



HAL
open science

Mélanges à quatre ondes dans les vapeurs atomiques : des propriétés quantiques aux applications à la gyrométrie et à la réalisation de nouveaux miroirs

Marc Vallet

► **To cite this version:**

Marc Vallet. Mélanges à quatre ondes dans les vapeurs atomiques: des propriétés quantiques aux applications à la gyrométrie et à la réalisation de nouveaux miroirs. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1991. Français. NNT: . tel-00011881

HAL Id: tel-00011881

<https://theses.hal.science/tel-00011881>

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ECOLE NORMALE
SUPERIEURE**



THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité: OPTIQUE et PHOTONIQUE

présentée par

Marc VALLET

Pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet:

**MELANGE A QUATRE ONDES DANS LES VAPEURS ATOMIQUES : DES
PROPRIETES QUANTIQUES AUX APPLICATIONS A LA GYROMETRIE ET A
LA REALISATION DE NOUVEAUX MIROIRS.**

Soutenue le 17 Juillet 1991 devant le jury composé de:

MM. B. CAGNAC (Président)
C. BORDE
A. BRUN
C. FABRE
R. FREY
G. GRYNBERG
M. PINARD

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ECOLE NORMALE
SUPERIEURE**



THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité: OPTIQUE et PHOTONIQUE

présentée par

Marc VALLET

Pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet:

**MELANGE A QUATRE ONDES DANS LES VAPEURS ATOMIQUES : DES
PROPRIETES QUANTIQUES AUX APPLICATIONS A LA GYROMETRIE ET A
LA REALISATION DE NOUVEAUX MIROIRS.**

Soutenu le 17 Juillet 1991 devant le jury composé de:

MM. B. CAGNAC (Président)
 C. BORDE
 A. BRUN
 C. FABRE
 R. FREY
 G. GRYNBERG
 M. PINARD

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure. Je remercie Jacques Dupont-Roc, directeur du laboratoire qui m'y a accueilli, pour les conditions de travail tout-à-fait remarquables qu'il m'a offert.

Gilbert Grynberg et Michel Pinard ont dirigé ce travail. Je veux exprimer toute ma reconnaissance pour ce que, l'un comme l'autre, ils m'ont apporté. Je veux aussi remercier les autres membres de l'équipe, Philippe Verkerk, Jean-Yves Courtois et Artem Petrossian, avec qui j'ai pris grand plaisir à travailler.

Je remercie tous les chercheurs du Laboratoire qui m'ont toujours fait profiter de leur expérience. En particulier, j'aimerais remercier Antoine Heidmann et Dominique Delande pour l'aide en informatique qu'ils m'ont constamment prodiguée et le groupe d'optique quantique dans sa totalité pour tous leurs conseils.

Je tiens aussi à remercier Bernard Cagnac, Christian Bordé, Alain Brun, Claude Fabre et Robert Frey qui ont accepté de participer au jury.

La majeure partie de ce travail étant de nature expérimentale, il n'aurait pu aboutir sans l'aide des personnels techniques du Laboratoire. Je remercie donc Francis Tréhin, Jean Quilbeuf, Marc Thommé, Guy Flory, Bernard Clergeaud et Ali Maizia, qui ont permis que les "manips tournent sans trop d'accros". J'aimerais aussi remercier le personnel du secrétariat, Marie-Noëlle Ollivier et Brigitte Enrique, ainsi que Mlle Gazan et M. Manceau qui ont assuré le tirage.

Je veux enfin souligner que ce travail a pu s'effectuer dans de bonnes conditions financières grâce au soutien du C.N.R.S. et de la D.R.E.T.

à Bronsky

Abstract:

The aim of this thesis is to study some applications of *four-wave mixing processes in atomic vapors*.

In the first part, we recall the basic notions of non-linear optics in a Kerr medium.

In the second part, we study some properties of ring four-wave mixing oscillators. The gain medium of these oscillators is made of an atomic vapor submitted to two external pump beams. Above threshold, two travelling counterpropagating waves appear in the cavity. We have shown and experimentally verified that the beat frequency between the two waves depends on non-reciprocal effects, such as the Sagnac effect, and the oscillator may be therefore used as a *rotation sensor*. Moreover, there are strong correlations between the waves. We have shown that the noise in *the difference of the intensities is below the shot-noise level*.

In the third part, we give some results concerning four-wave mixing processes with cross-polarized beams. We made a simple theoretical model based on the optical pumping formalism. This model allows one to interpret the large observed non-linearities as an *optical activity* process. This geometry leads to the observation of *a two-wave mixing* process, which consists of a redistribution of photons between two copropagating beams of different frequencies. This process is very close to the new cooling mechanisms. We have also realized a *phase-contrast mirror* and a *self-pumped mirror* by using sodium and rubidium vapors.

Lastly, in Annexe A and B, we present two other nonlinear oscillators which may be applied to gyrometry.

TABLE DES MATIERES**Remerciements****Abstract**

INTRODUCTION.....	1
PARTIE I: Optique non-linéaire dans les milieux Kerr.....	5
I.A. Mélange a quatre ondes	5
1. Expression de la polarisation.....	5
2. Approximation de l'enveloppe lentement variable.....	6
I.B. Discussion.....	7
1. Conservation de l'énergie.....	7
2. Accord de phase.....	8
3. Processus possibles.....	9
a. Phase non-linéaire.....	9
b. Mélange à quatre ondes vers l'arrière.....	9
c. Mélange à quatre ondes vers l'avant.....	10
d. Répartition distribuée.....	10
I.C. Références.....	12
PARTIE II: Application de l'oscillateur à mélange à quatre ondes à la gyrométrie et à la génération de faisceaux jumeaux.....	13
II.A. Généralités	14
1. Principe.....	14
a. Mode quasi-dégénéré.....	15
b. Mode non dégnéré.....	16

2. Conditions expérimentales.....	17
a. Milieu non linéaire.....	17
b. Source lumineuse.....	19
II.B. Application des oscillateurs à mélange à quatre ondes à la gyrométrie	21
1. Gyrométrie optique.....	21
a. Effet Sagnac.....	21
b. Gyromètre passif à fibre.....	22
c. Gyromètre actif ou gyrolaser.....	23
2. Etude théorique et expérimentale des propriétés gyrométriques d'un oscillateur à mélange à quatre ondes	25
3. Discussion des résultats.....	49
a. Influence de la pression	49
b. Autofocalisation des faisceaux	53
c. Autres processus de mélange à quatre ondes.....	54
d. Effet des classes de vitesse résonante.....	54
4. Conclusion.....	55
compléments II.B	
5. Influence de la phase non linéaire sur le profil des champs	56
6. Condition d'accord de phase du processus de répartition distribuée.....	62
II.C. Application des oscillateurs à mélange à quatre ondes à la génération de photons jumeaux.....	67
1. Rappel sur les états comprimés.....	67
a. Représentation semi-classique.....	67
b. Etats comprimés.....	68
c. Photons jumeaux.....	69
d. Méthode semi-classique.....	71
2. Utilisation de l'optique non linéaire pour générer des états comprimés et des faisceaux jumeaux	71
3. La méthode semi-classique appliquée à l'oscillateur à mélange à quatre ondes.....	73
a. Hypothèses et notations	73
b. Résolution des équations par l'approche temporelle.....	74
c. Effet de la rétrodiffusion.....	79

d. Pertes de la chaîne de détection.....	82
e. Validité de l'approche semi-classique.....	84
4. Montage expérimental.....	86
a. Détecteurs.....	86
b. Mesure du bruit de photon standard.....	89
1. Utilisation d'un interféromètre de Mach-Zehnder.....	90
2. Cas où un seul faisceau est incident sur le Mach-Zehnder.....	91
3. Cas où deux faisceaux sont incidents sur le Mach-Zehnder.....	93
c. Oscillateur utilisé.....	94
d. Description du Mach-Zehnder utilisé.....	98
5. Résultats expérimentaux.....	99
a. Courbes expérimentales.....	99
b. Comparaison avec la valeur théorique obtenue par la méthode semi-classique.....	101
c. Diffusion Rayleigh.....	102
d. Saturation des diodes.....	102
6. Conclusion.....	102
II.D. Références.....	103
PARTIE III: Etude du mélange d'ondes en polarisations linéaires orthogonales.....	107
III.A. Description théorique.....	107
1. Mélange de deux ondes de polarisation linéaire orthogonale: cas d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$	107
a. Description du modèle.....	107
b. Calcul des variables atomiques par les équations du pompage optique.....	110
c. Polarisation de la vapeur atomique.....	114
1. Cohérences optiques.....	114
2. Expression de la polarisation.....	115
d. Expression des champs sortants.....	116

2. Cas d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$	120
3. Interprétation des résultats.....	123
a. Description du système par un effet d'activité optique.....	123
b. Interprétation dans le formalisme de l'optique non linéaire.....	124
1. Mélange à quatre ondes.....	125
2. Mélange à deux ondes.....	126
c. Lien avec le refroidissement radiatif.....	128
4. Mélange à quatre ondes en polarisation linéaire orthogonale.....	129
a. Description du système.....	129
b. Orientation du milieu.....	130
c. Expression de l'onde réfléchie.....	131
d. Coefficient de réflexion.....	132
e. Miroir à contraste de phase.....	132
1. Amplitude réfléchie.....	132
2. Ouverture numérique.....	133
f. Auto-oscillation.....	135
5. Conclusion.....	136
III.B. Cas d'une transition quelconque.....	137
III.C. Etude expérimentale.....	163
1. Mélange multi-onde.....	163
a. Montage et paramètres expérimentaux.....	163
b. Résultats expérimentaux.....	163
2. Mélange à quatre ondes.....	166
a. Description expérimentale.....	166
b. Mesure du coefficient de réflexion.....	167
c. Auto-oscillation d'une cavité et instabilités spatiales.....	169
d. Contraste de phase.....	173
1. Rappel sur le Rubidium.....	173
2. Source lumineuse.....	174
3. Résultats expérimentaux.....	176

III.D. Miroir auto-pompé.....	181
III.E. Références:.....	193
ANNEXE A: Génération d'instabilités dans une cavité en anneau contenant un milieu de Kerr et alimentée par deux champs de fréquence différente.....	195
ANNEXE B: Oscillateurs à deux fois deux ondes.....	201

INTRODUCTION

L'étude des non-linéarités optiques a débuté au début des années soixante [1] avec l'avènement des lasers, ceux-ci permettant d'atteindre les intensités nécessaires pour étudier ces effets. Les applications des processus non-linéaires sont multiples: création de nouvelles sources lumineuses (par exemple par doublage de fréquence [1]), correction des aberrations (conjugaison de phase [2]), génération d'impulsions courtes (automodulation de phase [3]), etc.

Même si la plupart des applications utilisent en pratique des milieux denses, les vapeurs atomiques présentent néanmoins de multiples avantages au niveau de la compréhension des processus non-linéaires. En effet, les systèmes atomiques sont généralement bien connus et leurs non-linéarités peuvent être évaluées avec une très grande confiance. En outre, la possibilité offerte par les lasers accordables de travailler au voisinage d'une résonance atomique permet d'exploiter la très forte non-linéarité de ces systèmes. Il est ainsi possible avec des faisceaux laser continus d'intensité modérée d'obtenir des non-linéarités gigantesques dans les vapeurs atomiques. Ceci explique pourquoi de nombreuses équipes dans le monde continuent de travailler avec ces milieux [4] et c'est aussi pour cette raison que nous avons été amené à développer plusieurs expériences dans des vapeurs atomiques.

Hormis cette introduction, ce mémoire est constitué de trois parties:

Dans la partie I, nous rappelons les équations de base de l'optique non linéaire dans un milieu de Kerr et nous présentons les notions indispensables à la lecture des parties suivantes.

Dans la partie II, nous décrivons plusieurs résultats originaux concernant les *oscillateurs à mélange à quatre ondes* [5]. Ces derniers systèmes consistent en un milieu non linéaire placé à l'intérieur d'une cavité et soumis à deux ondes pompes extérieures à la cavité, et se propageant dans des directions opposées. Au delà d'un certain seuil, une oscillation se construit dans la cavité, le processus de gain étant le mélange à quatre ondes. Notre étude porte plus particulièrement sur le cas où les ondes pompes et l'oscillation ont la même polarisation linéaire et où la cavité est en anneau. Dans ce cas, l'oscillation est

formée de deux ondes progressives tournant dans deux directions opposées de la cavité. Nous avons alors démontré et vérifié expérimentalement que, d'une part, un tel système est susceptible d'applications en *gyrométrie*, et que, d'autre part, les deux champs sortants de la cavité sont fortement corrélés.

Dans le premier cas, nous avons observé que l'existence d'un phénomène non-réciproque conduit à une levée de dégénérescence entre les fréquences des ondes oscillantes tournant dans les direction opposées de la cavité. La fréquence de battement entre ces ondes permet de mesurer et de contrôler la non-réciprocité entre les deux sens de rotation. Cette non-réciprocité pouvant être due à l'effet Sagnac, l'oscillateur à mélange à quatre ondes peut donc être utilisé comme senseur de rotation. Notons que deux autres processus non-linéaires susceptibles d'application en gyrométrie ont été étudiés dans ce travail. Ils sont présentés dans les annexes A et B.

Le second processus est directement associé au fait que le processus de gain, le mélange à quatre ondes, est associé à une émission simultanée de paires de photons, les photons de la paire étant émis en sens opposé. Nous avons effectivement pu montrer qu'il existait une remarquable corrélation entre les intensités des deux faisceaux issus de la cavité puisque *la différence entre ces intensités présente des fluctuations plus petites que la limite de grenaille (shot-noise)*.

Dans la partie III, nous présentons plusieurs résultats concernant le mélange à quatre ondes quand les polarisations des ondes incidentes sont linéaires et orthogonales. Nous avons d'abord développé un modèle théorique basé sur les équations du pompage optique qui permet de comprendre l'origine des très grandes non-linéarités observées dans cette géométrie.

Parmi les illustrations expérimentales que nous avons faites et qui sont décrites dans cette partie, citons d'abord l'étude du *mélange à deux ondes*. Ce processus consiste en une redistribution de photons entre deux ondes se propageant dans le milieu et ayant des fréquences voisines mais différentes. L'étude de ce processus nous a montré qu'il existait une grande parenté entre cet effet et les nouveaux processus de refroidissement radiatif permettant d'obtenir des températures sub-Doppler [6].

Nous avons également montré que la géométrie dans laquelle le milieu non-linéaire interagit avec deux ondes pompes de même polarisation et se propageant en sens opposé et une onde sonde de polarisation orthogonale conduit par mélange à quatre ondes à la génération d'un champ réfléchi qui n'a ni la phase de l'onde incidente, ni la phase de l'onde conjuguée mais qui est en fait une superposition linéaire avec des amplitudes sensiblement égales de ces deux ondes. A cause de l'interférence de ces deux ondes, ce système se comporte comme *un miroir à contraste de phase* dont nous décrivons quelques propriétés. En particulier, nous présentons les résultats de plusieurs expériences montrant comment il est possible d'étudier des déformations de front d'onde ou des aberrations

d'instrument d'optique avec un tel miroir. Soulignons que les coefficients de réflexion de ces miroirs sont très élevés, et peuvent être supérieurs à 100%.

Nous avons également mis au point une version *auto-pompé* d'un tel miroir, c'est-à-dire ne nécessitant pas d'onde pompe extérieure et donc alimenté uniquement par l'onde incidente, le coefficient de réflexion de ce miroir étant de l'ordre de 20%.

- [1] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters and G. Weinreich, Phys. Rev. Lett., 7, 118 (1961).
N. Bloembergen, "Non Linear Optics", Benjamin New-York (1965).
- [2] A. Yariv and D.M. Pepper, Optics Lett., 1, 16 (1977).
- [3] S.A. Akhmanov, R.V. Kholkhlov and A.P. Sukhorukov, in Laser Handbook Vol 2, 1151 (1972) Ed. by F.T. Arecchi and E.O. Schulz-Dubois (North-Holland Publ. Comp. Amsterdam).
- [4] Voir par exemple les travaux de D. Steel et J.F. Lam (Hugues Laboratories, Malibu), R.W. Boyd (Université de Rochester), H. Gibbs (Université d'Arizona). Au laboratoire de Physique des Lasers (Université Paris-Nord), D. Bloch, Thèse d'état (1984). Dans notre laboratoire, E. Le Bihan, Thèse de 3ème cycle (1986) et D. Grandclément, Thèse Université Paris VI (1987).
- [5] D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, Phys. Rev. Lett., 59, 44 (1987).
D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, I.E.E.E. , 25, 580 (1989).
- [6] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Opt. Soc. Am. B, 6, 2023 (1989).

I. OPTIQUE NON-LINEAIRE DANS LES MILIEUX KERR

Dans cette introduction, nous rappelons les équations qui sont à la base de la théorie de l'optique non linéaire en nous limitant pour simplifier aux termes d'ordre trois en champ.

I.A. MELANGE A QUATRE ONDES

Le calcul des processus non linéaires se fait en deux étapes. Tout d'abord, on calcule la polarisation du milieu induite par le champ incident. Puis on calcule le champ rayonné par la polarisation du milieu. Nous supposons dans ce paragraphe que la polarisation du milieu est connue et nous nous intéressons uniquement au calcul du champ rayonné par cette polarisation.

I.A.1. Expression de la polarisation

Dans le cas d'une faible non-linéarité, la polarisation \vec{P} peut se développer en série de Taylor sous la forme:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 \left(\chi_0 \vec{E} + \sum_{i=2}^{\infty} \chi^{(i)} : [\vec{E}]^i \right) \quad (\text{I.1})$$

où $\chi^{(i)}$ est le tenseur de susceptibilité non linéaire d'ordre i et \vec{E} le champ total interagissant avec le milieu. Nous supposons de plus que le champ est polarisé linéairement.

Dans les milieux isotropes, tels que les vapeurs atomiques, seuls les termes impairs sont non nuls [1]. La polarisation s'écrit alors:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 \left(\chi_0 + \chi^{(3)} I + \chi^{(5)} I^2 + \dots \right) \vec{E} \quad (\text{I.2})$$

Pour des intensités suffisamment faibles, le développement précédent peut être limité à l'ordre 3, nous supposons dans la suite de cette partie que cette condition est vérifiée.

I.A.2. Approximation de l'enveloppe lentement variable

L'équation de propagation du champ s'écrit:

$$\nabla \bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{E}} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{P}} \quad (\text{I.3})$$

On suppose que le champ peut s'écrire sous la forme d'une somme d'onde plane \mathcal{E}_i et que les angles entre les différentes directions de propagation sont tous très petits devant un. De plus, les sources utilisées dans nos expériences étant des sources continues, l'amplitude des champs est supposée indépendante du temps en régime stationnaire.

$$\bar{\mathbf{E}} = \text{Re} \left(\sum \mathcal{E}_i(\vec{r}) e^{-i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) \vec{e}_o \quad (\text{I.4})$$

$$\text{avec } |\vec{k}_i| = \frac{\omega_i}{c} \left(1 + \frac{\chi_o}{2} \right)$$

La relation (I.3) s'écrit alors:

$$\text{Re} \left(\sum \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial z_i^2} + 2i k_i \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial z_i} \right) e^{-i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) \vec{e}_o = \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{P}}}{\partial t^2} \quad (\text{I.5})$$

L'approximation de l'enveloppe lentement variable [2] consiste à supposer que $\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial z_i^2} \right| \ll \left| k_i \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial z_i} \right|$, c'est-à-dire que l'échelle des variations spatiales de l'onde \mathcal{E}_i est grande devant la longueur d'onde.

On obtient alors:

$$\text{Re} \left(\sum 2i k_i \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial z_i} e^{-i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) \vec{e}_o = \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{P}}}{\partial t^2}$$

En projetant l'équation précédente sur le mode i et en intégrant sur un volume V dont les dimensions sont petites devant l'échelle de variation spatiale de \mathcal{E}_i et grandes devant le pas des différents réseaux lumineux, on obtient en notant P_+ la composante complexe de fréquence positive de la polarisation:

$$\sum 2ik_j \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial z_j} \int_V \left(e^{-i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \bar{k}_i \cdot \vec{r})} \right) dv = \mu_0 \int_V \left(\frac{\partial^2 \bar{P}_+}{\partial t^2} e^{i(\omega_i t - \bar{k}_i \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_o \right) dv \quad (I.6)$$

Les dimensions du volume V sont telles que la première intégrale de (I.6) est nulle si $i \neq j$. On obtient alors l'équation d'évolution de la composante \mathcal{E}_i :

$$2ik_i \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial z_i} = \frac{\mu_0}{V} \int_V \left(\frac{\partial^2 \bar{P}_+}{\partial t^2} e^{i(\omega_i t - \bar{k}_i \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_o \right) dv \quad (I.7)$$

En utilisant l'expression de la polarisation (I.2) limitée à l'ordre trois, on obtient alors l'expression du terme source de l'évolution de \mathcal{E}_i :

$$\sum_{j,k,l} \left(-\frac{(\omega_i + \Delta\omega)^2}{Vc^2} \int_V \left(\chi^{(3)}(\omega_j, \omega_k, \omega_l) \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k^* \mathcal{E}_l e^{i(\Delta\omega t - \Delta\vec{k} \cdot \vec{r})} \right) dv \right) \quad (I.8)$$

où: $\Delta\omega = \omega_j - \omega_k + \omega_l - \omega_i$ et $\Delta\vec{k} = \vec{k}_j - \vec{k}_k + \vec{k}_l - \vec{k}_i$

I.B. DISCUSSION

A partir de la relation (I.8), on peut étudier les différents termes qui contribuent à la polarisation rayonnant l'onde E_i et déduire les différentes relations que doivent vérifier les fréquences et les vecteurs d'ondes des champs pour que le terme (I.8) soit non nul.

I.B.1. Conservation de l'énergie

Pour que le traitement soit cohérent, il faut que la relation (I.8) soit indépendante du temps, c'est-à-dire que $\Delta\omega$ soit nul. Les fréquences des ondes d'indice $\{j,k,l\}$ participant au terme de la polarisation qui rayonne une onde de fréquence ω_i vérifient alors la relation:

$$\omega_j + \omega_l = \omega_k + \omega_i \quad (I.9)$$

Cette relation décrit la conservation de l'énergie lors de l'interaction avec les différents champs.

En supposant que le milieu est formé d'atomes à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, le processus non linéaire d'ordre trois peut se décrire par le diagramme suivant:

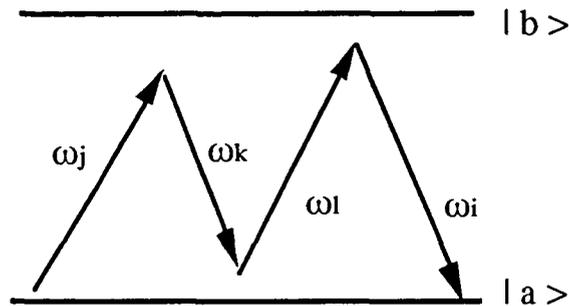


Figure I.1

C'est-à-dire qu'un photon de l'onde \mathcal{E}_j et de l'onde \mathcal{E}_l sont absorbés et qu'un photon de l'onde \mathcal{E}_k et \mathcal{E}_i sont émis.

I.B.2. Accord de phase

Le terme source (I.8) est constitué d'une intégrale sous laquelle se trouve un terme $e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. L'intégrale est maximum quand ce dernier terme est nul. Dans ce cas, on obtient la relation:

$$\vec{k}_j + \vec{k}_l = \vec{k}_k + \vec{k}_i \quad (\text{I.10})$$

Lorsque cette relation est vérifiée, tous les dipôles sont en phase et rayonnent des champs qui vont interférer de façon constructive pour former le terme source dans l'équation d'évolution de \mathcal{E}_i . On dit que le processus est accordé en phase (phase-matching) [1] [2]. Dans le cas contraire, les champs émis par les dipôles vont interférer de façon partiellement destructive ce qui va diminuer le champ global rayonné dans la direction de \mathcal{E}_i .

Soulignons que ce processus est un phénomène global qui dépend du volume d'intégration et donc des dimensions du milieu non linéaire.

I.B.3. Processus possibles

Pour limiter le nombre de cas possible, nous supposons qu'au moins deux ondes ont le même axe de propagation, ce qui est toujours le cas dans les différentes configurations étudiées dans ce mémoire. On suppose par exemple que deux ondes E_1 et E_2 se contrepropagent et que E_3 se propage selon une direction faisant un angle θ petit avec E_1 (figure I.2).

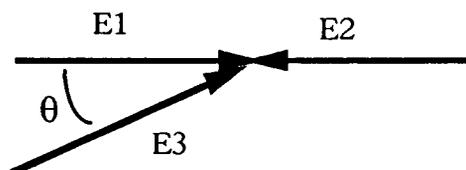


Figure I.2

On remarque dans l'expression (I.8) que les indices j et l jouent le même rôle dans l'intégrale. Les différentes contributions à la polarisation rayonnant l'onde \mathcal{E}_i peuvent être associées par paire qui ne diffèrent que par l'ordre d'interaction des atomes avec les ondes \mathcal{E}_j et \mathcal{E}_l . Néanmoins, les deux termes d'une paire peuvent avoir des poids différents, $\chi^{(3)}(\omega_j, \omega_k, \omega_l)$ n'étant pas nécessairement égal à $\chi^{(3)}(\omega_l, \omega_k, \omega_j)$.

a. Phase non-linéaire

Ce cas correspond à $i=j$ et $k=l$ (Figure I.3.a). Ce terme est toujours accordé en phase (I.10). On peut cependant différencier la phase non linéaire auto-induite ($i=j=k=l$) responsable de l'autofocalisation des faisceaux [3] de la phase non linéaire induite par une autre onde ($i=j \neq k=l$). La fréquence et la phase (à un facteur constant près) du champ rayonné E_4 sont les mêmes que celles du champ E_3 .

b. Mélange à quatre ondes vers l'arrière

Ce cas correspond à $j=1, k=3, l=2$ et $i=4$ (Figure I.3.b). Pour que l'énergie soit conservée, la fréquence de E_4 est égale à $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$. De plus, pour que le processus soit accordé en phase, les champs E_3 et E_4 se contrepropagent. On remarque d'après la relation (I.8) que la phase de E_4 est conjuguée de celle de E_3 . Ce processus est utilisé pour corriger les aberrations d'une onde lumineuse [4].

c. Mélange à quatre ondes vers l'avant

Ce cas correspond à $j=1$, $l=3$ et $i=4$ (Figure I.3.c). La conservation de l'énergie impose que $\omega_4=2\omega_1-\omega_3$.

De plus, la relation d'accord de phase impose que la direction de propagation de E_4 soit symétrique à celle de E_3 par rapport à la direction de E_1 ce qui supprime le désaccord de phase dans les directions transversales. Dans ce cas, l'intégrale (I.8) est égale à:

$$\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} e^{ik\theta^2 z} dz = i \frac{\sin\left(\frac{k\theta^2 l}{2}\right)}{\frac{k\theta^2 l}{2}} = i \operatorname{sinc}\left(\frac{k\theta^2 l}{2}\right)$$

où l est la longueur du milieu non linéaire. L'émission n'est donc optimum que pour un angle θ nul. Dans le cas contraire, le phénomène est désaccordé en phase et l'émission est très faible, le produit $k\theta^2 l$ étant grand devant l'unité, même pour des angles petits. Comme pour le mélange à quatre ondes vers l'arrière, l'amplitude du champ E_4 est conjuguée de celle du champ E_3 .

d. Répartition distribuée

Ce cas correspond à $j=2$, $k=1$, $l=3$ et $i=4$ (Figure I.3.d). La fréquence du champ E_4 vérifie alors l'égalité, déduite de (I.9): $\omega_4=\omega_2+\omega_3-\omega_1$.

De plus, la relation d'accord de phase impose la même condition que pour le mélange à quatre ondes vers l'avant.

C'est-à-dire que si l'angle θ n'est pas nul, la polarisation est pondérée par un coefficient $\operatorname{sinc}\left(\frac{k\theta^2 l}{2}\right)$. Par contre, l'amplitude du champ E_4 est proportionnelle à l'amplitude de E_3 et pas à son conjugué.

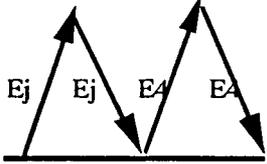
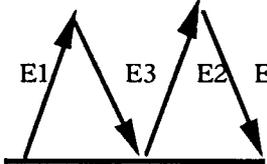
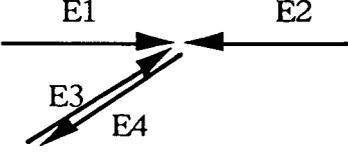
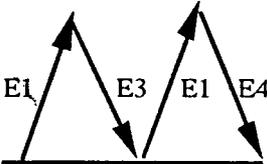
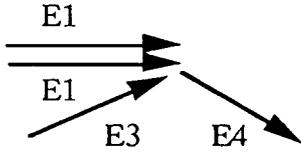
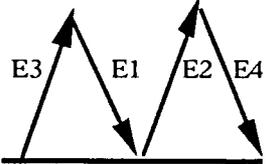
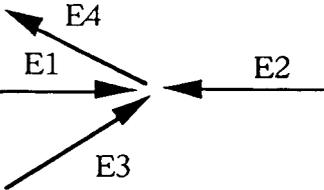
PROCESSUS	Fréquence de E4	Accord de phase
<p>a) phase non linéaire</p> 	ω_4	TOUJOURS
<p>b) Mélange à quatre ondes vers l'arrière</p> 	$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$	
<p>c) Mélange à quatre ondes vers l'avant</p> 	$\omega_4 = 2 \omega_1 - \omega_3$	
<p>d) répartition distribuée</p> 	$\omega_4 = \omega_2 + \omega_3 - \omega_1$	

Figure I.3

I.C. REFERENCES

- [1] Y.R. Shen, "The Principles of Non Linear Optics", Wiley-Interscience (1984).
- [2] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P.S. Pershan, Phys. Rev. 127, 1918 (1961).
- [3] R.Y. Chiao, E. Garmire and C.H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
- [4] R.A. Fisher, "Optical Phase Conjugation", Academic Press (1983).

II. APPLICATION DE L'OSCILLATEUR A MELANGE A QUATRE ONDES A LA GYROMETRIE ET A LA GENERATION DE FAISCEAUX JUMEAUX

Les premiers travaux sur les oscillateurs à mélange à quatre ondes (en anglais four-wave mixing oscillators) ont débuté dans le laboratoire en 1985. Les oscillateurs à mélange à quatre ondes constitués d'une cavité linéaire ont été étudiés au cours de la thèse de D. Grandclément [1]. L'étude des oscillateurs à mélange à quatre ondes constitués d'une cavité en anneau a débutée en 1987.

Les deux applications des oscillateurs à mélange à quatre ondes que nous avons étudiées nécessitant des cavités en anneau, nous nous limiterons à ce cas dans toute cette partie.

II.A. GENERALITES

II.A.1. Principe

Notre oscillateur à mélange à quatre ondes est constitué d'une cavité en anneau dans laquelle est placée une cellule contenant une vapeur atomique (figure II.1). Deux ondes pompes E_1 et E_2 , se propageant en sens opposé et de même polarisation linéaire interagissent avec la vapeur pour générer, par un processus de mélange à quatre ondes, deux ondes tournant en sens opposé dans la cavité, notées E_3 et E_4 [2].

Il est possible de montrer (Voir II.B.2 pour une approche plus quantitative de la théorie) que l'oscillation se produit lorsque le coefficient de réflexion par conjugaison de phase R_c est supérieur au carré des pertes de la cavité [3]. La polarisation des ondes oscillantes est identique à celle des ondes pompes, car les fenêtres à incidence de Brewster de la cellule introduisent des pertes importantes pour la polarisation orthogonale. De plus, dans nos conditions expérimentales, le coefficient R_c est toujours petit devant l'unité, ce qui empêche tout phénomène d'auto-oscillation [4].

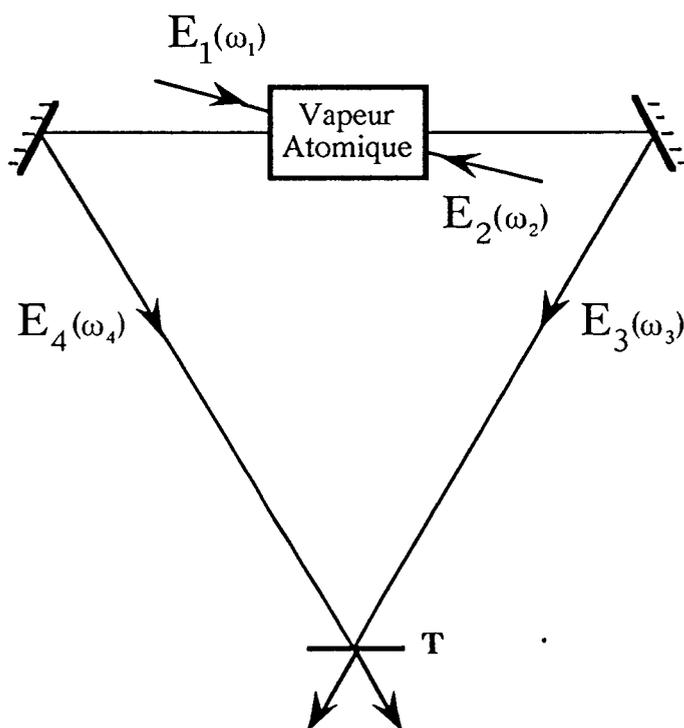


Figure II.1

La fréquence des ondes oscillantes peut être déduite de quelques formules simples. Tout d'abord, en appliquant le principe de conservation de l'énergie, le barycentre des fréquences des ondes pompes est égal au barycentre des fréquences des ondes oscillantes:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (\text{II.1})$$

Soulignons tout de suite que la relation (II.1) impose que les deux ondes contrarotatives E_3 et E_4 s'établissent simultanément et n'entrent pas en compétition comme dans les lasers en anneau classique [6] [7].

Une autre condition sur ω_3 et ω_4 est imposée par le fait que le déphasage sur un tour soit le même pour les deux ondes oscillantes E_3 et E_4 . Ceci implique la relation:

$$\omega_4 - \omega_3 = \Omega_4 - \Omega_3 \quad (\text{II.2.a})$$

où Ω_3 et Ω_4 sont les fréquences propres de la cavité les plus proches des fréquences des deux ondes oscillantes.

Notons que les fréquences propres de la cavité correspondant aux deux sens de rotation ne sont pas forcément égales. En effet, une levée de dégénérescence peut être induite par des effets non réciproques (comme par exemple l'effet Sagnac [13] ou des différences d'indice dans la cellule pour E_3 et E_4 [8]). En posant $\Delta\Omega$ cette levée de dégénérescence, la relation (II.2.a) peut s'écrire sous la forme:

$$\omega_4 - \omega_3 = \Delta\Omega + 2\pi p \frac{c}{L} \quad (\text{II.2.b})$$

où p est un entier relatif, L le périmètre de la cavité et $2\pi \frac{c}{L}$ l'intervalle spectrale libre.

Les différents modes de fonctionnement de l'oscillateur à mélange à quatre ondes se déduisent des relations (II.1) et (II.2) et correspondent aux différentes valeurs pouvant être prises par l'indice p . La valeur de p dépend de la position relative du barycentre ω_p de la fréquence des ondes pompes par rapport aux fréquences propres de la cavité.

a. Mode quasi-dégénéré

Si ω_p est proche d'une fréquence propre de la cavité, p est pair et l'on obtient, en posant $2q = p$:

$$\omega_4 - \omega_3 = \Delta\Omega + 4\pi q \frac{c}{L} \quad (\text{II.3.a})$$

Dans cette configuration, le seul mode de fonctionnement étudié expérimentalement dans le cadre de ce travail est le mode correspondant au cas où $q=0$. Ce mode de fonctionnement est représenté sur la figure II.2.a. Sur cette figure, la courbe continue correspond au sens de propagation de E_4 et la courbe en pointillée au sens de propagation de E_3 . Ce mode de fonctionnement est appelé par la suite mode quasi-dégénéré.

b. Mode non dégénéré

Si ω_p est proche du barycentre des fréquences de deux modes adjacents de la cavité, p est impair et la condition sur la différence des fréquences des ondes oscillantes s'écrit:

$$\omega_4 - \omega_3 = \Delta\Omega + 2\pi \frac{c}{L} + 4\pi q \frac{c}{L} \quad (\text{II.3.b})$$

Seuls les cas $q=0$ et $q=-1$ ont été observés expérimentalement. Ils sont représentés sur la figure II.2.b. Ces modes de fonctionnement sont appelés modes non-dégénérés ou modes B.

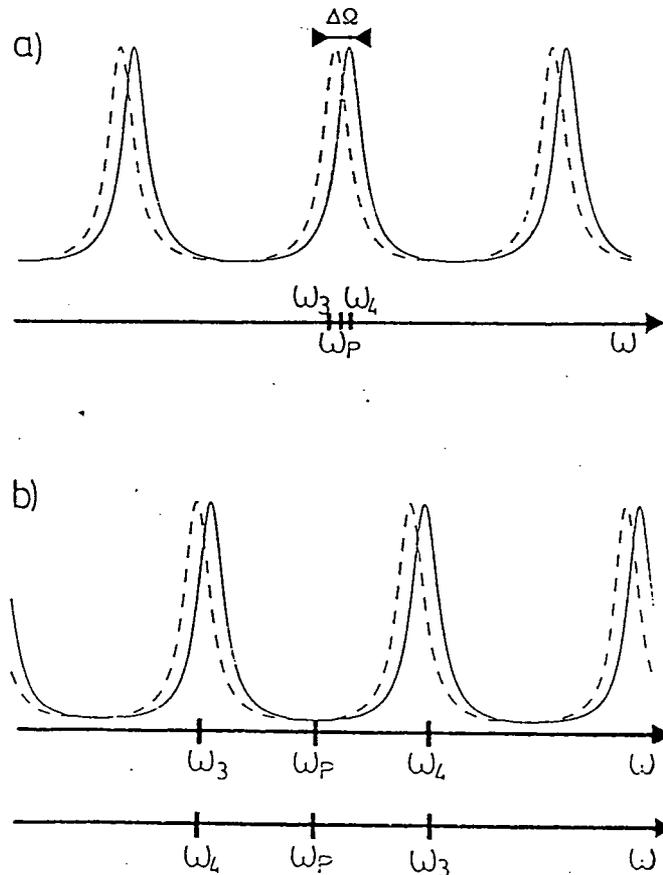


Figure II.2

II.A.2. Conditions expérimentales

a. Milieu non linéaire

La non-linéarité utilisée est due à la saturation d'une transition atomique. Les non-linéarités atomiques étant, à l'heure actuelle, parmi les plus grandes connues, leur utilisation facilite l'observation des effets recherchés. Nos expériences ont été réalisées avec la vapeur de sodium. La configuration électronique du sodium dans l'état fondamental est $(1s^2 2s^2 2p^6 3s^1)$, notée $3S_{1/2}$. Nous nous intéressons aux deux transitions qui relient le niveau $3S_{1/2}$ aux deux niveaux $3P_{1/2}$ et $3P_{3/2}$ de structure fine de la première configuration excitée. Ces deux transitions, appelées D_1 et D_2 , sont représentées sur la figure II.3.

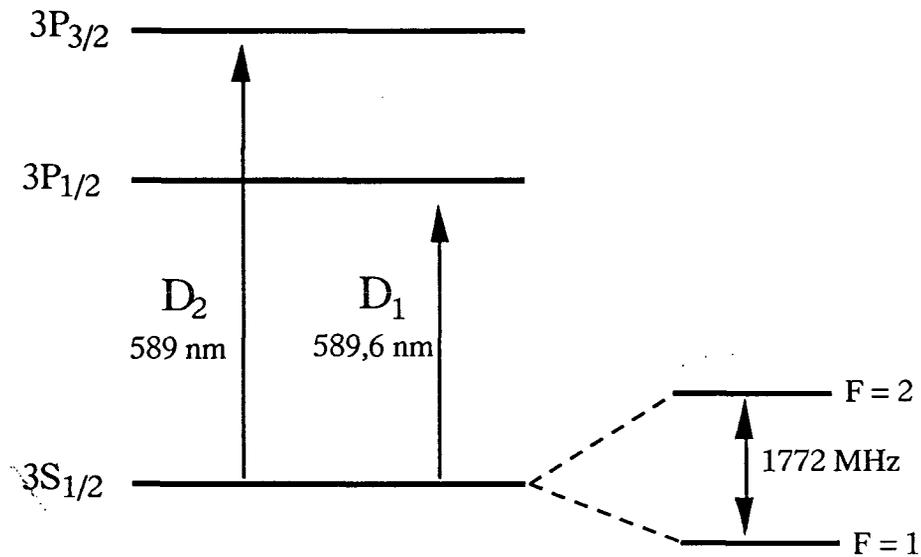


Figure II.3

Les différentes fréquences qui entrent en jeu dans le problème sont:

- Largeur naturelle du niveau excité Γ :

$$\Gamma \approx 10 \text{ MHz} \quad \text{pour les transitions } D_1 \text{ et } D_2$$

- Largeur Doppler ku :

$$ku = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad \text{soit } ku \approx 1 \text{ GHz pour } T = 175^\circ\text{C}$$

- Fréquence de Rabi des champs:

La fréquence de Rabi Ω_r qui vaut (dE/\hbar) [11] dépend de la puissance et de la polarisation des champs. Typiquement, pour un faisceau de 200 mW, focalisé sur 250 μm , polarisé linéairement, on obtient à partir de l'expression des forces d'oscillateurs [10]:

$$\begin{aligned}\Omega_r &= 700 \text{ MHz} && \text{pour la transition } D_1. \\ \Omega_r &= 1 \text{ GHz} && \text{pour la transition } D_2.\end{aligned}$$

- Désaccord à résonance :

Le désaccord δ entre la fréquence de la transition atomique et la fréquence des ondes est en valeur absolue de l'ordre de 3 GHz. Le système est donc dans la situation:

$$\Gamma \ll k u, \Omega_r < |\delta|$$

Ceci permet, d'une part, d'effectuer un développement perturbatif en $\frac{\Omega_r}{\delta}$ de la polarisation et d'autre part de négliger le nombre d'atomes interagissant de façon résonante avec le champ.

Les structures hyperfines du niveau fondamental et des niveaux excités sont négligées. Les deux transitions D_1 et D_2 sont donc assimilées à deux transitions $(J=\frac{1}{2} \rightarrow J=\frac{1}{2})$ et $(J=\frac{1}{2} \rightarrow J=\frac{3}{2})$.

Deux autres paramètres importants interviennent lorsque l'on effectue des expériences d'optique non linéaire dans les gaz. Il s'agit des susceptibilités linéaire χ_0 et non linéaire d'ordre trois $\chi^{(3)}$ définies par:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\chi_0 \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E}^3)$$

où \vec{P} est la polarisation du milieu (Voir I).

On obtient pour χ_0 , à 175°C et pour $\delta=3$ GHz:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= 6 \cdot 10^{-6} && \text{pour la transition } D_1. \\ \chi_0 &= 1,2 \cdot 10^{-5} && \text{pour la transition } D_2.\end{aligned}$$

Ce qui, compte tenu d'une longueur de cellule de 5 cm, donne une épaisseur optique égale à:

$$k\chi_0 l = 6,5 \quad \text{pour la transition } D_2.$$

Le milieu est donc optiquement épais au sens de la dispersion.

L'ordre de grandeur de $\chi^{(3)}$ est obtenu en appliquant la formule suivante démontrée pour un atome à deux niveaux [11] :

$$\chi^{(3)} = -\frac{1}{2}\chi_0 \frac{d^2}{\hbar^2 \delta^2} \quad (\text{II.4})$$

Une application numérique effectuée pour les mêmes conditions que χ_0 donne:

$$\chi^{(3)} = - 3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$$

b. Source lumineuse

La source utilisée est un laser à colorant continu monomode en anneau mis au point au laboratoire [12] (figure II.4), pompé par un laser Ar^+ . Le colorant utilisé est la Rhodamine 6G.

La puissance de sortie est de 600 mW et le jitter est de l'ordre de 1 MHz. La fréquence est asservie sur un interféromètre de Fabry-Perot balayable par pression, notée FP3 sur la figure II.4. Un isolateur optique est placé à la sortie du laser à colorant. Il est formé d'un prisme de Glan, d'un rotateur de Faraday faisant tourner une polarisation linéaire de 45° dans son plan, et d'une lame demi-onde. Il évite tout retour qui perturberait le fonctionnement du laser.

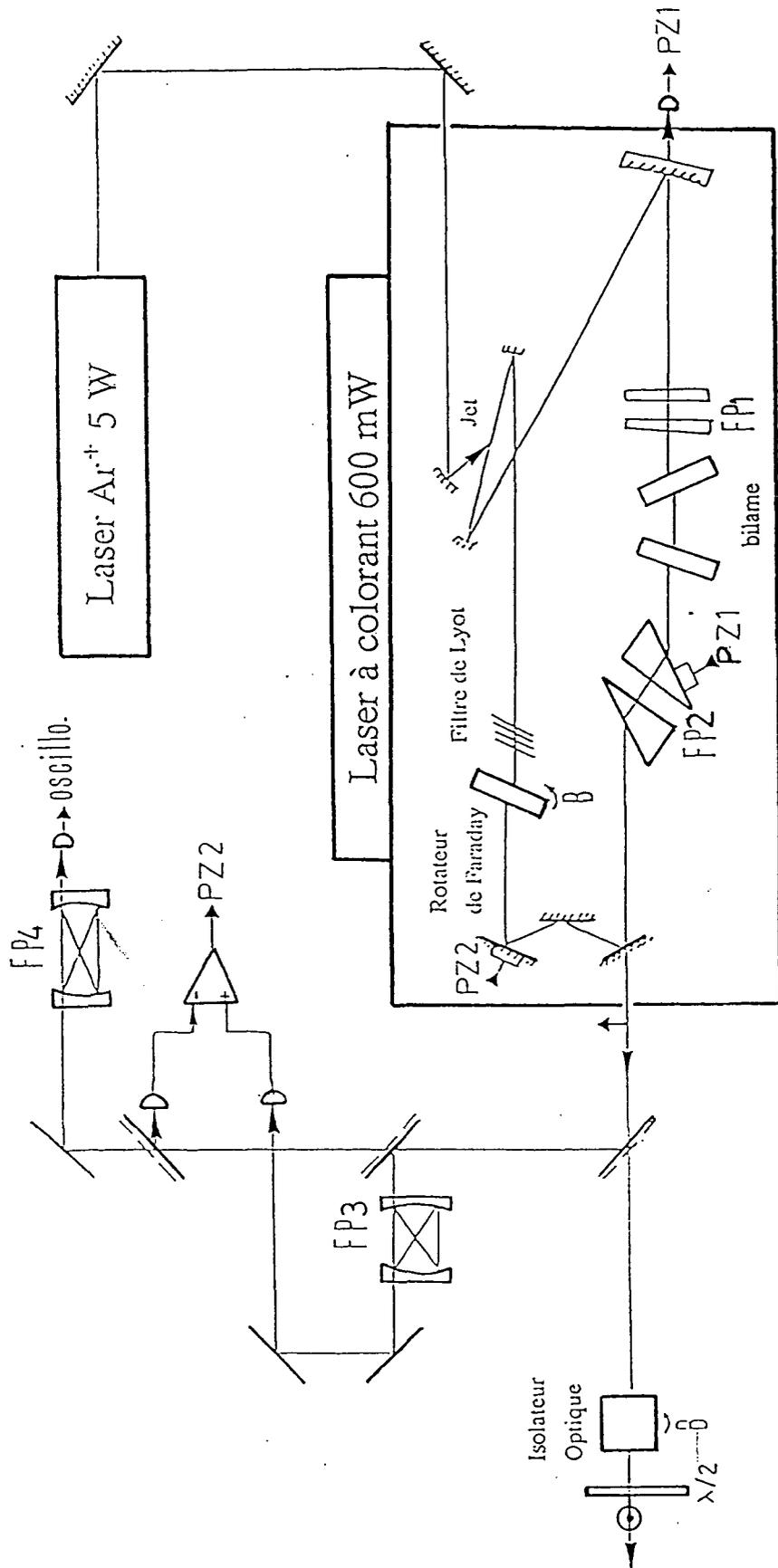


Figure II.4

Schéma du laser à colorant utilisé

II.B. APPLICATION DES OSCILLATEURS A MELANGE A QUATRE ONDES A LA GYROMETRIE

II.B.1. Gyrométrie optique

a. Effet Sagnac

La gyrométrie optique repose sur l'effet Sagnac, découvert en 1913 [13]. Celui-ci peut s'énoncer comme suit:

Deux ondes électromagnétiques, se propageant en sens opposé sur un contour (L) fermé et imprimé d'une rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ auront acquis un déphasage relatif après avoir parcouru un tour.

Une démonstration rigoureuse de l'effet Sagnac peut être trouvée dans les références [7] et [14], mais on peut intuitivement se représenter l'effet Sagnac en considérant que, dans le référentiel tournant, les deux ondes mettent un temps différent pour parcourir le contour selon que l'onde se propage dans le "sens" de la rotation ou dans le "sens opposé". A cette différence de temps correspond une différence de marche entre les deux ondes qui vaut, en supposant que le contour est situé dans un plan orthogonal à $\vec{\Omega}$:

$$\Delta L = \frac{4S}{C} \Omega \quad (\text{II.5})$$

où S est la surface délimitée par le contour.

La figure d'interférence des deux ondes contrarotatives permet alors de mesurer Ω (figure II.5).

Pour évaluer la sensibilité de l'interféromètre de Sagnac, notons que pour mesurer la rotation terrestre ($10^\circ \cdot h^{-1}$), Michelson et Gale durent utiliser un contour rectangulaire de $2 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ de surface intérieure pour obtenir une différence de marche de $\lambda/4$, ce qui correspond à une translation de la figure d'interférence d'un quart de frange [15]. De telles dimensions sont prohibitives pour la plupart des applications et plusieurs solutions ont été proposées pour surmonter cette difficulté [7].

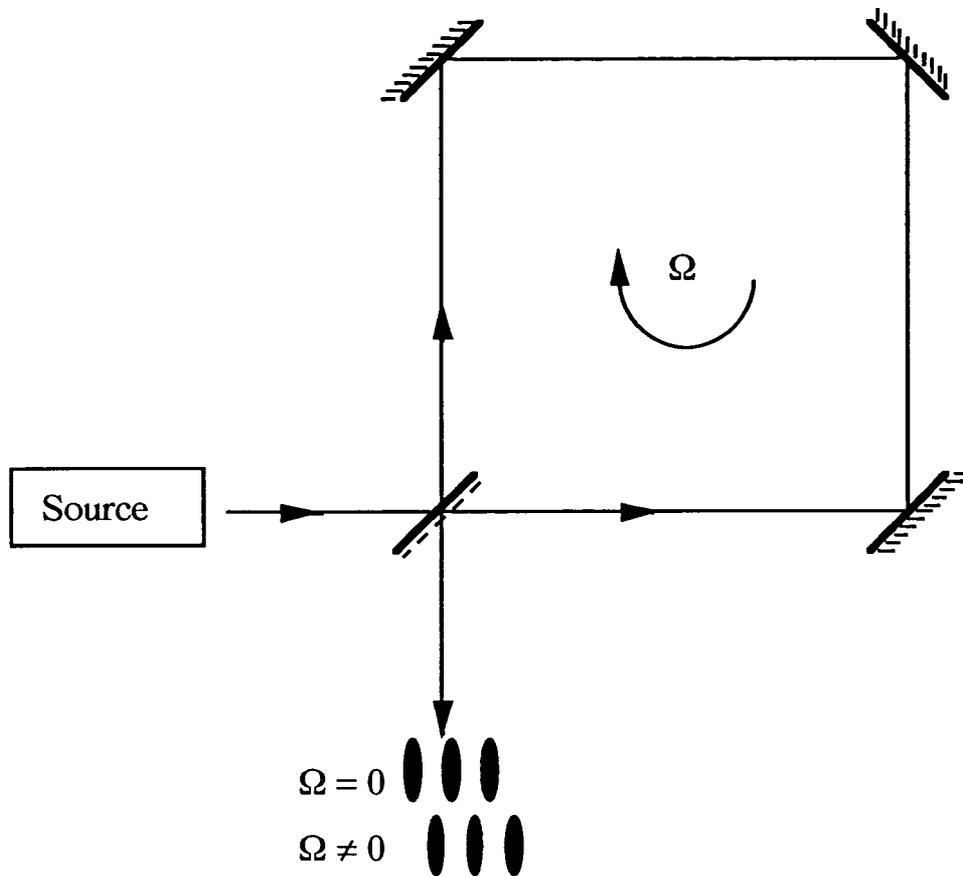


Figure II.5: Interféromètre de Sagnac

b. Gyromètre passif à fibre

L'idée est d'augmenter la surface S sans accroître la taille de l'interféromètre, en utilisant comme bras de l'interféromètre une fibre optique enroulée sur plusieurs centaines de tours. La rotation produit un déphasage mesuré par un déplacement des franges sur un détecteur [16].

Ces gyromètres ont actuellement une sensibilité maximale de $0,1^\circ \cdot \text{h}^{-1}$, insuffisante pour des systèmes de navigation inertielle. De plus, de tels gyromètres sont sensibles à tout effet non réciproque dans les fibres (effets dus à la température, aux champs magnétiques, à la biréfringence...). Leur domaine d'application reste donc la mesure de grande vitesse de rotation où leur compacité en font de bons gyromètres.

Soulignons cependant que l'utilisation de la conjugaison de phase permet d'éliminer l'influence des effets non-réciproques des fibres [16].

c. Gyromètre actif ou gyrolaser

Un autre moyen d'augmenter la sensibilité d'un gyromètre optique est de placer un milieu actif dans la cavité afin d'obtenir une oscillation bidirectionnelle (figure II.6) [17]. Le milieu amplificateur le plus généralement utilisé est un mélange Hélium-Néon. Afin d'obtenir une oscillation bidirectionnelle, il est nécessaire d'utiliser un mélange isotopique de proportion égale de Néon 20 et Néon 22 [17]. Aucune source extérieure n'est alors nécessaire. La différence de marche modifie la condition d'accord de la cavité et donc induit entre les deux ondes lasers contrarotatives une différence de marche de fréquence [7] :

$$\Delta\nu = \frac{4S}{\lambda L} \Omega \quad (\text{II.6})$$

où L est la longueur de la cavité. Le facteur $K = \frac{4S}{\lambda L}$ est appelé facteur d'échelle.

Pour $S = 1 \text{ m}^2$, $\Omega = 10^\circ \cdot \text{h}^{-1}$ et $\lambda = 0,633 \text{ }\mu\text{m}$, on obtient $\Delta\nu = 765 \text{ Hz}$, fréquence théoriquement facilement mesurable. De plus, le battement peut être mesuré très précisément. Les effets qui augmentent les fluctuations de la fréquence d'oscillation étant presque tous réciproques, s'éliminent si on mesure la différence des deux fréquences contrarotatives. De fait, la sensibilité actuelle est de l'ordre de $10^{-3} \text{ }^\circ \cdot \text{h}^{-1}$; cette sensibilité est très proche de la sensibilité ultime limitée par le bruit quantique [18]. Cependant, pour atteindre de telles sensibilités, il faut d'abord s'affranchir du problème de la zone aveugle. En effet, lorsque deux oscillateurs de fréquences très proches coexistent, des termes de couplage dus à la rétrodiffusion des champs sur les miroirs les forcent à osciller à des fréquences identiques (phénomène de "verrouillage de phase"). Le senseur inertiel devient alors "aveugle" à toute rotation inférieure à une certaine vitesse de rotation minimum Ω_a , nécessaire pour déverrouiller les deux fréquences. L'intervalle $2\Omega_a$ est appelé zone aveugle et reste de l'ordre de $0,01^\circ \cdot \text{s}^{-1}$ pour les meilleurs gyrolasers.

Pour s'affranchir de cette zone aveugle, la solution adoptée par la majorité des constructeurs est d'appliquer en permanence au bloc senseur une rotation d'amplitude $100^\circ \cdot \text{s}^{-1}$, alternative pour résoudre les problèmes de stabilité. Cette activation est obtenue à partir d'une résonance mécanique entretenue. Il persiste néanmoins une zone aveugle résiduelle, source d'erreur à chaque période d'oscillation de la mécanique. Pour minimiser l'erreur qui s'accumule à chaque oscillation de l'activation, il convient de bruiteur cette résonance pour rendre cette erreur aléatoire et ainsi obtenir sur la mesure une erreur de type marche au hasard. La mesure est alors effectuée sur un temps long devant la période d'activation.

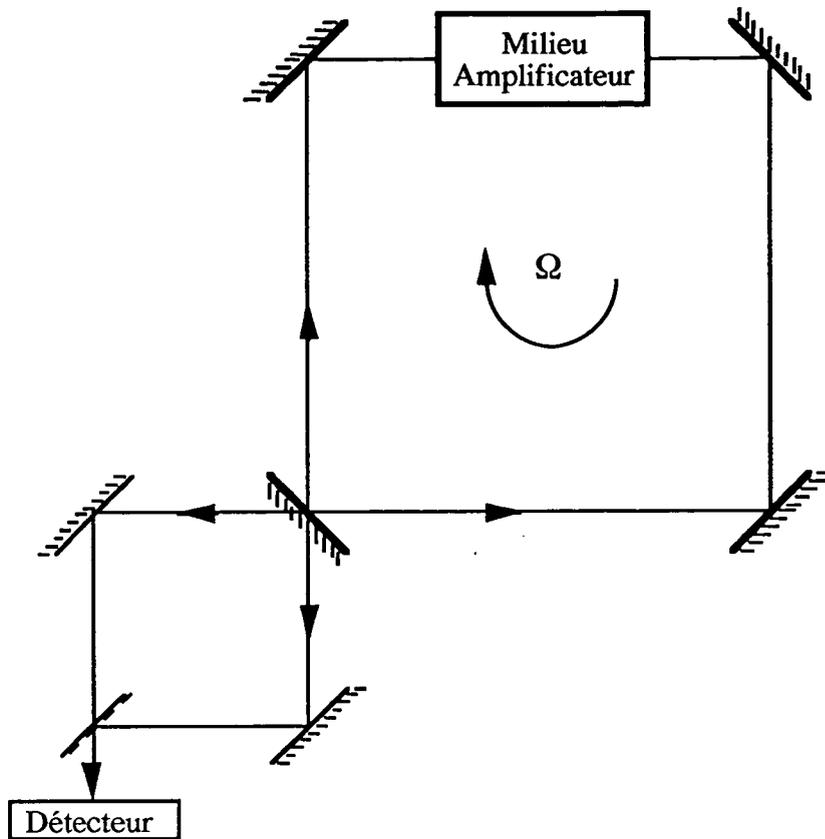


Figure II.6 : Principe d'un gyrolaser

La réponse au problème de la zone aveugle par l'activation mécanique nécessite des réalisations mécaniques et électroniques complexes et donc coûteuses. Bien que les gyrolasers soient commercialisés et représentent un marché relativement important, les recherches se poursuivent encore pour simplifier la technologie de ces appareils et améliorer leurs performances. En particulier, il a été montré que l'utilisation de la conjugaison de phase peut permettre de diminuer la zone aveugle [44].

II.B.2. Etude théorique et expérimentale des propriétés gyrométriques d'un oscillateur à mélange à quatre ondes

Cette partie consiste en un article paru dans le journal de physique.

Classification
Physics Abstracts
42.65F

Etude théorique et expérimentale des propriétés gyrométriques d'un oscillateur à mélange à quatre ondes en anneau

M. Pinard, M. Vallet et G. Grynberg

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'E.N.S., Université Pierre et Marie Curie, Tour 12, 75252 Paris Cedex 05

(Reçu le 22 mars 1990, accepté le 6 juin 1990)

Résumé. — Nous étudions les propriétés d'un oscillateur en anneau utilisant le mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique comme processus de gain. Notre étude concerne ici le mode de fonctionnement quasi dégénéré. L'étude théorique est faite au moyen des équations de Lamb. Nous montrons que le système se comporte comme un gyromètre et que son facteur d'échelle est identique à celui des gyrolasers. Nous calculons la zone aveugle de ce gyromètre, zone aveugle qui est due à la rétrodiffusion sur les miroirs. Nous montrons aussi que l'utilisation d'une non-linéarité intrinsèque permet de s'affranchir du problème de la zone aveugle par un moyen purement optique. Finalement nous décrivons les expériences faites en utilisant une vapeur de sodium qui nous ont permis de mettre en évidence ces propriétés gyrométriques.

Abstract. — We present a theoretical and experimental study of the steady-state regime of a ring four-wave mixing oscillator. We study here the properties of the quasi-degenerate mode. The theory is developed using the Lamb equations. We show that the four-wave mixing oscillator can be used as a gyrometer and that its scale factor is identical to the gyrolaser scale factor. We calculate the lock-in band, which is due to backscattering on the mirrors, and show that an intrinsic non-linearity can be used to circumvent this problem by optical means only. Finally we describe the experiments we have performed using sodium vapor to observe these gyrometric properties.

1. Introduction.

L'étude du mélange à quatre ondes a suscité beaucoup d'intérêt depuis plusieurs années. Cet intérêt est stimulé à la fois par les applications possibles en conjugaison de phase [1] et par la possibilité de générer soit des états comprimés du rayonnement [2-6], soit des faisceaux de photons jumeaux [7]. De nombreuses études ont porté sur les propriétés de l'auto-oscillation de cavité utilisant le mélange à quatre ondes comme processus générant les photons. Toutefois la plupart des études réalisées avec des vapeurs atomiques utilisent le milieu conjuguant la phase comme miroir amplificateur [8]. Nous nous intéressons dans cet article à l'étude de l'auto-oscillation d'une cavité en anneau où le milieu conjuguant la phase est utilisé comme amplificateur et est placé dans un des bras de la cavité. Dans ce domaine, de nombreux résultats ont déjà été obtenus dans les milieux photoréfractifs [9]. Dans notre

étude, le milieu non linéaire, mélangeant les ondes est constitué par une vapeur atomique. Nous avons montré récemment que les résultats obtenus dans le cas des solides photoréfractifs ne s'appliquent pas toujours aux vapeurs atomiques. Par exemple, dans le cas d'un solide photoréfractif, la fréquence de l'oscillation diffère légèrement de la fréquence des pompes [10-14] tandis que dans le cas d'une vapeur de sodium pure les deux fréquences généralement coïncident [15-18].

En fait, l'analyse des résultats expérimentaux [17] montrent que l'oscillation dans le cas d'une vapeur de sodium pure a des propriétés similaires à celles d'un oscillateur paramétrique dégénéré [19]. Il existe néanmoins des différences entre les deux dispositifs, nous avons par exemple observé que l'oscillation est presque toujours bistable dans le cas du mélange à quatre ondes [17] tandis qu'une telle propriété n'est pas observée dans le cas d'un oscillateur paramétrique dégénéré.

Pour étudier théoriquement les propriétés de l'oscillation d'une cavité utilisant une vapeur atomique conjuguant la phase comme amplificateur, nous utilisons la méthode de Lamb [20]. Nous l'appliquons ici à l'étude d'un oscillateur en anneau. Après avoir décrit le modèle (§ 2), nous étudions, dans le paragraphe 3 l'influence des collisions sur le fonctionnement quasi dégénéré. Nous montrons qu'en présence de collisions et pour des ondes pompes d'intensité différente il est possible de lever la dégénérescence entre les fréquences des deux ondes contrarotatives. Dans le paragraphe 4 nous décrivons l'expérience qui nous a permis de mettre en évidence cette propriété et de tracer la réponse gyrométrique d'un oscillateur paramétrique atomique. Dans le paragraphe 5 nous décrivons les résultats obtenus en utilisant pour lever la dégénérescence une méthode plus conventionnelle, cette méthode consistant à placer dans la cavité un rotateur de Faraday. Il faut aussi souligner que l'étude théorique que l'on fait ici peut avoir des applications dans le cas d'autres dispositifs gyrométriques où le mélange à quatre ondes se manifeste comme un effet secondaire [21].

2. Description du modèle.

L'oscillateur étudié est constitué d'une cavité en anneau, cette cavité contient un milieu non linéaire qui la remplit totalement, ce milieu non linéaire interagit avec deux ondes pompes E_1 et E_2 se propageant en sens opposé. On posera $E_p = E_1 + E_2$. Le milieu non linéaire est une vapeur atomique qui est décrite par un ensemble d'atomes à deux niveaux a et b (Fig. 1). La fréquence atomique est ω_0 et N est le nombre d'atomes par unité de volume. L'élément de matrice de l'opérateur dipolaire électrique entre les deux niveaux est d . Les deux faisceaux pompes E_1 et E_2 ont même fréquence ω et même polarisation linéaire e_x . On suppose que

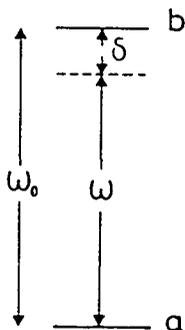


Fig. 1. — Schéma du système atomique à deux niveaux.

[Scheme of the two level atomic system.]

l'excitation est non résonante, le désaccord $\delta = \omega_0 - \omega$ entre la fréquence atomique et la fréquence des pompes est beaucoup plus grand que la largeur naturelle γ_{ab} et que la largeur Doppler ku . Les fréquences de Rabi résonantes des atomes dans les ondes pompes sont supposées très petites devant le désaccord $|\delta|$. Nous sommes ainsi dans une situation où un calcul perturbatif peut être utilisé pour calculer la réponse atomique. La méthode utilisée consiste à supposer connu le champ intra-cavité $E_c(\mathbf{r}, t)$ puis à calculer la polarisation atomique $P(\mathbf{r}, t)$ induite par le champ total $E(\mathbf{r}, t) = E_c(\mathbf{r}, t) + E_p(\mathbf{r}, t)$ interagissant avec les atomes. En utilisant la polarisation $P(\mathbf{r}, t)$ comme terme source dans les équations de Maxwell on calcule le champ rayonné par les atomes et en particulier le champ rayonné dans la cavité. La condition d'auto-cohérence de ce calcul impose que ce dernier champ coïncide avec E_c .

Dans toute la suite, nous supposons que tous les champs ont la même polarisation linéaire e_x , par conséquent nous omettons cette polarisation et raisonnons comme si ces champs étaient scalaires. Le champ pompe total s'écrit :

$$E_p(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{j=1}^2 \xi_j e^{-i\omega_j t} e^{ik_j \cdot \mathbf{r}} = E_p^+(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \quad (1)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 &= -\mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

Nous supposons que le champ intra-cavité est une superposition linéaire d'un petit nombre de modes propres spatiaux de la cavité. La composante de fréquence positive de $E_c(\mathbf{r}, t)$ s'écrit donc :

$$E_c(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_n \xi_n(t) e^{-i\omega_n t} U_n(z) = E_c^+(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \quad (2)$$

avec

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_n(z) + \Omega_n^2 U_n(z) = 0.$$

Dans le cas d'une cavité en anneau immobile de longueur L les modes propres normés s'écrivent :

$$U_n(z) = \exp \pm ik_n z \quad (3)$$

avec

$$k_n = n \frac{2\pi}{L}.$$

L'ensemble des champs appliqués va créer dans le milieu une polarisation $P(\mathbf{r}, t)$ qui s'écrit :

$$P(\mathbf{r}, t) = P^+(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \quad (4)$$

Cette polarisation qui est non linéaire contient deux types de composantes : des composantes dont la phase totale coïncide avec celle d'un des champs appliqués et des composantes dont la phase totale ne coïncide avec aucune des phases des ondes appliquées. Les composantes de $P(\mathbf{r}, t)$ du second type sont responsables de l'émission d'onde dans des directions qui ne coïncident ni avec les directions de la cavité ni avec la direction des ondes pompes. On ne tiendra pas compte de ces dernières composantes car on peut montrer que leurs contributions sont négligeables.

La dépendance spatiale du champ intra-cavité étant connue on peut établir l'équation d'évolution temporelle des $\xi_n(t)$. Ces équations d'évolution s'obtiennent à partir des équations de Maxwell appliquées au champ total E , qui s'écrivent :

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \mu_0 \cdot \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Pour éviter un problème délicat de conditions aux limites, nous remplaçons comme dans la théorie traditionnelle de Lamb du laser les pertes dues à la transmission des miroirs par des pertes dues à la présence d'un milieu conducteur de conductivité σ , ce milieu étant supposé uniforme et remplissant toute la cavité.

L'équation d'évolution de $\varepsilon_n(t)$ est obtenue en multipliant l'équation (5) par $c^2 U_n^*(z) e^{i\omega_n t}$ et en intégrant spatialement le résultat sur un volume de longueur L et de dimensions transversales grandes devant le pas des réseaux créés par les ondes lumineuses. On obtient alors :

$$(\Omega_n^2 - \omega_n^2) \varepsilon_n - i\omega_n \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \varepsilon_n - 2i\omega_n \dot{\varepsilon}_n = + \frac{\omega_n^2}{\varepsilon_0} \mathcal{F}_n$$

avec

$$\mathcal{F}_n = \frac{2 \int_V P^+(r, t) e^{i\omega_n t} U_n^*(z) d^3r}{\int_V |U_n(z)|^2 d^3r} \quad (6)$$

Comme la différence $|\Omega_n - \omega_n|$ est toujours très petite devant ω_n l'équation précédente se simplifie, on obtient :

$$\left[(+\Omega_n - \omega_n) - \frac{i\sigma}{2\varepsilon_0} \right] \varepsilon_n - i\dot{\varepsilon}_n = \frac{\omega_n}{2\varepsilon_0} \mathcal{F}_n \quad (7)$$

En décomposant ε_n en fonction de son amplitude E_n et de sa phase φ_n :

$$\varepsilon_n = E_n e^{-i\varphi_n} \quad (8)$$

On en déduit les équations d'évolution de E_n et de φ_n :

$$\dot{E}_n + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} E_n = - \frac{\omega_n}{2\varepsilon_0} \text{Im} (\mathcal{F}_n e^{i\varphi_n}) \quad (9.a)$$

$$-\Omega_n + (\omega_n + \dot{\varphi}_n) = - \frac{\omega_n}{2\varepsilon_0} \frac{1}{E_n} \text{Re} (\mathcal{F}_n e^{i\varphi_n}) \quad (9.b)$$

On voit que si on connaît les composantes \mathcal{F}_n en fonction des ε_n et des ε_j , on en déduit les équations d'auto-cohérence du champ intra-cavité. Notre tâche consiste donc premièrement à exprimer les amplitudes \mathcal{F}_n en fonction des ε_n et des ε_j puis à résoudre les équations d'évolution ainsi obtenues. Pour trouver la valeur des champs intra-cavité en régime stationnaire, il faut également résoudre les équations d'évolution des champs pompes ε_1 et ε_2 . *A priori* les amplitudes ε_1 et ε_2 dépendent simultanément de z et de t . En faisant l'hypothèse de l'enveloppe lentement variable, on obtient :

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon_1 - 2ik \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} - 2i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = + \mu_0 \omega^2 \mathcal{F}_1 \quad (9.c)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon_2 + 2ik \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} - 2i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = + \mu_0 \omega^2 \mathcal{F}_2 \quad (9.d)$$

avec

$$\mathcal{F}_j = \frac{2}{V} \int_V P^+(r, t) e^{i\omega_j t} e^{-ik_j \cdot r} d^3r \quad (j = 1, 2)$$

Dans les équations (9.c) et (9.d) le terme dû aux pertes ne figure pas car les ondes pompes ne circulent pas dans la cavité, leur direction faisant un petit angle θ avec l'axe de celle-ci. Les dimensions du volume V sont grandes devant le pas des différents réseaux mais petites devant les dimensions spatiales de variation des ε_j ($j = 1, 2$).

3. Cavité en anneau, fonctionnement quasi dégénéré. Influence des collisions.

A) POSITION DU PROBLÈME. — Dans ce paragraphe, on considère un cas où le champ intra-cavité est la superposition de deux ondes planes contrarotatives. On s'intéresse à un mode de fonctionnement quasi dégénéré, c'est-à-dire que lorsque la cavité est immobile on a :

$$U_3(z) = U_4^*(z) = \exp ikz \quad (10)$$

avec

$$k = n \frac{c}{L} = \frac{\Omega}{c}.$$

Lorsque la cavité tourne, sa longueur dépend du sens dans lequel la lumière la parcourt. On voit que cette différence lève la dégénérescence des fréquences propres pour deux ondes contrarotatives. Cette levée de dégénérescence due à l'effet Sagnac [22-24] est proportionnelle à la vitesse de rotation $\dot{\theta}$, on a :

$$\Delta\Omega = \Omega_3 - \Omega_4 = 2 \pi S \dot{\theta}. \quad (11)$$

Les deux ondes ε_3 et ε_4 de fréquence ω_3 et ω_4 sont générées par le processus de mélange à quatre ondes. La conservation de l'énergie au cours de ce processus impose que l'on ait :

$$\omega_3 + \omega_4 = 2 \omega. \quad (12)$$

Les trois fréquences ω , ω_3 et ω_4 étant supposées très proches on peut supposer que la susceptibilité linéaire χ_0 et par conséquent l'indice linéaire n_0 ($n_0 = 1 + \frac{\chi_0}{2}$) dû au milieu atomique remplissant la cavité est le même pour les quatre ondes ε_1 , ε_2 , ε_3 et ε_4 .

On redéfinit les champs pompes et les champs intra-cavité en tenant compte de cet indice linéaire, on pose donc :

$$E_p(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \exp - i (\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})$$

avec $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \frac{\omega}{c} n_0 = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{\chi_0}{2} \right)$$

$$E_c(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=3}^4 \operatorname{Re} \varepsilon_j \exp - i (\omega_j t + (-1)^j n_0 k_j z). \quad (13)$$

Dans ce paragraphe on va étudier l'effet des collisions. Ces collisions ont pour principal effet d'apporter le défaut d'énergie nécessaire pour rendre réelle l'excitation atomique [25]. Dans ce cas on a montré que l'on ne peut plus négliger le rôle de l'effet Doppler pour calculer la susceptibilité non linéaire lorsque les ondes lumineuses forment des réseaux dans le milieu atomique [26]. Pour tenir compte de l'effet Doppler, il faut calculer la contribution à la polarisation d'une classe de vitesse \mathbf{v} puis sommer sur la distribution des vitesses.

B) CONTRIBUTION D'UNE CLASSE DE VITESSE. — Pour calculer la contribution d'un atome de vitesse v à la polarisation non linéaire, il faut résoudre l'équation d'évolution de la matrice densité $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Cette équation s'écrit :

$$\left[\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d}{dt} \rho \right]_{\text{rel}} + \frac{1}{i\hbar} [H_0, \rho] + \frac{1}{i\hbar} [V, \rho]. \quad (14)$$

H_0 est l'hamiltonien atomique, V décrit le couplage entre un atome et les ondes incidentes et $\frac{d\rho}{dt} |_{\text{relax}}$ décrit l'effet de la relaxation (émission spontanée + collisions déphasantes).

Comme les ondes incidentes sont peu saturantes on résout perturbativement cette équation. La solution à l'ordre (3) pour la cohérence optique ρ_{ba} est égale à [27] :

$$\begin{aligned} \rho_{ba}^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & \frac{iNd}{2\hbar} \sum_{\mu} E_{\mu} \frac{\exp - i[\omega_{\mu} t - \mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\mu}]}{\gamma_{ab} + i(\omega_0 - \tilde{\omega}_{\mu})} \\ & - \frac{iN}{4\hbar^3} \sum_{\mu, \nu, \lambda} \frac{d^3 E_{\mu} E_{\nu} E_{\lambda}}{\gamma_{ab} + i(\omega_0 + \tilde{\omega}_{\mu} - \tilde{\omega}_{\nu} - \tilde{\omega}_{\lambda})} \times \\ & \times \frac{1}{\gamma_b + i(\tilde{\omega}_{\mu} - \tilde{\omega}_{\nu})} \left[\frac{1}{\gamma_{ab} + i(\omega_0 - \tilde{\omega}_{\nu})} + \frac{1}{\gamma_{ab} + i(\tilde{\omega}_{\mu} - \omega_0)} \right] \\ & \exp - i(\psi_{\mu} - \psi_{\nu} - \psi_{\lambda}) \exp i(\mathbf{k}_{\mu} - \mathbf{k}_{\nu} - \mathbf{k}_{\lambda}) \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

avec

$$\psi_{\mu} = \omega_{\mu} t + \varphi_{\mu}. \quad (15)$$

Dans cette formule les fréquences $\tilde{\omega}_{\mu}$ sont les fréquences des ondes δ_{μ} vues par un atome de vitesse v dans son référentiel. Elles sont donc égales à :

$$\tilde{\omega}_{\mu} = \omega_{\mu} - \mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{v}. \quad (16)$$

Dans les termes d'ordre 3 en champ il faut distinguer les termes d'indice non linéaire des termes de gain dus au processus de mélange à quatre ondes.

C) TERMES D'INDICE NON LINÉAIRE. — On s'intéresse d'abord à la cohérence optique évoluant comme l'onde pompe 1 et proportionnelle à δ_1 , cette cohérence est égale à :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2\hbar} \frac{NdE_1}{\gamma_{ab} + i\delta} e^{-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varphi_1)} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 I_1}{\hbar^2 \delta^2} \frac{2\gamma_{ab}}{\gamma_b} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1} \frac{d^2 I_j}{\hbar^2 \delta^2} \left(2 \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_b} + \frac{2\gamma_{ab} + i(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_1)}{\gamma_b + i(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_1)} \right) \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Il faut d'abord remarquer qu'en l'absence de collisions la modification de la cohérence optique par les autres ondes est la même quelle que soit l'onde, est indépendante de v et vaut le double de la modification de la cohérence optique par l'onde 1. En effet, en l'absence de collisions, on a $2\gamma_{ab} = \gamma_b$ ce qui implique que :

$$\frac{2\gamma_{ab} + i(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_1)}{\gamma_b + i(\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_1)} = 1 \quad \forall j. \quad (18)$$

Dans ces conditions la cohérence optique $\rho_{ba}^{(3)}$ est égale à :

$$\frac{i}{2\hbar} \frac{NdE_1}{\gamma_{ab} + i\delta} e^{-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varphi_1)} \left[1 - \frac{d^2}{2\hbar^2 \delta^2} (I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4) \right]. \quad (19)$$

En présence de collisions la modification par l'onde ε_j va dépendre de $(\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_1)$ donc de v . En effet on a :

$$\gamma_{ab} = \frac{\gamma_b}{2} + \beta p. \quad (20)$$

La modification de la cohérence optique par une quelconque des ondes ε_j ($j \neq 1$) s'écrit alors :

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 I_j}{\hbar^2 \delta^2} \left[1 + \frac{2\beta p}{\gamma_b} + 1 + \frac{2\beta p}{\gamma_b + i(\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_1)} \right]. \quad (21)$$

Les deux nouveaux termes proportionnels à βp traduisent la création par collision de réseaux réels de population [26]. Ce réseau est statique pour le premier terme, modulé à la fréquence $\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_1$ pour le second. Ces réseaux ont une durée de vie $\tau_b = \frac{1}{\gamma_b}$.

On voit aussi sur la formule (21) que la contribution du réseau modulé dépend en général de la vitesse car $\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_1$ ($j \neq 1$) en dépend. Il faut distinguer le réseau créé par ε_1 et ε_3 qui est un réseau de grand pas $\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)$ des réseaux créés par ε_1 et ε_2 d'une part et ε_1 et ε_4 d'autre part qui sont des réseaux de petit pas $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

Pour calculer la contribution du réseau de grand pas nous supposons que $k\theta u \ll \gamma_b \ll ku$.

Pour les contributions dues aux réseaux de petit pas on a :

$$\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \approx \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_1 = 2kv_z. \quad (22)$$

Dans ce cas la sommation sur les vitesses fait apparaître un facteur de l'ordre de $\frac{\gamma_b}{ku}$ très petit devant l'unité. On peut dans ces conditions négliger la contribution des réseaux de petit pas. La sommation sur les vitesses donne la contribution des termes d'indice non linéaire à la polarisation $P_1(\mathbf{r}, t)$, cette contribution ${}^{NL}P_1(\mathbf{r}, t)$ est égale à :

$${}^{NL}P_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_1 \varepsilon_1 \exp -i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (23)$$

On voit que χ_1 est égal à :

$$\chi_1 = \chi_0 + \chi^{(3)} \left[2 \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_b} I_t + (I_t - I_1) + 2 I_3 \frac{\beta p}{\gamma_b + i(\omega_3 - \omega_1)} \right] \quad (24)$$

avec

$$\chi_0 = \frac{Nd^2}{\varepsilon_0 \hbar \delta} \quad \text{et} \quad \chi^{(3)} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{\hbar^2 \delta^2} \chi_0.$$

Il ne faut pas oublier que χ_1 est une fonction de z par suite de la dépendance spatiale de I_1 et de I_2 (déplétion des pompes). Un calcul tout à fait analogue permet d'obtenir χ_2 :

$$\chi_2 = \chi_0 + \chi^{(3)} \left[2 \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_b} I_t + (I_t - I_2) + 2 I_4 \frac{\beta p}{\gamma_b + i(\omega_4 - \omega_2)} \right]. \quad (25)$$

La susceptibilité χ_3 (resp. χ_4) s'obtient à partir de l'expression donnant χ_1 (resp. χ_2) par échange des indices 1 et 3 (resp. les indices 2 et 4).

Dans l'expression de χ_1 le dernier terme dû au réseau de grand pas créé par les ondes ε_1 et ε_3 est responsable d'un échange d'énergie entre ces deux ondes. Cet effet de couplage est appelé mélange à deux ondes et a été observé d'abord dans les photoréfractifs [9] puis dans la vapeur de sodium où il est induit par collision [28]. Cet effet de couplage varie comme une fonction de dispersion en fonction de $\delta\omega$ la différence $\omega_3 - \omega_1$. Le gain par mélange à deux ondes peut être supérieur à l'absorption linéaire ce qui conduit à l'amplification d'une des deux ondes.

Dans notre situation ($\delta\omega \ll \gamma_b$) le gain associé à ce processus est égal à $|r_c| \frac{\beta p |\delta\omega|}{\gamma_b^2}$ où r_c est la réflectivité par conjugaison de phase. On supposera que le produit $\beta p |\delta\omega|$ est très petit devant γ_b^2 de telle sorte que l'on négligera dans toute la suite le processus de mélange à deux ondes.

En présence de collisions un autre effet apparaît lorsque les pompes sont d'intensités différentes ($I_1 \neq I_2$). En effet dans ce cas les susceptibilités χ_3 et χ_4 sont différentes et leur différence est proportionnelle à $(I_1 - I_2)$, on a :

$$\chi_3 - \chi_4 = 2 \chi^{(3)} \frac{\beta p}{\gamma_b} (I_1 - I_2). \quad (26)$$

Dans ces conditions les fréquences propres de la cavité dépendent du sens de parcours et leur différence est proportionnelle à $(I_1 - I_2)$, on a donc créé un biais optique [29].

D) TERMES DE CONJUGAISON DE PHASE. — A partir de l'expression (15) on peut calculer pour une classe de vitesse v la cohérence optique responsable de l'émission d'une onde ε_1 par mélange à quatre ondes. En supposant comme précédemment que $k\theta u \ll \gamma_b \ll ku$ on obtient après sommation sur les vitesses la contribution du processus de conjugaison de phase à la polarisation $P_1(\mathbf{r}, t)$. Cette contribution ${}^{\text{CP}}P_1(\mathbf{r}, t)$ est égale à :

$${}^{\text{CP}}P_1(\mathbf{r}, t) = - \frac{i}{2 \hbar^3} \frac{Nd^4}{(\gamma_{ab} + i\delta)} \frac{E_2 E_3 E_4}{\delta^2} \exp - i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \times \\ \times \exp \cdot i(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \left[1 + \frac{\beta p}{\gamma_b + i(\omega_2 - \omega_4)} \right] + \text{c.c.} \quad (27)$$

On définit le coefficient de couplage K_{12} entre ε_1 et ε_2^* par la formule suivante :

$${}^{\text{CP}}P_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 K_{12} \varepsilon_2^* \exp - i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (28)$$

On voit que K_{12} est égal à :

$$K_{12} = 2 \chi^{(3)} \varepsilon_3 \varepsilon_4 \left[1 + \frac{\beta p}{\gamma_b + i(\omega_2 - \omega_4)} \right] = K \varepsilon_3 \varepsilon_4. \quad (29)$$

Comme les ondes ε_3 et ε_4 sont conjuguées l'une de l'autre on a :

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega.$$

Il est alors facile de montrer que :

$$K_{21} = K^* \varepsilon_3 \varepsilon_4, \quad K_{43} = K \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad K_{34} = K^* \varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (30)$$

L'approximation consistant à négliger le gain par mélange à deux ondes devant celui par mélange à quatre ondes ($\beta p |\delta \omega| \ll \gamma_b^2$) permet d'approximer le coefficient K par sa partie réelle K_r :

$$K \approx K_r = 2 \chi^{(3)} \left[1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right]. \quad (31)$$

E) EXPRESSION DES COMPOSANTES DE FOURIER DE LA POLARISATION. — La polarisation à l'ordre 3 est obtenue en sommant les contributions dues aux termes d'indice non linéaire à celles dues au processus de mélange à quatre ondes. Connaissant la polarisation, on calcule aisément les composantes de Fourier \mathcal{F}_j , on trouve :

$$\mathcal{F}_{1,2}(z) = \varepsilon_0 \chi_{1,2}(z) \varepsilon_{1,2}(z) + \varepsilon_0 K \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_2^*(z). \quad (32)$$

De même on trouve que les composantes \mathcal{F}_3 et \mathcal{F}_4 sont égales à :

$$\mathcal{F}_{3,4} = \varepsilon_0 \bar{\chi}_{3,4} \varepsilon_{3,4} + \varepsilon_0 K \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_{4,3}^*$$

avec

$$\bar{\chi}_{3,4} = \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{3,4}(z) dz \quad (33)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon_1 \varepsilon_2 dz.$$

F) CALCUL DU GAIN SATURÉ. — Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas où la déplétion des ondes pompes est le processus dominant de saturation. On a montré précédemment que c'est le cas lorsque l'épaisseur optique $k \chi_0 L$ est très grande devant l'unité [18]. Pour calculer la déplétion des ondes pompes il faut calculer leur évolution au cours de la traversée de la cavité en anneau de longueur L .

Il faut donc résoudre les équations d'évolution couplées (9.c) et (9.d) qui compte tenu du choix particulier des modules des vecteurs d'onde k_1 et k_2 , s'écrivent :

$$\begin{aligned} -2 ik \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} - 2 i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} &= + \mu_0 \omega^2 (\mathcal{F}_1 - \varepsilon_0 \chi_0 \varepsilon_1) \\ + 2 ik \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} - \frac{2 i \omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} &= \mu_0 \omega^2 (\mathcal{F}_2 - \varepsilon_0 \chi_0 \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (34)$$

Comme l'évolution temporelle des champs pompes provient uniquement de celle des ondes intra-cavité et que leur temps caractéristique d'évolution est très long devant le temps de traversée de la cellule on peut considérer que les champs pompes suivent adiabatiquement les champs intra-cavité. Dans ce cas l'équation d'évolution du champ pompe $\varepsilon_1(z, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = + \frac{ik}{2 \varepsilon_0} (\mathcal{F}_1 - \varepsilon_0 \chi_0 \varepsilon_1)$$

avec

$$(\mathcal{F}_1 - \varepsilon_0 \chi_0 \varepsilon_1) = \varepsilon_0 (\chi_1 - \chi_0) \varepsilon_1 + \varepsilon_0 K \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_2^*. \quad (35)$$

On suppose que les modifications spatiales de ε_1 induites par la polarisation non linéaire sont très faibles. Par conséquent on traite leur effet de manière perturbative et on se limite à

l'ordre 1 en $k\chi^{(3)}IL$. Si on note $\varepsilon_1(0)$ et $\varepsilon_2(L)$ les champs pompes entrant dans la cellule et $\varepsilon_1(L)$, $\varepsilon_2(0)$ les champs pompes sortant on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(L) &= \varepsilon_1(0) + i \frac{k}{2} L [\chi_1^{\text{NL}} \varepsilon_1(0) + K \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_2^*(L)] \\ \varepsilon_2(0) &= \varepsilon_2(L) + i \frac{k}{2} L [\chi_2^{\text{NL}} \varepsilon_2(L) + K \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_1^*(0)]\end{aligned}\quad (36)$$

avec

$$\begin{aligned}\chi_1^{\text{NL}} &= \chi_1 - \chi_0 = \chi^{(3)} \left[2I_1 - I_1 + \frac{2\beta p}{\gamma_b} (I_1 + I_3) \right] \\ \chi_2^{\text{NL}} &= \chi_2 - \chi_0 = \chi^{(3)} \left[2I_1 - I_2 + \frac{2\beta p}{\gamma_b} (I_1 + I_4) \right].\end{aligned}\quad (37)$$

Nous avons montré au paragraphe 3-C qu'il est intéressant d'étudier la situation où les intensités I_1 et I_2 des ondes pompes sont différentes. Pour simplifier les calculs on limitera notre étude au cas où la différence $(I_1 - I_2)$ est très petite devant I_0 la valeur moyenne des intensités pompes ($I_1 + I_2 = 2I_0$). Dans ces conditions on pourra en première approximation remplacer χ_1^{NL} et χ_2^{NL} par leurs valeurs pour $I_1 = I_2 = I_0$:

$$\chi_1^{\text{NL}} = \chi_2^{\text{NL}} = \chi^{\text{NL}} = \chi^{(3)} \left[3I_0 + 4I + \frac{2\beta p}{\gamma_b} (2I_0 + 3I) \right] \quad (38)$$

où I est la valeur de l'intensité des ondes intra-cavité ($I_3 = I_4 = I$). Avec ces hypothèses on trouve que la valeur moyenne spatiale du produit $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ est égale à :

$$\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = I_0 \exp -i\Phi'_p + i\alpha' I_0 \varepsilon_3 \varepsilon_4$$

avec $\alpha' = \frac{1}{2} kKL$

$$\Phi'_p = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{k}{2} \chi^{\text{NL}} L = \Phi_p - \frac{k}{2} \chi^{\text{NL}} L \quad (39)$$

avec $\Phi_p = \varphi_1 + \varphi_2$.

On montre de la même manière que les valeurs moyennes spatiales des intensités I_1 et I_2 sont égales à :

$$\bar{I}_i = I_i + \alpha' I_0 E_3 E_4 \sin(\Phi_c - \Phi_p) \quad (i = 1, 2) \quad (40)$$

avec $\Phi_c = \varphi_3 + \varphi_4$.

G) EQUATIONS DE LAMB.

a) *Equation d'évolution.* — Connaissant les composantes de Fourier \mathcal{F}_3 et \mathcal{F}_4 on en déduit les équations d'évolution des E_j et des φ_j ($j = 3, 4$). L'équation d'évolution de E_3 s'écrit :

$$\dot{E}_3 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} E_3 = -\frac{\omega_3}{2} KI_0 E_4 [\sin(\Phi_c - \Phi'_p) + \alpha' \sqrt{I_3 I_4}]. \quad (41a)$$

On montre de la même façon que l'équation d'évolution de φ_3 s'écrit :

$$\omega_3 + \dot{\varphi}_3 - \Omega_3 = -\frac{\omega_3}{2} \left\{ \chi^{(3)} (2I_1 - I_3) + 2 \frac{\beta p}{\gamma_b} \chi^{(3)} (\bar{I}_1 + \bar{I}_1) + KI_0 \sqrt{\frac{I_4}{I_3}} \cos(\Phi_c - \Phi'_p) \right\}. \quad (41b)$$

L'équation (41a) et celle qui s'en déduit par échange des indices 3 et 4 montrent que les intensités sont égales en régime stationnaire. On en déduit alors que la différence entre les fréquences ω_3 et ω_4 est égale à :

$$\begin{aligned}\omega_3 - \omega_4 &= \Omega_3 - \Omega_4 - \omega \frac{\beta p}{\gamma_b} \chi^{(3)} (I_1 - I_2) \\ &= 2 \pi S \dot{\theta} - \omega \frac{\beta p}{\gamma_b} \chi^{(3)} (I_1 - I_2).\end{aligned}\quad (42)$$

Cette équation nous montre clairement qu'un oscillateur en anneau à conjugaison de phase peut servir de gyromètre optique et que son facteur d'échelle est le même que celui d'un gyrolaser traditionnel de mêmes dimensions. De plus cette équation montre qu'en présence de collisions et pour une valeur suffisante de $(I_1 - I_2)$, un biais optique permettant de sortir de la zone aveugle peut être obtenu. En effet, la rétrodiffusion sur les miroirs couplant les deux ondes tournant en sens opposé dans l'anneau, un verrouillage de leur fréquence se produit lorsque la vitesse de rotation est en valeur absolue inférieure à $\dot{\theta}_c$. Dans un gyrolaser traditionnel le problème peut être résolu en ajoutant un mouvement mécanique supplémentaire de rotation, ce qui permet de sortir de la zone aveugle et de mesurer des vitesses de rotation inférieures à $\dot{\theta}_c$. On voit que dans notre cas, ceci peut être réalisé optiquement en modulant la différence $(I_1 - I_2)$. En particulier le fait de pouvoir moduler en créneau carré cette quantité pourrait permettre d'augmenter la précision de la mesure de $\dot{\theta}$ par rapport à une activation mécanique qui est forcément sinusoïdale [23, 24].

b) *Intensités et phases en régime stationnaire.* — Il apparaît clairement à partir de l'équation (41a) et de celle obtenue par échange des indices 3 et 4 que ces équations admettent une solution stationnaire pour laquelle $E_3 = E_4$. En appelant I l'intensité de ces ondes $I = E_3^2 = E_4^2$, nous trouvons :

$$g' \sin (\Phi_c - \Phi_p) - \gamma = sI. \quad (43a)$$

De même l'équation (41b) et celle obtenue par échange des indices 3 et 4 donnent :

$$\Delta = \omega_4 - \Omega'_4 = \omega_3 - \Omega'_3 = g' \cos (\Phi_c - \Phi_p) + \frac{3}{2} g \frac{I}{I_0} + 2 g x \frac{I}{I_0}$$

avec

$$\begin{aligned}g' &= -\omega \chi^{(3)} I_0 \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) = g(1+x) \\ s &= -g' \alpha' \\ \gamma &= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}\end{aligned}\quad (43b)$$

$\Omega'_{3,4}$ sont les fréquences de la cavité modifiées par la présence du milieu atomique, elles sont d'après la formule (41b) égales à :

$$\Omega'_{3,4} = \Omega \left(1 \pm \frac{\pi S \dot{\theta}}{\Omega} + \frac{\chi_0}{2} + K I_0 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \chi^{(3)} I_{1,2} \right)^{-1} \quad (44)$$

où Ω est la fréquence propre de la cavité vide et immobile.

A partir du système précédent (formules 43) on obtient aisément la valeur de g'_s le gain au seuil, en faisant $I = 0$ dans les deux équations :

$$g'_s = \frac{c}{L} |r_c| = \sqrt{\gamma^2 + \Delta^2}. \quad (45)$$

Dans cette expression $r_c = \sqrt{R_c}$ où R_c est le coefficient de réflexion du miroir à conjugaison de phase pour une onde progressive [18]. On peut réexprimer cette condition de seuil en fonction de η le déphasage sur un tour ($\Delta = \frac{c}{L} \eta$) et de la transmission T du miroir de sortie de la cavité ($\gamma = \frac{c}{L} \frac{T}{2}$). On voit que la condition de seuil en fonction de η et de T s'écrit :

$$R_c = \eta^2 + \frac{T^2}{4}. \quad (46)$$

Cette condition coïncide avec celle trouvée par l'approche spatiale [18] : le seuil d'apparition d'une oscillation est très bas et varie comme le carré des pertes pour une cavité accordée. Ce seuil très bas montre qu'une onde stationnaire de phase Φ_c appropriée peut extraire beaucoup plus d'énergie des ondes pompes qu'une onde progressive. Finalement il faut remarquer que la valeur de Φ_c est bloquée sur Φ_p la somme des phases φ_1 et φ_2 des deux ondes pompes.

Étudions maintenant les valeurs de I et de Φ_c légèrement au-dessus du seuil. Notre étude étant limitée au fonctionnement de l'oscillateur très près du seuil, on suppose donc que :

$$g' - \gamma \ll \gamma.$$

Dans ce cas là phase $\Phi_c - \Phi_p$ va se bloquer à une valeur très proche de $+\frac{\pi}{2}$ (si $\chi_0 > 0$). En posant $\Phi_c - \Phi_p = \frac{\pi}{2} + \Delta\Phi$ le système d'équations se réécrit :

$$\begin{cases} g' \left(1 - \frac{\Delta\Phi^2}{2} \right) - \gamma = sI \\ \Delta + g' \Delta\Phi = \frac{3}{2} g \left(1 + \frac{4}{3} x \right) \frac{I}{I_0}. \end{cases} \quad (47)$$

Ce système nous montre que l'intensité I est l'ordonnée du point d'intersection entre une droite et une parabole (Fig. 2). Un tel système peut avoir deux solutions non nulles : pour qu'il en soit ainsi il faut que la pente de la droite soit inférieure à la pente de la tangente à la parabole au point A d'abscisse $-\Delta\Phi_c$ ($\Delta\Phi_c$ est défini par $g' \left(1 - \frac{\Delta\Phi_c^2}{2} \right) = \gamma$). Comme on suppose que la cavité est une bonne cavité on trouve que cette condition est vérifiée sauf dans une toute petite plage d'intensité pompe juste au-dessus du seuil.

Pour une valeur de Δ on trouve une, deux ou trois solutions (la solution $I = 0$ est toujours possible en dehors de l'intervalle $[-\Delta\Phi_c, \Delta\Phi_c]$). On voit sur la figure 3 qu'en fonction du sens de variation de la longueur de la cavité on peut obtenir deux valeurs différentes de I . Ceci est le schéma classique de la bistabilité dispersive [30-32].

c) *Effet de la rétrodiffusion.* — Dans ce paragraphe on va introduire l'effet de la rétrodiffusion due aux miroirs. La rétrodiffusion totale qui est la somme des rétrodiffusions dues aux différents miroirs de la cavité est caractérisée par une amplitude r et un déphasage ϵ [23, 24].

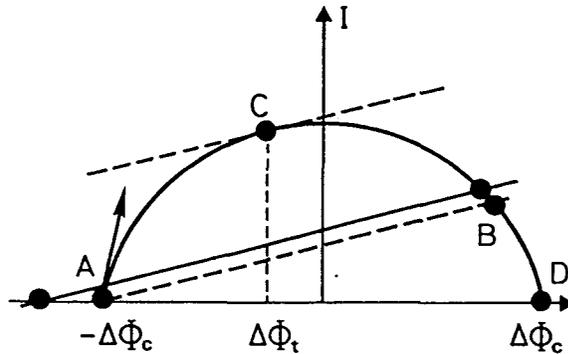


Fig. 2. — Les solutions du système d'équations (43) correspondent à l'intersection d'une droite et d'une parabole. Chaque solution physique est indiquée par un point. Les lignes pointillées correspondent à des situations où un brusque saut d'intensité se produit lorsqu'on varie L .

[The solutions of (43) correspond to the intersection of the solid line and the parabola. The possible physical solutions are indicated by dots. The dashed lines correspond to the situations where a sudden jump in intensity is expected when L is scanned.]

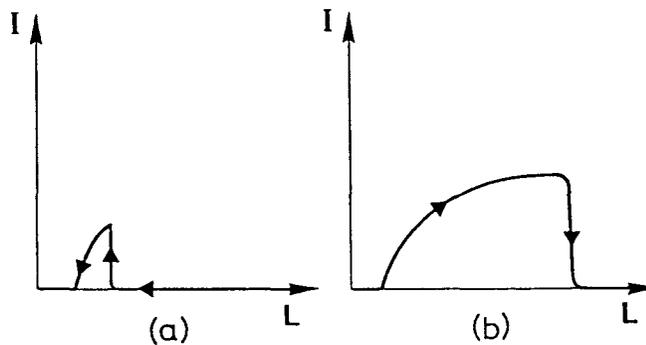


Fig. 3. — Variation de l'intensité émise I en fonction de la longueur L de la cavité. Quand la longueur de la cavité change, l'abscisse du point d'intersection de la droite et de l'axe horizontal change (voir Fig. 2). Partant de la ligne continue de la figure 2 la solution $I = 0$ reste une solution lorsque L décroît jusqu'à ce que l'abscisse coïncide avec A. Pour une valeur de L légèrement inférieure, le seul point stable devient le point B qui correspond à une intensité $I \neq 0$. Lorsqu'on continue à diminuer L le point de fonctionnement décrit la branche BD de la parabole. Lorsque l'abscisse de la droite est supérieure à l'abscisse du point D l'intensité émise est nulle. Ceci est représenté sur la figure (3a). Lorsque la longueur L croît (Fig. 3b) le système suit par continuité la solution non nulle jusqu'à ce que le point C soit atteint. Ensuite la solution d'intensité non nulle étant instable le système cesse d'osciller.

[Variation of the emitted intensity as a function of the length of the cavity. When the length of the cavity changes, the abscissa of the solid line of figure 2 varies. Starting from the solid line of figure 2 we see that $I = 0$ remains a solution when L increases until the abscissa coincides with A. For slightly larger values of L , the only stable solution is B, for which $I \neq 0$. This corresponds to the curve shown on (Fig. 3a). When the length decreases (Fig. 3b), the system continuously follows the nonzero solution until the point C of figure 3 is reached.]

A chaque tour de cavité la rétrodiffusion rajoute au vecteur δ_3 un vecteur qui vaut :

$$\begin{aligned} & r e^{i\varepsilon} E_4 \exp i(\psi_3 - \psi_4) \\ \text{avec} \quad & \psi_{3,4} = (\omega_{3,4}) t + \varphi_{3,4}. \end{aligned} \quad (48)$$

Comme r est très petit devant l'unité on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_3 &= \frac{c}{L} r \frac{E_4}{E_3} \sin(\psi + \varepsilon) \\ \frac{d}{dt} E_3 &= \frac{c}{L} r E_4 \cos(\psi + \varepsilon) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{avec} \quad \psi = \psi_3 - \psi_4.$$

On en déduit immédiatement l'équation d'évolution de ψ , on a :

$$\frac{d}{dt} \psi = \omega_\ell \left[\left(\frac{E_3}{E_4} + \frac{E_4}{E_3} \right) \sin \psi \cos \varepsilon - \left(\frac{E_3}{E_4} - \frac{E_4}{E_3} \right) \sin \varepsilon \cos \psi \right]$$

$$\text{avec} \quad \omega_\ell = \frac{c}{L} r.$$

d) *Equations globales d'évolution. Zone aveugle active.* — Les équations globales d'évolution s'obtiennent en ajoutant l'effet de la rétrodiffusion aux équations d'évolution du § 3Ga.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{E}_3 + \gamma E_3 &= g' E_4 [\sin(\Phi_c - \Phi_p') + \alpha' E_3 E_4] + \omega_\ell E_4 \cos(\psi + \varepsilon) \\ \dot{E}_4 + \gamma E_4 &= g' E_3 [\sin(\Phi_c - \Phi_p') + \alpha' E_3 E_4] + \omega_\ell E_3 \cos(\psi - \varepsilon) \\ \dot{\Phi}_c + 2\omega - (\Omega_3 + \Omega_4) &= -\frac{\omega}{2} (\chi_3 + \chi_4) + g' \cos(\Phi_c - \Phi_p') \left[\frac{E_3}{E_4} + \frac{E_4}{E_3} \right] + \\ &+ \omega_\ell \left(\frac{E_4}{E_3} - \frac{E_3}{E_4} \right) \sin \psi \cos \varepsilon + \omega_\ell \left(\frac{E_4}{E_3} + \frac{E_3}{E_4} \right) \cos \psi \sin \varepsilon \\ \dot{\psi} &= 2\pi S \dot{\theta} - \omega \frac{\beta p}{\gamma_b} \chi^{(3)} [\bar{I}_1 - \bar{I}_2] + \frac{\omega}{2} \chi^{(3)} [I_3 - I_4] + \\ &+ g' \left(\frac{E_4}{E_3} - \frac{E_3}{E_4} \right) \cos(\Phi_c - \Phi_p') + \omega_\ell \left(\frac{E_4}{E_3} + \frac{E_3}{E_4} \right) \sin \psi \cos \varepsilon + \omega_\ell \left(\frac{E_4}{E_3} - \frac{E_3}{E_4} \right) \cos \psi \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (50)$$

On va d'abord résoudre le cas particulier $\varepsilon = 0$. En effet, dans ce cas, la rétrodiffusion conserve l'égalité entre I_3 et I_4 . L'équation d'évolution de la phase s'écrit alors :

$$\dot{\psi} = \Delta\Omega + 2\omega_\ell \sin \psi. \quad (51)$$

Cette équation est l'équation d'Adler [33] que l'on rencontre dans l'étude des gyrolasers traditionnels [23], cette équation admet une solution stationnaire ψ_s tant que $\Delta\Omega/2\omega_\ell$ est compris entre -1 et 1 . Cette solution est :

$$\psi_s = -\text{Arc sin} \frac{\Delta\Omega}{2\omega_\ell}. \quad (52)$$

En l'absence de biais optique ($I_1 = I_2$) la différence $\Delta\Omega$ est égale à $(2\pi S\dot{\theta})$. On voit que la vitesse de rotation critique $\dot{\theta}_c$ est égale à :

$$\dot{\theta}_c = \frac{\omega_l}{\pi S} = \frac{cr}{L\pi S}. \quad (53)$$

Si $|\Delta\Omega|$ est supérieur à $2\omega_l$ alors il n'existe plus de solution stationnaire. Il existe néanmoins une solution analytique [34] qui est une fonction périodique du temps de période $T = 2\pi\Gamma^{-1}$ avec

$$\Gamma = \sqrt{\Delta\Omega^2 - 4\omega_l^2}. \quad (54)$$

Lorsque ε est différent de zéro le problème est plus compliqué car les intensités I_3 et I_4 sont différentes et leur différence $\Delta I = I_3 - I_4$ est couplée à ψ par la rétrodiffusion. Néanmoins, cette différence étant due à la rétrodiffusion on peut la supposer très petite devant I la valeur moyenne des intensités $\left(I = \frac{I_3 + I_4}{2}\right)$. Dans ces conditions on peut linéariser les équations d'évolution de I_3 , I_4 et de Ψ . L'équation d'évolution de ΔI est alors égale à :

$$\frac{d}{dt} \Delta I + 2\gamma \Delta I = - (4\omega_l \sin \varepsilon \sin \psi) I. \quad (55)$$

Lorsque les intensités I_3 et I_4 sont différentes, on voit apparaître dans l'équation d'évolution de la phase un nouveau terme proportionnel à $I_3 - I_4$. Son origine physique est la même que celle du biais optique proportionnel à $(I_1 - I_2)$, néanmoins ce nouveau terme existe même sans collisions contrairement au biais optique. En linéarisant l'équation d'évolution de ψ on obtient :

$$\dot{\psi} = \Delta\Omega - \frac{g}{2} \cdot \frac{I}{I_0} \cdot \frac{\Delta I}{I} + g' \frac{\Delta I}{I} \Delta\Phi + 2\omega_l \sin \psi \cos \varepsilon - \omega_l \frac{\Delta I}{I} \cos \psi \sin \varepsilon. \quad (56)$$

Pour trouver l'expression de la zone aveugle on se place à une vitesse $\dot{\theta}$, très proche de $\dot{\theta}_c$, dans ces conditions ψ évolue très lentement et on peut supposer que ΔI suit adiabatiquement, on a donc :

$$\frac{\Delta I}{I} = - \frac{2\omega_l}{\gamma} \sin \varepsilon \sin \psi. \quad (57)$$

On voit que la condition de validité du traitement est que la rétrodiffusion due aux miroirs soit très faible devant les pertes de la cavité ($\omega_l \ll \gamma$).

Dans ces conditions l'équation d'évolution de ψ s'écrit :

$$\dot{\psi} = \Delta\Omega + a \sin \psi + b \sin 2\psi$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 2\omega_l \cos \varepsilon - 2 \left(g' \Delta\Phi - \frac{g}{2} \frac{I}{I_0} \right) \frac{\omega_l}{\gamma} \sin \varepsilon \\ b &= \frac{\omega_l^2}{\gamma} \sin^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (58)$$

Cette équation est de la forme $\dot{\psi} = \Delta\Omega + f(\psi)$ où $f(\psi)$ est une fonction périodique de ψ qui varie entre $-f_{\max}$ et f_{\max} . Si $\Delta\Omega$ (que l'on suppose positif) est inférieur ou égal à f_{\max} alors cette équation admet une solution stationnaire. La fonction $f(\psi)$ étant de la forme $a \sin \psi + b \sin 2\psi$ on montre aisément que son maximum est égal à $\sqrt{a^2 + 4b^2}$ lorsque a est très grand devant b . Cette dernière condition est toujours réalisée sauf lorsque ε est très voisin de $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que la vitesse de rotation critique $\dot{\theta}_c$ est égale à :

$$\frac{1}{2\pi S} \sqrt{a^2 + 4b^2}. \quad (59)$$

Lorsque ε est différent de zéro on voit que la zone aveugle dépend du point de fonctionnement. En effet, dans ces conditions le coefficient a , qui d'après (58) est égal à :

$$2\omega_l \cos \varepsilon - 2\frac{\omega_l}{\gamma} \sin \varepsilon \left(g' \Delta\Phi - \frac{g}{2} \frac{I}{I_0} \right) \quad (60)$$

dépend du point de fonctionnement par l'intermédiaire de $\Delta\Phi$ et de I . On voit en particulier que le coefficient a peut s'annuler, dans ces conditions la zone aveugle est égale à b et est par conséquent très petite.

4. Etude expérimentale.

A) DESCRIPTION DU MONTAGE. — Pour étudier expérimentalement les propriétés d'un oscillateur utilisant le mélange à quatre ondes nous avons utilisé le montage représenté par la figure 4.

La vapeur atomique de sodium est contenue dans une cellule en quartz à angle de Brewster qui contient aussi 3 torrs d'hélium. La cellule est chauffée à 165°.

Le faisceau de sortie du laser à colorant monomode (largeur du laser ≈ 1 MHz), d'intensité I , traverse un cristal électro-optique suivi d'un prisme de Glan. Ce dispositif divise le faisceau incident en deux faisceaux ε_1 et ε_2 polarisés orthogonalement. Les intensités respectives I_1 et I_2 de ces deux faisceaux dépendent de la tension appliquée sur le cristal électro-optique, leur somme restant constante et égale à $2I_0$. L'utilisation d'une lame demi-onde permet de faire tourner la polarisation du faisceau ε_1 de façon à obtenir deux faisceaux pompes de même polarisation linéaire verticale. La puissance typique d'un des faisceaux pompes à l'entrée de la cellule est de 150 mW et chacun des faisceaux est focalisé sur une tache dont le diamètre est égal à 300 μm .

La cavité rectangulaire est constituée de quatre miroirs plans M_1 , M_2 , M_3 et M_4 parfaitement réfléchissants et sa longueur L est égale à 136 cm $\left(\frac{c}{L} = 220 \text{ MHz} \right)$. En plaçant une lentille de focale $f = 200$ mm au milieu du bras $M_1 M_2$ et une identique au milieu du bras $M_3 M_4$ on impose deux « waists » identiques pour le mode fondamental de la cavité au milieu des bras $M_2 M_3$ et $M_1 M_4$. Les « waists » ont un diamètre de 170 μ . On place la cellule de sodium au milieu du bras $M_1 M_4$. Afin d'extraire de l'énergie de la cavité on a placé une lame de verre dans le bras $M_2 M_3$. Cette lame est orientée à 45° et une de ces faces a subi un traitement anti-reflet. A chaque tour cette lame permet d'extraire 15 % de l'énergie des faisceaux circulant dans la cavité. Son rôle est donc identique à celui d'un miroir de coefficient de transmission $T = 0,15$. Le miroir M_1 est collé sur une cale piézo-électrique, ce qui permet de balayer la longueur de la cavité. Enfin, lorsqu'on veut travailler à longueur de cavité constante, on utilise un faisceau auxiliaire émis par un laser He-Ne stabilisé. Ce faisceau qui est polarisé horizontalement est injecté dans la cavité par l'intermédiaire du miroir

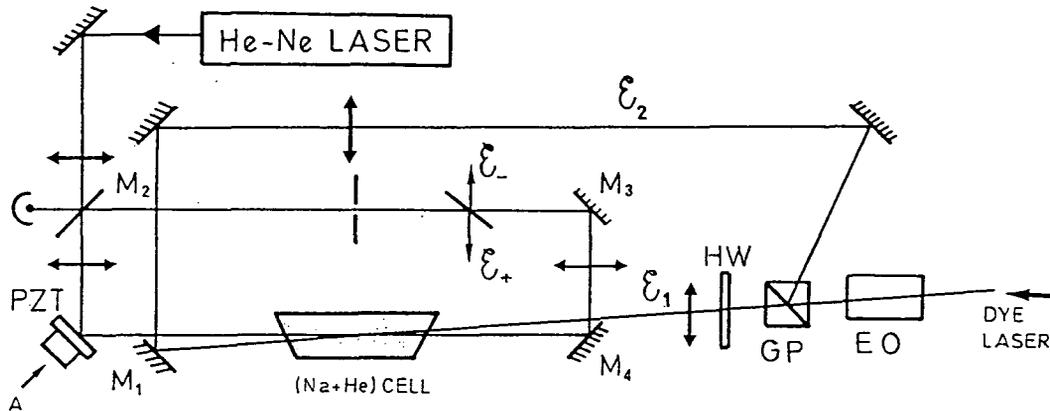


Fig. 4. — Schéma du montage expérimental.

[Experimental set-up.]

M_2 qui est partiellement réfléchissant pour le rouge. On détecte l'énergie du faisceau rouge réfléchi par la cavité. On asservit la longueur de la cavité de façon à maintenir l'égalité entre la fréquence du laser He-Ne et une des fréquences de résonance de la cavité. Le contrôle de la longueur de la cavité se fait par l'intermédiaire de la cale piézo-électrique (PZT).

Un diaphragme est placé dans la cavité pour éviter une oscillation dans les modes transverses.

La fréquence ω des ondes pompes est proche de ω_0 (fréquence de la raie D_2), mais l'excitation n'est pas résonante. Le désaccord δ entre ω et ω_0 ($\delta = \omega_0 - \omega$) est en valeur absolue compris entre 1 GHz et 3 GHz. Dans ces conditions on a mesuré la réflectivité par conjugaison de phase R_c pour une onde sonde progressive et on a trouvé que R_c est au plus égale à 1 %. On voit donc que le gain R_c est inférieur aux pertes qui sont au moins égales à 15 %. Cette valeur de R_c est néanmoins suffisante pour obtenir l'oscillation car le seuil d'un tel oscillateur (voir § 3Gb) est égal au carré des pertes pour une cavité accordée $\left(R_c \geq \frac{T^2}{4} \right)$.

Effectivement, en balayant L la longueur de la cavité on observe l'oscillation simultanée de deux ondes contrarotatives ϵ_+ et ϵ_- . On constate que l'oscillation ne se produit que pour des valeurs particulières de L (condition de résonance simultanée sur ω_+ et ω_-) et que ces valeurs particulières de L sont équidistantes. On constate aussi que conformément à la théorie, l'intensité de sortie présente un comportement bistable (voir § 3Gb). Enfin on constate que l'intensité I présente deux types de résonance qui diffèrent essentiellement par l'intensité de sortie. En asservissant la longueur de la cavité on a pu étudier en détail les deux modes de fonctionnement de l'oscillateur. Nous ne discuterons dans cet article que les propriétés de mode le plus intense qui correspond à un fonctionnement quasi dégénéré. On a montré que l'autre mode est non dégénéré et que la différence $\omega_+ - \omega_-$ est en valeur absolue égale à l'intervalle spectral libre de la cavité [35].

B) ETUDE DU MODE QUASI DÉGÉNÉRÉ.

1) *Biais optique.* — La valeur typique pour les intensités de sortie I_+ et I_- est de l'ordre du milliwatt. La fréquence de battement $\Delta\nu = \nu_+ - \nu_-$ entre les faisceaux ϵ_+ et ϵ_- est mesurée en envoyant le signal de battement dans un analyseur de spectre. La figure 5 montre la variation de $\Delta\nu$ en fonction du paramètre $(I_1 - I_2)/I_0$. Pour des valeurs de ce paramètre

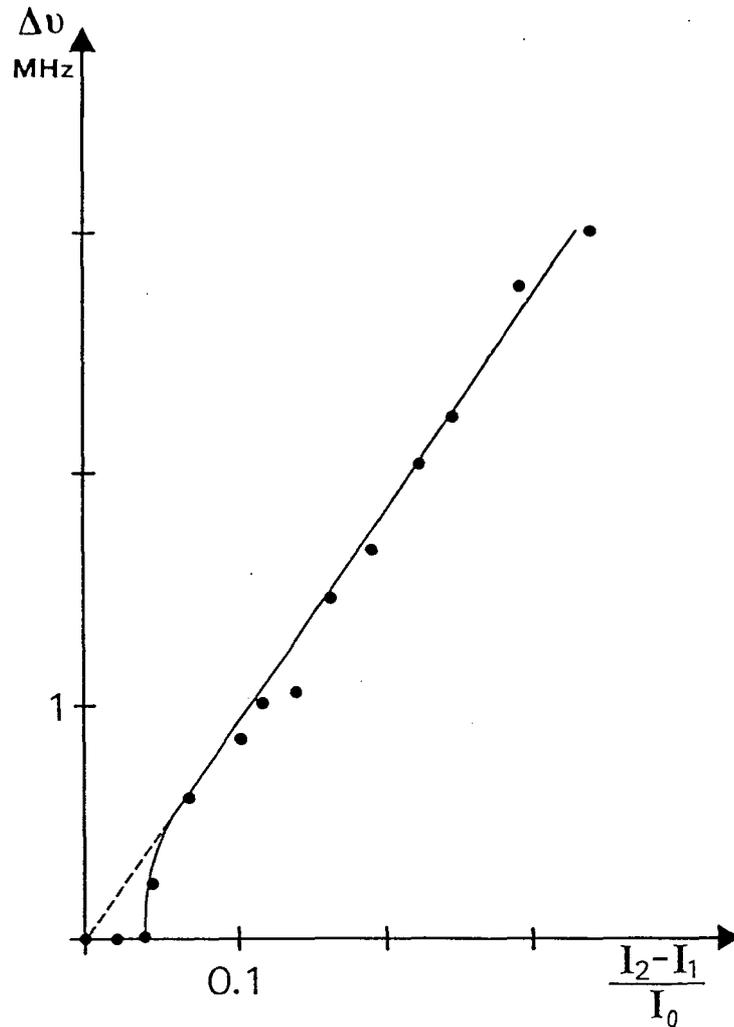


Fig. 5. — Variation de la fréquence de battement $\Delta\nu$ en fonction de la différence d'intensité $(I_2 - I_1)/I_0$ entre les deux ondes pompes ($2I_0$ est l'intensité totale). L'expérience est réalisée avec une cellule contenant 3 torrs d'hélium.

[Variation of the beat frequency $\Delta\nu$ as a function of $(I_2 - I_1)/I_0$ where $2I_0$ is the constant total intensity. The experiment is done with a cell containing 3 torrs of helium.]

comprises entre 0,1 et 0,3 la fréquence de battement $\Delta\nu$ est bien une fonction linéaire conformément à la théorie. Pour des valeurs plus petites on observe une déviation à la loi linéaire. Ce type de comportement est bien connu dans les gyromètres actifs et correspond à la zone aveugle du gyrolaser [1].

Notre gyromètre a une zone aveugle de 200 kHz, ce qui, compte tenu de son facteur d'échelle S [1], correspond à une vitesse de rotation de 50°/s. Cette valeur est très grande comparée à la zone aveugle des gyrolasers, ceci pouvant être partiellement expliqué par la qualité courante des éléments optiques utilisés dans notre cavité. Chaque point de la figure 5

est entaché d'une incertitude de 25 kHz. Il semble que la position de la fréquence de battement fluctue rapidement conduisant à une largeur apparente de 25 kHz. L'origine de cette largeur est à l'heure actuelle inconnue. Il semble que cette largeur soit partiellement due aux fluctuations de l'intensité des ondes oscillantes. En effet lorsque ces fluctuations augmentent la largeur augmente.

Cette largeur peut aussi être due à un déplacement relatif des deux faisceaux pompes entraînant une modification de $(I_1 - I_2)$ donc du biais. Ce déplacement peut être engendré soit par une imperfection expérimentale soit par des effets spatiaux provenant du milieu non linéaire.

Cet effet lié au caractère gaussien des faisceaux n'a pas été pris en compte dans la théorie développée dans cet article.

Si ces problèmes étaient résolus on pourrait utiliser cet effet non linéaire non réciproque pour remplacer l'activation mécanique utilisée dans les gyrolasers par une activation optique dans un gyromètre à mélange à quatre ondes.

On pourrait par exemple utiliser deux faisceaux pompes d'intensité $I_1 = I_0 + I(t)$ et $I_2 = I_0 - I(t)$ où $I(t)$ est une fonction créneau variant entre $-\Delta I$ et ΔI . La différence entre les deux fréquences de battement mesurées dans ces deux conditions nous donnerait directement la fréquence de battement créé par l'effet Sagnac et donc de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ du gyromètre.

Cette méthode d'obtention d'une courbe gyrométrique bien que présentant de nombreux avantages est un peu trop indirecte. C'est pourquoi nous avons décidé de reprendre l'expérience en utilisant un autre processus bien maîtrisé pour créer la non réciprocity. Cette non réciprocity est obtenue en plaçant dans la cavité un rotateur de Faraday.

2) *Biais induit par effet Faraday.* — Le rotateur de Faraday que nous avons utilisé est constitué d'un barreau de TGG placé dans un champ magnétique \mathbf{B} créé par un solénoïde parcouru par un courant i . Ce barreau est placé entre deux lames quart d'onde dont les lignes neutres sont orientées à 45° des axes horizontal et vertical. L'orientation relative de ces deux lames est telle que la polarisation de la lumière reste inchangée après la traversée des deux lames.

La cavité utilisée dans cette expérience est identique à celle utilisée dans l'expérience précédente. En revanche, dans cette expérience, la cellule utilisée est une cellule de sodium pur (sans gaz tampon), chauffée à 170°C environ et les deux ondes pompes ont des intensités identiques ($I_1 = I_2 = I_0$). Ces deux ondes sont focalisées dans la cellule sur une tache dont le diamètre est de $300\ \mu\text{m}$. Pour un désaccord en fréquence δ compris en valeur absolue entre 1 GHz et 3 GHz on observe en balayant la cavité une série de résonances fines comme dans l'expérience précédente (§ 4B.1). En stabilisant la longueur de la cavité on a pu étudier en détail l'influence du rotateur de Faraday sur le mode quasi dégénéré.

La figure 6 montre la variation de la fréquence $\Delta\nu$ de battement entre les deux ondes contrarotatives ε_+ et ε_- émise par l'oscillateur en fonction du courant i circulant dans le solénoïde.

Les points de la figure 6 ont été obtenus pour une valeur I de l'intensité de sortie, les étoiles correspondent à des mesures effectuées pour une intensité moitié. Le fait que les résultats correspondant à des intensités différentes se placent sur la même courbe montre que le facteur d'échelle ne dépend pas du point de fonctionnement de l'oscillateur ce qui est en accord avec les prédictions de la partie théorique.

Ces courbes sont tout à fait similaires à celle obtenue précédemment dans le cas du biais optique. On observe bien un comportement linéaire de la fréquence de battement pour des valeurs suffisantes de i . En revanche, pour de faibles valeurs de i on observe une déviation par rapport à la loi linéaire et pour $|i| < I_c$ la fréquence de battement est nulle.

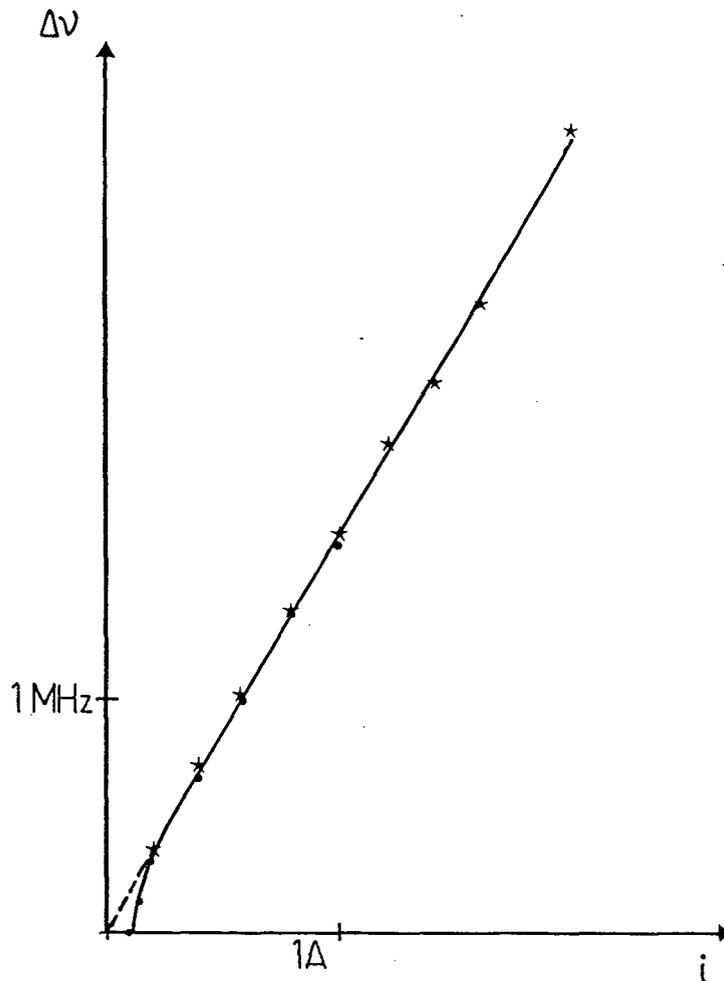


Fig. 6. — Variation de la fréquence de battement $\Delta\nu$ en fonction du courant i circulant dans le rotateur de Faraday. La cellule d'expérience est remplie exclusivement de sodium. Les points ont été obtenus pour une intensité émise I , les étoiles pour une intensité $I/2$.

[Variation of the beat frequency $\Delta\nu$ as a function of the current flowing through the Faraday rotator. The cell only contains sodium. Dots were obtained for an emitted intensity I , stars for an intensity $I/2$.]

La levée de dégénérescence qui est de 1,7 MHz par ampère, lorsque $|i|$ est très grand devant i_c , doit être comparée à la valeur prévue théoriquement. En effet, le rotateur de Faraday utilisé crée pour un courant i une levée de dégénérescence $\Delta\nu$ entre les deux ondes contrarotatives égale :

$$\Delta\nu = \frac{c}{L} \frac{V}{\pi} ni \int_0^d f(z) dz$$

V est la constante de Verdet du barreau utilisé (TGG dans notre expérience) et d sa longueur. n est le nombre de spires par unité de longueur de solénoïde et la fonction $f(z)$ tient compte du trajet parcouru par les faisceaux lumineux.

Le calcul conduit à un biais égal à $(1,6 \pm 0,2)$ MHz/A ce qui est en bon accord avec nos résultats expérimentaux.

Le comportement de la fréquence de battement en fonction du courant i est identique au comportement observé dans l'expérience précédente. En particulier la zone aveugle a une dimension semblable de même que la largeur de battement. Ceci prouve d'ailleurs que la non-réciprocité obtenue par le biais optique n'est pas la cause unique de l'élargissement.

5. Conclusion.

Nous avons présenté les principales caractéristiques d'un oscillateur en anneau utilisant le mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique comme processus de gain. Nous avons limité notre étude au mode de fonctionnement quasi dégénéré. Nous avons montré théoriquement que dans ce mode de fonctionnement l'oscillateur à mélange à quatre ondes se comporte comme un gyromètre optique actif : son facteur d'échelle est identique à celui des gyrolasers et sa sensibilité est aussi limitée par le processus de rétrodiffusion qui est responsable de la zone aveugle du gyromètre.

Nous avons montré que l'utilisation d'une non-linéarité intrinsèque permet par un moyen purement optique de s'affranchir de la zone aveugle. Nous avons mis en évidence expérimentalement l'ensemble de ces propriétés gyrométriques en utilisant une vapeur de sodium interagissant avec deux ondes pompes contrapropagatives de fréquence proche de celle de la raie $D_2(3 S_{1/2} \rightarrow 3 P_{3/2})$.

Plusieurs extensions sont possibles pour ce travail. Premièrement notre théorie est valable uniquement au voisinage du seuil car nous avons supposé que l'énergie prélevée aux pompes était très faible. Une théorie valable pour une intensité quelconque serait évidemment intéressante pour comprendre le comportement de ce gyromètre à forte intensité. Deuxièmement le modèle atomes immobiles et le fait que nous négligeons l'absorption est certainement critiquable car le désaccord à la résonance n'est pas suffisamment grand devant la largeur Doppler pour éliminer totalement l'influence des classes de vitesse résonnantes. Néanmoins, en dépit de ces restrictions, le modèle présenté ici permet d'expliquer la majorité des résultats obtenus expérimentalement.

Du point de vue expérimental, l'utilisation d'un laser à colorant pompé par un laser à argon ionisé peut sembler un obstacle rédhibitoire au développement de tels gyromètres. En fait, une miniaturisation de notre système est parfaitement envisageable en utilisant un alcalin plus lourd et des diodes lasers [36]. Néanmoins, toute démarche dans cette direction doit être précédée par une meilleure compréhension de l'origine de la largeur de la courbe de battement. Il nous est apparu qu'un des paramètres influant de manière significative sur la forme de la courbe de battement est l'angle et le recouvrement des ondes pompes. Ceci suggère que les problèmes spatiaux, tels que la définition des modes transverses pour un tel oscillateur, mériteraient d'être considérés dans le prolongement de cette étude.

Remerciements.

Les auteurs tiennent à remercier la DRET pour son concours à cette étude. Ils remercient également M. Faucheux et J. J. Roland de Quantel pour les nombreuses et fructueuses discussions sur cette expérience.

Bibliographie

- [1] HELLWARTH R. W., *J. Opt. Soc. Am.* 67 (1977) 1 ;
YARIV A. and PEPPER D. M., *Opt. Lett.* 1 (1977) 16 ; see also *Optical Phase conjugation*, edited by R. Fisher (Academic, New York, 1983).

- [2] YUEN H. P. and SHAPIRO J. H., *Opt. Lett.* **4** (1979) 334.
- [3] WALLS D. F., *Nature* (London) **306** (1983) 141.
- [4] SLUSHER R. E., HOLBERG L. W., MERTZ J. C. and VALLEY J. F., *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2409 ;
SLUSHER R. E. and YURKE B., in *Frontiers in Quantum Optics*, edited by S. Sarkar and E. R. Pike
(Hilger, London, 1986).
- [5] SHELBY R. M., LEVENSON M. D., PERLMUTTER S. H., DE VOE R. G., WALLS D. F., *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 691 ;
LING AU WU, KIMBLE H. J., HALL J. L. and HUIFA WU, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2520.
- [6] MAEDA M. W., KUMAR P. and SHAPIRO J. H., *Phys. Rev. A* **32** (1985) 3803.
- [7] VALLET M., PINARD M. and GRYNBERG G., *Europhys. Lett.*, **11** (1990) 739.
- [8] LIND R. C. and STEEL D. G., *Opt. Lett.* **6** (1981) 554 ;
KLEINMANN B., TREHIN F., PINARD M. and GRYNBERG G., *J. Opt. Soc. Am. B* **2** (1985) 704 ;
LE BIHAN E., PINARD M. and GRYNBERG G., *Opt. Lett.* **11** (1986) 159 ;
LEITE J. R., SIMONEAU P., BLOCH D., LÉBOITEUX S. and DUCLOY M., *Europhys. Lett.* **2** (1986) 749.
- [9] WHITE J. O., CRONIN-COLOMB M., FISHER B. and YARIV A., *Appl. Phys. Lett.* **40** (1982) 450 ;
YARIV A. and SZE-KEUNG KWONG, *Opt. Lett.* **10** (1985) 454 ;
MAC DONALD K. R. and FEINBERG J., *J. Opt. Soc. Am.* **1** (1984) 1213 and *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 821 ;
RAJBENBACH H. and HUIGNARD J. P., *Opt. Lett.* **10** (1985) 137.
- [10] FEINBERG J. and BACHER G. D., *Opt. Lett.* **9** (1984) 420.
- [11] MAC DONALD K. R. and FEINBERG J., *J. Opt. Soc. Amer. A* **1** (1984) 1213.
- [12] MAC DONALD K. R. and FEINBERG J., *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 821.
- [13] RAJBENBACH H. and HUIGNARD J. P., *Opt. Lett.* **10** (1985) 137.
- [14] YARIV A. and KWONG S. K., *Opt. Lett.* **10** (1985) 454.
- [15] PINARD M., GRANDCLEMENT D. and GRYNBERG G., *Europhys. Lett.* **2** (1986) 755.
- [16] GRANDCLEMENT D., GRYNBERG G. and PINARD M., *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 44.
- [17] GRANDCLEMENT D., PINARD M. and GRYNBERG G., *IEEE J. Quantum Electron.* **25** (1989) 580.
- [18] PINARD M., HOROWICZ R., GRANDCLEMENT D. and GRYNBERG G., *IEEE J. Quantum Electron.* **25** (1989) 570.
- [19] SHEN Y. R., « The principle of Non-linear Optics » (New York : Wiley (1984) ch. 9-2).
- [20] MURRAY SARGENT III, SCULLY M. O., LAMB W. E. Jr., « Laser Physics » Addison-Wesley Publishing Company (1974).
- [21] LEFLOCH A., Communication privée Gyromètres passifs résonants.
- [22] SAGNAC G., *C.R. Hebd. Acad. Sci. Paris* **95** (1913) 708.
- [23] CHOW W. W. et Coll. *Rev. of Modern Physics* **57** (1985) 61.
- [24] FAUCHEUX M., FAYOUX D., ROLAND J. J., *J. Optics* **19** (1988) 101.
- [25] BLOEMBERGEN N., BOGDAN A. R. and DOWNER M. W., in *Laser Spectroscopy V* edited by Mc Kellar A. R. W., Oka T. and Stroicheff B. P. (Springer, Heidelberg) (1981) 157.
- [26] GRYNBERG G. and PINARD M., *Phys. Rev. A* **32** (1985) 3772.
- [27] BLOCH D., Thèse de 3^e cycle, Université Paris XI (1980).
- [28] GRYNBERG G., LE BIHAN E. and PINARD M., *J. Phys. France* **47** (1986) 1321 ;
GRANDCLEMENT D., GRYNBERG G. and PINARD M., *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 40 ; **59** (1987) 40.
- [29] GRYNBERG G. and PINARD M., *C.R. Hebd. Acad. Sci. Paris* **306** (1988) 203 ;
GRYNBERG G., PINARD M., FAUCHEUX M., *Opt. Lett.* **14** (1989) 63.
- [30] GIBBS H. M., MAC CALL S. L. and VENKATESAN T. N. C., *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1135.
- [31] GIBBS H. M., *Optical Bistability : Controlling Light with Light*. New York : Academic (1985).
- [32] GIACOBINO E., DEVAUD M., BIRABEN F. and GRYNBERG G., *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 434.
- [33] ADLER R., *Proceedings of the IEEE* **61** (1973) n° 10.
- [34] CRESSER J. D., LOUISELL W. H., MEYSTRE P., SCHLEICH W. and SCULLY M. O., *Phys. Rev. A* **25** (1982) 2214.
- [35] GRYNBERG G., PINARD M. and VERKERK P., *Europhys. Lett.* **9** (1989) 139.
- [36] ORIA M., BLOCH D., FICHET M. and DUCLOY M., *Opt. Lett.* **19** (1989) 1082.

II.B.3. Discussion des résultats

Dans ce chapitre, les numéros des formules qui ne sont pas précédés de II font référence à l'article de la partie II.B.2.

a. Influence de la pression

Dans le précédent article, les parties imaginaires des susceptibilités et du coefficient de couplage par mélange à quatre ondes ont été négligées (formules 26 et 31). Cette hypothèse, qui consiste à ne considérer le système qu'à l'ordre zéro en $(\beta p \Delta / \gamma_b^2)$, revient à supposer que le gain (ou l'extra-absorption) dû au mélange à deux ondes ne joue aucun rôle dans le problème.

En revanche, le calcul a été effectué au premier ordre en $(I_1 - I_2) / I_0$. Il faut donc justifier cette hypothèse en comparant l'influence des deux "infiniment petits": $(\beta p \Delta / \gamma_b^2)$ et $(I_1 - I_2) / I_0$.

Le calcul peut être repris à partir des formules (26) et (31), en conservant le terme imaginaire dans l'expression de K_{34} (respectivement K_{43}) et de χ_3 (respectivement χ_4).

En posant $\Delta = \omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_2$, on obtient:

$$K_{34} = 2\chi^{(3)} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \left[1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} - i \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \right]$$

(II.7)

$$\chi_3 = \chi_0 + \chi^{(3)} \left[\frac{2\gamma_{ab}}{\gamma_b} I_1 + (I_1 - I_3) + 2I_1 \frac{\beta p}{\gamma_b} + 2iI_1 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \right]$$

L'expression de K_{43} se déduit de la formule précédente par interversion des indices 3 et 4, 1 et 2, et en remplaçant Δ par $(-\Delta)$.

En conservant l'expression (38) de l'indice non linéaire des ondes pompes, expression qui suppose que le milieu modifie peu \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , on en déduit la polarisation pour l'onde \mathcal{E}_3 (respectivement \mathcal{E}_4):

$$\begin{aligned} P_3 = \epsilon_0 \chi^{(3)} & \left[(2I_1 - I_3) + 2 \frac{\beta p}{\gamma_b} (\bar{I}_1 + \bar{I}_1) + 2iI_1 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \right] \mathcal{E}_3 \\ & + 2\epsilon_0 \chi^{(3)} \left[\left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} - i \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \right) (I_0 e^{-i\phi_p} + i\alpha' I_0 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4) \right] \mathcal{E}_4^* \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Les équations de Lamb (formules 41 de l'article) deviennent alors:

$$\begin{aligned} \omega_3 - \omega_4 + \dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4 = & \Omega_3 - \Omega_4 - \frac{\omega}{2} \chi^{(3)} \left[(I_4 - I_3) + 2 \frac{\beta p}{\gamma_b} (I_1 - I_2) + 2 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} I_0 \sin(\phi_c - \phi'_p) \right. \\ & \left. \left(\frac{E_4}{E_3} + \frac{E_3}{E_4} \right) + 2 \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) I_0 \cos(\phi_c - \phi'_p) \left(\frac{E_4}{E_3} - \frac{E_3}{E_4} \right) \right. \\ & \left. + \alpha' I_0 \frac{2\beta p \Delta}{\gamma_b^2} (I_3 + I_4) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_3 + \gamma E_3 = & -\omega \chi^{(3)} \left[\bar{I}_1 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} E_3 + I_0 \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \sin(\phi_c - \phi'_p) E_4 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \alpha' I_0 I_4 E_3 \right. \\ & \left. - \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} I_0 \cos(\phi_c - \phi'_p) E_4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_4 + \gamma E_4 = & -\omega \chi^{(3)} \left[-\bar{I}_2 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} E_4 + I_0 \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \sin(\phi_c - \phi'_p) E_3 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \alpha' I_0 I_3 E_4 \right. \\ & \left. + \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} I_0 \cos(\phi_c - \phi'_p) E_3 \right] \end{aligned}$$

(II.9)

L'oscillateur est supposé fonctionner près du seuil. $\phi_c - \phi'_p$ est alors voisin de $\pi/2$, χ_0 étant supposé positif (formule 43.a). Le terme $\sin(\phi_c - \phi'_p)$ peut donc être remplacé par un et les termes contenant $\cos(\phi_c - \phi'_p)$ sont négligés. De plus, le coefficient de réflexion par conjugaison de phase $\alpha' I_0$ est aussi supposé petit devant l'unité. Enfin, nous ne gardons que les termes du premier ordre en $(E_4 - E_3)$.

En appliquant ces différentes approximations aux équations de Lamb (II.9), on obtient en régime stationnaire:

$$\begin{aligned} \omega_3 - \omega_4 = & \Omega_3 - \Omega_4 - \frac{\omega \chi^{(3)}}{2} \left((I_3 - I_4) + \frac{2\beta p}{\gamma_b} (I_1 - I_2) + 4 \frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} I_0 \right) \\ \gamma E_3 = & -\omega \chi^{(3)} \left(\frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \bar{I}_1 E_3 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) I_0 E_4 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \alpha' I_0 I_4 E_3 \right) \\ \gamma E_4 = & -\omega \chi^{(3)} \left(-\frac{\beta p \Delta}{\gamma_b^2} \bar{I}_2 E_4 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) I_0 E_3 + \left(1 + \frac{\beta p}{\gamma_b} \right) \alpha' I_0 I_3 E_4 \right) \end{aligned} \quad (II.10)$$

Le système d'équations vérifié par E_3 et E_4 se résout simplement en multipliant chaque équation respectivement par E_3 et E_4 et en faisant la différence. On obtient alors:

$$I_3 - I_4 = -\frac{\omega\chi^{(3)}\beta p\Delta}{\gamma\gamma_p^2}(I_3\bar{I}_1 + I_4\bar{I}_2) \quad (\text{II.11})$$

Cette relation devient, en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas:

$$I_3 - I_4 = \frac{\beta p\Delta}{\gamma_p^2}(I_3 + I_4) \quad (\text{II.12})$$

La relation (II.12) justifie à posteriori l'hypothèse consistant à ne garder que les termes du premier ordre en $(E_4 - E_3)$, car on se limite dans ce calcul aux termes du premier ordre en $(\beta p\Delta/\gamma_b^2)$.

En reportant l'expression de $I_3 - I_4$ dans la relation vérifiée par $\omega_3 - \omega_4$, et en posant I la demi-somme de I_3 et I_4 , on en déduit que:

$$\omega_3 - \omega_4 = \frac{\Omega_3 - \Omega_4 - \frac{\omega\chi^{(3)}\beta p}{\gamma_b}(I_1 - I_2)}{1 - \frac{\omega\chi^{(3)}\beta p}{\gamma_b^2}\left(I_0 + \frac{I}{2}\right)} \quad (\text{II.13})$$

Cette expression se simplifie près du seuil, lorsque I est très petit devant I_0 . Cette hypothèse revient à négliger les termes d'indices non linéaires dus aux ondes oscillantes dans l'expression (II.10). Dans ces conditions, la levée de dégénérescence est alors égale à:

$$\omega_3 - \omega_4 = \frac{\Omega_3 - \Omega_4 + a\gamma_b \frac{(I_1 - I_2)}{I_0}}{1 + a} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{où } a = -\frac{\omega\chi^{(3)}\beta p}{\gamma_b^2} I_0$$

La relation (II.10) peut être écrite lorsque le système est très proche du seuil d'oscillation:

$$\omega_3 - \omega_4 = \Omega_3 - \Omega_4 - \frac{\omega\chi^{(3)}\beta p}{\gamma_b} \left((I_1 - I_2) + 2\frac{\Delta}{\gamma_b} I_0 \right) \quad (\text{II.15})$$

Le biais optique est dû à l'influence de deux termes, tout deux induits par collision. Le premier est dû à une différence d'indice non linéaire des deux ondes oscillantes, cette différence étant proportionnelle à la différence entre les intensités des ondes pompes. Le second terme correspond à un processus de mélange à quatre ondes assisté par collision: le réseau réel induit par \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_3 (respectivement \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_4) est déphasé par rapport au réseau lumineux à cause de la durée de vie finie du niveau excité et la composante de ce réseau en quadrature avec le réseau lumineux a une phase égale à $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \pi/2$ qui est précisément la phase de \mathcal{E}_4 au seuil (Voir 43.a).

Dans nos conditions expérimentales (3 Torr d'hélium), a est de l'ordre de 300. La formule (42) ne peut s'appliquer à la courbe de la figure 5. Il faut au contraire utiliser l'expression déduite de (II.14):

$$\omega_3 - \omega_4 = \gamma_b \frac{(I_1 - I_2)}{I_0} \quad (\text{II.16})$$

Résultat qui est en bon accord avec l'expérience.

Pour une pression de gaz tampon de 10 mTorr, a est égal à 1. Pour des pressions très supérieures à 10 mTorr, la formule (II.16) doit être utilisée. Dans ces conditions, le biais est indépendant de la pression, mais surtout le système est aveugle, c'est-à-dire insensible à $\Omega_3 - \Omega_4$. De plus, à partir de (II.13) et (II.16) on déduit que:

$$\frac{I_3 - I_4}{I_3 + I_4} = -\frac{\beta p}{\gamma_b} \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right) \quad (\text{II.17})$$

Pour de telles valeurs de a , l'intensité des deux ondes oscillantes n'est plus égale (les hypothèses de l'article ne s'appliquent pas pour ces valeurs de a).

L'expression (II.14) indique donc qu'il faut que les pressions de gaz tampon soient inférieures à 10 mTorr pour que l'oscillateur à mélange à quatre ondes soit sensible à l'effet Sagnac. A de telles pressions, il faut tenir compte des collisions sodium-sodium, car elles peuvent créer un biais important bien que la pression de sodium soit très faible (de l'ordre de $3 \cdot 10^{-5}$ Torr).

En effet, le processus de collision sodium-sodium étant résonant, la section efficace est très grande [19]. Le coefficient d'élargissement collisionnel est de l'ordre de 1 GHz par Torr. En appliquant la formule (II.13), on trouve un biais résiduel de l'ordre de:

$$\omega_3 - \omega_4 = 0,85(\Omega_3 - \Omega_4) + 1,5 \frac{(I_1 - I_2)}{I_0} \text{ MHz} \quad (\text{II.18})$$

Cet effet peut en partie expliquer les fluctuations du biais induit par effet Faraday. A cause des phénomènes d'autofocalisation (Voir II.B.3.b), il est difficile d'égaliser les intensités pompes au niveau de la cellule à mieux que 10%. De plus, l'intensité totale fluctuant d'environ 10%, la fréquence $\omega_3 - \omega_4$ fluctue sur une plage de quelques dizaines de kilohertz, ce qui correspond bien aux données expérimentales.

De plus, lors des expériences effectuées sans gaz tampon, avec le rotateur de Faraday (voir figure 6 de l'article), il est apparu un biais qui subsistait en l'absence de courant dans la bobine du rotateur de Faraday. Ce biais a pu être annulé en modifiant la superposition des deux ondes pompes, donc la valeur de $(I_1 - I_2)$. Ceci confirme l'existence du biais induit par les collisions sodium-sodium (II.18).

En conclusion, la théorie développée dans l'article II.B.2 reste valable à condition de faire l'approximation $a \ll 1$. Pour la partie expérimentale, le biais induit par effet Faraday mesuré est en bon accord avec sa valeur théorique car la cellule ne contenait pas de gaz tampon (figure 6). Par contre, la courbe expérimentale correspondant au biais induit par pression (figure 5) est mieux décrite par l'expression (II.16) que par l'expression 42 de l'article (valable si $a \ll 1$).

b. Autofocalisation des faisceaux

Lorsqu'ils traversent un milieu non linéaire, les faisceaux gaussiens subissent une modification de front d'onde due à l'indice non linéaire $n_2 I$ qui n'est pas uniforme spatialement.

Il en découle des phénomènes d'autofocalisation [20] [5] (ou de focalisation croisée si plusieurs faisceaux sont présents simultanément). Les intensités dans le milieu vont être modifiées, ce qui peut entraîner une modification du biais induit par collision (Voir II.B.3.a).

Dans le complément II.B.5, la variation du mode de la cavité en fonction de l'intensité pompe a été étudiée, ainsi que la dépendance du diamètre de l'onde pompe I_2 en fonction de l'intensité de l'onde pompe I_1 , lorsque l'onde pompe I_2 est obtenue par réflexion de l'onde pompe I_1 . Nous avons conclu que l'oscillateur devait fonctionner près du seuil pour que l'oscillation ne modifie pas le diamètre des pompes, qu'un désaccord haute fréquence (coté autofocalisant) influait moins sur la dimension du diamètre des pompes et que la géométrie consistant à réfléchir l'onde pompe I_1 était très mauvaise pour égaliser les deux intensités I_1 et I_2 . Cette géométrie est cependant intéressante, car le produit $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ des champs pompes au niveau de la cellule est plus grand que celui obtenu lorsque le faisceau laser est séparé en deux pour former \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 (Voir figure 4 du II.B.2).

c. Autres processus de mélange à quatre ondes

Un autre processus est possible par mélange à quatre ondes. Cet effet est habituellement appelé répartition distribuée (en anglais distributed feedback) [21]. Il consiste en l'absorption d'un photon de l'onde pompe E_1 (respectivement E_2) et d'un photon de l'onde E_4 (respectivement E_3) et en l'émission d'un photon de l'onde pompe E_2 (respectivement E_1) et d'un photon de fréquence ω_4 (respectivement ω_3) dans la direction de l'onde E_3 (respectivement E_4). Cependant, dans la configuration utilisée, ce terme présente un désaccord de phase et doit être pondéré par un facteur qui dépend fortement de l'angle entre la direction des pompes et celle définie par la cavité. (voir I.B.3.d).

Le terme de désaccord de phase est calculé dans le complément II.B.6 en tenant compte du profil gaussien des faisceaux. L'application numérique déduite des paramètres expérimentaux indique que ce processus joue un rôle négligeable dans notre expérience, l'angle entre les ondes pompes et les ondes oscillantes étant suffisamment important.

d. Effet des classes de vitesse résonante

Considérons un atome appartenant à la classe de vitesse résonante pour l'onde \mathcal{E}_3 . Cet atome est résonant avec l'onde \mathcal{E}_1 , l'effet Doppler résiduel étant négligé. Par contre, il ne sera pas résonant avec l'onde \mathcal{E}_2 , le désaccord de \mathcal{E}_2 dans le référentiel de cet atome étant égal à 2δ . La contribution de l'onde \mathcal{E}_1 à la susceptibilité non linéaire de \mathcal{E}_3 passe donc par un processus doublement résonant alors que celle de \mathcal{E}_2 passe par un processus simplement résonant. L'expression de la susceptibilité non linéaire n'est donc pas symétrique en I_1 et I_2 :

$$\chi_3(I_1, I_2) \neq \chi_3(I_2, I_1)$$

Le même raisonnement s'applique à la susceptibilité de l'onde \mathcal{E}_4 , qui par symétrie est égale à:

$$\chi_4(I_1, I_2) = \chi_3(I_2, I_1)$$

La différence des deux susceptibilités vaut alors:

$$\chi_3 - \chi_4 = \chi_3(I_1, I_2) - \chi_3(I_2, I_1)$$

Si les intensités des ondes pompes sont différentes, les fréquences propres de la cavité et donc les fréquences des ondes oscillantes sont différentes.

L'effet des classes de vitesses résonante est donc analogue aux effets non réciproques induits par collision et étudié dans la partie (II.B.2). Ces effets, quoique très faibles a priori (à cause du facteur de Boltzmann), peuvent néanmoins contribuer au biais résiduel.

II.B.4. Conclusion

Les oscillateurs à mélange à quatre ondes en anneau sont donc sensibles à l'effet Sagnac et peuvent servir de senseur inertielle. De plus, la présence d'un biais optique et le fait qu'il n'y ait pas de compétition entre les deux ondes oscillantes sont deux avantages par rapport aux gyrolasers conventionnels. En vue d'une application industrielle, une des possibilités serait d'utiliser le césium ($\lambda = 852 \text{ nm}$) afin de miniaturiser le système en remplaçant le laser à colorant par des diodes laser [22].

Cependant de nombreuses difficultés apparaissent:

- Il convient de réguler très soigneusement la puissance des ondes pompes (II.B.3.a et II.B.3.b) pour éviter les fluctuations de biais.
- Il faut maximiser l'angle entre les ondes pompes et l'oscillation (II.B.3.c).
- Il est aussi préférable d'avoir une puissance pompe maximale pour utiliser un désaccord le plus grand possible et ainsi minimiser l'influence des classes de vitesse résonante (II.B.3.d).

Tout ceci indique bien que l'utilisation des oscillateurs à mélange à quatre ondes comme senseur inertielle en est encore au stade de la recherche.

Enfin, nous avons étudié deux autres systèmes très proches de l'oscillateur à mélange à quatre ondes:

La première étude, décrite dans l'annexe A, fait suite à une proposition de Kaplan et Meystre [23], qui indiquait que le facteur d'échelle des gyromètres passifs pouvait être augmenté par l'adjonction d'un milieu non linéaire dans la cavité. Nous avons étudié théoriquement ce système, appelé gyromètre résonant [24], et montré qu'il pouvait conduire à des instabilités dont la fréquence est directement liée à la non-réciprocité.

D'autre part, nous avons étudié expérimentalement les propriétés gyrométriques d'un oscillateur en anneau utilisant comme processus de gain le mélange à deux ondes dans une vapeur de sodium [25]. Le système présente une zone aveugle bien plus grande que le dispositif étudié dans cette partie pour des raisons expliquées dans l'annexe B.

II.B.5. Complément: influence de la phase non linéaire sur le profil des champs

I) Modifications spatiales des modes propres de la cavité

On va dans ce complément calculer les modifications spatiales des modes propres de la cavité, modifications dues à l'action du milieu non-linéaire. En effet, dans un milieu non-linéaire, la longueur optique dépend de l'intensité et celle-ci dépend transversalement de la position lorsque les faisceaux sont gaussiens. A priori un tel processus modifie simultanément la taille et le rayon de courbure du faisceau à chaque passage et il faut donc calculer ces modifications.

Dans le cas qui nous intéresse le milieu interagit avec deux ondes pompés de même intensité I_p et de mêmes dimensions w_p on a :

$$\mathcal{E}_1(r) = \mathcal{E}_2(r) = \sqrt{I_p} \exp - \frac{r^2}{w_p^2} \quad (1)$$

Il interagit aussi avec deux ondes oscillantes de même intensité I et de même dimensions w_c on a :

$$\mathcal{E}_+(r) = \mathcal{E}_-(r) = \sqrt{I} \exp - \frac{r^2}{w_c^2} \quad (2)$$

En supposant que le milieu non-linéaire est constitué d'atomes immobiles à deux niveaux on montre que l'indice pour les ondes \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- est égal à :

$$n_+ = n_- = n_0 + \frac{\chi^{(3)}}{2} [4 I_p(r) + 3 I(r)]$$

$$\text{avec } I_p(r) = I_p \exp - \frac{2r^2}{w_p^2} \quad (3)$$

$$I(r) = I \exp - \frac{2r^2}{w_c^2}$$

Connaissant les indices $n_+(r)$ et $n_-(r)$, il est possible d'étudier la propagation des ondes \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- dans le milieu non-linéaire de longueur l . Lorsque les modifications des faisceaux sont faibles on peut assimiler cette propagation à l'effet conjoint d'une lentille de focale f située à l'entrée du milieu et de la propagation dans le vide sur une distance l .

On montre alors que la focale équivalente est égale à :

$$\frac{1}{f} = \frac{2 k\chi^{(3)} I_p \ell}{z_{R_p}} + \frac{3 k\chi^{(3)} I \ell}{2 z_R} = \frac{1}{f_p} + \frac{1}{f_{osc}} \quad (4)$$

Dans cette formule z_{R_p} et z_R sont respectivement les longueurs de Rayleigh associées au mode des ondes pompes et au mode de la cavité :

$$z_{R_p} = \frac{\pi w_p^2}{\lambda} = \frac{k}{2} w_p^2 \quad (5)$$

$$z_R = \frac{\pi w_c^2}{\lambda}$$

On est maintenant capable de calculer la matrice de transfert pour un tour complet de cavité pleine, tour partant et finissant au point M_1 (voir fig.1. En effet, la propagation de M_2 à M_1 est parfaitement calculable et son effet sur le paramètre q $\left[\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \frac{i}{z_R} \right]$ s'écrit de la façon générale :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (6)$$

Les quatre éléments A,B,C et D de la matrice de transfert de la cavité vide dépendent uniquement de la géométrie de la cavité.

La propagation du faisceau de M_2 à M_1 transforme q_2 en q'_1 qui est égal à :

$$q'_1 = \frac{q_2 (f - \ell) + \ell f}{f - q} \quad (7)$$

La condition de stabilité de la cavité impose l'égalité entre q'_1 et q_1 .

Cette égalité nous donne z_R en fonction de f et des éléments A,B,C et D de la matrice de transfert de la cavité vide.

En combinant cette égalité et la relation (4) qui relie f et z_R on obtient finalement que z_R est solution d'une équation du second degré :

$$z_R^2 \left[\frac{1}{4f_p^2} + \frac{C}{B} - \frac{D}{Bf_p} \right] + z_R \cdot K \cdot \left[-\frac{1}{2f_p} + \frac{D}{B} \right] + \left[1 + \frac{1}{4} K^2 \right] = 0 \quad (8)$$

$$\text{avec } K = -\frac{3}{2} k\chi^{(3)} I \ell = -\frac{3}{2} r_c$$

Cette formule permet d'étudier l'influence sur la longueur de Rayleigh des effets spatiaux croisés dus aux ondes pompes et des propres effets dus aux ondes intra-cavité.

On a appliqué cette formule générale à l'étude de quelques cas particuliers correspondant à des géométries de cavité utilisées dans nos expériences.

La figure 2 montre la variation de la longueur de Rayleigh z_R en fonction de r_c pour une cavité identique à celle utilisée pour d'étude de la sensibilité à un biais induit par effet Faraday (cf § II.B.2).

La figure 3 montre la variation de z_R en fonction de r_c et de la focale f_0 pour une cavité stabilisée par une seule lentille placée au milieu du bras $M_3 M_4$. Ces figures ont été tracées pour une focale f_p égale à 1,5m.

II) Modifications spatiales des ondes pompes

Cette modification peut avoir des effets notables dans nos expériences uniquement lorsque l'onde pompe retour \mathcal{E}_2 est obtenue par rétro réflexion de l'onde pompe aller \mathcal{E}_1 après traversée du milieu non-linéaire. Si on ne tient pas compte des modifications spatiales créées par la cellule on trouve que le rayon de courbure de l'onde \mathcal{E}_1 après propagation sur une distance d est égal à

$$R(d) = d + \frac{z_{R1}^2}{d} \quad (9)$$

ou z_{R1} est la longueur de Rayleigh de l'onde \mathcal{E}_1

Pour que l'onde retour soit identique à l'onde aller il faut placer un miroir de rayon courbure R soit à la distance d_1 soit à la distance d_2 avec :

$$d_1 = \frac{R}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - 4z_{R1}^2}$$

$$d_2 = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - 4z_{R1}^2} \quad (10)$$

On supposera par la suite que le miroir est placé soit en d_1 soit en d_2 .

En fait, à cause des effets de focalisation dus au milieu, le faisceau pompe retour n'est pas identique au faisceau pompe aller.

L'onde pompe \mathcal{E}_1 traverse donc un milieu non-linéaire interagissant avec deux ondes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 de même puissance mais de dimensions différentes.

Pour l'onde \mathcal{E}_1 le milieu est équivalent à une lentille de focale f égale à

$$\frac{1}{f} = \frac{r_c}{2} \left[\frac{1}{z_{R1}} + \frac{2z_{R1}}{z_{R2}^2} \right] \quad (11)$$

Le premier terme est dû à l'effet de l'onde \mathcal{E}_1 sur elle-même, le second est dû à l'effet croisé de l'onde \mathcal{E}_2 sur l'onde \mathcal{E}_1 .

Comme l'onde retour \mathcal{E}_2 est obtenue par rétro réflexion de \mathcal{E}_1 , on peut exprimer z_{R2} en fonction de f , d et de R .

On trouve :

$$z_{R2} = z_{R1} \left[1 - 2x \left(z_{R1}^2 \frac{(z_{R1}^2 - d^2)}{(z_{R1}^2 + d^2)^2} \right) + \frac{x^2 z_{R1}^4}{(z_{R1}^2 + d^2)^2} \right] \quad (12)$$

$$\text{avec } x = \frac{2d}{f}$$

En combinant cette relation avec la relation (11) qui donne $\frac{1}{f}$ en fonction de z_{R2} on obtient une équation où ne figure que z_{R2} comme inconnue. Nous avons limité la résolution de cette équation à des valeurs des paramètres réalisées expérimentalement. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1. On constate que les effets du milieu sur la longueur de Rayleigh de l'onde pompe sont importants. On constate d'autre part que le signe de l'effet dépend du signe de $x^{(3)}$ comme prévu intuitivement mais aussi de façon plus inattendue de la position du miroir réfléchissant.

Remarque: une autre méthode, plus rigoureuse, consiste à ne pas supposer la lentille gazeuse comme localisée. Voir par exemple les travaux de A. Le Floch de l'Université de Rennes: thèse de J.P. Taché, "Etude expérimentale et théorique par la méthode ABCD de quelques effets transverses non-résonants et résonants dans les cavités laser", Université de Rennes 1, soutenue le 30/9/88.

sans pompe retour	$r_c = -0.1$	$r_c = 0.1$
$d = 0.11$	$zr = 0.332$	$zr = 0.272$
$d = 0.88$	$zr = 0.273$	$zr = 0.331$
avec pompe retour		
$d = 0.11$	$zr = 0.375$	$zr = 0.128$
$d = 0.88$	$zr = 0.115$	$zr = 0.373$

Tableau 1: Longueur de Rayleigh de la pompe 2 en fonction de la position du miroir et du coefficient de réflexion r_c . Calcul effectué avec ou sans l'influence de la pompe 2.

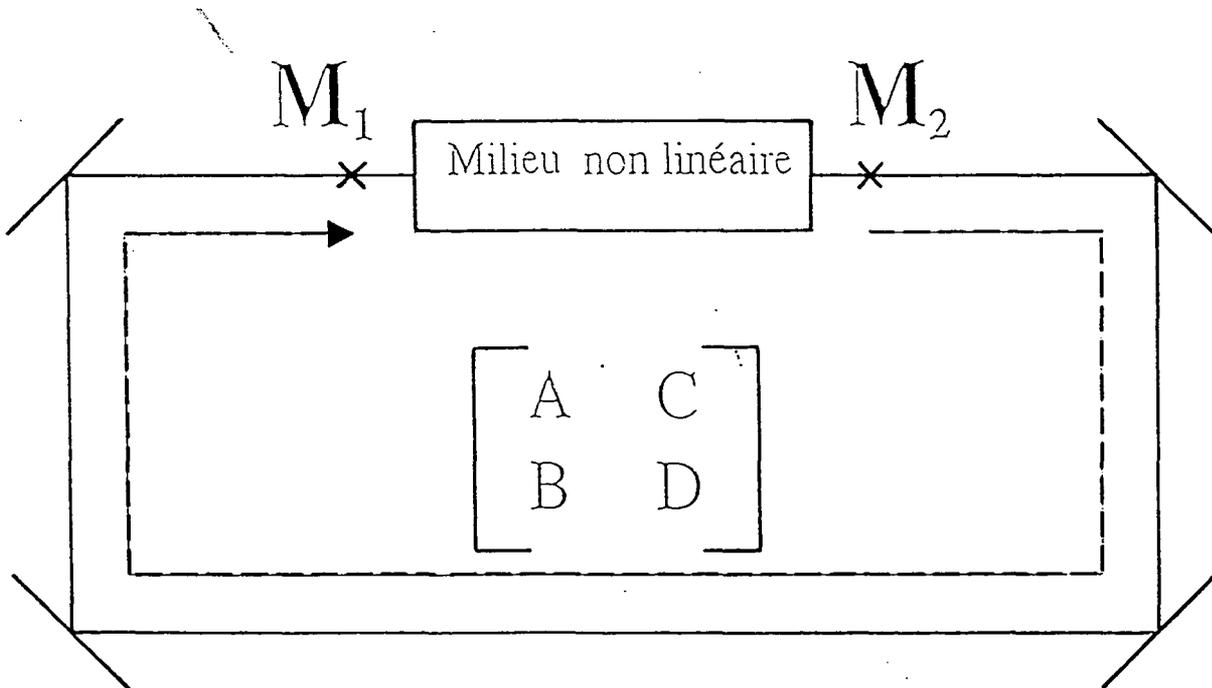


Figure 1

focale= 200

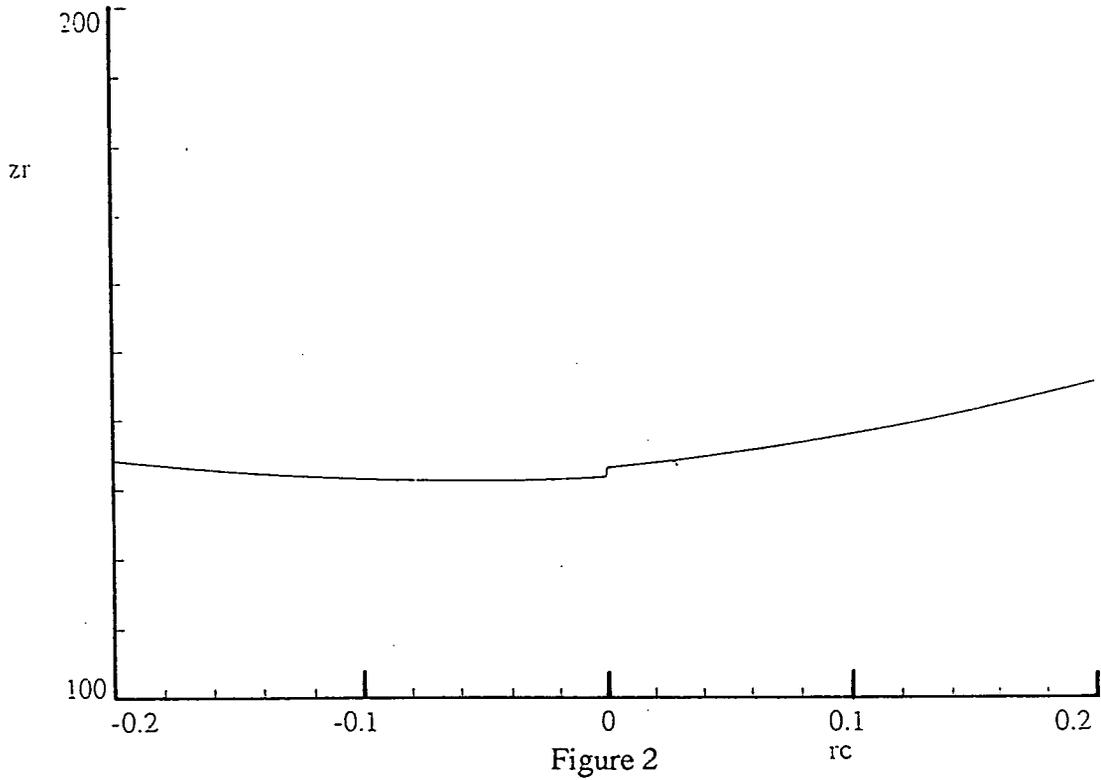


Figure 2

$z = [0, 1000]$

$rc = [-0.20, 0.20]$

$f = [350, 900]$

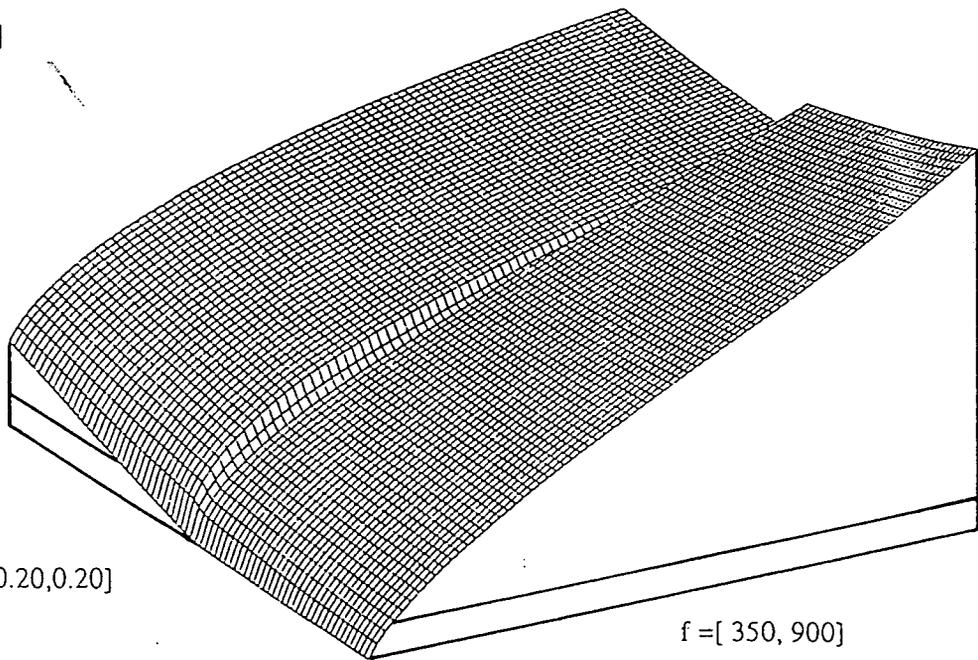
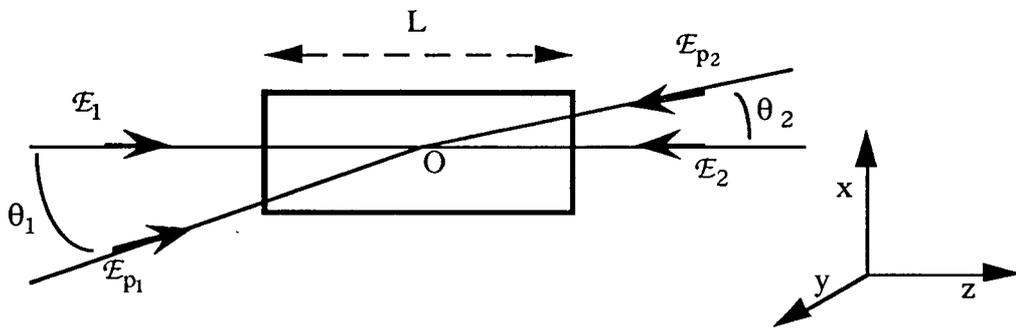


Figure 3

II.B.6. Complément: condition d'accord de phase du processus de répartition distribuée

Dans ce complément, nous calculons la contribution du processus de répartition distribuée à la polarisation atomique en tenant compte du profil gaussien de l'amplitude des champs.

Le milieu est soumis à quatre champs: deux champs \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 qui se contrepropagent et deux champs pompes \mathcal{E}_{p1} et \mathcal{E}_{p2} dont les directions de propagation font des angles θ_1 et θ_2 avec la direction de propagation commune à \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Les quatre champs ont la même fréquence ω et sont polarisés linéairement selon Oy .



Nous supposons que les faisceaux sont tous focalisés au centre de la cellule. De plus, la longueur de la cellule est supposée très petite devant la longueur de Rayleigh des faisceaux. Dans ces conditions, on peut négliger les variations de la taille des faisceaux au cours de la propagation dans la cellule et supposer de plus que le front d'onde est plan. Les champs dans la cellule s'expriment alors sous la forme:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \text{Re} \left(\mathcal{E}_i(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right) \vec{e}_y$$

où: $\mathcal{E}_i(\vec{r}) = E_i e^{-\frac{r_i^2}{w_i^2}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ et r_i est la distance à l'axe défini par O et \vec{k}_i

L'expression précédente n'est cependant valide que si l'indice du milieu est indépendant de r_i . L'influence de l'indice non linéaire sur le profil des champs doit être négligeable, c'est-à-dire que l'on se place dans le cas d'un milieu mince ($k\chi^{(3)}IL \ll 1$).

Nous nous intéressons à la composante P_2 de la polarisation qui rayonne dans la direction de E_2 . La contribution du terme de répartition distribuée à cette composante se calcule en projetant la polarisation sur le champ E_2 (I.8).

On suppose que les deux champs E_{p_1} et E_{p_2} (respectivement E_1 et E_2) ont la même dimension transversale W_p (respectivement W_c). L'expression de P_2 s'écrit alors:

$$P_2 = \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{\int_V \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_{p_2} \mathcal{E}_{p_1}^* e^{ikz} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W_c^2}} dV}{\int_V e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{W_c^2}} dV}$$

où V est le volume de la cellule.

Les dimensions transversales des champs étant très petites devant celles de la cellule, l'expression précédente se simplifie en:

$$P_2 = \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{2}{\pi W_c^2 L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_{p_2} \mathcal{E}_{p_1}^* e^{ikz} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W_c^2}} \right) dz dx dy$$

Sachant que:

$$\begin{aligned} r_{p_1}^2 &= y^2 + (x \cos \theta_1 - z \sin \theta_1)^2 & ; & \quad r_{p_2}^2 = y^2 + (x \cos \theta_2 - z \sin \theta_2)^2 \\ \vec{k}_{p_1} \cdot \vec{r} &= k(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1) & ; & \quad \vec{k}_{p_2} \cdot \vec{r} = -k(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de P_2 :

$$P_2 = \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{2E_1 E_{p_2} E_{p_1}^*}{\pi W_c^2 L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dx dy$$

$$\text{avec: } f(x, y, z) = e^{ik \left(\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} \right) z} e^{-ik(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)x} e^{-\left(\frac{2(x^2+y^2)}{W_t^2} + \frac{z^2}{W_p^2} (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2) - \frac{xz(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2)}{W_p^2} \right)}$$

$$\text{et } W_t = \sqrt{\frac{W_c^2 W_p^2}{W_c^2 + W_p^2}} .$$

Nous étudions cette expression dans deux cas:

$$1) \theta_1 = -\theta_2 = \theta$$

Ce cas correspond à la configuration où le désaccord de phase est minimum quand les ondes sont supposées être des ondes planes (I.B.3.d). En se limitant aux termes d'ordre 2 en θ , l'expression de P_2 s'écrit:

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{2}{\pi W_c^2 L} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ik\theta^2 z} e^{-\frac{2z^2\theta^2}{W_p^2}} e^{-2\left(\frac{x^2+y^2}{W_t^2}\right)} \right) dz dx dy$$

L'expression précédente se simplifie pour donner:

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{W_t^2}{W_c^2} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* \frac{\sqrt{2} z_r}{\alpha L} \int_0^{\frac{\alpha L}{\sqrt{2} z_r}} e^{-u^2} \cos \sqrt{2} \alpha u \, du$$

Où z_r est la longueur de Rayleigh, θ_p la divergence des champs E_{p_1} et E_{p_2} ($\theta_p = \lambda/\pi W_p$). α est égal au rapport des angles θ et θ_p .

L'amplitude de P_2 dépend du paramètre $\alpha L/z_r$. Ce terme s'écrit aussi sous la forme $\theta L/W_p$. Il exprime le recouvrement des faisceaux dans la cellule. S'il est petit devant un, les faisceaux se recouvrent bien dans toute la cellule et l'expression de P_2 se simplifie pour devenir semblable à l'expression obtenue quand les champs sont considérés comme des ondes planes (I.B.3.d) :

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{W_t^2}{W_c^2} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* \operatorname{sinc} \frac{k\theta^2 L}{2}$$

Par contre, si les faisceaux se recouvrent mal dans la cellule ($\alpha L/z_r \gg 1$), P_2 est égale à:

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{W_t^2}{W_c^2} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$$

Comme on a supposé $L \ll z_r$, α est très grand et P_2 est négligeable.

2) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

Ce cas correspond à la géométrie de l'oscillateur à mélange à quatre ondes. En utilisant les notations précédentes, on obtient:

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{2}{\pi W_c^2 L} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\alpha \left(\frac{az}{z_r} - \frac{2x}{W_p} \right)} e^{-\frac{2\alpha^2 z^2}{z_r^2}} e^{-2 \left(\frac{x^2 + y^2}{W_c^2} \right)} e^{\frac{4\alpha xz}{W_p z_r}} \right) dz dx dy$$

On suppose que les faisceaux se recouvrent bien dans la cellule ($\alpha L/z_r \ll 1$). L'intégration de la formule précédente donne:

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{W_p^2}{W_c^2} E_1 E_{p_2} E_{p_1}^* e^{\frac{-2W_c^2}{W_p^2 + W_c^2} \alpha^2} \text{sinc} \left(\frac{W_p^2 - W_c^2}{W_p^2 + W_c^2} \frac{k\theta^2 L}{2} \right)$$

Comme W_p et W_c sont du même ordre de grandeur, on remarque à partir de l'expression précédente que, dès que α est supérieur à un, P_2 est négligeable. Le terme de répartition distribuée ne joue donc un rôle que si l'angle entre les faisceaux est inférieur à leur divergence; ce qui signifie, d'un point de vue expérimental, que les quatre champs doivent être confondus.

Soulignons que l'expression que l'on obtiendrait pour la contribution du mélange à quatre ondes vers l'avant (I.B.3.c) dans cette configuration est du même ordre de grandeur.

Il est donc légitime de ne tenir compte dans l'étude théorique de l'oscillateur à mélange à quatre ondes que du terme de mélange à quatre ondes vers l'arrière car c'est le seul accordé en phase.

II.C. APPLICATION DES OSCILLATEURS A MELANGE A QUATRE ONDES A LA GENERATION DE PHOTONS JUMEAUX

II.C.1. Rappel sur les états comprimés

a. Représentation semi-classique

En optique classique, un mode du champ électromagnétique, de fréquence, de polarisation, de direction de propagation déterminée peut être décrit par un champ monochromatique :

$$E \vec{e} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}$$

où \vec{e} est la polarisation et E_0 et φ sont respectivement l'amplitude et la phase du champ. En physique classique, E_0 et φ peuvent être parfaitement déterminées l'une et l'autre.

Ce champ peut aussi être écrit sous la forme :

$$E = E_1 \cos(\omega t) + E_2 \sin(\omega t)$$

où E_1 et E_2 correspondent aux deux quadratures du champ électromagnétique.

En optique quantique, E_1 et E_2 sont décrits par deux opérateurs qui ne commutent pas entre eux. Ils sont en effet les analogues de la position et de l'impulsion d'un oscillateur harmonique, quantités conjuguées l'une de l'autre. Il en résulte que les dispersions ΔE_1 et ΔE_2 sur la mesure des deux quadratures du champ vérifient l'inégalité de Heisenberg:

$$\Delta E_1 \Delta E_2 \geq \epsilon^2 \quad (\text{II.19})$$

où ϵ correspond au champ électrique d'un seul photon [26].

Dans beaucoup d'expériences, les bruits mécaniques et thermiques, ainsi que la sensibilité des détecteurs, limitent la précision des mesures à un niveau bien supérieur à (II.19). Le domaine des fréquences optiques, où le bruit expérimental peut être réduit à un niveau très bas grâce à la qualité de l'instrumentation et au faible niveau de bruit thermique permet d'atteindre des précisions où le caractère quantique du champ électromagnétique joue un rôle essentiel.

Les deux quadratures E_1 et E_2 étant de même nature physique, les sources lumineuses habituelles ne privilégient pas une quadrature par rapport à une autre.

Les deux dispersions sont donc généralement égales et vérifient:

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 \geq \varepsilon \quad (\text{II.20})$$

Un état cohérent est un état tel que la relation (II.20) soit une égalité:

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = \varepsilon \quad (\text{II.21})$$

En particulier, l'état de plus basse énergie, le vide, vérifie l'égalité (II.21). La valeur moyenne des deux quadratures du champ est nulle, mais la variance de ces quadratures ne l'est pas.

Un état cohérent peut être écrit sous la forme:

$$E = (\bar{E}_1 + \delta E_1) \cos \omega t + (\bar{E}_2 + \delta E_2) \sin \omega t \quad (\text{II.22})$$

C'est-à-dire qu'un état cohérent peut être représenté comme la somme d'un champ "classique", dont les deux quadratures \bar{E}_1 et \bar{E}_2 sont parfaitement définies, et du vide, les dispersions des quadratures du vide vérifiant $\Delta E_i = \sqrt{\langle \delta E_i^2 \rangle} = \varepsilon$ (II.21). C'est l'interférence entre ce champ classique et ces fluctuations du vide qui est à l'origine du bruit quantique dans une mesure physique du champ.

b. Etats comprimés

L'inégalité de Heisenberg n'impose en fait qu'une limite sur le produit des dispersions des deux quadratures du champ. Rien n'interdit de diminuer la dispersion d'une des deux quadratures en augmentant la quadrature conjuguée de façon à ce que la relation (II.20) reste vérifiée.

Un état comprimé (en anglais *squeezed state*) est alors un état du champ tel que la dispersion d'une de ses deux quadratures (par exemple ΔE_2) soit inférieure à la dispersion des fluctuations du vide:

$$\Delta E_2 < \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta E_1 \geq \frac{\varepsilon^2}{\Delta E_2} \quad (\text{II.23})$$

Comme dans le cas d'un état cohérent, on peut se représenter un état comprimé comme la somme d'un champ "classique" et d'un champ d'amplitude moyenne nulle dont la dispersion d'une des deux quadratures est inférieure à ε .

c. Photons jumeaux

Dans le domaine optique, les détecteurs disponibles sont tous quadratiques, c'est-à-dire qu'ils sont sensibles à l'intensité du champ électromagnétique reçu. Il est alors intéressant de pouvoir réduire le bruit sur l'intensité, afin d'améliorer la précision des mesures de nombreuses expériences (absorption, interférométrie, ...).

Le bruit quantique sur l'intensité peut s'expliquer par le caractère corpusculaire de la lumière. En effet, un faisceau lumineux peut être considéré comme un flux de photons. Ce point de vue ne s'applique évidemment que lorsque l'on ne s'intéresse qu'à l'intensité du champ et non à sa phase.



Figure II.7

L'instant d'arrivée des photons sur le détecteur est en général aléatoire et il en résulte un bruit de grenaille. Si le faisceau est un faisceau cohérent, les photons n'ont aucune corrélation temporelle entre eux et la statistique de comptage des photons correspond à une loi de Poisson (figure II.7). En particulier, pendant un temps T , le nombre n de photons arrivés sur le détecteur vérifie:

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} \quad (\text{II.23})$$

Cette relation permet d'exprimer la densité spectrale de bruit de l'intensité lumineuse $S_I(\Omega)$ [27] [28] :

$$S_I(\Omega) = 2 \Delta f \bar{I} \quad (\text{II.24})$$

où Δf est la bande passante de la détection et Ω la fréquence d'analyse. Il faut noter que l'intensité dans la formule (II.24) est exprimée en photons par seconde. Cette unité est beaucoup mieux adaptée à l'étude du bruit d'intensité, car les détecteurs utilisés dans les expériences de génération et d'observation des états comprimés sont des photodiodes. La grandeur mesurée est alors le courant délivré par la photodiode, courant qui est proportionnel au nombre de photons reçus par seconde.

Le bruit sur l'intensité d'un faisceau cohérent est donc un bruit blanc. C'est un bruit de grenaille dû à l'aspect corpusculaire de la lumière. Il est appelé bruit de photon standard (ou shot-noise).

Dans le cas d'un champ quelconque, on exprime la variance de l'intensité sous la forme:

$$S_I(\Omega) = 2 \Delta f \bar{I} (1 + Q(\Omega)) \quad (\text{II } 25)$$

où Q est appelé "facteur de Mandel" [28].

Si le champ est comprimé en intensité, Q est négatif. C'est-à-dire que la densité spectrale de bruit est en dessous du bruit de photon standard.

Une autre possibilité pour s'affranchir des fluctuations d'intensité est de posséder deux faisceaux dont les fluctuations sont identiques [29]. Chaque faisceau pris séparément présente du bruit. Néanmoins, en effectuant une mesure de la différence d'intensité entre les deux faisceaux (figure II.8), on élimine le bruit sur le signal. Ces états quantiques, très proches des états comprimés, sont appelés faisceaux de photons jumeaux.

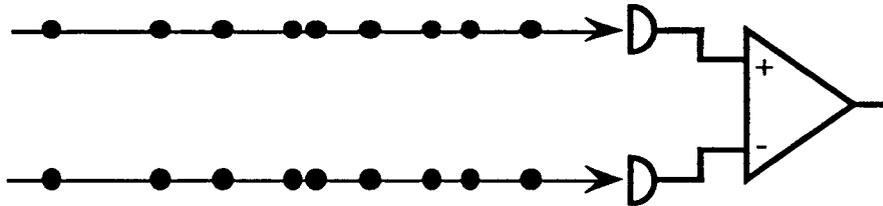


Figure II.8

Enfin, il est intéressant de donner l'expression de la densité spectrale de bruit de l'amplitude des fluctuations du vide. Nous avons vu précédemment qu'un état cohérent s'écrit, en choisissant une origine des temps adéquate, $(\bar{E}_1 + \delta E_1) \cos \omega t + \delta E_2 \sin \omega t$. Les fluctuations de l'intensité valent alors:

$$\delta I = 2\sqrt{\bar{I}} \delta E_1 \quad (\text{II.26})$$

D'où, en exprimant l'intensité en photons par seconde:

$$S_{\delta I}(\Omega) = 4\bar{I} S_{\delta E_1}(\Omega) \quad (\text{II.27})$$

Cette expression doit être comparée à l'expression (II.24). La densité spectrale de bruit de δI étant égale à la densité spectrale de bruit de I pour toute fréquence non nulle, et les fluctuations d'un état cohérent étant égales aux fluctuations du vide, on en déduit que:

$$S_{\delta E_1}(\Omega) = \Delta f / 2 \quad (\text{II.26})$$

d. Méthode semi-classique

Cette méthode consiste à traiter classiquement les champs et les fluctuations [30]. Elle est basée sur l'utilisation de la distribution de Wigner [31]. On montre, en utilisant cette représentation semi-classique, que les moyennes et les variances des variables classiques décrivant le champ sont régies par les mêmes équations que les opérateurs associés lors de la plupart des transformations subies par les champs [32]. En particulier, la propagation libre, la réflexion (et la transmission) sur un miroir et la réflexion sur un miroir à conjugaison de phase non absorbant sont des transformations dont l'action s'exprime de la même façon sur les moyennes et les variances des variables classiques et sur les moments d'ordre un et deux des opérateurs.

Cette propriété n'est vraie que pour les variances et les moyennes. Les fluctuations doivent donc être petites devant les valeurs moyennes afin de négliger les moments d'ordre supérieur à deux. Soulignons que cette hypothèse conduit à la linéarisation des équations d'évolution des fluctuations, ce qui simplifie leur résolution.

L'approche semi-classique permet de s'affranchir des opérateurs en résolvant les équations d'évolution des variables classiques associées, plus faciles à manipuler et à interpréter physiquement. Par contre, il faut tenir compte de tous les couplages avec les modes vides du champ qui introduisent des fluctuations.

II.C.2. Utilisation de l'optique non linéaire pour générer des états comprimés et des faisceaux jumeaux

Les expériences de génération d'états comprimés dans un milieu non linéaire sont basées sur des processus de mélange d'onde [33] : mélange à trois ondes, ou amplification paramétrique, et mélange à quatre ondes. Le premier processus consiste en l'absorption d'un photon pompe et en l'émission de deux photons de fréquence voisine et deux fois plus petite que la fréquence de l'onde pompe (figure II.9.a). Le second processus consiste en l'absorption de deux photons de l'onde pompe et en l'émission de deux photons de fréquence voisine de celle des ondes pompes (figure II.9.b et II.9.c). Ces deux processus conduisent à l'émission simultanée d'une paire de photons. Physiquement, cette émission simultanée est à la base des corrélations existant entre les deux faisceaux émis par le milieu.

Cependant, ces processus spontanés de mélange d'onde ont un rendement très faible et les faisceaux de photons jumeaux ainsi obtenus sont peu intenses. De plus, l'émission peut se produire dans toutes les directions, pourvu que le processus soit accordé en phase. Pour étudier les corrélations entre les deux faisceaux émis, il faut donc une détection très sensible ou travailler avec des faisceaux pompes très intenses afin d'augmenter l'intensité des faisceaux de photons jumeaux [34].

Pour s'affranchir de ces deux contraintes, une solution est de placer le milieu non linéaire dans une cavité. La direction d'émission est alors imposée par les modes de cette cavité. L'effet non linéaire est de plus amplifié par le facteur de surtension de la cavité. Cette méthode a permis la première observation d'états comprimés [35]. L'expérience était cependant effectuée sous le seuil d'oscillation de l'oscillateur à mélange à quatre ondes et le champ émis par la cavité était d'amplitude moyenne nulle ("vide" comprimé).

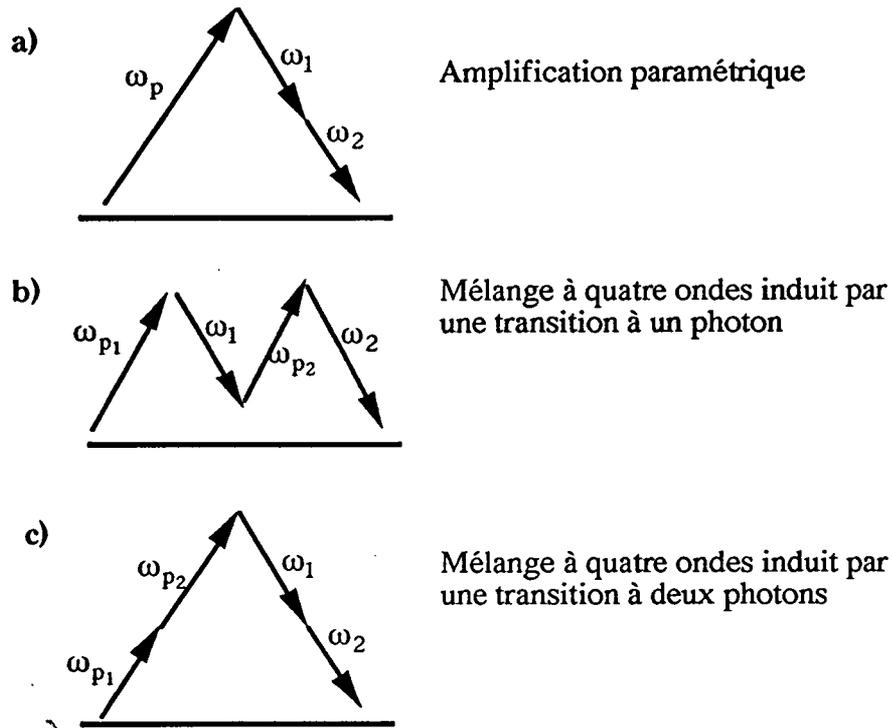


Figure II.9

Dans notre laboratoire, la première expérience sur les états comprimés a consisté à étudier le bruit du faisceau sortant d'un oscillateur à mélange à quatre ondes linéaire fonctionnant au dessus du seuil. Cette étude a été effectuée par D.Grandclément, mais aucune réduction de bruit n'a pu être mise en évidence [1].

Les résultats obtenues dans notre laboratoire sur la génération de faisceaux jumeaux au moyen d'un oscillateur paramétrique optique (O.P.O) [36] nous ont incités à reprendre les études sur les corrélations entre les deux faisceaux émis par un oscillateur à mélange à quatre ondes en anneau. En effet, ces deux systèmes sont régis par des équations presque semblables dans une approche semi-classique [37].

Indiquons que de nombreuses références sur l'obtention de faisceaux de photons jumeaux ou d'états comprimés se trouvent dans les publications [32] et [38].

II.C.3. La méthode semi-classique appliquée à l'oscillateur à mélange à quatre ondes

a. Hypothèses et notations

Comme dans la partie II.B. nous considérons une cavité triangulaire en anneau dont un des miroirs, noté M_1 , a une transmission en champ non nulle, notée t_1 . Toutes les autres pertes (fenêtres de la cellule, diffusion des atomes, etc) sont assimilées à des pertes dues à un des deux autres miroirs, noté M_2 . Ce miroir a donc une transmission non nulle t_2 (figure II.10).

Cette approximation est justifiée dans le cadre de la méthode semi-classique si les atomes ne sont pas excités de façon résonante.

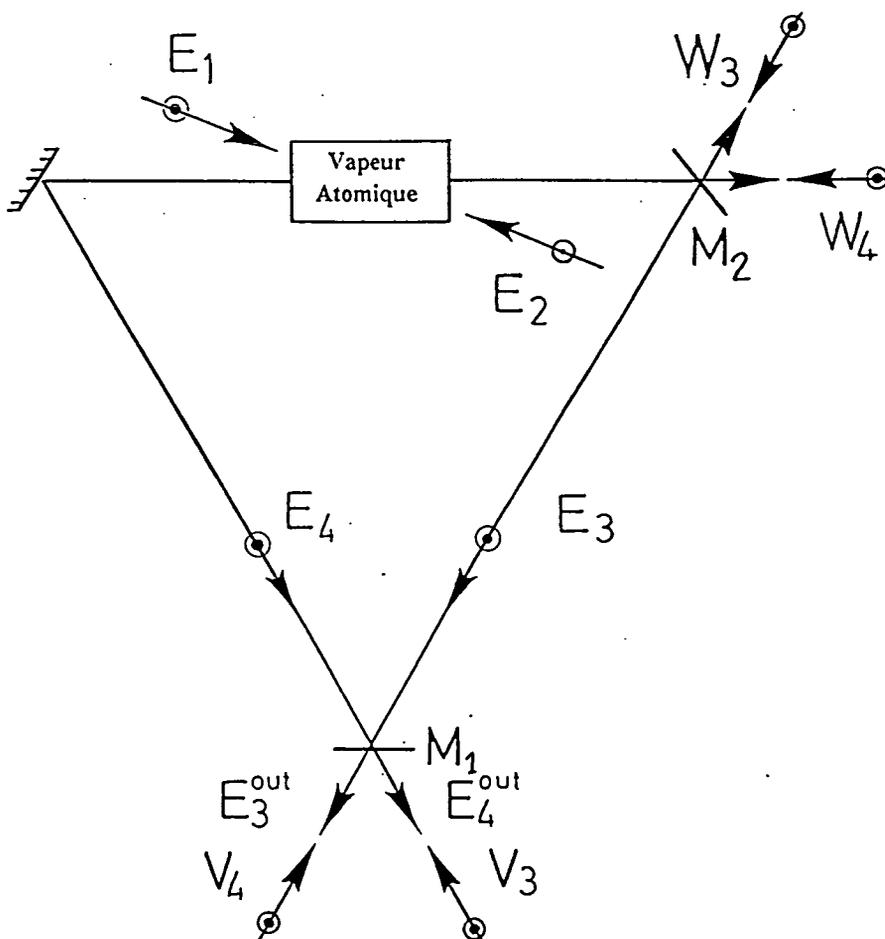


Figure II.10

Les champs macroscopiques sont notés:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(r, t) &= \text{Re} \left(\mathcal{E}_i(t) e^{-i\omega_i t} e^{ik_i r} \right) \vec{e}_x \\ &= \text{Re} \left(\mathcal{Q}_i(t) e^{-i\omega_i t} e^{ik_i r} e^{-i\phi_i(t)} \right) \vec{e}_x\end{aligned}\quad (\text{II.29})$$

où i appartient à $\{1, 2, 3, 4\}$

Les fluctuations du vide couplées aux modes de la cavité par l'intermédiaire de M_1 (respectivement M_2) sont notées V_i (respectivement W_i). L'indice i correspond au mode de la cavité auquel V_i est couplé (figure II.10):

$$\vec{V}_i(r, t) = \text{Re} \left(V_i(t) e^{-i\omega_i t} e^{ik_i r} \right) \vec{e}_x \quad (\text{II.30})$$

b. Résolution des équations par l'approche temporelle

Si les variations des champs intracavités sont faibles après un tour de cavité et sont lentes devant le temps mis pour parcourir un tour, cette variation peut être assimilée à la dérivée des champs:

$$\mathcal{E}_i(t + \tau) - \mathcal{E}_i(t) = \tau \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \quad (i = 3, 4) \quad (\text{II.31})$$

où τ , égal au L/c , est le temps mis pour parcourir un tour de cavité.

Cette hypothèse implique aussi que les fréquences de bruit étudiées soient petites devant l'intervalle spectrale libre de la cavité. Cette approche, appelée approche temporelle [32], présente l'avantage d'être similaire à l'approche de Lamb décrite dans la partie II.B. Afin d'alléger les notations, la dépendance temporelle des variables n'est indiquée qu'au cas où il peut y avoir ambiguïté.

De plus, $\tau \frac{dx}{dt}$ est noté \dot{x} . Les équations d'évolutions des champs intracavités s'expriment

alors sous la forme:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_3 &= \left(r_1 r_2 e^{i\Omega_3} - 1 \right) \mathcal{E}_3 + i r_1 r_2 \alpha \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_4^* + t_1 V_3 + t_2 W_3 \\ \dot{\mathcal{E}}_4 &= \left(r_1 r_2 e^{i\Omega_4} - 1 \right) \mathcal{E}_4 + i r_1 r_2 \alpha \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3^* + t_1 V_4 + t_2 W_4\end{aligned}\quad (\text{II.32})$$

où α est égal à $k \chi^{(3)} l$.

Ω_i représente le déphasage accumulé au bout d'un tour. La phase non linéaire φ_i^{NL} est incluse dans Ω_i . On rappelle que (Voir II.B) :

$$\varphi_i^{NL} = \alpha \left(|\mathcal{E}_i|^2 + 2 \sum_{j \neq i} |\mathcal{E}_j|^2 \right)$$

Le champ devant être peu modifié au bout d'un tour, Ω_i et t_i doivent être petits devant l'unité. Grâce à ces hypothèses, les équations d'évolutions des champs intracavités se simplifient pour devenir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_3 &= (-\gamma + i\Omega_3) \mathcal{E}_3 + i\alpha \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_4^* + t_1 V_3 + t_2 W_3 \\ \dot{\mathcal{E}}_4 &= (-\gamma + i\Omega_4) \mathcal{E}_4 + i\alpha \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3^* + t_1 V_4 + t_2 W_4 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

où $\gamma = \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_2^2}{2}$

Le coefficient γ est lié à la bande passante B.P de la cavité par la relation:

$$\text{B.P} = \frac{2\gamma}{\tau} \text{ rd.s}^{-1}$$

Pour résoudre ces équations par la méthode semi-classique, les amplitudes et les phases des champs sont écrites sous la forme de la somme de valeurs moyennes \bar{Q}_i et $\bar{\varphi}_i$ et de termes de fluctuations δQ_i et $\delta \varphi_i$.

Les solutions stationnaires des valeurs moyennes se déduisent de (II.33):

$$\begin{aligned} (\gamma - i\Omega_3) \bar{Q}_3 &= i\alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \bar{Q}_4 e^{-i\bar{\phi}} \\ (\gamma - i\Omega_4) \bar{Q}_4 &= i\alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \bar{Q}_3 e^{-i\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

où $\phi = (\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_3 + \varphi_4)$.

On déduit de ce système que:

$$\bar{Q}_3 = \bar{Q}_4 \quad \text{et} \quad \gamma = \alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \sin \bar{\phi} \quad (\text{II.35})$$

Les équations d'évolution des amplitudes s'obtiennent aussi à partir de (II.33):

$$\begin{aligned}\dot{Q}_3 &= -\gamma Q_3 + \alpha Q_1 Q_2 Q_4 \sin \phi + t_1 \operatorname{Re}(V_3 e^{i\varphi_3}) + t_2 \operatorname{Re}(W_3 e^{i\varphi_3}) \\ \dot{Q}_4 &= -\gamma Q_4 + \alpha Q_1 Q_2 Q_3 \sin \phi + t_1 \operatorname{Re}(V_4 e^{i\varphi_4}) + t_2 \operatorname{Re}(W_4 e^{i\varphi_4})\end{aligned}\quad (\text{II.36})$$

En linéarisant ces équations, on obtient:

$$\begin{aligned}\delta\dot{Q}_3 &= -\gamma \delta Q_3 + \alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \sin \bar{\phi} \delta Q_4 + \bar{Q}_4 \delta(\alpha Q_1 Q_2 \sin \phi) + t_1 \operatorname{Re}(V_3 e^{i\bar{\varphi}_3}) + t_2 \operatorname{Re}(W_3 e^{i\bar{\varphi}_3}) \\ \delta\dot{Q}_4 &= -\gamma \delta Q_4 + \alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \sin \bar{\phi} \delta Q_3 + \bar{Q}_3 \delta(\alpha Q_1 Q_2 \sin \phi) + t_1 \operatorname{Re}(V_4 e^{i\bar{\varphi}_4}) + t_2 \operatorname{Re}(W_4 e^{i\bar{\varphi}_4})\end{aligned}\quad (\text{II.37})$$

En utilisant (II.35) et en soustrayant ces deux équations:

$$\begin{aligned}\delta\dot{Q}_4 - \delta\dot{Q}_3 &= -2\gamma (\delta Q_4 - \delta Q_3) + t_1 \left(\operatorname{Re}(V_4 e^{i\bar{\varphi}_4}) - \operatorname{Re}(V_3 e^{i\bar{\varphi}_3}) \right) \\ &\quad + t_2 \left(\operatorname{Re}(W_4 e^{i\bar{\varphi}_4}) - \operatorname{Re}(W_3 e^{i\bar{\varphi}_3}) \right)\end{aligned}\quad (\text{II.38})$$

Le terme $\delta(\alpha Q_1 Q_2 \sin(\phi))$ s'élimine donc par soustraction. Les fluctuations des ondes pompes et les fluctuations de phase ne sont pas couplées avec les fluctuations de la différence d'amplitude des deux ondes oscillantes. Ce résultat est dû au fait que I_3 est égale à I_4 , car les pertes de la cavité sont les mêmes pour les deux champs intracavités.

Toute perte non réciproque aura comme effet de rompre l'égalité entre les deux intensités (Voir II.B.3.a). Du bruit supplémentaire sur la différence des amplitudes sera alors ajouté, ce qui réduira les corrélations entre les deux amplitudes. Il est donc très important expérimentalement d'équilibrer ces pertes afin de minimiser la contamination du signal par le bruit des ondes pompes ou le bruit de phase.

Expérimentalement, la quantité mesurée est la densité spectrale de bruit de la différence d'intensité des champs sortants, notée $S_-(\Omega)$. La transformée de Fourier d'une variable $x(t)$ est notée $x(\Omega)$, la donnée du paramètre t ou Ω permettant de savoir dans quel espace on se place. L'expression de S_- s'écrit:

$$S_-(\Omega) = \overline{|\delta I_4^{\text{out}}(\Omega) - \delta I_3^{\text{out}}(\Omega)|^2}\quad (\text{II.39})$$

Or, sachant que:

$$\delta I_i^{\text{out}}(\Omega) = 2\sqrt{\bar{I}_i^{\text{out}}} \delta Q_i^{\text{out}}(\Omega) \quad (\text{II.40})$$

On en déduit l'expression de la densité spectrale de bruit de l'intensité en fonction de celle des amplitudes:

$$S_-(\Omega) = 4I \overline{|\delta Q_4^{\text{out}}(\Omega) - \delta Q_3^{\text{out}}(\Omega)|^2} \quad (\text{II.41})$$

où: $I = \bar{I}_3^{\text{out}} = \bar{I}_4^{\text{out}}$

Afin d'étudier le spectre de bruit sur la différence d'intensité des deux faisceaux, la relation (II.38) doit être exprimée dans l'espace de Fourier.

Nous avons vu au paragraphe (II.C.1.a) que l'amplitude des fluctuations du vide ne dépendait pas de la quadrature mesurée. Le bruit $\text{Re}(V_i e^{i\bar{\varphi}_i})$ a donc le même spectre que $\text{Re}(V_i)$. La transformée de Fourier de $\text{Re}(V_i e^{i\bar{\varphi}_i})$ est donc simplement notée $V_i(\Omega)$, le signe Re étant omis pour alléger les notations.

L'équation (II.38) devient:

$$(\delta Q_4 - \delta Q_3)(\Omega) = \frac{t_1(V_4(\Omega) - V_3(\Omega)) + t_2(W_4(\Omega) - W_3(\Omega))}{2\gamma + i\Omega\tau} \quad (\text{II.42})$$

L'expression de l'amplitude des champs sortants s'écrit:

$$\bar{Q}_i^{\text{out}} + \delta Q_i^{\text{out}}(\Omega) = t_1(\bar{Q}_i + \delta Q_i(\Omega)) - V_i(\Omega) \quad (\text{II.43})$$

Dans cette équation, le signe négatif devant V_i est nécessaire afin de conserver l'énergie lors de la réflexion vitreuse.

En utilisant (II.42) et (II.43), on obtient:

$$(\delta Q_4^{\text{out}} - \delta Q_3^{\text{out}})(\Omega) = \frac{(t_2^2 - i\Omega\tau)(V_4(\Omega) - V_3(\Omega)) + t_1 t_2 (W_4(\Omega) - W_3(\Omega))}{2\gamma + i\Omega\tau} \quad (\text{II.44})$$

La densité spectrale de bruit sur la différence des amplitudes des champs se calcule à partir de (II.41) et (II.44).

En utilisant le fait que les fluctuations du vide de deux modes différents ne sont pas corrélées et que la densité spectrale de bruit d'une quadrature du vide est égale à $\Delta f/2$ lorsque les intensités sont exprimées en photons par seconde (II.28), on obtient:

$$S_-(\Omega) = \frac{2\gamma t_2^2 + \Omega^2 \tau^2}{4\gamma^2 + \Omega^2 \tau^2} 4 I \Delta f \quad (\text{II.45})$$

Ce résultat est similaire à celui obtenu dans le cas d'un oscillateur paramétrique optique [36]. L'expression (II.45) montre que l'amplitude du bruit est réduite par un facteur qui dépend de la fréquence d'analyse. Ce facteur est une "lorentzienne" (figure II.11) dont la demi-largeur est égale à la bande passante de la cavité. Les deux faisceaux ne présentent des corrélations que pour des fréquences inférieures à cette bande passante. Ceci s'interprète physiquement par le fait que la cavité "stocke" les photons pendant une durée égale à l'inverse de la bande passante. Deux photons, émis simultanément par le milieu non linéaire, sortiront de la cavité à des instants différents. Le délai moyen entre la sortie des deux photons sera de l'ordre du temps de stockage de la cavité. On ne pourra donc observer les corrélations que pour des temps plus longs que ce temps de stockage. Ceci explique que, pour des fréquences supérieures à l'inverse de ce temps de stockage, la densité spectrale de bruit soit celle que l'on obtiendrait en mesurant deux faisceaux incorrélés car la cavité a totalement supprimé les corrélations entre les deux faisceaux.

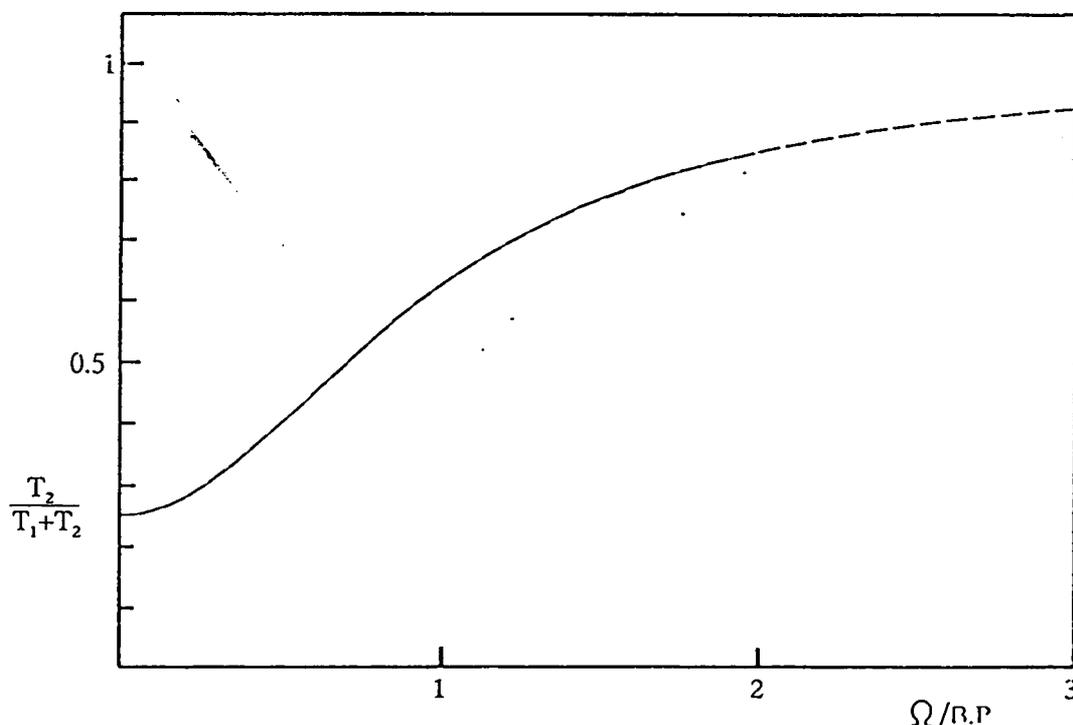


Figure II.11

Nous remarquons aussi que les pertes supplémentaires t_2 diminuent les corrélations. En particulier, le facteur de Mandel à fréquence nulle $Q(0)$ est égale à:

$$Q(0) = \frac{-T_1}{T_1 + T_2}$$

où T_i est la transmission en intensité des miroirs. Il faut donc maximiser la transmission du coupleur de sortie afin de réduire cet effet.

Enfin soulignons que pour obtenir ce résultat, nous avons supposé que:

- Les fluctuations des champs sont très petites devant leur valeur moyenne. Cette hypothèse est vérifiée lorsque le système est très largement au dessus du seuil.
- La rétrodiffusion (Voir paragraphe suivant) et l'absorption atomique sont négligeables.

c. Effet de la rétrodiffusion

La rétrodiffusion est due à des imperfections des miroirs de la cavité. Une partie des champs intracavités est rétro-réfléchié et se superpose à l'onde se propageant dans la direction opposée. Ces champs sont responsables du phénomène de verrouillage dans le cas du mode quasi-dégénéré (Voir II.B). Nous allons maintenant étudier leur influence sur les corrélations entre les ondes \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 . Les champs rétrodiffusés sont notés $r e^{i\varepsilon} \mathcal{E}_3$ et $r e^{i\varepsilon} \mathcal{E}_4$ où $r e^{i\varepsilon}$ est le coefficient de rétrodiffusion, supposé très petit devant γ . On a donc dans chaque sens de parcours de la cavité deux champs respectivement égaux à $(\mathcal{E}_4 + r e^{i\varepsilon} \mathcal{E}_3)$ et $(\mathcal{E}_3 + r e^{i\varepsilon} \mathcal{E}_4)$. Les équations d'évolution de l'amplitude de \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 (II.36) s'écrivent alors en ajoutant le terme dû à la rétrodiffusion:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Q}}_3 &= -\gamma \mathcal{Q}_3 + \alpha \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_4 \sin \phi + r \mathcal{Q}_4 \cos(\varepsilon - \psi) + t_1 \operatorname{Re}(V_3 e^{i\varphi_3}) + t_2 \operatorname{Re}(W_3 e^{i\varphi_3}) \\ \dot{\mathcal{Q}}_4 &= -\gamma \mathcal{Q}_4 + \alpha \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_3 \sin \phi + r \mathcal{Q}_3 \cos(\varepsilon + \psi) + t_1 \operatorname{Re}(V_4 e^{i\varphi_4}) + t_2 \operatorname{Re}(W_4 e^{i\varphi_4}) \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

où $\psi = (\omega_4 - \omega_3)t + \varphi_4 - \varphi_3$

La rétrodiffusion introduit un couplage entre les fluctuations d'amplitude et les fluctuations de phase des champs intracavités. Cependant, le terme de rétrodiffusion est modulé à la fréquence $\omega_4 - \omega_3$. Si cette dernière est grande devant la fréquence d'évolution des champs dans la cavité, l'amplitude des champs ne sera pas affectée par la rétrodiffusion. La rétrodiffusion ne joue par conséquent aucun rôle dans le cas où l'oscillation est non-dégénéré, la différence de fréquence des deux champs, égale à l'intervalle spectrale libre de la cavité, étant alors grande devant la bande passante de la cavité. L'étude de l'influence de la rétrodiffusion peut donc se limiter au cas dégénéré (mode A) et en ne supposant qu'aucun biais n'est présent, ω_3 est égale à ω_4 .

La rétrodiffusion, qui bloque à une valeur constante la phase relative de \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 , supprime aussi l'égalité entre les amplitudes des champs moyens \bar{Q}_3 et \bar{Q}_4 . En effet, la différence $(\bar{Q}_4 - \bar{Q}_3)$ peut s'obtenir à partir des équations satisfaites pour les valeurs moyennes des amplitudes, équations déduites de (II.46) et qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} -\gamma\bar{Q}_3 + (\alpha\bar{Q}_1\bar{Q}_2 \sin\bar{\phi} + r \cos(\varepsilon - \bar{\psi})) \bar{Q}_4 &= 0 \\ (\alpha\bar{Q}_1\bar{Q}_2 \sin\bar{\phi} + r \cos(\varepsilon + \bar{\psi})) \bar{Q}_3 - \gamma\bar{Q}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Au premier ordre en r/γ , on obtient:

$$\bar{Q}_4 - \bar{Q}_3 = \frac{-r \sin\varepsilon \sin\bar{\psi}}{\gamma} (\bar{Q}_3 + \bar{Q}_4) \quad (\text{II.48})$$

Le rapport r/γ étant de l'ordre de 10^{-2} , la différence d'intensité $\Delta I = (I_3 - I_4)$ est très petite devant la valeur moyenne $I = (I_3 + I_4)/2$. Ce résultat nous permet d'étudier l'effet de la rétrodiffusion sur le bruit en se limitant au premier ordre en $\Delta I/I$.

L'évolution des amplitudes étant couplée à celle des phases des champs intracavités (II.46), il faut connaître les fluctuations de ces phases. L'équation d'évolution des phases se déduit de (II.33) en ajoutant le terme de rétrodiffusion:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3(\omega_3\tau + \dot{\varphi}_3) &= \Omega_3 \varphi_3 + \alpha Q_1 Q_2 Q_4 \cos\phi + r Q_4 \sin(\varepsilon - \psi) + t_1 \text{Im}(V_3 e^{i\varphi_3}) + t_2 \text{Im}(W_3 e^{i\varphi_3}) \\ \dot{\varphi}_4(\omega_4\tau + \dot{\varphi}_4) &= \Omega_4 \varphi_4 + \alpha Q_1 Q_2 Q_3 \cos\phi + r Q_3 \sin(\varepsilon + \psi) + t_1 \text{Im}(V_4 e^{i\varphi_4}) + t_2 \text{Im}(W_4 e^{i\varphi_4}) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

D'où:

$$\dot{\psi} = \Omega_4 - \Omega_3 + \alpha Q_1 Q_2 \cos\phi \left(\frac{Q_3}{Q_4} - \frac{Q_4}{Q_3} \right) + r \left(\frac{Q_3}{Q_4} \sin(\varepsilon + \psi) + \frac{Q_4}{Q_3} \sin(\psi - \varepsilon) \right) + V_\psi$$

$$\text{où: } V_\psi = \frac{1}{Q_4} (t_1 \text{Im}(V_4 e^{i\varphi_4}) + t_2 \text{Im}(W_4 e^{i\varphi_4})) - \frac{1}{Q_3} (t_1 \text{Im}(V_3 e^{i\varphi_3}) + t_2 \text{Im}(W_3 e^{i\varphi_3})) \quad (\text{II.50})$$

En linéarisant cette expression et en exprimant les fluctuations dans l'espace de Fourier, on obtient une relation dont le second membre comprend quatre termes:

$$\left(i\Omega\tau + 2r\frac{\Delta Q}{Q} \sin \varepsilon \sin \bar{\Psi} - 2r \cos \varepsilon \cos \bar{\Psi} \right) \delta\psi(\Omega) =$$

$$+ \delta(\Omega_4 - \Omega_3)(\Omega) \quad (\text{II.51.a})$$

$$- 2\frac{\Delta Q}{Q} \delta(\alpha Q_1 Q_2 \cos \phi)(\Omega) \quad (\text{II.51.b})$$

$$+ \frac{2}{Q} (\alpha \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \cos \bar{\phi} + r \cos \bar{\Psi} \sin \varepsilon - r \Delta Q \sin \bar{\Psi} \cos \varepsilon) (\delta Q_4 - \delta Q_3)(\Omega) \quad (\text{II.51.c})$$

$$+ V_\psi(\Omega) \quad (\text{II.51.d})$$

où: $\Delta Q = \bar{Q}_4 - \bar{Q}_3$

Le terme multiplicatif de $\delta\psi(\Omega)$ peut être assimilé à $i\Omega\tau$ dès que la fréquence d'analyse est grande devant $2r/\tau$, cette dernière fréquence étant de l'ordre de la zone aveugle introduite par la rétrodiffusion.

A partir de (II.46), on déduit les équations vérifiées par la différence d'amplitude des champs \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 en tenant compte de la rétrodiffusion:

$$(2\gamma + i\Omega\tau) (\delta Q_4 - \delta Q_3)(\Omega) = r(\bar{Q}_4 - \bar{Q}_3) \delta(\alpha Q_1 Q_2 \sin \phi)(\Omega)$$

$$+ r(\bar{Q}_4 \sin(\varepsilon - \bar{\Psi}) - \bar{Q}_3 \sin(\varepsilon + \bar{\Psi})) \delta\psi(\Omega)$$

$$+ t_1(V_4(\Omega) - V_3(\Omega))$$

$$+ t_2(W_4(\Omega) - W_3(\Omega)) \quad (\text{II.52})$$

Le premier terme du second membre est proportionnel à $\bar{Q}_4 - \bar{Q}_3$. Cependant, cette différence est elle-même proportionnelle à $r/\gamma (\bar{Q}_4 + \bar{Q}_3)$ (Voir II.48). En supposant que l'intensité dans la cavité est de l'ordre de l'intensité pompe et en supposant que l'amplitude des fluctuations des pompes est de l'ordre de celle des fluctuations du vide parce que l'on est à haute fréquence, le terme de bruit ajouté par le déséquilibre entre Q_3 et Q_4 est de l'ordre des fluctuations du vide pondéré par r^2 . Cette quantité est négligeable devant les fluctuations du vide entrant par les miroirs M_1 et M_2 (figure 10) et le premier terme du second membre de la relation (II.52) peut être omis.

Pour résoudre le système d'équations couplées (II.51) et (II.52), on suppose d'abord que l'influence de la rétrodiffusion est nulle (approche perturbative). $(\delta Q_4 - \delta Q_3)(\Omega)$ est alors de l'ordre des fluctuations du vide (II.46).

On en déduit les ordres de grandeur des différents termes de (II.51):

$$\text{terme (II.51.a): } \delta(\Omega_4 - \Omega_3)(\Omega) = 2\alpha\bar{\rho}(\delta\varrho_3 - \delta\varrho_4)(\Omega) \approx \frac{2\gamma}{\bar{\rho}}(\delta\varrho_3 - \delta\varrho_4)(\Omega)$$

$$\text{terme (II.51.b): } 2\frac{\Delta\varrho}{\bar{\rho}}\delta(\alpha\varrho_1\varrho_2\cos\phi)(\Omega) \approx \frac{2r}{\gamma}\delta(\alpha\varrho_1\varrho_2\cos\phi)(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \text{terme (II.51.c): } & \frac{2}{\bar{\rho}}(\alpha\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_2\cos\bar{\phi} + r\cos\bar{\psi}\sin\varepsilon - r\Delta\varrho\sin\bar{\psi}\cos\varepsilon)(\delta\varrho_4 - \delta\varrho_3)(\Omega) \\ & \approx \frac{2}{\bar{\rho}}\left(\gamma + r - \frac{r^2}{\gamma}\right)(\delta\varrho_4 - \delta\varrho_3)(\Omega) \end{aligned}$$

Ces trois termes sont au mieux du même ordre de grandeur que V_ψ (terme II.51.d). Si on suppose que $\delta\psi(\Omega) = V_\psi / i\Omega\tau$, le terme dans (II.52) dû aux fluctuations de phase est de l'ordre de $r\bar{\rho}V_\psi(\Omega)$. En utilisant la définition de V_ψ , on en déduit que $r\bar{\rho}V_\psi(\Omega)$ est de l'ordre de grandeur des fluctuations du vide entrant par le miroir (termes 3 et 4 du second membre de II.52) pondérées par r . L'influence des fluctuations de phase est donc négligeable pour de telle fréquence d'analyse Ω .

En conclusion, la rétrodiffusion ne joue aucun rôle sur le spectre de bruit du mode non-dégénéré (mode B). De plus, dès que la fréquence de détection est supérieure à la zone aveugle, elle ne modifie pas non plus le spectre de bruit du mode dégénéré. La zone aveugle de notre oscillateur à mélange à quatre ondes est de l'ordre de 100 kHz (voir II.B.2). La rétrodiffusion intervient donc dans le calcul des fréquences de bruit inférieures à cette valeur. Or à de telles fréquences, les champs sont largement au dessus du bruit quantique et l'influence de la rétrodiffusion ne peut pas se manifester expérimentalement.

d. Pertes de la chaîne de détection

Pour mesurer les corrélations entre les deux intensités I_3^{out} et I_4^{out} , les photons des champs sortants sont convertis en électrons. Les corrélations entre I_3^{out} et I_4^{out} sont alors reportées sur les deux courants électriques i_3 et i_4 (i_j est égal à $e I_j^{\text{out}}$ où I_j^{out} est exprimé en photons par seconde).

Une chaîne de détection expérimentale n'a pas un taux de conversion de 100% (pertes dues à l'optique de focalisation, rendement quantique des détecteurs inférieur à l'unité). La transmission en intensité de la chaîne de détection étant notée η , les pertes peuvent alors être assimilées à la propagation à travers une lame de transmission η , suivie d'un détecteur D de rendement quantique égal à l'unité (figure II.12).

Le champ détecté est alors égal à:

$$\mathcal{E}_{D_i}^{\text{out}} = \sqrt{\eta} \mathcal{E}_i^{\text{out}} + \sqrt{1-\eta} V_{\text{in}} \quad \text{avec } i = 3,4 \quad (\text{II.53})$$

où V_i est l'amplitude des fluctuations du vide entrant par la lame.

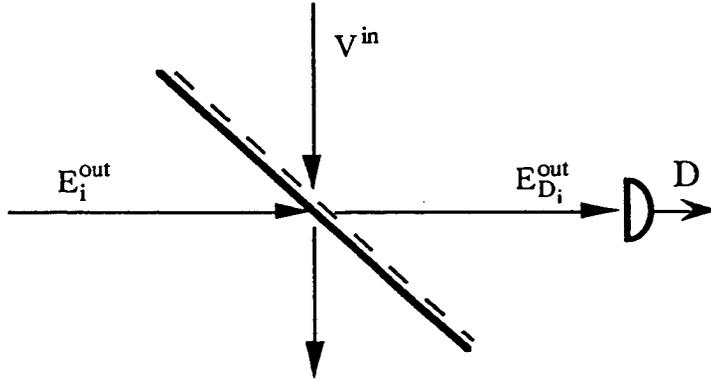


Figure II.12

Les fluctuations d'intensité des champs détectés se calculent à partir de (II.53), en supposant que le champ moyen est très grand devant les fluctuations:

$$\delta I_{D_i}^{\text{out}} = \eta \delta I_i^{\text{out}} + 2\sqrt{\eta(1-\eta)} \bar{\mathcal{E}}_i^{\text{out}} \text{Re}(V_i e^{i\bar{\varphi}_i}) \quad \text{avec } i = 3,4 \quad (\text{II.54})$$

Les fluctuations du vide V_{in} entrant par la lame n'étant pas corrélées aux autres fluctuations, on obtient la densité spectrale de bruit de la différence d'intensité des champs détectés:

$$S_{D_-}(\Omega) = \overline{|I_{D_4}^{\text{out}} - I_{D_3}^{\text{out}}|^2}(\Omega) = \eta^2 S_-(\Omega) + 2\bar{I} \eta(1-\eta) 2\Delta f \quad (\text{II.55})$$

Les intensités étant exprimées en photons par seconde.

Avec la notation de Mandel (II.23), le premier terme s'exprime sous la forme:

$$S_-(\Omega) = 2\bar{I} (1 + Q(\Omega)) 2\Delta f$$

D'où:

$$S_{D_-}(\Omega) = 2\eta\bar{I} (1 + \eta Q(\Omega)) 2\Delta f \quad (\text{II.56})$$

Les corrélations sont donc réduites d'un facteur proportionnel aux pertes de la chaîne de détection.

Ce calcul a été effectué en supposant que les pertes étaient identiques pour les deux faisceaux et que les détecteurs avaient le même rendement quantique. Le calcul complet tenant compte de toutes les dissymétries possibles a été effectué par T. Debuisschert [39]. Il a montré que la formule (II.56) s'applique si les déséquilibres entre les efficacités des détecteurs et entre les intensités des deux faisceaux ne sont considérés qu'au premier ordre.

e. Validité de l'approche semi-classique

Dans les parties précédentes, nous avons négligé l'absorption des atomes. En effet, lorsque les atomes sont excités réellement, l'émission spontanée introduit des photons incorrélés dans les deux modes de la cavité. La méthode semi-classique ne peut plus alors être appliquée pour calculer la corrélation entre les deux champs \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 .

Plusieurs théories ont été proposées pour calculer le spectre de bruit sur la différence des intensités des faisceaux sortants d'un oscillateur à mélange à quatre ondes en tenant compte de l'absorption atomique. Le but de cette partie n'est pas de développer ces théories mais de comparer les résultats qu'elles prédisent à ceux prévus par la méthode semi-classique.

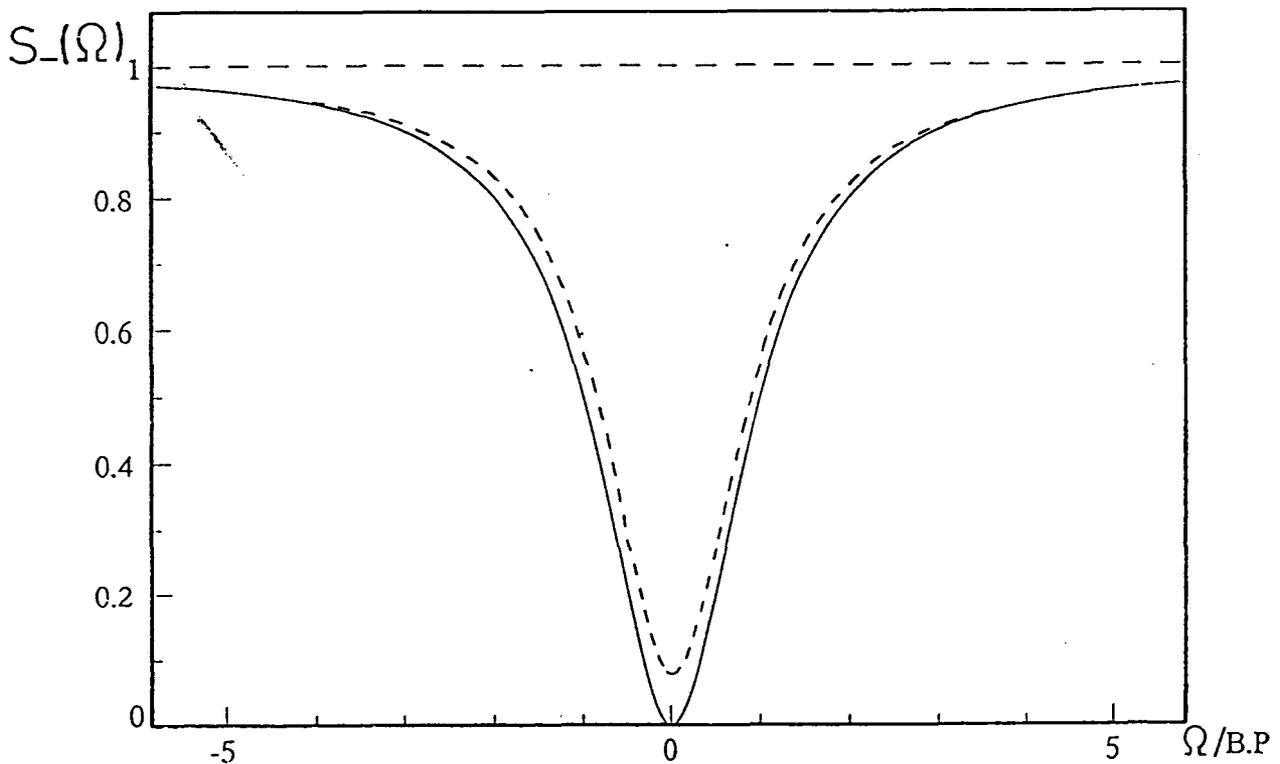


Figure II.13

Un premier calcul théorique a été effectué par W. Zhang *et al* dans le groupe du professeur D.Walls [40]. Ce calcul tient compte de la distribution gaussienne des vitesses des atomes et de l'absorption atomique. Les auteurs décrivent le milieu par un ensemble d'atomes à deux niveaux et supposent que la cavité a une bande passante très petite devant le taux de relaxation du niveau excité des atomes (cette hypothèse sert à éliminer adiabatiquement les variables atomiques). Sur la figure II.13, on a représenté en pointillé la courbe théorique calculée par W. Zhang en utilisant les paramètres de notre expérience. Nous avons superposé en trait continu la courbe calculée dans les mêmes conditions par la méthode semi-classique. Nous remarquons que l'influence de l'absorption atomique est faible et que l'approche semi-classique peut être appliquée dans nos conditions.

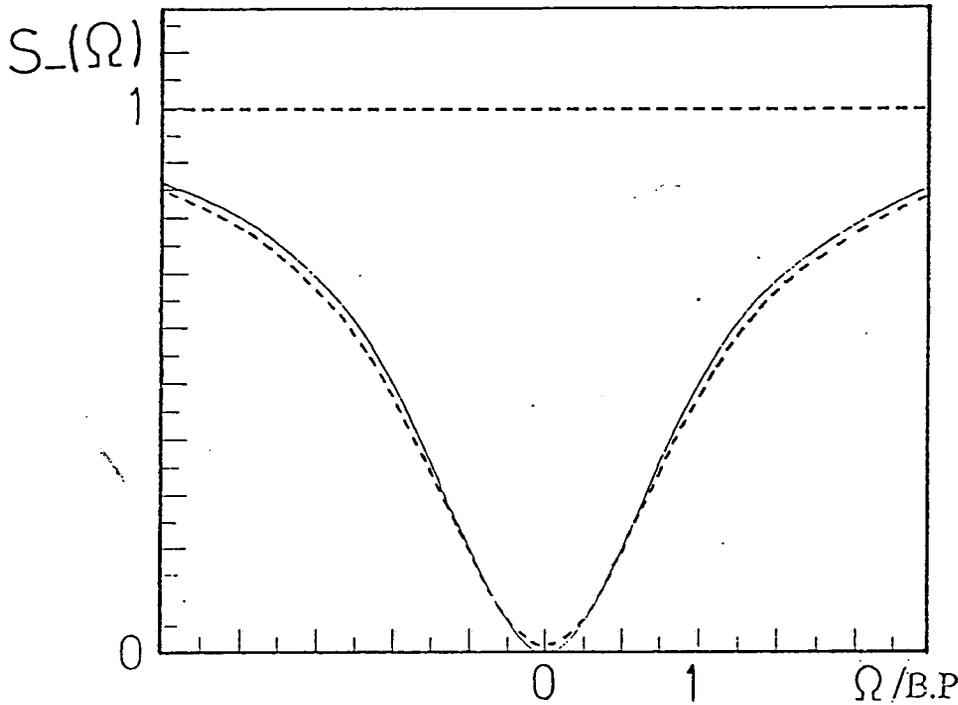


Figure II.14

Une autre approche a été développée dans le groupe du Pr Luggiato par M. Brambilla *et al* [41]. Elle utilise les mêmes hypothèses que la théorie développée par W. Zhang mais suppose les atomes immobiles. La méthode décrite par M. Brambilla présente l'avantage de donner les conditions expérimentales de validité de la méthode semi-classique. Nous avons superposé sur la figure II.14 les spectres de bruit calculé par M. Brambilla en utilisant les paramètres de notre expérience, d'une part en tenant compte de l'absorption (courbe pointillée) et d'autre part en la négligeant (courbe continue). On retrouve à nouveau que l'effet de l'absorption est faible dans nos conditions expérimentales.

Tous ces résultats théoriques prédisent donc que les oscillateurs à mélange à quatre ondes devraient générer des faisceaux jumeaux. Cependant, le système expérimental est beaucoup plus complexe que le système théorique étudié: les atomes de sodium ne sont pas décrits par un ensemble d'atomes à deux niveaux, le taux de stockage de la cavité est de l'ordre de grandeur du taux de relaxation du niveau excité (ce qui interdit l'élimination adiabatique des variables atomiques), les ondes ne sont pas des ondes planes mais des faisceaux gaussiens, etc.

Une étude expérimentale est donc utile pour tester la validité des hypothèses et leur relative importance.

II.C.4. Montage expérimental

a. Détecteurs

La densité spectrale de bruit du courant est obtenue au moyen d'un analyseur de spectre. Il affiche une puissance $P(\Omega)$ proportionnelle à la densité spectrale de bruit de l'intensité lumineuse reçue par le détecteur. Les détecteurs sont des photodiodes BPX65 sans capot de protection. Elles ont un rendement quantique η de l'ordre de 0,75. La différence des rendements quantiques est inférieure à 0,02. C'est ce rendement quantique faible qui est la principale limitation à la mesure du facteur de Mandel, celui-ci étant réduit par un facteur η (II.56).

En notant R la résistance de charge, η le rendement quantique du détecteur et en appliquant la formule (II.56), on obtient:

$$P(\Omega) = 2R\bar{i}\eta(1 + \eta Q(\Omega))\Delta f \quad (\text{II.57})$$

où \bar{i} est le courant moyen délivré par le détecteur. Cette formule n'est valable que si la bande passante de l'analyseur de spectre est petite devant les variations du spectre de bruit mesuré. Dans le cas contraire, il faut convoluer la fonction de transfert de l'analyseur de spectre avec le spectre de bruit mesuré.

Pour un champ cohérent d'une puissance lumineuse typique de 1 mW, une bande passante de 10 kHz et une résistance de charge de 50 Ω , on obtient:

$$P(\Omega) \approx -128 \text{ dBm}$$

Cette puissance est trop faible pour être détectée par l'analyseur de spectre.

De plus, il faut comparer ce bruit de grenaille au bruit Johnson généré par la résistance de charge de la photodiode, bruit dont la densité spectrale est égale à [42]:

$$S(\Omega) = \frac{4kT}{R} \Delta f \quad (\text{II.58})$$

La densité spectrale de bruit des fluctuations du courant générées par l'arrivée aléatoire des photons est d'après (II.24) égale à:

$$S(\Omega) = 2e\bar{i}\Delta f \quad (\text{II.59})$$

Cette quantité doit être supérieure à la précédente, ce qui impose une limite inférieure à la résistance de charge:

$$R > \frac{2kT}{e\bar{i}} \quad (\text{II.60})$$

Pour un courant typique de 1 mA, R doit être supérieure à 52 Ω . L'amplification du signal dû au shot-noise se fait donc en deux temps. Tout d'abord, la diode est chargée sur une résistance de charge de 1k Ω , suivie d'un préamplificateur faible bruit permettant d'adapter l'impédance (figure II.15). Ce préamplificateur est précédé d'un filtre passe-haut qui coupe le bruit basse-fréquence et évite au préamplificateur d'être saturé (figure II.15). Ce bruit est en effet très supérieur au niveau de bruit du shot-noise. Il est dû d'une part aux fluctuations de l'intensité des ondes oscillantes, causées par des vibrations mécaniques et acoustiques, d'autres part au bruit Flicker [42] de la résistance de charge de la diode.

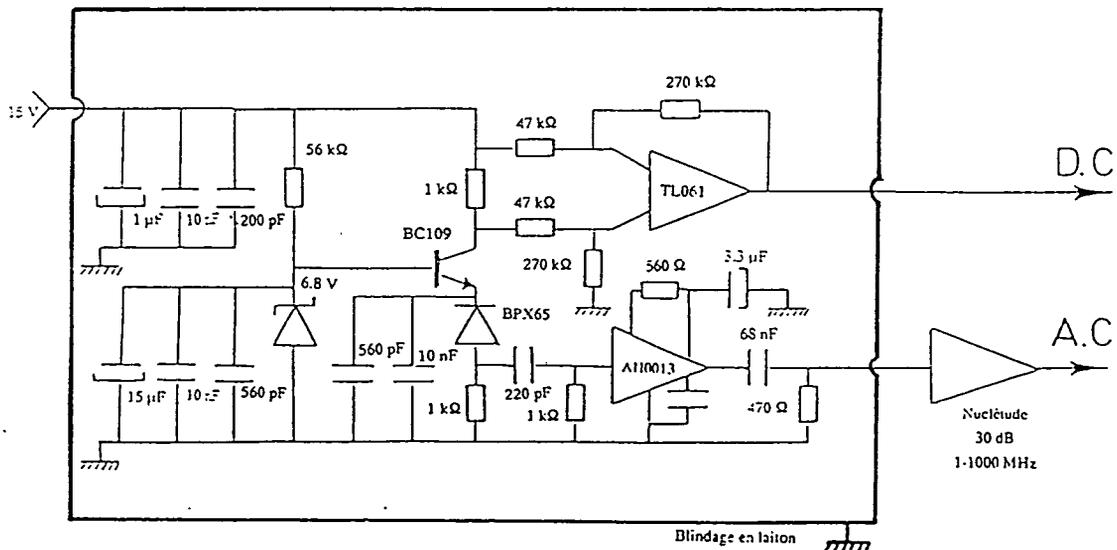


Figure II.15

Pour des fréquences supérieures à la fréquence de coupure du filtre passe-haut (égale à 750 kHz), la résistance de charge de la diode est formée par les deux résistances de 1 k Ω en parallèle, soit 500 Ω . D'après les formules (II.58) et (II.59), on en déduit que le rapport entre le shot-noise et le bruit Johnson est d'environ 10 pour un courant typique de 1 mA.

Le préamplificateur est suivi d'un amplificateur à fort gain (30 dB). Pour une puissance lumineuse de 1 mW, on obtient une puissance de bruit:

$$P(\Omega) \approx -88 \text{ dBm}$$

Cette puissance est mesurable par notre analyseur de spectre.

La photodiode est alimentée par l'émetteur d'un transistor, ce qui permet, en mesurant le courant du collecteur, d'obtenir le signal continu et ainsi d'optimiser la position du faisceau sur la diode.

La mesure de la différence des deux intensités des faisceaux émis par l'oscillateur à mélange à quatre ondes est alors effectuée en soustrayant les deux voies alternatives au moyen d'un soustracteur et en injectant le signal dans l'analyseur de spectre (figure II.16).

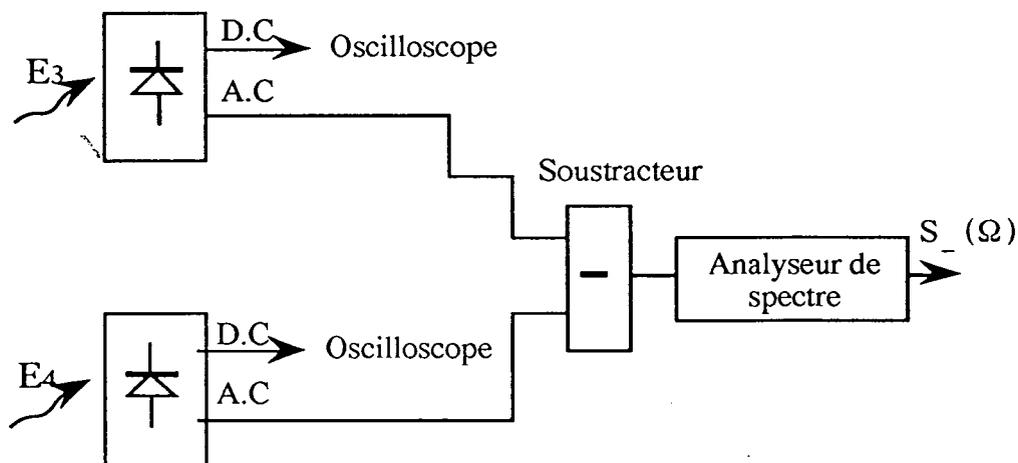


Figure II.16

Les gains des chaînes d'amplifications sont égalisés en s'assurant que les résistances de charges des deux photodiodes sont égales à mieux que 1% et en ajustant le gain d'un des deux préamplificateurs.

Le mode de réjection en mode commun vaut alors:

$$\frac{G_3 + G_4}{2|G_4 - G_3|} \geq 35 \text{ dB} \quad \text{sur la bande de fréquence 2 - 10 MHz}$$

où G_i désigne le gain globale d'une chaîne et englobe le gain des amplificateurs fort gain (figure II.15).

De même, l'équilibrage des sorties continues est effectué à mieux que 30 dB.

b. Mesure du bruit de photon standard

Pour pouvoir conclure sur l'importance des corrélations entre les faisceaux sortants de l'oscillateur à mélange à quatre ondes, il faut comparer la densité spectrale de bruit de la différence d'intensité $I_4^{\text{out}} - I_3^{\text{out}}$ au niveau de "shot-noise" (densité spectrale de bruit d'un faisceau cohérent d'intensité $I_4^{\text{out}} + I_3^{\text{out}}$).

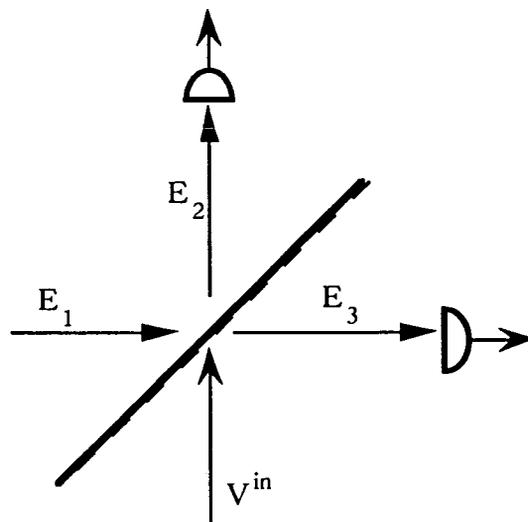


Figure II.17

La méthode la plus courante pour mesurer le niveau de shot-noise d'un faisceau d'intensité I est d'envoyer ce faisceau sur une lame semi-réfléchissante et de mesurer la différence entre les deux faisceaux sortants (figure II.17). En effet, en utilisant les notations de la figure II.17, on obtient:

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= \bar{\mathcal{E}}_1 (\delta \mathcal{E}_1 + V_{\text{in}}) \\ \delta I_3 &= \bar{\mathcal{E}}_1 (\delta \mathcal{E}_1 - V_{\text{in}}) \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

D'où on déduit:

$$S_-(\Omega) = \overline{|\delta I_3 - \delta I_2|^2}(\Omega) = 4I S_{V_{in}}(\Omega) = 2I\Delta f \quad (\text{II.62})$$

Le bruit mesuré est donc égal au shot-noise. Il est par conséquent indépendant du bruit du faisceau incident.

Cependant, l'utilisation d'une lame semi-réfléchissante est délicate. Expérimentalement, il faut pouvoir commuter rapidement de la mesure du niveau de shot-noise à la mesure des corrélations entre I_3^{out} et I_4^{out} , afin que les mesures soient effectuées dans les mêmes conditions expérimentales.

1. Utilisation d'un interféromètre de Mach-Zehnder

Pour commuter rapidement de la mesure des corrélations entre I_3^{out} et I_4^{out} à la mesure du shot-noise, nous avons utilisé un interféromètre de Mach-Zehnder (figure II.18).

On note φ le déphasage relatif entre les deux bras de l'interféromètre et on suppose que les deux lames semi-réfléchissantes sont identiques et ont une transmission et une réflexion en champs supposées réelles, que l'on note t et r .

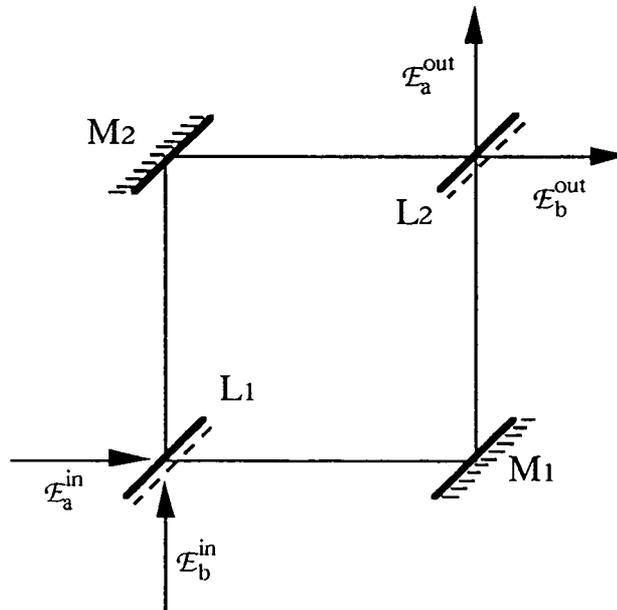


Figure II.18: Interféromètre de Mach-Zehnder

Les champs E_3 et E_4 ont la même polarisation, mais leur fréquences peuvent être différentes. Cependant, leur fréquences sont suffisamment proches pour que le déphasage relatif entre les deux bras soit le même pour l'onde E_a^{in} et l'onde E_b^{in} .

Les champs entrants sont notés:

$$\begin{aligned}\vec{E}_a^{\text{in}} &= \text{Re}(\mathcal{E}_a^{\text{in}} e^{-i\omega_a t}) \vec{e}_x \\ \vec{E}_b^{\text{in}} &= \text{Re}(\mathcal{E}_b^{\text{in}} e^{-i\omega_b t}) \vec{e}_y\end{aligned}$$

L'expression des champs sortants en fonction des champs entrants est alors (à un facteur de phase près dû à la propagation libre):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a^{\text{out}} &= (r^2 e^{i\varphi} + t^2) \mathcal{E}_a^{\text{in}} + tr(e^{i\varphi} - 1) \mathcal{E}_b^{\text{in}} e^{-i(\omega_b - \omega_a)t} \\ \mathcal{E}_b^{\text{out}} &= tr(e^{i\varphi} - 1) \mathcal{E}_a^{\text{in}} e^{-i(\omega_a - \omega_b)t} + (t^2 e^{i\varphi} + r^2) \mathcal{E}_b^{\text{in}}\end{aligned}\quad (\text{II.63})$$

L'expression de la différence des deux intensités sortantes se déduit alors des formules précédentes, en supposant que les lames réfléchissantes sont parfaites ($r = t$):

$$I_b^{\text{out}} - I_a^{\text{out}} = \cos\varphi (I_b^{\text{in}} - I_a^{\text{in}}) - i \sin\varphi \left[\mathcal{E}_a^{\text{in}} (\mathcal{E}_b^{\text{in}})^* e^{i(\omega_b - \omega_a)t} - (\mathcal{E}_a^{\text{in}})^* \mathcal{E}_b^{\text{in}} e^{-i(\omega_b - \omega_a)t} \right] \quad (\text{II.64})$$

Cette formule est valable quelque soit les champs E_a^{in} et E_b^{in} ; en particulier, l'un d'entre eux peut être égal au champ du vide.

2. Cas où un seul faisceau est incident sur le Mach-Zehnder

Nous supposons qu'un seul champ d'intensité non nulle est injecté dans l'interféromètre de Mach-Zehnder, par exemple E_a^{in} . L'origine des temps est choisie de telle sorte que le champ moyen soit réel. $\mathcal{E}_a^{\text{in}}$ s'exprime dans l'approche semi-classique sous la forme: $\sqrt{I_a} + \delta\mathcal{E}_a$. Le champ E_b^{in} est égal aux fluctuations du vide que nous notons $\text{Re}(V_b e^{-i\omega_a t})$.

On obtient alors à partir de (II.64):

$$\delta(I_b^{\text{out}} - I_a^{\text{out}}) = 2 \cos\varphi \sqrt{I_a} \text{Re}(\delta\mathcal{E}_a) + 2 \sin\varphi \sqrt{I_a} \text{Im}(V_b) \quad (\text{II.65})$$

Les fluctuations du champ entrant ne sont pas corrélées aux fluctuations du vide entrant par l'autre voie de l'interféromètre. La densité spectrale de bruit S_-^{out} de la différence des intensités des champs sortants se déduit donc de la formule (II.65) en ajoutant les deux contributions. On obtient:

$$S_-^{\text{out}}(\Omega) = \cos^2\varphi (1 + Q(\Omega)) I_a 2\Delta f + \sin^2\varphi I_a 2\Delta f \quad (\text{II.66})$$

Lorsque le déphasage relatif est nul modulo π , le bruit mesuré est égal au bruit du faisceau incident. Par contre, lorsque le déphasage est égal à $\pi/2$ modulo π , le bruit mesuré est égal au shot-noise d'un faisceau d'intensité I_a . Ce résultat est équivalent à celui que l'on obtiendrait en utilisant une lame semi-réfléchissante, dont la transmission et la réflexion seraient fonction de φ .

En balayant le déphasage relatif φ , le bruit mesuré passe continûment de la densité spectrale de bruit du champ \mathcal{E}_a au shot-noise. De plus, si le champ \mathcal{E}_a n'est pas comprimé en intensité, dans l'expression (II.66), Q est positif ou nul. Le shot-noise est alors la valeur minimale de la densité spectrale de puissance obtenue en balayant φ .

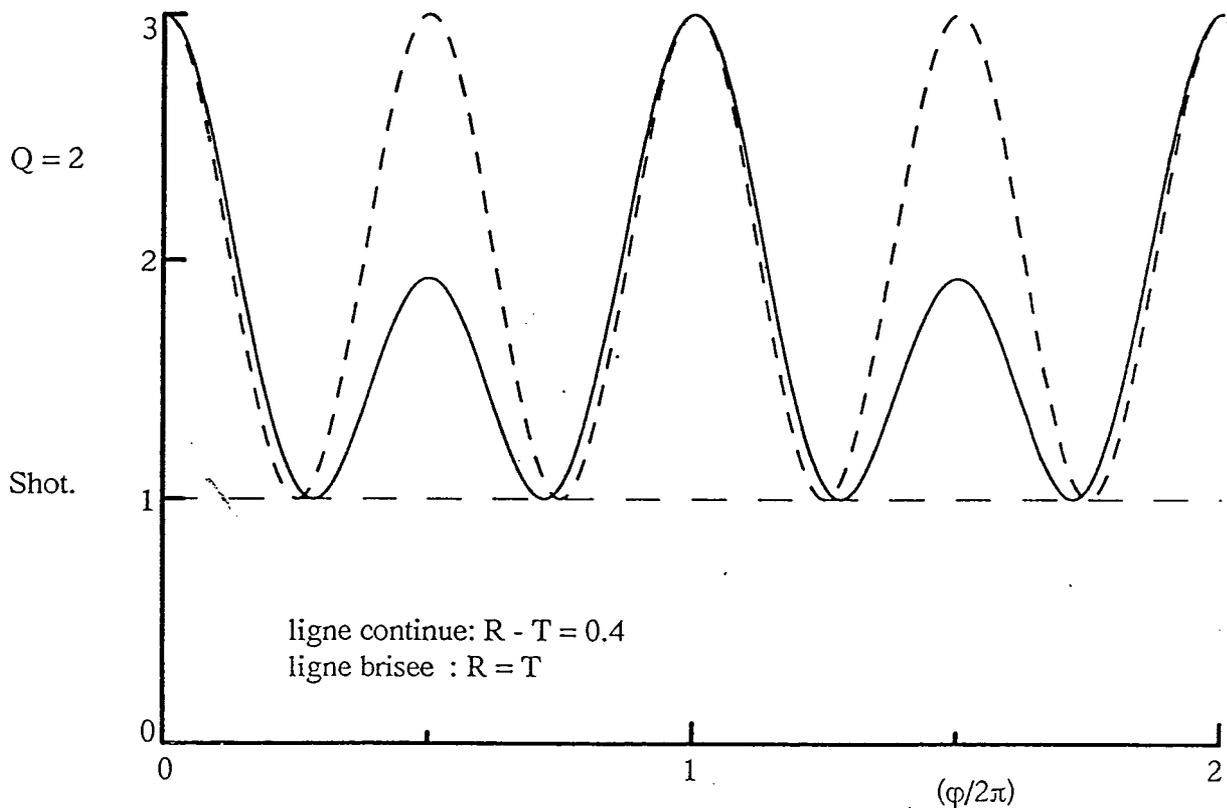


Figure II.19

Soulignons que ce résultat est général et reste vrai même si les lames semi-réfléchissantes de l'interféromètre de Mach-Zehnder sont imparfaites. Sur la figure II.19, nous avons représenté la densité spectrale de bruit lorsque les lames sont parfaites et lorsqu'elles sont fortement déséquilibrées. Dans les deux cas, la valeur minimale correspond au shot-noise

3. Cas où deux faisceaux sont incidents sur le Mach-Zehnder

Pour simplifier les calculs, nous ne nous intéressons qu'à deux valeurs discrètes de φ .

a) $\varphi = 0 \pmod{\pi}$

On déduit immédiatement de l'expression (II.64) que:

$$S_-^{\text{out}}(\Omega) = S_-^{\text{in}}(\Omega) \quad (\text{II.67})$$

où S_-^{in} désigne la densité spectrale de la différence des intensités des champs entrants.

C'est ce point de fonctionnement de l'interféromètre de Mach-Zehnder qui est utilisé pour mesurer les corrélations entre les deux champs émis par l'oscillateur à mélange à quatre ondes.

b) $\varphi = \pi/2 \pmod{\pi}$

Si les deux champs ont la même fréquence, la différence des intensités moyennes s'écrit:

$$\bar{I}_b^{\text{out}} - \bar{I}_a^{\text{out}} = -i \left(\bar{\mathcal{E}}_a^{\text{in}} (\bar{\mathcal{E}}_b^{\text{in}})^* - (\bar{\mathcal{E}}_a^{\text{in}})^* \bar{\mathcal{E}}_b^{\text{in}} \right) \quad (\text{II.68})$$

On remarque donc que cette différence dépend de la différence des phases moyennes des deux champs. Les temps de mesures étant comparables aux temps caractéristiques des fluctuations classiques des phases, les mesures sont impossibles à effectuer car le niveau de bruit va fluctuer au rythme des fluctuations de la phase relative des deux champs. Cet effet se manifeste non seulement pour $\varphi = \pi/2 \pmod{\pi}$, mais dès que φ n'est pas rigoureusement égal à $0 \pmod{\pi}$. Il est donc impossible expérimentalement de mesurer les corrélations de $I_b^{\text{out}} - I_a^{\text{out}}$, la phase de l'interféromètre de Mach-Zehnder ne restant jamais rigoureusement égale à $0 \pmod{\pi}$ pendant le temps de mesure.

Nous étudions donc le cas où les deux champs ont des fréquences différentes. Cet écart en fréquence est supposé très grand devant la bande passante de l'électronique de détection pour que les intensités moyennes ne soient pas modulées. De plus, l'origine des temps est choisie de telle sorte que $\bar{\mathcal{E}}_a^{\text{in}}$ et $\bar{\mathcal{E}}_b^{\text{in}}$ soient réels. Enfin, les deux champs sont supposés avoir la même intensité I . A partir de (II.64), on a alors:

$$\delta I_b^{\text{out}} - \delta I_a^{\text{out}} = 2\sqrt{I} \left[\text{Im} \left(\delta \mathcal{E}_a^{\text{in}} e^{i\Delta t} \right) - \text{Im} \left(\delta \mathcal{E}_b^{\text{in}} e^{-i\Delta t} \right) \right] \quad (\text{II.69})$$

où $\Delta = \omega_b - \omega_a$.

En écrivant cette expression dans l'espace de Fourier, on obtient:

$$\delta(I_b^{\text{out}} - I_a^{\text{out}})(\Omega) = \frac{\sqrt{I}}{i} \left[\delta\mathcal{E}_a^{\text{in}}(\Delta + \Omega) - (\delta\mathcal{E}_a^{\text{in}}(\Delta - \Omega))^* - \delta\mathcal{E}_b^{\text{in}}(-\Delta + \Omega) + (\delta\mathcal{E}_b^{\text{in}}(-\Delta - \Omega))^* \right] \quad (\text{II.70})$$

Pour que la mesure à $\varphi = \pi/2$ corresponde au niveau de bruit de photon standard pour une intensité $2I$, il faut que chacun des faisceaux soit au bruit de photon standard à une fréquence décalée de $\pm \Delta$ par rapport à leur fréquence d'oscillation. En effet, dans ce cas, en utilisant (II.70), on obtient:

$$S_-^{\text{out}}(\Omega) = 4I\Delta f$$

Cependant, la condition sur le bruit des faisceaux à $\pm \Delta$ entraîne que l'on ne peut pas utiliser avec certitude cette position de l'interféromètre pour mesurer le bruit de photon.

c. Oscillateur utilisé

La cavité formée des quatre miroirs $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ (figure II.20) est similaire à celle décrite dans l'article II.B.II. Son périmètre est de 136 cm et elle est stabilisée par deux lentilles F_1 et F_2 de focale 200 mm. L'intervalle entre mode transverse est alors de 50 MHz. Les modes transverses sont donc suffisamment espacés pour éviter une éventuelle compétition entre modes. La longueur de la cavité est asservie sur la fréquence d'un laser He-Ne monomode stabilisé en fréquence. Ce laser est injecté dans la cavité à travers le miroir M_3 dont la transmission est de 20% à $\lambda = 632,8$ nm et n'est que de 1% à $\lambda = 589$ nm. La mesure de l'énergie réfléchiée par la cavité permet de contrôler la longueur de la cavité et de la maintenir constante en modifiant la position du miroir M_1 qui est monté sur une cale piézo-électrique.

La puissance de sortie de l'oscillateur à mélange à quatre ondes est asservie en contrôlant la fréquence du laser à colorant. En effet, la demi-somme des fréquences oscillantes étant égale à la demi-somme des fréquences des ondes pompes, en modifiant la fréquence des ondes pompes, on modifie le désaccord entre les fréquences des ondes intracavités et les fréquences de résonance de la cavité. On fait ainsi varier la puissance de sortie.

Pour que les corrélations soient maximums, il faut que le coefficient de couplage du miroir de sortie soit le plus grand possible (II.45). Nous avons utilisé une lame de verre L_1 dont l'une des faces possède un traitement antireflet. Elle est placée à 45° par rapport à la direction définie par les modes de la cavité. Son coefficient de réflexion en intensité est de 9% car la polarisation des champs oscillants est perpendiculaire au plan d'incidence sur la lame. Ce montage permet d'optimiser le rapport entre le coefficient de couplage et les pertes intracavités (II.43).

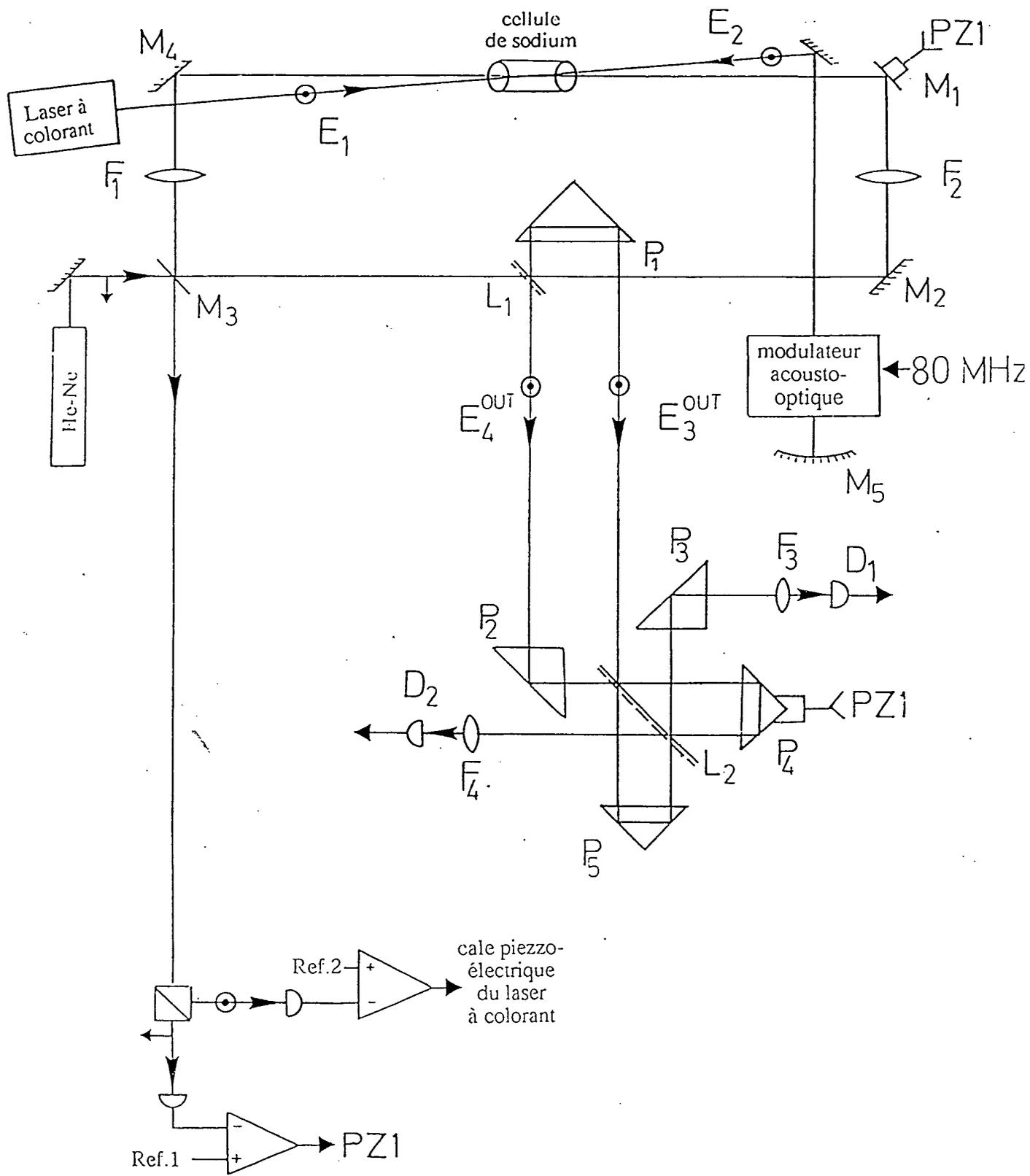


Figure II.20: Montage expérimental

De plus, cette lame est située au milieu du bras $\{M_2, M_3\}$. Cette géométrie permet d'extraire deux faisceaux dont les fronts d'ondes sont identiques, ce qui facilite la superposition des faisceaux dans l'interféromètre de Mach-Zehnder. Le faisceau E_3^{out} est rendu parallèle à E_4^{out} en utilisant un prisme P_1 à réflexion totale et traité antireflet sur la face d'entrée.

Afin d'obtenir un gain optimum par mélange à quatre ondes, l'onde pompe E_2 est obtenue par rétro réflexion de l'onde pompe E_1 . Leur puissances respectives sont de 250 mW et 125 mW, leur dimension transversale étant de l'ordre de 250 μm . En utilisant un montage identique à celui utilisé pour l'étude des propriétés gyrométriques (figure 4 du II.B.2) on aurait obtenu des intensités égales de 125 mW.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que notre système de détection des corrélations entre les deux faisceaux sortant de l'oscillateur à mélange à quatre ondes ne pouvait fonctionner que si les deux champs avaient des fréquences différentes. Il faut donc étudier le mode non-dégénéré (mode B) et éliminer le mode dégénéré (mode A).

Cependant, le mode B présente un inconvénient lorsque la fréquence des ondes pompes est identique [9]. Le mode B oscille entre deux modes de fonctionnement, $\omega_3 - \omega_4 = c/L$ et $\omega_3 - \omega_4 = -c/L$. Cette oscillation a une période de quelques minutes et interdit tout asservissement de l'intensité des ondes oscillantes [9]. Pour éviter cet effet, la fréquence de l'onde pompe E_2 est décalée de - 160 MHz au moyen d'un modulateur acousto-optique fonctionnant en double passage (figure II.20). Dans cette configuration, on obtient un fonctionnement stable avec une seule fréquence dans chaque sens vérifiant $|\omega_3 - \omega_1| < |\omega_3 - \omega_2|$ (figure II.21).

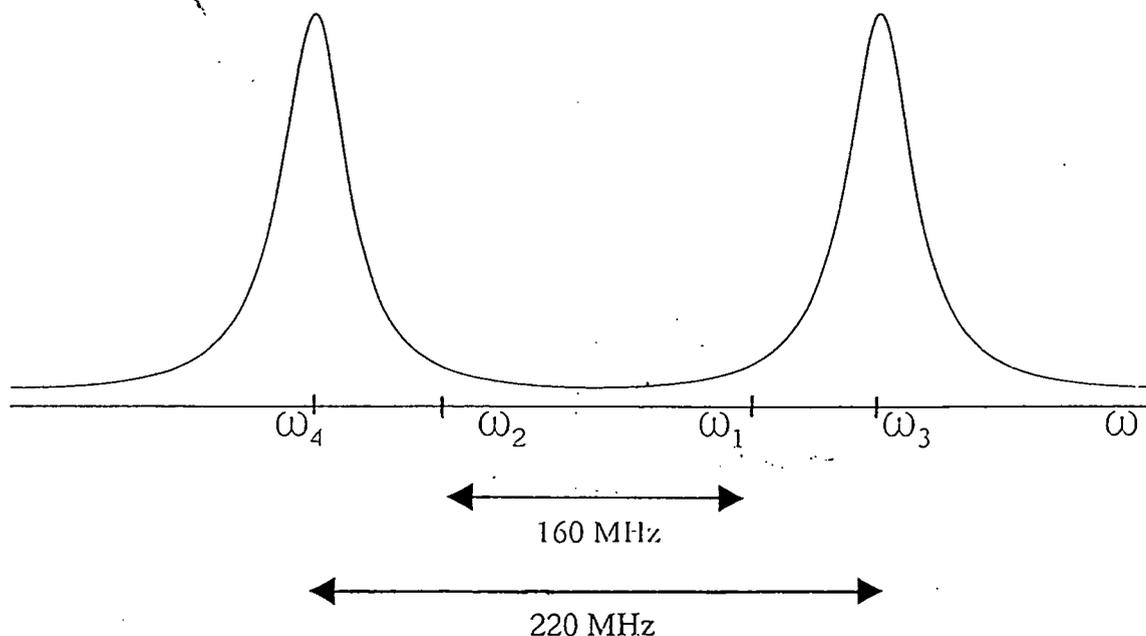


Figure II.21

De plus, on a constaté que la puissance de l'onde ayant la fréquence de E_4 et se copropageant avec E_3 est négligeable. En effet, en mesurant le battement du champ E_3 sortant de l'oscillateur avec un faisceau secondaire, on obtient un nombre de photons par seconde ayant la fréquence de E_4 de l'ordre de 10^4 photons.s⁻¹, ce qui correspondrait à un facteur de rétrodiffusion de 10^{-12} (les meilleurs gyrolasers actuels ont un facteur de rétrodiffusion de l'ordre de 10^{-6} [7]). Ceci montre bien l'efficacité de la brisure de symétrie induite par l'utilisation de faisceaux pompes de fréquences différentes.

Enfin, dans cette configuration, l'intensité des ondes oscillantes est supérieure pour le mode B par rapport au mode A (figure II.22), ce qui est l'opposé de la situation obtenue avec des pompes de même fréquence.

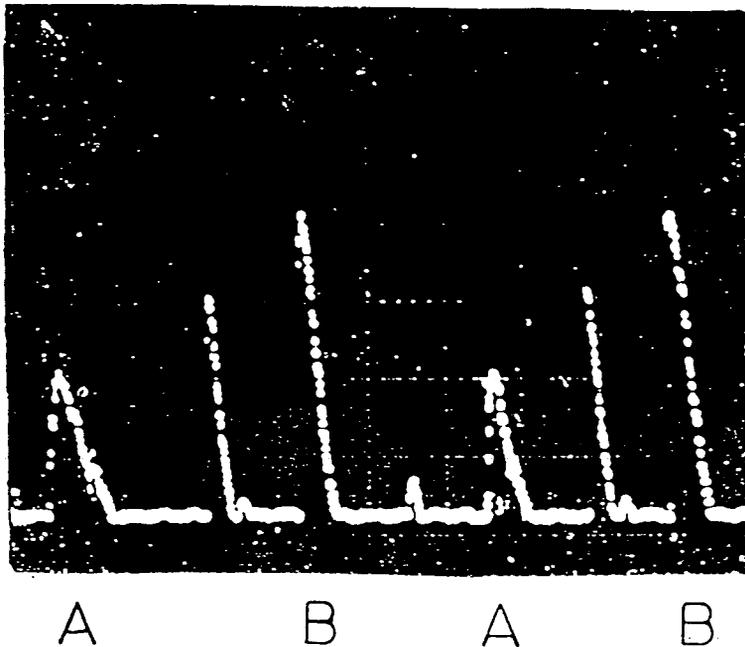


Figure II.22 : Intensité de sortie de l'oscillateur. Le pic A correspond au mode dégénéré, le pic B au mode non-dégénéré et les autres pics à des modes transverses.

d. Description du Mach-Zehnder utilisé

Pour obtenir un interféromètre compact, donc peu sensible aux vibrations, celui-ci a été replié en remplaçant les miroirs par deux prismes P_4 et P_5 à réflexion totale (figure II.20). Ces prismes permettent d'éliminer un réglage, le faisceau réfléchi étant parallèle au faisceau incident, si ce dernier est parallèle au plan d'incidence du prisme. De plus, ils permettent l'utilisation d'une lame semi-réfléchissante unique (L_2). Le prisme P_4 est muni d'une cale piézo-électrique afin de pouvoir balayer le déphasage relatif entre les deux bras. Les longueurs parcourues avant l'interféromètre par les deux faisceaux sont pratiquement égales, afin que ceux-ci aient le même front d'onde en tout point de l'interféromètre. Nous obtenons alors un contraste supérieur à 95% pour les deux faisceaux (figure II.23).

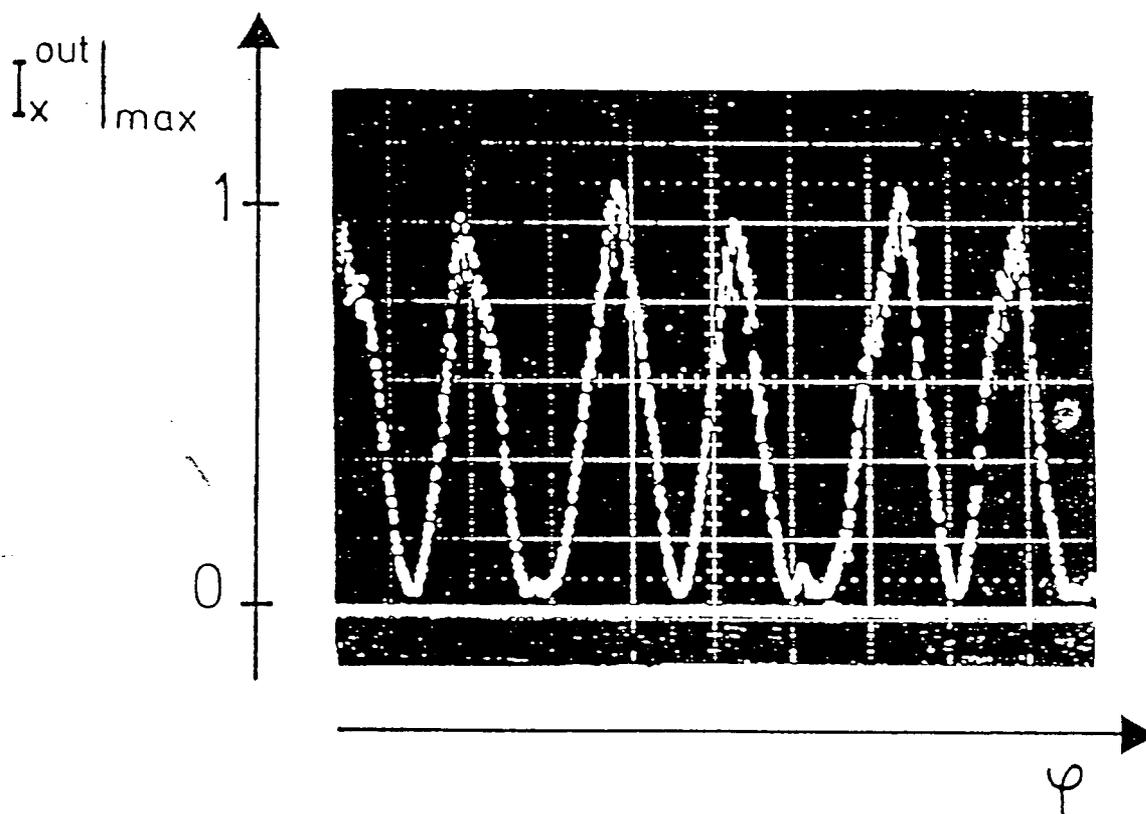


Figure II.23

Les deux détecteurs D_3 et D_4 (décrits dans la partie II.C.4.a) sont précédés d'un ensemble de deux lentilles de focale 10 mm et 50 mm permettant de focaliser les faisceaux sur les photodiodes. Notons enfin que tous les éléments optiques sont traités antireflet.

II.C.5. Résultats expérimentaux

La fréquence du laser à colorant est décalée de -2,5 GHz par rapport à la fréquence de transition de la raie D₂ du sodium ($\lambda = 589$ nm). La puissance des deux champs E₃ et E₄ sortants est de 1,7 mW. Les deux champs ont des intensités légèrement différentes, cette différence étant de l'ordre de 5%. Cette différence d'intensité peut être due soit au fait que la fréquence d'un des deux champs est plus proche que l'autre de la résonance, soit aux collisions résiduelles par mélange à deux ondes, les intensités I₁ et I₂ étant différentes (Voir II.17). Le faisceau le plus intense est légèrement défocalisé sur la photodiode afin d'équilibrer les deux niveaux de bruit. L'équilibrage est effectué à 1 MHz.

A cette fréquence, le bruit dominant est dû aux fluctuations classiques de l'oscillateur et du laser à colorant et les bruits des deux faisceaux sont donc parfaitement corrélés. Le taux de réjection de la chaîne (optique+électronique) est alors de 25 dB, ce qui correspond à un déséquilibre inférieur à 1%.

a. Courbes expérimentales

La fréquence de détection est de 6 MHz.

Sur la figure II.24.a est représenté le bruit d'un seul faisceau en fonction de φ , le déphasage relatif entre les deux bras de l'interféromètre de Mach-Zehnder. D'après le paragraphe II.C.4.b, le niveau minimum correspond au shot-noise de chaque faisceau. On remarque de plus que les champs sortants de l'oscillateur à mélange à quatre ondes ne sont pas au shot-noise. Cet extra-bruit peut difficilement s'expliquer par des fluctuations classiques, la fréquence d'analyse étant trop élevée. Il peut être en partie dû au bruit induit par la proximité du seuil d'oscillation de l'oscillateur à mélange à quatre ondes (voir la conclusion du II.C.3.b).

Sur la figure II.24.b est représenté le niveau de bruit de la différence d'intensité des deux faisceaux en fonction du déphasage φ . En comparant le niveau de bruit pour $\varphi = 0 \text{ mod } \pi$ à la somme des deux "shot-noises" déduits des courbes II.24.a, on obtient un facteur de Mandel égal à -0,14 ($\pm 0,05$). En corrigeant par le facteur dû aux pertes des détecteurs, on obtient une réduction de bruit de 19 (± 6) %.

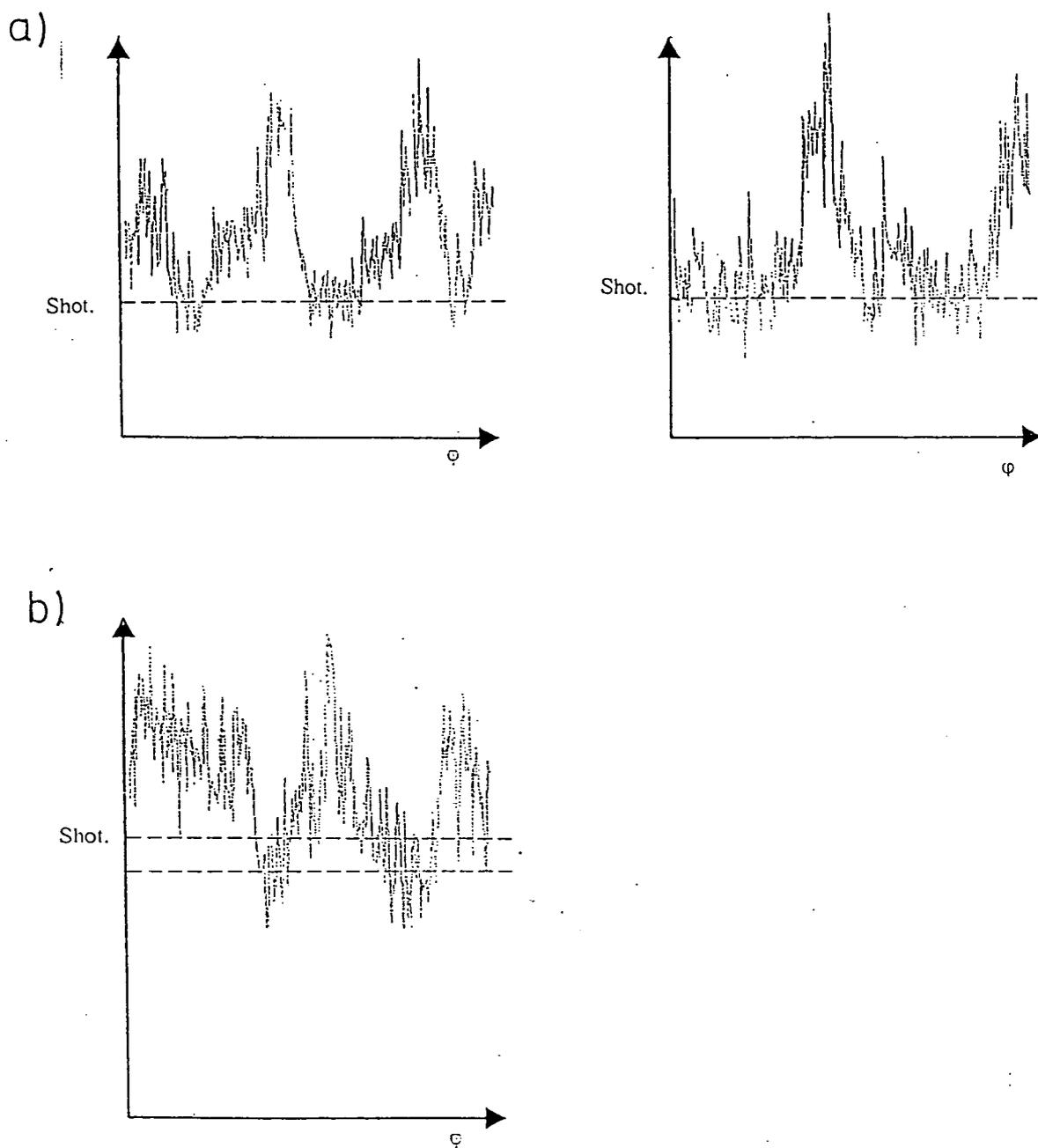


Figure II.24

Soulignons que lorsque $\varphi = \pi/2 \bmod \pi$, le bruit est supérieur au shot-noise d'un faisceau d'intensité $I_3 + I_4$. Ce bruit peut être dû aux battements entre E_3 (respectivement E_4) et la petite composante de E_4 (respectivement E_3) ayant la fréquence de E_3 (Voir II.C.4.b.3). Ceci montre donc la nécessité de mesurer le shot-noise de chaque faisceau séparément.

La réduction du bruit quantique a été observée sur la bande 5-9 MHz. Pour des fréquences inférieures à 5 MHz, le bruit classique devient trop important et malgré le taux de réjection de 25 dB de la chaîne de détection, il ne permet pas d'observer d'éventuelles corrélations. Des fréquences d'analyses supérieures à 9 MHz deviennent comparables à la bande passante de la cavité, ce qui réduit le taux de corrélations. De plus, la fréquence de coupure des préamplificateurs étant de 20 MHz, les mesures deviennent difficiles à effectuer.

b. Comparaison avec la valeur théorique obtenue par la méthode semi-classique

Pour calculer la valeur de $Q(\Omega)$ théorique, il faut mesurer les pertes totales de la cavité. Pour cela, nous avons mesuré la déplétion des ondes pompes. Le miroir M_5 transmet environ 1% du champ E_1 . En comparant l'intensité transmise par la cellule dans le cas où l'oscillation se produit et ne se produit pas, on mesure la puissance soustraite aux ondes pompes pour alimenter l'oscillation. Cette puissance est alors égale aux pertes totales multipliées par la puissance de l'oscillation dans la cavité.

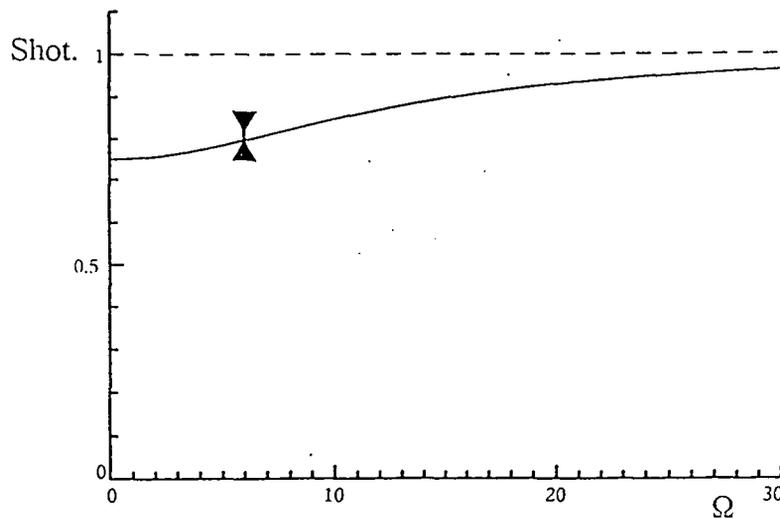


Figure II.25

Nous obtenons alors des pertes totales de l'ordre de 37%. La figure II.25 représente la courbe $(1+Q(\Omega))$ calculée au moyen de la méthode semi-classique. Le facteur de Mandel théorique est égal à -0,21. Ce chiffre est en accord avec la valeur expérimentale qui est de $(-0,19 \pm 0,06)$ représentée par une barre d'erreur sur la figure II.25.

c. Diffusion Rayleigh

La diffusion Rayleigh est connue comme étant une cause de dégradation des corrélations quantiques dans les expériences utilisant des non-linéarités atomiques [35]. Pour étudier l'importance de cette diffusion, nous avons injecté dans l'interféromètre de Mach-Zehnder une onde sonde prélevée au laser à colorant et ayant la même intensité que les ondes oscillantes. La fréquence de cette sonde est décalée au moyen d'un modulateur acousto-optique, afin d'être égale à la fréquence de l'onde oscillante. Dans l'autre voie, on a injecté le champ émis par la cavité lorsque l'intensité dans la cavité est nulle. Le bruit mesuré pour $\varphi = \pi/2$ est alors égal aux fluctuations du vide auxquels s'ajoute le bruit dû à la diffusion Rayleigh.

En plaçant un cache derrière la lame de sortie de la cavité, le champ injecté dans l'interféromètre n'est plus le champ émis par la cavité mais le champ du vide. Ceci permet de mesurer le niveau de shot-noise de l'onde sonde.

Aucune différence n'a été observée entre les deux mesures. La diffusion Rayleigh n'introduit donc pas un bruit suffisant pour être détecté dans nos conditions expérimentales.

d. Saturation des diodes

Pour que les résultats décrits précédemment soient justifiés, il faut que la détection soit linéaire. Pour le vérifier, nous avons doublé l'intensité des ondes oscillantes ce qui a effectivement doublé le niveau du "shot-noise" conformément à la formule (II.22).

II.C.6. Conclusion

Tout en étant important au niveau fondamental, ce résultat est au niveau des performances assez éloigné de celui obtenu en utilisant un oscillateur paramétrique optique, qui génère deux faisceaux dont les corrélations mesurées à l'heure actuelle sont de 86% [43].

Pour améliorer le résultat obtenu avec une vapeur atomique, on peut utiliser un laser de pompe plus stable, par exemple un laser Titane-Saphir qui permettrait de pomper des alcalins plus lourds (rubidium et césium). Ces alcalins présentent deux avantages: ils ont une largeur Doppler plus petite que le sodium et une tension de vapeur saturante plus élevée à température égale. Ces deux propriétés ont pour effet de rapprocher les conditions expérimentales du cas idéal.

II.D. REFERENCES

- [1] D. Grandclément. Thèse Université Paris 6 (1988).
D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 44 (1987).
M. Pinard, R. Horowitz, D. Grandclément and G. Grynberg, *I.E.E.E.*, 25, 570 (1989).
D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, *I.E.E.E.*, 25, 580 (1989).
- [2] A.R. Fischer, "Optical Phase Conjugation", Academic Press (1983).
- [3] P. Yeh, *J. Opt. Soc. Am. A*, 2, 727 (1985).
M. Pinard, D. Grandclément and G. Grynberg, *Europhys. Lett.*, 2, 755 (1986).
- [4] E. Lebihan. M. Pinard and G. Grynberg, *Optics Lett.*, 11, 159 (1986).
J.R.R. Leite, P. Simoneau, D. Bloch, S. Leboiteux and M. Ducloy, *Europhys. Lett.*, 2, 747 (1986).
- [5] Y.R. Shen, "The principles of Non-Linear Optics", Wiley, New-York (1984).
- [6] M. Sargent III, M.O. Scully, W.E. Lamb Jr, "Laser Physics", Addison-Wesley Publish. Comp. (1974).
- [7] W.W. Chow, J. Banacloche, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders, W. Schleich and M.O. Scully, *Rev. of Modern Physics*, 57, 61 (1985).
- [8] G. Grynberg, M. Pinard and M. Faucheux, *Optics Lett.*, 14, 63 (1989).
- [9] G. Grynberg, M. Pinard and Ph. Verkerk, *Europhys. Lett.*, 9, 139 (1989).
- [10] W.L. Wiese, M.W. Smith and B.M. Miles, *Atomic Transitions Probabilities*, Vol 2, NSRD-NBS 22 (1959).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, "Processus d'Interaction entre Photons et Atomes", Ed. C.N.R.S. (1988).
- [12] F. Biraben, *Opt. Commun.*, 29, 353 (1979).
F. Biraben, "Fonctionnement du laser à colorant", Notice non publiée.
- [13] G. Sagnac, *C.R. Acad. des Sciences*, 157, 708 (1913).
- [14] E.J. Post, *Rev. of Modern Physics*, 39, 475 (1967).
B. Prade, J.Y. Vinet, "L'effet Sagnac et la gyrométrie optique", Laboratoire d'Optique Appliquée, Rapport interne (1988).
- [15] A.M. Michelson and H.G. Gale, *Astrophys. J.*, 61, 140 (1925).

-
- [16] Pour les gyromètres à fibre classiques:
H. Lefevre, *Revue Scientifique et Technique de la Défense*, 7, 35 (1990).
Pour les gyromètres à fibre à conjugaison de phase:
C. Bordé, "Quantum Optics, Experimental gravitation and measurement theory",
N.A.T.O. A.S.I. series, 94, 269 (1981).
P.H. Graindorge, H.G. Arditty, N. Papuchon, J.P. Huignard and C.H. Bordé, "Forced
reciprocity using phase-conjugation", p 368 in "Fiber Optic rotation and related
technologies", Ed. by S. Ezekiel and H.J. Arditty, Springer-Verlag N.Y. (1982).
B. Fisher and S. Sternklar, *Applied Phys. Lett.*, 47, 1 (1985).
P. Yeh, I. McMichael and M. Khoshnevisan, *Applied Opt.*, 25, 1029 (1986).
- [17] F. Aranowitz, *Phys.Rev.*, 139, A 635 (1965).
- [18] T. Callaghan, S. Callaghan, J. Hanse, C. Tetteimer et F. Aranowitz, *Proceedings of
the Symposium Gyro. Technology*, p1 Stuttgart (1982).
- [19] C. Carrington, D. Stacey and J. Cooper, *J. Phys. B*, 417 (1973).
- [20] P.L. Kelley, *Phys. Rev. Lett.*, 15, 1005 (1965).
A. Yariv and P. Yeh, *Opt. Commun.*, 27, 295 (1978).
- [21] W. J. Firth and C. Paré, *Optics Lett.*, 13, 1096 (1988).
G. Grynberg and J. Paye, *Europhys. Lett.*, 8, 29 (1989).
- [22] M. Oria, D. Bloch, M. Fichet and M. Ducloy, *Opt. Lett.*, 19, 1082 (1989).
- [23] A.F. Kaplan and P. Meystre, *Optics Lett.*, 6, 590 (1981).
- [24] S. Ezekiel and R. Balzamo, *Appl. Phys. Lett.*, 30, 478 (1977).
- [25] D. Grandclément, G. Grynberg and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 40 (1987).
- [26] "Squeezed Light", Eds Loudon and Knight, *J. Mod. Opt.*, 34, 709 (1987).
- [27] A. Yariv, "Introduction to Optical Electronics", Eds Holt, Rineholt and Winston
(1976).
- [28] S. Reynaud, *Ann. Phys. Fr.*, 15, 63 (1990).
- [29] S. Reynaud, *Europhys. Lett.*, 4, 427 (1987).
- [30] S. Reynaud, C. Fabre and E. Giacobino, *J. Opt. Soc. Am.*, B4, 1520 (1987).
- [31] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* 40, 749 (1932).
M.J. Bastiaans, *Opt. Commun.*, 25, 26 (1978).
M.J. Bastiaans, *Opt. Commun.*, 30, 321 (1979).
- [32] C. Fabre and S. Reynaud, "Cours des Houches" session 1990.

-
- [33] Une autre méthode pour générer un faisceau dont le bruit est inférieur au shot-noise consiste à alimenter une diode laser par un courant régulé au dessous du bruit de grenaille. Le taux de conversion électron-photon dans les diodes laser étant proche de l'unité, les photons émis conservent en partie les corrélations des électrons. Le faisceau laser est alors comprimé en intensité. W. H. Richardson, S. Machida and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.*, 66, 2867 (1991).
- [34] O. Aytru and P. Kumar, *Phys. Rev. Lett.*, 65, 1555 (1990).
P.R. Tapster, J.G. Rarity and J.S. Satchell, *Phys. Rev. A* 37, 2963 (1989).
- [35] R. Slusher, L. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz and J. Valley, *Phys. Rev. Lett.*, 55, 2409 (1985).
- [36] A. Heidman, R. Horowitz, S. Reynaud, E. Giacobino and C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 2555 (1987).
T. Debuisschert, S. Reynaud, A. Heidman, E. Giacobino and C. Fabre, *Quantum Opt.*, 1, 3 (1989).
- [37] S. Reynaud and A. Heidman, *Opt. Commun.*, 71, 209 (1989).
- [38] S. Reynaud, A. Heidman, E. Giacobino and C. Fabre, "Quantum Fluctuations in Optical Systems", A paraitre dans *Progress in Optics*.
- [39] T. Debuisschert, Thèse Université Paris 6 (1990).
- [40] W. Zhang and D. Walls, *Opt. Commun.*, 79, 497 (1990).
- [41] M. Brånbillia, F. Castelli, L.A. Lugiato, F. Patri and G. Strini, to be published in *Opt. Commun.*,
- [42] Horowitz and Hill, "The Art of Electronics", Cambridge University Press. (1982)
- [43] J. Mertz, E. Giacobino, C. Fabre and A. Heidman, Proceedings of N.A.T.O. workshop "Quantum measurements in Optics", Cortina (1991).
- [44] J.C. Diels and I.C. McMichael, *Optics Lett.*, 6, 219 (1981).

III. ETUDE DU MELANGE D'ONDES EN POLARISATIONS LINEAIRES ORTHOGONALES

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier comment, dans un gaz atomique, deux ondes de polarisation orthogonale et de même direction de propagation peuvent être couplées et modifier la susceptibilité du milieu. Nous utiliserons ensuite l'expression de la susceptibilité du milieu pour exprimer les modifications subies par une onde de polarisation linéaire et se propageant dans la direction opposée. Enfin, nous décrirons les propriétés de divers systèmes dont la physique est basée sur le mélange d'ondes de polarisation orthogonale.

III.A. DESCRIPTION THEORIQUE

III.A.1. Mélange de deux ondes de polarisation linéaire orthogonale: cas d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$

Dans la partie II de ce mémoire, nous nous sommes intéressé aux couplages intervenant entre différentes ondes de même polarisation. Ces ondes ne pouvaient être distinguées que par leur différente direction de propagation. Lorsque les ondes se propagent dans la même direction, on peut en outre les distinguer en utilisant des polarisations orthogonales.

a. Description du modèle

Nous considérons deux ondes planes, monochromatiques, d'intensité respective I_1 et I_2 de polarisation linéaire orthogonale, se propageant dans la même direction. Ces deux ondes sont notées:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \text{Re}\left(E_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)}\right) \vec{e}_x \\ \vec{E}_2 &= \text{Re}\left(E_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)}\right) \vec{e}_y\end{aligned}\tag{III.1}$$

Dans cette configuration, l'axe de quantification le plus approprié est la direction de propagation commune aux deux ondes. Les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 se décomposent sur la base circulaire en deux ondes de polarisation circulaire σ^+ et circulaire σ^- .

Le champ total entrant \vec{E}_{in} s'écrit alors sous la forme:

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re} \left\{ \left(E_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)} + i E_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)} \right) \vec{e}_- \right. \\ \left. + \left(-E_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)} + i E_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)} \right) \vec{e}_+ \right\} \quad (\text{III.2})$$

avec: $\vec{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y)$

La différence des fréquences des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 est notée :

$$\delta = \omega_1 - \omega_2$$

Cette différence δ est supposée très petite devant ω , la fréquence moyenne des deux champs. Dans ces conditions, le déphasage relatif entre les deux champs dû à la propagation peut être négligé (ce déphasage vaut $\delta l/c$ où l est la longueur de la cellule contenant la vapeur atomique).

L'origine des temps est choisie de telle sorte que $\varphi_1 + \varphi_2$ soit nul. On pose alors φ le déphasage relatif entre les deux champs:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

La relation (III.2) s'écrit, en posant k demi-somme de la norme des vecteurs d'onde des deux champs:

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re} \left\{ \left[\left(E_1 e^{-i \frac{\delta t + \varphi}{2}} + i E_2 e^{i \frac{\delta t + \varphi}{2}} \right) \vec{e}_- + \left(-E_1 e^{-i \frac{\delta t + \varphi}{2}} + i E_2 e^{i \frac{\delta t + \varphi}{2}} \right) \vec{e}_+ \right] e^{-i(\omega t - kz)} \right\} \quad (\text{III.3})$$

Cette expression permet de déduire l'expression des coefficients de la décomposition du champ total entrant sur la base circulaire définie par [1]:

$$\vec{E} = \text{Re} \left((-E_+ \vec{e}_- - E_- \vec{e}_+) e^{-i(\omega t - kz)} \right) \quad (\text{III.4})$$

Le champ total interagit avec une vapeur atomique et sa fréquence ω est proche de ω_a la fréquence d'une raie de résonance reliant un niveau fondamental de moment cinétique J_g à un niveau excité de moment cinétique J_e .

Dans une première étape, on traite le cas où $J_g = J_e = 1/2$. Le cas d'une transition quelconque sera traité ultérieurement. Le système est donc décrit par un modèle d'atome à quatre niveaux couplés par deux ondes d'amplitude E_+ et E_- (figure III.1).

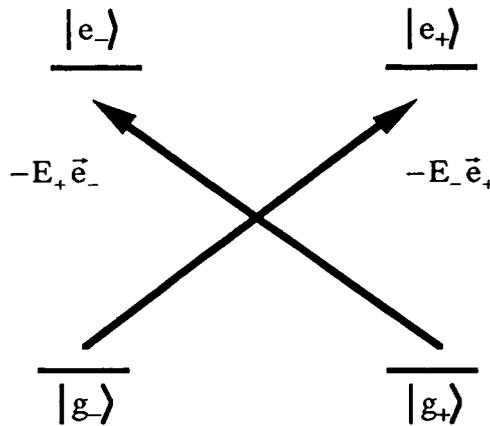


Figure III.1: transition $1/2 \rightarrow 1/2$

La différence entre la fréquence des ondes E_1 et E_2 et la fréquence de résonance de la transition atomique est notée:

$$\Delta = \omega - \omega_a$$

où ω_a est la fréquence de résonance de la transition atomique.

Remarque: dans les parties I et II de ce mémoire, cette différence est notée $\delta = \omega_a - \omega$. Le changement de notation $\delta \rightarrow -\Delta$ est effectué pour que les notations de la partie III soient cohérentes avec celles des articles publiés.

Les ordres de grandeur des différentes fréquences intervenant dans le problème sont les mêmes que dans la partie II (Voir II.A.2.a), c'est-à-dire que:

$$\Gamma \ll \kappa u, \Omega_r \ll \Delta \quad (\text{III.5})$$

Enfin, pour simplifier, on suppose dans un premier temps que la relaxation du niveau fondamental est homogène et est caractérisée par le taux γ de retour à l'équilibre des populations des sous-niveaux Zeeman du fondamental. En fait, la relaxation est due au temps de transit fini des atomes à travers le faisceau lumineux. Ce processus dépend de la vitesse des atomes et est par conséquent inhomogène. Une étude complète tenant compte de la distribution thermique des vitesses et du profil gaussien du faisceau est effectuée dans la partie III.B. Elle conduit à des résultats très similaires à ceux obtenus dans le cas où la relaxation est supposée homogène, et le caractère homogène ou inhomogène de la relaxation ne change pas l'aspect qualitatif des résultats.

b. Calcul des variables atomiques par les équations du pompage optique

L'état du système peut être obtenu au moyen des équations du pompage optique. Cette méthode permet de calculer les différentes observables du niveau fondamental [2]. On introduit alors un taux de pompage optique pour chaque sous-niveau Zeeman de l'état fondamental, correspondant au nombre d'atome quittant cet état par seconde sous l'effet des champs E_- et E_+ .

Les taux de pompage optique s'expriment à partir des éléments de matrice de l'opérateur moment dipolaire électrique [3]. Si l'effet des collisions est négligeable, on obtient:

$$\gamma_p^- = \frac{\Gamma}{4} \frac{d_{-+}^2 |E_+|^2}{\hbar^2 \Delta^2} \quad \text{et} \quad \gamma_p^+ = \frac{\Gamma}{4} \frac{d_{+-}^2 |E_-|^2}{\hbar^2 \Delta^2} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{où } d_{-+} = \langle e_- | \vec{D} \cdot \vec{e}_- | g_+ \rangle \quad \text{et} \quad d_{+-} = \langle e_+ | \vec{D} \cdot \vec{e}_+ | g_- \rangle$$

L'expression de l'opérateur moment dipolaire électrique dans la base standard s'écrit [1]:

$$\vec{D} = -D_+ \vec{e}_- - D_- \vec{e}_+ + D_z \vec{e}_z \quad (\text{III.7})$$

En appliquant le théorème de Wigner-Eckart [4], on en déduit:

$$\begin{aligned} d_{-+} &= \langle e_- | D_- | g_+ \rangle = -d \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} d \\ d_{+-} &= \langle e_+ | D_+ | g_- \rangle = d \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} d \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

où d est l'élément de matrice réduit de l'opérateur moment dipolaire électrique et la parenthèse désigne un symbole 3-j de Wigner [5]. En choisissant convenablement la phase relative entre les fonctions d'ondes radiales associées aux niveaux J_g et J_e , on peut choisir d réel.

En utilisant les relations (III.6) et (III.3), on obtient alors l'expression des taux de pompage en fonction de l'intensité des deux champs E_1 et E_2 :

$$\gamma_p^\pm = \frac{\Gamma}{12} \frac{d^2 (I_1 + I_2 \pm 2E_1 E_2 \sin(\delta t + \varphi))}{\hbar^2 \Delta^2} \quad (\text{III.9})$$

Soulignons que les taux de pompage sont modulés à la fréquence δ . En effet, le transfert de moment cinétique entre le champ et les atomes ne se produit que lorsque la polarisation a une composante circulaire non nulle. Or la composition de deux ondes de même direction de propagation, et de polarisation linéaire orthogonale est égale à une onde dont la polarisation est successivement linéaire, circulaire σ^+ , linéaire, circulaire σ^- ... Il s'en suit une modulation du taux de pompage optique.

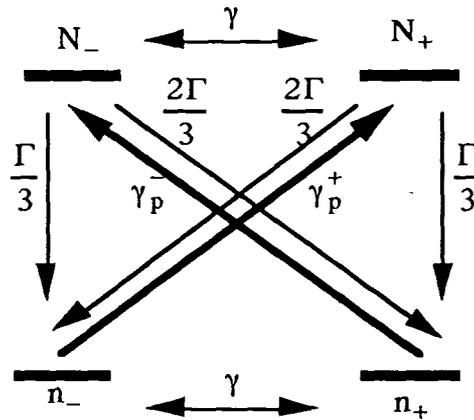


Figure III.2: Modèle théorique

L'hypothèse du pompage optique consiste à supposer que les cohérences optiques suivent instantanément l'évolution des observables du niveau fondamental (populations et cohérences Zeeman). Cette hypothèse permet de ne résoudre que les équations d'évolution de ces observables, en éliminant adiabatiquement les cohérences optiques [3].

Pour appliquer cette approximation, il faut donc que le taux de relaxation des cohérences optiques, égal à $\Gamma/2$ lorsqu'il n'y a pas de collisions, soit très grand devant les taux de pompage γ_p^\pm et les taux de relaxation intrinsèques γ des populations du niveau fondamental. De plus, la fréquence d'évolution forcée de ces populations, égale à δ (fréquence d'évolution du taux de pompage) doit être elle-aussi très petite devant $\Gamma/2$.

En résumé, les conditions devant être vérifiées par le système s'écrivent:

$$\overline{\gamma_p^\pm}, \gamma, \delta \ll \Gamma \quad (\text{III.10})$$

où $\overline{\gamma_p^\pm}$ est la valeur moyenne temporelle de γ_p^\pm .

Le fait de choisir comme axe de quantification la direction de propagation du champ total E implique que les seules cohérences Zeeman non nulles soient telles que $\Delta m_J = 2n$ où n est un entier relatif [3].

Comme les deux niveaux ont un moment cinétique $1/2$, il ne peut donc apparaître de cohérences Zeeman et les seules observables du niveau excité et du niveau fondamental sont les populations, que nous noterons n_- , n_+ , N_- et N_+ , les majuscules étant relatives au niveau excité et les minuscules au niveau fondamental.

Pour calculer les populations du niveau fondamental, il faut tenir compte de la retombée par émission spontanée à partir des populations du niveau excité. Le taux de retombée du niveau $|e, J_e, m_{J_e}\rangle$ vers le niveau $|g, J_g, m_{J_g}\rangle$ est égal à [3]:

$$\Gamma_{em_{J_e}, gm_{J_g}} = \Gamma (2J_e + 1) \begin{pmatrix} J_g & 1 & J_e \\ m_{J_g} & m_{J_e} - m_{J_g} & -m_{J_e} \end{pmatrix}^2$$

On déduit alors du modèle représenté figure III.2, les équations d'évolution des différentes populations:

$$\frac{dn_-}{dt} = -(\gamma + \gamma_p^+) n_- + \frac{\Gamma}{3} N_- + \frac{2\Gamma}{3} N_+ + \frac{\gamma}{2} \quad (\text{III.11.a})$$

$$\frac{dn_+}{dt} = -(\gamma + \gamma_p^-) n_+ + \frac{2\Gamma}{3} N_- + \frac{\Gamma}{3} N_+ + \frac{\gamma}{2} \quad (\text{III.11.b})$$

$$\frac{dN_-}{dt} = -(\Gamma + \gamma) N_- + \gamma_p^- n_+ \quad (\text{III.11.c})$$

$$\frac{dN_+}{dt} = -(\Gamma + \gamma) N_+ + \gamma_p^+ n_- \quad (\text{III.11.d})$$

Compte-tenu des hypothèses de validité des équations du pompage optique (III.10), les expressions des populations du niveau excité s'écrivent, à partir de (III.11.c) et (III.11.d):

$$N_+ = \frac{\gamma_p^+}{\Gamma} n_- \quad \text{et} \quad N_- = \frac{\gamma_p^-}{\Gamma} n_+ \quad (\text{III.12})$$

Les équations d'évolutions des populations du niveau fondamental (III.11.a) et (III.11.b) deviennent, en utilisant (III. 12):

$$\begin{aligned}\frac{dn_-}{dt} &= -\left(\gamma + \frac{\gamma_p^+}{3}\right)n_- + \frac{\gamma_p^-}{3}n_+ + \frac{\gamma}{2} \\ \frac{dn_+}{dt} &= -\left(\gamma + \frac{\gamma_p^-}{3}\right)n_+ + \frac{\gamma_p^+}{3}n_- + \frac{\gamma}{2}\end{aligned}\tag{III.14}$$

Il faut noter que la demi-différence des populations est proportionnelle à la valeur moyenne de J_z , la composante du moment cinétique du niveau fondamental selon l'axe de quantification (le moment cinétique est normalisé par $1/\hbar$ pour apparaître sans dimension). Cette quantité est aussi appelée orientation longitudinale du niveau fondamental [1]. En notant S la somme des populations, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\gamma S + \gamma \\ \frac{d\langle J_z \rangle}{dt} &= -\left(\gamma + \frac{\gamma_p^- + \gamma_p^+}{3}\right)\langle J_z \rangle + \left(\frac{\gamma_p^+ - \gamma_p^-}{3}\right)\frac{S}{2}\end{aligned}\tag{III.14}$$

La première relation indique que la population totale S du niveau fondamental est constante en régime permanent. En utilisant l'expression des taux de pompage optique (III.9), l'équation d'évolution de l'orientation longitudinale du fondamental s'écrit :

$$\frac{d\langle J_z \rangle}{dt} = -\gamma_2 \langle J_z \rangle + \gamma_1 \sin(\delta t + \varphi)\tag{III.15}$$

où : $\gamma_1 = \frac{\Gamma}{36} \frac{d^2 E_1 E_2}{\hbar^2 \Delta^2}$ et $\gamma_2 = \gamma + \frac{\Gamma}{36} \frac{d^2 (I_1 + I_2)}{\hbar^2 \Delta^2}$

L'orientation en régime "forcé" s'obtient aisément:

$$\langle J_z \rangle = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{1}{1+u^2} (\sin(\delta t + \varphi) - u \cos(\delta t + \varphi)) \quad \text{avec } u = \frac{\delta}{\gamma_2}\tag{III.16}$$

Le taux de relaxation γ_2 correspond au taux de relaxation global de l'orientation longitudinale (III.15). Il est formé de la somme du taux de relaxation intrinsèque du niveau fondamental et d'un taux de relaxation dû à la saturation du pompage optique. La saturation du pompage optique est donc incluse dans l'expression (III.16).

Le calcul a pu être effectué à tous les ordres de pompage parce que le système est parfaitement décrit par une seule observable, l'orientation du niveau fondamental (les populations du niveau excité ayant été négligées et la population du niveau fondamental étant constante).

L'égalité précédente indique aussi que l'orientation longitudinale du niveau fondamental suit les variations de la polarisation du champ total avec un retard dû au temps de réponse du niveau fondamental. Ce retard induit un déphasage entre l'orientation et l'évolution de la polarisation du champ total, c'est-à-dire l'évolution du pompage optique. On remarque évidemment que si le milieu répond instantanément ($\gamma_2 \rightarrow \infty$ ou $\delta \rightarrow 0$), l'orientation longitudinale du niveau fondamental est en phase avec les variations de polarisation du champ pompe.

Notons enfin que les déplacements lumineux (en anglais *light-shift*) n'interviennent pas dans le calcul. Ceci est dû au fait que le moment cinétique du niveau fondamental est égal à $1/2$. Dans ce cas, l'hamiltonien effectif a la même structure qu'un hamiltonien dû à un champ magnétique aligné le long de Oz [3]. Cet hamiltonien commute avec J_z et ne modifie donc pas l'évolution des populations du niveau fondamental.

c. Polarisation de la vapeur atomique

1. Cohérences optiques

La polarisation du milieu est proportionnelle aux cohérences optiques induites par le champ. Celles-ci se calculent en utilisant l'équation de Bloch [6] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_a + V, \rho] + \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\text{relax}} \quad (\text{III.17})$$

où ρ est la matrice densité du système atomique, H_a l'hamiltonien propre du système et V l'hamiltonien d'interaction entre le système atomique et les champs électromagnétiques. Nous supposons dans ce paragraphe que la transition est quelconque et nous notons J_g et J_e les moments cinétiques du niveau fondamental et du niveau excité. On décompose la matrice densité et les hamiltoniens dans la base $\{|J_g, m_g\rangle, |J_e, m_e\rangle\}$ sous la forme de quatre sous-matrices. En notant P_e (respectivement P_g) le projecteur sur le niveau excité (respectivement fondamental), on obtient:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{bmatrix} \quad H_a = \hbar\omega_a P_e \quad V = -\vec{D} \cdot \vec{E} = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{D}^- \cdot \vec{E} \\ -\vec{D}^+ \cdot \vec{E} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

avec: $\vec{D}^+ = P_e \cdot \vec{D} \cdot P_g$ et $\vec{D}^- = P_g \cdot \vec{D} \cdot P_e$

L'équation d'évolution des cohérences optiques contenues dans ρ_{eg} s'écrit sous forme matricielle en utilisant (III. 17):

$$\frac{d\rho_{eg}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \left((\vec{D}^+ \cdot \vec{E}) \rho_{gg} - \hbar\omega_a \rho_{eg} - \rho_{ee} (\vec{D}^+ \cdot \vec{E}) \right) - \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg} \quad (\text{III.19})$$

La contribution de ρ_{ee} est négligée devant celle de ρ_{gg} , car les observables du niveau excité sont très petites comparées à celles du niveau fondamental (Voir III.A.1.b). De plus, on suppose que l'on est dans une situation où les cohérences Zeeman du niveau fondamental (termes $\langle m_g | \rho | m_g' \rangle$ où m_g est différent de m_g') sont nulles. Dans ces conditions, l'équation d'évolution des cohérences optiques s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \rho_{m_e, m_g} = -\left(i\omega_a + \frac{\Gamma}{2}\right) \rho_{m_e, m_g} + \frac{e^{-i\omega t}}{2i\hbar} \rho_{m_g, m_g} \left(\langle m_e | D_+ | m_g \rangle \cdot E_- + \langle m_e | D_- | m_g \rangle \cdot E_+ \right)$$

Le terme de fréquence $e^{i\omega t}$ est négligé car il est non résonant ("rotating-wave approximation") [6]. Enfin, en supposant que les cohérences suivent adiabatiquement l'évolution des populations, on obtient:

$$\rho_{m_e, m_g} = \rho_{m_g, m_g} \frac{e^{-i\omega t}}{\frac{\Gamma}{2} - i\Delta} \frac{\left(\langle m_e | D_+ | m_g \rangle \cdot E_- + \langle m_e | D_- | m_g \rangle \cdot E_+ \right)}{2i\hbar} \quad (\text{III.20})$$

2. Expression de la polarisation

La polarisation du milieu a pour expression:

$$\vec{P} = N \langle \vec{D} \rangle = N \text{Tr}(\rho \vec{D}) \quad (\text{III.21})$$

où N est la densité volumique d'atome.

En utilisant les notations précédentes, la relation (III.21) devient:

$$\vec{P} = N \left(\text{Tr}(\rho_{ge} \vec{D}^+) + \text{Tr}(\rho_{eg} \vec{D}^-) \right) \quad (\text{III.22})$$

Ces deux termes sont conjugués l'un de l'autre. Il suffit de ne développer que le second terme, de fréquence positive d'après la relation (III. 20). Ce terme vaut:

$$\text{Tr}(\rho_{eg} \vec{D}^-) = \sum_{m_e, m_g} \rho_{m_e, m_g} \langle m_g | \vec{D}^- | m_e \rangle \quad (\text{III.23})$$

En utilisant le fait que: $\bar{D}^- = (\bar{D}^+)^\dagger$, on a:

$$\langle m_g | \bar{D}^- | m_e \rangle = \langle m_e | D_- | m_g \rangle^* \bar{e}_- + \langle m_e | D_+ | m_g \rangle^* \bar{e}_+ \quad (\text{III.24})$$

(En fait les deux éléments de matrice de l'opérateur moment dipolaire sont réels, l'élément de matrice réduit ayant été choisi réel (III.8))

En remplaçant dans l'expression (III.23) les cohérences par leur expression (III.20) et les éléments de matrice de l'opérateur dipolaire par leur expression (III.24), et en utilisant le fait que le produit des éléments de matrice de D_- et D_+ entre deux niveaux m_g et m_e est toujours nul, on obtient l'expression de la composante de fréquence positive de la polarisation:

$$\bar{P} = N \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i\hbar \left(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta\right)} \sum_{m_g, m_e} \rho_{m_g, m_e} \left(\langle m_e | D_+ | m_g \rangle^2 E_- \bar{e}_+ + \langle m_e | D_- | m_g \rangle^2 E_+ \bar{e}_- \right) \right) \quad (\text{III.25})$$

Dans nos conditions, Γ est très petit devant Δ , la polarisation vaut donc:

$$\bar{P} = \frac{N}{\hbar \Delta} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \sum_{m_g, m_e} \rho_{m_g, m_e} \left(\langle m_e | D_+ | m_g \rangle^2 E_- \bar{e}_+ + \langle m_e | D_- | m_g \rangle^2 E_+ \bar{e}_- \right) \right\} \quad (\text{III.26})$$

La polarisation pour une transition ($1/2 \rightarrow 1/2$) se déduit aisément de la formule précédente. En utilisant les notations de la figure III.2, on obtient:

$$\bar{P} = \frac{Nd^2}{3\hbar\Delta} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} (n_- E_- \bar{e}_+ + n_+ E_+ \bar{e}_-) \right\} \quad (\text{III.27})$$

d. Expression des champs sortants

L'équation de propagation du champ total s'écrit :

$$\nabla \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

On projette cette équation sur les deux polarisations (σ^+) et (σ^-).

Les deux composantes circulaires du champ total vérifient:

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial t^2} + 2ik \frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = -\mu_0 \omega^2 P_{\pm} + 2i\mu_0 \omega \frac{\partial P_{\pm}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\pm}}{\partial t^2} \quad (\text{III.28})$$

Dans cette équation, P_{-} et P_{+} sont les composantes de la polarisation dans la base standard.

En supposant justifiée l'approximation de l'enveloppe lentement variable [7], on peut négliger les deux premiers termes ainsi que les deux derniers termes dans l'équation (III.28).

On pose $P_{\pm} = \epsilon_0 \chi_{\pm} E_{\pm}$, où χ_{\pm} est la susceptibilité pour l'onde E_{\pm} . La fréquence d'évolution temporelle de E_{\pm} étant de l'ordre de δ , le rapport entre le dernier terme du membre de gauche et le premier terme du membre de droite est donc de l'ordre de $\delta/\omega\chi_{\pm}$. Compte-tenu des valeurs numériques de χ_{\pm} (II.A.2.a) et en prenant pour δ une valeur typique de 1MHz, le rapport $\delta/\omega\chi_{\pm}$ est de l'ordre de 10^{-3} , ce qui permet de négliger le dernier terme du membre de gauche devant le premier terme du membre de droite.

Dans ces conditions, l'équation d'évolution de E_{\pm} devient:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} = \frac{ik}{2} \chi_{\pm} E_{\pm} \quad (\text{III.29})$$

L'expression des susceptibilité χ_{\pm} se déduit de la relation (III.27):

$$\chi_{\pm} = \left[\frac{-Nd^2}{3\hbar\Delta} \right] n_{\pm} = \chi_0 (1 \pm 2\langle J_z \rangle) \quad (\text{III.30})$$

avec: $\chi_0 = \frac{-Nd^2}{6\hbar\Delta}$

où χ_0 est la susceptibilité linéaire du milieu [7], quantité indépendante de t et de z .

En utilisant (III.29) et (III.30), on obtient donc:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} = \frac{ik}{2} \chi_0 (1 \pm 2\langle J_z \rangle) E_{\pm} \quad (\text{III.31})$$

En multipliant les deux membres de la précédente égalité par E_{\pm}^* , et en ajoutant le terme

conjugué, on en déduit immédiatement que $\frac{\partial I_{\pm}}{\partial z} = 0$.

L'intensité des composantes circulaire du champ total est donc indépendante de z . $\langle J_z \rangle$ étant proportionnel à $(I_+ - I_-)$ (III.6 et III.14), il est par conséquent indépendant de z . Les équations d'évolutions (III. 31) s'intègrent alors simplement pour donner:

$$E_{\pm}(l) = e^{\frac{i k \chi_0 l}{2} (1 \pm 2 \langle J_z \rangle)} E_{\pm}(0) \quad (\text{III.32})$$

On en déduit l'expression du champ à la sortie $E(l)$ défini par:

$$\begin{aligned} \vec{E}(l) &= \text{Re} \left\{ \left(E_1(l) e^{-i(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)} \right) \vec{e}_x + \left(E_2(l) e^{-i(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)} \right) \vec{e}_y \right\} \\ &= E_x(l) \vec{e}_x + E_y(l) \vec{e}_y \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{pmatrix} E_1(l) \\ E_2(l) \end{pmatrix} = e^{\frac{i k \chi_0 l}{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta e^{i(\delta t + \varphi)} \\ \sin \theta e^{-i(\delta t + \varphi)} & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.33.a})$$

$$\text{avec: } \theta = \frac{1}{4} k (\chi_+ - \chi_-) l = k \chi_0 l \langle J_z \rangle \quad (\text{III.33.b})$$

On obtient, à un facteur de phase commun près $kl(1 + \chi_0/2)$ dû à la propagation libre:

$$\begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (\text{III.34})$$

L'expression du champ à la sortie de la cellule est donc connue exactement, quelle que soit la longueur de la cellule, et tient compte d'une éventuelle saturation du pompage optique. L'expression de l'angle θ est donné par (III.33.b) et (III.16). Il peut s'écrire sous la forme:

$$\theta = \frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \sin(\delta t + \varphi - \arctan u) \quad (\text{III.35})$$

où $b = k \chi_0 l (\gamma_1/\gamma_2)$ et $u = \delta/\gamma_2$

Pour résoudre l'équation (III.34), $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont développés sous la forme d'une série de fonction de Bessel J_p [8]:

$$\cos \theta = J_0 \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \cos(2k(\delta t + \varphi - \arctan u))$$

$$\sin \theta = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \sin((2k+1)(\delta t + \varphi - \arctan u))$$

La composante $E_x(l)$ vaut alors, à partir de (III.34):

$$E_x(l) = E_1 J_0 \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} E_1 \left[J_{2p} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \left(\cos((\omega_1 + 2p\delta)t + \varphi_1 + 2p\varphi - 2p \arctan u) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \cos((\omega_1 - 2p\delta)t + \varphi_1 - 2p\varphi + 2p \arctan u) \right) \right]$$

$$- \sum_{p=0}^{\infty} E_2 \left[+ J_{2p+1} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \left(\sin((\omega_2 + (2p+1)\delta)t + \varphi_2 + (2p+1)\varphi - (2p+1) \arctan u) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sin((\omega_2 - (2p+1)\delta)t + \varphi_2 - (2p+1)\varphi + (2p+1) \arctan u) \right) \right]$$

(III.36)

Et en utilisant la propriété des fonctions de Bessel : $J_{-p} = (-1)^p J_p$, on obtient:

$$E_x(l) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 J_{2p} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \cos((\omega_1 + 2p\delta)t + (\varphi_1 + 2p\varphi) - 2p \arctan u) \right.$$

$$\left. - E_2 J_{2p+1} \left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \sin((\omega_1 + 2p\delta)t + (\varphi_1 + 2p\varphi) - (2p+1) \arctan u) \right\}$$

(III.37)

L'expression de $E_y(l)$ se déduit de la formule précédente en intervertissant les indices 1 et 2 et en changeant δ , φ et u en leur opposés. La composante cartésienne $E_x(l)$ (respectivement $E_y(l)$) du champ sortant est formée d'une superposition d'ondes de fréquence $\omega_1 + 2p\delta$ (respectivement $\omega_2 + 2p\delta$).

L'intensité de chaque harmonique composant $E_x(l)$ se déduit de (III.37). En notant I_p l'intensité de la composante à la fréquence $\omega_1 + 2p\delta$, l'expression de I_p vaut:

$$I_p = E_1^2 J_{2p}^2\left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}}\right) + E_2^2 J_{2p+1}^2\left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}}\right) + 2E_1E_2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} J_{2p}\left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}}\right) J_{2p+1}\left(\frac{b}{\sqrt{1+u^2}}\right) \quad (\text{III.38})$$

Enfin, on obtient l'intensité totale moyenne \bar{I}_x^{out} de la composante selon x du champ sortant en sommant les intensités I_p :

$$\bar{I}_x^{\text{out}} = \frac{E_1^2 + E_2^2}{2} + \frac{E_1^2 - E_2^2}{2} J_0\left(\frac{2b}{\sqrt{1+u^2}}\right) + E_1E_2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} J_1\left(\frac{2b}{\sqrt{1+u^2}}\right) \quad (\text{III.39})$$

L'absorption ayant été négligée, l'intensité \bar{I}_y^{out} se déduit de l'égalité précédente et est égale à $E_1^2 + E_2^2 - \bar{I}_x^{\text{out}}$.

III.A.2. Cas d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$

Le modèle théorique est le même que dans la partie précédente. Les notations et les taux de retombés sont décrit sur les figures (III.3 a et b). Comme précédemment, les majuscules sont relatives aux populations du niveau excité et les minuscules aux populations du niveau fondamental.

Les équations d'évolution des populations du niveau fondamental sont égales à:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\gamma n_1 - \gamma_{p_1}^+ n_1 - \gamma_{p_1}^- n_1 + \frac{2\Gamma}{3} N_2 + \frac{\Gamma}{3} N_3 + \Gamma N_1 + \frac{\gamma}{2} \quad (\text{III.40.a})$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -\gamma n_2 - \gamma_{p_2}^- n_2 - \gamma_{p_2}^+ n_2 + \frac{2\Gamma}{3} N_3 + \frac{\Gamma}{3} N_2 + \Gamma N_4 + \frac{\gamma}{2}$$

En appliquant le même raisonnement que pour (III.12), on obtient les populations du niveau excité:

$$N_4 = \frac{\gamma_{p_2}^+}{\Gamma} n_2 \quad ; \quad N_3 = \frac{\gamma_{p_1}^+}{\Gamma} n_1 \quad ; \quad N_2 = \frac{\gamma_{p_2}^-}{\Gamma} n_2 \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{\gamma_{p_1}^-}{\Gamma} n_1 \quad (\text{III.40.b})$$

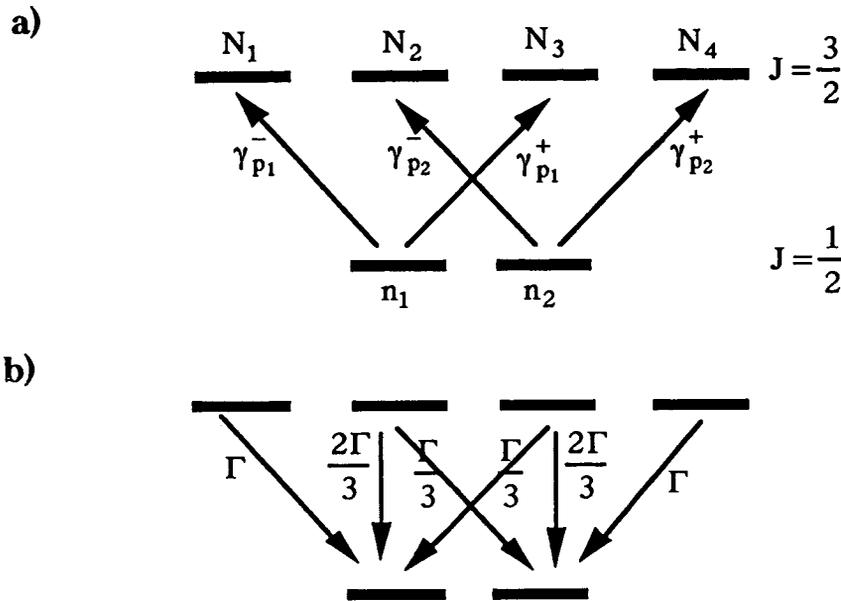


Figure III.3: transition $1/2 \rightarrow 3/2$

En remplaçant dans les équations d'évolution (III.40.a) les populations du niveau excité par leur valeur (III.40.b) et en ne gardant que les termes à l'ordre zéro en γ/Γ (hypothèses (III.10) du pompage optique), l'équation d'évolution de l'orientation longitudinale s'écrit:

$$\frac{d\langle J_z \rangle}{dt} = -\gamma_2 \langle J_z \rangle + \gamma_1 \sin(\delta t + \varphi) \quad (\text{III.41})$$

avec: $\gamma_1 = \frac{\Gamma}{72} \frac{d^2 E_1 E_2}{\hbar^2 \Delta^2}$ et $\gamma_2 = \gamma + \frac{\Gamma}{72} \frac{d^2 (I_1 + I_2)}{\hbar^2 \Delta^2}$

L'équation d'évolution de l'orientation longitudinale est donc rigoureusement identique à celle obtenue dans le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$ (III.15). Ceci est dû au fait que les sous-niveaux Zeeman $m_j = \pm 3/2$ du niveau excité ne jouent qu'un rôle de spectateur, la retombée par émission spontanée compensant exactement le vidage par pompage optique. De plus, le carré de l'élément de matrice réduit pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ étant égale au double de celui de la transition $1/2 \rightarrow 1/2$ [9], la valeur numérique de l'orientation longitudinale est la même que celle obtenue pour la transition $1/2 \rightarrow 1/2$.

La polarisation se déduit alors de l'expression (III.26):

$$\vec{P} = \frac{Nd^2}{12\hbar\Delta} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left((n_1 + 3n_2) E_- \vec{e}_+ + (n_2 + 3n_1) E_+ \vec{e}_- \right) \right\}$$

On en déduit χ_{\pm} en fonction de $\langle J_z \rangle$, en rappelant que (III.27 et III.29):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \operatorname{Re} \left\{ -\chi_+ E_+ \vec{e}_- - \chi_- E_- \vec{e}_+ \right\}$$

On obtient:

$$\chi_{\pm} = \chi_0 (1 \mp \langle J_z \rangle) \quad (\text{III.42})$$

avec: $\chi_0 = \frac{-Nd^2}{6\hbar\Delta}$

En utilisant l'expression de l'angle θ (III.33), on en déduit que $\theta = -\frac{1}{2} k \chi_0 l \langle J_z \rangle$. Sachant que χ_0 est double pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ (car le carré de l'élément de matrice réduit est double), l'angle de rotation θ est donc l'opposé de celui obtenu dans le cas de la transition $1/2 \rightarrow 1/2$.

Soulignons que tous les calculs ont été effectués en négligeant les collisions. En fait, on peut montrer que le signe de l'orientation longitudinale pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ dépend du taux de collision et peut s'annuler pour une certaine pression, ce qui n'est pas le cas pour une transition $1/2 \rightarrow 1/2$. Expérimentalement, à cause des collisions résiduelles, l'angle θ sera plus faible dans le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ que dans le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$ [10] (Voir III.B).

III.A.3. Interprétation des résultats

a. Description du système par un effet d'activité optique

La résolution du système par la méthode du pompage optique permet de décrire simplement le processus de couplage entre les deux champs. Dans la cellule, la polarisation du champ total est modulée à la différence des fréquences des deux champs incidents (figure III.4). La polarisation est successivement linéaire, circulaire σ^+ , linéaire, circulaire σ^- , etc (III.3) (En toute rigueur, ceci n'est vrai que si les deux champs incidents ont la même intensité; sinon, la polarisation est elliptique droite, linéaire, elliptique gauche, etc; la physique du phénomène reste cependant la même).

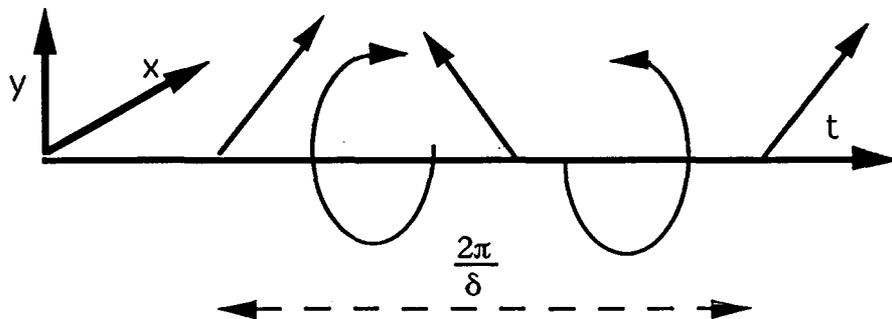


Figure III.4

Lorsque la polarisation est circulaire, les atomes sont pompés optiquement d'un sous-niveau Zeeman à l'autre, ce qui induit une biréfringence rotatoire dans le milieu. A cause du temps de réponse fini du niveau fondamental, ce dernier n'a pas retrouvé son état d'équilibre lorsque la polarisation du champ est de nouveau linéaire et il subsiste de la biréfringence rotatoire. La polarisation du champ tourne alors dans son plan, ce qui indique qu'une partie de l'intensité d'un des deux champs entrants est transférée dans l'autre champ. Ce transfert se voit sur l'expression (III.39) de l'intensité de sortie d'un des deux champs. Le couplage entre les deux champs passe donc par un processus d'activité optique (biréfringence rotatoire induite par un champ électromagnétique).

La biréfringence rotatoire étant modulée à la fréquence δ , celle-ci induit sur les champs des bandes latérales décalées en fréquence d'un multiple de δ (processus similaire à de la modulation de phase par effet Faraday [7]).

Enfin, on retrouve sur les expressions des champs sortants le rôle essentiel du temps de réponse du niveau fondamental. En particulier, si les atomes répondent instantanément (ce qui correspond aux cas $\delta \rightarrow 0$ ou $\gamma_2 \rightarrow \infty$), le transfert disparaît (III.39). L'activité optique est donc étroitement liée à la non-adiabaticité de la réponse du niveau fondamental.

b. Interprétation dans le formalisme de l'optique non linéaire

L'angle de la rotation due à l'activité optique dans le milieu s'exprime en fonction des amplitudes des champs, à partir de (III. 16):

$$\theta = -\frac{\alpha l}{2i} \left(\frac{1+iu}{1+u^2} E_1 E_2 e^{-i(\delta t + \varphi)} - \frac{1-iu}{1+u^2} E_1 E_2 e^{i(\delta t + \varphi)} \right) \quad (\text{III.43})$$

avec α égal à:

$$\alpha = k\chi_0 \frac{\Gamma}{\gamma_2} \frac{d^2}{36\hbar^2 \Delta^2}$$

On ne s'intéresse qu'à l'expression de $E_1(l)$. Par symétrie, $E_2(l)$ se déduit de $E_1(l)$ par interversion des indices 1 et 2 et en changeant u en son opposé.

Pour étudier les différents termes et les comparer aux résultats obtenus en polarisation parallèles (partie II), on limite les processus de mélange d'onde au troisième ordre. Cette hypothèse revient à ne considérer que les termes du premier ordre en θ . En effet, θ étant du second ordre en champ, l'expression de $E_1(l)$ au troisième ordre en champ est égale à (III.33):

$$E_1(l) = E_1 - \theta e^{i(\delta t + \varphi)} E_2 \quad (\text{III.44})$$

Le fait de supposer θ petit équivaut à prendre b petit (III.35). Ce cas correspond soit à un milieu mince ($k\chi_0 l \ll 1$), soit à un pompage optique non saturé ($\gamma_1 \ll \gamma_2$) (soit évidemment à une combinaison des deux précédentes conditions). Dans ces conditions, le champ $E_1(l)$ s'écrit:

$$E_1(l) = E_1 + \frac{\alpha l}{2i} \frac{1+iu}{1+u^2} E_2^2 E_1 - \frac{\alpha l}{2i} \frac{1-iu}{1+u^2} E_2^2 E_1 e^{i(2\delta t + 2\varphi)} \quad (\text{III.45})$$

Le champ sortant est donc formé de trois termes. Le premier correspond à la propagation libre. Il est égal au champ incident, à un facteur de phase près du à la propagation libre que nous avons omis. Les deux termes suivants correspondent respectivement à des termes de mélange à deux ondes et à quatre ondes. En choisissant comme axe de quantification la direction de polarisation de E_1 , l'interprétation physique des processus se comprend aisément en terme d'absorption et d'émission de photons de E_1 et de E_2 . En effet, dans ce cas, l'onde E_1 a une polarisation π et l'onde E_2 se décompose selon les deux polarisations σ^- et σ^+ (figure III.5). Ce choix d'axe de quantification permet de n'avoir qu'un seul des champs incidents sur une polarisation donnée et de pouvoir visualiser les différents processus.

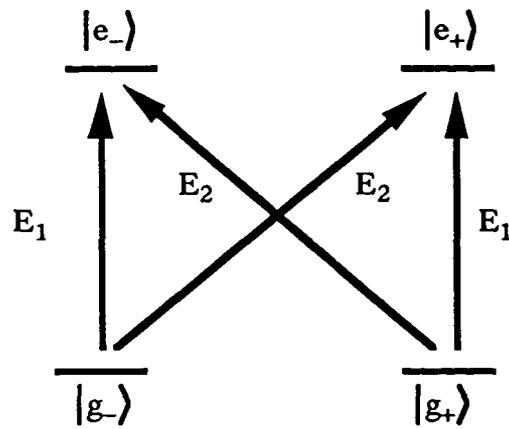


Figure III.5: Modèle dans l'approche optique non linéaire

1. Mélange à quatre ondes

Le dernier terme dans l'expression de $E_1(l)$ (III.45) est modulé à la fréquence 2δ . Il correspond à l'absorption de deux photons de l'onde E_2 , et à l'émission d'un photon de l'onde E_1 et d'un photon de même polarisation que E_1 mais dont la fréquence est égale à $2\omega_2 - \omega_1$. C'est donc un processus de mélange à quatre ondes vers l'avant. L'onde émise apparaît d'ailleurs comme la conjuguée de l'onde E_1 . L'intensité de l'onde émise est d'après la relation (III.45) égale à:

$$I_{-1} = \frac{(\alpha l)^2}{4} \frac{1}{1+u^2} E_1^2 E_2^4 \quad (\text{III.46})$$

L'intensité est notée I_{-1} car le champ émis correspond à l'harmonique d'ordre -1 (III.37). On retrouve bien la formule (III.46) en développant au premier ordre la formule générale (III.38). Comme le processus passe par une orientation dans le fondamental (figure III.6.a) son efficacité dépend du temps de réponse de l'orientation et décroît rapidement avec δ , la fréquence d'excitation.

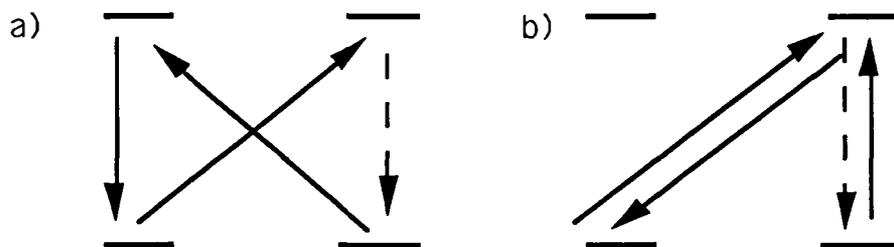


Figure III.6

2. Mélange à deux ondes

Le second terme dans l'expression de $E_1(l)$ (III.45) décrit le rayonnement d'une onde de même fréquence que E_1 . Si l'orientation répond instantanément ($u = 0$), ce terme est en quadrature par rapport à E_1 (III.45) et donc n'interfère pas avec E_1 . Dans ce cas, il correspond à un terme de phase non linéaire induit par E_2 [7]. Lorsque u est différent de zéro, l'onde émise est déphasée et elle a une composante en phase (ou en opposition de phase) avec E_1 qui va interférer avec E_1 . L'intensité I_0 de la composante de fréquence ω_1 de $E_1(l)$ vaut alors:

$$I_0 = E_1^2 + \alpha_1 \frac{u}{1+u^2} E_1^2 E_2^2 \quad (\text{III.47})$$

L'expression précédente peut être considérée dans le cadre d'une théorie au troisième ordre en champ comme l'intensité de sortie totale, l'intensité de I_1 étant d'un ordre plus élevé en champs (III.38). Il y a eu transfert d'une onde vers l'autre onde au cours de la propagation à travers la vapeur. On retrouve un processus de mélange à deux ondes [11] (déjà rencontré dans la partie II.B).

L'expression (III.47) est identique à celle obtenue dans le cas du mélange à deux ondes assisté par collision en polarisation linéaire parallèle [12]. Dans cette configuration, elle vaut:

$$E_1^2(l) = E_1^2 + \alpha_p \frac{u_p}{1+u_p^2} E_1^2 E_2^2 \quad (\text{III.48})$$

où : $\alpha_p = k\chi_0 \frac{\beta_p}{\Gamma} \frac{d^2}{6\hbar^2 \Delta^2}$, $u_p = \frac{\delta}{\Gamma}$ et β_p est le coefficient d'élargissement par pression (Voir II.B.2).

En comparant les deux courbes de transfert (III.47) et (III.48), représentées sur la figure (III.7) (en pointillé pour des polarisations parallèles et en trait plein pour des polarisations orthogonales), on remarque que le rapport du transfert maximum est égal à $(\Gamma^2 / 6\gamma_2 \beta_p)$. Le coefficient β_p étant de l'ordre de Γ dans les expériences de mélange à deux ondes assisté par collision [12] et γ_2 étant très petit devant Γ , le processus est donc plus efficace dans le cas du mélange à deux ondes en polarisation croisée. Par contre, la courbe de transfert est plus étroite, car le temps de réponse de l'orientation γ_2^{-1} est très grand devant Γ^{-1} , le temps de réponse du réseau réel induit par collision.

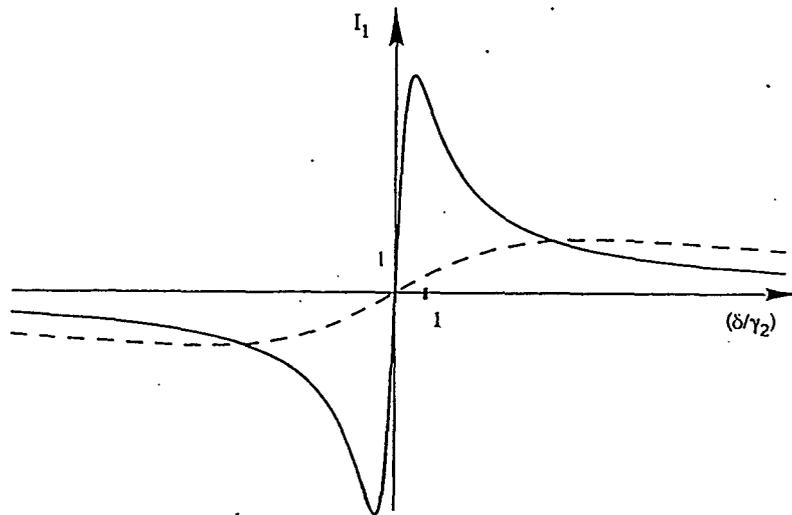


Figure III.7: Transfert par mélange à deux ondes

De même, en polarisation parallèle, les ondes générées par mélange à quatre ondes vers l'avant ont une intensité I_c de l'ordre de [13]:

$$I_c = \left(k \chi^{(3)}_1 \right)^2 E_1^2 E_2^4$$

En utilisant l'expression de la susceptibilité non linéaire d'ordre trois $\chi^{(3)}$ (II.4), le rapport de l'intensité des ondes générées par mélange à quatre ondes en polarisation orthogonale I_{-1} (III.46) et en polarisation parallèle I_c est de l'ordre de:

$$\frac{I_{-1}}{I_c} = \frac{1}{1+u^2} \frac{\Gamma^2}{36\gamma_2^2} \quad (\text{III.49})$$

Pour u petit, le mélange à quatre ondes est beaucoup plus efficace en polarisation orthogonale qu'en polarisation parallèle ($\gamma_2 \ll \Gamma$). Comme pour le mélange à deux ondes, on gagne le rapport entre le taux de relaxation du niveau excité et le taux de relaxation du niveau fondamental (au carré dans le premier cas car le processus est d'un ordre supérieur en intensité). Cependant, le processus est limité à de faibles différences de fréquence entre les deux champs alors que pour des polarisations parallèles, la différence de fréquence ne joue aucun rôle, tant qu'elle est petite devant le désaccord à résonance (Voir II).

Remarquons que la phase non linéaire due à l'onde elle-même (terme de la forme $|E_1|^2 E_1$) est un processus qui ne passe pas par une orientation dans le niveau fondamental (figure III.8), mais par une excitation virtuelle du niveau excité. Elle est due au fait que les atomes passent un temps très court mais fini dans le niveau excité. Comme les populations du niveau excité ont été négligées dans cette théorie, il est normal que la phase non linéaire n'apparaisse pas dans le résultat.



Figure III.8: Processus de phase non linéaire

Notons cependant que pour qu'elle ne joue vraiment aucun rôle, il faut que le déphasage non linéaire associé à ce terme et accumulé pendant la traversée de la cellule soit négligeable. En d'autres termes, le milieu doit être optiquement mince au sens de la phase auto-induite. Ce déphasage non linéaire est égal à $k \chi^{(3)} E_1^2 l$ et doit être petit devant l'unité. En exprimant $\chi^{(3)}$ en fonction de α (III.43), on obtient $(\alpha l \gamma_2 / \Gamma) \ll 1$.

c. Lien avec le refroidissement radiatif

Dans les expériences de refroidissement sub-Doppler par effet Sisyphes [14], les atomes sont soumis à deux ondes de même fréquence, de polarisation linéaire orthogonale et se propageant dans des directions opposées. La polarisation de l'onde stationnaire résultant de la superposition des deux ondes est selon le point de l'espace successivement linéaire, σ^- , linéaire, σ^+ , etc. Le pas de la modulation de polarisation étant égal à $\lambda/2$, un atome de vitesse v selon la direction de propagation des ondes "voit" une variation temporelle d'ellipticité de la polarisation avec une période π/kv (figure III.9). Dans notre configuration, les atomes sont considérés comme immobiles (car $\Delta \gg kv$) et "voient" une variation temporelle d'ellipticité de la polarisation avec une période $2\pi/\delta$ (figure III. 4). On peut montrer que la matrice densité des atomes est la même dans les deux cas pour une même valeur de Δ [15]. L'étude du champ sortant permet alors de mesurer certains paramètres des expériences de refroidissement (comme la force de friction).

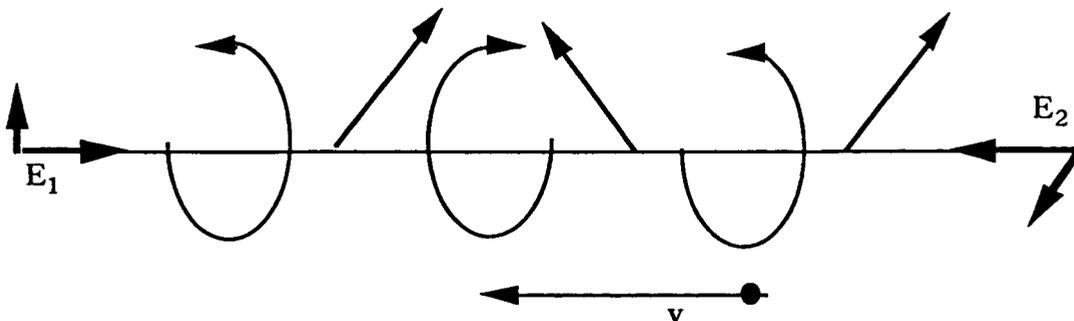


Figure III.9

Notons cependant que les processus de refroidissement ont lieu généralement sur des transitions $J \rightarrow J+1$ avec $J > 1/2$. Il faut prolonger la théorie dans le cas où le niveau fondamental a un moment cinétique supérieur à $1/2$.

III.A.4. Mélange à quatre ondes en polarisation linéaire orthogonale

a. Description du système

Dans cette partie, nous étudions l'interaction entre le milieu atomique décrit dans la partie (III.A.1) et trois ondes de même axe de propagation (figure III.10). Deux des ondes, notées E_f et E_b , de même polarisation linéaire (selon Oy), se propagent dans des directions opposées. Une troisième onde E_p , de polarisation linéaire selon Ox, se propage dans la même direction que E_f . Elle est superposée à E_f au moyen d'un prisme séparateur de polarisation, par exemple un prisme de Glan (figure III.10).

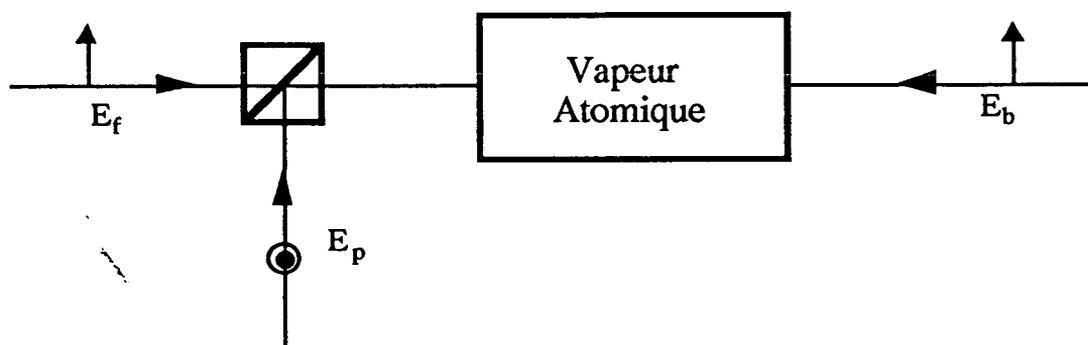


Figure III.10: Principe de l'expérience

Une quatrième onde va alors être créée par mélange à quatre ondes dans le milieu. Cette onde, de même polarisation que E_p , se propage dans la direction opposée à celle de E_p . Les champs sont notés au moyen de leur amplitude complexe:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_f &= \text{Re} \left(E_f e^{-i(\omega_f t - kz + \phi_f)} \right) \vec{e}_y = \text{Re}(\mathcal{E}_f) \vec{e}_y \\
 \vec{E}_b &= \text{Re} \left(E_b e^{-i(\omega_b t + kz + \phi_b)} \right) \vec{e}_y = \text{Re}(\mathcal{E}_b) \vec{e}_y \\
 \vec{E}_p &= \text{Re} \left(E_p e^{-i(\omega_p t - kz + \phi_p)} \right) \vec{e}_x = \text{Re}(\mathcal{E}_p) \vec{e}_x \\
 \vec{E}_r &= \text{Re} \left(E_r e^{-i(\omega_r t + kz + \phi_r)} \right) \vec{e}_x = \text{Re}(\mathcal{E}_r) \vec{e}_x
 \end{aligned}
 \tag{III.50}$$

On suppose que les déphasages relatifs dus à la propagation sont négligeables car les différences de fréquence sont très petites devant c/l (où l est la longueur de la cellule). Les modules des vecteurs d'onde des champs sont donc considérés comme étant tous égaux.

Les hypothèses du pompage optique sont supposé vérifiées et la théorie développée dans la partie (III.A.1) peut être appliquée. Enfin, on note:

$$\delta_p = \omega_p - \omega_f \quad \text{et} \quad \varphi_p = \phi_p - \phi_f$$

b. Orientation du milieu

Les ondes E_p et E_f ayant des polarisations linéaires orthogonales, elles peuvent induire une orientation longitudinale dans le milieu. Le milieu présente alors une activité optique et l'angle de rotation θ s'exprime à partir des amplitudes complexes des champs (III.43):

$$\theta = \frac{\alpha l}{2i} \left(\frac{1-iu}{1+u^2} \mathcal{E}_f \mathcal{E}_p^* - \frac{1+iu}{1+u^2} \mathcal{E}_f^* \mathcal{E}_p \right) \quad (\text{III.51})$$

où $u = \delta_p / \gamma_2$ et α est défini dans la relation (III.43).

Une orientation longitudinale peut aussi résulter de la combinaison des ondes E_p et E_b . Cependant, dans ce cas, comme les ondes ont des directions de propagation opposées, la polarisation lumineuse, et donc l'orientation, est modulée spatialement avec un pas $\lambda/2$ (figure III.9). La largeur Doppler kv_D étant très grande devant γ_2 , le taux de relaxation de l'orientation longitudinale, cette dernière est brouillée par le mouvement des atomes et sa contribution à l'orientation globale de la vapeur est négligeable.

Les processus non linéaires dus à des excitations virtuelles (mélange à quatre ondes en polarisation parallèle, phase non linéaire auto-induite, et en général tous les processus étudiés dans la partie II.B) sont négligés car ils sont d'un facteur γ_2/Γ plus petit par rapport aux effets induits par l'orientation longitudinale du niveau fondamental (Voir III.A.3.b).

L'action du milieu sur les ondes est donc totalement décrit par l'activité optique d'angle de rotation θ qui se déduit directement de la relation (III.43) en prenant $E_1 = E_p$ et $E_2 = E_f$.

c. Expression de l'onde réfléchie

Sous l'effet de l'activité optique, la polarisation de l'onde E_b va tourner dans son plan d'un angle θ . Après traversée de la cellule, le champ E_b^{out} a donc deux composantes cartésiennes \mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y qui s'écrivent en utilisant (III.34):

$$\mathcal{E}_x = \sin \theta \mathcal{E}_b \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_y = \cos \theta \mathcal{E}_b \quad (\text{III.52})$$

L'expression de l'onde réfléchie E_r se déduit évidemment de la formule précédente car E_r est égale à E_x , la composante selon Ox du champ sortant.

Il faut souligner que la polarisation de l'onde E_b dans la cellule reste toujours linéaire car elle se déduit par rotation de celle du champ E_b à l'entrée de la cellule. Le champ E_b dans la cellule n'induit donc aucune orientation. L'expression de l'onde réfléchie par la vapeur est donc juste à tous les ordres en champs, sous réserve de la validité des hypothèses du pompage optique.

Pour simplifier le développement ultérieur, on suppose à présent que l'angle θ est petit afin de se limiter au troisième ordre en champ (premier ordre en θ). De plus, on suppose que le pompage optique n'est pas saturé, c'est-à-dire que γ_2 est indépendant des intensités des champs et vaut γ (III.15). Enfin, pour permettre l'analogie avec les miroirs à conjugaison de phase en polarisation linéaire parallèle [16], les deux ondes E_f et E_b sont supposées très grandes devant E_p . E_f et E_b sont donc les deux ondes pompes ("forward and backward pump beam") et E_p représente le faisceau sonde ("probe beam").

En utilisant les égalités (III.52) et (III.51), on obtient:

$$\mathcal{E}_r = \frac{\alpha l}{2i} \left(\frac{1 - iu}{1 + u^2} \mathcal{E}_f \mathcal{E}_b \mathcal{E}_p^* - \frac{1 + iu}{1 + u^2} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_f^* \mathcal{E}_p \right) \quad (\text{III.53})$$

Les deux termes du membre de droite de la formule (III.53) proviennent de processus de mélange à quatre ondes.

Le premier est un terme de mélange à quatre ondes vers l'arrière. Il est associé au processus consistant en l'absorption d'un photon de chaque onde pompe et en l'émission d'un photon de l'onde sonde et d'un photon de E_r de fréquence $\omega_f + \omega_b - \omega_p$. Ce terme correspond à la *conjugaison de phase* classique.

Le second est un terme de répartition distribuée. Il est associé au processus consistant en l'absorption d'un photon de l'onde pompe E_b et un photon de l'onde sonde E_p et en l'émission d'un photon de l'onde pompe E_f et d'un photon de E_r dont la fréquence est égale à $\omega_p + \omega_b - \omega_f$. Habituellement, ce terme n'est pas présent dans les expériences de mélange à quatre ondes car l'accord de phase n'est pas réalisé lorsque les directions des ondes pompes et de l'onde sonde font un angle (Voir I).

Il ne subsiste alors que le second terme qui est accordé en phase quel que soit l'angle. En revanche, dans le cas d'une géométrie où l'angle est voisin de zéro (ce cas ou le cas étudié dans l'annexe A), les deux termes ont le même poids, et on ne peut omettre le terme de répartition distribuée.

d. Coefficient de réflexion

Le coefficient de réflexion par mélange à quatre ondes R_c est défini comme le rapport entre l'intensité réfléchie E_r^2 et l'intensité incidente E_p^2 . En utilisant (III.53), il est égal à:

$$R_c = R_{\max} \frac{1}{1+u^2} \sin^2(\delta_p t + \varphi_p - \arctan u) \quad (\text{III.54})$$

avec: $R_{\max} = (\alpha E_f E_b l)^2$

R_c est une fonction décroissante de u , propriété qui découle du temps de réponse fini de l'orientation.

e. Miroir à contraste de phase

1. Amplitude réfléchie

Nous nous intéressons au cas où les trois ondes ont la même fréquence ω . Le champ réfléchi s'écrit, à partir de (III.53):

$$\mathcal{E}_r = r_c \sin \varphi_p E_p e^{-i(\omega t + kz)} \quad (\text{III.55})$$

avec: $r_c = \sqrt{R_{\max}} e^{-i\varphi_b}$

Si le champ sonde est modulé spatialement en phase (φ_p devient $\varphi_p(r)$) on obtient:

$$\mathcal{E}_r = r_c \sin(\varphi_p(r)) E_p e^{-i(\omega t + kz)} \quad (\text{III.56})$$

La modulation de phase du champ incident a donc été "transférée" en modulation d'intensité.

Le système (vapeur+ondes pompes) est équivalent à un miroir à contraste de phase [17]. Il peut être décrit comme la superposition d'un miroir à conjugaison de phase et d'un miroir classique de mêmes coefficient de réflexion, et est de ce fait très proche des interféromètres de Fizeau à conjugaison de phase [18].

Le coefficient de réflexion est égal à:

$$R_c = R_{\max} \sin^2 \varphi_p(r) \quad (\text{III.57})$$

Le coefficient de réflexion est une fonction sinusoidale de la différence de phase φ_p . Cette modulation provient de l'interférence entre le terme de mélange à quatre ondes vers l'arrière et le terme de répartition distribuée.

Enfin, soulignons que le fait de supposer θ petit n'implique pas que le coefficient de réflexion R_{\max} soit petit devant l'unité. En effet, les deux inégalités $\alpha |E_p E_f| \ll 1$ et $\alpha |E_f E_p| > 1$ peuvent être vérifiées simultanément. Cette propriété permet d'obtenir une grande réflectivité tout en conservant un traitement théorique simple.

2. Ouverture numérique

Pour évaluer l'ouverture numérique d'un tel miroir, nous supposons que l'onde sonde \mathcal{E}_p ne contient qu'une seule fréquence spatiale K . L'onde sonde s'écrit donc sous la forme:

$$\vec{E}_p = \text{Re} \left(E_p e^{iKx} e^{-i(\omega t - kz)} \right) \vec{e}_x$$

En d'autre terme, l'onde sonde et l'onde pompe font un angle ξ , égal à K/k (Figure III.11). L'angle maximum ξ tel que l'onde réfléchi soit modulée en intensité à la fréquence K donne l'ouverture numérique du miroir à contraste de phase.

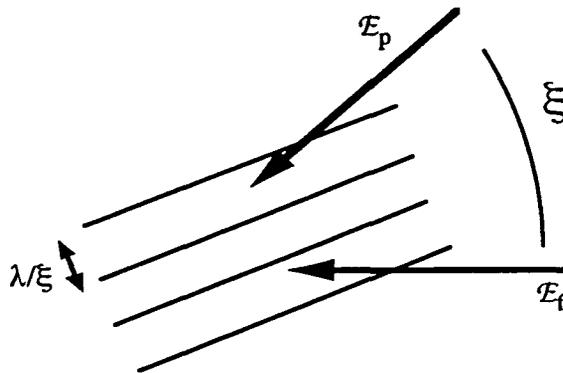


Figure III.11

Le contraste de phase est limité par la condition d'accord de phase du processus de répartition distribuée. En effet, celui-ci n'est accordé en phase que si l'angle entre l'onde sonde et les ondes pompes est suffisamment faible (Voir I B.3.d et complément II.B.6).

En utilisant l'expression du terme de désaccord calculé dans le complément II.B.6 pour des ondes planes (terme égal à $\sin c\left(\frac{k\xi^2 l}{2}\right)$), on obtient:

$$k\xi^2 l \ll 2\pi$$

Soit:
$$\xi \ll \sqrt{\frac{\lambda}{l}} \quad (\text{III.58.a})$$

Soulignons cependant que la condition d'accord de phase pour des ondes planes ne peut être appliquée à des faisceaux gaussiens que si ces faisceaux se recouvrent dans toute la cellule. Dans le cas contraire, le terme de répartition distribuée est négligeable. La condition de recouvrement, établie dans le complément II.B.6, s'écrit:

$$\xi \ll \frac{W}{l} \quad (\text{III.58.b})$$

où W est le diamètre des faisceaux.

Cependant, comme nous avons supposé pour établir ce résultat que la longueur de Rayleigh est très grande devant la longueur de la cellule, W/l est toujours très grand devant $\sqrt{\lambda/l}$. Dans ce cas, l'ouverture angulaire est donnée par la relation (II.58.a):

$$\xi_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda}{l}} \quad (\text{III.59})$$

Soulignons cependant que le brouillage Doppler va aussi diminuer l'efficacité du contraste de phase en agissant d'ailleurs simultanément sur la conjugaison de phase et sur la répartition distribuée. En effet, l'orientation est modulée spatialement et le temps mis par un atome pour parcourir un pas du réseau doit être beaucoup plus long que le temps de réponse γ_2 de l'orientation. Cette condition s'écrit :

$$\xi \ll \frac{\gamma_2}{k v_D}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, la sommation sur les vitesses fait apparaître un facteur multiplicatif de l'ordre de $(\gamma_2 / k\xi v_D)$. La décroissance de l'orientation est en ξ^{-1} alors que le désaccord du terme de répartition distribuée introduit un terme en ξ^{-2} . De plus, le brouillage Doppler diminue également le mélange à quatre ondes vers l'arrière et la répartition distribuée. Le brouillage du réseau par effet Doppler n'affecte donc pas le contraste de la modulation d'amplitude de \mathcal{E}_r mais uniquement l'amplitude globale de \mathcal{E}_r .

f. Auto-oscillation

Une oscillation peut être obtenue dans une cavité fermée par un miroir dont la réflectivité est supérieure à l'unité [19]. Or, le coefficient de réflexion R_{\max} en polarisation croisée est beaucoup plus grand que le gain en polarisation parallèle (III.49). En particulier, il peut être supérieur à l'unité, ce qui n'était pas le cas en polarisation linéaire parallèle dans nos conditions expérimentales dans le sodium ($r_c \approx 0,1$). Le système étudié est représenté figure (III.12). Le miroir M a une réflectivité R_M et la longueur de la cavité formée par le miroir M et la cellule vaut L. On note alors $\eta = 2kL$ le déphasage accumulé au bout d'un tour de cavité.

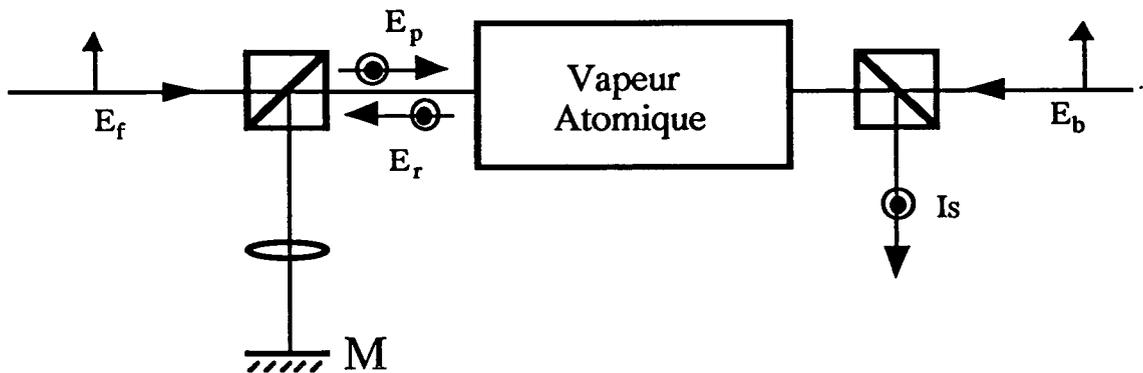


Figure III.12

La cavité impose la relation entre le champ E_p et le champ E_r :

$$\mathcal{E}_p = \sqrt{R_M} e^{i\eta} \mathcal{E}_r \quad (\text{III.60})$$

En combinant cette égalité avec l'expression de \mathcal{E}_r en fonction de \mathcal{E}_b (III.51 et III.52), on obtient l'expression de la phase et de l'amplitude de l'onde intracavité:

$$\begin{aligned} \phi_p &= \phi_b - \eta \\ E_p &= \sqrt{R_M} E_b \sin(\alpha l E_p E_f \sin(\phi_b - \eta)) \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

On en déduit la condition de seuil en développant le sinus au premier ordre:

$$1 = \sqrt{R_M} \sqrt{R_{\max}} \sin(\phi_b - \eta)$$

La condition de seuil dépend du déphasage introduit par la cavité, contrairement aux cavités fermées par des miroirs à conjugaison de phase [19].

Cette condition d'accord est due au processus de répartition distribuée qui se comporte comme un miroir classique et qui donc ne compense pas le déphasage accumulé par la propagation libre dans la cavité. Enfin, la condition nécessaire pour que l'oscillation se produise est que R_{\max} soit supérieur à $(R_M)^{-1}$.

III.A.5. Conclusion

Dans cette partie théorique, nous avons vu que le mélange d'onde en polarisation orthogonale a des propriétés intéressantes:

- Dans le cas d'une transition reliant un niveau excité à un niveau fondamental $J_g=1/2$, les calculs peuvent être menés à tous les ordres en champs dans le cadre de la théorie du pompage optique.
- On prévoit l'existence de mélange à deux ondes, en l'absence de collision déphasante [12] et de relaxation radiative [20].
- Un lien intéressant peut être établi entre ce signal de mélange à deux ondes et les forces apparaissant dans les mécanismes du refroidissement sub-Doppler.
- Les non-linéarités calculées sont beaucoup plus importantes que dans le cas où toutes les ondes ont la même polarisation. De plus, les directions de propagation des ondes étant identiques, la longueur d'interaction n'est pas limitée par le recouvrement des faisceaux comme c'est le cas en polarisation parallèle (Voir II).

III.B. CAS D'UNE TRANSITION QUELCONQUE:

Ce chapitre se présente sous la forme d'un article soumis à Optics Communication.

Dans la première partie, une étude théorique est effectuée dans le cas d'une transition quelconque. De plus, la présence d'un champ magnétique transverse est prise en compte. Enfin, le caractère inhomogène de la relaxation associé au temps de transit est traité rigoureusement. Cependant, le fait de prendre une transition quelconque ne permet plus de faire un traitement analytique à tous les ordres en champ le système. Le pompage optique est supposé non saturé et le milieu est supposé mince.

Dans la seconde partie, nous avons présenté les résultats de diverses expériences étudiées théoriquement dans les parties (III.A.1) et (III.A.2) (mélange à quatre ondes vers l'avant et mélange à deux ondes).

**TWO-WAVE MIXING WITH CROSS-POLARIZED BEAMS IN SODIUM:
A QUANTITATIVE INVESTIGATION**

M.Vallet, M.Pinard and G.Grynberg

*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de L'Ecole Normale Supérieure
Université P.M.Curie
Tour 12, BP74
75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE*

Abstract

We present a detailed investigation of two-wave and four-wave mixing with linearly cross-polarized beams in atomic vapors. The theoretical analysis developed at third order of perturbation theory is performed using an irreducible tensorial set representation and can be applied for any value of the angular momenta of the lower and upper states of the transition. We also consider the lineshape in the presence of a possible magnetic field in two situations. The first case corresponds to homogeneous broadening and the second case to transit-time broadening. These calculations are then compared with experiments results obtained in sodium on the D_1 and D_2 transitions. The dependance upon the magnetic field shows the importance of the hyperfine coupling in the ground state.

I. INTRODUCTION

Two-wave and four-wave mixing interaction in atomic vapors have been the subject of a considerable literature. In particular, it has been shown recently that a close connection does exist between these processes and atomic cooling [1] [3]. The study of photon redistribution (two-wave mixing) between copropagating linearly cross-polarized beams [2] provides for example interesting informations on the low intensity Sisyphus cooling [4]. It is the aim of this paper to present new theoretical and experimental results on this situation. By comparison with our preceding paper [2], we describe a model that can be applied to any $J_g \rightarrow J_e$ transition and we have taken into account the effect of a static magnetic field and the transit-time broadening. We present experimental data obtained with sodium vapor and in particular we compared the two-wave mixing lineshapes on the D_1 and the D_2 transitions and show that these shapes are inverted. We also study how the two-wave and four-wave mixing lineshapes evolve in a static magnetic field and we observe that the shift of these lines involve the g-factor of each hyperfine component of the ground state. This shows that, even for large detunings from resonance, one should not forget the coupling between the electrons and nucleus momenta.

II. THEORY

a. Description of the model

We consider atoms interacting with two copropagating incident fields (Fig.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \bar{e}_x &= \Re\left(\sqrt{I_1} e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} \bar{e}_x\right) \\ \mathcal{E}_2 \bar{e}_y &= \Re\left(\sqrt{I_2} e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)} \bar{e}_y\right) \end{aligned} \quad (1)$$

The frequencies ω_1 and ω_2 are close to an atomic frequency ω_a corresponding to a transition between levels of total angular momenta J_g and J_e . Moreover, the detuning $\Delta = \omega_1 - \omega_a$ is assumed to be very large compared to the Doppler and natural widths of the transition and compared to $\delta = \omega_1 - \omega_2$. We neglect any collisional effects that may perturb the optical coherences and we use a perturbation theory to third order. These assumptions permit to describe the vapor with a motionless atom model [5] and to neglect the absorptive effects by comparison with the dispersive ones.

If the length of the medium is sufficiently small, the total field in the sample can be described as a single frequency field with a slowly varying polarization:

$$\mathcal{E} \bar{e}_\lambda = \Re\left(\vec{E}(t, z) e^{-i(\omega t - kz)}\right) \quad (2)$$

$$\text{with: } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$\vec{E}(t, z)$ is a field of intensity $I_0 = I_1 + I_2$ with a time-dependent polarization \vec{e}_λ :

$$\vec{e}_\lambda = (x(z, t) \vec{e}_x + y(z, t) \vec{e}_y) \quad (3)$$

$$\text{with: } x(0, t) = \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} e^{-i\frac{\delta t}{2}} \text{ and } y(0, t) = \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} e^{i\frac{\delta t}{2}}$$

(by choosing the time-origin, the relative phase between the two fields can be equal to zero at the time-origin)

We call γ the relaxation rate of the ground state and Γ the radiative width of the excited state. In addition, the atoms may be submitted to a transverse magnetic field along the x-axis, the Larmor frequencies of the ground and excited states being respectively equal to ω_g and ω_e . We suppose that γ , ω_g and ω_e have the same order of magnitude but are very small compared to the natural width of the excited state. The field intensity I_0 is supposed sufficiently to be weak so that the excited state follows adiabatically the ground state.

We can then use an optical pumping approach where optical coherences adiabatically follow the evolution of population. Consequently, the optical pumping rate γ_p must be much smaller than Γ [6].

In addition, we suppose that the optical process is linear ($\gamma_p \ll \gamma$).

b. Evolution equations for the density matrix of the atoms

Using the preceding assumptions, it can be shown that the reduced density matrix of the ground and excited states, respectively written ρ_g and ρ_e verify the coupled equations [6]:

$$\frac{d}{dt}\rho_g = -\gamma_p A - \gamma\rho_g - i\omega_g [P_g \cdot J_x \cdot P_g, \rho_g] + \tau(\rho_e) \quad (4.a)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_e = \gamma_p E - \Gamma\rho_e - i\omega_e [P_e \cdot J_x \cdot P_e, \rho_e] \quad (4.b)$$

where:

$$\gamma_p = \Gamma \frac{d^2 I_0}{4\hbar^2 \Delta^2}$$

$$A = (\vec{e}_\lambda^* \cdot \hat{D}) P_e (\vec{e}_\lambda \cdot \hat{D})$$

$$E = \frac{1}{2J_g + 1} (\vec{e}_\lambda \cdot \hat{D}) P_g (\vec{e}_\lambda^* \cdot \hat{D})$$

\hat{D} is equal to \vec{D}/d where \vec{D} is the electric dipole moment operator and d the reduced density matrix element of \vec{D} , $\tau(\rho_e)$ is an operator which describes the repopulation by spontaneous emission from the excited state. P_e and P_g are respectively the projector on the ground and the excited states. J_x is the x-component of the angular momentum.

A classical method to solve (4) is to project these equations on a irreducible tensorial set basis $T_q^{(k)}$ [7]. One can show that the components of A and E are:

$$\begin{aligned} A_q^{(k)} &= (-1)^k B_k(J_g, J_e) \phi_q^{(k)}(\vec{e}_\lambda) \\ E_q^{(k)} &= B_k(J_e, J_g) \phi_q^{(k)}(\vec{e}_\lambda) \end{aligned} \quad (5)$$

where:

$$B_k(J_1, J_2) = (-1)^{J_1 + J_2 + k + 1} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ J_1 & J_1 & J_2 \end{Bmatrix}$$

$\phi_q^{(k)}$ is equal to [8]:

$$\phi_q^{(k)} = \sum_{p,p'} (-1)^{p+1} \alpha_p^* \alpha_{-p} \langle 11 p p' | k q \rangle$$

where α_p are the components of the polarization on the standard set:

$$\vec{e}_\lambda = \sum_p (-1)^p \alpha_{-p} \vec{e}_p \text{ and } \langle 11 p p' | k q \rangle \text{ a Clebsh-Gordan coefficient.}$$

Using the expansion of ρ_g :

$$\rho_g = \sum_{k,q} \rho_q^{(k)} T_q^{(k)}(J_g) \text{ where } \rho_q^{(k)} = (-1)^q \langle T_{-q}^{(k)}(J_g) \rangle \quad (6)$$

we transform (4) in:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_q^{(k)} = & -\gamma \rho_q^{(k)} - i \frac{\omega_g}{2} \left[\rho_{q+1}^{(k)} \sqrt{k(k+1) - q(q+1)} + \rho_{q-1}^{(k)} \sqrt{k(k+1) - q(q-1)} \right] \\ & + \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_k(J_g, J_e) \phi_q^{(k)} \end{aligned} \quad (7)$$

where:

$$\mathcal{B}_k(J_g, J_e) = (-1)^{k+1} \left[\mathcal{B}_k(J_g, J_e) + (-1)^{J_g + J_e} (2J_e + 1) \frac{\Gamma_r}{\Gamma_e} \begin{Bmatrix} J_e & J_e & k \\ J_g & J_g & 1 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_k(J_e, J_g) \right]$$

Γ_r is the repopulation rate from the excited state to the ground state. \mathcal{B}_k is composed of two terms: the first one corresponds to the "depopulation" of the ground state and the second one to the repopulation from the excited state. As the fields propagate along the z-axis, only $\phi_0^{(1)}$, $\phi_{\pm 2}^{(2)}$ and $\phi_0^{(2)}$ are different from zero [8].

Consequently, the equations of evolution of the $Q_q^{(k)}$ are:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Q_{\pm 1}^{(1)} &= -\gamma Q_{\pm 1}^{(1)} - i \frac{\omega_g}{\sqrt{2}} Q_0^{(1)} \\
\frac{d}{dt} Q_0^{(1)} &= -\gamma Q_0^{(1)} - i \frac{\omega_g}{\sqrt{2}} [Q_1^{(1)} + Q_{-1}^{(1)}] + \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_1(J_g, J_e) \sqrt{2} \Im(x^* y) \\
\frac{d}{dt} Q_{\pm 2}^{(2)} &= -\gamma Q_{\pm 2}^{(2)} - i \omega_g Q_{\pm 1}^{(2)} + \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_2(J_g, J_e) \left(\frac{1}{2} (|y|^2 - |x|^2) \pm \frac{1}{2} (xy^* + x^* y) \right) \\
\frac{d}{dt} Q_{\pm 1}^{(2)} &= -\gamma Q_{\pm 1}^{(2)} - i \omega_g Q_{\pm 2}^{(2)} - i \omega_g \sqrt{\frac{3}{2}} Q_0^{(2)} \\
\frac{d}{dt} Q_0^{(2)} &= -\gamma Q_0^{(2)} - i \omega_g \sqrt{\frac{3}{2}} [Q_{-1}^{(2)} + Q_1^{(2)}] + \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_2(J_g, J_e) \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned} \tag{8}$$

c. Evolution equations of the density matrix of the field

We can write equations similar as (4) for the density matrix of the fields [8] [9] which is defined as:

$$\Pi = \begin{pmatrix} |x|^2 & xy^* \\ x^* y & |y|^2 \end{pmatrix}$$

Since we assume that the absorptive effects are negligible compared to the dispersions ones, Π verify:

$$\frac{d\Pi}{dz} = -i k \chi [B, \Pi] \tag{9}$$

where χ is equal to $\frac{Nd^2}{2\epsilon_0 \hbar \Delta}$, and N the density of atoms.

The matrix elements of B are defined as:

$$\langle \tilde{e}_i | B | \tilde{e}_j \rangle = \text{Tr}_g \left\{ Q_g (\tilde{e}_i^* \cdot \hat{D}) P_e (\tilde{e}_j \cdot \hat{D}) \right\} \tag{10}$$

The operators $(\tilde{e}_i^* \cdot \hat{D}) P_e (\tilde{e}_j \cdot \hat{D})$ can be projected onto an irreducible tensorial set basis $T_q^{(k)}(J_g)$.

Using these results, we can show that:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{e}_x | [B, \Pi] | \tilde{e}_x \rangle &= i B_1 (J_g, J_e) \sqrt{2} \langle T_0^{(1)} \rangle \Re e(x^* y) - B_2 (J_g, J_e) [\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle] \Im m(x^* y) \\
\langle \tilde{e}_x | [B, \Pi] | \tilde{e}_y \rangle &= -xy^* B_2 (J_g, J_e) [\langle T_2^{(2)} \rangle + \langle T_{-2}^{(2)} \rangle] \\
&\quad + \frac{i}{2} (|y|^2 - |x|^2) [\sqrt{2} B_1 (J_g, J_e) \langle T_0^{(1)} \rangle + B_2 (J_g, J_e) (\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle)] \\
\langle \tilde{e}_y | [B, \Pi] | \tilde{e}_x \rangle &= -\langle \tilde{e}_x | [B, \Pi] | \tilde{e}_y \rangle^* \\
\langle \tilde{e}_y | [B, \Pi] | \tilde{e}_y \rangle &= -\langle \tilde{e}_x | [B, \Pi] | \tilde{e}_x \rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

We recall that $\langle T_q^{(k)} \rangle = (-1)^q \rho_{-q}^{(k)}$ [8].

There are only three different terms which appear in (11): $\langle T_0^{(1)} \rangle$, which is proportional to $\langle J_z \rangle$, is the z-component of the orientation, and $\langle T_{-2}^{(2)} \rangle$ and $\langle T_2^{(2)} \rangle$, which are proportional to $\langle (J_x \pm iJ_y)^2 \rangle$, are the components of the transverse alignment [8]. The system of equations (4) and (9) is general. We have only assumed that the absorption is negligible. It can be applied for any transition, any optical thickness or even any polarization of the fields. In our case, we will suppose that the medium is optically thin, and more precisely that $k\chi l$ (γ_p/γ) is very small compared to one.

d. Theoretical expression for the intensities of the transmitted beams

The intensity of the output field polarized along the x-axis is obtained from formulae (9) and (11):

$$I_x^{\text{out}} = I_1 - i I_0 k\chi l \left[i B_1 (J_g, J_e) \sqrt{2} \langle T_0^{(1)} \rangle \Re e(x^* y) - B_2 (J_g, J_e) (\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle) \Im m(x^* y) \right] \tag{12}$$

The output intensity I_y^{out} is equal to $I_0 - I_x^{\text{out}}$, because the total intensity is conserved since the absorption has been neglected.

Finally, using the resolution of (8), we find:

$$I_x^{\text{out}} = I_1 - k\chi l \frac{\gamma_p}{(2J_g + 1)\gamma} \frac{I_1 I_2}{I_0} \eta \frac{1}{1 + v^2} \left[\left(C_1(J_g, J_e) - C_2(J_g, J_e) \right) - \left(C_1(J_g, J_e) + C_2(J_g, J_e) \right) (\sin 2\delta t - v \cos 2\delta t) \right] \quad (13)$$

where

$$\eta = \frac{1 + u^2}{1 + u^2 + \omega_g^2/\gamma^2}; \quad v = \frac{1 + u^2 - \omega_g^2/\gamma^2}{1 + u^2 + \omega_g^2/\gamma^2} u; \quad u = \frac{\delta}{\gamma}$$

and

$$C_k(J_g, J_e) = B_k(J_g, J_e) \mathcal{B}_k(J_g, J_e)$$

The second term of this formula is associated with a third-order nonlinearity proportional to $I_1 I_2$. Moreover, one can note that this term is the sum of a static component and of a modulated one. The static component is associated with a two-wave mixing process [2], whereas the modulated component results from the beating between E_x and a field whose angular frequency is equal to $\omega_1 - 2\delta$. This last field is generated through a four-wave mixing process, which corresponds to the absorption of two photons of angular frequency ω_2 and polarized along the y-axis, and to the simultaneous emission of two photons polarized along the x-axis and of angular frequencies ω_1 and $2\omega_2 - \omega_1$. We also see from formula (13) that the magnetic field has two effects. On the first hand, it is well-known that a transverse magnetic field destroys an orientation or an alignment parallel to the z-axis [6]. Indeed, one remarks that the transfer term is divided by $1 + u^2 + \omega_g^2/\gamma^2$. On the other hand, one can expect a splitting of the curve giving I_x^{out} versus δ , when a transverse magnetic field is applied in the sample, the two resonances corresponding to δ equal to $\pm \sqrt{\omega_g^2 - \gamma^2}$. These resonance are due to the fact that the mean values of the orientation and of the alignment are modulated at the frequency δ . These two effects have been observed experimentally and are discussed later.

e. Amplitude and sign of the transfer

First, we discuss the case of a transition starting from a ground state ($J_g = 1/2$). In that case, there is no alignment in the ground state and the coefficient B_2 is null. This case has already been studied in a former paper [2], but we can note that the same results can be recovered by this more general method. In fact, one can remark from (11) that the term

$$i k\chi l \left[\langle \tilde{e}_x | [B, \Pi] | \tilde{e}_y \rangle - \langle \tilde{e}_y | [B, \Pi] | \tilde{e}_x \rangle \right] \text{ is null.}$$

That means that $I_0 (xy^* - x^*y)$, which is equal to $|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2$ (where \mathcal{E}_+ and \mathcal{E}_- are the circular components of the total field) is constant during the propagation. This result shows that in this case there cannot be energy transfer from one circular component of the field to the other.

Secondly, the sign of the transfer curve depends on the product $B_1(J_g, J_e) \mathcal{B}_1(J_g, J_e)$ which depends on the upper state angular momentum J_e . The ground-state orientation is proportional to $\mathcal{B}_1(J_g, J_e)$ which has the same sign for the two transitions in Kastler optical pumping [6]. On the contrary, $B_1(J_g, J_e)$ has an opposite sign for the ($J_g=1/2 \rightarrow J_e=1/2$) transition and for the ($J_g=1/2 \rightarrow J_e=3/2$) transition. One thus expects that the two transfer curves $I_x^{\text{out}}(\delta)$ look symmetric one from each other. Moreover there may be an additional reduction factor on the transition ($J_g=1/2 \rightarrow J_e=3/2$) if there are collisions in the sample. In fact, for a transition ($J_g \rightarrow J_g+1$) the sign of the "depopulation" term in $\mathcal{B}_1(J_g, J_e)$ is opposite to the sign of the repopulation term. In absence of collision, the sum has the sign of the second term. Collisions decrease the repopulation term and thus the ground state orientation value. In particular, there is a range of pressure where this orientation is close to zero [10], and for higher pressure values, the sign of the orientation is the opposite of the sign obtained without collision.

f. Transit -time effect

In a physical experiment, the fields are not plane waves and can often be described by gaussian beams. Moreover, the atoms have a velocity and experiment different intensities when they cross the beam. This transit-time depends on the velocity of each atom and can be considered as an inhomogeneous relaxation. Previously, we have empirically introduced an homogeneous relaxation rate. The aim of this section is to correctly describe the transit-time effect. We keep an homogeneous relaxation time γ_c^{-1} which may for example be due to collisions on the walls of the cell. This time is assumed to be very long compared to the mean transit-time.

The fields \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 are gaussian beams, whose waists are assumed to be equal and located in the middle of the cell.

We also assume that the Rayleigh length of the beams is very large compared to the length of the cell, so that the intensity of the total field can be written:

$$I = I_0 e^{-\frac{2r^2}{W_0^2}} \quad (14)$$

r is the distance from the z -axis, equal to $\sqrt{x^2+y^2}$ and the beam waist W_0 does not depend on z .

We consider one atom of velocity \vec{v} . Its distance from the z -axis is equal to r at a time t . The contribution of this atom to $\langle T_0^{(1)} \rangle$ and $\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle$ may be deduced from equations (8) and (14). We first solve the equations for $Q_q^{(1)}(r, \vec{v}, t)$ ($q=0, \pm 1$), which is the contribution of this atom to the orientation. These coupled equations are:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_0^{(1)}(r, \vec{v}, t) &= -\gamma_c Q_0^{(1)}(r, \vec{v}, t) - i \frac{\omega_g}{\sqrt{2}} [Q_{-1}^{(1)}(r, \vec{v}, t) + Q_1^{(1)}(r, \vec{v}, t)] \\ &\quad + \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \exp\left(-\frac{2r^2}{W_0^2}\right) \mathcal{B}_1(J_g, J_e) \sqrt{2} \Im(x^* y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{d}{dt} Q_{-1}^{(1)}(r, \vec{v}, t) + \frac{d}{dt} Q_1^{(1)}(r, \vec{v}, t) \right] &= -\gamma_c \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_{-1}^{(1)}(r, \vec{v}, t) + Q_1^{(1)}(r, \vec{v}, t)] - i \omega_g Q_0^{(1)}(r, \vec{v}, t) \end{aligned} \quad (15)$$

The system of equation (15) can be easily solved and we obtain:

$$\langle T_0^{(1)} \rangle(r, \vec{v}, t) = \Re e \left\{ \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_1 \frac{E_1 E_2}{I_0} \sqrt{2} \int_{t_0}^t e^{-(\gamma_c + i\omega_g)(t-t')} e^{-\frac{2r'^2}{W_0^2}} \sin \delta t' dt' \right\} \quad (16.a)$$

where r' may be expressed as:

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + v_x^2 \tau^2 + v_y^2 \tau^2 + 2v_x x \tau + 2v_y y \tau \\ \tau &= t' - t; \quad v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x \quad \text{and} \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

The equations verified by $\rho_q^{(2)}(r, \vec{v}, t)$ (the contribution of the same atom to the alignment) are solved using the same technic; we obtain:

$$\left(\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle \right) (r, \vec{v}, t) = -2i \Re e \left\{ \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_2 \frac{E_1 E_2}{I_0} \int_{t_0}^t e^{-(\gamma_c + i\omega_g)(t-t')} e^{-\frac{2r^2}{W_0^2}} \cos \delta t' dt' \right\}$$

(16.b)

The two equations (16) have a very similar expression, we thus proceed only with the expression of the longitudinal orientation.

To get the atomic orientation we average the preceding expression on the velocity distribution which is a gaussian whose "width" at $1/e$ is equal to $2v_D$. Furthermore, we assume that the time interval $(t - t_0)$ is very large compared with γ_c^{-1} so that the steady state regime is attained at time t . Then we obtain:

$$\langle T_0^{(1)} \rangle (r, t) = \Re e \left\{ \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \mathcal{B}_1 \frac{E_1 E_2}{I_0} \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\gamma_c + i\omega_g)\tau} e^{-\frac{2r^2}{W_0^2} \frac{1}{1 + \gamma_0^2 \tau^2}} \sin \delta(t + \tau)}{1 + 2\gamma_0^2 \tau^2} d\tau \right\}$$

(17)

where $\gamma_0 = \frac{v_D}{W_0}$

Finally, the mean value of $\langle T_0^{(1)} \rangle$ is obtained by averaging (17) over the position r of the atom at time t :

$$\langle T_0^{(1)} \rangle (r, t) = \frac{\gamma_p \mathcal{B}_1 (J_g, J_e) E_1 E_2}{(2J_g + 1) I_0 \sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{\cos \delta \tau \cos \omega_g \tau e^{-\gamma_c \tau} d\tau}{1 + \gamma_0^2 \tau^2} \sin \delta t - \int_0^\infty \frac{\sin \delta \tau \cos \omega_g \tau e^{-\gamma_c \tau} d\tau}{1 + \gamma_0^2 \tau^2} \cos \delta t \right]$$

(18)

Since we have assumed that γ_c is very small compared to γ_0 (inverse of the mean transit-time) we can replace $\exp(-\gamma_c \tau)$ by one.

$\langle T_0^{(1)} \rangle$ is then equal to:

$$\langle T_0^{(1)} \rangle = \frac{\gamma_p \mathcal{B}_1(J_g, J_e) E_1 E_2 \sqrt{2\pi}}{(2J_g + 1) I_0 8\gamma_0} \left[\left(e^{-\frac{|\omega_g - \delta|}{\gamma_0}} + e^{-\frac{|\omega_g + \delta|}{\gamma_0}} \right) \sin \delta t - \left(f\left(\frac{\delta - \omega_g}{\gamma_0}\right) + f\left(\frac{\delta + \omega_g}{\gamma_0}\right) \right) \cos \delta t \right] \quad (19)$$

where the function f is equal to: $f(x) = \frac{e^{-x} \text{Ei}(x) - e^x \text{Ei}(-x)}{\pi}$ and Ei is the exponential-integral function [11].

The resolution of (16.b) is identical and we obtain:

$$\langle T_2^{(2)} \rangle - \langle T_{-2}^{(2)} \rangle = \frac{-2i \gamma_p \mathcal{B}_2(J_g, J_e) E_1 E_2 \pi}{(2J_g + 1) I_0 8\gamma_0} \left[\left(e^{-\frac{|\omega_g - \delta|}{\gamma_0}} + e^{-\frac{|\omega_g + \delta|}{\gamma_0}} \right) \cos \delta t + \left(f\left(\frac{\delta + \omega_g}{\gamma_0}\right) + f\left(\frac{\delta - \omega_g}{\gamma_0}\right) \right) \sin \delta t \right] \quad (20)$$

From the formula (12), (19) and (20), we find the following expression for I_x^{out} :

$$I_x^{\text{out}} = I_1 - k\chi l \frac{\gamma_p}{2J_g + 1} \frac{I_1 I_2}{I_0} \frac{\pi}{8\gamma_0} \left[\left(C_1(J_g, J_e) - C_2(J_g, J_e) \right) \left(f\left(\frac{\delta + \omega_g}{\gamma_0}\right) + f\left(\frac{\delta - \omega_g}{\gamma_0}\right) \right) - \left(C_1(J_g, J_e) + C_2(J_g, J_e) \right) \left[\left(e^{-\frac{|\omega_g - \delta|}{\gamma_0}} + e^{-\frac{|\omega_g + \delta|}{\gamma_0}} \right) \sin 2\delta t - \left(f\left(\frac{\delta + \omega_g}{\gamma_0}\right) + f\left(\frac{\delta - \omega_g}{\gamma_0}\right) \right) \cos 2\delta t \right] \right] \quad (21)$$

We note that there are still two resonances at $(\delta = \omega_g)$ and $(\delta = -\omega_g)$ when a magnetic field is applied. The comparison with (13) shows that the shapes of the four-wave mixing are different in the case of homogeneous and transit-time broadening.

g. Variation of the Hanle effect with the relaxation process

Now, we show that an Hanle effect experiment performed in the same experimental conditions allows one to test the validity of this relaxation model. We thus consider an atomic vapor optically pumped by a circularly polarized pump beam, the created orientation is detected through the Faraday effect induced on a linearly polarized probe beam. The two applied beams have the same waist. When the two incident fields have the same frequency ($\delta=0$), it is no longer possible to eliminate the relative phase ($\varphi_1 - \varphi_2$) by an appropriate choice of the time origin. It is then necessary to replace δt by $(\varphi_1 - \varphi_2)$ and to set $\delta=0$ in the preceding formulae (21). We suppose that the field $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ is circularly polarized and $\varphi_1 - \varphi_2$ is equal to $\pi/2$.

The expression of the orientation is:

$$\langle J_z \rangle = \frac{\gamma_p}{(2J_g + 1)\gamma} \frac{1}{1 + \omega_g^2/\gamma^2} C_1(J_g, J_e) \quad (22.a)$$

for an homogeneous relaxation rate γ , and:

$$\langle J_z \rangle = \frac{\gamma_p}{(2J_g + 1)} \frac{\pi}{4\gamma_0} e^{-|\omega_g|/\gamma} C_1(J_g, J_e) \quad (22.b)$$

for an inhomogeneous relaxation rate.

The variation of the orientation versus a magnetic field has a lorentzian behavior in the first case and an exponential behavior in the second case.

III. EXPERIMENTAL STUDY

a. Experimental set-up

We present now the results of an experiment done with sodium atoms. The atomic transitions that we have studied are the D_1 ($3S_{1/2} - 3P_{1/2}$) and the D_2 ($3S_{1/2} - 3P_{3/2}$) transitions. The 3-cm long cell containing sodium atoms is made with Corning 1720 glass, the windows being cut at normal incidence. The transmission of the cell is thus independent of the polarization and there is no residual birefringence. The temperature of this cell is kept in the range $[200^\circ\text{C}, 240^\circ\text{C}]$ and the Doppler width of the atoms is of the order of 1 GHz. The cell is placed at the center of three pairs of Helmholtz coils which allows one to control the applied magnetic fields.

The pump laser is a home-made c.w dye laser which delivers a monochromatic beam of frequency ω_1 . Its power is 600 mW and its jitter is about 2 MHz. The output beam is then split into two beams by a tunable beam splitter, made by an half-wave plate and a Glan

prism (Fig.2). One of the two fields is sent into two acousto-optic modulators which shifts the incident frequency by respectively Ω and $-\Omega-\delta/2$.

Then, by retroreflecting this beam into the acousto-optic modulators, we obtain a beam whose frequency has been shifted by an amount equal to $-\delta$. This system has been used to avoid any modification of the direction of the beam during the sweeping of δ . Then the two beams \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 , which are cross-polarized are recombined in a Glan prism G_1 , and sent into the cell. The beams are focussed into the cell by the lens L_1 which can be changed to vary the spot radius.

At the exit of the cell, another Glan prism G_2 splits the output beam into its two polarization components. We can then study either the total intensity $|E_x^{\text{out}}|^2$ or the beat between E_x^{out} and a local oscillator of intensity I_{10} , whose frequency, equal to $\omega_1 + \Omega_{10}$, has been shifted by an acousto-optic modulator.

b. Relevant parameters for the experiment

Most of the experiments have been performed on the D_1 line. Actually, we have observed that the signal obtained on the ($J_g=1/2 \rightarrow J_e=3/2$) transition is weaker than the signal obtained on the ($J_g=1/2 \rightarrow J_e=1/2$) transition. The typical detuning in our experiment is equal to 4.5 GHz. The power P of the fields at the entrance of the cell is of the order of 100 mW and the spot radius is about 400 μm . In this case the resonance Rabi frequency Ω_c obtained for a circular polarization is:

$$\Omega_c = \frac{d}{h} \sqrt{\frac{4P}{3\pi W_0^2 c \epsilon_0}} \quad (23)$$

Using the numerical value of the dipole moment d [12], we find that:

$$\Omega_c = 500 \text{ MHz}$$

That gives a typical optical pumping rate of the order of:

$$\gamma_p = 150 \text{ kHz}$$

This value justifies the optical pumping approach. We note that the nuclear spin has been neglected. In fact, if we take it into account, this does not change the order of magnitude of the preceding parameters.

We have first done the Hanle effect experiment described in part (II.g). The cusp shape of the experimental curve (Fig.3) permits to conclude that the dominant relaxation process is the transit -time effect (formula 22).

c. Variation of the output intensity versus δ

To study the dependence of the output field intensity versus δ , we have first cancelled the magnetic field. An experimental recording of I_x^{out} and I_y^{out} versus δ is shown in figure 4. The curves are well described by formula (21). The value of $\gamma_0 = 320 \text{ kHz}$ deduced from the theoretical approach is in good agreement with the value deduced from experiment. The difference may be due to the uncertainties on experimental conditions and to the saturation of the optical pumping.

We remark the symmetry between the two curves $I_x^{\text{out}}(\delta)$ and $I_y^{\text{out}}(\delta)$ which demonstrate the transfer from one polarization component to the other. However, because of a residual absorption in the cell, the sum $(I_x^{\text{out}}(\delta) + I_y^{\text{out}}(\delta))$ is not equal to the total input power. On figure 5, we compare the variation of I_x^{out} versus δ when the laser is tuned either above the D_1 or above the D_2 line. One can remark that the two curves appear as mirror-images in agreement with the theoretical analysis. In addition, one can note that the amplitude of the transfer for the D_2 line is weaker than the one obtained for the D_1 line for a similar detuning. This effect may be due to collisional relaxation in the excited level whose effect on the ground state orientation depends on the atomic transition (cf II.b). These experiments have been done with a positive detuning. Symmetric curves have been obtained for a negative detuning.

d. Variation of the output intensity versus ω_g

In the theoretical part, we have shown that a transverse magnetic field B_x splits each curve into two curves separated by a distance proportional to B_x (see formulas (13) and (21)). We show in figure (6.a). the amplitude of the four-wave mixing emission versus δ , when a transverse magnetic field B_x is applied. Indeed, we see that the magnetic field is strong enough to separate the two components. Moreover, we deduce from the position of the maxima that the absolute value of the gyromagnetic factor that is necessary to interpret this position is of the order of 700 kHz.G^{-1} . This value differs from the gyromagnetic factor of a $S=1/2$ ground state, which is equal to 2.8 MHz.G^{-1} . This difference can be explained if we include the nuclear spin $I=3/2$. Actually, the Landé factor g_F for the $F=2$ and the $F=1$ hyperfine sublevels are $1/4$ and $-1/4$ which is just the factor necessary to describe the experimental measurement. We have plotted the variation of the four-wave mixing emission versus B_x , for a very small value of δ (Fig 6.b) and for the same experimental conditions as the preceding curve. These curves also need the value $|g_F| = 1/4$ for the gyromagnetic factor to be consistent with the theory.

Finally, we show in figure (7.a) the variation of the static component of the output intensity I_x^{out} versus δ when a transverse magnetic field is applied. We observe the splitting of the transfer curve into its two components, in agreement with theory. Measurements of the frequency δ_s for which the transfer is zero have been made for several values of the magnetic field. The experimental values obtained for the Larmor frequencies are in agreement with the theoretical line provided that one still takes $|g_F| = 1/4$ (Fig 7.b). To conclude we note that the addition of a huge longitudinal magnetic field, suppresses the splitting of the curves as it can be expected.

IV) CONCLUSION

We have developed a method for calculating the four-wave mixing and the redistribution of photons between two linearly cross-polarized beams nearly resonant with an atomic transition. We have shown that a good agreement is obtained between theory and experiment.

This approach can be useful to fully understand the effects associated with cross-polarized nonlinearities. Indeed, it appears that the cross-polarized nonlinearities are generally larger than the nonlinearities involving beams of same linear polarization by a factor of the order of Γ/γ (radiative width of the upper level divided by the relaxation rate of the ground level). These cross-polarized nonlinearities are thus of fundamental importance in many problems involving the interaction of light with relatively dense vapors and in particular for the study of instabilities [13].

REFERENCE:

- [1] Y. Shevy, Laser Spectroscopy IX, ed. by M.S. Feld, J.E. Thomas, and A. Mooradian (Academic, San Diego, 1989) p.29.
- [2] G. Grynberg, M. Vallet and M. Pinard, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 701.
- [3] P.R. Berman, Phys. Rev. A 43 (1991) 1470.
- [4] C. Cohen-Tannoudji in Fundamental Systems in Quantum Optics ed. by J. Dalibard, J.M. Raymond and J. Zinn-Justin (Observer Science Publishers 1991).
- [5] M. Pinard and G. Grynberg, Phys. Rev. A 32 (1985) 3772.
- [6] J.P. Barrat and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. Rad. 22 (1961) 329 and 443.
- [7] U. Fano and G. Racah, Irreducible Tensorial Sets, (1957) Academic Press N.Y.
- [8] A. Omont, Progress in Quantum Electronics 5 (1977) 69.
- [9] C.Cohen-Tannoudji and F.Laloë, J. Phys. 28 (1967) 505 and 722.
- [10] H.G. Dehmelt, Phys. Rev. 105 (1957) 1487.
- [11] Handbook of Mathematical Functions, Ed. by M.Abramovitz and I.A.Segun, (1985) Dover Publications N.Y.
- [12] Wiese, Smith and Miles, Atomic Transition Probabilities 2 (1969) NSRDS-NBS.
- [13] D.J. Gautier, M.S. Malcuit, A.L. Gaeta and R.W. Boyd, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1721. J.Y. Courtois and G. Grynberg (to be published).

FIGURE CAPTIONS

Figure 1: Principle of the experiment.

Figure 2: Experimental setup.

Figure 3: Hanle effect in the ground state of sodium atoms detected through the rotation of the plane of polarization of a probe beam. The cusp shape of the curve indicates that the dominant relaxation process is the transit-time broadening.

Figure 4: Mean value of the transmitted intensity for the x and the y polarization versus δ . The redistribution of photons between the two beams is apparent on these recordings. These curves have been obtained for a detuning $\Delta = 4.5 (\pm 0.3)$ GHz from the center of the D_1 resonance line. The experiment has been done with two beams of intensity $P_1 = P_2 = 110 (\pm 10)$ mW focussed on a spot radius $w = 400 (\pm 20)$ μm . Because of the absorption in the cell, the maximum value of $I_x^{\text{out}}(\delta)$ is smaller than I_1 . The dashed line has been deduced from the theoretical expression (21).

Figure 5: Variation of I_x^{out} versus δ for the D_1 and the D_2 transitions in sodium.
 a) The laser frequency is on the blue side of the D_1 line.
 b) The laser frequency is on the blue side of the D_2 line.

Figure 6: Variation of E_{-1} the four-wave mixing component of E_x^{out} .
 a) versus δ/γ , ω_g/γ being equal to 6.5
 b) versus ω_g/γ , δ/γ being equal to 0.1
 The solid line correspond to the theoretical formula (21) using the hyperfine g-factor.

Figure 7: a) Variation of the mean value of I_x^{out} versus δ when a transverse magnetic field is applied . To explain the distance between the two components of the curve one needs to take into account the hyperfine g-factor.
 b) Variation of the splitting δ_s versus the magnetic field. The line corresponds to a slope equal to 700 kHz.G⁻¹

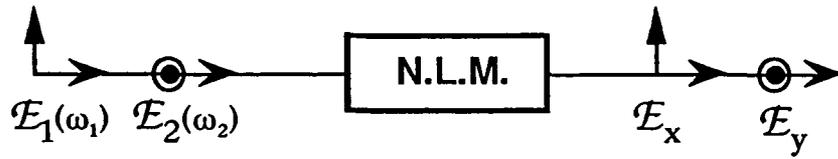


Figure 1

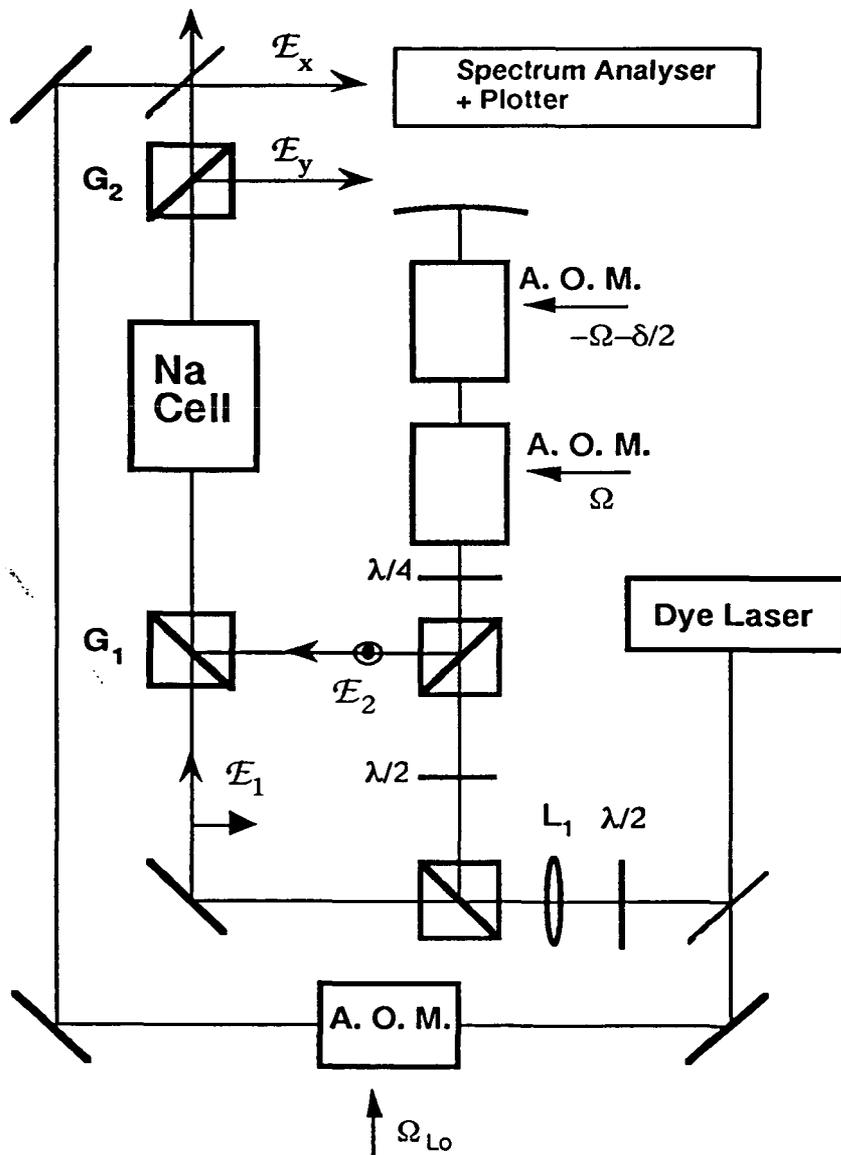


Figure 2

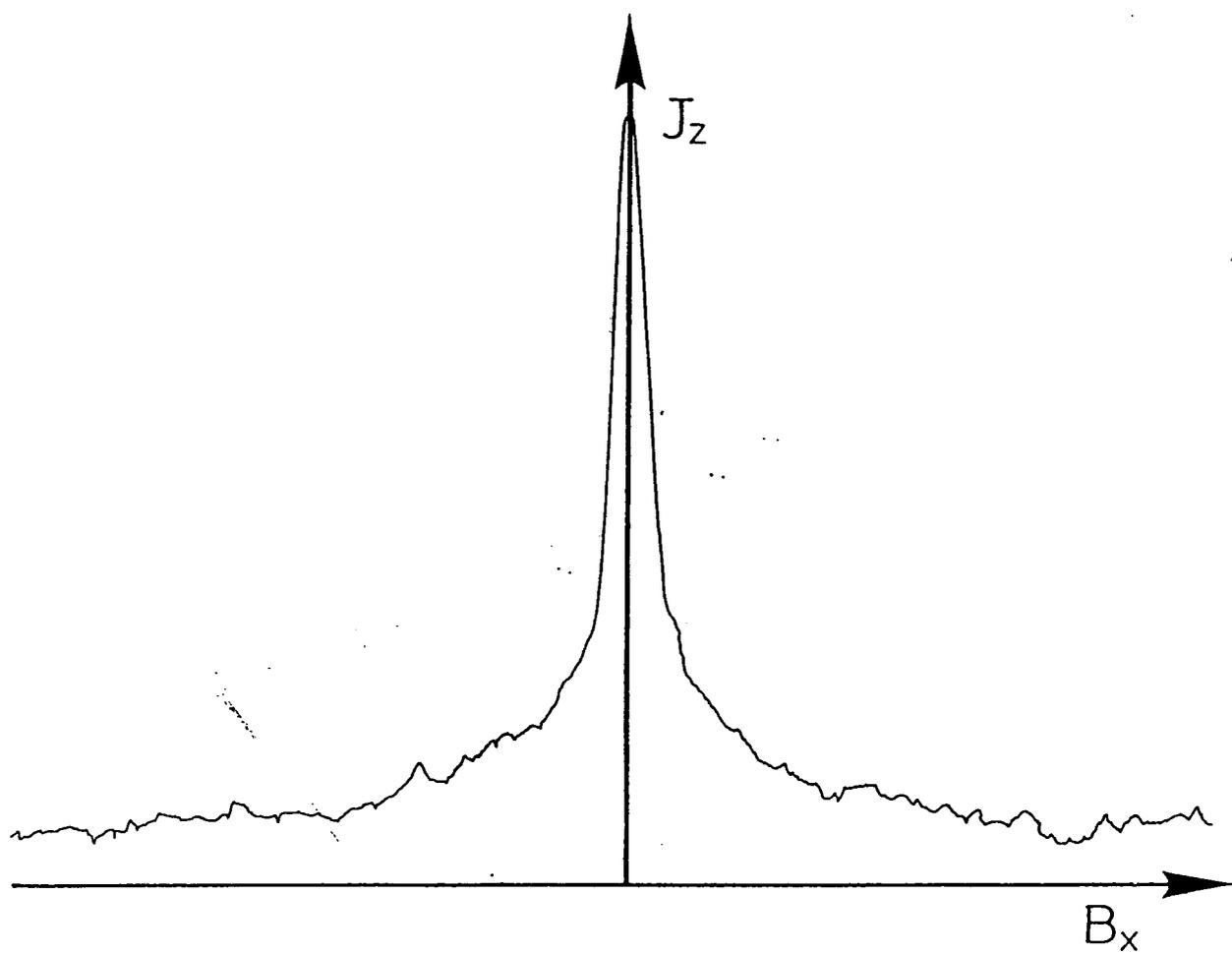


Figure 3

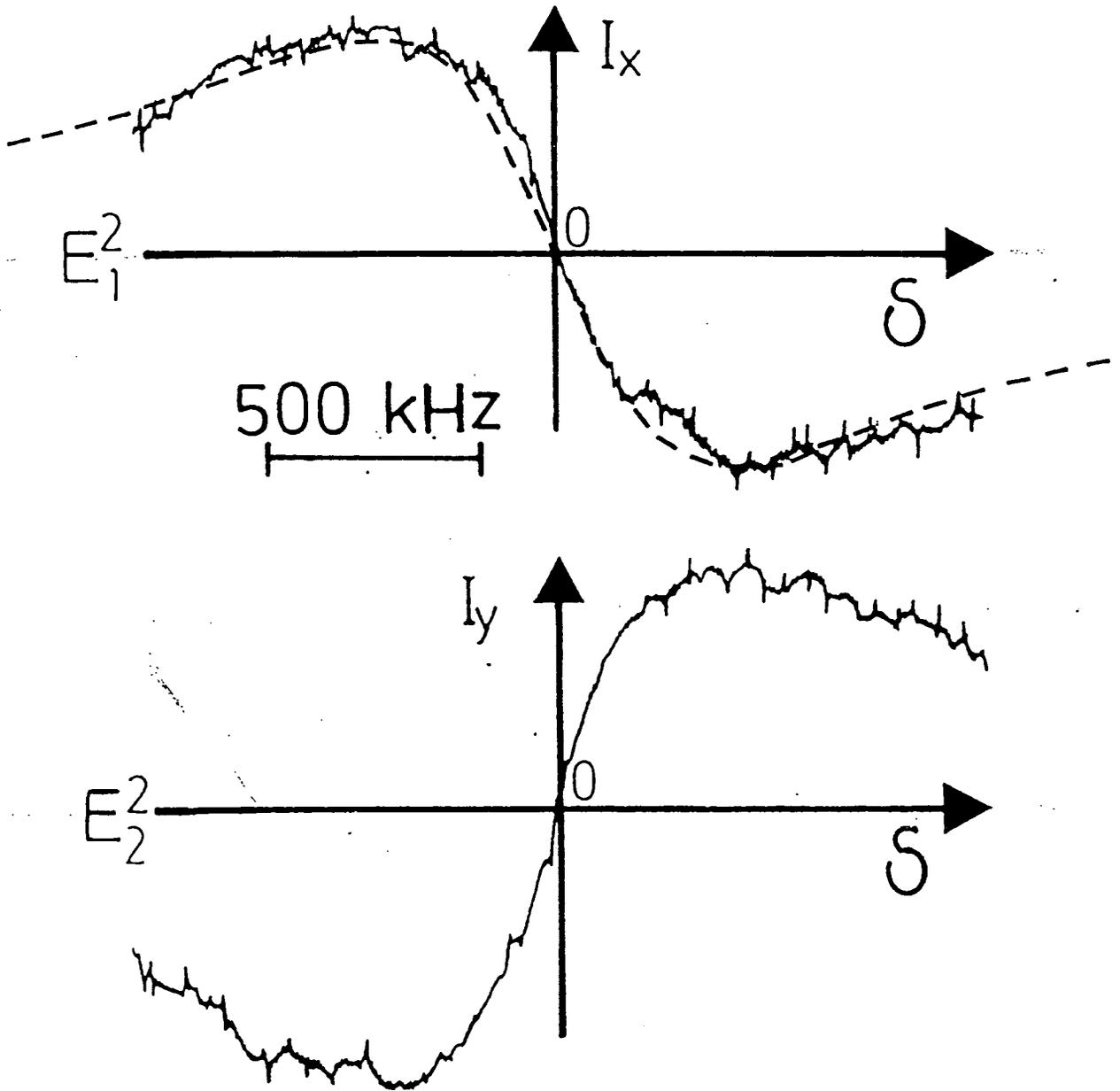


Figure 4

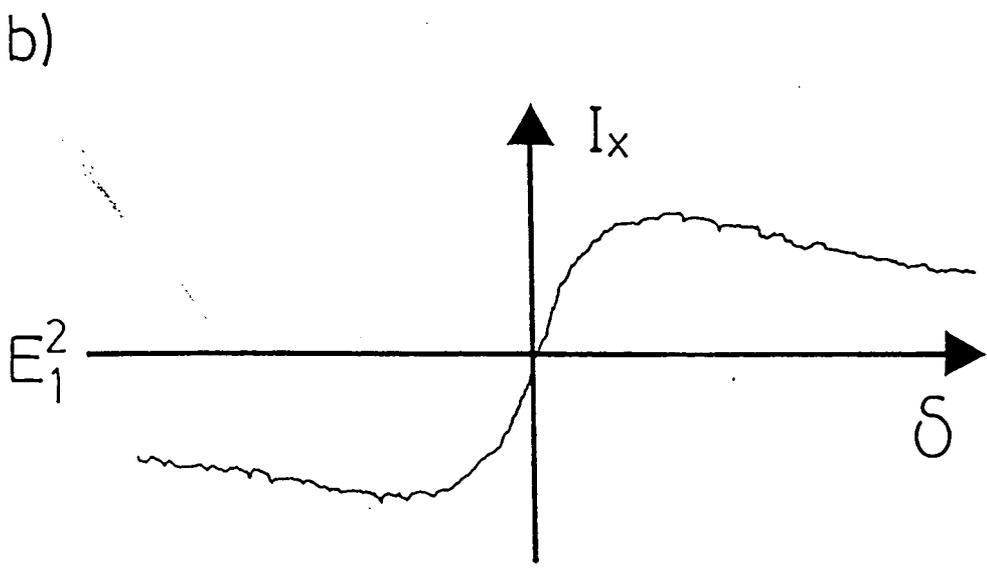
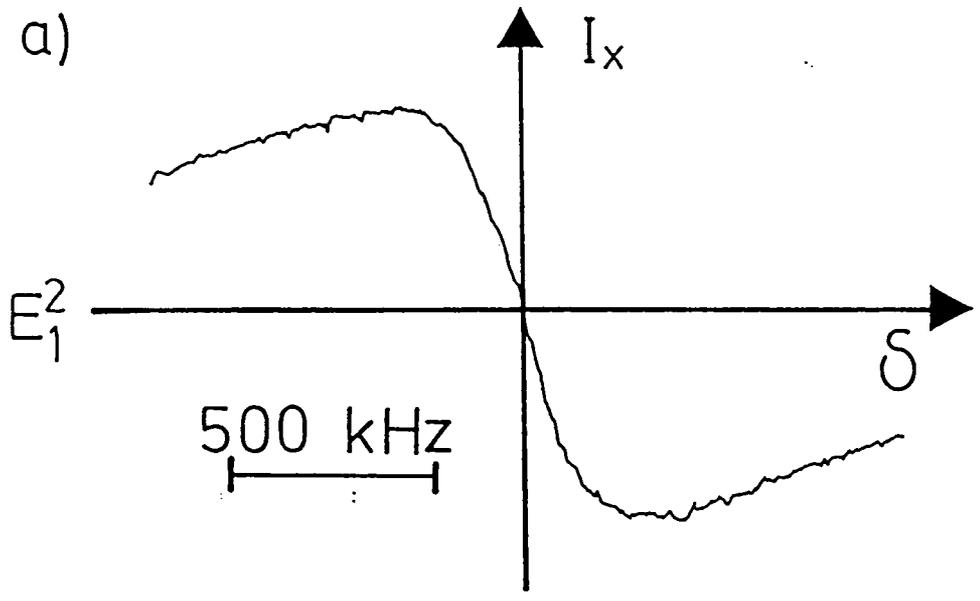


Figure 5

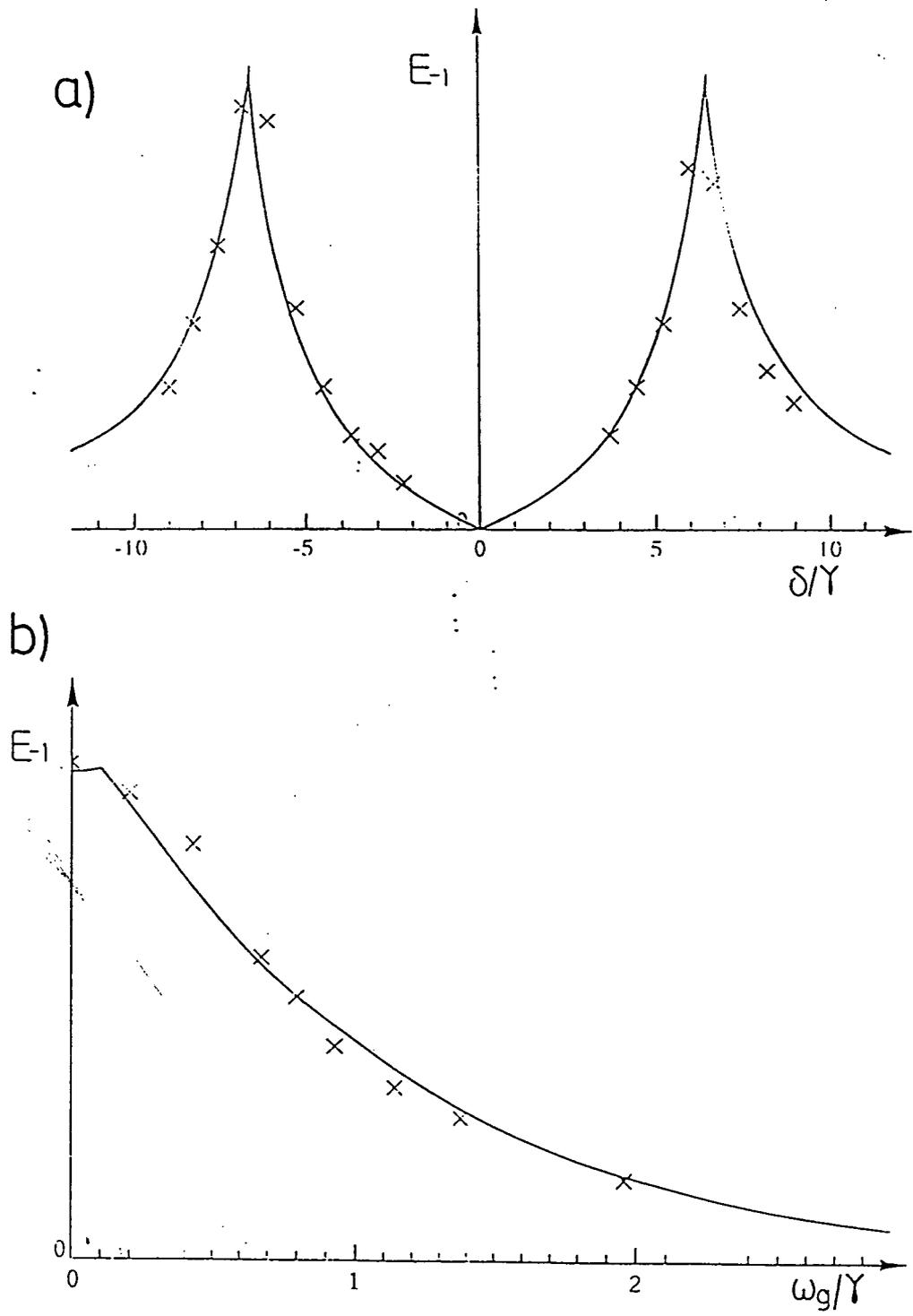


Figure 6

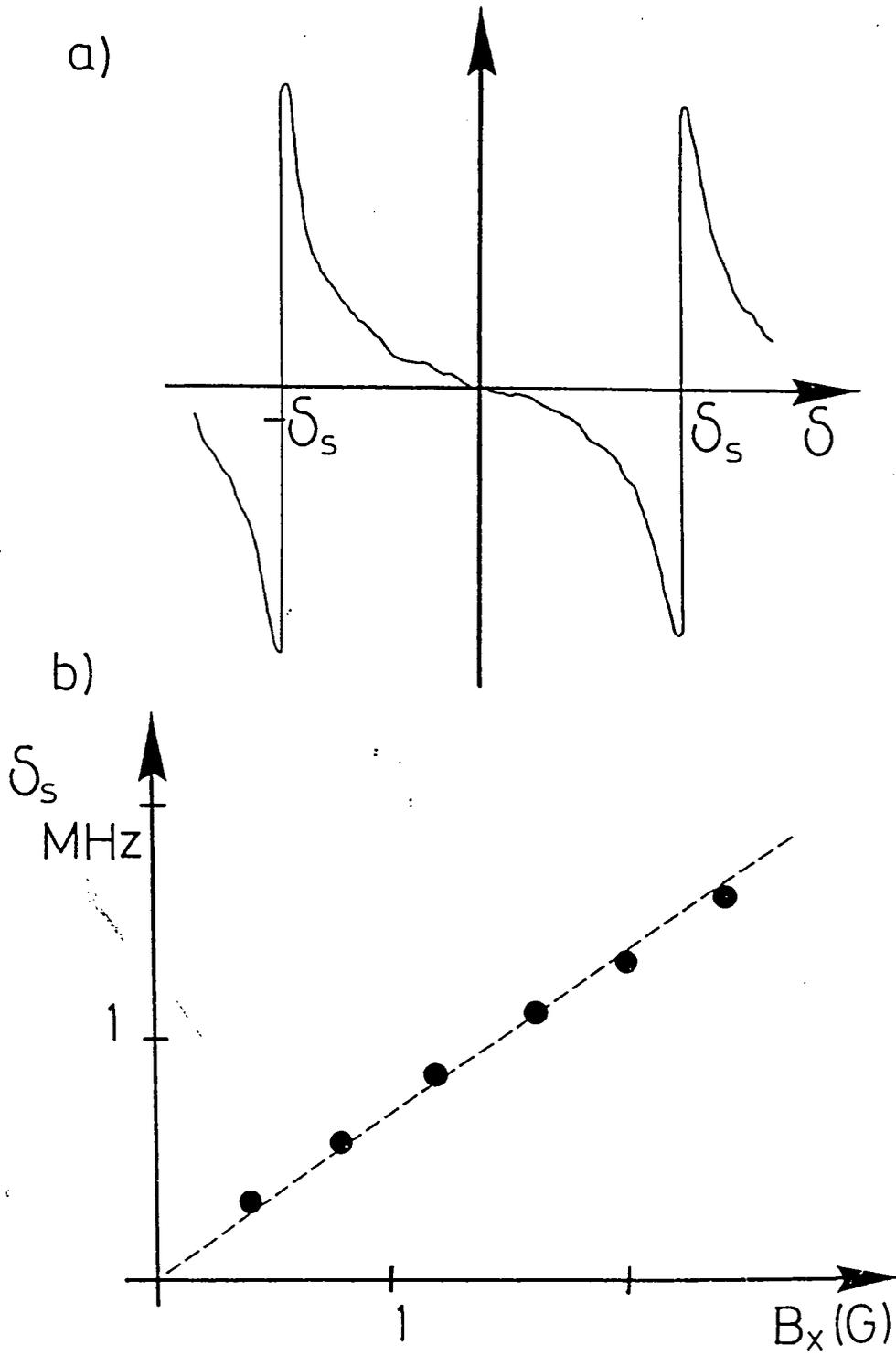


Figure 7

III.C. ETUDE EXPERIMENTALE

III.C.1. Mélange multi-onde

a. Montage et paramètres expérimentaux

Le montage expérimental est le même que celui décrit dans l'article précédent (voir figure 2 du III.B). Cependant, afin d'obtenir des non-linéarités plus forte, les deux champs E_1 et E_2 sont focalisés dans la cellule sur un diamètre de $130 (\pm 20) \mu\text{m}$. Les deux ondes ont des puissances respectives de $P_1 = 50 (\pm 10) \text{ mW}$ et $P_2 = 70 (\pm 10) \text{ mW}$. La température de la cellule est d'environ 215°C . Le désaccord Δ entre la fréquence des champs et la fréquence de résonance de la transition D_1 est de $3 (\pm 0.3) \text{ GHz}$.

b. Résultats expérimentaux

Sur la figure (III.13.a), on a représenté le battement entre le champ sortant $E_x(l)$ polarisé selon Ox (III.34) et l'oscillateur local décalé de 80 MHz, lorsque la différence de fréquence δ entre les deux champs E_1 et E_2 est égale à -100 kHz. Le signal est mesuré au moyen d'un analyseur de spectre dont l'échelle est linéaire. L'amplitude H_p de l'harmonique de fréquence $\omega_1 + 2p\delta$ est donc proportionnelle à $\sqrt{I_0 I_p}$, où I_0 est l'intensité de l'oscillateur local et I_p est l'intensité de la composante de Fourier de fréquence $\omega_1 + 2p\delta$ du champ $E_x(l)$.

Sur la figure (III.13.b), on a représenté les valeurs théoriques de H_p déduites de la formule (III.38) en prenant $b=3,9$ (III.35) et $E_2^2/E_1^2 = 1,4$. Un accord parfait entre la théorie et l'expérience n'est pas attendu; en effet, les conditions expérimentales ne satisfont pas totalement les hypothèses du calcul théorique (autofocalisation, relaxation inhomogène, structure hyperfine due au spin nucléaire). Cependant, l'accord est relativement bon et la "hiérarchie" des différentes harmoniques H_p est la même ($H_1 > H_2 > H_3$). La différence importante d'amplitude entre la valeur théorique et expérimentale de H_0 s'explique par la superposition à la valeur expérimentale d'un pic parasite de fréquence 80 MHz. Cette fréquence est émise par l'alimentation du modulateur acousto-optique.

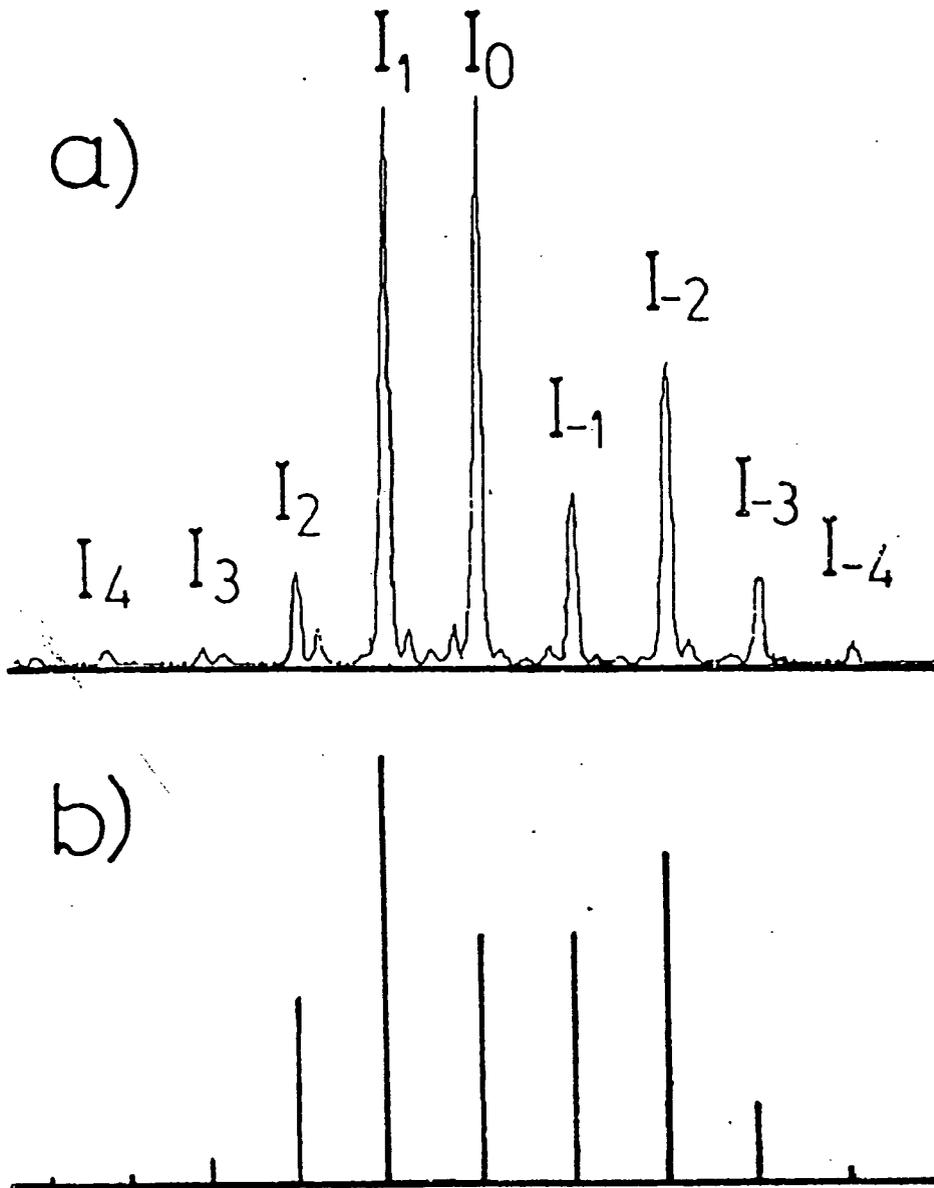


Figure III.13

Sur la figure (III.14) sont représentées les variations des amplitudes H_p en fonction de δ pour les mêmes conditions expérimentales. Les points correspondent à $H_{.1}$ et les étoiles à $H_{.2}$. Les courbes superposées sont les courbes théoriques calculées à partir de (III.38).

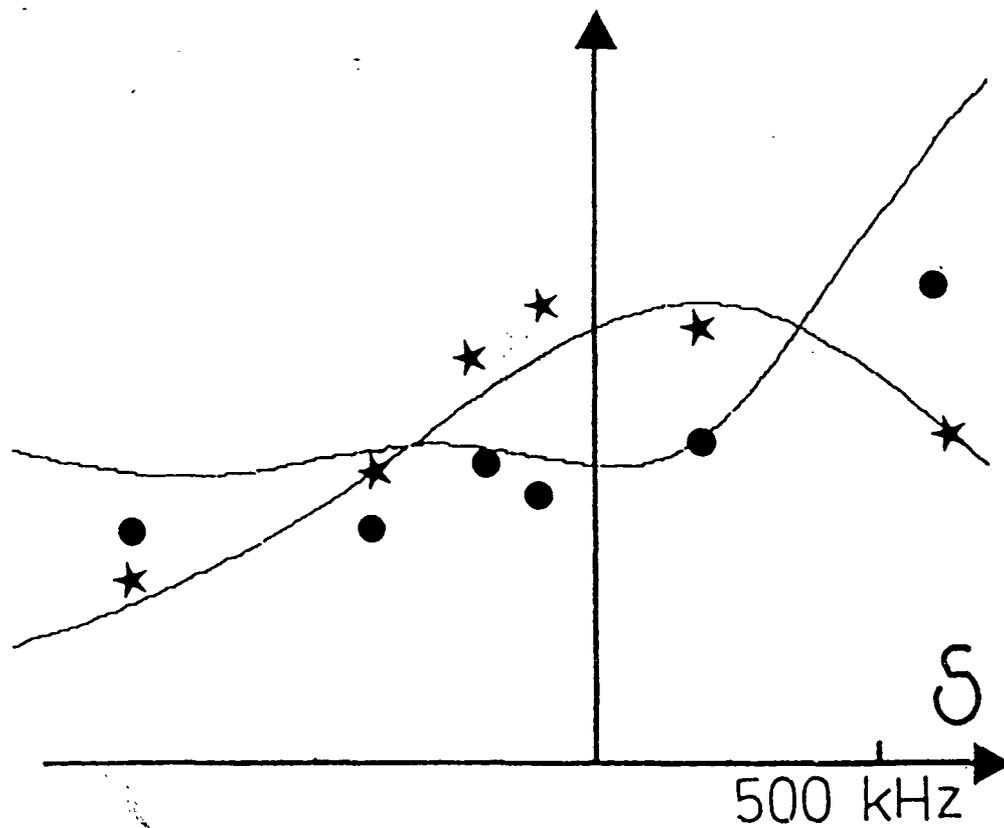


Figure III.14

Ces résultats ont été publiés dans la référence [21].

III.C.2. Mélange à quatre ondes

a. Description expérimentale

Cette partie se réfère à l'étude théorique (III.A.4).

L'expérience est décrite sur la figure III.15. Après avoir traversé une lentille L1 de 1000 mm de focale, le champ de fréquence ω émis par le laser à colorant est séparé en deux au moyen d'un prisme de Glan P1 précédé d'une lame demi-onde. L'axe de la lame demi-onde est placée de telle sorte que le faisceau réfléchi par le prisme de Glan P1 ait une intensité beaucoup plus faible que celle du faisceau transmis par le prisme de Glan P1. La fréquence du champ réfléchi est décalée de $(220 + \delta)$ MHz au moyen d'un modulateur acousto-optique M.A.O.1 piloté par un synthétiseur de fréquence. Le champ obtenu traverse ensuite une lame semi-réfléchissante. Le faisceau réfléchi est mesuré par une photodiode PD1 permettant de contrôler la puissance de l'onde transmise \mathcal{E}_p . L'intensité du faisceau transmis I_p est égale à 10 mW.

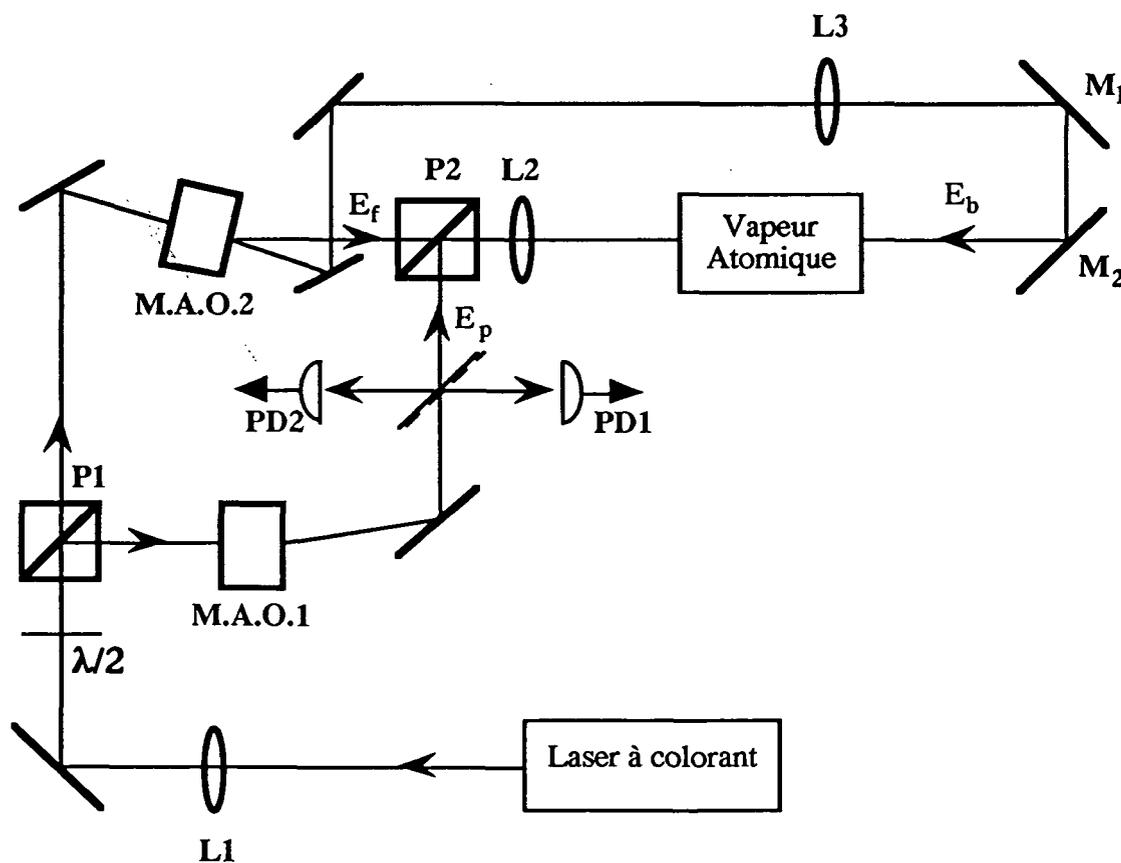


Figure III.15: Montage expérimental

Le faisceau transmis par le prisme de Glan P1 est divisé en deux au moyen d'un second modulateur acousto-optique M.A.O.2 piloté à 220 MHz. Le faisceau transmis dans l'ordre zéro, noté \mathcal{E}_b , sert de faisceau pompe retour. Celui défléchi dans l'ordre 1 (décalé en fréquence de 220 MHz), noté \mathcal{E}_f , sert de faisceau pompe aller. En variant la puissance de commande du modulateur, on peut donc modifier les intensités I_f et I_b tout en gardant leur somme I constante. I est égal à 280 mW.

Les champs \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_f sont superposés spatialement au moyen d'un prisme de Glan P2 et focalisés dans une cellule ne contenant que du sodium au moyen d'une lentille L2 de 250 mm de focale. Le diamètre des faisceaux dans la cellule est alors d'environ 130 μm . Le champ \mathcal{E}_b est superposé aux champs \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_f en utilisant les miroirs réglables M_1 et M_2 . Il est focalisé dans la cellule sur un diamètre de 130 μm au moyen d'une lentille L3 de focale 500 mm. La température de la cellule de sodium varie entre 200°C et 240°C. Le champ magnétique terrestre est compensé au moyen de trois paires de bobines de Helmholtz.

b. Mesure du coefficient de réflexion

Lorsque le désaccord Δ à la résonance de la transition D_1 est de l'ordre de quelques gigahertz, la cellule réfléchit un champ \mathcal{E}_r , mesuré au moyen d'une diode PD2 (figure III.15). On a d'abord analysé spectralement le champ réfléchi \mathcal{E}_r . Pour cela on a superposé \mathcal{E}_r à un oscillateur local décalé de 80 MHz et on a analysé le signal de battement délivré par la photodiode PD2 grâce à un analyseur de spectre. Ceci nous a permis de montrer que \mathcal{E}_r est constitué de la superposition de deux champs de fréquence respective $\omega \pm \delta$ et de même amplitude. Ce résultat est en parfait accord avec la relation (III.53), les deux composantes de \mathcal{E}_r correspondant respectivement au processus de mélange à quatre ondes vers l'arrière ($\omega - \delta$) et de répartition distribué ($\omega + \delta$).

Nous avons ensuite mesuré R_c , définie par $R_c = |\mathcal{E}_r|^2 / |\mathcal{E}_p|^2$. Le battement entre les deux composantes de \mathcal{E}_r est responsable d'une modulation de la réflectivité R_c à la fréquence 2δ (III.54). Pour mesurer \bar{R}_c la valeur moyenne de la réflectivité, un filtre passe-bas de fréquence de coupure Ω_c très petite devant δ est placée à la sortie de la photodiode PD2. Ω_c est égal à 10 kHz. Dans ces conditions, \bar{R}_c est égal à :

$$\bar{R}_c = \frac{R_{\max}}{2} \frac{1}{1+u^2} \quad (\text{III.62})$$

Dans les meilleurs conditions expérimentales, pour un désaccord Δ de 4,5 GHz et une température de cellule de 240°C, on mesure un coefficient de réflexion R_{\max} égal à 350%. Lorsque Δ est égal à -4,5 GHz, R_{\max} est de l'ordre de 150 à 200%. Cette différence est probablement due à des effets d'autofocalisation (III.C.1.a).

Lorsque la fréquence du laser est voisine de la fréquence de résonance de la transition D_2 , le meilleur coefficient de réflexion obtenu est égal à 85% pour un désaccord de 4 GHz. Cette différence de gain, déjà observée lors de l'étude du mélange à deux ondes, est probablement due aux collisions résiduelles (III.B).

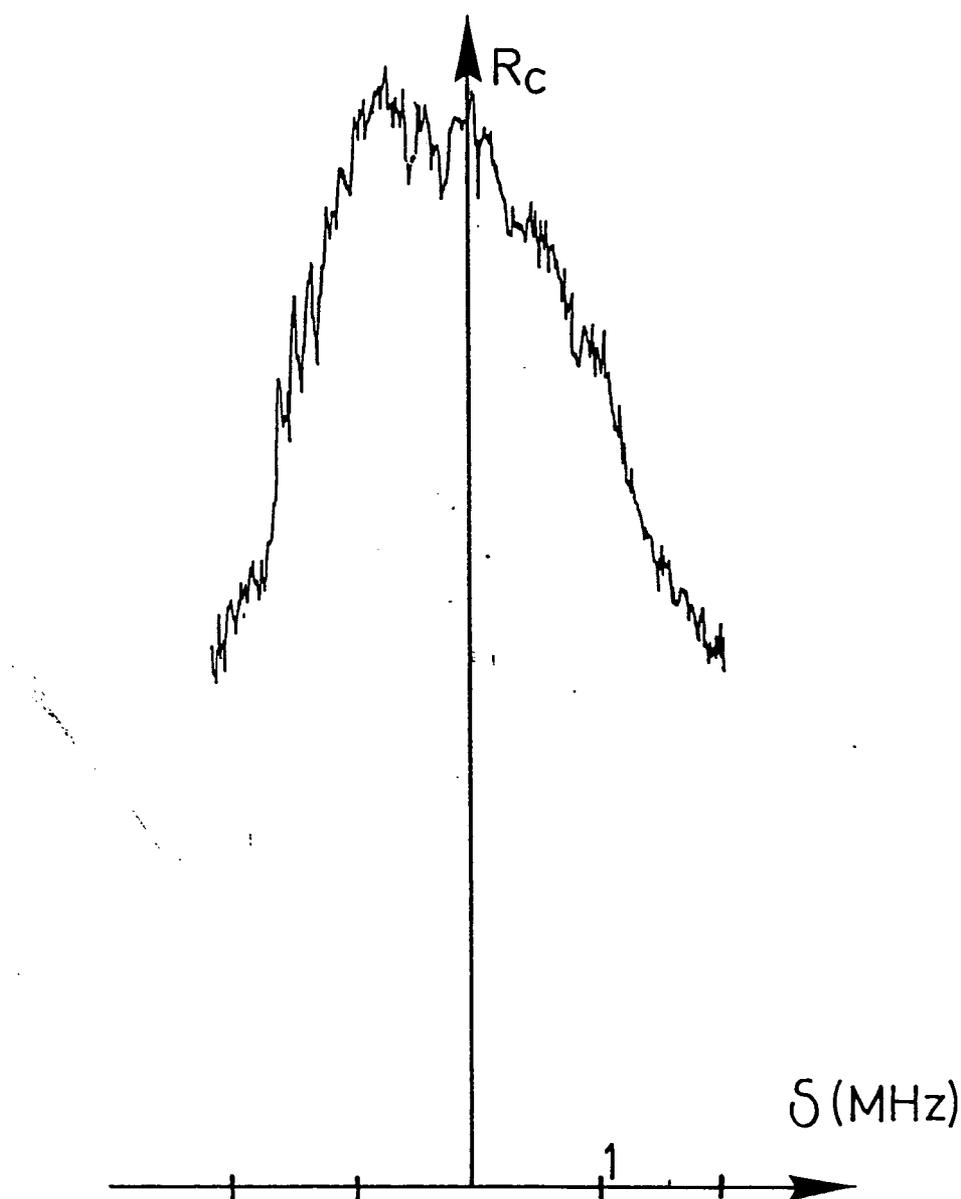


Figure III.16

En balayant la différence de fréquence δ , on obtient une courbe $R_{\max}(\delta)$ maximum pour δ nul (figure III.16), ce qui est en accord avec la formule (III.62).

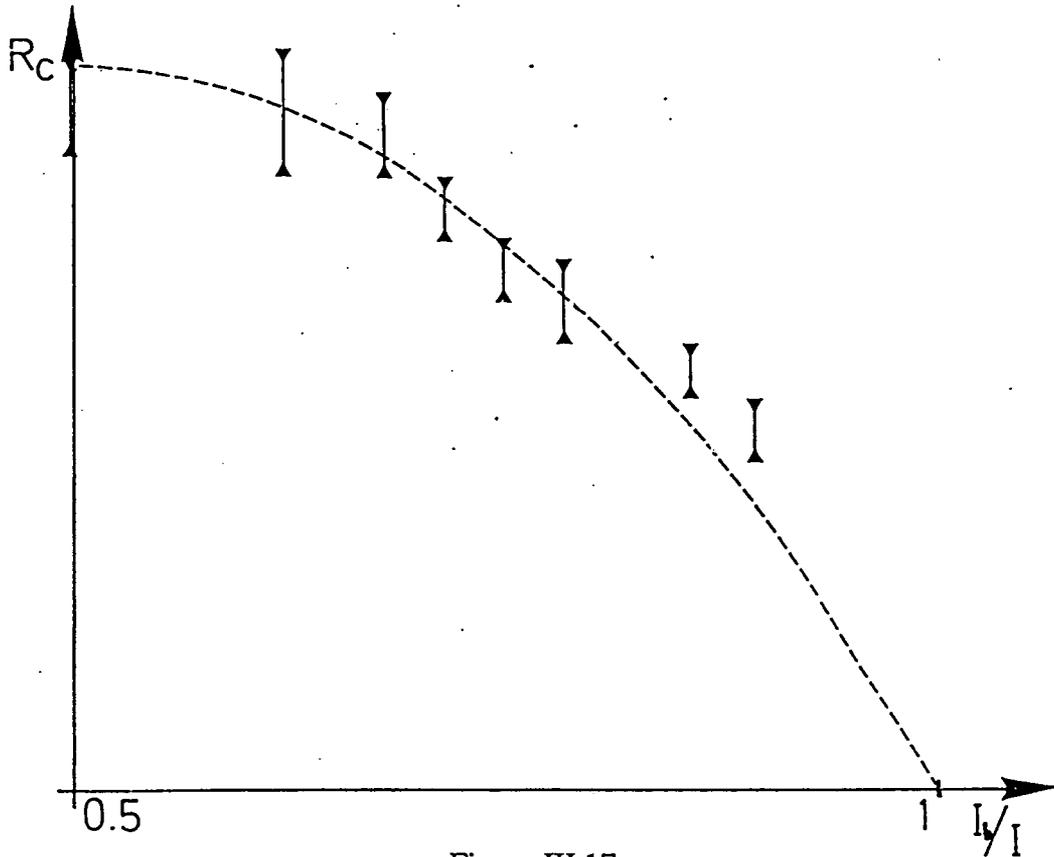


Figure III.17

Sur la figure (III.17), on a reporté R_{\max} pour différentes valeurs de I_b/I . La courbe en pointillé correspond à la parabole théorique déduite de (III.54):

$$R_{\max} = R_{\max}[I_b = I_f] \frac{I_b}{I} \left(1 - \frac{I_b}{I}\right)$$

Enfin, en appliquant un champ magnétique transverse de 10 Gauss, on annule le coefficient de réflexion. Ceci confirme que le processus de gain est dû à une orientation dans le niveau fondamental.

c. Auto-oscillation d'une cavité et instabilités spatiales

Dans cette expérience, les deux ondes \mathcal{E}_f et \mathcal{E}_b ont la même fréquence ω et la même puissance égale à 200 mW. Un miroir M totalement réfléchissant, monté sur une cale piézo-électrique, est placé derrière le prisme de Glan P1 (figure III.18). Deux lentilles L2 et L3 de focale 400 mm focalisent les deux champs \mathcal{E}_f et \mathcal{E}_b dans la cellule de sodium sur un diamètre de 200 μm .

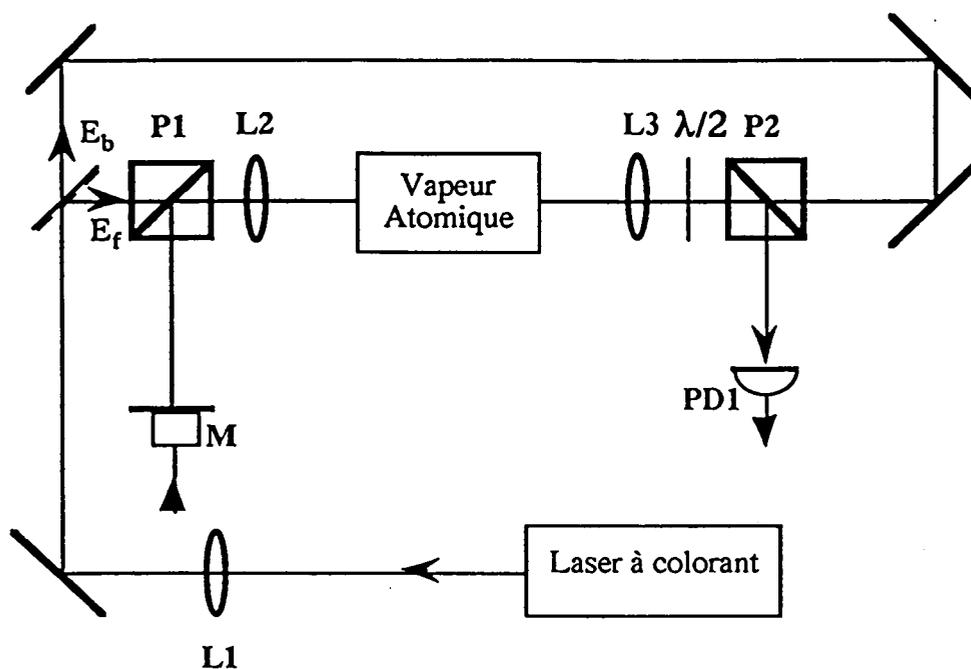


Figure III.18

Le miroir M est placé de telle sorte que la cavité formée par M, L2 et la face d'entrée de la cellule soit stable [22]. L'alignement de la cavité est effectué en injectant un champ faible obtenu en tournant légèrement la lame demi-onde située sur le trajet de \mathcal{E}_b (figure III.18).

L'alignement est alors correct lorsque le faisceau réfléchi par M se superpose à \mathcal{E}_f . Enfin, lorsque le réglage est effectué, on enlève la lame demi-onde.

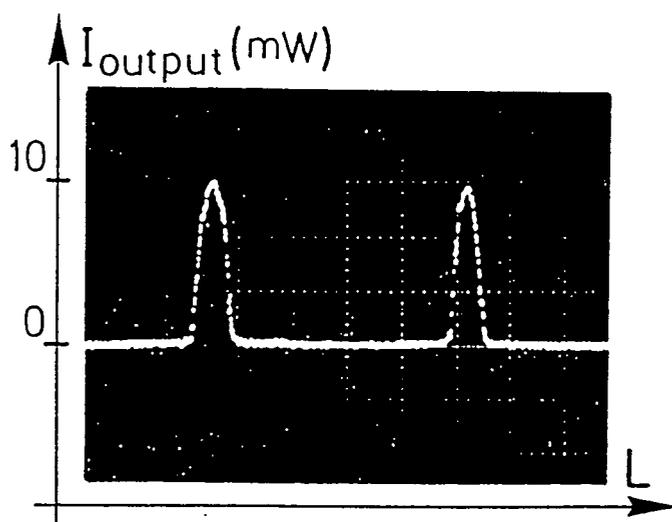


Figure III.19

On obtient une oscillation dont la puissance de sortie est mesurée au moyen de la réflexion sur P2. La puissance de sortie maximum mesurée est égale à 10 mW. L'oscillation a lieu des deux côtés de la résonance pour un désaccord $|\Delta|$ compris entre 1,5 GHz et 6 GHz. Elle a la même fréquence que les ondes pompes \mathcal{E}_f et \mathcal{E}_b et ne se produit que lorsque la cavité est accordée (figure III.19). Tous ces propriétés sont en accord avec l'analyse théorique (III.A.4.f).

Lorsque le désaccord est positif, une émission conique hors-d'axe se superpose à l'oscillation (figure III.21). Par contre, lorsque la fréquence du laser est proche de la fréquence de résonance de la raie D_2 , nous n'avons obtenu ni oscillation, ni instabilité, le coefficient de réflexion étant inférieur à l'unité.

Cette émission subsiste quand le miroir M est ôté (figure III.20). Cette émission a été observée pour la première fois par R.W.Boyd *et al* [23]. Nos résultats coïncident avec les leurs. En particulier, une émission hors-d'axe ne se produit que lorsque Δ est positif. Cette propriété est due aux conditions d'accord de phase qui ne sont vérifiées que du côté autofocalisant [24]. Du côté autodéfocalisant, l'émission se produit dans l'axe.

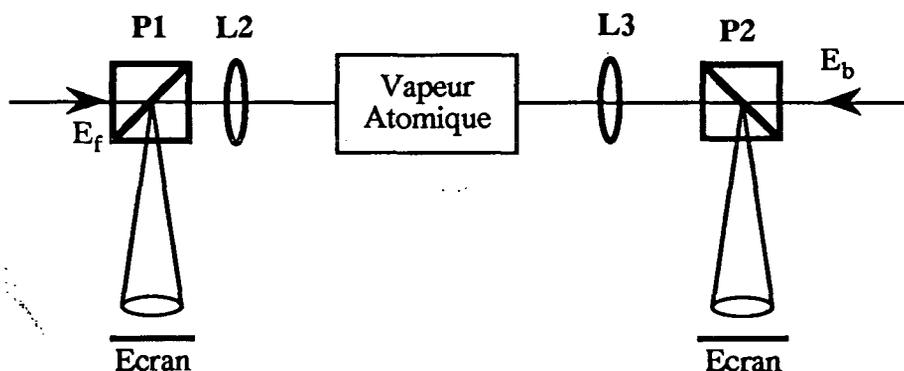


Figure III.20

L'étude de ces instabilités est intéressante d'un point de vue expérimental car elles sont similaires aux instabilités rencontrées en hydrodynamique [25]. Les techniques optiques et les temps de réponse très courts des systèmes optiques permettraient alors de s'affranchir de beaucoup de contraintes rencontrées en hydrodynamique. Ces instabilités font l'objet d'études qui se poursuivent dans notre équipe de recherche et qui devraient être présentées dans la thèse de J. Y. Courtois.

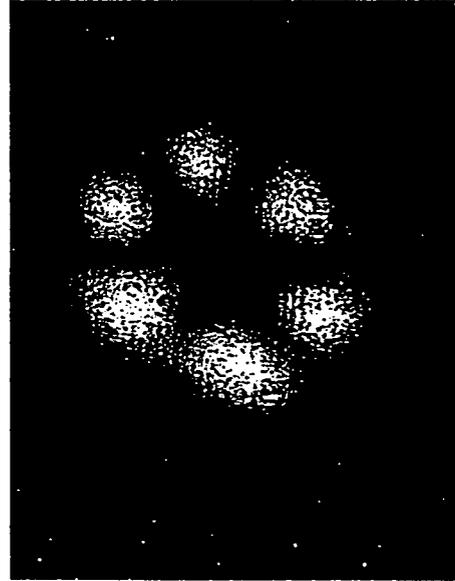
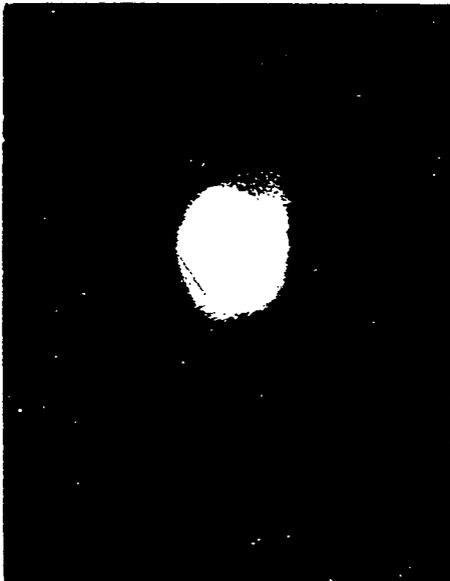
 $\Delta = 4.5 \text{ GHz}$  $\Delta = 900 \text{ MHz}$  $\Delta = -2.5 \text{ GHz}$

Figure III.21

d. Contraste de phase

Nous avons vu théoriquement que le système (vapeur + ondes pompes) se comporte comme un miroir à contraste de phase (Voir III.A.4.e.). En appliquant les paramètres expérimentaux ($l = 3 \text{ cm}$) à la relation (III.59), on obtient une ouverture numérique de 5.10^{-3} rd, ce qui donne un interfrange de $\lambda/\xi = 120 \mu\text{m}$. On ne peut donc détecter qu'une modulation de phase correspondant à une seule frange sur le profil du faisceau.

Pour pouvoir observer plus de franges, il faut augmenter le diamètre des faisceaux. En effet, l'ouverture numérique est limitée par la condition d'accord de phase du processus de répartition distribuée qui ne dépend, si les faisceaux se recouvrent dans toute la cellule, que de la longueur de la cellule et de la longueur d'onde optique. Cependant, en augmentant le diamètre des faisceaux, le gain diminue et on ne peut pas compenser cette perte de gain par une augmentation du nombre d'atomes car le sodium à haute température endommage les fenêtres de la cellule. Nous avons donc changé de vapeur et utilisé un alcalin plus lourd, le Rubidium.

1. Rappel sur le Rubidium

La configuration électronique du rubidium [26] dans l'état fondamental est ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$), notée $5S_{1/2}$. L'atome de rubidium existe sous la forme de deux isotopes:

- Rb 85 dont l'abondance à l'état naturel est de 73% et dont le spin nucléaire est égal à 5/2.
- Rb 87, dont l'abondance est de 27% et dont le spin nucléaire vaut 3/2.

La structure des raies D_1 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$) et D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) est représentée sur la figure III.22.

Comme dans le cas du sodium, la structure hyperfine du niveau excité est négligée. La tension de vapeur saturante étant plus importante que celle du sodium, la densité volumique d'atomes est plus importante. Pour une température de 100°C , on obtient $5,5 \cdot 10^{18} \text{ at.m}^{-3}$ (densité qui correspond à une température de l'ordre de 220°C pour le sodium).

La largeur Doppler est égale à 340 MHz. La structure hyperfine du niveau fondamental est donc résolue.

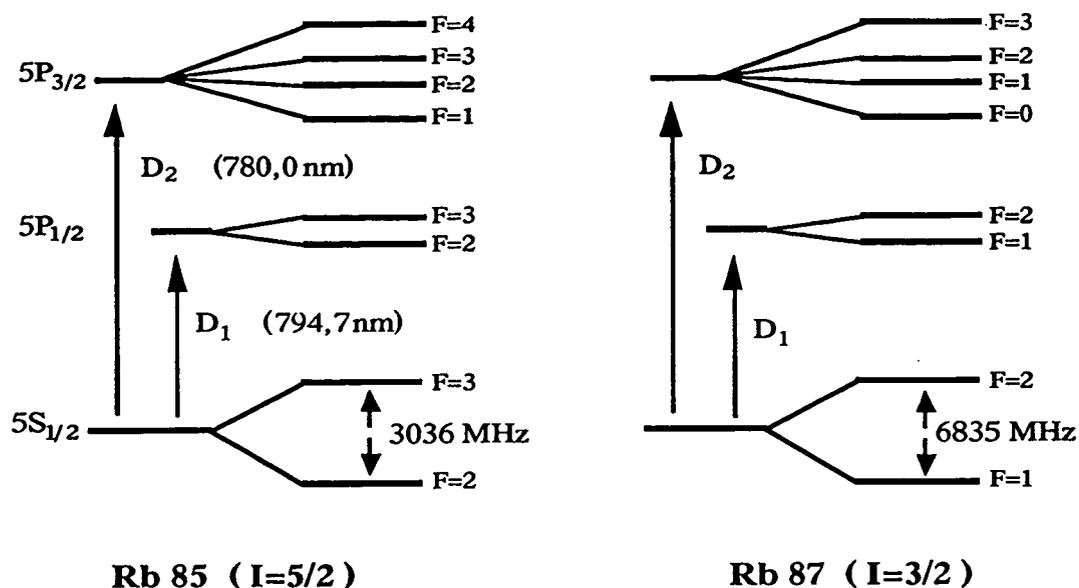


Figure III.22

2. Source lumineuse

La source lumineuse est un laser Titane-Saphir continu, monomode, construit au laboratoire [27] (figure III.23). Il est pompé par un laser Ar^+ multi-raie Spectra délivrant une puissance de 10 Watt. La puissance de sortie est de l'ordre de 1,2 Watt. L'intervalle de fréquence accordable est de l'ordre de [750-850 nm]. Les miroirs (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) sont totalement réfléchissants autour de 800 nm et transparents pour la fréquence du laser Ar^+ . Le miroir de sortie M_6 transmet environ 4% à 800 nm. L'onde intracavité est rendue unidirectionnelle au moyen d'un rotateur de Faraday suivi d'un ensemble de trois miroirs (M_4, M_5, M_6) non coplanaires. Dans un sens de parcours, la rotation de la direction de polarisation par l'ensemble des trois miroirs compense la rotation due à l'effet Faraday. Dans l'autre sens, les deux rotations s'ajoutent ce qui introduit des pertes, plusieurs éléments sélectifs du laser étant à incidence de Brewster.

La sélection en fréquence s'effectue au moyen d'un filtre de Lyot de largeur 0,25 nm, d'un étalon mince d'intervalle spectral libre égal à 150 GHz et d'un étalon épais d'intervalle spectral libre égal à 15 GHz. La position de l'étalon mince est asservie sur la réflexion de l'onde intracavité. Le sommet d'un pic de résonance de l'étalon épais est asservie sur la fréquence du laser au moyen d'une détection synchrone. Enfin, la fréquence du laser est asservie sur une fréquence de résonance d'un interféromètre de Fabry-Perot extérieur en utilisant la méthode mise au point par T. Hänsch et B. Couillaud [28].

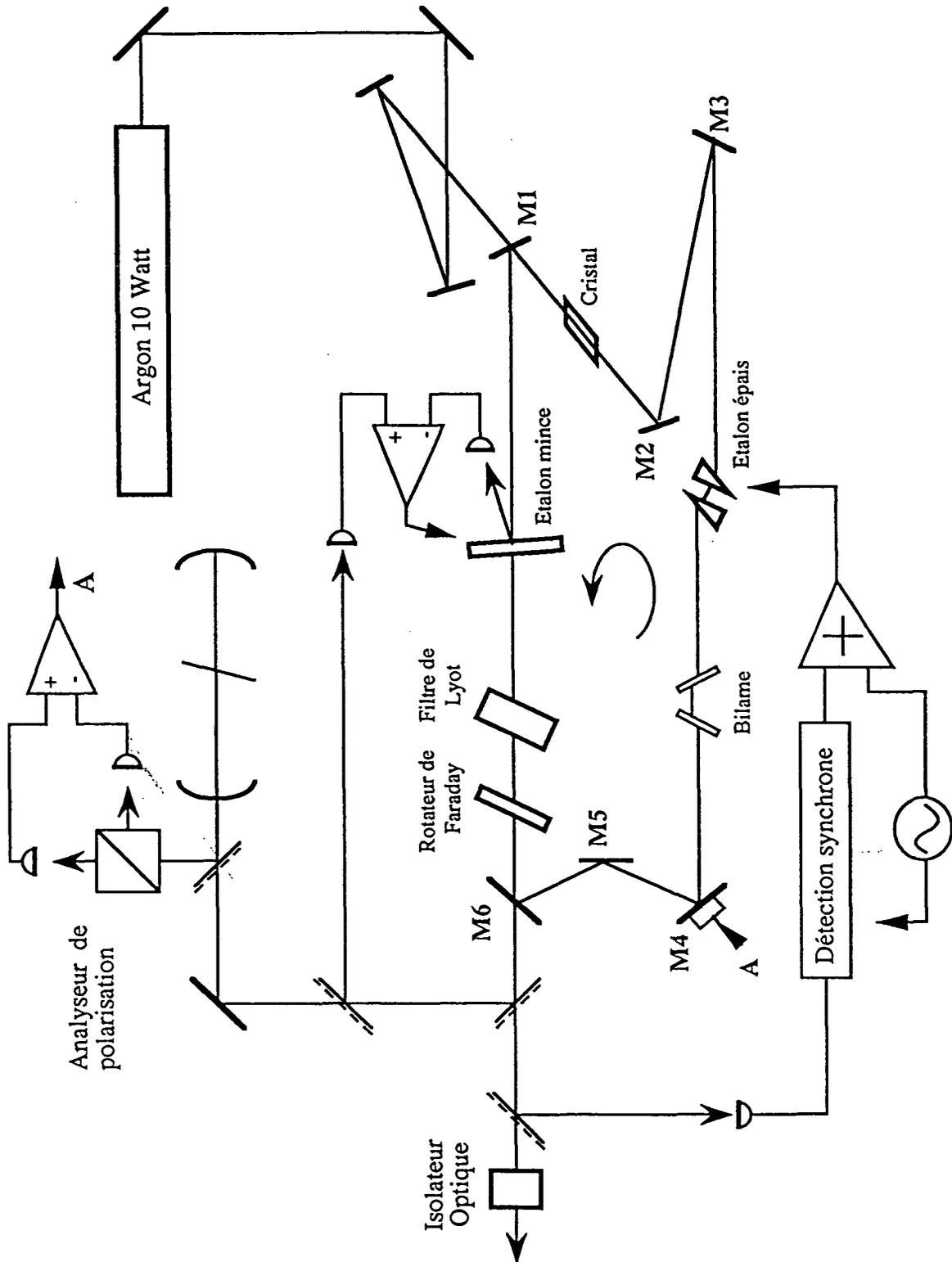


Figure III.23 : Principe du laser Titane-Saphir

3. Résultats expérimentaux

Le montage expérimental utilisé est décrit sur la figure III.24.

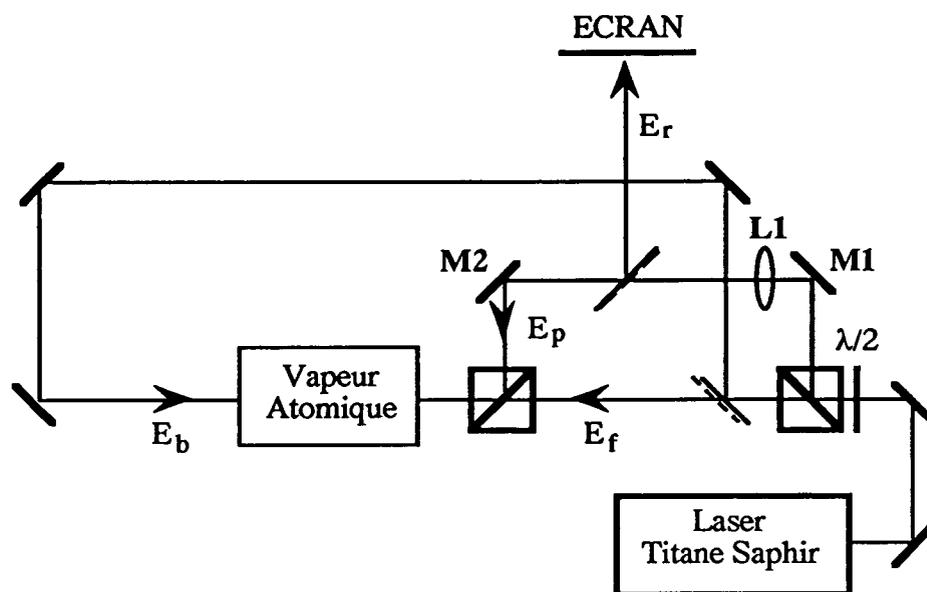


Figure III.24

La puissance des ondes pompes \mathcal{E}_b et \mathcal{E}_f est de 220 mW et celle de l'onde sonde \mathcal{E}_p est égale à 20 mW. La fréquence du laser est proche de la raie D_1 et se situe à environ 2 GHz au dessous de la fréquence de la transition hyperfine de plus basse fréquence. La température de la cellule est de 100°C et sa longueur est de 3,7 cm. Ses fenêtres sont taillées à incidence de Brewster pour la polarisation des ondes pompes, ce qui introduit des pertes de 28% pour les ondes sonde et réfléchie \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_r mais évite toute réflexion parasite sur les fenêtres de la cellule.

Les deux ondes pompes ne sont pas focalisées dans la cellule. Leur diamètre dans la cellule est alors égal à 5 mm. La condition de superposition (III.58.b) est donc vérifiée pour des angles entre l'onde \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_f inférieurs à 10^{-1} rd. L'onde sonde peut être focalisée dans la cellule au moyen d'une lentille L1.

Tout d'abord, l'onde \mathcal{E}_p n'est pas focalisée, son diamètre est donc égal à 5 mm et elle est parfaitement superposée à \mathcal{E}_f . L'intensité de l'onde réfléchie dépend de la phase relative φ_p entre \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_f (III.57). Cette phase φ_p est balayée au moyen du miroir M1 qui est collé sur une cale piézo-électrique. Pour $\varphi_p = \pi/2 \bmod \pi$, l'intensité réfléchie est maximum, alors que pour $\varphi_p = 0 \bmod \pi$, elle est minimum.

En effectuant une rotation ξ au miroir M2, l'onde réfléchie \mathcal{E}_r est modulée spatialement en intensité (figure III.25). Si on augmente l'angle, les deux contributions ne se recouvrent plus. Comme il se doit pour un processus de conjugaison de phase, le faisceau généré par mélange à quatre ondes vers l'arrière ne se déplace pas sur l'écran (figure III.24) alors que le faisceau associé au terme de répartition distribuée se comporte comme la réflexion sur un miroir classique et donc se déplace de $2\xi L$ sur l'écran (où L est la distance entre l'écran et la cellule). Sur la figure III.26, nous avons reporté le profil de l'onde réfléchie pour plusieurs valeurs de ξ .

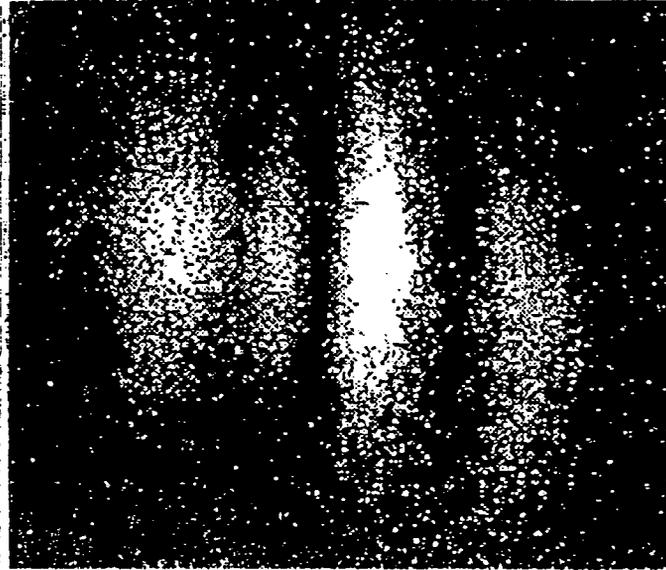
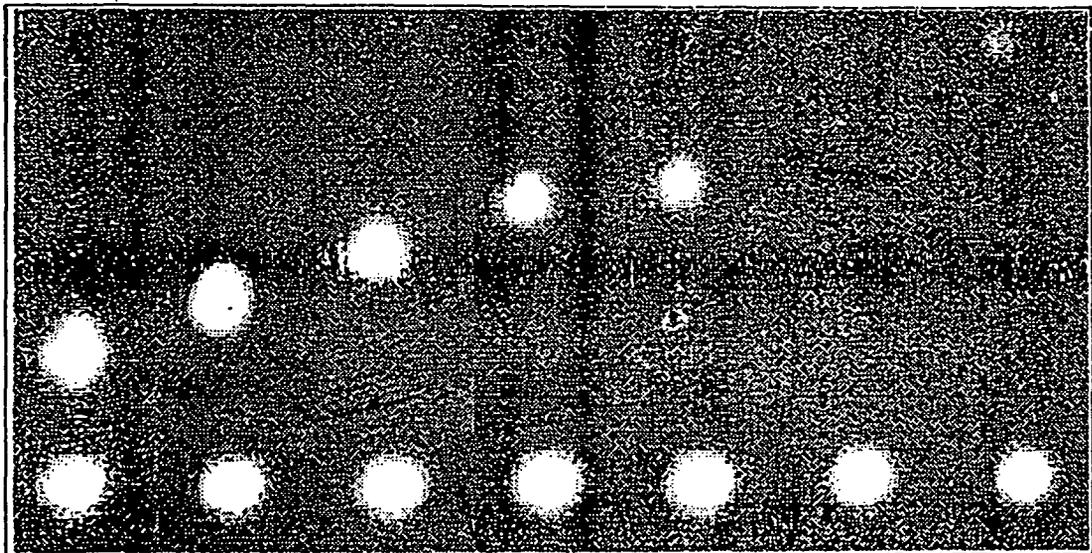


Figure III.25



ξ (mrd)	1,57	2,16	2,74	3,40	3,56	4,25	5,16
-------------	------	------	------	------	------	------	------

Figure III.26

Sur la figure III.27 est représenté le rapport de l'intensité du terme de répartition distribuée et du terme de mélange à quatre ondes vers l'arrière en fonction de ξ . On remarque que ce rapport décroît avec l'angle, car le terme de répartition distribuée est désaccordé en phase. Les croix correspondent à un désaccord en fréquence du laser de 1,8 GHz et les étoiles à un désaccord de 2,5 GHz. La courbe continue correspond à l'expression théorique, qui vaut $\text{sinc}^2(k\xi^2/2)$ (Voir annexe II.B.6). L'ouverture numérique de ce miroir est donc de l'ordre de $4 \cdot 10^{-3}$ rd.

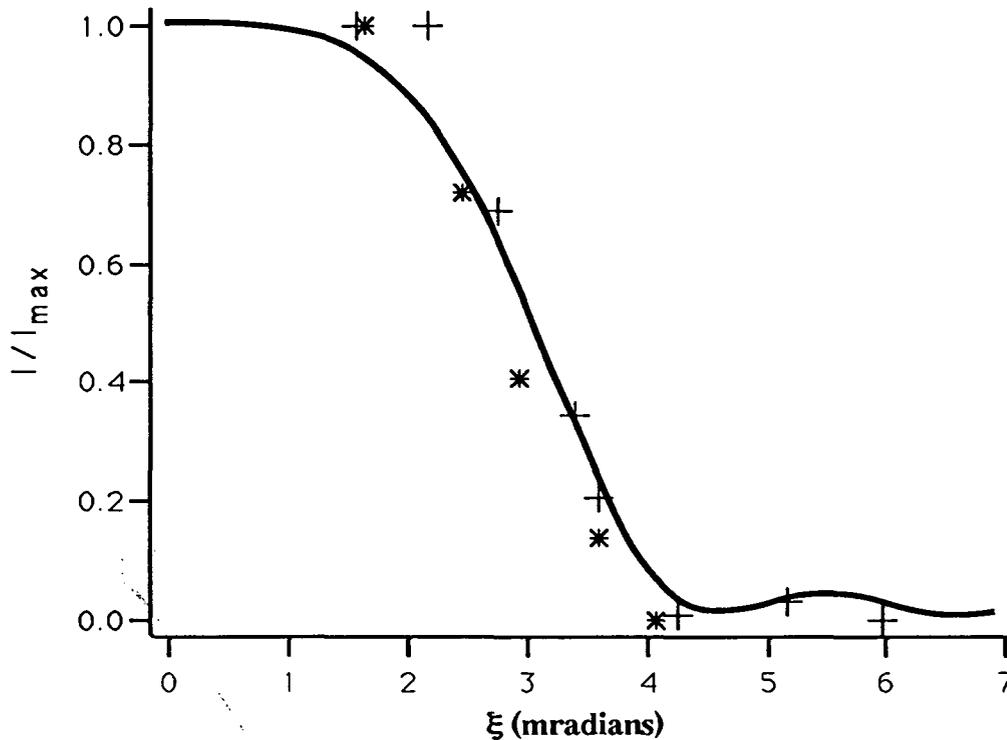


Figure III.27

Pour augmenter l'ouverture numérique, celle-ci étant égale à $\sqrt{\lambda l}$ (III.59), il faut diminuer la longueur de la cellule. On peut utiliser par exemple des cellules de quelques millimètres d'épaisseur, déjà testées avec le césium [29], ce qui permettrait d'augmenter l'ouverture numérique d'un facteur 5.

Si l'on place une lentille L_1 sur le trajet du champ \mathcal{E}_p (figure III.24), de telle sorte que dans la cellule le faisceau gaussien puisse être assimilé à une onde sphérique, on obtient une modulation spatiale de l'intensité de l'onde réfléchie correspondant à la modulation de phase de l'onde \mathcal{E}_p (figure III.28.a). La figure (III.28.b) correspond aux mêmes conditions expérimentales mais le déphasage relatif entre \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_f a été décalé de $\pi/2$.

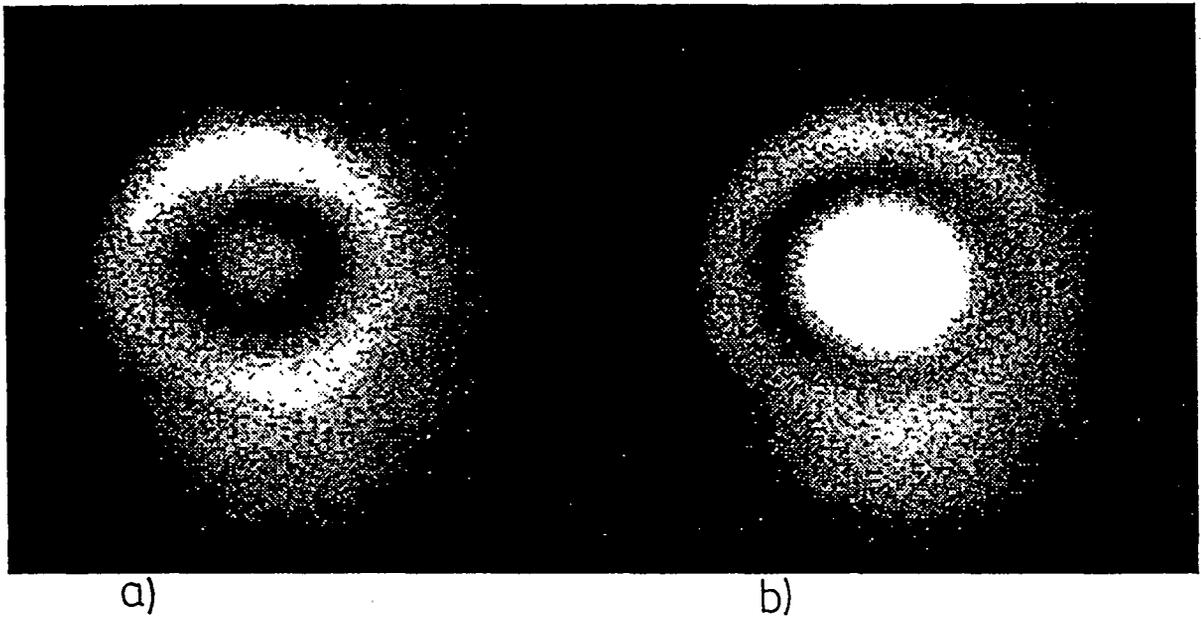


Figure III.28 :

Sur la figure III.29, on a représenté le profil de l'onde réfléchie lorsque la normale de la lentille L_1 fait un angle de 30° avec la direction de propagation de l'onde \mathcal{E}_p , et ceci pour trois positions de la cellule: sur la focale tangentielle [30] (figure III.29.a), entre la focale sagittale et la focale tangentielle (figure III.29.b) et sur la focale sagittale (figure III.29.c).

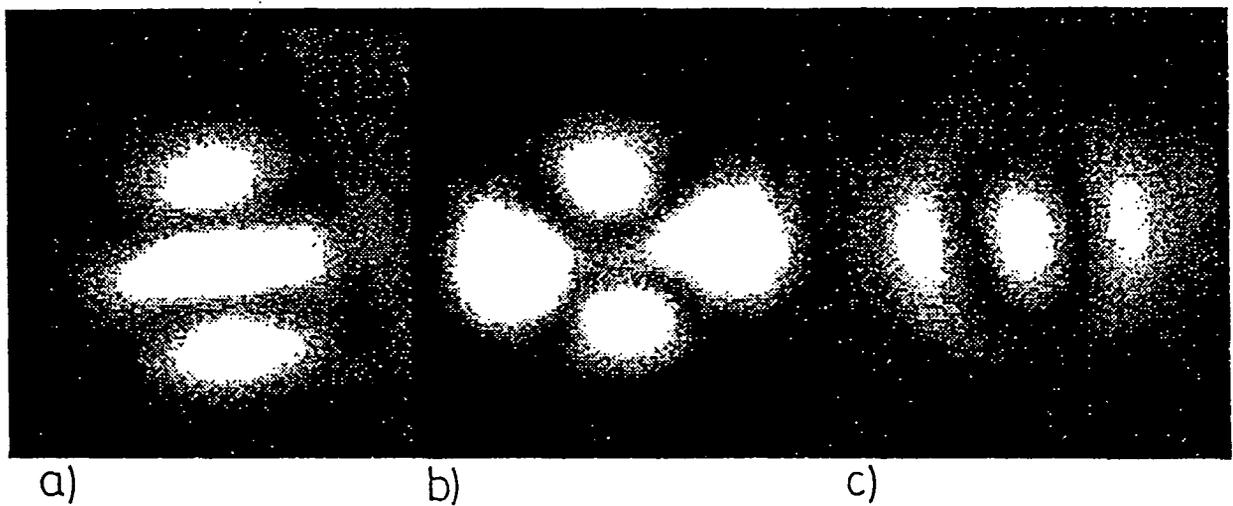


Figure III.29

III.D. MIROIR AUTO-POMPE

Ce chapitre est constitué d'un article devant paraître dans Optics Letters.

Dans cet article, nous décrivons le fonctionnement d'un miroir non-linéaire auto-pompé, c'est-à-dire ne nécessitant pas la présence de pompes extérieures. Un faisceau incident polarisé selon l'axe Oy induit une oscillation polarisée selon Ox par mélange à quatre ondes dans une cavité linéaire contenant une cellule de sodium. L'interaction du champ incident avec l'onde stationnaire générée dans la cavité induit un champ réfléchi. Une réflectivité de l'ordre de 20% a ainsi été obtenue et les temps de réponse de ce miroir sont de l'ordre de 100 ns à 200 ns.

**Nonfrequency-shifted self-pumped phase-conjugate mirror
using sodium vapor**

M. Vallet, M. Pinard and G. Grynberg

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure - Université Pierre et Marie Curie - 75252 PARIS Cedex 05 - FRANCE

Abstract

An incident c.w. laser beam polarized along the y direction induces a four-wave mixing oscillation polarized along the x direction in a linear cavity containing a sodium cell. The interaction of the incident field with the standing wave induces the generation of a reflected field. Reflectivities up to 20% inside the cell and response times shorter than 100 ns have been observed.

The first self-pumped phase conjugate mirrors have been demonstrated in nonresonant media and particularly in barium titanate [1]. These photorefractive media have the disadvantage of having a slow response time (milliseconds to seconds) at typical c.w. intensity levels. Faster response times can be obtained with stimulated Brillouin scattering [2]. This process, however requires high laser intensities of the order of megawatts per square centimeter. A possible approach to obtain fast response time with relatively low input power is to use a resonant atomic media as the nonlinear medium. This has been first done by Gaeta, Lam and Lind [3]. In their experiment the standing wave that conjugates the incident field is generated through a two-wave mixing gain process in sodium vapor [4]. The drawback of this process is that the oscillating field and thus the conjugate field should be frequency shifted with respect to the incident field [4]. We describe here a self-pumped mirror where the reflected wave has the same frequency as the incident wave, the gain process being degenerate forward four-wave mixing in sodium vapor. This gain mechanism corresponds to a process where two photons of the incident beam are absorbed and two photons of a copropagating cross-polarized beam are emitted. The sodium cell is located inside a linear cavity which permits to obtain a standing wave oscillation. The colinear geometry for the pump and oscillation allows a large overlapping inside the sodium cell and thus the possibility to achieve high reflectivities. Actually, reflectivities of the order of 20% inside the cell have been measured.

The sodium oscillator consists of a pure sodium cell with Brewster windows placed between two curve mirrors (Fig. 1). These mirrors have a radius of curvature equal to 30 cm and their reflectivities are $R_1 = 99.5\%$ and $R_2 = 95\%$. The distance between the mirrors is 54 cm which implies a spot radius of the order of $130 \mu\text{m}$. The 5 cm long quartz cell containing sodium is placed at the center of the cavity. Two Glan prisms with antireflection coatings are located on both sides of the sodium cell. These Glan prisms G_1 and G_2 permit to enter and to extract the incident beam which is polarized along the y direction, the cavity being only closed for the x polarization. The incident beam is aligned along the longitudinal axis of the cavity and it is focussed near the location of the waist of the resonator mode. The spot radius of the incident beam in the cell is equal to $250 \mu\text{m}$ and the beam power is 500 mW. The laser frequency is tuned close to the D_1 resonance line of sodium and we denote by Δ the detuning from resonance. We have observed an oscillation in the cavity both for $\Delta > 0$ and for $\Delta < 0$. However, since the intensity of the

oscillation was larger on the high-frequency side of the resonance, all the experiments described below correspond to that situation. When the reflected beam is combined with the incident field, very stable and highly-contrasted fringes are observed on a screen. The existence of this stable interference pattern shows that the frequencies of the reflected field and of the incident field are equal. The same experiment has been done with the oscillating field coming out from one mirror of the cavity and has shown the same result. This shows that the gain mechanism is degenerate four-wave mixing in the forward direction (with absorption of two photons of the incident beam and emission of two photons in the cavity mode) and not two-wave mixing [3] [4] where a frequency difference is expected.

To study the characteristics of the intensity reflected by the sodium cell, we have inserted a glass plate (G.P.) on the path of the incident beam. There is an antireflection coating on one face of the plate, the other face being uncoated and reflecting 15% of the incident energy. Most of our experiments have been done at a cell temperature of the order of 170°C. Using an input incident beam of 500 mW coming from a monomode c.w. dye laser, a reflectivity of 7 % is measured. However, one has to take into account the poor transmission of the cell for the y-polarization. Actually, if one takes into account the single-pass transmission of the Brewster window for the y-polarization (72 %), this result corresponds to an internal reflectivity of 14 %. By increasing the temperature up to 190°C, a reflectivity of 20% has been achieved. In these last conditions, the simultaneous measurement of the intensity of the incident beam after transmission in the sodium cell shows a 40% relative depletion when the reflectivity is maximum (this relative depletion corresponds to the variation of the transmission when the reflectivity varies from 0 % to 20 % when the length of the cavity is scanned, all the other parameters remaining unchanged). This shows that in our experimental conditions, because of the losses in the sodium cell and in the cavity, only half of the power taken from the incident beam is transferred into the reflected beam. We have not tried to repeat the experiment at a higher temperature because of the already rapid attack of the quartz windows by sodium atoms.

Another important characteristic of this mirror is its response time. To measure the time response, we have placed on the path of the incident beam an electro-optic modulator and applied to it the output of a pulse generator. The Glan prism G_1 transforms the modulation of the incident

beam polarization into an intensity modulation which is shown in Fig. (2-a). The time dependence of the reflected intensity is shown in Fig. (2-b). The comparison between the two curves shows a time response of the order of 50 ns. Actually, the time response varies with the experimental conditions but always remains shorter than 200 ns.

To perform the following analysis, we first neglect the losses due to the cell windows. To calculate the intracavity fields \mathcal{E}_f and \mathcal{E}_b and the reflected beam \mathcal{E}_r we use a method that we have introduced precedingly to explain the redistribution of photons between cross-polarized beams [5]. We consider first the beam resulting from the combination of \mathcal{E}_i (incident field) and \mathcal{E}_f (forward intracavity field at the entrance of the cell). This beam has a polarization which depends upon the relative phase between \mathcal{E}_i and \mathcal{E}_f . In the general case, the polarization is elliptical and the optical pumping induces the creation of an orientation in the sodium ground state. Because of this orientation, the atomic medium becomes optically active and the polarization of the incident beams rotates by an angle θ . When the pumping rate is small compared to the relaxation rate γ of the ground state, the angle θ is equal to [5]:

$$\theta = \frac{\alpha \ell}{2i} (\mathcal{E}_i \mathcal{E}_f^* - \mathcal{E}_i^* \mathcal{E}_f) \quad (1)$$

where ℓ is the length of the medium and $\alpha = k\chi_0 (d^2/36\hbar^2\Delta^2)(\Gamma/\gamma)$ (this formula has been established in Ref. [5] in the case of a $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$ transition, k is the wavevector, χ_0 the linear susceptibility, d the reduced matrix element of the electric dipole moment and Γ the radiative width of the excited state).

The forward intracavity field \mathcal{E}'_f incident on mirror M_2 (Fig. 1) is equal to $(\mathcal{E}_f \cos\theta - \mathcal{E}_i \sin\theta)$. The backward intracavity field \mathcal{E}_b is obtained by reflection of \mathcal{E}'_f on the mirror M_2 . The backward field after passing through the cell has a y -component $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_b \sin\theta$ which is ejected from the cavity by the Glan prism G_1 and a x -component $\mathcal{E}'_b = \mathcal{E}_b \cos\theta$ which corresponds to the intracavity field. Finally, the system can be closed by using the fact that \mathcal{E}_f is obtained from \mathcal{E}'_b through reflection on the mirror M_1 .

First, by combining $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_b \sin\theta$ with Equation (1), we obtain in the limit of a thin medium ($|\theta| \ll 1$):

$$\mathcal{E}_r = -\frac{\alpha \ell}{2i} (\mathcal{E}_f \mathcal{E}_b \mathcal{E}_i^* - \mathcal{E}_f^* \mathcal{E}_b \mathcal{E}_i) \quad (2)$$

The two terms of the right-hand side of Eq. (2) describe four-wave mixing processes. The first term corresponds to the backward four-wave mixing term which is known to generate the phase-conjugate wave. The second term is often called the distributed feedback term. It generates a field having the same phase as the incident field. (The effect of the Brewster windows on the fields polarized along the y-direction can be included in the model by replacing \mathcal{E}_i by $t \mathcal{E}_i$ and $\mathcal{E}_b \sin \theta$ by $t \mathcal{E}_b \sin \theta$ where t is the amplitude transmission coefficient for the y-polarization ($|t|^2 = 0.72$))

However, equation (2) is not sufficient to describe the reflected field since \mathcal{E}_f and \mathcal{E}_b , being generated from \mathcal{E}_i , are also functions of \mathcal{E}_i . Indeed, by studying the round trip of the field inside the cavity, as explained above, one finds that:

$$\mathcal{E}_f = -\frac{r_1 r_2 \sin \theta \cos \theta}{e^{-i\eta} - r_1 r_2 \cos^2 \theta} \mathcal{E}_i \quad (3-a)$$

$$\mathcal{E}_r = -\frac{r_2 e^{-i\eta/2} \sin^2 \theta}{e^{-i\eta} - r_1 r_2 \cos^2 \theta} \mathcal{E}_i \quad (3-b)$$

where η is the round-trip dephasing and r_1 and r_2 are the amplitudes of the reflection coefficients on the mirrors M_1 and M_2 (phase factors due to the propagation between the cell and the point where the fields \mathcal{E}_i and \mathcal{E}_r are considered have been omitted). The equation (3-a) is an implicit equation for \mathcal{E}_f (or θ) since \mathcal{E}_f and θ are already related by eq. (1). In the case of a thin optical medium ($|\theta| \ll 1$), this equation can be explicitly solved. One recovers the threshold condition for a four-wave mixing oscillator and the fact that the phase of the intracavity field is locked on the phase of the incident field [6]. Concerning the reflected field, Eq. (3-b) shows that the global phase of \mathcal{E}_r only depends on \mathcal{E}_i . The fact that no term in \mathcal{E}_i^* explicitly appears comes from the locking of the phase of the intracavity field on the phase of the incident field. More generally, one can consider this result as a consequence of time-translation invariance (the modification of the global phase of the incident field is equivalent to change the origin of the time axis). However, using a method similar to the one developed by Tomita *et al.* [7], one can show that the present system may correct the distortions of the wavefront of the incident beam.

The system that we have presented here may be interesting for several reasons. For example, the reflected wave and the incident wave have the same frequency, the reflectivity is relatively high and the response time relatively short. On the other hand, this mirror has some drawbacks. Like most of the phase-conjugate mirrors using atomic vapors, the angular aperture is very small.

Furthermore, this mirror can only work with incident beams having a well-defined polarization. We think however that the main advantage of the scheme described here is that the physical mechanism that leads to the emission of the reflected wave seems perfectly understood. This situation is thus well adapted for a comparison between theory and experiment.

REFERENCES

- [1] J. Feinberg, *Opt. Lett.* **7**, 486 (1982); J.O. White, M. Cronin-Golomb, B. Fischer and A. Yariv, *Appl. Phys. Lett.* **40**, 450 (1982); M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J.O. White and A. Yariv, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-20**, 12 (1984); M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J.O. White and A. Yariv, *Appl. Phys. Lett.* **42**, 919 (1983).
- [2] B.Ya Zel' dovich, V.I. Popovichev, V.V. Ragul'skii and F.S. Faizullov, *JETP Lett.* **15**, 109 (1972); K.D. Ridley and A.M. Scott, *Opt. Comm.* **76**, 406 (1990).
- [3] C.J. Gaeta, J.F. Lam and R.C. Lind, *Opt. Lett.* **14**, 245 (1989).
- [4] G. Grynberg, E. Le Bihan and M. Pinard, *J. Phys. (Paris)* **47**, 1321 (1986); D. Grandclément, G. Grynberg and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 40 (1987); G. Khitrova, J.F. Valley and H.M. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1126 (1988); M.T. Gruneisen, K.R. Mac Donald and R.W. Boyd, *JOSA B5*, 123 (1988); M.T. Gruneisen, K.R. Mac Donald, A.L. Gaeta, R.W. Boyd and D.J. Harter, *Phys. Rev. A40*, 3464 (1989).
- [5] G. Grynberg, M. Vallet and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 701 (1990).
- [6] M. Pinard, R. Horowicz, D. Grandclément and G. Grynberg, *IEEE J. Quantum Electron.* **25**, 570 (1989).
- [7] Y. Tomita, R. Yahalom and A. Yariv, *Opt. Comm.* **73**, 413 (1989).

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1: Experimental setup. The incident, reflected and transmitted fields are polarized along the y direction. The intracavity fields are polarized along the x direction.

Fig. 2: Time response of the self-pumped mirror. Fig. 2-a shows the variation of the incident intensity and Fig. 2-b the variation of the reflected intensity.

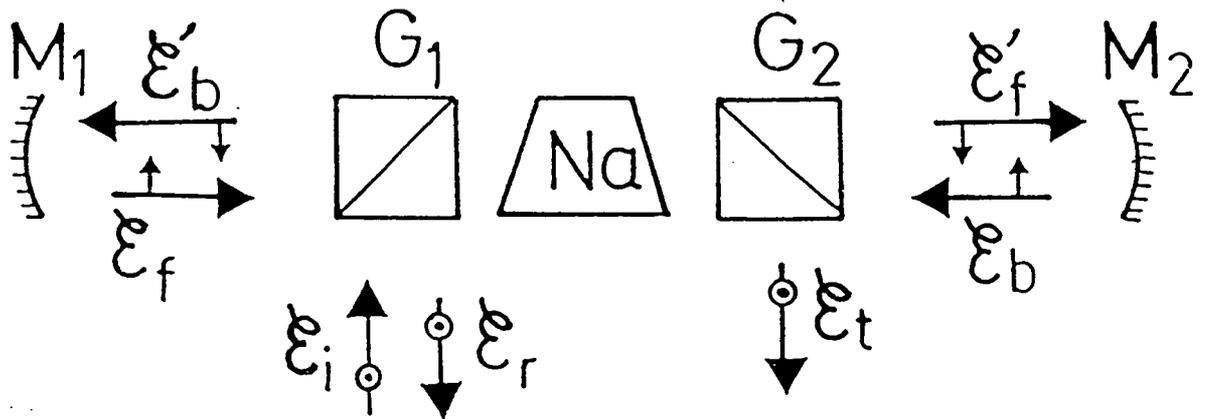


Figure 1

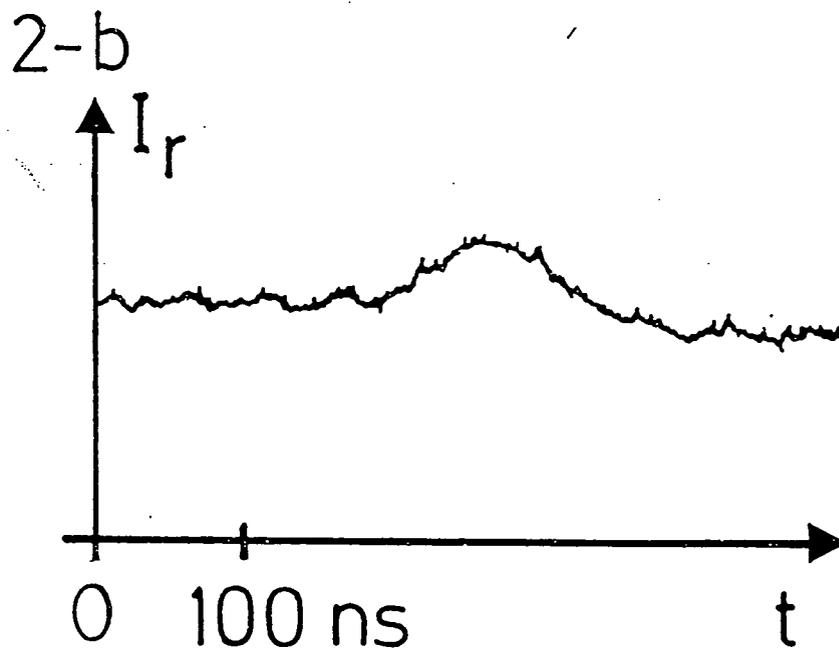
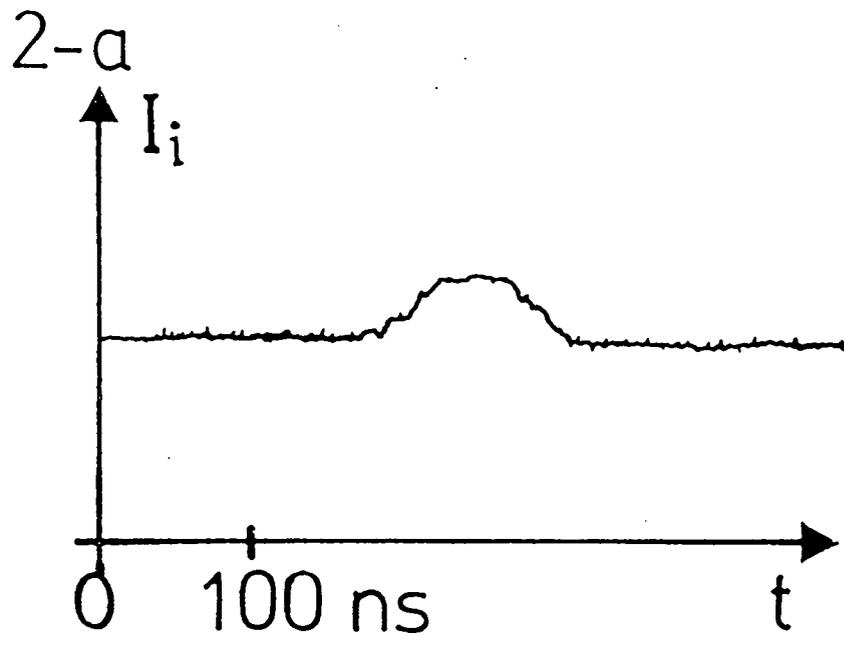


Figure 2

III.E. REFERENCES:

- [1] A. Omont, *Prog. Quantum. Electronics*, 5, 69 Pergamon. Press (1977).
- [2] J.P. Barrat, C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. Rad.*, 22, 329 et 443 (1961).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, *Cours du Collège de France 1990*
J. Brossel, *Cours des Houches 1964*.
- [4] A. Messiah, *Mécanique Quantique II*, Dunod (1960).
- [5] M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis and J.K. Wooten Jr., "The 3-j and 6-j symbols", Technology Press, M.I.T (1959).
- [6] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'Interaction entre Photons et Atomes*. Inter. Ed. C.N.R.S. (1988).
- [7] Y.R. Shen, *The principles of Non Linear Optics*, Wiley Interscience (1984).
- [8] M. Abramowitz and I.A. Segun, *Handbook of mathematical Functions*, Dover Publication Inc., N.Y (1964).
- [9] W.L. Wiese, M.W. Smith and B.M. Miles, *Atomic Transition Probabilities*, NSRD-NBS 22 (1969).
- [10] H.G. Dehmelt, *Phys. Rev.* 105, 1487 (1957).
- [11] J.P. Huignard and M. Marrakchi, *Opt.Comm.*, 38, 249 (1981).
- [12] G. Grynberg, E. Le Bihan and M. Pinard, *J.Phys.*, 47, 1321 (1986).
D. Grandclément, G. Grynberg and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 44 (1987).
- [13] R.L. Abrams and R.C. Lind, *Optics Lett.*, 2, 94 (1978).
- [14] J. Dalibard and C.Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B*, 6, 2023 (1989).
- [15] M. Pinard, J.Y. Courtois et G. Grynberg A paraitre.
- [16] A. Yariv and D.M. Pepper, *Optics Lett.*, 1, 16 (1977).
- [17] Voir par exemple M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics 6th Ed.*, Pergamon Press, 424-428 (1980).
- [18] F.A. Hopf, *J. Opt. Soc. Am.*, 70, 1320 (1980).
J. Feinberg, *Optics Lett.*, 8, 569 (1983).
D.J. Gauthier, R.W. Boyd, R.K. Jungquist, J.B. Lisson and L.L. Voci, *Optics Lett.*, 14, 324 (1989).

-
- [19] A.E. Siegman, P.A. Belanger et A. Hardy., *Optical Resonators Using Phase-conjugate Mirrors*, chap 13 de la référence [II. 2].
- [20] M. Pinard and G. Grynberg, *Phys. Rev. A* 43, 1470 (1991).
- [21] G. Grynberg, M. Vallet and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.*, 65, 701 (1990).
- [22] H. Kolgelnik and T. Li, *Applied Opt.*, 5, 1551 (1966).
- [23] D.J. Gauthier, M.S. Malcuit, A.L. Gaeta and R.W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 1827 (1990).
- [24] G. Grynberg and J. Paye, *Europhys.Lett.*, 8, 29 (1989).
- [25] J.Y. Courtois and G. Grynberg, submitted to *Opt. Commun.*
- [26] E.Arimondo, M.Inguscio and P.Violino, *Rev. of Modern Physics*, 49, 31 (1977).
J.Reader, C.H.Corliss, W.L.Wiese and G.A.Martin, "Wavelengths and Transition Probabilities for Atoms and Atomic Ions", NSRDS-NBS 68, Whashington (1980).
- [27] F.Biraben, "Description du laser Titane Saphir", notice non publiée.
- [28] T.W.Hänsch and B.Couillaud, *Opt. Commun.*, 35, 441 (1980).
- [29] M. Oria, D. Bloch, M. Fichet and M. Ducloy, *Opt. Lett.*, 19, 1082 (1989).
- [30] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* 6th Ed.,Pergamon Press, 214 *et seq.* (1980).

Annexe A: Génération d'instabilités dans une cavité en anneau contenant un milieu de Kerr et alimenté par deux champs de fréquence différente.

Cette partie est constituée d'un article paru dans Optics Communication. Nous considérons une cavité en anneau contenant un milieu de Kerr et alimentée par deux ondes se propageant dans des directions opposées de la cavité et de fréquence différente. Nous prévoyons l'apparition d'instabilités générées par mélange à quatre ondes, décrivons leur seuils ainsi que leur fréquences au seuil. Nous montrons qu'une non-réciprocité entre les deux directions de propagation peut être observée sur ces instabilités.

INSTABILITIES IN A RING CAVITY FILLED WITH A KERR MEDIUM AND SUBMITTED TO A BIMODE FIELD

M. VALLET, Ph. VERKERK and G. GRYNBERG

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris Cedex 05, France

Received 28 September 1989

We consider a ring interferometer filled with a nonlinear Kerr medium and submitted to two counter-rotating waves. We determine the threshold of the temporal instability and the frequency of oscillations at threshold. We discuss this instability as the combination of three different four-wave mixing processes. We show that the nonreciprocity between the counter-rotating directions (Sagnac effect) can be observed on these instabilities.

It has been shown by Ikeda [1] that a ring cavity filled by a nonlinear Kerr medium and interacting with a single-mode field can become unstable for a sufficiently large value of the nonlinearity. Later on, Firth et al. [2] and Silberberg and Bar Joseph [3] have shown that these instabilities can be interpreted in terms of four-wave mixing generation of two sidebands of the incident field by the Kerr medium.

We consider here the case where the ring cavity is submitted to two counter-rotating fields (fig. 1). Such a system is a well-known example of passive optical gyro [4]. Actually, it has been shown by Kaplan and Meystre [5] that the scale factor of such a gyro can be enhanced by the presence of a Kerr medium. The study of Kaplan and Meystre was done for in a range of parameters where the physical system remains stable. Our aim is to investigate what occurs at the threshold of instability and slightly above.

We consider a ring cavity with two totally reflective mirrors and one mirror of transmission $T \ll 1$ and reflectivity R (with $T + R \approx 1$). Two beams are incident on the transmitting mirror (fig. 1). These beams have the same polarization and the same amplitude E_0 outside the cavity. Their frequencies ω_1 and ω_2 are close to the eigenfrequencies of the cavity. More precisely, we assume in this paper that $|\omega_1 - \Omega_1|$, $|\omega_2 - \Omega_2|$ and $|\omega_1 - \omega_2|$ are much smaller than the free spectral range of the cavity. The difference between Ω_1 and Ω_2 can be due to a nonre-

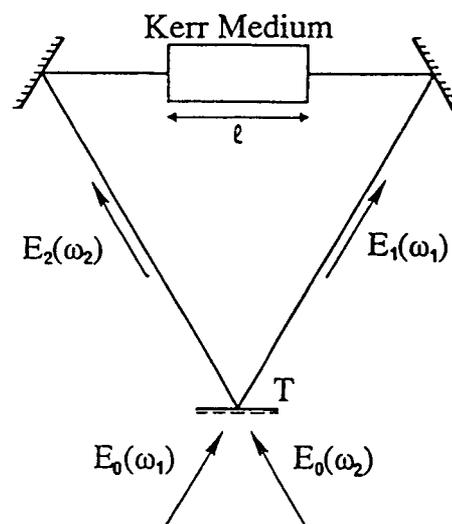


Fig. 1. Ring cavity containing a Kerr medium and submitted to two counter-rotating beams.

ciprocal effect such as the Sagnac effect [4].

The cavity contains a Kerr medium of length l . Its refractive index n is the sum of the linear component n_0 and the nonlinear component. The linear optical length of the cavity L' is equal to $L + (n_0 - 1)l$, where L is the geometrical length of the cavity. We assume here that the time response of the Kerr medium is very short compared to the time response of the cav-

ity. The nonlinear refractive index thus follows adiabatically the variation of the field amplitudes. The equations of evolution of the fields E_1 and E_2 in the cavity are similar to those of ref. [6] and read

$$dE_1/dt = \frac{1}{2}\gamma(E'_0 - E_1) + i(\omega_1 - \Omega_1)E_1 + in_2(|E_1|^2 + 2|E_2|^2)\omega_1(l/L')E_1, \quad (1a)$$

$$dE_2/dt = \frac{1}{2}\gamma(E'_0 - E_2) + i(\omega_2 - \Omega_2)E_2 + in_2(|E_2|^2 + 2|E_1|^2)\omega_2(l/L')E_2, \quad (1b)$$

where $\gamma = cT/L'$ is the cavity bandwidth and $E'_0 = 2E_0/\sqrt{T}$ is the maximum field inside the cavity. The last terms of eqs. (1a) and (1b) correspond to the nonlinear phase shift induced by the Kerr medium (note that these terms are not symmetric in the field E_1 and E_2 [5]). We also assume that these nonlinear phase shifts are small compared to the free spectral range of the cavity.

To simplify the following discussion, we introduce the dimensionless quantities

$$E'_j = E_j/E'_0 = x_j \exp(i\phi_j), \quad (2a)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\gamma t, \quad (2b)$$

$$\delta_j = 2(\omega_j - \Omega_j)/\gamma, \quad (2c)$$

$$b = 2n_2 E_0^2 (\omega_1/\gamma) (l/L') = (8/T^2)n_2 E_0^2 (\omega_1/c)l. \quad (2d)$$

In formula (2a), x_j corresponds to the dimensionless amplitude of field E_j ($0 \leq x_j \leq 1$) and ϕ_j to its phase. In formula (2d), we can replace ω_1 by ω_2 since $|\omega_1 - \omega_2|$ is very small. We introduce also the notations

$$\Delta = (\omega_2 - \omega_1) - (\Omega_2 - \Omega_1), \quad (3a)$$

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = (2/\gamma)\Delta, \quad (3b)$$

that will be useful for the following discussions.

The eqs. (1) can then be transformed in a set of four equations,

$$dx_1/d\tau = \cos \phi_1 - x_1, \quad (4a)$$

$$dx_2/d\tau = \cos \phi_2 - x_2, \quad (4b)$$

$$d\phi_1/d\tau = \delta_1 + b(x_1^2 + 2x_2^2) - (\sin \phi_1)/x_1, \quad (4c)$$

$$d\phi_2/d\tau = \delta_2 + b(x_2^2 + 2x_1^2) - (\sin \phi_2)/x_2. \quad (4d)$$

The steady-state solution for this system in the case where $\delta_1 = \delta_2$ has been studied by Kaplan and Meystre

[5]. Here, we have first found the steady-state solutions of this system for several values of δ_1 , δ_2 and b and we have then made a linear stability analysis of these solutions. It appears that for certain values of these parameters, *all the solutions are unstable*. For example, we have plotted in fig. 2 the domain in the b, δ_1 plane where all the solutions are unstable for $\delta = 1.4$. We have calculated these domains for several values of δ and we have reported in fig. 3 the domain in the δ, b plane where there is at least one value of δ_1 for which all the solutions are unstable. We see that the instability can be obtained only if $|b| \geq b_{\min}$. b_{\min} is slightly smaller than the value $(8/3\sqrt{3})$ required to obtain bistability with a single beam whose amplitude is E_0 [6], but larger than the value $(8/9\sqrt{3})$ necessary to obtain bistability with both beams propagating in opposite directions in the cavity [5]. Also, b_{\min} is smaller than the value $8/\sqrt{3}$ required to obtain an asymmetric behaviour with two

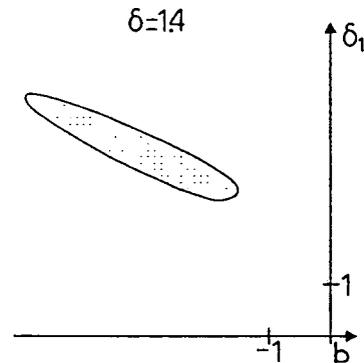


Fig. 2. Stability of the solutions for $\delta = 1.4$. All the solutions in the shaded region are unstable.

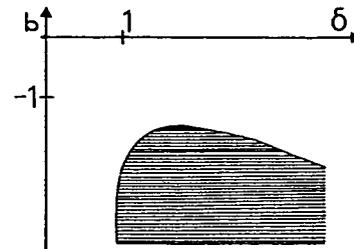


Fig. 3. Stability of the solutions in the δ, b plane. In the shaded region there is at least one value of δ_1 for which all the steady state solutions are unstable.

pumps of same frequency [5]. Finally, we see that instability should be difficult to observe when δ gets smaller than 1.

In an actual experiment, b and δ will generally be determined by external conditions (intensity and frequencies of the light source, characteristics of the cavity, Sagnac effect). Fig. 3 can then be used to predict if an instability can occur for these values of the parameters. Then, one should use a figure similar to fig. 2 to find for which range of values of δ_1 (detuning of the cavity) the instability indeed arises.

To see what occurs above the threshold of instability we have solved numerically eqs. (4) for values of b , δ and δ_1 which lay in the domain of instability. For example, we show in fig. 4 the solution obtained for $\delta=3$, $b=-5.5$ and $\delta_1=2.5$. This curve presents the variation of x_1^2 (field intensity) versus τ (time in reduced units). We observe an oscillatory behaviour which is obviously not sinusoidal. It is in fact the superposition of a sinusoidal curve of frequency $\Omega=\eta\delta$ (with $\eta\approx 0.66$) with its second harmonic. If we get closer to the threshold, the amplitude of the harmonic decreases.

We want to give a physical interpretation of the origin of three instabilities and also explain the origin of the value of the factor η found by the numerical calculation above. As usually [2,3] for instabilities obtained in a fast-response Kerr medium the origin can be related to four-wave mixing generation. Actually, the interaction of two pump beams of frequencies ω_1 and ω_2 in a ring four-wave mixing oscillator [7] above threshold leads to the generation of two counter-rotating fields having frequencies (fig. 5a)

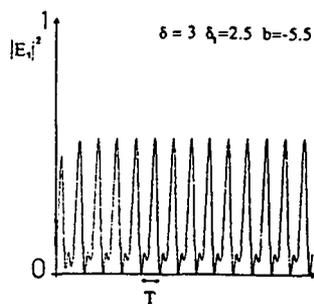


Fig. 4. Intensity of one beam versus time for $\delta=3$, $b=-5.5$ and $\delta_1=2.5$. The period T is equal to $2\pi/\eta\delta$ with $\eta\approx 0.66$.

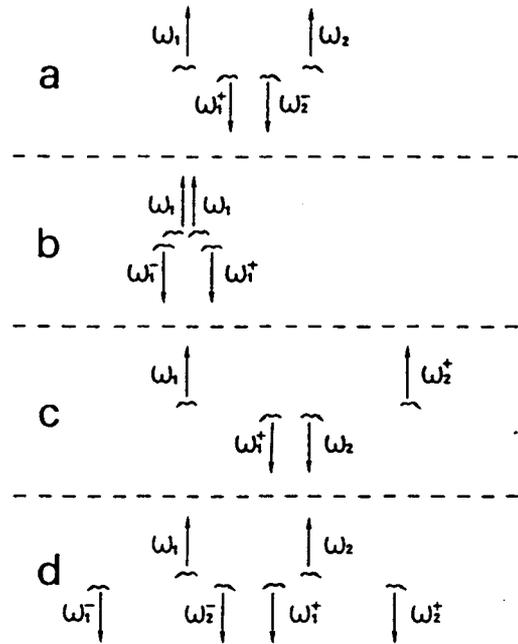


Fig. 5. Four-wave mixing processes generating the new frequencies. (a) Backward four-wave mixing; (b) forward four-wave mixing; and (c) cross coupling. The new beams generated in the same direction as E_1 (respectively E_2) have frequencies ω_1^+ and ω_1^- (respectively ω_2^+ and ω_2^-). The ondulated arrows indicate the direction of propagation of the photons. For each diagram, the upper arrows correspond to the photons which are absorbed and the lower arrows to the photons which are emitted. The combined effect of the preceding four-wave mixing processes is shown in (d). Apart from the pump beam, two weak fields are created in each counter-rotating direction.

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \pm \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) . \quad (5)$$

This means that this process alone would lead to an instability having a frequency $|\omega_1 - \omega_+| = |\omega_2 - \omega_-| = 0.5|\Delta|$. Actually, it is the value experimentally obtained in a ring four-wave mixing oscillator [7]. The difference between the four-wave mixing oscillator and the present system is that here we cannot neglect the other four-wave mixing couplings (forward four-wave mixing, cross coupling) because of the geometrical configuration (pump beams and oscillating beams propagate here in the same direction).

For example, forward four-wave mixing (fig. 5b) induces the creation of two beams of frequency ω_1^+ and ω_1^- propagating in the same direction as the

pump beam ω_1 , the relation between the frequencies being $\omega_1^+ = 2\omega_1 - \omega_1^-$. If the forward four-wave mixing was the unique gain process, we would obtain $|\omega_1 - \omega_1^+| = |\omega_1 - \omega_1^-| = 0$. However, the combination of backward four-wave mixing and forward four-wave mixing leads to having a triplet in each counter-rotating direction ($\omega_1, \omega_1^+, \omega_1^-$ and $\omega_2, \omega_2^+, \omega_2^-$).

One should also consider the cross-coupling terms. These terms correspond to a four-wave mixing process where for example one photon of the pump beam ω_1 and one photon of the oscillating beam ω_2^+ is absorbed and two photons are emitted, one in the pump beam ω_2 , the other in the oscillating beam ω_1^+ (fig. 5c). If this process was alone, we would find using an equation similar to eq. (5) that $\omega_1^+ - \omega_2 = \Omega_1 - \Omega_2$. This equation leads to $\omega_1^+ - \omega_1 = \Delta$. Thus each four-wave mixing process leads to a different prediction for η . η would be 0.5 for backward four-wave mixing, 0 for forward four-wave mixing and 1 for the last parametric process. The final value of η thus appears as the mean value of η for all possible four-wave mixing processes. (Actually, the fact that η is larger than 0.5 can be qualitatively related to the fact that the cross coupling appears in the equations with a coefficient two times larger than the forward four-wave mixing [8,9].)

In fig. 4, the oscillatory behaviour comes from the beat between the pump beam of frequency ω_1 and the weak beams of frequencies $\omega_1 \pm \eta\Delta$. The harmonic arises from the beat between the two weak beams.

One can also study directly the threshold of the four-wave mixing instability using a method similar to the one used for the four-wave mixing oscillator [10] and including forward four-wave mixing and cross coupling as in the case of the theory of spatial instabilities of a standing wave in a nonlinear medium [8,9]. Such an approach indeed confirms the results discussed previously.

Let us now consider the particular case where $\omega_1 = \omega_2$. In this case, an instability can appear for a sufficiently large value of the incident intensity E_0^2 and of $\Omega_1 - \Omega_2$ (Sagnac effect or any other nonreciprocal effect). The frequency of instability being proportional to $(\Omega_1 - \Omega_2)$, this shows that the Sagnac effect could be detected by measuring the beat frequency above threshold. Thus a passive gyro filled with a Kerr medium behaves like an active gyro

above the instability threshold.

This study can progress in several directions. First, we have studied what occurs around the threshold of instability. The real behaviour far in the instability domain has yet to be determined. Secondly, we have considered a Kerr medium with an instantaneous response time. In fact, in several experimental situations, one should take into account the time response of the medium. This introduces a new gain process (two-wave mixing [11]) which is known to strongly modify the manifestation of Ikeda instabilities [12]. Finally, we have discussed the connection with the gyro problem. However, the major problem in optical gyro is retrodiffusion. It is thus desirable in the future to know how the present results are modified by retrodiffusion.

The authors would like to thank Michel Pinard from our laboratory and B. Prade, J.Y. Vinet and B. Lamouroux from the Laboratoire d'Optique Appliquée (ENSTA and Ecole Polytechnique) for interesting discussions.

References

- [1] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 709.
- [2] W.J. Firth, E. Abraham and E.M. Wright, *Appl. Phys.* B28 (1982) 170.
- [3] I. Bar Joseph and Y. Silberberg, *Optics Comm.* 48 (1983) 53.
- [4] W.W. Chow, J. Gea-Banacloche, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders, W. Schleich and M.O. Scully, *Rev. Mod. Phys.* 57 (1985) 61.
- [5] A.F. Kaplan and P. Meystre, *Optics Lett.* 6 (1981) 590; *Optics Comm.* 40 (1982) 229.
- [6] G. Grynberg, F. Biraben and E. Giacobino, *Appl. Phys.* B26 (1981) 155.
- [7] G. Grynberg and M. Pinard, *C.R. Acad. Sci. (Paris)* 306 (1988) 203; G. Grynberg, M. Pinard and M. Faucheux, *Optics Lett.* 14 (1989) 63; D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, *IEEE J. Quantum Electron.* 25 (1989) 580.
- [8] W.J. Firth and C. Pare, *Optics Lett.* 13 (1988) 1096.
- [9] G. Grynberg and J. Payne, *Europhys. Lett.* 8 (1989) 29.
- [10] G. Grynberg, M. Pinard, D. Grandclément and Ph. Verkerk, *J. Physique* 49 (1988) C2-471; M. Pinard, R. Horowicz, D. Grandclément and G. Grynberg, *IEEE J. Quantum Electron.* 25 (1989) 570.
- [11] G. Grynberg, E. Le Bihan and M. Pinard, *J. Physique* 47 (1986) 1321.
- [12] Y. Silberberg and I. Bar-Joseph, *J. Opt. Soc. Am.* B1 (1984) 662.

ANNEXE B: Oscillateurs à deux fois deux ondes

Cette partie est constituée d'un article paru dans *Optics Communication*. Nous y décrivons un oscillateur en anneau où deux ondes tournant en sens opposé sont générées par un processus de mélange à deux ondes. La différence de fréquence entre les deux ondes est théoriquement sensible aux effets non-réciproques (effet Sagnac).

Ce système est aussi un double miroir à conjugaison de phase. L'interaction par mélange à quatre ondes entre chaque onde pompe et les deux ondes oscillantes génère en effet deux ondes réfléchies qui sont conjuguées des ondes pompes. Un coefficient de réflexion de l'ordre de 10^{-4} a été mesuré.

Double phase-conjugation in sodium

M. Vallet, M. Pinard and G. Grynberg

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l' Ecole Normale Supérieure, Université Pierre et Marie Curie, BP 74, 75252 Paris Cedex 05, France

Received 15 February 1991

We present the results of an experiment showing double phase-conjugation in an atomic vapor. Two pump beams incident on a sodium cell placed in a ring cavity induce the generation of two counterrotating oscillating beams. The four-wave mixing interaction of each pump beam with the counterpropagating beams in sodium generates a beam which is phase-conjugate of the pump beam. Reflectivities of the order of 2×10^{-4} have been observed.

A large variety of phase-conjugate mirrors have been proposed and realized during the last past years. In particular, the double phase-conjugate mirror has been proposed by Cronin-Golomb et al. [1] and demonstrated by Weiss et al. [2] using photorefractive crystals. The principle of this device is shown in fig. 1. Two input beams E_1 and E_2 are incident upon opposite surfaces of a photorefractive crystal. Because of four-wave mixing processes in the crystal, these beams produce two output beams E'_1 and E'_2 which are respectively phase-conjugate of E_1 and E_2 . This type of mirrors is particularly interesting since no other pump beam is required. The interest of this device has induced numerous results on this subject [3]. An essential aspect of these double phase-conjugate mirrors is that they used two-wave mixing [4] as an essential element to generate the new waves. Actually, it has been shown that two-wave mixing can be observed in materials very different from photorefractive and in particular in atomic vapors [5,6]. Furthermore, the atomic vapors have the ad-

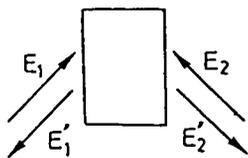


Fig. 1. Scheme of a double phase-conjugate mirror using a photorefractive crystal.

vantage of having fast response-time. It was thus interesting to realize a double phase-conjugate mirror using atomic vapors. We present in this paper the results of such an experiment.

In fact, our experiment uses a scheme slightly different from the one of fig. 1, since the medium is enclosed in a ring cavity (fig. 2). The two incident waves E_1 and E_2 then induce a two-wave mixing generation of two beams E_+ and E_- which counterrotate in the cavity. The four-wave mixing interaction of E_1 (resp E_2) with the counterpropagating beams E_+ and E_- creates the phase-conjugate fields E'_1 (resp

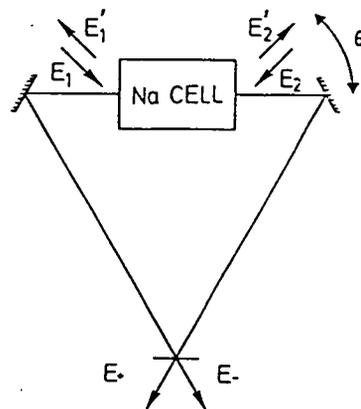


Fig. 2. Scheme of the double phase-conjugate mirror studied in this paper. Note that the atomic vapor is enclosed in a ring oscillator.

E_2). In our experimental situation, the medium is a quartz cell containing sodium and 3 Torr of helium since two-wave mixing oscillation is easier to achieve in the presence of a buffer gas [7]. The temperature of the cell is about 170°C. The output (500 mW) from a home-made single mode dye laser is sent onto a half-wave plate followed by a Glan prism to give the two beams E_1 and E_2 . Their relative intensity I_1 and I_2 can be modified by rotating the half-wave plate, their sum I being constant. Using a second half-wave plate on the path of E_2 , we obtain the same vertical polarization for the two pump beams E_1 and E_2 . The ring cavity consists of four totally reflecting plane mirrors M_1 , M_2 , M_3 and M_4 (fig. 3). To stabilize the cavity, a lens has been set in the middle of each small arm ($M_1 M_2$) and ($M_3 M_4$). Those lenses whose focal length are equal to 200 mm give two identical waists in the middle of each large arm ($M_1 M_4$) and ($M_2 M_3$). The cavity length being equal to 140 cm, the dimension of these waists is 170 μm . The sodium cell with Brewster windows is placed at the center of the arm ($M_1 M_4$). We have inserted a glass plate P_1 inside the cavity to extract energy from the oscillating beams. There is an antireflection coating on one face, the other face being uncoated and reflecting 4% of the incident energy.

The pump beam E_1 (resp E_2) makes a small angle θ (resp $\pi-\theta$) with the cavity axis ($M_1 M_4$) ($\theta=5 \times 10^{-3}$ in our experiment). The pump beams are focussed inside the sodium cell and have the same waist ($w_p=200 \mu\text{m}$). A vertically polarized bidirectional oscillation is observed on the high frequency side of the D_2 line. This oscillation is maximum when the laser is detuned by 1.5 GHz from the center of the absorption line. To determine the frequency

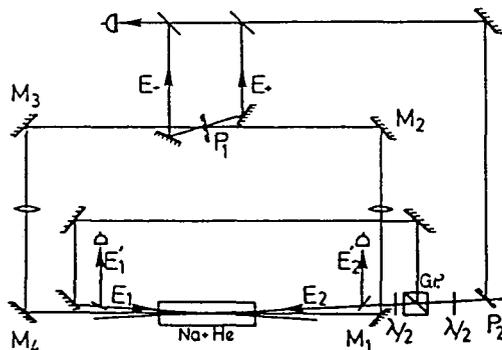


Fig. 3. Experimental setup.

spectrum of the oscillating beam E_+ (resp. E_-) we have analysed with a spectrum analyser the beat frequency between this beam and a reference beam taken from the pump beam with a plate P_2 (see fig. 3). The measurement of $|\omega_+ - \omega|$ and $|\omega_- - \omega|$ shows that these quantities vary between 8 MHz and 20 MHz depending on the cavity length, this result being identical to the one precedingly obtained for a single incident beam [7]. Note that if one pump beam is suppressed (E_2 by example) the corresponding oscillation E_- disappears but the other oscillating beam E_+ remains. This shows that the oscillation can be considered as the superposition of two unidirectional oscillations. We have also studied the beat frequency between the two oscillating beams E_+ and E_- and observed that the two frequencies ω_+ and ω_- are equal in our experimental conditions. To detect a phase-conjugate emission, two glass plates have been placed on the paths of the incident beams E_1 and E_2 . The reflected beam E'_1 for example is induced by a four-wave mixing process where one photon of the beam E_+ and one photon of the beam E_- are absorbed, two photons being emitted, one supplementary photon in the beam E_1 and one photon in the beam E'_1 . The frequency of the reflected field should be equal to $(\omega_+ + \omega_- - \omega)$. Actually, we have observe the phase-conjugate emission on each incident beam and measured a phase-conjugate reflectivity of the order of 2×10^{-4} . The beat frequency between the reflected beam E'_1 and the reference beam is equal to twice $|\omega_+ - \omega|$ on the entire oscillation range in agreement with the preceding analysis.

We wish now to give a possible explanation for the fact that $\omega_- = \omega_+$. In principle, the difference $(\omega_+ - \omega_-)$ depends on the difference between the optical lengths in the two counterrotating directions [8]:

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = -\omega(l/L)(\chi_+ - \chi_-),$$

χ_+ and χ_- are the susceptibilities of the beams E_+ and E_- in the sodium cell, l is the length of the cell and L the length of the cavity. In a preceding experiment done with a ring four-wave mixing oscillator [9], we observed that the two counterrotating beams can have different frequencies when the pump beams have different intensities. This frequency difference is associated with a pressure-induced con-

tribution to the nonlinear susceptibility of each oscillating beam which leads to a nonreciprocal phase shift in the presence of pump beams of different intensity [9]. This effect could also be expected to occur in the present experimental situation. We recall that in the four-wave mixing experiment [9], a beat frequency ($\Delta\omega/2\pi$) equal to 1 MHz was observed for a difference $(I_1 - I_2)/I$ equal to 0.1. In the present experiment we have never observed any difference between ω_- and ω_+ for a similar value of $(I_1 - I_2)/I$. This result suggests that the lock-in band [8] in this experiment is larger than the lock-in band obtained in the four-wave mixing experiment. The difference is not associated with the optical elements which are common to both experiments. We think that the difference comes from the contribution of a four-wave mixing term (often called distributed feedback) in the sodium vapor itself. This term corresponds to a process where one photon of the pump beam E_1 and one photon of the oscillating beam E_- are absorbed, two photons being emitted: one photon in the beam E_2 and one photon in the direction of the oscillating beam E_+ , this last photon having a frequency ω_- . Of course, the reciprocal process also exists and leads to the emission of photons of frequency ω_+ in the direction of the beam E_- . This term thus creates a coupling between the two counterrotating waves and has an effect equivalent to the backscattering produced by mirrors or intracavity elements [8].

To calculate the amplitude of the retroreflected beams E'_+ and E'_- we assume that the atomic vapor can be described by a set of motionless two-level atoms and that the experimental conditions for the Kerr limit (where a perturbative treatment of the incident fields can be developed) are fulfilled. In fact, the atomic polarization associated with the distributed feedback term has a wavevector $k_1 + k_- - k_2$ different from k_- , the difference being equal to $k\theta^2 e_z$ (e_z is the unitary vector along the k_+ direction and k is equal to ω/c). Taking into account this phase mismatch we find that the total field E'_+ is equal to

$$E'_+ = k\chi^{(3)}E_1 E_2^* E_- [\sin(k\theta^2 l/2)/(k\theta^2 l/2)] \\ = r_{+-} E_- .$$

By analogy with the gyrolaser problem [8], we deduce from this equation that the lock-in-band due to the distributed feedback process is equal to $2(c/L)$

$|r_{+-}|$ where c/L is the free spectral range of the cavity. In our experimental conditions we estimate this lock-in band to be 1 MHz. This value is adequate to explain why the two counterrotating beams were always locked in our experiment. In the case of the ring four-wave mixing oscillator, the backscattering associated with the distributed feedback term should also occur, but in this case the difference between $k_1 + k_- - k_2$ and k_+ has not only a component $k\theta^2$ along e_z but also a component $2k\theta$ along e_x . Then there are two reduction factors due to the mismatching, and consequently this contribution to the lock-in band must be smaller which may explain why a gyro-type curve was observed in the preceding experiment [9].

In conclusion, we have observed double phase-conjugation in sodium vapor. Once again, this shows that ideas issued from photorefractives can be adapted to other materials and, in particular, to atomic vapors. Even if the photorefractives still remain the more interesting materials for applications; the type of experiment presented in this paper demonstrates the general character of the underlying phenomena.

References

- [1] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J.O. White and A. Yariv, IEEE J. Quantum Electron. QE-20 (1984) 12.
- [2] S. Weiss, S. Sternklar and B. Fischer, Optics Lett. 12 (1987) 114.
- [3] A.M.C. Smout and R.W. Eason, Optics Lett. 12 (1987) 498; M.D. Ewbank, Optics Lett. 13 (1988) 47; P. Yeh, Y. Tallis, Y. Chang and M.D. Ewbank, J. Opt. Soc. Am B 5 (1988) 1743; D. Wang, Z. Zhang, Y. Zhu, S. Zhang and P. Ye, Optics Comm. 73 (1989) 495.
- [4] J.D. White, M. Cronin-Golomb, B. Fischer and A. Yariv, Appl. Phys. Lett. 40 (1982) 450; H. Rajbenback and J.P. Huignard, Optics Lett. 10 (1985) 137; K.R. Mac Donald and J. Feinberg, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 821.
- [5] G. Grynberg, E. Le Bihan and M. Pinard, J. Phys. (Paris) 47 (1986) 1321.
- [6] M.T. Gruneisen, K.R. Mac Donald, A.L. Gaeta, R.W. Boyd and D.J. Harter, Phys. Rev. A 40 (1989) 3464.
- [7] D. Grandclément, M. Pinard and G. Grynberg, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 40.
- [8] W.W. Chow, J. Gea-Banacloche, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders, W. Schleich and M.O. Scully, Rev. Modern Phys. 57 (1985) 61.
- [9] G. Grynberg, M. Pinard and M. Faucheux, Optics Lett. 14 (1989) 63.

nom: Marc VALLET

titre: Mélange à quatre ondes dans les vapeurs atomiques: des propriétés quantiques aux applications gyrométriques et à la réalisation de nouveaux miroirs.

résumé:

L'objet de cette thèse est l'étude de plusieurs applications des processus de mélange à quatre ondes induits dans les vapeurs atomiques.

Dans la première partie, les notions de base de l'optique non-linéaire dans les milieux de Kerr sont rappelés.

Dans la seconde partie, nous étudions les propriétés des oscillateurs à mélange à quatre ondes en anneau dont le milieu amplificateur est constitué d'une vapeur de sodium soumise à deux ondes pompes ne circulant pas dans la cavité. Les applications de ces oscillateurs comme senseur de rotation et comme générateur de faisceaux jumeaux sont démontrées, les principes de ces deux notions étant rappelées dans leur grande ligne.

Dans la troisième partie, nous présentons plusieurs résultats sur le mélange à quatre ondes lorsque les ondes incidentes ont des polarisations linéaires orthogonales. Cette géométrie nous a permis d'observer un processus de mélange à deux ondes, et de réaliser un miroir à contraste de phase et un miroir auto-pompé. Les résultats obtenus expérimentalement dans les vapeurs de rubidium et de sodium sont en accord avec un modèle théorique basé sur les équations du pompage optique, ce modèle permettant d'interpréter sous forme d'activité optique les fortes non-linéarités observées.

mots clés :

- mélange à quatre ondes
- vapeur atomique
- gyrométrie optique
- faisceaux jumeaux
- activité optique
- mélange à deux ondes