



**HAL**  
open science

# Etude numérique des phénomènes aéroélastiques en aérodynamique supersonique. Application aux tuyères propulsives

Anne-Sophie Mouronval

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Mouronval. Etude numérique des phénomènes aéroélastiques en aérodynamique supersonique. Application aux tuyères propulsives. Modélisation et simulation. INSA de Rouen, 2004. Français. NNT: . tel-00011632

**HAL Id: tel-00011632**

**<https://theses.hal.science/tel-00011632v1>**

Submitted on 16 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée en vue de l'obtention du titre de

**Docteur**

de

**L'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen**

Discipline : Mécanique  
Spécialité : Mécanique des Fluides

par

ANNE-SOPHIE MOURONVAL

---

## ÉTUDE NUMÉRIQUE DES PHÉNOMÈNES AÉROÉLASTIQUES EN AÉRODYNAMIQUE SUPERSONIQUE. APPLICATION AUX TUYÈRES PROPULSIVES

---

soutenue le 15 mars 2004

*Membres du jury*

Rapporteurs :

G. DEGREGZ	Professeur à l'Institut Von Karman, Belgique
W. KOSCHEL	Professeur, Directeur de la Propulsion Spatiale au DLR, Allemagne

Examineurs :

T. ALZIARY	Professeur à l'ENSMA de Poitiers
J. DÉLERY	Directeur de Recherches à l'ONERA, Meudon
M. FREY	Ingénieur, EADS SPACE Transportation, München, Allemagne
A. HADJADJ	Maître de Conférences à l'INSA de Rouen
O. PIRONNEAU	Professeur à l'Université Paris VI (Pierre et Marie Curie)
D. VANDROMME	Professeur à l'INSA de Rouen

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides Numérique,  
LMFN-CORIA, UMR 6614 CNRS.



## *Avant-propos*

*Ce travail de thèse s'étant effectué au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides Numérique LMFN-CORIA, UMR 6614 CNRS, je tiens, en premier lieu, à remercier Messieurs Ledoux et Trinité de m'y avoir accueillie.*

*Je remercie également Monsieur Vandromme de m'avoir proposé ce sujet de thèse et de l'intérêt qu'il a porté à mon travail.*

*Je tiens aussi à témoigner de ma profonde gratitude à Monsieur Hadjadj qui m'a encadrée durant ces quatre années de thèse et dont les conseils m'ont été très précieux. Faisant toujours preuve non seulement d'une grande disponibilité mais aussi d'une grande gentillesse, il a su m'encourager dans mes travaux de recherche lorsque cela était nécessaire.  
Merci Abdellah !*

*Par ailleurs, je suis très reconnaissante aux membres du jury et particulièrement à Messieurs Degrez et Koschel qui ont accepté d'être rapporteurs de mon travail.*

*En dernier lieu, j'aimerais dire un grand merci à mes collègues du LMFN-CORIA qui m'ont accompagnée ces quatre années ainsi qu'à ceux du laboratoire MSSMat de l'ECP pour leur soutien durant la préparation de ma soutenance. Enfin, je souhaiterais clore cet avant-propos en remerciant ma famille et mes amis (Peggy, Isabelle, Guy, Anna et tous les autres !) qui m'ont encouragée et supportée dans les moments difficiles !*



# Table des matières

Table des matières	v
Nomenclature	3
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Contexte de l'étude</b>	<b>13</b>
<b>2 Décollement et charges latérales dans les moteurs fusée</b>	<b>15</b>
2.1 Position du problème . . . . .	15
2.2 Décollement en régime de forte surdétente . . . . .	16
2.2.1 Principaux types de tuyères . . . . .	16
2.2.2 Régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique . . . . .	18
2.2.3 Décollements libre, restreint et transition . . . . .	21
2.2.4 Dissymétrie du décollement . . . . .	24
2.2.5 Modélisation du décollement stationnaire . . . . .	25
2.3 Etudes relatives aux charges latérales . . . . .	28
2.3.1 Etudes expérimentales . . . . .	28
2.3.2 Origines physiques et modèles associés . . . . .	36
2.3.3 Etudes numériques . . . . .	40
2.4 Récapitulatif . . . . .	41
<b>3 Modèles de stabilité aéroélastique</b>	<b>43</b>
3.1 Modèles de stabilité aéroélastique . . . . .	43
3.1.1 Schématisation du problème à résoudre . . . . .	44
3.1.2 Hypothèses des modèles . . . . .	45
3.1.3 Fréquences et modes propres naturels . . . . .	48
3.1.4 Stabilité aéroélastique . . . . .	49
3.2 Récapitulatif . . . . .	52
<b>II Méthodes numériques et validations</b>	<b>53</b>
<b>4 Modèles numériques relatifs au code structure</b>	<b>55</b>
4.1 Mécanique linéaire et non-linéaire . . . . .	55

4.1.1	Généralités . . . . .	55
4.1.2	Relations cinématiques générales . . . . .	56
4.1.3	Principe des Travaux Virtuels . . . . .	59
4.2	Formulation de coque . . . . .	61
4.2.1	Champ cinématique d'une coque mince . . . . .	61
4.2.2	Forme variationnelle . . . . .	63
4.3	Démarche éléments finis . . . . .	64
4.3.1	Schéma temporel de Newmark . . . . .	64
4.3.2	Discrétisation spatiale . . . . .	64
4.4	Élément DKT18 . . . . .	66
4.4.1	Approximations éléments finis . . . . .	68
4.4.2	Matrice masse . . . . .	70
4.4.3	Sollicitations externes . . . . .	70
4.4.4	Terme de contraintes internes . . . . .	71
4.4.5	Rigidité fictive . . . . .	72
4.4.6	Conversion repère local - repère global . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Validation et applications de l'élément DKT18 linéaire</b>	<b>75</b>
5.1	Calculs statiques . . . . .	75
5.2	Application à l'analyse dynamique (vibrations libres) . . . . .	76
5.2.1	Anneau plat encastré . . . . .	77
5.2.2	Tuyère LEA souple . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Schémas numériques relatifs aux codes fluide</b>	<b>81</b>
6.1	Mise en forme des équations . . . . .	81
6.2	Schéma numérique des codes 1 (Roe TVD), 2 (WENO) et 3 (TURB) . . . . .	84
6.2.1	Calcul des flux convectifs . . . . .	86
6.2.2	Calcul des flux visqueux . . . . .	93
6.2.3	Discrétisation temporelle . . . . .	93
6.3	Récapitulatif . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Tests de validation des schémas numériques des codes fluide</b>	<b>97</b>
7.1	Tube à choc . . . . .	97
7.2	Evolution d'un tourbillon isentropique . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Techniques numériques de couplage fluide-structure</b>	<b>103</b>
8.1	Introduction . . . . .	103
8.2	Fluides en domaine évolutif . . . . .	104
8.2.1	Adaptation des méthodes numériques . . . . .	105
8.2.2	Loi de consistance géométrique : GCL . . . . .	107
8.2.3	Prise en compte du mouvement du maillage . . . . .	115
8.2.4	Récapitulatif . . . . .	115
8.3	Exemples d'applications au fluide en domaine évolutif . . . . .	116
8.3.1	Compression dans un piston . . . . .	116
8.3.2	Projectile placé dans un écoulement supersonique . . . . .	118
8.4	Spécificités du couplage . . . . .	120

8.4.1	Principaux schémas de couplage faible . . . . .	122
8.5	Validation du couplage: cas du “flutter” (flottement) . . . . .	124
8.5.1	Position du problème et analyse théorique . . . . .	124
8.5.2	Couplage a priori . . . . .	127
8.5.3	Validation du couplage de codes . . . . .	129
8.6	Conclusion . . . . .	133
<b>III Applications aux tuyères supersoniques</b>		<b>135</b>
<b>9</b>	<b>Stabilité aéroélastique d’un divergent flexible en présence d’un choc</b>	<b>137</b>
9.1	Applications des modèles de stabilité aéroélastique à une tuyère bidimensionnelle plane . . . . .	137
9.1.1	Configuration étudiée . . . . .	137
9.1.2	Obtention des grandeurs initiales . . . . .	138
9.1.3	Influence des conditions aux limites . . . . .	139
9.1.4	Influence des propriétés du matériau . . . . .	143
9.1.5	Influence de l’angle . . . . .	144
9.1.6	Prise en compte des effets visqueux . . . . .	145
9.2	Simulations numériques couplées sur la configuration bidimensionnelle plane . . . . .	148
9.2.1	Calculs eulériens . . . . .	150
9.2.2	Calculs turbulents . . . . .	160
9.2.3	Comparaison des temps de calculs . . . . .	166
9.3	Application à la tuyère LEA souple . . . . .	168
9.3.1	Obtention des grandeurs initiales . . . . .	169
9.3.2	Influence des conditions aux limites et des propriétés du matériau . . . . .	174
9.3.3	Recommandations aux expérimentateurs . . . . .	177
9.3.4	Temps de calcul (cas LEA1) . . . . .	177
<b>10</b>	<b>Conclusions &amp; perspectives</b>	<b>179</b>
<b>IV Annexes</b>		<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Article publié dans “<i>Int. J. Shock Waves</i>”</b>	<b>187</b>
<b>B</b>	<b>Article accepté à “<i>J. Propulsion &amp; Power</i>”</b>	<b>197</b>
<b>C</b>	<b>Modèle continu et éléments finis non-linéaires de coque mince</b>	<b>209</b>
C.1	Principe des Travaux Virtuels . . . . .	209
C.1.1	Projection du PTV sur la configuration de référence . . . . .	209
C.2	Formulation de coque non-linéaire . . . . .	211
C.2.1	Champ cinématique d’une coque en grands déplacements . . . . .	211
C.2.2	Forme variationnelle . . . . .	213
C.2.3	Forme incrémentale . . . . .	214
C.3	Démarche éléments finis . . . . .	214
C.3.1	Schéma temporel de Newmark . . . . .	214



C.3.2	Discrétisation spatiale . . . . .	214
C.3.3	Discrétisation du Principe des Travaux Virtuels . . . . .	214
C.3.4	Discrétisation de la forme incrémentale du PTV . . . . .	215
C.4	Linéarisation par la méthode de Newton-Raphson . . . . .	216
C.4.1	Techniques de pilotage . . . . .	217
C.5	Élément DKT18 en grands déplacements . . . . .	218
C.5.1	Matrice tangente . . . . .	219
<b>D</b>	<b>Validation de l'élément DKT18 non-linéaire</b>	<b>223</b>
D.1	Plaque carrée soumise à un chargement ponctuel . . . . .	223
D.2	Panneau cylindrique articulé . . . . .	224
D.2.1	Configuration rigide . . . . .	225
D.2.2	Configuration flexible . . . . .	228
<b>E</b>	<b>Applications présentant de grandes rotations de la structure</b>	<b>231</b>
E.1	Poutre en "L" sous chargement de flexion . . . . .	231
E.2	Enroulement d'une plaque . . . . .	233
E.3	Hémisphère pincé . . . . .	233
<b>F</b>	<b>Fréquences et modes propres des tuyères souples</b>	<b>235</b>
F.1	Modes propres supérieurs des cas LEA1 et LEA3 . . . . .	235
<b>G</b>	<b>Matrice de rigidité aérodynamique pour un divergent bidimensionnel plan</b>	<b>241</b>
<b>H</b>	<b>Mesure des charges latérales</b>	<b>243</b>
H.1	Utilisation de la fonction de transfert du montage . . . . .	243
H.2	Méthode de correction d'inertie de l'ONERA . . . . .	244
<b>I</b>	<b>Élément DKT</b>	<b>245</b>
I.1	Généralités . . . . .	245
I.2	Prise en compte des hypothèses de Kirchhoff . . . . .	245
<b>J</b>	<b>Décomposition de la matrice tangente</b>	<b>249</b>
<b>K</b>	<b>"Flutter" : résolution par différences finies</b>	<b>251</b>
<b>L</b>	<b>Coopération avec l'IDRIS dans le cadre du projet Eurogrid</b>	<b>253</b>
	Table des figures	254
	Liste des tableaux	261
	Bibliographie	265

## Publications, conférences et rapports

Ce travail de thèse a fait l'objet de plusieurs publications, conférences et rapports. Ceux-ci sont résumés ci-après.

### Articles dans des journaux internationaux

1. **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj, A. Kudryavtsev and D. Vandromme. *Numerical investigation of transient nozzle flow*, International Journal of Shock Waves, N° 5, Vol. 12, pp. 403-411, 2003.
2. **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj et E. Lefrançois. *Initiation aux techniques numériques de couplage fluide-structure*, Revue européenne des éléments finis, N° 5, Vol. 12, pp. 519-554, 2003.
3. **A.-S. Mouronval** and A. Hadjadj. *Numerical Study of the Starting Process in a Supersonic Nozzle*, accepté à "Journal of Propulsion and Power". 2004.

### Conférences, communications à des congrès

1. **A.-S. Mouronval** and A. Hadjadj. *Numerical Study of the starting process in a supersonic nozzle*, Proceedings of the West East High Speed Flow Fields, April 22-26 2002, Marseille, France, pp 314-321, edited by CIMNE, Barcelona.
2. A.N. Kudryavtsev, D. Khotyanovsky, **A.-S. Mouronval** and A. Hadjadj, *Implementation of high-order schemes for simulation of complex supersonic flows*, IV International conference on Non-equilibrium Processes in Nozzles and Jets, St. Petersburg, 2002.
3. A. Hadjadj, L. Blin, **A.-S. Mouronval** et S. Dubos. *Simulation numérique des écoulements turbulents compressibles*, Actes du séminaire de l'Association Française de Mécanique "turbulence et lanceurs spatiaux", CNES, Paris, 13-14 juin 2002.
4. **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj, A. Kudryavtsev and D. Vandromme. *Numerical investigation of transient nozzle flow*, Proceedings of the Fourth European Symposium on Aerothermodynamics Space Vehicles, CIRA, Capua, Italy, 15-18 October 2001, pp 399-406.
5. E. Lefrançois, **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj et D. Vandromme. *Couplage fluide-structure appliqué à la propulsion aéronautique et spatiale*, "Towards a New Fluid Dynamics with its Challenges in Aerospace Engineering", NFD 2000, November 20-22, DASSAULT-AVIATION/CNRS.

### Rapports de contrats de recherche

1. **A.-S. Mouronval** et A. Hadjadj. *Etude théorique et numérique en matière d'interaction fluide-structure pour le cas d'une tuyère de moteur fusée*. Rapport d'avancement du Contrat CNES / CORIA-CNRS, convention N° 02/CNES/0435 (17 pages). Novembre 2002.
2. **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj, D. Vandromme et E. Lefrançois. *Etude théorique et numérique en matière d'interaction fluide-structure pour le cas d'une tuyère de moteur fusée*. Rapport de synthèse des travaux de couplage fluide-structure, Contrat CNES / CORIA-CNRS, marché N° 00/CNES/5777 (40 pages). Juillet 2001.
3. **A.-S. Mouronval**, A. Hadjadj et D. Vandromme. *Amélioration de la prise en compte de la turbulence dans le code CANARI; couplage et implantation de modèles*. Rapport de synthèse des travaux sur le code CANARI, Contrat de recherches N° 940 647 T du 30/09/98 - SNECMA / CORIA-CNRS, (60 pages). Décembre 1999.

### Rapports de projets et de coopération

1. *La Lettre de l'IDRIS*, N°5, septembre 2002, disponible sur le site web <http://www.idris.fr/>. Cette communication décrit en partie le rôle joué par A.-S. Mouronval dans le projet Eurogrid en tant que collaboratrice de l'équipe de "Calcul Scientifique coopératif" de l'IDRIS et l'application développée.

# Nomenclature

## Notations relatives au fluide

<b>A</b>	: matrice jacobienne
$a$	: célérité du son
$C_f$	: coefficient de frottement
$C_p$	: coefficient de chaleur massique à pression constante
$C_v$	: coefficient de chaleur massique à volume constant
$E_t$	: énergie totale par unité de masse
$e$	: énergie interne par unité de masse
<b>F</b>	: vecteur des flux eulériens
$F_p$	: fonction de corrélation du modèle d'interaction libre de Chapman
<b>G</b>	: vecteur des flux visqueux
$h$	: enthalpie
$k$	: énergie cinétique turbulente
$M$	: nombre de Mach
$M_{sh}$	: nombre de Mach de l'onde incidente
$p$	: pression statique du fluide
$p^*$	: pression effective du fluide
<b>Q</b>	: vecteur des variables conservatives
<b>R</b>	: matrice des vecteurs propres
$Re_t$	: nombre de Reynolds turbulent
$r$	: constante des gaz parfaits ( $r = C_p - C_v$ )
<b>S<sub>o</sub></b>	: vecteur des termes source
$\mathcal{S}$	: surface
$s$	: entropie
$T$	: température
$t$	: temps
$U_c$	: vitesse absolue
$U_{rel}$	: vitesse relative
$u$	: vitesse longitudinale
$\mathcal{V}$	: volume d'une cellule de contrôle
$v$	: vitesse verticale

## Indices et accentuations

a	:	ambiante
c	:	chambre
e	:	sortie
i	:	séparation naissante
nom	:	nominale
p	:	plateau
s	:	décollement
vac	:	vide
w	:	paroi
★, *	:	grandeur adimensionnée
$\infty$	:	grandeur à l'infini
$\sim$	:	grandeur moyennée au sens de Favre
$\bar{\phantom{x}}$	:	grandeur moyennée au sens de Reynolds
//	:	fluctuation au sens de Favre
/	:	fluctuation au sens de Reynolds

## Abréviations

ATAC	:	Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps
CFL	:	<i>Courant Friedrichs Levy</i>
E-D	:	<i>Expansion-Deflection</i>
FSCD	:	<i>Flow Separation Control Device</i>
FSS	:	<i>Free Shock Separation</i> (décollement libre)
LEA	:	Laboratoire d'Études Aérodynamiques
PDF	:	Fonction densité de probabilité
RSS	:	<i>Restricted Shock Separation</i> (décollement restreint)
rms	:	<i>root mean square</i>
SSME	:	<i>Space Shuttle Main Engines</i>
TIC	:	<i>Truncated Ideal Contoured</i>
TPP	:	Théorie des Petites Perturbations
TOC	:	<i>Thrust-Optimized Contoured</i>
TOP	:	<i>Thrust-Optimized Parabolic</i>
TVD	:	<i>Total Variation Diminishing</i>
WENO	:	<i>Weighted Essentially Non-Oscillatory</i>

## Symboles grecs

$\alpha$	:	demi-angle du divergent
$\Delta t$	:	pas de temps
$\tilde{\Delta}, \tilde{\tilde{\Delta}}$	:	limiteur de flux
$\varepsilon$	:	dissipation de l'énergie cinétique turbulente
$\varepsilon^*$	:	contribution isotrope de $\varepsilon$
$\gamma$	:	rapport des chaleurs spécifiques
$\mu$	:	viscosité dynamique moléculaire
$\mu_t$	:	viscosité dynamique turbulente
$\nu$	:	viscosité cinématique moléculaire
$\rho$	:	masse volumique
$\sigma$	:	tenseur des contraintes visqueuses

## Notations relatives à la structure

$A$	:	aire de la surface moyenne
$C$	:	configuration occupée par le solide
$\{e\}$	:	vecteur des déformations de membrane
$E$	:	module d'Young
$[E_{gl}]$	:	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\vec{f}_s, \vec{f}_v$	:	sollicitations surfaciques et volumiques
$\{F_{int}\}, \{f_{int}^e\}$	:	vecteurs des efforts internes global et élémentaire
$\{F_{ext}\}, \{f_{ext}^e\}$	:	vecteurs des sollicitations externes global et élémentaire
$[F]$	:	tenseur gradient de déformation
$h$	:	épaisseur
$[H]$	:	matrice d'élasticité
$[I]$	:	matrice identité
$[K_L], [k_L]$	:	matrices tangentes linéaires globale et élémentaire
$[K_T], [k_T]$	:	matrices tangentes globale et élémentaire
$[K_\sigma], [k_\sigma]$	:	matrices tangentes géométriques globale et élémentaire
$[L_0]$	:	tenseur gradient des déplacements
$\{M\}$	:	vecteur des efforts résultants de flexion
$[M], [m]$	:	matrices masses globale et élémentaire
$\{N\}$	:	vecteur des efforts résultants de membrane
$\vec{n}$	:	normale à la surface moyenne
$nelt$	:	nombre total d'éléments
$nnel$	:	nombre de nœuds par élément
$\{R\}, \{r\}$	:	vecteurs résidu global et élémentaire
$S$	:	surface délimitant le volume occupé par le solide
$[S]$	:	tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
$t$	:	temps
$\{u\}$	:	vecteur déplacements
$\{\ddot{u}\}$	:	vecteur accélérations
$V$	:	volume occupé par le solide
$W$	:	forme variationnelle
$\vec{x} = (x, y, z)$	:	vecteur position, coordonnées cartésiennes
$\vec{u}_{q, x_0}$	:	$\frac{\partial \vec{u}_q}{\partial x_0}$
$\{.\}$	:	vecteur colonne
$\langle . \rangle$	:	vecteur ligne
$[.]$	:	matrice

**Symboles grecs**

$\{\chi\}$	: vecteur des déformations de flexion
$\delta$	: première variation
$\Delta$	: incrément
$\{\gamma\}$	: vecteur des déformations de cisaillement transversal
$\nu$	: coefficient de Poisson
$\rho$	: masse volumique notée $\rho_s$ si possible confusion avec la masse volumique du fluide

**Indices**

0	: grandeur définie sur la configuration initiale
$d$	: terme d'inertie
$e$	: grandeur élémentaire
$ext$	: grandeur externe
$f$	: grandeur relative aux effets de flexion
$int$	: grandeur interne
$m$	: grandeur relative aux effets de membrane
$p$	: quantité définie sur la surface moyenne
$t$	: grandeur définie sur la configuration actuelle
$T$	: transposée
$\star$	: grandeur virtuelle

**Abréviations**

$CST$	: <i>Constant Strain Triangle</i>
$DKT$	: <i>Discret Kirchhoff Triangle</i>
$PTV$	: Principe des Travaux Virtuels
$Tr$	: opérateur trace

## Notations relatives et spécifiques au couplage fluide-structure

$A$	: coefficient d'influence aérodynamique
$\mathbf{F}$	: vecteur des flux eulériens
$\{F\}$	: vecteur sollicitations
$f$	: fréquence
$J$	: jacobien
$[K_p]$	: matrice de rigidité aérodynamique
$L$	: opérateur spatial
$N_b$	: nombre de surface appartenant au volume $\mathcal{V}$
$N_{fs}$	: nombre de pas de temps fluide pour un pas de temps structure
$\mathbf{n}$	: normale sortante
$p_s$	: pression statique transmise à la structure
$R_k$	: coefficient d'influence dynamique du mode $k$
$u$	: vitesse du fluide suivant x ou déplacement de la structure
$\mathbf{u}_b$	: vitesse du maillage
$v$	: vitesse du fluide suivant y
$\{W\}$	: vecteur de variables nodales de la structure
$w$	: composante normale du déplacement de la structure
$\mathbf{x} = (x, y)$	: vecteur position
$[X]$	: matrice des vecteurs propres naturels
$[\bar{X}]$	: matrice des vecteurs propres aéroélastiques

## Symboles grecs

$\Delta t$	: pas de temps fluide
$\Delta t_s$	: pas de temps structure
$\lambda$	: valeur propre naturelle
$[\lambda]$	: matrice des valeurs propres naturelles
$[\Lambda]$	: matrice des valeurs propres aéroélastiques
$\rho$	: masse volumique du fluide
$\rho_s$	: masse volumique de la structure
$\xi$	: variables mixtes
$\omega$	: pulsation propre naturelle
$\Omega$	: pulsation propre aéroélastique

## Indices

$\infty$	: grandeur à l'infini
$cr$	: grandeur critique
$n$	: indice temporel ou $n^{ième}$ mode propre de la structure

## Abréviations

$GCL$	: <i>Geometric Conservation Law</i>
$SCL$	: <i>Surface Conservation Law</i>
$VCL$	: <i>Volume Conservation Law</i>
$CSS$	: <i>Conventional Serial Staggered</i>
$GCSS$	: <i>Generalized Conventional Serial Staggered</i>
$ISS$	: <i>Improved Serial Staggered</i>





# Chapitre 1

## Introduction

Ce mémoire de thèse traite principalement des phénomènes aéroélastiques rencontrés dans les tuyères propulsives. Cette étude se situe, par conséquent, au croisement de deux domaines particulièrement porteurs : les applications multiphysiques et l'aérospatiale.

Depuis environ dix ans, la simulation numérique des problèmes couplés (*i.e.* multiphysiques) connaît un essor constant. Deux facteurs peuvent expliquer cette évolution :

- les succès, aussi bien passés que présents, de la simulation numérique en général. Les numériciens ont développé, au fil des années, des codes de calcul de plus en plus complexes pour décrire des problèmes physiques spécifiques. Certains cherchent maintenant à étendre le domaine d'applications de ces outils en prenant en compte les interférences entre le milieu étudié et son environnement.
- le développement des capacités de calcul qui autorise des projets de plus en plus ambitieux ;

Nombreux sont les laboratoires de recherche à commencer à s'intéresser à ces simulations numériques innovantes. Pour s'en convaincre, il suffit, par exemple, de consulter les travaux que l'IDRIS<sup>1</sup> a menés, en collaboration avec plusieurs laboratoires du CNRS, sur le thème du "*calcul réparti et couplage d'applications multiphysiques*" [65]. Les applications traitées dans le cadre de ces travaux européens, auxquels nous avons activement pris part, concernaient des disciplines très variées. En effet, on peut citer les sciences de l'environnement (couplage entre les cycles hydrologiques et atmosphériques), la combustion turbulente (couplage entre le rayonnement et la combustion), l'astrophysique (couplage entre la dynamique gravitationnelle de la matière noire et la dynamique dissipative du gaz baryonique résultant des chocs hydrodynamiques... ) ou encore la mécanique (couplage fluide-structure).

Les interactions fluide/structure font intervenir une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide sous forme gazeuse ou liquide, en écoulement autour de cette dernière. Globalement, on peut distinguer les phénomènes hydroélastiques (interaction fluide en phase liquide/structure) des phénomènes aéroélastiques (interaction fluide en phase gazeuse/structure).

L'hydroélasticité se rencontre le plus souvent dans le domaine biomédical (circulation sanguine) ou l'hydraulique (écoulement autour d'un navire). L'aéroélasticité possède, quant à elle, de

---

1. Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique

nombreuses applications aussi bien dans le génie civil (ponts suspendus...) que dans les domaines aéronautique et spatial (ailes d'avions, turbo-machines, lanceurs spatiaux...).

Parallèlement, l'industrie aérospatiale doit répondre à une demande de plus en plus exigeante et adapter ses technologies en conséquence. En particulier, les performances aérodynamiques des lanceurs doivent sans cesse être accrues pour pouvoir mettre en orbite de satellites de plus en plus lourds. Cela passe, le plus souvent, par une augmentation du rapport de section des tuyères propulsives. Ces tuyères ne sont donc pas adaptées à basse altitude où elles fonctionnent en régime de surdétente. Ce régime est à l'origine d'un décollement étendu du jet propulsif, par nature tridimensionnel et instationnaire générant des efforts mécaniques sur la structure. Ces efforts, appelés charges latérales, sont préjudiciables pour la structure mécanique des tuyères et peuvent mener à son endommagement et, par conséquent, à l'échec du vol. Compte tenu de ces risques pour l'intégrité et la stabilité des engins spatiaux, de nombreux efforts ont été faits afin de mieux comprendre les phénomènes aérodynamiques responsables de ces charges. Cependant, il apparaît maintenant que le divergent doit être considéré dans son ensemble. Il est primordial, par exemple, de prendre en compte le comportement mécanique du divergent et les transferts de chaleur à la paroi pour mieux évaluer les efforts thermomécaniques dangereux pour son intégrité. C'est dans ce contexte que se situe notre travail mené, depuis quelques années, dans le cadre du programme ATAC.

La simulation numérique des phénomènes aéroélastiques n'en est qu'à ses débuts, en particulier dans le domaine aérospatial. Cela s'explique par le fait qu'elle se situe à la confluence de deux disciplines intrinsèquement complexes et très différentes : la mécanique des fluides et celle des structures. Il est inutile de rappeler la complexité des écoulements au sein des tuyères propulsives : écoulement turbulent fortement compressible, discontinuités multiples, réflexions de choc régulières ou singulières, décollements turbulents libres ou restreints, zones de recirculation, couches de mélange *etc.* De même, la mécanique des structures fait intervenir de nombreux concepts comme la plasticité, les non-linéarités géométriques ou de contact. A cela viennent s'ajouter des difficultés spécifiques (physiques et numériques) aux simulations aéroélastiques elles-mêmes. En effet, les sollicitations exercées par le fluide peuvent modifier les fréquences de vibration de la structure (coalescence de modes...), les échelles caractéristiques du fluide et de la structure peuvent différer de plusieurs ordres de grandeur..., ce qui rend difficile la résolution numérique du problème.

Dans ce contexte, il nous est apparu impératif de mener notre étude par étapes. Le mémoire retrace notre parcours. Nous lui avons volontairement conféré un aspect "pédagogique" afin d'inciter les numériciens des fluides et des structures à se tourner vers l'aéroélasticité. Ainsi, le mémoire est scindé en trois grandes parties. La première définit plus précisément le contexte de notre étude. Par ailleurs, les interactions fluide/structure (comme d'autres) peuvent être simulées grâce à un couplage "fort" ou "faible". Le premier repose sur la résolution, à chaque instant, d'un seul système couplé pour le fluide et pour la structure : le couplage est porté par un modèle mathématique unique. Ce type de couplage est donc très contraignant d'un point de vue mathématique et numérique : il requiert, par exemple, un lourd travail de réécriture d'un nouveau code. A l'inverse, le couplage faible repose sur un dialogue entre des codes dédiés à différents domaines de la Physique. Très souple, il permet de conserver les spécificités et l'intégrité de chaque code devant être couplé. Notons, au passage, que cette technique pourrait aussi être

appliquée à des codes industriels ou commerciaux. Il s'agit, sans doute, de la solution envisagée par les développeurs de FLUENT et d'ABAQUS qui viennent de décider d'une collaboration afin de proposer un nouvel outil de simulation pour l'étude des interactions fluide-structure [50]. En effet, seules quelques modifications au sein de ces codes sont nécessaires pour prendre en compte l'interaction des domaines de la Physique auxquels ils sont dédiés. Ces avantages nous ont conduits à choisir ce second type de couplage pour notre étude. La deuxième partie de ce mémoire offre donc une description des codes structure et fluide dont nous disposons au début de ce travail ainsi que de la technique employée pour associer ces derniers. Enfin, la troisième et dernière partie présente une application aux phénomènes aéroélastiques au sein des tuyères propulsives. Les différents chapitres composant ces trois grandes parties sont détaillés ci-dessous.

Faisant suite à ce chapitre introductif, deux chapitres composent la première partie de ce mémoire. Le second chapitre propose un état de l'art des connaissances actuelles sur le décollement de jet et les efforts latéraux dans les moteurs fusée. Différents aspects du décollement ainsi que les expériences ayant mis en évidence les charges latérales sont présentés. Partant de ces observations, les origines physiques des charges latérales et les modèles développés sont exposés. Le rôle joué par les phénomènes aéroélastiques dans l'apparition mais surtout l'amplification des ces efforts est introduit. Les risques qu'ils présentent pour la stabilité du moteur sont également soulignés. Les quelques modèles développés afin de prédire la stabilité aéroélastique des divergents flexibles présentant un choc de décollement font, d'ailleurs, l'objet du troisième chapitre.

La seconde partie s'articule autour de cinq chapitres. Nous exposons, dans le chapitre quatre, le code utilisé pour prédire le comportement de la structure. Une description des coques minces, dans le cadre de la mécanique linéaire, est donnée avant que ne soit résumée leur représentation par éléments finis. Plusieurs validations et applications de l'élément fini retenu figurent dans le chapitre suivant. Par la suite (chapitres six et sept), les schémas numériques relatifs aux codes fluide sont exposés et validés. Ces codes sont bien adaptés pour décrire l'aérodynamique des écoulements compressibles et, par conséquent, fréquemment utilisés au LMFN dans ce cadre. Le chapitre huit introduit les techniques numériques de couplage fluide-structure. Il présente la méthodologie que nous avons utilisée afin d'adapter aux simulations aéroélastiques et de coupler les codes "fluide" et "structure" décrits dans les chapitres précédents. Un rapide inventaire des méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (*i.e.* déformables) est dressé. La méthode de maillage dynamique, issue des techniques ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), est présentée de manière plus détaillée et ses applications illustrées. Plusieurs points spécifiques au couplage fluide/structure sont également discutés. Enfin, une dernière section est consacrée à l'étude du phénomène de "flutter". Elle permet de valider l'algorithme de couplage retenu.

Le chapitre neuf de ce mémoire constitue une application et une analyse approfondie des modèles de stabilité aéroélastique exposés au chapitre trois. Ceux-ci sont employés pour étudier la stabilité d'un divergent bidimensionnel plan soumis à un choc de décollement. L'influence de plusieurs paramètres sur la stabilité de la structure est analysée. Les résultats obtenus sont ensuite confrontés aux résultats de simulations numériques couplées. En dernier lieu, les modèles sont utilisés pour étudier la stabilité de la tuyère souple étudiée expérimentalement par l'ONERA.

Les annexes exposent les travaux complémentaires que nous avons effectués. Ainsi, les annexes A et B proposent une analyse fine de l'amorçage rapide d'une tuyère supersonique. Ces travaux avaient pour objectif de mieux comprendre la formation et la propagation des différentes discontinuités apparaissant au sein de l'écoulement lors d'un amorçage rapide. Pour cela, une configuration d'étude simplifiée (canal de section constante doté d'un divergent conique) a, tout d'abord, été retenue. Par la suite, les deux configurations étudiées par Amann [4] ont été simulées et les résultats numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux disponibles. Enfin, bien que les calculs de couplage que nous avons réalisés reposent sur les hypothèses de la mécanique linéaire, un élément de coque en grands déplacements et rotations modérées a été développé. Ce dernier peut être très utile ultérieurement, en particulier si le comportement post-instabilité de la structure doit être étudié. Ainsi, un élément de coque linéaire a été étendu aux non-linéarités géométriques. Il est présenté dans les annexes C et D. Sa validation fait l'objet de l'annexe E. Cette version non-linéaire de l'élément et les techniques de résolution associées (pilotage en chargement... ) ont été rajoutées au code structure. De nombreux autres compléments aux différents chapitres sont reportés dans les annexes suivantes pour faciliter la lecture du mémoire.

Finalement, le chapitre dix présente nos conclusions et donne quelques perspectives à ce travail.

Première partie

Contexte de l'étude



## Chapitre 2

# Décollement et charges latérales dans les moteurs fusée

*L'objectif de ce chapitre est d'exposer les connaissances actuelles sur les charges latérales dans les moteurs fusée en régime de surdétente. Ce chapitre présente différents aspects du décollement et les expériences ayant mis en évidence les charges latérales. Partant de ces observations, les origines physiques des charges latérales et les modèles développés sont exposés. Les calculs numériques effectués ces dernières années sont également évoqués. Au terme de ce chapitre, nous serons donc en mesure de mieux situer la présente étude parmi les recherches actuelles sur le thème des charges latérales.*

### 2.1 Position du problème

A la suite du récent échec du vol 157 d'Ariane 5, le 11 décembre 2002, la commission d'enquête a déclaré que la perte de contrôle du lanceur résultait de fuites dans le système de refroidissement du moteur Vulcain 2 [1, 2]. Ces fuites proviendraient de fissures engendrées par des efforts mécaniques et thermiques.

Les charges latérales (*i.e.* les efforts normaux à la poussée axiale observées dans les moteurs fusée) font partie de ces possibles efforts mécaniques et traduisent des répartitions de pression différentes le long des parois de la tuyère. Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au décollement de la couche limite en régime de forte surdétente<sup>1</sup>.

Le phénomène de surdétente peut avoir un caractère :

- permanent (moteurs fusée munis de tuyères adaptées à haute altitude et fonctionnant au sol lors d'essais ou à basse altitude durant la phase d'ascension du lanceur) ;

---

1. Le décollement peut présenter un caractère dissymétrique engendré par :

- un défaut de forme du divergent ;
- la géométrie de la tuyère lorsque la section de sortie n'est pas orthogonale à l'axe de révolution ("scarfed nozzle") ;
- un obstacle solide ou fluide extérieur à la tuyère. C'est le cas lors d'injection de fluide à partir de la paroi (vectorisation de la poussée).



- transitoire (lors du démarrage d’un moteur fusée au sol correspondant à la montée en pression dans la chambre de combustion).

En effet, lors du démarrage d’un moteur fusée au sol, par exemple, la pression chambre n’est pas suffisamment élevée pour que l’écoulement soit supersonique dans toute la tuyère : celui-ci est recomprimé à travers une onde de choc afin de s’adapter à la pression extérieure. Cette recompression s’accompagne d’un décollement dont les pertes de symétrie génèrent des efforts latéraux.

Ce phénomène, déjà observé sur plusieurs moteurs réels, peut avoir de graves conséquences liées à son caractère aléatoire. Ainsi, ces efforts peuvent-ils causer des déformations de la tuyère et des mouvements par rapport à son système d’attache. Les contraintes générées par ces efforts, instationnaires en module et direction, sont susceptibles d’être amplifiées par des effets dynamiques. Ils constituent de ce fait un facteur contraignant dans la conception de la structure de la tuyère puisqu’ils imposent d’avoir des tuyères plus épaisses, donc plus lourdes ou plus courtes et par conséquent entraînent une diminution de la charge utile transportée.

Plusieurs solutions sont actuellement à l’étude afin d’éviter ces efforts sur le divergent [96, 106]. Une première solution consiste à adapter, durant le vol, le contour de la tuyère aux variations de la pression chambre et de la pression ambiante afin que le décollement soit inexistant (tuyères auto-adaptables de type EEC : Extendible Exit Cone). La seconde solution réside dans les moyens de contrôle du décollement (Flow Separation Control Device). Cependant, les connaissances actuelles sur le décollement et les charges induites ainsi que des difficultés de mise en œuvre ne permettent pas encore d’appliquer ces systèmes aux moteurs fusée. Effectivement, les causes exactes des pertes de symétrie sont encore mal connues et les moyens de prédiction des efforts latéraux induits peu nombreux.

## 2.2 Décollement en régime de forte surdétente

### 2.2.1 Principaux types de tuyères

Avant d’aborder les différents régimes de fonctionnement d’une tuyère et en particulier le phénomène de décollement en régime de forte surdétente, il est important de rappeler les caractéristiques des tuyères conventionnelles. En effet, le décollement est fonction, entre autres, de la géométrie du divergent. Deux principales familles (figure 2.1) peuvent être distinguées [95, 96] :

- les tuyères coniques qui furent très largement utilisées dans la conception des premiers moteurs fusée de par leur simplicité et leur facilité de construction. Généralement, ces tuyères présentent des angles de divergence entre 15 et 25 degrés. Elles sont actuellement encore employées pour équiper les très petits moteurs (servant, par exemple, au contrôle d’altitude des satellites).
- les tuyères galbées<sup>2</sup>, qui forment la seconde famille de tuyères conventionnelles, offrent de sérieux avantages sur les précédentes en terme de taille et de performance bien que, comme ces dernières, elles n’aient une performance optimale qu’à une altitude donnée.

---

2. “bell” ou “contoured nozzle” en anglais.

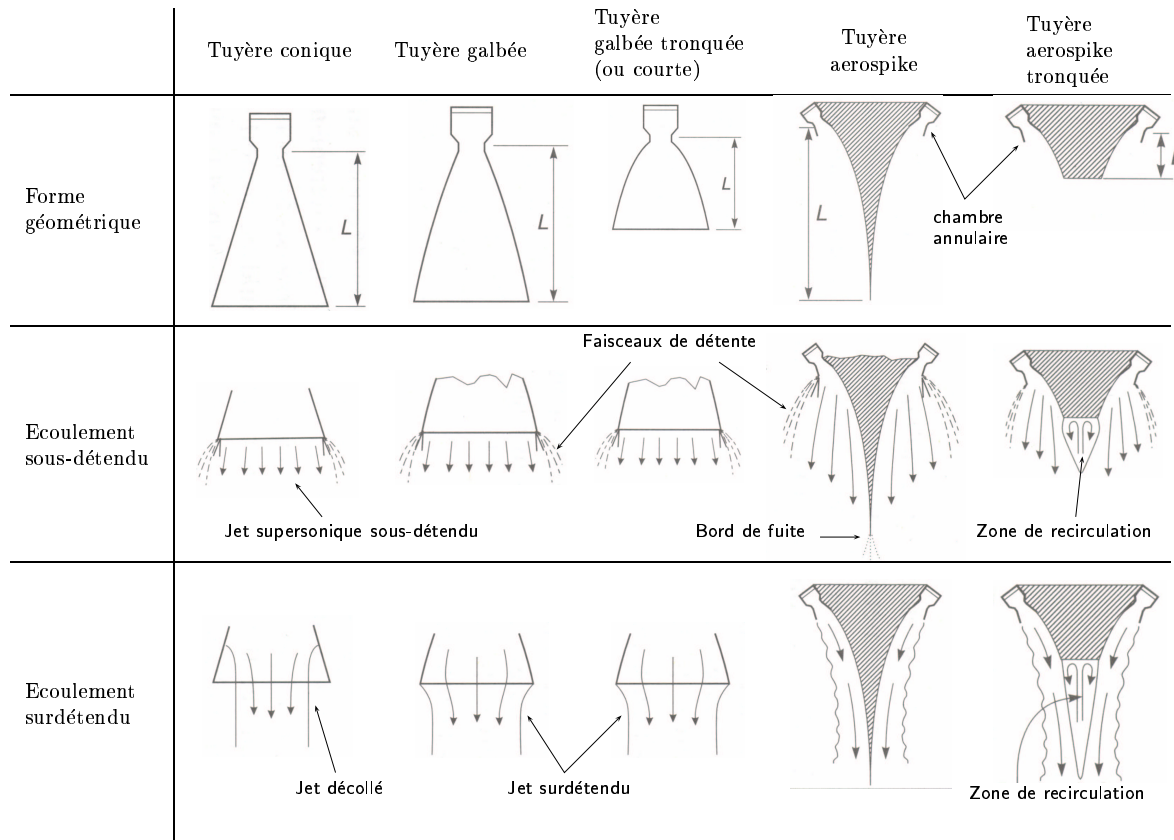


FIG. 2.1 – Principaux types de tuyères conventionnelles (coniques et galbées) et non-conventionnelles (aerospike), d'après [122].

Par ailleurs, cette famille de tuyère peut elle-même être divisée en sous-familles. Ainsi, on distingue [96] :

- les tuyères idéales tronquées (dites TIC, Truncated Ideal Contoured)<sup>3</sup>. La tuyère idéale, si elle n'est pas tronquée, produit un profil uniforme de l'écoulement en sortie de tuyère. La dernière partie de leur contour ne présente qu'une faible inclinaison, ce qui leur confère une grande longueur. Or, cette faible pente en sortie ne présente qu'une contribution négligeable à la poussée. Par conséquent, tronquer ces tuyères en facilite l'utilisation pour les moteurs fusée, sans perte significative en performance due à la non-uniformité de l'écoulement en sortie. En s'appuyant sur cette approche, Ahlberg [3] proposa une méthode d'optimisation qui résulte en un contour présentant une performance maximale pour un rapport de section donné. Les tuyères des moteurs russe RD-0120 et européen Viking sont de ce type.
- les tuyères optimisées en poussée (dites TOC, Thrust-Optimized Contoured). Rao [104] proposa une méthode permettant d'optimiser la performance d'une tuyère pour une longueur donnée. La longueur typique d'une "tuyère Rao" est de 75 à 85 % de

3. Notons également l'existence des CTIC (Compressed Truncated Ideal Contoured).

la longueur d'un tuyère conique de 15 degrés ayant le même rapport de section.

- les tuyères optimisées paraboliques (dites TOP, Thrust-Optimized Parabolic). Il a aussi été montré par Rao [105] que le profil de la tuyère obtenu par cette méthode pouvait être approché par une parabole, sans perte significative de performance. Cette approche est fréquemment employée pour la conception des tuyères de moteurs fusée modernes tels que le moteur américain SSME ou européen Vulcain.

On notera, en particulier, que les profils des tuyères coniques et galbées de type TOC ou TOP sont à l'origine de chocs internes dans l'écoulement.

Les tuyères non-conventionnelles (voir figure 2.1) comme les tuyères annulaires de type aerospike<sup>4</sup> sortent du cadre de notre étude et ne feront donc pas l'objet d'une description. Le lecteur intéressé est invité à consulter les références [95] et [122] pour plus de détails.

### 2.2.2 Régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique

Lorsque la tuyère est amorcée (état sonique au col), le régime d'écoulement ne dépend que du rapport entre la pression ambiante  $p_a$  (supposée variable) et la pression statique en sortie  $p_{e,vac}$  (où *vac* fait référence au vide) que celle-ci a dans le vide. Dans la pratique, on distingue, pour ces régimes de fonctionnement, les écoulements non-décollés des écoulements décollés.

#### - Ecoulement non-décollé

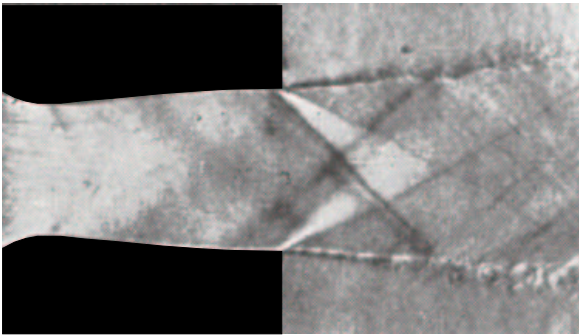


FIG. 2.2 – *Tuyère bidimensionnelle en régime sous-détendu ( $p_a/p_{e,vac}=0.66$ ). Notez la présence des faisceaux de détente à la lèvre de sortie de la tuyère (photo tirée de [81]).*

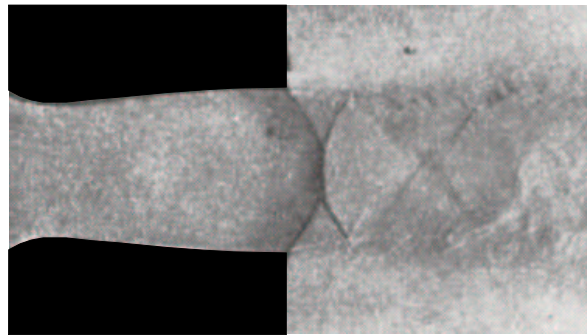


FIG. 2.3 – *Tuyère bidimensionnelle en régime surdétendu avec réflexion de Mach pour un rapport de pression  $p_a/p_{e,vac} > 2.5$  (photo tirée de [81]).*

Lorsque la tuyère est amorcée et que l'écoulement dans le divergent reste attaché à la paroi, le profil de pression pariétale n'est pas influencé par la pression ambiante externe mais dépend principalement de la pression chambre,  $p_c$ , et de la géométrie de la tuyère employée. Ce type d'écoulement se rencontre lorsque le moteur fonctionne à - ou au-delà de - l'altitude pour laquelle il a été adapté. En terme de rapport de pression, cela correspond à :

- $p_a/p_{e,vac} = 1$  : tuyère adaptée à la pression ambiante ou extérieure.

<sup>4</sup> Encore appelés "plug nozzles". Ces tuyères sont auto-adaptables car elles ne comportent pas de parois externes et ne présentent pas de décollement.

- $p_a/p_{e,vac} < 1$  : tuyère dite sous-détendue. Dans ce cas, un faisceau de détente apparaît à la lèvre de sortie de la tuyère (figure 2.2).

### - Ecoulement avec décollement naissant

Lorsque le rapport de pression est supérieur à un ( $p_a/p_{e,vac} > 1$ ), la tuyère fonctionne en régime de surdétente. Une onde de choc (choc de recompression ou de décollement) se forme à la lèvre de la tuyère. La couche limite enregistre un gradient de pression adverse, s'épaissit, mais reste attachée à la paroi jusqu'à la lèvre de sortie de la tuyère (figure 2.3). Différentes structures de choc (réflexion régulière, réflexion de Mach et choc en chapeau [62]), décrites plus en détails par la suite, peuvent être observées dans le jet comme en témoignent les figures 2.4 et 2.5.

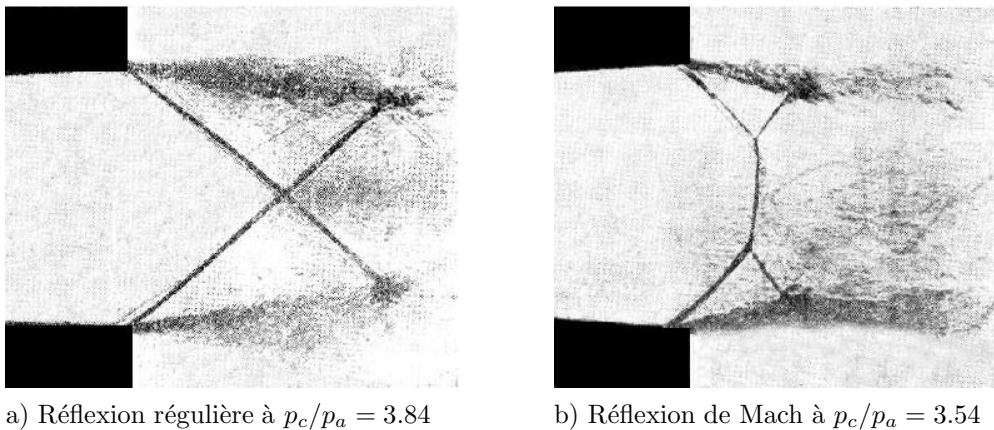


FIG. 2.4 – Jet supersonique avec réflexion régulière et réflexion de Mach.  $p_c$  désigne la pression chambre (photos tirées de [20]).

### - Ecoulement avec décollement effectif

Si la pression aval continue à augmenter et dépasse un certain seuil<sup>5</sup> ( $p_a/p_{e,vac} \gg 1$ , régime de forte surdétente), il arrive un moment où la couche limite ne peut plus contrer le gradient de pression adverse devenu trop important et décolle. Soulignons, à ce niveau, que la prédiction de ce seuil de pression est un enjeu important pour les motoristes puisque ceux-ci souhaitent souvent éviter ou maîtriser le décollement. Les critères de décollement (section 2.2.5) ont pour objectif d'estimer ce seuil.

---

5. En pratique,  $p_{e,vac}/p_a \simeq 0.4 - 0.8$  [96].

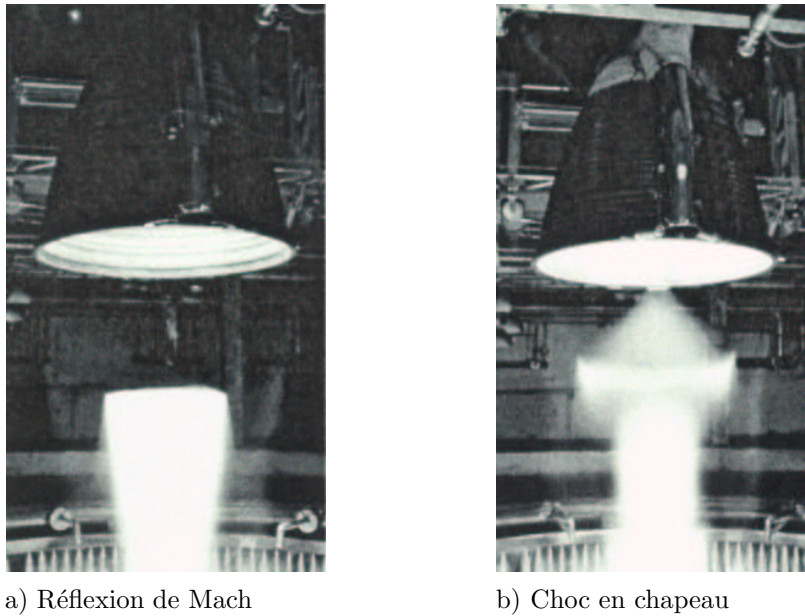


FIG. 2.5 – Moteur Vulcain au banc d'essai (Photos Snecma).

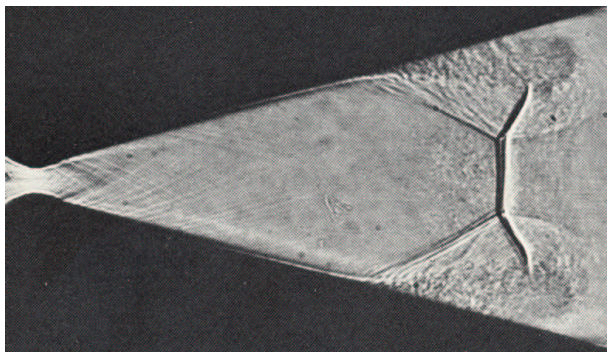


FIG. 2.6 – Décollement effectif lors d'un amorçage rapide - tuyère Amann [4].

Comme évoqué ci-dessus, plusieurs types de structure de choc peuvent être observées dans le jet. Lorsque l'évolution du profil de la tuyère est douce (cas des tuyères de moteurs fusée de type TIC), le choc de décollement se réfléchit sur l'axe de symétrie. Deux types de réflexion peuvent alors se produire :

- l'une dite "régulière"<sup>6</sup> (figure 2.7.a) où le choc incident I se réfléchit directement sur l'axe de symétrie en un choc oblique réfléchi IR ;
- l'autre dite "singulière" ou "de Mach" où le choc incident I se réfléchit en formant un

choc normal à l'axe appelé disque de Mach (figure 2.7.b). Du point triple TP, où se rencontrent le choc incident, le choc réfléchi et le disque de Mach, émane une ligne de glissement SL. Cette discontinuité iso-bars sépare la poche subsonique en aval du choc fort de la région supersonique en aval du choc réfléchi IR.

On pourra noter que l'obtention de l'une ou l'autre de ces réflexions dépend fortement du rapport de pression (figure 2.4) et du contour de la tuyère. D'autre part, le phénomène de transition entre ces réflexions peut faire intervenir un effet d'hystérésis [26, 14].

Lorsque l'évolution du profil de la tuyère est fortement optimisée en poussée (TOC et TOP), il se forme un choc interne de focalisation (IS). Ce choc est dû au changement de courbure

6. Ce type de réflexion est théoriquement impossible dans les tuyères axisymétriques [26, 14] mais il arrive que le disque de Mach soit si petit que la réflexion est apparemment régulière.

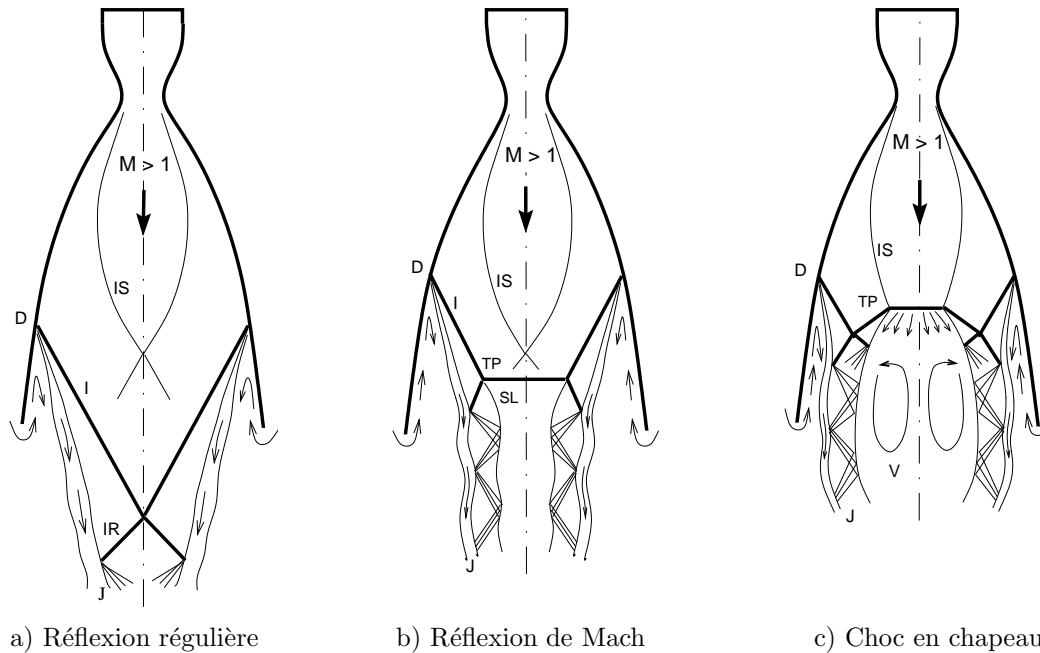


FIG. 2.7 – Représentation schématique de la réflexion régulière, de la réflexion de Mach et du choc en chapeau. *I*: choc incident, *IS*: choc de focalisation, *IR*: choc réfléchi, *J*: jet, *SL*: ligne de glissement, *TP* point triple, *D*: point de décollement, *V*: tourbillon.

de la paroi au niveau du col. L'interférence de ce choc interne avec le choc de décollement (*I*) peut conduire à une structure de choc complexe dite "en chapeau"<sup>7</sup> (figure 2.7.c) [51]. Cette structure serait le résultat de l'interférence entre le choc de décollement et la réflexion de Mach inverse<sup>8</sup> du choc interne sur l'axe de symétrie. Là encore, l'obtention de l'une ou l'autre de ces structures dépend du profil de la tuyère, du rapport de pression et fait également intervenir un effet d'hystérésis [51].

En dernier lieu, concernant le décollement lui-même, deux types de configurations ont été observés expérimentalement, puis confirmés numériquement.

### 2.2.3 Décollements libre, restreint et transition

Le plus souvent, le décollement rencontré est libre (c'est-à-dire que le jet décolle de la tuyère avant sa lèvre de sortie et s'en éjecte librement). Cependant, pour certains types de tuyères, un second type de décollement, appelé "décollement restreint", peut être rencontré. Ce dernier se caractérise par un rapide recollement de la couche limite décollée.

#### - Décollement libre

Dans le cas d'un décollement libre (en anglais "Free Shock Separation" : FSS), l'écoulement surdétendu dans la tuyère décolle complètement pour un certain rapport de pression  $p_a/p_w$ , où

7. De l'anglais "cap-shock".

8. Voir [51] pour plus de détails sur la réflexion de Mach inverse et les principales différences entre un disque de Mach et un choc en chapeau.

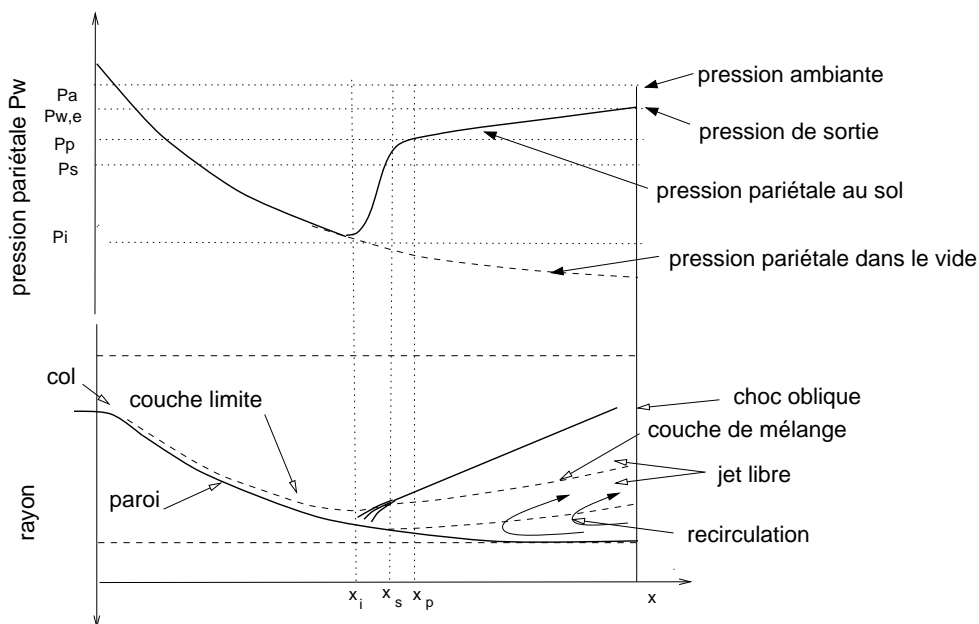


FIG. 2.8 – Représentation schématique du décollement libre, d’après Frey et Hagemann [51]. On remarquera que le choc de décollement peut se réfléchir de façon régulière, singulière ou induire une structure de choc en chapeau en présence d’un choc interne (cf. figure 2.7.c). Les indices  $i$ ,  $s$  et  $p$  font référence, respectivement, au point de séparation naissante, au point de séparation effective et au plateau.

$p_w$  dénote la pression pariétale. Un écoulement de retour en aval du point de décollement se forme : une partie du fluide ambiant est “aspirée” jusqu’au point de décollement, avant d’être réorientée avec le jet principal de la tuyère.

L’évolution de la pression pariétale  $p_w$  (figure 2.8) peut être considérée comme en partie régie par la physique des interactions onde de choc/couche limite en écoulement supersonique. La première déviation de la pression pariétale par rapport à son évolution dans le vide  $p_{w,vac}$  est appelée pression de séparation naissante. Elle est notée  $p_i$ <sup>9</sup>. La pression pariétale augmente ensuite rapidement jusqu’à atteindre une pression plateau  $p_p$  généralement plus faible que la pression ambiante  $p_a$ . Il faut noter que le décollement effectif a lieu plus en aval, en  $x_s$ , un peu avant le plateau. L’augmentation de pression entre  $p_p$  et  $p_a$ , due à la zone de recirculation, est beaucoup moins marquée.

Il en ressort que le décollement libre fait intervenir deux mécanismes bien distincts. Le premier est associé au décollement du jet à la paroi et régi par le saut de pression  $p_i/p_p$  alors que le second est lié à l’écoulement ambiant aspiré dans la zone de recirculation et contrôle l’évolution du rapport  $p_p/p_a$ .

### - Décollement restreint

Dans les années 70, un second type de configuration de décollement fut observé par Nave et Coffey [93] durant des tests sur des maquettes du moteur J-2S alimentées en gaz froids.

9. Parfois notée  $p_{sep}$  dans la littérature.

L'existence de ce nouveau type de décollement, dit "restreint" (en anglais "Restricted Shock Separation" : RSS) du fait de la faible étendue de la zone de recirculation, fut confirmée en 1994 par les simulations numériques de Chen *et al.* [25]. Par la suite, il fut rencontré sur d'autres maquettes à échelle réduite mais aussi sur des moteurs réels, bien qu'à l'origine les scientifiques pensaient que cette configuration n'avait lieu que pour des maquettes à échelle réduite fonctionnant en gaz froids. En fait, cette configuration est principalement influencée par le profil de la tuyère et non par la taille de celle-ci.

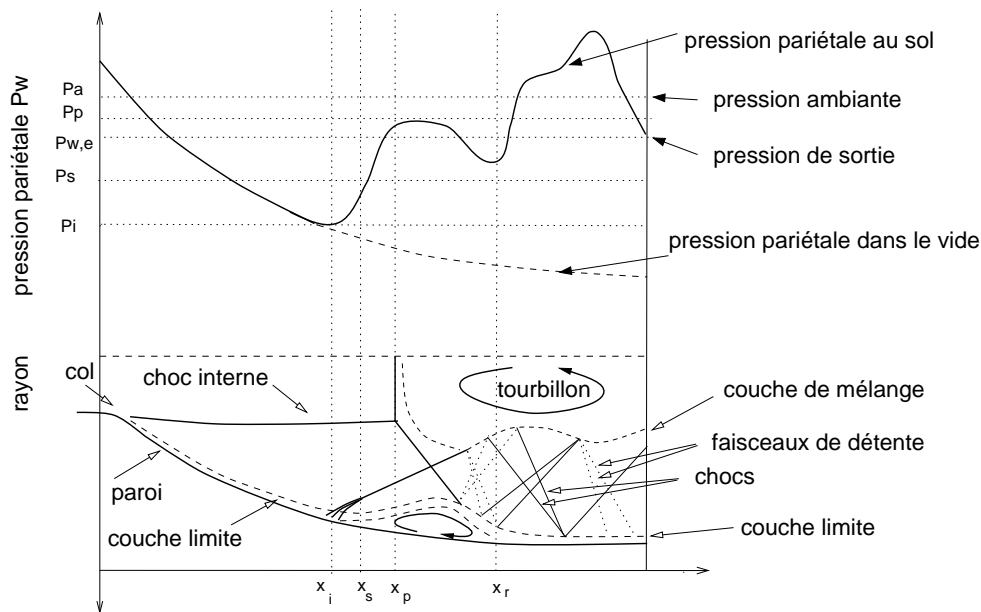


FIG. 2.9 – Représentation schématique du décollement restreint, d'après Frey et Hagemann [51]. Les indices  $i$ ,  $s$ ,  $p$  et  $r$  font référence, respectivement, au point de séparation naissant, au point de séparation effective, au plateau et au point de recollement.

Pour ce régime d'écoulement, n'ayant lieu qu'à certains rapports de pression, l'écoulement décolle puis recolle rapidement sur la paroi de la tuyère. L'évolution de la pression pariétale en aval du décollement est irrégulière, la pression pariétale dépassant parfois la pression ambiante (cf. figure 2.9). Ce phénomène est attribué au recollement de l'écoulement décollé. En effet, celui-ci induit des ondes de compression et de détente dans le jet supersonique.

### - Transition et "end effect"

Durant l'amorçage des moteurs présentant initialement un décollement libre, la transition entre décollement libre et décollement restreint se produit à un rapport de pression  $p_c/p_a$  bien défini. Le décollement restreint, comme nous venons de le voir, se caractérise par une zone de recirculation fermée, où les pressions sont inférieures à la pression ambiante. La transition FSS  $\rightarrow$  RSS s'accompagne, par conséquent, d'un déplacement aval soudain du point de décollement. Lorsque la pression génératrice augmente davantage, la bulle de recirculation se déplace vers l'aval et le point de recollement atteint finalement la sortie de la tuyère. La zone de recirculation s'ouvre alors au fluide ambiant. Ceci s'accompagne d'une augmentation de la



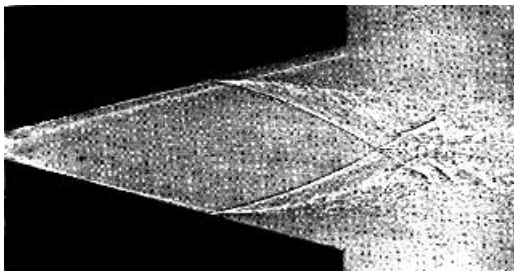
pression dans la zone de retour, derrière le choc de décollement, et le point de décollement est repoussé vers l'amont. Ainsi, la zone de recirculation peut se refermer, d'où une nouvelle chute de pression et un mouvement aval du point de décollement. Un mouvement cyclique, connecté à l'ouverture et à la fermeture de la zone de recirculation, est alors observé [100]. Cette transition  $RSS \rightarrow FSS$  est connue dans la littérature sous le nom de "end effect".

Les mêmes phénomènes peuvent être observés durant la phase d'extinction du moteur. Toutefois, si la transition  $FSS \rightarrow RSS$  ("end effect") a lieu, dans ce cas, au même rapport de pression génératrice que lors de l'amorçage, celle correspondant à la transition  $RSS \rightarrow FSS$  ( $FSS \rightarrow RSS$  à l'amorçage) diffère. Ceci témoigne d'un effet d'hystérésis.

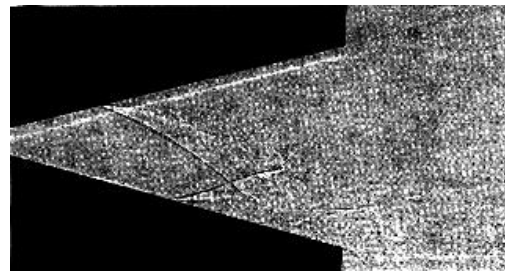
Frey et Hagemann ont proposé une explication pour le décollement restreint à partir d'observations expérimentales et de simulations numériques. Selon leurs résultats, la structure de choc en chapeau, décrite dans la section 2.2.2, serait l'élément clé de la transition  $FSS \leftrightarrow RSS$ . Ils concluent que cette transition ne peut se produire que dans les tuyères présentant un choc interne<sup>10</sup>.

#### 2.2.4 Dissymétrie du décollement

Nous venons de décrire les principales caractéristiques stationnaires des décollements libre et restreint. A ce niveau, il est important de noter que ces décollements peuvent présenter des asymétries (figures 2.10.a et 2.10.b).



a) Décollement symétrique à  $p_c/p_a = 19.4$



b) Décollement dissymétrique à  $p_c/p_a = 8.7$

FIG. 2.10 – *Tuyère bidimensionnelle décollée (Photos issues de [85]).*

Le caractère dissymétrique de l'écoulement a été étudié notamment par Lawrence [73, 74]. Ses expériences mirent en évidence que des décollements dissymétriques, stables ou non, pouvaient intervenir dans tous les types de tuyères, qu'elles soient bidimensionnelles, ou de révolution, coniques ou profilées, à petit ou à grand rapport de section. Elles montrèrent également, que ce régime dissymétrique apparaissait généralement dans des plages intermédiaires de  $p_c/p_a$ , après et avant des régimes de décollement symétriques. De plus, le caractère dissymétrique du décollement peut s'accompagner d'un phénomène de basculement d'un côté à l'autre du divergent.

Aujourd'hui encore, les phénomènes contrôlant la symétrie et la stabilité du décollement restent

<sup>10</sup>. Pourquoi alors n'y a-t-il pas de choc en chapeau dans les tuyères coniques? Selon Frey et Hagemann, ceci est dû au fait que le choc interne subit de multiples réflexions, ce qui réduit le nombre de Mach de l'écoulement près de l'axe et que la réflexion de Mach inverse nécessite un écoulement à haut nombre de Mach.

mal compris. Les études expérimentales récentes sur ce sujet [19] témoignent de ces difficultés.

Par ailleurs, on peut noter que les décollements turbulents induits par des chocs sont par nature fluctuants. Cette caractéristique du décollement joue un rôle important dans l'apparition des charges latérales. Cependant, par souci de concision, ces aspects ne sont pas décrits ici. Une revue bibliographique des travaux effectués à ce sujet peut être trouvée dans les références [38, 55, 100].

### 2.2.5 Modélisation du décollement stationnaire

Bien que le caractère instationnaire et dissymétrique du décollement ait été mis en évidence par de nombreuses expériences, le phénomène observé est généralement décrit comme fluctuant autour d'une position moyenne stable, ce qui justifie l'utilisation de l'approche stationnaire pour prédire sa position.

#### - Prédiction du décollement libre

Pour prédire la position axiale du décollement, il est nécessaire de connaître, par exemple, le rapport  $p_i/p_a$ . La position  $x_i$  du décollement naissant peut ensuite être déduite à partir du profil de pression pariétale dans le vide.

- Approche classique

Dans la théorie relative à l'interaction onde de choc/couche limite en écoulement bidimensionnel, Chapman [24] introduit le "concept d'interaction libre". Selon ce concept, l'augmentation de pression lors d'un décollement est liée essentiellement à l'épaississement de la couche limite, indépendamment des conditions en aval ayant provoqué le décollement. L'écoulement amont externe est défini par un nombre de Mach  $M_i$  et une pression  $p_i$ . La couche limite est caractérisée par son coefficient de frottement  $C_{fi}$  et son épaisseur de déplacement. Moyennant l'introduction d'une loi de corrélation pour la répartition de la pression dans les zones d'interaction libre, Chapman parvint à l'expression suivante :

$$\frac{p_p}{p_i} = 1 + \frac{\gamma M_i^2}{2} \sqrt{2C_{fi}} (M_i^2 - 1)^{-1/4} F_p(X)$$

où l'indice  $p$  est relatif au plateau de pression et  $i$  le point où débute l'interaction. La fonction  $F_p$  est une fonction universelle déduite de l'expérience. Le critère d'interaction libre indique que le saut de pression à travers le choc de décollement dépend du nombre de Mach amont  $M_i$  mais également du coefficient de frottement  $C_{fi}$  de la couche limite au début de l'interaction. Cependant, comme la variation de  $C_{fi}$  avec le nombre de Reynolds est très faible ( $C_f$  varie comme  $Re^{-1/5}$  pour un écoulement turbulent de plaque plane), des corrélations fonction uniquement du nombre de Mach amont ont été proposées.

Deux types de critères peuvent être distingués : ceux donnant le saut de pression et ceux donnant le rapport des nombres de Mach à travers le choc de décollement (*cf.* tableau 2.1).

Toutefois, il ressort de plusieurs comparaisons entre les résultats expérimentaux et ceux issus de

Auteur	Formulation	Spécifications
Summerfield (1940) [120]	$p_i/p_a \simeq 0.4$	tuyères coniques
Green (1953) [56]	$M_p/M_i = 0.78$	tuyères coniques
Schilling (1962) [111]	$p_i/p_c = 0.582(p_c/p_a)^{-0.195}$	tuyères profilées
	$p_i/p_c = 0.541(p_c/p_a)^{-0.136}$	tuyères coniques
Kalt and Bendal (1965) [69]	$p_i/p_c = 0.667(p_c/p_a)^{-0.2}$	air froid et gaz réels chauds
Schmucker (1976) [113]	$p_i/p_a = (1.88M_i - 1)^{-0.64}$	propergols liquides

TAB. 2.1 – Quelques critères de décollement. Voir [107] pour plus de détails concernant les spécifications de ces critères.

ces critères<sup>11</sup>, qu’aucun ne peut prétendre s’appliquer de façon générale à une tuyère quelconque (divergent long ou tronqué, conique ou galbé, alimenté en air froid ou en gaz chauds... ). Une des raisons expliquant les écarts observés réside dans le fait qu’aucun des critères précédents ne différencie les deux mécanismes responsables de l’augmentation de pression entre  $p_i$  et  $p_a$ .

- Décomposition du rapport de pression

Le décollement libre fait intervenir deux mécanismes distincts :

- Le premier est associé au décollement de l’écoulement lui-même et pilote l’évolution du rapport  $p_i/p_p$ .
- Le second est associé au gaz ambiant aspiré dans la zone de recirculation et contrôle l’évolution du rapport  $p_p/p_a$ .

Aussi est-il préférable de modéliser séparément ces deux phénomènes pour prédire la position du décollement, comme l’ont suggéré Carrière [22] et Lawrence [74] en 1968.

Concernant la modélisation du premier mécanisme, la théorie de l’interaction libre peut être utilisée. L’augmentation de la pression au niveau du choc (rapport  $p_i/p_p$ ) est donc assez facilement modélisable<sup>12</sup>.

Pour la remontée de pression associée à la zone décollée (rapport  $p_p/p_a$ ), la situation est très différente car les modèles manquent. Les expériences indiquent que de nombreux paramètres (géométrie de la paroi en aval du point de décollement, longueur de la zone de décollement, courbure de la paroi [51]...) influencent de manière significative l’augmentation de la pression dans cette zone.

Malgré ces difficultés, de nouveaux modèles fondés sur cette décomposition du rapport  $p_i/p_a$ , tels celui de l’ONERA [107], ont été développés. Les résultats obtenus pour la tuyère LEA sont très encourageants et meilleurs que ceux fournis par des critères plus classiques [107].

11. Voir, par exemple, l’application de ces critères au décollement de la tuyère Mark II [107] ou de la tuyère LEA [55].

12. Par exemple, en considérant les critères précédents avec  $p_p$  à la place de  $p_a$ .

### - Prédiction du décollement restreint

La prédiction du décollement restreint n'a débuté que récemment. Les modèles de Ostlund et Bigert [97], et Frey et Hagemann [52] sont, à notre connaissance, les premiers à avoir été développés, le dernier étant plus sophistiqué et plus physique que le précédent.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.2.3, le recollement de la couche limite décollée trouve son origine dans la présence du choc en chapeau. En effet, à la traversée du choc de décollement, l'écoulement est dévié vers l'axe du divergent. A l'inverse, les chocs obliques, émanant du point triple de la configuration du choc en chapeau, dévient l'écoulement en direction de la paroi, ce qui favorise le recollement. Ainsi, si la déviation de l'écoulement engendrée par le choc de décollement prévaut sur celle induite par les chocs obliques, le jet décollé restera libre. Si, au contraire, la seconde déviation est plus importante, le jet recollera à la paroi.

Frey et Hagemann [52] ont montré qu'une comparaison entre les positions axiales du point de décollement et du choc droit présent dans la structure de choc en chapeau permettait d'évaluer l'importance relative de ces deux contributions. Le modèle qu'ils ont développé repose sur ce point.

Dans un premier temps, Frey et Hagemann déterminent la position du décollement grâce au critère de Schmucker modifié :

$$\frac{p_i}{p_a} = \alpha(1.88M_i - 1)^{-0.64} \quad (2.1)$$

où le coefficient  $\alpha$  diffère selon que le décollement est libre ou restreint ( $\alpha_{rss} < \alpha_{fss}$ ). La position du choc droit normal à l'axe est, quant à elle, déterminée à partir des relations de choc. Les grandeurs inconnues de l'écoulement sont estimées à partir d'un calcul eulérien de l'écoulement non-décollé.

Pour déterminer les rapports de pression auxquels ont lieu les transitions durant l'amorçage, les auteurs procèdent comme suit :

- Le décollement étant de type FSS au début de l'amorçage, ils en déterminent la position à l'aide de la relation (2.1) avec  $\alpha = \alpha_{fss}$ .
- Ils étudient la différence entre la position du décollement et celle du choc droit en fonction du rapport de pression  $p_c/p_{c,nom}$  puis déterminent le rapport de pression ( $p_{c1}/p_{c,nom}$ ) correspondant au minimum négatif de cette différence. Enfin, ils considèrent que la transition vers le décollement RSS a lieu pour un rapport de pression de l'ordre 50 % supérieur à  $p_{c1}/p_{c,nom}$ .
- A partir de ce rapport de pression, le décollement est restreint. Par conséquent, sa position est évaluée à l'aide de la relation (2.1) avec  $\alpha = \alpha_{rss}$ . On notera donc qu'au rapport correspondant à la transition, la position du décollement subit un saut vers l'aval (passage de  $\alpha_{fss}$  à  $\alpha_{rss}$ ), ce qui reproduit bien le comportement observé dans les expériences.
- Ils déterminent la valeur du rapport de pression correspondant à la transition RSS  $\rightarrow$  FSS "end effect" en considérant que celui-ci se produit lorsque le point de décollement atteint la lèvre de sortie de la tuyère.

Les résultats de ce modèle sont en bon accord avec les données du moteur Vulcain [52].

## 2.3 Etudes relatives aux charges latérales

Cette section résume les principales études relatives aux charges latérales menées par le passé. En premier lieu, plusieurs études expérimentales sont exposées. Dans un second temps, les modèles de prédiction déduits de ces observations sont résumés. Enfin, les résultats des simulations numériques effectuées ces dernières années sont présentés.

### 2.3.1 Etudes expérimentales

Selon Schmucker [112], le phénomène de charges latérales fut observé pour la première fois dans les années 60, sur le moteur du lanceur Atlas<sup>13</sup>.

Cette partie rappelle quelques-unes des nombreuses études expérimentales réalisées sur ce thème. Plusieurs études mettant en évidence des charges latérales sur des moteurs fusée ou des maquettes à échelle réduite sont présentées. De plus, des expériences portant sur des effets aéroélastiques (tuyères peu rigides) sont évoquées.

#### - Moteurs fusée

Les expériences ayant eu pour objectif de mieux comprendre les origines physiques des efforts latéraux sur les moteurs fusée réels sont multiples. Nous n'en présentons ici que deux parmi les plus représentatives<sup>14</sup>.

Moteur	Pression chambre nominale : $p_{c,nom}$ (bars)	Poussée dans le vide ( $kN$ )	Ergols	Type de contour
J-2S	82	1180	H2/O2	parabolique
Vulcain	100	1000	H2/O2	parabolique

TAB. 2.2 – Conditions de fonctionnement des moteurs étudiés [8].

Moteur	Diamètre au col ( $m$ )	Diamètre de sortie ( $m$ )	Rapport de section	Longueur de tuyère ( $m$ )	Angle de sortie	Angle max
J-2S	0.3099	1.950	39.6	2.228	6.5°	34°
Vulcain	0.2624	1.760	45	2.065	6.5°	35°

TAB. 2.3 – Caractéristiques géométriques des moteurs étudiés [8].

Dans les années 70, Nave et Coffey [93] menèrent une série d'expériences sur le moteur américain J-2S (cf. tableaux 2.2 et 2.3) en gaz chauds et sur ses maquettes à échelle réduite en gaz froids.

En premier lieu, une séquence de démarrage normale du moteur fut conduite. Une fois que la

13. Les charges observées pouvaient atteindre une intensité équivalente à 20 % de la poussée nominale.

14. La référence [55] peut être consultée pour une description de quelques autres études.



FIG. 2.11 – Apparition des “teepees” lors de l’amorçage des moteurs SSME (Photo NASA).

pression dans la chambre de combustion eut atteint sa valeur nominale ( $p_{c,nom} \simeq 83 \text{ bars}$ ), elle fut décrétementée jusqu’à l’obtention d’un pic de charges latérales. Des visualisations de l’écoulement décollé furent effectuées à l’aide d’une caméra et mirent en évidence l’aspect instationnaire du décollé libre rencontré. Plus précisément, les auteurs virent apparaître et disparaître, de façon aléatoire, des structures triangulaires (connues depuis sous le nom de “teepees”, voir figure 2.11)<sup>15</sup>. Cependant, le lien entre la présence de ces structures et l’intensité des charges latérales mesurées ne put jamais être clairement établi. Par ailleurs, ces teepees ne furent jamais observés sur des tuyères alimentées en gaz froids. Il semble donc que des phénomènes thermiques, et plus particulièrement le système de refroidissement, jouent un rôle prédominant dans l’apparition de ces structures.

Dans un second temps, les auteurs réalisèrent des mesures d’efforts latéraux sur les maquettes fonctionnant en gaz froids. Les mesures furent répétées pour différentes valeurs de la pression génératrice (voir figure 2.12). Deux pics furent détectés. Le premier, le plus intense, survient lors du passage du décollé libre au décollé restreint, pour un rapport de pression faible. Le second, plus large, se produit lorsque le décollé restreint se rapproche de la section de sortie de la tuyère.

Toutefois, bien qu’un comportement qualitatif des charges latérales en fonction du rapport  $p_c/p_a$  ressorte de cette étude, aucune information quantitative concernant le niveau réel de ces charges ne peut en être tirée. Schmucker [112] remarqua, en effet, que les efforts d’inertie dus au montage de la tuyère du J-2S et la déformation de celle-ci pouvaient modifier, de façon non-négligeable, l’intensité des efforts mesurés par les capteurs. Il utilisa une méthode de correction<sup>16</sup> des efforts

15. La visualisation de ces lignes de décollement fut rendue possible par la formation de givre le long des parois du divergent. Ce givre résultait des très basses températures de parois dans la zone décollée et de l’humidité de l’écoulement de retour extérieur. D’autre part, cette structure de décollement n’est visible que sur les tuyères des moteurs américains. Ceci se justifie par le fait que, contrairement aux moteurs européens, le circuit de refroidissement d’hydrogène liquide s’y fait de l’aval vers l’amont. C’est cette spécificité qui est responsable des très basses températures de parois dans la zone décollée.

16. Méthode décrite dans l’annexe H.

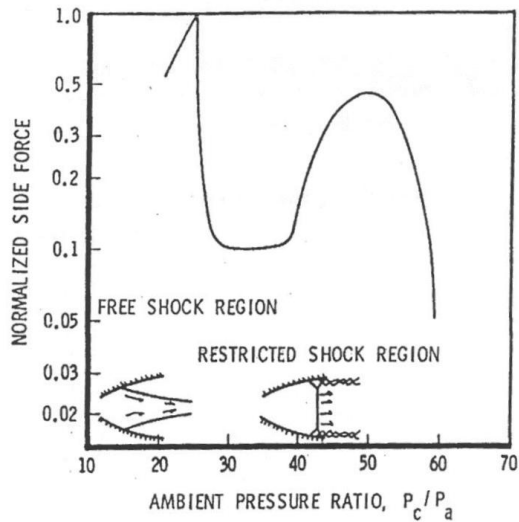


FIG. 2.12 - Evolution du niveau des charges latérales en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$ , pour les maquettes du moteur J-2S (tiré de [93]).

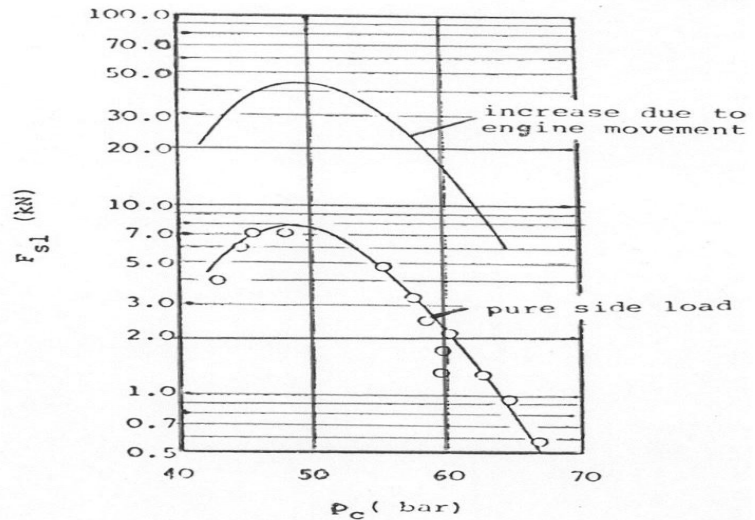


FIG. 2.13 - Effets de la prise en compte des effets d'inertie sur le niveau des efforts latéraux pour les maquettes du moteur J-2S (tiré de [112]).

bruts mesurés et détermina les efforts résultant uniquement des phénomènes aérodynamiques (asymétries du champ de pression) à l'intérieur du divergent. Il montra ainsi (figure 2.13) que, sur le montage du moteur J-2S, les efforts corrigés présentaient un maximum de  $8\text{ kN}$  alors que les signaux bruts conduisaient à un maximum de  $45\text{ kN}$  (soit un rapport de six environ).

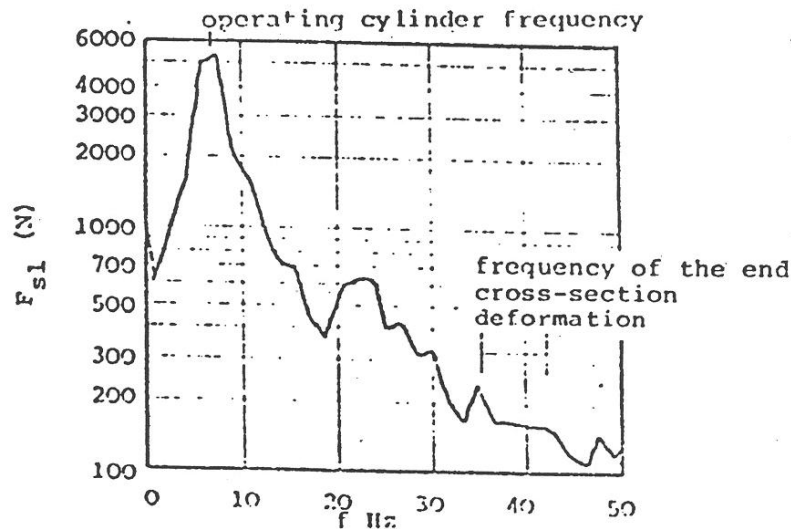


FIG. 2.14 - Spectre des signaux bruts mesurés sur les maquettes du moteur J-2S, obtenus pour un rapport de pression  $p_c/p_a = 68$  (tiré de [112]).

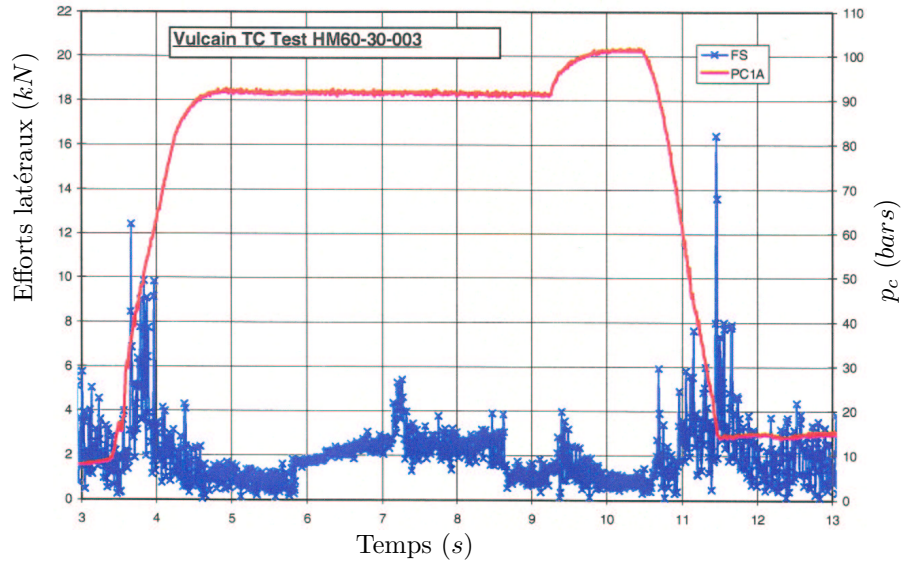


FIG. 2.15 – Essais réalisés par DASA sur le moteur Vulcain : mesures (non corrigées) des charges latérales en fonction de l'évolution de la pression chambre (tiré de [123]).

Schmucker réalisa également une analyse spectrale des signaux bruts issus des capteurs d'effort (figure 2.14). Le mouvement prédominant observé correspond à un déplacement autour de la rotule de suspension (mouvement pendulaire) dont la fréquence propre se situe autour de  $7\text{ Hz}$ . Deux autres pics de résonance sont mis en évidence à  $22\text{ Hz}$  et à  $35\text{ Hz}$ . D'après Schmucker, ces pics pourraient traduire une déformation elliptique de la section de sortie de la tuyère.

Par ailleurs, DASA a mené une étude expérimentale importante sur le moteur européen Vulcain (cf. tableaux 2.2 et 2.3) [124, 123]. Cette campagne comprenait des mesures de pression statique pariétale, des mesures d'efforts et des séquences vidéo.

L'évolution de la pression chambre durant ces essais est représentée sur la figure 2.15. Comme le montre cette figure, une rapide montée en pression permet d'atteindre une pression chambre de  $92\text{ bars}$ . Un régime permanent est ensuite établi pendant quelques secondes avant que la pression ne soit rapidement diminuée. Dans le même temps, les efforts latéraux sur le divergent sont mesurés et les résultats reportés sur la figure 2.15.

Durant les phases de montée et de descente en pression, des décollements libre et restreint sont observés. DASA constate que les principaux pics de charges latérales correspondent aux transitions entre ces régimes de décollement. Les basculements associés à ces transitions ne se feraient pas de façon symétrique, ce qui expliquerait le niveau important des efforts latéraux.

### - Etudes sur maquettes au LEA et au DLR

Les principaux phénomènes observés sur les moteurs fusée réels (décollement libre, restreint, transitions) peuvent l'être également sur des maquettes à échelle réduite. Les expériences sur ces maquettes sont beaucoup moins coûteuses et plus simples à instrumenter, c'est pourquoi celles-ci sont généralement privilégiées. Cependant, il est important de noter que les résultats obtenus sur des maquettes fonctionnant en gaz froids ne sont pas facilement transposables aux



moteurs à échelle réelle fonctionnant en gaz chauds, comme le montre Hagemann [60].

Deux tuyères ont été étudiées au LEA de Poitiers afin de caractériser et de mieux comprendre les mécanismes entraînant l'apparition des charges latérales. La première est de type idéale tronquée, donc sans choc interne (LEA-TIC), la seconde possède un contour optimisé en poussée et présente un choc interne (LEA-TOC). Toutes deux sont alimentées en gaz froids et sont très rigides de sorte à s'affranchir de possibles effets aéroélastiques.

Les expériences menées sur la tuyère LEA-TIC par Girard [55] montrent que la ligne de décollement moyenne est axisymétrique quel que soit le rapport de pression considéré et que seul le décollement libre est observé. Par ailleurs, des visualisations du décollement, à l'aide de cristaux liquides, ont mis en évidence un domaine de rapport de pression ( $p_c/p_a$  entre 22 et 52 environ) pour lequel l'écoulement semble beaucoup plus agité.

Des mesures instationnaires pour un rapport de pression appartenant à cette plage ( $p_c/p_a \simeq 40$ ) ont été réalisées. Un maximum de fluctuations, lié au battement du choc, a été détecté dans la région du décollement. Ces battements ont des fréquences associées faibles (de l'ordre de quelques dizaines de  $Hz$ ). Les signaux de pression de la zone décollée sont, quant à eux, dominés par des fréquences beaucoup plus élevées. Girard attribue leur origine aux structures développées dans la couche de mélange, entre le jet supersonique et l'écoulement de retour.

D'autre part, l'existence de charges latérales, dans le cas de cette tuyère fonctionnant en régime statique, a été mise en évidence. L'évolution des efforts latéraux en fonction du rapport de pression indique un unique pic pour des rapports de pression très faibles ( $p_c/p_a \simeq 30$ ) [31]. Ces efforts seraient provoqués par les instationnarités décrites ci-dessus.

La tuyère LEA-TOC [94, 31] présente, selon le rapport de pression, un décollement libre ou restreint. Pour ces deux types de décollement, la ligne moyenne est axisymétrique.

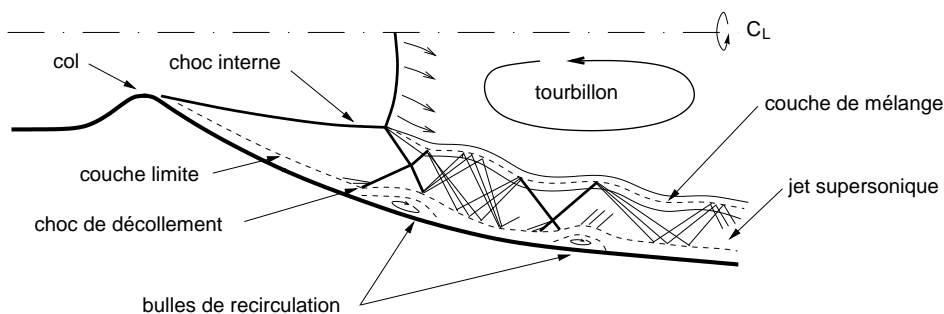


FIG. 2.16 – Représentation schématique de deux bulles de recirculation successives.

D'autre part, il est intéressant de noter qu'au moins deux bulles de recirculation successives (et non une seule) sont formées lorsque le décollement est restreint (voir figure 2.16).

D'après les observations, la durée d'une transition FSS  $\rightarrow$  RSS semble très courte (environ  $10\text{ms}$ ). Les résultats suggèrent également que, pour cette tuyère du moins, les transitions FSS  $\rightarrow$  RSS (montée de pression) et RSS  $\rightarrow$  FSS (descente) n'induisent pas d'importantes dissymétries. L'évolution des charges latérales en fonction du rapport de pression présente trois

pics principaux :

- Le premier maximum (vers  $p_c/p_a = 20$  pour une montée de pression), correspond à la fin du régime FSS (et non à la transition vers le décollement RSS) et serait le résultat de l'instabilité grandissante du décollement. L'intensité des efforts enregistrés durant le régime RSS est beaucoup plus faible.
- Pour des rapports de pression plus élevés, deux pics de charges latérales sont observés. Ces pics, associés à une instabilité à grande échelle de l'écoulement, correspondent à l'ouverture de la deuxième puis de la première bulle de recirculation.

Dans la référence [61], Hagemann *et al.* comparent les résultats d'essais au DLR sur une tuyère idéale TIC et une tuyère parabolique TOP, en termes de charges latérales. Ces deux tuyères ont été conçues de sorte que les efforts latéraux soient directement comparables (les deux tuyères sont adaptées pour un même rapport de pression et ont des performances identiques dans le vide).

Les résultats obtenus lors de l'amorçage sont résumés sur la figure 2.17. Pour la tuyère TIC, le décollement est toujours libre, alors que pour la tuyère TOP, un décollement restreint peut être rencontré à partir d'un rapport de pression de 32. La tuyère TIC présente un pic de charges latérales pour les faibles rapports de pression. Ce phénomène doit encore être étudié. Une augmentation du niveau des charges est ensuite enregistrée pour atteindre un maximum peu marqué, correspondant à un choc de décollement situé au tiers du divergent. Enfin, les efforts diminuent.

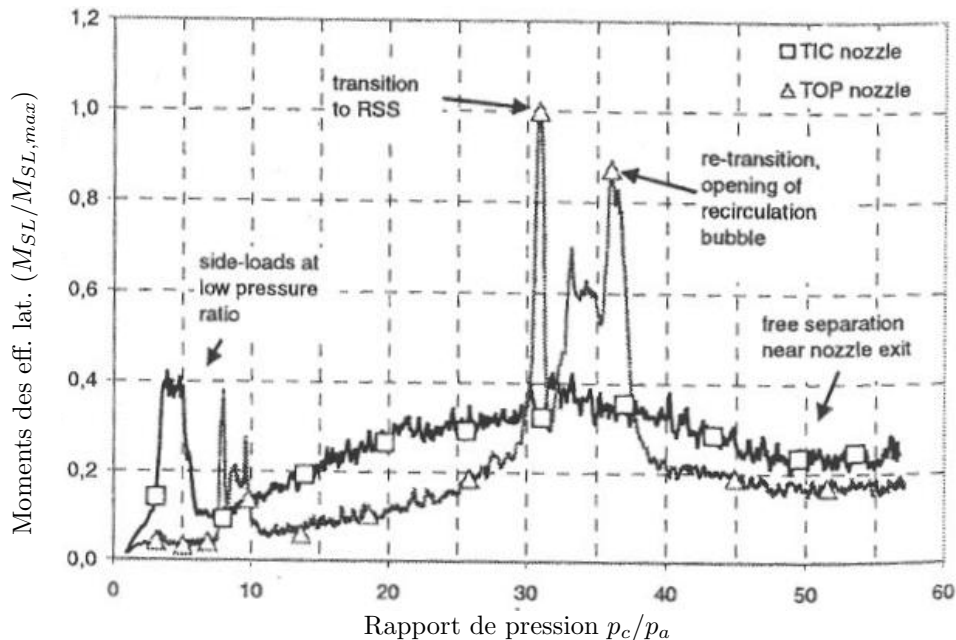


FIG. 2.17 – Comparaison des moments (corrigés) induits par les charges latérales sur une tuyère idéale TIC et une tuyère parabolique TOP, durant l'amorçage [61].

Pour la tuyère parabolique, les efforts induits par le décollement libre sont de même intensité

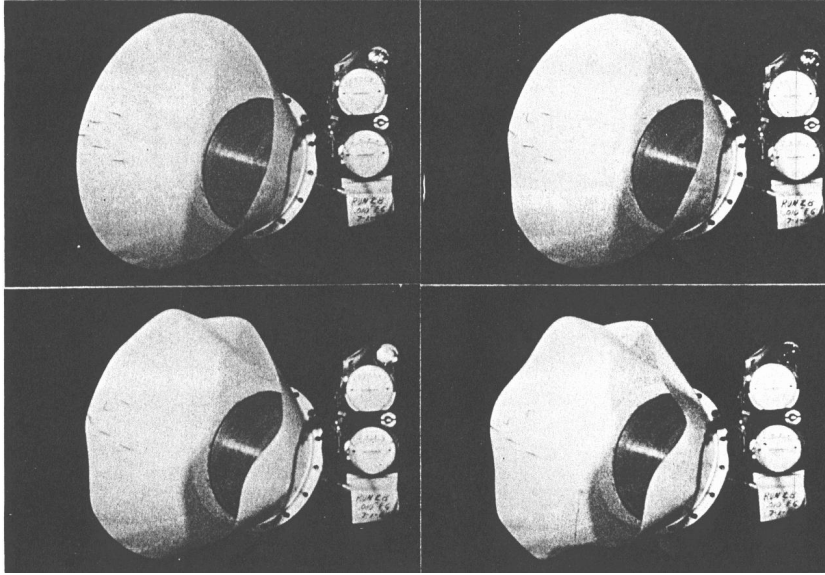


FIG. 2.18 – *Tuyère souple en flambage sur sept lobes. Expérience de Tuovila et Land [127].*

(les moments induits sont inférieurs mais la tuyère TOP est plus courte). Par contre, deux pics supplémentaires associés à la transition FSS  $\rightarrow$  RSS et à l'ouverture de la bulle de recirculation sont visibles pour des rapports de pression de 32 et 37 respectivement. Ainsi, pour un même rapport de pression, le décollement restreint induit des efforts d'une intensité trois fois supérieure à celle des efforts engendrés par le décollement libre.

Les résultats obtenus lors de l'arrêt du moteur sont similaires exception faite que le décollement restreint est présent sur une plus large plage de pression (la transition RSS  $\rightarrow$  FSS a lieu pour un rapport de pression de 15).

### - Tuyères souples

D'une manière générale, les expériences mettant en évidence des phénomènes aéroélastiques sont encore peu nombreuses. En particulier, les données expérimentales retraçant la réponse temporelle d'une tuyère flexible sont pratiquement inexistantes. Quelques expériences permettent toutefois d'obtenir des informations qualitatives sur le sujet.

#### ▷ Expériences de Tuovila et Land

En 1968, Tuovila et Land [127] réalisèrent des mesures expérimentales sur cinq divergents souples de tuyères surdétendues. Ces derniers différaient par le rapport de section et par l'épaisseur des extensions flexibles qui les composaient. Leurs expériences mirent en évidence, grâce à des films, un comportement instable de type flambement sur trois des divergents étudiés (figure 2.18). Cependant, la note technique rédigée par ces chercheurs ne présente que peu de données quantitatives.

#### ▷ Expériences sur la tuyère LEA souple

Les expériences menées par Moreaux [87] ont pour objectif d'acquérir une base de données pour le cas d'une tuyère souple. Afin de profiter au mieux des travaux de caractérisation de l'écoulement dans la tuyère LEA-TIC, il est apparu intéressant de prendre ces essais pour référence et de définir une tuyère souple ayant la même géométrie.

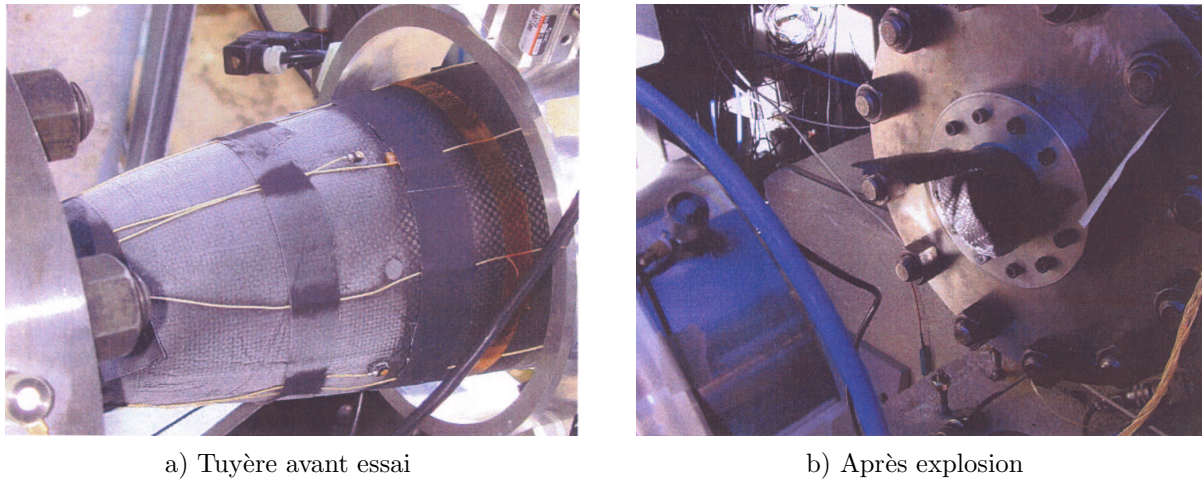


FIG. 2.19 – *Tuyère souple exploitée au LEA avant et après explosion (photos tirées de [87]).*

Une première campagne d'essai a été réalisée au LEA au début de l'année 2001. Lors de ces essais, seules cinq rafales ont pu être effectuées. En effet, à la suite de ceux-ci, un jeu latéral de l'ordre de  $0.6\text{ mm}$  a été constaté entre les parties métallique et composite de la tuyère, dans la zone située juste après le col. Aucun résultat ne fut retenu de cette première campagne. La tuyère n'étant pas réparable, une seconde version, utilisant cette fois le même matériau pour le convergent et le divergent, fut réalisée.

Une campagne d'essai sur cette seconde version (figure 2.19.a) a été menée au LEA en octobre 2001. Une trentaine de rafales ont été réalisées et ont permis de tester la tuyère souple pour des pressions allant de 11 à 64 bars. Malheureusement, la tuyère a de nouveau cassé. Celle-ci a explosé durant une rafale (figure 2.19.b). Les témoins présents ont rapporté que "la tuyère a gonflé, dégonflé, puis éclaté". Cependant, la conception de la tuyère n'est cette fois pas en cause. Moreaux pense avoir détecté une instabilité. L'analyse des résultats semble lui donner raison. Ces derniers montreraient une instabilité du mode d'ovalisation de la tuyère et un couplage aéroélastique pour un rapport de pression de 54 bars. Nous reviendrons plus en détails sur ces expériences dans le chapitre 3.

#### ▷ Tuyères souples Volvo

En dernier lieu, il convient de citer les travaux de Ostlund [96] sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre 9. En effet, Ostlund a étudié les effets d'un couplage aéroélastique en réalisant quelques expériences sur la tuyère S1 Volvo ainsi que sur la tuyère S6 Volvo dont il modifia la fréquence du mode de flexion. Ainsi, grâce à l'utilisation de ressorts de torsion, il parvint à étudier cinq tuyères plus ou moins souples. Ces expériences mirent en évidence l'existence d'effets aéroélastiques.

### 2.3.2 Origines physiques et modèles associés

Dès la mise en évidence expérimentale de l'existence d'efforts latéraux, de nombreux chercheurs commencèrent à développer des méthodes de "type-ingénieur" afin de déterminer la plage de rapports de pression auxquelles celles-ci pouvaient apparaître ainsi que leur intensité.

Or, comme le montrent les résultats exposés ci-dessus, des charges latérales ont été observées :

- pour des tuyères de moteurs réels et des maquettes à échelle réduite ;
- pour des tuyères de différents types (conique, TIC, TOC...);
- en gaz chauds et en gaz froids ;
- durant des phases transitoires (amorçage, arrêt) et en régime stationnaire ;
- pour des tuyères souples et rigides.

Leur origine réside dans le caractère tridimensionnel de la distribution de pression à l'intérieur de la tuyère. Celui-ci peut résulter :

- d'une ligne de décollement asymétrique ;
- de pulsations de pression au niveau de la ligne de décollement ou dans la zone de recirculation ;
- d'une transition entre décollement libre et restreint (et vice versa) ;
- d'un couplage aéroélastique ;
- de fortes variations de la pression externe : buffeting (non considéré par la suite).

A chacune de ces origines diverses correspond un ou plusieurs modèles de prédiction différents. Nous donnons, dans cette section, les principes généraux des plus connus de ceux-ci<sup>17</sup>. Le lecteur intéressé est invité à consulter les références citées pour une description plus détaillée de ces modèles.

#### - Dissymétrie de la ligne de décollement

L'hypothèse d'une ligne de décollement asymétrique constitue le fondement du modèle de Schmucker [112].

Afin de développer son modèle, celui-ci part de l'expression générale des charges latérales :

$$F_{sl} = \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_a - p_w) r(x) \cos\theta \, d\theta dx \quad (2.2)$$

où  $L$  représente la longueur du divergent,  $\theta$  l'angle local de la paroi et  $r(x)d\theta dx = dA$  un élément de surface (figure 2.20). L'auteur considère ensuite que la région décollée asymétrique, située entre les points  $x_{s1}$  et  $x_{s2}$ , contribue majoritairement aux charges latérales. Ainsi, l'équation (2.2) prend la forme :

$$F_{sl} = \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \int_0^{2\pi} (p_a - p_w) r(x) \cos\theta \, d\theta dx$$

---

17. Des modèles moins connus, tels que ceux de Pratt et Withney ou celui Rocketdyne, sont décrits dans la référence [113].

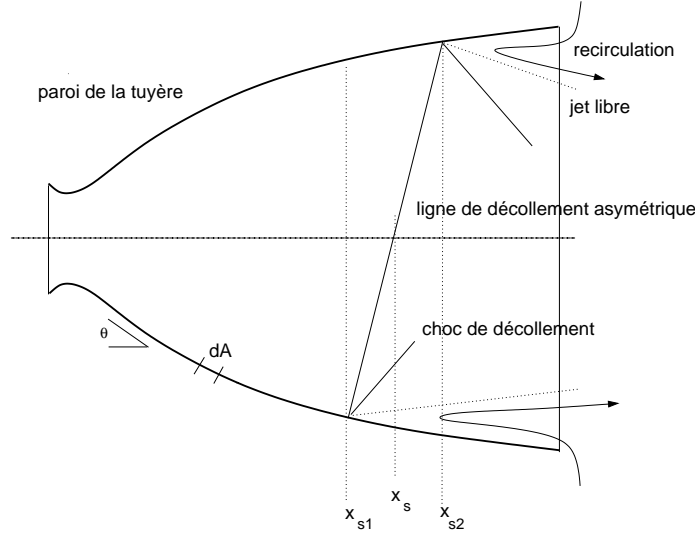


FIG. 2.20 – Représentation schématique d'une ligne de décollement asymétrique.

ou, de manière simplifiée,

$$F_{sl} \simeq (p_a - \bar{p}_s) A_{sl}. \quad (2.3)$$

Dans cette dernière relation,  $A_{sl}$  est la projection de la région présentant une distribution asymétrique de pression sur le plan perpendiculaire à la direction des efforts latéraux et  $\bar{p}_s$  dénote la pression pariétale moyenne à laquelle se produit le décollement.

En premier lieu, Schmucker évalue le terme  $p_a - \bar{p}_s$  de l'équation (2.3) grâce au critère de décollement qu'il a lui-même développé<sup>18</sup>. Concernant le second terme, il pose

$$A_{sl} = b \Delta l_{sl}$$

où  $b = 2\bar{r}_s K_g$  est un coefficient mesurant l'asymétrie de la zone décollée dans la direction azimutale avec  $K_g = 0.3 - 0.4$  pour le moteur J-2S et  $\bar{r}_s$  le rayon du décollement moyen.

Enfin, afin d'estimer  $\Delta l_{sl} = x_{s2} - x_{s1}$ , Schmucker suppose, notamment, que les fluctuations de pression pariétale sont proportionnelles à la pression nominale. Il obtient finalement l'expression suivante :

$$F_{sl} = 2K_g K_{fl} \frac{r_i}{r_t} r_t^2 \frac{p_i}{p_c} p_a \left(1 - \frac{p_i}{p_a}\right) \frac{1}{\frac{d(p_w/p_c)}{d(x/r_t)}} \frac{1}{1 - \frac{1 + (\gamma - 1)/2M_i^2}{(1.88M_i - 1)M_i} \frac{1.2032}{\gamma}} \quad (2.4)$$

où  $K_{fl} = 0.05$  pour le moteur J-2S. Cette expression est proportionnelle à  $(dp_w/dx)^{-1}$ . Le gradient de pression est donc le facteur le plus important influençant l'intensité des efforts latéraux. Ainsi, lorsque le gradient de pression diminue (ce qui est souvent le cas lorsque le point de décollement se déplace vers la sortie), les efforts latéraux augmentent.

Il convient de remarquer que ce modèle ne s'applique qu'aux décollements libres et qu'il a été

18. Voir le tableau 2.1 avec  $(p_a - \bar{p}_s) \simeq p_a(1 - p_i/p_a)$ .

développé pour prédire les charges latérales du moteur J-2S. Or, dès que ce modèle est appliqué à un moteur de géométrie très différente, l'accord entre les efforts latéraux prédits et mesurés n'est pas satisfaisant. Ceci indique que la simple hypothèse d'une ligne de séparation asymétrique n'est pas représentative, à elle seule, des phénomènes physiques mis en jeu.

### - Pulsations de pression

Les oscillations de la ligne de décollement et les pulsations aléatoires de pression dans la zone de recirculation constituent le fondement du modèle de Dumnov [42].

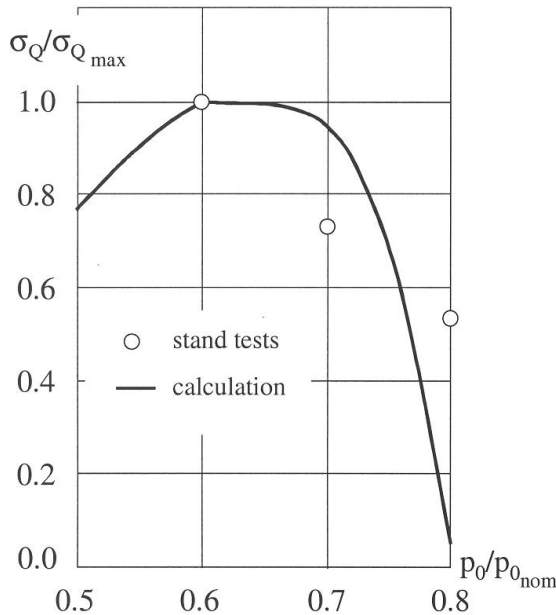


FIG. 2.21 – Variation du niveau quadratique moyen des fluctuations de l'effort latéral dans le moteur RD-0120 en fonction de la pression chambre (avec nos notations,  $p_0/p_{0,\text{nom}}$  est l'équivalent de  $p_c/p_{c,\text{nom}}$ ). – modèle de Dumnov, o expérience. Figure tirée de [42].

remarquer plusieurs auteurs [32, 96], Dumnov ne fournit pas tous les éléments nécessaires à la reconstruction de son modèle.

### - Transition entre FSS et RSS

DASA/DLR et Volvo [52, 97] ont développé deux nouveaux modèles de charges latérales destinés à prédire l'intensité des efforts latéraux constatés lors d'une transition FSS-RSS.

Leurs modèles supposent que la transition entre ces deux régimes requiert un certain laps de temps et que, par conséquent, il peut exister un instant durant lequel une partie de la tuyère

Dumnov choisit d'évaluer les efforts latéraux fluctuants à partir des caractéristiques statistiques du champ de pression pariétale. Cette approche l'amène, en particulier, à déterminer la densité spectrale de puissance croisée des fluctuations de pression. Cette quantité étant difficile à estimer par la théorie, il fait appel à l'expérience et généralise les données empiriques<sup>19</sup> grâce à l'analyse dimensionnelle. Cependant, l'expression obtenue fait apparaître une nouvelle inconnue : le niveau quadratique moyen des fluctuations de pression. Suivant la région concernée (zone d'excursion du choc ou région décollée), Dumnov distingue deux niveaux quadratiques moyens différents qu'il modélise afin de fermer son modèle.

L'application de ce modèle aux moteurs fusées russes comme RD-0120 a donné un accord raisonnable entre les charges latérales prédites et mesurées (figure 2.3.2).

Le modèle de Dumnov est certainement l'un des modèles les plus aboutis puisqu'il fait appel à la description la plus fine des efforts de pression sur le divergent. Cependant, comme le font re-

19. Ces données empiriques reposent principalement sur des expériences en gaz froids sur des moteurs à échelle réduite (tuyères coniques ou TIC).

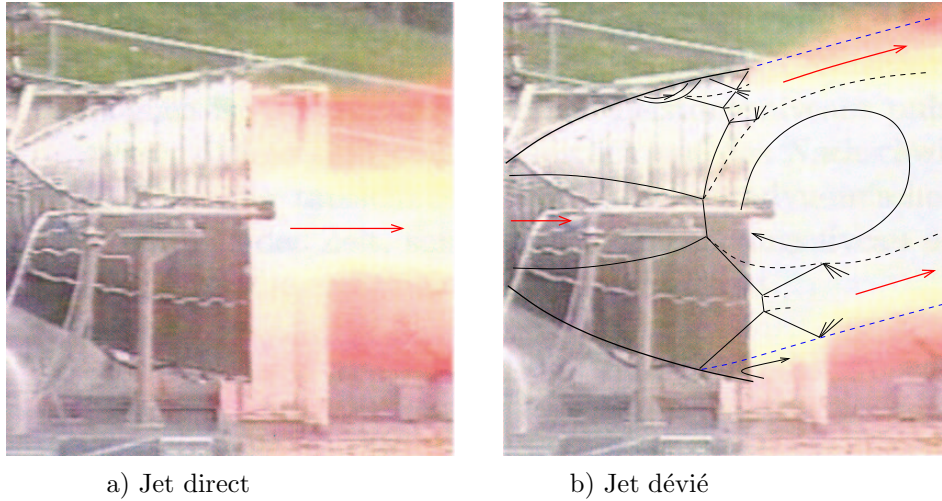


FIG. 2.22 – Jet libre et écoulement asymétrique dans un divergent lors de la transition FSS-RSS. Figures tirées de [52].

est soumise à un décollement libre et l'autre à un décollement restreint (figure 2.22). Parce que le point de décollement est situé plus en aval pour un décollement restreint que pour un décollement libre au moment de la transition et que la distribution de pression pariétale est totalement différente dans les deux cas (*cf.* sous-section 2.2.3), de fortes charges latérales agissent sur la tuyère. Notons que ces modèles emploient des critères de décollement restreint afin de prédire le rapport de pression pour lequel se produit le basculement. Les charges latérales sont déduites à partir d'un équilibre mécanique sur l'ensemble du moteur.

Les comparaisons entre les valeurs ainsi prédites et les résultats expérimentaux sur moteurs à échelles réduite et réelle semblent très satisfaisantes [52].

### - Couplage aéroélastique

De faibles variations de pression peuvent modifier significativement le contour de la tuyère. Cette distorsion du contour engendre à son tour une variation de pression au niveau de la paroi et réciproquement. L'étude de ce couplage entre le jet décollé et la paroi a fait l'objet des travaux de Pekkari [98, 99]. Le modèle développé permet de détecter une éventuelle instabilité du système couplé, dans le cas d'un écoulement décollé, et peut également prédire l'amplification aéroélastique des efforts. Globalement, ce modèle s'articule autour de deux points. Le premier repose sur les équations régissant le mouvement de la structure en présence de charges aérodynamiques. Le second s'appuie sur la modélisation des variations de pression sous l'effet de la distorsion de la paroi (théorie linéarisée des écoulements supersoniques).

Les premiers résultats expérimentaux sur la tuyère souple LEA semblent indiquer un accord raisonnable avec le modèle de Pekkari. Par contre, Ostlund [96] a effectué des expériences confirmant le bon comportement de ce modèle mais à condition de modifier la modélisation des variations de pression pariétale induites par le mouvement de la paroi.

Notre étude, dont le prochain chapitre sera consacré à ce type de modèle, se situe dans ce cadre.



### 2.3.3 Etudes numériques

De nombreuses études numériques ont été réalisées sur les tuyères idéales tronquées ou optimisées. Les tuyères LEA-TIC et LEA-TOC, par exemple, ont été étudiées dans [100, 32, 31]. Les calculs réalisés reposent le plus souvent sur une modélisation RANS de la turbulence. Un intérêt particulier est souvent porté à la prévision de la position du décollement, à la configuration de choc obtenue (réflexion de Mach, choc en chapeau...) ainsi qu'à l'effet d'hystérésis entre FSS et RSS pour les tuyères présentant ces deux types de décollement. Généralement, les résultats concernant les configurations de choc obtenues ainsi que l'effet d'hystérésis entre FSS et RSS sont en bon accord avec les données expérimentales, car essentiellement régis par des effets eulériens. Par contre, ceux relatifs à la position précise du décollement, contrôlés par des effets visqueux, sont moins satisfaisants.

Bien que les études dédiées plus particulièrement aux charges latérales soient beaucoup moins nombreuses, elles apportent de précieux renseignements sur ces efforts.

Deck [32], par exemple, a réalisé des simulations numériques de type RANS instationnaires 3D sur la tuyère LEA-TIC. L'évolution de la position du décollement en fonction du rapport de pression est en bon accord avec les données expérimentales, tout comme celle du niveau  $rms$  de l'effort latéral. L'auteur montre également, pour un rapport de pression  $p_c/p_a \simeq 50$ , que la PDF des efforts latéraux suit une distribution de Rayleigh et que les composantes des efforts respectent une loi normale. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux et confirme les hypothèses de Dumnov pour les tuyères TIC. Enfin, les résultats indiquent que les charges latérales résultent des fluctuations de pression basses fréquences, prédominantes au voisinage de décollement.

Par ailleurs, Nasuti et Onofri [92] ont montré que, bien que l'analyse stationnaire aide à comprendre la structure de l'écoulement au moment du maximum de charges latérales, seules des simulations instationnaires peuvent permettre d'étudier le caractère fortement transitoire du phénomène. Les auteurs ont mis en évidence l'apparition et l'évolution de petites ondes de choc dans le jet supersonique entourant le tourbillon central en configuration RSS. Selon eux, le déplacement rapide de ces petites ondes de choc le long de la tuyère pourrait, du fait de leur improbable symétrie, être une origine supplémentaire des charges latérales.

Concernant les simulations numériques relatives au couplage fluide-structure dans les divergents peu rigides, celles-ci sont actuellement très peu nombreuses.

Une des études les plus détaillées a été réalisée par Lefrançois. Dans la référence [78], l'auteur étudie le couplage aéroélastique 2D entre un divergent souple et un écoulement eulérien surdétendu présentant un choc de recompression. La stabilité du système couplé est étudiée en fonction de la position de ce choc. L'auteur valide ainsi le modèle de Pekkari [98] sur une géométrie de tuyère bidimensionnelle plane. En effet, pour certaines positions du choc, des comportements instables sont observés, en accord avec le modèle. Nous reviendrons plus en détails sur les résultats obtenus par Lefrançois dans le chapitre 9.

Dans [110], Shall *et al.* présentent les résultats de simulations couplées tridimensionnelles entre un divergent et un écoulement surdétendu considéré comme eulérien. Leur calcul repose sur un couplage faible. Les conditions génératrices de l'écoulement sont telles que ce choc se situe soit à l'extérieur soit à l'intérieur du divergent. Cependant, aucune instabilité n'est observée, quelle

que soit la configuration étudiée : les déplacements de la structure, perturbée suivant son mode bilobe, sont toujours amortis. Toutefois, les résultats sont essentiellement qualitatifs (absence d'analyse spectrale des signaux, pas de comparaison avec les résultats d'un modèle...) ce qui s'explique sans doute par le fait qu'il ne s'agit que de calculs préliminaires ayant pour objectif de préparer de futures expériences.

En dernier lieu, les travaux d'Arina [6] peuvent être cités. En effet, ce dernier effectuait des simulations numériques couplées entre un divergent 2D-plan flexible et l'écoulement (subsonique, transsonique ou supersonique). Le fluide est considéré comme non visqueux, et unidimensionnel. Le principal objectif d'Arina était d'évaluer l'influence des propriétés élastiques de la paroi sur la stabilité du système. Ainsi, l'auteur montre que lorsque l'écoulement supersonique présente un choc de recompression dans le divergent, le système couplé est instable pour de faibles valeurs de l'épaisseur de la paroi.

## 2.4 Récapitulatif

Ce chapitre a eu pour objectif de rappeler les connaissances actuelles sur les charges latérales dans les moteurs fusée. De ce fait, il permet de mieux comprendre le contexte de la présente étude et de la situer parmi les travaux de recherche antérieurs.

Dans un premier temps, une description du phénomène de décollement dans les tuyères en régime surdétendu a été présentée. Nous avons exposé les principales caractéristiques des décollements libre et restreint et souligné les évolutions très différentes des pressions pariétales associées. Le lien entre le profil de la tuyère (TIC, TOC...) et l'apparition du décollement restreint ainsi que le rôle joué par la structure de choc en chapeau dans la transition FSS  $\leftrightarrow$  RSS ont été rappelés. D'autre part, nous avons brièvement introduit deux importants aspects du décollement : son instationnarité et son possible caractère dissymétrique. Enfin, les modèles de prédiction du décollement ont été résumés. Pour le décollement libre, il apparaît nécessaire de décomposer le rapport de pression en deux contributions : l'une associée au décollement lui-même, l'autre associée à la zone de recirculation et dépendante des conditions avales. Les récents progrès dans la prédiction du décollement restreint ont aussi été évoqués.

Nous nous sommes ensuite attachés à résumer quelques-unes des nombreuses études expérimentales réalisées sur les charges latérales. Bien que celles-ci s'avèrent difficiles à évaluer du fait des effets d'inertie du montage, plusieurs phénomènes physiques ont pu être mis en évidence :

- Les tuyères de type TIC ne présentent que des décollements libres. Dans ce type de tuyère, l'origine des charges latérales est essentiellement associée à une dissymétrie de la distribution de pression le long de deux génératrices diamétralement opposées. Généralement, les charges latérales les plus intenses sont observées pour de faibles valeurs du rapport de pression.
- Pour les tuyères présentant également un décollement restreint, le principal pic de charges latérales est mesuré en régime transitoire, lors de la transition entre le décollement libre et le décollement restreint. Certains auteurs l'associent au fait que la transition ne s'effectue pas de façon symétrique par rapport à l'axe de la tuyère. Pendant une durée très courte, l'écoulement serait entièrement décollé (décollement libre) suivant une génératrice alors

qu'il recolle (décollement restreint) sur la paroi suivant la génératrice opposée. D'autres ont constaté que ce pic avait lieu plutôt à la fin du régime FSS et l'attribuent à l'instabilité grandissante de ce dernier à l'approche de la transition. Par ailleurs, un dernier pic a lieu lorsque la bulle de recirculation du décollement restreint est proche de la sortie.

- Enfin, pour des tuyères peu rigides, des phénomènes aéroélastiques ont été observés.

Partant de ces observations expérimentales, différents modèles ont été développés, comme ceux de Schmucker, Dumnov, DASA/DLR et Pekkari. Ceux-ci reposent respectivement sur :

- une dissymétrie globale de la ligne de décollement ;
- des pulsations de pression au niveau de la ligne de décollement ou dans la zone de recirculation ;
- une transition entre décollement libre et restreint (et vice versa) ;
- un couplage aéroélastique.

Les simulations numériques sur les charges latérales sont encore peu nombreuses. Ceci est particulièrement vrai pour les simulations prenant en compte un éventuel couplage entre le jet surdétendu et le divergent. Cependant, quelques phénomènes aéroélastiques ont pu être mis en évidence

En conclusion, il apparaît clairement que les phénomènes à l'origine des charges latérales sont multiples et très complexes, ce qui les rend difficiles à modéliser et à simuler. D'autre part, il semble probable que dans certains cas, ces causes interagissent (par exemple, les charges latérales dues à une transition entre deux régimes de décollement peuvent être amplifiées par couplage aéroélastique).

## Chapitre 3

# Modèles de stabilité aéroélastique

*Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à un divergent flexible de moteur fusée soumis aux efforts de pression des gaz de propulsion. La tuyère considérée étant fortement surdétendue, une onde de choc apparaît au sein de l'écoulement. Notre objectif étant d'étudier la stabilité de la structure suite à une petite perturbation de cette onde de choc, nous présentons dans ce chapitre, les modèles permettant de traiter ce problème. Leur application fera l'objet du chapitre 9.*

### 3.1 Modèles de stabilité aéroélastique

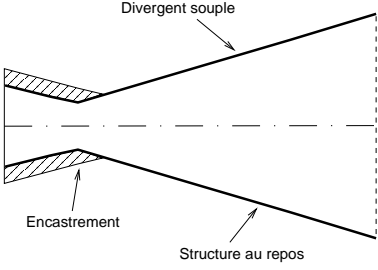
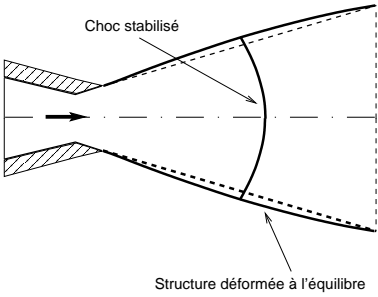
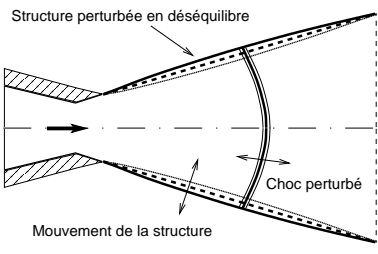
Actuellement, les industriels en charge de la fabrication des propulseurs de moteurs fusée (SNECMA-Moteurs en particulier) sont contraints, pour augmenter la charge utile du lanceur, de concevoir des divergents toujours plus légers donc de plus en plus souples. Dans le même temps, ils doivent s'assurer que ceux-ci sont aptes à résister aux contraintes mécaniques et thermiques qu'ils peuvent subir en vol. Par exemple, ils sont très désireux de disposer d'un outil simple à mettre en œuvre permettant, en particulier, de tester la stabilité aéroélastique d'un divergent quelconque. Dans le cadre du groupe de travail ATAC (Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps) auquel nous participons, nous cherchons donc à déterminer la fiabilité de quelques modèles récents grâce à l'utilisation du calcul numérique couplé. Nous essayons également de déterminer les facteurs jouant un rôle important dans l'apparition des instabilités afin, soit de les éviter, soit de mieux les contrôler.

Les travaux sur ce type de problème sont encore peu nombreux. Parmi ceux-ci, les plus connus sont ceux de Pekkari [98, 99]. En effet, celui-ci a analysé l'influence de la perturbation d'un choc sur les modes propres de vibration du divergent. Son modèle repose principalement sur deux points : (1) la prise en compte d'un profil de pression pariétale simplifié, en particulier au niveau du choc de décollement, et (2) la théorie des petites perturbations pour représenter l'influence du mouvement de la paroi sur le champ de pression à l'intérieur du divergent flexible. Il montra ainsi, dans les limites de son modèle, l'existence de certains modes propres instables en fonction de la position initiale du choc perturbé. Ces instabilités sont de type statique (flambement).

Dans cette section, nous présentons le modèle de stabilité développé au laboratoire [78] à partir

de celui de Pekkari. Celui-ci repose sur les mêmes hypothèses que le précédent mais permet, en plus, de détecter les instabilités dynamiques (“flutter”) de la structure. Nous reviendrons sur les différents types d’instabilités aéroélastiques au cours de ce chapitre et lors de l’application des modèles décrits ci-dessous.

### 3.1.1 Schématisation du problème à résoudre

 <p>Divergent bidimensionnel flexible au repos.</p>	<p><b>Etape 1</b></p> <p>Une structure initialement au repos est soumise aux sollicitations du champ de pression résultant de la détente interne des gaz en écoulement.</p>
 <p>Divergent flexible à l'équilibre.</p>	<p><b>Etape 2</b></p> <p>La tuyère étant supposée fortement surdétendue, un choc de recompression se forme dans l'écoulement à une position donnée. La structure s'équilibre vis-à-vis de ces sollicitations.</p>
 <p>Couplage aéroélastique après perturbation du choc.</p>	<p><b>Etape 3</b></p> <p>Le choc est perturbé par une onde de pression ou par un petit déplacement de la paroi. La structure n'est donc plus en équilibre et un couplage aéroélastique s'opère entre celle-ci et l'écoulement perturbé.</p>

TAB. 3.1 – Principe du couplage. Remarquons qu'à l'étape 3, la perturbation a été supposée symétrique, ce qui justifie que la réponse de la structure supposée bidimensionnelle plane ait été représentée, elle aussi, symétrique.

Le principe du modèle de Pekkari et de sa généralisation aux instabilités dynamiques est résumé dans le tableau 3.1.

Si les déplacements du divergent soumis aux efforts de pression sont suffisamment petits (*i.e.* s'ils sont inférieurs à l'épaisseur de la structure  $h$ ) pour que les principes de la mécanique linéaire soient valides, la déformée de la structure au cours du temps peut être représentée par une combinaison linéaire de ses déformées modales. Celles-ci sont associées à des fréquences propres aéroélastiques pouvant différer des fréquences propres naturelles, comme le montrent les modèles exposés ci-après.

Il est important, à ce niveau, de bien noter la différence entre les fréquences (resp. modes) propres naturelles  $\omega/(2\pi)$  et les fréquences (resp. modes) propres aéroélastiques  $\Omega/(2\pi)$ . Comme le montre la théorie des vibrations, les fréquences propres naturelles d'un système non-amorti correspondent à ses fréquences de résonance [54]. Lorsque cette même structure est soumise à un écoulement, ses fréquences de résonance sont modifiées et correspondent à ce que l'on appelle les fréquences propres aéroélastiques du système. Rappelons enfin que, pour trouver les fréquences de résonance d'une structure non-amortie, un effort harmonique de fréquence variable lui est imposé. Les fréquences de résonance sont les fréquences pour lesquelles la réponse du système devient infinie.

### 3.1.2 Hypothèses des modèles

Les hypothèses sur lesquelles ces modèles reposent sont les suivantes :

- Le système mécanique est considéré comme quasi-statique par rapport à l'écoulement. En effet, les temps caractéristiques des deux domaines sont différents de plusieurs ordres de grandeur :  $\Delta t_{structure} \gg \Delta t_{fluide}$ . Autrement dit, le fluide réagit de manière quasi-instantanée aux modifications de la structure.
- La structure est régie par le principe d'équilibre des forces et l'amortissement est négligé :

$$m \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}(t) = \vec{f}_m^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_a^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_m(\vec{w}(t)) + \vec{f}_a(\vec{w}(t)) \quad (3.1)$$

où  $m$  est la masse locale du système,  $\vec{w}(t)$  son déplacement,  $\vec{f}_m^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_m(\vec{w}(t))$  et  $\vec{f}_a^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_a(\vec{w}(t))$  sont les sollicitations mécaniques internes et aérodynamiques. Ces dernières ont pour expression :

$$\vec{f}_a^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_a(\vec{w}) = -(p_w - p_a) \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la paroi dirigée vers l'axe,  $p_w$  la pression pariétale exercée par l'écoulement et  $p_a$  la pression atmosphérique. Par ailleurs, à l'équilibre (voir la deuxième étape du tableau 3.1) :

$$\vec{f}_m^{eq}(\vec{w}_{eq}) + \vec{f}_a^{eq}(\vec{w}_{eq}) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{f}_a^{eq}(\vec{w}_{eq}) = -(p_w^{eq} - p_a) \vec{n}. \quad (3.2)$$

Les termes  $\vec{f}_m(\vec{w}(t))$  et  $\vec{f}_a(\vec{w}(t)) = -(p_w(t) - p_w^{eq}) \vec{n}$  sont donc liés à la modification de l'état d'équilibre ("eq"), c'est-à-dire à la perturbation apportée à la structure ou au choc. Ainsi,  $\vec{w}(t)$  représente ici le déplacement par rapport à la position d'équilibre de la structure initialement sous contraintes<sup>1</sup>.

---

1. ayant pour déplacement  $\vec{w}_{eq}$ .

- En amont du choc de décollement, le profil de pression pariétal noté  $p_\infty$  est déduit à partir des relations analytiques d'écoulement isentropique dans une conduite à section variable. Ce choc se produit à une abscisse  $x_i^{eq}$  donnée (pour une pression chambre  $p_c$  donnée). Il est supposé ramener brusquement l'écoulement à la pression atmosphérique  $p_a$  (figure 3.1) :

$$p_w^{eq}(x) = \begin{cases} p_\infty(x) & x < x_i^{eq} \\ p_a, & x > x_i^{eq}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Remarquons que l'auteur a introduit une simplification. En effet, cette schématisation du profil de pression n'est valide que pour un fluide parfait. En écoulement visqueux, la montée de pression se fait progressivement sur une échelle de longueur correspondant à la zone d'interaction libre (*cf.* le chapitre précédent). L'auteur considère comme confondus les points  $x_i$ ,  $x_s$  et  $x_p$  correspondant au point de séparation naissante, au point de séparation effective et au plateau. La pression plateau  $p_c$  est d'ailleurs considérée comme valant  $p_a$ . La pression  $p_i$  (qualifiée abusivement, par la suite, de "pression de décollement") est obtenue d'après un critère de type Summerfield [120] ( $p_i/p_a = 0.3, 0.4, \dots$ ). Par ailleurs,  $x_i^{eq}$ , abscisse où la pression en pleine veine est égale à la pression de décollement, vérifie  $p_i = p_\infty(x_i^{eq})$ .

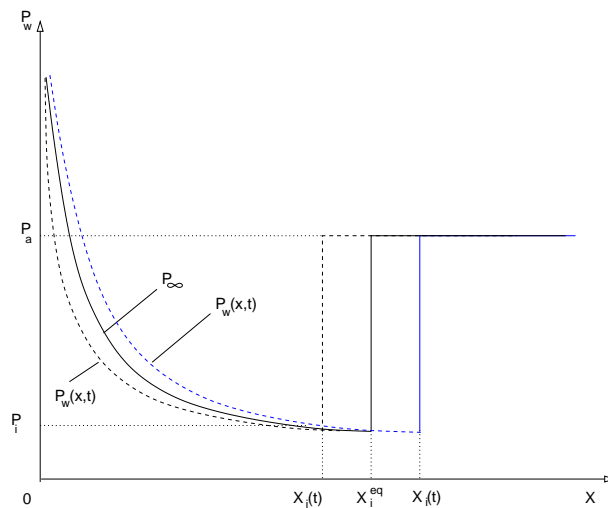


FIG. 3.1 – Modélisation du profil de pression pariétale à l'équilibre et évolution au cours du temps.

- Lorsque le divergent se déforme, la pression interne exercée sur la paroi change (figure 3.1). Cette variation de pression est modélisée par une forme simplifiée<sup>2</sup> de la théorie des petites perturbations TPP [7, 40] :

$$\Delta p(x, t) = \frac{\rho_\infty(x) U_\infty^2(x)}{\sqrt{M_\infty^2(x) - 1}} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial s}, \quad (3.4)$$

où les variables  $\rho_\infty$ ,  $U_\infty$  et  $M_\infty$  désignent respectivement la masse volumique, la vitesse et le nombre de Mach de l'écoulement isentropique,  $w_n(x, t)$  est le déplacement normal

2. Cette forme est connue chez les aéroélasticiens comme étant la théorie du piston.

de la paroi au point considéré et  $s$  l'abscisse curviligne le long de la paroi. Il est rappelé que ce déplacement est supposé suffisamment petit (c'est-à-dire inférieur à l'épaisseur  $h$  de la structure) pour que la structure ait un comportement linéaire. Pekkari suppose que la pression de décollement ne varie pas lorsque le choc bouge sous l'action du déplacement de la structure :  $p_i(t) = p_i = p_w(x_i^{eq})$ ; seule sa position  $x_i(t)$  varie :  $p_w(x_i(t)) = p_i$  (voir figure 3.1). Finalement, l'évolution temporelle de la pression dans le divergent déformé prend la forme :

$$p_w(x, t) = \begin{cases} p_\infty(x) + \frac{\rho_\infty(x)U_\infty(x)^2}{\sqrt{M_\infty^2(x) - 1}} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial s}, & x < x_i(t), \\ p_a, & x > x_i(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Afin de ne pas alourdir les équations, nous omettrons par la suite les variables  $x$  et  $t$  dans l'expression de  $\Delta p(x, t)$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté (en particulier, nous remplacerons  $x_i(t)$  par  $x_i$  et  $w_n(x, t)$  par  $w_n$ ).

- La structure sous contraintes étant initialement à l'équilibre, la perturbation du terme de sollicitation  $\vec{f}_a$  est calculée comme étant la résultante des efforts de pression entre les positions initiale et perturbée du choc. Nous cherchons donc à évaluer  $[p_w^{eq}(x) - p_w(x, t)]$ . Deux cas doivent être distingués suivant la nouvelle position  $x_i$  du choc. Pour  $x_i < x_i^{eq}$ , nous avons, en utilisant les relations (3.3) et (3.5) :

$$p_w^{eq}(x) - p_w(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s}, & x < x_i, \\ p_\infty(x) - p_a, & x_i < x < x_i^{eq} \\ 0, & x > x_i^{eq}. \end{cases}$$

De même, si  $x_i > x_i^{eq}$ , il vient :

$$p_w^{eq}(x) - p_w(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s}, & x < x_i^{eq}, \\ p_a - p_\infty(x) - \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s}, & x_i^{eq} < x < x_i \\ 0, & x > x_i. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pekkari suppose ensuite que la variation locale de pression  $\Delta p(x, t)$  engendrée par la déformation du divergent est petite par rapport à la pression exercée initialement sur la paroi :

$$\forall(x, t) \quad p_\infty(x) \gg \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s} = \Delta p(x, t),$$

ce qui est vérifié dans le cadre des petits déplacements. Par ailleurs, l'hypothèse des petits déplacements de la structure implique aussi que les déplacements induits du choc sont faibles :

$$\left| \frac{x_i - x_i^{eq}}{x_i^{eq}} \right| \ll 1.$$



Ainsi, on suppose que toutes les grandeurs sont constantes dans l'intervalle  $[x_i, x_i^{eq}]$ , soit :

$$\rho_\infty(x) = \rho_\infty(x_i^{eq}) \quad ; \quad u_\infty^2(x) = u_\infty^2(x_i^{eq}) \quad ; \quad p_\infty(x) = p_\infty(x_i^{eq}) = p_i$$

Finalement, les deux cas précédents peuvent être regroupés sous une unique forme :

$$p_w^{eq}(x) - p_w(x, t) = -(p_a - p_i)(\sigma[x - x_i] - \sigma[x - x_i^{eq}]) - \Delta p(x, t)\sigma[\min(x_i, x_i^{eq}) - x] \quad (3.7)$$

où  $\sigma$  est la fonction de Heavyside donnée par :

$$\sigma[x] = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pekkari néglige ensuite le second terme de droite et considère, par conséquent, que le terme de sollicitation  $\vec{f}_a(w) = -(p_w - p_w^{eq})\vec{n}$  n'est non-nul que sur la zone balayée par le choc :

$$\vec{f}_a(w) = -(p_a - p_i)(\sigma[x - x_i] - \sigma[x - x_i^{eq}])\vec{n}, \quad (3.8)$$

Il ne reste donc qu'à déterminer  $x_i - x_i^{eq}$ . Pour cela, Pekkari considère le développement au premier ordre du terme  $p_\infty(x)$  de la relation (3.3) autour de  $x_i^{eq}$  :

$$p(x)_\infty \approx p_\infty(x_i^{eq}) + (x - x_i^{eq}) \left( \frac{dp_\infty}{dx} \right)_{x_i^{eq}} + \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s} + \dots$$

En prenant ce développement limité en  $x_i$  et en considérant que  $p(x_i) \approx p_\infty(x_i^{eq}) \approx p_i$ , il parvient à la relation :

$$x_i - x_i^{eq} = \left[ \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{-\frac{dp_\infty}{dx} \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w_n}{\partial s} \right]_{x_i^{eq}} \quad (3.9)$$

où  $[ ]_{x_i^{eq}}$  indique que l'expression est prise au point  $x_i^{eq}$ .

### 3.1.3 Fréquences et modes propres naturels

Afin de faciliter la présentation du modèle de stabilité [78], il est préférable de rappeler, en premier lieu, ce à quoi correspondent les modes et fréquences propres naturels d'une structure.

Nous verrons, dans un chapitre ultérieur, qu'une technique de discrétisation spatiale permet d'obtenir le système régissant la dynamique d'une structure sous forme matricielle :

$$[M]\{\ddot{W}\} + [K]\{W\} = \{F\}, \quad (3.10)$$

où  $[M]$  est la matrice masse du système,  $[K]$  la matrice des rigidités et  $\{F\}$  le vecteur des sollicitations induites par l'oscillation du choc de décollement. Le vecteur  $\{W\}$  représente l'ensemble des composantes du déplacement de tous les nœuds du maillage et  $\{\ddot{W}\}$  leur accélération. Déterminer les modes propres naturels de la structure consiste à rechercher les solutions de la forme :

$$\{W(x, t)\} = \{V(x)\}e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

vérifiant l'équation précédente en l'absence de sollicitations externes (*i.e.*  $\{F\} = \{0\}$ ). Après substitution, ceci revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{V\} = \{0\}. \quad (3.12)$$

dont le déterminant est le polynôme caractéristique ayant pour racine l'ensemble des  $k$  valeurs propres  $\omega_k^2$  du système ( $k$  correspondant au nombre de degrés de liberté de la structure). Les matrices  $[M]$  et  $[K]$  étant symétriques réelles et définies positives, ces racines sont toutes réelles et positives, le système est donc stable d'après l'équation (3.11). On désigne par  $[\lambda]$  la matrice diagonale constituée des éléments  $\omega_i^2$ . De même, on notera  $[X]$  la matrice dont les colonnes sont constituées de l'ensemble des vecteurs propres  $\{V_i\}$  associés à ces fréquences (*i.e.*  $[X] = [\{V_1\}|\{V_2\}|\dots|\{V_n\}]$ ). Celle-ci vérifie les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$[X]^T[M][X] = [I] \quad \text{et} \quad [X]^T[K][X] = [\lambda] \quad (3.13)$$

On remarquera que les vecteurs propres ont été normés de sorte que leur masse généralisée soit unitaire.

Enfin, les solutions de l'équation (3.10) avec  $\{F\} = \{0\}$  peuvent s'écrire :

$$\{W(x,t)\} = [X]\{v(t)\}$$

avec  $\{v(t)\} = \{e^{i\omega_k t}\}$ .

### 3.1.4 Stabilité aéroélastique

Le premier modèle développé pour l'analyse de la stabilité aéroélastique d'un divergent est celui de Pekkari. Il est possible d'étendre ce modèle pour prendre en compte les instabilités dynamiques. Nous avons choisi de présenter tout d'abord le modèle étendu [78] dans cette section car le modèle de Pekkari peut en être déduit directement. Ceci permet de mieux mettre en évidence les différences entre les deux modèles.

#### - Modèle étendu

Nous nous proposons maintenant de montrer que la stabilité du système soumis à une sollicitation  $\{F\}$  peut être obtenue par une démarche similaire à celle employée pour la détermination des modes propres. Pour cela, il convient de remarquer que le système (3.10) prend la forme homogène suivante :

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] - [K_p])\{W\} = \{0\}. \quad (3.14)$$

En effet, le vecteur  $\{F\}$ , c'est-à-dire la sollicitation exercée sur le domaine en un point donné suite à une perturbation du choc (équation 3.8), peut être mis sous la forme suivante :

$$\{F\} = [K_p]\{W\},$$

où  $[K_p]$  est la matrice dite "de rigidité aérodynamique".

Un exemple explicitant le calcul de cette matrice pour un divergent bidimensionnel plan est donné dans l'annexe G. En observant la forme homogène obtenue (équation 3.14) grâce à cette

expression, il est possible de voir que le terme de sollicitation agit directement sur la rigidité de la structure. Ceci laisse supposer une évolution de ses fréquences et modes propres aéroélastiques en fonction de la localisation du choc (par l'intermédiaire de  $\{F\}$ ). Ces modes propres vérifient :

$$(([K] - [K_p]) - \Omega^2[M]) \{\bar{V}\} = \{0\}. \quad (3.15)$$

Les solutions non-triviales de cette équation sont les racines du polynôme caractéristique obtenu par le déterminant :

$$|([K] - [K_p]) - \Omega^2[M]| = 0.$$

Dans cette expression, l'ensemble des  $\Omega_i^2$  constitue les valeurs propres aéroélastiques du système associées aux vecteurs propres  $\{\bar{V}_i\}$ . Les valeurs propres aéroélastiques sont regroupées en une matrice diagonale notée  $[\Lambda]$  et les modes propres aéroélastiques en une matrice  $[\bar{X}] = \{\bar{V}_1 | \bar{V}_2 \dots\}$ . Il est important de remarquer que ceux-ci peuvent être différents des modes propres naturels, *i.e.*  $[\bar{X}] \neq [X]$ . La solution à ce problème est donc du type :

$$\{W(x, t)\} = [\bar{X}]\{v(t)\}$$

avec  $\{v(t)\} = \{e^{i\Omega_k t}\}$ .

Lorsque les valeurs propres aéroélastiques sont réelles positives le système est stable. Si, une (au moins) devient réelle négative alors la fréquence associée est imaginaire pure ; la structure devient statiquement instable. Enfin, si deux fréquences deviennent complexes conjuguées l'une de l'autre alors le système est dynamiquement instable (figure 3.2).

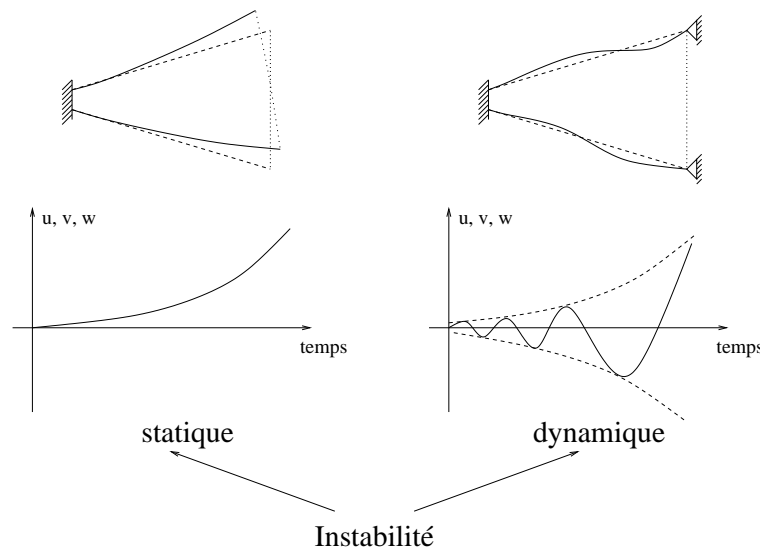


FIG. 3.2 – *Instabilités statique et dynamique.*

### - Modèle de Pekkari

Le modèle de Pekkari considère, quant à lui, une projection sur l'espace des vecteurs propres naturels ( $[\bar{X}] \equiv [X]$ ). Il s'en suit alors une simplification du problème. En effet, les propriétés

d'orthogonalité des modes prennent la forme :

$$[X]^T[M][X] = [I] \quad \text{et} \quad [X]^T([K] - [K_p])[X] = [\Lambda] \quad (3.16)$$

or  $[X]$  étant les aussi les modes naturels, nous avons :

$$[X]^T[K][X] = [\lambda].$$

En posant ensuite (voir l'annexe G pour l'expression de  $[K_p]$ )

$$[X]^T[K_p][X] = [\lambda_p]$$

avec (pour une tuyère bidimensionnelle plane) :

$$\lambda_{ik}^p \Big|_{x_i^{eq}} = (p_a - p_i) \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{-\left(\frac{dp_\infty}{dx}\right)_{x_i^{eq}} \sqrt{M_\infty^2 - 1}} X_n^i \Big|_{x_i^{eq}} \frac{\partial X_n^k}{\partial s} \Big|_{x_i^{eq}},$$

on déduit que  $[\Lambda] = [\lambda] - [\lambda_p]$ .

En négligeant le couplage de mode ( $[\lambda_p]$  diagonale), Pekkari aboutit au résultat suivant :

$$\Omega_k^2 = \omega_k^2 - (p_a - p_i) \left[ \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\left(-\frac{dp_\infty}{dx}\right) \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{2} \frac{\partial (X_n^k)^2}{\partial s} \right]_{x_i^{eq}}. \quad (3.17)$$

où  $\Omega_k$  est la pulsation aéroélastique du mode  $k$  et  $\omega_k$  la pulsation naturelle de la structure associée au même mode. Le terme  $X_n^k \Big|_{x_i^{eq}}$  désigne, quant à lui, le déplacement normal du mode propre naturel  $k$  au point  $x_i^{eq}$ .

Ainsi, on remarque que, selon l'amplitude du second terme du membre de droite,  $\Omega_k^2$  peut devenir négatif et traduire ainsi des cas d'instabilités statiques de type flambement. D'après ce modèle, ces cas semblent être favorisés par des positions du choc de décollement telles que :

1. le gradient de pression à la paroi soit faible,
2. la vitesse de l'écoulement soit élevée,
3. la dérivée du carré de la composante normale d'un mode soit élevée.

L'équation (3.17) peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\Omega_k}{\omega_k}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A}{R_k}\right)_{x_i^{eq}} \quad (3.18)$$

avec, pour le coefficient de réponse aéroélastique  $A$  et les coefficients de réponse dynamique  $R_k$  :

$$A = (p_a - p_i) \left[ \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\left(-\frac{dp_\infty}{dx}\right) \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right]_{x_i^{eq}} \quad \text{et} \quad R_k = \left[ \frac{\omega_k^2}{\frac{1}{2} \frac{\partial (X_n^k)^2}{\partial s}} \right]_{x_i^{eq}} \quad (3.19)$$

## 3.2 Récapitulatif

Nous avons présenté, dans ce chapitre, deux modèles permettant de détecter l'apparition d'instabilités du divergent. Rappelons que ces modèles ne sont valides que dans le cadre des petits déplacements de la structure (donc des faibles déplacements induits du choc). Si une instabilité apparaît, ces hypothèses ne sont rapidement plus vérifiées. Ces modèles ne décrivent donc pas le comportement ultérieur de la structure. La description de celui-ci nécessite le recours à la mécanique non-linéaire. Par exemple, l'instabilité peut être stoppée sous l'effet des efforts internes non-linéaires. D'autre part, si le choc est situé initialement dans une région conduisant à une instabilité et que ses déplacements deviennent importants, celui-ci peut entrer dans une plage de positions correspondant à une zone de stabilité de la structure. Dans ces conditions, l'instabilité disparaît et le choc retourne vers sa position initiale, ce qui provoque de nouveau l'instabilité (et ainsi de suite). On observe alors un mouvement cyclique du choc.

## Deuxième partie

# Méthodes numériques et validations



## Chapitre 4

# Modèles numériques relatifs au code structure

*Ce chapitre, ainsi que le suivant, est dédié à la modélisation des structures dont nous avons étudié la stabilité lors de nos travaux. Dans cette étude, nous avons été amenés à traiter des structures de poutres et de coques minces. Les poutres minces sont fréquemment utilisées en couplage fluide-structure [75, 102] et elles sont décrites dans de nombreuses références [12]. Par souci de concision, nous ne les présenterons donc pas ici. Nous donnons, dans ce chapitre, une description des coques minces, dans le cadre de la mécanique linéaire. Le modèle continu est introduit, avant que ne soit résumée leur représentation par éléments finis (élément DKT18). Une validation (applications) de cet élément de coque linéaire sera présentée dans le chapitre suivant. D'autre part, bien que les calculs de couplage que nous effectuerons reposent sur les hypothèses de la mécanique linéaire (i.e. comme le modèle de Pekkari que nous venons de voir), un élément de coque en grands déplacements et rotations modérées a été développé. Ce dernier peut être utile ultérieurement, en particulier si le comportement post-instabilité des structures doit être étudié. Ainsi, l'élément de coque linéaire DKT18 a été étendu aux non-linéarités géométriques (en Formulation Lagrangienne Totale). Cet élément n'ayant pas été directement utilisé dans nos travaux de couplage, son développement et sa validation sont présentés dans les annexes C et D. Notons enfin que la version non-linéaire ainsi les techniques de résolution non-linéaires associées (pilotage ...) ont été rajoutées au code REFLEX [11].*

## 4.1 Mécanique linéaire et non-linéaire

### 4.1.1 Généralités

Un corps solide soumis à des sollicitations externes subit des déplacements, des rotations et des déformations. Différentes quantités permettent de caractériser son évolution. Ainsi, la configuration  $C_t$  définit la région de l'espace occupée par le solide à l'instant  $t$ , les quantités cinématiques (gradient de déformation ...) traduisent le mouvement local ou le changement de forme de ce solide, alors que les quantités mécaniques (tenseurs de Cauchy, Piola-Kirchhoff ...)



représentent les efforts internes.

Lorsque les déformations et déplacements, auxquels le solide élastique est soumis, sont petits, le comportement de celui-ci est linéaire et sa description mathématique repose sur les aspects suivants [35] :

- les configurations déformée et initiale sont proches et peuvent être confondues ;
- les déformations sont des fonctions linéaires des déplacements ;
- la loi de comportement du matériau est linéaire ;
- enfin, la discrétisation par éléments finis du Principe des Travaux Virtuels (PTV) conduit à un système linéaire du type :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

où  $[M]$  est la matrice masse globale,  $[K]$  la matrice de rigidité indépendante des déplacements et  $\{F\}$  le vecteur des sollicitations externes.

Dans le cas contraire, *i.e.* en mécanique non-linéaire, le comportement du solide n'est plus proportionnel aux différentes quantités cinématiques et mécaniques mises en jeu. Trois principaux types de non-linéarités peuvent être distingués :

- *la non-linéarité géométrique* caractérise un solide soumis à d'importants changements géométriques induits par de grands déplacements. Ces non-linéarités peuvent être classées en deux catégories. La première est constituée des non-linéarités géométriques avec grande déformation de la matière (emboutissage...), alors que la seconde regroupe les non-linéarités géométriques en petites déformations (coques minces, membranes...);
- *la non-linéarité matérielle (i.e. physique ou naturelle)* est rencontrée pour des matériaux dont le comportement mécanique obéit à une fonction non-linéaire des déformations (plasticité...);
- *la non-linéarité de contact* apparaît lors d'un mouvement relatif entre deux solides.

Dans la présente étude, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique linéaire. Toutefois, nous traiterons également, dans les annexes C et D, des non-linéarités géométriques en petites déformations afin de faciliter de possibles travaux futurs.

### 4.1.2 Relations cinématiques générales

Cette section a pour objectif d'introduire l'ensemble des notions et grandeurs nécessaires à la description d'un solide<sup>1</sup> [35]. Par la suite, celles-ci nous permettront d'en établir les équations d'équilibre par l'intermédiaire du Principe des Travaux Virtuels.

#### - Gradient de déformation

Soit  $\mathcal{C}_0$  la configuration occupée par le solide à l'instant  $t_0$  (configuration de référence) et  $\mathcal{C}_t$  celle à l'instant  $t$  (configuration actuelle).

---

1. En petits ou grands déplacements.

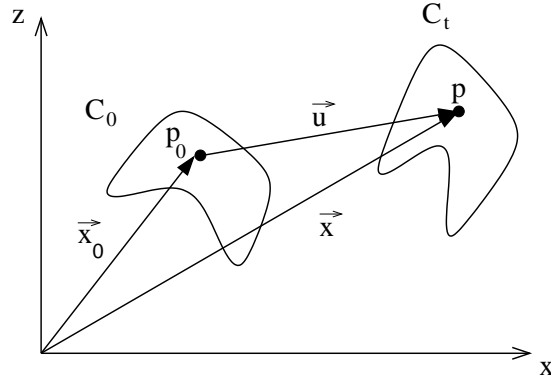


FIG. 4.1 – Configurations de référence et actuelle : vecteurs position.

Le vecteur position d'un point quelconque de la structure déformée (figure 4.1) est défini en utilisant une description lagrangienne par :

$$\vec{x}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(\vec{x}_0, t),$$

avec

- $\vec{x}_0$  : vecteur position dans la configuration  $C_0$  ;
- $\vec{x}$  : vecteur position dans la configuration  $C_t$  ;
- $\vec{u}$  : vecteur déplacement entre ces deux configurations.

L'écriture différentielle de cette relation,

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= d\vec{x}_0 + d\vec{u} = d\vec{x}_0 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}_0} d\vec{x}_0 \\ &= ([I] + [L_0]) d\vec{x}_0 = [F] d\vec{x}_0, \end{aligned}$$

fait apparaître le tenseur gradient de déformation entre  $C_0$  et  $C_t$  :

$$[F] = \left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right], \quad (4.1)$$

ainsi que le tenseur gradient des déplacements :

$$[L_0] = \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}_0} \right]. \quad (4.2)$$

Le tenseur  $[F]$  permet de définir la transformation du vecteur  $\vec{x}_0$  dans  $C_0$  en un vecteur  $\vec{x}$  dans  $C_t$  :

$$\{d\vec{x}\} = [F] \{d\vec{x}_0\}. \quad (4.3)$$

Ses composantes cartésiennes s'écrivent :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} ; \quad \det [F] = |F| > 0.$$

Il découle de (4.3) un ensemble de relations de transport entre les deux configurations. Ainsi, un élément de volume  $dV_0$  de  $\mathcal{C}_0$  se transporte dans la configuration  $\mathcal{C}_t$  selon :

$$dV = |F| dV_0, \quad (4.4)$$

alors qu'un élément de surface orienté  $\vec{dS}_0 = dS_0 \vec{n}_0$  devient :

$$\vec{dS} = dS \{n\} = [F]^{-T} \{n_0\} |F| dS_0. \quad (4.5)$$

### - Mesure de déformation

Considérons maintenant un élément de longueur  $ds_0$  défini dans la configuration de référence  $\mathcal{C}_0$  par :

$$ds_0^2 = \langle dx_0 \rangle \{dx_0\}.$$

Dans la configuration actuelle  $\mathcal{C}_t$ , celui-ci devient :

$$ds^2 = \langle dx \rangle \{dx\} = \langle dx_0 \rangle [F]^T [F] \{dx_0\}.$$

La différence entre ces deux éléments de longueur,

$$ds^2 - ds_0^2 = \langle dx_0 \rangle ([F]^T [F] - [I]) \{dx_0\} = 2 \langle dx_0 \rangle [E_{gl}] \{dx_0\},$$

constitue une mesure de l'état de déformation caractérisée par le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$[E_{gl}] = \frac{1}{2} ([F]^T [F] - [I]).$$

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la mécanique linéaire pour laquelle les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- les gradients des déplacements sont supposés petits. Les produits et les carrés des dérivées sont négligeables :

$$\begin{aligned} u_{,x_0}, u_{,y_0} \dots &\simeq \Delta \ll 1, \\ (u_{,x_0})^2, (u_{,x_0} u_{,y_0}) \dots &\simeq \Delta^2 \ll \Delta. \end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur de Green-Lagrange s'écrit :

$$[E_{gl}] \simeq [D_0] = \frac{1}{2} ([L_0] + [L_0]^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ \text{sym} & & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}.$$

- les déplacements  $u, v, w$ , sont petits par rapport aux dimensions du solide :

$$\max(|u|, |v|, |w|) \ll L$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du solide.

Ces hypothèses permettent de confondre les configurations actuelle et de référence pour écrire les équations d'équilibre et effectuer les intégrations :

$$dV \simeq dV_0, \quad dS \simeq dS_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial x_0} \dots$$

### 4.1.3 Principe des Travaux Virtuels

Lorsque qu'un solide est soumis à des sollicitations externes, il développe des efforts internes qui génèrent des déformations. Son équilibre est alors régi par des lois de conservation pouvant être exprimées soit sous une forme locale (équations aux dérivées partielles), soit sous une forme globale (Principe des Travaux Virtuels).

#### - Equations du mouvement

La conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \vec{v} dV_t = \int_{V_t} \vec{f}_v dV_t + \int_{S_t} \vec{t} dS_t,$$

est le principe fondamental traduisant l'équilibre du solide dans la configuration actuelle. Dans cette relation,  $V_t$  est le volume, délimité par la surface  $S_t$ , occupé par le solide dans sa configuration actuelle,  $\rho$  désigne la masse volumique,  $\vec{v} = d\vec{u}/dt$  le vecteur vitesse,  $\vec{f}_v$  les forces volumiques extérieures et  $\vec{t}$  les efforts surfaciques. Ceux-ci sont reliés au tenseur des contraintes  $[\sigma]$  suivant :  $\{t\} = [\sigma]\{n\}$  (où  $\{n\}$  est la normale sortante à la surface  $S_t$ ).

Le théorème de la divergence ainsi que le principe de conservation de la masse,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dV_t = 0,$$

permettent d'obtenir les équations locales du mouvement (dites "de Cauchy") :

$$\overrightarrow{Div} \sigma + \vec{f}_v = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (4.6)$$

auxquelles sont associées des conditions initiales et des conditions aux limites (voir ci-après).

#### - Ecriture faible : PTV

La forme variationnelle (ou faible)  $W$  des équations d'équilibre est obtenue par application de la méthode des résidus pondérés à la relation (4.6) :

$$W = \int_{V_t} \langle \psi \rangle \{R\} dV_t = 0 \quad \text{avec} \quad \{R\} = \rho \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} - \{Div \sigma\} - \{f_v\}. \quad (4.7)$$

Dans le cadre de notre étude, l'espace des fonctions tests (ou virtuelles)  $\langle \psi \rangle$  coïncide avec celui des fonctions réelles, ce qui revient à associer les variables virtuelles aux premières variations des variables cinématiques :

$$\langle \psi \rangle = \langle u^* \rangle = \langle \delta u \rangle .$$

Une intégration par partie de l'expression (4.7) conduit à une forme faible en contraintes :

$$W = \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_t + \int_{V_t} Tr([L^*][\sigma]) dV_t - \int_{S_t} \vec{u}^* \cdot \vec{t} dS_t - \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_v dV_t = 0, \quad (4.8)$$

où  $[L^*] = \left[ \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \vec{x}} \right]$  et  $Tr$  désigne l'opérateur trace.

En utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{cinématiques} & \{u\} = \{\bar{u}\} \quad ; \quad \{u^*\} = \{0\} & \text{sur} & S_u \\ \text{mécaniques} & \{t\} = [\sigma]\{n\} = \{f_s\} & \text{sur} & S_f \end{cases}$$

où  $S_u \cup S_f = S$  et  $S_u \cap S_f = \emptyset$

ainsi que la relation<sup>2</sup> :

$$Tr([L^*][\sigma]) = Tr([D^*][\sigma]) \quad \text{où} \quad [D^*] = \frac{1}{2}([L^*] + [L^*]^T),$$

avec :

$$\begin{aligned} [\sigma] & : \text{ tenseur des contraintes de Cauchy} \\ [D^*] & : \text{ première variation du tenseur des déformations} \end{aligned}$$

la forme faible (4.8) devient :

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_t + \int_{V_i} Tr([D^*][\sigma]) dV_t - \int_{S_{f_t}} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_s dS_t - \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_v dV_t = 0 \quad (4.9) \\ &= W_d \quad \quad \quad + W_{int} \quad \quad \quad - W_{ext} \quad \quad \quad = 0 \end{aligned}$$

où  $W_d$  représente le travail virtuel des efforts d'inertie,  $W_{int}$  celui des efforts internes et  $W_{ext}$  celui des sollicitations externes. Les hypothèses de la mécanique linéaire, exposées précédemment, étant vérifiées, la forme variationnelle prend finalement la forme :

$$W = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \rho_0 \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_0 + \int_{V_0} Tr([D_0^*][\sigma]) dV_0 - \int_{S_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} dS_0 - \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} dV_0. \quad (4.10)$$

### - Loi de comportement

Dans le cadre de notre étude, la structure est supposée avoir un comportement élastique linéaire (les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont supposées petites). D'autre part, son comportement suit l'hypothèse des contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ). La loi de comportement peut alors s'écrire sous forme réduite :

$$\{\sigma\} = [H_t]\{D_0\}, \quad (4.11)$$

Les vecteurs  $\{\sigma\}$  et  $\{D_0\}$  étant composés des termes non-nuls des matrices correspondantes :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle \\ \langle D_0 \rangle &= \langle E_x \quad E_y \quad 2E_{xy} \quad 2E_{xz} \quad 2E_{yz} \rangle \end{aligned}$$

$[H_t]$  est la matrice d'élasticité dont l'expression, en contraintes planes, est donnée par :

$$[H_t] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [H_\tau] \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

2. Cette relation provient de la symétrie de  $[\sigma]$ .

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; \quad [H_\tau] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

avec  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.

## 4.2 Formulation de coque

Dans cette section, nous appliquons les relations précédentes à la formulation d'une coque mince.

### 4.2.1 Champ cinématique d'une coque mince

Une coque est un solide dont une dimension, l'épaisseur, reste petite par rapport aux deux autres dimensions caractérisant sa surface moyenne. De par sa forme particulière, le comportement d'une coque est différent de celui d'un solide tridimensionnel. On associe ainsi à ce type de structure la modélisation analytique suivante :

- sa géométrie est caractérisée par sa surface moyenne et la direction  $\vec{n}$  de celle-ci suivant l'épaisseur. Ainsi, le vecteur position du point  $q$  dans la configuration  $\mathcal{C}_t$  (figure 4.2) s'écrit :

$$\vec{x}_q = \vec{x}_p + z\vec{n}$$

où  $\vec{x}_p$  est le vecteur position de la surface moyenne,  $\vec{n}$  la normale à cette surface et  $z$  le paramètre d'épaisseur ;

- un état de contraintes planes existe :  $\sigma_{zz} = 0$  ;
- sa cinématique selon  $z$  respecte l'hypothèse des sections droites (dite de “Reissner/Mindlin”) : la fibre  $\vec{n}_0$  ne subit qu'une rotation rigide sans aucune élongation.
- en conséquence des hypothèses précédentes, les variables de description de la cinématique sont un champ de vecteurs de déplacements et un champ de vecteurs de rotations.

Dans le repère  $(\vec{t}_{10}, \vec{t}_{20}, \vec{n}_0)$ , ces approximations se traduisent par (voir figure 4.2) :

$$\vec{u}_q(x,y,z) = \vec{u}_p(x,y) + z\vec{\beta}(x,y) \quad \text{avec} \quad -h/2 \leq z \leq h/2,$$

$$\text{soit} \quad \begin{Bmatrix} u_q(x,y,z) \\ v_q(x,y,z) \\ w_q(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_p(x,y) \\ v_p(x,y) \\ w_p(x,y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

La topologie des structures coques permet d'affirmer que les champs  $\vec{u}_p$  et  $\vec{\beta}$  ne dépendent que des variables  $x$  et  $y$  associées à la surface moyenne.

Le champ de vecteur  $\vec{u}_p(x,y)$  traduit le mouvement de la surface moyenne ( $\overrightarrow{p_0p} = \overrightarrow{q_0q_0'}$ ) alors que le champ  $\vec{\beta}(x,y)$  est relatif à la rotation de la normale  $\vec{n}_0$ . On notera que l'hypothèse des rotations modérées implique  $\beta_x = \theta_y$ ,  $\beta_y = -\theta_x$  et  $\beta_z = 0$  (où  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les composantes de

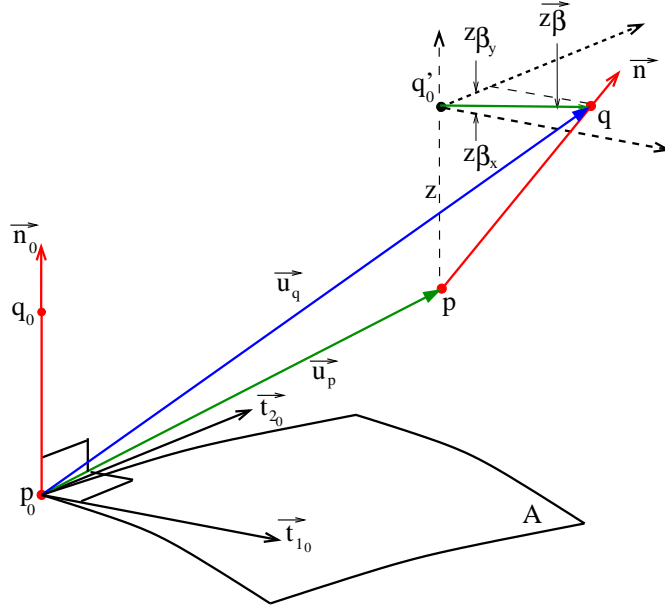


FIG. 4.2 – Cinématique d'une coque.

la rotation du vecteur normal  $\vec{n}_0$  autour de  $\vec{t}_{1_0}$  et  $\vec{t}_{2_0}$ ).

Ce champ de déplacement permet de déterminer le tenseur gradient des déplacements (*cf.* section 4.1.2) :

$$[L_0] = \left[ \frac{\partial \vec{u}_q}{\partial \vec{x}_0} \right] = \begin{bmatrix} u_{q,x_0} & u_{q,y_0} & u_{q,z} \\ v_{q,x_0} & v_{q,y_0} & v_{q,z} \\ w_{q,x_0} & w_{q,y_0} & w_{q,z} \end{bmatrix},$$

$$\text{avec : } \begin{cases} u_{q,x_0} = u_{,x_0} + z\beta_{x,x_0} \\ v_{q,x_0} = v_{,x_0} + z\beta_{y,x_0} \\ w_{q,x_0} = w_{,x_0} \end{cases} ; \begin{cases} u_{q,y_0} = u_{,y_0} + z\beta_{x,y_0} \\ v_{q,y_0} = v_{,y_0} + z\beta_{y,y_0} \\ w_{q,y_0} = w_{,y_0} \end{cases} ; \begin{cases} u_{q,z} = \beta_x \\ v_{q,z} = \beta_y \\ w_{q,z} = 0 \end{cases}$$

Dans le cadre des petits déplacements, nous avons vu que :

$$[E_{gl}] = [D_0] = \begin{bmatrix} u_{,x_0} & \frac{1}{2}(u_{,y_0} + v_{,x_0}) & \frac{1}{2}(u_{,z_0} + w_{,x_0}) \\ & v_{,y_0} & \frac{1}{2}(v_{,z_0} + w_{,y_0}) \\ sym & & w_{,z_0} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Les différents termes du tenseur des déformations peuvent être regroupés en termes de membrane-flexion et cisaillement transversal :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ 2E_{xy} \end{array} \right\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad \text{et} \quad \{\gamma\} = \left\{ \begin{array}{c} 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{array} \right\}, \quad (4.15)$$

avec, pour les déformations de membrane et de flexion, les expressions suivantes :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x_0} \\ v_{,y_0} \\ u_{,y_0} + v_{,x_0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x_0} \\ \beta_{y,y_0} \\ \beta_{x,y_0} + \beta_{y,x_0} \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Les relations relatives au cisaillement transversal ne sont pas détaillées car, lorsque les hypothèses de type Kirchhoff discrètes (voir annexe I) seront introduites, l'énergie de déformation de cisaillement transversal sera négligée.

#### 4.2.2 Forme variationnelle

L'expression du travail virtuel des efforts internes  $W_{int}$  peut être simplifiée avant d'être discrétisée. Dans un premier temps, la loi de comportement (4.11) nous autorise à écrire :

$$W_{int} = \int_{V_0} Tr([D_0^*][\sigma]) dV_0 = \int_{V_0} \langle D_0^* \rangle \{\sigma\} dV_0 = \int_{V_0} \langle D_0^* \rangle [H_t]\{D_0\} dV_0.$$

En négligeant ensuite les termes de cisaillement transversal, nous obtenons :

$$W_{int} = \int_{V_0} \langle \varepsilon^* \rangle [H]\{\varepsilon\} dV_0,$$

soit, après séparation des déformations de membrane et de flexion selon les relations (4.15) :

$$W_{int} = \int_{A_0} \langle e^* \rangle [H_m]\{e\} + \langle \chi^* \rangle [H_f]\{\chi\} dA_0. \quad (4.17)$$

Dans cette dernière équation,  $A_0$  désigne l'aire de la surface moyenne,  $[H_m]$  et  $[H_f]$  (matrices  $3 \times 3$ ) les rigidités de membrane et de flexion<sup>3,4</sup> liées à la matrice  $[H]$  (4.13) selon :

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{h/2} [H] dz = h[H] \quad ; \quad [H_f] = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H] dz = \frac{h^3}{12}[H].$$

Enfin, étant données les expressions des efforts résultants de membrane et de flexion :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [H_m]\{e\} \quad \text{et} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [H_f]\{\chi\}, \quad (4.18)$$

la relation (4.17) devient :

$$W_{int} = \int_{A_0} \langle e^* \rangle \{N\} + \langle \chi^* \rangle \{M\} dA_0. \quad (4.19)$$

3. La rigidité de couplage membrane-flexion  $[H_{mf}]$  est nulle dans l'ensemble des cas que nous étudierons (symétrie matérielle par rapport au plan  $z = 0$ ).

4. Nous supposons que les propriétés du matériau ne varient pas selon l'épaisseur.



### 4.3 Démarche éléments finis

Dans les sections précédentes, nous avons présenté le modèle continu décrivant les structures de type coques minces. A présent, il nous est possible d'étudier la discrétisation par éléments finis [11, 12, 13] associée à ce modèle. Dans un premier temps, les principes de discrétisation spatiale et temporelle d'un système linéaire sont rappelés. Le formalisme général introduit est ensuite appliqué à un élément de coque de type facettes planes.

#### 4.3.1 Schéma temporel de Newmark

Le schéma de discrétisation temporelle employé dans cette étude est implicite et appartient à la famille des schémas de Newmark<sup>5</sup>. Ceux-ci sont issus de développements en série de Taylor (Dhatt et Touzot [37], Bathe [9]) :

$$\{u^{p+1}\} = \{u^p\} + \Delta t \{\dot{u}^p\} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-b)\{\ddot{u}^p\} + b\{\ddot{u}^{p+1}\}) \quad (4.20)$$

$$\{\dot{u}^{p+1}\} = \{\dot{u}^p\} + \Delta t ((1-a)\{\ddot{u}^p\} + a\{\ddot{u}^{p+1}\}) \quad (4.21)$$

Les différents schémas de la famille de Newmark correspondent à des valeurs particulières de  $a$  et  $b$ , ces deux paramètres contrôlant la stabilité et la précision du schéma.

Nous avons retenu ici le *schéma de Newmark* pour lequel  $a=b=0.5$ . Ce schéma, connu également sous les noms de *schéma d'accélération moyenne* ou *schéma trapézoïdal*<sup>6</sup> est fréquemment utilisé en dynamique des structures : il bénéficie d'une précision temporelle du second ordre ainsi que d'une stabilité inconditionnelle<sup>7</sup>. D'autre part, il n'introduit aucun amortissement numérique. La discrétisation du terme d'accélération, selon ce schéma, se déduit de (4.20) :

$$\{\ddot{u}^{p+1}\} = \frac{4}{\Delta t^2} (\{u^{p+1}\} - \{u^p\}) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}^p\} - \{\ddot{u}^p\}. \quad (4.22)$$

Bien que nous n'utiliserons que le schéma d'accélération moyenne, il est intéressant de noter que pour des valeurs de  $a$  et  $b$  supérieures à 0.5, le schéma est conditionnellement stable et que pour ( $a=0.5, b=0$ ), un schéma explicite (différences finies centrées) est retrouvé.

Enfin, si un amortissement des hautes fréquences est nécessaire, le schéma d'accélération moyenne peut être modifié en choisissant  $a$  et  $b$  de la façon suivante :

$$a = \frac{1}{2} + \alpha \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

#### 4.3.2 Discrétisation spatiale

L'étape suivante consiste à appliquer une technique de discrétisation spatiale pour obtenir la forme discrète associée à la forme faible  $W$ . La méthode des éléments finis conduit, par

---

5. Ce schéma n'est pas spécifique à la "démarche éléments finis", il est introduit à ce niveau pour faciliter la présentation.

6. Il repose, en effet, sur l'utilisation d'une accélération moyenne sur le pas de temps.

7. En analyse linéaire.

l'intermédiaire d'un maillage, à une discrétisation du domaine  $V_0$  :

$$V_0 = \sum_{e=1}^{nelt} V_0^e, \quad nelt : \text{nombre total d'éléments.}$$

Cette décomposition s'applique aussi à la forme variationnelle pour le pas 'p' :

$$W^p = \sum_{e=1}^{nelt} W_e^p.$$

Sur chaque élément, une approximation nodale du vecteur solution est réalisée :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{nnel} N_i \{u_i\} \quad ; \quad \{u^*\} = \sum_{i=1}^{nnel} N_i \{u_i^*\} \quad nnel : \text{nombre de nœuds par élément,}$$

ce qui, appliqué à l'accélération, donne :

$$\{\ddot{u}\} = \sum_{i=1}^{nnel} N_i \{\ddot{u}_i\}.$$

Ainsi, nous obtenons sur chaque élément, la forme élémentaire discrétisée :

$$W_e^p = \langle u_n^* \rangle \{r^p\}, \quad (4.23)$$

où les valeurs nodales de la fonction test  $\langle u_n^* \rangle$  ont été extraites pour faire apparaître le résidu élémentaire  $\{r^p\}$ .

Après assemblage sur l'ensemble des éléments, nous obtenons finalement :

$$W^p = \sum_{e=1}^{nelt} W_e^p = \langle u^* \rangle \{R\} \quad \text{avec} \quad \{R\} = \sum_{e=1}^{nelt} \{r^p\}, \quad (4.24)$$

où  $\langle u^* \rangle$  est le vecteur global des valeurs nodales virtuelles et  $\{R\}$  le résidu global.

### - Discrétisation du Principe des Travaux Virtuels

La forme élémentaire du PTV (4.10) correspondant au pas de calcul  $p$  s'écrit :

$$W_e^p = \int_{V_0^e} \bar{u}^* \cdot \rho \ddot{u} \, dV_0 + \int_{V_0^e} Tr([D_0^*][\sigma]) \, dV_0 - \int_{S_0^e} \bar{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} \, dS_0 - \int_{V_0^e} \bar{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} \, dV_0.$$

Chaque terme est discrétisé de la manière suivante :

- La discrétisation par éléments finis du terme d'inertie  $W_d$  fait apparaître la matrice masse élémentaire  $[m]$  :

$$W_d^e = \int_{V_0^e} \bar{u}^* \cdot \rho \ddot{u} \, dV_0 = \langle u_n^* \rangle [m] \{\ddot{u}_n\}.$$

- Par ailleurs, celle du terme associé aux efforts internes  $W_{int}^e$  introduit le vecteur élémentaire des contraintes internes  $\{f_{int}^e\}$  :

$$W_{int}^e = \int_{V_0^e} Tr([D_0^*][\sigma]) dV_0 = \langle u_n^* \rangle \{f_{int}^e\}.$$

- Enfin, le terme de sollicitations externes (forces volumiques, surfaciques ou ponctuelles) devient :

$$W_{ext}^e = \int_{S_0^e} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} dS_0 + \int_{V_0^e} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} dV_0 = \langle u_n^* \rangle \{f_{ext}^e\}.$$

Finalement,  $W_e^p$  (4.23) s'écrit :

$$W_e^p = \langle u_n^* \rangle \{r^p\} = \langle u_n^* \rangle ([m]\{\ddot{u}_n^p\} + \{f_{int}^{e,p}\} - \{f_{ext}^{e,p}\}),$$

et le système global associé à (4.24) est obtenu par assemblage de ces termes élémentaires :

$$[M]\{\ddot{u}^p\} + \{F_{int}^p\} = \{F_{ext}^p\}, \quad (4.25)$$

où  $[M]$  désigne la matrice masse assemblée,  $\{F_{int}^p\}$  et  $\{F_{ext}^p\}$  les vecteurs assemblés des efforts internes et sollicitations externes respectivement.

## 4.4 Élément DKT18

Trois types d'éléments peuvent être utilisés pour développer un élément de coque<sup>8</sup> : les éléments isoparamétriques dégénérés, les éléments à facettes planes et les éléments courbes. D'une manière simplifiée, les éléments tridimensionnels dégénérés sont obtenus à partir des éléments et des équations tridimensionnels. La coque est considérée, dans cette approche, comme un domaine tridimensionnel limité par une surface supérieure et une surface inférieure généralement courbées. Dans la seconde approche, très couramment utilisée en pratique et retenue pour notre étude, la géométrie de la coque est représentée par un ensemble de facettes planes. Cette technique consiste à combiner des éléments de membrane et de flexion puis à coupler leurs effets au niveau de l'assemblage (par transformation dans un repère global). Enfin, les éléments courbes peuvent être vus comme un enrichissement géométrique des éléments à facettes planes.

Cette section présente la formulation linéaire d'un élément de coque de type Kirchhoff discret, appelé DKT18 (Discret Kirchhoff Triangle à 18 degrés de liberté). Nous verrons que la partie membrane y est formulée suivant l'élément CST (Constant Strain Triangle) alors que la partie flexion est issue de l'élément DKT (Discret Kirchhoff Triangle) [13]. Ainsi les variables nodales de cet élément sont, après assemblage, les déplacements ( $U, V, W$ ) des trois nœuds et les rotations ( $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ ) autour des axes globaux  $X, Y$  et  $Z$  (figure 4.3). Enfin, rappelons qu'une description de sa version non-linéaire (en grands déplacements, rotations modérées et petites déformations) est donnée en annexe C.

8. Voir, par exemple, les références [29, 63] pour une description plus précise de ceux-ci.

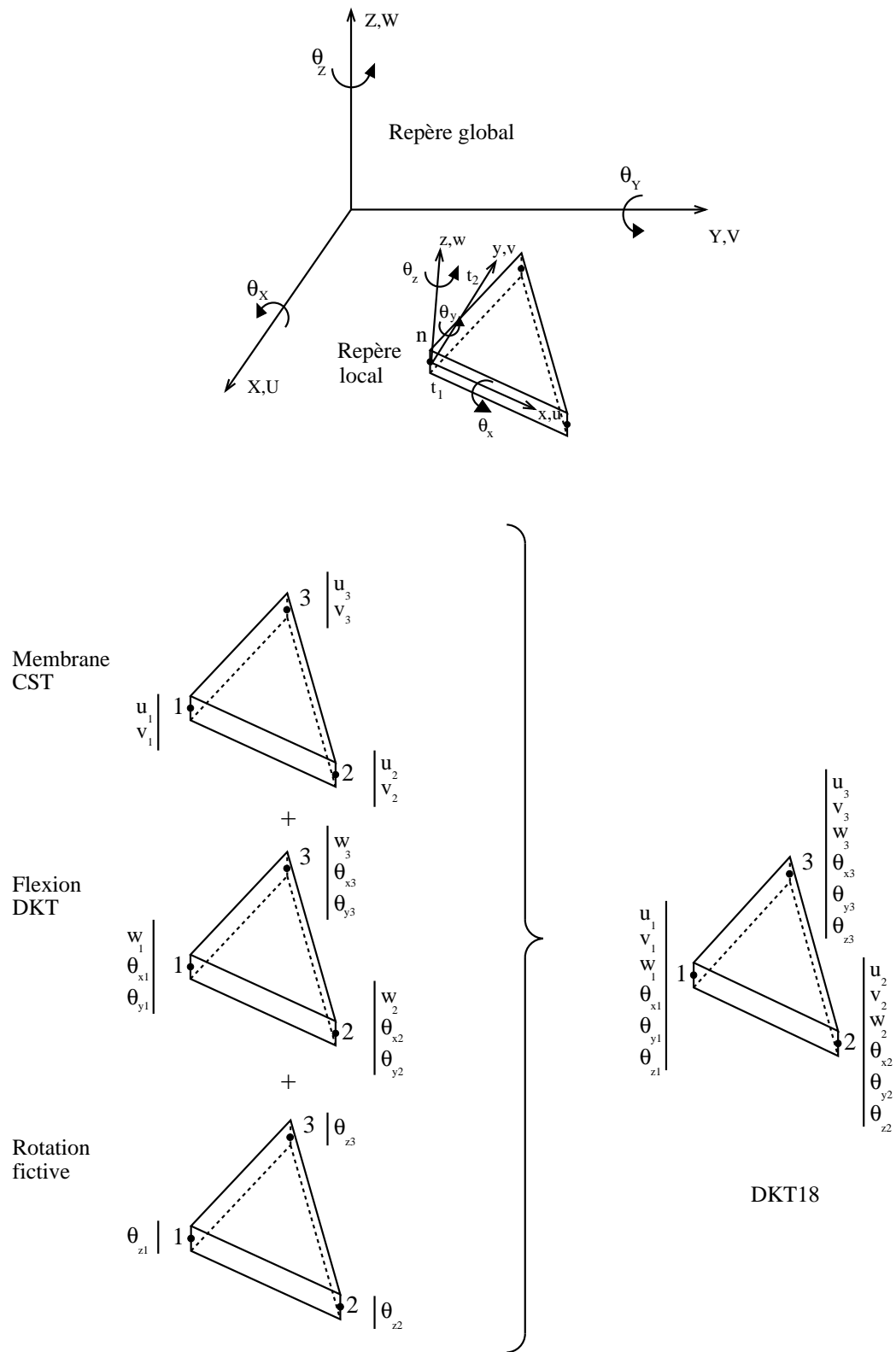


FIG. 4.3 – Construction de l'élément DKT18.

#### 4.4.1 Approximations éléments finis

##### - Repère local et coordonnées locales

La surface de référence de l'élément est définie par :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad ; \quad N_2 = \xi \quad ; \quad N_3 = \eta \quad ; \quad (\xi, \eta) \in [0, 1]$$

et les vecteurs de base  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  ont pour expression :

$$\{a_1\} = \{x_{p,\xi}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{a_2\} = \{x_{p,\eta}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad ; \quad X_{21} = X_2 - X_1 \dots$$

Ceux-ci permettent de construire un repère orthonormé  $[Q] = [\vec{t}_1 : \vec{t}_2 : \vec{n}]$  ayant pour vecteur normal<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|} \quad ; \quad |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2| = 2A_e \quad ; \quad A_e : \text{aire du triangle élémentaire} \\ \{n\} &= \begin{Bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{Bmatrix} Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21} \\ Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21} \\ X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

et, pour vecteurs tangents :

$$\langle t_1 \rangle = \langle n_Z + \frac{n_Y^2}{a} : -\frac{n_X n_Y}{a} : -n_X \rangle \quad \text{et} \quad \langle t_2 \rangle = \langle -\frac{n_X n_Y}{a} : n_Z + \frac{n_X^2}{a} : -n_Y \rangle \quad (4.27)$$

avec  $a = 1 + n_Z$ .

On notera que le repère ainsi défini est constant en tout point de l'élément. Nous l'emploierons par la suite pour définir la géométrie, la cinématique ainsi que les variables nodales de l'élément.

La position d'un point  $q$  situé à une hauteur  $z$  dans l'épaisseur s'exprime selon (*cf.* sous-section 4.2.1) :

$$\{x_q\} = \{x_p\} + z\{n\}$$

ou encore :

$$\{x_q(\xi, \eta, z)\} = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z \end{Bmatrix}.$$

Les coordonnées des nœuds 1, 2 et 3 dans le repère local ayant le nœud 1 pour origine sont :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [t_1 : t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [t_1 : t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix}$$

9.  $\vec{n}$  est considéré comme normal à la surface moyenne des éléments (il est ainsi discontinu d'un élément à l'autre, ce qui conduit à définir six degrés de liberté par nœud).

et les coordonnées d'un point  $p$  de la surface moyenne sont interpolées selon :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi x_2 + \eta x_3 \\ \xi y_2 + \eta y_3 \end{Bmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de transformation  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x,\xi & y,\xi \\ x,\eta & y,\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix},$$

ce qui conduit à :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 & -y_2 \\ -x_3 & x_2 \end{bmatrix} ; \quad \det [J] = 2A_e = x_2 y_3 - x_3 y_2. \quad (4.28)$$

### - Variables cinématiques

Le champ de déplacement d'un point  $q$  est défini sous forme vectorielle par (cf. sous-section 4.2.1) :

$$\begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.29)$$

Concernant, la partie membrane du PTV, les déplacements  $u$  et  $v$  sont définis suivant la formulation de l'élément CST [11] et sont linéaires en  $\xi$  et  $\eta$  :

$$\begin{aligned} u &= \langle N_u \rangle \{u_n\} & ; & \quad v = \langle N_v \rangle \{u_n\} \\ u^* &= \langle N_u \rangle \{u_n^*\} & ; & \quad v^* = \langle N_v \rangle \{u_n^*\} \\ \langle N_u \rangle &= \langle \dots : N_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : \dots \ i = 1,2,3 \rangle \\ \langle N_v \rangle &= \langle \dots : 0 \ N_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : \dots \ i = 1,2,3 \rangle \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\{u_n\}$  contient les 18 variables nodales de l'élément :

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots : u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} : \dots \ i = 1,2,3 \rangle$$

$u_i, v_i, w_i$  étant les déplacements au nœud  $i$  par rapport aux axes locaux  $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$  et  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  les rotations au nœud  $i$  autour de ces mêmes axes. Le vecteur des variables virtuelles  $\langle u_n^* \rangle$  est similaire.

Afin d'évaluer la partie flexion du PTV, les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont définies suivant la formulation de l'élément DKT [12] :

$$\begin{aligned} \beta_x &= \langle N^x \rangle \{u_n\} & ; & \quad \beta_y = \langle N^y \rangle \{u_n\} \\ \beta_x^* &= \langle N^x \rangle \{u_n^*\} & ; & \quad \beta_y^* = \langle N^y \rangle \{u_n^*\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N^x \rangle &= \langle \dots : 0 \ 0 \ N_{i1}^x \ -N_{i3}^x \ N_{i2}^x \ 0 : \dots \ i = 1,2,3 \rangle \\ \langle N^y \rangle &= \langle \dots : 0 \ 0 \ N_{i1}^y \ -N_{i3}^y \ N_{i2}^y \ 0 : \dots \ i = 1,2,3 \rangle \end{aligned}$$

où  $N_{ij}^x$  et  $N_{ij}^y$  sont quadratiques en  $\xi$  et  $\eta$  et définis explicitement dans l'annexe I.

Les variables nodales associées à la représentation de  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont  $w_i$ ,  $\theta_{x_i} = -\beta_{y_i}$  et  $\theta_{y_i} = \beta_{x_i}$ .

Enfin, une interpolation linéaire de  $w$  est retenue (comme pour  $u$  et  $v$ ) pour définir le vecteur des charges équivalentes et la matrice masse :

$$\begin{aligned} w &= \langle N_w \rangle \{u_n\} \quad ; \quad w^* = \langle N_w \rangle \{u_n^*\} \\ \langle N_w \rangle &= \langle \dots : 0 \ 0 \ N_i \ 0 \ 0 \ 0 : \dots \ i = 1,2,3 \rangle \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Matrice masse

Les grandeurs utilisées dans les sections suivantes sont élémentaires. Afin de ne pas alourdir les notations, nous omettrons parfois l'indice "e" ainsi que l'indice "0" faisant référence à la configuration initiale sur laquelle le PTV est exprimé.

La matrice masse élémentaire  $[m]$  associée aux variables<sup>10</sup>  $u, v$  et  $w$  se déduit de :

$$W_d^e = \int_{A_e} \rho_m \left( u^* \frac{d^2 u}{dt^2} + v^* \frac{d^2 v}{dt^2} + w^* \frac{d^2 w}{dt^2} \right) dA = \langle u_n^* \rangle [m] \{\ddot{u}_n\}.$$

Ainsi :

$$[m] = \int_{A_e} \rho_m (\{N_u\} \langle N_u \rangle + \{N_v\} \langle N_v \rangle + \{N_w\} \langle N_w \rangle) dA,$$

où  $\rho_m = \int_{-t}^t \rho dz$  est la masse par unité de surface moyenne.

Si celle-ci est constante, la matrice masse a pour expression :

$$[m]_{(18 \times 18)} = \frac{A_e \rho_m}{12} \begin{bmatrix} 2[I] & [I] & [I] \\ & 2[I] & [I] \\ sym & & 2[I] \end{bmatrix} ; \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

#### 4.4.3 Sollicitations externes

Les sollicitations externes, rencontrées dans cette étude, sont volumiques (poids), surfaciques (pression), ou ponctuelles<sup>11</sup>. Dans le cas de la pression par exemple, le travail virtuel des efforts devient :

$$W_{ext}^e = \int_{A_e} \vec{u}_p^* \cdot \vec{f} dA = \int_{A_e} \langle u^* \ v^* \ w^* \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_z \end{Bmatrix} dA = \langle u_n^* \rangle \{f_{ext}\},$$

10. Les termes d'inertie de rotation ont été négligés.

11. Voir la référence [12] pour plus de détails concernant la discrétisation des efforts volumiques et localisés.





### - Partie flexion

De la même façon, la partie relative à la flexion (équation 4.16) devient :

$$\begin{Bmatrix} \chi \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} = [B_f] \{u_n\}, \quad (4.35)$$

avec :

$$[B_f]_{(3 \times 18)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 < N_{x,\xi} > -y_2 < N_{x,\eta} > \\ -x_3 < N_{y,\xi} > +x_2 < N_{y,\eta} > \\ -x_3 < N_{x,\xi} > +x_2 < N_{x,\eta} > +y_3 < N_{y,\xi} > -y_2 < N_{y,\eta} > \end{bmatrix}.$$

et les moments généralisés sont facilement évalués selon (4.18). Par ailleurs  $\{\chi^*\}$  prend la forme :

$$\{\chi^*\} = [B_f] \{u_n^*\}. \quad (4.36)$$

Ainsi :

$$W_{int}^f = \langle u_n^* \rangle \{f_{int}^f\} = \langle u_n^* \rangle \int_{A_e} [B_f]^T \{M\} dA.$$

$[B_f]$  et  $\{M\}$  étant des fonctions linéaires de  $\xi$  et  $\eta$ , une intégration numérique utilisant trois points de Hammer conduit à :

$$\begin{Bmatrix} f_{int}^f \end{Bmatrix}_{(18 \times 1)} = \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T \{M\})_i J = \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T [H_f] [B_f])_i J \{u_n\} = [k_f] \{u_n\}$$

où  $\omega_i$  est le poids associé au point d'intégration  $i$ ,  $J = \det[J]$  et  $[k_f]$  la matrice élémentaire de rigidité associée à la flexion.

Finalement, les contraintes internes complètes s'écrivent :

$$\{f_{int}^e\} = \{f_{int}^m\} + \{f_{int}^f\} = [B_e]^T \{N\} A_e + \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T \{M\})_i J$$

soit, pour la matrice de rigidité :

$$[k] = [k_m] + [k_f] = [B_e]^T [H_m] [B_e] + \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T [H_f] [B_f])_i J.$$

#### 4.4.5 Rigidité fictive

Les champs cinématiques réels et virtuels ne font pas intervenir les rotations  $\theta_z$  et  $\theta_z^*$  autour de la normale ; ainsi tous les termes de la matrice élémentaire  $[k]$  associés aux variables nodales  $\theta_{zi}$  et  $\theta_{zi}^*$  sont nuls. Si tous les éléments connectés à un nœud  $i$  sont coplanaires, la matrice assemblée  $[K]$  sera singulière au niveau de ce nœud. Afin d'éviter cette difficulté numérique, nous introduisons une rigidité fictive associée aux variables  $\theta_{zi}$  et  $\theta_{zi}^*$  [13] telle que :

$$W_{int}^e = W_{int}^e + W_{\theta_z}^e$$

avec :

$$W_{\theta_z}^e = \int_{A_e} \alpha E \frac{h^3}{12} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) dA$$

où  $\alpha$  est un coefficient petit par rapport à un ( $\alpha = 10^{-4}$ ).

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{zn}^* \rangle [k_{\theta_z}] \{ \theta_{zn} \} \quad ; \quad \langle \theta_{zn} \rangle = \langle \theta_{z1} \theta_{z2} \theta_{z3} \rangle$$

$$[k_{\theta_z}] = \alpha E \frac{h^3}{12} \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_{32}^2 + x_{32}^2 & -y_{32}y_3 - x_3x_{32} & y_{32}y_2 + x_{32}x_2 \\ & y_3^2 + x_3^2 & -y_3y_2 - x_3x_2 \\ \text{sym} & & y_2^2 + x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

cette dernière matrice devant être ajoutée à  $[k]$  avant l'assemblage.

#### 4.4.6 Conversion repère local - repère global

Le passage du système (4.23) :

$$W_e = \langle u_n^* \rangle \{ r \} = \langle u_n^* \rangle ([m] \{ \ddot{u}_n \} + \{ f_{int}^e \} - \{ f_{ext}^e \})$$

au système (4.24) :

$$W = \langle u^* \rangle \{ R \} = \langle u^* \rangle ([M] \{ \ddot{u} \} + \{ F_{int} \} - \{ F_{ext} \})$$

ou encore

$$W = \langle u^* \rangle \{ R \} = \langle u^* \rangle ([M] \{ \ddot{u} \} + [K] \{ u \} - \{ F_{ext} \}),$$

se fait par assemblage des matrices et vecteurs élémentaires. Cependant, ces grandeurs élémentaires sont exprimées dans un repère local propre à chaque élément. Il convient donc de toutes les exprimer dans un repère commun avant de procéder à l'assemblage.

Les déplacements et rotations dans le repère global  $X, Y, Z$  (figure 4.3) sont  $U, V, W, \theta_X, \theta_Y$  et  $\theta_Z$  et sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix}. \quad (4.38)$$

Les composantes de  $[Q] = [\vec{t}_1 \ : \ \vec{t}_2 \ : \ \vec{n}]$  sont données explicitement par (4.26) et (4.27).

Soient  $\langle u_n^* \rangle_{glob}$  et  $\langle u_n \rangle_{glob}$ , les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i \ V_i \ W_i \ \theta_{Xi} \ \theta_{Yi} \ \theta_{Zi} : \dots \ i = 1, 2, 3 \rangle.$$

En utilisant (4.38), nous avons :

$$\{ u_n \} = [T] \{ u_n \}_{glob} \quad ; \quad \{ u_n^* \} = [T] \{ u_n^* \}_{glob}$$

avec :

$$[T]_{(18 \times 18)} = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] \\ [0] & [A] & [0] \\ [0] & [0] & [A] \end{bmatrix} \quad ; \quad [A]_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] \\ [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

et finalement les matrices et vecteurs élémentaires s'expriment dans le repère global <sup>12</sup> selon :

$$[K] = [T]^T [k] [T] \quad ; \quad \{F_{int}\} = [T]^T \{f_{int}^e\} \quad ; \quad \{F_{ext}\} = [T]^T \{f_{ext}^e\}. \quad (4.40)$$

Cette transformation des vecteurs et matrices du repère local au repère global conclut la description de l'élément DKT18 présent dans REFLEX. Sa validation fait l'objet du chapitre suivant.

---

12. Les termes d'inertie de rotation étant négligés, la matrice masse globale  $[M]$  est identique à la matrice masse  $[m]$  (voir [13]).

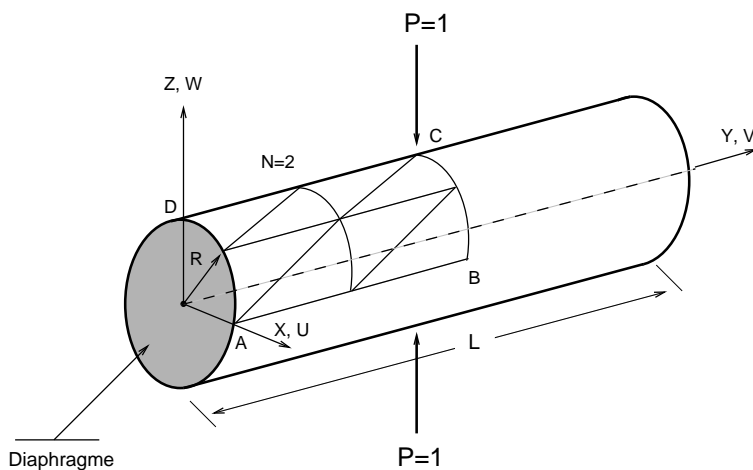
## Chapitre 5

# Validation et applications de l'élément DKT18 linéaire

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer et d'illustrer les capacités de l'élément DKT18 linéaire [13] présent dans le code REFLEX [11, 12, 13]. Dans une première partie, nous présentons brièvement les résultats d'une analyse statique avant d'exposer, dans une seconde partie, les modes et fréquences propres de deux configurations rencontrées dans les moteurs fusée (vibrations libres). On pourra noter que plusieurs autres cas-tests ont été effectués (voir le rapport d'avancement [88]). Ils ne sont pas présentés ici par souci de concision.

### 5.1 Calculs statiques

Un problème classique, très fréquemment traité pour évaluer les performances des éléments de coque, est celui du cylindre reposant sur deux diaphragmes rigides dans leur plan et soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées (figure 5.1).



Conditions aux limites :

$$AD : U = W = \theta_Y = 0;$$

$$AB : W = \theta_Y = \theta_X = 0;$$

$$CB : V = \theta_X = \theta_Z = 0;$$

$$CD : U = \theta_Y = \theta_Z = 0.$$

Propriétés du matériau :

$$h = 0.03 \text{ m};$$

$$E = 3 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2};$$

$$\nu = 0.3.$$

FIG. 5.1 – Cylindre pincé supporté par deux diaphragmes (effort  $P=1 \text{ N}$ , longueur  $L=6 \text{ m}$  et rayon  $R=3 \text{ m}$ ).

Les données géométriques et mécaniques présentées ci-dessus sont celles employées dans la référence [13]. Cet exemple de coque mince ( $R/h = 100$ ) constitue un des tests les plus sévères pour étudier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de déformations de membrane complexes avec une importante part des déformations de flexion, notamment au niveau des zones sollicitées (point  $C$ ).

Par ailleurs, la présence de symétries nous autorise à ne discrétiser qu'un huitième de la coque (portion  $ABCD$  sur la figure 5.1). Trois maillages réguliers ( $N=2, 10$  et  $15$  éléments selon  $AB$  et  $BC$ ) ont été utilisés.

Les résultats obtenus sont reportés sur les figures 5.2.a et 5.2.b. Les résultats de [13] avec le même élément apparaissent aussi sur cette figure, pour comparaison. On notera que nos résultats sont en parfait accord avec ces derniers. Ces courbes permettent d'évaluer la vitesse de convergence de l'élément vers la solution analytique établie par Lindberg *et al.* [82]. Celle-ci est assez lente pour de faibles valeurs de  $N$  : un raffinement de maillage est nécessaire pour obtenir de bons résultats. Ce comportement peut être expliqué par la grande variation des champs de membrane et de flexion au voisinage du point  $C$  [63].

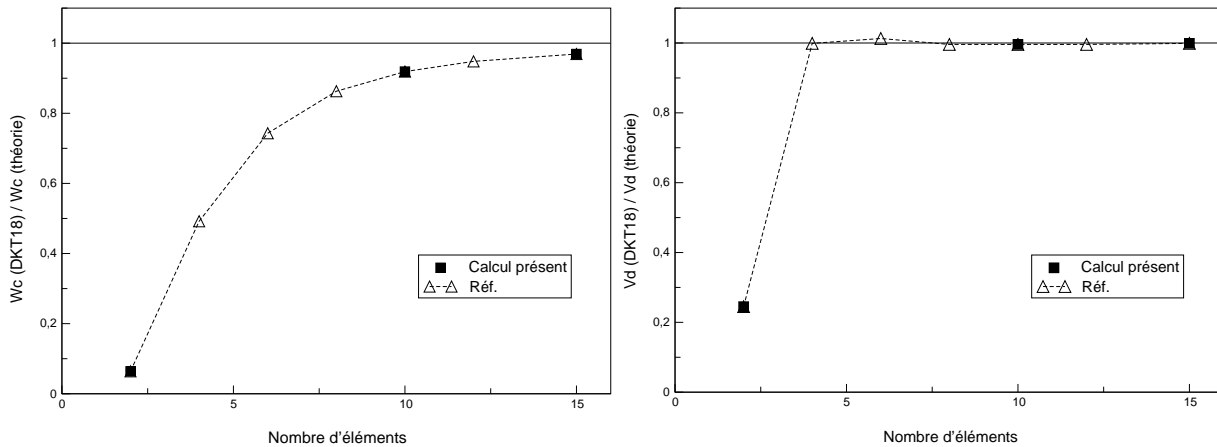


FIG. 5.2 – Déplacements adimensionnés vertical du point  $C$  (à gauche) et longitudinal du point  $D$  (à droite) en fonction du nombre d'éléments : convergence vers les résultats théoriques [82] indiqués par la droite en trait plein ( $\bar{W}_C = -EhW_C/P = 164.24$  et  $\bar{V}_D = EhV_D/P = 4.114$ ) et comparaison avec les résultats de [13] (notés "Réf." sur les figures).

## 5.2 Application à l'analyse dynamique (vibrations libres)

Nous proposons maintenant de déterminer, à l'aide de l'élément DKT18, les fréquences et les modes propres de deux configurations rencontrées en couplage fluide-structure dans les moteurs fusée. L'avancement en temps (schéma de Newmark) sera, quant à lui, validé dans le chapitre 8.

Rappelons rapidement le principe de ces calculs. Après discrétisation par éléments finis, le

système aux vibrations libres s'écrit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}, \quad (5.1)$$

et les solutions périodiques de cette équation sont du type :

$$\{u\} = \{u_0\} \cos(\omega t + \phi),$$

où  $\omega$  représente la pulsation ( $\omega = 2\pi f$  où  $f$  est la fréquence).

En substituant la relation précédente dans (5.1), il vient :

$$([K] - \omega^2[M])\{u_0\} = \{0\}.$$

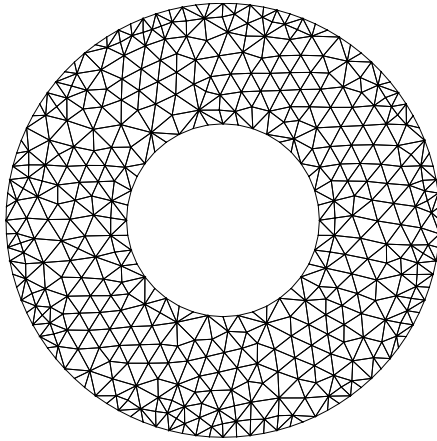
Comme  $\{u_0\} \neq \{0\}$ , on en déduit :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0.$$

La résolution de cette équation fournit les valeurs propres (pulsations) et les modes propres de la configuration considérée.

### 5.2.1 Anneau plat encastré

Cette configuration consiste en un anneau plat encastré le long de son pourtour extérieur. Les modes et fréquences propres de cette géométrie ont été calculés par Carpentier [21] dans le cadre de l'étude des couplages fluide-structure et aéro-acoustique dans les propulseurs à propergols solides.



Conditions aux limites :

$$U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0$$

(encastrement) sur  $R_2$ .

Propriétés du matériau :

$$\begin{aligned} h &= 0.016 \text{ m}; \\ E &= 4 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}; \\ \nu &= 0.3; \\ \rho &= 3500 \text{ kg.m}^{-3}. \end{aligned}$$

FIG. 5.3 – Maillage de l'anneau plat (rayons interne  $R_1=0.4 \text{ m}$  et externe  $R_2=0.9 \text{ m}$ ).

Les caractéristiques de cet anneau sont résumées ci-dessus. Le maillage réalisé (458 nœuds) est comparable à celui employé par [21] (446 nœuds). Les quatre premiers modes propres de la structure sont illustrés sur la figure 5.4. Il en ressort que seul le premier mode est axisymétrique.

Enfin, la comparaison entre les fréquences propres que nous obtenons avec l'élément DKT18 (tableau 5.1) et celles de la référence<sup>1</sup> [21] indique un bon accord entre les deux calculs.

1. L'auteur ne précise pas l'élément employé ni le type de matrice masse retenu.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Référence [21]	47.78	64.79	101.48	148.96
Présent calcul	48.49	65.65	102.85	151.88

TAB. 5.1 – Fréquences propres (en Hz) de l'anneau plat encastré.

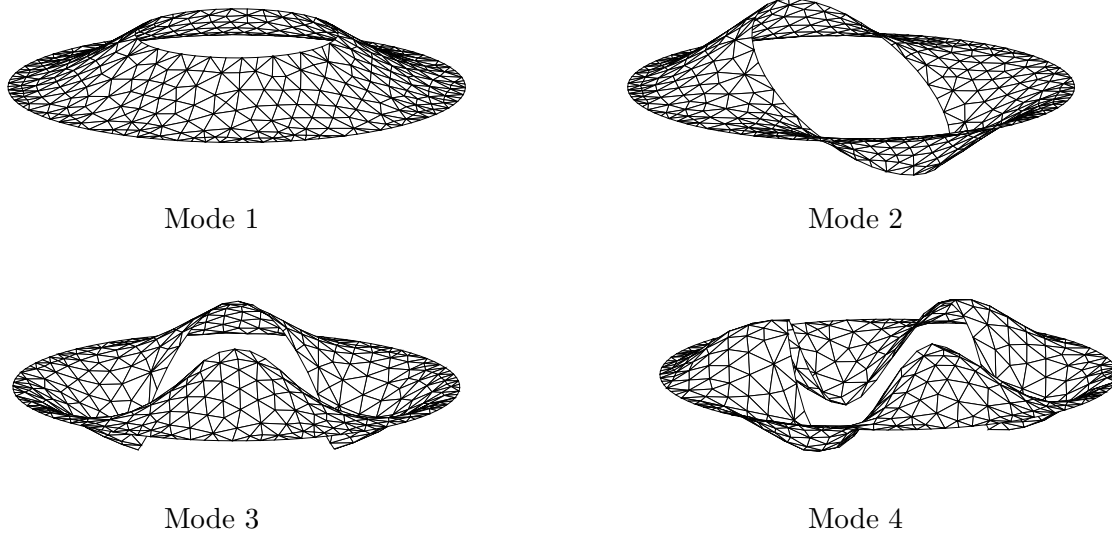


FIG. 5.4 – Modes propres de l'anneau plat encastré.

### 5.2.2 Tuyère LEA souple

Les modes propres de la tuyère LEA souple en aluminium ( $0.6\text{ mm}$  d'épaisseur), dont nous donnerons une description précise au chapitre 9, ont été calculés en avant projet par l'ONERA grâce au code de calcul ALGOR. Nous comparons ci-après ces résultats à ceux d'IDEAS et de REFLEX effectués au LMFN-CORIA. Le maillage utilisé par REFLEX comporte 2400 éléments triangulaires DKT18 (figure 9.38). Il est équivalent en terme de raffinement à celui utilisé par l'ONERA. Celui imposé à IDEAS est similaire et utilise des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds.

Les fréquences propres obtenues sont résumées dans le tableau 5.2. Les figures 5.5 et 5.6 présentent les quatre premiers modes propres de la tuyère obtenus par IDEAS.

Les résultats fournis par IDEAS et REFLEX sont très proches. Ils sont en bon accord avec ceux de l'ONERA : l'écart relatif entre les fréquences propres du premier mode, par exemple, est de 5 %. Les faibles écarts observés s'expliquent par les petites différences entre les différents éléments finis, maillages et propriétés du matériau utilisés.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
ONERA [87]	173.5	227.7	416.7	573.6
REFLEX	182.5	227.9	446.0	598.0
IDEAS	182.3	230.0	425.0	604.0

TAB. 5.2 – Fréquences propres (en Hz) de la tuyère aluminium LEA (cas LEA1). Mode 1 : ovalisation, Mode 2 : trilobe, Mode 3 : quadrilobe, Mode 4 : flexion.

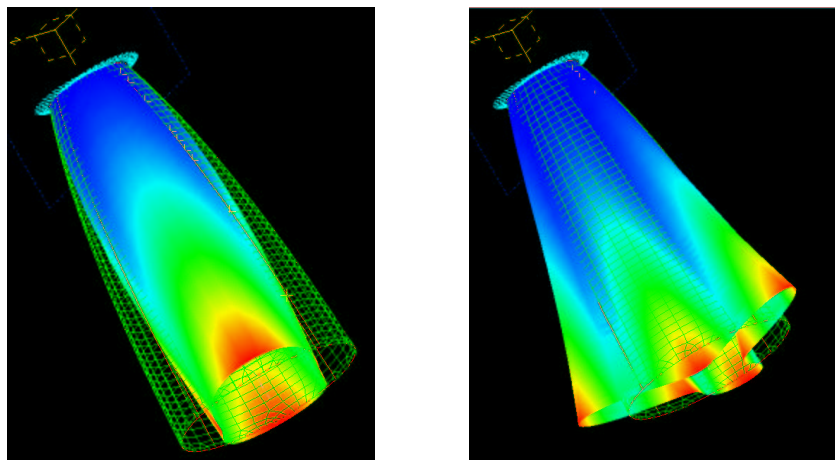


FIG. 5.5 – Mode d'ovalisation et mode trilobe.

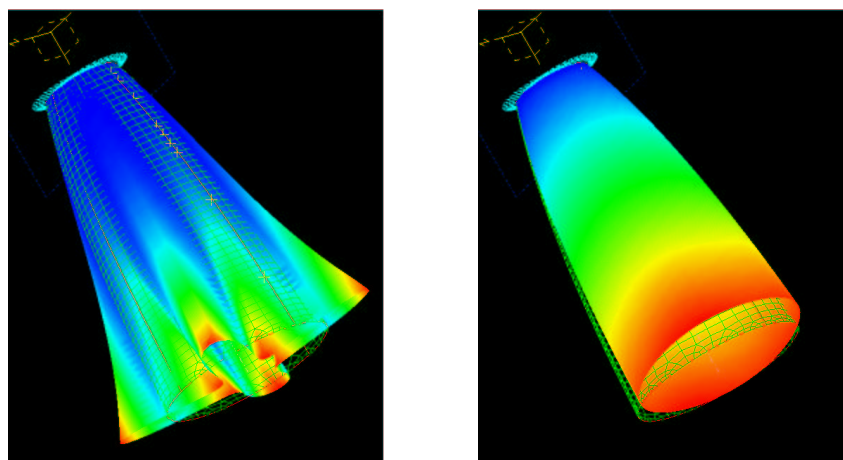


FIG. 5.6 – Mode quadrilobe et mode de flexion.

En conclusion, les différents tests effectués au cours de nos travaux ont mis en évidence le bon comportement de l'élément DKT18. Ce dernier peut donc être retenu pour la suite de notre étude.





## Chapitre 6

# Schémas numériques relatifs aux codes fluide

*Ce chapitre présente les “codes fluide” utilisés dans la présente étude. Ces codes sont au nombre de trois. Il s’agit de codes bien adaptés pour décrire l’aérodynamique des écoulements compressibles et, par conséquent, fréquemment utilisés au Laboratoire de Mécanique des Fluides Numériques LMFN-CORIA dans ce cadre. Un de ces codes permet de traiter des écoulements turbulents, les deux autres se limitent aux écoulements visqueux sans turbulence. Nous rappelons donc brièvement, ci-après, les équations à résoudre avant de résumer les schémas numériques employés.*

### 6.1 Mise en forme des équations

Les équations du mouvement de tout milieu continu sont régies par les principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique. Celles-ci se composent des équations traduisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l’énergie. Elles forment le système d’équations de Navier-Stokes.

Lorsque l’écoulement est turbulent, comme c’est le cas pour les écoulements au sein des propulseurs, il est classique de résoudre ces équations sous leur forme moyennée (approche RANS, *Reynolds Averaged Navier-Stokes*). En effet, même si les méthodes de simulation des grandes échelles [86] émergent aujourd’hui comme une possibilité pour prédire de façon fiable et précise des écoulements relativement complexes dans un avenir proche, les méthodes RANS restent une alternative intéressante à moyen terme étant donnée la puissance actuelle des ordinateurs.

La présente étude utilise le modèle de turbulence  $k - \varepsilon$  de Jones-Launder [68] dans le cadre de ce formalisme. Plus précisément, les termes inconnus (flux turbulents de quantité de mouvement et de chaleur) apparaissant dans les équations de Navier-Stokes moyennées sont modélisés grâce à une hypothèse de type transport par gradient (hypothèse de Boussinesq). Il résulte de cette dernière modélisation que la détermination des flux turbulents passe par l’évaluation de la viscosité turbulente,  $\mu_t$ . Dans le modèle  $k - \varepsilon$  (version bas-Reynolds) adopté ici,  $\mu_t$  est évaluée à partir de deux grandeurs : l’énergie cinétique turbulente  $k$  et la contribution isotrope de sa

dissipation,  $\varepsilon^*$ , dont deux équations de transport permettent de suivre les évolutions.

Ainsi, pour un écoulement de fluide bidimensionnel<sup>1</sup> compressible turbulent, pour lequel les forces de pesanteur sont négligeables, l'ensemble des équations à résoudre s'expriment sous la forme suivante :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{Q}) + \mathbf{S}_{\mathbf{o}}(\mathbf{Q}) \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{x} = x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y$  représente le vecteur des variables d'espace dans le repère cartésien de base  $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}$  l'opérateur divergence,  $\mathbf{Q} = [\bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{u}, \bar{\rho}\tilde{v}, \bar{\rho}\tilde{E}_t, \bar{\rho}k, \bar{\rho}\varepsilon^*]^T$  le vecteur des variables conservatives  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x \mathbf{i}_x + \mathbf{F}_y \mathbf{i}_y$  le vecteur des flux eulériens,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_x \mathbf{i}_x + \mathbf{G}_y \mathbf{i}_y$  le vecteur des flux visqueux et  $\mathbf{S}_{\mathbf{o}}$  celui des termes source. Les expressions de ces vecteurs sont données ci-dessous :

- Flux eulériens (ou flux convectifs) :

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + p^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ (\bar{\rho}\tilde{E}_t + p^*)\tilde{u} \\ \bar{\rho}k\tilde{u} \\ \bar{\rho}\varepsilon^*\tilde{u} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + p^* \\ (\bar{\rho}\tilde{E}_t + p^*)\tilde{v} \\ \bar{\rho}k\tilde{v} \\ \bar{\rho}\varepsilon^*\tilde{v} \end{pmatrix}$$

- Flux visqueux :

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \tilde{u} + (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \tilde{v} + \gamma \left( \frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x} \\ \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \\ (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \tilde{u} + (\bar{\mu} + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \tilde{v} + \gamma \left( \frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial y} \\ \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \\ \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1. Cette restriction de la présentation est due au fait que notre étude se limite aux problèmes bidimensionnels.

- Termes source :

$$\mathbf{S}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{P}_k - \bar{\rho}\varepsilon^* + S_k \\ C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon^*}{k} \mathcal{P}_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \bar{\rho}\varepsilon^* + S_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Dans ces relations,  $\bar{\rho}$  est la masse volumique moyenne<sup>2</sup>,  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  les composantes moyennes horizontale et verticale du vecteur vitesse,  $\tilde{E}_t$  l'énergie totale moyenne par unité de masse,  $\tilde{\varepsilon}$  l'énergie interne moyenne et  $p^*$  la pression effective définie comme la somme de la pression statique moyenne  $\bar{p}$  et de la contribution turbulente mesurée par  $\frac{2}{3}\bar{\rho}k$  :

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3}\bar{\rho}k$$

L'expression de l'énergie totale moyenne s'écrit :

$$\bar{\rho}\tilde{E}_t = \frac{p^*}{\gamma-1} + \frac{\tilde{u}_l\tilde{u}_l}{2} + \left(1 - \frac{2}{3(\gamma-1)}\right)\bar{\rho}k$$

où  $\gamma$  est le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants ( $\gamma = c_p/c_v$ ). En ce qui concerne la viscosité dynamique moyenne  $\bar{\mu}$ , celle-ci est donnée, pour la gamme de température étudiée, par la loi de Sutherland [109] :

$$\bar{\mu} = \mu_0 \sqrt{\frac{\tilde{T}}{T_0}} \left( \frac{1 + S/T_0}{1 + S/\tilde{T}} \right)$$

où  $\tilde{T}$  est la température moyenne,  $\mu_0 = 1.711 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  la viscosité du fluide à la température de référence  $T_0 = 273.15 \text{ K}$  et  $S$  est une constante fixée pour l'air à  $110.4 \text{ K}$ .

L'énergie cinétique turbulente s'écrit :  $k = \frac{1}{2}\widetilde{u_k''u_k''}$  et sa dissipation<sup>3</sup> :

$$\bar{\rho}\varepsilon = \bar{\rho}\varepsilon^* + 2\bar{\mu} \left( \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y_n} \right)^2 = \bar{\rho}\varepsilon^* - \mathcal{S}_k$$

$y_n$  désignant la distance normale à la paroi la plus proche. Le terme de production de l'énergie turbulente a pour expression :

2.  $\tilde{\phi}$  et  $\phi''$  désignent la moyenne et la fluctuation de  $\phi$  au sens de Favre ( $\phi = \tilde{\phi} + \phi''$ ), alors que  $\bar{\phi}$  et  $\phi'$  désignent la moyenne et la fluctuation de  $\phi$  au sens de Reynolds ( $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ).

3. Il s'agit ici de l'expression de la dissipation pour une turbulence homogène. La "vraie" dissipation est en fait telle que  $\bar{\rho}\varepsilon = \sigma_{ij}\partial u_i''/\partial x_j$  où  $\sigma_{ij} = \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) + \lambda(\partial u_i/\partial x_j)\delta_{ij}$ .

$$\mathcal{P}_k = -\frac{2}{3}\bar{\rho}k\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right) + \mu_t\left[2\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)^2\right]$$

Enfin, la viscosité tourbillonnaire  $\mu_t$  est déterminée à partir de  $k$  et  $\varepsilon^*$  selon :

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon^*}$$

L'ensemble des termes source, des fonctions d'amortissement et les constantes du modèle de turbulence utilisés sont rappelés dans le tableau 6.1.

$Pr_\varepsilon = 1.3$	$Pr_t = 0.9$	$Pr_k = 1.0$
$Pr = 0.72$	$C_{\varepsilon_1} = 1.45$	$C_{\varepsilon_2} = 1.94$
$f_\varepsilon = 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2)$	$f_\mu = \exp\left(\frac{-2.5}{1 + Re_t/50}\right)$	$Re_t = \frac{\bar{\rho}k^2}{\bar{\mu}\varepsilon^*}$
$\mathcal{S}_k = -2\bar{\mu}\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y_n}\right)^2$	$\mathcal{S}_\varepsilon = 2\bar{\nu}\mu_t\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_t}{\partial y_n^2}\right)^2$	$C_\mu = 0.09$

TAB. 6.1 – Constantes, termes sources et fonctions d'amortissement du modèle de turbulence  $k - \varepsilon$  bas-Reynolds.

A ce stade, le système requiert encore la connaissance d'une loi d'état afin de prendre en compte les variations de masse volumique et de pression liées aux variations de température. En considérant l'air comme un gaz parfait, on a pour ce dernier :

$$\bar{p} = \bar{\rho}r\tilde{T} = \bar{\rho}(\gamma - 1)\tilde{e}$$

où  $r$  est relié aux chaleurs spécifiques par la relation de Meyer :  $r = c_p - c_v$ .

## 6.2 Schéma numérique des codes 1 (Roe TVD), 2 (WENO) et 3 (TURB)

D'un point de vue numérique, nous avons choisi de résoudre le système (6.1) en employant une des techniques les plus utilisées en mécanique des fluides : la méthode des volumes finis<sup>4</sup> en coordonnées généralisées sur des maillages structurés. Celle-ci consiste à discrétiser la forme intégrale des équations de conservation plutôt que leur forme locale. Cette intégration s'effectue sur un volume élémentaire  $\mathcal{V}$  de frontière  $\mathcal{S}$  et conduit, après application du théorème de Green, à la forme suivante :

$$\frac{\partial\mathbf{Q}\mathcal{V}}{\partial t} + \int_{\mathcal{S}}(\mathbf{F}_x\mathbf{i}_x + \mathbf{F}_y\mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}}(\mathbf{G}_x\mathbf{i}_x + \mathbf{G}_y\mathbf{i}_y) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} + \mathbf{S}_0\mathcal{V} \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface  $\mathcal{S}$ .

4. En toute rigueur, le schéma WENO, utilisé dans cette étude, repose sur une formulation différences finies.

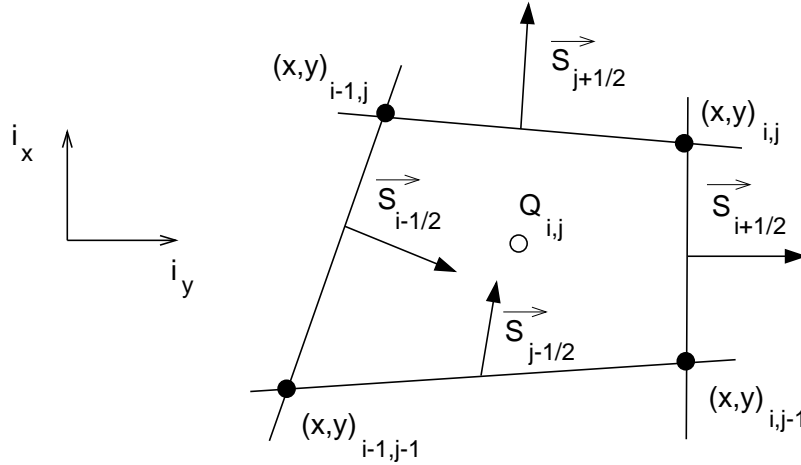


FIG. 6.1 – Volume d'intégration et vecteurs surface.

Considérons un quadrilatère de volume  $\mathcal{V}_{i,j}$  (figure 6.1). Les vecteurs surfaces sont définis comme l'aire de la surface multipliée par son vecteur unitaire normal

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}} &= (y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1})\mathbf{i}_x + (x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j})\mathbf{i}_y = (S_{ix}\mathbf{i}_x + S_{iy}\mathbf{i}_y)_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} &= (y_{i,j} - y_{i,j-1})\mathbf{i}_x + (x_{i,j-1} - x_{i,j})\mathbf{i}_y = (S_{ix}\mathbf{i}_x + S_{iy}\mathbf{i}_y)_{i-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{S}_{j-\frac{1}{2}} &= (y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1})\mathbf{i}_x + (x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1})\mathbf{i}_y = (S_{jx}\mathbf{i}_x + S_{jy}\mathbf{i}_y)_{j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}} &= (y_{i-1,j} - y_{i,j})\mathbf{i}_x + (x_{i,j} - x_{i-1,j})\mathbf{i}_y = (S_{jx}\mathbf{i}_x + S_{jy}\mathbf{i}_y)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Leurs composantes ont pour expression :

$$\begin{aligned} (S_{ixp})_{i\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{S}_{i\pm\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{i}_x}{|\mathbf{S}_{i\pm\frac{1}{2}}|} & (S_{iyp})_{i\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{S}_{i\pm\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{i}_y}{|\mathbf{S}_{i\pm\frac{1}{2}}|} \\ (S_{jxp})_{j\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{S}_{j\pm\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{i}_x}{|\mathbf{S}_{j\pm\frac{1}{2}}|} & (S_{jyp})_{j\pm\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{S}_{j\pm\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{i}_y}{|\mathbf{S}_{j\pm\frac{1}{2}}|} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (6.2) prend la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}_{i,j} \mathcal{V}_{i,j}}{\partial t} &= - \left[ \left( \mathbf{F}_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} |\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}| - \mathbf{F}_{\xi_{i-\frac{1}{2},j}} |\mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}}| \right) + \left( \mathbf{F}_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} |\mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}}| - \mathbf{F}_{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}} |\mathbf{S}_{j-\frac{1}{2}}| \right) \right] \\ &\quad - \left[ \left( \mathbf{G}_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} |\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}| - \mathbf{G}_{\xi_{i-\frac{1}{2},j}} |\mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}}| \right) + \left( \mathbf{G}_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} |\mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}}| - \mathbf{G}_{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}} |\mathbf{S}_{j-\frac{1}{2}}| \right) \right] \\ &\quad + \mathbf{S}_{\mathbf{O}_{i,j}} \mathcal{V}_{i,j} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\text{avec : } \mathbf{F}_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} = (\mathbf{F}_x n_x + \mathbf{F}_y n_y)_{i+\frac{1}{2},j} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} = (\mathbf{F}_x n_x + \mathbf{F}_y n_y)_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{G}_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} = (\mathbf{G}_x n_x + \mathbf{G}_y n_y)_{i+\frac{1}{2},j} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} = (\mathbf{G}_x n_x + \mathbf{G}_y n_y)_{i,j+\frac{1}{2}}$$

Notons enfin que  $\mathbf{Q}_{i,j}$  représente la valeur moyenne de  $\mathbf{Q}$  dans le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j}$ , et que  $\mathbf{F}_{\xi_{i+\frac{1}{2}}} + \mathbf{G}_{\xi_{i+\frac{1}{2}}}$  (resp.  $\mathbf{F}_{\eta_{j+\frac{1}{2}}} + \mathbf{G}_{\eta_{j+\frac{1}{2}}}$ ) est le flux moyen à travers la surface  $\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}}$ ).

### 6.2.1 Calcul des flux convectifs

Trois types de schémas ont été utilisés pour calculer les flux convectifs : un premier de type TVD (schéma de Roe), un second de la famille ENO et un dernier fondé sur le fractionnement des flux. Nous en donnons, dans cette partie, une rapide description après les avoir situés dans la hiérarchie des schémas conservatifs pour des problèmes hyperboliques.

#### - Hiérarchie des schémas conservatifs pour des problèmes hyperboliques

Considérons l'ensemble des schémas d'ordre quelconque existants  $\mathcal{S}_T$  (*cf.* figure 6.2). Cet ensemble peut être divisé en deux sous-ensembles : les schémas centrés  $\mathcal{S}_C$  et décentrés ("upwind")  $\mathcal{S}_{UP}$  (Steger-Warming [119], par exemple).

$$\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_C \cup \mathcal{S}_{UP}.$$

Parmi ceux-ci, on peut distinguer les schémas de la famille ENO (Essentially Non-Oscillatory [83, 67])  $\mathcal{S}_{ENO}$  et ceux de la famille TVD (Total Variation Diminishing [128])  $\mathcal{S}_{TVD}$ , comme le schéma de Roe [108],  $\mathcal{S}_{TVD}$  dont certains sont monotones et appartiennent ainsi à  $\mathcal{S}_M$  :

$$\mathcal{S}_M \subset \mathcal{S}_{TVD} \subset \mathcal{S}_{ENO} \subset \mathcal{S}_T.$$

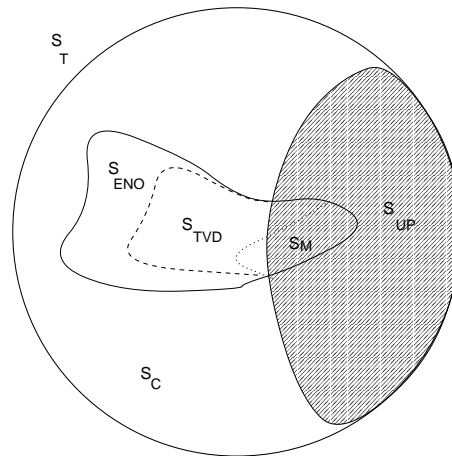


FIG. 6.2 – Hiérarchie des schémas numériques [128].

Les schémas employés ici ont pour propriété commune de ne pas osciller au voisinage des discontinuités de l'écoulement.

Nous décrivons, ci-après, les trois schémas utilisés dans ce travail. Par simplicité, leur description se limite aux équations d'Euler mono-dimensionnelles :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

où  $\mathbf{Q} = \{\rho, \rho u, \rho E_t\}^T$  et  $\mathbf{F} = \{\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E_t + p)u\}^T$ .

Sous forme discrétisée, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \mathbf{0}.$$

Dans cette dernière expression,  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}$ ) représente le flux numérique à travers l'interface  $i + \frac{1}{2}$  (resp.  $i - \frac{1}{2}$ ).

### - Schéma de Steger et Warming

En tenant compte de la direction de propagation des informations, il est possible de décomposer le flux eulérien  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}$ ) en une partie dépendante des conditions amont, notée  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^+$  (resp.  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^+$ ) et une partie dépendante des conditions aval, notée  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^-$  (resp.  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^-$ ):

$$\hat{\mathbf{F}}_{i\pm\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{F}}_{i\pm\frac{1}{2}}^+ + \hat{\mathbf{F}}_{i\pm\frac{1}{2}}^- \quad (6.5)$$

Le flux  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$  peut être évalué sous différentes formes, en considérant, par exemple, une évaluation spatiale du premier ordre :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \hat{\mathbf{F}}_i^+ \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^- = \hat{\mathbf{F}}_{i+1}^-$$

ou une évaluation spatiale du second ordre :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}\hat{\mathbf{F}}_i^+ - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i-1}^+ \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{3}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i+1}^- - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i+2}^-$$

Dans ce qui suit, nous allons développer l'expression du flux au second ordre. Ainsi,

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \left( \frac{3}{2}\hat{\mathbf{F}}_i^+ - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i-1}^+ \right) + \left( \frac{3}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i+1}^- - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{F}}_{i+2}^- \right)$$

De même pour  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}$ .

Comme  $\hat{\mathbf{F}}$  est homogène par rapport à  $\mathbf{Q}$ , il est possible de transformer l'expression précédente en utilisant la relation  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$ . La matrice jacobienne  $\mathbf{A} = \partial\hat{\mathbf{F}}/\partial\mathbf{Q}$  peut être diagonalisée grâce à la matrice des vecteurs propres  $\mathbf{R}$ , de sorte que :  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}$ . La matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_s\}$  regroupe les valeurs propres :

$$\lambda_1 = u - a \quad ; \quad \lambda_2 = u \quad ; \quad \lambda_3 = u + a$$

Ainsi,  $\hat{\mathbf{F}}^+$  et  $\hat{\mathbf{F}}^-$  s'écriront en fonction de :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{R}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{R}^{-1} \quad (6.6)$$

où les composantes des matrices diagonales  $\mathbf{\Lambda}^+$  et  $\mathbf{\Lambda}^-$  sont données par :

$$\lambda_s^+ = \frac{1}{2}(\lambda_{s+} + |\lambda_s|) \quad \lambda_s^- = \frac{1}{2}(\lambda_{s-} + |\lambda_s|)$$

avec  $s \in [1, 3]$ .



Steger et Warming [119] suggèrent une méthode de séparation des flux dans laquelle les matrices jacobiniennes sont évaluées aux mêmes points que  $\mathbf{Q}$ . Ainsi :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{SW} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{A}_i^+ \mathbf{Q}_i - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{i-1}^+ \mathbf{Q}_{i-1} \right) + \left( \frac{3}{2} \mathbf{A}_{i+1}^+ \mathbf{Q}_{i+1} - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{i+2}^+ \mathbf{Q}_{i+2} \right)$$

MacCormack [84] propose lui de les calculer au même point en alternant ceux-ci entre l'estimation prédicteur et l'estimation correcteur :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{MC} = \mathbf{A}_{i+q}^+ \left( \frac{3}{2} \mathbf{Q}_i - \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{i-1} \right) + \mathbf{A}_{i+q}^- \left( \frac{3}{2} \mathbf{Q}_{i+1} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{i+2} \right)$$

avec  $q=0$  dans l'étape prédicteur et  $q=1$  dans l'étape correcteur et l'inverse pour l'itération suivante.

Le schéma de MacCormack donne de bons résultats dans les couches limites mais peut conduire à des instabilités dans les zones à forts gradients de pression. L'expression proposée par Steger et Warming est beaucoup plus dissipative et permet alors de conserver la stabilité du schéma dans ces zones. Dans la pratique, une pondération est donc utilisée entre ces deux types de décomposition :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = (1 - W_p) \hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{SW} + W_p \hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{MC} \quad (6.7)$$

où  $W_p$  est une fonction poids associée au saut de pression entre deux mailles voisines :

$$W_p = \frac{1}{1 + \Delta p^2}$$

Dans le cas du flux  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta p$  est donné par :

$$\Delta p = \frac{p_{i+1} - p_i}{\min(p_{i+1}, p_i)}$$

### - Schéma de Roe

Le solveur de Roe [108] est un solveur de Riemann approché et repose sur la linéarisation suivante de l'équation (6.4) :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial x} = \mathbf{0}$$

où la matrice de Roe<sup>5</sup>  $\bar{\mathbf{A}}$  s'écrit :

$$\bar{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}) = (\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{\Lambda}} \bar{\mathbf{R}}^{-1})_{i+\frac{1}{2}}$$

où  $\bar{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}\{\bar{\lambda}_s\}$  est la matrice diagonale des valeurs propres,  $\bar{\mathbf{R}} = \{\bar{\mathbf{r}}_s\}$ , celle des vecteurs propres à droite et  $\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \{\bar{\mathbf{l}}_s\}$  celle des vecteurs propres à gauche ( $s \in \{1,3\}$ ).

Cette matrice vérifie les relations suivantes :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^R) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^L) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^R, \mathbf{Q}^L)(\mathbf{Q}^R - \mathbf{Q}^L) = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{Q}})(\mathbf{Q}^R - \mathbf{Q}^L);$$

---

5.  $(\bar{\cdot})$  fait référence à la moyenne de Roe.

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{Q});$$

$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^R, \mathbf{Q}^L)$  possède des valeurs propres réelles et des vecteurs propres linéairement indépendants.

Elle permet d'écrire le flux numérique sous la forme :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^L) + \mathbf{F}_{i+1}(\mathbf{Q}^R)) - \frac{1}{2} \left| \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}^R, \mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}^L) \right| (\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}^R - \mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}^L) \quad (6.8)$$

ou, de manière équivalente :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^L) + \mathbf{F}_{i+1}(\mathbf{Q}^R)) - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}} |\bar{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}| \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (\mathbf{Q}^R - \mathbf{Q}^L).$$

Dans la pratique, ce schéma repose sur les étapes suivantes :

### 1. Calcul des moyennes de Roe

Dans un premier temps, et pour chaque cellule de contrôle, les moyennes de Roe de la masse volumique  $\rho$ , de la vitesse  $u$ , de l'enthalpie  $h = (\rho E_t + p)/\rho$  et de la célérité du son  $a$  entre les états à gauche et les états à droite sont calculées :

$$\bar{\rho}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho^L + D\rho^R}{1 + D}; \quad \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u^L + Du^R}{1 + D}; \quad \bar{h}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h^L + Dh^R}{1 + D}; \quad \bar{a}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{(\gamma - 1)\left(\bar{h} - \frac{1}{2}\bar{u}^2\right)}$$

où  $D = \sqrt{\rho^R/\rho^L}$ .

Le calcul des états gauche et droite sera explicité ultérieurement.

### 2. Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$

Les valeurs propres  $\bar{\lambda}_s$  de la matrice  $\bar{\mathbf{A}}$ ,

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{u} - \bar{a}; \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{u}; \quad \bar{\lambda}_3 = \bar{u} + \bar{a}$$

ainsi que leur vecteur propre  $\bar{\mathbf{r}}_s$  associé,

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} - \bar{a} \\ \bar{h} - \bar{u}\bar{a} \end{pmatrix}, \quad ; \quad \bar{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{u}^2/2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} + \bar{a} \\ \bar{h} + \bar{u}\bar{a} \end{pmatrix}$$

sont ensuite évalués.

### 3. Calcul des sauts des variables caractéristiques

L'étape suivante consiste à déterminer les sauts des variables caractéristiques  $\partial \mathbf{w}_s = \bar{\mathbf{R}}^{-1}(\bar{\mathbf{Q}}^R - \bar{\mathbf{Q}}^L)$ , soit :

$$\begin{aligned}\partial w_1 &= \frac{1}{2}(\delta\rho - \partial w_2 + (\bar{u}\delta\rho - \delta\rho u)/\bar{a}) \\ \partial w_2 &= \frac{1}{2}((\bar{h} - \bar{u}^2)\delta\rho + \bar{u}\delta\rho u - \delta\rho E_t)(\gamma - 1) \\ \partial w_3 &= \frac{1}{2}(\delta\rho - \partial w_2 - (\bar{u}\delta\rho - \delta\rho u)/\bar{a})\end{aligned}$$

avec :  $\delta(\cdot)_{i\pm\frac{1}{2}} = (\cdot)^R - (\cdot)^L$ .

#### 4. Calcul du flux numérique

Enfin le flux numérique  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}$ ) est calculé selon :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^L) + \mathbf{F}_{i+1}(\mathbf{Q}^R)) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^3 |\bar{\lambda}_s| \partial w_s \bar{\mathbf{r}}_s.$$

En général,  $|\bar{\lambda}_s|$  est remplacé par  $Q_s^*(\lambda_s)$  où  $Q_s^*$  est une fonction qui permet d'éviter le problème d'entropie :

$$Q_s^*(\lambda_s) = \begin{cases} |\bar{\lambda}_s| & \text{si } |\bar{\lambda}_s| > \epsilon \\ \frac{1}{2}(\lambda_s^2/\epsilon + \epsilon) & \text{si } |\bar{\lambda}_s| \leq \epsilon \end{cases}$$

avec  $\epsilon = \text{coef}(|u| + a)$  et  $0 \leq \text{coef} \leq 0.35$ . Dans la présente étude,  $\text{coef} = 0.15$ .

#### • Extension du schéma au second ordre

En choisissant  $\mathbf{Q}^L = \mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}^R = \mathbf{Q}_{i+1}$ , le schéma numérique obtenu est du premier ordre en espace. Afin d'en augmenter la précision jusqu'au second ordre, nous utilisons l'approche MUSCL (Monotone Upstream Centred Schemes for Conservation Laws). On définit les états à gauche et à droite suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}^R &= \mathbf{Q}_{i+1} - \frac{1}{4} \left[ (1 - \bar{\eta})\tilde{\Delta}_{i+\frac{3}{2}} + (1 + \bar{\eta})\tilde{\tilde{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}} \right] \\ \mathbf{Q}_{i-\frac{1}{2}}^L &= \mathbf{Q}_i + \frac{1}{4} \left[ (1 - \bar{\eta})\tilde{\tilde{\Delta}}_{i-\frac{1}{2}} + (1 + \bar{\eta})\tilde{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} \right]\end{aligned}\tag{6.9}$$

avec  $\bar{\eta} = -1$ .

La limitation des flux peut se faire, par exemple, grâce au limiteur "Minmod" :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} &= \text{Minmod}(\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}, \omega \mathbf{Q}_{i-\frac{1}{2}}) \\ \tilde{\tilde{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}} &= \text{Minmod}(\mathbf{Q}_{i+\frac{1}{2}}, \omega \mathbf{Q}_{i+\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

dont la définition est :

$$\text{Minmod}(x, \omega y) = \text{sgn}(x) \max \{0, \min [|x|, \omega y \text{sgn}(x)]\}$$

avec  $\omega = (3 - \bar{\eta})/(1 - \bar{\eta})$ .

## - Schéma WENO

Les schémas d'ordre élevé ENO et WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) peuvent être considérés comme des développements des schémas FCT (Flux Corrected Transport) et TVD. Comme leurs prédécesseurs, ils introduisent de la viscosité numérique près des discontinuités de l'écoulement afin d'éviter l'apparition d'oscillations, tout en conservant une précision d'ordre élevée dans les autres régions.

Dans les schémas ENO [64, 116], la dissipation numérique nécessaire est introduite via l'utilisation d'un "stencil" adaptatif. Parmi les différents stencils possibles est retenu celui sur lequel la solution est la moins raide. Ce stencil est ensuite utilisé pour reconstruire, par interpolation, les flux à l'interface des volumes de contrôle.

Les schémas WENO [83, 67] utilisent, au contraire, une superposition de tous les stencils candidats pour effectuer cette interpolation. Un poids, choisi tel qu'il soit très faible près des discontinuités et élevé dans les autres régions, est associé à chacun de ces stencils.

Dans ce travail nous utilisons le schéma WENO du cinquième ordre développé par Jiang *et al.* [67].

Dans la pratique, le calcul des flux numériques  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}$ ) peut être décomposé en quatre étapes :

### 1. Passage aux flux caractéristiques

Dans un premier temps, les valeurs  $\mathbf{Q}_{i+k}$  et  $\mathbf{F}_{i+k}$  (les indices  $i+k$  représentent les différents points des stencils) sont projetées sur les vecteurs propres de la matrice jacobienne de Roe  $\bar{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$ .<sup>6</sup>

$$q_{s,i} = \bar{\mathbf{l}}_{s,i+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{Q}_i \quad \text{et} \quad f_{s,i} = \bar{\mathbf{l}}_{s,i+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{F}_i \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{l}}_{s,i+\frac{1}{2}} : \text{vecteurs propres à droite de } \bar{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, le système de départ se réduit-il à une série de problèmes scalaires unidimensionnels :

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial f_s}{\partial x} = 0, \quad s \in [1,3] \text{ en 1D.}$$

Les dérivées spatiales sont ensuite discrétisées suivant :

$$\frac{\partial f_s}{\partial x} \approx \frac{\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{s,i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

où  $\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}$  est flux numérique associé aux variables caractéristiques.

### 2. Décomposition du flux caractéristique

---

6. ( $\bar{\cdot}$ ) fait référence à la moyenne de Roe décrite précédemment.

Dans un second temps, ces flux caractéristiques sont scindés en deux composantes  $f_s^+$  et  $f_s^-$  telles que :

$$f_s(q) = f_s^+(q_s) + f_s^-(q_s) \quad \text{avec} \quad \frac{df_s^+(q_s)}{dq_s} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{df_s^-(q_s)}{dq_s} \leq 0.$$

Ces décompositions peuvent être de Lax :

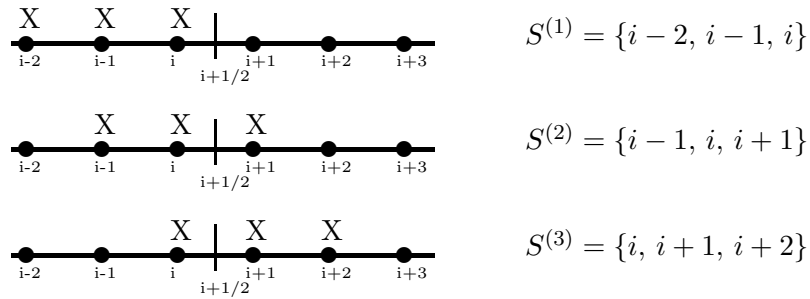
$$f_s^\pm(q_s) = \frac{1}{2}(f(q_s) \pm \alpha q_s) \quad \alpha = \max_{q_s} |df'_s(q_s)/dq_s|$$

ou de Roe :

$$f_s^\pm(q_s) = \frac{1}{2}(f(q_s) \pm \text{sgn}(\alpha)f(q_s)).$$

### 3. Reconstruction de $\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^\pm$ par interpolation

L'étape suivante consiste à reconstruire le flux  $\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^+$  (symétriquement  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^-$ ) en utilisant une interpolation essentiellement non-oscillante des flux  $f_{s,i}^{+(j)}$  sur trois "stencils"  $S^{(j)}$ ,



de sorte à ce que :

$$\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_1 \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(1)+} + \omega_2 \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(2)+} + \omega_3 \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(3)+}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(1)+} &= \frac{1}{3}f_{s,i-2}^+ - \frac{7}{6}f_{s,i-1}^+ + \frac{11}{6}f_{s,i}^+ \\ \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(2)+} &= -\frac{1}{6}f_{s,i-1}^+ + \frac{5}{6}f_{s,i}^+ + \frac{1}{3}f_{s,i+1}^+ \\ \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^{(3)+} &= \frac{1}{3}f_{s,i}^+ + \frac{5}{6}f_{s,i+1}^+ - \frac{1}{6}f_{s,i+2}^+ \end{aligned}$$

Les poids sont donnés par :

$$\omega_i = \frac{\tilde{w}_i}{\sum \tilde{w}_k} \quad \text{avec} \quad \tilde{w}_k = \frac{\gamma_k}{(\epsilon + \beta_k)^2} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{1}{10} \quad \gamma_2 = \frac{6}{10} \quad \gamma_3 = \frac{5}{10}$$

où  $\epsilon$  est un paramètre évitant au dénominateur de s'annuler (en pratique  $\epsilon = 10^{-6}$ ) et les indicateurs de lissage  $\beta_k$  sont calculés suivant :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{13}{12}(f_{s,i-2}^+ - 2f_{s,i-1}^+ + f_{s,i}^+)^2 + \frac{1}{4}(f_{s,i-2}^+ - 4f_{s,i-1}^+ + 3f_{s,i}^+)^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(f_{s,i-1}^+ - 2f_{s,i}^+ + f_{s,i+1}^+)^2 + \frac{1}{4}(f_{s,i-1}^+ - f_{s,i+1}^+)^2 \\ \beta_3 &= \frac{13}{12}(f_{s,i}^+ - 2f_{s,i+1}^+ + f_{s,i+2}^+)^2 + \frac{1}{4}(f_{s,i-4}^+ + f_{s,i+1}^+ + 3f_{s,i+2}^+)^2.\end{aligned}$$

Finalement, le flux caractéristique s'écrit :

$$\hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}} = \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^+ + \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}}^-.$$

#### 4. Retour au flux numérique

En dernier lieu, la projection inverse de celle effectuée à l'étape 1 permet d'obtenir le flux numérique :

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{s=1}^3 \hat{f}_{s,i+\frac{1}{2}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{s,i+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{r}}_{s,i+\frac{1}{2}} : \text{ vecteurs propres à gauche de } \bar{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}.$$

### 6.2.2 Calcul des flux visqueux

Les termes visqueux sont approximés par un schéma centré du second ordre pour les schémas TVD et TURB (voir [59]) et centré au quatrième ordre pour le schéma WENO.

### 6.2.3 Discrétisation temporelle

#### - Discrétisation explicite

Les codes TVD et WENO résolvent les équations de Navier-Stokes (sans turbulence) et emploient un avancement en temps explicite.

L'équation (6.3) peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial(\mathcal{V}\mathbf{Q})}{\partial t} = L(\mathbf{Q}) \quad (6.10)$$

où  $L(\mathbf{Q})$  est une approximation des flux convectifs.

Pour résoudre ce système, nous utilisons une méthode explicite Runge-Kutta TVD du second ordre [116] pour le schéma TVD :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} &= \mathcal{V}^n\mathbf{Q}^n + \Delta t L(\mathbf{Q}^n) \\ \mathcal{V}^{n+1}\mathbf{Q}^{n+1} &= \frac{1}{2}\mathcal{V}^n\mathbf{Q}^n + \frac{1}{2}\mathcal{V}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(\mathbf{Q}^{(1)})\end{aligned}$$

et une méthode Runge-Kutta TVD du troisième ordre [116] pour le schéma WENO :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} &= \mathcal{V}^n\mathbf{Q}^n + \Delta t L(\mathbf{Q}^n) \\ \mathcal{V}^{(2)}\mathbf{Q}^{(2)} &= \frac{3}{4}\mathcal{V}^n\mathbf{Q}^n + \frac{1}{4}\mathcal{V}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\mathbf{Q}^{(1)}) \\ \mathcal{V}^{n+1}\mathbf{Q}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathcal{V}^n\mathbf{Q}^n + \frac{2}{3}\mathcal{V}^{(2)}\mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\mathbf{Q}^{(2)}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, ces schémas d'intégration explicites sont stables sous la condition  $CFL < 1$ .

### - Discrétisation implicite

Le code résolvant la forme complète de (6.3), à l'aide du schéma de Steger-Warming, de la discrétisation des flux visqueux et des termes source décrite ci-dessus, emploie un avancement en temps implicite.

Ce type d'avancement requiert une linéarisation des flux. Ainsi, (en 2D) la linéarisation en temps des flux eulériens est réalisée de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_\xi^{n+1} = \mathbf{F}_\xi^n + \mathbf{A}_\xi^n \delta \mathbf{Q}^n$$

avec  $\delta \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$ . De même pour  $\mathbf{F}_\eta^{n+1}$ .

Les termes visqueux sont approximés par :

$$\mathbf{G}_\xi^{n+1} = \mathbf{G}_\xi^n + \delta \mathbf{G}_\xi^n \quad \mathbf{G}_\eta^{n+1} = \mathbf{G}_\eta^n + \delta \mathbf{G}_\eta^n$$

Les gradients suivant  $\xi$  sont supposés faibles devant les gradients suivant  $\eta$  (approximation de couche mince), d'où :

$$\delta \mathbf{G}_{\eta i, j+\frac{1}{2}} - \delta \mathbf{G}_{\eta i, j-\frac{1}{2}} \gg \delta \mathbf{G}_{\xi i+\frac{1}{2}, j} - \delta \mathbf{G}_{\xi i-\frac{1}{2}, j}$$

Il ne reste donc qu'à évaluer  $\delta \mathbf{G}_\eta$ . Celui-ci est calculé, pour la surface  $\mathcal{S}_{i, j+\frac{1}{2}}$ , suivant :

$$\delta \mathbf{G}_{\eta i, j+\frac{1}{2}} = \frac{|\mathcal{S}_{i, j+\frac{1}{2}}|}{\mathcal{V}_{i, j}} \mathcal{M}_{\eta 1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\delta \bar{\rho}, \delta \tilde{u}, \delta \tilde{v}, \delta \tilde{e}, \delta k, \delta \varepsilon^*)^T$$

La matrice  $\mathcal{M}_{\eta 1}$  est décrite dans [118].

Les termes source peuvent être linéarisés de la façon suivante :

$$\mathbf{S}_o^{n+1} = \mathbf{S}_o^n + \left( \frac{\partial \mathbf{S}_o}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n \delta \mathbf{Q}^n = \mathbf{S}_o^n + \mathbf{H}^n \delta \mathbf{Q}^n$$

Afin de stabiliser l'opérateur implicite, on suppose que les termes source s'expriment de manière linéaire en fonction de  $(\bar{\rho}k, \bar{\rho}\varepsilon^*)$ , ce qui revient à dire que la matrice  $\mathbf{H}$  est diagonale. Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_\epsilon \end{pmatrix}$$

où  $H_k = (\mathcal{P}_k - \bar{\rho}\varepsilon^* + S_k)/(\bar{\rho}k)$  et  $H_\epsilon = (C_{\epsilon 1} \frac{\varepsilon^*}{k} \mathcal{P}_k - C_{\epsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \bar{\rho}\varepsilon^* + S_\epsilon)/(\bar{\rho}\varepsilon^*)$ .

En introduisant l'expression de l'ensemble des flux et termes source précédents dans l'équation (6.3) et en regroupant les accroissements implicites  $\delta \mathbf{Q}$  par indices, on aboutit au système suivant, en termes de matrices par blocs (6×6) :

$$\hat{\mathbf{A}}_{i, j} \delta \mathbf{Q}_{i, j}^n + \hat{\mathbf{B}}_{i, j} \delta \mathbf{Q}_{i, j+1}^n + \hat{\mathbf{C}}_{i, j} \delta \mathbf{Q}_{i, j-1}^n + \hat{\mathbf{D}}_{i, j} \delta \mathbf{Q}_{i+1, j}^n + \hat{\mathbf{E}}_{i, j} \delta \mathbf{Q}_{i-1, j}^n = \Delta \mathbf{Q}_{i, j}^n \quad (6.11)$$

L'expression détaillée des termes figurant dans cette relation peut être trouvée dans la référence [118]. Les termes à droite de cette équation, notés  $\Delta \mathbf{Q}_{i,j}^n$ , représentent la formulation explicite des flux. La résolution de l'équation (6.11) s'effectue à l'aide de l'algorithme de Thomas généralisé. Une relaxation de Gauss-Seidel est utilisée dans la direction  $\xi$  en faisant deux boucles sur les valeurs de  $i$  (la première boucle avec  $i$  décroissant et la deuxième avec  $i$  croissant). En pratique, deux itérations suffisent pour assurer la convergence de la relaxation de Gauss-Seidel [84]. Ainsi, dans le cadre d'un schéma de type prédicteur-correcteur, les étapes à effectuer sont les suivantes :

### - Etape prédicteur

En premier lieu, on balaye dans la direction  $\xi$  avec  $i$  décroissant :

$$\hat{\mathbf{A}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} + \hat{\mathbf{B}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j+1}^{(1)} + \hat{\mathbf{C}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j-1}^{(1)} = \Delta \mathbf{Q}_{i,j}^n - \hat{\mathbf{D}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i+1,j}^{(1)} - \hat{\mathbf{E}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i-1,j}^{(0)}$$

avec  $\delta \mathbf{Q}_{i,j}^{(0)} = 0$ . Le deuxième balayage est effectué avec  $i$  croissant :

$$\hat{\mathbf{A}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j}^{(2)} + \hat{\mathbf{B}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j+1}^{(2)} + \hat{\mathbf{C}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i,j-1}^{(2)} = \Delta \mathbf{Q}_{i,j}^n - \hat{\mathbf{D}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i+1,j}^{(2)} - \hat{\mathbf{E}}_{i,j} \delta \mathbf{Q}_{i-1,j}^{(1)}$$

La solution pour l'état prédicteur s'écrit :

$$\mathbf{Q}^{\overline{n+1}} = \mathbf{Q}^n + \delta \mathbf{Q}^{(2)}$$

### - Etape correcteur

Les matrices,  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{E}}$  ainsi que l'incrément explicite  $\Delta \mathbf{Q}$  sont réestimés à l'aide de  $\mathbf{Q}^{\overline{n+1}}$  obtenu à l'état prédicteur.

On balaye dans la direction  $\xi$  avec  $i$  décroissant :

$$\hat{\mathbf{A}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} + \hat{\mathbf{B}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j+1}^{(1)} + \hat{\mathbf{C}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j-1}^{(1)} = \Delta \mathbf{Q}_{i,j}^{\overline{n+1}} - \hat{\mathbf{D}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i+1,j}^{(1)} - \hat{\mathbf{E}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i-1,j}^{(0)}$$

avec  $\delta \mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{Q}^{\overline{n+1}} - \mathbf{Q}^n$ . Le deuxième balayage est effectué avec  $i$  croissant :

$$\hat{\mathbf{A}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j}^{(2)} + \hat{\mathbf{B}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j+1}^{(2)} + \hat{\mathbf{C}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i,j-1}^{(2)} = \Delta \mathbf{Q}_{i,j}^{\overline{n+1}} - \hat{\mathbf{D}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i+1,j}^{(2)} - \hat{\mathbf{E}}_{i,j}^{\overline{n+1}} \delta \mathbf{Q}_{i-1,j}^{(1)}$$

La solution pour l'état correcteur s'écrit :

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{Q}^{\overline{n+1}} + \mathbf{Q}^n + \delta \mathbf{Q}^{(2)} \right)$$

## 6.3 Récapitulatif

En résumé, dans le cadre de notre étude, nous utiliserons trois codes "fluide" 2D dont dispose le LMFN. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

- Code TVD
  - Avancement en temps explicite de type Runge-Kutta TVD, précis au second ordre ;
  - Calcul des flux eulériens grâce au schéma TVD de Roe précis au second ordre ;



- Calcul des flux visqueux selon un schéma centré du second ordre.
- Code WENO
  - Avancement en temps explicite de type Runge-Kutta TVD, précis au troisième ordre ;
  - Calcul des flux eulériens grâce au schéma WENO précis au cinquième ordre ;
  - Calcul des flux visqueux selon un schéma centré du quatrième ordre.
- Code TURB
  - Avancement en temps explicite/implicite de type prédicteur-correcteur, précis au second ordre ;
  - Calcul des flux eulériens grâce au schéma de Steger-Warming précis au second ordre ;
  - Calcul des flux visqueux selon un schéma centré du second ordre.

Remarquons que tous ces codes sont écrits en coordonnées généralisées et sont parallélisés (en utilisant la librairie MPI).

## Chapitre 7

# Tests de validation des schémas numériques des codes fluide

Nous présentons, ci-après, les résultats de deux cas-tests permettant de valider nos schémas numériques. Le premier permet de tester la résolution des discontinuités (tube à choc) alors que le second repose sur la convection d'un tourbillon isentropique. Notons que le code turbulent a déjà été validé dans les références [100, 59, 118].

### 7.1 Tube à choc

Ce premier cas-test consiste à simuler l'écoulement eulérien 1D dans un tube supposé infiniment long (figure 7.1) après la rupture d'une membrane séparant deux gaz maintenus à des états thermodynamiques (1) et (2) différents tels que :

$$\begin{aligned} (\rho_1, u_1, p_1) &= (1, 0, 1) & \text{si } x < L/2 \\ (\rho_2, u_2, p_2) &= (0.125, 0, 0.1) & \text{si } x \geq L/2. \end{aligned}$$

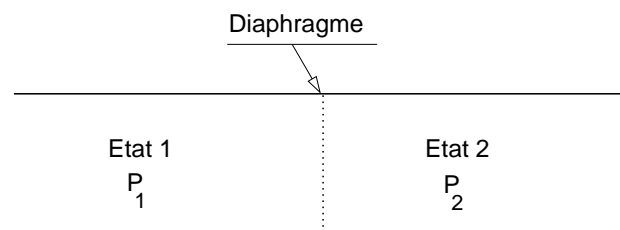


FIG. 7.1 – Tube à choc : état initial.

Il s'agit d'un test classique (problème de Sod [117]) regroupant plusieurs phénomènes instationnaires et comportant des zones de gradients importants. En effet, à la rupture de la membrane, une onde de compression se propage à la vitesse  $u_s$  du milieu en surpression vers le milieu en dépression. Au même instant, une onde de détente se forme et se propage en sens inverse à la

vitesse  $u_d$ . Les deux discontinuités sont séparées par une ligne de glissement isobare se déplaçant à la vitesse  $u_g$  (figure 7.2).

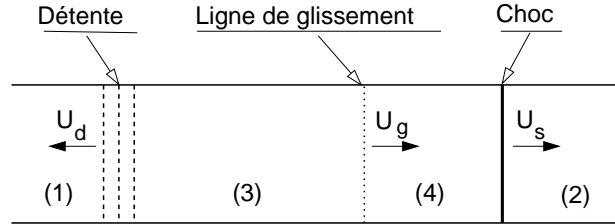


FIG. 7.2 – Tube à choc : après rupture du diaphragme.

Le tube simulé ici est de longueur  $L = 2\text{ m}$  et comporte 500 mailles uniformément réparties. Les conditions initiales sont exposées ci-dessus. Le nombre de CFL est pris égal à 0.7.

Si le schéma numérique est de bonne qualité, les résultats ne doivent pas présenter d'oscillations au voisinage des discontinuités. La solution obtenue (figure 7.3) est correcte et montre la robustesse du schéma WENO cinquième ordre. En effet, bien qu'il soit d'un ordre très élevé, ce dernier a un comportement stable au voisinage des discontinuités (onde de choc, ligne de glissement...) comme le schéma de Roe.

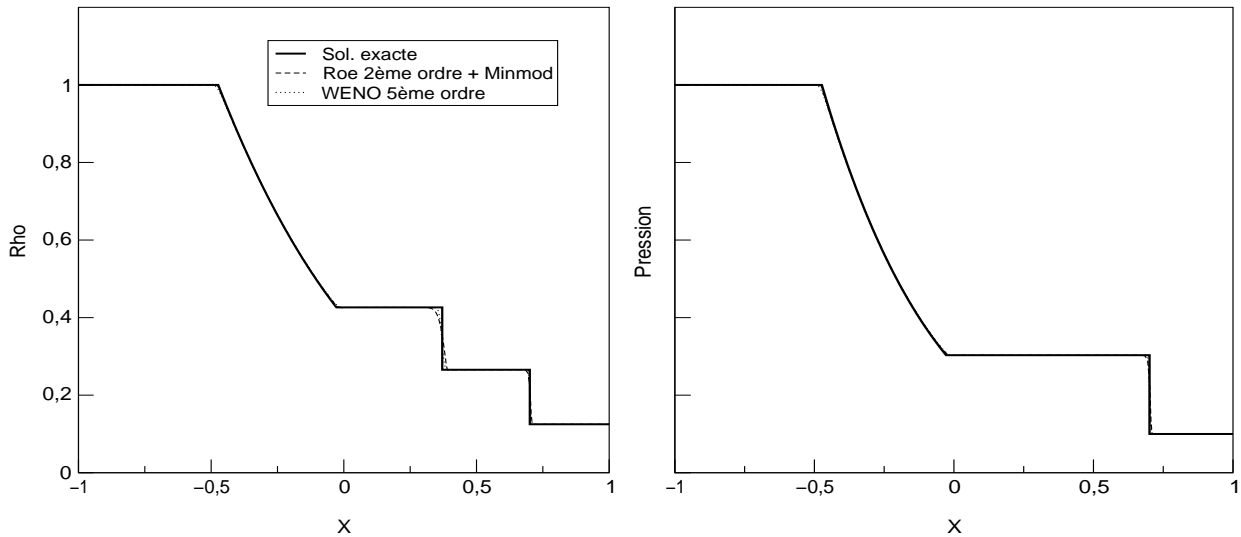
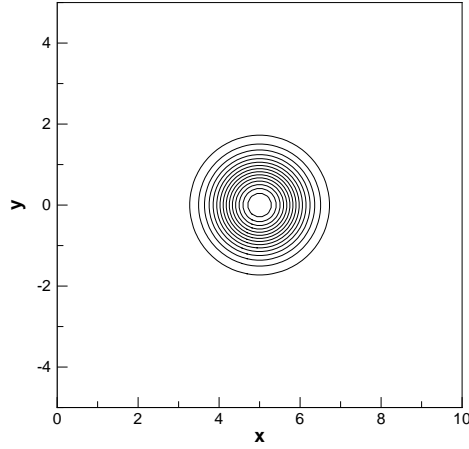


FIG. 7.3 – Tube à choc (problème de Sod) : solution à  $t = 0.4\text{ s}$ .

## 7.2 Evolution d'un tourbillon isentropique

L'étude de l'évolution temporelle d'un tourbillon isentropique placé dans un écoulement uniforme est un cas-test fréquemment utilisé pour évaluer le taux de convergence des schémas numériques en l'absence de chocs [129, 30]. En effet, la connaissance de la solution exacte permet

FIG. 7.4 – *Etat initial, iso-valeurs de masse volumique.*

d'en mesurer la précision pour des écoulements eulériens ne présentant pas de forts gradients.

Ce cas-test consiste en un écoulement 2D uniforme ( $p_\infty = 1$ ;  $\rho_\infty = 1$ ;  $u_\infty = cst$ ;  $v_\infty = cst$ ) dans lequel se trouve un tourbillon isentropique provoquant des perturbations de l'écoulement :

$$(\delta u, \delta v) = \frac{\hat{\beta}}{2\pi} \exp^{\frac{1-r^2}{2}} (-\bar{y}, \bar{x}), \quad \delta T = -\frac{(\gamma-1)\hat{\beta}^2}{8\gamma\pi^2} \exp^{1-r^2}$$

où  $\hat{\beta} = 5$  est l'intensité du tourbillon,  $\gamma = 1.4$ ,  $T = p/\rho$ ,  $T_\infty = 1$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x - x_0, y - y_0)$  avec  $x_0$  et  $y_0$  les coordonnées du centre du tourbillon à l'instant initial et  $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ . L'écoulement est isentropique ( $\delta s = 0$ ), soit pour un gaz parfait :  $p/\rho^\gamma = 1$ .

Etant données les relations  $u = u_\infty + \delta u$ ,  $v = v_\infty + \delta v$ ,  $T = T_\infty + \delta T$  et la relation d'isentropie, les variables conservatives à l'état initial sont données par :

$$\begin{aligned} \rho &= T^{\frac{1}{\gamma-1}} = (T_\infty + \delta T)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[ 1 - \frac{(\gamma-1)\hat{\beta}^2}{8\gamma\pi^2} \exp^{1-r^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \rho u &= \rho(u_\infty + \delta u) = \rho \left[ u_\infty - \frac{\hat{\beta}}{2\pi} \exp^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{y} \right] \\ \rho v &= \rho(v_\infty + \delta v) = \rho \left[ v_\infty + \frac{\hat{\beta}}{2\pi} \exp^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{x} \right] \\ p &= \rho^\gamma \\ \rho E_t &= \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Le domaine de calcul, représenté sur la figure 7.4, comporte  $N$  points dans chaque direction. Le centre du tourbillon se situe en  $(x_0, y_0) = (5, 0)$  et les conditions aux limites sont de type périodique. Le CFL est fixé à 0.8 pour tous les calculs. Le schéma WENO utilisé est du cinquième ordre en espace et du troisième ordre en temps alors que le schéma TVD est du second ordre en espace et en temps.

Schéma	$N \times N$	Erreur (norme $L_1$ )	$r$	Schéma	Erreur (norme $L_1$ )	$r$
WENO	$40 \times 40$	$2.322 e-3$	—	TVD	$2.656 e-2$	—
	$80 \times 80$	$1.077 e-4$	4.430		$9.197 e-3$	1.530
	$160 \times 160$	$4.061 e-6$	4.729		$2.603 e-3$	1.821
	$320 \times 320$	$1.263 e-7$	5.007		$6.779 e-4$	1.941
	$640 \times 640$	$3.944 e-9$	5.001		$1.711 e-4$	1.986

TAB. 7.1 – Erreurs et taux de convergence pour la masse volumique (tourbillon stationnaire) après cinq périodes.

### - Cas stationnaire

Nous nous intéressons en premier lieu au cas où le tourbillon est stationnaire ( $u_\infty = 0, v_\infty = 0$ ). Dans ce cas, la mesure de l'erreur relative en norme  $L_1$  sur la masse volumique durant l'évolution temporelle du tourbillon permet d'estimer l'ordre de convergence du schéma. Si la méthode est de l'ordre  $r$ , pour un maillage uniforme, l'ordre de convergence  $r$  est donné par :

$$r = \frac{\ln \left[ E_1^N / E_1^{N'} \right]}{\ln(N'/N)} \quad (7.1)$$

où  $E_1^N$  et  $E_1^{N'}$  sont les erreurs relatives en norme  $L_1$  sur les maillages de  $N \times N$  et  $N' \times N'$  points, respectivement. Après cinq périodes (une période correspondant au temps mis par une perturbation pour faire la longueur du domaine de calcul à la célérité du son), la solution numérique obtenue pour différents maillages est comparée à la solution exacte et les erreurs relatives sur la masse volumique sont calculées. Le taux de convergence est ensuite évalué selon l'équation (7.1). Le tableau 7.1 résume les résultats obtenus et met en évidence que, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 2$  pour le schéma TVD et  $r \rightarrow 5$  pour le schéma WENO. Ceci confirme les précisions théoriques en espace des deux schémas.

### - Cas instationnaire

L'évolution de ce même tourbillon a été étudiée lorsque celui-ci est convecté diagonalement. Ce cas ne diffère du précédent que par les vitesses de l'écoulement moyen ( $u_\infty = 1, v_\infty = 1$ ).

Les résultats obtenus après plusieurs périodes de convection du tourbillon (sur une distance correspondant à la longueur de la diagonale du domaine de calcul) et pour différents maillages sont présentés sur la figure 7.5. Cette figure représente un profil de la masse volumique au centre du tourbillon. Ces résultats montrent une nette différence entre les schémas TVD et WENO pour le maillage ( $80 \times 80$ ) : le schéma WENO du cinquième ordre est peu dissipatif même après plusieurs périodes (figure 7.5.a) contrairement au schéma TVD du second ordre (figure 7.5.b). Sur cette même figure, il est également possible de noter une dérive croissante du centre du tourbillon au fur et à mesure de sa convection. Comme l'indique Yee [129], la dérive verticale du tourbillon est principalement due à la dissipation spatiale du schéma alors que la dérive horizontale est liée à l'erreur de phase de l'intégration en temps.

Enfin, les calculs montrent que lorsque le maillage est raffiné ( $200 \times 200$ ), le schéma TVD du

second ordre converge vers la solution exacte (figure 7.5.c). Cependant la solution fournie par le schéma TVD sur le maillage le plus fin n'est toujours pas aussi précise que celle du schéma WENO obtenue sur le maillage  $(80 \times 80)$ .

Ce test montre bien que dans les régions ne présentant pas de forts gradients, le schéma WENO du cinquième ordre est moins diffusif que le schéma TVD du second ordre. Concernant les coûts de calcul, celui du schéma WENO est environ trois à quatre fois plus important que celui du schéma TVD.

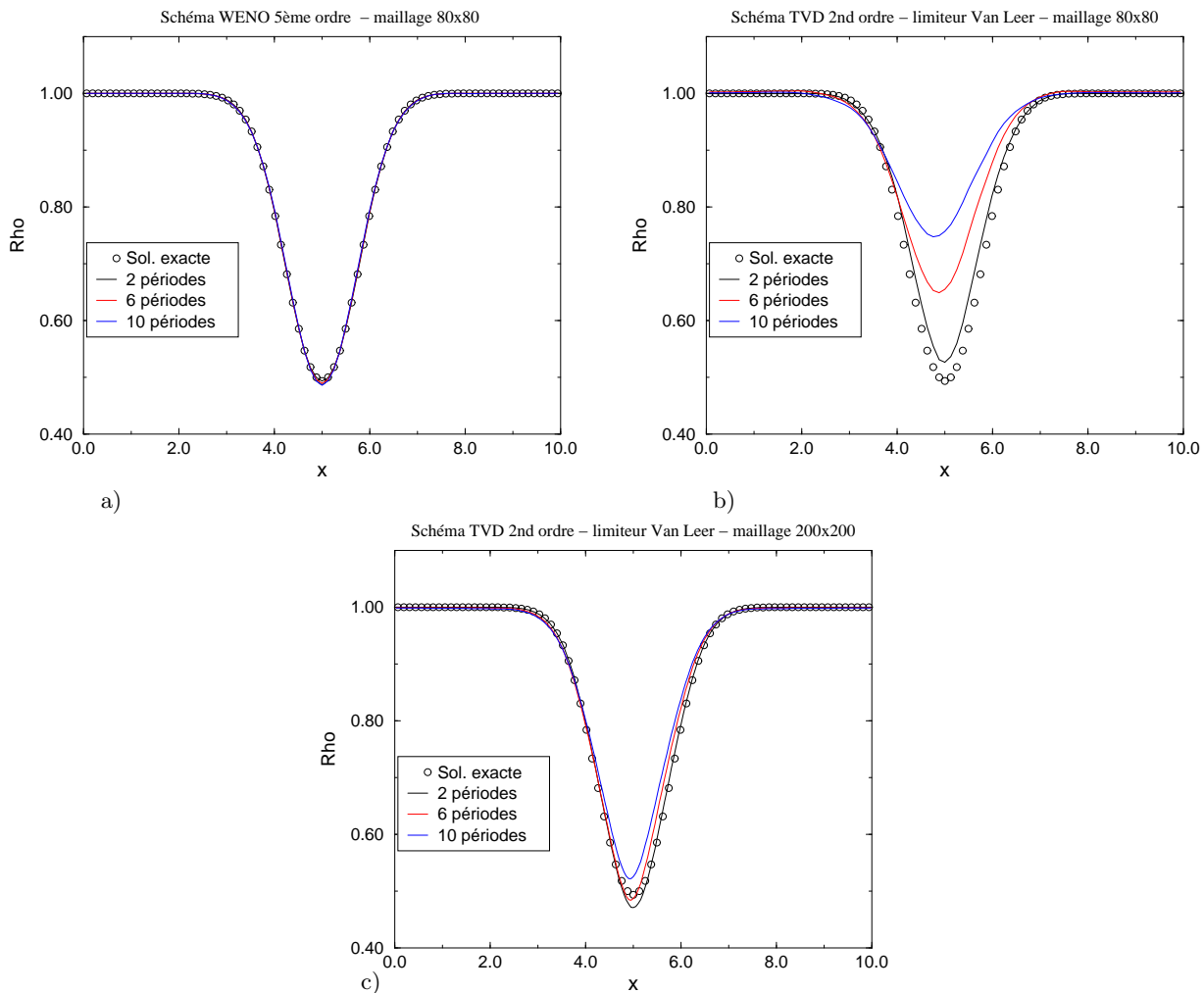


FIG. 7.5 – Evolution temporelle d'un tourbillon 2D convecté diagonalement en fonction du schéma numérique employé et du maillage.

En conclusion, les deux cas-tests présentés ci-dessus (tube à choc et tourbillon isentropique) indiquent que les schémas TVD donnent de bons résultats pour des écoulements simples avec des chocs (figure 7.3) mais que pour des écoulements plus complexes présentant des tourbillons, des ondes acoustiques, des lignes de glissement, des ondes instationnaires..., les schémas de type WENO sont sans doute plus appropriés.



## Chapitre 8

# Techniques numériques de couplage fluide-structure

*Ce chapitre présente la méthodologie que nous avons utilisée afin d'adapter aux simulations aéroélastiques et de coupler nos "codes fluide" et le "code structure" REFLEX. Un rapide inventaire des méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (i.e. déformables) est dressé. La méthode de maillage dynamique, issue des méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), est présentée de manière plus détaillée et ses applications illustrées. Par la suite, plusieurs points spécifiques au couplage fluide/structure sont discutés. Enfin, une dernière partie est consacrée à l'étude du phénomène de "flutter" (flottement) et constitue une validation de l'algorithme de couplage retenu. Des conclusions sont tirées concernant notamment le type de schéma à utiliser pour le solveur fluide pour cette dernière application. Par ailleurs, ce chapitre a fait l'objet d'un article [89] publié dans la Revue Européenne des Eléments Finis.*

### 8.1 Introduction

Le couplage "faible" (par opposition au couplage "fort") repose sur un dialogue entre des codes de calcul permettant d'étudier différents domaines de la Physique. Cette technique très souple permet de conserver les spécificités et l'intégrité de chaque code de calcul. Seules quelques modifications au sein de ces codes sont nécessaires pour prendre en compte l'interaction des domaines de la Physique auxquels ils sont dédiés.

Les phénomènes aéroélastiques font intervenir un couplage entre deux milieux bien différents : un fluide et une structure. Les échanges d'information entre les deux domaines s'effectuent par l'intermédiaire de conditions aux limites à l'interface fluide-structure (cf. figure 8.1). Le fluide soumet la structure à un effort de pression à l'interface alors que la structure déformable modifie le domaine fluide via cette même interface mobile. Une des difficultés de ce couplage réside dans le fait que le domaine fluide devient évolutif ce qui implique de modifier le code fluide (si celui-ci ne peut pas prendre en compte l'évolution du domaine de calcul au cours du temps). La première section de cette étude est donc consacrée aux méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (techniques ALE : Arbitrary Lagrangian Eulerian, maillages dynamiques. . .). Plusieurs exemples de validation (ou d'application) simples à mettre



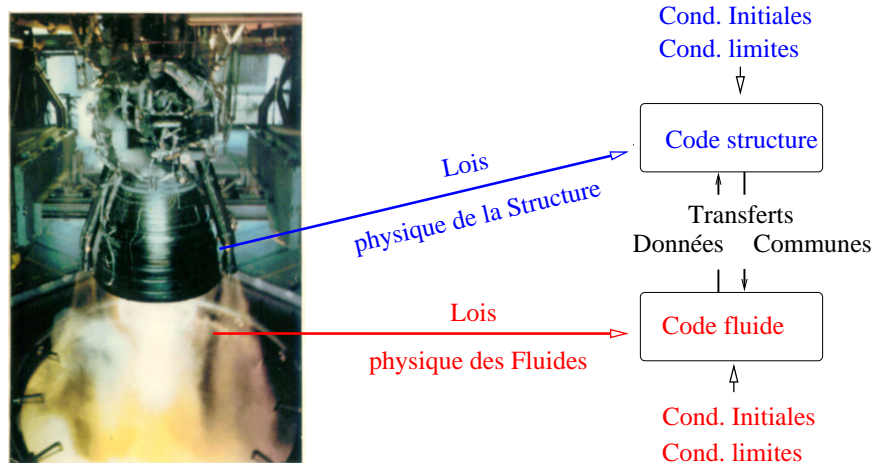


FIG. 8.1 – Principe du couplage fluide-structure (application aux moteurs fusée).

en œuvre sont présentés. Nous verrons également que les modifications à apporter au code structure ne sont dues qu’aux échanges d’information avec le code fluide. Ces modifications ne feront donc pas l’objet d’une section spécifique. Il ne restera par conséquent qu’à mettre en œuvre les transferts d’information entre les deux codes. Ce point fera l’objet de la section 8.4. Enfin, la dernière section est consacrée à la validation de l’outil de calcul couplé ainsi développé. Cette validation repose sur un des cas-tests les plus étudiés en aéroélasticité : l’étude du phénomène de “flutter”. Une dernière partie expose nos conclusions.

## 8.2 Fluides en domaine évolutif

Le couplage faible en aéroélasticité fait intervenir un code dédié à la simulation du champ fluide et un second permettant d’étudier la dynamique de la structure. La structure est soumise au niveau de l’interface fluide-structure aux sollicitations (efforts de pression et frottement dans le cas d’un fluide visqueux) exercées par le fluide. Comme les codes de structure sont généralement capables de traiter des problèmes de dynamique où interviennent des efforts surfaciques variables en fonction du temps, ils ne nécessitent que de recevoir cette information du code fluide. D’autre part, le code structure fournit une estimation de la position de la structure à chaque instant sous l’effet des sollicitations du fluide. Ceci implique une nouvelle position de son interface avec le fluide qui doit être transmise à ce dernier. Ainsi, les seules modifications à introduire dans le code structure sont relatives aux transferts d’information avec le fluide (*cf.* section 8.4). Le code fluide doit, lui aussi, être modifié pour transmettre les efforts de pression pour chaque position de l’interface qu’il reçoit du code structure (*cf.* section 8.4). Cependant, le domaine fluide se modifie lorsque la structure se déforme. Les codes disponibles ne permettant généralement pas de traiter des domaines mobiles, quelques modifications du code fluide doivent être effectuées.

Afin de réaliser des simulations numériques des écoulements en milieux évolutifs quelconques (*i.e.* grandes déformations du domaine fluide par exemple) il convient de :

- formuler les nouvelles équations à résoudre et adapter des méthodes numériques déjà existantes (sous-section 8.2.1) ;

- respecter certains critères de type GCL (Geometric Conservation Law, sous-section 8.2.2) ;
- faire évoluer le maillage lui-même en fonction de la position de l'interface (sous-section 8.2.3).

### 8.2.1 Adaptation des méthodes numériques

Considérons la forme Eulérienne des équations bidimensionnelles décrite au chapitre 6 et rappelée ci-dessous :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$$

Considérons maintenant que le domaine fluide est mobile. Notons que, dans cette section, nous supposons que le mouvement du maillage est connu et ne dépend pas du fluide. Afin de faciliter la résolution de ce système où  $\mathbf{x}$  est fonction du temps, plusieurs techniques sont envisageables [101].

Une première solution consiste à ramener le domaine mobile à un domaine fictif fixe. Les méthodes reposant sur des *changements de variables* [58] ou *de repères* [48] entrent dans cette catégorie. Cependant, ces techniques souffrent de nombreuses restrictions ce qui explique que les *méthodes de type ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian) leur soient souvent préférées.

Contrairement aux précédentes, les méthodes ALE [39] reposent sur l'utilisation de cellules déformables. D'une manière générale, elles introduisent un maillage mobile dont la vitesse peut varier continûment et arbitrairement entre une valeur nulle (approche eulérienne) et une valeur égale à celle du fluide (approche Lagrangienne). En dernier lieu, citons les *maillages dynamiques* [10] dont le principe est similaire à celui des méthodes ALE : les deux approches ne diffèrent que par l'usage qui en est fait d'une formulation intégrale [101]. Cette dernière technique est simple à mettre en œuvre et facilite l'adaptation des schémas existants. Nous la présentons donc ci-après.

Considérons les équations précédentes et définissons un nouvel espace (dit de référence) de coordonnées mixtes  $\xi$  (figure 8.2).

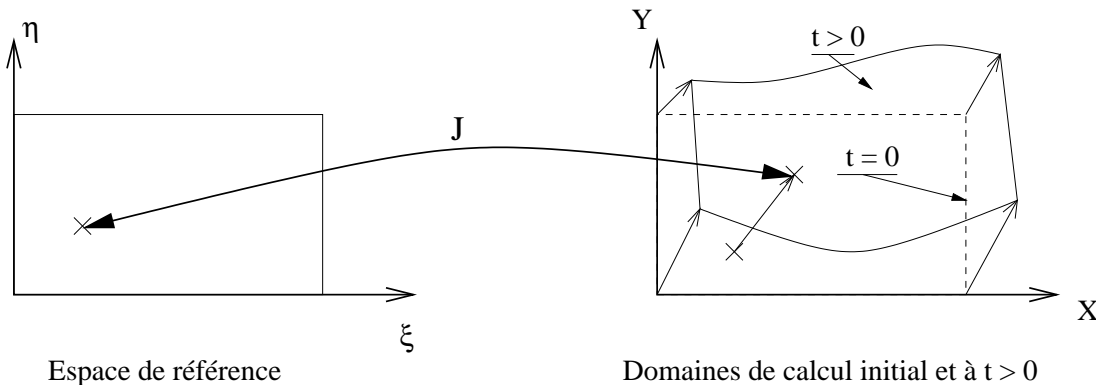


FIG. 8.2 – Transformation géométrique  $J$ .

Dans le cas général, les deux systèmes de coordonnées  $\mathbf{x}$  et  $\xi$  dépendent du temps. L'intérêt d'introduire un nouveau système de coordonnées réside essentiellement dans la possibilité de le considérer comme indépendant du temps et de bénéficier ainsi d'un domaine sur lequel les intégrations pourront être rigoureusement et plus facilement calculées. Parmi les choix possibles de domaine de référence, citons le domaine initial ou encore le même domaine à un instant donné antérieur au calcul (pour le cas de grandes déformations susceptibles de dégrader la qualité du maillage et nécessitant des remises à jour régulières).

Ces deux espaces sont reliés par une transformation géométrique qui s'exprime au travers d'un Jacobien  $J$  défini par :

$$J = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \Big|_t \right).$$

La vitesse d'un point du domaine est  $\mathbf{u}_b = u_b \mathbf{i}_x + v_b \mathbf{i}_y$  avec :

$$\mathbf{u}_b = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\xi}.$$

Il résulte de l'utilisation de ces coordonnées (voir [101] pour plus de détails) une nouvelle formulation des équations d'Euler :

$$\frac{\partial(J\mathbf{Q})}{\partial t} \Big|_{\xi} + J\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

avec  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_x \mathbf{i}_x + \mathbf{F}'_y \mathbf{i}_y$  et :

$$\mathbf{F}'_x = \mathbf{F}_x - u_b \mathbf{Q} \quad \mathbf{F}'_y = \mathbf{F}_y - v_b \mathbf{Q}.$$

Ces équations sont similaires aux équations d'Euler classiques. A ce stade, plusieurs remarques peuvent être formulées :

- seuls les termes de convection sont affectés par la vitesse locale du maillage. Si les équations de Navier-Stokes sont considérées alors les flux visqueux (laminaires et turbulents) restent inchangés, à condition d'introduire la vitesse du maillage dans les flux convectifs ;
- il est également intéressant de noter que pour  $\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}$ , les équations d'Euler classiques sont retrouvées alors que si l'on choisit  $\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  (coordonnées Lagrangiennes), la formulation Lagrangienne de la dynamique des gaz est obtenue.

Considérons maintenant une cellule d'intégration du maillage mobile, de volume  $\mathcal{V}$ . Celle-ci occupe un volume  $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$  dans les coordonnées du laboratoire et un volume  $\mathcal{V}_{\xi}$  dans l'espace des coordonnées mixtes. L'intégration de l'équation (8.1) sur  $\mathcal{V}_{\xi}$  conduit à :

$$\int_{\mathcal{V}_{\xi}} \frac{\partial(J\mathbf{Q})}{\partial t} \Big|_{\xi} d\xi + \int_{\mathcal{V}_{\xi}} J\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' d\xi = \mathbf{0}.$$

La dérivée en temps étant prise à  $\xi$  constant et  $\mathcal{V}_{\xi}$  étant indépendant du temps, la dérivation en temps peut être sortie de l'intégrale. Enfin, le changement de variables  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$  permet d'obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{x}}} \mathbf{Q} d\mathbf{x} \right] + \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{x}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

Cette dernière équation peut être considérée comme la formulation en maillage dynamique des équations d'Euler selon un formalisme de type volumes finis.

### 8.2.2 Loi de consistance géométrique : GCL

On remarquera que les méthodes de type ALE ou maillage dynamique font intervenir des vitesses de maillage qu'il est nécessaire de traiter rigoureusement pour assurer, au minimum, une indépendance de la solution physique du problème à l'égard de ces dernières. La démarche générale consiste alors à satisfaire une loi dite de conservation géométrique (GCL en anglais) qui stipule que [126] : *“Tout champ uniforme et constant solution des équations de Navier-Stokes, doit le rester quel que soit le mouvement du maillage”*. Cette terminologie remonte à la fin des années 70 avec les travaux de Thomas et Lombard [125]. Demirdzic [33], par exemple, montra que le non-respect de la GCL pouvait générer des puits ou des sources de masse et contribuer à l'apparition d'oscillations numériques.

En maillage fixe, celle-ci se limite à la SCL (Surface Conservation Law [130]). Cette loi est obtenue en considérant les équations précédentes sur un maillage fixe, pour un écoulement uniforme dans une direction  $\mathbf{c}$  arbitraire. Son expression analytique, bien connue, prend la forme :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = 0.$$

et traduit le fait que chaque cellule de calcul doit être fermée par ses surfaces. Cette équation semble triviale, ce qui explique qu'elle soit rarement mentionnée. Elle est généralement satisfaite pour les schémas de type volumes finis et ne pose pas de problème particulier dans notre cas.

Pour un maillage mobile, la GCL inclut également la loi de conservation volumétrique (VCL : Volume Conservation Law). Elle repose sur le fait qu'un maillage arbitrairement mobile ne doit pas affecter l'écoulement ; elle est déduite à partir de l'équation de continuité pour un fluide de masse volumique uniforme et de vitesse nulle [46, 33] :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = 0. \quad (8.3)$$

Soulignons que le non-respect de cette loi conduit à une formation artificielle de puits et de sources de masse.

Afin que la VCL soit vérifiée à chaque pas de temps, Demirdzic [33, 34] détermine la vitesse normale de chaque surface à partir de la discrétisation de l'équation (8.3). Cette discrétisation doit s'effectuer selon la même technique que celle employée pour résoudre l'ensemble des équations d'Euler. Cette méthode est générale : elle permet de déterminer une vitesse normale de chaque surface, respectant la VCL, quel que soit le type de discrétisation temporelle utilisé (explicite, implicite, à un ou plusieurs sous-pas...). Trois exemples illustrent ce point.

**Exemple 1 :** Avancement en temps explicite du premier ordre “Euler explicite”.

La discrétisation de l'équation (8.3) à l'aide d'un schéma temporel de type “Euler explicite” s'écrit :

$$\frac{\mathcal{V}^{n+1} - \mathcal{V}^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n,$$

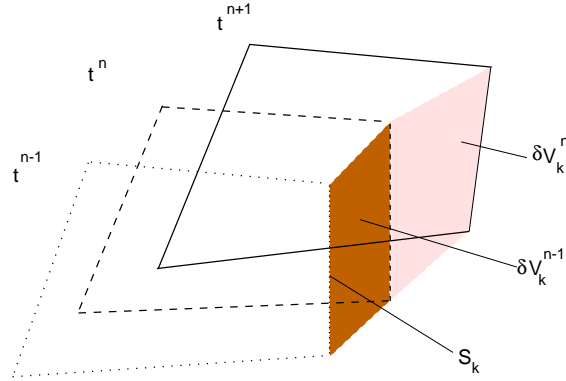


FIG. 8.3 – Volumes  $\delta\mathcal{V}_k^{n-1}$  et  $\delta\mathcal{V}_k^n$  balayés par une surface orientée  $\mathcal{S}_k \mathbf{n}$  d'une cellule de contrôle mobile entre les instants  $(t^{n-1}, t^n)$  et  $(t^n, t^{n+1})$  respectivement.

où l'indice  $n$  fait référence à l'instant  $t^n$  et  $\mathcal{S}_k (k \in [1, N_b])$  représente l'une des  $N_b$  surfaces  $\mathcal{S}$  appartenant au volume de contrôle  $\mathcal{V}$ . D'autre part, la variation du volume d'une cellule entre deux instants peut être vue comme la somme des variations (positives ou négatives) de volume engendrées par le mouvement de chaque surface orientée  $\mathcal{S}_k \mathbf{n}$  :

$$\frac{\mathcal{V}^{n+1} - \mathcal{V}^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta\mathcal{V}_k^n}{\Delta t},$$

où  $\delta\mathcal{V}_k^n = \delta\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{S}_k \mathbf{n}$  ( $\delta\bar{\mathbf{r}}$  représente le déplacement du centre de la surface) est le volume<sup>1</sup> balayé par la surface orientée  $\mathcal{S}_k \mathbf{n}$  pendant l'intervalle  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  (voir figure 8.3). Ainsi, la vitesse normale d'une surface  $\mathcal{S}_k$  doit être calculée suivant :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta\mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^n}, \quad (8.4)$$

pour que la VCL soit vérifiée. Notons que  $\mathcal{V}^{n+1}$  est supposé connu (la position des points du maillage à l'instant  $n + 1$  peut, par exemple, être déduite de celle de l'interface fluide-structure par interpolation).

Remarque : Dans le cas d'un schéma explicite, les flux sont évalués à l'instant  $n$ , c'est pourquoi nous avons choisi (équation (8.4)) d'évaluer les surfaces  $\mathcal{S}_k$  à l'instant  $n$  (c'est-à-dire au même instant que les autres termes des flux). Ce choix n'est pas dicté par la VCL [130] : il est possible de choisir d'évaluer  $\mathcal{S}_k$  à l'instant  $n + 1$  par exemple. Dans ce cas, la relation (8.4) devient :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta\mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{n+1}}.$$

Notons que le produit  $(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k$  est inchangé et donc que ces deux choix sont consistants du point de vue de la VCL (*i.e.* vérifient la relation (8.3)).

1. Ce "volume" peut être positif ou négatif suivant le signe de  $\delta\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}$ .

**Exemple 2 :** Avancement en temps implicite du second ordre.

Lorsque le code utilise un avancement en temps implicite du second ordre, la discrétisation de l'équation (8.3) implique :

$$\frac{3\mathcal{V}^{n+1} - 4\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n-1}}{2\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{n+1}.$$

Comme, de plus,

$$\frac{3\mathcal{V}^{n+1} - 4\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n-1}}{2\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{3\delta\mathcal{V}_k^n - \delta\mathcal{V}_k^{n-1}}{2\Delta t},$$

la vitesse normale de chaque surface doit être calculée suivant :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{n+1} = \frac{3\delta\mathcal{V}_k^n - \delta\mathcal{V}_k^{n-1}}{\Delta t \mathcal{S}_k^{n+1}}. \quad (8.5)$$

On peut noter que les vitesses (*cf.* équations (8.4) et (8.5)) doivent être calculées différemment dans ces deux premiers exemples. Cependant, la méthode appliquée pour obtenir ces relations est bien la même dans les deux cas et repose toujours sur la discrétisation de l'équation (8.3). Seul le schéma d'intégration change.

Remarque : Comme précédemment, les surfaces  $\mathcal{S}_k$  sont évaluées au même instant que les autres termes des flux (donc à l'instant  $n + 1$  pour ce schéma implicite). Rappelons que ce choix est arbitraire et qu'il n'est pas dicté par la VCL (du moins pour la méthode proposée par Demirdzic [33]).

**Exemple 3 :** Runge-Kutta TVD explicite à 3 sous-pas (troisième ordre).

Dans nos calculs, les schémas d'intégration temporelle employés sont de type Runge-Kutta explicite (du second ou troisième ordre). Nous illustrons donc aussi le calcul de la vitesse normale de chaque surface pour un schéma temporel Runge-Kutta TVD au troisième ordre [116] :

$$\mathcal{V}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)} = \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \Delta t L(\mathbf{Q}^n) \quad (8.6)$$

$$\mathcal{V}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \frac{1}{4} \mathcal{V}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(\mathbf{Q}^{(1)}) \quad (8.7)$$

$$\mathcal{V}^{n+1} \mathbf{Q}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \frac{2}{3} \mathcal{V}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(\mathbf{Q}^{(2)}). \quad (8.8)$$

où  $L$  représente l'opérateur spatial.

Avant d'appliquer ce schéma de discrétisation à l'équation (8.3), il est nécessaire de déterminer les volumes  $\mathcal{V}^{(1)}$  et  $\mathcal{V}^{(2)}$ . En premier lieu, notons que le premier sous-pas constitue une estimation  $\mathbf{Q}^{(1)}$  de la solution en  $t^{n+1}$ . On peut donc considérer que  $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{n+1}$ . De même, on considérera que  $\mathcal{S}^{(1)} = \mathcal{S}^{n+1}$  (ces surfaces seront utilisées pour calculer  $L(\mathbf{Q}^{(1)})$ ). Enfin, le second sous-pas étant une estimation  $\mathbf{Q}^{(2)}$  de la solution en  $t^{n+1/2}$ , nous aurons  $\mathcal{V}^{(2)} \approx (\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1})/2$ . De même,  $\mathcal{S}^{(2)} \approx (\mathcal{S}^n + \mathcal{S}^{n+1})/2$  (ces surfaces seront utilisées pour calculer  $L(\mathbf{Q}^{(2)})$ ).

L'application du premier sous-pas (équation (8.6)) de cette méthode à l'équation (8.3) et les remarques précédentes impliquent :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n + \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t}.$$

Cette relation fournit l'expression de la vitesse normale de la surface devant être utilisée au premier sous-pas de l'intégration temporelle :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^n}. \quad (8.9)$$

L'application de la relation (8.7) (second sous-pas) à la discrétisation de l'équation (8.3) conduit ensuite à :

$$\frac{\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1}}{2} \approx \frac{3}{4} \mathcal{V}^n + \frac{1}{4} \mathcal{V}^{n+1} + \frac{1}{4} \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(1)}$$

soit, après simplification :

$$\sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t}.$$

On en déduit l'expression de la vitesse normale d'une surface quelconque  $\mathcal{S}_k$  à utiliser au second sous-pas de l'intégration temporelle :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{(1)} = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{(1)}}. \quad (8.10)$$

Enfin, l'application de la relation (8.8) (troisième sous-pas) à la discrétisation de l'équation (8.3) implique :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathcal{V}^n + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1}}{2} + \frac{2}{3} \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(2)}.$$

Il en résulte :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{(2)} = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{(2)}}. \quad (8.11)$$

Ainsi, en utilisant les expressions (8.9), (8.10) et (8.11) pour le calcul des vitesses à chaque sous-pas, la VCL est-elle automatiquement vérifiée, comme l'ont confirmé des tests utilisant un fluide uniforme au repos sur un maillage arbitrairement mobile (voir ci-après).

En toute rigueur, le schéma d'intégration temporelle Runge-Kutta TVD n'est du troisième ordre que pour les problèmes linéaires. De plus, les approximations faites ( $\mathcal{V}^{(1)}$  et  $\mathcal{V}^{(2)}$ ) font que le schéma n'est plus du troisième ordre. Toutefois, il ne s'agit pas d'une source d'erreur significative ([102], page 197).

D'autre part, concernant l'influence de la mobilité du maillage sur la précision du schéma, les travaux de Guillard et Farhat [57], notamment, ont montré que le fait d'assurer un critère de type GCL adapté au schéma, permet d'assurer les mêmes critères de stabilité et de précision que dans le cas d'un maillage fixe. Les auteurs ont aussi montré que plus la précision du schéma augmentait et plus le respect d'une loi GCL devenait primordial.

### - Cas-test

Nous vérifions ici le respect de la Loi de Conservation des Volumes (*VCL*) et illustrons les conséquences de son non-respect à partir de tests similaires à ceux présentés dans la référence [33]. Pour ce faire, l'écoulement considéré est uniforme et de vitesse nulle. Le maillage mobile, dont les frontières sont fixes, est constitué de  $(10 \times 10)$  mailles. A tout instant, les lignes du maillage ( $i = cst$ ) sont horizontales, celles ( $j = cst$ ) sont inclinées d'un angle  $\alpha = 60^\circ$ . La taille du domaine est de  $10m$  dans la direction  $x$  et de  $2m$  dans la direction d'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le maillage est symétrique par rapport aux lignes fixes ( $i=5$ ) et ( $j=5$ ), par conséquent seule l'évolution des points  $(i, j) \in [0, 5]^2$  est explicitée.

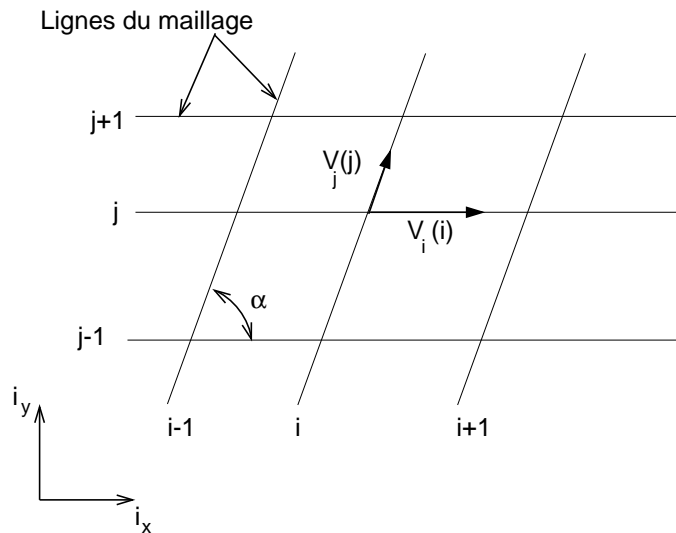


FIG. 8.4 – Définition des vitesses du maillage.

Les vitesses maximales des lignes du maillage suivant  $x$  et suivant la direction  $\alpha$  sont notées  $V_i^{max}$  et  $V_j^{max}$  respectivement. Nous choisissons  $V_i^{max} = 0.81 m/s$  et  $V_j^{max} = 0.18 m/s$ . Chaque ligne ( $= cst$ ), resp. ( $j = cst$ ), est animée d'une vitesse  $V_i(i)$ , resp.  $V_j(j)$ , constante (figure 8.4 et tableau 8.1).

2. Le maillage est pris volontairement d'un angle quelconque.



$i$	0	1	2	3	4	5
$V_i(i)$	0	$\frac{1}{8}V_i^{max}$	$\frac{1}{4}V_i^{max}$	$\frac{1}{2}V_i^{max}$	$V_i^{max}$	0
$j$	0	1	2	3	4	5
$V_j(j)$	0	$\frac{1}{8}V_j^{max}$	$\frac{1}{4}V_j^{max}$	$\frac{1}{2}V_j^{max}$	$V_j^{max}$	0

TAB. 8.1 – Vitesses des lignes du maillage.

Introduisons les distances suivantes :

$$d_i(i) = \text{distance}\{\text{Point}(i, j), \text{Point}(0, j)\} \quad (\text{indépendant de } j)$$

$$d_j(j) = \text{distance}\{\text{Point}(i, j), \text{Point}(i, 0)\} \quad (\text{indépendant de } i).$$

Les positions des points à l'instant initial (figure 8.5) sont données dans le tableau 8.2.

$i$	0	1	2	3	4	5
$d_i^0(i)$	0	0.8875	1.775	2.55	3.1	5.0
$j$	0	1	2	3	4	5
$d_j^0(j)$	0	0.1775	0.355	0.51	0.62	1.0

TAB. 8.2 – Positions des points à l'instant initial.

Ces positions sont choisies de sorte à ce qu'à l'instant  $t_f = 1s.$ , le maillage soit régulier, *i.e.*  $\Delta x = cst$  et  $\Delta y = cst$  (figure 8.6). Notons qu'à un instant quelconque  $t$ , la position  $(X, Y)$  des points est donnée par :

$$X(i, j) = d_i^0(i) + d_j^0(j) \cos \alpha + t (V_i(i) + V_j(j) \cos \alpha)$$

$$Y(i, j) = d_j^0(j) \sin \alpha + t (V_j(j) \sin \alpha)$$

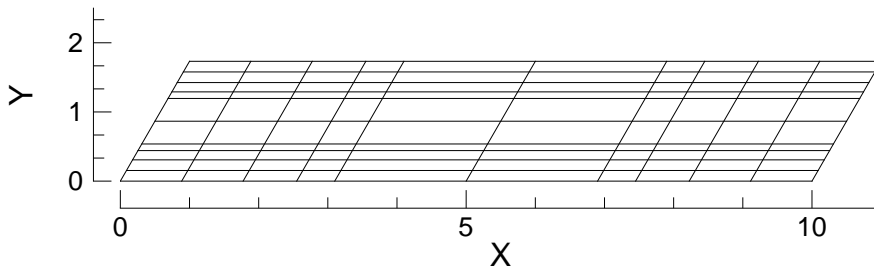


FIG. 8.5 – Maillage à l'instant initial.

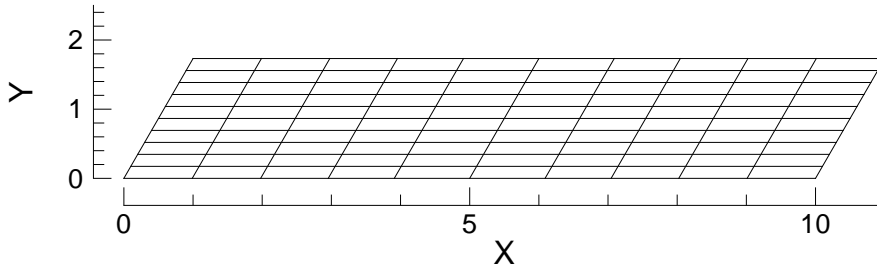


FIG. 8.6 – Maillage à l'instant final.

### - Respect de la VCL

Considérons, pour plus de simplicité, un schéma TVD employant un avancement en temps explicite du premier ordre (schéma d'Euler). Nous venons de voir que pour respecter la VCL, il convenait de vérifier la relation :

$$\frac{\mathcal{V}^{n+1} - \mathcal{V}^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n.$$

Ainsi, la vitesse normale d'une surface  $\mathcal{S}_k$  doit être calculée suivant (voir ci-dessus) :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^n} \quad (8.12)$$

pour que la VCL soit vérifiée.

L'équation (8.12) est utilisée ici pour calculer les vitesses normales des surfaces. Après plusieurs itérations (CFL=1), aucune variation du champ n'est observée. L'écoulement est inchangé en  $t_f$ . Ceci confirme que la VCL est vérifiée lorsque la relation (8.12) est utilisée.

### - Non-respect de la VCL

Intéressons nous maintenant aux conséquences du non-respect de la VCL. Pour cela, nous déduisons la vitesse normale du maillage associée à la surface  $\mathcal{S}_k$  à partir de la vitesse de chaque ligne  $i$  et  $j$  et l'utilisons à la place de (8.12). Ainsi pour les surfaces verticales  $\mathcal{S}_i$  :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_i = V_i \sin \alpha \quad (8.13)$$

et pour les surfaces horizontales  $\mathcal{S}_j$  :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_j = V_j \sin \alpha \quad (8.14)$$

Dans ce cas, dès la première itération, le champ présente des puits et des sources de masse volumique. Ainsi à l'instant  $t_f$ , le champ est représenté sur la figure 8.7. Ceci est la conséquence du fait que la variation de volume des cellules n'est pas égale aux volumes balayés par les surfaces (figure 8.8).

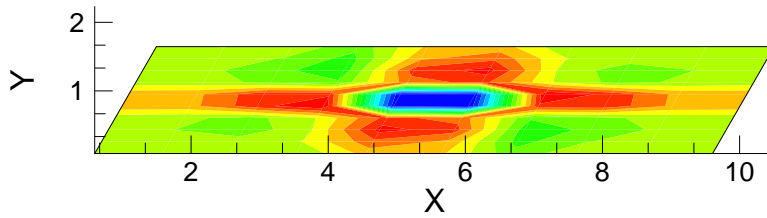


FIG. 8.7 – Champs de masse volumique à l’instant  $t_f$  pour un CFL de 1 ( $Max=1.0048$ ,  $Min=0.9894$ ) lorsque les expressions (8.13) et (8.14) sont utilisées.

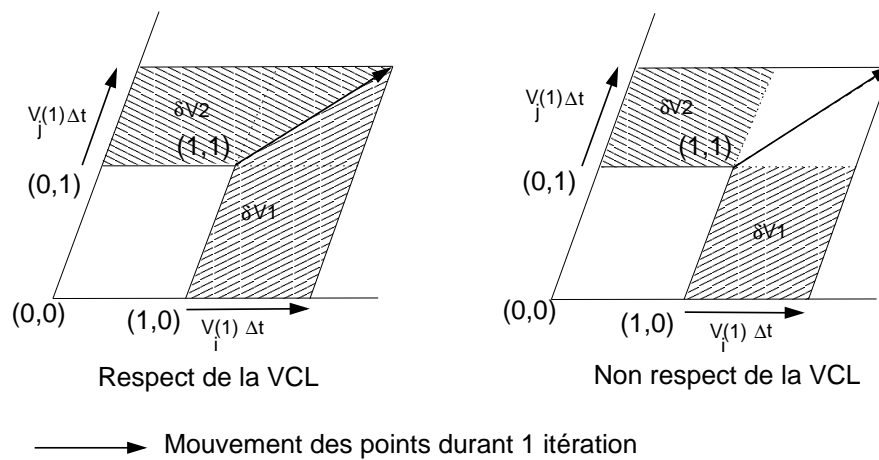


FIG. 8.8 – Respect et non-respect de la GCL. Comparaison des “volumes balayés” (en hachuré sur la figure) par une surface entre  $t$  et  $t + \Delta t$  en fonction de l’expression utilisée pour le calcul de la vitesse normale de cette surface. A gauche : calcul des vitesses du maillage à partir de la relation (8.12), à droite : calcul des vitesses du maillage à partir des équations (8.13) et (8.14).

Lorsque le CFL est diminué, l’intensité de ces puits et de ces sources est plus faible mais la topologie de l’écoulement reste identique (CFL=0.5 :  $Max=1.0026$  et  $Min=0.9944$ , figure non présentée). Ceci s’explique par la diminution de l’erreur commise sur les volumes balayés par les surfaces<sup>3</sup> entre deux instants (figure 8.9). On remarquera, en effet, que la différence entre les résultats théoriques (maximum et minimum de la masse volumique égaux à un) et numériques est pratiquement divisée par deux pour ce dernier cas.

En résumé, la méthode proposée par Demirdzic [33] et adoptée ici pour satisfaire la VCL consiste à discrétiser l’équation (8.3) en tenant compte du schéma temporel employé par le code. Il est également nécessaire de choisir l’instant auquel les surfaces, apparaissant dans les flux, doivent être évaluées : à chaque choix correspond une vitesse normale des surfaces qui respecte la VCL.

3. Le rôle joué par l’amplification de la diffusion du schéma numérique lorsque le CFL est diminué n’est pas important ici.

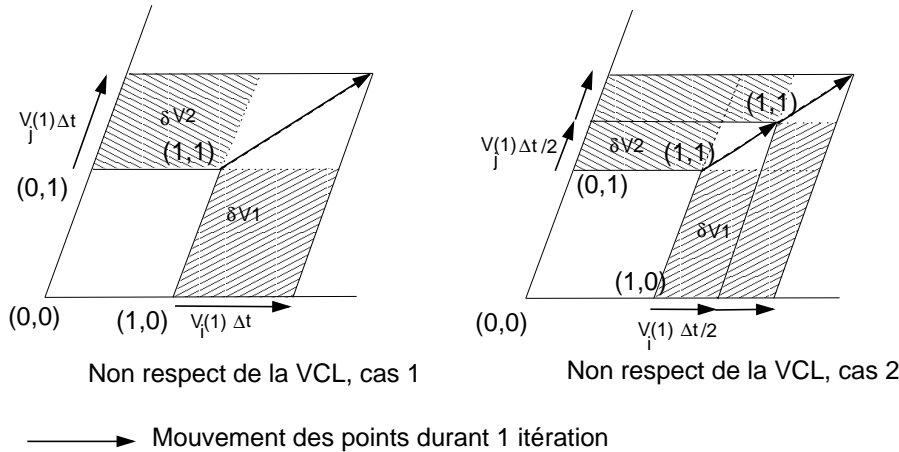


FIG. 8.9 – Non-respect de la GCL : influence du pas de temps (à gauche :  $CFL=1$ , représentation à  $t + \Delta t$  ; à droite :  $CFL=0.5$ , représentation à  $t + 0.5\Delta t$  et  $t + \Delta t$ ).

### 8.2.3 Prise en compte du mouvement du maillage

La seconde difficulté, liée à ce type de simulations, réside dans le mouvement du maillage lui-même (*i.e.* la transmission du mouvement du bord du domaine fluide au reste du maillage) et peut, elle aussi, être traitée suivant différentes techniques. L’approche retenue par Farhat [47] en constitue un exemple original. Dans cette référence, le maillage est assimilé à une *pseudo-structure* possédant son propre comportement dynamique. Après discrétisation, celui-ci se voit attribuer une matrice masse  $[M]$ , une matrice de rigidité  $[K]$  et une matrice relative à l’amortissement  $[D]$ . Le couplage fait désormais intervenir trois champs : le fluide, la structure et le maillage dynamique. Cette technique généralise plusieurs méthodes plus classiquement employées, notamment celle de Batina [10]. En effet, pour  $[M] = [D] = [0]$ , l’analogie des ressorts, utilisée par Batina [10] et modifiée par Blom [16], est retrouvée.

### 8.2.4 Récapitulatif

Comme nous venons de le voir, le couplage faible en aéroélasticité nécessite de faire communiquer un code fluide et un code structure. Certaines instructions doivent être introduites dans chaque code pour permettre ce dialogue (*cf.* section 8.4). D’autre part, contrairement au code structure, le code fluide doit subir quelques modifications en plus de l’introduction de ces instructions. Ces modifications sont dues au fait que le mouvement de l’interface fluide-structure modifie le domaine fluide au cours du temps. Nous avons présenté dans cette section différentes techniques permettant de traiter ce problème. Nous avons en particulier présenté la technique dite de “maillage dynamique” dont un des principaux avantages est de permettre une adaptation rapide des schémas existants aux domaines mobiles.

Ainsi, l’adaptation des schémas volumes finis utilisés dans cette étude (*cf.* chapitre 6) est simple avec cette technique. Elle consiste principalement à :

- faire évoluer le maillage (le mouvement du maillage ayant été supposé, dans cette section, connu et indépendant du fluide) ;

- calculer la vitesse du maillage en respectant la GCL ;
- prendre en compte le flux modifié  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \mathbf{u}_q \mathbf{Q}$  au lieu de  $\mathbf{F}$  ;  
Il en résulte, par exemple, que la matrice Jacobienne  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$ , intervenant dans ces schémas, devient  $\mathbf{A} - \mathbf{u}_q \mathbf{I}_d$  ( $\mathbf{I}_d$  désigne la matrice identité), d'où une modification des valeurs propres associées à cette matrice. La référence [72] décrit plus en détails les modifications à apporter au schéma de Roe, celles à introduire dans les schémas WENO et TURB sont similaires.
- prendre en compte la vitesse du maillage dans le calcul du pas de temps ;
- prendre en compte la vitesse du maillage dans les conditions aux limites ;
- valider le code fluide obtenu (*cf.* section suivante).

### 8.3 Exemples d'applications au fluide en domaine évolutif

Cette section est consacrée à la validation de la méthode de maillage dynamique et permet de mieux en appréhender les possibilités. Des cas-tests monodimensionnels et bidimensionnels sont étudiés. Le choix de ces cas-tests a été motivé par la présence d'ondes de choc, ce qui les rapproche des écoulements dans les tuyères. Les solveurs utilisés pour l'ensemble des simulations présentées sont ceux décrits au chapitre 6.

#### 8.3.1 Compression dans un piston

Le dispositif simulé consiste en une chambre contenant un gaz au repos, obstruée à l'une de ses extrémités par un piston (*cf.* figure 8.10) et permet de générer des ondes de choc instationnaires.

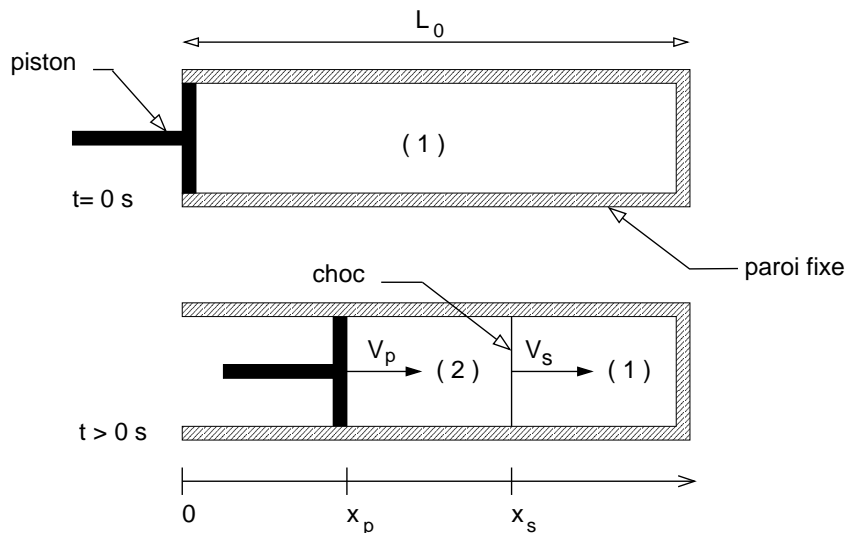
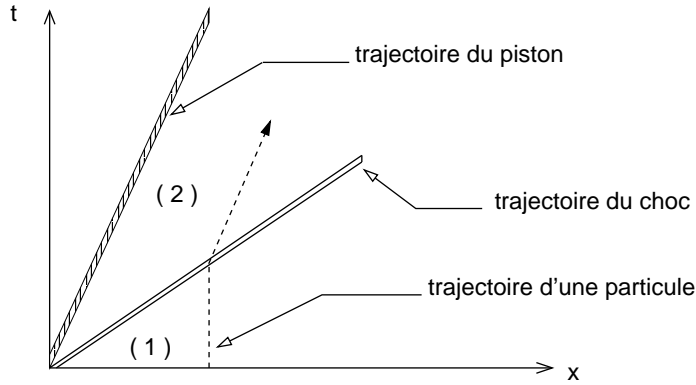


FIG. 8.10 – Génération d'une onde de choc instationnaire.

A l'instant initial, le piston est brutalement déplacé à une vitesse constante unitaire  $V_p$  de sorte à comprimer le gaz (*cf.* figures 8.10 et 8.11). L'onde de choc ainsi générée se propage dans le milieu au repos, défini par l'état 1. Connaissant la vitesse  $V_p$  du piston et la célérité  $a_1$  du son

FIG. 8.11 – Diagramme  $x-t$  correspondant à la compression du gaz.

dans le milieu au repos, le nombre de Mach  $M_s$  de cette onde ainsi que sa vitesse et sa position peuvent être aisément déduits [43] :

$$\frac{2}{\gamma+1} \frac{M_s^2 - 1}{M_s} = \frac{V_p}{a_1} \quad ; \quad V_s = M_s a_1 \quad ; \quad x_s = V_s t \quad (8.15)$$

Enfin, un écoulement gazeux (état 2) de même vitesse que le piston est induit entre celui-ci et l'onde de choc. Ses caractéristiques sont déterminées par les conditions initiales (état 1) et le nombre de Mach du choc :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{M_s^2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \right) \left( \gamma M_s^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right) \quad (8.16)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma+1} \left( \gamma M_s^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right) \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \quad (8.17)$$

La cavité d'une longueur de référence  $L_0$  contient initialement de l'air au repos ( $\gamma=1.4$ ) dont la pression  $p_1$  et la masse volumique  $\rho_1$  sont choisies unitaires. D'autre part, le maillage, composé d'une centaine de mailles, est mis à jour à chaque itération en imposant une variation linéaire de la vitesse de ses points (de  $V_p$  pour le premier point à 0 pour le dernier).

Les conditions aux limites sont de type glissement sur l'ensemble des parois (cylindre et piston). Les calculs sont réalisés à l'aide des schémas TVD<sup>4</sup> et WENO<sup>5</sup>. Le CFL est de 0.6 pour les deux schémas.

Théoriquement, l'onde de choc se propage à un nombre de Mach  $M_s=1.63$  (équation (8.15)). Les grandeurs caractéristiques (relations (8.16) et (8.17)) théoriques de l'état 2 induit par le choc sont présentées dans le tableau 8.3. Ces résultats sont très bien retrouvés par les simulations numériques réalisées, comme en témoignent les profils de pression obtenus à un instant

4. Solveur de Roe, reconstruction des variables caractéristiques à l'ordre 2, limiteur minmod et avancement en temps Runge-Kutta d'ordre 2.

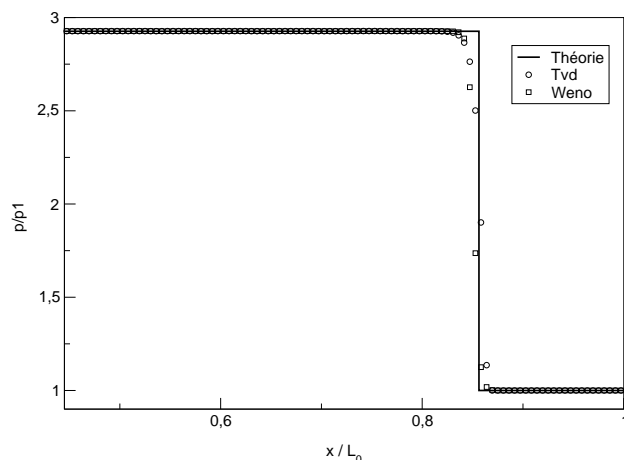
5. Ordre 5 en espace, fractionnement des flux de Lax-Friedrichs et avancement en temps Runge-Kutta TVD d'ordre 3.

$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$V_2/a_1$
2.93	2.08	1.41	0.84

TAB. 8.3 – Evolution spatiale théorique des grandeurs physiques caractéristiques.

quelconque et représentés sur la figure 8.12.

Par ailleurs, des calculs similaires ont été menés afin de simuler également une détente dans ce piston. Les résultats obtenus (non présentés) furent de même qualité que ceux exposés ci-dessus.

FIG. 8.12 – Profils adimensionnés de pression à l'instant adimensionné  $t^* = ta_1/L_0 = 0.529$ .

### 8.3.2 Projectile placé dans un écoulement supersonique

Ce second cas-test a pour objectif de tester nos codes de calcul en maillage dynamique sur une configuration bidimensionnelle. Il repose sur l'évolution d'un projectile bidimensionnel plan placé dans un écoulement supersonique. Celui-ci, dans un premier temps immobile, est par la suite animé d'une certaine vitesse.

#### - Cas 1 : Projectile fixe

Un projectile (*cf.* figure 8.13) de demi-angle au sommet  $\theta = 10^\circ$  est brutalement introduit dans un écoulement supersonique à un nombre de Mach de 3. La présence de cet obstacle dans l'écoulement supersonique génère une onde de choc oblique qui se réfléchit sur la paroi supérieure du canal. Les caractéristiques physiques des différentes régions de l'écoulement induites par les réflexions du choc peuvent être établies analytiquement [43] et sont résumées dans le tableau 8.4.

Etant donnée la symétrie du problème, seule la moitié supérieure de la configuration, apparaissant sur la figure 8.13, a été simulée. Le maillage réalisé comporte  $(N_x \times N_y) = (280 \times 100)$

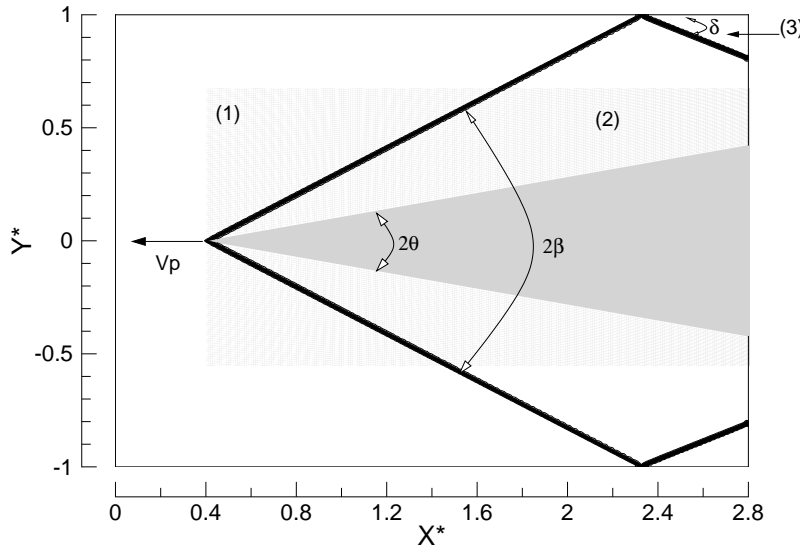


FIG. 8.13 – Projectile fixe ( $V_p = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ) soumis à un écoulement supersonique ( $M_1 = 3.0$ ) : iso-contours de pression obtenus à l'aide du schéma WENO et définition des notations utilisées.  $X^* = X/h$  et  $Y^* = Y/h$  (où  $h$  est la demi-hauteur du canal, prise unitaire).

$\beta$	$M_2$	$p_2/p_1$	$T_2/T_1$	$\rho_2/\rho_1$
$27.38^\circ$	2.51	2.05	1.24	1.65
$\delta$	$M_3$	$p_3/p_1$	$T_3/T_1$	$\rho_3/\rho_1$
$21.79^\circ$	2.09	3.83	1.49	2.56

TAB. 8.4 – Evolution spatiale des grandeurs physiques caractéristiques. Etats (2) et (3), valeurs théoriques.

mailles. Les conditions initiales sont définies par l'état 1 et les conditions aux limites sont les suivantes :

- entrée supersonique (toutes les grandeurs sont imposées) ;
- sortie supersonique (extrapolation de toutes les variables) ;
- conditions de glissement sur toutes les parois ;
- conditions de symétrie (*i.e.* glissement) sur l'axe ( $y = 0$ ).

Le CFL est fixé à 0.9 pour le schéma TVD et 0.7 pour le schéma WENO.

Les iso-valeurs de pression obtenues à l'aide du premier schéma sont présentées sur la figure 8.13 (les résultats du WENO sont comparables et ne sont donc pas exposés). L'ensemble des grandeurs physiques des régions 2 et 3 est en parfait accord avec la théorie. En particulier, les angles  $\beta$  et  $\delta$  sont très bien prédits (erreur relative inférieure à 0.1% pour les deux angles). Ceci



confirme la robustesse et la précision de nos codes, en l'absence de mouvement du maillage.

### - Cas 2 : Projectile mobile

Le projectile est maintenant animé d'une vitesse  $V_p = 260 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui correspondrait à un nombre de Mach  $M_p = V_p/a_1 = 0.75$ . La pression et la température du fluide en amont de l'obstacle sont inchangées mais sa vitesse est telle que son nombre de Mach soit égal à 2.25. Par conséquent, dans le référentiel lié au projectile en mouvement, l'écoulement supersonique amont possède un nombre de Mach relatif de 3.0. Ainsi, pour le projectile, ce second cas est équivalent au précédent ( $M_1 = 3.0$ ). En particulier, les angles  $\beta$  et  $\delta$  des chocs formés doivent être égaux à ceux obtenus dans le cas précédent.

Le fuselage du projectile, dont seul le bord d'attaque a été simulé dans le cas 1, est supposé avoir une hauteur constante. Comme précédemment, seule la moitié supérieure de la configuration a été simulée. Le domaine de calcul est un rectangle de longueur  $7.2 h$  comportant  $(N_x \times N_y) = (450 \times 100)$  mailles. Les conditions initiales sont définies par l'état 1, les conditions aux limites, le CFL et les schémas numériques employés sont identiques au cas 1 (pour un CFL de 0.9, le pas de temps obtenu est d'environ  $5 \times 10^{-6} \text{ s}$ ).

Le maillage est remis à jour à chaque itération, le projectile s'étant déplacé durant celle-ci de la distance  $V_r \Delta t$ .

Les résultats obtenus à trois instants différents de la simulation sont présentés sur la figure 8.14. Les angles des chocs et du faisceau de détente sont très bien prédits et la topologie de l'écoulement est de bonne qualité (absence d'oscillations numériques...). La technique de maillage dynamique est ainsi validée.

## 8.4 Spécificités du couplage

Nous exposons maintenant les spécificités du couplage. Dans un premier temps nous rappelons les principales différences entre le couplage fort et le couplage faible. La souplesse de ce dernier est ainsi mise en évidence. Les principes généraux de plusieurs algorithmes de couplage faible ainsi que les problèmes sous-jacents sont introduits. Cette section décrit donc la mise en œuvre du couplage proprement dit (*i.e.* la mise en œuvre des transferts d'information entre les codes fluide et structure).

Selon Cebra [23], on peut résumer les différents types de couplage existants :

- le *couplage fort* repose sur la résolution, à chaque instant, d'un seul système couplé pour le fluide et pour la structure : le couplage est porté par un modèle mathématique unique ;
- le *couplage faible* consiste à établir un dialogue entre deux codes dont l'un est dédié à la structure et l'autre au fluide.

Le couplage fort est réalisé grâce à des algorithmes *monolithiques* [49] et n'introduit pas de décalage temporel entre le fluide et la structure. Cependant, certains numériciens ne lui sont pas favorables. Dans le cas général, la formulation du problème en un unique système ne serait pas aisée. Cebra [23] souligne, de plus, que la matrice complète du système couplé peut être mal

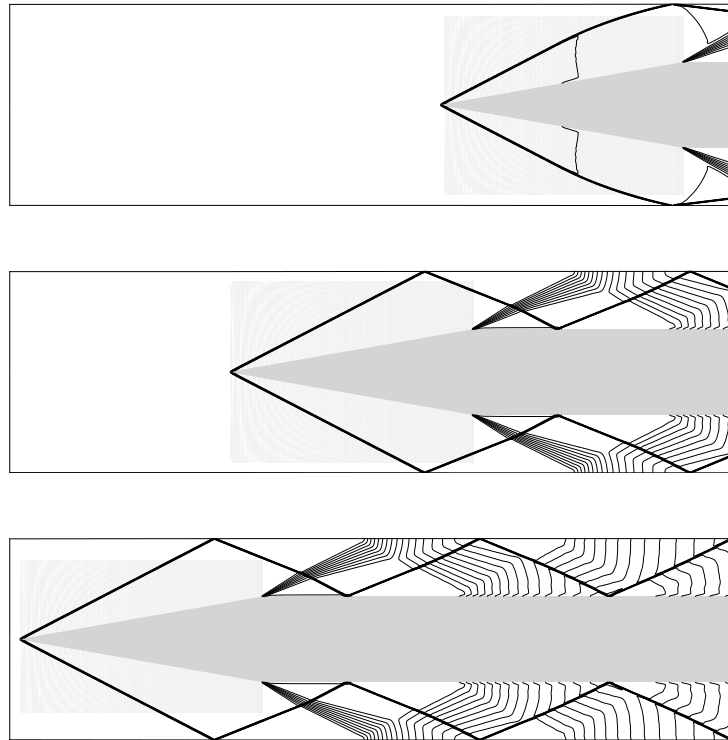


FIG. 8.14 – Projectile lancé à  $V_p = 260 \text{ m.s}^{-1}$  dans un écoulement supersonique à un nombre de Mach  $M_1$  de 2.25. Iso-contours de masse volumique aux instants  $t^* = ta_1/h = 0.69$ ,  $t^* = 3.47$  et  $t^* = 6.25$  (schéma TVD).

conditionnée<sup>6</sup> et qu'un important travail de réécriture des codes peut être nécessaire et choisit de s'orienter vers le couplage faible.

Parmi les avantages de ce second type de couplage figure sa grande souplesse : il préserve en effet la modularité de chacun des codes de calcul. Ainsi, il permet de bénéficier des méthodes les plus performantes dans chacune des disciplines et simplifie les traitements explicite/implicite ainsi que le sous-cyclage [80]. Ces avantages nous ont conduits à employer ce couplage pour nos simulations couplées.

Cependant, plusieurs réflexions doivent accompagner le choix de l'algorithme de couplage. Le choix du 'bon candidat' doit être conditionné d'après :

1. L'échelle des temps caractéristiques des physiques étudiées. Certains auteurs (De Langre [71]) introduisent la notion de vitesse réduite comme étant le rapport des temps ca-

6. Ceci peut se justifier par les différences entre les "rigidités" du fluide et de la structure et entre leurs discrétisations respectives.

ractéristiques respectifs du fluide et de la structure pour une longueur donnée :

$$U_R = \frac{V_{fluide}}{V_{struct.}} = \frac{\Delta t_{struct.}}{\Delta t_{fluide}}.$$

Ce paramètre offre ainsi un classement des couplages selon que :

- $U_R \ll 1$  : fluide sans écoulement (retenue de barrage...);
  - $U_R \equiv 1$  : fluide avec écoulement lent (voile dans le vent...);
  - $U_R \gg 1$  : fluide avec écoulement rapide (aéroélasticité...).
2. La nature des discrétisations temporelles employées pour les deux codes (explicite, implicite, recherche d'un état stationnaire, transitoire...).
- Ces deux points conditionnent la nécessité ou pas d'itérer au sein du processus de couplage ainsi que la fréquence de remise à jour des variables communes au fluide et à la structure (typiquement la frontière du domaine et le champ de pression pariétale).
3. Concernant ce dernier aspect, se pose aussi le problème du choix du profil de pression pariétale à transmettre au code de structure [103]. Le champ transmis correspond-t-il à celui calculé à l'instant  $n$ ,  $n + 1$  ou à une combinaison des deux?
  4. Enfin, le choix des moyens informatiques de transfert des informations entre les deux codes doit aussi être pris en compte.

#### 8.4.1 Principaux schémas de couplage faible

Les *algorithmes décalés* [47, 17] font partie du premier point. Le principe du plus simple de ces algorithmes (CSS: *Conventional Serial Staggered* [103]) est le suivant (figure 8.15) :

1. Transfert des déplacements  $u^n$  de la structure vers le fluide et actualisation de la position du maillage mobile;
2. Intégration temporelle du fluide. Celle-ci peut-être sous-cyclée [102] ( $N_{fs}$  pas fluide pour un pas structure). En effet, le pas de temps fluide  $\Delta t_f$  est souvent très inférieur au pas de temps structure<sup>7</sup>  $\Delta t_s$ .
3. Transfert de la pression  $P_s^{n+1}$  du fluide vers la structure et calcul des charges induites;
4. Intégration temporelle de la structure: calcul des déplacements  $u^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ .

Toutefois, cet algorithme est d'une précision inférieure à celles des solveurs fluide et structure employés et moins stable que ceux-ci [103].

Plusieurs auteurs ont utilisé une *procédure itérative de prédiction/correction* [18] afin de remédier à ces problèmes, bien que ces algorithmes requièrent un temps de calcul, par pas de temps, relativement important. D'autres ont choisi de généraliser l'algorithme CSS (*generalized Conventional*

---

7. Numériquement, cela se traduit souvent par le fait que le fluide emploie un avancement en temps explicite et la structure un avancement implicite.

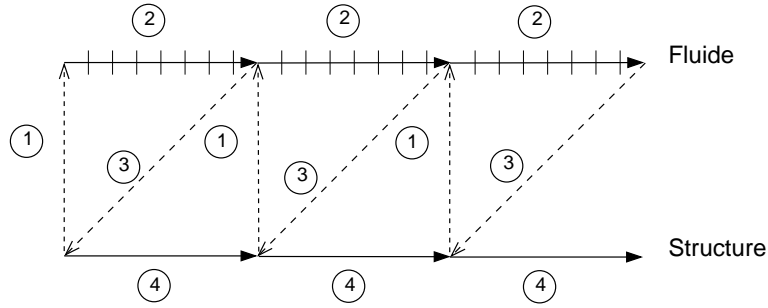


FIG. 8.15 – Principe de l’algorithme CSS [103].

*Serial Staggered* [103]) et d’en contrôler la précision. L’intégration en temps est décomposée selon les étapes suivantes (figure 8.16) :

1. Prédiction du déplacement de la structure à  $t^{n+1}$  selon :

$$u_p^{n+1} = u^n + \alpha_0 \Delta t_s \dot{u}^n + \alpha_1 \Delta t_s (\dot{u}^n - \dot{u}^{n-1})$$

où  $u_p$  représente la prédiction,  $\dot{u}$  la vitesse de la structure et  $\alpha_i$  ( $i=0,1$ ) deux paramètres numériques.

2. Transfert de la prédiction au fluide et actualisation de la position  $x^{n+1}$  du maillage ;
3. Intégration en temps du fluide avec éventuellement sous-cyclage ;
4. Transfert de la pression  $P_s^{n+1}$  vers la structure et calcul des charges induites ;
5. Intégration en temps de la structure : calcul des déplacements  $u^{n+1}$  à l’instant  $t^{n+1}$ .

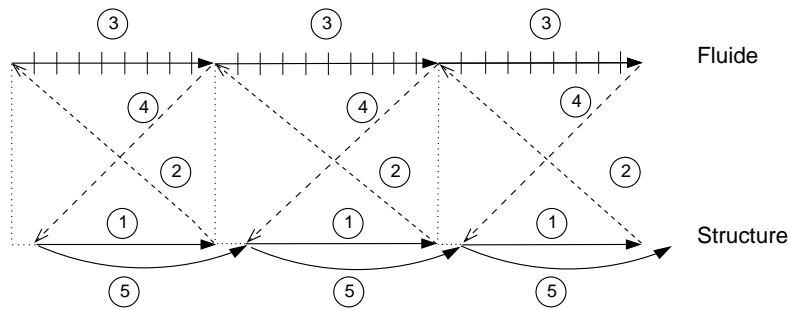


FIG. 8.16 – Principe de l’algorithme CSS généralisé [103].

La prédiction utilisée pour mettre à jour le maillage du fluide ne vérifiant pas, en général  $u_p^{n+1} = u^{n+1}$ , ces algorithmes définissent une double interface entre le fluide et la structure. Par ailleurs, une analyse de l’évolution de l’énergie du système couplé a mis en évidence l’importance des choix de la prédiction (étape 1) et du champ de pression  $P_s^{n+1}$  transmis à la structure sur la conservation de l’énergie de ce système [103].

Enfin, on notera qu’il n’est pas simple de respecter simultanément la GCL et la continuité des positions et des vitesses du fluide et de la structure à l’interface. Aussi, Lesoinne et Farhat [80]

ont-ils développé un algorithme dit ISS (*Improved Serial Staggered*) répondant à l'ensemble de ces contraintes. Ces algorithmes reposent sur des intégrations du fluide et de la structure aux instants  $(t^{n-1/2}, t^{n+1/2} \dots)$  et  $(t^n, t^{n+1} \dots)$  respectivement.

En dernier lieu, soulignons que des difficultés similaires (en terme de conservation de l'énergie, dans l'espace cette fois) existent si les maillages du fluide et de la structure ne coïncident pas à l'interface. Néanmoins, des solutions sont proposées dans les références [47, 23].

### - Moyens informatiques

Dans la pratique, le transfert d'information entre les deux codes est réalisé grâce à une bibliothèque de calcul parallèle (de type PVM : Parallel Virtual Machine ou MPI : Message Passing Interface). Plusieurs cours sur ces bibliothèques sont disponibles sur Internet (voir par exemple [66]).

Aujourd'hui la bibliothèque MPI a largement pris le pas sur la bibliothèque PVM. Il est donc recommandé d'utiliser cette bibliothèque bien que PVM reste intéressante dans le cadre de l'utilisation conjointe de machines hétérogènes.

Les codes fluide et structure sont installés sur une machine multi-processeurs ou sur un cluster de machines (homogènes ou hétérogènes) disposant d'une bibliothèque de calcul parallèle. Nos calculs couplés, par exemple, sont effectués sur des machines parallèles de type CRAY T3E, SGI ORIGIN 2000, et IBM SP4. Ensuite, un processeur est associé à chaque code grâce à des instructions spécifiques MPI ou PVM. Les échanges entre processeurs (donc entre codes) sont effectués grâce à des instructions d'envoi et de réception. La bibliothèque MPI par exemple dispose de sous-routines telles que `MPL_[R, S, B]SEND()` et `MPI_RECV()`.

### - Récapitulatif

En résumé, la mise en œuvre du couplage faible proprement dit nécessite de :

- choisir un algorithme de couplage (CSS, GCSS, ISS avec ou sans sous-cyclage . . . ) adapté à la physique du problème couplé ;
- choisir le champ de pression à transférer [103] en rapport avec la précision du schéma couplé ;
- choisir une bibliothèque de calcul parallèle (PVM, MPI. . . ). Ce choix dépend de la machine ou du cluster sur lequel les calculs seront effectués ;
- valider le nouveau code obtenu (section suivante).

## 8.5 Validation du couplage : cas du “flutter” (flottement)

### 8.5.1 Position du problème et analyse théorique

Ce cas-test classique en aéroélasticité consiste en l'étude de la stabilité d'une plaque semi-infinie placée dans un écoulement supersonique [53]. D'un point de vue numérique, ce cas-test constitue une validation de la “partie couplage” des codes fluide et structure : il permet en effet

d'estimer l'amortissement numérique introduit lors du couplage ainsi que le "calage en temps des deux codes".

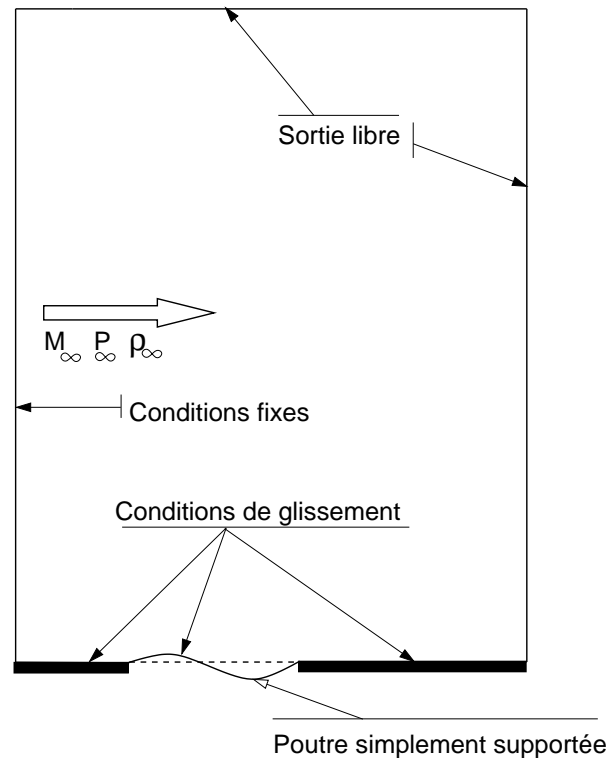


FIG. 8.17 – Configuration étudiée.

Une plaque semi-infinie, modélisable par une poutre, est placée dans un écoulement supersonique (cf. figure 8.17) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Masse volumique à l'infini :  $\rho_\infty = 0.4 \text{ kg.m}^{-3}$
- Pression à l'infini :  $P_\infty = 13000 \text{ Pa}$

La plaque, dont les propriétés du matériau sont les suivantes :

- Module d'Young :  $E = 7.728 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$
- Epaisseur :  $h = 1.35 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Longueur :  $L = 0.5 \text{ m}$
- Masse volumique :  $\rho_s = 2710 \text{ kg.m}^{-3}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$

est simplement supportée à ses extrémités. Plus précisément, cette plaque est soumise à la pression  $P(x, t)$  du fluide sur sa partie supérieure et à une pression constante  $P = P_\infty$  sur sa partie inférieure.

Le calcul de la valeur théorique des conditions critiques de "flutter" repose sur l'équation de la

dynamique d'une poutre en flexion, donnée par :

$$\rho_s b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E b h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b \Delta P(x, t) = 0 \quad (8.18)$$

où  $b$  est la profondeur de la poutre (choisie unitaire),  $w$  la composante verticale du déplacement et  $\Delta P(x, t) = P(x, t) - P_\infty$  les efforts aérodynamiques résultants. Ce dernier terme peut être approximé, selon la théorie des petites perturbations<sup>8</sup> (TPP) [7], par :

$$\Delta P(x, t) = \alpha \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (8.19)$$

où  $u_\infty$  et  $M_\infty$  sont respectivement la vitesse du fluide à l'infini et le nombre de Mach qui lui est associé. Les conditions aux limites pour une poutre simplement supportée s'écrivent :  $w(x = 0) = w(x = L) = \partial^2 w / \partial x^2(x = 0) = \partial^2 w / \partial x^2(x = L) = 0$ . Notons que l'équation (8.18) n'est valable que dans le cadre des petits déplacements ( $w < h/2$ ). Par la suite, nous étudions le système formé des équations mathématiques (8.18) et (8.19). Cette analyse nous servira de référence lors du couplage de codes.

Nous choisissons d'étudier le système précédent en ramenant l'équation (8.18) à un problème aux valeurs propres où intervient le paramètre de charge  $\alpha$ , fonction du nombre de Mach  $M_\infty$ . En effet, cette méthode met bien en évidence l'influence du nombre de Mach sur les fréquences propres de la structure. Il est également possible de résoudre cette équation par différences finies (*cf.* Annexe K).

L'application de la méthode des éléments finis à l'équation (8.18) conduit à la forme générale suivante :

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] + \alpha[K_p])\{W\} = \{0\} \quad (8.20)$$

où  $[M]$  est la matrice masse globale,  $[K]$  la matrice de rigidité globale,  $[K_p]$  la matrice de charge externe globale issue de la théorie des petites perturbations (TPP) et  $\{W\}$  le vecteur solution des déplacements nodaux verticaux. Les matrices  $[M]$  et  $[K]$  utilisées sont celles de l'élément de poutre de Bernoulli dont une description figure dans la référence [12].

L'écriture de  $\{W\}$  sous forme modale :

$$\{W\}(x, t) = \{\overline{W}\}(x) e^{i\omega t} \quad ; \quad \omega : \text{pulsation}$$

conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$(([K] + \alpha[K_p]) - \lambda[M])\{\overline{W}\} = \{0\} \quad (8.21)$$

où  $\lambda = \omega^2$  est la valeur propre associée au mode propre  $\{\overline{W}\}$ .

Ainsi, nous pouvons considérer que les efforts aérodynamiques contribuent à modifier la rigidité naturelle de la structure. Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire en l'absence d'efforts aérodynamiques, la résolution de (8.21) fournit pour les deux premières fréquences propres naturelles ( $f_n = \omega_n/2\pi$ )

---

8. Appelée "théorie du piston" par les aéroélasticiens.

de la plaque semi-infinie  $f_1 = 13 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 52 \text{ Hz}$ , ce qui est en très bon accord avec les valeurs théoriques ( $13.07 \text{ Hz}$  et  $52.30 \text{ Hz}$ ) déduites de :

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 L^4}} \quad \text{avec} \quad m_0 = \rho_s b h \quad \text{et} \quad D = \frac{E b h^3}{12} \quad (8.22)$$

où  $\omega_n$  représente la  $n^{\text{ième}}$  pulsation propre.

Lorsque le paramètre  $\alpha$  varie, les fréquences propres sont modifiées (*cf.* figure 8.18). Ainsi lorsque  $\alpha$  augmente (*i.e.* lorsque  $M_\infty$  augmente), les deux premières fréquences propres de la structure tendent à se rapprocher jusqu'à se confondre (coalescence de mode) pour une valeur critique  $\alpha_c$  correspondant à l'apparition du phénomène de flutter. Dans notre cas, le nombre de Mach associé à la valeur critique  $\alpha_c$  vaut :  $M_{crit}^{th} = 2.11$  et la fréquence de coalescence des deux premiers modes est de  $42 \text{ Hz}$  environ. En deçà de cette valeur de  $\alpha$ , la structure adopte un comportement stable, et tend vers une position d'équilibre correspondant à sa position au repos. A l'approche de cette valeur, la dissipation d'énergie emmagasinée par la structure ralentit jusqu'à se stabiliser pour  $\alpha = \alpha_c$ . A ce stade, le mouvement de la structure est auto-entretenu, l'énergie captée par le premier mode est transmise au second mode sans dissipation<sup>9</sup>. Au delà de  $\alpha_c$ , les deux modes prennent des valeurs imaginaires et la structure adopte un comportement harmonique instable.

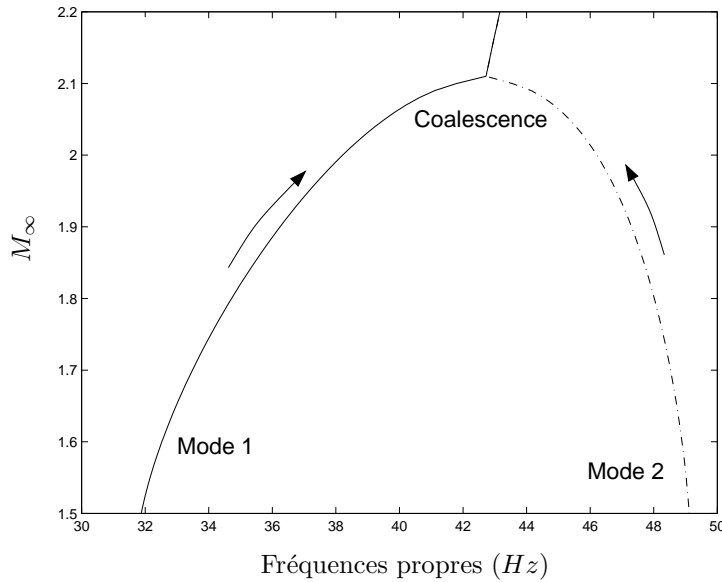


FIG. 8.18 – Evolution théorique des deux premières fréquences propres de la structure en fonction du nombre de Mach  $M_\infty$ . Résolution des équations (8.18) et (8.19) par analyse modale.

### 8.5.2 Couplage a priori

Dans cette partie, nous testons le code de structure REFLEX (décrit au chapitre 4) employé pour le couplage.

<sup>9</sup>. Ceci est dû à la valeur commune prise par ces deux derniers.



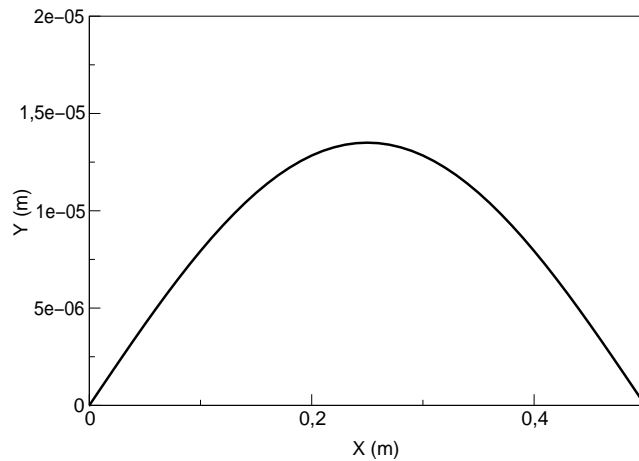


FIG. 8.19 – Premier mode propre naturel de la structure.

### - Principe

Le principe de ce couplage *a priori*, résumé sur la figure 8.20, est décrit ci-dessous :

1. Calcul du premier mode propre de la structure (*cf.* figure 8.19) et perturbation de la position de la structure suivant ce mode ;
2. Le code structure évalue la charge initiale  $\Delta P_{TPP}^0$  à partir de la théorie des petites perturbations ;
3. Le code structure calcule le nouveau déplacement  $w^{n+1}$  de la poutre soumise à la charge aérodynamique  $\Delta P_{TPP}^n$  ;
4. Ce même code calcule la nouvelle charge aérodynamique  $\Delta P_{TPP}^{n+1}$  à l'aide de la théorie des petites perturbations à partir du déplacement  $w^{n+1}$  ;
5. Mise à jour des grandeurs ;
6. Retour au point 3, jusqu'à atteindre l'instant final choisi ;
7. Examen de la réponse temporelle de la structure.

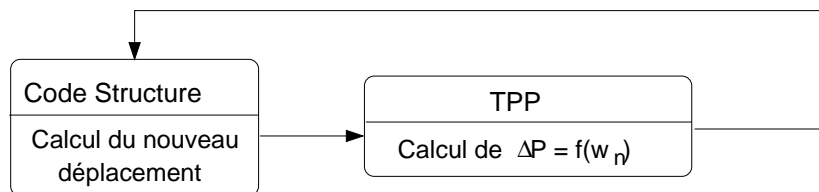


FIG. 8.20 – Couplage *a priori*, test du code structure. Schématisation des étapes 3 à 6.

### - Test du code structure

Ce test permet de vérifier le bon fonctionnement (schéma temporel...) du code structure REFLEX [11]. En effet l'équation résolue est une formulation éléments finis de (8.18) :

$$[M]\{\ddot{W}\} + [K]\{W\} = \{F\} \quad (8.23)$$

où le vecteur sollicitation  $\{F\}$  est déduit de la théorie des petites perturbations. Par conséquent, la solution obtenue par REFLEX doit coïncider avec celle établie à l'aide de la résolution par analyse modale.

Le code REFLEX emploie le schéma temporel de Newmark implicite pour lequel  $\alpha=\beta=0.5$  et utilise, pour représenter la structure, un modèle de poutre ne contenant que des termes linéaires et ne prenant pas en compte le cisaillement transversal, conformément à l'analyse théorique (élément de poutre de type Bernoulli). Le maillage de la structure comporte 50 éléments de type poutre. Les conditions aux limites sont résumées sur la figure 8.17. Le pas de temps choisi est de l'ordre de  $4 \times 10^{-6}$  s au cours de la simulation (même pas de temps que le calcul couplé suivant).

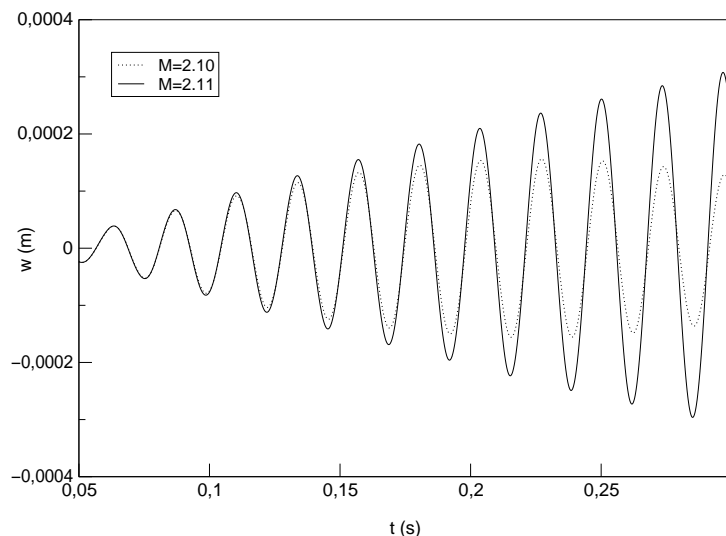


FIG. 8.21 – Evolution temporelle du déplacement vertical en  $x=0.25$  m. Couplage *a priori*. On notera que les déplacements obtenus vérifient bien l'hypothèse des petits déplacements.

La figure 8.21 expose l'évolution temporelle du déplacement en  $x=0.5$  m pour  $M_\infty=2.10$  et  $M_\infty=2.11$ . Les résultats obtenus sont en bon accord avec la théorie, ce qui démontre le bon comportement du code structure.

Ainsi, il ne nous reste qu'à introduire et valider un algorithme de couplage entre les codes fluide et structure.

### 8.5.3 Validation du couplage de codes

Le problème est maintenant résolu en couplant les codes fluide et structure. Il s'agit ici de valider l'algorithme de couplage de ces codes en estimant l'amortissement numérique introduit

ainsi que le “calage en temps des deux codes”.

Ce travail a également fait l’objet d’une collaboration avec l’équipe Calcul Scientifique Coopératif de l’IDRIS dans le cadre du Projet Eurogrid [65] (voir l’annexe L). Un des avantages de l’approche basée sur CORBA, qui a été utilisée par l’IDRIS, est de permettre l’interopérabilité entre applications et calculateurs hétérogènes. L’ensemble des trois modules (structure, fluide et visualisation) ont été installés sur trois centres (IDRIS - IBM SP3 - centre de calcul de l’université de Manchester - SGI O2000 et O3000 - et Forschungszentrum à Jülich - IBM RS6000 et grappe de machines Pentium sous Linux) et utilisés de façon interchangeable suivant les besoins. Dans les démonstrations publiques qui ont été faites, la visualisation tournait à l’IDRIS (France) ou bien à Manchester (Angleterre), le code structure à Manchester ou bien à l’IDRIS et le code fluide à Jülich (Allemagne).

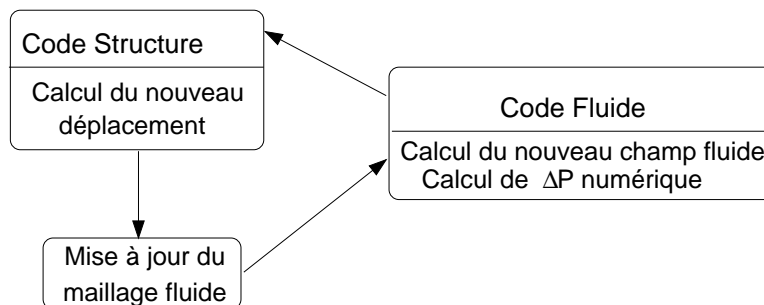


FIG. 8.22 – Couplage des codes fluide et structure. Schématisation des étapes 6 à 9.

Comme précédemment, la détermination des conditions de flutter se fait en augmentant le nombre de Mach  $M_\infty$ , jusqu’à apparition de l’instabilité de la structure. La méthode de résolution utilisée pour chaque calcul est schématisée sur la figure 8.22. Contrairement au couplage *a priori*, la théorie des petites perturbations n’intervient pas : la charge aérodynamique  $\Delta P$  transmise au code structure pour construire le vecteur des sollicitations aérodynamiques  $\{F\}$  (cf. équation (8.23) est calculée par le code fluide. La structure influence le fluide et réciproquement. Le principe du couplage est similaire à celui exposé dans la section précédente :

1. Calcul du premier mode propre de la structure (cf. figure 8.19) et perturbation de la position de la structure suivant ce mode ;
2. Modification du maillage fluide afin de coïncider avec la position perturbée de la structure ;
3. Calcul du champ fluide initial convergé : obtention d’un champ fluide pour un nombre de Mach infini donné et une structure figée ;
4. Libération de la structure (la structure retrouve sa flexibilité) ;
5. Le code fluide calcule la charge initiale  $\Delta P_{num}^0$  ;
6. Le code structure calcule le nouveau déplacement  $w^{n+1}$  de la poutre soumise à la charge aérodynamique  $\Delta P_{num}^n$  ;
7. Le code structure transmet  $w^{n+1}$  au code fluide. Le maillage fluide est modifié en conséquence et le nouveau champ de pression ainsi que la charge aérodynamique résultante

$\Delta P_{num}^{n+1}$  sont calculés. Le code fluide transmet  $\Delta P_{num}^{n+1}$  à la structure.

8. Mise à jour des grandeurs ;
9. Retour au point 6, jusqu'à atteindre l'instant final choisi ;
10. Examen de la réponse temporelle de la structure.

Nous avons choisi par simplicité de faire communiquer les codes fluide et structure suivant un simple algorithme de type CSS sans sous-cyclage.

Les problèmes de stabilité de cet algorithme ne sont généralement significatifs que si un sous-cyclage trop grand est introduit. Par ailleurs, cet algorithme reste précis si les communications s'effectuent à chaque pas de temps fluide (et lorsque ce dernier code est explicite). Ceci explique notre choix.

Par ailleurs, le maillage du fluide est de  $(110 \times 126)$  mailles et coïncide avec le maillage de la structure à l'interface. De plus, le maillage fluide n'est modifié que localement au niveau de l'interface. Le CFL du fluide est fixé à 0.8 ( $\Delta t$  de l'ordre de  $4 \times 10^{-6}$  s au cours de la simulation). Enfin les transferts d'information entre les deux codes sont effectués grâce à la librairie de calcul parallèle MPI.

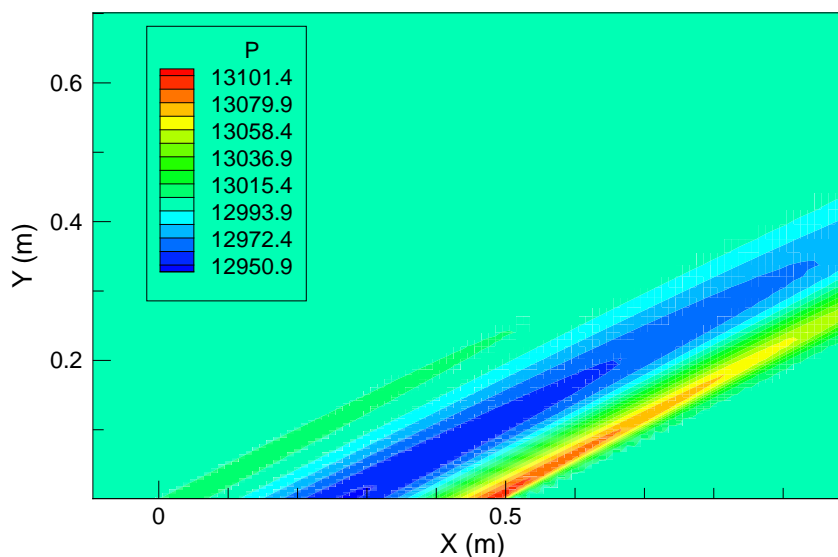


FIG. 8.23 – Champ de pression au cours de la simulation du flutter ( $M_\infty = 2.19$ ).

Plusieurs calculs (différents codes fluide employés ...) ont été effectués. Les résultats présentés ci-après ont été obtenus avec le code fluide WENO. Le maillage de la structure, l'élément de poutre et le schéma temporel utilisés par REFLEX ainsi que les conditions limites sont inchangés.

La figure 8.23 illustre le champ de pression obtenu à un instant quelconque de la simulation pour  $M_\infty = 2.19$ . Les variations de pression (compression suivie d'une détente et d'une seconde compression) induites par le mouvement de la structure, *i.e.* par les changements de pente successifs de la paroi sont clairement visibles. Pour ce nombre de Mach très proche du nombre de Mach critique, la structure répond sur le "mode flutter" (figure 8.24), résultat de la coalescence

de ses deux premiers modes. On remarquera de plus que ce mode n'a plus de symétrie : il possède un extremum vers  $x = 0.35 \text{ m}$ .

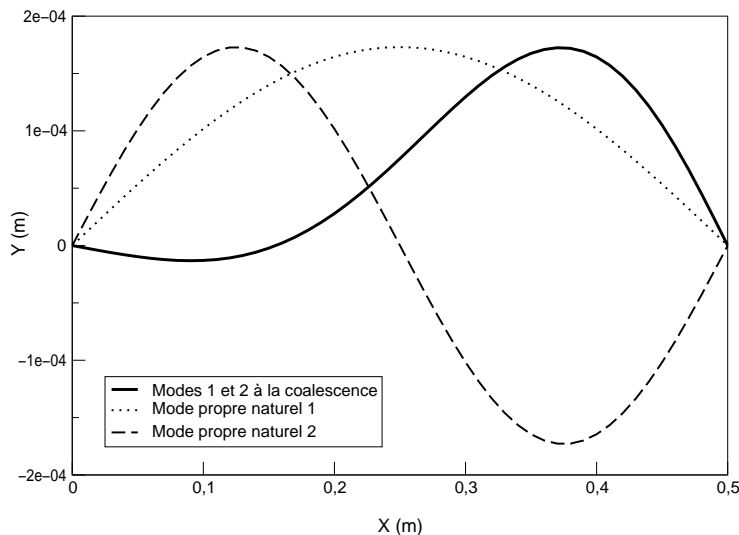


FIG. 8.24 – Modes propres 1 et 2 à la coalescence. Les modes propres naturels 1 et 2 sont représentés pour comparaison.

D'autre part, l'évolution temporelle des déplacements de la structure (figure 8.25) met en évidence un amortissement de ceux-ci pour  $M_\infty = 2.18$  et une amplification pour  $M_\infty = 2.19$ . On en conclut que le nombre de Mach critique  $M_{cr}^{num}$  est d'environ 2.19 ce qui est en bon accord avec la valeur théorique ( $M_{cr}^{th} = 2.11$  soit 3.79 % d'erreur). De plus, une transformée de Fourier du signal à  $M_\infty = 2.19$  indique que la fréquence flutter est de 43 Hz. L'écart entre les résultats théorique et numérique peut en partie être expliqué par le fait que la solution analytique résulte d'un modèle monodimensionnel simplifié (pas de prise en compte des effets de mémoire) alors que le code fluide prend en compte les effets bidimensionnels.

En dernier lieu, remarquons que des conclusions supplémentaires peuvent être tirées de ces calculs :

- Les codes fluide précis au premier ordre ne sont pas adaptés pour prédire les conditions de flutter : ils sont trop diffusifs, ce qui retarde l'apparition du phénomène ( $M_{cr}^{num} = 2.26$  soit 7.11 % d'erreur) ;
- La suppression du limiteur effectuée par Lefrançois [75] afin de conserver la précision du schéma dans les zones de forts gradients, n'est pas applicable pour les schémas TVD : les instabilités numériques générées ont conduit à une divergence des calculs ;

Le schéma utilisé dans [75] est le schéma de Lax-Wendroff employant la correction de flux FCT, c'est cette correction qui est supprimée dans cette dernière étude.

- L'utilisation d'un code TVD précis au second ordre en espace et en temps conduit à des résultats très proches de ceux obtenus avec un schéma WENO ( $M_{cr}^{num} = 2.20$  soit 4.26 % d'erreur) précis au cinquième ordre. Etant donné qu'un code fluide WENO du cinquième ordre en espace est beaucoup plus coûteux en temps de calcul (environ quatre fois plus cher)

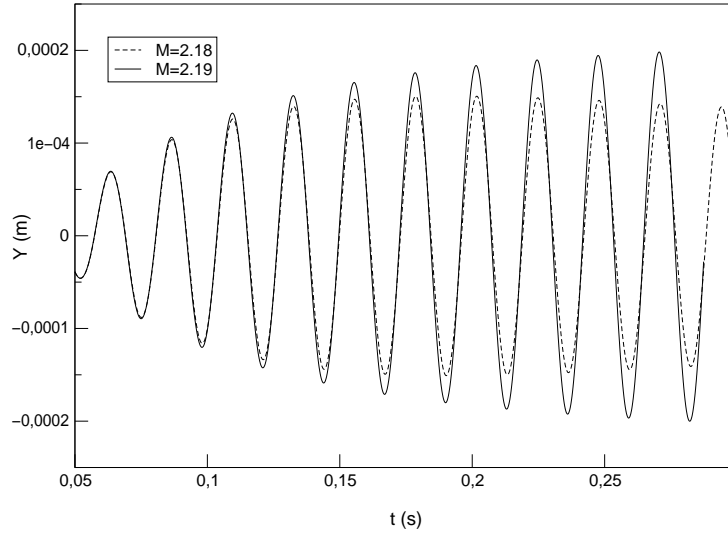


FIG. 8.25 – Evolution temporelle du déplacement vertical en  $x=0.25$  m.

qu'un code TVD du second ordre et n'apporte pas de modification significative du nombre de Mach critique par rapport à ce dernier, nous estimons qu'un schéma au second ordre en espace et en temps est suffisant pour obtenir une bonne description des phénomènes aéroélastiques tels que le flutter. Ceci est en accord avec les résultats obtenus par différents auteurs [75, 15, 102] avec des schémas précis au second ordre. Notons, toutefois, que l'utilisation d'un code WENO dans le cadre de cette étude se justifie par ses qualités dans des cas d'écoulements complexes (interaction d'ondes de choc, lignes de glissement, instabilités transitionnelles...) tels ceux présents dans les tuyères de moteur fusée [90]. Son utilisation n'est pas motivée par le couplage proprement dit. D'autre part, bien qu'un schéma de type WENO puisse être utilisé en accord avec une loi GCL adaptée à son schéma d'intégration, la précision du schéma couplé ne peut être au mieux qu'à l'ordre 2 [57]. De plus, il est très difficile de conserver la précision d'un schéma d'ordre élevé tel que le schéma WENO à proximité des frontières du domaine de calcul. Ceci explique les faibles écarts entre les résultats des codes WENO et TVD pour ce type de problème et appuie notre précédente conclusion.

- La prise en compte de la vitesse du maillage dans le code fluide dans ce cas d'étude du flutter n'est pas fondamentale (si celle-ci est annulée, le nombre de Mach critique reste pratiquement inchangé).

## 8.6 Conclusion

Le but de ce chapitre était principalement de décrire la mise en œuvre du couplage dit "faible". Ce type de couplage repose sur un dialogue entre deux codes dont l'un est dédié à la structure et l'autre au fluide. Très souple, il préserve la modularité de chacun des codes de calcul et permet de bénéficier des méthodes les plus performantes dans chacune des disciplines.

Deux étapes importantes dans la mise en œuvre de ce couplage ont été distinguées. La première

consiste à adapter le code fluide aux domaines évolutifs alors que la seconde a pour objectif d'introduire dans chaque code les instructions nécessaires à leur dialogue.

La première section de cette étude a donc été consacrée aux méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (techniques de changement de repère, techniques ALE. . .). Un intérêt particulier a été porté à la technique dite de "maillage dynamique" et à la loi de conservation géométrique (GCL) que celle-ci doit respecter. Par la suite, différentes méthodes permettant de faire évoluer le maillage en fonction de la position de l'interface (formulation à trois champs de Farhat, analogie des ressorts. . .) ont été évoquées. Plusieurs exemples de validation (compression dans un piston, écoulement bidimensionnel autour d'un projectile mobile) ont été présentés. Des codes fluide reposant sur des schémas robustes et précis, ont été adaptés aux milieux évolutifs et utilisés dans ces exemples.

La mise en pratique des transferts d'information entre les deux codes (*i.e.* la seconde étape de cette méthodologie) a fait l'objet de la section 8.4. Les principaux algorithmes de couplage faible (algorithmes décalés de type CSS, avec ou sans sous-cyclage. . .) ont été rappelés et une technique informatique simple utilisant les bibliothèques parallèles exposée. Enfin, la dernière section a été consacrée à la validation de l'outil de calcul couplé obtenu. Un cas-test classique en aéroélasticité, le flutter, a été utilisé. Ce test simple à réaliser nous a permis non seulement de valider l'algorithme de couplage choisi mais aussi d'investir des phénomènes physiques spécifiques aux interactions fluide-structure (coalescence de mode. . .). Comme nous l'avons vu, ce cas-test permet de plus d'étudier l'influence de plusieurs paramètres numériques sur l'apparition des conditions critiques de flutter. Ainsi, il est ressorti de nos calculs qu'un couplage utilisant un code TVD précis au second ordre en espace conduisait à une estimation des conditions de flutter proche de celle d'un schéma WENO précis au cinquième ordre.

Troisième partie

**Applications aux tuyères  
supersoniques**





## Chapitre 9

# Stabilité aéroélastique d'un divergent flexible en présence d'un choc

*Ce chapitre constitue une application et une analyse des modèles de stabilité aéroélastique exposés au chapitre 3. Rappelons que notre objectif est d'étudier la stabilité d'un divergent souple suite à une perturbation du choc de décollement présent au sein de l'écoulement fortement surdétendu. Dans un premier temps, les modèles de stabilité sont appliqués à une configuration bidimensionnelle plane. L'influence de plusieurs paramètres sur la stabilité de la structure est analysée. Les résultats obtenus sont ensuite confrontés aux résultats de simulations numériques couplées. En dernier lieu, les modèles sont utilisés pour étudier la stabilité de la tuyère souple étudiée expérimentalement par l'ONERA dans le cadre du programme ATAC.*

### 9.1 Applications des modèles de stabilité aéroélastique à une tuyère bidimensionnelle plane

#### 9.1.1 Configuration étudiée

La configuration étudiée est une tuyère bidimensionnelle plane (*cf.* figure 9.1). Lorsque cela n'est pas précisé, le demi-angle du divergent est d'environ 22 degrés, ce qui donne un rapport de section de  $\epsilon = A_s/A_{col} \simeq 8.5$ . La longueur selon  $x$  du divergent de demi-angle  $\alpha = 22^\circ$ , notée  $L$ , ainsi que la demi-hauteur du col,  $h_{col}/2$ , seront prises comme longueurs de référence pour adimensionner les résultats.

Nous portons ici un intérêt particulier aux facteurs favorisant l'instabilité d'un mode quelconque. Ainsi, afin d'évaluer l'influence des conditions aux limites et des propriétés du matériau de la structure sur les résultats, trois cas ont été étudiés (voir tableau 9.1). Concernant les conditions aux limites, seul le divergent est flexible : le col est encasté et l'extrémité du divergent est soit libre soit encastée, suivant le cas considéré. Les propriétés du matériau sont identiques pour les cas 1 et 2. Pour le cas 3, le module d'Young est divisé par deux et l'épaisseur est diminuée. Ces propriétés ont été choisies de sorte à faire apparaître des comportements instables.

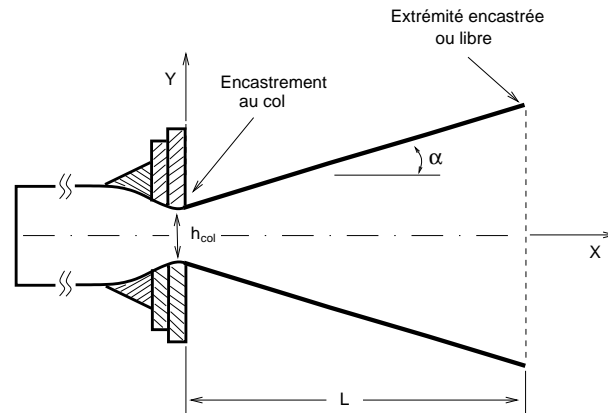


FIG. 9.1 – Configuration étudiée :  $L/h_{col} \simeq 9.3$ ,  $\epsilon = A_s/A_{col} \simeq 8.5$  et  $\alpha \simeq 22^\circ$ .

	Col	Sortie	$E(N.m^{-2})$	$h(mm)$	$\rho_s (kg.m^{-3})$
Cas 1	encastrement	libre	$4.4 \times 10^{11}$	30.0	2000
Cas 2	encastrement	encastrement	$4.4 \times 10^{11}$	30.0	2000
Cas 3	encastrement	encastrement	$2.2 \times 10^{11}$	10.0	2000

TAB. 9.1 – Conditions aux limites et propriétés du matériau en fonction du cas considéré.  $E$  module d'Young,  $h$  épaisseur,  $\rho_s$  masse volumique (le coefficient de Poisson,  $\nu$ , est nul pour les trois cas).

Nous étudions, en premier lieu, la stabilité des configurations précédentes (cas 1 à 3) à l'aide du modèle de Pekkari et de sa généralisation (appelée "modèle étendu"). Certains de ces calculs seront, par la suite, effectués grâce au couplage de code.

### 9.1.2 Obtention des grandeurs initiales

Comme nous l'avons vu précédemment, les données nécessaires au calcul des fréquences propres aéroélastiques  $\Omega/(2\pi)$  sont de deux types : les données relatives au divergent (profil, modes et fréquences propres naturels...) et des données concernant l'écoulement (pression, masse volumique, vitesse et nombre de Mach).

La structure est modélisée par 100 éléments<sup>1</sup> de poutre<sup>2</sup>. Les trois premières fréquences propres naturelles ( $w_k/2\pi$ ,  $k \in [1,3]$ ) obtenues pour chacun des cas considérés sont reportées dans le tableau 9.2. Les résultats montrent bien que la structure se rigidifie lorsque son extrémité est encastrée (comparer les cas 1 et 2) alors qu'elle devient plus souple quand son module d'Young et son épaisseur sont diminués (comparer les cas 2 et 3). Les trois premiers modes propres naturels

1. Ce nombre d'éléments vérifie la convergence en maillage.

2. Il s'agit d'un élément à trois degrés de liberté par nœud, prenant en compte le cisaillement transversal [12].

associés à ces fréquences sont présentés sur les figures 9.2.a et 9.2.b.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Mode 1	9.48	60.30	14.22
Mode 2	59.39	166.1	39.22
Mode 3	166.25	325.63	76.94

TAB. 9.2 – Fréquences propres naturelles (en Hz) obtenues pour les trois cas étudiés.

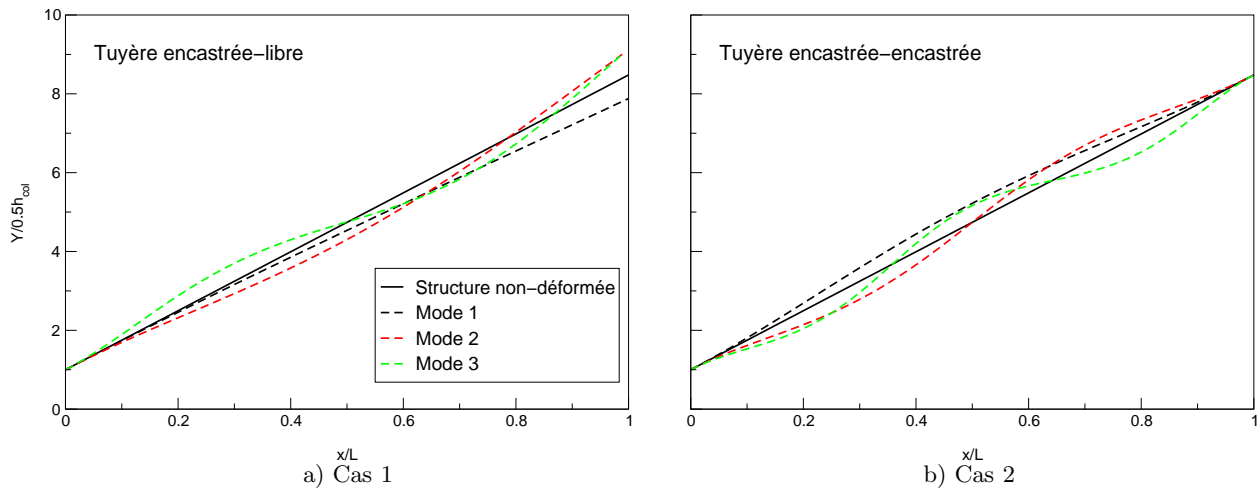


FIG. 9.2 – Modes propres naturels (le cas 3 possède des modes propres équivalents au cas 2).

Le fluide considéré est l'air. Sa température totale  $T_c$  est de 270 K. La pression atmosphérique est de 1 bar. Concernant la position du choc, celle-ci est déterminée grâce aux relations unidimensionnelles des chocs droits. Elle est fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  (figure 9.3). Le choc pris en compte dans cette partie est donc un choc de recompression dans un écoulement eulérien et non un choc de décollement. Les modèles de stabilité sont, cependant, tout à fait applicables pour déterminer la stabilité de la structure en fonction de la position de ce choc. En effet, seul le critère de décollement utilisé dans les modèles pour évaluer la position du choc fait référence à un choc de décollement. Les modèles sont donc utilisables pour un écoulement eulérien à condition de déterminer la position du choc grâce aux relations unidimensionnelles des chocs droits. Notons que dans ce cas  $x_i^{eq}$  sera remplacé par  $x_{choc}$  puisque le décollement n'existe pas. Enfin, en amont du choc, le profil de pression est obtenu grâce aux relations analytiques des écoulements adiabatiques unidimensionnels.

### 9.1.3 Influence des conditions aux limites

Afin de tester l'influence des conditions aux limites imposées à la paroi du divergent, nous comparons les résultats obtenus pour les cas 1 et 2. Les figures 9.4 et 9.5 exposent, sous deux formes différentes, les résultats des modèles pour le cas 1. Avant de commenter cette figure, il est

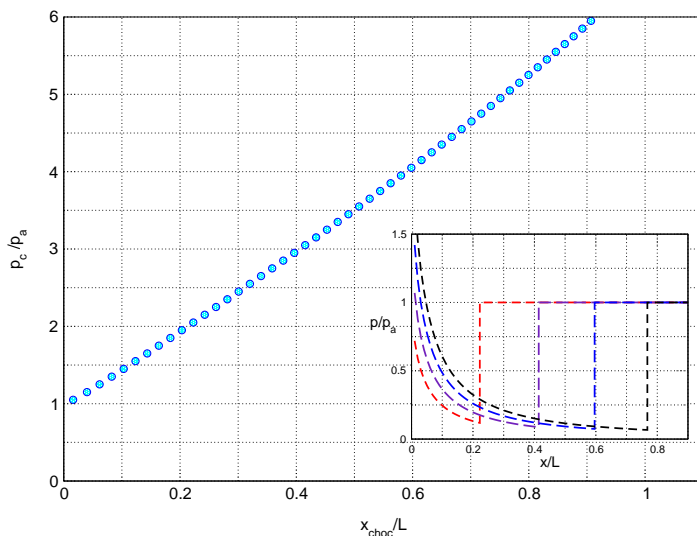


FIG. 9.3 – Position du choc en fonction du rapport de pression et profils de pression pariétale associés pour les rapports  $p_c/p_a = 2.0, 3.0, 4.0$  et  $5.0$ . Théorie 1D, la pression ambiante  $p_a$  est supposée constante, seule la pression chambre  $p_c$  varie.

important de rappeler la différence entre les fréquences (resp. modes) propres naturelles  $\omega/(2\pi)$  et les fréquences (resp. modes) propres aéroélastiques  $\Omega/(2\pi)$ . En l'absence d'amortissement, les fréquences propres naturelles d'un système correspondent à ses fréquences de résonance [54]. Lorsque cette même structure est soumise à un écoulement, ses fréquences de résonance sont modifiées et correspondent aux fréquences propres aéroélastiques du système. Par définition, les fréquences propres naturelles  $\omega/2\pi$  ne varient donc pas en fonction de la position du choc, contrairement aux fréquences aéroélastiques.

La figure 9.4 montre l'évolution de la partie réelle de  $\Omega_1/(2\pi)$  en fonction de  $x_{choc}$ . Les fréquences aéroélastiques des modes 2 et 3 varient peu<sup>3</sup> et ne présentant pas d'instabilité, leurs évolutions ne sont pas représentées. Pour faciliter l'analyse des résultats, la première fréquence propre naturelle  $\omega_1/(2\pi)$  a été reportée sur cette même figure. On constate donc que, quel que soit le modèle aéroélastique utilisé, la partie réelle de  $\Omega_1/(2\pi)$  décroît lorsque le choc se déplace vers l'aval. Jusqu'à  $x/L=0.38$ ,  $\Omega_1$  reste proche de  $\omega_1$  : l'écart entre ces deux grandeurs est inférieur à 10%. Pour des positions du choc situées plus en aval, les effets aéroélastiques deviennent significatifs<sup>4</sup>. Enfin, à partir de  $x/L=0.68$  et jusqu'à la fin du divergent,  $\Omega_1$  devient imaginaire pure. Ceci traduit une instabilité statique de la structure (flambement). Remarquons que le fait que les deux modèles (celui de Pekkari et son extension) donnent des résultats similaires n'est pas surprenant puisqu'ils sont tous deux adaptés pour prédire les instabilités statiques.

La figure 9.5 présente les résultats sous la même forme que celle utilisée par Pekkari dans son étude [98]. Le rapport représenté est  $(\Omega/\omega)^2/|\Omega/\omega|$  où  $||$  désigne le module. Ce rapport est négatif lorsque  $\Omega$  est imaginaire pure et vaut 1 lorsque la fréquence aéroélastique correspond à la fréquence naturelle. D'un point de vue mécanique, on peut considérer que des valeurs de ce rapport supérieures à 1 ( $\Omega > \omega$ ) correspondent à une augmentation de la rigidité de la structure

3. Ces modes évoluent entre 54.9 Hz et 60.9 Hz et 165.2 Hz et 167.2 Hz respectivement.

4. Nous avons choisi ce seuil approximatif de 10% pour qualifier les effets aéroélastiques de "significatifs".

sous l'effet du fluide (via la matrice de rigidité aérodynamique  $[K_p]$ ). A l'inverse, un rapport inférieur à 1 peut être vu comme un assouplissement de la structure. Cette représentation permet de juger de la stabilité de plusieurs modes (ici 1 à 3) sans que la disparité de ceux-ci ne puisse gêner l'exploitation des résultats (pas de problème d'échelle). On voit d'ailleurs bien sur cette figure que les modes 2 et 3 ne présentent pas d'instabilité et que les effets aéroélastiques sont négligeables (inférieurs à 10%) pour ces modes.

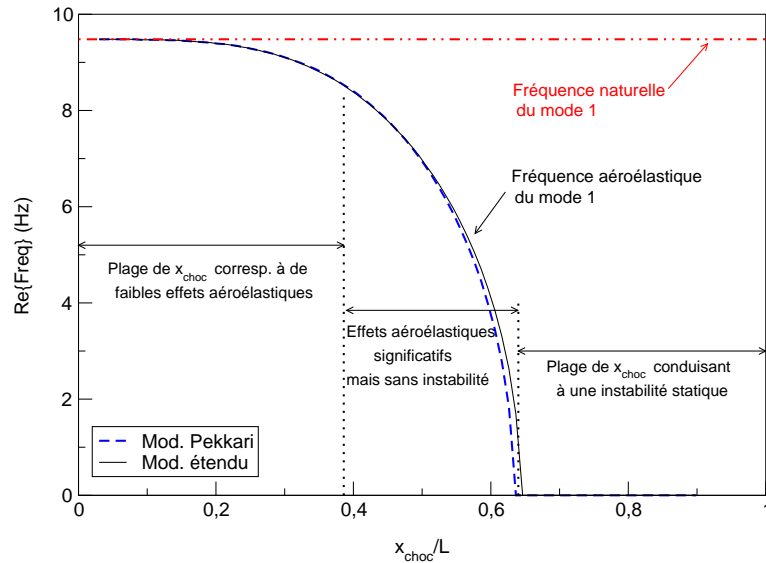


FIG. 9.4 – Evolution de la première fréquence propre aéroélastique ( $Re$  : partie réelle) en fonction de la position du choc. Cas 1.

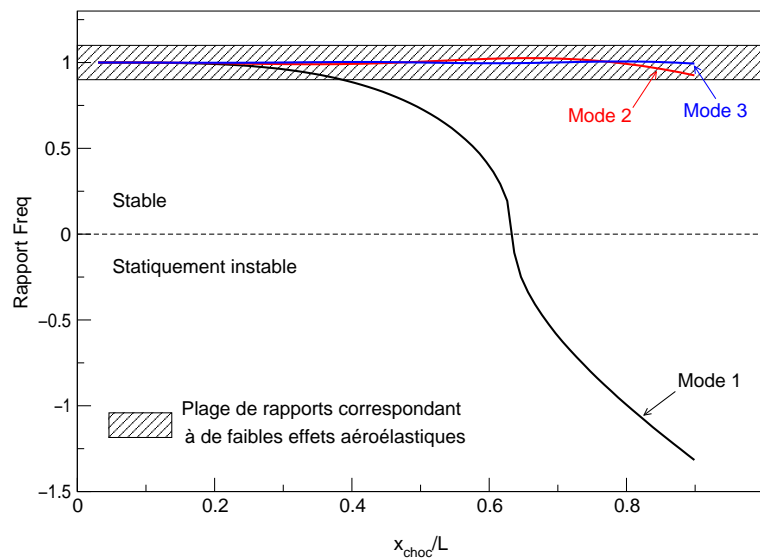


FIG. 9.5 – Evolution du rapport  $(\Omega_1/\omega_1)^2/|\Omega_1/\omega_1|$  en fonction de la position du choc (cas 1).

Ces premiers résultats indiquent, en résumé, que le premier mode du divergent est d'autant

plus instable que le choc s'approche de la sortie de la tuyère. Pour comprendre ce point, il est judicieux de revenir à la formulation simplifiée du modèle de base :

$$\left(\frac{\Omega_k}{\omega_k}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A}{R_k}\right)_{x_{choc}}$$

avec, pour le coefficient d'influence aéroélastique :

$$A(x_{choc}) = (p_a - p_i) \left[ \frac{\rho_\infty(x) U_\infty^2(x)}{\left(-\frac{dp_\infty(x)}{dx}\right) \sqrt{M_\infty^2(x) - 1}} \right]_{x_{choc}}$$

et pour le coefficient d'influence dynamique du mode  $k$  :

$$R_k(x_{choc}) = \left[ \frac{\omega_k^2}{\frac{1}{2} \frac{\partial (X_n^k(s))^2}{\partial s}} \right]_{x_{choc}}$$

Ce coefficient contrôle la variation des fréquences propres aéroélastiques par rapport aux fréquences naturelles. En effet, si l'on considère le coefficient d'influence aéroélastique  $A$ , celui-ci est toujours positif et croissant en fonction de  $x_{choc}$  (figure 9.9.b). Par conséquent,

$$R_k > 0 \Rightarrow (\Omega_k^2 < \omega_k^2) \quad \text{et} \quad R_k < 0 \Rightarrow (\Omega_k^2 > \omega_k^2)$$

Le signe de  $R_k$  varie avec  $x_{choc}$  de la même façon que  $\partial(X_n^k)^2/\partial s$ . Les termes  $\partial(X_n^k)^2/\partial s$  associés aux deux premiers modes du cas 1 sont représentés sur la figure 9.7.a. Comme nous venons de le voir, cette figure permet de mieux comprendre l'évolution des fréquences aéroélastiques : il suffit pour cela de repérer les positions du choc correspondant au changement de signe de  $\partial(X_n^k)^2/\partial s$  pour définir les plages où  $\Omega_k^2 > \omega_k^2$  et  $\Omega_k^2 < \omega_k^2$  pour chaque mode  $k$ . Dans le cas du premier mode,  $\partial(X_n^1)^2/\partial s$  (resp.  $R_1$ ) atteint son maximum (resp. minimum) positif en bout de tuyère, ce qui correspond également à la position du choc pour laquelle  $A$  est maximum. Ceci favorise l'instabilité du mode 1 à cet endroit. La même remarque est valable pour le mode 2 mais celui-ci n'est pas instable. Ceci résulte de la valeur de sa pulsation propre naturelle  $\omega_2$ . En effet,  $R_k$  est proportionnel à  $\omega_k^2$  donc  $R_2 > R_1$ , ce qui explique que le mode 1 soit instable en bout de tuyère contrairement au mode 2. On comprend, par conséquent, qu'augmenter  $R_k$  peut permettre de supprimer une éventuelle instabilité du mode  $k$ . D'où l'idée d'étudier, entre autres, l'effet des conditions aux limites de la structure.

Il s'agit donc maintenant d'analyser les résultats du cas 2 (figure 9.6). Il apparaît qu'aucun des modes n'est instable dans ce cas. Ceci est dû à l'augmentation des fréquences naturelles  $\omega_k/(2\pi)$  engendrée par la modification des conditions aux limites et de leurs modes propres naturels ( $X_n^k$ ) associés (figure 9.7.b). On remarque aussi qu'il reste possible d'avoir une instabilité statique du mode 1 (notamment), mais en début de tuyère cette fois ( $R_1$  faible et positif). Cette instabilité statique sera, sans doute, plus difficile à faire apparaître. En effet, dans cette zone, le coefficient  $A$  n'est généralement pas fort car inversement proportionnel au gradient de pression qui lui est important. On note aussi qu'entre  $x/L \simeq 0.5$  et  $0.7$ ,  $R_1$  est négatif (donc  $\Omega_1^2 > \omega_1^2$ ) alors

que  $R_2$  est positif (donc  $\Omega_2^2 < \omega_2^2$ ) : les deux fréquences aéroélastiques se rapprochent. La même remarque est valable pour d'autres modes mais pour des plages de positions du choc différentes. Il y a donc maintenant un risque d'instabilité dynamique par coalescence de modes si ceux-ci ont des fréquences naturelles proches (voir cas 3).

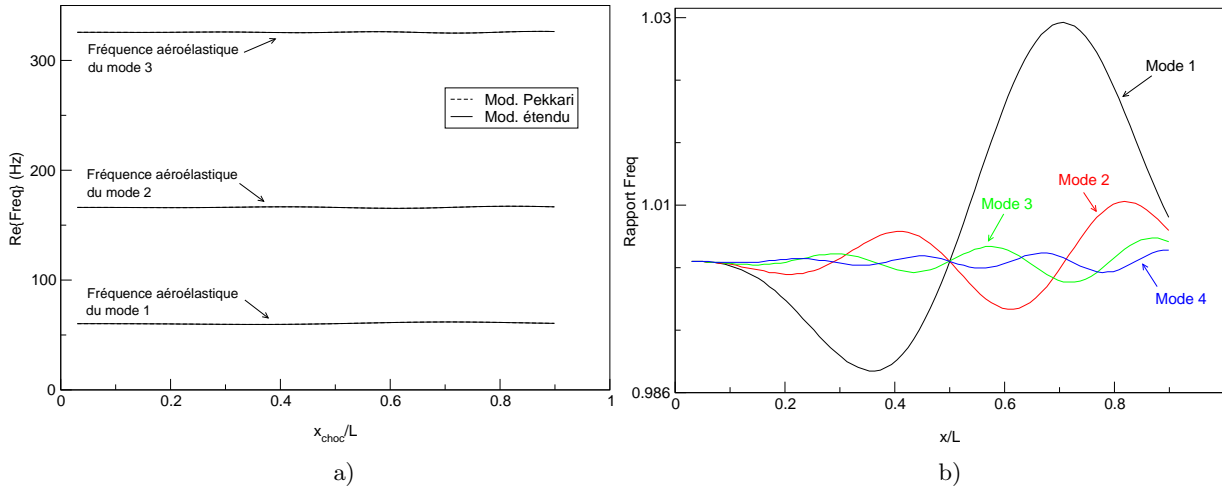


FIG. 9.6 – Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport  $(\Omega/\omega)^2/|\Omega/\omega|$  b). Cas 2

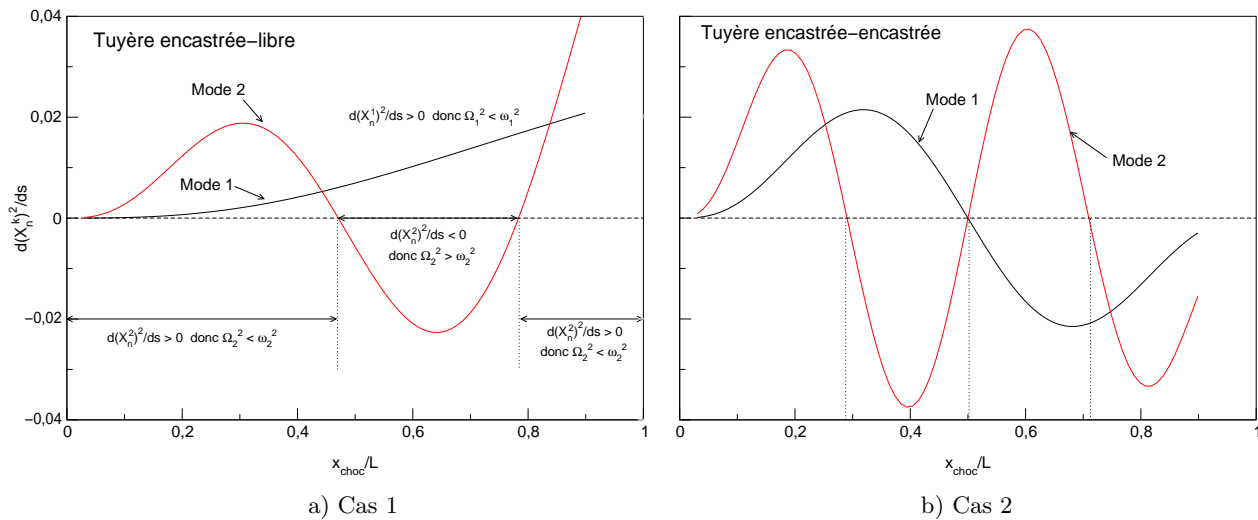


FIG. 9.7 – Evolution de  $\partial(X_n^k)^2/\partial s$  en fonction de  $x_{choc}$  pour les modes 1 ( $k = 1$ ) et 2 ( $k = 2$ ).

### 9.1.4 Influence des propriétés du matériau

Nous évaluons maintenant l'influence des propriétés du matériau sur la stabilité du système. Pour cela, nous comparons les résultats du cas 2 (figure 9.6.a) et ceux du cas 3 (figure 9.8).

Si nous avons vu que le cas 2 ne présentait pas d'instabilité, le cas 3, au contraire, fait apparaître des comportements instables des modes 1 et 2. Ceci est en accord avec ce que nous avons prévu en



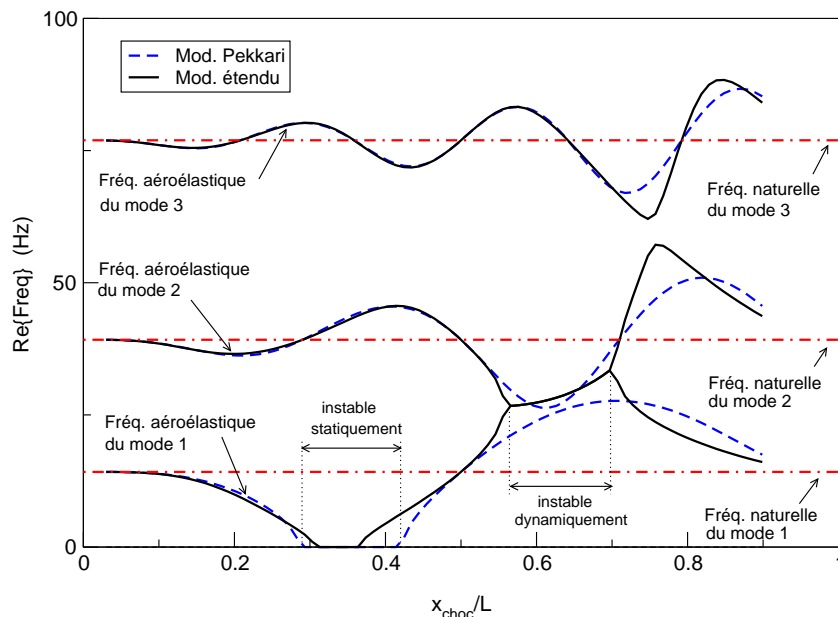


FIG. 9.8 – Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 3).

examinant en détails les résultats du cas 2. Ces différences s'expliquent, comme nous le pensions, par la variation des coefficients d'influence dynamique  $R_k$  (due, cette fois, à la modification des propriétés du matériau). Ces instabilités sont de deux types :

- une instabilité statique du mode 1 pour  $x_{choc}/L \in [0.3, 0.43]$  pour le modèle de Pekkari et  $x_{choc}/L \in [0.31, 0.36]$  pour le modèle étendu. Celle-ci est détectée par les deux modèles et correspond à une annulation de la fréquence  $\Omega_1/(2\pi)$ .
- une instabilité dynamique des modes 1 et 2 entre  $x_{choc}/L = 0.56$  et  $x/L = 0.69$  prévue uniquement par le modèle étendu. Cette instabilité est le résultat de la coalescence de ces deux modes.

Cette dernière instabilité a été confirmée par un calcul pas à pas utilisant les mêmes hypothèses que les modèles de stabilité<sup>5</sup>. Ce cas met ainsi en évidence la supériorité du modèle généralisé par rapport à celui de Pekkari en présence d'instabilités dynamiques.

Enfin, on remarque qu'en modifiant davantage les propriétés du matériau, une coalescence des modes 2 et 3 pourrait se produire en fin de tuyère ( $x/L \simeq 0.75$ ), car les fréquences  $\Omega_2/2\pi$  et  $\Omega_3/2\pi$  sont déjà proches en ce point.

### 9.1.5 Influence de l'angle

Un autre paramètre important de cette configuration est le demi-angle du divergent  $\alpha$ . Nous étudions ici son influence sur l'apparition des instabilités. Nous ne retenons donc que les cas

5. Plus précisément, nous intégrons directement l'équation (3.10) en utilisant le schéma temporel de Newmark. Il est important de remarquer qu'il ne s'agit pas d'un calcul couplé mais simplement de résoudre (3.10) autrement que par une analyse modale. Les hypothèses de modèles sont conservées : aucun code fluide n'est introduit à ce niveau.

1 et 3 puisque seuls ces cas ont montré des comportements instables pour  $\alpha = \alpha_1 \simeq 22^\circ$ . Nous répétons les calculs précédents avec, cette fois,  $\alpha_2 = 16^\circ$  et  $\alpha_3 = 10^\circ$ .

Faire varier le demi-angle du divergent implique une variation de son rapport de section et donc de l'évolution du choc en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  (figure 9.9.a). En effet, plus le demi-angle est grand, plus le décollement est précoce pour une valeur de rapport de pression  $p_c/p_a$  donnée. Le coefficient aérodynamique  $A$  est donc modifié<sup>6</sup> (figure 9.9.b).

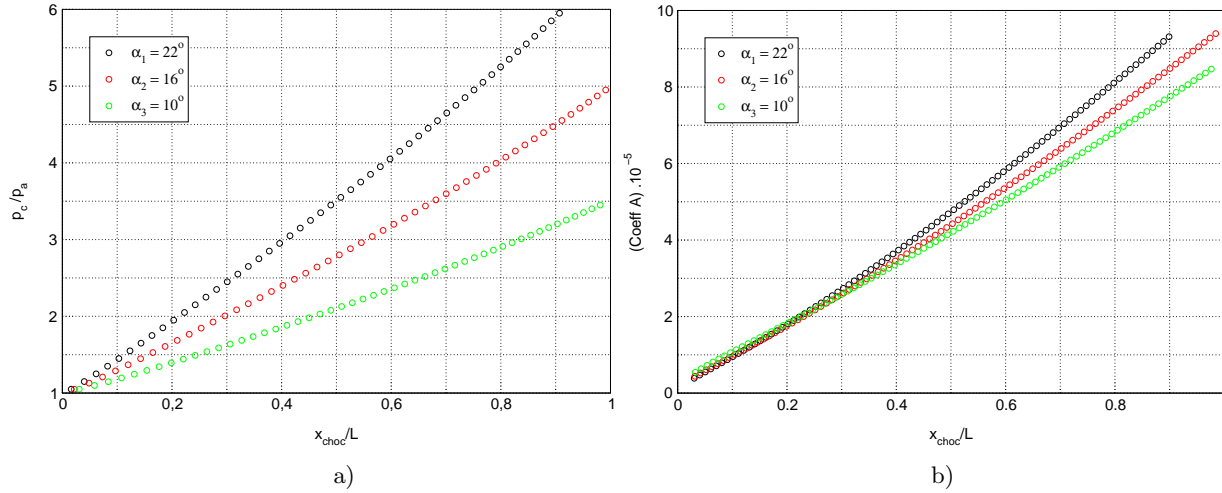


FIG. 9.9 – Position du choc en fonction de la pression chambre (a) et coefficient d'influence aérodynamique en fonction du demi-angle (b).

Notons que la longueur de la paroi flexible n'est pas changée. Les fréquences propres et les modes propres du divergent ne sont donc pas modifiés pour le cas considéré. Cependant, les coefficients d'influence dynamique  $R_k$  sont faiblement modifiés. En effet, le terme  $(\partial X_n^k / \partial s)_{x_{choc}}$  varie légèrement en fonction de  $\alpha$  pour  $x_{choc}$  donné car  $s = x \cos(\alpha)$ . Cette légère variation des coefficients  $R_k$  explique les décalages suivant  $x$  entre les différentes courbes des figures 9.10.a et 9.10.b pour les cas 1 et 3 respectivement. La variation de  $A$  avec  $\alpha$  entraîne, quant à elle, une modification de l'amplitude de ces extrema.

Les résultats obtenus montrent qu'une variation de quelques degrés du demi-angle du divergent n'influence que peu l'évolution des fréquences. En conclusion, il ressort de l'ensemble des calculs précédents, qu'il est plus intéressant de modifier les conditions aux limites ou les propriétés du matériau de la structure que le demi-angle du divergent pour modifier son comportement aéroélastique.

### 9.1.6 Prise en compte des effets visqueux

Bien que les modèles ne tiennent pas compte de la nature de la couche limite, ils peuvent tout de même fournir une estimation de la stabilité du divergent soumis à un choc de décollement, comme nous l'avons vu dans leur description. En effet, l'écoulement visqueux présente un choc de décollement dont la position en fonction du rapport de pression diffère de celle du choc de recompression du cas eulérien. Dans cette section, nous analysons la stabilité de ce choc de

6. Notons que  $A$  dépend de  $x_{choc}$  qui, lui-même, dépend de  $p_c$ .

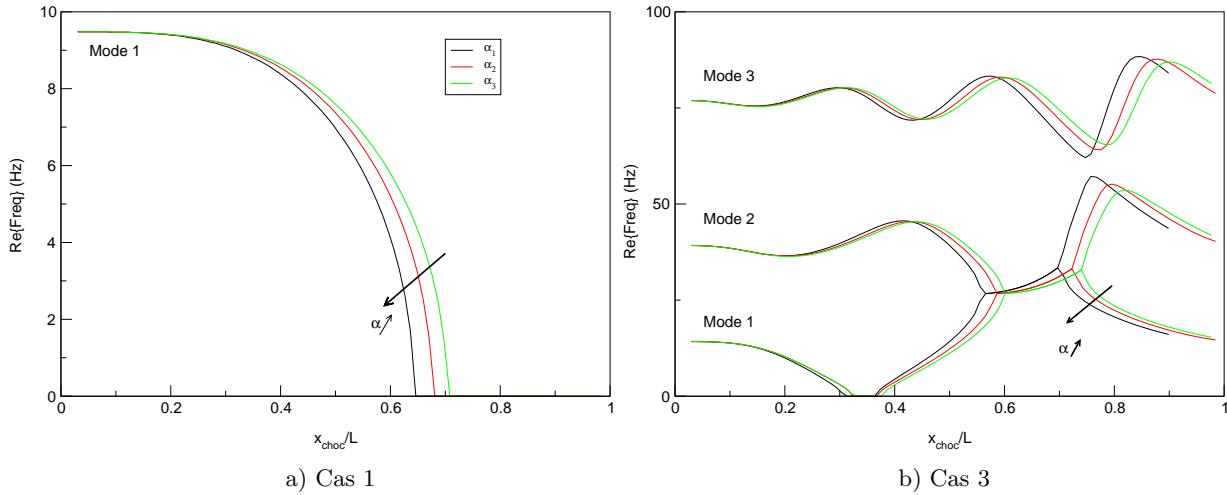


FIG. 9.10 – Influence du demi-angle du divergent sur l'évolution des fréquences propres aéroélastiques.

décollement en utilisant une simulation numérique de l'écoulement turbulent (voir plus loin) afin de définir sa position en fonction du rapport de pression (figure 9.11). Nous n'employons pas de critère de décollement pour faciliter la comparaison avec les simulations numériques couplées. Le demi-angle du divergent vaut 10 degrés.

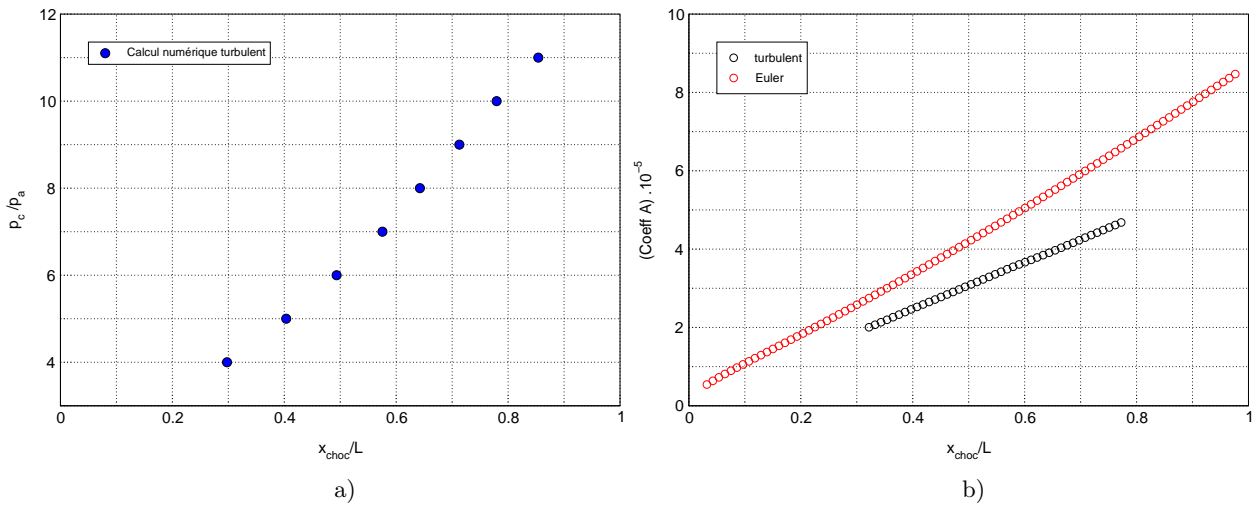


FIG. 9.11 – Evolution de la position du décollement en fonction du rapport de pression (calcul numérique) (a) et coefficient d'influence aérodynamique A (b).

Nous présentons ici l'ensemble des calculs effectués précédemment pour  $\alpha_3$  en considérant cette fois un écoulement turbulent. Pour faciliter la comparaison avec le cas eulérien, nous superposons les résultats du modèle étendu pour les cas eulériens et turbulents.

Dans ces nouveaux calculs, seul le coefficient d'influence aérodynamique A a été modifié par rapport aux cas eulériens ayant un même demi-angle du divergent. Comparativement, celui-ci

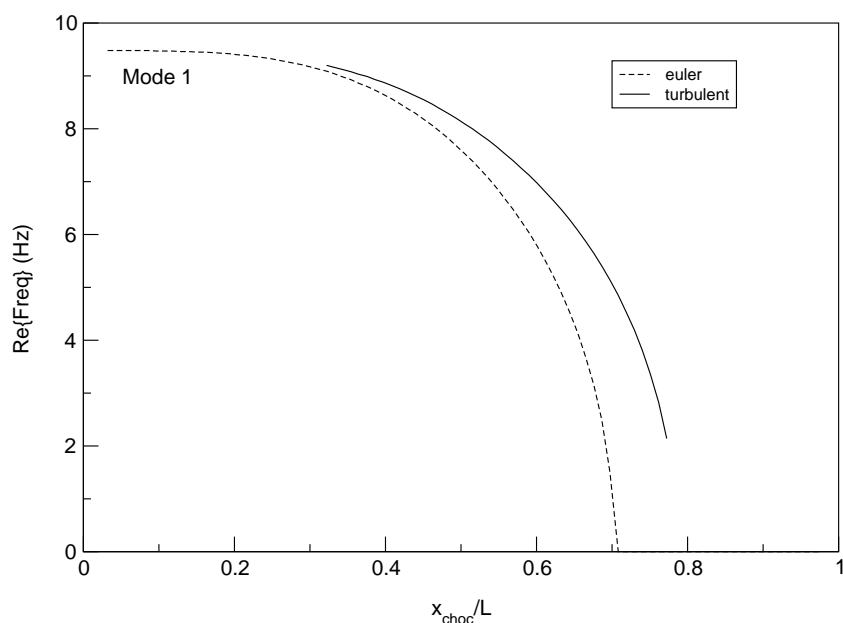


FIG. 9.12 – Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 1). Cas eulérien vs cas turbulent pour le modèle étendu.

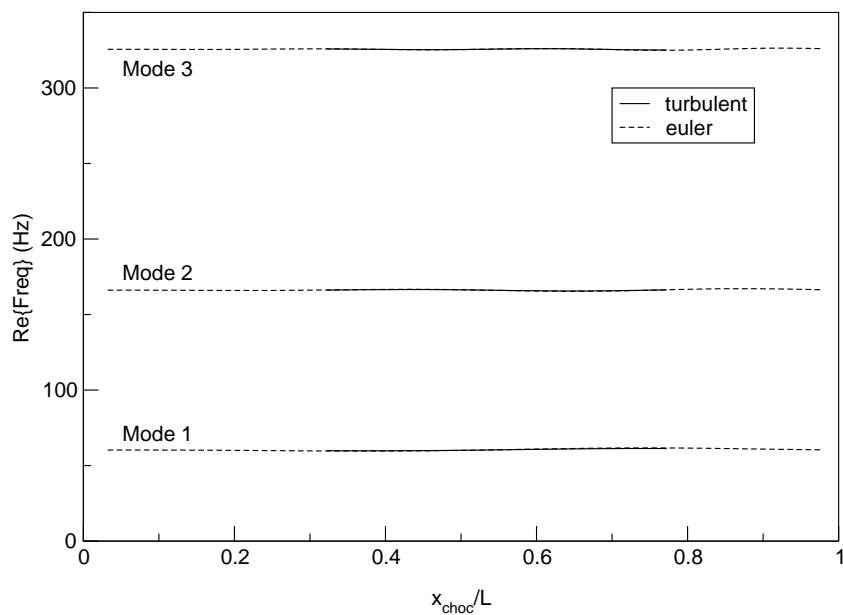


FIG. 9.13 – Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 2). Cas eulérien vs cas turbulent pour le modèle étendu.

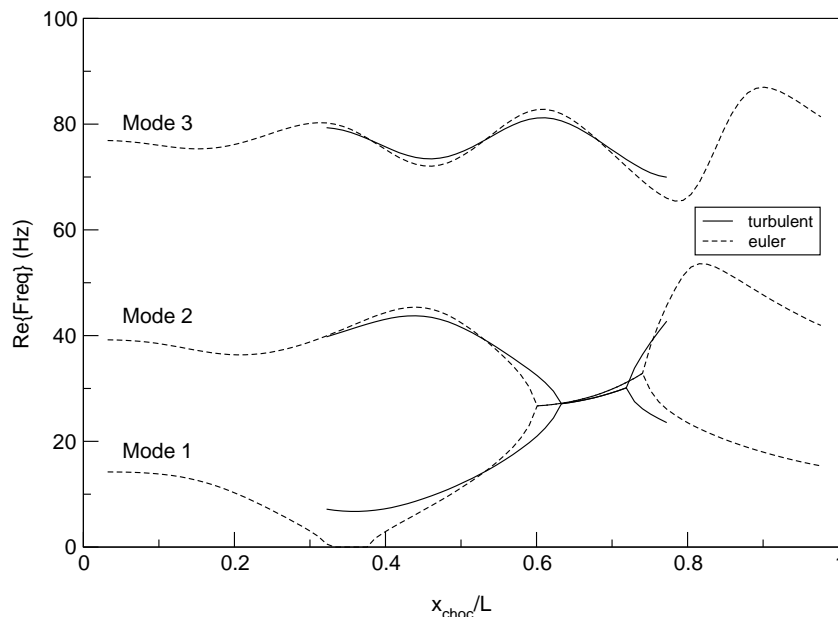


FIG. 9.14 – Evolution des fréquences propres en fonction de la position du choc (Cas 3). Comparaison des cas eulérien et turbulent pour le modèle étendu.

est plus faible que précédemment pour une position du choc donnée (figure 9.11.b).

Les figures 9.12, 9.13 et 9.14 présentent les résultats obtenus pour les cas 1, 2 et 3 respectivement. Notons que l'évolution des fréquences aéroélastiques n'est tracée qu'à partir de  $x \simeq 0.8m$  car il n'est pas possible de stabiliser le choc de décollement en amont de cette valeur (*i.e.* pour des rapports de pression plus faibles que  $p_c/p_a = 4$ ): la zone de recirculation est, pour les faibles rapports de pression, trop étendue et le choc est très proche du col de la tuyère.

L'analyse des résultats montre peu de différences entre le cas eulérien et le cas turbulent. Ceci se justifie par le fait que seul le coefficient  $A$  ait été modifié et que sa diminution n'était pas très importante. Il est cependant intéressant de remarquer que les instabilités sont globalement retardées et que l'instabilité statique du cas 3 est supprimée (ce qui est cohérent avec la diminution de  $A$  par rapport au cas eulérien, pour une position du choc donnée).

## 9.2 Simulations numériques couplées sur la configuration bidimensionnelle plane

Nous vérifions ici les résultats des modèles en réalisant un ensemble de calculs couplés suivant le principe décrit au chapitre 8. Ces calculs portent sur les cas 2 (stable) et 3 (instable pour certaines positions du choc) exposés précédemment. Des simulations d'écoulements eulériens puis turbulents ont été réalisées. La configuration d'étude est représentée sur la figure 9.15.

Le couplage est réalisé suivant l'algorithme CSS (*Conventional Serial Staggered*, voir chapitre 8) sans sous-cyclage, grâce à la librairie de calcul parallèle MPI.

Le code REFLEX permet de simuler le comportement dynamique de la structure. L'élément de

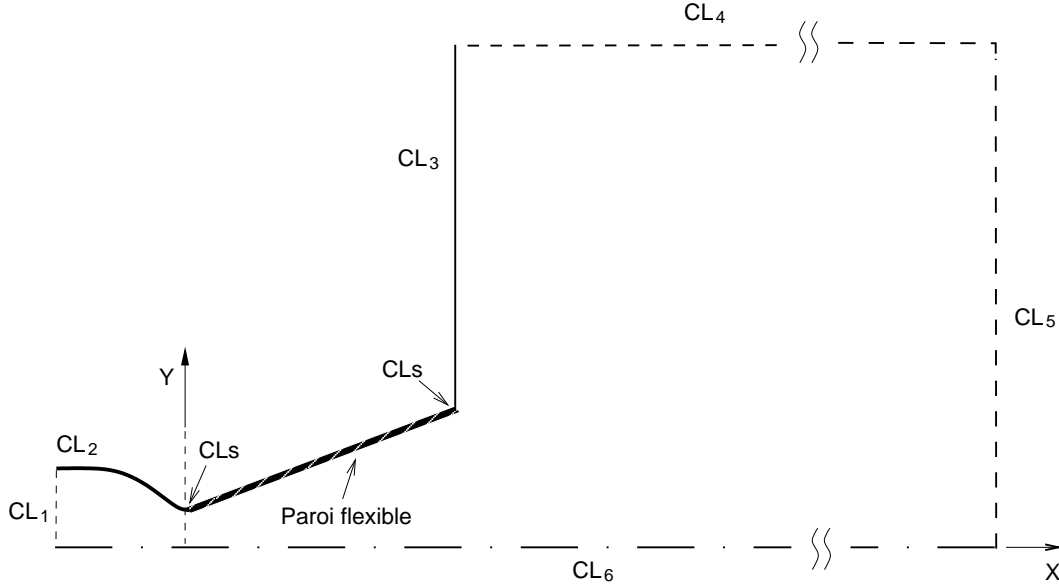


FIG. 9.15 – Configuration étudiée numériquement.  $CL_1$  : entrée caractéristique,  $CL_2$ ,  $CL_3$  : paroi adiabatique (condition de glissement en euler ou condition de non-glissement en visqueux),  $CL_4$  : condition correspondant à une entrée lointaine à faible vitesse (équation (9.1)),  $CL_5$  : sortie caractéristique,  $CL_6$  : axe de symétrie et  $CLs$  : encastrement de la structure.

poutre utilisé est identique à celui du modèle de stabilité. Le maillage de la structure est obtenu par extraction de celui du fluide au niveau de la paroi du divergent. L'épaisseur  $h$  de la structure est prise comme longueur de référence pour adimensionner les déplacements de la structure.

Le code fluide utilisé diffère suivant le type de simulation effectuée. Dans le cas eulérien, nous avons retenu<sup>7</sup> le code TVD dont une description a été donnée au chapitre 6. Seule la moitié supérieure de la configuration a été étudiée, du fait de la symétrie du problème. Le maillage comporte  $(300 \times 70)$  points pour le divergent et  $(50 \times 150)$  points pour la partie jet. Le domaine correspondant au divergent est réparti sur cinq processeurs, celui correspondant au jet sur deux processeurs. Les conditions aux limites sont résumées sur la figure 9.15. Notons que pour la condition aux limites  $CL_4$ , le fluide rentrant est considéré comme subissant une évolution isentropique depuis les conditions ambiantes. Le long de cette frontière, les vitesses sont extrapolées et les conditions de température et de pression sont données par :

$$T = T_a - \frac{\gamma - 1}{2\gamma r} (u^2 + v^2) \quad \text{et} \quad p = p_a \left( \frac{T}{T_a} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (9.1)$$

Le CFL est fixé à 0.8 (ce qui correspond à un pas de temps de l'ordre de  $3 \times 10^{-6}$  s.). Dans le cas turbulent, nous avons employé le code TURB décrit au chapitre 6. Le maillage a été resserré au niveau de la paroi. Il comporte  $(600 \times 90)$  points pour le divergent et  $(150 \times 200)$  points pour la partie jet. Le domaine correspondant au divergent est réparti sur cinq processeurs, celui correspondant au jet sur trois processeurs. Le CFL est de 100 (de sorte à conserver le même

7. Nous avons en effet montré au chapitre 8 que le code WENO donnait des résultats similaires à ceux du code TVD, pour des calculs couplés dont le champ aérodynamique est relativement simple.

ordre de grandeur du pas de temps que dans le cas eulérien). Les conditions aux limites sont inchangées. Les conditions génératrices et ambiantes sont celles utilisées pour les modèles de stabilité.

### 9.2.1 Calculs eulériens

Le demi-angle du divergent est de 22 degrés. Pour chaque rapport de pression ( $p_c/p_a=1.5$  à 6), le calcul consiste, en premier lieu, à obtenir un champ aérodynamique convergé en l'absence de mouvement de la structure. Celle-ci est ensuite perturbée suivant son premier mode. Un couplage s'établit avec le fluide et les déplacements temporels de la structure sont mesurés en plusieurs points. Une analyse spectrale de ces signaux est ensuite effectuée afin de déterminer les fréquences aéroélastiques du système.

La figure 9.16.a illustre le champ aérodynamique obtenu pour un rapport de pression de 4.0 : le choc de recompression (choc secondaire) ainsi qu'un faisceau de détente au niveau du col sont bien visibles. La position du choc au niveau de la paroi est relevée, les résultats obtenus pour l'ensemble des rapports de pression sont reportés sur la figure 9.16.b. Pour comparaison, la position du choc sur l'axe est également représentée, la différence entre celle-ci et celle à la paroi témoignant de la courbure du choc. Les résultats obtenus sont en bon accord avec la théorie 1D utilisée dans les modèles de stabilité.

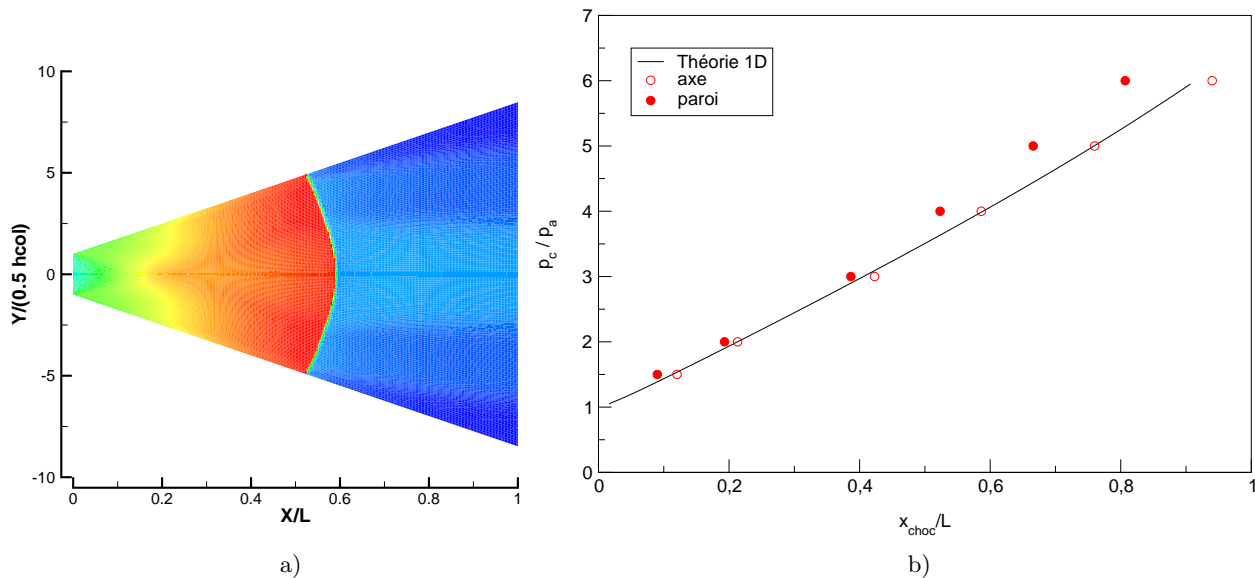


FIG. 9.16 – Champ de Mach pour un rapport de pression  $p_c/p_a=4.0$  ( $min=0.0$ ,  $max=3.25$ ) a) et évolution de la position du choc en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  b).

### - Stabilité du Cas 2

Nous analysons d'abord les résultats issus des simulations numériques effectuées sur le cas 2. Rappelons que, d'après les modèles de stabilité, ce cas ne présente aucune instabilité. Nous nous

proposons de vérifier ce point grâce au calcul couplé.

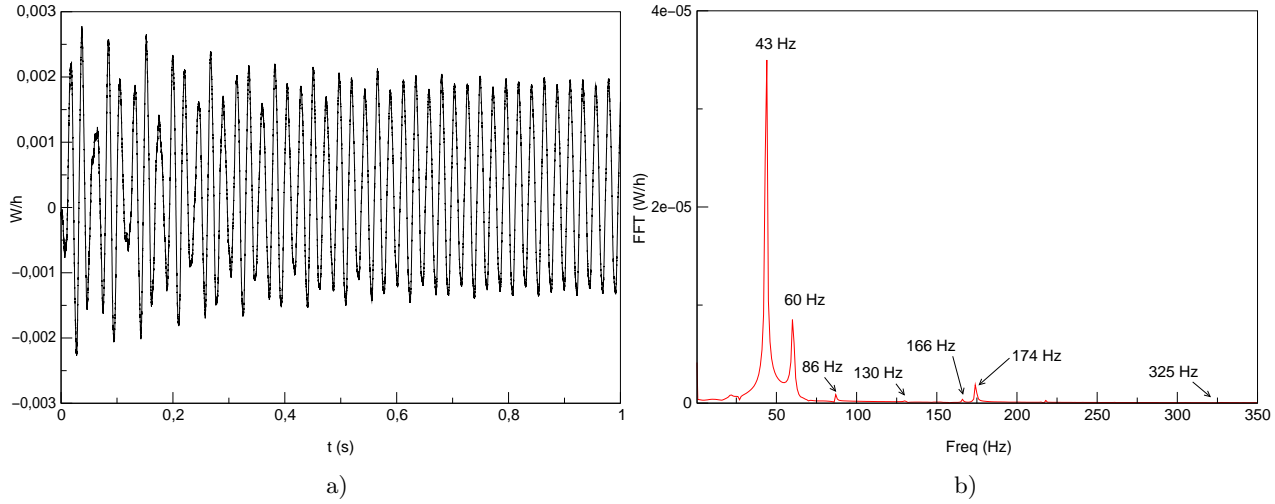


FIG. 9.17 – Déplacement vertical adimensionné  $W/h$  du point de la structure situé en  $x/L=0.66$  pour un rapport de pression  $p_c/p_a=5.0$  a) et transformée de Fourier associée b). Cas 2, calcul eulérien, schéma TVD d'ordre 2.

La figure 9.17.a donne un exemple des signaux enregistrés pendant le couplage. Il s'agit ici du déplacement adimensionné d'un point quelconque de la structure pour un rapport de pression  $p_c/p_a = 5$ . Un léger amortissement du déplacement vertical est constaté. Les fréquences de ce signal sont visibles sur la figure 9.17.b. On remarque immédiatement que trois d'entre elles (60 Hz, 166 Hz et 325 Hz) sont très proches des fréquences propres naturelles de la structure (voir tableau 9.2). Il s'agit, en fait, des fréquences aéroélastiques du système. Ces fréquences apparaissent toujours dans les spectres des déplacements quel que soit le rapport de pression  $p_c/p_a$  imposé et restent constantes. Les simulations numériques confirment donc que la structure ne présente pas d'instabilité aéroélastique pour le cas 2.

Cependant, on note aussi, sur les précédents spectres (figure 9.17.b), l'apparition de fréquences supplémentaires (43 Hz, 86 Hz, 130 Hz, 174 Hz ...). Leur présence peut surprendre. En effet, nous venons de voir que les simulations numériques effectuées dans cette section consistaient, en premier lieu, à obtenir un champ fluide convergé en l'absence de mouvement de la paroi avant de perturber la structure et d'activer le couplage. On s'attend donc à ce que le comportement du système soit régi par une relation du type :

$$[M]\{\ddot{W}\} + [K]\{W\} = \{F\}$$

où  $F$  est l'effort aérodynamique induit pas le mouvement de la structure. Si celui-ci peut s'écrire sous la forme  $\{F\} = [K_p]\{W\}$ , comme nous l'avons vu au chapitre 3, alors l'équation précédente prend la forme :

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] - [K_p])\{W\} = 0$$

et on ne doit retrouver que les fréquences aéroélastiques sur les spectres des déplacements. L'apparition d'autres fréquences traduirait donc la présence d'une sollicitation aérodynamique



supplémentaire que nous noterons  $\{F_2\}$ . Le comportement du système serait alors régi par :

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] - [K_p])\{W\} = \{F_2\}$$

On remarque que dans ce cas, il existe un risque supplémentaire pour la structure. En effet, nous avons vu que celle-ci pouvait devenir instable statiquement si une de ses fréquences aéroélastiques devenait imaginaire pure et instable dynamiquement si deux de ses fréquences coalesçaient. Un risque supplémentaire provient maintenant de cet effort  $\{F_2\}$ . Supposons que celui-ci soit de nature sinusoïdale, par exemple :

$$\{F_2\} = \{A(x)\}\cos(\omega_f t)$$

où  $\omega_f$  est la pulsation associée indépendante du déplacement de la structure. Dans ce cas, d'après la théorie des vibrations, le système peut entrer en résonance si  $\omega_f$  est égale à l'une des pulsations propres de  $[M]\{\ddot{W}\} + ([K] - [K_p])\{W\} = \{0\}$ , c'est-à-dire à l'une des pulsations aéroélastiques du système.

Pour déterminer la nature de  $\{F_2\}$ , nous avons examiné plus en détails les champs aérodynamiques initiaux obtenus pour plusieurs rapports de pression. Les profils de pression pariétale enregistrés à des instants différents témoignaient de la convergence du calcul. Toutefois, il est apparu, en enregistrant les signaux de pression en plusieurs points du divergent durant une période assez longue, que les calculs avaient convergé vers un état stationnaire ayant un caractère oscillatoire. En effet, les signaux enregistrés en amont de chaque position du choc se sont révélés constants mais ils présentaient un caractère sinusoïdal en aval de ceux-ci. La figure 9.18.a illustre ce point pour un rapport pression de 5.0. Ceci met en évidence un battement du choc dont les fréquences peuvent être identifiées par analyse spectrale. Ainsi, pour le rapport de pression de 5.0, on obtient les fréquences figurant sur le graphe 9.18.b. On remarque immédiatement que ces fréquences sont identiques à celles de la figure 9.17.b. L'effort  $\{F_2\}$  est donc bien la sollicitation induite par le battement "intrinsèque" (ou "naturel", c'est-à-dire observable en l'absence de couplage) du choc. Cette sollicitation sera notée par la suite  $\{F_{choc}\}$ . *A priori*, les fréquences de  $\{F_{choc}\}$  peuvent être considérées comme indépendantes du déplacement de la structure, le couplage aéroélastique étant porté par  $\{F\} = [K_p]\{W\}$ . Nous reviendrons sur l'origine physique de ce battement dans la section consacrée aux calculs turbulents.

Ce point étant éclairci, nous comparons les fréquences aéroélastiques obtenues numériquement pour différents rapports de pression à celles estimées précédemment par les modèles de Pekkari et son extension (figure 9.19). Il apparaît que les simulations numériques confirment les résultats des modèles : les fréquences aéroélastiques restent proches des fréquences naturelles de la structure, ce qui signifie que les effets aéroélastiques sont faibles.

### - Stabilité du Cas 3

Nous nous intéressons maintenant au cas 3. Ce cas présente, selon les estimations des modèles, une instabilité statique pour une faible bande de rapport de pression et une instabilité dynamique sur une bande plus étendue. Ce cas a déjà été étudié numériquement par Lefrançois [78, 77]. Les calculs réalisés par ce dernier utilisent le même code de structure que celui retenu ici mais un code fluide différent. En effet, Lefrançois a employé un code éléments

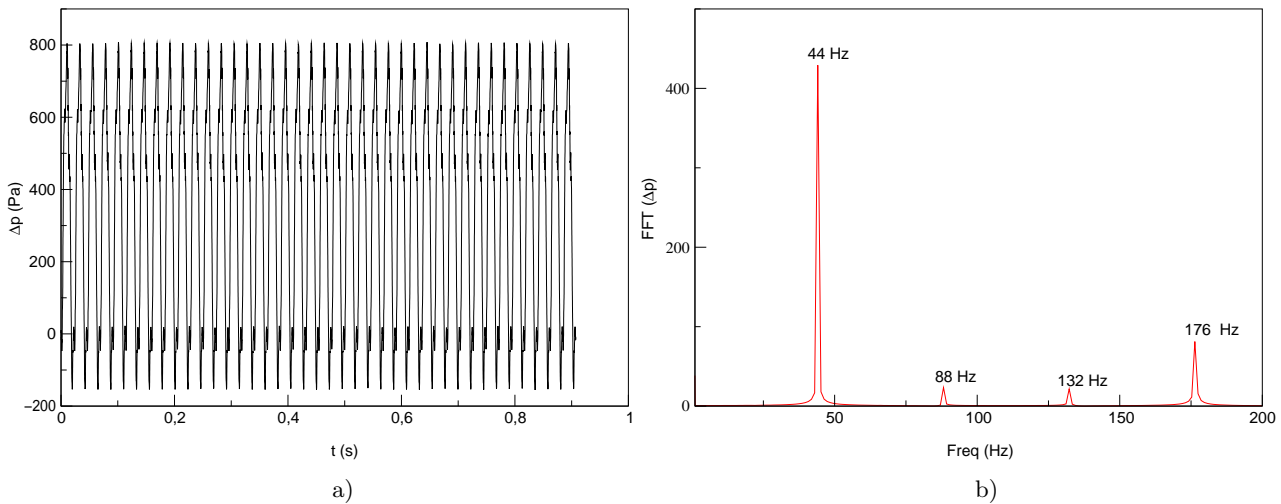


FIG. 9.18 – Signaux de pression pariétale  $\Delta p$  enregistrés durant l'état stationnaire (absence de mouvement de la paroi), en un point situé au niveau de la paroi en aval ( $x/L=0.82$ ) du choc, pour un rapport de pression  $p_c/p_a=5.0$  a) et transformée de Fourier associée b). Calcul eulérien, schéma TVD d'ordre 2.

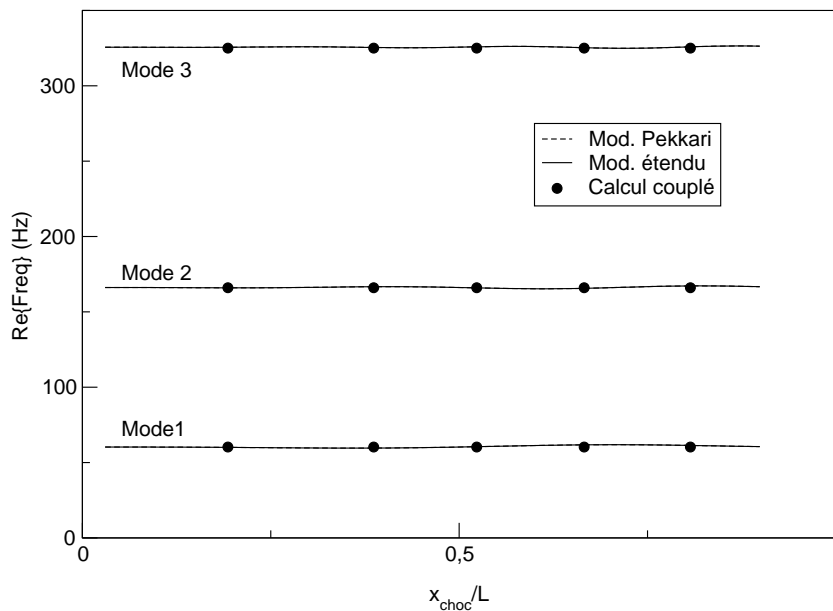


FIG. 9.19 – Comparaison des résultats numériques et des modèles (calculs eulériens) : évolution des fréquences aéroélastiques en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  pour le cas 2.

finis en maillage non-structurés utilisant la version FCT du schéma de Lax-Wendroff. Ce code est précis à l'ordre deux en espace et en temps. De même, l'algorithme de couplage n'est pas identique : l'auteur a utilisé un algorithme *GCSS* (*Generalized Conventional Serial Staggered*) avec sous-cyclage. Ses résultats seront comparés à ceux des présentes simulations.

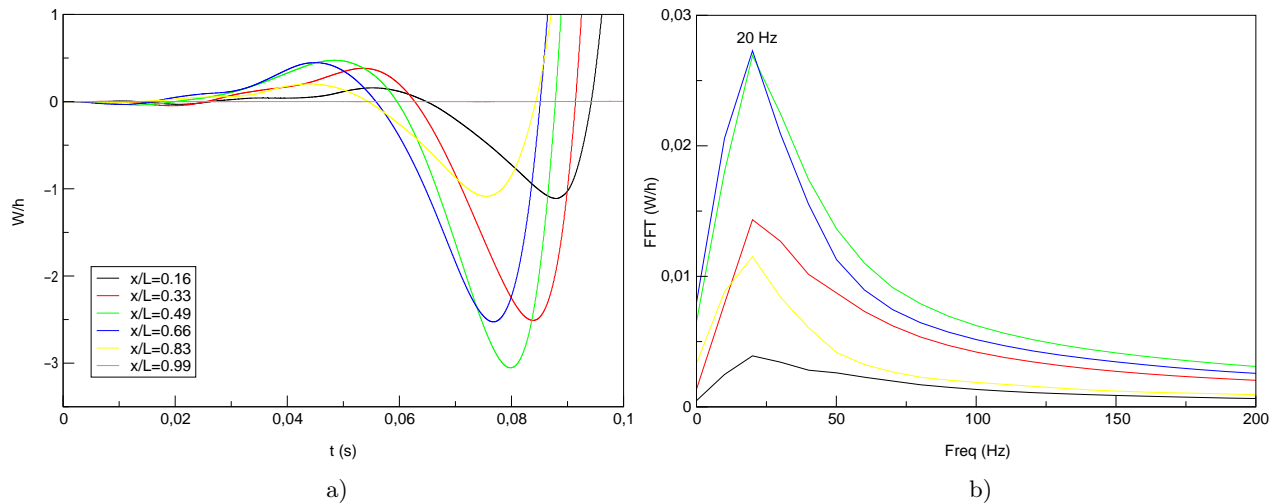


FIG. 9.20 – Déplacement vertical adimensionné  $W/h$  de plusieurs points de la structure pour un rapport de pression  $p_c/p_a = 5.0$  a) et transformée de Fourier associée b). Cas 3. Calcul eulérien. Schéma TVD d'ordre 2.

La figure 9.20.a présente plusieurs signaux enregistrés pendant le couplage, pour un rapport de pression de 5.0. Sur cette figure, on voit clairement que les déplacements adoptent un comportement sinusoïdal d'amplitude croissante. Il n'est cependant pas aisé de dire, à partir de cette seule figure, si ce comportement résulte d'une coalescence de deux modes de la structure (instabilité dynamique) ou d'une résonance due au battement intrinsèque du choc ; pour cela, une analyse spectrale du signal doit être effectuée. Une unique fréquence de 20 Hz environ peut alors être relevée (figure 9.20.b). Cette fréquence étant très inférieure à la fréquence intrinsèque fondamentale du choc (40-50 Hz), il ne s'agit pas d'une résonance mais de la coalescence des deux premiers modes propres. On en conclue que la position du choc correspondant à un rapport de pression de 5.0 induit une instabilité dynamique. A ce stade, on peut aussi remarquer qu'il est difficile d'évaluer la variation des autres modes propres, celles-ci n'étant pas visibles sur les spectres associés aux déplacements. Concernant les autres rapports de pression, on retrouve le même type de comportements pour les rapports de pression  $p_c/p_a = 3.0, 4.0$  et 6.0. La structure présente donc une instabilité dynamique au moins sur cette bande de rapport de pression. Pour les rapports de pression plus faibles ( $p_c/p_a = 1.5$  et 2 correspondant aux simulations relatives aux deux positions du choc situées les plus en amont), les déplacements sont amortis, la structure est stable comme le prévoient les modèles.

Comme dans le cas 2, les fréquences aéroélastiques obtenues numériquement sont comparées aux résultats des modèles ainsi qu'à ceux des simulations numériques de Lefrançois (figure 9.21). Globalement, les résultats des simulations numériques sont en bon accord avec ceux des modèles : ceux-ci indiquent bien la présence d'une instabilité dynamique. Cependant, les simulations numériques prévoient une fréquence de coalescence plus basse que celle estimée par les modèles. La zone d'instabilité semble également un peu plus étendue dans les simulations numériques. De même, les résultats obtenus par Lefrançois sont en bon accord avec les nôtres. Ce dernier point semble indiquer que les différences entre les résultats des simulations numériques et ceux des modèles ne s'expliquent ni par la méthode numérique employée par le code fluide,

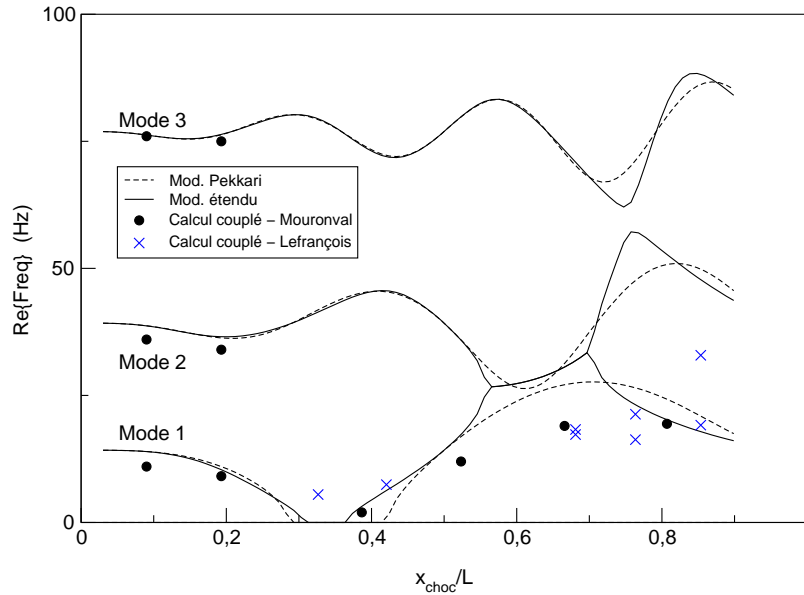


FIG. 9.21 – Comparaison des résultats numériques et des modèles (calculs eulériens) : évolution des fréquences aéroélastiques en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  pour le cas 3.

ni par le schéma de couplage utilisé. Il semble donc que cela provienne plutôt des hypothèses simplificatrices effectuées concernant l'effort aérodynamique dans ces modèles.

### - Suppression du battement intrinsèque du choc

Avant de commenter les précédentes constatations, nous nous proposons de montrer différemment que les instabilités observées ci-dessus ne sont pas dues au mouvement intrinsèque du choc. Pour illustrer cela, la méthode la plus efficace est de supprimer ce battement naturel du choc, en le stabilisant à sa position d'équilibre. Dans ce but, nous avons utilisé un "artifice" numérique consistant à augmenter la diffusion numérique du code (passage à l'ordre 1 en espace). Une fois ce mouvement naturel du choc supprimé, les calculs couplés précédents ont été répétés.

Remarquons que nous n'incitons pas le lecteur à utiliser un code fluide très diffusif (ordre 1) pour simuler les phénomènes aéroélastiques dans les tuyères supersoniques (voir, par exemple, les conclusions du chapitre 8) : il s'agit simplement d'un artifice pour isoler les phénomènes aéroélastiques de ceux induits par le battement intrinsèque du choc.

Les résultats obtenus pour le cas 2 pour un rapport de pression de 5.0 sont reportés sur la figure 9.22. Ils sont à comparer avec ceux de la figure 9.17 (ordre 2). On constate que les fréquences aéroélastiques sont les seules à apparaître sur les spectres, ce qui confirme, une fois de plus, que les fréquences supplémentaires résultaient du mouvement intrinsèque du choc.

De même, les résultats obtenus pour le cas 3 pour un rapport de pression de 5.0, apparaissent sur la figure 9.23 et sont à comparer avec ceux de la figure 9.20 (ordre 2). On note encore un comportement oscillatoire instable dont l'origine ne peut être qu'une coalescence des deux premières fréquences aéroélastiques du système, conformément à ce que nous avons conclu précédemment.

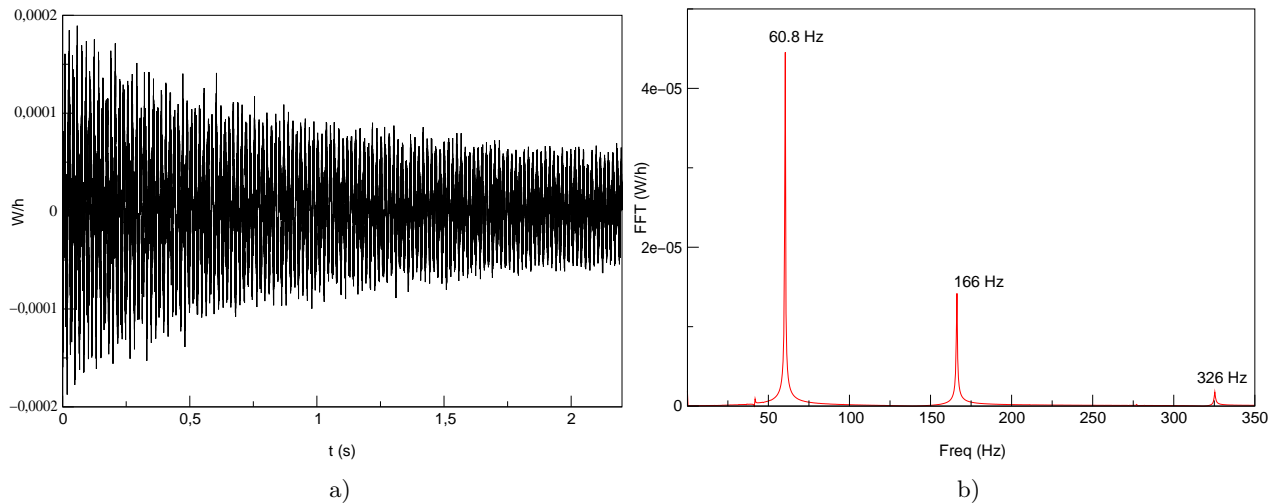


FIG. 9.22 – Déplacement vertical adimensionné  $W/h$  du point de la structure situé en  $x/L=0.66$  pour un rapport de pression  $p_c/p_a=5.0$  a) et transformée de Fourier associée b). Cas 2, schéma TVD d'ordre 1.

On remarque aussi que la fréquence de coalescence est différente de celle obtenue à l'ordre 2, ce qui s'explique par la diffusion numérique supplémentaire introduite (voir la simulation du "flutter" effectuée au chapitre 8).

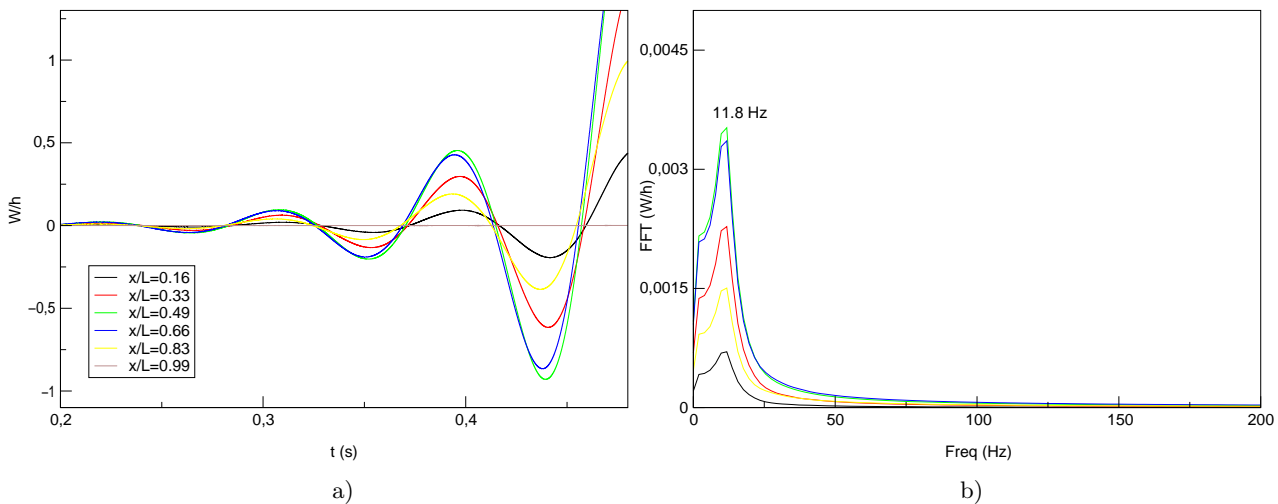


FIG. 9.23 – Déplacement vertical adimensionné  $W/h$  de plusieurs points de la structure pour un rapport de pression  $p_c/p_a=5.0$  a) et transformée de Fourier associée b). Cas 3, schéma TVD d'ordre 1.

### - Vérification des hypothèses

Pour expliquer les différences observées entre les modèles et les simulations (figure 9.21), nous examinons deux hypothèses effectuées pour modéliser la sollicitation aérodynamique induite par le mouvement de la structure. D'une part, Pekkari considère que le terme de sollicitation

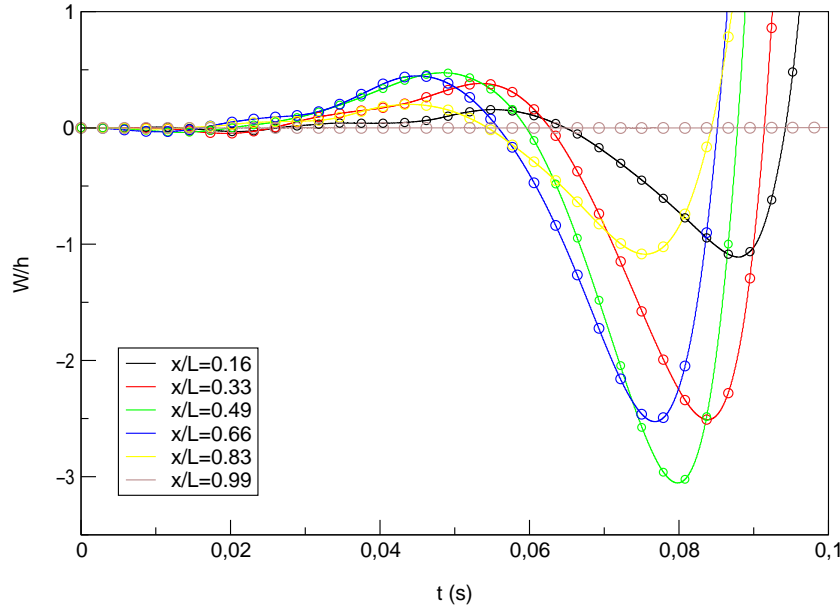


FIG. 9.24 – Evolution du déplacement vertical adimensionné  $W/h$  en différents points pour la forme complète (trait plein) et incomplète (symbole o) de l'effort  $\vec{f}_a$ . Rapport de pression  $p_c/p_a=5.0$ , calcul eulérien (cas 3).

aérodynamique  $\vec{f}_a(w) = -(p_w - p_w^{eq})\vec{n}$  n'est non-nul que sur la zone balayée par le choc suite au couplage et, d'autre part, il emploie la théorie des petites perturbations pour représenter l'influence du mouvement de la paroi sur le champ pression.

Afin de juger de la validité de la première hypothèse, nous avons répété un des calculs précédents en ne transmettant à la structure que la sollicitation aéroélastique au niveau de la zone d'excursion du choc. Pour cela, nous avons communiqué à la structure, à chaque itération,  $\vec{f}_a(w) = -(p_w - p_w^{eq})\vec{n}$ , pour seulement 30 points répartis de part et d'autre de la position initiale du choc (soit un dixième des points de la paroi du divergent) et  $\vec{f}_a(w) = \vec{0}$  ailleurs. Les résultats précédents et ceux obtenus en procédant ainsi sont reportés sur la figure 9.24. Il apparaît que les deux résultats ne diffèrent pas, ce qui prouve que l'hypothèse est valide, du moins pour les cas que nous avons considérés.

Nous étudions donc maintenant la validité de la seconde hypothèse. Nous avons vu que les modèles utilisaient la théorie des petites perturbations afin de calculer la variation de pression pariétale induite par le déplacement de la paroi (dans la région supersonique). Nous nous plaçons donc dans le cas où la tuyère est complètement amorcée ( $p_c/p_a=10$ ) de sorte à ce que tout le divergent soit supersonique. Une fois le calcul convergé, le profil de pression pariétale  $p_w^{eq}(x)$  est enregistré. Le profil du divergent est ensuite modifié, soit en augmentant le demi-angle du divergent, soit en le perturbant sur le premier ou le second mode. Le calcul est alors relancé jusqu'à convergence. Le nouveau profil de pression pariétale  $p_\infty(x)$  est enregistré à son tour et la variation de pression pariétale  $\Delta p(x) = p_w(x) - p_w^{eq}(x)$  induite par le déplacement de la structure est déduite. Les résultats obtenus dans chacun des cas sont comparés à ceux issus de la théorie

des petites perturbations :

$$\Delta p(x) = \frac{\rho_\infty(x) U_\infty^2(x)}{\sqrt{M_\infty^2(x) - 1}} \frac{\partial w_n(x)}{\partial s}$$

sur la figure 9.25. L'ensemble de résultats indique des écarts entre la théorie des petites perturbations et les simulations eulériennes, quelle que soit la modification du profil du divergent.

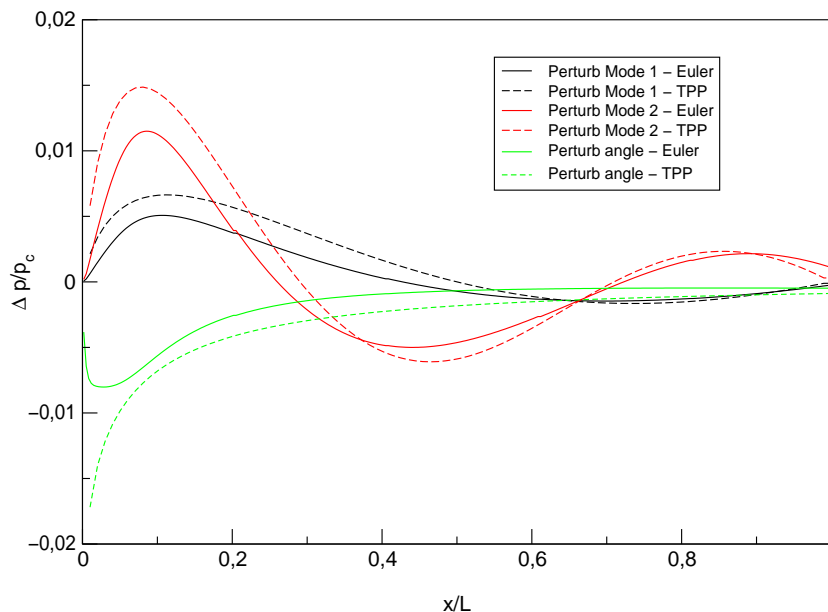


FIG. 9.25 – Variation de pression  $\Delta p(x)/p_c$  engendrée par une perturbation de la paroi suivant les modes 1 et 2 ainsi qu'après une augmentation d'un degré du demi-angle du divergent. Comparaison entre les résultats d'un calcul numérique eulérien et ceux issus de la théorie des petites perturbations TPP ( $p_c/p_a = 10$ ).

Pour mieux estimer ces écarts, il est intéressant de tracer le coefficient :

$$\mathcal{B}(x) = \frac{\Delta p(x)}{p_c \frac{\partial w(x)}{\partial s}}$$

Notons qu'Ostlund [96] s'intéresse également à ce coefficient pour une perturbation correspondant à une augmentation ou une diminution du demi-angle du divergent. Dans ce cas,  $\partial w(x)/\partial s$  ne s'annule pas et le calcul de  $\mathcal{B}(x)$  ne pose pas de problème. Ce n'est pas le cas lorsque le profil est perturbé suivant son premier ou son second mode propre car alors  $\partial w(x)/\partial s$  s'annule en plusieurs points, d'où l'apparition de pics (correspondant à une indétermination de  $\mathcal{B}$ ) à ces endroits sur les courbes de la figure 9.26.a. Remarquons, de plus, que, selon la théorie des petites perturbations, ce coefficient serait indépendant de la forme de la perturbation de la paroi :

$$\mathcal{B}_{TPP}(x) = \frac{\rho_\infty(x) U_\infty^2(x)}{p_c \sqrt{M_\infty^2(x) - 1}} \quad (9.2)$$

Globalement, d'après la figure 9.26.b, il semble que la théorie des petites perturbations surestime le coefficient  $\mathcal{B}(x)$ . D'autre part, les simulations numériques indiquent aussi que  $\mathcal{B}(x)$  n'est pas

indépendant de la forme de la perturbation de la paroi contrairement à ce que prévoit la théorie des petites perturbations. Il faut aussi évoquer que, selon la théorie des petites perturbations, si  $\partial w(x)/\partial s = 0$  alors  $\Delta p(x) = 0$  ce qui est contradictoire avec le fait qu'une modification uniforme de la section du divergent induit une variation de pression. Ce coefficient est utilisé par les modèles de stabilité afin de calculer l'excursion du choc ( $x_i - x_i^{eq}$ ), ce qui pourrait expliquer les différences observées entre les résultats fournis par ces derniers et les simulations numériques. Il semble donc que l'amélioration des modèles de stabilité requiert une modélisation plus fine de ce coefficient.

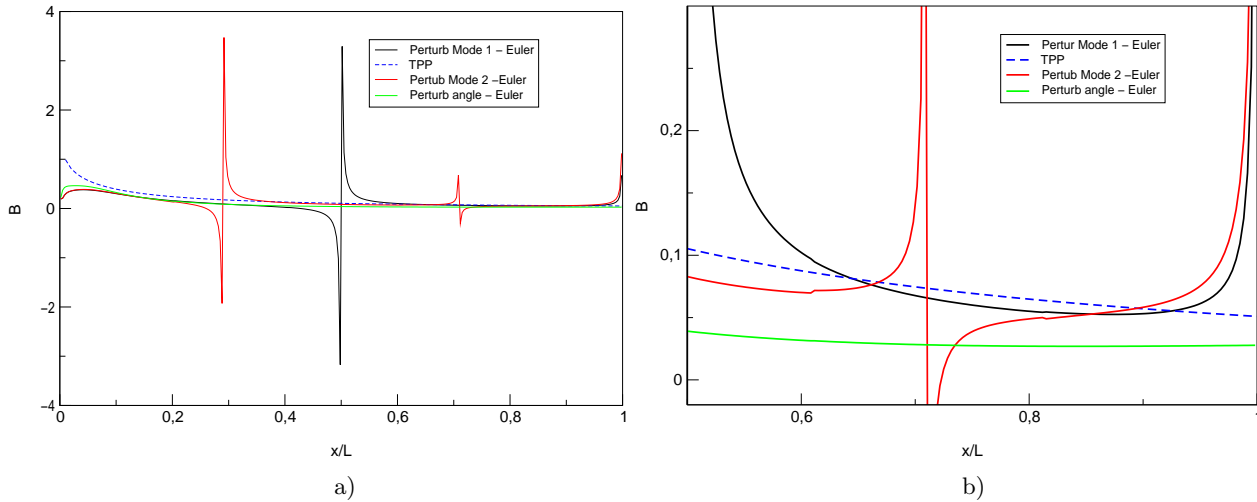


FIG. 9.26 – Evaluation numérique du coefficient  $\mathcal{B}(x) = \Delta p(x)/(p_c \partial w(x)/\partial s)$  pour une perturbation suivant les modes 1, 2 et pour une augmentation d'un degré du demi-angle du divergent. Comparaison avec la théorie des petites perturbations pour laquelle  $\mathcal{B}(x)$  est donné par la relation (9.2). Figure complète (a) et agrandissement (b).



### 9.2.2 Calculs turbulents

Les simulations numériques que nous avons réalisées concernent la configuration ayant un demi-angle du divergent de 10 degrés. Pour chaque rapport de pression  $p_c/p_a$  considéré, les calculs ont consisté, en premier lieu, à obtenir un écoulement stationnaire en l'absence de mouvement de la structure. Les simulations eulériennes ayant montré que le choc pouvait présenter un comportement oscillant qui lui était propre, une attention particulière a été portée à l'analyse des champs initiaux (*i.e.* avant couplage). La structure a ensuite été perturbée, le couplage a débuté et les déplacements du divergent ont été enregistrés puis analysés.

#### - Ecoulements stationnaires

Pour chaque rapport de pression, le décollement obtenu est libre. La figure 9.27.a illustre le champ aérodynamique stationnaire correspondant au rapport de pression  $p_c/p_a$  de 6. On pourra remarquer également que, quel que soit le rapport de pression, la réflexion du choc de décollement sur l'axe est régulière. Par ailleurs, la figure 9.27.b met bien en évidence la zone de recirculation associée au décollement et en particulier l'aspiration du fluide ambiant. On note également la présence d'un petit tourbillon au coin de la lèvre de sortie de la tuyère conformément à d'autres résultats numériques [32, 100].

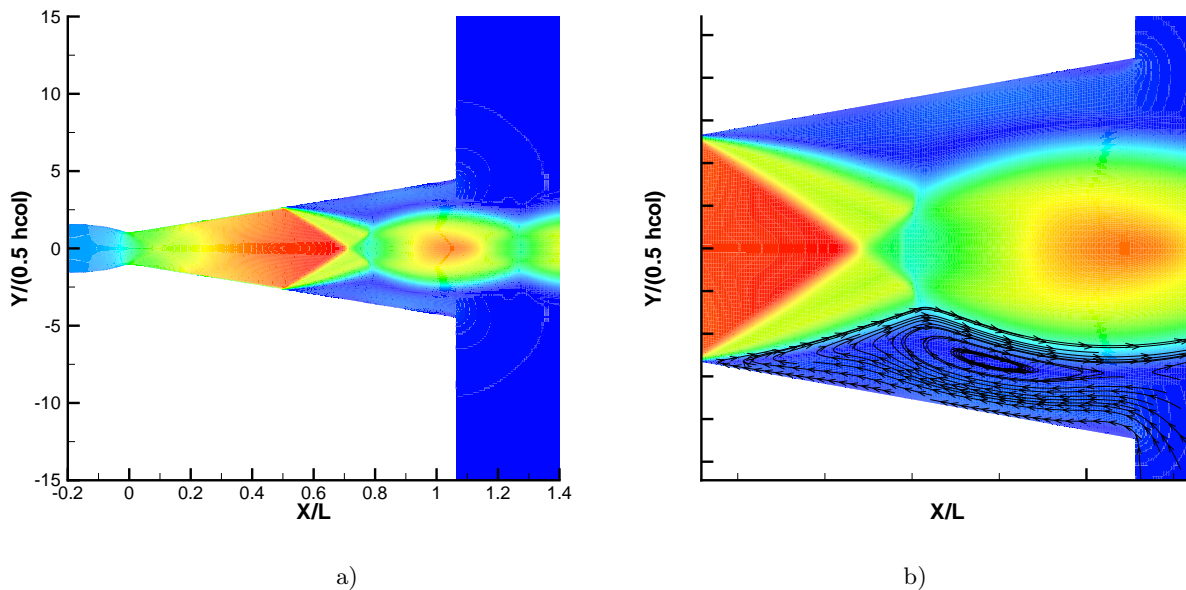


FIG. 9.27 – Champ de Mach ( $p_c/p_a=6.0$ ,  $Min=0$ ,  $Max=2.67$ ) a) et bulle recirculation b). Calcul turbulent.

Des strioscopies numériques (générées à partir du module du gradient de masse volumique [70]) de l'écoulement sont présentées sur la figure 9.28 pour les rapports de pression  $p_c/p_a=4, 6, 8$  et 10. Ces figures indiquent clairement les multiples réflexions du faisceau de détente en aval du col, ainsi que la présence de la couche limite en amont du choc de décollement (il s'agit du fin trait noir au niveau de la paroi). La progression du choc de décollement avec l'augmentation du rapport de pression est relativement rapide (ce qui s'explique par le fait qu'il s'agit d'une configuration 2D plane et non d'une configuration axisymétrique). En effet, pour  $p_c/p_a \simeq 12$ , le

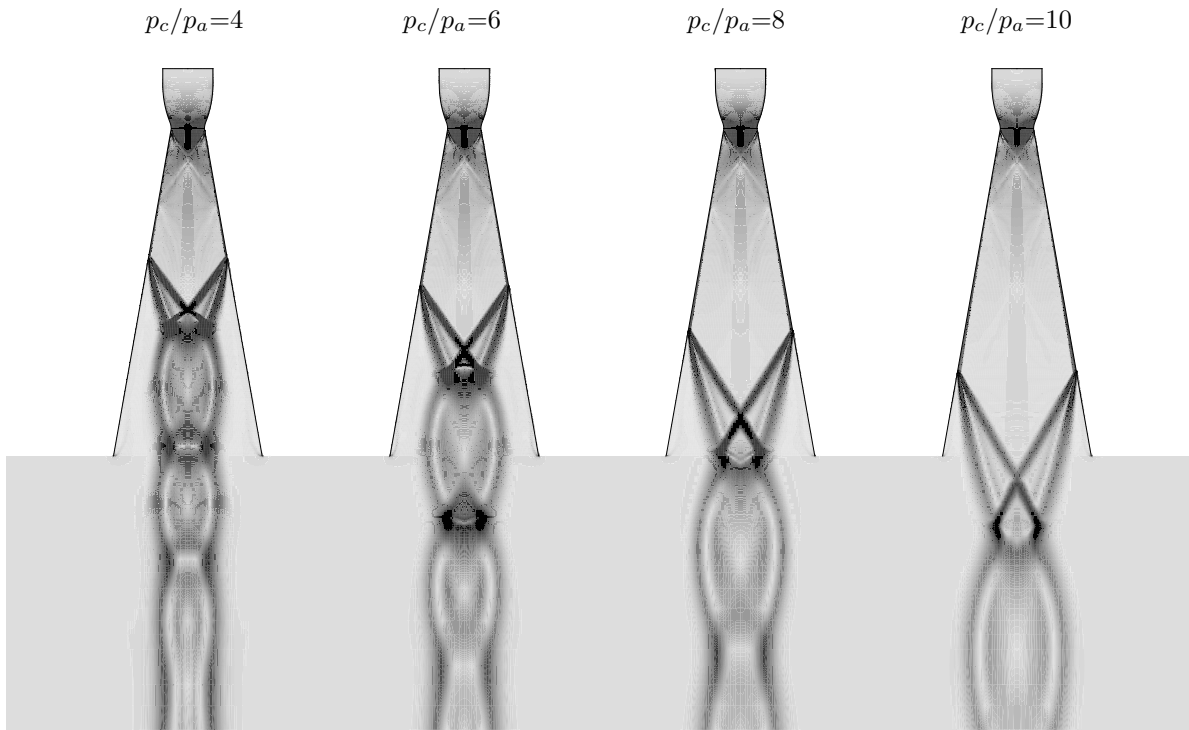


FIG. 9.28 – Strioscopies numériques de l'écoulement turbulent pour différents rapports de pression.

choc atteint la lèvre de sortie de la tuyère. Enfin, des cellules de compression/détente sont visibles dans le jet supersonique décollé. On note également la présence d'un choc interne (partant du col de la tuyère) dont l'intensité décroît au fur et à mesure de ses multiples réflexions sur l'axe et la paroi du divergent.

Les positions  $x_i^{eq}$  du décollement au niveau de la paroi ont ensuite été relevées puis comparées avec celles prédites par plusieurs critères de décollement (figure 9.29). L'accord entre les résultats issus de ces critères (en particulier ceux de Schilling et de Summerfield) et les simulations numériques est bon. Remarquons que le code de calcul ne converge pas vers une solution stationnaire pour les rapports de pression inférieurs à 4. Ceci s'explique par le fait que le choc de décollement se trouve très proche du col et que la zone décollée devient très importante pour ces bas rapports de pression.

Pour compléter cette analyse des résultats, il est intéressant d'examiner les profils de pression pariétale adimensionnés. La figure 9.30 expose ces profils sous deux formes différentes : la première est obtenue en normalisant la pression pariétale par la pression extérieure  $p_a$ , alors que la seconde utilise la pression chambre  $p_c$ . En observant ces figures, on remarque, tout de suite, que le rapport entre la pression au début de l'interaction libre,  $p_i$ , et la pression extérieure,  $p_a$ , reste presque constant (environ 0.4) lorsque le choc se déplace vers l'aval. Ceci est cohérent avec le fait que le critère de Summerfield prédise bien la position du décollement pour cette tuyère. On note, de plus, que la remontée de pression est rapide pour tous les rapports

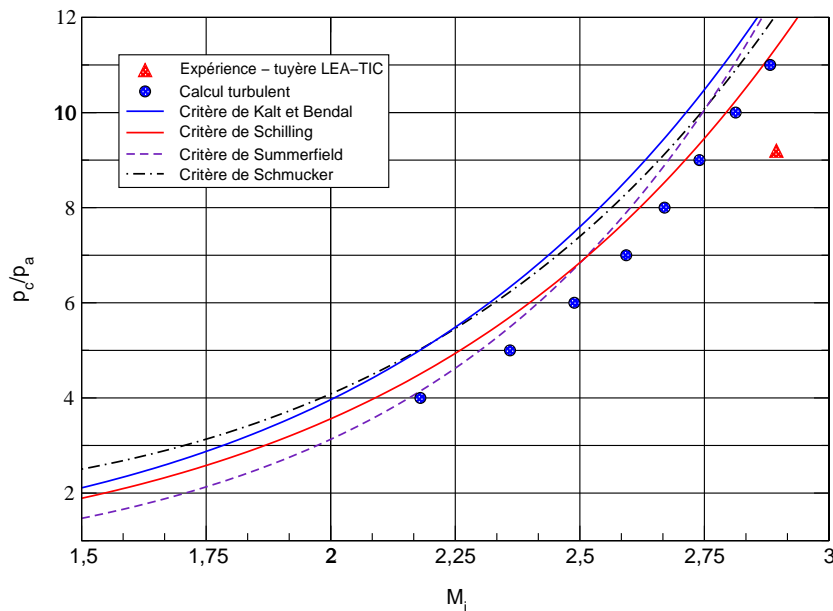


FIG. 9.29 – Evolution du point de décollement. Comparaison des calculs turbulents avec les critères.

$p_c/p_a$ : la zone d'interaction libre est relativement courte. Par ailleurs, les profils de pression rejoignent rapidement la pression extérieure: la pression plateau  $p_p$  est assimilable à  $p_a$ . Ceci explique également pourquoi les critères de décollement donnent de bons résultats pour cette configuration bien qu'ils ne reposent pas sur une modélisation séparée de la zone d'interaction libre et de celle correspondant au plateau.

Nous allons maintenant montrer que l'on retrouve aussi dans ce cas un battement naturel du choc à basse fréquence. Pour cela, nous avons enregistré les signaux de pression en différents points du divergent, juste en amont et en aval du choc. Les résultats obtenus pour le rapport 6 sont présentés sur les figures 9.31 et 9.32. Ainsi, en amont du choc de décollement, le signal évolue peu et présente un caractère aléatoire. Son analyse spectrale ne révèle aucune fréquence particulière (turbulence dans la couche limite attachée). Le signal enregistré en aval du choc a une allure bien différente (figure 9.32.a). Une transformée de Fourier de ce signal met en évidence plusieurs fréquences inférieures à  $50 \text{ Hz}$ . La plus importante de ces fréquences se situe aux alentours de  $15\text{-}16 \text{ Hz}$  pour les quatre rapports étudiés (4, 6, 8 et 10). Ces fréquences caractérisent le battement naturel du choc. On notera que l'origine physique de ce battement reste méconnue à l'heure actuelle mais que de tels mouvements ont été détectés expérimentalement [55] à plusieurs reprises. Ce sujet fait encore l'objet de discussions scientifiques au sein, entre autres, du groupe ATAC. Certains pensent que le choc se comporterait comme un filtre passe-bas ne laissant passer que les basses fréquences de la turbulence. D'autres, au contraire [114], estiment que le choc se comporte comme un système mécanique de type masse-ressort. Il posséderait une masse, une raideur et un amortissement (et donc une fréquence propre) naturels. Ainsi, il pourrait entrer en résonance sous l'effet de perturbations externes. On observe également que les fréquences détectées sont plus basses que celles du cas eulérien. Ceci peut s'expliquer soit par la différence entre l'angle du divergent dans le cas eulérien (22 degrés) et celui du cas turbulent (10 degrés)

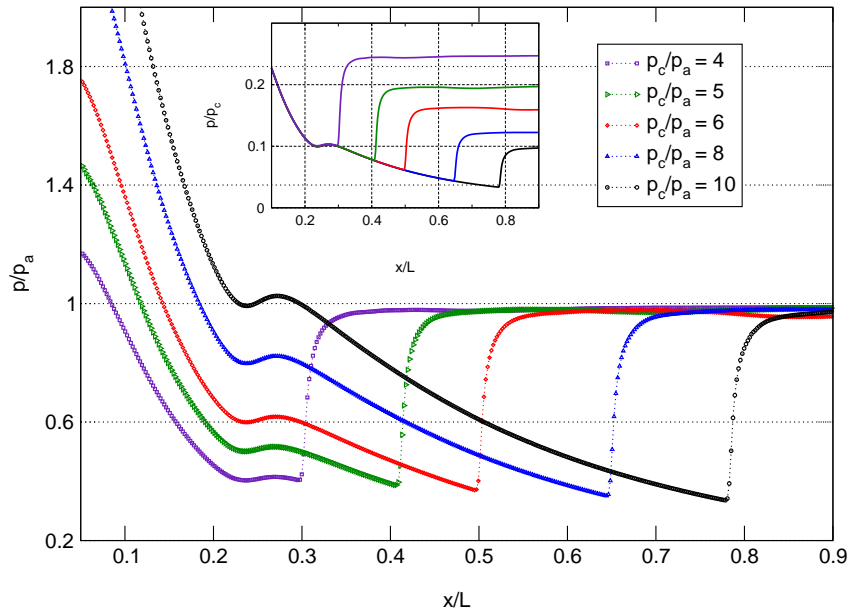


FIG. 9.30 – Profils de pression pariétale. Calcul turbulent.

soit par la turbulence elle-même. Comme dans le cas eulérien, ce mouvement naturel du choc va se retrouver dans les calculs couplés. Il est donc important de l'avoir bien mis en évidence.

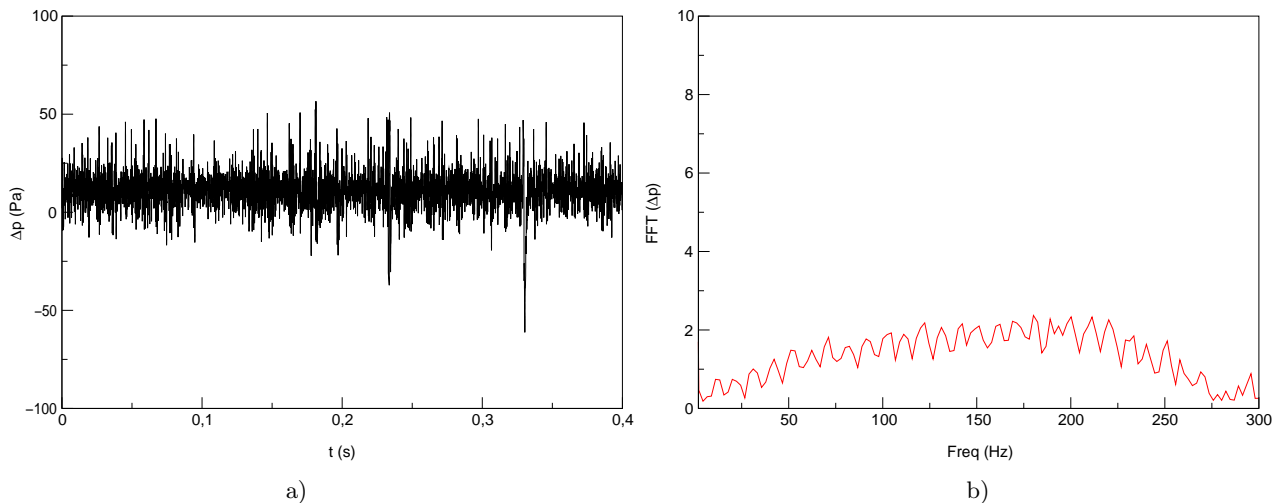


FIG. 9.31 – Signaux temporels de pression  $\Delta p$  enregistrés en un point situé juste en amont ( $x/L=0.46$ ) du point de décollement en l'absence de mouvement de la paroi a) et transformée de Fourier associée b). Rapport de pression  $p_c/p_a=6$ . Calcul turbulent.

**- Cas 2**

Examinons, tout d'abord, les résultats obtenus pour le cas 2. La figure 9.33.a montre le déplacement adimensionné d'un point quelconque de la structure, pour un rapport de pres-

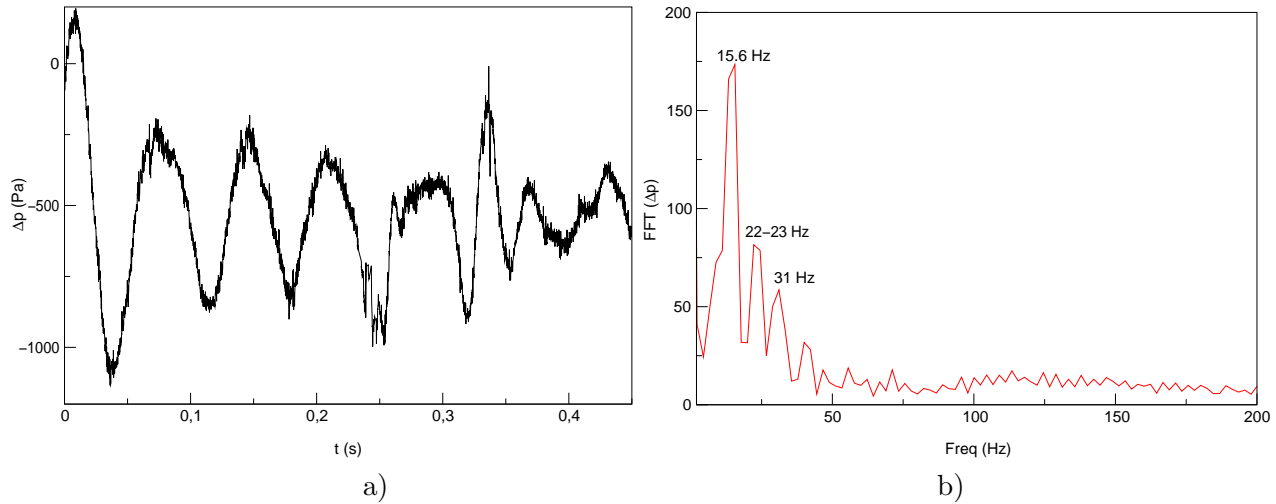


FIG. 9.32 – Signaux temporels de pression  $\Delta p$  enregistrés en un point situé juste en aval ( $x/L=0.53$ ) du point de décollement en l'absence de mouvement de la paroi a) et transformée de Fourier associée b). Rapport de pression  $p_c/p_a=6$ . Calcul turbulent.

sion de 6. Le déplacement est amorti. Les fréquences aéroélastiques du système restent proches des fréquences naturelles de la structure (figure 9.33.b), ce qui traduit le fait que les effets aéroélastiques sont faibles. On remarque, une fois de plus, la présence de fréquences supplémentaires inférieures à 60 Hz. Comme dans le cas eulérien, celles-ci correspondent aux fréquences intrinsèques du choc. Ces conclusions sont valables pour tous les rapports de pression testés ( $p_c/p_a=4, 6, 8$  et 10). Ainsi, on peut conclure que le système est stable quelle que soit la position du choc de décollement. Ceci est en accord avec les prédictions des modèles.

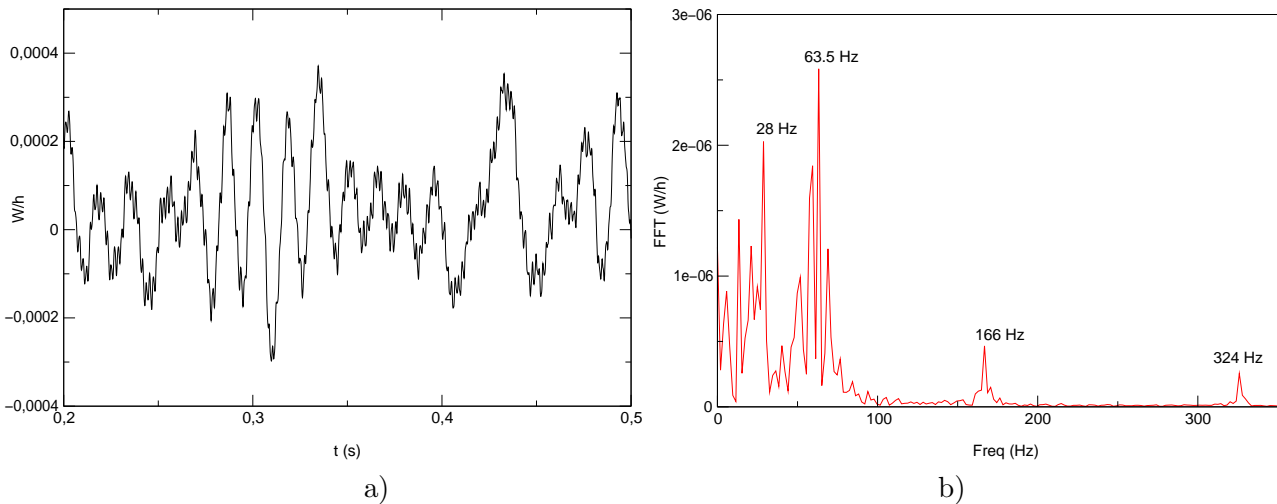


FIG. 9.33 – Evolution du déplacement vertical en  $x/L=0.66$  a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression  $p_c/p_a=6$ . Cas 2, calcul turbulent.

### - Cas 3

Le cas 3 est plus complexe à analyser car les deux premières fréquences propres naturelles de la structure sont inférieures à  $50\text{ Hz}$  (voir tableau 9.2), ce qui correspond justement à la plage de fréquences intrinsèques du battement du choc. Il est donc possible que le système rentre en résonance si une de ses fréquences aéroélastiques est très proche d'une des fréquences intrinsèques du choc.

La figure 9.34 illustre les résultats obtenus pour le rapport de pression de 4. Les déplacements sortent rapidement du domaine linéaire ( $W/h > 1$ ) en adoptant un comportement sinusoïdal d'amplitude croissante (figure 9.34.a). La fréquence de ce signal (figure 9.34.b) est de  $12\text{ Hz}$ , ce qui est, à la fois, proche d'une des fréquences de la structure et de celle du choc. On peut donc penser qu'il s'agit d'une résonance entre la première fréquence aéroélastique du système qui serait de  $12\text{ Hz}$  environ et une des fréquences naturelles du choc. Il peut également s'agir de la coalescence des deux premières fréquences aéroélastiques du système (instabilité dynamique). Cependant, étant donné que l'amplification temporelle du déplacement est exponentielle, nous estimons qu'il s'agit plutôt d'une instabilité dynamique. Dans tous les cas, cette position du choc induit d'importants déplacements de la structure, ce qui peut être extrêmement dangereux pour l'intégrité du divergent.

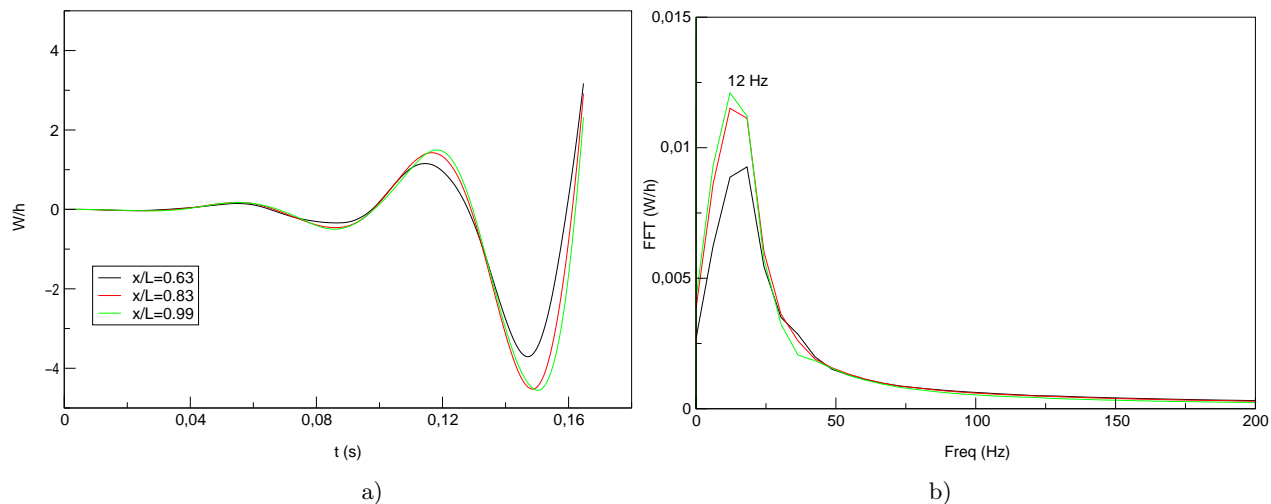


FIG. 9.34 – Evolution du déplacement vertical en différents points a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression  $p_c/p_a=4$ . Cas 3, calcul turbulent.

Concernant le rapport de pression de 6 (figure 9.35), les déplacements obtenus ont tendance à sortir, une fois de plus, de la limite du linéaire. Cependant, l'amplitude des déplacements augmente moins rapidement. Il semble qu'il s'agisse d'une résonance. La fréquence dominante du signal étant de  $35\text{ Hz}$ , nous pensons que cette résonance concernerait plutôt la seconde fréquence aéroélastique du système et une des fréquences naturelles du choc. Par ailleurs, on détecte aussi une fréquence à  $8\text{ Hz}$  qui pourrait être la première fréquence aéroélastique. Celle-ci serait passée de  $12\text{ Hz}$  à environ  $8\text{ Hz}$  entre le rapport de pression de 4 et celui de 6. Les résultats obtenus seraient donc en accord avec les modèles de stabilité puisque ceux-ci prédisent que pour le rapport de pression de 6 la structure ne présente ni une instabilité statique ni une instabilité dynamique.

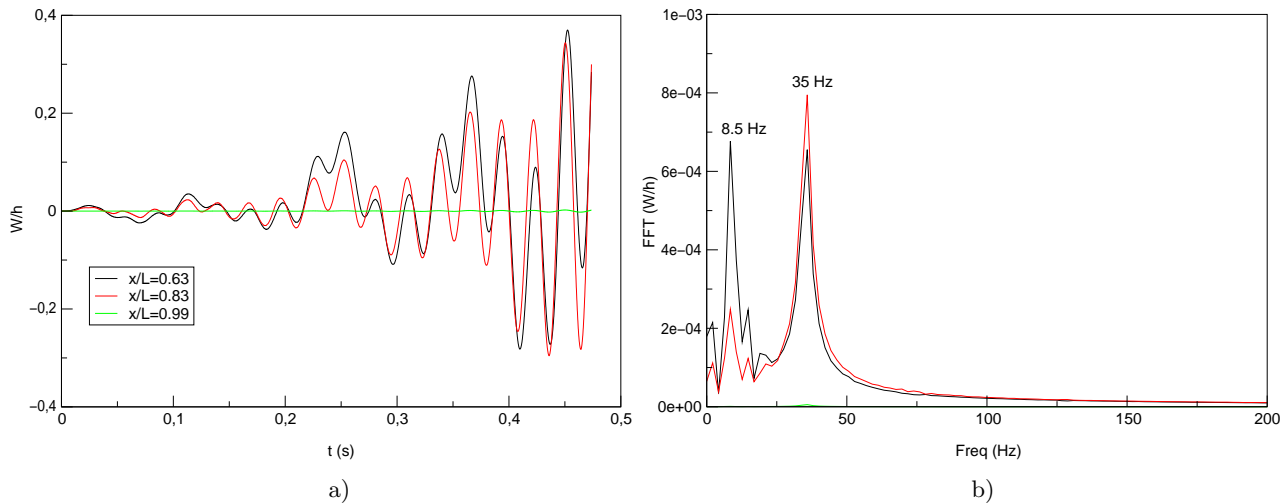


FIG. 9.35 – Evolution du déplacement vertical en différents points a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression  $p_c/p_a=6$ . Cas 3, calcul turbulent.

Enfin, la figure 9.36 expose les résultats obtenus pour le rapport de pression de 8. Les résultats pour le rapport de pression de 10 sont similaires et ne sont donc pas présentés. On note, cette fois, que le signal diverge rapidement. Nous estimons qu'il s'agit d'une instabilité statique de la structure. La première fréquence aéroélastique est, selon nous, devenue imaginaire pure, ce qui est cohérent avec l'hypothèse faite précédemment selon laquelle la première fréquence aéroélastique diminue avec l'augmentation du rapport de pression. Pour ces rapports de pression, la structure serait donc instable comme l'estiment les modèles. Cependant, nous pensons qu'il s'agit d'une instabilité statique et non dynamique. Ce résultat est cohérent avec ce que nous avons observé avec les simulations eulériennes : nous avons remarqué, en effet, que la fréquence de coalescence des deux premières fréquences aéroélastiques était plus basse pour les simulations eulériennes que celle issue des modèles, ce qui signifie aussi que la première fréquence aéroélastique du système était plus faible que prévu.

En résumé, les résultats obtenus par les simulations numériques turbulentes indiquent que toutes les positions du choc étudiées peuvent engendrer d'importants déplacements de la structure risquant de l'endommager. Ces comportements résulteraient d'une résonance avec les fréquences intrinsèques du choc ou d'instabilités (statiques ou dynamiques) du divergent, selon le rapport considéré.

### 9.2.3 Comparaison des temps de calculs

Dans un contexte industriel, il est important d'estimer les temps de calcul nécessaires à l'évaluation de la stabilité aéroélastique de la structure.

En ce qui nous concerne, les calculs réalisés à partir des modèles de stabilité requièrent une à deux minutes afin d'obtenir l'évolution des dix premières fréquences aéroélastiques en 80 positions du choc. Par contre, un seul calcul couplé eulérien (correspondant à une unique position du choc) utilisant 8 processeurs nécessite en moyenne 15 heures CPU sur la machine IBM SP4 du Crihan.

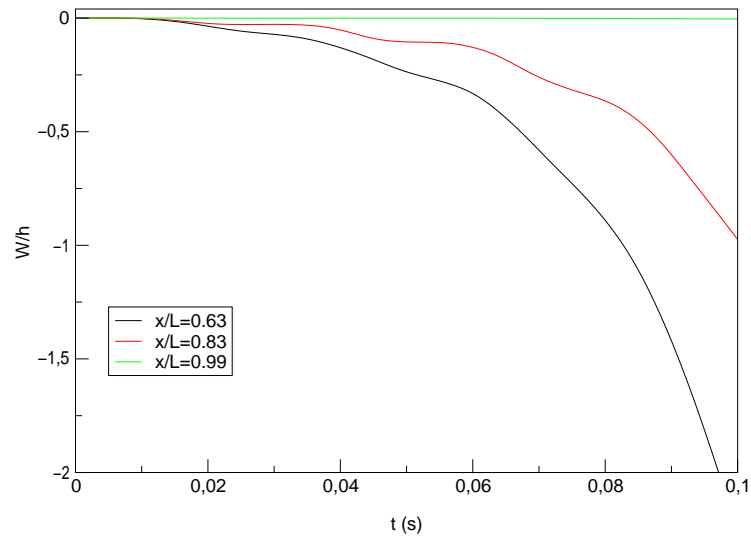


FIG. 9.36 – Evolution du déplacement vertical en différents points pour un rapport de pression  $p_c/p_a=8$ . Cas 3, calcul turbulent.

De même, un seul calcul couplé turbulent utilisant le même nombre de processeurs prend environ 40 heures CPU.



### 9.3 Application à la tuyère LEA souple

Nous nous intéressons maintenant à l'application des modèles de stabilité à une configuration tridimensionnelle. Nous allons montrer que certaines conclusions obtenues en appliquant les modèles de stabilité sur les configurations bidimensionnelles restent valables ici.

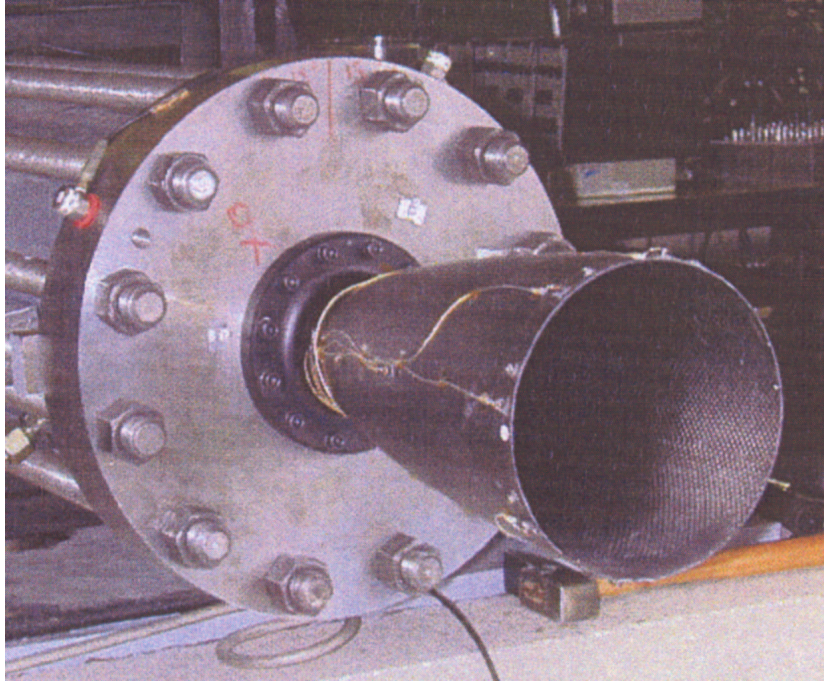


FIG. 9.37 – Tuyère LEA souple (version 1) au banc d'essai. Photo tirée de [87].

Nous avons vu au chapitre 2 que l'ONERA avait étudié expérimentalement le comportement aéroélastique d'une tuyère souple (figure 9.37). Celle-ci possède une géométrie identique à celle de la tuyère définie par le LEA-Poitiers (tableau 9.3).

$L$	$h_{col}$	$D_{sortie}$	$\alpha_{sortie}$
330 mm	13.6 mm	150 mm	2.9°

TAB. 9.3 – Données géométriques de la LEA souple.  $L$  : longueur à partir du col,  $h_{col}$  : hauteur du col,  $D_{sortie}$  : diamètre de l'extrémité et  $\alpha_{sortie}$  : demi-angle de sortie.

Parmi les nombreuses configurations étudiées en avant-projet par l'ONERA, figure une tuyère en aluminium d'épaisseur 0.6 mm (version 1). Cette tuyère a été retenue pour notre étude (cas LEA1). Comme nous l'avons fait pour les applications bidimensionnelles, trois cas ont été étudiés afin de tester l'influence des conditions aux limites et des propriétés du matériau (tableau 9.4). Seule une partie du divergent de la tuyère ( $x \geq 50$  mm) a été modélisée<sup>8</sup> (figure 9.38).

8. Le reste de la tuyère ( $x \leq 50$  mm) est considéré comme rigide conformément aux calculs et aux expériences

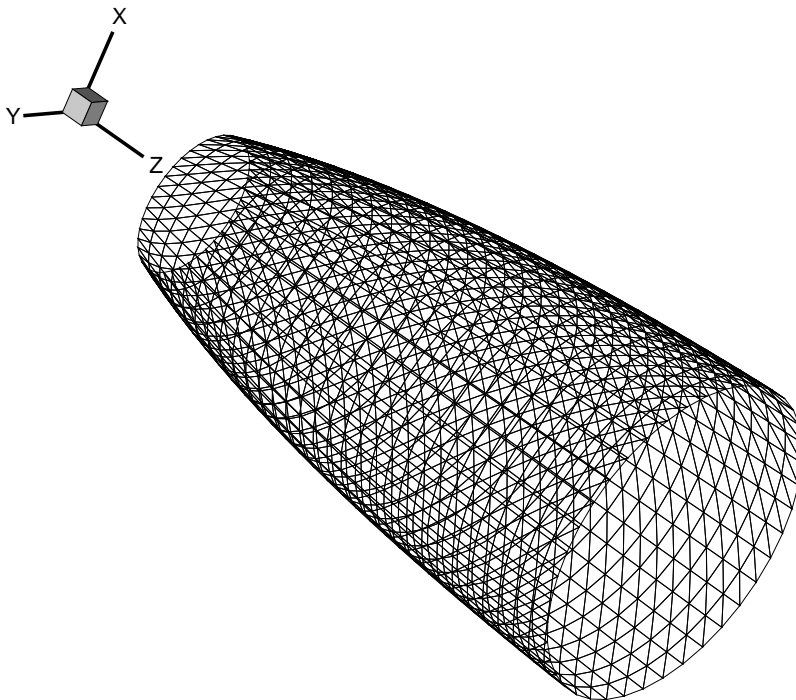


FIG. 9.38 – Maillage de la tuyère LEA souple.

	"Col <sup>a</sup> "	Sortie	$E(N.m^{-2})$	$h$ (mm)	$\rho_s$ ( $kg.m^{-3}$ )
Cas LEA1	encastrement	libre	$7.2 \times 10^{10}$	0.6	2800
Cas LEA2	encastrement	encastrement	$7.2 \times 10^{10}$	0.6	2800
Cas LEA3	encastrement	encastrement	$1.44 \times 10^{10}$	0.6	2800

TAB. 9.4 – Conditions aux limites et propriétés du matériau ( $\nu = 0.32$ ) des cas LEA.<sup>a</sup> En fait, il s'agit de la couronne située en  $x = 50$  mm.

### 9.3.1 Obtention des grandeurs initiales

La structure est modélisée grâce à l'élément de coque DKT18 décrit au chapitre 4. Les six premières fréquences propres naturelles ( $\omega_i/2\pi, i \in [1, 6]$ ) obtenues pour chacun des cas considérés sont reportées dans les tableaux 9.5, 9.6 et 9.7. Pour chaque cas, une étude de convergence par rapport au maillage<sup>9</sup> a été réalisée.

réalisés par Moreaux [87].

9. Les maillages ( $N_L \times N_p$ ) sont donnés en fonction du nombre  $N_L$  d'éléments quadrilatères suivant la longueur du divergent par le nombre  $N_p$  d'éléments quadrilatères suivant son pourtour. Chaque élément quadrilatère est

Le code de calcul<sup>10</sup> a dû être modifié de façon à utiliser des matrices creuses. En effet, si l'on considère, par exemple, le plus petit maillage ( $30 \times 40$ ) comportant 1240 nœuds, les matrices<sup>11</sup> masse  $[M]$  et de rigidité  $[K]$  ont pour taille ( $7440 \times 7440$ ). En terme de mémoire, ceci revient à environ 450 MB par matrice, d'où la nécessité de ne stocker que les termes non-nuls de celles-ci. Notons que les fréquences reportées dans ces tableaux sont racines doubles du problème aux valeurs propres<sup>12</sup>. Quelques remarques concernant la convergence en maillage des six premières fréquences propres naturelles peuvent être faites : nous avons considéré que les résultats étaient convergés pour un maillage M1 lorsque les écarts relatifs entre les fréquences obtenues sur ce maillage et un maillage M2 plus fin étaient inférieurs à 5%. Ainsi, on peut considérer que la convergence est atteinte dans les trois cas pour le maillage ( $60 \times 80$ ). Par précaution, nous avons, tout de même, conservé le maillage le plus fin ( $60 \times 100$ ) pour évaluer l'évolution des fréquences aéroélastiques en fonction de la position du choc. Par ailleurs, on pourra aussi noter que :

- Pour chaque cas, on vérifie bien, comme on pouvait s'y attendre, que les modes les plus longs à converger sont les modes ayant le plus de lobes (hexalobe pour le cas LEA1 et heptalobe pour les cas LEA2 et LEA3).
- Le raffinement selon la longueur du divergent joue un rôle plus important dans les cas bi-encastrés que dans le cas encastré-libre (les déformations modales dans cette direction sont moins marquées dans ce dernier cas).

Les figures 9.39 et 9.40 illustrent les six premiers modes propres des cas LEA1 et LEA3. Aucun de ces modes n'est axisymétrique. Par ailleurs, seul le mode de flexion peut générer des charges latérales. L'annexe F présente les modes supérieurs de ces configurations. En dernier lieu, précisons que le mode bilobe est également connu sous le nom de "mode d'ovalisation". Il faut aussi souligner que le mode de flexion ne doit pas être confondu avec le mode de pendulage du moteur bien que ceux-ci aient même allure. En effet, le mode de pendulage est un mouvement d'ensemble du moteur par rapport à son système d'attache.

---

ensuite divisé en deux éléments triangulaires.

10. Les modèles de stabilité ont été codés sous Matlab afin de faciliter leur utilisation.

11. L'élément DKT18 possède six degrés de liberté par nœud.

12. Par conséquent, ce que nous désignons par "mode  $k$ " est le mode  $2k - 1$  fourni par l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
30 × 40	182.7	230.8	428.7	599.7	694.8	1030.9
30 × 80	180.5	227.2	417.6	598.5	667.1	972.7
60 × 40	181.1	231.0	430.4	597.5	699.2	1040.8
60 × 80	178.9	227.0	418.0	596.3	668.4	975.7
60 × 100	178.7	226.6	416.6	596.2	664.8	968.4

TAB. 9.5 – Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA1 en fonction du maillage. Mode 1 : bilobe (ovalisation), mode 2 : trilobe, mode 3 : quadrilobe, mode 4 : mode de flexion, mode 5 : pentalobe, mode 6 : hexalobe.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
30 × 40	1350.4	1423.7	1514.9	1655.8	2013.5	2079.0
30 × 80	1309.2	1359.5	1488.5	1554.1	1853.9	2065.4
60 × 40	1337.9	1413.7	1503.6	1651.7	2019.7	2071.2
60 × 80	1295.6	1346.5	1476.9	1543.0	1845.9	2057.3
60 × 100	1290.6	1338.7	1473.6	1530.6	1826.5	2055.6

TAB. 9.6 – Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA2 en fonction du maillage. Mode 1 : quadrilobe, mode 2 : pentalobe, mode 3 : trilobe, mode 4 : hexalobe, mode 5 : heptalobe, mode 6 : bilobe.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
30 × 40	603.9	636.7	677.5	740.5	900.5	929.7
30 × 80	585.5	608.0	665.7	695.0	829.1	923.7
60 × 40	598.3	632.2	672.4	738.7	903.3	926.3
60 × 80	579.4	602.2	660.5	690.0	825.5	920.1
60 × 100	577.2	598.7	659.0	684.5	816.8	919.2

TAB. 9.7 – Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA3 en fonction du maillage. Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA2 en fonction du maillage. Mode 1 : quadrilobe, mode 2 : pentalobe, mode 3 : trilobe, mode 4 : hexalobe, mode 5 : heptalobe, mode 6 : bilobe.

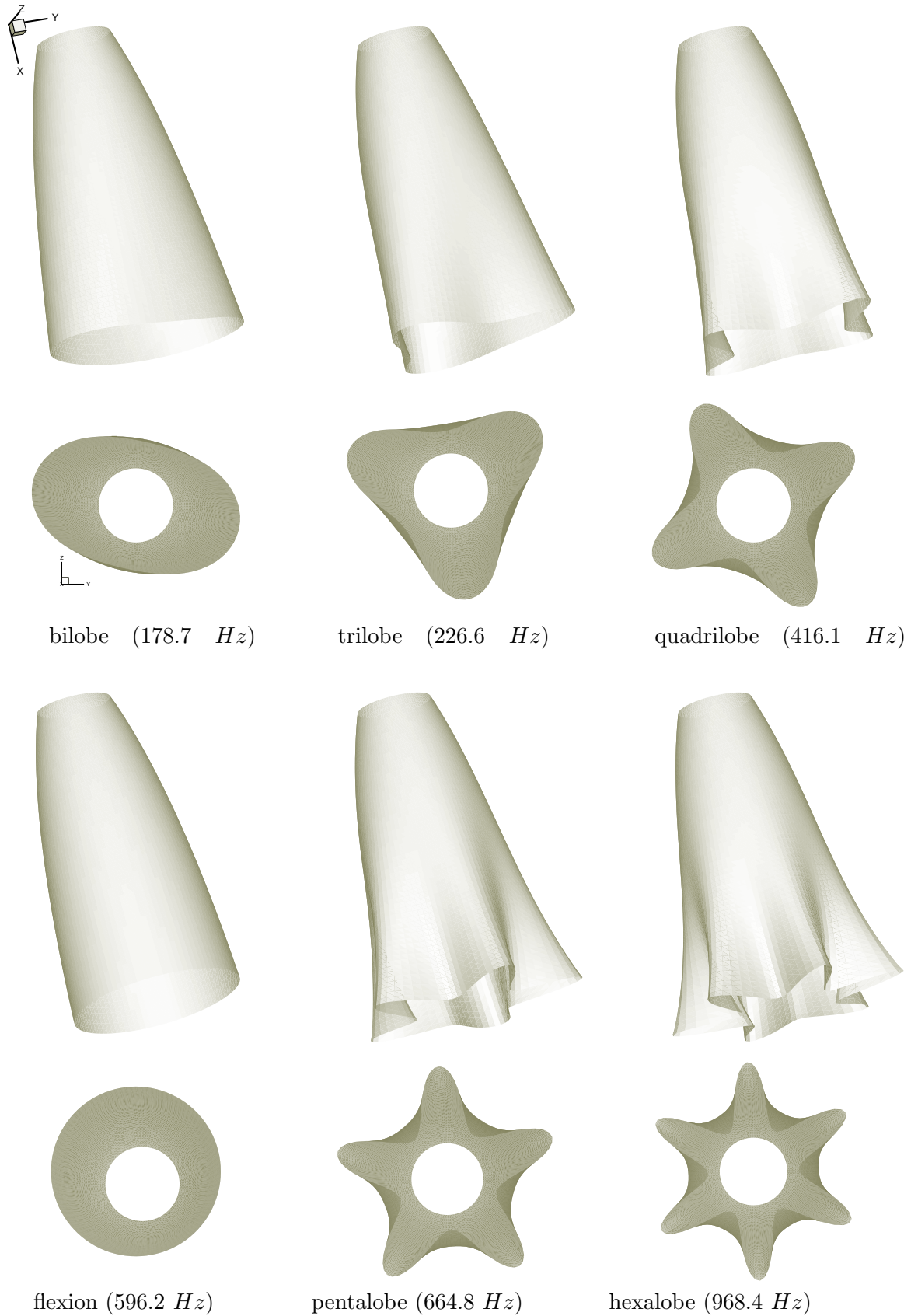


FIG. 9.39 – Modes propres naturels 1 à 6 obtenus pour le cas LEA1. Vues de profil et de dessus.

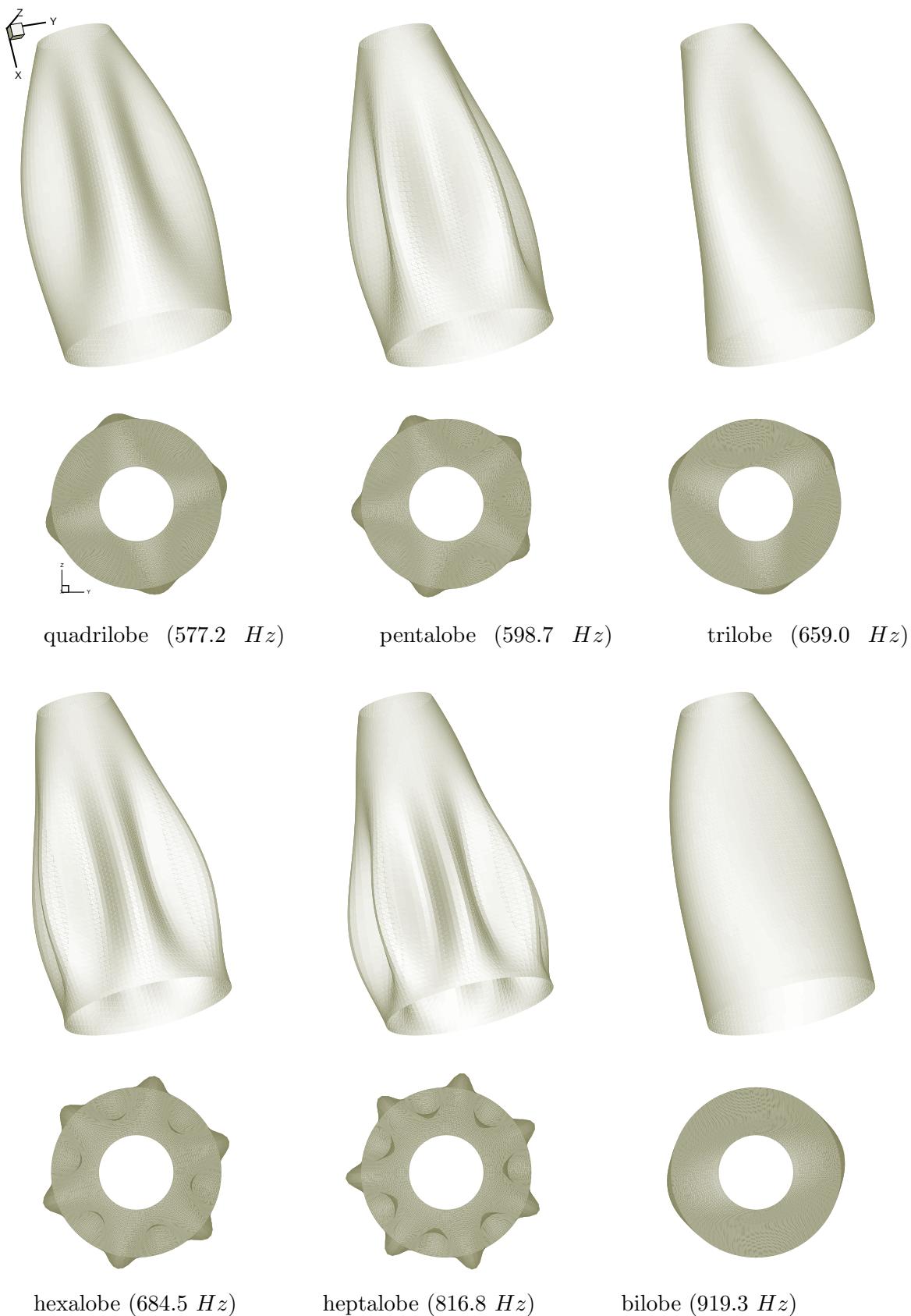


FIG. 9.40 – Modes propres naturels 1 à 6 obtenus pour le cas LEA3. Vues de profil et de dessus.

Concernant les données relatives au fluide, la température totale  $T_c$  est de  $270\text{ K}$  et la pression extérieure  $p_a$  est de  $1\text{ bar}$ . La position du point de décollement en fonction du rapport de pression  $p_c/p_a$  est issue des expériences effectuées au LEA sur la version rigide de cette tuyère [55] (figure 9.41). La valeur de la pression  $p_i$  au pied du choc de décollement ainsi que le profil de pression en amont de celui-ci sont déduits des relations isentropiques.

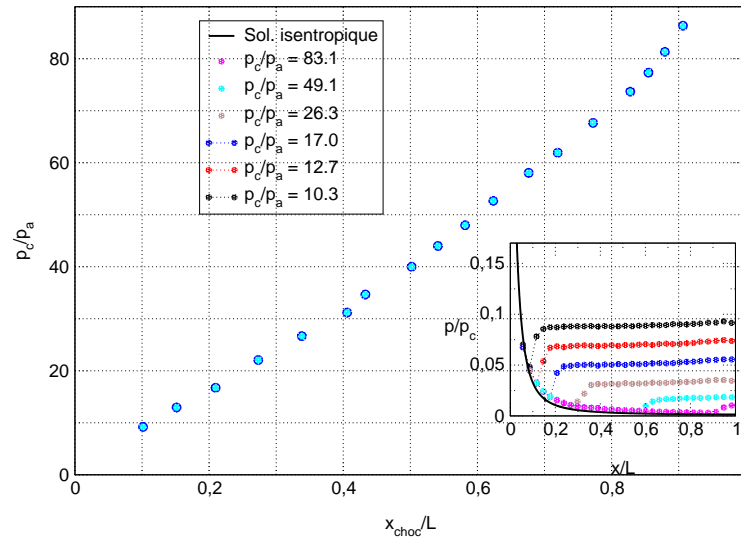


FIG. 9.41 – Evolution de la position du décollement en fonction du rapport de pression. Données expérimentales [55].

### 9.3.2 Influence des conditions aux limites et des propriétés du matériau

Comparons, tout d'abord, les résultats de cas LEA1 (tuyère encastrée-libre) et LEA2 (tuyère encastrée-encastrée) afin d'évaluer l'influence des conditions aux limites. Il est rappelé qu'une modification de ces dernières se traduit par une modification des fréquences propres naturelles et des modes associés, donc des coefficients d'influence dynamique  $R_k$ .

La figure 9.42.a montre les résultats obtenus pour le cas LEA1. Les résultats de deux modèles de stabilité étant pratiquement identiques (instabilité statique uniquement), seuls ceux du modèle de Pekkari sont présentés. Il apparaît très clairement que quatre modes sur les six étudiés sont statiquement instables. La fréquence aéroélastique du mode 1 décroît rapidement et s'annule en  $x/L = 0.63$ . De même, les fréquences aéroélastiques des modes 2, 3 et 5 s'annulent les unes après les autres. La fréquence du mode 6 suit la même tendance. On note également un point intéressant : le mode de flexion (mode 4) n'est pas instable, les effets aéroélastiques pouvant même être qualifiés de faibles pour ce mode (évolution relative de la fréquence inférieure à 10 %, figure 9.42.b). Il s'agit d'un point important car ce mode est le seul à engendrer des efforts latéraux. On note donc que les modes les plus instables ne sont pas toujours ceux ayant les plus faibles fréquences naturelles (comparer le mode 4 avec les modes 5 et 6). En résumé, à partir de  $x/L = 0.63$ , la structure est instable car au moins un de ces modes présente une instabilité statique.

Soulignons que ces conclusions sont tout à fait cohérentes avec les résultats expérimentaux

obtenus par l'ONERA sur la tuyère souple (version 2). Moreaux [87] aurait effectivement constaté une instabilité de la tuyère pour un rapport de pression  $p_c/p_a$  de 75.7 correspondant à une position du choc située en  $x/L=0.85$ . Rappelons que, suite à la rupture de la version 1 de cette tuyère, l'ONERA a conçu une seconde tuyère légèrement différente (encastrement réalisé suivant un autre procédé, épaisseur du matériau variable...) entièrement en composite. Cette tuyère étant un peu plus rigide que celle étudiée ici, il n'est pas étonnant que son mode d'ovalisation devienne instable pour une position du choc située plus en aval.

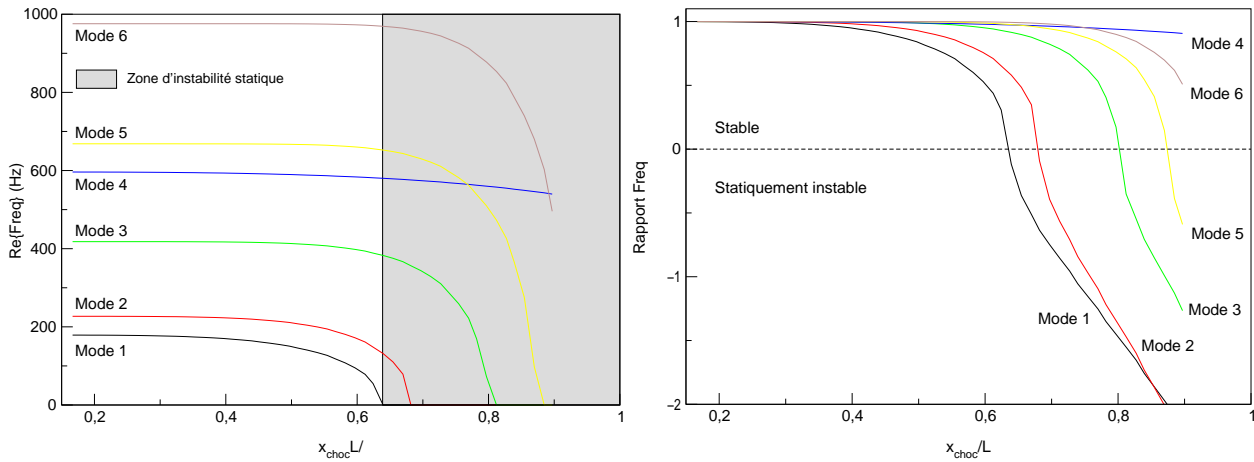


FIG. 9.42 – Evolution des six premières fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport  $(\Omega/\omega)^2/|\Omega/\omega|$  b). Cas LEA1.

Les conditions aux limites de cette tuyère sont maintenant modifiées mais les propriétés du matériau sont inchangées (cas LEA2). Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 9.43.a et 9.43.b. Comme nous l'avons constaté et analysé en 2D, cette modification des conditions aux limites entraîne une variation des coefficients d'influence dynamique. Celle-ci se traduit par la disparition des instabilités statiques rencontrées en fin de divergent. On voit cependant que certaines fréquences aéroélastiques tendent à se rapprocher.

### - Influence des propriétés du matériau

Nous avons donc modifié les propriétés du matériau afin de voir si une instabilité dynamique par coalescence de mode pouvait se produire (cas LEA3). Les résultats reportés sur la figure 9.44 indiquent une plage de positions du choc susceptibles de provoquer une instabilité dynamique de plusieurs modes. En effet, entre  $x/L=0.60$  et  $x/L=0.84$ , plusieurs fréquences aéroélastiques se rapprochent significativement. Cependant, on n'observe pas, strictement parlant, de coalescence. On peut penser que ce comportement provient de l'algorithme de résolution qui ne parvient pas à capter précisément ce phénomène. Pour éclaircir ce point, nous avons décidé de résoudre le système (3.10) non plus par analyse modale mais en effectuant un calcul pas à pas. Plus précisément, nous intégrons directement l'équation (3.10) en utilisant le schéma temporel de Newmark. Il est important de remarquer qu'il ne s'agit pas d'un calcul couplé mais simplement de résoudre (3.10) autrement que par une analyse modale. Les hypothèses de modèles sont conservées : aucun code fluide n'est introduit à ce niveau. La figure 9.45 illustre les réponses tem-



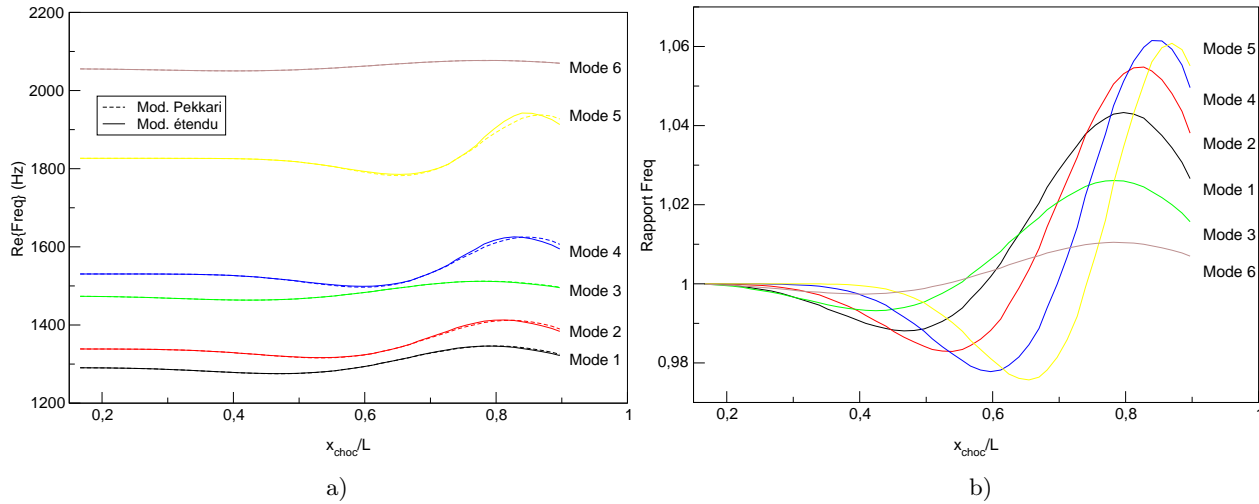


FIG. 9.43 – Evolution des six premières fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport  $(\Omega/\omega)^2/|\Omega/\omega|$  b). Cas LEA2.

porelles en déplacement obtenues pour un choc situé en  $x/L=0.27$  et en  $x/L=0.70$ . Le deuxième point est placé dans ce que nous pensons être une zone d'instabilité dynamique contrairement au premier. Ces signaux confirment nos hypothèses. En effet, le premier présente un amortissement (la structure est stable pour cette position du choc) alors que le second témoigne d'une instabilité dynamique de la structure<sup>13</sup>.

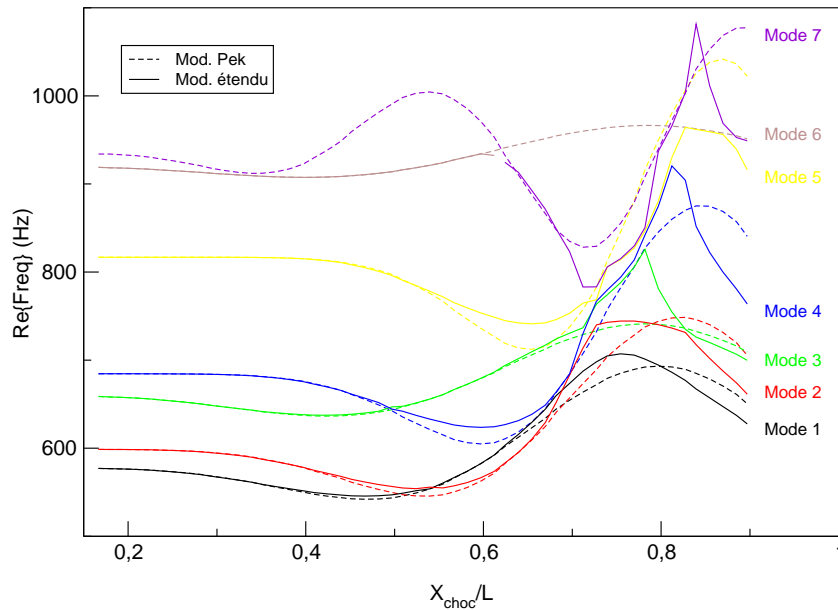


FIG. 9.44 – Evolution des sept premières fréquences aéroélastiques en fonction de la position du choc. Cas LEA3.

13. La fréquence de coalescence associée est d'environ 650 Hz pour cette position du choc.

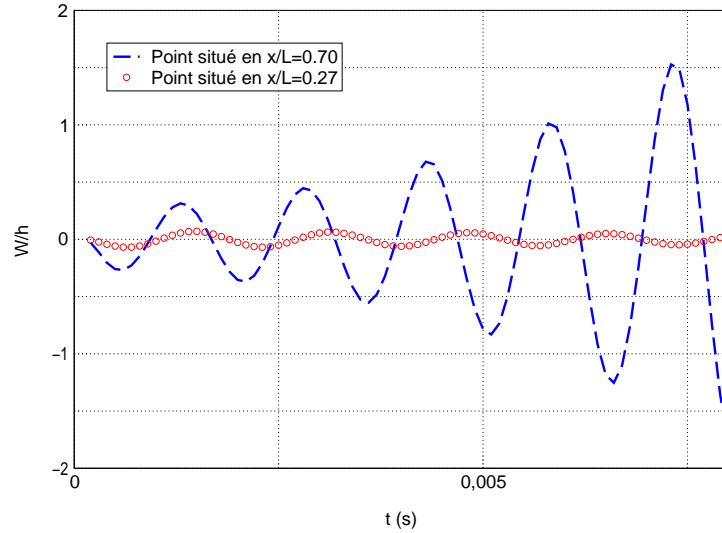


FIG. 9.45 – Evolution temporelle d'un point quelconque du divergent pour un choc situé en  $x/L=0.27$  et en  $x/L=0.70$ . Calcul pas à pas. Cas LEA3.

### 9.3.3 Recommandations aux expérimentateurs

Compte tenu des précédents résultats et analyses, nous pensons qu'il serait intéressant de vérifier, au minimum, le rôle des conditions aux limites grâce aux expériences. Modifier ces conditions constitue, selon nous, le moyen le plus rapide et le moins coûteux de supprimer d'éventuelles instabilités d'un divergent sans changer sa géométrie ou son matériau. Ceci dans le but de constituer une base de données pour valider les modèles de stabilité aéroélastique.

### 9.3.4 Temps de calcul (cas LEA1)

Concrètement, les temps de calculs sur station de travail de type SGI, nécessaire à l'obtention des 12 premières fréquences aéroélastiques en 40 positions du choc et sur le maillage le plus fin, sont d'un peu plus de 4 heures CPU pour le modèle de Pekkari et de 15 heures pour sa version étendue, soit un rapport de 3.5. Pour ces deux modèles, le calcul et l'assemblage des matrices masse et de rigidité (effectué une seule fois au début) constituent l'étape la plus longue (environ 4 heures CPU). L'écart entre les deux modèles s'explique par le fait que le modèle de Pekkari utilise les fréquences et modes propres naturels pour calculer les fréquences aéroélastiques en une position du choc donnée. Il ne requiert donc que quelques secondes par position du choc. En effet, il ne doit résoudre le problème aux valeurs propres  $([K] - \omega^2[M]) \{V\} = \{0\}$  qu'une fois. Au contraire le modèle étendu repose sur la résolution du problème aux valeurs propres  $(([K] - [K_p]) - \Omega^2[M]) \{\bar{V}\} = \{0\}$  pour chaque position du choc (15 minutes par position). Toutefois, on peut constater que le temps CPU du modèle étendu reste tout à fait acceptable.

D'un point de vue numérique, on peut estimer à environ 400 heures CPU le temps nécessaire à l'obtention d'une solution tridimensionnelle convergée pour une position du choc donnée. Il faut ensuite perturber la paroi du divergent et enregistrer les déplacements de celle-ci pendant une période au moins égale à 10 ou 15 fois la période du mode de plus basse fréquence naturelle (200 Hz environ pour le cas LEA1, la fréquence aéroélastique pouvant devenir très inférieure

à celle-ci). On peut donc estimer qu'une simulation tridimensionnelle, utilisant 12 processeurs, requerra 800 heures CPU. Pour estimer les fréquences aéroélastiques pour cinq positions du choc, il faudra donc plusieurs mois de calcul, ce qui reste aujourd'hui inexploitable d'un point de vue industriel.

## Chapitre 10

# Conclusions & perspectives

Cette thèse a été dédiée à l'étude des phénomènes aéroélastiques dans les tuyères de propulseurs. Elle s'inscrit dans le cadre des activités du groupe ATAC. Nous y avons montré que les phénomènes aéroélastiques peuvent être nuisibles pour les moteurs fusée (présence de modes instables) au même titre que les charges latérales qu'ils peuvent amplifier. Par ailleurs, nous nous sommes efforcés de conférer à ce travail un aspect "pédagogique" afin d'inciter les numériciens des fluides et des structures à s'investir dans ces problèmes. Un effort particulier a également été porté à la validation des outils mis au point.

Le cadre de l'étude a, tout d'abord, été précisé. Une description du phénomène de décollement dans les tuyères en régime surdétendu a été présentée. Nous avons exposé les principales caractéristiques des décollements libres (FSS) et restreints (RSS). Le lien entre le profil de la tuyère (TIC, TOC...) et l'apparition du décollement restreint ainsi que le rôle joué par la configuration de choc en chapeau dans la transition FSS  $\leftrightarrow$  RSS ont été rappelés. D'autre part, nous avons brièvement introduit deux importants aspects du décollement : son instationnarité et son possible caractère dissymétrique. Enfin, les modèles de prédiction du décollement ont été résumés.

Nous nous sommes ensuite attachés à résumer quelques-unes des nombreuses études expérimentales réalisées sur les charges latérales. Partant de ces observations, les différents modèles développés par le passé, comme ceux de Schmucker, Dumnov, DASA/DLR et Pekkari ont été exposés. Ceux-ci reposent respectivement sur :

- une dissymétrie globale de la ligne de décollement ;
- des pulsations de pression au niveau de la ligne de décollement ou dans la zone de recirculation ;
- une transition entre le décollement libre et le décollement restreint (et vice versa) ;
- ou un couplage aéroélastique.

Notre étude concernant les phénomènes aéroélastiques dans les tuyères propulsives, nous avons porté un intérêt particulier au modèle développé par Pekkari. Ce modèle permet d'analyser la stabilité aéroélastique d'un divergent soumis à un choc de recompression ou de décollement (écoulement surdétendu). L'influence d'une perturbation de ce choc sur les modes propres de vibration du divergent a été soulignée. Ce modèle repose principalement sur deux points : (1) la prise en compte d'un profil de pression pariétale simplifié, en particulier au niveau du

choc de décollement, et (2) la théorie des petites perturbations pour représenter l'influence du mouvement de la paroi sur le champ de pression à l'intérieur du divergent flexible. Pekkari montre ainsi, dans les limites de son modèle, l'existence de certains modes propres instables en fonction de la position initiale du choc perturbé. Ces instabilités sont de type statique (flambement). Une version "étendue" du modèle a également été exposée. Celle-ci repose sur les mêmes hypothèses que le précédent mais permet, en plus, de détecter les instabilités dynamiques (de type "flutter") de la structure grâce à une projection des équations couplées sur une base modale variable.

Notre objectif étant d'évaluer ces modèles, un code de calcul adapté a été développé. Par conséquent, nous avons, en premier lieu, répertorié et présenté plusieurs techniques numériques de couplage fluide-structure disponibles dans la littérature. Nous avons ensuite opté pour le couplage "faible" dont nous avons détaillé la mise en œuvre. Ce type de couplage repose sur un dialogue entre deux codes dont l'un est dédié à la structure et l'autre au fluide. Ainsi, il est très rapidement ressorti qu'il s'agissait d'une technique très souple préservant la modularité de chacun des codes de calcul à coupler et permettant de bénéficier des méthodes les plus performantes dans chacune des disciplines.

Dans un second temps, nous avons sélectionné des codes "fluide" et "structure" bien adaptés pour décrire l'écoulement compressible complexe au sein des tuyères de propulseur et le comportement dynamique du divergent. Une présentation complète de ces codes a été effectuée et certains développements supplémentaires réalisés. Concernant le code structure, un élément de coque non-linéaire en grands déplacements et rotations modérées a été développé, implémenté et validé ainsi que plusieurs techniques de pilotage (pilotage en déplacement, en chargement et en longueur d'arc). Le développement de cet élément était motivé par notre désir de simuler ultérieurement le comportement post-instabilité d'une structure. Par ailleurs, l'élément de coque linéaire DKT18 a été utilisé pour diverses applications telle que la détermination des modes propres de vibration de la tuyère LEA souple. Les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

D'un point de vue du fluide, nous disposons de trois codes robustes et précis bien adaptés pour décrire les écoulements aérodynamiques. Nous avons poursuivi leur développement. Certains de ces codes ont été appliqués à l'étude de l'amorçage rapide d'une tuyère supersonique (voir les annexes A et B).

Une fois que ces codes furent rendus exploitables et performants pour traiter le problème considéré, la mise en œuvre du couplage a reposé sur deux étapes importantes. La première a consisté à adapter les codes fluide aux domaines évolutifs alors que la seconde a eu pour objectif d'introduire dans chaque code les instructions nécessaires à leur dialogue. Nous avons par conséquent résumé les méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (techniques de changement de repère, techniques ALE... ). Un intérêt particulier a été porté à la technique dite de "maillage dynamique" et à la loi de conservation géométrique (GCL) que celle-ci doit respecter. C'est cette technique que nous avons retenue pour notre étude. Plusieurs exemples de validation (compression dans un piston, écoulement bidimensionnel autour d'un projectile mobile) ont été présentés. La mise en pratique des transferts d'information entre les deux codes (*i.e.* la seconde étape de cette méthodologie) a ensuite été introduite. Les principaux algorithmes de couplage faible (algorithmes décalés de type CSS, avec ou sans sous-cyclage... ) ont été rappelés et une technique informatique

simple utilisant les bibliothèques parallèles exposée. Enfin, nous avons validé l'outil de calcul couplé obtenu. Un cas-test classique en aéroélasticité, le "flutter" (flottement), a été utilisé. Les résultats obtenus furent très satisfaisants. Comme nous l'avons vu, ce cas-test permet, de plus, d'étudier l'influence de plusieurs paramètres numériques sur l'apparition des conditions critiques de "flutter". Ainsi, il est ressorti de nos calculs qu'un couplage utilisant un code précis au second ordre en espace conduisait à une estimation des conditions de flutter proche de celle d'un schéma WENO précis au cinquième ordre. Notons enfin que ces développements et applications mettent en évidence le fait que l'aéroélasticité est une discipline à part entière qui ne doit pas être vue comme la simple superposition de deux domaines distincts. En effet, même si sa mise en œuvre peut être réalisée facilement en couplant un code fluide et un code structure, les problèmes d'aéroélasticité font intervenir des phénomènes physiques qui leur sont propres (coalescence de modes... ). De même, ils possèdent leurs propres difficultés numériques (échelles de temps des deux codes à coupler souvent très différentes... ).

L'outil développé a ensuite été utilisé pour étudier la stabilité d'un divergent soumis à un choc de décollement. Dans un premier temps, les modèles de stabilité ont été appliqués à une configuration bidimensionnelle plane. L'écoulement a été considéré comme eulérien puis comme turbulent. Plusieurs résultats très intéressants sont ressortis de cette première étude :

- La supériorité du modèle étendu a été confirmée : le modèle de Pekkari est inapte à prédire les instabilités dynamiques. Ceci est dû au fait qu'il projette les équations couplées sur une base modale fixe (celle des vecteurs propres naturels).
- L'analyse des coefficients d'influence aérodynamique  $A$  et dynamiques  $R_k$  est riche d'enseignements. Elle permet, par exemple, de comprendre pourquoi un mode dont la fréquence est plus élevée que celle d'un autre peut devenir instable avant celui-ci. Elle permet aussi de mieux appréhender l'influence des conditions aux limites de la structure, des propriétés du matériau ou de l'angle du divergent.
- Il est apparu que faire varier les conditions aux limites permettait de modifier significativement le comportement du divergent (apparition ou disparition de comportements instables).
- Concernant l'influence de la turbulence, les modèles ne la prennent en compte que *via* la position du décollement en fonction du rapport de pression. Dans ces conditions, il y a peu de différences avec le cas eulérien. Il faudrait modifier la modélisation du profil de pression afin de mieux prendre en compte la zone d'interaction libre et la région correspondant au plateau.
- Les modèles ont également été appliqués en 3D à la version souple de la tuyère LEA. L'influence des conditions aux limites et des propriétés du matériau a de nouveau été étudiée. En particulier, dans le cas LEA1 (tuyère en aluminium encastrée au col), plusieurs modes présenteraient une instabilité statique lorsque le décollement est proche de la sortie du divergent. Ceci serait cohérent avec les résultats des expériences menées par Moreaux. D'autre part, lorsque le divergent est encastré au col et à son extrémité, ces instabilités sont supprimées (cas LEA2). Enfin, si on modifie, en plus, les propriétés du matériau de sorte à rendre la tuyère plus souple, des instabilités dynamiques peuvent apparaître (cas LEA3).

- De façon générale, on constate que les modes les plus instables ne sont pas toujours ceux de plus basses fréquences. De plus, le mode de flexion, (le plus actif en terme d’amplification des efforts latéraux) peut ne pas être instable alors que plusieurs autres le sont. Il ne faut donc pas se limiter à l’étude de ce mode pour juger de la stabilité du divergent. Une instabilité dynamique ou statique peut s’avérer très dangereuse pour l’intégrité du divergent, quel que soit le mode mis en cause.
- Partant de ces résultats, nous estimons qu’il est nécessaire que les travaux expérimentaux débutés sur la tuyère souple soient poursuivis. Il est indispensable qu’une base de données expérimentales complète soit créée. En particulier, il serait fort intéressant de vérifier expérimentalement l’influence des conditions aux limites mais aussi l’influence du type de décollement (FSS ou RSS) sur la stabilité de la structure.

Dans un second temps, nous avons mené des calculs couplés eulériens et turbulents pour les configurations bidimensionnelles planes ayant un angle de 22 et 10 degrés respectivement. Concernant les simulations couplées eulériennes, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les résultats numériques sont qualitativement en accord avec ceux issus des modèles. En effet, lorsque ceux-ci prédisent que la structure est stable pour toutes les positions du choc (cas 2), cela est retrouvé numériquement. De même, lorsqu’une instabilité dynamique est prévue (cas 3), celle-ci est confirmée par les calculs. Cependant, il est apparu que la plage de positions du choc conduisant à une instabilité dynamique était un peu plus étendue que celle prévue par le modèle étendu. De même, la fréquence de coalescence retrouvée numériquement était plus faible que celles estimée par ce dernier.
- Pekkari suppose que la stabilité du divergent est essentiellement pilotée par les variations de pression engendrées par le mouvement de la paroi au niveau du choc. Pour les cas considérés, cette hypothèse est valide. Les variations de pression engendrées par le mouvement de la paroi en amont et en aval de la zone d’excursion du choc ne jouent pas un rôle important ici. Il n’est pas sûr, toutefois, que cette hypothèse reste valide lorsque le décollement est restreint.
- Les écarts observés entre les résultats numériques et ceux des modèles ont été expliqués par l’emploi de la théorie des petites perturbations. Pour cela, nous avons évalué la variation de pression engendrée par une légère augmentation de l’angle du divergent, une perturbation suivant son premier puis son second mode propre naturel. Il en est ressorti que celle-ci était globalement surestimée par la théorie des petites perturbations. L’emploi de cette théorie est donc un des points faibles des modèles de stabilité.
- Par ailleurs, l’examen des champs aérodynamiques obtenus avant couplage (servant de solutions initiales aux calculs couplés) présentait un battement naturel du choc à basse fréquence. Ce battement a déjà été observé expérimentalement sur d’autres configurations mais reste, jusqu’à aujourd’hui, inexpliqué. Il est possible que le choc se comporte comme un système masse-ressort possédant un amortissement, une masse et une fréquence naturels que des perturbations extérieures pourraient faire entrer en résonance.

Concernant les calculs turbulents :

- La position du décollement, obtenue numériquement en l’absence de couplage, est en bon accord avec les prédictions de plusieurs critères de décollement. Cet accord se justifie,

selon nous, par la géométrie de la tuyère pour laquelle la pression plateau et proche de la pression ambiante.

- Les champs initiaux (issus des calculs convergés avant couplage) présentaient, comme en eulérien, un battement naturel du choc pour tous les rapports de pression étudiés.
- Lors du couplage, le cas 2 (tuyère bi-encastrée) n’a pas mis en évidence d’instabilités, conformément aux prédictions des modèles. Par contre, le cas 3 (tuyère bi-encastrée plus souple que celle du cas 2) a fait apparaître des comportements instables pour les quatre rapports de pression étudiés. Il s’agissait d’instabilités dynamiques, statiques mais aussi de résonances (correspondance entre une des fréquences aéroélastiques et la fréquence intrinsèque du choc). De plus, l’observation des spectres indiquerait que la fréquence aéroélastique du premier mode serait plus faible que celle prédite par les modèles. Cependant, ces derniers prévoyaient “une zone à risques”, ce qui a été globalement retrouvé numériquement. Une fois de plus, les écarts rencontrés sont dus, en partie, à l’emploi de la théorie des petites perturbations. Toutefois, il convient de souligner que les calculs couplés requièrent plus d’une semaine de calcul alors que les modèles évaluent la stabilité du divergent en une ou deux minutes. On peut donc considérer ces modèles comme un outil fort intéressant pour les applications industrielles.

Enfin, notons que le travail accompli ici sera poursuivi en collaboration avec une équipe de l’Université de Technologie de Compiègne et que le modèle de stabilité étendu devrait être transféré au groupe FSCD.

Plusieurs travaux futurs concernant les phénomènes aéroélastiques eux-mêmes et plus précisément la simulation couplée dans les tuyères sont envisagés en perspectives de cette thèse :

- Il serait très instructif de mener une simulation sur une tuyère présentant un décollement restreint et non libre comme nous l’avons fait jusqu’à présent. Les ondes de recompression dans la zone recollée influencent certainement la stabilité de la structure.
- Un calcul couplé tridimensionnel turbulent sur la configuration LEA souple serait riche d’informations, à condition qu’il soit mené en parallèle à une étude expérimentale.
- Enfin, le comportement post-instabilité du divergent pourrait être réalisé à l’aide de la version non-linéaire de l’élément DKT18 que nous avons développée.





## Quatrième partie

### Annexes



## **Annexe A**

**Article publié dans "Int. J. Shock Waves"**

## Numerical investigation of transient nozzle flow

A.-S. Mouronval<sup>1</sup>, A. Hadjadj<sup>1</sup>, A. N. Kudryavtsev<sup>2</sup>, D. Vandromme<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMFN-CORIA, INSA de Rouen, 76801 St. Etienne du Rouvray, France

<sup>2</sup> Institute of Theoretical and Applied Mechanics, 630090 Novosibirsk, Russia

Received 16 November 2001 / Accepted 24 September 2002 /  
Published online 4 December 2002 – © Springer-Verlag 2002

**Abstract.** The starting process of two-dimensional and axisymmetric nozzle flows has been investigated numerically. Special attention has been paid to the early phase of the starting process and to the appearance of a strong secondary shock wave. For both cases, shock intensities and velocities are obtained and discussed. The flow evolution in the axisymmetric case is proved to be more complex and the transient starting process is slower than in the plane case. Finally, the effects of changing the nozzle angle and the incident shock wave Mach number on the transient flow are addressed. It is shown that a faster start-up can be induced either by decreasing the nozzle angle or increasing the Mach number of the incident shock wave.

**Key words:** Shock wave, Starting process, Nozzle flow, Numerical simulation

### NOMENCLATURE

$a$	: speed of sound
$\alpha$	: nozzle half-angle
$CD$	: Contact Discontinuity
$IS$	: Internal Shock
$M_{sh}$	: incident shock Mach number
$PS$	: Primary Shock
$SS$	: Secondary Shock
$SL$	: Slip Line
$TP$	: Triple Point
$t^*$	: dimensionless time
$U_c^*$	: dimensionless absolute shock velocity
$U_{rel}^*$	: dimensionless relative shock velocity
$V$	: Vortex

### Subscripts

0	: downstream conditions of PS
1	: upstream conditions of PS
2	: downstream conditions of SS
3	: upstream conditions of SS
4	: upstream conditions of the incident shock

## 1 Introduction

During the engine start-up and the low altitude flight of space vehicles, the over-expanded character of the nozzle exhaust flow may lead to unsteady flow separation. If the pressure distribution deviates from its usual axisymmetric shape, severe side-loads acting on the nozzle can develop. Their magnitude can be such that they present life-time

constraints on thrust chamber components as well as result in a thrust vector misalignment. Therefore, their correct prediction is required when designing nozzles.

Several aerodynamic effects (random pressure fluctuations, transition of separation pattern between free shock separation and restricted shock separation) or aeroelastic coupling may be responsible for an asymmetric pressure distribution (see Ostlund et al. 2001 for a review). In spite of many studies on the subject, the mechanisms of these effects are quite complex and fundamental knowledge of the flow physics is still needed. Indeed, some peculiar phenomena that occur during the early stages of the start-up process yield a strong non-uniform flow field and thus can influence the further development of separated flow regions (Nasuti et al. 1994).

The starting process was experimentally investigated by many researchers (Smith 1964, Smith 1966, Amann 1969, Saito et al. 1999). Amann (1969), for instance, studied the influence of several parameters (nozzle half-angle, throat width and nozzle inlet radius) on the starting process. Besides, particular interest has been paid to the duration of the starting process, since it decreases the useful testing time of short-duration facilities. However, the evolution of a complex wave structure has also been clearly shown.

From a numerical point of view, several studies were undertaken to simulate nozzle flow transients. Most of the simulations performed were two-dimensional plane or axisymmetric computations owing to the large amount of computational time required for three-dimensional ones. Prodromou et al. (1992) and Igra et al. (1998), for example, carried out Euler simulations of the two-dimensional plane reflection nozzle of Amann (1969) with rounded and

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow

sharp-edged inlet respectively. On the other hand, Jacobs (1991) Tokarcik-Polsky et al. (1994) and Saito et al. (1999) presented numerical simulations of the same type of nozzle, including viscous effects. It may be concluded from these studies that inviscid computations satisfactorily predict the main flow features (namely the primary and secondary shock waves, multiple shock wave reflections and slip surfaces). Nevertheless, the investigation of phenomena connected with boundary layer separation requires viscous simulations. Concerning rocket nozzles, Chen et al. (1994), among others, examined the flow structures of the start-up and shut-down processes using a Navier Stokes solver with a turbulence model. The configuration they studied was a sub-scale nozzle of a J-2S rocket engine (i.e. a precursor of the American Space Shuttle main engine). Later, Nasuti et al. (1994) and (1998) simulated the flow transients during the start-up of the Vulcain nozzle (designed for the European rocket Ariane V). Both inviscid and viscous laminar flow models were considered and permitted to demonstrate that very peculiar flow field configurations, which are characterized by two main vortical regions, may occur during the start-up of the nozzle. The first region is due to the boundary-layer separation from the wall whereas the second has an inviscid origin. One of the main conclusions of these studies is that, even if the investigation of phenomena connected with boundary layer separation requires viscous simulations, as already said, inviscid calculations can represent a possible way to perform qualitative analyses of such inviscid phenomena.

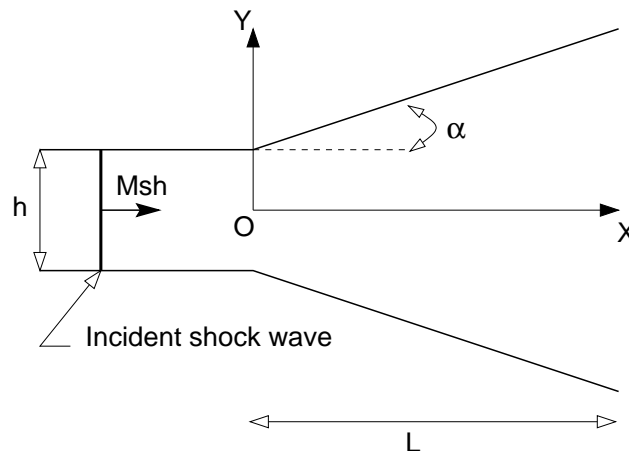
Since our main objective was to obtain a better understanding of the basic characteristic phenomena, which may interact with viscous effects and give rise to flow separation, we decided, as a first step, to carry out inviscid simulations of the transient process.

In order to focus on the main features of the starting process itself and thus to avoid the incident shock reflections encountered in reflected-shock tunnels, an even more simple configuration than those studied by Amann (1969) has been considered. Indeed, it consists of a constant-area tube terminated by a conical nozzle as depicted in Fig. 1.

The current study concentrates only on certain aspects of the entire starting process. The first part of this study is dedicated to the effects of axisymmetric or two-dimensional formulations on flow development, shock velocities and shock intensities, whereas the second part deals with the effects of changing the nozzle divergence angle or the Mach number of the incident shock wave.

## 2 Numerical method

In the current study, we solved numerically the two-dimensional and axisymmetric Euler equations. We used a finite-difference, flux-based, fifth order WENO scheme (Jiang et al. 1996) with the Lax-Friedrichs splitting for calculating the numerical fluxes at cell interfaces. As a matter of fact, ENO schemes use an adaptive "smoothest" sub-stencil chosen within a larger, fixed stencil to construct a high-order approximation of the solution avoid-



**Fig. 1.** Sketch of the studied configuration. Nozzle length  $L = 241,9\text{ mm}$ , nozzle half-angle  $\alpha = 15^\circ$  (unless notified), diameter (in axisymmetric simulations) or height (in two-dimensional simulations)  $h = 6.15\text{ mm}$ , Mach number of the incident shock wave  $M_{sh} = 3$  (unless notified)

ing the interpolation across discontinuities and preserving uniformly high order accuracy at all points where the solution is smooth. By contrast, WENO schemes employ a superposition of several sub-stencils with adaptive coefficients to increase the order of approximation even more. Notice, however, that the authors do not mean that second order schemes would give poor results when applied to the present configuration. Actually, some of their computations on the planar configuration (figures not shown) would tend to demonstrate that, for the present configuration, no significant differences can be observed between the results obtained thanks to a fifth order WENO scheme and a second order TVD scheme. This is probably due to the fine mesh used in this study. Nevertheless, using a fifth order WENO has several advantages over using second order schemes (Liu et al. 1994, Jiang et al. 1996): aside from their ability to accurately capture shocks and steep gradients, WENO schemes are also capable of improving resolution in regions of smooth solution and accurately preserving a long-time vortex evolution. Compared to classical second order TVD schemes, higher accuracy is achieved with less grid points. TVD schemes work well for simple flows with shocks but for complex flows including vortices, acoustic waves, non-stationary waves ..., WENO schemes are generally much more appropriate. Since nozzle flows frequently include such phenomena (contact discontinuity instability, interaction of flow non-uniformities with gasdynamic discontinuities), the authors chose to use a WENO scheme for such investigations.

Time stepping was performed by the explicit third order Runge-Kutta TVD method of Shu et al. (1989). Employing this method is generally recommended for stability reasons when using a fifth order WENO scheme. However, using other time integration schemes (e.g. the fourth order Runge-Kutta-Gill scheme) is possible even if they will not respect the non-oscillatory nature of high-order shock-capturing schemes. Comparing results obtained us-

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow

ing the third order Runge-Kutta TVD method of Shu and Osher, their second order Runge-Kutta TVD scheme and the fourth order Runge-Kutta-Gill method (figures not shown), showed that using a second, third or fourth order scheme for the temporal discretization with a WENO of fifth order accuracy in space has no significant influence on the results for the studied configuration. The time step is computed so that:

$$\Delta t = \frac{CFL}{\max_{ij} (|u_{i,j}| + c_{i,j})/\Delta x_{i,j} + (|v_{i,j}| + c_{i,j})/\Delta y_{i,j}}$$

where  $(i, j)$  are the cell indices. The authors performed computations with two  $CFL$  numbers ( $CFL = 0.8$  and  $CFL = 0.4$ ). No significant differences could be seen between these two computations (figures not shown). This suggests that the solutions are not strongly dependent on the  $CFL$  number. However, notice that the  $CFL$  number should respect the stability criterion based on the linear analysis ( $CFL \leq 1$ ) since the scheme is fully explicit. The  $CFL$  number used in all the computations presented in this paper was set equal to 0.8.

Additionally, this scheme was coded for structured meshes in general curvilinear coordinates, and parallelization was introduced by partitioning the computational domain and using MPI libraries. The numerical code used in this study has been tested and validated on complex compressible flows including shock/shock, shock/mixing layer interactions (Kudryavtsev et al. 1998, Kudryavtsev et al. 2001) and turbulence (Blin 1999, Blin et al. 1999).

## 2.1 Grid generation

As already mentioned, a simple configuration has been considered for both plane and axisymmetric cases (Fig. 1). For the plane case, calculations were carried out only for the upper half of the domain due to symmetry. In axisymmetric solvers, one applies curvilinear grids in the axial and radial directions and no grid is used in the azimuthal direction. Owing to this simplification, axisymmetric conditions are prescribed along the centerline of the nozzle. The mesh was made of 15 domains among which 13 were located in the diverging part of the nozzle. Each domain was assigned to a single processor and contained  $(100 \times 120)$  cells.

## 2.2 Initial and boundary conditions

The test flow is air with  $\gamma = 1.4$ . The incident shock wave propagates in a medium at rest whose pressure and temperature are equal to  $6.3 \text{ kPa}$  and  $293 \text{ K}$  respectively.

The applied boundary conditions included supersonic nozzle inflow ( $M = 1.35$  for  $M_{sh} = 3$  and  $M = 1.66$  for  $M_{sh} = 5$ ), symmetry about the nozzle centerline and extrapolation at the nozzle exit. A slip boundary condition was prescribed on solid walls.

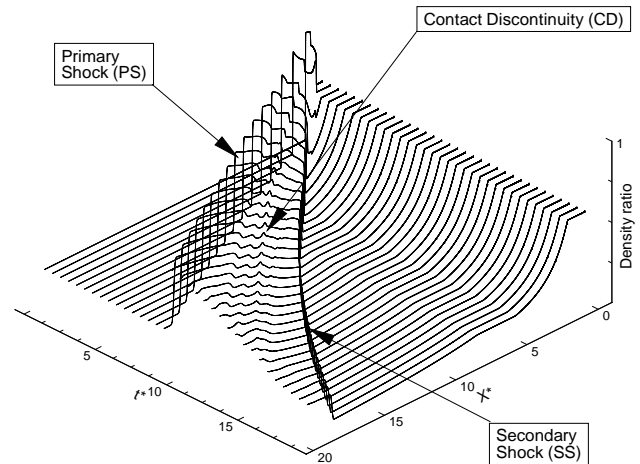


Fig. 2. Density ratio evolution along the axis, in the  $(X^* - t^*)$  plane (plane case)

## 3 Results and discussion

All length scales are normalized by the nozzle height (or diameter)  $h$  and the elapsed dimensionless time is defined as  $t^* = ta_0/h$  where  $a_0$  is the speed of sound of the gas initially at rest (the origin of time is chosen in such a way that the primary shock reaches the nozzle entrance at  $t^* = 0$ ). Only the results obtained before the arrival of the primary shock (PS) at the nozzle exit are presented and analyzed<sup>1</sup>.

### 3.1 Physical flow description

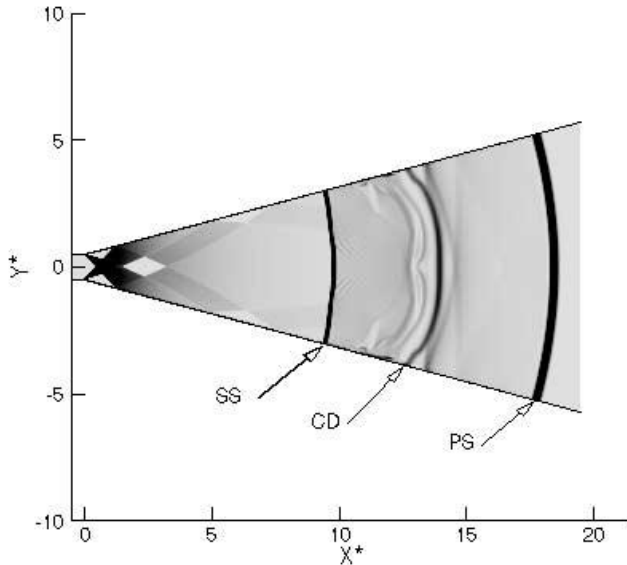
In the plane case, basically, because of the area increase, the nozzle flow undergoes an expansion (Figs. 2 and 3). The expansion fan originating from the throat corners reflects several times on the axis. At the same time, the propagation of the incident or primary shock (PS) in the medium at rest can be clearly observed. Comparing density and pressure fields (figure not shown) a contact discontinuity (CD) following this primary shock can be easily identified. This discontinuity quickly becomes distorted owing to a Richtmyer-Meshkov type of instability (Jacobs 1991). Eventually, a left-running (with respect to the fluid) secondary shock (SS) appears and is carried to the right because of the supersonic carrier flow. As will be pointed out later, this shock wave matches the high Mach number, low pressure flow downstream of the throat to the lower velocity high pressure gas behind the primary shock.

With regard to the axisymmetric case, although the general behaviour of the transient flow is similar, the flow evolution is more complex (Fig. 4). This is partly due to the interaction of an internal shock (IS, resulting from a focalization of characteristic lines<sup>2</sup>) with both the secondary shock and the contact discontinuity. Furthermore,

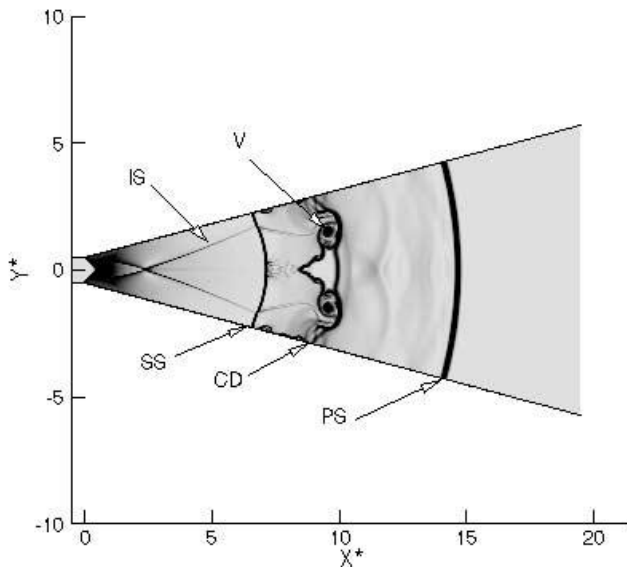
<sup>1</sup> This limitation permits to reduce the influence of the boundary conditions that is likely to exist.

<sup>2</sup> This phenomenon is similar to the barrel shock which occurs in highly under-expanded supersonic jets.

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow



**Fig. 3.** Schlieren picture of the flow field during start-up at  $t^* \simeq 8.27$  (plane case)



**Fig. 4.** Schlieren picture of the flow field during start-up at  $t^* \simeq 8.27$  (axisymmetric case)

it is worth noting that the contact discontinuity is more distorted than in the previous case and contains two vortices (denoted V). In addition, it is obvious from Figs. 3 and 4 that every front (PS, SS and CD) propagates slower in this latter case.

### 3.1.1 Early stages of the starting process

Figures 5.a to 5.d display the flow evolution at the very beginning of the starting process for the plane case. As soon as the primary shock wave enters the divergent nozzle (Fig. 5.a), the change in nozzle area causes an expan-

sion fan to form and a secondary shock wave to appear at its tail (Fig. 5.b). As explained by Smith (1964), the value of  $(U - a)$  behind the primary shock decreases as the shock speed decreases, causing the minus characteristics behind the shock to rotate progressively and become convergent. As a result of the intersection of these converging minus characteristics, a secondary shock wave is created. At  $t^* \simeq 0.23$  (Fig. 5.b), wall effects are still localized in the wall vicinity and the core flow behaviour can be considered as one-dimensional. However, both parts of the secondary shock wave propagate quickly towards the plane of symmetry and soon a single shock spans the whole cross section. Similarly, the two branches of the contact discontinuity meet at the centerline (Fig. 5.c). All fronts are then completely formed (Fig. 5.d) and swept downstream (see Fig. 3), leading to a quasi-steady flow in the nozzle.

As far as the axisymmetric case is concerned, the involved phenomena are more complex (Figs. 6.a to 6.f). Until approximately  $t^* \simeq 0.90$ , the flow behaviour is similar to the one observed in the plane case. Consequently, results are only presented from this time. Figure 6.a illustrates the formation of an internal shock which interacts with the secondary shock. Notice the appearance of a first triple point (TP0)<sup>3</sup>. In the following stage (Fig. 6.b), a second triple point (TP1), moving towards the wall, can be seen as well as the interaction of the slip-line (SL1) originating from it with the one (SL0) issued from TP0 (Fig. 6.c). This triple point TP1 results from the Mach reflection of the secondary shock wave on the axis<sup>4</sup>. Vortices (V) are generated by this interaction. Similar vortices were clearly observed by Amann (1969) for a 2D plane reflection nozzle with a rounded inlet as well as by Saito et al. (1999) in a nozzle with sharp-edged inlet and slightly larger nozzle half-angle as used by Amann (1969). At a later time (Fig. 6.d), the second triple point (TP1) reaches the wall and disappears while another (TP2) propagates from the wall towards the centerline (Figs. 6.e and 6.f).

### 3.1.2 Detailed analysis of the whole starting process

So far, we have been describing the qualitative evolution of the flow. Let us now discuss it more precisely by investigating specific features such as density profiles, shock velocities and intensities.

Figures 7 and 8 display the density ratio (defined as  $\rho/\rho_4$  where  $\rho_4$  is the density behind the incident shock at  $t^* = 0$ ) evolution recorded at several stages of the computations for the plane and axisymmetric case respectively. As can be seen in Fig. 7, the flow expands until it reaches the secondary shock. The expansion is weaker in the plane case than in the axisymmetric one. The reflection of the internal shock on the axis is visible at  $X^* \simeq 2.5$

<sup>3</sup> The complex shock interactions and Mach reflections occurring here will not be described in detail since they are not under the scope of the present study.

<sup>4</sup> Notice that the triple point TP1 is formed before TP0, however it is called "second triple point" because it is clearly visible after TP0.



Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow

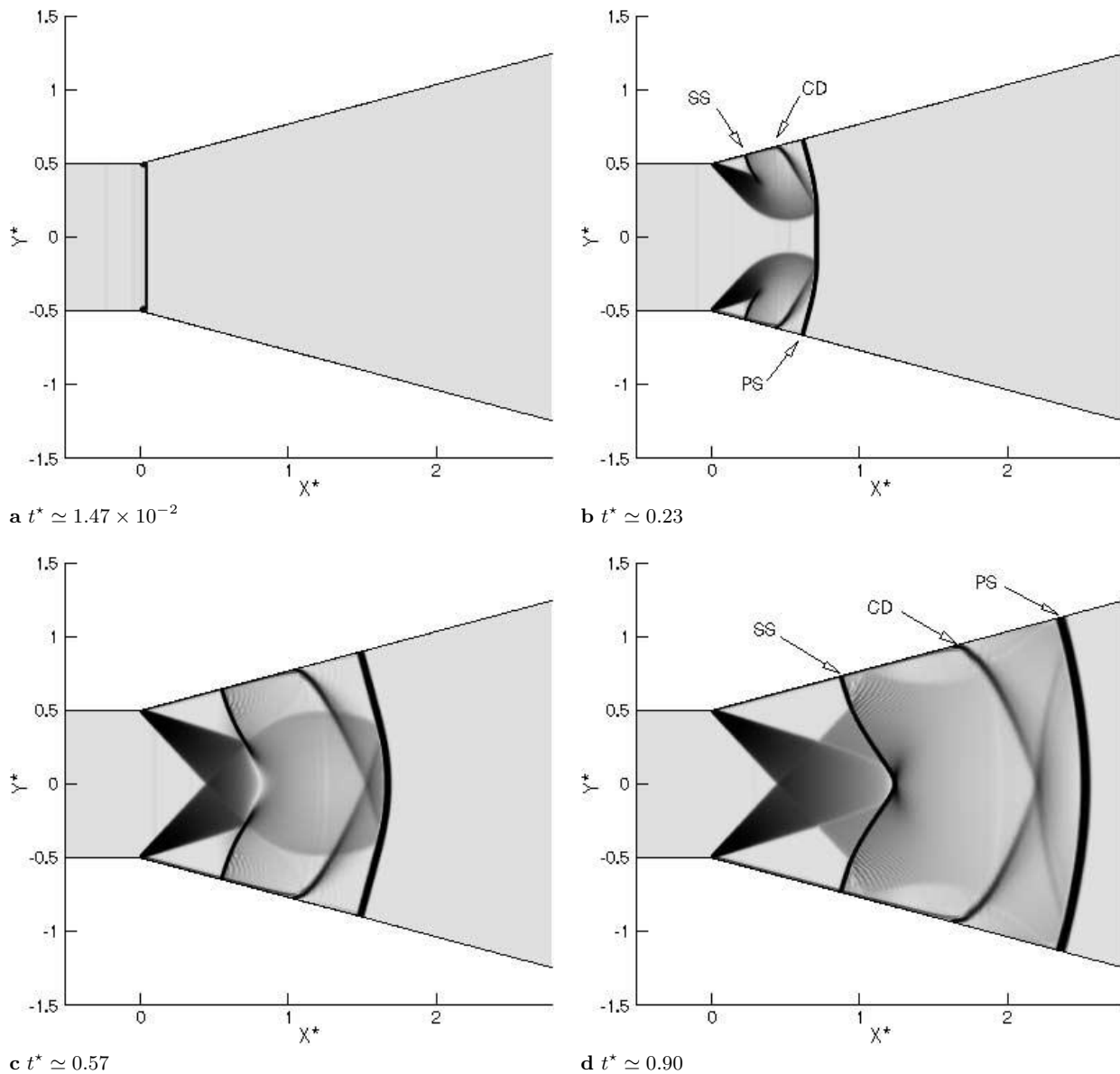


Fig. 5a–d. Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up (plane case)

for the axisymmetric simulation. Subsequently, the density increases gradually between the secondary and primary shocks. Comparing density profiles ( $\rho/\rho_4$ ) and pressure profiles (defined as  $p/p_4$  where  $p_4$  is the pressure behind the incident shock at  $t^* = 0$ ), the contact discontinuities can be distinguished from the shock waves (Fig. 9). Finally, we notice that these discontinuities are more intense and distorted in the axisymmetric case.

We will now discuss the evolution (speeds and intensities) of the shocks propagating within the nozzle.

Figure 10 illustrates the evolution of the secondary and primary shock locations  $X_{sh}^*$  as a function of time. As shown in the graph, the two shocks (PS and SS) reach the

end of the nozzle much later in the axisymmetric configuration.

By differentiating  $X_{sh}^*$  with respect to  $t^*$ , one can easily obtain the absolute velocity ( $U_c^*$ ) of both shocks (Fig. 11). Because the primary shock is propagating in a medium at rest, its velocity relatively ( $U_{rel}^*$ ) to this medium is equal to its absolute velocity. However, this is not the case for the secondary shock which is moving upstream relatively to the gas. If we denote by  $U_3^*$  the flow velocity on the axis, at the first point on the left of the secondary shock (see Fig. 12), then the relative speed of the secondary shock can be deduced:  $U_{rel}^* = U_c^* - U_3^*$ . As highlighted by Smith (1964), the speed of the primary shock starts at the value given by the shock-tube theory and decreases steadily with

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow

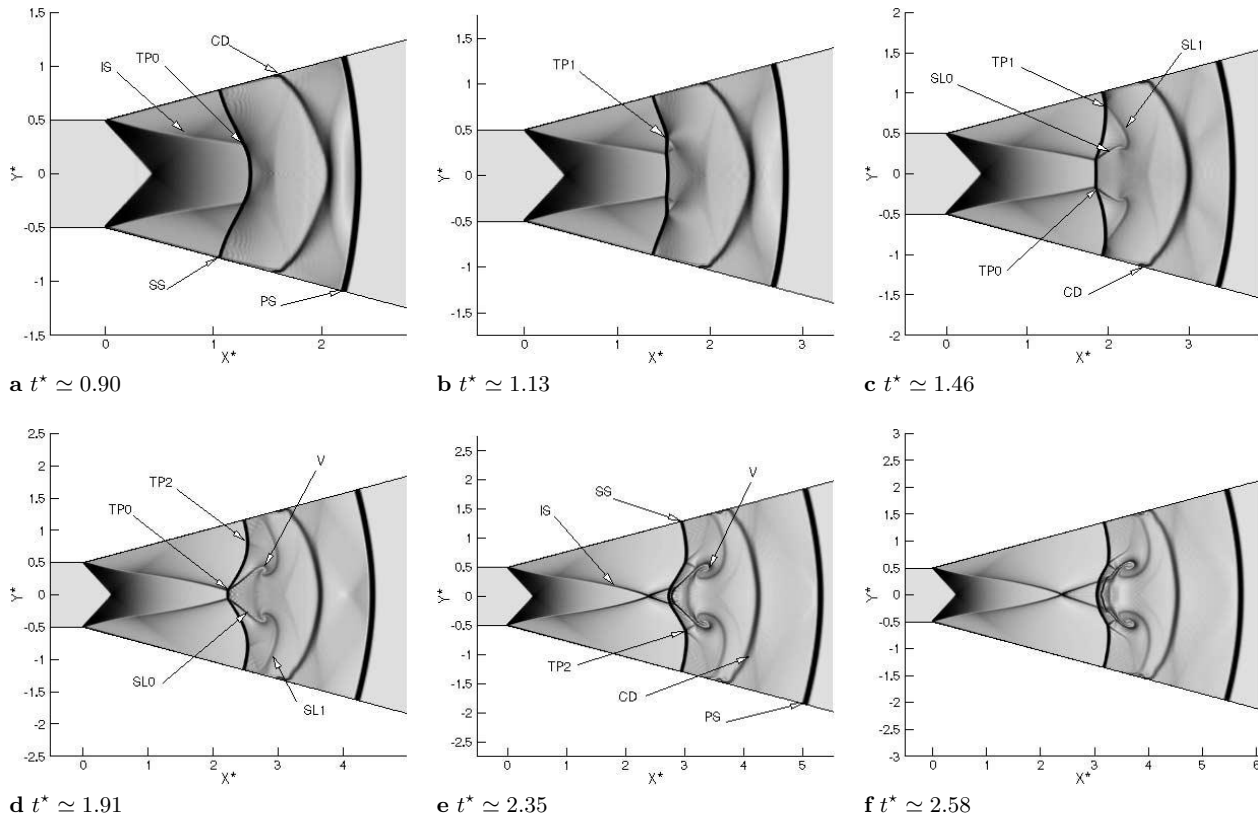


Fig. 6a-f. Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up (axisymmetric case)

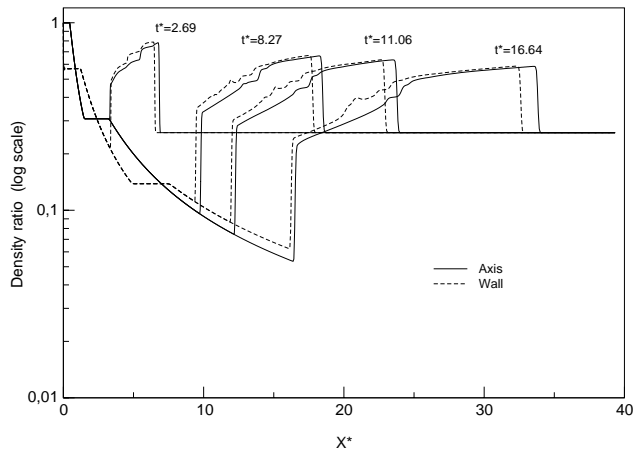


Fig. 7. Density evolution along the centerline and on the nozzle wall (plane case)

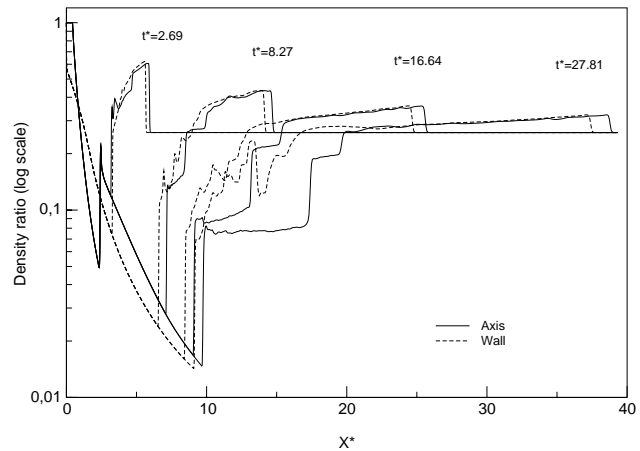
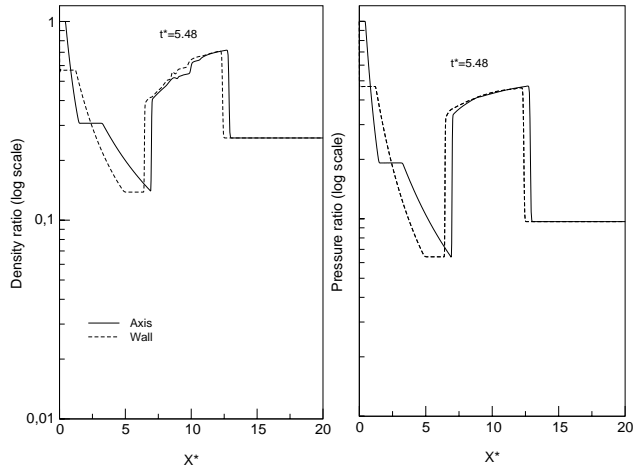


Fig. 8. Density evolution along the centerline and on the nozzle wall (axisymmetric case)

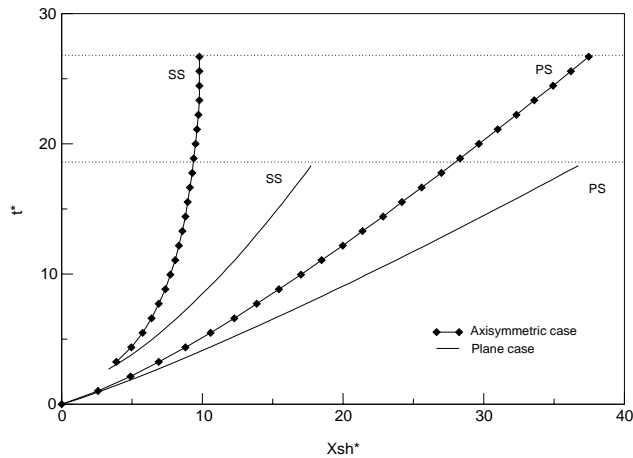
distance. Furthermore, its rate of change with distance is at first very large, but becomes smaller as it propagates through the nozzle. Similarly, the secondary shock is swept away with a decreasing velocity  $U_c^*$ . Nevertheless, as clearly visible, it moves upstream relative to the gas ( $U_{rel}^* < 0$ ) with an increasing velocity. These results are in accordance with those obtained by Smith (1964) and Amann (1969). To conclude this part, note that the abso-

lute velocities ( $U_c^*$ ) of both shocks decrease more rapidly in the axisymmetric case, in particular at the beginning of the start-up. This result could be expected: the same result was found by Amann when increasing the nozzle half-angle in the plane case (as will be discussed later), that is to say when increasing the expansion ratio. In fact, in the axisymmetric case, the aspect ratio increases much more rapidly than in the plane one (for instance at  $X_{sh}^* = 19.5$

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow



**Fig. 9.** Comparison between density (on the left) and pressure (on the right) profiles (plane case)



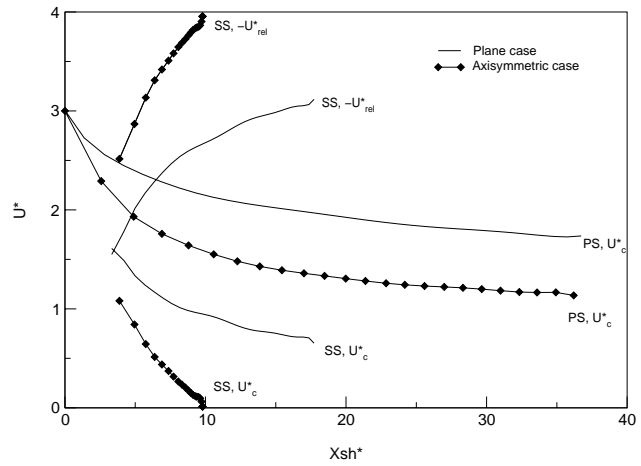
**Fig. 10.** Shock location recorded on the axis vs. time. Plane and axisymmetric cases

this aspect ratio is equal to approximately 11 for the plane case and 131 for the axisymmetric case), resulting in a slower starting process. By the same process, the relative velocity of the secondary shock increases more rapidly.

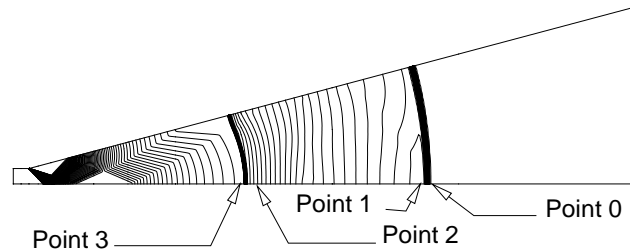
Figure 13 illustrates the evolution of shock intensities during both starting processes. Pressure ratios are defined as  $p_1^*/p_0^*$  and  $p_2^*/p_3^*$  for the primary shock and the secondary shock respectively. The reader is referred to Fig. 12 for a definition of states 0, 1, 2 and 3. Unlike the primary shock, the strength of the secondary shock wave increases with distance as it proceeds through the nozzle (Smith 1964). This growth is more pronounced in the axisymmetric case. Interestingly enough, the pressure rise induced by the secondary shock quickly outweighs the pressure rise induced by the primary shock.

The pressure and speed evolution previously described can be easily linked. To do so (Fig. 14), we compared absolute velocities  $U_c^*$  (Fig. 11) computed from:

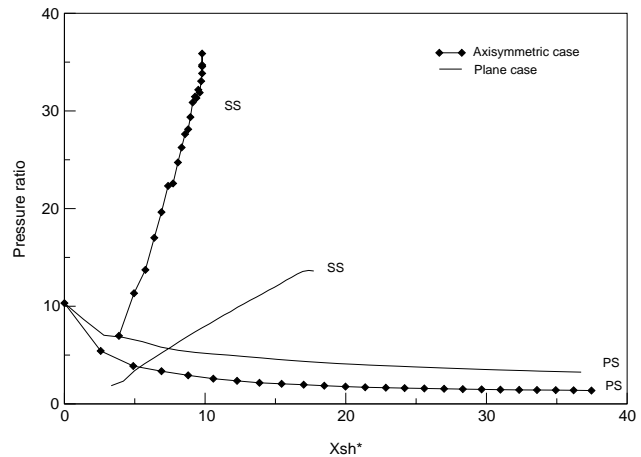
$$U_c^* = \frac{d}{dt^*}(X_{sh}^*) \quad (1)$$



**Fig. 11.** Absolute ( $U_c^*$ ) and relative ( $U_{rel}^*$ ) shock velocities recorded on the axis vs. shock location. Plane and axisymmetric cases



**Fig. 12.** Definition of states 0, 1, 2 and 3 (pressure contours, plane case)

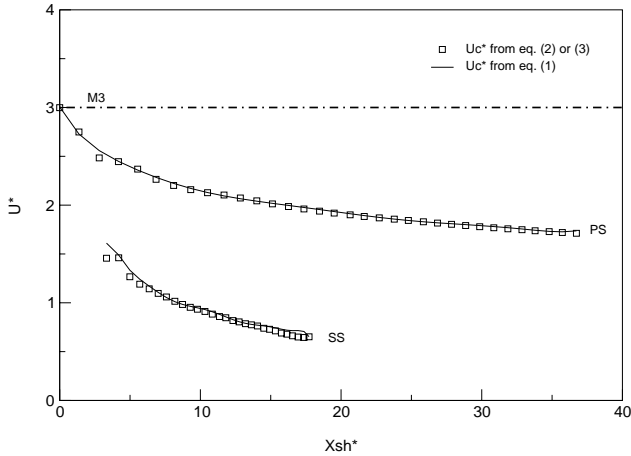


**Fig. 13.** Shock intensities recorded on the axis vs. shock location. Plane and axisymmetric cases

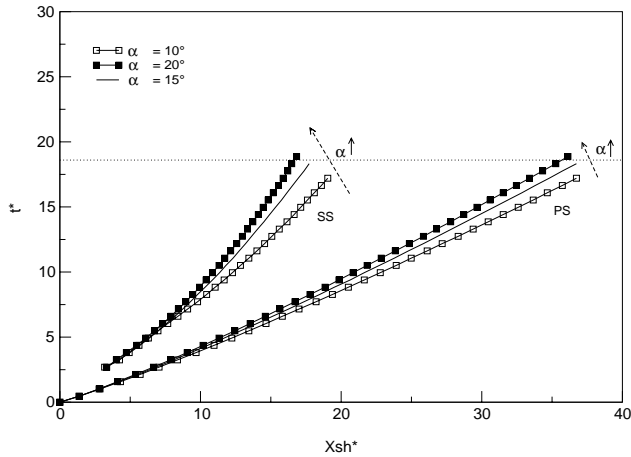
and  $U_c^{*1d}$  evaluated from the following one-dimensional formulas (Courant et al. 1991):

$$\frac{p_1^*}{p_0^*} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[ \left( \frac{U_c^{*1d}}{a_0^*} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{for PS} \quad (2)$$

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow



**Fig. 14.** Comparison between absolute shock velocities on the axis  $U_c^*$  derived from relation (1) and  $U_c^{*1d}$  evaluated from equation (2) for PS and (3) for SS. The convective velocity associated with a shock wave Mach number of three (see curve entitled "M3" in the present figure) is also included for comparison (plane case)



**Fig. 15.** Evolution of the shock locations recorded on the axis with varying the nozzle angle (plane case)

$$\frac{p_2^*}{p_3^*} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[ \left( \frac{U_3^* - U_c^{*1d}}{a_3^*} \right)^2 - 1 \right] \text{ for SS} \quad (3)$$

where  $p_1^*/p_0^*$ ,  $p_2^*/p_3^*$ ,  $U_3^*$  and  $a_3^*$  are obtained from the computations whereas  $a_0$  is the speed of sound of the gas initially at rest. Figure 14 also suggests that the numerical code is correctly implemented and locally consistent with the shock relations, as expected. Although we only present the results for the plane case, the conclusions are the same for the axisymmetric simulations.

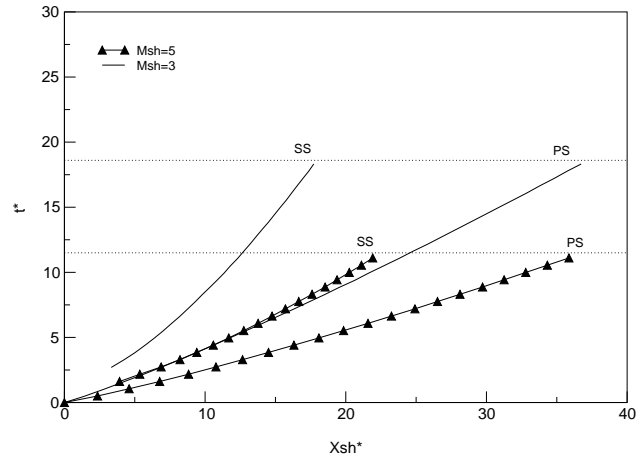
### 3.2 Effects of nozzle geometry

To study the influence of changing the nozzle angle, several computations were carried out for a range of nozzle half-angles  $\alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ , all other parameters being

kept constant. Figure 15 indicates that the starting process is delayed if  $\alpha$  is increased. This confirms the results previously reported by Amann (1969) for a plane reflection nozzle.

### 3.3 Effects of initial shock wave Mach number

Let us now have a look at the influence of the initial shock wave Mach number (Fig. 16). As expected, the higher the initial Mach number, the faster the starting process. For instance, when reaching  $X^* = 15$ , the primary shock propagates approximately 1.6 times as fast for  $M_{sh} = 5$  as for  $M_{sh} = 3$ , and the secondary shock wave is swept about 2.4 times as fast.



**Fig. 16.** Evolution of the shock locations recorded on the axis with varying the initial shock wave Mach number (plane case)

## 4 Conclusions

This work has been dedicated to the study of the inviscid phenomena occurring during the starting process of a very simple configuration. Several points have been brought out. First, more complex phenomena have been observed for the axisymmetric configuration than for the plane one. This is partly due to the appearance of an internal shock, resulting from the focalization of the characteristic lines induced by the expansion fan, and to its interaction with the secondary shock. Second, the strength of the secondary shock wave increases rapidly at the beginning of the start-up process whereas the strength of the primary shock decreases. Third, increasing the nozzle angle delays the starting process. On the opposite, the higher the incident shock wave Mach number, the faster the starting process.

Our objective now is to continue this study by investigating flow separation during start-up. Further work will be directed to including viscous and turbulent effects in our simulations.

Mouronval et al.: Numerical investigation of transient nozzle flow

*Acknowledgements.* Authors would like to acknowledge the CRIHAN (Centre de Ressources Informatiques de Haute Normandie, Rouen) for providing computational resources. This work has been performed within the framework of the French ATAC (Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps) program supported and managed by the French space agency (CNES). The support of INTAS grant No. 99-0785 is also gratefully acknowledged.

## References

- Amann HO (1969) Experimental study of the starting process in a reflection nozzle. *Phys. Fluids Supplement* 12:150–153
- Blin L (1999) Modélisation statistique et simulation des grandes échelles des écoulements turbulents. Application aux inverseurs de poussée. Ph. D. thesis, University of Rouen, France
- Blin L, Hadjadj A, Vervisch L (1999) Large Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows. AIAA-Paper 99-0787, 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV
- Chen CL, Chakravarthy SL, Hung CM (1994) Numerical Investigation of Separated Nozzle Flows. *AIAA Journal* 32:1836–1843
- Courant R, Friedrichs KO (1991) Supersonic flow and shock waves. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag
- Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarty S (1987) Uniform high order essentially non oscillatory schemes III. *J. Comput. Phys.* 71:231–301
- Igra O, Wang L, Falcovitz J, Amann HO (1998) Simulation of the starting flow in a wedge-like nozzle. *Shock Waves* 8:235–242
- Jacobs PA (1991) Simulation of transient flow in a shock tunnel and a high Mach number nozzle. NASA CR 187606
- Jiang G, Shu CW (1996) Efficient implementation of weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 126:202–228
- Kudryavtsev AN, Khotyanovsky DV (1998) A numerical method for simulation of unsteady phenomena in high speed shear flows. ICMAR'98, Int. Conf. on Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk
- Kudryavtsev A, Hadjadj A (2001) Visualisation graphique en mécanique des fluides numérique. In the proceedings of Fluvisu 2001 conference, 18-21 June 2001, Rouen, France
- Liu XD, Osher S, Chan T (1994) Weighted essentially non oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 115:200–212
- Nasuti F, Onofri M (1994) Transient Flow analysis of nozzle start-up by a shock fitting technique. *Unsteady Flows in Aeropropulsion*, edited by W. Ng. D. Fant and L. Povinelli, AD-40:127–135, ASME, New York, pp. 127–135
- Nasuti F, Onofri M (1998) Viscous and Inviscid Vortex Generation During Startup of Rocket Nozzles. *AIAA Journal* 36:809–815
- Ostlund J, Damgaard M, Frey M (2001) Side-load phenomena in highly over-expanded rocket nozzles. *AIAA Paper* 2001-3684
- Prodromou P, Hillier R (1992) Computation of unsteady nozzle flows. *Proc. of the 18th ISSW Sendai, Japan, II:1113–1118*
- Saito T, Timofeev EV, Sun M, Takayama K (1999) Numerical and experimental study of 2-D nozzle starting process. Paper 4090, in the Proceedings of the 22nd ISSW, Imperial College, London, UK, July 18–23
- Shu CW, Osher S (1989) Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J. Comput. Phys.* 83:32–78
- Smith CE (1964) An analytic study of the starting process in a hypersonic nozzle. *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Institute.* p. 198, Stanford Univ. Press
- Smith CE (1966) The starting process in a hypersonic nozzle. *J. Fluid Mech.* 24:625–640
- Tokarcik-Polsky S, Cambier JL (1994) Numerical study of transient flow phenomena in shock tunnels. *AIAA Journal* 32:971–978

## **Annexe B**

**Article accepté à “*J. Propulsion & Power*”**

# Numerical Study of the Starting Process in a Supersonic Nozzle<sup>1</sup>

A.-S. Mouronval and A. Hadjadj

CORIA, UMR 6614 CNRS, Av. de l'Université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France

(Dated: Oct. 2003)

## Abstract

*The present paper is dedicated to the numerical study of transient flows occurring during the starting process of supersonic nozzles. Two configurations experimentally studied by Aman [3] have been investigated. Special attention has been paid to the complex evolution of the wave structure and the induced flow field behind the starting shock. The influence of the shape of the nozzle inlet is pointed out and the computational results are compared with Amann's findings. They are shown to agree well with the experimental results.*

## Nomenclature

$a$	=	speed of sound
$\alpha$	=	nozzle half-angle
$CD$	=	Contact Discontinuity
$CW$	=	Compression Wave
$EF$	=	Expansion Fan
$h_1$	=	shock-tunnel height
$h_c$	=	nozzle-throat height
$IS$	=	Internal Shock
$M_{sh}$	=	incident shock Mach number
$MS$	=	Mach Stem
$PS$	=	Primary Shock
$R$	=	nozzle inlet radius
$RS$	=	Reflected Shock
$SS$	=	Secondary Shock
$SL$	=	Slip Line
$SL_R$	=	Slip Line associated with the RS
$TP$	=	Triple Point
$t^*$	=	dimensionless time
$V$	=	Vortex
$X_{sh}^*$	=	normalized shock-location

1. This paper was partially presented at the West East High Speed Flow Field Conference, Marseille, 2002.

## Introduction

During the engine start-up and the low altitude flight of space vehicles, the over-expanded character of the nozzle exhaust flow may lead to unsteady flow separation. If the pressure distribution deviates from its usual axisymmetric shape, severe side-loads acting on the nozzle can appear. Their magnitude can be such that they present life-time constraints on thrust chamber components as well as resulting in a thrust vector misalignment. Therefore, their correct prediction is required when designing nozzles.

Several aerodynamical causes (random pressure fluctuations, transition between free shock separation and restricted shock separation) or aeroelastic coupling may be responsible for an asymmetric pressure distribution [1]. However, the mechanisms are quite complex, and fundamental knowledge of the flow physics is still needed. Indeed, some peculiar phenomena that occur during the early stages of the start-up process [2] yield a strong non-uniform flow field and thus can influence the further development of separated flow regions. The starting process

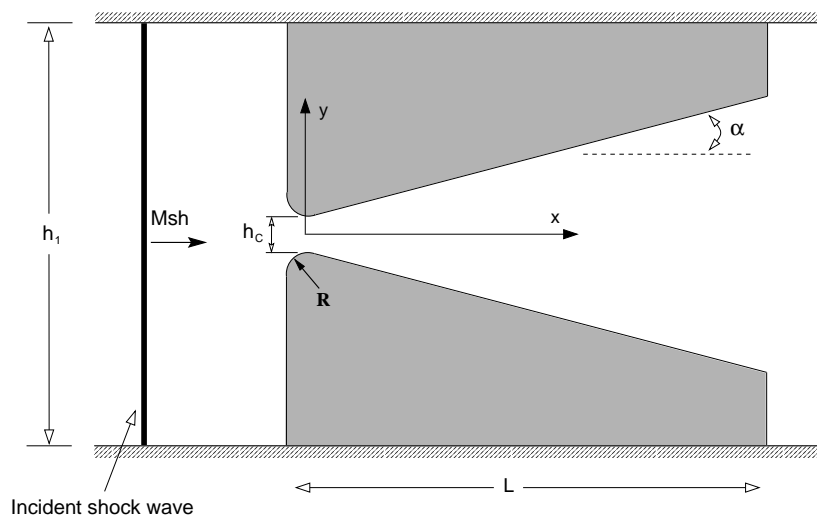


FIG. B.1 – Sketch of the studied configurations. Nozzle length  $L = 120\text{ mm}$ , half nozzle angle  $\alpha = 15^\circ$ , throat height  $h_c = 6.15\text{ mm}$ , shock tunnel height  $h_1 = 104.5\text{ mm}$ , inlet radius  $R = 10\text{ mm}$  (referred to as “Case 1” in the following) or  $R = 0\text{ mm}$  (Case 2), Mach number of the incident shock wave  $M_{sh} = 3$ .

of supersonic nozzles has been experimentally investigated by many researchers (Amann [3], Smith [4]). Even though particular interest has been paid to the duration of the starting process, the complex evolution of the wave structure has been clearly shown. On the other hand, Jacobs [5], Prodromou and Hillier [6], Tokarcik *et al.* [7], Igra *et al.* [8] and Saito *et al.* [9], among others, have studied numerically the transient flow in reflected-shock tunnels. It may be concluded from these studies that inviscid computations satisfactorily predict the main flow features (namely the primary and secondary shock waves, multiple shock wave reflections and slip surfaces). Nevertheless, the investigation of phenomena connected with boundary layer separation requires viscous simulations.

In this study, two configurations previously studied by Amann [3] (see Fig. B.1) have been inves-



tigated in order to better understand the starting process of supersonic nozzles. The first part of this paper gives a brief description of the numerical method used in this work. The second part is dedicated to Euler computations. Finally, some concluding remarks are made.

## Numerical method

In the current study, we solved the two-dimensional Euler equations numerically. We used a finite-difference, flux-based, fifth order WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) scheme [10] with the Lax-Friedrichs splitting to calculate the numerical fluxes at cell interfaces. In fact, ENO schemes use an adaptive “smoothest” sub-stencil chosen within a larger, fixed stencil to construct a high-order approximation of the solution, avoiding the interpolation across discontinuities and preserving uniformly high order accuracy at all points where the solution is smooth. By contrast, WENO schemes employ a superposition of several sub-stencils with adaptive coefficients to increase the order of approximation even more.

Using a fifth order WENO has several advantages over using second order schemes [10, 11]: aside from their ability to accurately capture shocks and steep gradients, WENO schemes are also capable of improving resolution in regions of smooth solution and accurately preserving a long-term vortex evolution. Compared to classical second order TVD schemes, higher accuracy is achieved with fewer grid points. TVD schemes work well for simple flows with shocks but for complex flows including vortices, acoustic waves, non-stationary waves ..., WENO schemes are generally much more appropriate. Since nozzle flows frequently include such phenomena (contact discontinuity instability, interaction of flow non-uniformities with gasdynamic discontinuities), the authors chose to use a WENO scheme for such investigations.

Time stepping was performed by the explicit third order Runge-Kutta TVD method of Shu *et al.* [12]. This method is generally recommended for stability reasons when using a fifth order WENO scheme. However, the use of other time integration schemes (e.g. the fourth order Runge-Kutta-Gill scheme) is possible even if they do not respect the non-oscillatory nature of high-order shock-capturing schemes. The *CFL* number used in all the computations presented in this paper was set at 0.8.

Additionally, this scheme was coded for structured meshes in general curvilinear coordinates, and parallelization was introduced by partitioning the computational domain and using MPI libraries. The numerical code used in this study has been tested and validated on complex compressible flows including shock/shock, shock/mixing layer interactions [13,14] and turbulence [15].

## Grid generation

As already mentioned, Amann’s configurations [3] (Fig. B.1) have been considered. To be more specific, these configurations consist in a nozzle whose inlet is either rounded ( $R = 10\text{ mm}$ , referred to as “case 1” in the following) or sharp (“sharp-edged inlet”,  $R = 0\text{ mm}$ , referred to as “case 2”). These nozzles are located at the end wall of a shock tube. For each case, calculations were performed only for the upper half of the domain due to the symmetry of the configuration. The mesh was made of 24 (case 1) or 23 (case 2) domains, each one was assigned to a single processor and contained about  $(100 \times 120)$  cells.

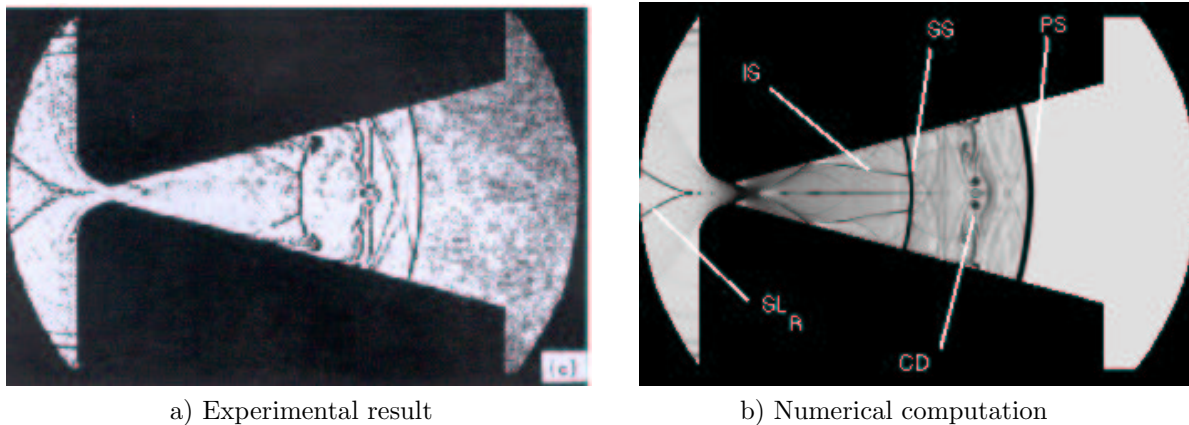


FIG. B.2 – Schlieren pictures of the flow field during start-up at  $t^* \simeq 5.05$  (Case 1) with *RS*: Reflected Shock (not visible), *IS*: Internal Shock, *SL<sub>R</sub>*: Slip Line associated with the Reflected shock, *CD*: Contact Discontinuity, *PS*: Primary Shock, *SS*: Secondary Shock.

## Initial and boundary conditions

The test flow is air with  $\gamma=1.4$ . The incident shock wave propagates at  $M_{sh}=3$  in a medium at rest whose pressure and temperature are equal to  $6.3\text{ kPa}$  and  $293\text{ K}$  respectively. The applied boundary conditions included supersonic flow at the inflow of the computational domain (shock tunnel), symmetry about the nozzle centerline and extrapolation at the outflow. A slip boundary condition was prescribed on the walls.

## Results and discussion

All length scales are normalized by the throat height  $h_c$  and the elapsed dimensionless time is defined as  $t^* = ta_0/h_c$  where  $a_0$  is the speed of sound of the gas initially at rest ( $a_0 \simeq 343\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). The origin of time is chosen in such a way that the primary shock reaches the nozzle throat at  $t^* = 0$ .

Case 1 (rounded inlet with  $R = 10\text{ mm}$ ):

The general evolution of the wave system within the nozzle with a rounded inlet is shown in Figs. B.2a and B.2b. Notice that, basically, the agreement between numerical and experimental results is good. Each feature appearing during the start-up will be described more precisely later.

As can be seen (Fig. B.2b), when the incident shock reaches the shock tube end wall, its upper and lower parts are reflected and propagate back away from it. They soon collide and create a single reflected shock (RS) leaving behind a quasi-stationary high pressure region. Meanwhile, the inner core of the incident shock wave is transmitted through the nozzle orifice to form a primary shock (PS) that can be clearly observed propagating in the medium at rest. Besides, comparing density and pressure fields (figure not shown), contact discontinuities (CD) following this primary shock can be easily identified. At the same time, a left-running (with respect to the

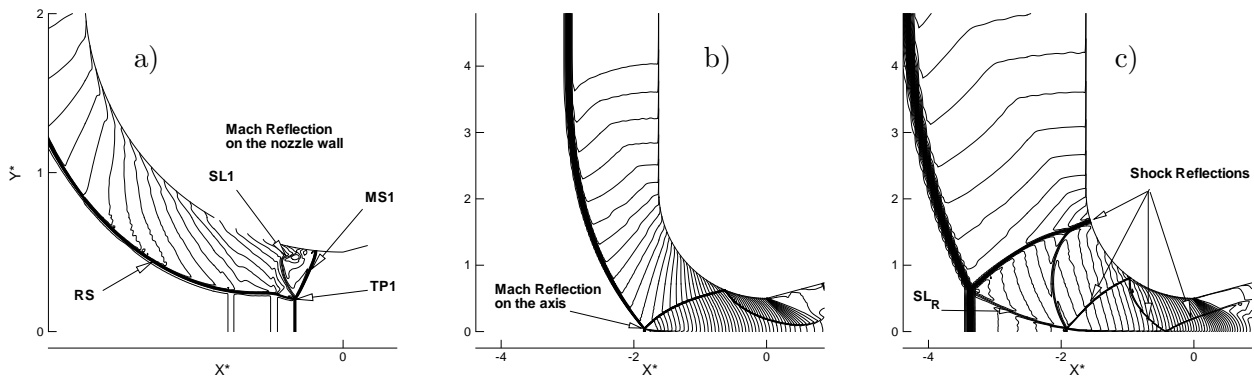


FIG. B.3 – Density contours : a)  $t^* \simeq -8.32e - 2$ , b)  $t^* \simeq 0.59$  and c)  $t^* \simeq 1.70$  (Case 1). Half plane shown. TP : Triple Point, MS : Mach Stem (see also Fig. B.2 for notations).

fluid) secondary shock (SS) appears and is carried to the right because of the supersonic carrier flow. This secondary shock arises as a part of the matching process between the high Mach number, low pressure flow downstream from the throat, and the lower velocity high pressure gas behind the primary shock. The flow in the nozzle undergoes an expansion originating from the throat and reflecting several times on the axis. Notice also the appearance of an internal shock (IS) due to a focalization of characteristic lines. We now discuss in more detail the early stages of this starting process. Special attention will be paid to the flow upstream from the nozzle throat (*i.e.* the region located at  $x < 0$ ) before addressing the flow downstream from it.

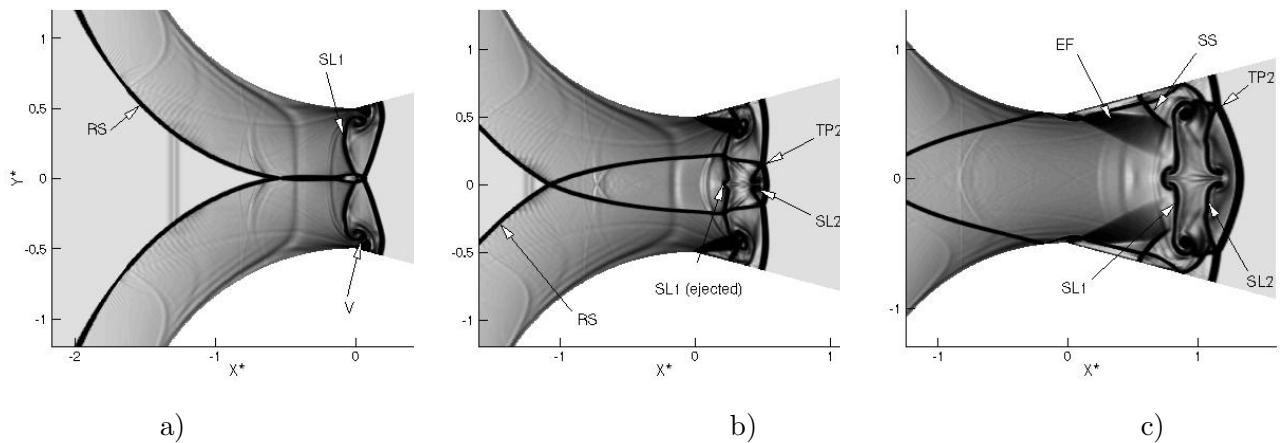


FIG. B.4 – Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up : a)  $t^* \simeq 2.86e-2$ , b)  $t^* \simeq 0.14$  and c)  $t^* \simeq 0.36$  (Case 1). V : Vortex, EF : Expansion Fan (see also Fig. B.2 for notations).

As soon as the incident shock reaches the nozzle entrance, its outer part reflects on the wall whereas its inner part enters the nozzle. The regular reflection occurring on the wall quickly

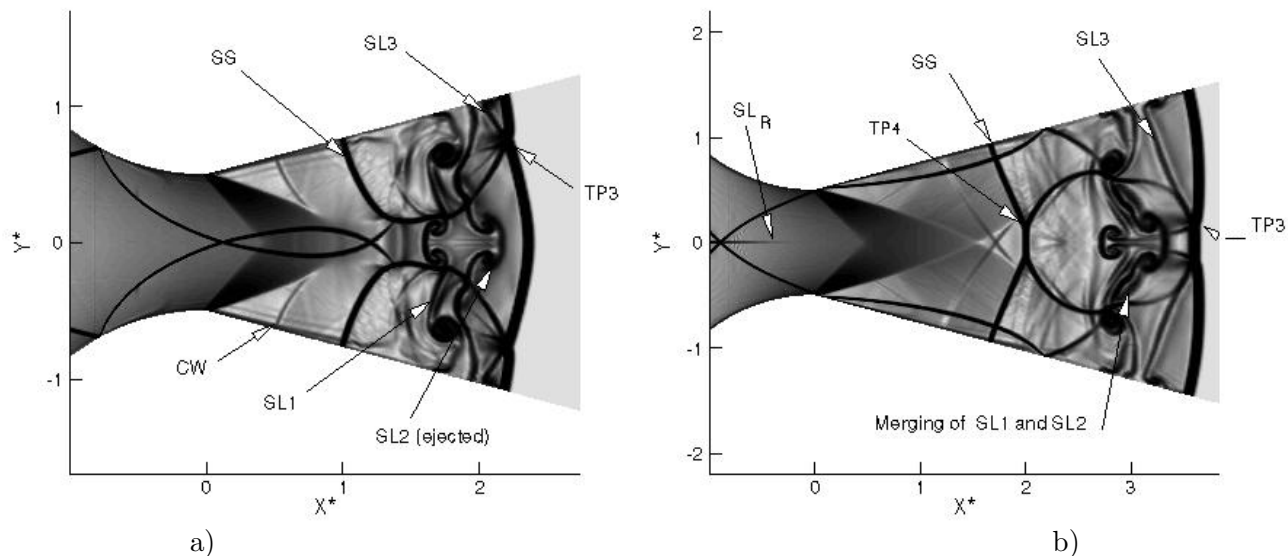


FIG. B.5 – Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up : a)  $t^* \simeq 0.70$  and b)  $t^* \simeq 1.14$  (Case 1). CW: Compression Waves (see also Fig. B.2 for notations).

turns into a Mach reflection (Fig. B.3a) consisting in the (upper or lower) reflected shock, the primary (*i.e.* transmitted) shock and a Mach stem (MS1). These three shocks meet at a triple point (TP1) where a slip line (SL1) emanates (see Ben-Dor [16] for more detail about shock wave reflections and associated phenomena in steady and unsteady flows). As stated above, the two parts of the reflected shock (RS) propagate upstream and reflect on the axis (Fig. B.3b) via a Mach reflection pattern whose associated slip line (SLR) propagates (a closer look at this slip line indicates a Kelvin Helmholtz instability) downstream. The new part of this reflected shock reflects on the wall and again on the axis (Fig. B.3c) so that additional Mach reflections appear and a multiple wave reflection system is formed. Furthermore, it is worth noting that the triple points associated with these Mach reflections have a common trajectory and hence their slip lines match the first one (SLR). As far as the flow downstream from the throat is concerned, the situation is even more complex. First, the triple point TP1 moves toward the axis and the size of the Mach stem (MS1) grows. As the triple point TP1 disappears (Fig. B.4a), its slip line is ejected and develops into a vortex (V). Again, the regular reflection of MS1 turns into a Mach reflection and the new triple point (TP2) travels toward the wall (Figs. B.4b and B.4c) before “vanishing” and ejecting its slip line. Moreover, investigating this later figure helps in distinguishing the expansion fan (EF) as well as the secondary shock (SS) that appears at its tail. As time proceeds (Figs. B.5a and B.5b), the complex evolution of the flow can be observed, including: compression waves (CW), interaction of the secondary wave with parts of the reflected shock, formation of new triples point (TP3, TP4) moving either toward the wall or the axis and their associated slip lines. The merging of SL1 and SL2 can be clearly seen (Fig. B.5b). One can also see that the vortices (V) due to the first Mach reflection are still visible and are carried downstream. At this point, all the main features of the flow are present (see Fig. B.2b).

Case 2 (sharp-edged inlet) :

With regards to the second case, the global behaviour (Figs. B.6a and B.6b) of the transient flow in case 2 is similar to that in case 1. Therefore, only their main differences are underlined. A prominent feature of this second configuration is the presence of two strong vortices (V) that form at the sharp edges of the inlet and modify its effective shape (they form an effective concave corner). This results in an internal shock wave (IS). Furthermore, as Amann pointed out, the multiple contact surfaces resulting from the Mach reflections are not filled with vortices (in fact, they are much less visible). Indeed the Mach effect associated with the sharp corners is much weaker. Lastly, in opposition with the first case (Fig. B.2b), the computed secondary shock (Fig. B.6b) displays a shape close to a  $\lambda$  shape. We think that the flow separation induced by the corner is partly responsible for this behaviour : an artificial "numerical" boundary layer is involved during this separation and interacts later with the secondary shock.

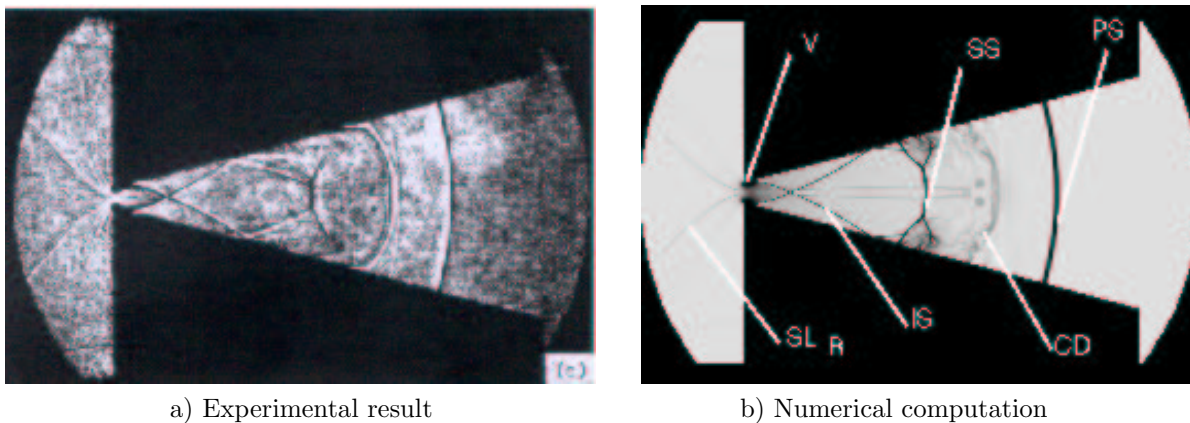


FIG. B.6 – Schlieren picture of the flow field during start-up at  $t^* \simeq 6.13$  (Case 2). See Fig. B.2 for notations.

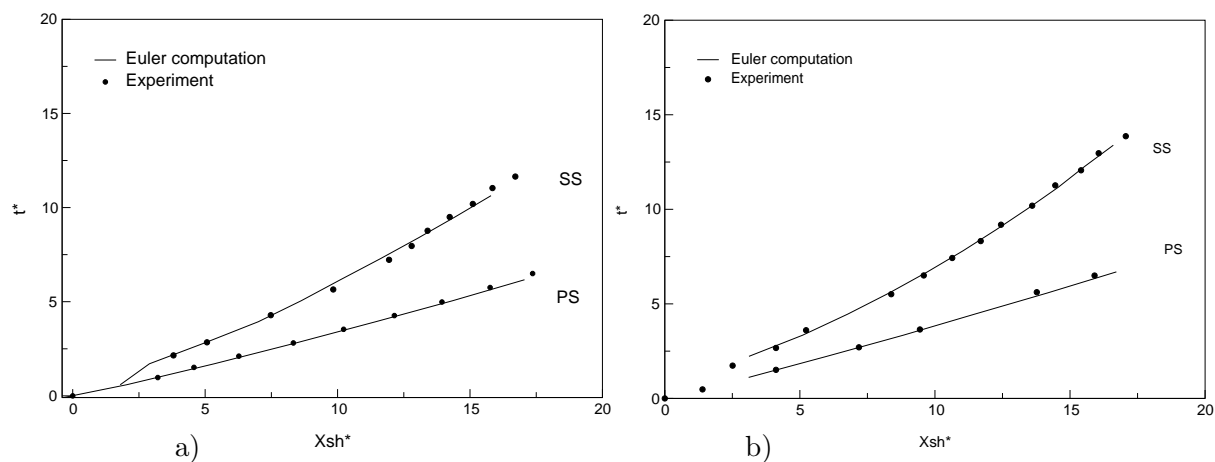


FIG. B.7 –  $(x^* - t^*)$  diagram of shock locations on the axis a) case 1, b) case 2.

The locations of the primary and secondary shocks for case 1 are plotted in Fig. B.7a, and compared with the experimental results. The agreement is excellent for the primary shock as well as for the secondary one. With regards to the second case (Figs. B.7b), the same remarks can be made. The position of the secondary shock is satisfactorily predicted by Euler computations. To conclude this section, it is interesting to note, comparing Figs. B.7a and B.7b, that the starting process is faster in the first case than in the second one. This is partly due to the fact that the convergent part induced by the rounded inlet increases the velocity of the transmitted shock.

## Conclusion

This work has been dedicated to the study of the inviscid phenomena occurring during the starting process of Amann's configurations. Several points have been brought out. First, the main flow features (secondary shock, contact discontinuities, primary shock) are satisfactorily predicted by computations and are in good agreement with the findings of Amann. The complex evolution of the flow has been analyzed: the multiple wave reflection system formed by the reflection of the incident wave has been underlined, as well as the important role played by Mach reflections in the divergent part of the nozzle. In particular, the slip line associated with the first Mach reflection occurring in case 1, induces vortices that propagate downstream. We also highlight two recirculation bubbles that formed at the sharp edges of the inlet in case 2 resulting in an effective concave corner and causing an internal shock. Our objective now is to continue this study by investigating flow separation during start-up more precisely including turbulent effects in our computations (thanks to the use of LES or URANS simulations).

## Acknowledgments

The authors are grateful to Dr. A.N. Kudryavtsev from ITAM (Russia) for helpful discussions and also would like to acknowledge the CRIHAN (Centre de Ressources Informatiques de Haute Normandie, Rouen) for providing computational resources.

## References

1. Ostlund, J., Damgaard, M., and Frey, M., “Side-load phenomena in highly over-expanded rocket nozzles,” AIAA Paper 2001-3684, July 2001.
2. Mouronval, A.-S., Hadjadj, A., Kudryavtsev, A., and Vandromme, D., “Numerical investigation of transient nozzle flow,” *International Journal of Shock Waves*, Vol. 12, 2003, pp. 403-411.
3. Amann, H. O., “Experimental study of the starting process in a reflection nozzle,” *Physics of Fluids Supplement*, Vol. 12, 1967, pp. 150-153.
4. Smith, C. E., “The starting process in a hypersonic nozzle,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 24, 1966, pp. 625-640.
5. Jacobs, P. A., “Simulation of transient flow in a shock tunnel and a high Mach number nozzle,” NASA CR 187606, 1991.
6. Prodromou, P., and Hillier, R., “Computation of unsteady nozzle flows,” In the proceedings of the 18th ISSW, Sendai, Japan, Vol. II, 1992, pp. 1113-1118.

7. Tokarcik-Polsky, S., and Cambier, J.-L., "Numerical study of transient flow phenomena in shock tunnels," *AIAA Journal*, Vol. 32, 1994, pp. 971-978.
8. Igra, O., Wang, L., Falcovitz, J., Amann, O., "Simulation of the starting flow in a wedge-like nozzle," *International Journal of Shock Waves*, Vol. 8, 1998, pp. 235-242.
9. Saito, T., Timofeev, E. V., Sun, M., and Takayama, K., "Numerical and experimental study of 2-D nozzle starting process," In the Proceedings of the 22nd ISSW, paper No. 4090, Imperial College, London, UK, July 18-23, 1999.
10. Jiang, G., Shu, C.-W., "Efficient implementation of weighted essentially non-oscillatory schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 126, 1996, pp. 202-228.
11. Liu, X. D., Osher, S., and Chan, T., "Weighted essentially non oscillatory schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, 1994, pp. 200-212.
12. Shu, C.-W., and Osher, S., "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 83, 1989, pp. 32-78.
13. Kudryavtsev, A., and Khotyanovsky, D. V., "A numerical method for simulation of unsteady phenomena in high speed shear flows," *International Conference on Methods of Aerophysical Research*, Novosibirsk, June 1998.
14. Kudryavtsev, A., and Hadjadj, A., "Visualisation graphique en mécanique des fluides numérique," In the proceedings of the Fluvisu Conference, 18-21 June 2001, Rouen, France.
15. Blin, L., Hadjadj, A., and Vervisch, L., "Large Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows," *AIAA-Paper 99-0787*, 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, 1999.
16. Ben-Dor, G., "*Shock Wave Reflection Phenomena*," Springer-Verlag, New York, 1991.

## Conclusions générales sur l’amorçage rapide et perspectives

Cette annexe et celle qui la précède nous ont permis d’exposer nos travaux relatifs à l’amorçage rapide d’une tuyère supersonique. Ces travaux ont été menés parallèlement à notre recherche sur les phénomènes aéroélastiques dans les tuyères souples.

En premier lieu, nous ne nous sommes intéressés qu’à certains aspects de l’amorçage. Dans cette première étude, nous avons porté une attention particulière à la formation des différentes discontinuités apparaissant dans l’écoulement. Les effets axisymétriques ou bidimensionnels de la configuration sur l’évolution de l’écoulement ainsi que les vitesses des chocs et leur intensité ont été analysés avant que ne soient étudiées l’influence de l’angle de la tuyère et celle du nombre de Mach de l’onde incidente. Deux configurations simplifiées par rapport à celles de Amann ont été considérées. Plusieurs points ont été mis en évidence. Tout d’abord, la formation des différentes discontinuités (en particulier celle du choc secondaire) a pu être observée. Il est également ressorti de cette première étude que les phénomènes sont plus complexes dans le cas axisymétrique que dans le cas plan. Ceci est dû en partie à l’apparition d’un choc interne et à son interaction avec le choc secondaire. Il a aussi été montré que l’intensité du choc secondaire augmentait rapidement au début de l’amorçage, contrairement à celle du choc primaire qui, elle, décroît. Enfin, augmenter le demi-angle du divergent ralentit l’amorçage de la tuyère. À l’inverse, plus le nombre de Mach de l’onde incidente est élevé, plus l’amorçage est rapide.

Dans une seconde partie, nous avons examiné les deux configurations étudiées expérimentalement par Amann (une tuyère plane dont le col est soit arrondi, *Cas 1*, soit droit, *Cas 2*). Les principales caractéristiques de l’écoulement (chocs primaire et secondaire, discontinuité de contact) ont été prédites de façon satisfaisante même si des calculs turbulents sont nécessaires pour reproduire le décollement de la couche limite et la forme exacte du choc secondaire. L’évolution très complexe de l’écoulement a été soulignée et analysée : le système de réflexions multiples formées par la réflexion de l’onde incidente a été mis en évidence ainsi que le rôle joué par les réflexions de Mach dans le divergent de la tuyère. En particulier, la ligne de glissement associée à la première réflexion de Mach dans le *Cas 1* génère des tourbillons qui se propagent ensuite vers l’aval. Par ailleurs, il a également été montré deux bulles de recirculation se formant au niveau de l’entrée dans le *Cas 2*. Ces phénomènes sont à l’origine d’un choc interne. Enfin, un accord satisfaisant a été obtenu entre la vitesse de propagation des chocs prédite numériquement et celle mesurée expérimentalement.

Plusieurs travaux futurs sont envisagés en perspectives de cette étude.

- Il serait instructif de reproduire ces calculs en turbulent, afin de prendre en compte les interactions choc/couche limite.
- Il serait aussi judicieux de mener un calcul bidimensionnel de la totalité de la configuration (donc de ne pas supposer que l’écoulement est symétrique *a priori*) et d’introduire une perturbation dans les conditions amont afin de voir s’il est possible d’obtenir une configuration dissymétrique comme celle observée expérimentalement.
- Un calcul turbulent tridimensionnel utilisant le code LES en cours de développement au LMFN [41] serait également très pertinent.



- Enfin, il pourrait s'avérer fort intéressant de remplacer l'onde de choc incidente par une montée en pression lente afin d'évaluer l'influence de celle-ci sur l'amorçage. De plus, cela serait plus proche de ce qui se passe lors de l'allumage d'un moteur fusée ou, tout simplement, du démarrage d'un banc d'essais.

## Annexe C

# Modèle continu et éléments finis non-linéaires de coque mince

*Cette annexe présente le développement d'une version non-linéaire de l'élément DKT18. Par souci de concision, seules les différences par rapport au cas linéaire sont exposées. Plus de détails peuvent être trouvés dans le rapport d'avancement [88].*

### C.1 Principe des Travaux Virtuels

Nous avons vu au chapitre 4 que la forme faible du PTV (équation 4.8) sur la configuration actuelle s'écrivait :

$$W = \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_t + \int_{V_t} Tr([D^*][\sigma]) dV_t - \int_{S_{f_t}} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_s dS_t - \int_{V_t} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_v dV_t = 0$$

Nous nous plaçons ici dans le cas où l'hypothèse des petits déplacements n'est plus nécessairement vérifiée. Le domaine d'intégration  $V_t$  devient donc aussi une inconnue du problème. Ainsi faut-il exprimer les relations d'équilibre sur une configuration connue.

#### C.1.1 Projection du PTV sur la configuration de référence

Plusieurs configurations lagrangiennes peuvent être utilisées pour l'analyse non-linéaire (figure C.1). Il en résulte différentes formulations possibles pour tenir compte des grands déplacements :

- la Formulation Lagrangienne Totale (FLT) utilise comme configuration de référence la position initiale  $\mathcal{C}_0$  du solide ;
- la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas (FLAP) repose sur la configuration  $\mathcal{C}_{t-\Delta t}$  (*i.e.*  $\mathcal{C}_{p-1}$ ) : la solution à l'instant  $t$  est déterminée en fonction de la solution à l'instant  $t - \Delta t$  (pas précédent) ;
- la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI) emploie la configuration  $\mathcal{C}_i$  obtenue à l'itération précédente.

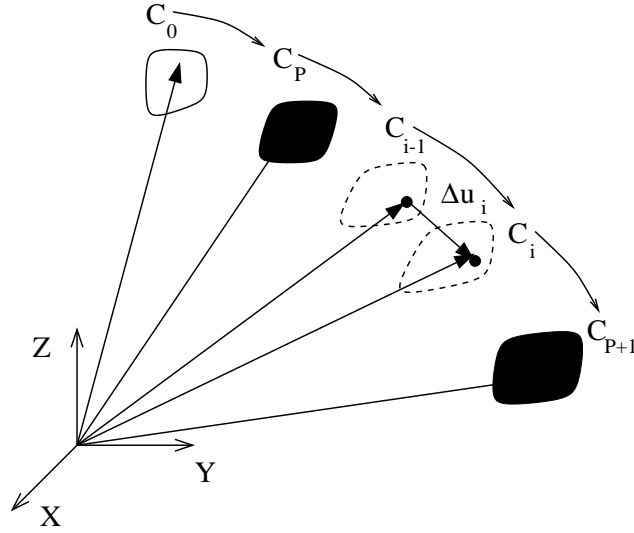


FIG. C.1 – Configurations initiale  $C_0$ , du pas  $p$   $C_p$  et à l'itération  $i$   $C_i$ .

Nous n'emploierons dans cette étude que la FLT et considérons donc la configuration initiale  $C_0$  comme configuration de référence.

L'expression des travaux virtuels des forces d'inertie et des sollicitations externes, sur cette configuration connue, s'effectue par le biais du tenseur  $[F]$ . En effet, le domaine d'intégration  $(V_t, S_t)$  peut être ramené à  $(V_0, S_0)$  selon :

$$dV = |F| dV_0 \quad ; \quad dS = (\langle n_0 \rangle [F]^{-1} [F]^{-T} \{n_0\})^{\frac{1}{2}} |F| dS_0 \quad ; \quad |F| = \det [F]$$

ainsi, il vient :

$$W_d = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} |F| dV_0 = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \rho_0 \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_0$$

$$W_{ext_v} = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_v |F| dV_0 = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} dV_0$$

$$W_{ext_s} = \int_{S_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_s (\langle n_0 \rangle [F]^{-1} [F]^{-T} \{n_0\})^{\frac{1}{2}} |F| dS_0 = \int_{S_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} dS_0.$$

L'expression du travail virtuel interne sur la configuration initiale se déduit des propriétés de l'opérateur trace (se référer aux pages 24-25 de la référence [35] pour plus de détails) :

$$\int_{V_t} Tr([D^*][\sigma]) dV = \int_{V_0} Tr([E_{gl}^*][S]) dV_0$$

où  $[S]$  est le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce transporté dans la configuration  $C_0$  et relié au tenseur des contraintes de Cauchy  $[\sigma]$  dans la configuration actuelle  $C_t$  suivant :

$$[\sigma] = \frac{1}{|F|} [F][S][F]^T$$

et  $[E_{gl}^*]$  est la première variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$[E_{gl}^*] = \frac{1}{2} ([F^*]^T [F] + [F]^T [F^*]).$$

Finalement, la forme variationnelle exprimée dans la configuration  $\mathcal{C}_0$  s'écrit :

$$W = \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \rho_0 \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV_0 + \int_{V_0} Tr([E_{gl}^*][S]) dV_0 - \int_{S_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} dS_0 - \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} dV_0. \quad (C.1)$$

### Forme incrémentale

Il convient de noter, à ce niveau, que la résolution d'une équation non-linéaire telle que (C.1) nécessite l'emploi d'une méthode de linéarisation. La méthode de Newton-Raphson, retenue dans notre étude, requiert le calcul de la forme incrémentale<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_d + \Delta W_{int} \\ &= \int_{V_0} \vec{u}^* \cdot \rho_0 \frac{d^2 \Delta \vec{u}}{dt^2} dV_0 + \int_{V_0} Tr([\Delta E_{gl}^*][S]) + Tr([E_{gl}^*][\Delta S]) dV_0. \end{aligned} \quad (C.2)$$

### Loi de comportement

Selon le même principe que dans le cas linéaire, la loi de comportement peut être écrite sous la forme réduite :

$$\{S\} = [H_t]\{E_{gl}\} \quad (C.3)$$

Les vecteurs  $\{S\}$  et  $\{E_{gl}\}$  étant composés des termes non-nuls des matrices correspondantes.  $[H_t]$  est la matrice d'élasticité du cas linéaire.

## C.2 Formulation de coque non-linéaire

### C.2.1 Champ cinématique d'une coque en grands déplacements

La coque est supposée subir de grands déplacements et des rotations modérées. Le champ de déplacement est similaire à celui présenté dans la sous-section 4.2.1. et permet de déterminer le tenseur gradient des déplacements (section 4.1.2) :

$$[L_0] = \left[ \frac{\partial \vec{u}_q}{\partial \vec{x}_0} \right] = \begin{bmatrix} u_{q,x_0} & u_{q,y_0} & u_{q,z} \\ v_{q,x_0} & v_{q,y_0} & v_{q,z} \\ w_{q,x_0} & w_{q,y_0} & w_{q,z} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} u_{q,x_0} = u_{,x_0} + z\beta_{x,x_0} \\ v_{q,x_0} = v_{,x_0} + z\beta_{y,x_0} \\ w_{q,x_0} = w_{,x_0} \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_{q,y_0} = u_{,y_0} + z\beta_{x,y_0} \\ v_{q,y_0} = v_{,y_0} + z\beta_{y,y_0} \\ w_{q,y_0} = w_{,y_0} \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_{q,z} = \beta_x \\ v_{q,z} = \beta_y \\ w_{q,z} = 0 \end{cases}$$

1. Dans cette relation, l'incrément  $\Delta W_{ext}$  a été supposé nul.

Cependant, le tenseur de Green-Lagrange est plus complexe que dans le cas linéaire. Le tenseur gradient de déformation s'écrit,

$$[F] = [I] + [L] = \begin{bmatrix} 1 + u_{,x_0} + z\beta_{x,x_0} & u_{,y_0} + z\beta_{x,y_0} & \beta_x \\ v_{,x_0} + z\beta_{y,x_0} & 1 + v_{,y_0} + z\beta_{y,y_0} & \beta_y \\ w_{,x_0} & w_{,y_0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Une forme plus compacte de ce dernier est :

$$[F] = [ \{a\} + z\{b_{,x_0}\} : \{c\} + z\{b_{,y_0}\} : \{b\} ]$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 + u_{,x_0} \\ v_{,x_0} \\ w_{,x_0} \end{Bmatrix} ; \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} u_{,y_0} \\ 1 + v_{,y_0} \\ w_{,y_0} \end{Bmatrix} ; \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Les différents termes du tenseur des déformations de Green-Lagrange,

$$[E_{gl}] = \begin{bmatrix} E_x & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_y & E_{yz} \\ sym & & E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}([F]^T[F] - [I]),$$

ont donc pour expressions :

$$E_x = 1/2((\langle a \rangle + z \langle b_{,x_0} \rangle)(\{a\} + z\{b_{,x_0}\}) - 1)$$

$$E_{xy} = 1/2((\langle a \rangle + z \langle b_{,x_0} \rangle)(\{c\} + z\{b_{,y_0}\}))$$

$$E_{xz} = 1/2((\langle a \rangle + z \langle b_{,x_0} \rangle)\{b\})$$

$$E_y = 1/2((\langle c \rangle + z \langle b_{,y_0} \rangle)(\{c\} + z\{b_{,y_0}\}) - 1)$$

$$E_{yz} = 1/2((\langle c \rangle + z \langle b_{,y_0} \rangle)\{b\})$$

$$E_z = 1/2(\langle b \rangle \{b\} - 1).$$

Ces termes peuvent être simplifiés en ne retenant que les termes linéaires en  $z$  et les déformations de cisaillement transversal constantes suivant l'épaisseur :

$$E_x = 1/2(\langle a \rangle \{a\} + 2z \langle a \rangle \{b_{,x_0}\} - 1)$$

$$E_{xy} = 1/2(\langle a \rangle \{a\} + z(\langle a \rangle \{b_{,y_0}\} + \langle c \rangle \{b_{,x_0}\}))$$

$$E_{xz} = 1/2 \langle a \rangle \{b\}$$

$$E_y = 1/2(\langle c \rangle \{c\} + 2z \langle c \rangle \{b_{,y_0}\} - 1)$$

$$E_{yz} = 1/2 \langle c \rangle \{b\}$$

$$E_z = 0.$$

Comme dans le cas linéaire, un regroupement de ces termes en membrane-flexion et cisaillement transversal conduit à :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ 2E_{xy} \end{array} \right\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad \text{et} \quad \{\gamma\} = \left\{ \begin{array}{c} 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Ici encore les relations relatives au cisaillement transversal ne seront pas détaillées davantage car l'énergie de déformation de CT sera négligée par la suite. Les déformations de membrane et de flexion ont les expressions suivantes :

$$\{e\} = \left\{ \begin{array}{c} 1/2(\langle a \rangle \{a\} - 1) \\ 1/2(\langle c \rangle \{c\} - 1) \\ \langle a \rangle \{c\} \end{array} \right\} \quad ; \quad \{\chi\} = \left\{ \begin{array}{c} \langle a \rangle \{b_{,x_0}\} \\ \langle c \rangle \{b_{,y_0}\} \\ \langle a \rangle \{b_{,y_0}\} + \langle c \rangle \{b_{,x_0}\} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.5})$$

Enfin, de sorte à mettre bien en évidence la non-linéarité de ces déformations, nous décomposons celles-ci sous la forme :

$$\{e\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x_0} \\ v_{,y_0} \\ u_{,y_0} + v_{,x_0} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1/2(u_{,x_0}^2 + v_{,x_0}^2 + w_{,x_0}^2) \\ 1/2(u_{,y_0}^2 + v_{,y_0}^2 + w_{,y_0}^2) \\ u_{,x_0}u_{,y_0} + v_{,x_0}v_{,y_0} + w_{,x_0}w_{,y_0} \end{array} \right\} \quad (\text{C.6})$$

partie linéaire  $\{e_l\}$                       partie-non linéaire  $\{e_{nl}\}$

et

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_{x,x_0} \\ \beta_{y,y_0} \\ \beta_{x,y_0} + \beta_{y,x_0} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} u_{,x_0}\beta_{x,x_0} + v_{,x_0}\beta_{y,x_0} \\ u_{,y_0}\beta_{x,y_0} + v_{,y_0}\beta_{y,y_0} \\ u_{,x_0}\beta_{x,y_0} + v_{,x_0}\beta_{y,y_0} + u_{,y_0}\beta_{x,x_0} + v_{,y_0}\beta_{y,x_0} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.7})$$

partie linéaire  $\{\chi_l\}$                       partie non-linéaire  $\{\chi_{nl}\}$

### C.2.2 Forme variationnelle

Nous nous proposons maintenant de donner une expression plus détaillée du travail virtuel des efforts internes. La loi de comportement (C.3) nous autorise dans un premier temps à écrire :

$$W_{int} = \int_{V_0} Tr([E_{gl}^*][S]) dV_0 = \int_{V_0} \langle E_{gl}^* \rangle \{S\} dV_0 = \int_{V_0} \langle E_{gl}^* \rangle [H_t]\{E_{gl}\} dV_0.$$

En négligeant ensuite les termes de cisaillement transversal, nous obtenons :

$$W_{int} = \int_{V_0} \langle \varepsilon^* \rangle [H]\{\varepsilon\} dV_0$$

soit, après séparation des déformations de membrane et de flexion selon les relations (C.4) :

$$W_{int} = \int_{A_0} \langle e^* \rangle [H_m]\{e\} + \langle \chi^* \rangle [H_f]\{\chi\} dA_0, \quad (\text{C.8})$$

où les grandeurs  $A_0$ ,  $[H_m]$  et  $[H_f]$  (matrices  $(3 \times 3)$ ) sont identiques au cas linéaire.

### C.2.3 Forme incrémentale

La forme incrémentale associée à  $W_{int}$  (C.8) s'écrit :

$$\Delta W_{int} = \int_{V_0} Tr([\Delta E_{gl}^*][S]) + Tr([E_{gl}^*][\Delta S]) dV_0,$$

et s'exprime en fonction de l'incrément des déformations virtuelles et des efforts généralisés selon :

$$\begin{aligned} \Delta W_{int} = \int_{A_0} (< e^* > \{\Delta N\} + < \Delta e^* > \{N\}) + \\ (< \chi^* > \{\Delta M\} + < \Delta \chi^* > \{M\}) dA_0. \end{aligned} \quad (C.9)$$

## C.3 Démarche éléments finis

La résolution d'un problème dynamique non-linéaire en structure requiert :

- un schéma de discrétisation temporelle ;
- une technique de linéarisation (si le schéma de discrétisation temporelle est implicite).

### C.3.1 Schéma temporel de Newmark

Le schéma de discrétisation temporelle employé est identique à celui du cas linéaire (sous-section 4.3.1).

### C.3.2 Discrétisation spatiale

Là encore, la discrétisation spatiale repose sur les mêmes principes que dans le cas linéaire (sous-section 4.3.2).

### C.3.3 Discrétisation du Principe des Travaux Virtuels

La forme élémentaire du PTV (C.1) correspondant au pas de calcul  $p$  s'écrit :

$$W_e^p = \int_{V_0^e} \vec{u}^* \cdot \rho \vec{\ddot{u}} dV_0 + \int_{V_0^e} Tr([E_{gl}^*][S]) dV_0 - \int_{S_0^e} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{s_0} dS_0 - \int_{V_0^e} \vec{u}^* \cdot \vec{f}_{v_0} dV_0. \quad (C.10)$$

Chaque terme est discrétisé de la manière suivante :

- Terme d'inertie

La discrétisation de ce terme par éléments finis fait apparaître la même matrice masse élémentaire  $[m]$  que celle rencontrée dans le cas linéaire.

- Contraintes internes

Par contre, la discrétisation de  $W_{int}^e$  diffère.

$$W_{int}^e = \int_{V_0^e} Tr([E_{gl}^*][S]) dV_0 = < u_n^* > \{f_{int}^e\}. \quad (C.11)$$

- Sollicitations externes

Ce terme reste inchangé par rapport au cas linéaire, sauf si des forces dites “suiveuses” (dépendantes du déplacement) sont exercées sur la coque.

Finalement  $W_e^p$  (C.10) s'écrit :

$$W_e^p = \langle u_n^* \rangle \{r^p\} = \langle u_n^* \rangle ([m]\{\ddot{u}_n\} + \{f_{int}^e\} - \{f_{ext}^e\}),$$

et le système global associé est obtenu par assemblage de ces termes élémentaires :

$$[M]\{\ddot{u}\} + \{F_{int}\} = \{F_{ext}\} \quad (C.12)$$

où  $[M]$  désigne la matrice masse assemblée,  $\{F_{int}\}$  et  $\{F_{ext}\}$  les vecteurs assemblés des efforts internes et sollicitations externes respectivement.

### C.3.4 Discrétisation de la forme incrémentale du PTV

Obtenue en prenant l'accroissement du résidu  $\{r\}$ , la forme incrémentale élémentaire,

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= \Delta W_d^e + \Delta W_{int}^e \\ &= \int_{V_0^e} \vec{u}^* \cdot \rho \Delta \vec{\ddot{u}}^p dV_0 + \int_{V_0^e} Tr([\Delta E_{gl}^*][S]) dV_0 + \int_{V_0^e} Tr([E_{gl}^*][\Delta S]) dV_0, \end{aligned}$$

fait intervenir une matrice dite “tangente” :

$$\Delta W_e = \langle u_n^* \rangle [\bar{k}_T] \{\Delta u_n\} \quad (C.13)$$

où  $\{\Delta u_n\} = \{u_n^{p+1}\} - \{u_n^p\}$  est l'incrément élémentaire de la solution.

La contribution du terme d'inertie  $\Delta W_d^e$  à cette matrice se déduit de l'expression de l'accélération (4.22) :

$$\Delta W_d^e = \langle u_n^* \rangle \frac{4}{\Delta t^2} [m] \{\Delta u_n\} \quad (C.14)$$

alors que la matrice tangente du cas statique, évaluée par intégration numérique, est issue de l'incrément  $\Delta W_{int}^e$  :

$$\Delta W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k_T] \{\Delta u_n\}.$$

Ainsi, la matrice tangente élémentaire de notre problème de dynamique a pour expression :

$$[\bar{k}_T] = \frac{4}{\Delta t^2} [m] + [k_T]. \quad (C.15)$$



## C.4 Linéarisation par la méthode de Newton-Raphson

Comme nous l'avons vu (relation (C.12)), la méthode des éléments finis conduit à une formulation des problèmes non-linéaires du type :

$$W = \langle u^* \rangle \{R(u)\} = 0 \quad \forall \langle u^* \rangle \quad \text{soit} \quad \{R(u)\} = [\overline{K}(u)]\{u\} - \{F\} = 0$$

où  $[\overline{K}(u)]$  symbolise la rigidité dépendante des déplacements et  $\{F\}$  les sollicitations appliquées au solide.

La majorité des algorithmes de résolution des problèmes non-linéaires repose sur la résolution d'un système d'équations linéaires à chaque itération (Fafard [44], Dhatt et Touzot [37]). Nous n'utiliserons ici que la méthode de Newton-Raphson standard dont nous présentons maintenant le principe général avant de l'appliquer au système (C.12).

Considérons une solution approchée  $\{u^{i-1}\}$  du problème non-linéaire :

$$\{R(u^{i-1})\} = [\overline{K}(u^{i-1})]\{u^{i-1}\} - \{F\} \neq 0.$$

La méthode de Newton-Raphson consiste à introduire, de manière itérative, une correction  $\{\Delta u^i\}$  (figure C.1) de la solution  $\{u^{i-1}\}$  afin de satisfaire :

$$\{R(u^i)\} = \{R(u^{i-1} + \Delta u^i)\} = 0.$$

Un développement en série de Taylor de cette expression au voisinage de  $\{u^{i-1}\}$  permet d'obtenir, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$\{R(u^i)\} = \{R(u^{i-1})\} + \left[ \frac{\partial R}{\partial u} \right]_{u=u^{i-1}} \{\Delta u^i\} = 0$$

En posant :

$$[\overline{K}_T(u^{i-1})] = \left[ \frac{\partial R}{\partial u} \right]_{u=u^{i-1}} \quad (\text{C.16})$$

le système à résoudre pour déterminer la correction  $\{\Delta u^i\}$  s'écrit :

$$\boxed{[\overline{K}_T(u^{i-1})]\{\Delta u^i\} = -\{R(u^{i-1})\}} \quad (\text{C.17})$$

L'application concrète de cette méthode au système non-linéaire temporel (C.12) :

$$[M]\{\ddot{u}^{p+1}\} + [K(u^{p+1})]\{u^{p+1}\} = \{F_{ext}^{p+1}\} \quad \text{avec} \quad [K(u^{p+1})]\{u^{p+1}\} = \{F_{int}^{p+1}\}$$

ou, après application du schéma de Newmark (4.22) :

$$[\overline{K}(u^{p+1})]\{u^{p+1}\} = \{F^{p+1}\}$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad [\overline{K}(u^{p+1})] &= \frac{4}{\Delta t^2} [M] + [K(u^{p+1})] \\ \{F^{p+1}\} &= \{F_{ext}^{p+1}\} + [M] \left( \frac{4}{\Delta t^2} \{u^p\} + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}^p\} + \{\ddot{u}^p\} \right) \end{aligned}$$

nécessite la résolution, à chaque itération  $i$  de chaque pas de temps  $p$ , du système :

$$[\overline{K}_T(u_{i-1}^{p+1})] \{\Delta u^i\} = -\{R(u_{i-1}^{p+1})\}$$

$$\text{où} \quad \{R(u_{i-1}^{p+1})\} = [\overline{K}(u_{i-1}^{p+1})] \{u_{i-1}^{p+1}\} - \{F^{p+1}\} = [M] \{\ddot{u}_{i-1}^{p+1}\} + [K(u_{i-1}^{p+1})] \{u_{i-1}^{p+1}\} - \{F_{ext}^{p+1}\}.$$

Finalement, la solution approchée est corrigée selon :

$$\{u_i^{p+1}\} = \{u_{i-1}^{p+1}\} + \{\Delta u^i\}$$

jusqu'à satisfaire un critère de convergence.

### Remarques

En pratique, l'expression de la matrice tangente  $[\overline{K}_T]$  n'est pas obtenue selon (C.16) mais en discrétisant directement la forme incrémentale du PTV (*cf.* section précédente) :

$$\Delta W(u^{i-1}) = \langle u^* \rangle [\overline{K}_T(u^{i-1})] \{\Delta u^i\}.$$

D'autre part, la nature non-linéaire de la matrice tangente  $[\overline{K}_T]$  est moins pénalisante en dynamique qu'en statique (matrice  $[K_T]$ ) de par la présence du terme  $4[M]/\Delta t^2$  dans son expression (équation (C.15)). En effet, plus  $\Delta t$  est petit, moindre est l'influence de  $[K_T]$  (Dhatt et Lefrançois [36]).

#### C.4.1 Techniques de pilotage

La technique précédente permet de déterminer la solution correspondant à un chargement donné. Cependant, les non-linéarités sont parfois telles que les algorithmes de résolution divergent si le niveau de charge maximum est imposé directement à la structure. On doit donc utiliser une approche incrémentale, plus progressive dont la mise en œuvre introduit un "paramètre de charge"  $\lambda$ . Ce scalaire multipliant un vecteur chargement de référence de la structure est inconnu *a priori* et porte à  $n + 1$  ( $n$  degrés de liberté) le nombre d'inconnues du problème alors que le système à résoudre ne comporte que  $n$  équations. Une équation auxiliaire dont le choix détermine la technique de pilotage adoptée doit par conséquent venir compléter ce système. Nous donnons ci-après un rapide aperçu des trois techniques que nous emploierons. Leur description détaillée peut être trouvée dans la thèse de Ammar [5] et la référence [44].

Une première possibilité consiste à imposer la valeur du coefficient de chargement, ce qui revient à résoudre le problème par paliers de chargement. On parle dans ce cas d'un *pilotage par chargement imposé*. Néanmoins, cette technique n'est adaptée que si le paramètre de charge varie de façon monotone.

Le *pilotage en déplacement* constitue une deuxième technique. Celle-ci, moins simple que la

précédente, consiste à imposer le déplacement d'un nœud sur un degré de liberté choisi. Toutefois, le pilotage en déplacement  $a$ , lui aussi, ses limites et ne peut convenir si la courbe charge-déplacement présente un point de retour en déplacement.

Dans ce cas, on peut avoir recours au *pilotage en longueur d'arc* dont les deux précédentes techniques sont des cas particuliers. Celui-ci repose sur le contrôle d'une longueur discrète de l'arc sur la courbe charge-déplacement.

## C.5 Élément DKT18 en grands déplacements

Cette section présente la formulation non-linéaire (en grands déplacements, rotations modérées et petites déformations en FLT) de l'élément DKT18 présenté dans le chapitre 4.

Le repère, les coordonnées locales et les variables cinématiques utilisés sont identiques à ceux du chapitre 4. De même, la matrice masse et la matrice de rigidité fictive ainsi que la technique de changement de repère (local-global) sont inchangées.

### Terme de contraintes internes

La forme élémentaire de  $W_{int}$  (C.11) se décompose en membrane et flexion suivant :

$$W_{int}^e = W_{int}^m + W_{int}^f = \int_{A_e} \langle e^* \rangle \{N\} dA + \int_{A_e} \langle \chi^* \rangle \{M\} dA \quad (C.18)$$

#### ▷ Partie membrane

L'expression des déformations de membrane (C.5), nécessaire au calcul des efforts normaux, est :

$$\{e\}_{(3 \times 1)} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2(\langle a \rangle \{a\} - 1) \\ 1/2(\langle c \rangle \{c\} - 1) \\ \langle a \rangle \{c\} \end{array} \right\} \quad (C.19)$$

avec :

$$\{a\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + u_{,x_0} \\ v_{,x_0} \\ w_{,x_0} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \langle N_{,x}^u \rangle \\ \langle N_{,x}^v \rangle \\ \langle N_{,x}^w \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} + \{e_x\} = [B_{ma}] \{u_n\} + \{e_x\}$$

$$\{c\} = \left\{ \begin{array}{l} u_{,y_0} \\ 1 + v_{,y_0} \\ w_{,y_0} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \langle N_{,y}^u \rangle \\ \langle N_{,y}^v \rangle \\ \langle N_{,y}^w \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} + \{e_y\} = [B_{mc}] \{u_n\} + \{e_y\}$$

où  $\langle e_x \rangle = \langle 1 \ 0 \ 0 \rangle$  et  $\langle e_y \rangle = \langle 0 \ 1 \ 0 \rangle$ .

Les dérivées en  $x$  et  $y$  sont exprimées en fonction des dérivées en  $\xi$  et  $\eta$  en utilisant (4.28) :

$$[B_{ma}]_{(3 \times 18)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ y_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} \quad (C.20)$$

$$[B_{mc}]_{(3 \times 18)} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -x_3 \langle N_{,\xi}^u \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^u \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^v \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^v \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^w \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix}.$$

Une fois  $\{e\}$  calculé, les efforts généralisés de membrane se déduisent aisément de (4.18). D'autre part, les déformations de membrane virtuelles  $\{e^*\}$  (première variation des déformations de membrane réelles),

$$\{e^*\}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \langle a \rangle \{a^*\} \\ \langle c \rangle \{c^*\} \\ \langle c \rangle \{a^*\} + \langle a \rangle \{c^*\} \end{bmatrix}$$

$$\{a^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,x_0}^* \\ v_{,x_0}^* \\ w_{,x_0}^* \end{Bmatrix} = [B_{ma}] \{u_n^*\} \quad ; \quad \{c^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,y_0}^* \\ v_{,y_0}^* \\ w_{,y_0}^* \end{Bmatrix} = [B_{mc}] \{u_n^*\}$$

sont reliées aux variables nodales virtuelles selon :

$$\{e^*\} = \begin{bmatrix} \langle a \rangle [B_{ma}] \\ \langle c \rangle [B_{mc}] \\ \langle c \rangle [B_{ma}] + \langle a \rangle [B_{mc}] \end{bmatrix} \{u_n^*\} = \underset{(3 \times 18)}{[B_e]} \{u_n^*\}. \quad (\text{C.21})$$

Cette dernière relation implique :

$$W_{int}^m = \langle u_n^* \rangle \{f_{int}^m\} = \langle u_n^* \rangle \int_{A_e} [B_e]^T \{N\} dA.$$

Comme  $[B_e]$  et  $\{N\}$  sont constants sur l'élément, les efforts internes de membrane prennent la forme :

$$\underset{(18 \times 1)}{\{f_{int}^m\}} = [B_e]^T \{N\} A_e.$$

### ▷ Partie flexion

Dans le cadre des rotations modérées, nous négligeons la partie non-linéaire des déformations de flexion (démarche similaire à celle utilisée pour l'élément DKTP27 en grands déplacements et rotations modérées [5]). Par conséquent, l'expression de  $\{\chi\}$  est identique à celle rencontrée dans le cas linéaire. Finalement, nous obtenons :

$$\{f_{int}^e\} = \{f_{int}^m\} + \{f_{int}^f\} = [B_e]^T \{N\} A_e + \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T \{M\})_i J.$$

#### C.5.1 Matrice tangente

Cette matrice provient de la forme incrémentale (C.13) :

$$\Delta W^e = \Delta W_d^e + \Delta W_{int}^e$$

où la contribution du terme d'inertie est définie par (C.14).

L'incrément du terme relatif aux efforts internes s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta W_{int}^e &= \int_{A_e} (\langle e^* \rangle \{\Delta N\} + \langle \Delta e^* \rangle \{N\}) + (\langle \chi^* \rangle \{\Delta M\} + \langle \Delta \chi^* \rangle \{M\}) dA \\ &= \Delta W_{int}^m + \Delta W_{int}^f\end{aligned}\quad (C.22)$$

et introduit différentes matrices élémentaires selon le type de décomposition adoptée. Nous proposons ici de décomposer la matrice tangente du cas statique  $[k_T]$  en matrices tangentés "linéaire"  $[k_L]$  et géométrique  $[k_\sigma]$ .

▷ **Partie membrane**

$$\begin{aligned}\Delta W_{int}^m &= \Delta W_{int}^{m1} + \Delta W_{int}^{m2} \\ &= \underbrace{\int_{A_e} \langle e^* \rangle \{\Delta N\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_L^m] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta e^* \rangle \{N\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_\sigma^m] \{\Delta u_n\}}.\end{aligned}\quad (C.23)$$

On remarquera que la matrice  $[k_L^m]$  est abusivement qualifiée de "linéaire" : on pourra se reporter à l'annexe J pour une décomposition plus fine de la matrice tangente faisant intervenir explicitement la matrice de rigidité du cas linéaire.

D'autre part, on notera que :

$$\{\Delta e^*\} = \{\Delta e_l^*\} + \{\Delta e_{nl}^*\} = \{\Delta e_{nl}^*\}$$

où  $\{\Delta e_l^*\}$  et  $\{\Delta e_{nl}^*\}$  sont données par la variation de (C.6). En effet, le fait que l'accroissement d'un champ virtuel simple est nul implique  $\{\Delta e_l^*\} = \{0\}$ .

• **Calcul de  $[k_l^m]$**

L'expression de  $\{\Delta N\} = [H_m] \{\Delta e\}$  se déduit de  $\{\Delta e\}$  (dont la forme est similaire à  $\{e^*\} = \{\delta e\}$ ) :

$$\{\Delta e\} = \left\{ \begin{array}{l} \langle a \rangle \{\Delta a\} \\ \langle c \rangle \{\Delta c\} \\ \langle c \rangle \{\Delta a\} + \langle a \rangle \{\Delta c\} \end{array} \right\} = [B_e] \{\Delta u_n\}.\quad (C.24)$$

Ces relations, ainsi que les équations (C.21) et (C.23), nous permettent d'écrire :

$$\Delta W_{int}^{m1} = \langle u_n^* \rangle [k_L^m] \{\Delta u_n\} = \langle u_n^* \rangle \int_{A_e} [B_e]^T [H_m] [B_e] dA \{\Delta u_n\}.$$

Ainsi :

$$\underset{(18 \times 18)}{[k_L^m]} = [B_e]^T [H_m] [B_e] A_e.$$

• **Calcul de  $[k_\sigma^m]$**

L'incrément des déformations virtuelles  $\{\Delta e^*\}$  présent dans  $\Delta W_{int}^{m2}$  (C.23) s'exprime selon :

$$\begin{aligned} \{\Delta e^*\} &= \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta a \rangle [B_{ma}] \{u_n^*\} \\ \langle \Delta c \rangle [B_{mc}] \{u_n^*\} \\ (\langle \Delta a \rangle [B_{mc}] + \langle \Delta c \rangle [B_{ma}]) \{u_n^*\} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta u_n \rangle [B_{ma}]^T [B_{ma}] \{u_n^*\} \\ \langle \Delta u_n \rangle [B_{mc}]^T [B_{mc}] \{u_n^*\} \\ \langle \Delta u_n \rangle ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) \{u_n^*\} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Aussi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta W_{int}^{m2} &= \langle u_n^* \rangle [k_\sigma^m] \{\Delta u_n\} \\ &= \langle u_n^* \rangle \int_{A_e} [B_{ma}]^T [B_{ma}] N_x + [B_{mc}]^T [B_{mc}] N_y + \\ &\quad ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) N_{xy} dA \{\Delta u_n\} \end{aligned}$$

et :

$$[k_\sigma^m]_{(18 \times 18)} = ([B_{ma}]^T [B_{ma}] N_x + [B_{mc}]^T [B_{mc}] N_y + ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) N_{xy}) A_e.$$

où les expressions des efforts normaux  $\langle N \rangle = \langle N_x \ N_y \ N_{xy} \rangle$  sont données par la relation (4.18).

▷ **Partie flexion**

$$\Delta W_{int}^f = \underbrace{\int_{A_e} \langle \chi^* \rangle \{\Delta M\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_L^f] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta \chi^* \rangle \{M\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_\sigma^f] \{\Delta u_n\}} \quad (C.25)$$

La partie non-linéaire des déformations de flexion ayant été négligée,  $\{\Delta \chi^*\} = \{\Delta \chi_{nl}^*\} = \{0\}$  et par conséquent  $[k_\sigma^f]$  est nulle et la matrice  $[k_L^f]$  est effectivement linéaire.

• **Calcul de  $[k_L^f]$**

L'incrément (C.25) fait intervenir  $\langle \chi^* \rangle$  ainsi que  $\{\Delta M\} = [H_f] \{\Delta \chi\}$ .

$\{\Delta \chi\}$  a une forme similaire à  $\{\chi^*\} = \{\delta \chi\}$  :

$$\{\Delta \chi\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \beta_{x,x_0} \\ \Delta \beta_{y,y_0} \\ \Delta \beta_{x,y_0} + \Delta \beta_{y,x_0} \end{array} \right\} = [B_f] \{\Delta u_n\}. \quad (C.26)$$

En reportant cette expression ainsi que (4.36) dans (C.25), nous avons :

$$\Delta W_{int}^f = \langle u_n^* \rangle [k_L^f] \{\Delta u_n\} = \langle u_n^* \rangle \int_{A_e} [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \{\Delta u_n\}$$

Cette relation, intégrée numériquement avec trois points de Hammer, fournit :

$$[k_L^f]_{(18 \times 18)} = \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T [H_f] [B_f])_i J.$$

▷ **Résumé**

En regroupant les contributions des termes d'inertie et des efforts internes (membrane et flexion), il vient :

$$[\bar{k}_T] = [k_T] + \frac{4}{\Delta t^2} [m] \quad ; \quad [k_T] = [k_L] + [k_\sigma]$$

avec :

$$[k_L] = [k_L^m] + [k_L^f] = [B_e]^T [H_m] [B_e] A_e + \sum_{i=1}^3 (\omega [B_f]^T [H_f] [B_f])_i J$$

$$[k_\sigma] = [k_\sigma^m] = ([B_{ma}]^T [B_{ma}] N_x + [B_{mc}]^T [B_{mc}] N_y + ([B_{ma}]^T [B_{mc}] + [B_{mc}]^T [B_{ma}]) N_{xy}) A_e.$$

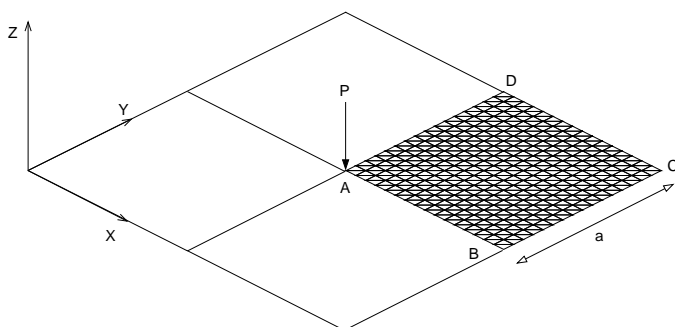
## Annexe D

# Validation de l'élément DKT18 non-linéaire

Cette annexe présente quelques-uns des tests réalisés avec la version non-linéaire de l'élément DKT18 décrite dans l'annexe C. La totalité des cas-tests réalisés peut être trouvée dans le rapport d'avancement [88]. Ces calculs ont pour objectif de vérifier le bon comportement et la bonne programmation de l'élément que nous avons développé, c'est pourquoi nous ne nous attacherons pas à commenter le comportement de la structure d'une manière approfondie. Nous essaierons plutôt de confronter nos résultats à d'autres déjà existants.

### D.1 Plaque carrée soumise à un chargement ponctuel

Ce premier cas-test est représenté sur la figure D.1. Il s'agit d'une plaque carrée encadrée soumise à un chargement ponctuel  $P$  en son centre. Les caractéristiques de cette configuration sont résumées ci-dessous.



Conditions aux limites :

$$U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0$$

(encastrement) sur  $BC$  et  $DC$  ;

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ (symétrie) sur } AD ;$$

$$V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ (symétrie) sur } AB.$$

Propriétés du matériau :

$$h = 1 \text{ m} ;$$

$$E = 90.12 \text{ N.m}^{-2} ;$$

$$\nu = 0.3.$$

FIG. D.1 – Plaque chargée verticalement au centre ( $a=10 \text{ m}$ ).



Du fait de la symétrie du problème, seul un quart de la structure a été considéré. Quatre maillages ont été employés ( $2 \times 2$ ), ( $4 \times 4$ ), ( $8 \times 8$ ) et ( $16 \times 16$ ), le dernier étant illustré sur la figure D.1. Un pilotage en chargement a été adopté (ce que justifie la rigidité strictement croissante de la structure) : la charge totale  $P = 140 \text{ N}$  est imposée en neuf pas égaux et la norme de convergence retenue est :

$$\varepsilon = \frac{\max(|\Delta \vec{u}_i|)}{\max(|\Delta \vec{u}_p|)} = 10^{-3} \quad ; \quad \Delta \vec{u}_p = \sum_{i=1}^{ipas} \Delta \vec{u}_i$$

où  $|\cdot|$  représente la valeur absolue.

Nous comparons nos résultats<sup>1</sup> à ceux obtenus avec les éléments DKQ16<sup>2</sup> [131] et DKT15<sup>3</sup> [63]. Les courbes charge-déplacement du point  $A$  pour les deux premiers maillages (figures D.2 et D.3) mettent clairement en évidence les grands déplacements de la structure (le déplacement vertical dépassant jusqu'à plus de quatre fois son épaisseur) indiquent un bon accord entre les résultats des trois éléments. Elles montrent également que l'augmentation du nombre d'éléments modifie peu les résultats pour ce cas-test (les résultats obtenus avec les maillages ( $8 \times 8$ ) et ( $16 \times 16$ ) sont pratiquement identiques à ceux du maillage ( $4 \times 4$ ) et ne sont donc pas présentés).

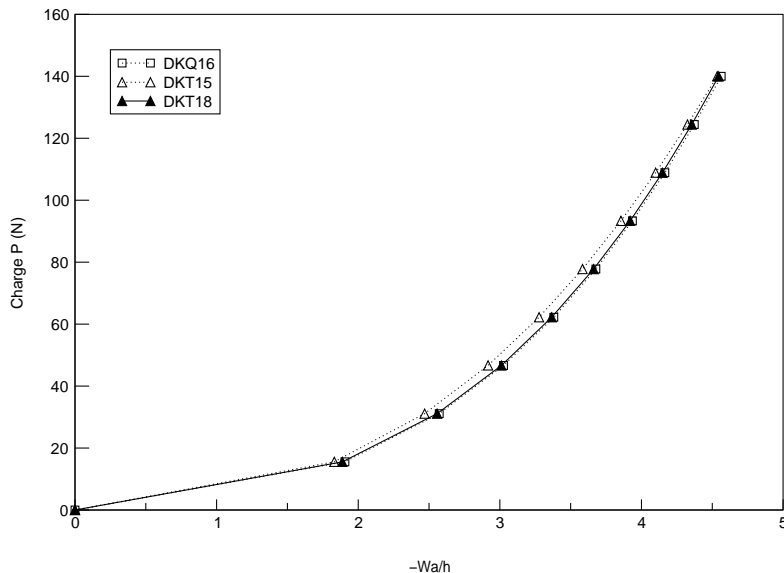


FIG. D.2 – Déplacement vertical adimensionné du point  $A$ . Maillage ( $2 \times 2$ ).

## D.2 Panneau cylindrique articulé

Ce cas-test classique fut traité par de nombreux auteurs afin de valider différents éléments en analyse non-linéaire géométrique des structures courbées [5, 63, 121, 131]. Il s'agit d'une coque cylindrique simplement appuyée le long de ces deux côtés droits et soumise à une charge

1. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est reporté dans le rapport d'avancement [88].
2. Élément résultant de la superposition de l'élément de membrane RQ4 et de l'élément de flexion DKQ8, en grands déplacements et rotations modérées en FLT.
3. Élément à cinq degrés de liberté par nœud utilisant l'approche isoparamétrique dégénérée en FLAI.

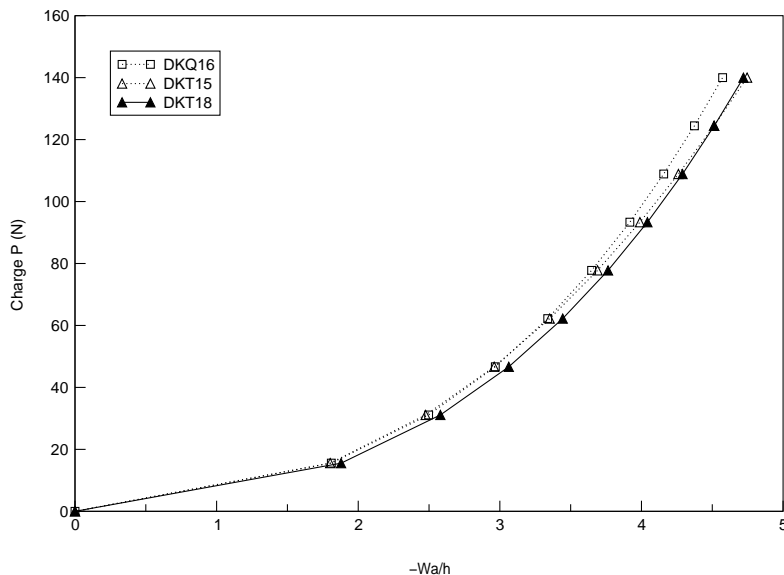


FIG. D.3 – Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage  $(4 \times 4)$ .

verticale concentrée en son centre (figure D.4).

Nous étudions deux configurations ne différant que par la valeur de l'épaisseur : l'une qualifiée de "rigide" où l'épaisseur vaut  $12.7\text{ mm}$ , l'autre qualifiée de "flexible" où l'épaisseur est de  $6.35\text{ mm}$ . Dans les deux cas, nous ne considérons qu'un quart de la structure et comparons les résultats de l'élément DKT18 avec ceux obtenus à l'aide de DKQ16 [131] et DKT15 [63]. Les résultats de Surana [121] sont pris pour référence. Ce dernier a utilisé un élément quadrilatéral à seize nœuds.

### D.2.1 Configuration rigide

Dans ce cas ( $h_1 = 12.7\text{ mm}$ ,  $h_1/R = 1/200$ ), la courbe charge-déplacement présente deux points limites en chargement, ce qui requiert l'emploi d'un pilotage en déplacement (ou en longueur d'arc). Aussi avons-nous imposé le déplacement vertical du point A (douze incréments égaux tels que  $\Delta W_A = -2.5\text{ mm}$  avec un critère de convergence  $\varepsilon = 10^{-3}$ ).

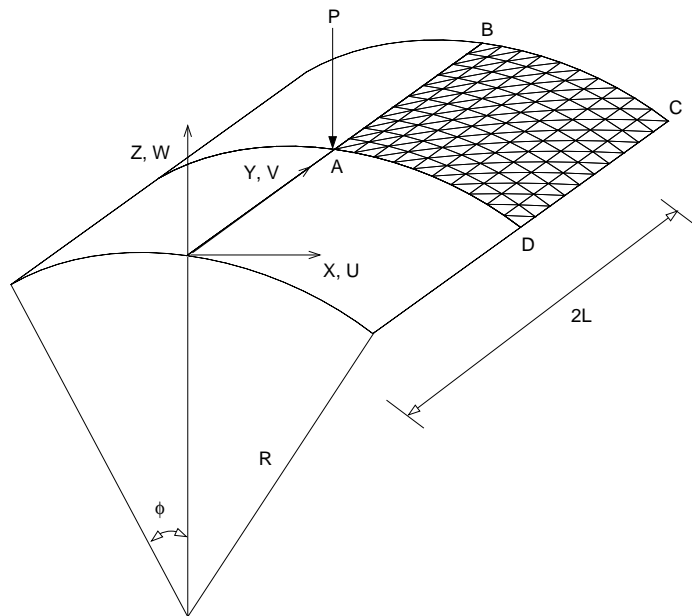
Le présent calcul a utilisé trois maillages<sup>4</sup> :  $(4 \times 6)$ ,  $(8 \times 8)$  et  $(10 \times 12)$ , conformément à [131] et [63]. Surana [121], quant à lui, a employé un maillage  $(2 \times 2)$ .

Les déplacements<sup>5</sup> des points A (figures D.5 et D.7) et B (figures D.6 et D.8) évalués<sup>6</sup> par l'élément DKT18 sont en très bon accord avec ceux de DKT15 et très proches de ceux de Surana.

4. Le premier chiffre représente le nombre d'éléments suivant  $BC$  et le second le nombre d'éléments suivant  $AB$ .

5. Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence pour chacun des maillages figure dans la référence [89].

6. Les résultats obtenus avec le maillage  $(10 \times 12)$  diffèrent peu de ceux obtenus avec le maillage  $(8 \times 8)$  et ne sont donc pas présentés.



Conditions aux limites :

$$U = V = W = \theta_X = \theta_Z = 0$$

(articulation) sur  $CD$ ;

$$U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ (symétrie) sur } AB;$$

$$V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ (symétrie) sur } AD.$$

Propriétés du matériau :

$$h_1 = 12.7 \text{ mm ou } h_2 = 6.35 \text{ mm};$$

$$E = 3.10275 \text{ KN.mm}^{-2};$$

$$\nu = 0.3.$$

FIG. D.4 – Panneau cylindrique articulé (rayon  $R = 2540 \text{ mm}$ , longueur  $L = 254 \text{ mm}$ , angle  $\phi = 0.1 \text{ rad}$ ).

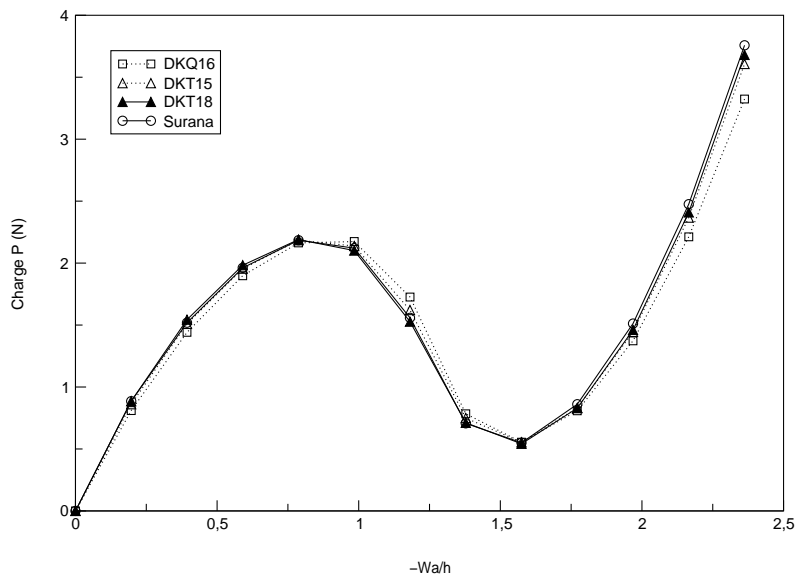


FIG. D.5 – Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage  $(4 \times 6)$ .

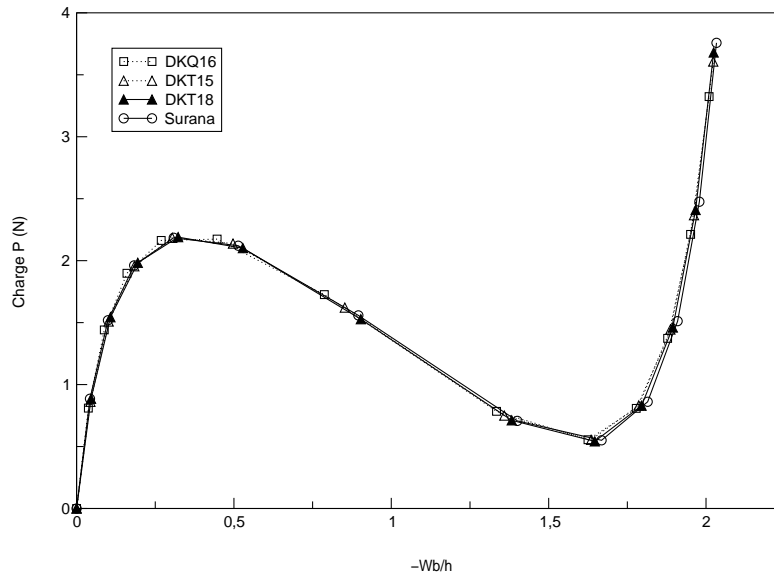


FIG. D.6 – Déplacement vertical adimensionné du point B. Maillage (4 × 6).

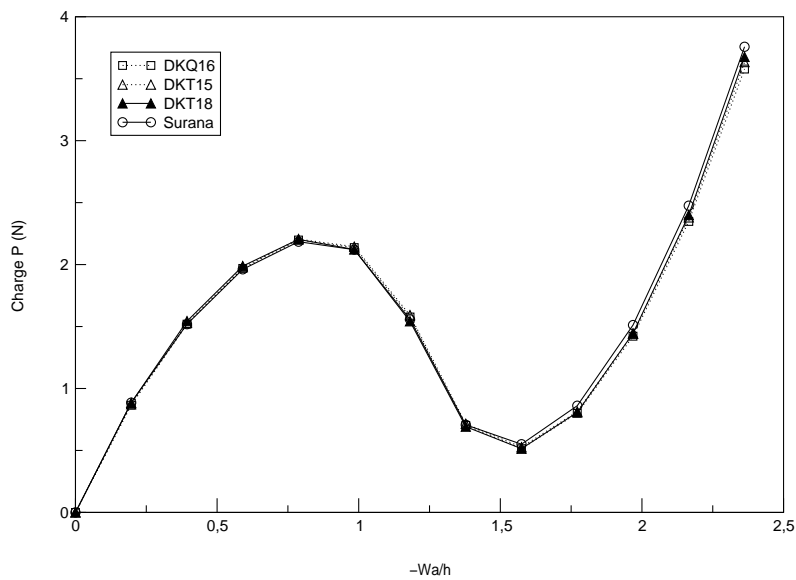


FIG. D.7 – Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage (8 × 8).

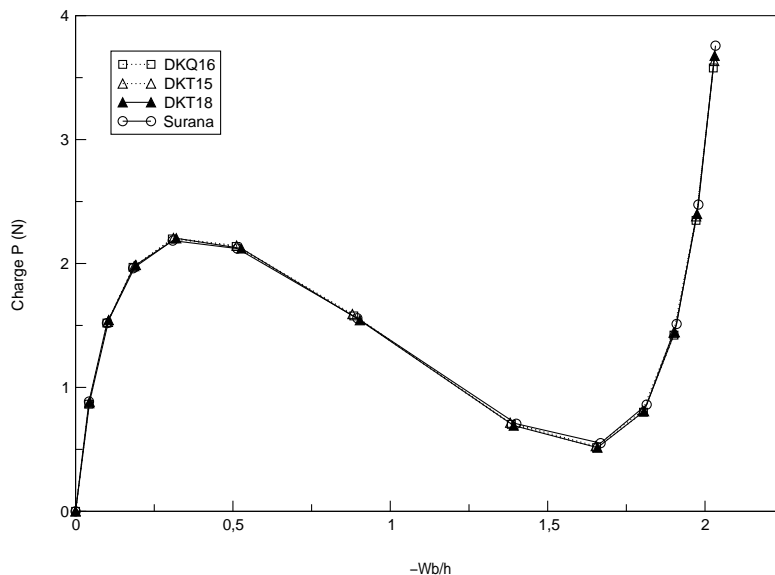


FIG. D.8 – Déplacement vertical adimensionné du point  $B$ . Maillage  $(8 \times 8)$ .

## D.2.2 Configuration flexible

Cette seconde configuration ( $h_2 = 6.35 \text{ mm}$ ,  $h_2/R = 1/400$ ) se caractérise par un comportement très différent de la précédente : la courbe charge-déplacement du point  $A$  présente maintenant deux points limites en charge ainsi que deux points limites en déplacement (“snap-back”). Un pilotage en longueur d’arc est donc indispensable pour suivre convenablement les branches instables.

Deux maillages ont été employés pour ce calcul :  $(4 \times 6)$  et  $(8 \times 8)$ . D’autre part, la résolution du problème a été réalisée en 23 pas (critère de convergence  $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Entre trois et quatre itérations ont été nécessaires pour atteindre la convergence pour le maillage  $(4 \times 6)$ , conformément à ce qui est mentionné dans [131] pour l’élément DKQ16 (quatre itérations par pas, pour le même maillage).

Le bon comportement de l’élément DKT18 établi à partir des tests précédents est confirmé ici par les courbes charge-déplacement relatives aux points  $A$  (figures D.9 et D.11) et  $B$  (figures D.10 et D.12). En effet, les points de retour sont bien captés par l’élément, les courbes obtenues coïncident pratiquement avec celles de l’élément DKT15 et s’avèrent proches des résultats de Surana. On notera que celui-ci a utilisé un pilotage en déplacement, ce qui explique qu’il n’ait pas capté les points de retour en déplacement.

En conclusion, l’ensemble des cas-tests, dont une partie a été présentée dans cette annexe, permet d’affirmer que l’élément DKT18 non-linéaire développé donne de très bons résultats dans la limite des grands déplacements et des rotations modérées. Les techniques de pilotage ont également pu être validées grâce à ces tests.

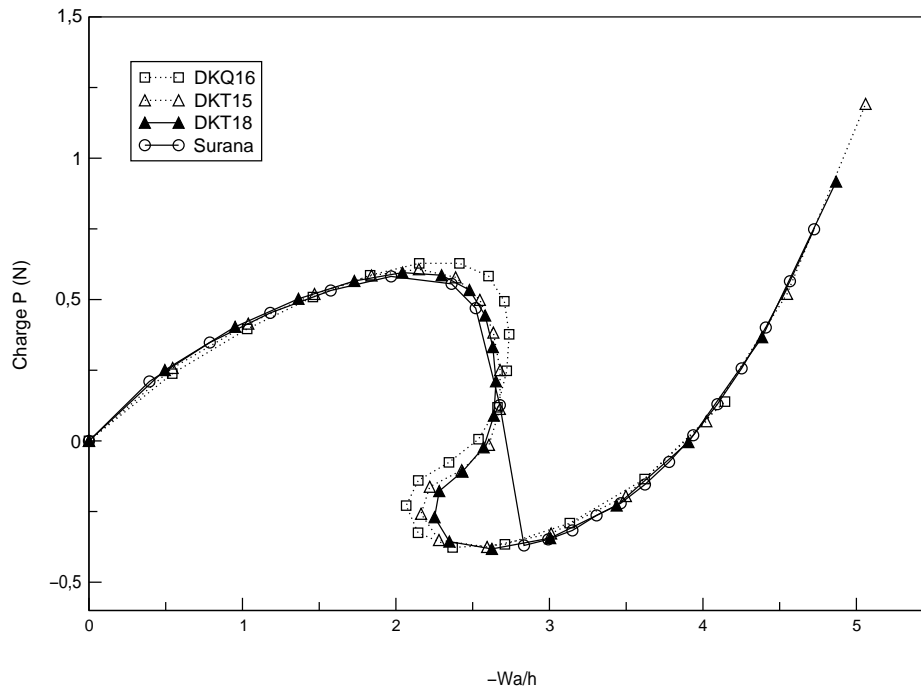


FIG. D.9 – Déplacement adimensionné du point A. Maillage  $(4 \times 6)$ .

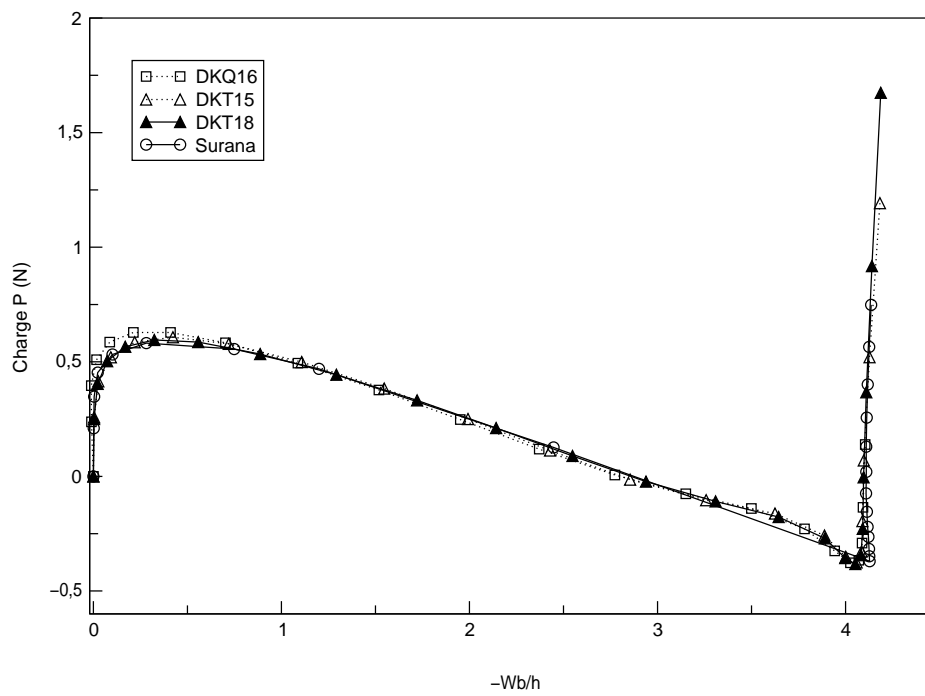


FIG. D.10 – Déplacement adimensionné du point B. Maillage  $(4 \times 6)$ .

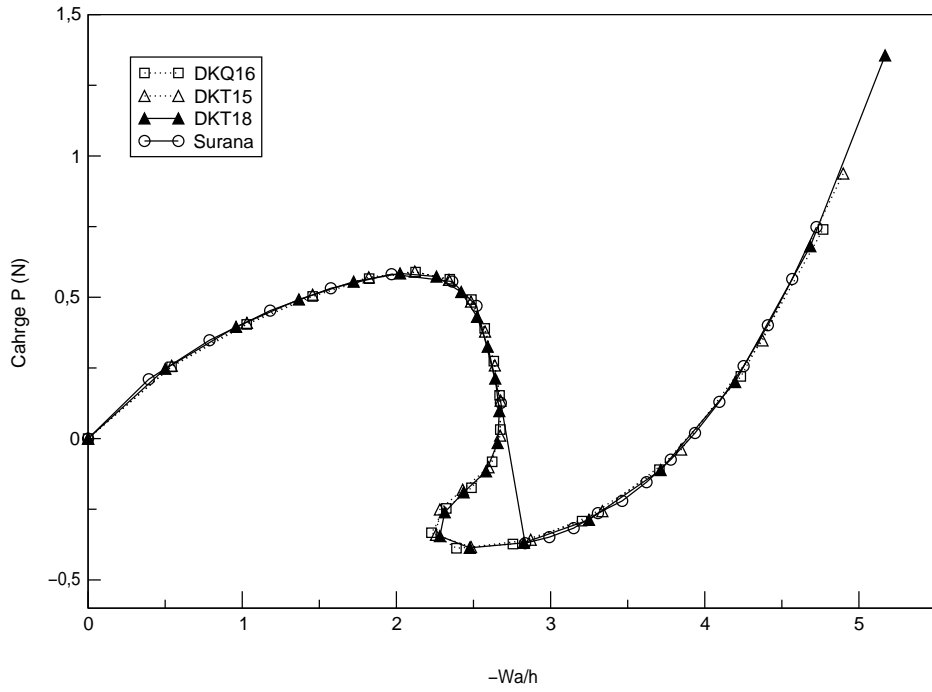


FIG. D.11 – Déplacement adimensionné du point A. Maillage  $(8 \times 8)$ .

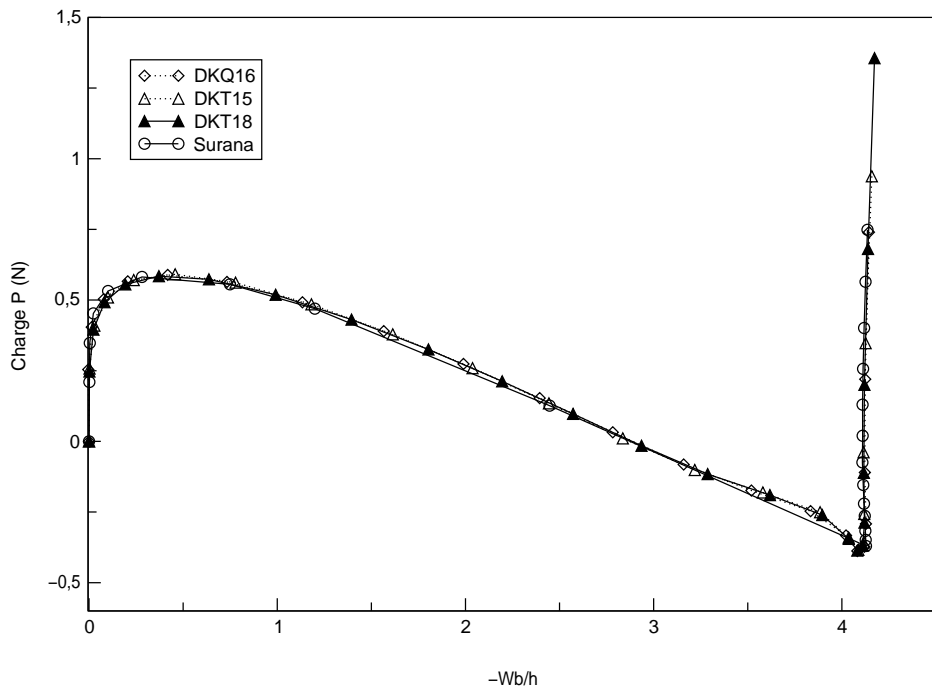


FIG. D.12 – Déplacement adimensionné du point B. Maillage  $(8 \times 8)$ .

## Annexe E

# Applications présentant de grandes rotations de la structure

*Cette annexe présente quelques-uns des tests réalisés avec plusieurs éléments non-linéaires capables de traiter de grandes rotations. Ces calculs ont pour objectif de mettre en valeur les capacités de ces éléments et ne sont donc pas décrits en détails.*

### E.1 Poutre en “L” sous chargement de flexion

Ce cas test illustre les capacités d’un élément de poutre non-linéaire que nous avons été amenés à étudier lors de nos travaux. Il s’agit d’un élément de poutre non-linéaire en grands déplacements et grandes rotations formulé en FLT [75]. Ce test consiste à fléchir une poutre en forme de “L” : la poutre, dont une des extrémités est encastree ( $u=w=\theta=0$ ), est soumise à un moment concentré à sa seconde extrémité (figure E.1).

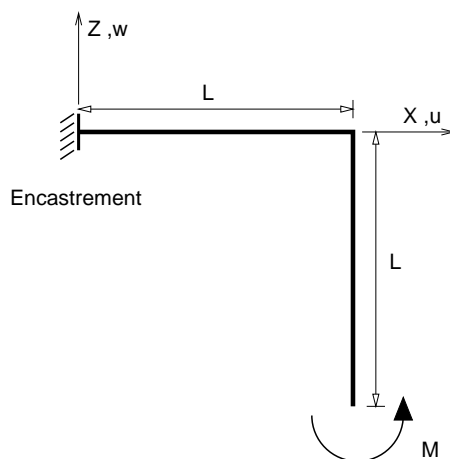


FIG. E.1 – Poutre en “L” soumise à un moment fléchissant.

Le moment total pour courber la poutre sous forme d’un cylindre est  $M_{\text{tot}} = 50\pi$ . Les configurations successives de la poutre sont représentées sur la figure E.2. Les courbes charge-déplacements



(figure E.3) de l'extrémité libre de la poutre relatives à nos calculs et à ceux de Fafard sont en très bon accord.

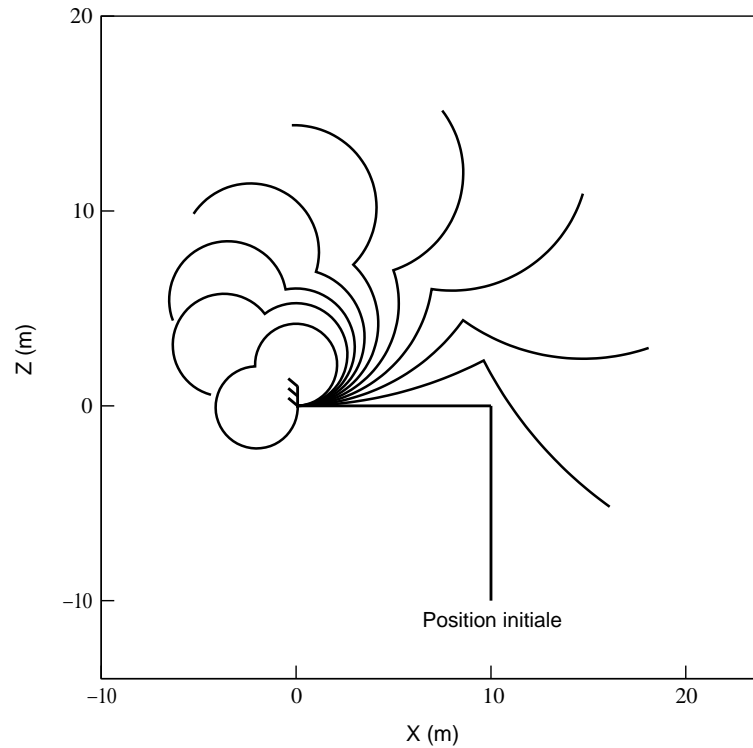


FIG. E.2 – Configurations successives de la poutre en L.

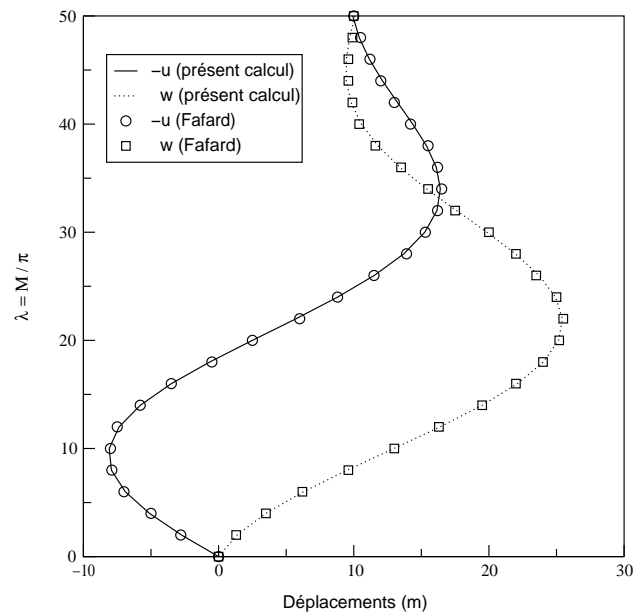


FIG. E.3 – Courbe charge-déplacements de l'extrémité libre de la poutre.

## E.2 Enroulement d'une plaque

Ce cas test met en évidence les capacités d'un élément de coque non-linéaire appelé  $Q_{4\gamma 24}$  [13] formulé en grands déplacements et grandes rotations en FLT [79]. Il s'agit d'un exemple inspiré de la référence [75]. Une plaque encastree est enroulée sous forme d'un cylindre par l'intermédiaire d'un moment réparti appliqué à son extrémité libre (figure E.4).

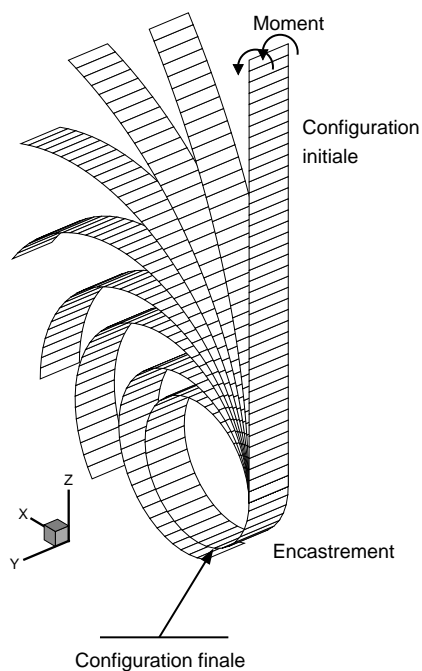


FIG. E.4 – *Enroulement d'une plaque : configurations successives au cours du chargement. Élément  $Q_{4\gamma}$  non-linéaire, maillage  $(40 \times 1)$ .*

## E.3 Hémisphère pincé

Enfin, nous présentons les résultats d'un calcul consistant à "pincer un hémisphère" (figure E.5). Pour effectuer ce calcul, nous avons développé une version de notre élément non-linéaire DKT18 en formulation FLAI (Formulation Lagrangienne Actualisée).

Les configurations successives lors de l'augmentation du chargement sont représentées sur la figure E.6 et illustrent bien les capacités du nouvel élément ainsi développé.

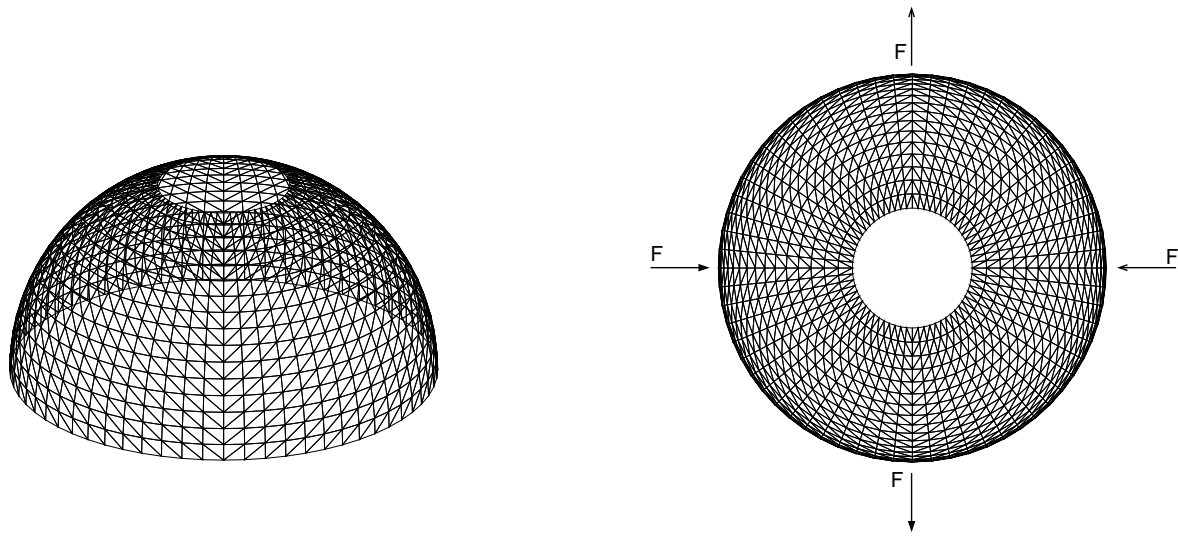


FIG. E.5 – Configuration initiale : vue 3D (à gauche) et vue de dessus avec représentation du chargement (à droite).

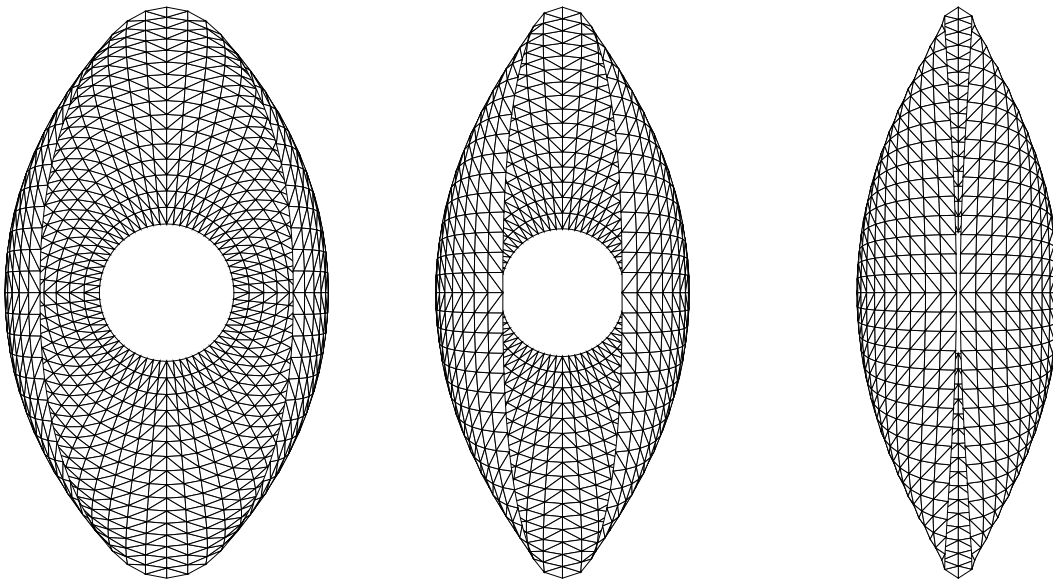


FIG. E.6 – Configurations successives lors de l'augmentation du chargement (de gauche à droite), vues de dessus.

## Annexe F

# Fréquences et modes propres des tuyères souples

*Cette annexe présente les modes propres supérieurs des cas LEA1 et LEA3 étudiés au chapitre 9. La complexité grandissante des modes est mise en évidence. De plus, dans le cas LEA1, tous les modes observés sont retrouvés dans l'étude [115] concernant le moteur Vulcain.*

### F.1 Modes propres supérieurs des cas LEA1 et LEA3

Nous présentons les modes propres 7 à 18 des cas LEA1 (figures F.1 et F.2) et LEA3 (figures F.3 et F.4) étudiés au chapitre 9.

Les résultats obtenus mettent en évidence la complexité de ces modes. Il faut également noter que ces modes participent de façon beaucoup moins importante à la réponse dynamique de la structure que les modes 1 à 6 exposés au chapitre 9.

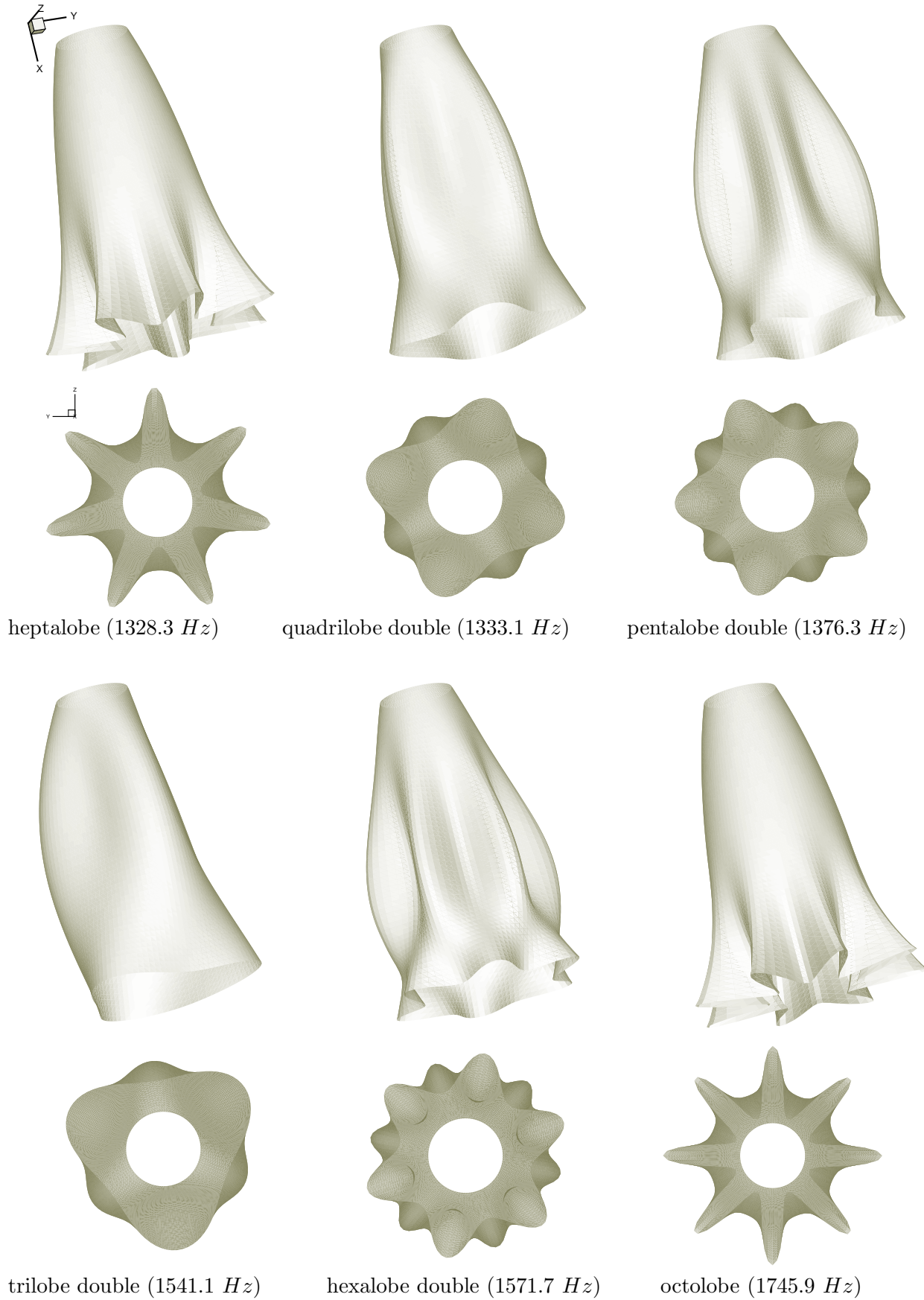


FIG. F.1 – Modes propres naturels 7 à 12 du cas LEA1. Vues latérales et de dessus.

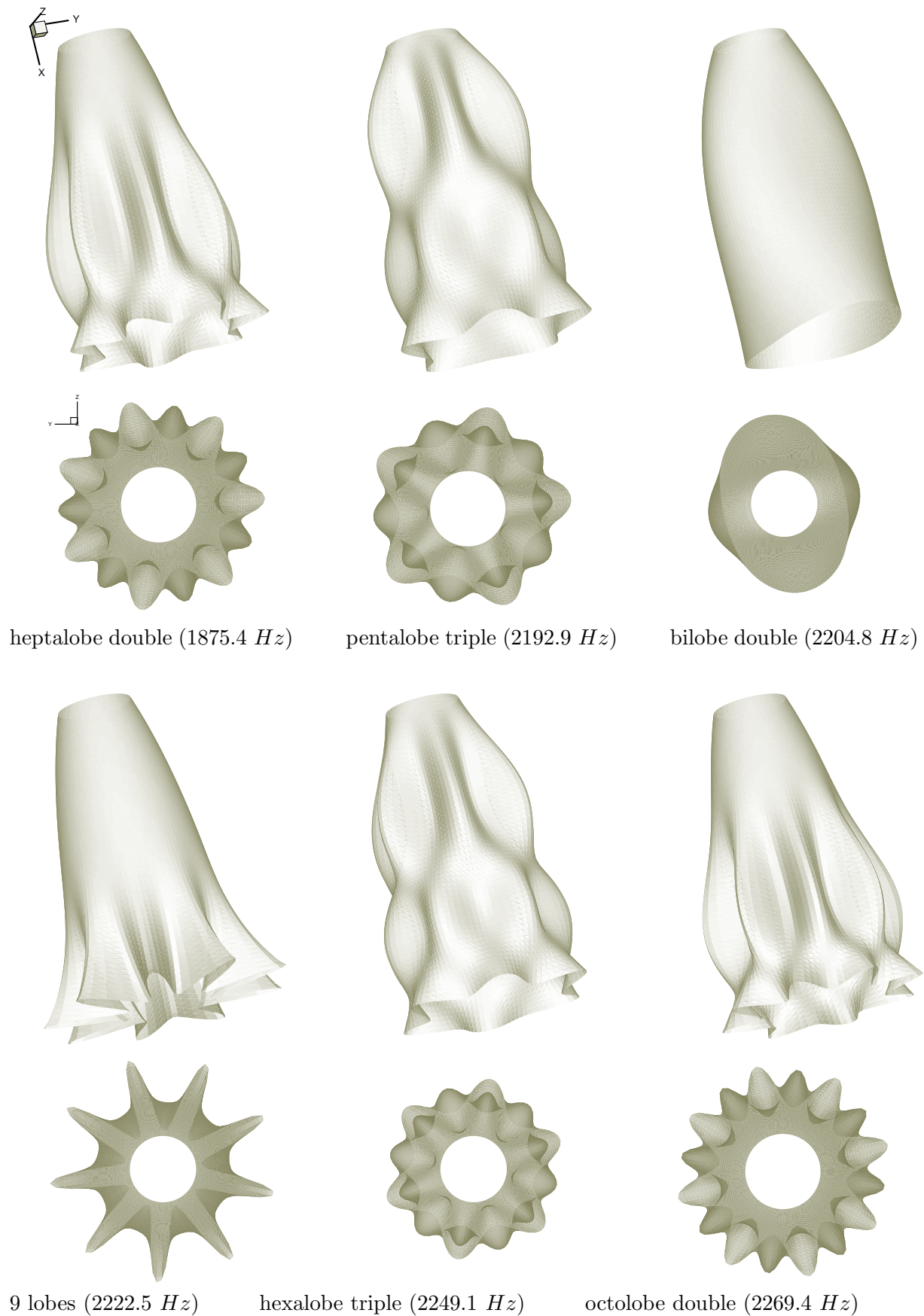


FIG. F.2 – Modes propres naturels 13 à 18 du cas LEA1. Vues latérales et de dessus.

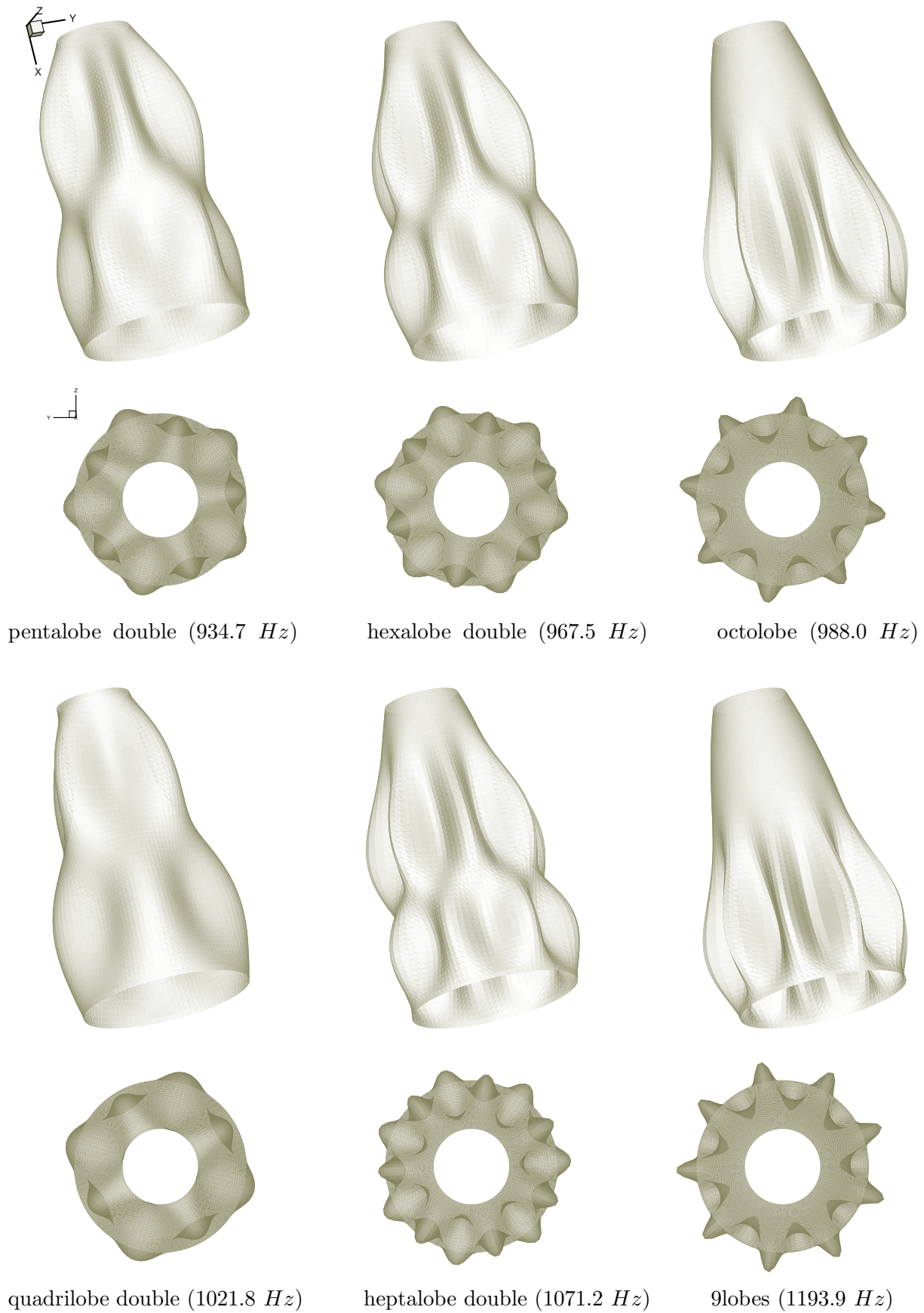


FIG. F.3 – Modes propres naturels 7 à 12 du cas LEA3. Vues latérales et de dessus.

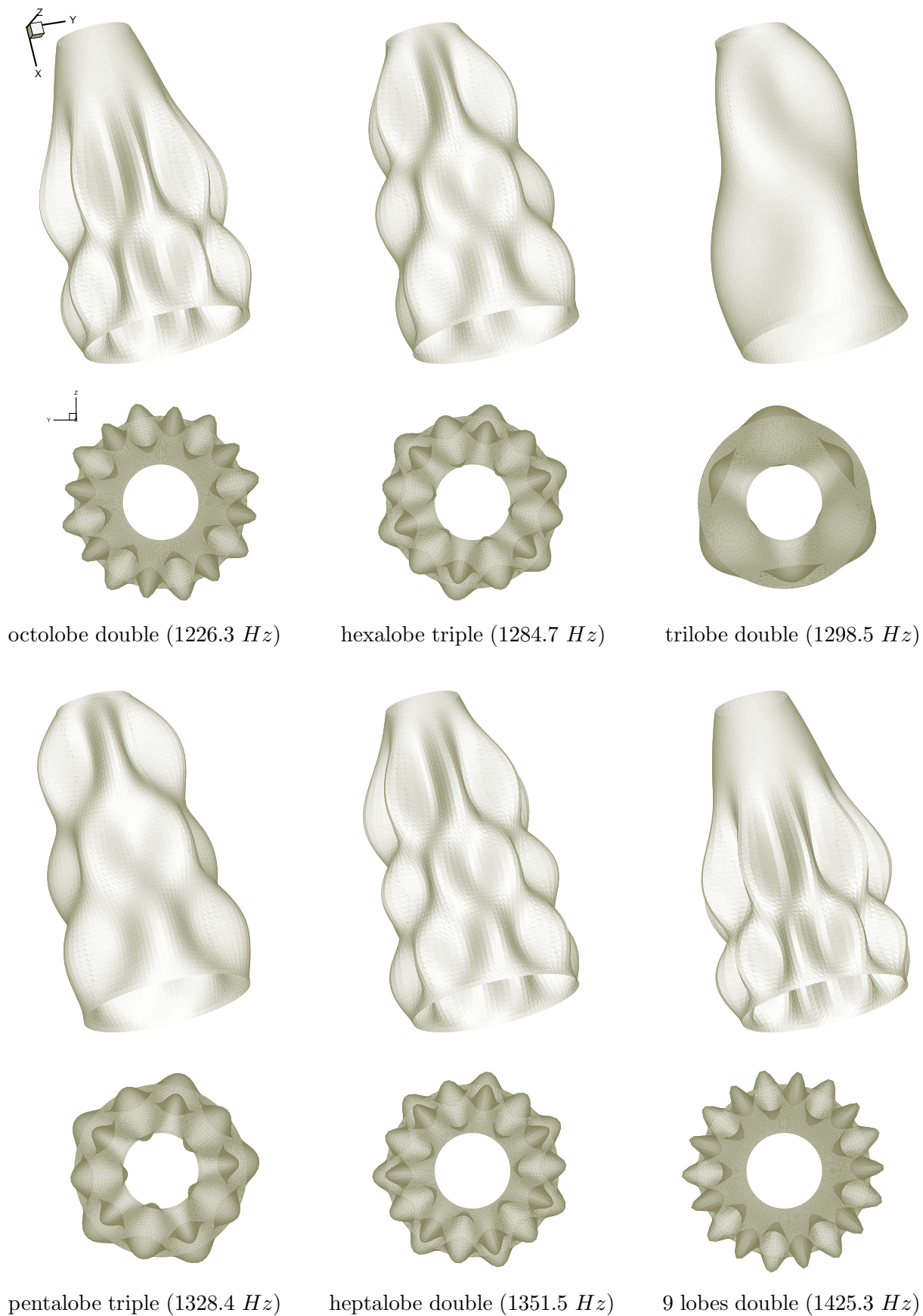


FIG. F.4 – Modes propres naturels 13 à 18 du cas LEA3. Vues latérales et de dessus.





## Annexe G

# Matrice de rigidité aérodynamique pour un divergent bidimensionnel plan

Considérons, par exemple, un divergent bidimensionnel plan, (le cas tridimensionnel est similaire et peut être trouvé dans [76]), modélisé par des éléments de poutre à trois degrés de liberté par nœuds  $(u_i, v_i$  et  $\theta_i)$ . L'expression de l'effort  $\{F\}$  se déduit de :

$$\langle \delta W \rangle \{F\} = \int_{\mathcal{S}} -\delta \vec{w} \cdot (p_a - p_i) (\sigma[x - x_i] - \sigma[x - x_i^{eq}]) dS \vec{n}$$

$\mathcal{S}$  étant la surface interne du divergent. En supposant  $s_i^{eq} - s_i \simeq x_i^{eq} - x_i$  :

$$\langle \delta W \rangle \{F\} \approx \langle \delta W \rangle (p_a - p_i) \left[ \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{-\frac{dp_{\infty}}{dx} \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \begin{pmatrix} \vdots \\ n_j^x \\ n_j^y \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \frac{\partial w_n}{\partial s} \right]_j \quad (\text{G.1})$$

où  $j$  est l'indice du nœud correspondant au point de décollement. Le terme  $\partial w_n / \partial s$  représente la dérivée suivant l'abscisse curviligne du déplacement normal à la paroi en  $j$ . Ce terme a pour expression :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)_j &= \frac{(n_{j+1}^x u_{j+1} + n_{j+1}^y v_{j+1}) - (n_{j-1}^x u_{j-1} + n_{j-1}^y v_{j-1})}{2l} \\ &= \langle 000 \mid \dots \mid -n_{j-1}^x - n_{j-1}^y 0 \mid 000 \mid n_{j+1}^x n_{j+1}^y 0 \mid \dots \mid 000 \rangle \{W\} \end{aligned}$$

$l$  étant la longueur, supposée constante, d'un élément et  $(n^x, n^y)$  les composantes de la normale. Ainsi

$$\begin{aligned} [K_p] &= (p_a - p_i) \left[ \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{-\frac{dp_{\infty}}{dx} \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \right]_j \frac{1}{2l} \times \{000 \mid \dots \mid n_j^x n_j^y 0 \mid 000 \mid \dots \mid 000\} \times \\ &\quad \langle 000 \mid \dots \mid -n_{j-1}^x - n_{j-1}^y 0 \mid 000 \mid n_{j+1}^x n_{j+1}^y 0 \mid \dots \mid 000 \rangle \quad (\text{G.2}) \end{aligned}$$



## Annexe H

# Mesure des charges latérales

Les mesures d'efforts latéraux sont aujourd'hui encore difficiles. En particulier, les valeurs absolues des efforts mesurés par les capteurs doivent être exploitées avec précautions. En effet, ceux-ci sont généralement influencés par des phénomènes de vibration du montage et ne traduisent donc pas directement l'intensité des efforts aérodynamiques (dus au champ de pression) s'exerçant sur le divergent considéré. Dans cette section, nous décrivons rapidement deux méthodes permettant de déterminer les efforts aérodynamiques à partir des efforts mesurés. La première, employée à l'ONERA de Modane, consiste à corriger les efforts bruts mesurés des effets d'inertie du montage. La seconde, utilisée par exemple au LEA/CEAT de Poitiers, repose sur la connaissance de la fonction de transfert du montage <sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup> Notons aussi que Girard [55] emploie une technique utilisant les mesures de pression instantanées et les modes de déformation du jet supersonique. Cette dernière technique étant, à notre connaissance, moins répandue que les deux précédentes, elle n'est pas décrite par la suite. Le lecteur intéressé est invité à consulter la référence [55] pour plus d'informations sur cette méthode.

### H.1 Utilisation de la fonction de transfert du montage

NGuyen *et al.* [94], par exemple, utilisent cette technique au LEA/CEAT de Poitiers.

Soient  $\vec{F}_r(t)$  la force mesurée sous l'action de la force aérodynamique  $\vec{F}_a(t)$  et  $\widehat{\vec{F}}_r(f)$  et  $\widehat{\vec{F}}_a(f)$  leur transformée de Fourier respectives. Ces dernières sont liées par la relation :

$$\widehat{\vec{F}}_r(f) = H(f)\widehat{\vec{F}}_a(f) \tag{H.1}$$

où  $H(f)$  est la fonction de transfert du système de taille  $N \times N$ ,  $N$  étant le nombre de degrés de liberté du montage ( $N=2$  au LEA/CEAT).

Cette fonction est déterminée expérimentalement dans une certaine bande de fréquence (de 0 à 120 Hz, pour le banc d'essai du LEA/CEAT) en excitant le système avec un pot vibrant et en mesurant la force d'excitation avec un capteur de force très léger. L'effort aérodynamique  $\vec{F}_a(t)$  est déduit ensuite en prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (H.1).

## H.2 Méthode de correction d'inertie de l'ONERA

Cette seconde technique consiste à s'affranchir directement des effets d'inertie (d'où son nom). Nous n'en donnons ici que le principe général, les détails de cette technique pouvant être trouvés dans les références [27, 28, 91].

Cette technique de restitution de l'effort aérodynamique à partir des efforts mesurés par la balance repose sur la relation :

$$\text{Efforts aérodynamiques} = \text{Efforts mesurés} - \text{Efforts d'inertie} \quad (\text{H.2})$$

où les efforts d'inertie sont le résultat du mouvement d'ensemble du montage et de la déformation de la partie pesée.

Afin de déterminer les constantes (inertie, centre de gravité) apparaissant dans le système d'équations précédent, la maquette est excitée en l'absence de jet (efforts aérodynamiques = 0). Cette excitation des modes propres du montage est réalisée grâce à un pot vibrant dans une bande de fréquence allant classiquement de 10 à 1000  $Hz$ . Il ne reste plus alors qu'à calculer les efforts d'inertie en utilisant la relation (H.2).

## Annexe I

# Elément DKT

Cette annexe présente brièvement l'élément DKT [12] utilisé pour la partie flexion de l'élément DKT18 décrit dans le chapitre 4.

### I.1 Généralités

Les éléments de type Kirchhoff discret de plaque et de coque ont été proposés à partir de 1968 comme une alternative pour définir des éléments à faibles nombres de nœuds et de degrés de liberté sans utiliser la théorie "continue" de Kirchhoff<sup>1</sup> : ils constituent, de ce fait, un trait d'union entre les éléments de Reissner/Mindlin et ceux de la théorie "continue" de Kirchhoff.

Ces éléments possèdent les caractéristiques suivantes :

- l'énergie interne de déformation de flexion est identique à celle du modèle de Reissner/Mindlin :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \} dA ;$$

- l'énergie de cisaillement transverse CT est négligée :

$$U_c^e = 0 ;$$

- les hypothèses de Kirchhoff doivent satisfaire les relations cinématiques traduisant que les déformations de CT sont nulles. Elles peuvent être introduites selon plusieurs techniques. L'élément traité ici emploie une forme intégrale sur les côtés  $ij$  :

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = 0.$$

### I.2 Prise en compte des hypothèses de Kirchhoff

L'élément DKT (Discret Kirchhoff Triangle) a trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud :

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots : w_i \beta_{xi} \beta_{yi} : \dots i = 1, 2, 3 \rangle . \quad (\text{I.1})$$

---

1. Celle-ci exige, pour les modèles déplacements compatibles, une continuité  $C^1$  de  $w$ .

Les approximations  $C^0$  de  $\beta_x(\xi, \eta)$  et de  $\beta_y(\xi, \eta)$  sont telles que :

- la rotation  $\beta_s$  (dans le plan  $sz$  où  $s$  est la coordonnée le long des côtés) est quadratique en  $s$  ;
- la rotation  $\beta_n$  (dans le plan  $nz$ , où  $\vec{n}$  est la direction normale aux côtés dirigée vers l'extérieur de l'élément) est linéaire en  $s$  :

$$\beta_x = \langle N \rangle \{ \beta_{xn} \} + \langle P_x \rangle \{ \alpha \} \quad ; \quad \beta_y = \langle N \rangle \{ \beta_{yn} \} + \langle P_y \rangle \{ \alpha \} \quad (\text{I.2})$$

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle$$

$$\langle \beta_{xn} \rangle = \langle \beta_{x1} \ \beta_{x2} \ \beta_{x3} \rangle \quad ; \quad \langle \beta_{yn} \rangle = \langle \beta_{y1} \ \beta_{y2} \ \beta_{y3} \rangle$$

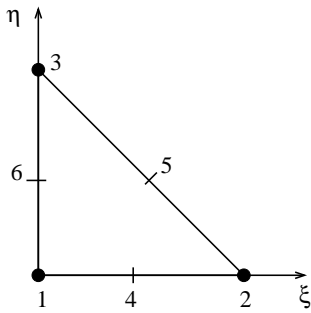
$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \rangle$$

$$\langle P_x \rangle = \langle P_4 C_4 \ P_5 C_5 \ P_6 C_6 \rangle \quad ; \quad \langle P_y \rangle = \langle P_4 S_4 \ P_5 S_5 \ P_6 S_6 \rangle$$

et

$$C_k = x_{ji}/L_k \quad ; \quad S_k = y_{ji}/L_k \quad ; \quad L_k = (x_{ji}^2 + y_{ji}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Les fonctions  $N_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) et  $P_k$  ( $k=4, 5, 6$ ) sont données dans le tableau I.1.



$N_i$ ( $i=1, 2, 3$ )	$P_k$ ( $k=4, 5, 6$ )
$N_1 = \lambda = 1 - \xi - \eta$ $N_2 = \xi$ $N_3 = \eta$	$P_4 = 4 \xi \lambda$ $P_5 = 4 \xi \eta$ $P_6 = 4 \lambda \eta$

TAB. I.1 – Fonctions  $N_i$  et  $P_k$ .

Les variables  $\alpha_k$  sont associées à la variation quadratique de  $\beta_s$  sur les côtés :

$$\beta_s = (1 - s')\beta_{si} + s'\beta_{sj} + 4s'(1 - s')\alpha_k \quad ; \quad \beta_n = (1 - s')\beta_{ni} + s'\beta_{nj} \quad (\text{I.3})$$

$$0 \leq s' = s/L_k \leq 1.$$

Les rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$ , où les directions  $s$  et  $n$  sont relatives au côté  $k$ , sont reliées à  $\beta_x$  et  $\beta_y$  par :

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{I.4})$$

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour obtenir les expressions de  $\beta_x(\xi, \eta)$  et  $\beta_y(\xi, \eta)$  en fonction des variables nodales  $\langle u_n \rangle$  (I.1) et pour obtenir la matrice de rigidité. Nous considérons la démarche utilisée dans [12] : l'hypothèse de Kirchhoff est introduite sur le contour de l'élément sous la forme suivante :

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = \int_i^j (w_{,s} + \beta_s) ds = 0.$$

En utilisant les relations (I.3) et (I.4), on obtient :

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(C_k\beta_{xi} + S_k\beta_{yi} + C_k\beta_{xj} + S_k\beta_{yj}) + \frac{2}{3}L_k\alpha_k = 0,$$

d'où l'on tire l'expression de  $\alpha_k$  en fonction des variables nodales des nœuds  $i$  et  $j$  :

$$\alpha_k = \frac{3}{2L_k}(w_i - w_j) - \frac{3}{4}(C_k\beta_{xi} + S_k\beta_{yi} + C_k\beta_{xj} + S_k\beta_{yj}) \quad k = 4, 5, 6. \quad (\text{I.5})$$

En substituant la relation (I.5) dans (I.2), on obtient les expressions explicites des rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction des neuf variables nodales  $\{u_n\}$  :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & : & N_{i1}^x & N_{i2}^x & N_{i3}^x & : & \dots & i = 1,2,3 \\ \dots & : & N_{i1}^y & N_{i2}^y & N_{i3}^y & : & \dots & i = 1,2,3 \end{bmatrix} \{u_n\} \quad (\text{I.6})$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{i1}^x &= \frac{3}{2L_k}P_kC_k - \frac{3}{2L_m}P_mC_m & N_{i2}^x &= N_i - \frac{3}{4}P_kC_k^2 - \frac{3}{4}P_mC_m^2 \\ N_{i3}^x &= \frac{3}{4}P_kC_kS_k - \frac{3}{4}P_mC_mS_m & N_{i1}^y &= \frac{3}{2L_k}P_kS_k - \frac{3}{2L_m}P_mS_m \\ N_{i2}^y &= N_{i3}^x & N_{i3}^y &= N_i - \frac{3}{4}P_kS_k^2 - \frac{3}{4}P_mS_m^2 \end{aligned}$$

$N_i$ ,  $P_k$  et  $P_m$  sont définis par le tableau I.1.

Les indices  $k$  et  $m$  sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet  $i$  comme point commun (tableau I.2).

nœud sommet $i$	côté $k$ ( $i - j$ )	côté $m$ ( $i - j$ )
1	4 (1-2)	6 (3-1)
2	5 (2-3)	4 (1-2)
3	6 (3-1)	5 (2-3)

TAB. I.2 – Indices  $i$ ,  $k$  et  $m$ .

Compte tenu des hypothèses introduites pour formuler DKT, les rotations nodales  $\beta_{xi}$  et  $\beta_{yi}$  sont celles de la théorie de Kirchhoff :

$$\beta_{xi} = -(w_{,x})_i = \theta_{yi} \quad ; \quad \beta_{yi} = -(w_{,y})_i = -\theta_{xi} \quad i = 1, 2, 3.$$





## Annexe J

# Décomposition de la matrice tangente

Cette annexe présente une décomposition plus fine de la matrice tangente que celle que nous avons employée dans le chapitre C.

Cette seconde décomposition issue de [45] fait apparaître explicitement la matrice de rigidité du cas linéaire  $[k_L]$  :

$$[k_T] = [k_L] + \underbrace{[k_{u_l}] + [k_{u_{nl}}]}_{[k_{NL}]} + \underbrace{[k_{\sigma_l}] + [k_{\sigma_{nl}}]}_{[k_{\sigma}]}$$

Les contributions des termes de membrane et de flexion peuvent être séparées comme suit :

- Membrane

$$\begin{aligned} \Delta W_{int}^m = & \underbrace{\int_{A_e} \langle e_l^* \rangle \{\Delta N_l\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_L^m] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle e_{nl}^* \rangle \{\Delta N_l\} + \langle e_l^* \rangle \{\Delta N_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{u_l}^m] \{\Delta u_n\}} + \\ & \underbrace{\int_{A_e} \langle e_{nl}^* \rangle \{\Delta N_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{u_{nl}}^m] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta e_{nl}^* \rangle \{N_l\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{\sigma_l}^m] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta e_{nl}^* \rangle \{N_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{\sigma_{nl}}^m] \{\Delta u_n\}} \end{aligned}$$

- Flexion

$$\begin{aligned} \Delta W_{int}^f = & \underbrace{\int_{A_e} \langle \chi_l^* \rangle \{\Delta M_l\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_L^f] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \chi_{nl}^* \rangle \{\Delta M_l\} + \langle \chi_l^* \rangle \{\Delta M_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{u_l}^f] \{\Delta u_n\}} + \\ & \underbrace{\int_{A_e} \langle \chi_{nl}^* \rangle \{\Delta M_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{u_{nl}}^f] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta \chi_{nl}^* \rangle \{M_l\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{\sigma_l}^f] \{\Delta u_n\}} + \underbrace{\int_{A_e} \langle \Delta \chi_{nl}^* \rangle \{M_{nl}\} dA}_{\langle u_n^* \rangle [k_{\sigma_{nl}}^f] \{\Delta u_n\}} \end{aligned}$$

Dans notre étude, ce terme se réduit à :

$$\Delta W_{int}^f = \int_{A_e} \underbrace{\langle \chi_l^* \rangle \{ \Delta M_l \}}_{\langle u_n^* \rangle [k_L^f] \{ \Delta u_n \}} dA$$

car nous avons négligé les déformations non-linéaires de flexion.

## Annexe K

# “Flutter” : résolution par différences finies

En l’absence de sollicitation dynamique, l’équation (8.18) permet d’obtenir les modes et fréquences propres naturels d’une poutre en flexion. Les solutions d’une telle équation pour une poutre bi-appuyée de longueur  $L=0.5\text{ m}$  sont, en effet, du type [54] :

$$w(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t) \quad (\text{K.1})$$

où  $\omega_n$  représente la  $n^{\text{ème}}$  pulsation propre et vaut :

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 L^4}} \quad \text{avec} \quad m_0 = \rho_s A \quad \text{et} \quad D = \frac{Ebh^3}{12} \quad (\text{K.2})$$

Afin d’évaluer le plus simplement possible l’influence des sollicitations aérodynamiques sur la réponse temporelle de la structure, l’équation (8.18) est, dans un premier temps, résolue numériquement. L’approche retenue est de type différences finies. L’état initial de la poutre correspond à une perturbation de celle-ci suivant son premier mode (*cf.* figure 8.19) :

$$w(x, 0) = 0.01 h \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

et les conditions aux limites s’écrivent :

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0$$

Le schéma adopté est explicite<sup>1</sup> et le calcul des dérivées spatiales<sup>2</sup> et temporelle est précis au second ordre. Les dérivées au point  $i$  ( $i \in [0, N_x]$ ) et à l’instant  $t^n = n \Delta t$  prennent la forme :

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_i^n = \frac{w_{i-2}^n - 4w_{i-1}^n + 6w_i^n - 4w_{i+1}^n + w_{i+2}^n}{\Delta x^4} \quad (\text{K.3})$$

1. Différences finies centrées, voir [11].

2. Y compris celles nécessaires à la résolution des conditions aux limites.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{w_{i-1}^n - 2w_i^n + w_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i^n = \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{K.4})$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_i^n = \frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{K.5})$$

Notons qu'à l'état initial ( $n=0$ ), il est nécessaire de connaître l'état ( $n=-1$ ). Celui-ci est estimé à partir de :

$$w_i^{-1} = w_i^0 + \frac{\Delta t^2}{2} a_i^0$$

où l'accélération initiale  $a_0$  se déduit de l'équation (8.18). La structure est composée de  $N_x=50$  mailles et le pas de temps  $\Delta t=10^{-6}$  s. respecte la condition de stabilité.

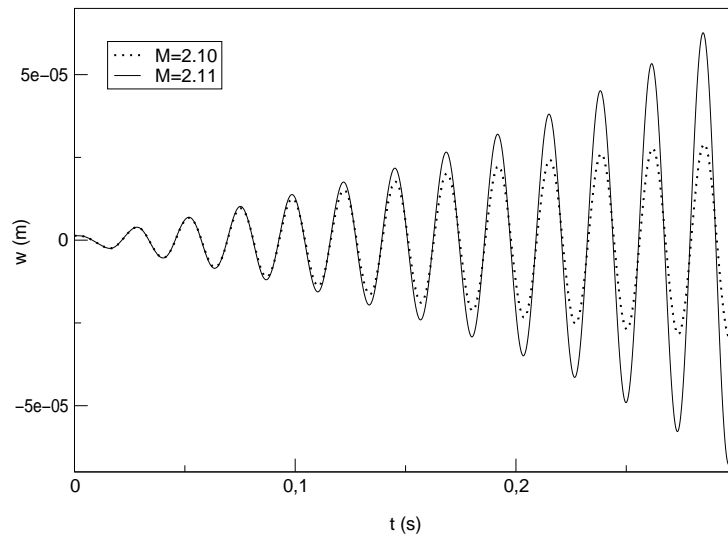


FIG. K.1 – Evolution temporelle théorique du déplacement vertical en  $x=0.25$  m. Résolution des équations (8.18) et (8.19) par un schéma de différences finies.

La figure K.1 illustre l'évolution temporelle du point situé au milieu de la poutre. Il apparaît que le signal est amorti lorsque le nombre de Mach  $M_\infty$  est de 2.10 alors qu'il diverge si celui-ci est de 2.11. La limite de stabilité se situe donc entre ces deux valeurs du nombre de Mach.

## Annexe L

# Coopération avec l'IDRIS dans le cadre du projet Eurogrid

*Cette annexe présente brièvement le déroulement ainsi que les résultats de notre collaboration avec l'équipe de Calcul Scientifique Coopératif de l'IDRIS (Denis Girou et Gilles Grasseau), dans le cadre du projet Eurogrid [65].*

En 2000, L'IDRIS cherchait à expérimenter le couplage d'applications scientifiques multi-physiques sur des plates-formes hétérogènes via le standard d'interopérabilité CORBA (Common Object Request Broker Architecture). Ce dernier est largement utilisé depuis une dizaine d'années dans tous les types d'applications dits d'entreprise, mais peu jusqu'à présent dans le domaine scientifique. Comme Denis Girou le souligne : “[notre] collaboration dans le cadre de ce projet a eu pour [eux] le gros avantage de [leur] permettre de développer et valider [leur] stratégie et [leurs] choix techniques sur une application réelle”. Elle leur a aussi “donner l'occasion de mettre au point une méthodologie générale pour le couplage de codes scientifiques existants, dans de nouvelles sphères d'utilisation de ceux-ci pour simuler des phénomènes plus complexes, multi-physiques ou multi-échelles. Plusieurs projets, dans des thématiques extrêmement diverses (astrophysique, combustion, sciences de l'environnement, électromagnétisme), ont ensuite été traités strictement sur les mêmes bases techniques”.

En résumé, le LMFN-CORIA a coopéré avec L'IDRIS en fournissant le code de couplage décrit dans le chapitre 8. Dans ce code, les échanges entre les modules fluide et structure s'effectuaient via MPI, sur les machines Cray T3e de l'IDRIS ou Origin 2000 du CRIHAN. Notre travail a consisté à assister l'IDRIS sur la problématique physique et sur les détails de l'implémentation des codes utilisés comme base du couplage.

L'IDRIS a pris en charge tout le travail d'implémentation relatif à CORBA. L'essentiel de leur travail s'est déroulé au printemps 2001 pour la partie relative au développement de l'application elle-même (définition de l'interface physique et informatique entre les codes fluide et structure, définition des échanges de données entre les deux codes, implémentation des services correspondants à ces échanges, encapsulation des codes Fortran dans des modules écrits en C++, tests et validation du couplage). Par la suite, l'IDRIS a effectué l'intégration de l'application couplée dans le logiciel UNICORE, permettant d'offrir un accès unifié à une grille de calculateurs

hétérogènes, ainsi que des tests et la validation de ce projet sur la grille HPC-Grid<sup>1</sup> du projet européen EuroGrid dont l'IDRIS est l'un des partenaires majeurs. Une démonstration de cette application, où le code structure s'exécutait sur une machine en Allemagne, le code fluide sur une machine en Angleterre et un code de visualisation interactive sur l'une de leurs machines à Orsay a été faite en décembre 2001, lors de la première session d'examen du projet Eurogrid par la commission européenne.

---

1. Voir <http://www.eurogrid.org/wp4.html>.

# Table des figures

2.1	Principaux types de tuyères conventionnelles (coniques et galbées) et non-conventionnelles (aerospike), d'après [122]. . . . .	17
2.2	Tuyère bidimensionnelle en régime sous-détendu ( $p_a/p_{e,vac}=0.66$ ). Notez la présence des faisceaux de détente à la lèvre de sortie de la tuyère (photo tirée de [81]). . . . .	18
2.3	Tuyère bidimensionnelle en régime surdétendu avec réflexion de Mach pour un rapport de pression $p_a/p_{e,vac} > 2.5$ (photo tirée de [81]). . . . .	18
2.4	Jet supersonique avec réflexion régulière et réflexion de Mach. $p_c$ désigne la pression chambre (photos tirées de [20]). . . . .	19
2.5	Moteur Vulcain au banc d'essai (Photos Snecma). . . . .	20
2.6	Décollement effectif lors d'un amorçage rapide - tuyère Amann [4]. . . . .	20
2.7	Représentation schématique de la réflexion régulière, de la réflexion de Mach et du choc en chapeau. I: choc incident, IS: choc de focalisation, IR: choc réfléchi, J: jet, SL: ligne de glissement, TP point triple, D: point de décollement, V: tourbillon. . . . .	21
2.8	Représentation schématique du décollement libre, d'après Frey et Hagemann [51]. On remarquera que le choc de décollement peut se réfléchir de façon régulière, singulière ou induire une structure de choc en chapeau en présence d'un choc interne (cf. figure 2.7.c). Les indices $i$ , $s$ et $p$ font référence, respectivement, au point de séparation naissante, au point de séparation effective et au plateau. . . . .	22
2.9	Représentation schématique du décollement restreint, d'après Frey et Hagemann [51]. Les indices $i$ , $s$ , $p$ et $r$ font référence, respectivement, au point de séparation naissante, au point de séparation effective, au plateau et au point de recollement. . . . .	23
2.10	Tuyère bidimensionnelle décollée (Photos issues de [85]). . . . .	24
2.11	Apparition des "teepees" lors de l'amorçage des moteurs SSME (Photo NASA). . . . .	29
2.12	Evolution du niveau des charges latérales en fonction du rapport de pression $p_c/p_a$ , pour les maquettes du moteur J-2S (tiré de [93]). . . . .	30
2.13	Effets de la prise en compte des effets d'inertie sur le niveau des efforts latéraux pour les maquettes du moteur J-2S (tiré de [112]). . . . .	30
2.14	Spectre des signaux bruts mesurés sur les maquettes du moteur J-2S, obtenus pour un rapport de pression $p_c/p_a = 68$ (tiré de [112]). . . . .	30
2.15	Essais réalisés par DASA sur le moteur Vulcain: mesures (non corrigées) des charges latérales en fonction de l'évolution de la pression chambre (tiré de [123]). . . . .	31
2.16	Représentation schématique de deux bulles de recirculation successives. . . . .	32
2.17	Comparaison des moments (corrigés) induits par les charges latérales sur une tuyère idéale TIC et une tuyère parabolique TOP, durant l'amorçage [61]. . . . .	33
2.18	Tuyère souple en flambage sur sept lobes. Expérience de Tuovila et Land [127]. . . . .	34



2.19	Tuyère souple exploitée au LEA avant et après explosion (photos tirées de [87]). . . . .	35
2.20	Représentation schématique d'une ligne de décollement asymétrique. . . . .	37
2.21	Variation du niveau quadratique moyen des fluctuations de l'effort latéral dans le moteur RD-0120 en fonction de la pression chambre. . . . .	38
2.22	Jet libre et écoulement asymétrique dans un divergent lors de la transition FSS-RSS. Figures tirées de [52]. . . . .	39
3.1	Modélisation du profil de pression pariétale à l'équilibre et évolution au cours du temps. . . . .	46
3.2	Instabilités statique et dynamique. . . . .	50
4.1	Configurations de référence et actuelle : vecteurs position. . . . .	57
4.2	Cinématique d'une coque. . . . .	62
4.3	Construction de l'élément DKT18. . . . .	67
5.1	Cylindre pincé supporté par deux diaphragmes (effort $P=1 N$ , longueur $L=6 m$ et rayon $R=3 m$ ). . . . .	75
5.2	Déplacements adimensionnés vertical du point C (à gauche) et longitudinal du point D (à droite) en fonction du nombre d'éléments : convergence vers les résultats théoriques [82] indiqués par la droite en trait plein ( $\overline{W}_C = -EhW_C/P = 164.24$ et $\overline{V}_D = EhV_D/P = 4.114$ ) et comparaison avec les résultats de [13] (notés "Réf." sur les figures). . . . .	76
5.3	Maillage de l'anneau plat (rayons interne $R_1=0.4 m$ et externe $R_2=0.9 m$ ). . . . .	77
5.4	Modes propres de l'anneau plat encastéré. . . . .	78
5.5	Mode d'ovalisation et mode trilobe. . . . .	79
5.6	Mode quadrilobe et mode de flexion. . . . .	79
6.1	Volume d'intégration et vecteurs surface. . . . .	85
6.2	Hierarchie des schémas numériques [128]. . . . .	86
7.1	Tube à choc : état initial. . . . .	97
7.2	Tube à choc : après rupture du diaphragme. . . . .	98
7.3	Tube à choc (problème de Sod) : solution à $t = 0.4 s$ . . . . .	98
7.4	Etat initial, iso-valeurs de masse volumique. . . . .	99
7.5	Evolution temporelle d'un tourbillon 2D convecté diagonalement en fonction du schéma numérique employé et du maillage. . . . .	101
8.1	Principe du couplage fluide-structure (application aux moteurs fusée). . . . .	104
8.2	Transformation géométrique $J$ . . . . .	105
8.3	Volumes $\delta\mathcal{V}_k^{n-1}$ et $\delta\mathcal{V}_k^n$ balayés par une surface orientée $S_k \mathbf{n}$ d'une cellule de contrôle mobile entre les instants $(t^{n-1}, t^n)$ et $(t^n, t^{n+1})$ respectivement. . . . .	108
8.4	Définition des vitesses du maillage. . . . .	111
8.5	Maillage à l'instant initial. . . . .	112
8.6	Maillage à l'instant final. . . . .	113
8.7	Champs de masse volumique à l'instant $t_f$ pour un CFL de 1 (Max=1.0048, Min=0.9894) lorsque les expressions (8.13) et (8.14) sont utilisées. . . . .	114

8.8	Respect et non-respect de la GCL. Comparaison des “volumes balayés” (en hachuré sur la figure) par une surface entre $t$ et $t + \Delta t$ en fonction de l’expression utilisée pour le calcul de la vitesse normale de cette surface. A gauche: calcul des vitesses du maillage à partir de la relation (8.12), à droite: calcul des vitesses du maillage à partir des équations (8.13) et (8.14). . . . .	114
8.9	Non-respect de la GCL: influence du pas de temps (à gauche: CFL=1, représentation à $t + \Delta t$ ; à droite: CFL=0.5, représentation à $t + 0.5\Delta t$ et $t + \Delta t$ ). . . . .	115
8.10	Génération d’une onde de choc instationnaire. . . . .	116
8.11	Diagramme x-t correspondant à la compression du gaz. . . . .	117
8.12	Profils adimensionnés de pression à l’instant adimensionné $t^* = ta_1/L_0 = 0.529$ . . . . .	118
8.13	Projectile fixe ( $V_p = 0 m.s^{-1}$ ) soumis à un écoulement supersonique ( $M_1 = 3.0$ ): iso-contours de pression obtenues à l’aide du schéma WENO et définition des notations utilisées. $X^* = X/h$ et $Y^* = Y/h$ (où $h$ est la demi-hauteur du canal, prise unitaire). . . . .	119
8.14	Projectile lancé à $V_p = 260 m.s^{-1}$ dans un écoulement supersonique à un nombre de Mach $M_1$ de 2.25. Iso-contours de masse volumique aux instants $t^* = ta_1/h = 0.69$ , $t^* = 3.47$ et $t^* = 6.25$ (schéma TVD). . . . .	121
8.15	Principe de l’algorithme CSS [103]. . . . .	123
8.16	Principe de l’algorithme CSS généralisé [103]. . . . .	123
8.17	Configuration étudiée. . . . .	125
8.18	Evolution théorique des deux premières fréquences propres de la structure en fonction du nombre de Mach $M_\infty$ . Résolution des équations (8.18) et (8.19) par analyse modale. . . . .	127
8.19	Premier mode propre naturel de la structure. . . . .	128
8.20	Couplage a priori, test du code structure. Schématisation des étapes 3 à 6. . . . .	128
8.21	Evolution temporelle du déplacement vertical en $x = 0.25 m$ . Couplage a priori. On notera que les déplacements obtenus vérifient bien l’hypothèse des petits déplacements. . . . .	129
8.22	Couplage des codes fluide et structure. Schématisation des étapes 6 à 9. . . . .	130
8.23	Champ de pression au cours de la simulation du flutter ( $M_\infty = 2.19$ ). . . . .	131
8.24	Modes propres 1 et 2 à la coalescence. Les modes propres naturels 1 et 2 sont représentés pour comparaison. . . . .	132
8.25	Evolution temporelle du déplacement vertical en $x = 0.25 m$ . . . . .	133
9.1	Configuration étudiée: $L/h_{col} \simeq 9.3$ , $\epsilon = A_s/A_{col} \simeq 8.5$ et $\alpha \simeq 22^\circ$ . . . . .	138
9.2	Modes propres naturels (le cas 3 possède des modes propres équivalents au cas 2). . . . .	139
9.3	Position du choc en fonction du rapport de pression et profils de pression pariétale associés pour les rapports $p_c/p_a = 2.0, 3.0, 4.0$ et $5.0$ . Théorie 1D, la pression ambiante $p_a$ est supposée constante, seule la pression chambre $p_c$ varie. . . . .	140
9.4	Evolution de la première fréquence propre aéroélastique (Re: partie réelle) en fonction de la position du choc. Cas 1. . . . .	141
9.5	Evolution du rapport $(\Omega_1/\omega_1)^2/ \Omega_1/\omega_1 $ en fonction de la position du choc (cas 1). . . . .	141
9.6	Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport $(\Omega/\omega)^2/ \Omega/\omega $ b). Cas 2 . . . . .	143
9.7	Evolution de $\partial(X_n^k)^2/\partial s$ en fonction de $x_{choc}$ pour les modes 1 ( $k = 1$ ) et 2 ( $k = 2$ ). . . . .	143

9.8	Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 3). . . . .	144
9.9	Position du choc en fonction de la pression chambre (a) et coefficient d'influence aéroélastique en fonction du demi-angle (b). . . . .	145
9.10	Influence du demi-angle du divergent sur l'évolution des fréquences propres aéroélastiques. . . . .	146
9.11	Evolution de la position du décollement en fonction du rapport de pression (calcul numérique) (a) et coefficient d'influence aéroélastique $A$ (b). . . . .	146
9.12	Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 1). Cas eulérien vs cas turbulent pour le modèle étendu. . . . .	147
9.13	Evolution des fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc (Cas 2). Cas eulérien vs cas turbulent pour le modèle étendu. . . . .	147
9.14	Evolution des fréquences propres en fonction de la position du choc (Cas 3). Comparaison des cas eulérien et turbulent pour le modèle étendu. . . . .	148
9.15	Configuration étudiée numériquement. $CL_1$ : entrée caractéristique, $CL_2, CL_3$ : paroi adiabatique (condition de glissement en euler ou condition de non-glissement en visqueux), $CL_4$ : condition correspondant à une entrée lointaine à faible vitesse (équation (9.1)), $CL_5$ : sortie caractéristique, $CL_6$ : axe de symétrie et CLs: encastrement de la structure. . . . .	149
9.16	Champ de Mach pour un rapport de pression $p_c/p_a=4.0$ ( $min=0.0, max=3.25$ ) a) et évolution de la position du choc en fonction du rapport de pression $p_c/p_a$ b). 150	
9.17	Déplacement vertical adimensionné $W/h$ du point de la structure situé en $x/L=0.66$ pour un rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ a) et transformée de Fourier associée b). Cas 2, calcul eulérien, schéma TVD d'ordre 2. . . . .	151
9.18	Signaux de pression pariétale $\Delta p$ enregistrés durant l'état stationnaire (absence de mouvement de la paroi), en un point situé au niveau de la paroi en aval ( $x/L=0.82$ ) du choc, pour un rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ a) et transformée de Fourier associée b). Calcul eulérien, schéma TVD d'ordre 2. . . . .	153
9.19	Comparaison des résultats numériques et des modèles (calculs eulériens): évolution des fréquences aéroélastiques en fonction du rapport de pression $p_c/p_a$ pour le cas 2. . . . .	153
9.20	Déplacement vertical adimensionné $W/h$ de plusieurs points de la structure pour un rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ a) et transformée de Fourier associée b). Cas 3. Calcul eulérien. Schéma TVD d'ordre 2. . . . .	154
9.21	Comparaison des résultats numériques et des modèles (calculs eulériens): évolution des fréquences aéroélastiques en fonction du rapport de pression $p_c/p_a$ pour le cas 3. . . . .	155
9.22	Déplacement vertical adimensionné $W/h$ du point de la structure situé en $x/L=0.66$ pour un rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ a) et transformée de Fourier associée b). Cas 2, schéma TVD d'ordre 1. . . . .	156
9.23	Déplacement vertical adimensionné $W/h$ de plusieurs points de la structure pour un rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ a) et transformée de Fourier associée b). Cas 3, schéma TVD d'ordre 1. . . . .	156
9.24	Evolution du déplacement vertical adimensionné $W/h$ en différents points pour la forme complète (trait plein) et incomplète (symbole o) de l'effort $\vec{f}_a$ . Rapport de pression $p_c/p_a=5.0$ , calcul eulérien (cas 3). . . . .	157

9.25	Variation de pression $\Delta p(x)/p_c$ engendrée par une perturbation de la paroi suivant les modes 1 et 2 ainsi qu'après une augmentation d'un degré du demi-angle du divergent. Comparaison entre les résultats d'un calcul numérique eulérien et ceux issus de la théorie des petites perturbations TPP ( $p_c/p_a = 10$ ). . . . .	158
9.26	Evaluation numérique du coefficient $\mathcal{B}(x) = \Delta p(x)/(p_c \partial w(x)/\partial s)$ pour une perturbation suivant les modes 1, 2 et pour une augmentation d'un degré du demi-angle du divergent. Comparaison avec la théorie des petites perturbations pour laquelle $\mathcal{B}(x)$ est donné par la relation (9.2). Figure complète (a) et agrandissement (b). . . . .	159
9.27	Champ de Mach ( $p_c/p_a = 6.0$ , Min=0, Max=2.67) a) et bulle recirculation b). Calcul turbulent. . . . .	160
9.28	Strioscopies numériques de l'écoulement turbulent pour différents rapports de pression. . . . .	161
9.29	Evolution du point de décollement. Comparaison des calculs turbulents avec les critères. . . . .	162
9.30	Profils de pression pariétale. Calcul turbulent. . . . .	163
9.31	Signaux temporels de pression $\Delta p$ enregistrés en un point situé juste en amont ( $x/L=0.46$ ) du point de décollement en l'absence de mouvement de la paroi a) et transformée de Fourier associée b). Rapport de pression $p_c/p_a = 6$ . Calcul turbulent. . . . .	163
9.32	Signaux temporels de pression $\Delta p$ enregistrés en un point situé juste en aval ( $x/L=0.53$ ) du point de décollement en l'absence de mouvement de la paroi a) et transformée de Fourier associée b). Rapport de pression $p_c/p_a = 6$ . Calcul turbulent. . . . .	164
9.33	Evolution du déplacement vertical en $x/L=0.66$ a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression $p_c/p_a = 6$ . Cas 2, calcul turbulent. . . . .	164
9.34	Evolution du déplacement vertical en différents points a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression $p_c/p_a = 4$ . Cas 3, calcul turbulent. . . . .	165
9.35	Evolution du déplacement vertical en différents points a) et transformée de Fourier b) pour un rapport de pression $p_c/p_a = 6$ . Cas 3, calcul turbulent. . . . .	166
9.36	Evolution du déplacement vertical en différents points pour un rapport de pression $p_c/p_a = 8$ . Cas 3, calcul turbulent. . . . .	167
9.37	Tuyère LEA souple (version 1) au banc d'essai. Photo tirée de [87]. . . . .	168
9.38	Maillage de la tuyère LEA souple. . . . .	169
9.39	Modes propres naturels 1 à 6 obtenus pour le cas LEA1. Vues de profil et de dessus. . . . .	172
9.40	Modes propres naturels 1 à 6 obtenus pour le cas LEA3. Vues de profil et de dessus. . . . .	173
9.41	Evolution de la position du décollement en fonction du rapport de pression. Données expérimentales [55]. . . . .	174
9.42	Evolution des six premières fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport $(\Omega/\omega)^2/ \Omega/\omega $ b). Cas LEA1. . . . .	175
9.43	Evolution des six premières fréquences propres aéroélastiques en fonction de la position du choc a) et évolution du rapport $(\Omega/\omega)^2/ \Omega/\omega $ b). Cas LEA2. . . . .	176
9.44	Evolution des sept premières fréquences aéroélastiques en fonction de la position du choc. Cas LEA3. . . . .	176
9.45	Evolution temporelle d'un point quelconque du divergent pour un choc situé en $x/L=0.27$ et en $x/L=0.70$ . Calcul pas à pas. Cas LEA3. . . . .	177

B.1	Sketch of the studied configurations. Nozzle length $L = 120\text{ mm}$ , half nozzle angle $\alpha = 15^\circ$ , throat height $h_c = 6.15\text{ mm}$ , shock tunnel height $h_1 = 104.5\text{ mm}$ , inlet radius $R = 10\text{ mm}$ (referred to as “Case 1” in the following) or $R = 0\text{ mm}$ (Case 2), Mach number of the incident shock wave $M_{sh} = 3$ . . . . .	199
B.2	Schlieren pictures of the flow field during start-up at $t^* \simeq 5.05$ (Case 1) with RS: Reflected Shock (not visible), IS: Internal Shock, $SL_R$ : Slip Line associated with the Reflected shock, CD: Contact Discontinuity, PS: Primary Shock, SS: Secondary Shock. . . . .	201
B.3	Density contours: a) $t^* \simeq -8.32e - 2$ , b) $t^* \simeq 0.59$ and c) $t^* \simeq 1.70$ (Case 1). Half plane shown. TP: Triple Point, MS: Mach Stem (see also Fig. B.2 for notations). . . . .	202
B.4	Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up: a) $t^* \simeq 2.86e - 2$ , b) $t^* \simeq 0.14$ and c) $t^* \simeq 0.36$ (Case 1). V: Vortex, EF: Expansion Fan (see also Fig. B.2 for notations). . . . .	202
B.5	Schlieren pictures of the flow field during the early stages of start-up: a) $t^* \simeq 0.70$ and b) $t^* \simeq 1.14$ (Case 1). CW: Compression Waves (see also Fig. B.2 for notations). . . . .	203
B.6	Schlieren picture of the flow field during start-up at $t^* \simeq 6.13$ (Case 2). See Fig. B.2 for notations. . . . .	204
B.7	$(x^* - t^*)$ diagram of shock locations on the axis a) case 1, b) case 2. . . . .	204
C.1	Configurations initiale $\mathcal{C}_0$ , du pas $p \mathcal{C}_p$ et à l’itération $i \mathcal{C}_i$ . . . . .	210
D.1	Plaque chargée verticalement au centre ( $a = 10\text{ m}$ ). . . . .	223
D.2	Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage ( $2 \times 2$ ). . . . .	224
D.3	Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage ( $4 \times 4$ ). . . . .	225
D.4	Panneau cylindrique articulé (rayon $R = 2540\text{ mm}$ , longueur $L = 254\text{ mm}$ , angle $\phi = 0.1\text{ rad}$ ). . . . .	226
D.5	Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage ( $4 \times 6$ ). . . . .	226
D.6	Déplacement vertical adimensionné du point B. Maillage ( $4 \times 6$ ). . . . .	227
D.7	Déplacement vertical adimensionné du point A. Maillage ( $8 \times 8$ ). . . . .	227
D.8	Déplacement vertical adimensionné du point B. Maillage ( $8 \times 8$ ). . . . .	228
D.9	Déplacement adimensionné du point A. Maillage ( $4 \times 6$ ). . . . .	229
D.10	Déplacement adimensionné du point B. Maillage ( $4 \times 6$ ). . . . .	229
D.11	Déplacement adimensionné du point A. Maillage ( $8 \times 8$ ). . . . .	230
D.12	Déplacement adimensionné du point B. Maillage ( $8 \times 8$ ). . . . .	230
E.1	Poutre en “L” soumise à un moment fléchissant. . . . .	231
E.2	Configurations successives de la poutre en L. . . . .	232
E.3	Courbe charge-déplacements de l’extrémité libre de la poutre. . . . .	232
E.4	Enroulement d’une plaque: configurations successives au cours du chargement. Élément $Q4_\gamma$ non-linéaire, maillage ( $40 \times 1$ ). . . . .	233
E.5	Configuration initiale: vue 3D (à gauche) et vue de dessous avec représentation du chargement (à droite). . . . .	234
E.6	Configurations successives lors de l’augmentation du chargement (de gauche à droite), vues de dessous. . . . .	234
F.1	Modes propres naturels 7 à 12 du cas LEA1. Vues latérales et de dessus. . . . .	236
F.2	Modes propres naturels 13 à 18 du cas LEA1. Vues latérales et de dessus. . . . .	237

---

F.3	Modes propres naturels 7 à 12 du cas LEA3. Vues latérales et de dessus. . . . .	238
F.4	Modes propres naturels 13 à 18 du cas LEA3. Vues latérales et de dessus. . . . .	239
K.1	Evolution temporelle théorique du déplacement vertical en $x=0.25\text{ m}$ . Résolution des équations (8.18) et (8.19) par un schéma de différences finies. . . . .	252



# Liste des tableaux

2.1	Quelques critères de décollement. Voir [107] pour plus de détails concernant les spécifications de ces critères. . . . .	26
2.2	Conditions de fonctionnement des moteurs étudiés [8]. . . . .	28
2.3	Caractéristiques géométriques des moteurs étudiés [8]. . . . .	28
3.1	Principe du couplage. Remarquons qu'à l'étape 3, la perturbation a été supposée symétrique, ce qui justifie que la réponse de la structure supposée bidimensionnelle plane ait été représentée, elle aussi, symétrique. . . . .	44
5.1	Fréquences propres (en Hz) de l'anneau plat encastré. . . . .	78
5.2	Fréquences propres (en Hz) de la tuyère aluminium LEA (cas LEA1). Mode 1 : ovalisation, Mode 2 : trilobe, Mode 3 : quadrilobe, Mode 4 : flexion. . . . .	79
6.1	Constantes, termes sources et fonctions d'amortissement du modèle de turbulence $k - \varepsilon$ bas-Reynolds. . . . .	84
7.1	Erreurs et taux de convergence pour la masse volumique (tourbillon stationnaire) après cinq périodes. . . . .	100
8.1	Vitesses des lignes du maillage. . . . .	112
8.2	Positions des points à l'instant initial. . . . .	112
8.3	Evolution spatiale théorique des grandeurs physiques caractéristiques. . . . .	118
8.4	Evolution spatiale des grandeurs physiques caractéristiques. Etats (2) et (3), valeurs théoriques. . . . .	119
9.1	Conditions aux limites et propriétés du matériau en fonction du cas considéré. $E$ module d'Young, $h$ épaisseur, $\rho_s$ masse volumique (le coefficient de Poisson, $\nu$ , est nul pour les trois cas). . . . .	138
9.2	Fréquences propres naturelles (en Hz) obtenues pour les trois cas étudiés. . . . .	139
9.3	Données géométriques de la LEA souple. $L$ : longueur à partir du col, $h_{col}$ : hauteur du col, $D_{sortie}$ : diamètre de l'extrémité et $\alpha_{sortie}$ : demi-angle de sortie. . . . .	168
9.4	Conditions aux limites et propriétés du matériau ( $\nu = 0.32$ ) des cas LEA. . . . .	169
9.5	Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA1 en fonction du maillage. Mode 1 : bilobe (ovalisation), mode 2 : trilobe, mode 3 : quadrilobe, mode 4 : mode de flexion, mode 5 : pentalobe, mode 6 : hexalobe. . . . .	171



---

9.6	Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA2 en fonction du maillage. Mode 1 : quadrilobe, mode 2 : pentalobe, mode 3 : trilobe, mode 4 : hexalobe, mode 5 : heptalobe, mode 6 : bilobe. . . . .	171
9.7	Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA3 en fonction du maillage. Fréquences propres naturelles obtenues pour le cas LEA2 en fonction du maillage. Mode 1 : quadrilobe, mode 2 : pentalobe, mode 3 : trilobe, mode 4 : hexalobe, mode 5 : heptalobe, mode 6 : bilobe. . . . .	171
I.1	Fonctions $N_i$ et $P_k$ . . . . .	246
I.2	Indices $i$ , $k$ et $m$ . . . . .	247

# Bibliographie

- [1] Arianespace flight 157: The inquiry board submits its findings. PRESS RELEASE, Tuesday, January 07, 2003, disponible sur le site <http://www.spaceref.com/>.
- [2] Arianespace to continue with launches of the baseline Ariane 5. PRESS RELEASE, Tuesday, January 07, 2003, disponible sur le site <http://www.spaceref.com/>.
- [3] J.H. Ahlberg, S. Hamilton, S. Migdal, and E.N. Nilson. Truncated perfect nozzles in optimum nozzle design. *ARS Journal*, pages 614–620, May 1961.
- [4] H.O. Amann. Experimental study of the starting process in a reflection nozzle. *Phys. Fluids Supplement*, 12:150–153, 1967.
- [5] S. Ammar. *Méthode asymptotique perturbée pour la résolution de problèmes non linéaires en grandes rotations et grands déplacements*. PhD thesis, Université Laval, Québec, 1996.
- [6] R. Arina. Shock induced oscillations in a nozzle with flexible walls. In *Proc. of ECCOMAS conference*, 2000.
- [7] H. Ashley and G. Zartarian. Piston theory - A new aerodynamic tool for the aeroelastician. *J. of Aeronautical Sciences*, 23(12):1109–1118, December 1956.
- [8] F. Le Bail, M. Popp, and C. Weiland. Engineering aspects of side-load prediction. Technical report, Deutsche Aerospace, October 1994.
- [9] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [10] J.T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28:1381–1388, 1990.
- [11] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 1 : solides élastiques*. Hermes, 1990.
- [12] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2 : poutres et plaques*. Hermes, 1990.
- [13] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 3 : coques*. Hermes, 1990.
- [14] G. Ben-Dor, M. Ivanov, E.I. Vasilev, and T. Elperin. Hysteresis processes in the regular reflection  $\leftrightarrow$  Mach reflection transition in steady flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 38:347–387, 2002.
- [15] F.J. Blom. *Investigation on computational fluide-structure interaction*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Lausanne, 1998.
- [16] F.J. Blom. Considerations on the spring analogy. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 32:647–668, 2000.
- [17] F.J. Blom and P. Leyland. Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ALE method. In *Proc. of the 4th International Symposium on Fluid-Structure Interaction, Aeroelasticity, Flow-Induced Vibrations and Noise*, 1997.

- [18] F.J. Blom and P. Leyland. Consistency of fluid-structure interaction algorithms. In *Proc. of ECCOMAS 98 conference*, 1998.
- [19] A. Bourgoing. Instationnarité et dissymétrie d'un écoulement supersonique dans une tuyère plane. Technical Report NT 2002-3, Onera, 2002.
- [20] E. Carafoli. *High speed aerodynamics*. Editura tehnica, Bucharest, 1956.
- [21] R. Carpentier. Etude des couplages aéro-acoustique et fluide-structure dans les propulseurs à propergols solides. *La modélisation numérique en aérothermochimie pour la propulsion spatiale*. CNES, 2000.
- [22] P. Carrière, M. Sirieix, and J.L. Solignac. Propriétés de similitude des phénomènes de décollement laminaire ou turbulent en écoulement supersonique non uniforme. In *12ème congrès international de mécanique appliquée*, 1968.
- [23] J.R. Cebal and R. Lohner. Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35(4):687–692, 1997.
- [24] D. Chapman, D. Kuehn, and H. Larson. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effects of transition. Technical note TN 3869, NASA, 1957.
- [25] C. Chen, S. Chakravarty, and C. Hung. Numerical investigation of separated nozzle flows. *AIAA Journal*, 32(9), 1994.
- [26] A. Chpoun, D. Passerel, H. Li, and G. Ben-dor. Reconsideration of oblique shock wave reflections in steady flows. part, 1. experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 301:19–35, 1995.
- [27] F. Garçon and J.P. Drevet. Unsteady load measurements on the main engine nozzle of the Ariane 5 launch vehicle. In *Proc. of the 3rd European Symposium on Aerothermodynamics of Space Vehicles, ESA-ESTEC*, 1998.
- [28] F. Garçon and D. Munier. Mesure des charges latérales dynamiques sur tuyères avec jet à S4B Modane. Compte rendu de réunion du groupe ATAC, ONERA, 18 juin 2002.
- [29] F. Dammak. *Formulation isoparamétrique généralisée en analyse linéaire et non linéaire des coques par éléments finis*. PhD thesis, Université Laval, Québec, 1996.
- [30] F. Davoudzadeh, H. McDonald, and B.E. Thompson. Accuracy evaluation of unsteady CFD numerical schemes by vortex preservation. *Comput. Fluids*, 24:883, 1995.
- [31] T. Alziary de Roquefort. Unsteadiness and side-loads in over-expanded supersonic nozzles. In *Proc. of the 4th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles*, 2001.
- [32] S. Deck. *Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur des configurations de lanceur*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2002.
- [33] I. Demirdzic and M. Peric. Space Conservation Law in finite volume calculations of fluid flow. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 8:1037–1050, 1988.
- [34] I. Demirdzic and M. Peric. Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 10:771–790, 1990.
- [35] G. Dhatt and M. Fafard. Mécanique non linéaire. Technical report, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris, Septembre 1995.
- [36] G. Dhatt and E. Lefrançois. Dynamique des structures minces linéaires et non linéaires. Technical report, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris, Octobre 1999.

- [37] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A., Paris, 1984.
- [38] D.S. Dolling. Fluctuating loads in shock-waves/turbulent boundary layer interaction: tutorial and update. *AIAA Paper 93-0284*, 1993.
- [39] J. Donea, S. Guillini, and J.P. Halleux. An Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element method for transient fluid-structure interactions. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 33:689–723, 1982.
- [40] E.H. Dowell. *Aeroelasticity of Plates and Shells*. Kluwer Academic Publishers, 1974.
- [41] S. Dubos. *Modèles instationnaires pour l'étude des phénomènes de buffeting. Application aux tuyères de propulseurs*. PhD thesis, INSA de Rouen, en préparation.
- [42] G.E. Dumnov. Unsteady side-loads acting on the nozzle with developed separation zone. *AIAA Paper 96-3220*, 1996.
- [43] G. Emanuel. *Gasdynamics: Theory and Applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1986.
- [44] M. Fafard. Algorithmes et stratégies de résolution pour l'analyse non linéaire. Technical report, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris, Octobre 1999.
- [45] M. Fafard. Flambement linéaire et non linéaire. Technical report, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris,, Octobre 1999.
- [46] C. Farhat. High performance simulation of coupled nonlinear transient aeroelastic problems. In *Ecole d'été Porquerolles, France*, 1996.
- [47] C. Farhat, M. Lesoinne, and N. Maman. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: Three field formulation, geometric conservation and distributed solution. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 21:807–835, 1995.
- [48] C. Farhat and T.Y. Lin. Transient aeroelastic computations using multiple moving frames of references. *AIAA Paper 90-3053-CP*, 1990.
- [49] F.F. Felker. Direct solution of two dimensional Navier-Stokes equations for static aeroelasticity problems. *AIAA Journal*, 31(1):148–153, 1993.
- [50] FLUENT. FLUENT and ABAQUS to deliver coupled fluid-structure analysis capability, december 2003. Disponible sur le site <http://www.cfd-online.com/Forum/news.cgi>.
- [51] M. Frey and G. Hagemann. Status of flow separation prediction in rocket nozzles. *AIAA Paper 98-3619*, 1998.
- [52] M. Frey and G. Hagemann. Flow separation ans side-loads in rocket nozzles. *AIAA Paper 99-2815*, 1999.
- [53] Y.C. Fung. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Wiley and Son, New York, 1958.
- [54] M. Geradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Masson, 1995.
- [55] S. Girard. *Etude des charges latérales dans une tuyère supersonique surdétendue*. PhD thesis, Université de Poitiers, France, 1999.
- [56] L. Green. Flow separation in rocket nozzles. *ARS journal*, 23(1):34–35, January February 1953.
- [57] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the Geometric Conservation Law for flow computations on moving meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:1467–1482, 2000.

- [58] G.P. Guruswamy. Unsteady aerodynamic and aeroelastic calculations for wings using euler equations. *AIAA Journal*, 28:461–469, 1990.
- [59] A. Hadjadj. *Analyse physique et simulation numérique des écoulements compressibles applications aux tuyères de propulseur*. PhD thesis, Université de Rouen, 1997.
- [60] G. Hagemann. Scalability discussion for rocket nozzle flows based on subscale and full-scale testing. In *Proc. of the 4th European Symposium on Aerothermodynamics of Space Vehicles, ESA-ESTEC*, 2001.
- [61] G. Hagemann, M. Frey, and W. Koschel. Appearance of restricted shock separation in rocket nozzles. *J. of Propulsion and Power*, 18(3):577–584, 2002.
- [62] G. Hagemann, M. Terhardt, M. Frey, P. Reijasse, M. Onofri, F. Nasuti, and J. Ostlund. Flow separation and side-loads in rocket nozzles. In *Proc. of the 4th International Symposium on Liquid Space Propulsion*, 2000.
- [63] F. Hammadi. *Formulation et évaluation d'éléments finis à continuité  $C^0$  de la géométrie pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques*. PhD thesis, Université de Compiègne, France, 1998.
- [64] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarty. Uniform high order essentially non oscillatory schemes iii. *J. Comput. Phys.*, 71:231–301, 1987.
- [65] IDRIS. La lettre de l'IDRIS, Septembre 2002. Disponible sur le site <http://www.idris.fr/>.
- [66] IDRIS. Supports de cours, 2002. Disponibles sur le site <http://www.idris.fr/>.
- [67] G. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 126:202–228, 1996.
- [68] W.P. Jones and B.E. Launder. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:1119–1130, 1973.
- [69] S. Kalt and D. Bendal. Conical rocket nozzles performance under flow separated conditions. *J. of spacecraft and rockets*, 2(3), May 1965.
- [70] A. Kudryavtsev and A. Hadjadj. Visualisation graphique en mécanique des fluides numérique. In *Proc. of Fluvisu 2001 conference*, 2001.
- [71] E. De Langre, P. Hemon, and B. Peseux. Introduction aux interactions fluide-structure. Technical report, Cours IPSI, Paris -23-24 mai, 2000.
- [72] S. Lantéri. *Simulation d'écoulements aérodynamiques instationnaires sur une architecture S.I.M.D massivement parallèle*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1991.
- [73] R.A. Lawrence. Symmetrical and unsymmetrical separation in supersonic nozzles. research report 67-1, Southern Methodist University, 1967.
- [74] R.A. Lawrence and E.E. Weynand. Factors affecting flow separation in contoured supersonic nozzles. *AIAA*, 6(6), 1968.
- [75] E. Lefrançois. *Modèle numérique de couplage fluide-structure pour l'étude des phénomènes aéroélastiques avec applications aux moteurs fusée*. PhD thesis, Université de Rouen, 1998.
- [76] E. Lefrançois. Etude numérique du décollement de jet et du phénomène de charges latérales au sein des moteurs fusée avec prise en compte de l'aéroélasticité. Rapport de post-doctorat, CORIA/CNES, 2000.
- [77] E. Lefrançois. Numerical validation of a stability model for a flexible overexpanded rocket nozzle. In *Proc. of the 50th annual general meeting and conference of Canadian Aeronautics and Space Institute (CASI) - 9th Aerodynamics Symposium -*, 2003.

- [78] E. Lefrançois, G. Dhatt, and D. Vandromme. Numerical study of aeroelastic stability of an overexpanded rocket nozzle. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9(6-7), 2000.
- [79] D. Lemosse. *Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2000.
- [80] M. Lesoinne and C. Farhat. Higher-order subiteration-free staggered algorithms for non-linear transient aeroelastic problems. *AIAA Journal*, 36(9):1754–1757, 1998.
- [81] H.W. Liepmann and A. Roshko. *Elements of gasdynamics*. John Wiley and sons, 1957.
- [82] G.M. Lindberg, M.D. Olson, and G.R. Cowper. New developments in the finite element analysis of shells. *Q. Bull. Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada*, 4, 1969.
- [83] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 115:200–212, 1994.
- [84] R.W. MacCormack. Current status of numerical solutions of the Navier Stokes equations. *AIAA Paper 85-0032*, 1985.
- [85] T.D. McKenney. Flow separation in overexpanded supersonic nozzles. *ARS Journal*, page 320, Sept/Oct 1954.
- [86] P. Moin. Advances in large eddy simulation methodology for complex flows. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 23:710–720, 2002.
- [87] N. Moreaux. Essais sur la tuyère souple ATAC au LEA de Poitiers. Technical Report RT 77/00144 DAFE/DDSS, ONERA, Février 2002.
- [88] A.-S. Mouronval. Modèles éléments finis de coque pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique en vue de l'application au couplage fluide-structure. Rapport d'avancement de thèse, CORIA-INSA de Rouen, Juillet 2000.
- [89] A.-S. Mouronval, A. Hadjadj, and E. Lefrançois. Une méthodologie générale pour l'étude numérique du couplage fluide-structure par une approche multicode. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 12(5):519–554, 2003.
- [90] A.-S. Mouronval, A. Hadjadj, A. Kudryavtsev, and D. Vandromme. Numerical investigation of transient nozzle flow. *Int. Journal of Shock Waves*, 12(5):403–411, 2003.
- [91] D. Munier, F. Garçon, P. Champigny, S. Deck, and R. Hallard. Side loads measurements on subscale launcher nozzles. In *Proc. of the 4th International Conference on Launcher Technology "Space Launcher Liquid Propulsion"*, 2002.
- [92] F. Nasuti and M. Onofri. Viscous and inviscid vortex generation during start-up of rocket nozzles. *AIAA Journal*, 36(5), 1998.
- [93] L.H. Nave and G.A. Coffey. Sea-level side-loads in high area ratio rocket engine. *AIAA Paper 73-1284*, 1973.
- [94] A.T. NGuyen, S. Girard, and T. Alziary de Roquefort. Etude de l'écoulement dans une tuyère à contour parabolique en régime surdétendu. Rapport final, CEAT, Juillet 2001.
- [95] R.A. O'Leary and J.E. Bech. Nozzle design, 1992. Disponible sur le site <http://www.engineeringatboeing.com/articles/nozzledesign.jsp>.
- [96] J. Ostlund. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads. Technical Report 09, Royal Institute of Technology, Sweden, May 2002.
- [97] J. Ostlund and M. Bigert. A subscale investigation on side-loads in sea level rocket nozzle. *AIAA Paper 99-2759*, 1999.

- [98] L.O. Pekkari. Aeroelastic stability of supersonic nozzles with separated flow. *AIAA Paper 93-2588*, 1993.
- [99] L.O. Pekkari. Aeroelastic analysis of side-loads in supersonic nozzles with separated flow. *AIAA Paper 94-3377*, 1994.
- [100] C. Pilinski. *Etude numérique du décollement en tuyères supersoniques*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2002.
- [101] S. Piperno. Numerical methods used in aeroelasticity simulations. Rapport de recherche CERMICS-92-5, INRIA, 1992.
- [102] S. Piperno. *Simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1995.
- [103] S. Piperno and C. Farhat. Energy based design and analysis of staggered solvers for nonlinear transient aeroelastic problems. *AIAA Paper 2000-1447*, 2000.
- [104] G.V.R. Rao. Exhaust nozzle contours for optimum thrust. *Jet Propulsion*, pages 377–382, June 1958.
- [105] G.V.R. Rao. Approximation of optimum thrust nozzle contours. *ARS Journal*, page 561, June 1960.
- [106] P. Reijasse, P. James, and P. Vuillermoz. Dimensionnement des tuyères de moteurs-fusées : objectifs et contraintes. In *Proc. of Symp. International AAAF - Véhicules et systèmes de rentrée atmosphérique*, 2001.
- [107] P. Reijasse and O. Sarrazin. Modèle de décollement libre dans une tuyère surdétendue. Technical Report RT 48/4361 DAFE/N, ONERA, September 1999.
- [108] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [109] W.M. Rohsenow, J.P. Hartnett, and E.N. Ganic. *Handbook of heat transfer fundamentals*. McGraw-Hill, 1985.
- [110] E. Schall, R. Lardat, A. Dervieux, B. Koobus, and C. Farhat. Aeroelastic coupling between a thin divergent and high pressure jets. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9(6-7):835–851, Octobre 2000.
- [111] M.T. Schilling. *Flow separation in rocket nozzles*. PhD thesis, University of Buffalo, 1962.
- [112] R.H. Schmucker. Flow processes in overexpanded chemical rocket nozzles part 2 : side-loads due to asymmetric separation. Report 77396, NASA, 1984.
- [113] R.H. Schmucker. Flow processes in overexpanded chemical rocket nozzles part I: Flow separation. Report 77396, NASA, 1984.
- [114] R. Schwane, H. Wong, D. Perigo, and Y. Xia. Unsteady turbulent flow predictions for separated flow in over-expanded rocket nozzles. *AIAA Paper 2003-4761*, 2003.
- [115] SERAM-CNES. Etude du comportement dynamique du divergent du moteur VULCAIN. Technical Report Dossier 60737, Laboratoire de Mécanique des Structures secteur ENSAM, Université Paris VI, 1996.
- [116] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of Essentially Non-Oscillatory shock capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77:439–471, 1988.
- [117] G. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 27:1–31, 1978.
- [118] E. Solakoglu. *Modélisation des écoulements compressibles turbulents, interaction onde de choc/couche limite turbulente*. PhD thesis, Université de Rouen, 1994.

- 
- [119] J.L. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with applications to finite difference methods. *J. Comput. Phys.*, 40(2):263–293, 1981.
- [120] M. Summerfield, C. Foster, and W. Swan. Flow separation in overexpanded supersonic exhaust nozzles. *Jet Propulsion*, 24, September-October 1954.
- [121] K.S. Surana. Geometrically nonlinear formulations for curved shell elements. *IJNME*, 19:581–615, 1983.
- [122] G. Sutton and O. Biblarzd. *Rocket propulsion elements*. Wiley and sons, 1992.
- [123] M. Terhardt. Vulcain flow separation and side-load analysis. In *Proc. of the European Seminar on Rocket Nozzles*, 1998.
- [124] M. Terhardt, G. Hagemann, and M. Frey. Flow separation and side-load behaviour of the Vulcain engine. *AIAA Paper 99-2762*, 1999.
- [125] P.D. Thomas and C.K. Lombard. Geometric Conservation Law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*, 17:1030–1037, 1979.
- [126] J.G. Trulio and K.R. Trigger. Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations in a arbitrary time-dependent coordinate system. Report UCLR-6522, University of California, Lawrence Radiation Laboratory, 1961.
- [127] W.J. Tuovila and N.S. Land. Experimental study of aeroelastic instability of overexpanded rocket nozzle extensions. Technical Report TN D-4471, NASA, April 1968.
- [128] H.C. Yee. A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods. *VKI Lecture Series, 1989-04*, 1989.
- [129] H.C. Yee, N.D. Sandham, and M.J. Djemohri. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters. *J. Comp. Phys.*, 150:199–238, 1999.
- [130] H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trépanier, and R. Camarero. Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes. *Computers and Fluids*, 22(1):9–23, 1993.
- [131] C.L. Zheng. *Formulation et évaluation d'une famille d'éléments finis incompatibles de membranes, plaques et coques de type Kirchhoff discret*. PhD thesis, Université de Compiègne, France, 2000.





## **Résumé :**

Cette thèse est consacrée à l'étude des phénomènes aéroélastiques dans les tuyères de propulseurs. Elle s'inscrit dans le cadre des activités du groupe de recherche Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps (ATAC). Un des principaux objectifs de ce travail est de démontrer que les phénomènes aéroélastiques peuvent être nuisibles pour les moteurs fusée (présence de modes instables) au même titre que les charges latérales qu'ils peuvent amplifier. Dans cet objectif, deux modèles permettant de prédire la stabilité aéroélastique de divergents flexibles en présence un choc de décollement sont détaillés. Par ailleurs, un outil numérique, reposant sur un couplage faible des codes fluide et structure dont dispose le LMFN-CORIA, est développé pour étudier ce type de problème. Cet outil performant est ensuite validé sur le cas-test classique du "flutter". Une application et une analyse approfondie des modèles de stabilité aéroélastique sont réalisées. Les modèles sont employés pour étudier la stabilité d'un divergent bidimensionnel plan soumis à un choc de décollement. L'influence de plusieurs paramètres sur la stabilité de la structure est évaluée. Les résultats obtenus sont ensuite confrontés aux résultats de simulations numériques couplées. En dernier lieu, les modèles sont utilisés pour étudier la stabilité de la tuyère LEA souple sur laquelle l'ONERA effectue des mesures expérimentales. Enfin, des travaux complémentaires sur l'amorçage rapide d'une tuyère supersonique sont présentés en annexes.

**Mots-clés :** Aéroélasticité, couplage faible, tuyère, décollement, instabilités statiques et dynamiques, amorçage, volumes finis, éléments finis.

## **Numerical study of aeroelastic phenomena in supersonic flows. Application to rocket nozzles.**

### **Abstract:**

This thesis is concerned with the study of aeroelastic phenomena in rocket nozzles. A part of this work has been performed within the frame of the french working group ATAC. One of its main aims is to highlight how hazardous these phenomena can be for the structure of the nozzle. Indeed, some structural eigenmodes may become statically or dynamically (flutter) instable because of the coupling between wall deformations and the induced pressure variations in the nozzle. Two models dedicated to aeroelastic stability of over-expanded nozzles are exposed in details. Moreover, a new code (based on a fluid/structure partitioned procedure) is developed so that such phenomena might be numerically investigated. This code is validated by simulating the well-known test of the supersonic panel flutter. The aeroelastic behaviour of a two-dimensional over-expanded nozzle is investigated thanks to the two stability models. Several parameters are shown to play a major role on the stability of the flexible divergent. Comparisons are made with numerical results. Finally, the stability models are applied to the flexible nozzle that ONERA studied experimentally. Lastly, investigations of the starting process of a supersonic nozzle are exposed.

**Keywords:** Aeroelasticity, weak coupling, nozzle, separation, instabilities, start-up process, finite volumes, finite elements.