



HAL
open science

Revêtements galoisiens et groupe fondamental d'algèbres de dimension finie

Patrick Le Meur

► **To cite this version:**

Patrick Le Meur. Revêtements galoisiens et groupe fondamental d'algèbres de dimension finie. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2006. Français. NNT: . tel-00011753

HAL Id: tel-00011753

<https://theses.hal.science/tel-00011753>

Submitted on 5 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques (section CNU : 25)
Formation Doctorale : Mathématiques
École Doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Patrick LE MEUR

le 10 février 2006

**Revêtements galoisiens et groupe fondamental
d'algèbres de dimension finie**

JURY

M. Alain BRUGUIÈRES	Examineur
M. Claude CIBILS	Directeur de thèse
M. Philippe CALDERO	Examineur
M. Bernhard KELLER	Rapporteur, Président du Jury
Mme María Julia REDONDO	Rapporteuse

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques (section CNU : 25)
Formation Doctorale : Mathématiques
École Doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Patrick LE MEUR

le 10 février 2006

**Revêtements galoisiens et groupe fondamental
d'algèbres de dimension finie**

JURY

M. Alain BRUGUIÈRES	Examineur
M. Claude CIBILS	Directeur de thèse
M. Philippe CALDERO	Examineur
M. Bernhard KELLER	Rapporteur, Président du Jury
Mme María Julia REDONDO	Rapporteuse

Très cher lecteur,

Avant de te plonger avidement dans la lecture de ce texte, je tiens à remercier quelques personnes qui ont eu un rôle significatif dans l'aboutissement de ma thèse.

Mes premiers remerciements s'adressent à Claude Cibils, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements ont largement contribué à la réussite de celle-ci. Je ne le remercierai sans doute jamais assez de m'avoir fait découvrir de nouveaux domaines des mathématiques, notamment au travers de colloques auxquels il m'a proposé d'assister.

J'exprime toute ma gratitude à Bernhard Keller pour avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse, mais aussi pour ses conseils pendant mon DEA, en particulier ceux qui m'ont amené à faire ma thèse à Montpellier avec Claude Cibils. Lors de divers colloques, j'ai eu l'occasion de suivre quelques exposés de Bernhard Keller, tous sans exception portaient sa griffe : celle d'un enseignant d'une qualité rare. Pour cela également je le remercie.

En mars 2005, Claude Cibils m'a introduit auprès de Maria Julia Redondo qui était invitée à Montpellier. Elle a alors eu la gentillesse de me consacrer une partie importante de son temps pour que je lui expose mes résultats. Les discussions qui ont suivi avec elle-même et Claude Cibils ont grandement contribué à rendre plus lisibles certaines démonstrations. Plus tard, elle a accepté de rédiger un rapport sur ma thèse. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Alain Bruguières et Philippe Caldero m'ont fait l'honneur d'être examinateurs dans mon jury de thèse. Je les en remercie chaleureusement. A cette occasion, je voudrais remercier Alain Bruguières pour ses questions stimulantes et qui ont fait apparaître certains de mes résultats sous un angle bien différent.

Lors de divers exposés de mes travaux, j'ai pu discuter avec plusieurs chercheurs dont les commentaires m'ont beaucoup apporté. Je pense en particulier à Ibrahim Assem, Belkacem Bendiffalah, Daniel Guin, Jose Antonio de la Peña mais aussi à Andrea Solotar qui, tout comme Maria Julia Redondo, m'a consacré de son temps lors d'un passage à Montpellier.

Je n'aurais pu effectuer ma thèse dans de bonnes conditions sans support financier. Ce dernier m'a été apporté par Bijan Mohammadi et Marc Herzlich qui dirigeaient la formation doctorale de Mathématiques à mon arrivée à Montpellier. Je les remercie vivement pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'attribuant une allocation de recherche. Je remercie également les secrétaires du Département de Mathématiques pour leur aide.

Claudine Picaronny ainsi que Karine Beauchard et Grégory Ginot m'ont permis de rédiger cette thèse dans de bonnes conditions. Je leur exprime ici ma reconnaissance.

Une thèse représente un parcours long et difficile, mais dans mon cas il fut agrémenté d'une atmosphère détendue et je tiens à remercier les doctorants qui y ont contribué : Nathaël Alibaud, Florent Balacheff, Michele Bolognesi, Robin Perrot, Jérôme Petit ainsi que toute l'équipe organisatrice des DOCTISSTM 2004.

Je remercie enfin mes parents sans qui je ne serais jamais arrivé jusqu'ici. Merci également à Isabelle pour m'avoir soutenu et m'avoir apporté un équilibre indispensable à l'accomplissement de cette thèse.

Table des matières

Introduction	3
1 Des k-algèbres aux k-catégories	11
1.1 Notions sur la théorie de la représentation	11
1.1.1 Rappels basiques	11
1.1.2 Algèbres graduées	12
1.2 Des algèbres aux k -catégories	12
1.2.1 k -catégories et idéaux	12
1.2.2 Propriétés locales et globales d'une k -catégorie	14
1.2.3 Catégories G -graduées	15
2 Présentations admissibles	16
2.1 Carquois et catégorie des chemins	16
2.1.1 La catégorie des carquois	16
2.1.2 Chemins et promenades dans un carquois	18
2.2 Automorphismes de kQ	22
2.2.1 Raccourcis et double raccourcis dans un carquois	23
2.2.2 Transvections et dilatations	25
2.2.3 Tout automorphisme est produit de dilatations et de transvections	27
2.3 Carquois liés et présentations admissibles	29
3 Combinatoire sur les chemins d'un carquois	34
3.1 Dérivation des chemins	34
3.1.1 Définition et premières propriétés	34
3.1.2 Application : description du support de l'image d'un chemin par un automorphisme	36
3.2 Ordre sur les chemins, ordre sur les raccourcis	39
3.2.1 Ordre sur l'ensemble des chemins d'un carquois	39
3.2.2 Ordre sur l'ensemble des raccourcis d'un carquois	42
3.2.3 Application à l'écriture des produits de transvections	43
3.3 Application aux algèbres monomiales	48
4 Etude des groupes fondamentaux d'une algèbre triangulaire	52
4.1 Relations d'équivalence dans un espace vectoriel	52
4.1.1 Relation d'équivalence associée à un sous-espace vectoriel	53
4.1.2 Comparaison des relations d'équivalence associées à deux sous-espaces liés par un automorphisme	60
4.2 Relation d'homotopie et groupe fondamental d'un carquois lié	68
4.2.1 Définitions	68
4.2.2 Espaces classifiants	71
4.2.3 Comparaison des groupes fondamentaux des présentations d'une algèbre triangulaire, groupe fondamental d'une algèbre sans double raccourci	72
5 Application à l'étude de $HH^1(A)$	93
5.1 Rappels sur l'algèbre de Lie $HH^1(A)$	93
5.2 Le morphisme $\theta_\nu: Hom(\pi_1(Q, I), k^+) \rightarrow HH^1(A)$ induit par une présentation de $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ de noyau I	94
5.3 Caractérisation des éléments dans l'image de l'un des θ_ν	96

6	Revêtements de catégories et d'algèbres, revêtement universel	105
6.1	Revêtements de k -catégories et propriétés basiques	105
6.1.1	Définition et premières propriétés	105
6.1.2	Propriétés locales et globales liées aux foncteurs couvrants	107
6.1.3	Propriétés des morphismes de revêtements	109
6.1.4	Revêtements galoisiens	113
6.2	Présentation des revêtements	117
6.2.1	Revêtements de carquois liés	117
6.2.2	Présentation de revêtements	125
6.3	Revêtement universel d'une algèbre sans double raccourci ou monomiale sans flèches multiples	132
6.3.1	Comparaison des revêtements galoisiens de A induits par les revêtements universels de carquois lié des présentations admissibles de A	133
6.3.2	Condition suffisante sur A pour que A admette un revêtement universel	136
6.3.3	Limites de la définition du revêtement universel	139
7	Revêtements galoisiens d'extensions de catégories	145
7.1	Rappels sur les algèbres de matrices triangulaires	145
7.1.1	Algèbres de matrices triangulaires	145
7.1.2	k -catégories de matrices triangulaires	146
7.2	Revêtements galoisiens d'une catégorie de matrices triangulaires	147
7.2.1	Graduation sur (B, M, A)	147
7.2.2	Revêtement galoisien associé à une graduation sur (B, M, A)	148
7.3	Application au revêtement galoisien induit par le revêtement universel associé à une présentation admissible	151
7.3.1	Graduation sur (B, M, A) à l'aide des groupes fondamentaux de présentations admissibles de B et de A	151
7.3.2	Calcul du revêtement galoisien associé	153
7.4	Conoyau du morphisme $G_b \star G_A \rightarrow G$	158

Introduction

L'utilisation des revêtements d'algèbres a été initiée par K. Bongartz et P. Gabriel dans [9] et C. Riedtmann dans [36]. Les revêtements d'algèbres nécessitent de considérer les k -algèbres comme des k -catégories (ou encore des *algèbres avec plusieurs objets*, voir [31]). Lorsque $A' \rightarrow A$ est un revêtement de k -catégories, la théorie de la représentation de A' est plus simple à étudier que celle de A (en particulier, si A est de représentation finie alors A' l'est, si A est domestique alors A' l'est) et les A -modules peuvent être vus comme des A' -modules : en suivant les idées exposées par E. L. Green dans [19], si $A' \rightarrow A$ est un revêtement galoisien de groupe G alors la catégorie des A' -modules est équivalente à la catégorie des A -modules G -gradués. De cette façon une algèbre n'admettant aucun revêtement galoisien non trivial serait relativement simple à étudier du point de vue de sa théorie de la représentation. Ces algèbres seraient donc des algèbres «simplement connexes».

La définition de la notion de revêtement établit un lien fort avec la notion correspondante en topologie. En particulier, un revêtement de carquois définit un revêtement entre les algèbres (ou catégories) de chemins associées.

Dans [9], les revêtements d'une algèbre sont mis en parallèle avec ceux de la catégorie des modules indécomposables qui lui est associée. Plus précisément, si A est une k -algèbre de type de représentation fini et si $Ind(A)$ est la catégorie des A -modules indécomposables, alors :

- tout revêtement $A' \rightarrow A$ de k -catégories définit un revêtement $Ind(A') \rightarrow Ind(A)$ entre les catégories de modules indécomposables associées,
- si $\mathcal{C} \rightarrow Ind(A)$ est un revêtement, alors \mathcal{C} est la catégorie des modules sur une k -catégorie convenable, cette dernière étant un revêtement de A .

L'un des intérêts d'une telle mise en parallèle est qu'il est plus facile de manipuler les revêtements de $Ind(A)$ que ceux de A , l'une des raisons à cela étant que le carquois de $Ind(A)$ (i.e. le carquois d'Auslander Reiten de A) est localement *plus simple* que le carquois ordinaire de A . De cette façon K. Bongartz et P. Gabriel ont mis en évidence un groupe fondamental et un revêtement universel associé à toute k -algèbre de type de représentation fini (voir [9] et [17]). Ces considérations ont en particulier permis de définir la notion d'algèbre simplement connexe : une algèbre de type de représentation fini et connexe A est simplement connexe lorsque le carquois d'Auslander-Reiten de A muni des relations de mèches est simplement connexe. Notons que dans [8], R. Bautista, F. Larrón et L. Salmeron ont établi une caractérisation de cette propriété en termes de *séparation* de l'algèbre A lorsque cette dernière est triangulaire.

Il est donc naturel de se demander s'il est possible d'obtenir un résultat similaire pour d'autres algèbres (de type de représentation infini). Une réponse à cette question a été apportée par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]. En effet, étant donnée une k -algèbre de dimension finie, connexe et basique A , un groupe fondamental lui est associé : si $kQ/I \simeq A$ est une présentation par carquois et relations admissibles, le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ obtenu est un quotient du groupe fondamental de l'espace topologique sous-jacent à Q par des relations dépendant de l'idéal I . Du point de vue des carquois liés (i.e. des couples formés d'un carquois Q et d'un idéal admissible I) nous disposons donc d'un groupe fondamental et d'un revêtement universel, et la catégorie des revêtements d'un carquois lié et connexe (Q, I) est équivalente à celle des ensembles discrets muni d'une action du groupe $\pi_1(Q, I)$. Néanmoins, le groupe $\pi_1(Q, I)$ a le désavantage de dépendre du choix de la présentation $kQ/I \simeq A$ puisqu'il peut exister des présentations distinctes $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ telles que les groupes $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(Q, J)$ ne sont pas isomorphes. Notons qu'avec la définition du groupe fondamental d'un carquois lié, I. Assem et A. Skowroński ont étendu la notion d'algèbre simplement connexe (voir [2]) : une algèbre de dimension finie, connexe et basique A est simplement connexe si et seulement si le groupe fondamental du carquois lié de toute présentation de A est trivial.

La principale motivation de cette thèse est l'étude de l'aspect non canonique du groupe fondamental tel que défini dans [29]. Plus précisément, nous essaierons de répondre à la question suivante : est-il possible d'associer à une k -algèbre de dimension finie un groupe "fondamental" qui ne dépend que de l'algèbre (et pas du choix d'une présentation) et qui vérifie des propriétés analogues à celles du groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs? Notons que cette question naturelle a été posée à l'issue de la thèse d'Eric Reynaud (voir [35]) par D. Guin et M. Saorin. Les principaux axes de travail de cette thèse seront les suivants :

- comparer les diverses présentations d'une k -algèbre fixée,
- comparer les groupes fondamentaux associés à des présentations distinctes d'une même algèbre,
- comparer les revêtements d'une même algèbre A associés aux groupes fondamentaux de présentations différentes de A ,
- lorsque $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ est une algèbre de matrices triangulaires, établir un lien entre les revêtements de Λ et ceux de A et de B .

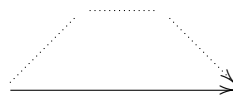
Le dernier point est en complément du reste du travail dans cette thèse. Il rejoint certains résultats qui établissent des liens entre la théorie de la représentation de $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ et celle de A et de B . Par exemple,

D. Happel a relié, dans [22], la cohomologie de Hochschild d'une extension ponctuelle $\begin{bmatrix} k & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ à celle de B et de M au moyen d'une suite exacte longue. Plus tard, ce résultat a été généralisé au cas d'une extension quelconque $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ par C. Cibils dans [13] d'une part et S. Michelena et M. I. Platzack dans [30] d'autre part : la suite exacte longue relie la cohomologie de Hochschild de l'extension avec celle de A , de B et de M .

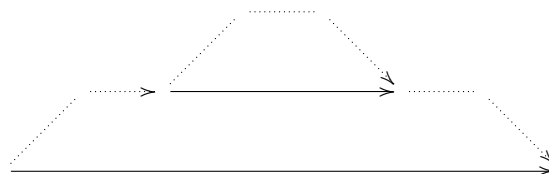
Voyons à présent plus en détail le contenu de cette thèse Chapitre par Chapitre.

Le Chapitre 1 est l'occasion de faire de brefs rappels sur quelques notions de base de la théorie de la représentation. Pour plus de détails sur la théorie de la représentation des algèbres nous renvoyons le lecteur à [1] ou [6]. Nous rappellerons également la définition et quelques propriétés de la notion de k -catégorie (voir [31]). Cette notion généralise celle de k -algèbre.

Le Chapitre 2 est consacré aux présentations de k -algèbres et de k -catégories par carquois et relations admissibles. Nous commencerons (dans la Section 2.1) par introduire des notions combinatoires essentielles sur les carquois. Dans la Section 2.2, nous étudierons le groupe des automorphismes de l'algèbre des chemins d'un carquois au moyen de deux types d'automorphismes : les dilatations et les transvections. Les dilatations sont des automorphismes associant à une flèche un multiple scalaire de cette flèche. Pour définir et étudier les transvections, nous introduisons la notion de raccourci (introduite par I. Assem, D. Castonguay, E.N. Marcos et S. Trepode dans [4]) et la notion de double raccourci (introduite par l'auteur dans [27], voir [28] pour une version plus détaillée). En termes simples, un raccourci d'un carquois est la donnée d'une flèche α et d'un chemin u parallèle à (et différent de) α , cette donnée pouvant être représentée par un diagramme de la forme :



où le trait plein représente la flèche α et le trait en pointillés représente le chemin u . Un double raccourci est la donnée de deux raccourcis, le second se greffant sur le premier. Avec les conventions prises dans le diagramme précédent, nous pouvons représenter un double raccourci comme suit :



Une transvection $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ (dont la définition dépend de la donnée d'un raccourci (α, u) et d'un scalaire τ) associe à la flèche α la somme $\alpha + \tau u$, toute autre flèche étant inchangée par cette transvection. La définition

des dilatations et des transvections est inspirée de celle des matrices bien connues de dilatation et matrices de transvection de $GL_n(k)$ et dans le cas du carquois de Kronecker généralisé à n flèches, la notion de transvection (resp. de dilatation) que nous introduisons coïncide avec la notion de matrice de transvection (resp. de dilatation) de $GL_n(k)$. L'utilisation de ces automorphismes nous permet de démontrer le premier résultat important de cette thèse :

Proposition *Soit Q un carquois fini et sans cycle orienté, alors le groupe $Aut_0(kQ)$ des automorphismes φ de la k -algèbre kQ vérifiant $\varphi(x) = x$ pour tout sommet $x \in Q_0$ est engendré par les dilatations et transvections.*

Notons que la démonstration de la Proposition ci-dessus utilise la génération (bien connue) de $GL_n(k)$ par les matrices de dilatation et celles de transvection. La Section 2.3 est consacrée à la définition proprement dite des présentations admissibles. En particulier nous rappelons qu'une k -algèbre de dimension finie et basique admet des présentations admissibles par carquois et relations admissibles (fait dû à P. Gabriel, voir [6] ou [9]). L'un des buts principaux de cette thèse est de comparer les groupes fondamentaux associés à des présentations admissibles distinctes d'une même algèbre. Il est donc naturel d'essayer de relier deux présentations admissibles d'une même algèbre. Dans cette optique nous donnons une démonstration complète du résultat suivant qui est bien connu :

Proposition *Soit A une k -algèbre de dimension finie basique et triangulaire. Soient $\nu: kQ \rightarrow A$ et $\mu: kQ \rightarrow A$ deux présentations admissibles de noyaux respectifs I et J . En supposant que $\nu(e_x) = \mu(e_x)$ pour tout sommet $x \in Q_0$ (i.e. ν et μ sont des présentations relatives au même système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux) alors il existe un automorphisme $\psi \in Aut_0(kQ)$ tel que $\psi(I) = J$ et tel que le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\mu}^{-1}\bar{\nu}} & kQ/J \end{array}$$

où les flèches verticales sont les surjections canoniques et où $\bar{\nu}: kQ/I \rightarrow A$ (resp. $\bar{\mu}: kQ/J \rightarrow A$) est l'isomorphisme induit par ν (resp. par μ)

Ainsi, un automorphisme $\psi \in Aut_0(kQ)$ est un moyen de passer d'une présentation admissible d'une k -algèbre à une autre présentation de cette même algèbre. De ce point de vue, les dilatations et les transvections peuvent être considérées comme un moyen de transformer une présentation admissible en une présentation admissible qui reste très proche de la première.

Le Chapitre 3 est consacré à l'introduction de notions combinatoires sur les carquois :

- (i) la dérivation des chemins,
- (ii) les ordres sur l'ensemble des chemins d'un carquois,
- (iii) les ordres sur l'ensemble des raccourcis d'un carquois.

Dans la Section 3.1 nous traitons de la dérivation des chemins, dans la Section 3.2 nous étudions les ordres sur les chemins (resp. sur les raccourcis) et dans la Section 3.3 nous donnons quelques applications à l'étude des présentations admissibles des algèbres monomiales (i.e. s'écrivant comme le quotient de l'algèbre des chemins d'un carquois par l'idéal engendré par un ensemble de chemins). Dans un carquois Q , un chemin v sera dit dérivé d'un chemin u si v est obtenu à partir de u en remplaçant certaines flèches apparaissant dans u par des chemins parallèles. De cette façon, avec l'ordre que nous introduisons sur l'ensemble des chemins, si v est dérivé de u alors $v < u$. Notons que l'ordre que nous introduisons sur l'ensemble des chemins d'un carquois est inspiré des travaux de D. R. Farkas, C. D. Feustel et E. L. Green sur les bases de Gröbner d'un idéal admissible d'une algèbre de chemins d'un carquois (voir [15]). L'introduction des notions (i), (ii) et (iii) ci-dessus résulte de la nécessité de pouvoir traiter le problème suivant : si A admet une présentation par le carquois avec relations admissibles (Q, I) alors les éléments de I sont appelés «relations de (Q, I) ». Parmi ces relations nous distinguons les «relations minimales de (Q, I) » introduites par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]. En termes imagés, une relation minimale est une relation r dont les seules sous-expressions qui sont des relations sont 0 et r (une sous-expression de r est une combinaison linéaire de chemins où les chemins apparaissant avec un coefficient non nul apparaissent dans r avec le même coefficient non nul). Etant donné $\psi \in Aut_0(kQ)$, nous savons que $(Q, \psi(I))$ définit une autre présentation admissible de A , mais si r est une relation minimale de

(Q, I) alors $\psi(r)$ peut ne pas être une relation minimale de $(Q, \psi(I))$. Il est donc intéressant de rechercher des sous-expressions de $\psi(r)$ où à défaut de pouvoir décrire facilement les chemins apparaissant avec un coefficient non nul dans $\psi(r)$. A cette fin, la dérivation des chemins et les ordres sur les chemins et les raccourcis sont utiles dans le cas où le carquois considéré est sans cycle orienté et sans flèches multiples. Ainsi l'image d'un chemin u par un produit de transvections est la somme de u et d'une combinaison linéaire de chemins dérivés de u . Nous montrons également que pour l'ordre que nous introduisons sur les raccourcis, tout produit ψ de transvections peut être réécrit en produit de transvections $\psi = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n} \dots \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}$ de sorte que la suite associée des raccourcis soit strictement décroissante : $(\alpha_n, u_n) > \dots > (\alpha_1, u_1)$. Une telle écriture permet alors de déterminer $\psi(\alpha)$ pour toute flèche α en recherchant les occurrences de la flèche α dans la suite de flèches $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Le Chapitre 4 est consacré à la comparaison des groupes fondamentaux d'une k -algèbre de dimension finie, connexe, basique et triangulaire. Ce Chapitre est divisé en deux Sections. La Section 4.1 concentre les aspects les plus techniques de la comparaison de groupes fondamentaux. De cette façon, la lecture des résultats importants du Chapitre est simplifiée, mais surtout, le lecteur peut constater que de nombreux résultats intermédiaires dans la comparaison des groupes fondamentaux de présentations admissibles relèvent de l'algèbre linéaire et ne nécessitent pas l'existence d'une structure multiplicative. Les méthodes utilisées dans cette Section sont relativement élémentaires et il est intéressant de noter l'utilisation des bases de Gröbner dans une version linéaire (i.e. sans utiliser de structure multiplicative, ces bases sont également appelées bases sous forme d'échelon réduite dans la littérature française) pour démontrer certains des résultats les plus difficiles de cette Section (et également de cette thèse). Dans la Section 4.2 nous rappelons la définition de la relation d'homotopie \sim_I et du groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ d'un carquois muni de relations admissibles (ou carquois lié) (Q, I) ainsi que les ont définis R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]. Nous passons ensuite à la comparaison des groupes fondamentaux de différentes présentations admissibles d'une même k -algèbre (de dimension finie basique et triangulaire). Comme nous l'avons dit plus haut, les transvections et les dilatations permettent de passer d'une présentation admissible à une autre sans trop changer l'idéal des relations. Les deux Propositions suivantes que nous démontrons illustrent cette affirmation :

Proposition *Supposons que Q n'a pas de cycle orienté, soit (Q, I) un carquois lié et soit D une dilatation. Alors les relations d'homotopie \sim_I et $\sim_{D(I)}$ coïncident. En particulier, si Q est connexe, les groupes fondamentaux $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(Q, D(I))$ sont isomorphes.*

Proposition *Supposons que Q n'a pas de cycle orienté, soit (Q, I) un carquois lié et soit $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection. Posons $J = \varphi(I)$. Alors les relations d'homotopie \sim_I et \sim_J sont comparables (pour la relation d'ordre non total «être plus fine que»). En particulier, l'un des deux groupes fondamentaux parmi $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(Q, J)$ est un quotient de l'autre.*

Ces deux Propositions nous permettent de démontrer la comparaison suivante obtenue par M. J. Bardzell et E. N. Marcos dans [7] lorsque l'algèbre est contrainte.

Proposition (voir [7]) *Soit A une k -algèbre de dimension finie, connexe, basique, triangulaire et contrainte. Alors deux présentations admissibles de A ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Etant donnée une k -algèbre de dimension finie basique connexe et triangulaire A , la comparaison ci-dessus des relations d'homotopie des présentations admissibles de A nous permet alors de considérer ces relations d'homotopie comme les sommets d'un carquois Γ . Nous démontrons que Γ est connexe, n'a pas de cycle orienté, et d'après un argument du à M. Suárez-Álvarez, Γ est fini. Puisque Γ est fini et n'a pas de cycle orienté, Γ a au moins une source (i.e. un sommet qui n'est le terminus d'aucune flèche) et tout sommet de Γ est le terminus d'un chemin dont la source est une source de Γ . En outre Γ est tel que si $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ sont deux présentations admissibles et si il existe dans Γ un chemin de source \sim_I et de terminus \sim_J , alors \sim_I est plus fine que \sim_J et le groupe fondamental $\pi_1(Q, J)$ est un quotient de $\pi_1(Q, I)$.

La question de savoir si Γ n'a qu'une seule source est alors naturelle : en effet, en supposant que Γ a une source unique, si $kQ/I_0 \simeq A$ est une présentation admissible telle que \sim_{I_0} est la source de Γ et si $kQ/I \simeq A$ est une autre présentation admissible, alors le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ est un quotient de $\pi_1(Q, I_0)$. Le reste de la Section 4.2 est donc consacré à l'étude de l'unicité de la source de Γ . En utilisant les résultats démontrés dans la Section 4.1 à l'aide des bases de Gröbner nous obtenons la Proposition suivante :

Proposition *Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique, de carquois ordinaire Q . Si Q n'a pas de double raccourci et si k est de caractéristique nulle, alors le carquois Γ a une seule source.*

En traduisant le fait que Γ a une source unique en termes de groupe fondamental, nous obtenons le Théorème principal de cette thèse (que nous avons énoncé dans [27] et démontré dans [28])

Théorème *Supposons que A est connexe. Supposons que le carquois Q de A n'a pas de double raccourci et que k est de caractéristique nulle. Alors il existe une présentation admissible $kQ/I_0 \simeq A$ telle que pour toute autre présentation admissible $kQ/I \simeq A$, l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, I)$.*

En utilisant les résultats obtenus dans la Section 3.3 sur les algèbres monomiales nous obtenons également la Proposition suivante :

Proposition *Soit A une k -algèbre de dimension finie basique et monomiale, de carquois ordinaire Q . Si Q n'a pas de cycle orienté et n'a pas de flèches multiples alors le carquois Γ a une seule source.*

L'intérêt de cette dernière Proposition est moindre que celui de la précédente. En effet, le principal objectif de la Section est d'exhiber une présentation admissible privilégiée $kQ/I_0 \simeq A$ de A telle que le groupe fondamental de toute présentation est un quotient de $\pi_1(Q, I_0)$. Or ce fait est bien connu dans le cas des algèbres monomiales. De ce point de vue, la Proposition ci-dessus sur les algèbres monomiales n'apporte donc rien de nouveau, néanmoins elle est intéressante à double titre :

- elle énonce un résultat d'unicité de la source de Γ dans une situation où le carquois Q peut avoir des double raccourcis alors que l'hypothèse contraire est omniprésente dans cette thèse,
- elle permet (plus loin dans le texte) d'exhiber le revêtement universel (en termes de catégories et plus seulement en termes de carquois lié) d'une algèbre monomiale triangulaire et sans flèches multiples.

Le Chapitre 5 est consacré à une application des résultats de comparaison du Chapitre 4. Etant donnée une k -algèbre connexe, de dimension finie, basique et triangulaire, I. Assem et J. A. de la Peña ont établi dans [5], pour une présentation admissible $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ de noyau I , l'existence d'une application linéaire injective :

$$\theta_\nu: \pi_1(Q, I) \hookrightarrow HH^1(A)$$

où $HH^1(A)$ désigne le second groupe de cohomologie de Hochschild de A . Après un bref rappel (dans la Section 5.1) sur la cohomologie de Hochschild, nous décrivons en détail (dans la Section 5.2) l'application θ_ν . Enfin dans la Section 5.3 nous nous intéressons à l'image de θ_ν (laquelle est une sous-algèbre de Lie abélienne de $HH^1(A)$). Rappelons que dans [16], D. R. Farkas, E. L. Green et E. N. Marcos ont caractérisé l'image de θ_ν en termes de dérivations diagonalisables. Nous donnons dans la Section 5.3 une autre démonstration de cette caractérisation en utilisant les bases de Gröbner. Nous nous attachons ensuite à comparer θ_ν et θ_μ pour deux présentations admissibles distinctes, et plus particulièrement dans le cas où μ est déduite de ν par composition avec une transvection ou une dilatation. Nous obtenons de cette façon les résultats suivants :

Proposition *Soit $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation, soit $D: kQ \rightarrow kQ$ une dilatation. Soit μ la présentation $\mu = \nu \circ D: kQ \twoheadrightarrow A$. Posons $I = Ker(\mu)$ et $J = Ker(\nu)$ de sorte que $J = D(I)$. En identifiant $\pi_1(Q, I)$ et $\pi_1(Q, J)$, nous avons l'égalité :*

$$\theta_\nu = \theta_\mu$$

Proposition *Soit $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation, soit $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection. Soit μ la présentation $\mu = \nu \circ \varphi: kQ \twoheadrightarrow A$. Posons $I = Ker(\mu)$ et $J = Ker(\nu)$ de sorte que $J = \varphi(I)$. Supposons que $\alpha \sim_J u$. Rappelons qu'alors l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $p: \pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, J)$. Alors il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Hom(\pi_1(Q, J), k^+) & & \\ \downarrow p^* & \searrow \theta_\nu & \\ & & HH^1(A) \\ & \nearrow \theta_\mu & \\ Hom(\pi_1(Q, I), k^+) & & \end{array}$$

Où p^* est l'injection induite par p . En particulier $Im(\theta_\nu) \subseteq Im(\theta_\mu)$

Proposition Soit $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation et posons $I = \text{Ker}(\nu)$. Soit $\psi: kQ \rightarrow kQ \in \text{Aut}_0(kQ)$ tel que $\psi(I) = I$ et posons μ la présentation $\mu = \nu \circ \psi: kQ \rightarrow A$ de sorte que $\text{Ker}(\mu) = I$. Posons $\bar{\psi}: A \xrightarrow{\sim} A$ l'automorphisme de la k -algèbre A tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{\bar{\psi}} & A \end{array}$$

Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & HH^1(A) \\ & \nearrow \theta_\nu & \downarrow \sim \bar{\psi}_* \\ \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+) & & HH^1(A) \\ & \searrow \theta_\mu & \end{array}$$

En particulier, $\text{Im}(\theta_\mu)$ est l'image de $\text{Im}(\theta_\nu)$ par l'automorphisme $\bar{\psi}_*: HH^1(A) \xrightarrow{\sim} HH^1(A)$ induit par la conjugaison des dérivations de A par $\bar{\psi}: A \xrightarrow{\sim} A$.

L'utilisation de l'unicité de la source de Γ nous permet alors d'établir le Théorème suivant :

Théorème Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

- le corps k est de caractéristique nulle et que Q n'a pas de double raccourci,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Alors nous avons les faits suivants :

- (i) les sous-algèbres de Lie de $HH^1(A)$ constituées d'éléments simultanément diagonalisables et maximales pour cette propriété sont exactement les sous-algèbres de la forme $\text{Im}(\theta_\nu)$ où $\nu: kQ \rightarrow A$ est une présentation admissible telle que $\sim_{\text{Ker}(\nu)}$ est la source de Γ .
- (ii) si \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont deux telles sous-algèbres alors il existe $\psi: A \xrightarrow{\sim} A$ un automorphisme de k -algèbre tel que $\mathcal{G}' = \psi_*(\mathcal{G})$.

Dans le Chapitre 6 nous utilisons les résultats obtenus dans le Chapitre 4 pour la recherche du revêtement universel d'une k -algèbre de dimension finie, connexe, basique et triangulaire. Etant donnée une telle k -algèbre A (considérée comme une k -catégorie au moyen d'un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux), un revêtement universel de A est un revêtement galoisien connexe $\mathcal{C} \rightarrow A$ vérifiant la propriété suivante : pour tout revêtement galoisien connexe $\mathcal{C}' \rightarrow A$, il existe un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \downarrow F & \searrow F'' & \\ & & \mathcal{C}' \\ & & \downarrow F' \\ A & \xrightarrow{\sim \psi} & A \end{array}$$

où la flèche horizontale est un isomorphisme de k -algèbres dont la restriction au système complet d'idempotents est l'application identité. Dans la Section 6.1 nous rappelons quelques notions sur les foncteurs couvrants (ou revêtements) et les revêtements galoisiens et démontrons quelques propriétés utiles. Pour exhiber un revêtement universel nous utilisons les propriétés du revêtement universel de carquois lié défini par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]. Aussi, dans la Section 6.2, nous faisons quelques rappels sur les revêtements de carquois liés, en particulier nous redémontrons le fait connu suivant : un revêtement (galoisien) de carquois lié définit, par passage aux k -catégories, un revêtement (galoisien) de k -catégorie (ce dernier est donc dit présentable par un revêtement de carquois lié). Afin de pouvoir utiliser les propriétés du revêtement universel de carquois lié pour la recherche d'un revêtement universel de A , nous avons besoin de faire le cheminement inverse pour un revêtement galoisien : étant donné un revêtement galoisien, est-il possible de le présenter, i.e. est-il possible de construire un revêtement de carquois lié dont le revêtement de k -catégorie associé soit le

revêtement galoisien de départ ? Nous apportons une réponse à cette question en démontrant la Proposition suivante (qui a été démontrée dans [29] dans le cas particulier où les k -catégories concernées sont sans flèches multiples) :

Proposition *Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revêtement galoisien de groupe G avec \mathcal{B} localement bornée. Supposons que le carquois ordinaire de \mathcal{B} n'a pas de boucle. Alors F est présentable. Si en outre \mathcal{E} est connexe, alors F est présentable par un revêtement galoisien.*

Cette dernière Proposition nous permet de prouver le troisième Théorème de cette thèse :

Théorème *Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- Q n'a pas de double raccourci et k est de caractéristique nulle,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Alors A admet un revêtement universel.

Il est important de noter que la seule unicité de la source du carquois Γ ne suffit pas à démontrer le Théorème ci-dessus, nous utilisons en fait un raffinement de la propriété «être une source de Γ ». En particulier, l'existence d'un revêtement universel dans le cas d'une algèbre monomiale triangulaire sans flèches multiples est un résultat non trivial et qui ne découle pas directement du fait que le groupe fondamental d'une présentation quelconque est un quotient du groupe fondamental d'une présentation monomiale.

Notons enfin que bien que nous disposions d'un revêtement universel dans les cas cités ci-dessus, l'analogie avec la situation topologique n'est pas parfaite. En effet, nous verrons qu'étant donnée une k -algèbre A , la catégorie des revêtements de A n'admet pas nécessairement de produit (et donc pas nécessairement de produit fibré). Pour cette raison, la catégorie des revêtements de A n'est en général pas équivalente à la catégorie des ensembles discrets munis de l'action d'un groupe fixé et la catégories des revêtements à fibre finie de A n'est en général pas galoisienne (au sens de [20]).

Dans le Chapitre 7 nous allons nous intéresser à un problème différent de ceux traités dans les Chapitres précédents : étant donnée une k -algèbre de matrices triangulaires $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$, nous regarderons comment construire un revêtement galoisien de Λ à partir d'un revêtement galoisien de A , d'un revêtement galoisien de B et d'une donnée supplémentaire portant sur M . Plus précisément, nous définissons la notion de «gradation sur (B, M, A) » comme étant la donnée d'une G_A -gradation de A (G_A un groupe), d'une G_B -gradation de B (G_B un groupe) et d'une gradation de M par un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble F , de façon que ces trois graduations soient compatible avec la structure de $B - A$ bimodule sur M . A partir d'une telle donnée, nous construisons un revêtement galoisien de Λ de groupe noté (G_B, F, G_A) . Après avoir vérifié que tout revêtement galoisien de Λ peut être construit de cette façon (ce qui intuitivement semble naturel) nous démontrons le fait suivant :

Proposition *Supposons que Λ est connexe et que :*

$$\Lambda = kQ/I = \begin{bmatrix} kQ_A/I_A & 0 \\ M & kQ_B/I_B \end{bmatrix}$$

Notons $\pi_1(Q_A, I_A)$ (resp. $\pi_1(Q_B, I_B)$) le produit libre des groupes fondamentaux des composantes connexes de (Q_A, I_A) (resp. (Q_B, I_B)). Alors il existe une gradation naturelle sur (B, M, A) par $(\pi_1(Q_B, I_B), F, \pi_1(Q_A, I_A))$ avec F bien choisi. Le revêtement galoisien de Λ associé à cette gradation est celui défini par le revêtement universel du carquois lié (Q, I) . En particulier, $\pi_1(Q, I)$ et $(\pi_1(Q_B, I_B), F, \pi_1(Q_A, I_A))$ sont isomorphes.

Cette Proposition montre que la construction n'est pas trop grossière puisque le revêtement de A (resp. de B) défini par la G_A -gradation (resp. G_B -gradation) de A (resp. de B) est connexe.

Nous établissons ensuite (en toute généralité) le lien suivant entre les groupes G_B, G_A et (G_B, F, G_A) .

Proposition *Si $G_B \amalg G_A$ désigne le produit libre des groupes, alors le conoyau du morphisme de groupes $G_B \amalg G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ (défini par les morphismes naturels $G_B \rightarrow (G_B, F, G_A)$ et $G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$) est libre.*

En appliquant cette Proposition au cas où $\Lambda = kQ/I$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire *Supposons que $\Lambda = kQ/I$. Alors le conoyau du morphisme naturel de groupes*

$$\pi_1(Q_B, I_B) \amalg \pi_1(Q_A, I_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$$

est libre.

Notons que ce dernier résultat a déjà été démontré dans le cas d'une extension ponctuelle (i.e. en supposant que $A = k$) par I. Assem, J. C. Bustamante, D. Castonguay et C. Novoa dans [3].

Les définitions, remarques, exemples, et résultats de cette thèse sont numérotés selon les Sections : «Définition 6.3.1» désigne une définition de la Section 3 du Chapitre 6. Il nous arrivera parfois d'énoncer une Proposition ou une Définition connue et dont la paternité n'est pas clairement établie, nous la signalerons alors en la qualifiant de «bien connue». De prime abord le texte peut sembler un peu long. En effet, les démonstrations dans cette thèse ont été écrites avec un souci double : d'une part s'assurer, dans la mesure du possible, qu'il n'y a pas de faille dans les raisonnements, d'autre part, permettre au lecteur une compréhension des démonstrations à la seule lecture de celles-ci.

Chapitre 1

Des k -algèbres aux k -catégories

Nous commençons par faire un court rappel, dans la Section 1.1, sur quelques notions basiques de la théorie de la représentation des algèbres. Dans ce texte nous nous intéressons, entre autres, aux revêtements d'une k -algèbre de dimension finie. Les revêtements nécessitent de considérer les k -algèbres comme des k -catégories. Aussi nous ferons, dans la Section 1.2, un rappel sur les k -catégories.

1.1 Notions sur la théorie de la représentation

1.1.1 Rappels basiques

Nous rappelons ici quelques notions élémentaires et fixons quelques notations et appellations de la théorie des représentations des algèbres. Pour une étude plus approfondie de ces notions nous renvoyons à [6] ou à [1]. Dans ce texte nous considérerons des k -algèbres associatives unitaires et de dimension finie sur k , pour simplifier nous les appellerons *k -algèbres de dimension finie*. Le terme *k -algèbre* désignera une k -algèbre associative non (nécessairement) unitaire. Si A est une k -algèbre, le **centre de** A est la sous-algèbre de A :

$$Z(A) = \{x \in A \mid (\forall a \in A) ax = xa\}$$

Lorsque A est k -algèbre de dimension finie, un A -module est un module à gauche sur A et de dimension finie sur k . La catégorie des A -modules sera notée $\text{mod}(A)$. Rappelons (voir [6, I.4 p. 14]) qu'une telle algèbre A n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules projectifs indécomposables (resp. modules simples) et que si τ désigne le radical de A alors l'application $P \mapsto P/\tau P$ établit une bijection entre les classes d'isomorphisme de modules projectifs indécomposables et celles des modules simples. En particulier, A est dite **basique** (ou Morita réduite) lorsque $A = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ où les P_i sont des modules projectifs indécomposables deux à deux non isomorphes. La Proposition suivante montre que dans l'optique de l'étude des A -modules, nous pouvons supposer que A est basique :

Proposition 1.1.1 (voir [6, II.2 p. 35]) *Soit A une k -algèbre de dimension finie. Soit $A = P_1^{d_1} \oplus \dots \oplus P_n^{d_n}$ une décomposition de A où P_i est indécomposable, $d_i \geq 1$ pour tout i et $P_i \not\cong P_j$ si $i \neq j$. Soit $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ et posons $\Gamma = \text{End}_A(P)^{op}$. Alors Γ est basique et A et Γ sont Morita équivalentes par l'équivalence suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}(A) & \rightarrow & \text{mod}(\Gamma) \\ X & \mapsto & \text{Hom}_A(P, X) \end{array}$$

Avec les notations de la Proposition 1.1.1, nous dirons que Γ est la **Morita réduction** de A .

Exemple 1.1.2 *Soit $n \geq 1$ un entier et posons $A = M_n(k)$. Alors $M_n(k)$ est indécomposable, $P = M_n(k)$ et $\Gamma = k$ est la Morita réduction de $M_n(k)$.*

Soit A une k -algèbre de dimension finie. Alors A est dite **connexe** si il n'existe pas de décomposition de A en produit direct $A = A_1 \times A_2$ de deux algèbres non nulles. L'étude de la connexité peut se faire au moyen des **idempotents** de A . Rappelons qu'un idempotent de A est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$. Par exemple 1 et 0 sont des idempotents de A . Un idempotent e de A est dit **central** si $e \in Z(A)$. Ainsi, A est connexe si et seulement si 1 ne peut s'écrire comme somme d'idempotents centraux $1 = e_1 + e_2$ avec $e_1, e_2 \neq 1$.

Pour une k -algèbre A de dimension finie, les idempotents permettent également de décrire les A -modules projectifs indécomposables. Rappelons que :

- deux idempotents e_1, e_2 sont dits **orthogonaux** si $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$,
- un idempotent e est dit **primitif** lorsque e ne peut s'écrire comme somme $e = e_1 + e_2$ de deux idempotents orthogonaux tels que $e_1, e_2 \neq e$,
- un **système complet d'idempotents** est un ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'idempotents tels que $1 = e_1 + \dots + e_n$.

Avec ces notions, $e \in A$ est un idempotent si et seulement si Ae est un A -module projectif, et lorsque c'est le cas, Ae est projectif indécomposable si et seulement si e est primitif. De plus, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux alors $A = Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n$ est une décomposition de A en somme de A -modules projectifs indécomposables. Réciproquement, si $A = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ est une décomposition en somme de projectifs indécomposables, alors la décomposition $1 = e_1 + \dots + e_n$ avec $e_i \in P_i$ définit un système complet $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux et $P_i = Ae_i$. Remarquons qu'avec ces notations nous avons un isomorphisme de k -espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(P_i, P_j) &= \text{Hom}_A(Ae_i, Ae_j) \xrightarrow{\sim} e_i Ae_j \\ f &\mapsto f(e_i) \end{aligned}$$

1.1.2 Algèbres graduées

Soit G un groupe. Une k -algèbre G -graduée est une k -algèbre de dimension finie A , munie d'une décomposition $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ en somme directe de sous-espaces vectoriels, telle que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ pour tous $g, h \in G$. Notons que cela implique $1 \in A_{1_G}$. À une telle algèbre G -graduée est associée la catégorie des A -modules G -gradués décrite comme suit. Un A -module G -gradué est un A -module M muni d'une décomposition $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ en somme directe de sous-espaces vectoriels, telle que $A_g M_h \subseteq M_{gh}$ pour tous $g, h \in G$. D'autre part, si M et N sont deux A -modules G -gradués, un morphisme $M \rightarrow N$ dans la catégorie des A -modules G -gradués est un morphisme de A -modules $f: M \rightarrow N$ tel que $f(M_g) \subseteq N_g$ pour tout $g \in G$.

1.2 Des algèbres aux k -catégories

Afin d'étudier les revêtements galoisiens d'une k -algèbre de dimension finie (et notamment les revêtements galoisiens dont le groupe n'est pas fini), nous rappelons quelques notions sur les k -catégories.

1.2.1 k -catégories et idéaux

Etant donnée une catégorie \mathcal{C} , nous noterons \mathcal{C}_0 la collection des objets de \mathcal{C} , et si x, y sont deux objets de \mathcal{C} , l'ensemble des morphismes $x \rightarrow y$ de \mathcal{C} sera noté ${}_y\mathcal{C}_x$.

Définition 1.2.1 Une k -catégorie est une catégorie \mathcal{C} telle que :

- \mathcal{C}_0 est un ensemble,
- chaque ensemble ${}_y\mathcal{C}_x$ est un k -espace vectoriel,
- la composition des morphismes est k -bilinéaire.

Un **morphisme de k -catégories** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur tel que chaque application $F: {}_y\mathcal{C}_x \rightarrow {}_{F(y)}\mathcal{C}'_{F(x)}$ est une application k -linéaire.

Ces définitions permettent de définir la *catégorie des k -catégories*. En particulier, un isomorphisme de k -catégories $F: \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$ est un morphisme tel que $F: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$ est une bijection et tel que chacune des applications linéaires $F: {}_y\mathcal{C}_x \rightarrow {}_{F(y)}\mathcal{C}'_{F(x)}$ est un isomorphisme. Un tel isomorphisme est appelé automorphisme lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Nous noterons $\text{Aut}(\mathcal{C})$ le **groupe des automorphismes de \mathcal{C}** :

$$\text{Aut}(\mathcal{C}) = \{f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \mid f \text{ est un isomorphisme}\}$$

Parmi les automorphismes de \mathcal{C} citons les automorphismes $f: \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ dont la restriction à \mathcal{C}_0 est l'identité, c'est à dire tels que $f(x) = x$ pour tout objet x de \mathcal{C} . L'ensemble de ces automorphismes sera noté $\text{Aut}_0(\mathcal{C})$:

$$\text{Aut}_0(\mathcal{C}) = \{f \in \text{Aut}(\mathcal{C}) \mid (\forall x \in \mathcal{C}_0) f(x) = x\}$$

Ces automorphismes forment un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(\mathcal{C})$ et ils apparaîtront dans l'étude des revêtements galoisiens de \mathcal{C} .

Exemple 1.2.2 Les k -algèbres de dimension finie fournissent de nombreux exemples de k -catégories : une k -algèbre de dimension finie A définit une k -catégorie dont l'ensemble des sommets est réduit à un point et telle que l'algèbre des endomorphismes de ce point est A . Plus généralement, une décomposition $1 = e_1 + \dots + e_n$ de l'unité de A en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux définit une k -catégorie dont l'ensemble des objets est $\{1, \dots, n\}$ et dont l'espace des morphismes $e_i \rightarrow e_j$ est $e_j A e_i$, la composition des morphismes étant induite par le produit de A .

Si il n'y a pas d'ambiguïté sur le système complet $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'idempotents deux à deux orthogonaux, la k -catégorie ainsi définie sera encore notée A . Dans la suite, nous utiliserons cette construction dans le cas où les idempotents e_i sont primitifs. A cette fin, la Proposition suivante montre que le choix de ce système importe peu.

Proposition 1.2.3 Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ (resp. $\{e'_1, \dots, e'_n\}$) un système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux de A . Soit \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') la k -catégorie associée. Alors \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont isomorphes.

Remarque 1.2.4 Soit A une k -algèbre de dimension finie et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents deux à deux orthogonaux. Alors $\text{Aut}_0(A)$ s'identifie naturellement avec le groupe des automorphismes $f: A \xrightarrow{\sim} A$ de l'algèbre A vérifiant $f(e_i) = e_i$ pour tout i .

Remarque 1.2.5 Soit \mathcal{C} une k -catégorie telle que \mathcal{C}_0 est fini. Nous pouvons alors définir une k -algèbre associative unitaire (non nécessairement de dimension finie) $A = \bigoplus_{x, y \in \mathcal{C}_0} {}_y\mathcal{C}_x$. Le produit dans A de deux morphismes étant leur composition lorsqu'ils sont composables et nul lorsqu'ils ne le sont pas. L'unité de A est alors $1 = \sum_{x \in \mathcal{C}_0} \text{Id}_x$ et l'ensemble $\{\text{Id}_x \mid x \in \mathcal{C}_0\}$ est un système complet d'idempotents deux à deux orthogonaux. La k -catégorie associée à A à l'aide de ces idempotents est alors égale à \mathcal{C} .

Définition 1.2.6 Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Un **idéal** I de \mathcal{C} est la donnée de sous-espaces vectoriels ${}_y I_x \subseteq {}_y\mathcal{C}_x$ pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$ tels que la composition vu de deux morphismes $u \in {}_y\mathcal{C}_x$ et $v \in {}_z\mathcal{C}_y$ vérifie $vu \in {}_z I_x$ dès que $u \in {}_y I_x$ ou $v \in {}_z I_y$.

Définition 1.2.7 Soit \mathcal{C} une k -catégorie et soit I un idéal de \mathcal{C} . La **catégorie quotient** \mathcal{C}/I est la k -catégorie définie comme suit :

- l'ensemble des objets est \mathcal{C}_0 ,
- ${}_y(\mathcal{C}/I)_x = {}_y\mathcal{C}_x / {}_y I_x$ pour tous objets x, y ,
- la composition des morphismes est induite par celle des morphismes de \mathcal{C} :

$$(v \bmod {}_z I_y)(u \bmod {}_y I_x) = (vu \bmod {}_z I_x)$$

L'application identité sur les objets et chacun des quotients ${}_y\mathcal{C}_x \rightarrow {}_y(\mathcal{C}/I)_x$ définissent alors un morphisme naturel $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/I$.

L'intersection d'une famille quelconque d'idéaux de \mathcal{C} est un idéal de \mathcal{C} . De cette façon, étant donné un ensemble E de morphismes de \mathcal{C} , l'**idéal engendré par** E est l'intersection de tous les idéaux contenant les morphismes appartenant à E .

Si I et J sont deux idéaux d'une k -catégorie \mathcal{C} , alors l'**idéal produit** IJ est défini comme suit :

$${}_y(IJ)_x = \text{Vect}(vu \mid u \in {}_y I_z, v \in {}_z J_x, z \in \mathcal{C}_0)$$

En particulier, les puissances de l'idéal I sont définies par $I^0 = \mathcal{C}$ et $I^{n+1} = I^n I$.

Par ailleurs, nous écrirons $I \subseteq J$ si pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$ nous avons ${}_y I_x \subseteq {}_y J_x$.

Enfin, si $\psi \in \text{Aut}(\mathcal{C})$ est un automorphisme de \mathcal{C} , nous noterons $\psi(I)$ (resp. $\psi^{-1}(I)$) l'idéal défini par :

$${}_y \psi(I)_x = \psi({}_{\psi^{-1}(y)} I_{\psi^{-1}(x)}) \quad (\text{resp. } {}_y \psi^{-1}(I)_x = \psi^{-1}({}_{\psi(x)} I_{\psi(y)}))$$

Remarque 1.2.8 Soit A une k -algèbre de dimension finie et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux. Notons \mathcal{A} la k -catégorie ainsi associée à A . Alors les associations :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{idéaux de } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{idéaux de } \mathcal{A}\} \\ & I \longrightarrow & \{e_j I e_i\}_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \\ \bigoplus_{i,j \in \{1, \dots, n\}} {}_j I_i & \longleftarrow & I \end{array}$$

sont bijectives et inverses l'une de l'autre.

1.2.2 Propriétés locales et globales d'une k -catégorie

Définition 1.2.9 Une k -catégorie **localement bornée** est une k -catégorie \mathcal{C} vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) deux objets distincts de \mathcal{C} ne sont pas isomorphes,
- (ii) pour tout $x \in \mathcal{C}_0$ les espaces vectoriels $\bigoplus_{y \in \mathcal{C}_0} {}_y \mathcal{C}_x$ et $\bigoplus_{y \in \mathcal{C}_0} {}_x \mathcal{C}_y$ sont de dimension finie,
- (iii) pour tout $x \in \mathcal{C}_0$, la k -algèbre ${}_x \mathcal{C}_x$ est locale.

Une k -catégorie **localement de dimension finie** est une k -catégorie \mathcal{C} vérifiant les conditions (i) et (iii) ci-dessus et telle que :

- (ii') l'espace vectoriel ${}_y \mathcal{C}_x$ est de dimension finie pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$.

Remarque 1.2.10 Si une k -catégorie est localement bornée alors elle est localement de dimension finie. Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. Alors la k -catégorie associée à A au moyen d'un système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux est localement bornée (donc localement de dimension finie).

La notion de k -catégorie localement de dimension finie permet de définir le radical d'une k -catégorie. Cette définition est due à K. Bongartz et P. Gabriel. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [9].

Définition 1.2.11 (voir [9]) Soit \mathcal{C} une k -catégorie localement de dimension finie. Le **radical** \mathcal{RC} est l'idéal tel que ${}_y \mathcal{RC}_x$ est l'ensemble des morphismes $x \rightarrow y$ qui ne sont pas des isomorphismes. La puissance n -ième $(\mathcal{RC})^n$ du radical sera notée $\mathcal{R}^n \mathcal{C}$.

Remarque 1.2.12 Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. Alors le radical de A vue comme k -catégorie correspond au radical de A vue comme k -algèbre.

Définition 1.2.13 Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Nous dirons que \mathcal{C} est **connexe** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$ il existe une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ d'objets de \mathcal{C} telle que ${}_x \mathcal{C}_{x_{i+1}} \oplus {}_{x_{i+1}} \mathcal{C}_{x_i} \neq 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Définition 1.2.14 Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Une **composante connexe** de \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} qui est connexe et dont l'ensemble des objets est maximal pour cette propriété.

Remarque 1.2.15 La k -catégorie \mathcal{C} est la réunion disjointe de ses composantes connexes.

Remarque 1.2.16 La k -algèbre de dimension finie A est connexe si et seulement si la k -catégorie associée l'est.

Propriété 1.2.17 Soit \mathcal{C} une k -catégorie connexe et soit $E \subseteq \mathcal{C}_0$ un sous-ensemble non vide vérifiant l'implication suivante pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$:

$${}_y \mathcal{C}_x \neq 0 \implies (x \in E \Leftrightarrow y \in E)$$

Alors $E = \mathcal{C}_0$.

Preuve : Soit $x_0 \in E$ et soit $x \in \mathcal{C}_0$. Puisque \mathcal{C} est connexe, il existe une suite $x_0, \dots, x_n = x$ d'objets de E telle que ${}_x \mathcal{C}_{x_{i+1}} \oplus {}_{x_{i+1}} \mathcal{C}_{x_i} \neq 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Ayant $x_0 \in E$, l'hypothèse faite sur E implique successivement $x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_n \in E$. Donc $x \in E$ pour tout $x \in \mathcal{C}_0$. \square

1.2.3 Catégories G -graduées

Dans [14] (voir également [19]) C. Cibils et E. N. Marcos ont établi un lien entre la notion de revêtement galoisien de k -catégorie et la notion de k -catégorie graduée. Nous utiliserons ce lien au Chapitre 6. Aussi nous faisons un bref rappel sur les k -catégories graduées.

Définition 1.2.18 Soit G un groupe. Une k -catégorie G -graduée est une k -catégorie \mathcal{C} munie, pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$, d'une décomposition ${}_y\mathcal{C}_x = \bigoplus_{g \in G} {}_y\mathcal{C}_x^g$ en somme directe de sous-espaces vectoriels vérifiant la condition suivante :

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{C}_0) (\forall g, h \in G) \quad {}_z\mathcal{C}_y^g {}_y\mathcal{C}_x^h \subseteq {}_z\mathcal{C}_x^{gh}$$

Les morphismes appartenant à ${}_y\mathcal{C}_x^g$ seront dits **homogènes de degré g** .

Remarque 1.2.19 Si \mathcal{C} est une k -catégorie G -graduée, alors pour tout $x \in \mathcal{C}_0$, la k -algèbre ${}_x\mathcal{C}_x$ est G -graduée, en particulier, le morphisme identité 1_x de x est homogène de degré l'unité de G .

Définition 1.2.20 Soit \mathcal{C} une k -catégorie G -graduée. Un **idéal homogène** de \mathcal{C} est un idéal I tel que :

$$(\forall x, y \in \mathcal{C}_0) \quad {}_yI_x = \bigoplus_{g \in G} {}_yI_x \cap {}_y\mathcal{C}_x^g$$

Remarque 1.2.21 Pour montrer qu'un idéal I est homogène il suffit de montrer que pour tout $u \in {}_yI_x$, la décomposition $u = \sum_{g \in G} u_g$ avec $u_g \in {}_y\mathcal{C}_x^g$ vérifie $u_g \in {}_yI_x$ pour tout $g \in G$.

Chapitre 2

Présentations admissibles

Dans ce Chapitre nous rappelons ce qu'est une présentation d'une k -algèbre (ou k -catégorie) par carquois et relations admissibles (carquois liés). Il s'agit d'une présentation par générateurs et relations introduite par P. Gabriel : les générateurs sont les sommets et les flèches d'un carquois et les relations sont des combinaisons linéaires de chemins du carquois. Le caractère «admissible» des relations assure que pour une k -algèbre fixée, deux présentations sont relatives au même carquois.

Dans la Section 2.1 nous introduirons les notions combinatoires de base sur les carquois. Nous rappelons également la définition de l'algèbre et de la catégorie kQ des chemins d'un carquois Q .

Dans la Section 2.2 nous étudierons les automorphismes de la catégorie des chemins d'un carquois. Pour cela nous définissons deux notions qui seront centrales tout au long de ce texte : les raccourcis (déjà connus dans la littérature, voir [4]) et les double raccourcis (notion nouvelle, introduite par l'auteur dans [27]). Ces deux notions nous permettront de définir deux types d'automorphismes : les dilatations et les transvections. Les dilatations et les transvections sont des analogues des matrices de dilatation et des matrices de transvection. Le résultat principal de la Section 2.2 est le suivant : si Q est un carquois sans cycle orienté, alors $Aut_0(kQ)$ est engendré par les transvections et les dilatations (en analogie avec la génération de $GL_n(k)$ par les matrices de transvection et celles de dilatation).

Enfin la Section 2.3 est consacrée à la définition proprement dite des présentations admissibles.

2.1 Carquois et catégorie des chemins

2.1.1 La catégorie des carquois

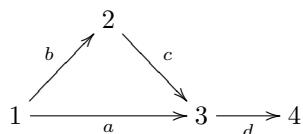
Un **carquois** Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, t) où Q_0, Q_1 sont des ensembles et $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$ sont des applications. Les éléments de Q_0 (resp. Q_1) sont appelés les **sommets** (resp. les **flèches**) de Q . Etant donnée une flèche $\alpha \in Q_1$, le sommet $s(\alpha)$ (resp. $t(\alpha)$) est appelé **la source** (resp. **le terminus**) de α . Nous utiliserons alors la notation $\alpha: s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ ou $s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$.

Il nous arrivera dans la suite d'avoir à considérer plusieurs carquois simultanément. Dans une telle situation nous utiliserons la même notation (s, t) pour désigner les applications source et terminus de l'un des carquois considérés.

Exemple 2.1.1 Soit Q le carquois défini par

- $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $Q_1 = \{1 \xrightarrow{a} 3, 1 \xrightarrow{b} 2, 2 \xrightarrow{c} 3, 3 \xrightarrow{d} 4\}$.

Il est plus commode d'écrire Q sous la forme d'un diagramme :



Avant de poursuivre nous introduisons quelques propriétés de finitude associées à un carquois. Etant donné un carquois Q et un sommet $x \in Q_0$, nous noterons x^+ (resp. x^-) l'ensemble des flèches de Q de source

(resp. de terminus) x :

$$x^+ = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = x\}$$

$$x^- = \{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = x\}$$

En particulier, nous dirons d'un sommet $x \in Q_0$ qu'il est une **source** (resp. un **terminus**) de Q si et seulement si $x^- = \emptyset$ (resp. $x^+ = \emptyset$), c'est à dire si et seulement si il n'existe aucune flèche de Q dont le terminus (resp. la source) est x .

Définition 2.1.2 Soit Q un carquois. Nous dirons que :

- Q est **fini** si les deux ensembles Q_0 et Q_1 sont finis,
- Q est **localement fini** si les ensembles x^+ et x^- sont finis pour tout $x \in Q_0$.

Remarque 2.1.3 Le carquois Q est donc localement fini si et seulement si de chaque sommet il ne part et n'arrive qu'au plus un nombre fini de flèches.

Soit Q un carquois. Un **sous-carquois** Q' de Q est la donnée de deux sous-ensembles $Q'_0 \subseteq Q_0$ et $Q'_1 \subseteq Q_1$ tels que si $\alpha \in Q'_1$ alors la source et le terminus de α appartiennent à Q'_0 . Les applications source et terminus $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$ induisent alors des applications $s', t': Q'_1 \rightarrow Q'_0$ qui font de $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ un carquois.

Soient Q et Q' deux carquois. Un **morphisme de carquois** $f: Q \rightarrow Q'$ est la donnée de deux applications :

$$f_0: Q_0 \rightarrow Q'_0 \quad \text{et} \quad f_1: Q_1 \rightarrow Q'_1$$

telles que pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y$ de Q , la flèche $f_1(\alpha)$ de Q' a pour source (resp. pour terminus) $f_0(s(\alpha)) = f_0(x)$ (resp. $f_0(t(\alpha)) = f_0(y)$) :

$$f_0(x) \xrightarrow{f_1(\alpha)} f_0(y)$$

Afin d'alléger les notations, nous utiliserons la notation f pour désigner chacune des applications $f_0: Q_0 \rightarrow Q'_0$ et $f_1: Q_1 \rightarrow Q'_1$ associées au morphisme de carquois $f: Q \rightarrow Q'$.

Exemple 2.1.4 Soit Q un carquois, le morphisme $1_Q: Q \rightarrow Q$ est tel que les applications $Q_0 \rightarrow Q_0$ et $Q_1 \rightarrow Q_1$ sont les applications identité.

Nous disposons donc de la **catégorie des carquois** décrite comme suit :

- les objets sont les carquois,
- les morphismes sont les morphismes de carquois,
- la composition gf de deux morphismes $f: Q \rightarrow Q'$ et $g: Q' \rightarrow Q''$ est le morphisme $h: Q \rightarrow Q''$ tel que $h_0 = g_0 f_0$ et $h_1 = g_1 f_1$.

Pour chaque carquois Q , son morphisme identité est le morphisme $1_Q: Q \rightarrow Q$ décrit dans l'Exemple 2.1.4. En particulier, il est aisé de vérifier qu'un morphisme de carquois $f: Q \rightarrow Q'$ est un isomorphisme si et seulement si $f: Q_0 \rightarrow Q'_0$ et $f: Q_1 \rightarrow Q'_1$ sont bijectives.

Etant donné un carquois Q , nous noterons $Aut(Q)$ le groupe des automorphismes de Q :

$$Aut(Q) = \{f: Q \rightarrow Q \mid f \text{ est un isomorphisme}\}$$

Les carquois interviennent dans l'étude des algèbres par le biais des présentations admissibles d'algèbres (dues à P. Gabriel) que nous introduisons plus loin. Ces présentations sont des présentations par «générateurs et relations» où les générateurs sont les sommets et les flèches d'un carquois. L'un des atouts des présentations admissibles est qu'étant donnée une k -algèbre de dimension finie, le carquois intervenant dans une présentation admissible est toujours le même : c'est le carquois ordinaire de l'algèbre dont nous rappelons à présent la définition.

Définition 2.1.5 (voir [6, III.1]) Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux et soit \mathfrak{r} le radical de A . Le **carquois ordinaire** de A est défini par :

- l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$,
- pour tous sommets i, j , le carquois a exactement $\dim_k e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$ flèches de source i et de terminus j .

Exemple 2.1.6 *Le carquois ordinaire de la k -algèbre k est réduit à un sommet sans flèche.*

Si $n \geq 1$, le carquois ordinaire de la k -algèbre des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures est :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

Notons que cette définition se généralise au cas des k -catégories localement de dimension finie.

Définition 2.1.7 (voir [9]) *Soit \mathcal{C} une k -catégorie localement de dimension finie. Le **carquois ordinaire** de \mathcal{C} est défini comme suit :*

- l'ensemble des sommets est \mathcal{C}_0 ,
- si x, y sont des sommets alors le carquois a exactement $\dim_k {}_y\mathcal{R}\mathcal{C}_x / {}_y\mathcal{R}^2\mathcal{C}_x$ flèches de source x et de terminus y .

Nous avons vu dans le Chapitre précédent qu'il est possible d'associer une k -catégorie à une k -algèbre de dimension finie. La Proposition suivante bien connue établit la cohérence entre cette association et la définition du carquois ordinaire.

Proposition 2.1.8 *Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Alors le carquois ordinaire de A et celui de la k -catégorie associée à A sont isomorphes.*

La Proposition 2.1.8 montre en particulier que la classe d'isomorphisme du carquois ordinaire d'une k -algèbre de dimension finie et basique ne dépend pas du choix d'un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux.

Remarque 2.1.9 *Soit \mathcal{C} une k -catégorie localement bornée (par exemple une k -algèbre de dimension finie). Alors le carquois ordinaire de \mathcal{C} est localement fini.*

2.1.2 Chemins et promenades dans un carquois

Soit Q un carquois. Si $x, y \in Q_0$ sont deux sommets de Q , un **chemin** u de Q de source x et de terminus y est une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 0$) de flèches de Q telles que :

- si $n = 0$ alors $x = y$,
- $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
- $s(\alpha_1) = x$ et $t(\alpha_n) = y$.

Le chemin u sera dit de **longueur** n et noté

$$u = \alpha_n \dots \alpha_1 \quad \text{ou encore} \quad x = x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} x_n = y$$

afin de préciser les sommets apparaissant dans u . Si $n = 0$ le chemin sera noté $u = e_x$ et il sera dit **stationnaire** en x ou **trivial**. Enfin nous étendons les fonctions source et terminus $s, t: Q_0 \rightarrow Q_1$ au chemin u en posant $s(u) = x$ et $t(u) = y$. Une **boucle** de Q est une flèche dont la source et le terminus coïncident. Deux chemins de Q seront dits **parallèles** si ils ont la même source et le même terminus. En particulier, nous dirons que Q est **sans flèches multiples** si deux flèches distinctes de Q ne sont pas parallèles. Enfin un **cycle orienté** de Q est un chemin non trivial de Q dont la source et le terminus coïncident.

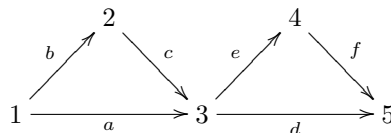
L'utilisation du carquois ordinaire permet d'introduire certaines classes d'algèbres (ou de k -catégories) bien connues et dont nous rappelons la définition :

Définition 2.1.10 *Soit \mathcal{C} une k -catégorie localement bornée (par exemple une k -algèbre de dimension finie et basique). Soit Q le carquois ordinaire de \mathcal{C} . Nous dirons que \mathcal{C} est :*

- **triangulaire** si Q n'a pas de cycle orienté,
- **contrainte** si pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$ l'espace vectoriel ${}_y\mathcal{C}_x$ est de dimension 1,
- **sans boucle** si Q n'a pas de boucle,
- **sans flèches multiples** si Q est sans flèches multiples (le terme utilisé dans la littérature anglo-saxonne est «square-free»).

Remarque 2.1.11 *Soit Q un carquois sans cycle orienté. Alors une flèche quelconque apparaît au plus une fois dans un chemin de Q .*

Exemple 2.1.12 Soit Q le carquois :



Les chemins de Q sont :

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, b, a, cb, ea, ecb, da, dcb, fea, fecb, c, ec, dc, fec, e, d, fe, f$$

Définition 2.1.13 Soit Q un carquois, soient u et v deux chemins de Q . Si $s(v) = t(u)$ alors la **concaténation** vu de v et de u est le chemin de Q défini comme suit :

- si u (resp. v) est stationnaire alors $vu = v$ (resp. $vu = u$).
- si $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ et $v = \beta_m \dots \beta_1$ ($\alpha_i, \beta_i \in Q_1$) alors :

$$vu = \beta_m \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1$$

Remarque 2.1.14 La notation $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ est ambiguë dans la mesure où les termes α_i peuvent être des flèches ou des chemins de longueur au moins 2. Aussi, lorsque nous écrivons $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ il sera sous-entendu (sauf mention expresse du contraire) que les termes α_i sont des flèches. Nous adopterons également cette convention pour l'utilisation des symboles β_i, γ_i, a_i .

Nous pouvons à présent rappeler la définition de la catégorie et de l'algèbre des chemins d'un carquois .

Définition 2.1.15 Soit Q un carquois. La **catégorie des chemins de Q** est la k -catégorie, notée kQ , définie comme suit :

- l'ensemble des objets est Q_0 ,
- si $x, y \in Q_0$, l'espace ${}_y kQ_x$ est le k -espace vectoriel de base la famille des chemins de Q de source x et de terminus y .
- pour $x, y, z \in Q_0$ la composition des morphismes est donnée par la concaténation des chemins :

$$\begin{array}{ccc} {}_z kQ_y \times {}_y kQ_x & \longrightarrow & {}_z kQ_x \\ (v, u) & \longmapsto & vu \end{array}$$

Si $x, y \in Q_0$ et si $u \in {}_y kQ_x$, nous écrivons $s(u) = x$ et $t(u) = y$.

Définition 2.1.16 Soit Q un carquois. **L'algèbre des chemins kQ de Q** est la k -algèbre associative non nécessairement unitaire ayant pour base la famille des chemins de Q et dont le produit $v.u$ de deux chemins est la concaténation vu lorsqu'elle est définie et 0 sinon.

Notons que la catégorie des chemins d'un carquois vérifie la propriété universelle suivante :

Propriété 2.1.17 Soit Q un carquois et soit \mathcal{C} une k -catégorie. Soit $f_0: Q_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ une application et soit $\{f_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ une famille de morphismes de \mathcal{C} telle que $f_\alpha \in {}_{f_0(y)} \mathcal{C}_{f_0(x)}$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$. Alors il existe un et un seul morphisme $F: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ tel que :

- $F(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in Q_0$,
- $F(\alpha) = f_\alpha$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Pour cette raison, la k -catégorie kQ est dite **k -catégorie libre**.

En particulier, si $f: Q \rightarrow Q'$ est un morphisme de carquois, nous noterons $f: kQ \rightarrow kQ'$ le morphisme étendant les applications $f: Q_0 \rightarrow Q'_0$ et $f: Q_1 \rightarrow Q'_1$.

Propriété 2.1.18 Soit Q un carquois, alors kQ est une k -algèbre unitaire si et seulement si Q_0 est fini. Dans ce cas l'unité est $1 = \sum_{x \in Q_0} e_x$ et cette expression est une décomposition en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Si Q_0 est fini alors kQ est une k -algèbre de dimension finie si et seulement si Q_1 est fini et Q n'a pas de cycle orienté.

Propriété 2.1.19 Soit Q un carquois localement fini et sans cycle orienté. Alors kQ est une k -catégorie localement de dimension finie. Le radical $\mathcal{R}(kQ)$ de la k -catégorie kQ est exactement l'idéal de kQ engendré par l'ensemble flèches de Q . Nous le noterons kQ^+ . Plus précisément, pour $x, y \in Q_0$, l'espace ${}_y(kQ^+)_x \subseteq {}_y kQ_x$ est engendré par les chemins non triviaux de Q de source x et de terminus y .

Remarque 2.1.20 Le carquois ordinaire de kQ est donc Q

Dans la suite, kQ^+ désignera également l'idéal de la k -algèbre kQ engendré par les flèches de Q . Cet idéal est donc engendré par les chemins non triviaux de Q .

Définition 2.1.21 Soit Q un carquois. Soit r un élément de la k -algèbre kQ . Donc r est une combinaison linéaire des chemins de Q et nous appellerons **le support de r** , noté $\text{supp}(r)$, l'ensemble des chemins de Q qui apparaissent dans cette combinaison linéaire avec un coefficient non nul.

Tout élément $r \in kQ$ est une combinaison linéaire de chemins $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$. Afin d'éviter de répéter que nous supposons que les scalaires t_1, \dots, t_n sont non nuls et que les chemins u_1, \dots, u_n sont deux à deux distincts, nous introduisons la notion de forme normale de r .

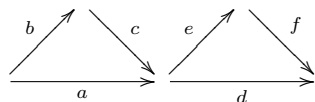
Définition 2.1.22 Soit Q un carquois et soit $r \in kQ$. Une **forme normale de r** est une expression de la forme :

$$r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$$

où $t_1, \dots, t_n \in k^*$ et où u_1, \dots, u_n sont des chemins deux à deux distincts de Q .

Remarque 2.1.23 Si $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ est une forme normale de r , alors $\text{supp}(r) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

Exemple 2.1.24 Soit Q le carquois :



Soit $r_1 = da + 2 fecb + fea$ et $r_2 = dcb - fecb$. Alors $\text{supp}(r_1) = \{da, fecb, fea\}$, $\text{supp}(r_2) = \{dcb, fecb\}$ et $\text{supp}(r_1 + 2 r_2) = \{da, fea, dcb\}$.

Remarque 2.1.25 Considérons kQ comme un k -espace vectoriel de base la famille des chemins de Q . Pour chaque chemin u de Q , nous disposons de la forme linéaire $u^* : kQ \rightarrow k$ telle que pour tout chemin v de Q :

$$u^*(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, le support de $r \in kQ$ est décrit par :

$$\text{supp}(r) = \{u \mid u^*(r) \neq 0\}$$

Notons que $\text{supp}(r) = \emptyset \Leftrightarrow r = 0$. Notons également que si Q est fini et sans cycle orienté alors $\{u^*\}_u$ chemin est la base de l'espace vectoriel $(kQ)^*$ duale de la base de kQ formée des chemins de Q .

Afin d'alléger les notations dans les démonstrations nous introduisons la notion de sous-expression.

Définition 2.1.26 Soit Q un carquois et soient $r, r' \in {}_y kQ_x$. Nous dirons que r' est une **sous-expression** de r si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\text{supp}(r') \subseteq \text{supp}(r)$,
- si $u \in \text{supp}(r')$ alors $u^*(r) = u^*(r')$.

Remarque 2.1.27 Soient $r, r' \in {}_y k Q_x$. Soit $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ une forme normale. Alors r' est une sous-expression de r si et seulement si il existe $E \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$r' = \sum_{i \in E} t_i u_i$$

Notons deux propriétés utiles relatives à la notion de sous-expression.

Propriété 2.1.28 Soit Q un carquois, et soit $r \in {}_y k Q_x$. Supposons que $r = r_1 + \dots + r_n$ avec $\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors :

- $\text{supp}(r) = \text{supp}(r_1) \sqcup \dots \sqcup \text{supp}(r_n)$,
- r_i est une sous-expression de r pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve : L'égalité $r = r_1 + \dots + r_n$ entraîne $\text{supp}(r) \subseteq \text{supp}(r_1) \cup \dots \cup \text{supp}(r_n)$. D'autre part, cette dernière réunion est disjointe par hypothèse. Soit $u \in \text{supp}(r_1) \sqcup \dots \sqcup \text{supp}(r_n)$. Donc il existe un unique $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u \in \text{supp}(r_i)$. Il vient alors :

$$u^*(r) = u^*(r_1) + \dots + u^*(r_n) = u^*(r_i) \neq 0$$

Ceci démontre que :

- $u \in \text{supp}(r)$,
- si $u \in \text{supp}(r_i)$ alors $u^*(r_i) = u^*(r)$.

Donc $\text{supp}(r) = \text{supp}(r_1) \sqcup \dots \sqcup \text{supp}(r_n)$ et r_i est une sous-expression de r pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Propriété 2.1.29 Soit Q un carquois. Soit $r \in {}_y k Q_x$ et soit r' une sous-expression de r . Supposons que $r = r_1 + \dots + r_n$ avec $\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Supposons également que :

$$\text{si } i \in \{1, \dots, n\} \text{ alors } \text{supp}(r_i) \subseteq \text{supp}(r') \text{ ou } \text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r') = \emptyset$$

Alors il existe des indices $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts et tels que $r' = r_{i_1} + \dots + r_{i_m}$.

Preuve : Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ écrivons une forme normale $r_i = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} u_{i,j}$. Nous avons donc une forme normale pour r :

$$r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} u_{i,j}$$

Puisque r' est une sous-expression de r , il existe $E \subseteq \{(i, j) \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, n_i\}\}$ tel que :

$$r' = \sum_{(i,j) \in E} t_{i,j} u_{i,j}$$

Ceci entraîne en particulier :

$$\text{supp}(r') = \{u_{i,j} \mid (i, j) \in E\}$$

Or, si $i \in \{1, \dots, n\}$ nous avons $\text{supp}(r_i) \subseteq \text{supp}(r')$ ou $\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r') = \emptyset$, donc :

$$\{(i, j) \mid j = 1, \dots, n_i\} \subseteq E \text{ ou } E \cap \{(i, j) \mid j = 1, \dots, n_i\} = \emptyset$$

Posons $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ les indices deux à deux distincts tels que :

$$\{(i, j) \mid j = 1, \dots, n_i\} \subseteq E \Leftrightarrow i \in \{i_1, \dots, i_m\}$$

Nous avons donc $r' = r_{i_1} + \dots + r_{i_m}$. \square

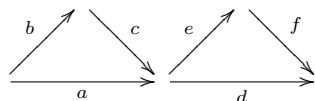
Rappelons à présent la notion de promenade d'un carquois.

Soit Q un carquois. Pour chaque flèche $x \xrightarrow{\alpha} y$ de Q nous définissons son inverse formel $y \xrightarrow{\alpha^{-1}} x$ de source $s(\alpha^{-1}) = y$ et de terminus $t(\alpha^{-1}) = x$. Par abus de notation, nous écrirons $\alpha^{-1} = \alpha$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$. Etant donnés deux sommets $x, y \in Q_0$, une **promenade** γ de Q de source x et de terminus y est une suite $\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_n^{\varepsilon_n}$ ($n \geq 0$) de flèches et d'inverses formels de flèches tels que :

- si $n = 0$, alors $x = y$,
- $s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$.
- $s(\alpha_1^{\varepsilon_1}) = x$ et $t(\alpha_n^{\varepsilon_n}) = y$.

Cette promenade sera notée $\gamma = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$. Si $n = 0$, nous noterons $\gamma = e_x$, et cette promenade sera dite **stationnaire en x** . Les fonctions source et terminus s, t définies sur l'ensemble des chemins sont étendues à la promenade γ en posant $s(\gamma) = x$ et $t(\gamma) = y$. Enfin, si $\gamma = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade de Q , nous noterons γ^{-1} la promenade définie par : $\gamma^{-1} = \gamma$ si γ est stationnaire, et $\gamma^{-1} = \alpha_1^{-\varepsilon_1} \dots \alpha_n^{-\varepsilon_n}$ sinon.

Exemple 2.1.30 Soit Q le carquois :



$b^{-1}c^{-1}a$, $b^{-1}c^{-1}d^{-1}da$ et $a^{-1}d^{-1}$ sont des promenades de Q .

Remarque 2.1.31 Les chemins d'un carquois Q sont donc des promenades de Q .

Soit Q un carquois et soient γ et γ' des promenades de Q . La **concaténation** $\gamma'\gamma$ de γ et de γ' est définie lorsque $s(\gamma') = t(\gamma)$ de la façon suivante :

- $\gamma'\gamma = \gamma$ (resp. $\gamma'\gamma = \gamma'$) lorsque γ' (resp. γ) est stationnaire.
- $\gamma'\gamma = \beta_m^{\eta_m} \dots \beta_1^{\eta_1} \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ si $\gamma = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ et $\gamma' = \beta_m^{\eta_m} \dots \beta_1^{\eta_1}$.

Si $f: Q \rightarrow Q'$ est un morphisme de carquois et si γ est une promenade de Q , alors nous définissons la promenade $f(\gamma)$ par :

$$f(\gamma) = \begin{cases} e_{f(x)} & \text{si } \gamma = e_x \\ f(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots f(\alpha_1)^{\varepsilon_1} & \text{si } \gamma = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1} \end{cases}$$

Définition 2.1.32 Un carquois Q est dit **connexe** si pour tous sommets $x, y \in Q_0$ il existe une promenade de source x et de terminus y .

Proposition 2.1.33 Soit Q un carquois. Alors la k -catégorie kQ est connexe si et seulement si Q est connexe. Si Q est fini alors la k -algèbre kQ est connexe si et seulement si Q est connexe.

2.2 Automorphismes de kQ

Fixons pour cette section un carquois Q quelconque. Nous allons nous intéresser aux automorphismes de kQ dont la restriction à Q_0 est l'application identité. Rappelons que ces automorphismes forment le sous-groupe $Aut_0(kQ)$ de $Aut(kQ)$:

$$Aut_0(kQ) = \{\psi: kQ \xrightarrow{\sim} kQ \in Aut(kQ) \mid (\forall x \in Q_0) \psi(x) = x\}$$

Remarque 2.2.1 D'un point de vue plus général, le groupe des automorphismes d'une k -algèbre de dimension finie a déjà été étudié, voir par exemple [21], [34], [38] et [37].

Commençons par donner deux Propriétés sur les éléments de $Aut_0(kQ)$.

Propriété 2.2.2 Supposons que Q est localement fini et n'a pas de cycle orienté. Soit $\psi \in Aut_0(kQ)$. Alors $\psi(kQ^+) = kQ^+$ et $\psi((kQ^+)^2) = (kQ^+)^2$.

Preuve : Soient x, y deux sommets de Q . Comme Q n'a pas de cycle orienté, ${}_y kQ_x^+$ est de dimension finie. Soit $x \xrightarrow{u} y$ un chemin non trivial. Puisque Q n'a pas de cycle orienté, x et y sont distincts, donc $\psi(u) \in {}_y kQ_x = {}_y kQ_x^+$. Ceci démontre que $\psi({}_y kQ_x^+) \subseteq {}_y kQ_x^+$. Or ${}_y kQ_x^+$ est de dimension finie et $\psi \in Aut(kQ)$, donc ${}_y kQ_x^+$ et $\psi({}_y kQ_x^+)$ ont la même dimension. Ceci montre que :

$$(\forall x, y \in Q_0) \quad \psi({}_y kQ_x^+) = {}_y kQ_x^+$$

autrement dit $\psi(kQ^+) = kQ^+$. D'autre part :

- $\psi((kQ^+)^2) = \psi(kQ^+kQ^+) \subseteq \psi(kQ^+)\psi(kQ^+) \subseteq kQ^+kQ^+ = (kQ^+)^2$,
- pour tous $x, y \in Q_0$ le k -espace vectoriel ${}_y(kQ^+)_x^2$ est de dimension finie,
- pour tous $x, y \in Q_0$ les espaces ${}_y(kQ^+)_x^2$ et $\psi({}_y(kQ^+)_x^2)$ ont la même dimension car $\psi \in \text{Aut}(kQ)$.

Donc $\psi((kQ^+)^2) = (kQ^+)^2$. \square

Propriété 2.2.3 *Supposons que Q est localement fini et n'a pas de cycle orienté. Soit $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$. Soient $x, y \in Q_0$ deux sommets distincts de sorte que ${}_y kQ_x = {}_y kQ_x^+$. Notons E le sous-espace vectoriel de ${}_y kQ_x$ engendré par les flèches $x \rightarrow y$ de Q et soit $\iota: E \hookrightarrow {}_y kQ_x$ l'inclusion. Nous avons ${}_y kQ_x = E \oplus {}_y(kQ^+)_x^2$ et si $p: {}_y kQ_x \rightarrow E$ désigne la projection associée à cette décomposition, alors l'application linéaire :*

$$E \xrightarrow{\iota} {}_y kQ_x \xrightarrow{\psi} {}_y kQ_x \xrightarrow{p} E$$

est un isomorphisme.

Preuve : Soit $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$. Puisque $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$, il existe $r \in {}_y kQ_x$ tel que $\alpha = \psi(r)$. Ecrivons $r = r_1 + r_2$ avec $r_1 \in E$ et $r_2 \in {}_y(kQ^+)_x^2$. La Propriété 2.2.2 page précédente implique en particulier que $\psi(r_2) \in {}_y(kQ^+)_x^2$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi(r_1) + \psi(r_2) \\ &= \psi \iota(r_1) \bmod {}_y(kQ^+)_x^2 \\ &= p\psi \iota(r_1) \bmod {}_y(kQ^+)_x^2 \end{aligned}$$

Or $p\psi \iota(r_1) \in E$, donc $\alpha = p\psi \iota(r_1)$. Ceci démontre que $p\psi \iota$ est injective. Puisque E est de dimension finie, cela démontre également que $p\psi \iota$ est bijective. \square

Nous allons étudier le groupe $\text{Aut}_0(kQ)$ à l'aide de deux familles d'automorphismes : les transvections et les dilatations. La terminologie est inspirée des matrices de transvections et des matrices de dilatation. Pour rappel, étant donné un entier $n \geq 1$, une matrice de dilatation est une matrice diagonale inversible de taille $n \times n$ dont tous les coefficients diagonaux sauf éventuellement un sont égaux à 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, une matrice de transvection est une matrice de taille $n \times n$ de la forme :

$$I_n + \lambda E_{i,j}$$

où $\lambda \in k$, où I_n désigne la matrice identité de taille n et où $E_{i,j}$ est la matrice carrée $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i , colonne j , lequel est égal à 1.

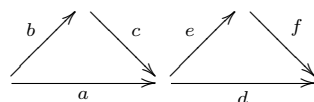
La définition des transvections de kQ utilise la notion de raccourci de Q que nous introduisons à présent.

2.2.1 Raccourcis et double raccourcis dans un carquois

Nous définissons dans cette sous-Section deux objets combinatoires associés à un carquois : les raccourcis et les double raccourcis. Les raccourcis ont été introduits dans [4] dans l'étude des algèbres schuriennes fortement simplement connexes.

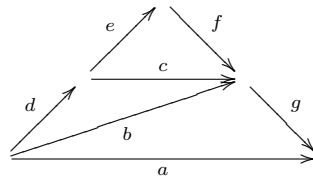
Définition 2.2.4 (voir [4]) *Soit Q un carquois. Un **raccourci** de Q est un couple (α, u) où α est une flèche de Q et u est un chemin de Q , distinct de α et parallèle à α .*

Exemple 2.2.5 *Soit Q le carquois :*



Les raccourcis de Q sont (a, cb) et (d, fe) .

Exemple 2.2.6 Soit Q le carquois :



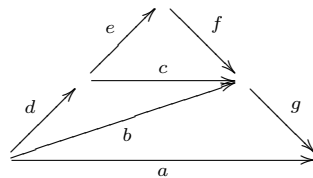
Les raccourcis de Q sont (a, gcd) , $(a, gfed)$, (a, gb) , (b, cd) , (b, fed) et (c, fe) .

Définition 2.2.7 Soit Q un carquois. Un **double raccourci** de Q est un quadruplet (α, u, β, v) tel que :

- (α, u) et (β, v) sont des raccourcis de Q ,
- la flèche β apparaît dans le chemin u (i.e. il existe des chemins u_1 et u_2 tels que $u = u_2\beta u_1$).

Exemple 2.2.8 Le carquois de l'Exemple 2.2.5 page précédente n'a pas de double raccourci.

Exemple 2.2.9 Soit Q le carquois :



Les double raccourcis de Q sont (a, gcd, c, fe) , (a, gb, b, cd) , (a, gb, b, fed) et (b, cd, c, fe) .

Remarque 2.2.10 Soit Q un carquois, alors :

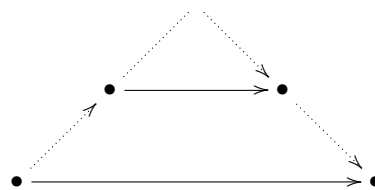
- si α, β sont deux flèches distinctes et parallèles de Q , alors $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ est un double raccourci,
- si $c = \alpha_n \dots \alpha_1$ est un cycle orienté, alors $(\alpha_1, \alpha_1 c, \alpha_1, \alpha_1 c)$ est un double raccourci.

Remarque 2.2.11 Soit Q un carquois sans cycle orienté et soit (α, u, β, v) un double raccourci. Alors il existe des chemins u_1 et u_2 (uniques d'après la Remarque 2.1.11 page 18) tels que $u = u_2\beta u_1$. Afin d'éviter la multiplication des notations dans la suite, le chemin $u_2\beta u_1$ sera dit **obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par v** . Notons que (α, u_2vu_1) est alors un raccourci.

Il nous arrivera dans la suite de considérer des carquois sans double raccourci. Aussi nous donnons une caractérisation «visuelle» de cette propriété. Nous omettons sa démonstration qui est immédiate.

Proposition 2.2.12 Un carquois Q est sans double raccourci si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Q n'a pas de cycle orienté,
- Q n'a pas de flèches multiples,
- Q n'a aucun sous-carquois Q' de la forme suivante :



où les lignes pleines sont des flèches et les lignes pointillées sont des chemins (les sommets et les flèches de ces chemins sont supposés être des sommets et des flèches de Q').

2.2.2 Transvections et dilatations

Nous pouvons à présent définir les transvections et les dilatations de kQ .

Définition 2.2.13 Une **dilatation** est un automorphisme $D: kQ \rightarrow kQ$ tel que $D(\alpha) \in k^* \alpha$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Soit (α, u) un raccourci de Q et $\tau \in k$. La **transvection** $\varphi_{\alpha, u, \tau}: kQ \rightarrow kQ$ associée au triplet (α, u, τ) est l'automorphisme de kQ défini comme suit :

- $\varphi_{\alpha, u, \tau}(\alpha) = \alpha + \tau u$,
- $\varphi_{\alpha, u, \tau}(\beta) = \beta$ pour toute flèche β telle que $\beta \neq \alpha$.

La transvection $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ sera dite **relative au raccourci** (α, u) .

Notons que la définition de $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ est correcte grâce à la propriété universelle de kQ (voir la Propriété 2.1.17 page 19). De plus, les transvections et les dilatations sont des éléments de $\text{Aut}_0(kQ)$.

Remarque 2.2.14 L'ensemble des dilatations est un sous-groupe de $\text{Aut}_0(kQ)$.

Définition 2.2.15 Le sous-groupe de $\text{Aut}_0(kQ)$ constitué des dilatations est noté \mathcal{D} . Le sous-groupe de $\text{Aut}_0(kQ)$ engendré par les transvections est noté \mathcal{T} .

Commençons par établir quelques propriétés des groupes \mathcal{T} et \mathcal{D} .

Propriété 2.2.16 Si D est une dilatation et si φ est une transvection, alors $D\varphi D^{-1}$ est une transvection. En conséquence, \mathcal{T} est stable par conjugaison par les éléments de \mathcal{D} .

Preuve : Ecrivons $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$. Puisque D est une dilatation, il existe $\lambda, \mu \in k^*$ tels que :

$$D(\alpha) = \lambda \alpha \quad \text{et} \quad D(u) = \mu u$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} D\varphi D^{-1}(\alpha) &= D\varphi\left(\frac{1}{\lambda} \alpha\right) = \frac{1}{\lambda} D(\alpha + \tau u) = \alpha + \frac{\mu}{\lambda} \tau u \\ D\varphi D^{-1}(\beta) &= \beta \quad \text{pour toute flèche } \beta \neq \alpha \end{aligned}$$

Donc $D\varphi D^{-1} = \varphi_{\alpha, u, \frac{\mu}{\lambda} \tau}$. □

Propriété 2.2.17 Supposons que Q n'a pas de cycle orienté. Soient $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\alpha, v, \nu}$ deux transvections. Alors $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\alpha, v, \nu}$ commutent et :

- $\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu}(\alpha) = \alpha + \tau u + \nu v$,
- $\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu}(\beta) = \beta$ pour toute flèche $\beta \neq \alpha$.

En particulier, $\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu} = \varphi_{\alpha, u, \tau + \nu}$ et $\varphi_{\alpha, u, \tau}^{-1} = \varphi_{\alpha, u, -\tau}$.

Preuve : Puisque Q n'a pas de cycle orienté, la flèche α n'apparaît ni dans u ni dans v . Donc :

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu}(\alpha) &= \varphi_{\alpha, u, \tau}(\alpha + \nu v) = \alpha + \tau u + \nu v \\ \varphi_{\alpha, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau}(\alpha) &= \varphi_{\alpha, v, \nu}(\alpha + \tau u) = \alpha + \nu v + \tau u \end{aligned}$$

D'autre part, si β est une flèche différente de α , alors :

$$\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu}(\beta) = \beta = \varphi_{\alpha, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau}(\beta)$$

La description annoncée de $\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, v, \nu}$ est donc vérifiée. Les autres assertions sont conséquence directe du calcul que nous venons de faire. □

Propriété 2.2.18 Soient $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\beta, v, \nu}$ deux transvections. Si (α, u, β, v) et (β, v, α, u) ne sont pas des double raccourcis et si $\alpha \neq \beta$ alors $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\beta, v, \nu}$ commutent et :

- $\varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\beta, v, \nu}(\alpha) = \alpha + \tau u$,

- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\beta,v,\nu}(\beta) = \beta + \nu v$,
- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\beta,v,\nu}(\gamma) = \gamma$ pour toute flèche $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.

Preuve : Ni (α, u, β, v) ni (β, v, α, u) n'est un double raccourci, autrement dit :

- la flèche β n'apparaît pas dans le chemin u ,
- la flèche α n'apparaît pas dans le chemin v .

Ceci entraîne les égalités suivantes :

$$\varphi_{\beta,v,\nu}(u) = u \quad \text{et} \quad \varphi_{\alpha,u,\tau}(v) = v$$

Nous avons donc (rappelons que $\beta \neq \alpha$) :

- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\beta,v,\nu}(\alpha) = \varphi_{\alpha,u,\tau}(\alpha) = \alpha + \tau u = \varphi_{\beta,v,\nu}(\alpha + \tau u) = \varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\alpha)$,
- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\beta,v,\nu}(\beta) = \varphi_{\alpha,u,\tau}(\beta + \nu v) = \beta + \nu v = \varphi_{\beta,v,\nu}(\beta) = \varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\beta)$,
- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\beta,v,\nu}(\gamma) = \varphi_{\alpha,u,\tau}(\gamma) = \gamma = \varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\gamma)$ pour toute flèche $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.

Ceci démontre la Propriété. □

Propriété 2.2.19 *Supposons que Q n'a pas de cycle orienté. Soit (α, u, β, v) un double raccourci. Notons w le chemin obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par v . Si $(\alpha, u, \beta, v) \neq (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ alors :*

$$\varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau} = \varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}\varphi_{\beta,v,\nu}$$

En particulier, si $\tau\nu \neq 0$, alors $\varphi_{\alpha,u,\tau}$ et $\varphi_{\beta,v,\nu}$ ne commutent pas.

Preuve : Soient u_1, u_2 les chemins tels que :

$$u = u_2\beta u_1 \quad \text{et} \quad w = u_2\nu u_1$$

Puisque Q n'a pas de cycle orienté et que $(\alpha, u, \beta, v) \neq (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ nous avons :

- $\alpha \neq \beta$ (si $\alpha = \beta$ alors $u = u_2\alpha u_1$ alors que u et α sont parallèles et que Q n'a pas de cycle orienté donc $u = \alpha$ ce qui est faux),
- α n'apparaît ni dans v ni dans $w = u_2\nu u_1$,
- β n'apparaît ni dans u_1 , ni dans u_2 , ni dans u .

Nous avons donc :

- $\varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\alpha) = \varphi_{\beta,v,\nu}(\alpha + \tau u) = \alpha + \tau u + \tau\nu w$,
- $\varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\beta) = \varphi_{\beta,v,\nu}(\beta) = \beta + \nu v$,
- $\varphi_{\beta,v,\nu}\varphi_{\alpha,u,\tau}(\gamma) = \gamma$ pour toute flèche $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.

D'autre part :

- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}\varphi_{\beta,v,\nu}(\alpha) = \varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}(\alpha) = \alpha + \tau u + \tau\nu w$,
- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}\varphi_{\beta,v,\nu}(\beta) = \varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}(\beta + \nu v) = \varphi_{\alpha,u,\tau}(\beta + \nu v) = \beta + \nu v$,
- $\varphi_{\alpha,u,\tau}\varphi_{\alpha,w,\tau\nu}\varphi_{\beta,v,\nu}(\gamma) = \gamma$ pour toute flèche $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.

Nous avons donc bien l'égalité annoncée. □

Propriété 2.2.20 *Soient $\alpha \neq \beta$ deux flèches parallèles et soient τ, ν des scalaires non nuls. Alors $\varphi_{\alpha,\beta,\tau}$ et $\varphi_{\beta,\alpha,\nu}$ ne commutent pas.*

Preuve : Nous avons :

- $\varphi_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_{\beta,\alpha,\nu}(\alpha) = \alpha + \tau \beta$,
- $\varphi_{\beta,\alpha,\nu}\varphi_{\alpha,\beta,\tau}(\alpha) = (1 + \tau\nu) \alpha + \tau \beta$. □

Propriété 2.2.21 *Supposons que Q n'a pas de cycle orienté. Soient $\varphi_{\alpha,u,\tau}$ et $\varphi_{\beta,v,\nu}$ deux transvections avec $\tau \neq 0$ et $\nu \neq 0$. Si ces deux transvections commutent alors :*

- (α, u, β, v) n'est pas un double raccourci,

- (β, v, α, u) n'est pas un double raccourci,
- $\varphi_{\alpha, u, \tau'}$ et $\varphi_{\beta, v, \nu'}$ commutent pour tous $\tau' \in k$ et $\nu' \in k$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la Propriété 2.2.17 page 25, de la Propriété 2.2.18 page 25, de la Propriété 2.2.19 page précédente et de la Propriété 2.2.20 page ci-contre. \square

La Propriété 2.2.21 page précédente fournit en particulier une autre caractérisation du fait que Q n'a pas de double raccourci.

Proposition 2.2.22 *Un carquois n'a pas de double raccourci si et seulement si :*

- il n'a pas de cycle orienté,
- deux transvections quelconques commutent.

Preuve : Si Q n'a pas de double raccourci, alors Q n'a pas de cycle orienté d'après la Remarque 2.2.10 page 24, en outre les transvections commutent deux à deux d'après la Propriété 2.2.17 page 25 et la Propriété 2.2.18 page 25. La réciproque est une conséquence directe de la Propriété 2.2.21 page précédente \square

2.2.3 Tout automorphisme est produit de dilatations et de transvections

Dans cette sous-Section nous allons démontrer le résultat principal de la présente Section. Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons un résultat classique d'algèbre linéaire qui sera utile pour sa démonstration.

Proposition 2.2.23 (voir [26, Chap XIII, §9]) *Soit $n \geq 1$ et soit $A \in GL_n(k)$. Alors il existe des matrices de transvection T_1, \dots, T_r telles que $T_1 \dots T_r A$ est diagonale.*

Proposition 2.2.24 *Soit Q un carquois localement fini et sans cycle orienté. Supposons que Q n'a qu'un nombre fini de raccourcis (par exemple : Q est fini et sans cycle orienté). Alors le groupe $Aut_0(kQ)$ est engendré par $\mathcal{T} \cup \mathcal{D}$. En particulier $Aut_0(kQ) = \mathcal{DT} = \mathcal{TD}$.*

Preuve : Puisque \mathcal{D} normalise \mathcal{T} (d'après la Propriété 2.2.16 page 25), les deux ensembles \mathcal{DT} et \mathcal{TD} sont des sous-groupes de $Aut_0(kQ)$ et $\mathcal{DT} = \mathcal{TD}$. Nous n'avons donc qu'à démontrer que $Aut_0(kQ) = \mathcal{TD}$. Remarquons que si $\psi \in Aut_0(kQ)$ et si α est une flèche de Q telle qu'il n'existe pas de raccourci de Q de la forme (α, u) (i.e. relatif à la flèche α), alors $\psi(\alpha) \in k^* \alpha$. Puisque Q n'a qu'un nombre fini de raccourcis, nous disposons donc, pour chaque $\psi \in Aut_0(kQ)$, d'un entier bien défini :

$$n(\psi) = \text{Card}(\{\alpha \in Q_1 \mid \psi(\alpha) \notin k^* \alpha\})$$

Ainsi :

$$\psi \in \mathcal{D} \Leftrightarrow n(\psi) = 0$$

Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \geq 0$, l'assertion suivante que nous noterons H_n :

«Si $\psi \in Aut_0(kQ)$ vérifie $n(\psi) \leq n$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{T}$ tel que $\varphi\psi \in \mathcal{D}$ »

Cela montrera bien que $Aut_0(kQ) = \mathcal{TD}$. L'assertion H_0 est vraie puisque : $\psi \in \mathcal{D} \Leftrightarrow n(\psi) = 0$. Soit $n \geq 1$, supposons que H_{n-1} est vraie et soit $\psi \in Aut_0(kQ)$ tel que $n(\psi) = n$. En particulier il existe une flèche $x \xrightarrow{\alpha_1} y$ de Q telle que $\psi(\alpha_1) \notin k^* \alpha_1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les flèches de Q de source x et de terminus y . Pour poursuivre nous aurons besoin du Lemme qui suit.

Lemme 2.2.25 *Il existe $\varphi \in \mathcal{T}$ tel que :*

- $\varphi\psi(\alpha) \in k^* \alpha + {}_y(kQ^+)_x^2$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$,
- si $\alpha \in Q_1$ n'est pas parallèle à α_1 et vérifie $\psi(\alpha) \in k^* \alpha$, alors $\varphi\psi(\alpha) \in k^* \alpha$.

Preuve : Adoptons les notations de la Propriété 2.2.3 page 23. Nous avons donc :

- $E = \text{Vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$,
- ${}_y kQ_x = E \oplus {}_y(kQ^+)_x^2$,
- $\iota: E \hookrightarrow {}_y kQ_x$ l'inclusion,
- $p: {}_y kQ_x \twoheadrightarrow E$ la projection associée à la décomposition ${}_y kQ_x = E \oplus {}_y(kQ^+)_x^2$.

D'après la Propriété 2.2.3 page 23, l'application linéaire :

$$f: E \xrightarrow{\iota} {}_y kQ_x \xrightarrow{\psi} {}_y kQ_x \xrightarrow{p} E$$

est un isomorphisme. La matrice de f dans la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de E est donc une matrice de $GL_d(k)$. D'après la Proposition 2.2.23 page précédente, il existe des applications linéaires f_1, \dots, f_r vérifiant les conditions suivantes :

- $f_1 \dots f_r f(\alpha_i) \in k^* \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,
- pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ il existe deux flèches distinctes α_{i_j} et α_{l_j} ainsi qu'un scalaire ν_j tels que :

$$(\forall i \in \{1, \dots, d\}) \quad f_j(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_{i_j} + \nu_j \alpha_{l_j} & \text{si } i = i_j \\ \alpha_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, r\}$ posons :

$$\varphi_j = \varphi_{\alpha_{i_j}, \alpha_{l_j}, \nu_j}$$

Posons $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_r \in \mathcal{T}$. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_i) &= \psi \iota(\alpha_i) \\ &= p \psi \iota(\alpha_i) \bmod {}_y (kQ^+)_x^2 \\ &= f(\alpha_i) \bmod {}_y (kQ^+)_x^2 \end{aligned}$$

De plus la définition des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ entraîne :

$$\begin{aligned} \varphi f(\alpha_i) &= \varphi_1 \dots \varphi_r f(\alpha_i) \\ &= f_1 \dots f_r f(\alpha_i) \\ &\in k^* \alpha_i \end{aligned}$$

Enfin, $\varphi({}_y (kQ^+)_x^2) \subseteq {}_y (kQ^+)_x^2$ d'après la Propriété 2.2.2 page 22, donc :

$$\varphi \psi(\alpha_i) \in k^* \alpha_i + {}_y (kQ^+)_x^2$$

Soit à présent $\alpha \in Q_1$ une flèche non parallèle à α_1 (donc distincte de $\alpha_1, \dots, \alpha_d$) et telle que $\psi(\alpha) \in k^* \alpha$. Alors $\varphi_i(\alpha) = \alpha$ pour tout i , puis $\varphi(\alpha) = \alpha$ et enfin :

$$\varphi \psi(\alpha) \in k^* \alpha$$

Ceci achève la démonstration du Lemme. □

Le Lemme 2.2.25 page précédente fournit donc l'existence de $\varphi_1 \in \mathcal{T}$ tel que, en posant $\psi_1 = \varphi_1 \psi$, nous avons :

- (i) $\psi_1(\alpha) \in k^* \alpha + {}_y (kQ^+)_x^2$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$,
- (ii) si $\alpha \in Q_1$ n'est pas parallèle à α_1 et vérifie $\psi(\alpha) \in k^* \alpha$, alors $\psi_1(\alpha) \in k^* \alpha$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$ nous avons donc une forme normale :

$$\psi_1(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_i} \tau_{i,j} u_{i,j}$$

où $\lambda_i \in k^*$ et où $u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}$ sont des chemins de longueur au moins 2 de source x et de terminus y . Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$ posons :

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{\alpha_i, u_{i,j}, -\frac{\tau_{i,j}}{\lambda_i}}$$

Pour $(i, j) \neq (i', j')$, le quadruplet $(\alpha_i, u_{i,j}, \alpha_{i'}, u_{i',j'})$ n'est pas un double raccourci car : Q n'a pas de cycle orienté, α_i et $\alpha_{i'}$ sont parallèles et $u_{i,j}$ est de longueur au moins 2. Pour cette raison les transvections $\varphi_{i,j}$ ($i \in \{1, \dots, d\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$) commutent deux à deux. Posons alors :

$$\varphi_2 = \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^{n_i} \varphi_{i,j}$$

Pour $\alpha \in Q_1$ nous avons donc :

- $\varphi_{i,j}(\alpha) = \alpha$ pour tous i, j puis $\varphi_2(\alpha) = \alpha$ pour toute flèche α non parallèle à α_1 ,
- $\varphi_2(\alpha_i) = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_i} -\frac{\tau_{i,j}}{\lambda_i} u_{i,j}$

En particulier $\varphi_2(u_{i,j}) = u_{i,j}$ pour tous i, j (en effet, nous avons vu plus haut qu'aucune des flèches α_i n'apparaît dans $u_{i,j}$). Ces égalités nous donnent donc :

- (iii) $\varphi_2\psi_1(\alpha) = \psi(\alpha)$ si $\alpha \in Q_1$ n'est pas parallèle à α_1 (i.e. $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$),
- (iv) $\varphi_2\psi_1(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Posons $\psi_2 = \varphi_2\psi_1$, les points (i) – (iv) entraînent donc :

- (v) $\psi_2(\alpha_i) \in k^*\alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,
- (vi) si $\alpha \in Q_1$ n'est pas parallèle à α_1 et si $\psi(\alpha) \in k^*\alpha$, alors $\psi_2(\alpha) \in k^*\alpha$.

Etant donné que $\psi(\alpha_1) \notin k^*\alpha_1$, les points (v) et (vi) entraînent :

$$n(\psi_2) < n(\psi) = n$$

L'hypothèse de récurrence H_{n-1} s'applique donc à ψ_2 :

$$\text{il existe } \varphi_3 \in \mathcal{T} \text{ tel que } \varphi_3\psi_2 \in \mathcal{D}$$

Ainsi $\varphi_3\varphi_2\varphi_1 \in \mathcal{T}$ vérifie $\varphi_3\varphi_2\varphi_1\psi \in \mathcal{D}$. L'assertion H_n est donc démontrée. Nous avons donc montré que H_n est vraie pour tout $n \geq 0$. Ceci montre que $\text{Aut}_0(kQ) = \mathcal{TD}$. \square

Remarque 2.2.26 *Etant donné $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$ il existe donc, d'après la Proposition 2.2.24 page 27, des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ainsi qu'une dilatation D vérifiant :*

$$\psi = D\varphi_1 \dots \varphi_n$$

Il existe également des transvections $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$ vérifiant :

$$\psi = \varphi'_1 \dots \varphi'_m D$$

Remarque 2.2.27 *Il est naturel de se demander si l'énoncé de la Proposition 2.2.24 page 27 peut être renforcé : est-ce que $\text{Aut}_0(kQ)$ est le produit semi-direct $\mathcal{T} \rtimes \mathcal{D}$? La réponse est non dans le cas général. En effet supposons que Q est le carquois de Kronecker $1 \rightrightarrows 2$ et soient α, β les deux flèches de Q . Une vérification immédiate montre que $\text{Aut}_0(kQ)$ est naturellement isomorphe à $GL_2(k)$. En particulier, si nous posons $\psi = \varphi_{\beta,\alpha} - 2\varphi_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2}\varphi_{\beta,\alpha,1}\varphi_{\alpha,\beta,1}$ alors :*

$$\psi(\alpha) = 2\alpha \quad \text{et} \quad \psi(\beta) = \frac{1}{2}\beta$$

Ainsi $\psi \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}$. Donc $\text{Aut}_0(kQ)$ n'est pas le produit semi-direct $\mathcal{T} \rtimes \mathcal{D}$ dans ce cas. En revanche, si Q est un carquois localement fini, sans cycle orienté, avec un nombre fini de raccourcis (en particulier, si Q est fini et sans cycle orienté) et si Q n'a pas de flèches multiples, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \{Id_{kQ}\}$ et $\text{Aut}_0(kQ)$ est le produit semi-direct $\mathcal{T} \rtimes \mathcal{D}$.

2.3 Carquois liés et présentations admissibles

Définition 2.3.1 *Soit Q un carquois localement fini. Un idéal admissible de kQ est un idéal I de la k -catégorie kQ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $I \subseteq (kQ^+)^2$.
- pour tout sommet $x \in Q_0$ il existe un entier n_x tel que ${}_y(kQ^+)_x^{n_x} \subseteq {}_y I_x$ et ${}_x(kQ^+)_y^{n_x} \subseteq {}_x I_y$ pour tout $y \in C_0$.

Remarque 2.3.2 *Soit Q un carquois fini et I un idéal de kQ . Alors I est admissible si et seulement si il existe un entier $n \geq 2$ tel que $(kQ^+)^n \subseteq I \subseteq (kQ^+)^2$.*

Définition 2.3.3 *Un carquois lié est un couple (Q, I) où Q est un carquois localement fini et I un idéal admissible de kQ . Un élément $u \in {}_y I_x$ sera alors appelé une relation de I .*

Les relations de la forme u où u est un chemin seront dites **relations monomiales**.

Définition 2.3.4 Un idéal admissible I de kQ est dit **monomial** si il est engendré par un ensemble de chemins.

Remarque 2.3.5 Dans la suite nous attribuerons au carquois lié (Q, I) les propriétés satisfaites par Q (e.g. connexité, sans double raccourci, sans cycle orienté...).

Parmi les relations de I nous distinguons les relations minimales introduites par J. A. de la Peña et R. Martinez-Villa dans [29].

Définition 2.3.6 (voir [29]) Soit (Q, I) un carquois lié. Considérons kQ comme une k -algèbre associative non unitaire et I comme un idéal de kQ . Soit $r \in I$. Alors r sera dite **relation minimale** si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $r \neq 0$,
- si $r = r_1 + r_2$ où $r_1, r_2 \in I$ sont à support disjoints, alors $r = r_1$ ou $r = r_2$.

Selon la Définition 2.3.6, une relation minimale est en particulier une combinaison linéaire de chemins. Vérifions que l'appellation «relation minimale» est cohérente avec l'appellation «relation», c'est à dire qu'une relation minimale est une combinaison linéaire de chemins parallèles.

Propriété 2.3.7 Soit (Q, I) un carquois lié et r une relation minimale de I . Alors il existe $x, y \in Q_0$ tels que $r \in {}_y I_x$.

Preuve : Nous considérons ici kQ comme une k -algèbre non unitaire et I comme un idéal de kQ . Ecrivons r sous forme normale :

$$r = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Posons $x = s(u_1)$ et $y = t(u_1)$. Posons également :

$$E = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid s(u_i) = x \text{ et } t(u_i) = y\} \quad \text{et} \quad F = \{1, \dots, n\} \setminus E$$

Notons $r_1 = \sum_{i \in E} \lambda_i u_i$ et $r_2 = r - r_1$. Ainsi :

- $r_1 = e_y r e_x \in I$ et $r_2 = r - r_1 \in I$,
- $\text{supp}(r_1) = \{u_i \mid i \in E\}$ et $\text{supp}(r_2) = \{u_i \mid i \in F\}$.

En particulier $\text{supp}(r_1) \cap \text{supp}(r_2) = \emptyset$ et la minimalité de r implique $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$. Puisque $u_1 \in \text{supp}(r_1)$, nous avons $r_1 \neq 0$ puis $r_2 = 0$. De cette façon $r = r_1 \in {}_y I_x$. \square

Remarque 2.3.8 Au sens de la Définition 2.3.3 page précédente, une relation minimale est donc une relation.

La définition que nous prenons ici pour la notion de relation minimale est un peu différente de celle introduite dans [29] puisqu'une relation monomiale est une relation minimale. Cette différence n'a aucune incidence sur l'utilisation des résultats de [29], en outre elle permet d'alléger le texte comme dans la Proposition suivante bien connue.

Proposition 2.3.9 Soit (Q, I) un carquois lié. Alors toute relation de I peut s'écrire comme somme de relations minimales de I à supports deux à deux disjoints.

Preuve : Supposons que la conclusion de la Proposition est fausse. Il existe donc une relation $r \in {}_y I_x$ qui ne peut pas s'écrire comme somme de relations minimales à supports deux à deux disjoints, et nous pouvons supposer que $\text{Card}(\text{supp}(r))$ est minimal pour cette propriété. En particulier $r \neq 0$ et r n'est pas une relation minimale. Il existe donc $r_1, r_2 \in {}_y I_x$ des relations telles que :

- $r_1 + r_2 = r$,
- $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$,
- $\text{supp}(r_1) \cap \text{supp}(r_2) = \emptyset$.

Ces trois conditions entraînent en particulier que $\text{supp}(r) = \text{supp}(r_1) \sqcup \text{supp}(r_2)$ et $\text{supp}(r_1) \neq \emptyset$, $\text{supp}(r_2) \neq \emptyset$. La minimalité de $\text{Card}(\text{supp}(r))$ implique donc que r_1 et r_2 s'écrivent tous deux comme sommes de relations minimales à supports deux à deux disjoints. Il en résulte que $r = r_1 + r_2$ est également une somme de relations minimales à supports deux à deux disjoints. Cette contradiction montre que la conclusion de la Proposition est vraie. \square

Définition 2.3.10 Soient (Q, I) et (Q', I') deux carquois liés. Un **morphisme de carquois liés** $f: (Q, I) \rightarrow (Q', I')$ est un morphisme de carquois $f: Q \rightarrow Q'$ tel que $f(I) \subseteq I'$.

Si (Q, I) est un carquois lié, $1_Q: Q \rightarrow Q$ est un morphisme de carquois liés $(Q, I) \rightarrow (Q, I)$, il sera noté $1_{(Q, I)}$ (le morphisme identité de (Q, I)). Nous obtenons ainsi la **catégorie des carquois liés** :

- les objets sont les carquois liés,
- les morphismes sont les morphismes de carquois liés,
- la composition est induite par la composition des morphismes de carquois.

En particulier, nous noterons $\text{Aut}(Q, I)$ le groupe des automorphismes du carquois lié (Q, I) . Nous avons donc :

$$\text{Aut}(Q, I) = \{f: (Q, I) \rightarrow (Q, I) \mid f: Q \rightarrow Q \text{ est un isomorphisme et } f(I) = I\}$$

Si (Q, I) est un carquois lié et si $f: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ est un morphisme de k -catégories (ou de k -algèbres) tel que $I \subseteq \text{Ker}(f)$, nous noterons $\bar{f}: kQ/I \rightarrow \mathcal{C}$ le morphisme induit par f . En particulier, si $f: (Q, I) \rightarrow (Q', I')$ est un morphisme de carquois liés, nous noterons $\bar{f}: kQ/I \rightarrow kQ'/I'$ le morphisme de k -catégories induit par f .

Définition 2.3.11 (voir [9] ou [6]) Soit A une k -algèbre de dimension finie. Une **présentation admissible** de A est un morphisme surjectif de k -algèbres $\mu: kQ \rightarrow A$ tel que $(Q, \text{Ker}(\mu))$ est un carquois lié fini.

Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Une **présentation admissible** de \mathcal{C} est un morphisme de k -catégories $\mu: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ qui est plein, établit une bijection $Q_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_0$, et tel que $(Q, \text{Ker}(\mu))$ est un carquois lié.

Remarque 2.3.12 Une **présentation admissible** $kQ \rightarrow A$ de noyau I sera parfois notée $kQ/I \simeq A$ lorsque nous ne nous intéresserons qu'au carquois lié (Q, I) (et pas au morphisme surjectif $kQ \rightarrow A$).

Avec les notations de la Définition 2.3.11, nous dirons que (Q, I) présente A (resp. \mathcal{C}). L'intérêt de l'utilisation d'un idéal admissible est donné par la Proposition suivante due à P. Gabriel.

Proposition 2.3.13 (voir [9]) Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique (resp. \mathcal{C} une k -catégorie localement bornée). Alors A (resp. \mathcal{C}) admet des présentations admissibles et le carquois de toute présentation admissible est le carquois ordinaire de A (resp. \mathcal{C}).

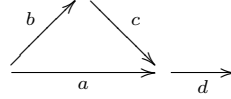
Remarque 2.3.14 Soit \mathcal{C} une k -catégorie localement bornée de carquois ordinaire Q . Nous rappelons ici comment obtenir une présentation admissible de \mathcal{C} . Supposons donnés, pour tous $x, y \in Q_0$, des éléments ${}_y u_x^{(1)}, \dots, {}_y u_x^{(y^{n_x})} \in {}_y \mathcal{R} \mathcal{C}_x$ dont les images dans ${}_y (\mathcal{R} \mathcal{C} / \mathcal{R}^2 \mathcal{C})_x$ constituent une base de ${}_y (\mathcal{R} \mathcal{C} / \mathcal{R}^2 \mathcal{C})_x$. Alors le carquois Q a exactement ${}_y n_x$ flèches de source x et de terminus y . De plus, tout morphisme $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ établissant, pour tous $x, y \in Q_0$, une bijection de l'ensemble des flèches de Q de source x et de terminus y vers l'ensemble $\{ {}_y u_x^{(1)}, \dots, {}_y u_x^{(y^{n_x})} \}$ est une présentation admissible.

Remarque 2.3.15 Si A est une k -algèbre de dimension finie et basique et si $\nu: kQ \rightarrow A$ est une présentation admissible, alors $\{\nu(e_x)\}_{x \in Q_0}$ est un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Ce système fait de A une k -catégorie et $\nu: kQ \rightarrow A$ est une présentation admissible de k -catégorie. La présentation ν sera alors dite **présentation relative** au système $\{\nu(e_x)\}_{x \in Q_0}$. Rappelons que d'après la Proposition 1.2.3 page 13, deux choix de systèmes complets d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A définissent deux k -catégories isomorphes. En particulier, deux systèmes définissent des k -catégories ayant les mêmes présentations. Pour cette raison, lorsqu'il nous arrivera de considérer une k -algèbre de dimension finie et basique A , il sera sous-entendu (sauf mention expresse du contraire) que nous choisissons en même temps un système complet $\{e_x\}_{x \in Q_0}$ d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. En particulier, lorsque nous étudierons une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow A$ il sera toujours sous-entendu que $\nu(e_x) = e_x$ pour tout $x \in Q_0$ (i.e. que ν est relative au système $\{e_x\}_{x \in Q_0}$).

Définition 2.3.16 Une k -algèbre A de dimension finie est **monomiale** si et seulement si il existe une présentation admissible $kQ/I \simeq A$ telle que I est monomial (voir la Définition 2.3.4 page 30).

L'exemple bien connu qui suit montre qu'une algèbre peut avoir des présentations par des carquois liés distincts.

Exemple 2.3.17 Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :



et $I = \langle da \rangle$. Notons $\nu: kQ \rightarrow kQ/I = A$ la surjection canonique. Ainsi A est monomiale, ν est une présentation admissible monomiale et nous disposons d'une présentation admissible $\mu: kQ \rightarrow A$ définie par :

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} \nu(a) + \nu(cb) & \text{si } \alpha = a \\ \nu(\alpha) & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{a\} \end{cases}$$

cette présentation est de noyau $J = \langle da - dcb \rangle$.

Une k -algèbre de dimension finie peut avoir des présentations admissibles par des carquois liés distincts. Néanmoins celles-ci ne sont pas indépendantes comme le montre la Proposition suivante.

Proposition 2.3.18 Soit A une k -algèbre de dimension finie basique et triangulaire. Soient $\nu: kQ \rightarrow A$ et $\mu: kQ \rightarrow A$ deux présentations admissibles. Posons $I = \text{Ker}(\nu)$ et $J = \text{Ker}(\mu)$. Alors il existe $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$ tel que $\psi(I) = J$ et tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\mu}^{-1}\bar{\nu}} & kQ/J \end{array}$$

et où les flèches verticales sont les morphismes naturels.

Preuve : Notons $p: kQ \rightarrow kQ/I$ et $q: kQ \rightarrow kQ/J$ les surjections naturelles et notons $\theta = \bar{\mu}^{-1}\bar{\nu}: kQ/I \rightarrow kQ/J$ de sorte que θ est un isomorphisme de k -catégories vérifiant $\theta(x) = x$ pour tout $x \in Q_0$ (voir la Remarque 2.3.15 page précédente). Puisque q est surjectif, nous avons :

$$(\forall x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1) (\exists \psi(\alpha) \in {}_y kQ_x) \quad q(\psi(\alpha)) = \theta(p(\alpha)) \quad (i)$$

Nous disposons ainsi d'un morphisme de k -catégories $\psi: kQ \rightarrow kQ$ tel que $\psi(x) = x$ pour tout $x \in Q_0$ et la propriété (i) ci-dessus nous assure que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ kQ/I & \xrightarrow{\theta} & kQ/J \end{array}$$

Montrons que ψ est un isomorphisme de k -algèbres. Puisque θ et p sont surjectifs, il vient :

$$(\forall u \in kQ) (\exists v \in kQ) \quad q(u) = \theta(p(v)) = q(\psi(v))$$

Etant donné que $J = \text{Ker}(q)$ est admissible, nous obtenons :

$$(\forall u \in kQ) (\exists v \in kQ) \quad u - \psi(v) \in J \subseteq (kQ^+)^2$$

Ceci montre que :

$$kQ \subseteq \psi(kQ) + (kQ^+)^2$$

Donc, après une récurrence immédiate :

$$(\forall n \geq 1) \quad kQ \subseteq \psi(kQ) + (kQ^+)^{2^n}$$

Puisque Q est fini et n'a pas de cycle orienté, la longueur des chemins de Q est bornée, donc il existe $n \geq 1$ tel que $(kQ^+)^{2^n} = 0$. Donc $kQ \subseteq \psi(kQ)$. Ainsi $\psi: kQ \rightarrow kQ$ est un morphisme surjectif d'algèbres, c'est donc un isomorphisme pour raison de dimension. Donc $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$. Nous disposons donc d'un diagramme commutatif d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & kQ & \xrightarrow{p} & kQ/I & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & kQ & \xrightarrow{q} & kQ/J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes. Donc $\psi(I) = J$. □

Remarque 2.3.19 *En utilisant la Proposition 2.3.18 page ci-contre et la Remarque 2.2.26 page 29 nous en déduisons que si A est une k -algèbre de dimension finie basique et triangulaire, si $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ sont deux présentations admissibles, alors il existe une dilatation D ainsi que des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telles que $J = D\varphi_n \dots \varphi_1(I)$. Il existe également des transvections $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$ telles que $J = \varphi'_m \dots \varphi'_1 D(I)$.*

Chapitre 3

Combinatoire sur les chemins d'un carquois

Dans le Chapitre 4 nous allons comparer les groupes fondamentaux associés à diverses présentations d'une k -algèbre de dimension finie et basique. Les méthodes que nous allons utiliser seront simples d'un point de vue conceptuel. En contrepartie les démonstrations seront techniques. La plupart de celles-ci sont basées sur un procédé de récurrence et ces récurrences se feront sur un ensemble de chemins d'un carquois (ou un ensemble de couples de chemins, ou un ensemble de raccourcis). De ce fait nous aurons besoin d'ordonner les chemins (ou les couples de chemins, ou les raccourcis) et afin d'alléger les preuves dans le Chapitre prochain, il est judicieux de traiter cette question à part. Le présent Chapitre est consacré à la définition de ces ordres, à leurs propriétés ainsi qu'à certaines de leurs conséquences.

Dans tout ce Chapitre Q désignera un carquois fini et sans cycle orienté.

3.1 Dérivation des chemins

3.1.1 Définition et premières propriétés

La notion de raccourci permet de définir celle de dérivation d'un chemin. Cette dernière est utile pour alléger les démonstrations.

Définition 3.1.1 Soit Q un carquois. Soient $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ et v deux chemins de Q .

Nous dirons que v est **dérivé d'ordre 1 de** u si il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ ainsi qu'un raccourci (α_i, u) tel que :

$$v = \alpha_n \dots \alpha_{i+1} u \alpha_{i-1} \dots \alpha_1$$

Plus généralement, si $m \geq 2$, nous dirons que v est **dérivé d'ordre m de** u si il existe m indices $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ ainsi que des raccourcis $(\alpha_{i_1}, u_1), \dots, (\alpha_{i_m}, u_m)$ tels que v est obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de la flèche α_{i_j} par u_j pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$v = \alpha_n \dots \alpha_{i_m+1} u_m \alpha_{i_m-1} \dots \alpha_{i_j+1} u_j \alpha_{i_j-1} \dots \alpha_{i_1+1} u_1 \alpha_{i_1-1} \dots \alpha_1$$

Si il existe un entier $m \geq 1$ tel que v est dérivé de u d'ordre m , nous dirons que v est **dérivé** de u .

Remarque 3.1.2 Si v est dérivé d'ordre m de u , alors il existe une suite de chemins v_0, v_1, \dots, v_m telle que $v_0 = u$, $v_m = v$ et telle que v_{i+1} est dérivé d'ordre 1 de v_i pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Voyons à présent quelques propriétés liées à la dérivation des chemins, rappelons que Q n'a pas de cycle orienté.

Propriété 3.1.3 Si u, v sont deux chemins tels que v est dérivé d'ordre l et dérivé d'ordre l' de u , alors $l = l'$.

Preuve : Ecrivons $u: x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} x_n$. Donc il existe :

- des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$,

- des indices $1 \leq j_1 < \dots < j_{l'} \leq n$.

ainsi que des raccourcis :

- $(\alpha_{i_1}, v_1), \dots, (\alpha_{i_l}, v_l)$,
- $(\alpha_{j_1}, w_1), \dots, (\alpha_{j_{l'}}, w_{l'})$.

tels que :

$$\begin{aligned} v &= \alpha_n \dots \alpha_{i_l+1} v_l \alpha_{i_l-1} \dots \alpha_{i_1+1} v_1 \alpha_{i_1-1} \dots \alpha_1 \\ v &= \alpha_n \dots \alpha_{j_{l'}+1} w_{l'} \alpha_{j_{l'}-1} \dots \alpha_{j_1+1} w_1 \alpha_{j_1-1} \dots \alpha_1 \end{aligned}$$

Notons que dans les deux écritures ci-dessus v est écrit comme une concaténation de chemins :

$$\begin{aligned} v &= c_n \dots c_1 \\ v &= c'_n \dots c'_1 \end{aligned}$$

où c_i (resp. c'_i) est un chemin de source x_{i-1} et de terminus x_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Plus précisément :

- $c_{i_t} = v_t$ pour $t \in \{1, \dots, l\}$ et $c_i = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$,
- $c'_{j_t} = w_t$ pour $t \in \{1, \dots, l'\}$ et $c'_i = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_{l'}\}$.

Puisque Q n'a pas de cycle orienté, $c_i = c'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par ailleurs, les couples (α_{i_t}, v_t) et (α_{j_t}, w_t) sont des raccourcis, donc :

$$l = l' \quad , \quad i_1 = j_1, \dots, i_l = j_l \quad \text{et} \quad v_{i_t} = w_{i_t} \quad \text{pour tout } t$$

En particulier, $l = l'$. □

Propriété 3.1.4 *Si v est dérivé d'ordre l de u et si w est dérivé de v , alors w est dérivé de u d'ordre au moins l .*

Preuve : D'après la Remarque 3.1.2 page ci-contre, il existe une suite de chemins $w_0 = v, \dots, w_m = w$ telle que w_{i+1} est dérivé d'ordre 1 de w_i . Il suffit donc de démontrer la Propriété lorsque w est un dérivé d'ordre 1 de v , ce que nous supposons désormais.

Ecrivons $u = \alpha_n \dots \alpha_1$. Il existe donc :

- des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$,
- des raccourcis $(\alpha_{i_1}, v_1), \dots, (\alpha_{i_l}, v_l)$,

tels que v est obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de la flèche α_{i_j} par le chemin v_j pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$v = \alpha_n \dots \alpha_{i_l+1} v_l \alpha_{i_l-1} \dots \alpha_{i_j+1} v_j \alpha_{i_j-1} \dots \alpha_{i_1+1} v_1 \alpha_{i_1-1} \dots \alpha_1$$

Puisque w est dérivé d'ordre 1 de v , l'une des deux situations suivantes est satisfaite :

- il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$ ainsi qu'un raccourci (α_{i_0}, c) tel que w est obtenu à partir de v en remplaçant l'occurrence de α_{i_0} par c .
- il existe $j \in \{1, \dots, l\}$, il existe une décomposition $v_j = w_2 \beta w_1$, avec $\beta \in Q_1$, ainsi qu'un raccourci (β, c) tels que w est obtenu à partir de v en remplaçant l'occurrence de β par c . En particulier, $(\alpha_{i_j}, w_2 c w_1)$ est un raccourci.

Ces deux situations impliquent respectivement :

- w est obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de la flèche α_{i_0} par c et celle de la flèche α_{i_t} par v_t pour tout $t \in \{1, \dots, l\}$. Ainsi w est dérivé d'ordre $l + 1$ de u .
- w est obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de la flèche α_{i_j} par $w_2 c w_1$ et l'occurrence de la flèche α_{i_t} par v_t , pour tout $t \in \{1, \dots, l\} \setminus \{j\}$. En particulier, w est dérivé d'ordre l de u .

□

Remarque 3.1.5 *D'après les Propriétés 3.1.3 page précédente et 3.1.4, si u, v, w sont des chemins tels que :*

- v est dérivé de u ,

- w est dérivé de v ,
- w est dérivé d'ordre 1 de u .

Alors v est dérivé d'ordre 1 de u .

Notons que l'exemple ci-après montre que l'inégalité fournie par la Propriété 3.1.4 page précédente peut être une égalité.

Exemple 3.1.6 Soit (α, u, β, v) un double raccourci et soit w le chemin obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par v . Alors :

- u est dérivé d'ordre 1 de α ,
- w est dérivé d'ordre 1 de u ,
- w est dérivé d'ordre 1 de α .

La Propriété 3.1.4 page précédente implique en particulier :

Propriété 3.1.7 La relation «être dérivé de» est une relation transitive.

3.1.2 Application : description du support de l'image d'un chemin par un automorphisme

Voyons dans cette sous-Section quelques exemples d'utilisation de la notion de dérivation des chemins. Les résultats que nous allons établir seront utiles par la suite.

Supposons dans cette sous-Section que Q est un carquois sans cycle orienté et sans flèches multiples. Le fil directeur des résultats qui vont suivre est le suivant :

étant donnés deux chemins u, v de Q , étant donné $\psi \in \mathcal{T}$, existe-t-il un critère pour montrer que $v \in \text{supp}(\psi(u))$ et si c'est le cas est-il possible de calculer le coefficient avec lequel v apparaît dans $\psi(u)$?

Notons que l'hypothèse faite sur Q permet de démontrer le résultat suivant :

Propriété 3.1.8 Soit $\psi \in \mathcal{T}$. Soit $\alpha \in Q_1$. Alors $\psi(\alpha) = \alpha + r$ où r est une combinaison linéaire de chemins parallèles à α et de longueur au moins 2.

Preuve : Soit $x \xrightarrow{\beta} y \in Q_1$. Soit $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection. Puisque Q n'a pas de flèches multiples, u est un chemin de longueur au moins 2. Donc $\varphi(\beta) \in \beta + {}_y(kQ^+_x)^2$ d'après la définition de φ . D'autre part, la Propriété 2.2.2 page 22 nous donne $\varphi({}_y(kQ^+_x)^2) = {}_y(kQ^+_x)^2$. Donc :

$$\varphi(\beta + {}_y(kQ^+_x)^2) \subseteq \beta + {}_y(kQ^+_x)^2$$

Donc, si ψ est un produit de transvections, nous avons :

$$\psi(\beta + {}_y(kQ^+_x)^2) \subseteq \beta + {}_y(kQ^+_x)^2$$

Donc $\psi(\beta) = \beta + r$ où r est une combinaison linéaire de chemins de longueur au moins 2. □

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas possible de supprimer l'hypothèse sur les flèches multiples.

Exemple 3.1.9 Soit Q le carquois $1 \rightrightarrows 2$ et soient α, β les deux flèches de Q . Alors :

$$\varphi_{\alpha, \beta, -\frac{1}{2}} \varphi_{\beta, \alpha, 1} \varphi_{\alpha, \beta, 1}(\alpha) = 2 \alpha$$

Remarquons que $\text{Aut}_0(kQ)$ est isomorphe à $GL_2(k)$.

Commençons par décrire le support $\text{supp}(\psi(u))$ ($\psi \in \mathcal{T}$ et u un chemin) à partir de la donnée du support de $\psi(\alpha)$ lorsque α est une flèche quelconque.

Propriété 3.1.10 Soit $\psi \in \mathcal{T}$ et soit $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ un chemin. Soit, pour chaque i , une forme normale $\psi(\alpha_i) = \alpha_i + \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} u_{i,j}$ où chaque $u_{i,j}$ est un chemin parallèle à α_i et de longueur au moins 2 (voir la Propriété 3.1.8). Alors le support de $\psi(u)$ est l'ensemble des chemins décrit de la manière qui suit. Pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$ soient :

- $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$,
- $j_l \in \{1, \dots, m_{i_l}\}$ pour chaque $l \in \{1, \dots, r\}$,

le support de $\psi(r)$ contient le chemin obtenu à partir de u en remplaçant, pour chaque $l \in \{1, \dots, r\}$, l'occurrence de chaque flèche α_{i_l} par le chemin u_{i_l, j_l} :

$$\alpha_n \dots \alpha_{i_r+1} u_{i_r, j_r} \alpha_{i_r-1} \dots \alpha_{i_l+1} u_{i_l, j_l} \alpha_{i_l-1} \dots \alpha_{i_1+1} u_{i_1, j_1} \alpha_{i_1-1} \dots \alpha_1$$

en outre le coefficient de ce chemin dans $\psi(u)$ est :

$$\lambda_{i_1, j_1} \dots \lambda_{i_r, j_r}$$

En particulier, $\psi(u) - u$ est une combinaison linéaire de chemins dérivés de u et de longueur strictement plus grande que celle de u .

Preuve : Nous avons :

$$\psi(u) = \psi(\alpha_n) \dots \psi(\alpha_1) = \left[\alpha_n + \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_{n,j} u_{n,j} \right] \dots \dots \left[\alpha_1 + \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{1,j} u_{1,j} \right]$$

En développant ce produit nous obtenons la description annoncée. \square

Remarquons que la Propriété 3.1.10 page précédente admet le raffinement suivant. Ce dernier nous sera utile par la suite :

Propriété 3.1.11 Soient u_1, u_2, u_3 des chemins tels que u_2 et u_3 sont tous deux dérivés de u_1 (par exemple $u_2, u_3 \in \text{supp}(\psi(u_1)) \setminus \{u_1\}$ avec $\psi \in \mathcal{T}$) et vérifiant les conditions suivantes :

- u_3 est dérivé d'ordre 1 de u_1 ,
- u_3 est dérivé de u_2 .

Alors il existe des chemins u', u'', θ' ainsi qu'un raccourci (α, θ) tels que :

$$u_1 = u'' \alpha u', \quad u_2 = u'' \theta u' \quad \text{et} \quad u_3 = u'' \theta' u'$$

et tels que θ' est dérivé de θ .

Preuve : Puisque u_3 est dérivé d'ordre 1 de u_1 , que u_3 est dérivé de u_2 et que u_2 est dérivé de u_1 , la Remarque 3.1.5 page 35 implique que u_2 est dérivé d'ordre 1 de u_1 .

Ecrivons alors $u_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ donc il existe :

- $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- deux raccourcis (α_i, θ) et (α_j, θ') ,

tels que :

$$u_2 = \alpha_n \dots \alpha_{i+1} \theta \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 \quad \text{et} \quad u_3 = \alpha_n \dots \alpha_{j+1} \theta' \alpha_{j-1} \dots \alpha_1$$

Puisque Q n'a pas de cycle orienté et puisque u_3 est dérivé de u_2 nous avons nécessairement $i = j$ et θ' est dérivé de θ . Le raccourci (α_i, θ) ainsi que les chemins $u' = \alpha_{i-1} \dots \alpha_1$, $u'' = \alpha_n \dots \alpha_{i+1}$ et θ' conviennent donc. \square

La description du support de $\psi(u)$ (lorsque $\psi \in \mathcal{T}$ et u est un chemin) nous permet, étant donné $r \in kQ$, d'exhiber des sous-expressions de r à partir de sous-expressions de $\psi(r)$. Les deux résultats qui suivent illustrent notre propos. Rappelons que Q est un carquois fini, sans cycle orienté et sans flèches multiples.

Proposition 3.1.12 Soit $\psi \in \mathcal{T}$, soit $r \in {}_y kQ_x$ et soit r' une sous-expression de $\psi(r)$. Notons \simeq la relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de Q engendrée par :

$$v \in \text{supp}(\psi(u)) \implies u \simeq v$$

Supposons que pour tous $u, v \in \text{supp}(\psi(r))$ vérifiant $u \simeq v$, nous ayons :

$$u \in \text{supp}(r') \Leftrightarrow v \in \text{supp}(r')$$

Alors $\psi^{-1}(r')$ est une sous-expression de r .

Preuve : Nous noterons \simeq' la relation d'équivalence induite par \simeq sur l'ensemble $\text{supp}(r)$:

$$(\forall u, v \in \text{supp}(r)) \quad u \simeq' v \Leftrightarrow u \simeq v$$

Ainsi le support de r s'écrit

$$\text{supp}(r) = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_n$$

comme réunion disjointe des \simeq' -orbites de $\text{supp}(r)$. Nous disposons donc de sous-expressions r_1, \dots, r_n de r telles que :

$$r = r_1 + \dots + r_n \text{ et } \text{supp}(r_i) = c_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

En particulier, $\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Ecrivons chaque r_i sous forme normale :

$$r_i = \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} u_{i,j}$$

Cela nous donne donc une forme normale pour r :

$$r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} u_{i,j}$$

Nous avons donc :

$$\psi(r) = \psi(r_1) + \dots + \psi(r_n) = r'_1 + \dots + r'_n$$

En notant $r'_i = \psi(r_i)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et soient $u, v \in \text{supp}(r'_i)$. Donc il existe $u', v' \in \text{supp}(r_i)$ tels que $u \in \text{supp}(\psi(u'))$ et $v \in \text{supp}(\psi(v'))$. Donc :

- $u \simeq u'$ car $u \in \text{supp}(\psi(u'))$,
- $v \simeq v'$ car $v \in \text{supp}(\psi(v'))$,
- $u' \simeq' v'$ (i.e. $u' \simeq v'$) car $u', v' \in \text{supp}(r_i) = c_i$.

Nous obtenons ainsi :

$$u, v \in \text{supp}(r'_i) \Rightarrow u \simeq v \tag{i}$$

- Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et montrons que si $i \neq j$ alors $\text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r'_j) = \emptyset$.

Si $v \in \text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r'_j)$, alors il existe :

- $u \in \text{supp}(r_i) = c_i \subseteq \text{supp}(r)$ tel que $v \in \text{supp}(\psi(u))$ (et donc $v \simeq u$),
- $u' \in \text{supp}(r_j) = c_j \subseteq \text{supp}(r)$ tel que $v \in \text{supp}(\psi(u'))$ (et donc $v \simeq u'$).

Ainsi $u \simeq v \simeq u'$, avec $u, u' \in \text{supp}(r)$. Donc $u \simeq u'$ avec $u \in \text{supp}(r_i) = c_i$ et $u' \in \text{supp}(r_j) = c_j$. Puisque c_i, c_j sont des orbites de $\text{supp}(r)$ pour \simeq' cela implique $i = j$. Donc :

$$i \neq j \Rightarrow \text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r'_j) = \emptyset \tag{ii}$$

- Puisque $\psi(r) = r'_1 + \dots + r'_n$, l'implication (ii) et la Propriété 2.1.28 page 21 impliquent :

$$r'_i \text{ est une sous-expression de } \psi(r) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

- Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r') \neq \emptyset$. Fixons $u \in \text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r')$ et soit $v \in \text{supp}(r'_i)$.

Ainsi :

- $u \in \text{supp}(r')$,
- $u \simeq v$ d'après (i).

L'hypothèse faite sur r' implique donc que $v \in \text{supp}(r')$. En résumé :

$$\text{supp}(r'_i) \subseteq \text{supp}(r') \text{ ou } \text{supp}(r'_i) \cap \text{supp}(r') = \emptyset \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \tag{iii}$$

Grâce à (ii) et (iii), la Propriété 2.1.29 page 21 s'applique à $\psi(r) = r'_1 + \dots + r'_n$ et à la sous-expression r' de $\psi(r)$. Il existe donc des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ tels que :

$$r' = r'_{i_1} + \dots + r'_{i_m}$$

En particulier :

$$\psi^{-1}(r') = r_{i_1} + \dots + r_{i_m}$$

Donc $\psi^{-1}(r')$ est une sous-expression de r . □

Propriété 3.1.13 Soit $\psi \in \mathcal{T}$, soit $r \in {}_y k Q_x$ et soit $u \in \text{supp}(r)$. Alors l'une au moins des deux assertions suivantes est satisfaite :

- $u \in \text{supp}(\psi(r))$,
- il existe $v \in \text{supp}(r)$ tel que $u \neq v$ et $u \in \text{supp}(\psi(v))$.

En particulier, si il n'existe pas dans $\text{supp}(r)$ de chemin dont u est un dérivé alors :

$$u \in \text{supp}(\psi(r)) \quad \text{et} \quad u^*(\psi(r)) = u^*(r)$$

Preuve : Ecrivons une forme normale de r :

$$r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$$

et supposons par exemple que $u = u_1$.

• Supposons que $u \notin \text{supp}(\psi(r))$. Notons que $u^*(\psi(u)) = 1$ d'après la Propriété 3.1.10 page 36. Puisque $u \notin \text{supp}(\psi(r))$, il vient :

$$0 = u^*(\psi(r)) = \sum_{i=1}^n t_i u_1^*(\psi(u_i)) = t_1 + \sum_{i=2}^n t_i u_1^*(\psi(u_i))$$

Puisque $t_1 \neq 0$, il existe $i \geq 2$ tel que $u_1^*(\psi(u_i)) \neq 0$. Donc :

$$u_i \in \text{supp}(r), \quad u_1 \in \text{supp}(\psi(u_i)) \quad \text{et} \quad u_1 \neq u_i \quad (\text{car } i \neq 1)$$

$v = u_i$ convient donc.

• Supposons à présent que u n'est dérivé d'aucun chemin de $\text{supp}(r)$. Nous avons alors :

$$u^*(\psi(r)) = t_1 u^*(\psi(u)) + \sum_{i=2}^n t_i u^*(\psi(u_i))$$

Rappelons que $u^*(\psi(u)) = 1$. D'autre part, si $i \in \{2, \dots, n\}$ alors $u \neq u_i$. Donc :

$$u \in \text{supp}(\psi(u_i)) \Rightarrow u \in \text{supp}(\psi(u_i) - u_i) \Rightarrow u \text{ est dérivé de } u_i$$

Or u n'est pas dérivé de u_i par hypothèse. Donc :

$$u \notin \text{supp}(\psi(u_i)) \quad \text{pour tout } i \geq 2$$

Nous avons donc :

$$u^*(\psi(r)) = t_1 = u^*(r) \neq 0$$

Donc $u \in \text{supp}(\psi(r))$ et $u^*(\psi(r)) = u^*(r)$. □

3.2 Ordre sur les chemins, ordre sur les raccourcis

3.2.1 Ordre sur l'ensemble des chemins d'un carquois

Pour cette sous-Section fixons Q un carquois fini que nous supposerons sans cycle orienté. Dans le Chapitre qui va suivre nous aurons besoin d'un ordre sur l'ensemble (fini) des chemins de Q . Nous serons plus particulièrement intéressés par les ordres $<$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $e_x < u$ pour tout sommet $x \in Q_0$ et tout chemin non trivial u ,
- (ii) si (α, u) est un raccourci alors $u < \alpha$,
- (iii) si $u \leq u'$, si $v \leq v'$ et si les concaténations de chemins vu et $v'u'$ sont définies, alors $vu \leq v'u'$.

Avant d'étudier l'existence de tels ordres, notons une conséquence utile de leurs attributs.

Propriété 3.2.1 Soit $<$ un ordre (non nécessairement total) sur l'ensemble des chemins de Q . Supposons que $<$ vérifie les conditions (ii) et (iii) ci-dessus. Si u et v sont deux chemins de Q , alors :

$$v \text{ est dérivé de } u \Rightarrow v < u$$

Preuve : Supposons que v est dérivé de u d'ordre m . D'après la Remarque 3.1.2 page 34, il existe une suite v_0, \dots, v_m de chemins de Q telle que $v_0 = u$, $v_m = v$ et telle que v_{i+1} est dérivé d'ordre 1 de v_i pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Il nous suffit donc de démontrer que $v < u$ si v est dérivé d'ordre 1 de u . Dans ce cas il existe des chemins u_1, u_2 ainsi qu'un raccourci (α, w) tels que :

$$u = u_2 \alpha u_1 \text{ et } v = u_2 w u_1$$

Puisque $<$ vérifie (ii) et (iii) nous avons bien $v < u$. \square

Nous allons exhiber de tels ordres à partir d'une construction due à D. R. Farkas, C. D. Feustel et E. L. Green dans [15] et que nous rappelons brièvement. Fixons un ordre total $e_{x_1} \triangleleft \dots \triangleleft e_{x_p} \triangleleft \alpha_1 \triangleleft \dots \triangleleft \alpha_q$, où x_1, \dots, x_p sont les sommets de Q et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont les flèches de Q . Cet ordre définit l'ordre lexicographique \prec sur l'ensemble des chemins non triviaux de Q et nous l'étendons à tous les chemins de Q de la façon suivante :

- $e_{x_1} \prec \dots \prec e_{x_p}$,
- $e_x \prec u$ pour tout sommet x et tout chemin non trivial u .

Pour chaque flèche $\alpha \in Q_1$ fixons un entier positif ou nul $W(\alpha)$ appelé le **poids de α** . La fonction $W: Q_1 \rightarrow \mathbb{N}$ sera appelée la **fonction de poids**. Etant donné un chemin $u: x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} x_n$, nous appellerons **poids de u** l'entier $W(u) = W(\alpha_1) + \dots + W(\alpha_n)$ (le poids $W(e_x)$ d'un chemin stationnaire étant nul). L'ordre $<$ sur l'ensemble des chemins est alors défini comme suit. Etant donnés deux chemins u, v de Q , nous posons :

$$u < v \Leftrightarrow \begin{cases} W(u) < W(v) \\ \text{ou} \\ W(u) = W(v) \text{ et } u \prec v \end{cases}$$

L'ordre obtenu est alors total. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [15].

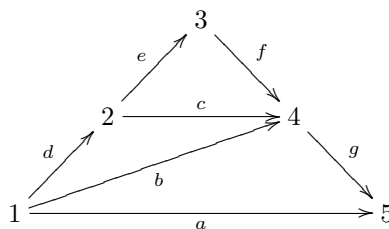
Pour nos besoins, nous appliquerons cette construction dans deux situations, nous obtiendrons ainsi deux types d'ordres qui seront dits respectivement :

- naturel,
- associé à un raccourci (α_0, u_0) .

Décrivons à présent ces deux types d'ordres.

1^{ère} situation : l'ordre naturel. Supposons que Q n'a pas de flèches multiples. Fixons un ordre arbitraire $e_1 \triangleleft \dots \triangleleft e_p \triangleleft \alpha_1 \triangleleft \dots \triangleleft \alpha_q$ sur l'ensemble $Q_0 \cup Q_1$. Pour toute flèche α , le poids $W(\alpha)$ de α sera égal au nombre de raccourcis de Q de la forme (α, u) . L'ordre ainsi défini sur l'ensemble des chemins de Q sera dit **naturel**.

Exemple 3.2.2 Soit Q le carquois :



Rappelons que les raccourcis de Q sont (a, gcd) , $(a, gfed)$, (a, gb) , (b, cd) , (b, fed) et (c, fe) . La fonction de poids $W: Q_1 \rightarrow \mathbb{N}$ est donc donnée par :

$$W(a) = 3, \quad W(b) = 2, \quad W(c) = 1, \quad W(x) = 0 \text{ si } x \neq a, b, c$$

Posons :

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 3 \triangleleft 4 \triangleleft 5 \triangleleft a \triangleleft b \triangleleft c \triangleleft d \triangleleft e \triangleleft f \triangleleft g$$

Alors l'ordre naturel $<$ restreint à l'ensemble des chemins de Q de source 1 et de terminus 5 est :

$$gfed < gcd < gb < a$$

Avant de démontrer que l'ordre naturel vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) données ci-dessus nous donnons un Lemme qui sera utile dans la suite.

Lemme 3.2.3 Soit (α, u) un raccourci. Alors $W(u) < W(\alpha)$.

Preuve : Pour $a \in Q_1$, posons :

$$R(a) = \{(a, u) \mid (a, u) \text{ est un raccourci de } Q\}$$

Ainsi $W(a) = \text{Card}(R(a))$.

Ecrivons $u = a_n \dots a_1$ avec $a_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Notons que si $i \neq j$, alors $a_i \neq a_j$ car Q n'a pas de cycle orienté. Pour cette raison $R(a_i) \cap R(a_j) = \emptyset$ dès que $i \neq j$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} R(a_1) \cup \dots \cup R(a_n) \text{ est une réunion disjointe,} \\ W(u) = W(a_1) + \dots + W(a_n) = \text{Card}(R(a_1)) + \dots + \text{Card}(R(a_n)). \end{cases}$$

Posons $R(u) = R(a_1) \sqcup \dots \sqcup R(a_n)$. Si (a_i, v) est un raccourci, alors v est un chemin de longueur au moins 2 car Q n'a pas de flèches multiples. Ainsi, les deux chemins parallèles α et $a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1$ sont distincts parce que de longueurs distinctes. Pour cette raison $(\alpha, a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1)$ est un raccourci de Q . Nous disposons donc d'une application :

$$\begin{aligned} \theta: \quad R(u) &\longrightarrow R(\alpha) \\ (a_i, v) &\longmapsto (\alpha, a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1) \end{aligned}$$

Montrons que l'application θ est injective. Si (a_i, v) et (a_i, v') sont deux raccourcis tels que $\theta(a_i, v) = \theta(a_i, v')$, alors : $a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1 = a_n \dots a_{i+1} v' a_{i-1} \dots a_1$ Donc $v = v'$ puis $(a_i, v) = (a_i, v')$.

Si $1 \leq j < i \leq n$ et si (a_i, v) et (a_j, v') sont deux raccourcis tels que $\theta(a_i, v) = \theta(a_j, v')$, alors

$$a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1 = a_n \dots a_{j+1} v' a_{j-1} \dots a_1$$

Donc $v a_{i-1} \dots a_1 = a_i \dots a_{j+1} v' a_{j-1} \dots a_1$. Or v et a_i sont parallèles et Q n'a pas de cycle orienté. Donc $v = a_i$, ce qui est impossible puisque (a_i, v) est un raccourci. Cette contradiction montre que $\theta(a_i, v) \neq \theta(a_j, v')$ si (a_i, v) et (a_j, v') sont deux raccourcis tels que $i \neq j$. L'application θ est donc bien injective et donc :

$$\text{Card}(R(u)) = \text{Card}(\theta(R(u)))$$

D'autre part, si il existe un raccourci (a_i, v) tel que $(\alpha, u) = \theta(a_i, v)$ alors $a_n \dots a_1 = u = a_n \dots a_{i+1} v a_{i-1} \dots a_1$. Cette égalité entraîne $a_i = v$ et contredit le fait que (a_i, v) est un raccourci de Q . Nous avons donc $(\alpha, u) \in R(\alpha) \setminus \theta(R(u))$. Pour cette raison :

$$W(\alpha) = \text{Card}(R(\alpha)) > \text{Card}(\theta(R(u))) = \text{Card}(R(u)) = W(u)$$

□

Propriété 3.2.4 Tout ordre naturel vérifie les conditions (i), (ii), (iii)  crites au début de la sous-Section.

Preuve : Pour $\alpha \in Q_1$, posons :

$$R(\alpha) = \{(\alpha, u) \mid (\alpha, u) \text{ est un raccourci de } Q\}$$

Ainsi $W(\alpha) = \text{Card}(R(\alpha))$.

- Si u est un chemin non trivial, alors $u \succ e_x$ et $W(u) \geq 0 = W(e_x)$ pour tout $x \in Q_0$ par construction de \succ et de W . Donc $u > e_x$ pour tout chemin non trivial u et tout $x \in Q_0$. La propriété (i) est donc satisfaite.

- D'après le Lemme 3.2.3, si (α, u) est un raccourci, alors $W(\alpha) > W(u)$, puis $\alpha > u$. La propriété (ii) est donc vérifiée.

- Soient u, v, u', v' des chemins tels que $u < u'$, $v < v'$ et tels que les concaténations vu et $v'u'$ sont définies. D'après la construction de l'ordre $<$ nous avons en particulier :

$$W(u) \leq W(u') \text{ et } W(v) \leq W(v')$$

Supposons d'abord que l'une des deux inégalités ci-dessus est stricte. Dans ce cas, $W(vu) = W(v) + W(u) < W(v') + W(u') = W(v'u')$ ce qui entraîne $vu < v'u'$. Si $W(v) = W(v')$ et $W(u) = W(u')$, alors $u < u'$ et $v < v'$, puis $vu < v'u'$ par construction de l'ordre lexicographique \prec . La propriété (iii) est donc vérifiée. □

2^{nde} situation : l'ordre associé à (α_0, u_0) . Dans cette situation nous ne faisons aucune hypothèse sur les flèches multiples de Q , nous supposons seulement que Q n'a pas de cycle orienté. Fixons (α_0, u_0) un raccourci et écrivons $u_0 = a_n \dots a_1$. Puisque (α_0, u_0) est un raccourci et puisque Q n'a pas de cycle orienté, les flèches α_0 et a_i sont distinctes pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fixons un ordre total \triangleleft sur $Q_1 \cup Q_0$:

$$e_{x_1} \triangleleft \dots \triangleleft e_{x_p} \triangleleft \alpha_1 \triangleleft \dots \triangleleft \alpha_q$$

De façon que :

$$a_n \triangleleft \alpha_0$$

Posons $W : Q_1 \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction de poids triviale :

$$W(a) = 0 \quad \text{pour toute flèche } a \in Q_1$$

L'ordre $<$ qui en résulte sera dit associé au raccourci (α_0, u_0) . Notons que $<$ coïncide avec l'ordre lexicographique \prec défini par \triangleleft . L'ordre $<$ ne vérifie pas en général la propriété (ii) énoncée en début de sous-Section (à savoir $u < \alpha$ pour tout raccourci (α, u)). Néanmoins, il vérifie la Propriété suivante, ce qui sera suffisant pour nous.

Propriété 3.2.5 *Les conditions (i) et (iii) écrites au début du sous-Section sont satisfaites par $<$. De plus $u_0 < \alpha_0$.*

Preuve : Puisque $<$ et l'ordre lexicographique \prec défini par \triangleleft coïncident, les conditions (i) et (iii) sont vérifiées. De plus, $a_n \triangleleft \alpha_0$ donc $u_0 = a_n \dots a_1 \prec \alpha_0$ puis $u_0 < \alpha_0$. \square

3.2.2 Ordre sur l'ensemble des raccourcis d'un carquois

Nous supposerons dans cette sous-Section que Q est un carquois fini sans cycle orienté et sans flèches multiples. Dans la suite nous aurons besoin d'un ordre $<$ sur l'ensemble (fini) des raccourcis de Q vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) si (α, u, β, v) est un double raccourci, alors $(\beta, v) < (\alpha, u)$,
- (ii) si (α, u) et (α, v) sont des raccourcis et si (α, u, β, w) est un double raccourci tel que v est obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par w , alors $(\alpha, v) < (\alpha, u)$.

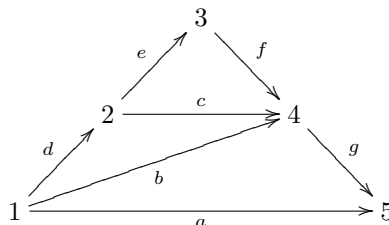
Un tel ordre sera dit **admissible**.

Fixons $<$ un ordre naturel ainsi que nous l'avons construit à la sous-Section précédente, et notons W la fonction de poids correspondante. Définissons l'ordre $<$ sur les raccourcis de Q par :

$$(\beta, v) < (\alpha, u) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < \alpha \\ \text{ou} \\ \beta = \alpha \text{ et } v < u \end{cases}$$

Cet ordre sera dit **associé à $<$** .

Exemple 3.2.6 *Soit Q le carquois :*



Les raccourcis de Q sont (a, gcd) , $(a, gfed)$, (a, gb) , (b, cd) , (b, fed) et (c, fe) . Reprenons $<$ l'ordre naturel que nous avons construit dans l'Exemple 3.2.2 page 40. Alors les chemins apparaissant dans un raccourci se comparent comme suit :

$$fe < fed < gfed < c < cd < gcd < b < gb < a$$

Donc l'ordre associé sur l'ensemble des raccourcis est :

$$(c, fe) < (b, fed) < (b, cd) < (a, gfed) < (a, gcd) < (a, gb)$$

Proposition 3.2.7 *L'ordre $<$ associé à l'ordre naturel $<$ est admissible.*

Preuve : • Si (α, u, β, v) est un double raccourci, alors le Lemme 3.2.3 page 41 entraîne $W(u) < W(\alpha)$. D'autre part, $W(\beta) \leq W(u)$ car $u = u_2\beta u_1$ avec u_1, u_2 des chemins. Donc $W(\beta) < W(\alpha)$ puis $\beta < \alpha$ et enfin $(\beta, v) < (\alpha, u)$. La propriété (i) est donc satisfaite.

• Supposons que (α, u) et (α, v) sont des raccourcis, et supposons qu'il existe un double raccourci (α, u, β, w) tel que v est le chemin obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par w . Il existe donc des chemins u_1, u_2 tels que :

$$u = u_2\beta u_1 \text{ et } v = u_2 w u_1$$

D'après le Lemme 3.2.3 page 41 nous avons $W(\beta) > W(w)$. Donc :

$$W(u) = W(u_2) + W(\beta) + W(u_1) > W(u_2) + W(w) + W(u_1) = W(v)$$

puis $u > v$. Ceci montre que $(\alpha, v) < (\alpha, u)$. La propriété (ii) est donc satisfaite. \square

Remarquons une propriété sur l'ordre sur les raccourcis associé à un ordre naturel :

Propriété 3.2.8 *Soit $<$ un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q et soit $<$ l'ordre admissible associé sur l'ensemble des raccourcis de Q . Soit $\psi \in \mathcal{T}$. Soient (α, u) un raccourci et v un chemin distinct de u et tel que $v \in \text{supp}(\psi(u))$. Alors :*

- (α, v) est un raccourci,
- $(\alpha, v) < (\alpha, u)$.

Preuve : Puisque $\psi(u) - u$ est une combinaison linéaire de chemins dérivés de (donc parallèles à) u et de longueur supérieure strictement à celle de u , le couple (α, v) est bien un raccourci. D'autre part, puisque v est dérivé de u , nous avons $v < u$ d'après la Propriété 3.2.1 page 39 et la Propriété 3.2.4 page 41. Donc $(\alpha, v) < (\alpha, u)$ par construction de l'ordre $<$ sur les raccourcis de Q . \square

3.2.3 Application à l'écriture des produits de transvections

Dans cette sous-Section nous allons appliquer les constructions précédentes (les ordres naturels et les ordres associés sur les raccourcis) à l'écriture des produits de transvections. Plus précisément, étant donné $\psi \in \mathcal{T}$, nous recherchons une écriture $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$ où $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des transvections et ce, de façon que $\psi(\alpha)$ soit «facilement calculable». Par exemple :

Exemple 3.2.9 *Supposons que (α, u, β, v) est un double raccourci, soit w le chemin obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par v et soient $\tau, \nu \in k^*$. Posons :*

$$\psi = \varphi_{\beta, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau} \in \mathcal{T} \tag{i}$$

Alors :

$$\psi(\alpha) = \alpha + \tau u + \tau \nu w$$

Remarquons que le chemin $w \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ est tel que le raccourci (α, w) n'est le raccourci sous-jacent à aucune des transvections $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\beta, v, \nu}$ apparaissant dans l'écriture (i).

En revanche, nous avons l'égalité :

$$\psi = \varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, w, \tau \nu} \varphi_{\beta, v, \nu} \tag{ii}$$

et l'égalité $\psi(\alpha) = \alpha + \tau u + \tau \nu w$ peut être interprétée de la façon suivante :

- les chemins $u, w \in \text{supp}(\psi(\alpha) - \alpha)$ sont exactement les chemins θ tels que le raccourci (α, θ) est le raccourci sous-jacent à l'une des transvections $\varphi_{\alpha, u, \tau}$, $\varphi_{\alpha, w, \tau \nu}$ ou $\varphi_{\beta, v, \nu}$ de l'écriture (ii),
- le chemin u (resp. w) apparaît dans $\psi(\alpha)$ avec le scalaire τ (resp. $\nu \tau$) et ce scalaire est exactement celui intervenant dans la définition de la transvection $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ (resp. $\varphi_{\alpha, w, \tau \nu}$).

Ainsi, pour déterminer l'image d'une flèche par ψ , il est plus efficace de partir de l'écriture (ii) que de l'écriture (i).

Remarquons en outre, que si $<$ est un ordre admissible sur les raccourcis alors $(\alpha, u) > (\alpha, w) > (\beta, v)$, de sorte que l'écriture (ii) (contrairement (i)) est un produit de transvections selon une suite strictement décroissante de raccourcis.

Le but de cette sous-Section est de formaliser le phénomène décrit dans l'Exemple ci-dessus. Pour cela nous introduisons une filtration de \mathcal{T} par des sous-groupes.

Dans toute cette sous-Section Q désignera un carquois sans cycle orienté et sans flèches multiples.

Filtration de \mathcal{T} à l'aide d'un ordre admissible sur les raccourcis

Pour ce paragraphe, fixons un ordre $<$ admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q . Commençons par définir les groupes qui participent à la filtration de \mathcal{T} .

Définition 3.2.10 Soit (α, u) un raccourci, alors $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ est défini comme étant le sous-groupe de \mathcal{T} engendré par les transvections de la forme $\varphi_{\beta, v, \tau}$ où $(\beta, v) < (\alpha, u)$:

$$\mathcal{T}_{<(\alpha, u)} = \langle \varphi_{\beta, v, \tau} ; (\beta, v) < (\alpha, u) \text{ et } \tau \in k \rangle$$

Le sous-groupe $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ est défini de la même manière en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges :

$$\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)} = \langle \varphi_{\beta, v, \tau} ; (\beta, v) \leq (\alpha, u) \text{ et } \tau \in k \rangle$$

Enfin $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ est le sous-groupe de \mathcal{T} défini par :

$$\mathcal{T}_{(\alpha, u)} = \{ \varphi_{\alpha, u, \tau} \mid \tau \in k \}$$

Remarque 3.2.11 • La Propriété 2.2.17 page 25 nous assure que $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ est bien un sous-groupe de \mathcal{T} .

- Soit (α, u) un raccourci, alors :
 - $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ et $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ sont des sous-groupes de $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$,
 - $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ est engendré par $\mathcal{T}_{(\alpha, u)} \cup \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$.
- Si $(\beta, v) < (\alpha, u)$ alors $\mathcal{T}_{\leq(\beta, v)} \subseteq \mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$. De plus :

$$\mathcal{T} = \bigcup_{(\beta, v) \text{ raccourci}} \mathcal{T}_{\leq(\beta, v)}$$

Propriété 3.2.12 Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Soit (α, u) un raccourci, alors $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ normalise $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$.
- Soit (α, u) un raccourci, alors :

$$\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)} = \mathcal{T}_{(\alpha, u)} \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$$

En particulier $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$.

- Soit $(a_1, v_1) < \dots < (a_r, v_r)$ la suite strictement croissante de tous les raccourcis de Q . Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{T}_{\leq(a_r, v_r)} \\ \mathcal{T}_{<(a_i, v_i)} &= \mathcal{T}_{\leq(a_{i-1}, v_{i-1})} \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, r\} \\ \mathcal{T}_{\leq(a_i, v_i)} &= \mathcal{T}_{(a_i, v_i)} \mathcal{T}_{(a_{i-1}, v_{i-1})} \dots \mathcal{T}_{(a_1, v_1)} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$$

Preuve : • Par définition, nous avons :

- $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ est l'ensemble transvections de la forme $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ ($\tau \in k$),
- $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ est engendré par les transvections de la forme $\varphi_{\beta, v, \nu}$ avec $\nu \in k$ et $(\beta, v) < (\alpha, u)$.

Pour prouver que $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ normalise $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$, il suffit donc de montrer que si $\tau, \nu \in k$ et si $(\beta, v) < (\alpha, u)$, alors

$$\varphi_{\beta, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau} \in \varphi_{\alpha, u, \tau} \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$$

Soient $\tau, \nu \in k$ et $(\beta, v) < (\alpha, u)$. Puisque $(\beta, v) < (\alpha, u)$, le quadruplet (β, v, α, u) n'est pas un double raccourci. Nous avons deux situations possibles selon que (α, u, β, v) est ou n'est pas un double raccourci.

1^{er} cas : (α, u, β, v) est un double raccourci. Puisque Q n'a pas de flèches multiples nous avons $(\alpha, u, \beta, v) \neq (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$. La Propriété 2.2.19 page 26 nous donne donc :

$$\varphi_{\beta, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau} = \varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, w, \tau \nu} \varphi_{\beta, v, \nu}$$

où w est le chemin obtenu à partir de u en remplaçant l'occurrence de β par v . Notons au passage que puisque $<$ est un ordre admissible, nous avons $(\alpha, w) < (\alpha, u)$. De ce fait $\varphi_{\alpha, w, \tau \nu} \varphi_{\beta, v, \nu} \in \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ et donc :

$$\varphi_{\beta, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau} = \varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\alpha, w, \tau \nu} \varphi_{\beta, v, \nu} \in \varphi_{\alpha, u, \tau} \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$$

2nd cas : (α, u, β, v) n'est pas un double raccourci. Donc (α, u, β, v) et (β, v, α, u) ne sont pas des double raccourcis. La Propriété 2.2.17 page 25 et la Propriété 2.2.18 page 25 impliquent donc que $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\varphi_{\beta, v, \nu}$ commutent. Ainsi :

$$\varphi_{\beta, v, \nu} \varphi_{\alpha, u, \tau} = \varphi_{\alpha, u, \tau} \varphi_{\beta, v, \nu} \in \varphi_{\alpha, u, \tau} \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$$

De ce fait, $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$ normalise $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$.

• D'après la Remarque 3.2.11 page précédente, $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ est engendré par $\mathcal{T}_{(\alpha, u)} \cup \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$. Donc $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)} = \mathcal{T}_{(\alpha, u)} \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ et $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$.

• Puisque (a_r, v_r) est le plus grand raccourci, nous avons, d'après la définition de \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\leq(a_r, v_r)}$$

D'autre part, pour $i \in \{1, \dots, r-1\}$, il n'y a pas de raccourci (β, v) tel que $(a_i, v_i) < (\beta, v) < (a_{i+1}, v_{i+1})$ donc :

$$\mathcal{T}_{<(a_{i+1}, v_{i+1})} = \mathcal{T}_{\leq(a_i, v_i)}$$

Le point précédent implique donc que pour tout $i \in \{2, \dots, r\}$ nous avons :

$$\mathcal{T}_{\leq(a_i, v_i)} = \mathcal{T}_{(a_i, v_i)} \mathcal{T}_{\leq(a_{i-1}, v_{i-1})}$$

Il vient donc pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$:

$$\mathcal{T}_{\leq(a_i, v_i)} = \mathcal{T}_{(a_i, v_i)} \mathcal{T}_{(a_{i-1}, v_{i-1})} \cdots \mathcal{T}_{(a_1, v_1)}$$

□

Application à l'écriture des produits de transvections

Rappelons que Q désigne un carquois fini sans cycle orienté et sans flèches multiples.

Le travail effectué dans le paragraphe précédent s'applique à l'écriture des produits de transvections de la façon suivante.

Propriété 3.2.13 Soit $\psi \in \mathcal{T}$ et soit $<$ un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q . Alors il existe un entier $n \geq 0$ ainsi que des transvections $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\psi = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n} \cdots \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}$,
- $\tau_i \neq 0$ pour tout i .
- $(\alpha_1, u_1) < (\alpha_2, u_2) < \dots < (\alpha_n, u_n)$.

Si de plus (α, u) est un raccourci tel que $\psi \in \mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ (resp. $\psi \in \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$) alors nous pouvons supposer que $(\alpha_i, u_i) \leq (\alpha, u)$ (resp. $(\alpha_i, u_i) < (\alpha, u)$) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve : Remarquons que nous pouvons supposer que $\psi \neq Id_{kQ}$ (si $\psi = Id_{kQ}$ alors $n = 0$ convient). Soit $(a_1, v_1) < \dots < (a_r, v_r)$ la suite strictement croissante de tous les raccourcis de Q . Soit (α, u) un raccourci tel que $\psi \in \mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ (la Remarque 3.2.11 page ci-contre nous assure qu'il existe un tel raccourci). Il existe donc $t \in \{1, \dots, r\}$ tel que $(\alpha, u) = (a_t, v_t)$. Or $\mathcal{T}_{\leq(a_t, v_t)} = \mathcal{T}_{(a_t, v_t)} \cdots \mathcal{T}_{(a_1, v_1)}$ d'après la Propriété 3.2.12 page précédente. Il existe donc des scalaires ν_1, \dots, ν_t tels que :

$$\psi = \varphi_{a_t, v_t, \nu_t} \cdots \varphi_{a_1, v_1, \nu_1}$$

Soient alors $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq t$ les indices tels que : $\nu_j \neq 0 \Leftrightarrow j \in \{i_1, \dots, i_n\}$ pour tout j . Posons $(\alpha_j, u_j, \tau_j) = (a_{i_j}, v_{i_j}, \nu_{i_j})$ pour chaque j . Etant donné que $\varphi_{a_i, v_i, 0} = Id_{kQ}$, nous avons :

$$\psi = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n} \cdots \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}$$

Avec $\tau_i \neq 0$ pour tout i et $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n) \leq (a_t, v_t) = (\alpha, u)$.

Supposons à présent que le raccourci (α, u) vérifie $\psi \in \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$. Puisque $\psi \neq Id_{kQ}$, il existe $(\alpha', u') < (\alpha, u)$ tel que $\psi \in \mathcal{T}_{\leq(\alpha', u')}$. Le raisonnement qui vient d'être fait en supposant que $\psi \in \mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$ peut donc s'appliquer en remplaçant (α, u) par (α', u') . Nous pouvons donc supposer que $(\alpha_i, u_i) \leq (\alpha', u') < (\alpha, u)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

□

Remarquons que la Propriété 3.2.13 se simplifie dans le cas où le carquois Q n'a pas de double raccourci (rappelons que cela implique que deux transvections quelconques commutent) :

Propriété 3.2.14 *Supposons que le carquois Q n'a pas de double raccourci. Soit $\psi \in \mathcal{T}$. Alors il existe un entier $n \geq 0$ ainsi que des transvections $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i) $\psi = \varphi_1 \dots \varphi_n$,
- (ii) $\tau_i \neq 0$ pour tout i ,
- (iii) $(\alpha_i, u_i) \neq (\alpha_j, u_j)$ si $i \neq j$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la Propriété 3.2.13 page précédente, après avoir choisi un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis. \square

Nous pouvons à présent établir une description généralisant le phénomène observé dans l'Exemple 3.2.9 page 43. Plus précisément :

Proposition 3.2.15 *Soit $n \geq 1$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ soit $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ une transvection. Supposons que $\tau_i \neq 0$ pour tout i et que $(\alpha_1, u_1) < (\alpha_2, u_2) < \dots < (\alpha_n, u_n)$ (où $<$ est un ordre admissible quelconque sur l'ensemble des raccourcis de Q). Posons $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$ et soit $\alpha \in Q_1$. Alors $\psi(\alpha)$ admet pour forme normale :*

$$\psi(\alpha) = \alpha + \sum_{i, \alpha = \alpha_i} \tau_i u_i$$

En particulier, le support de $\psi(\alpha)$ est :

$$\text{supp}(\psi(\alpha)) = \{\alpha\} \cup \{u_i \mid \alpha_i = \alpha\}$$

Preuve : Montrons par récurrence sur $i \in \{1, \dots, n\}$ que l'assertion suivante, notée H_i , est vraie :

$$\llbracket \varphi_i \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{j \leq i, \alpha = \alpha_j} \tau_j u_j \rrbracket$$

L'assertion H_1 est vraie par définition de $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}$. Soit $i \in \{2, \dots, n\}$, supposons que H_{i-1} est vraie. Ainsi :

$$\varphi_{i-1} \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{j \leq i-1, \alpha = \alpha_j} \tau_j u_j$$

Donc :

$$\varphi_i \dots \varphi_1(\alpha) = \varphi_i(\alpha) + \sum_{j \leq i-1, \alpha = \alpha_j} \tau_j \varphi_i(u_j)$$

Soit $j < i$, montrons que $\varphi_i(u_j) = u_j$. Si la flèche α_i apparaît dans le chemin u_j alors $(\alpha_j, u_j, \alpha_i, u_i)$ est un double raccourci et donc $(\alpha_i, u_i) < (\alpha_j, u_j)$ (car $<$ est admissible) avec $j \leq i-1 < i$, ce qui contredit l'hypothèse $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$. Ceci montre que $\varphi_i(u_j) = u_j$ dès que $j < i$. Avec la définition de $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ nous avons donc :

$$\varphi_i \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{j \leq i, \alpha = \alpha_j} \tau_j u_j$$

Ainsi H_i est vraie dès que H_{i-1} l'est. Ceci montre que H_n est vraie :

$$\varphi_n \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{i, \alpha = \alpha_i} \tau_i u_i$$

Montrons que cette expression est une forme normale. Notons tout d'abord que si i vérifie $\alpha = \alpha_i$, alors $\alpha \neq u_i$ puisque (α_i, u_i) est un raccourci. D'autre part, si $1 \leq i < j \leq n$ vérifient $\alpha = \alpha_i$ et $\alpha = \alpha_j$, alors $(\alpha_i, u_i) < (\alpha_j, u_j)$. En particulier, l'hypothèse $\alpha = \alpha_i = \alpha_j$ implique $u_j \neq u_i$. Enfin, les coefficients τ_i sont tous non nuls, donc l'expression ci-dessus de $\varphi_n \dots \varphi_1(\alpha)$ est bien une forme normale. \square

Avant de poursuivre, notons une conséquence utile de la Proposition 3.2.15.

Corollaire 3.2.16 *Avec les mêmes notations que celles la Proposition 3.2.15, soit $u = a_r \dots a_1$ un chemin non trivial de Q ($a_j \in Q_1$). Soit $j \in \{1, \dots, r\}$ et soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $a_j = \alpha_i$, alors :*

$$a_r \dots a_{j+1} u_i a_{j-1} \dots a_1 \in \text{supp}(\psi(u))$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la Proposition 3.2.15 page précédente et de la Propriété 3.1.10 page 36. \square

Notons qu'en supposant que Q n'a pas de double raccourci, il est plus simple d'étudier $\text{supp}(\psi(\alpha))$ pour $\psi \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in Q_1$.

Proposition 3.2.17 *Supposons que Q n'a pas de double raccourci. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des transvections ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$). Posons $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$ et soit (α, u) un raccourci. Alors :*

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \implies (\exists i \in \{1, \dots, n\}) (\alpha, u) = (\alpha_i, u_i)$$

Preuve : Démontrons par récurrence sur $l \in \{1, \dots, n\}$ que l'assertion suivante, notée H_l , est vraie :

$$\ll u \in \text{supp}(\varphi_l \dots \varphi_1(\alpha)) \implies (\exists i \in \{1, \dots, l\}) (\alpha, u) = (\alpha_i, u_i) \gg$$

H_1 est vraie par construction de φ_1 . Soit $l \in \{1, \dots, n-1\}$, supposons que H_l est vraie et supposons que $u \in \text{supp}(\varphi_{l+1} \dots \varphi_1(\alpha))$. Pour démontrer que H_{l+1} est vraie, nous pouvons supposer que $(\alpha, u) \neq (\alpha_i, u_i)$ pour $i \in \{1, \dots, l\}$. Rappelons que d'après la Propriété 3.1.8 page 36, nous avons une forme normale $\varphi_l \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{j=1}^m t_j v_j$ où chaque v_j est un chemin parallèle à α et de longueur au moins 2. En particulier, (α, v_j) est un raccourci pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Etant donné que (α_{l+1}, u_{l+1}) est un raccourci et que Q n'a pas de double raccourci, nous en déduisons que la flèche α_{l+1} n'apparaît pas dans le chemin v_j pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Donc $\varphi_{l+1}(v_j) = v_j$ pour tout j . Nous avons donc :

$$\varphi_{l+1} \varphi_l \dots \varphi_1(\alpha) = \varphi_{l+1}(\alpha) + \sum_{j=1}^m t_j v_j \quad (1)$$

Nous avons supposé que $(\alpha, u) \neq (\alpha_i, u_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$. Puisque H_l est vraie, cela entraîne que $u \notin \text{supp}(\varphi_l \dots \varphi_1(\alpha))$. Etant donné que $\varphi_l \dots \varphi_1(\alpha) = \alpha + \sum_{j=1}^m t_j v_j$ est une forme normale, nous en déduisons que $u \notin \{v_1, \dots, v_m\}$. L'égalité (1) ci-dessus entraîne donc $u \in \text{supp}(\varphi_{l+1}(\alpha))$. Donc $(\alpha, u) = (\alpha_{l+1}, u_{l+1})$ (car H_1 est vraie). Donc H_{l+1} est vraie. Ceci démontre par récurrence que H_1, \dots, H_n sont vraies. La Proposition est ainsi démontrée. \square

Notons que la Proposition 3.2.17 peut être affinée en utilisant la Proposition 3.2.15 page précédente. La démonstration est conséquence directe de cette dernière.

Proposition 3.2.18 *Supposons que Q n'a pas de double raccourci. Soit $n \geq 1$ un entier, et pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ une transvection. Posons $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$. Supposons que $\tau_i \neq 0$ pour tout i et que $(\alpha_i, u_i) \neq (\alpha_j, u_j)$ si $i \neq j$. Alors pour toute flèche α , nous avons l'égalité :*

$$\psi(\alpha) = \alpha + \sum_{i \text{ tel que } \alpha = \alpha_i} \tau_i u_i$$

Cette égalité est une forme normale. En particulier, le support de $\psi(\alpha)$ est :

$$\text{supp}(\psi(\alpha)) = \{\alpha\} \cup \{u_i \mid \alpha_i = \alpha\}$$

Les descriptions faites dans la Proposition 3.2.15 page ci-contre et dans la Proposition 3.2.18 nous seront utiles par la suite. Notons qu'elles nous permettent également d'établir un résultat d'unicité dans l'écriture établie dans la Propriété 3.2.13 page 45. Plus précisément :

Corollaire 3.2.19 *Soit $\psi \in \mathcal{T}$ et soit $<$ un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q . Alors il existe un unique $n \geq 0$ et une unique suite $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de transvections ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$) vérifiant les conditions suivantes :*

- $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$,
- $\tau_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$.

Preuve : Rappelons que l'existence est fournie par la Propriété 3.2.13 page 45.

Posons A, R, T les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha \in Q_1 \mid \psi(\alpha) \neq \alpha\} \\ R &= \{(\alpha, u) \mid (\alpha, u) \text{ est un raccourci, } \alpha \in A \text{ et } u \in \text{supp}(\psi(\alpha))\} \\ T &= \{(\alpha, u, \tau) \mid (\alpha, u) \in R \text{ et } \tau = u^*(\psi(\alpha))\} \end{aligned}$$

En reprenant les notations de la Propriété 3.2.13 page 45, nous allons démontrer que :

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \\ R &= \{(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)\} \\ T &= \{(\alpha_1, u_1, \tau_1), \dots, (\alpha_n, u_n, \tau_n)\} \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in Q_1$ nous avons, grâce à la Proposition 3.2.15 page 46, la forme normale suivante :

$$\psi(\alpha) = \alpha + \sum_{i \text{ tel que } \alpha = \alpha_i} \tau_i u_i$$

Donc :

- $\psi(\alpha) \neq \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$,
- si (α, u) est un raccourci, alors $u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \Leftrightarrow (\alpha, u) \in \{(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)\}$,
- si $(\alpha, u) = (\alpha_i, u_i)$, alors $u^*(\psi(\alpha)) = \tau_i$.

Ces trois points montrent bien que :

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \\ R &= \{(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)\} \\ T &= \{(\alpha_1, u_1, \tau_1), \dots, (\alpha_n, u_n, \tau_n)\} \end{aligned}$$

Les deux familles (ordonnées selon l'ordre $<$ sur les raccourcis) $\{\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}\}_{i=1, \dots, n}$ et $\{\varphi_{\alpha, u, \tau}\}_{(\alpha, u, \tau) \in T}$ sont donc égales. L'unicité est ainsi démontrée. \square

Ici encore, le Corollaire 3.2.19 page précédente se spécialise au cas où le carquois n'a pas de double raccourci. Nous obtenons ainsi le Corollaire suivant dont la démonstration est immédiate.

Corollaire 3.2.20 *Soit $\psi \in \mathcal{T}$ un produit de transvections commutant deux à deux. Alors la suite de transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fournie par la Propriété 3.2.14 page 46 est unique à la permutation des indices près.*

3.3 Application aux algèbres monomiales

Dans le Chapitre précédent nous avons obtenu un moyen de comparer deux présentations d'une k -algèbre de dimension finie à l'aide de transvections et de dilatations. Nous allons appliquer cela à l'étude des algèbres monomiales triangulaires et sans flèches multiples. Plus précisément, étant donné un carquois lié (Q, I) tel que I est monomial, nous allons étudier le sous-groupe de $\text{Aut}_0(kQ)$ constitué des automorphismes conservant l'idéal I , nous le noterons $\text{Aut}_0(kQ, I)$:

$$\text{Aut}_0(kQ, I) = \{\psi \in \text{Aut}_0(kQ) \mid \psi(I) = I\}$$

L'intérêt de cette étude est double. D'une part les résultats obtenus nous permettront d'exhiber le revêtement universel d'une algèbre monomiale triangulaire. Remarquons au passage, à l'intention du lecteur averti, que ce point comporte une certaine subtilité :

- le groupe fondamental de toute présentation d'une algèbre monomiale est le quotient du groupe fondamental de toute présentation monomiale, et ce dernier groupe n'est autre que le groupe fondamental du carquois ordinaire de l'algèbre,

- si $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ sont deux présentations monomiales alors il est possible de montrer que $I = J$, autrement dit, le carquois lié (et donc le revêtement universel de ce carquois lié) d'une présentation monomiale ne dépend pas du choix de cette présentation. Remarquons que la démonstration de ce fait nécessite que Q n'ait pas de flèches multiples (sans cette hypothèse, l'unicité du carquois lié monomial est fausse).

Néanmoins, étant donné un revêtement galoisien de k -catégories $F: \mathcal{C} \rightarrow A$, il n'est pas évident (bien que cela semble naturel) que F est le quotient du revêtement galoisien $\mathcal{E} \rightarrow A$ défini par le revêtement universel d'une présentation monomiale de A . L'une des raisons de cette difficulté est que de la catégorie des revêtements galoisiens d'un carquois lié (Q, I) n'est pas équivalente la catégorie des revêtements galoisiens de la k -catégorie kQ/I .

L'autre intérêt de la présente étude, est que nous n'y supposons pas que le carquois Q est sans double raccourci contrairement à ce qui sera souvent fait par la suite.

Tout au long de cette Section, Q désignera un carquois fini, sans cycle orienté et sans flèches multiples. Nous fixons I_0 un idéal admissible et monomial de kQ . Nous noterons $A = kQ/I_0$. Fixons également un ordre naturel $<$ sur l'ensemble des chemins de Q . Nous noterons $<$ l'ordre associé sur l'ensemble des raccourcis de Q .

Proposition 3.3.1 *Si $D: kQ \rightarrow kQ$ est une dilatation, alors $D(I_0) = I_0$.*

Preuve : Soit u un chemin de Q . Puisque D est une dilatation il existe $\lambda \in k^*$ tel que $D(u) = \lambda u$. Donc $u \in I_0 \Rightarrow D(u) = \lambda u \in I_0$. Ceci montre que $D(I_0) \subseteq I_0$ puis que $D(I_0) = I_0$ pour des raisons de dimension. \square

Etant donné que $Aut_0(kQ)$ est engendré par les transvections et les dilatations, nous nous intéressons désormais aux produits de transvections laissant I_0 invariant.

Proposition 3.3.2 *Soit (α, u) un raccourci de Q . Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- $\varphi_{(\alpha, u, \tau)}(I_0) = I_0$ pour tout $\tau \in k$,
- $\varphi_{(\alpha, u, \tau)}(I_0) \neq I_0$ pour tout $\tau \in k^*$.

Preuve : Soit $\tau \in k^*$ tel que $\varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) = I_0$. Fixons $t \in k$. Soit v un chemin appartenant à I_0 . Si α n'apparaît pas dans v alors $\varphi_{\alpha, u, t}(v) = v \in I_0$. Supposons maintenant que α apparaît dans v . Puisque Q n'a pas de cycle orienté, nous avons $v = v_2 \alpha v_1$ où v_2, v_1 sont des chemins de Q dans lesquels α n'apparaît pas. Donc :

$$\varphi_{\alpha, u, \tau}(v) = v + \tau v_2 u v_1 \quad \text{et} \quad \varphi_{\alpha, u, t}(v) = v + t v_2 u v_1$$

Or $v \in I_0$ et $\varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) = I_0$ donc $\tau v_2 u v_1 \in I_0$ puis $v_2 u v_1 \in I_0$. Pour cette raison $\varphi_{\alpha, u, t}(v) \in I_0$ et ceci pour tout chemin $v \in I_0$. Comme I_0 est engendré par les chemins qu'il contient, il vient $\varphi_{\alpha, u, t}(I_0) \subseteq I_0$ puis $\varphi_{\alpha, u, t}(I_0) = I_0$ pour tout $t \in k$. \square

Lemme 3.3.3 *Soient $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}, \dots, \varphi_n = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n}$ des transvections ($n \geq 0$) vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\tau_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$,
- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$.

Soit $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$. Si $\psi(I_0) = I_0$ alors $\varphi_i(I_0) = I_0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve : Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$ et soit $u = a_r \dots a_1 \in I_0$ une relation monomiale de I_0 . Si $a_j \neq \alpha_i$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, alors $\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(u) = u \in I_0$. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $a_j = \alpha_i$. Puisque Q n'a pas de cycle orienté, nous avons $a_{j'} \neq \alpha_i$ pour tout $j' \neq j$. De ce fait nous avons :

$$\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(u) = u + \tau_i a_r \dots a_{j+1} u_i a_{j-1} \dots a_1$$

D'autre part, d'après le Corollaire 3.2.16 page 46, nous savons que :

$$a_r \dots a_{j+1} u_i a_{j-1} \dots a_1 \in \text{supp}(\psi(u))$$

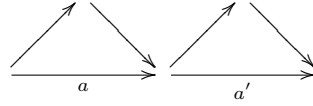
Cette dernière propriété implique : $a_r \dots a_{j+1} u_i a_{j-1} \dots a_1 \in I_0$ (rappelons que $\psi(I_0) = I_0$, que $\psi(u) \in I_0$ et que I_0 est monomial). Donc $\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(u) \in I_0$ et ce, pour toute relation monomiale $u \in I_0$. Donc

$\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(I_0) = I_0$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Le Lemme 3.3.3 page précédente et la Proposition 3.3.1 page précédente nous donnent immédiatement la Proposition suivante.

Proposition 3.3.4 *Le sous-groupe $\{\psi \in \mathcal{T} \mid \psi(I_0) = I_0\}$ de \mathcal{T} est engendré par des transvections qu'il contient. Donc $\text{Aut}_0(kQ, I_0)$ est engendré par les transvections qu'il contient et les dilatations.*

Exemple 3.3.5 *Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :*



et $I = \langle a'a, a'u + u'a, u'u \rangle$. Nous avons noté ici u (resp. u') le chemin de longueur 2 parallèle à a (resp. a'). Alors :

$$\mathcal{T} \cap \text{Aut}_0(kQ, I) = \{\varphi_{a,u,\tau} \varphi_{a',u',\tau} \mid \tau \in k\}$$

Donc $\text{Aut}_0(kQ, I)$ est non trivial, il ne contient aucune transvection et donc n'est pas engendré par des transvections.

Le Lemme 3.3.3 page précédente fournit également la Proposition suivante. Elle sera particulièrement utile dans l'étude du revêtement universel de A . La Proposition qui suit comporte un résultat d'existence et un résultat d'unicité. Nous démontrerons l'unicité dans le Chapitre 4 en utilisant les bases de Gröbner.

Proposition 3.3.6 *Soit I un idéal admissible de kQ tel que les k -algèbres A et kQ/I sont isomorphes. Alors il existe un et un seul produit de transvections $\psi_I \in \mathcal{T}$ tel que :*

- $\psi_I(I_0) = I$,
- si (α, u) est un raccourci tel que $u \in \text{supp}(\psi_I(\alpha))$, alors $\varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) \neq I_0$ pour tout $\tau \neq 0$.

Preuve : Ainsi qu'annoncé, nous allons démontrer l'existence de ψ_I , l'unicité sera quant à elle démontrée au Chapitre 4 (plus précisément à la Proposition 4.1.21 page 57). Posons $A_I = \{\psi \in \text{Aut}_0(kQ) \mid \psi(I_0) = I\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $\psi \in A_I$ il existe un raccourci (α, u) tel que :

- $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$,
- $\varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) = I_0$ pour tout $\tau \in k$.

Posons, pour $\psi \in A_I$:

$$R_\psi = \{(\alpha, u) \mid \begin{array}{l} (\alpha, u) \text{ est un raccourci,} \\ u \in \text{supp}(\psi(\alpha)), \\ \varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) = I_0 \text{ pour tout } \tau \in k \end{array}\}$$

Ainsi, pour tout $\psi \in A_I$, l'ensemble R_ψ est non vide et nous disposons d'un raccourci (α_ψ, u_ψ) défini par :

$$(\alpha_\psi, u_\psi) = \max R_\psi$$

Choisissons $\psi \in A_I$ tel que $(\alpha_\psi, u_\psi) = \min\{(\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) \mid \psi' \in A_I\}$. Posons :

$$(\alpha, u) = (\alpha_\psi, u_\psi), \quad \tau = u^*(\psi(\alpha)), \quad \psi' = \psi \varphi_{\alpha, u, -\tau}$$

Ainsi :

$$\varphi_{\alpha, u, -\tau}(I_0) = I_0 \text{ (car } (\alpha, u) \in R_\psi) \text{ puis } \psi'(I_0) = I \text{ de sorte que } \psi' \in A_I$$

• **Montrons tout d'abord que $(\alpha_\psi, u_\psi) \notin R_{\psi'}$.** D'après la Propriété 3.2.13 page 45, il existe $n \geq 0$ ainsi que des transvections $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}, \dots, \varphi_n = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$,
- $\tau_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$.

D'autre part, puisque $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ et $u^*(\psi(\alpha)) = \tau$, la Proposition 3.2.15 page 46 implique l'existence d'un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(\alpha_i, u_i, \tau_i) = (\alpha, u, \tau)$. Posons $\psi_1 = \varphi_{i-1} \dots \varphi_1$, nous avons donc :

- $\psi_1 \in \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$,
- $\psi' = \psi \varphi_{\alpha, u, -\tau} = \varphi_n \dots \varphi_{i+1} \varphi_{\alpha, u, \tau} \psi_1 \varphi_{\alpha, u, \tau}^{-1}$.

D'après la Propriété 3.2.12 page 44 nous savons que $\varphi_{\alpha, u, \tau} \psi_1 \varphi_{\alpha, u, \tau}^{-1} \in \mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$, la Propriété 3.2.13 page 45 fournit donc un entier $m \geq 0$ ainsi que des transvections $\varphi'_1 = \varphi_{\beta_1, v_1, \nu_1}, \dots, \varphi'_m = \varphi_{\beta_m, v_m, \nu_m}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\varphi_{\alpha, u, \tau} \psi_1 \varphi_{\alpha, u, \tau}^{-1} = \varphi'_m \dots \varphi'_1$,
- $\nu_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,
- $(\beta_1, v_1) < \dots < (\beta_m, v_m) < (\alpha, u)$.

Nous avons donc :

- $\psi' = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n} \dots \varphi_{\alpha_{i+1}, u_{i+1}, \tau_{i+1}} \varphi_{\beta_m, v_m, \nu_m} \dots \varphi_{\beta_1, v_1, \nu_1}$,
- $\tau_j \neq 0$ et $\nu_l \neq 0$ pour tous $j \in \{1, \dots, i+1\}$ et $l \in \{1, \dots, m\}$,
- $(\beta_1, v_1) < \dots < (\beta_m, v_m) < (\alpha, u)$,
- $(\alpha, u) < (\alpha_{i+1}, u_{i+1}) < \dots < (\alpha_n, u_n)$.

La Proposition 3.2.15 page 46 implique donc que $u \notin \text{supp}(\psi'(\alpha))$, d'où :

$$(\alpha, u) \notin R_{\psi'}$$

En particulier $(\alpha, u) \neq \max(R_{\psi'}) = (\alpha_{\psi'}, u_{\psi'})$. D'autre part, la minimalité de $(\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) = (\alpha, u)$ implique :

$$(\alpha, u) < (\alpha_{\psi'}, u_{\psi'})$$

• **Montrons à présent que** $(\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) \leq (\alpha, u)$. Pour cela il suffit de démontrer l'implication suivante pour tout raccourci (β, v) de Q :

$$v \in \text{supp}(\psi'(\beta)) \text{ et } (\alpha, u) < (\beta, v) \Rightarrow \varphi_{\beta, v, t}(I_0) \neq I_0 \text{ pour tout } t \in k^*$$

Soit (β, v) un raccourci de Q tel que $v \in \text{supp}(\psi'(\beta))$ et $(\alpha, u) < (\beta, v)$. L'égalité $\psi' = \psi \varphi_{\alpha, u, -\tau}$ entraîne :

$$\psi'(\beta) = \begin{cases} \psi(\beta) & \text{si } \beta \neq \alpha \\ \psi(\beta) - \tau \psi(u) & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

1^{er} cas : $\alpha \neq \beta$. Alors $v \in \text{supp}(\psi'(\beta)) = \text{supp}(\psi(\beta))$ avec $(\alpha, u) < (\beta, v)$. Donc, par définition de $(\alpha, u) = (\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) = \max R_{\psi}$, il vient :

$$\varphi_{\beta, v, t}(I_0) \neq I_0 \text{ pour tout } t \in k^*$$

2nd cas : $\alpha = \beta$. Donc :

- $\psi'(\beta) = \psi(\beta) - \tau \psi(u)$,
- $v \in \text{supp}(\psi'(\beta))$,
- $(\alpha, u) < (\beta, v) = (\alpha, v)$.

Remarquons que si $v \notin \text{supp}(\psi(\beta))$ alors $v \in \text{supp}(\psi(u))$ ce qui entraîne, d'après la Propriété 3.2.8 page 43, que $(\alpha, u) > (\alpha, v) = (\beta, v)$ alors que nous avons supposé $(\alpha, u) < (\beta, v)$. Donc nécessairement $v \in \text{supp}(\psi(\beta)) = \text{supp}(\psi(\alpha))$. Ainsi $(\beta, v) = (\alpha, v)$ est un raccourci tel que :

- $v \in \text{supp}(\psi(\alpha))$,
- $(\alpha, u) < (\alpha, v) = (\beta, v)$,

ce qui, d'après la définition de $(\alpha, u) = (\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) = \max R_{\psi}$, implique :

$$\varphi_{\beta, v, t}(I_0) \neq I_0 \text{ pour tout } t \in k^*$$

Nous venons donc de montrer que si $(\alpha, u) < (\beta, v)$ et si $v \in \text{supp}(\psi'(\beta))$, alors $\varphi_{\beta, v, t}(I_0) \neq I_0$ pour tout $t \in k^*$. Nous avons donc bien :

$$(\alpha_{\psi'}, u_{\psi'}) \leq (\alpha, u)$$

Ceci contredit l'inégalité $(\alpha, u) < (\alpha_{\psi'}, u_{\psi'})$ exhibée plus haut. Cette contradiction montre qu'il existe $\psi_I \in A_I$ tel que $R_{\psi_I} = \emptyset$. \square

Chapitre 4

Etude des groupes fondamentaux d'une algèbre triangulaire

Nous allons à présent entrer dans la thématique principale de cette thèse : la recherche d'un groupe fondamental pour une k -algèbre de dimension finie. Pour ce faire, nous allons partir de matériaux déjà existants : le groupe fondamental associé à une présentation admissible. Etant donnée une présentation admissible $kQ/I \simeq A$, le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$ (introduit dans [29]) est défini de façon analogue à celui d'un espace topologique : il est construit comme quotient des lacets de Q par une relation d'homotopie \sim_I entre les promenades de Q .

Notre travail va consister à comparer les groupes fondamentaux associés à des présentations admissibles d'une même algèbre. L'élément moteur de ce travail est que si $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ sont des présentations admissibles telles que J est l'image de I par une dilatation ou une transvection, alors il existe une relation simple entre les relations d'homotopie \sim_I et \sim_J , de sorte que l'un des deux groupes fondamentaux $\pi_1(Q, I)$ ou $\pi_1(Q, J)$ est un quotient de l'autre.

Il est intéressant de noter que de nombreux résultats de comparaison des groupes fondamentaux sont le fait de raisonnements d'algèbre linéaire sans qu'aucune structure multiplicative ne soit nécessaire. Ces raisonnements sont regroupés dans la Section 4.1, ils utiliseront en particulier la notion de base de Gröbner adaptée à l'algèbre linéaire (i.e. sans utiliser de structure multiplicative).

4.1 Relations d'équivalence dans un espace vectoriel

Dans la présente Section nous avons rassemblé tous les résultats techniques que nous utiliserons dans la comparaison des groupes fondamentaux d'une k -algèbre de dimension finie. Il est intéressant de noter que cette Section ne fait intervenir que des notions d'algèbre linéaire élémentaire et aucune structure multiplicative éventuelle.

Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et muni d'une base (e_1, \dots, e_n) . Afin d'alléger l'écriture, il nous arrivera d'écrire « $e_i < e_j$ » au lieu de « $i < j$ ». De cette manière, la base de E est totalement ordonnée : $e_1 < \dots < e_n$. Nous noterons (e_1^*, \dots, e_n^*) la base de E^* duale de (e_1, \dots, e_n) . Rappelons que cette base duale est caractérisée par : $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$ et $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Définition 4.1.1 Soit $r \in E$, le **support de r** est l'ensemble noté $\text{supp}(r)$:

$$\text{supp}(r) = \{e_i \mid e_i^*(r) \neq 0\}$$

Remarque 4.1.2 Le support de $0 \in E$ est l'ensemble vide. D'autre part, pour tout $r \in E$ nous avons $r = \sum_{e_i \in \text{supp}(r)} \lambda_{e_i} e_i$ avec $\lambda_{e_i} = e_i^*(r) \in k^*$ pour tout $e_i \in \text{supp}(r)$.

Si $r \in E$, nous appellerons **forme normale de r** toute égalité de la forme $r = \lambda_{i_1} e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p} e_{i_p}$ telle que les indices i_l sont deux à deux distincts et telle que $\lambda_{i_l} \neq 0$ pour tout l . Nous aurons alors $\text{supp}(r) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$.

Faisons à présent quelques rappels sur le logarithme et l'exponentielle d'une application linéaire $E \rightarrow E$. Pour plus de détails sur ces notions, nous renvoyons le lecteur à [32]. Notons que ces définitions ne sont valables

que lorsque le corps k est de caractéristique nulle ou lorsque $\text{car}(k) > n$. Soit $\nu: E \rightarrow E$ une application linéaire nilpotente, alors l'**exponentielle de ν** est notée $\text{exp}(\nu)$ et elle est définie par :

$$\text{exp}(\nu) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \nu^l$$

L'application linéaire $\text{exp}(\nu): E \rightarrow E$ est alors un isomorphisme tel que $\text{exp}(\nu) - \text{Id}_E: E \rightarrow E$ est nilpotente. Soit à présent $\psi: E \rightarrow E$ un isomorphisme linéaire unipotent i.e. tel que $\psi - \text{Id}_E$ est nilpotent. Le **logarithme de ψ** est noté $\text{ln}(\psi)$ et il est défini par :

$$\text{ln}(\psi) = \sum_{l \geq 1} \frac{(-1)^{l+1}}{l} (\psi - \text{Id}_E)^l$$

L'application $\text{ln}(\psi)$ est alors nilpotente. Le lien entre les applications logarithme et exponentielle est rappelé dans la Proposition ci-dessous.

Proposition 4.1.3 (voir [32, Thm 3.3.3]) *Le logarithme et l'exponentielle sont deux applications inverses l'une de l'autre établissant une bijection ensembliste :*

$$\{u: E \rightarrow E \mid u \text{ est nilpotente}\} \xrightarrow{\sim} \{u: E \rightarrow E \mid u \text{ est unipotente}\}$$

4.1.1 Relation d'équivalence associée à un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-Section nous fixons un sous-espace vectoriel E de F . Les éléments de F seront appelés **relations de F** .

Définition 4.1.4 *Soit $r \in F$. Nous dirons que r est une **relation minimale de F** si $r \neq 0$ et si r ne peut pas s'écrire comme somme de deux relations non nulles de F et à supports disjoints.*

Exemple 4.1.5 • *Supposons que E a pour base (e_1, e_2, e_3) et que $F = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$. Alors $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$ et $e_1 + 2e_2 + e_3$ sont des relations minimales de F .*

• *Supposons que E a pour base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ et que $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + 2e_5, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4 + e_5)$. Alors les relations minimales de F sont (au multiple près par un scalaire non nul) $e_1 + e_2$, $e_3 + e_4$ et e_5 .*

Proposition 4.1.6 *Soit $r \in F$, alors r s'écrit $r = r_1 + \dots + r_p$ où les $r_i \in F$ sont des relations minimales à supports deux à deux disjoints : $\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.*

Preuve : Supposons qu'il existe des relations de F qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de relations minimales de F à supports deux à deux disjoints. Parmi ces relations soit $r \in F$ telle que $\text{Card}(\text{supp}(r))$ est minimal. En particulier $r \neq 0$ et r n'est pas une relation minimale de F . Donc il existe $r_1, r_2 \in F \setminus \{0\}$ telles que : $r = r_1 + r_2$ et $\text{supp}(r_1) \cap \text{supp}(r_2) = \emptyset$. En particulier $\text{Card}(\text{supp}(r_i)) < \text{Card}(\text{supp}(r))$ pour $i = 1, 2$. Donc, d'après l'hypothèse de minimalité sur r , chaque r_i est une somme de relations minimales de F à supports deux à deux disjoints. Etant donné que $\text{supp}(r_1) \cap \text{supp}(r_2) = \emptyset$ la décomposition de r_1 et de r_2 fournit une décomposition de $r = r_1 + r_2$ en somme de relations minimales de F à supports deux à deux disjoints, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. \square

La Proposition 4.1.6 nous donne immédiatement le Corollaire suivant.

Corollaire 4.1.7 *L'espace F admet une base constituée de relations minimales de F .*

Les résultats de cette Section nous intéressent dans la mesure où nous pouvons les appliquer aux carquois liés. L'exemple suivant montre comment ces derniers apparaissent ici.

Exemple 4.1.8 *Soit Q un carquois fini et sans cycle orienté et soit I un idéal admissible de kQ . Posons $E = kQ$ et $F = I$. Prenons pour base de E la famille formée des chemins de Q (pour un ordre quelconque). Alors les relations minimales de F sont exactement les relations minimales du carquois lié (Q, I) .*

Nous pouvons à présent définir la relation d'équivalence associée à F .

Définition 4.1.9 La relation d'équivalence associée à F est notée \equiv_F . C'est la relation d'équivalence sur l'ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ engendrée par la propriété :

si $r \in F$ est une relation minimale, alors $e_i \equiv_F e_j$ pour tous $e_i, e_j \in \text{supp}(r)$.

Cette définition admet la caractérisation suivante et dont la démonstration est immédiate.

Proposition 4.1.10 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors $e_i \equiv_F e_j$ si et seulement si il existe une suite de relations minimales r_1, \dots, r_p telles que :

- $e_i \in \text{supp}(r_1)$ et $e_j \in \text{supp}(r_p)$,
- $\text{supp}(r_l) \cap \text{supp}(r_{l+1}) \neq \emptyset$ pour tout $l \in \{1, \dots, p-1\}$.

Définition 4.1.11 Soit $\{r_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ une famille de relations minimales de F . Nous dirons que \equiv_F est **déterminée par la famille** $\{r_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ si dans la Proposition 4.1.10 il est possible d'imposer que les relations r_1, \dots, r_p appartiennent systématiquement à la famille $\{r_l\}_{l \in \mathcal{L}}$.

La relation d'équivalence \equiv_F est donc déterminée par la famille des relations minimales de F . Nous allons démontrer qu'il est possible de restreindre cette famille à toute famille de relations minimales engendrant F (remarquons qu'un phénomène similaire dans le cadre des carquois liés a été énoncé dans [7]). Pour établir cela nous démontrons d'abord le Lemme qui suit.

Lemme 4.1.12 Soit $r \in F$ une relation minimale et soient $u_1, \dots, u_p \in F$ des relations minimales et linéairement indépendantes telles que $r = \sum_{l=1}^p \lambda_l u_l$ avec $\lambda_l \in k^*$ pour tout l . Alors pour tous $l, l' \in \{1, \dots, p\}$ il existe une suite d'indices $l_1, \dots, l_d \in \{1, \dots, p\}$ telle que :

- (i) $l = l_1$ et $l' = l_d$,
- (ii) $\text{supp}(u_{l_t}) \cap \text{supp}(u_{l_{t+1}}) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \{1, \dots, d-1\}$.

Preuve : Notons \sim la relation d'équivalence sur les indices $1, \dots, p$ engendrée par :

$$\text{supp}(u_l) \cap \text{supp}(u_{l'}) \neq \emptyset \Rightarrow l \sim l'$$

Il nous suffit donc de démontrer que la relation \sim n'a qu'une seule classe d'équivalence, à savoir $\{1, \dots, p\}$. Si c_1 et c_2 sont deux classes d'équivalence distinctes de \sim , alors $\text{supp}(u_l) \cap \text{supp}(u_{l'}) = \emptyset$ pour tout $l \in c_1$ et tout $l' \in c_2$. Ceci implique en particulier que $\sum_{l \in c_1} \lambda_l u_l$ et $\sum_{l \in c_2} \lambda_l u_l$ sont deux relations de F à supports deux à deux disjoints. Notons alors c_1, \dots, c_N les classes d'équivalence de \sim , et pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ posons $r_i = \sum_{l \in c_i} \lambda_l u_l$. Puisque les u_i sont linéairement indépendants, chaque r_i est une relation non nulle de F et les r_i sont à supports deux à deux disjoints. Enfin l'égalité $\{1, \dots, p\} = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_N$ entraîne $r = r_1 + \dots + r_N$. La relation r est minimale donc $N = 1$ et \sim n'a effectivement qu'une seule classe d'équivalence. Le Lemme est donc démontré. \square

Grâce au Lemme 4.1.12 nous pouvons démontrer que \equiv_F peut être reconstruite à partir d'une famille génératrice quelconque de relations minimales de F . Notons qu'un résultat similaire a été énoncé par M. Bardzell et E. N. Marcos dans [7] à propos de la relation d'homotopie d'un carquois lié.

Proposition 4.1.13 (voir également [7]) Soient r_1, \dots, r_p des relations minimales de F engendrant l'espace vectoriel F . Alors \equiv_F est déterminée par les relations minimales r_1, \dots, r_p .

Preuve : Notons \equiv la relation d'équivalence sur $\{e_1, \dots, e_n\}$ engendrée par :

$$(\forall l \in \{1, \dots, p\}) \quad e_i, e_j \in \text{supp}(r_l) \Rightarrow e_i \equiv e_j$$

Etant donné que chaque r_i est une relation minimale, la définition de \equiv_F implique :

$$e_i \equiv e_j \Rightarrow e_i \equiv_F e_j$$

Il nous suffit donc de démontrer que pour toute relation minimale r de F , deux éléments quelconques de $\text{supp}(r)$ sont \equiv -équivalents. Soit $r \in F$ une relation minimale. Les relations minimales r_1, \dots, r_p engendrent F , donc il existe des relations minimales u_1, \dots, u_q prises parmi $\{r_1, \dots, r_p\}$ ainsi que des scalaires $\lambda_l \in k^*$ tels que $r = \sum_{l=1}^q \lambda_l u_l$. Nous pouvons en outre supposer que u_1, \dots, u_q sont linéairement indépendants.

Puisque $u_l \in \{r_1, \dots, r_p\}$ pour tout l , le Lemme 4.1.12 page ci-contre (appliqué à $r = \sum_{l=1}^q \lambda_l u_l$) et la définition de \equiv impliquent que pour tous $e_i, e_j \in \bigcup_l \text{supp}(u_l)$ nous avons $e_i \equiv e_j$. En particulier, pour tous $e_i, e_j \in \text{supp}(r) \subseteq \bigcup_l \text{supp}(u_l)$ nous avons $e_i \equiv e_j$. Ainsi deux éléments quelconques du support d'une relation minimale de F sont \equiv -équivalents. Donc \equiv et \equiv_F coïncident. \square

Afin de pouvoir comparer les relations d'équivalence associées à deux sous-espaces vectoriels de E , nous aurons besoin d'une base «standard» de F formée de relations minimales. Nous présentons cette base dans la Définition qui suit.

Définition 4.1.14 Une *base de Gröbner de F* est une base (r_1, \dots, r_d) de F vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ il existe un entier $i_j \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$r_j \in e_{i_j} + \text{Vect}(e_i ; i < i_j)$$

(ii) $i_1 < i_2 < \dots < i_d$,

(iii) si $j \neq j'$ alors $e_{i_j} \notin \text{supp}(r_{j'})$,

La Propriété qui suit est une conséquence de la Définition 4.1.14, nous en omettons la démonstration.

Propriété 4.1.15 Avec les notations de la Définition 4.1.14, si $r \in F$ est non nul, alors il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\max(\text{supp}(r)) = e_{i_j}$. Plus généralement, si $r \in F$, alors la décomposition de r selon la base de Gröbner de F est : $r = \sum_{j=1}^d e_{i_j}^*(r) r_j$.

Notons que la définition que nous utilisons pour les bases de Gröbner est un peu différente de la définition classique puisque nous n'utilisons aucune structure multiplicative. Les bases de Gröbner ainsi que nous les avons définies sont également appelées bases réduites sous forme d'échelon dans la littérature française et elles sont reliées aux matrices sous forme d'échelon réduite (voir [24] pour plus de détails sur ces matrices). L'atout principal d'une telle base est souligné par la Proposition qui suit.

Proposition 4.1.16 Le sous-espace F admet une et une seule base de Gröbner.

Voyons, à titre d'exemple, quelques propriétés de la base de Gröbner de l'idéal I d'une présentation admissible d'une algèbre monomiale.

Propriété 4.1.17 Soit Q un carquois fini, sans cycle orienté et sans flèches multiples. Soit I_0 un idéal admissible et monomial de kQ (ainsi kQ/I_0 est une k -algèbre monomiale) et soit $\psi \in \mathcal{T}$ un produit de transvections. Posons $I = \psi(I_0)$ (ainsi, (Q, I) définit une présentation admissible de kQ/I_0) et soit $<$ un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q . Considérons kQ comme un k -espace vectoriel de dimension finie muni de la base des chemins de Q totalement ordonnée par $<$. Ainsi I est également un sous-espace vectoriel de kQ . Alors :

- pour tout chemin u tel que $u \in I_0$, il existe un et un seul élément, noté r_u , de la base de Gröbner de I tel que $u \in \text{supp}(r_u)$,
- pour tout élément $r \in I$ de la base de Gröbner de I , il existe un et un seul chemin u tel que $u \in I_0$ et tel que $r = r_u$,
- pour tout chemin u tel que $u \in I_0$, nous avons $u = \max(\text{supp}(r_u))$, $u^*(r_u) = 1$ et $r_u - u$ est une combinaison linéaire de chemins dérivés de u .

Preuve : Soit $u_1 < \dots < u_n$ la suite strictement croissante des chemins de Q . Notons (r_1, \dots, r_d) la base de Gröbner de I et soient $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ les indices tels que $r_j \in u_{i_j} + \text{Vect}(u_i ; i < i_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$.

• Soit $u \in I_0$ un chemin. Alors $\psi(u) \in I$ et $u = \max(\text{supp}(\psi(u)))$ (d'après la Propriété 3.1.10 page 36). La Propriété 4.1.15 implique donc qu'il existe un unique indice $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $u = u_{i_j}$. En particulier, $u \in \text{supp}(r_j)$ et si $j' \neq j$ alors $u = u_{i_j} \notin \text{supp}(r_{j'})$ par définition de la base de Gröbner de I . Donc $r_u := r_j$ est l'unique élément de la base de Gröbner de I tel que $u \in \text{supp}(r_u)$. De plus, $u = \max(\text{supp}(r_u)) = u_{i_j}$. Notons que de cette façon, tout chemin appartenant à I_0 appartient également à $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_d}\}$.

• Soit r_j un élément de la base de Gröbner de I , posons $r = r_j$. Alors $u_{i_j} = \max(\text{supp}(r))$ donc u_{i_j} n'est dérivé d'aucun chemin de $\text{supp}(r)$. La Propriété 3.1.13 page 39 implique donc que $u_{i_j} \in \text{supp}(\psi^{-1}(r))$. Or $\psi^{-1}(r) = \psi^{-1}(r_j) \in I_0$ et I_0 est monomial. Donc $u_{i_j} \in I_0$ est un chemin tel que $u_{i_j} \in \text{supp}(r_j)$. Donc $r_j = r_{u_{i_j}}$ d'après le point précédent. Si de plus u est un chemin tel que $u \in I_0$ et tel que $r_j = r_u$, alors $u = \max(\text{supp}(r_u))$ (d'après le point précédent) et donc $u = \max(\text{supp}(r_j)) = u_{i_j}$. Ceci montre que pour tout élément r_j de la base de Gröbner de I , il existe un et un seul chemin u tel que $u \in I_0$ et tel que $r_j = r_u$. Notons que ceci montre (avec le point précédent) que :

$$\{u_{i_1}, \dots, u_{i_d}\} = \{u \text{ chemin} \mid u \in I_0\}$$

• Montrons par récurrence sur $j \in \{1, \dots, d\}$ que la propriété suivante, notée H_j , est vraie :

« $\text{supp}(r_j - u_{i_j})$ est constitué de chemins dérivés de u_{i_j} »

D'après la Propriété 3.1.10 page 36, nous savons que : $u_{i_1} = \max(\text{supp}(\psi(u_{i_1})))$. Ayant $\psi(u_{i_1}) \in I$, la Propriété 4.1.15 page précédente, entraîne que $\psi(u_{i_1}) \in r_1 + \text{Vect}(r_j ; j < 1) = \{r_1\}$. Donc $r_1 = \psi(u_{i_1})$. Donc $r_1 - u_{i_1} = \psi(u_{i_1}) - u_{i_1}$ est, d'après la Propriété 3.1.10 page 36, une combinaison linéaire de chemins dérivés de u_{i_1} . Donc H_1 est vraie. Soit $j \in \{2, \dots, d\}$, supposons que H_1, \dots, H_{j-1} sont vraies et montrons que H_j est vraie. D'après la Propriété 3.1.10 page 36, nous savons que : $u_{i_j} = \max(\text{supp}(\psi(u_{i_j})))$ et $\text{supp}(\psi(u_{i_j}) - u_{i_j})$ est constitué de chemins dérivés de u_{i_j} . Etant donné que $\psi(u_{i_j}) \in I$, nous en déduisons, grâce à la Propriété 4.1.15 page précédente, que :

$$\psi(u_{i_j}) = r_j + \sum_{j' < j \text{ et } u_{i_{j'}} \in \text{supp}(\psi(u_{i_j}))} u_{i_{j'}}^*(\psi(u_{i_j})) r_{j'}$$

Donc :

$$r_j - u_{i_j} = (\psi(u_{i_j}) - u_{i_j}) - \sum_{j' < j \text{ et } u_{i_{j'}} \in \text{supp}(\psi(u_{i_j}))} u_{i_{j'}}^*(\psi(u_{i_j})) r_{j'}$$

Notons que si $j' < j$ est tel que $u_{i_{j'}} \in \text{supp}(\psi(u_{i_j}))$, alors :

- $u_{i_{j'}}$ est dérivé de u_{i_j} ,
- $\text{supp}(r_{j'} - u_{i_{j'}})$ est constitué de chemins dérivés de $u_{i_{j'}}$ (car $H_{j'}$ est vraie),

donc $\text{supp}(r_{j'})$ est constitué de chemins dérivés de u_{i_j} . Donc $\text{supp}(r_j - u_{i_j})$ est constitué de chemins dérivés de u_{i_j} . Donc H_j est vraie. Ceci démontre que H_1, \dots, H_d sont vraies. Donc, si $u \in I_0$ est un chemin, alors $r_u - u$ est une combinaison linéaire de chemins dérivés de u . \square

Remarque 4.1.18 Avec les notations de la Définition 4.1.14 page précédente, la base de Gröbner de F est totalement ordonnée : $r_1 < \dots < r_d$.

Nous disposons donc d'une base associée de manière unique à l'espace vectoriel F (à partir de la base (e_1, \dots, e_n) de E). Jusqu'à la fin de la sous-Section nous conserverons les notations de la Définition 4.1.14 page précédente pour la base de F . La Proposition qui suit met en évidence l'intérêt de cette base.

Proposition 4.1.19 La base de Gröbner de F est constituée de relations minimales de F .

Preuve : Soit $j \in \{1, \dots, d\}$ et supposons que r_j n'est pas une relation minimale. Donc $r_j = r + r'$ où $r, r' \in F \setminus \{0\}$ vérifient $\text{supp}(r) \cap \text{supp}(r') = \emptyset$. Ceci implique que $\text{supp}(r_j) = \text{supp}(r) \sqcup \text{supp}(r')$ et nous pouvons donc supposer que $\max(\text{supp}(r)) = e_{i_j}$. Posons $e_{i'} = \max(\text{supp}(r'))$. D'après la Propriété 4.1.15 page précédente, il existe j' tel que $i' = i_{j'}$. Ayant $i' < i_j$, il vient $j' < j$. Donc $e_{i_{j'}} \in \text{supp}(r') \subseteq \text{supp}(r_j)$ avec $j \neq j'$ ce qui est contraire à la Définition 4.1.14 page précédente. Ainsi r_j est bien une relation minimale de F pour tout j . \square

Remarque 4.1.20 D'après la Proposition 4.1.19 nous savons donc que \equiv_F est déterminée par les éléments de sa base de Gröbner.

Grâce à l'introduction des bases de Gröbner, nous pouvons à présent démontrer l'unicité du produit de transvections ψ_I dans la Proposition 3.3.6 page 50.

Proposition 4.1.21 Soit A une k -algèbre de dimension finie, basique, triangulaire et monomiale. Soit Q le carquois ordinaire de A et supposons que Q n'a pas de flèches multiples. Soit I_0 l'idéal admissible et monomial de kQ tel que $kQ/I_0 \simeq A$. Soit $kQ/I \simeq A$ une présentation admissible quelconque. Alors il existe un et un seul produit de transvections $\psi_I \in \mathcal{T}$ tel que :

- (i) $\psi_I(I_0) = I$,
- (ii) si (α, u) est un raccourci tel que $u \in \text{supp}(\psi_I(\alpha))$, alors $\varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) \neq I_0$ pour tout $\tau \neq 0$.

Preuve : Rappelons que l'existence d'un produit de transvections $\psi_I \in \mathcal{T}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé a été établie dans la Proposition 3.3.6 page 50. Pour la présente démonstration, fixons $<$ un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q . Puisqu'il existe $\varphi \in \mathcal{T}$ tel que $\varphi(I_0) = I$ (par exemple $\varphi = \psi_I$), nous pouvons utiliser la Propriété 4.1.17 page 55. Pour chaque chemin u tel que $u \in I_0$, nous noterons donc r_u l'élément de la base de Gröbner de I qui lui est associé.

Soient $\psi, \psi' \in \mathcal{T}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. Pour montrer que $\psi = \psi'$, il suffit de montrer que $\psi(\alpha) = \psi'(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$. Si $\alpha \in Q_1$, alors (d'après la Propriété 3.1.10 page 36) $\alpha \in \text{supp}(\psi(\alpha))$, $\alpha^*(\psi(\alpha)) = 1$ et $\psi(\alpha) - \alpha$ est une combinaison linéaire de chemins parallèles à u et de longueur au moins 2, et il en est de même pour ψ' . Pour montrer que $\psi = \psi'$, il suffit donc de montrer que $\theta^*(\psi(\alpha)) = \theta^*(\psi'(\alpha))$ pour tout raccourci (α, θ) .

Soit $\alpha \in Q_1$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un chemin θ tel que (α, θ) est un raccourci, tel que $\theta^*(\psi(\alpha)) \neq \theta^*(\psi'(\alpha))$ et tel que θ est maximal pour ces deux propriétés. Puisque $\theta^*(\psi(\alpha)) \neq \theta^*(\psi'(\alpha))$, nous pouvons supposer, quitte à échanger ψ et ψ' , que $\theta^*(\psi(\alpha)) \neq 0$. En particulier, $\theta \in \text{supp}(\psi(\alpha))$. Puisque ψ vérifie la condition (ii) de l'énoncé, il existe des chemins u_1, u_2 tels que :

$$u_2\alpha u_1 \in I_0 \text{ et } I_0 \not\exists \varphi_{\alpha, \theta, 1}(u_2\alpha u_1) = u_2\alpha u_1 + u_2\theta u_1$$

Nous noterons $u = u_2\alpha u_1$ et $w = u_2\theta u_1$. Ainsi, $u \in I_0$ et $w \notin I_0$. Notons que puisque (α, θ) est un raccourci, la Propriété 3.1.10 page 36 implique que :

$$\begin{cases} w^*(\psi(u)) = \theta^*(\psi(\alpha)) \\ w^*(\psi'(u)) = \theta^*(\psi'(\alpha)) \end{cases} \quad (1)$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} A_\psi &= \{v \in \text{supp}(\psi(u)) \mid v \neq u \text{ et } v \in I_0\} \\ A_{\psi'} &= \{v \in \text{supp}(\psi'(u)) \mid v \neq u \text{ et } v \in I_0\} \end{aligned}$$

Puisque $u \in I_0$, nous avons $\psi(u), \psi'(u) \in I$. En outre, $u = \max(\text{supp}(\psi(u)))$ et $u^*(\psi(u)) = 1$ (resp. $u = \max(\text{supp}(\psi'(u)))$ et $u^*(\psi'(u)) = 1$) d'après la Propriété 3.1.10 page 36. Nous en déduisons, grâce à la Propriété 4.1.15 page 55 et à la Propriété 4.1.17 page 55 sur la base de Gröbner de I , que :

$$\begin{cases} \psi(u) = r_u + \sum_{v \in A_\psi} v^*(\psi(u)) r_v \\ \psi'(u) = r_u + \sum_{v \in A_{\psi'}} v^*(\psi'(u)) r_v \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} w^*(\psi(u)) = w^*(r_u) + \sum_{v \in A_\psi} v^*(\psi(u)) w^*(r_v) \\ w^*(\psi'(u)) = w^*(r_u) + \sum_{v \in A_{\psi'}} v^*(\psi'(u)) w^*(r_v) \end{cases} \quad (2)$$

Soit $v \in A_\psi$ (resp. $v \in A_{\psi'}$) tel que $w^*(r_v) \neq 0$. Donc $w \in \text{supp}(r_v)$. Etant donné que $v \in I_0$ et que $w \notin I_0$, nous avons donc $w \in \text{supp}(r_v) \setminus \{v\} = \text{supp}(r_v - v)$. D'après la Propriété 4.1.17 page 55, cela implique que w est dérivé de v . Ainsi :

- $u = u_2\alpha u_1$ et $w = u_2\theta u_1$ avec (α, θ) un raccourci,
- w est dérivé de u ,
- w est dérivé de v .

Ceci implique, d'après la Propriété 3.1.11 page 37, qu'il existe un chemin θ' tel que :

- (α, θ') est un raccourci,
- θ est dérivé de θ' (et donc $\theta' > \theta$),
- $v = u_2 \theta' u_1$.

La maximalité de θ entraîne donc que $\theta'^*(\psi(\alpha)) = \theta'^*(\psi'(\alpha))$. Etant donné que $u = u_2 \alpha u_1$ et que $v = u_2 \theta' u_1$, la Propriété 3.1.10 page 36 implique que : $v^*(\psi(u)) = \theta'^*(\psi(\alpha))$ et $v^*(\psi'(u)) = \theta'^*(\psi'(\alpha))$. Donc $v^*(\psi(u)) = v^*(\psi'(u))$. Rappelons que $v^*(\psi(u)) \neq 0$ (resp. $v^*(\psi'(u)) \neq 0$) car $v \in A_\psi$ (resp. $v \in A_{\psi'}$), donc $v^*(\psi'(u)) \neq 0$ (resp. $v^*(\psi(u)) \neq 0$) et $v \in A_{\psi'}$ (resp. $v \in A_\psi$). Ceci est vrai pour tout $v \in A_\psi$ (resp. $v \in A_{\psi'}$) tel que $w^*(r_v) \neq 0$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \{v \in A_\psi \mid w^*(r_v) \neq 0\} = \{v \in A_{\psi'} \mid w^*(r_v) \neq 0\} \\ v \in A_\psi \text{ et } w^*(r_v) \neq 0 \implies v^*(\psi(u)) = v^*(\psi'(u)) \end{cases} \quad (3)$$

Les points (2) et (3) impliquent que $w^*(\psi(u)) = w^*(\psi'(u))$. Avec le point (1), nous en déduisons que $\theta^*(\psi(\alpha)) = \theta^*(\psi'(\alpha))$. Or nous avons supposé que $\theta^*(\psi(\alpha)) \neq \theta^*(\psi'(\alpha))$. Cette contradiction montre que pour tout raccourci (α, θ) , nous avons $\theta^*(\psi(\alpha)) = \theta^*(\psi'(\alpha))$. Donc $\psi = \psi'$. \square

La Remarque 4.1.20 page 56 permet de démontrer la Proposition suivante. Celle-ci sera utile dans l'étude des dérivations d'une k -algèbre de dimension finie.

Proposition 4.1.22 Soit $d: E \rightarrow E$ une application linéaire telle que $d(e_i) = t_i e_i$ avec $t_i \in k$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et telle que $d(F) \subseteq F$. Alors :

- $d(r_j) \in k.r_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,
- si $e_i \equiv_F e_j$ alors $t_i = t_j$.

Preuve : • Fixons $j \in \{1, \dots, d\}$. Nous avons $r_j \in e_{i_j} + \text{Vect}(e_i \mid i < i_j)$, $d(F) \subseteq F$ et $d(e_i) = t_i e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc :

- (i) $\text{supp}(d(r_j)) \subseteq \text{supp}(r_j)$,
- (ii) $d(r_j) \in F \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_j}) = \text{Vect}(r_1, \dots, r_j)$.

Il existe donc des scalaires $\tau_1, \dots, \tau_j \in k$ tels que :

$$d(r_j) = \tau_1 r_1 + \dots + \tau_j r_j$$

D'autre part, $e_{i_l} \in \text{supp}(r_{l'})$ si et seulement si $l = l'$. Donc pour tout $j' \in \{1, \dots, j-1\}$:

- (iii) $e_{i_{j'}} \in \text{supp}(d(r_j)) \Leftrightarrow \tau_{j'} \neq 0$,
- (iv) $e_{i_{j'}} \notin \text{supp}(r_j)$.

(i) et (iv) impliquent que $e_{i_{j'}} \notin \text{supp}(d(r_j))$ pour tout $j' \in \{1, \dots, j-1\}$, puis (iii) entraîne $\tau_1 = \dots = \tau_{j-1} = 0$. Ainsi :

$$d(r_j) = \tau_j r_j \text{ avec } \tau_j \in k$$

- Soit $j \in \{1, \dots, d\}$ et écrivons :

$$r_j = e_{i_j} + \sum_{i < i_j} \lambda_i e_i$$

Donc :

$$\tau_j e_{i_j} + \sum_{i < i_j} \tau_j \lambda_i e_i = \tau_j r_j = d(r_j) = t_{i_j} e_{i_j} + \sum_{i < i_j} \lambda_i t_i e_i$$

Ceci implique que :

- $\tau_j = t_{i_j}$,
- si $i < i_j$ vérifie $\lambda_i \neq 0$, alors $t_i = \tau_j$.

Ainsi :

$$e_i \in \text{supp}(r_j) \Rightarrow t_i = \tau_j$$

• Soient $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ tels que $e_i \equiv_F e_{i'}$. D'après la Remarque 4.1.20 page 56 il existe une suite d'indices $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, d\}$ telle que :

- $e_i \in \text{supp}(r_{j_1})$ et $e_{i'} \in \text{supp}(r_{j_m})$,
- $\text{supp}(r_{j_l}) \cap \text{supp}(r_{j_{l+1}}) \neq \emptyset$ pour tout $l \in \{1, \dots, m-1\}$.

Le point précédent nous donne alors :

- $t_i = \tau_{j_1}$ et $t_{i'} = \tau_{j_m}$,
- $\tau_{j_l} = t_{i_l} = \tau_{j_{l+1}}$ pour $l \in \{1, \dots, m-1\}$.

Donc $\tau_{j_1} = \tau_{j_m}$ et :

$$e_i \equiv_F e_{i'} \Rightarrow t_i = t_{i'}$$

□

Nous terminons cette sous-Section par démontrer quelques propriétés liées à la base de Gröbner de F .

Propriété 4.1.23 $e_1 \in F \Leftrightarrow r_1 = e_1$

Preuve : Si $r_1 = e_1$, alors $e_1 \in F$. Réciproquement, si $e_1 \in F$, alors il existe j tel que $i_j = 1$, et nécessairement $j = 1$. Donc $r_1 \in e_1 + \text{Vect}(e_i ; i < 1)$ c'est à dire $r_1 = e_1$. □

Dans les trois Propriétés qui suivent, nous effectuons le quotient de E par un vecteur non nul de E et nous nous intéressons à la relation d'équivalence associée à l'image de F dans ce quotient.

Propriété 4.1.24 Supposons que $e_1 \in F$ et soit $p: E \rightarrow E/k.e_1$ la surjection canonique. L'espace $E/k.e_1$ est alors muni d'une base ordonnée $p(e_2) < \dots < p(e_n)$. Pour cette base de $E/k.e_1$, le sous-espace $p(F) = F/k.e_1$ admet $p(r_2) < \dots < p(r_d)$ pour base de Gröbner. Enfin, pour $i, j \geq 2$, nous avons :

$$e_i \equiv_F e_j \Leftrightarrow p(e_i) \equiv_{F/k.e_1} p(e_j)$$

Preuve : Clairement, $(p(e_2), \dots, p(e_n))$ est une base de $p(E)$. Puisque $e_1 \in F$, la Propriété 4.1.23 implique que $r_1 = e_1$. En particulier, $(p(r_2), \dots, p(r_d))$ est une base de $p(F)$. Soit $j \in \{2, \dots, d\}$, alors $r_j \in e_{i_j} + \text{Vect}(e_i ; i < i_j)$ et $e_1 \notin \text{supp}(r_j)$. Donc :

- (i) $p(r_j) \in p(e_{i_j}) + \text{Vect}(p(e_i) ; 2 \leq i < i_j)$,
- (i') $p(e_i) \in \text{supp}(p(r_j))$ si et seulement si $e_i \in \text{supp}(r_j)$, pour tout $i \geq 2$,
- (ii) $i_2 < \dots < i_d$.

Nous savons que si $j \neq j'$ alors $e_{i_j} \notin \text{supp}(r_{j'})$. Le point (i') ci-dessus implique donc que :

(iii) si $j, j' \geq 2$ sont distincts alors $p(e_{i_j}) \notin \text{supp}(p(r_{j'}))$.

En résumé, la base $(p(r_2), \dots, p(r_d))$ de $p(F)$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de la Définition 4.1.14 page 55 pour $p(F)$. C'est donc bien la base de Gröbner de $p(F)$. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer la comparaison annoncée entre \equiv_F et $\equiv_{p(F)}$. D'après la Proposition 4.1.19 page 56, nous savons que :

- (1) \equiv_F est déterminée par les relations minimales r_1, \dots, r_d de F .
- (2) $\equiv_{p(F)}$ est déterminée par les relations minimales $p(r_2), \dots, p(r_d)$ de $p(F)$.

Etant donné que $\text{supp}(r_1) = \{e_1\}$, la relation minimale r_1 est la seule dont le support contient e_1 . Donc la classe de \equiv_F -équivalence de e_1 est $\{e_1\}$. Pour cette raison \equiv_F est déterminée par les relations minimales r_2, \dots, r_d . D'autre part, le point (i') ci-dessus montre que la bijection ensembliste :

$$p: \{e_2, \dots, e_n\} \rightarrow \{p(e_2), \dots, p(e_n)\}$$

fait se correspondre le support de r_j et celui de $p(r_j)$ pour tout $j \geq 2$. Avec les points (1) et (2) ci-dessus nous avons donc pour tous $i, j \geq 2$:

$$e_i \equiv_F e_j \Leftrightarrow p(e_i) \equiv_{p(F)} p(e_j)$$

□

Propriété 4.1.25 Supposons que $e_1 \notin F$ et soit $q: E \rightarrow E/k.e_1$ la projection canonique. L'espace $E/k.e_1$ est alors muni d'une base ordonnée $q(e_2) < \dots < q(e_n)$. Pour cette base de $E/k.e_1$, le sous-espace $q(F)$ admet $q(r_1) < \dots < q(r_d)$ pour base de Gröbner. Enfin, pour $i, j \geq 2$ nous avons la comparaison suivante entre \equiv_F et $\equiv_{q(F)}$:

$$q(e_i) \equiv_{q(F)} q(e_j) \Rightarrow e_i \equiv_F e_j$$

Preuve : Clairement, $(q(e_2), \dots, q(e_n))$ est une base de $q(E)$. Puisque $e_1 \notin F$, la Propriété 4.1.23 implique que $r_1 \neq e_1$ et donc $i_j \geq i_1 > 1$ pour tout $j \geq 1$. En outre, $(q(r_1), \dots, q(r_d))$ est une base de $q(F)$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$, alors $r_j \in e_{i_j} + \text{Vect}(e_i ; i < i_j)$ avec $i_j > 1$. Donc :

- (i) $q(r_j) \in q(e_{i_j}) + \text{Vect}(q(e_i)) ; 2 \leq i < i_j$,
- (i') $q(e_i) \in \text{supp}(q(r_j))$ si et seulement si $e_i \in \text{supp}(r_j)$, pour tout $i \geq 2$,
- (ii) $i_1 < \dots < i_d$.

Nous savons que si $j \neq j'$ alors : $e_{i_j} \notin \text{supp}(r_{j'})$ et $i_j, i_{j'} \geq 2$. Le point (i') ci-dessus implique donc que :

- (iii) si $j \neq j'$ alors $q(e_{i_j}) \notin \text{supp}(q(r_{j'}))$.

En résumé, la base $(q(r_1), \dots, q(r_d))$ de $q(F)$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de la Définition 4.1.14 page 55 pour $q(F)$. C'est donc bien la base de Gröbner de $q(F)$. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer la comparaison annoncée entre \equiv_F et $\equiv_{q(F)}$. D'après la Proposition 4.1.19 page 56, nous savons que :

- (1) \equiv_F est déterminée par les relations minimales r_1, \dots, r_d de F .
- (2) $\equiv_{q(F)}$ est déterminée par les relations minimales $q(r_1), \dots, q(r_d)$ de $q(F)$.

De plus, le point (i') ci-dessus montre que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ nous avons :

$$q(e_i) \in \text{supp}(q(r_j)) \Rightarrow e_i \in \text{supp}(r_j)$$

Donc pour $i, j \geq 2$ nous avons bien :

$$q(e_i) \equiv_{q(F)} q(e_j) \Rightarrow e_i \equiv_F e_j \quad \square$$

Propriété 4.1.26 Soit $\pi : E \rightarrow E/k.r_1$ la surjection canonique. Alors $E/k.r_1$ est muni d'une base ordonnée : $\pi(e_1) < \dots < \widehat{\pi(e_{i_1})} < \dots < \pi(e_n)$. Pour cette base de $E/k.r_1$, le sous-espace $\pi(F) = F/k.r_1$ admet $\pi(r_2) < \dots < \pi(r_d)$ pour base de Gröbner. Enfin, pour $i, j \geq 2$ nous avons :

$$\pi(e_i) \equiv_{\pi(F)} \pi(e_j) \Rightarrow e_i \equiv_F e_j$$

Preuve : Etant donné que $r_1 \in e_{i_1} + \text{Vect}(e_i ; i < i_1)$, le $(n-1)$ -uplet $(\pi(e_1), \dots, \widehat{\pi(e_{i_1})}, \dots, \pi(e_n))$ est bien une base de $\pi(E)$. D'autre part, $(\pi(r_2), \dots, \pi(r_d))$ est une base de $\pi(F)$. Soit $j \in \{2, \dots, d\}$. Nous avons $r_j \in e_{i_j} + \text{Vect}(e_i ; i < i_j)$ avec $e_{i_1} \notin \text{supp}(r_j)$. Donc :

- (i) $\pi(r_j) \in \pi(e_{i_j}) + \text{Vect}(\pi(e_i) ; i < i_j \text{ et } i \neq i_1)$,
- (i') $\pi(e_i) \in \text{supp}(\pi(r_j))$ si et seulement si $e_i \in \text{supp}(r_j)$, pour tout $i \neq i_1$,
- (ii) $i_2 < \dots < i_d$.

Si j, j' sont distincts et tous deux différents de 1, alors $e_{i_j} \notin \text{supp}(r_{j'})$. Le point (i') ci-dessus implique donc que :

- (iii) si $j, j' \in \{2, \dots, d\}$ sont distincts alors $\pi(e_{i_j}) \notin \text{supp}(\pi(r_{j'}))$.

En résumé, la base $(\pi(r_2), \dots, \pi(r_d))$ de $\pi(F)$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de la Définition 4.1.14 page 55 pour $\pi(F)$. C'est donc bien la base de Gröbner de $\pi(F)$. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer la comparaison annoncée entre \equiv_F et $\equiv_{\pi(F)}$. D'après la Proposition 4.1.19 page 56, nous savons que :

- (1) \equiv_F est déterminée par les relations minimales r_1, \dots, r_d de F .
- (2) $\equiv_{\pi(F)}$ est déterminée par les relations minimales $\pi(r_2), \dots, \pi(r_d)$ de $\pi(F)$.

De plus, le point (i') ci-dessus montre que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$ nous avons :

$$\pi(e_i) \in \text{supp}(\pi(r_j)) \Rightarrow e_i \in \text{supp}(r_j)$$

Donc pour $i, j \geq 2$ nous avons bien :

$$\pi(e_i) \equiv_{\pi(F)} \pi(e_j) \Rightarrow e_i \equiv_F e_j \quad \square$$

4.1.2 Comparaison des relations d'équivalence associées à deux sous-espaces liés par un automorphisme

Nous nous intéressons ici au problème suivant dont nous conserverons les notations tout au long de la sous-Section :

Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et muni d'une base totalement ordonnée $e_1 < \dots < e_n$. Soit I un sous-espace de E , soit $\psi : E \rightarrow E$ un isomorphisme linéaire qui est unipotent et posons $J = \psi(I)$.

Est-il possible de comparer, au sens de la finesse, \equiv_I et \equiv_J ?

Rappelons que « \equiv_I est plus fine que \equiv_J » signifie que : $e_i \equiv_I e_j \Rightarrow e_i \equiv_J e_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Afin d'alléger les énoncés de comparaison de \equiv_I et \equiv_J , nous introduisons à présent les conditions sur ψ qui seront utilisées dans ces résultats. Nous dirons que ψ vérifie la condition (C) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(C0) la matrice de ψ dans la base (e_1, \dots, e_n) de E est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1,

(C1) si $e_j \in \text{supp}(\psi(e_i))$ avec $i \neq j$, alors $\psi(e_j) = e_j$,

(C2) si $i \neq j$, alors les ensembles $\text{supp}(\psi(e_i) - e_i)$ et $\text{supp}(\psi(e_j) - e_j)$ sont disjoints.

Notons que la condition (C0) imposée sur la matrice de ψ signifie que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ nous avons :

$$\psi(e_i) \in e_i + \text{Vect}(e_l ; l < i)$$

Voici quelques propriétés de ψ .

Propriété 4.1.27 Si ψ vérifie (C) alors $(\psi - \text{Id}_E)^2 = 0$. En outre si nous posons $\nu = \psi - \text{Id}_E$ alors $\psi = \text{Id}_E + \nu$ et $\psi^{-1} = \text{Id}_E - \nu$.

Preuve : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, alors il existe des entiers $j_1 < \dots < j_t < i$ (avec $t \geq 0$) tels que :

$$\psi(e_i) = e_i + \sum_{l=1}^t \lambda_l e_{j_l}$$

où les scalaires λ_l sont tous non nuls. En particulier, $\text{supp}(\psi(e_i) - e_i) = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_t}\}$ et $\psi(e_{j_l}) = e_{j_l}$ pour tout $l \in \{1, \dots, t\}$, puisque la condition (C) est satisfaite. Donc :

$$(\psi - \text{Id}_E)^2(e_i) = (\psi - \text{Id}_E) \left(\sum_{l=1}^t \lambda_l e_{j_l} \right) = 0$$

et ceci pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc $(\psi - \text{Id}_E)^2 = 0$. Notons alors $\nu = \psi - \text{Id}_E$, de sorte que $\psi = \text{Id}_E + \nu$. Avec $(\psi - \text{Id}_E)^2 = 0$ nous avons $\psi^2 - 2\psi + \text{Id}_E = 0$ ce qui, en composant avec ψ^{-1} , s'écrit : $\psi^{-1} = \text{Id}_E - \nu$. \square

Remarque 4.1.28 Sous les hypothèses de la Propriété 4.1.27 (i.e. ψ vérifie la condition (C)) et avec les mêmes notations, nous avons donc pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\text{supp}(\psi^{-1}(e_i)) = \text{supp}(\psi(e_i))$$

Ceci entraîne en particulier que ψ^{-1} et ψ vérifient simultanément ou non la condition (C).

La condition (C) peut paraître technique, néanmoins la Proposition suivante montre qu'elle est satisfaite dans les cas qui nous intéresseront par la suite.

Proposition 4.1.29 Soit Q un carquois fini et sans cycle orienté, posons $E = kQ$. Prenons pour base de E la famille des chemins de Q . Soit $\psi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection. Soit $<$ un ordre associé à (α, u) sur l'ensemble des chemins de Q . Alors ψ vérifie la condition (C).

Preuve : Puisque Q n'a pas de cycle orienté, α n'apparaît pas dans u et donc $\psi(u) = u$.

(C0), (C1) Soit v un chemin de Q .

- si α n'apparaît pas dans v , alors $\psi(v) = v$ et $\text{supp}(\psi(v) - v) = \emptyset$.
- si α apparaît dans v alors il existe des chemins v_1 et v_2 dans lesquels α n'apparaît pas (car Q est sans cycle orienté) et tels que $v = v_2 \alpha v_1$. Donc $\psi(v) = v + \tau v_2 u v_1$ avec $v_2 u v_1 < v_2 \alpha v_1 = v$ d'après la Propriété 3.2.5 page 42. De plus, $\text{supp}(\psi(v) - v) = \{v_2 u v_1\}$ avec $\psi(v_2 u v_1) = v_2 u v_1$ car α n'apparaît ni dans v_1 , ni dans v_2 , ni dans u .

Ce deux points montrent bien que la matrice de ψ dans la base constituée des chemins de Q et ordonnée par $<$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux égaux à 1. La condition (C0) est donc satisfaite. Ces deux points montrent également que la condition (C1) est satisfaite.

(C2) Soient c et c' deux chemins distincts. Nous avons donc plusieurs cas selon que α apparaît ou non dans c ou c' :

1^{er} cas : si α n'apparaît pas dans c (resp. dans c'). Alors $\psi(c) = c$ (resp. $\psi(c') = c'$) et donc les ensembles $\text{supp}(\psi(c) - c)$ et $\text{supp}(\psi(c') - c')$ sont disjoints parce que l'un des deux au moins est vide.

2nd cas : si $c = c_2\alpha c_1$ et $c' = c'_2\alpha c'_1$, alors :

$$\text{supp}(\psi(c) - c) = \{c_2uc_1\} \text{ et } \text{supp}(\psi(c') - c') = \{c'_2uc'_1\}$$

Si ces deux ensembles ne sont pas disjoints, alors $c_2uc_1 = c'_2uc'_1$. Etant donné que Q n'a pas de cycle orienté, cela entraîne $c_2 = c'_2$, $c_1 = c'_1$ puis $c = c'$ ce qui est impossible.

En conclusion $\text{supp}(\psi(c) - c) \cap \text{supp}(\psi(c') - c') = \emptyset$. Donc (C2) est bien satisfaite. \square

Avant d'établir les résultats de comparaison de \equiv_I et \equiv_J nous démontrons un Lemme intermédiaire.

Lemme 4.1.30 *Supposons que ψ vérifie la condition (C) et posons $\nu = \psi - Id_E$. Supposons en outre que :*

$$\text{si } i \neq j \text{ vérifient } e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \text{ alors } e_i \not\equiv_I e_j \quad (\text{H})$$

Soit $r \in I$ une relation minimale de forme normale $r = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$. Alors :

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \sum_{s \in S} \lambda_s e_s + \sum_{s \in S} \lambda_s \nu(e_s) \\ \text{supp}(\psi(r)) &= \{e_s \mid s \in S\} \bigsqcup \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \end{aligned}$$

En outre il existe une décomposition de $\psi(r) \in J$ en somme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints $\psi(r) = r_1 + \dots + r_{n_r}$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{supp}(r) &= \{e_s \mid s \in S\} \subseteq \text{supp}(r_1) \\ \text{supp}(r_t) &\subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \text{ pour } t \geq 2 \end{aligned}$$

Preuve : Puisque r est une relation minimale de I , nous avons $S \neq \emptyset$ et $\psi(r) \in J \setminus \{0\}$. Remarquons également que d'après la Propriété 4.1.27 page précédente nous avons :

$$\psi = Id_E + \nu \quad \text{et} \quad \psi = Id_E - \nu$$

D'autre part, la condition (C) entraîne :

$$e_i \notin \text{supp}(\nu(e_i)) \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Commençons par déterminer le support de $\psi(r)$. Ayant $\psi = Id_E + \nu$, il vient :

$$\psi(r) = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s + \sum_{s \in S} \lambda_s \nu(e_s) \quad (2)$$

Notons que :

- d'après la condition (C), les ensembles $\text{supp}(\nu(e_s))$ ($s \in S$) sont deux à deux disjoints,
- d'après (1), nous avons $e_s \notin \text{supp}(\nu(e_s))$ pour tout $s \in S$,
- si $s, s' \in S$ sont distincts, alors $e_s \equiv_I e_{s'}$ (car $e_s, e_{s'} \in \text{supp}(r)$ et r est une relation minimale de I), ce qui entraîne (par (H)) que $e_{s'} \notin \text{supp}(\nu(e_s))$

Ces trois propriétés démontrent, à partir de (2), que :

$$\text{supp}(\psi(r)) = \{e_s \mid s \in S\} \bigsqcup \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \quad (3)$$

D'après la Proposition 4.1.6 page 53, la relation $\psi(r)$ de J s'écrit comme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints :

$$\psi(r) = r_1 + \dots + r_{n_r} \quad (4)$$

Parmi ces relations minimales, il en existe une, soit r_{t_0} , dont le support contient au moins un des éléments de $\{e_s \mid s \in S\} \subseteq \text{supp}(\psi(r))$. Quitte à changer l'indexation des relations r_t , nous pouvons supposer que $t_0 = 1$ et $r_{t_0} = r_1$. Il existe donc une partie non vide S_1 de S et un élément $u_1 \in E$ tels que :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sum_{s \in S_1} \lambda_s e_s + u_1 \\ r_1 &\text{ est une relation minimale de } J \\ \text{supp}(u_1) &\subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \end{aligned}$$

Notons que la dernière propriété ci-dessus implique que $\psi(u_1) = u_1$. Ayant $\psi^{-1} = Id_E - \nu$, il vient :

$$I \ni \psi^{-1}(r_1) = \sum_{s \in S_1} \lambda_s e_s - \sum_{s \in S_1} \lambda_s \nu(e_s) + u_1$$

et avec les mêmes arguments que ceux utilisés plus haut pour déterminer $\text{supp}(\psi(r))$ (rappelons que $\text{supp}(u_1) \subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s))$), nous avons :

$$\text{supp}(\psi^{-1}(r_1)) = \{e_s \mid s \in S_1\} \sqcup P \text{ avec } P \subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s))$$

Grâce à la Proposition 4.1.6 page 53, la relation $\psi^{-1}(r_1)$ de I peut s'écrire comme somme de relations minimales de I à supports deux à deux disjoints. Parmi ces relations minimales, choisissons en une, soit r'_1 , dont le support contient au moins un élément de $\{e_s \mid s \in S_1\} \subseteq \text{supp}(\psi^{-1}(r_1))$. Il existe donc une partie non vide S'_1 de S_1 ainsi qu'un élément $u'_1 \in E$ tels que :

$$\begin{aligned} r'_1 &= \sum_{s \in S'_1} \lambda_s e_s + u'_1 \\ r'_1 &\text{ est une relation minimale de } I \\ \text{supp}(u'_1) &\subseteq P \subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \end{aligned}$$

En particulier, puisque les deux ensembles $\{e_s \mid s \in S\}$ et $\bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s))$ sont disjoints (d'après (3)), nous avons :

$$\text{supp}(r'_1) = \{e_s \mid s \in S'_1\} \bigsqcup \text{supp}(u'_1)$$

Fixons $s_0 \in S'_1$ et soit $e \in \text{supp}(u'_1)$. Alors il existe $s \in S$ tel que $e \in \text{supp}(\nu(e_s))$, ce qui implique :

- $e \equiv_I e_{s_0}$ car : $e, e_{s_0} \in \text{supp}(r'_1)$ et r'_1 est une relation minimale de I ,
- $e \not\equiv_I e_s$ car $e \in \text{supp}(\nu(e_s))$ (d'après (1) et (H)),
- $e_s \equiv_I e_{s_0}$ car : $e_s, e_{s_0} \in \text{supp}(r)$ et r est une relation minimale de I .

Nous obtenons donc une contradiction : $e \equiv_I e_s$ et $e \not\equiv_I e_s$. Cette contradiction démontre que $\text{supp}(u'_1) = \emptyset$, c'est à dire $u'_1 = 0$ (remarquons au passage que l'utilisation de l'indice $s_0 \in S'_1$ montre que les conditions $S_1 \neq \emptyset$ et $S'_1 \neq \emptyset$ sont indispensables). Donc :

$$r'_1 = \sum_{s \in S'_1} \lambda_s e_s \text{ est une relation minimale de } I$$

La minimalité de $r = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ entraîne donc que $S'_1 = S$ puis que $S_1 = S$. Ainsi, la relation minimale $r_1 = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s + u_1$ de J vérifie la propriété :

$$\{e_s \mid s \in S\} \subseteq \text{supp}(r_1) \quad (5)$$

Etant donné que $\psi(r) = r_1 + \dots + r_{n_r}$ est une décomposition en somme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints, les points (3) et (5) entraînent que pour tout $t \geq 2$ nous avons :

$$\text{supp}(r_t) \subseteq \text{supp}(\psi(r)) \setminus \text{supp}(r_1) \subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \quad (6)$$

Le Lemme est donc démontré grâce aux points (2), (3), (5) et (6). \square

Nous pouvons à présent établir et démontrer quelques Propositions permettant de comparer \equiv_I et \equiv_J .

Proposition 4.1.31 *Supposons que ψ vérifie la condition (C) et posons $\nu = \psi - Id_E$. Supposons satisfaites les deux conditions suivantes :*

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \not\equiv_I e_j \quad (\text{H1})$$

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \not\equiv_J e_j \quad (\text{H2})$$

Alors $I = J$ et en particulier \equiv_I et \equiv_J coïncident.

Preuve : Soit $r \in I$ une relation minimale de I . Ecrivons r sous forme normale : $r = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$. Grâce à la condition (H1) nous pouvons appliquer le Lemme 4.1.30 page 62 à r . Donc il existe $u \in E$ vérifiant :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sum_{s \in S} \lambda_s e_s + u \quad \text{est une relation minimale de } J. \\ \text{supp}(u) &\subseteq \bigsqcup_{s \in S} \text{supp}(\nu(e_s)) \quad (\star) \\ \text{supp}(r_1) &= \{e_s \mid s \in S\} \sqcup \text{supp}(u) \end{aligned}$$

Soit $s \in S$ et soit $e \in \text{supp}(u)$. D'après la condition (\star) sur $\text{supp}(u)$ nous savons qu'il existe $s' \in S$ tel que $e \in \text{supp}(\nu(e_{s'}))$. Nous avons donc :

- $e \not\equiv_J e_{s'}$ car $e \in \text{supp}(\nu(e_{s'}))$ (voir (H2)),
- $e \equiv_J e_s$ car : $e, e_s \in \text{supp}(r_1)$ et r_1 est une relation minimale de J ,
- $e_s \equiv_J e_{s'}$ car : $e_s, e_{s'} \in \text{supp}(r_1)$ et r_1 est une relation minimale de J .

Nous avons donc $e \equiv_J e_s \equiv_J e_{s'} \not\equiv_J e$. Cette contradiction montre que $\text{supp}(u) = \emptyset$ puis $u = 0$. Donc :

$$J \ni r_1 = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s = r$$

Ainsi : $r \in J$ pour toute relation minimale r de I . Puisque I est engendré par ses relations minimales (grâce au Corollaire 4.1.7 page 53), il vient $I \subseteq J$. Finalement $I = J$ car I et J ont la même dimension ($J = \psi(I)$ et ψ est un automorphisme de E). \square

Proposition 4.1.32 *Supposons que ψ vérifie la condition (C) et posons $\nu = \psi - Id_E$. Supposons satisfaites les deux conditions suivantes :*

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \not\equiv_I e_j \quad (\text{H3})$$

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \equiv_J e_j \quad (\text{H4})$$

Alors \equiv_I est plus fine que \equiv_J . Plus précisément, \equiv_J est la relation d'équivalence engendrée par :

$$\begin{aligned} e_i \equiv_I e_j &\Rightarrow e_i \equiv_J e_j \\ e_i \equiv_J e_j &\text{ dès que } e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \end{aligned}$$

Preuve : • Rappelons tout d'abord que grâce à (H3) et grâce au Lemme 4.1.30 page 62, pour chaque relation minimale r de I nous disposons d'une décomposition :

$$\psi(r) = r_1 + \dots + r_{n_r} \quad (1)$$

en somme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints de façon que :

$$\text{supp}(r) \subseteq \text{supp}(r_1) = \text{supp}(r) \bigsqcup_{e_i \in \text{supp}(r)} \bigsqcup \text{supp}(\nu(e_i)) \quad (2)$$

$$\text{supp}(r_t) \subseteq \bigsqcup_{e_i \in \text{supp}(r)} \text{supp}(\nu(e_i)) \quad \text{pour } 2 \leq t \leq n_r \quad (3)$$

- D'autre part, d'après la Définition 4.1.9 page 54 de \equiv_F , la relation d'équivalence \equiv_F est engendrée par :

$$(\forall r \in \text{Min}(I)) \quad e_i, e_j \in \text{supp}(r) \Rightarrow e_i \equiv_I e_j \quad (4)$$

où $\text{Min}(I)$ désigne l'ensemble des relations minimales de I .

- Définissons alors \equiv comme étant la relation d'équivalence sur $\{e_1, \dots, e_n\}$ engendrée par :

$$(\forall r \in \text{Min}(I)) \quad e_i, e_j \in \text{supp}(r) \Rightarrow e_i \equiv e_j \quad (5)$$

$$e_i \in \text{supp}(\nu(e_j)) \Rightarrow e_i \equiv e_j \quad (6)$$

Grâce à (4) il nous suffit donc de démontrer que \equiv et \equiv_J coïncident pour démontrer la Proposition.

- Notons que puisque $\psi: E \rightarrow E$ est un isomorphisme, que $J = \psi(I)$ et que I est engendré par ses relations minimales (voir Proposition 4.1.6 page 53), l'espace J est engendré par $\{\psi(r) \mid r \in \text{Min}(r)\}$. En utilisant (1) il vient donc :

$$J = \text{Vect}(r_t \mid t \in \{1, \dots, n_r\} \text{ et } r \in \text{Min}(I))$$

Etant donné que chaque r_t est une relation minimale de J , la Proposition 4.1.13 page 54 implique que \equiv_J est engendrée par :

$$(\forall r \in \text{Min}(r)) \quad (\forall t \in \{1, \dots, n_r\}) \quad e_i, e_j \in \text{supp}(r_t) \Rightarrow e_i \equiv_J e_j \quad (7)$$

- **Démontrons que \equiv est plus fine que \equiv_J .**

Soit r une relation minimale de I et soient $e_i, e_j \in \text{supp}(r)$ de sorte que $e_i \equiv e_j$ en vertu de (5). D'après (2) nous avons $\text{supp}(r) \subseteq \text{supp}(r_1)$. Donc, en utilisant (7), il vient $e_i \equiv_J e_j$. Supposons à présent que $e_i \in \text{supp}(\nu(e_j))$ de sorte que $e_i \equiv e_j$ (selon (6)). Alors $e_i \equiv_J e_j$ d'après (H4). Ces deux arguments démontrent bien que \equiv est plus fine que \equiv_J .

- **Démontrons à présent que \equiv_J est plus fine que \equiv .**

Soit r une relation minimale de I , soit $t \in \{1, \dots, n_r\}$ et soient $e_i, e_j \in \text{supp}(r_t)$ de sorte que $e_i \equiv_J e_j$ (d'après (7)). D'après (1), (2) et (3) nous savons que :

$$e_i, e_j \in \text{supp}(r) \bigsqcup_{e \in \text{supp}(r)} \bigsqcup \text{supp}(\nu(e))$$

Notons que pour $l = i$ ou $l = j$:

- si $e_l \notin \text{supp}(r)$ alors il existe $e_{l'} \in \text{supp}(r)$ tel que $e_l \in \text{supp}(\nu(e_{l'}))$. Ceci entraîne, par (6), que $e_l \equiv e_{l'}$.
- si $e_l \in \text{supp}(r)$, alors $e_l \equiv e_{l'}$ en posant $l' = l$.

En résumé :

$$\text{il existe } e_{i'}, e_{j'} \in \text{supp}(r) \text{ tels que } e_i \equiv e_{i'} \text{ et } e_j \equiv e_{j'}$$

Or (5) entraîne $e_{i'} \equiv e_{j'}$, donc $e_i \equiv e_{i'} \equiv e_{j'} \equiv e_j$. Ainsi :

$$e_i \equiv e_j \text{ dès que } e_i, e_j \in \text{supp}(r_t)$$

Ceci démontre que \equiv_J est plus fine que \equiv , et que \equiv et \equiv_J coïncident. \square

La Proposition qui suit est en quelque sorte le symétrique de la Proposition 4.1.32 page ci-contre.

Proposition 4.1.33 *Supposons que ψ vérifie la condition (C) et posons $\nu = \psi - \text{Id}_E$. Supposons satisfaites les deux conditions suivantes :*

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \equiv_I e_j \quad (\text{H5})$$

$$e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow e_i \not\equiv_J e_j \quad (\text{H6})$$

Alors \equiv_J est plus fine que \equiv_I . Plus précisément, \equiv_I est la relation d'équivalence engendrée par :

$$e_i \equiv_J e_j \Rightarrow e_i \equiv_I e_j$$

$$e_i \equiv_I e_j \text{ dès que } e_j \in \text{supp}(\nu(e_i))$$

Preuve : D'après la Remarque 4.1.28 page 61, l'isomorphisme ψ^{-1} satisfait également la condition (C) et $\psi^{-1} = Id - \nu$. La Proposition est donc une conséquence directe de la Proposition 4.1.32 page 64 appliquée à l'isomorphisme ψ^{-1} , au sous-espace J (à la place de I) et au sous-espace $I = \psi^{-1}(J)$ (à la place de J). \square

Nous allons à présent démontrer une autre comparaison entre \equiv_I et \equiv_J . Nous n'y faisons aucune hypothèse concernant (C). Rappelons que $\psi: E \rightarrow E$ est unipotent et que $\psi(I) = J$.

Proposition 4.1.34 *Supposons que le corps k est de caractéristique nulle et posons $\nu = \ln(\psi)$. Supposons que ν vérifie les conditions suivantes :*

- $\nu(e_i) \in Vect(e_j ; j < i)$ pour tout i ,
- si $i \neq j$ vérifient $e_j \in \text{supp}(\nu(e_i))$, alors $e_i \not\equiv_I e_j$ et $e_i \not\equiv_J e_j$.

Alors $I = J$ et en particulier \equiv_I et \equiv_J coïncident.

Preuve : Nous allons démontrer la Proposition 4.1.34 par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$ alors l'égalité $I = J$ est évidente. Supposons que $n > 1$ et que la conclusion de la Proposition 4.1.34 est vraie lorsque l'espace vectoriel ambiant est de dimension au plus $n - 1$. Notons $r_1 < \dots < r_d$ (resp. $r'_1 < \dots < r'_d$) la base de Gröbner de I (resp. de J) et soient i_1, \dots, i_d (resp. i'_1, \dots, i'_d) les indices tels que $r_j \in e_{i_j} + Vect(e_i ; i < i_j)$ (resp. $r'_j \in e_{i'_j} + Vect(e_i ; i < i'_j)$) pour tout j . Pour prouver que $I = J$, nous allons démontrer que I et J ont la même base de Gröbner. A cette fin nous allons procéder en 4 étapes :

- a) montrer que les suites $i_1 < \dots < i_d$ et $i'_1 < \dots < i'_d$ coïncident,
- b) montrer que $\psi(r_1) = r'_1$,
- c) montrer que $r_1 = r'_1$ et $\nu(r_1) = 0$ (en utilisant l'hypothèse de récurrence appliquée à $E/k.e_1$),
- d) montrer que $r_2 = r'_2, \dots, r_d = r'_d$ (en utilisant l'hypothèse de récurrence appliquée à $E/k.r_1$).

a) Pour alléger le texte, posons $E_i = Vect(e_j ; j \leq i)$. Puisque $\nu(e_j) \in E_{j-1}$ et $r_j \in e_{i_j} + E_{i_j-1}$, et puisque $\psi = \exp(\nu)$, nous avons $\psi(r_j) \in J \cap (e_{i_j} + E_{i_j-1})$ pour tout j . La définition de la base de Gröbner de J implique alors que $\{i_1, \dots, i_d\} \subseteq \{i'_1, \dots, i'_d\}$. Pour raison de cardinalité ces deux ensembles d'indices sont égaux. Donc nous avons $i_1 = i'_1, \dots, i_d = i'_d$.

b) Ayant $i_1 = i'_1$, il vient $\psi(r_1) - r'_1 \in J \cap E_{i_1-1}$. La définition de la base de Gröbner de J implique $\psi(r_1) - r'_1 = 0$.

c) Montrons que $r_1 = r'_1$ et que $\nu(r_1) = 0$. Notons tout d'abord que la Propriété 4.1.23 page 59 et les égalités $\psi(r_1) = r'_1$ et $\psi(e_1) = e_1$ impliquent : $e_1 \in I \Leftrightarrow r_1 = e_1 \Leftrightarrow r'_1 = e_1 \Leftrightarrow e_1 \in J$ (et dans ce cas, $\nu(r_1) = \nu(e_1) = 0$). Pour montrer que $r_1 = r'_1$ et que $\nu(r_1) = 0$, nous pouvons donc supposer que $e_1 \notin I$ et $e_1 \notin J$.

Posons $q: E \rightarrow E/k.e_1$ la surjection canonique. D'après la Propriété 4.1.25 page 59, l'espace vectoriel $E/k.e_1$ admet $q(e_2) < \dots < q(e_n)$ pour base totalement ordonnée et pour cette base, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1) $q(r_1) < \dots < q(r_d)$ est la base de Gröbner de I ,
- (2) $q(e_i) \equiv_{q(I)} q(e_j) \implies e_i \equiv_I e_j$ pour $i, j \in \{2, \dots, n\}$,
- (3) $q(r'_1) < \dots < q(r'_d)$ est la base de Gröbner de J ,
- (4) $q(e_i) \equiv_{q(J)} q(e_j) \implies e_i \equiv_J e_j$ pour $i, j \in \{2, \dots, n\}$.

Notons que puisque $\nu(e_1) = 0$ et $\psi(e_1) = e_1$, les endomorphismes $\nu, \psi: E \rightarrow E$ induisent des endomorphismes $\bar{\nu}, \bar{\psi}: E/k.e_1 \rightarrow E/k.e_1$. Par hypothèse sur ν et ψ nous avons alors :

- (5) $\bar{\psi}: E/k.e_1 \rightarrow E/k.e_1$ est un isomorphisme linéaire unipotent,
- (6) $\bar{\psi}(q(I)) = q(J)$,
- (7) $\bar{\nu} = \ln(\bar{\psi})$,
- (8) $\text{supp}(\bar{\nu}(q(e_i))) = \{q(e_j) ; 2 \leq j \leq n \text{ et } e_j \in \text{supp}(\nu(e_i))\}$,
- (9) $\bar{\nu}(q(e_i)) \in Vect(q(e_j) ; 2 \leq j < i)$.

Soient alors $i, j \in \{2, \dots, n\}$. L'hypothèse liant ν, \equiv_I et \equiv_J ainsi que les points (2), (4) et (8) donnent :

$$q(e_j) \in \text{supp}(\bar{\nu}(q(e_i))) \Rightarrow e_j \in \text{supp}(\nu(e_i)) \Rightarrow \begin{cases} e_i \not\equiv_I e_j \\ e_i \not\equiv_J e_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(e_i) \not\equiv_{q(I)} q(e_j) \\ q(e_i) \not\equiv_{q(J)} q(e_j) \end{cases} \quad (10)$$

Les points (5), (6), (7), (9) et (10) montrent que les données $E/k.e_1$, $q(I)$, $q(J)$, $\bar{\psi}$ vérifient les hypothèses de la Proposition 4.1.34 page précédente. Puisque $\dim(E/k.e_1) = n - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique : avec la description (voir les points (1) et (3)) des bases de Gröbner de $q(I)$ et $q(J)$ nous obtenons :

$$(\forall j \in \{1, \dots, d\}) \quad q(r_j) = q(r'_j)$$

En particulier : $r'_1 = r_1 + \lambda e_1$ avec $\lambda \in k$. Donc $(\psi - Id)(r_1) = \lambda e_1$. Or $\psi(e_1) = e_1$ donc $(\psi - Id)^2(r_1) = 0$. Il vient donc $\nu(r_1) = \ln(\psi)(r_1) = \lambda e_1$.

Montrons par l'absurde que $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $e_1 \in \text{supp}(\nu(r_1))$. Donc il existe $e_i \in \text{supp}(r_1)$ tel que $e_1 \in \text{supp}(\nu(e_i))$. Ceci implique que $e_1 \not\equiv_I e_i$ et puisque deux éléments quelconques de $\text{supp}(r_1)$ sont \equiv_I -équivalents, nous avons donc $e_1 \notin \text{supp}(r_1)$. Etant donné que $r'_1 = r_1 + \lambda e_1$, il vient $\text{supp}(r'_1) = \text{supp}(r_1) \sqcup \{e_1\}$. Ainsi $e_i, e_1 \in \text{supp}(r_1) \sqcup \{e_1\} = \text{supp}(r'_1)$, ce qui implique $e_i \equiv_J e_1$. Cette dernière propriété contredit $e_1 \in \text{supp}(\nu(e_i))$. Donc $\lambda = 0$, $r_1 = r'_1$ et $\nu(r_1) = 0$.

d) Montrons à présent que $r_2 = r'_2, \dots, r_d = r'_d$. A cette fin nous allons appliquer l'hypothèse de récurrence à $E/k.r_1$. Soit $\pi : E \rightarrow E/k.r_1$ la surjection naturelle. D'après la Propriété 4.1.26 page 60, l'espace vectoriel $E/k.r_1$ admet $\pi(e_1) < \dots < \pi(e_{i_1}) < \dots < \pi(e_n)$ pour base totalement ordonnée et pour cette base, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1') $\pi(r_2) < \dots < \pi(r_d)$ est la base de Gröbner de $\pi(I)$,
- (2') $\pi(e_i) \equiv_{\pi(I)} \pi(e_j) \implies e_i \equiv_I e_j$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$,
- (3') $\pi(r'_2) < \dots < \pi(r'_d)$ est la base de Gröbner de $\pi(J)$,
- (4') $\pi(e_i) \equiv_{\pi(J)} \pi(e_j) \implies e_i \equiv_J e_j$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$.

Notons que puisque $\nu(r_1) = 0$ et $\psi(r_1) = r_1$, les endomorphismes $\nu, \psi : E \rightarrow E$ induisent des endomorphismes $\hat{\nu}, \hat{\psi} : E/k.r_1 \rightarrow E/k.r_1$. Par hypothèse sur ν et ψ nous avons alors :

- (5') $\hat{\psi} : E/k.r_1 \rightarrow E/k.r_1$ est un isomorphisme linéaire unipotent,
- (6') $\hat{\psi}(\pi(I)) = \pi(J)$,
- (7') $\hat{\nu} = \ln(\hat{\psi})$,
- (8') $\hat{\nu}(\pi(e_i)) \in \text{Vect}(\pi(e_j) ; j \in \{1, \dots, i-1\} \setminus \{i_1\})$.

Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence à $E/k.r_1$, $\pi(I)$, $\pi(J)$ et $\hat{\psi}$, il ne nous reste donc plus qu'à montrer que l'implication suivante est satisfaite, pour tous $i, j \neq i_1$:

$$\pi(e_j) \in \text{supp}(\hat{\nu}(\pi(e_i))) \implies \pi(e_i) \not\equiv_{\pi(I)} \pi(e_j) \text{ et } \pi(e_i) \not\equiv_{\pi(J)} \pi(e_j)$$

Soient $i, j \neq i_1$ vérifiant $\pi(e_j) \in \text{supp}(\hat{\nu}(\pi(e_i)))$. Remarquons que :

- $\text{supp}(\hat{\nu}(\pi(e_i))) = \{\pi(e_l) \mid e_l \in \text{supp}(\nu(e_i))\}$ si $e_{i_1} \notin \text{supp}(\nu(e_i))$,
- $\text{supp}(\hat{\nu}(\pi(e_i))) \subseteq \{\pi(e_l) \mid e_l \in \text{supp}(\nu(e_i)) \text{ et } l \neq i_1\} \cup \{\pi(e_l) \mid l < i_1 \text{ et } e_l \in \text{supp}(r_1)\}$ si $e_{i_1} \in \text{supp}(\nu(e_i))$.

Distinguons alors les cas $e_j \in \text{supp}(\nu(e_i))$ et $e_j \notin \text{supp}(\nu(e_i))$:

- si $e_j \in \text{supp}(\nu(e_i))$ alors $e_i \not\equiv_I e_j$ and $e_i \not\equiv_J e_j$, ce qui implique, grâce aux points (2') et (4') ci-dessus : $\pi(e_i) \not\equiv_{\pi(I)} \pi(e_j)$ et $\pi(e_i) \not\equiv_{\pi(J)} \pi(e_j)$.
- si $e_j \notin \text{supp}(\nu(e_i))$ alors nécessairement $e_{i_1} \in \text{supp}(\nu(e_i))$ et $e_j \in \text{supp}(r_1)$. Etant donné que $r_1 = r'_1$, la propriété $e_j \in \text{supp}(r_1)$ implique que $e_j \equiv_I e_{i_1}$ et $e_j \equiv_J e_{i_1}$. D'autre part, la propriété $e_{i_1} \in \text{supp}(\nu(e_i))$ implique que $e_{i_1} \not\equiv_I e_i$ et $e_{i_1} \not\equiv_J e_i$. Donc $e_j \not\equiv_I e_i$ et $e_j \not\equiv_J e_i$. Grâce aux points (2') et (4') ci-dessus, il vient : $\pi(e_j) \not\equiv_{\pi(I)} \pi(e_i)$ et $\pi(e_j) \not\equiv_{\pi(J)} \pi(e_i)$.

Ainsi, les données $E/k.r_1, \pi(I), \pi(J), \hat{\psi}$ vérifient les hypothèses de la Proposition 4.1.34 page précédente, et $\dim(E/k.r_1) = n - 1$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence, elle nous donne : $\pi(I)$ et $\pi(J)$ sont égaux et donc ont la même base de Gröbner. La description (1') et (3') de ces bases implique alors que $\pi(r_j) = \pi(r'_j)$ pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$. Donc pour chaque $j \geq 2$ il existe $\lambda_j \in k$ tel que $r_j = r'_j + \lambda_j r_1$. Remarquons que λ_i est nécessairement nul car $e_{i_1}^*(r_j) = e_{i_1}^*(r'_j) = 0$ (par construction de la base de Gröbner). Donc $r_j = r'_j$ pour tout $j = 2, \dots, d$ et $r_1 = r'_1$. Ceci montre que $I = J$. \square

4.2 Relation d'homotopie et groupe fondamental d'un carquois lié

4.2.1 Définitions

Définition 4.2.1 (voir [29]) Soit (Q, I) un carquois lié. La **relation d'homotopie** de (Q, I) est notée \sim_I . C'est la relation d'équivalence sur l'ensemble des promenades de Q engendrée par les propriétés suivantes :

1. $e_x \sim_I \alpha^{-1}\alpha$ et $e_y \sim_I \alpha\alpha^{-1}$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y$ de Q .
2. si u, v, u', v' sont des promenades de Q telles que $u \sim_I u'$ et $v \sim_I v'$, alors $vu \sim_I v'u'$ dès que les promenades vu et $v'u'$ sont bien définies (i.e. \sim_I est compatible avec la concaténation des promenades).
3. $u \sim_I v$ pour tous $u, v \in \text{supp}(r)$ où r est une relation minimale de I .

Dans toute la suite, la classe de \sim_I -équivalence d'une promenade γ de Q sera notée $[\gamma]_I$ ou $[\gamma]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Avec les notations de la Définition 4.2.1, deux promenades équivalentes pour \sim_I seront dites homotopes si il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation d'homotopie concernée.

Propriété 4.2.2 Soit (Q, I) un carquois lié. Alors deux promenades homotopes sont nécessairement parallèles.

Preuve : 1. Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ est une flèche, alors $\alpha\alpha^{-1}$ et e_y (resp. $\alpha^{-1}\alpha$ et e_x) sont parallèles.

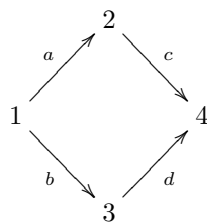
2. Si u, v, u', v' sont des promenades de Q telles que $u \sim_I u'$ et $v \sim_I v'$ et si u et u' (resp. v et v') sont parallèles, alors vu et $v'u'$ sont parallèles (lorsque ces deux promenades sont définies).

3. Si r est une relation minimale, alors la Propriété 2.3.7 page 30 implique qu'il existe $x, y \in Q_0$ tels que $r \in {}_yI_x$. Donc deux chemins quelconques de $\text{supp}(r)$ sont parallèles. \square

Si Q est un carquois alors Q est également un espace topologique définissant une relation d'homotopie et un groupe fondamental (lorsque Q est connexe). Ce dernier sera noté $\pi_1(Q)$.

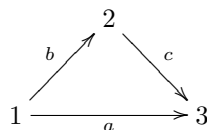
Remarque 4.2.3 Les propriétés 2 et 3 dans la Définition 4.2.1 sont exactement les propriétés définissant la relation d'homotopie de Q . Donc, si $\gamma \sim_I \gamma'$, alors γ et γ' sont homotopes (à extrémité fixée) en tant que chemins de l'espace topologique sous-jacent à Q .

Exemple 4.2.4 Soit Q le carquois :



et soit $I = \langle ca - db \rangle$. Alors $ca - db$ est une relation minimale, donc $ca \sim_I db$. Dans ce cas deux promenades sont \sim_I -homotopes si et seulement si elles sont parallèles.

Exemple 4.2.5 Soit Q le carquois :



et soit $I = \langle cb \rangle$. Alors la relation d'homotopie \sim_I est exactement la relation d'homotopie de l'espace topologique sous-jacent à Q .

La Proposition qui suit généralise le phénomène constaté dans l'Exemple 4.2.5. Elle est une conséquence directe de la Définition 4.2.1 et de la Remarque 4.2.3.

Proposition 4.2.6 Soit (Q, I) un carquois lié où I est un idéal monomial Alors \sim_I coïncide avec la relation d'homotopie de l'espace topologique sous-jacent à Q .

La relation d'homotopie \sim_I de (Q, I) définit par restriction une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de Q . Ci-après, nous donnons une relation d'équivalence sur ces mêmes chemins et qui est reliée à \sim_I . Cette relation d'équivalence a été introduite par J. C. Bustamante dans [10].

Définition 4.2.7 (voir [10]) Soit (Q, I) un carquois lié. La **relation d'homotopie naturelle** de (Q, I) est notée \approx_I . C'est la relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de Q engendrée par les propriétés suivantes :

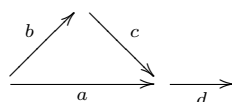
1. $u \approx_I v$ dès que $u, v \in \text{supp}(r)$ où r est une relation minimale de I .
2. si $u \approx_I u'$ et $v \approx_I v'$, alors $vu \approx_I v'u'$ si les chemins vu et $v'u'$ sont bien définis.

Rappelons que, étant donné un carquois lié (Q, I) fini et sans cycle orienté, nous disposons d'une relation d'équivalence \equiv_I sur l'ensemble des chemins de Q (voir la Définition 4.1.9 page 54). Nous disposons donc de trois relations d'équivalence sur l'ensemble des chemins de Q : \sim_I , \equiv_I et \approx_I . La Propriété qui suit établit une comparaison entre ces relations d'équivalence. Elle est conséquence directe de la Définition 4.1.9 page 54, de la Définition 4.2.1 page ci-contre et de la Définition 4.2.7.

Propriété 4.2.8 Soit (Q, I) un carquois lié fini et sans cycle orienté. Alors \equiv_I est plus fine que \approx_I et \approx_I est plus fine que \sim_I .

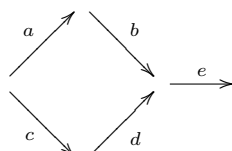
Notons que ces trois relations d'équivalence peuvent ne pas coïncider comme le montrent les deux Exemples qui suivent.

Exemple 4.2.9 Soit Q le carquois :



et $I = \langle da - dc \rangle$. Alors $da - dc$ est une relation minimale. Deux promenades sont \sim_I -équivalentes si et seulement si elles sont parallèles. En outre $a \sim_I cb$ alors que $a \not\equiv_I cb$ et $a \not\approx_I cb$.

Exemple 4.2.10 Soit Q le carquois :



et $I = \langle ba - dc, eba \rangle$. Alors les relations minimales de I sont (à la multiplication près par un scalaire non nul) $ba - dc$, eba et edc . En particulier $eba \sim_I edc$, $eba \approx_I edc$ alors que $eba \not\equiv_I edc$.

La relation d'équivalence \sim_I permet de définir le groupe fondamental d'un carquois lié connexe. Ce dernier a été défini par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]

Définition 4.2.11 (voir [29]) Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soit $x_0 \in Q_0$. **Le groupe fondamental de (Q, I) en x_0** est noté $\pi_1(Q, I, x_0)$. C'est l'espace quotient par la relation d'homotopie \sim_I de l'ensemble des promenades γ de Q de source et terminus égal à x_0 .

La concaténation des promenades de Q confère à $\pi_1(Q, I, x_0)$ une structure de groupe. L'élément neutre est alors $[e_{x_0}]$ et l'inverse de $[\gamma]$ est $[\gamma^{-1}]$.

La Remarque 4.2.3 page ci-contre justifie la Propriété suivante.

Propriété 4.2.12 Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soit x_0 un sommet de Q . Alors l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes :

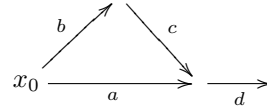
$$\pi_1(Q, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, I, x_0)$$

La construction du groupe fondamental d'un carquois lié est similaire à celle du groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs. En particulier, nous retrouvons l'indépendance du groupe fondamental par rapport au point de base.

Proposition 4.2.13 (voir [29]) Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soient x_0, x_1 deux sommets de Q . Alors $\pi_1(Q, I, x_0)$ et $\pi_1(Q, I, x_1)$ sont deux groupes isomorphes.

Dans la suite nous noterons donc $\pi_1(Q, I)$ pour désigner le groupe $\pi_1(Q, I, x_0)$.

Exemple 4.2.14 Soit Q le carquois :



Soit $I = \langle da \rangle$ et $J = \langle da - dc \rangle$. Alors $\pi_1(Q, I, x_0)$ est le groupe libre sur un générateur : $[a^{-1}cb]_I$ et $\pi_1(Q, J, x_0)$ est le groupe trivial. Rappelons que d'après l'Exemple 2.3.17 page 32, les k -algèbres kQ/I et kQ/J sont isomorphes.

Il est utile de pouvoir donner une présentation du groupe fondamental d'un carquois lié à l'aide de générateurs et relations. Avant cela rappelons la définition suivante.

Définition 4.2.15 Soit Q un carquois. Un **arbre maximal** de Q est un sous-carquois T de Q tel que :

- $T_0 = Q_0$,
- l'espace topologique sous-jacent à Q est un arbre (i.e. T est connexe et $\pi_1(T)$ est le groupe trivial).

La présentation qui suit du groupe fondamental d'un carquois lié connexe a été établie par J. C. Bustamante dans [10].

Proposition 4.2.16 (voir [10]) Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soit x_0 un sommet de Q . Soit T un arbre maximal de Q . Pour chaque sommet $x \in Q_0$ il existe une et une seule promenade γ_x de T de source x_0 et de but x .

Soit $F = L(Q_1)$ le groupe libre sur l'ensemble des flèches de Q .

Soit N le sous-groupe distingué de F engendré par l'ensemble constitué des éléments suivants :

- $\alpha\alpha^{-1}$ et $\alpha^{-1}\alpha$ pour toute flèche $\alpha \in Q$,
- α pour toute flèche $\alpha \in T_1$,
- uv^{-1} pour tous chemins u, v tels que $u, v \in \text{supp}(r)$ où r est une relation minimale de I .

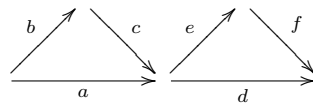
Dans ces conditions, le morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} F = L(Q_1) &\longrightarrow \pi_1(Q, I, x_0) \\ x \xrightarrow{\alpha} y &\longmapsto [\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x] \end{aligned}$$

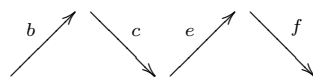
passé au quotient par N et induit un isomorphisme de groupes :

$$F/N \xrightarrow{\sim} \pi_1(Q, I, x_0)$$

Exemple 4.2.17 Soit Q le carquois :



Posons $I = \langle da + fecb, fea + dcb \rangle$. Alors les relations minimales de I sont (à la multiplication par un scalaire non nul près) $da + fecb$ et $fea + dcb$. Soit T l'arbre maximal de Q :



Alors :

$$\pi_1(Q, I) \simeq \langle a, b, c, d, e, f \mid b, c, e, f, da(fecb)^{-1}, fea(dcb)^{-1} \rangle$$

Donc $\pi_1(Q, I) \simeq \langle a, d \mid da, ad^{-1} \rangle$, c'est à dire $\pi_1(Q, I) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4.2.2 Espaces classifiants

Dans tout le texte nous considérons les k -algèbres comme des k -catégories et nous étudions les groupes fondamentaux des présentations de cette k -catégorie. D'autre part, à une petite catégorie \mathcal{C} est associé un espace topologique appelé espace classifiant. Il est donc intéressant de comparer le groupe fondamental de cet espace classifiant avec celui d'une présentation lorsque \mathcal{C} est la k -catégorie associée à une k -algèbre.

Rappelons d'abord la définition de l'espace classifiant.

Définition 4.2.18 Soit \mathcal{C} une petite catégorie. L'espace classifiant $E(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} est le CW-complexe construit de la façon suivante :

- les 0-cellules sont les objets $x \in \mathcal{C}_0$ de \mathcal{C} ,
- les 1-cellules sont les morphismes de \mathcal{C} . La cellule associée au morphisme $u \in {}_y\mathcal{C}_x$ est attachée aux 0-cellules x et y ,
- si $n \geq 2$, les n -cellules sont les n -uplets (u_n, \dots, u_1) de morphismes de \mathcal{C} tels que la composition $u_{i+1}u_i$ est bien définie pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. La n -cellule (u_n, \dots, u_1) est attachée de façon naturelle aux $n-1$ -cellules $(u_n, \dots, u_{i+1}u_i, \dots, u_1)$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Remarque 4.2.19 Soit \mathcal{C} une petite catégorie et soient $u, v \in {}_y\mathcal{C}_x$ deux morphismes. Alors u et v définissent chacun une 1-cellule de $E(\mathcal{C})$ attachée aux 0-cellules x et y . Donc u et v définissent chacun un chemin d'extrémités x et y de l'espace topologique $E(\mathcal{C})$.

Proposition 4.2.20 Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Soient $u, v \in {}_y\mathcal{C}_x$ deux morphismes. Alors u et v sont homotopes à extrémités fixées en tant que chemins de $E(\mathcal{C})$. En conséquence la relation d'homotopie de $E(\mathcal{C})$ est triviale.

Preuve : Remarquons le fait suivant : si u, v sont deux morphismes de \mathcal{C} alors u (resp. v) définit un chemin γ_u (resp. γ_v) de $E(\mathcal{C})$ dont le support est l'image de la 1-cellule u (resp. v) dans $E(\mathcal{C})$. Si de plus $v \circ u$ est défini alors la 2-cellule (v, u) se recolle le long des 1-cellules v, u et $v \circ u$, de ce fait, les chemins $\gamma_v\gamma_u$ et $\gamma_{v \circ u}$ sont homotopes à extrémités fixées. Nous identifions désormais un morphisme de \mathcal{C} et le chemin de $E(\mathcal{C})$ qu'il définit.

- Soit $x \in \mathcal{C}_0$. Notons 1_x (resp. 0_x) le morphisme identité (resp. nul) de l'objet x . Alors le couple $(1_x, 0_x)$ définit une 2-cellule se recollant sur les 1-cellules $1_x, 0_x$ et 0_x . Etant donné que 2 de ces 1-cellules sont égales, 1_x et 0_x sont homotopes à extrémité fixée.

- Soit $u \in {}_y\mathcal{C}_x$. Alors $u \circ 0_x$ et $u \circ 1_x$ sont homotopes à extrémités fixées car 0_x et 1_x le sont. Donc u est homotope au morphisme nul $0 \in {}_y\mathcal{C}_x$, et ce pour tout $u \in {}_y\mathcal{C}_x$. La Proposition est ainsi démontrée. \square

L'existence de morphismes nuls montre que la construction de l'espace classifiant n'est pas adaptée aux k -catégories. Notons que dans le cadre des carquois liés, J. C. Bustamante a construit un CW-complexe associé à tout carquois lié et qui permet de retrouver le groupe fondamental de ce dernier. Nous rappelons ici cette définition. Pour plus de détails sur cette construction nous renvoyons le lecteur à [10].

Définition 4.2.21 (voir [10]) Soit (Q, I) un carquois lié. L'espace classifiant $\mathcal{B}(Q, I)$ de (Q, I) est le CW-complexe défini comme suit :

- les 0-cellules sont les sommets $x \in Q_0$ de Q ,
- les 1-cellules sont les classes \tilde{u} de \approx -équivalence de chemins u tels que $u \notin I$. La 1-cellule \tilde{u} est attachée aux 0-cellules $s(u)$ et $t(u)$,
- pour $n \geq 2$, les n -cellules sont les n -uplets $(\tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_1)$ de classes de \approx -équivalence telles que $u_n \dots u_1 \notin I$. La n -cellule $(\tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_1)$ est attachée aux $n-1$ -cellules $(\tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_{i+1}u_i, \dots, \tilde{u}_1)$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Proposition 4.2.22 (voir [10]) Soit (Q, I) un carquois lié connexe. Alors le groupe fondamental de (Q, I) et celui de l'espace $\mathcal{B}(Q, I)$ sont isomorphes.

4.2.3 Comparaison des groupes fondamentaux des présentations d'une algèbre triangulaire, groupe fondamental d'une algèbre sans double raccourci

Ainsi que nous l'avons vu dans la Section 2.3, une k -algèbre de dimension finie et basique A peut avoir des présentations admissibles distinctes avec des groupes fondamentaux non isomorphes. Dans cette sous-Section nous essayons de comparer les groupes fondamentaux des présentations admissibles de A .

Dans toute la sous-Section Q désignera un carquois fini et sans cycle orienté.

Rappelons que si \sim et \sim' sont deux relations d'équivalence sur l'ensemble des promenades de Q , la relation \sim est dite **plus fine** que \sim' si et seulement si :

$$(\forall \gamma, \gamma') \quad \gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma \sim' \gamma'$$

Par définition du groupe fondamental d'un carquois lié, nous avons donc la Propriété suivante :

Propriété 4.2.23 *Supposons que Q est connexe. Soient I et J deux idéaux admissibles de kQ . Si \sim_I est plus fine que \sim_J alors l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes :*

$$\pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, J)$$

Dans cette sous-Section nous allons principalement nous intéresser à la question suivante : «étant donnée A une k -algèbre de dimension finie et basique, existe-t-il une présentation admissible de A dont la relation d'homotopie est plus fine que toutes les relations d'homotopie des présentations admissibles de A ?». D'après la Propriété 4.2.23, le groupe fondamental de toute présentation admissible serait un quotient naturel de cette présentation particulière.

Remarque 4.2.24 *Les résultats que nous allons démontrer dans les deux paragraphes suivants sont également valables lorsque Q est un carquois localement fini (et pas seulement fini) et sans cycle orienté. En effet, l'hypothèse de locale finitude permet de remplacer l'utilisation de la dimension finie de kQ (lorsque Q est fini) par l'utilisation de la dimension finie de ${}_y kQ_x$ (lorsque Q est localement fini) avec $x, y \in Q_0$ bien choisis. De même, l'utilisation (lorsque Q est fini) d'un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q (resp. d'un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q) peut être remplacée par l'utilisation (lorsque Q est localement fini) d'un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q' (resp. d'un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q') où Q' est le sous-carquois plein convexe de Q contenant les sommets $x, y \in Q_0$ bien choisis (Q' est alors fini et sans cycle orienté car Q est localement fini et sans cycle orienté).*

Comparaison de \sim_I et \sim_J lorsque J est l'image de I par une transvection ou une dilatation.

Rappelons que Q désigne un carquois fini sans cycle orienté. Dans ce paragraphe, nous fixons I un idéal admissible de kQ , nous fixons $\varphi \in \text{Aut}_0(kQ)$ un automorphisme de kQ dont la restriction à Q_0 est l'application identité et nous posons $J = \varphi(I)$. Nous allons comparer \sim_I et \sim_J lorsque φ est une dilatation ou une transvection.

Proposition 4.2.25 *Si φ est une dilatation, alors \sim_I et \sim_J coïncident.*

Preuve : Posons $D = \varphi$. Soit $r \in {}_y I_x$ une relation minimale et soit $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ une forme normale. Puisque D est une dilatation, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\lambda_i \in k^*$ tel que $D(u_i) = \lambda_i u_i$. Donc nous avons une forme normale :

$$J \ni D(r) = \sum_{i=1}^n t_i \lambda_i u_i$$

En particulier : $\text{supp}(D(r)) = \text{supp}(r)$. Soit $E \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tel que $r' = \sum_{i \in E} t_i \lambda_i u_i \in J$. Alors :

$$I \ni D^{-1}(r') = \sum_{i \in E} t_i u_i$$

Puisque r est une relation minimale de I , il vient $E = \emptyset$. Ceci montre que $D(r)$ est une relation minimale de J et a le même support que r , et ce pour toute relation minimale r de I . Par définition de \sim_I et \sim_J nous avons donc :

\sim_I est plus fine que \sim_J

En remplaçant D par D^{-1} (D^{-1} est une dilatation et $D^{-1}(J) = I$) dans le raisonnement que nous venons de faire nous obtenons :

\sim_J est plus fine que \sim_I

Donc \sim_I et \sim_J coïncident. □

Nous allons à présent étudier le cas où φ est une transvection. Auparavant nous donnons une définition utile pour cette comparaison.

Définition 4.2.26 Soient \sim et \sim' deux relations d'équivalence sur l'ensemble des promenades de Q et soit (α, u) un raccourci de Q . Nous dirons que \sim' est engendrée par \sim et $\alpha \sim' u$ si \sim' est la relation d'équivalence engendrée par :

- $\alpha\alpha^{-1} \sim' e_y$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim' e_x$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$,
- $vu \sim' v'u'$ dès que $v \sim' v'$, $u \sim' u'$ et que les promenades $v'u'$ et vu sont définies,
- $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma \sim' \gamma'$,
- $\alpha \sim' u$.

Nous noterons alors $\sim' = \langle \sim, \alpha \sim' u \rangle$.

Remarque 4.2.27 Avec les notations de la Définition 4.2.26, si \sim' est engendrée par \sim et $\alpha \sim' u$, alors \sim est plus fine que \sim' et $\alpha \sim' u$.

Le situation où $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ est une transvection se divise en 4 cas selon que α et u sont équivalents ou non pour la relation \sim_I (resp. \sim_J). Jusqu'à la fin de ce paragraphe nous fixons un ordre $<$ associé au raccourci (α, u) .

Proposition 4.2.28 Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ est une transvection. Si $\alpha \not\sim_I u$ et $\alpha \sim_J u$, alors \sim_J est engendrée par \sim_I et $\alpha \sim_J u$.

Preuve : Posons $\psi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ et $\nu = \psi - Id_{kQ}$. Soit v un chemin :

- si α n'apparaît pas dans v alors $\psi(v) = v$, $\nu(v) = 0$ et $\text{supp}(\nu(v)) = \emptyset$,
- si α apparaît dans v , alors il existe des chemins v_1 et v_2 dans lesquels α n'apparaît pas (car Q n'a pas de cycle orienté) et tels que $v = v_2\alpha v_1$. Donc $\nu(v) = \tau v_2 u v_1$ avec $v = v_2\alpha v_1 \not\sim_I v_2 u v_1$ et $v = v_2\alpha v_1 \sim_J v_2 u v_1$.

Ces deux points montrent que ψ vérifie les conditions de la Proposition 4.1.32 page 64. De ce fait, la relation \equiv_J est engendrée par :

- $v \equiv_I v' \Rightarrow v \equiv_J v'$,
- $v \equiv_J v_2 u v_1$ pour tout chemin v s'écrivant $v = v_2\alpha v_1$.

Or la relation \sim_J est engendrée par :

- $\beta\beta^{-1} \sim_J e_y$ et $\beta^{-1}\beta \sim_J e_x$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\beta} y$ de Q ,
- $wv \sim_J w'v'$ si $w \sim_J w'$, $v \sim_J v'$ et si les concaténations wv et $w'v'$ sont définies,
- $v \equiv_J w \Rightarrow w \sim_J v$, pour tous chemins v et w .

En utilisant la comparaison de \equiv_I et \equiv_J ci-dessus nous en déduisons que \sim_J est engendré par :

- $\beta\beta^{-1} \sim_J e_y$ et $\beta^{-1}\beta \sim_J e_x$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\beta} y$ de Q ,
- $wv \sim_J w'v'$ si $w \sim_J w'$, $v \sim_J v'$ et si les concaténations wv et $w'v'$ sont définies,
- $v \equiv_I v' \Rightarrow v \sim_J v'$,
- $v \sim_J v_2 u v_1$ pour tout chemin v s'écrivant $v = v_2\alpha v_1$.

En utilisant la compatibilité de \sim_J avec la concaténation, nous en déduisons que \sim_J est engendrée par :

- $\beta\beta^{-1} \sim_J e_y$ et $\beta^{-1}\beta \sim_J e_x$ pour toute flèche $x \xrightarrow{\beta} y$ de Q ,
- $wv \sim_J w'v'$ si $w \sim_J w'$, $v \sim_J v'$ et si les concaténations wv et $w'v'$ sont définies,

- $v \equiv_I v' \Rightarrow v \sim_J v'$,
- $\alpha \sim_J u$.

Donc \sim_J est bien engendrée par \sim_I et par $\alpha \sim_J u$. \square

En utilisant l'égalité $\varphi_{\alpha,u,\tau}^{-1} = \varphi_{\alpha,u,-\tau}$, en remplaçant φ par φ^{-1} et en échangeant les rôles de I et J , la Proposition 4.2.28 page précédente donne le résultat symétrique suivant.

Proposition 4.2.29 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha,u,\tau}$ est une transvection. Si $\alpha \sim_I u$ et $\alpha \not\sim_J u$, alors \sim_I est engendrée par \sim_J et $\alpha \sim_I u$.*

Proposition 4.2.30 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha,u,\tau}$ est une transvection. Si $\alpha \not\sim_I u$ et $\alpha \not\sim_J u$, alors $I = J$ et \sim_I et \sim_J coïncident.*

Preuve : Posons $\psi = \varphi_{\alpha,u,\tau}$ et $\nu = \psi - Id_{kQ}$. Soit v un chemin :

- si α n'apparaît pas dans v alors $\psi(v) = v$, $\nu(v) = 0$ et $supp(\nu(v)) = \emptyset$,
- si α apparaît dans v , alors il existe des chemins v_1 et v_2 dans lesquels α n'apparaît pas (car Q n'a pas de cycle orienté) et tels que $v = v_2\alpha v_1$. Donc $\nu(v) = \tau v_2 u v_1$ avec $v = v_2\alpha v_1 \not\sim_I v_2 u v_1$ et $v = v_2\alpha v_1 \not\sim_J v_2 u v_1$.

Ces deux points montrent que ψ vérifie les conditions de la Proposition 4.1.31 page 64. Donc $I = J$ et nécessairement \sim_I et \sim_J coïncident. \square

Avant de traiter le dernier cas de la situation où φ est une transvection nous démontrons un Lemme afin de rendre la démonstration plus lisible.

Lemme 4.2.31 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha,u,\tau}$ est une transvection et supposons que $\alpha \sim_J u$. Soit $r \in I$ une relation minimale de I . Alors :*

$$v, w \in supp(r) \Rightarrow v \sim_J w$$

Preuve : Ecrivons

$$r = \sum_{c \in C} \lambda_c \theta_c + \sum_{b \in B} \lambda_b v_b \alpha u_b + \mu_b v_b u u_b$$

de façon que :

- $\lambda_c, \lambda_b \in k^*$ et $\mu_b \in k$ pour tous $c \in C$ et $b \in B$,
- les chemins $\theta_c, v_b \alpha u_b, v_{b'} u u_{b'}$ ($c \in C, b, b' \in B$) sont deux à deux distincts,
- la flèche α n'apparaît pas dans le chemin θ_c , pour tout $c \in C$.

Nous avons donc :

$$\varphi(r) = \sum_{c \in C} \lambda_c \theta_c + \sum_{b \in B} \lambda_b v_b \alpha u_b + (\mu_b + \tau \lambda_b) v_b u u_b \in {}_y J_x$$

De plus il existe une décomposition $\varphi(r) = r_1 + \dots + r_n$ en somme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints. Distinguons les cas $B = \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

1^{er} cas : $B = \emptyset$. Alors $r = \sum_{c \in C} \lambda_c \theta_c$ avec $\varphi(\theta_c) = \theta_c$ pour tout $c \in C$. Donc :

$$\varphi(r) = r \in {}_y J_x$$

Ainsi r est une relation de J , montrons qu'elle est minimale. Soit $C' \subseteq C$ un sous-ensemble non vide tel que $\sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c \in {}_y J_x$. Alors :

$${}_y J_x \ni \varphi^{-1} \left(\sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c \right) = \sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c$$

Puisque r est une relation minimale de I , nous avons $C' = C$. Ceci montre que r est également une relation minimale de J . En particulier :

$$v, w \in supp(r) \Rightarrow v \sim_J w$$

Le Lemme est donc démontré dans ce cas.

2nd cas : $B \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $v_b \alpha u_b \notin \text{supp}(r_i)$ et $v_b u u_b \notin \text{supp}(r_i)$ pour tout $b \in B$. D'après la description de $\varphi(r)$ ci-dessus, il existe donc $C' \subseteq C$ un sous-ensemble non vide tel que :

$$r_i = \sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c$$

Donc :

$${}_y I_x \ni \varphi^{-1}(r_i) = \sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c$$

Puisque r est une relation minimale de I et que $B \neq \emptyset$, cela implique que $C' = \emptyset$ ce qui est contradictoire. Donc un tel indice i n'existe pas et :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) (\exists b \in B) v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r_i) \text{ ou } v_b u u_b \in \text{supp}(r_i) \quad (4.1)$$

Notons alors \equiv la relation d'équivalence sur l'ensemble d'indices $\{1, \dots, n\}$ engendrée par :

si il existe $b \in B$ tel que $v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r_i)$ et $v_b u u_b \in \text{supp}(r_j)$, alors $i \equiv j$

Puisque r_1, \dots, r_n sont des relations minimales et puisque $\alpha \sim_J u$, cette définition entraîne :

$$i \equiv j \Rightarrow (\forall v, w \in \text{supp}(r_i) \cup \text{supp}(r_j)) v \sim_J w$$

Montrons que la relation d'équivalence \equiv n'a qu'une seule orbite. Soit $c_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$ une \equiv -orbite et posons :

$$r' = \sum_{i \in c_0} r_i \in {}_y J_x$$

Notons que d'après (4.1) il existe $b \in B$ tel que $v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r')$ ou $v_b u u_b \in \text{supp}(r')$. Par construction de \equiv et par définition de c_0 nous avons donc :

$$(\exists b \in B) v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r') \quad (4.2)$$

Puisque $\varphi(r) = r_1 + \dots + r_n$ est une décomposition en somme de relations minimales de J et à supports deux à deux disjoints et puisque $r' = \sum_{i \in c_0} r_i$, il existe $\eta_c, \eta_b, \varepsilon_{b'} \in \{1, 0\}$ pour chaque $c \in C, b \in B, b' \in B$ tels que :

$$r' = \sum_{c \in C} \eta_c \lambda_c \theta_c + \sum_{b \in B} \eta_b \lambda_b v_b \alpha u_b + \varepsilon_b (\lambda_b \tau + \mu_b) v_b u u_b$$

Soit $b \in B$ tel que $\eta_b = 1$. Donc $v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r')$ et il existe $i \in c_0$ tel que $v_b \alpha u_b \in \text{supp}(r_i)$. Donc :

- si $\lambda_b \tau + \mu_b = 0$ alors $\varepsilon_b (\lambda_b \tau + \mu_b) = \lambda_b \tau + \mu_b$,
- si $\lambda_b \tau + \mu_b \neq 0$ alors $v_b u u_b \in \text{supp}(\varphi(r))$ donc il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $v_b u u_b \in \text{supp}(r_j)$. Par définition de \equiv , cela implique que $i \equiv j$, que $j \in c_0$, et que $v_b u u_b \in \text{supp}(r')$. Donc $\varepsilon_b = 1$ et $\varepsilon_b (\lambda_b \tau + \mu_b) = \lambda_b \tau + \mu_b$.

Donc $\varepsilon_b (\lambda_b \tau + \mu_b) = \lambda_b \tau + \mu_b$ dès que $\eta_b = 1$. Posons :

$$C' = \{c \in C \mid \eta_c = 1\} \text{ et } B' = \{b \in B \mid \eta_b = 1\}$$

Notons que (4.2) montre qu'il existe b tel que $\eta_b \neq 0$. Donc $B' \neq \emptyset$. Les ensembles C' et B' vérifient :

$$r' = \sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c + \sum_{b \in B'} \lambda_b v_b \alpha u_b + (\mu_b + \tau \lambda_b) v_b u u_b$$

Il vient alors :

$$\varphi^{-1}(r') = \sum_{c \in C'} \lambda_c \theta_c + \sum_{b \in B'} \lambda_b v_b \alpha u_b + \mu_b v_b u u_b \in {}_y I_x$$

Puisque r est une relation minimale et $B' \neq \emptyset$, nous avons nécessairement $C' = C, B' = B, r' = \varphi(r)$ et $c_0 = \{1, \dots, n\}$. Ceci démontre que $\{1, \dots, n\}$ est une \equiv -orbite. De cette façon :

$$v \sim_J w \text{ pour tous } v, w \in \text{supp}(\varphi(r))$$

Fixons $b_0 \in B$, ainsi $v_{b_0} \alpha u_{b_0} \in \text{supp}(\varphi(r))$ et :

- si $c \in C$, alors $\theta_c \in \text{supp}(\varphi(r))$ donc $\theta_c \sim_J v_{b_0} \alpha u_{b_0}$,
- si $b \in B$, alors $v_b \alpha u_b \in \text{supp}(\varphi(r))$ donc $v_b \alpha u_b \sim_J v_{b_0} \alpha u_{b_0}$,
- si $b \in B$, alors $v_b \alpha u_b \sim_J v_{b_0} \alpha u_{b_0}$ et $v_b \alpha u_b \sim_J v_b u u_b$ donc $v_b u u_b \sim_J v_{b_0} \alpha u_{b_0}$ (rappelons que $\alpha \sim_J u$).

Ceci montre que $v \sim_J w$ pour tous $v, w \in \text{supp}(r)$. \square

Nous pouvons à présent examiner le dernier cas de la situation où φ est une transvection.

Proposition 4.2.32 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ est une transvection. Si $\alpha \sim_I u$ et $\alpha \sim_J u$, alors \sim_I et \sim_J coïncident.*

Preuve : Soit $r \in {}_y I_x$ une relation minimale. D'après le Lemme 4.2.31 page 74 nous avons :

$$v, w \in \text{supp}(r) \Rightarrow v \sim_J w$$

D'après la définition de \sim_I et \sim_J cela implique que \sim_I est plus fine que \sim_J . Echangeons les rôles de I et de J dans le raisonnement que nous venons de faire ($I = \varphi_{\alpha, u, \tau}^{-1}(J) = \varphi_{\alpha, u, -\tau}(J)$) nous obtenons donc que \sim_J est plus fine que \sim_I . Ceci montre que \sim_I et \sim_J coïncident. \square

En regroupant la Proposition 4.2.28 page 73, la Proposition 4.2.29 page 74, la Proposition 4.2.30 page 74 et la Proposition 4.2.32, il vient :

Proposition 4.2.33 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ est une transvection. Alors le tableau suivant exprime le lien entre \sim_I et \sim_J en fonction de la comparaison de α et u selon \sim_I et \sim_J .*

	$\alpha \not\sim_J u$	$\alpha \sim_J u$
$\alpha \not\sim_I u$	$I = J$ et $\sim_I = \sim_J$	$\sim_J = \langle \sim_I, \alpha \sim_J u \rangle$
$\alpha \sim_I u$	$\sim_I = \langle \sim_J, \alpha \sim_I u \rangle$	$\sim_I = \sim_J$

Signalons que la Proposition 4.2.25 page 72 nous permet de retrouver le résultat suivant qui a été démontré par M. Bardzell et E. N. Marcos dans [7]

Proposition 4.2.34 *(voir [7]) Soit A une k -algèbre de dimension finie, basique, connexe et de carquois Q . Supposons que A est contrainte et triangulaire. Alors deux présentations admissibles quelconques de A ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Preuve : • Soit $\nu : kQ \rightarrow A$ une présentation admissible de noyau J et soit (α, u) un raccourci de Q . Posons $x = s(\alpha)$ et $y = t(\alpha)$. Puisque A est contrainte et puisque $\alpha \in {}_y kQ_x \setminus {}_y I_x$ (car I est admissible) il existe un scalaire $\lambda \in k$ tel que :

$$\nu(u) = \lambda \nu(\alpha)$$

Donc $u - \lambda \alpha \in {}_y I_x$. L'admissibilité de I entraîne $\lambda = 0$ et $u \in {}_y I_x$ est un chemin de longueur au moins 2. Donc :

- Q n'a pas de flèches multiples,
- si (α, u) est un raccourci, alors u est une relation de I .

Ceci implique en particulier que si $v = v_2 \alpha v_1$ est un chemin de Q avec v_1 et v_2 des chemins, alors $v_2 u v_1 \in I$.

• Soit $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection et soit I un idéal admissible tel que (Q, I) présente A . Montrons que $\varphi(I) = I$. Soit r une relation de I (non nécessairement minimale) et écrivons $r = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ une forme normale.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ nous avons donc :

- si α n'apparaît pas dans u_i , alors $\varphi(u_i) = u_i$,
- si α apparaît dans u_i alors il existe des chemins v_1, v_2 dans lesquels α n'apparaît pas (car Q est sans cycle orienté) et tels que $u_i = v_2 \alpha v_1$. Donc $\varphi(u_i) = u_i + \tau v_2 u v_1$ et $v_2 u v_1 \in I$ d'après ce que nous avons écrit au point précédent.

Donc $\varphi(u_i) - u_i \in I$ en toute circonstance. Il vient donc :

$$\varphi(r) - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\varphi(u_i) - u_i) \in I$$

Ceci montre que $\varphi(r) = r + (\varphi(r) - r) \in I$ pour toute relation r de I . Ainsi $\varphi(I) \subseteq I$ et pour raison de dimension :

$$\varphi(I) = I \text{ si } (Q, I) \text{ présente } A \text{ et si } \varphi \text{ est une transvection}$$

• Soient à présent $\mu: kQ \rightarrow A$ et $\nu: kQ \rightarrow A$ deux présentations admissibles de noyaux respectifs I et J . D'après la Remarque 2.3.19 page 33 il existe une dilatation D ainsi que des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (avec $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$) telles que :

$$J = D\varphi_n \dots \varphi_1(I)$$

Posons :

- $I_0 = I$,
- $I_t = \varphi_t \dots \varphi_1(I)$ pour $t \in \{1, \dots, n\}$.

D'après la Proposition 4.2.25 page 72, \sim_J et \sim_{I_n} coïncident ($J = D(I_n)$ et D est une dilatation). De plus l'étude faite au point précédent montre que :

$$I_1 = \varphi_1(I_0) = I_0, \dots, I_n = \varphi(I_{n-1}) = I_{n-1}$$

Donc $I = I_0 = I_n$ et \sim_J et \sim_{I_n} coïncident. Donc \sim_I et \sim_J coïncident. \square

Comparaison de \sim_I et \sim_J lorsque J l'image de I par un produit de transvections.

Dans ce paragraphe nous cherchons à généraliser les Propositions du paragraphe précédent. Nous fixons donc un idéal admissible I de kQ , nous fixons $\psi \in \text{Aut}_0(kQ)$ et nous posons $J = \psi(I)$. Nous allons étudier le cas où ψ est un produit de transvections. Nous commençons par étudier une généralisation du Lemme 4.2.31 page 74.

Rappelons que Q est un carquois fini et sans cycle orienté.

Lemme 4.2.35 *Supposons que Q n'a pas de flèches multiples et que ψ est un produit de transvections. Supposons également que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ et tout chemin $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ nous ayons $\alpha \sim_J u$. Alors pour toute relation minimale $r \in I$ de I nous avons les deux implications suivantes :*

$$\begin{aligned} v, w \in \text{supp}(\psi(r)) &\Rightarrow v \sim_J w \\ v, w \in \text{supp}(r) &\Rightarrow v \sim_J w \end{aligned}$$

Preuve : • Notons tout d'abord que si $v \in \text{supp}(\psi(u))$ alors $u \sim_J v$. En effet, d'après la Propriété 3.1.10 page 36, il existe :

- des raccourcis $(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_m, u_m)$ tels que $u_i \in \text{supp}(\psi(\alpha_i))$ (et donc $\alpha_i \sim_J u_i$) pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,
- des chemins v_0, \dots, v_m .

tels que :

- $u = v_m \alpha_m v_{m-1} \alpha_{m-1} \dots v_1 \alpha_1 v_0$,
- $v = v_m u_m v_{m-1} u_{m-1} \dots v_1 u_1 v_0$.

Ayant $\alpha_i \sim_J u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il vient $u \sim_J v$. Ainsi :

$$v \in \text{supp}(\psi(u)) \implies u \sim_J v \tag{i}$$

Notons \simeq la relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins engendrée par :

$$v \in \text{supp}(\psi(u)) \implies u \simeq v$$

Avec cette définition, le point (i) entraîne :

$$u \simeq v \implies u \sim_J v \tag{ii}$$

• Ecrivons $\psi(r) = r_1 + \dots + r_n$ comme somme de relations minimales r_1, \dots, r_n de J et à supports deux à deux disjoints. Notons \equiv la relation d'équivalence sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ définie par :

$$i \equiv j \iff (\exists u \in \text{supp}(r_i)) (\exists v \in \text{supp}(r_j)) u \simeq v$$

Puisque r_1, \dots, r_n sont des relations minimales de J , l'implication (ii) donne :

$$i \equiv j \implies (\forall u, v \in \text{supp}(r_i) \cup \text{supp}(r_j)) u \sim_J v \quad (iii)$$

Montrons que $\{1, \dots, n\}$ est une \equiv -orbite. Soit $c \subseteq \{1, \dots, n\}$ une \equiv -orbite et posons :

$$r' = \sum_{i \in c} r_i$$

Ainsi :

- $r' \in J$,
- r' est une sous-expression de $\psi(r)$,
- $\text{supp}(r') = \bigsqcup_{i \in c} \text{supp}(r_i)$.

Soient $u, v \in \text{supp}(\psi(r))$ tels que $u \simeq v$. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sont les indices tels que $u \in \text{supp}(r_i)$ et $v \in \text{supp}(r_j)$, alors $i \equiv j$. Étant donné que c est une orbite, il vient donc :

$$u \in \text{supp}(r') \Leftrightarrow i \in c \Leftrightarrow j \in c \Leftrightarrow v \in \text{supp}(r')$$

Donc r et r' vérifient les hypothèses de la Proposition 3.1.12 page 37. Donc $\psi^{-1}(r')$ est une sous-expression de r . D'autre part :

- $\psi^{-1}(r') \neq 0$ ($r' \neq 0$ car $c \neq \emptyset$),
- $\psi^{-1}(r') \in I$,
- r est une relation minimale de I .

Nous avons donc :

$$\psi^{-1}(r') = r, \quad r' = \psi(\psi^{-1}(r')) = \psi(r), \quad \text{et } c = \{1, \dots, n\}$$

L'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est donc bien une \equiv -orbite. L'implication (iii) entraîne donc :

$$u, v \in \text{supp}(\psi(r)) \implies u \sim_J v \quad (iv)$$

La première des deux implications annoncées est donc démontrée.

• Démontrons à présent la seconde implication annoncée. A cette fin, fixons $<$ un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q . En particulier, la Propriété 3.1.10 page 36, la Propriété 3.2.1 page 39 et la Propriété 3.2.4 page 41 impliquent que pour u et v des chemins, nous avons :

$$v \in \text{supp}(\psi(u)) \setminus \{u\} \implies v < u$$

Notons que $<$ définit l'ordre (total) lexicographique (encore noté $<$) sur l'ensemble des couples de chemins :

$$(u, v) < (u', v') \Leftrightarrow \begin{cases} u < u' \\ \text{ou} \\ u = u' \text{ et } v < v' \end{cases}$$

Supposons que la seconde implication qui nous reste à démontrer est fautive, nous disposons donc d'un ensemble non vide :

$$\Sigma = \{(u, v) \in \text{supp}(r)^2 \mid u \not\sim_J v\}$$

Posons $(u, v) = \max(\Sigma)$.

Notons que si $u \notin \text{supp}(\psi(r))$ (resp. $v \notin \text{supp}(\psi(r))$), alors la Propriété 3.1.13 page 39 implique qu'il existe $u' \in \text{supp}(r)$ (resp. $v' \in \text{supp}(r)$) tel que $u \in \text{supp}(\psi(u')) \setminus \{u'\}$ (resp. $v \in \text{supp}(\psi(v')) \setminus \{v'\}$). Nous avons alors :

- $u < u'$ car $u \in \text{supp}(\psi(u')) \setminus \{u'\}$ (resp. $v < v'$ car $v \in \text{supp}(\psi(v')) \setminus \{v'\}$),
- $u \sim_J u'$ car $u \in \text{supp}(\psi(u'))$ (resp. $v \sim_J v'$ car $v \in \text{supp}(\psi(v'))$) d'après (i).

Donc $v \not\sim_J u \sim_J u'$ (resp. $u \not\sim_J v \sim_J v'$). Ainsi :

$$(u', v) \in \Sigma \text{ et } (u, v) < (u', v) \text{ (resp. } (u, v') \in \Sigma \text{ et } (u, v) < (u, v'))$$

ce qui contredit la maximalité de $(u, v) = \max(\Sigma)$. Ceci montre que :

$$u \in \text{supp}(\psi(r)) \text{ et } v \in \text{supp}(\psi(r))$$

Nous avons donc :

- $u, v \in \text{supp}(\psi(r))$,
- $u \not\sim_J v$.

Ceci contredit (iv), montre que $\Sigma = \emptyset$ et achève la preuve du Lemme. \square

Le Lemme 4.2.35 page 77 fournit la comparaison suivante de \sim_I et \sim_J .

Proposition 4.2.36 *Supposons que Q n'a pas de flèches multiples et que ψ est un produit de transvections. Supposons également que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ et tout chemin $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ nous ayons $\alpha \sim_J u$. Alors \sim_I est plus fine que \sim_J .*

Preuve : C'est une conséquence directe du Lemme 4.2.35 page 77 et de la définition de \sim_I . \square

La Proposition 4.2.36 fournit la généralisation suivante de la Proposition 4.2.32 page 76. Nous omettons la démonstration qui est immédiate.

Proposition 4.2.37 *Supposons que Q n'a pas de flèches multiples et que ψ est un produit de transvections. Supposons également que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ et tout chemin $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ (resp. $u \in \text{supp}(\psi^{-1}(\alpha))$) nous ayons $\alpha \sim_J u$ (resp. $\alpha \sim_I u$). Alors \sim_I et \sim_J coïncident.*

Remarquons que la Proposition 4.2.37 s'agit effectivement d'une généralisation de la Proposition 4.2.32 page 76 puisque si ψ est une transvection, alors $\psi(\alpha)$ et $\psi^{-1}(\alpha)$ ont le même support pour toute flèche α . Rappelons que Q est un carquois fini et sans cycle orienté.

Notons également la généralisation suivante de la Proposition 4.2.30 page 74.

Proposition 4.2.38 *Supposons que Q n'a pas de double raccourci. Supposons que ψ est un produit de transvections et supposons que k est de caractéristique nulle. Supposons également que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ et tout chemin $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$ distinct de α , nous ayons $\alpha \not\sim_I u$ et $\alpha \not\sim_J u$. Alors $I = J$ et \sim_I et \sim_J coïncident.*

Preuve : Nous allons appliquer la Proposition 4.1.34 page 66. A cette fin fixons $<$ un ordre naturel sur l'ensemble des chemins de Q . Notons la propriété suivante satisfaite par ψ :

Lemme 4.2.39 *Soit (α, u) un raccourci tel que $u \in \text{supp}(\psi(\alpha))$. Écrivons $u = \beta_m \dots \beta_1$. Alors :*

$$\psi(\beta_j) = \beta_j \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, m\}$$

Preuve : Nous avons un raccourci (α, u) avec $u = \beta_m \dots \beta_1$. En particulier, si il existe un raccourci de la forme (β_j, v) , alors (α, u, β_j, v) est un double raccourci alors que Q n'a pas de double raccourci. Donc pour tout j , il n'existe pas de raccourci de la forme (β_j, v) . D'après la Propriété 3.1.8 page 36, cela entraîne que $\psi(\beta_j) = \beta_j$ pour tout j . \square

En considérant kQ comme une k -algèbre de dimension finie, posons $\nu: kQ \rightarrow kQ$ l'application linéaire définie par :

$$\nu(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_n \dots \alpha_{i+1} (\psi(\alpha_i) - \alpha_i) \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 & \text{si } u = \alpha_n \dots \alpha_1 \text{ est un chemin non trivial} \\ 0 & \text{si } u = e_x, x \in Q_0 \end{cases}$$

Le Lemme qui suit résume les propriétés de ν qui nous seront utiles.

Lemme 4.2.40 *Soient u, v deux chemins, alors :*

$$v \in \text{supp}(\nu(u)) \implies \begin{cases} u \not\sim_I v \\ u \not\sim_J v \end{cases}$$

Pour tout chemin u :

$$\nu(u) \in \text{Vect}(v ; v < u)$$

Enfin ν est une dérivation de kQ (i.e. $\nu(ab) = \nu(a)b + a\nu(b)$ pour tous $a, b \in kQ$).

Preuve : • Ecrivons $u = \alpha_n \dots \alpha_1$. Si $v \in \text{supp}(\nu(u))$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ ainsi que $w \in \text{supp}(\psi(\alpha_i) - \alpha_i)$ tels que :

$$v = \alpha_n \dots \alpha_{i+1} w \alpha_{i-1} \dots \alpha_1$$

Par hypothèse sur ψ nous avons $\alpha_i \not\sim_I w$ et $\alpha_i \not\sim_J w$. Etant donné que \equiv_I (resp. \equiv_J) est plus fine que \sim_I (resp. \sim_J), il vient :

$$u \not\equiv_I v \text{ et } u \not\equiv_J v$$

De plus v est dérivé de u donc $v < u$ d'après la Propriété 3.2.1 page 39 et la Propriété 3.2.4 page 41.

- Soit u un chemin, nous venons de voir que si $v \in \text{supp}(\nu(u))$ alors $v < u$. Donc :

$$\nu(u) \in \text{Vect}(v ; v < u)$$

• Afin de démontrer que ν est une dérivation, il nous suffit de démontrer que $\nu(vu) = \nu(v)u + v\nu(u)$ pour u et v deux chemins quelconques. Soient u et v deux chemins de Q . Par définition de ν nous avons :

$$u \in {}_y kQ_x \implies \nu(u) \in {}_y kQ_x$$

En particulier :

$$s(v) \neq t(u) \implies \nu(vu) = 0 = \nu(v)u + v\nu(u)$$

Supposons à présent que $s(v) = t(u)$ et écrivons :

- $u = \alpha_n \dots \alpha_1$,
- $v = \beta_m \dots \beta_1$.

Donc :

$$\begin{aligned} \nu(vu) = \nu(\beta_m \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1) &= \sum_{i=1}^n \beta_m \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_{i+1} (\psi(\alpha_i) - \alpha_i) \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 + \\ &\quad \sum_{j=1}^m \beta_m \dots \beta_{j+1} (\psi(\beta_j) - \beta_j) \beta_{j-1} \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1 \\ &= v\nu(u) + \nu(v)u \end{aligned}$$

Donc ν est bien une dérivation. □

Nous avons $\psi: kQ \rightarrow kQ$ un automorphisme de l'espace vectoriel kQ de base la famille des chemins ordonnée par l'ordre naturel $<$ et vérifiant $\psi(I) = J$. Afin d'utiliser la Proposition 4.1.34 page 66 et conclure $I = J$, il suffit, d'après le Lemme 4.2.40 page précédente, de démontrer que $\ln(\psi) = \nu$. Le Lemme suivant fournit cette égalité.

Lemme 4.2.41 $\exp(\nu) = \psi$ et $\nu = \ln(\psi)$.

Preuve : Notons que d'après le Lemme 4.2.40 page précédente, $\nu: kQ \rightarrow kQ$ est une application linéaire nilpotente, donc $\exp(\nu)$ est bien défini.

• Soit $\alpha \in Q_1$. D'après le Lemme 4.2.39 page précédente et par définition de ν , si $v \in \text{supp}(\psi(\alpha) - \alpha)$, alors $\nu(v) = 0$. Donc $\nu^2(\alpha) = \nu(\psi(\alpha) - \alpha) = 0$. Ainsi :

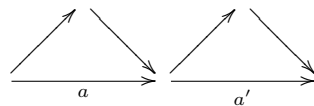
$$\exp(\nu)(\alpha) = \alpha + \nu(\alpha) = \psi(\alpha) \text{ pour toute flèche } \alpha \in Q_1$$

D'autre part, si $x \in Q_0$, alors $\nu(e_x) = 0$ donc $\exp(\nu)(e_x) = e_x = \psi(e_x)$.

• Puisque ν est une dérivation, $\exp(\nu): kQ \rightarrow kQ$ est un morphisme de k -algèbres. Ainsi $\psi, \exp(\nu): kQ \rightarrow kQ$ sont des morphismes de k -algèbres et ils coïncident sur $Q_1 \cup Q_0$ lequel engendre la k -algèbre kQ . Donc $\exp(\nu) = \psi$ puis $\nu = \ln(\psi)$. □

Le Lemme 4.2.40 page précédente et le Lemme 4.2.41 montrent que si nous posons $E = kQ$ et que nous le munissons de la base constituée des chemins de Q , ordonnée par l'ordre naturel $<$, alors $\psi: E \rightarrow E$ vérifie les conditions de la Proposition 4.1.34 page 66. Donc $I = J$ et \sim_I et \sim_J coïncident. Ceci achève la démonstration de la Proposition 4.2.38 page précédente □

Exemple 4.2.42 Soit Q le carquois :



En notant u (resp. u') le chemin de longueur 2 et parallèle à a (resp. a'), posons $I = \langle a'a + u'u, a'u + u'a \rangle$. Soit $\psi = \varphi_{a,u,1}\varphi_{a',u',1}$ et posons $J = \psi(I)$. Supposons que k est de caractéristique 2. Alors $J = \langle a'a, a'u + u'a \rangle$ Donc :

- $I \neq \psi(I) = J$,
- $a \not\sim_J u$ et $a' \not\sim_J u'$,
- $a \not\sim_I u$ et $a' \not\sim_I u'$.

Nous pouvons donc constater que l'hypothèse sur la caractéristique de k ne peut être supprimée dans la Proposition 4.2.38 page 79. Néanmoins, lorsque I est un idéal monomial la situation se simplifie. Le résultat suivant étend la Proposition 4.2.38 page 79 au cas d'une caractéristique quelconque et d'un carquois sans flèches multiples (pouvant admettre un double raccourci).

Proposition 4.2.43 Supposons que Q n'a pas de flèches multiples. Supposons que I est un idéal monomial de kQ . Supposons enfin que pour tout raccourci (α, u) :

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \implies \alpha \not\sim_J u$$

Alors $I = J$ et \sim_I et \sim_J coïncident.

Preuve : Fixons un ordre naturel $<$ sur l'ensemble des chemins de Q et soit $u_1 < \dots < u_N$ la suite strictement croissante des chemins de Q . Pour démontrer que $I = J$, nous allons démontrer que tout chemin appartenant à I appartient également à J . Notons R_n l'assertion suivante :

$$\langle \{u_1, \dots, u_n\} \cap I \subseteq J \rangle$$

Nous allons démontrer que R_1, \dots, R_N sont vraies par récurrence sur $n \in \{1, \dots, N\}$. Si $u_1 \in I$, alors $\psi(u_1) \in J$, or $\psi(u_1) = u_1 + r$ avec $r \in \text{Vect}(u_i; i < 1) = 0$ (d'après la Propriété 3.1.10 page 36). Donc $u_1 = \psi(u_1) \in J$. Ainsi R_1 est vraie. Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$ et supposons que R_n est vraie. Pour démontrer que R_{n+1} est vraie, nous aurons besoin du Lemme suivant :

Lemme 4.2.44 Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$ tel que R_n est vraie. Alors :

$$\begin{cases} r \in J \setminus \{0\} \\ \max(\text{supp}(r)) \leq r_n \end{cases} \implies \text{supp}(r) \subseteq J$$

Preuve : Notons H_l l'assertion :

$$\langle r \in J \setminus \{0\} \text{ et } \max(\text{supp}(r)) \leq r_l \implies \text{supp}(r) \subseteq J \rangle$$

Nous allons démontrer par récurrence sur $l \in \{1, \dots, n\}$ que H_1, \dots, H_n sont vraies. Si $r \in J \setminus \{0\}$ est tel que $\max(\text{supp}(r)) \leq u_1$, alors $r = t u_1$ avec $t \in k^*$. Donc $u_1 = \frac{1}{t} r \in J$ et $\text{supp}(r) \subseteq J$. Donc H_1 est vraie.

Soit $l \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que H_l est vraie et soit $r \in J \setminus \{0\}$ tel que $\max(\text{supp}(r)) \leq u_{l+1}$. Puisque H_l est vraie, nous pouvons supposer que $u_{l+1} = \max(\text{supp}(r))$. De cette façon, u_{l+1} n'est dérivé d'aucun chemin de $\text{supp}(r)$. La Propriété 3.1.13 page 39 implique donc que :

$$u_{l+1}^*(\psi^{-1}(r)) = u_{l+1}^*(r) \neq 0$$

Donc :

$$u_{l+1} \in \text{supp}(\psi^{-1}(r)) \text{ et } \psi^{-1}(r) \in I$$

Comme I est monomial, il vient : $u_{l+1} \in I$. Etant donné que $l+1 \leq n$ et que R_n est vraie, nous en déduisons que $u_{l+1} \in J$. Posons alors :

$$r' = r - u_{l+1}^*(r) u_{l+1}$$

Donc $r' \in J$ et $\max(\text{supp}(r')) < u_{l+1}$. Puisque H_l est vraie, cela entraîne : $\text{supp}(r') \subseteq J$. Or $\text{supp}(r) = \text{supp}(r') \sqcup \{u_{l+1}\}$ avec $u_{l+1} \in J$. Donc $\text{supp}(r) \subseteq J$. Donc H_{l+1} est vraie. Ceci montre que H_1, \dots, H_n sont

vraies. Le Lemme est ainsi démontré. \square

Montrons à présent que R_{n+1} est vraie. Si $u_{n+1} \notin I$, alors $I \cap \{u_1, \dots, u_{n+1}\} = I \cap \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq J$ car R_n est vraie, nous pouvons donc supposer que $u_{n+1} \in I$. Posons $u = u_{n+1}$. La Propriété 3.1.10 page 36 implique alors que :

$$\begin{cases} u^*(\psi(u)) = 1 \\ v \in \text{supp}(\psi(u) - u) \implies v \text{ est dérivé de } u \implies v < u \end{cases}$$

Puisque $\psi(u) \in J$, nous avons une décomposition de $\psi(u)$:

$$\psi(u) = r_1 + \dots + r_p$$

en somme de relations minimales de J à supports deux à deux disjoints. Quitte à réindexer ces relations minimales, nous pouvons supposer que $u \in \text{supp}(r_1)$. En particulier, nous avons, d'après le Lemme 4.2.44 page précédente :

$$i \in \{2, \dots, p\} \implies \max(\text{supp}(r_i)) < u = u_{n+1} \implies \text{supp}(r_i) \subseteq J \quad (1)$$

• Soit $v \in \text{supp}(\psi(u))$ tel que v est dérivé de u d'ordre 1. D'après la Propriété 3.1.10 page 36, nous avons alors :

$$u = \theta' \alpha \theta \quad , \quad v = \theta' w \theta \quad \text{et} \quad w \in \text{supp}(\psi(\alpha))$$

avec θ, θ' des chemins et (α, w) un raccourci. En particulier : $\alpha \not\sim_J w$ et donc $u \not\sim_J v$. Etant donné que r_1 est une relation minimale de J et que $u \in \text{supp}(r_1)$, nous avons donc nécessairement $v \notin \text{supp}(r_1)$. Il existe donc $i \in \{2, \dots, p\}$ tel que $v \in \text{supp}(r_i)$. Le point (1) ci-dessus donne $\text{supp}(r_i) \subseteq J$, donc $v \in J$ et $\psi^{-1}(v) \in I$. D'autre part, la Propriété 3.1.11 page 37 implique que $v \in \text{supp}(\psi^{-1}(v))$. Donc $v \in I$ car $\psi^{-1}(v) \in I$ et I est monomial. Ainsi :

$$\begin{cases} v \in \text{supp}(\psi(u)) \\ v \text{ est dérivé d'ordre 1 de } u \end{cases} \implies \begin{cases} v \in I \cap J \\ v \notin \text{supp}(r_1) \end{cases} \quad (2)$$

• Soit $v \in \text{supp}(r_1) \setminus \{u\} \subseteq \text{supp}(\psi(u) - u)$. Donc v est dérivé de u d'ordre au moins 2 (voir le point (2) ci-dessus). Il existe donc, d'après la Propriété 3.1.10 page 36, $m \geq 2$, il existe des chemins $\theta_0, \dots, \theta_m$ et des raccourcis $(\alpha_1, v_1), \dots, (\alpha_m, v_m)$ tels que :

$$\begin{cases} u = \theta_m \alpha_m \theta_{m-1} \dots \theta_1 \alpha_1 \theta_0 \\ v = \theta_m v_m \theta_{m-1} \dots \theta_1 v_1 \theta_0 \\ v_i \in \text{supp}(\psi(\alpha_i)) \end{cases} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, m\}$$

Puisque $m \geq 2$, nous disposons d'un chemin :

$$v' = \theta_m v_m \theta_{m-1} \alpha_{m-1} \theta_{m-2} \alpha_{m-2} \dots \theta_1 \alpha_1 \theta_0$$

Puisque $\theta_i \in \text{supp}(\psi(\alpha_i))$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il vient donc, d'après la Propriété 3.1.10 page 36 :

$$\begin{cases} v' \in \text{supp}(\psi(u)) & \text{et } v' \text{ est dérivé d'ordre 1 de } u \\ v \in \text{supp}(\psi(v')) \end{cases}$$

Donc :

- $v' < u = u_{n+1}$ et $v \in \text{supp}(\psi(v'))$,
- $v' \in I \cap J$ (d'après le point (2) ci-dessus), en particulier, $\psi(v') \in J$.

D'après la Propriété 3.1.10 page 36, nous avons $\max(\text{supp}(\psi(v'))) = v'$ (avec $v' \leq u_n$). Le Lemme 4.2.44 page précédente entraîne alors que $\text{supp}(\psi(v')) \subseteq J$ et donc que $v \in J$. Ainsi :

$$v \in \text{supp}(r_1) \setminus \{u\} \implies v \in J$$

Etant donné que r_1 est une relation minimale de J et que $u \in \text{supp}(r_1)$, nous avons : $r_1 = t u$ avec $t \in k^*$. Donc $u_{n+1} = u = \frac{1}{t} r_1 \in J$. Rappelons que $\text{supp}(\psi(u)) = \bigsqcup_{i=1}^d \text{supp}(r_i)$. Avec le point (1) ci-dessus nous avons donc $\text{supp}(\psi(u)) \subseteq J$. Donc R_{n+1} est vraie. Ceci démontre que R_1, \dots, R_N sont vraies. Donc $I \cap \{u_1, \dots, u_N\} \subseteq J$. Puisque I est monomial, cela entraîne que $I \subseteq J$. Enfin I et J ont la même dimension ($J = \psi(I)$) donc $I = J$. La Proposition 4.2.43 page précédente est donc démontrée. \square

Le carquois Γ des relations d'homotopie d'une k -algèbre.

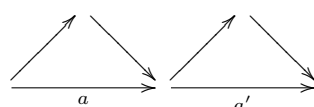
Fixons dans ce paragraphe une k -algèbre A de dimension finie et basique et dont le carquois ordinaire est Q (fini et sans cycle orienté). La Proposition 4.2.33 page 76 justifie la Définition suivante.

Définition 4.2.45 Soient \sim et \sim' deux relations d'équivalence sur l'ensemble des promenades de Q . Alors \sim' est un successeur direct de \sim si il existe des idéaux admissibles I, J de kQ ainsi qu'une transvection $\varphi_{\alpha, u, \tau}$ tels que :

- les k -algèbres $kQ/I, kQ/J$ et A sont isomorphes,
- $J = \varphi_{\alpha, u, \tau}(I)$,
- $\sim = \sim_I$ et $\sim' = \sim_J$,
- $\alpha \not\sim_I u$ et $\alpha \sim_J u$.

Avec les notations de la Définition 4.2.45, nous dirons de la transvection $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ qu'elle induit une succession directe $\sim \rightarrow \sim'$. Notons que le triplet $(I, J, \varphi_{\alpha, u, \tau})$ n'est pas unique comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.2.46 Soit Q le carquois :



Notons u (resp. u') le chemin de longueur 2 et parallèle à a (resp. a'). Soit $I = \langle a'a + u'u \rangle$ et $A = kQ/I$. Posons :

- $I_1 = \varphi_{a, u, 1}(I) = \langle a'a + a'u + u'u \rangle$,
- $I_2 = \varphi_{a', u', 1}(I) = \langle a'a + u'a + u'u \rangle$.

Alors $\sim_{I_1} = \sim_{I_2}$ est un successeur direct de \sim_I et les deux triplets $(I, I_1, \varphi_{a, u, 1})$ et $(I, I_2, \varphi_{a', u', 1})$ établissent la succession directe $\sim_I \rightarrow \sim_{I_1}$.

Remarque 4.2.47 Si \sim' est un successeur direct de \sim , alors \sim est plus fine strictement que \sim' .

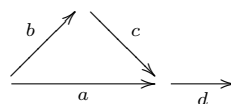
La notion de succession directe nous permet de disposer les relations d'homotopie des présentations admissibles de A dans un carquois comme suit.

Définition 4.2.48 Le carquois Γ des relations d'homotopie de A est défini par :

- l'ensemble des sommets est $\{\sim_I \mid I \text{ est admissible et } kQ/I \simeq A \text{ comme } k\text{-algèbres}\}$,
- il y a une flèche (et une seule) $\sim \rightarrow \sim'$ dans Γ si et seulement si \sim' est un successeur direct de \sim .

Voyons quelques exemples de calculs du carquois Γ .

Exemple 4.2.49 Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :



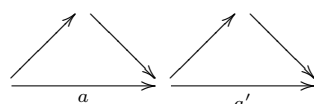
et $I = \langle da - dcb \rangle$. Posons $J = \varphi_{a, cb, 1}(I) = \langle da \rangle$. Alors \sim_I est un successeur direct de \sim_J et un rapide calcul montre que Γ est égal à :

$$\sim_J \rightarrow \sim_I$$

En outre $\pi_1(Q, I) \simeq 1$ et $\pi_1(Q, J) \simeq \mathbb{Z}$.

L'exemple qui suit montre que Γ peut ne pas être un arbre.

Exemple 4.2.50 Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :



et $I = \langle a'a - u'a - a'u + u'u \rangle$ où u (resp. u') est le chemin de longueur 2 et parallèle à a (resp. a'). Remarquons que $a \sim_I u$ et $a' \sim_I u'$. Remarquons également que tout produit de transvections s'écrit $\varphi_{a,u,t}\varphi_{a',u',t'}$ avec $t, t' \in k$. Posons :

- $I_1 = \varphi_{a',u',1}(I) = \langle a'a - a'u \rangle$,
- $I_2 = \varphi_{a,u,1}(I) = \langle a'a - u'a \rangle$,
- $I_3 = \varphi_{a,u,1}\varphi_{a',u',1}(I) = \langle a'a \rangle$,

donc :

- $\pi_1(Q, I)$ est le groupe trivial,
- $\pi_1(Q, I_1) \simeq \mathbb{Z}$ est le groupe libre à un générateur : $[a'^{-1}u']_{I_1}$,
- $\pi_1(Q, I_2) \simeq \mathbb{Z}$ est le groupe libre à un générateur : $[ua^{-1}]_{I_2}$,
- $\pi_1(Q, I_3) \simeq \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ est le groupe libre à deux générateurs : $[a'^{-1}u']_{I_3}$, $[ua^{-1}]_{I_3}$,

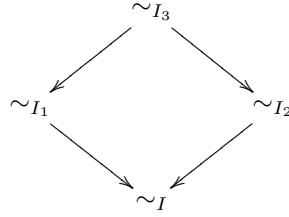
Ainsi les groupes $\pi_1(Q, I_1)$ et $\pi_1(Q, I_2)$ sont isomorphes, mais l'application identité sur les promenades de Q n'induit aucune application bien définie entre ces groupes parce que \sim_{I_1} et \sim_{I_2} ne sont pas comparables. Posons $\psi_{t,t'} = \varphi_{a,u,t}\varphi_{a',u',t'}$ pour $t, t' \in k$, ainsi :

$$\psi_{t,t'}(I_3) = \langle a'a + t a'u + t' au' + tt' u'u \rangle$$

donc :

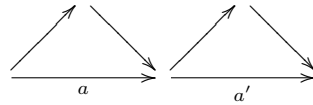
- si $tt' \neq 0$ alors $\sim_{\psi_{t,t'}(I_3)}$ coïncide avec \sim_I ,
- si $t \neq 0$ et $t' = 0$ alors $\sim_{\psi_{t,t'}(I_3)}$ coïncide avec \sim_{I_1} ,
- si $t = 0$ et $t' \neq 0$ alors $\sim_{\psi_{t,t'}(I_3)}$ coïncide avec \sim_{I_2} .

Ainsi, Γ est égal à :



L'exemple suivant montre que le carquois Γ peut avoir plusieurs sources.

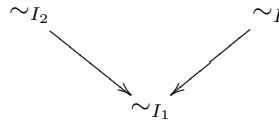
Exemple 4.2.51 Supposons que k est de caractéristique 2. Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :



et $I = \langle a'a + u'u, a'u + u'a \rangle$ où u (resp. u') est le chemin de longueur 2 et parallèle à a (resp. a'). Posons :

- $I_1 = \varphi_{a,u,1}(I) = \langle a'a + a'u + u'u, a'u + u'a + u'u \rangle$,
- $I_2 = \varphi_{a',u',1}(I_1) = \langle a'a + a'u + u'a + 2 u'u, a'u + u'a + 2 u'u \rangle = \langle a'a, u'a + a'u \rangle$.

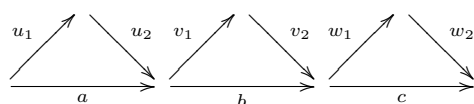
Alors Γ est égal à :



Donc Γ a plusieurs sources. Notons que \sim_{I_2} est plus fine que \sim_I et que \sim_{I_1} . Ainsi $\pi_1(Q, I) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_1(Q, I_1) \simeq 1$ dont tous deux quotients de $\pi_1(Q, I_2) \simeq \mathbb{Z}$.

Ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, si il existe dans Γ un chemin de source \sim_I et de terminus \sim_J , alors \sim_I est plus fine que \sim_J . Le carquois Γ est donc lié à la relation de finesse entre les relations d'homotopie des présentations admissibles de A . L'exemple qui suit montre cependant que Γ n'est pas égal au diagramme de Hasse cette relation de finesse.

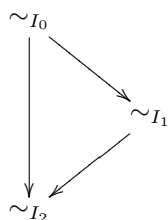
Exemple 4.2.52 Soit $A = kQ/I_0$ où Q est le carquois suivant :



et $I_0 = \langle va - bu, cvu - wba \rangle$. Ici nous avons noté $u = u_2u_1$ (resp. $v = v_2v_1$, resp. $w = w_2w_1$) le chemin de longueur 2 de Q et parallèle a (resp. b , resp. c). Remarquons que $\pi_1(Q, I_0) \simeq \mathbb{Z}$. Posons alors :

- $I_1 = \varphi_{c,w,1}(I_0) = \langle va - bu, cvu + wvu - wba \rangle$ (donc $\pi_1(Q, I_1) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$),
- $I_2 = \varphi_{a,u,1}(I_0) = \langle va + vu - bu, cvu - wba - wbu \rangle$ (donc $\pi_1(Q, I_2) = 0$),

Une rapide vérification montre que Γ est égal à :



Ainsi Γ contient un raccourci et donc ne peut pas être le diagramme de Hasse d'un ensemble partiellement ordonné.

Enonçons à présent quelques propriétés du carquois Γ .

Propriété 4.2.53 Notons r le nombre de raccourcis dans Q , alors :

- (i) Γ est connexe,
- (ii) la longueur des chemins de Γ est bornée par r ,
- (iii) Γ n'a pas de cycle orienté,
- (iv) le nombre de flèches de Γ dont la source est un sommet fixé de Γ est fini majoré par r ,
- (v) Γ admet au moins une source,
- (vi) chaque sommet est le terminus d'un chemin de Γ dont la source est une source de Γ .

Preuve : (i) Soient \sim et \sim' deux sommets de Γ . Il existe donc deux présentations admissibles $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ telles que $\sim = \sim_I$ et $\sim' = \sim_J$. D'après la Remarque 2.3.19 page 33, il existe :

- une dilatation D ,
- des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

tels que :

$$J = D\varphi_n \dots \varphi_1(I)$$

Posons alors :

$$I_0 = I \quad \text{et} \quad I_l = \varphi_l \dots \varphi_1(I) \quad \text{pour } l \in \{1, \dots, n\}$$

Ainsi :

- $\sim' = \sim_J$ et \sim_{I_n} coïncident d'après la Proposition 4.2.25 page 72,
- pour $l \in \{1, \dots, n\}$, la Proposition 4.2.33 page 76 implique que l'une des assertions suivantes est satisfaite :
 1. \sim_{I_l} et $\sim_{I_{l-1}}$ coïncident,
 2. $\sim_{I_l} \rightarrow \sim_{I_{l-1}} \in \Gamma_1$,
 3. $\sim_{I_{l-1}} \rightarrow \sim_{I_l} \in \Gamma_1$.

Donc il existe une promenade de Γ de source \sim et de terminus \sim' . Donc Γ est connexe.

(ii) Soit $\sim_0 \rightarrow \sim_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sim_{n-1} \rightarrow \sim_n$ un chemin de longueur n dans Γ . Supposons que pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la succession directe $\sim_{i-1} \rightarrow \sim_i$ soit induite par la transvection $\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$. Ainsi :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad \alpha_i \not\sim_{i-1} u_i \quad \text{et} \quad \alpha_i \sim_i u_i$$

En particulier, si $1 \leq i < j \leq n$ alors :

- $\alpha_i \sim_{j-1} u_i$ car $i \leq j-1$ (\sim_i est plus fine que \sim_{j-1}),
- $\alpha_j \not\sim_{j-1} u_j$.

Donc $(\alpha_i, u_i) \neq (\alpha_j, u_j)$. Les raccourcis $(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)$ sont donc deux à deux distincts, ce qui force $n \leq r$.

(iii) Si Γ a un cycle orienté, alors la longueur des chemins de Γ n'est pas bornée. Donc Γ n'a pas de cycle orienté.

(iv) Soit \sim un sommet de Γ et soient :

$$\sim \rightarrow \sim_1, \dots, \sim \rightarrow \sim_n$$

des flèches distinctes de Γ de source \sim . Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe une transvection $\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ induisant la succession directe $\sim \rightarrow \sim_i$. Ainsi :

$$\alpha_i \not\sim u_i \text{ et } \sim_i = \langle \sim, \alpha_i \sim_i u_i \rangle$$

Puisque $\sim_i \neq \sim_j$ si $i \neq j$, il vient $(\alpha_i, u_i) \neq (\alpha_j, u_j)$ si $i \neq j$. Les raccourcis $(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)$ sont donc deux à deux distincts ce qui implique $n \leq r$. Donc $\text{Card}(\sim^+) \leq r$.

(v) et (vi) Soit $\sim \in \Gamma_0$. Puisque la longueur des chemins de Γ est bornée, il existe un chemin de Γ de terminus \sim :

$$\sim_0 \rightarrow \sim_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sim_{n-1} \rightarrow \sim_n = \sim$$

et de longueur maximum pour cette propriété. La maximalité implique qu'il n'existe pas de flèche $\sim' \rightarrow \sim_0$. De ce fait \sim_0 est une source de Γ et \sim est le terminus d'un chemin de Γ dont la source est une source de Γ . \square

Notons également la propriété suivante de Γ due à M. Suárez-Alvarez :

Propriété 4.2.54 *Le carquois Γ n'a qu'un nombre fini de sommets.*

Preuve : Puisque Q n'a pas de cycle orienté, il n'y a qu'un nombre fini de chemins dans Q . Donc il n'y a qu'un nombre fini de relations d'équivalence sur l'ensemble des chemins de Q . D'autre part, si (Q, I) présente A , alors \sim_I est uniquement déterminé par sa restriction à l'ensemble des chemins de Q . Ceci montre que Γ_0 et Γ sont finis. \square

Remarque 4.2.55 *Supposons que Q est connexe. Si \sim_I et \sim_J sont deux sommets de Γ tels qu'il existe dans Γ un chemin de source \sim_I et de but \sim_J , alors \sim_I est plus fine que \sim_J et l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, J)$.*

L'intérêt de Γ est souligné par la Proposition suivante. Nous omettons sa démonstration qui est une conséquence directe de la Remarque 4.2.55.

Proposition 4.2.56 *Supposons que Q est connexe. Si Γ n'a qu'une seule source, et si la présentation $kQ/I_0 \simeq A$ est telle que \sim_{I_0} est la source de Γ , alors pour toute autre présentation $kQ/I \simeq A$, l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, I)$.*

Avant d'étudier l'unicité de la source de Γ notons quelques conséquences intéressantes lorsque cette propriété est vraie. Jusqu'à la fin de ce paragraphe nous supposons que Q est connexe, que Γ a une source unique et nous fixons $kQ/I_0 \simeq A$ une présentation admissible telle que \sim_{I_0} est la source de Γ . Si γ est une promenade de Q , nous noterons $[\gamma]$ sa classe de \sim_{I_0} -équivalence.

Proposition 4.2.57 *Le groupe $\pi_1(Q, I_0)$ est la limite projective du système projectif de groupes obtenu à partir de Γ de la façon suivante :*

- chaque sommet \sim_I est remplacé par le groupe $\pi_1(Q, I)$,
- une flèche $\sim_I \rightarrow \sim_J$ est remplacée par le morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, J)$ induit par l'application identité sur les promenades de Q .

Preuve : C'est une conséquence directe du fait que Γ n'a qu'une seule source. \square

Il est intéressant de savoir à quoi ressemblent les groupes fondamentaux des présentations d'une k -algèbre fixée. Ce point a déjà été étudié par J. C. Bustamante et D. Castonguay dans [11]. Il est possible d'étudier cette question en utilisant le carquois Γ . Pour cela fixons un sommet de base $x_0 \in Q_0$ et pour chaque sommet $x \in Q_0$ fixons une promenade γ_x de Q de source x_0 et de terminus x . Nous avons alors la Proposition suivante.

Proposition 4.2.58 Soit $kQ/I \simeq A$ une présentation admissible de A . Alors il existe une suite de raccourcis $(\alpha_1, u_1), \dots, (\alpha_n, u_n)$ de Q telle que :

$$\pi_1(Q, I) \simeq \pi_1(Q, I_0) / \langle [\gamma_{x_i}^{-1} \alpha_i^{-1} u_i \gamma_{x_i}] \text{ pour } i = 1, \dots, n \rangle$$

où le sommet x_i est la source de la flèche α_i pour $i = 1, \dots, n$.

Preuve : • Pour $\sim_J \in \Gamma_0$ nous noterons N_{\sim_J} le noyau du morphisme surjectif de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Q) & \twoheadrightarrow & \pi_1(Q, J) \\ \gamma & \longmapsto & [\gamma]_J \end{array}$$

Ainsi N_{\sim_J} est le sous-groupe distingué de $\pi_1(Q)$ engendré par :

$$\{\gamma_x^{-1} \gamma^{-1} \gamma' \gamma_x \mid \gamma \text{ et } \gamma' \text{ promenades de source } x \text{ et telles que } \gamma \sim_J \gamma'\}$$

Nous avons donc $\pi_1(Q, J) = \pi_1(Q) / N_{\sim_J}$.

• Posons $\sim = \sim_I$. Il existe un chemin de Γ :

$$\sim_{I_0} = \sim_0 \rightarrow \sim_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sim_{n-1} \rightarrow \sim_n = \sim$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe une transvection $\varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ induisant la succession directe $\sim_{i-1} \rightarrow \sim_i$. Ainsi :

$$\sim_i = \langle \sim_{i-1}, \alpha_i \sim_i u_i \rangle$$

Donc $\sim = \sim_n$ est la relation d'équivalence engendrée par :

- $\gamma \sim_{I_0} \gamma' \Rightarrow \gamma \sim \gamma'$,
- $\alpha_i \sim u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Donc N_{\sim_I} est le sous-groupe distingué de $\pi_1(Q)$ engendré par :

$$N_{\sim_{I_0}} \cup \{[\gamma_{x_i}^{-1} \alpha_i^{-1} u_i \gamma_{x_i}] \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

en notant $x_i = s(\alpha_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \pi_1(Q, I) &= \pi_1(Q) / N_{\sim_I} \\ &\simeq (\pi_1(Q) / N_{\sim_{I_0}}) / \langle [\gamma_{x_i}^{-1} \alpha_i^{-1} u_i \gamma_{x_i}] ; i \in \{1, \dots, n\} \rangle \\ &\simeq \pi_1(Q, I_0) / \langle [\gamma_{x_i}^{-1} \alpha_i^{-1} u_i \gamma_{x_i}] ; i \in \{1, \dots, n\} \rangle \end{aligned}$$

□

La Proposition 4.2.58 fournit une borne supérieure au nombre de classes d'isomorphisme de groupes qui peuvent être groupe fondamental d'une présentation de A .

Corollaire 4.2.59 Notons r le nombre de raccourcis de Q . Alors il y a au plus 2^r classes d'isomorphisme de groupes qui peuvent être le groupe fondamental d'une présentation admissible de A .

Preuve : C'est une conséquence directe de la Proposition 4.2.58. □

Etude de l'unicité de la source de Γ

Fixons A une k -algèbre de dimension finie, basique et dont le carquois ordinaire est Q (lequel est, rappelons le, un carquois fini et sans cycle orienté). Nous allons étudier l'unicité de la source de Γ dans deux cas :

- Q n'a pas de double raccourci et k est de caractéristique nulle,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Commençons par étudier le cas où Q n'a pas de double raccourci et k est de caractéristique nulle. Le Lemme suivant montre comment relier "efficacement" deux sources de Γ .

Lemme 4.2.60 Supposons que Q n'a pas de double raccourci. Soient \sim et \sim' des sources de Γ . Alors il existe $kQ/I \simeq A$ et $kQ/J \simeq A$ deux présentations admissibles de A ainsi que des transvections $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}, \dots, \varphi_n = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n}$ telles que :

- $\sim = \sim_I$ et $\sim' = \sim_J$
- $J = \varphi_n \dots \varphi_1(I)$,
- $\alpha_i \not\sim_I u_i$ et $\alpha_i \not\sim_J u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve : Rappelons que d'après la Propriété 2.2.17 page 25 et la Propriété 2.2.18 page 25, \mathcal{T} est un groupe commutatif puisque Q n'a pas de double raccourci.

• Soient I, J' tels que (Q, I) (resp. (Q, J')) présente A et tels que $\sim_I = \sim$ et $\sim_{J'} = \sim'$. D'après la Remarque 2.3.19 page 33, il existe une dilatation D et des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tels que $J' = D\varphi_n \dots \varphi_1(I)$. Notons que d'après la Proposition 4.2.25 page 72, $\sim_{J'}$ et \sim_J coïncident avec $J = \varphi_n \dots \varphi_1(I) = D^{-1}(J')$. L'ensemble Σ décrit ci-après est donc non vide :

$$\Sigma = \left\{ (I, J, n) \left| \begin{array}{l} (Q, I) \text{ et } (Q, J) \text{ présentent } A, \\ \sim_I = \sim \text{ et } \sim_J = \sim', \\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{il existe } \psi \in \mathcal{T} \text{ un produit de } n \text{ transvections tel que } J = \psi(I) \end{array} \right. \right\}$$

• Choisissons alors $(I, J, n) \in \Sigma$ tel que n est minimal pour cette propriété. Nous disposons donc de transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$) telles que $\varphi_n \dots \varphi_1(I) = J$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et supposons que $\alpha_i \sim_I u_i$ (resp. $\alpha_i \sim_J u_i$). Posons $I' = \varphi_i(I)$ (resp. $J' = \varphi_i^{-1}(J) = \varphi_{\alpha_i, u_i, -\tau_i}(J)$). Si $\alpha_i \not\sim_{I'} u_i$ (resp. $\alpha_i \not\sim_{J'} u_i$) alors la Proposition 4.2.33 page 76 entraîne que \sim_I (resp. \sim_J) est un successeur direct de $\sim_{I'}$ (resp. de $\sim_{J'}$) ce qui n'est pas car $\sim = \sim_I$ (resp. $\sim' = \sim_J$) est une source de Γ . Donc $\alpha_i \sim_{I'} u_i$ (resp. $\alpha_i \sim_{J'} u_i$) et la Proposition 4.2.33 page 76 implique que $\sim = \sim_I$ (resp. $\sim' = \sim_J$) et $\sim_{I'}$ (resp. $\sim_{J'}$) coïncident. Ainsi :

- $\sim = \sim_{I'}$ et $\sim' = \sim_{J'}$ (resp. $\sim = \sim_I$ et $\sim' = \sim_{J'}$),
- $J = \varphi_n \dots \varphi_{i+1} \varphi_{i-1} \dots \varphi_1(I')$ (resp. $J' = \varphi_n \dots \varphi_{i+1} \varphi_{i-1} \dots \varphi_1(I)$).

Donc $(I', J, n-1) \in \Sigma$ (resp. $(I, J', n-1) \in \Sigma$) ce qui contredit la minimalité de n . Ceci montre que :

$$\alpha_i \not\sim_I u_i \text{ et } \alpha_i \not\sim_J u_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

□

Le Lemme 4.2.60 page précédente nous permet de conclure à l'unicité de la source de Γ .

Proposition 4.2.61 *Supposons que Q n'a pas de double raccourci et supposons que k est de caractéristique nulle. Alors Γ n'a qu'une seule source.*

Preuve : Soient $\sim, \sim' \in \Gamma_0$ tels que \sim (resp. \sim') est une source de Γ . D'après le Lemme 4.2.60 page précédente il existe I, J tels que (Q, I) et (Q, J) présentent A et il existe des transvections (commutant deux à deux car Q n'a pas de double raccourci) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$) telles que :

- $\sim = \sim_I$ et $\sim' = \sim_J$,
- $J = \varphi_n \dots \varphi_1(I)$,
- $\alpha_i \not\sim u_i$ et $\alpha_i \not\sim' u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Posons $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$. Donc $J = \psi(I)$ et si (α, u) est un raccourci, alors (d'après la Proposition 3.2.17 page 47) :

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad (\alpha, u) = (\alpha_i, u_i)$$

Donc :

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \Rightarrow \begin{cases} \alpha \not\sim_I u \\ \alpha \not\sim_J u \end{cases}$$

Puisque $\text{car}(k) = 0$, la Proposition 4.2.38 page 79 s'applique. Ainsi $I = J$ et $\sim = \sim_I = \sim_J = \sim'$. Donc Γ n'a qu'une seule source. □

Nous pouvons à présent démontrer le premier Théorème de ce texte.

Théorème 4.2.62 *Soit A une k -algèbre de dimension finie connexe et basique. Supposons que le carquois ordinaire Q de A n'a pas de double raccourci et supposons que k est de caractéristique nulle. Alors il existe une présentation admissible $kQ/I_0 \simeq A$ telle que pour toute autre présentation admissible $kQ/I \simeq A$ l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, I)$.*

Preuve : C'est une conséquence directe de la Proposition 4.2.61 page ci-contre et de la Proposition 4.2.56 page 86 \square

Remarquons que, étant donné un chemin $\sim_0 \rightarrow \dots \rightarrow \sim_n$ de Γ , il n'existe pas nécessairement des présentations admissibles $kQ/I_i \simeq A$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) telles que $\sim_i = \sim_{I_i}$ pour tout i et telles que pour chaque i il existe une transvection $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ telle que la succession directe $\sim_{I_{i-1}} \rightarrow \sim_{I_i}$ soit induite par le triplet $(I_{i-1}, I_i, \varphi_i)$ (en termes peu rigoureux nous pourrions dire que « nous ne contrôlons pas les successions directes $\sim_{i-1} \rightarrow \sim_i$ »). Notons que si, par chance, toutes ces conditions étaient vérifiées, alors nous aurions $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. La Proposition suivante montre que lorsque \sim_0 est l'unique source de Γ , ces conditions peuvent être satisfaites pour au moins un des chemins de Γ de source \sim_0 et de but \sim_n .

Proposition 4.2.63 *Supposons que Q n'a pas de double raccourci et que k est de caractéristique nulle. Soit $kQ/I_0 \simeq A$ une présentation admissible telle que \sim_{I_0} est la source de Γ et soit $kQ/I \simeq A$ une autre présentation admissible. Alors il existe :*

- une dilatation D ,
- des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$).

vérifiant les propriétés suivantes :

- $I = D\varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si de plus \sim_I est source de Γ (i.e. $\sim_I = \sim_{I_0}$) alors \sim_{I_i} et $\sim_{I_{i-1}}$ coïncident (i.e. $\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i$, d'après la Proposition 4.2.33 page 76) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve : • D'après la Remarque 2.3.19 page 33, il existe une dilatation D ainsi que $\psi \in \mathcal{T}$ tels que $I = D\psi(I_0)$. Posons $J = D^{-1}(I)$. Nous allons montrer par récurrence sur $m \geq 0$ que l'assertion suivante, notée H_m , est vraie :

« si (Q, J) présente A et si J est l'image de I_0 par un produit de m transvections, alors il existe :

- $n \geq 0$,
- des transvections $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}, \dots, \varphi_n = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n}$,

tels que :

- $J = \varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$.

»

Notons que pour démontrer la première partie de la Proposition il suffit de démontrer que H_m est vraie pour tout $m \geq 0$.

H_0 est bien évidemment vraie. Soit $m \geq 1$, supposons que H_{m-1} est vraie et supposons que $J = \varphi_{\beta_m, v_m, \nu_m} \dots \varphi_{\beta_1, v_1, \nu_1}(I_0)$.

1^{er} cas : il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\beta_i \sim_J v_i$. Puisque les transvections commutent deux à deux (Q n'a pas de double raccourci) nous pouvons supposer que $i = m$. Posons $J' = \varphi_{\beta_{m-1}, v_{m-1}, \nu_{m-1}} \dots \varphi_{\beta_1, v_1, \nu_1}(I_0)$. Puisque H_{m-1} est vraie, il existe :

- $n \geq 0$,
- des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour tout i),

tels que :

- $J' = \varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- (*) $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$.

Posons $\varphi_{n+1} = \varphi_{\alpha_{n+1}, u_{n+1}, \tau_{n+1}} := \varphi_{\beta_m, v_m, \nu_m}$. Ainsi $J = \varphi_{n+1}(J') = \varphi_{n+1} \dots \varphi_1(I_0)$, et si nous posons $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$ pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$, nous avons $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour $i \leq n$ d'après (*) et $\alpha_{n+1} = \beta_m \sim_J v_m$ par hypothèse. L'assertion H_m est donc vraie dans ce cas.

2nd cas : $\beta_i \not\sim_J v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Posons alors $\psi = \varphi_{\beta_m, v_m, \nu_m} \dots \varphi_{\beta_1, v_1, \nu_1}$ de sorte que : ψ est un produit de transvections commutant deux à deux et $J = \psi(I_0)$. Puisque \sim_{I_0} est la source de Γ , \sim_{I_0} est plus fine que \sim_J donc :

$$\beta_i \not\sim_{I_0} v_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m\}$$

D'après la Proposition 3.2.17 page 47 (rappelons que Q n'a pas de double raccourci), nous avons pour tout raccourci (α, u) :

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \Rightarrow (\exists i \in \{1, \dots, m\}) (\alpha, u) = (\beta_i, v_i)$$

Ainsi $J = \psi(I_0)$, ψ est un produit de transvections commutant deux à deux et :

$$(\forall \alpha \in Q_1) \begin{cases} u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \\ u \neq \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \not\sim_I u \text{ et } \alpha \not\sim_J u$$

La Proposition 4.2.38 page 79 s'applique donc (rappelons que $\text{car}(k) = 0$). Donc $I_0 = J$. Donc H_m est également vraie ici (avec $n = 0$).

H_m est donc vraie pour tout $m \geq 0$. Ceci démontre l'existence de la dilatation D et des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vérifiant :

- $I = D\varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Supposons à présent que \sim_I est la source de Γ (donc $\sim_I = \sim_{I_0}$). Les transvections $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) mises en évidence au point précédent vérifient $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Notons que, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i$ ou $\alpha_i \not\sim_{I_{i-1}} u_i$. Donc, d'après la Proposition 4.2.33 page 76, l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- \sim_{I_i} et $\sim_{I_{i-1}}$ coïncident,
- $\sim_{I_{i-1}} \rightarrow \sim_{I_i}$ est une flèche de Γ .

Etant donné que $\sim_I = \sim_{I_n}$ (car $I = D(I_n)$ et D est une dilatation), les sommets $\sim_{I_0}, \dots, \sim_{I_n} = \sim_I$ définissent un chemin de Γ de source \sim_{I_0} et de terminus \sim_I . Et ce chemin est trivial si et seulement si $\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons supposé que \sim_I est source de Γ , donc ce chemin est trivial et $\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i$ (i.e. \sim_{I_i} et $\sim_{I_{i-1}}$ coïncident) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

À présent, laissons de côté le cas « Q n'a pas de double raccourci et k est de caractéristique nulle», et examinons l'unicité de la source de Γ dans le cas où A est monomiale. Notons tout d'abord la Proposition suivante dont la démonstration est immédiate.

Proposition 4.2.64 *Si $kQ/I_0 \simeq A$ est une présentation admissible monomiale, alors \sim_{I_0} est une source de Γ .*

Si A est connexe et monomiale, alors le groupe fondamental de toute présentation de A est un quotient du groupe fondamental de toute présentation monomiale de A . Pour cette raison l'étude de l'unicité de la source de Γ a moins d'intérêt dans ce cas. Néanmoins elle est utile dans l'optique de l'étude des revêtements galoisiens de A .

Jusqu'à la fin du paragraphe nous supposons que Q n'a pas de double flèches et nous fixons $kQ/I_0 \simeq A$ une présentation monomiale de A .

Lemme 4.2.65 *Soit $kQ/I \simeq A$ une présentation admissible. Alors le produit de transvections ψ_I défini par la Proposition 3.3.6 page 50 vérifie la propriété suivante :*

pour toute flèche α et tout chemin $u \in \text{supp}(\psi_I(\alpha))$ nous avons $\alpha \sim_I u$.

Preuve : Posons $\psi = \psi_I$. Fixons un ordre naturel $<$ sur l'ensemble des chemins de Q et soit $<$ l'ordre admissible associé sur l'ensemble des raccourcis de Q . D'après la Propriété 3.2.13 page 45 il existe des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$) telles que :

- $\psi = \varphi_n \dots \varphi_1$,
- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$,
- $\tau_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

La Proposition 3.2.15 page 46 implique de plus que pour tout raccourci (α, u) :

$$u \in \text{supp}(\psi(\alpha)) \Leftrightarrow (\exists i \in \{1, \dots, n\}) (\alpha_i, u_i) = (\alpha, u)$$

En particulier, pour démontrer le Lemme, il nous suffit de montrer que $\alpha_i \sim_I u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. A cette fin, nous allons démontrer par récurrence descendante sur $m \in \{1, \dots, n+1\}$ que l'assertion suivante, notée H_m , est vraie :

$$\llbracket \alpha_i \sim_I u_i \text{ pour } i \in \{m, m+1, \dots, n\} \rrbracket$$

Notons que H_{n+1} est vraie puisque l'ensemble $\{n+1, n+2, \dots, n\}$ est vide. Soit alors $m \in \{1, \dots, n\}$ et supposons que H_{m+1} est vraie. Pour montrer que H_m est vraie, il suffit de démontrer que $\alpha_m \sim_I u_m$. Puisque $u_m \in \text{supp}(\psi(\alpha_m))$, la définition de $\psi = \psi_I$ (voir la Proposition 3.3.6 page 50) donne $\varphi_{\alpha_m, u_m, 1}(I_0) \neq I_0$. Puisque I_0 est monomiale, cela implique qu'il existe un chemin $u \in I_0$ tel que $\varphi_{\alpha_m, u_m, 1}(u) \notin I_0$. Nous avons donc :

$$\varphi_{\alpha_m, u_m, 1}(u) = u + v \text{ avec } v \text{ un chemin tel que } v \notin I_0$$

Nous disposons donc de chemins v_1, v_2 tels que :

$$u = v_2 \alpha_m v_1 \text{ et } v = v_2 u_m v_1 \notin I_0$$

Puisque $\psi(u) \in I$, il existe une décomposition :

$$\psi(u) = r_1 + \dots + r_N$$

avec r_1, \dots, r_N des relations minimales de I et à supports deux à deux disjoints. Notons que d'après la Propriété 3.1.10 page 36, nous avons $u, v \in \text{supp}(\psi(u))$. Quitte à réindexer les relations minimales r_1, \dots, r_N nous pouvons supposer que $v \in \text{supp}(r_1)$. Soit alors $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u \in \text{supp}(r_i)$. Nous allons distinguer deux cas selon que $i = 1$ ou $i \neq 1$.

1^{er} cas : $i = 1$. Alors $u, v \in \text{supp}(r_1)$, et r_1 est une relation minimale de I . Donc $v_2 \alpha_m v_1 = u \sim_I v = v_2 u_m v_1$ et $\alpha_m \sim_I u_m$.

2nd cas : $i \neq 1$. Nous avons alors :

- $\text{supp}(r_1) \subseteq \text{supp}(\psi(u))$,
- $u \notin \text{supp}(r_1)$,

La Propriété 3.1.10 page 36 implique donc que $\text{supp}(r_1)$ est constitué de chemins dérivés de u . Supposons d'abord qu'il n'existe pas dans $\text{supp}(r_1)$ de chemin dont v est dérivé. Alors la Propriété 3.1.13 page 39 implique que $v \in \text{supp}(\psi^{-1}(r_1))$ (avec $\psi^{-1}(r_1) \in I_0$). Puisque I_0 est monomial, cela entraîne $v \in I_0$ ce qui n'est pas (par construction de v). Cette contradiction montre :

il existe $w \in \text{supp}(r_1)$ tel que v est dérivé de w

Donc w est dérivé de u , v est dérivé de w et v est dérivé d'ordre 1 de u . D'après la Propriété 3.1.11 page 37 nous disposons donc d'un raccourci (α, θ) ainsi que de chemins u', u'', θ' tels que θ' est dérivé de θ et :

$$u = u'' \alpha u', \quad w = u'' \theta u' \text{ et } v = u'' \theta' u'$$

Or :

$$u = v_2 \alpha_m v_1 \text{ et } v = v_2 u_m v_1$$

Donc (rappelons que Q n'a pas de cycle orienté) :

$$v_1 = u', \quad v_2 = u'', \quad \alpha = \alpha_m \text{ et } \theta' = u_m$$

Ayant $w = v_2 \theta v_1 \in \text{supp}(\psi(u = v_2 \alpha_m v_1))$, il existe (d'après la Proposition 3.2.15 page 46) $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_j = \alpha_m$ et $(\alpha, \theta) = (\alpha_j, u_j)$. Ainsi :

- $(\alpha_j, u_j) = (\alpha, \theta)$,
- $u_m = \theta'$ est dérivé de θ (en particulier $u_m = \theta' < \theta$),
- $\alpha_j = \alpha_m$.

Donc $u_m = \theta' < \theta = u_j$, puis $(\alpha_m, u_m) < (\alpha_m, u_j) = (\alpha_j, u_j)$ ce qui donne enfin $m < j$, ou encore $m+1 \leq j$. Puisque H_{m+1} est vraie, nous en déduisons que $\alpha_j \sim_I u_j$ (remarquons que si $m = n$ alors $m < j$ contredit $j \in \{1, \dots, n\}$, cette contradiction montre que dans le cas $m = n$, c'est le 1^{er} cas qui est vérifié et non le second, ceci montre que H_n est vraie). Donc :

- $\alpha_j \sim_I u_j$,
- $v \sim_I w$ car $v, w \in \text{supp}(r_1)$ et r_1 est une relation minimale de I ,
- $u = v_2 \alpha_m v_1 = v_2 \alpha_j v_1$, $v = v_2 u_m v_1$, $w = v_2 u_j v_1$.

Donc :

$$v_2 \alpha_m v_1 = v_2 \alpha_j v_1 \sim_I v_2 u_j v_1 = w \sim_I v = v_2 u_m v_1$$

Donc $\alpha_m \sim_I u_m$.

Ceci montre que H_m est vraie dès que H_{m+1} l'est. Donc H_1 est vraie : $\alpha_i \sim_I u_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Le Lemme 4.2.65 page ci-contre nous permet d'exhiber une Proposition similaire à la Proposition 4.2.63 page 89.

Proposition 4.2.66 Soit $kQ/I \simeq A$ une présentation admissible. Alors il existe :

- une suite de transvections $\varphi_1 = \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}, \dots, \varphi_n = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n}$,
- une suite d'idéaux I_1, \dots, I_n tels que $kQ/I_i \simeq A$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

tels que :

- $I_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(I_{i-1})$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $I = I_n$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$.

En particulier, il existe un chemin de Γ de source \sim_{I_0} et de terminus \sim_I . Si de plus \sim_I est une source de Γ , alors $n = 0$ et $I = I_0$.

Preuve : Fixons $<$ un ordre admissible sur l'ensemble des raccourcis de Q . D'après la Proposition 3.3.6 page 50, nous avons :

$$\psi_I = \varphi_{\alpha_n, u_n, \tau_n} \cdots \varphi_{\alpha_1, u_1, \tau_1}$$

Avec :

- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_n, u_n)$,
- $\tau_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Posons $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ et $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc :

- $(\alpha_1, u_1) < \dots < (\alpha_i, u_i)$,
- $\tau_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$.

D'après la Proposition 3.2.15 page 46 cela implique, pour tout raccourci (α, u) :

$$u \in \text{supp}(\varphi_i \dots \varphi_1(\alpha)) \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, i\} (\alpha, u) = (\alpha_j, u_j)$$

Puisque $\varphi_n \dots \varphi_1 = \psi_I$, il vient donc pour tout raccourci (α, u) :

$$u \in \text{supp}(\varphi_i \dots \varphi_1(\alpha)) \Rightarrow u \in \text{supp}(\psi_I(\alpha)) \Rightarrow \varphi_{\alpha, u, \tau}(I_0) \neq I_0 \text{ pour tout } \tau \in k^*$$

Ceci démontre que $\varphi_i \dots \varphi_1 = \psi_{I_i}$. Le Lemme 4.2.65 page 90 implique alors que $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$. Ainsi :

- $I_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(I_{i-1})$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $I = I_n$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

En particulier, la Proposition 4.2.33 page 76 implique que \sim_{I_i} et $\sim_{I_{i-1}}$ coïncident ou $\sim_{I_{i-1}} \rightarrow \sim_{I_i} \in \Gamma_1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. La suite $\sim_{I_0}, \dots, \sim_{I_n} = \sim_I$ de sommets de Γ définit donc un chemin de Γ de source \sim_{I_0} et de terminus \sim_I . Supposons à présent que \sim_I est une source de Γ . Le chemin de source \sim_{I_0} et de terminus \sim_I est donc nécessairement trivial. Donc $\sim_I = \sim_{I_0}$. Ayant $\sim_I = \sim_{I_n}$, la propriété $\alpha_n \sim_{I_n} u_n$ ne peut être. Donc $n = 0$ et $I = I_0$. \square

La Proposition 4.2.66 nous donne immédiatement l'unicité de la source de Γ en caractéristique quelconque et sans hypothèse sur les double raccourcis de Q .

Corollaire 4.2.67 Si A est monomiale et si Q n'a pas de flèches multiples alors Γ a une seule source.

Chapitre 5

Application à l'étude de $HH^1(A)$

Dans ce Chapitre nous appliquons l'étude faite au Chapitre 4 à l'étude du second groupe de cohomologie de Hochschild d'une k -algèbre de dimension finie : étant donnée une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow A$ de noyau I d'une k -algèbre de dimension finie (avec Q sans cycle orienté), I. Assem et J. A. de la Peña ont établi dans [5] l'existence d'un morphisme injectif de groupes $\theta_\nu: \pi_1(Q, I) \hookrightarrow HH^1(A)$, nous allons comparer les morphismes θ_ν pour différentes présentations admissibles de A .

5.1 Rappels sur l'algèbre de Lie $HH^1(A)$

Dans cette Section nous faisons un rappel sur la cohomologie de Hochschild d'une k -algèbre de dimension finie et plus précisément sur l'espace $HH^1(A)$. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [23] ou [33].

Soit A une k -algèbre de dimension finie. La **cohomologie de Hochschild de A** a été définie par G. Hochschild dans [23]. En considérant A comme un $A - A$ -bimodule, le i -ème groupe ($i \geq 0$) de cohomologie de Hochschild de A est noté $HH^i(A)$ et il est défini par :

$$HH^i(A) = Ext_{A \otimes A^{op}}^i(A, A)$$

Le produit de Yoneda confère alors à $HH^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} HH^i(A)$ une structure de k -algèbre associative unitaire et graduée commutative (c'est à dire que $gf = (-1)^{mn}fg$ pour $f \in HH^n(A)$ et $g \in HH^m(A)$). En outre $HH^1(A)$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie (plus généralement M. Gerstenhaber a mis en évidence dans [18] une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur $HH^*(A)$). D'après un résultat dû à B. Keller (voir [25]), la cohomologie de Hochschild de A est invariante par équivalence dérivée et il en est de même pour la structure d'algèbre de $\bigoplus_{i \geq 0} HH^i(A)$ ainsi que pour la structure d'algèbre de Lie de $HH^1(A)$. Dans la suite nous pourrons donc supposer que A est basique.

Notons que $HH^0(A)$ est isomorphe (en tant que k -algèbre) au centre $Z(A)$ de A . Le groupe $HH^1(A)$ peut être quant à lui décrit en termes de dérivations. Rappelons qu'une **dérivation de A** est une application k -linéaire $d: A \rightarrow A$ telle que :

$$(\forall a, b \in A) \quad d(ab) = ad(b) + d(a)b$$

En particulier, une **dérivation intérieure de A** est une dérivation de la forme :

$$a \mapsto aa_0 - a_0a \quad \text{avec } a_0 \in A$$

Notons $Der(A)$ l'espace des dérivations de A et $Int(A)$ le sous-espace de $Der(A)$ constitué des dérivations intérieures de A . Rappelons que le crochet entre applications k -linéaires $A \rightarrow A$:

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

fait de $Der(A)$ une algèbre de Lie dont $Int(A)$ est un idéal. Il existe alors un isomorphisme naturel d'algèbres de Lie :

$$Der(A)/Int(A) \simeq HH^1(A)$$

Dans les deux Sections qui suivent nous allons utiliser une description un peu différente de $HH^1(A)$ en termes de dérivations unitaires. Celles-ci ont été introduites par J. A. de la Peña et M. Saorín dans [33].

Définition 5.1.1 (voir [33]) Soit A une k -algèbre de dimension finie et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A . Une **dérivation unitaire** est une dérivation $d: A \rightarrow A$ telle que :

$$d(e_i) = 0 \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

L'espace des dérivations unitaires de A sera noté $Der_0(A)$.

J. A. de la Peña et M. Saorín ont démontré dans [33] que l'algèbre de Lie $HH^1(A)$ peut être décrite à l'aide des dérivations unitaires comme suit :

Proposition 5.1.2 (voir [33]) Soit A une k -algèbre de dimension finie et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A . Alors $Der_0(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $Der(A)$ et le morphisme induit par l'inclusion $Der_0(A) \hookrightarrow Der(A)$:

$$Der(A)_0 / Der_0(A) \cap Int(A) \longrightarrow Der(A) / Int(A)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie. En particulier, $Der_0(A) / Der_0(A) \cap Int(A)$ et $HH^1(A)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie.

Nous identifierons désormais $HH^1(A)$ avec l'espace quotient $Der_0(A) / Der_0(A) \cap Int(A)$.

Notons en outre la description suivante de $Der_0(A) \cap Int(A)$ lorsque A est basique :

Proposition 5.1.3 (voir [33]) Soit A un k -algèbre de dimension finie et basique. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A , et soit E la sous-algèbre de A engendrée par ces idempotents. En particulier, $E = Vect(e_1, \dots, e_n)$. Alors $Der_0(A) \cap Int(A)$ est le sous-espace de $Der_0(A)$ des dérivations de la forme :

$$a \mapsto ae - ea \quad \text{où } e \in E$$

5.2 Le morphisme $\theta_\nu: Hom(\pi_1(Q, I), k^+) \rightarrow HH^1(A)$ induit par une présentation de $\nu: kQ \rightarrow A$ de noyau I

Soit A une k -algèbre de dimension finie connexe, basique et triangulaire. Soit Q le carquois de A . Dans cette Section nous fixons :

- $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation admissible de A de noyau I ,
- un sommet de base $x_0 \in Q_0$ pour le groupe fondamental $\pi_1(Q, I) = \pi_1(Q, I, x_0)$,
- un arbre maximal T de Q .

Etant donné un sommet $x \in Q_0$ de Q , nous désignerons par γ_x l'unique promenade de T de source x_0 et de terminus x . Rappelons que la présentation ν fixe un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux $\{\nu(e_x) \mid x \in Q_0\}$. Ces données vont nous permettre de définir une application :

$$\theta_\nu: Hom(\pi_1(Q, I), k^+) \longrightarrow HH^1(A)$$

Cette application à été introduite par I. Assem et J. A. de la Peña dans [5] (voir également [16]). Ici k^+ désigne le groupe additif du corps de base k et $Hom(\pi_1(Q, I), k^+)$ est l'ensemble des morphismes de groupes $\pi_1(Q, I) \rightarrow k^+$. Notons que $Hom(\pi_1(Q, I), k^+)$ est naturellement muni d'une structure de k -algèbre commutative (et donc de k -algèbre de Lie abélienne) induite par celle de k .

Décrivons à présent l'application θ_ν . Pour plus de détails sur cette description, nous renvoyons le lecteur à [5]. Soit $f: \pi_1(Q, I) \rightarrow k$ un morphisme de groupes. Si $x \xrightarrow{u} y$ est un chemin de Q , alors $[\gamma_y^{-1}u\gamma_x] \in \pi_1(Q, I)$ et $f([\gamma_y^{-1}u\gamma_x]) \in k$. Nous disposons donc d'une application k -linéaire :

$$\begin{aligned} kQ &\longrightarrow kQ \\ u \text{ un chemin} &\longmapsto f([\gamma_{t(u)}^{-1}u\gamma_{s(u)}]) u \end{aligned}$$

Cette application conserve l'idéal I et induit une dérivation unitaire :

$$\bar{f}: A \xrightarrow{\bar{\nu}^{-1}} kQ/I \longrightarrow kQ/I \xrightarrow{\bar{\nu}} A$$

\bar{f} est donc telle que pour tout chemin u de source x et de terminus y :

$$\bar{f}(\nu(u)) = f([\gamma_y^{-1}u\gamma_x]_I) \nu(u)$$

L'image de \bar{f} dans $HH^1(A)$ sera notée $\theta_\nu(f)$.

Remarque 5.2.1 Dans cette construction, nous obtenons bien une dérivation car $f: \pi_1(Q, I) \rightarrow k^+$ est un morphisme de groupes.

I. Assem et J. A. de la Peña ont démontré dans [5] la Proposition suivante :

Proposition 5.2.2 (voir [5]) L'application linéaire :

$$\theta_\nu: Hom(\pi_1(Q, I), k^+) \longrightarrow HH^1(A)$$

est injective.

Donnons à présent quelques propriétés du morphisme θ_ν .

Remarque 5.2.3 Soit $d: A \rightarrow A$ une dérivation unitaire et soit $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ un chemin. Alors :

$$d(\nu(u)) = d(\nu(\alpha_n) \dots \nu(\alpha_1)) = \sum_{i=1}^n \nu(\alpha_n) \dots \nu(\alpha_{i+1}) d(\nu(\alpha_i)) \nu(\alpha_{i-1}) \dots \nu(\alpha_1)$$

Donc d est uniquement déterminé par $\{d(\nu(\alpha))\}_{\alpha \in Q_1}$. En particulier $d = 0$ si et seulement si $d(\nu(\alpha)) = 0$ pour tout $\alpha \in Q_1$.

Proposition 5.2.4 θ_ν est un morphisme d'algèbres de Lie. Son image est une sous-algèbre de Lie abélienne de $HH^1(A)$.

Preuve : Nous noterons $\bar{u} = \nu(u)$ pour tout $u \in kQ$. Soient $f, g \in Hom(\pi_1(Q, I), k^+)$. Nous disposons de deux dérivations unitaires :

$$\bar{f}, \bar{g}: A \rightarrow A$$

telles que :

$$(\forall x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1) \begin{cases} \bar{f}(\bar{\alpha}) = f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\alpha} \\ \bar{g}(\bar{\alpha}) = g([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\alpha} \end{cases}$$

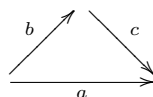
Et $\theta_\nu(f) \in HH^1(A)$ (resp. $\theta_\nu(g) \in HH^1(A)$) est l'image dans $HH^1(A)$ de la dérivation \bar{f} (resp. \bar{g}). De cette façon, $[\theta_\nu(f), \theta_\nu(g)]$ est l'image dans $HH^1(A)$ de la dérivation $[\bar{f}, \bar{g}]$. Or :

$$\begin{aligned} (\forall x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1) \bar{f} \circ \bar{g}(\bar{\alpha}) &= \bar{f}(g([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\alpha}) \\ &= g([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\alpha} \\ &= \bar{g} \circ \bar{f}(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

Ainsi $[\bar{f}, \bar{g}] = 0$ et $[\theta_\nu(f), \theta_\nu(g)] = 0$. Puisque $Hom(\pi_1(Q, I), k^+)$ est une algèbre de Lie abélienne, cela démontre que θ_ν est un morphisme d'algèbres de Lie et que son image est une sous-algèbre abélienne de $HH^1(A)$. \square

L'exemple suivant montre que θ_ν n'est pas surjectif en général.

Exemple 5.2.5 Soit Q le carquois :



Soit $A = kQ$ et soit $\nu: kQ \rightarrow A = kQ$ l'identité. Soit $d: A \rightarrow A$ la dérivation unitaire définie par :

$$d(\alpha) = \begin{cases} cb & \text{si } \alpha = a \\ 0 & \text{si } \alpha = b \text{ ou } \alpha = c \end{cases}$$

Alors l'image de d dans $HH^1(A)$ n'appartient pas à $Im(\theta_\nu)$.

5.3 Caractérisation des éléments dans l'image de l'un des θ_ν

Pour cette Section nous fixons A une k -algèbre de dimension finie, connexe, basique et triangulaire. Nous désignerons par \mathfrak{r} le radical de A . Fixons $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux et soit Q le carquois ordinaire de A , de sorte que $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. Nous noterons E la sous-algèbre semi-simple de A engendrée par les idempotents $e_i, i = 1, \dots, n$. Ainsi $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. En particulier, pour $e \in E$, nous noterons $\delta_e: A \rightarrow A, a \mapsto ea - ae$ la dérivation unitaire associée à e .

Afin d'alléger le texte, le terme «dérivation» désignera systématiquement «dérivation unitaire». D'autre part, par «présentation de A » nous entendrons toute présentation admissible $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ telle que $\nu(e_i) = e_i$. Enfin l'expression «base de A » désignera une base \mathcal{B} de l'espace vectoriel A telle que :

- $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i,j} e_j A e_i$,
- $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{B}$,
- $\mathcal{B} \setminus \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathfrak{r}$.

Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{B}$, nous noterons $s(u)$ et $t(u)$ (la source et le terminus de u) les indices tels que $u \in e_{t(u)} A e_{s(u)}$. L'intérêt de telles bases est donné par la Remarque suivante.

Remarque 5.3.1 • Soit $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble :

$$\{\nu(u) \mid u \text{ chemin non trivial de source } i \text{ et de terminus } j\}$$

engendre $e_j \mathfrak{r} e_i$. De plus $\{\nu(\alpha)\}_{i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1}$ est une famille linéairement indépendante d'éléments de cet ensemble. Il existe donc une base \mathcal{B} (non unique) de A telle que :

- $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$,
- pour tout $r \in \mathcal{B}$ il existe un chemin u tel que $\nu(u) = r$.

• Réciproquement, si \mathcal{B} est une base de A , alors pour tous i, j il existe une famille d'éléments de $\mathcal{B} \cap e_j \mathfrak{r} e_i$ dont les images dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$ constituent une base de $e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$. Ainsi une telle base \mathcal{B} définit (de façon non unique) une présentation $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ telle que $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Nous allons étudier les dérivations de A qui sont diagonalisables dans une base de A . Notons que ces dérivations ont été étudiées par D. R. Farkas, E. L. Green et E. N. Marcos dans [16]

Lemme 5.3.2 Soit $d: A \rightarrow A$ une dérivation. Supposons qu'il existe une base \mathcal{B} de A qui est une base de diagonalisation de d (i.e. $d(u) \in k.u$ pour tout $u \in \mathcal{B}$). Soit $e \in E$. Alors \mathcal{B} est également une base de diagonalisation de $d + \delta_e$.

Preuve : Ecrivons $e = \sum_{l=1}^n t_l e_l$. Soit $u \in \mathcal{B}$. Posons $i = s(u)$ et $j = t(u)$ de sorte que $u = e_j u e_i \in e_j A e_i$.

Donc :

$$\begin{aligned} \delta_e(u) &= \delta_e(e_j u e_i) \\ &= \sum_{l=0}^n t_l (e_l e_j u e_i - e_j u e_i e_l) \\ &= (t_j - t_i)u \end{aligned}$$

Donc $\delta_e(u) \in k.u$ puis $(d + \delta_e)(u) \in k.u$ pour tout $u \in \mathcal{B}$. □

Le Lemme 5.3.2 montre que la Définition suivante n'est pas ambiguë.

Définition 5.3.3 Soit $f \in HH^1(A)$. Alors f sera dit diagonalisable si l'une quelconque des dérivations $d: A \rightarrow A$ représentant f est diagonalisable dans une base de A . Une telle base de A sera alors dite une base de diagonalisation de f .

Définition 5.3.4 Soit $\{f_\lambda\}_\lambda$ une famille d'éléments de $HH^1(A)$. Alors les f_λ seront dits simultanément diagonalisables si il existe une base de A qui est une base de diagonalisation commune aux f_λ .

Notons la Propriété suivante sur les familles simultanément diagonalisables. Rappelons que le crochet de Lie de $HH^1(A)$ est induit par le crochet de Lie sur les dérivations.

Propriété 5.3.5 Supposons que Q n'a pas de flèches multiples. Soit $\{f_\lambda\}_\lambda$ une famille d'éléments diagonalisables de $HH^1(A)$. Alors les éléments f_λ sont simultanément diagonalisables si et seulement si $[f_\lambda, f_{\lambda'}] = 0$ pour tous indices λ, λ' .

Preuve : Pour chaque λ soit $d_\lambda: A \rightarrow A$ une dérivation représentant f_λ . Fixons également une présentation admissible $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$. Pour $\alpha \in Q_1$ posons $\bar{\alpha} := \nu(\alpha)$. Commençons par montrer que l'hypothèse faite sur le carquois Q implique que $Im([d, d']) \subseteq \mathfrak{r}^2$ pour d, d' des dérivations quelconques. Soit $u \in e_j \mathfrak{r} e_i$ non nul, étant donné que Q n'a pas de cycle orienté, nous avons $i \neq j$ puis $e_j \mathfrak{r} e_i = e_j A e_i$. Donc $d(u) \in e_j \mathfrak{r} e_i$. Ceci montre que :

$$d(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{r} \quad (1)$$

En conséquence, pour $u, v \in \mathfrak{r}$, nous avons $d(vu) = d(v)u + vd(u) \in \mathfrak{r}^2$. Autrement dit :

$$d(\mathfrak{r}^2) \subseteq \mathfrak{r}^2 \quad (2)$$

Par ailleurs, puisque Q n'a pas de flèches multiples, (1) et (2) entraînent :

$$(\forall \alpha \in Q_1) \quad (\exists t \in k) \quad (\exists u \in \mathfrak{r}^2) \quad d(\bar{\alpha}) = t\bar{\alpha} + u \quad (3)$$

De (1), (2) et (3) nous déduisons finalement que :

$$Im([d, d']) \subseteq \mathfrak{r}^2 \quad (4)$$

• Supposons la famille $\{f_\lambda\}_\lambda$ simultanément diagonalisable. Alors il existe \mathcal{B} une base de diagonalisation commune aux f_λ . Donc la matrice de l'application linéaire $d_\lambda: A \rightarrow A$ est diagonale pour tout λ . Donc les endomorphismes d_λ commutent deux à deux. Ceci montre que $[f_\lambda, f_{\lambda'}] = 0$ pour tous λ, λ' .

• Supposons que $[f_\lambda, f_{\lambda'}] = 0$ pour tous λ, λ' . Donc :

$$(\forall (\lambda, \lambda')) \quad (\exists e^{(\lambda, \lambda')} \in E) \quad [d_\lambda, d_{\lambda'}] = d_{e^{(\lambda, \lambda')}}$$

Ecrivons $e^{(\lambda, \lambda')} = \sum_{i=1}^n t_i^{(\lambda, \lambda')} e_i$ pour chaque (λ, λ') . Fixons $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il vient donc :

$$(\forall u \in e_j \mathfrak{r} e_i) \quad [d_\lambda, d_{\lambda'}](u) = (t_j^{(\lambda, \lambda')} - t_i^{(\lambda, \lambda')})u$$

Ainsi :

(i) $[d_\lambda, d_{\lambda'}]: e_j \mathfrak{r} e_i \rightarrow e_j \mathfrak{r} e_i$ est une homothétie pour tout (λ, λ') ,

(ii) $d_\lambda(e_i) = d_\lambda(e_j) = 0$ pour tout λ ,

(iii) $e_j A e_i = e_j \mathfrak{r} e_i \oplus k \cdot e_i \oplus k \cdot e_j$.

Le point (i) implique, avec (4), que $[d_\lambda, d_{\lambda'}](\bar{\alpha}) = 0$ pour tous λ, λ' et pour toute flèche α . Ceci entraîne que $[d_\lambda, d_{\lambda'}] = 0$ pour tous λ, λ' . Donc, il existe une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de l'espace vectoriel $e_j \mathfrak{r} e_i$ qui est une base de diagonalisation commune des endomorphismes $d_\lambda: e_j \mathfrak{r} e_i \rightarrow e_j \mathfrak{r} e_i$. Posons :

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \bigcup_{i,j} \mathcal{B}_{i,j}$$

Ainsi \mathcal{B} est une base de A et c'est une base de diagonalisation de d_λ pour chaque λ . Donc la famille $\{f_\lambda\}_\lambda$ est simultanément diagonalisable. \square

La Proposition suivante montre que chaque présentation définit une famille de d'éléments de $HH^1(A)$ simultanément diagonalisables. Notons que ce fait a déjà été observé dans [16].

Proposition 5.3.6 (voir également [16]) *Soit $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation de A . Alors $Im(\theta_\nu)$ est une famille d'éléments de $HH^1(A)$ qui sont simultanément diagonalisables.*

Preuve : D'après la Remarque 5.3.1 page ci-contre, il existe une base \mathcal{B} de A telle que :

$$\begin{cases} r \in \mathcal{B} \Rightarrow \text{il existe un chemin } u \text{ tel que } r = \nu(u) \\ \alpha \in Q_1 \Rightarrow \nu(\alpha) \in \mathcal{B} \end{cases}$$

Posons $I = Ker(\nu)$ et soit $f \in Hom(\pi_1(Q, I), k^+)$. Nous disposons donc d'une dérivation unitaire $\bar{f}: A \rightarrow A$ telle que pour tout chemin u de source x et de terminus y :

$$\bar{f}(\nu(u)) = f([\gamma_y^{-1} u \gamma_x]) \nu(u)$$

La base \mathcal{B} de A est donc une base de diagonalisation de \bar{f} puis de $\theta_\nu(f)$. Donc $Im(\theta_\nu)$ est une famille diagonalisable simultanément. \square

Intéressons nous à la réciproque de la Proposition 5.3.6 page précédente. Pour cela nous disposons du Lemme suivant. Remarquons que ce Lemme a déjà été démontré dans [16], nous en donnons ici une démonstration différente et utilisant des bases de Gröbner.

Lemme 5.3.7 (voir [16]) Soit $f \in HH^1(A)$ diagonalisable et soit \mathcal{B} une base de diagonalisation de f . Si $\nu: kQ \rightarrow A$ est une présentation telle que $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ (voir la Remarque 5.3.1 page 96), alors $f \in Im(\theta_\nu)$.

Preuve : Posons $I = Ker(\nu)$. Soit $d: A \rightarrow A$ une dérivation représentant f . Puisque \mathcal{B} est une base de diagonalisation de f contenant $\{\nu(\alpha)\}_{\alpha \in Q_1}$, nous en déduisons l'existence de scalaires $\{t_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ tels que :

$$d(\nu(\alpha)) = t_\alpha \nu(\alpha) \text{ pour toute flèche } \alpha \in Q_1$$

Puisque d est une dérivation, il vient alors pour tout chemin $u = \alpha_n \dots \alpha_1$:

$$d(\nu(\alpha_n \dots \alpha_1)) = d(\nu(\alpha_n) \dots \nu(\alpha_1)) = (t_{\alpha_1} + \dots + t_{\alpha_n}) \nu(\alpha_n \dots \alpha_1)$$

Nous noterons donc $t_u = t_{\alpha_1} + \dots + t_{\alpha_n}$ de façon que :

$$d(\nu(u)) = t_u \nu(u) \text{ pour tout chemin } u$$

Plus généralement, si $\gamma = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade de Q , nous poserons :

$$t_\gamma = \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} t_{\alpha_i}$$

Avec la convention $t_\gamma = 0$ si γ est stationnaire.

Nous allons montrer que l'application $\gamma \mapsto t_\gamma$ induit un morphisme de groupes $g: \pi_1(Q, I) \rightarrow k^+$ dont l'image par θ_ν est f .

• **Construisons le morphisme** $g: \pi_1(Q, I) \rightarrow k^+$. Remarquons que par construction de $\gamma \mapsto t_\gamma$ nous avons :

- (i) $t_{e_x} = 0$ pour tout $x \in Q_0$ et $t_{\gamma'\gamma} = t_{\gamma'} + t_\gamma$ pour toutes promenades γ, γ' telles que $s(\gamma') = t(\gamma)$,
- (ii) $t_{\alpha\alpha^{-1}} = t_{\alpha^{-1}\alpha} = 0$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$,
- (iii) $t_{wv} = t_{wv'u}$ dès que u, v, v', w sont des promenades telles que $t_v = t_{v'}$ et telles que wv et $wv'u$ sont définies.

Posons $d': kQ \rightarrow kQ$ l'application linéaire définie par :

$$d'(u) = t_u u \text{ pour tout chemin } u$$

Ainsi, pour tout chemin u , nous avons $d(\nu(u)) = t_u \nu(u) = \nu(t_u u) = \nu(d'(u))$ par définition de t_u . Il vient donc :

$$(\forall r \in kQ) \quad d(\nu(r)) = \nu(d'(r))$$

Et en particulier :

$$r \in I \Rightarrow \nu(d'(r)) = d(\nu(r)) = d(0) = 0 \Rightarrow d'(r) \in I$$

Ainsi l'application linéaire $d': kQ \rightarrow kQ$ vérifie les conditions suivantes :

- kQ est un k -espace vectoriel de base la famille des chemins et I est un sous-espace de kQ ,
- $d'(u) = t_u u$ pour tout chemin u ,
- $d'(I) \subseteq I$.

La Proposition 4.1.22 page 58 s'applique donc à d' (rappelons la démonstration de cette Proposition a utilisé les bases de Gröbner). Nous avons donc :

$$u \equiv_I u' \Rightarrow t_u = t_{u'}$$

Rappelons que \equiv_I est la relation d'équivalence la plus fine sur l'ensemble des chemins telle que deux chemins dans le support d'une relation minimale de I soient \equiv_I -équivalents. Donc :

(iv) si r est une relation minimale, alors $t_u = t_v$ dès que $u, v \in \text{supp}(r)$.

Les points (ii), (iii) et (iv) impliquent l'existence d'une application bien définie :

$$\pi_1(Q, I) \rightarrow k^+, [\gamma] \mapsto t_\gamma$$

Le point (i) montre que cette application est un morphisme de groupes que nous noterons g :

$$g: \begin{array}{ccc} \pi_1(Q, I) & \longrightarrow & k^+ \\ [\gamma] & \longmapsto & t_\gamma \end{array}$$

• **Montrons que $\theta_\nu(g) = f$.** Par construction de g nous avons :

$$g([\gamma_y^{-1}u\gamma_x]) = t_{\gamma_y^{-1}u\gamma_x} = t_u - t_{\gamma_y} + t_{\gamma_x} \text{ pour tout chemin } u \text{ de source } x \text{ et de terminus } y$$

Donc $\theta_\nu(g) \in HH^1(A)$ a pour représentant la dérivation $\bar{g}: A \rightarrow A$ telle que :

$$\bar{g}(\nu(u)) = (t_u - t_{\gamma_y} + t_{\gamma_x}) \nu(u) \text{ pour tout chemin } u \text{ de source } x \text{ et de terminus } y$$

Posons $e = \sum_{x \in Q_0} t_{\gamma_x} e_x \in E$. Ainsi :

$$\delta_e(\nu(u)) = (t_{\gamma_y} - t_{\gamma_x}) \nu(u) \text{ pour tout chemin } u \text{ de source } x \text{ et de terminus } y$$

Nous avons donc :

$$(\bar{g} + \delta_e)(\nu(u)) = t_u \nu(u) = d(\nu(u)) \text{ pour tout chemin } u$$

Donc $\bar{g} - d$ est une dérivation intérieure, ce qui montre bien que \bar{g} représente f . Ainsi $f = \theta_\nu(g) \in \text{Im}(\theta_\nu) \square$

Proposition 5.3.8 Soit $\{f_\lambda\}_\lambda$ une famille d'éléments de $HH^1(A)$ simultanément diagonalisables. Alors il existe une présentation $\nu: kQ \rightarrow A$ telle que $f_\lambda \in \text{Im}(\theta_\nu)$ pour tout λ .

Preuve : Soit \mathcal{B} une base de diagonalisation simultanée de $\{f_\lambda\}_\lambda$. D'après la Remarque 5.3.1 page 96, il existe une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow A$ telle que $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$. Le Lemme 5.3.7 page précédente, appliqué à chaque f_λ , montre que $f_\lambda \in \text{Im}(\theta_\nu)$ pour tout λ . \square

Le Lemme 5.3.7 page ci-contre fournit également une condition suffisante pour que $\theta_\nu: \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)$ soit un isomorphisme.

Proposition 5.3.9 Supposons que Q n'a pas de raccourci. Soit $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation de A . Alors $\theta_\nu: \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+) \hookrightarrow HH^1(A)$ est un isomorphisme. En particulier $HH^1(A)$ est abélienne.

Preuve : D'après la Proposition 5.2.2 page 95, il nous suffit de démontrer que θ_ν est surjectif. Soit $f \in HH^1(A)$ et soit $d: A \rightarrow A$ une dérivation représentant f . D'après la Remarque 5.3.1 page 96, la présentation ν de A fournit une base \mathcal{B} de A telle que :

- pour tout $r \in \mathcal{B}$ il existe un chemin u vérifiant $r = \nu(u)$,
- $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Soit $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$. Puisque Q n'a pas de raccourci, nous avons $e_y kQ e_x = k \cdot \alpha$ puis $e_y A e_x = k \cdot \nu(\alpha)$. Ayant $d(\alpha) \in e_y A e_x$, il existe un scalaire t_α tel que $d(\nu(\alpha)) = t_\alpha \nu(\alpha)$. Soit $r \in \mathcal{B}$. Donc il existe un chemin $u = \alpha_n \dots \alpha_1$ tel que $r = \nu(u)$. Dans ces conditions :

$$d(r) = d(\nu(u)) = d(\nu(\alpha_n) \dots \nu(\alpha_1)) = (t_{\alpha_1} + \dots + t_{\alpha_n}) \nu(\alpha_n \dots \alpha_1) \in k \cdot \nu(r)$$

Donc \mathcal{B} est une base de diagonalisation de d . Ainsi f est diagonalisable et \mathcal{B} est une base de diagonalisation de f telle que $\nu(\alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute flèche α . Le Lemme 5.3.7 page précédente entraîne donc que $f \in \text{Im}(\theta_\nu)$ et ceci pour tout $f \in HH^1(A)$. Donc θ_ν est bien un isomorphisme et $HH^1(A)$ est abélienne car $\text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)$ l'est. \square

Nous allons à présent comparer les images de θ_ν et θ_μ lorsque ν et μ sont deux présentations de A .

Proposition 5.3.10 Soit $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation, soit $D: kQ \rightarrow kQ$ une dilatation. Soit μ la présentation $\mu = \nu \circ D: kQ \rightarrow A$. Posons $I = \text{Ker}(\mu)$ et $J = \text{Ker}(\nu)$ de sorte que $J = D(I)$. Rappelons que $\pi_1(Q, I) = \pi_1(Q, J)$ (voir la Proposition 4.2.25 page 72). Nous avons l'égalité :

$$\theta_\nu = \theta_\mu$$

Preuve : Soit $f: \pi_1(Q, I) \rightarrow k^+$ un morphisme de groupes, f définit donc deux dérivations $d_1, d_2: A \rightarrow A$ telles que pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$:

$$\begin{aligned} d_1(\nu(\alpha)) &= f([\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]) \nu(\alpha) \\ d_2(\mu(\alpha)) &= f([\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]) \mu(\alpha) \end{aligned}$$

En outre $\theta_\nu(f)$ (resp. $\theta_\mu(f)$) est représenté par d_1 (resp. d_2). Soit $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$. Puisque D est une dilatation, il existe $t \in k^*$ tel que $D(\alpha) = t \alpha$, ainsi :

$$\begin{aligned} d_1(\mu(\alpha)) &= d_1(\nu(D(\alpha))) \\ &= t d_1(\nu(\alpha)) \\ &= t f([\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]) \nu(\alpha) \\ &= f([\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]) \mu(\alpha) = d_2(\mu(\alpha)) \end{aligned}$$

Ainsi $d_1, d_2: A \rightarrow A$ sont deux dérivations coïncidant sur $\mu(Q_1)$. Donc $d_1 = d_2$ et $\theta_\nu(f) = \theta_\mu(f)$ pour tout $f \in \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)$. \square

Proposition 5.3.11 Soit $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation, soit $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ une transvection. Soit μ la présentation $\mu = \nu \circ \varphi: kQ \rightarrow A$. Posons $I = \text{Ker}(\mu)$ et $J = \text{Ker}(\nu)$ de sorte que $J = \varphi(I)$. Supposons que $\alpha \sim_J u$. D'après la Proposition 4.2.33 page 76 et la Remarque 4.2.55 page 86, l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $p: \pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\pi_1(Q, J), k^+) & & \\ \downarrow p^* & \searrow \theta_\nu & \\ & & HH^1(A) \\ & \nearrow \theta_\mu & \\ \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+) & & \end{array}$$

Où p^* est l'injection induite par p . En particulier $\text{Im}(\theta_\nu) \subseteq \text{Im}(\theta_\mu)$

Preuve : Soit $f: \pi_1(Q, J) \rightarrow k^+$ un morphisme de groupes. Ainsi $p^*(f)$ est la composition $\pi_1(Q, I) \xrightarrow{p} \pi_1(Q, J) \xrightarrow{f} k$. Donc nous disposons de dérivations $d_1: A \rightarrow A$ et $d_2: A \rightarrow A$ représentant $\theta_\nu(f)$ et $\theta_\mu(p^*(f))$ respectivement et telles que pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y$:

$$\begin{aligned} d_1(\nu(a)) &= f([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_J) \nu(a) \\ d_2(\mu(a)) &= p^*(f)([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_I) \mu(a) \end{aligned}$$

Afin de montrer que $\theta_\nu(f) = \theta_\mu(p^*(f))$ nous allons montrer que $d_1(\mu(a)) = d_2(\mu(a))$ pour toute flèche a . Soit $x \xrightarrow{\alpha} y$ une flèche. Par définition de p nous avons $p([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_I) = [\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_J$. Donc :

$$f([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_J) = f(p([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_I)) = p^*(f)([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_I)$$

1^{er} cas : $a \neq \alpha$. Alors $\nu(a) = \mu(a)$ et :

$$d_1(\mu(a)) = d_1(\nu(a)) = f([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_J) \nu(a) = p^*(f)([\gamma_y^{-1} a \gamma_x]_I) \mu(a) = d_2(\mu(a))$$

2nd cas : $a = \alpha$. Alors :

- $\mu(a) = \mu(\alpha) = \nu(\alpha) + \tau \nu(u)$,
- $\alpha \sim_J u$ donc $[\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]_J = [\gamma_y^{-1} u \gamma_x]_J$.

Donc :

$$\begin{aligned}
d_1(\mu(a)) &= d_1(\nu(\alpha)) + \tau d_1(\nu(u)) \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]_J) \nu(\alpha) + \tau f([\gamma_y^{-1}u\gamma_x]_J) \nu(u) \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]_J) (\nu(\alpha) + \tau \nu(u)) \\
&= p^*(f)([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]_I) \mu(\alpha) \\
&= d_2(\mu(\alpha)) = d_2(\mu(a))
\end{aligned}$$

Ainsi d_1 et d_2 sont deux dérivations coïncidant sur l'ensemble $\mu(Q_1)$, donc elles sont égales. Donc :

$$(\forall f \in \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)) \quad \theta_\nu(f) = \theta_\mu \circ p^*(f)$$

La Proposition est ainsi démontrée. \square

Rappelons que si $g: A \rightarrow A$ est un automorphisme de k -algèbres tel que $g(e_i) = e_i$ pour tout i , alors g définit un automorphisme de l'espace des dérivations de A :

$$d \longmapsto g \circ d \circ g^{-1}$$

Cet automorphisme conserve l'espace des dérivations intérieures et définit donc un automorphisme g_* de l'algèbre de Lie $HH^1(A)$:

$$\begin{array}{ccc}
g_*: & HH^1(A) & \longrightarrow & HH^1(A) \\
& \text{classe de } d & \longmapsto & \text{classe de } g \circ d \circ g^{-1}
\end{array}$$

Proposition 5.3.12 Soit $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation et posons $I = \text{Ker}(\nu)$. Soit $\psi: kQ \rightarrow kQ \in \text{Aut}_0(kQ)$ tel que $\psi(I) = I$ et posons μ la présentation $\mu = \nu \circ \psi: kQ \rightarrow A$ de sorte que $\text{Ker}(\mu) = I$. Posons $\bar{\psi}: A \xrightarrow{\sim} A$ l'automorphisme de la k -algèbre A tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\
\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
A & \xrightarrow{\bar{\psi}} & A
\end{array}$$

Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
& & HH^1(A) \\
& \nearrow \theta_\nu & \downarrow \sim \bar{\psi}_* \\
\text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+) & & HH^1(A) \\
& \searrow \theta_\mu &
\end{array}$$

En particulier, $\text{Im}(\theta_\mu)$ est l'image de $\text{Im}(\theta_\nu)$ par l'automorphisme $\bar{\psi}_*: HH^1(A) \xrightarrow{\sim} HH^1(A)$ défini par $\bar{\psi}: A \xrightarrow{\sim} A$.

Preuve : Soit $f \in \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)$ et montrons que $\theta_\mu(f) = \bar{\psi}_*(\theta_\nu(f))$. Soient $d_1, d_2: A \rightarrow A$ les dérivations telles que pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y$:

$$\begin{aligned}
d_1(\nu(\alpha)) &= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \nu(\alpha) \\
d_2(\mu(\alpha)) &= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \mu(\alpha)
\end{aligned}$$

Ainsi d_1 (resp. d_2) représente $\theta_\nu(f)$ (resp. $\theta_\mu(f)$) et pour montrer que $\bar{\psi}_*(\theta_\nu(f)) = \theta_\mu(f)$ il suffit de montrer que $\bar{\psi} \circ d_1 \circ \bar{\psi}^{-1} = d_2$. Soit $x \xrightarrow{\alpha} y$ une flèche de Q . Alors :

$$\begin{aligned}
d_2 \circ \bar{\psi}(\nu(\alpha)) &= d_2 \circ \bar{\psi} \circ \mu \circ \psi^{-1}(\alpha) \quad \text{car } \nu = \mu \circ \psi^{-1} \\
&= d_2 \circ \mu \circ \psi(\psi^{-1}(\alpha)) \quad \text{car } \bar{\psi} \circ \mu = \mu \circ \psi \\
&= d_2(\mu(\alpha)) \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \mu(\alpha)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \circ d_1(\nu(\alpha)) &= \bar{\psi}(f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \nu(\alpha)) \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\psi}(\nu(\alpha)) \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \bar{\psi} \circ \mu \circ \psi^{-1}(\alpha) \quad \text{car } \mu = \nu \circ \psi \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \mu \circ \psi \circ \psi^{-1}(\alpha) \quad \text{car } \bar{\psi} \circ \mu = \mu \circ \psi \\
&= f([\gamma_y^{-1}\alpha\gamma_x]) \mu(\alpha)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\bar{\psi} \circ d_1(\nu(\alpha)) = d_2 \circ \bar{\psi}(\nu(\alpha))$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$. Donc $\bar{\psi}_*(\theta_\nu(f)) = \theta_\mu(f)$ pour tout $f \in \text{Hom}(\pi_1(Q, I), k^+)$. La Proposition est ainsi démontrée. \square

Avant d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce Chapitre, nous démontrons un Lemme qui sera utile pour prouver ce résultat.

Lemme 5.3.13 *Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- le corps k est de caractéristique nulle et Q n'a pas de double raccourci,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Rappelons que sous ces conditions (voir le Théorème 4.2.62 page 88 et le Corollaire 4.2.67 page 92), Γ a une seule source.

Soit $\nu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible de noyau I_0 tel que \sim_{I_0} est la source de Γ et soit $\mu: kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible quelconque de noyau I . Alors il existe :

- $\nu': kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible de noyau I_0 ,
- $\psi: A \xrightarrow{\sim} A$ un automorphisme de k -algèbre,

tels que :

$$\text{Im}(\theta_\mu) \subseteq \text{Im}(\theta_{\nu'}) = \psi_*(\text{Im}(\theta_\nu))$$

Si de plus \sim_I est également la source de Γ , alors $\text{Im}(\theta_\mu) = \text{Im}(\theta_{\nu'}) = \psi_*(\text{Im}(\theta_\nu))$.

Preuve : D'après la Proposition 2.3.18 page 32, il existe $\varphi \in \text{Aut}_0(kQ)$ tel que $\varphi(I_0) = I$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ kQ/I_0 & \xrightarrow{\bar{\mu}^{-1}\bar{\nu}} & kQ/I \end{array}$$

(les flèches verticales désignant les applications surjectives naturelles). En particulier, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \\ \searrow \nu & & \swarrow \mu \\ & A & \end{array}$$

D'après la Proposition 4.2.63 page 89 (dans le cas où $\text{car}(k) = 0$ et Q n'a pas de double raccourci) et la Proposition 4.2.66 page 92 (dans le cas où A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples) il existe :

- une dilatation D ,
- des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour chaque i),

vérifiant :

- $I = D\varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$.

Posons $\psi = \varphi^{-1}D\varphi_n \dots \varphi_1 \in \text{Aut}_0(kQ)$. Ainsi $\psi(I_0) = I_0$ et nous avons une présentation admissible :

$$\nu' = \nu \circ \psi: kQ \twoheadrightarrow A \text{ de noyau } I_0$$

Posons alors $\bar{\psi}: A \xrightarrow{\sim} A$ l'automorphisme de k -algèbre tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \nu' \downarrow & & \downarrow \nu' \\ A & \xrightarrow{\bar{\psi}} & A \end{array}$$

D'après la Proposition 5.3.12 page précédente, nous savons donc que :

$$\text{Im}(\theta_{\nu'}) = \bar{\psi}_*(\text{Im}(\theta_\nu))$$

Montrons à présent que $Im(\theta_\mu) \subseteq Im(\theta_{\nu'})$. Nous avons $\mu = \nu\varphi^{-1} = \nu'\varphi_1^{-1} \dots \varphi_n^{-1}D^{-1}$. Pour alléger les notations, posons :

$$\mu_0 = \nu', \quad \mu_1 = \nu'\varphi_1^{-1}, \quad \dots, \quad \mu_i = \nu'\varphi_1^{-1} \dots \varphi_i^{-1}, \quad \dots, \quad \nu_n = \nu'\varphi_1^{-1} \dots \varphi_n^{-1}$$

De cette façon, nous avons :

$$Ker(\mu_i) = Ker(\nu'\varphi_1^{-1} \dots \varphi_i^{-1}) = \varphi_i \dots \varphi_1(Ker(\nu')) = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0) = I_i$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors :

- $\mu_{i-1}: kQ \rightarrow A$ et $\mu_i: kQ \rightarrow A$ sont deux présentations admissibles de A ,
- $\mu_i = \mu_{i-1} \circ \varphi_i^{-1}$ avec $\varphi_i^{-1} = \varphi_{\alpha_i, u_i, -\tau_i}$,
- $Ker(\mu_i) = I_i$, $Ker(\mu_{i-1}) = I_{i-1}$ et $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$.

La Proposition 5.3.11 page 100 implique donc que :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad Im(\theta_{\mu_i}) \subseteq Im(\theta_{\mu_{i-1}}) \quad (1)$$

Nous en déduisons que :

$$Im(\theta_{\mu_n}) \subseteq Im(\theta_{\mu_0}) = Im(\theta_{\nu'}) \quad (2)$$

Nous savons de plus que $\mu = \nu'\varphi_1^{-1} \dots \varphi_n^{-1}D^{-1} = \mu_n D^{-1}$ avec D^{-1} une dilatation. D'après la Proposition 5.3.10 page 100, cela entraîne que :

$$Im(\theta_\mu) = Im(\theta_{\mu_n}) \subseteq Im(\theta_{\nu'}) = \bar{\psi}_*(Im(\theta_\nu)) \quad (3)$$

Si de plus \sim_I est la source de Γ , alors la Proposition 4.2.63 page 89 et la Proposition 4.2.66 page 92 impliquent que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons :

$$\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i \quad \text{et} \quad \sim_{I_i} = \sim_{I_{i-1}} \quad (4)$$

(plus précisément : si Q n'a pas de double raccourci et si $car(k) = 0$ alors la Proposition 4.2.63 page 89 implique que (4) est satisfait et si A est monomiale et si Q n'a pas de flèches multiples, la Proposition 4.2.66 page 92 implique que $n = 0$ et donc (4) est également satisfait).

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons donc :

- $\mu_{i-1} = \mu_i \circ \varphi_i$ avec $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$,
- $Ker(\mu_i) = I_i$, $Ker(\mu_{i-1}) = I_{i-1}$ et $\alpha_i \sim_{I_{i-1}} u_i$,

ce qui, d'après la Proposition 5.3.11 page 100, implique que $Im(\theta_{\mu_{i-1}}) \subseteq Im(\theta_{\mu_i})$. Donc toutes les inclusions dans (1) sont des égalités. Donc les inclusions dans (2) et (3) sont aussi des égalités. Donc $Im(\theta_\mu) = Im(\theta_{\nu'}) = \bar{\psi}_*(Im(\theta_\nu))$. Le Lemme est ainsi démontré. \square

Les trois Propositions qui précèdent nous permettent d'énoncer une caractérisation des éléments de $HH^1(A)$ qui appartiennent à l'image de l'un des morphismes θ_ν .

Théorème 5.3.14 *Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- le corps k est de caractéristique nulle et Q n'a pas de double raccourci,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Rappelons que sous ces conditions (voir le Théorème 4.2.62 page 88 et le Corollaire 4.2.67 page 92), Γ a une seule source. Alors nous avons les faits suivants :

- (i) *les sous-algèbres de Lie de $HH^1(A)$ constituées d'éléments simultanément diagonalisables et maximales pour cette propriété sont exactement les sous-algèbres de la forme $Im(\theta_\nu)$ où $\nu: kQ \rightarrow A$ est une présentation admissible telle que $\sim_{Ker(\nu)}$ est la source de Γ .*
- (ii) *si \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont deux telles sous-algèbres alors il existe $\psi: A \xrightarrow{\sim} A$ un automorphisme de k -algèbre tel que $\mathcal{G}' = \psi_*(\mathcal{G})$.*

Preuve : Pour alléger la preuve, les sous-algèbres de $HH^1(A)$ constituées d'éléments simultanément diagonalisables et maximales pour cette propriété seront appelées «sous-algèbres maximales».

(i) Soit \mathcal{G} une sous-algèbre maximale de $HH^1(A)$. D'après la Proposition 5.3.8 page 99, il existe une présentation admissible $\mu: kQ \rightarrow A$ telle que $\mathcal{G} \subseteq Im(\theta_\mu)$. De plus, d'après le Lemme 5.3.13 page précédente, il existe une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow A$ vérifiant :

- $\sim_{\text{Ker}(\nu)}$ est la source de Γ ,
- $\text{Im}(\theta_\mu) \subseteq \text{Im}(\theta_\nu)$.

Donc $\mathcal{G} \subseteq \text{Im}(\theta_\nu)$ et d'après la Proposition 5.3.6 page 97, $\text{Im}(\theta_\nu)$ est constituée d'éléments simultanément diagonalisables. Par maximalité de \mathcal{G} nous avons donc $\mathcal{G} = \text{Im}(\theta_\nu)$ avec $\sim_{\text{Ker}(\nu)}$ est la source de Γ . Donc toute sous-algèbre maximale de $HH^1(A)$ est de la forme $\text{Im}(\theta_\nu)$ où ν est une présentation admissible de A telle que $\sim_{\text{Ker}(\nu)}$ est la source de Γ .

Supposons à présent que $\mu: kQ \rightarrow A$ est une présentation admissible telle que $\sim_{\text{Ker}(\mu)}$ est la source de Γ et montrons que $\text{Im}(\theta_\mu)$ est une sous-algèbre maximale de $HH^1(A)$. Notons que $\text{Im}(\theta_\mu)$ est contenue dans une sous-algèbre maximale \mathcal{G} . D'après la description (que nous venons de faire) de ces sous-algèbres maximales nous en déduisons qu'il existe $\nu: kQ \rightarrow A$ une présentation admissible de A telle que :

- $\sim_{\text{Ker}(\nu)}$ est la source de Γ ,
- $\text{Im}(\theta_\nu) = \mathcal{G}$ est une sous-algèbre maximale
- $\text{Im}(\theta_\mu) \subseteq \text{Im}(\theta_\nu)$.

D'après le Lemme 5.3.13 page 102 nous savons qu'il existe un automorphisme $\psi: A \xrightarrow{\sim} A$ de k -algèbre tel que $\text{Im}(\theta_\mu) = \psi_*(\text{Im}(\theta_\nu))$. Étant donné que ψ est un automorphisme de la k -algèbre A , l'automorphisme ψ_* transforme toute sous-algèbre maximale en une sous-algèbre maximale. Donc $\text{Im}(\theta_\mu)$ est une sous-algèbre maximale.

(ii) Soient ν, μ deux présentations admissibles de A telles que $\sim_{\text{Ker}(\nu)} = \sim_{\text{Ker}(\mu)}$ est la source de Γ . Ainsi $\text{Im}(\theta_\nu)$ et $\text{Im}(\theta_\mu)$ sont deux sous-algèbres maximales de $HH^1(A)$. D'après le Lemme 5.3.13 page 102, il existe un automorphisme de k -algèbre $\psi: A \xrightarrow{\sim} A$ tel que $\text{Im}(\theta_\mu) = \psi_*(\text{Im}(\theta_\nu))$. \square

Chapitre 6

Revêtements de catégories et d'algèbres, revêtement universel

Ce Chapitre est consacré à l'étude des revêtements de k -catégorie. La problématique est la suivante : étant donnée une k -algèbre de dimension finie et basique A , est-ce qu'il existe un revêtement galoisien connexe de A vérifiant une propriété universelle par rapport aux revêtements galoisiens connexes de A et ce, de façon analogue à la propriété universelle satisfaite par le revêtement universel d'un espace topologique connexe par arcs par rapport à ses revêtements galoisiens ? Nous commencerons (dans la Section 6.1) par rappeler les définitions de base et les propriétés des revêtements de k -catégorie. Ensuite (dans la Section 6.2) nous ferons des rappels sur les revêtements de carquois lié. Ces derniers nous seront utiles pour deux raisons : d'une part un revêtement de carquois lié définit, par passage aux k -catégories un revêtement, d'autre part nous disposons (grâce au travail effectué par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29]) d'un revêtement universel de carquois lié. Nous démontrerons également des résultats de présentabilité des revêtements de k -catégorie répondant au problème suivant : étant donné un revêtement de k -catégorie, est-il possible de lui associer un revêtement de carquois lié dont le revêtement de k -catégorie associé est le revêtement de départ ? (notons que cette question a déjà été traitée dans [29] dans le cas d'un revêtement galoisien d'une k -catégorie sans flèches multiples). Dans la Section 6.3 nous nous intéresserons à l'existence proprement dite du revêtement universel d'une k -algèbre de dimension finie.

6.1 Revêtements de k -catégories et propriétés basiques

Dans cette Section nous rappelons la définition de foncteur couvrant ainsi que quelques unes de ses propriétés (voir [9]). Nous verrons ensuite quelques propriétés locales et globales de k -catégories qui sont conservées par un foncteur couvrant. L'un des outils de travail principaux dans l'étude des revêtements est la notion de morphisme de revêtements, nous pourrions constater que l'analogie avec la situation topologique est forte. Enfin nous achèverons cette Section par un rappel de la définition d'un revêtement galoisien (voir [14] par exemple) ainsi que par l'énoncé de quelques propriétés des revêtements galoisiens qui nous seront utiles dans la suite.

6.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1.1 (voir [9]) Un **foncteur couvrant** est un foncteur k -linéaire $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ entre k -catégories vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $F^{-1}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathcal{B}_0$,

(ii) pour tous $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et pour tous $\widehat{x}_0, \widehat{y}_0 \in \mathcal{E}_0$ tels que $F(\widehat{x}_0) = x_0$ et $F(\widehat{y}_0) = y_0$, les applications suivantes induites par F sont des bijections :

$$\bigoplus_{\widehat{y} \in F^{-1}(y_0)} \widehat{y} \mathcal{E}_{\widehat{x}_0} \xrightarrow{F} {}_{y_0} \mathcal{B}_{x_0}$$
$$\bigoplus_{\widehat{x} \in F^{-1}(x_0)} \widehat{y}_0 \mathcal{E}_{\widehat{x}} \xrightarrow{F} {}_{y_0} \mathcal{B}_{x_0}$$

Etant donné $x \in \mathcal{B}_0$, l'ensemble $F^{-1}(x) = \{\widehat{x} \in \mathcal{E}_0 \mid F(\widehat{x}) = x\}$ est appelé la **fibres de F en x** .

En référence à la situation analogue en topologie, un foncteur couvrant $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ sera également dit **revêtement de \mathcal{B}** .

Lemme 6.1.2 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de k -catégories tel que :

- \mathcal{B} est connexe,
- la condition (ii) de la Définition 6.1.1 page précédente est satisfaite.

Alors F est couvrant.

Preuve : Posons $E = \{x \in \mathcal{B}_0 \mid F^{-1}(x) \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{B}$. Remarquons que si $x \in \mathcal{E}_0$ alors $F(x) \in E$. Donc E est non vide.

Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et supposons que :

- ${}_{y_0}\mathcal{B}_{x_0} \neq 0$,
- $F^{-1}(x_0) \neq \emptyset$.

Nous disposons d'un isomorphisme fourni par (ii) dans la Définition 6.1.1 page précédente :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in F^{-1}(y_0)} \hat{y} \widehat{\mathcal{E}}_{x_0} \xrightarrow{F} {}_{y_0}\mathcal{B}_{x_0}$$

Puisque ${}_{y_0}\mathcal{B}_{x_0} \neq 0$, l'ensemble $F^{-1}(y_0)$ est non vide. Ainsi :

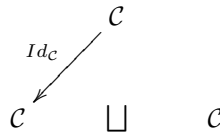
$$x_0 \in E \text{ et } {}_{y_0}\mathcal{B}_{x_0} \neq 0 \implies y_0 \in E \tag{a}$$

En échangeant les rôles de x_0 et y_0 et en utilisant le second isomorphisme fourni par (ii) dans la Définition 6.1.1 page précédente, le raisonnement que nous venons de faire donne également :

$$y_0 \in E \text{ et } {}_{y_0}\mathcal{B}_{x_0} \neq 0 \implies x_0 \in E \tag{b}$$

Avec la Propriété 1.2.17 page 14, les points (a) et (b) impliquent que $E = \mathcal{B}_0$. Donc $F^{-1}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathcal{B}_0$. Donc F est couvrant. □

Exemple 6.1.3 Soit \mathcal{C} une k -catégorie. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C} \sqcup \mathcal{C}$. Alors le morphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ décrit par :



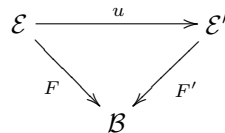
vérifie la condition (ii) de la Définition 6.1.1 page précédente et n'est pas un foncteur couvrant.

Remarque 6.1.4 $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant si et seulement si $F^{op}: \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ l'est.

Remarque 6.1.5 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant, alors p est un isomorphisme si et seulement si $p: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est injectif.

Etant donnée une k -catégorie \mathcal{B} , nous disposons de la **catégorie des revêtements de \mathcal{B}** :

- les objets sont les foncteurs couvrants $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$,
- étant donnés deux foncteurs couvrants $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ et $F': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$, un morphisme $u: F \rightarrow F'$ est la donnée d'un morphisme $u: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ de k -catégories tel que le diagramme suivant commute :



- la composition des morphismes $v: F'' \rightarrow F'$ et $u: F' \rightarrow F$ de revêtements de \mathcal{B} est la composée $v \circ u$ des morphismes associés de k -catégories.

En particulier, le morphisme identité Id_F d'un foncteur couvrant $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est donné par $Id_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Nous noterons $Aut(F)$ le groupe des automorphismes du foncteur couvrant $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$. Une vérification immédiate donne alors :

$$Aut(F) = \{u: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \mid F \circ u = F \text{ et } u \text{ est un isomorphisme}\}$$

6.1.2 Propriétés locales et globales liées aux foncteurs couvrants

Dans cette sous-Section nous allons donner quelques propriétés locales et globales des k -catégories qui sont liées aux foncteurs couvrants.

Remarque 6.1.6 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant, soit $u \in {}_y\mathcal{B}_x$ et soient $\hat{y}_0 \in F^{-1}(y), \hat{x}_0 \in F^{-1}(x)$. D'après la Définition 6.1.1 page 105 nous savons qu'il existe une unique combinaison linéaire $\sum_{\hat{y} \in F^{-1}(y)} \hat{y}u \in \bigoplus_{\hat{y} \in F^{-1}(y)} \hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0}$ telle que $\sum_{\hat{y} \in F^{-1}(y)} F(\hat{y}u) = u$. La combinaison linéaire $\sum_{\hat{y} \in F^{-1}(y)} \hat{y}u$ sera appelée **le relèvement de u (par rapport à F) de source \hat{x}_0** .

De la même manière, il existe une unique combinaison linéaire $\sum_{\hat{x} \in F^{-1}(x)} u_{\hat{x}} \in \bigoplus_{\hat{x} \in F^{-1}(x)} \hat{y}_0\mathcal{E}_{\hat{x}}$ telle que $\sum_{\hat{x} \in F^{-1}(x)} F(u_{\hat{x}}) = u$. La combinaison linéaire $\sum_{\hat{x} \in F^{-1}(x)} u_{\hat{x}}$ sera appelée **le relèvement de u (par rapport à F) de terminus \hat{y}_0** .

Propriété 6.1.7 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. Si \mathcal{E} est connexe, alors \mathcal{B} est connexe.

Preuve : Soient $x, y \in \mathcal{B}$. Fixons $x' \in F^{-1}(x)$ et $y' \in F^{-1}(y)$. Puisque \mathcal{E} est connexe, il existe :

- une suite $x_0 = x', x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y'$ d'objets de \mathcal{E} ,
- un morphisme non nul $u_i \in {}_{x_i}\mathcal{E}_{x_{i-1}} \cup {}_{x_{i-1}}\mathcal{E}_{x_i}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ainsi $x = F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_n) = y$ est une suite d'objets de \mathcal{B} et puisque F est un foncteur couvrant, $F(u_i) \in {}_{F(x_i)}\mathcal{B}_{F(x_{i-1})} \cup {}_{F(x_{i-1})}\mathcal{B}_{F(x_i)}$ est un morphisme non nul pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc \mathcal{B} est connexe. \square

La Propriété 6.1.7 justifie la définition suivante.

Définition 6.1.8 Un foncteur couvrant $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est dit **connexe** lorsque \mathcal{E} est connexe.

Lorsque $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant, certaines propriétés de \mathcal{B} sont également satisfaites par \mathcal{E} . Par exemple, la Propriété suivante, due à K. Bongartz et P. Gabriel dans [9], montre qu'il nous est permis de considérer les présentations admissibles de \mathcal{E} lorsque \mathcal{B} admet une présentation admissible.

Propriété 6.1.9 (voir [9]) Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. Supposons que deux objets distincts de \mathcal{E} ne sont pas isomorphes. Alors \mathcal{B} est localement bornée si et seulement si \mathcal{E} l'est.

Notons que certaines propriétés liées au carquois ordinaire d'une catégorie localement bornée sont conservées. Ainsi nous disposons du résultat suivant bien connu. Dans la suite, nous l'utiliserons librement sans référence.

Propriété 6.1.10 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant avec \mathcal{B} et \mathcal{E} localement bornées. Alors :

- si \mathcal{B} est triangulaire, alors \mathcal{E} est triangulaire,
- si \mathcal{B} est schurienne (i.e. $\dim_k {}_y\mathcal{B}_x \leq 1$ pour tous $x, y \in \mathcal{B}_0$), alors \mathcal{E} est schurienne.

D'autres propriétés liées au carquois ordinaire sont conservées par un foncteur couvrant. Pour les établir, nous utilisons la Propriété suivante démontrée par K. Bongartz et P. Gabriel dans [9].

Propriété 6.1.11 (voir [9]) Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant avec \mathcal{B} et \mathcal{E} localement bornées. Si $x, y \in \mathcal{E}_0$ alors :

$$\begin{aligned} p({}_y\mathcal{R}\mathcal{E}_x) &\subseteq {}_{p(y)}\mathcal{R}\mathcal{B}_{p(x)} \\ p({}_y\mathcal{R}^2\mathcal{E}_x) &\subseteq {}_{p(y)}\mathcal{R}^2\mathcal{B}_{p(x)} \end{aligned}$$

De plus, pour $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\widehat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\widehat{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$, les applications suivantes induites par p sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\widehat{y} \in p^{-1}(y_0)} \widehat{y} \mathcal{R}\mathcal{E}_{\widehat{x}_0} &\xrightarrow{p} {}_{y_0} \mathcal{R}\mathcal{B}_{x_0} \\ \bigoplus_{\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)} \widehat{y}_0 \mathcal{R}\mathcal{E}_{\widehat{x}} &\xrightarrow{p} {}_{y_0} \mathcal{R}\mathcal{B}_{x_0} \\ \bigoplus_{\widehat{y} \in p^{-1}(y_0)} \widehat{y} (\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_{\widehat{x}_0} &\xrightarrow{p} {}_{y_0} (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{x_0} \\ \bigoplus_{\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)} \widehat{y}_0 (\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_{\widehat{x}} &\xrightarrow{p} {}_{y_0} (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{x_0} \end{aligned}$$

La Propriété 6.1.11 page précédente permet d'obtenir le résultat suivant apparu dans [9] (voir également [29]). Dans la suite nous l'utiliserons librement sans référence.

Propriété 6.1.12 (voir [9] ou [29]) Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant avec \mathcal{B} et \mathcal{E} localement bornées. Alors :

- si \mathcal{E} a des flèches multiples, alors \mathcal{B} en a également.
- si \mathcal{B} est contrainte, alors \mathcal{E} est contrainte,
- si \mathcal{B} n'a pas de boucle alors \mathcal{E} n'a pas de boucle.

Nous finissons cette sous-Section en démontrant deux propriétés montrant que certaines restrictions d'un foncteur couvrant sont des foncteurs couvrants.

Propriété 6.1.13 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. Soit $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine et soit \mathcal{E}' la sous-catégorie pleine de \mathcal{E} telle que $\mathcal{E}'_0 = F^{-1}(\mathcal{B}'_0)$. Alors le morphisme $F': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}'$ induit par F est un foncteur couvrant.

Preuve : • Soit $x \in \mathcal{B}'_0$. Par définition de \mathcal{E}' nous avons $F'^{-1}(x) = F^{-1}(x) \subseteq \mathcal{E}'_0$. D'autre part $F^{-1}(x) \neq \emptyset$ car F est couvrant. Donc $F'^{-1}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathcal{B}'_0$.

- Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}'_0$ et soit $\widehat{x}_0 \in F'^{-1}(x_0)$. Puisque F est couvrant nous avons l'isomorphisme :

$$\bigoplus_{\widehat{y} \in F^{-1}(y_0)} \widehat{y} \mathcal{E}_{\widehat{x}_0} \xrightarrow{F} {}_{y_0} \mathcal{B}_{x_0} \quad (a)$$

Puisque $x_0, y_0 \in \mathcal{B}'_0$, $\widehat{x}_0 \in \mathcal{E}'_0$ nous avons $F^{-1}(y_0) = F'^{-1}(y_0) \subseteq \mathcal{E}'_0$. D'autre part, puisque \mathcal{B}' (resp. \mathcal{E}') est une sous-catégorie pleine de \mathcal{B} (resp. \mathcal{E}), l'isomorphisme (a) ci-dessus coïncide avec le morphisme :

$$\bigoplus_{\widehat{y} \in F'^{-1}(y_0)} \widehat{y} \mathcal{E}'_{\widehat{x}_0} \xrightarrow{F'} {}_{y_0} \mathcal{B}'_{x_0}$$

Ce dernier est donc un isomorphisme.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}'_0$ et $\widehat{y}_0 \in F'^{-1}(y_0)$. Le raisonnement que nous venons de faire, appliqué au foncteur couvrant $F^{op}: \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ (voir la Remarque 6.1.4 page 106), implique que le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\widehat{x} \in F'^{-1}(x_0)} \widehat{y}_0 \mathcal{E}'_{\widehat{x}} \xrightarrow{F'} {}_{y_0} \mathcal{B}'_{x_0}$$

Donc F' est un foncteur couvrant. □

Propriété 6.1.14 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. Si \mathcal{B} est connexe et si \mathcal{E}' est une composante connexe de \mathcal{E} , alors la restriction $F|_{\mathcal{E}'}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant.

Preuve : Posons $F' = F|_{\mathcal{E}'}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et soit $\widehat{x}_0 \in F'^{-1}(x_0) = F^{-1}(x_0) \cap \mathcal{E}'_0$. Puisque F est un foncteur couvrant, nous disposons d'un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\widehat{y} \in F^{-1}(y_0)} \widehat{y} \mathcal{E}_{\widehat{x}_0} \xrightarrow{F} {}_{y_0} \mathcal{B}_{x_0} \quad (a)$$

Remarquons que si $\hat{y} \in F^{-1}(y_0)$ vérifie $\hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} \neq 0$, alors $\hat{y} \in \mathcal{E}'_0$ et $\hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} = \hat{y}\mathcal{E}'_{\hat{x}_0}$ puisque : $\hat{x}_0 \in \mathcal{E}'_0$ et \mathcal{E}' est une composante connexe de \mathcal{E} . L'isomorphisme (a) ci-dessus coïncide donc avec le morphisme suivant :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in F'^{-1}(y_0)} \hat{y}\mathcal{E}'_{\hat{x}_0} \xrightarrow{F'} y_0\mathcal{B}_{x_0}$$

En particulier, ce dernier est un isomorphisme.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\hat{y}_0 \in F'^{-1}(y_0) = F^{-1}(y_0) \cap \mathcal{E}'_0$. Puisque $F'^{op} : \mathcal{E}'^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ est un foncteur couvrant (voir la Remarque 6.1.4 page 106) et que $F'_{|\mathcal{E}'^{op}} = F'^{op}$, le raisonnement que nous venons de faire implique que le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\hat{x} \in F'^{-1}(x_0)} \hat{y}_0\mathcal{E}'_{\hat{x}} \xrightarrow{F'} y_0\mathcal{B}_{x_0}$$

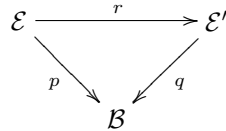
• Le morphisme de k -catégories $F' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ vérifie donc la condition (ii) de la Définition 6.1.1 page 105 et \mathcal{B} est connexe. Le Lemme 6.1.2 page 106 implique donc que F' est un foncteur couvrant. \square

6.1.3 Propriétés des morphismes de revêtements

Cette sous-Section est consacrée à l'étude des morphismes de revêtements. L'une des propriétés principales qui vont apparaître est que lorsque les k -catégories considérées sont connexes, un morphisme de revêtement est uniquement déterminé par l'image d'un objet et un seul.

Nous commençons cette sous-Section par trois Propositions : étant donnés deux morphismes de k -catégories connexes q et r , elles démontrent que si deux des morphismes parmi q , r et $q \circ r$ sont des foncteurs couvrants, alors le troisième l'est également. Notons que seule l'implication « $q \circ r$ et q couvrants $\Rightarrow r$ est couvrant» utilise la connexité.

Proposition 6.1.15 *Supposons donné un diagramme commutatif de k -catégories et de foncteurs k -linéaires :*



Si q et r sont des foncteurs couvrants, alors p est un foncteur couvrant.

Preuve : • L'application $p_0 : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est surjective comme composition $\mathcal{E}_0 \xrightarrow{r} \mathcal{E}'_0 \xrightarrow{q} \mathcal{B}_0$ d'applications surjectives.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Ayant $p = q \circ r$, il vient :

$$p^{-1}(y_0) = \bigsqcup_{z \in q^{-1}(y_0)} r^{-1}(z)$$

Le morphisme induit par p :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{p} y_0\mathcal{B}_{x_0} \tag{a}$$

s'écrit donc :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{p} y_0\mathcal{B}_{x_0}$$

et ce dernier est la composée suivante de morphismes induits par q et r respectivement (car $p = q \circ r$) :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} \bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} z\mathcal{E}'_{r(\hat{x}_0)} \xrightarrow{q} y_0\mathcal{B}_{x_0}$$

Or :

- $\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} z\mathcal{E}'_{r(\hat{x}_0)} \xrightarrow{q} y_0\mathcal{B}_{x_0}$ est un isomorphisme, car q est un foncteur couvrant,
- $\bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y}\mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} z\mathcal{E}'_{r(\hat{x}_0)}$ est un isomorphisme pour tout $z \in q^{-1}(y_0)$, car r est un foncteur couvrant.

Le morphisme (a) induit par p est donc un isomorphisme.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\hat{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$. Puisque r^{op} et q^{op} sont des foncteurs couvrants (d'après la Remarque 6.1.4 page 106) et que $p^{op} = q^{op} \circ r^{op}$, le raisonnement que nous venons de faire montre que le morphisme :

$$\bigoplus_{\hat{x} \in p^{-1}(x_0)} \hat{y}_0 \mathcal{E}_{\hat{x}} \xrightarrow{p} y_0 \mathcal{B}_{x_0}$$

est un isomorphisme. Donc p est un foncteur couvrant. \square

Proposition 6.1.16 *Supposons donné un diagramme commutatif de k -catégories et de foncteurs k -linéaires :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{r} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Si p et r sont des foncteurs couvrants, alors q est un foncteur couvrant.

Preuve : $p: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est une application surjective et égale à la composition $\mathcal{E}_0 \xrightarrow{r} \mathcal{E}'_0 \xrightarrow{q} \mathcal{B}_0$. Donc $q: \mathcal{E}'_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est surjective.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\hat{x}_0 \in q^{-1}(x_0)$. Fixons $\hat{x}_0 \in r^{-1}(\hat{x}_0)$ de sorte que $p(\hat{x}_0) = x_0$. Puisque p est un foncteur couvrant, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{p} y_0 \mathcal{B}_{x_0}$$

et ce dernier est égal à la composée des morphismes suivants (voir la preuve de la Proposition 6.1.15 page précédente) :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} \bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} z \mathcal{E}'_{\hat{x}_0} \xrightarrow{q} y_0 \mathcal{B}_{x_0}$$

Puisque r est un foncteur couvrant, le morphisme $\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} \bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} z \mathcal{E}'_{\hat{x}_0}$ est un isomorphisme. Le morphisme suivant est donc également un isomorphisme :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(y_0)} z \mathcal{E}'_{\hat{x}_0} \xrightarrow{q} y_0 \mathcal{B}_{x_0}$$

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{B}_0$ et $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$. Puisque p^{op} et r^{op} sont des foncteurs couvrants (d'après la Remarque 6.1.4 page 106) et que $p^{op} = q^{op} \circ r^{op}$, le raisonnement que nous venons de faire implique que :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(x_0)} \tilde{y}_0 \mathcal{E}'_z \xrightarrow{q} y_0 \mathcal{B}_{x_0}$$

est un isomorphisme. Donc q est un foncteur couvrant. \square

Proposition 6.1.17 *Supposons donné un diagramme commutatif de k -catégories et de foncteurs k -linéaires :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{r} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Supposons en outre que \mathcal{E}' est connexe ou que l'application $r: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_0$ est surjective. Si p et q sont des foncteurs couvrants, alors r est un foncteur couvrant.

Preuve : • Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{E}'_0$ et $\hat{x}_0 \in r^{-1}(x_0)$. En particulier, $q(x_0) = p(\hat{x}_0)$. Puisque p est un foncteur couvrant, nous disposons d'un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(q(y_0))} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{p} q(y_0) \mathcal{B}_{q(x_0)}$$

Ainsi que nous l'avons vu dans la Preuve de la Proposition 6.1.15 page 109, cet isomorphisme est la composée :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(q(y_0))} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} \bigoplus_{z \in q^{-1}(q(y_0))} z \mathcal{E}'_{x_0} \xrightarrow{q} q(y_0) \mathcal{B}_{q(x_0)}$$

Puisque q est un foncteur couvrant, $\bigoplus_{z \in q^{-1}(q(y_0))} z \mathcal{E}'_{x_0} \xrightarrow{q} q(y_0) \mathcal{B}_{q(x_0)}$ est un isomorphisme. Donc le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\bigoplus_{z \in q^{-1}(q(y_0))} \bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} \bigoplus_{z \in q^{-1}(q(y_0))} z \mathcal{E}'_{x_0}$$

Etant donné que nous avons, pour tout $z \in q^{-1}(q(y_0))$:

$$r \left(\bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \right) \subseteq z \mathcal{E}'_{x_0}$$

Le morphisme $\bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(z)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} z \mathcal{E}'_{x_0}$ est un isomorphisme pour tout $z \in q^{-1}(q(y_0))$. En particulier :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in r^{-1}(y_0)} \hat{y} \mathcal{E}_{\hat{x}_0} \xrightarrow{r} y_0 \mathcal{E}'_{x_0}$$

est un isomorphisme.

• Soient $x_0, y_0 \in \mathcal{E}'_0$ et $\hat{y}_0 \in r^{-1}(y_0)$. D'après la Remarque 6.1.4 page 106, p^{op} et q^{op} sont des foncteurs couvrants, de plus $p^{op} = q^{op} \circ r^{op}$. Le raisonnement que nous venons de faire montre donc que :

$$\bigoplus_{\hat{x} \in r^{-1}(x_0)} \hat{y}_0 \mathcal{E}_{\hat{x}} \xrightarrow{r} y_0 \mathcal{E}'_{x_0}$$

est un isomorphisme. Ainsi $r: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ vérifie la condition (ii) de la Définition 6.1.1 page 105 et l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- \mathcal{E}' est connexe,
- $r: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_0$ est une application surjective.

Le Lemme 6.1.2 page 106 implique donc que r est un foncteur couvrant. □

L'exemple qui suit montre que l'hypothèse « \mathcal{E}' est connexe» ne peut pas être supprimée dans la Proposition 6.1.17 page ci-contre.

Exemple 6.1.18 Soit \mathcal{B} une k -catégorie. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$. Posons $p = Id_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ et soient $r: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ et $q: \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ les morphismes de k -catégories définis comme suit :



Alors $p = q \circ r$, p et q sont des foncteurs couvrants et r n'est pas un foncteur couvrant.

Nous en venons au thème principal de cette sous-Section : la détermination d'un morphisme de revêtements connexes par l'image d'un objet.

Proposition 6.1.19 Soient $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ et $q: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ deux foncteurs couvrants connexes. Deux morphismes de revêtements $r, r': p \rightarrow q$ coïncident si et seulement si il existe $x \in \mathcal{E}_0$ tel que $r(x) = r'(x)$.

Preuve : Puisque \mathcal{E}' est connexe, la Proposition 6.1.17 page précédente implique que r et r' sont couvrants. Soit $C = \{x \in \mathcal{E}_0 \mid r(x) = r'(x)\}$. Supposons que $C \neq \emptyset$.

• Soient $x \in C$, $y \in \mathcal{E}_0$ tels que ${}_y\mathcal{E}_x \neq 0$. Fixons $u \in {}_y\mathcal{E}_x \setminus \{0\}$. Puisque r et r' sont des foncteurs couvrants, nous avons :

$$r(u) \in {}_{r(y)}\mathcal{E}'_{r(x)} \setminus \{0\} \text{ et } r'(u) \in {}_{r'(y)}\mathcal{E}'_{r'(x)} \setminus \{0\}$$

Notons que $q(r(y)) = q(r'(y)) = p(y)$. En particulier $r(u) - r'(u) \in \bigoplus_{y' \in q^{-1}(q(r(y)))} {}_{y'}\mathcal{E}'_{r(x)}$. De plus :

$$q(r(u) - r'(u)) = q \circ r(u) - q \circ r'(u) = p(u) - p(u) = 0$$

Puisque q est un foncteur couvrant, il vient :

$$0 = r(u) - r'(u) \in \bigoplus_{y' \in q^{-1}(q(r(y)))} {}_{y'}\mathcal{E}'_{r(x)}$$

Ayant $r(u) \in {}_{r(y)}\mathcal{E}'_{r(x)} \setminus \{0\}$ et $r'(u) \in {}_{r'(y)}\mathcal{E}'_{r'(x)} \setminus \{0\}$ nous avons nécessairement $r(y) = r'(y)$ et $r(x) = r'(x)$. Ainsi :

$$x \in C \text{ et } u \in {}_y\mathcal{E}_x \setminus \{0\} \implies y \in C \text{ et } r(u) = r'(u) \tag{i}$$

De la même manière :

$$y \in C \text{ et } u \in {}_y\mathcal{E}_x \setminus \{0\} \implies x \in C \text{ et } r(u) = r'(u) \tag{ii}$$

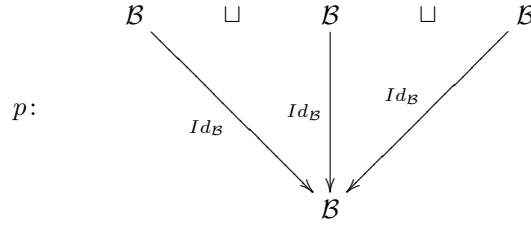
Grâce à la Propriété 1.2.17 page 14, les points (i) et (ii) impliquent que $C = \mathcal{E}_0$ et que $r = r'$ □

La Proposition 6.1.19 page précédente s'applique en particulier aux automorphismes d'un revêtement connexe. Nous obtenons ainsi le Corollaire suivant dont la démonstration est immédiate.

Corollaire 6.1.20 *Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant connexe et soit $g \in \text{Aut}(p)$. Alors $g = Id_p$ si et seulement si il existe $x \in \mathcal{E}_0$ tel que $p(x) = x$.*

L'exemple qui suit montre que l'hypothèse de connexité ne peut être supprimée dans le Corollaire 6.1.20

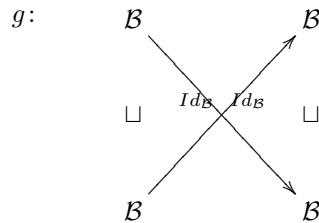
Exemple 6.1.21 *Soit \mathcal{B} une k -catégorie connexe. Soit $p: \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ le foncteur couvrant défini par :*



Soit $g: \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ l'automorphisme de k -catégorie fixant une composante connexe et permutant les deux autres :

$$\mathcal{B} \xrightarrow{Id_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

$$\square \qquad \square$$



Alors $g \in \text{Aut}(p)$, g fixe au moins un objet de $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$ et $g \neq Id_{\mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}}$.

Remarque 6.1.22 *Si $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant, alors pour tout $x \in \mathcal{B}_0$, nous disposons d'une action de $\text{Aut}(p)$ sur $p^{-1}(x)$:*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Aut}(p) & \times & p^{-1}(x) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\
 (g & , & \hat{x}) & \longmapsto & g(\hat{x})
 \end{array}$$

6.1.4 Revêtements galoisiens

Définition 6.1.23 Soit G un groupe. Une G -catégorie est une k -catégorie \mathcal{C} munie d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$. Une G -catégorie libre est une G -catégorie \mathcal{C} telle que l'action induite de G sur \mathcal{C}_0 est libre.

Remarque 6.1.24 Si \mathcal{C} est une G -catégorie libre, alors le morphisme structurel $G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$ est injectif.

Propriété 6.1.25 Si $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant, alors l'inclusion $\text{Aut}(p) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{E})$ confère à \mathcal{E} une structure de $\text{Aut}(p)$ -catégorie. Si de plus \mathcal{E} est connexe, alors \mathcal{E} est une $\text{Aut}(p)$ -catégorie libre.

Preuve : \mathcal{E} est une $\text{Aut}(p)$ -catégorie d'après la Remarque 6.1.22 page précédente. Supposons que \mathcal{E} est connexe. Le Corollaire 6.1.20 page ci-contre montre que \mathcal{E} est une $\text{Aut}(p)$ -catégorie libre. \square

L'exemple 6.1.21 page précédente fournit un foncteur couvrant $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que \mathcal{E} n'est pas une $\text{Aut}(p)$ -catégorie libre.

Nous définissons à présent la catégorie quotient d'une G -catégorie libre. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [14] par exemple.

Définition 6.1.26 (voir [14]) Soit G un groupe et soit \mathcal{C} une G -catégorie libre. La **catégorie quotient** \mathcal{C}/G est la k -catégorie définie comme suit :

- l'ensemble des objets est \mathcal{C}_0/G ,
- étant donné $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_0/G$, l'espace vectoriel $\bigoplus_{x \in \alpha, y \in \beta} {}_y\mathcal{C}_x$ est un G -module, et nous posons :

$${}_{\beta}(\mathcal{C}/G)_{\alpha} = \left(\bigoplus_{x \in \alpha, y \in \beta} {}_y\mathcal{C}_x \right) / G$$

- Soient $v \in {}_{\gamma}(\mathcal{C}/G)_{\beta}$ et $u \in {}_{\beta}(\mathcal{C}/G)_{\alpha}$ deux morphismes de \mathcal{C}/G . Soient $v' \in {}_z\mathcal{C}_{y'}$ et $u' \in {}_y\mathcal{C}_x$ des représentants de v et u respectivement. Alors il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot y = y'$. La composition $v \circ u \in {}_{\gamma}(\mathcal{C}/G)_{\alpha}$ a alors pour représentant :

$$v' \circ g \cdot u' \in {}_z\mathcal{C}_{g \cdot x}$$

Remarque 6.1.27 La composition des morphismes dans la catégorie quotient \mathcal{C}/G est bien définie parce que l'action de G sur \mathcal{C}_0 est libre.

Etant donnée une G -catégorie libre \mathcal{C} , nous disposons d'un morphisme naturel de k -catégories $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ défini comme suit :

- l'image d'un objet $x \in \mathcal{C}_0$ est son orbite $G \cdot x \in (\mathcal{C}/G)_0$,
- l'image d'un morphisme $u \in {}_y\mathcal{C}_x$ est son orbite $G \cdot u \in {}_{G \cdot y}(\mathcal{C}/G)_{G \cdot x}$.

Dans toute la suite, lorsque nous considérerons un morphisme $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ sans autre précision ce sera toujours le morphisme naturel que nous venons de décrire. Notons que le morphisme $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ vérifie la propriété universelle suivante bien connue.

Propriété 6.1.28 Soit \mathcal{C} une G -catégorie libre et soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un morphisme de k -catégories tel que $F \circ g = F$ pour tout $g \in G$. Alors il existe un unique morphisme $\bar{F}: \mathcal{C}/G \rightarrow \mathcal{C}'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \downarrow & \nearrow \bar{F} & \\ \mathcal{C}/G & & \end{array}$$

Propriété 6.1.29 (voir [13]) Soit \mathcal{C} une G -catégorie libre. Alors $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ est un foncteur couvrant.

Remarque 6.1.30 Conservons les notations de la Propriété 6.1.28. Alors la Proposition 6.1.15 page 109, la Proposition 6.1.16 page 110 et la Propriété 6.1.29 montrent que F est un foncteur couvrant si et seulement si \bar{F} l'est.

Remarque 6.1.31 Si \mathcal{C} est une G -catégorie libre, alors $G \subseteq \text{Aut}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G)$ et G agit transitivement sur les fibres de $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ (la fibre de $G.x \in (\mathcal{C}/G)_0$ est $G.x \subseteq \mathcal{C}_0$).

Nous pouvons à présent rappeler la définition d'un revêtement galoisien de k -catégorie.

Définition 6.1.32 (voir [13] par exemple) Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. Alors p est un **revêtement galoisien de groupe** G si \mathcal{E} est une G -catégorie libre telle qu'il existe un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ & \swarrow & \searrow p \\ \mathcal{E}/G & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B} \end{array}$$

où le morphisme horizontal $\mathcal{E}/G \rightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme. Le revêtement galoisien $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ sera dit **connexe** si \mathcal{E} est connexe.

Remarque 6.1.33 Avec les notations de la Définition 6.1.32 nous avons $\text{Aut}(p) = \text{Aut}(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/G)$.

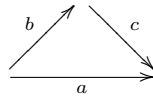
La Remarque 6.1.31 et la Remarque 6.1.33 fournissent la Propriété suivante.

Propriété 6.1.34 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revêtement galoisien de groupe G . Alors il existe un morphisme injectif de groupes $G \hookrightarrow \text{Aut}(p)$. En outre G et $\text{Aut}(p)$ agissent transitivement sur les fibres de p .

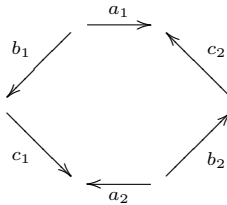
Sous les hypothèses et avec les notations de la Propriété 6.1.34, le morphisme $G \hookrightarrow \text{Aut}(p)$ sera appelé **le morphisme naturel** $G \rightarrow \text{Aut}(p)$. Notons que d'après la Propriété 6.1.29 page précédente nous avons la :

Propriété 6.1.35 Un revêtement galoisien est un foncteur couvrant.

Exemple 6.1.36 Soit Q le carquois :



Soit Q' le carquois :



Posons $\mathcal{E} = kQ'$ et $\mathcal{B} = kQ$. Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ défini par :

- $F(a_1) = a, F(b_i) = b$ et $F(c_i) = c$ pour $i \in \{1, 2\}$,
- $F(a_2) = a + cb$.

Alors F est un foncteur couvrant et n'est pas un revêtement galoisien.

Proposition 6.1.37 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant connexe. Alors \mathcal{E} est naturellement une $\text{Aut}(p)$ -catégorie libre. En outre p est un revêtement galoisien si et seulement si $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur chaque fibre $p^{-1}(x)$ de p . Enfin, si p est revêtement galoisien de groupe G , alors le morphisme naturel $G \hookrightarrow \text{Aut}(p)$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve : • Nous savons, d'après la Propriété 6.1.25 page précédente, que \mathcal{E} est une $\text{Aut}(p)$ -catégorie libre.

• Si p est un revêtement galoisien, la Propriété 6.1.34 affirme que $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres de p . Réciproquement, supposons que $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres de p . D'après la Propriété 6.1.28 page précédente il existe un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{p} & \mathcal{B} \\ \pi \downarrow & & \nearrow \bar{p} \\ \mathcal{E}/\text{Aut}(p) & & \end{array}$$

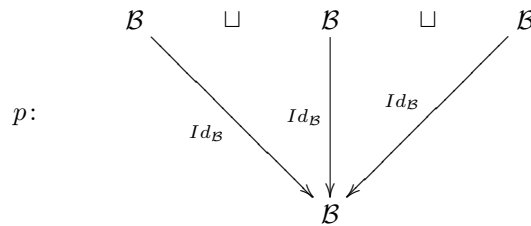
Puisque p est un foncteur couvrant, la Remarque 6.1.30 page 113 entraîne que \bar{p} est un foncteur couvrant. Montrons que l'application $\bar{p}: \mathcal{E}_0/Aut(p) = (\mathcal{E}/Aut(p))_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est injective, cela montrera (d'après la Remarque 6.1.5 page 106) que $\bar{p}: \mathcal{E}/Aut(p) \rightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme. Si $x, y \in \mathcal{E}_0$ sont tels que $\bar{p}(\pi(x)) = \bar{p}(\pi(y))$, alors $p(x) = p(y)$. Puisque $Aut(p)$ agit transitivement sur les fibres de p , il existe $g \in Aut(p)$ tel que $g(x) = y$. Donc $\pi(x) = \pi(y)$. Ainsi $p: \mathcal{E}/Aut(p) \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant et l'application $\bar{p}: \mathcal{E}_0/Aut(p) = (\mathcal{E}/Aut(p))_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ est injective. Donc \bar{p} est un isomorphisme d'après la Remarque 6.1.5 page 106. De cette façon, p est un revêtement galoisien. En résumé, nous avons l'équivalence :

$$p \text{ est un revêtement galoisien} \Leftrightarrow Aut(p) \text{ agit transitivement sur les fibres de } p$$

• Supposons que p est un revêtement galoisien de groupe G . D'après la Propriété 6.1.34 page précédente, le groupe G agit transitivement sur les fibres de p et nous disposons d'une injection naturelle $G \hookrightarrow Aut(p)$. Soit $g \in Aut(p)$ et soit $x \in \mathcal{E}_0$. Ayant $p(g(x)) = p(x)$ il existe $g' \in G$ tel que $g(x) = g'(x)$ (G agit transitivement sur $p^{-1}(p(x))$). La Proposition 6.1.19 page 111 implique alors que $g = g' \in G$. Ceci montre que le morphisme naturel $G \hookrightarrow Aut(p)$ est un isomorphisme. \square

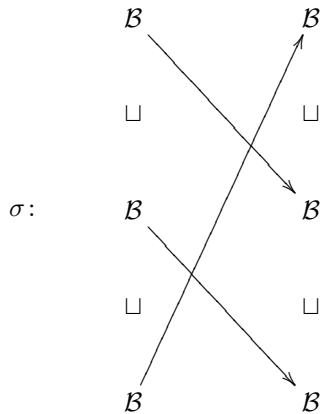
Si $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un revêtement galoisien connexe de groupe G , la Proposition 6.1.37 page précédente nous permet d'identifier G et $Aut(p)$ au moyen du morphisme naturel $G \rightarrow Aut(p)$, ce que nous ferons désormais. Notons que cette identification n'est pas possible lorsque le revêtement galoisien en question n'est pas connexe, ainsi que le montre l'exemple qui suit.

Exemple 6.1.38 Soit \mathcal{B} une k -catégorie connexe et soit $\mathcal{E} = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B}$. Soit $p: \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ le foncteur couvrant décrit par :



Nous avons vu dans l'Exemple 6.1.21 page 112 que \mathcal{E} n'est pas une $Aut(p)$ -catégorie libre.

Soit $\sigma: \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ l'automorphisme de la k -catégorie \mathcal{E} effectuant une permutation des composantes connexes de \mathcal{E} de la façon suivante :

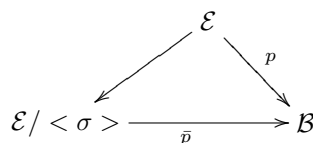


Donc $\sigma \in Aut(p)$ et $\sigma^3 = Id_{\mathcal{E}}$. Notons que le sous-groupe $\langle \sigma \rangle = \{Id_{\mathcal{E}}, \sigma, \sigma^2\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de $Aut(p)$ est tel que σ^2 effectue également une permutation des composantes connexes de \mathcal{E} . En particulier :

\mathcal{E} est une $\langle \sigma \rangle$ -catégorie libre

Ceci implique que $\langle \sigma \rangle \subsetneq Aut(p)$ (car \mathcal{E} n'est pas une $Aut(p)$ -catégorie libre).

Ayant $\langle \sigma \rangle \subseteq Aut(p)$, il existe un diagramme commutatif de k -catégories (d'après la Propriété 6.1.28 page 113) :



D'après la Remarque 6.1.30 page 113, le morphisme \bar{p} est un foncteur couvrant (rappelons que \mathcal{B} est connexe) et une vérification immédiate montre que $\bar{p}: \mathcal{E}_0 / \langle \sigma \rangle \rightarrow \mathcal{B}_0$ est injective. Donc \bar{p} est un isomorphisme. Ainsi :

$$p \text{ est un revêtement galoisien de groupe } \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ et } \text{Aut}(p) \not\cong \langle \sigma \rangle$$

Notons que comme en topologie, nous avons la :

Propriété 6.1.39 Si p est un revêtement galoisien connexe de groupe G , alors $G = \text{Aut}(p)$ est égal l'espace des endomorphismes $p \rightarrow p$ du revêtement p .

Preuve : Par construction, tout automorphisme de p est un endomorphisme de p . Soit $F: p \rightarrow p$ un endomorphisme de p . Soit $x \in \mathcal{E}_0$. D'après la Propriété 6.1.34 page 114 il existe $g \in \text{Aut}(p) = G$ tel que $g(x) = F(x)$. La Proposition 6.1.19 page 111 implique alors $F = g \in G$. \square

La ressemblance avec la situation topologique ne s'arrête pas là, plus particulièrement, la Propriété 6.1.13 page 108 et la Propriété 6.1.14 page 108 se généralisent au cas d'un revêtement galoisien.

Proposition 6.1.40 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revêtement galoisien de groupe G . Supposons que \mathcal{B} est connexe et soit \mathcal{E}' une composante connexe de \mathcal{E} . Alors la restriction $p|_{\mathcal{E}'}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ est un revêtement galoisien.

Preuve : • D'après la Propriété 6.1.14 page 108 nous savons que $p' = p|_{\mathcal{E}'}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant.

• Soient $x, y \in \mathcal{E}'_0$ tels que $p'(x) = p'(y)$. Donc $p(x) = p(y)$. Puisque p est galoisien de groupe G , la Propriété 6.1.34 page 114 implique qu'il existe $g \in G \subseteq \text{Aut}(p)$ tel que $g(x) = y$. Ainsi :

- $g(\mathcal{E}')$ est une composante connexe de \mathcal{E} (rappelons que $g \in \text{Aut}(\mathcal{E})$),
- $g(\mathcal{E}')_0 \cap \mathcal{E}'_0 \neq \emptyset$.

Donc $g(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$ et g induit un automorphisme $g' \in \text{Aut}(\mathcal{E}')$ tel que $g'(x) = y$ et puisque $p \circ g = p$ il vient $p' \circ g' = p'$, i.e. $g' \in \text{Aut}(p')$. Ainsi p' est un revêtement connexe tel que $\text{Aut}(p')$ agit transitivement sur les fibres de p' . Donc p' est un revêtement galoisien. \square

Proposition 6.1.41 Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revêtement galoisien de groupe G . Soit \mathcal{B}' une sous-catégorie pleine convexe de \mathcal{B} . Soit \mathcal{E}' la sous-catégorie pleine de \mathcal{E} définie par $\mathcal{E}'_0 = p^{-1}(\mathcal{B}'_0)$. Alors le morphisme $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}'$ induit par p est un revêtement galoisien de groupe G .

Lorsque nous étudierons le revêtement universel d'une k -algèbre, nous aurons parfois à vérifier qu'un morphisme de k -catégories donné est un revêtement galoisien. La Proposition qui suit sera utile en ce sens.

Proposition 6.1.42 Supposons donné un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{r} & \mathcal{E}' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{B} & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & \mathcal{B} \end{array}$$

Supposons en outre que :

- \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont connexes,
- p (resp. q) est un revêtement galoisien de groupe G (resp. G'),
- $\varphi \in \text{Aut}_0(\mathcal{B})$.

Alors il existe une unique application $\lambda: G \rightarrow G'$ telle que :

$$(\forall g \in G) \quad \lambda(g) \circ r = r \circ g$$

En outre, λ est un morphisme surjectif de groupes et r est un revêtement galoisien de groupe $\text{Ker}(\lambda)$.

Preuve : La Proposition 6.1.15 page 109, appliquée à φ et à p implique que $q \circ r = \varphi \circ p$ est un foncteur couvrant. Puisque \mathcal{E}' est connexe, la Proposition 6.1.17 page 110 implique que r est un foncteur couvrant.

Fixons $x_0 \in \mathcal{E}_0$ et posons $x'_0 = r(x_0) \in \mathcal{E}'_0$.

• Établissons l'existence et l'unicité de l'application λ . Soit $g \in G = \text{Aut}(p)$. Alors :

$$q(r(g(x_0))) = \varphi \circ p(g(x_0)) = \varphi \circ p(x_0) = q(r(x_0)) = q(x'_0)$$

Puisque q est galoisien de groupe G' , il existe $g' \in G'$ tel que $g'(x'_0) = r(g(x_0))$. De plus, g' est unique pour cette propriété (d'après la Proposition 6.1.19 page 111). Aussi nous noterons $\lambda(g) = g'$. Nous avons en outre :

- $q \circ \lambda(g) \circ r = q \circ r = \varphi \circ p$,
- $q \circ r \circ g = \varphi \circ p \circ g = \varphi \circ p$.

Donc :

- $q: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ et $\varphi \circ p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ sont deux revêtements connexes de \mathcal{B} ,
- $\lambda(g) \circ r$ et $r \circ g$ sont deux morphismes de revêtements $\varphi \circ p \rightarrow q$,
- $\lambda(g) \circ r(x_0) = \lambda(g)(x'_0) = r(g(x_0))$.

La Proposition 6.1.19 page 111 implique donc que $\lambda(g) \circ r = r \circ g$. Ainsi :

$$(\forall g \in G) \quad (\exists! \lambda(g) \in G') \quad \lambda(g) \circ r = r \circ g \quad (i)$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de l'application λ .

- Montrons que λ est un morphisme de groupes. Soient $g, g' \in G$. Alors :

$$\lambda(g'g) \circ r = r \circ g' \circ g = \lambda(g') \circ r \circ g = \lambda(g') \circ \lambda(g) \circ r$$

La caractérisation (i) de λ donne donc $\lambda(g'g) = \lambda(g')\lambda(g)$ pour tous $g, g' \in G$. Donc λ est un morphisme de groupes.

- Montrons que λ est surjectif. Soit $g' \in G'$ et soit $x \in r^{-1}(g'(x'_0))$ (x existe car r est un foncteur couvrant). Alors :

$$p(x) = \varphi(p(x)) = q(r(x)) = q \circ g'(x'_0) = q(x'_0) = q(r(x_0)) = \varphi(p(x_0)) = p(x_0)$$

Donc il existe $g \in G$ tel que $g(x_0) = x$. Nous avons ainsi :

$$\lambda(g)(x'_0) = \lambda(g) \circ r(x_0) = r \circ g(x_0) = r(x) = g'(x'_0)$$

Puisque q est galoisien de groupe G' , il vient $\lambda(g) = g'$. Donc λ est surjectif.

- Soit $g \in G$, la caractérisation (i) de λ donne :

$$\lambda(g) = 1 \Leftrightarrow r \circ g = g \Leftrightarrow g \in \text{Aut}(r)$$

Donc $\text{Ker}(\lambda) = \text{Aut}(r)$. Afin de démontrer la Proposition, il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que $\text{Ker}(\lambda)$ agit transitivement sur les fibres de p (en vertu de la Proposition 6.1.37 page 114). Soient $x, x' \in \mathcal{E}_0$ tels que $r(x) = r(x')$. Donc :

$$p(x) = \varphi \circ p(x) = q \circ r(x) = q \circ r(x') = p(x')$$

Puisque p est galoisien de groupe G , il existe $g \in G$ tel que $g(x) = x'$. En outre :

$$\lambda(g)(r(x)) = r(g(x)) = r(x') = r(x)$$

Donc $\lambda(g) = 1$ (car q est galoisien de groupe G') puis $g \in \text{Ker}(\lambda)$. Ainsi $\text{Ker}(\lambda) = \text{Aut}(r)$ agit transitivement sur les fibres du foncteur couvrant connexe r . Donc r est galoisien de groupe $\text{Ker}(\lambda)$. \square

6.2 Présentation des revêtements

6.2.1 Revêtements de carquois liés

Nous faisons dans cette sous-Section quelques rappels sur les revêtements de carquois lié. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [29] ou [10].

Définition 6.2.1 Soit $p: Q' \rightarrow Q$ un morphisme de carquois. Nous dirons que p est un **revêtement de carquois** si p vérifie les conditions suivantes :

- (i) $p^{-1}(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in Q_0$,
- (ii) pour tout $x \in Q'_0$, les deux applications induites par p :

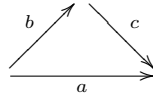
$$\begin{array}{ccc} x^+ & \longrightarrow & p(x)^+ \\ \alpha & \longmapsto & p(\alpha) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} x^- & \longrightarrow & p(x)^- \\ \alpha & \longmapsto & p(\alpha) \end{array}$$

sont des bijections.

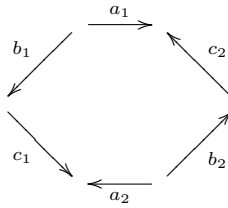
Définition 6.2.2 (voir [9], [19] et [29]) Un **revêtement de carquois lié** est un morphisme de carquois liés $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $p: Q' \rightarrow Q$ est un revêtement de carquois,
- (ii) pour toute relation minimale $r \in {}_y I_x$ et pour tout $x' \in p^{-1}(x)$ il existe $y' \in p^{-1}(y)$ et $r' \in {}_{y'} I'_{x'}$ tels que $p(r') = r$,
- (iii) pour toute relation minimale $r \in {}_y I_x$ et pour tout $y' \in p^{-1}(y)$ il existe $x' \in p^{-1}(x)$ et $r' \in {}_{y'} I'_{x'}$ tels que $p(r') = r$.

Exemple 6.2.3 Soit Q le carquois :



et soit $I = \langle cb \rangle$. Soit Q' le carquois :



et soit $I' = \langle c_1 b_1, c_2 b_2 \rangle$. Alors le morphisme de carquois liés $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ défini par :

$$p(x_i) = x \text{ pour tout } x \in \{a, b, c, d\} \text{ et tout } i \in \{1, 2\}$$

est un revêtement de carquois lié.

Remarque 6.2.4 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié. Soit γ une promenade (par exemple un chemin) de Q de source x et de terminus y . Pour tout $x' \in p^{-1}(x)$ (resp. $y' \in p^{-1}(y)$) il existe une unique promenade γ' de Q' de source x' (resp. de terminus y') et telle que $\gamma = p(\gamma')$. Si de plus γ est un chemin, alors γ' est un chemin également. Cette promenade γ' est appelée le **relèvement de γ de source x' (resp. de terminus y') par rapport à p** .

La propriété suivante sur les revêtements de carquois lié est immédiate à vérifier, nous en omettons la démonstration. Dans la suite nous l'utiliserons librement et sans référence.

Propriété 6.2.5 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié alors :

- si Q' est connexe, alors Q est connexe,
- si Q' a un cycle orienté (resp. des flèches multiples, resp. une boucle, resp. un raccourci, resp. un double raccourci) alors Q en a aussi.

Voyons à présent le lien entre les revêtements de carquois lié et les foncteurs couvrants. Notons tout d'abord la :

Proposition 6.2.6 Soit $p: Q' \rightarrow Q$ un revêtement de carquois. Alors $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant.

Preuve : • L'application $p: Q'_0 \rightarrow Q_0$ est surjective car $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement de carquois lié.

• Soient $x, y \in Q_0$ et $x' \in p^{-1}(x)$. Si u est un chemin de Q de source x et de terminus y , la Remarque 6.2.4 montre qu'il existe $y' \in p^{-1}(y)$ ainsi qu'un chemin $u' \in {}_{y'} kQ'_{x'}$, tel que $p(u') = u$. Puisque ${}_{y'} kQ_x$ est l'espace vectoriel de base la famille des chemins de Q de source x et de terminus y , l'application suivante :

$$\bigoplus_{y' \in p^{-1}(y)} {}_{y'} kQ'_{x'} \xrightarrow{p} {}_y kQ_x \tag{i}$$

est surjective. Montrons qu'elle est également injective. Soit $\sum_{y' \in p^{-1}(y)} r_{y'} \in \bigoplus_{y' \in p^{-1}(y)} {}_{y'} kQ'_{x'}$. Soient $y' \in p^{-1}(y)$ et $u' \in \text{supp}(r_{y'})$, alors u' est l'unique chemin v de Q' de source x' vérifiant l'égalité $p(v) = p(u')$ (d'après la Remarque 6.2.4), donc :

$$(\forall y'' \in p^{-1}(y)) (\forall v \in \text{supp}(r_{y''})) u' \neq v \implies p(u') \neq p(v)$$

Donc :

$$(\forall y'' \in p^{-1}(y)) \quad p(u')^*(p(r_{y''})) = \begin{cases} 0 & \text{si } y' \neq y'' \\ u'^*(r_{y'}) & \text{si } y' = y'' \end{cases}$$

Ceci démontre en particulier que :

$$\sum_{y' \in p^{-1}(y)} r_{y'} \neq 0 \implies \sum_{y' \in p^{-1}(y)} p(r_{y'}) \neq 0$$

L'application (i) est donc injective et bijective.

• Soient $x, y \in Q_0$ et $y' \in p^{-1}(y)$. En échangeant les rôles de x et y et en remplaçant x' par y' , le point précédent montre également que l'application :

$$\bigoplus_{x' \in p^{-1}(x)} y' kQ'_{x'} \xrightarrow{p} y kQ_x$$

est bijective. Donc $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant. \square

Proposition 6.2.7 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié. Alors $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant.

Preuve : • L'application $p: Q'_0 \rightarrow Q_0$ est surjective car p est un revêtement de carquois lié.

• Soient $x_0, y_0 \in Q_0$ et $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Nous disposons d'un diagramme commutatif d'espaces vectoriels et d'applications linéaires :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} kQ'_{\hat{x}_0} & \xrightarrow{p} & y_0 kQ_{x_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} kQ'/I'_{\hat{x}_0} & \xrightarrow{\bar{p}} & y_0 kQ/I_{x_0} \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives. Puisque $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant (d'après la Proposition 6.2.6 page ci-contre), la flèche horizontale supérieure du diagramme ci-dessus est bijective, donc l'application :

$$\bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} kQ'/I'_{\hat{x}_0} \xrightarrow{\bar{p}} y_0 kQ/I_{x_0} \quad (i)$$

est surjective. Montrons qu'elle est également injective.

Soit $\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} r_{\hat{y}} \in \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} kQ'_{\hat{x}_0}$ tel que $\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} \bar{p}(r_{\hat{y}} \text{ mod } I') = 0$. Cela signifie que $\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} p(r_{\hat{y}}) \in I$. Il existe donc des relations minimales r_1, \dots, r_n de I telles que :

$$\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} p(r_{\hat{y}}) = r_1 + \dots + r_n$$

Puisque $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement de carquois lié, il existe, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, un sommet $\hat{y}_i \in p^{-1}(y_0)$ et une relation $\hat{r}_i \in \hat{y}_i I'_{\hat{x}_0}$ tels que $r_i = p(\hat{r}_i)$. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n p(\hat{r}_i) = \sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} p(r_{\hat{y}})$$

Puisque $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant, il vient :

$$\sum_{i=1}^n \hat{r}_i = \sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} r_{\hat{y}} \in \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y_0)} \hat{y} kQ'_{\hat{x}_0}$$

Nous en déduisons que :

$$(\forall \hat{y} \in p^{-1}(y_0)) \quad r_{\hat{y}} = \sum_{i \text{ tel que } \hat{y}_i = \hat{y}} \hat{r}_i \in \hat{y} I'_{\hat{x}_0}$$

Donc $\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} r_{\hat{y}} \text{ mod } I' = 0$. L'application (i) est donc injective et bijective.

• Soient $x_0, y_0 \in Q_0$ et $\hat{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$. En échangeant les rôles de x_0 et y_0 et en remplaçant \hat{x}_0 par \hat{y}_0 , le point précédent montre également que l'application :

$$\bigoplus_{\hat{x} \in p^{-1}(x_0)} \hat{y}_0 kQ'/I'_{\hat{x}} \xrightarrow{\bar{p}} y_0 kQ/I_{x_0}$$

est bijective. Donc $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant. \square

Le principal sujet d'étude de cette Section est la réciproque de la Proposition 6.2.7 page précédente. Un élément de réponse est fourni par la Proposition suivante. Elle est due à K. Bongartz et P. Gabriel dans [9].

Proposition 6.2.8 (voir [9]) Soit $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant entre k -catégories localement bornées. Soit $Q_{\mathcal{E}}$ (resp. $Q_{\mathcal{B}}$) le carquois \mathcal{E} (resp. \mathcal{B}). Supposons que le carquois de \mathcal{B} n'a pas de flèches multiples, alors il existe un morphisme de carquois $r: Q_{\mathcal{E}} \rightarrow Q_{\mathcal{B}}$ tel que $r(x) = p(x)$ pour tout sommet x de $Q_{\mathcal{E}}$.

Notons également que si un morphisme de carquois définit un foncteur couvrant, alors ce morphisme de carquois est un revêtement de carquois lié. Plus précisément :

Propriété 6.2.9 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un morphisme de carquois lié tel que $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant. Alors p est un revêtement de carquois lié.

Preuve : • L'application $p: Q'_0 \rightarrow Q_0$ est surjective car \bar{p} est un foncteur couvrant. Posons $\mathcal{E} = kQ'/I'$ et $\mathcal{B} = kQ/I$. Nous noterons $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ et $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ les morphismes naturels.

• D'après la Propriété 6.1.11 page 107, nous avons, pour tous $x, y \in Q'_0$, un isomorphisme induit par \bar{p} :

$$\bigoplus_{y' \in p^{-1}(p(y))} y' (\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x \xrightarrow{\bar{p}} p(y) (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{p(x)}$$

Soit $x \in Q'_0$. Nous disposons donc d'un diagramme commutatif d'espaces vectoriels et d'applications linéaires :

$$\begin{array}{ccc} k^{(x^+)} & \xrightarrow{\mu} & \bigoplus_{y \in \mathcal{B}_0} \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} \hat{y} (\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x \\ \downarrow p & & \downarrow \bar{p} \\ k^{(p(x)^+)} & \xrightarrow{\nu} & \bigoplus_{y \in \mathcal{B}_0} y (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{p(x)} \end{array}$$

Puisque μ et ν sont des présentations admissibles, les lignes horizontales sont des isomorphismes. Donc $k^{(x^+)} \xrightarrow{p} k^{(p(x)^+)}$ est un isomorphisme. Donc l'application :

$$\begin{array}{ccc} p: & x^+ & \longrightarrow & p(x)^+ \\ & \alpha & \longmapsto & p(\alpha) \end{array}$$

est bijective. Les mêmes arguments montrent que l'application :

$$\begin{array}{ccc} p: & x^- & \longrightarrow & p(x)^- \\ & \alpha & \longmapsto & p(\alpha) \end{array}$$

est bijective. Donc $p: Q' \rightarrow Q$ est un revêtement de carquois.

• Soit $r \in {}_y I_x$ une relation minimale et soit $x' \in p^{-1}(x)$. Puisque $p: Q' \rightarrow Q$ est un revêtement de carquois, la Proposition 6.2.6 page 118 implique que le morphisme $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant. Donc il existe $\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} r_{\hat{y}} \in \bigoplus_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} \hat{y} kQ'_{x'}$ tel que $r = \sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} p(r_{\hat{y}})$. En particulier :

$$0 = r \text{ mod } I = \sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} \bar{p}(r_{\hat{y}} \text{ mod } I')$$

Puisque \bar{p} est un foncteur couvrant, il vient :

$$\sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} r_{\hat{y}} \text{ mod } I' = 0$$

Donc $r_{\hat{y}} \in I'$ pour tout $\hat{y} \in p^{-1}(y)$. Donc :

- $r = \sum_{\hat{y} \in p^{-1}(y)} p(r_{\hat{y}})$,
- $r_{\hat{y}} \in I'$ et $p(r_{\hat{y}}) \in I$ pour tout $\hat{y} \in p^{-1}(y)$,
- $\text{supp}(p(r_{y'})) \cap \text{supp}(p(r_{y''})) = \emptyset$ pour tous $y', y'' \in p^{-1}(y)$ distincts (car $p: kQ' \rightarrow kQ$ est un foncteur couvrant).

Etant donné que r est minimale, il existe $y' \in p^{-1}(y)$ tel que $p(r_{y'}) = r$ avec $r_{y'} \in {}_{y'}I'_{x'}$.

• Soit $r \in {}_yI_x$ une relation minimale et soit $y' \in p^{-1}(x)$. En échangeant les rôles de x et de y et en remplaçant x' par y' , le raisonnement fait au point précédent montre qu'il existe $x' \in p^{-1}(x)$ ainsi que $r' \in {}_{y'}I'_{x'}$ tel que $p(r') = r$. Donc $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement de carquois lié. \square

Faisons à présent un rappel sur les revêtements galoisiens de carquois lié. A cette fin, définissons le groupe $\text{Aut}(p)$ des **automorphismes d'un revêtement** $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ de carquois lié. Il est défini par :

$$\text{Aut}(p) = \{g \in \text{Aut}(Q', I') \mid p \circ g = p\}$$

En particulier, si $x \in Q_0$, alors $\text{Aut}(p)$ agit naturellement sur $p^{-1}(x)$.

Remarque 6.2.10 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié et soit $g \in \text{Aut}(p)$. Alors l'automorphisme $\bar{g} \in \text{Aut}(kQ'/I')$ induit par g vérifie $\bar{p} \circ \bar{g} = \bar{p}$. Autrement dit $\bar{g} \in \text{Aut}(\bar{p})$. Nous disposons ainsi d'un morphisme de groupes $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Aut}(\bar{p})$.

Définition 6.2.11 (voir [10]) Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié où Q' est connexe. Soit $G \rightarrow \text{Aut}(p)$ un morphisme de groupes. Le groupe G agit donc par automorphismes sur (Q', I') . Alors p est un **revêtement galoisien de groupe** G si pour tout $x \in Q_0$ l'action de G sur $p^{-1}(x)$ est libre et transitive.

Etablissons, comme dans la Section 6.2 une caractérisation de la propriété «être galoisien» pour un revêtement de carquois lié.

Proposition 6.2.12 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié où Q' est connexe. Alors $\text{Aut}(p)$ agit librement sur les fibres de p .

Preuve : Soit $g \in \text{Aut}(p)$ et $x_0 \in Q'_0$ tel que $g(x_0) = x_0$. Alors :

- $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant d'après la Proposition 6.2.7 page 119,
- $\bar{g} \in \text{Aut}(\bar{p})$ (voir la Remarque 6.2.10),
- $\bar{g}(x_0) = x_0$.

Puisque kQ'/I' est connexe, le Corollaire 6.1.20 page 112 implique que $\bar{g} = \text{Id}_{kQ'/I'}$. Ceci implique en particulier que :

- $g(x) = x$ pour tout $x \in Q'_0$,
- $g(\alpha) - \alpha \in I' \subseteq (kQ'^+)^2$ pour toute flèche $\alpha \in Q'_1$.

Or $g \in \text{Aut}(Q', I')$, donc $g(\alpha) \in Q'_1$ pour toute flèche $\alpha \in Q'_1$. Donc $g(\alpha) = \alpha$ pour toute flèche $\alpha \in Q'_1$ et $g = \text{Id}_{(Q', I')}$. \square

La Proposition 6.2.12 nous permet d'obtenir une caractérisation des revêtements de carquois lié qui sont des revêtements galoisiens.

Proposition 6.2.13 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié tel que Q' est connexe. Alors p est galoisien de groupe G si et seulement si $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(x)$ pour tout $x \in Q_0$. Dans ce cas $G \rightarrow \text{Aut}(p)$ est un isomorphisme.

Preuve : • D'après la Définition 6.2.11, si p est galoisien de groupe G alors G agit transitivement sur les fibres de p (au moyen de l'action définie par le morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Aut}(p)$). Donc $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres de p .

• Supposons que $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres de p . Alors la Proposition 6.2.12 implique que p est un revêtement galoisien de groupe $\text{Aut}(p)$.

• Supposons enfin que p est un revêtement galoisien de groupe G . Puisque l'action de G sur (Q', I') définie par le morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Aut}(p)$ est libre, ce même morphisme est injectif. Soit $g \in \text{Aut}(p)$

et $x_0 \in Q'_0$. Remarquons que $p(x_0) = p(g(x_0))$. Puisque p est un revêtement galoisien de groupe G , il existe $g' \in G$ tel que $g'(x_0) = g(x_0)$. Ainsi $g'g^{-1}(x_0) = x_0$ et $g'g^{-1} \in \text{Aut}(p)$. D'après la Proposition 6.2.12 page précédente cela implique que $g = g'$. Donc $G \rightarrow \text{Aut}(p)$ est un isomorphisme de groupes. \square

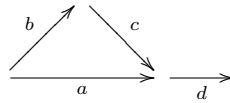
Notons également suivante caractérisation suivante des revêtements galoisiens, elle est due à J. C. Bustamante dans [10].

Proposition 6.2.14 (voir [10]) Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement de carquois lié avec Q' connexe. Fixons $x'_0 \in Q'_0$ et soit $x_0 = p(x'_0)$. Alors l'application $\gamma \mapsto p(\gamma)$ induite par p entre les promenades de Q' et celles de Q induit un morphisme injectif de groupes :

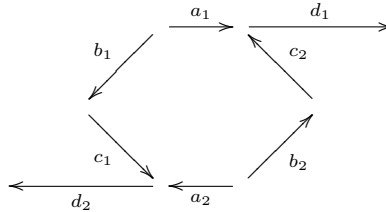
$$p_*: \pi_1(Q', I', x'_0) \hookrightarrow \pi_1(Q, I, x_0)$$

En outre p est galoisien si et seulement si $p_*(\pi_1(Q', I'))$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(Q, I)$.

Exemple 6.2.15 Soit Q le carquois :



et soit $I = \langle da \rangle$. Soit Q' le carquois :



et soit $I' = \langle d_1a_1, d_2a_2 \rangle$. Alors le morphisme de carquois liés $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ défini par :

$$p(x_i) = x \text{ pour tout } x \in \{a, b, c, d\} \text{ et tout } i \in \{1, 2\}$$

est un revêtement galoisien de carquois lié de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur (Q', I') en permutant x_1 et x_2 pour tout $x \in \{a, b, c, d\}$.

Nous avons vu plus haut qu'un revêtement de carquois lié définit un foncteur couvrant. Nous avons également la Proposition analogue, et bien connue, pour les revêtements galoisiens :

Proposition 6.2.16 Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement galoisien de groupe G . Alors $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un revêtement galoisien de groupe G .

Preuve : Remarquons que kQ'/I' est connexe car p est un revêtement galoisien.

• Nous savons d'après la Proposition 6.2.7 page 119 que $\bar{p}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant. Montrons que $\text{Aut}(\bar{p})$ agit transitivement sur les fibres de \bar{p} (lesquelles sont les fibres de p). Soient $x, x' \in Q'_0$ tels que $p(x) = p(x')$. Puisque p est un revêtement galoisien de groupe G , il existe $g \in G$ tel que $g(x) = x'$. Donc $\bar{g} \in \text{Aut}(\bar{p})$ (voir la Remarque 6.2.10 page précédente) vérifie $\bar{g}(x) = x'$. Ainsi :

$$p(x) = p(x') \implies (\exists \bar{g} \in \text{Aut}(\bar{p})) \bar{g}(x) = x'$$

Avec la Proposition 6.1.37 page 114 nous en déduisons que \bar{p} est un revêtement galoisien de groupe $\text{Aut}(\bar{p})$.

• Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que $\text{Aut}(\bar{p})$ et G sont isomorphes. Montrons que le morphisme de groupes $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Aut}(\bar{p})$ est un isomorphisme (en vertu de la Proposition 6.2.13 page précédente, la composition $G \rightarrow \text{Aut}(p) \rightarrow \text{Aut}(\bar{p})$ sera alors un isomorphisme). Puisque p agit librement sur ses fibres et que p et \bar{p} ont les mêmes fibres, le morphisme $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Aut}(\bar{p})$ est injectif. Si $g \in \text{Aut}(\bar{p})$ et si $x_0 \in Q'_0$, alors $p(x_0) = p(g(x_0))$. Puisque p est un revêtement galoisien de groupe $G = \text{Aut}(p)$, il existe $g' \in \text{Aut}(p)$ tel que $g'(x_0) = g(x_0)$. D'après le Corollaire 6.1.20 page 112 cela implique que $g = \bar{g}'$. Le morphisme de groupes $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Aut}(\bar{p})$ est donc un isomorphisme de groupes. Donc \bar{p} est un revêtement galoisien de groupe $\text{Aut}(\bar{p}) \simeq \text{Aut}(p) \simeq G$. \square

Nous allons à présent donner la définition du revêtement universel d'un carquois lié connexe. Cette définition est due à R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29] (voir également [9] et [19]). Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soit $x_0 \in Q_0$. Nous définissons le carquois \bar{Q} de la façon suivante :

- \tilde{Q}_0 est l'ensemble des classes $[\gamma]$ de \sim_I -équivalence de promenades γ de Q de source x_0 ,
- Etant donnés $[\gamma], [\gamma'] \in \tilde{Q}_0$, l'ensemble des flèches $[\gamma] \rightarrow [\gamma']$ est l'ensemble des couples $(\alpha, [\gamma])$ tels que $\alpha \in Q_1$ et $[\gamma'] = [\alpha\gamma]$.

Nous disposons alors d'un morphisme de carquois $p_0: \tilde{Q} \rightarrow Q$ défini comme suit :

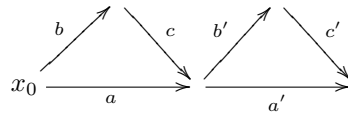
- $p_0([\gamma]) = t(\gamma)$ pour tout $[\gamma] \in \tilde{Q}$,
- $p_0((\alpha, [\gamma])) = \alpha$ pour tout $(\alpha, [\gamma]) \in \tilde{Q}_1$.

Soit $\tilde{I} = p_0^{-1}(I)$. Alors $p_0: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement galoisien de groupe $\pi_1(Q, I)$. L'action de $\pi_1(Q, I)$ sur (\tilde{Q}, \tilde{I}) est décrite comme suit : soit $g = [\gamma] \in \pi_1(Q, I)$ où γ est une promenade de Q de source et terminus x_0 . Alors :

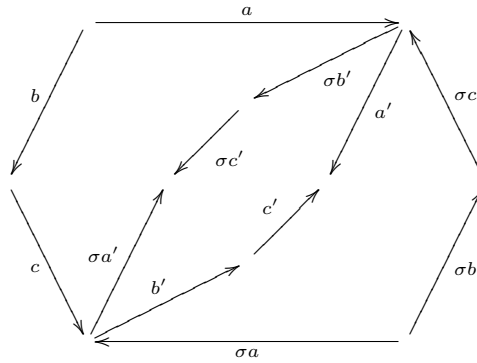
- $g.[\gamma'] = [\gamma'\gamma^{-1}]$ pour tout $[\gamma'] \in \tilde{Q}_0$,
- $g.(\alpha, [\gamma']) = (\alpha, [\gamma'\gamma^{-1}])$ pour toute flèche $(\alpha, [\gamma']) \in \tilde{Q}_1$.

Le revêtement $p_0: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ sera appelé le **revêtement universel** de (Q, I) (défini par le sommet x_0).

Exemple 6.2.17 (voir [10]) Soit Q le carquois :



et soit $I = \langle a'a + c'b'cb, a'cb + c'b'a \rangle$. Alors $\pi_1(Q, I) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit $\sigma = [b^{-1}c^{-1}a]$ le générateur de $\pi_1(Q, I)$. Alors \tilde{Q} est égal à :

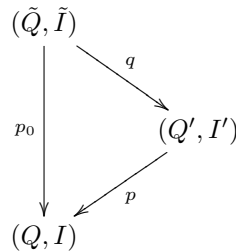


et $\tilde{I} = \langle a'a + c'b'cb, \sigma a'\sigma a + \sigma c'\sigma b'\sigma c\sigma b, \sigma a'cb + \sigma c'\sigma b'a, a'\sigma c\sigma b + c'b'\sigma a \rangle$. Le revêtement universel $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ est défini par :

$$p(\sigma x) = p(x) = x \text{ pour tout } x \in Q_1$$

La propriété principale du revêtement universel est décrite dans la Proposition suivante due à R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans [29].

Proposition 6.2.18 (voir [29]) Soit (Q, I) un carquois lié, soit $x_0 \in Q_0$ et soit $p_0: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ le revêtement universel de (Q, I) . Pour tout revêtement connexe $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ il existe un revêtement $q: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q', I')$ tel que le diagramme suivant commute :



Si de plus p est galoisien de groupe G , alors q est galoisien de groupe $\pi_1(Q', I')$ et il existe une suite exacte de groupes :

$$1 \rightarrow \pi_1(Q', I') \xrightarrow{p_*} \pi_1(Q, I) \rightarrow G \rightarrow 1$$

Nous rappelons maintenant une autre manière de considérer les revêtements galoisiens de carquois lié, elle est due à E. L. Green (voir [19]).

Étant donné un carquois Q , une **fonction de poids sur Q** est une application $W: Q_1 \rightarrow G$ où G est un groupe. Une telle fonction de poids s'étend sur les chemins et les promenades de Q de la façon suivante :

$$W(\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}) = W(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots W(\alpha_1)^{\varepsilon_1}$$

Si u est une promenade (en particulier si u est un chemin ou une flèche) de Q , l'élément $W(u)$ de G sera appelé le **poids de u** . Notons que si deux promenades γ et γ' de Q sont telles que la concaténation $\gamma'\gamma$ est définie, alors $W(\gamma'\gamma) = W(\gamma')W(\gamma)$.

Si (Q, I) est un carquois lié et si $W: Q_1 \rightarrow G$ est une fonction de poids sur Q , nous dirons que W est **admissible** si pour toute relation minimale $r \in {}_y I_x$, deux chemins quelconques $u, v \in \text{supp}(r)$ ont le même poids.

Exemple 6.2.19 (voir [19]) Soit (Q, I) un carquois lié connexe et soit $x_0 \in Q_0$. Pour chaque sommet $x \in Q_0$ fixons γ_x une promenade de Q de source x_0 et de terminus x (de façon que $\gamma_{x_0} = e_{x_0}$) et posons $W: Q_1 \rightarrow \pi_1(Q, I)$ la fonction de poids :

$$W: \begin{array}{ccc} Q_1 & \longrightarrow & \pi_1(Q, I) \\ x \xrightarrow{\alpha} y & \longmapsto & [\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x] \end{array}$$

Alors W est une fonction de poids admissible.

Soit (Q, I) un carquois lié et soit $W: Q_1 \rightarrow G$ une fonction de poids admissible. Posons $Q \sharp G$ le carquois défini par :

- $(Q \sharp G)_0 = Q_0 \times G$,
- étant donnés $(x, s), (y, t) \in (Q \sharp G)_0$, les flèches $(x, s) \rightarrow (y, t)$ de $Q \sharp G$ sont les flèches $x \rightarrow y$ de Q de poids $t^{-1}s$.

Nous disposons donc d'un morphisme de carquois $Q \sharp G \rightarrow Q$ décrit par :

$$\begin{array}{ccc} (Q \sharp G)_0 & \rightarrow & Q_0 \\ (x, s) & \mapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (Q \sharp G)_1 & \rightarrow & Q_1 \\ (x, s) \xrightarrow{\alpha} (y, t) & \mapsto & x \xrightarrow{\alpha} y \end{array}$$

Nous noterons $I \sharp G$ l'idéal de $k(Q \sharp G)$ image réciproque de I par le morphisme $k(Q \sharp G) \rightarrow kQ$ induit par $Q \sharp G \rightarrow Q$. Alors $(Q \sharp G, I \sharp G)$ est un carquois lié, nous l'appellerons le carquois lié **smash-produit** de (Q, I) et de G (la fonction de poids W étant sous-entendue) et nous le noterons $(Q, I) \sharp G$. Dans toute la suite, le morphisme de carquois liés $(Q \sharp G, I \sharp G) \rightarrow (Q, I)$ sera celui défini par le morphisme de carquois $Q \sharp G \rightarrow Q$ décrit ci-dessus. E. L. Green démontre dans [19] que ce morphisme de carquois liés est un revêtement :

Proposition 6.2.20 (voir [19]) *Le morphisme de carquois liés $(Q, I) \sharp G \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement. Si de plus $Q \sharp I$ est connexe, alors c'est un revêtement galoisien de groupe G .*

L'intérêt de cette construction est qu'elle permet de retrouver tous les revêtements galoisiens de carquois lié :

Proposition 6.2.21 (voir [19]) *Soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ un revêtement galoisien de groupe G . Alors il existe une fonction de poids admissible $W: Q_1 \rightarrow G$ ainsi qu'un diagramme commutatif de carquois liés :*

$$\begin{array}{ccc} (Q, I) \sharp G & \xrightarrow{\sim} & (Q', I') \\ & \searrow & \swarrow p \\ & (Q, I) & \end{array}$$

où le morphisme horizontal est un isomorphisme. En outre, si p est le revêtement universel de (Q, I) défini par le sommet $x_0 \in Q_0$, alors nous pouvons supposer que $W: Q_1 \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est l'une quelconque des fonctions de poids décrites dans l'Exemple 6.2.19.

6.2.2 Présentation de revêtements

Nous avons vu dans la sous-Section précédente qu'un revêtement de carquois lié définit un foncteur couvrant. Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à l'opération inverse : partant d'un foncteur couvrant, est-il possible de construire un revêtement de carquois lié dont le foncteur couvrant associé est le foncteur couvrant de départ ?

Définition 6.2.22 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant. F est dit **présentable** si il existe des présentations admissibles $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ (de noyau I') et $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ (de noyau I) ainsi un revêtement de carquois liés $p: (Q', I) \rightarrow (Q, I)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{E} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Si en outre p est un revêtement galoisien, nous dirons que F est présentable par un revêtement galoisien.

Remarque 6.2.23 Si $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur couvrant présentable, alors \mathcal{B} et \mathcal{E} sont localement bornées puisqu'elles admettent chacune une présentation admissible.

Avec les notations de la Définition 6.2.22, si $\alpha \in Q_1$ alors tout relèvement de $\nu(\alpha)$ par rapport à F (à source ou terminus fixé) s'écrit $\mu(\alpha')$ avec $\alpha' \in Q'_1$ vérifiant $\alpha = p(\alpha')$. Donc tout relèvement de $\nu(\alpha)$ est un morphisme de \mathcal{C}' et pas seulement une somme de morphismes non parallèles. Partant de cette remarque nous pouvons démontrer le Lemme suivant sur la présentabilité d'un foncteur couvrant :

Lemme 6.2.24 Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur couvrant avec \mathcal{B} localement bornée. Supposons que $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ est une présentation admissible (de noyau I) telle que pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$ et tout $x' \in F^{-1}(x)$, le relèvement de $\nu(\alpha)$ de source x' par rapport à F est un morphisme de \mathcal{E} .

Alors il existe une présentation admissible $\nu': kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ (de noyau I') ainsi qu'un revêtement de carquois lié $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\nu}'} & \mathcal{E} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{B} \end{array}$$

En particulier, F est présentable.

Preuve : • Soient $x, y \in \mathcal{E}_0$. Rappelons que d'après la Propriété 6.1.11 page 107, le foncteur couvrant F définit un diagramme commutatif d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{y' \in F^{-1}(F(y))} y' \mathcal{R}\mathcal{E}_x & \xrightarrow{\lambda} & F(y) \mathcal{R}\mathcal{B}_{F(x)} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \bigoplus_{y' \in F^{-1}(F(y))} y' (\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x & \xrightarrow{\theta} & F(y) (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{F(x)} \end{array} \quad (1)$$

où les flèches verticales sont les surjections naturelles et les flèches horizontales (λ et θ) sont les isomorphismes induits par F .

Posons $A = \{\nu(\alpha) \mid F(x) \xrightarrow{\alpha} F(y) \in Q_1\} \subseteq F(y) \mathcal{R}\mathcal{B}_{F(x)}$. Etant donné que $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ est une présentation admissible, l'ensemble $p_2(A)$ est une base de $F(y) (\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{F(x)}$. Posons $B = \lambda^{-1}(A)$. Les éléments de B sont donc les relèvements respectif de source x par rapport à F des éléments de A . D'après l'hypothèse faite sur la présentation ν , l'ensemble B est donc constitué de morphismes de \mathcal{E} . Donc :

$$B \subseteq \bigcup_{y' \in F^{-1}(F(y))} y' \mathcal{R}\mathcal{E}_x$$

Posons $B_{y'} = B \cap {}_{y'}\mathcal{R}\mathcal{E}_x$ pour $y' \in F^{-1}(F(y))$, de sorte que $B = \bigcup_{y' \in F^{-1}(F(y))} B_{y'}$. Remarquons que nous avons en particulier $p_1(B_{y'}) \subseteq {}_{y'}(\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x$ pour tout $y' \in F^{-1}(F(y))$. Puisque $p_2(A)$ est une base de ${}_{F(x)}(\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_{F(x)}$, puisque θ est un isomorphisme et puisque le diagramme (1) commute, il vient :

$$p_1(B) = \theta^{-1}p_2(A) \text{ est une base de } \bigoplus_{y' \in F^{-1}(F(y))} {}_{y'}(\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x$$

Etant donné que $p_1(B) = \bigcup_{y' \in F^{-1}(F(y))} p_1(B_{y'})$ et que $p_1(B_{y'}) \subseteq {}_{y'}(\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x$, nous en déduisons que $p_1(B_{y'})$ est une base de ${}_{y'}(\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x$ pour tout $y' \in F^{-1}(F(y))$. Nous avons donc :

- $B_y \subseteq {}_y\mathcal{R}\mathcal{E}_x$,
- $F(B_y)$ (qui est égal à $\lambda(B_y) \subseteq A$) est constitué d'images par ν de flèches de Q ,
- $p_1(B_y)$ est une base de ${}_y(\mathcal{R}\mathcal{E}/\mathcal{R}^2\mathcal{E})_x$.

• En appliquant le point précédent à tous $x, y \in \mathcal{E}_0$, nous déduisons, grâce à la Remarque 2.3.14 page 31 qu'il existe une présentation admissible $\nu': kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ telle que :

$$(\forall x \xrightarrow{\alpha} y \in Q'_1) (\exists F(x) \xrightarrow{\alpha'} F(y) \in Q_1) \quad F(\nu'(\alpha)) = \nu(\alpha') \quad (2)$$

Remarquons que si $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q'_1$ est une flèche de Q' et si α', α'' sont des flèches de Q de source $F(x)$, de terminus $F(y)$ et vérifiant $F(\nu'(\alpha)) = \nu(\alpha') = \nu(\alpha'')$, alors $\nu(\alpha' - \alpha'') = 0$ donc $\alpha' - \alpha'' \in \text{Ker}(\nu) \subseteq (kQ^+)^2$ et $\alpha' = \alpha''$. La flèche α' dans la propriété (2) ci-dessus est donc unique, nous la noterons $p(\alpha)$. Soit $p: Q'_0 \rightarrow Q_0$ l'application $x \mapsto F(x)$. Nous disposons donc d'un morphisme de carquois $p: Q' \rightarrow Q$ vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall \alpha \in Q'_1) \quad F(\nu'(\alpha)) = \nu(p(\alpha))$$

De ce fait, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ' & \xrightarrow{\nu'} & \mathcal{E} \\ p \downarrow & & \downarrow F \\ kQ & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{B} \end{array}$$

Posons $I' = \text{Ker}(\nu')$. Notons que :

$$u \in {}_y I'_x \Rightarrow \nu(p(u)) = F(\nu'(u)) = F(0) = 0 \Rightarrow p(u) \in {}_{p(y)} I_{p(x)}$$

Donc $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un morphisme de carquois liés et le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\nu}'} & \mathcal{E} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Rappelons que $\bar{\nu}$ et $\bar{\mu}$ sont des isomorphismes. Puisque F est un foncteur couvrant, la Propriété 6.2.9 page 120 implique que p est un revêtement de carquois lié. Le Lemme est ainsi démontré. \square

Grâce au Lemme 6.2.24 page précédente nous pouvons démontrer un premier résultat établissant la présentabilité d'un foncteur couvrant.

Propriété 6.2.25 Soient $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ et $F': \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs couvrants. Supposons que $F \circ F'$ est présentable. Alors F et F' sont présentables.

Preuve : Puisque $FF': \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}$ est présentable, il existe des présentations admissibles $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ (de noyau I) et $\nu'': kQ'' \rightarrow \mathcal{C}''$ (de noyau I'') ainsi qu'un revêtement de carquois lié $p: (Q'', I'') \rightarrow (Q, I)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ''/I'' & \xrightarrow{\nu''} & \mathcal{C}'' \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow FF' \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{C} \end{array}$$

• Montrons que F est présentable. Soit $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q_1$ une flèche de Q et soit $x' \in F^{-1}(x)$. Fixons $x'' \in F'^{-1}(x')$ (donc $x'' \in (FF')^{-1}(x)$). Puisque $p: Q'' \rightarrow Q$ est un revêtement de carquois, il existe une flèche $x'' \xrightarrow{\alpha''} y'' \in Q''_1$ telle que $\alpha = p(\alpha'')$. Nous avons donc :

- $F'(\nu''(\alpha'')) \in_{F'(y'')} \mathcal{C}'_{x'}$,
- $F(F'(\nu''(\alpha''))) = \nu(p(\alpha'')) = \nu(\alpha)$.

Donc le relèvement de $\nu(\alpha)$ de source x' par rapport à F est égal à $F'(\nu''(\alpha'')) \in_{F'(y'')} \mathcal{C}'_{x'}$, c'est donc un morphisme de \mathcal{C}' . Ceci étant vrai pour toute flèche α de Q , nous en déduisons, d'après le Lemme 6.2.24 page 125, l'existence d'une présentation admissible $\nu': kQ' \rightarrow \mathcal{C}'$ (de noyau I') ainsi que d'un revêtement de carquois lié $q: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\nu}'} & \mathcal{C}' \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{C} \end{array}$$

Ainsi F est présentable.

• Montrons à présent que F' est présentable. Posons $q': Q''_0 \rightarrow Q'_0$ l'application $x \mapsto F'(x)$. Soit $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q''_1$ une flèche de Q'' . Puisque $q: Q' \rightarrow Q$ est un revêtement, il existe une unique flèche $F'(x) \xrightarrow{\alpha'} y' \in Q'_1$ de source $F'(x)$ telle que $q(\alpha') = p(\alpha)$. Nous avons alors :

$$F(F'\nu''(\alpha)) = \nu(p(\alpha)) = \nu(q(\alpha')) = F(\nu'(\alpha'))$$

Puisque F est un foncteur couvrant, nous en déduisons que $\nu'(\alpha') = F'(\nu''(\alpha))$ (en particulier, $y' = F'(y)$). Ainsi, pour toute flèche $x \xrightarrow{\alpha} y \in Q''_1$ de Q'' il existe une et une seule flèche $F'(x) \xrightarrow{\alpha'} F'(y) \in Q'_1$ de Q' , que nous noterons $q'(\alpha)$, telle que $q(q'(\alpha)) = p(\alpha)$ et vérifiant :

$$F' \circ \nu''(\alpha) = \nu'(q'(\alpha))$$

Nous avons ainsi construit un morphisme de carquois $q': Q'' \rightarrow Q'$ tel que $q \circ q' = p$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'' & \xrightarrow{\nu''} & \mathcal{C}'' \\ q' \downarrow & & \downarrow F' \\ kQ' & \xrightarrow{\nu'} & \mathcal{C}' \end{array}$$

En particulier :

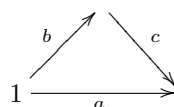
$$u \in {}_y I''_x \Rightarrow \nu'(q'(u)) = F'(\nu''(u)) = F'(0) = 0 \Rightarrow u \in {}_{q'(y)} I'_{q'(x)}$$

Donc $q': (Q'', I'') \rightarrow (Q', I')$ est un morphisme de carquois liés, et le diagramme suivant commute :

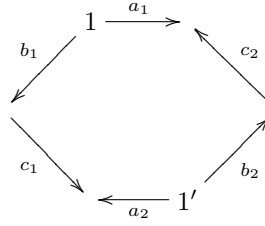
$$\begin{array}{ccc} kQ''/I'' & \xrightarrow{\bar{\nu}''} & \mathcal{C}'' \\ \bar{q}'' \downarrow & & \downarrow F' \\ kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\nu}'} & \mathcal{C}' \end{array}$$

Avec la Propriété 6.2.9 page 120, il vient : q' est un revêtement de carquois lié. Ainsi, q' est un revêtement, $q \circ q' = p$ et F' est présentable. □

Exemple 6.2.26 Soit Q le carquois :



Soit Q' le carquois :



Posons $\mathcal{E} = kQ'$ et $\mathcal{B} = kQ$. Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ défini par :

- $F(a_1) = a$, $F(b_i) = b$ et $F(c_i) = c$ pour $i \in \{1, 2\}$,
- $F(a_2) = a + cb$.

Alors F est un foncteur couvrant non présentable.

Le Lemme 6.2.24 page 125 nous permet également de démontrer la présentabilité des revêtements de k -catégories contraintes.

Proposition 6.2.27 Soit $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur couvrant. Supposons que \mathcal{C} est localement bornée et contrainte. Alors F est présentable.

Preuve : Soit Q le carquois ordinaire de \mathcal{C} et soit $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{C}$ une présentation admissible quelconque. Notons $I = \text{Ker}(\nu)$. Soit $\alpha \in Q_1$ une flèche de source x et de terminus y de Q et soit $x' \in F^{-1}(x)$. Puisque \mathcal{C} est contrainte, nous avons $\dim_k {}_y\mathcal{C}_x = 1$. D'autre part, nous disposons de l'isomorphisme induit par le foncteur couvrant F :

$$\bigoplus_{y' \in F^{-1}(y)} {}_{y'}\mathcal{C}'_{x'} \xrightarrow{F} {}_y\mathcal{C}_x$$

Donc il existe un unique $y_0 \in F^{-1}(y)$ tel que :

- $\dim_k {}_{y_0}\mathcal{C}'_{x'} = 1$,
- ${}_{y'}\mathcal{C}'_{x'} = 0$ pour $y' \in F^{-1}(y) \setminus \{y_0\}$.

Puisque $\nu(\alpha) \neq 0$, le relèvement de $\nu(\alpha)$ de source x' par rapport à F appartient nécessairement à ${}_{y_0}\mathcal{C}'_{x'}$, c'est donc un morphisme de \mathcal{C}' . Le foncteur couvrant F et la présentation admissible ν vérifient donc les hypothèses du Lemme 6.2.24 page 125. Donc F est présentable. \square

Tous les foncteurs couvrants ne sont pas présentables. Néanmoins la question de la présentabilité est plus aisée à traiter dans le cas des revêtements galoisiens de k -catégories. Avant d'examiner ce cas nous donnons une description alternative des revêtements galoisiens, elle est due à C. Cibils et E. N. Marcos dans [14].

Définition 6.2.28 (voir [14]) Soit \mathcal{C} une k -catégorie G -graduée. La catégorie **smash-produit** $\mathcal{C} \sharp G$ est définie comme suit :

- l'ensemble des objets est $\mathcal{C}_0 \times G$,
- si (x, s) et (y, t) sont des objets de $\mathcal{C} \sharp G$, alors l'espace des morphismes $(x, s) \rightarrow (y, t)$ est ${}_y\mathcal{C}_x^{t^{-1}s}$,
- la composition des morphismes est induite par la composition des morphismes de \mathcal{C} .

Nous dirons que la G -gradation de \mathcal{C} est connexe si $\mathcal{C} \sharp G$ est connexe.

Remarque 6.2.29 Si la G -gradation de \mathcal{C} est connexe, alors G est engendré par l'ensemble des degrés des morphismes homogènes non nuls de \mathcal{C} .

Etant donnée une k -catégorie G -graduée \mathcal{C} , nous disposons d'un morphisme naturel $\mathcal{C} \sharp G \rightarrow \mathcal{C}$ défini comme suit :

- l'image de l'objet $(x, s) \in \mathcal{C} \sharp G$ est $x \in \mathcal{C}_0$,
- l'image du morphisme $u \in {}_{(y,t)}(\mathcal{C} \sharp G)_{(x,s)} = {}_y\mathcal{C}_x^{t^{-1}s}$ est $u \in {}_y\mathcal{C}_x$.

Dans toute la suite, lorsque nous considérerons un morphisme $\mathcal{C} \sharp G \rightarrow \mathcal{C}$ sans autre précision, ce sera celui que nous venons de définir. L'intérêt de cette construction est donné par la Proposition suivante due à C. Cibils et E. N. Marcos dans [14]

Proposition 6.2.30 (voir [14]) *Le morphisme $\mathcal{C}\sharp G \rightarrow \mathcal{C}$ associé à une G -catégorie \mathcal{C} est un revêtement galoisien de groupe G . Réciproquement, si $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est un revêtement galoisien de de groupe G , alors il existe une G -graduation sur \mathcal{C} ainsi qu'un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\sharp G & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}' \\ & \searrow & \swarrow F \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

où la flèche horizontale est un isomorphisme.

Remarquons que la construction smash-produit pour les carquois liés et pour les k -catégories coïncident au sens suivant :

Propriété 6.2.31 *Soit (Q, I) un carquois lié. Soit $W: Q_1 \rightarrow G$ une fonction de poids admissible. Posons $(Q', I') = (Q, I)\sharp G$ et soit $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ le revêtement de carquois lié associé à W (voir la Proposition 6.2.20 page 124). Alors W définit une G -graduation de kQ/I , notons $F: (kQ/I)\sharp G \rightarrow kQ/I$ le morphisme naturel. Il existe alors un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\sim} & (kQ/I)\sharp G \\ & \searrow \bar{p} & \swarrow F \\ & & kQ/I \end{array}$$

où la flèche horizontale est un isomorphisme.

Preuve : Pour $u \in {}_y kQ_x$ nous noterons $\bar{u} = u \bmod I \in {}_x (kQ/I)_y$.

• Pour $x, y \in Q_0$ et $g \in G$, soit ${}_y kQ_x^g$ le sous-espace vectoriel de ${}_y kQ_x$ engendré par les chemins de Q de source x , de terminus y et de poids g . Puisque W est une fonction multiplicative des chemins de Q (par rapport à la concaténation) nous obtenons ainsi une G -graduation de kQ . Puisque W est une fonction de poids admissible, l'idéal I est un idéal homogène de la k -catégorie G -graduée kQ (en effet, I est engendré par l'ensemble de ses relations monomiales, et toute relation monomiale est un morphisme homogène de kQ car W est admissible). De cette façon, kQ/I est une k -catégorie G -graduée.

• Soit $\psi: (Q\sharp G)_0 = Q_0 \times G \rightarrow (kQ/I\sharp G)_0 = Q_0 \times G$ l'application identité. Soit $(x, s) \xrightarrow{\alpha} (y, t) \in (Q\sharp G)_1$. Ainsi α est une flèche de Q de source x , de terminus y et de poids $t^{-1}s$. Donc $\bar{\alpha} \in {}_y (kQ/I)_x^{t^{-1}s}$ et nous posons :

$$\psi((x, s) \xrightarrow{\alpha} (y, t)) = \bar{\alpha} \in {}_{(y,t)}(kQ/I)_{(x,s)} = {}_y (kQ/I)_x^{t^{-1}s}$$

De cette façon, $F \circ \psi(\alpha) = p(\alpha)$ pour toute flèche $\alpha \in (Q\sharp G)_1$. Ainsi, nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k(Q\sharp G) & \xrightarrow{\psi} & (kQ/I)\sharp G \\ p \downarrow & & \downarrow F \\ kQ & \longrightarrow & kQ/I \end{array}$$

où la flèche verticale du bas est le quotient $kQ \rightarrow kQ/I$. En particulier :

$$r \in {}_y (I\sharp G)_x \Rightarrow F \circ \psi(r) = p(r) \bmod I = 0 \Rightarrow \psi(r) = 0$$

la dernière implication résultant du fait que F est un foncteur couvrant. Ceci montre que $\psi(I\sharp G) = 0$. Nous avons donc un diagramme commutatif (rappelons que $(Q', I') = (Q, I)\sharp G$) :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\psi}} & (kQ/I)\sharp G \\ & \searrow \bar{p} & \swarrow F \\ & & kQ/I \end{array}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $\bar{\psi}: kQ'/I' \rightarrow (kQ/I)\sharp G$ est un isomorphisme. Rappelons que par construction $\bar{\psi}: Q'_0 \rightarrow ((kQ/I)\sharp G)_0$ est l'application identité. D'après la Proposition 6.1.17 page 110 nous savons que $\bar{\psi}: kQ'/I' \rightarrow (kQ/I)\sharp G$ est un foncteur couvrant. Etant donné que $\bar{\psi}: Q'_0 \rightarrow ((kQ/I)\sharp G)_0$ est

bijective, nous en déduisons que $\bar{\psi}$ est un isomorphisme. La Propriété est ainsi démontrée. \square

L'utilisation du smash-produit va nous permettre de présenter les revêtements galoisiens de catégories sans boucle. Notons que la Proposition qui suit a déjà été démontrée par R. Martinez-Villa et J. A. de la Peña dans le cas plus particulier où les carquois ordinaires des k -catégories concernées sont supposés être sans flèches multiples (voir [29]). La démonstration de la Proposition 6.2.32 utilise les constructions smash-produit dues à E. L. Green (dans [19]) d'une part et à C. Cibils et E. N. Marcos (dans [14]) d'autre part.

Proposition 6.2.32 *Soit $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revêtement galoisien de groupe G avec \mathcal{B} localement bornée. Supposons que le carquois ordinaire de \mathcal{B} n'a pas de boucle. Alors F est présentable. Si en outre \mathcal{E} est connexe, alors F est présentable par un revêtement galoisien.*

Preuve : D'après la Proposition 6.2.30 page précédente, nous pouvons supposer que \mathcal{B} est G -graduée, que $\mathcal{E} = \mathcal{B} \sharp G$ et que $F: \mathcal{E} = \mathcal{B} \sharp G \rightarrow \mathcal{B}$ est le morphisme naturel. Nous noterons Q le carquois ordinaire de \mathcal{B} .

La démonstration va se faire en plusieurs étapes :

- construire une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ (de noyau I) telle que l'image par ν d'un chemin de Q est un morphisme homogène de \mathcal{B} ,
- la présentation ν définit une fonction de poids admissible W sur le carquois lié (Q, I) , nous obtenons ainsi un revêtement de carquois lié $q: (Q', I') = (Q, I) \sharp G \rightarrow (Q, I)$,
- construire une présentation admissible $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ telle que $F \circ \mu = \nu \circ q$,
- montrer que $\text{Ker}(\mu) = I'$ et conclure.

• Soient $x, y \in \mathcal{B}_0$ tels que ${}_y(\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_x \neq 0$. Puisque \mathcal{B} n'a pas de boucle, nous avons $x \neq y$ et ${}_y\mathcal{B}_x = {}_y\mathcal{R}\mathcal{B}_x$. Puisque ${}_y\mathcal{B}_x = \bigoplus_{g \in G} {}_y\mathcal{B}_x^g$, il existe une base de ${}_y\mathcal{R}_x$ constituée d'éléments homogènes. De cette

base il est possible d'extraire une famille d'éléments dont les images dans ${}_y(\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_x$ forment une base de ${}_y(\mathcal{R}\mathcal{B}/\mathcal{R}^2\mathcal{B})_x$. D'après la Remarque 2.3.14 page 31, cela définit une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ et par construction, pour toute flèche $\alpha \in Q_1$, le morphisme $\nu(\alpha)$ de \mathcal{B} est homogène. Donc pour tout chemin u de Q , le morphisme $\nu(u)$ de \mathcal{B} est homogène.

• Posons $I = \text{Ker}(\nu)$ et soit $W: Q_1 \rightarrow G$ la fonction de poids associant à toute flèche $\alpha \in Q_1$ le degré du morphisme homogène $\nu(\alpha)$ de \mathcal{B} . De cette façon, pour tout chemin u de Q de source x et de terminus y nous avons :

$$\nu(u) \in {}_y\mathcal{B}_x^{W(u)}$$

Montrons que W est une fonction de poids admissible de (Q, I) . Soit $r \in {}_yI_x$ une relation minimale et soit $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ une forme normale. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $\nu(u_i) \in {}_y\mathcal{B}_x^{W(u_i)}$. Donc :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad \nu(u_i) = F(\nu(u_i) \in (y,1)\mathcal{E}_{(x,W(u_i))})$$

Ainsi $0 = \nu(r) = \sum_{i=1}^n t_i \nu(u_i)$ est l'image de $\sum_{i=1}^n t_i \nu(u_i) \in \bigoplus_{g \in G} (y,1)\mathcal{E}_{(x,g)}$ par l'isomorphisme suivant induit par F :

$$\bigoplus_{g \in G} (y,1)\mathcal{E}_{(x,g)} \xrightarrow{F} {}_y\mathcal{B}_x$$

Il vient donc $0 = \sum_{i=1}^n t_i \nu(u_i) \in \bigoplus_{g \in G} (y,1)\mathcal{E}_{(x,g)}$. Cela signifie que pour tout $g \in G$:

$$\text{l'élément} \quad \sum_{i \text{ tel que } W(u_i)=g} t_i \nu(u_i) \text{ de } (y,1)\mathcal{E}_{(x,g)} = {}_y\mathcal{B}_x^g \text{ est nul}$$

Donc :

$$(\forall g \in G) \quad \sum_{i \text{ tel que } W(u_i)=g} t_i u_i \in {}_yI_x$$

Puisque r est une relation minimale et puisque $r = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ est une forme normale, il vient :

$$(\forall g \in G) \quad \{i \in \{1, \dots, n\} \mid W(u_i) = g\} = \emptyset \text{ ou } \{1, \dots, n\}$$

Posons $g = W(u_1)$, donc :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad W(u_i) = g = W(u_1)$$

ceci montre que W est une fonction de poids admissible de (Q, I) . Nous noterons $(Q', I') = (Q, I) \sharp G$ et $q: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ le morphisme naturel. Notons que d'après la Proposition 6.2.20 page 124, q est un revêtement de carquois lié et il est galoisien de groupe G si Q' est connexe.

• Construisons à présent la présentation $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$. Nous poserons $\mu(x, s) = (x, s) \in \mathcal{E}_0$ pour tout $(x, s) \in Q'_0 = Q_0 \times G$. Soit $(x, s) \xrightarrow{\alpha} (y, t) \in Q'_1$. Donc $\alpha = q(\alpha)$ est également une flèche de Q de source x , de terminus y et de poids $t^{-1}s$. Ainsi $\nu(\alpha) \in {}_y\mathcal{B}_x^{t^{-1}s}$. Posons alors :

$$\mu((x, s) \xrightarrow{\alpha} (y, t)) = \nu(\alpha) \in {}_{(y,t)}\mathcal{E}_{(x,s)} = {}_y\mathcal{B}_x^{t^{-1}s}$$

Nous disposons ainsi d'un morphisme de k -catégories $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ tel que $\nu(q(\alpha)) = F(\mu(\alpha))$ pour toute flèche $\alpha \in Q'_1$. Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ' & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{E} \\ q \downarrow & & \downarrow F \\ kQ & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{B} \end{array}$$

Montrons que $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ est une présentation admissible, pour cela il suffit de montrer que :

- $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ est plein,
- $\text{Ker}(\mu)$ est un idéal admissible de kQ' .

Soit $u \in {}_{(y,t)}\mathcal{E}_{(x,s)} = {}_y\mathcal{B}_x^{t^{-1}s}$. Puisque ν est une présentation admissible, il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n t_i u_i$ de chemins de Q telle que $u = F(u) = \sum_{i=1}^n t_i \nu(u_i)$. Nous pouvons en outre supposer que $W(u_i) = t^{-1}s$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (ceci est possible car I est un idéal homogène de kQ). Donc u_1, \dots, u_n sont des chemins de Q de source x , de terminus y et de poids $W(u_i) = t^{-1}s$, ce sont donc également des chemins de Q' de source (x, s) et de terminus (y, t) vérifiant $q(u_i) = u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc :

- $u = F(u) = \nu(\sum_{i=1}^n t_i u_i)$,
- $\sum_{i=1}^n t_i u_i = q(\sum_{i=1}^n t_i u_i) \in {}_{(y,t)}kQ'_{(x,s)}$.

Nous avons donc :

$$F(u) = \nu \circ q(\sum_{i=1}^n t_i u_i) = F \circ \mu(\sum_{i=1}^n t_i u_i) \in {}_{(y,t)}kQ'_{(x,s)}$$

Puisque F est un foncteur couvrant, cela entraîne : $u = \mu(\sum_{i=1}^n t_i u_i)$. Donc $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ est plein.

Montrons à présent que $\text{Ker}(\mu)$ est un idéal admissible de kQ' . Pour cela il suffit de montrer que $\text{Ker}(\mu) = I'$. Si $u \in {}_{(y,t)}I'_{(x,s)}$ alors $q(u) \in I = \text{Ker}(\nu)$ et $F \circ \mu(u) = \nu \circ q(u) = 0$. Donc $\mu(u) = 0$ (car F est un foncteur couvrant) puis $u \in \text{Ker}(\mu)$. Ainsi $I' \subseteq \text{Ker}(\mu)$. Si $u \in {}_{(y,t)}\text{Ker}(\mu)_{(x,s)}$ alors $\nu \circ q(u) = F \circ \mu(u) = F(0) = 0$ et $q(u) \in \text{Ker}(\nu) = I$. Nous avons donc :

- $\bar{q}: kQ'/I' \rightarrow kQ/I$ est un foncteur couvrant (d'après la Proposition 6.2.7 page 119),
- $\bar{q}(u \text{ mod } I') = 0$.

donc $u \in I'$. Ceci montre que $\text{Ker}(\mu) \subseteq I'$. Donc $I' = \text{Ker}(\mu)$.

• $\nu: kQ \rightarrow \mathcal{B}$ et $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{E}$ sont donc des présentations admissibles de noyaux respectifs I et I' , et $q: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement de carquois lié (galoisien de groupe G si Q' est connexe) tel que $F \circ \mu = \nu \circ q$. Nous disposons donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{E} \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Ceci montre que F est présentable. Si de plus \mathcal{E} est connexe, alors Q' est connexe et $q: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ est un revêtement galoisien de groupe G . \square

L'exemple qui suit montre que l'hypothèse sur les boucles de \mathcal{E} ne peut pas être supprimée dans la Proposition 6.2.32 page 130.

Exemple 6.2.33 *Supposons que $\text{car}(k) = 2$. Soit $\mathcal{E} = M_2(k)$ l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans k . Posons :*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La décomposition $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2$ fait de \mathcal{E} une k -catégorie telle que :

$${}_1\mathcal{E}_1 = k.e_1, \quad {}_2\mathcal{E}_2 = k.e_2, \quad {}_1\mathcal{E}_2 = k.a, \quad {}_2\mathcal{E}_1 = k.b$$

Soit $\mathcal{B} = k[X]/(X^2)$ (\mathcal{B} est une k -catégorie avec un seul objet). Alors le morphisme $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ défini par :

$$F(e_1) = 1, \quad F(e_2) = 1, \quad F(a) = F(b) = 1 + X \text{ mod } X^2$$

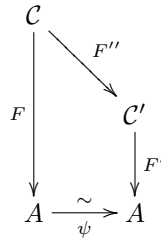
est un revêtement galoisien connexe de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre F n'est pas présentable car $F(\mathcal{R}\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{R}\mathcal{B}$.

6.3 Revêtement universel d'une algèbre sans double raccourci ou monomiale sans flèches multiples

Soit A une k -algèbre connexe de dimension finie et basique. Fixons un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux $\{e_1, \dots, e_n\}$ faisant de A une k -catégorie. Notons Q le carquois ordinaire de A . Fixons $x_0 \in Q_0$ un sommet de base pour le calcul des groupes fondamentaux des présentations admissibles de A . Dans toute cette Section, nous supposons que Q n'a pas de cycle orienté.

Commençons par définir la notion de revêtement universel d'une k -algèbre.

Définition 6.3.1 *Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ un revêtement galoisien connexe. Alors F est un **revêtement universel** de A si pour tout revêtement galoisien connexe $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$ il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*

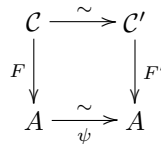


avec $\psi \in \text{Aut}_0(A)$.

Le lecteur peut constater que la définition du revêtement universel d'une algèbre est plus faible celle du revêtement universel d'un espace topologique (du fait de l'existence de $\psi \in \text{Aut}_0(A)$). Nous verrons plus loin qu'il n'est pas possible de renforcer cette définition.

Afin d'alléger le texte nous introduisons la notion d'équivalence entre revêtements galoisiens.

Définition 6.3.2 *Etant donnés deux revêtement galoisiens $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ et $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$, nous dirons que F et F' sont **équivalents** si il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*



où les flèches horizontales sont des isomorphismes et où $\psi \in \text{Aut}_0(A)$.

En termes imprécis, un revêtement universel de A est donc un revêtement galoisien connexe de A qui est factorisé «à équivalence près de revêtements galoisiens» par un tout revêtement galoisien connexe de A . Notons la propriété suivante d'une telle factorisation.

Propriété 6.3.3 *Supposons que A a un revêtement universel $F: \mathcal{C} \rightarrow A$. Soit $\pi_1(A) = \text{Aut}(F)$ le groupe de ce revêtement galoisien. Soit $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$ un revêtement galoisien de groupe G . Alors tout morphisme $F'': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ fourni par la Définition 6.3.1 page ci-contre est un revêtement galoisien. Si H est le groupe du revêtement galoisien F' , alors il existe une suite exacte courte de groupes :*

$$1 \rightarrow H \rightarrow \pi_1(A) \rightarrow G \rightarrow 1$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la Proposition 6.1.42 page 116. \square

Remarque 6.3.4 *Soit A une k -algèbre de dimension finie et supposons que A admet un revêtement universel. En combinant la propriété universelle du revêtement universel d'un carquois lié et la présentabilité des revêtements galoisiens de A (voir la Proposition 6.2.32 page 130), nous savons que A admet un revêtement universel de la forme $k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow kQ/I \simeq A$ où $(\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ est le revêtement universel du carquois lié (Q, I) présentant A .*

Remarque 6.3.5 *Soit A une k -algèbre de dimension finie et basique. La Définition 6.3.1 page précédente pose naturellement la question suivante : si $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ est un revêtement universel, est-ce que \mathcal{C} est une catégorie simplement connexe au sens de [2] ? Autrement dit, est-ce que le groupe fondamental de tout carquois lié présentant \mathcal{C} est trivial ? Il s'agit d'une question délicate puisqu'en général, nous ne savons pas si A admet un revêtement galoisien par une catégorie est simplement connexe. Néanmoins, si A admet un revêtement universel $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ et si il existe un revêtement galoisien $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$ tel que \mathcal{C}' est simplement connexe, alors les revêtements galoisiens F et F' sont équivalents. En effet, en reprenant les notations de la Définition 6.3.1 page ci-contre, nous disposons d'un morphisme $F'': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et d'après la Propriété 6.3.3, ce morphisme est un revêtement galoisien. Dans ces conditions, $F'': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est présentable par un revêtement galoisien de carquois liés $(Q, I) \rightarrow (Q', I')$ (avec $\mathcal{C}' \simeq kQ'/I'$). Etant donné que \mathcal{C}' est simplement connexe, ce revêtement galoisien de carquois liés est un isomorphisme. Donc $F'': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un isomorphisme et F et F' sont équivalents. Donc $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$ est un revêtement universel avec \mathcal{C}' simplement connexe.*

Dans cette Section nous allons étudier l'existence d'un revêtement universel de A . Nous allons nous intéresser à deux situations :

- Q n'a pas de double raccourci et k est de caractéristique nulle,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

6.3.1 Comparaison des revêtements galoisiens de A induits par les revêtements universels de carquois lié des présentations admissibles de A

Pour cette sous-Section, fixons I un idéal admissible de kQ . Soit $\varphi \in \text{Aut}_0(kQ)$ et posons $J = \varphi(I)$. Nous disposons donc des revêtements universels de carquois lié :

- $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ de groupe $\pi_1(Q, I)$,
- $q: (\hat{Q}, \hat{J}) \rightarrow (Q, J)$ de groupe $\pi_1(Q, J)$.

En analogie avec la comparaison que nous avons faite entre \sim_I et \sim_J dans la sous-Section 4.2.3, nous allons établir un lien entre les revêtements galoisiens de k -catégories qui leur sont associés à savoir $\bar{p}: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow kQ/I$ et $\bar{q}: k\hat{Q}/\hat{J} \rightarrow kQ/J$.

Proposition 6.3.6 *Supposons que φ est une dilatation. Alors il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\sim} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & kQ/J \end{array}$$

où $k\tilde{Q}/\tilde{I} \xrightarrow{\sim} k\hat{Q}/\hat{J}$ est un isomorphisme.

Preuve : D'après la Proposition 4.2.25 page 72, les relations d'homotopie \sim_I et \sim_J coïncident. Donc les carquois \hat{Q} et \tilde{Q} sont égaux, de même que les morphismes de carquois $p: \tilde{Q} \rightarrow Q$ et $q: \hat{Q} \rightarrow Q$. Puisque φ

est une dilatation, pour tout chemin u de Q il existe $t_u \in k^*$ tel que $\varphi(u) = t_u u$. Nous disposons donc d'une dilatation $D: \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}$ définie par :

$$D(u) = t_{p(u)} u \text{ pour tout chemin } u \text{ de } \tilde{Q}$$

En particulier :

$$(\forall \alpha \in \tilde{Q}_1) \quad q \circ D(\alpha) = t_{p(\alpha)} q(\alpha) = t_{p(\alpha)} p(\alpha) = \varphi \circ p(\alpha)$$

Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q} & \xrightarrow{D} & k\hat{Q} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \end{array} \quad (d_1)$$

Montrons que $D(\tilde{I}) \subseteq \hat{J}$. Si $r \in {}_y\tilde{I}_x$ alors $q(D(r)) = \varphi(p(r)) \in I \in J$. Donc $D(r) \in {}_y\hat{J}_x$ (par construction du revêtement universel q). Ceci montre que $D(\tilde{I}) \subseteq \hat{J}$. Le diagramme (d_1) définit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\bar{D}} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & kQ/J \end{array}$$

Remarquons que :

- \bar{p} (resp. \bar{q}) est un foncteur couvrant (d'après la Proposition 6.2.7 page 119),
- $\bar{\varphi}: kQ/I \rightarrow kQ/J$ est un isomorphisme.

Donc \bar{q} et $\bar{\varphi} \circ \bar{p}$ sont des foncteurs couvrants. Puisque $k\hat{Q}/\hat{J}$ est connexe (car (\tilde{Q}, \tilde{I}) est le revêtement universel de (Q, J)), la Proposition 6.1.17 page 110 implique que $\bar{D}: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow k\hat{Q}/\hat{J}$ est un foncteur couvrant. Comme de plus la restriction de ce foncteur couvrant à l'ensemble des objets est l'identité de \tilde{Q}_0 (rappelons que D est une dilatation), \bar{D} est un isomorphisme (d'après la Remarque 6.1.5 page 106). \square

Proposition 6.3.7 *Supposons que $\varphi = \varphi_{\alpha, u, \tau}$ est une transvection et supposons que $\alpha \sim_J u$. Alors il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\psi} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & kQ/J \end{array}$$

où ψ est un revêtement galoisien de groupe le noyau du morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$ induit par l'application identité sur les promenades de Q .

Preuve : Rappelons que d'après la Proposition 4.2.33 page 76, la relation d'homotopie \sim_I est plus fine que \sim_J . En particulier, l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$. Nous disposons donc d'un morphisme de k -catégories $F: k\tilde{Q} \rightarrow k\hat{Q}$ défini par :

$$\begin{aligned} (\forall [\gamma]_I \in \tilde{Q}_0) \quad F([\gamma]_I) &= [\gamma]_J \\ (\forall (a, [\gamma]_I) \in \tilde{Q}_1) \quad F(a, [\gamma]_I) &= \begin{cases} (a, [\gamma]_J) & \text{si } a \neq \alpha \\ (\alpha, [\gamma]_J) + \tau(u, [\gamma]_J) & \text{si } a = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Où $(u, [\gamma]_J)$ désigne le chemin de \hat{Q} de source $[\gamma]_J$, de terminus $[u\gamma]_J = [\alpha\gamma]_J$ et tel que $q(u, [\gamma]_J) = u$. Donc :

$$\begin{aligned} (\forall [\gamma]_I \in \tilde{Q}_0) \quad q \circ F([\gamma]_I) &= q([\gamma]_J) = t(\gamma) = \varphi \circ p([\gamma]_I) \\ (\forall (a, [\gamma]_I) \in \tilde{Q}_1) \quad q \circ F(a, [\gamma]_I) &= \begin{cases} q(a, [\gamma]_J) = a = \varphi \circ p(a, [\gamma]_I) & \text{si } a \neq \alpha \\ q((\alpha, [\gamma]_J) + \tau(u, [\gamma]_J)) = \alpha + \tau u = \varphi \circ p(a, [\gamma]_I) & \text{si } a = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q} & \xrightarrow{F} & k\hat{Q} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \end{array} \quad (d'_1)$$

Montrons que $F(\tilde{I}) \subseteq \hat{J}$. Si $u \in {}_y\tilde{I}_x$ alors $q(F(u)) = \varphi(p(u)) \in \varphi(I) = J$ et donc $F(u) \in \hat{J}$ (car q est le revêtement universel de (Q, J)). Ainsi $F(\tilde{I}) \subseteq \hat{J}$. Pour cette raison, le diagramme (d'_1) définit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\bar{F}} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & kQ/J \end{array} \quad (d_2)$$

Posons $\psi = \bar{F}$. Le diagramme (d_2) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\bar{F}} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \searrow \bar{\varphi} \circ \bar{p} & & \swarrow \bar{q} \\ & kQ/J & \end{array}$$

Notons que :

- $\bar{\varphi} \circ \bar{p}$ est un revêtement galoisien de groupe $\pi_1(Q, I)$,
- \bar{q} est un revêtement galoisien de groupe $\pi_1(Q, J)$,
- $k\tilde{Q}/\tilde{I}$ et $k\hat{Q}/\hat{J}$ sont connexes.

La Proposition 6.1.42 page 116 implique donc que $\bar{F}: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow k\hat{Q}/\hat{J}$ est un revêtement galoisien de groupe le noyau du morphisme surjectif de groupes $\lambda: \pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$ défini par :

$$(\forall g \in \pi_1(Q, I)) \quad \bar{F} \circ g = \lambda(g) \circ \bar{F}$$

Montrons que $\lambda: \pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$ n'est autre que le morphisme de groupes induit par l'application identité sur les promenades de Q , à savoir égal à l'application : $[\gamma]_I \mapsto [\gamma]_J$. Soit $g = [\gamma]_I \in \pi_1(Q, I)$ (γ étant une promenade de Q de source et de terminus x_0), ainsi $[\gamma]_J \in \pi_1(Q, J)$. Alors $[e_{x_0}]_I \in \hat{Q}_0$, $\bar{F}([e_{x_0}]_I) = [e_{x_0}]_J \in \hat{Q}_0$ et :

$$\begin{aligned} \lambda(g)([e_{x_0}]_J) &= \lambda(g) \circ \bar{F}([e_{x_0}]_I) = \bar{F}(g([e_{x_0}]_I)) = \bar{F}([\gamma^{-1}]_I) = [\gamma^{-1}]_J \\ [\gamma]_J([e_{x_0}]_J) &= [\gamma^{-1}]_J \end{aligned}$$

Donc $\lambda(g), [\gamma]_J \in \pi_1(Q, J) = \text{Aut}(\bar{q})$ sont des automorphismes du foncteur couvrant connexe \bar{q} et ils vérifient $\lambda(g)([e_{x_0}]_J) = [\gamma]_J([e_{x_0}]_J)$. Ceci implique, d'après le Corollaire 6.1.20 page 112, que $\lambda(g) = [\gamma]_J$. Donc λ est l'application $[\gamma]_I \in \pi_1(Q, I) \mapsto [\gamma]_J$. Donc $\psi = \bar{F}$ est un revêtement galoisien de groupe le noyau du morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$ induit par l'application identité sur les promenades de Q . \square

Notons que la Proposition 6.3.7 page précédente admet la généralisation suivante.

Proposition 6.3.8 *Supposons que Q n'a pas de flèches multiples et que φ est un produit de transvections. Supposons que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ nous ayons $\alpha \sim_J u$ pour tout $u \in \text{supp}(\varphi(\alpha))$. Alors il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\psi} & k\hat{Q}/\hat{J} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & kQ/J \end{array}$$

où ψ est un revêtement galoisien de groupe le noyau du morphisme surjectif $\pi_1(Q, I) \rightarrow \pi_1(Q, J)$ induit par l'application identité sur les promenades de Q .

Preuve : Rappelons que d'après la Proposition 4.2.36 page 79 la relation d'homotopie \sim_I est plus fine que \sim_J , en particulier, l'application identité sur les promenades de Q induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \pi_1(Q, J)$.

Soit $c = \sum_{i=1}^n t_i u_i$ une combinaison linéaire de chemins de Q et qui sont \sim_J -homotopes. Soit γ une promenade de \hat{Q} de terminus égal à $s(u_1)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $(u_i, [\gamma]_J)$ le chemin de \hat{Q} de source $[\gamma]_J$ relevant le chemin u_i de Q par rapport au revêtement q . Le chemin $(u_i, [\gamma]_J)$ est donc de terminus $[u_i \gamma]_J = [u_1 \gamma]_J$. Nous disposons donc d'une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n t_i (u_i, [\gamma]_J)$ de chemins parallèles de \hat{Q} , cette combinaison linéaire est le relèvement de c de source $[\gamma]_J$ par rapport à p . Dans cette démonstration nous la noterons $(c, [\gamma]_J)$.

L'hypothèse « $\alpha \sim_J u$ pour tout $u \in \text{supp}(\varphi(\alpha))$ et pour toute flèche $\alpha \in Q_1$ » permet donc de définir un morphisme de k -catégories $\tilde{F}: k\tilde{Q} \rightarrow k\hat{Q}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\forall [\gamma]_I \in \tilde{Q}_0) \quad F([\gamma]_I) &= [\gamma]_J \\ (\forall (\alpha, [\gamma]_I) \in \tilde{Q}_1) \quad F(\alpha, [\gamma]_I) &= (\varphi(\alpha), [\gamma]_J) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\forall [\gamma]_I \in \tilde{Q}_0) \quad q \circ F([\gamma]_I) &= q([\gamma]_J) = t(\gamma) = \varphi(p([\gamma]_I)) \\ (\forall (\alpha, [\gamma]_I) \in \tilde{Q}_1) \quad q \circ F(\alpha, [\gamma]_I) &= q(\varphi(\alpha), [\gamma]_J) = \varphi(\alpha) = \varphi \circ p(\alpha, [\gamma]_I) \end{aligned}$$

Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q} & \xrightarrow{F} & k\hat{Q} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \end{array} \quad (d'_1)$$

Nous pouvons à présent suivre la démonstration de la Proposition 6.3.7 page 134 en partant du diagramme d'_1 de cette preuve (à partir du diagramme d'_1 dans la preuve de la Proposition 6.3.7 page 134, le fait que φ est une transvection n'est pas utilisé) et aboutir à la conclusion annoncée. \square

6.3.2 Condition suffisante sur A pour que A admette un revêtement universel

Intéressons nous à présent à l'existence d'un revêtement universel de A . Nous allons établir cette existence dans deux situations :

- $\text{car}(k) = 0$ et Q n'a pas de double raccourci,
- A est monomiale et Q n'a pas de flèches multiples.

Ces deux situations se traitent de façon identique, aussi nous introduisons un hypothèse (vérifiée dans chacun de ces deux cas) pour éviter des répétitions. Rappelons que Γ désigne le carquois des relations d'homotopie des présentations admissibles de A .

Nous dirons que A vérifie l'hypothèse (H) si il existe une présentation admissible $\nu_0: kQ \twoheadrightarrow A$ (de noyau noté I_0) telle que pour toute présentation admissible $kQ/I \simeq A$ il existe :

- une dilatation D ,
- des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$),

vérifiant les conditions suivantes :

- $I = D\varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, (en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$).

Remarque 6.3.9 D'après la Proposition 4.2.63 page 89 (resp. la Proposition 4.2.66 page 92), si $\text{car}(k) = 0$ et si Q n'a pas de double raccourci (resp. si A est monomiale et si Q n'a pas de flèches multiples), alors A vérifie (H) .

Remarque 6.3.10 Supposons que A vérifie (H) . Soit $kQ/I \simeq A$ une présentation admissible. En reprenant les notations de (H) nous disposons donc de présentations admissibles $kQ/I_i \simeq A$ ($i \in \{0, \dots, n\}$), telles que :

- \sim_I et \sim_{I_n} coïncident (car $I = D(I_n)$ et D est une dilatation),
- $\sim_{I_i} = \sim_{I_{i-1}}$ ou $\sim_{I_{i-1}} \rightarrow \sim_{I_i} \in \Gamma_1$ (car $I_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(I_{i-1})$ et $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$).

Donc il existe un chemin de Γ de source \sim_{I_0} et de terminus \sim_I . En particulier, Γ a une seule source : \sim_{I_0} .

Proposition 6.3.11 *Supposons que A vérifie l'hypothèse (H). Soit $p_0: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I_0)$ le revêtement universel de (Q, I) de groupe $\pi_1(Q, I_0)$. Alors $\bar{v}_0 \bar{p}_0: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow A$ est un revêtement universel de A .*

Preuve : Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ un revêtement galoisien connexe de groupe G . D'après la Proposition 6.2.32 page 130, il existe :

- une présentation admissible $\nu: kQ \rightarrow A$ (de noyau noté I),
- une présentation admissible $\mu: kQ' \rightarrow \mathcal{C}$ (de noyau noté I'),
- un revêtement galoisien $q: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ de groupe G ,

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ'/I' & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{C} \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & A \end{array} \quad (d_1)$$

Soit $p: (\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow (Q, I)$ le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I)$. D'après la Proposition 6.2.18 page 123, il existe un revêtement galoisien $r: (\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow (Q', I')$ tel que $q \circ r = p$. Nous disposons ainsi d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k\hat{Q}/\hat{I} & \xrightarrow{\bar{\mu} \circ \bar{r}} & \mathcal{C} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow F \\ kQ/I & \xrightarrow{\bar{\nu}} & A \end{array} \quad (d_2)$$

Puisque A vérifie l'hypothèse (H), il existe une dilatation D ainsi que des transvections $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$) telles que :

- $I = D\varphi_n \dots \varphi_1(I_0)$,
- $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, en posant $I_i = \varphi_i \dots \varphi_1(I_0)$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $p_i: (Q^{(i)}, I^{(i)}) \rightarrow (Q, I_i)$ le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I_i)$. Remarquons que $I = D(I_n)$, donc, d'après la Proposition 6.3.6 page 133, il existe un isomorphisme $\theta: kQ^{(n)}/I^{(n)} \rightarrow k\hat{Q}/\hat{I}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ^{(n)}/I^{(n)} & \xrightarrow{\theta} & k\hat{Q}/\hat{I} \\ \bar{p}_n \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ kQ/I_n & \xrightarrow{\bar{D}} & kQ/I \end{array}$$

D'autre part, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $\alpha_i \sim_{I_i} u_i$ avec $I_i = \varphi_{\alpha_i, u_i, \tau_i}(I_{i-1})$, donc, d'après la Proposition 6.3.7 page 134, il existe un revêtement galoisien $\psi_i: kQ^{(i-1)}/I^{(i-1)} \rightarrow kQ^{(i)}/I^{(i)}$ (en posant $I^{(0)} = \tilde{I}$ et $Q^{(0)} = \tilde{Q}$) tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} kQ^{(i-1)}/I^{(i-1)} & \xrightarrow{\psi_i} & kQ^{(i)}/I^{(i)} \\ \bar{p}_{i-1} \downarrow & & \downarrow \bar{p}_i \\ kQ/I_{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}_i} & kQ/I_i \end{array}$$

Posons $\psi' = \theta\psi_n \dots \psi_1: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow k\hat{Q}/\hat{I}$. Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\psi'} & k\hat{Q}/\hat{I} \\ \bar{p}_0 \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ kQ/I_0 & \xrightarrow{\bar{D}\bar{\varphi}_n \dots \bar{\varphi}_1} & kQ/I \end{array} \quad (d_3)$$

Posons alors :

- $\psi = \bar{\mu} \circ \bar{r} \circ \psi' : k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow \mathcal{C}$,
- $\varphi = \bar{\nu} \bar{D} \bar{\varphi}_n \dots \bar{\varphi}_1 \bar{\nu}_0^{-1} : A \xrightarrow{\sim} A$ (notons que $\varphi \in \text{Aut}_0(A)$ car $D, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Aut}_0(kQ)$ et ν et ν_0 sont deux présentations relatives au même système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A).

Les diagrammes (d_2) et (d_3) étant commutatifs, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C} \\ \bar{\nu}_0 \bar{p}_0 \downarrow & & \downarrow F \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

avec $\varphi \in \text{Aut}_0(A)$. Donc $\bar{\nu}_0 \bar{p}_0$ est un revêtement universel de A . □

La Remarque 6.3.9 page 136 et la Proposition 6.3.11 page précédente impliquent directement les théorèmes suivants :

Théorème 6.3.12 *Soit A une k -algèbre de dimension finie connexe et basique. Soit Q le carquois ordinaire de A . Supposons que :*

- k est de caractéristique nulle,
- Q n'a pas de double raccourci.

Soit $\nu : kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible (de noyau I_0) telle que \sim_{I_0} est la source de Γ . Soit $p : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I_0)$ le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I_0)$. Alors $\bar{\nu} \bar{p} : k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow A$ est un revêtement universel de A .

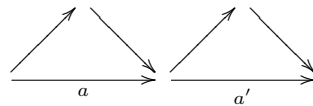
Théorème 6.3.13 *Soit A une k -algèbre de dimension finie connexe et basique (en caractéristique quelconque). Soit Q le carquois ordinaire de A . Supposons que :*

- A est monomiale
- Q n'a pas de flèches multiples.

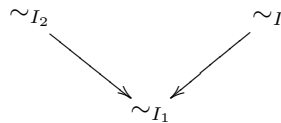
Soit $\nu : kQ \twoheadrightarrow A$ une présentation admissible monomiale (de noyau I_0). Soit $p : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I_0)$ le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I_0)$. Alors $\bar{\nu} \bar{p} : k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow A$ est un revêtement universel de A .

L'exemple qui suit montre que l'hypothèse sur la caractéristique de k ne peut pas être supprimée dans le Théorème 6.3.12

Exemple 6.3.14 *Supposons que k est de caractéristique 2. Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :*



et $I = \langle a'a + u'u, a'u + u'a \rangle$ où u (resp. u') est le chemin de longueur 2 et parallèle à a (resp. a'). Nous avons vu dans l'Exemple 4.2.51 page 84 que le carquois Γ associé à A est égal à :



avec $\pi_1(Q, I) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et :

- $I_1 = \varphi_{a,u,1}(I) = \langle a'a + a'u + u'u, a'u + u'a + u'u \rangle$ et $\pi_1(Q, I_1) = 0$,
- $I_2 = \varphi_{a',u',1}(I_1) = \langle a'a + a'u + u'a + 2 u'u, a'u + u'a + 2 u'u \rangle = \langle a'a, u'a + a'u \rangle$ et $\pi_1(Q, I_2) \simeq \mathbb{Z}$.

Supposons que A admet un revêtement universel.

Nous savons donc (voir la Remarque 6.3.4 page 133) qu'il existe une présentation admissible $kQ/J \simeq A$ telle que le revêtement universel de A est présenté par le revêtement universel de carquois lié de (Q, J) . En outre, d'après la Propriété 6.3.3 page 133, nous savons que pour toute autre présentation $kQ/J' \simeq A$ il existe un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(Q, J) \rightarrow \pi_1(Q, J')$. D'après la forme de Γ , nous en déduisons que $\sim_J = \sim_{I_2}$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que J est nécessairement l'image de I_2 par une dilatation. D'après la Proposition 6.3.6 page 133 nous pouvons donc supposer $J = I_2$.

Notons alors $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}_2) \rightarrow (Q, I_2)$ et $q: (\hat{Q}, \hat{I}) \rightarrow (Q, I)$ les revêtements universels de carquois liés. Ainsi $k\tilde{Q}/\tilde{I}_2 \rightarrow kQ/I_2 \simeq A$ est un revêtement universel de A et $k\hat{Q}/\hat{I} \rightarrow kQ/I \simeq A$ est un revêtement galoisien connexe de A . Nous disposons donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I}_2 & \xrightarrow{f} & k\hat{Q}/\hat{I} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ kQ/I_2 & \xrightarrow{g} & kQ/I \end{array}$$

avec g un isomorphisme tel que $g(x) = x$ pour tout $x \in Q_0$. Il existe donc $\varphi \in \text{Aut}_0(kQ)$ et $\psi: k\tilde{Q} \rightarrow k\hat{Q}$ tels que :

- $\varphi(I_2) = I$ et $\bar{\varphi} = g$,
- $\psi(\tilde{I}_2) \subseteq \hat{I}$ et $\bar{\psi} = f$.

Soit alors $\alpha \in Q_1$. Soit $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$ tel que $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$. La commutativité du diagramme ci-dessus implique l'égalité :

$$q \circ \psi(\tilde{\alpha}) = \varphi \circ p(\tilde{\alpha}) = \varphi(\alpha)$$

En particulier, $\psi(\tilde{\alpha})$ est un relèvement de $\varphi(\alpha)$ par rapport au revêtement $q: k\hat{Q} \rightarrow kQ$. Etant donné que q est le revêtement universel de (Q, I_2) , cela signifie que :

$\varphi(\alpha)$ est une combinaison linéaire de chemins \sim_{I_2} -homotopes de Q , et ce pour toute flèche $\alpha \in Q_1$.

Cette dernière propriété implique, après une rapide vérification, que φ est une dilatation. Ayant $I_2 = \varphi(I)$, il vient $\sim_I = \sim_{I_2}$ ce qui est faux. Cette contradiction montre que A ne peut pas avoir de revêtement universel.

6.3.3 Limites de la définition du revêtement universel

Dans cette sous-Section, nous allons voir que la définition que nous avons prise pour le revêtement universel d'une k -algèbre, bien que semblant naturelle, est moins puissante que celle du revêtement universel d'un espace topologique.

Rappelons (voir la Définition 6.3.1 page 132) que si A est une k -algèbre de dimension finie, connexe et basique, un revêtement universel de A est un revêtement galoisien connexe $F: \mathcal{C} \rightarrow A$ tel que pour tout revêtement galoisien connexe $F': \mathcal{C}' \rightarrow A$ il existe un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \downarrow F & \searrow F'' & \\ & \mathcal{C}' & \\ & \downarrow F' & \\ A & \xrightarrow[\psi]{\sim} & A \end{array}$$

avec $\psi \in \text{Aut}_0(A)$.

Remarque 6.3.15 Le revêtement universel, quand il existe, vérifie une propriété de factorisation par rapport aux revêtements galoisiens connexes. Soit A une k -algèbre de dimension finie, basique, connexe et triangulaire. Supposons que $F: \tilde{A} \rightarrow A$ est un revêtement universel et supposons que la propriété de factorisation vérifiée par F est valable pour tous les revêtements connexes de A (et pas seulement pour les revêtements galoisiens connexes de A). Soit $F': \mathcal{C} \rightarrow A$ revêtement connexe. La propriété de factorisation fournit une égalité :

$$F'F'' = \psi F$$

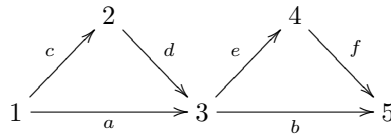
où $F'' : \tilde{A} \rightarrow C$ est un morphisme et $\psi \in \text{Aut}_0(A)$. En particulier, $F'F'' = \psi F_0$ est un revêtement galoisien. D'après la Proposition 6.2.32 page 130, nous en déduisons que $F''F'$ est présentable. Donc F' est présentable d'après la Proposition 6.2.27 page 128. Ainsi :

tout revêtement connexe de A est présentable

Or nous avons vu dans l'Exemple 6.2.26 page 127 qu'il peut exister des revêtements connexes non présentables de A . Ceci montre que la propriété de factorisation du revêtement universel, quand ce dernier existe, ne peut pas être étendue à tous les revêtements.

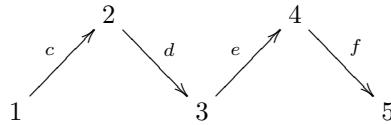
Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, cette définition diffère un peu de celle du revêtement galoisien d'un espace topologique connexe par arcs du fait de l'existence de $\psi \in \text{Aut}_0(A)$. L'exemple suivant montre qu'il n'est pas possible de «contrôler ψ », en particulier, il n'est pas possible d'imposer $\psi = Id_A$.

Exemple 6.3.16 Supposons que $\text{car}(k) = 0$. Posons $A = kQ/I$ où Q est le carquois suivant :



et $I = \langle ba, bdc - fea, fedc \rangle$.

Nous prendrons 1 comme point de base pour le groupe fondamental $\pi_1(Q, I)$. Posons T l'arbre maximal :



Donc $\pi_1(Q, I) \simeq \langle a, b \mid ba^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ (plus précisément, $\pi_1(Q, I)$ admet pour base le générateur $[c^{-1}d^{-1}a]$). Nous identifions désormais $\pi_1(Q, I)$ et \mathbb{Z} .

Une vérification immédiate montre que le carquois Γ des relations d'homotopie des présentations admissibles de A est :



Où $J = \varphi_{a,dc,1}(I) = \langle ba + bdc, bdc - fea, fedc \rangle$ (le groupe $\pi_1(Q, J)$ est trivial). En particulier, \sim_I est la source de Γ .

A l'aide de l'identification $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$ faite plus haut, la fonction de poids $W : Q_1 \rightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(Q, I)$ (admissible sur (Q, I)) définie par l'arbre maximal T et le sommet 1 est donc la suivante :

$$W(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in \{c, d, e, f\} \\ 1 & \text{si } \alpha \in \{a, b\} \end{cases}$$

Notons $p : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ le revêtement universel de (Q, I) de groupe $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 6.2.21 page 124 nous avons donc :

$$\tilde{Q}_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbb{Z}$$

$$\tilde{Q}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1, i) \xrightarrow{a} (3, i+1) \\ (1, i) \xrightarrow{c} (2, i) \\ (2, i) \xrightarrow{d} (3, i) \\ (3, i) \xrightarrow{b} (5, i+1) \\ (3, i) \xrightarrow{e} (4, i) \\ (4, i) \xrightarrow{f} (5, i) \end{array} \middle| i \in \mathbb{Z} \right\}$$

de plus $p: \tilde{Q} \rightarrow Q$ est le morphisme donné par :

$$\begin{aligned} (\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbb{Z}) \quad p(i, j) &= i \\ (\forall (i, j) \xrightarrow{x} (l, m) \in \tilde{Q}_1) \quad p((i, j) \xrightarrow{x} (l, m)) &= x \end{aligned}$$

Remarquons que \tilde{Q} a la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & (1, i-2) & \xrightarrow{c} & (2, i-2) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & & \downarrow a & & & & \\ & & & & & & & & & & (1, i-1) & \xrightarrow{c} & (2, i-1) & \xrightarrow{d} & (3, i-1) & \xrightarrow{e} & (4, i-1) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & & \downarrow a & & & & \downarrow b & & & & \\ & & & & & & & & & & (1, i) & \xrightarrow{c} & (2, i) & \xrightarrow{d} & (3, i) & \xrightarrow{e} & (4, i) & \xrightarrow{f} & (5, i) \\ & & & & & & & & & & \downarrow a & & & & \downarrow b & & & & \\ \dots & \longrightarrow & (3, i+1) & \xrightarrow{e} & (4, i+1) & \xrightarrow{f} & (5, i+1) & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

De plus \tilde{I} est l'idéal de \tilde{Q} engendré par :

- tous les chemins $(1, i) \xrightarrow{a} (3, i+1) \xrightarrow{b} (5, i+2)$ (i.e. tous les chemins verticaux de longueur 2),
- tous les chemins $(1, i) \xrightarrow{c} (2, i) \xrightarrow{d} (3, i) \xrightarrow{e} (4, i) \xrightarrow{f} (5, i)$ (i.e. tous les chemins horizontaux de longueur 4),
- toutes les relations de commutativité "bdc - fea" dans les rectangles du dessin ci-dessus.

Posons $\tilde{A} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$. D'après le Théorème 6.3.12 page 138, le morphisme :

$$\bar{p}: \tilde{A} \rightarrow A$$

défini par p est un revêtement universel de A (c'est un revêtement galoisien de groupe $\pi_1(Q, I) = \mathbb{Z}$). Posons alors :

$$\psi = \varphi_{a,dc,1}\varphi_{b,fe,-1}$$

Donc $\psi(I) = I$. C'est pourquoi nous disposons d'un automorphisme $\bar{\psi}: A \rightarrow A \in \text{Aut}_0(A)$ tel que le diagramme suivant commute (rappelons que $A = kQ/I$) :

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\bar{\psi}} & A \end{array}$$

les flèches verticales étant les surjections naturelles. Puisque $\bar{\psi} \in \text{Aut}_0(A)$, nous disposons d'un revêtement galoisien de groupe \mathbb{Z} :

$$F = \bar{\psi} \circ \bar{p}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$$

Puisque $\bar{p}: \tilde{A} \rightarrow A$ est un revêtement universel de A , nous disposons d'un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{F'} & \tilde{A} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow F = \bar{\psi}\bar{p} \\ A & \xrightarrow{\theta} & A \end{array} \quad (d)$$

où $\theta \in \text{Aut}_0(A)$. En particulier, $FF'((1,0)) = \bar{p}((1,0)) = 1$. Par construction de \bar{p} , parce que $\bar{\psi} \in \text{Aut}_0(A)$ et parce que $F = \bar{\psi}\bar{p}$, il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $F'((1,0)) = (1, n)$.

Supposons que $\theta = \text{Id}_A$ et déduisons-en une contradiction.

Rappelons que $\tilde{A} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$. Notons :

- α la flèche $(1, 0) \xrightarrow{a} (3, 1)$ de \tilde{Q} (donc $p(\alpha) = a$),
- u le chemin $(1, n) \xrightarrow{c} (2, n) \xrightarrow{d} (3, n)$ de \tilde{Q} (donc $p(u) = dc$),
- α' la flèche $(1, n) \xrightarrow{a'} (3, n+1)$ de \tilde{Q} (donc $p(\alpha') = a$),

Si c est un chemin de \tilde{Q} (resp. de Q) nous noterons $\bar{c} = c \text{ mod } \tilde{I}$ (resp. $\bar{c} = c \text{ mod } I$) son image dans $\tilde{A} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$ (resp. $A = kQ/I$). Nous avons alors :

$$\begin{cases} \bar{\psi}\bar{p}F'(\bar{\alpha}) = \theta\bar{p}(\bar{\alpha}) = \bar{p}(\bar{\alpha}) = \bar{a} \\ \bar{\psi}\bar{p}(\bar{\alpha}') - \bar{\psi}\bar{p}(\bar{u}') = \bar{\psi}(\bar{a}) - \bar{\psi}(\bar{dc}) = \bar{a} \end{cases} \quad (1)$$

Remarquons que $\bar{\psi}\bar{p}F'(\bar{\alpha})$ est de terminus le terminus de $t(\bar{a}) = t(a) = 3$. Donc le terminus de $F'(\bar{\alpha})$ est égal à $(3, i)$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Donc (rappelons que $F'((1, 0)) = (1, n)$) :

$$\begin{cases} F'(\bar{\alpha}) \in {}_{(3,i)}\tilde{A}_{(1,n)} \\ \bar{\alpha}' - \bar{u}' \in {}_{(3,n+1)}\tilde{A}_{(1,n)} \oplus {}_{(3,n)}\tilde{A}_{(1,n)} \end{cases} \quad (2)$$

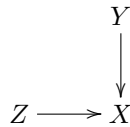
Puisque $\bar{\psi}\bar{p}$ est un foncteur covariant, les points (1) et (2) ci-dessus impliquent que :

$$F'(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}' - \bar{u}'$$

Or $F'(\bar{\alpha})$ est un morphisme de \tilde{A} (car $F': \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ est un morphisme et $\bar{\alpha}$ est un morphisme de \tilde{A}) et $\bar{\alpha}', \bar{u}'$ sont deux morphismes non nuls et non parallèles de \tilde{A} . **Cette contradiction montre que θ ne peut pas être égal à $Id_{\tilde{A}}$.**

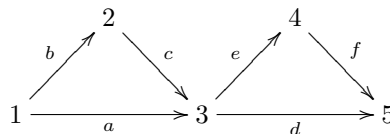
L'Exemple 6.3.16 page 140 que nous venons de détailler montre donc que la Définition 6.3.1 page 132 ne peut pas être renforcée. Nous avons donc mis en évidence une différence de taille entre la notion de revêtement universel d'un espace topologique et celle d'une k -algèbre. Cette différence a des conséquences non négligeables comme le montre l'exemple qui suit.

Rappelons (voir [20]) qu'une catégorie galoisienne est une catégorie \mathcal{R} munie d'un foncteur fibre $\mathcal{F}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}ns$ (où $\mathcal{E}ns$ est la catégorie des ensemble finis) et vérifiant un certain nombre de propriétés parmi lesquelles la suivante : « la catégorie \mathcal{C} admet des produits fibrés (et donc des produits). De plus, pour tout diagramme dans \mathcal{C} :

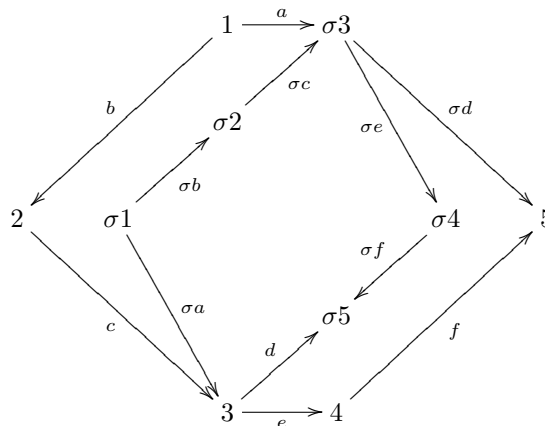


la fibre $\mathcal{F}(Y \times_X Z)$ du produit fibré $Y \times_X Z$ est le produit fibré (dans $\mathcal{E}ns$) $\mathcal{F}(Y) \times_{\mathcal{F}(X)} \mathcal{F}(Z)$ ».

Exemple 6.3.17 Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois :



et $I = \langle da, dcb + fea, fecb \rangle$. Posons $G = \mathbb{Z}/2 = \langle \sigma | \sigma^2 \rangle$. Soit Q' le carquois :



et soit :

$$I' = \langle \begin{array}{l} \sigma d a, d \sigma a, \\ dcb + \sigma f \sigma e a, \sigma d \sigma c \sigma b + f e \sigma a, \\ f e c b, \sigma f \sigma e \sigma c \sigma b \end{array} \rangle$$

Donc le morphisme naturel de carquois liés $p: (Q', I') \rightarrow (Q, I)$ ($x, \sigma x \mapsto x$) est un revêtement galoisien de groupe G . Posons alors $A' = kQ'/I'$. Donc p définit un revêtement galoisien de groupe G :

$$F = \bar{p}: A' \rightarrow A$$

Définissons un autre revêtement galoisien $F': A' \rightarrow A$ de groupe G de la façon suivante :

- $F'(a \text{ mod } I') = F'(\sigma a \text{ mod } I') = a + cb \text{ mod } I$,
- $F'(x \text{ mod } I') = F'(\sigma x \text{ mod } I') = x \text{ mod } I$ pour toute flèche $x \neq a$ de Q' .

Supposons que la catégorie des revêtements de A muni du foncteur fibre naturel (qui à un revêtement $r: C \rightarrow A$ associe $r^{-1}(1)$) est une catégorie galoisienne.

Nous disposons donc du produit de F et de F' . Nous avons ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ A' & & A' \\ F \searrow & & \swarrow F' \\ & A & \end{array}$$

tel que $F'' = F \circ p_1 = F' \circ p_2$ est un foncteur couvrant de fibre le produit des fibres de F et de F' . Nous pouvons donc supposer que :

$$C_0 = Q'_0 \times_{Q_0} Q'_0 = \bigcup_{x \in Q_0} \{(x, x), (x, \sigma x), (\sigma x, x), (\sigma x, \sigma x)\}$$

Notons que la Proposition 6.1.17 page 110 implique que p_1 et p_2 sont des foncteurs couvrants.

Pour aboutir à une contradiction, nous allons calculer le relèvement u de $a \text{ mod } I \in {}_3A_1$ de source $(1, 1)$ par rapport à F'' . Puisque p_1 et p_2 sont des foncteurs couvrants, nous avons les relèvements suivants :

- $p_1(u_1) + p_1(u_2) = a \text{ mod } I'$ avec $u_1 + u_2 \in {}_{(\sigma 3, 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \oplus {}_{(\sigma 3, \sigma 3)}\mathcal{C}_{(1,1)}$,
- $p_2(v_1) + p_2(v_2) = a \text{ mod } I'$ avec $v_1 + v_2 \in {}_{(3, \sigma 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \oplus {}_{(\sigma 3, \sigma 3)}\mathcal{C}_{(1,1)}$,
- $p_2(v_3) + p_2(v_4) = cb \text{ mod } I'$ avec $v_3 + v_4 \in {}_{(\sigma 3, 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \oplus {}_{(3, 3)}\mathcal{C}_{(1,1)}$.

Remarquons que $a \text{ mod } I = F(a \text{ mod } I') = F'(a \text{ mod } I' - cb \text{ mod } I')$. Donc :

$$\begin{cases} F''(u_1 + u_2) = F p_1(u_1 + u_2) = F(a \text{ mod } I') = a \text{ mod } I \\ F''(v_1 + v_2 - v_3 - v_4) = F' p_2(v_1 + v_2 - v_3 - v_4) = F'(a \text{ mod } I' - cb \text{ mod } I') = a \text{ mod } I \end{cases}$$

Donc $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$. En comparant les source et les terminus de $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4$, il vient :

- $v_1 = v_4 = 0$,
- $u_1 = v_3$,
- $u_2 = v_2$.

Notons que $v_3 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$ car $a \text{ mod } I' \neq 0$ et $cb \text{ mod } I' \neq 0$. Puisque p_1 est un foncteur couvrant, nous avons une application injective :

$$p_1: {}_{(\sigma 3, \sigma 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \oplus {}_{(\sigma 3, 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \hookrightarrow {}_{\sigma 3}A'_1 \quad (1)$$

Or :

- $v_3 \in {}_{(\sigma 3, 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \setminus \{0\}$,
- $v_2 \in {}_{(\sigma 3, \sigma 3)}\mathcal{C}_{(1,1)} \setminus \{0\}$,
- ${}_{\sigma 3}A'_1 = k.(a \text{ mod } I')$ est de dimension 1.

Pour raison de dimension, l'application (1) ci-dessus ne peut donc pas être injective. Cette contradiction montre que le produit F'' de F et de F' n'existe pas.

L'Exemple 6.3.17 page 142 montre donc qu'étant donnée une k -algèbre de dimension finie, basique et connexe A , la catégorie des revêtements à fibre finie de A n'est pas, de manière naturelle, une catégorie galoisienne. En particulier, la catégorie des revêtements de A n'est pas équivalente à la catégorie des ensembles discrets munis de l'action d'un groupe fixé.

Chapitre 7

Revêtements galoisiens d'extensions de catégories

Le dernier Chapitre de cette thèse est consacré à une étude de certains revêtements galoisiens des algèbres de matrices triangulaires $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$. Plus précisément, étant donné un revêtement galoisien d'une algèbre $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$, nous essaierons de le décrire à l'aide de données sur A , B et M . Cette question rejoint d'autres études faites sur les algèbres de matrices triangulaires :

- dans [22], D. Happel a établi, lorsque $A = k$, l'existence d'une suite exacte longue reliant les cohomologies de Hochschild de B (à coefficients dans B et dans M) et la cohomologie de Hochschild de $\begin{bmatrix} k & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$,
- dans [3], I. Assem, J. C. Bustamante, D. Castonguay et C. Novoa établissent, pour une algèbre de la forme $\begin{bmatrix} k & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$, un lien entre le groupe fondamental d'une présentation de cette algèbre et celui de la présentation induite de B .
- dans [12], D. Castonguay et J. A. de la Peña établissent une condition suffisante sur une présentation $kQ/I \simeq \begin{bmatrix} k & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ pour que $\pi_1(Q, I)$ soit libre. Pour ce faire ils utilisent le lien évoqué au point précédent entre $\pi_1(Q, I)$ et le groupe fondamental de la présentation induite de B .

Dans la Section 7.1 nous rappelons la définition des algèbres de matrices triangulaires, dans la Section 7.2 nous introduisons la notion de graduation sur (B, M, A) (A, B étant des k -catégories et M un B - A -bimodule M) et construisons le revêtement galoisien associé. Dans la Section 7.3 nous appliquerons cette construction pour retrouver le revêtement galoisien associé au revêtement universel de carquois lié d'une présentation admissible de $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ à partir d'une graduation sur (B, M, A) . Enfin dans la Section 7.4 nous établirons un lien entre le groupe du revêtement galoisien de $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ induit par une graduation sur (B, M, A) et cette même graduation, ce lien généralise le résultat de [3] cité plus haut.

7.1 Rappels sur les algèbres de matrices triangulaires

7.1.1 Algèbres de matrices triangulaires

Une **algèbre de matrices triangulaires** est décrite au moyen de deux k -algèbres de dimension finie A et B , et d'un B - A bimodule M de dimension finie sur k . L'algèbre de matrices triangulaires associée au triplet (B, M, A) est notée $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$. Elle est définie par :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ m & b \end{bmatrix} \mid a \in A, b \in B, m \in M \right\}$$

L'addition et la multiplication sont induites par l'addition et le produit des matrices ainsi que par la structure d'algèbre (resp. de module) de A et de B (resp. de M) :

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ m_1 + m_2 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ m_1 a_2 + b_1 m_2 & b_1 b_2 \end{bmatrix}$$

Rappelons (voir [6]) que pour une telle algèbre $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$, il est possible de décrire les modules en fonction des A -modules et des B -modules. Plus précisément soit (X, Y, f) un triplet où :

- $X \in \text{mod}(A)$,
- $Y \in \text{mod}(B)$,
- $f: M \otimes_A X \rightarrow Y$ est B -linéaire.

Alors le k -espace vectoriel $X \oplus_f Y$ est muni d'une structure de Λ -module comme suit :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ m & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ f(m \otimes x) + by \end{bmatrix}$$

De cette manière, tout Λ -module est isomorphe à $X \oplus_f Y$ pour un triplet (X, Y, f) adéquat. Pour plus de détails sur cette description nous renvoyons le lecteur à [6, III.2].

Lorsque $A = k$ (resp. $B = k$), l'algèbre Λ est notée $B[M]$ (resp. $[M]A$) et elle est dite **extension ponctuelle** de B par M (resp. coextension ponctuelle de A par M).

7.1.2 k -catégories de matrices triangulaires

Définissons donc à présent la notion de k -catégorie de matrices triangulaires (ou extension de k -catégories). Pour cela nous rappelons auparavant la notion de bimodule.

Définition 7.1.1 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux k -catégories. Un \mathcal{B} - \mathcal{A} **bimodule** \mathcal{M} est la donnée :

- d'un k -espace vectoriel ${}_b \mathcal{M}_a$ pour tout $(b, a) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{A}_0$,
- d'applications linéaires :

$$\begin{aligned} {}_{b'} \mathcal{B}_b \otimes {}_b \mathcal{M}_a \otimes {}_a \mathcal{A}_{a'} &\longrightarrow {}_{b'} \mathcal{M}_{a'} \\ f \otimes m \otimes g &\longmapsto fmg \end{aligned}$$

pour tous $a, a' \in \mathcal{A}_0$, $b, b' \in \mathcal{B}_0$.

de façon que l'association :

$$\begin{aligned} (b, a) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{A}_0 &\longmapsto {}_b \mathcal{M}_a \\ (f, g) \in {}_{b'} \mathcal{B}_b \times {}_a \mathcal{A}_{a'} &\longmapsto (m \mapsto fmg) \end{aligned}$$

est un foncteur $\mathcal{B} \times \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Vect}$, où Vect désigne la catégorie des k -espaces vectoriels.

Remarque 7.1.2 Pour alléger les notations nous écrirons fm (resp. mg) au lieu de $fm1_a$ (resp. $1_b mg$) pour $f \in {}_{b'} \mathcal{B}_b$ (resp. $g \in {}_a \mathcal{A}_{a'}$) et $m \in {}_b \mathcal{M}_a$.

Définition 7.1.3 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux k -catégories et \mathcal{M} un \mathcal{B} - \mathcal{A} bimodule. La k -catégorie $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathcal{M} & \mathcal{B} \end{bmatrix}$ associée au triplet $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{A})$ est définie comme suit :

- l'ensemble des objets est $\mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{B}_0$,
- l'espace des morphismes $x \rightarrow y$ est égal à :

$$\begin{cases} {}_y \mathcal{A}_x & \text{si } x, y \in \mathcal{A}_0 \\ {}_y \mathcal{B}_x & \text{si } x, y \in \mathcal{B}_0 \\ {}_y \mathcal{M}_x & \text{si } x \in \mathcal{A}_0 \text{ et } y \in \mathcal{B}_0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{B}_0 \text{ et } y \in \mathcal{A}_0 \end{cases}$$

- la composition des morphismes est induite par celle des morphismes de \mathcal{A} , celle des morphismes de \mathcal{B} et par les applications structurelles du \mathcal{B} - \mathcal{A} bimodule \mathcal{M} .

Remarque 7.1.4 Soit $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ une algèbre de matrices triangulaires. Fixons $\{e_1, \dots, e_n\}$ (resp. $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$) un système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux de A (resp. de B) définissant la k -catégorie \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}). Dans ce cas $M = \bigoplus_{i,j} f_j M e_i$ et nous disposons d'un \mathcal{B} - \mathcal{A} bimodule \mathcal{M} défini comme suit :

- ${}_j \mathcal{M}_i = f_j M e_i$ pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$,
- pour $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ et $j, j' \in \{n+1, \dots, n+m\}$ l'application linéaire :

$${}_j \mathcal{B}_{j'} \otimes {}_j \mathcal{M}_i \otimes {}_i \mathcal{A}_{i'} \longrightarrow {}_{j'} \mathcal{M}_{i'}$$

est l'application structurelle $f_{j'} B f_j \otimes f_j M e_i \otimes e_i A e_{i'} \rightarrow f_{j'} M e_{i'}$ du B - A bimodule M .

La k -catégorie $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathcal{M} & \mathcal{B} \end{bmatrix}$ ainsi définie est la k -catégorie associée à $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ au moyen du système complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux $\{e_1, \dots, e_{n+m}\}$.

7.2 Revêtements galoisiens d'une catégorie de matrices triangulaires

7.2.1 Graduation sur (B, M, A)

Dans la suite, nous utiliserons la notation (B, M, A) pour désigner un triplet constitué de k -catégories A , B et d'un B - A -bimodule M . D'autre part, si F est un ensemble, une F -**graduation** de M est la donnée, pour tous $x \in A_0$, $y \in B_0$ d'une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels ${}_y M_x = \bigoplus_{f \in F} {}_y M_x^f$.

Définition 7.2.1 Soient A, B des k -catégories et soit M un B - A -bimodule. Une **graduation sur** (B, M, A) est la donnée de groupes G_A, G_B , d'un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble F (i.e. F est muni d'une action de G_B à gauche, d'une action de G_A à droite, ces deux actions étant compatibles au sens naturel), d'un élément $f_0 \in F$ ainsi que :

- d'une G_A -graduation de A ,
- d'une G_B -graduation de B ,
- d'une F -graduation de M ,

subjettées à la condition :

$${}_b B_b^{g_B} {}_b M_a^f {}_a A_{a'}^{g_A} \subseteq {}_b M_{a'}^{g_B f g_A}$$

pour tous $a, a' \in A_0$, $b, b' \in B_0$, $g_A \in G_A$, $g_B \in G_B$ et $f \in F$. Dans la suite, nous dirons que (B, M, A) est gradué par G_B, F, G_A (l'élément $f_0 \in F$ étant sous-entendu).

L'utilisation de l'élément $f_0 \in F$ peut paraître artificielle, néanmoins elle est nécessaire pour que le revêtement que nous allons construire soit de «taille» raisonnable (i.e. connexe pour certaines graduations «naturelles»)

Exemple 7.2.2 Soit $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ une k -catégorie de matrices triangulaires, soit G un groupe et fixons une G -graduation de Λ . Posons :

- $G_A = G$,
- $G_B = G$,
- $F = G$ et $f_0 = 1_G \in G = F$.

Alors la G -graduation de Λ définit une graduation sur (B, M, A) par G_B, F, G_A .

7.2.2 Revêtement galoisien associé à une graduation sur (B, M, A)

Dans cette sous-Section, Λ désignera la k -catégorie de matrices triangulaires $\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$. Nous allons construire le revêtement galoisien de Λ associé à une graduation sur (B, M, A) . Commençons par construire le groupe de ce futur revêtement galoisien.

Définition 7.2.3 Soient G_A, G_B deux groupes, soit F un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble et soit $f_0 \in F$. Notons $L(F)$ le groupe libre de base F . Notons \star le produit libre des groupes, nous disposons donc d'applications naturelles :

- $\iota_B: G_B \rightarrow G_B \star L(F) \star G_A$ un morphisme de groupes,
- $\iota_F: F \rightarrow G_B \star L(F) \star G_A$ une application,
- $\iota_A: G_A \rightarrow G_B \star L(F) \star G_A$ un morphisme de groupes.

Nous définissons le groupe (G_B, F, G_A) (f_0 étant sous-entendu) par :

$$(G_B, F, G_A) = G_B \star L(F) \star G_A / N$$

où N est le sous-groupe distingué de $G_B \star L(F) \star G_A$ engendré par :

$$\{\iota_F(f_0)\} \cup \{\iota_F(g_B f g_A)^{-1} \iota_B(g_B) \iota_F(f) \iota_A(g_A) \mid g_B \in G_B, f \in F, g_A \in G_A\}$$

Remarque 7.2.4 Avec les hypothèses et notations de la Définition 7.2.3, les compositions respectives des applications $\iota_B, \iota_F, \iota_A$ avec le quotient $G_B \star L(F) \star G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ définissent les applications suivantes :

- $\lambda_B: G_B \rightarrow (G_B, F, G_A)$ un morphisme de groupes,
- $\lambda_F: F \rightarrow (G_B, F, G_A)$ une application,
- $\lambda_A: G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ un morphisme de groupes.

Dans la suite nous conserverons ces notations.

Notons que le groupe (G_B, F, G_A) vérifie la propriété universelle suivante :

Propriété 7.2.5 Soient G_A, G_B des groupes, soit F un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble et soit $f_0 \in F$. Soit G un groupe muni de :

- $\varphi_B: G_B \rightarrow G$ un morphisme de groupes,
- $\varphi_F: F \rightarrow G$ une application,
- $\varphi_A: G_A \rightarrow G$ un morphisme de groupes.

soumis aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\forall g_B \in G_B) (\forall f \in F) (\forall g_A \in G_A) & \varphi_B(g_B) \varphi_F(f) \varphi_A(g_A) = \varphi_F(g_B f g_A) \\ \varphi_F(f_0) = 1 \end{cases}$$

Alors il existe un et un seul morphisme de groupes $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow G$ tel que :

- $\varphi \circ \lambda_B = \varphi_B$,
- $\varphi \circ \lambda_F = \varphi_F$,
- $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la Définition 7.2.3. □

Construisons à présent une (G_B, F, G_A) -graduation de Λ associée à la graduation sur (B, M, A) par G_B, F, G_A, f_0 .

Définition 7.2.6 Soit une graduation sur (B, M, A) par G_B, F, G_A, f_0 . Soient $x, y \in \Lambda_0$ et soit $g \in (G_B, F, G_A)$. Rappelons que ${}_y \Lambda_x = 0$ si $x \in B_0$ et $y \in A_0$. Nous poserons :

$$\cdot {}_y \Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_y A_x^{g_A} \text{ si } x, y \in A_0,$$

$$\begin{aligned} \cdot {}_y\Lambda_x^{(g)} &= \bigoplus_{g_B \in \lambda_B^{-1}(g)} {}_yB_x^{g_B} \text{ si } x, y \in B_0, \\ \cdot {}_y\Lambda_x^{(g)} &= \bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g)} {}_yM_x^f \text{ si } x \in A_0 \text{ et } y \in B_0. \end{aligned}$$

Propriété 7.2.7 Soit une graduation sur (B, M, A) par G_B, F, G_A, f_0 . La Définition 7.2.6 page ci-contre établit une (G_B, F, G_A) -graduation de Λ .

Preuve : Nous noterons $G = (G_B, F, G_A)$.

- Soient $x, y \in A_0$, nous avons une partition : $G_A = \bigsqcup_{g \in G} \lambda_A^{-1}(g)$. De plus ${}_y\Lambda_x = {}_yA_x = \bigoplus_{g_A \in G_A} {}_yA_x^{g_A}$.

Donc :

$${}_y\Lambda_x = \bigoplus_{g \in G} \bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_yA_x^{g_A} = \bigoplus_{g \in G} {}_y\Lambda_x^{(g)}$$

- Soient $x, y \in B_0$. En remplaçant A par B dans le point précédent, nous obtenons de même :

$${}_y\Lambda_x = \bigoplus_{g \in G} {}_y\Lambda_x^{(g)}$$

- Soient $x \in A_0$ et $y \in B_0$, nous avons une partition : $F = \bigsqcup_{g \in G} \lambda_F^{-1}(g)$. De plus ${}_y\Lambda_x = {}_yM_x = \bigoplus_{f \in F} {}_yM_x^f$.

Donc :

$${}_y\Lambda_x = \bigoplus_{g \in G} \bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g)} {}_yM_x^f = \bigoplus_{g \in G} {}_y\Lambda_x^{(g)}$$

- Soient $x, y, z \in \Lambda_0$ et $g, g' \in G$.

(i) Si $x, y, z \in A_0$ alors :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} = \left(\bigoplus_{g'_A \in \lambda_A^{-1}(g')} {}_zA_y^{g'_A} \right) \left(\bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_yA_x^{g_A} \right) \subseteq \bigoplus_{\substack{g'_A \in \lambda_A^{-1}(g') \\ g_A \in \lambda_A^{-1}(g)}} {}_zA_x^{g'_A g_A}$$

Or λ_A est un morphisme de groupes donc :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} \subseteq \bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g'g)} {}_zA_x^{g_A} = {}_z\Lambda_x^{(g'g)}$$

(ii) Si $x, y, z \in B_0$ alors le point précédent donne (après avoir remplacé A par B) :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_z\Lambda_x^{(g'g)}$$

(iii) Si $x, y \in A_0$ et $z \in B_0$ alors :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} = \left(\bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g')} {}_zM_y^f \right) \left(\bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_yA_x^{g_A} \right) \subseteq \bigoplus_{\substack{f \in \lambda_F^{-1}(g') \\ g_A \in \lambda_A^{-1}(g)}} {}_zM_x^{f g_A}$$

Or $\lambda_F(fg_A) = \lambda_F(f)\lambda_A(g_A)$ donc :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} \subseteq \bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g'g)} {}_zM_x^f = {}_z\Lambda_x^{(g'g)}$$

(iv) Si $x \in A_0$ et $y, z \in B_0$ alors le point précédent donne (après avoir remplacé A par B) :

$${}_z\Lambda_y^{(g')} {}_y\Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_z\Lambda_x^{(g'g)}$$

Ceci achève la preuve de la Propriété. □

Définition 7.2.8 Soient G_B, F, G_A, f_0 graduant (B, M, A) . Le revêtement galoisien $\Lambda\sharp(G_B, F, G_A) \rightarrow \Lambda$ défini grâce à la Propriété 7.2.5 page 148 sera dit **induit par la graduation de (B, M, A) par G_B, F, G_A, f_0** .

Voyons à présent comment exprimer tout revêtement galoisien de Λ comme un revêtement galoisien induit par une graduation sur (B, M, A) .

Proposition 7.2.9 Soit $F: \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ un revêtement galoisien de groupe G . Alors F et le revêtement galoisien de Λ induit par la graduation sur (B, M, A) décrite dans l'Exemple 7.2.2 page 147 sont des revêtements galoisiens de Λ isomorphes.

Preuve : • D'après la Proposition 6.2.30 page 129, il existe une G -graduation de Λ ainsi qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda\sharp G & \xrightarrow{\quad} & \hat{\Lambda} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Lambda & \end{array} \quad (d_1)$$

où la flèche verticale est un isomorphisme. Les espaces de morphismes homogènes de Λ pour la G -graduation que nous venons d'introduire seront notés selon la notation : ${}^g_y\Lambda_x$ pour éviter une confusion avec les espaces des morphismes homogènes de A (resp. de B) pour la G_A -graduation (resp. la G_B -graduation) de A (resp. de B).

• Rappelons que $G_A = G_B = F = G$ et que $f_0 = 1_G \in F = G$. Grâce à la Propriété 7.2.5 page 148, les applications suivantes :

- $Id_G: G_B = G \rightarrow G$,
- $Id_G: G_A = G \rightarrow G$,
- $Id_G: F = G \rightarrow G$,

définissent un morphisme de groupes :

$$\varphi: (G_B, F, G_A) \longrightarrow G$$

tel que $\varphi \circ \lambda_B = \varphi \circ \lambda_A = \varphi \circ \lambda_F = Id_G$.

- Soit $\theta = \lambda_A: G = G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$. Alors :

$$\varphi \circ \theta = \varphi \circ \lambda_A = Id_G \quad \text{par construction de } \varphi$$

De plus :

- $\theta \circ \varphi \circ \lambda_A = \theta \circ Id_G = \lambda_A = Id_{(G_B, F, G_A)} \circ \lambda_A$,
- $\theta \circ \varphi \circ \lambda_B = \theta \circ Id_G = \lambda_A = Id_{(G_B, F, G_A)} \circ \lambda_B$,
- $\theta \circ \varphi \circ \lambda_F = \theta \circ Id_G = \lambda_A = Id_{(G_B, F, G_A)} \circ \lambda_F$.

D'après la Propriété 7.2.5 page 148, cela entraîne que $\theta \circ \varphi = Id_{(G_B, F, G_A)}$. Ainsi :

$$\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow G \text{ est un isomorphisme de groupes d'inverse } \theta = \lambda_A = \lambda_B = \lambda_F \quad (i)$$

En particulier, $\lambda_A, \lambda_F, \lambda_B$ sont des isomorphismes.

- Soient $x, y \in \Lambda_0$ et soit $g \in (G_B, F, G_A)$. D'après (i), nous avons :

- si $x, y \in A_0$ alors ${}_y\Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_yA_x^{g_A} = {}_yA_x^{\varphi(g)} = {}_y^{\varphi(g)}\Lambda_x$,
- si $x, y \in B_0$ alors ${}_y\Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{g_B \in \lambda_B^{-1}(g)} {}_yB_x^{g_B} = {}_yB_x^{\varphi(g)} = {}_y^{\varphi(g)}\Lambda_x$,
- si $x \in A_0$ et $y \in B_0$ alors ${}_y\Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g)} {}_yM_x^f = {}_yM_x^{\varphi(g)} = {}_y^{\varphi(g)}\Lambda_x$.

Ainsi :

$$(\forall x, y \in \Lambda_0) (\forall g \in (G_B, F, G_A)) \quad {}_y\Lambda_x^{(g)} = {}_y^{\varphi(g)}\Lambda_x$$

Donc :

$$(\forall (x, s), (y, t) \in \Lambda_0 \times (G_B, F, G_A)) \quad ({}_{y,t})(\Lambda\sharp(G_B, F, G_A))_{(x,s)} = ({}_{y,\varphi(t)})(\Lambda\sharp G)_{(x,\varphi(s))}$$

L'application bijective :

$$\begin{aligned} (\Lambda\sharp(G_B, F, G_A))_0 &\longrightarrow (\Lambda\sharp G)_0 \\ (x, s) &\longmapsto (x, \varphi(s)) \end{aligned}$$

définit donc un isomorphisme de k -catégories $\Lambda\sharp(G_B, F, G_A) \rightarrow \Lambda\sharp G$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda\sharp(G_B, F, G_A) & \xrightarrow{\sim} & \Lambda\sharp G \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Lambda & \end{array} \quad (d_2)$$

Les diagrammes (d_1) et (d_2) montrent que la Proposition est satisfaite. \square

La Proposition 7.2.9 page ci-contre montre que tout revêtement galoisien de Λ est isomorphe au revêtement galoisien de Λ induit par une graduation sur (B, M, A) . La réponse apportée par la Proposition 7.2.9 page précédente est néanmoins insatisfaisante dans certains cas. En effet, si $A = k$, alors la G_A -graduation de A fournie par la Proposition 7.2.9 page ci-contre n'est pas connexe. Nous allons voir dans la Section qui suit que la Proposition 7.2.9 page précédente peut-être affinée dans le cas où $\hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ est le revêtement galoisien associé au revêtement universel d'une présentation admissible de Λ .

7.3 Application au revêtement galoisien induit par le revêtement universel universel associé à une présentation admissible

Soit (Q, I) un carquois lié connexe et posons $\Lambda = kQ/I$. Supposons que $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$. Soit (Q_A, I_A) (resp. (Q_B, I_B)) le sous-carquois plein (et convexe) de (Q, I) dont l'ensemble des sommets est A_0 (resp. B_0), de sorte que $A = kQ_A/I_A$ et $B = kQ_B/I_B$. Le but de cette Section est de montrer que le revêtement galoisien de Λ associé au revêtement universel de (Q, I) est induit par une graduation sur (B, M, A) à partir d'une $\pi_1(Q_A, I_A)$ -graduation (resp. $\pi_1(Q_B, I_B)$ -graduation) de A (resp. B) telle que décrite par l'Exemple 6.2.19 page 124 et la Propriété 6.2.25 page 126 (remarquons que les notations $\pi_1(Q_A, I_A)$ et $\pi_1(Q_B, I_B)$ sont abusives car A et B ne sont pas nécessairement connexes).

7.3.1 Graduation sur (B, M, A) à l'aide des groupes fondamentaux de présentations admissibles de B et de A

Commençons par introduire des notations qui seront utilisées tout au long de la Section.

- Soit Σ l'ensemble des flèches de Q dont la source est un sommet de Q_A et le terminus est un sommet de Q_B . Ainsi :

- $Q_0 = (Q_A)_0 \sqcup (Q_B)_0$,
- $Q_1 = (Q_B)_1 \sqcup \Sigma \sqcup (Q_A)_1$,
- M est l'idéal de $\Lambda = kQ/I$ engendré par $\{\alpha \text{ mod } I \mid \alpha \in \Sigma\}$.

- Soient A_1, \dots, A_m les composantes connexes de A et soient $(Q_A^1, I_A^1), \dots, (Q_A^m, I_A^m)$ les composantes connexes de (Q_A, I_A) de sorte que $kQ_A^i/I_A^i = A_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ soit $a_i \in (Q_A^i)_0$ un sommet de base pour le groupe fondamental $\pi_1(Q_A^i, I_A^i, a_i) = \pi_1(Q_A^i, I_A^i)$ et soit T_A^i un arbre maximal de Q_A^i . La donnée de a_i et de T_A^i définit une fonction de poids admissible de (Q_A^i, I_A^i) (voir l'Exemple 6.2.19 page 124) que nous noterons W_A^i :

$$W_A^i: (Q_A^i)_1 \longrightarrow \pi_1(Q_A^i, I_A^i)$$

Rappelons que d'après la Propriété 6.2.31 page 129, la k -catégorie kQ_A^i/I_A^i est $\pi_1(Q_A^i, I_A^i)$ -graduée au moyen de la fonction de poids W_A^i et que $(Q_A^i, I_A^i)\sharp_{\pi_1(Q_A^i, I_A^i)} \rightarrow (Q_A^i, I_A^i)$ est le revêtement universel de carquois lié (voir la Proposition 6.2.21 page 124).

Posons alors $\pi_1(Q_A, I_A)$ le produit libre des groupes $\pi_1(Q_A^i, I_A^i)$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) :

$$\pi_1(Q_A, I_A) = \coprod_{i=1}^m \pi_1(Q_A^i, I_A^i)$$

Les fonctions de poids admissibles W_A^1, \dots, W_A^m définissent donc une fonction de poids W_A de (Q_A, I_A) :

$$W_A: (Q_A)_1 \longrightarrow \pi_1(Q_1, I_A)$$

de sorte que $W_A(\alpha) = W_A^i(\alpha)$ si α est une flèche de Q_A^i (rappelons que $(Q_A)_1 = \bigsqcup_{i=1}^m (Q_A^i)_1$). Etant donné que $(Q_A^1, I_A^1), \dots, (Q_A^m, I_A^m)$ sont les composantes connexes de (Q_A, I_A) , l'ensemble des relations minimales de (Q_A, I_A) est la réunion disjointe des ensembles des relations minimales de (Q_A^i, I_A^i) ($i \in \{1, \dots, m\}$). De ce fait :

$$W_A: (Q_A)_1 \rightarrow \pi_1(Q_1, I_A) \text{ est une fonction de poids admissible de } (Q_A, I_A)$$

Ainsi kQ_A/I_A est $\pi_1(Q_A, I_A)$ -graduée (grâce à la Propriété 6.2.31 page 129). Nous noterons $G_A = \pi_1(Q_A, I_A)$.

• En procédant de la même manière pour B nous obtenons successivement :

- B_1, \dots, B_n les composantes connexes de B ,
- $B_j = kQ_B^j/I_B^j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,
- $(Q_B^1, I_B^1), \dots, (Q_B^n, I_B^n)$ sont les composantes connexes de B ,
- un point de base b_j de Q_B^j pour le groupe fondamental $\pi_1(Q_B^j, I_B^j)$ et un arbre maximal T_B^j de Q_B^j définissant la fonction de poids admissible $W_B^j: (Q_B^j)_1 \rightarrow \pi_1(Q_B^j, I_B^j)$ de (Q_B^j, I_B^j) ,
- $\pi_1(Q_B, I_B)$ est le produit libre de groupes $\prod_{j=1}^n \pi_1(Q_B^j, I_B^j)$,
- W_B^1, \dots, W_B^n définissent la fonction de poids admissible $W_B: (Q_B)_1 \rightarrow \pi_1(Q_B, I_B)$ de (Q_B, I_B) ,
- $B = kQ_B/I_B$ est $\pi_1(Q_B, I_B)$ -graduée au moyen de la fonction de poids W_B .

Nous noterons $G_B = \pi_1(Q_B, I_B)$.

• Si γ est une promenade de Q (resp. de Q_A, Q_A^i, Q_B, Q_B^j) nous noterons $[\gamma]$ (resp. $[\gamma]_A, [\gamma]_A^i, [\gamma]_B, [\gamma]_B^j$) sa classe d'homotopie pour la relation d'homotopie \sim_I (resp. $\sim_{I_A}, \sim_{I_A^i}, \sim_{I_B}, \sim_{I_B^j}$). Le lien entre ces différentes notations est fourni par le Lemme suivant :

Lemme 7.3.1 Soient γ, γ' deux promenades de Q_A^i (resp. de Q_B^j) alors :

- $[\gamma]_A^i = [\gamma']_A^i \Leftrightarrow [\gamma]_A = [\gamma']_A$ (resp. $[\gamma]_B^j = [\gamma']_B^j \Leftrightarrow [\gamma]_B = [\gamma']_B$),
- $[\gamma]_A = [\gamma']_A \Rightarrow [\gamma] = [\gamma']$ (resp. $[\gamma]_B = [\gamma']_B \Rightarrow [\gamma] = [\gamma']$),

Preuve : C'est une conséquence directe des faits suivants :

- l'ensemble des relations minimales de (Q_A, I_A) est la réunion des ensembles des relations minimales des composantes connexes (Q_A^i, I_A^i) ($i \in \{1, \dots, m\}$),
- l'ensemble des relations minimales de (Q_B, I_B) est la réunion des ensembles des relations minimales des composantes connexes (Q_B^j, I_B^j) ($j \in \{1, \dots, n\}$),
- les relations minimales de (Q_B, I_B) et de (Q_A, I_A) sont des relations minimales de (Q, I) .

□

• Posons $x_0 = a_1$ le sommet de base pour le groupe fondamental $\pi_1(Q, I, x_0) = \pi_1(Q, I)$. Les arbres $T_A^1, \dots, T_A^m, T_B^1, \dots, T_B^n$ sont des arbres deux à deux disjoints de Q . Il existe donc un arbre maximal T de Q tel que :

- $T \cap Q_A^i = T_A^i$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$,
- $T \cap Q_B^j = T_B^j$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

Pour $x \in Q_0$ nous noterons alors γ_x la promenade de T de source x_0 et de terminus x . Le Lemme 7.3.1 montre que les applications suivantes (pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$) sont bien définies et sont des morphismes de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Q_A^i, I_A^i, a_i) & \longrightarrow & \pi_1(Q, I, x_0) \\ [\gamma]_A^i & \longmapsto & [\gamma_{a_i}^{-1} \gamma \gamma_{a_i}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Q_B^j, I_B^j, b_j) & \longrightarrow & \pi_1(Q, I, x_0) \\ [\gamma]_B^j & \longmapsto & [\gamma_{b_j}^{-1} \gamma \gamma_{b_j}] \end{array}$$

Nous disposons donc de morphismes de groupes :

$$\begin{aligned}\pi_1(Q_A, I_A) &\xrightarrow{\varphi_A} \pi_1(Q, I) \\ \pi_1(Q_B, I_B) &\xrightarrow{\varphi_B} \pi_1(Q, I)\end{aligned}$$

De cette façon, $\pi_1(Q, I)$ est un $G_B \times G_A^{op} = \pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$ -ensemble.

D'autre part, l'arbre maximal T de Q définit une fonction de poids W admissible de (Q, I) :

$$\begin{aligned}W: \quad Q_1 &\longrightarrow \pi_1(Q, I) \\ x \xrightarrow{\alpha} y &\longmapsto [\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]\end{aligned}$$

La fonction de poids W fait donc de $\Lambda = kQ/I$ une k -catégorie $\pi_1(Q, I)$ -graduée. Nous noterons $(\tilde{Q}, \tilde{I}) = (Q, I) \sharp \pi_1(Q, I)$. Nous disposons ainsi de $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I)$.

Le résultat suivant nous donne une compatibilité entre W , W_A et W_B .

Propriété 7.3.2 *Le diagramme suivant (où les flèches non nommées sont les inclusions) commute :*

$$\begin{array}{ccccc}(Q_A)_1 & \longrightarrow & Q_1 & \longleftarrow & (Q_B)_1 \\ W_A \downarrow & & W \downarrow & & \downarrow W_B \\ \pi_1(Q_A, I_A) & \xrightarrow{\varphi_A} & \pi_1(Q, I) & \xleftarrow{\varphi_B} & \pi_1(Q_B, I_B)\end{array}$$

Preuve : Soit $x \xrightarrow{\alpha} y$ une flèche de Q_A^i . Notons $\gamma_A^i(x)$ (resp. $\gamma_A^i(y)$) la promenade de T_A^i de source a_i et de terminus x (resp. y). Alors $W_A(\alpha) = [(\gamma_A^i(y))^{-1} \alpha \gamma_A^i(x)]_A^i$. Donc :

- $\varphi_A W_A(\alpha) = [\gamma_{a_i}^{-1} (\gamma_A^i(y))^{-1} \alpha \gamma_A^i(x) \gamma_{a_i}]$,
- $W(\alpha) = [\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]$.

Or γ_x et $\gamma_A^i(x) \gamma_{a_i}$ (resp. γ_y et $\gamma_A^i(y) \gamma_{a_i}$) sont des promenades de source x_0 et de terminus x (resp. y) de l'arbre T , donc :

$$[\gamma_x] = [\gamma_A^i(x) \gamma_{a_i}] \quad \text{et} \quad [\gamma_y] = [\gamma_A^i(y) \gamma_{a_i}]$$

Donc $\varphi_A W_A(\alpha) = W(\alpha)$ pour toute flèche α de Q_A^i et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

De la même manière, nous avons $\varphi_B W_B(\alpha) = W(\alpha)$ pour toute flèche α de Q_B . □

• Soient $x \in A_0$ et $y \in B_0$. Alors ${}_y M_x = \bigoplus_{g \in \pi_1(Q, I)} {}_y \Lambda_x^g$ est l'espace vectoriel des classes modulo I des chemins de Q de source x et de terminus y .

Remarquons que si $g \in \pi_1(Q, I)$ est tel que ${}_y \Lambda_x^g \neq 0$ alors il existe un chemin de u de Q , de source x , de terminus y et de poids $W(u) = g$. Ecrivons alors $u = u_B \alpha u_A$ avec u_B (resp. u_A) un chemin de Q_B (resp. un chemin de Q_A) et $\alpha \in \Sigma$ (une telle écriture est unique). Alors :

$$g = W(u) = W(u_B) W(\alpha) W(u_A) = \varphi_B W_B(u_B) W(\alpha) \varphi_A W_A(u_A) = W_B(u_B) \cdot W(\alpha) \cdot W_A(u_A)$$

Posons alors F le sous- $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble de $\pi_1(Q, I)$ engendré par l'ensemble $\{W(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma\}$:

$$F = \{g_B \cdot W(\alpha) \cdot g_A \mid g_B \in \pi_1(Q_B, I_B), \alpha \in \Sigma, g_A \in \pi_1(Q_A, I_A)\}$$

Ainsi M est F -graduée. Remarquons également que $\Sigma \cap T_1 \neq \emptyset$, donc l'élément neutre de $\pi_1(Q, I)$ appartient à F . Nous poserons $f_0 = 1_{\pi_1(Q, I)} \in F$. D'après la Propriété 7.3.2 et parce que Λ est $\pi_1(Q, I)$ -graduée, G_B, F, G_A, f_0 graduent (B, M, A) .

7.3.2 Calcul du revêtement galoisien associé

Conservons dans cette sous-Section les notations et hypothèses de la sous-Section précédente.

La Proposition qui suit établit le lien entre $\tilde{p}: k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow kQ/I$ et le revêtement galoisien de $\Lambda = kQ/I$ induit par la graduation sur (B, M, A) . Rappelons que $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ est le revêtement universel.

Proposition 7.3.3 *Il existe un diagramme commutatif de k -catégories :*

$$\begin{array}{ccc} (kQ/I)\sharp(G_B, F, G_A) & \xrightarrow{\sim} & k\tilde{Q}/\tilde{I} \\ & \searrow & \swarrow \bar{p} \\ & kQ/I & \end{array}$$

où la flèche verticale est un isomorphisme et où $(kQ/I)\sharp(G_B, F, G_A)$ est le smash-produit induit par la graduation sur (B, M, A) introduite dans la sous-Section 7.3.1.

Nous allons démontrer la Proposition 7.3.3 en plusieurs étapes : d'abord établir l'existence d'un morphisme naturel de groupes $(G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$, puis montrer que ce morphisme est un isomorphisme, et enfin montrer que cet isomorphisme est compatible avec les deux graduations de $\Lambda = kQ/I$ (la (G_B, F, G_A) -graduation et la $\pi_1(Q, I)$ -graduation).

D'après la Propriété 7.2.5 page 148 nous disposons d'un morphisme de groupes :

$$\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$$

tel que :

- $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A: G_A = \pi_1(Q_A, I_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$,
- $\varphi \circ \lambda_B = \varphi_B: G_B = \pi_1(Q_B, I_B) \rightarrow \pi_1(Q, I)$,
- $\varphi \circ \lambda_F: F \hookrightarrow \pi_1(Q, I)$ est l'inclusion ensembliste.

L'isomorphisme inverse de φ

Pour démontrer que φ est un isomorphisme, nous allons construire l'inverse $\pi_1(Q, I) \rightarrow (G_B, F, G_A)$ à partir d'une application définie sur l'ensemble des promenades de Q et à valeurs dans (G_B, F, G_A) , puis en démontrant que deux promenades \sim_I -homotopes ont la même image par cette application. Commençons par introduire quelques notations. Soient :

- P l'ensemble des promenades de Q ,
- P_A l'ensemble des promenades de Q_A ,
- P_B l'ensemble des promenades de Q_B ,
- $\Sigma^\pm = \{\alpha^{-1} \mid \alpha \in \Sigma\} \cup \Sigma$.

De cette façon, tout élément de P s'écrit de façon unique comme concaténation d'éléments de $P_A \cup P_B \cup \Sigma^\pm$. Nous définissons alors les applications suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_B: & P_B & \longrightarrow (G_B, F, G_A) \\ & \gamma & \longmapsto \lambda_B \circ W_B(\gamma) \\ f_A: & P_A & \longrightarrow (G_B, F, G_A) \\ & \gamma & \longmapsto \lambda_A \circ W_A(\gamma) \\ f_F: & \Sigma^\pm & \longrightarrow (G_B, F, G_A) \\ & \alpha^\varepsilon & \longmapsto (\lambda_F \circ W(\alpha))^\varepsilon \end{array}$$

Nous avons alors les faits suivants. Ils sont conséquence directe de la multiplicativité de W_A et W_B (par rapport à la concaténation) et du fait que λ_A et λ_B sont des morphismes de groupes.

- $f_A(\alpha\alpha^{-1}) = f_A(\alpha^{-1}\alpha) = 1$ pour toute flèche $\alpha \in (Q_A)_1$,
- $f_B(\alpha\alpha^{-1}) = f_B(\alpha^{-1}\alpha) = 1$ pour toute flèche $\alpha \in (Q_B)_1$,
- $f_A(\gamma'\gamma) = f_A(\gamma')f_A(\gamma)$ pour $\gamma, \gamma' \in P_A$ telles que $s(\gamma') = t(\gamma)$,
- $f_B(\gamma'\gamma) = f_B(\gamma')f_B(\gamma)$ pour $\gamma, \gamma' \in P_B$ telles que $s(\gamma') = t(\gamma)$.

Puisque toute promenade $\gamma \in P$ est produit (de manière unique) de promenades appartenant à $P_A \cup P_B \cup \Sigma^\pm$, les fonctions f_A, f_F, f_B définissent une unique application :

$$f: P \rightarrow (G_B, F, G_A)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $f|_{P_A} = f_A$, $f|_{P_B} = f_B$ et $f|_{\Sigma^\pm} = f_F$,
- (ii) $f(\alpha\alpha^{-1}) = f(\alpha^{-1}\alpha) = 1$ pour toute flèche $\alpha \in Q_1$,
- (iii) $f(\gamma'\gamma) = f(\gamma')f(\gamma)$ pour $\gamma', \gamma \in P$ telles que $s(\gamma') = t(\gamma)$,
- (iv) $f(e_x) = 1$ pour tout $x \in Q_0$.

La propriété suivante de f nous sera utile par la suite.

Propriété 7.3.4 $f(\gamma) = 1$ pour toute promenade de T .

Preuve : Soit γ une promenade de T .

- (a) si γ est une promenade de Q_A alors il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que γ est une promenade de T_A^i . Donc $f(\gamma) = \lambda_A(W_A(\gamma))$ et $W_A(\gamma) = W_A^i(\gamma) = 1$ par construction de W_A^i et de W_A ,
- (b) si γ est une promenade de Q_B alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que γ est une promenade de T_B^j . Donc $f(\gamma) = \lambda_B(W_B(\gamma))$ et $W_B(\gamma) = W_B^j(\gamma) = 1$ par construction de W_B^j et de W_B ,
- (c) si $\gamma = \alpha^\varepsilon$ avec $\alpha \in \Sigma$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ alors $\alpha \in T_1$. Donc $f(\gamma) = \lambda_F(W(\alpha))^\varepsilon$ et $W(\alpha) = 1$ par construction de W . Etant donné que $f_0 = 1$, il vient $f(\gamma) = 1$.

De manière générale, γ est une concaténation de promenades de T appartenant à P_A , P_B ou Σ^\pm . Les points (a), (b), (c) et (iii) ci-dessus montrent donc que :

$$f \text{ est une promenade de } T \implies f(\gamma) = 1$$

□

Nous pouvons à présent montrer que f passe au quotient par la relation d'homotopie \sim_I .

Propriété 7.3.5 Deux promenades \sim_I -homotopes de Q ont la même image par f .

Les points (ii) et (iii) ci-dessus montrent qu'il suffit de démontrer l'implication suivante :

$$r \text{ est une relation minimale de } I \implies f(u) = f(v) \text{ pour tous } u, v \in \text{supp}(r)$$

Soit $r \in I$ une relation minimale et soient $u, v \in \text{supp}(r)$. Posons $x = s(u)$ et $y = t(v)$.

1^{er} cas : $x, y \in A_0$. Alors r est une relation minimale de (Q_A, I_A) . Puisque $W_A: (Q_A)_1 \rightarrow \pi_1(Q_A, I_A)$ est admissible, il vient $W_A(u) = W_A(v)$. Donc :

$$f(u) = f_A(u) = \lambda_A W_A(u) = \lambda_A W_A(v) = f_A(v) = f(v)$$

2^{ème} cas : $x, y \in B_0$. En remplaçant A par B dans le raisonnement fait au 1^{er} cas, nous obtenons de la même manière $f(u) = f(v)$.

3^{ème} cas : $x \in A_0$ et $y \in B_0$. Alors $u = u_B \alpha u_A$ et $v = v_B \beta v_A$ avec u_A et v_A (resp. u_B et v_B) des chemins de Q_A (resp. Q_B) et $\alpha, \beta \in \Sigma$. Par définition de f nous avons donc :

$$f(u) = f_B(u_B) f_F(\alpha) f_A(u_A) \quad \text{et} \quad f(v) = f_B(v_B) f_F(\beta) f_A(v_A)$$

Par construction de f_B, f_F, f_A nous avons donc :

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_B(W_B(u_B)) \lambda_F(W(\alpha)) \lambda_A(W_A(u_A)) \\ &= \lambda_F(W_B(u_B).W(\alpha).W_A(u_A)) \end{aligned}$$

Or, par définition de l'action de $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$ sur $\pi_1(Q, I)$, nous avons :

$$W_B(u_B).W(\alpha).W_A(u_A) = \varphi_B(W_B(u_B))W(\alpha)\varphi_A(W_A(u_A))$$

De plus $\varphi_B(W_B(u_B)) = W(u_B)$ et $\varphi_A(W_A(u_A)) = W(u_A)$ d'après la Propriété 7.3.2 page 153. Donc $W(u) \in F$ et $f(u) = \lambda_F(W(u))$. En remplaçant u par v nous obtenons de la même manière : $W(v) \in F$ et $f(v) = \lambda_F(W(v))$. Or $r \in I$ est une relation minimale et W est une fonction de poids admissible, donc $W(u) = W(v)$ et $f(u) = f(v)$.

Ainsi $f(u) = f(v)$ quels que soient $u, v \in \text{supp}(r)$. Ceci démontre que deux promenades \sim_I -homotopes ont la même image par f . □

D'après la Propriété 7.3.5 page précédente nous disposons d'une application bien définie :

$$\begin{aligned} \bar{f}: P / \sim_I &\longrightarrow (G_B, F, G_A) \\ [\gamma] &\longmapsto f(\gamma) \end{aligned}$$

D'après les points (iii) et (iv) ci-dessus, \bar{f} définit, après restriction à l'ensemble des classes de \sim_I -homotopie des promenades de source et terminus x_0 , un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \theta: \pi_1(Q, I) &\longrightarrow (G_B, F, G_A) \\ [\gamma] &\longmapsto f(\gamma) \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que θ est l'inverse de φ .

Propriété 7.3.6 $\theta \circ \varphi = Id_{(G_B, F, G_A)}$

Preuve : Par définition de φ et en vertu de la Propriété 7.2.5 page 148, il suffit de démontrer que $\theta \circ \varphi \circ \lambda_A = \lambda_A$, $\theta \circ \varphi$

$\lambda_B = \lambda_B$ et $\theta \circ \varphi \circ \lambda_F = \lambda_F$.

• Soit γ une promenade de la composante connexe Q_A^i de Q_A , de source et terminus a_i , de sorte que $[\gamma]_A^i \in \pi_1(Q_A, I_A)$. Etant donné que $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A$, nous avons :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A([\gamma]_A^i) = \theta \circ \varphi_A([\gamma]_A^i)$$

Or, $\varphi_A([\gamma]_A^i) = [\gamma_{a_i}^{-1} \gamma \gamma_{a_i}]$ (par construction de φ_A), donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A([\gamma]_A^i) = \theta([\gamma_{a_i}^{-1} \gamma \gamma_{a_i}])$$

Or :

$$\theta([\gamma_{a_i}^{-1} \gamma \gamma_{a_i}]) = f(\gamma_{a_i}^{-1} \gamma \gamma_{a_i}) = f(\gamma_{a_i}^{-1}) f(\gamma) f(\gamma_{a_i})$$

par construction de θ et car f est multiplicative. D'autre part, étant donné que γ_{a_i} et $\gamma_{a_i}^{-1}$ sont des promenades de T , nous savons (d'après la Propriété 7.3.4 page précédente) que $f(\gamma_{a_i}) = f(\gamma_{a_i}^{-1}) = 1$. Donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A([\gamma]_A^i) = f(\gamma)$$

Etant donné que $\gamma \in P_A$ (car γ est une promenade de Q_A^i donc de Q_A) il vient, par définition de f_A :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A([\gamma]_A^i) = f_A(\gamma) = \lambda_A(W_A(\gamma))$$

Enfin, par construction de W_A , nous avons $W_A(\gamma) = [\gamma]_A^i$, donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A([\gamma]_A^i) = \lambda_A([\gamma]_A^i)$$

Cette égalité est valable pour tout $i \in \{1, \dots, m, \}$ et pour tout $[\gamma]_A^i \in \pi_1(Q_A^i, I_A^i) \hookrightarrow \prod_{j=1}^m \pi_1(Q_A^j, I_A^j)$, donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_A = \lambda_A \tag{1}$$

• En remplaçant A par B , le raisonnement que nous venons de faire s'applique également à $\theta \circ \varphi \circ \lambda_B$, nous obtenons ainsi :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_B = \lambda_B \tag{2}$$

• Soit $g \in F$. Donc il existe $g_A \in G_A = \pi_1(Q_A, I_A)$, $g_B \in G_B = \pi_1(Q_B, I_B)$ et $\alpha \in \Sigma$ tels que $g = g_B \cdot W(\alpha) \cdot g_A = \varphi_B(g_B) W(\alpha) \varphi_A(g_A)$. Donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_F(g) = \theta \circ \varphi \circ \lambda_F(\varphi_B(g_B) W(\alpha) \varphi_A(g_A))$$

Or :

- $\lambda_F(\varphi_B(g_B) W(\alpha) \varphi_A(g_A)) = \lambda_F(g_B \cdot W(\alpha) \cdot g_A) = \lambda_B(g_B) \lambda_F(W(\alpha)) \lambda_A(g_A)$,
- $\theta \circ \varphi \circ \lambda_A(g_A) = \lambda_A(g_A)$ d'après l'égalité (1) ci-dessus,
- $\theta \circ \varphi \circ \lambda_B(g_B) = \lambda_B(g_B)$ d'après l'égalité (2) ci-dessus.

Donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_F(g) = \lambda_B(g_B) \theta \circ \varphi \circ \lambda_F(W(\alpha)) \varphi_A(g_A)$$

Notons x la source de α et y son terminus. Donc $W(\alpha) = [\gamma_y^{-1} \alpha \gamma_x]$, puis, par construction de θ et par multiplicativité de f :

$$\theta(W(\alpha)) = f(\gamma_y^{-1}) f_F(\alpha) f(\gamma_x)$$

Etant donné que γ_x et γ_y^{-1} sont des promenades de T , nous savons (d'après la Propriété 7.3.4 page 155) que $f(\gamma_y^{-1}) = f(\gamma_x) = 1$. D'autre part, par construction de f_F , nous avons $f_F(\alpha) = \lambda_F(W(\alpha))$. Donc :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_F(g) = \lambda_B(g_B) \lambda_F(W(\alpha)) \varphi_A(g_A) = \lambda_F(g_B \cdot W(\alpha) \cdot g_A) = \lambda_F(g)$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $g \in F$, il vient :

$$\theta \circ \varphi \circ \lambda_F = \lambda_F \quad (3)$$

Les égalités (1), (2) et (3) ci-dessus montrent que $\theta \circ \varphi = Id_{(G_B, F, G_A)}$. \square

Nous pouvons à présent démontrer que $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est un isomorphisme de groupes.

Proposition 7.3.7 $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est un isomorphisme de groupes d'inverse $\theta: \pi_1(Q, I) \rightarrow (G_B, F, G_A)$.

Preuve : Ayant $\theta \circ \varphi = Id_{(G_B, F, G_A)}$ (d'après la Propriété 7.3.6 page précédente) il nous suffit de démontrer que φ est surjectif. Rappelons que $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A$, $\varphi \circ \lambda_B = \varphi_B$ et $\varphi \circ \lambda_F$ est l'inclusion $F \hookrightarrow \pi_1(Q, I)$. Soit $[\gamma] \in \pi_1(Q, I)$ (ainsi γ est une promenade de Q de source et terminus x_0). En particulier, $[\gamma] = W(\gamma)$. Nous savons qu'il existe des promenades $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ appartenant à $P_A \cup P_B \cup \Sigma^\pm$ et vérifiant l'égalité $\gamma = \gamma_r \dots \gamma_1$. En particulier, $[\gamma] = W(\gamma) = W(\gamma_r) \dots W(\gamma_1)$. Or, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ nous avons :

- si $\gamma_i \in P_A$ alors $W(\gamma_i) = \varphi_A W_A(\gamma_i) = \varphi(\lambda_A(W_A(\gamma_i))) \in Im(\varphi)$,
- si $\gamma_i \in P_B$ alors $W(\gamma_i) = \varphi_B W_B(\gamma_i) = \varphi(\lambda_B(W_B(\gamma_i))) \in Im(\varphi)$,
- si $\gamma \in \Sigma^\pm$, alors il existe $\alpha \in \Sigma$ ainsi que $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que $\gamma = \alpha^\varepsilon$. Dans ce cas $W(\gamma_i) = W(\alpha)^\varepsilon = \varphi(\lambda_F(W(\alpha))^\varepsilon) \in Im(\varphi)$.

Donc $W(\gamma_i) \in Im(\varphi)$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Ceci montre que $[\gamma] = W(\gamma) \in Im(\varphi)$ pour tout $[\gamma] \in \pi_1(Q, I)$. Donc φ est surjective. Donc $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow G$ est un isomorphisme de groupes d'inverse θ . \square

Preuve de la Proposition 7.3.3 page 154

Rappelons que la notation ${}_y \Lambda_x^{(g)}$ est utilisée pour désigner les espaces de morphismes homogènes pour la (G_B, F, G_A) -graduation de $\Lambda = kQ/I$ décrite dans la sous-Section 7.3.1. Nous utiliserons la notation habituelle ${}_y \Lambda_x^g$ pour désigner les espaces de morphismes homogènes pour la $\pi_1(Q, I)$ -graduation de Λ (définie au moyen de la fonction de poids W). Rappelons également que $A = kQ_A/I_A$ (resp. $B = kQ_B/I_B$) est $G_A = \pi_1(Q_A, I_A)$ -graduée (resp. $G_B = \pi_1(Q_B, I_B)$ -graduée) au moyen de la fonction de poids W_A (resp. W_B). Rappelons enfin que $(\tilde{Q}, \tilde{I}) = (Q, I) \# \pi_1(Q, I)$ et que $p: (\tilde{Q}, \tilde{I}) \rightarrow (Q, I)$ est le revêtement universel de groupe $\pi_1(Q, I)$.

- D'après la Propriété 6.2.31 page 129 nous disposons d'un diagramme commutatif de k -catégories :

$$\begin{array}{ccc} k\tilde{Q}/\tilde{I} & \xrightarrow{\sim} & (kQ/I) \# \pi_1(Q, I) \\ & \searrow \bar{p} & \swarrow \\ & kQ/I & \end{array} \quad (d_1)$$

où la flèche horizontale est un isomorphisme.

- Soient $x, y \in \Lambda_0$ et $g \in (G_B, F, G_A)$.

1^{er} cas : $x, y \in A_0$. Alors :

$${}_y \Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{g_A \in \lambda_A^{-1}(g)} {}_y A_x^{g_A}$$

Remarquons que si $\lambda_A(g_A) = g$, alors :

- $\varphi(g) = \varphi(\lambda_A(g_A)) = \varphi_A(g_A)$,
- ${}_y A_x^{g_A}$ est l'espace vectoriel engendré par les classes module I_A de chemins de Q_A de source x , de terminus y et de poids (selon W_A) g_A .

Soit $g_A \in \lambda_A^{-1}(g)$ et soit u un chemin de Q_A de source x , de terminus y et tel que $W_A(u) = g_A$. Donc $W(u) = \varphi_A(W_A(u)) = \varphi(g)$ et $u \bmod I \in {}_y \Lambda_x^{\varphi(g)}$. Ceci démontre que ${}_y \Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_y \Lambda_x^{\varphi(g)}$.

2^{ème} cas : $x, y \in B_0$. Nous pouvons alors utiliser le raisonnement fait au premier cas en remplaçant A par B .

Donc ${}_y \Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_y \Lambda_x^{\varphi(g)}$.

3^{ème} cas : $x \in A_0$ et $y \in B_0$. Alors :

$${}_y \Lambda_x^{(g)} = \bigoplus_{f \in \lambda_F^{-1}(g)} {}_y M_x^f$$

Rappelons que $F \subseteq \pi_1(Q, I)$ et que la F -graduation de M est déduite de la $\pi_1(Q, I)$ graduation de Λ , autrement dit ${}_y M_x^f = {}_y \Lambda_x^f$ pour tout $f \in F$. D'autre part, si $f \in \lambda_F^{-1}(g)$ alors $\varphi(g) = \varphi(\lambda_F(f)) = f$ par construction de φ . Donc ${}_y \Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_y \Lambda_x^{\varphi(g)}$.

• Ainsi :

$$(\forall g \in (G_B, F, G_A)) (\forall x, y \in \Lambda_0) \quad {}_y \Lambda_x^{(g)} \subseteq {}_y \Lambda_x^{\varphi(g)} \quad (\star)$$

Etant donné que $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est un isomorphisme, toutes les inclusions (\star) ci-dessus sont des égalités. L'application bijective :

$$\begin{aligned} (\Lambda \sharp (G_B, F, G_A))_0 &\longrightarrow (\Lambda \sharp \pi_1(Q, I))_0 \\ (x, s) &\longmapsto (x, \varphi(g)) \end{aligned}$$

définit donc un isomorphisme de k -catégories $\Lambda \sharp (G_B, F, G_A) \xrightarrow{\sim} \Lambda \sharp \pi_1(Q, I)$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \sharp (G_B, F, G_A) & \xrightarrow{\sim} & \Lambda \sharp \pi_1(Q, I) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Lambda & \end{array} \quad (d_2)$$

Les diagrammes (d_1) et (d_2) fournissent le diagramme désiré dans la Proposition 7.3.3 page 154. Cette dernière est donc démontrée. \square

7.4 Conoyau du morphisme $G_b \star G_A \rightarrow G$

Soit $\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}$ une k -catégorie de matrices triangulaires. Supposons donnée une graduation sur (B, M, A) par G_B, F, G_A, f_0 . Dans la Section 7.2 (voir la Définition 7.2.3 page 148) nous avons construit le groupe (G_B, F, G_A) ainsi qu'un revêtement galoisien de Λ de groupe (G_B, F, G_A) . Rappelons que nous disposons de morphismes de groupes $\lambda_A: G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$, $\lambda_B: G_B \rightarrow (G_B, F, G_A)$ et d'une application $\lambda_F: F \rightarrow (G_B, F, G_A)$ vérifiant la propriété universelle décrite dans la Propriété 7.2.5 page 148. Remarquons que les morphismes de groupes λ_A et λ_B définissent un morphisme de groupes noté λ :

$$\lambda: G_B \amalg G_A \longrightarrow (G_B, F, G_A)$$

Le but de cette Section est de déterminer le conoyau du morphisme de groupes λ . Remarquons que dans [3], I. Assem, J. C. Bustamante, D. Castonguay et C. Novoa ont étudié une question similaire : en supposant que $A = k$, ils ont démontré que pour une présentation admissible de Λ par (Q, I) (définissant une présentation admissible de B par (Q_B, I_B)), le conoyau du morphisme $\pi_1(Q_B, I_B) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est libre.

Rappelons que F est un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble. Fixons des notations pour cette Section

Définition 7.4.1 Soit F_0 l'orbite de $f_0 \in F$. Alors $F \setminus F_0$ est un $G_B \times G_A^{op}$ -ensemble. Soit alors E l'espace quotient de $F \setminus F_0$ par l'action de $G_B \times G_A^{op}$. Le groupe libre de base E sera noté $L(E)$.

Définition 7.4.2 Soit $\pi_F: F \rightarrow L(E)$ l'application définie comme suit :

$$(\forall f \in F) \quad \pi_F(f) = \begin{cases} G_B \times G_A^{op} \cdot f & \text{si } f \notin F_0 \\ 1 & \text{si } f \in F_0 \end{cases}$$

Remarque 7.4.3 L'application $\pi_F: F \rightarrow L(E)$ est constante sur les orbites de F .

L'application π_F nous permet de définir un candidat pour le conoyau de $\lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$.

Propriété 7.4.4 Il existe un et un seul morphisme de groupes $\pi: (G_B, F, G_A) \rightarrow L(E)$ vérifiant :

- $\pi \circ \lambda_B$ est le morphisme trivial,
- $\pi \circ \lambda_A$ est le morphisme trivial,
- $\pi \circ \lambda_F = \pi_F$.

Preuve : Posons $\pi_A: G_A \rightarrow L(E)$ et $\pi_B: L(E)$ les morphismes triviaux.

Nous avons :

$$\pi \circ \lambda_F(f_0) = \pi_F(f_0) = 1$$

Soient $f \in F$, $g_A \in G_A$ et $g_B \in G_B$. Donc $g_B.f.g_A$ et f sont dans la même orbite de F . D'après la Remarque 7.4.3 nous avons donc $\pi_F(g_B.f.g_A) = \pi_F(f)$. D'autre part $\pi_A(g_A) = \pi_B(g_B) = 1$ donc :

$$\pi_B(g_B)\pi_F(f)\pi_A(g_A) = \pi_F(g_B.f.g_A)$$

D'après la Propriété 7.2.5 page 148 nous savons donc qu'il existe un et un seul morphisme de groupes $\pi: (G_B, F, G_A) \rightarrow L(E)$ vérifiant les propriétés annoncées. \square

Proposition 7.4.5 Le conoyau du morphisme naturel $\lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ est π , c'est donc un groupe libre de base E

Preuve : • Rappelons que $\lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ est le morphisme de groupes défini par $\lambda_A: G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ et $\lambda_B: G_B \rightarrow (G_B, F, G_A)$. Donc la composition $\pi \circ \lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow L(E)$ est le morphisme de groupes défini par :

- $\pi \circ \lambda_A: G_A \rightarrow L(E)$,
- $\pi \circ \lambda_B: G_B \rightarrow L(E)$.

Or ces deux morphismes sont triviaux par construction de π (voir la Propriété 7.4.4). Donc $\pi \circ \lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow L(E)$ est le morphisme trivial.

• Rappelons que E est l'espace quotient de $F \setminus F_0$ pour l'action de $G_B \times G_A^{op}$. Donc si $e \in E$, alors il existe $f \in F \setminus F_0$ tel que $e = G_B \times G_A^{op}.f$ et $e = \pi_F(f) = \pi(\lambda_F(f))$. Donc le morphisme $\pi: (G_B, F, G_A) \rightarrow L(E)$ est surjectif. C'est donc un épimorphisme.

• Soit $u: (G_B, F, G_A) \rightarrow G$ un morphisme de groupes tel que $u \circ \lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow G$ est le morphisme trivial. Par construction de λ , cela signifie que $u \circ \lambda_A: G_A \rightarrow G$ et $u \circ \lambda_B: G_B \rightarrow G$ sont les morphismes triviaux. En particulier, pour $f \in F$, $g_A \in G_A$ et $g_B \in G_B$ nous avons :

$$u(\lambda_F(g_B.f.g_A)) = u(\lambda_B(g_B)\lambda_F(f)\lambda_A(g_A)) = u(\lambda_F(f))$$

Donc $u \circ \lambda_F: F \rightarrow G$ est une application constante sur les orbites de F . Il existe donc une application $\bar{u}: E \rightarrow G$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F \setminus F_0 & \xrightarrow{u} & G \\ \downarrow & \nearrow \bar{u} & \\ E & & \end{array} \quad (d)$$

la flèche horizontale étant le quotient. L'application $\bar{u}: E \rightarrow G$ définit un morphisme de groupes $\tilde{u}: L(E) \rightarrow G$. Montrons que $\tilde{u} \circ \pi: (G_B, F, G_A) \rightarrow G$ coïncide avec u . Nous avons :

- $\tilde{u} \circ \pi \circ \lambda_A$ est le morphisme trivial (car $\pi \circ \lambda_A$ est trivial) et $u \circ \lambda_A$ est le morphisme trivial (par hypothèse sur u),
- $\tilde{u} \circ \pi \circ \lambda_B$ est le morphisme trivial (car $\pi \circ \lambda_B$ est trivial) et $u \circ \lambda_B$ est le morphisme trivial (par hypothèse sur u),
- si $f \in F_0 = G_B \times G_A^{op}.f_0$, alors $u \circ \lambda_F(f) = u \circ \lambda_F(f_0) = 1$ (la première égalité résulte du fait que $u \circ \lambda_F$ est constant sur les orbites de F et la seconde du fait que $\lambda_F(f_0) = 1$). D'autre part $\pi(f) = 1$ par construction donc $\tilde{u} \circ \pi(f) = 1 = u \circ \lambda_F(f)$,

- si $f \in F \setminus F_0$ alors $\pi(\lambda_F(f)) = G_B \times G_A^{op} \cdot f$ puis $\tilde{u} \circ \pi(\lambda_F(f)) = u(\lambda_F(f))$ d'après la commutativité du diagramme (d) ci-dessus.

Ceci démontre, grâce à la Propriété 7.2.5 page 148 que $\tilde{u} \circ \pi = u$. Etant donné que π est surjectif, \tilde{u} est l'unique morphisme $L(E) \rightarrow G$ vérifiant $\tilde{u} \circ \pi = u$. Ceci démontre que π est le conoyau de λ . \square

Appliquons à présent la Proposition 7.4.5 page précédente au cas étudié dans la Section 7.3 : supposons que $\Lambda = kQ/I$ où (Q, I) est un carquois lié connexe. Nous reprenons désormais les notations et hypothèses mises en places dans la Section 7.4. Rappelons brièvement celles d'entre elles que nous utiliserons :

- $A = kQ_A/I_A$ et $B = kQ_B/I_B$,
- Σ est l'ensemble des flèches de Q de source un sommet de Q_A et de terminus un sommet de Q_B ,
- $\pi_1(Q_A, I_A)$ (resp. $\pi_1(Q_B, I_B)$) désigne le produit libre des groupes fondamentaux des composantes connexes de (Q_A, I_A) (resp. de (Q_B, I_B)),
- $W: Q_1 \rightarrow \pi_1(Q, I)$ (resp. $W_A: (Q_A)_1 \rightarrow \pi_1(Q_A, I_A)$, $W_B: (Q_B)_1 \rightarrow \pi_1(Q_B, I_B)$) est une fonction de poids admissible de (Q, I) (resp. (Q_A, I_A) , (Q_B, I_B)).

Nous disposons en outre de deux morphismes naturels de groupes :

$$\varphi_A: \pi_1(Q_A, I_A) \rightarrow \pi_1(Q, I) \quad \text{et} \quad \varphi_B: \pi_1(Q_B, I_B) \rightarrow \pi_1(Q, I)$$

de sorte que (voir la Propriété 7.3.2 page 153) :

- $W(\alpha) = \varphi_A W_A(\alpha)$ pour toute flèche α de Q_A ,
- $W(\alpha) = \varphi_B W_B(\alpha)$ pour toute flèche α de Q_B .

Les morphismes φ_A et φ_B confèrent à $\pi_1(Q, I)$ une structure de $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$ -ensemble et F désigne le sous- $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$ -ensemble de $\pi_1(Q, I)$ engendré par $\{W(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma\}$. De cette façon nous disposons d'une graduation sur (B, M, A) par $\pi_1(Q_B, I_B), F, \pi_1(Q_A, I_A), f_0 = 1$. Enfin nous avons mis en évidence un isomorphisme de groupes (voir la Proposition 7.3.7 page 157) :

$$\varphi: (\pi_1(Q_A, I_A), F, \pi_1(Q_B, I_B)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Q, I)$$

tel que $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A$ et $\varphi \circ \lambda_B = \varphi_B$.

Notons alors :

$$(\varphi_B, \varphi_A): \pi_1(Q_B, I_B) \amalg \pi_1(Q_A, I_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$$

le morphisme de groupes induit par les morphismes naturels $\varphi_A: \pi_1(Q_A, I_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ et $\varphi_B: \pi_1(Q_B, I_B) \rightarrow \pi_1(Q, I)$. Rappelons que F_0 désigne l'orbite de $f_0 = 1 \in F$ sous l'action de $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$ et que E désigne l'espace quotient de $F \setminus F_0$ par l'action de $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$.

A l'aide de la Proposition 7.4.5 page précédente nous pouvons à présent démontrer le Corollaire suivant. Notons que dans le cas où Q est fini et où $A = k$, ce Corollaire a déjà été démontré par I. Assem, J. C. Bustamante, D. Castonguay et C. Novoa dans [3]

Corollaire 7.4.6 *Le conoyau de (φ_B, φ_A) est libre de base l'espace quotient de $F \setminus F_0$ par l'action de $\pi_1(Q_B, I_B) \times \pi_1(Q_A, I_A)^{op}$.*

Preuve : Pour alléger le texte, nous reprenons les notations $G_A = \pi_1(Q_A, I_A)$ et $G_B = \pi_1(Q_B, I_B)$. Nous disposons du morphisme de groupes :

$$\lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$$

défini par $\lambda_A: G_A \rightarrow (G_B, F, G_A)$ et $\lambda_B: (G_B, F, G_B)$. D'après la Proposition 7.4.5 page précédente, nous savons que le conoyau de λ est libre de base $E = (F \setminus F_0)/G_B \times G_A^{op}$.

Etant donné que $\varphi: (G_B, F, G_A) \rightarrow \pi_1(Q, I)$ est un isomorphisme de groupes, $\varphi \circ \lambda$ et λ ont le même conoyau. Or, par construction de λ , le morphisme :

$$\varphi \circ \lambda: G_B \amalg G_A \rightarrow \pi_1(Q, I)$$

est défini par les morphismes de groupes $\varphi \circ \lambda_A = \varphi_A: G_A \rightarrow \pi_1(Q, I)$ et $\varphi \circ \lambda_B = \varphi_B: G_B \rightarrow \pi_1(Q, I)$. Donc $\varphi \circ \lambda = (\varphi_B, \varphi_A)$. Le Corollaire est ainsi démontré. \square

Bibliographie

- [1] I. Assem. *Algèbres et modules*. Presses de l'Université d'Ottawa. Masson (Paris), 1977.
- [2] I. Assem and Skowroński A. On some classes of simply connected algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 56(3) :417–450, 1988.
- [3] I. Assem, J. C. Bustamante, D. Castonguay, and C. Novoa. A note on the fundamental group of a one-point extension. *Publications Mathématiques de l'Université de Sherbrooke*, 2004.
- [4] I. Assem, D. Castonguay, E. N. Marcos, and S. Trepode. Strongly simply connected shurian algebras and multiplicative bases. *Journal of Algebra*, 283(1) :161–189, 2005.
- [5] I. Assem and J. A. de la Peña. The fundamental groups of a triangular algebra. *Communications in Algebra*, 24(1) :187–208, 1996.
- [6] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation theory of artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] M. J. Bardzell and E. N. Marcos. H^1 and representation of finite dimensional algebras. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 224 :31–38, 2002.
- [8] R. Bautista, F. Larrión, and L. Salmeron. On simply connected algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 27(2) :212–220, 1983.
- [9] K. Bongartz and P. Gabriel. Covering spaces in representation theory. *Inventiones Mathematicae*, 65 :331–378, 1982.
- [10] J. C. Bustamante. The classifying space of a bound quiver. *Journal of Algebra*, 277(2) :431–455, 2004.
- [11] J. C. Bustamante and D. Castonguay. Fundamental groups of presentations of algebras. à paraître dans *Journal of Algebra and its Applications*, 2005.
- [12] D. Castaonguay and J. A. de la Peña. On the inductive construction of galois coverings of algebras. *Journal of Algebra*, 263(1) :59–74, 2003.
- [13] C. Cibils. Tensor hochschild homology and cohomology. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 210 :35–51, 2000.
- [14] C. Cibils and E. N. Marcos. Skew categories, Galois coverings and smash-product of a k -category. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(1) :39–50, 2006.
- [15] D. R. Farkas, C. D. Feustel, and E. L. Green. Synergy in the theories of Gröebner bases and path algebras. *Canadian Journal of Mathematics*, 45(4) :727–739, 1993.
- [16] D. R. Farkas, E. L. Green, and E. N. Marcos. Diagonalizable derivations of finite dimensional algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 196(2) :341–351, 2000.
- [17] P. Gabriel. The universal cover of a representation finite algebra. *Lecture Notes in Mathematics*, 903 :65–105, 1981. in : Representation of algebras.
- [18] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Annals of Mathematics*, 78(2) :267–288, 1963.
- [19] E. L. Green. Graphs with relations, coverings and group-graded algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 279(1) :297–310, sep 1983.
- [20] A. Grothendieck and M. Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental*. SGA 1, volume 224 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [21] F. Guil-Asensio and M. Saorín. The group of outer automorphisms and the Picard group of an algebra. *Algebras and Representation Theory*, 2(4) :313–330, 1999.
- [22] D. Happel. Hochschild cohomology of finite dimensional algebras. *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreuil, Marie-Paule Malliavin, Lecture Notes in Mathematics*, 1404 :108–126, 1989.

- [23] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Mathematics*, 46 :58–67, 1992.
- [24] F. E. Hohn. *Elementary matrix algebra*. Collier Macmillan Publishers, 3rd edition, 1973.
- [25] B. Keller. Hochschild cohomology and derived Picard groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 190 :177–196, 2004.
- [26] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 3rd edition, 1993.
- [27] P. Le Meur. The fundamental group of a triangular algebra without double bypasses. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 341, 2005.
- [28] P. Le Meur. The universal cover of an algebra without double bypasses. math.RT/0507513, 2005.
- [29] R. Martínez-Villa and J. A. de la Peña. The universal cover of a quiver with relations. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 30 :277–292, 1983.
- [30] S. Michelena and M. I. Platzbeck. Hochschild cohomology of triangular matrix algebras. *Journal of Algebra*, 223(2) :502–525, 2000.
- [31] B. Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Mathematics*, 8 :1–161, 1972.
- [32] R. Mneimne and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann (Paris), 1997.
- [33] J. A. de La Peña and M. Saorín. On the first Hochschild cohomology group of an algebra. *Manuscripta Mathematica*, 104 :431–442, 2001.
- [34] R. D. Pollack. Algebras and their automorphism groups. *Communications in Algebra*, 17(8) :1843–1866, 1989.
- [35] E. Reynaud. Algebraic fundamental group and simplicial complexes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 177(2) :203–214, 2003.
- [36] Ch. Riedtmann. Algebren, darstellungsköcher ueberlagerungen und zurück. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 55 :199–224, 1980.
- [37] C. Strametz. The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 334(9) :733–738, 2002.
- [38] C. Strametz. The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra. *Journal of Algebra and its Applications*, 5(3) :245–270, 2006.

Index

- (G_B, F, G_A) , 146
 $(Q, I)\sharp G$, 124
 $(Q\sharp G, I\sharp G)$, 124
 $\langle \sim, \alpha \sim' u \rangle$, 73
 $Aut(F)$, 106
 $Aut(Q)$, 17
 $Aut(Q, I)$, 31
 $Aut(\mathcal{C})$, 12
 $Aut(p)$, 121
 $Aut_0(\mathcal{C})$, 12
 $Aut_0(kQ)$, 22
 $Aut_0(kQ, I)$, 48
 $Der(A)$, 93
 $Der_0(A)$, 94
 $E(\mathcal{C})$, 71
 F -graduation, 145
 G -catégorie, 113
 G -catégorie libre, 113
 $HH^*(A)$, 93
 $HH^1(A)$, 93
 $HH^i(A)$, 93
 I, J , 13
 $I\sharp G$, 124
 $I \subseteq J$, 13
 I^n , 13
 $Int(A)$, 93
 $L(F)$, 146
 $Q\sharp G$, 124
 $Z(A)$, 11
 $[\gamma]$, 68
 $[\gamma]_I$, 68
 $[f, g]$, 93
 Γ , 83
 α^{-1} , 21
 \equiv_F , 54
 γ^{-1} , 22
 γ_x , 94
 λ_A , 146
 λ_B , 146
 λ_F , 146
 $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathcal{M} & \mathcal{B} \end{bmatrix}$, 144
 B - A bimodule, 144
 $B(Q, I)$, 71
 \mathcal{C}/G , 113
 \mathcal{C}/I , 13
 $\mathcal{C}\sharp G$, 128
 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$, 113
 \mathcal{C}_0 , 12
 \mathcal{D} , 25
 \mathcal{RC} , 14
 $\mathcal{R}^n\mathcal{C}$, 14
 \mathcal{T} , 25
 $\mathcal{T}_{(\alpha, u)}$, 44
 $\mathcal{T}_{<(\alpha, u)}$, 44
 $\mathcal{T}_{\leq(\alpha, u)}$, 44
 \mathfrak{r} , 11
 $\pi_1(Q)$, 68
 $\pi_1(Q, I)$, 70
 $\pi_1(Q, I, x_0)$, 69
 $\psi(I)$, 13
 $\sim \rightarrow \sim'$, 83
 \sim_I , 68
 θ_ν , 94
 \approx_I , 69
 $\varphi_{\alpha, u, \tau}$, 25
 ${}_y\mathcal{C}_x$, 12
 e_i^* , 52
 $exp(\nu)$, 53
 k -algèbre, 11
 k -algèbre de dimension finie, 11
 k -catégorie, 12
 k -catégorie G -graduée, 15
 kQ^+ , 20
 $ln(\psi)$, 53
 $supp(r)$, 20, 52
 u^* , 20
 x^+ , 16
 x^- , 16
algèbre basique, 11
algèbre de matrices triangulaires, 143
algèbre des chemins, 19
algèbre monomiale, 32
arbre maximal, 70
automorphisme d'un foncteur couvrant, 106
automorphisme d'un revêtement, 106
automorphisme d'un revêtement de carquois lié, 121
automorphismes d'une k -catégorie, 12
base de Gröbner, 55
base duale, 52
basique, 11
boucle, 18
carquois, 16
carquois des relations d'homotopie, 83
carquois lié, 29
carquois ordinaire, 17, 18

- catégorie des carquois, 17
- catégorie des carquois liés, 31
- catégorie des chemins, 19
- catégorie des revêtements de \mathcal{B} , 106
- catégorie quotient, 13, 113
- centre d'une algèbre, 11
- chemin, 18
- coextension ponctuelle, 144
- cohomologie de Hochschild, 93
- composante connexe, 14
- concaténation, 19, 22
- connexe, 11, 14, 22
- contrainte, 18
- cycle orienté, 18

- dérivé, 34
- dérivé d'ordre 1, 34
- dérivé d'ordre m , 34
- dérivation, 93
- dérivation intérieure, 93
- dérivation unitaire, 94
- dilatation, 25
- double raccourci, 24

- espace classifiant, 71
- exponentielle, 53
- extension ponctuelle, 144

- fibre, 105
- flèche, 16
- flèches multiples, 18
- foncteur couvrant, 105
- foncteur couvrant présentable, 125
- fonction de poids, 40, 124
- forme normale, 20, 52

- graduation connexe, 128
- graduation sur (B, M, A) , 145
- groupe des automorphismes d'un foncteur couvrant, 106
- groupe des automorphismes d'un revêtement, 106
- groupe fondamental, 69

- idéal, 13
- idéal admissible, 29
- idéal homogène, 15
- idéal monomial, 30
- idéal produit, 13
- induire une succession directe, 83

- localement bornée, 14
- localement de dimension finie, 14
- logarithme, 53
- longueur, 18

- Morita réduction, 11
- morphisme de carquois, 17
- morphisme de carquois liés, 31
- morphisme homogène, 15
- ordre naturel, 40
- ordre admissible, 42
- ordre associé à (α_0, u_0) , 42
- ordre associé à $<$, 42
- ordre sur les chemins, 39
- ordre sur les raccourcis, 42

- parallèles, 18
- plus fine, 72
- poids, 40
- poids d'un chemin, d'une promenade, 124
- présentation admissible, 31
- présentation relative à, 31
- promenade, 21
- puissance d'un idéal, 13

- raccourci, 23
- radical d'une k -catégorie, 14
- relèvement par rapport à un revêtement, 107
- relèvement par rapport à un revêtement de carquois lié, 118
- relation, 29, 53
- relation d'équivalence associée à, 54
- relation d'homotopie naturelle, 69
- relation d'homotopie, 68
- relation d'homotopie naturelle, 69
- relation engendrée par, 73
- relation minimale, 30, 53
- relation monomiale, 30
- revêtement, 106
- revêtement de carquois, 117
- revêtement de carquois lié, 118
- revêtement galoisien, 114
- revêtement galoisien connexe, 114
- revêtement galoisien de carquois lié, 121
- revêtement galoisien enduit par une graduation sur (B, M, A) , 148
- revêtement présentable, 125
- revêtement universel d'un carquois lié, 123
- revêtement universel d'une algèbre, 132

- sans boucle, 18
- sans flèches multiples, 18
- shurienne, 107
- smash-produit, 128
- sommet, 16
- source, 16, 18, 21
- sous-carquois, 17
- sous-expression, 20
- stationnaire, 18, 22
- successeur direct, 83
- succession directe, 83
- support, 20, 52

- terminus, 18, 21
- transvection, 25
- triangulaire, 18
- trivial, 18

Revêtements galoisiens et groupe fondamental d'algèbres de dimension finie

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude des revêtements galoisiens et à la recherche du revêtement universel et du groupe fondamental pour les algèbres de dimension finie, connexes et basiques sur un corps algébriquement clos. Pour ce faire, nous partons d'une construction déjà existante : le groupe fondamental associé à toute présentation d'une telle algèbre A par son carquois ordinaire Q et des relations admissibles. Nous commençons par comparer les différentes présentations de A . Les automorphismes de l'algèbre kQ des chemins de Q permettent de relier deux présentations de A et parmi ceux-là, nous distinguons les dilatations et les transvections : elles engendrent le groupe des automorphismes de kQ , en outre, les groupes fondamentaux de deux présentations de A reliées par une dilatation ou une transvection sont liés entre eux par un passage au quotient. Ceci permet d'exhiber un groupe fondamental pour A lorsque le corps de base est de caractéristique nulle et lorsque Q n'a pas de double raccourci. Ces raisonnements se transposent à l'étude des revêtements galoisiens de A , puisqu'à chaque présentation de A est associé un revêtement galoisien de A et de groupe le groupe fondamental de la présentation. Ainsi, sous les hypothèses précédentes fournissant le groupe fondamental de A , un revêtement universel de A existe. Ce dernier résultat est également démontré pour un corps de caractéristique quelconque, lorsque A est monomiale et lorsque Q n'a ni flèches multiples ni cycle orienté tout en admettant d'éventuels double raccourcis.

Galois coverings and fundamental group of finite dimensional algebras

Summary : This thesis is devoted to the study of the Galois coverings of finite dimensional algebras. In particular, it investigates the existence of a universal cover and a fundamental group for finite dimensional connected and basic algebras over an algebraically closed field. For this purpose, we start from an already existing notion : the fundamental group associated with any presentation of such an algebra A by its ordinary quiver Q and admissible relations. We first compare the different presentations of A . The automorphisms of the path algebra kQ allow one to link two arbitrary presentations of A . Among these automorphisms, we distinguish the dilatations and the transvections : they generate the group of automorphisms of kQ , moreover, the fundamental groups of two presentations of A linked by a transvection or a dilatation are related by a quotient relation. These properties allow us to exhibit a fundamental group for A when the ground field has characteristic zero and when Q has no double bypass. These considerations can be translated in terms of Galois coverings since any presentation gives rise to a Galois covering with group the fundamental group of the presentation. Hence, under the above hypotheses granting a fundamental group, A admits a universal cover. This last result is extended to the case where A is monomial, Q has no oriented cycles and no multiple arrows (but may have double bypasses) and where the ground field may have any characteristic.

mots-clés : algèbre de dimension finie, algèbre monomiale, algèbre triangulaire, extension d'algèbre, extension ponctuelle, revêtement, foncteur couvrant, revêtement galoisien, groupe fondamental, revêtement universel, carquois, présentation admissible, transvection, dilatation, carquois lié, raccourci, double raccourci, cycle orienté, flèches multiples, cohomologie de Hochschild.

Discipline : Mathématiques

Lieu de préparation de la thèse :

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (UMR CNRS 5149)
Université Montpellier 2
case courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5
France