. En fait, les modes composants ont été calculés sur la structure complète et les fréquences ne sont jamais rigoureusement doubles à cause d'erreurs numériques dues à la taille du modèle. À titre indicatif, pour le premier mode de flexion selon le troisième harmonique, les deux

fréquences sont  $f_1 = 197,916$  Hz et  $f_2 = 197,941$  Hz, ce qui représente une différence d'environ 0,01%. À l'inverse, les fréquences propres ont été calculées dans l'espace des coordonnées cycliques et sont, elles, parfaitement doubles.

## 6.5 Gestion du contact

La gestion du contact est une adaptation de la méthode développée pour le modèle planaire évolué. La seule modification notable concerne la prise en compte des contraintes de contact par les fonctions splines mais la détection angulaire est reprise.

### 6.5.1 Transformations préalables

Le modèle 3D a été construit dans un repère cartésien global ( $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ ) reporté sur la figure 6.6 dans lequel sont exprimés les degrés de liberté en déplacement. À la suite de la réduction du modèle, la contribution des modes frontières est exprimée dans ce même repère. Afin de faciliter le calcul des distances entre les deux structures, il a été jugé préférable d'écrire les contributions des modes frontières dans un repère cylindrique ( $\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z$ ). Dans ce repère et sous l'hypothèse des petites perturbations, les distances dépendent alors linéairement des déplacements dans la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  des deux structures.

En notant  $\Phi_{CB}$  la matrice de changement de base de l'équation (6.1) (l'exposant  $(j)$  disparaît parce que qu'il n'y a pas d'étape de sous-structuration), les nouvelles matrices masse et raideur dans cet espace se calculent aisément :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{CB}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} &= \Phi_{CB}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} \cdot \Phi_{CB} \\ \mathbf{K}_{CB}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} &= \Phi_{CB}^T \cdot \mathbf{K}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} \cdot \Phi_{CB} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Pour calculer les matrices masse et raideur de Craig-Bampton dans le repère cylindrique,  $\mathbf{u}_f$  doit être exprimé dans ce même repère :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_f^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} \\ \mathbf{q} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]}_{\mathbf{P}_{CB}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_f^{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z} \\ \mathbf{q} \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de passage usuelle entre l'espace cartésien et l'espace cylindrique. Finalement, les deux matrices de Craig-Bampton que nous utilisons par la suite, et dont nous omettons le rappel au repère, s'écrivent :

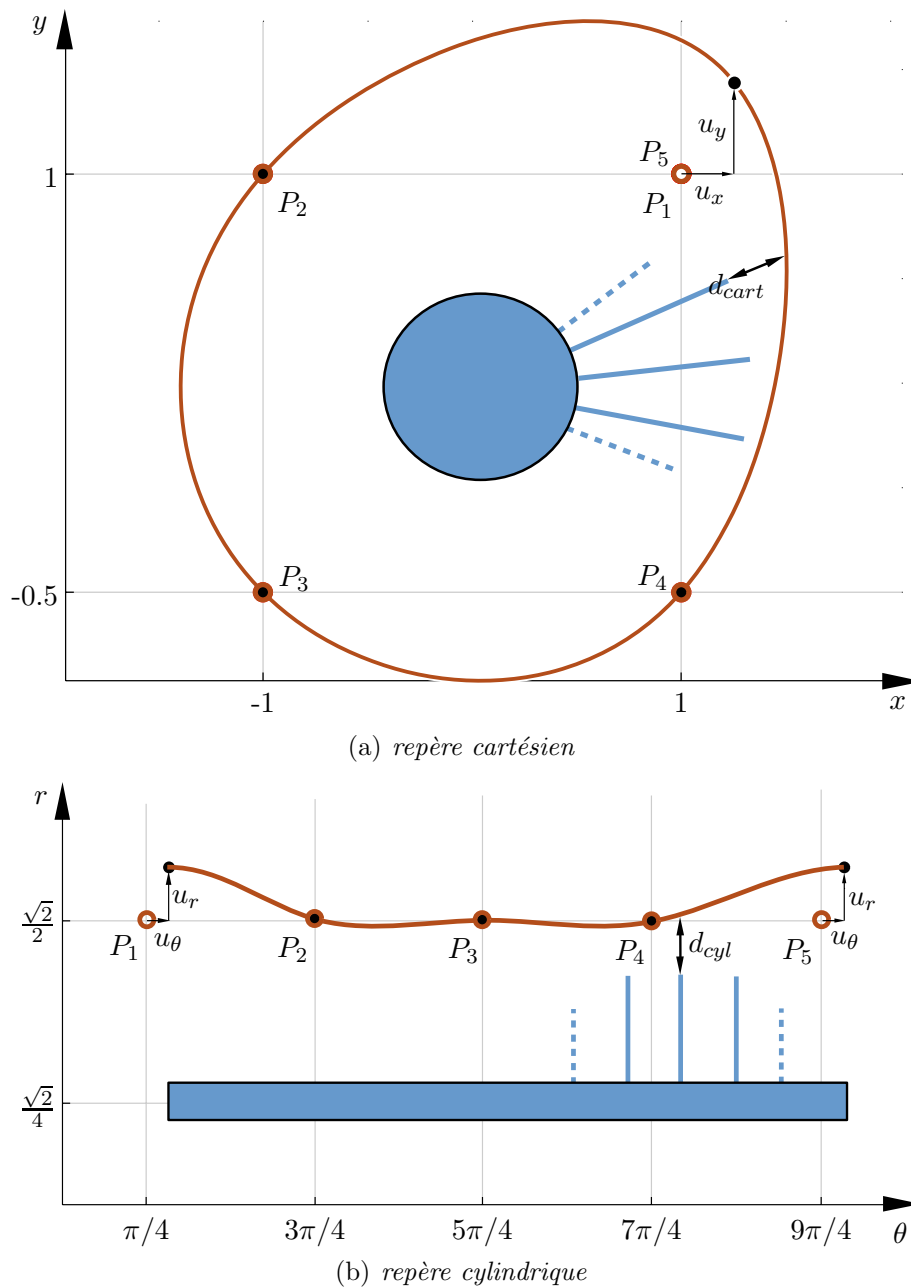
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{CB} &= \mathbf{M}_{CB}^{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z} = \mathbf{P}_{CB}^T \cdot \mathbf{M}_{CB}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} \cdot \mathbf{P}_{CB} \\ \mathbf{K}_{CB} &= \mathbf{K}_{CB}^{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z} = \mathbf{P}_{CB}^T \cdot \mathbf{K}_{CB}^{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z} \cdot \mathbf{P}_{CB} \end{aligned} \quad (6.16)$$

et ont une forme particulière :

$$\mathbf{M}_{CB} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{CB}^{ff} & \mathbf{M}_{CB}^{fq} \\ \mathbf{M}_{CB}^{qf} & \mathbf{I} \end{array} \right], \quad \mathbf{K}_{CB} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_{CB}^{ff} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\omega^2) \end{array} \right] \quad (6.17)$$



Cette modification géométrique ne change en aucun cas la formulation de la spline et cela



**figure 6.11** – Spline passant par un même ensemble de quatre points exprimés dans deux repères différents. Les conditions de continuité et de dérivabilité sont vérifiées dans les deux cas.

pour une raison très simple : le paramétrage  $t$  d'une spline étant intrinsèque, la méthode de construction de cette dernière ne dépend pas des points qui la contrôlent : seules leurs coordonnées ont changé de repère. Bien évidemment, il n'y a pas équivalence exacte entre les deux splines mais rien ne permet de préférer l'une d'entre elles. Une comparaison sur la figure 6.11 montre que les distances  $d_{cart}$  et  $d_{cyl}$  sont identiques.

## 6.5.2 Algorithme général

En termes mécaniques, le travail virtuel des efforts de contact implique la variation de la distance entre les structure et de ce fait, celle des fonctions splines au niveau de la détection du contact. Alors que dans le cas planaire évolué, la contribution du carter dans la fonction distance dépendait seulement des huit variables associées à l'élément potentiellement impacté, le caractère plein de la matrice  $\mathcal{A}^{-1}$  de l'équation (6.12) montre que la gestion du contact à l'aide d'une spline engage la totalité des nœuds de la structure sur laquelle elle s'appuie. Ce constat établi, en reprenant les notations du chapitre 2, c'est seulement au niveau du calcul des matrices de contact  $\mathbf{C}_N$  et  $\mathbf{C}_{NT}$  qu'une modification majeure intervient. Il est en effet nécessaire d'exprimer la variation de la spline en fonction des variables de déplacement du problème qui sont contenues dans la position des points de données puis d'intégrer sur le domaine par application de la procédure de Galerkin. Le contact est de type nœud-ligne et cette opération se résume au calcul de la spline en  $t$  donné, de façon similaire à l'équation (5.10) pour le premier modèle. Les points de contrôle étant déduits des points de données par inversion de l'équation (6.12), la procédure est simple et résumée dans l'algorithme général suivant :

**prédiction :** les contributions des deux structures sont calculées dans l'espace de Craig-Bampton cylindrique. La connaissance du déplacements des nœuds frontière permet de calculer la position des points de données de la spline. Grâce à la relation (6.12), on en déduit la position des points de contrôle.

**calcul des pénétrations :** la distance entre l'extrémité de chaque aube et l'abscisse curviligne de la spline qui lui fait face est calculée et les deux matrices de contact  $\mathbf{C}_N$  et  $\mathbf{C}_{NT}$  sont assemblées.

**correction :** les multiplicateurs de Lagrange sont calculés de façon à annuler les pénétrations détectées entre les deux structures en tenant compte le frottement.

Jusqu'à l'instant final, le temps est incrémenté avant un retour à la première étape.

## 6.6 Résultats

### 6.6.1 Vérification du modèle

À cause de la taille importante du modèle éléments finis 3D, la matrice  $\Phi_{CB}$  n'a pas été conservée à la suite de la réduction. Outre l'analyse de convergence modale sur la déviation des fréquences expliquée en section 6.4.2.2, il n'y a aucun recours pour vérifier la validité du modèle réduit, notamment au niveau des déplacements des modes frontières. Nous verrons par la suite que certains résultats concernant la roue aubagée peuvent paraître étranges et mériteraient une analyse plus fine. Néanmoins, une étude qui n'est pas présentée dans ce mémoire parce que d'intérêt limité a permis de démontrer que le comportement des structures était cohérent avec leur géométrie à symétrie cyclique. Elle portait en particulier sur l'analyse de la réponse statique des structures à une succession de chargements extérieurs déduits l'un de l'autre par rotation d'un angle précis (l'angle parcouru entre deux nœuds frontières successifs) dans le repère cylindrique. Comme at-



tendu, les réponses statiques sont, elles aussi, déduites l'une de l'autre par rotation de ce même angle.

À ce stade, seul le couplage entre les déplacements normaux et tangentiels en extrémité d'aube ne semble pas avoir une signification très physique. En effet, d'après ces résultats, en accord avec les simulations dynamiques qui sont présentées dans la suite, la rigidité d'une aube est plus élevée dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  que dans la direction  $\mathbf{e}_r$ . Une première explication se fonde sur le fait que la roue aubagée est réduite selon les déplacements des nœuds frontières dans les directions  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$ , or cette dernière n'est pas une direction privilégiée de flexion des aubes.

## 6.6.2 Cas n°1 : excitation extérieure à deux diamètres

L'étude de ce cas comprend plusieurs objectifs :

- déterminer un pas de temps optimal ;
- contrôler la bonne prise en compte du contact par les fonctions splines ;
- vérifier l'efficacité de la réduction sur une simulation dynamique incluant du contact.

À cette fin, les degrés de liberté frontières sont conservés tels quels et le carter est excité sur une forme à deux lobes, illustrée sur la figure 6.12 par un chargement externe impulsif d'une durée de  $100 \mu\text{s}$ . Tout autre type de déformation, en temps et en espace, est possible mais notre choix s'apparente à une dilatation thermique du stator, souvent rencontrée au cours de vols commerciaux.

Dans ce qui suit, la vitesse de rotation du moteur est fixée à  $350 \text{ rad/s}$  et l'amortissement structural inclus dans le modèle, en suivant une approche identique à celle du modèle planaire évolué, est très faible pour autoriser plusieurs contacts successifs. En plus des modes frontières, cent quarante modes composants pour le carter ainsi que soixante-six pour la roue aubagée sont retenus.

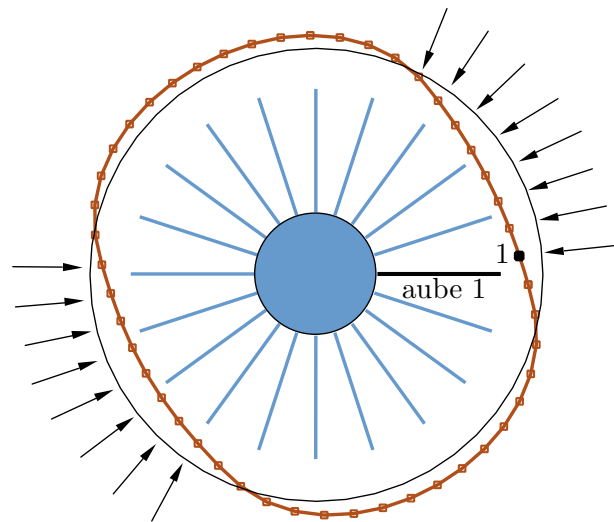
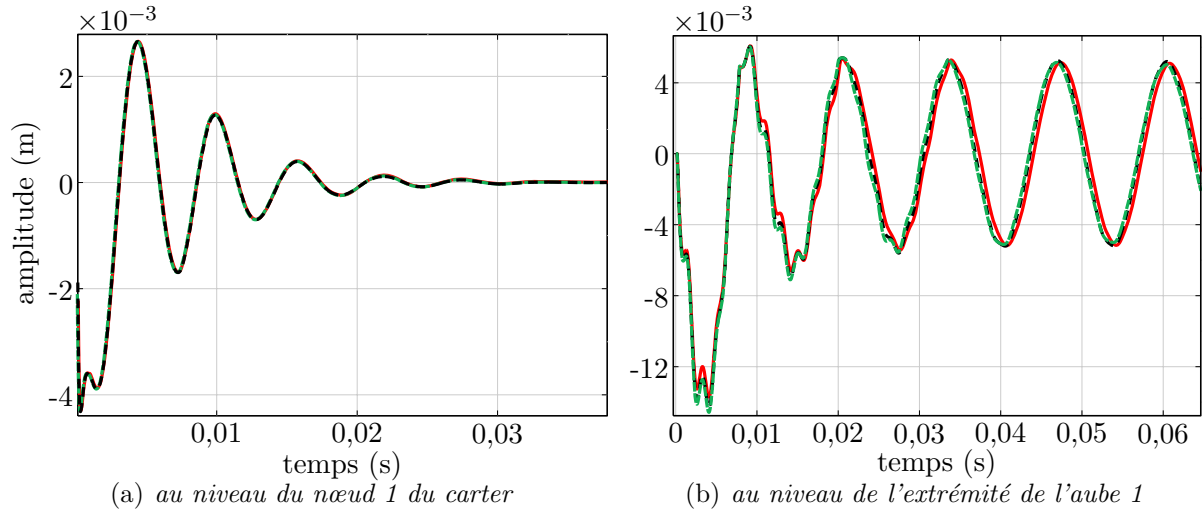


figure 6.12 – Chargement externe à deux lobes.

### 6.6.2.1 Sensibilité au pas de temps

Les déplacements à l'extrémité de l'aube 1 et du nœud 1 du carter sont comparés pour trois pas de temps différents sur la figure 6.13. Alors que le pas de temps critique de Courant est, pour l'ensemble rotor/stator :  $\Delta t = 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ , le fait que des contraintes de contact soient présentes augmente la raideur locale et par conséquent, diminue le pas de temps critique admissible de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . Pour des pas de temps supérieurs, une divergence numérique est détectée. Ceci dit, pour  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ , la différence avec les

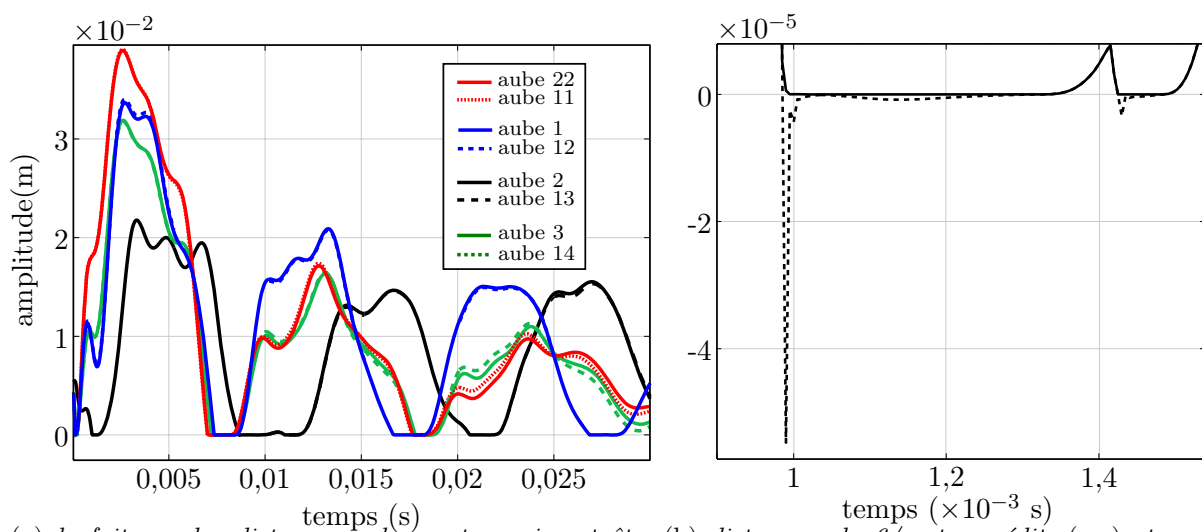
deux autres courbes, qui sont elles pratiquement indiscernables, augmente légèrement aux instants de contacts mais est constante pour le reste de la simulation lorsque le contact est définitivement perdu. Cela signifie que la méthode de gestion du contact diminue la taille du pas de temps mais exécute parfaitement son travail pour des pas de temps inférieurs.



**figure 6.13** – Influence de la taille du pas de temps sur le déplacement des structures pendant l'interaction :  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  s (—),  $\Delta t = 10^{-6}$  s (—) et  $\Delta t = 10^{-7}$  s (—).

## 6.6.2.2 Vérifications des contraintes de contact

Afin de s'assurer que les contraintes de contact sont correctement prises en compte dans l'algorithme, il faut vérifier à la fois le signe des distances inter-structures et le sens des efforts de frottement. Le pas de temps choisi est  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Le premier point est illustré sur la figure 6.14(a). On remarque que les distances de pénétrations restent



**figure 6.14** – Procédure de gestion du contact par éléments splines. Les distances après correction sont positives ou nulles.



toujours positives, ce qui est cohérent avec les contraintes de contact. Cette figure illustre aussi la symétrie de ce cas d'étude en particulier puisque les distances sont (presque) identiques deux à deux, phénomène du tout autant au type d'excitation extérieure à deux lobes appliquée qu'à la géométrie du rotor constitué d'un nombre pair d'aubes. Le deuxième point est évoqué sur les figures 6.15(a) et 6.15(b). Au niveau du carter, le couplage géométrique entre  $u$  et  $v$  est évident. Aussi, à la suite un déplacement négatif dans la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  provoqué par l'excitation externe, un rebond apparaît du fait du premier impact entre les deux parties vers  $t = 3 \cdot 10^{-4}$  s, ce qui est cohérent avec la figure 6.15(b) où le premier impact entre l'aube 1 et le carter est détectée à cet instant. Pour ce dernier, les déplacements dans la direction tangentielle diffèrent selon la valeur du coefficient de frottement. Toutes ces remarques sont valables de la même manière pour la

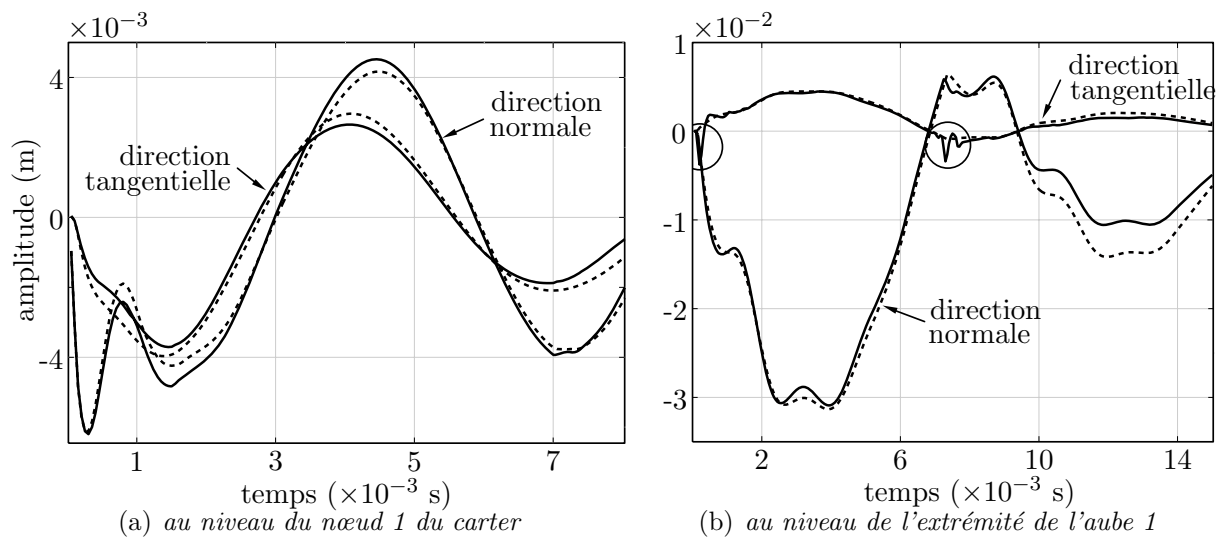


figure 6.15 – Déplacements en fonction du coefficient de frottement :  $\mu = 0$  (—) et  $\mu = 1$  (- -).

roue aubagée. Les instants de contact sont indiqués par des cercles sur la figure 6.15(b). La rotation du moteur s'effectuant dans le sens direct, le frottement augmente le déplacement tangentiel du carter (la courbe (—) est alors au dessus de la courbe (- -)) et le diminue en extrémité d'aube (à cet instant, la courbe (—) est en dessous de la courbe (- -)). Ensuite, la légère déformation provoquée par ce contact éphémère disparaît au profit d'un couplage géométrique.

Cependant, une question subsiste. On peut en effet s'interroger sur l'amplitude de déplacement radial en bout d'aube de l'ordre de trois centimètres, remarque cohérente avec la souplesse de l'aube dans cette direction évoquée précédemment, et qui, d'une manière intuitive, semble excessive.

### 6.6.2.3 Étude de la convergence modale

Même si une étude de convergence modale par déviation des fréquences a démontré le bon comportement du modèle réduit, cette dernière n'est pas suffisante. En effet, rien ne prouve que sous un chargement dynamique, le MAC soit un critère suffisant. C'est dans cette optique que nous comparons les déplacements des structures pour des modèles

réduits comprenant un nombre croissant de modes composants récapitulés dans le tableau 6.1. Dans cette simulation,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$  s. Les temps de calcul mentionnés dans le

cas	nombre de modes composants		légende	temps de calcul
	carter	roue aubagée		
n°1	50	22	---	1
n°2	150	66	- - -	2,27
n°3	250	110	---	4,18
n°4	350	154	- - -	6,25

tableau 6.1 – Caractéristiques du modèle réduit

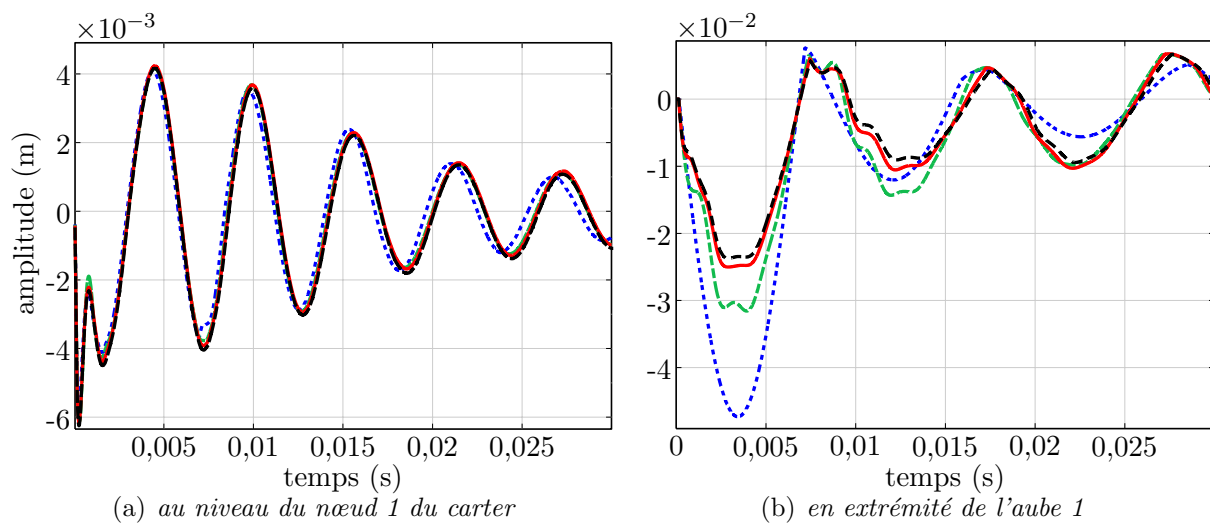


figure 6.16 – Évolution des déplacements en fonction du nombre de modes composants inclus dans le modèle réduit. Pour la légende, voir le tableau 6.1.

tableau 6.1 sont normés par rapport au temps le plus court. On peut d'emblée mentionner que le problème posé par la réduction de la roue aubagée est confirmé sur la figure 6.16(b). En effet, alors que le carter ne nécessite que très peu de modes composants (il semble que cinquante modes composants suffisent pour le cas traité, cf. figure 6.16(a)), la convergence temporelle du modèle de la roue aubagée est très lente et l'ajout de deux familles de modes composants entre deux cas successifs génère une différence importante au niveau du déplacement du nœud frontière dans la direction radiale, particulièrement lors du premier impact. Cette étude nécessite donc une confirmation pour dégager des conclusions pertinentes sur les facteurs prévisibles de gain de temps. Néanmoins, en combinant ces résultats à ceux concernant un pas de temps optimal, il n'est pas exagéré de penser que les temps de calcul puissent être sensiblement réduits sans détérioration de la précision.

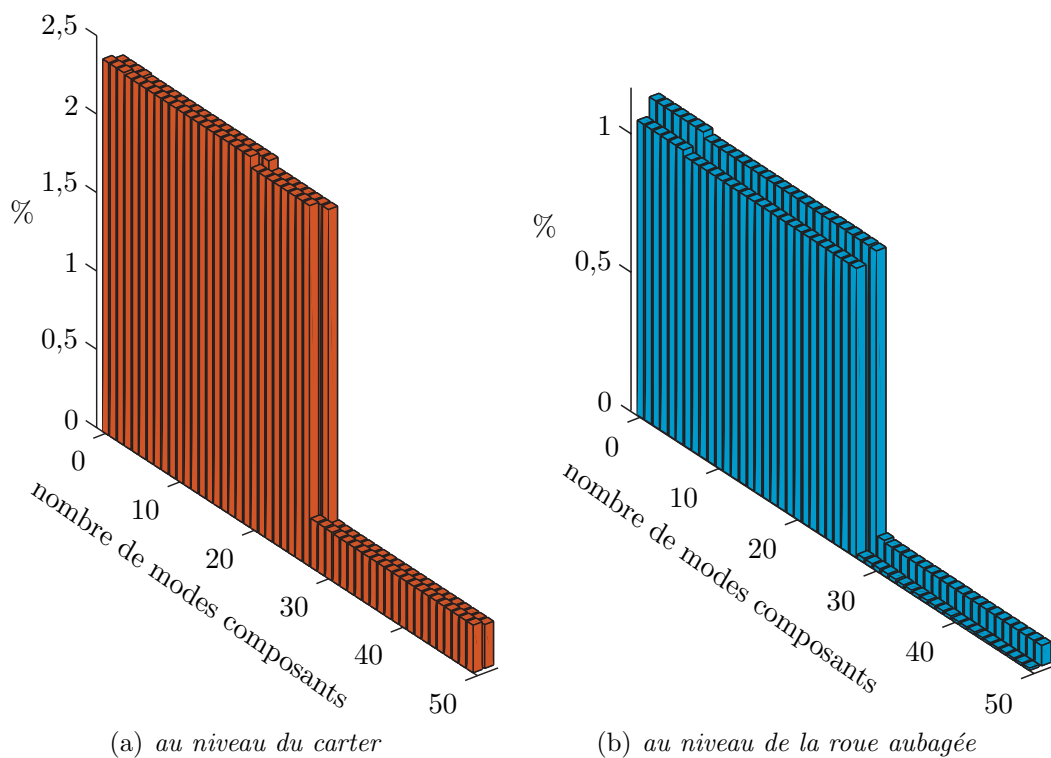
### 6.6.3 Cas n°2 : interaction modale à trois diamètres

Ce cas d'étude a pour but de vérifier que ce modèle 3D réduit permet de détecter une interaction modale potentiellement dangereuse. Il est possible d'imaginer une étude pa-

ramétrique en fonction de l'amortissement structural, de la durée ou de l'amplitude de l'excitation initiale. On se limite à l'étude des amplitudes de vibration en fonction de la vitesse de rotation du moteur. Le chargement initial s'inscrit dans la procédure habituelle : le premier mode à trois diamètres du carter est excité par une force impulsionnelle d'une durée de 100  $\mu$ s d'amplitude suffisante pour générer un contact.

### 6.6.3.1 Réduction du modèle

La discussion porte sur le nombre de modes composants à conserver et sur la méthode de réduction finale. En fait, nous avons déjà constaté que c'est la présence de certains modes composants qui diminue sensiblement la déviation des fréquences. Pour le cas qui nous



**figure 6.17** – Évolution de la déviation des fréquences des deux premiers modes à trois diamètres des deux structures en fonction de la participation des cinquante premiers modes composants dans le modèle réduit.

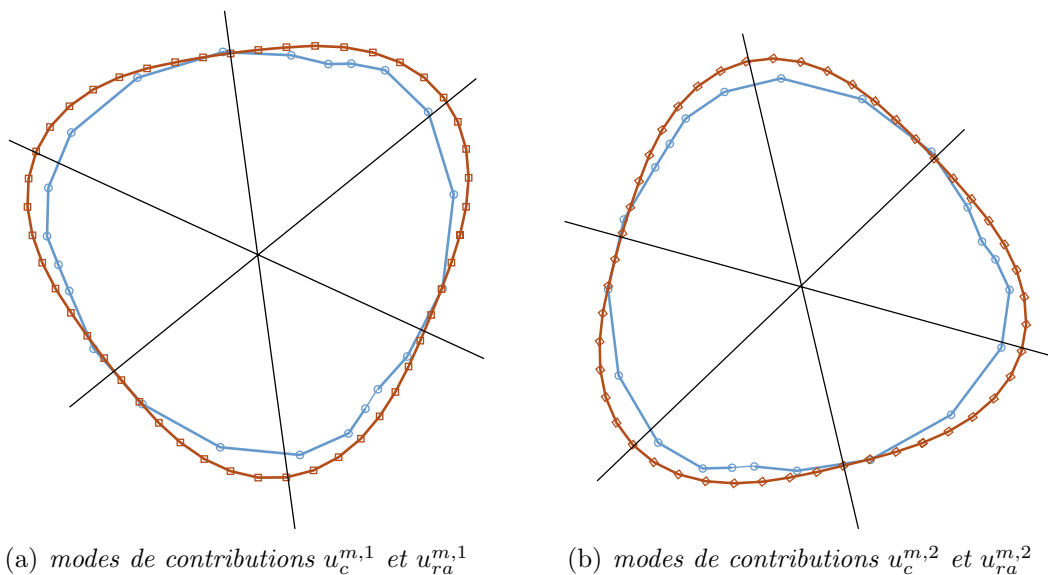
concerne, c'est-à-dire une interaction modale à trois diamètres, il est possible de montrer qu'un nombre très restreint de modes composants à trois diamètres suffit. En effet, sur la figure 6.17, il est facilement vérifiable que ce sont les modes composants 28 et 29 des deux structures qui jouent un rôle important dans la dynamique des deux premiers modes propres à trois diamètres. À propos du carter, il est intéressant de noter que deux modes composants à trois diamètres précèdent les modes 28 et 29 (de fréquence plus basse d'après la figure 6.8, ils sont situés en position 3 et 4) mais n'ont aucun rôle dans l'amélioration du critère de convergence.

La question se pose maintenant de savoir comment réduire efficacement le modèle. Deux

alternatives sont proposées :

- la matrice  $\Phi_{CB}$  est construite en conservant tous les modes frontières ainsi que les deux modes composants à trois diamètres retenus. Les matrices masse et raideur qui découlent du changement de base sont ensuite diagonalisées. Les modes propres associés constituent une combinaison *figée* de tous les modes frontières et de deux modes composants. Parmi ces nouveaux vecteurs propres, il existe plusieurs modes à trois diamètres (visibles au niveau des déplacements des ddl frontières). On conserve les deux pour lesquels la déviation des fréquences est la plus faible. C'est la méthode utilisée pour l'établissement des diagrammes de la figure 6.17 par exemple. Le modèle réduit est alors constitué de quatre degrés de liberté, à savoir les deux contributions « figées » de chaque structure ;
- une fois le changement de base effectué, les matrices masse et raideur de Craig-Bampton sont partitionnées entre les ddl frontières  $\mathbf{u}_f$  et les contributions  $\mathbf{q}$  des modes composants. Les matrices  $\mathbf{M}_{CB}^{ff}$  et  $\mathbf{K}_{CB}^{ff}$  (cf. équation (6.17)) sont diagonalisées et les deux premiers modes à trois diamètres sont retenus. La combinaison entre ces deux modes frontières à trois diamètres et leurs homologues composants est alors libre. Le modèle réduit est donc constituée de huit degrés de liberté, à savoir deux contributions des modes frontières à trois diamètres et deux contributions des modes composants à trois diamètres pour chaque structure. Cette formulation est légèrement plus riche que la précédente.

Pour des raisons d'efficacité et de temps de calcul, nous retenons la première proposition. En fait, il s'avère que plus la formulation est riche, moins une interaction modale à trois diamètres est facile à détecter. Il est opportun de préciser que la double réduction pro-



**figure 6.18** – Les deux modes à trois diamètres du carter et de la roue aubagée utilisés dans la simulation d'une interaction modale. Les indicateurs  $\square$  et  $\circ$  illustrent la position des nœuds frontières.

posée, une synthèse modale à interface fixe suivie d'une diagonalisation sur les modes



propres, bien que répandue, est très puissante. En effet, elle autorise un traitement du contact rigoureux avec un nombre minimal d'inconnues en minimisant la taille de la matrice de passage entre l'espace où les déplacements sont prédits et l'espace physique où les contraintes de contact sont prises en compte. À l'avenir, cette procédure peut constituer une évolution du second modèle planaire dans l'optique de réduire les coûts informatiques.

### 6.6.3.2 Comportement des structures

La taille du pas temps pour une bonne détection du contact pose toujours problème ; ceci n'est pas présenté dans cette partie. Puisque la matrice globale d'alternance entre l'étape de prédiction des déplacements et l'étape de prise en compte des contraintes de contact est de faible dimension,  $\Delta t = 10^{-7}$  s représente un bon compromis.

Pour rappel, l'étude porte sur l'interaction modale des premiers modes à trois diamètres du carter et de la roue aubagée. Les fréquences propres respectives sont  $f_{ra} = 75,2$  Hz et  $f_c = 160,3$  Hz et la vitesse critique calculée grâce à l'équation (1.12) est :  $\Omega_c = 492,18$  rad/s.

Les résultats sont présentés pour trois vitesses de rotations différentes, toutes supérieures à la vitesse de rotation critique théorique. Le comportement de l'ensemble rotor/stator est similaire à celui de l'ensemble planaire évolué. Numériquement, il existe une (des) vitesse(s) critique(s) en dessus de laquelle (desquelles) les amplitudes de vibration des deux structures divergent (cf. figures 6.25 et 6.26) et en dessous de laquelle, le contact est perdu assez rapidement jusqu'à ce que les vibrations disparaissent (cf. figures 6.21, 6.20 et 6.19).

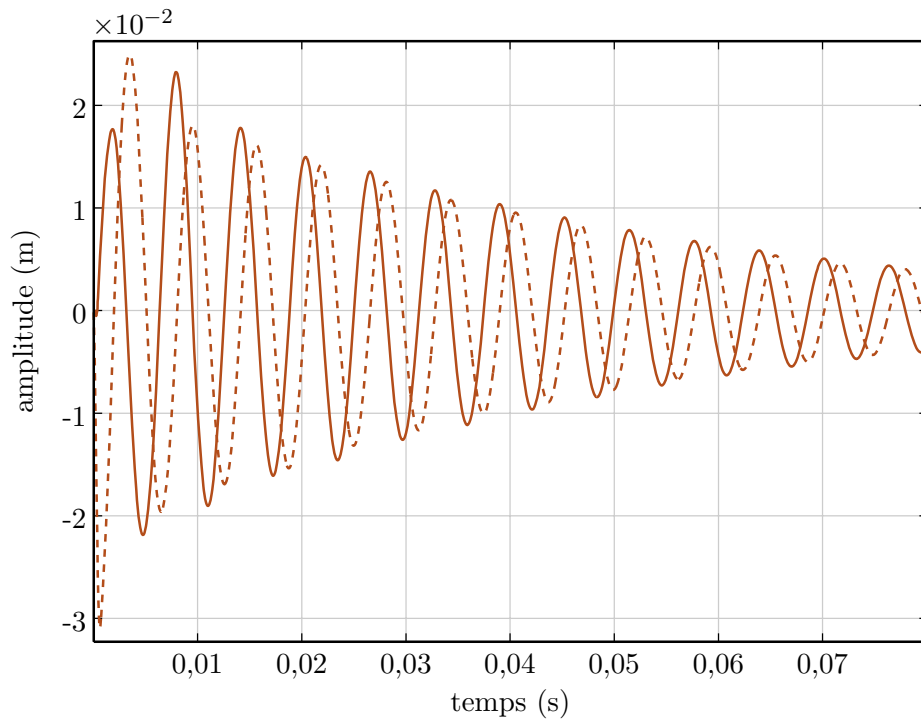
Pour des vitesses de rotation appartenant grossièrement à l'intervalle  $[600, 670]$  rad/s, un contact intermittent s'instaure entre les deux structures (cf. figure 6.24) et les vibrations sont telles qu'un mode tournant avance apparaît au niveau du carter et un mode tournant rétrograde au niveau de la roue aubagée. Pour  $\Omega = 670$  rad/s, une succincte étude fréquentielle des vibrations des structures illustrée sur les figures 6.27 et 6.28 annonce la vitesse :

$$\Omega_c = \frac{2\pi(157 + 163)}{3} = 670,2 \text{ rad/s} \quad (6.18)$$

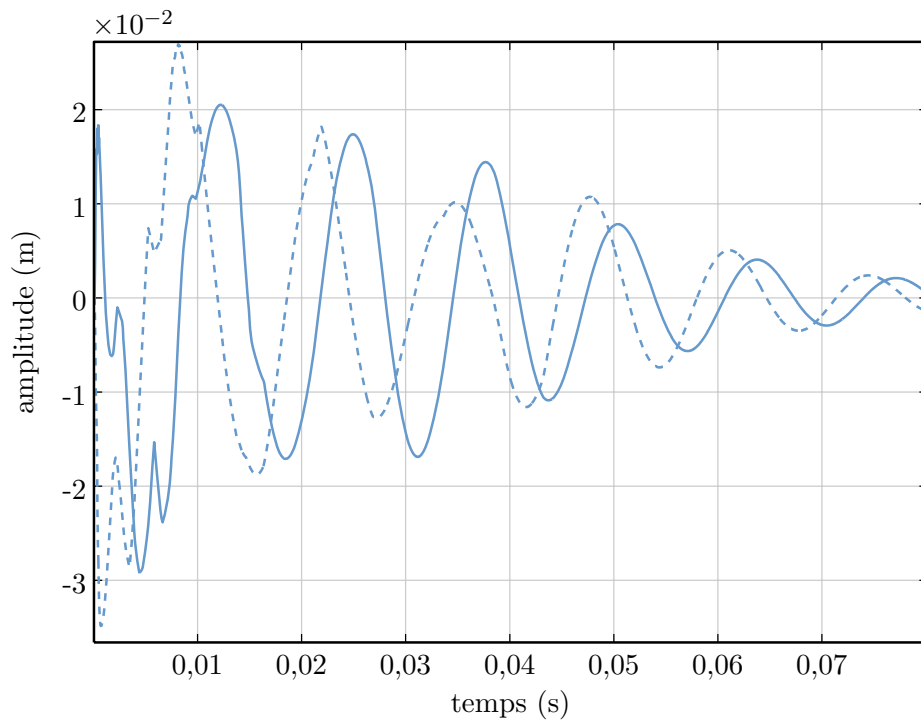
Cette égalité signifie que la condition d'embrassement est vérifiée mais aussi que les structures ne vibrent pas selon leur fréquence propre. Ces résultats se distinguent de ceux issus du modèle planaire évolué puisque pour des raisons qui demeurent inexplicées, la vitesse critique numérique, de l'ordre de 675 rad/s et au-dessus de laquelle les amplitudes de vibration divergent, n'est pas égale à la vitesse critique théorique.

Il est assez étonnant de s'apercevoir que ce régime limite se caractérise par des vibrations du carter à une fréquence proche de leur fréquence propre (157 Hz contre 160 Hz) mais aussi par des vibrations de la roue aubagée à une fréquence double de leur fréquence propre (163 Hz contre 75 Hz). Il se peut que cette différence concernant la roue aubagée provienne du problème de réduction modale déjà évoqué.





**figure 6.19** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 500$  rad/s et  $n_d = 3$ . Après la perte de contact, les amplitudes diminuent lentement à cause de l'amortissement structural jusqu'à disparaître.

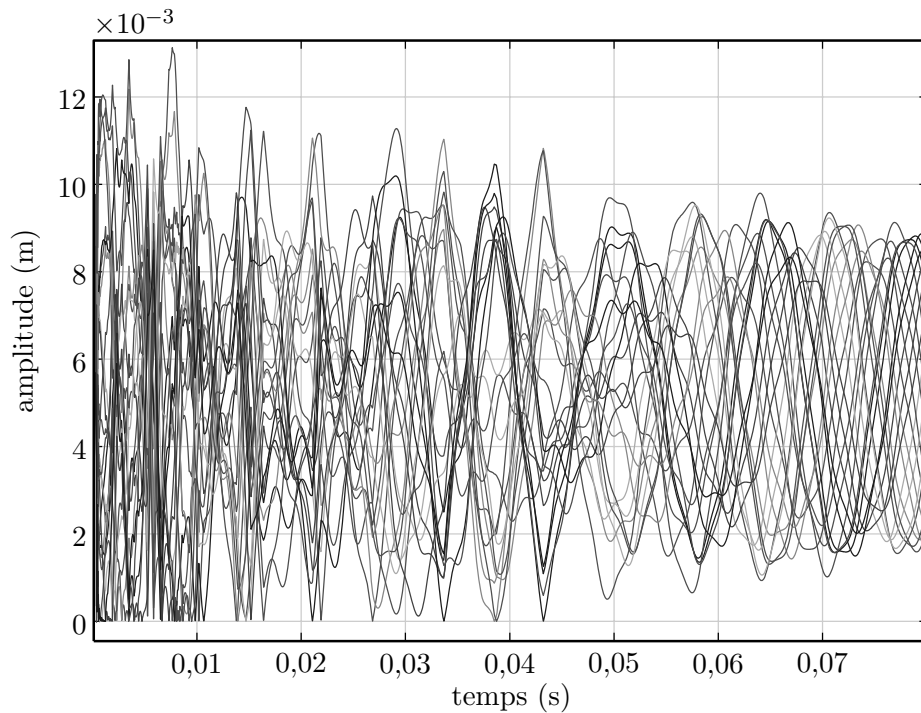


**figure 6.20** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 500$  rad/s et  $n_d = 3$ . Après la perte de contact, les amplitudes diminuent lentement à cause de l'amortissement structural jusqu'à disparaître.

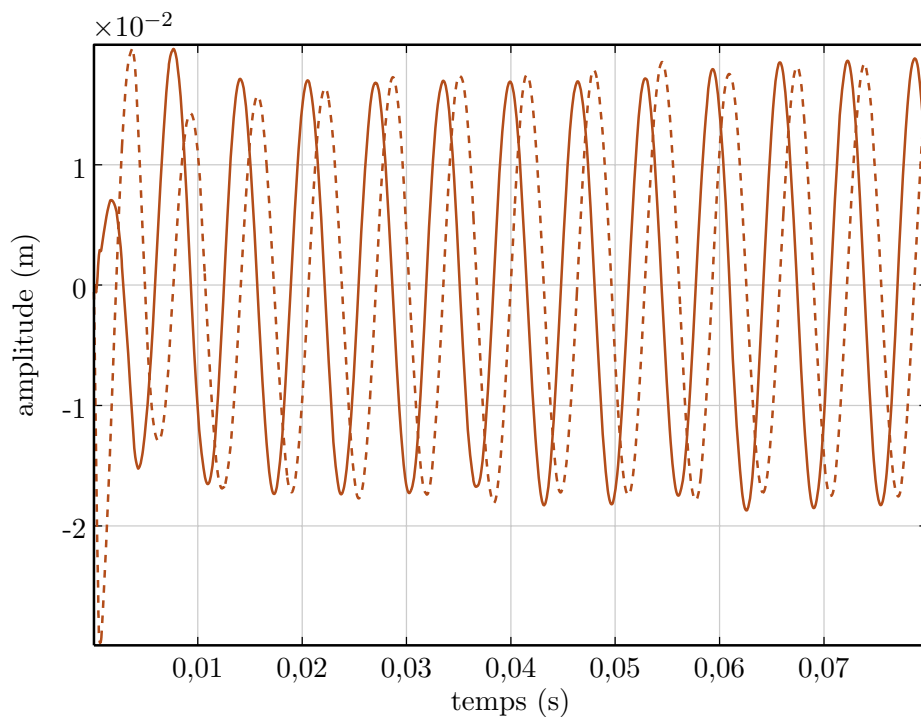
## Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle 3D d'une turbo-machine a été adapté de manière optimale afin de détecter une interaction modale en des temps de simulation très courts. Dans



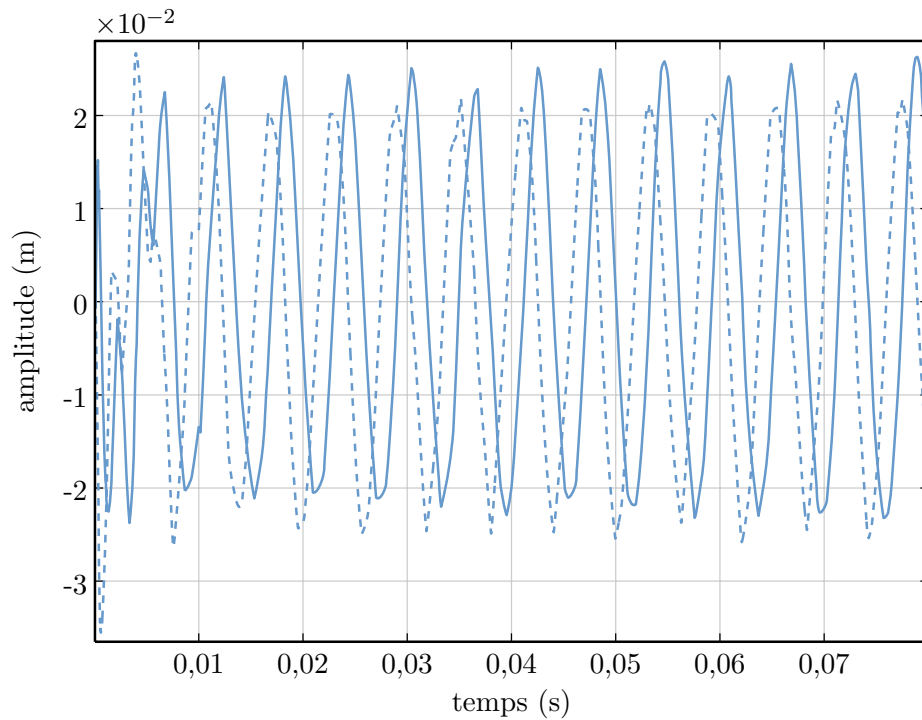


**figure 6.21** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes pour  $\Omega = 500 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 3$ . Après quelques impacts initiaux le contact entre les deux structures est perdu définitivement vers 0,04 s.

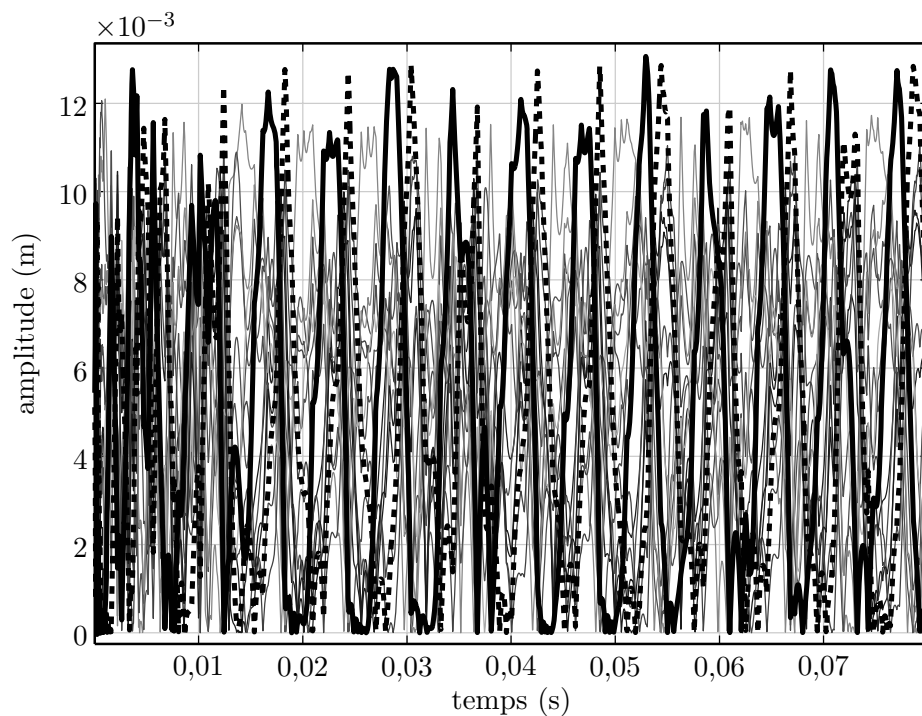


**figure 6.22** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (- - -) pour  $\Omega = 670 \text{ rad/s}$  et  $n_d = 3$ . Cette vitesse critique engendre un cas d'interaction modale limite pour lequel un mode tournant avance apparaît au niveau du carter.

cette optique, la réduction du modèle est réalisée par une procédure de synthèse modale à interface fixe, plus précisément la méthode Craig-Bampton. Une étude de la diminution de la déviation des fréquences en fonction du nombre de modes composants retenus démontre



**figure 6.23** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (- - -) pour  $\Omega = 670$  rad/s et  $n_d = 3$ . Cette vitesse critique engendre un cas d'interaction modale limitée pour lequel un mode tournant rétrograde apparaît au niveau de la roue aubagée.



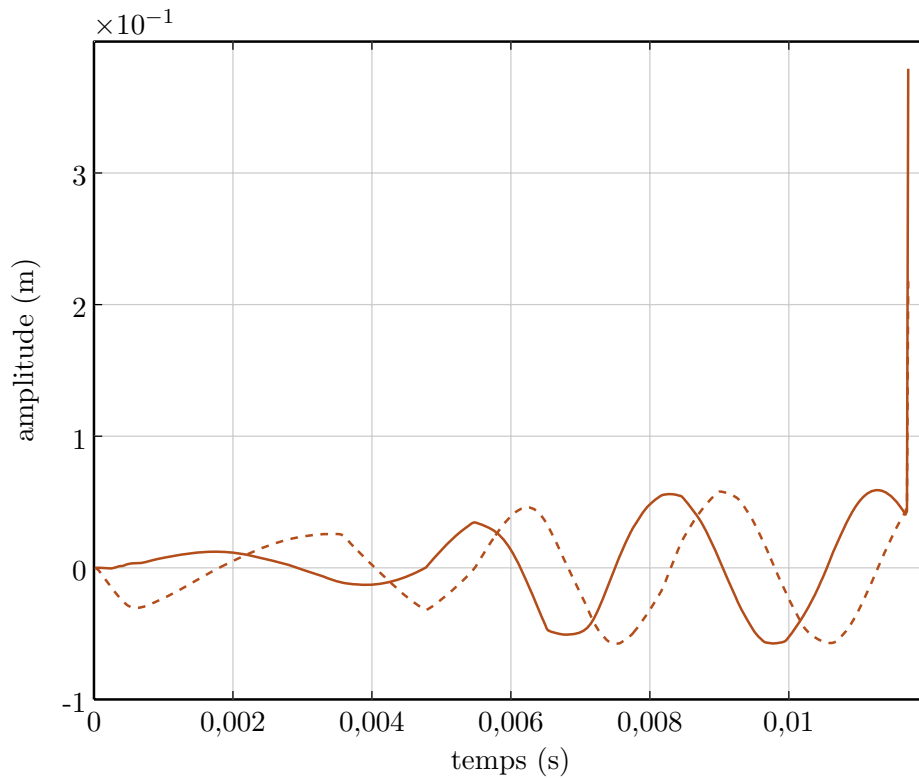
**figure 6.24** – Distances entre le carter et l'extrémité des aubes pour  $\Omega = 670$  rad/s et  $n_d = 3$ . Les contacts, décrits pour deux aubes (—) et (- -), sont intermittents.

la qualité de la réduction.

La facétisation, née d'une discrétisation par éléments finis d'une structure, est à l'origine





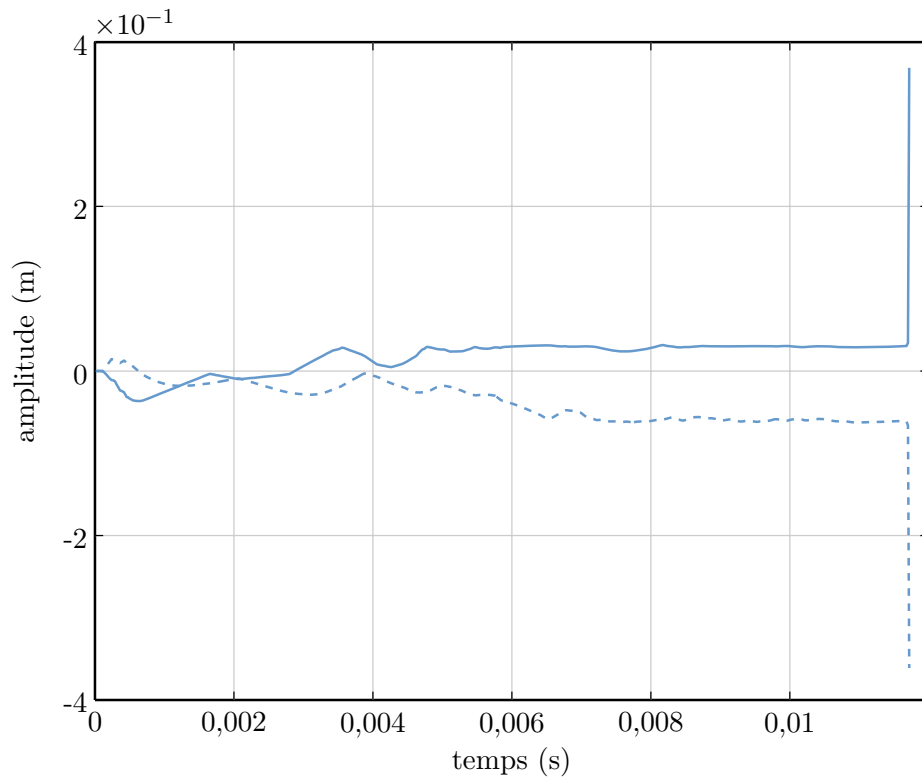


**figure 6.25** – Vibrations modales du carter  $u_c^{m,1}$  (—) et  $u_c^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 700$  rad/s et  $n_d = 3$ . Pour cette vitesse de rotation légèrement supérieure à la vitesse critique, il y a divergence des déplacements après quelques tours moteur.

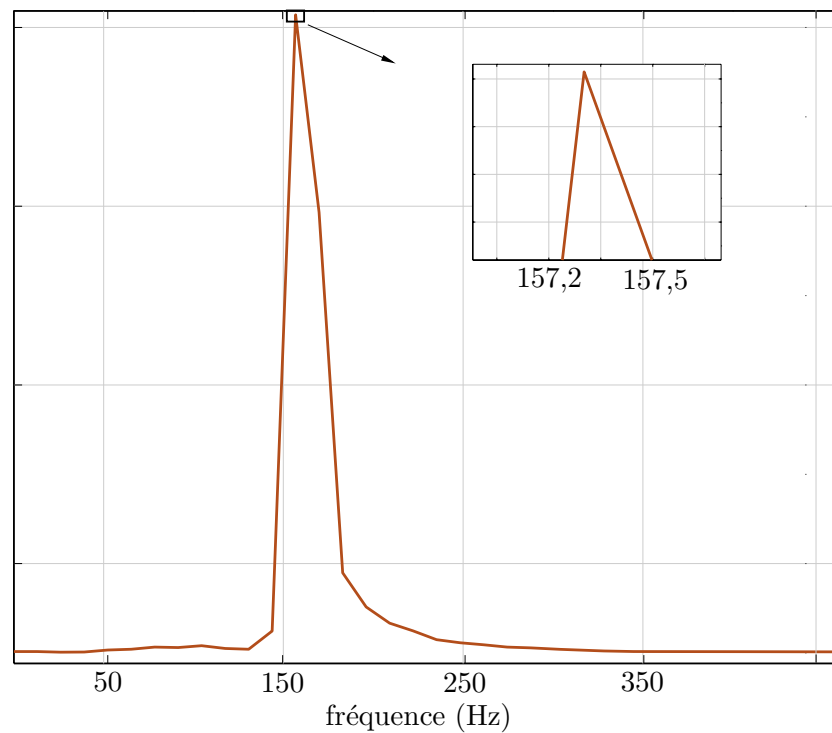
de nombreux problèmes théoriques et numériques dans le traitement du contact. Une hypothèse simplificatrice stipulant que le contact n'a lieu que sur une circonférence de nœuds au niveau du carter a été l'étape initiatrice au développement d'un enrichissement fonctionnel à l'aide de fonctions splines.

Un premier exemple montre la robustesse de la procédure mise en œuvre pour la gestion du contact, mais aussi l'intérêt de la réduction pour des temps de calcul convenables et des études paramétriques. N'importe quelle situation d'interaction engendrée par une excitation extérieure est possible. Toutefois, il ne faut pas manquer de remarquer qu'une interrogation, demeurant pour l'instant sans réponse physique précise, a été soulevée concernant la souplesse excessive des aubes en traction à la suite de la réduction du modèle. Si l'on s'en tient aux résultats actuels en supposant qu'ils sont exacts, ce comportement « étrange » est sans doute lié au choix des degrés de libertés frontières dans le plan orthogonal à l'axe de rotation du moteur. On peut donc penser que cette hypothèse représente une limite à notre modèle et une généralisation à un mouvement 3D (selon les directions  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$ ) de la procédure de réduction sur plusieurs nœuds de la corde en sommet d'aube ainsi que sur une couronne de largeur non nulle du carter est une évolution à considérer. Le traitement du contact par une spline surfacique serait inhérente à cette perspective.

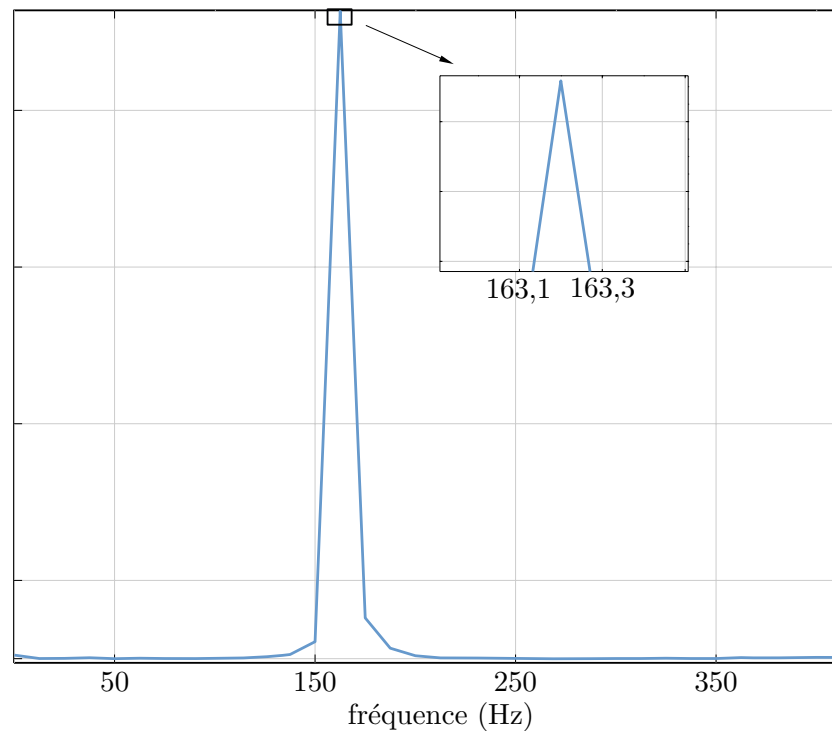
Une deuxième exemple, à l'image des deux premiers modèles planaires développés, atteint une taille minimale de quatre degrés de liberté grâce à une seconde réduction modale du modèle de Craig-Bampton obtenu auparavant, ceci afin de se concentrer sur le phé-



**figure 6.26** – Vibrations modales de la roue aubagée  $u_{ra}^{m,1}$  (—) et  $u_{ra}^{m,2}$  (---) pour  $\Omega = 700$  rad/s et  $n_d = 3$ . Pour cette vitesse de rotation légèrement supérieure à la vitesse critique, il y a divergence des déplacements après quelques tours moteur.



**figure 6.27** – Contenu fréquentiel de la réponse du carter pendant le cas limite d'interaction modale.



**figure 6.28** – Contenu fréquentiel de la réponse de la roue aubagée pendant le cas limite d'interaction modale.

nomène d'interaction modale. On montre qu'une vitesse critique existe pour laquelle des modes tournants, respectivement avance pour le carter et rétrograde pour la roue aubagée, apparaissent. Au-dessus de cette vitesse critique, un régime divergent est détecté. Pour des vitesses inférieures, le contact initial est rapidement perdu. Cependant, la vitesse de rotation critique numérique  $\Omega_c$  ne répond pas à la condition théorique :

$$\omega_c = n_d \Omega_c - \omega_{ra} \quad (6.19)$$

pour des raisons qui restent à déterminer mais probablement en relation avec la réduction modale du modèle de la roue aubagée.

# Bilan et perspectives

## Bilan des travaux

La présentation de ce mémoire a pour l'essentiel suivi l'ordre chronologique. Notre propos était de développer différents modèles de moteur d'avion, et plus particulièrement sa pointe avant comprenant une roue aubagée de type fan et un carter, dans l'optique de prédire un phénomène d'interaction.

Une théorie proposant une interprétation de cet événement, fondée sur des hypothèses simples, ainsi que le cadre de la mécanique du contact constituent les bases du développement d'algorithmes et de méthodes numériques. Ensuite, et c'est la partie essentielle, notre travail couvre trois modélisations différentes de complexité croissante, dont l'évolution est notamment dictée par les limitations mais aussi par une meilleure appréhension du phénomène grâce aux questions soulevées lors de la mise en équations.

L'avantage majeur des développements proposés est de permettre l'apparition d'une interaction modale généralement en accord avec la théorie. On constate que le modèle est représentatif s'il comprend les ingrédients suivants :

- un couplage géométrique des formes modales des deux entités en vis-à-vis ;
- un champ de déplacement assez riche permettant la prise en compte d'une loi de contact cohérente d'un point de vue physique.

Toutefois, la méthode de résolution couplant multiplicateurs de Lagrange et schéma temporel explicite ainsi que la réduction des structures dans l'espace modal, figeant ainsi tous les degrés de liberté, a introduit une limitation générale aux trois modèles : il s'agit d'une singularité dans la détection du contact due à la propagation à vitesse infinie d'une onde de déformation générée localement.

Une solution originale considère ce même problème dans le domaine fréquentiel. La complexité du comportement physique des deux structures demande une généralisation de la méthode de l'équilibrage harmonique à des systèmes oscillants mais apériodiques. La procédure conduit à un ensemble d'équations algébriques non-linéaires qui peut être apprécié sous l'angle de la théorie des modes non-linéaires. À ce stade du travail, cette méthode n'a pas encore abouti du fait de certaines difficultés numériques mais conserve toutes ses promesses.

Même si cela n'a pas encore été réalisé, il semble tout à fait possible que la modélisation



industrielle présentée dans le dernier chapitre de ce mémoire bénéficie de cette formulation fréquentielle. En effet, la méthode de synthèse modale, l'enrichissement fonctionnel ainsi que l'intégration temporelle des équations ont permis de montrer un comportement similaire à celui du second modèle planaire.

## Perspectives

L'intégralité de ces développements constitue les prémices de la recherche dans ce domaine. En effet, à l'heure actuelle seule l'efficacité des modélisations dans la détection d'une interaction modale a été prouvée. La compréhension du phénomène en elle-même, les causes exactes de son apparition ainsi que les différences avec la théorie, pour ne citer qu'elles, n'ont pas été abordées. C'est d'ailleurs dans cette optique qu'est né le développement de la procédure fréquentielle.

Le modèle 3D a montré quelques faiblesses, principalement dans le choix assumé de traiter le contact dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du moteur. Ceci dit, la faisabilité de la méthode n'est pas du tout remise en cause et son extension à un mouvement en trois dimensions semble possible sur tout type de structure (roue aubagée de compresseur ou de turbine) et sous tout type de chargement. Pour résumer, les méthodes mises en œuvre dans ce travail répondent aux exigences de nombreux champs d'investigation :

- dans ce contexte d'interaction, est-il préférable que la géométrie des aubes « ferme » ou bien « ouvre » le jeu entre les structures?
- quel est le rôle du désaccordage quant à l'atténuation du phénomène?
- quel type de matériau abrasable semble le plus approprié pour minimiser des conséquences d'un tel événement? Notons sur ce point, qu'une loi d'usure est évoquée en annexe A.

Malgré tout, force est de constater qu'une formulation de l'ensemble à des mouvements plus complexes de type réponse à un balourd avec prise en compte de la déformation de l'axe de rotation, problème très largement répandu pour ces machines, demanderait un travail assez lourd bien que connu [LOR 01].

Enfin, il paraît important de mentionner la nécessité de la mise au point d'un banc expérimental. Elle était initialement prévue dans la planification de cette étude mais a finalement dû être abandonnée pour cause de manque de moyens expérimentaux et de temps. Elle pourrait cependant constituer une suite à ce travail. L'appel à une roue aubagée réelle accompagnée de son carter serait extrêmement coûteux. Sur ces bases, la faisabilité d'une expérience à l'aide d'un tour vertical a été examinée par E. ARNOULT à l'Ecole Centrale de Nantes lors de son travail de thèse [ARN 00]. La problématique des vitesses de glissement en jeu semble primordiale :

- faut-il développer un modèle réduit après analyse des effets d'échelle?
- les résultats d'une étude impliquant des vitesses de rotation plus faibles peuvent-ils être extrapolés de manière asymptotique?



Quelques éléments de réponse sont donnés dans [SCH 97] mais beaucoup de questions restent ouvertes.

On ne manquera pas de noter que les points principaux relatifs à ce travail et concernant la singularité introduite par la discrétisation temporelle, le traitement du contact ainsi que la discrétisation spatiale modale ne sont pas discutés par P. SCHMIECHEN. Sa loi de contact est de type pénalité généralisée et les structures qu'il adopte sont assez éloignées de celles constituant un moteur d'avion. Il pourrait être intéressant de reprendre son étude sur la base de nos méthodes pour comprendre l'influence réelle des modélisations dans les résultats.

# Références

- [ALA 97] ALART P., “Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Vol. 76, pp. 83–108, 1997. [27](#)
- [AND 97] ANDREWS K. T., SHILLOR M., WRIGHT S., ET KLARBRING A., “A dynamic thermoviscoelastic contact problem with friction and wear”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 35, pp. 1291–1309, 1997. [140](#)
- [ARN 00] ARNOULT E., *Modélisation Numérique et Approche Expérimentale du Contact en Dynamique : Application au Contact Aubes/Carter de Turboréacteur*. Thèse, École Centrale de Nantes, Nantes, France, janvier 2000. [14](#), [104](#), [133](#)
- [BAT 90] BATOZ J. L. ET DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, 1990. [30](#)
- [BAT 96] BATHE K.-J., *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996. [29](#)
- [BEL 91] BELYTSCHKO T. ET NEAL M. O., “Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 78, pp. 141–163, 1991. [27](#)
- [BER 91] BERTHILLIER M. ET MASCARELL J.-P., “Vibration des roues aubagées : étude de l’interaction rotor-stator”, Rapport interne SNECMA YLEC N° DR/152/91, 1991. [6](#), [10](#)
- [BLA 01] BLADH R., *Efficient Predictions of the Vibratory Response of Mistuned Bladed Disks by Reduced Order Modeling*. Thèse, The University of Michigan, Ann Arbor, USA, 2001. [7](#)
- [BON 97] BONET J. ET WOOD R. J., *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997. [146](#)
- [CAR 91] CARPENTER N. J., TAYLOR R. L., ET KATONA M. G., “Lagrange constraints for transient finite element surface contact”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 130–128, 1991. [37](#)
- [CEZ 01] CEZDANSKI A. ET MEGUID S. A., “Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 37, pp. 861–879, 2001. [23](#)
- [CHA 98] CHABRAND P., DUBOIS F., ET RAOUS M., “Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction”, *Mathematical Computer and Modelling*, Vol. 28, pp. 97–108, 1998. [24](#)



- [CHA 01] CHABRAND P., CHERTIER O., ET DUBOIS F., “Complementarity methods for multibody friction contact problems in finite deformations”, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, pp. 553–579, 2001. [23](#)
- [CHA 04] CHAMORET D., SAILLARD P., RASSINEUX A., ET BERGHEAU J.-M., “New smoothing procedures in contact mechanics”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 168, No. 1-2, pp. 107–116, 2004. [104](#)
- [CHI 93] CHILDS D., *Turbomachinery Rotordynamics Phenomena, Modeling and Analysis*. Prentice Hall, 1993. [5](#)
- [CRA 68] CRAIG R. R. ET BAMPION C. C., “Coupling of substructures for dynamics analyses”, *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, pp. 1313–1319, 1968. [103](#)
- [CRA 76] CRAIG R. R. ET CHANG C.-J., “Free-interface methods of substructures coupling for dynamic analysis”, *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 11, pp. 1633–1635, 1976. [104](#)
- [CRA 00] CRAIG R. R., “Coupling of substructures for dynamics analyses: an overview”, dans *Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, Atlanta, USA, 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, 2000. [103](#)
- [CUL 94] CULIOLI J.-C., *Introduction à l’optimisation*. Ellipses, 1994. [24](#)
- [CUR 95] CURNIER A., HE Q. C., ET KLARBRING A., “Continuum Mechanics Modelling of Large Deformation Contact with Friction”, dans *Contact Mechanics*, pp. 145–158, M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau Editors Plenum Press, 1995. [20](#)
- [DAV 94] DAVIS P. J., *Circulant Matrices*. New York: Chelsea Publishing, 1994. [6](#)
- [DL 01] DRAGON-LOUISET M., “On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 1625–1639, 2001. [140](#)
- [DUB 98] DUBIGEON S., *Mécanique des Milieux Continus*. Lavoisier, Tec & Doc, Nantes, 1998. [73](#)
- [GG 99] GIRAUDON-GUILLOTEAU I., *Modélisation du Contact en Dynamique: Construction d’un Élément Simplifié de Contact et Application à l’Interaction Rotor/Stator*. Thèse, École Centrale de Nantes, Nantes, France, novembre 1999. [37](#)
- [GIA 89] GIANNAKOPOULOS A. E., “The return mapping method for the integration of friction constitutive relations”, *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 1, pp. 157–167, 1989. [21](#)
- [GÉR 92] GÉRADIN M. ET RIXEN D., *Théorie des vibrations: application à la dynamique des structures*. Paris, Masson, 1992. [34](#), [36](#)
- [HEI 99] HEINSTEIN M. W. ET A. L. T., “An algorithm for the matrix-free solution of quasi-static frictional contact problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 9, pp. 1205–1226, 1999. [24](#)
- [IBR 95] IBRAHIMBEGOVIĆ A., “On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner’s beam theory: three-dimensional curved beam elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 122, pp. 11–26, 1995. [145](#)
- [JOH 89] JOHNSON A. R. ET QUIGLEY C. J., “Frictionless geometrically non-linear contact using quadratic programming”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2261–2270, 1989. [26](#)



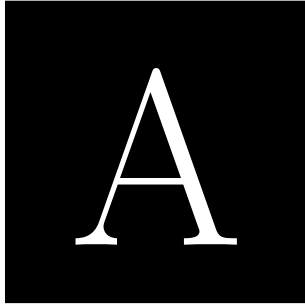


- [JOS 81] JOSEPH J. A., *Cyclic Symmetry in MSC/NASTRAN*. The MacNeal-Schwendler Corporation, 1981. 6
- [LAU 83] LAU S. L., CHEUNG Y. K., ET WU S. Y., “Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 871–876, 1983. 39
- [LAU 02] LAURSEN T. A., *Computational Contact and Impact Mechanics Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, 2002. 18
- [LEE 93] LEE C.-W., *Vibration Analysis of Rotors*. Kluwer Academic Publishers, 1993. 5
- [LEG 03] LEGRAND M., PESEUX B., PIERRE C., ET SEINTURIER E., “Amélioration de la prédiction de l’interaction rotor/stator dans un moteur d’avion”, Giens, France, 6ème Colloque National en Calcul des Structures, 12-14 mai 2003. 36
- [LEI 73] LEISSA W., *Vibration of Shells*. Washington D.C.: NASA SP 288, Scientific and Technical Information Office, 1973. 9
- [LOR 01] LORNAGE D., *Dynamique globale des lignes d’arbre de turbomachines couplées aux fluides environnants : application au cas des lames de fluides*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, France, décembre 2001. 133
- [MAG 01] MAGNUSON A., RISTINMAA M., ET LJUNG C., “Behavior of the extensible elastica solution”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 8441–8457, 2001. 145
- [MEI 67] MEIROVITCH L., *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan, New-York, 1967. 54
- [NAC 03] NACIVET S., PIERRE C., THOUVEREZ F., ET JEZEQUEL L., “A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263, pp. 201–219, 2003. 95
- [NAY 79] NAYFEH A. H. ET MOOK D. T., *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, New York, 1979. 38
- [NEW 59] NEWMARK N. M., “A method of computation for structural dynamics”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp. 67–94, 1959. 34
- [PAD 01] PADMANABHAN V. ET LAURSEN T. A., “A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 37, pp. 173–198, 2001. 104
- [PAI 00] PAI P. F., ANDERSON T. J., ET WHEATER E. A., “Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2951–2980, 2000. 145
- [PAP 93] PAPADOPOULOS P. ET TAYLOR R. L., “A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems”, *Computers & Structures*, Vol. 46, pp. 1107–1118, 1993. 27
- [PES 89] PESEUX B., *Contribution à l’étude des structures partiellement ou totalement immergées en matériau homogène ou composite*. Thèse de doctorat d’état ès sciences, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, Nantes, France, 1989. 73
- [POU 04] PODOU O., PIERRE C., ET REISSER B., “A new hybrid frequency-time domain method for the forced vibration of elastic structures with friction and intermittent



- contact”, dans *The 10th of International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, USA, ISROMAC10-2004-068, 2004. 44
- [PUJ 04] PUJSENJAK R. R. ET OBLAK M. M., “Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 255–292, 2004. 39
- [RAB 65] RABINOWICZ E., *Friction and wear of materials*. John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1965. 140
- [ROS 62] ROSENBERG R. M., “The normal modes of nonlinear  $n$ -degree-of-freedom systems”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 363–368, 1962. 148
- [SCH 97] SCHMIECHEN P., *Travelling Wave Speed Coincidence*. Thèse, College of Science, Technology and Medicine, London, UK, May 1997. 13, 134
- [SCH 01] SCHULZ M. ET FILIPPOU F. C., “Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 761–785, 2001. 145
- [SHA 91] SHAW S. W. ET PIERRE C., “Non-linear normal modes and invariant manifolds”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, pp. 170–173, 1991. 148
- [SIM 92] SIMO J. C. ET LAURSEN T. A., “An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction”, *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992. 28
- [SIN 05] SINHA S. K., “Non-linear dynamic response of a rotating radial Timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, pp. 113–149, 2005. 2
- [VAN 87] VANCE J. M., *Rotordynamics of Turbomachinery*. Wiley-Interscience, 1987. 5
- [VG 01] VON GROLL G. ET EWINS D. J., “The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 241, No. 2, pp. 223–233, 2001. 39
- [WRI 02] WRIGGERS P., *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002. 18
- [YI 99] YI M., HE J., HUANG B., ET ZHOU H., “Friction and wear behavior and abrasability of abradable seal coating”, *Wear*, Vol. 231, pp. 47–53, 1999. 139
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O. ET TAYLOR R. L., *Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, Vol. 2 de *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, 1991. 35





# Loi d'usure

## A.1 Généralités

Dans les turbo-machines modernes, la réduction du jeu entre l'extrémité des aubes et le carter permettant d'améliorer le rendement et d'optimiser la consommation de carburant augmente les possibilités de contact entre les deux parties. En fonction des conditions de fonctionnement lors de l'interaction, des dommages structuraux sévères peuvent être occasionnés. En conséquence, les constructeurs se sont penchés sur l'utilisation de matériaux dits « abrasables » pour leurs qualités d'usure et positionnés entre les deux structures potentiellement en contact. Le bénéfice est triple [YI 99] :

- lors des premiers tours du moteur, un rail est usiné par le passage des aubes dans le revêtement. Par la suite et en fonctionnement normal, le jeu entre les deux structures est facilement ajusté et optimisé ;
- en cas d'incident, si les deux structures sont amenées à entrer en contact, l'énergie est principalement dissipée durant l'usure du revêtement abrasable, minimisant ainsi les effets néfastes sur les aubes et le carter. Il peut par la suite être aisément remplacé ;
- le revêtement remplit des fonctions d'isolement thermique et de lubrification.

Mais il ne faut pas oublier que ce type de revêtement doit répondre à deux conditions contradictoires :

- « abrasabilité » : l'usure du matériau doit être facile afin que les contraintes au sein du carter et des aubes soient les plus faibles possibles ;
- résistance à l'érosion : cette partie du moteur est soumise à des flux de gaz à température et pression variables et au passage de particules solides contenues dans l'air auxquels elle doit résister.

La mise au point de tels matériaux est d'actualité. Pour l'heure, ils apparaissent sous des formes variables de poudres compactées, de particules de métal pulvérisées ou encore de structures en nids d'abeilles. Leurs qualités d'usure, de résistance à l'érosion ainsi que leur comportement lors d'un contact à très haute vitesse sont donc très fluctuantes.

L'idée de développer une loi d'usure répondant aux exigences de SNECMA s'est confrontée à deux difficultés principales :

- les références bibliographiques sur le sujet sont peu nombreuses. La piste de l'usi-



- nage à grande vitesse s'est rapidement révélée infructueuse puisque les vitesses de « coupe » en extrémité d'aube avoisinent les 500 m/s à cause du diamètre important de la soufflante ;
- la variété des matériaux abrasables rencontrés imposait le développement d'une loi ajustable dont les paramètres doivent être fixés par l'expérience.

## A.2 Principe de la loi

L'usure est un phénomène physique compliqué couplant des processus mécaniques et thermiques fortement non-linéaires. En effet, elle est fonction de la vitesse relative de glissement, des pressions de contact et des duretés des matériaux, elles-mêmes sensibles à la température [AND 97]. La connaissance de la thermodynamique est nécessaire à la mise au point d'un modèle rigoureux [DL 01] et plusieurs lois ont été développées sur ces bases. Les plus courantes et les plus simples sont celles d'ARCHARD et RABINOWICZ [RAB 65]. D'autres auteurs s'appuient sur des hypothèses plus réalistes pour généraliser ces lois macroscopiques mais les vitesses de glissement restent faibles, en général. Il existe aussi des procédures associées à la méthode des éléments finis qui font disparaître de la matière lorsqu'une valeur seuil en contrainte est atteinte.

Dans notre étude, la loi est beaucoup plus intuitive et ses fondements mathématiques et physiques demeurent limités. Elle peut être appréhendée comme une généralisation de la loi de frottement de COULOMB. Son principe est simple mais fortement ancré dans la procédure prédiction-correction d'un schéma explicite dédié au contact : il consiste à pondérer les efforts de contact dans les directions normale et tangentielle par des coefficients qui doivent remplir certaines conditions. Dans un premier temps et en s'aidant de l'algorithme développé dans le chapitre 3, les efforts de contact interdisant toute pénétration sont calculés. Lors de la phase de correction, l'effort de contact dans la direction normale est multiplié par un scalaire  $a_N$  tel que  $0 \leq a_N \leq 1$ . Si  $a_N = 0$ , la pression de contact est nulle et donc le matériau abrasable n'a aucune résistance mécanique et s'use complètement. Par contre, si  $a_N = 1$ , la pression de contact est inchangée et il n'y a donc aucune usure. Pour le reste, le choix de  $a_N$  conditionne la transformation de l'énergie de rotation, soit en énergie d'usure dissipée, soit en énergie de vibration qu'acquiert les deux structures. Dans la direction tangentielle, le coefficient  $a_T$  doit être supérieur à l'unité. Une borne supérieure est difficile à donner mais certains résultats permettent de lever cette indétermination. On considère en effet que dans cette direction, la matière « vue » par l'extrémité d'une aube (à cause de la pénétration due à l'usure dans la direction normale) augmente les efforts par rapport à un frottement parfait. Ceci peut être résumé en imaginant qu'un bulldozer fournit une énergie proportionnelle à la quantité de matière qu'il déplace. Finalement, le déplacement des structures est corrigé après la pondération des efforts de contact pour simuler l'usure.

Bien sûr, certaines loi de la mécanique comme la préservation de la quantité de mouvement sont violées puisque dans cette procédure, la matière qui disparaît n'est plus. Néanmoins, elle permet une prise en compte immédiate de l'usure du revêtement abrasable et de



visualiser en temps réel son niveau sur toute la circonférence du carter. Dans cette optique, un vecteur Usure est créé (plus il a de composantes, plus la gestion locale de l'usure est précise) et contient en début de procédure l'épaisseur du revêtement, pas nécessairement constante, grâce auquel sont calculées les distances de pénétration utiles à la gestion du contact. Il est ensuite mis à jour en fonction des contacts détectés. La figure A.1 résume la méthode.

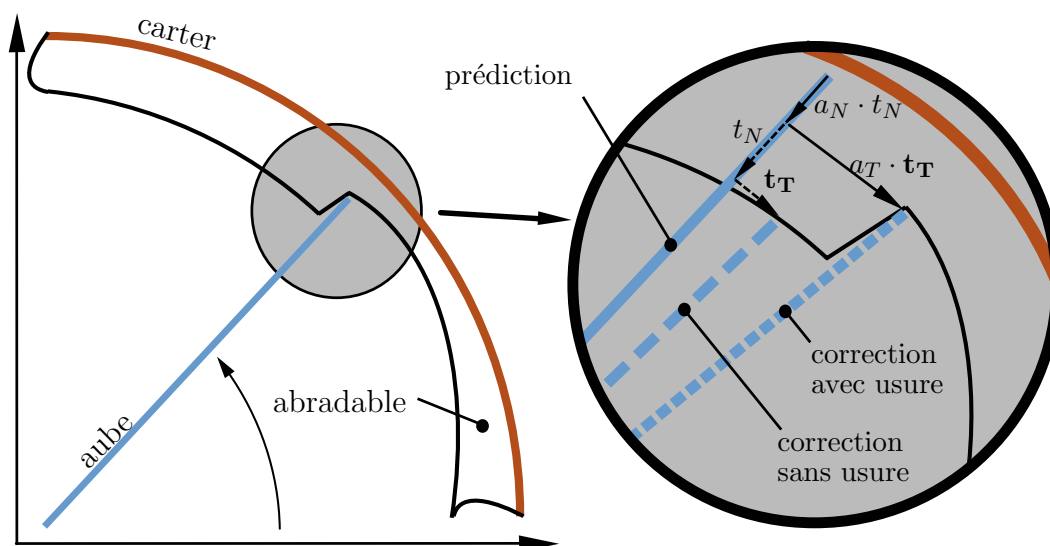


figure A.1 – Prise en compte de l'usure

### A.3 Comportement mécanique

Afin de comprendre le comportement de la loi d'usure un peu plus en détails, un modèle particulier est mis en place. Il s'agit du carter du modèle plan évolué (cf. partie 4.1.2) sur lequel a été placée une épaisseur constante de 5 mm d'abradable et d'une seule aube en rotation. L'initiation du contact est effectuée en excentrant l'axe de la roue aubagée. Deux simulations ont été réalisées, pour lesquelles, dans un premier temps  $a_T = 0$  afin d'étudier la profondeur d'usure en fonction de la valeur du coefficient  $a_N$  et dans un deuxième temps  $a_N = 0,2$  afin d'étudier l'évolution de la position de la trace laissée par l'aube en fonction de  $a_T$ . La figure A.2 illustre les différents profils du revêtement après le passage de l'aube en fonction de  $a_N$ . Quand  $a_N = 0$ , la profondeur de passe est maximale et il y a usure totale de l'abradable et la régularité du profil révèle que le carter ne vibre pas. Pour  $a_N > 0$ , la profondeur de passe diminue très rapidement avec  $a_N$  et des oscillations apparaissent à cause de l'excitation vibratoire du carter. Une analyse de Fourier de ces oscillations montre qu'elles impliquent le contenu fréquentiel ce dernier. On visualise les profils d'usure de l'abradable en fonction de  $a_T$  sur la figure A.3. Le trait en pointillés gras illustre le fait que le point de départ de l'usure de la matière dépend de ce coefficient, ce qui n'est pas physique. La condition  $a_T > 4$  correspond à une pondération trop importante de l'effort tangentiel pour laquelle la position de l'extrémité de l'aube est sur-correctée : ceci a pour effet de modifier la position angulaire sur le carter du premier contact entre les deux

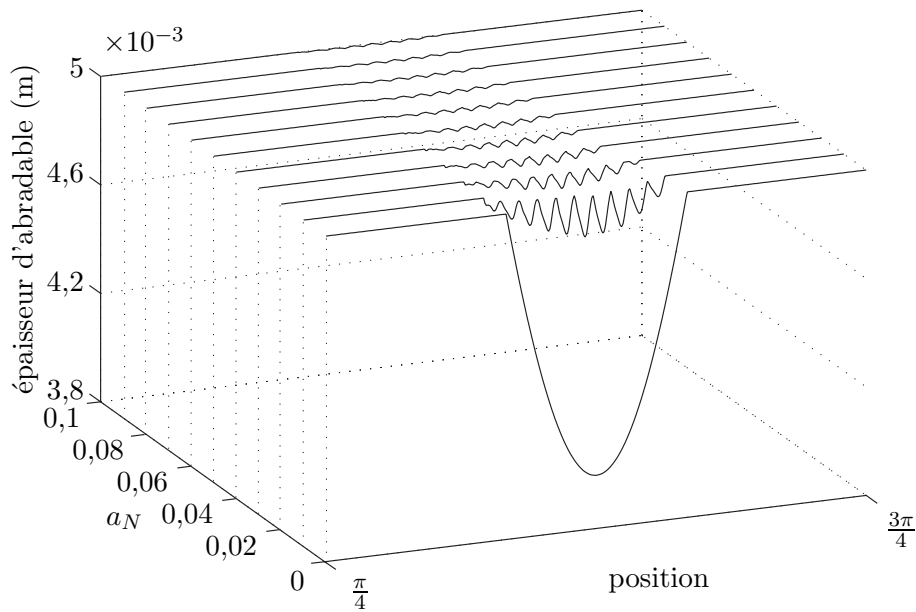


figure A.2 – Profils d'usure dans la direction normale

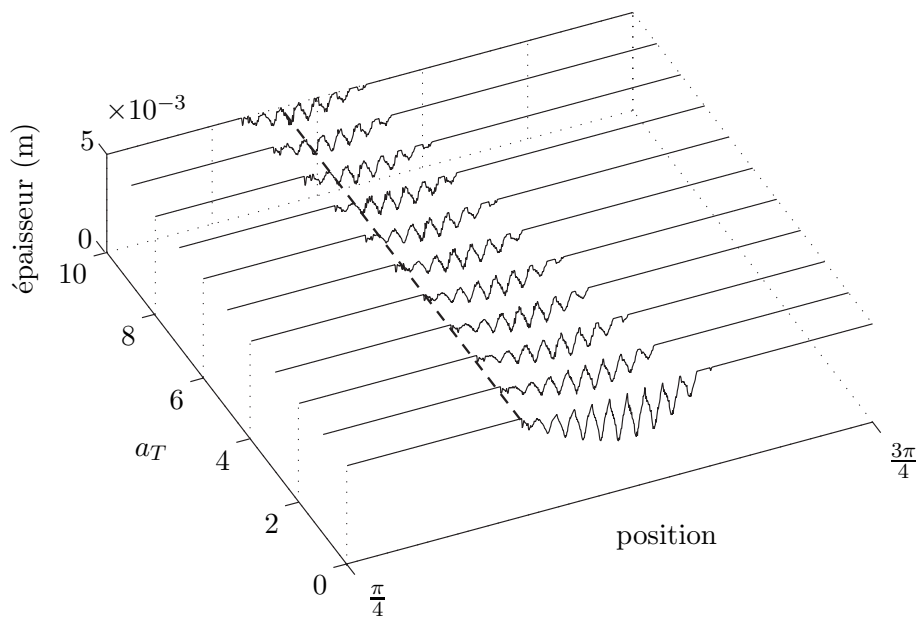


figure A.3 – Profils d'usure dans la direction tangentielle

structures. Cette considération permet de lever l'indétermination de la borne supérieure du coefficient  $a_T$ .

## A.4 Perspectives

Les deux seules simulations ont été réalisées pour  $a_N$  et  $a_T$  constants. Il est tout à fait envisageable d'enrichir l'algorithme afin que ces coefficients dépendent de la vitesse relative de glissement ou de la pression de contact par exemple. Une étude sur sa signification physique pourrait aussi être intéressante et permettre une meilleure compréhension du phénomène. Malheureusement, sans plus de précisions expérimentales, cette loi d'usure a



peu de sens. Il est clair qu'une confrontation à l'expérience est inévitable et c'est pourquoi notre partenaire industriel SNECMA a déjà lancé une campagne d'essais dans le but de caractériser ce type de matériau et de quantifier les deux paramètres  $a_N$  et  $a_T$ . Il s'agit d'un lancer à très haute vitesse, grâce à un canon, d'un objet coupant sur un échantillon d'abradable. Ce dernier est fixé de telle façon qu'il rend possible, grâce à des éprouvettes d'extensométrie, la mesure des efforts engendrés par l'impact.







# B

## Poutre non-linéaire

### B.1 Motivations

Pour répondre à l'une des propositions d'évolution du premier modèle plan de turbomachine concernant le couplage des degrés de liberté en traction et en flexion en sommet d'aube, une modélisation de la roue aubagée par des éléments finis de type poutre non-linéaire a été considérée. Même si des formulations très puissantes existent (par exemple, [IBR 95] ou [SCH 01]) et font l'objet de nombreux travaux, la simplicité des développements entrepris dans [MAG 01] a motivé leur adoption.

### B.2 Formulation

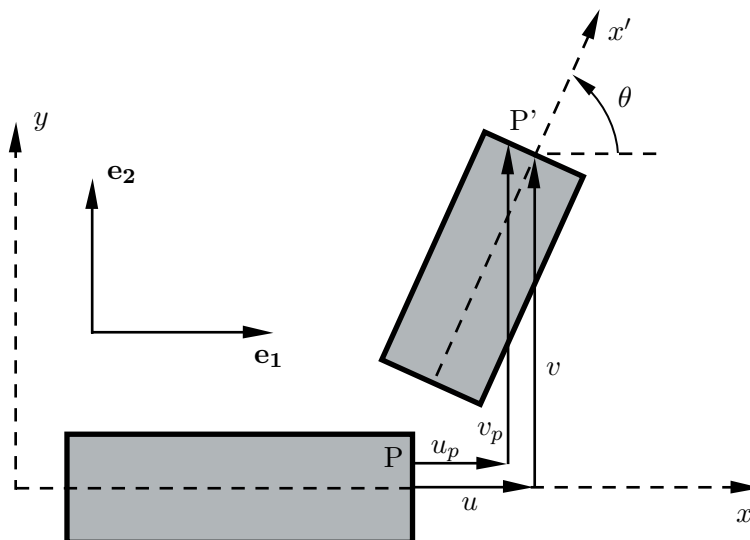


figure B.1 – Notations pour la mise en équations d'un élément poutre non-linéaire

Dans ce qui suit, la géométrie de la poutre est initialement droite (pour une généralisation à une poutre initialement courbe, voir [PAI 00]), les déplacements se font uniquement dans le plan, la loi de comportement est élastique et la mise en équations est effectuée selon le formalisme du Lagrangien Total. On considère que l'hypothèse d'Euler-Bernoulli est vérifiée et qu'en conséquence toute section initialement droite et perpendiculaire à l'axe neutre reste droite et perpendiculaire à l'axe neutre dans la configuration courante comme décrit sur la figure D.2. Tout point matériel dans la configuration non déformée est repéré



par le couple  $(x,y)$ . Un point  $Q$  appartenant à l'axe neutre se déplace de la quantité  $u(x)$  selon la direction  $\mathbf{e}_1$  et de la quantité  $v(x)$  selon  $\mathbf{e}_2$  : son image est notée  $Q'$ . De la même façon, un point  $P$  appartenant à la même section, se déplace de la quantité  $u_p(x,y)$  selon  $\mathbf{e}_1$  et de  $v_p(x,y)$  selon  $\mathbf{e}_2$  : son image est notée  $P'$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= u(x) - y \sin \theta(x) \\ v_p(x,y) &= v(x) - y(1 - \cos \theta(x)) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où  $\theta(x)$  représente la rotation d'une section droite durant la transformation. L'allongement  $e(x)$  selon l'axe  $\mathbf{e}_1$  se met alors sous la forme :

$$e(x) = \sqrt{(1 + u_{,x}(x))^2 + v_{,x}(x)^2} - 1 \quad (\text{B.2})$$

Grâce à cette grandeur, il est possible de redéfinir l'angle  $\theta(x)$  en fonction des déplacements d'une section au niveau de la fibre neutre :

$$\begin{aligned} \cos(\theta(x)) &= \frac{1 + u_{,x}(x)}{1 + e(x)} \\ \sin(\theta(x)) &= \frac{v_{,x}(x)}{1 + e(x)} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Cette équation permet d'interpréter le couplage entre les déplacements  $u$  et  $v$  durant la transformation. On retrouve les résultats usuels d'une poutre de Bernoulli en tenant compte de l'hypothèse des petites perturbations.

La loi de comportement utilisée implique une relation linéaire entre les tenseurs de déformations et de contraintes de Biot, par hypothèse. Pour plus de détails sur le sujet, lire [BON 97]. Le tenseur des déformations  $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$  est relié au tenseur de la transformation  $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$  de la manière suivante :

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}} = \sqrt{\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}} - \bar{\bar{\mathbf{I}}}} \quad (\text{B.4})$$

Appliqué à notre cas unidirectionnel, la déformation dans la direction  $\mathbf{e}_1$  devient (pour simplifier l'écriture pour la suite, on la note  $\varepsilon_1(x)$ ) :

$$\varepsilon_1(x) = e(x) - y\theta_{,x}(x) \quad (\text{B.5})$$

En ne perdant pas de vue que seules deux inconnues parmi  $u(x)$ ,  $v(x)$  et  $\theta(x)$  sont indépendantes, notre choix se porte sur une formulation du problème en  $u(x)$  et  $v(x)$ . Le travail virtuel des quantités d'accélération se calcule aisément en négligeant les termes d'inertie de rotation (ce qui s'avère être une simplification assez grossière mais sans conséquence pour notre étude) et peut se mettre sous forme matricielle après discrétisation :

$$\delta \mathcal{A} = \rho S \int_0^L (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v) dx \quad (\text{B.6})$$



Le calcul du travail virtuel des efforts de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta E_d &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} E \varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 \, dy \, dx \\ &= E \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (e \delta e + y^2 \theta_{,x} \delta \theta_{,x}) \, dy \, dx\end{aligned}\tag{B.7}$$

soit, après intégration suivant  $y$  :

$$\delta E_d = ES \int_0^L e \delta e \, dx + EI \int_0^L \theta_{,x} \delta \theta_{,x} \, dx\tag{B.8}$$

Afin de discrétiser  $\delta E_d$ , il est nécessaire d'écrire la relation entre  $\theta_{,x}(x)$  et les fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  et leurs dérivées spatiales respectives :

$$\theta_{,x}(x) = \frac{v_{,xx}(x)(1 + u_{,x}(x)) - u_{,xx}(x)v_{,x}(x)}{(1 + u_{,x}(x))^2 + v_{,x}(x)^2}\tag{B.9}$$

La suite de la procédure est usuelle. En s'appuyant sur la méthode de Galerkin, il suffit de différencier les expressions  $e(x)$  et  $\theta_{,x}(x)$ . Elle n'est cependant pas détaillée à cause de sa lourdeur. On remarque néanmoins que la formulation fait intervenir les dérivées spatiales secondes des déplacements  $u(x)$  et  $v(x)$  et impose, par conséquent, l'utilisation de fonctions d'ordre élevé. Nous choisissons une discrétisation des fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  par les fonctions usuelles de la poutre de Bernoulli en flexion (cf. équations (D.5) et (D.6) en remplaçant  $s$  par  $x$ ).

## B.3 Cas test

### B.3.1 Méthode de résolution

Afin d'éviter une linéarisation des efforts internes, les équations de la mécanique résultant du PTV sont résolues par le schéma temporel explicite des différences finies. Auparavant, des termes d'amortissement interne ont été ajoutés. À chaque itération, le vecteur des efforts internes est intégré dans la direction  $x$  par un schéma de Simpson, une intégration exacte sur le domaine étant impossible.

### B.3.2 Résultats

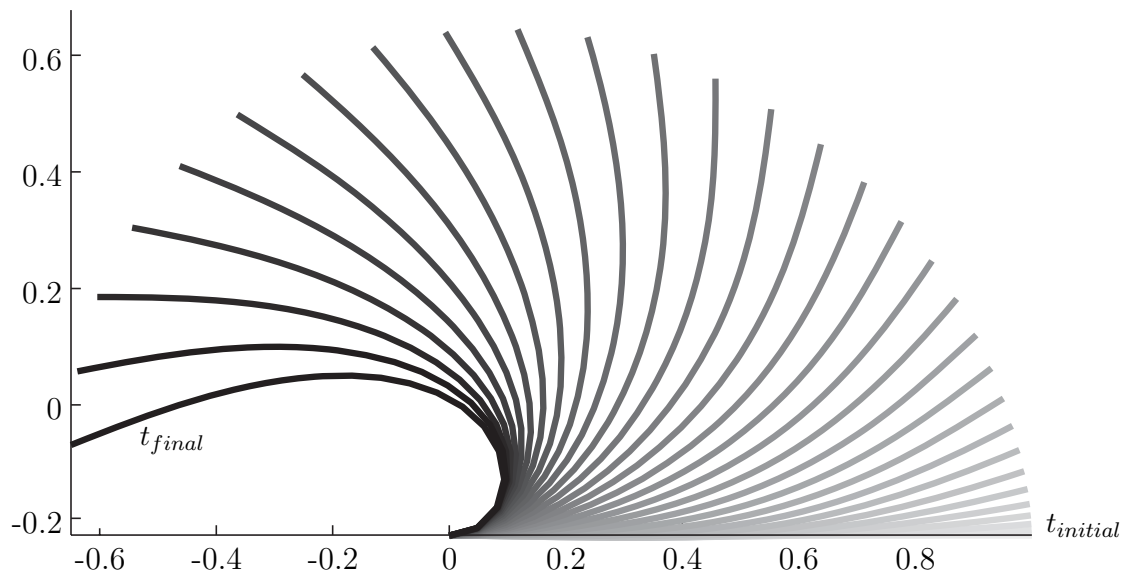
Le comportement mécanique de cette poutre non-linéaire a été testé sur un cas simple. Un encastrement est imposé à l'une des extrémités de la manière suivante :

$$v(0) = v_{,x}(0) = u_{,x}(0) = 0\tag{B.10}$$

La deuxième extrémité subit l'action d'une force suiveuse de direction perpendiculaire à l'axe neutre de la configuration déformée. Les résultats sont illustrés sur la figure B.2

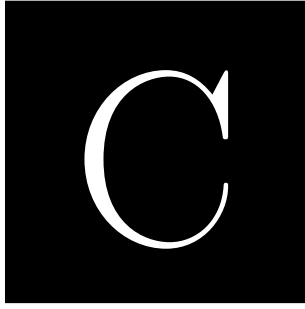


pour différents pas de temps compris entre l'instant initial et l'instant final. Ces résultats



**figure B.2** – *Évolution de la déformée de la poutre au cours du temps*

n'ont pas été comparés à des cas références parus dans la bibliographie parce que cette piste de travail a été abandonnée, et ceci pour une raison principale : comme évoqué dans l'introduction du mémoire, nous nous concentrons dans ce travail sur l'interaction « modale » rotor-stator. Ceci suppose que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée. Bien sûr, le concept de mode non-linéaire, dont plusieurs formulations existent (voir par exemple, [ROS 62], [SHA 91]) est connu. Sa mise en œuvre dans un travail ultérieur est une perspective de l'étude actuelle.



# Notions d'algèbre linéaire

Les structures à symétrie cyclique telles que les roues aubagées de moteur d'avion ont des caractéristiques géométriques qui leur donnent quelques spécificités mathématiques présentées dans cette annexe.

## C.1 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2N}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & a_{N2}\mathbf{B} & \cdots & a_{NN}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

## C.2 Matrices circulantes

Les matrices masse et raideur de structures à symétrie cyclique peuvent s'écrire sous une forme dite circulante ou circulante par bloc. Cette notion est notamment utilisée au cours du chapitre 1 et il est important de connaître les caractéristiques de leurs valeurs propres et de leurs vecteurs propres, notamment. De façon générale, une matrice carrée circulante prend la forme suivante :

$$\mathbf{C} = \mathbf{circ}(c_1, c_2, \dots, c_N) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ c_N & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Toutes les matrices circulantes de taille  $N$  ont  $N$  vecteurs propres indépendants. En particulier, elles partagent le même ensemble de vecteurs propres qui constituent la matrice de Fourier complexe  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{E} = [e_{ki}]; \quad e_{ki} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\alpha(k-1)(i-1)} \quad \text{avec } k, i = 1, \dots, N \quad (\text{C.3})$$



où  $j = \sqrt{-1}$  et  $\alpha = 2\pi/N$ . Les nombres complexes n'étant pas toujours pratiques pour visualiser des phénomènes physiques, on préfère souvent utiliser la matrice de Fourier réelle,  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{2}{\sqrt{N}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \alpha & \frac{2}{\sqrt{N}} \sin \alpha & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{2}{\sqrt{N}} \cos 2\alpha & \frac{2}{\sqrt{N}} \sin 2\alpha & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{2}{\sqrt{N}} \cos(N-1)\alpha & \frac{2}{\sqrt{N}} \sin(N-1)\alpha & \cdots & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{N}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

où la dernière colonne existe seulement si  $N$  est pair. Les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont orthonormales entraînant  $\mathbf{E}^* \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille  $N$ . Alors que  $\mathbf{E}$  diagonalise la matrice circulante  $\mathbf{C}$  dans le corps des complexes,  $\mathbf{F}$  la diagonalise seulement par bloc de taille  $2 \times 2$  (d'où la notion d'harmoniques doubles) excepté le premier terme, et le dernier si  $N$  est pair, dans le corps des réels.

### C.3 Matrices circulantes par bloc

Toutes ces considérations peuvent être généralisées aux matrices circulantes par bloc dont la forme est celle des matrices masse et raideur d'une structure mécanique à symétrie cyclique où chaque secteur est riche de  $M$  degrés de liberté. Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{C}$  devient :

$$\mathbf{C} = \text{circ}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_N) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_N \\ \mathbf{C}_N & \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

La forme de la matrice  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}$  (respectivement  $\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}$ ) est telle qu'elle diagonalise  $\mathbf{C}$  seulement par bloc de taille  $M \times M$  (respectivement  $2M \times 2M$ ). Pour les matrices circulantes de structures à symétrie cyclique, tous les blocs  $\mathbf{C}_i$  sont nuls sauf  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  et  $\mathbf{C}_N = \mathbf{C}_2^T$ . Le résultat du produit  $(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})$ , qui d'un point de vue mathématique représente la projection dans l'espace des coordonnées cycliques réelles, est une matrice diagonale par bloc (de dimension  $2M \times 2M$  pour la plupart) dont la forme est la suivante :

$$\tilde{\mathbf{C}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T) \cos k\alpha & (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2^T) \sin k\alpha \\ (\mathbf{C}_2^T - \mathbf{C}_2) \sin k\alpha & \mathbf{C}_1 + (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T) \cos k\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Ce type de matrice admet des valeurs propres doubles et des modes propres particuliers. ■

## C.4 Matrices anti-symétriques

Montrons que le problème d'analyse modale posée par l'équation (1.4) admet des pulsations propres doubles. Pour cela reprenons la matrice de l'équation (C.6) qui est généralement anti-symétrique en mécanique parce que le bloc  $\mathbf{C}_1$  est lui-même symétrique. Elle s'écrit donc plus simplement :

$$\tilde{\mathbf{C}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{B}^T = -\mathbf{B} \quad (\text{C.7})$$

Soit  $\boldsymbol{\lambda}_1 = [\boldsymbol{\lambda}_A, \boldsymbol{\lambda}_B]^T$ , un vecteur propre de  $\tilde{\mathbf{C}}^k$  associée à la valeur propre  $\omega^2$  (il existe puisque la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}^k$  a les propriétés mécaniques appropriées), il vérifie l'égalité suivante (en n'oubliant pas que  $\mathbf{C}_i = \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M}_i$ ) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_A \\ \boldsymbol{\lambda}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

En utilisant l'égalité  $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$ , l'équation (C.8) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_A \\ -\boldsymbol{\lambda}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}_B \\ \boldsymbol{\lambda}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

ce qui démontre que si  $\boldsymbol{\lambda}_1 = [\boldsymbol{\lambda}_A, \boldsymbol{\lambda}_B]^T$  est un vecteur propre de  $\tilde{\mathbf{C}}^k$  associé à la valeur propre  $\omega^2$  alors  $\boldsymbol{\lambda}_2 = [-\boldsymbol{\lambda}_B, \boldsymbol{\lambda}_A]^T$  l'est aussi. Ces deux vecteurs étant indépendants, la valeur propre  $\omega^2$  est donc double, ce qu'il fallait démontrer.







# D

## Matrices élémentaires

Dans tout ce qui suit,  $E$  désigne le module d'Young,  $I$  le moment quadratique d'une section de poutre,  $S$ , la surface de cette section,  $\rho$ , la masse volumique du matériau et  $l$ , la longueur élémentaire.

### D.1 Élément fini poutre droit

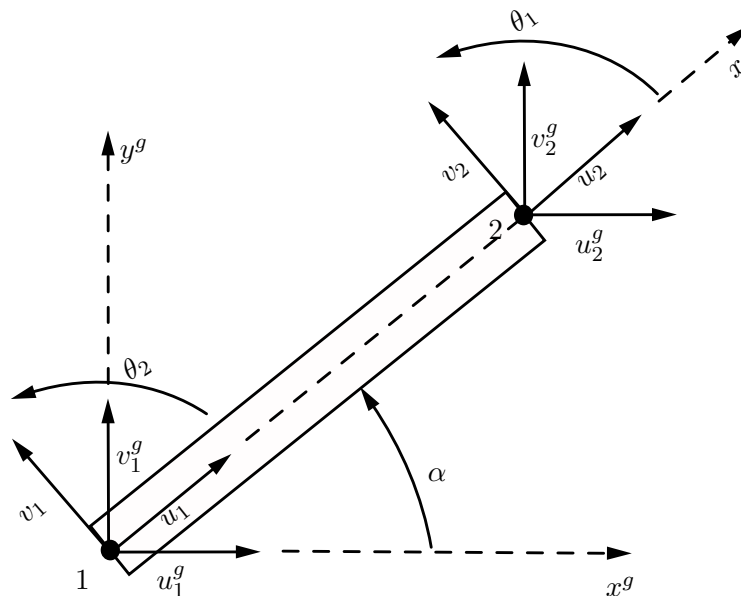


figure D.1 – Élément poutre-barre de longueur  $l$  dans les bases locale et globale.

L'élément fini poutre-barre généralement utilisé en mécanique et plus particulièrement dans ce mémoire repose sur une discrétisation polynomiale linéaire en traction et cubique en flexion. Le vecteur des variables nodales est défini pour un élément :  $[u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]$ . En plus de la loi de comportement linéaire usuelle, en prenant une discrétisation identique du champ de pondération et en appliquant le Principe des Travaux Virtuel sur un élément



fini, on construit la matrice raideur élémentaire :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

puis la matrice masse élémentaire :

$$\mathbf{M}_e = \rho S l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} \\ 0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} \\ 0 & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Ces deux matrices sont écrites dans une base locale liée à l'élément. L'assemblage par compatibilité des déplacements nodaux ne peut se faire que sur les variables nodales relatives à une base globale. Il s'avère alors nécessaire de projeter chaque matrice élémentaire dans cette base globale par un changement de base dans le plan, qui s'écrit matriciellement, d'après les notations proposées sur la figure D.1 :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} u_1^g \\ v_1^g \\ \theta_1 \\ u_2^g \\ v_2^g \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Les matrices élémentaires dans la base globale se calculent aisément par conservation des énergies cinétique et potentielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^g &= \mathbf{P}^T \mathbf{K}_e \mathbf{P} \\ \mathbf{M}_e^g &= \mathbf{P}^T \mathbf{M}_e \mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

## D.2 Élément fini poutre courbe

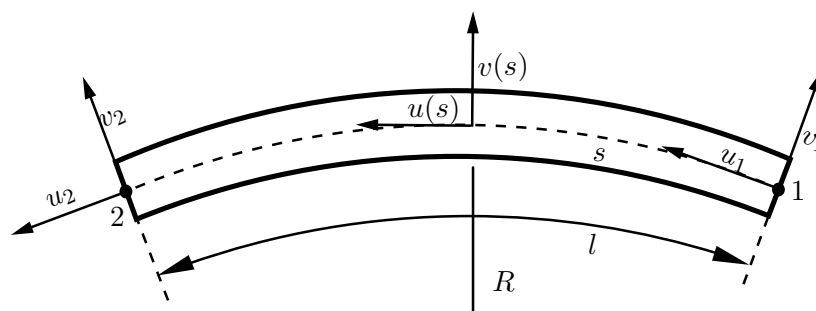


figure D.2 – Élément poutre courbe de longueur  $l$ .

Dans cette partie,  $R$  représente le rayon de courbure de l'élément. Le carter est discrétisé en éléments finis poutre courbe à 4 degrés de liberté par nœud. Le champ de déplacement, défini par rapport à la variable curviligne  $s$ , est le suivant :

$$\begin{Bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(s) & M_2(s) & 0 & 0 & M_3(s) & M_4(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1(s) & M_2(s) & 0 & 0 & M_3(s) & M_4(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{,s1} \\ v_1 \\ v_{,s1} \\ u_2 \\ u_{,s2} \\ v_2 \\ v_{,s2} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

avec :

$$\begin{cases} M_1(s) = 1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \\ M_2(s) = s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_3(s) = \frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3} \\ M_4(s) = \frac{s^3}{l^2} - \frac{s^2}{l} \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Les matrices élémentaires sont construites en suivant la même démarche que pour l'élément



poutre-barre. La matrice masse s'écrit :

$$\mathbf{M}_e = \rho S l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 \\ \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} \\ 0 & 0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 \\ -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} \\ 0 & 0 & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

et la matrice raideur :

$$\mathbf{K}_e = E \begin{bmatrix} \frac{6S}{5l} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & -\frac{Sl}{10R} & -\frac{6S}{5l} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & \frac{Sl}{10R} \\ \frac{S}{10} & \frac{2Sl}{15} & \frac{Sl}{10R} & 0 & -\frac{S}{10} & -\frac{Sl}{30} & -\frac{Sl}{10R} & \frac{Sl^2}{60R} \\ -\frac{S}{2R} & \frac{Sl}{10R} & A & B & \frac{S}{2R} & -\frac{Sl}{10R} & C & F \\ -\frac{Sl}{10R} & 0 & B & D & \frac{Sl}{10R} & -\frac{Sl^2}{60R} & -F & G \\ -\frac{6S}{5l} & -\frac{S}{10} & \frac{S}{2R} & \frac{Sl}{10R} & \frac{6S}{5l} & -\frac{S}{10} & \frac{S}{2R} & -\frac{Sl}{10R} \\ \frac{S}{10} & -\frac{Sl}{30} & -\frac{Sl}{10R} & -\frac{Sl^2}{60R} & -\frac{S}{10} & \frac{2Sl}{15} & \frac{Sl}{10R} & 0 \\ -\frac{S}{2R} & -\frac{Sl}{10R} & C & -F & \frac{S}{2R} & \frac{Sl}{10R} & A & -B \\ \frac{Sl}{10R} & \frac{Sl^2}{60R} & F & G & -\frac{Sl}{10R} & 0 & -B & D \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

avec :

$$A = \frac{13l^4SR^2 + 13l^4I - 84Il^2R^2 + 420IR^4}{35l^3R^4}$$

$$B = \frac{11l^4SR^2 + 11l^4I - 252Il^2R^2 + 1260IR^4}{210l^2R^4}$$

$$C = 3 \frac{3l^4SR^2 + 3l^4I + 56Il^2R^2 - 280IR^4}{70l^3R^4}$$

$$D = \frac{l^4SR^2 + l^4I - 28Il^2R^2 + 420IR^4}{105lR^4}$$

$$G = \frac{840IR^4 - 3l^4SR^2 - 3l^4I + 28Il^2R^2}{420lR^4}$$

$$F = \frac{2520IR^4 - 13l^4SR^2 - 13l^4I - 84Il^2R^2}{420l^2R^4}$$

Par passage à la limite  $R \rightarrow +\infty$ , il est possible de retrouver les matrices masse et raideur élémentaires de l'élément fini poutre droit en flexion.







# Algorithmes de gestion du contact en statique

## E.1 Position du problème

Les algorithmes qui ont permis de résoudre le problème d'une poutre contactant une paroi rigide présenté dans la section 3.4.2 sont listés dans cette annexe. Avec les hypothèses de petites perturbations, il s'agit, mathématiquement, d'un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités décrit par les équations (3.44). Sous les mêmes hypothèses, une généralisation à une situation dynamique (schéma explicite ou implicite) impliquant deux structures déformables en contact entraîne des modifications mineures. Dans ce qui suit, l'intégralité des matrices est donnée pour une poutre constituée de quatre éléments finis. Les caractéristiques mécaniques utilisées sont récapitulées dans le tableau 3.2.

### matrice raideur

$K=10^{-3}*$

31.104	0	-15.552	0.1944	0	0	0	0
0	0.00648	-0.1944	0.00162	0	0	0	0
-15.552	-0.1944	31.104	0	-15.552	0.1944	0	0
0.1944	0.00162	0	0.00648	-0.1944	0.00162	0	0
0	0	-15.552	-0.1944	31.104	0	-15.552	0.1944
0	0	0.1944	0.00162	0	0.00648	-0.1944	0.00162
0	0	0	0	-15.552	-0.1944	15.552	-0.1944
0	0	0	0	0.1944	0.00162	-0.1944	0.00324

### vecteur force poids propre généralisé

$F_{ext}=10^{-6}*$

-2.25
0
-2.25
0
-2.25
0
-1.125
0.0046875



## E.2 Méthode des contraintes actives

### initialisation

(cf. équation 3.44)

```
A=zeros(8,8); % matrice de contraintes de contact
b=zeros(8,1); % vecteur des contraintes de contact
for i=1:4
    A(2*i-1,2*i-1)=-1;
    b(2*i-1,1)=vmax;
end
prec=10^(-16);
init=zeros(8,1);
```

### algorithme principal

```
[u,p]=qsolve(K,Fext',A,b',init',prec);
```

### fonction qsolve

```
function [sol,mult]=qsolve(Q,r,C,d,init,tol)

sol=init; ecart=d-sol*C'; if any(ecart<0), error('Init non admissible'); end;
p=0;
test=abs(ecart)<tol; % contraintes actives ?
while 1
    while 1
        S=[diag(test)*C]; % matrice des contraintes saturées
        Z=null(S); % matrice nulle associée
        if isempty(Z), break; end; % sortie si solution nulle
        v=(Z*(Z'*Q*Z*inv(Z)')*(r'-Q*sol'))';
        if norm(v,inf)<=tol, break; end;
        w=v*C';
        J=find(w-ecart>tol);
        if isempty(J), t=1;
        else t=min(ecart(J)./w(J)); end; % calcul du pas
        sol=sol+t*v; % actualisation de la solution
        ecart=ecart-t*w; % positions des contraintes
        test=abs(ecart)<tol; % nouvelles contraintes actives ?
        if t==1, break; end; % sortie si déplacement maximum
    end;
    mult=(pinv(S')*(Q*sol'-r'))'; % calcul des multiplicateurs de Lagrange
```





```

if any(mult(p+1:end)>tol),
    [mu, j]=max(mult(p+1:end));
    test(j)=0;
else break; end;           % solution finale
end

```

## E.3 Méthode de la pénalité

### initialisation

```

res=1;
Fc=zeros(8,1); % vecteur des efforts de contact
Kc=zeros(8,8); % matrice de contact
prec=10^(-12);
epsilon=10^6;

```

### algorithme principal

```

while res>prec
    % solution en déplacement
    u=inv(K+Kc)*(Fext+Fc);
    % contribution de la pénalisation au niveau des pénétrations
    test=vmax-u(1:2:7,1)>0;
    Fc=epsilon*vmax*test;
    Kc=epsilon*diag(test);
    % calcul du résidu
    res1=(K+Kc)*u-Fext-Fc;
    res=sqrt(res1'*res1);
end

```

## E.4 Méthode du lagrangien augmenté

### initialisation

```

ZE=10^(-16)*ones(4,1);
p=zeros(8,1); % vecteur des multiplicateurs de Lagrange
Fc=zeros(8,1); % vecteur des efforts de contact
Kc=zeros(8,8); % matrice de contact
prec=10^(-12);
epsilon=100;
res=1;

```



**algorithme principal**

```

while res>prec
    % solution en déplacement
    u=inv(K+Kc)*(Fext+Fc+p);
    % calcul des multiplicateurs de Lagrange par projection sur R+ (Uzawa)
    p(1:2:7,1)=max(p(1:2:7,1)+epsilon*(vmax-u(1:2:7,1)),ZE);
    % contribution du terme augmenté
    test=p>0;
    Fc=epsilon*vmax*test;
    Kc=epsilon*diag(test);
    % calcul du résidu
    res1=(K+Kc)*u-Fext-Fc-p;
    res=sqrt(res1'*res1);
end

```

**E.5 Méthode des multiplicateurs de Lagrange****initialisation**

```

ZE=10^(-16)*ones(4,1);
rho=0.000022745155; % coefficient de la méthode d'Uzawa
p=zeros(8,1); % vecteur des multiplicateurs de Lagrange
prec=10^(-12);
res=1;

```

**algorithme principal**

```

while res>prec
    % solution en déplacement
    u=inv(K)*(Fext+p);
    % calcul des multiplicateurs de Lagrange par projection sur R+ (Uzawa)
    p=max(p(p(1:2:7,1)+rho*(vmax-u(1:2:7,1))),ZE);
    % calcul du résidu
    res1=K*u-Fext-p;
    res=sqrt(res1'*res1);
end

```

