



**HAL**  
open science

# CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ELASTOMERES ET DES MEMBRANES SOUFFLEES

Gilles Marckmann

► **To cite this version:**

Gilles Marckmann. CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ELASTOMERES ET DES MEMBRANES SOUFFLEES. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français. NNT: . tel-00011650

**HAL Id: tel-00011650**

**<https://theses.hal.science/tel-00011650v1>**

Submitted on 20 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes

Université de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2004

N° B.U. :

**Thèse de Doctorat**

**Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes**

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Gilles MARCKMANN

le 7 juin 2004

à l'Ecole Centrale de Nantes

**Titre**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ELASTOMERES ET DES MEMBRANES  
SOUFFLEES**

**Jury**

Président :	BETTESS Peter	Professor of Civil Engineering, University of Durham
Rapporteurs :	BATOZ Jean-Louis	Professeur, Institut Supérieur d'Ingénieur de la Conception, Saint-Dié des Vosges
	BESSION Jacques	Chargé de Recherche, Ecole des Mines de PARIS, Evry
Examineurs :	GRANDIDIER Jean-Claude	Professeur, Laboratoire de Modélisation Mécanique et de Mathématiques
	LE HOUEDDEC Donatien	Professeur, Ecole Centrale de Nantes
	PESEUX Bernard	Professeur, Ecole Centrale de Nantes

---

Directeur de thèse : Bernard PESEUX

Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, Ecole Centrale de Nantes - BP 92101 - 44321 Nantes  
Cedex 03

Co-encadrant :

Laboratoire :

N° ED 0367-127



## REMERCIEMENTS

---

Ce mémoire présente une partie des travaux de Recherche que j'ai réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique et Matériaux sur une période d'environ cinq ans alors que j'exerçais la fonction d'Ingénieur de Recherche.

Les travaux qu'il renferme furent l'occasion de collaborations enrichissantes avec un certain nombre de mes collègues, et ce document n'aurait sans doute jamais vu le jour sans leurs encouragements et leur soutien permanent. Je tiens donc à remercier chacun d'entre eux.

Tout d'abord, je remercie mon directeur de Laboratoire Donatien Le Houedec et mon directeur de thèse Bernard Peseux pour m'avoir accordé du temps à la préparation de ma thèse.

Je remercie également tous ceux qui ont participé à ces travaux de façon direct ou indirect, pour leur aide ou leurs conseils constructifs lors de l'élaboration de ce mémoire ; Laurent Gornet, Eric Bechet, Tanguy Messenger, Pierre Charrier, Grégory Chagnon, et surtout Erwan Verron qui a largement contribué aux travaux qui sont présentés dans ce document.

Enfin, je remercie ceux qui ont été présent au moment où j'en avais besoin ; Patrice, Jean-Benoît, Jean-Pierre, Brigitte, ...



# Table des Matières

---

---

<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre I Les élastomères et les polymères en général</b>	<b>15</b>
I.1 Introduction	15
I.2 Un peu d'histoire	15
I.2.1 L'âge des métaux	15
I.2.2 Les peuples du caoutchouc	16
I.2.3 Le temps des expéditions	17
I.2.4 L'ère industrielle	18
I.2.5 Le pneumatique	19
I.2.6 Les nouveaux matériaux	20
I.2.7 L'après-guerre	21
I.3 La physique des élastomères	22
I.3.1 La chimie des élastomères	22
I.3.1.1 La structure moléculaire	22
I.3.1.2 La cristallinité et la transition vitreuse	23
I.3.1.3 Les charges	24
I.3.2 Les phénomènes physiques	25
I.3.2.1 L'effet Mullins	25
I.3.2.2 L'élasticité non-linéaire	26
I.3.2.3 La viscoélasticité	27
I.3.2.4 L'amplification des déformations	28
I.3.2.5 L'effet Payne	29
I.3.3 La statistique des réseaux de chaînes	29
I.3.3.1 La chaîne idéale	29
I.3.3.2 Les effets du volume exclusif	30
I.3.3.3 La limite d'extensibilité	30
I.4 Conclusion	32

<b>Chapitre II</b>	<b>Algorithmes d'identification</b>	<b>33</b>
II.1	Introduction	33
II.1.1	Problématique	33
II.1.2	Compromis	33
II.1.3	Méthodes retenues	34
II.2	Les algorithmes mathématiques classiques	34
II.2.1	La méthode du gradient	35
II.2.2	La méthode de relaxation	35
II.2.3	La méthode de Newton	35
II.2.4	La méthode du gradient conjugué	36
II.2.5	La méthode des moindres carrés	36
II.2.6	Méthode de Levenberg-Marquardt	38
II.3	Les algorithmes génétiques	39
II.3.1	Principes des AG	40
II.3.2	Phénotype et génotype	40
II.3.3	Exploitation versus exploration	42
II.3.3.1	Diversité et convergence	42
II.3.3.2	La sélection	42
II.3.3.3	Le croisement	43
II.3.3.4	La mutation	45
II.3.3.5	Le remplacement	46
II.3.4	Mise en œuvre d'un AG	46
II.3.4.1	La forme canonique et les variantes	46
II.3.4.2	La convergence	47
II.3.4.3	Les nombres aléatoires	47
II.3.4.4	Le choix du codage	48
II.4	L'identification par une approche Orientée Objet	50
II.4.1	Motivation	50
II.4.2	Description de la Programmation Orientée Objet (POO)	50
II.4.2.1	Qu'est ce qu'un objet ?	50
II.4.2.2	Les grands principes de la POO	51
II.4.2.3	Les avantages et les inconvénients de la POO	52
II.4.3	Exemples de l'application	53
II.4.3.1	Les AG	53
II.4.3.2	L'identification	59
II.5	Application aux modèles hyperélastiques	64
II.5.1	Objectif	64
II.5.2	Méthodologie	64
II.5.2.1	Essais de référence	64

II.5.2.2	Stratégie d'identification	66
II.5.3	Comparaison des modèles hyperélastiques	69
II.5.3.1	L'identification	69
II.5.3.2	Bilan	69
II.6	Conclusion et perspectives	70
<b>Chapitre III</b>	<b>Construction de nouveaux modèles</b>	<b>73</b>
III.1	Introduction	73
III.2	Equivalence de modèles	74
III.2.1	Présentation	74
III.2.2	Comparaison des modèles	74
III.2.2.1	Formulation des modèles	74
III.2.2.2	Identification des modèles	76
III.2.2.3	Comparaison des modèles	76
III.2.2.4	Validation de l'équivalence	81
III.2.3	Conclusion sur l'équivalence	81
III.3	Modélisation de l'effet Mullins	82
III.3.1	Présentation	82
III.3.2	Théorie d'altération de réseau	83
III.3.2.1	Interprétations physiques de l'effet Mullins dans la littérature	83
III.3.2.2	Théorie proposée	84
III.3.2.3	Construction du nouveau modèle	85
III.3.2.4	Comparaison avec l'expérience	86
III.3.3	Intérêt et impact du modèle	87
III.4	Conclusion	87
<b>Chapitre IV</b>	<b>Application aux membranes soufflées</b>	<b>89</b>
IV.1	Problématique	89
IV.2	L'étude des membranes	89
IV.2.1	Equations générales	90
IV.2.2	Discussion sur les différentes méthodes de résolution	92
IV.2.3	La méthode du tir	92
IV.2.4	La méthode des éléments finis	93
IV.3	Modélisation des membranes par B-splines	94
IV.3.1	Présentation	94
IV.3.2	L'élément B-spline	94
IV.3.2.1	Définition	94
IV.3.2.2	Interpolation d'une courbe dans un espace de dimension deux	96
IV.3.3	Equations d'équilibre et procédure de résolution	100



IV.3.3.1	Mise en équations	100
IV.3.3.2	Procédures de résolution numérique	101
IV.3.4	Validation de l'approche	103
IV.3.4.1	Le tube cylindrique infini	103
IV.3.4.2	La membrane sphérique	104
IV.3.4.3	Le tube cylindrique encastré (ligaturé)	105
IV.3.5	Contribution de l'article	107
IV.4	Utilisation des modèles de chaînes	110
IV.4.1	Description des modèles de comportement	110
IV.4.1.1	Le modèle gaussien de Treloar	110
IV.4.1.2	Les modèles statistiques non-gaussiens	111
IV.4.1.3	Identification des modèles	111
IV.4.2	Résultats numériques	112
IV.4.2.1	Le ballon sphérique	112
IV.4.2.2	La membrane plane circulaire	113
IV.4.3	Contribution de l'étude	119
IV.5	Conclusion	120
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>121</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>125</b>
Références bibliographiques		125
<b>Annexe A</b>	<b>Etude des modèles hyperélastiques</b>	<b>141</b>
A. 1	Objectifs de l'étude	141
A. 2	Rappels de Mécanique des Milieux Continus	141
A. 2.1	La transformation et le tenseur gradient de la transformation	142
A. 2.2	Les tenseurs de dilatations	142
A. 2.3	Les tenseurs de déformations	142
A. 2.4	Les invariants	142
A. 2.5	La cinématique des matériaux incompressibles	143
A. 2.6	Les tenseurs de contrainte	144
A. 2.7	Les lois de comportement hyperélastiques	145
A. 2.7.1	Généralités	145
A. 2.7.2	L'incompressibilité	145
A. 2.7.3	Les matériaux hyperélastiques	146
A. 3	Les données expérimentales	147
A. 3.1	Les essais classiques	147
A. 3.1.1	L'extension simple	147
A. 3.1.2	La compression uniaxiale	148



A. 5 Conclusion sur les modèles de comportement . . . . . 192





## Introduction générale

---

Les élastomères, appelés communément caoutchoucs, sont des matériaux largement utilisés dans l'industrie automobile tant pour leur comportement antivibratoire (supports moteur, silent-blocs) que pour leur souplesse et leur adhérence (pneumatiques). La conception de pièces utilisant des élastomères se faisait encore il y a quelques années suivant des critères de raideur mécanique que l'ingénieur pouvait estimer par des modèles de comportement mécanique relativement simple intégrés à un logiciel éléments finis standard. Dans le cas de l'automobile, la tenue dans le temps de ces pièces était validée en laboratoire par des essais cycliques sur des prototypes. Ces essais étaient souvent longs et ne pouvaient se faire qu'après une phase de fabrication d'un prototype souvent coûteux. La réduction des délais et des coûts de conception des véhicules imposée par les grands constructeurs à leurs sous-traitants a engendré un changement dans les méthodes de conception des sous-ensembles, entraînant une diminution des temps d'essais et une réduction du prix de revient des pièces, associées à des cahiers des charges de plus en plus sévères. Dans un tel contexte économique, il s'avère nécessaire d'améliorer les outils de prédiction et d'aide à la décision employés par les concepteurs de telles pièces, et en particulier dans le domaine des matériaux élastomères dont le comportement complexe reste encore très mal connu. Le but de ce mémoire est de présenter les travaux entrepris au Laboratoire de Mécanique et Matériaux de l'Ecole Centrale de Nantes afin d'améliorer la simulation du comportement mécanique des élastomères. Cette présentation est décomposée en quatre chapitres relativement indépendants et quatre annexe.

Le premier chapitre donnera un aperçu sommaire de l'histoire de ces matériaux, suivi d'une description de leurs particularités physiques. Nous nous intéresserons dans la suite du mémoire à deux phénomènes de nature mécanique : l'élasticité non-linéaire et l'effet Mullins. Une étude sur les différents modèles hyperélastiques de la bibliographie présentée en annexe nous a permis d'observer une similitude entre différents modèles. Cette similitude sera étudiée plus particulièrement sur deux modèles, l'un phénoménologique (le modèle de Hart-Smith [HS 66]), l'autre fondé sur la physique statistique (modèle de chaînes d'Arruda et Boyce [ARR 93]), afin de montrer les relations possibles permettant de passer de l'un à l'autre. Ceci constituera la première partie du chapitre III. Nous nous intéresserons alors au phénomène mécanique particulier que constitue l'adoucissement cyclique (*stress-softening* en anglais) connu sous le nom d'effet Mullins [MUL 48]. Ce phénomène a été peu étudié jusqu'à présent, et peu de modèles capables de reproduire ce phénomène existent. Ainsi, la seconde partie du chapitre III présentera

la construction d'un modèle original reproduisant ce phénomène et s'appuyant sur des considérations physiques d'altération de réseau de chaînes moléculaires.

Nous aborderons dans le chapitre **II** les développements informatiques particuliers que nous avons mis en place pour identifier les paramètres des lois de comportement. Ce chapitre rappellera rapidement les méthodes usuelles employées pour résoudre ce type de problème, puis présentera la méthode des Algorithmes Génétiques constituant une voie récente en matière d'identification de paramètres matériels. L'ensemble de ces algorithmes est intégré à un outil spécifique développé en Programmation Orientée Objet. Nous donnerons alors une description de la méthodologie employée pour élaborer l'application informatique finale. Ensuite, cet outil sera utilisé pour établir un classement des modèles hyperélastiques selon leur aptitude à reproduire les essais de Treloar [TRE 44] et de Kawabata [KAW 81]. Une description détaillée de ces modèles et les résultats de l'identification de leurs coefficients matériels sont par ailleurs fournis en annexe de ce mémoire.

Enfin, l'utilisation de certains modèles de comportement sera illustrée par la simulation de structures en élastomères au travers du cas particulier de soufflage de membranes. Ce type de procédé utilisé classiquement pour caractériser les élastomères en extension équibiaxiale [TRE 44] peut être étendu pour étudier leur comportement biaxial en général, par l'intermédiaire d'une méthode d'identification inverse. Dans cette optique, un élément fini utilisant une interpolation de type B-spline a été développé et sera présenté dans le chapitre **IV**. Puis les simulations de soufflage de membranes proprement dites seront exposées. Leur originalité est d'utiliser des lois de comportement fondées sur la statistique de réseau de chaînes, encore peu utilisées en ingénierie. De plus, ces simulations mettront en évidence des phénomènes structurels liés au comportement du matériau, indiquant qu'un tel procédé est sensible à la loi de comportement et peut être envisagé pour l'identification de modèles.

# Chapitre I

## Les élastomères et les polymères en général

---

### I.1 Introduction

Contrairement aux métaux, les élastomères, et en particulier le caoutchouc naturel, sont apparus tardivement en Europe. Pour mieux en comprendre les raisons, nous commencerons ce chapitre par un bref résumé des étapes ayant marqué l'histoire de ces matériaux. Cette première partie permettra ainsi de comprendre pourquoi ces matériaux sont encore assez peu connus et n'ont été étudiés que depuis moins d'un demi-siècle par les mécaniciens.

Les difficultés rencontrées par les mécaniciens sont liées à la complexité des phénomènes chimiques et physiques mis en jeu. Un aperçu de l'état des connaissances actuelles sera donc exposé dans la seconde partie de ce chapitre. Nous présenterons alors des notions de chimie relatives aux élastomères et plus généralement aux polymères, dont les élastomères font partie. Ceci sera suivi d'une description des phénomènes physiques observés par les mécaniciens.

### I.2 Un peu d'histoire

#### I.2.1 L'âge des métaux

Afin de faire un parallèle avec l'histoire des élastomères, rappelons brièvement les périodes historiques où les métaux sont apparus.

La métallurgie fut connue d'abord au Proche-Orient où elle apparaît dès le IV<sup>ème</sup> millénaire avant notre ère. En Europe occidentale, elle apparaîtra près d'un millénaire plus tard, et il lui faudra 400 à 500 ans pour se diffuser dans toute la France [LIC 85]. Elle concerne dans un premier temps le cuivre et l'or qui sont réservés aux ornements et objets de prestige dans une époque appelée Chalcolithique (littéralement : âge du cuivre). On continue toujours à utiliser les roches dures pour la fabrication d'une grande partie de l'outillage quotidien dans la continuité du Néolithique.

L'âge de bronze, qui s'étend du III<sup>ème</sup> millénaire à 500 av. J.C., est l'une des grandes époques de notre passé européen, une période de mutations et d'innovations correspondant à la diffusion des langues indo-européennes. La métallurgie du bronze se répand dans toute l'Europe,



en partie grâce à l'abondance du minerai de cuivre, notamment en Autriche, en Espagne, en Grande-Bretagne et en Irlande), entraînant des progrès techniques qui vont rendre les sociétés entièrement dépendantes du métal. En 1000 ans, 50000 tonnes de cuivre brut sont extraites des seules mines autrichiennes.

Vers 700 av. J.C., les civilisations de l'Age du Bronze vont s'effacer devant de nouvelles ethnies maîtrisant la métallurgie du fer, connue depuis le II<sup>ème</sup> millénaire avant notre ère par les Hittites d'Asie Mineure. L'Age du Fer est divisé en deux périodes : le Premier Age du Fer (de 750 à 450 av. J.C.) et le second Age du Fer (de 475 av. J.C. à la conquête romaine). Le fer s'impose petit à petit grâce à sa plus grande résistance comparée aux métaux utilisés précédemment. La métallurgie du fer est cependant très difficile car elle nécessite une température de près de 1500°C, ce qui limitera son utilisation dans la fabrication des armes (épées et pointes de flèche). Puis, il s'imposera progressivement dans l'agriculture (socs, houes, pioches).

### I.2.2 Les peuples du caoutchouc

Contrairement aux métaux, la découverte et l'utilisation du caoutchouc commencent en Amérique du sud et en Amérique centrale avec les civilisations précolombiennes.

L'histoire du Mexique commence avec les premiers habitants du nouveau monde qui passèrent par le détroit de Bering, une trentaine de milliers d'années avant notre ère [REI 93]. Mais les premières civilisations qui abandonnent le nomadisme pour se sédentariser et commencer la culture du maïs n'apparaissent que vers l'an 3000 av. J.C. ; ce sont les Olmèques dont le nom signifie « hommes du caoutchouc » et les Zapotèques qui possèdent l'écriture, l'astronomie et les mathématiques.

A la période appelée classique qui atteint son apogée entre 300 et 600 après J.C., d'autres civilisations apparaissent, comme les Mayas dans le sud du Mexique. Notons que ces datations sont approximatives car les différentes méthodes utilisées (calendriers, carbone 14 et stratigraphie) fournissent des informations parfois très différentes [TOY 77]. C'est l'époque du développement de l'astronomie, des mathématiques, de l'écriture, de la sculpture, de l'architecture, de la céramique et des arts.

Pendant la période post-classique apparaissent les Toltèques et encore plus tard les Aztèques à Mexico. Les Aztèques considèrent le caoutchouc comme un matériau mythique et sacré ; il est alors omniprésent dans la religion. Ils reconnaissent en lui le « sang du monde », le donnant en sacrifice à leur Dieu afin que celui-ci continue à leur dispenser sa chaleur et sa lumière. Ils l'utilisent pour préparer certains plats, guérir la toux ou préserver les nouveau-nés du froid. Mais le caoutchouc est surtout utilisé pour la confection de balles, utilisées dans un jeu semblable au tennis actuel (figure I.1).

Lorsque les conquistadors entrèrent dans Mexico en 1519, ils découvrirent le Tlachtli. Ce jeu, pratiqué alors par les Aztèques mais puisant ses racines dans l'histoire et la religion maya, mettait en scène plusieurs athlètes qui devaient faire rebondir une balle de caoutchouc sur des murs de pierre (figure I.1). Les joueurs pariaient terres, esclaves et autres biens. le Tlachtli servait à



Figure I.1 : Aztèques jouant au jeu de balle ([www.ifoca.com/general/lecaout.htm](http://www.ifoca.com/general/lecaout.htm))

prédire l'avenir et à prendre des décisions importantes, ou encore à régler des conflits politiques et territoriaux. Le caoutchouc fascine les conquistadors qui l'utilisent pour imperméabiliser vêtements et bottes, comme le faisait bien avant eux le peuple des Maïnas qui l'appelait « caa o-chu » ou « cahuchu », ce qui signifie « bois qui pleure » car le latex provient de l'arbre hévéa après incision de son écorce ([www.infoscienc.fr](http://www.infoscienc.fr)).

### I.2.3 Le temps des expéditions

En 1735, le Roi de France Louis XV engage d'importantes sommes d'argent dans une expédition scientifique dans les Andes sous la direction de Louis Godin (1704-1760) pour vérifier la théorie de Newton (*Principia Mathematica*), qui prétend que la terre est aplatie aux pôles. En France, la majorité des membres de l'Académie Royale des Sciences rejette cette théorie qui implique que les planètes évoluent dans le vide et sont soumises à des forces « gravitationnelles » qui agissent à distance. Ils préfèrent penser que la Terre ressemble à un citron, thèse confirmée depuis 1700 par les relevés géodésiques de Cassini.

Pour trancher la question, il convient de mesurer la longueur d'un degré de méridien à l'équateur [GRE 01]. Charles-Marie de La Condamine (1701-1774), savant illustre, et l'astronome Pierre Bouguer font partie de l'expédition. Sur dix membres de l'expédition, six survivent aux épreuves et aux conditions épouvantables dans lesquelles ils doivent travailler. En février 1743, Bouguer quitte précipitamment le continent américain. La Condamine préfère descendre le cours de l'Amazone et profiter de son séjour en Amérique du Sud pour en établir la cartographie et étudier deux plantes de ces régions, l'hévéa et le quinquina. La Condamine en profite pour se faire fabriquer des objets en caoutchouc par les indiens (bouteilles, seringues,...). En 1747, à son retour à Cayenne, il rédige un rapport de mission décrivant l'arbre, la saignée, la fabrication d'objets et envisage les possibilités futures du caoutchouc.

Le latex, récolté au Brésil et envoyé par bateau en Europe, s'avère peu stable et coagulant à l'air. Il ne peut tolérer les temps de trajet de l'époque et arrive sous forme solide dans nos contrées. Sous cette forme de produit « sec », le caoutchouc se révèle peu exploitable. En 1768, on découvre que le caoutchouc sec peut se dissoudre dans l'éther et retrouver ainsi son état liquide.

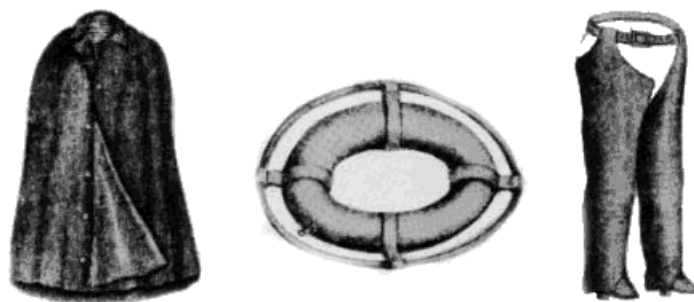


Figure I.2 : Premières utilisations du caoutchouc naturel (www.ifoca.com)

En 1791, le premier brevet relatif au caoutchouc est déposé. Il décrit une méthode qui permet de rendre imperméable les vêtements de cuir, de coton et de laine (figure I.2). Suivra la fabrication d'élastiques, de bretelles et de jarretières. Ces produits présentent cependant deux inconvénients majeurs, ils durcissent par temps froid et collent en été.

#### I.2.4 L'ère industrielle

Entre 1818 et 1839, c'est la fièvre du caoutchouc. De nombreuses entreprises se créent, notamment en 1830, Edouard Daubree, cousin de l'aïeul d'Edouard Michelin, installe pour sa femme un atelier de confection de balles pour enfants. C'est l'origine de la manufacture Michelin (www.michelin.com).

En 1839, Goodyear révolutionne le caoutchouc en mettant au point ce qui deviendra le procédé de vulcanisation (par allusion à Vulcain). Il découvre que le soufre (provenant des volcans) permet de fixer l'élasticité du matériau à chaud, tout en supprimant son adhésivité et sa rigidification par le froid. En 1843, Hancock, qui travaille chez Goodyear, constate qu'en immergeant une lamelle de caoutchouc dans du soufre à 110°C pendant 1h30, celui-ci conserve sa souplesse. Si l'immersion dure plus longtemps, il obtient du caoutchouc durci. Avec la découverte de la vulcanisation, la fabrication de pièces en caoutchouc s'accroît brusquement (bouchons, vêtements, sacs étanches, mobilier en ébonite, chaussures, ...)

En 1845, Thomson dépose un brevet décrivant la fabrication d'un pneumatique pour les voitures hippomobiles ; mais ce pneu n'aura pas de succès. En 1861 a lieu la première tentative de plantation d'hévéa à Java, colonie hollandaise. Devant l'expansion de l'industrie caoutchoutière et la pénurie de matière, les anglais, et surtout Sir Henry Wickham, essaient, entre 1870 et 1876, de créer des plantations d'hévéa dans leurs colonies d'Extrême-Orient (figure I.3). Pour cela, ils feront transporter des graines et des pousses d'arbre du Brésil vers Ceylan, Singapour, Java, la Malaisie ...

En Mars 1880, le premier hévéa d'Extrême-Orient fleurit. Le prix du kilo de caoutchouc à Paris est alors de 25 francs alors que le salaire horaire moyen est de 0,50 francs. Ce prix élevé incite à planter et à saigner tout ce qui peut produire du latex. En 1884, les arbres plantés en Malaisie commencent à produire du latex.



Figure I.3 : Prélèvement de latex sur un Hévéa (www.ifoca.com)

### I.2.5 Le pneumatique

En 1888, John Boyd Dunlop, vétérinaire écossais et bricoleur génial, fabrique lui-même ses gants en caoutchouc dont il se sert pour opérer. Voyant son fils peiner sur les routes irlandaises avec son tricycle, il décide de reprendre l'idée de Thomson et de fixer, à l'aide d'un ciment, un boyau caoutchouté gonflé à l'air sur les roues du vélo. En 1889, pour sa publicité Dunlop équipe les vélos des coureurs cyclistes de pneus de sa fabrication.



Figure I.4 : Charles Terront sur son vélo équipé de pneumatique (www.ifoca.com)

En 1891, un cycliste vient de crever et se présente aux établissements Michelin, déjà réputés pour la fabrication de leurs pièces en caoutchouc. Edouard Michelin est alors fasciné par ce pneu et imagine ce que pourrait être le pneumatique s'il était facilement réparable. Un mois après, il dépose un brevet décrivant le principe d'un pneu démontable. Charles Terront, dont le vélo est équipé de pneumatiques Michelin (figure I.4), court la course Paris-Brest-Paris et gagne. L'invention est alors plébiscitée et un an après 10 000 cyclistes roulent sur des pneus Michelin.

En 1895, l'automobile vient de naître. Un de ses inconvénients est l'utilisation de bandages pleins qui n'amortissent pas les chocs et endommagent fortement la mécanique. Michelin décide d'appliquer son concept de pneu démontable à l'automobile et construit sa propre machine, « L'éclair ». Elle participe à la course Paris-Bordeaux-Paris et termine dans les délais impartis. C'est le début de la grande aventure du pneu automobile. Le développement va en être assuré grâce à la fabrication en chaîne des voitures Ford.

### I.2.6 Les nouveaux matériaux

Parallèlement au développement de l'industrie du latex dans la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, la société américaine Phélan & Collender offre une récompense de 10000 dollars à qui trouvera un produit de remplacement de l'ivoire (devenu rare et cher) pour la fabrication des boules de billard [sci 99].

En 1869, John Wesley Hyatt met au point une matière ressemblant à de la corne à partir de cellulose et de camphre : le celluloid. A la même époque, Hilaire Bernigaud imagine une fibre synthétique à partir de cellulose, qui se révéla très inflammable. D'autres inventeurs mettent au point la rayonne de viscose et d'acétate. Tous ces nouveaux matériaux sont issus de produits naturels.

Fritz Hofmann relève le défi de Phélan & Collender et synthétise le principal composant du caoutchouc naturel. Le 12 septembre 1907, Bayer est la première société à déposer un brevet relatif à la fabrication d'un caoutchouc synthétique. Un an plus tard, le caoutchouc méthyle sera le premier caoutchouc synthétique fabriqué à l'échelle industrielle (www.bayer.fr).

Leo Hendrik Baekeland (figure I.5) est le premier à travailler sur des produits de synthèse qu'il appelle *plastiques*. En 1907 il met au point ce qui sera baptisé la Bakélite, une résine dure et légère qui peut être moulée et teinte. Elle trouve immédiatement des applications dans la fabrication d'objets courants (boutons, appareils téléphoniques, manche de couteau, ...). Cependant, la nature (polymère) et les propriétés mécaniques de la bakélite sont encore méconnues.



Figure I.5 : Leo Hendrik Baekeland

En 1920, Le chimiste allemand Hermann Straudinger s'intéresse à ces nouveaux produits et

montre que les polymères sont des molécules géantes, assemblages de chaînes de molécules plus petites.

L'essor de la pétrochimie entraîne les grands groupes industriels dans une course aux *matières plastiques*. En 1927, la firme chimique allemande Farben recrute les meilleurs spécialistes du domaine. Entre 1929 et 1932, ils produisent presque un polymère par jour ; certains sont restés, comme les polyvinyles et les polyacryliques.

En 1928, c'est DuPont de Nemours qui se lance dans la recherche fondamentale.

En 1931, le plexiglas, premier verre synthétique, apparaît. Puis le groupe américain Union Carbide and Chemical élabore le PVC (*Polyvinyl chlorate* en anglais) et des films transparents de polystyrène. En Grande-Bretagne, Imperial Chemical Industries met au point le polyéthylène.

En 1936, Carothers, travaillant pour DuPont de Nemours, met au point la première fibre synthétique, le nylon, dont la fabrication débute en 1939. La seconde guerre mondiale dirigera son utilisation vers la fabrication des toiles de parachute.

Les énormes besoins en matière occasionnés par la guerre encouragent le développement des polymères (isolant pour câbles, substituts du verre, tissus légers,... ). Le conflit avec le Japon coupe la route des plantations d'hévéas situées en Asie du Sud-Est, et relance les recherches dans la fabrication de caoutchoucs de synthèse. DuPont de Nemours qui avait mis au point le néoprène, crée le chloroprène qui reste cependant un produit cher.

En Europe, ce sont les Allemands qui comprennent l'importance stratégique du caoutchouc. En 1936, Farben expose au salon de Berlin le BUNA (Polybutadiène), de caractéristiques semblables au caoutchouc naturel. Rattrapant leur retard, les Américains produisent en 1944 700000 tonnes d'un produit similaire.

### I.2.7 L'après-guerre

Après la seconde guerre mondiale, la recherche sur ce type de matériau envahit la planète.

Le procédé d'extrusion-soufflage est breveté par Enoch Ferngren en 1935 ; il produira, en 1949, 23 millions de bouteilles en PEBD (Polyéthylène Basse Densité)(figure I.6).



Figure I.6 : Exemples de produits en PEBD (FIDEL FILLAUD - 44120 Vertou - France)



En 1954, Giulio Natta met au point en Italie le polypropylène.

En 1956, on met au point le PEHD (Polyéthylène Haute Densité) plus rigide que le PEBD.

En 1963, 195 millions de bouteilles sont soufflées par an.

A la fin des années 60 apparaissent les polycarbonates (transparents et plus résistants à certains produits chimiques), le téflon (tétrafluoroéthylène), le polysulfone (résistant à la chaleur). Les plastiques renforcés prennent également de l'importance (matériaux composites déjà utilisés pendant la guerre pour les bateaux de débarquement et les coques de protection des radars). En 1969, les Japonais remplacent le verre des plastiques renforcés par de la fibre de carbone. En 1971, DuPont de Nemours crée le kevlar (fibre d'aramide).

Dans les années 70, le PVC voit ses applications grandir. Le PET (*Polyethylene Terephthalate* en anglais) est utilisé pour l'emballage des bouteilles de boissons gazeuses.

En 1973, le choc pétrolier met fin au rêve du *tout plastique* des années 60, mais n'empêche pas l'augmentation de la cadence de production des bouteilles plastiques qui passe à 3600 bouteilles par heure en 1992.

Le marché actuel des polymères est partagé pour un tiers pour le naturel et deux tiers pour le synthétique, pour une consommation mondiale de nos jours de deux cent cinq millions de tonnes. Pour le caoutchouc, la consommation mondiale est de 17,5 millions de tonnes en 2001 dont 40% de caoutchouc naturel et 60% de caoutchouc synthétique.

## I.3 La physique des élastomères

Les élastomères sont des matériaux présentant des caractéristiques multiples et complexes liés à leur nature chimique (réseau de chaînes moléculaires). Nous présenterons donc dans la section I.3.1 les notions générales de chimie relatives à l'ensemble de ces matériaux telles qu'elles peuvent apparaître dans la littérature. Puis, dans un second temps (section I.3.2), nous décrirons les principaux phénomènes physiques observés à une échelle macroscopique lorsque les élastomères sont soumis à des sollicitations mécaniques.

### I.3.1 La chimie des élastomères

#### I.3.1.1 La structure moléculaire

Les polymères (dont les élastomères font partie) sont obtenus par polymérisation de molécules à base organique identiques (les monomères). Cette réaction en chaîne consiste en l'ouverture des doubles liaisons carbone-carbone (C=C) des monomères, et la formation de nouvelles liaisons simples (C-C) entre de nouvelles molécules proches, par enchaînements successifs de motifs mis bout à bout. Par exemple, les figures I.7, I.8 et I.9 illustrent respectivement les molécules de polyéthylène, de polyisoprène et de nylon.

La réaction aboutit à la création de longues chaînes macroscopiques de longueurs différentes enchevêtrées de manière aléatoire. Ces chaînes forment ainsi une pelote (ou « plat de spaghetti »). Les statisticiens évaluent alors que la distance entre les deux extrémités d'une même chaîne est



Figure I.7 : Molécules de polyéthylène

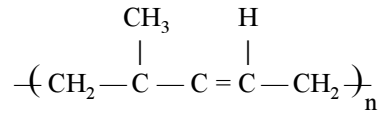


Figure I.8 : Molécules de polyisoprène (caoutchouc naturel)

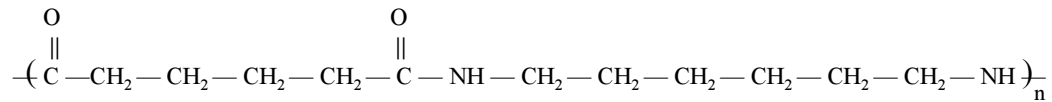


Figure I.9 : Molécules du nylon

de l'ordre de 5 à 10% de la longueur totale de la chaîne [G'S 97]. Cet enchevêtrement physique contribue en partie à la cohésion de l'ensemble. Néanmoins, cette cohésion est renforcée par des liaisons inter-chaînes, comme des interactions entre dipôles de chaînes polarisées, ou par des ponts physiques entre chaînes liés à la formation de préréticulation. Cette préréticulation est rendue possible grâce à la formation d'un réseau tridimensionnel où les chaînes moléculaires ne sont plus linéaires mais ramifiées.

Une manière d'améliorer la cohésion du matériau consiste à provoquer une réticulation. En effet, le procédé de polymérisation est en général accompagné du procédé de vulcanisation mis au point par Goodyear en 1839 (voir section I.2.4). Ce procédé consiste à ajouter au mélange initial des agents vulcanisants qui peuvent être du soufre, des peroxydes ou des oxydes métalliques. Ces agents permettent la formation de ponts physiques entre chaînes selon le principe illustré par la figure I.10.

### I.3.1.2 La cristallinité et la transition vitreuse

Dans certains polymères, des édifices tridimensionnels ordonnés peuvent apparaître dans des proportions variant de 0 à 90% du volume du matériau. Ils sont alors constitués d'une phase amorphe et d'une phase cristalline. Notons que le caoutchouc naturel présente une structure moléculaire régulière (stéréorégularité) qui favorise la cristallinité partielle. Dans les élastomères la phase cristalline est minoritaire et la température de fusion  $T_f$  de la phase cristalline est proche de la température ambiante.

Certains élastomères (comme le caoutchouc naturel) présentent une aptitude à cristalliser sous contraintes (lorsqu'ils sont très étirés). Ce phénomène est généralement imputé à l'alignement progressif des chaînes étirées qui s'empilent tendant ainsi à minimiser leur énergie de conformation. Le taux de cristallinité semble cependant être de l'ordre de 10% pour des déformations de l'ordre de 500% pour le caoutchouc naturel [MUR 02] alors qu'il peut atteindre 30% pour des



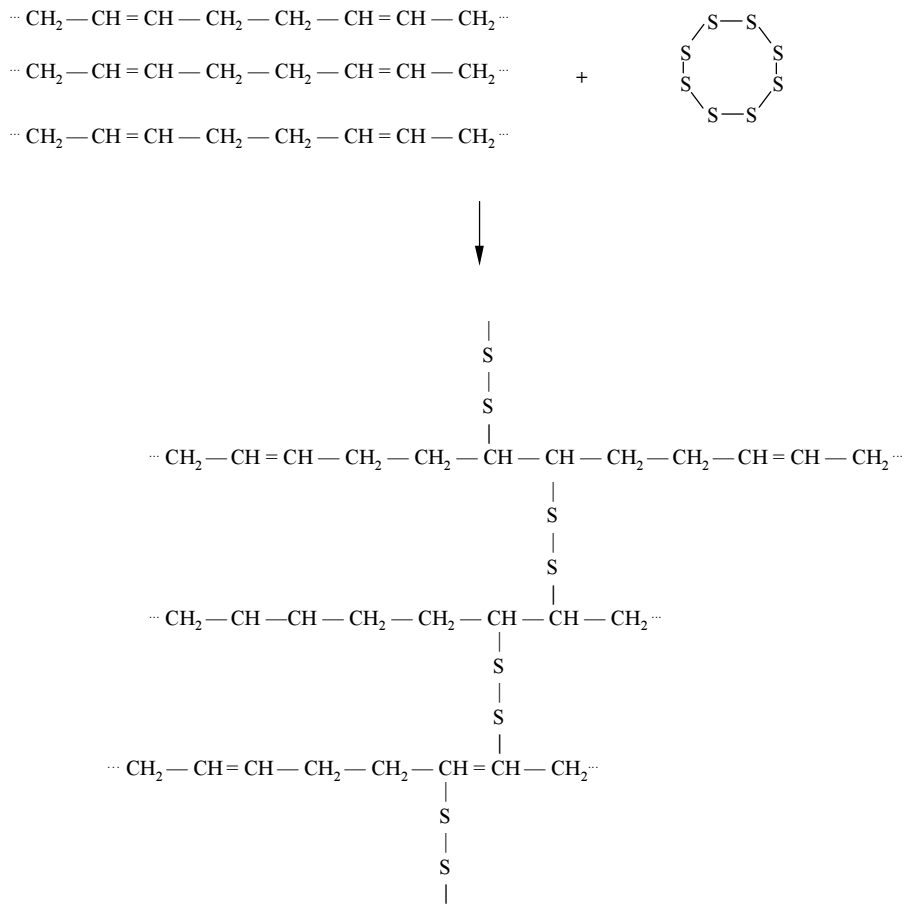


Figure I.10 : Formation de ponts de reticulation disulfures

déformations de l'ordre de 400% pour un PET à 75°C [LU 01].

Outre la température de fusion de la phase cristalline  $T_f$ , les élastomères sont caractérisés par une température de transition vitreuse, notée généralement  $T_g$  (*glass transition temperature* en anglais). C'est la température en dessous de laquelle l'agitation thermique est trop faible pour compenser les forces d'interactions entre segments de chaînes qui confèrent au matériau un comportement de solide « rigide » élasto-(visco)plastique [HAW 97]. Les élastomères présentent toujours une valeur de  $T_g$  très inférieure à la température ambiante [G'S 97] ce qui leur confère un état caoutchoutique à la température ambiante.

### I.3.1.3 Les charges

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des élastomères (raideur, contrainte à rupture, ...), des agents renforçants sont généralement introduits. Il s'agit, dans la majorité des cas, de particules de noirs de carbone.

Les mécanismes de renforcement ne sont pas clairement établis. Cependant, certains auteurs [KIL 87, HAM 97, GOV 97] attribuent l'augmentation de la raideur à un effet composite

qu'il nomme « Strain Amplification » (amplification des déformations). Cet effet mécanique n'est possible que grâce à l'ancrage chimique des chaînes sur les particules de noir de carbone (environ 30% de la matrice).

### I.3.2 Les phénomènes physiques

Les élastomères se distinguent par cinq grands phénomènes mécaniques macroscopiques dont les origines ne sont toujours pas clairement identifiées. Ces phénomènes sont l'effet Mullins, l'élasticité caoutchoutique, la viscoélasticité, l'amplification des déformations et l'effet Payne.

#### I.3.2.1 L'effet Mullins

Ce phénomène est le moins étudié et pourtant le premier auquel est confronté l'expérimentateur. Il consiste en un adoucissement de la loi de comportement après une première sollicitation. Après cette première sollicitation, le matériau peut être considéré comme un matériau viscoélastique non-linéaire pour des déformations inférieures à la déformation maximale de la première sollicitation. C'est pour cette raison que ce phénomène est peu étudié puisque les applications principales des caoutchoucs sollicitent le matériau sous des chargements cycliques. Le matériau est alors très vite adapté (on emploie en général le terme d'*accommodation*) à l'effet Mullins, en cinq ou six cycles, et seul le comportement stabilisé est utile pour évaluer la raideur ou les modes de vibration des pièces mécaniques en élastomère.

Cet adoucissement fut apparemment observé pour la première fois par Bouasse et Carrière [BOU 03] et a été longuement étudié par Mullins [MUL 48] [MUL 57a]. Il suggéra quelques interprétations physiques de ce phénomène qui porte aujourd'hui son nom.

Ce phénomène est observable sur l'ensemble des élastomères, mais il est plus prononcé dans les élastomères chargés que dans les caoutchoucs non-chargés. Pour cette raison Bueche [BUE 60] [BUE 61] explique l'effet Mullins par un mécanisme d'endommagement de liaisons entre chaînes polymériques et charges. D'autres auteurs, comme Harwood *et al.* [HAR 67], Govindjee et Simo [GOV 91], Miehe [MIE 95], Ogden [OGD 99] ou bien Johnson et Beatty [JOH 93] proposent des modèles fondés ou non sur des interprétations physiques.

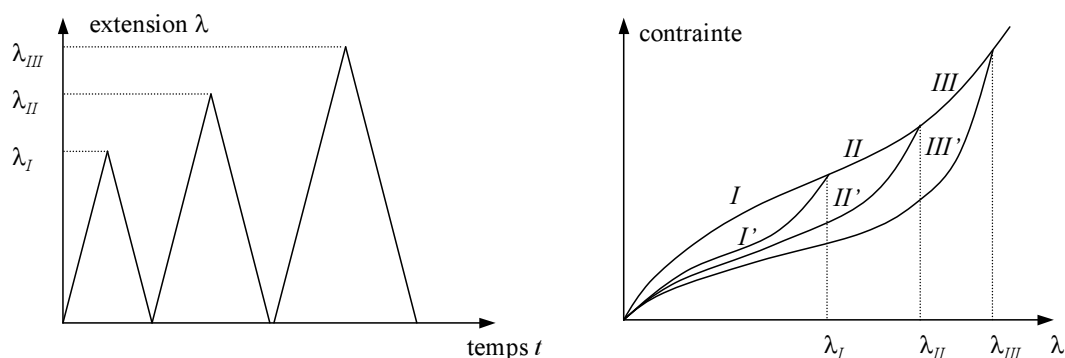


Figure I.11 : Effet Mullins

Une bonne description du phénomène est donnée dans [JOH 93] ainsi que dans [DRO 01] et résumée sur la figure I.11. Considérons un élastomère soumis à une histoire de déformation uniaxiale quasi-statique telle que celle illustrée par le graphe de gauche de la figure I.11. Le matériau vierge de toute déformation est d'abord étiré jusqu'à une extension  $\lambda_I$ . Les contraintes correspondantes suivent alors la courbe dénotée  $I$  sur le graphe de droite de la figure I.11. La décharge à partir de l'extension  $\lambda_I$  se fait en suivant la courbe  $I'$ . Lorsqu'une deuxième charge de 0 à  $\lambda_{II} > \lambda_I$  est appliquée, les contraintes suivent à nouveau le chemin  $I'$  jusqu'à  $\lambda = \lambda_I$  puis suivent le chemin  $II$  qui prolonge la courbe  $I$  suivant le chemin  $I-II-III$  qui est la courbe de traction dite de première charge. La deuxième décharge, à partir de l'extension  $\lambda_{II}$  suit le parcours  $II'$ , qui est différent de  $I'$  et situé en dessous. En poursuivant le processus, la charge correspondant à l'extension jusqu'à  $\lambda_{III}$  suit les courbes  $II'-III$ . Et la décharge suit le chemin  $III'$ . Les courbes  $I', II'$  et  $III'$  peuvent être considérées comme des courbes d'élasticité. En effet, si le matériau n'est plus jamais soumis à une extension supérieure à  $\lambda_{III}$  il se comportera de manière élastique et restera sur la courbe  $III'$ . C'est pourquoi ce type de matériau est dit pseudo-élastique.

Mullins [MUL 57a] a démontré que les caoutchoucs recouvraient partiellement ou totalement leur comportement d'origine de façon lente (plusieurs jours) à température ambiante. Néanmoins, Bueche et Mullins [BUE 60, MUL 57a] observèrent que le recouvrement était grandement accéléré par la température et que 50% de la raideur était recouverte après une heure à 100°C. Mullins [MUL 48] et James et Green [JAM ] ont également mis en évidence que le degré d'adoucissement n'était pas identique dans toutes les directions et qu'un comportement mécanique anisotrope se développe lorsque le matériau est sollicité. L'adoucissement dans la direction perpendiculaire à l'extension est inférieure à la moitié de l'adoucissement dans la direction d'étirement.

En réalité, le phénomène présenté ci-dessus est idéalisé, et l'adoucissement n'est pas complet pendant la première charge. En fait, lors de chargements cycliques à déformation maximale constante, un adoucissement continu dans le temps est observé. Cependant 90% de l'adoucissement apparaît pendant le premier cycle, puis l'adoucissement se stabilise au bout de trois à quatre cycles.

### I.3.2.2 L'élasticité non-linéaire

Un autre phénomène caractéristique des élastomères est leur comportement quasi-statique élastique non-linéaire. L'ensemble de la littérature applique la théorie de l'hyperélasticité pour décrire ce comportement.

L'hyperélasticité se définit par un comportement élastique dérivant d'une énergie potentielle de déformation  $W$  permettant d'écrire la loi de comportement sous la forme :

$$\bar{\bar{S}} = -p\bar{\bar{C}}^{-1} + 2\frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (\text{I.1})$$

où  $\bar{\bar{S}}$  désigne le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,  $p$  la pression hydrostatique

inconnue permettant de prendre en compte l'incompressibilité, et  $\bar{\bar{C}}$  le tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit (la définition de ces grandeurs sera rappelée dans l'annexe A. 2).

Dans le cas des élastomères, cette fonction énergie de déformation est généralement assimilée à une variation d'entropie du réseau de chaînes [DOI 96, DIA 99, BOR 98]. En effet, les deux principes fondamentaux de la thermodynamique permettent d'écrire, pour un processus réversible :

$$\Delta E + \Delta K = W_{\text{ext}} + Q \quad (\text{I.2})$$

et :

$$T \Delta S = Q \quad (\text{I.3})$$

où  $\Delta E$ ,  $\Delta K$ ,  $W_{\text{ext}}$ ,  $Q$  et  $T$  désignent respectivement la variation d'énergie interne, la variation d'énergie cinétique, le travail des efforts extérieurs, la quantité de chaleur reçue et la température. Le théorème de l'énergie cinétique aboutit, quant à lui, à la relation :

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K \quad (\text{I.4})$$

où  $W_{\text{int}}$  est le travail des efforts intérieurs ou énergie de déformation. En reportant les équations (I.3) et (I.4) dans l'équation (I.2) nous obtenons :

$$W_{\text{int}} + \Delta E = T \Delta S \quad (\text{I.5})$$

Du fait de l'incompressibilité des élastomères (hypothèse généralement admise pour des matériaux non confinés), la variation d'énergie interne  $\Delta E$ , liée au travail de la pression par la variation de volume, est négligée devant les autres termes. Nous obtenons alors :

$$W = W_{\text{int}} = T \Delta S \quad (\text{I.6})$$

Ainsi, le comportement réversible des élastomères peut être décrit comme dérivant d'un potentiel d'énergie de déformation. Cette théorie est confirmée expérimentalement par les travaux de Meyer et Ferri [MEY 35] décrits dans [KAU 01]. Ces derniers observent que la force de traction sur une éprouvette de caoutchouc faiblement vulcanisé est proportionnelle à la température (éq. (I.7)) :

$$f(T) = \alpha T \quad \text{avec} \quad \alpha = \text{constante} \quad (\text{I.7})$$

### I.3.2.3 La viscoélasticité

En chargement dynamique, même lent, le comportement des élastomères s'éloigne du comportement hyperélastique du fait de l'existence de processus irréversibles. En effet, les élastomères, largement utilisés dans le domaine anti-vibratoire, sont connus pour leur aptitude à dissiper de l'énergie. Ce processus se traduit par une augmentation de la température sous chargement adiabatique. Il est alors considéré viscoélastique non-linéaire, ce qui se traduit par deux types de phénomène mis en évidence par l'expérience.

Le premier, à long terme, est le fluage sous déformation constante [WIN 00, AMI 02], tel que l'illustre la figure I.12. Le second, à court terme, est un comportement hystérétique sous

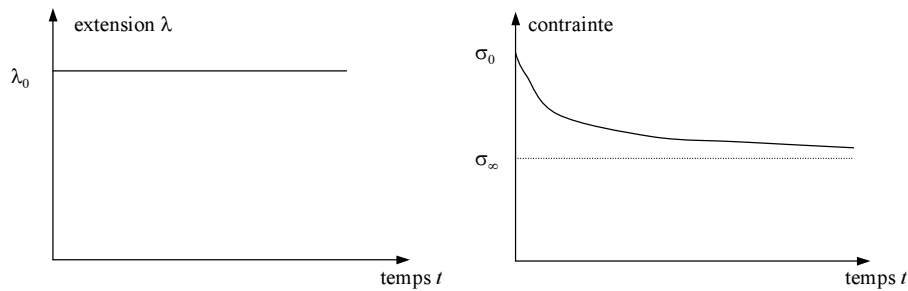


Figure I.12 : Phénomène de relaxation

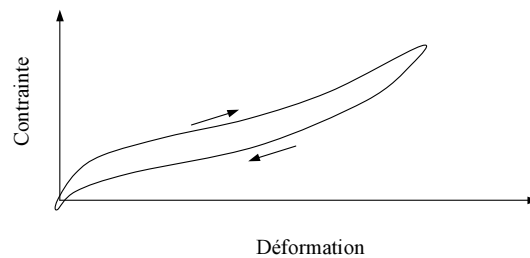


Figure I.13 : Courbe d'hystérésis d'un élastomère

chargement cyclique [GAB 95, BER 98] comme le montre la figure I.13 .

Ces deux types de comportement viscoélastique se combinent en général et un chargement cyclique répété présentera une réponse dont la boucle d'hystérésis se décalera vers le bas.

#### I.3.2.4 L'amplification des déformations

Comme nous l'avons signalé plus haut, la présence de noirs de carbone peut provoquer des amplifications de déformations par effet composite.

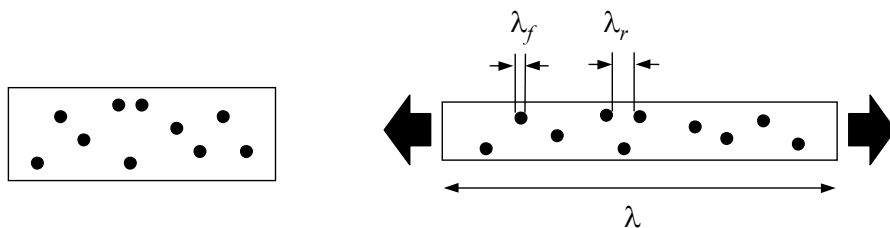


Figure I.14 : Phénomène d'amplification de déformation

La plupart de ces théories dérivent des travaux d'Einstein [EIN 06] sur les particules en suspension dans un liquide. Elles considèrent que les déformations macroscopiques peuvent être décomposées en déformation de la matrice et en déformations des charges (voir figure I.14). Les charges (noirs de carbone) étant infiniment rigides devant la matrice polymérique, l'extension des charges  $\lambda_f$  (rapport de la longueur déformée sur la longueur initiale) est considérée égale à 1. La loi de comportement de la matrice étant supposée connue, trouver le comportement

du matériau chargé revient à connaître les déformations réelles de la matrice ( $\lambda_r$ ) en fonction des déformations macroscopiques  $\lambda$  du matériau chargé et du taux volumique de charge  $\nu$ . On peut remarquer que  $\lambda_r$  est nécessairement supérieur à  $\lambda$  puisque les charges sont considérées indéformables. Il y a donc bien amplification des déformations dans la matrice. Kilian *et al.* proposent un modèle suivant cette approche et permettant de reproduire avec une bonne corrélation la tendance du matériau à se renforcer en fonction du taux de charges [KIL 87].

### I.3.2.5 L'effet Payne

Le quatrième phénomène caractéristique des élastomères, que nous donnons à titre indicatif, concerne la variation du module complexe en fonction de l'amplitude de déformation et de la proportion de charges dans la matrice. Il est désigné sous le terme d'effet Payne [PAY 60].

Ce phénomène est surtout étudié dans le domaine vibratoire. Il sort du cadre d'étude que nous nous sommes fixés et ne sera pas détaillé davantage.

## I.3.3 La statistique des réseaux de chaînes

Afin de comprendre les mécanismes physiques observés sur les élastomères, et plus généralement les polymères, des physiciens ont élaboré des théories fondées sur la constitution chimique de ces matériaux. Ces théories reposent sur des méthodes statistiques permettant de prendre en compte la nature aléatoire de l'enchevêtrement des chaînes et sur la physique des chaînes étudiées isolément.

### I.3.3.1 La chaîne idéale

Une chaîne isolée idéale est constituée de  $N$  segments (monomères) de longueur  $l$  et possède un grand nombre de degrés de liberté correspondant à ses différentes conformations possibles [KAU 01]. Une conformation se distingue d'une autre par une rotation autour d'une liaison C-C (voir figure I.15). Pour étudier de manière statistique ce type de structure, on utilise la théorie des chemins aléatoires [DOI 96]. On suppose pour cela que les segments suivent une grille tridimensionnelle dont la cellule de base est de côté  $l$  selon un parcours aléatoire. On admet, de plus, que deux segments distincts peuvent éventuellement se situer sur la même arête de la grille.

On désigne par  $\vec{r}$  le vecteur reliant les deux extrémités de la chaîne. On démontre alors que la longueur moyenne des chaînes est donnée par la relation :

$$\langle \vec{r}^2 \rangle = Nl^2 \quad (\text{I.8})$$

La longueur moyenne des chaînes est alors proportionnelle à  $\sqrt{N}$ .

Notons, maintenant,  $P(\vec{r}, N)$  la probabilité de distribution, c'est-à-dire la probabilité que la deuxième extrémité d'une chaîne constituée de  $N$  segments soit dirigée suivant  $\vec{r}$ , la théorie des chemins aléatoires permet alors d'obtenir la fonction de probabilité de distribution gaussienne

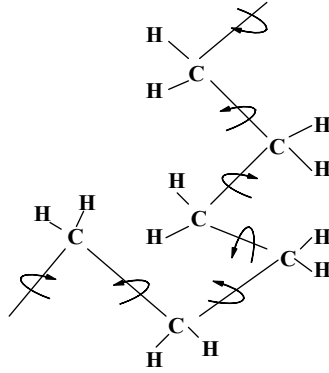


Figure I.15 : Structure moléculaire du polyéthylène

de  $\vec{r}$ , à savoir :

$$P(\vec{r}, N) = \left( \frac{3}{2\pi Nl^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{3\|\vec{r}\|^2}{2Nl^2} \right) \quad (\text{I.9})$$

Cette fonction de distribution a donné naissance au modèle de comportement néo-hookéen dit « modèle gaussien » que nous présenterons dans la partie A. 4.3. Elle est cependant fondée sur une approche idéalisée des réseaux de chaînes et n'est applicable que dans le cadre des faibles déformations (en dessous de 200% d'étirement).

### I.3.3.2 Les effets du volume exclusif

Le modèle précédent peut être amélioré en constatant que deux segments possédant une liaison commune ne peuvent pas avoir des orientations indépendantes puisque ceci signifierait qu'une chaîne peut se recouvrir elle-même lorsque les segments prennent le chemin en sens inverse, ce qui est physiquement impossible. De plus, la théorie du réseau de chaînes idéales repose sur un modèle où deux segments distincts peuvent se situer au même lieu physique.

Lorsqu'on interdit au segment  $n + 1$  de direction  $\vec{r}_{n+1}$  de suivre la direction  $-\vec{r}_n$  du segment  $n$ , et si l'on considère qu'une arête de la grille ne peut être occupée qu'une fois, la théorie montre que la longueur moyenne des chaînes est proportionnelle à  $N^{3/5}$  au lieu de  $N^{1/2}$ . On constate, qu'une chaîne à volume exclusif « occupe » plus de place qu'une chaîne idéale.

Cependant, cette nouvelle approche mène à des résultats proches des précédents, et le modèle gaussien est toujours considéré valide pour de grandes valeurs de  $N$ .

### I.3.3.3 La limite d'extensibilité

Si nous retournons dans le cadre de la théorie des chaînes idéales, nous constatons qu'une chaîne de  $N$  segments étirée complètement passe d'une dimension moyenne  $lN^{1/2}$  à une dimension  $lN$ . Son extension maximale est donc de  $\lambda = \sqrt{N}$ .

Pour prendre en compte cette limite d'extensibilité dans la probabilité de distribution, Kuhn et Grün [KUH 42] ainsi que James et Guth [JAM 43] proposent de déterminer la distribution

de probabilité des angles entre les segments voisins d'une chaîne. Soit  $r$  la norme du vecteur  $\vec{r}$  reliant les extrémités d'une chaîne déformée, la distribution de cette norme est donnée par :

$$\ln(p(r)) = N \left[ \frac{r}{Nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \quad (\text{I.10})$$

où  $\beta$  est défini par :

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{r}{Nl} \right) \quad (\text{I.11})$$

et  $\mathcal{L}$  est la fonction de Langevin :

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (\text{I.12})$$

Cette nouvelle forme donnée à  $p$  est dite « non-gaussienne ». Elle permet de construire des modèles de comportement, dits non-gaussiens, que nous aborderons dans la partie [A. 4.3](#).

Notons que si la fonction de Langevin  $\mathcal{L}(x)$  possède une forme mathématique explicite, il n'est pas possible d'écrire sa fonction inverse à partir de fonctions classiques. D'un point de vue numérique, cette fonction est généralement approchée, soit par un développement de Taylor à l'ordre 5 (c'est le cas dans le code éléments finis Abaqus), soit par une approximation. Ainsi, Perrin utilise l'approximation de Padé sous la forme d'une fraction rationnelle [[PER 00](#)] :

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \approx \frac{x(3-x^2)}{1-x^2} \quad (\text{I.13})$$

Cette approximation est très bonne, comme l'illustre la figure [I.16](#) dans laquelle l'inverse de la fonction de Langevin a été calculée par la méthode de Newton. L'utilisation d'une telle

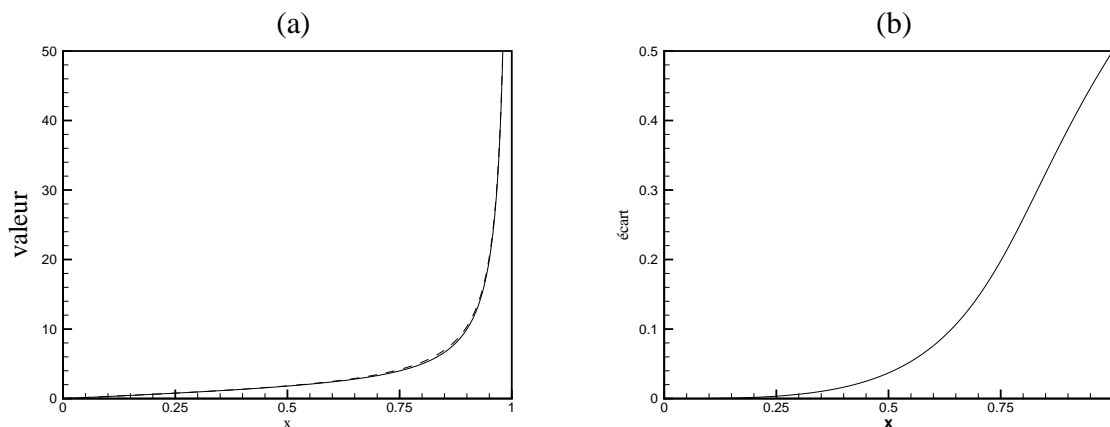


Figure I.16 : Comparaison de la fonction de Padé et de la fonction inverse de la fonction de Langevin. (a) : (—) fonction  $\mathcal{L}^{-1}$ , (---) fonction de Padé - (b) : écart entre la fonction  $\mathcal{L}^{-1}$  et la fonction de Padé

approximation permet d'éviter la recherche itérative systématique de la valeur de  $\mathcal{L}^{-1}$  coûteuse en temps de calcul.



## I.4 Conclusion

Ce premier chapitre a présenté après un bref parcours historique, les notions générales de chimie et de physique des polymères, et plus particulièrement des élastomères, qui seront utilisées dans la suite du document.

La complexité des liaisons et des mécanismes intervenant lors de la déformation de ces matériaux explique qu'il n'existe pas encore actuellement de modèle unique permettant de simuler une pièce en élastomères. L'hypothèse d'un comportement de type hyperélastique est généralement admise pour modéliser le comportement élastique non-linéaire, et a permis de donner naissance à un nombre important de modèles différents fondés sur des observations expérimentales ou sur la physique des chaînes de macromolécules. En revanche, les modèles viscoélastiques sont rares et sont encore loin de reproduire suffisamment correctement les expériences pour être utilisés dans des codes de calcul. Ceci est encore plus vrai pour les modèles simulant l'effet Mullins.

Notons finalement que, pour un mécanicien, l'existence d'un modèle « universel » n'est pas un problème en soi tant que l'on n'étudie pas des pièces susceptibles de subir toutes les déformations possibles dans un domaine de déformation très étendu. Certaines industries se satisfont amplement de l'estimation de la raideur de leurs pièces. En revanche, si on s'intéresse à des pièces présentant simultanément des zones peu déformées et des zones fortement déformées, il est intéressant de disposer d'un modèle plus complexe. Ainsi, l'étude de la propagation de fissures dans les élastomères nécessite l'utilisation d'un modèle capable de représenter correctement l'état de fortes déformations en fond de fissure même si la pièce est globalement peu déformée.

# Chapitre II

## Algorithmes d'identification

---

### II.1 Introduction

Deux problèmes majeurs auxquels est confronté l'ingénieur mécanicien souhaitant effectuer une simulation sont d'une part le choix de la loi de comportement et d'autre part l'obtention des valeurs des paramètres de la loi de comportement qu'il a choisie. Pour cela, il est nécessaire d'identifier ces paramètres par une méthode directe ou inverse à partir d'essais expérimentaux. L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes que nous avons mises en œuvre pour identifier les différentes lois de comportement hyperélastiques et pseudo-élastiques (effet Mullins).

#### II.1.1 Problématique

La problématique de l'identification consiste à faire coïncider une solution  $\vec{\widehat{Y}}$  issue d'un modèle (analytique, semi-analytique ou numérique) et une mesure expérimentale  $\vec{\overline{Y}}$ . Il s'agira, par exemple, de la réponse d'une éprouvette à un effort de traction (voir section A. 3.1.1). Les mesures sont constituées de  $n$  points de mesure  $Y_i$  correspondant à  $n$  valeurs calculées  $\widehat{Y}_i$ . Nous définissons alors une norme  $\phi$  pour quantifier l'écart entre ces deux ensemble de valeurs :

$$\phi = \sum_{i=1}^n \|Y_i - \widehat{Y}_i\|^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \|\vec{\overline{Y}} - \vec{\widehat{Y}}\|^2 \quad (\text{II.1})$$

Ainsi, annuler  $\phi$  revient à faire coïncider les mesures avec les valeurs théoriques. Cependant, les mesures expérimentales sont souvent entachées d'une erreur de mesure, tandis que les valeurs théoriques sont sujettes à des hypothèses simplificatrices quelquefois importantes. Pour identifier les paramètres du matériau, il suffit alors de minimiser  $\phi$ .

#### II.1.2 Compromis

La fonction  $\phi$  définie par l'équation (II.1) peut être modifiée en multipliant les termes de la sommation par des coefficients. Ces coefficients sont appelés *poids* ou *coefficients de pondération* et permettent de définir l'importance relative des différents termes intervenant dans la définition de l'écart  $\phi$ .

Dans le cas où le modèle est capable de reproduire, aux erreurs expérimentales près, le ou les essais, il convient de s'assurer que la solution est unique, c'est-à-dire qu'un seul jeu de paramètres est possible. Dans ce cas, les paramètres sont clairement identifiés et quel que soit le poids accordé aux différents points de mesure la solution sera inchangée. Si les solutions sont multiples, il convient de lever l'indétermination.

Dans la plupart des cas, un écart important persiste sur une partie des points de mesure. On peut alors faire coïncider  $Y_i$  et  $\widehat{Y}_i$  en certains points, mais pas en tout point simultanément. Le problème d'optimisation est alors associé à un compromis sur les écarts respectifs. Selon les poids attribués aux différents points de mesure l'identification peut fournir des solutions différentes. De même, des points de mesure peuvent être éliminés de l'identifications entraînant des restrictions sur le domaine de validité des modèles identifiés. Ainsi, dans la section A. 4, les modèles ont pu être identifiés au mieux avec un poids identique attribué aux différents types d'essais ou en privilégiant un type d'essai en particulier.

### II.1.3 Méthodes retenues

Parmi toutes les méthodes possibles de minimisation, et plus généralement d'optimisation, seules quelques unes ont retenu notre attention. Nous présentons dans un premier temps les algorithmes d'optimisation classiques adaptés aux fonctions mathématiques continues et dérivables, puis nous aborderons le cas des algorithmes génétiques (AG) permettant de traiter une gamme plus large de problèmes (fonctions discrètes, espaces de solution discrets ou discontinus,...). Enfin, nous décrirons une méthodologie de programmation assimilable à de la programmation orientée objet (POO) et permettant l'implantation rapide de loi de comportement dans notre application d'identification.

## II.2 Les algorithmes mathématiques classiques

$\phi$  (Eq. II.1) est une fonction positive définie en tout point où  $\vec{Y}$  est définie. Cette fonction peut donc être minimisée des méthodes de minimisation de fonctions mathématiques (voir, par exemple, l'ouvrage de Culioli [CUL 94]). Nous présentons dans cette partie le principe général des plus classiques d'entre elles adaptées à la fonction  $\phi$ .

Le principe général de ces méthodes d'optimisation consiste à construire une suite de points de l'espace des solutions convergeant vers un minimum de la fonction  $\phi$ . Pour cela, ces méthodes partent d'un point  $\vec{u}_0$ , vecteur de l'espace des paramètres et tentent de trouver une direction de descente  $\vec{d}$  permettant d'obtenir un nouveau point où la valeur de  $\phi$  est plus petite. La direction  $d$  doit alors vérifier :

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\vec{u}_0, \vec{u}_0 + \alpha \vec{d}] \subset U_{ad} \\ \forall \gamma \quad 0 < \gamma < \alpha \quad \phi(\vec{u} + \gamma \vec{d}) \leq \phi(\vec{u}) \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

où  $U_{ad}$  est l'espace des paramètres admissibles. On dit alors que  $\vec{d}$  est *admissible*.

Le point  $\vec{u}_0$  est minimum si et seulement si :

$$\forall \vec{d} \text{ admissible} \quad \nabla\phi(\vec{u}_0)^t \vec{d} \geq 0 \quad (\text{II.3})$$

où  $\nabla$  désigne l'opérateur gradient et  $.^t$  l'opérateur transposé.

### II.2.1 La méthode du gradient

L'approximation linéaire de  $\phi$  au voisinage de  $\vec{u}_0$  (développement de Taylor à l'ordre 1) permet de définir la nouvelle fonction  $L$ , approximation de  $\phi$  à l'ordre 1 :

$$L(\vec{u}) = \phi(\vec{u}_0) + \nabla\phi(\vec{u}_0)^t . (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (\text{II.4})$$

Pour cette fonction  $L$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$L(\vec{u}(\alpha)) = \phi(\vec{u}_0) - \alpha \nabla\phi(\vec{u}_0)^t . \nabla\phi(\vec{u}_0) < \phi(\vec{u}_0) \quad (\text{II.5})$$

La direction  $\vec{d} = -\nabla\phi(\vec{u}_0)$  est donc une direction admissible. En fait, c'est la meilleure direction de descente. Cette propriété permet de définir une variété de méthodes regroupées sous le terme de *méthode du gradient*. On distingue entre autre :

- *la méthode du gradient à pas optimal* : on cherche l'optimum de la fonction à un seul paramètre  $L(\vec{u}(\alpha))$ ;
- *la méthode du gradient à pas fixe* :  $\alpha$  est fixé au cours des itérations. Cependant, il est généralement difficile d'estimer la bonne valeur à adopter pour le paramètre  $\alpha$ .

### II.2.2 La méthode de relaxation

Cette méthode consiste à substituer à la fonction  $\phi$  à  $n$  variables une série de problèmes  $J^i(\nu)$  à une seule variable :

$$J^i(\nu) = \phi(u_1^1, u_2^2, \dots, u_{i-1}^{i-1}, \nu, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0) \quad (\text{II.6})$$

Partant du point initial  $\vec{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ , on minimise  $J^1(\nu)$  pour trouver la première composante  $u_1^1$ , puis de manière itérative, on minimise  $J^i(\nu)$  pour trouver  $u_i^i$ .

### II.2.3 La méthode de Newton

En approchant  $\phi$  par un développement de Taylor à l'ordre 2, nous pouvons définir  $\phi_0$  par :

$$\phi^0(\vec{u}) = \phi(\vec{u}_0) + \nabla\phi(\vec{u}_0)^t . (\vec{u} - \vec{u}_0) + \frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{u}_0)^t \phi''(\vec{u}_0) . (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (\text{II.7})$$

où  $\phi''(\vec{u}_0)$  est la matrice des dérivées secondes  $\frac{\partial^2\phi}{\partial u_i \partial u_j}$  au point  $\vec{u}_0$ , appelée aussi *Hessien* ou *matrice Hessienne*. La méthode de Newton consiste alors à annuler le gradient  $\nabla\phi$  en considérant son approximation  $\nabla\phi^0$  à l'ordre 1 :

$$\nabla\phi^0(\vec{u}) = \nabla\phi(\vec{u}_0) + \phi''(\vec{u}_0) . (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (\text{II.8})$$

La solution  $u_1$  de  $\nabla\phi^0(u) = 0$  est telle que :

$$\phi''(\vec{u}_0)\vec{u}_1 = \phi''(\vec{u}_0).\vec{u}_0 - \nabla\phi(\vec{u}_0) \quad (\text{II.9})$$

Pour que la solution existe,  $\phi''(\vec{u}_0)$  doit être inversible.

Des variantes de cette méthode existe :  $\phi''(\vec{u}_0)$  peut être remplacée par une approximation (*méthode de quasi-Newton*). Nous renvoyons le lecteur vers l'ouvrage de Culioli [CUL 94] pour plus de détails.

## II.2.4 La méthode du gradient conjugué

Une alternative bien connue à la méthode de Newton est la méthode des gradients conjugués. On dit que deux directions  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_0$  sont conjuguées si  $\vec{d}_0^t\phi''(\vec{u}_0)\vec{d}_1 = 0$ . L'algorithmique de la méthode du gradient conjugué est constituée des étapes suivantes :

1.  $\vec{u}_0$  est point de départ et on choisit la direction  $\vec{d}_0 = \nabla\phi(\vec{u}_0)$ . On pose  $\mathbf{A} = \phi''(\vec{u}_0)$  et on note  $\|\vec{d}\|_{\mathbf{A}}^2 = \vec{d}_0^t\mathbf{A}\vec{d}_0$
2. on construit le point  $\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \alpha_0\vec{d}_0$  avec  $\alpha_0 = \frac{\|\vec{d}_0\|^2}{\|\vec{d}_0\|_{\mathbf{A}}^2}$
3. on construit la direction  $\vec{d}_1$  combinaison de  $\vec{d}_0$  et de  $\nabla\phi(\vec{u}_1)$  telle que  $\vec{d}_1 = \nabla\phi(\vec{u}_1) - \frac{\vec{d}_0^t\mathbf{A}\nabla\phi(\vec{u}_1)}{\|\vec{d}_0\|_{\mathbf{A}}^2}\vec{d}_0$
4. ...
5. connaissant  $\vec{u}_i$  et  $\vec{d}_i$ , on actualise  $\mathbf{A} = \phi''(\vec{u}_i)$  et on optimise  $\phi$  le long de la direction  $\vec{d}_i$ .  
On obtient  $\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i - \frac{\vec{d}_i^t\nabla\phi(\vec{u}_i)}{\|\vec{d}_i\|_{\mathbf{A}}^2}\vec{d}_i$
6. on cherche la direction  $\vec{d}_{i+1}$  conjuguée de  $\vec{d}_i$  et  $\vec{d}_{i-1}$   
 $\vec{d}_{i+1} = \nabla\phi(\vec{u}_i) - \frac{\vec{d}_i^t\mathbf{A}\nabla\phi(\vec{u}_{i+1})}{\|\vec{d}_i\|_{\mathbf{A}}^2}\vec{d}_i$
7. on itère les étapes 5 et 6 jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.

Des variantes existent également pour cette méthode (Fletcher-Reeves, ou Polak et Ribière) [CUL 94].

## II.2.5 La méthode des moindres carrés

Les méthodes précédentes ne prennent pas en compte la forme particulière de la fonction  $\phi$ . Partant de l'expression de  $\phi$  donnée par l'équation II.1, nous cherchons désormais à linéariser la fonction  $\vec{Y}$ .

Soient  $u$  le vecteur des paramètres à optimiser et  $\vec{u}_0$  un point de départ du problème de minimisation. Si  $\vec{Y}$  (réponse du modèle analytique) est continue et dérivable au voisinage de  $\vec{u}_0$ , on peut écrire le développement de Taylor à l'ordre 1 suivant :

$$\vec{Y}(\vec{u}_0 + \vec{\delta}_u) \simeq \vec{Y}(\vec{u}_0) + \nabla\vec{Y}_u\vec{\delta}_u = \vec{f}_0 + \mathbf{P}\vec{\delta}_u \quad (\text{II.10})$$

où  $\nabla$  définit l'opérateur gradient suivant la variable  $\vec{u}$  et  $\vec{\delta}_u$  est une petite variation de  $\vec{u}$ . La fonction  $\phi$  peut être alors approchée par la nouvelle fonction  $\hat{\phi}$  définie par :

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n \|Y_i - f_0^i - \nabla f_j^i \delta_j\|^2 \quad (\text{II.11})$$

$$= \|\vec{Y} - \vec{f}_0 - \mathbf{P}\vec{\delta}_u\|^2 \quad (\text{II.12})$$

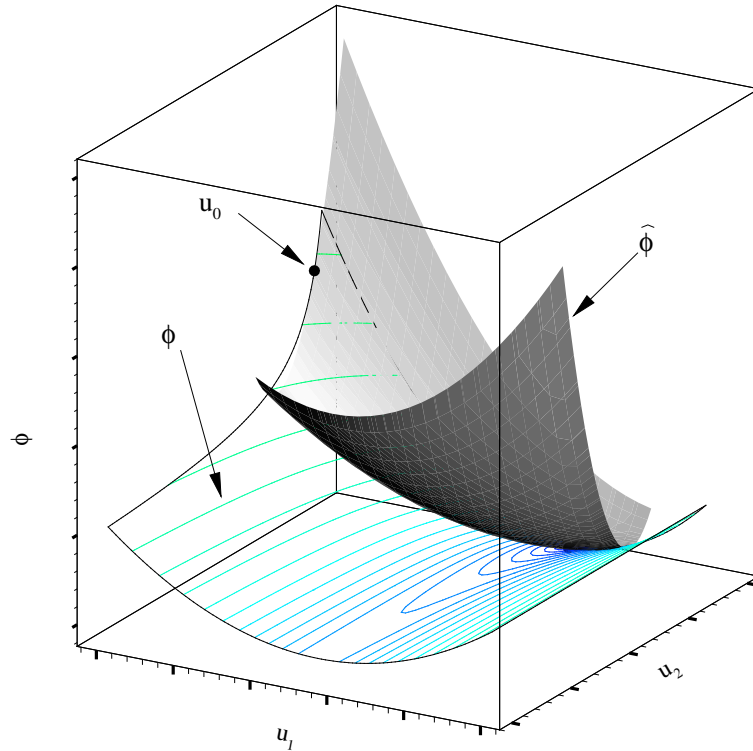


Figure II.1 : Visualisation de la fonction  $\hat{\phi}$  définie par l'équation II.11 définie au point  $u_0$  tangente à  $\phi$  en  $u_0$

Une condition nécessaire pour que  $\hat{\phi}$  soit minimum en  $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\delta}_u$  est :

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \vec{\delta}_u} = 0 \quad (\text{II.13})$$

ce qui se traduit par une équation matricielle de la forme :

$$\mathbf{A}\vec{\delta}_u = \vec{g} \quad (\text{II.14})$$

où  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^t\mathbf{P}$  et  $\vec{g} = \mathbf{P}^t(\vec{Y} - \vec{f}_0)$ . Soit  $\vec{\delta}$  la solution de l'équation (II.14),  $\vec{\delta}$  est solution de l'approximation de  $\phi$  par linéarisation de  $\vec{Y}$ . On itère ainsi l'opération au point  $\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \vec{\delta}$ .

Cette technique que nous appelons *Méthode des moindres carrés* diffère de la méthode de gradient en ce sens que ce n'est pas  $\phi$  qui est linéarisé mais  $\vec{Y}$ .  $\hat{\phi}$  est alors une forme quadratique tangente à  $\phi$  en  $\vec{u}_0$  dont l'optimum est connu et supposé proche de l'optimum de  $\phi$  (figure II.1). Cette méthode est relativement stable et permet d'atteindre le voisinage du point

optimal en suivant les *vallées* et en contournant les *bosses* (voir figure II.2). Elle présente cependant l'inconvénient de converger lentement vers la solution. Dans certains cas, le point courant peut osciller indéfiniment dans le voisinage de la solution sans l'atteindre. Cette technique peut

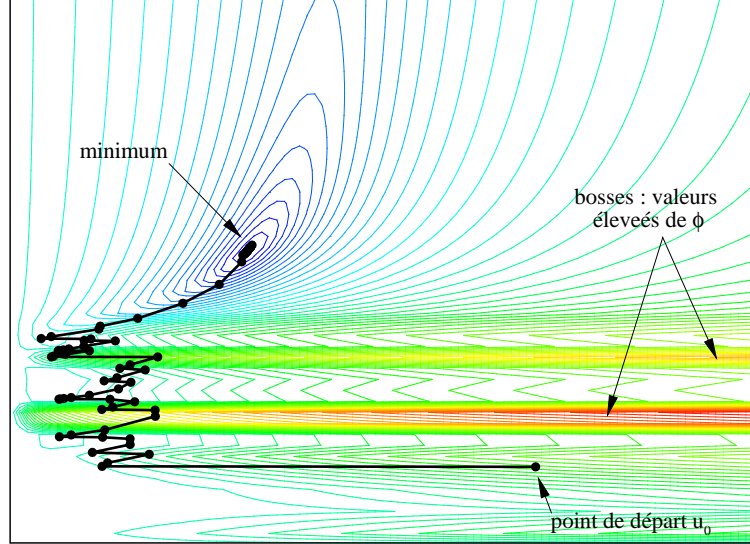


Figure II.2 : Exemple de contournement de *bosses* : partant du point  $u_0$  la méthode des moindres carrés converge vers le minimum en contournant les zones de valeurs plus élevées de  $\phi$ .

donc être employée pour « dégrossir » le problème d'optimisation, en pré-traitement d'une autre méthode à convergence plus rapide.

Notons également qu'afin de réduire le mauvais conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  et de ne pas favoriser certaines directions (cas de vallées très étroites, ou paramètres d'ordre de grandeurs très différents), il est possible de transformer le système (II.14) en changeant  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{A}^*$ ,  $\vec{g}$  en  $\vec{g}^*$  et  $\vec{\delta}_u$  en  $\vec{\delta}_u^*$ , avec :

$$\mathbf{A}^* = (a_{ij}^*) = \left( \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}} \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\vec{g}^* = (g_i^*) = \left( \frac{g_i}{\sqrt{a_{ii}}} \right) \quad (\text{II.16})$$

alors, la solution  $\vec{\delta}_u$  se déduit de  $\vec{\delta}_u^*$  par la relation :

$$\vec{\delta}_u = \frac{\delta_u^* i}{\sqrt{a_{ii}}} \quad (\text{II.17})$$

## II.2.6 Méthode de Levenberg-Marquardt

Sur la base de la méthode précédente, Marquardt [MAR 63] a proposé une nouvelle méthode, qui porte aujourd'hui le nom de Levenberg-Marquardt, très utilisée dans les problèmes d'identification par moindres carrés. Cette méthode consiste à ajouter au problème de minimisation de la fonction  $\hat{\phi}$ , donnée par l'équation (II.12), la contrainte  $\|\vec{\delta}_u\| = R_0$  où  $R_0$  est un rayon d'hypersphère

arbitraire. L'auteur introduit ainsi un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . La nouvelle fonction à optimiser devient alors  $\vec{u}(\delta, \lambda)$  définie par :

$$\vec{u}(\delta, \lambda) = \|\vec{Y} - \vec{f}_0 - \nabla \vec{f} \vec{\delta}\|^2 + \lambda(\|\vec{\delta}\|^2 - \vec{\delta}_0^2) \quad (\text{II.18})$$

La solution  $\vec{\delta}$  vérifie alors :

$$(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \vec{\delta} = \vec{g} \quad (\text{II.19})$$

Comme pour la méthode précédente,  $\vec{\delta}$  corrige le point obtenu au pas précédent.

L'algorithme consiste alors à ajuster  $\lambda$  à chaque itération de sorte que  $\phi$  au point courant décroisse entre deux itérations successives. L'auteur propose de partir d'une valeur de  $\lambda$  arbitraire, puis, à chaque itération et suite à une série de tests sur  $\phi$ , de multiplier ou de diviser une ou plusieurs fois  $\lambda$  par un facteur  $\nu > 1$ .

Cette méthode présente l'avantage d'être très rapide. En revanche, sa rapidité de convergence la rend moins stable que la *méthode des moindres carrés* et elle peut ne pas converger dans certains cas. La figure II.3 permet de visualiser le chemin parcouru au cours des itérations pour les deux dernières méthodes.

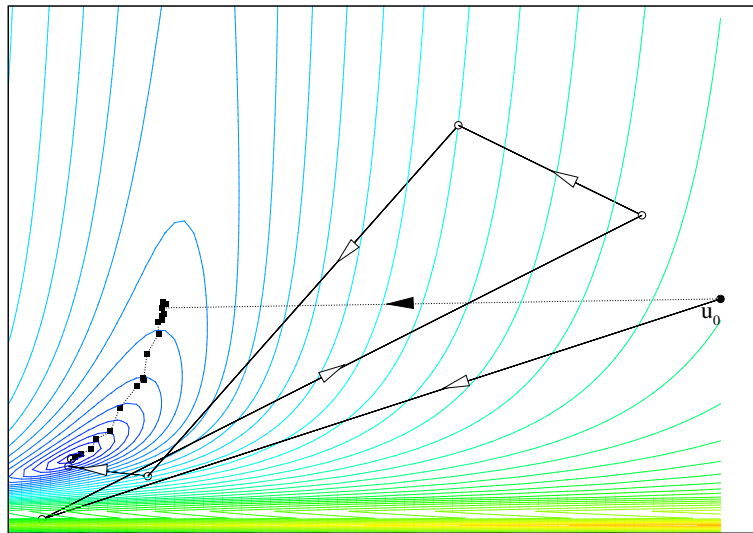


Figure II.3 : Comparaison de la méthode des moindres carrés (■) avec la méthode de Levenberg-Marquardt (○). Le point  $u_0$  est le point de départ de l'algorithme (les flèches ► et ▷ donne le sens de progression des itérations).

## II.3 Les algorithmes génétiques

Parallèlement à ces algorithmes classiques, les algorithmes génétiques (AG) ont fait leur apparition depuis quelques années dans le domaines de l'identification [FUR 97, LIU 02, YOS 03, MES 00]. Ces méthodes sont issus des travaux de Holland [HOL 75] et ont été largement diffusées, dès les années 80, grâce aux travaux de Goldberg [GOL 94]. Plus tard, Michalewicz retracera l'état de l'art en la matière [MIC 96].



### II.3.1 Principes des AG

Ces algorithmes font partie des algorithmes évolutionnaires (AE), c'est-à-dire des stratégies de calculs évolutifs qui doivent leur nom à leur analogie avec la théorie de l'*Evolution* développés par Charles Darwin en biologie. Le principe est la survie et la reproduction des individus les mieux adaptés à leur environnement qui ont pour conséquence, d'une part la transmission des caractéristiques nécessaires à la survie, d'autre part la *convergence évolutive* des espèces. Ce principe ne serait pas complet si nous n'incluions pas le principe de mutation des espèces, parfois bénéfique, parfois néfaste, permettant de faire des sauts de performance en augmentant la diversité génétique.

Les algorithmes génétiques sont des méthodes de convergence itérative globale d'une population et non pas d'un seul individu. Le processus de convergence n'est alors plus déterministe mais probabiliste, à l'instar de l'*Evolution Darwinienne* ; c'est une méthode *stochastique*. L'introduction du hasard confère aux AG des propriétés d'exploration de l'espace de recherche ne faisant plus dépendre strictement la solution d'un point de départ. Elle offre ainsi une plus grande chance d'obtenir un optimum global de la fonction objectif. Un autre avantage de cette méthode est de pouvoir optimiser une fonction objectif quelconque sans exigence de continuité ou de dérivabilité de celle-ci, et elle est adaptée aux fonctions à variables discrètes. Leur champ d'application est donc bien plus vaste que les méthodes classiques d'optimisation. Son inconvénient est son temps d'exécution souvent plus élevé comparé, lorsque cela est possible, aux méthodes mathématiques classiques.

L'algorithme peut être décrit par cinq étapes s'appliquant sur une population de  $P$  individus initialement générés aléatoirement [GOL 94, SEB 98] :

1. *évaluation* des individus d'une population
2. *sélection* des individus
3. *croisement* des individus sélectionnés
4. *mutation* des individus
5. *remplacement* par une nouvelle population

### II.3.2 Phénotype et génotype

La transmission des caractéristiques des individus parents à leurs enfants se fait par l'intermédiaire de *chromosomes*, par analogie avec la reproduction sexuée. Ainsi, les algorithmes génétiques opèrent sur les *gènes* contenus dans ces *chromosomes*. Les *chromosomes* sont la représentation codée de l'individu qui, rappelons le, n'est pas nécessairement un nombre. Nous pouvons ainsi distinguer deux espaces distincts, mais liés :

- l'espace phénotypique : c'est l'espace sur lequel s'effectue l'évaluation des performances  $\mathcal{F}$  permettant la sélection (ie: la « réalité »);

- l'espace génotypique : c'est l'espace de représentation sur lequel s'effectuent les croisements et les mutations (ie: la « représentation »).

La forme canonique du codage utilisée dans les AG est le codage informatique binaire. Chaque chromosome est une chaîne de 0 et de 1 de taille  $N$  choisi par l'utilisateur. Le codage binaire d'un nombre réel passe par un entier : il y a discrétisation. De même, l'intervalle de recherche est discrétisé en  $2^N$  entiers compris entre 0 et  $2^N - 1$ . Le codage s'effectue ensuite en décomposant l'entier en puissance de 2. Le chromosome s'écrit alors en classant les bits par puissance de 2 décroissante (arbitrairement). Le  $i$ -ème gène valant 0 si le caractère est 0 ou  $2^{i-1}$  si le caractère est 1 (Eq. II.20).

$$\begin{aligned} \boxed{0|1|0|0|1|1|1|0} &= 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 \\ &\quad + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 78 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

La convergence des AG s'appuie sur la *théorie des schémas*, sous-ensemble de  $\{0, 1\}^N$  (exemple : eq. II.21).

$$\boxed{0|1|*|*|1|0|*|1} \subset \{0, 1\}^8 \quad \text{avec} \quad \boxed{*} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{0} \text{ ou } \boxed{1} \quad (\text{II.21})$$

Le codage binaire offre donc le nombre maximal de schémas par bit et a été considéré pendant longtemps comme le codage le plus performant pour les algorithmes génétiques. Ce dogme est aujourd'hui remis en cause [SCH 98].

Les AG ne sont cependant pas dépendants du codage binaire [MIC 96] bien que l'analogie avec les gènes d'ADN soit tentante. Ainsi, il existe d'autres codages possibles, tels que les codages entier ou réel. La construction du codage dépend du problème à traiter (variable continue ou discrète). Cependant, il doit répondre à six principes [SEB 96, SCH 98] faisant appel à la notion de *formae*, forme, ou encore *briques élémentaires* (sous-ensemble de l'espace des représentations, généralisation des *schémas* du codage binaire) :

- *Principe 1 - redondance minimale* : un phénotype doit correspondre à un génotype unique. Au pire, si  $n$  génotypes représentent un seul phénotype, ces  $n$  génotypes doivent être proches ;
- *Principe 2 - corrélation formes-performance* : des formes petites (exemple : des schémas de cardinal petit) doivent concerner des individus de performances proches ;
- *Principe 3 - clôture de forme* : l'intersection de deux formes compatibles, si elle est non nulle, doit être une forme ;
- *Principe 4 - fermeture du croisement ou respect* : le croisement de deux individus d'une même forme  $\mathcal{H}$  doit donner un individu de forme  $\mathcal{H}$  ;
- *Principe 5 - ergodicité du croisement ou assortiment constructif* : si deux formes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont d'intersection non nulle, le croisement de deux individus appartenant à chacune des formes doit pouvoir donner un individu appartenant à la forme  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$  ;

- *Principe 6 - ergodicité de la mutation* : tout point de l'espace des solutions doit pouvoir être atteint par un nombre fini de mutation.

Le respect de ces principes permet de démontrer le *théorème des formes* de Holland [HOL 75] assurant la convergence des AG.

### II.3.3 Exploitation versus exploration

#### II.3.3.1 Diversité et convergence

Les AG fonctionnent sur un compromis entre l'*exploitation* des individus performants et l'*exploration* de nouveaux types d'individus par la mutation, mais également par la combinaison des caractéristiques génétiques des individus.

Le principe d'exploration consiste à tester et à conserver des nouvelles solutions non nécessairement meilleures (« il faut accepter de perdre de temps en temps pour gagner en final ») alors que l'exploitation utilise la *performance* des individus par l'intermédiaire de la *pression sélective*. Si cette dernière est trop forte, il y aura perte de la *diversité génétique* et convergence prématurée vers le meilleur individu trouvé au cours des itérations. Si cette pression sélective est trop faible, il y aura trop de diversité génétique et convergence lente. Les processus d'exploitation sont la sélection, le croisement. Les processus d'exploration sont le croisement et la mutation. On remarque ainsi que le croisement est l'opérateur principal des AG.

#### II.3.3.2 La sélection

L'étape de sélection se fait au sens probabiliste du terme. Les individus les plus performants ont une probabilité plus grande d'être sélectionnés. La manière de sélectionner ces individus n'est cependant pas unique. Nous donnons, ci-dessous, une liste non exhaustive des types de sélections possibles :

##### *sélection par tirage uniforme*

C'est le mode de tirage le plus simple puisqu'il ne fait pas intervenir la performance des individus. C'est évidemment celui qui conduit à conserver la diversité génétique de la population initiale, et par conséquent, ne favorise pas la convergence.

##### *le tournoi :*

Le tournoi est le tirage réellement sélectif le plus simple. Parmi  $p$  individus sélectionnés par un tirage uniforme, on choisit le plus performant.

##### *la troncation*

C'est également un mode de sélection simple. Parmi les  $\mu$  meilleurs individus, on effectue un tirage uniforme. Ce type de sélection nécessite le classement des individus afin de déterminer

les  $\mu$  meilleurs.

### ***le tirage à la roulette***

L'analogie de cette méthode avec la roulette tient dans la notion de cases dans lesquelles peut tomber une bille. Ce mode de sélection consiste à favoriser les meilleurs individus en leur attribuant des cases dont la largeur  $L_j$  est fonction de la performance de l'individu.

$$L_j = \frac{\mathcal{F}(X_j)}{\sum_{k=1}^P \mathcal{F}(X_k)} \quad (\text{II.22})$$

où  $P$  est le nombre d'individus de la population et  $X_j$  désigne l'individu  $j$ . On définit alors le rang  $r_j$  de l'individu :

$$r_j = \sum_{k=1}^j L_k \quad (\text{II.23})$$

On effectue le tirage uniforme de  $p$  entre 0 et 1. Si  $r_j < p < r_{j+1}$  alors on choisit l'individu  $X_j$ . Ce type de sélection requiert généralement une remise à l'échelle de  $\mathcal{F}$  de sorte que l'amplitude de ses variations ne soit pas d'un ordre de grandeur supérieur à sa valeur moyenne.

### **II.3.3.3 Le croisement**

#### ***Le croisement en codage binaire***

Le croisement en codage binaire consiste à échanger des gènes du  $i$ -ème chromosome d'un individu  $X$  avec les mêmes gènes du  $i$ -ème chromosome d'un individu  $Y$ . Ces échanges de gènes peuvent se faire, comme en biologie, en un ou plusieurs points de croisement. Les modes les plus fréquemment utilisés sont les *croisement à un ou deux points* (figure II.4(a)), ou le *croisement uniforme* c'est-à-dire via un masque (figure II.4(b)). La position du (ou des) point(s) de croisement ou la description du masque est aléatoire et change à chaque croisement. Le croisement par masque revient à un croisement à plusieurs points (dont le nombre est aléatoire) permettant d'éviter de favoriser les bits forts. D'autres types de croisement sont possibles, comme le *croisement par renversement* où l'ordre des bits échangés entre deux points de coupure est inversé.

#### ***Le croisement en codage réel ou entier***

Dans le cas où le code est réel ou entier, le mode de croisement précédent ne peut plus s'appliquer. Le mode de croisement proposé dans la littérature et respectant les principes évoqués dans la section II.3.2 est le *croisement barycentrique*. Le point de croisement est remplacé par un « poids » de croisement. Ainsi, des enfants  $C$  et  $D$  issus du croisement de  $A$  avec  $B$  s'obtiennent par l'équation suivante :

$$\begin{cases} C = \alpha A + (1 - \alpha) B \\ D = (1 - \alpha) A + \alpha B \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1] \quad (\text{II.24})$$

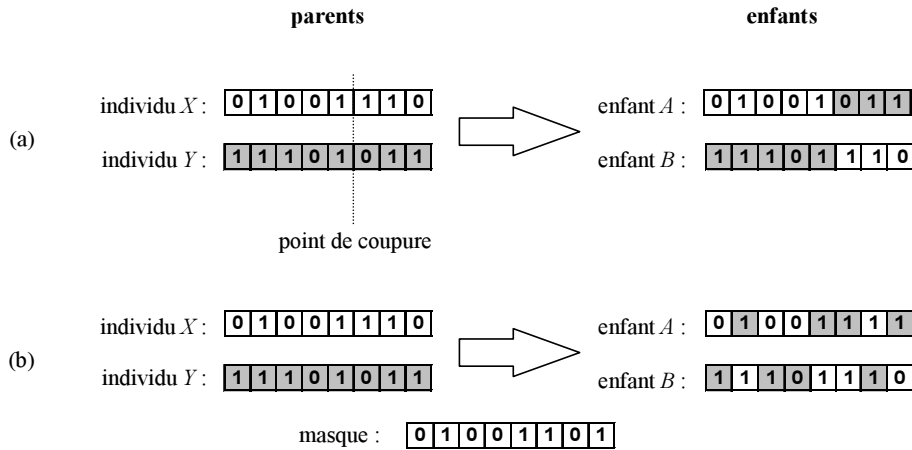


Figure II.4 : Deux modes de croisement pour un algorithme en codage binaire : (a) croisement à un point; (b) croisement uniforme

On choisit ensuite la partie entière des composantes de  $C$  et de  $D$  si le choix s'est porté sur un codage entier.  $\alpha$  est déterminé aléatoirement entre 0 et 1, comme pour le lieu du point de croisement dans le cas du codage binaire. Les enfants issus du croisement sont situés entre les deux parents. Cependant, certains auteurs [MIC 96, SEB 98] préconisent un choix de  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-0,5; 1,5]$  afin d'augmenter l'exploration des solutions possibles. Il convient alors de veiller à ne pas sortir des bornes du domaine de recherche. Si c'est le cas, le point peut être corrigé soit par projection sur les frontières, soit par rebond sur celles-ci [MES 00].

### *Le croisement restreint*

Il est possible d'introduire dans l'algorithme la notion de croisement restreint, c'est à dire que l'opération de croisement de l'individu  $X$  par l'individu  $Y$  n'est autorisée que si la distance  $d(X, Y)$  entre  $X$  et  $Y$  est inférieure à un seuil [SEB 98]. On crée ainsi la notion de sous-population. Si deux sous-populations convergent vers la même solution, elle peuvent alors finir par fusionner. Dans le cas contraire, l'algorithme peut fournir plusieurs solutions simultanément. Cette technique permet de mettre en évidence l'existence d'optima multiples. Sans croisement restreint, le processus stochastique finit toujours par favoriser un des optima au détriment des autres.

Prenons l'exemple de la fonction  $\mathcal{F}(X) = -f(x_1, x_2)$  proposée par Liu [LIU 02] et définie par :

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} -6 < x_1 < 6 \\ -6 < x_2 < 6 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

La fonction possède quatre optima identiques (fig. II.5(a)). L'application du mode de croisement restreint permet de converger simultanément vers les différents extrema (nuages de points plus denses sur la figure II.5(b)).

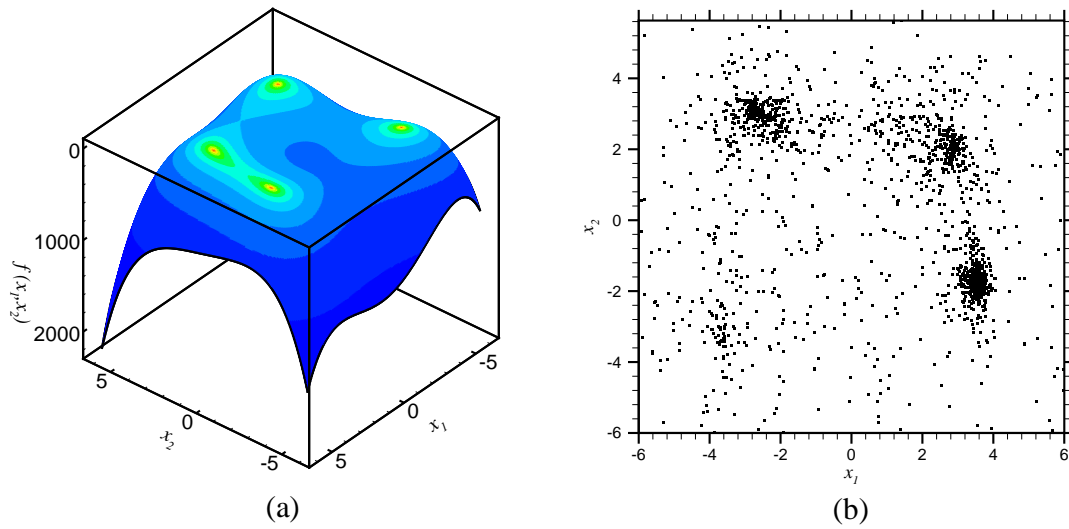


Figure II.5 : (a) Fonction  $f(x_1, x_2)$  ; (b) Populations g n r es par l'AG

Ce mode de croisement n'est cependant pas une garantie pour trouver plusieurs extrema. Plus le seuil est faible, moins le choix de candidats au croisement est important. Il y a alors perte possible de diversité et perte des performances de l'AG. La convergence peut se faire sur un point qui n'est pas un extremum. Il convient alors d'ajuster le seuil en fonction de la taille du domaine et de la population.

**II.3.3.4 La mutation**

La mutation est le seul contrepois à la perte de diversité qui se produit dans le processus de convergence évolutive. Elle consiste à créer des altérations sur les gènes de manière aveugle, dans le but d'introduire de nouvelles formae dans la population. Cette mutation se fait au hasard suivant un taux de *probabilité de mutation*  $p_m$  fixé par l'utilisateur. Pour que cette mutation soit effective, il faut que  $p_m$  vérifie [SEB 98]:

$$p_m > \frac{1}{N P} \tag{II.26}$$

où  $N$  et  $P$  sont respectivement le nombre de gènes et le nombre d'individus de la population.

En codage binaire, cette mutation s'effectue en remplaçant le gène mutant par sa valeur complémentaire. Si le gène vaut 0, il est remplacé par un 1 ; s'il vaut 1 il est remplacé par un 0 [GOL 94].

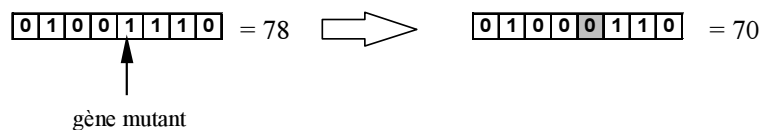


Figure II.6 : Mutation d'un gène en codage binaire

En codage réel ou entier, la mutation peut se faire en ajoutant une perturbation gaussienne de variance  $\sigma$  et centrée sur 0. Le taux  $p_m$  et la variance  $\sigma$  peuvent être fixés au cours des itérations (des générations) ou peuvent évoluer en fonction des résultats. On parle alors de *mutation adaptative*. En effet, si beaucoup d'enfants issus de mutation sont meilleurs que les autres, on peut envisager d'augmenter le taux de mutation. On peut également, dans le cas du codage binaire, faire dépendre ce taux de mutation de la position du bit afin de favoriser les mutations sur les bits les plus faibles et faciliter ainsi la convergence.

### II.3.3.5 Le remplacement

La manière de remplacer la population courante par une population nouvelle peut être de plusieurs types. Le choix de la méthode dépendra de la nature du problème traité. Il convient cependant, à nouveau, de veiller à un bon compromis entre l'exploitation des performances acquises par la population, et l'exploration et la conservation de la diversité génétique.

Les types de remplacement classiques sont :

- les  $P$  parents sont remplacés par  $P$  enfants ;
- le meilleur individu fait un enfant qui remplace le pire individu ;
- $\mu$  parents font beaucoup d'enfants et on garde les  $P$  meilleurs parmi les enfants ;
- $\mu$  parents font beaucoup d'enfants et on garde les  $P$  meilleurs parmi les enfants et les parents (remariages possibles).

Au remplacement peut s'ajouter le principe d'*élitisme*. Si le meilleur individu de la nouvelle génération n'est pas plus performant que le meilleur individu de l'ancienne génération, alors on remplace le pire individu de la nouvelle génération par le meilleur individu de l'ancienne génération. Ce processus favorise la convergence en forçant la conservation du meilleur individu d'une génération à l'autre.

## II.3.4 Mise en œuvre d'un AG

Nous venons de voir les grands principes des AG. En pratique, sa mise en œuvre pose quelques difficultés de par la nature stochastique de l'algorithme et offre des choix (codage, mode de sélection, ...) qui ne sont pas sans conséquence sur la convergence.

### II.3.4.1 La forme canonique et les variantes

On peut imaginer beaucoup de variantes possibles aux AG. Michalewicz [MIC 96] en donne un aperçu (notion d'âge des chromosomes, reproduction « on-the-fly », marquage des chromosomes sélectionnés, point de croisement adaptatif, ...). Il serait difficile d'en faire le tour. Nous nous limiterons ici aux opérateurs classiques appliqués aux codages binaire et entier (ou réel).

Dans notre problématique d'identification, les *individus*  $X$  sont des points de l'espace de recherche, c'est-à-dire le vecteur  $u$  des *paramètres matériau*, tandis que la fonction *performance*, évoquée dans le cadre de la sélection des individus, est l'opposée de la fonction  $\mathcal{F} = -\phi$  de l'équation (II.1) (le signe  $-$  provient du fait que  $\phi$  doit être minimisé alors qu'un AG est construit pour maximiser la fonction  $\mathcal{F}$ ).

### II.3.4.2 La convergence

La convergence des AG repose sur leur nature stochastique ainsi que sur la théorie des grands nombres. La convergence d'un AG n'est donc pas garantie. Michalewicz remarque en effet qu'il existe une limite à l'hypothétique nombre illimité d'itérations, et une limite à l'hypothétique nombre illimité d'individus de la population. Or, ces derniers sont fixés par l'utilisateur qui devra faire des mises au point en fonction du problème traité. De même, de par la nature stochastique de l'algorithme, aucune conclusion ne doit être tirée d'une seule exécution et il est recommandé de lancer plusieurs fois un AG pour tenter d'atteindre l'extremum global. Une alternative est d'augmenter le nombre d'individus ; ceci est d'autant plus vrai qu'on utilise un croisement restreint qui partage le nombre d'individus en sous-population.

La convergence est moins sensible au nombre de générations maximal fixé, à condition de ne pas le considérer trop petit. Il est préférable de fixer ce nombre à une valeur haute et de définir un critère d'arrêt. Ce dernier permet d'arrêter la procédure si les chances d'amélioration de la solution sont minces. Il peut être défini sur le génotype (évaluation de la diversité génétique) ou sur le phénotype (évaluation de l'amélioration de la performance).

### II.3.4.3 Les nombres aléatoires

Le bon fonctionnement d'un AG repose sur la qualité des routines informatiques de tirage de nombres aléatoires. Pour notre part, nous utilisons la routine `rand_gen` du compilateur Compaq Visual Fortran sur un micro-processeur Pentium 4. Pour garantir la qualité d'exploration de l'AG, il convient de s'assurer que ces routines sont fiables d'un point de vue statistique, à savoir :

- les tirages aléatoires ne suivent pas une répartition Gaussienne (répartition uniforme) ;
- les nombres tirés aléatoirement ne présentent pas de périodicité ;
- deux exécutions successives ne produisent pas le même jeu de nombres aléatoires (indépendance de la compilation).

Le premier point se vérifie en comptant le nombre de tirages identiques dans une série de nombres aléatoires. En pratique, le nombre de tirages n'étant pas infini, on forme des classes de nombres en partitionnant l'intervalle de tirage. La figure II.7 montre une partition de 50 classes suite à un tirage de  $10^8$  nombres compris entre 0 et 1. On constate que le tirage de nombres par la routine utilisée est proche du tirage uniforme, le nombre moyen de tirages par classe devant être  $2000000 = 10^8/50$ . Un autre test à réaliser est le test d'auto-corrélation. Sur un signal



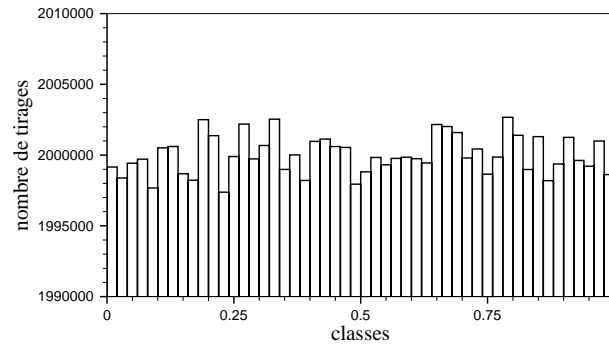


Figure II.7 : Exemple de répartition des tirages

aléatoire  $x(t)$ , la fonction d'auto-corrélation s'écrit :

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t - \tau) dt \quad (\text{II.27})$$

Si on note  $\bar{m}$  la valeur moyenne du signal et  $\bar{\sigma}$  son écart type :

$$\bar{m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{m})^2 dt \quad (\text{II.28})$$

Pour un processus aléatoire,  $C(0)$  vaut  $\bar{\sigma}^2 + \bar{m}^2$ , et  $C(\infty)$  vaut  $\bar{m}^2$ . La figure II.8 montre la

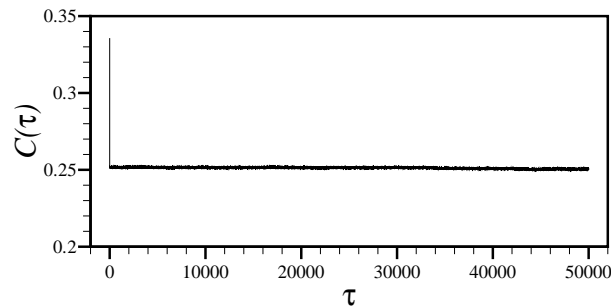


Figure II.8 : Exemple d'auto-corrélation des tirages

fonction  $C(\tau)$  calculée pour un tirage de  $10^5$  nombres entre 0 et 1. Pour ce tirage nous obtenons  $\bar{m} = 0.5005555$  et  $\bar{\sigma} = 0.2893765$  et nous vérifions bien  $C(T) = 0.2506404 \simeq \bar{m}^2 = 0.2505558$ . De plus, la courbe obtenue est plate, ce qui signifie qu'il n'existe aucune périodicité sur les  $10^5$  tirages.

#### II.3.4.4 Le choix du codage

Nous avons vu précédemment que plusieurs codages étaient possibles. Certains auteurs [MIC 96] préconisent un codage des paramètres le plus proche de l'espace de travail. Ainsi, il est préférable de travailler avec des entiers ou des réels dans notre problématique d'identification des paramètres matériau.

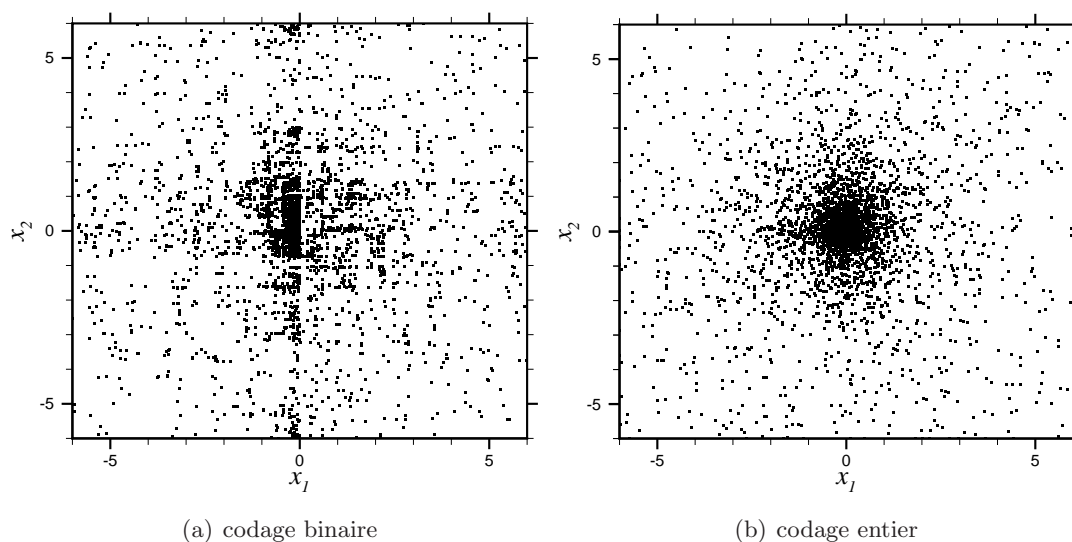


Figure II.9 : Deux ensembles populations générées au cours des générations par l'AG pour la fonction  $\mathcal{F}(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$

La principale critique faite au codage binaire [SCH 98] est son manque de continuité (Falaises de Hamming) qui empêche par exemple de passer de l'entier 7 (codé par  $\boxed{0} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1}$ ) à l'entier 8 (codé  $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}$ ) par simple mutation sur 1 bit. Ainsi, le codage binaire ne vérifie pas le principe de corrélation énoncé dans la partie II.3.2. Ce manque de continuité de la représentation induit également un opérateur croisement peu performant. Ainsi, le croisement de  $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}$  (valant 8) avec  $\boxed{0} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1}$  (valant 7) permet de générer n'importe quel nombre entier entre 0 et 15 alors que le croisement de  $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}$  (valant 8) avec  $\boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0}$  (valant 0) ne peut fournir que les nombres entiers 0 ou 8.

Les conséquences sont la formation de franges dues à la faible ergodicité de croisement qui agit comme un filtre sur l'ensemble de la population générée (figure II.9) et freine l'adaptation par émergence de solutions intermédiaires. Une comparaison plus détaillée des codages binaire et entier a été réalisée par Messenger [MES 00] dans le cadre de sa thèse.

Bien que des tentatives d'amélioration du codage binaire existe (codage Gray, voir [MIC 96]), nous nous bornerons à la programmation d'un AG supportant le codage binaire canonique et le codage entier.

## II.4 L'identification par une approche Orientée Objet

### II.4.1 Motivation

Nous cherchons, à présent, à développer une application informatique permettant de résoudre notre problème d'identification de paramètres matériau. La diversité des méthodes d'optimisation présentées dans ce chapitre, la multitude de lois de comportement exposées dans la section A.4 ainsi que les différents modes de déformation possibles (section A.3.1) nous ont orientés vers un mode de programmation le plus général possible offrant la possibilité de faire évoluer les types de données et les types de traitement de ces données de manière indépendante. Ce type de problématique est résolu de manière classique par une programmation Orientée Objet.

La programmation orientée objet est un paradigme et non un langage proprement dit [JAT 03]. Ses principes peuvent être développés au travers d'un langage conventionnel bien que certains langages favorisent sa mise en œuvre. Ainsi, bien que notre application ait été développée en Fortran90, nous n'aborderons pas les détails de programmation.

Les sections suivantes ont donc pour but de décrire les notions développées dans notre application informatique, en particulier les concepts d'*objets* et l'application de ces concepts dans notre cas particulier.

### II.4.2 Description de la Programmation Orientée Objet (POO)

#### II.4.2.1 Qu'est ce qu'un objet ?

La POO consiste à modéliser informatiquement un ensemble d'éléments physiques ou abstraits en un ensemble d'entités informatiques regroupant leurs caractéristiques. Contrairement à la programmation procédurale, ces entités peuvent être de natures différentes. Ainsi, une classe d'objet est définie autant par des données (entiers, réels, booléens, caractères) que par des *méthodes* associées à l'objet. On appelle *méthodes* l'ensemble des opérations s'appliquant aux objets. Cependant, elles portent des noms différents en fonction de leur nature : on distingue par exemple les *constructeurs* permettant de créer les objets (ou les initialiser), les *constructeurs de copie* permettant de copier les objets, les *destructeurs*, les *fonctions* et les *interfaces*.

#### *La classe*

Une classe (d'objet) est le type d'un objet, indépendamment de son identité. Un objet est issu d'une classe. La classe est donc une sorte de moule, ou structure, qui est défini par :

- des attributs : il s'agit des données représentant l'état de l'objet ;
- des méthodes : il s'agit des opérations applicables aux objets.

#### *L'objet*

Un objet est défini par :

- une identité : c'est l'étiquette permettant de définir l'objet indépendamment de son état ;
- des attributs : il s'agit des variables stockant les informations sur l'état de l'objet ;
- des méthodes : c'est l'ensemble des fonctions, des routines caractérisant la réponse de l'élément vis à vis de sollicitations extérieures ou d'une requête.

La distinction entre l'objet et sa classe est de même ordre qu'entre une variable et le type de cette variable (entier, réel, ...) en programmation procédurale. L'objet est parfois appelé *instance d'une classe* ou *occurrence d'une classe*.

#### II.4.2.2 Les grands principes de la POO

La programmation orientée objet (POO) est une alternative à la programmation procédurale. La démarche algorithmique de la programmation procédurale est remplacée par une attitude de généralisation (ou abstraction) et de séparation des types de données et des méthodes de traitement de ces données. On programme alors en partant du général vers le cas particulier, pour tendre vers une programmation la plus générique possible. L'objectif d'une telle approche est de favoriser la réutilisation de programmes ou de fonctions, et ainsi permettre à un code d'évoluer fréquemment afin de perdurer. La réutilisation des codes orientés objets est rendue possible par les notions d'*héritage*, d'*encapsulation* et de *polymorphisme*.

##### *L'héritage*

L'héritage est le mécanisme de transmission des propriétés d'une classe d'objets. Ce mécanisme permet de définir une hiérarchie de classes allant du plus général au plus particulier. A chaque niveau, la classe dérivée hérite des propriétés de la classe dont elle dérive, ce qui évite d'avoir à redéfinir ces propriétés (cette notion n'existe pas en Fortran90). Ainsi, il est possible de se procurer des bibliothèques de classes qui constituent une base sur laquelle on pourra définir des classes dérivées spécialisées. Une classe peut dériver de deux classes distinctes. On parle alors d'héritage multiple.

##### *L'encapsulation*

L'encapsulation est le masquage des détails de programmation. Elle permet l'évolution d'une application par la stabilisation des échanges des informations utiles liées à un objet. Ces échanges se font par l'intermédiaire d'*interfaces*, qui définissent les accès aux informations particulières d'un objet. Par exemple, une interface nommée *taille*, peut donner une information sur un objet *matrice* sans que l'utilisateur n'ait besoin de connaître comment l'objet *matrice* est programmé. Les interfaces sont les opérateurs (méthodes) permettant de définir la partie visible d'un objet.

### ***Le polymorphisme***

Le polymorphisme est la faculté d'une méthode à pouvoir s'appliquer à des objets de classes différentes. Le polymorphisme augmente donc la « généralité » d'un code. On généralise ainsi la programmation car l'appel des fonctions est rendu indépendant des objets particuliers. Par exemple, une fonction *affiche* peut se définir sur des objets de type *nombre entier*, *nombre réel*, *vecteur*, *matrice*, *texte*, ou tout autre objet ou cette fonction a un sens.

On distingue alors la *surcharge*, le *polymorphisme statique* et le *polymorphisme dynamique* :

- On parle de surcharge lorsque, dans une classe donnée, deux méthodes retournant le même type de sortie portent le même identificateur mais s'applique à des paramètres de types différents. La surcharge est mise en place lors de la compilation. Selon le type considéré, le compilateur interprétera la méthode selon le type d'objet ;
- La notion de polymorphisme statique est liée à celle de *template* qui définit des fonctions génériques qui peuvent s'appliquer sur des objets de classes différentes. L'interprétation de ces fonctions est faite lors de la compilation ;
- Le notion de polymorphisme dynamique est liée quant à elle à la notion d'héritage (elle n'est donc pas possible en Fortran90). Elle est mise en place lors de l'exécution du code. Prenons l'exemple de deux classes *triangle* et *rectangle* dérivant d'une classe *objet géométrique*. La méthode *dessine* est définie dans la classe *objet géométrique* et peut être redéfinie, si nécessaire, dans les classes dérivées en fonction des cas particuliers. Un appel de la fonction *dessine* peut être fait sur un *objet géométrique* sans connaître son type particulier. C'est lors de l'exécution que le code utilisera la fonction adaptée à l'objet. Ces méthodes sont de même type et ont le même type de paramètres.

### **II.4.2.3 Les avantages et les inconvénients de la POO**

#### ***Les avantages***

La POO, comme nous l'avons signalé, s'oppose à la programmation procédurale (ou fonctionnelle) en ce sens où l'algorithmique n'est pas figé par la manière dont le code a été écrit. En particulier, les multiples variables de passage des routines ou le nom des variables d'un problème peuvent être sources de difficultés lorsqu'un programme doit être modifié. La POO offre donc une bonne alternative puisqu'un objet peut être modifié sans que les variables d'appel d'une routine ne soient changées. Ainsi, la POO doit être abordée en termes d'utilisation des objets plutôt qu'en termes d'algorithme figé. Par exemple, dans notre problématique une fonction *identifie* appliquée à un objet *modèle* doit fournir un objet *modèle* dont l'état correspond au modèle identifié, indépendamment de l'algorithme qui a permis d'identifier ce modèle. La POO est donc plutôt attachée à une *sémantique* claire entre l'utilisateur et le programme qu'aux procédures qui permettent de répondre à une requête.

Pour un problème donné, les deux types de programmation donneront bien entendu les mêmes résultats, et les mêmes opérations seront exécutées pour y aboutir. La POO offrira cependant l'avantage de fournir un programme susceptible d'évoluer plus facilement en offrant des fonctions générales tendant vers le générique.

### ***Les inconvénients***

Les inconvénients de la POO sont liés à ses avantages. En premier lieu, il convient de noter que l'approche objet est moins intuitive que l'approche fonctionnelle. Il est plus naturel de décomposer un problème sous forme de hiérarchie de fonctions qu'en terme d'objets et d'interactions entre objets.

Un autre inconvénient de la POO est possible de rendre une hiérarchie de classe trop rigide, rendant son évolution difficile ou impossible. La POO nécessite donc une plus grande réflexion avant de commencer la programmation. Il convient de bien définir les objets et les classes d'objet en orientant la réflexion sur les interactions entre objets ou entre le programme et l'utilisateur.

## **II.4.3 Exemples de l'application**

Les notions très générales de la POO que nous venons d'aborder ont été appliquées à notre problématique d'identification. Les sections suivantes décrivent les classes développées pour deux aspects de cette thématique : les Algorithmes Génétiques et l'Identification proprement dite.

### **II.4.3.1 Les AG**

Bien que notre problématique soit l'identification de modèle de loi de comportement, nous regardons actuellement une partie de l'application finale, les Algorithmes Génétiques (voir la section II.3), que nous souhaitons traiter de manière indépendante et suffisamment générale pour être utilisée si nécessaire dans un autre contexte.

### ***Les principes des AG***

La finalité de l'optimisation par AG est d'offrir la possibilité de tester toute sorte de variantes entrevues dans la section II.3. C'est le niveau d'abstraction et de généralisation qui doit être conservé pour répondre aux objectifs de la POO. Ainsi, ce sont les grands principes des AG qui doivent nous guider vers le développement de l'application OO.

Rappelons que le principe des AG est de faire se reproduire, au cours de plusieurs générations, une ou des populations d'individus soumis à une pression sélective et à des mutations. La pression sélective est définie par une évaluation de la performance des individus (phénotype), tandis que la mutation et le croisement s'opèrent sur des chromosomes (génotype). A chaque génération une série de *procédures* est effectuée sur une population pour la faire évoluer (évaluation, sélection, croisement, mutation, remplacement). Nous retrouvons donc ici une notion de la

programmation procédurale. Cependant, cette dernière n'est pas incompatible avec la programmation orientée objet puisque l'application finale est un algorithme (génétique).

Nous pouvons donc définir, sans perte de généralité, le paquetage nécessaire pour les AG, c'est-à-dire la relation de composition et les relations indirectes entre les notions des AG. Nous voyons apparaître deux notions qui étaient jusqu'à présent implicites, à savoir, le *génom*e et l'*environnement*. Le premier est lié au codage des chromosomes : c'est le lien entre les gènes et le phénotype, ce qui permet d'interpréter les chromosomes <sup>1</sup> ; le second est l'ensemble des paramètres extérieurs qui définissent le terrain sur lequel doit évoluer la population et le critère de performance des individus. Les notions du schéma II.10 servent de bases pour définir les

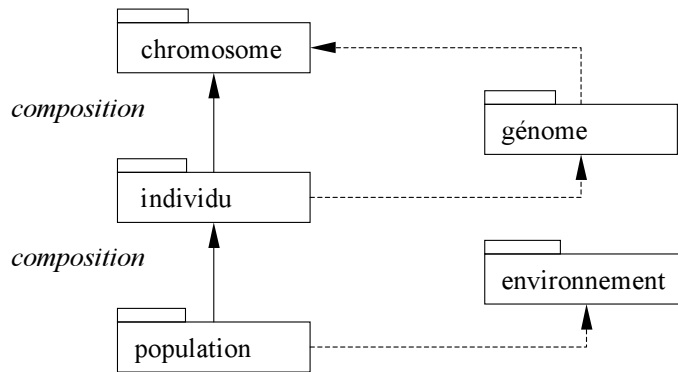


Figure II.10 : Paquetage des Algorithmes Génétiques

classes d'objets dont nous aurons besoin lors de la programmation.

### *L'analyse applicative*

Il convient maintenant de préciser le contenu des objets en définissant une sémantique qui servira à son tour de base pour définir les méthodes et les attributs des objets. Ainsi, l'analyse applicative doit ici faire le compte des différents cas d'utilisation envisageables pour le programmeur, les variantes des AG devant être considérées comme des cas d'utilisation particuliers. Ainsi, la sémantique à définir doit être établie pour le programmeur, et non pas pour un utilisateur souhaitant utiliser une méthode d'optimisation en « boîte noire ».

Commençons par définir le cas d'une utilisation standard des AG. Le diagramme II.11 permet alors de définir la sémantique de base de notre POO. En fait, ce cas d'utilisation est suffisamment général pour englober les différents cas que nous avons rencontrés. Les variantes que nous avons pu mettre en place n'impliquaient des changements que dans les relations d'utilisation entre objets. Ainsi, seul l'objet *environnement* a été enrichi pour pouvoir définir des cas d'utilisation supplémentaires.

<sup>1</sup>le terme « génome » n'est donc pas pris selon sa définition littérale.

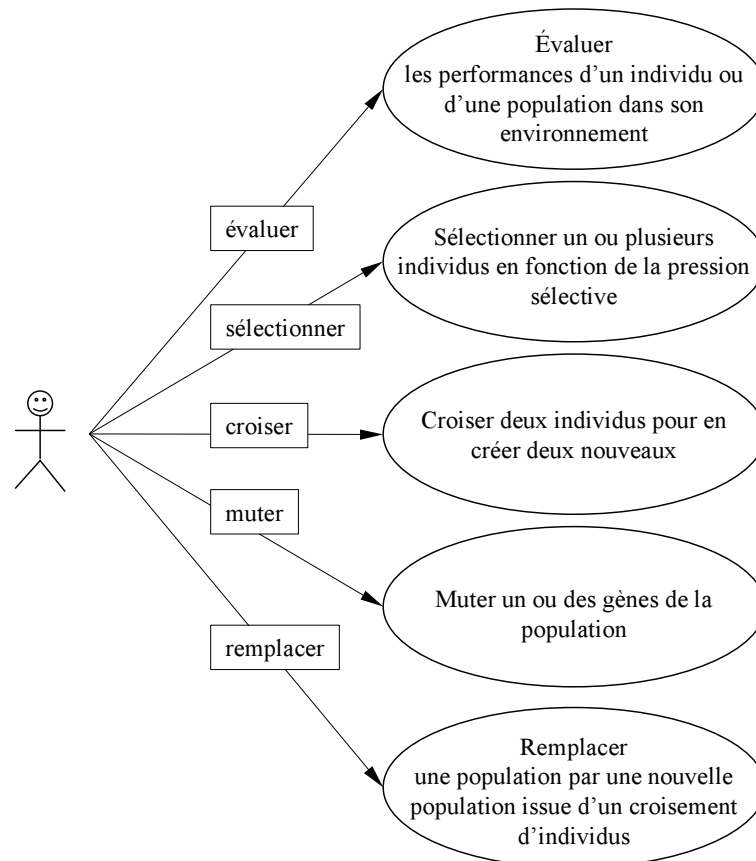


Figure II.11 : Cas d'utilisation standard

### *Les relations d'utilisation*

Nous pouvons à présent définir plus en détails les relations entre objets dans le cadre de la sémantique établie ci-dessus, et le cas échéant préciser cette sémantique.

Le diagramme II.12 permet, entre autres, de définir la notion de décodage et de la mettre en relation avec le génome. Il convient de remarquer que le génome est ici considéré comme universel alors qu'en toute rigueur il est lié à une population ; nous introduisons alors la notion d'espèce. Pour simplifier notre approche, nous considérerons que nous n'avons affaire qu'à une seule espèce. Ce diagramme montre que l'environnement détermine la performance d'un individu. Par conséquent, en POO, une fonction à optimiser devra être introduite par ce biais.

Des diagrammes similaires peuvent être établis pour définir les *méthodes* de sélection d'individus, de croisement, de mutation et de remplacement. Le but de cette partie n'est pas d'établir la liste exhaustive de ces méthodes, mais d'illustrer la méthodologie employée pour mettre en œuvre la programmation orientée objet et qui conduit à la définition des classes dédiées aux AG.

### *Les classes*

Après avoir défini les liens entre les types de données et les méthodes associées à ces données, la définition des classes est aisée. Ainsi, la programmation des AG en POO a finalement abouti



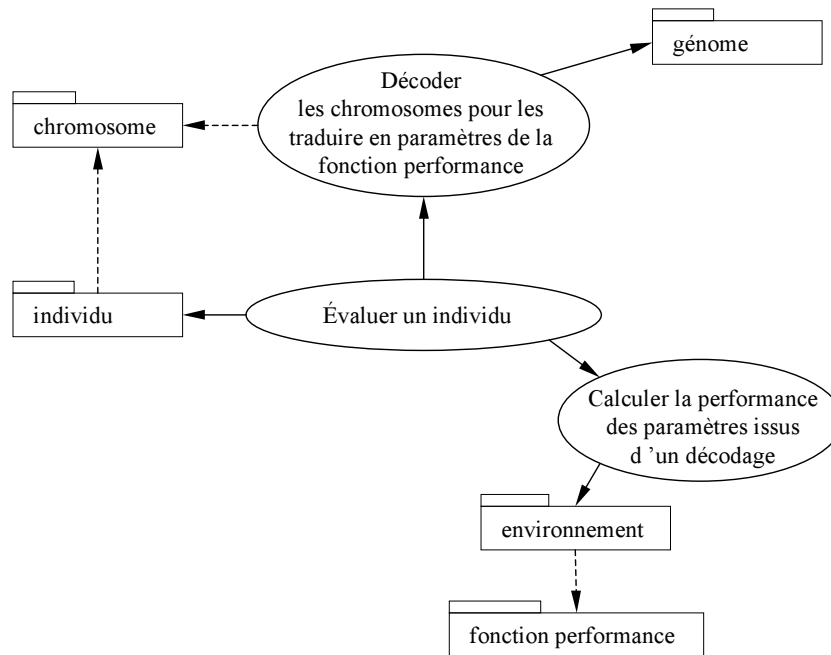


Figure II.12 : Diagramme de relation d'utilisation de l'évaluation d'un individu

à la création de sept classes (*population*, *individu*, *chromosome*, *gène*, *génome*, *argument* et *environnement*). Ces classes sont imbriquées par composition puisqu'une population contient une liste d'individus, eux-mêmes définis par une liste de chromosomes formés de gènes. Les tableaux II.1, II.2, II.3 et II.4 illustrent respectivement la composition des classes *population*, *environnement*, *génome* et *individu*. Les trois cases de chaque tableau regroupent respectivement le nom de la classe, les attributs et les méthodes :

population	
type génome	génome
entier	nombre d'individus
type individu	tableau d'individus
entier	rang du meilleur individu
réel	meilleure performance
entier	rang du pire individu
réel	pire performance
réel	somme des performances
réel	performance moyenne
réel	écart type sur les performances
entier	numéro de génération de la population
créé()	
évalue(population,environnement)	
remplace(population1,population2)	
type individu	sélectionne(individu,environnement)
type <i>vide</i>	affiche()
type <i>vide</i>	exporte(iu)

Tableau II.1: Définition de la classe population

environnement	
entier	nombre maximum de générations
chaîne de caractères	méthode de sélection
réel	probabilité de mutation
booléen	partage
réel	distance maxi de croisement
créé()	
modifie nombre de générations()	
...	

Tableau II.2: Définition de la classe environnement

génomme	
entier	nombre de paramètres
chaîne de caractères	codage
entier	nombre de gènes
réel	tableau des bornes inférieures
réel	tableau des bornes supérieures
créé()	
modifie codage(chaîne de caractère)	
modifie nombre de gènes(entier)	
...	

Tableau II.3: Définition de la classe génome

individu	
réel	performances
type chromosome	liste de chromosomes
créé()	
évalue()	
...	

Tableau II.4: Définition de la classe individu

### II.4.3.2 L'identification

Après cette illustration rapide de la POO pour les Algorithmes Génétiques, nous appliquons les mêmes méthodes pour définir notre application d'identification de paramètres de loi de comportement. Nous restreignons volontairement notre approche aux lois de comportement hyperélastiques en laissant à cette application la possibilité d'évoluer pour d'autres types de lois (viscoélastiques, élastoplastiques, ...).

#### *Les principes*

Contrairement au cas précédent, notre application finale est plutôt destinée à un expérimentateur, par conséquent la sémantique associée devrait en toute rigueur ne pas faire intervenir d'aspect informatique ou algorithmique. Cependant, nous nous donnons la possibilité de pouvoir choisir plusieurs méthodes d'optimisation, ou même d'en utiliser plusieurs successivement.

La problématique générale est d'identifier par optimisation les paramètres d'une loi de comportement à partir d'un plan d'expériences. Ce plan d'expériences est constitué de plusieurs expériences de natures distinctes que nous supposons restreintes à des courbes de réponses (force-déplacement, contrainte-élongation, ...). Pour l'utilisateur, les modèles de loi de comportement seront prédéfinis et distingués par leur nom usuel. Cependant, pour le programmeur, ces lois seront des objets d'une même classe, permettant ainsi l'implantation rapide d'un nouveau modèle sans avoir à redéfinir l'ensemble de l'application. Nous pouvons alors distinguer trois types de paquetage. L'un concerne les notions expérimentales, le second les notions de modèle, enfin le troisième est rattaché aux algorithmes choisis.

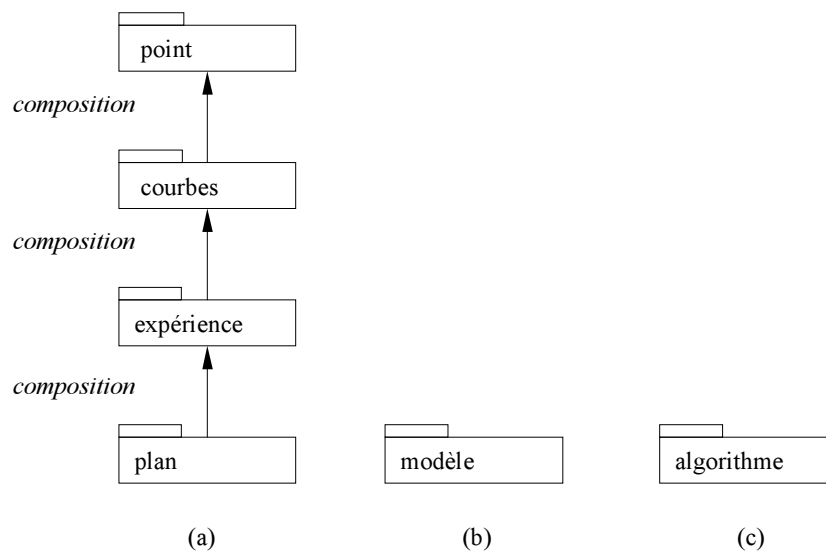


Figure II.13 : Paquetages d'identification. (a) : paquetage expérimental, (b) : paquetage modèle de comportement, (c) : paquetage d'algorithmes d'optimisation

Les notions du schéma II.13 servent de bases pour définir les classes d'objets dont nous aurons besoin dans notre programmation.

### L'analyse applicative

Comme pour l'exemple précédent, nous précisons maintenant une sémantique qui servira pour définir les méthodes et les attributs des objets.

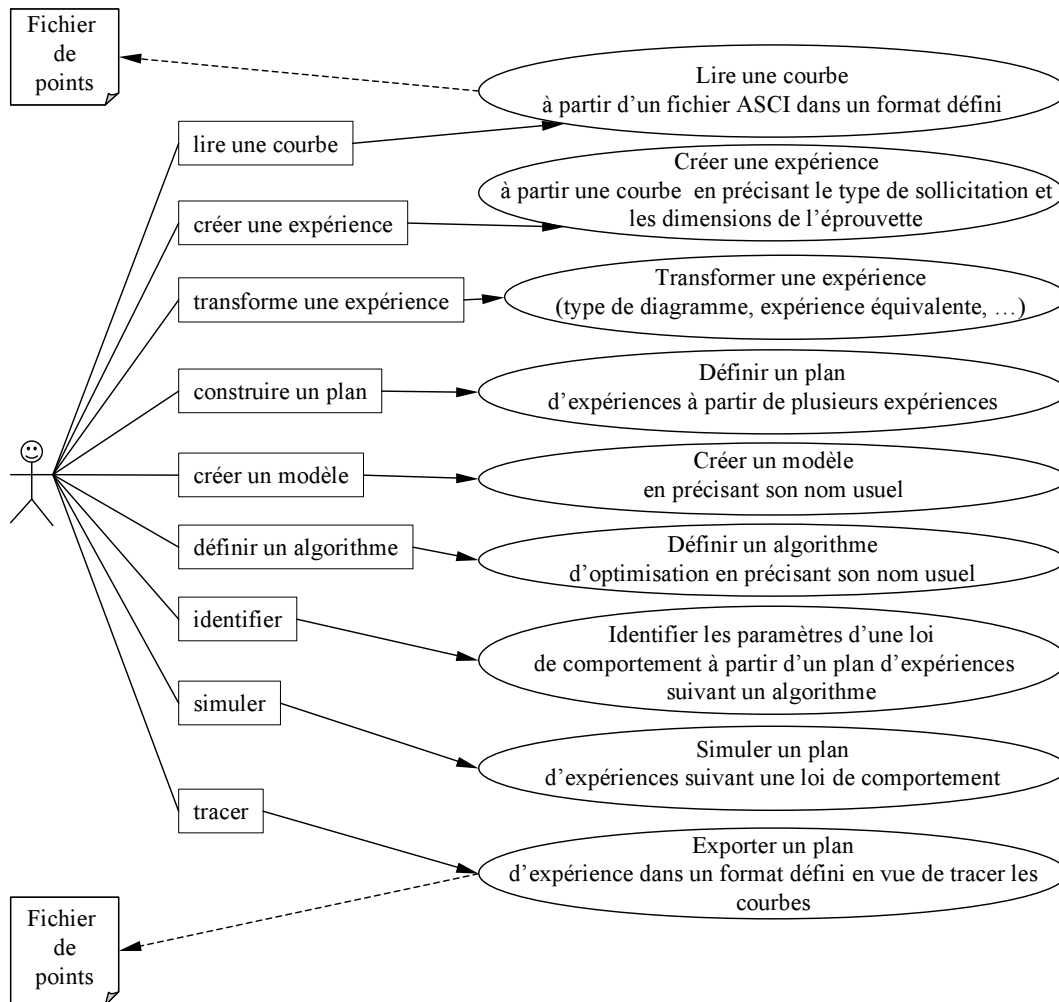


Figure II.14 : Cas d'utilisation standard

Le diagramme II.14 illustre un cas d'utilisation standard montrant l'originalité de notre approche. On notera en particulier qu'une telle approche permet d'identifier un modèle et de reproduire une autre expérience simple par un modèle dont les paramètres sont connus. On distingue ainsi les expériences servant à l'identification de celles servant à vérifier un modèle identifié.

### Les relations d'utilisation

La difficulté de l'application finale réside dans la définition du modèle de loi de comportement. En effet, les différents modes de déformation doivent pouvoir être pris en compte sans avoir à redéfinir leurs solutions analytiques à chaque fois qu'une nouvelle loi de comportement est

implantée dans le logiciel. Cette difficulté est levée par la séparation de la cinématique de l'essai de la réponse en contraintes de l'échantillon, sans tenir compte des cas particuliers. La cinématique des essais est donnée respectivement par les équations (A.42), (A.46), (A.56), (A.59) et (A.62) pour les cas de traction/compression uniaxiale, de traction équibiaxiale, de glissement pur, de cisaillement simple et de traction biaxiale générale respectivement. Nous utilisons ensuite la relation (A.40) pour l'ensemble des sollicitations, ce qui met en évidence que pour définir une loi de comportement hyperélastique la seule description de la fonction  $\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$  est nécessaire, même si les paramètres de cette fonction ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, I_1, I_2, \dots$ ) dépendent du modèle. Nous contourons le problème en écrivant une forme générale de fonction  $\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$  dépendant de tous les paramètres, à l'instar des routines UMAT (« user material ») des codes de calcul éléments finis (Abaqus, Radioss, ...). Le diagramme II.15 illustre les relations d'utilisation des objets mis en oeuvre pour répondre à cette problématique. Nous remarquons par ce biais que l'objet *simulation* peut-être du même type que l'objet *expérience*. Nous pouvons tracer, également le diagramme de relation d'utilisation lié à la méthode d'identification. Nous retrouvons dans cette méthode l'utilisation de la méthode de simulation. Par souci de clarté, celle-ci est réduite à sa plus simple expression. L'avantage de l'approche objet est mis en avant par ce diagramme. Ainsi,

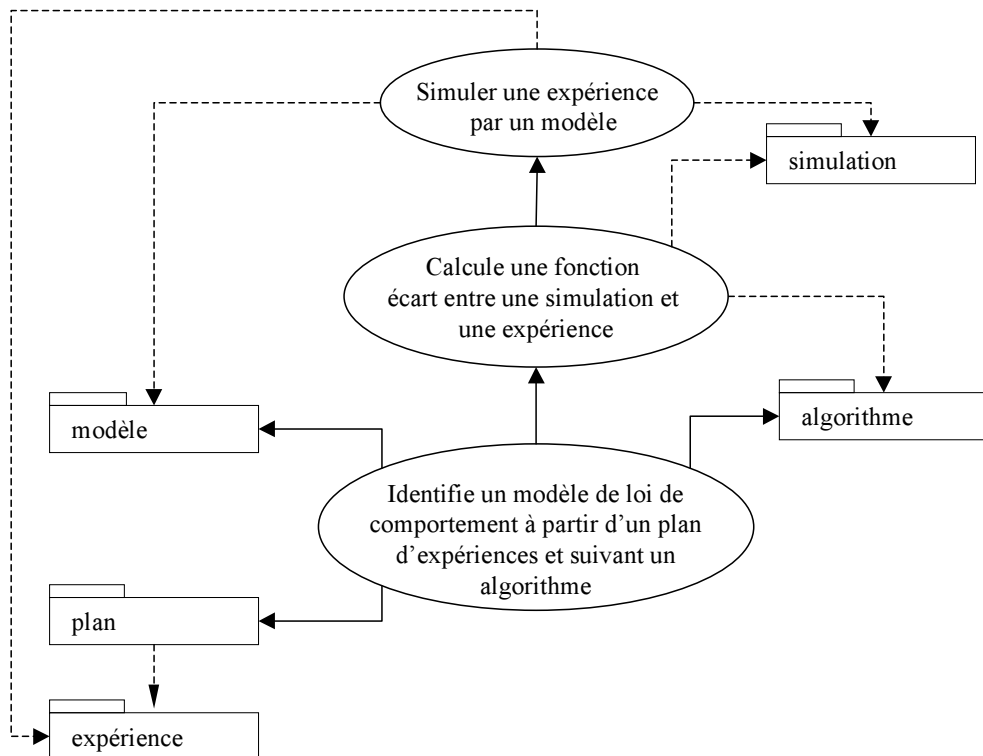


Figure II.15 : Diagramme de relation d'utilisation de l'identification d'un modèle

la notion de simulation apparaît maintenant comme une notion plus générale que la précédente qui était attachée à la notion de réponse analytique. Le diagramme II.15 permet d'envisager une généralisation de la méthode de simulation permettant de faire évoluer l'application vers l'identification inverse par une modélisation éléments finis. Le diagramme II.15 ne différera alors

que dans une généralisation de la fonction  $\sigma_i - \sigma_j$  en relation avec une généralisation de la notion de cinématique (description de la géométrie de l'éprouvette et des conditions d'essais).

Les autres diagrammes nécessaires à l'application d'identification ne seront pas détaillés pour ne pas surcharger cette illustration de la POO. Nous compléterons seulement cette dernière par la définition de quelques classes programmées pour notre problème.

### Les classes

Les tableaux II.5, II.6, II.7 et II.8 illustrent respectivement la composition des classes *courbe*, *plan*, *expérience* et *modèle* issues des réflexions portées par la construction des diagrammes de relation d'utilisation. Nous remarquons, ici, que les dimensions de l'éprouvette sont des données de l'objet *expérience*. En toute rigueur, il conviendrait de définir un objet de classe géométrie permettant de généraliser la notion de dimension. De plus, dans le cas de l'identification inverse, la cinématique et la géométrie ne sont pas totalement dissociées. De même, la notion d'expérience sous-entend que les résultats sont des courbes de réponse et interdit actuellement la notion de déformée d'une pièce quelconque. Nous montrons ainsi qu'il existe une limite à la généralisation dans notre programmation actuelle et qu'une modification devra être apportée dans une perspective d'identification par une approche éléments finis.

courbe	
chaîne de caractères	nom de la courbe
entier	nombre de points
type point	tableau des points
chaîne de caractères	dénomination des échelles de la courbes
créé courbe(nom d'un fichier de points)	
transforme courbe(type de transformation,courbe)	
...	

Tableau II.5: Définition de la classe courbe

### Exemple d'utilisation

Nous limitons donc notre application à l'identification de modèles de comportement suivant des courbes expérimentales obtenues par des essais sur des éprouvettes simples telles que celles décrites dans la partie A. 3.1. Cet outil a été utilisé afin d'identifier les paramètres matériau des modèles présentés dans la partie A. 4, ainsi que les paramètres du modèle d'effet Mullins présenté dans le chapitre III.3.

La POO offre donc une liberté quant à l'application définitive comparable à l'utilisation d'une boîte à outils. Un exemple d'utilisation est présentée sur la figure II.16. Il concerne l'identification du modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [ARR 93] sur une courbe contraintes/élongation

plan	
entier	nombre d'expériences
type expérience	tableaux des expériences
réel	tableaux des poids respectifs des expériences
initialise plan()	
ajoute expérience(expérience)	
type <i>vide</i>	export graphique()
...	

Tableau II.6: Définition de la classe *plan*

expérience	
chaîne de caractères	nom de l'expérience
entier	nombre de courbes
type courbe	tableaux de courbes
chaîne de caractères	type d'expérience (traction uniaxiale, ...)
réel	section
réel	longueur
réel	hauteur
réel	limite de validité inférieure des abscisses
réel	limite de validité supérieure des abscisses
créé expérience(courbe,nom,...)	
modifie expérience(expérience,paramètre, valeur)	
transforme expérience(transformation,expérience)	
...	

Tableau II.7: Définition de la classe *expérience*

d'un essai de traction uniaxiale contenue dans le fichier texte. Ces lignes de programme sont la traduction en Fortran90 des concepts exprimés précédemment. Le Fortran90 n'étant pas un langage orienté objet, certains principes de la POO ont été interprétés en fonction des possibilités qu'offre ce langage. En particulier, les méthodes ont été traduites par des routines alors que certaines pourraient être des fonctions. De même, si la notion de *structure* et celle de *surcharge* existent en Fortran90, la notion de **classe** regroupant une structure associée à des méthodes ne peut pas être traduite. Ainsi les méthodes ont été traduites par des routines externes à la classe et l'objet courant est passé comme paramètre de la routine. Ces contraintes de programmation ne retirent rien à la simplicité d'écriture du programme principal.



modèle	
chaîne de caractères	nom du modèle
entier	nombre de paramètres
réel	tableau des paramètres
réel	tableau des valeurs maximales des paramètres
réel	tableau des valeurs minimales des paramètres
chaîne de caractères	tableau des noms usuels des paramètres
fonction réelle	fonction $\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$
crée modèle(nom)	
modifie paramètre(modèle,nom usuel, valeur)	
identifie(modèle,plan,algorithme)	
...	

Tableau II.8: Définition de la classe modèle

## II.5 Application aux modèles hyperélastiques

### II.5.1 Objectif

Nous utilisons maintenant notre application pour identifier les modèles hyperélastiques de la littérature. Le but de cette étude est de qualifier l'aptitude de ces modèles à reproduire les essais expérimentaux suivant différents modes de déformation (voir la section A. 3.1 en annexe). Cette étude permettra d'établir un classement de ces modèles en fonction de leur domaine de validité et du nombre de coefficients intervenant dans leur formulation.

### II.5.2 Méthodologie

#### II.5.2.1 Essais de référence

Pour comparer les modèles hyperélastiques nous choisissons de les identifier suivant deux jeux de données expérimentales issus de la littérature. Le premier provient des travaux de Treloar [TRE 44] très utilisés dans la bibliographie [CAR 61, KLI 64, HS 66, HS 67, ALE 68, OGD 72, ARR 93, BOY 00]. Ces travaux concernent l'étude de deux types d'élastomères. Le premier est un caoutchouc à 8% de sulfure vulcanisé pendant 3 heures. Le second concerne un latex. Seuls les résultats du caoutchouc seront utilisés. Celui-ci présente l'avantage d'être fortement élastique réversible sans présenter de cristallisation sous contrainte jusqu'à 400% d'extension. Il est donc très bien adapté pour être modélisé par un modèle hyperélastique. Treloar utilise une éprouvette de longueur utile égale à 10 mm, de largeur 3 mm et d'épaisseur 0,8 mm. Cette éprouvette est pré-étirée à 400% avant d'effectuer les mesures afin d'éliminer l'effet Mullins. L'auteur a effectué sur ce matériau des essais d'extension simple (T), d'extension équi-biaxiale (EQB), de compression, de glissement pur (CP) et a également combiné un essai

```

program IDENTIFICATION_OO

use Experimentale

c  declaration des variables

implicit none
type (type_plan) :: plan,plan_export
type (type_experience) :: expel,simul
type (type_courbe) :: courbel
type (type_modele) :: modele

c  lecture du fichier et création du plan d'expérience

call cree_courbe('Treloar-uni-ax.txt',courbel)
call creer_experience(expel,'trac.Treloar',courbel
.,'pk1-lambda','traction uniaxiale',0.,0.,0.,0.,30.)
call ajoute_exp_plan(expel,plan,1.)

c  identification du modèle

call cree_model(modele,'8chaines')
call identifie(plan,modele,'AG')

c  simule le modèle identifié

call simule(expel,simul,modele)

c  affichage du résultat et sorties graphiques

call affiche(modele)
call ajoute_exp_plan(expel,plan_export,1.)
call ajoute_exp_plan(simul,plan_export,1.)
call export_graphique('Resultat.plt',plan_export)

end program IDENTIFICATION_OO

```

Figure II.16 : Exemple de programme principal d'identification en Fortran90 orienté objet

de traction avec un essai de glissement pur (EB). Les courbes expérimentales obtenues sont reproduites dans la section A. 3.2.1 en annexe de ce mémoire. Le deuxième jeu expérimental que nous choisissons pour référence est issu des travaux de Kawabata *et al.* [KAW 81]. Il concerne la traction biaxiale d'un échantillon carré de matériau isoprène de dimensions 115 mm par 115 mm. Les extensions sont mesurées par l'intermédiaire de potentiomètres qui détectent le déplacement de rails pour des valeurs variant de 1,04 à 3,7 ( $\lambda_1$ ) dans une direction et de 0,52 à 3,1 dans la direction perpendiculaire ( $\lambda_2$ ). Ces résultats concernent les états de déformations modérés pour un élastomère, mais permettent de balayer des états de déformation allant de l'extension uniaxiale à l'extension équibiaxiale.

### II.5.2.2 Stratégie d'identification

#### Les étapes d'identification

Les deux matériaux utilisés respectivement par Treloar et Kawabata sont proches. Nous cherchons alors à savoir si un même jeu de coefficients matériels peut reproduire les essais de ces deux auteurs. Pour cela, nous mettons en place une méthodologie composée de deux étapes :

- 1 Les paramètres sont identifiés sur les essais de Treloar :
  - 1.a si les résultats sont satisfaisants, les paramètres sont conservés ;
  - 1.b si les résultats sont peu satisfaisants, nous limitons le domaine de validité utilisé pour l'identification suivant les critères suivants :
    - 1.b.i si le modèle n'est pas capable de prendre en compte le raidissement final, nous diminuons les limites de l'intervalle d'identification ;
    - 1.b.ii si des modes de déformation ne sont pas bien reproduits, nous les éliminons progressivement de la procédure d'identification en augmentant les poids des autres modes ;

Nous prenons, pour illustrer cette stratégie, l'exemple de l'identification du modèle de Mooney. L'étape 1 fournit les paramètres  $C_1 = 0,256 MPa$  et  $C_2 = -2.30 \cdot 10^{-3} MPa$ , ainsi que les courbes de réponse de la figure II.17. Nous nous plaçons ainsi dans le cas 1.b.i :

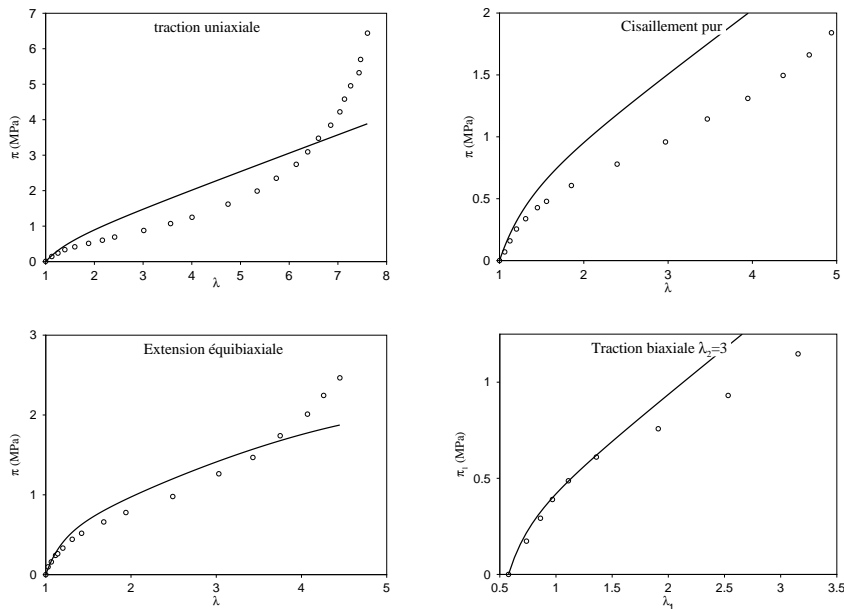


Figure II.17 : Identification du modèle de Mooney sur les essais de Treloar : étape 1 ; (o) essais de Treloar, (—) modèle de Mooney

le modèle n'est pas capable de prendre en compte le raidissement final de la traction uniaxiale ou de l'extension équi-biaxiale, de plus, le paramètre  $C_2$  est négatif, ce qui n'est

pas acceptable pour ce modèle. Nous réduisons donc le domaine de validité de l'extension maximale en traction uniaxiale à 5, puis nous relançons l'identification. Nous obtenons alors  $C_1 = 0,164MPa$  et  $C_2 = 4.86 \cdot 10^{-3}MPa$  et les courbes de réponse II.18. Cette solu-

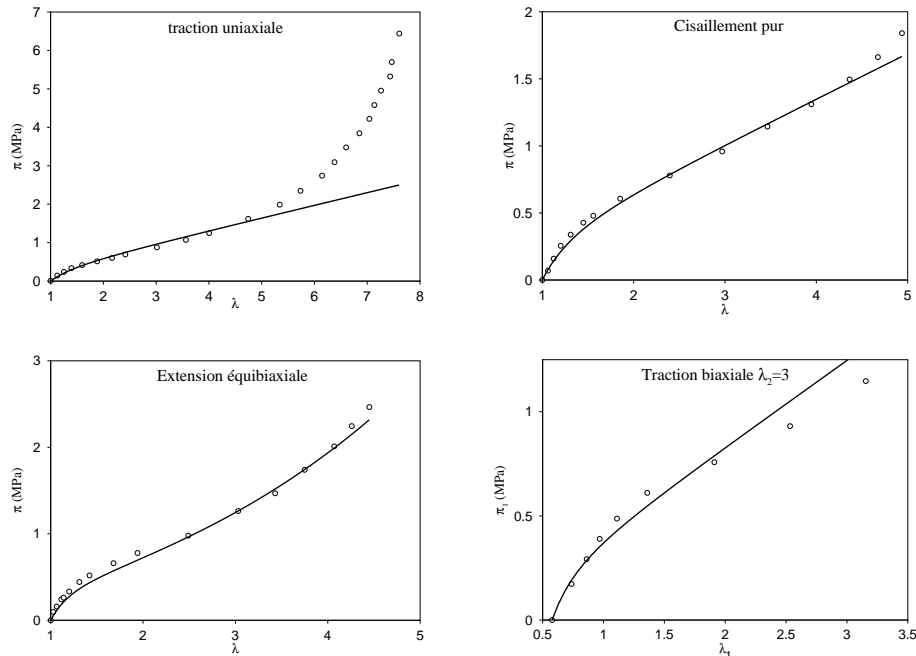


Figure II.18 : Identification du modèle de Mooney sur les essais de Treloar : étape 1.b.i ; (o) essais de Treloar, (—) modèle de Mooney

tion est alors affinée en réduisant le domaine de validité en traction biaxiale à  $\lambda < 2$ . Nous obtenons ainsi  $C_1 = 0,162MPa$ ,  $C_2 = 5,90 \cdot 10^{-3} MPa$  et les courbes de réponse II.19. Ceci achève l'étape 1.

2 Les paramètres issus de l'identification sur les essais de Treloar sont utilisés pour simuler les essais de Kawabata :

2.a si les résultats sont satisfaisants, ils sont conservés ;

2.b si les résultats sont peu satisfaisants, le modèle est identifié suivant les essais de Kawabata pour fournir un deuxième jeu de paramètres :

2.b.i si l'identification est peu satisfaisante, nous réduisons le domaine de validité utilisé pour l'identification ;

2.b.ii si l'identification est satisfaisante les paramètres sont conservés .

Les valeurs des paramètres obtenues à la fin de l'étape 1 sont prises pour simuler les essais de Kawabata *et al.*. Nous obtenons les courbes de réponses de la figure II.20. Ces réponses sont peu satisfaisantes puisque les simulations s'écartent des réponses expérimentales dans le domaine des faibles déformations. Nous réduisons alors, lors de l'étape 2.b.i, le domaines de validité du

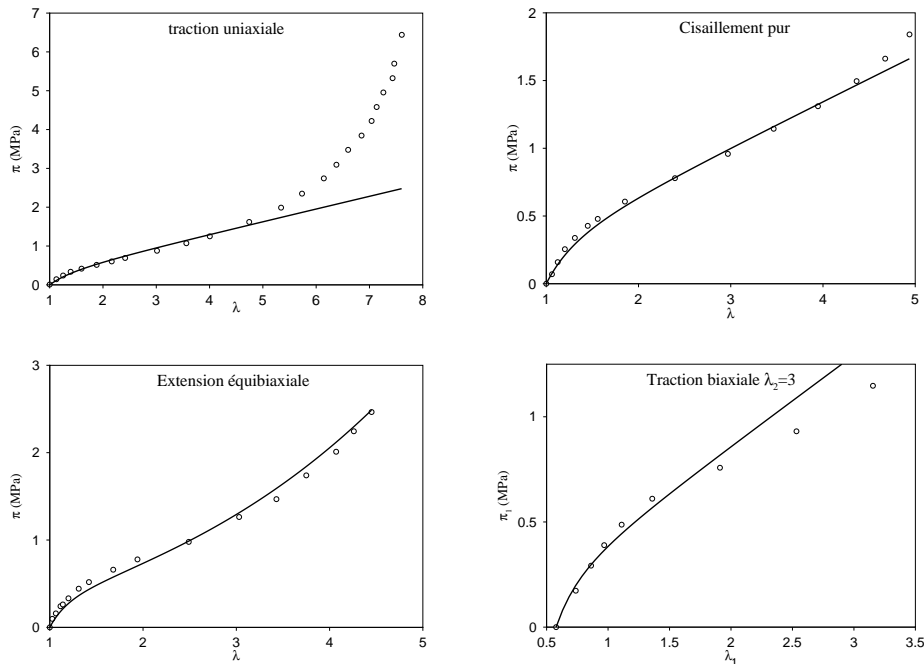


Figure II.19 : Identification du modèle de Mooney sur les essais de Treloar : étape 1.b.i (fin) ;  
 (o) essais de Treloar, (—) modèle de Mooney

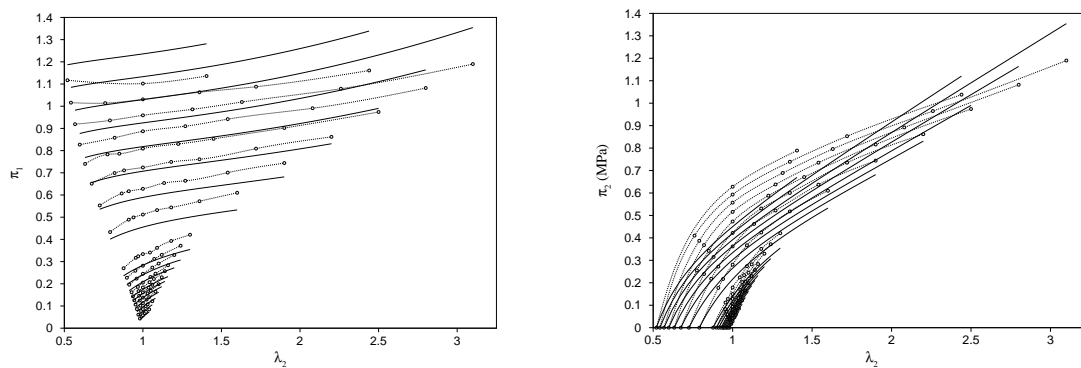


Figure II.20 : simulation des essais de Kawabata *et al.* par le modèle de Mooney : étape 2 ;  
 (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Mooney

modèle. Nous itérons pour aboutir à un résultat acceptable lorsque  $\lambda_1$  max et  $\lambda_2$  max sont fixés respectivement à 2,2 et 2. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure II.21.

La stratégie décrite si dessus permet ainsi d'identifier les modèles en déterminant leur domaine de validité.

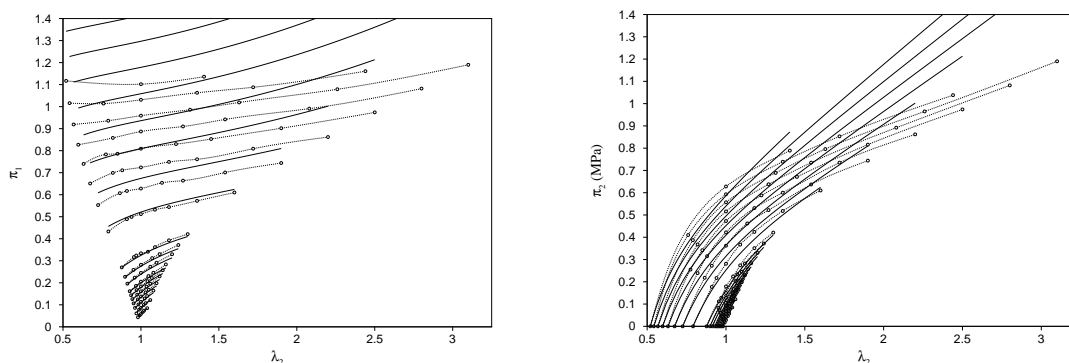


Figure II.21 : simulation des essais de Kawabata *et al.* par le modèle de Mooney : étape 2.b.i (fin) ; (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Mooney

### Les algorithmes d'identification

A la stratégie d'identification s'ajoute le choix des algorithmes utilisés. Parmi les algorithmes décrits dans les sections II.2 et II.3, seuls quelques uns ont retenu notre attention. Les modèles sont identifiés, dans un premiers temps, par la méthode des algorithmes génétiques. Les paramètres matériels ainsi obtenus sont alors utilisés comme point de départ pour l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Si ce dernier diverge, l'algorithme de Levenberg-Marquardt est remplacé par la méthode des moindres carrés. Enfin, si cet algorithme ne donne pas satisfaction, on lui substitue un algorithme de gradient à pas variable. L'ordre de ces algorithmes permet ainsi de profiter systématiquement des atouts des algorithmes génétiques. La discrétisation des variables lors de l'utilisation des AG nous conduit cependant à affiner les paramètres par une méthode classique.

## II.5.3 Comparaison des modèles hyperélastiques

### II.5.3.1 L'identification

La bibliographie des modèles étudiés, ainsi que les résultats de l'identification sont détaillés en annexe de ce mémoire (section A.4) où sont réunies les courbes de réponse aux différents types d'essais de Treloar et de Kawabata ainsi que les valeurs des coefficients matériels correspondants.

### II.5.3.2 Bilan

L'étude présentée dans l'annexe A.4 nous permet de classer les modèles de la littérature suivant leur aptitude à représenter le comportement hyperélastique des élastomères étudiés par Treloar [TRE 44] et Kawabata *et al.* [KAW 81]. Ces deux études étant indépendantes, nous pouvons généraliser nos propos et considérer que ce classement est valide pour les élastomères en général.

Le classement des modèles, présenté dans le tableau Tab II.9, est effectué en fonction de la

largeur de leur domaine de validité, de la possibilité de garder le même jeu de paramètres pour les essais de Treloar et ceux de Kawabata, puis du nombre de paramètres nécessaires.

	Modèle	Treloar					Kawabata		nc	Phén.	Phys.
		$\lambda_{max}$					$\lambda_{max}$				
		T	CP	EQB	EB		$\lambda_1$	$\lambda_2$			
modèles utilisables pour les très grandes déformations											
1	modèle tube étendu	-	-	-	-	$\neq$	-	-	4		$\times$
2	Ogden	-	-	-	-	$\neq$	-	-	6	$\times$	
3	Haines-Wilson	-	-	-	-	$\neq$	3,4	3	6	$\times$	
4	Biderman	-	-	-	-	$\neq$	2,5	3	4	$\times$	
5	Hart-Smith	-	-	-	-	$=$	1,9	1,5	3	$\times$	
6	8-chaînes	-	-	sous	sous	$\neq$	1,9	1,9	2		$\times$
7	Gent	-	-	-	-	$\neq$	1,6	1,6	2	$\times$	
8	Yeoh et Fleming	-	-	-	-	$\neq$	1,6	1,6	4	$\times$	
9	van der Waals	-	-	2,5	sur	$=$	2,2	2,2	4		$\times$
10	3-chaînes	-	-	sous	sous	$\neq$	1,3	1,3	2		$\times$
modèles utilisables pour les déformations modérées											
11	modèle tube	4	3,5	3	-	$=$	-	-	3		$\times$
12	Mooney	5	-	4	2	$\neq$	2,2	2	2	$\times$	
13	Ishihara	5	-	4	2,25	$\neq$	1,9	1,9	3		$\times$
14	Gent et Thomas	5	-	3	-	$=$	1,6	1,6	2	$\times$	
15	Slip-link	5	4	2,5	sur	$\neq$	2,5	2,5	3		$\times$
16	Flory et Erman	5	4	2,5	sur	$\neq$	2,2	2,2	3		$\times$
modèles utilisables pour les déformations faibles											
17	néo-hookéen	5	2	3	2,5	$=$	1,6	1,6	1		$\times$
18	Valanis et Landel	3,5	2,5	1,2	sous	$\neq$	1,3	1,3	1	$\times$	

Tableau II.9: Classement des modèles hyperélastiques : (T) traction ; (CP) cisaillement pur ; (EQB) extension équibiaxiale ; (EB) extension biaxiale ; ( $\neq$ ) jeux de coefficients différents ; ( $=$ ) même jeu de coefficients ; (nc) nombre de coefficients ; (Phén.) modèle phénoménologique ; (Phys.) modèle à base physique ; (sous) sous-estimation ; (sur) sur-estimation.

## II.6 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a permis de présenter les méthodes employées dans les parties III.2 et III.3 pour l'identification des paramètres matériels des modèles hyperélastiques et pseudo-élastiques (effet Mullins). L'application numérique d'identification que nous avons développée permet de

répondre à l'ensemble des cas de figure rencontrés dans le cadre de notre étude. Son implantation par une approche Orientée Objet la rend évolutive. Parmi les extensions possibles, nous pouvons dégager trois axes principaux :

- identification de modèles visco-hyperélastiques : les développements actuels autorisent des courbes dans un espace de dimension finie. Une des variables peut donc être le temps ;
- identification inverse : il convient pour cela de faire dialoguer notre application avec un logiciel éléments finis. La difficulté réside dans une définition générale des types de données échangées (courbes, déformées, chargements, ...) ;
- identification sur des modèles implicites de lois de comportement.

Une autre originalité de notre approche est de pouvoir traiter un ensemble de courbes complémentaires permettant d'identifier un phénomène en minimisant une erreur globale, plutôt que de s'attacher à une erreur sur chacune des courbes individuellement. Ceci nous a permis de valider notre approche d'altération de réseau pour modéliser l'effet Mullins d'une manière qualitative, bien que le modèle initial (modèle d'Arruda et Boyce) ne permette pas de reproduire précisément chaque courbe de charge.

Nous avons également pu tester la méthode des algorithmes génétiques sur le problème d'identification. Cette méthode est plus coûteuse en temps CPU que les algorithmes classiques. Cependant, dans certains cas de figure complexes (par exemple le modèle d'altération de réseau de la section III.3 de ce mémoire), cette méthode s'est avérée très performante en termes de convergence. Elle permet en outre d'obtenir un point très proche de la solution pouvant servir de point de départ pour une méthode plus classique (moindres carrés, Levenberg-Marquardt, ...) afin d'affiner la solution.





## Chapitre III

### Construction de nouveaux modèles

---

---

#### III.1 Introduction

En étudiant les modèles hyperélastiques de la littérature (voir l'annexe A), on constate qu'au cours des dernières décennies les modèles fondés sur la physique des chaînes apportent des éléments nouveaux quant à la compréhension des phénomènes entrant en jeu lors de la déformation du réseau de chaînes moléculaires. Nous pouvons tenter de résumer l'état de l'art actuel à la compréhension du phénomène de raidissement final (limite d'extensibilité des chaînes du réseau, théorie statistique non-Gaussienne de Khun et Grün [KUH 42]) et à la contribution des contraintes d'entrelacement (modèle *slip-link* de Ball *et al* [BAL 81], modèle de van der Waals [KIL 81], modèle de *jonctions contraintes* de Flory et Ermann [FLO 44], ou encore modèle tube d'Einrich *et al* [HEI 97]), même s'il n'existe pas de forme unanime pour la fonction d'énergie entropique  $W$ . Nous pouvons également remarquer que le modèle empirique de Hart-Smith et le modèle non-Gaussien d'Arruda et Boyce (modèle 8-chaînes) sont similaires en réponse aux différents chargements. Un des objectifs de ce chapitre sera de montrer que ces deux modèles sont effectivement équivalents et qu'il est possible de donner un sens physique aux paramètres matériels du modèle phénoménologique de Hart-Smith.

Le deuxième objectif de ce chapitre est de construire un nouveau modèle de comportement permettant d'intégrer l'effet Mullins [MUL 48] (voir section I.3.2.1). Ce phénomène est en effet le premier phénomène auquel est confronté un expérimentateur qui dispose, après plusieurs cycles de charge et de décharge, d'un réseau de courbes de réponse. Il est alors difficile de décider quelle courbe doit être utilisée pour identifier le modèle hyperélastique choisi. Dans ce chapitre, nous essaierons de comprendre les mécanismes physiques à l'origine de l'effet Mullins, puis nous utiliserons un modèle de comportement fondé sur la statistique du réseau de chaînes afin de construire un modèle de comportement pseudo-élastique permettant de le reproduire.

## III.2 Equivalence de modèles

### III.2.1 Présentation

L'objectif de cette section est de montrer l'équivalence du terme en  $I_1$  du modèle de Hart-Smith [HS 66] avec le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [ARR 93]. L'intérêt est double : d'une part donner un sens physique aux différents paramètres du modèle empirique de Hart-Smith, et d'autre part montrer que ce dernier répond aux attentes d'auteurs récents [MAO 99, BOY 00, MEI 01, FRI 02] qui tentent d'introduire un terme en  $I_2$  (correspondant au terme  $W_c$  de contraintes d'entrelacement introduit par Flory [FLO 44], Ermann [ERM 82], Mark [MAR 88] ou Ball *et al.* [BAL 81]) pour corriger les modèles de réseau de chaînes fantôme (terme  $W_{ph}$ ).

Des comparaisons de modèles similaires ont été réalisées par Boyce [BOY 96] pour comparer le modèle 8-chaînes avec celui de Gent [GEN 96]. Les résultats de ces travaux seront repris dans notre étude pour comparer les modèles deux à deux. Nous examinons en particulier les caractéristiques des trois modèles dans le domaine des petites et de grandes déformations.

Nous rappellerons, dans un premier temps les formulations respectives des modèles, puis nous établirons des relations entre leurs paramètres. A cet effet, nous identifierons les trois modèles sur les expériences de Treloar.

Les travaux exposés dans cette section ont fait l'objet d'un article accepté dans **Rubber Chemistry and Technology** en 2004 sous le titre « Equivalence of the Hart-Smith model with Arruda-Boyce and Gent formulations for rubber elasticity » .

### III.2.2 Comparaison des modèles

#### III.2.2.1 Formulation des modèles

Nous rappelons, dans cette section, la définition des trois modèles considérés dans cette étude. Le lecteur peut se référer à l'annexe A pour une description de l'historique de ces modèles.

#### *Le modèle de Hart-Smith*

Dans les années 60, Hart-Smith [HS 66] propose un modèle empirique sous la forme d'une énergie de déformation  $W$  reproduisant le raidissement final des matériaux élastomères dans le domaine des grandes déformations. La forme qu'il donne à  $W$  est la suivante :

$$W_{HS} = C_1 \int \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + C_2 \ln \left( \frac{I_2}{3} \right) \quad (\text{III.1})$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont trois paramètres matériels. Dans cette équation, le premier terme du membre de droite décrit la réponse globale du matériau ; il ne dépend que de l'invariant  $I_1$ . Le second terme, faisant intervenir  $I_2$ , provient des travaux de Gent et Thomas [GEN 58] et permet d'améliorer le modèle dans le domaine des déformations modérées (inférieures à 150%).

**Le modèle d'Arruda et Boyce**

Le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [ARR 93] repose sur la théorie statistique non-gaussienne de chaînes moléculaires proposée par Khun et Grün [KUH 42] (voir l'annexe A. 4.3). Dans ce modèle, le réseau de chaînes est distribué suivant les quatre directions privilégiées correspondant aux sommets d'un cube inscrit dans la sphère unité, comme le montre la figure III.1. L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W_{AB} = C_R N \left\{ \sqrt{\frac{I_1}{3N}} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right\} \tag{III.2}$$

Dans cette équation,  $\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \sqrt{I_1/3N} \right)$  où  $\mathcal{L}$  est la fonction de Langevin définie par  $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - 1/x$ ,  $C_R$  et  $N$  sont deux paramètres matériels. De par la nature non-gaussienne du comportement des chaînes, la valeur maximale que peut atteindre  $I_1$  est  $3N$ . Cette valeur représente la limite d'extensibilité des chaînes. Ce modèle ne dépend que du premier invariant de déformation  $I_1$  ce qui le rend moins pertinent dans le domaine des déformations modérées [WU 93].

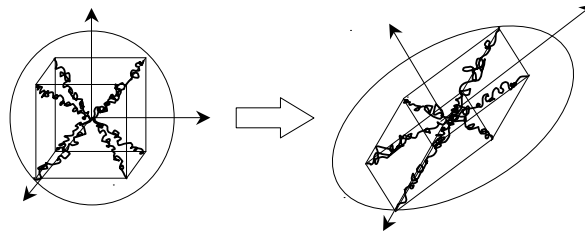


Figure III.1 : Modèle 8-chaînes

**Le modèle de Gent**

Plus récemment, Gent [GEN 96] a proposé un modèle empirique où l'énergie de déformation  $W$  est de la forme suivante :

$$W_G = -\frac{E}{6} \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \tag{III.3}$$

$E$  et  $J_m$  sont deux paramètres matériels.  $J_m$  représente alors la valeur maximale que peut atteindre  $I_1 - 3$  lors de la déformation. Il est donc l'équivalent de la limite d'extensibilité des chaînes du modèle 8-chaînes.

**Réduction du modèle de Hart-Smith**

Le modèle de Hart-Smith se distingue des modèles d'Arruda-Boyce et de Gent par l'utilisation d'un terme en  $I_2$  influençant la réponse en déformation modérées. Nous choisissons désormais de ne comparer que les termes de ces trois modèles faisant intervenir  $I_1$ . Le modèle de Hart-Smith est donc réduit à :

$$W_{HS} = C_1 \int \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 \tag{III.4}$$

où seuls les paramètres  $C_1$  et  $C_3$  du modèle interviennent. Dans la suite du chapitre, lorsque nous utiliserons l'expression « modèle de Hart-Smith », nous ferons référence à l'équation (III.4).

### III.2.2.2 Identification des modèles

Les modèles précédents sont identifiés avec l'application présentée dans le chapitre II sur les données expérimentales de Treloar [TRE 44] décrites dans la section II.5. Les quatre modes de déformation sont considérés simultanément afin de déterminer les valeurs des paramètres matériels. Le tableau III.1 rassemble les valeurs obtenues par l'identification. La figure III.2 permet de visualiser les réponses des modèles identifiés. On constate, sur cette figure, que les trois modèles reproduisent de manière équivalente et satisfaisante les différents modes de déformation (traction uniaxiale, glissement pur, extension équibiaxiale et extension biaxiale) avec deux coefficients matériels chacun.

Modèle	Premier paramètre (MPa)	Second paramètre
Hart-Smith	$C_1 = 0.18$	$C_3 = 2.7 \cdot 10^{-4}$
Arruda-Boyce	$C_R = 0.34$	$N = 27.9$
Gent	$E = 1.0$	$J_m = 92.0$

Tableau III.1: Valeurs des paramètres matériels

L'étonnante similitude des trois modèles pour les quatre modes de déformation nous a conduit à chercher des liens possibles permettant de passer d'un modèle à l'autre et de montrer ainsi leur équivalence. Ce travail est présenté dans la section suivante.

### III.2.2.3 Comparaison des modèles

Pour démontrer l'équivalence des modèles, la démarche déjà employée par Boyce pour comparer le modèle 8-chaînes avec le modèle de Gent est reprise [BOY 96].

#### *Développement en série*

Nous examinons, dans un premier temps, l'expression des développements en série des trois modèles.

La fonction énergie de déformation  $W_{HS}$  donnée par l'équation (III.4) peut s'écrire sous la forme d'une série infinie en puissances impaires de  $I_1$  :

$$W_{HS} = C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_3^i}{(2i+1)i!} (I_1 - 3)^{2i+1} \quad (\text{III.5})$$

Nous obtenons un cas particulier de la forme générale proposée par Rivlin [RIV 48b].

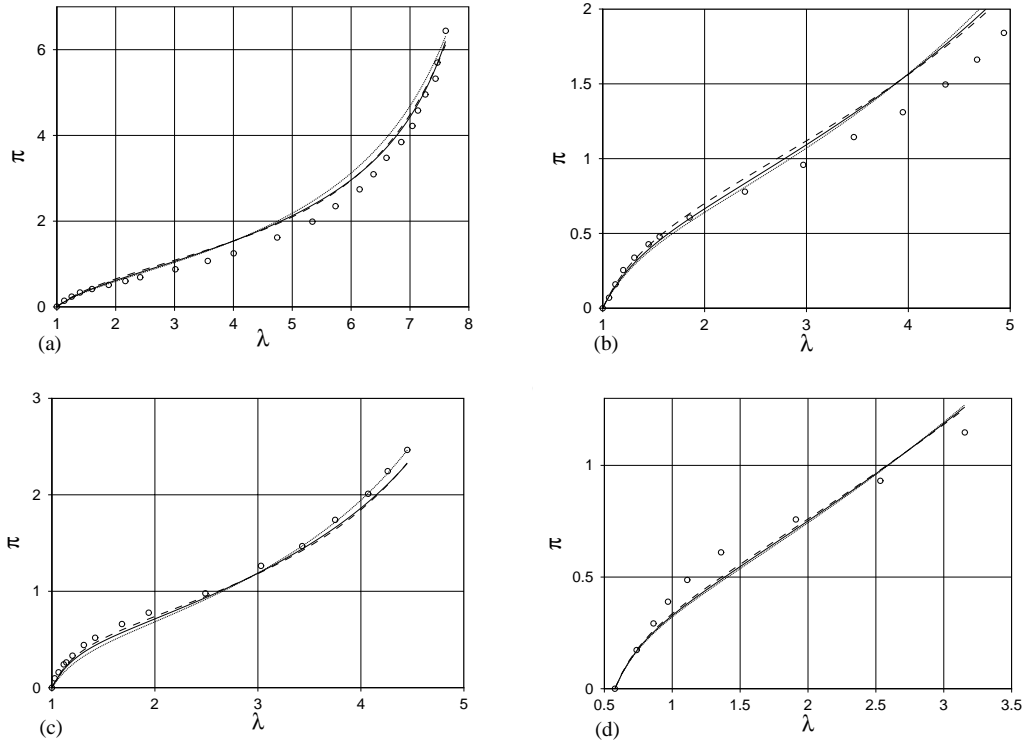


Figure III.2 : Identification sur les données expérimentales de Treloar, (a) traction uniaxiale, (b) glissement pur, (c) extension équibiaxiale, (d) extension biaxiale : (o) expériences de Treloar, (- - -) modèle de Hart-Smith (terme en  $I_1$ ), (—) Modèle d'Arruda-Boyce, (...) modèle de Gent.

La forme  $W_{AB}$  de la fonction énergie du modèle d'Arruda-Boyce est plus difficile à développer en série. La série tronquée à l'ordre cinq est donnée par :

$$W_{AB} = C_R \left[ \frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20N}(I_1^2 - 9) + \frac{1}{1050N^2}(I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000N^3}(I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4}(I_1^5 - 243) + \dots \right] \quad (\text{III.6})$$

Ce développement fait intervenir des puissances paires et impaires de  $I_1$ .

Enfin, le développement de la fonction  $W_G$  du modèle de Gent s'écrit :

$$W = \frac{E}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_m^{n+1}} (I_1 - 3)^n \quad (\text{III.7})$$

L'équation (III.7) fait également intervenir des termes en puissances paires et impaires.

### Comportement en petites déformations

Le premier terme des développements en série donnés par les équations (III.5), (III.6) et (III.7) permet de définir la raideur du matériau dans le domaine des petites déformations. Nous

retrouvons ainsi la forme néo-hookéenne  $W_{NH}$  de Treloar [TRE 75]:

$$W_{NH} = \frac{1}{2}C(I_1 - 3) \quad (\text{III.8})$$

où  $C$  est un paramètre matériel. En écrivant l'égalité de ces termes, nous établissons ainsi la première relation d'équivalence :

$$C = 2C_1 = C_R = \frac{E}{3} \quad (\text{III.9})$$

Cette relation traduit le tangence à l'origine des courbes de réponses des trois modèles. Si on examine la validité de la relation (III.9) avec les résultats de l'identification du tableau III.1, nous pouvons constater que  $2C_1 = 0,36$ ,  $C_R = 0,34$  et  $E/3 = 0,33$ . Ces trois valeurs présentent un écart relatif inférieur à 8%. Les paramètres obtenus par identification sont donc cohérents avec la relation (III.9).

### Comportement en grandes déformations

Comme nous l'avons signalé précédemment, les trois modèles sont capables de décrire le raidissement du matériau en grandes déformations. L'expression des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$  est donnée par l'équation :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \bar{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{B}^2 \quad (\text{III.10})$$

Dans notre cas,  $\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$ . On constate alors que cette expression ne fait intervenir que la dérivée de  $W$  par rapport à  $I_1$ . Pour les trois modèles considérés, nous obtenons :

$$\frac{\partial W_{HS}}{\partial I_1} = C_1 \exp [C_3(I_1 - 3)^2] \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial W_{AB}}{\partial I_1} = \frac{C_R N}{2\sqrt{3I_1}} \mathcal{L}^{-1} \left( \sqrt{\frac{I_1}{3N}} \right) \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial W_G}{\partial I_1} = \frac{E}{6} \frac{1}{1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}} \quad (\text{III.13})$$

Ces trois expressions mettent bien en évidence une limite infinie des contraintes pour des grandes valeurs de  $I_1$ . De plus, les modèles d'Arruda-Boyce et de Gent présentent une asymptote verticale pour une valeur finie de  $I_1$ . Cette dernière valeur est égale à  $3N$  pour le modèle 8-chaînes, et  $J_m + 3$  pour le modèle de Gent. Pour établir l'équivalence de ces deux modèles, il suffit donc d'écrire :

$$J_m = 3(N - 1) \quad (\text{III.14})$$

Les résultats du tableau III.1 fournissent  $J_m = 92$  et  $3(N - 1) = 80,7$ , soit une différence entre les deux termes de 12%.

La démarche devient cependant plus compliquée pour le modèle d'Hart-Smith qui ne présente pas d'asymptote, mais une forme exponentielle. La figure III.2 suggère cependant, qu'en pratique, une similitude entre les pentes des courbes de réponse sur le domaine des grandes déformations

suffirait à définir une équivalence de comportement entre les modèles. Nous comparons désormais le modèle de Hart-Smith avec celui de Gent, l'équivalence entre les modèles d'Arruda-Boyce et de Gent étant déjà établie par les équations (III.9) et (III.14).

Les équations suivantes fournissent les dérivées secondes respectives des fonctions énergies de déformation  $W_{HS}$  et  $W_G$  :

$$\frac{\partial^2 W_{HS}}{\partial I_1^2} = 2C_1 C_3 (I_1 - 3) \exp [C_3 (I_1 - 3)^2] \quad (\text{III.15})$$

et :

$$\frac{\partial^2 W_G}{\partial I_1^2} = \frac{E}{6J_m} \frac{1}{\left[1 - \frac{(I_1-3)}{J_m}\right]^2} \quad (\text{III.16})$$

Egaliser ces deux termes en tout point de l'intervalle considéré revient à égaliser les pentes des réponses des deux modèles. L'équation (III.9) permet de simplifier cette égalité. Nous obtenons ainsi une relation entre les paramètres  $C_3$  and  $J_m$  pour différentes valeurs de  $I_1$  :

$$2C_3 (I_1 - 3) \exp [C_3 (I_1 - 3)^2] = \frac{1}{J_m} \frac{1}{\left[1 - \frac{(I_1-3)}{J_m}\right]^2} \quad (\text{III.17})$$

Cette relation signifie que l'égalité de pente dépend du niveau de déformation. On peut également exprimer cette relation en utilisant la fonction *LambertW* [COR 96], notée  $W^L$  et définie par :

$$W^L(x) \exp [W^L(x)] = x \quad (\text{III.18})$$

l'équation (III.17) devenant alors :

$$C_3 (I_1 - 3)^2 = W^L \left( \frac{(I_1 - 3)}{2J_m} \frac{1}{\left[1 - \frac{(I_1-3)}{J_m}\right]^2} \right) \quad (\text{III.19})$$

Pour simplifier la suite de l'étude, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\alpha = \frac{I_1 - 3}{J_m} \quad (\text{III.20})$$

où  $\alpha \in [0, 1]$  et où  $I_1 = J_m + 3$  représente l'asymptote verticale du modèle de Gent (III.13). L'équation (III.19) peut s'écrire désormais :

$$C_3 J_m^2 = \frac{1}{\alpha^2} W^L \left( \frac{\alpha}{2(1 - \alpha)^2} \right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (\text{III.21})$$

Il convient de noter que le modèle de Gent admettant une asymptote verticale, pour une valeur de  $\alpha$  égale à 1, l'équation (III.21) n'est pas définie en ce point. En pratique, l'équivalence des deux modèles que nous cherchons à établir, est à définir dans le domaine des grandes déformations, c'est-à-dire pour  $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1[$  avec  $0 < \alpha_{\min}$ . L'équation (III.21) ne pouvant pas être vérifiée en tout point de ce domaine, nous choisissons de chercher à vérifier cette équivalence en moyenne



sur le domaine considéré. Une valeur moyenne du membre de droite de (III.21) permettrait ainsi de relier les paramètres  $C_3$  et  $J_m$  en éliminant la dépendance en  $\alpha$  :

$$C_3 J_m^2 = k \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\alpha^2} W^L \left( \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \right) d\alpha \quad (\text{III.22})$$

avec  $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < 1$ .

La valeur de  $k$  dépend désormais de l'intervalle sur lequel on souhaite définir l'équivalence. La figure III.3 présente l'évolution de  $k$  en fonction de  $\alpha_{\min}$  lorsque  $\alpha_{\max}$  est près proche de 1.  $k$  tend vers l'infini lorsque  $\alpha_{\min}$  tend vers 0 ou 1. En dehors des bornes de l'intervalle,  $k$  reste fini.

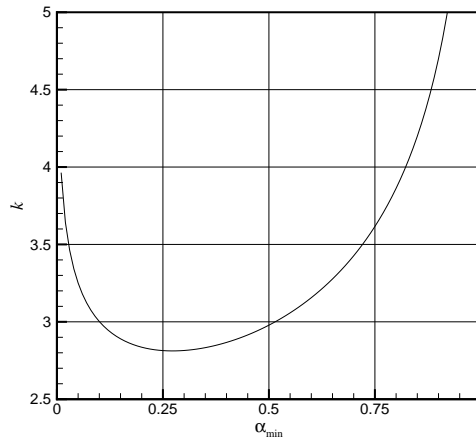


Figure III.3 : Evolution de  $k$  donné par l'équation (III.22) en fonction de  $\alpha_{\min}$

L'équivalence que nous cherchons à établir concerne le domaine des grandes déformations. Kucherskii [KUC 96] affirme que la formulation néo-hookéenne est valable dans le premier tiers du domaine de déformation. Les essais de Treloar présentés sur la figure III.2 suggèrent de considérer l'équivalence pour des extensions de l'ordre de 4 en traction uniaxiale, c'est-à-dire des valeurs de  $\alpha$  de l'ordre de 0,14. De plus, nous pouvons remarquer que la limite d'extensibilité des chaînes n'est jamais atteinte en pratique. La valeur maximale atteinte sur les essais de traction uniaxiale de Treloar est égale à 7,5 ce qui correspond à des valeur de  $I_1$  de l'ordre de 55 c'est-à-dire une valeur de  $\alpha$  de l'ordre de 0,6. Nous pouvons donc déterminer  $k$  avec plus de précision. Pour établir l'équivalence sur le domaine  $[0,14 ; 0,6]$ , nous devons considérer la valeur de  $k$  définie par :

$$C_3 J_m^2 = k = \frac{1}{0,6 - 0,14} \int_{0,14}^{0,6} \frac{1}{\alpha^2} W^L \left( \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \right) d\alpha \approx 2,69 \quad (\text{III.23})$$

Si on examine les résultats de l'identification du tableau III.1, nous pouvons constater que  $C_3 J_m^2 = 2,28$ . Nous avons donc un écart de 15% par rapport à la valeur obtenue par la relation (III.23). Cet écart est modéré, et l'équivalence pourrait être admise. Néanmoins, la section suivante validera plus systématiquement les relations (III.14) et (III.23)

### III.2.2.4 Validation de l'équivalence

Afin de valider les équivalences théoriques établies ci-dessus, nous choisissons d'identifier ces trois modèles pour une large gamme de matériaux par le logiciel présenté dans la section II. Afin d'obtenir une variation importante des paramètres identifiés, nous générons des jeux de données expérimentaux en simulant le modèle de Gent pour des valeurs de  $E$  et  $J_m$  situées respectivement dans les intervalles  $]0, 10]$  et  $[7, 100]$  (ces valeurs de  $J_m$  correspondent à une limite d'extensibilité des chaînes entre 200% et 900% en extension uniaxiale).

Les résultats obtenus par identification des modèles d'Arruda-Boyce et de Hart-Smith sont alors comparés aux valeurs théoriques. La figure III.4 permet de comparer l'évolution des paramètres  $N$  identifiés avec la relation linéaire (III.14). Cette relation simple est confirmée par cette approche indépendante. De même, la figure III.5 présente les résultats issus de

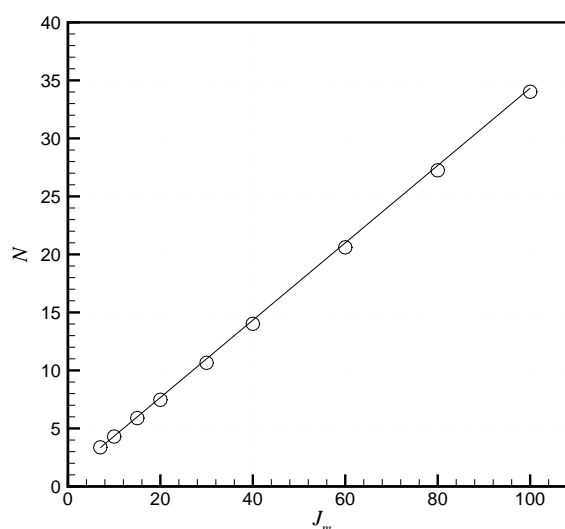


Figure III.4 : Comparaison des seconds paramètres des modèles de Gent et d'Arruda-Boyce : (o) résultats de l'identification, (—) résultats théorique de l'équation (III.14)

l'identification du modèle de Hart-Smith comparés aux valeurs théoriques de l'équation (III.23). Nous constatons que les deux approches fournissent des résultats très proches, ce qui valide également la relation (III.23).

### III.2.3 Conclusion sur l'équivalence

Nous venons de définir la correspondance entre les modèles de Gent, de Hart-Smith (terme en  $I_1$  uniquement) et d'Arruda-Boyce, ainsi que les relations reliant leurs paramètres. Si l'intérêt scientifique est secondaire (pas d'amélioration des modèles), il en est autrement de l'intérêt pratique. En effet, le modèle d'Arruda-Boyce présente certaines difficultés d'implantation numérique dans les codes de calcul par éléments finis :

- la matrice tangente est difficile à évaluer, et ces termes deviennent très grands pour des extensions proches de la limite d'extensibilité des chaînes (problème de convergence) ;

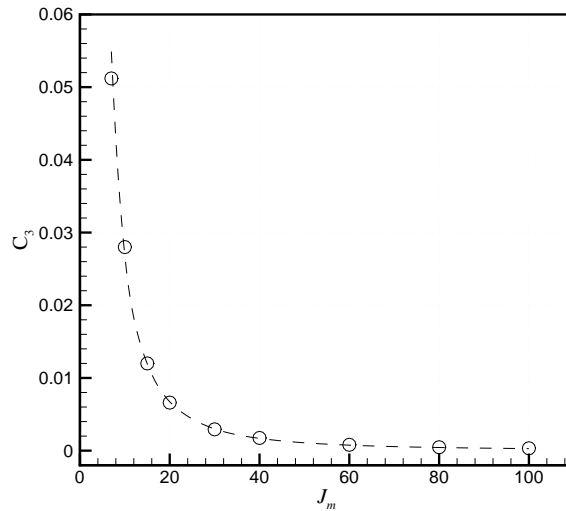


Figure III.5 : Comparaison des seconds paramètres des modèles de Gent et de Hart-Smith : (○) résultats de l'identification, (- -) résultats théorique de l'équation (III.22) pour  $k = 2, 69$ .

- il est difficile d'approcher l'inverse de la fonction de Langevin, souvent réduite à son développement à l'ordre 5.

A l'inverse, le modèle de Hart-Smith est très facile à implanter :

- la matrice tangente est d'expression simple et n'est jamais infinie ;
- le modèle utilise des fonctions mathématiques classiques ne nécessitant pas l'utilisation d'approximation par développement limité.

Ces avantages ont été exploités par Chagnon dans le cadre de sa thèse [CHA 03].

### III.3 Modélisation de l'effet Mullins

#### III.3.1 Présentation

L'objectif de cette section est de construire un modèle de comportement pseudo-élastique au sens de Mullins [MUL 48, MUL 57b, MUL 57a]. Une approche théorique d'altération du réseau fondée sur des interprétations physiques du phénomène est proposée. Nous montrerons ainsi que les différents auteurs traitant ce sujet attribuent l'effet Mullins à une modification du réseau de chaînes moléculaires entraînant une perte de raideur<sup>1</sup>. Il est ainsi montré que les paramètres du modèle hyperélastique classique d'Arruda et Boyce [ARR 93] peuvent être simplement remplacés par des fonctions dépendant de l'élongation maximale afin d'introduire l'effet Mullins dans la

<sup>1</sup>l'expression *perte de raideur* et le terme du matériau *adoucissement* seront utilisés par la suite pour traduire le terme anglais *stress-softening*

loi de comportement. Dans cette étude, seul le comportement statique est considéré et les effets viscoélastiques ne sont pas pris en compte.

Les travaux présentés ci-dessous ont fait l'objet d'une publication intitulée « A theory of network alteration for the Mullins effect » dans la revue **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** en 2002 [MAR 02]. Cet article est présenté dans l'annexe ??.

### III.3.2 Théorie d'altération de réseau

#### III.3.2.1 Interprétations physiques de l'effet Mullins dans la littérature

Dans la littérature il n'existe pas d'unanimité sur les causes physiques expliquant l'effet Mullins dans les élastomères. Mullins et Tobin [MUL 47] sont les premiers à développer un modèle phénoménologique. Ils considèrent pour cela que le matériau est constitué d'une phase souple et d'une phase dure. Au cours de la déformation, les régions dures sont rompues et transformées en régions molles. La fraction de la région molle croît avec l'accroissement de l'extension subie par le matériau. Néanmoins, aucune interprétation physique n'est donnée à ce modèle. Plus récemment, Johnson et Beatty [JOH 93] utilisent le modèle à deux phases de Mullins et Tobin et proposent des justifications physiques. Ils suggèrent que la phase dure peut être interprétée comme des agglomérats de chaînes moléculaires tenues par des segments de chaînes courtes, des entrelacements ou des forces intermoléculaires. Lorsque le matériau est étiré les chaînes sont arrachées des agglomérats qui se transforment en régions souples. Ce mécanisme induit trois phénomènes : les élongations diminuent dans la région souple, la longueur moyenne des chaînes augmente sous chargement et finalement la phase dure est orientée suivant la direction de l'étirement. Ces trois conséquences expliqueraient l'anisotropie du matériau après adoucissement.

Mullins [MUL 57a] suggère que l'adoucissement est dû à un désentrelacement des chaînes du réseau avec la rupture d'interactions entre les charges et la matrice élastomère. Une idée similaire est suggérée par Bueche [BUE 60, BUE 61]. Pour lui, le mécanisme principal de l'effet Mullins est la rupture des liaisons entre les charges et les chaînes polymériques. Le procédé de polymérisation conduit à la formation de chaînes de longueurs différentes entre les charges. Ces chaînes rompent progressivement lorsqu'elles atteignent leur limite d'extensibilité. Bueche développe alors un modèle probabiliste du contact entre chaînes et charges en bon accord avec l'expérience. Quelques années après, Harwood *et al.* [HAR 67] suggèrent que le phénomène d'adoucissement se produit entièrement dans la matrice et qu'il n'est donc pas une conséquence des ruptures de liaisons entre charges et matrice. Leurs observations mènent à la conclusion que l'adoucissement est principalement dû à un réarrangement du réseau moléculaire entraînant un déplacement des points de jonction du réseau. Plus récemment, Govindjee et Simo [GOV 91, GOV 92] reprennent les idées de Bueche et développent une fonction d'énergie libre élastique fondée sur la théorie des mélanges. Ils démontrent cependant que la généralisation de leur modèle au cas tridimensionnel présente des difficultés importantes. Ils concluent alors qu'une hypothèse d'endommagement isotrope est nécessaire et font l'hypothèse supplémentaire que les

directions principales restent constantes au cours du chargement. Malgré ces hypothèses leur modèle est en bonne corrélation avec les données expérimentales de Bueche.

Plus récemment, Miehe [MIE 95] ainsi que Ogden et Roxburgh [OGD 99] proposent des modèles purement phénoménologiques sans interprétations physiques pour l'effet Mullins. Miehe prend en compte des fonctions d'endommagement continue et discontinue fondées sur des mécanismes classiques d'endommagement. Ogden et Roxburgh développent, quant à eux, une loi de comportement dans laquelle le paramètre d'endommagement est activé uniquement pendant les périodes de décharge de l'histoire du chargement.

### III.3.2.2 Théorie proposée

Dans notre approche, nous adoptons la théorie de rupture de liaisons sans préjuger de la nature de ces liaisons. Le recouvrement partiel de la raideur avec la température suggère que, même si les liaisons entre charges et matrice sont rompues lors du chargement, des interactions faibles, recouvrables entre les chaînes du réseau, interviennent également dans l'effet Mullins. Ainsi, la théorie présentée dans l'article est cohérente avec le principe général d'un réarrangement de réseau de chaînes sous chargement. La conséquence directe est un accroissement apparent de la longueur moyenne de chaînes entre points de jonction du réseau comme l'ont suggéré Johnson et Beatty [JOH 93]. En effet, considérons la configuration de réseau présentée sur la figure III.6.

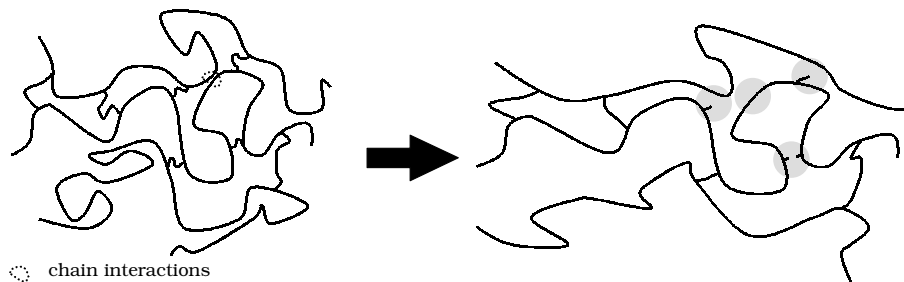


Figure III.6 : Rupture des liaisons faibles et des liaisons entre chaînes

Après polymérisation, les chaînes d'élastomères sont reliées aux points de jonction du réseau qui sont des liaisons de croisement de segments. D'autres liaisons sont des interactions faibles entre molécules polarisées. Ces deux types de liaisons conduisent à un réseau amorphe de chaînes comme l'illustre la partie gauche de la figure III.6. Lors de la déformation de ce réseau certaines chaînes sont étirées jusqu'à leur limite d'extensibilité et des ruptures de chaînes ont lieu. Le nombre de ces ruptures croît avec l'amplitude de déformation du milieu. De plus, ce nombre de ruptures de chaînes dépend fortement de la distribution de longueur des liaisons secondaires (voir la partie droite de la figure III.6). De même, des interactions faibles disparaissent du fait du déplacement des molécules liées pendant la déformation. A mesure que le nombre de ruptures de chaînes augmente, le nombre de points de jonction du réseau décroît. Ainsi, le nombre moyen  $N$  de segments de monomères par chaînes croît. Considérant que l'effet Mullins est contrôlé par l'élongation maximale, nous pouvons écrire  $N$  comme une fonction de l'état de déformation

maximale subi par le matériau lors de son histoire. Une autre conséquence du réarrangement du réseau est la décroissance de la densité de chaînes  $n$ . En effet, le principe de conservation de la masse implique que le nombre total de monomères par unité de volume  $Nn$  reste constant. Ce principe ne doit cependant pas être pris au sens strict puisque tous les monomères du réseau ne participent pas nécessairement à la rigidité. En effet, pendant le processus d'altération du réseau certaines chaînes sont transformées en chaînes pendantes (*dangling chains* en anglais) qui ne contribuent plus à la raideur du matériau. Ainsi, le produit  $Nn$  peut théoriquement décroître. Nous considérerons par la suite que ce produit reste constant.

### III.3.2.3 Construction du nouveau modèle

Afin de prendre en compte cette théorie dans un modèle hyperélastique classique, nous choisissons d'adapter le modèle non-gaussien d'Arruda et Boyce [ARR 93] écrit explicitement en fonction des paramètres physiques  $n$  et  $N$ . Un des avantages du modèle est d'exprimer la réponse du matériau en fonction de l'élongation moyenne des chaînes :

$$\lambda = \sqrt{I_1/3} \quad (\text{III.24})$$

Cette élongation peut être considérée comme un critère permettant de quantifier l'état de déformation maximale subi par le matériau lors de son histoire. Rappelons que l'effet Mullins est classiquement décrit comme fonction de l'élongation maximale par manque de critères bien définis. Bergström et Boyce [BER 99] utilisent déjà l'élongation moyenne des chaînes pour décrire le facteur d'amplification de déformation afin de modéliser la réponse hystérétique des élastomères.

Ainsi,  $N$  et  $n$  sont désormais écrits de la façon suivante :

$$N = N(\lambda_{\max}) \quad (\text{III.25})$$

$$n = n(\lambda_{\max}) \quad (\text{III.26})$$

avec la condition :

$$Nn = \text{constante} \quad (\text{III.27})$$

Ceci permet de proposer la relation contrainte-déformation du modèle 8-chaînes modifié :

$$\sigma_i = -p + \frac{1}{3} C_R(\lambda_{\max}) \sqrt{N(\lambda_{\max})} \frac{\lambda_i^2}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N(\lambda_{\max})}} \right) \quad \text{for } i = 1, 3 \quad (\text{III.28})$$

où le paramètre  $C_R$  dépend de l'élongation maximale :

$$C_R(\lambda_{\max}) = n(\lambda_{\max}) k T \quad (\text{III.29})$$

Nous considérons, ici, que la transformation subie par le matériau est isotherme. Comme la température apparaît dans l'expression de  $C_R$  (Eq. III.29), nous faisons l'hypothèse que son évolution est uniquement pilotée par l'évolution de  $n$  et non de  $T$ .

### III.3.2.4 Comparaison avec l'expérience

Afin de valider cette nouvelle approche, des essais de traction uniaxiale ont été effectués à température ambiante sur des échantillons plats à déformation imposée (voir détails dans [MAR 02]). Ces expériences ont été menées au Centre de Recherche Européen de Trelleborg sur du caoutchouc naturel (NR) à 25% de noirs de carbone et sur du Caoutchouc Styrène Butadiène (SBR) vulcanisé contenant 40% de noirs de carbone. Pour des raisons de confidentialité, les résultats sont normalisés de sorte que les contraintes soient comprises entre 0 et 1.

L'identification du modèle est faite en considérant  $C_R$  et  $N$  comme des fonctions polynomiales en  $\lambda_{\max}$  et en faisant varier le degré des polynômes de un à quatre. L'identification est faite simultanément sur l'ensemble des courbes (voir le chapitre II). Le résultat de l'identification est présenté sur les figures III.7 et III.8 et comparé aux résultats expérimentaux.

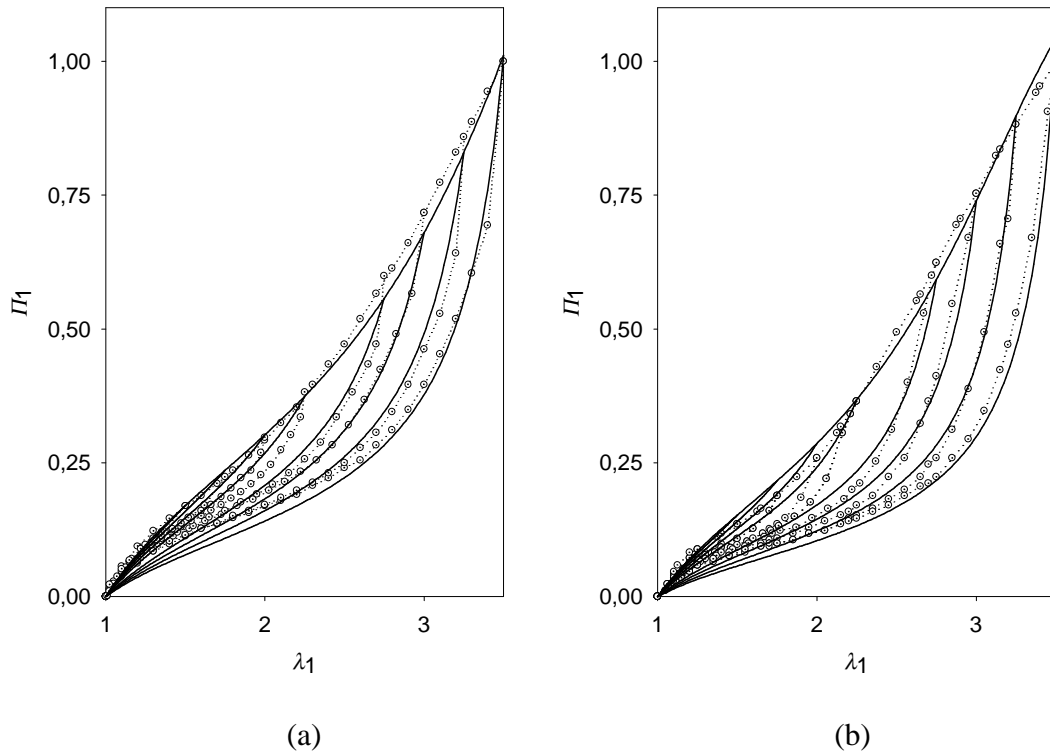


Figure III.7 : Résultats d'identification, (a) NR et (b) SBR: ( $\cdots\circ\cdots$ ): expériences, (—) théorie d'altération du réseau

La figure III.7 montre la bonne corrélation de notre modèle avec l'expérience pour les deux matériaux considérés. Les limitations du modèle 8-chaînes se retrouvent sur le modèle 8-chaînes modifié présenté ici. Elles expliquent l'écart plus important observé dans le domaine des petites déformations (autour de 50% de déformation). Ce problème peut être corrigé par l'utilisation d'un modèle plus approprié comme celui suggéré récemment par Boyce et Arruda [BOY 00].

Les courbes de la figure III.8 montrent l'évolution de  $N$  et  $C_R$  en fonction de l'élongation de chaîne maximale  $\lambda_{\max}$  (valeur maximale de  $\lambda$  décrite par l'équation (III.24)). Comme le prévoyait

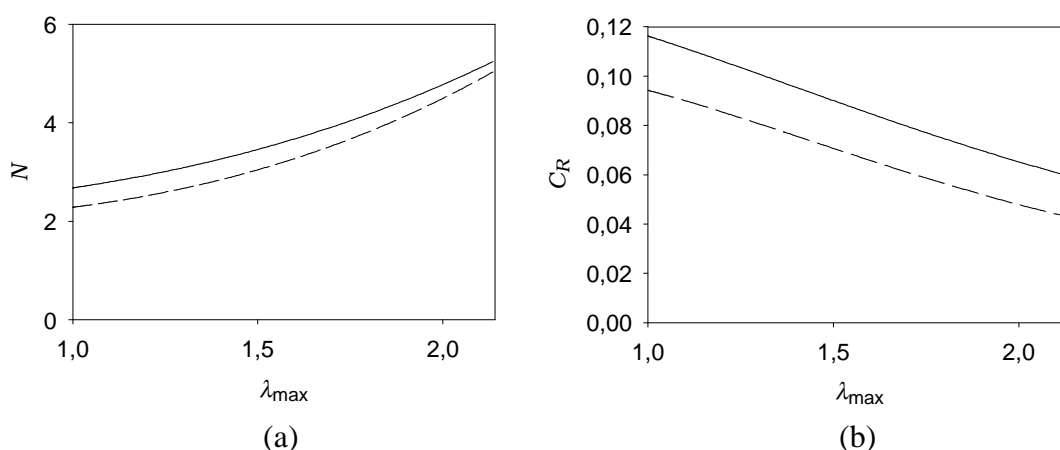


Figure III.8 : Paramètres matériels en fonctions de l'élongation maximale  $\lambda_{\max}$ , (a)  $N$  et (b)  $C_R$ :  
(—) NR, (- -) SBR.

la théorie proposée, le paramètre  $C_R$ , c'est-à-dire la densité de chaînes  $n$  (Fig. III.8(b)), décroît tandis que  $N$ , le nombre moyen de monomères par chaîne, croît (Fig. III.8(a)). Nous pouvons remarquer que les résultats sont très similaires pour les deux matériaux.

### III.3.3 Intérêt et impact du modèle

Nous avons donc construit un modèle de comportement permettant de reproduire l'effet Mullins dans les élastomères. Sur des considérations physiques et sur la base d'un modèle statistique, nous confirmons qu'une modification des caractéristiques du réseau de chaînes est à l'origine de ce phénomène. De plus nous disposons d'un modèle simple permettant de simuler ce phénomène à l'aide d'un code éléments finis.

Publié en 2002, cet article est cité dès 2003 par Cheng et Chen [CHE 03] ainsi que par Dorfmann et Ogden [DOR 03]. Une approche tout à fait similaire a été publiée récemment par Reese et Böl dans [REE 03].

## III.4 Conclusion

La construction d'un modèle de comportement prenant en compte l'effet Mullins s'avère nécessaire pour étudier la raideur des pièces en élastomères. Une application plus particulière est l'étude de la propagation de fissure. Dans ce contexte, il est en effet utile d'effectuer un bilan d'énergie relativement précis afin de distinguer la quantité d'énergie dissipée par le matériau (effet Mullins, viscoélasticité, ...) de la quantité dissipée par l'avancée de la fissure. Ceci est d'autant plus délicat que le matériau est fortement non-linéaire et que l'échantillon fissuré présente un large spectre d'états de déformation. Dans ce but un nouveau modèle de comportement prenant en compte l'effet Mullins a été présenté dans ce chapitre. Partant du principe généralement admis que l'effet Mullins est lié à des ruptures de liaisons entre chaînes, ou entre les chaînes et les charges [MUL 57a, BUE 60, BUE 61, JOH 93], le modèle d'Arruda et



Boyce [ARR 93] a été modifié pour tenir compte d'une évolution des caractéristiques du réseau (nombre de monomères par chaîne, densité volumique de chaînes) au cours du chargement. Bien que le modèle 8-chaînes soit un modèle simpliste du réseau de chaînes, il permet de construire un modèle reproduisant correctement l'effet Mullins.

Un des points faibles de ce modèle est la difficulté d'implantation dans un code éléments finis (voir section III.2.3). Néanmoins, l'équivalence entre les modèles de Hart-Smith et d'Arruda-Boyce établie dans la première partie de ce chapitre permet de construire un modèle d'effet Mullins similaire sur la base du modèle de Hart-Smith [CHA 03]. Malgré tout, quel que soit le modèle sur lequel s'appuie le modèle d'altération de réseau, des améliorations quantitatives peuvent être envisagées. En effet, des mesures plus précises de courbes de réponse pourraient permettre d'améliorer le modèle dans le domaine des petites déformations. Celles-ci permettraient éventuellement de déterminer de manière plus précise la loi d'évolution des paramètres matériels, et d'obtenir ainsi une réponse du modèle plus proche des essais expérimentaux. En particulier, la contrainte de conservation de la masse (produit  $Nn$ ) pourrait être abandonnée puisque les paramètres  $N$  et  $n$  concernent uniquement les chaînes intervenant dans la rigidité du matériau, les chaînes pendantes créées par les ruptures de liaisons n'intervenant plus dans le comportement.

Une modification plus profonde de notre modèle est également possible afin de prendre en compte l'anisotropie du matériau induite par l'effet Mullins [MUL 48, JAM 75, CHA 03]. Pour cela, il conviendrait de faire évoluer les paramètres de réseau en fonction de la direction d'étirement. Il sera avant tout nécessaire de mettre en place une campagne de mesures particulière afin de mieux cerner ce phénomène.

## Chapitre IV

### Application aux membranes soufflées

---

#### IV.1 Problématique

La finalité de l'étude des modèles de comportement pour des matériaux élastomères est de simuler des structures quelconques par des méthodes générales telles que la méthode des éléments finis. Le but de ce chapitre est de présenter le cas particulier des structures membranes souples. Cette problématique peut être appliquée au soufflage de ballons météorologiques, mais peut aisément être étendue au soufflage de polymères fondus employé dans les procédés de mise en forme par soufflage, ou de thermoformage [ROS 89, VIL 95]. En effet, le comportement d'un polymère fondu (thermoplastique) est souvent considéré comme hyperélastique [ZAM 89, DEL 91]. Une autre application est la caractérisation des matériaux en soufflage libre à partir de montage simple (membrane plane circulaire, tube cylindrique).

Notre étude fait suite aux travaux de Verron *et al.* [VER 97a, VER 98b, MAR 01] sur le moulage par soufflage et le thermoformage. Les très fortes non-linéarités rencontrées, aussi bien matérielles que géométriques, l'apparition de phénomènes d'instabilités structurelles lors du gonflement [KHA 92, VER 01b] ainsi que les problèmes de facettisation liés à la discrétisation par éléments finis, engendrent des difficultés de convergence ou d'interprétation des résultats. Certains travaux récents tentent d'améliorer les résultats de simulation éléments finis en utilisant des méthodes de maillage adaptatif [RV 97, MAR 01]. Pour notre part, notre intérêt s'est porté sur le développement d'une méthode alternative permettant d'enrichir l'interpolation plutôt que de remailler. Après avoir décrit rapidement les différentes méthodes proposées dans la littérature pour résoudre les problèmes de soufflage de membranes axisymétriques, nous présenterons la construction d'un élément fini original utilisant une interpolation de type B-spline. Puis, ce nouvel élément sera utilisé pour des simulations de soufflage utilisant les modèles de comportement non-gaussiens.

#### IV.2 L'étude des membranes

L'étude des membranes élastomères a fait l'objet de nombreuses publications scientifiques. Nous renvoyons le lecteur vers l'étude bibliographique rédigée par Chevaugnon dans le cadre de

sa thèse [CHE 02] ou, plus récemment, celle écrite par Verron dans son mémoire d'habilitation à diriger des recherches [VER 03a]. Ainsi, nous concentrerons notre attention sur les méthodes numériques employées pour l'études des structures membranes et la résolution des équations d'équilibre.

#### IV.2.1 Equations générales

L'écriture des équations locales d'équilibre d'une membrane hyperélastique axisymétrique en grandes transformations n'apparaît dans la bibliographie que pour quelques cas particuliers de membranes initialement planes, cylindriques (cylindre droit) ou sphériques et pour des lois de comportement simples (généralement Mooney-Rivlin). Ces hypothèses permettent de simplifier les écritures et les systèmes qui en découlent. Les EDP se transforment en équations différentielles ordinaires (EDO) avec des conditions limites aux deux extrémités (*two points boundary value problem* en anglais) résolues par la méthode de Runge-Kutta et la méthode de tir (*shooting method* en anglais), ou encore par la méthode des éléments finis [YAN 70, BEN 79, KHA 92, KHA 94, VER 97c].

En partant des hypothèses de membrane (rayon de courbure grand devant l'épaisseur, contraintes homogènes dans l'épaisseur) dans le cas particulier d'une structure axisymétrique en matériau hyperélastique, nous reprenons le système d'équations locales d'équilibre dans le cas général. Considérons un point matériel de la membrane paramétrée par son abscisse curviligne  $s$

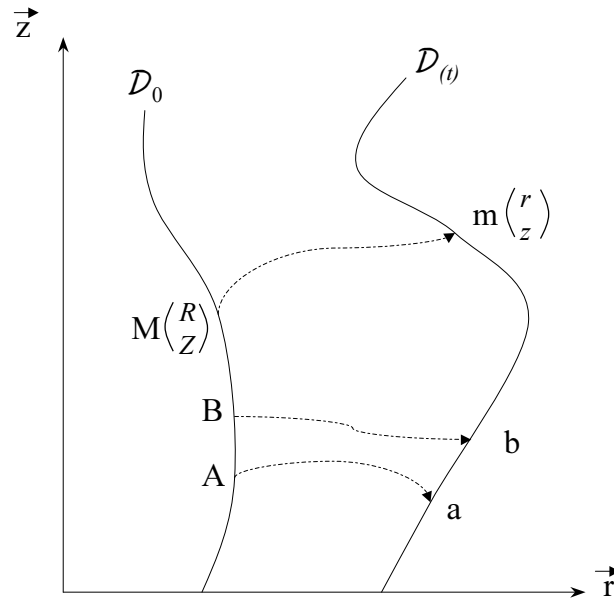


Figure IV.1 : Equilibre d'une membrane axisymétrique

( $s \in [0, l]$ ) et positionné au rayon  $r$  et à la hauteur  $z$  dans l'état déformé  $\mathcal{D}(t)$  et de coordonnées initiales (état non déformé  $\mathcal{D}_0$ )  $R$  et  $Z$  respectivement. L'élongation suivant la méridienne d'un

segment  $AB$  se transformant en  $ab$  s'écrit :

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \quad (\text{IV.1})$$

Tandis que l'élongation circonférentielle ne dépend que de la position radiale :

$$\lambda_2 = \frac{r}{R} \quad (\text{IV.2})$$

De par l'incompressibilité, l'épaisseur  $h$  dans l'état déformé est déterminée par la relation :

$$h = \frac{H}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{IV.3})$$

où  $H$  est l'épaisseur dans l'état non déformé.

Soit  $W(\lambda_1, \lambda_2)$  l'énergie de déformation décrivant la loi de comportement en fonction des élongations principales  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , l'énergie de déformation de la membrane s'écrit :

$$E_d = \int_{s=0}^{s=l} 2\pi W(\lambda_1, \lambda_2) R(s) H(s) ds \quad (\text{IV.4})$$

Tandis que le travail des efforts extérieurs (pression uniforme  $p$ ) est donné par :

$$\mathcal{T} = P \int_{s=0}^{s=l} \pi (r^2 z' + R^2 Z') ds \quad (\text{IV.5})$$

où  $(.)'$  désigne la dérivation suivant le paramètre  $s$ . Le théorème de l'énergie permet d'obtenir les équations d'équilibre en écrivant que toute variation  $\delta(E_d + \mathcal{T})$  est nulle pour toute variation  $\delta r$  et  $\delta z$ . Ceci permet d'aboutir aux équations suivantes :

$$RHW_{,r} - (RHW_{,r'})' = PRz' \quad (\text{IV.6})$$

$$(RHW_{,z'})' = Pr r' \quad (\text{IV.7})$$

et aux conditions aux limites suivantes :

$$[RHW_{,r'} \delta r]_{s=0}^{s=l} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$[(2\pi RHW_{,z'} - \pi p r^2) \delta z]_{s=0}^{s=l} = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Ici, la convention  $(.)_x$  désigne la dérivation suivant la variable  $x$ .

En exprimant les variables  $W_{,r}$ ,  $W_{,z'}$  et  $W_{,r'}$ , et en notant maintenant :

$$\omega_i = \frac{dW}{d\lambda_i}$$

$$\omega_{ij} = \frac{d^2W}{d\lambda_i d\lambda_j}$$

nous aboutissons, sans perte de généralité, à un système de la forme :

$$ar'' + bz'' = c \quad (\text{IV.10})$$

$$dr'' + ez'' = f \quad (\text{IV.11})$$

avec :

$$a = R \left[ \omega_1 + \frac{r'^2}{\lambda_1} \left( \omega_{11} - \frac{\omega_1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (\text{IV.12})$$

$$b = \frac{Rr'z'}{\lambda_1} \left( \omega_{11} - \frac{\omega_1}{\lambda_1} \right) \quad (\text{IV.13})$$

$$c = \lambda_1 \omega_2 - \frac{prz'\lambda_1}{H} - R'r'\omega_1 - Rr'\lambda_2'\omega_{12} \quad (\text{IV.14})$$

$$d = b \quad (\text{IV.15})$$

$$e = R \left[ \omega_1 + \frac{z'^2}{\lambda_1} \left( \omega_{11} - \frac{\omega_1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (\text{IV.16})$$

$$f = \frac{prr'\lambda_1}{H} - Rz'\omega_{12}\lambda_2' - R'z'\omega_1 \quad (\text{IV.17})$$

où  $\lambda_2'$  doit être remplacée par son expression :

$$\lambda_2' = \frac{Rr' - rR'}{R^2} \quad (\text{IV.18})$$

En résolvant le système (IV.11), on obtient les expressions de  $r''$  et de  $z''$  en fonction des autres variables.

$$r'' = \frac{1}{R} \left[ \frac{R'r'}{\lambda_1\omega_{11}} (\lambda_2\omega_{12} - \omega_1) - \frac{prz'\lambda_1}{h\omega_1} + \frac{r'^2}{\lambda_1^2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_{11}} - \lambda_1 \left( \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) \right] \quad (\text{IV.19})$$

$$z'' = \frac{1}{R} \left[ \frac{R'z'}{\lambda_1\omega_{11}} (\lambda_2\omega_{12} - \omega_1) - \frac{prr'\lambda_1}{h\omega_1} + \frac{r'z'}{\lambda_1^2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_{11}} - \lambda_1 \left( \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) \right] \quad (\text{IV.20})$$

Nous aboutissons à un système d'équations différentielles d'ordre deux valable pour l'ensemble des cas de soufflage de membranes axisymétriques. Nous remarquons que les expressions de  $r''$  et  $z''$  sont proches puisque l'on passe respectivement de l'une à l'autre en remplaçant les termes  $r'$  par  $z'$ ,  $z'$  par  $r'$  et  $r'^2$  par  $r'z'$ . Ce système ne peut cependant être intégré que par des méthodes numériques.

## IV.2.2 Discussion sur les différentes méthodes de résolution

### IV.2.3 La méthode du tir

En faisant un changement de variables, ce système d'EDO d'ordre deux peut être réécrit en un système d'EDO d'ordre un avec quatre conditions aux limites ( en  $r$ ,  $r'$ ,  $z$  et  $z'$ ) aux deux extrémités.

Dans un problème mécanique, les conditions aux limites ne sont généralement pas toutes connues pour une seule extrémité, mais sont partielles pour chaque extrémité. Prenons l'exemple d'un cylindre droit (figure IV.2) de rayon fixé à une extrémité et l'autre extrémité représentant une symétrie (demi cylindre). Les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{cases} r(s=0) & = R_0 \\ z(s=0) & = 0 \\ r'(s=l_0) & = 0 \\ z(s=l_0) & = l_0 \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

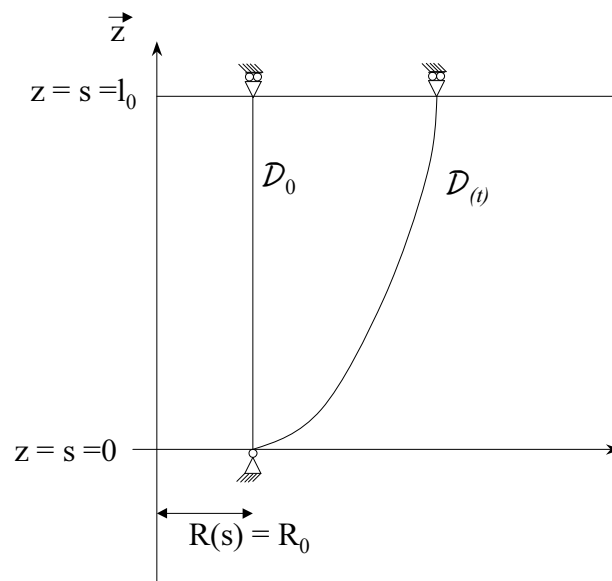


Figure IV.2 : Exemple d'un cylindre droit

tandis que sont inconnues  $r'(s = 0)$ ,  $z'(s = 0)$ ,  $r(s = l_0)$  et  $z'(s = l_0)$ .

Pour résoudre ce système, on utilise la méthode du tir. Pour cela, on estime les variables inconnues à une extrémité (ici,  $r'(s = 0)$  et  $z'(s = 0)$ ) et on intègre le système par la méthode de Runge-Kutta. Si les conditions aux limites connues à l'autre extrémité (ici,  $r'(s = l_0)$  et  $z(s = l_0)$ ) sont respectées, la solution est trouvée, sinon il faut « corriger le tir » par une méthode d'optimisation afin de réduire le résidu défini par l'écart entre la solution estimée et les conditions aux limites imposées.

Nous avons développé cette méthode en Fortran en utilisant la routine D02HAF de Nag (méthode de Runge-Kutta-Merson) ainsi que la routine ODE de NetLib (<http://gams.nist.gov>). Nous avons observé, comme d'autres auteurs avant nous [YAN 70, BEN 79, KHA 92, KHA 94, VER 97b], des difficultés de convergence de la méthode du tir qui semblent dues au fait que la fonction écart à optimiser est très irrégulière et présente des « vallées » très étroites au voisinage de la solution. Nous n'avons ainsi pu traiter que quelques cas de cylindres droits avec un rapport hauteur sur rayon initial d'au plus 5.

Ces difficultés nous ont ainsi incités à chercher une autre méthode de résolution plus robuste, et permettant de résoudre des cas de géométrie quelconque.

#### IV.2.4 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a déjà été utilisée pour traiter les problèmes de soufflage de membranes axisymétriques [CHA 89] ou pour des géométries tridimensionnelles [CHA 89, DEL 91, SON 91, KHA 94, RAC 94, VER 01b]. Elle souffre cependant d'un problème de facettisation d'autant plus important que les géométries non-déformée et déformée sont souvent très différentes. Les grandes transformations subies par les paraisons incitent à utiliser des méthodes

de maillage adaptatif, autant pour améliorer les résultats en termes de répartition d'épaisseur finale que pour respecter la géométrie déformée de la membrane localement très étirée et très courbée. Ces dernières tendent alors à augmenter de manière considérable le nombre de degrés de liberté nécessaires aux modèles, même dans des cas simples.

Pour contrecarrer ce problème de facettisation, notre choix s'est porté vers une méthode alternative, couplant la méthode des éléments finis à une description de la membrane par des fonctions de forme B-splines. C'est cette approche que nous décrivons dans la section suivante.

## IV.3 Modélisation des membranes par B-splines

### IV.3.1 Présentation

Afin de résoudre le problème de simulation du soufflage de membranes hyperélastiques axisymétriques, nous choisissons de développer un modèle éléments finis particulier reposant sur les propriétés mathématiques des fonctions B-spline et permettant d'obtenir des champs de déformation et de contrainte continus le long de la membrane. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication dans le journal **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** en 2001 [VER 01a] sous le titre de « Axisymmetric B-spline model for the non-linear inflation of rubberlike membranes ». Nous reprenons dans cette section, les idées principales développées dans l'article. Celui-ci est par ailleurs présenté dans l'annexe ??.

### IV.3.2 L'élément B-spline

L'utilisation des fonctions de forme de type B-spline pour résoudre des problèmes mécaniques est relativement récente. Bien que les premiers travaux aient débuté à la fin des années 1970, le nombre de problèmes traités reste faible. Des études contemporaines utilisant ce type d'approche existent pour des problèmes non-linéaires de poutres ou de plaques en statique ou en dynamique [VER 98a, PAT 99, SHE 00]. Ces travaux présentent les éléments finis spline comme plus économiques que les éléments finis classiques (fonctions d'interpolation de Lagrange) pour un même ordre de précision [PAT 98]. Cependant, la résolution des problèmes de membranes en très grandes déformations par ce type de méthode n'est pas, à notre connaissance, traitée dans la littérature.

#### IV.3.2.1 Définition

Les fonctions B-splines de degré  $l$  sont des splines développées dans une base polynômiale particulière et de degré  $l$ . Elles présentent l'avantage d'être de classe  $C^{l-1}$  tout en ne comportant qu'un degré de liberté par noeud ou par pôle (point de contrôle des splines). Les fondements mathématiques des splines peuvent être trouvés dans les ouvrages de De Boor [BOO 78] et de Hämmerlin et Hoffmann [HAM 91].

Considérons un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  décomposé en sous-intervalles par un ensemble de  $m + 1$  points  $(\xi^i)_{i=0,m}$  avec  $\xi^0 = a$  et  $\xi^m = b$ . Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une spline polynômiale

de degré  $l$  ( $l$  étant un entier positif) si elle satisfait les conditions suivantes :

(i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{l-1}$  sur  $[a, b]$  ;

(ii)  $f$  est une fonction polynômiale de degré  $l$  sur chaque sous-intervalle  $[\xi^i, \xi^{i+1}[$  pour  $i = 0, \dots, m-1$ .

Il peut être démontré que l'ensemble des splines de degré  $l$  associées à un jeu de points  $(\xi^i)_{i=0,m}$  est un espace linéaire de dimension  $m+l$  [HAM 91]. Cet espace est noté  $S_l \{(\xi^i)_{i=0,m}\}$ . Les splines linéaires ( $l=1$ ), quadratiques ( $l=2$ ) et cubiques sont les plus largement utilisées.

Une base particulière de splines nommées "Basic Spline Curves" (d'où le nom de « B-splines ») a été introduite par Schoenberg [SCH 46a], [SCH 46b]. Ces fonctions splines sont définies comme une base de l'espace  $S_l \{(\xi^i)_{i=0,m}\}$ .

Nous choisissons de nous focaliser sur les splines cubiques définies sur  $[0, 1]$ , intervalle de référence de notre élément fini. Avec la notation précédente, nous avons donc  $a=0$  et  $b=1$ , et l'espace linéaire considéré est  $S_3 \{(\xi^i)_{i=0,m}\}$  de dimension  $m+3$ . Une spline  $f$  de  $S_3 \{(\xi^i)_{i=0,m}\}$  se décompose de manière unique sur la base des B-splines :

$$f(\xi) = \sum_{i=-1}^{m+1} v^i B^i(\xi) \quad (\text{IV.22})$$

où  $(v^i)_{i=-1,m+1}$  sont les paramètres de la spline  $f$  et  $(B^i(\xi))_{i=-1,m+1}$  sont des fonctions polynômiales définies par morceaux suivant l'équation :

$$B^i(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq \xi^{i-2} \\ \frac{(\xi - \xi^{i-2})^3}{(\xi^{i+1} - \xi^{i-2})(\xi^i - \xi^{i-2})(\xi^{i-1} - \xi^{i-2})} & \xi^{i-2} \leq \xi < \xi^{i-1} \\ \frac{(\xi - \xi^{i-2})^2(\xi^i - \xi)}{(\xi^{i+1} - \xi^{i-2})(\xi^i - \xi^{i-2})(\xi^i - \xi^{i-1})} + \frac{(\xi^{i+1} - \xi)(\xi - \xi^{i-1})(\xi - \xi^{i-2})}{(\xi^{i+1} - \xi^{i-1})(\xi^i - \xi^{i-1})(\xi^{i+1} - \xi^{i-2})} \\ \quad + \frac{(\xi - \xi^{i-1})^2(\xi^{i+2} - \xi)}{(\xi^{i+1} - \xi^{i-2})(\xi^i - \xi^{i-1})(\xi^{i+2} - \xi^{i-1})} & \xi^{i-1} \leq \xi < \xi^i \\ \frac{(\xi^{i+1} - \xi)^2(\xi - \xi^{i-2})}{(\xi^{i+1} - \xi^{i-2})(\xi^{i+1} - \xi^{i-1})(\xi^{i+1} - \xi^i)} + \frac{(\xi^{i+2} - \xi)(\xi^{i+1} - \xi)(\xi - \xi^{i-1})}{(\xi^{i+2} - \xi^{i-1})(\xi^{i+1} - \xi^{i-1})(\xi^{i+1} - \xi^i)} \\ \quad + \frac{(\xi^{i+2} - \xi)^2(\xi - \xi^i)}{(\xi^{i+2} - \xi^{i-1})(\xi^{i+2} - \xi^i)(\xi^{i+1} - \xi^i)} & \xi^i \leq \xi < \xi^{i+1} \\ \frac{(\xi^{i+2} - \xi)^3}{(\xi^{i+2} - \xi^{i-1})(\xi^{i+2} - \xi^i)(\xi^{i+2} - \xi^{i+1})} & \xi^{i+1} \leq \xi < \xi^{i+2} \\ 0 & \xi^{i+2} \leq \xi \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

avec la convention :



- $\xi^i = \xi^0$  pour  $i \leq 0$  ;
- $\xi^i = \xi^m$  pour  $i \geq m$  ;
- les deux conventions précédente entraînant des termes nuls en dénominateur, nous adoptons également la convention :  $0/0 = 0$ .

Dans l'espace de définition de la fonction  $f$ , les points définis par les coordonnées  $(\xi^i, v^i)$  sont appelés *pôles* ou *points de contrôle* (*knots* en anglais) de la spline.

La figure IV.3 représente quelques unes des douze fonctions B-splines cubiques  $(B^i(\xi))_{i=0,11}$  pour une partition régulière de l'intervalle  $[0, 1]$  en dix sous-intervalles. On constate que les fonctions  $(B^i(\xi))_{i=3,8}$  sont des fonctions « cloches » centrée sur  $\xi^i$  et nulle en dehors de l'intervalle  $[\xi^{i-2}, \xi^{i+2}]$ .

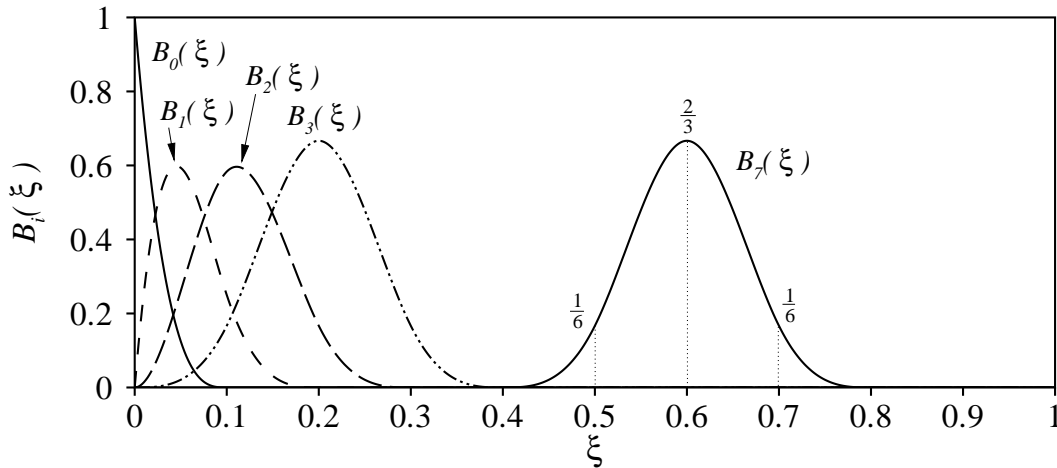


Figure IV.3 : Fonctions polynômiales B-splines pour un ensemble de onze points  $\xi_i$  équidistants sur  $[0,1]$

#### IV.3.2.2 Interpolation d'une courbe dans un espace de dimension deux

##### *Interpolation de la membrane*

La description de la géométrie d'une membrane axisymétrique peut se réduire à la courbe génératrice moyenne définie dans un repère cylindrique. Cette courbe continue de dimension deux est notée  $\mathcal{L}$ . Tout point matériel  $P$  de la courbe est défini par ses coordonnées  $(R(s), Z(s))$ , où  $s$  est la coordonnée curviligne adimensionnée variant de 0 à 1 le long de la courbe, et où  $R(s)$  et  $Z(s)$  sont respectivement les coordonnées radiale et axiale.

Nous discrétisons cette courbe en  $n$  sous-domaines. Les bornes de ces sous-domaines sont les  $n+1$  points  $(N^j)_{j=0,n}$  appelés nœuds par similitude avec la méthode des éléments finis classique. Les coordonnées du nœud  $N^j$  sont notées  $(R^j, Z^j)$  et sa coordonnées curvilignes est notée  $s^j$ .

Considérons un ensemble  $\Omega_{\mathcal{L}}$  de  $m$  points de  $[0, 1]$ . Tout point de coordonnées  $R(s)$  et  $Z(s)$  peut être interpolé par deux splines de  $S_3 \{ \Omega_{\mathcal{L}} \}$  :

$$R(s) = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha^i B^i(s) \quad (\text{IV.24})$$

$$Z(s) = \sum_{i=-1}^{m+1} \beta^i B^i(s) \quad (\text{IV.25})$$

où  $(\alpha^i)_{i=-1, m+1}$  et  $(\beta^i)_{i=-1, m+1}$  sont les paramètres des deux splines. Par extension du vocabulaire précédent, les points définis par les coordonnées  $(\alpha^i, \beta^i)_{i=-1, m+1}$  sont appelés *pôles* ou *points de contrôle* de la spline de dimension deux. Les coordonnées curvilignes des pôles sont  $(\xi^i)_{i=-1, m+1}$ .

Pour chaque spline,  $m + 3$  paramètres doivent être déterminés de manière unique. Pour cela, nous devons établir  $m + 3$  relations indépendantes. En prenant en compte les deux conditions limites angulaires aux extrémités (rotation libre de courbure nulle ou rotation imposée), nous réduisons ce nombre à  $m + 1$ . Les  $n + 1$  coordonnées des nœuds fournissent les seules autres relations possibles, nous devons donc choisir  $m = n$ . Le nombre de points  $(\xi^i)$  doit donc être égal au nombre de nœuds. De manière arbitraire, nous choisissons de fixer les coordonnées curvilignes  $(\xi^i)$  de sorte que :

$$\xi^i = s^i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \quad (\text{IV.26})$$

Dans la suite,  $m$  sera désormais remplacé par  $n$ , et les coordonnées  $\xi$  seront remplacées par  $s$ .

### Conditions aux limites

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, les conditions limites de la spline fournissent deux équations. On distingue deux types de conditions limites possibles. Nous détaillons ici le cas d'une des extrémités de la membrane, le nœud  $N^0$ , le cas de l'autre extrémité  $N^n$  pouvant se déduire par des développements similaires.

Dans le cas où le premier nœud n'est pas situé sur l'axe de symétrie, nous avons, pour les deux coordonnées, une condition d'extrémité naturelle, ce qui se traduit par une courbure nulle par rapport à  $s$  [HAM 91] :

$$R''(0) = 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$Z''(0) = 0 \quad (\text{IV.28})$$

où la notation  $(.)''$  désigne la dérivée seconde par rapport à  $s$ . Les équations (IV.27) et (IV.28) permettent de ré-écrire les équations (IV.24) et (IV.25) comme une série de  $n + 1$  fonctions polynômiales sous la forme :

$$R(s) = \sum_{i=0}^n \alpha^i B_r^i(s) \quad (\text{IV.29})$$

$$Z(s) = \sum_{i=0}^n \beta^i B_z^i(s) \quad (\text{IV.30})$$

où les nouvelles fonctions de base  $B_r^i(s)_{i=0,n}$  sont données par :

$$B_r^i(s) = \begin{cases} \frac{-2s^0 + s^1 + s^2}{s^2 - s^0} B^{-1} + B^0(s) & \text{pour } i = 0 \\ \frac{s^0 - s^1}{s^2 - s^0} B^{-1} + B^1(s) & \text{pour } i = 1 \\ B^i(s) & \text{pour } i = 2, \dots, n-2 \\ \text{dépend de la condition limite au nœud } N^n & \text{pour } i = n-1, n \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Les nouvelles fonctions  $B_z^i(s)_{i=0,n}$  sont définies de la même manière.

Dans le cas où le premier nœud se situe sur l'axe de symétrie, les deux fonctions spline  $R(s)$  et  $Z(s)$  ont la même condition limite en  $N^0$ . Le nœud doit rester sur l'axe au cours de la déformation, c'est-à-dire  $R(0) = 0$ , et la condition limite est une condition d'extrémité naturelle, c'est-à-dire  $R''(0) = 0$ . D'autre part, la coordonnée axiale  $Z(s)$  en  $N^0$  doit vérifier la condition d'extrémité de Hermite [HAM 91], à savoir :

$$Z'(0) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Cette condition traduit un angle droit entre la membrane et l'axe de symétrie. Les nouvelles fonctions  $B_z^i(s)$  s'écrivent dans ce cas :

$$B_z^i(s) = \begin{cases} B^{-1} + B^0(s) & \text{for } i = 0 \\ B^i(s) & \text{for } i = 1, \dots, n-2 \\ \text{de la condition limite au nœud } N^n & \text{for } i = n-1, n \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

alors que les fonction  $B_r^i(s)_{i=0,n}$  s'écrivent comme précédemment (Eq.(IV.31)).

Nous constatons ainsi que les conditions aux limites peuvent s'imposer de manière stricte, contrairement aux éléments finis de membranes classiques.

### ***Interpolation des déplacements et propriétés***

De manière similaire aux éléments finis classiques, nous choisissons de construire un élément isoparamétrique : les mêmes fonctions d'interpolation (IV.24) sont utilisées pour décrire la géométrie et les déplacements. Les déplacements radiaux et axiaux sont respectivement notés  $u_r(s)$  et  $u_z(s)$ , et sont décrits par deux nouvelles splines :

$$u_r(s) = \sum_{i=0}^n \gamma^i B_r^i(s) \quad (\text{IV.34})$$

$$u_z(s) = \sum_{i=0}^n \delta^i B_z^i(s) \quad (\text{IV.35})$$

où  $(\gamma^i)_{i=0,n}$  et  $(\delta^i)_{i=0,n}$  sont les paramètres des deux splines.

Afin de déterminer les valeurs des paramètres des splines, nous introduisons deux matrices carrées  $\mathbf{A}_r$  et  $\mathbf{A}_z$  de dimension  $n+1$ . Les coefficients  $A_r^{ij}$  de  $\mathbf{A}_r$  et  $A_z^{ij}$  de  $\mathbf{A}_z$  sont donnés par

les relations :

$$A_r^{ij} = B_r^j(s^i) \quad (\text{IV.36})$$

$$A_z^{ij} = B_z^j(s^i) \quad (\text{IV.37})$$

Ainsi, les paramètres  $(\alpha^i)_{i=0,n}$ ,  $(\beta^i)_{i=0,n}$ ,  $(\gamma^i)_{i=0,n}$  et  $(\delta^i)_{i=0,n}$  sont obtenus respectivement par les équations (IV.24), (IV.25), (IV.34) et (IV.35) écrites pour chaque nœud. Ceci fournit le système d'équations linéaires suivant :

$$\sum_{j=0}^n A_r^{ij} \alpha^j = R^i \quad \text{pour } i = 0, n \quad (\text{IV.38})$$

$$\sum_{j=0}^n A_z^{ij} \beta^j = Z^i \quad \text{pour } i = 0, n \quad (\text{IV.39})$$

$$\sum_{j=0}^n A_r^{ij} \gamma^j = u_r^i \quad \text{pour } i = 0, n \quad (\text{IV.40})$$

$$\sum_{j=0}^n A_z^{ij} \delta^j = u_z^i \quad \text{pour } i = 0, n \quad (\text{IV.41})$$

dans lequel  $(u_r^i, u_z^i)$  sont les déplacements nodaux du nœud  $N^i$ .

Les coordonnées  $(r(s), z(s))$  de tout point matériel de la membrane peuvent maintenant être calculées par la relation :

$$r(s) = R(s) + u_r(s) = \sum_{i=0}^n B_r^i(s) (\alpha^i + \gamma^i) \quad (\text{IV.42})$$

$$z(s) = Z(s) + u_z(s) = \sum_{i=0}^n B_z^i(s) (\beta^i + \delta^i) \quad (\text{IV.43})$$

Ainsi, les équations (IV.42), (IV.43) (IV.40) et (IV.41), permettent d'établir les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial r}{\partial u_r^i}(s) = \sum_{j=0}^n B_r^j(s) A_r^{*ji} \quad \frac{\partial r}{\partial u_z^i}(s) = 0 \quad (\text{IV.44})$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_r^i}(s) = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial u_z^i}(s) = \sum_{j=0}^n B_z^j(s) A_z^{*ji} \quad (\text{IV.45})$$

$$\frac{\partial r'}{\partial u_r^i}(s) = \sum_{j=0}^n B_r^{j'}(s) A_r^{*ji} \quad \frac{\partial r'}{\partial u_z^i}(s) = 0 \quad (\text{IV.46})$$

$$\frac{\partial z'}{\partial u_r^i}(s) = 0 \quad \frac{\partial z'}{\partial u_z^i}(s) = \sum_{j=0}^n B_z^{j'}(s) A_z^{*ji} \quad (\text{IV.47})$$

dans lesquelles les matrices  $\mathbf{A}_r^*$  et  $\mathbf{A}_z^*$  sont respectivement les matrices inverses de  $\mathbf{A}_r$  et  $\mathbf{A}_z$ .

Ces fonctions sont utiles lors de l'écriture du principe des travaux virtuels par dérivation de l'énergie de déformation de la membrane suivant des variations virtuelles des variables nodales  $u_r^i$  et  $u_z^i$ .

### IV.3.3 Equations d'équilibre et procédure de résolution

#### IV.3.3.1 Mise en équations

Dans cette partie, nous décrirons sommairement la mise en équation du problème mécanique. Le lecteur pourra se référer à l'article [VER 01a] présenté dans l'annexe ?? pour plus de détails.

#### *Relations cinématiques et loi de comportement*

Nous considérons toujours les hypothèses décrites dans la partie IV.2.1. Un point matériel  $(R, \Theta, Z)$  dans la configuration initiale se déplace en  $(r, \theta, z)$ . Par hypothèse d'axisymétrie :

$$r = R + u_r \quad (\text{IV.48})$$

$$\theta = \Theta \quad (\text{IV.49})$$

$$z = Z + u_z \quad (\text{IV.50})$$

où  $u_r$  et  $u_z$  sont les déplacements radial et axial respectivement. La géométrie initiale se réduit bien à une courbe unidimensionnelle continue de longueur  $L$ .  $(R, Z)$ ,  $(r, z)$ ,  $H$  et  $h$  respectivement les coordonnées initiales, les coordonnées dans l'état déformé, la répartition d'épaisseur initiale et la répartition d'épaisseur dans l'état déformé sont des fonctions dépendant seulement de l'abscisse curviligne  $s$  [YAN 70]. Nous choisissons  $s$  variant de 0 à 1 alors que l'abscisse curviligne physique varie de 0 à  $L$ . Les directions et les élongations principales sont les mêmes que celles établies dans la section IV.2.1.

Nous nous intéressons alors à un matériau de type Mooney-Rivlin [MOO 40] que nous écrivons, tenant compte de l'incompressibilité, sous la forme :

$$W = C [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3) + \alpha (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3)] \quad (\text{IV.51})$$

où  $C$  and  $\alpha$  sont les paramètres matériels. La membrane étant en état de contraintes planes, les composantes du second tenseur de Piola-Kirchhoff  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  (respectivement contrainte méridienne, circonférentielle et normale à la surface) s'écrivent :

$$S_1 = 2C \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^4} \right) (1 + \alpha \lambda_2^2) \quad (\text{IV.52})$$

$$S_2 = 2C \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right) (1 + \alpha \lambda_1^2) \quad (\text{IV.53})$$

$$S_3 = 0 \quad (\text{IV.54})$$

### Principe des travaux virtuels

En négligeant le poids propre et l'inertie de la structure, le principe des travaux virtuels se traduit par la relation :

$$g(\vec{u}, \delta \vec{u}, p) = \int_0^l 2\pi R L H (S_1 \lambda_1 \delta \lambda_1 + S_2 \lambda_2 \delta \lambda_2) ds - \int_0^l 2\pi p r (\delta u_r z' - \delta u_z r') ds \quad \forall \delta \vec{u} \quad (\text{IV.55})$$

où  $p$  est la pression sur la face interne de la paraison,  $\delta \vec{u}$  le vecteur des déplacements virtuels. Le premier terme représente le travail virtuel des efforts internes tandis que le second terme représente le travail virtuel du chargement extérieur défini sur la configuration courante (pression).

De manière analogue aux éléments finis classiques, nous discrétisons la membrane par  $n$  segments délimités par  $n+1$  nœuds  $(N^i)_{i=0,n}$ , mais nous utilisons, dans notre cas, l'interpolation par B-splines décrite précédemment. Nous aboutissons alors à un système d'équations non-linéaires de la forme :

$$\vec{G}(\vec{U}, p) = \vec{F}_{\text{int}}(\vec{U}) - \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{U}, p) = 0 \quad (\text{IV.56})$$

où  $\vec{U}$ ,  $\vec{F}_{\text{int}}(\vec{U})$  et  $\vec{F}_{\text{ext}}(\vec{U}, p)$  sont respectivement le vecteur des déplacements nodaux, le vecteur des forces internes et le vecteur des forces externes.

#### IV.3.3.2 Procédures de résolution numérique

Pour résoudre l'équation (IV.56), nous utilisons, dans un premier temps, le schéma classique de Newton-Raphson en imposant des incréments de pression  $\Delta p$  pour évaluer les premiers points de la courbe de réponses de la structure. Ce schéma ne peut cependant pas être conservé pour déterminer l'ensemble des positions d'équilibre de la membrane. Comme nous l'avons déjà mentionné, des phénomènes d'instabilité faisant apparaître des points limites sur la courbe de réponse [BEA 87, VER 99] nous obligent à adopter une méthode de continuation. Nous choisissons alors de développer la méthode de longueur d'arc [RIK 72, CRI 94].

Considérons un point d'équilibre connu défini par le vecteur des déplacements nodaux  $\vec{U}_e$  et la pression interne  $p_e$ .  $\vec{U}_e$  et  $p_e$  vérifient l'équation d'équilibre (IV.56). Nous cherchons alors un nouveau point d'équilibre défini par les incréments de déplacements  $\Delta \vec{U}$  et de pression  $\Delta p$  vérifiant :

$$\vec{G}(\vec{U}_e + \Delta \vec{U}, p_e + \Delta p) = 0 \quad (\text{IV.57})$$

La méthode de longueur d'arc consiste alors à ajouter une relation entre  $\Delta \vec{U}$  et  $\Delta p$  qui limite l'espace des solutions à une hypersphère définie par la norme :

$$A(\Delta \vec{U}, \Delta p) = \left( \|\Delta \vec{U}\|^2 + \psi^2 \|\Delta \vec{F}_{\text{ext}}\|^2 \right) - da^2 \quad (\text{IV.58})$$

où  $\Delta \vec{F}_{\text{ext}}$  est l'incrément de forces externes,  $\psi$  un facteur d'échelle entre les composantes de déplacements et d'efforts et  $da$  la longueur d'arc choisie. Nous choisissons de prendre  $\psi$

égale à zéro, ce qui réduit la méthode à un contrôle par longueur d'arc sur les déplacements seuls [BAT 79].

Nous construisons la suite de points de l'espace des solutions, définie par  $\Delta \vec{U}^{i+1} = \Delta \vec{U}^i + d\vec{U}^{i+1}$  et  $\Delta p^{i+1} = \Delta p^i + dp^{i+1}$  et nous appliquons alors la méthode de Newton-Raphson au nouveau système d'équations :

$$\vec{G}(\vec{U}_e + \Delta \vec{U}^{i+1}, p_e + \Delta p^{i+1}) = 0 \quad (\text{IV.59})$$

$$A(\Delta \vec{U}^{i+1}, \Delta p^{i+1}) = 0 \quad (\text{IV.60})$$

ce qui permet d'aboutir au système à résoudre :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K} & -\vec{f}_{\text{ext}} \\ \hline 2\Delta \vec{U}^{iT} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d\vec{U}^{i+1} \\ dp^{i+1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \vec{G}^i \\ A^i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

où le symbole  $\cdot^T$  désigne l'opérateur transposition et avec les notations suivantes :

$$\vec{f}_{\text{ext}}(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{G}}{\partial p}(\vec{U}_e + \Delta \vec{U}^i, p_e + \Delta p^i) \quad (\text{IV.62})$$

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}}(\vec{U}_e + \Delta \vec{U}^i, p_e + \Delta p^i) \quad (\text{IV.63})$$

$$\vec{G}^i = \vec{G}(\vec{U}_e + \Delta \vec{U}^i, p_e + \Delta p^i) \quad (\text{IV.64})$$

$$A^i = A(\Delta \vec{U}^i, \Delta p^i) \quad (\text{IV.65})$$

Comme nous le constatons, cette méthode nécessite d'être initialisée et ne peut donc pas être appliquée dès le premier incrément de mise en charge de la structure. Nous effectuons, pour cela, la prédiction  $\Delta \vec{U}^{\text{pred}}$  et  $\Delta p^{\text{pred}}$  en supposant qu'il vérifie la première équation du système (IV.61) avec  $\vec{G}^i = \vec{G}(\vec{U}_e, p_e) = \vec{0}$ . Cela revient à définir la solution suivant la raideur tangente de la structure :

$$\Delta \vec{U}^{\text{pred}} = \Delta p^{\text{pred}} d\vec{U}^{\text{tan}} \quad (\text{IV.66})$$

où  $d\vec{U}^{\text{tan}}$  est l'incrément de déplacement tangent :

$$d\vec{U}^{\text{tan}} = \mathbf{K}^{-1} \vec{f}_{\text{ext}} \quad (\text{IV.67})$$

Nous utilisons alors l'équation (IV.58) pour écrire :

$$\|\Delta \vec{U}^{\text{pred}}\|^2 = da^2 \quad (\text{IV.68})$$

Ainsi, la prédiction d'incrément de pression est donnée par la relation :

$$\Delta p^{\text{pred}} = \varepsilon \frac{da}{\|d\vec{U}^{\text{tan}}\|} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{IV.69})$$

Deux solutions sont alors possibles suivant le signe de  $\varepsilon$ . Afin de poursuivre le chemin de chargement dans le même sens, nous prenons le signe du produit scalaire  $\Delta \vec{U}_e \cdot d\vec{U}^{\text{tan}}$ , où  $\Delta \vec{U}_e$  est l'incrément entre les deux derniers points de la courbe d'équilibre :

$$\varepsilon = \text{signe} \left[ \Delta \vec{U}_e \cdot d\vec{U}^{\text{tan}} \right] \quad (\text{IV.70})$$

### IV.3.4 Validation de l'approche

Afin de valider nos développements, des résultats de simulations numériques sont comparés avec des solutions issues de la bibliographie. Nous étudierons le cas de soufflage du tube cylindrique infini, de la membrane sphérique et du tube cylindrique encastré. Sur ce dernier cas, nous nous intéresserons à la convergence au sens des éléments finis de notre approche par B-splines en regardant l'influence du nombre de noeuds du modèle sur les résultats.

#### IV.3.4.1 Le tube cylindrique infini

Nous considérons un cylindre infini de rayon uniforme  $R_0$  dans l'état non-déformé. Nous étudions un tronçon de longueur  $L$  et d'épaisseur initiale  $H$ . Son matériau est modélisé par le modèle de Mooney-Rivlin réduit aux paramètres  $C$  et  $\alpha$  défini par l'Eq. (IV.51). La géométrie et les conditions aux limites sont décrites sur la figure IV.4(a). Les deux extrémités sont dans des conditions limites naturelles en  $R$  et  $Z$ .

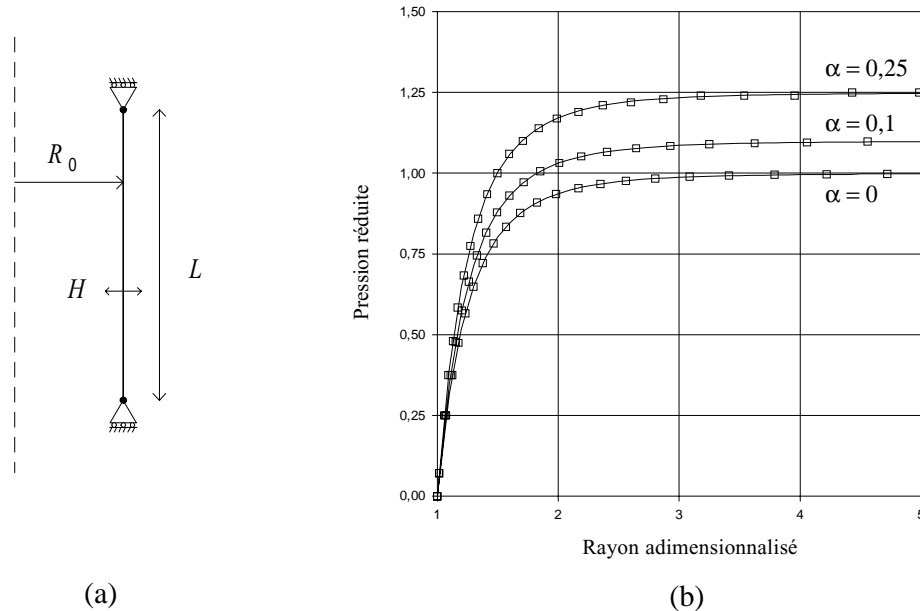


Figure IV.4 : Soufflage d'un tube cylindrique infini. (a) Description du modèle. (b) Pression réduite en fonction du rayon adimensionnalisé pour trois valeurs de  $\alpha$ : (—) résultats analytiques, ( $\square$ ) résultats numériques.

La réponse du système est une expansion uniforme sans accroissement de longueur du tronçon ( $\lambda_1 = 1$ ) qui suit la courbe suivante [ALE 71] :

$$p = (1 + \alpha) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \quad (\text{IV.71})$$

où  $\lambda$  est le rayon adimensionnalisé défini par :

$$\lambda = \frac{r}{R_0} \quad (\text{IV.72})$$



et  $p$  est la pression réduite défini par :

$$p = \frac{PR_0}{2CH} \quad (\text{IV.73})$$

La pression réduite tend donc vers  $1 + \alpha$  lorsque le rayon tend vers l'infini. Les résultats numériques sont présentés sur la figure IV.4(b) et comparés à la solution analytique. Ils ont été obtenus avec un élément à 21 nœuds pour des valeurs respectives de  $R_0$ ,  $L$ ,  $H$  et  $C$  égales à 1; 10; 0,01 et 1. Trois valeurs du paramètre  $\alpha$  ont été examinées :  $\alpha = 0.$ ,  $\alpha = 0,1$  et  $\alpha = 0,25$ . Les résultats numériques reproduisent avec une très bonne précision la solution analytique.

#### IV.3.4.2 La membrane sphérique

Cet exemple concerne une membrane sphérique en matériau de type Mooney-Rivlin, de rayon initial  $R_0$  et d'épaisseur uniforme  $H$ . La géométrie et les conditions aux limites sont décrites sur la figure IV.5(a).

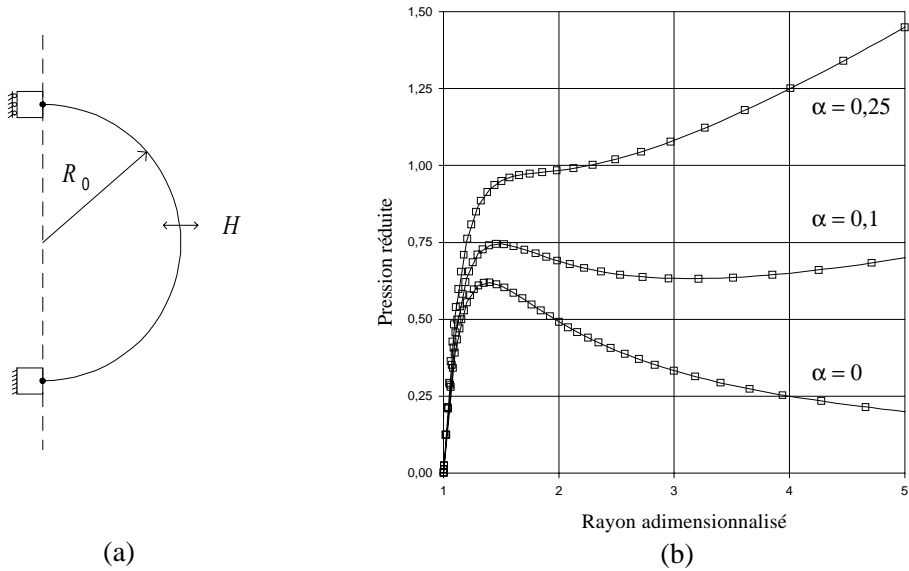


Figure IV.5 : Soufflage d'une membrane sphérique. (a) Description du modèle. (b) Pression réduite en fonction du rayon adimensionnalisé pour différentes valeurs de  $\alpha$  : (—) résultats analytiques, ( $\square$ ) résultats numériques.

Les deux extrémités sont soumises à des conditions de symétrie axiale, correspondant à une condition naturelle en  $R$  et une condition d'Hermite en  $Z$ . La solution triviale du problème conserve par ailleurs la propriété de sphéricité. Le problème se réduit alors à une équation de dimension un donnée par [BEA 87] :

$$p = \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{IV.74})$$

où  $\lambda$  est le rayon adimensionnalisé

$$\lambda = \frac{r}{R_0} \quad (\text{IV.75})$$

et  $p$  est la pression réduite défini par :

$$p = \frac{PR_0}{4CH} \quad (\text{IV.76})$$

L'équation (IV.74) a été largement étudiée dans la littérature. La membrane présente des comportements différents selon la valeur donnée au paramètre  $\alpha$  [VER 99]. Ainsi, pour  $\alpha = 0$ , on observe un point limite interdisant des valeurs de la pression supérieures à une certaine valeur maximale. Dans le cas où  $\alpha = 0,1$ , la courbe de réponse présente deux points limites entre lesquels la structure est instable. Enfin, pour  $\alpha = 0,25$ , la courbe de réponse est monotone et la pression croît avec le rayon de la sphère.

La membrane élément fini est discrétisée en 41 nœuds et les valeurs suivantes sont adoptées :  $R_0 = 1$ ,  $H = 0,01$  et  $C = 1$ . Les résultats numériques sont donnés sur la figure IV.5(b). Elles sont très proches de la solution pour les trois valeurs de  $\alpha$  évoquée ci-dessus.

#### IV.3.4.3 Le tube cylindrique encastré (ligaturé)

Ce troisième exemple concerne le tube de longueur finie ligaturé à ces deux extrémités. Ce problème ne présente pas de solution analytique simple. Par ailleurs, il est instable et difficile à résoudre [KHA 92].

##### *Résultats numériques*

Un cylindre de longueur  $L$  de rayon  $R_0$  et d'épaisseur initiale uniforme  $H$  est modélisé par un demi-cylindre présentant une symétrie plane en  $Z = 0$ . Cette symétrie est traduite par une condition limite de Hermite et un déplacement axial nul, tandis que l'extrémité ligaturée présente des déplacements radial et axial nuls avec une condition limite naturelle. Nous examinons toujours le cas du matériau de type Mooney-Rivlin de paramètres  $C$  et  $\alpha$ .

Nous généralisons l'étude en définissant une pression interne réduite  $p$ , déduite de la pression réelle  $P$  par la relation :

$$p = \frac{PR_0}{2CH} \quad (\text{IV.77})$$

De même, le rayon est adimensionnalisé par le rapport  $R/R_0$ . L'élancement du cylindre est défini de la même manière par le rapport  $L/R_0$ .

Le calcul est mené pour un élancement de 10 sur un demi-tube discrétisé par 101 nœuds pour s'assurer de la convergence au sens des éléments finis. La figure IV.6 montre les résultats de simulation pour les valeurs de  $\alpha$  étudiées précédemment. On observe la présence d'un point limite pour  $\alpha = 0$ , de deux points limites pour  $\alpha = 0,1$  et d'une courbe stable pour  $\alpha = 0,25$ .

De même, la figure IV.7 présente l'évolution du profil du tube au cours du soufflage pour les trois valeurs de  $\alpha$  considérées. Dans les cas où  $\alpha = 0,1$  et  $\alpha = 0,25$ , la membrane gonfle de manière régulière sur les parties stables et instables des courbes de réponse. En revanche, pour  $\alpha = 0$  (matériau néo-hookéen) on observe la formation d'une hernie (ou ventre, *bulge* en anglais) sur la partie instable de sa courbe de réponse (une amorce d'hernie était déjà perceptible pour

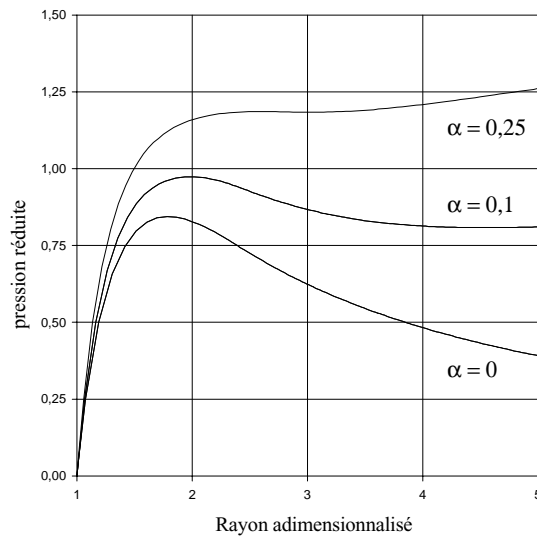


Figure IV.6 : Pression réduite en fonctions du rayon adimensionnalisé sur le plan de symétrie pour trois valeurs de  $\alpha$ .

$p = 0,87$  et  $\alpha = 0,1$ ). Ce phénomène a été observé précédemment par d'autres auteurs [KYR 91], [VER 01b].

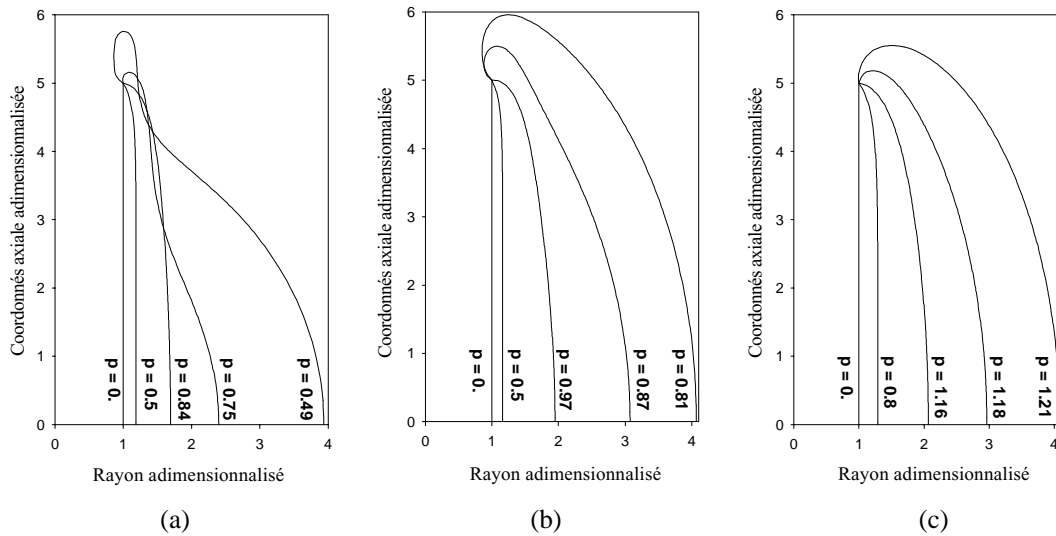


Figure IV.7 : Evolution du profil du tube cylindrique ligaturé au cours du soufflage : (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 0,1$  et (c)  $\alpha = 0,25$ .

### Etude de convergence

Nous étudions à présent l'ordre de convergence de notre élément fini B-splines au sens des éléments finis, c'est-à-dire l'évolution de la solution numérique lorsque le nombre de nœuds du modèle croît. Le calcul précédent avec 101 nœuds est alors pris comme solution de référence. Six autres simulations sont alors effectuées en prenant une répartition uniforme de 5, 11, 21, 31,

41 et 51 nœuds. Deux rapports sont alors définis. Le premier est évalué sur la courbe d'équilibre et est noté  $R_l$  (*loading curve ratio*). Il est égal à la différence la plus grande entre la courbe de réponse pour le maillage considéré et la courbe de référence. Le second est utilisé pour évaluer l'erreur sur la forme du profil. Il est noté  $R_p$  (*profile ratio*) et est égal à la distance entre deux profils pour un même rayon au plan de symétrie. Ce calcul est effectué pour toutes les pressions au cours du chargement et la plus grande valeur est retenue comme critère. Nous traçons alors l'évolution du logarithme de ces deux critères (figure IV.8) en fonction du logarithme de  $1/N$ , où  $N$  est le nombre de nœuds (critère lié à la distance entre deux nœuds). Les deux critères présentent des ordres de convergence similaires (pente des courbes de la figure IV.8).

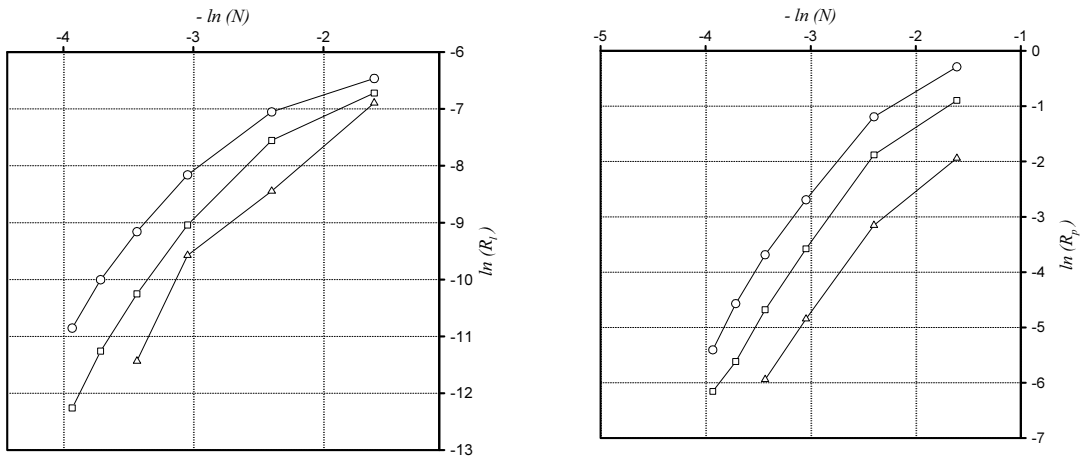


Figure IV.8 : Propriétés de convergence (a) critère  $R_l$ , (b) critère  $R_p$ : (○)  $\alpha = 0$ , (□)  $\alpha = 0,1$  et (△)  $\alpha = 0,25$ .

### IV.3.5 Contribution de l'article

Nous avons développé un élément fini spline permettant de résoudre le problème de soufflage libre quasi-statique d'une membrane hyperélastique axisymétrique en très grandes transformations. L'approche permet en outre de traiter les cas de soufflage instables par la méthode de longueur d'arc. Les champs issus du calcul (contraintes, déformations, épaisseurs) sont des fonctions continues de par l'appartenance à la classe  $\mathcal{C}^2$  du champ d'interpolation des déplacements. Ceci offre donc une alternative intéressante à la méthode de Runge-Kutta appliquée aux EDO décrivant l'équilibre local du système. Sa rapidité d'exécution (faible nombre de degrés de liberté pour une précision donnée), sa polyvalence (liée à la méthode des éléments finis) ainsi que sa stabilité (liée à l'utilisation de la méthode de longueur d'arc) en font un outil idéal pour introduire la modélisation d'un procédé de soufflage dans une boucle d'optimisation. Il offre en particulier la possibilité, contrairement aux EF standards [HAS 99], de gérer les symétries de façon stricte en bloquant des rotations aux extrémités, alors même que les degrés de liberté disponibles sont des déplacements.

Les inconvénients de cette méthode sont liés à ses avantages : à cause de la régularité des

courbes représentant la géométrie de la membrane et la continuité des champs de contrainte ou d'épaisseur, il nous est actuellement difficile de quantifier les erreurs liées à la discrétisation, en dehors de la comparaison avec des modèles analytiques connus ou des modèles éléments finis standards, comme ceux traités dans l'article. A ce titre, le soufflage du cylindre de longueur  $L = 10$  encastré a été simulé sous SAMCEF V9.1 pour une valeur de  $\alpha$  égale à 0 et le même nombre de degrés de liberté (cas de soufflage instable à géométrie complexe). Les résultats sont présentés sur les figures IV.4 et IV.5. Ces dernières sont à comparer respectivement aux figures IV.6 et IV.7(a). Les deux approches fournissent, des résultats identiques pour un maillage très fin de 101 noeuds.

Si l'intérêt d'une formulation B-spline pour un problème axisymétrique n'apparaît pas clairement à la vue du dernier exemple (les EF standards répondent bien au problème), il en est tout autre pour les problèmes non-axisymétriques avec éléments surfaciques. L'extension de notre méthode aux surfaces splines permettrait en effet de limiter considérablement le nombre de degrés de liberté, à l'instar de l'élément surfacique « continu » développé par Chevaugeon dans le cadre de sa thèse [CHE 02].

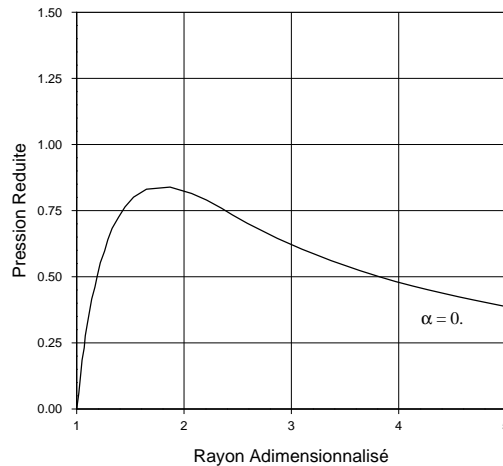


Figure IV.9 : Pression réduite en fonction du rayon maximum pour  $\alpha = 0$ .

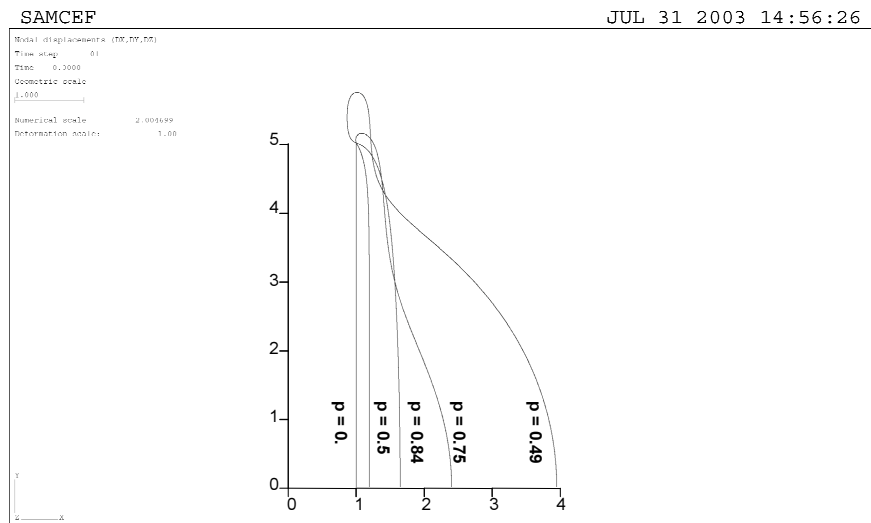


Figure IV.10 : Evolution du profil du cylindre durant le soufflage pour  $\alpha = 0$ .

## IV.4 Utilisation des modèles de chaînes

Depuis quelques années, les modèles classiques de comportement de Mooney-Rivlin [MOO 40] ou d'Ogden [OGD 72] sont remplacés par des modèles fondés sur la statistique de réseau de chaînes moléculaires dans les applications d'ingénieur [ALL 96]. La détermination des paramètres constitutifs est généralement effectuée par des essais de déformation homogène (traction uniaxiale, glissement pur, ...). Lorsqu'ils souhaitent étudier le comportement en extension biaxiale, les auteurs utilisent également le soufflage de membranes circulaires planes [JOY 72, SCH 75, REU 02]. Dans ce cas, la répartition non-homogène des déformations nécessite l'utilisation de méthodes numériques, faisant appel généralement à des modèles phénoménologiques de comportement. Nous choisissons ici de nous intéresser aux solutions numériques utilisant des modèles statistiques de réseau de chaînes moléculaires. Cette étude a fait l'objet d'une publication dans la revue **International Journal of Non-Linear Mechanics** en 2003 [VER 03b] intitulée « Inflation of elastomeric circular membrane using network constitutive equations » et présentée dans l'annexe ???. Elle utilise la méthode de résolution numérique par élément fini B-spline développé dans la section précédente. Les résultats numériques du ballon sphérique et de la membrane circulaire initialement plane sont présentés sous la forme des courbes d'équilibre des membranes, ainsi que des profils de distribution des extensions principales.

### IV.4.1 Description des modèles de comportement

Les modèles de comportement utilisés dans notre étude sont le modèle néo-hookéen, les modèles appelés 3-chaînes et 8-chaînes ainsi que le modèle de réseau complet (*full network*) approché de chaînes de Wu et Van der Giessen [WU 92]. Nous rappelons rapidement leur formulation respective.

#### IV.4.1.1 Le modèle gaussien de Treloar

Treloar est le premier à proposer une approche statistique pour traiter l'élasticité caoutchoutique. Il adopte alors une répartition gaussienne de conformation de chaînes de réseau et aboutit au modèle néo-hookéen dont la fonction d'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2}nkT(I_1 - 3) \quad (\text{IV.78})$$

où  $n$  désigne le nombre moyen de chaînes par unité de volume,  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.  $I_1$  désigne toujours le premier invariant du tenseur gradient de dilatation. On notera par la suite :

$$C_R = nkT \quad (\text{IV.79})$$

Ce modèle est limité aux petites déformations et ne peut pas prendre en compte le raidissement final observé en traction uniaxiale.

#### IV.4.1.2 Les modèles statistiques non-gaussiens

Pour lever la limitation du modèle néo-hookéen, James et Guth [JAM 43] ont développé un modèle fondé sur la théorie statistique non-gaussienne d'élasticité d'une chaîne isolée de Kuhn et Grün [KUH 42]. James et Guth construisent un modèle selon lequel les chaînes sont distribu es suivant les trois directions principales de déformation. Les contraintes principales de Cauchy  $(\sigma_i)_{i=1,3}$  de ce modèle, appel e modèle *3-chaînes*, s'écrivent alors comme des fonctions des extensions principales  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  :

$$\sigma_i^{3\text{-chaînes}} = -\frac{p}{\lambda_i} + \frac{1}{3}C_R\sqrt{N}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{N}}\right) \quad (\text{IV.80})$$

où  $p$  est la pression hydrostatique introduite par l'hypothèse d'incompressibilité.

Un autre modèle utilis e pour notre étude est le modèle *8-chaînes* d'Arruda et Boyce [ARR 93] déjà  evoqu e dans la section III.2.2.1 dont les contraintes principales de Cauchy ont pour expression :

$$\sigma_i^{8\text{-chaînes}} = -\frac{p}{\lambda_i} + \frac{1}{3}C_R\sqrt{N}\frac{\lambda_i}{\lambda^{\text{ch}}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda^{\text{ch}}}{\sqrt{N}}\right) \quad (\text{IV.81})$$

où  $\lambda^{\text{ch}}$  est l'extension des chaînes du modèle :

$$\lambda^{\text{ch}} = \sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)/3} \quad (\text{IV.82})$$

Pour ces deux modèles  $N$  désigne le nombre moyen de monomères constituant les chaînes des modèles respectifs et  $\mathcal{L}$  est la fonction de Langevin (voir section III.2).

Le dernier modèle considère dans notre étude est le modèle propos e par Wu et van der Giessen [WU 92] pour approcher le modèle de réseau complet où les chaînes de réseau sont distribu es uniformément sur une sphère unité [WU 93]. Pour simplifier le modèle intégral, Wu and van der Giessen proposent une combinaison des modèles 3-chaînes et 8-chaînes qu'ils nomment *approached full network*. L'expression des contraintes principales est alors :

$$\sigma_i^{\text{full network}} = (1 - \rho)\sigma_i^{3\text{-chaînes}} + \rho\sigma_i^{8\text{-chaînes}} \quad (\text{IV.83})$$

où  $\rho$  est un paramètre li e à l'extension principale maximale :

$$\rho = \frac{0,85}{\sqrt{N}}\max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{IV.84})$$

Le facteur 0,85 est fourni par les auteurs pour donner la meilleure corrélation avec le modèle intégral exact du réseau complet.

#### IV.4.1.3 Identification des modèles

Les différents modèles pr esent es ci-dessus sont identifi es à partir du même jeu de données expérimentales. Il s'agit des résultats d'extension uniaxiale sur du caoutchouc naturel report es dans les travaux de James *et al.* [JAM 75]. Les valeurs des paramètres considères sont ceux d etermin es par Wu et van der Giessen [WU 93], à savoir :

Notons que  $C_R$  est identique pour l'ensemble des modèles puisque les trois modèles sont équivalents au modèle néo-hookéen en petites déformations.



Modèle	$C_R$ (MPa)	$N$
néo-hookéen	0,4	-
3-chaînes	0,4	80
8-chaînes	0,4	25
<i>full network</i> approché	0,4	50

Tableau IV.1: Paramètres matériels utilisés

## IV.4.2 Résultats numériques

### IV.4.2.1 Le ballon sphérique

Nous reprenons dans un premier temps l'exemple du ballon sphérique utilisé dans la section IV.3.4.2 auquel nous appliquons successivement les quatre modèles de matériau énoncés ci-dessus.

Le rayon initial  $r_0$  est fixé à 1 pour une épaisseur uniforme de 0,01. La membrane est interpolée par un élément B-spline à 21 nœuds. Nous supposons que la membrane reste sphérique et n'examinons que la solution triviale. Ainsi, les extensions principales méridienne  $\lambda_m$ , circonférentielle  $\lambda_c$  et l'extension suivant l'épaisseur  $\lambda_h$  vérifient les relations :

$$\lambda_m = \lambda \quad , \quad \lambda_c = \lambda \quad , \quad \lambda_h = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{IV.85})$$

où  $\lambda$  est le rayon adimensionnalisé  $r/r_0$ . Les courbes d'équilibre représentant la pression en fonction de  $\lambda$  sont présentées sur la figure IV.11 pour les quatre modèles étudiés.

La réponse des modèles non-gaussiens présente deux points limites dont le premier est proche de celui du modèle néo-hookéen tandis que le second correspond au début d'une deuxième partie stable de la courbe (phénomène déjà observé avec le modèle de Mooney-Rivlin) [VER 99]. Le tableau IV.2 présente les valeurs numériques de ces points limites  $(\lambda_I, P_I)$  et  $(\lambda_{II}, P_{II})$ .

Modèle	$\lambda_I$	$P_I$	$\lambda_{II}$	$P_{II}$
néo-hookéen	1,40	$4,96 \cdot 10^{-3}$	-	-
3-chaînes	1,40	$5,04 \cdot 10^{-3}$	5,71	$1,97 \cdot 10^{-3}$
8-chaînes	1,39	$5,13 \cdot 10^{-3}$	3,92	$2,88 \cdot 10^{-3}$
<i>full network</i> approché	1,39	$5,08 \cdot 10^{-3}$	5,10	$2,26 \cdot 10^{-3}$

Tableau IV.2: Points limites du ballons sphérique

On observe que les valeurs de  $\lambda_I$  sont très proches de la solution analytique néo-hookéenne égale à  $\sqrt[6]{7} \simeq 1,38$ . Ceci confirme que les trois modèles sont proches en petites déformations  $\lambda \leq 2,0$  pour une même valeur du paramètres  $C_R$ . Pour les modèles non-gaussiens, les valeurs de  $\lambda_{II}$  et les courbes d'équilibre en grandes déformation diffèrent. Elles présentent cependant toutes des asymptotes verticales lorsque les chaînes des modèles atteignent leur limite

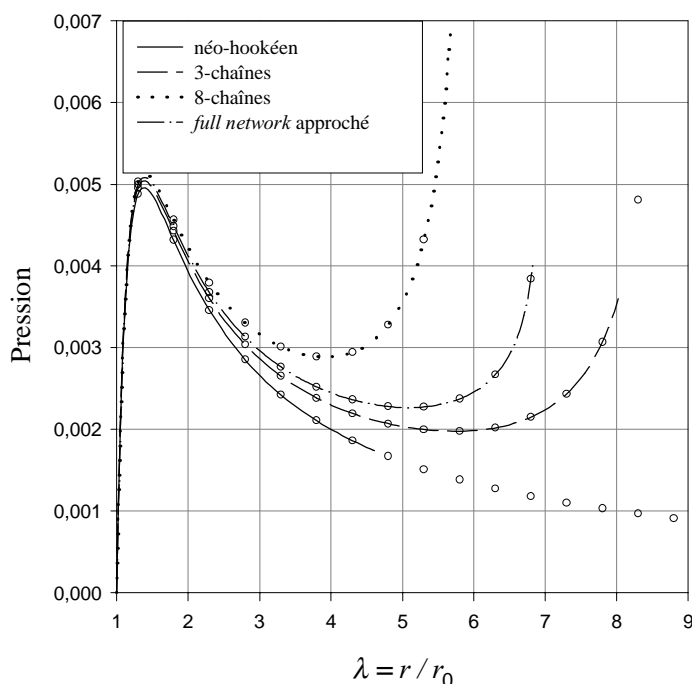


Figure IV.11 : Pression en fonction de  $\lambda$  pour le ballon sphérique : (o) modélisation par élément fini-B-spline, (—) solution semi-analytique (néo-hookéen), (— —) solution semi-analytique (3-chaînes), (— · —) solution semi-analytique (8-chaînes), (...) solution semi-analytique (*full network* approché)

d'extensibilité. Cette limite peut être évaluée pour les trois modèles suivant les critères donnés par le tableau IV.3.

Modèle	critère	$\lambda_{\text{asymptote}}$
3-chaînes	$\lambda = \sqrt{N} = \sqrt{80}$	8,94
8-chaînes	$\lambda^{\text{ch}} = \sqrt{N} = \sqrt{25}$	6,12
<i>full network</i> approché	$\max(\lambda, \lambda^{\text{ch}}) = \lambda = \sqrt{N} = \sqrt{50}$	7,07

Tableau IV.3: évaluation des positions des asymptotes

Sur la figure IV.11, les derniers points atteints numériquement sont représentés par le dernier rond (o) de chacune des courbes respectives.

#### IV.4.2.2 La membrane plane circulaire

Nous considérons maintenant une membrane plane circulaire (disque) de rayon égal à 1 et d'épaisseur uniforme égale à 0,01. Le bord extérieur du disque est maintenu encasté. Le modèle axisymétrique est discrétisé en 21 nœuds. Le nœud situé au bord encasté et dans un état de déformation de glissement pur :

$$\lambda_m \quad , \quad \lambda_c = 1 \quad , \quad \lambda_h = \frac{1}{\lambda_m} \quad (\text{IV.86})$$

tandis que sur l'axe de symétrie (appelé pôle et de rayon  $r = 0$ ) la membrane est en état de déformation équi-biaxiale :

$$\lambda_m \quad , \quad \lambda_c = \lambda_m \quad , \quad \lambda_h = \frac{1}{\lambda_m^2} \quad (\text{IV.87})$$

la structure présente un état de déformation non-homogène le long de son méridien. La condition de symétrie axiale est traitée dans la formulation de l'élément B-spline par une condition de tangence nulle ( $z' = 0$ ) au pôle prise en compte dans la fonction  $B_{r_i}$  (voir section IV.3.2.2). Comme pour les éléments finis classiques, nous imposons de plus un déplacement radial nul.

Nous étudions dans un premier temps les courbes d'équilibre présentant la pression interne de la bulle en fonction de la coordonnée axiale du pôle, notée  $z_{\text{pôle}}$ , pour les différents modèles de comportement. Les résultats numériques sont présentés sur la figure IV.12.

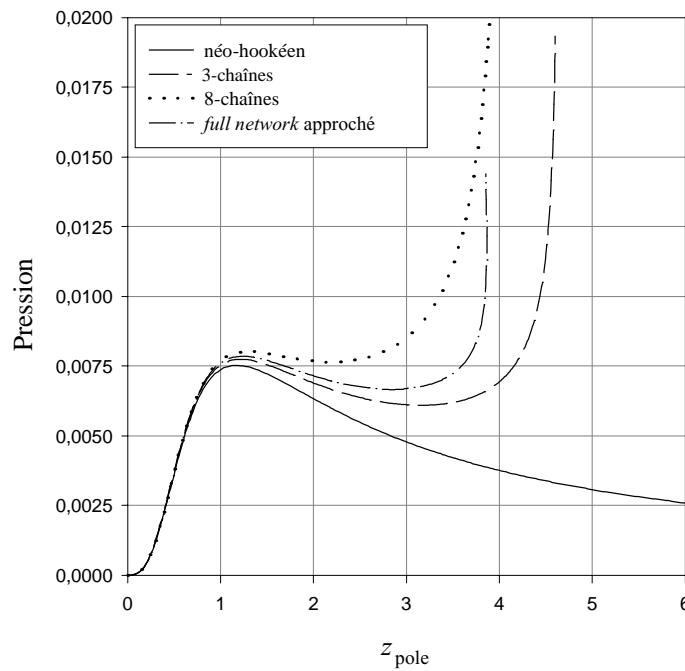


Figure IV.12 : Pression en fonction de  $z_{\text{pôle}}$  pour la membrane plane circulaire

Les valeurs des points limites détectés au cours du chargement pour les différentes courbes,  $(z_{\text{pôle } I}, P_I)$  et  $(z_{\text{pôle } II}, P_{II})$ , sont rassemblées dans le tableau IV.4.

Modèle	$z_{\text{pôle } I}$	$P_I$	$z_{\text{pôle } II}$	$P_{II}$
néo-hookéen	1,16	$7,52 \cdot 10^{-3}$	-	-
3-chaînes	1,23	$7,73 \cdot 10^{-3}$	3,16	$6,09 \cdot 10^{-3}$
8-chaînes	1,17	$8,01 \cdot 10^{-3}$	2,17	$7,64 \cdot 10^{-3}$
<i>full network</i> approché	1,26	$7,84 \cdot 10^{-3}$	2,83	$6,66 \cdot 10^{-3}$

Tableau IV.4: Points limites de la membrane plane circulaire.

La forme générale des courbes d'équilibre est similaire à celle rencontrée dans le cas du ballon sphérique. Les premiers points limites  $(z_{\text{pôle } I}, P_I)$  sont encore une fois très proches pour

les différents modèles. De même, le raidissement est bien distinct pour chacune des courbes correspondant aux modèles non-gaussiens. La limite d'extensibilité des chaînes est nettement marquée par la partie verticale des courbes de réponses présentées sur la figure IV.12.

Nous examinons à présent les profils de déformation des membranes illustrés par la figure IV.13.

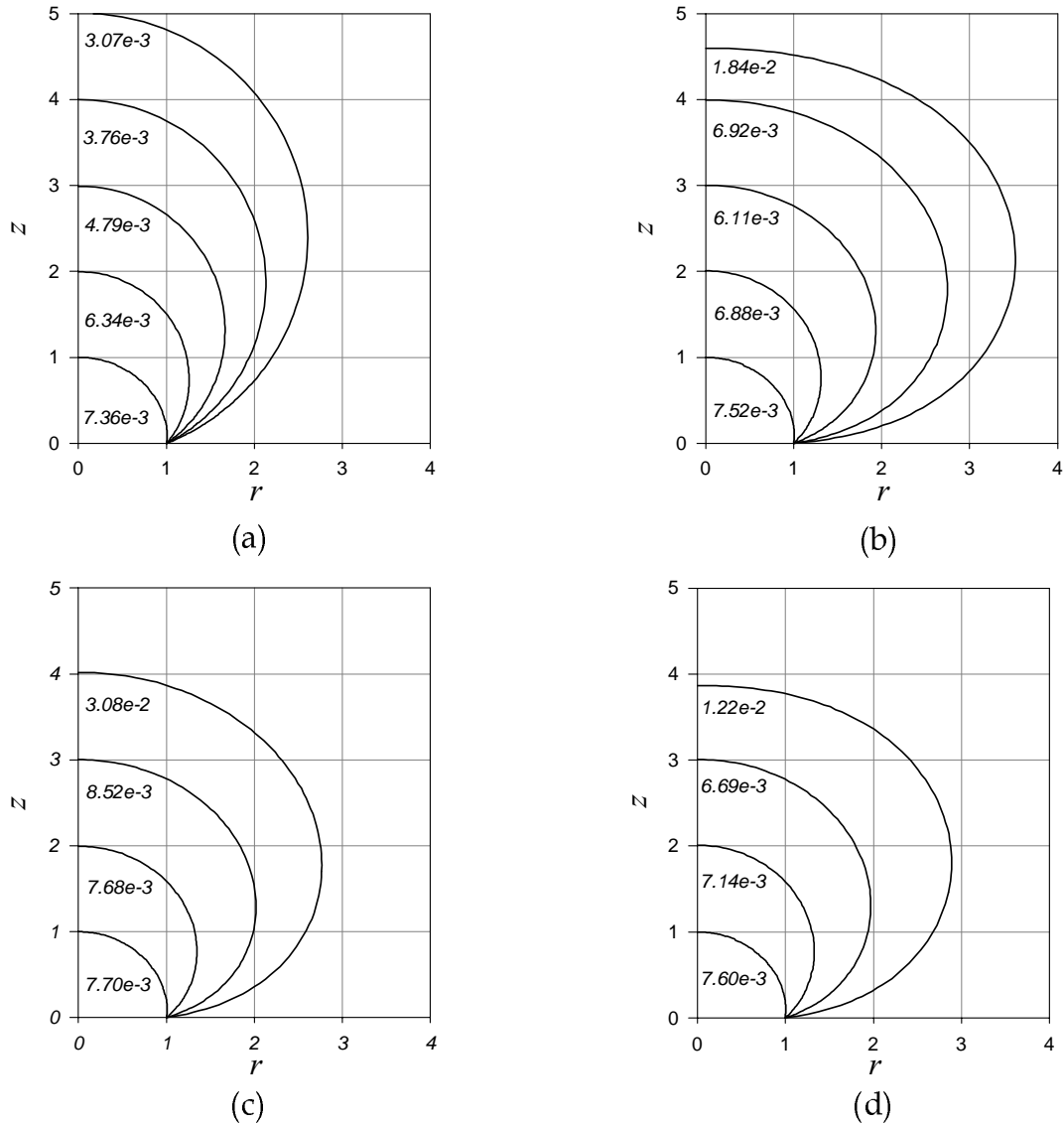


Figure IV.13 : Profils de déformation de la membrane plane circulaire : (a) néo-hookéen, (b) 3-chaînes, (c) 8-chaînes, (d) *full network* approché. Le chiffre sur les courbes indique la pression correspondante

Pour les quatre modèles étudiés, les profils correspondant à des hauteurs de la bulle  $z_{\text{pôle}}$  égales à 1, 2, 3 et 4, ainsi que le dernier profil atteint avant divergence numérique. On observe que les profils sont similaires pour les quatre modèles pour des valeurs de  $z_{\text{pôle}}$  égales à 1 et 2. Pour des valeurs supérieures, c'est-à-dire pour  $z_{\text{pôle}} \geq 3$ , les formes des modèles non-gaussiens

sont semblables entre elles mais différent de celui du modèle néo-hookéen. Ce dernier présente en effet une forme plus sphérique. Ainsi, cet exemple montre nettement l'influence de la limite d'extensibilité sur les déformées de structure soufflées.

Cette remarque est confirmée par les distributions d'épaisseur en fonction du rayon initial  $r_0$  au cours du chargement présentées sur la figure IV.14. Comme l'ont signalé Hassager *et*

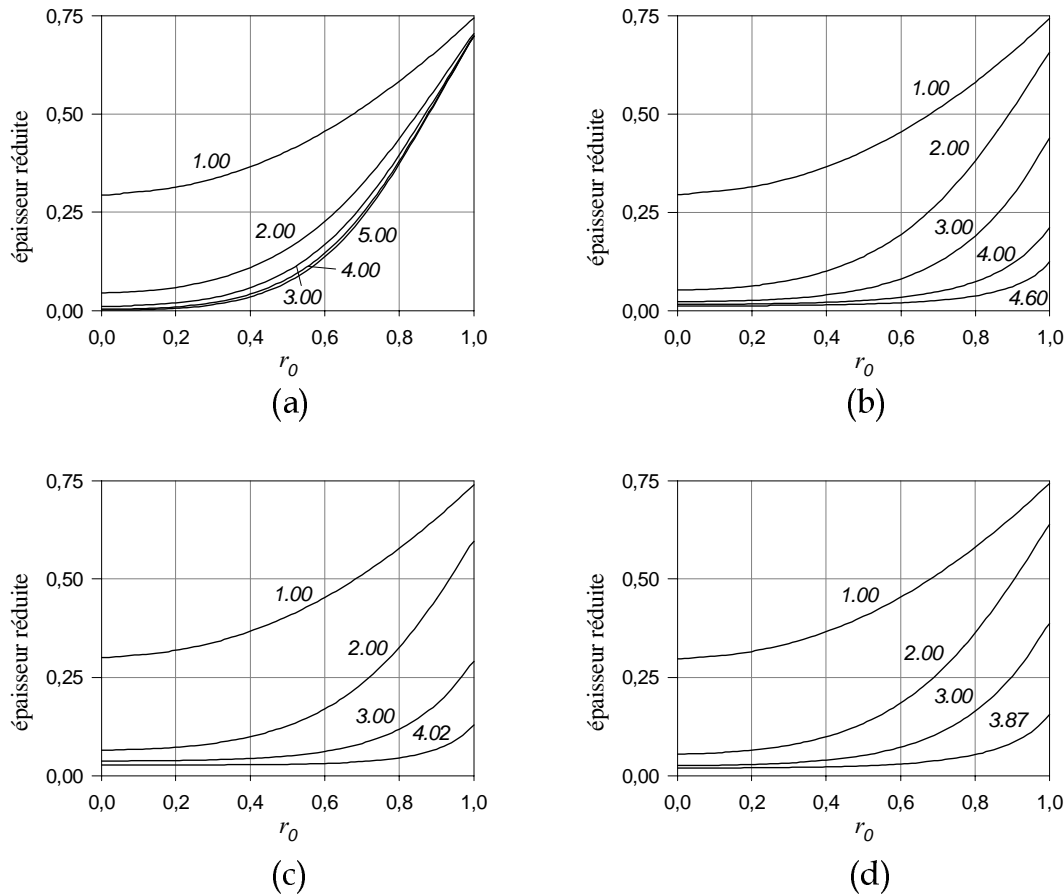


Figure IV.14 : distribution d'épaisseur au cours du chargement pour la membrane plane circulaire : (a) néo-hookéen, (b) 3-chaînes, (c) 8-chaînes, (d) *full network* approché. Le chiffre sur les courbes indique la valeur de  $z_{\text{pôle}}$ .

*al.*, la membrane néo-hookéenne présente un fort amincissement au voisinage du pôle [HAS 99]. Pour les modèles non-gaussiens cet amincissement est moins important quantitativement mais couvre une zone beaucoup plus étendue. Le dernier profil présenté sur les figures IV.14(b), (c) et (d) relatives aux modèles non-gaussiens montre des distributions d'épaisseur similaires. leur différence avec la membrane néo-hookéenne est par ailleurs très significative. En particulier, on observe pour cette dernière une épaisseur constante sur le bord encastré pour des valeurs de  $z_{\text{pôle}}$  de 2, 3 et 4, alors qu'au pôle l'épaisseur tend vers zéro (voir figure IV.14(a)). Ceci s'oppose aux résultats des trois autres modèles pour lesquels l'épaisseur évolue fortement au cours du chargement à l'encastrement et reste bornée au pôle.

Afin de mettre en évidence l'influence de la limite d'extensibilité des chaînes, modélisée par la fonction de Langevin dans les équations (IV.80), (IV.81) et (IV.83), la distribution des extensions principales  $\lambda_m$  and  $\lambda_c$  le long de la membrane est présentée sur la figure IV.15.

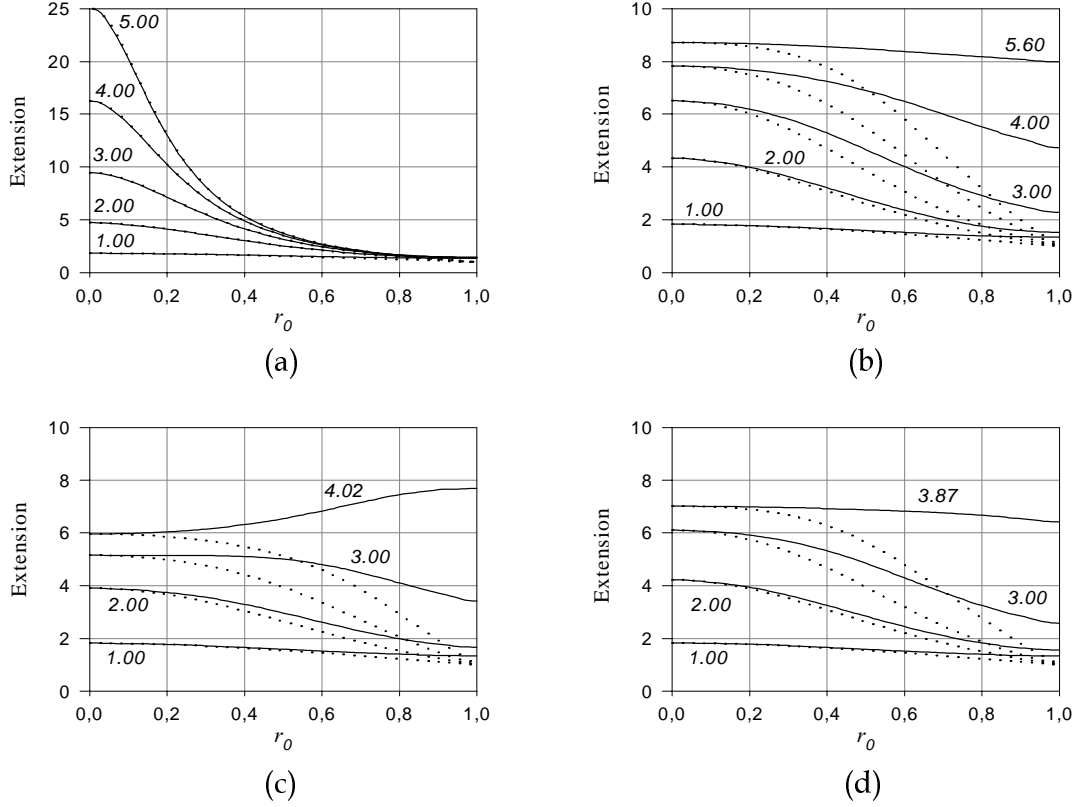


Figure IV.15 : Extension ratios in the circular plane membranes (—)  $\lambda_m$ , ( $\cdots$ )  $\lambda_c$  : (a) néo-hookéen, (b) 3-chaînes, (c) 8-chaînes, (d) *full network* approché. Le chiffre sur les courbes indique la valeur de  $z_{\text{pôle}}$ .

Nous vérifions bien, dans un premier temps, que l'extension circonférentielle  $\lambda_c$  varie entre la valeur  $\lambda_m$  au pôle et la valeur 1 sur le bord encastré. La figure IV.15(a) montre que pour la membrane néo-hookéenne les extensions  $\lambda_c$  et  $\lambda_m$  sont similaires, comme l'ont démontré précédemment Yang and Feng [YAN 70]. De plus, pour une hauteur de bulle  $z_{\text{pôle}} = 5$ , les extensions sont égales à 25 au pôle. Ce résultat n'a pas de signification physique et montre l'importance d'une bonne prise en compte de la limite d'extensibilité des chaînes dans la modélisation en grandes déformations. En revanche, dans le cas des modèles non-gaussiens les trois profils de distribution sont comparables pour un même niveau de déformation, bien que les résultats du modèle 8-chaînes (figures IV.15(c) pour  $z_{\text{pôle}} = 4,02$ ) diffèrent des modèles 3-chaînes et *full network* approché (figure IV.15(b) pour  $z_{\text{pôle}} = 5,60$  et figure IV.15(d) pour  $z_{\text{pôle}} = 3,87$ ). Dans ce dernier cas  $\lambda_m$  est plus important à l'encastré qu'au pôle alors que pour les modèles 3-chaînes et *full network*,  $\lambda_m$  tend à atteindre une valeur constante le long de la membrane. Cette dernière remarque peut s'expliquer par l'observation de l'extensibilité des chaînes. Rappelons d'abord qu'en un point matériel, l'extensibilité des chaînes est défini par

la valeur de  $\lambda^{\text{ch}}$  dont la valeur maximale le long de la membrane prend les valeurs présentées dans le tableau IV.5. Dans les trois cas, quand  $\lambda^{\text{ch max}}$  tend vers  $\sqrt{N}$ , le matériau se raidit et

Modèle	$\lambda^{\text{ch max}}$	résultat
3-chaînes	$\max(\lambda_m, \lambda_c, \lambda_n)$	$\lambda_m$
8-chaînes	$\sqrt{(\lambda_m^2 + \lambda_c^2 + \lambda_n^2)/3}$	-
<i>full network</i> approché	$\max(\lambda_m, \lambda_c, \lambda_n, \sqrt{(\lambda_m^2 + \lambda_c^2 + \lambda_n^2)/3})$	$\lambda_m$

Tableau IV.5: évaluation des extensions maximales des chaînes

la réponse de la structure approche l'asymptote verticale (figure IV.12). La distribution de la valeur de  $\lambda^{\text{ch max}}$  est tracée sur la figure IV.16 pour l'ensemble des points matériels situés le long de la membrane.

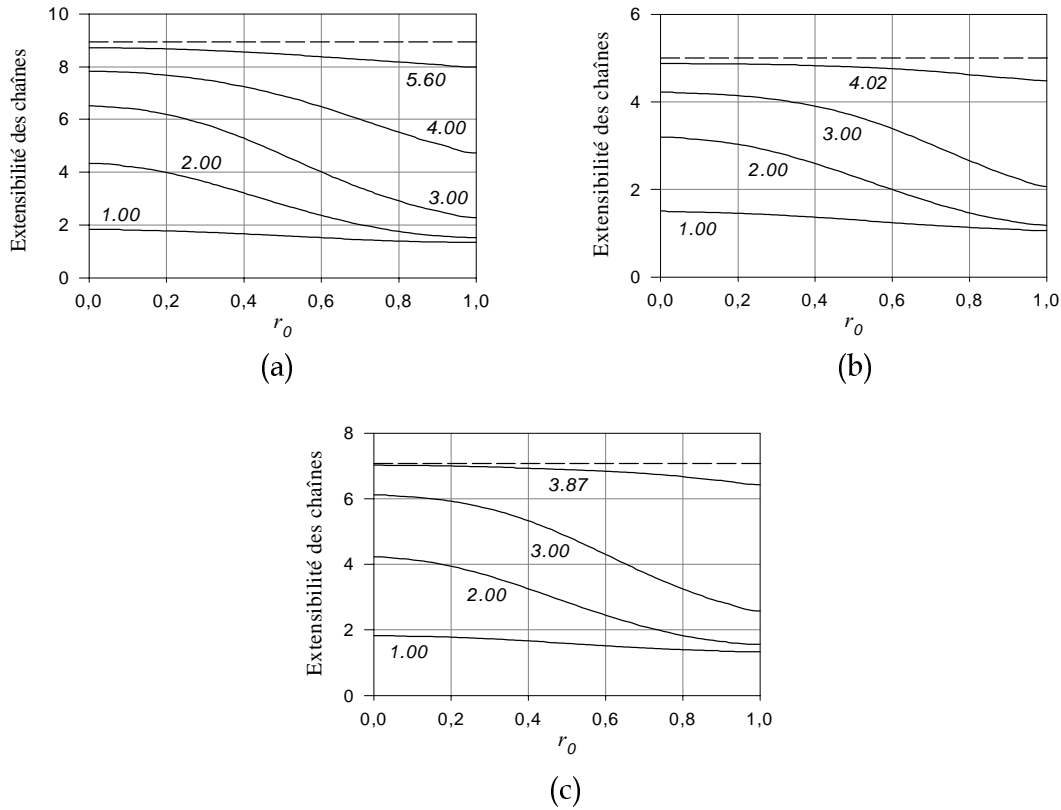


Figure IV.16 : Extensibilité maximale des chaînes dans la membrane plane circulaire : (—)  $\lambda^{\text{ch max}}$  le long de la membrane, (- -) valeur de  $\sqrt{N}$  : (a) 3-chaînes, (b) 8-chaînes, (c) *full network* approché. Le chiffre sur les courbes indique la valeur de  $z_{\text{pôle}}$ .

Ces trois profils sont fortement similaires. Au cours du chargement, la distribution de  $\lambda^{\text{ch max}}$  passe d'un état quasi-uniforme ( $z_{\text{pôle}} = 1$ ) à un état où le pôle de la bulle est étiré plus significativement ( $2 \leq z_{\text{pôle}} \leq 3$ ) ; finalement, le profil tend à s'uniformiser ( $3 < z_{\text{pôle}}$ ) à mesure que  $\lambda^{\text{ch max}}$  approche de la valeur  $\sqrt{N}$  au pôle. Les évolutions en ce point deviennent alors

minimes, et la membrane continue de gonfler comme si une inclusion rigide avait pris place sur un voisinage de plus en plus grand autour du pôle.

### IV.4.3 Contribution de l'étude

L'étude présentée dans cette section s'appuie sur les développements de l'élément fini B-spline associé à la méthode de longueur d'arc publiés dans [VER 01a] et présentés dans la section IV.3. Elle montre au travers d'exemples numériques l'intérêt de prendre en compte la limite d'extensibilité des chaînes dans la loi de comportement des élastomères. La comparaison des modèles néo-hookéen et non-gaussiens est faite pour les cas de soufflage libre de membranes sphériques et de membranes planes circulaires. Cette comparaison utilise les quatre modèles identifiés par Wu et Van der Giessen [WU 93] à partir des expériences de James *et al.* [JAM 75]. L'originalité de ces travaux est de présenter des résultats de calcul de soufflage pour des modèles fondés sur la statistique des réseaux de chaînes. Ces modèles, relativement récents sont en effet encore peu utilisés dans les calculs de structures (citons Allport et Day [ALL 96] qui utilisent le développement limité à l'ordre 5 du modèle d'Arruda et Boyce programmé dans Abaqus).

Dans le cas du soufflage de la membrane plane circulaire, la non prise en compte du raidissement du matériau lié à la limite d'extensibilité est étudiée grâce au modèle néo-hookéen. Les résultats montrent une déformée pratiquement sphérique présentant des profils d'élongations longitudinale et circonférencielle très voisins sur une grande partie de la membrane. Ces résultats diffèrent fortement pour les modèles non-gaussiens. Les déformées, très similaires pour des hauteurs de la bulle inférieures au diamètre initial de la membrane (déformations modérées), diffèrent de ceux du modèle gaussien par un aplatissement au pôle d'autant plus prononcé que les élongations atteignent la limite d'extensibilité des chaînes. La hauteur de la bulle tend alors vers une limite (asymptote verticale sur la courbe de pression en fonction de la hauteur de la bulle).

Le soufflage de membrane plane circulaire est utilisé classiquement pour l'identification de loi de comportement en état d'extension équi-biaxiale [TRE 44] (propriété au voisinage du pôle). Les résultats de l'article présenté ci-dessus montrent que la déformée de la membrane et son évolution avec la pression fournissent beaucoup d'informations quant à la limite d'extensibilité du matériau, et que la mesure expérimentale de cette déformée permettrait de mieux identifier son modèle de comportement. Cet essai présente en effet l'intérêt de solliciter le matériau dans un état de déformation mixte, variant de l'extension équi-biaxiale au pôle de la bulle, à un état de glissement pur sur le bord encasté de la membrane. La prise en compte d'un large spectre de déformation dans le processus d'identification du comportement du matériau élargirait l'intervalle de validité du modèle identifié.



## **IV.5 Conclusion**

Après avoir rappelé les méthodes usuelles permettant de calculer la réponse d'une membrane hyperélastique en soufflage libre, ce chapitre a présenté la construction d'un élément fini particulier s'appuyant sur une interpolation de type B-spline et prenant en compte de manière exacte les conditions limites de symétrie axiale. Ce modèle est une alternative aux éléments finis de membrane classiques qui présente la particularité de fournir des courbures de déformées et des champs de contraintes et de déformations continus en tout point du modèle.

Ce modèle a ensuite été utilisé pour une étude de soufflage de membranes avec des modèles de comportement hyperélastiques non-gaussiens. Cette étude a montré la forte influence de la limite d'extensibilité sur les résultats.

Nous disposons donc à présent d'un outil de simulation simple et robuste permettant de simuler le soufflage de membranes axisymétriques en grandes transformations. Cet outil peut facilement s'intégrer dans une boucle d'optimisation permettant l'identification inverse de loi de comportement à partir d'un montage simple de soufflage. La mesure par caméra de la déformée lors du processus de soufflage libre d'une membrane plane circulaire apporterait une information significative dans un processus d'identification inverse.

# Conclusions et perspectives

---

## Conclusions du mémoire

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre général de l'étude des matériaux élastomères. Nous nous sommes intéressés en particulier aux modèles de comportement utilisés en calcul de structures pour simuler leur comportement élastique non-linéaire. Notre attention s'est portée plus particulièrement sur la comparaison des modèles de la littérature et sur la construction d'un nouveau modèle permettant de représenter l'effet Mullins. Pour cela, il s'est avéré nécessaire de mettre en place une application dédiée à l'identification de ces modèles, ainsi qu'un code de calcul de structures particulier permettant de simuler le soufflage de membranes. L'ensemble de nos travaux a été rassemblé dans ce document suivant quatre chapitres.

Le premier chapitre de ce mémoire a présenté les grandes étapes de l'histoire des matériaux polymères, grande classe de matériaux dont font partie les élastomères. Après avoir constaté que ces matériaux sont apparus tardivement en Occident, nous avons porté notre attention sur les particularités chimiques et physiques de ces derniers. Nous avons ainsi pu mettre en avant que ces matériaux sont constitués d'un réseau amorphe de chaînes moléculaires mêlées à des agrégats tels que les noirs de carbones qui confèrent aux élastomères des propriétés mécaniques particulières comme l'élasticité non-linéaire, la visco-élasticité ou l'effet Mullins [MUL 48].

Dans le second chapitre, notre attention s'est portée sur la similitude de comportement de trois modèles hyperélastiques particuliers parmi lesquels le modèle non-gaussien d'Arruda et Boyce [ARR 93]. Le lien entre les paramètres matériels de ce modèle et les caractéristiques physiques du réseau de chaînes moléculaires a alors été mis à profit pour construire un modèle de comportement permettant de reproduire l'effet Mullins. Le modèle identifié a permis de conforter l'hypothèse d'une altération des liaisons moléculaires au sein du réseau tendant à augmenter la longueur moyenne des chaînes structurales et à diminuer le nombre de chaînes par unité de volume. Bien que relativement simple, ce modèle permet de reproduire assez fidèlement les essais expérimentaux.

Le troisième chapitre de ce mémoire a décrit les méthodes d'identification employées dans notre étude. Elles concernent les algorithmes d'optimisation classiques, mais également les algorithmes génétiques dont nous avons rappelé les concepts. Ces derniers sont encore peu utilisés dans le domaine de l'identification, alors qu'ils offrent des atouts importants en matière de convergence globale. L'ensemble des méthodes d'optimisation a été décrit, et une analyse applicative

de notre logiciel d'identification a été présentée en vue d'une Programmation Orientée Objet. Enfin, le logiciel a été utilisé afin d'établir un classement des performances de différents modèles hyperélastiques de la bibliographie (les détails de ces modèles sont donnés en annexe). Le critère de ce classement est leur aptitude à reproduire deux banques de données expérimentales issues des travaux de Treloar [TRE 44] d'une part, et de Kawabata *et al.* [KAW 81] d'autre part. A ce titre, nous avons montré que le modèle tube étendu et le modèle d'Ogden à trois termes reproduisent très bien l'ensemble de ces données avec le même jeu de coefficients matériels. Le modèle tube étendu présente cependant l'avantage de ne contenir que quatre coefficients matériels.

Le dernier chapitre nous a permis d'appliquer les modèles de comportement à des calculs de structures. Notre attention s'est portée sur le soufflage de membranes axisymétriques. Dans ce cadre, un élément fini a été construit sur la base d'une interpolation B-spline de degré trois. Cet élément fini présente l'avantage de fournir des champs de contrainte et de déformation continus le long de la structure, et de respecter strictement les conditions limites aux extrémités de la membrane avec pour seuls degrés de liberté les déplacements nodaux. Cet élément fini a été mis à contribution pour l'étude du soufflage de membranes avec les modèles de comportement non-gaussiens (3-chaînes, 8-chaînes, *full-network*). Cette étude a mis en exergue l'influence du choix de la loi de comportement sur la réponse de la structure. En particulier, la limite d'extensibilité des chaînes tend à introduire un aplatissement de la déformée au pôle de la bulle.

## Perspectives

Les résultats présentés dans ce mémoire permettent d'envisager des extensions possibles à nos travaux sur les différents points abordés.

L'équivalence entre le modèle de Gent, celui d'Hart-Smith et celui d'Arruda et Boyce a été démontrée, permettant ainsi d'établir un lien entre leurs paramètres matériels et ainsi de donner une interprétation physique aux modèles phénoménologiques. Une équivalence similaire pourrait certainement être établie entre le modèle d'Ogden et le modèle de tube étendu. En effet, leur identification sur les essais de Treloar et de Kawabata *et al.* a mis en évidence leur similitude de réponse, permettant d'envisager un lien possible entre leur paramètres respectifs. Une telle équivalence permettrait de montrer la surabondance des paramètres du modèle d'Ogden, et fournirait, une fois de plus, une interprétation physique à ces derniers.

Un autre point abordé dans ce document est la construction d'un modèle pour l'effet Mullins. Le modèle que nous avons établi repose sur le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce dont les coefficients caractéristiques dépendent de paramètres physiques (densité de chaînes, nombre moyen de monomères par chaîne). Le modèle d'altération de réseau ainsi construit peut être étendu à d'autres modèles de comportement afin de reproduire plus finement les résultats expérimentaux. Il conviendrait également de pouvoir prendre en compte l'anisotropie induite par l'histoire de la déformation et mise en évidence par Mullins. Enfin, rappelons qu'il sera nécessaire de prendre en compte le comportement viscoélastique du matériau afin de s'affranchir des approximations faites dans la section III.3, où les courbes de charge étaient supposées résulter du comportement

élastique seul.

Pour finir, les développements informatiques entrepris dans nos travaux peuvent être étendus afin d'effectuer des identifications inverses par algorithmes génétiques, ou par des méthodes classiques sur des résultats expérimentaux de soufflage de membranes. Ce procédé offre, en effet, l'avantage de solliciter le matériau dans une large plage de déformation biaxiale tout en étant plus simple de mise en œuvre que le montage du type de celui de Kawabata *et al.*. De plus, le modèle d'effet Mullins développé au chapitre III peut être implanté dans le code de calcul par éléments finis B-spline afin d'étudier la réponse d'une membrane soufflée soumise à quelques cycles de déformation. Une telle étude nécessite cependant la mise en place d'un dispositif expérimental permettant de suivre, par exemple par caméra optique, la forme de la membrane au cours du chargement.



## Références bibliographiques

- [ALE 68] ALEXANDER H., “A constitutive relation for rubber-like materials”, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 6, pp. 549–562, 1968. [64](#), [153](#), [160](#)
- [ALE 71] ALEXANDER H., “The tensile instability of initially spherical balloons”, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 9, pp. 151–162, 1971. [103](#)
- [ALL 96] ALLPORT J. ET DAY A., “Statistical mechanics material model for the constitutive modelling of elastomeric compounds”, *Proc Instn Mech Engrs*, Vol. 210, pp. 575–585, 1996. [110](#), [119](#)
- [AMB 89] AMBACHER H., ENDERLE H. F., KILIAN H. G., ET SAUTER A., “Relaxation in permanent networks”, *Prog. Colloid Polym. Sci.*, Vol. 80, pp. 209–220, 1989. [182](#)
- [AMI 02] AMIN A. F. M. S., ALAM M. S., ET OKUI Y., “A improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression: experiments, parameter identification and numerical verification”, *Mech. Mater.*, Vol. 34, pp. 75–95, 2002. [27](#)
- [ARR 93] ARRUDA E. ET BOYCE M. C., “A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, No. 2, pp. 389–412, 1993. [13](#), [62](#), [64](#), [74](#), [75](#), [82](#), [85](#), [88](#), [111](#), [121](#), [153](#), [170](#), [177](#), [185](#)
- [BAL 81] BALL R. C., DOI M., EDWARDS S. F., ET WARNER M., “Elasticity of entangled networks”, *Polymer*, Vol. 22, pp. 1010–1018, August 1981. [73](#), [74](#), [180](#)
- [BAT 79] BATOZ J. ET DHATT G., “Incremental displacement algorithms for nonlinear problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 14, pp. 1262–1267, 1979. [102](#)
- [BEA 87] BEATTY M. F., “Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, No. 12, pp. 1699–1734, 1987. [101](#), [104](#), [146](#)

- [BEN 79] BENEDICT R., WINEMAN A., ET YANG W. H., "The determination of limiting pressure in simultaneous elongation and inflation of nonlinear elastic tubes", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 15, pp. 241–249, 1979. 90, 93
- [BER 98] BERGSTRÖM J. S. ET BOYCE M. C., "Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, No. 5, pp. 931–954, 1998. 28
- [BER 99] BERGSTRÖM J. S. ET BOYCE M. C., "Mechanical behavior of particle filled elastomers", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 72, pp. 633–656, 1999. 85
- [BID 58] BIDERMAN V. L., "Calculations of rubber parts (en russe)", *Rascheti na Prochnost*, p. 40, 1958. 160
- [BOO 78] BOOR C. D., *A practical guide to splines*. New-York: Springer, 1978. 94
- [BOR 98] BORRET G. M., *Sur la propagation de fissure dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, Novembre 1998. 27
- [BOU 03] BOUASSE H. ET CARRIÈRE Z., "Courbes de traction du caoutchouc vulcanisé", *Ann. Fac. Sciences de Toulouse*, Vol. 5, pp. 257–283, 1903. 25
- [BOY 96] BOYCE M. C., "Direct comparison of the Gent and the Arruda-Boyce constitutive models of rubber elasticity", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 69, pp. 781–785, 1996. 74, 76, 173
- [BOY 00] BOYCE M. C. ET ARRUDA E. M., "Constitutive models of rubber elasticity: a review", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 73, pp. 505–523, 2000. 64, 74, 86, 153, 186
- [BUE 60] BUECHE F., "Molecular Basis for the Mullins Effect", *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. IV, No. 10, pp. 107–114, 1960. 25, 26, 83, 87
- [BUE 61] BUECHE F., "Mullins effect and rubber-filled interaction", *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. V, No. 15, pp. 271–281, 1961. 25, 83, 87
- [CAR 61] CARMICHAEL A. J. ET HOLDAWAY H. W., "Phenomenological elastomechanical behavior of rubber over wide ranges of strain", *J. Appl. Phys.*, Vol. 32, No. 2, pp. 159–166, 1961. 64, 153
- [CHA 89] CHARRIER J. M., SHRIVASTAVA S., ET WU R., "Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming - Non-axisymmetric problems", *J. Strain Analysis*, Vol. 24, No. 2, pp. 55–73, 1989. 93
- [CHA 94] CHARLTON D. J., YANG J., ET TEH K. K., "A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in Finite Element Analysis", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 67, pp. 481–503, 1994. 150, 153

- [CHA 99] CHARRIER P., *Dimensionnement d'un joint elastomère - Application aux baies vitrées de navires à passagers*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur, Ecole Centrale de Nantes (France), Septembre 1999. 150
- [CHA 03] CHAGNON G., *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Mécanique, Thermique et Génie Civil, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 30 octobre 2003. 82, 88
- [CHE 02] CHEVAUGEON N., *Contribution à l'étude des membranes hyperélastiques en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Mécanique, Thermique et Génie Civil, Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, Janvier 2002. 90, 108
- [CHE 03] CHENG M. ET CHEN W., "Experimental investigation of the stress-stretch behavior of EPDM rubber with loading rate effect", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 4749–4768, September 2003. 87
- [COR 96] CORLESS R., GONNET G., HARE D., JEFFREY D., ET KNUTH D., "On the lambert w function", *Adv. Comput. Math.*, Vol. 5, pp. 329–359, 1996. 79
- [CRI 94] CRISFIELD M., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. vol. 1: Essentials, Chapitre 9. Chichester, England: Wiley, 1994. 101
- [CUL 94] CULIOLI J.-C., *Introduction à l'optimisation*. Ecole des Mines de Paris: Ellipses, 1994. ISBN 2-7298-9428-4. 34, 36
- [DAV 85] DAVET J.-L., "Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire: confrontation de modèles et de travaux expérimentaux", *Annales des Ponts et Chaussées*, (3ème trimestre 1985. 159, 162
- [DEL 91] DELORENZI H. G. ET NIED H. F., "Finite element simulation of thermoforming and blow molding", dans *Progress in Polymer Processing*(ISAYEV A. I., ed.), pp. 117–171, Hanser Verlag, 1991. 89, 93
- [DIA 99] DIANI J., *Contribution à l'étude du comportement élastique et de l'endommagement des matériaux élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 8, rue du capitaine Scott - 75015 PARIS, 9 Juillet 1999. 27, 164
- [DOI 96] DOI M., *Introduction to Polymer Physics*. Oxford: Oxford Science Publications, 1996. 27, 29, 188
- [DOL 00] DOLL S. ET SCHWIZERHOF K., "On the development of volumetric strain energy functions", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 67, pp. 17–21, 2000. 144
- [DOR 03] DORFMANN A. ET OGDEN R., "A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particule reinforced rubber", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. in press, 2003. 87



- [DRO 01] DROZDOV A. D. ET DORFMANN A. I., “Stress-strain relations in finite viscoelastoplasticity of rigid-rod networks: applications to the Mullins effect”, *Continuum Mech. Thermodyn.*, Vol. 13, pp. 183–205, 2001. 26
- [EDW 88] EDWARDS S. F. ET VILGIS T. A., “The tube model theory of rubber elasticity”, *Rep. Prog. Phys.*, Vol. 51, pp. 243–297, 1988. 188
- [EIN 06] EINSTEIN A., “Eine neue Bestimmung des Molekuldimensionen”, *Annalen des Physik: (Leipzig)*, Vol. 19, pp. 289–306, 1906. 28
- [END 87] ENDERLE H. F. ET KILIAN H. G., “General deformation modes of a van der Waals network”, *Prog. in Colloid and Polym. Sci.*, Vol. 75, pp. 55–61, 1987. 182
- [ERM 82] ERMAN B. ET FLORY P., “Relationship between Stress, Strain, and Molecular Constitution of Polymer Networks. Comparison of Theory with Experiments”, *Macromolecules*, Vol. 15, pp. 806–811, 1982. 74, 179, 183
- [FLO 44] FLORY P. J., “Network structure and the elastic properties of vulcanized rubber”, *Chem. Rev.*, Vol. 35, pp. 51–75, 1944. 73, 74, 177, 179, 183
- [FLO 82] FLORY P. J. ET ERMAN B., “Theory of Elasticity of Polymer Networks. 3”, *Macromolecules*, Vol. 15, pp. 800–806, 1982. 183
- [FLO 94] FLORY P. J., “Network structure and the elasticity properties of vulcanized rubber”, *Chem. Rev.*, Vol. 35, pp. 51–75, 1994. 183
- [FRI 02] FRIED E., “An elementary molecular-statistical basis for the Mooney and Rivlin-Saunders theories of rubber elasticity”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 50, pp. 571–582, 2002. 74, 191
- [FUR 97] FURUKAWA T. ET YAGAMA G., “Inelastic constitutive parameter identification using an evolutionary algorithm with continuous individuals”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 40, pp. 1071–1090, 1997. 39
- [GAB 95] GABRIELI C. C., *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille II, Institut de Mécanique de Marseille, Décembre 1995. 28
- [GEN 58] GENT A. N. ET THOMAS A. G., “Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber”, *J. Polym. Sci.*, Vol. 28, pp. 625–637, 1958. 74, 164
- [GEN 96] GENT A. N., “A new constitutive relation for rubber”, *Rubber. Chem. Technol.*, Vol. 69, pp. 59–61, 1996. 74, 75, 173
- [GER 86] GERMAIN P., *Mécanique*, Vol. I de *l'Ecole Polytechnique*. Ellipses, 1986. 141

- [GOL 94] GOLDBERG D. E., *Algorithmes génétiques, exploitation, optimisation et apprentissage automatique*. Addison-Wesley eds., 1994. 39, 40, 45
- [GOV 91] GOVINDJEE S. ET SIMO J. C., “A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins’ effect”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 39, No. 1, pp. 87–112, 1991. 25, 83
- [GOV 92] GOVINDJEE S. ET SIMO J. C., “Mullins effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 29, No. 14/15, pp. 1737–1751, 1992. 83
- [GOV 97] GOVINDJEE S., “An evaluation of strain amplification concept via Monte-Carlo simulations of an ideal composite”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 70, No. 1, pp. 25–37, 1997. 24
- [GRE 01] GREFFOZ V., “Les arpenteurs de la planète Terre”, *Sciences et Vie*, pp. 168–175, Mars 2001. 17
- [G’S 97] G’SSELL C. ET COUPARD A., *Génie Mécanique des Caoutchoucs*. ISBN 2-9510704-0-3, Ecole des Mines de Nancy: Appollor et INPL, 1997. 23, 24
- [HAM 91] HAMMERLIN G. ET HOFFMANN K. H., *Numerical Mathematics*, Ch. 6. Undergraduate texts in mathematics, New-York: Springer Verlag, 1991. 94, 95, 97, 98
- [HAM 97] HAMZA S. S., “The role of carbon black on the elastic behavior of EPDM/LDPE blend”, *Mater. Lett.*, Vol. 30, pp. 156–3–155, 1997. 24
- [HAR 67] HARWOOD J. A. C., MULLINS L., ET PAYNE A. R., “Stress softening in rubbers - A review”, *Journal of the IRI*, Vol. 1, pp. 17–27, 1967. 25, 83
- [HAS 99] HASSAGER O., KRISTENSEN S., LARSEN J., ET NEERGAARD J., “Inflation and instability of a polymeric membrane”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 88, pp. 185–204, 1999. 107, 116
- [HAW 97] HAWARD R. N. ET YOUNG R. J., *The physics of glassy polymers*. Chapman-Hall, 2nd edition ed., 1997. 24
- [HEI 97] HEINRICH G. ET KALISKE M., “Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity”, *Comput. Theo. Polym. Sci.*, Vol. 7, No. 3/4, pp. 227–241, 1997. 73, 188, 191
- [HIL 78] HILL R., “Aspects of invariance in solid mechanics”, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 1–75, 1978. 168
- [HOL 75] HOLLAND J. H., *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975. 39, 42

- [HS 66] HART-SMITH L. J., "Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials", *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 17, pp. 608–626, 1966. [13](#), [64](#), [74](#), [153](#), [164](#)
- [HS 67] HART-SMITH L. J. ET CRISP J. D. C., "Large elastic deformations of thin rubber membranes", *Int. J. Engrg. Sci.*, Vol. 5, pp. 1–24, 1967. [64](#), [153](#)
- [ISI 51] ISIHARA A., HASHITSUME N., ET TATIBANA M., "Statistical theory of rubber-like elasticity -IV (two dimensional stretching)", *J. Chem. Phys.*, Vol. 19, pp. 1508–1512, 1951. [177](#), [191](#)
- [JAM ] JAMES A. ET GREEN A., "Strain energy functions of rubber. II-The Characterization of filled vulcanizates", [26](#)
- [JAM 43] JAMES H. M. ET GUTH E., "Theory of the elastic properties of rubber", *J. Chem. Phys.*, Vol. 11, pp. 455–481, 1943. [30](#), [111](#), [175](#)
- [JAM 75] JAMES A. G., GREEN A., ET SIMPSON G. M., "Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates", *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 19, pp. 2033–2058, 1975. [88](#), [111](#), [119](#), [151](#), [154](#), [159](#), [162](#)
- [JAT 03] JATON M., "Introduction à la programmation orientée objets". [www.tcom.ch/Tcom/cours/oop.html](http://www.tcom.ch/Tcom/cours/oop.html), 2003. [50](#)
- [JOH 93] JOHNSON M. A. ET BEATTY M. F., "The Mullins effect in uniaxial extension and its influence on transverse vibration of rubber string", *Continuum Mech. Thermodyn.*, Vol. 5, pp. 83–115, 1993. [25](#), [26](#), [83](#), [84](#), [87](#)
- [JOY 72] JOYE D. D., POEHLEIN G. W., ET DENSON C. D., "A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extensional flow", *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 16, No. 3, pp. 421–445, 1972. [110](#)
- [JOY 73] JOYE D. D., POEHLEIN G. W., ET DENSON C. D., "A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extensional flow. II", *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 17, No. 2, pp. 287–302, 1973. [149](#)
- [KAL 99] KALISKE M. ET HEINRICH G., "An extended tube-model for rubber elasticity: statistical-mechanical theory and finite Element implantation", *Rub. Chem. Technol.*, Vol. 72, pp. 602–632, 1999. [188](#), [190](#)
- [KAU 01] KAUSCH H. H., HEYMANS N., PLUMMER C. J., ET DECROLY P., *Matériaux polymères : propriété mécaniques et physiques. principes de mise en oeuvre*, Vol. ISBN 2-88074-415-6. Lausanne (CH): Presses polytechniques et universitaires romandes, le traité des matériaux en vingt volumes ed., 2001. [27](#), [29](#)

- [KAW 81] KAWABATA S., MATSUDA M., TEI K., ET KAWAI H., “Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate”, *Macromolecules*, Vol. 14, pp. 154–162, 1981. [9](#), [14](#), [65](#), [69](#), [122](#), [151](#), [154](#), [157](#), [158](#), [159](#), [164](#)
- [KHA 92] KHAYAT R. E., DERDOURI A., ET GARCIA-RÉJON A., “Inflation of an elastic cylindrical membrane: non-linear deformation and instability”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 29, No. 1, pp. 69–87, 1992. [89](#), [90](#), [93](#), [105](#)
- [KHA 94] KHAYAT R. E. ET DERDOURI A., “Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. part I. axisymmetric case”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 3773–3791, 1994. [90](#), [93](#)
- [KIL 81] KILIAN H. G., “Equation of state of real networks”, *Polymer*, Vol. 22, pp. 209–217, 1981. [73](#), [182](#)
- [KIL 86] KILIAN H. G., ENDERLE H. F., ET UNSELD K., “The use of the van der Waals model to elucidate universal aspects of structure-property relationships in simply extended dry and swollen rubbers”, *Colloid Polym. Sci.*, No. 264, pp. 866–879, 1986. [182](#)
- [KIL 87] KILIAN H. G., SCHENK H., ET WOLFF S., “Large deformation in filled networks of different architecture and its interpretation in terms of van der Waals model”, *Colloid Polym. Sci.*, Vol. 265, pp. 410–423, 1987. [24](#), [29](#)
- [KLI 64] KLINGBEIL W. W. ET SHIELD R. T., “Some numerical investigations on empirical strain energy functions in the large axi-symmetric extensions of rubber membranes”, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 15, pp. 608–629, 1964. [64](#), [153](#)
- [KUC 96] KUCHERSKII A. M., “New characteristic of tensile stress-strain properties in rubbers”, *Polymer Testing*, Vol. 22, No. 5, pp. 503–507, 1996. [80](#)
- [KUH 42] KUHN W. ET GRÜN F., “Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe”, *Kolloideitschrift*, Vol. 101, pp. 248–271, 1942. [30](#), [73](#), [75](#), [111](#), [174](#), [175](#)
- [KYR 91] KYRIAKIDES S. ET CHANG Y., “The initiation and propagation of a localized instability in a inflated elastic tube”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 27, pp. 1085–1111, 1991. [106](#)
- [LEM 90] LEMAITRE J. ET CHABOCHE J. L., *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. [145](#)
- [LIC 85] LICHARDUS J. ET LICHARDUS-ITTEN M., *La protohistoire de l'Europe*. Presse Universitaire de France, nouvelle clio ed., 1985. [15](#)

- [LIU 02] LIU G., HAN X., ET LAM K., “A combined genetic algorithm and nonlinear least squares methode for material characterization using elastic waves”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 1909–1921, 2002. 39, 44
- [LU 01] LU X. F. ET HAY J. N., “Crystallization orientation and relaxation in uniaxially drawn poly(ethylene terephthalate)”, *Polymer*, Vol. 42, pp. 8055–8067, 2001. 24
- [MAO 99] MAO Y., “Finite chain-length effects in rubber elasticity”, *Polymer*, Vol. 40, pp. 1167–1171, 1999. 74, 191
- [MAR 63] MARQUARDT D. W., “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 11, No. 2, pp. 431–441, 1963. 38
- [MAR 88] MARK J. E. ET ERMAN B., *Rubberlike elasticity - A molecular primer*. ISBN 0-471-61499-8, New-York: J. Wiley and Sons, 1988. 74, 179
- [MAR 01] MARCKMANN G. ET VERRON E., “Finite element analysis of blow-molding and thermoforming processes using a dynamic explicit procedure”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 43, No. 3, pp. 426–439, 2001. 89
- [MAR 02] MARCKMANN G., VERRON E., GORNET L., CHAGNON G., CHARRIER P., ET FORT P., “A theory of network alteration for the Mullins effect”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 50, pp. 2011–2028, 2002. 83, 86
- [MAY 40] MAYER J. E. ET MAYER M. G., *Statistical mechanics*. J. Wiley and Sons, 1940. 173
- [MEI 01] MEISSNER B. ET MATEJKA L., “Description of tensile stress-strain behavior of filler-reinforced rubber-like networks using a Langevin-theory-based approach. Part II”, *Polymer*, Vol. 42, pp. 1143–1156, 2001. 74, 191
- [MES 00] MESSEGER T., *Optimisation d'enclintes sous-marines composites*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies, Lille I, Juillet 2000. 39, 44, 49
- [MEY 35] MEYER K. ET FERRI C., “Sur l'élasticité des caoutchoucs”, *Helv. Chim. Acta*, Vol. 18, pp. 570–589, 1935. 27
- [MIC 96] MICHALEWICZ Z., *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer, third, revised and extended edition ed., 1996. ISBN 3-540-606776-9. 39, 41, 44, 46, 48, 49
- [MIE 95] MIEHE C., “Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials”, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 14, No. 5, pp. 697–720, 1995. 25, 84

- [MOO 40] MOONEY M., “A theory of large elastic deformation”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 11, pp. 582–592, 1940. [100](#), [110](#), [159](#)
- [MOR 86] MORMAN K. N., “The generalized strain measure with application to nonhomogeneous deformations in rubber-like solids”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 53, pp. 726–728, 1986. [142](#)
- [MUL 47] MULLINS L. ET TOBIN N., “Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 30, pp. 551–571, 1947. [83](#)
- [MUL 48] MULLINS L., “Effect of stretching on the properties of rubber”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 21, pp. 281–300, 1948. [13](#), [25](#), [26](#), [73](#), [82](#), [88](#), [121](#)
- [MUL 57a] MULLINS L., “Softening of rubber by deformation”, *Rub. Chem. Technol.*, Vol. 30, pp. 551–571, 1957. [25](#), [26](#), [82](#), [83](#), [87](#)
- [MUL 57b] MULLINS L. ET TOBIN N. R., “Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 30, pp. 551–571, 1957. [82](#)
- [MUR 02] MURAKAMI S., SENOO K., TOKI S., ET KOHJIYA S., “Structural development of natural rubber during uniaxial stretching by in situ wide angle X-ray diffraction using a synchrotron radiation”, *Polymer*, Vol. 43, pp. 2117–2120, 2002. [23](#)
- [OGD 72] OGDEN R. W., “Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 326, pp. 565–584, 1972. [64](#), [110](#), [153](#), [168](#), [169](#), [192](#)
- [OGD 99] OGDEN R. W. ET ROXBURGH D. G., “A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 455, pp. 2861–2877, 1999. [25](#), [84](#)
- [PAT 98] PATSKO N. L. ET SUBBOTIN Y. N., “B-spline in the Finite-Element Method”, *Comput. Math. Math. Phys.*, Vol. 38, No. 1, pp. 11–20, 1998. [94](#)
- [PAT 99] PATEL B. P., GANAPATHI M., ET SARAVANAN J., “Shear Flexible Field-consistant Curved Spline Beam Element for Vibration Analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 46, pp. 387–407, 1999. [94](#)
- [PAY 60] PAYNE A. P., “A note on the existance of a Yield Point in the dynamique modulus of loaded vulcanizates”, *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 3, pp. 127–127, 1960. [29](#)
- [PER 00] PERRIN G., “Analytic stress-strain relationship for isotropic network model of rubber elasticity”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. t. 328, No. II b, pp. 5–10, 2000. [31](#), [179](#)

- [RAC 94] RACHIK M., ROELANDT J. M., ET BATOZ J. L., "Simulation numérique du soufflage et du thermoformage des plastiques", *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 3, No. 2, pp. 187–210, 1994. [93](#)
- [REE 03] REESE S. ET BÖL M., "On a micromechanically-based finite element simulation of viscoelastic and damage behavior of rubber-like polymers", dans *Constitutive Models for Rubber III*(BUSFIELD ET MUHR, eds.), (Lisse/ Abingdon/ Exton (PA)/ Tokyo), pp. 213–220, Proceedings of the third European conference on Constitutive Models for Rubber, A.A. Balkema Publishers, 15-17 september 2003. [87](#)
- [REI 93] REICHHOLF J., *L'émergence de l'homme*. Flammarion, mars 1993. [16](#)
- [REU 02] REUGE N., SCHMIDT F. M., LE MAOULT Y., RACHIK M., ET ABBÉ F., "Elastomer biaxial characterization using bubble inflation technique. I Experimental investigations", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 41, No. 3, pp. 522–531, 2002. [110](#)
- [RIK 72] RIKS E., "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 39, pp. 1060–1066, 1972. [101](#)
- [RIV 48a] RIVLIN R. S., "Large elastic deformation of isotropic materials - IV. Further developments of the general theory", *Philos. T. Roy. Soc. A*, Vol. 241, pp. 379–397, 1948. [159](#)
- [RIV 48b] RIVLIN R. S., "Some topics in finite elasticity I. Fundamental concepts", *Philos. T. Roy. Soc. A*, Vol. 240, pp. 459–490, 1948. [76](#), [147](#), [159](#)
- [RIV 51] RIVLIN R. S. ET SAUNDERS D. W., "Large elastic deformations of isotropic materials - VII. Experiments on the deformation of rubber", *Philos. T. Roy. Soc. A*, Vol. 243, pp. 251–288, 1951. [151](#), [154](#), [164](#)
- [ROS 89] ROSATO D. V. ET ROSATO D. V., *Blow molding handbook*. Munich: Hanser, 1989. [89](#)
- [RV 97] RODRIGUEZ-VILLA A., *Etude theorique et expérimentale de l'extrusion-soufflage de corps creux en polymère*. Thèse, CEMEF, ENSMP, 1997. [89](#)
- [SAL 88] SALENÇON J., *Mécanique des Milieux Continus - II. Elasticité-Milieux curvilignes*. ISBN 2-7298-8863-2, Paris (France): Ellipses, école polytechnique ed., 1988. [146](#)
- [SCH 46a] SCHOENBERG I., "Contributions to the problem of equidistant data by analytic functions. Part A", *Quat. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 1, pp. 45–97, 1946. [95](#)
- [SCH 46b] SCHOENBERG I., "Contributions to the problem of equidistant data by analytic functions. Part B", *Quat. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 2, pp. 112–141, 1946. [95](#)



- [SCH 75] SCHMIDT L. R. ET CARLEY J. F., “Biaxial stretching of heat-softened plastic sheets: experiments and results”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 15, No. 1, pp. 51–62, 1975. 110
- [SCH 98] SCHOENAUER M., “Algorithme d’Evolution - Problèmes liés à la représentation”, rapport techn., Journée Evolutionnaire Trimestrielle, Ecole Polytechnique (Palaiseau), 8 avril 1998. 41, 49
- [sci 99] “Les matériaux artificiels”, *Sciences et Vie*, pp. 150–157, Janvier 1999. 20
- [SEB 96] SEBAG M. ET SCHOENAUER M., “Controlé d’un algorithme Génétique”, *Revue d’intelligence artificielle*, Vol. 10, No. 2-3, pp. 389–428, 1996. 41
- [SEB 98] SEBAG M., “Algorithmes d’Evolution - Mise en route”, rapport techn., Journée Evolutionnaire Trimestrielle, Ecole Polytechnique (Palaiseau), 8 avril 1998. 40, 44, 45
- [SEI 00] SEIBERT D. J. ET SCHÖCHE N., “Direct comparison of some recent rubber elasticity models”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 73, pp. 366–384, 2000. 173
- [SET 64] SETH B. R., “Generalized strain measure with applications to physical problems”, dans *Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*(REINER M. ET ABIR D., eds.), (New-York), pp. 162–172, McMillan, 1964. 142
- [SHE 00] SHEIKH A. H. ET MUKHOPADHYAY M., “Geometric nonlinear analysis of stiffened plates by the spline finite strip method”, *Comput. and Struct.*, Vol. 76, pp. 765–785, 2000. 94
- [SID 82] SIDOROFF F., “Cours sur les grandes déformations”, rapport GRECO, Ecole d’été Sophia-Antipolis, 1982. 141
- [SON 91] SONG W. N., KOUBA K., MIRZA F. A., ET VLACHOPOULOS J., “Finite element analysis of practical thermoforming”, dans *ANTEC’91*, pp. 1025–1026, 1991. 93
- [TOY 77] TOYNBEE A., *La Grande Aventure de l’Humanité*. Bruxelles: Elsevier Sequoia, 1977. 16
- [TRE 43] TRELOAR L. R. G., “The elasticity of a network of long chain molecules (I and II)”, *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 39, pp. 36–64 ; 241–246, 1943. 173
- [TRE 44] TRELOAR L. R. G., “Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation”, *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 40, pp. 59–70, 1944. 14, 64, 69, 76, 119, 122, 153, 154, 155, 156, 157, 159, 173
- [TRE 46] TRELOAR L. R. G. *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 42, pp. 77–83, 1946. 177



- [TRE 75] TRELOAR L. R. G., *The physics of rubber elasticity*. Oxford (UK): Oxford University Press, 1975. 78, 173
- [TRE 76] TRELOAR L. R. G., “The mechanics of rubber elasticity”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 351, pp. 301–330, 1976. 146
- [TRE 79] TRELOAR L. R. G. ET RIDING G., “A non-Gaussian theory for rubber in biaxial strain. I. Mechanical properties”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 369, pp. 261–280, 1979. 179
- [TRU 66] TRUESDELL C., *The elements of continuum mechanics*. New-York: Springer Verlag, 1966. 145
- [TSC 71] TSCHOEGL N. W., “Constitutive equations for elastomers”, *J. Polymer Sci. Part A-1*, Vol. 9, pp. 1959–1970, 1971. 159
- [VAL 67] VALANIS K. C. ET LANDEL R. F., “The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 38, No. 7, pp. 2997–3002, 1967. 164, 167
- [VER 97a] VERRON E., *Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et de thermoformage*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, Décembre 1997. 89
- [VER 97b] VERRON E., DERDOURI A., PESEUX B., ET CONNOLLY R., “Caractérisation de polymères chauffés par la technique de soufflage de membrane”, dans *Actes du 13e Congrès Français de Mécanique*, Vol. 2, (Poitiers), pp. 19–22, 1er-5 septembre 1997. 93
- [VER 97c] VERRON E., PESEUX B., DERDOURI A., ET CONNOLLY R., “Bubble inflation of heat-softened polymeric membranes above the glass transition temperature”, dans *Proceedings of the 16th Canadian Congress of Applied Mechanics*, Vol. 1, (Québec (Canada)), pp. 81–82, 1er-5 juin 1997. 90
- [VER 98a] VERMEULEN A. H. ET HEPPLER G. R., “Structural analysis of shells by b-spline field approximation method”, *Comput. and Struct.*, Vol. 68, pp. 167–179, 1998. 94
- [VER 98b] VERRON E., MARCKMANN G., ET PESEUX B., “Modélisation dynamique du thermoformage”, *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 7, No. 1-2-3, pp. 193–208, 1998. 89
- [VER 99] VERRON E., KHAYAT R., DERDOURI A., ET PESEUX B., “Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes”, *J. Rheol.*, Vol. 43, pp. 1083–1097, 1999. 101, 105, 112

- [VER 01a] VERRON E. ET MARCKMANN G., “An axisymmetrical B-spline model for the non-linear inflation of rubberlike membranes”, *Comput. Meth Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, No. 46-47, pp. 6271–6289, 2001. [94](#), [100](#), [119](#)
- [VER 01b] VERRON E., MARCKMANN G., ET PESEUX B., “Dynamic inflation of non-linear elastic and viscoelastic rubberlike membrane”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 50, No. 5, pp. 1233–1251, 2001. [89](#), [93](#), [106](#)
- [VER 03a] VERRON E., “Modélisation du comportement des structures et des matériaux élastomères”, mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, 24 octobre 2003. [90](#)
- [VER 03b] VERRON E. ET MARCKMANN G., “Inflation of elastomeric circular membrane using network constitutive equations”, *Int. J. Nonlinear Mech.*, Vol. 38, pp. 1221–1235, 2003. [110](#)
- [VIL 95] VILLA A. R., AGASSANT J. F., ET BELLET M., “Finite element simulation of the extrusion blow-molding process”, dans *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes-Numiform’95*, (Ithaca (USA)), pp. 1053–1058, juin 1995. [89](#)
- [WAN 52] WANG M. C. ET GUTH E., “Statistical Theory of Networks of Non-Gaussian Flexible Chains”, *J. Chem. Phys.*, Vol. 20, No. 7, pp. 1144–1157, 1952. [177](#)
- [WIN 00] WINEMAN A. S. ET RAJAGOPAL K. R., *Mechanical response of polymers. An introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. [27](#)
- [WU 92] WU P. D. ET VAN DER GIESSEN E., “On improved 3-D non gaussian models for rubber elasticity”, *Mech. Res. Commun.*, Vol. 19, No. 5, pp. 427–433, 1992. [110](#), [111](#)
- [WU 93] WU P. D. ET VAN DER GIESSEN E., “On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, No. 3, pp. 427–456, 1993. [75](#), [111](#), [119](#), [177](#), [179](#)
- [YAN 70] YANG W. H. ET FENG W. W., “On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 37, pp. 1002–1011, 1970. [90](#), [93](#), [100](#), [117](#)
- [YEO 90] YEOH O. H., “Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates”, *Rubber. Chem. Technol.*, Vol. 63, No. 5, pp. 792–805, 1990. [150](#), [159](#), [164](#), [170](#)
- [YEO 97] YEOH O. H. ET FLEMING P. D., “A New Attempt to Reconcile the Statistical and Phenomenological Theories of rubber Elasticity”, *J. Polymer Sci. . Part B: Polymer Physics*, Vol. 35, pp. 1919–1931, 1997. [164](#), [171](#), [173](#)

- [YOS 03] YOSHIMOTO F., HARADA T., ET YOSHIMOTO Y., “Data fitting with a spline using a real-coded genetic algorithm”, *Comp. Aided Design*, Vol. 35, pp. 751–760, 2003. 39
- [ZAM 89] ZAMANI N. G., WATT D. F., ET ESTEGHAMATIAN M., “Status of the finite element method in the thermoforming process”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 31, pp. 671–693, 1989. 89

# Annexes



# Etude des modèles hyperélastiques

---

## A. 1 Objectifs de l'étude

La modélisation du comportement mécanique des élastomères passe par le choix d'une loi de comportement permettant de reproduire qualitativement et quantitativement la réponse mécanique du matériau. De ce choix dépend la pertinence des simulations qui pourront être faites. S'il existait un modèle parfait capable de se comporter comme le matériau réel après une phase d'identification des paramètres caractéristiques, ce choix n'aurait pas de raison d'être. Malheureusement, le comportement complexe des élastomères est difficile à modéliser et une multitude de modèles a vu le jour depuis plus d'un demi-siècle, chacun possédant des qualités et des défauts. Il est difficile pour un ingénieur de trancher parmi les différents modèles existants, d'autant que ces modèles ne sont que très rarement comparés les uns avec les autres et souvent présentés par leur auteurs sous leur meilleur jour.

Le but de cette annexe est de présenter l'ensemble des modèles les plus utilisés de la littérature et des les qualifier par rapport à un jeu de données expérimentales unique. Ceci fera l'objet de la troisième partie de cette annexe. Il sera fait, avant cela, un rapide rappel de Mécanique des Milieux Continus, et une présentation des différents essais expérimentaux réalisables pour qualifier un élastomère.

## A. 2 Rappels de Mécanique des Milieux Continus

Dans cette partie, nous rappelons un certain nombre de notions de Mécanique des Milieux Continus en précisant les notations adoptées par la suite. Les matériaux étudiés étant très souples et très déformables, nous aborderons ces notions directement dans le contexte des grandes transformations. Des présentations plus générales et plus complètes pourront être trouvées dans [SID 82] et [GER 86].

### A. 2.1 La transformation et le tenseur gradient de la transformation

Considérons un solide de configuration  $\mathcal{D}_0$  au temps  $t_0$ , de volume initial  $V_0$  et de frontière  $S_0$ . On fait subir au temps  $t$  à ce solide une transformation  $\mathcal{F}(t)$ . Sa configuration devient alors  $\mathcal{D}_t$  admettant un volume et une frontière notés respectivement  $V_t$  et  $S_t$ . Chaque point matériel  $P$  de  $\mathcal{D}_0$  de position  $\vec{X}_0$  au temps  $t_0$  occupe la position  $\vec{x}_t$  au temps  $t$ . Nous adoptons la description *Lagrangienne*, c'est à dire que la configuration de référence est la configuration initiale du solide non déformé. On note  $\overline{\overline{F}}(t)$  le tenseur  $\overline{\overline{\text{grad}}}_{\vec{X}}(\vec{x})$  qui est appelé *tenseur gradient de la transformation*  $\mathcal{F}(t)$ . Il permet de connaître le transformé  $\vec{dx}$  d'un vecteur matériel  $\vec{dX}$  par la relation :

$$\vec{dx} = \overline{\overline{F}}(t)\vec{dX} \quad (\text{A.1})$$

### A. 2.2 Les tenseurs de dilatations

Soient  $\overline{\overline{C}}$ , le tenseur de Cauchy-Green droit défini par :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t \overline{\overline{F}} \quad (\text{A.2})$$

et  $\overline{\overline{B}}$  le tenseur *Eulérien* de Cauchy-Green gauche :

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \overline{\overline{F}}^t \quad (\text{A.3})$$

$\overline{\overline{C}}$  est un tenseur *Lagrangien*, tandis que  $\overline{\overline{B}}$  est *Eulérien*.

### A. 2.3 Les tenseurs de déformations

Des tenseurs de déformation généralisée peuvent être construits de façon systématique [SET 64, MOR 86]. Leur utilisation sera abordée ultérieurement, lors de la construction de lois de comportement et de l'établissement des équations d'équilibre sous des sollicitations données. On définit ainsi des tenseurs Lagrangiens par :

$$\begin{cases} \overline{\overline{E}}_\alpha = \frac{\overline{\overline{C}}^\alpha - \overline{\overline{I}}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \overline{\overline{E}}_0 = \frac{1}{2} \ln \overline{\overline{C}} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Le cas particuliers  $\alpha = 2$  fournit le tenseur classique  $\overline{\overline{E}}$  (Equation A.5) et  $\overline{\overline{A}}$  appelé tenseur de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}}{2} \quad (\text{A.5})$$

### A. 2.4 Les invariants

Lors de la diagonalisation de la matrice  $[C]$  représentant le tenseur de dilatation  $\overline{\overline{C}}$ , l'écriture du polynôme caractéristique fait apparaître trois invariants, notés  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Ils sont bien sûr

indépendants de la base dans laquelle le tenseur est exprimé :

$$I_1 = \text{tr}(\overline{\overline{C}}) \quad (\text{A.6})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \text{tr}(\overline{\overline{C}}) \right)^2 - \text{tr}(\overline{\overline{C}}^2) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$I_3 = \det \overline{\overline{C}} \quad (\text{A.8})$$

Considérons, un cube unitaire se déformant en un parallélépipède de dimension  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  en gardant ses côtés parallèles aux côtés du cube non déformé (figure A.1). La matrice  $[F]$  du

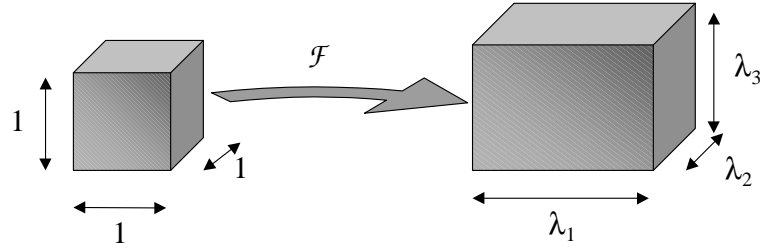


Figure A.1 : Déformation d'un cube élémentaire

gradient de la transformation correspondante s'écrit :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

où les variables  $\lambda_i$  sont les extensions principales. La matrice  $[C]$  du tenseur de Cauchy-Green est :

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Les invariants de  $\overline{\overline{C}}$  sont alors :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (\text{A.11})$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (\text{A.12})$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (\text{A.13})$$

$\sqrt{I_1}$  correspond donc à la longueur de la diagonale du parallélépipède,  $2I_2$  correspond à la somme des carrés des aires des faces et  $\sqrt{I_3}$  correspond au volume du parallélépipède .

### A. 2.5 La cinématique des matériaux incompressibles

Les élastomères et les polymères à l'état fondu sont souvent considérés comme incompressibles ou quasi-incompressibles. La prise en compte de l'incompressibilité dans la cinématique



de déformation se fait en imposant que la transformation  $\mathcal{F}$  a lieu à volume constant. Cela se traduit par :

$$J^2 = \left( \det \overline{\overline{F}} \right)^2 = \det \overline{\overline{C}} = I_3 = 1 \quad (\text{A.14})$$

En termes d'extensions principales, cela revient à écrire :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (\text{A.15})$$

d'où l'écriture de  $[\Lambda]$ , le tenseur gradient de déformation principale exprimé sur la base propre :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Lorsqu'il n'est pas possible de prendre en compte l'incompressibilité dans la cinématique de déformation, la déformation est décomposée en une partie incompressible  $\overline{\overline{F}}_{iso}$  (ou partie isochore) et une partie de compression volumique pure  $\overline{\overline{F}}_{vol}$  (ou partie sphérique) [DOL 00] :

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{F}}_{vol} \overline{\overline{F}}_{iso} \quad (\text{A.17})$$

$$\overline{\overline{F}}_{vol} = J^{\frac{1}{3}} \overline{\overline{I}} \quad (\text{A.18})$$

$$\overline{\overline{F}}_{iso} = J^{-\frac{1}{3}} \overline{\overline{F}} \quad (\text{A.19})$$

## A. 2.6 Les tenseurs de contrainte

Les contraintes sont des efforts internes de cohésion. Elles peuvent être décrites de différentes manières.

Considérons une coupe fictive de  $\mathcal{D}_0$  et un élément de surface  $dS_0$  de cette coupe de normale  $\overrightarrow{N}_0$ , appelé facette. Cette facette se transforme par  $\mathcal{F}$  en une facette  $dS$  de normale  $\overrightarrow{n}$ . Soit  $\overrightarrow{df}$  la résultante des efforts internes s'appliquant sur cette facette. Le vecteur contrainte  $\overrightarrow{t}$  défini par  $\overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$  dépend linéairement de  $\overrightarrow{n}$ . On définit généralement trois tenseurs de contrainte :

- Le tenseur  $\overline{\overline{\sigma}}$ , appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*, défini par :

$$\overrightarrow{df} = \overline{\overline{\sigma}} \overrightarrow{n} dS \quad (\text{A.20})$$

Il est Eulérien et symétrique en absence de couple de volume.

- Le tenseur  $\overline{\overline{\Pi}}$ , appelé *tenseur de Boussinesq* ou *tenseur de Piola-Kirchhoff de premier espèce* (PK1), défini par :

$$\overrightarrow{df} = \overline{\overline{\Pi}} \overrightarrow{N}_0 dS_0 \quad (\text{A.21})$$

Il n'est ni Eulérien, ni Lagrangien puisqu'il relie les contraintes dans l'état déformé à la facette dans l'état non déformé. De plus, ce tenseur n'est pas symétrique.

- Le tenseur  $\overline{\overline{S}}$ , appelé *tenseur de Piola-Lagrange* ou *second tenseur de Piola-Kirchhoff* (PK2), défini dans l'état non déformé par :

$$\overrightarrow{df_0} = \overline{\overline{F}}^{-1} \overrightarrow{df} = \overline{\overline{S}} \overrightarrow{N_0} dS_0 \quad (\text{A.22})$$

Il est Lagrangien et symétrique.

De par leur construction, ces trois tenseurs sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$\overline{\overline{\Pi}} = J \overline{\overline{\sigma}} \overline{\overline{F}}^{-t} \quad (\text{A.23})$$

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{F}}^{-1} \overline{\overline{\Pi}} \quad (\text{A.24})$$

$$\overline{\overline{S}} = J \overline{\overline{F}}^{-1} \overline{\overline{\sigma}} \overline{\overline{F}}^{-t} \quad (\text{A.25})$$

## A. 2.7 Les lois de comportement hyperélastiques

### A. 2.7.1 Généralités

D'une façon générale, une loi de comportement est une fonctionnelle de réponse du matériau permettant de définir un lien entre l'état de contrainte et l'histoire des transformations de ce matériau. Cette loi de comportement doit satisfaire trois principes : le principe de *déterminisme* ou principe de *causalité*, le principe d'*action locale*, et le principe d'*objectivité* ou d'*indifférence matérielle*.

Le principe de causalité impose que l'état de contrainte en un point et au temps  $t$  ne dépend que de l'histoire de la transformation du matériau jusqu'au temps  $t$ . Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons au cas des matériaux *matériellement simples* [LEM 90, TRU 66], c'est-à-dire pour lesquels l'état de contrainte ne dépend que de l'histoire du gradient de la transformation. Nous supposons, en particulier, que cette loi ne dépend pas de la température *i.e.* que les transformations sont isothermes. Le principe de l'action locale impose que l'état de contrainte en un point ne dépend que du voisinage du point. Il est automatiquement vérifié pour les matériaux matériellement simples. Enfin, le principe d'objectivité impose que la loi de comportement doit être indépendante de l'observateur ou du changement de référentiel. Finalement, ces trois principes sont vérifiés, si on écrit la loi de comportement sous la forme :

$$\overline{\overline{S}}(t) = \Phi_{\tau \leq t} \left( \overline{\overline{C}}(\tau) \right) \quad (\text{A.26})$$

ou bien sous la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}(t) = \Upsilon_{\tau \leq t} \left( \overline{\overline{B}}(\tau) \right) \quad (\text{A.27})$$

où  $\Phi$  et  $\Upsilon$  sont les fonctionnelles de réponse.

### A. 2.7.2 L'incompressibilité

Lorsque l'hypothèse d'incompressibilité est faite *a priori*, c'est-à-dire lorsque cette condition est imposée sur la cinématique du mouvement, les contraintes dans le matériau sont connues à

une pression hydrostatique près  $p$ . La loi de comportement est alors de la forme :

$$\bar{\bar{S}}(t) = -p\bar{\bar{C}}^{-1} + \Phi_{\tau \leq t} \left( \bar{\bar{C}} \Big|_{I_3=1}(\tau) \right) \quad (\text{A.28})$$

ou

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{I}} + \Upsilon_{\tau \leq t} \left( \bar{\bar{B}} \Big|_{I_3=1}(\tau) \right) \quad (\text{A.29})$$

### A. 2.7.3 Les matériaux hyperélastiques

Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation  $W$  dépendant uniquement de l'état de déformation courant  $\bar{\bar{F}}(t)$  (noté  $\bar{\bar{F}}$  dans la suite) et dont dérivent les contraintes [BEA 87]. En faisant l'hypothèse d'incompressibilité ( $J = 1$  et  $I_3 = 1$ ), les différents tenseurs des contraintes peuvent s'écrire en fonction de  $W$  :

- en écriture Lagrangienne :

$$\bar{\bar{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{C}}} - p\bar{\bar{C}}^{-1} \quad (\text{A.30})$$

- en écriture Eulérienne :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\bar{\bar{B}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{B}}} - p\bar{\bar{I}} \quad (\text{A.31})$$

- et en écriture mixte :

$$\bar{\bar{\Pi}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{F}}} - p\bar{\bar{F}}^{-t} \quad (\text{A.32})$$

Le principe d'objectivité nous impose d'écrire  $W$  sous la forme d'une fonction scalaire exprimée en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit  $\bar{\bar{C}}$ . En faisant, de plus, l'hypothèse d'isotropie,  $W$  peut s'exprimer en fonction des seuls invariants  $I_1$  et  $I_2$  ( $I_3 = 1$ ) de  $\bar{\bar{C}}$  [SAL 88].

$$W = W(I_1, I_2) \quad (\text{A.33})$$

Ces trois invariants ne sont cependant pas les seuls invariants possibles (*cf*: discussion de H.G. Hopkins dans [TRE 76]). En conservant les notations  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  pour les extensions principales (racines carrées des valeurs propres de  $\bar{\bar{C}}$ ), on peut écrire sans perte de généralité :

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{A.34})$$

Nous obtenons alors, selon l'écriture souhaitée :

$$\bar{\bar{S}} = 2 \left( \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \bar{\bar{I}} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} \right) - p\bar{\bar{C}}^{-1} \quad (\text{A.35})$$

ou :

$$\bar{\bar{\Pi}} = 2\bar{\bar{F}} \left( \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \bar{\bar{I}} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} \right) - p\bar{\bar{F}}^{-t} \quad (\text{A.36})$$

ou encore, dans les directions principales de  $\bar{\bar{\sigma}}$  :

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad i = 1, 3 \quad (\text{A.37})$$

ou également [RIV 48b] :

$$\sigma_i = 2 \left[ \lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] - p \quad i = 1, 3 \quad (\text{A.38})$$

Avec cette dernière écriture, on remarque que l'indétermination de  $p$  peut être levée en calculant la différence entre deux contraintes principales  $\sigma_i - \sigma_j$ . Ainsi, en choisissant une direction particulière  $j$  tel que  $\sigma_j = 0$ , on obtient :

$$\sigma_i = \sigma_i - \sigma_j \quad (\text{A.39})$$

$$= \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \quad (\text{A.40})$$

$$= 2 \left[ (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (\text{A.41})$$

## A. 3 Les données expérimentales

### A. 3.1 Les essais classiques

Construire une loi de comportement hyperélastique revient à donner une forme particulière à la fonction  $W$ . Cependant, une loi de comportement sera d'autant mieux adaptée à un matériau donné qu'elle sera susceptible de reproduire le comportement du matériau quel que soit le mode de déformation considéré. En pratique, les matériaux sont testés sur quelques modes simples permettant l'identification des constantes matérielles à partir de relations contraintes-déformations établies analytiquement. Nous nous proposons ici de répertorier les essais classiques rencontrés dans la littérature et de rappeler les formes analytiques des réponses du matériau en fonction du mode de déformation considéré.

#### A. 3.1.1 L'extension simple

Ce mode de déformation consiste à étirer un échantillon sur lequel la partie utile peut être supposée en état de déformation uniaxiale (figure A.2). Les contraintes dans la largeur et dans



Figure A.2 : Expérience de traction

l'épaisseur de l'éprouvette sont alors considérées nulles. Dans le repère lié à l'éprouvette, où l'axe  $\vec{e}_1$  représente la direction d'extension, la matrice  $[F]$  du tenseur gradient de déformation  $\overline{\overline{F}}$  est alors de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Les invariants de  $\overline{\overline{C}}$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \quad ; \quad I_3 = 1 \quad (\text{A.43})$$

La contrainte  $\pi$  est alors donnée par l'équation (A.36) :

$$\pi = \frac{F}{S_0} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (\text{A.44})$$

où  $F$  est la force de traction et  $S_0$  est l'aire de la section non déformée de l'éprouvette. Selon l'écriture de la loi de comportement, on peut encore écrire :

$$\sigma = \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \quad (\text{A.45})$$

où  $\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$  représentent les dérivées partielles de la fonction  $W$  lorsque celle-ci est écrite sous la forme  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

### A. 3.1.2 La compression uniaxiale

La compression uniaxiale est un cas particulier d'extension simple. L'éprouvette est alors comprimée au lieu d'être étirée. La forme analytique est donc la même que pour l'extension simple et les courbes de compression et de traction uniaxiale doivent se prolonger en suivant la relation (A.44). Dans l'équation A.42, on a alors  $\lambda < 1$ .

### A. 3.1.3 L'extension équibiaxiale

L'extension équibiaxiale consiste à étirer un échantillon simultanément dans deux directions avec la même valeur d'extension, tandis que la troisième direction est libre. On utilise, en général, une membrane sur laquelle on applique le même effort  $F$  sur chacun de ses côtés dans les deux directions du plan de la membrane (figure A.3). Soit un élément de membrane de côté

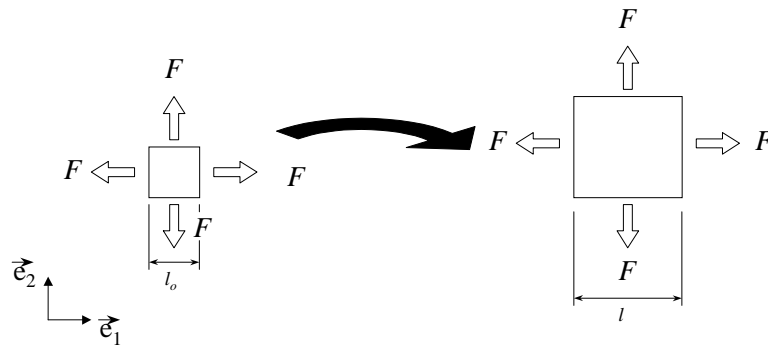


Figure A.3 : Expérience de traction équibiaxiale

$l_0$  dans sa configuration non déformée se transformant en un élément de côté  $l$ . On note  $\lambda$  le rapport  $l/l_0$ . Le tenseur gradient de déformation est alors de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

les invariants de  $\overline{\overline{C}}$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad ; \quad I_2 = \frac{2}{\lambda^2} + \lambda^4 \quad ; \quad I_3 = 1 \quad (\text{A.47})$$

Les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy sont alors :

$$\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (\text{A.48})$$

$$= 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (\text{A.49})$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad (\text{A.50})$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{A.51})$$

et la contrainte  $\pi = \pi_1 = \pi_2$  devient :

$$\pi = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (\text{A.52})$$

Une autre façon de mesurer un état de contrainte en extension équi-biaxiale consiste à gonfler une membrane circulaire encadrée sur ses bords de telle sorte qu'elle prenne la forme d'une bulle. On utilise alors la propriété qu'au voisinage du pôle de la bulle la membrane est en extension équi-biaxiale. Dans un repère dont le troisième axe est normal à la surface au pôle de la bulle, on mesure alors l'extension de la membrane entre deux marques tracées sur un cercle, le rayon de courbure au pôle  $r$  et la pression  $P$  insufflée dans la bulle. La relation suivante relie alors ces différentes valeurs (voir le chapitre [JOY 73]) :

$$P = 2 \frac{T}{r} \quad (\text{A.53})$$

où  $T$  est la tension radiale au pôle de la bulle, c'est-à-dire la force membranaire par unité de longueur de membrane déformée. En reprenant les notations de la figure A.3, la tension  $T$  est reliée à  $F$  par :

$$T = \frac{F}{l} \quad (\text{A.54})$$

et la contrainte  $\pi$  est reliée à  $T$  par :

$$\pi = \frac{F}{h_0 l_0} = \frac{\lambda T}{h_0} = \frac{\lambda P r}{2 h_0} \quad (\text{A.55})$$

où  $h_0$  est l'épaisseur initiale de la membrane.

#### A. 3.1.4 Le glissement pur

Cet essai consiste à pincer un échantillon de membrane rectangulaire sur ses bords les plus longs et à appliquer un effort perpendiculairement à ces bords (figure A.4), la contrainte hors plan est alors nulle. Les bords verticaux de l'éprouvette sur la figure A.4 ne restent pas parallèles. Cependant, si l'éprouvette est suffisamment large, on peut négliger les effets de bord et supposer

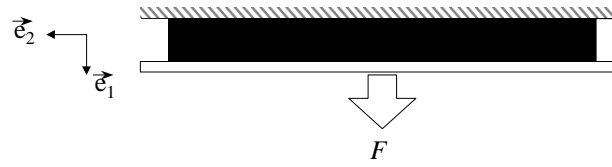


Figure A.4 : Expérience de cisaillement pur

que l'état de déformation de l'échantillon est celui au centre de l'éprouvette. Cette hypothèse permet alors d'écrire le tenseur gradient de déformation sous la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

les invariants de  $\overline{\overline{C}}$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2} \quad ; \quad I_2 = I_1 \quad ; \quad I_3 = 1 \quad (\text{A.57})$$

La contrainte  $\pi$  dans la direction de la force appliquée est alors donnée par :

$$\pi = \frac{F}{S_0} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (\text{A.58})$$

où  $F$  est la force de traction et  $S_0$  est l'aire de la section non déformée perpendiculaire à la direction de l'effort .

### A. 3.1.5 Le cisaillement simple

Cette expérience est généralement réalisée sur un bloc de matière sur lequel sont collés deux inserts plus rigides de part et d'autre du bloc. L'éprouvette ainsi réalisée est ensuite étirée comme l'indique la figure A.5. Cette expérience est souvent réalisée avec des éprouvettes dites

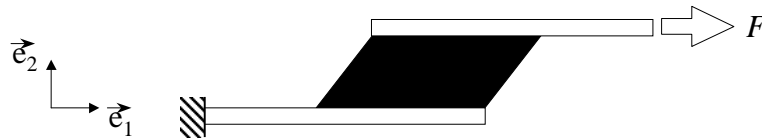


Figure A.5 : Expérience de cisaillement simple

« quatre blocs », où le bloc cisailé est répété symétriquement afin d'assurer le parallélisme des faces collées à des plaques métalliques beaucoup plus rigides que le matériau étudié ([YEO 90, CHA 94, CHA 99]). Cette expérience a l'inconvénient de générer une déformation des blocs où toutes les faces du bloc ne restent pas droites. Les faces libres présentent de légères courbures. On peut cependant, comme dans le cas du cisaillement pur, faire l'hypothèse que les effets de bord sont négligeables. On considère alors l'éprouvette en état de déformation uniforme. Le

tenseur gradient de la transformation est de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

où  $\gamma$  est le glissement donné par  $\gamma = u/h_0$ ,  $u$  étant le déplacement du support dans la direction de l'effort et  $h_0$  la hauteur du bloc constante au cours de l'expérience du fait de l'incompressibilité. En termes d'invariants, le cisaillement simple correspond aux invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  donnés par :

$$I_1 = 3 + \gamma^2 \quad ; \quad I_2 = 2(1 + \gamma^2) + 1 \quad ; \quad I_3 = 1 \quad (\text{A.60})$$

Après calcul, nous obtenons l'expression du cisaillement en terme d'invariants :

$$\tau = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \gamma \quad (\text{A.61})$$

### A. 3.1.6 La traction biaxiale

Les matériaux hyperélastiques étant en général considérés incompressibles, les extensions principales sont liées entre elles par la relation (A.15). La traction biaxiale où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  peuvent prendre des valeurs quelconques constitue le mode de déformation le plus général. La figure A.6 illustre le schéma de principe du montage expérimental de la traction biaxiale exercée sur une membrane. L'échantillon est tenu en quelques points le long de ses bords par des lames glissant

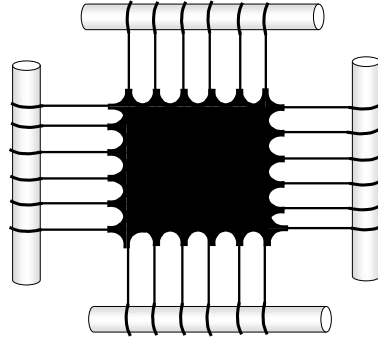


Figure A.6 : Expérience de traction biaxiale

sur des rails dont l'écartement permet de contrôler l'extension de l'échantillon suivant deux directions. Les forces s'exerçant sur la membrane sont alors les efforts permettant de maintenir l'écartement des rails. Les déformations sont en général mesurées par l'intermédiaire d'une grille régulière tracée sur la membrane ou par la mesure de l'écartement des rails ([JAM 75, RIV 51, KAW 81]). Le gradient des déformations dans la partie utile de l'éprouvette est alors supposé de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.62})$$



d'où les invariants :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad ; \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \quad ; \quad I_3 = 1 \quad (\text{A.63})$$

La contrainte hors plan étant nulle, on peut écrire :

$$\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (\text{A.64})$$

$$\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_3 \quad (\text{A.65})$$

d'où le résultat suivant :

$$\sigma_1 = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \quad (\text{A.66})$$

$$\sigma_2 = 2\left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \quad (\text{A.67})$$

ou encore :

$$\pi_1 = 2\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \quad (\text{A.68})$$

$$\pi_2 = 2\left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \quad (\text{A.69})$$

Enfin, notons que l'extension équibiaxiale est un cas particulier d'extension biaxiale.

### A. 3.1.7 L'équivalence extension équibiaxiale/compression

Du fait de l'incompressibilité et de la relation cinématique (A.15), tous ces modes de déformation ne sont pas indépendants. Ainsi, on peut montrer que la traction équibiaxiale présentée ci-dessus avec des valeurs de  $\lambda$  supérieures à 1 est équivalente à la compression uniaxiale, l'axe de compression  $\vec{e}_3$  étant l'axe orthogonal au plan de traction équibiaxiale ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ). Ainsi, en notant  $\sigma_{\text{eq}}$  la contrainte de traction équibiaxiale et  $\sigma_{\text{comp}}$  la contrainte de compression uniaxiale, nous avons les relations :

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{1 \text{ eq}} - \sigma_{3 \text{ eq}} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{comp}} = \sigma_{3 \text{ comp}} - \sigma_{1 \text{ comp}} \quad (\text{A.70})$$

et comme  $\sigma_{3 \text{ eq}} = 0$  et  $\sigma_{1 \text{ comp}} = 0$ . ceci devient :

$$\sigma_{\text{eq}} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = -\left(\lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right) = -\sigma_{\text{comp}} \quad (\text{A.71})$$

il s'ensuit que :

$$\pi_{\text{comp}} = -\lambda_{\text{eq}}^3 \pi_{\text{eq}} \quad (\text{A.72})$$

$\lambda_{\text{comp}}$  se déduisant de l'extension équibiaxiale  $\lambda_{\text{eq}}$  par la relation :

$$\lambda_{\text{comp}} = \frac{1}{\lambda_{\text{eq}}^2} \quad (\text{A.73})$$

### A. 3.1.8 L'équivalence cisaillement pur / cisaillement simple

On peut également montrer qu'il y a équivalence entre le cisaillement simple et le cisaillement pur [CHA 94], et que les résultats expérimentaux d'une expérience peuvent se déduire des résultats de l'autre. En effet, lorsqu'on calcule les valeurs propres du tenseur de dilatation  $\overline{\overline{C}}$ , les carrés des élongations principales sont donnés par :

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{4} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \right)^2 \quad ; \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{4} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4} \right)^2 \quad ; \quad \lambda_3^2 = 1 \quad (\text{A.74})$$

Du fait de l'incompressibilité, on a nécessairement  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ , on a donc un état de déformation de cisaillement pur dans la base principale de déformation. Cette base se déduit de la base structurelle précédente (voir figure A.5) par une rotation d'angle  $\theta$ , donnée par :

$$\theta = \arctan \left( \frac{\gamma}{\lambda_1^2 - 1} \right) = \frac{1}{\lambda_1} \quad (\text{A.75})$$

En notant  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , les contraintes principales, le tenseur des contraintes de Cauchy dans la base structurelle s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta & (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta & 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta & \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

En appliquant la relation (A.25), nous obtenons :

$$\tau = \pi_{12} = \frac{F}{S_0} = \left( \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.77})$$

Notons que  $\sigma_2$  correspond à l'extension  $1/\lambda$  du cisaillement pur et  $\sigma_1$  correspond à l'extension  $\lambda$ , nous en déduisons que  $\sigma_2 = 0$  et que :

$$\tau = \sigma_1 \cos \theta \sin \theta = \sigma_{cp} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.78})$$

La relation (A.78) permet donc de passer de la contrainte  $\sigma_{cp}$  du cisaillement pur (voir section A.3.2.1) au cisaillement  $\tau$  du cisaillement simple.

### A. 3.2 Les résultats expérimentaux de la bibliographie

Afin de comparer les différents modèles (*ie*: les différentes formes de  $W$ ) rencontrés dans la littérature, il convient de présenter quelques courbes expérimentales types d'un matériau élastomère. Ces résultats expérimentaux serviront de base afin de comparer les modèles dans la section suivante.

Nous choisissons de prendre comme référence les travaux de Treloar [TRE 44] très utilisés dans la bibliographie [CAR 61, KLI 64, HS 66, HS 67, ALE 68, OGD 72, ARR 93, BOY 00]. Ces travaux concernent l'étude de deux types d'élastomères. Le premier est un caoutchouc à 8% de soufre vulcanisé pendant 3 heures. Le second concerne un latex. Seuls les résultats

du caoutchouc seront présentés dans cette partie. Celui-ci présente l'avantage d'être fortement élastique réversible sans présenter de cristallisation jusqu'à 400% d'extension. Il est donc très bien adapté pour être modélisé par un modèle hyperélastique. Treloar a effectué sur ce matériau des essais d'extension simple, d'extension équibiaxiale, de compression, de glissement pur et a également combiné un essai de traction avec un essai de glissement pur.

Pour être complet, nous devons nous intéresser également à des essais de véritable traction biaxiale. Nous pouvons citer, dans cet esprit, les travaux de Rivlin et Saunders [RIV 51], de James *et al.* [JAM 75] ou encore de Kawabata *et al.* [KAW 81]. Nous choisissons ici d'utiliser les essais de Kawabata *et al.* [KAW 81] afin d'illustrer la capacité des lois de comportement de prendre en compte ces états de déformation biaxiale.

### A. 3.2.1 Les essais de Treloar (1944)

Treloar utilise une éprouvette de longueur utile égale à 10 mm, de largeur 3 mm et d'épaisseur 0,8 mm. Cette éprouvette est pré-étirée à 400% avant d'effectuer les mesures afin d'éliminer l'effet Mullins (voir section I.11).

#### *L'extension simple*

La figure A.7 représente l'évolution de la contrainte  $\pi$  (force par unité de surface non déformée) dans la direction d'extension en fonction de  $\lambda$ , le rapport de la longueur actuelle sur la longueur non déformée. L'éprouvette est étirée jusqu'à  $\lambda = 7,6$  (660% de déformation).

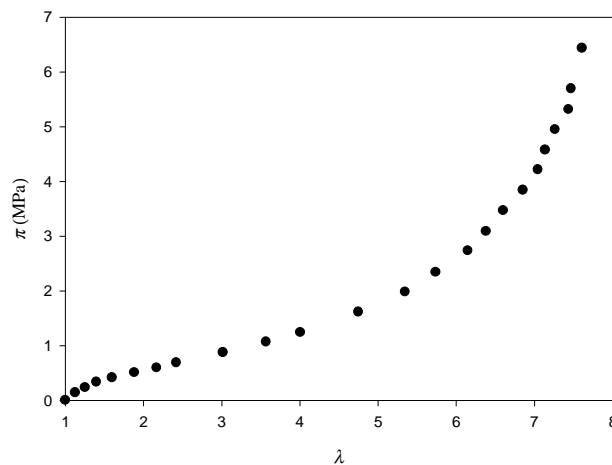


Figure A.7 : Courbe expérimentale d'extension simple de Treloar [TRE 44]

La forme en « S » de cette courbe de traction est caractéristique des élastomères. Une loi de comportement pouvant représenter ce type de réponse sera d'autant plus difficile à trouver que le domaine d'utilisation de ce matériau sera grand. Ainsi, jusqu'à 100% de déformation, la rigidification finale ne sera pas nécessairement prise en compte, alors qu'une modélisation jusqu'à 600% devra se faire avec une loi de comportement susceptible de prendre en compte cette rigidification.

***L'extension équibiaxiale***

Pour ce type de déformation, Treloar utilise le soufflage d'une membrane circulaire de 25 mm de diamètre (voir section A. 3.1.3). Il mesure alors l'extension de la membrane entre deux marques tracées sur un cercle initialement de 4 mm de diamètre centré au pôle, le rayon de courbure au pôle  $r$ , et la pression  $P$  insufflée dans la bulle. Il utilise alors la relation (A.55) pour tracer la courbe donnant  $\pi$  en fonction de  $\lambda$  (figure A.8).

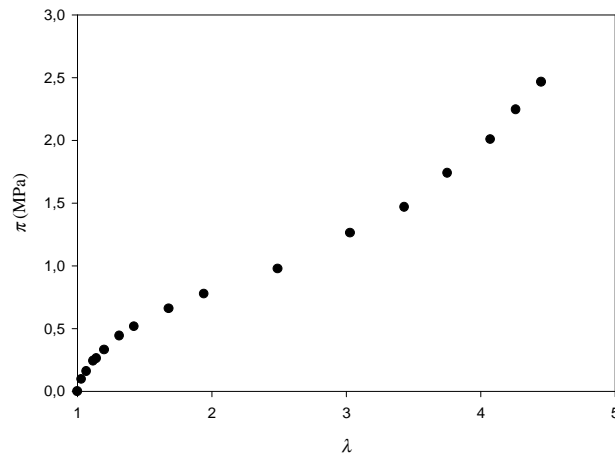


Figure A.8 : Courbe expérimentale d'extension équibiaxiale de Treloar [TRE 44]

***La compression***

Pour obtenir des données expérimentales sur la compression simple, Treloar utilise les expériences de traction équibiaxiale, en considérant l'équivalence décrite dans la section A. 3.1.7. La courbe expérimentale obtenue est alors celle de la figure A.9

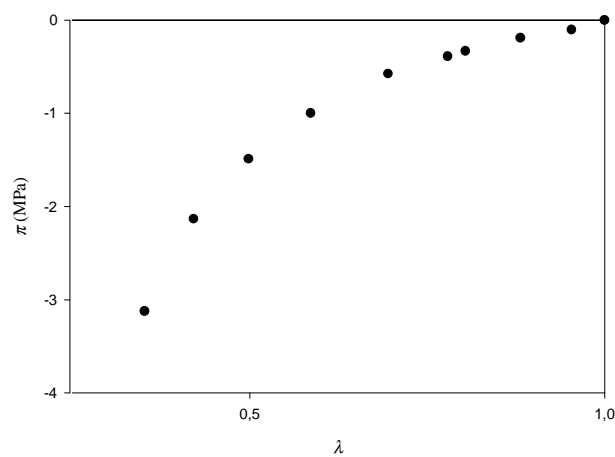


Figure A.9 : Courbe équivalente de compression uniaxiale de Treloar [TRE 44]

Elle prolonge effectivement celle de l'extension uniaxiale pour les valeurs de  $\lambda$  inférieures à 1.

### *Le glissement pur*

L'expérience de Treloar est celle décrite par la figure A.4. Il utilise une éprouvette de 75 mm de large pour 5 mm de haut. Le rétrécissement de la largeur est de 12% pour une extension de 5,2. Treloar applique donc l'hypothèse d'état de cisaillement pur pour comparer ces résultats au modèle Néo-Hookéen. Les résultats de cet essai sont donnés sur la figure A.10 :

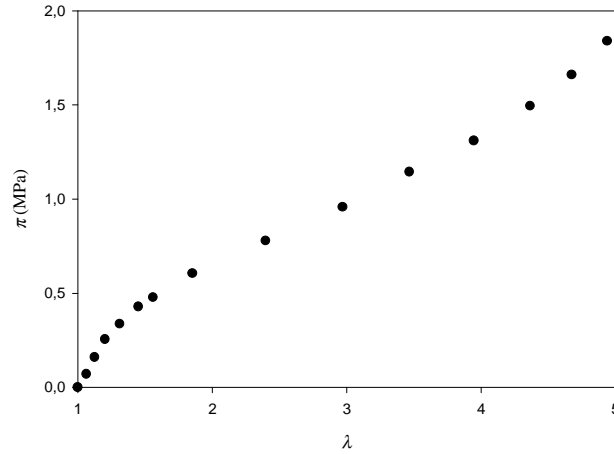


Figure A.10 : Courbe expérimentale de cisaillement pur [TRE 44]

### *La traction biaxiale*

Treloar complète sa série d'essais par un cas particulier de traction biaxiale (non équibiaxiale). L'éprouvette de cisaillement pur est d'abord étirée perpendiculairement à la direction de sollicitation d'un facteur 3 ( $\lambda_2 = 3$ ) puis pincée sur ses bords. Treloar effectue alors le test de cisaillement pur. Ce mode a été mis en œuvre sous la dénomination de « combined elongation and shear ». L'état de déformation est le suivant :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{3\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

L'état de pré-déformation avant l'essai proprement dit est alors :

$$[F_{\text{pré}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.80})$$

Treloar considère l'état pré-étiré ( $\lambda_2 = 3$  et  $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ) comme état de référence et mesure l'extension relative  $\lambda$  dans la direction de l'effort. Pour obtenir l'extension réelle  $\lambda_1$ , il convient de diviser par l'extension initiale de pré-tension  $\lambda_1 = \lambda/\sqrt{3}$ . La figure A.11 représente la contrainte  $\pi$  (PK1) en fonction de l'extension relative  $\lambda$ .

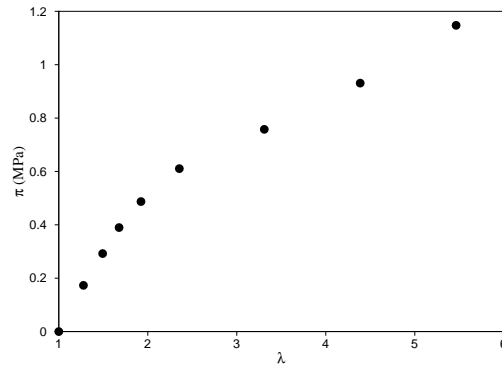


Figure A.11 : Expérience de traction biaxiale ( $\lambda_2 = 3$  et  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ ) [TRE 44]

### A. 3.2.2 Les essais de Kawabata *et al.* [KAW 81]

Ces essais concernent la traction biaxiale d'un échantillon de matériau isoprène de dimension 115 mm par 115 mm par l'intermédiaire d'un montage dont le principe est illustré par la figure A.6. Les extensions sont mesurées par l'intermédiaire de potentiomètres qui détectent le déplacement des rails.

Les résultats des mesures sont présentés sur les figures A.12 et A.13, présentant les contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Ces essais sont limités

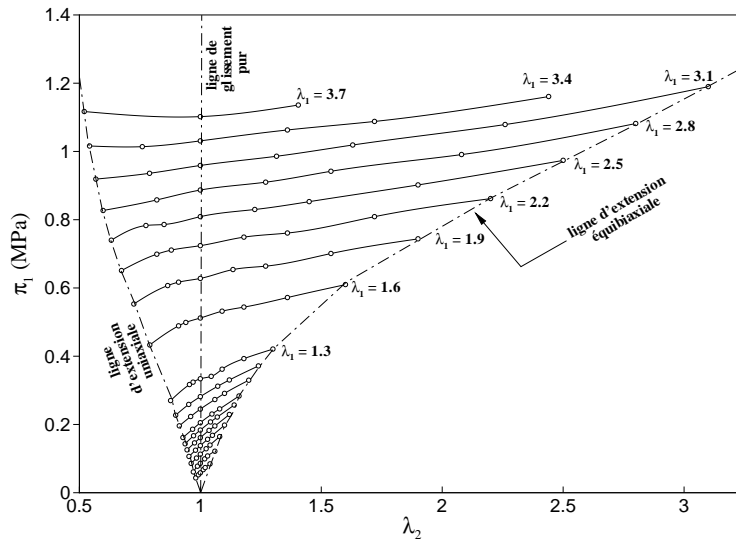


Figure A.12 : Expérience de traction biaxiale de Kawabata [KAW 81]

à des extensions de l'ordre de 350% en  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Elles permettront alors de valider ou non les modèles dans le domaines des petites et moyennes déformations.

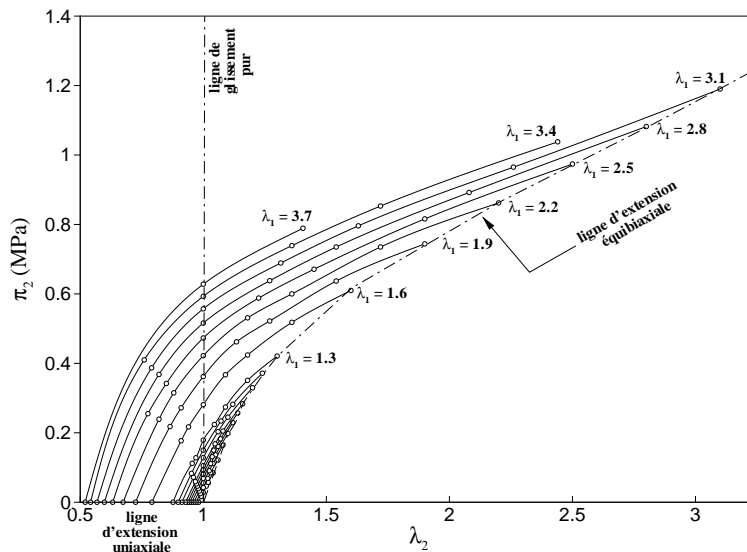


Figure A.13 : Expérience de traction biaxiale de Kawabata [KAW 81]

### A. 3.2.3 Commentaires sur ces essais

Nous avons mis en évidence, ci-dessus, que certains modes de déformations sont équivalents. Ainsi, si un modèle permet de reproduire le cisaillement pur, il reproduira avec une erreur du même ordre de grandeur le cisaillement simple, de même entre la traction équibiaxiale et la compression uniaxiale. Il n'est donc pas nécessaire, pour visualiser la justesse d'un modèle, de représenter tous les modes simples. Notons que la variété des essais de Treloar et de Kawabata est suffisante (traction uniaxiale, cisaillement pur, extension équibiaxiale et traction biaxiale).

## A. 4 Comparaison des modèles hyperélastiques

La mise en équations des relations contraintes-déformations pour différents modes de déformation rencontrés expérimentalement est relativement simple. La difficulté réside désormais dans la détermination de la forme de la fonction densité d'énergie de déformation  $W$  permettant d'évaluer au mieux les contraintes pour chaque mode rencontré. Des formes très variées de la fonction  $W$  sont rencontrées dans la littérature. Certaines ont été élaborées à partir de considérations phénoménologiques, cherchant à reproduire d'un point de vue purement mathématique les données expérimentales sans chercher à donner un sens physique aux constantes matérielles. Cette approche revient à considérer le matériau comme une boîte noire et à rechercher la fonction  $W$  reproduisant son comportement macroscopique. Ce type d'approche peut être décomposé en deux sous-types. Le premier consiste à trouver une forme mathématique générale (décomposition en séries mathématiques en  $I_1$  et  $I_2$  ou en  $\lambda_i$ ) reproduisant au mieux les expériences. Le deuxième consiste à rechercher directement les formes mathématiques des fonctions  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  à partir

d'expériences contrôlant plus ou moins indépendamment les paramètres  $I_1$  et  $I_2$ .

Une autre approche abordée parallèlement dans la littérature consiste à établir un modèle microscopique du réseau de chaînes polymériques et de construire le modèle macroscopique en intégrant des considérations physiques traitées de manière statistique. L'avantage de cette approche est de fournir des modèles dont les constantes matérielles ont un sens physique. Cependant, de par les difficultés théoriques de cette méthode, les modèles physiques ont été laissés de côté pendant une longue période (entre 1953 et 1975).

Les modèles les plus représentatifs, regroupés selon ces deux approches, sont présentés dans les sections suivantes et comparés selon leur aptitude à reproduire les essais de Treloar [TRE 44] et de Kawabata *et al.* [KAW 81]. L'isoprène (polyisoprène) utilisé par Kawabata *et al.* est un caoutchouc naturel. Ce matériau présente l'avantage d'être suffisamment proche du matériau utilisé par Treloar [TRE 44] pour pouvoir être modélisé avec les mêmes constantes matérielles. Cependant, nous identifierons les constantes des deux matériaux de manière indépendante afin de reproduire au mieux les différents essais. L'identification des constantes matérielles pour ces deux banques de données se fait par l'intermédiaire du logiciel d'identification présenté dans le chapitre II de ce mémoire.

## A. 4.1 Les modèles phénoménologiques et empiriques

### A. 4.1.1 Le modèle de Mooney (1940)

Ce modèle, établi par Mooney [MOO 40], part du constat que le comportement du caoutchouc est linéaire en cisaillement simple (voir partie A. 3.1.5). Mooney écrit alors  $W$  sous la forme :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{A.81})$$

Ce modèle est bien adapté pour représenter les essais de Treloar sur le caoutchouc naturel pour des déformations modérées (inférieures à 300%) avec des constantes matérielles  $C_1 = 0,162$  MPa et  $C_2 = 5,90 \cdot 10^{-3}$  MPa (cf: figure A.14). Il est également adapté pour reproduire les essais des Kawabata *et al.* sur l'isoprène pour des déformations inférieures à 100%, avec des valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  du même ordre de grandeur que celles relatives au caoutchouc naturel (cf: figure A.15).

### A. 4.1.2 Le modèle de Mooney-Rivlin (1948)

Rivlin [RIV 48b, RIV 48a] propose une extension du modèle de Mooney en décrivant  $W$  comme une série polynômiale en  $(I_1 - 3)$  et  $(I_2 - 3)$ .

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{avec} \quad C_{00} = 0 \quad (\text{A.82})$$

En pratique, cette série est tronquée à l'ordre 2 ou 3 [TSC 71, JAM 75, DAV 85, YEO 90]. Mais la troncature à l'ordre 3 nécessite l'identification de neuf constantes.



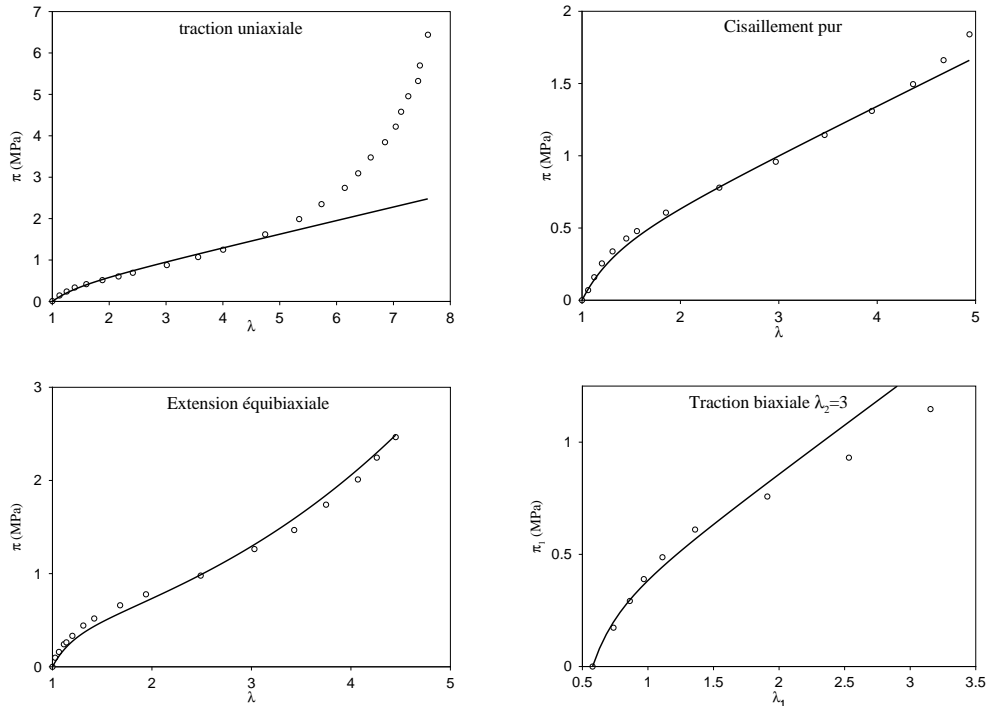


Figure A.14 : Modèle de Mooney, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Mooney  $C_1 = 0,162 MPa$ ,  $C_2 = 5,90 \cdot 10^{-3} MPa$

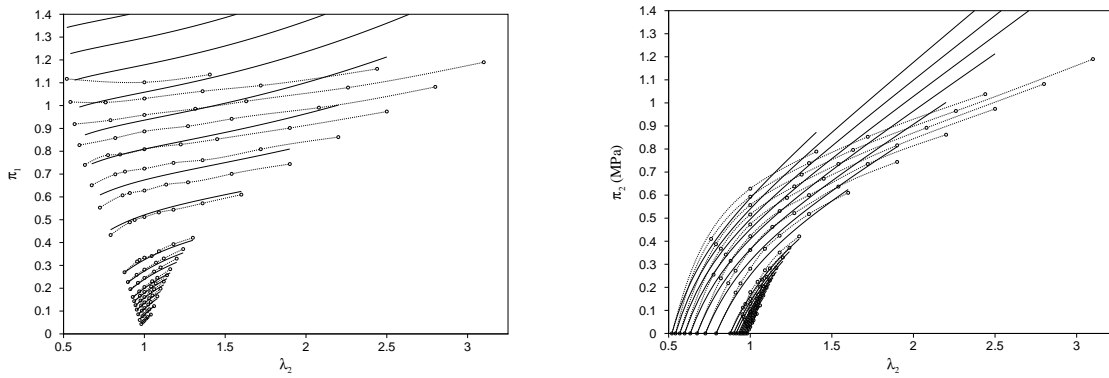


Figure A.15 : Modèle de Mooney, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Mooney  $C_1 = 0,182 MPa$ ;  $C_2 = 9,79 \cdot 10^{-3} MPa$

### Le modèle de Biderman (1958)

Biderman [BID 58] néglige les termes croisés du modèle précédent et prend une forme tronquée du modèle de Mooney-Rivlin à l'ordre 3 en  $I_1$  et à l'ordre 1 en  $I_2$  (modèle présenté en anglais par Alexander [ALE 68]).

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{A.83})$$

Ce modèle à quatre coefficients approche bien mieux les essais de Treloar que le modèle de Mooney, et améliore légèrement les résultats pour les données de Kawabata *et al.* en traction biaxiale (figures A.16 et A.17).

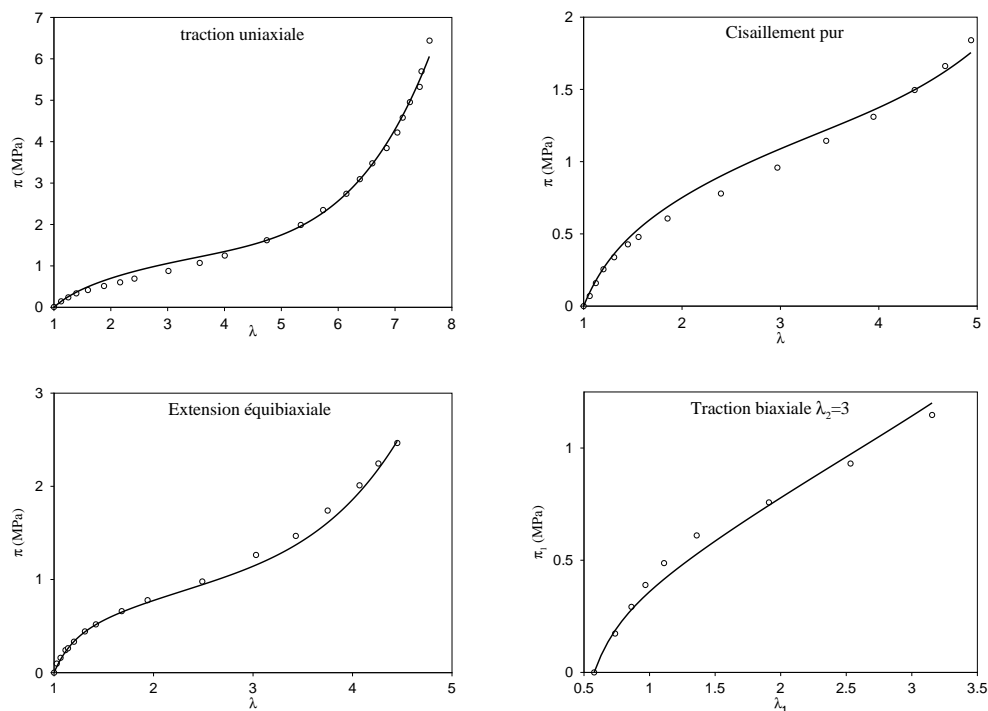


Figure A.16 : Modèle de Biderman, (○) essais de Treloar, (—) modèle de Biderman  $C_{10} = 0,208 \text{ MPa}$ ;  $C_{01} = 2,33 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$ ;  $C_{20} = -2,40 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ ;  $C_{30} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}$

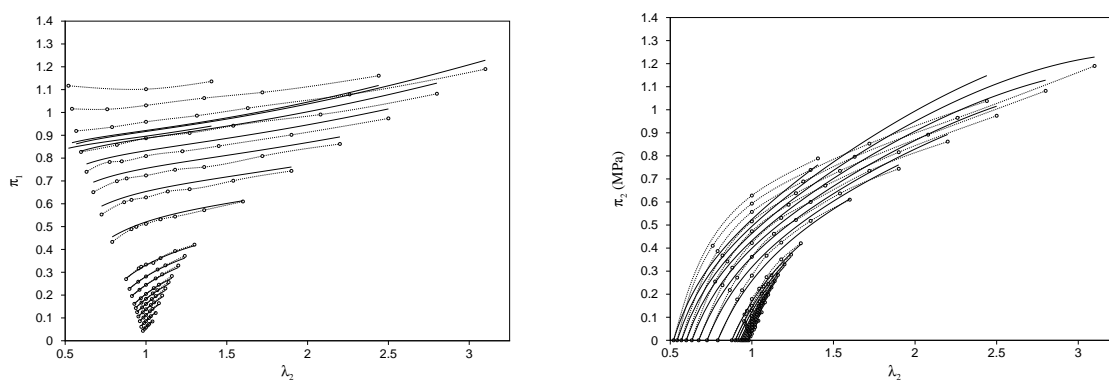


Figure A.17 : Modèle de Biderman, (○) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Biderman  $C_{10} = 0,185 \text{ MPa}$ ;  $C_{01} = 1,27 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$ ;  $C_{20} = -2,90 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ ;  $C_{30} = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}$

### A. 4.1.3 Le modèle de Haines-Wilson

James *et al.* [JAM 75] remarquent que l'ordre des exposants des termes en  $I_1$  et  $I_2$  du modèle de Mooney-Rivlin n'est pas similaire à l'ordre des exposants lorsque la série mathématique est écrite en terme de  $\lambda_i$ . Ceci leur permet de conclure que, physiquement, la troncature à l'ordre 2 s'écrit plutôt :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{10}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{A.84})$$

Davet [DAV 85] justifiera cette forme en partant de considérations expérimentales. Elle permet de reproduire avec une bonne précision les différentes expériences de Treloar (voir figure A.18). Il est également meilleur que le modèle de Mooney pour reproduire les essais de Kawabata *et al.* dans le domaine des déformations modérées ( *cf.* figure A.19).

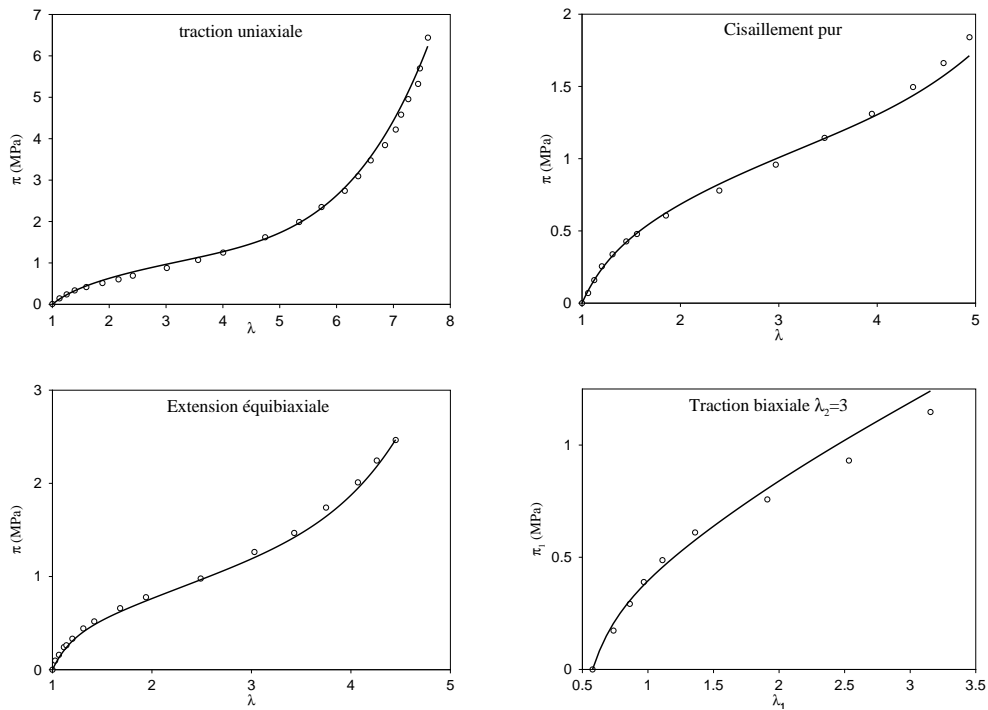


Figure A.18 : Modèle de Haines-Wilson, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Haines-Wilson (MPa)  $C_{10} = 0,173 \text{ MPa}$ ;  $C_{01} = 6,68 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_{11} = -1,18 \cdot 10^{-4}$ ;  $C_{20} = -1,19 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_{02} = 2,3 \cdot 10^{-6}$ ;  $C_{30} = 3,85 \cdot 10^{-5}$

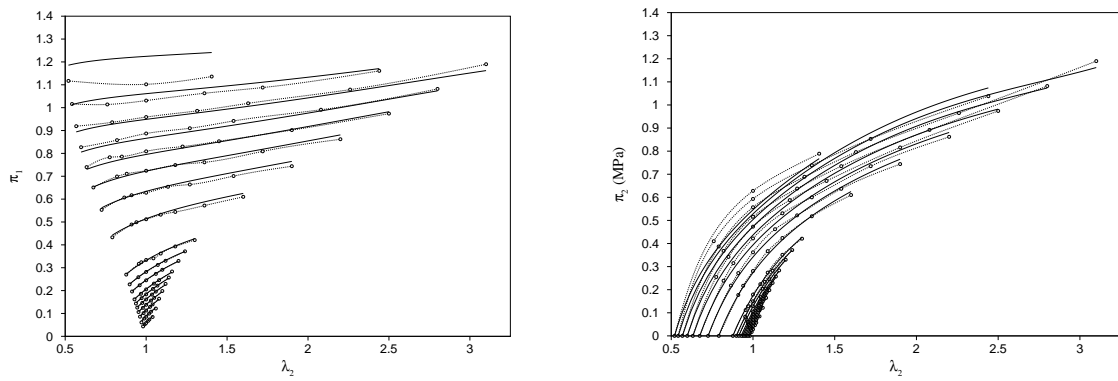


Figure A.19 : Modèle de Haines-Wilson, (○) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Haines-Wilson  $C_{10} = 0,176 \text{ MPa}$ ;  $C_{01} = 2,34 \cdot 10^{-2}$ ;  $C_{11} = -1,17 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_{20} = -4,64 \cdot 10^{-3}$ ;  $C_{02} = 1,59 \cdot 10^{-5}$ ;  $C_{30} = 2,47 \cdot 10^{-4}$

### A. 4.2 Approche en dérivées $\partial W/\partial I_1$ et $\partial W/\partial I_2$

La forme générale de Mooney-Rivlin (A.82) en série polynomiale en  $(I_i - 3)$  est difficile à identifier. De plus, cette forme mathématique générale peut conduire à des aberrations lorsque l'on sort, même légèrement, du domaine dans lequel elle a été identifiée. Certains auteurs préfèrent partir des courbes expérimentales pour en extraire directement l'allure des fonctions  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ . C'est le cas de Rivlin et Saunders [RIV 51], Hart-Smith [HS 66], Valanis et Landel [VAL 67], Kawabata *et al.* [KAW 81], Yeoh [YEO 90, YEO 97] et Diani [DIA 99].

Notons, en effet, que les deux fonctions peuvent se déduire de données expérimentales en traction biaxiale par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial I_1} &= \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{\lambda_1^3 \pi_1}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2^3 \pi_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} \right] \\ \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[ \frac{\lambda_1 \pi_1}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2 \pi_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.85})$$

#### A. 4.2.1 Le modèle de Rivlin et Saunders (1951)

Rivlin et Saunders [RIV 51] effectuent des essais de traction biaxiale en imposant des modes de déformation dans lesquels  $I_1$  ou  $I_2$  est fixé. Après avoir exploité ces essais, ils arrivent à la conclusion que  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  est indépendant de  $I_1$  et  $I_2$  et que  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  ne dépend pas de  $I_1$ . De plus, le rapport  $\frac{\partial W}{\partial I_2} / \frac{\partial W}{\partial I_1}$  décroît lorsque  $I_2$  augmente. Il propose alors pour  $W$  la forme générale suivante :

$$W = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (\text{A.86})$$

#### A. 4.2.2 Le modèle de Gent et Thomas(1958)

Gent et Thomas [GEN 58] proposent la forme empirique (A.87) présentant l'avantage de ne contenir que deux constantes matérielles et vérifiant la forme générale de Rivlin et Saunders (A.86) :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln \left( \frac{I_2}{3} \right) \quad (\text{A.87})$$

Ce modèle ne s'avère cependant pas plus performant que le modèle de Mooney pour reproduire les essais de Treloar ou de Kawabata *et al.* (voir figures A.20 et A.21).

#### A. 4.2.3 Le modèle de Hart-Smith (1966)

Hart-Smith [HS 66] constate, comme Rivlin et Saunders que  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  est constant pour des valeurs de  $I_1$  inférieures à 12, mais que ce terme augmente ensuite de manière significative pour des valeurs de  $I_1$  supérieures à 12. Hart-Smith explique ce phénomène par le fait que les chaînes de molécules polymériques ont une limite d'extensibilité, ce qui entraîne un raidissement important du matériau lorsque la longueur des chaînes approche cette limite. Il propose alors le modèle

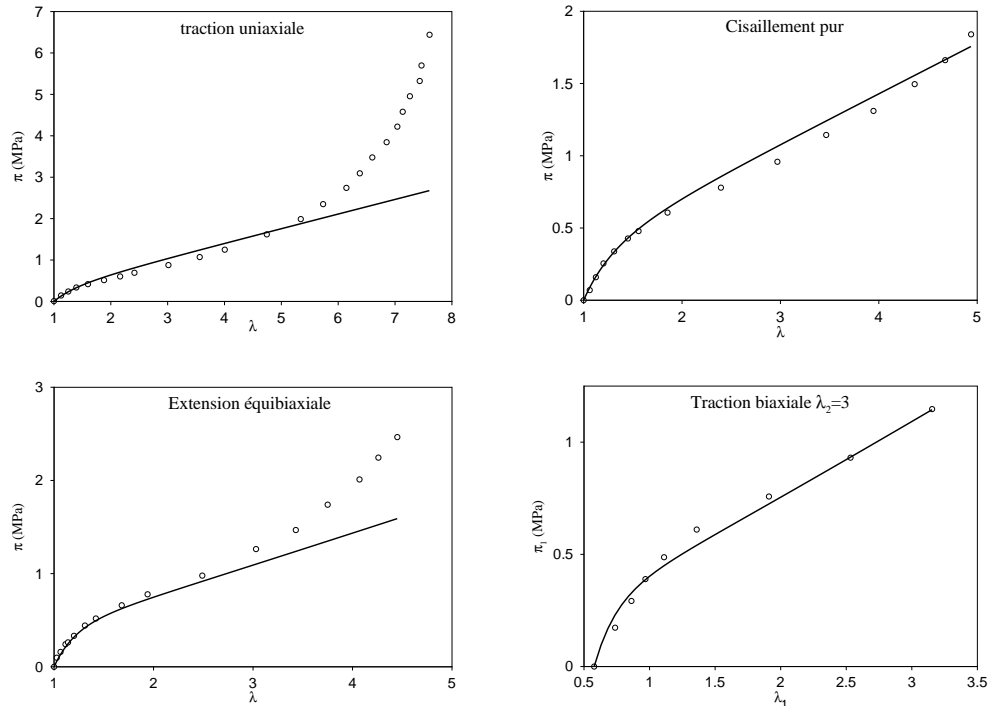


Figure A.20 : Modèle de Gent et Thomas, (○) essais de Treloar, (—) modèle de Gent et Thomas  
 $C_1 = 0,176 \text{ MPa}$ ;  $C_2 = 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$

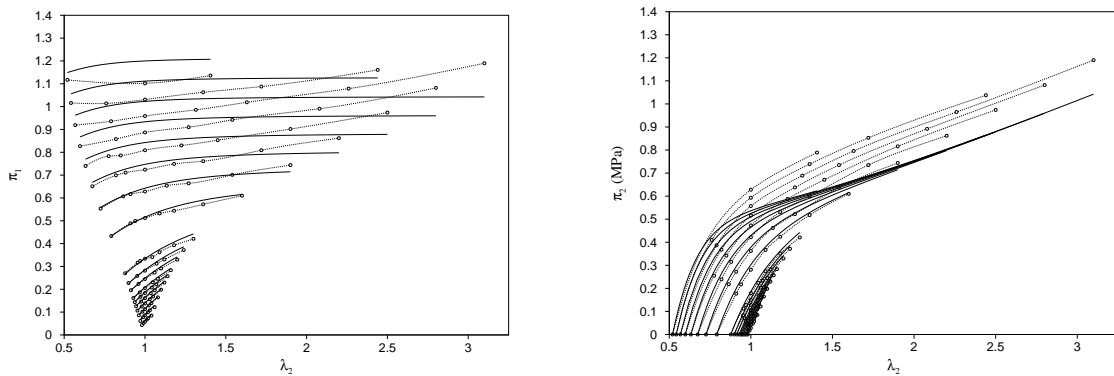


Figure A.21 : Modèle de Gent et Thomas, (○) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Gent et Thomas  
 $C_1 = 0,153 \text{ MPa}$ ;  $C_2 = 0,147 \text{ MPa}$

empirique où la fonction exponentielle modélise le raidissement du matériau :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = G \exp k_1(I_1 - 3)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = Gk_2/I_2 \quad (\text{A.88})$$

Cette forme s'avère bien adaptée pour reproduire les expériences de Treloar (voir figure A.22). Il reproduit cependant les données expérimentales de Kawabata *et al.* avec une moins bonne précision que le modèle de Davet (A.84) comme l'illustre la figure A.23.

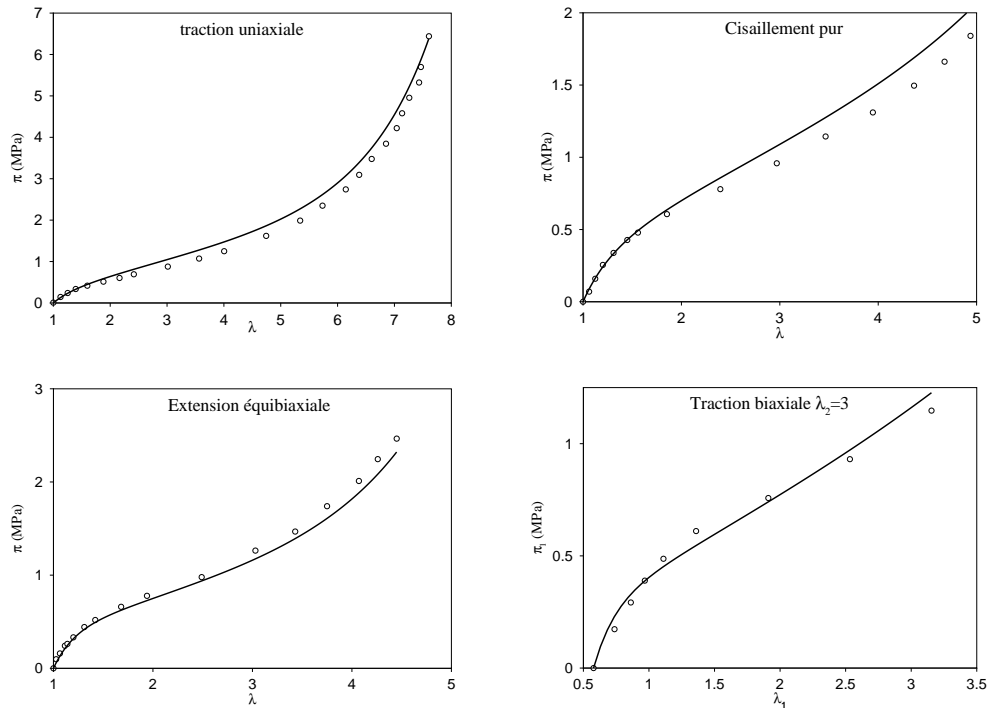


Figure A.22 : Modèle de Hart-Smith, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Hart-Smith  $G = 0,175 \text{ MPa}$ ;  $k_1 = 2,86 \cdot 10^{-4}$ ;  $k_2 = 0,311$

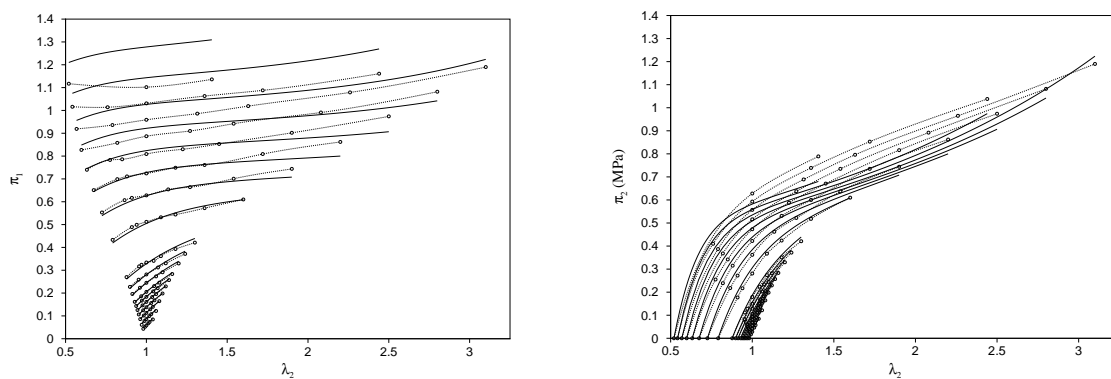


Figure A.23 : Modèle de Hart-Smith, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Hart-Smith  $G = 0,145 \text{ MPa}$ ;  $k_1 = 8,42 \cdot 10^{-4}$ ;  $k_2 = 1,13 \cdot 10^{-4}$

#### A. 4.2.4 Le modèle de Valanis et Landel (1967)

Valanis et Landel [VAL 67] suggèrent que si une forme analytique de  $W$  n'a pas encore été trouvée en terme d'invariants, c'est peut-être que son expression est trop complexe et qu'il est difficile de faire varier indépendamment  $I_1$  et  $I_2$  expérimentalement. Ils proposent alors de chercher une forme en termes d'extensions principales  $\lambda_i$ . Ils font également l'hypothèse (qui portera leurs noms) de séparabilité en  $\lambda_i$  et que  $W$  peut s'écrire à l'aide d'une seule fonction  $w$  qui ne dépend que d'une variable :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (\text{A.89})$$

Il propose aussi la forme de  $w$  suivante :

$$\frac{dw}{d\lambda} = 2\mu \ln(\lambda) \quad (\text{A.90})$$

Ce modèle simple à un seul coefficient ne permet cependant pas de reproduire tous les modes de déformation (voir figures A.24 et A.25). De plus, il est limité, comme on pouvait s'y attendre de part sa simplicité, aux petites déformations.

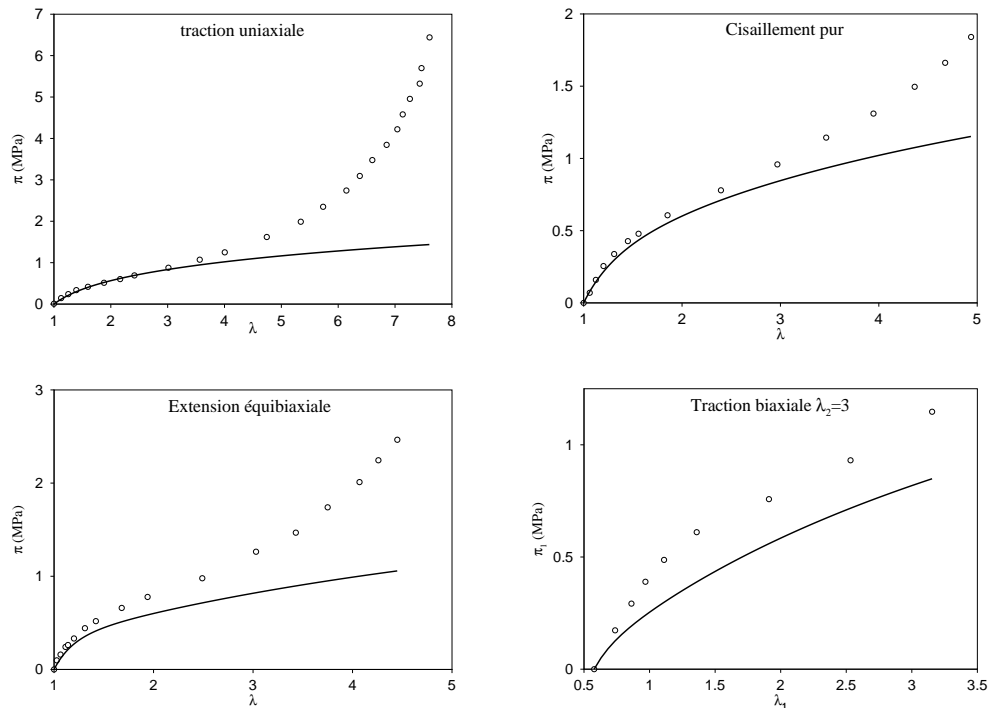


Figure A.24 : Modèle de Valanis et Landel, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Valanis et Landel  $\mu = 0,449 \text{ MPa}$



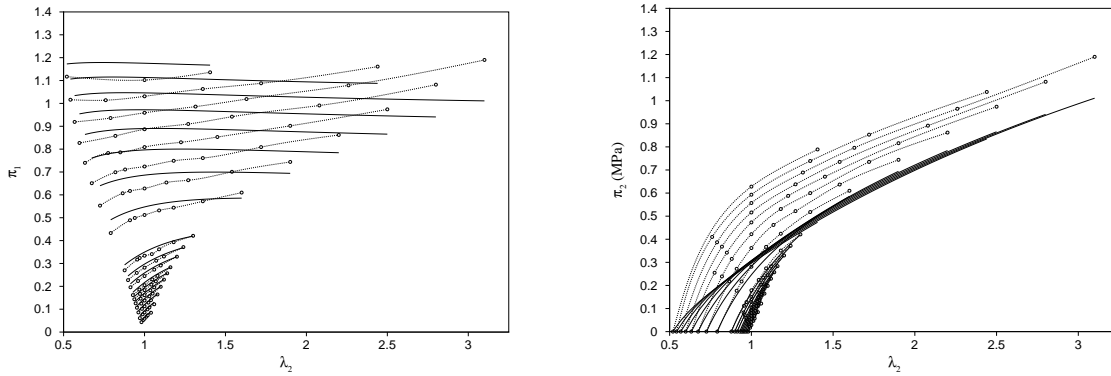


Figure A.25 : Modèle de Valanis et Landel, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Valanis et Landel  $\mu = 0,418 \text{ MPa}$

#### A. 4.2.5 Le modèle d'Ogden (1972)

En 1972, Ogden [OGD 72] introduit l'idée que  $W$  peut s'exprimer en termes de déformations généralisées [HIL 78] et introduit une forme mathématique en série de puissances réelles :

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{A.91})$$

Il propose alors un modèle à 6 constantes pour reproduire les essais de Treloar (voir figure A.26) avec une très bonne précision en traction uniaxiale, en cisaillement pur et en extension équibiaxiale. Seule la courbe de traction biaxiale de Treloar présente une petite déviation pour le jeu de paramètres fourni. Il est également très bien adapté pour reproduire les données de Kawabata *et al.* avec une précision inférieure à 0,05 MPa sur l'ensemble des courbes (voir figure A.27). Il est à noter que cette forme mathématique est suffisamment riche pour permettre d'approcher n'importe quelle fonction  $W$  avec peu de termes.

Cependant, toutes les valeurs possibles de  $\mu_n$  et  $\alpha_n$  ne sont pas possibles. Ainsi, pour que  $W$  puisse assurer une réponse physique raisonnable, il convient de vérifier qu'elle est définie positive pour toutes déformations non nulles. Ogden montre qu'il est suffisant de considérer :

$$\mu_i \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, n \quad (\text{A.92})$$

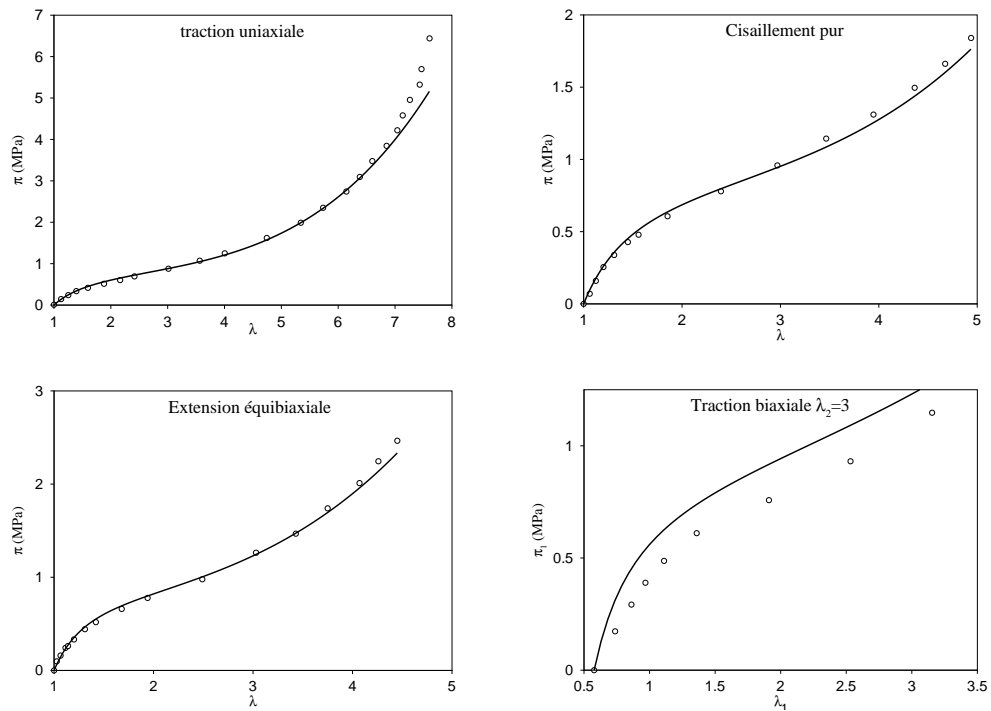


Figure A.26 : Modèle de Ogden (coefficients proposés par Ogden [OGD 72]), (o) essais de Treloar, (—) modèle de Ogden  $\alpha_1 = 1,3$ ;  $\mu_1 = 0,63 \text{ MPa}$ ;  $\alpha_2 = 5$ ;  $\mu_2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ ;  $\alpha_3 = -2$ ;  $\mu_3 = -1 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$

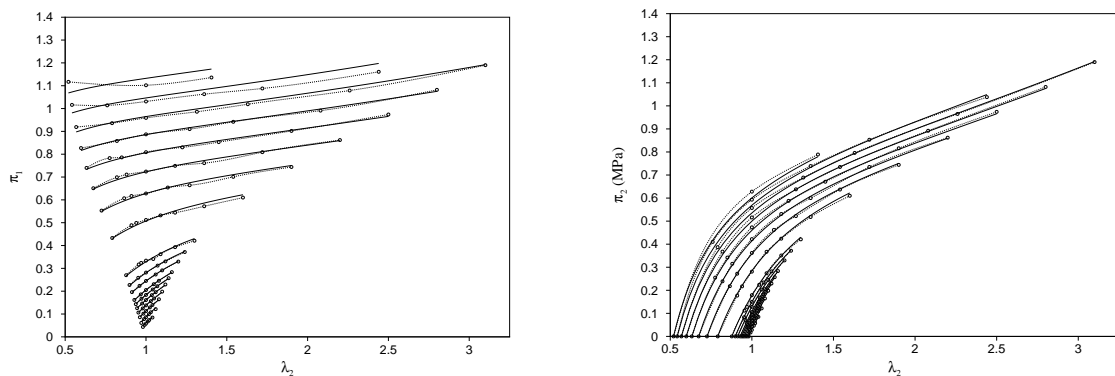


Figure A.27 : Modèle de Ogden, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Ogden  $\alpha_1 = 1,37$ ;  $\mu_1 = 0,54 \text{ MPa}$ ;  $\alpha_2 = 3,91$ ;  $\mu_2 = 5,19 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ ;  $\alpha_3 = -1,56$ ;  $\mu_3 = -2,15 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$

### A. 4.2.6 Le modèle de Gent (1996)

Gent reprend l'idée que l'élongation des chaînes de molécules n'est pas infinie et fait l'hypothèse que  $I_1$  admet une valeur maximale  $I_m$ . Il propose alors un modèle empirique à deux constantes ayant un sens physique. Il compare ainsi son modèle au modèle physique d'Arruda et Boyce [ARR 93] en justifiant son approche par le fait que le réseau de chaînes réel ne suit pas exactement la forme obtenue statistiquement et que son modèle en est une approximation possible :

$$W = -\frac{E}{6}(I_m - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad (\text{A.93})$$

Ce modèle s'avère acceptable pour modéliser les essais de Treloar avec des valeurs de coefficients ayant un sens physique macroscopique (voir figure A.28). Il ne permet cependant pas de reproduire la traction biaxiale en dehors des déformations modérées (voir figure A.29).

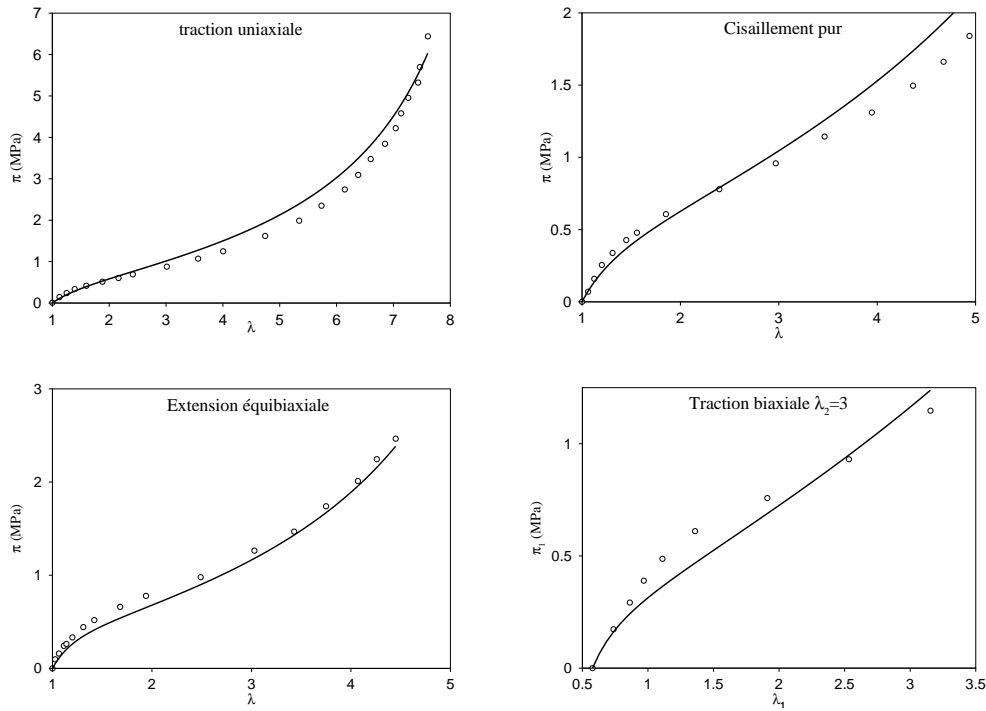


Figure A.28 : Modèle de Gent, (○) essais de Treloar, (—) modèle de Gent  $E = 0,978 \text{ MPa}$ ;  $I_m = 96,4$

### A. 4.2.7 Le modèle de Yeoh et Fleming (1997)

Yeoh [YEO 90] effectue des essais de traction, de cisaillement simple, de compression et d'extension équi-biaxiale et en déduit, comme ses prédécesseurs, que le terme  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  est grand devant  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  et que  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  est indépendant de  $I_2$ . Il considère  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  négligeable, et propose alors une

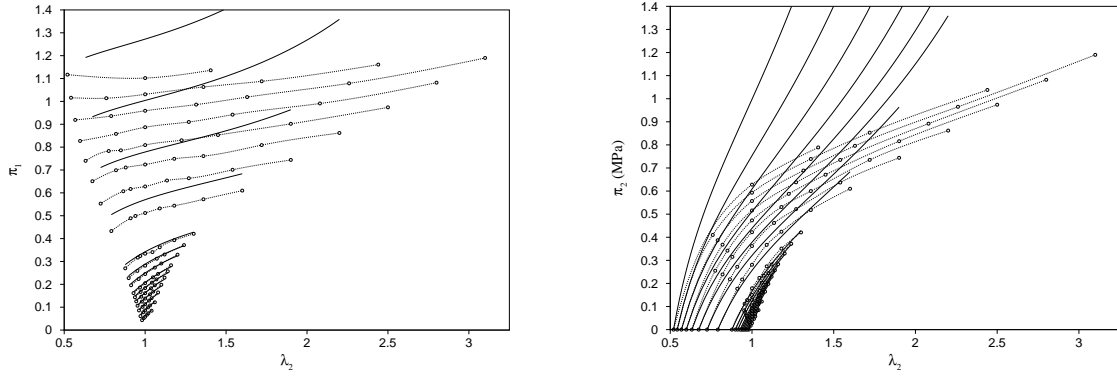


Figure A.29 : Modèle de Gent, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Gent  $E = 1,19 \text{ MPa}$ ;  $I_m = 22,7$

forme de Mooney-Rivlin uniquement fonction de  $I_1$  :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{A.94})$$

En 1997, Yeoh et Fleming [YEO 97] constatent qu'en traction la contrainte réduite  $\phi$  donnée par l'équation (A.95) s'approche d'une valeur constante indépendante de  $(I_1 - 3)$  pour des valeurs de  $(I_1 - 3)$  supérieure à 5 et, ceci, pour quatre matériaux différents. Il propose alors de corriger le modèle de Gent en évaluant la déviation par rapport à cette constante.

$$\phi = \left[ \frac{\sigma}{\lambda - \lambda^{-2}} \right] \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad (\text{A.95})$$

Il construit ainsi un modèle à trois constantes indépendantes :

$$W = \frac{A}{B}(I_m - 3)(1 - \exp(-BR)) - C_{10}(I_m - 3)\ln(1 - R) \quad (\text{A.96})$$

avec  $R = \frac{(I_1 - 3)}{(I_m - 3)}$

Il identifie ensuite ces paramètres sur des essais de traction et vérifie, avec une bonne corrélation, qu'il prédit correctement des essais de cisaillement simple.

Notons que ce modèle identifié sur les essais de Treloar donne des résultats intéressants (figure A.30) mais ne se montre pas meilleur que le modèle de Hart-smith pour représenter les essais de traction biaxiale alors qu'il contient un paramètre de plus (figure A.31).

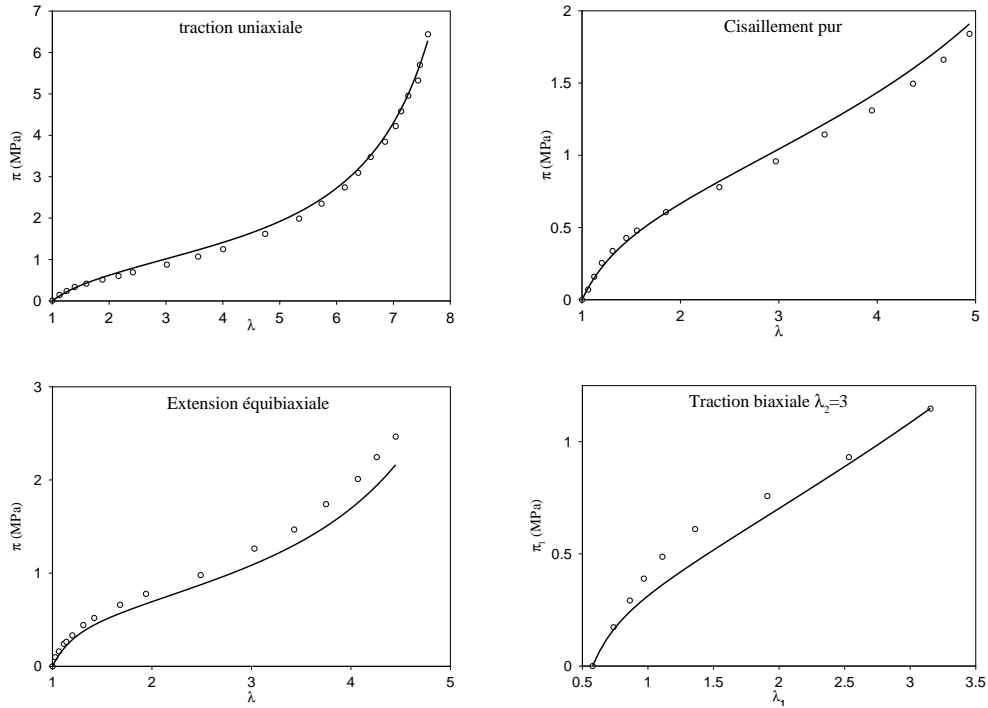


Figure A.30 : Modèle de Yeoh et Fleming, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Yeoh et Fleming  
 $A = 0,0519 \text{ MPa}$ ;  $B = 4,03$ ;  $C_{10} = 1,127 \text{ MPa}$ ;  $I_m = 82.8$

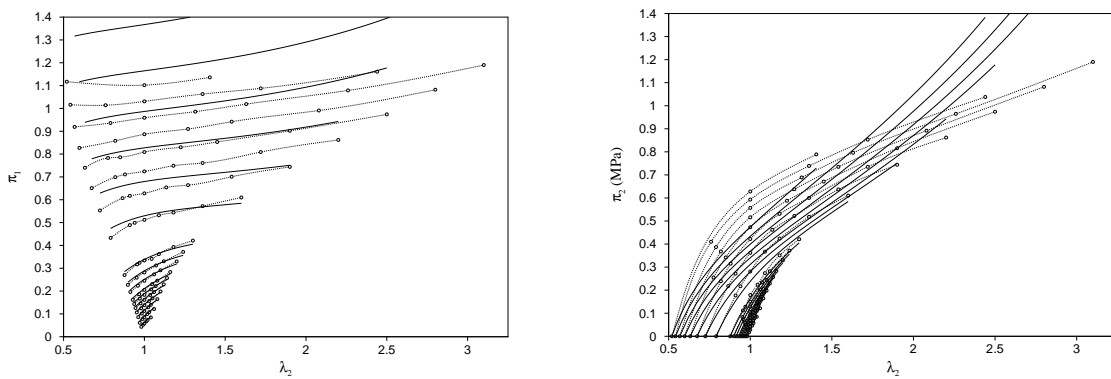


Figure A.31 : Modèle de Yeoh et Fleming, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Yeoh et Fleming  
 $A = 0,0251 \text{ MPa}$ ;  $B = 31,1$ ;  $C_{10} = 0,179 \text{ MPa}$ ;  $I_m = 42.3$

### A. 4.3 Les modèles physiques

Nous pouvons remarquer que depuis une quinzaine d'années le développement de nouveaux modèles phénoménologiques tend à introduire des considérations physiques sur les réseaux de chaînes [GEN 96, YEO 97] ou à comparer les performances des uns par rapport aux autres [BOY 96, SEI 00]. Sans chercher à confronter les deux approches, nous présentons dans cette section les différents travaux concernant la construction de modèles hyperélastiques fondés sur des considérations physiques. Ces travaux partent des propriétés physiques générales des polymères et utilisent les méthodes statistiques (I.3.3) afin de modéliser le comportement moyen macroscopique de ces matériaux. Ils aboutissent néanmoins à des modèles macroscopiques différents selon les phénomènes microscopiques considérés comme prédominants.

#### A. 4.3.1 Le modèle néo-hookéen (1943)

C'est le modèle hyperélastique le plus simple. Il correspond au modèle de Mooney-Rivlin à un seul terme, mais sa justification est plus moléculaire que phénoménologique. Le matériau est constitué d'un réseau de longues chaînes flexibles orientées aléatoirement et jointes chimiquement en certains points de jonction [TRE 75]. La mécanique statistique [MAY 40] évalue alors l'entropie d'une chaîne par la relation :

$$s = k \ln \Omega \quad (\text{A.97})$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $\Omega$  le nombre d'états quantiques de la chaîne, dépendant de sa conformation, c'est-à-dire la densité de probabilité pour que l'autre extrémité de la chaîne soit dans un voisinage  $dx dy dz$  de son origine. L'entropie devient alors :

$$s = k \ln [p(x, y, z) dx dy dz] \quad (\text{A.98})$$

En considérant que la loi de comportement dérive de la variation d'entropie entre l'état non-déformé et l'état déformé, Treloar [TRE 43] considère alors une répartition  $p$  Gaussienne (voir section I.3.3) qui conduit à la relation :

$$W = \frac{1}{2}nkT(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{A.99})$$

qui peut encore s'écrire :

$$W = \frac{1}{2}nkT(I_1 - 3) \quad (\text{A.100})$$

où  $n$  est le nombre de chaînes par unité de volume et  $T$  la température absolue.

Treloar [TRE 44] évalue alors la valeur du produit  $\frac{1}{2}nkT$  à 0,2 MPa. Ce modèle à une seule constante matérielle reproduit assez bien, étant donné sa simplicité, l'ensemble des essais de Treloar et de Kawabata *et al.*. Il n'est cependant utilisable que pour des déformations inférieures à 50%, comme l'illustrent les courbes A.32 et A.33. Il est, en particulier en traction, incapable de reproduire le raidissement final de la courbe de traction uniaxiale, tout comme le modèle de Mooney-Rivlin. Nous mettons, de plus, en évidence l'importance du terme  $C_2$  du modèle de Mooney-Rivlin dans la modélisation du matériau, particulièrement visible sur la traction biaxiale.

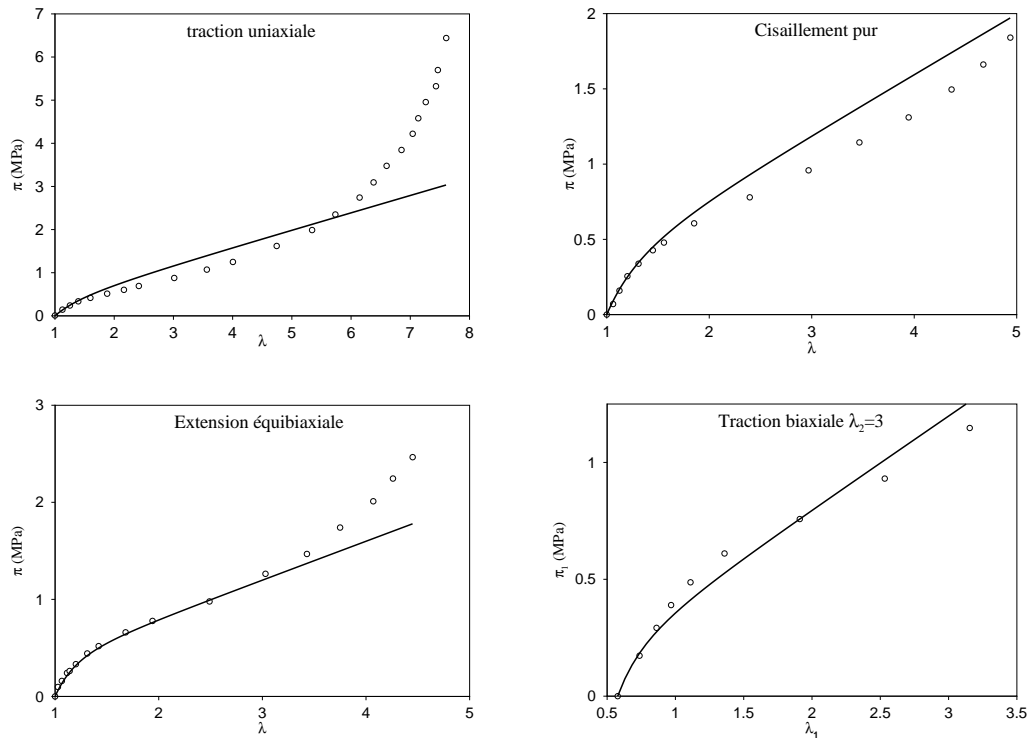


Figure A.32 : Modèle néo-hookéen de Treloar, (○) essais de Treloar, (—) modèle néo-hookéen  $\frac{1}{2}nkT = 0,2 \text{ MPa}$ ;

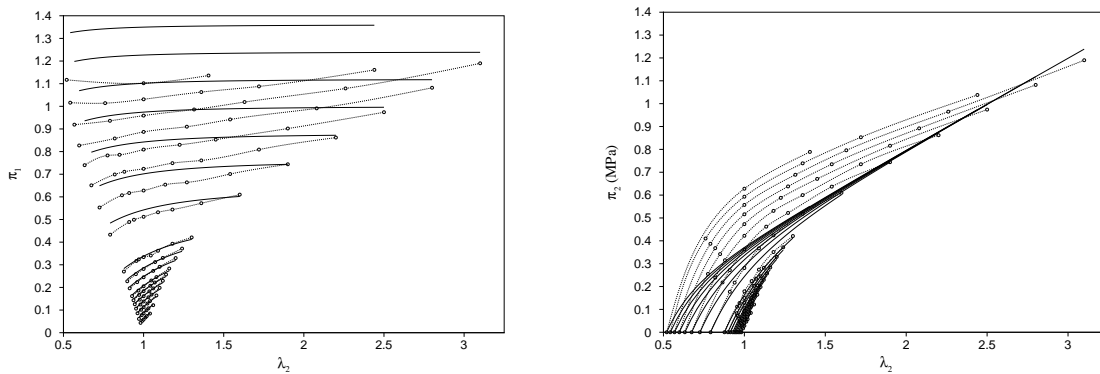


Figure A.33 : Modèle néo-hookéen de Treloar, (○) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle néo-hookéen  $\frac{1}{2}nkT = 0,2 \text{ MPa}$

#### A. 4.3.2 L'élasticité d'une chaîne (1942)

En 1942, Kuhn & Gr $\ddot{u}$ n [KUH 42] utilisent la th $\acute{e}$ orie statistique non-Gaussienne (voir section I.3.3) pour prendre en compte la limite d'extensibilit $\acute{e}$  des cha $\acute{i}$ nes susceptible d'expliquer l'accroissement de raideur finale des courbes exp $\acute{e}$ rim $\acute{e}$ ntales. La limite d'extension d'une cha $\acute{i}$ ne constitu $\acute{e}$ e de  $N$  segments est alors donn $\acute{e}$ e par  $\lambda_{max} = \sqrt{N}$ . Le r $\acute{e}$ sultat de leurs travaux est l'expression de l' $\acute{e}$ nergie de d $\acute{e}$ formation d'une cha $\acute{i}$ ne qui s' $\acute{e}$ crit :

$$w = nkT \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right] \quad (\text{A.101})$$

où  $\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right)$  et où  $\mathcal{L}^{-1}$  est l'inverse de la fonction de Langevin définie par  $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ . La relation force-extension d'une seule chaîne est alors obtenue par dérivation :

$$f = \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{kT\lambda}{\sqrt{N}} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{A.102})$$

#### A. 4.3.3 Le modèle 3-chaînes (1943)

James et Guth [JAM 43] s'appuient sur les travaux de Kuhn & Gr $\ddot{u}$ n [KUH 42] pour élaborer un modèle non-Gaussien. Ils supposent que les chaînes se déforment de manière affine avec le milieu et que le tenseur  $\overline{\overline{F}}$ , gradient de la transformation macroscopique, peut être utilisé pour définir la déformation des chaînes. Ils font l'hypothèse supplémentaire que la déformation du réseau de chaînes orientées aléatoirement peut se ramener à un réseau de chaînes réparties suivant les trois axes du repère de déformations principales. Si  $n$  est la densité de chaînes, chaque axe du repère se voit attribuer une densité  $n/3$  de chaînes. Le modèle construit ainsi est illustré par la figure A.34.

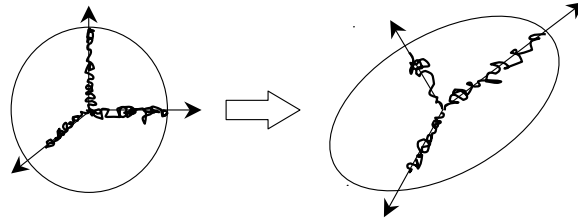


Figure A.34 : Modèle 3-chaînes

Les contraintes sont alors calculées par sommation des efforts des  $n/3$  chaînes de chaque direction selon l'équation :

$$\sigma_i = \frac{nkT\lambda}{3\sqrt{N}} \lambda_i \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_i}{\sqrt{N}} \right) - p \quad (\text{A.103})$$

Ce modèle permet de reproduire les essais de Treloar, en traction et en cisaillement, avec une bonne corrélation. Il permet, en particulier de reproduire la courbe de traction sur l'ensemble du domaine de déformation avec prise en compte du raidissement pour des extensions supérieures à 500%. Il sous-estime très légèrement les contraintes pour des valeurs de  $\lambda$  inférieures à 200% en présentant une courbure plus faible que celle des essais. On note également une sous-estimation beaucoup plus marquée (38%) sur les expériences de traction équi-biaxiale et biaxiale que l'on retrouve sur les essais de Kawabata *et al.*, particulièrement visible sur la figure A.36. Le modèle 3-chaînes n'est pas mieux adapté que le modèle néo-hookéen pour reproduire le comportement biaxial.



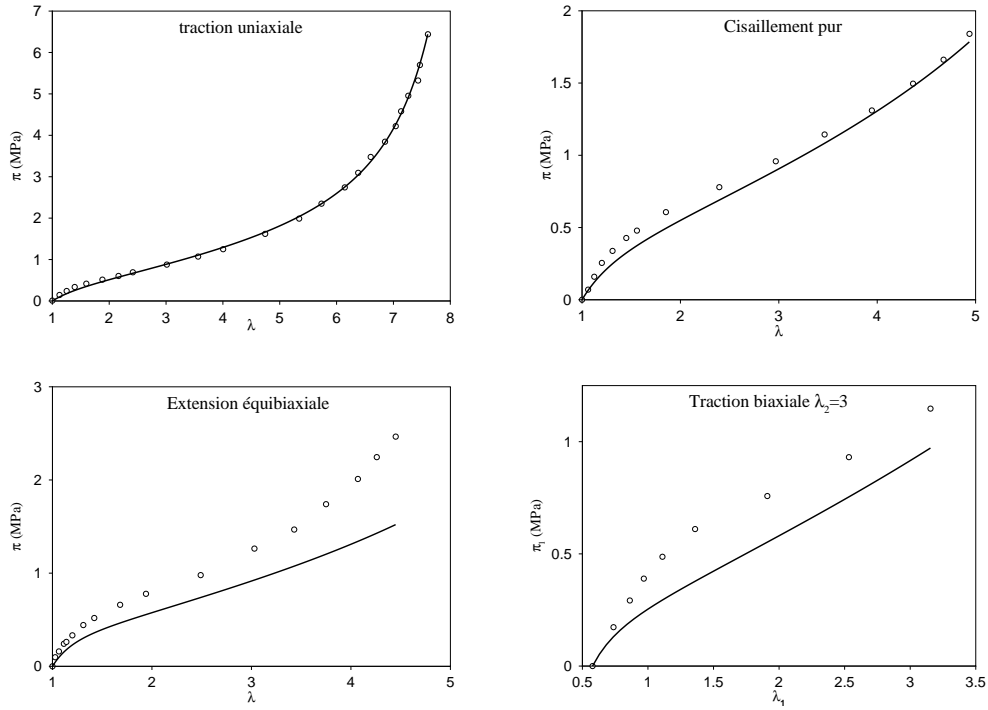


Figure A.35 : Modèle 3-chaînes, (o) essais de Treloar, (—) modèle 3-chaînes  $\frac{1}{2}nkT = 0,283 MPa$  ;  $N = 75.9$ ;

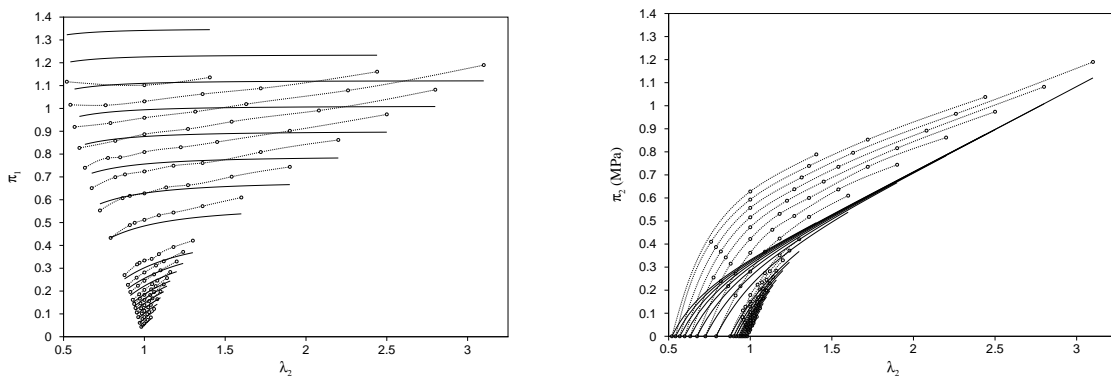


Figure A.36 : Modèle 3-chaînes, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle 3-chaînes  $\frac{1}{2}nkT = 0,356 MPa$  ;  $N = 365$ ;

#### A. 4.3.4 Le modèle 4-chaînes (1944)

Au moment où James et Guth élaborent le modèle 3-chaînes, Flory [FLO 44] et un peu plus tard Treloar [TRE 46] développent un modèle à 4-chaînes selon le schéma de la figure A.37. Les chaînes sont distribuées suivant les quatre directions liant le centre d'un tétraèdre régulier et ses quatre sommets. Ce tétraèdre régulier est inscrit dans la sphère unité qui se transforme en ellipsoïde contenant le tétraèdre déformé. Ce modèle a l'inconvénient de ne pas présenter de forme analytique puisque le centre du tétraèdre doit être évalué pour équilibrer le modèle. Pour cette raison, ce modèle est peu utilisé. Il présente cependant un comportement similaire au modèle 3-chaînes [ARR 93, WU 93]

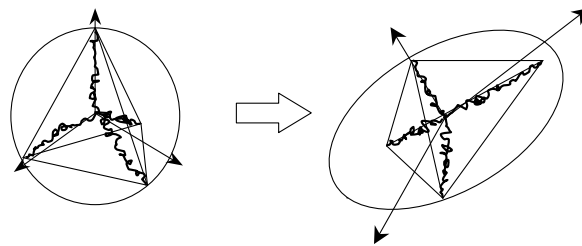


Figure A.37 : Modèle 4-chaînes

#### A. 4.3.5 Le modèle d'Ishihara (1951)

Ishihara [ISI 51] reprend la théorie de distribution non-Gaussienne des chaînes en linéarisant certaines équations. Il construit ainsi un modèle de forme similaire à la série de Rivlin où  $W$  s'écrit :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{A.104})$$

Son modèle est cependant développé en termes d'extensions principales et les paramètres  $C_{20}$  et  $C_{01}$  sont, en fait, liés entre eux. On notera la présence d'un terme fonction de  $I_2$  qui n'était pas présent dans les théories précédentes des modèles physiques. Ce modèle se rapproche des modèles phénoménologiques de Biderman et de Mooney-Rivlin. Il permet de mieux reproduire les comportements en extension biaxiale mais, contrairement au modèle 3-chaînes ou celui de Biderman, il ne permet pas de prendre en compte le raidissement final de la courbe de traction ce qui limite son utilisation aux extensions inférieures à 4.

#### A. 4.3.6 Le modèle de Wang et Guth (1952)

Wang et Guth [WAN 52] confirment cette approche en proposant une étude plus complète. Ils font l'hypothèse que les forces intra- et inter-moléculaires sont négligeables. Ils proposent alors de simplifier les équations de la théorie statistique non-Gaussienne par un développement en série. Ils aboutissent finalement à une représentation de la fonction  $W$  de type Money-Rivlin, où les deux coefficients ne sont pas indépendants. Leur dépendance ne permet cependant pas

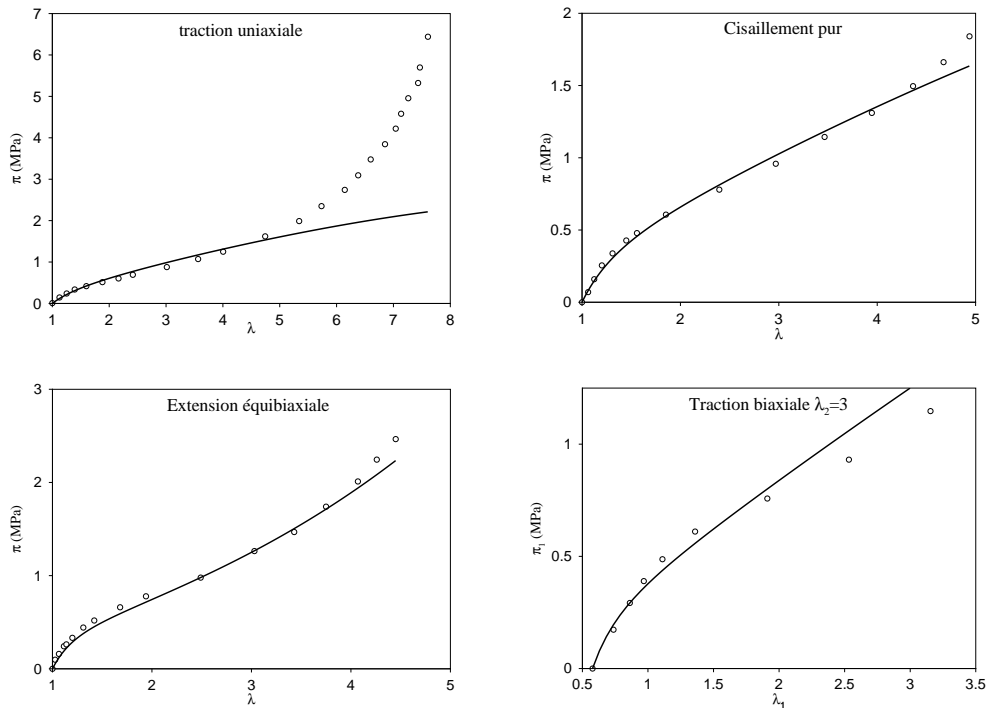


Figure A.38 : Modèle d'Isahara, (o) essais de Treloar, (—) modèle d'Isahara (MPa)  $C_{10} = 0,171$  ;  $C_{01} = 0,00489$ ;  $C_{20} = -0,00024$

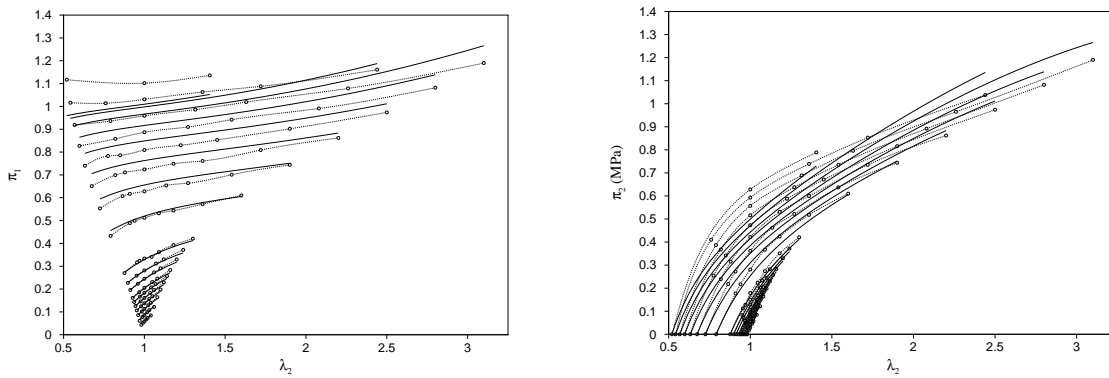


Figure A.39 : Modèle d'Isahara, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle d'Isahara (MPa)  $C_{10} = 0,186$  ;  $C_{01} = 0,0104$ ;  $C_{20} = -0,00252$

d'expliquer les données expérimentales. La déviation par rapport à l'expérience est imputée aux forces intra- et inter-moléculaires qui ont été négligées (hypothèse). Ils suggèrent alors de prendre en compte les forces de van der Waals.

#### A. 4.3.7 Le modèle full-chain (1975)

Treloar [TRE 79] reprend l'expression force-extension d'une chaîne (A.102) et considère une distribution uniforme de chaînes sur une sphère unité (figure A.40). Par référence aux modèles à 3 et 4 directions de chaînes, ce modèle est appelé « full chain ». Treloar obtient alors, par

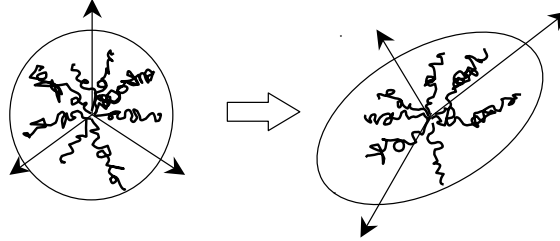


Figure A.40 : Modèle full-chain

intégration numérique, la réponse d'un réseau homogène sous sollicitations uniaxiales et biaxiales dont l'expression des contraintes en fonction des extensions macroscopiques  $\lambda_i$  du milieu s'écrit :

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi} C^R \sqrt{N} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \lambda^4 m_i^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi - p \quad (\text{A.105})$$

où  $m_1 = \sin \theta \cos \phi$ ,  $m_2 = \sin \theta \sin \phi$ ,  $m_3 = \cos \theta$  et  $\lambda^{-2} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{\lambda_i}$ .

Wu and Van der Giessen reprennent le développement du modèle [WU 93]. Il présente le même avantage que les autres modèles à  $n$  chaînes établis sur les mêmes bases, à savoir la dépendance à deux paramètres physiques  $C_R = nkT$  et  $N$ , et une relativement bonne corrélation avec l'expérience [WU 93][TRE 79]. Il souffre cependant de la nécessité d'une intégration numérique qui pénaliserait son implantation dans un code éléments finis. Pour cette raison, ce modèle est peu utilisé.

Plus tard, Perrin [PER 00] donne une forme analytique en appliquant l'approximation de Padé à l'inverse de la fonction de Langevin :

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \approx g(x) = \frac{x(3-x^2)}{1-x^2} \quad (\text{A.106})$$

Il donne cependant trois expressions différentes pour les valeurs de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  en précisant l'obligation d'ordonner les valeurs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Ces expressions, outre leur asymétrie, dépendent d'intégrales elliptiques, ce qui rend leur programmation difficile.

#### A. 4.3.8 Le réseau de chaînes réel

La déviation par rapport à l'expérience des modèles à  $n$  chaînes idéales, est communément imputée à l'hypothèse de réseau de chaînes idéalisé ne prenant pas en compte les enchevêtrements qui empêchent les chaînes de s'étirer librement et indépendamment. Ce réseau idéal est alors appelé réseau fantôme puisque les chaînes bougent comme si elles pouvaient se traverser mutuellement. Plusieurs auteurs comme Flory [FLO 44], Ermann [ERM 82], Mark [MAR 88] ou Edwards

[BAL 81] introduisent la notion de contraintes d'entrelacement ou de contraintes de conservation de la topologie et décrivent la forme générale de l'énergie libre sous la forme suivante :

$$W = W_{ph} + W_c \quad (\text{A.107})$$

où  $W_{ph}$  est la contribution du réseau fantôme (*phantom part* en anglais) et  $W_c$  (*cross-linking part* en anglais) est la contribution des contraintes de réseau (entrelacement, liaisons faibles,...)

#### A. 4.3.9 Le modèle slip-link (1981)

Ball *et al* [BAL 81] développent en particulier le modèle slip-link. Selon ce modèle, un lien relie deux chaînes suivant le schéma de la figure A.41. Les chaînes sont autorisées à glisser sur une certaine longueur  $a$  de part et d'autre de ce lien. La difficulté d'un tel modèle réside dans la complexité mathématique (statistique) permettant d'établir une énergie de déformation moyenne. Ball *et al* parviennent à une expression (A.108) valide et corrélée avec l'expérience en

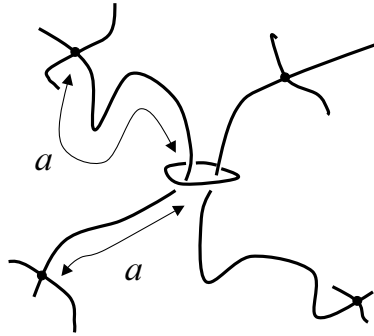


Figure A.41 : Modèle slip-link

petites déformations (figure A.42), permettant d'expliquer la chute du module initial (première courbure de la courbe de traction).

$$W = \frac{1}{2}kTN_c \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 + \frac{1}{2}kTN_s \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{(1+\eta)\lambda_i^2}{1+\eta\lambda_i^2} + \ln |1 + \eta\lambda_i^2| \right] \quad (\text{A.108})$$

On notera que le premier terme de l'équation A.108 correspond au modèle fantôme Gaussien (néo-hookéen) et que le deuxième terme est la déviation par rapport au modèle fantôme. Les courbes en pointillés de la figure A.42 permettent de visualiser la contribution de  $W_c$  sur le modèle complet. On notera que cette contribution est plus importante en traction biaxiale à  $\lambda_2$  imposé à 2. Ce phénomène se retrouve sur les essais de Kawabata *et al.* (voir figure A.43). Ce phénomène explique que le produit  $N_s kT$  identifié sur les essais de Kawabata soit inférieur à celui identifié sur la traction uniaxiale et équibiaxiale de Treloar. La réponse du modèle à la traction biaxiale de Kawabata *et al.* (figure A.43) est proche de celle du modèle de Gent et Thomas.

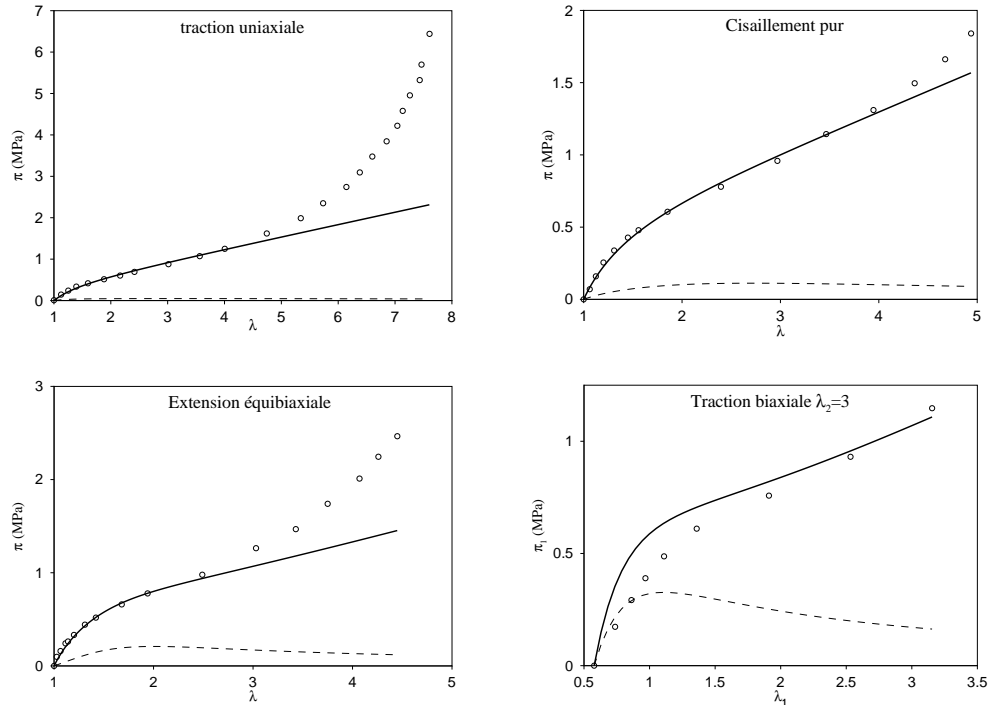


Figure A.42 : Modèle slip-link, (○) essais de Treloar, (—) modèle slip-link  $N_c kT = 0,3 \text{ MPa}$  ;  $N_s kT = 0,53 \text{ MPa}$ ;  $\eta = 1,9$ , (- -) contribution de  $W_c$

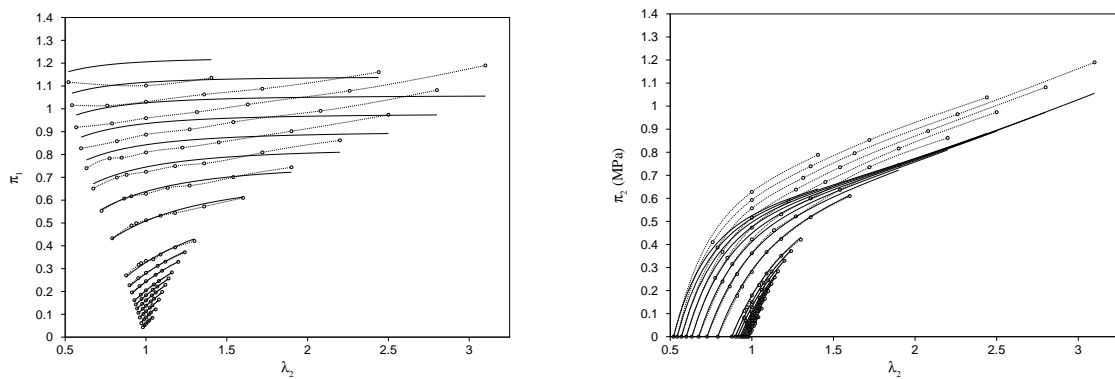


Figure A.43 : Modèle slip-link, (○) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle slip-link  $N_c kT = 0,31 \text{ MPa}$  ;  $N_s kT = 0,29 \text{ MPa}$ ;  $\eta = 0,84$ ,

### A. 4.3.10 Le modèle de Kilian ou modèle de van der Waals(1981)

Kilian *et al.* [KIL 81, KIL 86] s'inspirent de l'idée de Wang et Guth qui consiste à prendre en compte la contribution des interactions entre chaînes par les forces de van der Waals. Le réseau idéal est alors traité comme un gaz où les interactions sont appliquées entre quasi-particules. Il aboutit alors à un modèle à trois paramètres qui sort du cadre de l'hyperélasticité puisque l'expression des contraintes dépend de l'état de chargement.

En 1987 [END 87] puis en 1989 [AMB 89] le modèle est proposé sous la forme d'un potentiel  $W$  par l'introduction d'un invariant généralisé  $\tilde{I}$  :

$$W = G \left\{ -(\lambda_m^2 - 3) \left[ \ln(1 - \Theta) + \Theta \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\tilde{I} - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (\text{A.109})$$

avec  $\Theta = \sqrt{\frac{\tilde{I} - 3}{\lambda_m^2 - 3}}$

et  $\tilde{I} = \beta I_1 + (1 - \beta) I_2$

La justification moléculaire du paramètre supplémentaire  $\beta$ , considéré comme un coefficient d'ajustement, n'est cependant pas fournie. Les transformations apportées au modèle initial de Kilian confèrent finalement à ce modèle un caractère empirique même s'il est fondé sur des considérations moléculaires.

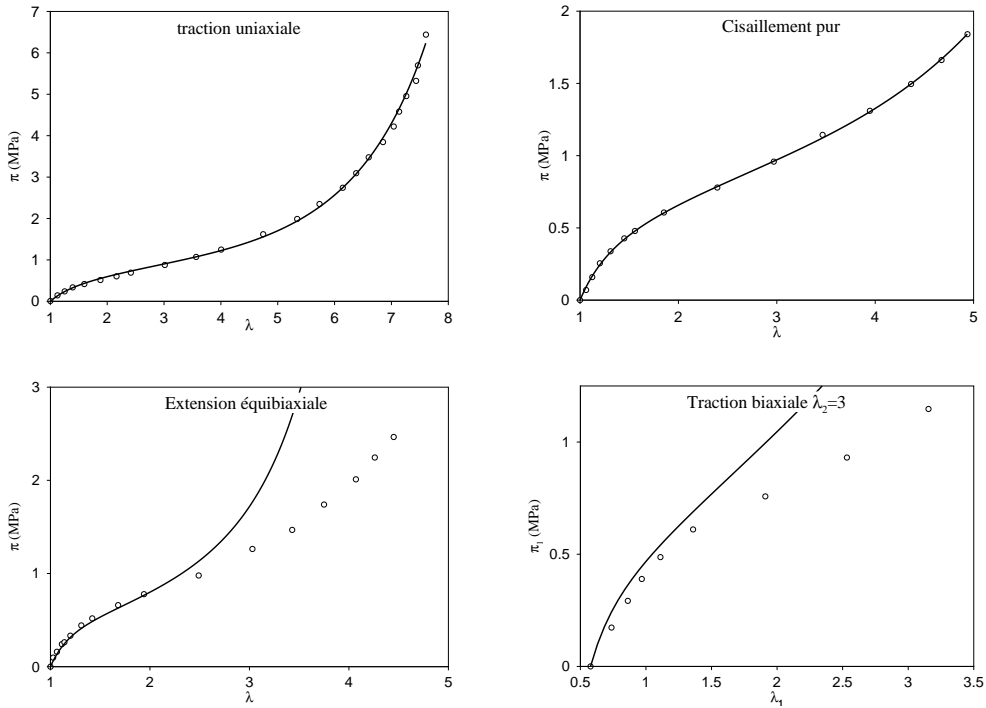


Figure A.44 : Modèle van der Waals de Kilian, (o) essais de Treloar, (—) modèle van der Waals  
 $G = 0,406 \text{ MPa}$  ;  $a = 0,295$  ;  $\lambda_m = 10,8$  ,  $\beta = 0,99$ ,

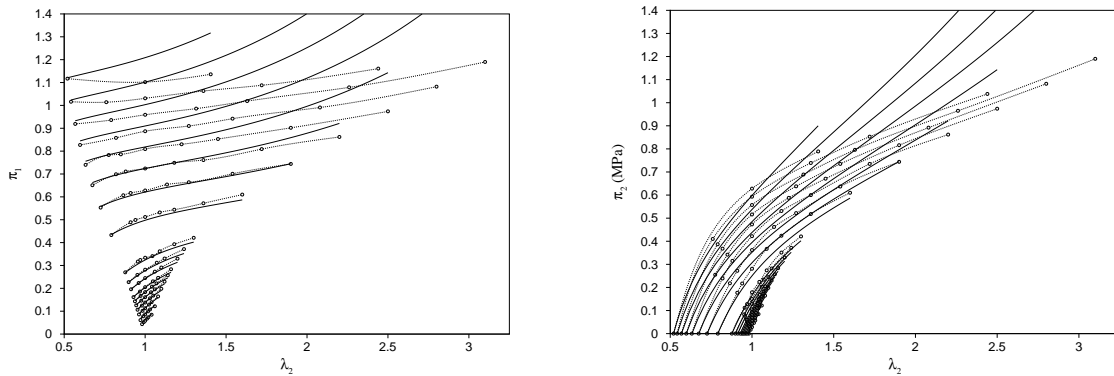


Figure A.45 : Modèle van der Waals de Kilian, (o) essais de Treloar, (—) modèle van der Waals  
(—) modèle van der Waals  $G = 0,406 \text{ MPa}$  ;  $a = 0,295$  ;  $\lambda_m = 10,8$ ,  $\beta = 0,99$ ,

Ce modèle reproduit très bien la traction uniaxiale et le cisaillement pur avec le même jeu de paramètres même dans le domaine des très grandes déformations (600% en traction, 500% en cisaillement pur)(figure A.44). Il permet également de simuler le comportement en traction équibiaxiale jusqu'à 150% de déformation (figure A.45). De façon générale les contraintes en déformations biaxiales sont surévaluées. Il est possible d'approcher globalement mieux l'ensemble des essais et d'obtenir ainsi un modèle aussi bon que celui de Biderman ou de Haynes-Wilson. Ce type de compromis se fait, bien entendu, en perdant la précision du modèle en traction uniaxiale et en glissement pur.

#### A. 4.3.11 Le modèle de Flory et Erman (1982) ou modèle de jonctions contraintes

Flory *et al.* [FLO 44, FLO 82, ERM 82, FLO 94] développent un modèle de la forme (A.107) où les points de jonctions entre chaînes sont contraints de se déplacer dans un voisinage restreint du fait de la présence des autres chaînes (« Constrained Junction Model », voir figure A.46). La partie fantôme de ce modèle est alors constituée du modèle néo-hookéen tandis que la partie



Figure A.46 : Modèle de jonctions contraintes - (o) jonction courante ;(x) jonctions voisines



« contraintes de réseau »  $W_c$  prend la forme suivante :

$$W_c = \frac{1}{2}kT\mu \sum_{i=1}^3 \left[ B_i + D_i - \ln(B_i + 1) - \ln(D_i + 1) \right] \quad (\text{A.110})$$

avec  $B_i = \kappa^2(\lambda_i^2 - 1)(\lambda_i^2 + \kappa)^{-2}$   
 et  $D_i = \lambda_i^2 \kappa^{-1} B_i$

Ce terme supplémentaire améliore le modèle néo-hookéen dans les déformations moyennes en ajoutant une courbure plus prononcée en début de chargement. Les courbes en pointillés de la figure A.47 permettent de visualiser la contribution due à  $W_c$  sur le modèle complet.

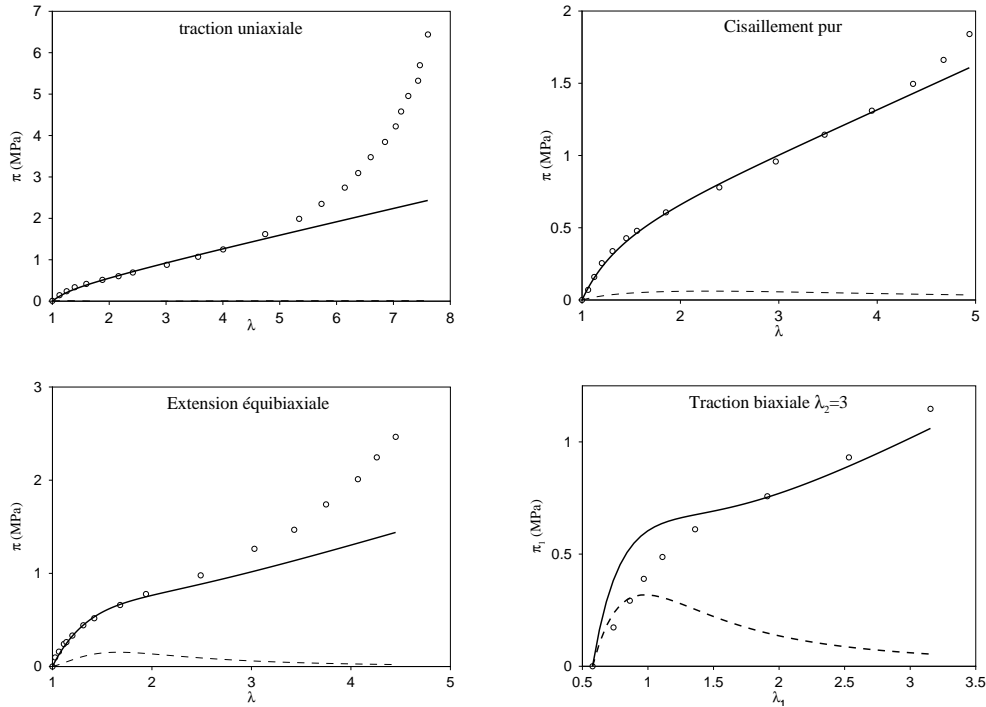


Figure A.47 : Modèle de Flory-Erman, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Flory-Erman  $C_{10} = 0,16 \text{ MPa}$  ;  $\frac{1}{2}kT\mu = 0,7 \text{ MPa}$  ;  $\kappa = 1,55$ , (- -) contribution de  $W_c$

Nous pouvons remarquer que ce modèle est proche de celui d'Edwards (slink-link) en terme de réponse aux différents types d'essais (voir figures A.47 et A.48). Les corrections apportées au modèle Gaussien sont similaires bien que le modèle microscopique associé soit différent. L'apport significatif de la partie non-fantôme pour la traction, le cisaillement pur et la traction équi-biaxiale en déformation modérée est malheureusement contrebalancé par une correction trop forte en traction biaxiale (voir figure A.47). De plus, l'utilisation du modèle Gaussien pour la partie fantôme du comportement limite l'utilisation du modèle aux déformations inférieures à 300% en traction.

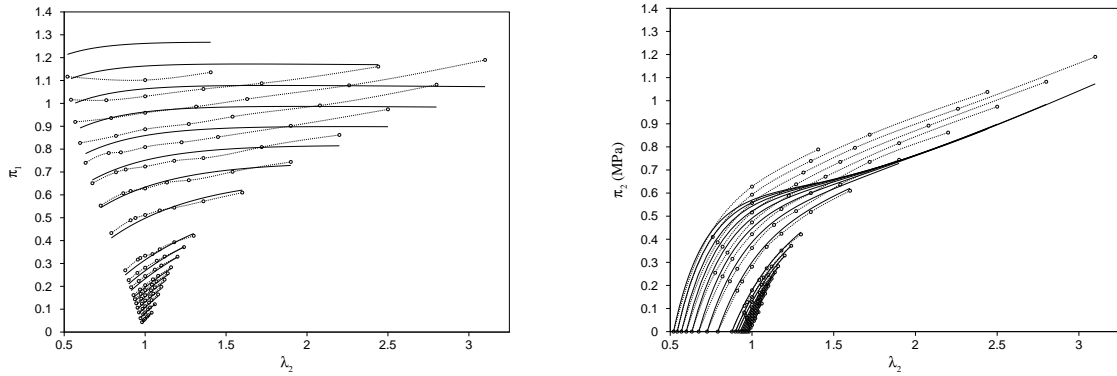


Figure A.48 : Modèle de Flory-Erman, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Flory-Erman  $C_{10} = 0,166 \text{ MPa}$  ;  $\frac{1}{2}kT\mu = 0,5 \text{ MPa}$  ;  $\kappa = 1,7$

#### A. 4.3.12 Le modèle 8-chaînes (1993)

En 1993, Arruda et Boyce [ARR 93] reprennent les travaux de James et Guth ainsi que ceux de Flory et Treloar sur les modèles 3-chaînes et 4-chaînes pour proposer un modèle similaire mais à 8 chaînes. Le principe est le même que pour les précédents : le réseau de chaînes est distribué suivant les quatre directions privilégiées correspondant aux sommets d'un cube inscrit dans la sphère unité comme le montre la figure A.49. On notera que le cube est un autre polyèdre régulier, ce qui permet de répartir simplement la matière en fournissant un modèle isotrope. Un

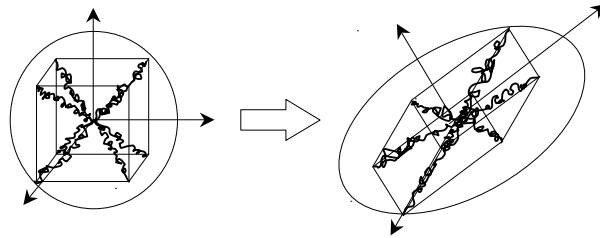


Figure A.49 : Modèle 8-chaînes

avantage de ce modèle est sa simplicité. En effet, on remarque que lorsque la sphère unité se déforme, toutes les chaînes s'étendent de manière identique, et que la valeur de cette extension  $\lambda_{ch}$  est donnée par la relation par :

$$\lambda_{ch}^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (\text{A.111})$$

Les contraintes sont alors données par :

$$\sigma_i = \frac{nkT\sqrt{N}}{3} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_{ch}} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{ch}}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{A.112})$$

où  $\mathcal{L}^{-1}$  est la fonction inverse de la fonction de Langevin (voir paragraphe A. 4.3.2),  $n$  est la densité de chaînes du réseau et  $N$  le nombre moyen de segments par chaîne. On note parfois

$C_r = nkT$ . L'énergie de déformation  $W$  correspondante s'écrit alors :

$$W_{8ch} = nkT \left[ \beta_{ch} \lambda_{ch} + \sqrt{N} \ln \left( \frac{\beta_{ch}}{\sinh(\beta_{ch})} \right) \right] \quad (\text{A.113})$$

avec  $\beta_{ch} = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{ch}}{\sqrt{N}} \right)$

Ce modèle permet de mieux approcher la traction équibiaxiale que les modèles 3 ou 4 chaînes (voir figure A.50). Le comportement en traction biaxiale n'est cependant pas mieux reproduit (figure A.51)

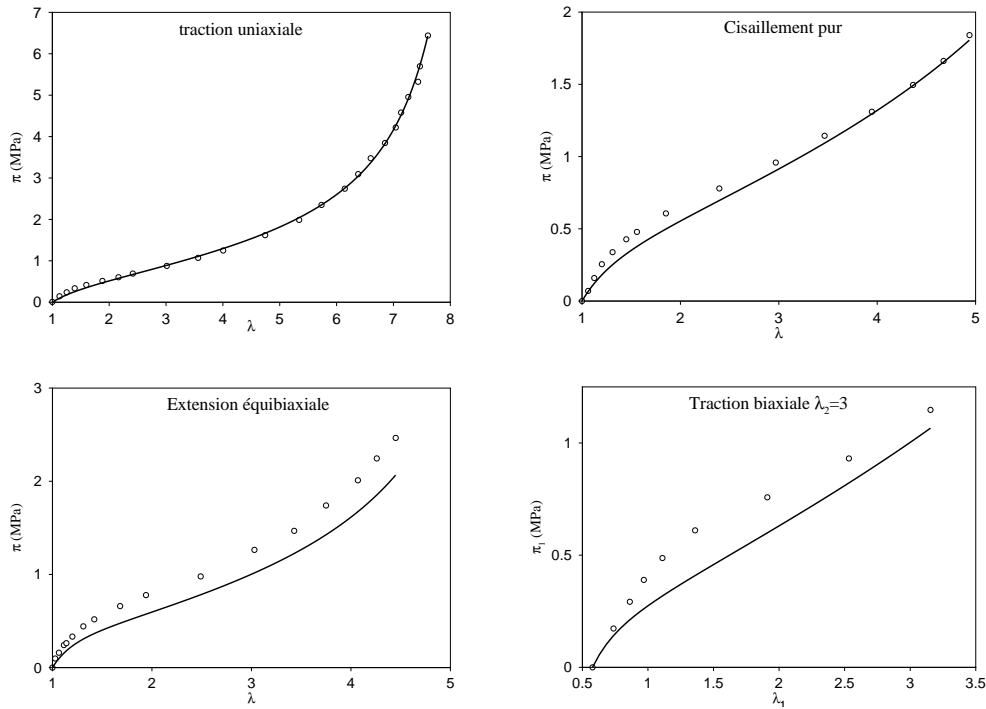


Figure A.50 : Modèle d'Arruda-Boyce, (o) essais de Treloar, (—) modèle de Arruda-Boyce  $C_r = 0,28 \text{ MPa}$  ;  $N = 25,4$ ;

Pour améliorer ce modèle, Boyce et Arruda [BOY 00] suggèrent d'ajouter un terme susceptible de prendre en compte la déviation du modèle par rapport à la théorie de réseau fantôme. Ces auteurs proposent par la même occasion d'améliorer le modèle de Flory et Erman en remplaçant la partie fantôme de ce dernier (modèle Gaussien) par le modèle non-Gaussien à 8 chaînes. Le modèle qui en résulte est présenté sur la figure A.52. Le terme dû aux contraintes de jonctions du modèle de Flory-Erman corrige bien le modèle d'Arruda-Boyce pour le comportement en cisaillement pur et en extension équibiaxiale. Il présente, cependant, le défaut du modèle de Flory-Erman pour la traction biaxiale en apportant une correction trop forte.

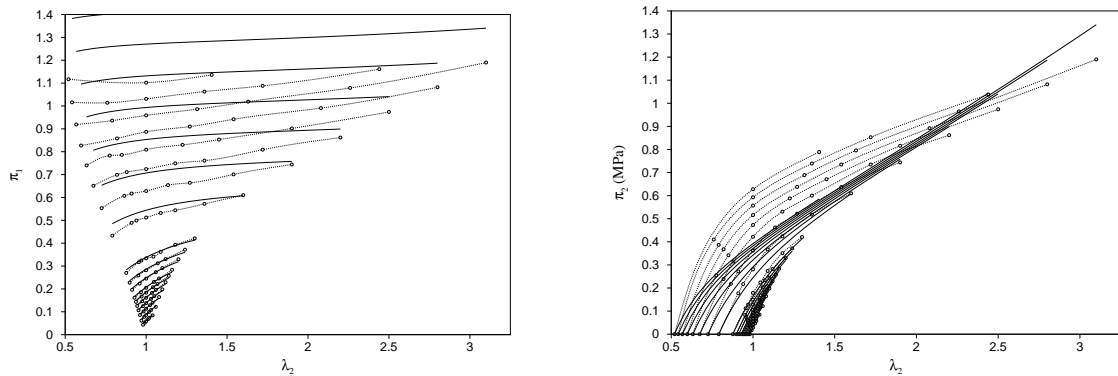


Figure A.51 : Modèle d'Arruda-Boyce, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de Arruda-Boyce  $C_r = 0,394 \text{ MPa}$  ;  $N = 45,4$ ;

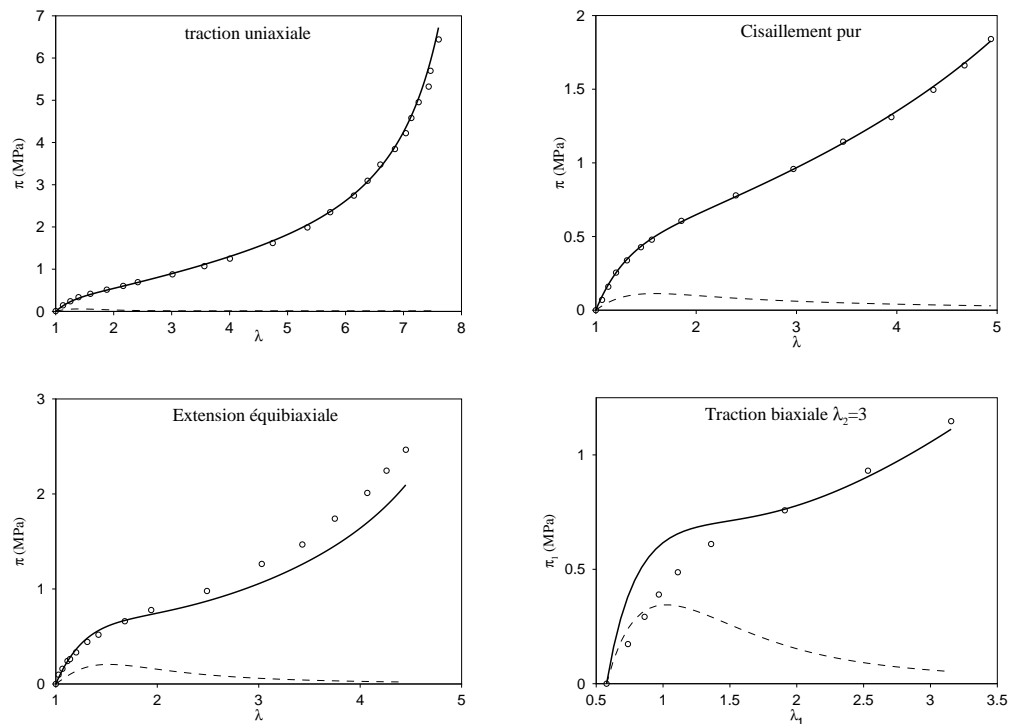


Figure A.52 : Modèle de Boyce-Flory, (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de de Boyce-Flory  $C_r = 0,28 \text{ MPa}$  ;  $N = 25$ ;  $G_c = 0,6$  ;  $\kappa = 2,6$ ; (- -) contribution de la partie non-fantôme

### A. 4.3.13 Le modèle tube (1997)

Heinrich *et al.* partent des travaux d'Edwards et Vilgis [EDW 88] et de Doi [DOI 96] pour établir un modèle de déformation où les chaînes ne se déforment plus selon un modèle de réseau fantôme. Les chaînes sont supposées se déformer en restant confinées dans un tube formé par le réseau avoisinant (figure A.53). Cette hypothèse est imputée au large degré d'interpénétration des chaînes du réseau. Ce confinement est contrôlé par un potentiel de restauration de la

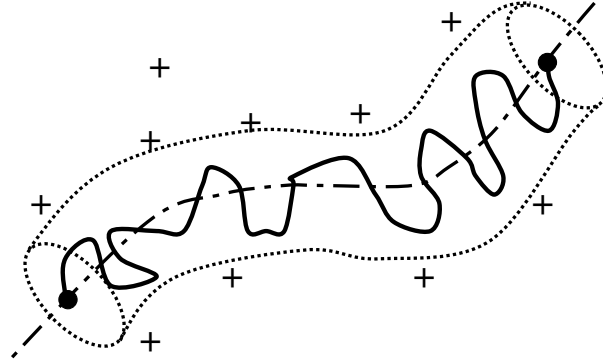


Figure A.53 : Visualisation du tube de conformation dans un réseau de polymère réticulé

conformation initiale. Ils supposent alors que ce potentiel est diagonal dans le système des axes principaux du tenseur des déformations [HEI 97]. La déviation moyenne  $d_i$  dans les directions des axes principaux suit alors une loi en puissance fonction des extensions  $\lambda_i$  :

$$d_i = d_o \lambda_i^{\alpha\beta} \quad (\text{A.114})$$

où  $\alpha = \frac{1}{2}$  et où  $\beta$  est introduit pour permettre la dépendance à de fortes dissolutions. Il doit être identifié empiriquement [KAL 99]. Heinrich *et al.* calculent alors le potentiel élastique et aboutissent à :

$$W = G_c I^*(2) + \frac{2G_e}{-\beta} I^*(-\beta) \quad (\text{A.115})$$

où  $I^*(\beta)$  est le premier invariant du tenseur de déformation généralisé  $\bar{\bar{e}}(\beta)$  défini par :

$$e_{ij}(\beta) = \frac{B_{ij}^{\frac{\beta}{2}} - \delta_{ij}}{\beta} \quad (\text{A.116})$$

avec  $B_{ij}$  composante de  $\bar{\bar{B}}$ , le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche. Ce modèle est à rapprocher du modèle phénoménologique d'Ogden à deux termes (paragraphe A. 4.2.5), en imposant  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -\beta$ ,  $\mu_1 = G_c$  et  $\mu_2 = \frac{-2G_e}{\beta}$ . Heinrich *et al.* fournissent cependant, par la construction de son modèle, une signification physique pour les paramètres matériaux  $G_c$  et  $G_e$  (voir [HEI 97] pour plus de détails) et par voie de conséquence justifient le modèle d'Ogden lorsqu'il est limité à deux termes et que  $\alpha_1$  est imposé égal à 2.

Ce modèle permet de très bien modéliser le comportement dans les différents modes de déformation avec le même jeu de coefficients matériels (figures A.54 et A.55). La bonne corrélation

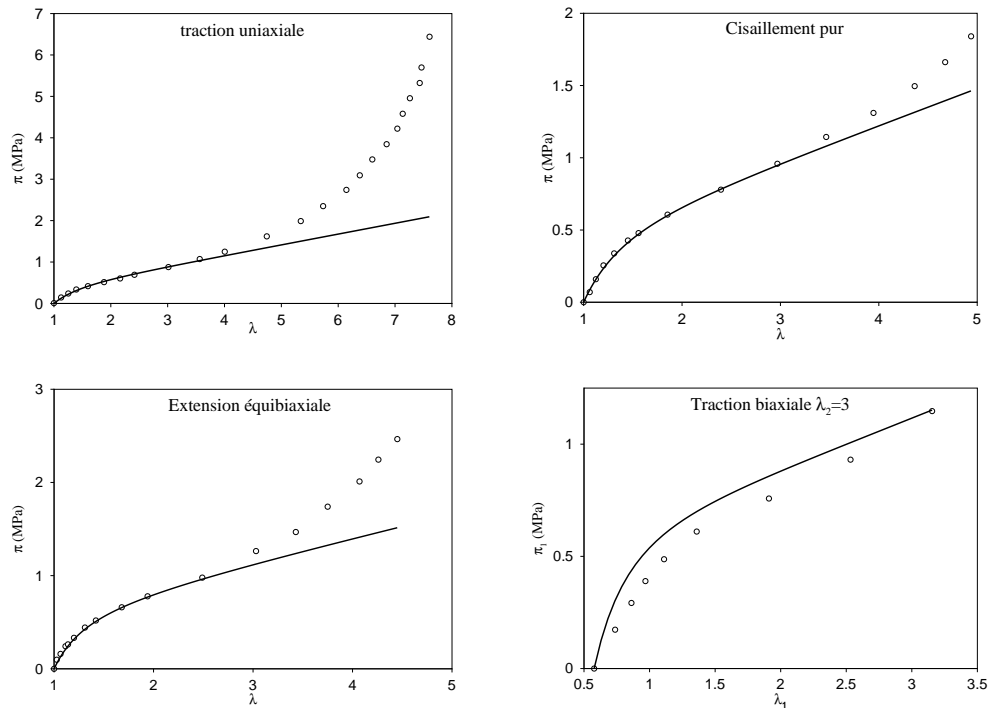


Figure A.54 : Modèle Tube , (o) essais de Treloar, (—) modèle Tube  $G_c = 0,266 \text{ MPa}$ ;  $G_e = 0,111 \text{ MPa}$ ;  $\beta = 0,375$

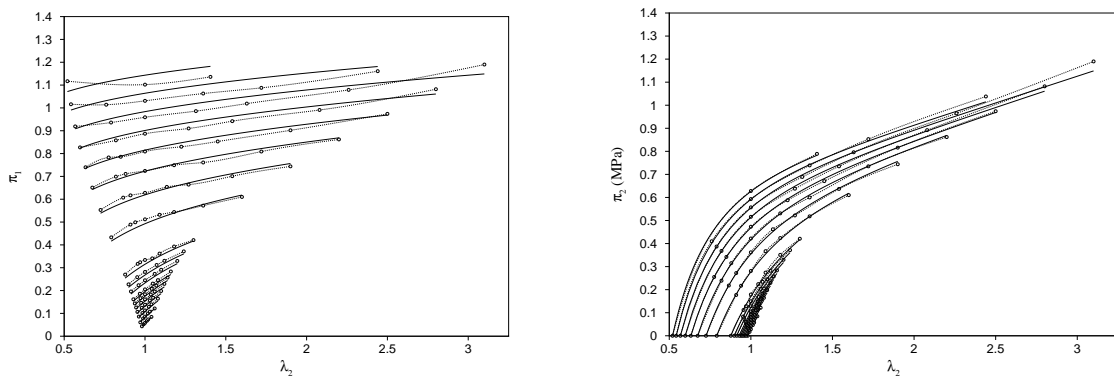


Figure A.55 : Modèle Tube , (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de  $G_c = 0,266 \text{ MPa}$ ;  $G_e = 0,111 \text{ MPa}$ ;  $\beta = 0,375$

avec les essais de Kawabata *et al.* est similaire à celle du modèle d'Ogden. On notera cependant que ce modèle ne permet pas de prendre en compte le raidissement final de la courbe de traction, et n'est applicable que dans une plage de déformation allant de 0 à 200% environ. L'identification de ses paramètres reste, comme pour le modèle d'Ogden, assez délicate. Les paramètres utilisés pour les figures A.54 et A.55 ont été identifiés sur les essais de Kawabata *et al.* par une méthode d'algorithme génétique. Une telle méthode met en évidence l'existence de

plusieurs solutions possibles. Une seule a été retenue pour le moment.

#### A. 4.3.14 Le modèle tube étendu («extended tube model», 1999)

La limitation du modèle tube aux déformations moyennes provient de la construction même du modèle qui ne fait intervenir que les contraintes d'entrelacement au détriment de l'élasticité des chaînes, et en particulier de leur limite d'extensibilité. Kaliske et Heinrich [KAL 99], conscients de ce problème, reprennent leurs travaux et remplacent leur approche Gaussienne par une approche non-Gaussienne. Ils introduisent alors un paramètre d'inextensibilité  $\delta$  des chaînes.

Ils aboutissent alors à une forme de d'énergie libre où la partie  $W_c = G_c I^*(2)$  (*cross-linking part*) est remplacée par :

$$W_c = \frac{G_c}{2} \left[ \frac{(1 - \delta^2)(I_1 - 3)}{1 - \delta^2(I_1 - 3)} + \ln(1 - \delta^2(I_1 - 3)) \right] \quad (\text{A.117})$$

tandis que la partie  $W_e$  (*tube constraint term*) reste inchangée :

$$W_e = \frac{2G_e}{-\beta} I^*(-\beta) \quad (\text{A.118})$$

Les auteurs imposent finalement à  $\beta$  de vérifier :  $0 \leq \beta \leq 1$ . Les figures A.54 et A.55

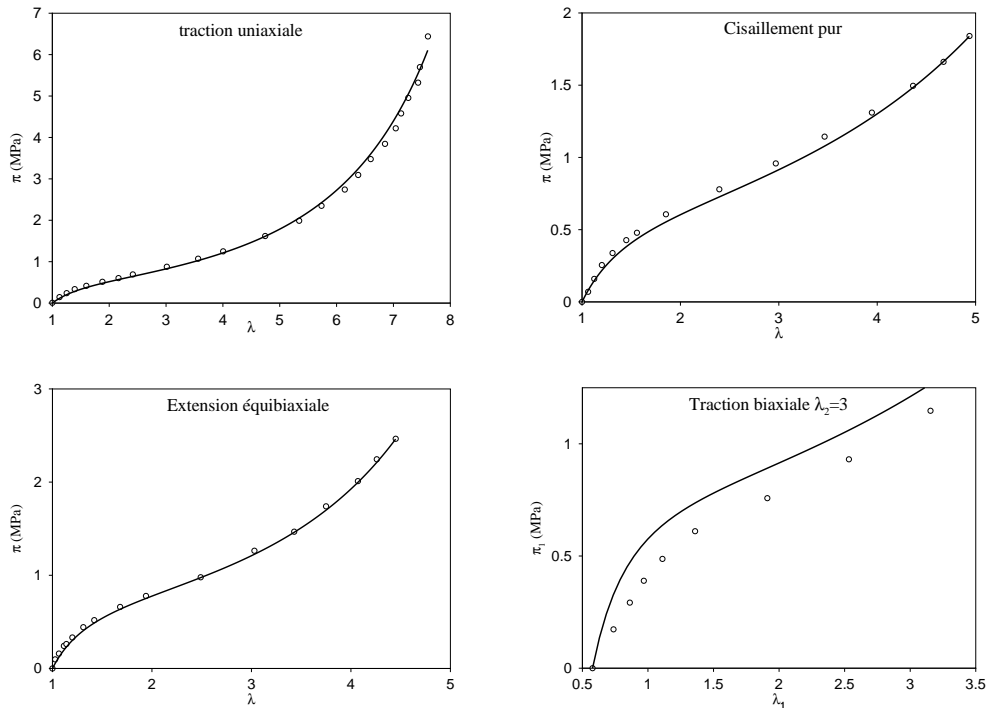


Figure A.56 : Modèle Extended-Tube , (o) essais de Treloar, (—) modèle Tube  $G_c = 0,202 \text{ MPa}$ ;  $G_e = 0,153 \text{ MPa}$ ;  $\beta = 0,178$ ;  $\delta = 0,0856$

illustrent la réponse de ce modèle pour des paramètres proches de ceux donnés dans [KAL 99].

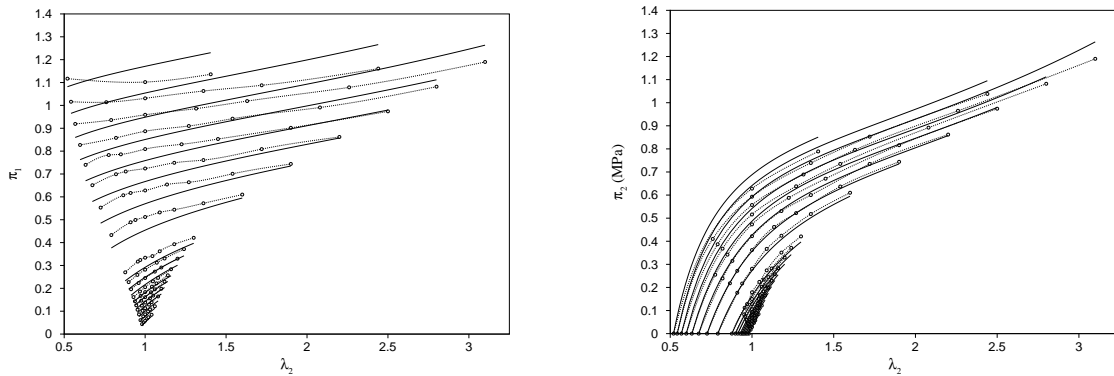


Figure A.57 : Modèle Extended-Tube , (o) essais de Kawabata *et al.*, (—) modèle de  $G_c = 0, 202 \text{ MPa}$ ;  $G_e = 0, 153 \text{ MPa}$ ;  $\beta = 0, 178$ ;  $\delta = 0, 0856$

#### A. 4.3.15 La dépendance en $I_2$

Si le modèle tube, dans sa forme première [HEI 97] permet de retrouver la forme du modèle phénoménologique d'Ogden à 2 termes, d'autres auteurs tentent de trouver une justification physique de la dépendance en  $I_2$  de l'énergie de déformation, qui permettrait de corriger les modèles à 3, 4 ou 8 chaînes. Citons par exemple les travaux de Mao [MAO 99] qui introduit un champ auxiliaire dans la fonction de distribution des chaînes et aboutit à un modèle polynômial en extensions principales écrit ensuite sous une forme en invariants. Il justifie ainsi, par un modèle statistique de chaînes, la présence de l'invariant  $I_2$  dans l'écriture de  $W$ . Cependant, les expressions obtenues sont formelles et montrent une dépendance entre les coefficients en  $I_1$  et en  $I_2$ . Ces expressions contiennent, de plus, des termes faisant intervenir le produit  $I_1 I_2$ . Nous retrouvons dans ces travaux les résultats déjà obtenus par Ishiara en 1951 [ISI 51].

Parallèlement, Meissner et Matejka [MEI 01] construisent un modèle empirique reprenant le modèle à 3 chaînes et en y ajoutant le terme  $C_2 (I_2 - 3)$  du modèle de Mooney-Rivlin. Ces travaux partent des constatations que dans le domaine des déformations élevées, le comportement des élastomères est gouverné par la limite d'extensibilité des chaînes, alors que pour des déformations faibles et modérées, le modèle de Mooney-Rivlin donne entière satisfaction. La justification physique de l'introduction du terme  $I_2$  est également étudiée par Fried [FRI 02]. Pour cela, il relaxe la contrainte de déformation affine du réseau (le champ local de déformation est égal au champ macroscopique de déformation au voisinage du point considéré) et autorise des formes particulières de champs de déformation sur une partition du réseau de chaînes. Il aboutit alors à des formes de  $W$  semblables à celle du modèle de Mooney-Rivlin ou de Rivlin et Saunders.



## A. 5 Conclusion sur les modèles de comportement

Nous pouvons constater que, contrairement aux métaux, les travaux réalisés depuis plus d'un demi-siècle sur le comportement élastique des élastomères ont donné naissance à des modèles variés pour des domaines de validité différents sans que pour autant un modèle particulier ait fait l'unanimité. Il est même assez frustrant de constater que, parmi les modèles illustrés dans ce chapitre, le modèle permettant de reproduire les essais dans le domaine de déformations le plus large et pour l'ensemble des modes de déformation est le modèle le plus phénoménologique qui soit, c'est-à-dire le modèle d'Ogden à 3 termes [OGD 72].

Néanmoins, les travaux réalisés sur des bases statistiques de réseau de chaînes permettent de cerner de mieux en mieux les phénomènes pouvant entrer en jeu au cours de la déformation du réseau moléculaire. Ainsi, il est admis que la limite d'extensibilité des chaînes est à l'origine du raidissement final des courbes observé expérimentalement, et que l'hypothèse de réseau fantôme non-Gaussien est valide. D'autre part, le modèle tube d'Heinrich, ou le modèle slip-link d'Edwards et Ball mettent en évidence la nécessité de prendre en compte les contraintes de réseau dues à l'enchevêtrement des chaînes prédominantes en petites déformations et dans le domaine des déformations modérées. Ainsi, le modèle tube étendu, établi en 1999 à partir des considérations physiques permet de reproduire le même type de comportement que le modèle d'Ogden avec seulement quatre paramètres au lieu de six.