

Analyse des signaux non-stationnaires par transformation de Huang, Opérateur deTeager-Kaiser, et Transformation de Huang-Teager (THT)

Jean-Christophe Cexus

▶ **To cite this version:**

Jean-Christophe Cexus. Analyse des signaux non-stationnaires par transformation de Huang, Opérateur deTeager-Kaiser, et Transformation de Huang-Teager (THT). Acoustique [physics.class-ph]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT : . tel-00012141

HAL Id: tel-00012141
https://theses.hal.science/tel-00012141

Submitted on 13 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N^o d'ordre : 3318

Thèse

présentée

devant l'Université de Rennes 1

pour obtenir

le grade de : **Docteur de l'Université de Rennes 1**

Mention *TRAITEMENT DU SIGNAL et TELECOMUNICATIONS.*

par

Jean-Christophe Cexus

Équipe d'accueil : *Institut de Recherche de l'École Navale (IRENav, EA 3634)*

École doctorale : *Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Système et Électronique (MATISSE)*

Composante universitaire : *SPM*

Analyse des signaux non-stationnaires par Transformation de Huang, Opérateur de Teager-Kaiser, et Transformation de Huang-Teager (THT)

soutenue le 12 décembre 2005 devant la commission d'examen :

Composition du Jury

Président : M. Lotfi SENHADJI, Professeur, Université de Rennes.

Rapporteurs : M. Gilles BUREL, Professeur, Université de Bretagne Occidentale.
M. Eric MOREAU, Professeur, Université de Toulon et du Var.

Examinateurs : M. Jean-Marc BOUCHER, Professeur, ENSTB, Brest.
M. Ali KHENCHAF, Professeur, ENSIETA, Brest (directeur de thèse.)
M. Abdel-Ouahab BOUDRAA, Maître de Conférences, École-Navale (encadrant).

Invités : M. Alain HETET, Ingénieur d'Etude de l'Armement DGA/DCE/GESMA Brest.
M. Franck FLORIN, Chef du service étude générale sonar de Thales Underwater Systems.

A mes parents, grands-parents
A mes frères, la Famille
A tous mes proches
A . . . [1]

[1] compléter !

Remerciements

« La présente se propose d'expliquer l'organisation d'une introduction à un essai, un traité philosophique ou un recueil scientifique, publiée si possible par une maison d'édition ou une collection ayant un rayonnement universitaire, et selon les règles désormais incontournables de l'étiquette académique. Dans les paragraphes suivants, je dirai de façon synthétique pourquoi on se doit d'écrire une introduction, ce qu'elle doit contenir, et comment doivent être organisés les remerciements. L'habileté à formuler les remerciements caractérise le spécialiste de haut vol. Il se peut que ce dernier, au terme de ses travaux, s'aperçoive qu'il n'est redevable à personne. Peu importe. Il lui faudra s'inventer des dettes. Toutes recherches sans dettes est une recherche suspecte, et on trouve toujours quelqu'un à remercier d'une manière ou d'une autre. » (extrait de *Comment voyager avec un saumon, nouveaux pastiches et postiches* de Umberto Eco page 107). Pour ma part, il en est tout autre.

Cette thèse s'est déroulée au sein du groupe d'Acoustique Sous-Marine de l'Institut de Recherche de l'Ecole Navale (IRENav) en association avec le laboratoire E3I2 (Extraction et Exploitation de l'Information en Environnements Incertains) de l'ENSIETA. Merci à Christophe Claramunt responsable de l'IRENav de m'avoir accueilli et fourni les moyens matériels nécessaires pour mener à bien ce travail. Je bénéficiais d'un financement en tant qu'Assistant d'Enseignement et de Recherche (AER) de la Marine Nationale. Je tiens à remercier l'École Navale pour la confiance qu'elle a bien voulu me donner durant ces quatre ans.

A messieurs les Professeurs Gilles Burel et Eric Moreau qui ont bien voulu se prêter à la tâche ingrate de rapporteurs, je veux exprimer toute ma reconnaissance. Je remercie également les Professeur Lotfi Senhadji et Jean-Marc Boucher pour avoir accepté de faire partie de ce jury de thèse. Je remercie Alain Hetet et Franck Florin pour leur participation à ce jury en tant qu'invités.

Je souhaite également remercier le Professeur Ali Khenchaf pour avoir accepter la direction de cette thèse et pour sa disponibilité dans les moments de grands doutes. Qu'il soit remercié ici pour cet apport.

Je remercie C. Claramunt et l'ensemble du groupe d'Acoustique Sous-Marine (ASM) de l'IRENAv pour m'avoir accueilli parmi eux. Leur motivation et leur enthousiasme ont contribué au bon déroulement de cette thèse. Merci également à l'ensemble des membres de l'IRENav, notamment le secrétariat et les services administratifs et informatiques pour leur aide.

Je tiens à remercier tout particulièrement les maîtres de conférences du groupe ASM qui ont bien voulu relire les diverses versions. Qu'ils soient remerciés ici pour leurs aides précieuses : Laurent Guillon, Delphine Dare-Emzivat, Rozenn Desmare et Valérie Labat. Certains points de cette thèse n'aurait pu avoir le jour sans des échanges très fructueux avec

notamment Fabien Salzenstein (Laboratoire InESS, Strasbourg) ou encore Thierry Chonavel (ENSTB, Brest).

Je tiens à remercier vivement Abdel-Ouahab Boudraa, « patron » de cette thèse, pour son travail d'encadrement, sa rigueur intellectuelle, son souci permanent de comprendre les problèmes traités ainsi que l'ambiance dans laquelle se sont passées ces trois années. La réussite de ce travail lui revient en grande partie. Cher collègue, que tu trouves ici en ces quelques mots l'expression de ma profonde reconnaissance éternelle. Sans oublier un coucou à sa petite famille qui s'agrandie de jour en jour (A quand la voiture ?)

Enfin je remercie tous les gens qui me sont proches (parents, frères, grands-parents, ...) ainsi que (en citant par ordre plus ou moins alphabétique) : Antoine (et sa musique de naze !), Christophe (et son accent du Sud), Delphine (belle comme un cœur), David (et sa voiture), Éric (le belge et au goût prononcé pour la bonne bière !), Franck (pour son vélo et ses ...), Louis (et son cerveau ! et ses voitures), Marc (et ses grandes jambes), Maël (pour sa courte période au sein de l'ASM), Myriem et Thierry (tous mes vœux de bonheur !), Rodéric (et sa classe), Rachel (la bretonne pure beurre), tous les Sébastien(s) (les trois et leurs manies : informatique pour l'un, les barbecues pour l'autre, la voile (et la rédaction d'une thèse aussi) pour le dernier), Sarah (l'anglaise qui « speak very well le French ! »), Valérie (et ses escaliers lors du déménagement),Youenn (et ses belles paroles), Zineb (pour m'avoir supporté dans le bureau) et son mari Amine, tous les petits nouveaux (Laurent, Antoine (bis), Marie-Laure ...) et tous les autres que j'aurai oublié dans cette longue liste pour leur amitié et leur soutien.

« Évidemment tout ce qui paraît sur cette page n'entraîne en rien leur responsabilité scientifique et doit être attribué, le cas échéant, à mon seul démérite pour les Bustine passées, présente et celles à venir. » (extrait de *Comment voyager avec un saumon, nouveaux pastiches et postiches* de Umberto Eco page 108).

Table des matières

Table des matières **I**

Liste des figures **V**

Liste des tableaux **IX**

Glossaire : Sigles et Notations **XI**

CONTEXTE ET OBJECTIFS **1**

I CHAPITRE I. Représentations d'un signal et fréquence instantanée **5**

I.1 Introduction 6

I.2 Problème et définitions 8

I.2.1 Problématique 8

I.2.2 Définitions 8

I.2.3 Propriétés d'une représentation temps-fréquence idéale 12

I.3 Représentations orientées temps-fréquence 13

I.3.1 Analyse temps-fréquence 13

I.3.2 Analyse temps-échelle 17

I.3.3 Synthèse 20

I.4 Estimation de la fréquence instantanée 21

I.4.1 Estimation par transformée de Hilbert 21

I.4.2 Estimation par RTF 23

I.4.3 Estimation par méthodes locales 24

I.5 Conclusion 25

II CHAPITRE II. La Transformation de Huang **27**

II.1 Introduction 28

II.2 Décomposition modale empirique (EMD) 28

II.2.1 Principe de la décomposition 29

II.2.2 Processus de tamisage : principe algorithmique 31
II.2.3 Commentaires sur le processus de tamisage 35
II.2.3.1 *A propos du critère d'arrêt* 35
II.2.3.2 *A propos de l'orthogonalité* 36
II.2.3.3 *A propos des erreurs d'estimation et du biais* 37
II.2.3.4 *A propos de l'adaptabilité et de la localité* 38
II.3 Autour de la méthode 41
II.3.1 Problématique d'interpolation 41
II.3.2 Problématique de discrétisation 43
II.4 Description temps-fréquence 46
II.4.1 Résolution fréquentielle 46
II.4.2 Structure en banc de filtres et ondelettes 48
II.4.2.1 *Comportement spectral : cas d'un bruit blanc gaussien* 48
II.4.2.2 *Comportement temporel : cas d'une impulsion* 49
II.4.2.3 *Comparaison avec les ondelettes* 50
II.4.2.4 *Comparaison avec l'analyse en composante principale* 52
II.4.3 Description conjointe temps-fréquence 52
II.4.3.1 *Structure méthodologique de l'analyse par THH* 52
II.4.3.2 *Description et analyse de signaux multi-composantes* 53
II.5 Conclusion 60

III CHAPITRE III. Filtrage et débruitage par Transformation de Huang 61
III.1 Introduction 62
III.2 Filtrage des signaux par la Transformation de Huang 62
III.2.1 Méthodologie du filtrage : $EMD_{\,filtrage}$ 62
III.2.2 Exemples d'applications 65
III.3 Débruitage des signaux par la Transformation de Huang 70
III.3.1 Méthodologie du débruitage : $EMD_{\,debruitage}$ 70
III.3.2 Exemples d'applications 73
III.4 Conclusion 75

IV CHAPITRE IV. L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser 77
IV.1 Introduction 78
IV.2 L'opérateur de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{R}}$ 78
IV.2.1 Énergie d'un système *masse-ressort* et $\Psi_{\mathbb{R}}$ 79
IV.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser 79
IV.2.3 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ 82
IV.2.4 Applications et limites de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ 82

IV.3 L'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{B}}$ 83
IV.3.1 Extensions de l'opérateur TKEO 83
IV.3.2 Définition et propriétés remarquables de $\Psi_{\mathbb{B}}$ 84
IV.3.3 Mesure d'interaction entre deux signaux par $\Psi_{\mathbb{B}}$ 87
IV.3.3.1 *Interaction et similarité* 88
IV.3.3.2 *Interaction et détection* 89
IV.3.4 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la classe de Cohen : généralisation 91
IV.3.5 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et CWVD 95
IV.3.6 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la fonction d'ambiguïté croisée 97
IV.3.7 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ 100
IV.4 Application à la mesure de similarité entre deux signaux 102
IV.4.1 Position du problème 102
IV.4.2 Application à la mesure d'interaction entres deux signaux 104
IV.4.3 Application à la classification des séries temporelles 106
IV.5 Application à la détection et à l'estimation des retards 108
IV.5.1 Position du problème 108
IV.5.2 Méthodologie de détection avec $\Psi_{\mathbb{B}}$ 109
IV.5.3 Application à des signaux synthétiques 110
IV.5.4 Application à l'estimation des retards 112
IV.6 Conclusion 116

V CHAPITRE V. La Transformation de Huang-Teager (THT) 117
V.1 Introduction 118
V.2 Analyse temps-fréquence par THT 120
V.2.1 Méthodologie de la description temps-fréquence 120
V.2.2 Application aux signaux multi-composantes 121
V.2.3 Synthèse 130
V.3 Reconnaissance des formes par THT 133
V.3.1 Classification dans le plan temps-fréquence 133
V.3.2 Méthodologie de la reconnaissance des formes : $THT_{\,RdF}$ 134
V.4 Conclusion 136

VI CHAPITRE VI. Analyse d'échos de cibles sonars par THT 139
VI.1 Introduction 140
VI.2 Analyse des échos de cibles sonars 141
VI.2.1 Mécanismes acoustiques de formation d'écho 141
VI.2.2 Analyse et description par SPWVD 142
VI.2.3 Analyse et description par THT 144

VI.3 Classification des échos de cibles sonars par THT_{RdF} 152
VI.3.1 Position du problème 152
VI.3.2 Identification des échos de cibles sonars 154
VI.4 Conclusion 156

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **159**

Bibliographie **165**

Listes des publications **179**

A Annexes Chapitre II **185**

B Annexes chapitre IV **187**

C Annexes chapitre VI **191**

Liste des figures

I.1 Insuffisance des représentations d'un signal en temps et en fréquence 6
I.2 Représentation temps-fréquence idéale d'un signal 7
I.3 Exemple d'une partition de musique 7
I.4 Exemples de signaux mono et multi-composantes 10
I.5 Représentations du signal avec quatre atomes gaussiens élémentaires 15
I.6 Exemples de RTF de la classe de Cohen du signal à 4 atomes gaussiens . . . 16
I.7 Pavage et cellule de résolution d'une RTF et d'une RTE 18
I.8 Comparaison de la RTF et de la RTE 19
I.9 Principe d'estimation de la FI à l'aide du signal analytique 22
I.10 Comparaison de l'estimation des FI d'un signal multi-composantes 23

II.1 Principe de l'EMD : *« oscillation rapide »* + *« oscillation lente »* 29
II.2 Principe de tamisage pour la 1reIMF 33
II.3 Signal temporel test (Eq. II.5) 34
II.4 Estimation des IMF du signal test (Eq. II.5) 34
II.5 Signal temporel test (Eq. II.14) 38
II.6 Estimation des IMF du signal test (Eq. II.14) 39
II.7 Illustration de l'interpolation par différentes méthodes 42
II.8 Décomposition par l'EMD d'un sinus pur (« tone ») 44
II.9 Estimation et comportement de l'erreur $E(\nu)$ de l'IMF_1 45
II.10 Décomposition d'un signal constitué de deux « tones » 47
II.11 Estimation et comportement de l'erreur $E(f_1, f_2)$ de l'IMF_1 48
II.12 Organisation de l'EMD en banc de filtres 49
II.13 Décomposition d'une réponse impulsionnelle par l'EMD 49
II.14 Comparaison du principe de décomposition par l'EMD et par les ondelettes . 51
II.15 Organigramme de la THH 53
II.16 Comparaison de la WVD et de la THH pour un signal à 4 atomes gaussiens . 54
II.17 Comparaison de quatre RTF pour un signal à 2 chirps linéaires parallèles . . 55

II.18 Application de la THH à deux chirps hyperboliques 56
II.19 Comparaison de la THH et de la WVD de deux chirps hyperboliques 57
II.20 RTF d'un signal multi-composantes avec un croisement des fréquences 58
II.21 RTF d'un signal multi-composantes avec des ruptures en fréquences 59

III.1 Signaux Tests avant bruitage : *Doppler*, *Blocks*, *Bumps*, *Heavysine*, et *ECG*. 66
III.2 Signaux Tests bruités 66
III.3 Décomposition EMD du signal bruité *Blocks* 67
III.4 Variation du SNR en fonction des IMFs considérées 68
III.5 Résultats du filtrage par $EMD_{\,fitrage}$ 69
III.6 Résultats du débruitage par $EMD_{\,debruitage_{SG}}$ 74

IV.1 L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser $\Psi_{\mathbb{R}}$ 80
IV.2 Schéma relationnel entre les différents opérateurs 84
IV.3 Exemples de trois séries temporelles de formes différentes 104
IV.4 Signaux $x(t)$ et $y(t)$ et FI linéaires correspondantes 105
IV.5 Mesure d'interaction de deux signaux FM 105
IV.6 Cylinder-Bell-Funnel, base de signaux synthétiques 107
IV.7 Comparaison de la coalescence par $Simil_{\mathbb{B}}$, DE et CC 107
IV.8 Principe de détection du signal par $\Psi_{\mathbb{B}}$, $M\mathbb{B}F$ 110
IV.9 Principe $M\mathbb{B}F$ appliqué à des signaux synthétiques 111
IV.10 Principe d'acquisition des signaux sur une ligne de capteurs 113
IV.11 Résultats d'estimation des retards dans le cas synthétique 113
IV.12 Résultats d'estimation des retards dans le cas réel 114

V.1 Estimation de la FI par $\Psi_{\mathbb{B}}$ 119
V.2 Organigramme d'estimation des FI et AI par un banc de filtres 119
V.3 Organigramme général de la THT 120
V.4 La THT et ses extensions 122
V.5 Les quatre versions de la THT appliquées à 4 atomes gaussiens 123
V.6 Comparaison des lignes de crêtes à partir de la THH et de la THT 124
V.7 Les quatre versions de la THT appliquées à deux chirps linéaires parallèles . . 125
V.8 Les quatre versions de la THT appliquées à 2 chirps hyperboliques 126
V.9 Les quatre versions de la THT appliquées à un signal avec intersection de FI 127
V.10 Comparaison des RTF WVD et $THT_{version4}$ pour le signal 4 128
V.11 Les quatre versions de la THT appliquées à un signal avec des ruptures de FI 129
V.12 Comparaisons de la WVD, la THH et la THT 131
V.13 Comparaisons de la WVD, la THH et la THT (suite) 132
V.14 Schéma de la structure du processus de $THT_{\,RdF}$ (phase d'apprentissage) . . 134

V.15 Organigramme du processus THT_{RdF} proposé 136

VI.1 Phénomènes de diffusion acoustique sur une cible 141
VI.2 SPWVD de la RI d'une cible sphérique en Nickel-Molybdène 143
VI.3 Caractérisation acoustique des motifs temps-fréquence d'une RI par SPWVD 144
VI.4 Décomposition EMD et spectre de la RI d'une coque sphérique 145
VI.5 SPWV des cinq premières IMF de la RI d'une cible sphérique creuse 145
VI.6 Énergie via $\Psi_{\mathbb{B}}$, FI et AI de chaque IMF de la RI d'une cible sphérique creuse 146
VI.7 RTF avec les 4 versions de la THT sur un écho de cible sphérique creuse . . . 147
VI.8 Caractérisation acoustique des motifs temps-fréquence d'une RI par THT . . 148
VI.9 RTF avec les 4 versions de la THT sur un écho de cible sphérique pleine . . . 149
VI.10 THT de deux cibles sphériques pleines de matière différente 150
VI.11 THT d'un écho d'une cible cylindrique en Nickel-Molybdène 151
VI.12 Architecture de la THT_{RdF} 153
VI.13 Espace de projection avec l'ACP 156

A.1 Organigramme du pseudo-code de l'EMD 185

Liste des tableaux

II.1 Pseudo-code de l'EMD 31
II.2 Matrice d'orthogonalité du signal test (Eq. II.5) 37
II.3 Matrice d'orthogonalité du signal test (Eq. II.14) 40

III.1 Pseudo-code du *filtrage* par $EMD_{\,filtrage}$ 65
III.2 Valeur de l'indice j_s pour les cinq signaux tests 68
III.3 Comparaison des SNR pour l'$EMD_{\,filtrage}$ 68
III.4 Comparaison des MSE pour l'$EMD_{\,filtrage}$ 69
III.5 Comparaison des MAE pour l'$EMD_{\,filtrage}$ 70
III.6 Pseudo-code de « débruitage » par $EMD_{\,debruitage_{Doux}}$ 73
III.7 Comparaisons des SNR pour l'$EMD_{\,debruitage}$ 75
III.8 Comparaisons des MAE pour l'$EMD_{\,debruitage}$ 75

IV.1 Mesures de similarité (DE, CC et $Simil_{\mathbb{B}}$) 104
IV.2 Erreurs de classification de : $Simil_{\mathbb{B}}$, DE et CC sur (`CBF.data`) 108
IV.3 Pseudo-code de $M\mathbb{B}F$ 110
IV.4 Estimation de T_B en fonction du SNR pour les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ par $M\mathbb{B}F$ et *« matched filter »* (MF) 112
IV.5 RMSE des retards entre $M\mathbb{B}F$ et « théorique », MF et « théorique » 115

VI.1 Pseudo-code de $THT_{\,RdF}$ 154
VI.2 Caractéristiques des cibles utilisées pour la phase d'apprentissage 155
VI.3 Caractéristiques des cibles utilisées pour la phase de généralisation 155

Glossaire : Sigles et Notations

La plupart des notations (abréviations) utilisées dans le présent document correspondent à celles les plus couramment employées dans la littérature. Toutefois, afin de faciliter la lecture du manuscrit et d'éviter toute équivoque, une liste des principales notations (sigles) est présentée. La majorité des sigles sont détaillées dans le texte la première fois qu'elles apparaissent ainsi que lorsque certaines définitions de variables peuvent prêter à confusion.

Sigles

ACP	Analyse en composantes principales.
AI	Amplitude instantanée.
AM	Modulation d'amplitude (amplitude modulation).
ASM	Acoustique sous-marine.
BEMD	Décomposition modale empirique bidimensionnelle.
CC	Coefficient de corrélation de Pearson ou fonction de corrélation croisée.
$CMSE$	Erreur quadratique moyenne consécutive (consecutive mean square error).
$CTKEO$	Opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser (cross Teager-Kaiser energy operator) *(pour des signaux à valeurs réelles)*.
$CTKEO_{\mathbb{B}}$	Opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser (cross Teager-Kaiser energy operator) *(pour des signaux à valeurs complexes)*.
CWVD	Distribution de Wigner-Ville croisée (cross Wigner-Ville distribution).
DE	Distance Euclidienne.
EMD	Décomposition modale empirique (empirical mode decomposition).
FI	Fréquence instantanée.
FM	Modulation de fréquence (frequency modulation).
IMF	Fonction modale intrinsèque (empirique) (intrinsic mode function).
$M\mathbb{B}F$	Matched $\Psi_{\mathbb{B}}$-Filter.
MSE	Erreur quadratique moyenne (mean square error).
PI	Phase instantanée.
PWVD	Pseudo-distribution de Wigner-Ville.
RBF	Fonctions radiales de bases (radial basis functions).
RDF	Reconnaissance de formes.
RI	Réponse impulsionnelle.
RTE	Représentation temps-échelle.
RTF	Représentation temps-fréquence.
SA	Signal analytique.
Sonar	SOund NAvigation and Ranging.
SNR	Rapport signal à bruit (signal to noise ratio).

SPWVD	Pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée (Smooth filter Wigner-Ville distribution).
ST	Série temporelle.
TD	Temps de retard (time-delay).
TF, $\mathcal{F}$	Transformation de Fourier.
TFD	Distribution temps-fréquence (time frequency distribution).
TH	Transformation de Hilbert.
THH	Transformation de Huang-Hilbert.
THT	Transformation de Huang-Teager.
TKEO	Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (Teager-Kaiser energy operator).
WVD	Distribution de Wigner-Ville (Wigner-Ville distribution).

Symboles et Notations Mathématiques

a, b	Rayons externe et interne d'une coque sphérique ou cylindrique.
c_l, c_t	Célérité des ondes longitudinale et transversale.
k	Nombre d'onde ($k = \frac{\omega}{c}$).
ω	Pulsation ($\omega = 2\pi\nu$).
t (ou u), f(ou ν)	Variable temps et fréquence.
fe	Fréquence d'échantillonnage .
$s(t), x(t)$	Expression temporelle d'un signal s ou x respectivement.
$S(\nu), S(\omega)$	Transformée de Fourier de $s(t)$, fonction de la variable fréquentielle ν ou de la pulsation ω.
x	Fréquence réduite $x = ka$.
ρ	masse volumique.
h_n^1	Fonctions de Hankel sphériques de première espèce, d'ordre n.
j_n	Fonctions de Bessel sphériques d'ordre n.
P_n	Polynôme de Legendre d'ordre n.
$\mathbb{R}$	Corps des réels.
$\mathbb{N}$	Corps des entiers.
$\mathbb{C}$	Corps des complexes.
$\langle .\vert .\rangle$	Produit scalaire dans L^2.
$E\{.\}$	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.
$\Psi_{\mathbb{R}}$	Transformation $\Psi_{\mathbb{R}} : x \longmapsto \dot{x}^2 - x\ddot{x}$, $x \in \mathbb{R}$.
$\Psi_{\mathbb{R}^2}$	Transformation $\Psi_{\mathbb{R}^2} : (x, y) \longmapsto \dot{x}\dot{y} - x\ddot{y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$\Psi_{\mathbb{C}_1}$	Transformation $\Psi_{\mathbb{C}} : x \longmapsto \|\dot{x}(t)\|^2 - \Re[x^*(t)\ddot{x}(t)]$, $x \in \mathbb{C}$.
$\Psi_{\mathbb{C}_2}$	Transformation $\Psi_{\mathbb{C}} : x \longmapsto \dot{x}(t)\dot{x}^*(t) - \frac{1}{2}[\ddot{x}(t)x^*(t) + x(t)\ddot{x}^*(t)]$, $x \in \mathbb{C}$.
$\Psi_{\mathbb{C}}$	Transformation associée à $\Psi_{\mathbb{C}}$, (cf. paragraphe IV.3.1).
$\Psi_{\mathbb{B}}$	Opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser.
$A_{xy}(u, \tau)$	Fonction d'ambiguïté croisée (cross-ambiguity function).
$A_x(u, \tau)$	Fonction d'ambiguïté (ambiguity function).
$W_{xy}(t, \nu)$	Distribution croisée de Wigner-Ville (cross Wigner-Ville distribution).
$W_x(t, \nu)$	Distribution de Wigner-Ville (Wigner-Ville distribution).
$\Gamma_{xy}(u, \nu)$	Transformée de Fourier de $A_{xy}(u, \tau)$ par rapport à τ.
$R_{xy}(t, \tau)$	Corrélation croisée instantané (instantaneous cross correlation function).
$\tilde{y}$	Estimée de y.

Contexte et objectifs

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification ...), d'analyse et d'interprétation des signaux. Elle fait donc largement appel aux résultats de la théorie de l'information, des statistiques ainsi qu'à de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.

Les signaux à traiter peuvent provenir de sources très diverses, mais la plupart sont des signaux électriques ou devenues électriques à l'aide de capteurs et transducteurs (microphones, rétines, senseurs thermiques, optiques, de pression, de vitesse, accélération, position, et en général de toutes les grandeurs physiques et chimiques).

Habituellement, les signaux issus des phénomènes physiques sont de nature non-stationnaire, voire également formés de plusieurs composantes fréquentielles (signaux multi-composantes). Ces signaux sont brefs, ne se répètent que rarement, et se manifestent par des oscillations évoluant au cours du temps. Parmi les signaux non-stationnaires, on peut citer les signaux de parole, de radar ou de sonar, biomédicaux, acoustiques, astrophysiques ...

Dans de telles situations, la représentation temporelle classique du signal ne donne pas une bonne perception des composantes oscillantes multiples, tandis que la représentation fréquentielle (transformée de Fourier) ne permet pas la localisation temporelle de ces composantes. Ainsi, partant des propriétés de ces signaux et des limitations de la transformée de Fourier (TF), il est naturel de s'orienter vers un schéma d'analyse temps-fréquence multi-composantes. En effet par définition, les représentations temps-fréquence (RTF) sont des transformations conjointes du temps et de la fréquence et fournissent une information sur la façon dont la fréquence du signal varie au cours du temps.

Si les RTF de la classe de Cohen constituent un moyen puissant pour l'analyse des signaux non-stationnaires, elles posent en revanche un problème pour l'interprétation et la lisibilité des représentations obtenues en raison de la présence de termes d'interférences (liée à la nature bilinéaire de ces représentations) [20]. Par conséquent, l'estimation des attributs à partir de ces représentations nécessaires, par exemple, à la classification d'un signal sera biaisée. Le lissage temps-fréquence peut réduire les interférences mais introduit des erreurs de localisation en temps et en fréquence. Rappelons que la TF est limitée aux signaux stationnaires et aux systèmes linéaires. Ainsi, toutes les méthodes, telles que le spectrogramme ou la distribution de Wigner-Ville, basées sur la TF auront intrinsèquement, plus ou moins, les mêmes limites. Par ailleurs, aussi bien les RTF de la classe de Cohen que les ondelettes nécessitent la spécification d'un noyau ou d'une fonction de base. Or, il n'existe pas de noyau de base universel. Ainsi l'idéal est de trouver une décomposition adaptée au signal, ne nécessitant pas d'informations *a priori* sur ce dernier, et qui permette d'obtenir une description temps-fréquence.

Partant des limitations énumérées ci-dessus, Huang *et al.* [114] ont récemment proposé une méthode abordant sous un autre angle la problématique d'analyse des signaux non-stationnaires : la décomposition modale empirique (EMD pour empirical mode decomposition). Contrairement aux RTF ou aux ondelettes, la base de décomposition de l'EMD est intrinsèque au signal. L'extraction des composantes oscillantes appelées modes empiriques (IMF pour Intrinsic Mode Functions) est non-linéaire, mais leur re-combinaison linéaire est exacte. L'EMD seule n'est pas une analyse temps-fréquence, mais sa combinaison avec la transformée d'Hilbert (TH) ou une autre méthode d'estimation de la fréquence instantanée (FI) permet d'obtenir une RTF. Ainsi, l'EMD couplée avec la TH est une description temps-fréquence appelée Transformation de Huang-Hilbert (THH).

Notre objectif principal est de proposer alors de nouveaux outils de traitement et d'analyse des signaux autour de l'approche EMD. Plus précisément, l'ensemble de la problématique s'articule autour du **traitement (le filtrage et le débruitage) des signaux** et **l'analyse temps-fréquence des signaux non-stationnaire multi-composantes à l'aide de la fréquence instantanée (FI) et de l'amplitude instantanée (AI).**

Afin de répondre à cette problématique trois grand axes d'études vont être abordés dans l'ensemble du manuscrit :

- dans un premier temps l'étude des propriétés de l'EMD, nous permet de l'appliquer directement en tant qu'outil de traitement des signaux. Nous utilisons l'EMD en tant que décomposition temporelle non-linéaire des signaux à des fins de filtrage et de débruitage des signaux,
- dans un deuxième temps, nous étendons l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser [153] aux signaux analytiques pour introduire un nouvel opérateur d'énergie d'interactions entre deux signaux complexes. Nous montrons que cet opérateur, dont celui de Teager est un cas particulier, est adapté à l'analyse des signaux non-stationnaires et permet l'estimation de la FI et AI d'un signal,
- dans un troisième temps, en partant des limitations de la THH, nous introduisons une nouvelle RTF utilisant l'EMD et l'opérateur de démodulation des signaux mono-composante AM-FM de Teager-Kaiser pour estimer la FI et l'AI [151]. Cette RTF est appelée Transformation de Huang-Teager (THT).

Le travail présenté dans ce manuscrit s'organise autour de six chapitres.

Le **chapitre (I)** propose d'abord un rappel sur les méthodes de représentations des signaux non-stationnaires dans le domaine temps-fréquence en présentant l'estimation des amplitudes et fréquences instantanées présentes dans un signal. Nous mettons en particuliers l'accent sur les propriétés nécessaires pour l'élaboration d'une représentation conjointe en temps et en fréquence. Enfin, le concept et les méthodes classiques d'estimations de la FI sont présentés.

Le **chapitre (II)** est consacré à l'étude de l'EMD et à la description de la THH ; cette dernière est une nouvelle méthode temps-fréquence récemment introduite par Huang *et al.* [114]. Quant à la décomposition temporelle des signaux par EMD, elle fournit des signaux mono-composante AM-FM (au sens large) ou IMF représentant chacune une « bande de fréquences » du signal. Ainsi tout signal peut être décrit comme étant la contribution d'un ensemble de composantes oscillantes : les IMF.
En se basant essentiellement sur les variations ou oscillations naturelles du signal, l'EMD permet une interprétation des phénomènes physiques présents dans le signal. En plus de

sa simplicité en termes d'implémentation et de sa capacité à décrire ponctuellement et de manière instantanée les phénomènes fréquentiels non résolus par l'analyse de Fourier, l'EMD est bien adaptée à l'étude des signaux non-stationnaires et/ou générés par des systèmes non-linéaires.

La THH repose sur l'association de la méthode d'analyse multi-résolution, l'EMD, et de la transformée de Hilbert (TH) pour l'estimation des amplitudes et des fréquences instantanées (respectivement AI et FI) du signal étudié. L'EMD décompose le signal en une somme de signaux oscillants (IMF) suivi par l'application de la TH pour estimer l'AI et FI de chacune des IMF. L'ensemble des AI et FI ainsi déterminées permet d'obtenir une représentation temps-fréquence. Dans ce chapitre nous faisons l'inventaire des problématiques associées à la THH telles que l'interpolation, l'échantillonnage ou l'orthogonalité des IMF [181, 197]. Nous étudions en particulier l'influence de l'échantillonnage sur la décomposition du signal et sur le nombre d'IMF trouvé.

Le **chapitre (III)** est consacré au filtrage et au débruitage non-linéaire utilisant l'EMD. En effet, dans la pratique, les filtres linéaires tels que le filtre de Wiener sont largement utilisés en raison de leur simplicité et de leur mise en oeuvre [176]. Malheureusement, ces filtres sont inefficaces pour les signaux transitoires ou impulsionnels (transitions brusques). Pour y remédier, des approches non-linéaires telles que les ondelettes ont été proposées [65,66] où l'idée est de seuiller les coefficients d'ondelettes en ne gardant que les plus significatifs. Cette approche de débruitage donne de bons résultats mais reste limitée par le bon choix de l'ondelette mère correspondant aux caractéristiques du signal à traiter. Pour s'affranchir du problème du choix du noyau, nous proposons une approche basée sur l'EMD entièrement pilotée par les données signal. Plus exactement, deux nouvelles méthodes sont proposées : une pour le filtrage et une pour le débruitage [25, 26].

Nous montrons que l'approche EMD réalise de manière automatique une décomposition en sous-bandes très proche de ce que donnerait l'analyse en ondelettes (multi-résolutions). En effet, l'EMD explore le signal depuis les plus hautes fréquences vers les basses fréquences. Le bruit (cas additif) étant une information haute fréquence, on s'attend à ce qu'elle soit, en grande partie, concentrée sur les premières IMF. Nous proposons de filtrer le signal en reconstruisant partiellement ce dernier par un nombre réduit d'IMF en partant de la dernière IMF (représentant la tendance du signal). Pour trouver le nombre d'IMF nécessaires, nous minimisons un critère mesurant la variation en énergie entre deux IMF consécutives.

Pour la stratégie du débruitage nous ne faisons pas l'hypothèse que le bruit est essentiellement concentré sur les premiers modes. Contrairement au filtrage, nous reconstruisons le signal en utilisant toutes les IMF que préalablement nous pré-traitons (pré-filtrage/seuillage). Nous procédons à un pré-filtrage ou un débruitage IMF par IMF. Pour le pré-filtrage, nous utilisons le filtre de Savitzky-Golay [191] qui lisse localement le signal par un polynôme pour filtrer chaque IMF séparément. Pour le débruitage, nous suivons la même démarche que celle des ondelettes. On estime le niveau du bruit de chaque IMF en utilisant l'estimateur de Donoho et Johnstone [65, 66] et nous procédons au seuillage en utilisant le seuil universel de Donoho. Plusieurs stratégies de seuillage sont étudiées (seuillage dur, doux . . .). Les résultats de filtrage et de débruitage obtenus sur des signaux synthétiques sont comparés aux méthodes standards (moyenneur, médian, ondelettes).

Dans le **chapitre (IV)**, nous présentons le principe de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser permettant d'estimer l'énergie d'un système harmonique (masse-ressort) nécessaire à la génération d'un signal [122]. L'énergie instantanée estimée permet alors de démoduler

le signal en calculant son AI et sa FI. Cet opérateur étant limité aux signaux réels, nous proposons son extension aux signaux complexes et sa généralisation est appelée l'opérateur complexe d'énergie croisée de Teager-Kaiser [37]. Cette nouvelle extension permet d'établir dans un premier temps le lien entre la version complexe de l'opérateur et la distribution de Wigner-Ville et dans un deuxième temps d'étendre ce lien à l'ensemble de la classe de Cohen. Nous montrons que le nouvel opérateur permet de mesurer l'interaction entre deux signaux complexes (mesure de similarité) [27]. Par ailleurs, nous montrons aussi que la maximisation de cette interaction permet de détecter la présence d'un signal dans un autre (détection) et de calculer le temps de retard entre les deux signaux [185].

Le **chapitre (V)** introduit une nouvelle description temps-fréquence. En partant des limites de la THH et plus particulièrement de celle de la TH nous proposons une nouvelle représentation temps-fréquence. En effet, même si la TH permet de définir la FI d'un signal, il est paradoxal (mais non contradictoire) que la détermination de cette grandeur instantanée repose sur l'intégration du signal (opération globale) sur toute la durée de celui-ci avec un poids identique pour le passé et le futur. De plus, la définition de la FI repose d'une part sur un filtre non causal et non instantané et d'autre part sur la TF du signal analytique.

La nouvelle RTF proposée fait appel, comme pour la THH, à l'EMD à laquelle nous associons l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser pour estimer l'AI et la FI de chaque IMF [28]. L'association de l'EMD (ou transformation de Huang) et l'opérateur de Teager-Kaiser est appelée Transformation de Huang-Teager (THT). L'intérêt de l'opérateur de Teager-Kaiser, comparé à la TH, est qu'il est local et fournit des mesures instantanées de l'AI et de la FI. Par ailleurs il est très simple à mettre en œuvre. Notons que l'approche proposée est différente de celles des RTF classiques dans la mesure où nous estimons d'abord les FI pour construire la description temps-fréquence (et non l'inverse). Nous illustrons la THT par des exemples de traitement de signaux synthétiques. Pour terminer, nous expliquons comment la THT peut s'insérer dans un processus de reconnaissance des formes (RdF) pour la classification de signaux non-stationnaires [36, 38].

Nous présentons dans le **chapitre (VI)** une application de la THT à l'acoustique sous-marine et plus exactement l'analyse des caractéristiques acoustiques de la réponse impulsionnelle (RI) d'un écho de cible sonar. En effet, l'analyse de la RI par THT permet de mettre en évidence les phénomènes physiques tels que les ondes de Lamb ou la réflexion spéculaire. La comparaison de cette analyse par rapport à celle conduite par la distribution de Wigner-Ville montre l'intérêt de la THT : absence d'interférences, simplicité du calcul ... Partant de cette analyse nous extrayons des attributs issus des statistiques d'ordre supérieurs pour la classification et l'identification de cibles sonars (naturelle ou manufacturée) [36, 38].

La **conclusion** dressera un bilan de l'ensemble des travaux réalisés en présentant quelques voies d'amélioration et d'optimisation des différentes approches proposées et un regard critique sera finalement porté sur l'ensemble des travaux effectués.

CHAPITRE I

Représentations d'un signal et fréquence instantanée

Sommaire

I.1 Introduction 6
I.2 Problème et définitions 8
I.2.1 Problématique 8
I.2.2 Définitions 8
I.2.3 Propriétés d'une représentation temps-fréquence idéale 12
I.3 Représentations orientées temps-fréquence 13
I.3.1 Analyse temps-fréquence 13
I.3.2 Analyse temps-échelle 17
I.3.3 Synthèse 20
I.4 Estimation de la fréquence instantanée 21
I.4.1 Estimation par transformée de Hilbert 21
I.4.2 Estimation par RTF 23
I.4.3 Estimation par méthodes locales 24
I.5 Conclusion 25

Dans ce chapitre, nous montrons que l'analyse d'un signal non-stationnaire passe nécessairement par une représentation conjointe en temps et en fréquence.

Après avoir donné le cadre général, nous identifions les propriétés souhaitables pour l'élaboration d'une analyse temps-fréquence. Cela nous conduit à étudier les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen ainsi que les représentations temps-échelle. Il ressort de cette étude que ces descriptions tentent dans une certaine mesure de localiser au mieux les différentes composantes du signal dans le plan temps-fréquence.

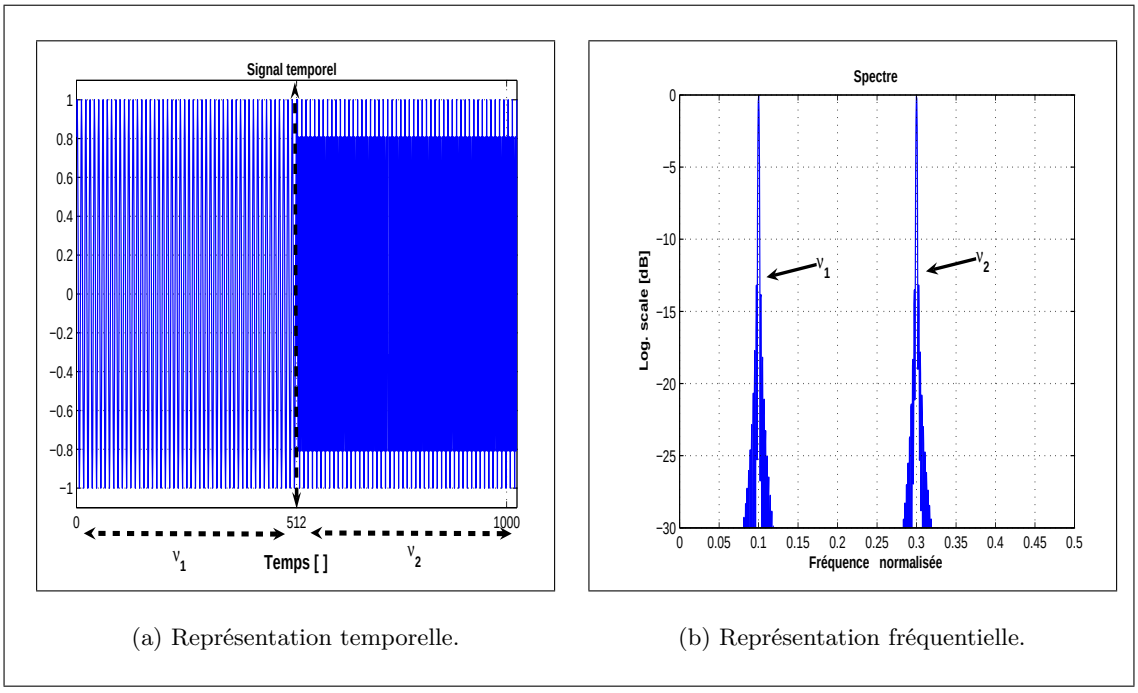
Cela nous amène alors à étudier le concept de fréquence instantanée. Nous présentons aussi différentes méthodes permettant son estimation en commençant par celle basée sur la transformation de Hilbert pour finir par les méthodes dites « locales ».

I.1 Introduction

L'analyse d'un phénomène physique passe souvent par l'acquisition d'un signal monodimensionnel fonction du temps. Même si la représentation temporelle d'un signal est la plus naturelle, elle ne permet pas toujours une analyse complète.
La représentation fréquentielle obtenue par transformation de Fourier (TF) fournit des informations auxquelles nous n'avons pas accès temporellement [23,76]. L'analyse spectrale, basée sur la TF, est un outil puissant de traitement du signal reposant sur le concept physique de fréquence (spatiale ou temporelle). Cependant, ces deux analyses, prises séparément, sont insuffisantes (inadaptées) pour une large classe de signaux. Considérons par exemple le signal $x(n)$ régi par :

$$x(n) = \begin{cases} \cos(2\pi\nu_1 n) & 1 \leqslant n \leqslant 512 \\ \cos(2\pi\nu_2 n) & 513 \leqslant n \leqslant 1024 \end{cases} . \tag{I.1}$$

Le signal est constitué de $n = 1024$ points correspondant à la contribution successive de deux sinusoïdes de fréquences réduites $\nu_1 = 0,1$ et $\nu_2 = 0,3$ (Fig. I.1). Sur l'intervalle $n = [1, 512]$, seul le signal de basse fréquence est présent ; puis sur l'intervalle $[513, 1024]$, seule la plus haute fréquence est présente.



(a) Représentation temporelle.

(b) Représentation fréquentielle.

Figure I.1 — Insuffisance des représentations (disjointes) temporelle et fréquentielle du signal (Eq. I.1).

Les représentations temporelles et fréquentielles (Fig. I.1(a) et I.1(b)), quoique complémentaires, ne permettent pas de rattacher facilement l'instant d'apparition (et de disparition) des sinusoïdes. Bien que toute l'information utile à l'analyse du signal soit contenue dans chacune de ces deux descriptions (temporelle et fréquentielle), celles-ci ne présentent que partiellement les caractéristiques d'un signal. On imagine alors qu'une approche mixte combinant simultanément les deux aspects temporel et fréquentiel devrait permettre une meilleure compréhension des différents phénomènes présents dans le signal (Fig. I.2).

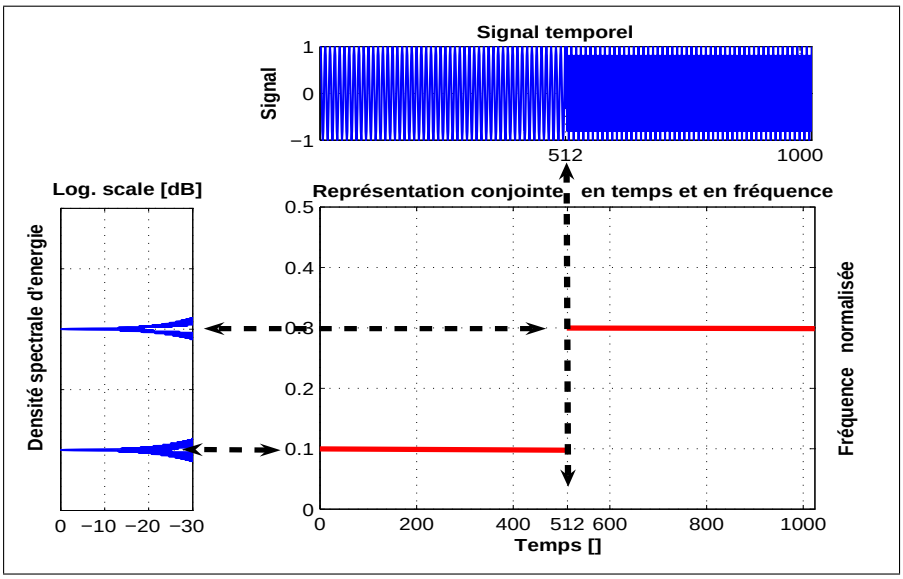


Figure I.2 — Représentation temps-fréquence idéale d'un signal.

L'exemple le plus parlant d'une telle approche est celui de la musique. Nous sommes capables d'associer à chaque note que nous entendons une fréquence fondamentale (do, ré, mi ...). Mais cette note est de durée finie contrairement aux exponentielles complexes utilisées dans la décomposition de Fourier [75, 145]. Cette note semble donc *a priori* difficile à décrire par une analyse spectrale classique. C'est pourquoi la notation musicale fait naturellement intervenir simultanément des notions de temps et de fréquence : sur une portée musicale, la variable temporelle correspond à la direction horizontale et la variable fréquentielle à l'axe vertical (Fig. I.3). La représentation musicale apparaît alors comme un prototype de description bidimensionnelle de type temps-fréquence.

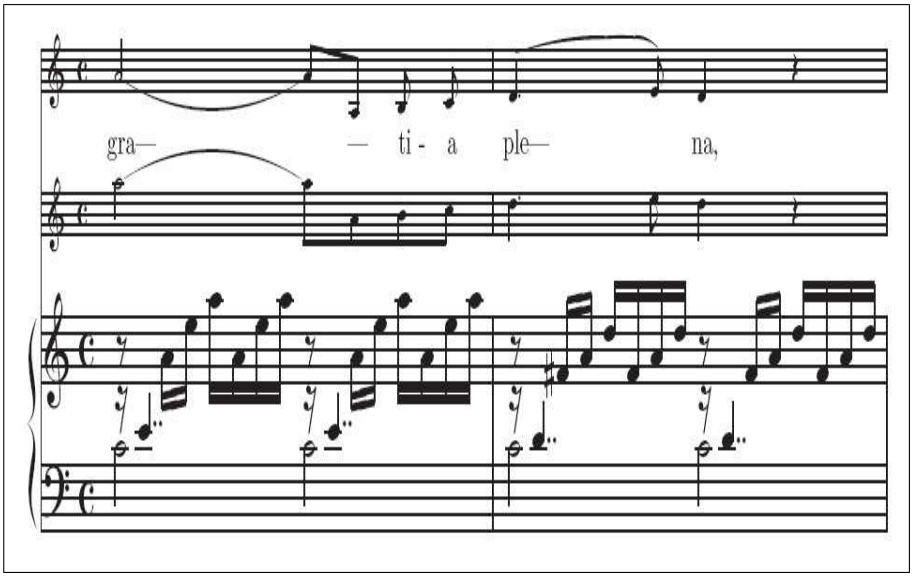


Figure I.3 — Exemple d'une partition de musique *(extrait du premier prélude de Well Tempered Clavier de Johann Sebastian Bach).*

Avant de poursuivre et d'étudier quelques descriptions bidimensionnelles temps-fréquence, il est nécessaire de définir des propriétés qui seront largement utilisées par la suite et qui constituent les fondations de notre problématique.

I.2 Problème et définitions

I.2.1 Problématique

L'exemple précédent nous a permis de montrer la nécessité et la pertinence de vouloir décrire des signaux dans un espace conjoint en temps et en fréquence.
Cette volonté d'étendre les représentations « mono-dimensionelle » à des représentations « bi-dimensionelles » en temps et en fréquence repose en fait sur les *« non-propriétés en traitement du signal »* [10]. Sous le terme **« non- »**, nous réunissons les systèmes non-linéaires, les signaux non-stationnaires (au sens déterministe du terme) mais aussi le modèle descriptif d'un signal mono/multi composante(s) défini lui même par la notion de largeur de bande et de fréquence instantanée.

Donner les définitions, du moins les concepts, des différents **« non- »** est nécessaire afin de situer l'ensemble de la problématique et des travaux décrits par la suite. Mais déjà, une partie de la problématique peut être identifiée.
Aussi, l'analyse correspond à la décomposition d'une chose en ses éléments, d'un tout en ses parties. En parlant de choses concrètes ou abstraites, l'analyse correspond à l'examen permettant d'isoler ou de discerner les différentes parties d'un tout : *« Aujourd'hui la science en est à l'analyse, à la minutieuse observation des détails ; c'est par là seulement que son œuvre peut commencer.* (extrait de J. Michelet [161], page 465).
Ainsi vouloir analyser un signal signifie vouloir le décrire de manière à faire apparaître les événements le constituant.

Une des problématiques de la thèse peut s'énoncer comme : **l'étude des fréquences instantanées d'un signal non-stationnaire multi-composantes**.

I.2.2 Définitions

Système linéaire et non-linéaire

Comme son nom l'indique, un système non-linéaire est un système pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas. Un système physique est dit « linéaire » quand le tout est exactement égal à la somme des composantes. Dans un tel système, la somme de causes produit une somme correspondante d'effets et il suffit d'étudier séparément les comportements individuels des composantes puis de les additionner pour déduire le comportement du tout (c'est le principe de superposition).

Des phénomènes aussi divers que la trajectoire d'un obus de canon ou la croissance d'une plante peuvent être décrits à l'aide d'équations linéaires dans lesquelles de petites modifications entraînent de petits effets et où de grands effets s'obtiennent par l'addition de petites modifications. Les équations non-linéaires s'appliquent aux éléments discontinus tels que les explosions, les cassures brusques des matériaux, la parole ... Contrairement aux courbes régulières obtenues lorsqu'on représente des équations linéaires, la représentation d'équations non-linéaires comprendra des cassures, des ruptures, des singularités ...

Signal stationnaire et non-stationnaire

Un signal est dit stationnaire si, dans le cas déterministe, il peut s'écrire comme une somme discrète de sinusoïdes et si, dans le cas aléatoire, ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine des temps. Les signaux non-stationnaires sont donc caractérisés par une « non-propriété » qui traduit une dépendance vis-à-vis du temps de leur contenu spectral. Or, en pratique, la grande majorité des signaux rencontrés sont non-stationnaires, et la notion de décomposition (projection) sur une somme infinie d'exponentielles complexes (ou sinusoïdes) propres à la TF doit être reconsidérée [20, 23, 48, 76].

Un modèle est déterministe[1] s'il ne fait pas appel au calcul de probabilités. Un modèle est stochastique s'il fait appel au calcul de probabilités.

Signal multi-composantes et mono-composante

Les notions de mono/multi composantes d'un signal passent par la définition des signaux dits à *Modulation d'amplitude et/ou Modulation de fréquence* (AM-FM). Un signal AM-FM multi-composantes $x(t)$ peut être représenté par le modèle suivant [20, 22] :

$$x\left(t\right)=\sum_{k=1}^{N}x_{k}\left(t\right)+n\left(t\right)\ , \tag{I.2}$$

avec $n(t)$ un bruit additif (représentant toutes les composantes indésirables), et N le nombre de composantes. Dans cette représentation, $x_k(t)$ est un signal mono-composante décrit par une Amplitude instantanée (AI) $a_k(t)$ et une Fréquence instantanée (FI) $\nu_{i_k}(t)$ telle que la forme complexe $z_k(t)$ associée à $x_k(t)$ peut s'écrire :

$$z_k(t)=a_k(t).e^{j\phi_k(t)}\ , \tag{I.3}$$

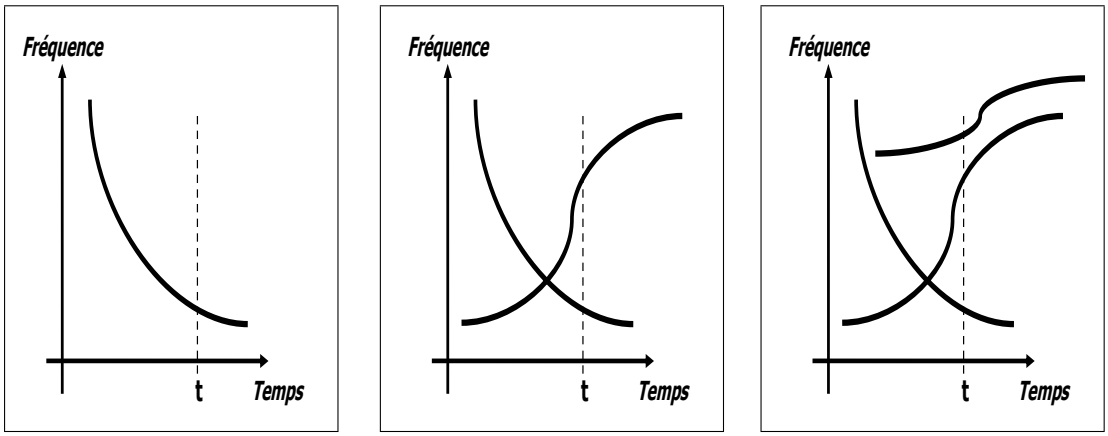
où :

$$\phi_k\left(t\right)=\int_{-\infty}^{t}\nu_{i_k}\left(\tau\right)d\tau\ . \tag{I.4}$$

Dans ce modèle, si $N=1$, le signal est dit mono-composante et si $N\geq 2$, le signal est dit multi-composantes.

Dans le cas le plus général, un signal $x(t)$ peut être considéré comme un signal AM-FM multi-composantes (Eq. I.2), ou du moins comme la contribution de plusieurs signaux AM-FM (Fig. I.4).
Il existe évidemment d'autres modèles possibles comme celui de Priestley [22] qui considère que toutes les fréquences existent et affecte à chacune d'elle une amplitude, l'amplitude étant nulle si la fréquence est inexistante.

[1] Le déterminisme ne signifie pas que le modèle considéré soit nécessairement prédictible. Ainsi jusqu'à présent, lorsque le physicien, le biologiste ou l'économiste rencontrait un phénomène irrégulier ou aléatoire, il en cherchait un modèle stochastique, dans l'idée qu'un modèle déterministe conduirait nécessairement à un comportement régulier et prédictible, en contradiction justement avec le phénomène qu'il cherchait à modéliser. Pourtant la théorie du chaos propose un modèle déterministe, mais chaotique.



(a) Signal mono-composante (1 composante).

(b) Signal multi-composantes (2 composantes).

(c) Signal multi-composantes (3 composantes).

Figure I.4 **—** Exemple de signaux mono et multi-composantes : évolution théorique des FI au cours du temps.

Signal mono-composante et fréquence instantanée

Lors de la définition d'un signal mono-composante, nous avons dû définir la FI (et l'AI). Nous ne pouvons alors pas passer sous silence les difficultés sous-jacentes à une telle notion de « spectre instantané ».

L'introduction des concepts d'AI et de FI d'un signal paraît assez intuitive notamment en communication où les signaux utilisés sont de type AM-FM. En effet, à la lecture d'une partition de musique, les notes qui se succèdent illustrent des variations fréquentielles variables au cours du temps et les nuances traduisent l'intensité sonore, elle aussi variable au cours du temps (Fig. I.3).

Cependant, le problème de la définition[2] et de l'estimation de la FI n'est pas si évident. La raison essentielle provient de la dualité entre le temps et la fréquence, notion illustrée par la relation d'incertitude (cf. sections I.3 et I.3.2). *« Cette dualité, manifestée par les fameuses relations d'incertitude, semble annihiler toute tentative de définition de la FI, puisque les idées de localisation en temps et en fréquence sont contradictoires : plus un signal est localisé en temps, moins il l'est en fréquence et réciproquement »* (extrait de B. Pincinbono dans [110], page 44).

Afin de définir une notion de FI, il est commode de s'appuyer sur un signal $x(t)$ associé à une idée de régime permanent et de stabilité au cours du temps. Soit un signal strictement sinusoïdal (ou monochromatique) décrit par l'équation :

$$x(t) = a\cos\left(\omega t + \phi\right) \ . \tag{I.5}$$

Ce signal est caractérisé par trois paramètres : l'amplitude a, la pulsation ω ou la fréquence ν définie par $\omega = 2\pi\nu$, et la phase à l'origine ϕ.

On pourrait imaginer d'étendre ce point de vue à des situations évolutives en rendant la constante a dépendante du temps et en introduisant dans la fonction *cosinus* un argument

[2] D'ailleurs, il faut souligner que l'interprétation de la FI a souvent été sujet à controverse [35, 60, 147, 193].

dont la dérivée serait aussi fonction du temps (dans ce cas le signal n'est plus strictement monochromatique) :

$$x(t) = a(t)\cos\left(\varphi(t)\right) \ , \tag{I.6}$$

où $\varphi(t)$ est la phase instantanée du signal $x(t)$.

Il est clair que la connaissance de $a(t)$ et de $\varphi(t)$ définit sans ambiguïté le signal $x(t)$. Malheureusement, cette expression n'est pas unique et, à l'inverse du cas monochromatique, il apparaît une infinité de couples $(a(t), \varphi(t))$ capables de décrire le signal $x(t)$ [76, 110].

Si l'on souhaite une relation bijective (bi-univoque) entre $x(t)$ et le couple $(a(t), \varphi(t))$, il faut introduire des conditions particulières permettant d'obtenir un seul et unique couple à partir de $x(t)$. Bien évidemment, l'AI doit être une grandeur positive et $\varphi(t)$ définie *modulo* 2π.

Nous verrons dans la section (I.4) que plusieurs méthodes ont été proposées pour l'estimation de la FI. On peut citer les techniques d'estimation utilisant la dérivée de la phase du signal, la modélisation AR du signal ou le centre de gravité d'une représentation temps-fréquence [20, 22, 48, 59, 76, 110, 149, 208]. L'estimation la plus utilisée, en supposant que le signal soit mono-composante, repose sur la Transformée de Hilbert (TH).

Fréquence instantanée, signal mono-composante et largeur de bande

La définition de la FI donnée ci-dessus suppose qu'à chaque instant il y a une seule et unique fréquence et par conséquent que le signal est mono-composante.
Malheureusement, il n'y a pas de définition précise pour juger si un signal est mono-composante ou pas. A défaut d'une telle définition, on impose au signal d'être à bande étroite afin que la FI estimée à partir de l'équation (I.6) ait un sens physique (son estimation est développée dans la paragraphe I.4.1).
La largeur de bande d'un signal peut être définie, par exemple, par les moments du spectre du signal [178]. Le nombre de passages par zéro par unité de temps du signal est donné par :

$$N_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{m_2}{m_0})^{1/2} \ , \tag{I.7}$$

et celui du nombre d'extrema est donné par :

$$N_1 = \frac{1}{\pi}(\frac{m_4}{m_2})^{1/2} \ , \tag{I.8}$$

avec m_i le moment d'ordre i du spectre. Ainsi, le paramètre L_b défini par la relation entre N_0 et N_1 [178] :

$$N_1^2 - N_0^2 = \frac{1}{\pi^2}\frac{m_4 m_0 - m_2^2}{m_2 m_0} = \frac{1}{\pi^2}L_b^2 \ , \tag{I.9}$$

est une mesure standard de la largeur de bande. Pour un signal bande étroite, L_b tend vers zéro et par conséquent le nombre d'extrema doit être égal au nombre de passages par zéro.

Dans le paragraphe I.4.1, nous développerons plus en détail les difficultés rencontrées lors de l'estimation de la FI d'un signal mono-composante et les contraintes imposées au signal pour que la FI estimée ait une signification physique.

I.2.3 Propriétés d'une représentation temps-fréquence idéale

Avant de parcourir les principales représentations en temps et en fréquence d'un signal mono-dimensionnel, il faut connaître les propriétés que doit posséder la représentation dédiée à notre problématique. La principale question qui se pose alors est la suivante :

Comment peut-on analyser et décrire des signaux non-stationnaires et/ou issus de systèmes non-linéaires (dans le sens où le processus utilisé pour générer de tels signaux obéit à un système d'équations non-linéaires) ?

En d'autres termes, ne peut-on pas enrichir par d'autres moyens l'analyse effectuée sur de tels signaux en utilisant un espace de description dans lequel les informations, jusque là masquées, sont mises en valeur plus explicitement ? Pour cela, il est nécessaire de définir des propriétés (ou critères) permettant d'obtenir une projection « optimale » en adéquation avec la problématique à résoudre.

Vouloir faire la liste des propriétés qu'une approche standard de décomposition doit posséder peut s'avérer un exercice périlleux vue la multitude de représentations potentiellement pertinentes et les orientations possibles que l'on peut être amené à prendre lors de l'analyse. Ainsi, si nous synthétisons l'ensemble de ses propriétés, une telle projection est en règle générale [76, 110, 114, 159, 171] :

(a) orthogonale,
(b) locale,
(c) adaptative,
(d) lisible (interprétation physique).

La propriété **(a)** assure l'unicité de la décomposition. Ainsi, l'analyse est réversible dans le sens où le signal initial peut être reconstruit simplement à partir de la projection. Elle permet de réduire la représentation et décrit le signal dans un espace « optimal » au sens du minimum de redondance d'information.
La propriété **(b)** permet d'observer des états qui sont brefs, voire transitoires. Les caractéristiques locales du signal sont ainsi mises en exergue plus facilement.
Le fait d'être adaptative **(c)** peut être intéressant dans le cas où le signal possède une grande richesse dynamique et balaye un très large spectre de fréquences au cours du temps. Dans ce cas, il est nécessaire que l'analyse prenne en compte les évolutions du signal en fonction du temps.
Enfin, la propriété **(d)**, qui est plus un critère « de confort », se révèle cependant extrêmement intéressante lors de l'analyse. En effet, l'interprétation et la compréhension des phénomènes physiques sollicités pour élaborer le signal peuvent en être grandement facilitées. Ce critère de lisibilité est subjectif dans le sens où il est lié à l'expérience et à la sensibilité de l'utilisateur.

Parmi toutes les méthodes susceptibles de répondre à notre attente, seules les plus classiques et les plus usitées vont retenir notre attention. Les représentations que nous allons développer sont les *Représentations temps-fréquence* (RTF) [76, 110] et les *Représentations temps-échelle* (RTE) [54, 144, 145, 158]. Ces méthodes décrivent l'évolution des propriétés fréquentielles du signal au cours du temps. Le changement d'espace de représentation ainsi opéré permet alors de mettre en évidence les non-stationnarités qui caractérisent le signal.
L'objectif est d'offrir une description détaillée et si possible pertinente des signatures temps-fréquence composant le signal.

I.3 Représentations orientées temps-fréquence

I.3.1 Analyse temps-fréquence

Il est aujourd'hui bien admis que les représentations d'un signal conjointement en temps et en fréquence offrent un réel intérêt : elles permettent une description des signaux non-stationnaires, c'est à dire l'analyse des lois de comportement fréquentiel du signal au cours du temps. Suite aux travaux fondamentaux de Ville et de Wigner sur les RTF, le sujet est quasiment devenu une discipline scientifique à part entière [20, 23, 41, 48, 76, 110, 171].

Par RTF, nous entendons la mise en correspondance d'une fonction monovariable (en t) avec une fonction à deux variables : le temps t et la fréquence ν. Contrairement à la TF, qui donne le contenu fréquentiel global d'un signal, les RTF situent l'énergie dans le plan temps-fréquence [76, 110].

Parmi les RTF, la classe de Cohen tient une place particulière [48] : « [elle] *peut être construite de manière objective et* [elle] *contient l'ensemble des représentations bilinéaires covariantes par translations dans le plan temps-fréquence* » (extrait de P. Flandrin [76], page 108).

L'expression générique de la classe de Cohen peut s'écrire [48, 76, 110] :

$$C_x(t,\nu;\Pi) = \int\int \Pi(u-t,\xi-\nu) W_x(u,\nu) du d\xi \,, \tag{I.10}$$

où $W_x(u,\nu)$ est la Distribution de Wigner-Ville (WVD) [20] :

$$W_x(t,\nu) = \int x(t+\frac{\tau}{2}).x^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau \,. \tag{I.11}$$

Π est le noyau de la représentation temps-fréquence. Le choix de Π détermine les propriétés de $C_x(t,\nu;\Pi)$: conditions marginales, FI ...
Ainsi, toute représentation de la classe de Cohen s'obtient par la double convolution temps-fréquence de la WVD qui apparaît comme la distribution quadratique centrale pour l'ensemble de la classe de Cohen.
Il existe de nombreuses distributions appartenant à la classe de Cohen comme par exemple le spectrogramme, la WVD (et ses extensions : PWVD et SPWVD), la distribution de Choi-Williams, celle de Born-Jordan, ou la B-distribution de Barkat-Boashash [20] ...

Dans l'absolu, cette description simultanée en temps et en fréquence rend l'interprétation plus facile. Toutefois, de par leur bilinéarité, ces distributions engendrent des termes d'interférences pouvant nuire à la lisibilité des représentations obtenues.
Ainsi, la WVD fournit d'excellents résultats pour des signaux mono-composante mais pour les signaux à composantes multiples, elle présente des interférences indésirables. Supposons que x_1 et x_2 soient deux composantes d'un seul signal x. La WVD est alors :

$$W_{x_1+x_2}(t,\nu) = W_{x_1}(t,\nu) + W_{x_2}(t,\nu) + 2\Re(W_{x_1,\,x_2}(t,\nu)) \,, \tag{I.12}$$

avec :

$$W_{x_1,\,x_2}(t,\nu) = \int x_1(t+\frac{\tau}{2}).x_2^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau \,. \tag{I.13}$$

$\Re(W_{x_1,\ x_2}(t,\nu))$ présente une structure oscillante contrairement aux composantes propres du signal en général plus régulières. On peut montrer que les structures interférentielles sont placées à mi-distance des composantes x_1 et x_2 et oscillent suivant l'axe des temps et/ou des fréquences [76]. La règle du point milieu résume la contribution des interférences : deux points du plan interfèrent pour créer une contribution en un troisième, leur milieu géométrique.

En conséquence, lorsque le signal est « complexe », les interférences compliquent l'analyse et la réduction de celles-ci est réalisée de différentes manières [17, 48, 76].
L'une des solutions[3] consiste à appliquer un lissage dans le plan temps-fréquence afin de les atténuer. Ainsi la distribution pseudo Wigner-Ville (PWVD) effectue un lissage en fréquence tandis que la pseudo Wigner-Ville lissée (SPWVD) applique un lissage bidimensionnel séparable en temps et en fréquence.
Une autre solution, plus « géométrique », permettant d'améliorer la lisibilité des distributions de la classe de Cohen (et de la classe affine) est basée sur la méthode de la réallocation [40]. Le principe est de réarranger le plan temps-fréquence pour y améliorer la localisation des composantes d'un signal.

De manière générale, ces représentations, quoique différentes reposent sur un concept identique à savoir la ré-écriture du noyau de lissage selon des critères prédéfinis à l'avance. Ces critères sont souvent choisis selon les caractéristiques connues des signaux à analyser ou de la problématique envisagée (détection [129,179], classification [56] ...). Des approches ont été proposées pour choisir automatiquement, parmi un ensemble de RTF, celle qui décrit de manière optimale le signal selon un critère donné [48, 118, 145].

Pour illustrer certaines RTF, nous définissons un signal synthétique $x(n)$ comme étant la combinaison linéaire de quatre « atomes gaussiens élémentaires ». Un « atome gaussien élémentaire » x_{τ_i,ν_i} s'exprime comme le produit d'une fonction sinusoïdale modulée par une gaussienne :

$$x_{\tau_i,\ \nu_i}(n) = \cos(2\pi\nu_i(n-\tau_i)).\exp\left(-\pi\left(\frac{n-\tau_i}{2\sqrt{N}}\right)^2\right), \tag{I.14}$$

avec N le nombre de points. Dans notre exemple, nous choisissons ν_i et τ_i tel que $\nu_i \in (0.15, 0.35)$ et $\tau_i \in (32, 96)$. Le signal $x(n)$ étudié s'exprime alors sous la forme :

$$x(n) = x_{32,\ 0.1}(n) + x_{96,\ 0.1}(n) + x_{32,\ 0.35}(n) + x_{96,\ 0.35}(n). \tag{I.15}$$

Ce signal temporel $x(n)$ est constitué de $N = 128$ points. Son spectre et les lois d'évolution théoriques des fréquences au cours du temps sont illustrés dans la figure I.5.
Nous identifions les quatre « atomes » sur la RTF[4] idéalisée et pas dans le signal temporel et fréquentiel.

[3] Bien évidemment, on considère le signal analytique. En effet, le fait d'utiliser le signal analytique a pour conséquence d'éliminer les interférences entre les composantes portées par les fréquences négatives et celles portées par les fréquence positives [76].

[4] Dans la suite, nous utiliserons les programmes, écrits sous MatLab, de la boîte à outils temps-fréquence développée par Auger *et al.* [13]. Ce principe d'affichage (temps, DSP, TFR) sera par la suite largement utilisé pour illustrer et décrire les signaux analysés.

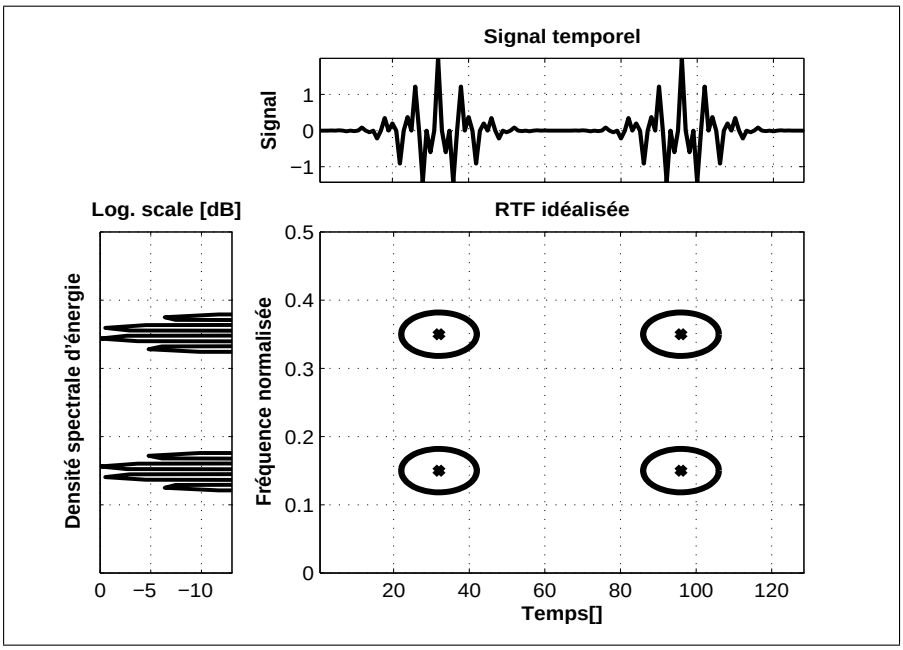


Figure I.5 **—** Représentations (temps, fréquence, RTF idéalisée) du signal avec quatre atomes gaussiens élémentaires.

Quelques RTF du signal sont présentées dans la figure I.6. Dans l'ensemble, les interférences, quoique redistribuées différemment, restent encore visibles.

Le spectrogramme ne présente pas d'interférences entre les composantes mais cela se fait au détriment de la localisation en temps et en fréquence des quatre atomes (Fig. I.6(a)). Pour obtenir une meilleur localisation des phénomènes temps-fréquence, nous pouvons appliquer le principe de réallocation sur le spectrogramme (Fig. I.6(b)).

La Distribution de Wigner-Ville permet de mettre en évidence les interférences entre les quatre composantes du signal (Fig. I.6(c)). L'une des solutions pour réduire ces interférences est d'utiliser la PSWVD qui lisse les interférences (en temps et en fréquence) mais au détriment d'un étalement temporel et fréquentiel plus important (Fig. I.6(d)).

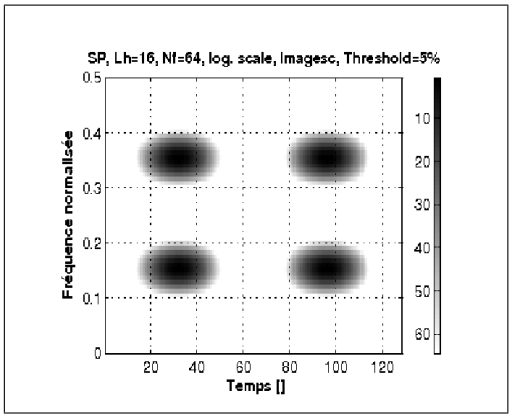
Les deux dernières figures I.6(e) et I.6(f) montrent le comportement de deux autres distributions de la classe de Cohen. On peut observer que selon les caractéristiques du noyau de la RTF les interférences ne sont pas traitées de la même manière.

Une représentation temps-fréquence donne une mesure pour une fréquence et un instant donnés. Lorsque ces variables sont liées par la TF, on alloue une incertitude pour le temps et pour la fréquence : c'est le principe d'incertitude d'Heisenberg(-Gabor) présent dans toutes les représentations conjointes en temps et en fréquence qui se traduit par la relation (aussi nommée inégalité temps-fréquence) [76] :

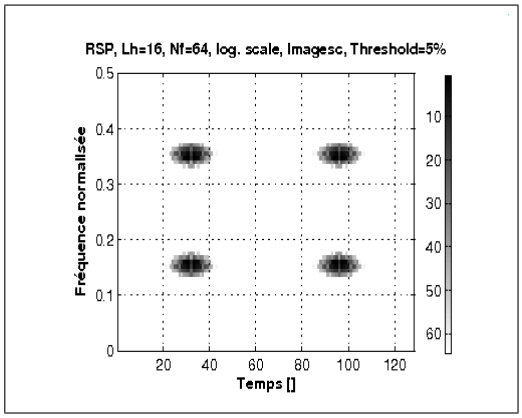
$$\Delta t \Delta \nu \geqslant \frac{1}{4\pi} , \tag{I.16}$$

où Δt et $\Delta \nu$ représentent respectivement les supports temporel et fréquentiel (Fig. I.7).

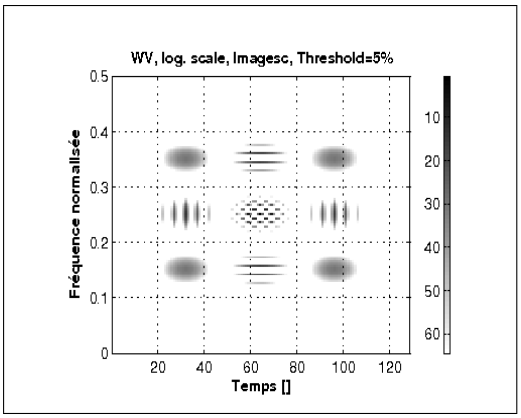
Cette relation traduit le fait que pour améliorer la localisation en temps, il est nécessaire de diminuer la largeur de la fenêtre d'analyse fréquentielle, ce qui a pour conséquence de dégrader la localisation fréquentielle ; cela est aussi vrai en fréquence [48, 76].



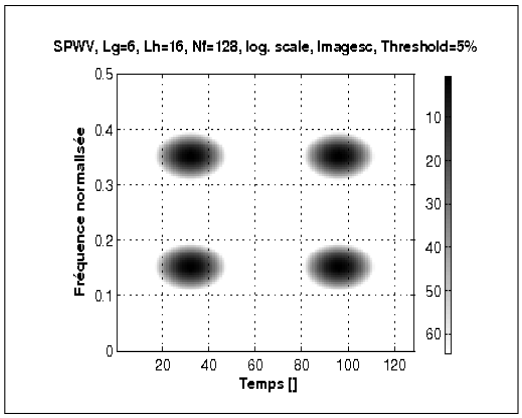
(a) Spectrogramme.



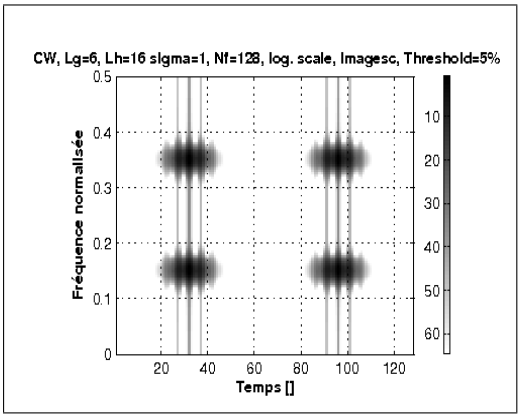
(b) Réallocation du spectrogramme.



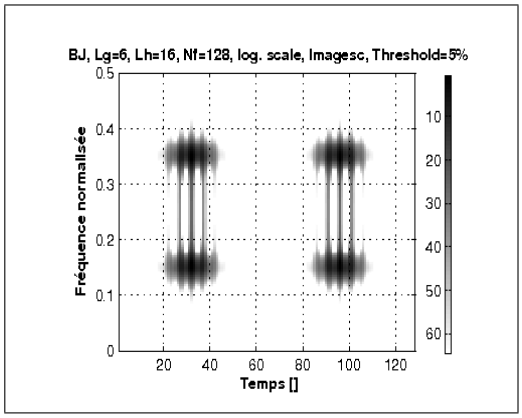
(c) Wigner-Ville.



(d) Pseudo Wigner-Ville lissée.



(e) Choi-Williams.



(f) Born-Jordan.

Figure I.6 **—** Exemples de RTF quadratiques de la classe de Cohen du signal à quatres atomes gaussiens.

Ainsi, diverses méthodes engendrent des RTF de propriétés et de performances variées. Elles se regroupent au sein d'ensembles cohérents, basés soit sur le type de modélisation (paramétrique[5] ou non), soit sur le caractère (linéaire, quadratique ...) de la transformation engendrant la représentation. Dans ce paragraphe, nous nous sommes restreints à une description succincte des distributions quadratiques de la classe de Cohen.

Ces descriptions dans l'espace temps-fréquence sont maintenant d'un usage courant en analyse de signaux. Précisons toutefois qu'il s'agit là de représentations bilinéaires de type quadratique à l'inverse des représentations linéaires plus temps-échelle développées dans le paragraphe suivant.

I.3.2 Analyse temps-échelle

Lorsque l'on parle de Représentation temps-échelle (RTE), on pense classiquement aux ondelettes [55, 145, 159, 202]. L'objectif de cette section est d'introduire la notion de transformée en ondelettes dans un cadre « temps-fréquence ».

Il est intéressant de souligner qu'initialement l'idée n'était pas de construire une représentation conjointe en temps et en fréquence mais réellement une projection conjointe en temps et en échelle. Ce n'est que par la suite que l'on a utilisé les ondelettes pour obtenir une description de type temps-fréquence.

Historiquement, la RTE est apparue avec les ondelettes « temps-échelle » de Grossmann-Morlet dans les années 80 [16, 95]. La description temps-échelle se base sur l'analyse du signal à travers une famille de fonctions. Le principe consiste à considérer le signal comme une succession d'approximations suivant l'échelle définie au départ (tout comme la résolution cartographique). Pour cette raison, on préfère parler de « niveaux de détail » élevés ou bas (d'où l'appellation temps-échelle ou analyse multi-résolution) plutôt que de « fréquences aigües ou graves » [145, 159].

L'expression générale de la transformée en ondelettes continue a pour forme [76, 145] :

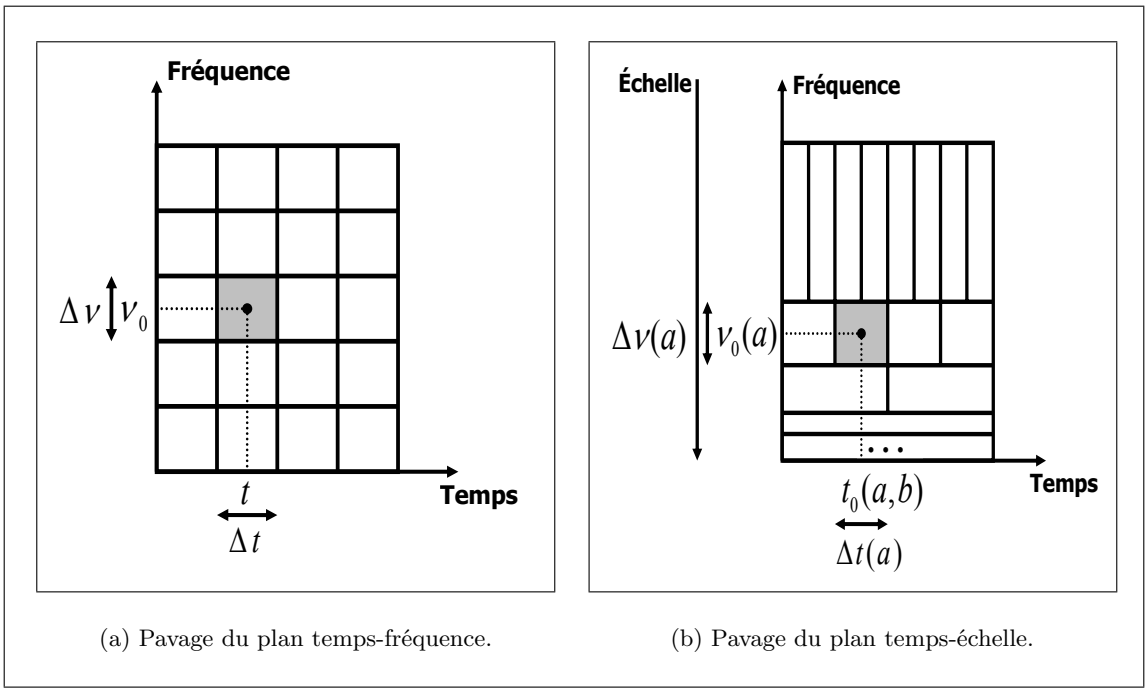
$$T_x(t,a;\psi_{ta}) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\psi_{ta}^*\left(\frac{s-t}{a}\right)ds\,, \tag{I.17}$$

avec a correspondant au facteur d'échelle. Ainsi, définir $|a| < 1$ « dilate » la fonction ψ_{ta} et prendre $|a| > 1$ la « comprime ». La fenêtre ψ_{ta} est appelée *ondelette d'analyse* et permet de déduire les autres fonctions de base (ou atomes) ψ par translation en temps et changement d'échelle :

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi_{ta}\left(\frac{s-t}{a}\right)\,. \tag{I.18}$$

Si nous comparons le pavage du plan temps-fréquence et celui du plan échelle-fréquence, nous remarquons que ce dernier n'est pas identique sur tout l'espace (Fig. I.7(b)).
En fait, plus le facteur de dilatation a est élevé (Eq. I.17), plus l'ondelette est étendue selon l'axe du temps et plus elle est concentrée selon l'axe des fréquences (Fig. I.7(b)). Par conséquent, la précision en temps et en fréquence est variable en fonction du facteur d'échelle a.

[5] Ce point n'a pas été traité pour la simple raison que l'on souhaite définir une représentation nécessitant un minimum d'informations sur le signal à analyser, ce qui n'est pas le cas de ces approches.



(a) Pavage du plan temps-fréquence.

(b) Pavage du plan temps-échelle.

Figure I.7 — Pavage et cellule de résolution : RTF (Gabor), RTE (ondelettes dyadiques).

La résolution temporelle est donc plus importante pour les hautes fréquences que pour les basses fréquences. Inversement, la résolution fréquentielle est plus importante pour les basses fréquences que pour les hautes fréquences.

De cette manière, nous pouvons alors bien saisir simultanément les transitoires rapides et les détails aussi bien pour les fréquences basses que pour les fréquences hautes, ce que ne peuvent offrir, *a contrario*, les distributions temps-fréquence quadratiques vues précédemment.

Cependant, quelle que soit la forme du maillage, l'aire des différentes cellules d'information (« logons ») reste identique. C'est le principe de Heisenberg-Gabor (Eq. I.16) qui s'applique toujours mais sous une forme qui dépend maintenant de la fréquence ν :

$$\Delta t(\nu)\Delta\nu(\nu) \geqslant \frac{1}{4\pi} \,. \tag{I.19}$$

Bien que la transformée en ondelettes soit une RTE, si on considère que l'ondelette d'analyse ψ_{ta} est bien localisée autour d'une fréquence ν_0, alors une interprétation RTF est possible en posant $\nu = \nu_0/a$ [76, 145]. Les ondelettes peuvent alors s'interpréter comme une RTF parmi d'autres.

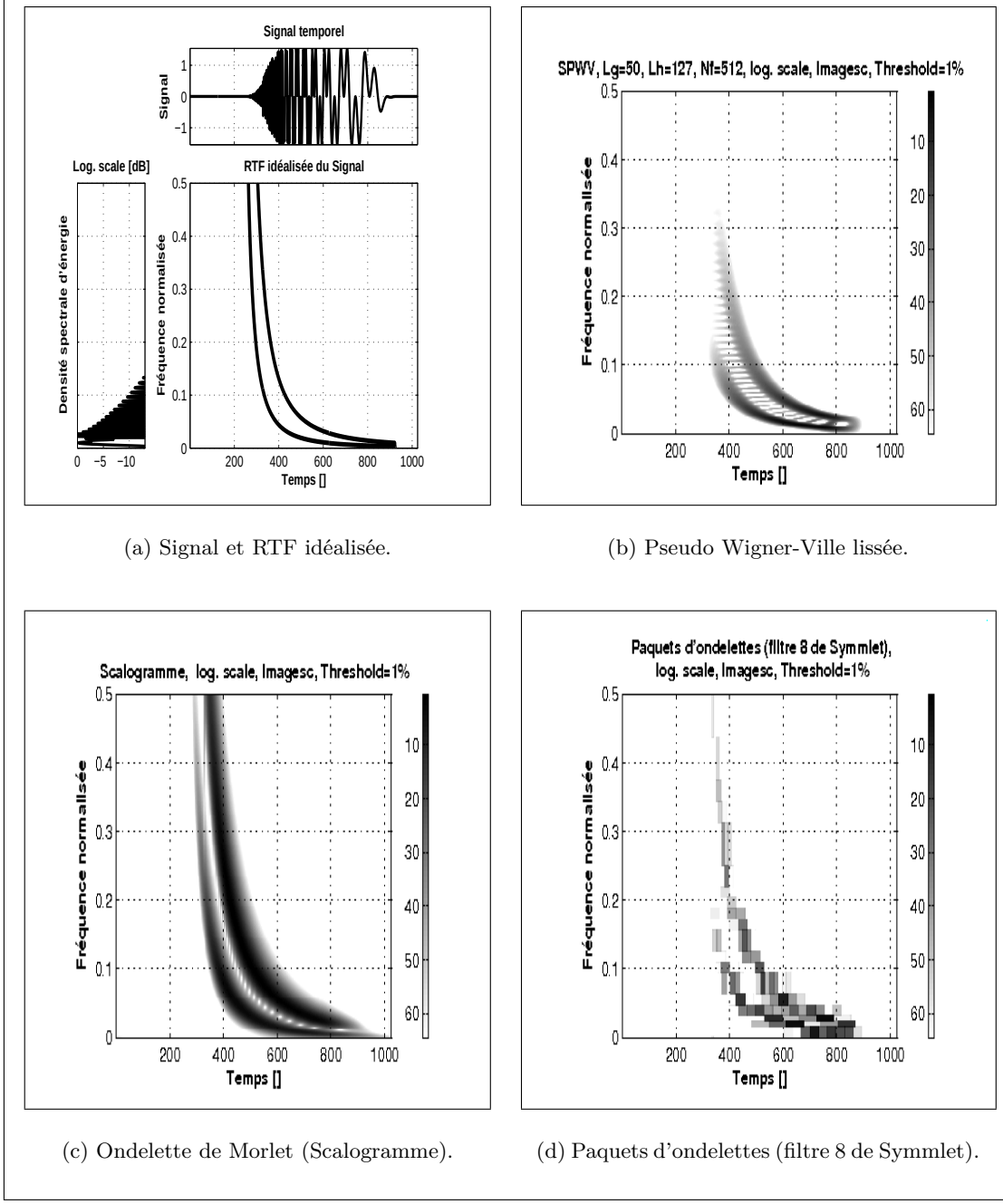
Pour illustrer l'ensemble de nos propos, nous considérons un signal $x(t)$ composé de la somme de deux signaux à FI hyperbolique (Fig. I.8(a)) :

$$x(t) \;=\; \cos\left(\frac{\alpha_1}{\beta - t}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_2}{\beta - t}\right) \,, \tag{I.20}$$

où la FI est donnée par :

$$FI_{\alpha,\,\beta}(t) \quad = \quad \frac{\alpha}{(\beta - t)^2}\,,$$

avec $\alpha_1 = 23,5$; $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 3$ et $\beta = 0,8$.
Ce type de signaux a la particularité de se caractériser par une variation rapide de la FI lorsque t tend vers β. Cette propriété est particulièrement intéressante dans les domaines du radar et du sonar [32, 43].



(a) Signal et RTF idéalisée.

(b) Pseudo Wigner-Ville lissée.

(c) Ondelette de Morlet (Scalogramme).

(d) Paquets d'ondelettes (filtre 8 de Symmlet).

Figure I.8 **—** Comparaison entre représentations temps-échelle et temps-fréquence sur un signal composé de deux FI hyperboliques.

Nous pouvons remarquer que les deux modulations hyperboliques ont des fréquences voisines vers la fin du signal. Les méthodes par ondelettes (Fig. I.8(c) et I.8(d)) séparent correctement les deux FI dans l'ensemble de l'espace temps-fréquence. En revanche, la SPWVD localise plus difficilement ces deux FI (Fig. I.8(b)) par rapport aux paquets d'ondelettes (Fig. I.8(d)).
Notons que la figure I.8(d) utilise les boîtes de Heisenberg [145]. Plus les boîtes sont sombres plus les amplitudes des coefficients associés à la transformation sont grandes. Ce principe de représentation graphique illustre le fait que les méthodes basées sur les ondelettes découpent le plan temps-fréquence (ou plutôt temps-échelle) de manière dyadique au contraire des RTF étudiées dans le section précédente.

Par ailleurs, l'analyse en ondelettes offre une plus grande souplesse d'utilisation puisque le choix des atomes de la transformée, déduits de l'ondelette analysante, est laissé au soin de l'utilisateur. Cependant, ce choix est une opération délicate qui dépend du problème étudié (compression, description, détection ...). Parmi l'ensemble des ondelettes disponibles (Haar, Morlet, Meyer, Daubechies, Symmlet ...), le choix d'une ondelette est déterminé (« expérimentalement ») après avoir constaté qu'elle était adéquate pour l'application considérée [10,55,90,145,159,202]. Par la suite, nous considérerons, par abus de langage (et si cela ne prête pas à confusion dans le discours), qu'une RTE est équivalente à une RTF.

I.3.3 Synthèse

Après avoir répertorié certaines descriptions basées sur une représentation conjointe en temps et en fréquence, nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de méthode universelle et unique pour analyser des signaux non-stationnaires. Aucune méthode n'est ni meilleure ni moins bonne ! En fait, tout dépend du (des) critère(s) choisi(s) (adaptatif, localité, orthogonalité, lisibilité, ...), voire pourquoi pas de la « sensibilité » de l'utilisateur. Ce qui nous conduit, *« en exagérant à peine* , [à introduire] *presqu'autant d'algorithmes d'analyse qu'il y a de signaux »* (d'après Y. Meyer [159]).

Il convient de noter que les transformations étudiées précédemment doivent être considérées non pas comme un gain d'information, mais plutôt comme une redistribution de l'information contenue dans le signal analysé de façon à faciliter son interprétation. Les deux approches (RTF et RTE) tentent de transcrire la totalité de l'information contenue dans le signal dans un espace à deux dimensions : le temps et la fréquence (ou échelle).

Toute la difficulté est alors de savoir si la transformation temps-fréquence employée est suffisante pour mettre en évidence les caractéristiques du signal. D'après les exemples décrits précédemment, nous pouvons conclure que l'analyse d'un signal non-stationnaire et multi-composantes passe nécessairement par une description dans un espace temps-fréquence.
Aussi, les RTF ont vocation à décrire le signal à l'aide d'une collection de signatures localisées en temps et en fréquence (au même titre qu'une partition de musique), dans notre cas les FI et AI d'un signal multi-composantes.

Face à ces constatations, il est nécessaire de pouvoir estimer ces deux grandeurs que sont la FI et l'AI d'un signal.

I.4 Estimation de la fréquence instantanée

I.4.1 Estimation par transformée de Hilbert

Nous avons développé dans la section I.2.2 le concept de la FI mais pas les méthodes permettant son estimation. Pour cela, il est nécessaire d'associer à un signal réel $x(t)$ un signal complexe $z(t)$, opération que l'on note $z(t) = S[x(t)]$. Il existe plusieurs façons d'y parvenir comme par exemple l'introduction du Signal analytique (SA). Il est alors nécessaire d'imposer les deux conditions ci-dessous.
- Premièrement, comme il s'agit d'une extension au cas général d'une approche qui doit s'appliquer au cas sinusoïdal, on impose la condition :

$$S[\cos(\omega t)] = \exp(i\omega t)\,,\ \forall \omega > 0\,. \tag{I.21}$$

- Deuxièmement, l'opération doit être linéaire : si l'AI de $x(t)$ est $a(t)$ alors celle de $\alpha.x(t)$ doit être $\alpha.a(t)$. Par extension, il suffit d'imposer que l'application $S[.]$ soit un filtrage linéaire. On peut alors définir le SA $z_x(t)$ associé au signal réel $x(t)$ [20, 76, 110].

Définition *Le SA $z_x(t)$ complexe associé au signal réel $x(t)$ s'exprime sous la forme :*

$$z_x(t) \equiv x(t) + jH\{x(t)\}\ , \tag{I.22}$$

avec :

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds\,, \tag{I.23}$$

*où **H** désigne la TH de $x(t)$ et 'vp' la valeur principale de l'intégrale au sens de Cauchy.*

On note que la partie réelle du SA $z_x(t)$ est $x(t)$ lui-même et que la partie imaginaire est obtenue à partir d'un filtre linéaire **H** en quadrature avec $x(t)$ [20, 48, 76, 110].

Le spectre du signal analytique est simple [20, 76, 110] :

$$Z_x(\nu) = X(\nu) + j(-j\ sign\ \nu)X(\nu) = 2U(\nu)X(\nu)\,, \tag{I.24}$$

où $U(\nu)$ désigne l'échelon unité de Heaviside. Son spectre est nul pour toutes les fréquences négatives. $z_x(t)$ est complexe avec un encombrement spectral deux fois plus petit que celui du signal réel $x(t)$.

Ainsi par construction, les notions d'amplitude et de phase d'un signal réel $x(t)$ non-stationnaire sont associées à un unique signal complexe $z_x(t)$ dont le module et l'argument définissent respectivement les grandeurs AI, $|z_x(t)|$, et la phase instantanée, $\arg z_x(t) = \phi(t)$ du signal $x(t)$. La FI s'exprime comme la dérivée de la phase instantanée. Nous pouvons alors écrire que l'AI, $a_x(t)$, et que la FI, $\nu_x(t)$, d'un signal $x(t)$ sont de la forme [20, 76, 110] :

$$a_x(t) \equiv |z_x(t)|\ , \tag{I.25}$$

$$\nu_x(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\ z_x(t)\,. \tag{I.26}$$

En observant les équations I.22, I.23 et I.25, on peut noter que la définition de la FI du signal fait intervenir un filtre non causal et non instantané. L'estimation de AI et FI d'un signal par la TH est schématisée dans la figure I.9.

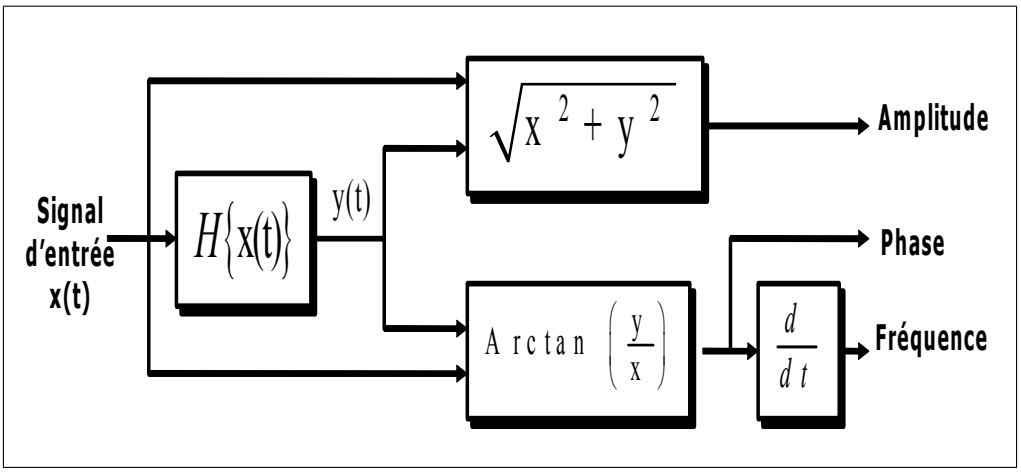


Figure I.9 **—** Principe d'estimation de la FI via le signal analytique $z_x(t)$ de $x(t)$.

La FI caractérise un comportement fréquentiel local en fonction du temps. De manière identique, on définit le retard de groupe $t_x(\nu)$, quantité duale de la FI, par [20, 76, 110] :

$$t_x(\nu) \equiv -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu}\arg\, Z_x(\nu)\,, \tag{I.27}$$

avec $Z_x(\nu)$ la TF de $z_x(t)$. Cette grandeur $t_x(\nu)$ décrit le comportement temporel local en fonction de la fréquence d'un signal $x(t)$ et mesure l'instant d'apparition d'une fréquence. Notons que la FI et le retard de groupe ont deux représentations graphiques différentes. Elles sont approximativement identiques quand le produit $B \times T$ est large (B est la largeur de la bande normalisée en fréquence et T est la durée du signal) [20, 22, 23, 76].

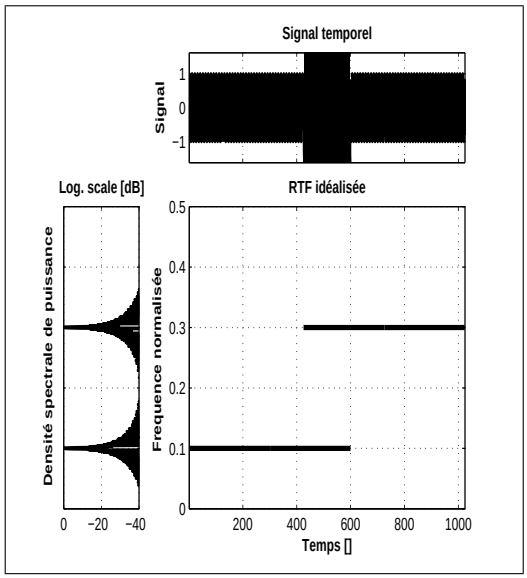
Bien que locale par rapport à la variable temporelle, la FI est une quantité « moyenne » relativement à la variable duale [76]. En fait, la FI ne permet une description facilement interprétable que dans le cas de signaux mono-composante pour lesquels, à un instant t, le signal est supposé n'exister qu'autour d'une fréquence unique. Dans le cas contraire, l'interprétation de la FI est plus difficile. Cette remarque est également valable dans l'espace dual pour le retard de groupe.

Pour illustrer nos propos, considérons le signal $x(n)$ comme le mélange de deux contributions à FI distinctes et constantes :

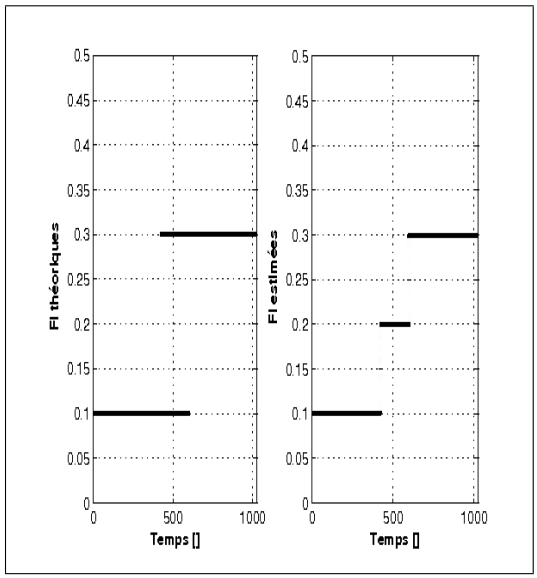
$$x(n) = \begin{cases} A_1\cos(2\pi\nu_1 n) & 1 \leqslant n \leqslant 600 \\ A_2\cos(2\pi\nu_2 n) & 425 \leqslant n \leqslant 1024 \end{cases}. \tag{I.28}$$

Le signal est constitué de $n = 1024$ points correspondant à la somme de deux sinusoïdes d'amplitudes $A_1 = A_2 = 1$ et de fréquences réduites $\nu_1 = 0,1$ et $\nu_2 = 0,3$ (Fig. I.10(a)).
Sur l'intervalle $n = [1, 424]$, seul le signal de basse fréquence est présent ; puis sur l'intervalle $[425, 600]$ les deux fréquences coexistent simultanément ; enfin sur $[601, 1024]$ seule la plus haute fréquence est présente.

Nous vérifions bien le fait que si une seule sinusoïde est présente, alors la FI estimée coïncide avec la fréquence du signal $x(n)$ tandis que, dans le cas contraire, la FI est plutôt une version « *médiane* » modulée en amplitude (Fig. I.10) [76].



(a) Caractéristiques du signal (Eq. I.28).



(b) Comparaison de la FI théorique et estimée par la transformée de Hilbert.

Figure I.10 — Comparaison et estimation des FI d'un signal multi-composantes à partir de la transformée de Hilbert.

Une autre contrainte est d'ailleurs imposée au signal pour que la FI estimée ait une signification physique. En effet, si nous considérons le signal $x(t) = \sin t$, alors le SA est $X_a(t) = \sin t + i \cos t$. Il est facile de constater que la FI est constante. Maintenant, si $x(t) = \sin t + \alpha$ (signal décalé en amplitude) alors le SA est $X_a(t) = \sin t + i \cos t + \alpha$. En conclusion, la FI n'est plus constante mais dépend de la valeur de α. Cet exemple illustre pourquoi on impose au signal dont on calcule la FI d'être de moyenne nulle.

Ainsi la moyenne nulle et la notion de bande étroite d'un signal mono-composante sont autant de contraintes imposées au signal $x(t)$ afin que la FI estimée se prête à une interprétation physique.

Même si la TH permet de définir clairement la FI d'un signal, il est paradoxal (mais non contradictoire) que la détermination de cette grandeur instantanée repose sur l'intégration du signal qui est une opération globale (Eq. I.22 et I.23) sur toute la durée de celui-ci avec un poids identique pour le passé et le futur. De plus, la définition de cette grandeur instantanée repose d'une part sur un filtre non causal et non instantané et d'autre part sur la TF du SA [20, 48, 76, 110].

Nous sommes donc conduits à définir des quantités « instantanées » prenant en compte des valeurs du signal qui ne sont pas encore observées et en toute rigueur on ne peut le faire que lorsque le signal a été intégralement observé. Face à cela, il existe des approches privilégiant essentiellement la notion *d'instantanéité* pour estimer la FI et l'AI d'un signal.

I.4.2 Estimation par RTF

Face à la problématique des signaux multi-composantes, l'une des solutions élégantes pour résoudre ce problème repose sur les RTF.

Par exemple, en considérant la WVD, la FI $\nu_x(t)$ d'un signal $x(t)$ est définie comme le moment d'ordre 1 en fréquence de la WVD [22, 76, 110, 141] :

$$\nu_x(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \nu W_{x_a}(t,\nu)\, d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t,\nu)\, d\nu}, \tag{I.29}$$

avec x_a le SA associé au signal x.

De nombreux travaux se basent d'ailleurs sur ces représentations conjointes en temps-fréquence pour remonter aux lois d'évolution des différentes FI présentes dans un signal multi-composantes [20, 48, 76, 110, 177]. Il est à noter que cette approche n'est théoriquement valable que si l'on définit des conditions particulières sur le noyau de la RTF de la classe de Cohen, à savoir la conservation de la FI [48, 76, 110].

I.4.3 Estimation par méthodes locales

Parallèlement aux méthodes « standards » basées sur la TH ou les RTF, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'estimation de la FI et de l'AI par des méthodes dites « instantanées » ou « locales ». Ces approches n'utilisent que les valeurs du signal et, si nécessaire, ses dérivées à l'instant même où l'on souhaite estimer la FI et l'AI [33, 59, 123, 149, 173, 174, 208].

Parmi les nombreuses méthodes de démodulations « instantanées », on peut citer celles basées sur :

- l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser [33, 123, 150],
- l'opérateur de Dyn [184],
- l'opérateur de Shekel [193],
- les matrices de Hankel et de Toeplitz [190] ...

Les méthodes citées ci-dessus sont essentiellement orientées vers la décomposition (ou démodulation) des signaux AM-FM multi-composantes. On peut trouver dans la littérature des études comparatives de ces diverses approches [97,127,140,173,183,190,208]. Par exemple, Potamianos *et al.* [173] ont comparé l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO pour Teager-Kaiser Energy Operator) et l'approche basée sur le SA et ont conclu sur l'intérêt de l'utilisation de TKEO pour l'estimation des FI (du moins pour la démodulation dans le domaine de la parole).

Par la suite, nous nous intéresserons essentiellement à l'opérateur TKEO dont l'étude approfondie est réalisée dans le chapitre **IV**. Cette transformation non-linéaire se démarque des autres pour plusieurs raisons :

- son expression provient de l'étude d'un système physique (énergie de l'oscillateur harmonique) [122, 151],
- elle ne requière pas l'hypothèse de stationnarité du signal [150, 151],
- certaines caractéristiques liées à l'enveloppe et à la FI ressortent mieux [151, 173],
- des relations avec la WVD ont été montrées [99, 100, 131] et sa généralisation à la classe de Cohen démontrée (cf. paragraphe IV.3.4 du chapitre **IV**),
- sa complexité est faible et sa mise en oeuvre informatique est très simple et rapide [151],
- elle ne nécessite pas de post-traitement en général, si on respecte les restrictions sur le signal [124, 150].

L'estimation de la FI et AI d'un signal $x(t)$ par l'opérateur TKEO est abordée au chapitre **V** .

I.5 Conclusion

Nous avons montré l'intérêt de disposer de représentations combinant simultanément le temps et la fréquence afin d'analyser des signaux non-stationnaires. Cela nous a conduit à définir un signal multi-composantes comme étant une combinaison de signaux mono-composante de type AM-FM. Il s'est avéré alors que la description d'un tel signal (mono-composante) passe par l'estimation de deux grandeurs : l'AI et la FI. Afin d'estimer la FI d'un signal, nous avons présenté les approches les plus courantes : la TH, les RTF, et les méthodes dites locales.

Il apparaît au vu des études réalisées qu'il existe deux grandes stratégies pour l'estimation de la FI :

- les premières reposent sur l'utilisation d'une RTF à partir de laquelle on estime les FI des différentes composantes présentes dans le signal,
- les secondes approches (TH et méthodes locales) estiment d'abord les FI (et AI) du signal pour aboutir finalement à l'élaboration de la description temps-fréquence.

Dans le cadre de nos travaux, nous orienterons principalement notre étude sur la deuxième méthodologie, à savoir l'estimation de la FI et de l'AI, puis le recours à une méthode locale basée sur une extension de l'opérateur d'énergie TKEO. Ce choix repose sur des constats simples comme la volonté de ne pas solliciter de pré-requis sur les caractéristiques du signal, mais aussi le souhait d'avoir une méthode qui soit naturellement auto-adaptative et locale.

Lors de l'estimation de la FI via la TH, nous avons remarqué que celle-ci ne permettait pas une interprétation « correcte » des FI présentes dans un signal multi-composantes (cf. paragraphe I.4.1). Aussi dans le chapitre **II**, nous allons nous intéresser à une approche qui permet de décrire les FI et AI présentes dans un signal multi-composantes en utilisant une décomposition originale du signal proposée par Huang *et al.* [114] : la Transformation de Huang ou, plus exactement, la Décomposition modale empirique (EMD pour Empirical mode decomposition).

CHAPITRE II

La Transformation de Huang

Sommaire

II.1 Introduction 28
II.2 Décomposition modale empirique (EMD) 28
II.2.1 Principe de la décomposition 29
II.2.2 Processus de tamisage : principe algorithmique 31
II.2.3 Commentaires sur le processus de tamisage 35
II.3 Autour de la méthode 41
II.3.1 Problématique d'interpolation 41
II.3.2 Problématique de discrétisation 43
II.4 Description temps-fréquence 46
II.4.1 Résolution fréquentielle 46
II.4.2 Structure en banc de filtres et ondelettes 48
II.4.3 Description conjointe temps-fréquence 52
II.5 Conclusion 60

Ce chapitre est une présentation de la méthode d'analyse des signaux non-stationnaires récemment introduite par Huang *et al.* [114]. Cette méthode est la combinaison d'un algorithme de décomposition temporelle d'un signal en composantes de base, appelée décomposition modale empirique (EMD pour Empirical mode decomposition) et de la transformation de Hilbert pour l'estimation des AI et FI. L'association de ces deux méthodes est appelée la Transformation de Huang-Hilbert (THH).

Dans un premier temps, nous expliquons le principe de l'EMD et l'illustrons par des exemples de signaux synthétiques. Nous mettons l'accent sur les problématiques inhérentes à l'EMD telles que l'interpolation ou l'échantillonnage qui conditionnent la décomposition temporelle. Nous montrons que, dans le cas d'un bruit blanc gaussien, l'EMD s'organise en une structure équivalente à un banc de filtres quasi-dyadiques.

Dans un deuxième temps, nous expliquons le principe de l'analyse temps-fréquence par THH et nous comparons les résultats obtenus à ceux données par la distribution de Wigner-Ville et des ondelettes. Enfin, nous terminons sur les limites et les améliorations à apporter à la THH.

II.1 Introduction

Les méthodes d'analyse présentées dans le chapitre précédent sont basées essentiellement sur la TF. Or celle-ci est limitée aux signaux stationnaires et aux systèmes linéaires. Ainsi, toutes les méthodes, telles le spectrogramme ou la WVD, basées sur la TF auront intrinsèquement, plus ou moins, les mêmes limites. Par ailleurs, aussi bien la TF, les RTF de la classe de Cohen ou les ondelettes nécessitent la spécification d'un noyau ou d'une fonction de base. De plus, une des limitations des RTF, telle que la WVD, est la présence de termes d'interférences qui nuit à la lisibilité des représentations obtenues et par conséquent aux attributs qu'on peut extraire pour réaliser la classification ou l'identification d'un signal. L'objectif est de trouver une décomposition adaptée au signal, ne nécessitant pas d'informations *a priori* sur celui-ci, et qui permet d'obtenir une description temps-fréquence.

Partant des limitations énumérées ci-dessus, Huang *et al.* ont récemment proposé une technique qui aborde sous un autre angle la problématique de l'analyse des signaux non-stationnaires avec l'approche de décomposition modale empirique (EMD pour Empirical mode decomposition) [114]. L'EMD décompose d'une façon adaptative un signal en une somme de composantes oscillantes. Contrairement à la TF ou aux ondelettes, la base de décomposition de l'EMD est intrinsèque au signal. Une des motivations du développement de l'EMD est l'estimation de la FI du signal. En effet, l'approche classique d'estimation de la FI basée sur la TH est strictement limitée aux signaux mono-composante. Ainsi, des contraintes sont imposées à ces composantes oscillantes pour estimer correctement la FI (avec un sens physique) propre à chaque composante présente dans le signal. L'EMD combinée avec la TH ou une autre méthode d'estimation de la FI aboutit à une RTF.

Nous étudions dans ce chapitre la décomposition temporelle des signaux par EMD ainsi que leur analyse temps-fréquence par l'approche THH. Comme l'EMD n'a pas de formulation analytique, toutes les études et les analyses seront validées par des simulations numériques. Les avantages et les limites de ces deux méthodes seront discutés.

II.2 Décomposition modale empirique (EMD)

L'EMD est définie par un processus appelé tamisage (*sifting*) permettant de décomposer le signal en contributions de base appelées modes empiriques ou IMF (Intrinsic mode functions) qui sont des signaux de type AM-FM mono-composante (au sens large), chacun de moyenne nulle [114]. La décomposition est locale, itérative, séquentielle (*fine to coarse approach*) et entièrement pilotée par les données (*Data driven approach*). L'EMD considère les signaux à l'échelle de leurs oscillations locales, sans que celles-ci soient nécessairement harmoniques au sens de Fourier. L'extraction des IMF est non-linéaire, mais leur recombinaison pour la reconstruction exacte du signal est linéaire. En se basant essentiellement sur les variations (ou oscillations naturelles) du signal, l'EMD permet une interprétation des phénomènes physiques présents. En plus de sa simplicité de mise en œuvre informatique et de sa capacité à décrire ponctuellement et de manière instantanée les phénomènes fréquentiels non résolus par l'analyse de Fourier, l'EMD est bien adaptée à l'étude des signaux non-stationnaires et/ou générés par des systèmes non-linéaires.

Cependant, l'EMD est simplement définie par un algorithme et elle ne possède pas de cadre théorique pour le moment. Dans la plupart des cas, les études (performance, analyse ...) menées sur l'EMD se font avec des simulations numériques extensives et dans des conditions contrôlées [77,78,114]. Cela étant, malgré le manque actuel de formalisme mathématique pour

décrire l'EMD, nous garderons à l'esprit la philosophie de la méthode et nous montrerons que ce manque ne remet pas en cause les réelles capacités d'analyse des signaux par l'EMD ou par ses dérivées telle que la THH. En effet, cette technique a été appliquée avec succès à des données réelles dans des domaines tels que l'océanographie et l'étude des phénomènes climatiques [52, 126], la sismologie [2], le contrôle non destructif [72, 73], l'acoustique sous-marine [29, 38], ou la biologie [86, 116, 126].

II.2.1 Principe de la décomposition

Le principe de l'EMD repose sur une décomposition adaptée en décrivant localement le signal comme une succession de contributions d'oscillations rapides (hautes fréquences) sur des oscillations plus lentes (basses fréquences). Pour illustrer la décomposition, nous considérons l'exemple simple d'un signal $x(t)$ formé de deux contributions : une oscillation rapide et une autre lente :

$$\underbrace{x(t)}_{signal} = \underbrace{d(t)}_{oscillation\,\mathbf{(a)}} + \underbrace{m(t)}_{tendance\,\mathbf{(b)}} \quad . \tag{II.1}$$

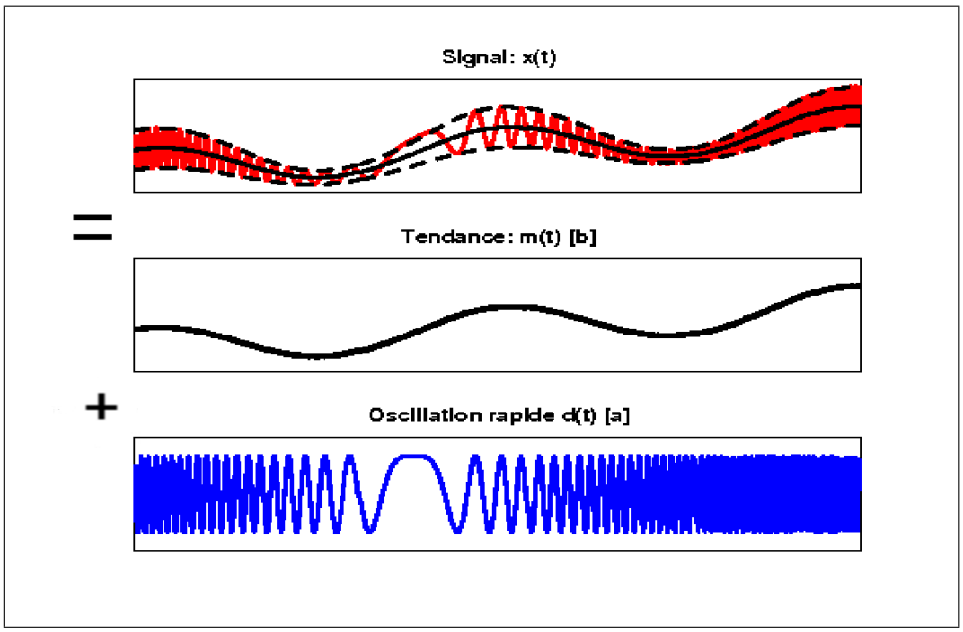


Figure II.1 — Principe de l'EMD : *« oscillation rapide »* ***(a)*** + *« oscillation lente »(tendance)* ***(b)***.

Ainsi, la reconstruction du signal $x(t)$ est réalisée en sommant les deux courbes point par point (on parle de décomposition géométrique) (Fig. II.1). Notons que, par construction la tendance $b(t)$ du signal contient localement des oscillations de plus basse fréquence que celle de l'oscillation rapide. Ce résultat peut être généralisé à toutes les contributions comme suit : chacune contient localement des oscillations de plus basse fréquence que celle extraite précédemment.

Conceptuellement, la mise en place de la méthode permettant de décrire cette décomposition est assez simple :

> Il suffit de considérer le signal à l'échelle de ses oscillations locales, de soustraire l'oscillation la plus rapide du signal et de réitérer le processus sur le résidu de manière à écrire le signal $x(t)$ comme une combinaison finie d'oscillations.

Le signal $x(t)$ peut alors s'écrire :

$$x(t) = \sum_{j=1}^{N} IMF_j(t) + r(t),\ (N \in \mathbb{N}^*)\,, \tag{II.2}$$

où $IMF_j(t)$ est la j^{e} oscillation, $r(t)$ le résidu de la décomposition et N le nombre d'IMF (ou modes).

L'approche proposée repose entièrement sur les caractéristiques oscillatoires de $x(t)$. Cette décomposition est entièrement pilotée par les données du signal (ou *data driven*) et adaptée à celui-ci. C'est pourquoi le nom de *fonction modale intrinsèque* (IMF) a été retenu, principalement car il associe naturellement l'idée de décrire un signal $x(t)$ suivant ses différents modes d'oscillations naturelles. La méthode est par construction, d'après (Eq. II.2), une décomposition **complète**, N étant fini. En effet, si l'on additionne toutes les IMF ainsi que le résidu alors, on reconstruit linéairement le signal original sans perte ou déformation de l'information initiale (du moins en théorie) [114].

Même si la notion d'IMF repose plus sur une intuition que sur une définition très rigoureuse, cette fonction doit respecter certains critères comme précisé ci-dessous.

Définition *Une IMF (ou mode empirique) est une fonction telle que :*

$$IMF : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \ \rightarrow IMF_j(t) \end{cases}, \tag{II.3}$$

qui doit être :

- *a) de moyenne nulle,*
- *b) dont les nombres d'extrema et de passages à zéro diffèrent au plus de un (en d'autres termes, cela signifie qu'entre un minimum et un maximum successif, une IMF passe par zéro),*
- *c) qui suit une loi de modulation en amplitude et en fréquence (comportement oscillant) naturellement de type mono-composante.*

le point (a) est lié à la contrainte d'estimation de la FI d'un signal mono-composante avec la TH (cf. section I.4).
le point (b) repose sur la définition de bande étroite d'un signal mono-composante (cf. paragraphe I.2.2).
La dernière remarque (c) est plus une conséquence due au processus d'estimation de l'IMF.
Ainsi, même si la notion d'IMF repose essentiellement sur un concept, celle-ci présente des caractéristiques très strictes et peut être formalisée par le modèle suivant :

$$IMF_j(t) \approx \Re\left\{a_j(t).e^{i\phi_j(t)}\right\}\,, \tag{II.4}$$

avec $a_j(t)$ l'amplitude de l'enveloppe de la j^{e} IMF et $\phi_j(t)$ sa phase.

En fait, les contraintes imposées reposent sur la volonté d'estimer la FI et l'AI d'une IMF en utilisant la TH. En effet, l'objectif initial de l'EMD est de réaliser une décomposition temporelle en signaux mono-composante pour calculer leurs FI, définies comme étant la dérivée de la phase du SA. Par la suite, la connaissance des FI permet d'aboutir à une représentation temps-fréquence.

II.2.2 Processus de tamisage : principe algorithmique

Les différentes étapes du procédé de tamisage peuvent s'écrire sous la forme du pseudo-code suivant (un organigramme est proposé en annexe A) :

Etape 1) Fixer ϵ, $j \leftarrow 1$ (j^{e} IMF)
Etape 2) $r_{j-1}(t) \leftarrow x(t)$ (résidu)
Etape 3) Extraire la j^{e} IMF :
(a) $h_{j,i-1}(t) \leftarrow r_{j-1}(t), i \leftarrow 1$ (i, itération de la boucle de *sifting)*
(b) Extraire les maxima et minima locaux de $h_{j,i-1}(t)$
(c) Calculer les enveloppes supérieure et inférieure : $U_{j,i-1}(t)$ et $L_{j,i-1}(t)$ par interpolation (splines cubiques par exemple) avec les maxima et minima locaux de $h_{j,i-1}(t)$ respectivement.
(d) Calculer l'enveloppe moyenne : $\mu_{j,i-1}(t) \leftarrow (U_{j,i-1}(t) + L_{j,i-1}(t))/2$.
(e) Mettre à jour : $h_{j,i}(t) \leftarrow h_{j,i-1}(t) - \mu_{j,i-1}(t), i \leftarrow i+1$.
(f) Calculer le critère d'arrêt (par exemple) :
$$SD(i) = \sum_{t=0}^{T} \frac{\mid h_{j,i-1}(t) - h_{j,i}(t) \mid^2}{(h_{j,i-1}(t))^2} \ ,$$
où T représente le nombre d'échantillons du signal.
(g) Décider : répéter l'étape (b)-(f) tant que $SD(i) < \epsilon$ et alors mettre $IMF_j(t)(\equiv IMF_j(t)) \leftarrow h_{j,i}(t)$ (j^{e} IMF).
Etape 4) Mettre à jour le résidu : $r_j(t) \leftarrow r_{j-1}(t) - IMF_j(t)$
Etape 5) Répéter l'étape 3 avec $j \leftarrow j+1$ jusqu'à ce que le nombre d'extrema dans $r_j(t)$ soit inférieur à 2.

Tableau II.1 **—** Pseudo-code de l'EMD.

Il est important de mentionner que le tamisage est répété plusieurs fois (i) jusqu'à ce que h vérifie les conditions nécessaires d'une IMF.

Nous commentons les différentes étapes de ce pseudo-code (Tab. II.1) en analysant la décomposition du signal suivant :

$$x(t) = \cos(2\pi t) + 2\cos(6\pi t) + 0,2t \ , \tag{II.5}$$

où t varie de 0 à 5 (pas de discrétisation de 10^{-4}). Le signal est constitué de deux oscillations distinctes, l'une rapide et l'autre plus lente, ainsi que d'une variation lente (Fig. II.3).

De manière plus littérale, l'extraction des IMF suit le schéma général suivant (Tab. II.1) :

- trouver les extrema locaux (maximum et minimum) du signal (étape : ***3b***). Ceux-ci sont symbolisés par des points sur la figure II.2(b) ;
- estimer les enveloppes supérieure et inférieure par interpolation respective des maxima et minima locaux (étape : ***3c***). Ceux-ci sont indiqués par les courbes plus foncées sur la figure II.2(b). L'interpolation utilisée dans ce cas est basée sur les splines cubiques comme le préconisent de nombreux auteurs [82, 114] ;
- estimer l'enveloppe moyenne locale à partir des enveloppes supérieure et inférieure (étape : ***3d***). Celle-ci est représentée par la courbe plus foncée sur la figure II.2(c) ;
- soustraire l'enveloppe moyenne du signal d'entrée (étape : ***3e***). Le résultat est représenté par la courbe de la figure II.2(d). Cela correspond alors à la première itération du tamisage. On calcule le critère d'arrêt (étape : ***3f***) et on vérifie alors que le signal remplit les critères d'une IMF (étape : ***3g***). Ici le critère décrit est celui proposé par Huang *et al.* [114]. Cette phase sera détaillée et discutée dans le paragraphe II.2.3.1.
- vérifier si le résidu présente un nombre suffisant d'extrema (supérieur à deux) et réitérer sur le signal résultant le processus d'extraction de l'IMF (étape : ***3***) ; sinon, le résidu est considéré comme étant le résidu final $r(t)$ de l'équation (Eq. II.2). Idéalement, le processus d'extraction des IMF est terminé lorsque le résidu ne contient plus d'extrema. Cela signifie que le résidu est une fonction monotone qui correspond à la dérive ou tendance du signal initial $x(t)$.

La figure II.4 illustre le résultat du processus de tamisage sur le signal d'équation II.5. La décomposition, réalisée sans aucune connaissance préalable des caractéristiques du signal, permet d'extraire correctement les deux contributions sinusoïdales ainsi que la tendance (résidu) du signal.

Si nous comparons le concept (page 30) et le pseudo-code décrit par la table II.1, nous pouvons noter que la méthode présente non pas une, mais deux boucles imbriquées (l'une indicée par j, l'autre par i).

La boucle principale, indicée sur j, correspond au concept même. Elle s'interrompt lorsqu'il n'est plus possible d'extraire du résidu courant une autre IMF ($r(t)$ présentant moins de deux extrema). C'est l'une des conditions pour que $IMF_k(t)$ soit une IMF d'après la définition. Cela permet de définir N le niveau de profondeur de la décomposition.

La deuxième boucle, indicée sur i, est plus fondamentale. En effet, l'application stricte du concept (boucle sur j) conduirait à des fonctions $IMF_j(t)$ qui ne seraient pas nécessairement des IMF : notamment les deux enveloppes L et U (Tab. II.1) ne seraient pas nécessairement symétriques par rapport à zéro. D'où la nécessité d'avoir une seconde boucle (indicée sur i) qui correspond au processus de tamisage (ou sifting) proprement dit.

Enfin, l'ensemble de la boucle de tamisage permet d'obtenir des modes de type AM-FM mono-composante (au sens large du terme) et permet d'autre part [114] :

– d'éliminer les petites oscillations (*riding waves*),
– d'adoucir les trop fortes amplitudes d'oscillations,
– de réduire les phénomènes de biais de proche en proche.

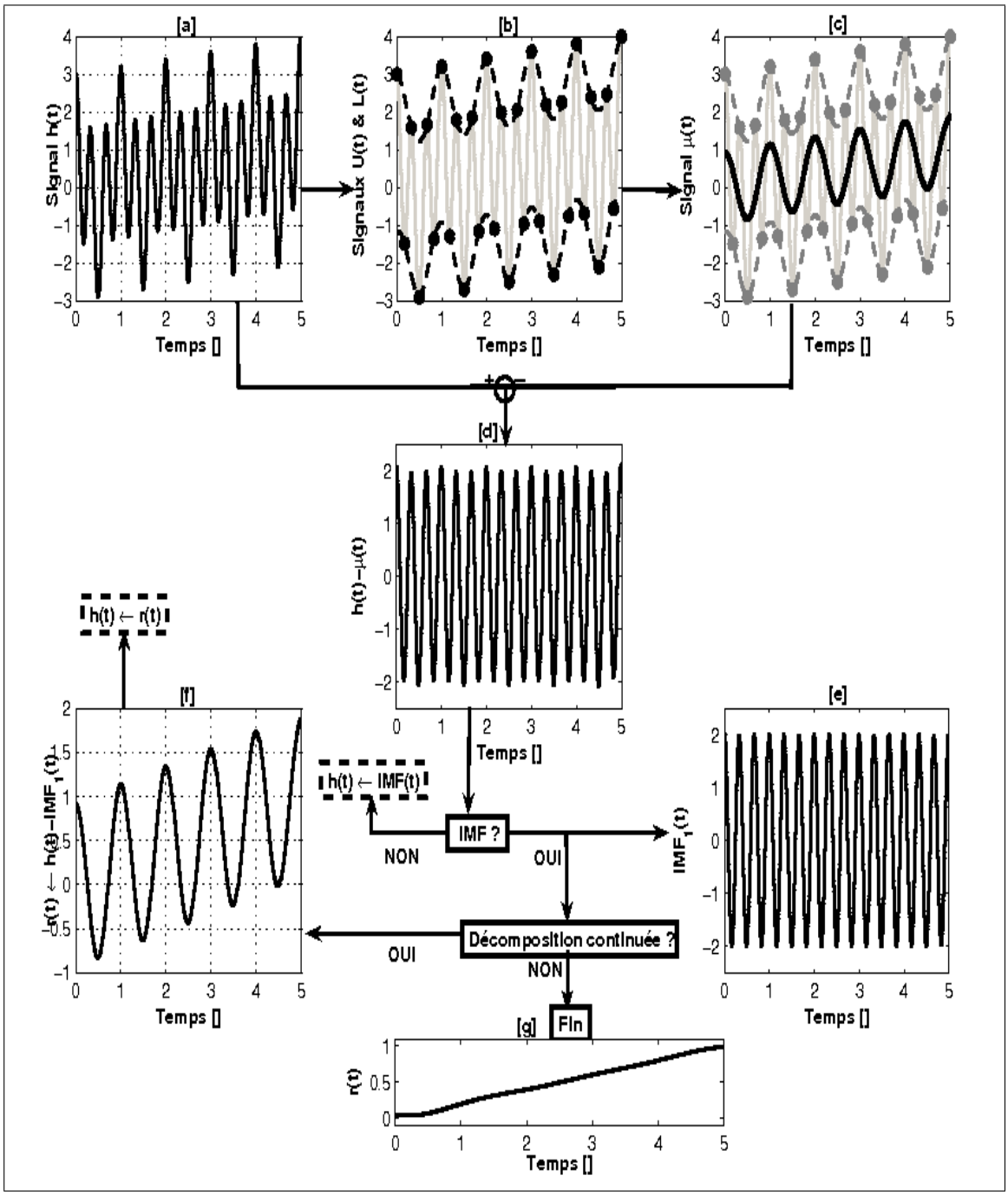


Figure II.2 — Principe de tamisage pour l'estimation de la 1reIMF du signal test (Eq. II.5).

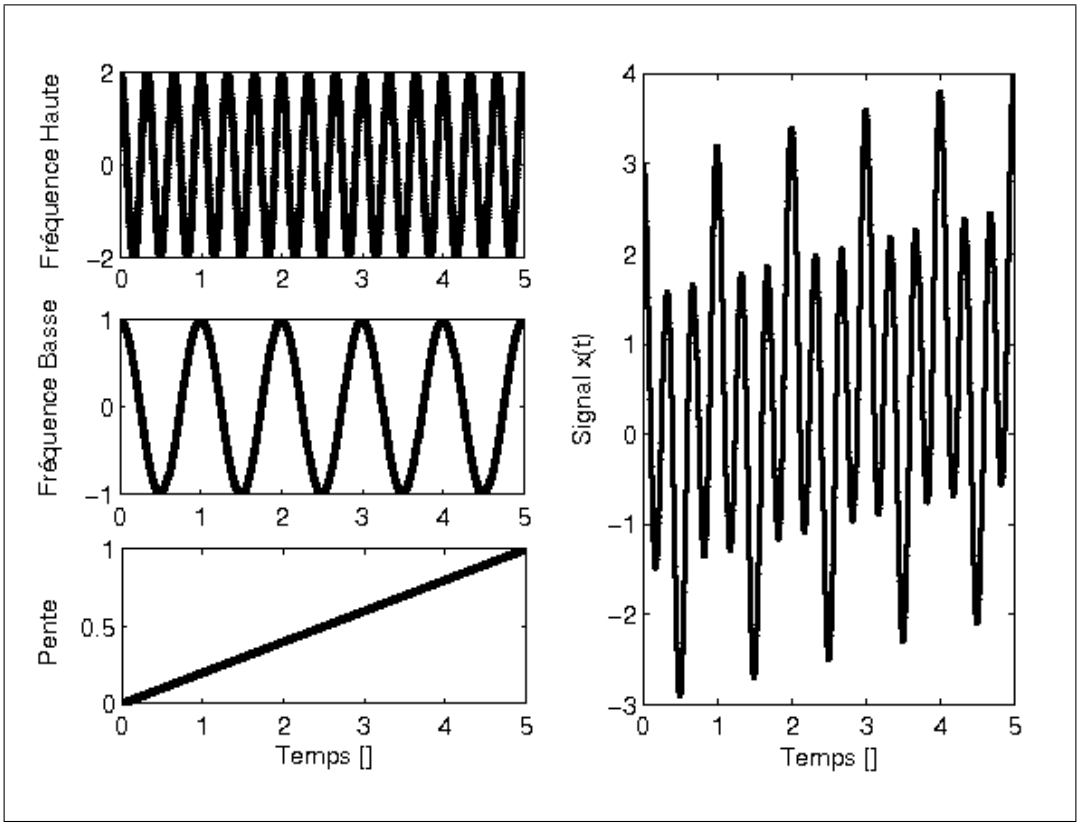


Figure II.3 — Signal temporel test (Eq. II.5).

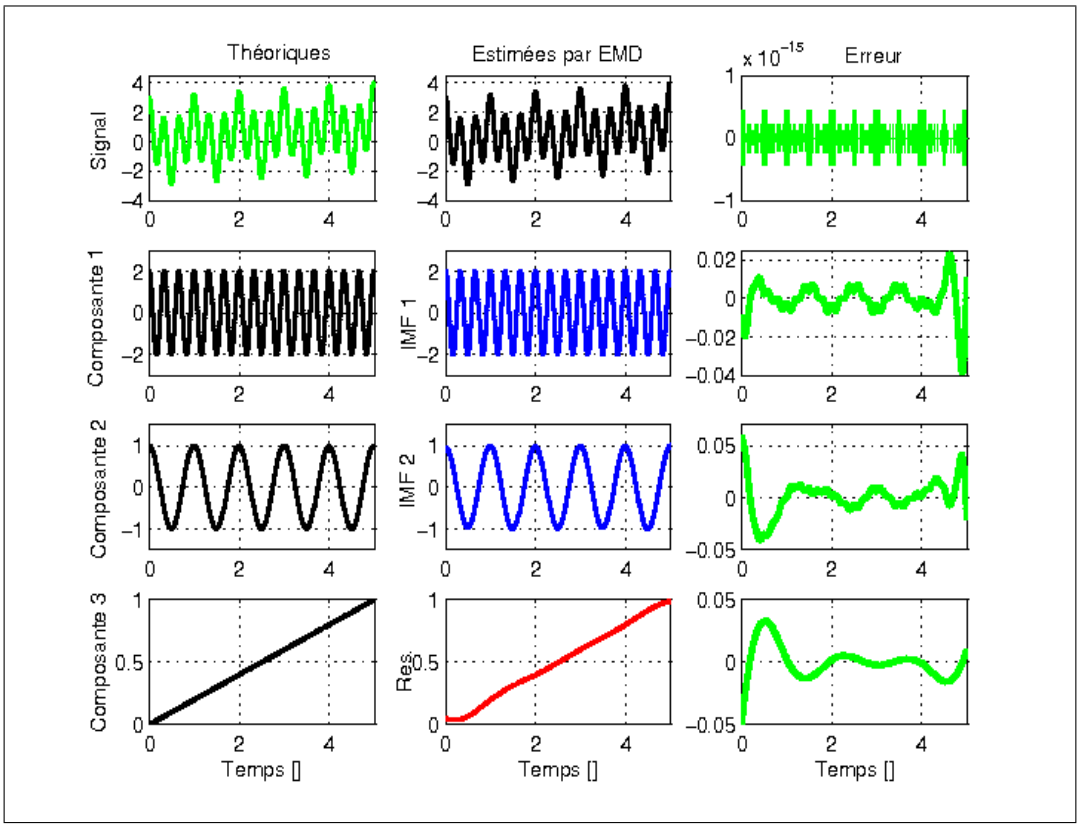


Figure II.4 — Estimation des IMF du signal test (Eq. II.5).

II.2.3 Commentaires sur le processus de tamisage

II.2.3.1 *A propos du critère d'arrêt*

Comme indiqué précédemment, l'EMD est composée de deux boucles : l'une permet d'extraire l'IMF (qui détermine le niveau de profondeur de la décomposition) et l'autre conditionne la fonction $IMF_j(t)$ de manière à valider la définition d'une IMF.
Dans la pratique (Tab. II.1), la boucle de tamisage qui permet d'extraire des IMF correctement conditionnées est pilotée par un critère d'arrêt (étape : ***3g***), noté $SD(i)$ [114]. De manière générale, les définitions du critère d'arrêt du tamisage reposent toutes sur le même principe : $h_{j,i}(t)$ est de moyenne nulle et symétrique. D'après la définition, c'est une des conditions d'existence d'une IMF .

Bien évidemment, l'une des premières méthodes est de ne pas appliquer de critère d'arrêt. Dans ce cas, nous supposons l'existence de la convergence du processus de tamisage (la moyenne de $h_{j,i}(t)$ tend vers zéro), hypothèse qui n'est pas rigoureusement démontrée à l'heure actuelle. On se borne alors à effectuer simplement un certain nombre d'itérations sans aucun test de validation sur l'IMF extraite. Cette approche n'est pas recommandée, et il est conseillé de définir un critère plus robuste lors du tamisage.

Ainsi dans [114], les auteurs proposent un critère d'arrêt $SD(i)$ reposant sur la déviation standard et est défini par :

$$SD(i) = \sum_{t=0}^{T} \frac{\mid h_{i-1}(t) - h_i(t) \mid^2}{[h_{i-1}(t)]^2} , \tag{II.6}$$

où $h_i(t)$, $h_{i-1}(t)$ et T sont définies dans la table (II.1). Pour plus de clarté, l'indice j, associé à l'estimation de la j^{e} IMF, a été volontairement omis. Le test d'arrêt est validé lorsque la différence entre deux tamisages consécutifs est inférieure à un seuil prédéfini ϵ : $SD(i) < \epsilon$ (étape : ***3g***). Typiquement, la valeur de SD_{stop}, notée ϵ dans (Tab. II.1) permettant de stopper le tamisage est comprise entre $0,2$ et $0,3$ [114, 115].
Cette valeur est un compromis et elle est définie de manière empirique. Si ϵ est trop grand, alors la méthode ne permet pas de séparer correctement les différents modes présents dans le signal ; inversement, si ϵ est trop petit, alors le principe risque d'aboutir à des composantes d'amplitudes quasi constantes, modulées par une unique fréquence (phénomène de sur-décomposition du signal). En d'autres termes, SD permet de limiter l'écart-type entre deux étapes consécutives de tamisage [114, 115].

Un autre critère local a été proposé par Rilling *et al.* [181] et est défini comme suit :

$$\sigma(t) = \left| \frac{\mu_{i-1}(t)}{U_{i-1}(t) - L_{i-1}(t)} \right| , \tag{II.7}$$

avec $\mu_{i-1}(t)$, $L_{i-1}(t)$, $U_{i-1}(t)$ définies dans (Tab. II.1). Partant de ce critère local $\sigma(t)$, trois conditions nécessaires sont définies pour que $h_i(t)$ soit bien une IMF [181] :

- la différence entre le nombre de zéros de $h_i(t)$ et le nombre de maxima de $h_i(t)$ est inférieure ou égale en valeur absolu à 1,
- $\sigma(t) \leq \theta_1$, $(\forall t)$,
- la quantité $t\sigma(t)$ doit être comprise entre θ_2 et α.

où θ_1 et θ_2 deux seuils tels que $0 \leq \theta_2 \leq \theta_1$. La première condition signifie qu'une IMF est une fonction oscillante autour de zéro (entre un maximum et un minimum, il doit y avoir un

zéro). les deux dernières conditions exigent que le paramètre $\sigma(t)$ soit faible ce qui n'empêche pas que celui-ci peut présenter des valeurs élevées (dans une certaine mesure).
On peut noter que si le critère est trop strict, le nombre d'itérations nécessaires à l'estimation d'une IMF sera important, et cela peut conduire à un trop grand nombre de modes (sur-décomposition du signal, là encore). De même, choisir un critère trop large peut aboutir au phénomène inverse et à une sous-estimation du nombre de modes. Les auteurs [181] proposent comme exemple de valeurs de seuils : $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 \approx 10\ \theta_1$, $\alpha = 0.05$.

Pour conclure, tous les critères d'arrêt sont basés sur le même concept : $h_{j,i}(t)$ vérifie bien les propriétés d'une IMF. Cependant, ces critères reposent sur des approches encore empiriques et nécessiteraient des études plus approfondies. Ainsi, les effets de bords dus principalement à l'interpolation des enveloppes supérieure et inférieure ne sont pas bien pris en compte [181].

II.2.3.2 *A propos de l'orthogonalité*

Nous avons constaté que l'EMD permet d'écrire un signal comme une somme finie de composantes (Eq. II.2). Idéalement d'après le paragraphe I.2.3, il serait intéressant que cette décomposition soit orthogonale :

$$\langle IMF_m | IMF_n \rangle = 0,\ \forall (m \neq n)\ , \tag{II.8}$$

avec $\langle .|. \rangle$ produit scalaire dans L^2. Malheureusement, nous n'avons pas de preuve théorique (mathématique) que cette orthogonalité soit garantie. Cependant dans la pratique, on peut espérer que cela soit quand même vérifiée, du moins dans une certaine mesure. En effet, comme chaque élément de la décomposition $IMF_j(t)$ est obtenue par la différence entre le signal $x(t)$ et sa moyenne locale $\overline{x(t)}$, nous avons alors :

$$\left\langle IMF_j(t) | \overline{x(t)} \right\rangle = (x(t) - \overline{x(t)}).\overline{x(t)} = 0\ \forall t\ . \tag{II.9}$$

Il faut noter que cette égalité n'est pas strictement vérifiée dans la pratique puisque la moyenne estimée est déduite à partir de deux enveloppes (ce n'est pas la moyenne locale *vraie* qui est calculée) [53, 114]. Aussi, en toute rigueur, comme l'orthogonalité s'exprime de manière globale, nous devons effectuer une moyenne sur l'intervalle étudié et alors :

$$\overline{(x(t) - \overline{x(t)}).\overline{x(t)}} = 0\ . \tag{II.10}$$

Partant des remarques précédentes, l'orthogonalité des composantes peut être estimée numériquement et *a posteriori* en définissant un indice d'orthogonalité, IO_{IMF_i,IMF_j} :

$$\begin{aligned} IO_{IMF_i,IMF_j} &= \frac{\langle IMF_i | IMF_j \rangle}{\|IMF_i\|\ .\ \|IMF_j\|},\ \forall (i,j)\ , \\ &= \frac{\sum\limits_n IMF_i(t_n).IMF_j(t_n)}{\sqrt{\sum\limits_n IMF_i 2(t_n)}\sqrt{\sum\limits_n IMF_j 2(t_n)}},\ \forall (i,j)\ , \end{aligned} \tag{II.11}$$

avec IMF_i et IMF_j deux composantes estimées à partir du signal discret $x(t_n)$ sur un intervalle [a,b] (discrétisé par $t_{n_{0 \leq n \leq T}}$, T le nombre d'échantillons). Nous pouvons noter que si $i = j$ alors $IO_{IMF_i,IMF_i} = 1$. Si nous considérons les N IMF de l'expression (Eq. II.2),

nous pouvons alors définir une matrice d'orthogonalité IO_{EMD} à partir de de l'équation II.11 définie par :

$$IO_{EMD} = \left[IO_{IMF_i,IMF_j}\right], \ \forall(i,j) \, . \tag{II.12}$$

Nous remarquons que cette matrice IO_{EMD} est symétrique et que la diagonale principale est unitaire. Si la décomposition est strictement orthogonale alors IO_{EMD} est égale à la matrice identité. Nous pouvons également définir un indice global d'orthogonalité à partir de la matrice IO_{EMD} (Eq. II.12) :

$$io = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left(IO_{IMF_i,IMF_j}\right)^2 . \tag{II.13}$$

Lors de l'estimation de l'orthogonalité, le résidu n'est pas pris en compte. En effet, ce résidu n'est pas une IMF : il correspond à la tendance du signal. Ainsi, grâce aux deux relations II.12 et II.13, le degré d'orthogonalité de la décomposition par l'EMD peut être totalement quantifié [53, 85, 114]. Si nous considérons le signal de l'équation II.5 alors le degré d'orthogonalité est donnée par le tableau (Tab. II.2) :

IO	IMF_1	IMF_2
IMF_1	$1,0000$	$0,0049$
IMF_2	$0,0049$	$1,0000$

io	$2,380010^{-5}$

Tableau II.2 — Matrice d'orthogonalité du signal test (Eq. II.5).

Dans la pratique, les erreurs d'approximation commises sont faibles mais souvent non négligeables (Tab. II.2). Il peut se produire une propagation des erreurs d'orthogonalité [53, 85, 114]. En effet, l'estimation des IMF repose sur une méthode récursive : ses composantes sont obtenues les unes des autres par soustractions successives. Cela a pour effet de propager les erreurs commises lors de l'estimation des IMF de proche en proche, c'est ce que nous appellerons et résumerons sous le terme de biais.

II.2.3.3 *A propos des erreurs d'estimation et du biais*

La première cause principale du biais provient de l'interpolation (étape : ***3c***). En effet, cette dernière permet d'estimer les enveloppes supérieure et inférieure du signal puis d'en déduire l'enveloppe moyenne (étape : ***3d***). Un phénomène de Gibbs apparaît alors, caractéristique des problèmes d'interpolation par des polynômes, notamment aux bornes des intervalles de définition du signal $x(t)$ (cf. paragraphe II.3.1). Nous pouvons souligner que plus ce phénomène de divergence (Gibbs) est présent sur les bornes d'existence du signal et moins les estimations des IMF suivantes seront précises. Ce phénomène est d'autant plus amplifié que le tamisage est par essence récursif.

La deuxième cause découle de la remarque précédente et est liée à la récursivité du tamisage. En effet, cette récursivité introduit une erreur cumulée sur l'estimation des IMF. L'une des conséquences de cette erreur est le risque d'avoir un résidu non monotone ou du moins différent de la théorie initialement escomptée. Par exemple dans la figure II.3, le signal $x(t)$ (Eq. II.5) est par construction de moyenne nulle et en théorie le résidu, $r(t)$, doit également être nul. Ce n'est malheureusement pas le cas si l'on observe le résidu estimé par l'EMD

(Fig. II.4) : il est non nul, plutôt monotone, et de faible amplitude. L'erreur commise sur le résidu permet d'estimer et de quantifier le biais lié à l'estimation des IMF à condition que la tendance du signal soit initialement connue ! Enfin, nous pouvons souligner que ce biais interfère bien évidemment avec le degré d'orthogonalité de la décomposition.

Ces erreurs d'estimation permettent de souligner l'importance du choix de la méthode d'interpolation et de la problématique de la propagation de ce biais de proche en proche. Cette propagation est due à la structure récursive et séquentielle de l'EMD mais elle est aussi due à l'échantillonnage des signaux discrets comme nous le verrons plus loin (cf. paragraphe II.3.2).

II.2.3.4 *A propos de l'adaptabilité et de la localité*

La gamme des oscillations contenues dans l'IMF change sur l'échelle temporelle, mais la première IMF contient localement celles qui sont les *plus rapides* par rapport aux autres IMF pour un même instant t considéré. Cette propriété d'oscillations locales reste d'ailleurs toujours vérifiée entre IMF successives. Ce phénomène est illustré avec le signal suivant composé de quatre oscillations distinctes :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) + \cos(8\pi t) & 0 \leqslant t < 2 \\ \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \cos(12\pi t) & 2 \leqslant t < 4 \\ \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) & 4 \leqslant t < 6 \end{cases} ; \qquad \text{(II.14)}$$

avec un pas de discrétisation de 10^{-4} (Fig. II.5), les différentes sinusoïdes n'étant pas raccordées de façon continue aux instants $t = 2$ et $t = 4$.

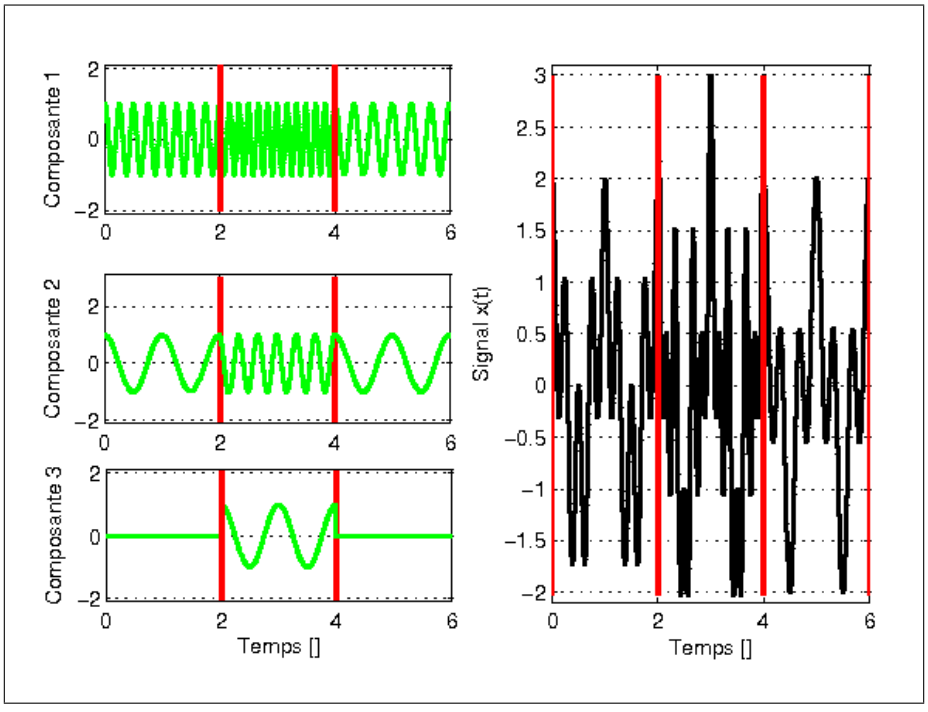


Figure II.5 — Signal temporel test (Eq. II.14)

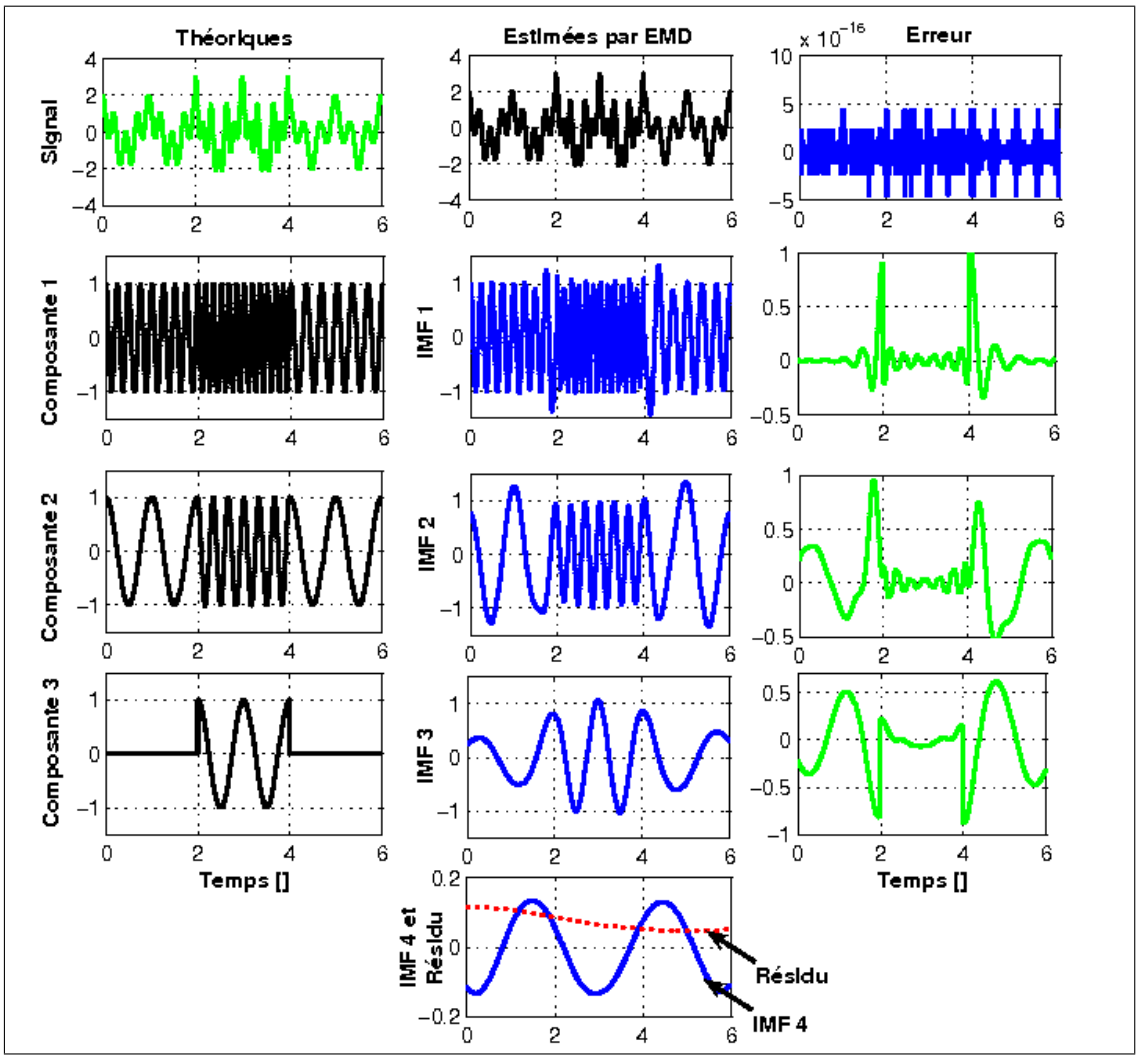


Figure II.6 — Estimation des IMF du signal test (Eq. II.14).

Nous constatons que le résultat de la décomposition par l'EMD du signal $x(t)$ illustre clairement le phénomène d'oscillations (Fig. II.6). Nous observons en effet que les quatre IMF présentent des oscillations extraites des plus hautes fréquences aux plus basses et cela localement. La première IMF extraite peut s'écrire :

$$\widetilde{IMF}_1(t) \approx \begin{cases} \cos(8\pi t) & 0 \leqslant t < 2 \\ \cos(12\pi t) & 2 \leqslant t < 4 \\ \cos(6\pi t) & 4 \leqslant t < 6 \end{cases}, \tag{II.15}$$

De même, si nous étudions la deuxième et la troisième IMF, celles-ci sont décrites approximativement par les relations :

$$\widetilde{IMF}_2(t) \approx \begin{cases} \cos(2\pi t) & 0 \leqslant t < 2 \; et \; 4 \leqslant t < 6 \\ \cos(6\pi t) & 2 \leqslant t < 4 \end{cases}, \tag{II.16}$$

$$\widetilde{IMF}_3(t) \approx \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < 2 \; et \; 4 \leqslant t < 6 \\ \cos(2\pi t) & 2 \leqslant t < 4 \end{cases}. \tag{II.17}$$

Nous pouvons noter que les composantes déduites par l'EMD sont similaires aux théoriques. Néanmoins, il existe des singularités à $t = 2$, 4 et $t = 6$, instants où le signal présente des ruptures de pente. Les erreurs observées s'expliquent essentiellement par le fait que lors du tamisage, l'estimation des enveloppes (supérieure et inférieure) repose sur l'interpolation à l'aide de splines cubiques. Le fait d'utiliser les splines au voisinage des singularités introduit un « lissage » de celles-ci (cf. paragraphe II.3). L'accumulation des erreurs se traduit alors par l'apparition d'une composante « artefact » notée $IMF_4(t)$ comprise entre ± 0.15. En effet, cette IMF_4 n'a pas lieu d'exister théoriquement mais la présence des singularités fait apparaître une composante supplémentaire représentative du biais cumulé lors de l'extraction des IMF. Nous pouvons d'ailleurs noter que ce biais provient essentiellement de l'IMF_3 entre les intervalles $t = [0; 2]$ et $t = [4, 6]$ où théoriquement celle-ci est nulle.
D'autre part, nous pouvons constater que cette description, quoique empirique, se comporte comme un banc de filtres auto-adaptatifs. L'EMD permet de sélectionner localement les oscillations correspondant aux hautes fréquences, pour tendre progressivement vers celles correspondant aux plus basses fréquences. Le même signal analysé à l'aide de la TF n'aurait pas permis de détecter l'instant de changement des fréquences du signal, clairement mis en évidence ici.

La faible valeur de l'indice global d'orthogonalité $io = 0,0836$ (Tab. II.3), indique que la décomposition est satisfaisante même si l'orthogonalité au sens strict n'est pas atteinte. Nous pouvons également observer que les coefficients de la matrice d'orthogonalité estimée sont faibles, sans pour autant être négligeables dans certains cas (comme par exemple IO_{IMF_3,IMF_2} ou encore IO_{IMF_4,IMF_3}). Nous remarquons que les erreurs les plus importantes sont associées principalement aux dernières IMF. Cela est manifestement dû aux effets de bords et aux accumulations d'erreurs introduites par l'algorithme de tamisage et l'interpolation (phénomène de Gibbs).

IO	IMF_1	IMF_2	IMF_3	IMF_4
IMF_1	$1,0000$	$-0,0444$	$-0,0685$	$-0,0299$
IMF_2	$-0,0444$	$1,0000$	$-0,1939$	$0,0712$
IMF_3	$-0,0685$	$-0,1939$	$1,0000$	$-0,1826$
IMF_4	$-0,0299$	$0,0712$	$-0,1826$	$1,0000$

io	$0,0836$

Tableau II.3 — Matrice d'orthogonalité du signal test (Eq. II.14).

Ainsi comme le font justement remarquer Flandrin *et al.* [78], la discrimination haute et basse fréquence est d'une part essentiellement qualitative (les oscillations ne sont pas nécessairement sinusoïdales) et d'autre part elle ne s'applique que localement et ne correspond à aucun filtre prédéterminé. L'extraction des modes est plutôt associée à un filtrage « fréquentiel » non-linéaire, fonction du temps, auto-adaptatif et automatique. Elle s'effectue d'une façon aveugle.

En résumé, le principe de description d'un signal non-stationnaire proposé par Huang *et al.* repose sur l'identification itérative et adaptative d'un nombre fini d'IMF en séparant localement une contribution rapide d'une tendance plus lente. Ces IMF représentent les oscillations naturelles et intrinsèques présentes dans le signal considéré. De manière plus formelle, cette décomposition repose sur un algorithme itératif, le tamisage, et non pas sur une formulation analytique, contrairement aux ondelettes ou à la WVD. Cette approche présente

des propriétés remarquables puisqu'elle offre une description complète, locale, adaptative et presque orthogonale, le degré d'orthogonalité pouvant être quantifié.

II.3 Autour de la méthode

Dans la section précédente, nous avons étudié le principe de la décomposition par l'EMD et notamment le processus de tamisage permettant d'imposer des contraintes sur les IMF (moyenne nulle ...). Lors de cette étude des problématiques ont été identifiées comme par exemple l'interpolation, l'orthogonalité de la décomposition, l'échantillonnage .... Dans la suite, nous proposons d'étendre certaines études.

II.3.1 Problématique d'interpolation

L'interpolation est une problématique importante aussi bien dans le domaine du signal que de l'image [128, 207]. C'est l'une des étapes clés dans l'estimation et l'extraction des IMF à partir des extrema. Nous allons illustrer quelques interpolations et étudier les problèmes éventuels rencontrés à l'aide du signal de la figure II.7**(a)** [145, 167]. Nous notons par $x(i)$ les valeurs des points utilisées comme références pour estimer les polynômes interpolateurs.

Bien évidemment, nombreuses approches existes pour répondre au problème d'interpolation. Mais les plus couramment utilisées font partie des méthodes dites par collocation. Il existe essentiellement quatre familles de méthodes d'approximation :

- la collocation où l'on impose que la fonction passe par les $x(i)$,
- les courbes osculatrices où l'on impose que l'interpolation passe par les $x(i)$ mais coïncide aussi avec les n premières dérivées,
- les méthodes basées sur les moindres carrés et celles basées sur les Min-max qui n'imposent pas de passer par les $x(i)$ mais entre les points et reposent sur des critères de distance entre la courbe d'interpolation et les points initiaux.

Il existe de nombreux procédés de collocation, allant des plus simples (forme de Newton ou de Lagrange) aux plus élaborées comme les splines-cubiques ou les courbes de Bézier, voire les B-splines ou encore les Non Uniform Rational Basic Splines (NURBS) [194]. Ainsi, les B-splines utilisent un type de base similaire à celle de Bézier (c'est une généralisation) [71, 96]. D'ailleurs, les approches comme les courbes de Bézier ou les B-splines sont plus considérées comme des méthodes d'approximation que d'interpolation.

La figure II.7 montre les résultats obtenus par différentes méthodes étudiées :

- l'approche « escalier » : il s'agit d'une fonction constante par morceaux et dont l'intervalle est centré autour des points $x(i)$ (Fig. II.7**(b)**) ;
- l'approche « linéaire » : c'est une fonction continue linéaire par morceaux entre deux points consécutifs $x(i)$. Une droite étant entièrement définie par deux points, l'interpolation est unique (Fig. II.7**(c)**) ;
- l'approche « cubique » : est une interpolation polynomiale par morceaux (cubique sur chaque intervalle) sans condition tangentielle stricte (Fig. II.7**(d)**) ;
- l'approche « spline[1] » : est une interpolation par morceaux à l'aide de polynômes cubiques d'Hermite (sur chaque intervalle) et globalement de classe C^2. C'est une approxi-

[1] Ce terme désigne une méthode d'interpolation par segments. Chaque segment est interpolé avec une courbe dont les bases sont la plupart du temps des fonctions cubiques. Par abus de langage, nous appellerons dans cette partie « spline » les polynômes interpolateurs définis à l'aide de conditions tangentielles. Par la suite, nous ne ferons plus la distinction.

mation plus locale que la précédente dans le sens où les variations sont plus douces entre les différents segments (Fig. II.7**(e)**) ;
– l'approche « Akima » : il s'agit d'une interpolation par splines cubiques privilégiant le lissage de l'ensemble des points au détriment de la monotonie de la courbe (la dérivée seconde n'est pas nécessairement continue) [4]. Cet interpolateur peut traiter un ensemble de points dispersés (Fig. II.7**(f)**).

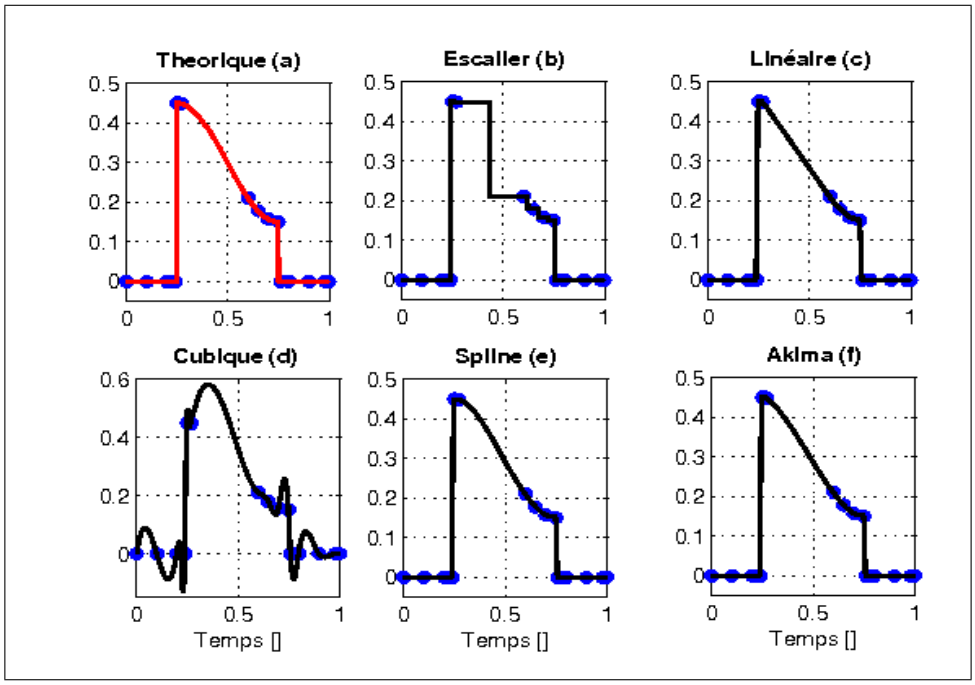


Figure II.7 — Illustration de l'interpolation par différentes méthodes.

De manière générale, l'ensemble des interpolations produisent des résultats satisfaisants sauf les approches « escalier » et « linéaire » qui ne sont pas recommandées pour l'estimation des IMF. En effet, ces deux méthodes aboutissent à un nombre trop important de modes [114]. La méthode « cubique » permet d'illustrer (et d'exagérer) un phénomène bien connu, le phénomène de Runge ou de Gibbs présent notamment au voisinage des singularités du signal [145, 167]. Ainsi, lors de l'approximation d'une fonction f présentant des discontinuités ou des points anguleux par une fonction g beaucoup plus régulière, nous remarquons que la fonction g dépasse (souvent largement) la fonction f en ses singularités. Ce phénomène appelé « overshot » par les électroniciens est particulièrement visible lors de l'approximation d'une fonction créneau par un polynôme trigonométrique.
L'approche avec les polynômes d'Hermite préserve mieux la forme des données que celle basée sur les « cubiques ». L'interpolation est construite exactement de la même manière, sauf que les tangentes en $x(i)$ sont déterminées différemment, à savoir de classe C^2 (pour l'approche « Hermite »). Cela a pour effet d'obtenir une interpolation plus lisse et moins oscillante.
L'interpolation proposée par Akima [4] semble équivalente à celle d'Hermite mais les conditions tangentielles sont différentes et s'avèrent performantes pour des données non uniformément réparties. Cependant, cela conduit à des temps de calcul supérieurs à la méthode basée sur les polynômes d'Hermite.

L'un des problèmes rencontrés lors du tamisage concerne la nécessité de réaliser des interpolations sur des extrema généralement irrégulièrement espacés (Fig. II.2). Il est nécessaire d'autre part de conserver les points des extrema estimés dans *l'étape* 3*d* (Tab. II.1), lors de

l'interpolation, et de ne pas les déplacer afin d'éviter d'introduire un plus grand biais dans la mesure où cela conditionne l'estimation des IMF. La localisation des extrema peut être liée à la fréquence d'échantillonnage du signal comme nous le verrons par la suite (cf. paragraphe II.3.2) [180, 181, 197].
Ainsi, l'interpolation est un des problèmes clefs de l'EMD et des études ont été menées pour sa résolution :

- l'interpolation par les splines cubiques fournissent de bons résultats, meilleurs que ceux obtenus par les approches « linéaire » ou polynomiale (« cubique ») [114, 181] ;
- l'approche neuronale utilisant les fonctions radiales de base a été également proposée pour estimer les enveloppes [111, 168, 169, 195, 214] ;
- une étude comparative des différentes méthodes d'interpolation a été réalisée par Linderhed [133, 134]. Cette derniere a également proposé une mesure appelée *empiquency* définie comme *« la moitié de la distance réciproque entre deux extrema consécutifs »* [134, 136]. Cette approche est essentiellement appliquée pour étendre l'EMD dans le domaine de l'image et semble ne pas avoir été appliquée pour estimer par la suite la FI et AI de l'IMF.

Pour finir, l'interpolation des enveloppes supérieure et inférieure nécessaire pour estimer les IMF est un problème non négligeable. Dans le cadre de nos travaux, nous privilégierons l'interpolation par splines cubiques (de type Hermite). Même si le choix des splines cubiques n'est pas optimal pour tous les signaux réels, il présente néanmoins un bon compromis entre la qualité de l'interpolation (et non l'approximation) et la simplicité du calcul.

Nous avons vu précédemment que pour décrire un signal $x(t)$ à l'aide de l'EMD, il est nécessaire d'estimer les enveloppes supérieure et inférieure du signal à partir des extrema. Aussi, l'un des problèmes relatifs à l'estimation des extrema d'un signal est lié à celui de la discrétisation des signaux.

II.3.2 Problématique de discrétisation

L'ensemble de la méthode repose sur les échantillons décrivant le signal $x(t)$. L'un des problème est de savoir si le processus de tamisage est tributaire ou non de la discrétisation du signal. A la lumière des études précédentes, il semble que la réponse soit affirmative. Aussi pour mieux comprendre les problèmes d'échantillonnage liés à l'EMD, nous proposons d'étudier l'estimation d'une fréquence pure (ou tone). L'étude s'inspire des travaux de Rilling [180, 181] et de ceux de Stevenson [197].

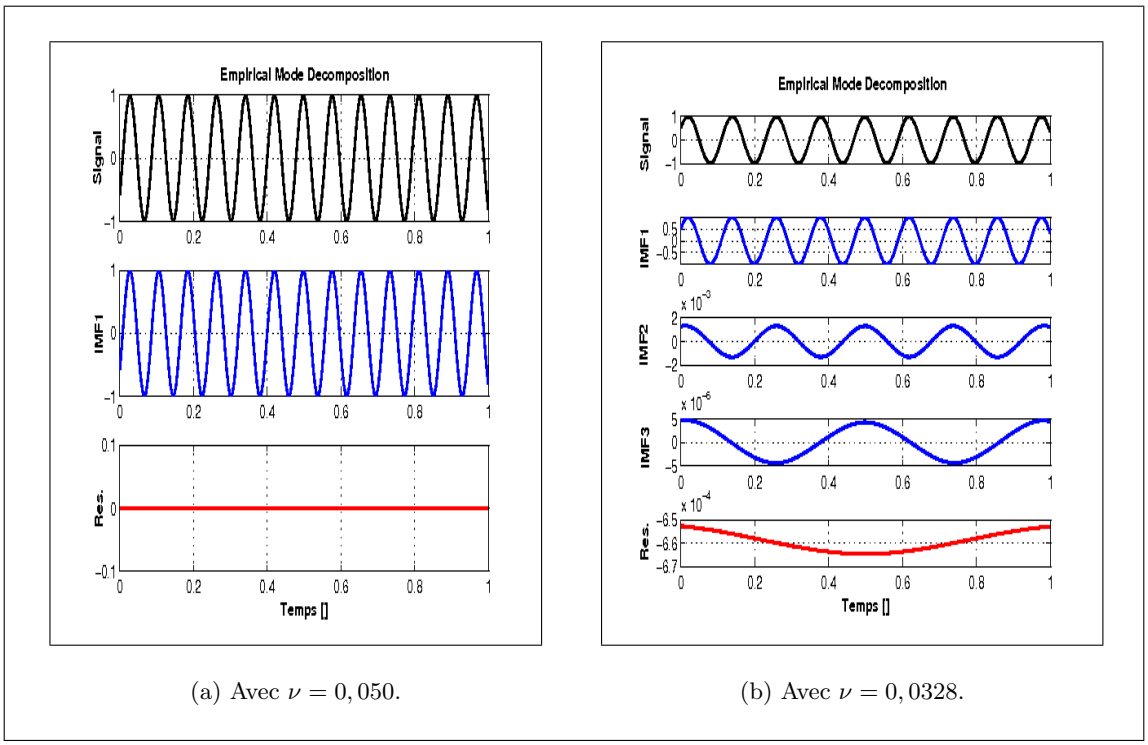
Le signal considéré est de la forme :

$$x_f(n) = \cos(2\pi.\nu.n)\,, \tag{II.18}$$

où $n \in \{1, \ldots, N\}$, $N = 256$ et ν la fréquence normalisée du signal $x(n)$.

L'étude consiste à modifier sur un intervalle de points constant ($N = 256$) la fréquence du signal et d'extraire la première IMF et de la comparer à la composante sinusoïdale théorique de fréquence ν.

La figure II.8 illustre parfaitement le problème de la fréquence d'échantillonnage. Ainsi, bien que le nombre d'échantillons soit le même dans les deux cas ($N = 256$ points), la décomposition du signal $x(n)$ est différente selon la fréquence de celui-ci. Seul le signal de fréquence normalisée $\nu = 0,050$ est décomposé correctement (le résidu est nul). En revanche, pour la



(a) Avec $\nu = 0,050$.

(b) Avec $\nu = 0,0328$.

Figure II.8 — Décomposition par l'EMD d'un sinus pur (tone).

fréquence $\nu = 0,0328$, la décomposition fait apparaître trois IMF (au lieu d'une) et un résidu non nul.

Afin d'illustrer le phénomène, l'erreur relative $E(\nu)$ associée à l'estimation de la première IMF est déterminé en fonction de la fréquence ν du signal [181] :

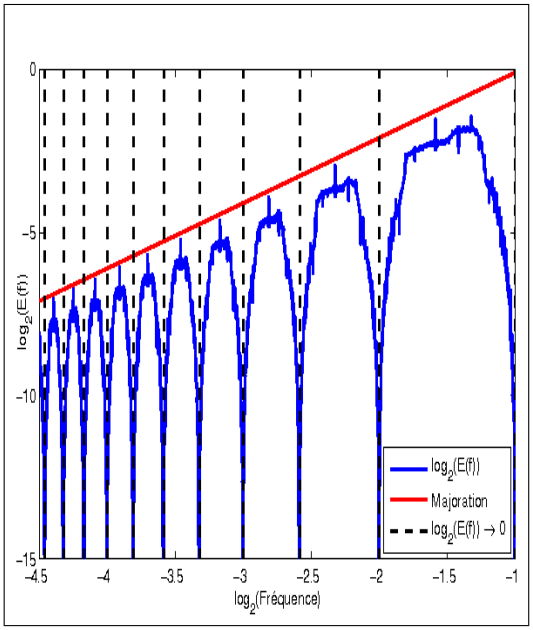
$$E(\nu) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} \left[x_\nu(n) - IMF_1(n)\right]^2}{\sum_{n=1}^{N} x_\nu^2}}, \tag{II.19}$$

avec ν la fréquence du signal, $x(n)$ variant sur l'intervalle $]0, 0.5[$ (en fréquence normalisée) et $IMF_1(n)$ la première IMF de $x(n)$. Nous pouvons noter que cette étude de $E(\nu)$ rejoint la problématique de l'orthogonalité et offre un éclairage nouveaux sur celle-ci.

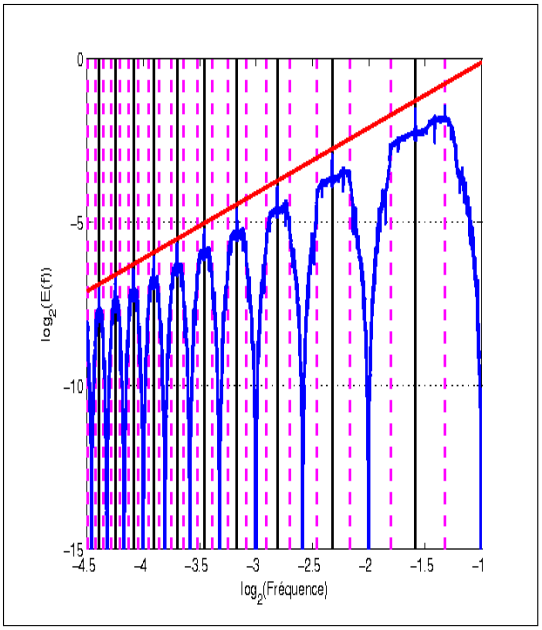
La figure II.9 montre la variation de $E(\nu)$ en fonction de ν dans le plan *log-log* (en base 2). Nous observons que globalement l'erreur est majorée par une fonction au carré de la fréquence $E(\nu) \leq \lambda\nu^2$. En conclusion, l'estimation de la première IMF est fonction de ν.

En appliquant le tamisage à un signal de type tone (sinus pur), les erreurs peuvent être modélisées comme suit [180, 181], (Fig. II.9) :

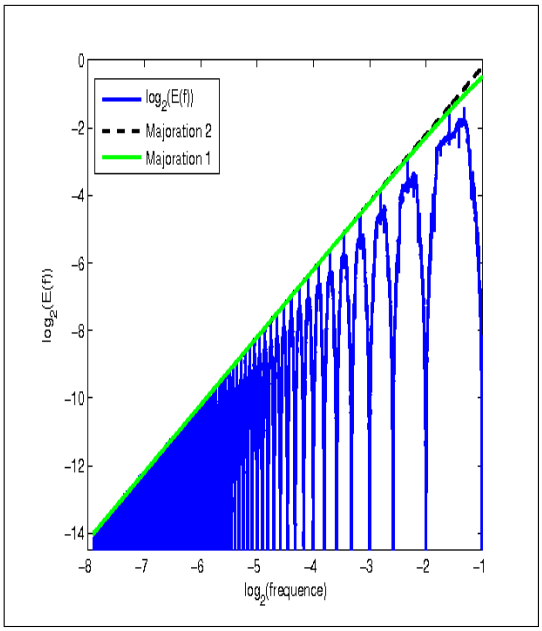
- l'erreur est majorée par : $E(\nu) \leq \frac{1-\cos(\pi\nu)}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi^2\nu^2}{2\sqrt{2}}$,
- la majoration des erreurs est atteinte pour les fréquences $\nu = 1/(2k+1)$ et $\nu = 2/(2k+1)$ avec $(k \in \mathbb{N}^*)$ à phase nulle,
- l'erreur est nulle pour les fréquences $\nu = 1/2k$ avec $(k \in \mathbb{N}^*)$ (à noter que dans ce cas, l'orthogonalité de la décomposition est pleinement vérifiée),



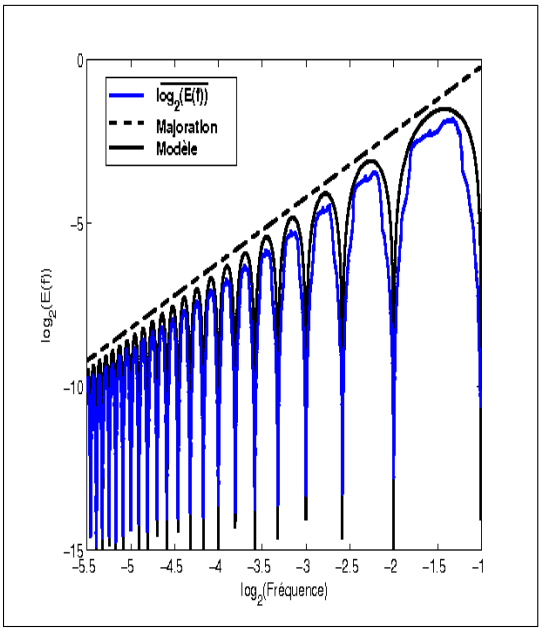
(a) Estimation de $E(\nu)$ dans le plan ($log_2 - log_2$).



(b) Modélisation de : $log_2(E(\nu)) \rightarrow 0$.



(c) Modélisation de : $Max(log_2(E(\nu)))$.



(d) Modélisation *parabolique* de $\overline{log_2(E(\nu))}$.

Figure II.9 — Estimation et comportement de l'erreur $E(\nu)$ associée à la première IMF pour un « tone ».

– la modélisation de l'erreur moyenne est régie par des lois paraboliques sur les intervalles $(\nu \in [1/2(k+1), 1/2k]) : \tilde{E}(\nu) \approx \frac{\pi 2}{2\sqrt{3}}(2(k+1)\nu - 1).(1 - 2k\nu)$.

Il en résulte que l'évaluation de la tonalité dépend fortement de la fréquence du signal ν pour une fréquence d'échantillonnage donnée. Il existe donc des intervalles de fréquences pour lesquels l'estimation est en accord avec les attentes initiales [180, 181].
Par la suite (cf. paragraphe II.4.1), nous proposerons une analyse sur la séparabilité de deux fréquences constantes et distinctes [180,181]. Celle-ci nous permettra d'apprécier, un peu plus, les potentialités offertes avec l'EMD à travers une représentation de type temps-fréquence.

II.4 Description temps-fréquence

Jusqu'à présent, nous avons décrit l'EMD essentiellement dans le domaine temporel. Par la suite, nous proposons d'étudier ses propriétés dans le domaine fréquentiel puis dans l'espace conjoint temps-fréquence. Pour cela, nous étudions sa capacité à séparer deux composantes sinusoïdales. Puis, la comparaison avec des approches standards comme les ondelettes ou la Wigner-Ville permet d'illustrer la capacité de l'EMD à s'organiser spontanément en une structure de banc de filtres. Finalement, nous verrons que l'obtention d'une représentation temps-fréquence à l'aide de l'EMD passe par la combinaison de celle-ci avec une méthode d'estimation de la FI et de l'AI de chacune des IMF.

II.4.1 Résolution fréquentielle

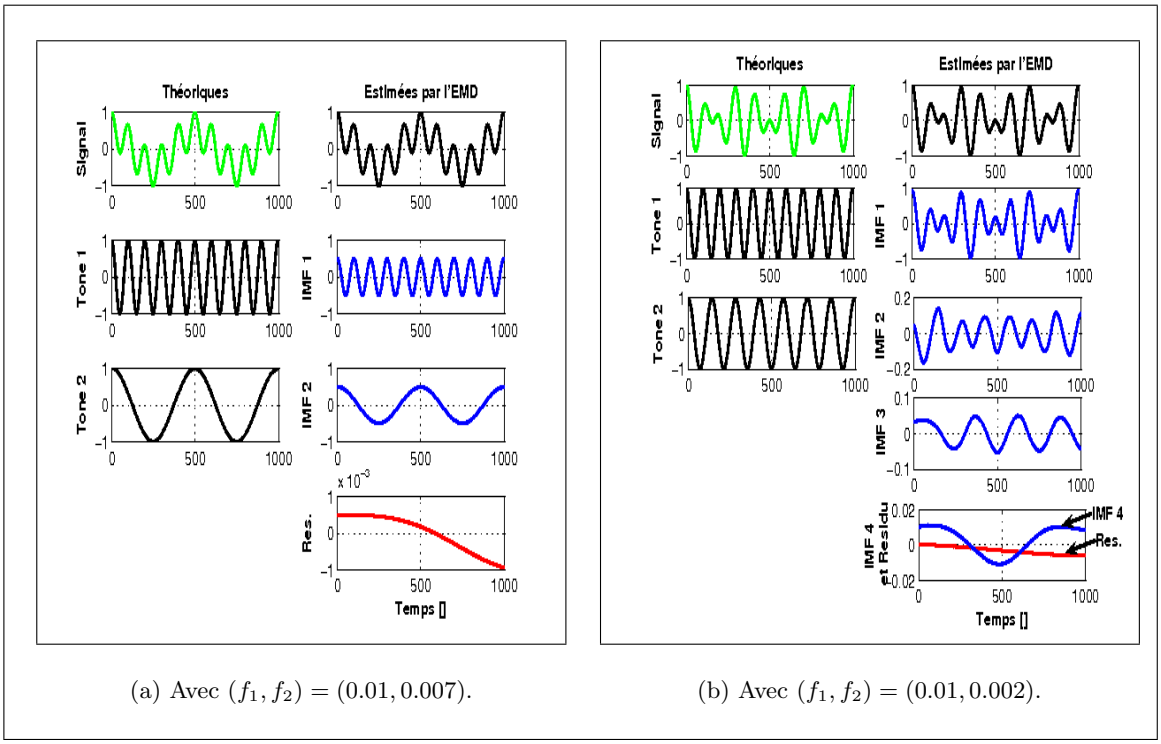
Dans ce paragraphe, nous étudions la capacité de l'EMD à séparer deux composantes sinusoïdales en fonction du rapport de leur fréquence. Cette étude est inspirée des travaux de Rilling *et al.* [180, 181]. Considérons un signal composé de deux sinusoïdes de fréquences pures distinctes (ou deux tones) :

$$\underbrace{x_{f_{1,2},a_{1,2}}(n)}_{signal\ x(n)} = \underbrace{cos(2\pi.f_1.n)}_{Composante\ 1:\ x_{f_1}(n)} + \underbrace{cos(2\pi.f_2.n)}_{Composante\ 2:\ x_{f_2}(n)} , \tag{II.20}$$

avec $n \in \{1, \ldots, N\}$, $N = 1024$ et (f_1, f_2) le couple de fréquences (normalisées) distinctes tel que $f_1 > f_2$. Pour simplifier, nous supposons que les amplitudes des deux signaux $x_{f_1}(n)$ et $x_{f_2}(n)$ sont identiques.

En posant $f_1 > f_2$, nous nous attendons à ce que l'EMD produise (au moins) deux IMF : l'une associée à la plus haute fréquence et l'autre à la plus basse (Fig. II.10(a)). Comme les signaux échantillonnés introduisent une erreur $E(f)$ (Eq. II.19) due à la discrétisation, nous choisissons pour les simulations des fréquences de faibles valeurs.

Nous observons que l'EMD donne des décompositions différentes en fonction du rapport des fréquences f_1 et f_2 (Fig. II.10). Lorsque les deux fréquences sont suffisamment distinctes l'une de l'autre, le signal $x(n)$ est décrit par une somme de deux contributions sinusoïdales (Fig. II.10(a)). Dans le cas contraire, l'approche considère le signal $x(n)$ comme une unique composante modulée en amplitude (Fig. II.10(b)). La transition entre les deux états est fonction du rapport entre les deux fréquences [180, 181].



(a) Avec $(f_1, f_2) = (0.01, 0.007)$.

(b) Avec $(f_1, f_2) = (0.01, 0.002)$.

Figure II.10 — Décomposition d'un signal constitué de deux « tones »(f_1, f_2) (en fréquences normalisées) à l'aide de l'EMD.

Le critère associé à l'estimation de la première et de la deuxième IMF basé sur $E(f)$ (Eq. (II.19)) est donné par [181] :

$$E(f_1, f_2) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_{f_1}^2(n) \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(x_{f_1}(n) - IMF_1(n)\right) 2 + \sum_{n=1}^{N} x_{f_2}^2(n) \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(x_{f_2}(n) - IMF_2(n)\right) 2}{\sum_{n=1}^{N} \left(x_{f_1}^2(n) + x_{f_2}^2(n)\right) \cdot \sum_{n=1}^{N} x2(n)}}, \tag{II.21}$$

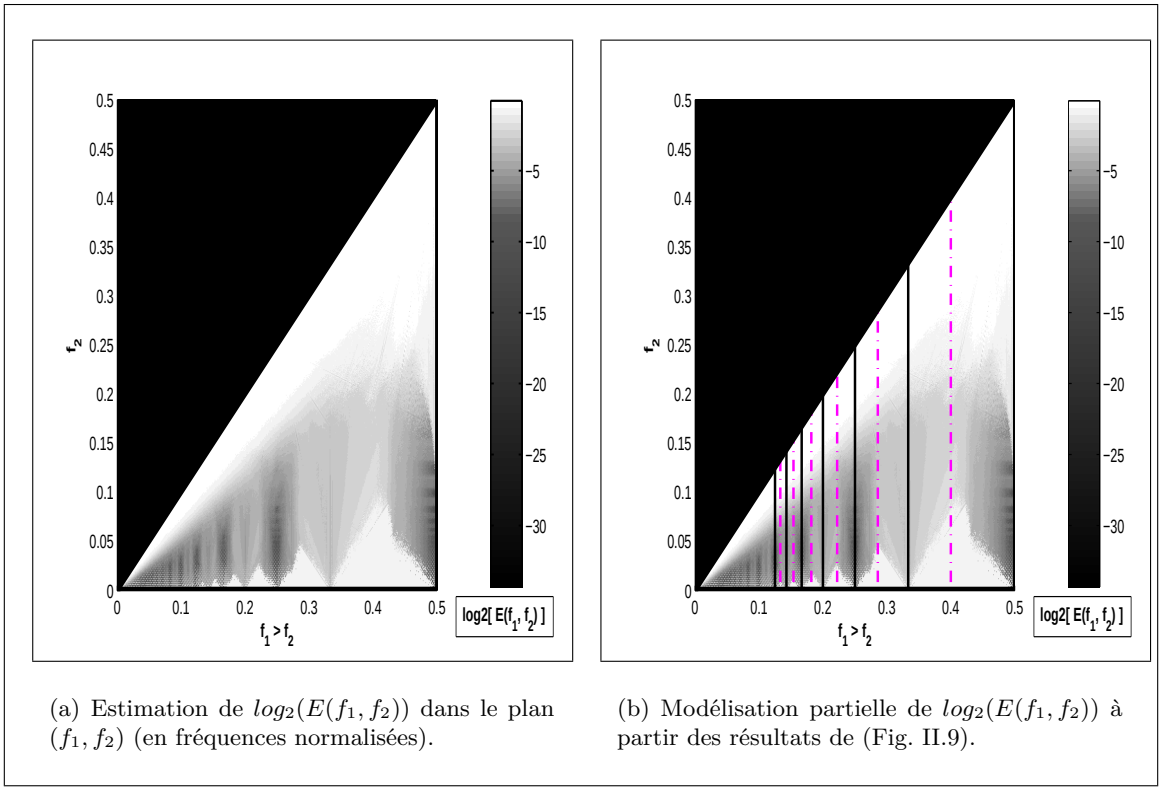
avec (f_1, f_2) les deux fréquences variant dans l'intervalle $]0, 0.5[$ et vérifiant $f_1 > f_2$ et $(IMF_1(n), IMF_2(n))$ les deux IMF estimées.

La figure II.11 illustre l'erreur $E(f_1, f_2)$ commise en séparant deux composantes sinusoïdales en fonction des deux fréquences f_1 et f_2. La structure obtenue (Fig. II.11), quoique complexe, illustre le fait qu'il existe des domaines où la séparation est très bonne, et d'autres où celle-ci est plus délicate. Nous remarquons une zone où l'erreur est très faible. L'EMD considère alors le signal $x(n)$ comme composé de deux sinusoïdes. En revanche, lorsque l'erreur $E(f_1, f_2)$ augmente, le signal $x(n)$ est analysé comme étant modulé en fréquence et en amplitude.

Notons d'autre part qu'il existe deux domaines principaux : si $f \lesssim 0.25$ le résultat est essentiellement fonction du rapport f_1/f_2 et si $f \gtrsim 0.25$ l'influence de la discrétisation du signal complique le résultat.

Enfin, les résultats obtenus dans la partie II.3.2 se retrouvent en partie sur la figure II.11(b). Ainsi, pour des basses fréquences ($f_2 \lesssim 0.1$), la majoration des erreurs est atteinte pour $f_1 = 2/(2k+1)$ (avec $(k \in \mathbb{N}^*)$). Cette erreur tend vers zéro pour des fréquences $f_1 = 1/k$

(avec ($k \in \mathbb{N}^*$)). Cette étude illustre le fait que l'EMD peut être considérée comme une batterie de filtres.



(a) Estimation de $log_2(E(f_1, f_2))$ dans le plan (f_1, f_2) (en fréquences normalisées).

(b) Modélisation partielle de $log_2(E(f_1, f_2))$ à partir des résultats de (Fig. II.9).

Figure II.11 — Estimation et comportement de l'erreur $E(f_1, f_2)$ associé aux deux premières IMF du signal à 2 « tones ».

II.4.2 Structure en banc de filtres et ondelettes

II.4.2.1 *Comportement spectral : cas d'un bruit blanc gaussien*

La section précédente a montré que, qualitativement, l'EMD se comporte comme un banc de filtres auto-adaptatifs. Ainsi, l'EMD décrit un signal en le décomposant localement des plus hautes fréquences vers les plus basses. Dans certains cas bien contrôlés (bruit blanc gaussien par exemple), cette décomposition s'organise « spontanément » en une structure d'un banc de filtres à coefficient de surtension constant [78, 80, 212].

La structure en banc de filtres est illustrée à la figure II.12. Le signal étudié est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 1. Trois mille réalisations ont été générées de 512 points chacune. Nous avons tracé dans le plan *log-log* la moyenne spectrale normalisée des sept IMF pour l'ensemble des réalisations.

Notons que l'EMD s'organise bien comme un banc de filtres passe-bande pour les modes supérieurs à 2, le premier mode correspondant plus à une structure de filtre passe-haut.

Des études ont été réalisées sur le comportement de l'EMD vis à vis d'un bruit gaussien fractionnaire [79, 82, 182]. Sur la base de simulations extensives et contrôlées, la nature quasi-dyadique des filtres estimés a été montrée. Il est également prouvé que la puissance spectrale se répartit sur l'ensemble des IMF en suivant une loi de type exponentiel [78, 82, 182]. L'ensemble de ces études caractérise le comportement de l'EMD vis à vis de différents types de bruits.

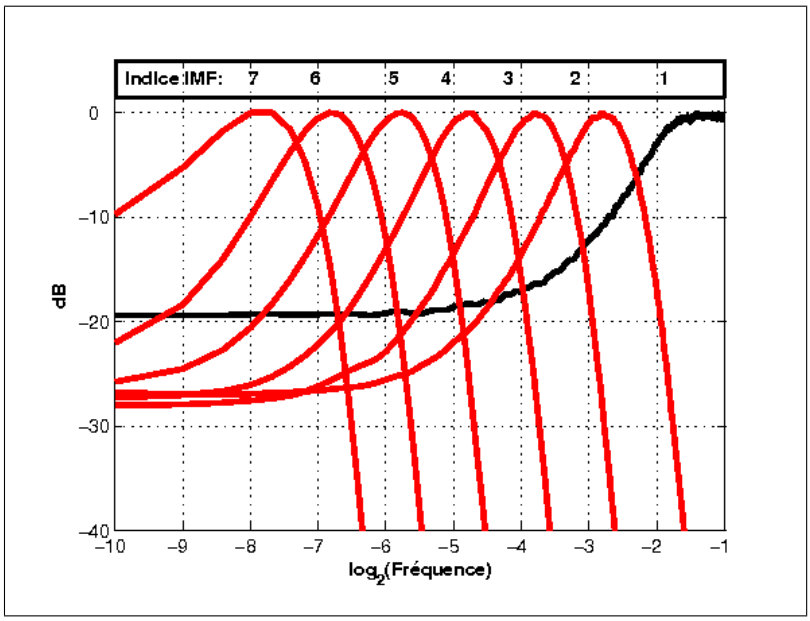


Figure II.12 — Organisation de l'EMD en banc de filtres vis à vis d'un bruit blanc gaussien.

II.4.2.2 *Comportement temporel : cas d'une impulsion*

L'étude de caractérisation de l'EMD réalisée précédemment dans le domaine fréquentiel trouve son équivalent dans le domaine temporel. Celle-ci passe par l'estimation de la réponse impulsionnelle de l'EMD. Elle peut être estimée en moyennant mode par mode des décompositions obtenues à partir d'une impulsion peu bruitée [78].

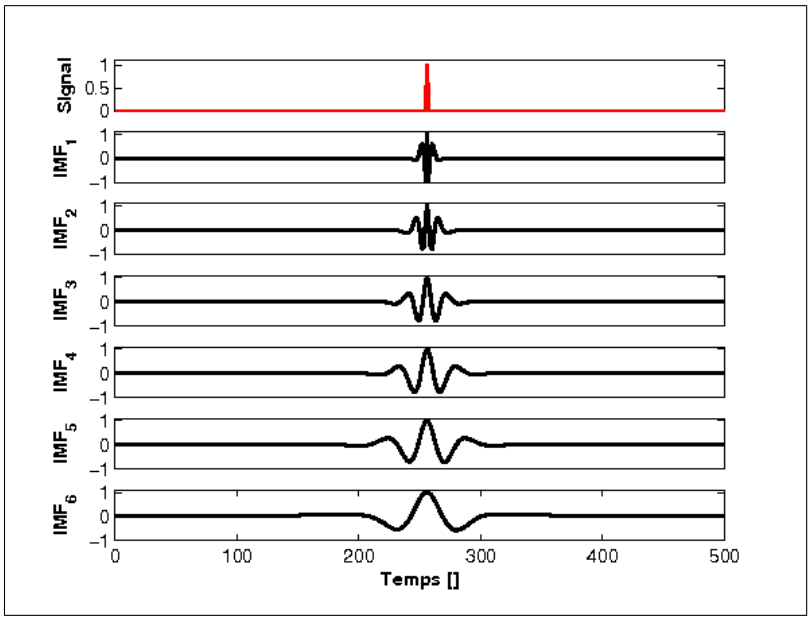


Figure II.13 — Décomposition d'une réponse impulsionnelle par l'EMD.

Sur la figure II.13, les signaux représentent la moyenne des six premières IMF de 5000 réalisations indépendantes comportant chacune 512 échantillons. Chaque IMF moyenne est norma-

lisée en amplitude. Un bruit additif de faible variance (10^{-3}) permet de garantir la présence de maxima et de minima lors du tamisage.

La figure II.13 illustre encore le fait que l'EMD a un comportement similaire à une analyse en ondelettes vis à vis d'une impulsion. Une analyse plus précise a montré que l'on peut se ramener à un gabarit unique comparable et proche d'une ondelette mère de type spline cubique (ondelette de Haar) [78].

II.4.2.3 *Comparaison avec les ondelettes*

Nous avons montré que dans des cas bien contrôlés la décomposition par EMD est analogue à une analyse multi-résolutions de type ondelette. Pourtant, l'approche EMD dans la description du signal est fondamentalement différente de celle des ondelettes. En effet, dans une analyse multi-résolutions par ondelettes, les premières frames sont associées aux basses fréquences (tendances, décomposition grossière du signal) pour tendre vers les détails plus représentatifs des hautes fréquences.

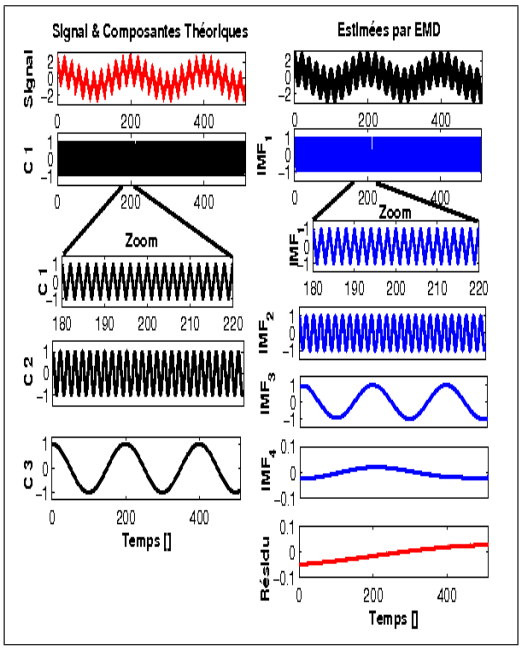
Pour illustrer cette différence, nous comparons les résultats de la décomposition par l'EMD et par les ondelettes orthogonales de Daubechies ($db3$) sur cinq niveaux (Fig. II.14). Le signal à analyser est de la forme :

$$x(t) = \sin(3t) + \sin(0.3t) + \sin(0.03t). \tag{II.22}$$

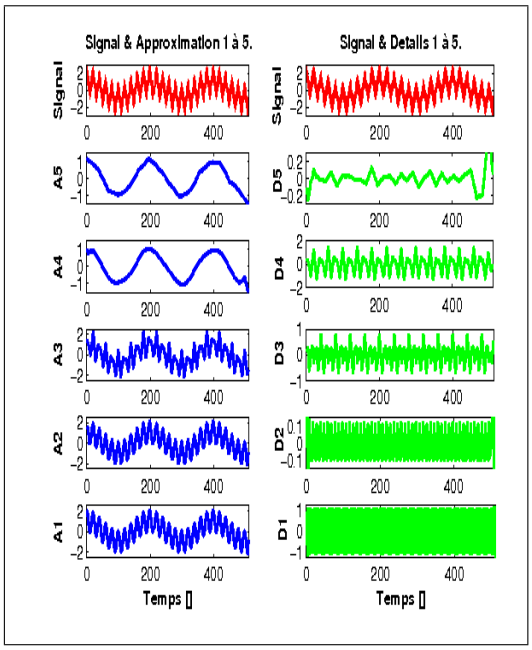
Ce signal est constitué de trois sinusoïdes : « rapide (C_1) », « moyenne (C_2) », « lente (C_3) ». Le nombre de points est de 512 (pas d'échantillonnage de 1).

Les modes déterminés par EMD permettent d'estimer correctement les différentes oscillations constituant le signal $x(t)$: de la plus rapide (IMF_1) à la plus lente (IMF_3) (Fig. II.14(a)). Les valeurs faibles de l'IMF_4 et du résidu peuvent être considérées comme raisonnablement négligeables.
La décomposition par ondelettes est illustrée par la figure (II.14(b)) où les A_p et les D_p représentent les Approximations et les Détails du signal respectivement. Cette figure montre que le sinus rapide est présent dans D_1, le sinus moyen dans D_4 et le sinus lent dans A_4. Nous constatons que les erreurs d'estimation des différentes composantes sont globalement plus importantes pour l'approche basée sur les ondelettes que celle basée sur l'EMD (Fig. II.14(c)). L'ensemble des différences et des erreurs constatées dans la décomposition est dû principalement à la discrétisation du signal et au choix de l'ondelette analysante.

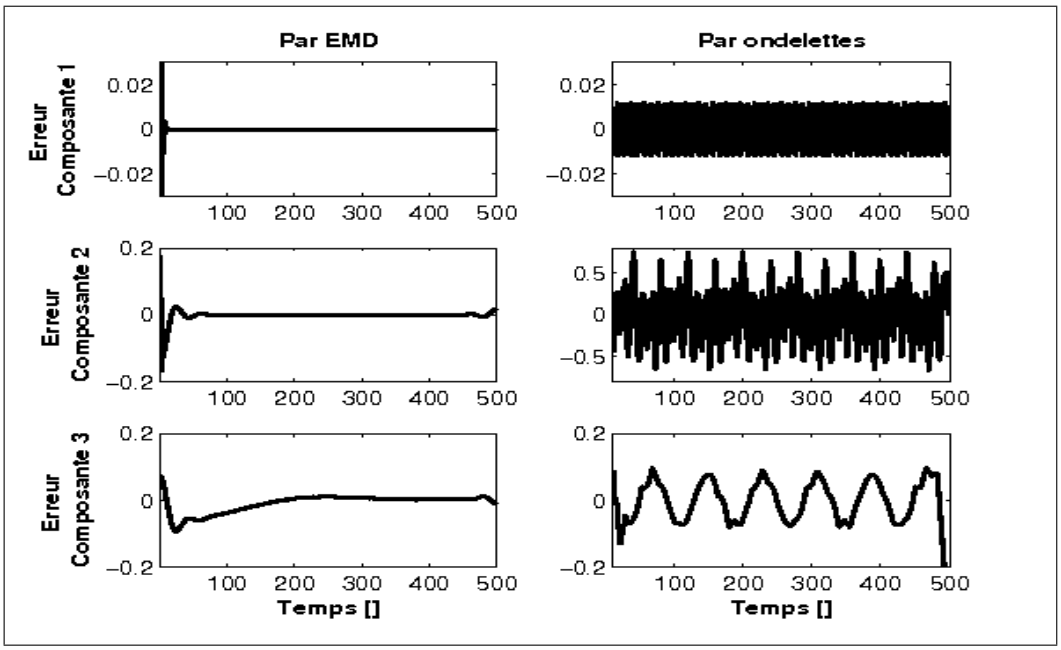
Dans ce paragraphe, nous avons comparé l'EMD avec la méthode des ondelettes qui nécessite l'élaboration préalable de la base de projection. Ainsi, la méthode des ondelettes apparaît plus comme une approche paramétrique tandis que l'EMD se classe plutôt dans la famille des approches non-paramétriques. D'autre part, la décomposition du signal est différente. En effet, la méthode ondelettes décrit le signal des plus basses fréquences vers les plus hautes. En revanche, l'EMD aborde la décomposition de façon diamétralement différente en débutant par les hautes fréquences pour terminer vers les plus basses.



(a) Avec EMD.



(b) Avec ondelettes.



(c) Erreur des estimations avec l'EMD et les ondelettes.

Figure II.14 — Comparaison du principe de décomposition par l'EMD et par les ondelettes.

II.4.2.4 *Comparaison avec l'analyse en composante principale*

Nous allons comparer le principe de l'EMD, approche non-paramétrique, avec une autre approche très proche dans le concept, à savoir l'analyse en composante principale (ACP). En effet, la base de décomposition est intrinsèque au signal dans les deux cas.

L'ACP définit aussi sa base de projection en fonction des caractéristiques intrinsèques du signal. En revanche, l'ACP repose sur une projection linéaire clairement explicitée dans laquelle la répartition des observations est préservée au mieux. L'ACP est une approche de projection linéaire qui maximise l'inertie totale du nuage de points [69]. D'autre part, il faut rappeler que les *frames* (composantes) obtenues par l'ACP sont difficilement interprétables physiquement (contrairement à l'EMD). Ainsi, dans le cas de l'ACP la décomposition est linéaire tandis que pour l'EMD celle-ci est non-linéaire [114].
Nous pouvons dire que l'EMD est une « ACP non-linéaire » dont le résultat issue de la décomposition permet une interprétation physique des phénomènes qui sont à l'origine du signal analysé.

Pour conclure, l'EMD est une décomposition temporelle non-linéaire ne reposant sur aucune famille de noyaux ou fonctions de base pré-déterminée, et qui peut s'interpréter en termes de banc de filtres. Cette approche peut être mise en évidence, dans le domaine fréquentiel, lorsque nous appliquons l'approche à un bruit blanc gaussien (et de façon plus générale à l'ensemble des bruits gaussiens fractionnaires). De façon duale, cela peut aussi être illustré dans le domaine temporel par application à une impulsion.

L'ensemble de ces analyses sur le comportement de l'EMD, dans des cas particuliers, permet d'obtenir une nouvelle description multi-résolution, non rigide (« data-driven ») et naturelle pour analyser un signal. Cette analyse ouvre la voie à plusieurs applications comme :

- le filtrage et le débruitage [25, 26],
- la description temps-fréquence [28],
- la classification de données [38],
- l'extension à l'espace des images [29].

II.4.3 Description conjointe temps-fréquence

II.4.3.1 *Structure méthodologique de l'analyse par THH*

L'objectif initial de l'EMD est de réaliser une décomposition temporelle en signaux mono-composante pour calculer leurs FI définies comme étant la dérivée de la phase du SA. Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la méthode permettant de décomposer un signal multi-composantes en IMF. Des contraintes ont été imposées à ces composantes oscillantes de type AM-FM (cf. paragraphe II.2.1). Ces conditions imposées permettent alors d'appliquer la TH pour estimer la FI et l'AI de chacune des IMF. La combinaison de l'EMD et de la TH est appelée la Transformation de Huang-Hilbert (THH).

Ainsi, la représentation temps-fréquence issue de la THH est construite à partir des FI et AI estimées [114]. L'image temps-fréquence est élaborée à partir de l'ensemble des couples $(AI_k(t), FI_k(t))$ déterminé de chaque $IMF_k(t)$, t représente la dimension temporelle, $FI_k(t)$ correspond à la dimension fréquentielle et la grandeur $AI_k(t)$ « quantifie » la contribution des $FI_k(t)$.

Rappelons qu'à l'inverse, les méthodes temps-fréquence classiques estiment la FI à partir des représentations obtenues. Il faut bien garder à l'esprit que l'EMD ne permet pas d'obtenir directement une représentation temps-fréquence comme la WVD. C'est l'association avec la TH (ou une autre méthode) pour estimer l'AI et la FI de chaque IMF qui permet d'y parvenir. La représentation finale est bien une représentation 2D type temps-fréquence [113–115] (Fig. II.15).

Pour résumer, l'analyse par THH d'un signal multi-composantes comporte essentiellement deux étapes : la décomposition temporelle (EMD) et l'estimation des FI et AI (TH) (Fig. II.15). Pour améliorer la décomposition temporelle et donc obtenir une meilleure lisibilité de la description temps-fréquence des pré/post-traitements peuvent être associés à la THH (Fig. II.15).

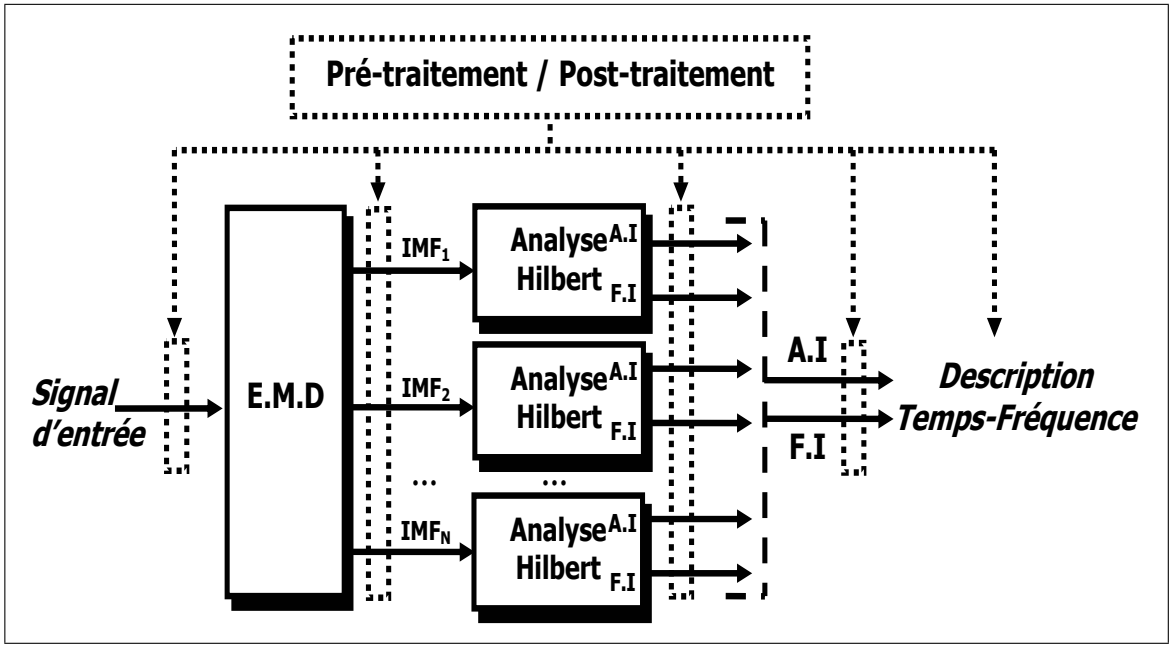


Figure II.15 **—** Organigramme de la THH.

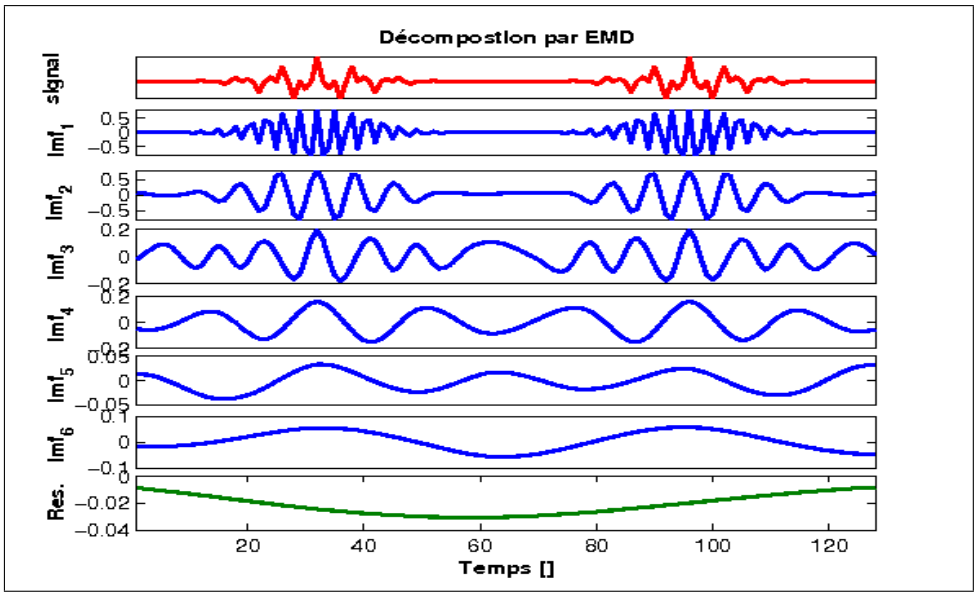
Par la suite, nous illustrons l'analyse par THH en utilisant les signaux décrits dans les parties précédentes (cf. paragraphes I.3 et II).

II.4.3.2 *Description et analyse de signaux multi-composantes*

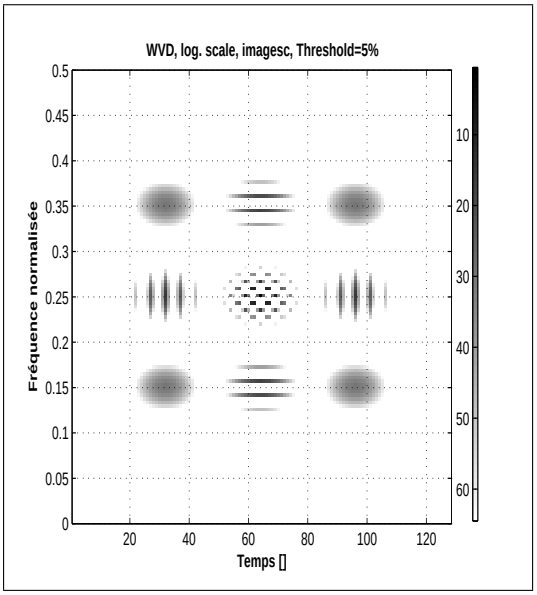
♦ Considérons un signal composé des quatre « atomes gaussiens élémentaires » (Eq. I.14).

La figure II.16(a) montre la décomposition par l'EMD de ce signal en IMF. Les représentations temps-fréquence de la WVD et de la THH sont représentées par les figures II.16(b) et II.16(c) respectivement.

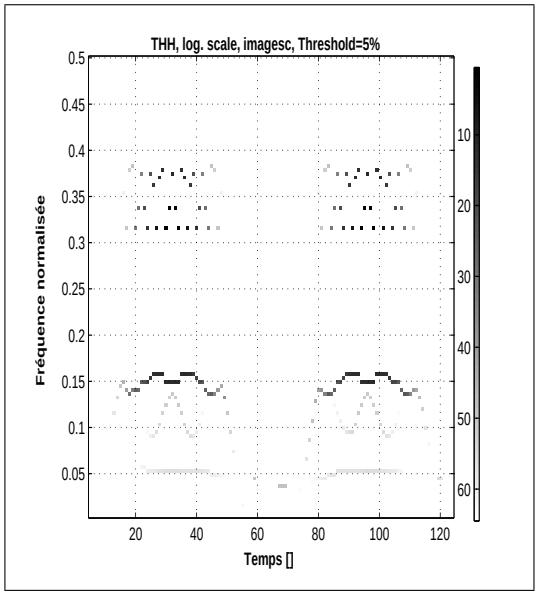
Ces figures montrent que les quatre atomes sont bien mis en évidence. Cependant, nous notons une perte de résolution fréquentielle pour les deux atomes à haute fréquence. Ce résultat est prévisible d'après l'étude réalisée précédemment sur la résolution fréquentielle. La THH est une description locale dont le résultat de la décomposition est sensible au choix de la fréquence d'échantillonnage utilisée [180,181,197]. Cependant, contrairement à la distribution quadratique de Wigner-ville qui donne de nombreux termes d'interférences, la THH n'en présente pas.



(a) Décomposition par EMD.



(b) Par Wigner-Ville.



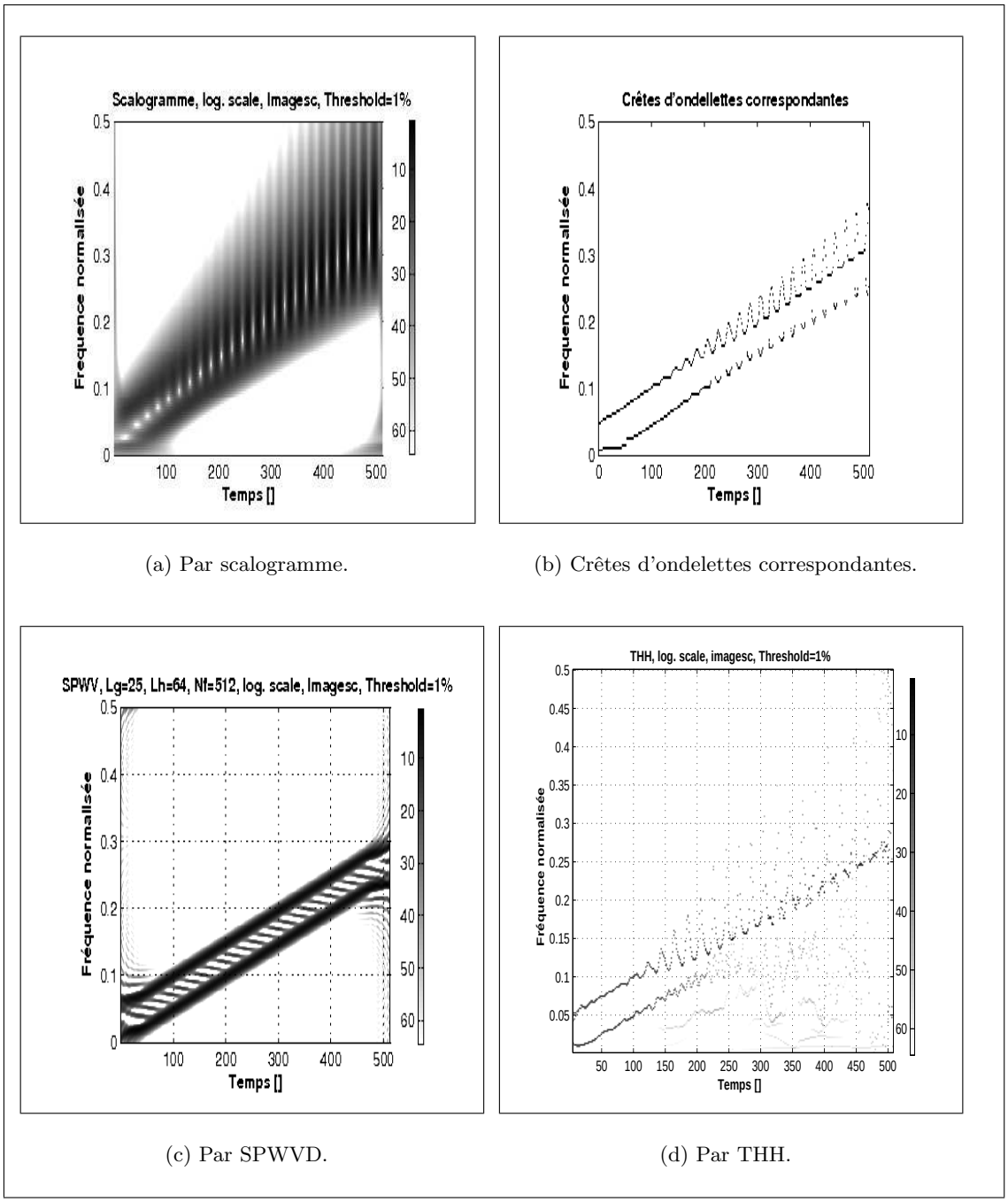
(c) Par THH.

Figure II.16 — Comparaison de la WVD et de la THH pour un signal à quatre « atomes gaussiens élémentaires ».

♦ Pour illustrer ce phénomène, nous appliquons la THH à un signal composé de deux chirps linéaires parallèles régi par le modèle suivant :

$$x(t) = \cos(bt^2 + ct) + \cos(bt^2)\,, \tag{II.23}$$

avec $FI_1(t) = 2bt + ct$ et $FI_2(t) = 2bt$.



(a) Par scalogramme.

(b) Crêtes d'ondelettes correspondantes.

(c) Par SPWVD.

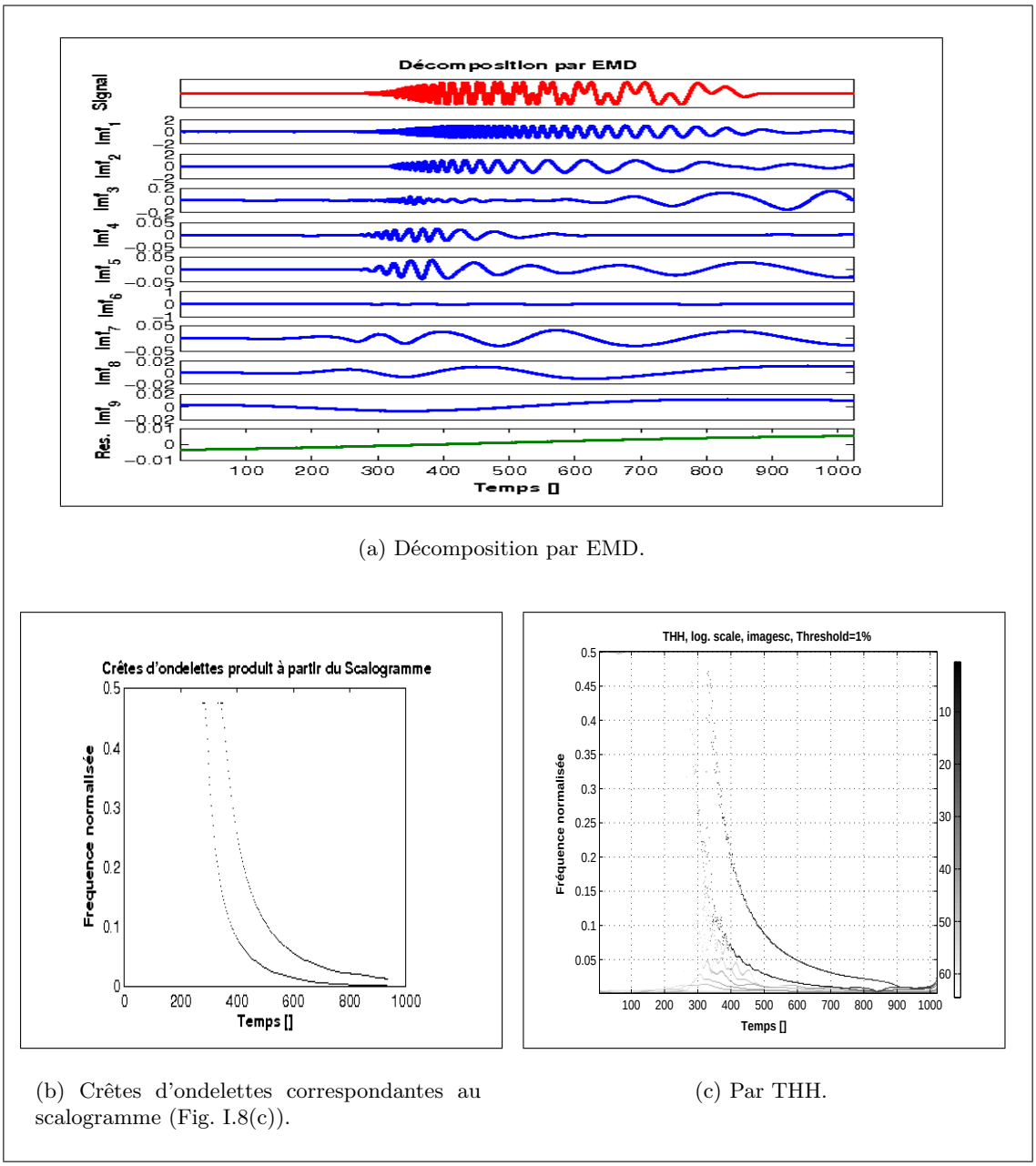
(d) Par THH.

Figure II.17 **—** Comparaison de quatre méthodes temps-fréquence pour l'analyse d'un signal composé de deux chirps linéaires parallèles.

La figure II.17 montre le résultat obtenu par ondelettes de Morlet (scalogramme), à partir des crêtes d'ondelettes, par SPWVD et par THH (respectivement Figures II.17(a), (b), (c)

et (d)).
Les résultats illustrés par les figures II.17(a) et II.17(b) sont typiques des performances attendues par l'approche ondelettes et la mauvaise résolution fréquentielle (et temporelle) dans la détermination des FI des deux chirps. En effet, à haute fréquence, la distance entre les deux FI n'est plus suffisante et les crêtes ont tendance à suivre les interférences. Dans ce cas, contrairement à la SPWVD (Fig. II.17(c)), il est difficile de calculer précisément les deux FI. Globalement, les résultats issus de la THH sont assez similaires à ceux obtenus à l'aide des ondelettes.

♦ Avant d'étudier des signaux plus particuliers, revenons sur le signal illustré par la figure I.8 représentant la somme de deux chirps hyperboliques [145].



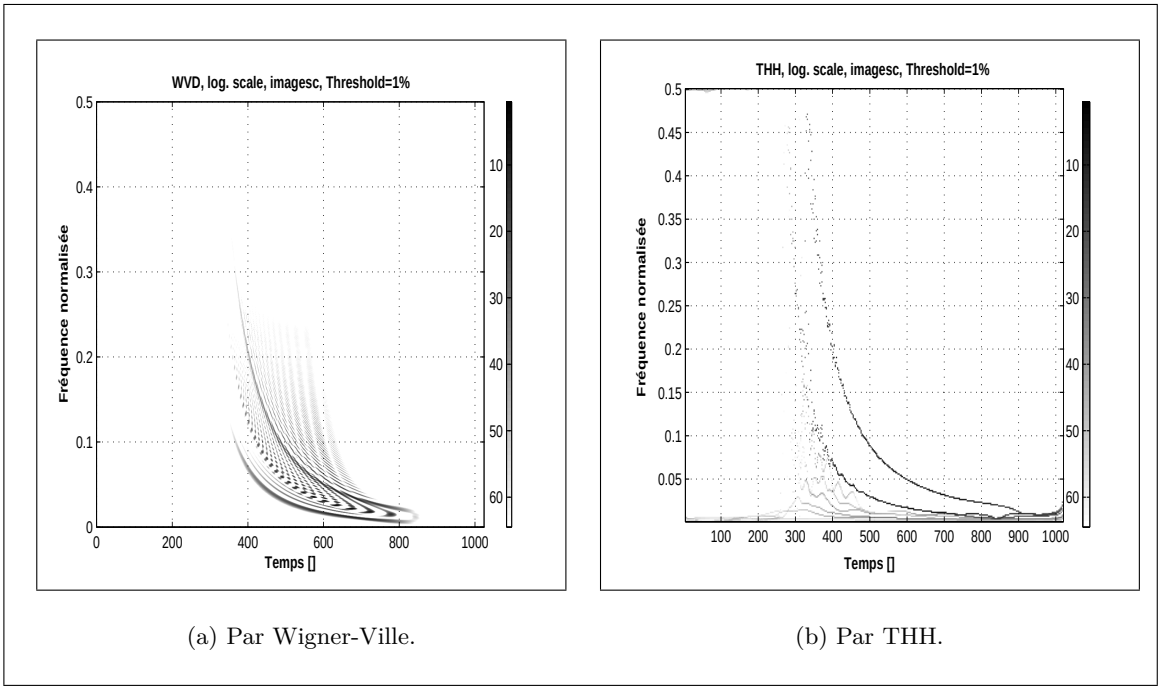
(a) Décomposition par EMD.

(b) Crêtes d'ondelettes correspondantes au scalogramme (Fig. I.8(c)).

(c) Par THH.

Figure II.18 — Application de la THH à deux chirps hyperboliques.

La représentation temps-fréquence obtenue à l'aide des crêtes d'ondelettes déduites du scalogramme (Fig. II.18(b)) et celle de la THH (Fig. II.18(c)) sont globalement équivalente. Les deux approches suivent l'évolution rapide en temps des deux FI. Cependant, l'approche par la THH présente un faible pouvoir de résolution dans les hautes fréquences (dû à la discrétisation des signaux (cf. paragraphes II.3.2 et II.4.1)). L'ensemble des résultats confirme le fait que l'EMD a tendance à se comporter comme une analyse multi-résolutions au même titre que les ondelettes.
D'autre part, le manque de formalisme mathématique de la THH ne semble pas être un obstacle (du moins pour cette catégorie de signaux) pour obtenir une description claire des phénomènes fréquentiels présents dans le signal au cours du temps.



(a) Par Wigner-Ville. (b) Par THH.

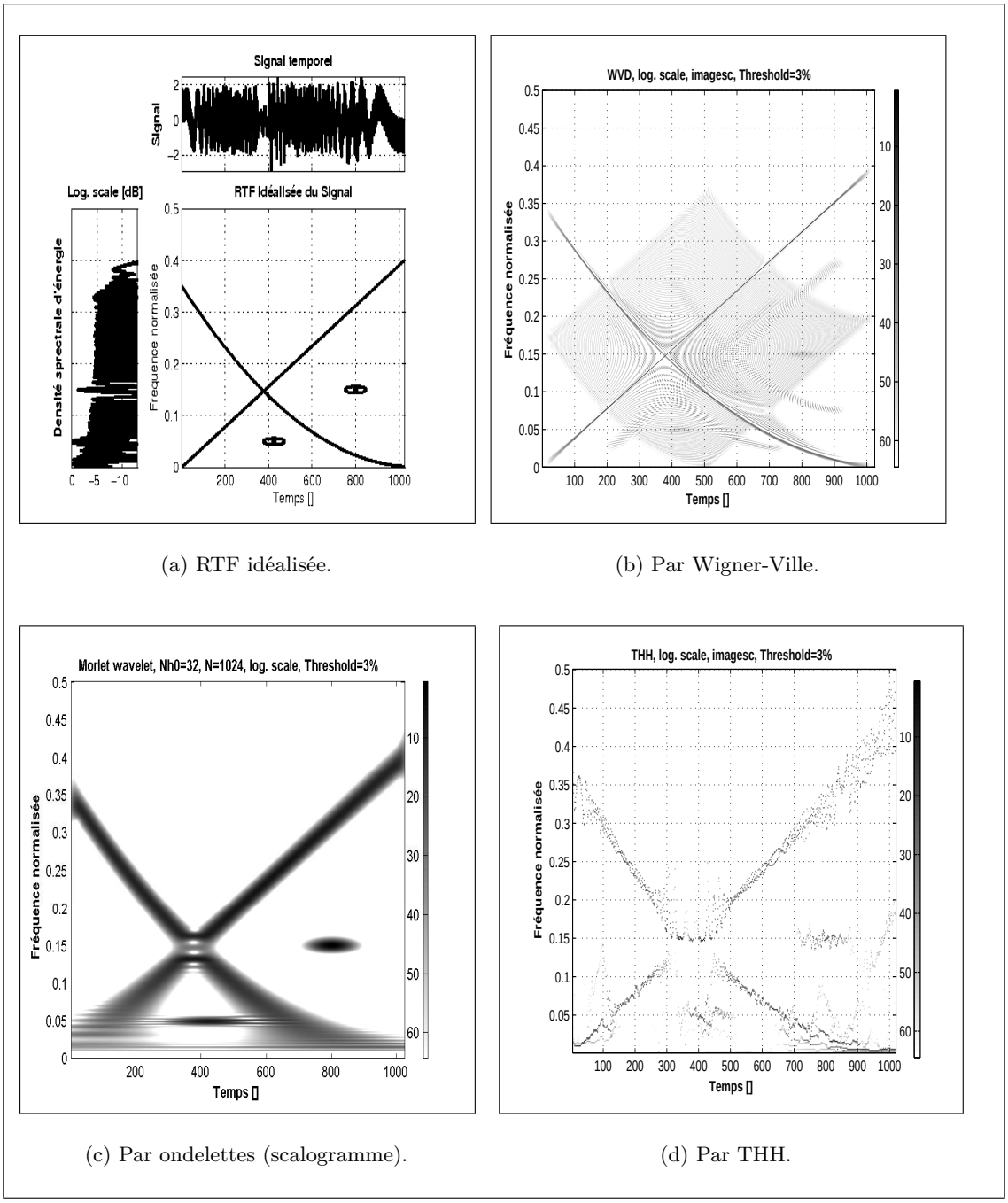
Figure II.19 — Comparaison des représentations temps-fréquence d'un signal constitué de deux chirps hyperboliques obtenues par WVD et par THH.

Si nous comparons le résultat, toujours pour le même signal, à une représentation quadratique telle que la WVD (Fig. II.19(a)), nous observons que la description pour les basses fréquences est meilleure avec la THH (Fig. II.19(b)), ce qui n'est pas le cas pour les hautes fréquences. Les interférences introduites par la WVD sont absentes dans le cas de la THH.

♦ Considérons maintenant un signal multi-composantes comprenant un chirp linéaire de fréquence croissante, un chirp quadratique de fréquence décroissante, et deux gaussiennes modulées situées en $t = 425$ et en $t = 800$ de fréquences normalisées respective de 0.05 et de 0.15.

La figure II.20 montre le résultat obtenu par WVD, ondelettes de Morlet (scalogramme) et par THH (respectivement Fig. II.20(b), (c), et (d)).
Sur la WVD (Fig. II.20(b)), nous constatons que les deux chirps sont bien localisés le long des deux courbes temps-fréquence, alors qu'ils sont plus étalés sur des bandes plus larges dans le scalogramme de la figure II.20(c). Cependant, les termes d'interférences créent des motifs oscillatoires complexes, qui masquent l'existence des deux transitoires temps-fréquence en $t = 425$ et $t = 800$. Au contraire, le scalogramme et la THH isolent ces transitoires. La THH

détecte clairement la présence des différentes lois d'évolution (Fig. II.20(d)). Cependant, pour les hautes fréquences nous observons un étalement fréquentiel et donc une perte de la loi de variation des FI. En $t = 800$, les FI du transitoire de haute fréquence ont des oscillations dues d'une part à la discrétisation du signal et d'autre part aux interférences avec le chirp linéaire. Ceci est également valable sur l'intervalle $[200, 500]$, où nous pouvons observer que les FI des chirps linéaires et quadratiques sont trop proches et ne sont plus résolues correctement.



(a) RTF idéalisée.

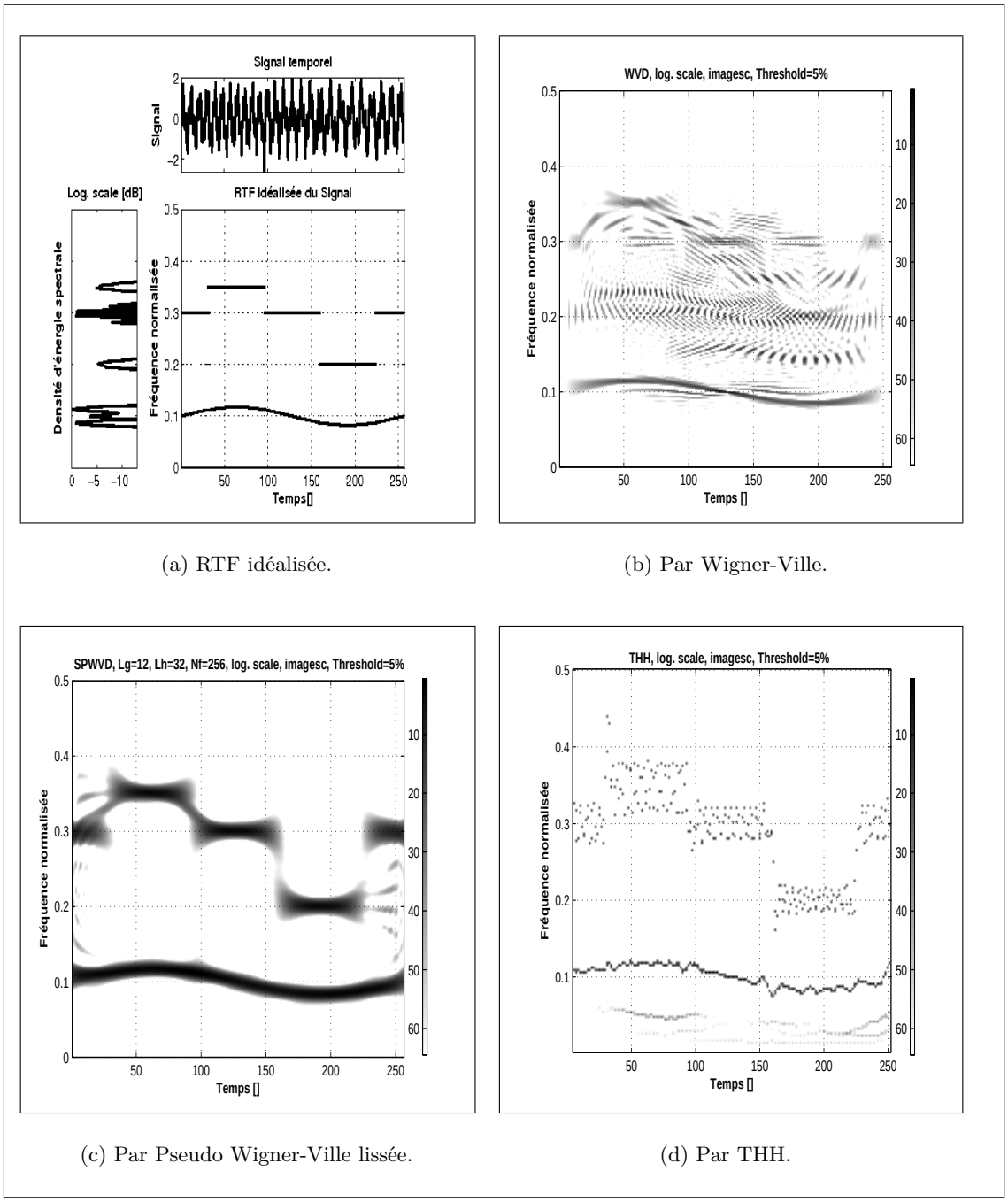
(b) Par Wigner-Ville.

(c) Par ondelettes (scalogramme).

(d) Par THH.

Figure II.20 **—** Description d'un signal multi-composantes présentant un croisement des fréquences.

♦ Enfin pour terminer ce paragraphe, considérons un signal comportant des changements brusques dans son contenu fréquentiel. Le signal est composé d'une loi fréquentielle d'évolution lente sur laquelle viennent se superposer des sauts fréquentiels brusques. Le signal présenté sur la figure II.21 est composé de cinq sauts fréquentiels et d'une FI lente variant selon une loi sinusoïdale.



(a) RTF idéalisée.

(b) Par Wigner-Ville.

(c) Par Pseudo Wigner-Ville lissée.

(d) Par THH.

Figure II.21 — Description temps-fréquence d'un signal multi-composantes avec des changements brusques en fréquences.

Nous constatons que la représentation de la SPWVD situe les différentes lois d'évolution (Fig. II.21(c)). Le fait de filtrer (en temps et en fréquence) supprime en grande partie l'ensemble des interférences sans trop pénaliser la résolution temps-fréquence. Toutefois, nous remarquons

que les transitions sont assez difficiles à déterminer. Si nous observons l'analyse obtenue par la THH, les transitions sont plus facilement identifiées. Cependant pour les hautes fréquences l'étalement fréquentiel est important et la détermination des lois des FI s'avère alors délicate. Il est à noter que la résolution de la THH peut être accrue en intégrant dans le processus de description des pré/post-traitements. Rappelons qu'aucune opération (comme le filtrage) n'a pas été associée à la THH dans l'ensemble des résultats présentés jusqu'ici.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la Transformation de Huang ou plus exactement la décomposition modale empirique (EMD) [114]. Cette méthode de décomposition temporelle et non-linéaire est définie comme la sortie d'un algorithme. Nous avons montré que le signal peut se décomposer en un nombre fini de composantes ou oscillations (IMF) extraites des données signal. Les IMF sont des modes centrés et de type AM-FM au sens large. Nous avons montré, sur la base de simulations, que l'extraction des IMF est non-linéaire, mais leur recombinaison linéaire est exacte. Chaque IMF est obtenue par un processus, appelé « tamisage », itératif, séquentiel et local (de type *fine to coarse*). Nous avons montré que les résultats de la décomposition par EMD sont conditionnés par l'échantillonnage et l'interpolation des signaux. Les résultats présentés montrent que pour une meilleure décomposition un sur-échantillonnage des signaux est nécessaire.

L'EMD permet de réaliser une décomposition temporelle en signaux mono-composante.
En particulier, nous avons mis en évidence la capacité de l'EMD à générer une analyse locale multi-résolution (vis à vis d'une impulsion ...), non-rigide et entièrement pilotée par les échelles naturelles des données.
Enfin, nous avons remarqué que cette décomposition s'organise en une structure type banc de filtres vis à vis d'un bruit blanc Gaussien.

L'EMD n'étant pas définie analytiquement, son étude et l'analyse de ses performances sont conduites avec des simulations numériques intensifs et dans des situations bien contrôlées. Dans le cadre de cette thèse, nos travaux sont orientés essentiellement vers le traitement (filtrage et débruitage) et l'analyse temps-fréquence des signaux.

Les traitement des signaux qui seront présentés dans le chapitre suivant à savoir le filtrage $EMD_{\,filtrage}$ et le débruitage $EMD_{\,debruitage}$ sont basés essentiellement sur l'aspect non-linéaire de l'EMD.

L'EMD combinée avec une méthode d'estimation des FI et AI permet d'obtenir une nouvelle représentation temps-fréquence des signaux non-stationnaires, multi-composantes ne faisant aucun *a priori* sur le signal, au contraire des RTF standards (WVD, ondelettes ...). A l'origine, Huang *et al.* ont proposé d'estimer la FI et l'AI à l'aide de la transformée de Hilbert : c'est la Transformation de Huang-Hilbert (THH) (cf. section II.4). Ainsi, la représentation temps-fréquence issue de la THH est construite à partir des FI et AI estimées au contraire des RTF classiques qui estiment les FI (et AI) à partir des représentations. Les résultats d'analyse temps-fréquence de signaux synthétiques par THH ont été comparées à celles de la WVD et des ondelettes. Globalement la THH donne des résultats comparables aux deux autres méthodes mais sans interférences et avec une détection correcte des différentes lois d'évolution des fréquences (FI). Partant des limitations de la transformation de Hilbert et pour améliorer les résultats de la THH, nous proposerons au chapitre **V** une autre méthode d'estimation des FI et AI basée sur l'opérateur de démodulation de Teager-Kaiser : c'est la Transformation de Huang-Teager (THT).

CHAPITRE III

Filtrage et débruitage par Transformation de Huang

Sommaire

III.1 Introduction 62
III.2 Filtrage des signaux par la Transformation de Huang 62
III.2.1 Méthodologie du filtrage : $EMD_{\,filtrage}$ 62
III.2.2 Exemples d'applications 65
III.3 Débruitage des signaux par la Transformation de Huang 70
III.3.1 Méthodologie du débruitage : $EMD_{\,debruitage}$ 70
III.3.2 Exemples d'applications 73
III.4 Conclusion 75

Ce chapitre présente deux nouvelles méthodes de traitement des signaux basées sur la décomposition non-linéaire de l'EMD : le filtrage et le débruitage. Le filtrage est basé sur la reconstruction partielle du signal en utilisant un nombre réduit d'IMF déterminé par un critère énergétique. Cette approche fait l'hypothèse que le bruit est réparti essentiellement sur les premières IMF. A l'inverse, l'approche de débruitage ne fait pas d'hypothèse de répartition du bruit et le signal est reconstruit complètement avec ses IMF pré-traitées séparément. Nous supposons que le bruit est blanc, gaussien et additif. Les deux méthodes proposées sont entièrement pilotées par les données et ne nécessitent pas d'informations a priori sur les caractéristiques des signaux. Les traitements sont validés sur des signaux synthétiques et réel et les résultats obtenus en terme de rapport signal à bruit sont significatifs par rapport aux méthodes classiques telles que le filtre moyenneur, le filtre médian ou les ondelettes.

III.1 Introduction

Les résultats obtenus dans le chapitre **II** sur l'analyse des signaux non-stationnaires ont montré la capacité de la THH, en tant que méthode temps-fréquence, à décrire ces signaux sans aucune information a priori et sans la spécification d'une base de décomposition. Cette capacité d'analyse est à mettre au crédit de l'EMD comme méthode non-linéaire bien adaptée à la décomposition temporelle des signaux non-stationnaires. L'idée de ce travail est d'exploiter cet aspect non-linéaire de la décomposition à des fins de filtrage et de débruitage.

D'une manière générale, les signaux sont bruités lors de leur acquisition. Le filtrage ou le débruitage sont souvent indispensables pour améliorer la qualité de ces signaux et pouvoir les exploiter ultérieurement. Classiquement, les méthodes linéaires comme le filtre de Wiener, le moyenneur ou le gaussien sont les plus utilisées en raison de leur simplicité et de la facilité de leur mise en œuvre [176]. Cependant, ces filtres sont inefficaces pour les signaux transitoires ou impulsionnels. D'autre part, les signaux réels sont très souvent de nature non-stationnaire. Pour y remédier, une approche non-linéaire basée sur les ondelettes a été proposée où l'idée est de seuiller les coefficients d'ondelettes en ne gardant que ceux qui sont censés correspondre au signal [65, 66, 145]. Cette méthode donne de bons résultats. Cependant, une limitation de l'approche ondelettes est que la fonction analysante est prédéterminée à l'avance et elle n'est pas souvent optimale pour décrire le signal. Rappelons que le choix de l'ondelette analysante dépend de la connaissance que l'on a du signal à étudier (régulier ou non) et de l'information que l'on veut récupérer. Plus exactement, les résultats de l'approche ondelettes dépendent du nombre de moments nuls de l'ondelette analysante, de la taille du support de cette ondelette, et de la régularité du signal. Pour éviter ce problème, une décomposition adaptative utilisant un dictionnaire d'atomes temps-fréquence (matching pursuit, Basis Pursuit) a été introduite [92, 146]. La taille du dictionnaire ainsi que le type de fonctions de base qui le constituent (fonctions de Gabor, sinusoïdes atténuées, ...) ont naturellement une influence importante sur les propriétés de la décomposition obtenue. Si le dictionnaire ne contient pas ou peu d'éléments adaptés à la structure du signal, les résultats seront peu satisfaisants car non exploitables. Ainsi, aussi bien pour les approches ondelettes que pour la décomposition atomique temps-fréquence, le choix du type de fonction de base et son adaptation au signal est un problème récurrent.

Les deux méthodes que nous proposons ne nécessitent pas la spécification d'une fonction de base ou la construction d'un dictionnaire. Nous effectuons le traitement dans l'espace des temps (espace physique du signal). Le même traitement pourrait s'effectuer dans l'espace des fréquences mais nécessiterait la connaissance du gabarit et du type de filtre fréquentiel à utiliser. L'idée principale est de montrer qu'il est possible avec l'approche EMD de filtrer et de débruiter et cela sans passer dans l'espace dual et sans aucune information a priori.

III.2 Filtrage des signaux par la Transformation de Huang

III.2.1 Méthodologie du filtrage : $EMD_{\,filtrage}$

L'approche proposée ici repose sur le fait que l'EMD permet d'extraire, séquentiellement et de manière intrinsèque, l'énergie présente dans le signal en commençant par les petites échelles (modes haute fréquence) pour aller vers les plus grandes (modes basse fréquence). La méthode se fonde sur l'hypothèse que les premières IMF (les modes de plus hautes fréquences) sont majoritairement dominées par le bruit et sont peu représentatives d'information propre

au signal initial. Ainsi, le signal filtré est reconstruit avec seulement quelques IMF dans lesquelles le signal « pur » prédomine majoritairement.

La décomposition par EMD permet d'écrire le signal $x(t)$ sous la forme suivante [114] :

$$x(t) = \sum_{j=1}^{N} IMF_j(t) + r_N(t) \,, \tag{III.1}$$

avec $\mathrm{IMF}_j(t), j \in \{1, \ldots, N\}$ l'ensemble des IMF, $\mathrm{r}_N(t)$ le résidu et N le nombre d'IMF (profondeur de la décomposition). Nous pouvons souligner que le nombre d'IMF est déterminé automatiquement durant le tamisage à l'aide du critère d'arrêt (cf. paragraphe II.2.3).

L'EMD décompose un signal donné $x(t)$ en une somme d'IMF par tamisage, chacune des composantes pouvant être vue comme un niveau d'échelle (de détails) distinct les unes des autres [114]. Cette notion d'échelle est locale et la décomposition est non linéaire (cf. paragraphe II.2). L'EMD peut être vue comme une approche de type ondelettes dont les bancs de filtres sont implicites et localisés à l'instant t de la décomposition. Chaque IMF décrit localement le signal $x(t)$ comme un niveau d'échelle et dans une « bande de fréquences » précise [82]. Localement, chaque IMF contient des oscillations de plus basses fréquences que celle extraite juste avant.

En général, le bruit est caractérisé par des composantes haute fréquence. La méthode de filtrage par l'EMD se fonde alors sur l'idée que l'énergie associée au bruit est concentrée majoritairement dans les modes de haute fréquence (premières IMF) et va diminuer pour des fréquences plus basses (dernières IMF). Partant de cette idée, il existe un mode, $\mathrm{IMF}_{j_s}(t)$, à partir duquel la distribution d'énergie du signal original est plus grande que celle du bruit. Cette propriété particulière nous permet alors de séparer le signal du bruit. Nous sélectionnons les modes qui sont significativement associés au signal original, tandis que les autres modes sont associés au bruit. Dans l'approche proposée ici, tous les modes caractéristiques du bruit sont mis à zéro lors de la reconstruction du signal. Comme chaque IMF correspond à une bande de fréquences, la reconstruction partielle avec un nombre réduit d'IMF s'apparente à du filtrage.

Considérons un signal original $y(t)$ contaminé par un bruit blanc, gaussien et additif $z(t)$:

$$x(t) = y(t) + z(t) \,. \tag{III.2}$$

Partant du signal observé $x(t)$, l'objectif est d'estimer une approximation $\tilde{y}(t)$ du signal original $y(t)$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE pour mean square error) :

$$MSE(y, \tilde{y}) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \left[y(t_i) - \tilde{y}(t_i) \right]^2 \,, \tag{III.3}$$

avec $y = [y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_T)]^t$, $\tilde{y} = [\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_2), \ldots, \tilde{y}(t_T)]^t$, et T la dimension du signal. D'autres mesures de l'erreur due à l'estimation peuvent être utilisées comme par exemple le minimum de l'erreur absolue (MAE pour mean absolute error) [65].

Le principe de la méthode est le suivant. Nous décomposons d'abord le signal $x(t)$ par l'EMD afin de le décrire selon l'expression (Eq. III.1). Le signal $\tilde{y}(t)$ est ensuite reconstruit en utilisant

$(N - j_s + 1)$ IMF indicées de j_s à N, (Eq. III.4) :

$$\tilde{y}_{j_s}(t) = \sum_{j=j_s}^{N} IMF_j(t) + r_N(t),\ j_s \in \{2, \ldots, N\}\,. \tag{III.4}$$

Le problème du filtrage proposé est de trouver l'indice j_s qui permet de minimiser la quantité $MSE(y, \tilde{y})$. Dans la pratique, le MSE ou le MAE ne peuvent pas être calculés explicitement parce que le signal original $y(t)$ est inconnu. Pour y remédier, nous proposons une mesure de distorsion appelée erreur quadratique moyenne consécutive ($CMSE$ pour Consecutive MSE) qui n'exige pas la connaissance de $y(t)$ définie par :

$$CMSE(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}) \triangleq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left[\tilde{y}_k(t_i) - \tilde{y}_{k+1}(t_i)\right]^2,\ k \in \{1, \ldots, N-1\} \tag{III.5}$$

$$\triangleq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left[IMF_k(t_i)\right]^2\,. \tag{III.6}$$

Ainsi, d'après la relation (Eq. III.6), le $CMSE$ est réduit à l'évaluation de l'énergie de la k^{eme} IMF. Cette valeur est aussi l'estimation de la variance empirique classique de l'IMF numéro k. Nous remarquons que si $k = 1$, alors $\tilde{y}_k(t) = x(t)$. Finalement, l'indice j_s est donné par :

$$j_s = \underset{1 \le k \le N-1}{arg\,min}\left[CMSE(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1})\right], \tag{III.7}$$

avec $\tilde{y}_k$ et $\tilde{y}_{k+1}$ les signaux reconstruits à partir des IMF indicées par k et $k+1$ respectivement. Le critère $CMSE$ permet d'identifier l'indice de l'IMF à partir duquel il y a un changement significatif de l'énergie. Il est important de noter que ce résultat empirique ainsi que la plupart des résultats issus de l'EMD [81,82,114,182,212] sont essentiellement basés sur des simulations numériques intensives.

Les différentes étapes du filtrage par EMD, $EMD_{filtrage}$, utilisant le critère énergétique $CMSE$ sont décrites dans le tableau suivant :

Entrée :
Signal bruité : $y(t)$;

Sortie :
Signal reconstruit : $\tilde{y}(t)$.

Étape A.
Fixer le critère d'arrêt du tamisage et appliquer l'EMD pour extraire les IMF, $j \in \{1, \ldots, N\}$ et le résidu $r_N(t)$;

Étape B.
Estimer les $CMSEs$ consécutifs et déterminer l'indice j_s à l'aide des équations (Eq. III.5 et III.7) ;

Étape C.
Reconstruire le signal débruité $\tilde{y}(t) \equiv \tilde{y}_{j_s}(t)$ en utilisant la relation (Eq. III.4).

Tableau III.1 — Pseudo-code du *filtrage* $EMD_{filtrage}$ basé sur le $CMSE$.

III.2.2 Exemples d'applications

Pour illustrer la méthode de filtrage, nous avons effectué des simulations numériques sur quatre signaux tests (*Doppler*, *Blocks*, *Bumps* et *Heavysine*) obtenus par le logiciel libre *WAVELAB*[1]. L'approche est aussi testée sur un signal réel biomédical : l'électrocardiogramme ECG. Les signaux sont de taille identique $T = 2048$. Pour les signaux synthétisés, la variance du bruit est déterminée de sorte que le rapport signal à bruit (SNR) original (avant le filtrage) de tous les signaux soit le même. Nous l'avons fixé à 2 dB. Le SNR de l'ECG est de -9 dB. Les signaux originaux et leurs versions bruitées sont illustrés respectivement dans les figures III.1 et III.2. Les mesures de distorsion SNR, MSE et MAE sont déterminées afin d'estimer l'efficacité de la réduction du bruit présent dans les signaux.

[1] C'est une bibliothèque de fonctions portant sur les ondelettes et les transformées temps-fréquence associées. Elle est maintenue et améliorée à l'Université de Standford par D.L. Donoho, avec de nombreuses contributions : O. Levi, S.Chen, E. Kolaczyk, M. Clerc et J. Kalifa. http ://www-stat.stanford.edu/ wavelab/

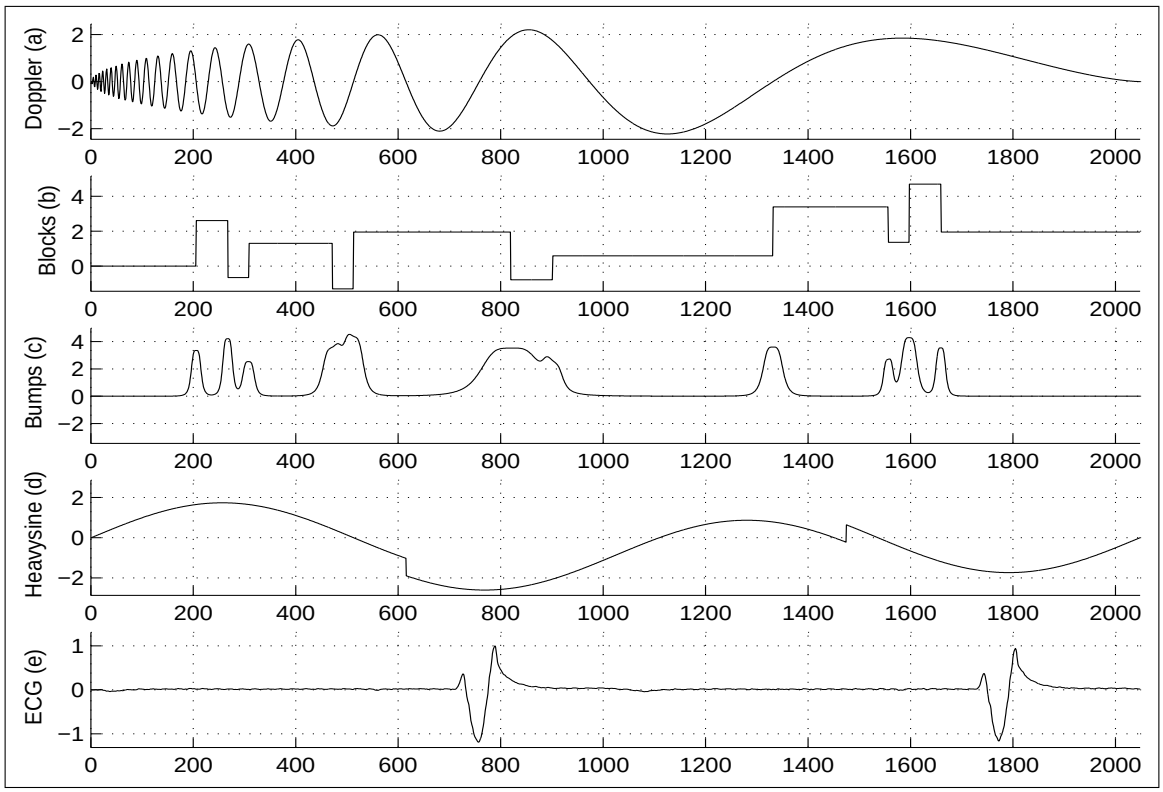


Figure III.1 — Signaux Tests avant bruitage : *Doppler*, *Blocks*, *Bumps*, *Heavysine*, et *ECG*.

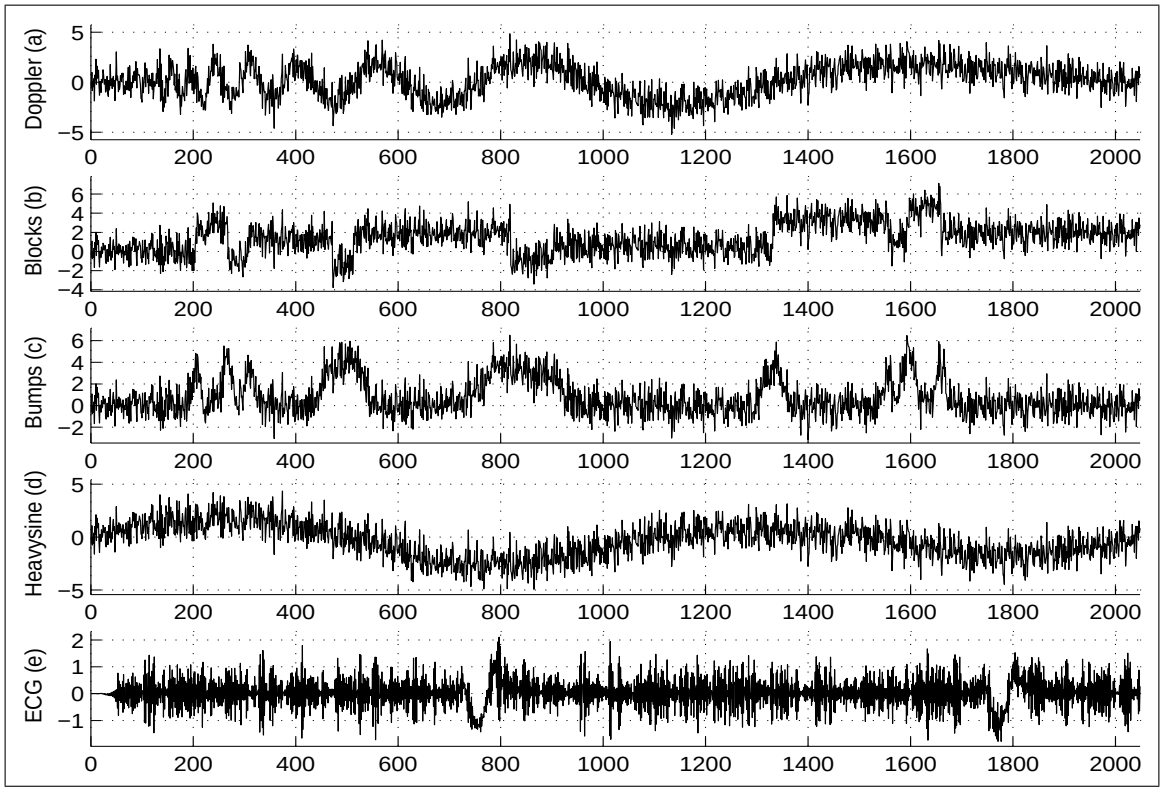


Figure III.2 — Signaux Tests bruités. Le SNR est de 2 dB pour les signaux *Doppler*, *Blocks*, *Bumps*, *Heavysine* et de -9 dB pour le signal *ECG*.

En appliquant le pseudo-code du tableau III.1, chaque signal bruité est décomposé en IMF et l'indice j_s estimé en minimisant le critère $CMSE$ (Eq. III.7). Par exemple, le signal *Blocks* est décomposé en cinq IMF plus un résidu (Fig. III.3). Nous remarquons que la première IMF correspond à des oscillations rapides (haute fréquence) tandis que la cinquième IMF est plus lente (plus basse fréquence que les premières). Une comparaison du signal initial (figure supérieure) et du résidu (figure inférieure) montre que le résidu représente la tendance globale du signal.

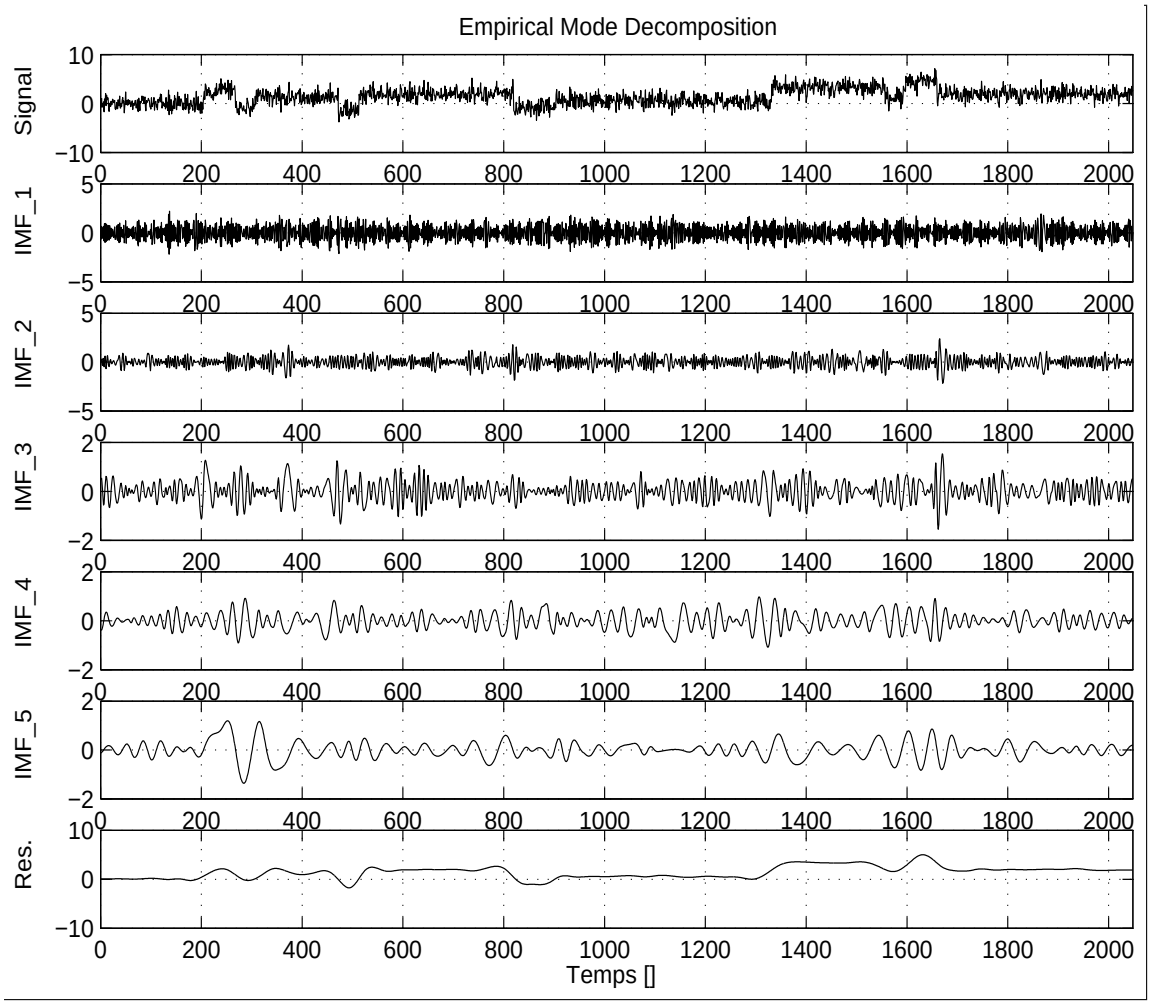


Figure III.3 — Décomposition par EMD du signal bruité *Blocks* : le signal initial, les 5 IMF, et le résidu (de haut en bas).

Les signaux filtrés sont reconstruits selon la relation (Eq. III.4) et les SNR correspondants estimés.

La figure III.4 montre les variations du SNR en fonction du nombre d'IMF lors de la reconstruction du signal pour les cinq signaux tests. Les valeurs de j_s de ces signaux sont données dans le tableau III.2. La figure III.4 montre que pour chaque signal le maximum du SNR a lieu à $j = j_s$ confirmant ainsi les résultats obtenus par le $CMSE$. Nous constatons que pour chaque signal la courbe du SNR ne présente qu'un seul maximum.

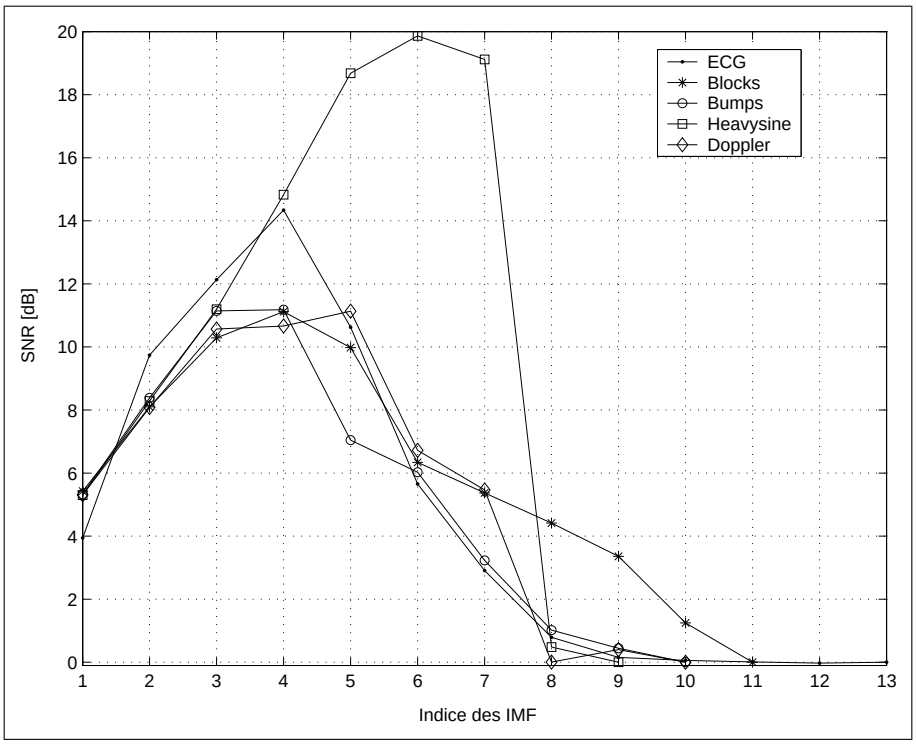


Figure III.4 **—** Variation des différentes valeurs de SNR en fonction du nombre d'IMF considérées pour la reconstruction des 5 signaux.

Signal	***Doppler***	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
Indice j_s	5	4	6	4	4

Tableau III.2 **—** Valeur de l'indice j_s pour les cinq signaux tests.

Globalement, les résultats obtenus sont qualitativement très bons (Fig. III.5). Les reconstructions estiment correctement les différentes variations présentes dans les signaux non bruités. Là où le signal non bruité varie brusquement la reconstruction fait de même et là où le signal initial est lisse son estimation l'est aussi. Les résultats les plus significatifs sont obtenus pour les signaux *Blocks*, *Bumps* et l'*ECG* (Fig. III.5 **(b),(c),(e)**) qui sont très proches des signaux originaux. Les gains en SNR varient entre 9 dB et 28 dB (Tab. III.3).

	Signal				
	Doppler	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]
Bruit	$2,03$	$2,03$	$2,03$	$2,03$	$-9,02$
Moyenneur	$9,86$	$9,06$	$9,46$	$12,66$	$7,23$
Médian	$10,57$	$10,17$	$10,55$	$10,67$	$4,62$
Ondelette	**14,97**	**11,94**	**14,47**	$18,76$	$5,82$
$EMD_{\ filtrage}$	$11,13$	**11,94**	$11,18$	**19,86**	**14,33**

Tableau III.3 **—** SNR des résultats de filtrage pour les signaux tests contaminés par un bruit blanc gaussien additif.

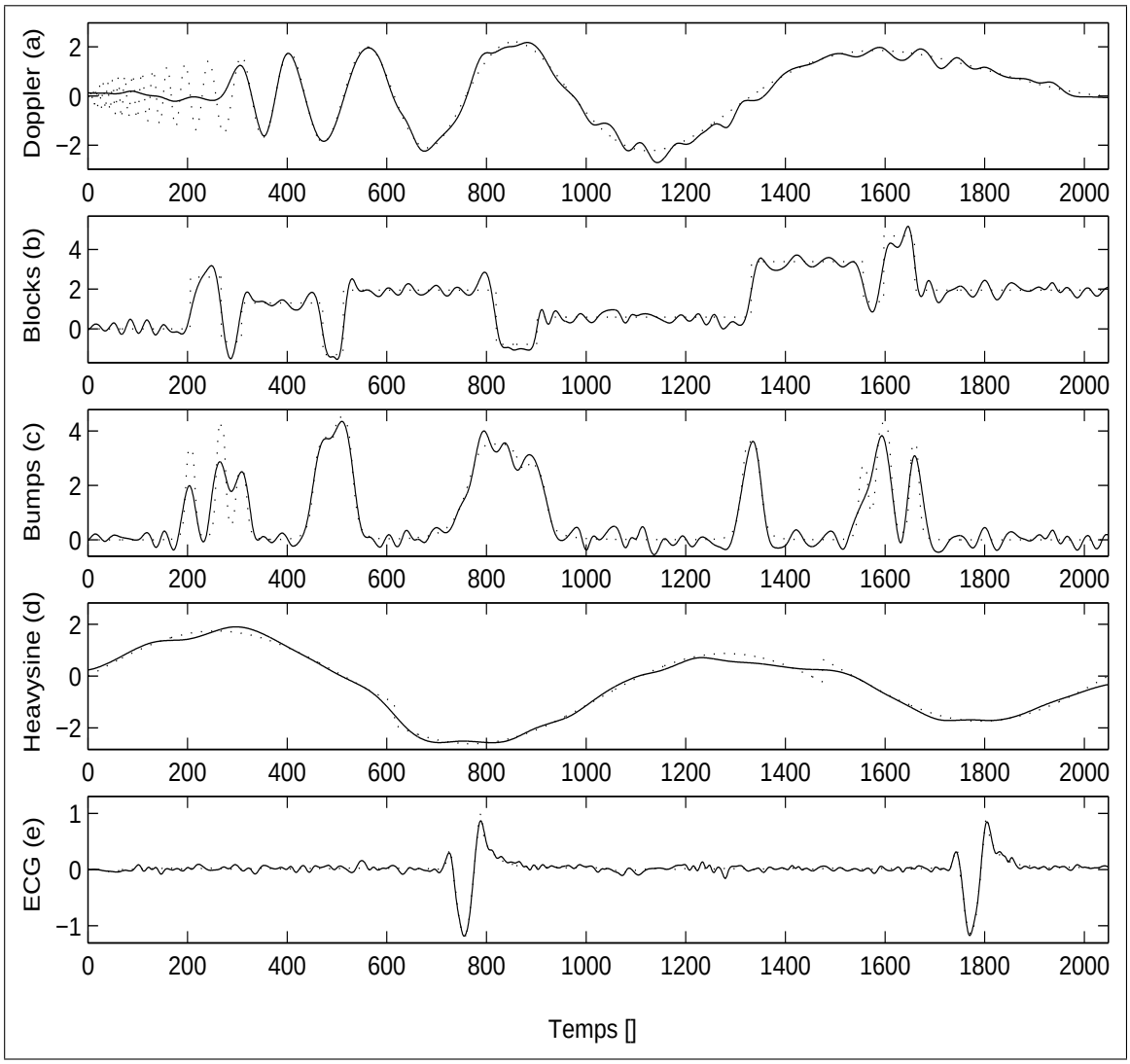


Figure III.5 — Résultats du filtrage par $EMD_{\,filtrage}$: en trait plein les signaux reconstruits et en pointillé les signaux non bruités.

	Signal				
	Doppler	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
	MSE	MSE	MSE	MSE	MSE
Bruit	$1,04$	$1,04$	$1,04$	$1,04$	0.33
Moyenneur	$0,17$	$0,20$	$0,19$	$0,09$	8×10^{-3}
Médian	$0,15$	$0,16$	$0,15$	$0,15$	14×10^{-3}
Ondelette	**0,05**	**0,10**	**0,06**	$0,03$	11×10^{-3}
$EMD_{\,filtrage}$	$0,12$	**0,10**	$0,12$	**0,02**	$\mathbf{1{,}5{\times}10^{-3}}$

Tableau III.4 — MSE des résultats de filtrage pour les signaux tests contaminés par un bruit blanc gaussien additif.

	Signal				
	Doppler	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
	MAE	MAE	MAE	MAE	MAE
Bruit	$0,81$	$0,81$	$0,81$	$0,81$	0.46
Moyenneur	$0,32$	$0,29$	$0,32$	$0,24$	$0,04$
Médian	$0,30$	$0,31$	$0,31$	$0,30$	$0,09$
Ondelette	**0,16**	**0,20**	**0,19**	$0,12$	$0,04$
$EMD_{\ filtrage}$	$0,21$	**0,20**	$0,24$	**0,10**	$0,03$

Tableau III.5 — MAE des résultats de filtrage pour les signaux tests contaminés par un bruit blanc gaussien additif.

Les valeurs du SNR, MSE et MAE obtenus par les différentes méthodes dont l'EMD sont présentées dans les tableaux III.3, III.4 et III.5. Pour les filtres moyenneur et médian, plusieurs tailles de fenêtre ont été testées $(3, 5, 9, 11, 13)$ mais seulement les meilleurs résultats obtenus (avec la taille 11) sont présentés pour la comparaison. Les ondelettes utilisées sont les symmlets de Daubechies (orthogonales et presque symétriques) d'ordre 5 et pour le débruitage nous avons utilisé le seuillage doux.

Notre approche donne de bien meilleurs résultats que les filtres moyenneur et médian. Pour les signaux *Bumps* et *ECG* notre méthode présente de meilleurs résultats que ceux des ondelettes. Cependant, la méthode basée sur les ondelettes fournit de meilleurs résultats pour les signaux *Doppler* et *Heavysine*. L'efficacité des méthodes comparées dépend beaucoup des caractéristiques des signaux utilisés. En particulier pour le signal ECG le filtre moyenneur donne un bien meilleur SNR que l'approche ondelettes. Une analyse attentive du signal *Doppler* (Fig. III.5a) montre que la décomposition par l'EMD ne permet pas une reconstruction correcte de la partie gauche du signal. Ce résultat est prévisible puisque cette partie du signal correspondant à des hautes fréquences (oscillations rapides du signal) a été mise à zéro lors de la reconstruction. Les oscillations que nous observons dans la figure III.5 sont particulièrement localisées à proximité des discontinuités et de toutes autres variations rapides (au voisinage des singularités). Celles-ci sont identiques aux oscillations induites par des phénomènes de Gibbs liés au fait que les signaux sont des reconstructions partielles obtenues avec un nombre réduit d'IMF.

Les oscillations observées dans les zones régulières (Fig. III.5**(b)-(c)**) peuvent être dues à la méthode d'interpolation utilisée (spline cubique). Pour réduire ces oscillations, une possibilité est de traiter individuellement chacune des IMF. C'est l'approche de débruitage des signaux par Transformation de Huang.

III.3 Débruitage des signaux par la Transformation de Huang

III.3.1 Méthodologie du débruitage : $EMD_{\ debruitage}$

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent montrent les capacités de l'EMD à filtrer les signaux, et les résultats obtenus sont très bons, en particulier comparés aux méthodes classiques telles que le filtre moyenneur ou le filtre médian. Cependant, l'hypothèse que le bruit est uniquement réparti sur les premières IMF n'est pas toujours vérifiée. La deuxième méthode de traitement proposée ne fait pas l'hypothèse sur la répartition du bruit

sur les IMF. L'approche consiste à reconstruire totalement le signal avec toutes les IMF préalablement pré-traitées. Comme toutes les IMF sont conservées, par conséquent leurs bandes de fréquences le sont aussi. La méthode est vue comme une technique de débruitage ($EMD_{\ debruitage}$). Le but de l'approche est de conserver les contributions importantes de toutes les IMF. L'idée du débruitage est de pré-filtrer ou de seuiller (au sens du débruitage par ondelettes) chaque IMF séparément.

Soit $f_j(t)$ un mode non bruité de longueur finie T et IMF_j sa version bruitée par un bruit supposé blanc, gaussien et additif, $b_j(t)$, de variance $\sigma_j^2(t)$, alors :

$$IMF_j(t) = f_j(t) + b_j(t)\,, \tag{III.8}$$

avec $j = \{1, \ldots, N\}$.

Nous définissons alors $\tilde{f}_j(t)$ une estimée de $f_j(t)$ basée sur l'observation bruitée $IMF_j(t)$. L'estimation de $\tilde{f}_j(t)$ est alors donnée par la relation :

$$\tilde{f}_j(t) = \Gamma[IMF_j(t), \tau_j]\,, \tag{III.9}$$

avec $\Gamma[IMF_j(t), \tau_j]$ la fonction de pré-traitement (filtrage, seuillage) définie par le paramètre τ_j (taille de fenêtre, valeur du seuil ...) et appliquée au signal $IMF_j(t)$. Le signal débruité $\tilde{x}(t)$ est donné par la relation :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{f}_j(t) + r_N(t)\,. \tag{III.10}$$

En ce qui concerne la fonction de pré-traitement Γ, nous avons utilisé deux approches. La première est un filtrage basé sur le filtre de Savitzky-Golay[2] [191]. Ce filtre RIF est très rapide et efficace pour le lissage des données bruitées. En effet, contrairement aux filtres classiques dont les propriétés sont définies dans le domaine fréquentiel et ensuite formulées temporellement, ce filtre dérive directement de la formulation d'un problème de lissage de données dans l'espace des temps. Ce filtre apparaît donc intéressant dans le cadre de l'EMD où l'on ne change pas d'espace de représentation.
Ce filtre effectue localement une régression pour estimer la valeur de chaque point du signal [191] :

$$\tilde{f}_j(i) = \sum_{m=-M_G}^{m=M_D} \alpha_m . IMF_j(i+m)\,, \tag{III.11}$$

avec $i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, et M_G et M_D le nombre de points à gauche et à droite du point i. L'idée du filtre de Savitzky-Golay est de trouver les coefficients α_m (Eq. III.11) qui conservent les moments d'ordres supérieurs à l'intérieur de la fenêtre d'analyse. Les points $IMF_j(i - M_G), \ldots, IMF_j(i + M_D)$ sont approximés par un polynôme d'ordre L, $\alpha_0 + \alpha_1 i^1 + \alpha_2 i^2 + \ldots + \alpha_L i^L$. Les coefficients α_m sont obtenus par un lissage au sens des moindres carrés, en utilisant une fenêtre glissante.

La deuxième approche pour la fonction de pré-traitement Γ est un seuillage qui s'inspire de celui de Donoho et Johnstone pour le débruitage des signaux par ondelettes [65,66]. Dans ce cas, les échantillons d'une IMF dans l'espace des temps sont vus comme des coefficients d'ondelettes dans l'espace des fréquences. Nous supposons que pour la j^{eme} IMF le bruit est blanc, gaussien et de variance σ_j^2. Nous savons que si S est la médiane de la valeur absolue

[2]Ce filtre est également appelé filtre DISPO (Digital Smoothing Polynomial).

de K variables aléatoires, gaussiennes, et indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_j^2, alors [65, 66] :

$$E[S] \approx 0.6745\,\sigma_j\,, \tag{III.12}$$

où $E[a]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire a. Un estimateur de la variance du bruit de la j^{eme} IMF, $\tilde{\sigma}_j$, est donné par :

$$\tilde{\sigma}_j = MAD_j/0.6745\,, \tag{III.13}$$

$$MAD_j = Median\left\{\left|IMF_j(t) - Median\left\{IMF_j(t')\right\}\right|\right\}\,. \tag{III.14}$$

$\tilde{\sigma}_j$ est également appelé niveau du bruit de la j^{eme} IMF. MAD_j représente la médiane de la valeur absolue de la déviation de la j^{eme} IMF (median absolute deviation). Par ailleurs, le maximum de l'amplitude du bruit de la j^{eme} IMF a une très forte probabilité d'être juste en dessous de

$$\tau_j = \tilde{\sigma}_j\sqrt{2.\log_e(T)}\,, \tag{III.15}$$

où T est le nombre d'échantillons [65, 66]. τ_j est également appelé seuil universel de Donoho [66]. En pratique, le seuil peut être fixé à deux ou trois fois l'écart-type du bruit. Une façon simple de modifier les valeurs des échantillons est d'utiliser une fonction de décision par rapport à ce seuil. Partant du seuil τ_j, une méthode intuitive consiste à ne conserver que les échantillons dont les amplitudes sont supérieures à τ_j et de remplacer les autres par zéro. C'est le principe du seuillage dur (appelé également seuillage brut) appliqué aux coefficients d'ondelettes [65] :

$$\hat{f}_j(t) = \begin{cases} IMF_j(t) & Si\ |IMF_j(t)| > \tau_j \\ 0 & Si\ |IMF_j(t)| \leq \tau_j\,. \end{cases} \tag{III.16}$$

Ainsi, cette approche s'interprète comme la mise à zéro de tous les échantillons qui pourraient être attribuables au bruit. Cependant, elle s'avère parfois trop sélective et d'autres méthodes plus souples ont été développées [11, 145, 163].

Nous proposons d'utiliser le seuillage doux qui est moins excessif que le seuillage dur (*soft-thresholding*) pour atténuer le bruit de chaque IMF. Cette méthode d'atténuation diminue de τ_j l'amplitude de tous les échantillons bruités (valeurs des IMF_j) qui sont au dessus du seuil τ_j. L'estimation des versions débruitées $\hat{f}_j(t)$ des $IMF_j(t)$ associées se calcule de la façon suivante [65] :

$$\hat{f}_j(t) = \begin{cases} IMF_j(t) - \tau_j & Si\ IMF_j(t) \geqslant \tau_j \\ 0 & Si\ |IMF_j(t)| < \tau_j \\ IMF_j(t) + \tau_j & Si\ IMF_j(t) \leqslant -\tau_j\,. \end{cases} \tag{III.17}$$

Ce seuillage doux conduit à des estimations plus lisses que celles obtenues par l'approche dure [11,145,163]. Les différentes étapes du débruitage par EMD, $EMD_{\ debruitage_{Doux}}$, peuvent se décrire à l'aide du pseudo-code suivant :

Entrée :
Signal bruité : $y(t)$;
Sortie :
Signal reconstruit : $\tilde{y}(t)$.

Étape A.
Fixer le critère d'arrêt du tamisage et appliquer l'EMD pour extraire les IMF, $j \in \{1, \ldots, N\}$ et le résidu $r_N(t)$;
Étape B.
Estimer les variances du bruit de chaque IMF, σ_j, à l'aide de l'équation (Eq. III.14) ;
Étape C.
Estimer le seuil, τ_j, et débruiter chaque IMF en fonction de σ_j, en utilisant les relations (Eq. III.13 et III.17) ;
Étape D.
Reconstruire le signal débruité $\tilde{y}(t)$ en utilisant la relation (Eq. III.10).

Tableau III.6 — Pseudo-code de « debruitage » par $EMD_{\,debruitage_{Doux}}$.

Le pseudo-code de l'$EMD_{\,debruitage_{SG}}$ est identique à celui l'$EMD_{\,debruitage_{Doux}}$ (Tab. III.6) où seules les étapes ***B*** et ***C*** sont remplacées par une étape de lissage de Savitzky-Golay d'ordre trois. On peut considérer que cette approche est « semi-paramétrique » dans le sens où des polynômes d'interpolation sont calculés pour débruiter les IMF.

III.3.2 Exemples d'applications

Les deux méthodes proposées dans cette partie : $EMD_{\,debruitage_{Doux}}$ et $EMD_{\,debruitage_{SG}}$ sont illustrées sur les signaux tests utilisés précédemment (*Doppler*, *Blocks*, *Bumps* et *Heavysine* et *ECG*). Les caractéristiques des signaux restent identiques à celles utilisées dans la partie précédente (SNR de 2 dB sauf pour l'*ECG* de -9 dB) (Fig. III.2).

La figure III.6 illustre les résultats de débruitage pour l'ensemble des cinq signaux à l'aide de la méthode $EMD_{\,debruitage_{SG}}$. Globalement, les résultats sont ceux escomptés : les tendances des signaux sont respectées aussi bien au voisinage des singularités que lors des faibles variations (signaux initiaux constants ou lisses). Nous remarquons là encore que les résultats les plus significatifs sont obtenus pour les signaux *Bumps*, *Heavysine* et *ECG* ainsi que pour le signal *Blocks* qui sont proches des signaux originaux (Fig. III.6). La reconstruction des signaux *Doppler*, *Bumps* et *Heavysine* (Figs. III.6(a),(c),(d)) par $EMD_{\,debruitage_{SG}}$ est meilleure que celle obtenue par $EMD_{\,filtrage}$ (Fig. III.5(a),(c),(d)). Par exemple, les oscillations au début du signal *Doppler* (Fig. III.5(a)) sont en grande partie bien reconstruites comparé à celles obtenues par $EMD_{\,filtrage}$. De même, les pics ou modes du signal *Bumps* (Fig. III.5(d)) sont mieux reconstruits que ceux de la figure III.6(c). Ces résultats sont corroborés par les valeurs du SNR (Tab. III.7). En effet, il y a une nette amélioration des SNR de tous les signaux traités par rapport l'approche $EMD_{\,filtrage}$. Ces résultats montrent l'apport de la reconstruction complète et du lissage des IMF par le filtre Savitzky-Golay.

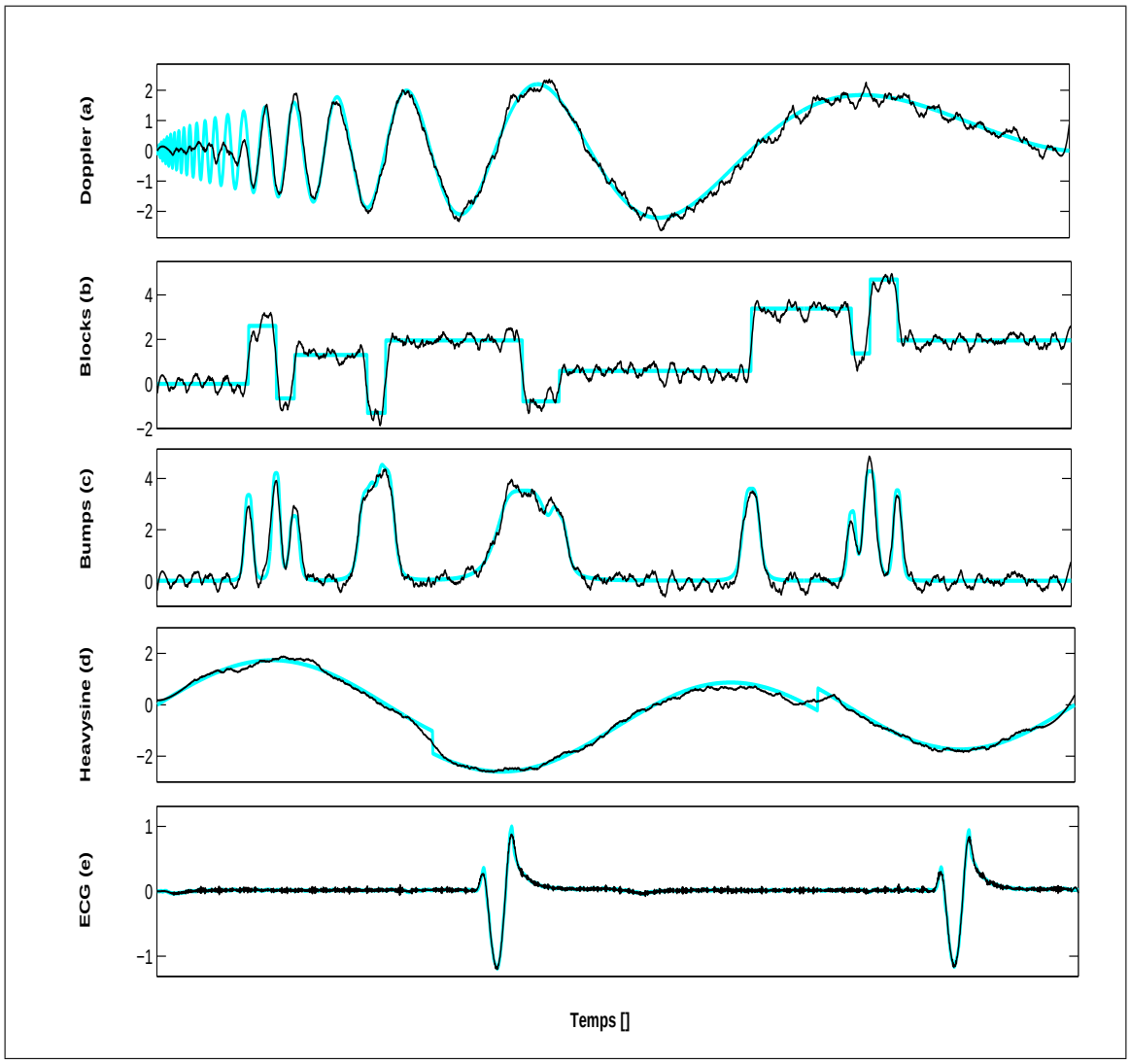


Figure III.6 — Résultats du débruitage par $EMD_{\ debruitage_{SG}}$: en trait plein les signaux reconstruits et en pointillé les signaux non bruités

L'ensemble de ces résultats sont confirmés par les valeurs de SNR obtenues (Tab. III.7). Nous pouvons observer des améliorations significatives du SNR qui varient avec des écarts de 10 dB à 28 dB environ. Ces valeurs sont équivalentes voire meilleures que celles obtenues avec la méthode $EMD_{\ filtrage}$. Les MAE et les SNR permettant de quantifier l'efficacité des méthodes de débruitage sont calculés pour chacun des signaux (Tab. III.7 et III.8). Les caractéristiques des méthodes de comparaison sont les mêmes que celles pour le $EMD_{\ filtrage}$.

Le débruitage doux donne de meilleurs résultats que le moyenneur et le médian pour l'ensemble des signaux et présente des meilleurs rapport signal à bruit pour les signaux Bumps et ECG que les ondelettes. Les résultats du débruitage doux sont intéressants mais un petit peu moins bons que ceux du débruitage par Savitzky-Golay. Cela étant, le débruitage doux est entièrement automatique et ne nécessite aucun réglage de la part de l'utilisateur. Globalement, les résultats du débruitage par Savitzky-Golay sont meilleurs que ceux de l'ensemble des méthodes y compris le seuillage doux.

	Signal				
	Doppler	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]	SNR [dB]
Bruit	$2,03$	$2,03$	$2,03$	$2,03$	$-9,02$
Moyenneur	$9,86$	$9,06$	$9,46$	$12,66$	$7,23$
Médian	$10,57$	$10,17$	$10,55$	$10,67$	$4,62$
Ondelette	**14,97**	**11,94**	**14,47**	$18,76$	$5,82$
$EMD_{\ debruitage_{Doux}}$	$11,13$	$11,98$	$11,18$	$19,86$	**14,39**
$EMD_{\ debruitage_{SG}}$	$13,57$	**12,00**	**14,50**	**20,60**	**17,77**

Tableau III.7 — *SNR* des résultats de débruitage pour les signaux tests contaminés par un bruit blanc, gaussien, et additif.

	Signal				
	Doppler	***Blocks***	***Heavysine***	***Bumps***	***ECG***
	MAE	MAE	MAE	MAE	MAE
Bruit	$0,81$	$0,81$	$0,81$	$0,81$	$0,81$
Moyenneur	$0,32$	$0,29$	$0,32$	$0,24$	$0,04$
Médian	$0,30$	$0,31$	$0,31$	$0,30$	$0,09$
Ondelette	**0,16**	**0,20**	$0,19$	$0,12$	$0,04$
$EMD_{\ debruitage_{Doux}}$	$0,21$	$0,25$	$0,24$	$0,10$	$0,03$
$EMD_{\ debruitage_{SG}}$	$0,18$	$0,22$	**0,18**	**0,09**	**0,01**

Tableau III.8 — *MAE* des résultats de débruitage pour les signaux tests contaminés par un bruit blanc, gaussien, et additif.

III.4 Conclusion

Dans le chapitre **III**, nous avons exploité l'aspect non-linéaire de la décomposition temporelle des signaux par EMD. Deux nouvelles méthodes de traitement de signaux sont proposées : le filtrage ($EMD_{\ filtrage}$) et le débruitage ($EMD_{\ debruitage_{Doux}}$, $EMD_{\ debruitage_{SG}}$).

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode de filtrage basée sur un critère énergétique (CMSE) des IMF issues de l'EMD : l'$EMD_{\ filtrage}$. L'algorithme $EMD_{\ filtrage}$ est extrêmement simple et entièrement piloté par les données. La méthode n'exige ni réglage de paramètres de la part de l'utilisateur ni l'emploi de pré- ou post-traitement. La méthode est limitée aux signaux contaminés par un bruit blanc, gaussien et additif. Les résultats obtenus sur des signaux synthétiques et un signal réel montrent que l' $EMD_{\ filtrage}$ est relativement efficace pour atténuer le bruit. D'autre part, l'$EMD_{\ filtrage}$ donne de meilleurs résultats que les méthodes de filtrage classiques (filtre moyenneur ou médian) et est équivalent à l'approche basée sur les ondelettes. Cette méthode est efficace en particulier pour les signaux très bruités, et également dans le cas ou l'estimation du niveau du bruit des signaux n'est pas possible.

Pour améliorer les résultats de l'$EMD_{\ filtrage}$ et en particulier au niveau des oscillations rapides observées au début du signal Doppler, nous avons traité séparément toutes les IMF et reconstruit le signal complètement : c'est l'approche de débruitage par EMD. En effet, comme toutes les IMF sont conservées par conséquent leurs bandes de fréquences le sont aussi. La méthode est donc vue comme une technique de débruitage. Deux approches de débruitage sont également proposées : $EMD_{\ debruitage_{Doux}}$ et l'$EMD_{\ debruitage_{SG}}$. L'$EMD_{\ debruitage_{Doux}}$

est une méthode de débruitage « de type boite noire » qui ne nécessite aucun pré requis sur le signal à débruiter. Par contre pour la méthode $EMD_{debruitage_{SG}}$, la taille de la fenêtre d'analyse du filtre et l'ordre du polynôme d'interpolation doivent être définis. Cette approche peut être vue comme une approche « semi-paramétrique ». Nous avons testé le débruitage sur les mêmes signaux et comparé les résultats aux mêmes méthodes que précédemment. Les résultats montrent que les tendances de signaux sont respectées aussi bien au voisinage des singularités que au niveau des faibles variations (signaux initiaux constants ou lisses). Comparé à l'$EMD_{filtrage}$ les signaux sont mieux reconstruits et avec de meilleurs rapport signal à bruit. Les résultats de l'$EMD_{debruitage_{Doux}}$ sont intéressants mais un petit moins bons que ceux du débruitage par Savitzky-Golay. Cela étant, l'$EMD_{debruitage_{Doux}}$ est entièrement automatique et ne nécessite aucun réglage de la part de l'utilisateur. Globalement, les résultats du débruitage par Savitzky-Golay sont meilleurs que ceux de l'ensemble des méthodes y compris l'$EMD_{debruitage_{Doux}}$.

Comme pour l'$EMD_{filtrage}$, l'analyse d'une large classe de signaux est nécessaire pour confirmer les résultats obtenus. Ainsi par exemple pour l'$EMD_{debruitage_{SG}}$, pour obtenir une meilleure reconstruction du signal, nous pouvons étudier l'effet de la taille de la fenêtre d'analyse du filtre sur le lissage des IMF et étudier comment déterminer automatiquement cette taille en fonction de l'IMF considérée. En outre, nous pouvons imaginer d'établir d'autres formes de seuillage ou de filtrage comme celles utilisées avec les ondelettes [11, 145].

CHAPITRE IV

L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser

Sommaire

IV.1 Introduction 78
IV.2 L'opérateur de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{R}}$ 78
IV.2.1 Énergie d'un système *masse-ressort* et $\Psi_{\mathbb{R}}$ 79
IV.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser 79
IV.2.3 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ 82
IV.2.4 Applications et limites de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ 82
IV.3 L'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{B}}$ 83
IV.3.1 Extensions de l'opérateur TKEO 83
IV.3.2 Définition et propriétés remarquables de $\Psi_{\mathbb{B}}$ 84
IV.3.3 Mesure d'interaction entre deux signaux par $\Psi_{\mathbb{B}}$ 87
IV.3.4 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la classe de Cohen : généralisation 91
IV.3.5 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et CWVD 95
IV.3.6 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la fonction d'ambiguïté croisée 97
IV.3.7 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ 100
IV.4 Application à la mesure de similarité entre deux signaux 102
IV.4.1 Position du problème 102
IV.4.2 Application à la mesure d'interaction entres deux signaux 104
IV.4.3 Application à la classification des séries temporelles 106
IV.5 Application à la détection et à l'estimation des retards 108
IV.5.1 Position du problème 108
IV.5.2 Méthodologie de détection avec $\Psi_{\mathbb{B}}$ 109
IV.5.3 Application à des signaux synthétiques 110
IV.5.4 Application à l'estimation des retards 112
IV.6 Conclusion 116

Dans ce chapitre nous présentons les opérateurs de Teager-Kaiser qui sont destinés à la démodulation en amplitude et/ou en fréquence des signaux AM-FM, et à la mesure de l'interaction de deux signaux non-stationnaires pour l'estimation des temps de retard. Après un rappel des fondements théoriques et physiques de ces opérateurs, nous présentons un nouveau opérateur appelé $\Psi_{\mathbb{B}}$ généralisant ceux de Teager-Kaiser. Nous établissons les liens théoriques entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et les RTF de la classe de Cohen. Nous présentons trois applications de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ à savoir la détection des signaux, l'estimation des temps de retards, et la mesure de similarité entre signaux non-stationnaires.

IV.1 Introduction

Les résultats présentés et analysés dans les chapitres **II** et **III** ont montré les capacités de l'EMD pour la décomposition temporelle non-linéaire des signaux, et comme outil d'analyse temps-fréquence quand elle est associée à une méthode d'estimation de la FI (la TH ...). Ces résultats ont également montré que les IMF générées par l'EMD sont des composantes de type AM-FM au sens large permettant d'estimer correctement la FI de chacune des mono-composantes. Comme la FI caractérise un comportement fréquentiel local en fonction du temps, l'idée est d'estimer cette dernière également avec une approche locale.

Toujours dans le même esprit que l'EMD nous nous sommes orientés vers une approche de démodulation pour l'estimation de la FI, et également de l'AI, qui soit locale, simple, et rapide. Plus exactement nous avons opté pour une démodulation basée sur l'opérateur de Teager-Kaiser qui est instantanée, bien adapté au signaux non-stationnaires et facile à mettre en œuvre. Une des motivation du choix de cette méthode de démodulation est d'améliorer les résultats d'analyse temps-fréquence obtenus par la THH (cf. chapitre **II**) et ce en proposant une autre approche temps-fréquence associant l'EMD à l'opérateur de Teager-Kaiser (cf. chapitre **V**).

Ce chapitre est structuré ainsi : dans un premier temps nous rappelons le principe de base de l'opérateur de Teager-Kaiser et rappelons ses avantages et ses inconvénients. Dans un deuxième temps nous présentons un nouveau opérateur généralisant celui de Teager-Kaiser et dont nous établissant plusieurs liens théoriques[1] avec les RTF de la classe de Cohen. Nous proposons également une discrétisation de cet opérateur pour sa mise en œuvre informatique. Dans troisième temps nous montrons que le nouveau opérateur est une mesure d'interaction non-linéaire qui permet la détection des signaux ou le calcul des temps de retard.

IV.2 L'opérateur de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{R}}$

Teager et Teager ont montré dans un papier sur un modèle phénoménologique pour la production des voyelles dans le conduit vocal, l'insuffisance du modèle linéaire de la parole [199]. En effet, la production de la parole fait appel à une série de mécanismes non-linéaires qu'il est difficile d'expliquer par une approche linéaire. Les résultats présentés par Teager et Teager et en particulier la courbe d'énergie nécessaire à la production de la parole montrent l'évidence du modèle non-linéaire de la parole [201]. Cependant, l'algorithme ou la méthode de calcul de l'énergie du système ayant généré le signal de parole n'a pas été présenté [201]. Ces mêmes auteurs ont également montré que les fréquences de résonances (formants) apparaissant dans le conduit vocal du signal de parole peuvent varier rapidement en fréquence et en amplitude [199]. Ainsi, ces variations de caractéristiques du signal de parole peuvent être modélisées comme une combinaison linéaire de signaux AM-FM.

L'absence de la méthode de calcul de l'énergie qui a créée le signal de la parole a suscitée l'intérêt de Kaiser [122]. En effet, Kaiser part du constat suivant : un signal de 10 Hz et un autre de 1000 Hz peuvent avoir la même énergie mais l'énergie du système pour créer le signal à 1000 Hz est plus importante que celle de 10 Hz [122]. Pour expliquer cette différence d'énergie, Kaiser montre dans le cas d'un système simple (oscillateur harmonique) que l'énergie nécessaire pour créer le signal oscillant est proportionnelle au carré du produit de

[1] A ce propos, nous avons pris délibérément le parti d'insérer les démonstrations de nombreuses propositions dans le texte, pour la simple raison qu'elles n'existent pas dans la littérature et que ceux sont de nouveaux résultats. Lors d'une première lecture, il n'est pas nécessaire de lire les preuves pour comprendre les résultats

l'amplitude et de la fréquence du signal. Ainsi, l'énergie est fonction des caractéristiques du signal que nous souhaitons créer.

Partant de ce système, Kaiser a proposé un algorithme très simple et rapide pour estimer l'énergie, appelé opérateur d'énergie de Teager-Kaiser, pour vu que la restriction liée à la largeur de bande du signal (signal bande étroite) soit respectée [122]. Une des premiers applications de cet opérateur est la détection des modulations AM-FM des formants en estimant le produit de leur amplitude et de leur fréquence [155]. En se basant sur le résultat de l'opérateur de Teager-Kaiser, Maragos *et al.* sont les premiers à proposer une méthode de démodulation des signaux AM-FM [155]. Cette méthode de démodulation, initialement dédiée aux signaux de parole, a été étendue à toute la classe des signaux à bande étroite au même titre que la TH.

IV.2.1 Énergie d'un système *masse-ressort* et $\Psi_{\mathbb{R}}$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système formé d'une masse m et d'un ressort de raideur k (Fig. IV.1), nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0\,. \tag{IV.1}$$

Cette équation différentielle du second ordre décrit le mouvement du système masse-ressort. Nous supposons que k est constant. C'est le modèle de l'oscillateur harmonique non amorti. $x(t)$ représente la position de la masse à l'instant t. La solution de l'équation IV.1 est une oscillation périodique donnée par :

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \tag{IV.2}$$

où A est l'amplitude des oscillations, $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre d'oscillation (fréquence angulaire), et ϕ la phase initiale.
L'énergie totale, E_x, du système masse-ressort (oscillateur harmonique) est la somme de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie cinétique de la masse :

$$E_x = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{IV.3}$$

En remplaçant la vitesse $v = dx/dt$ et la position $x = A\cos(\Omega t + \phi)$ dans l'équation IV.3 nous obtenons :

$$E_x = \frac{1}{2}m\Omega^2A^2\,, \tag{IV.4}$$

$$E_x \simeq A^2\Omega^2\,. \tag{IV.5}$$

Ainsi, l'énergie de l'oscillateur est proportionnelle au carré de l'amplitude et au carré de la pulsation des oscillations [124]. La valeur de E_x représente l'énergie du système masse-ressort nécessaire pour générer le signal sinusoïdal $x(t)$.

IV.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser

Considérons la version discrète de l'oscillation périodique. Soient x_n les échantillons du signal $x(t)$ représentant le mouvement de l'oscillateur. Nous pouvons écrire sa solution sous

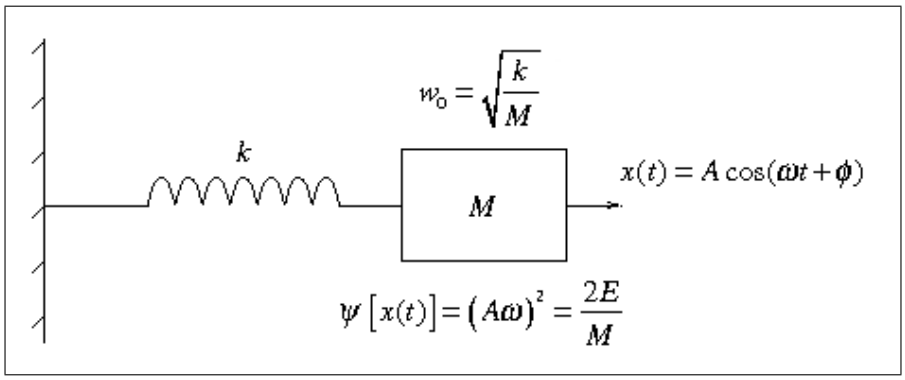


Figure IV.1 — L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser *dépiste* l'énergie fournie par la source sinusoïdale (normalisée par unité de masse^{-1}) qui engendre le signal $x(t)$.

la forme suivante :

$$x_n = A\cos(\Omega n + \phi)\,, \tag{IV.6}$$

où $\Omega = 2\pi f/F_e$ est la pulsation numérique, f la fréquence et F_e la fréquence d'échantillonnage. Nous supposons que l'échantillonnage est régulier. Notons que l'équation IV.6 a trois paramètres ou inconnues (A, Ω, ϕ) qui peuvent être calculées à partir de trois échantillons du signal. Pour la résolution nous utilisons les échantillons x_{n-1}, x_n, et x_{n+1} :

$$\begin{aligned} x_n &= A\cos(\Omega n + \phi)\,, & \text{(IV.7)}\\ x_{n+1} &= A\cos((n+1)\Omega + \phi)\,, & \text{(IV.8)}\\ x_{n-1} &= A\cos((n-1)\Omega + \phi)\,. & \text{(IV.9)} \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)]\,, & \text{(IV.10)}\\ \cos(2\alpha) &= 1 - 2\sin^2\alpha\,. & \text{(IV.11)} \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_{n+1}x_{n-1} &= A^2\cos[(n+1)\Omega + \phi]\cos[(n-1)\Omega + \phi]\,, & \text{(IV.12)}\\ &= \frac{A^2}{2}[2\cos^2(\Omega n + \phi) + 1 - 2\sin^2\Omega]\,, & \text{(IV.13)}\\ &= A^2\cos^2(\Omega n + \phi) - A^2\sin^2\Omega\,, & \text{(IV.14)}\\ &= x_n^2 - A^2\sin^2\Omega\,. & \text{(IV.15)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$A^2\sin^2(\Omega) = x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}\,. \tag{IV.16}$$

Pour des faibles valeurs de Ω nous avons $\sin(\Omega) \approx \Omega$. Si nous limitons les valeurs de Ω à $\Omega < \pi/4 = 0.7854$, c'est à dire $f/F_e < 1/8$, l'erreur commise en approximant $\sin(\Omega)$ par Ω est de $\Omega/\sin\Omega = \frac{\pi/4}{\sqrt{2}/2} \simeq 11\%$ et ce qui permet d'écrire l'expression IV.16 comme suit :

$$A^2\Omega^2 \simeq x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}\,. \tag{IV.17}$$

L'équation IV.17 donne une mesure de l'énergie du signal $x(t)$ dont la fréquence d'échantillonnage est telle que $F_e > 8f$ (c'est à dire au moins deux points dans chaque quart du cycle de l'oscillation sinusoïdale). L'algorithme nécessite alors une fréquence d'échantillonnage à peu prés de 8 fois supérieure de la composante la plus élevée du signal à traiter. Ainsi, la relation IV.17 est vue comme un algorithme de calcul de l'énergie d'un signal mono-composante :

$$E_n = x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = A^2 \sin^2(\Omega) \approx A^2\Omega^2 \,, \tag{IV.18}$$

où E_n est la sortie de l'algorithme et x_n est le signal à traiter. Notons que l'équation IV.18 est indépendante de la phase initiale de l'oscillation. Notons également que cet algorithme est symétrique dans le sens où le changement de x_n en x_{-n} ou de n en $-n$ (en inversant le signal en temps) ne change pas la valeur de l'énergie du signal. L'algorithme est facile à mettre en œuvre et rapide car ne nécessite que trois échantillons.

Bien qu'historiquement, la version discrète de l'opérateur de Teager-Kaiser ait été définie avant la version continue, il est pourtant plus naturel de débuter par la définition de l'opérateur continu en fonction de t.

Définition *L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO) $\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)]$ d'un signal $x(t)$ à valeurs réelles est défini dans le domaine continu par :*

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)] = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - x(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} \,, \tag{IV.19}$$

ou encore :

$$\Psi_{\mathbb{R}}(x) = \dot{x}^2 - x\ddot{x} \,, \tag{IV.20}$$

avec $x \equiv x(t)$, $\dot{x} \equiv dx(t)/dt$ et $\ddot{x} \equiv d^2x(t)/dt^2$ et en considérant la variable indépendante t comme implicite.

L'opérateur TKEO associé au mouvement de l'oscillateur harmonique vaut donc :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}}[x(t)] &= (-A\omega\sin(\omega t))^2 - A\omega\cos(\omega t)(-\omega^2 A\cos(wt)) \,, \\ &= A^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \,, \\ &= \omega^2 A^2 \,. \end{aligned} \tag{IV.21}$$

L'énergie de l'oscillateur harmonique peut donc s'écrire :

$$\underbrace{E_x}_{\substack{\text{Énergie}\\ \text{du}\\ \text{processus}}} = \underbrace{\frac{1}{2}m}_{\substack{\text{Coefficient}\\ \text{de}\\ \text{proportionnalité}}} . \underbrace{\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)]}_{\substack{\text{Opérateur}\\ \text{d'énergie de}\\ \text{Teager-Kaiser}}} .$$

L'opérateur TKEO est donc un opérateur différentiel non-linéaire qui permet de décrire les propriétés locales d'un signal réel $x(t)$, de même grandeur qu'une **énergie**. Il s'exprime simplement à partir du signal ainsi que de ses dérivées premières et secondes [124]. Son expression peu complexe permet une mise en oeuvre informatique aisée [151]. Enfin, il possède naturellement une très bonne résolution temporelle.

IV.2.3 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$

En fonction de la forme de discrétisation choisie pour l'opérateur de dérivation, différentes formules discrètes de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ peuvent être obtenues [122,123,151]. Dans notre travail, nous ne considérons qu'un seul cas : les différences finies du premier ordre à gauche[2].

La variable t étant remplacée par nT_e (T_e est la période d'échantillonnage), la valeur du signal x à l'instant t sera notée $x(nT_e)$ ou plus simplement $x(n)$. Les dérivées d'ordre un et deux au point n peuvent s'exprimer alors par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(n) &= \frac{x(n) - x(n-1)}{T_e}\,, \\ \ddot{x}(n) &= \frac{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)}{T_e^2}\,. \end{aligned}$$

L'opérateur TKEO ainsi discrétisé vaut donc :

$$\Psi_{\mathbb{R}_d} = \frac{x^2(n-1) + x(n)x(n-2)}{T_e^2}\,. \tag{IV.22}$$

En ignorant le décalage d'un échantillon et la normalisation par le facteur T_e^{-2}, nous obtenons la définition dans le domaine discret de l'opérateur d'énergie de Teager Kaiser (TKEO) :

Définition *Soit un signal discret $x(n)$ à valeur réelle. L'opérateur discret de Teager-Kaiser $\Psi_{\mathbb{R}}[x(n)]$ peut s'écrire sous la forme :*

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(n)] = x^2(n) - x(n-1)x(n+1)\,. \tag{IV.23}$$

Par la suite, nous omettrons les indices c et d de $\Psi_{\mathbb{R}}$ puisque le contexte sera clair suivant que nous nous référons au domaine continu ou discret. Enfin, il est nécessaire de noter que le fait de discrétiser l'opérateur de dérivation par une différence finie d'ordre 1 a plusieurs conséquences dont une importante est la sensibilité de l'opérateur discret vis à vis du bruit. Un certain nombre de remarques à ce sujet sont d'ailleurs abordées dans le paragraphe IV.3.7 lors de la discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$.

IV.2.4 Applications et limites de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$

L'une des premières applications significatives de l'opérateur TKEO est la démodulation AM-FM du signal de parole [155]. Dans cet article, les auteurs abordent et exposent les premiers concepts de démodulation AM-FM basés sur l'opérateur TKEO par la suite développés dans d'autres contributions. L'opérateur TKEO a été utilisé dans le domaine de l'analyse de la parole [151,200], de la reconnaissance d'interlocuteurs [119,120]. Il a été généralisé aux signaux AM-FM pour l'estimation de l'enveloppe instantanée et de la FI [148,151]. Il est aussi à la base de développements récents et d'extensions nombreuses aussi bien dans dans le domaine du signal [28,63,99,123,124,132,153] que dans le domaine de l'image [30,148,164,187,188].

Actuellement, l'opérateur TKEO est un outil familier au sein de la communauté du traitement du signal (notamment démodulation) et depuis peu en traitement d'images. Il apparaît habituellement comme une méthode alternative de démodulation et permet de définir une grandeur locale ayant la dimension d'une énergie pour les signaux oscillants. Cependant, étant

[2]Le lecteur intéressé pourra trouver les autres formulations dans l'article de Maragos *et al.* [151].

donnée son origine physique (énergie de l'oscillateur harmonique) et son expression littérale (Eq. IV.23) cet opérateur énergétique de démodulation est limité aux signaux bande étroite et mono-composante [150, 151]. Ainsi, si le signal est multi-composantes alors un filtrage passe-bande est nécessaire pour isoler les différentes composantes du signal avant d'estimer la FI et l'AI de chacune des composantes extraites [28, 33, 38, 102, 152, 175]. D'autre part, nous avons fait remarquer dans le paragraphe précédent que cet opérateur présente une certaine sensibilité au bruit. Ce sujet est d'ailleurs abordé dans le paragraphe IV.3.7.

Face à ses limitations, cet opérateur non-linéaire présente des atouts non négligeables comme par exemple son extrême simplicité pour sa mise en oeuvre, ou encore le fait que cette méthode soit locale (3 points sont suffisants pour le calculer). De plus, l'estimation de la FI ne nécessite pas le calcul du SA. Cela nous permet de s'affranchir de certaines contraintes liées à l'utilisation de la TH (cf. section I.4.1). Enfin, les relations établies avec la WVD (et la fonction d'ambiguïté) dans [99, 100, 131] et sa généralisation à la classe de Cohen démontrée dans la section IV.3.4 permettent de valider son application à l'analyse des signaux non-stationnaires.

IV.3 L'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser : $\Psi_{\mathbb{B}}$

IV.3.1 Extensions de l'opérateur TKEO

L'expression (Eq. IV.19) définit l'opérateur TKEO pour un signal réel. Plusieurs auteurs ont proposé des extensions pour un signal complexe. En effet, nous rencontrons assez fréquemment des signaux à valeurs complexes en traitement du signal et en particulier dans le signal analytique, après une transformation de Fourier ou en traitement d'antenne. Ainsi, Maragos *et al.* [148] proposent pour un signal $x(t)$ à valeur dans $\mathbb{C}$ la formulation :

$$\Psi_{\mathbb{C}_1}[x(t)] = \|\dot{x}(t)\|^2 - \Re[x^*(t)\ddot{x}(t)] \,. \tag{IV.24}$$

Récemment, Hamila *et al.* [99] ont proposé une autre formulation :

$$\Psi_{\mathbb{C}_2}[x(t)] = \dot{x}(t)\dot{x}^*(t) - \frac{1}{2}[\ddot{x}(t)x^*(t) + x(t)\ddot{x}^*(t)] \,. \tag{IV.25}$$

Ils ont notamment montré que l'on a :

$$\Psi_{\mathbb{C}_2}[x(t)] = \Psi_{\mathbb{R}}[x_r(t)] + \Psi_{\mathbb{R}}[x_i(t)] \,, \tag{IV.26}$$

avec $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ où $(x_r,\, x_i)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après les auteurs, cette forme permet de mieux appréhender la symétrie de l'opérateur [99]. Dans les articles [99, 100], les auteurs relient l'opérateur $\Psi_{\mathbb{C}_2}$ avec la WVD, ainsi qu'avec la fonction d'ambiguïté. Il est à noter que Lin *et al.* [131] sont les premiers à avoir montré le lien entre la WVD et l'opérateur d'énergie mais uniquement sous leurs formes discrètes.

Parallèlement à ces extensions sur des signaux complexes, Kaiser [124] propose pour représenter l'interaction entre deux signaux une extension permettant d'estimer l'énergie d'interaction croisée entre deux signaux à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à valeurs réelles, cet opérateur est défini par [124] :

$$\Psi_{2\mathbb{R}}(x, y) = \dot{x}\dot{y} - x\ddot{y} \,, \tag{IV.27}$$

Son symétrique est défini par :

$$\Psi_{2\mathbb{R}}(y,x) = \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x}\,, \tag{IV.28}$$

où $(\dot{x},\dot{y})$ et $(\ddot{x},\ddot{y})$ représentent les dérivées temporelles du premier et du second ordre du couple (x,y). Cette fonction peut être vue comme une mesure d'interaction-énergétique entre deux signaux réels. Par analogie avec l'étude énergétique effectuée sur le système $masse - ressort$, si x et y représentent une quantité équivalente à un mouvement de déplacement, alors $\Psi(x,y)$ (ou $\Psi(y,x)$) a la dimension d'une énergie [154]. Notons que si $x = y$, alors nous retrouvons l'expression de l'opérateur TKEO.

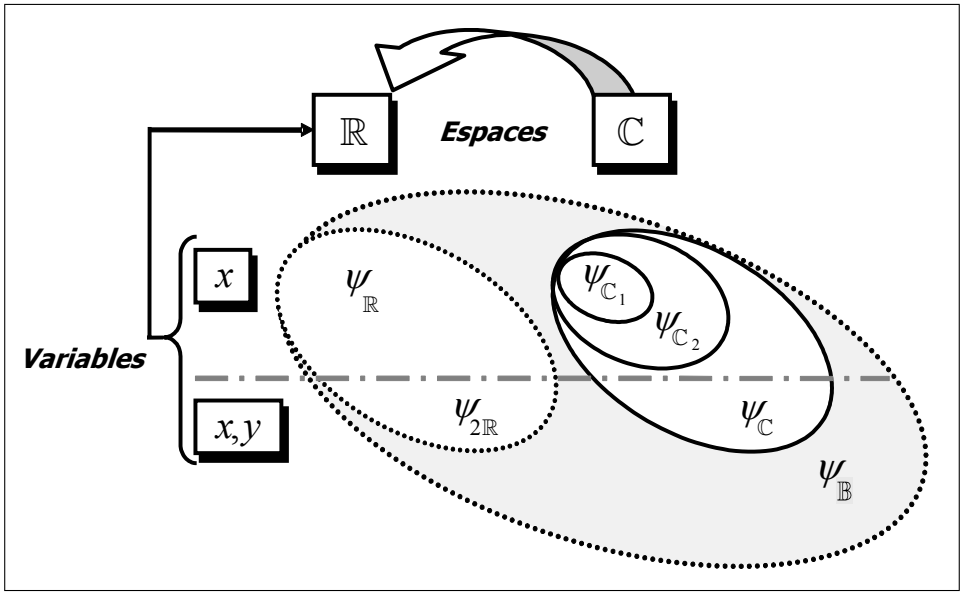


Figure IV.2 — Schéma relationnel entre les différents opérateurs d'énergie dans un espace $1D$.

Des relations existent entre les différents opérateurs d'énergie présentés dans la littérature (Fig. IV.2).
Une des limites de l'opérateur $\Psi_{2\mathbb{R}}$ et qu'il n'est défini que pour des signaux réels et qu'il n'est pas commutatif ($\Psi_{2\mathbb{R}}(x,y) \neq \Psi_{2\mathbb{R}}(y,x)$). Nous proposons dans la suite une forme étendue et symétrique de l'opérateur $\Psi_{2\mathbb{R}}$ pour des signaux complexes : l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser $_{\mathbb{B}}$ (CTKEO$_{\mathbb{B}}$ pour Cross Teager-Kaiser energy operator$_{\mathbb{B}}$).

IV.3.2 Définition et propriétés remarquables de $\Psi_{\mathbb{B}}$

La construction de nouveau opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser repose sur un premier opérateur $\Psi_{\mathbb{C}}$ défini comme suit [37] :

Définition *Soient deux signaux x et y distincts à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{C}}$ s'exprime sous la forme :*

$$\Psi_{\mathbb{C}}(x,y) = \frac{1}{2}[\dot{x}^*\dot{y} + \dot{x}\dot{y}^*] - \frac{1}{2}[x\ddot{y}^* + x^*\ddot{y}]\,, \tag{IV.29}$$

$$\Psi_{\mathbb{C}}(y,x) = \frac{1}{2}[\dot{x}^*\dot{y} + \dot{x}\dot{y}^*] - \frac{1}{2}[y\ddot{x}^* + y^*\ddot{x}]\,, \tag{IV.30}$$

où le symbole * désigne la conjugaison complexe.

Il faut noter que si $x = y$ nous retrouvons l'expression proposée par Hamila [99] (Eq. IV.26) :

$$\Psi_{\mathbb{C}}(x,x) = \Psi_{\mathbb{C}_2}(x) = \dot{x}\dot{x}^* - \tfrac{1}{2}[\ddot{x}x^* + x\ddot{x}^*] \quad .$$

A partir de l'expression de $\Psi_{\mathbb{C}}(x,y)$, une des solutions simples pour rendre cet opérateur symétrique est de combiner $\Psi_{\mathbb{C}}(x,y)$ et son symétrique $\Psi_{\mathbb{C}}(y,x)$ dans une même expression afin d'obtenir $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)$ [37].

Définition *L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)$ est défini par :*

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= \frac{1}{2}[\Psi_{\mathbb{C}}(x,y) + \Psi_{\mathbb{C}}(y,x)]; & \text{(IV.31)} \\ &= \frac{1}{2}[\dot{x^*}\dot{y} + \dot{x}\dot{y^*}] - \frac{1}{4}[\ddot{xy^*} + x^*\ddot{y} + \ddot{yx^*} + y^*\ddot{x}] \,. & \text{(IV.32)} \end{aligned}$$

Ainsi construit, il est évident que l'opérateur, $\Psi_{\mathbb{B}}$ est bien symétrique : $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = \Psi_{\mathbb{B}}(y,x)$. De plus si nous posons $x = y$, alors :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{B}}(x,x) &= \Psi_{\mathbb{C}}(x,x) \equiv \Psi_{\mathbb{C}}(x); & \text{(IV.33)} \\ &= \Psi_{\mathbb{C}_2}(x) \,. \end{aligned}$$

La symétrie est intéressante si nous voulons construire autour de l'opérateur une mesure de similarité pour les signaux. Nous retrouvons bien l'expression de l'équation IV.25 proposée par Hamila [99]. Par la suite pour plus de clarté nous utilisons la notation $\Psi_{\mathbb{B}}(x,x) \equiv \Psi_{\mathbb{B}}(x)$.

Par ailleurs, considérons la fonction d'autocorrélation instantanée définie pour un signal complexe $x(t)$ par [20] :

$$R_x(t,\tau) = x(t+\frac{\tau}{2}).x^*(t-\frac{\tau}{2}) \,. \qquad \text{(IV.34)}$$

L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)]$ vérifie la relation proposée par Hamila *et al.* [101] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)] = -2\frac{\partial^2 R_x(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} \,. \qquad \text{(IV.35)}$$

Par la suite, cette relation sera généralisée pour deux signaux complexes x et y distincts (Proposition. 9). L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ ainsi défini possède quelques propriétés remarquables que nous allons étudier. Pour simplifier les notations, nous notons $\Psi_{\mathbb{B}}$ de $x(t)$ et $y(t)$ par $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y;t)$ et "$\leftarrow$" correspond à l'opérateur d'affectation.

Propriétés de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$

– $\Psi_{\mathbb{B}}$ est une mesure de similarité :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y;t) \geq 0 \,,$$
$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y;t) = \Psi_{\mathbb{B}}(y,x;t) \,.$$

– $\Psi_{\mathbb{B}}$ est à valeurs réelles :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y;t) = \Psi^*_{\mathbb{B}}(x,y;t) \,.$$

– $\Psi_{\mathbb{B}}$ est invariable par translation temporelle :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x(t-t_0), y(t-t_0); t) = \Psi_{\mathbb{B}}(x,y;t-t_0) \,.$$

– $\Psi_{\mathbb{B}}$ conserve les lois d'évolutions en amplitude :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(\alpha x(t), \beta y(t)) = \alpha.\beta \Psi_{\mathbb{B}}(x, y; t) \, .$$

Cette relation montre par exemple que l'instant du maximum d'interaction est indépendant de l'échelle des amplitudes.

– Dilatation en temps :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x(at), y(at)) = a^2 \Psi_{\mathbb{B}}(x, y; t) \, .$$

■

Partant des cinq propriétés données ci-dessus, on peut en déduire aisément quelques relations simples (x et y étant deux signaux distincts à valeurs dans $\mathbb{C}$, a et b deux constantes dans $\mathbb{R}$) :

1. $\Psi_{\mathbb{B}}(0, x) = \Psi_{\mathbb{B}}(x, 0) = 0$, l'interaction entre un signal $x(t)$ et 0 est nulle, il n'y a pas d'échange énergétique ;
2. $\Psi_{\mathbb{B}}(a, x) = \Psi_{\mathbb{B}}(x, a) = -\dfrac{a}{2}\Re[\ddot{x}]$;
3. $\Psi_{\mathbb{B}}(x + a, y) = \Psi_{\mathbb{B}}(x, y) + \Psi_{\mathbb{B}}(a, y)$;
4. $\Psi_{\mathbb{B}}(x + a, x) = \Psi_{\mathbb{C}}(x) - \dfrac{a}{2}\Re[\ddot{x}]$;
5. $\Psi_{\mathbb{B}}(ax, y) = a.\Psi_{\mathbb{B}}(x, y)$;
6. $\Psi_{\mathbb{B}}(ax, x) = a.\Psi_{\mathbb{C}}(x)$;
7. $\Psi_{\mathbb{B}}(x + y, x + y) = \Psi_{\mathbb{B}}(x) + \Psi_{\mathbb{B}}(y) + 2\Psi_{\mathbb{B}}(x, y)$;
8. $\Psi_{\mathbb{B}}(e^{-j\omega_1 t}, e^{-j\omega_2 t}) = \dfrac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t$;
9. $\Psi_{\mathbb{B}}(a, b) = 0$.

Cette dernière relation signifie que l'interaction entre deux constantes est nulle : si on considère deux systèmes au repos alors il ne peut pas y avoir d'échange (interaction) entre les deux processus.
La relation (7) montre que $\Psi_{\mathbb{B}}$ répond au principe de superposition quadratique. ■

Différentes propositions permettant d'interpréter et d'appliquer l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ vont maintenant être établies.

Proposition 1 *Soient deux signaux x et y à valeurs dans $\mathbb{C}$. $\Psi_{\mathbb{B}}(x, y)$ est une forme bilinéaire symétrique et $\Psi_{\mathbb{C}}(x) = \Psi_{\mathbb{B}}(x, x)$ est la forme quadratique associée.*

Démonstration :

1. La symétrie de l'opérateur est établie par construction.
2. Linéarité selon x :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbb{B}}(ax_1 + bx_2, y) &= \frac{1}{2}[a\dot{x}_1^*\dot{y} + b\dot{x}_2^*\dot{y} + a\dot{x}_1\dot{y}^* + b\dot{x}_2\dot{y}^*] \\
&- \frac{1}{4}[ax_1\ddot{y}^* + bx_2\ddot{y}^* + ax_1^*\ddot{y} + bx_2^*\ddot{y} + ay\dddot{x}_1^* + by\dddot{x}_2^* + ay^*\ddot{x}_1 + by^*\ddot{x}_2] \, , \\
&= \frac{a}{2}[\dot{x}_1^*\dot{y} + \dot{x}_1\dot{y}] + \frac{b}{2}[\dot{x}_2^*\dot{y} + \dot{x}_2^*\dot{y}(t)^*] \\
&- \frac{a}{4}[x_1\ddot{y}^* + x_1^*\ddot{y} + y\ddot{x}_1^* + y^*\ddot{x}_1] - \frac{b}{4}[x_2\ddot{y}^* + x_2^*\ddot{y} + y\ddot{x}_2^* + y^*\ddot{x}_2] \, , \\
&= a\Psi_{\mathbb{B}}(x_1, y) + b\Psi_{\mathbb{B}}(x_2, y) \, .
\end{aligned}$$

3.De manière similaire, linéarité selon y :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x, ay_1 + by_2) \quad = \quad a\Psi_{\mathbb{B}}(x, y_1) + b\Psi_{\mathbb{B}}(x, y_2)\,.$$

4. Forme quadratique :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x, x) \quad = \quad \Psi_{\mathbb{C}}(x, x) \;\equiv\; \Psi_{\mathbb{C}}(x), \quad \text{(d'après l'équation IV.31).}$$

■

Proposition 2 *L'opérateur CTKEO$_{\mathbb{B}}$ de deux signaux dans $\mathbb{C}$ est égal à la somme des énergie croisées de Teager de leurs partie réelles et de leurs parties imaginaires.*

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x, y) \quad = \quad \Psi_{\mathbb{B}}(x_r, y_r) + \Psi_{\mathbb{B}}(x_i, y_i)\,, \tag{IV.36}$$

avec $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ et $y(t) = y_r(t) + jy_i(t)$ où (x_r, x_i, y_r, y_i) sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbb{B}}(x, y) \quad &= \quad \frac{1}{2}[(\dot{x_r} - j\dot{x_i})(\dot{y_r} + j\dot{y_i}) + (\dot{x_r} + j\dot{x_i})(\dot{y_r} - j\dot{y_i})] \\
&- \quad \frac{1}{4}[(x_r + jx_i)(\ddot{y_r} - j\ddot{y_i}) + (x_r - jx_i)(\ddot{y_r} + j\ddot{y_i}) \\
&+ \quad (y_r + jy_i)(\ddot{x_r} - j\ddot{x_i}) + (y_r - jy_i)(\ddot{x_r} + j\ddot{x_i})]\,, \\
\Psi_{\mathbb{B}}(x, y) \quad &= \quad \dot{x_r}\dot{y_r} - \frac{1}{2}[x_r\ddot{y_r} + \ddot{x_r}y_r] + \dot{x_i}\dot{y_i} - \frac{1}{2}[x_i\ddot{y_i} + \ddot{x_i}y_i]\,.
\end{aligned} \tag{IV.37}$$

■

Cette proposition permet d'estimer séparément la partie réelle indépendamment de la partie complexe (et vice-versa). Cette propriété est utilisée lors de la discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ (Partie. IV.3.7).

Par ailleurs les formulation (Eq. IV.31 et IV.37) permettent de retrouver les définitions proposées par Maragos *al.* [148] et par Hamila *al.* [99] :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbb{B}}(x, x) \quad &= \quad \Psi_{\mathbb{C}}(x, x) \equiv \Psi_{\mathbb{B}}(x) \equiv \Psi_{\mathbb{C}}(x)\,, \\
&= \quad \Psi_{\mathbb{C}_1}(x)\,, \\
&= \quad \Psi_{\mathbb{C}_2}(x)\,.
\end{aligned}$$

Après avoir montré quelques propriétés mathématiques importantes de $\Psi_{\mathbb{B}}$, nous allons étudier plus précisément l'une de ses propriété, à savoir l'interaction énergétique entre deux signaux.

IV.3.3 Mesure d'interaction entre deux signaux par $\Psi_{\mathbb{B}}$

Une des méthodes classiques pour mesurer l'interaction entre deux signaux est la corrélation croisée (CC). Cette mesure est bien adaptée dans le cas où le lien entre les signaux est linéaire. En pratique, l'interaction entre signaux est non linéaire et par conséquent le maximum de la CC ne correspond pas nécessairement au maximum d'interaction entre les signaux. Ainsi, par exemple, la mesure des temps de Retard (TR ou TD pour Time delay)

entre capteurs (acoustiques ...) basée sur la CC est problématique. La non linéarité peut provenir des phénomènes sous-jacents aux signaux ou des capteurs dont la réponse est non linéaire.

IV.3.3.1 *Interaction et similarité*

Nous avons établi dans la section précédente que $\Psi_{\mathbb{B}}$ est une mesure de similarité entre deux signaux. A partir de cette propriété, si les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux AM-FM alors l'énergie d'interaction peut être estimée grâce à l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$.

Considérons deux signaux AM-FM : $x(t) = a(t)e^{j\phi_1(t)}$ et $y(t) = b(t)e^{j\phi_2(t)}$. On peut montrer l'énergie d'interaction est (Annexe. B(1)) :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= \left[\frac{ab}{2}\dot{\phi}^2 + (\dot{a}\dot{b} - \frac{a\ddot{b}+\ddot{a}b}{2})\right]\cos(\phi_{21}) + \\ &\quad \left[\frac{ab}{2}(\ddot{\phi}_{21}) + (a\dot{b} - \dot{a}b)\dot{\phi}^2\right]\sin(\phi_{21})\,, \end{aligned} \tag{IV.38}$$

où $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2$, $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$ et $\ddot{\phi}_{21} = \ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1$.

A partir de cette relation, nous pouvons établir la proposition ci-dessous :

Proposition 3 *Soit $x(t) = a(t)e^{j\omega_1}$ et $y(t) = b(t)e^{j\omega_2}$ deux signaux AM. Le maximum d'interaction énergétique entre ces deux signaux est donné par :*

$$\mid \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) \mid \leq \mid \dot{a}\dot{b} - \frac{a\ddot{b}+\ddot{a}b}{2} \mid , \tag{IV.39}$$

où $\omega_1/2\pi$ et $\omega_2/2\pi$ sont les fréquences respectives de x et y.

Soit $x(t) = Ae^{j\phi_1(t)}$ et $y(t) = Be^{j\phi_2(t)}$ deux signaux FM. Le maximum d'interaction énergétique entre ces deux signaux est donné par :

$$\mid \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) \mid \leq \mid \frac{AB}{2} \mid . \mid (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + (\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2) \mid \ . \tag{IV.40}$$

Démonstration :

Si x et y sont des signaux AM alors ω_1 et ω_2 sont constants et l'équation IV.38 se réduit à :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = \left[\dot{a}\dot{b} - \frac{a\ddot{b}+\ddot{a}b}{2}\right]\cos(\omega_2 - \omega_1)\,. \tag{IV.41}$$

En prenant la valeur absolue de chaque coté de l'égalité de l'équation IV.41, nous obtenons l'équation IV.39.

Si x et y sont des signaux FM alors A et B sont constants et l'équation IV.38 se réduit à :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = \frac{AB}{2}\left[(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2\cos(\phi_{21}) + (\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2)\sin(\phi_{21})\right]. \tag{IV.42}$$

En prenant la valeur absolue de chaque coté de l'égalité de la relation IV.42, nous obtenons (Eq. IV.40).

■

La relation IV.40 permet d'énoncer que l'interaction énergétique entre deux signaux AM-FM repose sur une expression fonction des FI des deux signaux et des dérivées secondes de leurs phases.

IV.3.3.2 *Interaction et détection*

Les propriétés d'interaction énergétique de $\Psi_{\mathbb{B}}$ peuvent être appliquées dans une problématique de détection. Considérons le cas de deux capteurs qui enregistrent des versions décalées en temps et bruitées d'un même signal $s(t) = Ae^{j\omega t}$:

$$\begin{cases} x(t) = s(t) + n_1(t)\,, \\ y(t) = \alpha s(t-\tau)e^{j\omega(t-\tau)} + n_2(t)\,, \end{cases} \tag{IV.43}$$

où α un coefficient d'atténuation constant. Les paramètres τ et ω caractérisent le retard et le décalage fréquentiel entre les deux mesures de capteurs. Les bruits $\{n_1(t)\}$ et $\{n_2(t)\}$ sont supposés de moyenne nulle, décorrélés, et indépendants de $x(t)$ et $y(t)$. La problématique est de pouvoir estimer le décalage temporel (TD) τ.

Nous posons $u \equiv u(t) = Ae^{j\phi_1(t)}$, $v \equiv v(t) = Ae^{j\phi_2(t-\tau)}$ et $\phi_2(t-\tau) = \phi_1(t-\tau) + \omega(t-\tau)$. Le système (Eq. IV.43) peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + n_1(t)\,, \\ y(t) = v(t) + n_2(t)\,. \end{cases} \tag{IV.44}$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 4 *Soient deux signaux x et y :*

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{j\phi_1(t)} + n_1(t) \\ y(t) = \alpha.Ae^{j\phi_2(t-\tau)} + n_2(t) \end{cases} \tag{IV.45}$$

où $n_1(t)$ et $n_2(t)$ sont de moyenne nulle, décorrélés, et indépendants de $x(t)$ et $y(t)$. Nous supposons que $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivable en moyenne quadratique. Nous avons alors :

$$E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] = E\left[\Psi_{\mathbb{B}}\left(Ae^{j\phi_1(t)}, \alpha.Ae^{j\phi_2(t-\tau)}\right)\right]\,, \tag{IV.46}$$

$$E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] = \frac{\alpha A^2}{2} E\left[\left(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2\right)^2 \cos\left(\phi_{21}\right)\right]\,. \tag{IV.47}$$

avec $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$.

Démonstration :
La démonstration quoique extrêmement intéressante, nous avons décidé de la placer entièrement en annexe (Annexe. B(2)). Nous présentons ici simplement la démarche.

Il s'agit d'évaluer successivement les quantités :
- $\Psi_{\mathbb{B}}$ en fonction de u, v, n_1 et n_2 et des dérivées respectives.
- Puis en passant à l'espérance en tenant compte du fait que d'une part n_1 et n_2 sont de moyennes nulles et dé-corrélés et que d'autre part u (respectivement v) et n_2 (respectivement n_1) sont indépendant on montre que nous avons :

$$\begin{aligned} E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] &= A\alpha E[\Psi_{\mathbb{B}}(u,v)] + AE[\dot{u}^*.\dot{n}_2] + \alpha E[\dot{n}_1.\dot{v}] \\ &\quad +2E[\dot{n}_1.\dot{n}_2] + AE[\dot{u}.\dot{n}_2] + \alpha E[\dot{n}_1.\dot{v}^*] \,. \end{aligned} \tag{IV.48}$$

- Finalement en montrant que $E[\dot{n}_1.\dot{v}^*] = 0$ et de façon similaire : $E[\dot{n}_2.\dot{u}] = 0$, $E[\dot{n}_2.\dot{u}^*] = 0$, $E[\dot{n}_1.\dot{v}] = 0$ et $E[\dot{n}_1.\dot{n}_2] = 0$ nous obtenons l'expression IV.46 :

$$\begin{aligned} E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] &= A\alpha E[\Psi_{\mathbb{B}}(u,v)] \,, \\ &= \frac{\alpha A^2}{2}\left[(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2\cos(\phi_{21}) + (\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2)\sin(\phi_{21})\right] . \end{aligned} \tag{IV.49}$$

- La relation IV.47 est relativement immédiate.

■

Nous cherchons le maximum de la relation IV.47.
Pour $\cos(\phi_{21}) = 1$, nous avons : $\phi_2(t-\tau) = \phi_1(t-\tau)$,

Et puisque : $\phi_2(t-\tau) = \phi_1(t-\tau) + \omega(t-\tau)$, il s'en suit nécessairement que nous avons alors $\boxed{t = \tau}$.
Finalement,

$$\max \mid \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) \mid = \frac{A^2}{2} \mid \alpha \mid .(2\dot{\phi}_1^2 + \omega)^2 \,, \tag{IV.50}$$

se produit pour $\boxed{t = \tau}$.

L'argument τ qui maximise l'équation IV.47 fournit alors une évaluation du temps de retard TD. Comme la durée du signal est fini seule une estimation de la quantité $E[(\cos(\phi_{21})]$ est possible :

$$E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] \simeq \frac{2\alpha(\omega A)^2}{(T-\tau)} \int_{\tau}^{T} \cos(\phi_{21})dt = \varepsilon_{\mathbb{B}}(\tau) \,. \tag{IV.51}$$

Une évaluation simple du retard se détermine en maximisant ψ :

$$\tilde{\tau} = \arg \max_{\tau \in [0,T]} [\varepsilon_{\mathbb{B}}(\tau)] \,. \tag{IV.52}$$

Ainsi, **le problème de l'évaluation de TD est interprété comme une mesure d'interaction entre deux signaux (pour des signaux complexes FM)**. Partant de ces résultats théoriques nous proposons dans le paragraphe IV.5 une méthode d'estimation des TD entre deux signaux.

Dans l'immédiat, on se propose de démontrer quelques relations liant le $\text{CTKEO}_{\mathbb{B}}$ et l'ensemble de la classe de Cohen.

IV.3.4 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la classe de Cohen : généralisation

L'objectif de cette partie est d'étendre et de généraliser les résultats de Hamila *et al.* [100], limités à la WVD, aux distributions temps-fréquence de la classe de Cohen. Dans cette partie, nous supposerons que $x = y$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Rappelons que l'opérateur de CTKEO$_{\mathbb{B}}$ est défini par (Eq. IV.31) :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = \frac{1}{2}[\dot{x^*}\dot{y} + \dot{x}\dot{y^*}] - \frac{1}{4}[\ddot{y^*} + x^*\ddot{y} + y\ddot{x^*} + y^*\ddot{x}] \,,$$

et que la WVD $W_x(u,\nu)$ est donnée par [20] :

$$W_x(u,\nu) = \int_{\mathbb{R}} R_x(u,\tau) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau \,. \tag{IV.53}$$

où $R_x(u,\tau)$ la fonction d'autocorrélation instantanée du signal x (Eq. IV.34). La classe de Cohen regroupe l'ensemble des représentations quadratiques qui satisfont les propriétés de covariance (invariance de décalage temporel et fréquentiel) et se définie par [48] :

$$C_x(t,\nu;\Phi) = \int\int\int e^{2j\pi\xi u - 2j\pi\xi t} \Phi(\xi,\tau) R_x(u,\tau) e^{-2j\pi\nu\tau} d\xi du d\tau \,. \tag{IV.54}$$

avec $C_x(t,\nu;\Phi)$ l'ensemble des distributions de la classe de Cohen et Φ la fonction de paramétrisation de la TFR [76, 110].

La fonction de paramétrisation satisfait les conditions d'admissibilité (FI et retard de groupe) suivantes [21, 47, 76, 110] :

$$\Phi(0,\tau) = 1 \,,\ (\forall\tau)\ et\ \ \frac{\partial\Phi(\xi,\tau)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} = 0 \,, \tag{IV.55}$$

$$\Phi(\xi,0) = 1 \,,\ (\forall\xi)\ et\ \ \frac{\partial\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \,. \tag{IV.56}$$

L'équation IV.54 peut alors être ré-écrite sous la forme :

$$C_x(t,\nu;\Phi) = \int\int \underbrace{\left[\int R_x(u,\tau) e^{j2\pi\xi u} du\right]}_{A_x(\xi,\tau)} \Phi(\xi,\tau) e^{-2j\pi(\nu\tau+\xi t)} d\xi d\tau \,, \tag{IV.57}$$

avec $A_x(\xi,\tau)$ la fonction d'ambiguïté symétrique de x [20].

$C_x(t,\nu;\Phi)$ s'exprime ainsi comme la transformation de Fourier 2D de la fonction $M(\xi,\tau) = \int \Phi(\xi,\tau) R_x(u,\tau) e^{+j2\pi\xi u} du$, appelée fonction d'ambiguïté généralisée conjointe temps-fréquence associée à $C_x(t,\nu;\Phi)$ [47] :

$$M(\xi,\tau) = \int\int C_x(t,\nu;\Phi) e^{j2\pi(\nu\tau+\xi t)} dt d\nu \,, \tag{IV.58}$$

$$M(\xi,\tau) = \Phi(\xi,\tau).A_x(\xi,\tau) \,. \tag{IV.59}$$

A partir de ces expressions, nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 5 *Soit $x(t)$ un signal complexe. $\Psi_{\mathbb{B}}$ est lié à $M(\xi,\tau)$ et $\Phi(\xi,\tau)$ par l'expression :*

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)](\xi) = -2\mathcal{F}^{-1}\left\{\left[\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} - A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}\right]\right\}^*, \tag{IV.60}$$

avec $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier.

Démonstration :

En différenciant deux fois l'expression IV.59 par rapport à la variable τ et en utilisant les relations IV.56 et IV.35, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} &= \left.\frac{\partial^2[A_x(\xi,\tau)\Phi(\xi,\tau)]}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0},\\
\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} &= \left.\frac{\partial^2 A_x(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} + A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0},\\
\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} &= \int \left.\frac{\partial^2 R_x(u,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} e^{j2\pi\xi u}du + A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0},\\
\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2}\left[\int \Psi^*_{\mathbb{B}}[x(u)]e^{-2j\pi\xi u}du\right]^* + A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0},\\
\left.\frac{\partial^2 M(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{\Psi^*_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi)\right]^* + A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}.
\end{aligned} \tag{IV.61}$$

Comme $\Psi^*_{\mathbb{B}}[x(u)] = \Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]$, le résultat est alors démontré. ■

Ce résultat permet alors d'obtenir la relation entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et l'ensemble des TFR de la classe de Cohen :

Proposition 6 *Soit $x(t)$ un signal complexe. La relation entre $\Psi_{\mathbb{B}}$, l'ensemble des distributions de la classe de Cohen $C_x(t,\nu;\Phi)$, et la fonction de paramétrisation $\Phi(\xi,\tau)$ est :*

$$\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi) = \left[8\pi^2\int\int \nu^2 C_x(t,\nu;\Phi)e^{j2\pi\xi t}dtd\nu - 2\mathcal{F}\{\mid x(u)\mid^2\}(\xi)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}\right]^*. \tag{IV.62}$$

Démonstration :

En partant de l'équation IV.61, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{F}\{\Psi^*_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi)\right]^* &= -2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[M(\xi,\tau) - x(\xi,0)\Phi(\xi,\tau)\right]_{\tau=0},\\
\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi) &= -2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\int\int C_x(t,\nu;\Phi)e^{j2\pi(\nu\tau+\xi t)}dtd\nu - A_x(\xi,0)\Phi(\xi,\tau)\right]^*_{\tau=0},\\
\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi) &= \left[8\pi^2\int\int \nu^2 C_x(t,\nu;\Phi)e^{j2\pi\xi t}dtd\nu - 2A_x(\xi,0)\left.\frac{\partial^2\Phi(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}\right]^*.
\end{aligned} \tag{IV.63}$$

Puisque $A_x(\xi,0) = \mathcal{F}\{\mid x(u) \mid^2\}(\xi)$, le résultat est démontré. ■

La proposition (6) apparaît alors comme la généralisation des travaux de Hamila *et al.* à l'ensemble de la classe de Cohen. Leur résultat sur la distribution de Wigner-ville est obtenu en posant $\Phi(\xi,\tau) = 1$:

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] = -2\mathcal{F}^{-1}\left\{ \left.\frac{\partial^2 A_x(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} \right\}^* , \tag{IV.64}$$

soit, d'après l'équation IV.35 :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] = -2\frac{\partial^2 R_x(u,\tau)}{\partial\tau^2} . \tag{IV.65}$$

A présent, nous nous intéressons aux moments conjoints en temps-fréquence permettant de caractériser un signal $x(t)$. L'expression de cette grandeur, m_{pq} s'exprime en fonction de C_x [198] :

$$m_{pq} = \int\int t^p \nu^q C_x(t,\nu;\Phi) dt d\nu \ , \quad (n,m = 1,2,\ldots) . \tag{IV.66}$$

Proposition 7 *Soit $x(t)$ un signal complexe. La relation entre la classe de Cohen $C_x(t,\nu;\Phi)$ et l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est :*

$$\int \Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] du = 8\pi^2 \int\int \nu^2 C_x(t,\nu;\Phi) dt d\nu , \tag{IV.67}$$

et le moment m_{02} est donné par :

$$m_{02} = \frac{1}{8\pi^2}\int \Psi_B[x(u)] du . \tag{IV.68}$$

Démonstration :
En utilisant la relation IV.55 (soit pour $\xi = 0$), l'équation IV.58 peut s'écrire :

$$\int R_x(u,\tau) du = \int\int C_x(t,\nu;\Phi) e^{j2\pi\nu\tau} dt d\nu . \tag{IV.69}$$

En différenciant par deux fois l'expression IV.69 par rapport à τ et en utilisant la relation IV.55, nous obtenons :

$$\int \left.\frac{\partial^2 R_x(u,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} du = -4\pi^2 \int\int \nu^2 C_x(t,\nu;\Phi) \left. e^{j2\pi\nu\tau}\right|_{\tau=0} dt d\nu . \tag{IV.70}$$

En substituant dans l'équation IV.70 l'expression IV.65, nous obtenons finalement :

$$\frac{-1}{2}\int \Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] du = -4\pi^2 \int\int \nu^2 C_x(t,\nu;\Phi) dt d\nu .$$

La relation entre l'opérateur de $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la WVD est démontrée comme un cas particulier des propositions (Propositions 5 et 6). Nous pouvons remarquer que pour $p = 0$, $q = 2$ le moment

m_{02} peut s'exprimer aisément en fonction de $\Psi_{\mathbb{B}}$:

$$m_{02} = \frac{1}{8\pi^2} \int \Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]du \, .$$

■

Si nous étudions l'expression IV.68 de plus près, nous pouvons remarquer que la valeur moyenne de $\Psi_{\mathbb{B}}$ est proportionnelle au moment conjoint m_{02}. Cette relation a pour conséquence de permettre d'estimer simplement m_{02}. On peut noter également que cette relation suggère que le moment m_{02} est indépendant de la fonction de paramétrisation $\Phi(\xi, \tau)$ de la RTF de la classe de Cohen.

Proposition 8 *Soit $x(t)$ un signal complexe. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ vérifie la relation suivante :*

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] = 8\pi^2 \int \nu^2 C_x(u, \nu; 1)d\nu \, , \tag{IV.71}$$

soit encore :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] = 8\pi^2 \int \nu^2 W_x(u, \nu)d\nu \, . \tag{IV.72}$$

Démonstration :
Si nous posons $\Phi(\xi, \tau) = 1$, l'équation IV.62 peut s'exprimer successivement sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi) &= 8\pi^2 \left[\int \int \nu^2 C_x(t, \nu; 1) e^{j2\pi\xi t} dt d\nu \right]^* \, , \\
\mathcal{F}^{-1}\big\{\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)]\}(\xi)\big\}(u) &= 8\pi^2 \int \int \int \nu^2 C_x^*(t, \nu; 1) e^{-j2\pi\xi t} e^{+j2\pi\xi u} d\nu d\xi dt \, , \\
\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] &= 8\pi^2 \int \int \nu^2 C_x^*(t, \nu; 1) d\nu \int e^{-j2\pi\xi(t-u)} d\xi dt \, , \\
\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] &= 8\pi^2 \int \nu^2 \left[\int C_x^*(t, \nu; 1)\delta(t-u)dt \right] d\nu \, , \\
\Psi_{\mathbb{B}}^*[x(u)] &= 8\pi^2 \int \nu^2 C_x(u, \nu; 1)d\nu \, , \qquad \text{(IV.73)} \\
\Psi_{\mathbb{B}}[x(u)] &= 8\pi^2 \int \nu^2 W_x(u, \nu)d\nu \, . \qquad \text{(IV.74)}
\end{aligned}$$

■

Les relations IV.73 et IV.74 confirment et généralisent aux cas complexes les relations proposées par Hamila *et al.* [100]. L'équation IV.68 est une manière simple d'exprimer le moment conjoint m_{02} comme une grandeur proportionnelle à $\Psi_{\mathbb{B}}$.

D'autre part, si nous exprimons le second moment conditionnel en fréquence $< \nu^2 >_t$ à partir de la WVD :

$$< \nu^2 >_t = \frac{1}{\mid x(t) \mid^2} \int_{\mathbb{R}} \nu^2 W_x(t, \nu)d\nu \, , \tag{IV.75}$$

nous pouvons finalement écrire :

$$< \nu^2 >_t = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\Psi_{\mathbb{B}}(x)}{\mid x(t) \mid^2} \, . \tag{IV.76}$$

Par conséquent si l'on pose $x = y$, il est assez simple d'estimer le second moment conditionnel en fréquence $< \nu^2 >_t$ à partir de l'opérateur de $\Psi_{\mathbb{B}}$. La relation IV.60 n'est par une relation

directe, mais nécessite la connaissance de la fonction d'ambiguïté $A(\xi,0)$, entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la distribution de la classe de Cohen. Les relations (Propositions 5 et 6) sont des généralisations des résultats de Hamila *et al.* [99,100] à l'ensemble des distributions quadratiques de la classe de Cohen.

IV.3.5 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et CWVD

La corrélation croisée instantanée pour deux signaux distincts x et y complexes est donnée par [20] :

$$R_{xy}(t,\tau) = x(t+\frac{\tau}{2}).y^*(t-\frac{\tau}{2})\,, \tag{IV.77}$$

ou encore :

$$R_{xy}(t,\tau) = x(l_1).y^*(l_2)\,, \tag{IV.78}$$

avec $l_1 = t+\tau/2$, $l_2 = t-\tau/2$ et τ la variable temporelle de décalage (le retard temporel). D'autre part, on peut noter que :

$$\begin{aligned} R_{x^*y^*}(t,\tau) &= x^*(l_1).y(l_2)\,, \\ &= R^*_{xy}(t,\tau)\,. \end{aligned} \tag{IV.79}$$

Dans la suite de l'étude on supposera que x et y sont de nouveau distincts sauf mention contraire. L'une des premières relations que l'on peut écrire est celle existant entre R_{xy} et $\Psi_{\mathbb{B}}$, [37] :

Proposition 9 *Soient x et y deux signaux dans $\mathbb{C}$. La relation vérifiée par R_{xy} et $\Psi_{\mathbb{B}}$ est :*

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = -\frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}\,. \tag{IV.80}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau} &= \frac{1}{2}[\dot{x}(l_1)y^*(l_2) - x(l_1)\dot{y}^*(l_2)]\,, \\ \frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2} &= \frac{1}{4}[\ddot{x}(l_1)y^*(l_2) - 2\dot{x}(l_1)\dot{y}^*(l_2) + x(l_1)\ddot{y}^*(l_2)]\,, \\ \frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} &= \frac{1}{4}[\ddot{x}(t)y^*(t) - 2\dot{x}(t)\dot{y}^*(t) + x(t)\ddot{y}^*(t)]\,, \\ &= -\frac{1}{2}\dot{x}(t)\dot{y}^*(t) + \frac{1}{4}[\ddot{x}(t)y^*(t) + x(t)\ddot{y}^*(t)]\,. \end{aligned}$$

de façon identique :

$$\frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}\dot{x}(t)^*\dot{y}(t) + \frac{1}{4}[x^*(t)\ddot{y}(t) + \ddot{x}^*(t)y(t)]\,,$$

et finalement :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = -\frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}\,.$$

■

A partir de la relation IV.80, si l'on pose $x = y$ alors la relation entre $R_x(u,\tau)$ et $\Psi_B[x(t)]$ est [37] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)] = -2\frac{\partial^2 R_x(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} .$$

Nous retrouvons la relation proposée par Hamila *et al.* [101] et déjà montré d'une autre façon (Eq. IV.64).

La Distribution de Wigner-Ville Croisée (CWVD pour Cross Wigner-Ville Distribution) de x et y est définie par [20] :

$$W_{xy}(t,\nu) = \int_{\mathbb{R}} R_{xy}(t,\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau . \tag{IV.81}$$

D'autre part, nous avons aussi les relations suivantes [20] :

$$\begin{aligned} W^*_{xy}(t,\nu) &= \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t,\tau)e^{j2\pi\nu\tau}d\tau , \\ W_{x^*y^*}(t,\nu) &= \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t,\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau , \\ W_{x^*y^*}(t,-\nu) &= \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t,\tau)e^{j2\pi\nu\tau}d\tau , \\ W^*_{xy}(t,\nu) &= W_{x^*y^*}(t,-\nu) . \end{aligned} \tag{IV.82}$$

Suite à ces rappels, la relation entre CWVD et CTKEO$_{\mathbb{B}}$ peut être établie.

Proposition 10 *Soit x et y deux signaux temporels à valeurs dans $\mathbb{C}$. La relation entre la CWVD et $\Psi_{\mathbb{B}}$ est :*

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = 8\pi^2\int_{\mathbb{R}} \nu^2\Re[W_{xy}(t,\nu)]d\nu . \tag{IV.83}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} R_{xy}(t,\tau) &= \int_{\mathbb{R}} W_{xy}(t,\nu)e^{j2\pi\tau\nu}d\nu, \\ \frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2[W_{xy}(t,\nu)e^{j2\pi\nu\tau}]}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} d\nu , \\ &= -4\pi^2\int_{\mathbb{R}} \nu^2 W_{xy}(t,\nu)d\nu . \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = -4\pi^2\int_{\mathbb{R}} \nu^2 W^*_{xy}(t,\nu)d\nu ,$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= 4\pi^2\int_{\mathbb{R}} \nu^2[W_{xy}(t,\nu) + W^*_{xy}(t,\nu)]d\nu , \\ &= 8\pi^2\int_{\mathbb{R}} \nu^2\Re[W_{xy}(t,\nu)]d\nu . \end{aligned}$$

■

En posant $x = y$, on obtient alors :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(t), x(t)] \equiv \Psi_{\mathbb{B}}[x(t)] = 8\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \nu^2 W_x(t,\nu) d\nu \,. \tag{IV.84}$$

Ce résultat IV.84 confirme bien celui trouvé par Hamila *et al.* [99] et démontré dans le paragraphe précédent IV.3.4, relation IV.68. Cependant, il faut bien garder à l'esprit que l'ensemble des relations n'est valide que pour des signaux mono-composantes. Dans le cas de signaux multi-composantes un filtrage passe-bande va s'avérer nécessaire.

En conclusion, un nouvel opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est proposé et permet de généraliser l'ensemble des relations pour deux signaux x et y distincts et complexes. Cet opérateur apparaît comme une généralisation des opérateurs d'énergie de Teager-Kaiser dans le domaine complexe. Parmi l'ensemble des résultats établis, nous avons montré que $\Psi_{\mathbb{B}}$ est une quantité réelle et que c'est une forme bilinéaire symétrique. Nous avons aussi montré un certain nombre de propriétés importantes, notamment l'expression entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et CWVD ou encore avec l'ensemble de la classe de Cohen.

IV.3.6 Relations entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la fonction d'ambiguïté croisée

La fonction d'ambiguïté croisée est définie par [20] :

$$A_{xy}(u,\tau) = \int R_{xy}(t,\tau) e^{-j2\pi ut} dt \,. \tag{IV.85}$$

Elle peut s'interpréter comme une fonction de corrélation conjointe en temps et en fréquence. En notant $\Gamma_{xy}(u,\nu)$ la transformée de Fourier de $A_{xy}(u,\tau)$ par rapport τ, nous avons les relations suivantes :

$$R_{xy}(t,\tau) \overset{\mathcal{F}_{\mathrm{t}}}{\longleftrightarrow} A_{xy}(u,\tau) \overset{\mathcal{F}_{\tau}}{\longleftrightarrow} \Gamma_{xy}(u,\nu) \,. \tag{IV.86}$$

Ainsi $\Gamma_{xy}(u,\nu)$ est la transformation de Fourier 2D de $R_{xy}(t,\tau)$:

$$R_{xy}(t,\tau) \overset{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \Gamma_{xy}(u,\nu) \,. \tag{IV.87}$$

De façon équivalente, $A_{xy}(u,\tau)$, peut s'exprimer en fonction des transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement $X(\nu)$ et $Y(\nu)$:

$$A_{xy}(u,\tau) = \int \Gamma_{xy}(u,\nu) e^{j2\pi\tau\nu} d\nu \,, \tag{IV.88}$$

ou encore :

$$A_{xy}(u,\tau) = \int X(\nu + \frac{u}{2}) Y^*(\nu - \frac{u}{2}) e^{j2\pi\tau\nu} d\nu \,. \tag{IV.89}$$

Proposition 11 *Soient x et y deux signaux à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)$ s'exprime en fonction du spectre croisé $\Gamma_{xy}(u,\nu)$ sous la forme :*

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = 8\pi^2 \iint \nu^2 \Im\big[\Gamma_{xy}(u,\nu)\big] e^{j2\pi ut} du d\nu \,. \tag{IV.90}$$

où $\Im$ est la partie imaginaire.

Démonstration :

D'après l'équation IV.87, $R_{xy}(t,\tau)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$R_{xy}(t,\tau) = \int\int \Gamma_{xy}(u,\nu)e^{j2\pi(ut+\nu\tau)}dud\nu\,, \tag{IV.91}$$

et son conjugué associé sous la forme :

$$R^*_{xy}(t,\tau) = \int\int \Gamma^*_{xy}(u,\nu)e^{-j2\pi(ut+\nu\tau)}dud\nu\,, \tag{IV.92}$$

$$R^*_{xy}(t,\tau) = \int\int \Gamma^*_{xy}(-u,-\nu)e^{-j2\pi(ut+\nu\tau)}dud\nu\,. \tag{IV.93}$$

En différentiant deux fois les termes $R_{xy}(t,\tau)$ et $R^*_{xy}(t,\tau)$ par rapport à τ, on obtient :

$$\left.\frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} = -4\pi^2\int\int \nu^2\Gamma_{xy}(u,\nu)e^{j2\pi ut}dud\nu\,, \tag{IV.94}$$

$$\left.\frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} = +4\pi^2\int\int \nu^2\Gamma^*_{xy}(u,\nu)e^{j2\pi ut}dud\nu\,. \tag{IV.95}$$

En sommant les équations IV.94 et IV.95 et en utilisant l'équation IV.80 la proposition est alors vérifiée.

■

Proposition 12 *Soient x et y deux signaux à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)$ peut s'exprimer en fonction de $A_{xy}(u,\tau)$ comme suit :*

$$\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)\}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big[A_{xy}(u,\tau) + A^*_{xy}(-u,\tau)\Big]_{\tau=0}\,. \tag{IV.96}$$

Démonstration :

D'après l'équation IV.85 $R_{xy}(t,\tau)$ and $R^*_{xy}(t,\tau)$ peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$R_{xy}(t,\tau) = \int A_{xy}(u,\tau)e^{j2\pi ut}du\,, \tag{IV.97}$$

$$R^*_{xy}(t,\tau) = \int A^*_{xy}(-u,\tau)e^{j2\pi ut}du\,. \tag{IV.98}$$

En différentiant deux fois les équations IV.97 et IV.98 par rapport à τ, nous avons :

$$\left.\frac{\partial^2 R_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} = \int \left.\frac{\partial^2 A_{xy}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} e^{j2\pi ut}du\,, \tag{IV.99}$$

$$\left.\frac{\partial^2 R^*_{xy}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} = \int \left.\frac{\partial^2 A^*_{xy}(-u,\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0} e^{j2\pi ut}du\,. \tag{IV.100}$$

et d'après l'équation IV.80, nous obtenons :

$$\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = -\int \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big[A_{xy}(u,\tau) + A^*_{xy}(-u,\tau)\Big]_{\tau=0} e^{j2\pi ut}du\,. \tag{IV.101}$$

Pour terminer, on exprime l'expression IV.101 en fonction de $\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)$, en notant que $\Psi_{\mathbb{B}}$ est la transformée de Fourier inverse de :

$$-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big[A_{xy}(u,\tau)+A^*_{xy}(-u,\tau)\Big]_{\tau=0}. \tag{IV.102}$$

■

Proposition 13 *Soit x un signal à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous avons :*

$$\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}(x,x)\}(u) = -2\frac{\partial^2 A_{xx}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}. \tag{IV.103}$$

Démonstration :

Si nous considérons la quantité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_{xx}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2}\dot{x}(t)\dot{x}^*(t)+\frac{1}{4}[x(t)\ddot{x}^*(t)+\ddot{x}(t)x^*(t)]\,,\\ &= \frac{\partial^2 R^*_{xx}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0},\end{aligned} \tag{IV.104}$$

et puisque :

$$\frac{\partial^2 A_{xx}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = \int \frac{\partial^2 R_{xx}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} e^{-j2\pi ut}dt\,, \tag{IV.105}$$

$$\frac{\partial^2 A^*_{xx}(-u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = \int \frac{\partial^2 R^*_{xx}(t,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} e^{-j2\pi ut}dt\,, \tag{IV.106}$$

alors,

$$\frac{\partial^2 A_{xx}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial^2 A^*_{xx}(-u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}. \tag{IV.107}$$

En utilisant l'équation IV.101 :

$$\int \Psi_{\mathbb{B}}(x,x)e^{-j2\pi ut}dt = -2\frac{\partial^2 A_{xx}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}, \tag{IV.108}$$

soit finalement :

$$\mathcal{F}\{\Psi_{\mathbb{B}}(x,x)\}(u) = -2\frac{\partial^2 A_{xx}(u,\tau)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0}. \tag{IV.109}$$

■

Le résultat de l'équation IV.103 permet de confirmer le résultat de Hamila *et al.* [99]. Ainsi dans cette partie, le rapport entre la fonction d'ambiguïté croisée et l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ est établi. D'autre part, nous avons également montré le lien entre le spectre croisé et l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$.

IV.3.7 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$

Comme pour l'opérateur TKEO, nous allons nous intéresser maintenant à la discrétisation de l'opérateur CTKEO$_{\mathbb{B}}$. Pour la suite et pour plus de clarté dans la démonstration, nous noterons l'opérateur CTKEO$_{\mathbb{B}}$ dans le domaine continu par $\Psi_{\mathbb{B}_c}$ et sa formulation discrète, par $\Psi_{\mathbb{B}_d}$. On rappelle que l'expression $\Psi_{\mathbb{B}_c}$ dans le domaine continu pour des signaux complexes $x(t)$ et $y(t)$ est (Eq. IV.31) [37] :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}_c}[x(t),y(t)] &= \frac{1}{2}[\Psi_{\mathbb{C}_c}[x(t),y(t)]+\Psi_{\mathbb{C}_c}[y(t),x(t)]]\,,\\ &= \frac{1}{2}[\dot{x^*}\dot{y}+\dot{x}\dot{y^*}]-\frac{1}{4}[x\ddot{y^*}+x^*\ddot{y}+y\ddot{x^*}+y^*\ddot{x}]\,, \qquad \text{(IV.110)}\end{aligned}$$

où $\Psi_{\mathbb{C}_c}(x,y)$ donné par :

$$\Psi_{\mathbb{C}_c}[x(t),y(t)] = \frac{1}{2}[\dot{x^*}\dot{y}+\dot{x}\dot{y^*}]-\frac{1}{2}[x\ddot{y^*}+x^*\ddot{y}]\,. \qquad \text{(IV.111)}$$

Nous avons montré précédemment que $\Psi_{\mathbb{B}_c}(x,y)$ est une forme bilinéaire symétrique réelle (Proposition. 1) et $\Psi_{\mathbb{B}_c}(x,x)$ est sa forme quadratique associée. Nous avons aussi montré que $\Psi_{\mathbb{B}_c}(x,y)$ pour deux signaux complexes x et y est égale à la somme de $\Psi_{\mathbb{B}_c}(x,y)$ de leurs parties réelles et de leurs parties imaginaires (Proposition. 2), relation IV.36. Par conséquent, la discrétisation de $\Psi_{\mathbb{B}_c}(x,y)$ sera étudiée uniquement sur la quantité $\Psi_{\mathbb{B}_c}[x_k,y_k]$ avec $k\in\{r,i\}$.

Comme dans le cas de l'opérateur TKEO, la discrétisation de l'opérateur de dérivation peut s'exprimer sous différentes formes. Par la suite, nous proposons trois études de cas basées sur les différences finies de l'opérateur de dérivation : les différences finies d'ordre un à gauche, à droite, ou centrées.

Différences finies d'ordre un à gauche

La méthode permet d'estimer les dérivées en un point à l'aide de $x(n), x(n+1), x(n+2),\ldots$ Ces expressions reposent sur un développement limité de Taylor de la fonction $x(t)$ (ou $y(t)$) [167]. Si on procède de manière identique à celle de la section IV.2.3 et appliqué par Maragos *et al.* [151] à $\Psi_{\mathbb{R}}$, nous pouvons alors écrire successivement :

$$\Psi_{\mathbb{B}_c}[x(t),y(t)] \longmapsto \Psi_{\mathbb{B}_d}[x_r(n),y_r(n)]+\Psi_{\mathbb{B}_d}[x_i(n),y_i(n)]\,, \qquad \text{(IV.112)}$$

$$\begin{aligned}\text{avec } \Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n),y_k(n)] &= x_k(n)y_k(n)-\frac{1}{2}[x_k(n+1)y_k(n-1)\\ &\quad +y_k(n+1)x_k(n-1)]\,, \quad \text{avec } k\in\{i,r\}\,. \qquad \text{(IV.113)}\end{aligned}$$

Différences finies d'ordre un à droite

Dans le cas des différences finies d'ordre un à droite, les dérivées d'ordre un et deux au point n se calculent par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(n) &= \frac{x(n+1)-x(n)}{T_e}\,,\\ \ddot{x}(n) &= \frac{x(n+2)-2x(n+1)+x(n)}{T_e^2}\,.\end{aligned}$$

L'expression obtenue pour la forme discrète de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n), y_k(n)]$ avec $k \in \{i, r\}$ sera la même que dans le cas des différences finies d'ordre un à gauche.

Différences finies d'ordre un centrées

Dans le cas des différences finies d'ordre centrées, les dérivées d'ordre un et deux au point n se calculent par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(n) &= \frac{x(n+1) - x(n-1)}{T_e}\,, \\ \ddot{x}(n) &= \frac{x(n+2) - 2x(n) + x(n-1)}{T_e^2}\,. \end{aligned}$$

L'expression obtenue pour l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}_{d'}}[x_k(n), y_k(n)]$ (avec $k \in \{i, r\}$) est un peu plus compliquée :

$$\Psi_{\mathbb{B}_c}[x(t), y(t)] \longmapsto \Psi_{\mathbb{B}_{d'}}[x_r(n), y_r(n)] + \Psi_{\mathbb{B}_{d'}}[x_i(n), y_i(n)]\,, \tag{IV.114}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \Psi_{\mathbb{B}_{d'}}[x_k(n), y_k(n)] = {} & 2x_k(n)y_k(n) \\ & -[x_k(n+1)y_k(n-1) + y_k(n+1)x_k(n-1)] \\ & +x_k(n-1)y_k(n-1) \\ & -\frac{1}{2}[x_k(n)y_k(n-2) + y_k(n)x_k(n-2)] \\ & +x_k(n+1)y_k(n+1) \\ & -\frac{1}{2}[x_k(n+2)y_k(n) + y_k(n+2)x_k(n)]\,. \end{aligned} \tag{IV.115}$$

En regroupant les termes entre eux on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{B}_{d'}}[x_k(t), y_k(t)] = {} & \Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n+1), y_k(n+1)] + 2\Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n), y_k(n)], \\ & +\Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n-1), y_k(n-1)]\,, \quad \text{avec } k \in \{i, r\}. \end{aligned} \tag{IV.116}$$

avec $\Psi_{\mathbb{B}_d}$ égale à l'expression IV.113. Écrite sous cette forme (Eq. IV.116) l'expression correspond à une moyenne mobile pondérée de $\Psi_{\mathbb{B}_d}[x_k(n), y_k(n)]$.

Il faut cependant noter que le fait de discrétiser l'opérateur permet certes d'obtenir une expression extrêmement simple à mettre en œuvre, mais induit un certain nombre de problèmes. En effet, il faut garder à l'esprit que le recours à la formulation numérique des opérateurs de dérivation peut conduire à des erreurs importantes [167]. En effet, l'approche numérique revient à estimer la définition de la dérivée comme la différence entre deux grandes quantités : $x(t + \delta t)$ et $x(t)$ pour en obtenir une petite δx :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t}\,. \tag{IV.117}$$

D'autre part, l'opérateur de dérivation s'avère sensible au bruit (toujours à cause de la différence des termes $x(t + \delta t)$ et $x(t)$).

Ainsi le cas le plus courant est celui où la fonction $f(t)$ n'est pas connue analytiquement, mais tabulé et donc donnée par les valeurs f_n qu'elle prend aux points t_n, régulièrement espacés ou non. Dans ce cas, pour calculer $f^{(k)}(t)$, dérivée d'ordre k de $f(t)$, on peut procéder de la manière suivante :

- on approche $f(t)$ par une fonction connue analytique $g(t)$ (par exemple par collocation), censée représenter correctement $f(t)$: $f(t) \approx g(t)$;
- on remplace la quantité qu'on cherche $f^{(k)}(t)$ par $g^{(k)}(t)$: $f^{(k)}(t) \approx g^{(k)}(t)$.

Pour ce qui est de l'opérateur d'énergie, des solutions ont été proposées. Ainsi par exemple Dimitriadis *et al.* [63] proposent une approche basée sur l'utilisation des *Bsplines* et estime directement l'énergie de TKEO à partir du polynôme interpolateur.
Dans [64], les auteurs proposent une formulation modifiée de l'opérateur d'énergie en y intégrant des filtres de Gabor afin de « contourner » notamment la problématique de la dérivation. D'autres auteurs, comme [153, 187, 188], proposent des approches basées sur des extensions de TKEO à des ordres supérieurs et font remarquer que ces opérateurs sont plus robustes aux bruits. Ce problème n'est pas propre à l'opérateur d'énergie, mais est présent chaque fois que l'opérateur de dérivation doit être formulé numériquement. De nombreuses approches existent afin de proposer des solutions à ce problème délicat de la numérisation de l'opération de dérivation [5, 6, 15, 108, 207].

Après avoir étudié un certain nombre de propriétés théoriques de l'opérateur, $\Psi_{\mathbb{B}}$, on se propose par la suite de mettre en oeuvre celui-ci, et de l'appliquer à des problématiques bien spécifiques :

- l'étude de ses propriétés d'interaction entre deux signaux,
- l'étude de ses propriétés de similarité pour la classification de séries temporelles,
- l'estimation des retards sur une ligne de capteurs en acoustique sous-marine,
- l'application à la description temps-fréquence des signaux non-stationnaires à l'aide de la Transformation de Huang-Teager (THT).

IV.4 Application à la mesure de similarité entre deux signaux

IV.4.1 Position du problème

Dans cette section, nous appliquons l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ en tant que mesure de similarité pour l'analyse des séries temporelles (ST). Les ST sont des séquences de nombres représentant les variations d'une mesure réelle prises à intervalle de temps égaux (en général). Ces séquences peuvent représenter le cours des actions en bourse (achats, ventes ...), des mesures biomédicales, des mesures de mouvements gestuels présents dans une séquence d'images [7] ... De nombreuses applications nécessitent d'évaluer la similarité de deux objets, ou de trouver parmi un ensemble d'objets celui qui est le « plus similaire » à un objet donné.

Typiquement, l'étude des ST revient à les classifier, à rechercher des similitudes entre elles, à prévoir et extrapoler celles-ci. Les capacités des algorithmes de coalescence des ST dépendent essentiellement de la mesure de similarité utilisée [3].
Définir une mesure de similarité pour la comparaison de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, c'est être capable d'évaluer la ressemblance entre les attributs $x(t)$ et $y(t)$. Cette mesure de similarité est souvent basée sur une mise en correspondance de caractéristiques présentes dans le signal.

Classiquement, l'approche la plus usitée pour élaborer cette mesure est basée sur la distance Euclidienne (DE). La DE peut conduire à une mesure incorrecte de la similitude entre

deux ST notamment parce qu'elle ne prend pas en compte les variations des données ou au contraire elle est trop sensible aux petites déformations présentes dans les signaux. Parallèlement à celle-ci, la mesure du Coefficient de Corrélation de Pearson (CC) est aussi une autre méthode pour comparer les ST. Cependant là encore, la CC n'est pas nécessairement adéquate avec les variations des données. En effet, elle ne prend pas en compte la forme et la structure des ST. En outre, les similarités issues de la DE ou de la CC n'intègrent pas de notion de temporalité dans leur grandeur, les changements relatifs présents dans les ST ne sont pas considérés. C'est pourquoi, les méthodes basées sur ces métriques comme par exemple le $K-moyennes$, ou $K-moyennesfloues$ ou encore les méthodes de clustering hiérarchique permettent difficilement de grouper les ST entre elles [165].

La mesure de similarité que nous avons définie opère à trois niveaux : au niveau de l'attribut x, au niveau de sa pente $\dot{x}$ et enfin au niveau de sa dérivée seconde $\ddot{x}$. Au niveau des dérivées première et seconde, la mesure de similarité intègre ainsi une analogie de pente (ou de vitesse) et une ressemblance de type accélération entre les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$. Comparée à d'autres mesures, la méthode que nous proposons (notée par la suite $Simil_{\mathbb{B}}$) intègre dans son calcul l'information temporelle et les changements relatifs présents dans les ST. En effet, étant basée sur $\Psi_{\mathbb{B}}$, elle apparaît comme une fonction de similitude non linéaire et qui s'exprime en fonction des premières et deuxièmes dérivées des ST.

Nous définissons une version normalisée de $\Psi_{\mathbb{B}}$, notée $Simil_{\mathbb{B}}$. Son expression est de la forme :

$$Simil_{\mathbb{B}}(x,y) = \frac{2\int_T \mid \Psi_{\mathbb{B}}(x,y) \mid dt}{\int_T |\Psi_{\mathbb{B}}(x,x) + \Psi_{\mathbb{B}}(y,y)|\, dt}\,, \tag{IV.118}$$

où T est la durée du signal.

$Simil_{\mathbb{B}}$ est bien une mesure de similarité. En effet, $(\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2)$, $Simil_{\mathbb{B}}(x,y) \geq 0$ et $Simil_{\mathbb{B}}(x,y) = Simil_{\mathbb{B}}(y,x)$.
Le coefficient 2 dans l'expression (Eq. IV.118) permet de vérifier pour $x = y \Rightarrow Simil_{\mathbb{B}}(x,x) = 1$.
D'autre part, nous pouvons noter que la quantité $Simil_{\mathbb{B}}(x,y)$ est bornée : $0 \leq Simil_{\mathbb{B}}(y,x) \leq 1$, $(\forall (x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C})$. Enfin, l'expression analytique du signal réel est utilisée pour obtenir la forme complexe.

L'expression discrète de $Simil_{\mathbb{B}_d}$ se déduit facilement en utilisant les relations précédentes :

$$Simil_{\mathbb{B}_d}(x,y) = \frac{2\sum_T \left| \sum_k \Psi_{\mathbb{B}_d}(x_k,y_k) \right|}{\sum_T \left| \sum_k \Psi_{\mathbb{B}_d}(x_k,x_k) + \sum_k \Psi_{\mathbb{B}_d}(y_k,y_k) \right|}\,,\ (\text{avec} : k \in \{i,r\})\,. \tag{IV.119}$$

L'importance de prendre en compte les informations spatiales et temporelles d'une ST lors de l'estimation d'une grandeur de similarité est illustrée sur trois signaux synthétiques (Fig. IV.3). Nous comparons les valeurs de similarité estimées par les trois mesures (Tab. IV.1). Puisque les allures des trois ST g_1, g_2, et g_3 sont différentes alors on s'attend à ce que des mesures appropriées de similitude l'illustrent aussi.

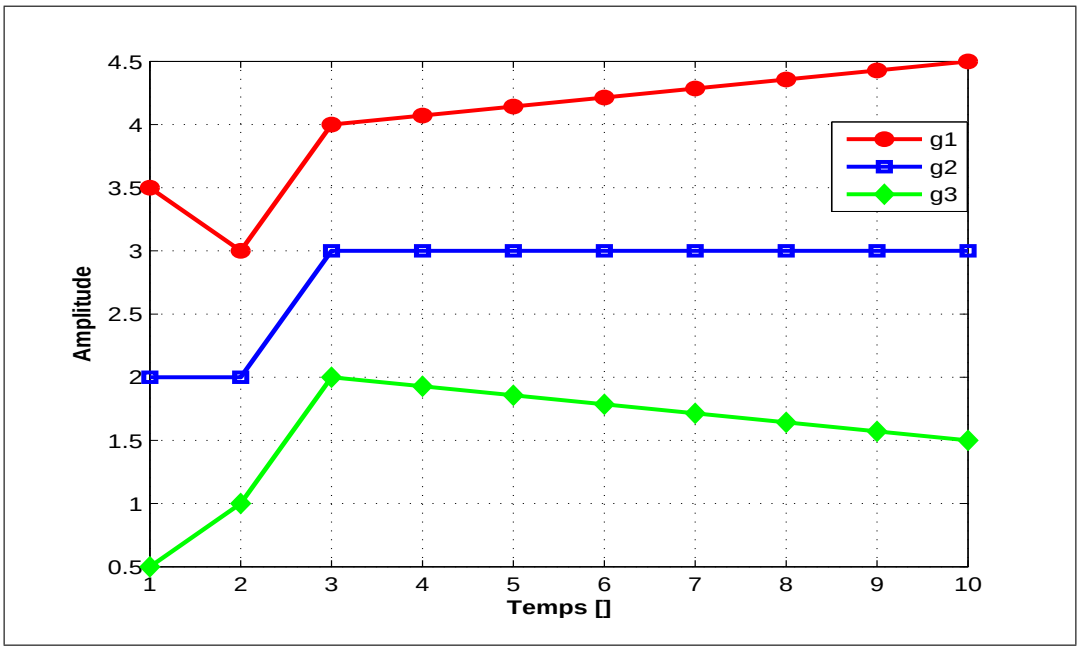


Figure IV.3 — Exemples de trois séries temporelles de formes différentes.

	Dist. Euclidienne	**Dist. Corrélation**	**Simil$_{\mathbb{B}}$**
(g_2, g_1)	3.995	0.092	0.973
(g_2, g_3)	3.995	0.092	0.752

Tableau IV.1 — Mesures de similarité (DE, CC et $Simil_{\mathbb{B}}$) entre g_2 et g_1, et entre g_2 et g_3 de la figure (Fig. IV.3).

Si nous considérons le signal g_2 comme référence et que nous estimons les similarités respectivement entre (g_2, g_1,) et entre (g_2, g_3) la différence dans les pentes de g_1 et g_3 devrait aboutir à des valeurs de ressemblances différentes (par rapport à g_2). Cependant à la lecture des résultats du tableau (IV.1), nous pouvons constater que seul $Simil_{\mathbb{B}}$ est capable de fournir une telle indication. En d'autres termes, l'observation de la figure IV.3 ne permet pas de conclure sur le fait que la ST g_2 est plus semblable à g_1 qu'à g_3 et réciproquement. Pourtant les deux distances (DE et CC) laissent suggérer le contraire et seul $Simil_{\mathbb{B}}$ permet de conclure sur cette dissemblance.

Ces résultats montrent que seule $Simil_{\mathbb{B}}$ est capable de saisir correctement l'information temporelle permettant de comparer les différentes allures des ST de la figure IV.3.

IV.4.2 Application à la mesure d'interaction entres deux signaux

Dans cette section, nous proposons d'étudier l'interaction énergétique de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ dans le cas où les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont caractérisés par des FI variant linéairement.

La figure IV.4 montre les lois d'évolution des deux signaux. Le signal $x(t)$ présente une modulation linéaire croissante tandis que la FI associée à $y(t)$ est décroissante. Nous avons superposé chaque fois en pointillé la FI de l'autre signal afin de bien visualiser l'endroit où les deux FI coïncident.

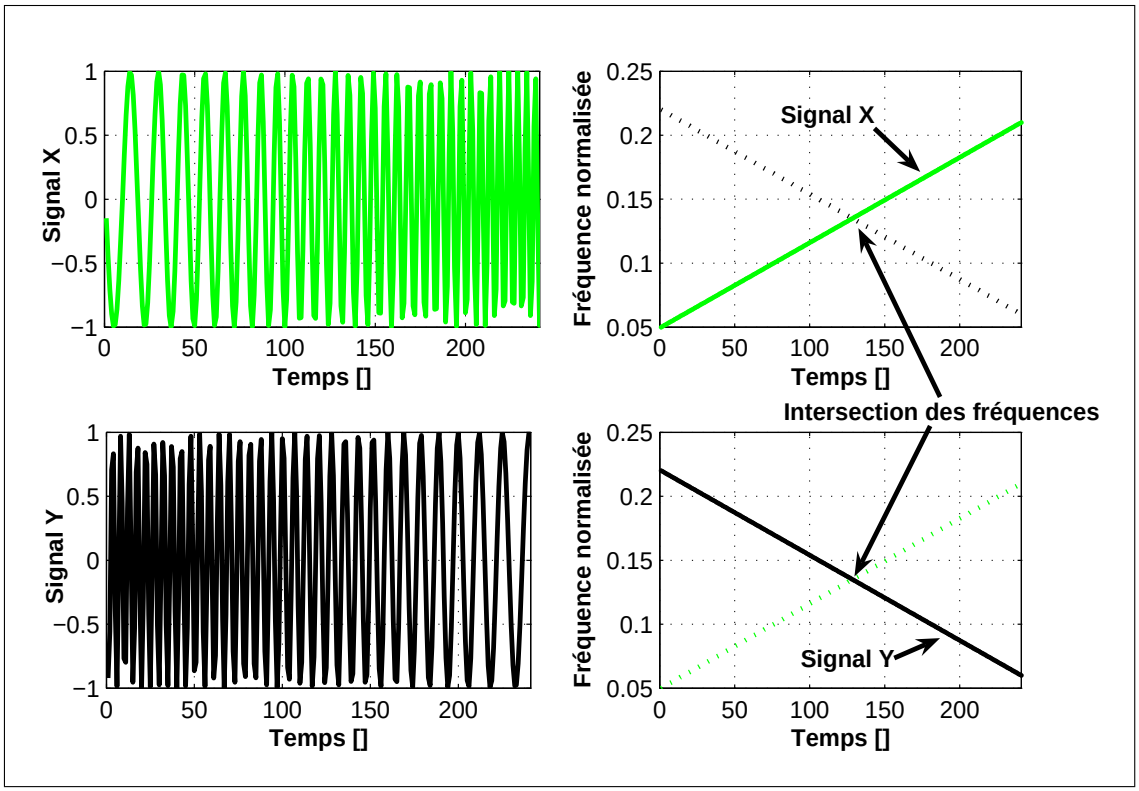
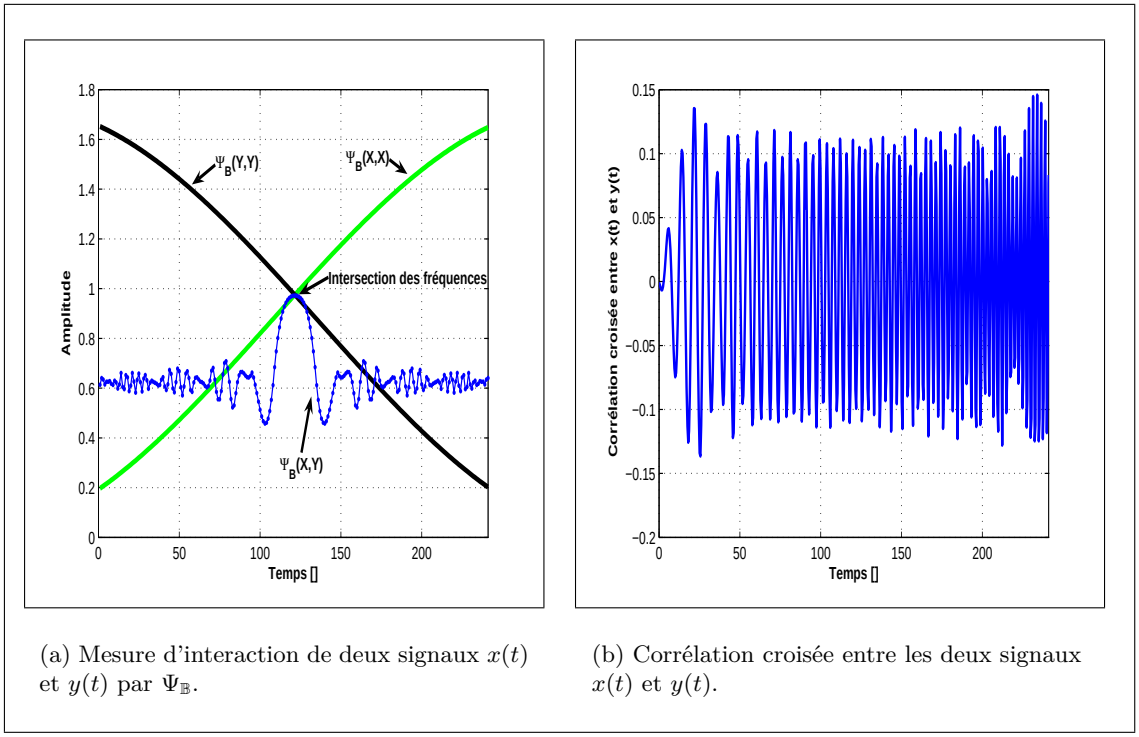


Figure IV.4 — Signaux $x(t)$ et $y(t)$ et FI linéaires correspondantes.



(a) Mesure d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par $\Psi_{\mathbb{B}}$.

(b) Corrélation croisée entre les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.

Figure IV.5 — Mesure d'interaction de deux signaux FM par la CC et le $\Psi_{\mathbb{B}}$.

La figure IV.5(a) illustre le comportement des trois grandeurs : $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)]$, $\Psi_{\mathbb{B}}[y(t)]$ et $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t), y(t)]$. Nous n'utilisons pas la normalisation $Simil_{\mathbb{B}}$ de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$. La figure IV.5(b) montre que la CC des deux signaux FM ne permet pas de mettre en évidence le fait que les deux FI se croisent.

Nous pouvons remarquer que l'énergie $\Psi_{\mathbb{R}}[x(t), y(t)]$ coïncide à l'intersection des deux courbes énergétiques $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)]$ et $\Psi_{\mathbb{B}}[y(t)]$ en $t = 125$. Nous pouvons noter d'autre part, que si les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ont des FI éloignées alors la valeur de $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t), y(t)]$ oscille autour d'une valeur faible (environ 0.6). Si l'on raisonne en terme d'interactions énergétiques, alors nous pouvons interpréter que les deux signaux ont peu d'interaction (de point commun) entre eux. Au contraire, lorsque les deux FI convergent alors l'échange énergétique (ou l'intensité d'interaction) tend à augmenter pour présenter un maximum à l'endroit où les deux FI coïncident. Cet exemple illustre le fait que cette mesure d'interaction permet de faire apparaître des informations supplémentaires alors que d'autres méthodes en sont incapables.

IV.4.3 Application à la classification des séries temporelles

Après avoir montré les différences majeures entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ (et $Simil_{\mathbb{B}}$) et d'autres mesures plus standard, nous allons l'appliquer à la classification hiérarchique de ST synthétiques formées par la base de données appelée `CBF.data` proposée initialement par Saito [186].
L'objectif est de classifier les séries chronologiques en tant qu'une des trois classes : $Cylinder(C)$, $Bell(B)$ ou $Funnel(F)$. Les données sont générées comme suit, (`CBF.data`) :

$$\begin{cases} c(t) = (6+\eta).X_{[a,b]}(t) + \epsilon(t), & \texttt{// Classe cylinder ;} \\ b(t) = (6+\eta).X_{[a,b]}(t).(t-a)/(b-a) + \epsilon(t), & \texttt{// Classe Bell ;} \\ f(t) = (6+\eta).X_{[a,b]}(t).(b-t)/(b-a) + \epsilon(t), & \texttt{// Classe Funnel ;} \end{cases}$$

avec $X_{[a,b]} = 1$ si $a \leq t \leq b$ et 0 sinon, η et $\epsilon(t)$ des distributions normales $\mathcal{N}(0,1)$, a un nombre entier tiré uniformément dans l'intervalle $[16, 32]$, et $(b-a)$ un nombre entier tiré uniformément dans l'intervalle $[32, 96]$.

Un exemple de ST de chacune des trois classes est représenté dans la figure IV.6. Nous pouvons constater que les classes $Bell$ et $Funnel$ sont très « proches » contrairement à la classe $Cylinder$. Pour une même réalisation, la différence entre les classes $Bell$ et $Funnel$ est simplement l'orientation de la pente.

Nous avons classifié la base `CBF.data` en trois classes distinctes (C, B, F) de même nombre de ST (Fig. IV.6). L'approche repose sur l'utilisation d'une représentation hiérarchique de type dendrogramme.

Ainsi comparé à la méthode standard du dendrogramme, la méthode proposée diffère uniquement lors de l'estimation de la matrice des similitudes entre tous les ST puisque celle-ci est déterminée avec l'opérateur $Simil_{\mathbb{B}}(x, y)$ (par abus de langage, cette matrice est appelée par la suite matrice des distances). Pour la construction des dendrogrammes proprement dit, la mesure de proximité (*« linkage »*) est basée sur la distance des plus proches voisins de la matrice des distances.

Nous comparons les résultats obtenus avec $Simil_{\mathbb{B}}(x, y)$ avec ceux de la DE et de la CC (Fig. IV.7). Nous avons réalisé plusieurs simulations (une cinquantaine de réalisations). Le tableau IV.2 donne le pourcentage moyen d'erreurs de classification obtenus par chacune des trois méthodes : $Simil_{\mathbb{B}}$, DE et CC.

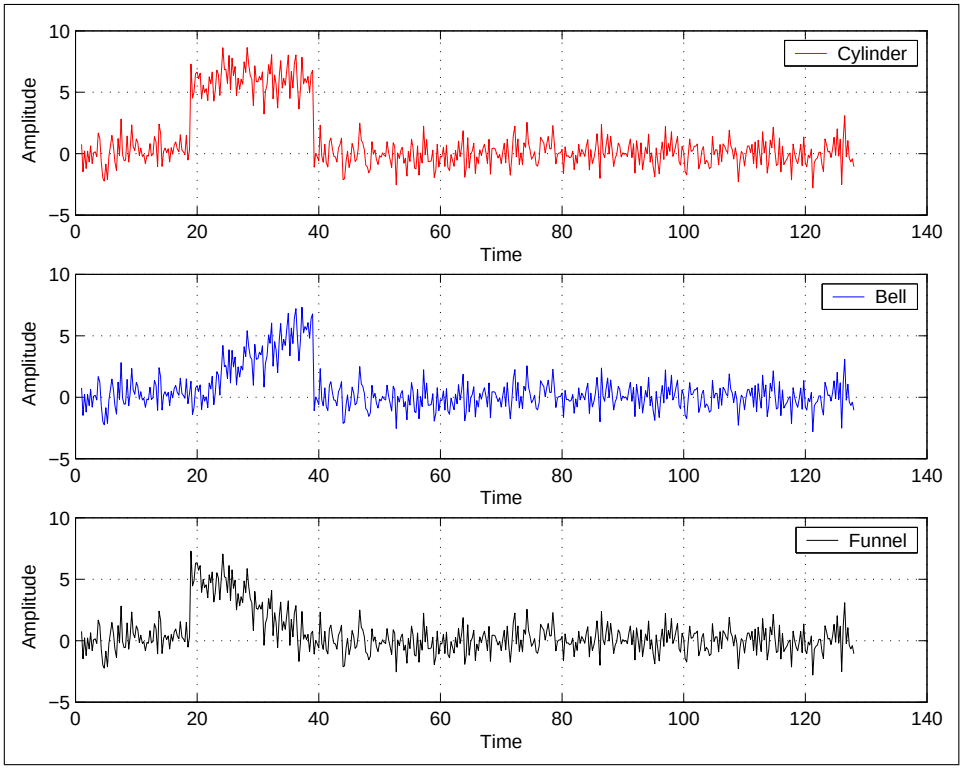


Figure IV.6 — Allure des différents signaux synthétiques constituant les trois classes : Cylinder, Bell et Funnel (`CBF.data`), [186].

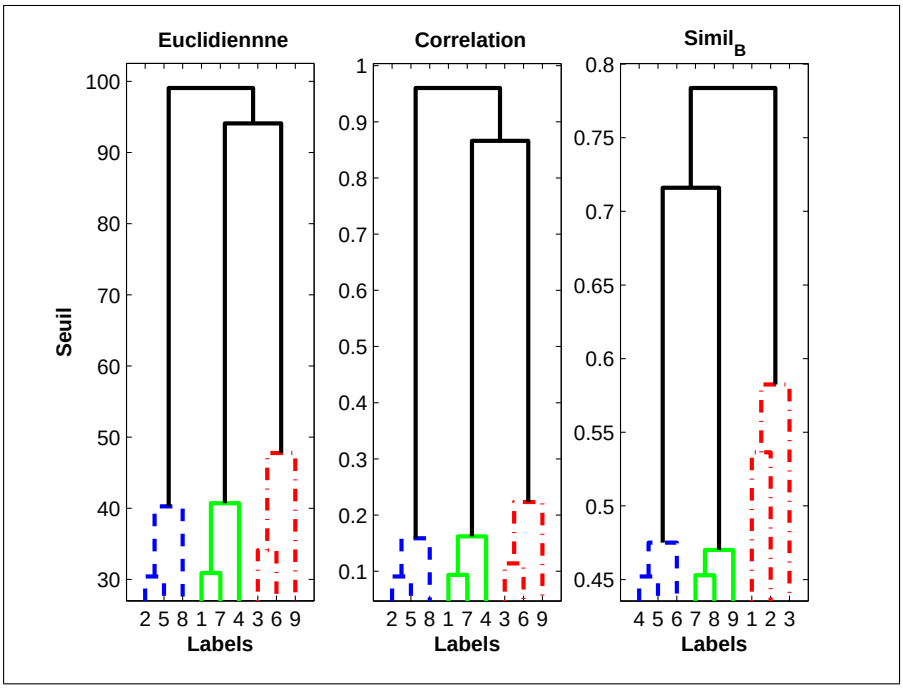


Figure IV.7 — Comparaison de la coalescence par $Simil_{\mathbb{B}}$, DE et CC. Les labels $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ et $(7, 8, 9)$ correspondent respectivement aux classes Cylinder, Bell et Funnel.

La figure IV.7 montre le résultat d'une des réalisations (avec seulement trois ST par classes (C, B, F) pour plus de lisibilité). Nous pouvons observer que les méthodes basées sur la DE ou la CC ne permettent pas de différencier correctement les trois classes (C, B, F). Au contraire, $Simil_{\mathbb{B}}$ montre une bonne capacité à distinguer les trois classes originales. Par ailleurs si nous observons le dendrogramme obtenu avec la méthode $Simil_{\mathbb{B}}$, nous pouvons noter que les deux classes *Bell* et *Funnel* offrent une similarité plus importante que la classe *Cylinder*. Cela se traduit par un noeud supplémentaire proche du seuil 0.7.

Les erreurs de classification montrent l'efficacité de $Simil_{\mathbb{B}}$ par rapport à la DE ou la CC (Tab. IV.2). Ces résultats sont prévisibles dans le sens où l'on avait observé que ni la DE ni la CC ne pouvait inclure d'information temporelle au contraire de $Simil_{\mathbb{B}}$.
Ces bons résultats de discrimination pour $Simil_{\mathbb{B}}$ s'explique d'une part parce que cet opérateur est non-linéaire et local tandis que la DE et la CC sont des mesures globales et linéaires [37, 185]. D'autre part, $Simil_{\mathbb{B}}$ s'exprimant en fonction des dérivées première et seconde du signal considéré, cela permet de prendre en compte de manière explicite les variations locales des ST (comme les pentes) au contraire des méthodes standards.

$Simil_{\mathbb{B}}$	**Dist. Euclidienne**	**Dist. Corrélation**
0.4	0.8	0.8

Tableau IV.2 — Erreurs de classification de : $Simil_{\mathbb{B}}$, DE et CC sur (`CBF.data`).

Pour conclure, les mesures de similitude telles que la DE et la CC ne peuvent pas saisir l'information temporelle des ST. Le fait de prendre en compte les variations relatives présentes (pentes, amplitudes ...) au cours du temps dans les signaux s'avère nécessaire et pertinent pour mesurer la similitude entre les ST.

Dans cette partie, nous avons proposé une nouvelle mesure de similitude pour l'analyse de ST, $Simil_{\mathbb{B}}$, basée sur $\Psi_{\mathbb{B}}$, qui permet de prendre plus en compte les variations locales présentes dans un signal. Cette prise en compte est réalisée à travers l'expression même de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ qui s'exprime en fonction des dérivées première et seconde du signal considéré.

Les résultats ont montré l'intérêt d'inclure les variations (à l'aide des dérivées) des ST et $Simil_{\mathbb{B}}$ illustre les performances obtenues par rapport à la DE ou à la corrélation. Il est évident que pour confirmer ses résultats, une plus grande classe de ST doit être étudiée et de plus comparée avec d'autres méthodes, en particulier celles qui prennent plus en compte les variations des ST.

IV.5 Application à la détection et à l'estimation des retards

IV.5.1 Position du problème

La détection et l'évaluation de temps de retard (TD pour Time Delay) entre les signaux en présence de perturbations sont des problèmes courants dans de nombreux domaine d'applications comme en communication, sonar, radar, diagnostique de défaut sur les machines, médecine et géophysique [39, 74, 104, 206]. Par exemple, dans le traitement des signaux sonars le calcul des TD entre les signaux sur différents capteurs est employé pour estimer la présence et localiser les sources potentielles (cibles). Classiquement, on regroupe sous l'abréviation *TD* aussi bien l'estimation des temps de retard (« TD estimation », (TDE)), que les temps d'ar-

rivée (« time of arrival », (TDOA)), que la différence des temps d'arrivée (« time of arrival difference », (TOAD)).

Une des méthodes classiques pour la détection des signaux et la mesure des TD est basée sur le produit de corrélation des signaux reçus sur les capteurs. L'estimation des retards repose alors sur la maximisation de la CC qui est une mesure de similarité linéaire. Cependant, l'interaction entre les signaux peut ne pas être linéaire et le maximum de la fonction CC ne correspond pas nécessairement aux maxima d'interaction et par conséquent l'estimation du TD est alors problématique. Dans cette partie, une nouvelle méthode de détection et d'estimation des TD basée sur l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ [37] est proposée. Ce nouveau filtre non-linéaire, appelé *« Matched $\Psi_{\mathbb{B}}$-Filter »* ($M\mathbb{B}F$), est un détecteur d'énergie quadratique et repose sur la mesure de similarité d'un signal présent dans un autre. Cela étant, nous n'avons pas de preuve théorique que la valeur du SNR en sortie du $M\mathbb{B}F$ est l'optimale comme c'est le cas du filtre adapté classique.
Suite à l'étude théorique réalisée dans la section IV.3.3, la localisation du pic de la fonction $\Psi_{\mathbb{B}}$ correspond au maximum d'interaction entre les deux signaux et permet alors d'évaluer le retard entre ceux-ci. La méthode $M\mathbb{B}F$ est une approche entièrement *« data-driven »*.

IV.5.2 Méthodologie de détection avec $\Psi_{\mathbb{B}}$

En détection active, un signal $s(t)$ est émis dans une direction de l'espace. Si une cible est présente, ce signal est renvoyé sous la forme d'un écho $e(t)$. La présence (ou l'absence) de cet écho dans le signal reçu $x(t)$ indique donc la présence (ou l'absence) d'une cible éventuelle.

Nous proposons de motiver notre approche de la détection par $\Psi_{\mathbb{B}}$ en étudiant le problème classique de la détection binaire : présence ou absence d'une cible.
Soit $s(t)$ le signal émis de durée T_0 et $r(t)$ le signal reçu traité sur l'intervalle $[T_i, T_f]$ pour détecter la présence (ou l'absence) de la cible. Les hypothèses sur le signal $r(t)$ sont :

$$\begin{cases} \textbf{- hypothèse } H_0 \textbf{ :} \; r(t) = n_1(t), \; (t \in [T_i, T_f]) \, , \\ \textbf{- hypothèse } H_1 \textbf{ :} \; r(t) = a.s(t - t_0) + n_2(t), \; (t \in [T_i, T_f]) \, . \end{cases} \tag{IV.120}$$

Sous l'hypothèse H_0, le signal contient seulement un bruit $n_1(t)$ additif blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ_n^2.
Sous l'hypothèse H_1, $r(t)$ est constitué d'une version atténuée de a et décalée en temps du signal transmis $a.s(t - t_0)$ et d'un bruit $n_2(t)$. Dans ce cas, on suppose qu'il y a une cible, et que le canal de transmission ne déforme pas le signal (mise à part une atténuation de a).
L'inconnue t_0 désigne le retard dû au temps mis par le signal émis pour effectuer le trajet aller-retour entre la cible et le point d'observation et permet par la suite d'en déduire la distance à la cible.
On pose $T = [T_{min}, T_{max}]$ les valeurs possibles de t_0. Dans ce cas, l'intervalle d'observation est $[T_i, T_f] = [T_{min}, T_{max} + t_0]$ et pour chaque valeur de $t_0 \in T$, la décision est donnée par la relation suivante :

$$T_B = \underset{t \in T}{Arg\,max} \left\{ \int_T \Psi_{\mathbb{B}}[s(t), r(t)] \right\} , \tag{IV.121}$$

T_B correspond à la date où il y a un maximum d'interaction entre $s(t)$ et $r(t)$. L'amplitude maximale associée à T_B peut être comparée à un seuil pour décider de la présence (H_1) ou l'absence (H_0) d'une cible. Dans notre cas, le seuil est déterminé arbitrairement.

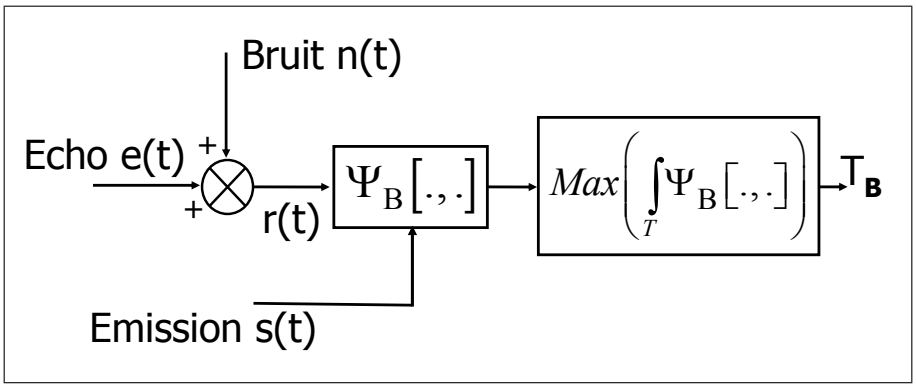


Figure IV.8 **—** Principe de détection du signal par $\Psi_{\mathbb{B}}$, $M\mathbb{B}F$.

Ainsi, le détecteur $M\mathbb{B}F$ calcule l'interaction entre le signal reçu et toutes versions possibles du signal transmis décalées en temps et sélectionne la plus grande interaction d'énergie comme vérifiant la décision. La localisation du maximum permet alors l'estimation du paramètre inconnu : $t_0 = T_B$, (Fig. IV.8). Les différentes étapes du procédé de détection par *« Matched $\Psi_{\mathbb{B}}$-Filter »* ($M\mathbb{B}F$) basé sur l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ sont décrites par le pseudo-code :

Entrées :

Signal émis : $s(m) = s_r(m) + js_i(m)$, $(m \in \{1, 2, \ldots, w\})$,
Signal reçu : $r(n) = r_r(n) + jr_i(n)$, $(n \in \{1, 2, \ldots, N\})$.

Sorties :

T_B : instant pour lequel $\Psi_{\mathbb{B}}$ est maximum .

Pour $k = 1$ **à** $(N - w + 1)$, (k est la fenêtre courante) ,
$g^k(n - k + 1) \longleftarrow r(n)$, $(n \in F = \{k, w + k - 1\})$,
Calculer :

$$\Psi_{\mathbb{B}_r}{}^l = \Psi_{\mathbb{B}_d}[s_r(l), g_r^k(l)] \text{ et}$$
$$\Psi_{\mathbb{B}_i}^l = \Psi_{\mathbb{B}_d}[s_i(l), g_i^k(l)] \quad ,$$
$$\Psi_{\mathbb{B}_d}[s(l), g^k(l)] \longleftarrow \Psi_{\mathbb{B}_r}{}^l + \Psi_{\mathbb{B}_i}^l,\ (l \in \{1, w\}) .$$

Calculer $I(k)$: somme des $\Psi_{\mathbb{B}_d}$ dans F, $I(k) = \sum_{l=k}^{w+k-1} \Psi_{\mathbb{B}_d}[s(l), g^k(l)]$.

FinPour ;

Calculer : $T_B = \underset{1 \le k \le M}{Arg\,max}\ [I(k)]$.

Tableau IV.3 **—** Pseudo-code de la détection par $M\mathbb{B}F$.

IV.5.3 Application à des signaux synthétiques

Afin d'illustrer le principe de détection par $M\mathbb{B}F$, la méthode est appliquée à des signaux synthétiques simples (Fig. IV.9). Deux signaux synthétiques de référence, $s_1(t)$ et $s_2(t)$, avec des fenêtres d'analyse de taille 65 et 81 respectivement sont illustrés figure IV.9**(a)-(d)**. $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les signaux émis et à détecter par la suite. Les signaux synthétiques de réception, $r_1(t)$ et $r_2(t)$, correspondent aux signaux de référence décalés temporellement (t_0) et atténués

de (a) auxquels un bruit $n(t)$ est ajouté (Fig. IV.9**(b)-(e)**). L'atténuation théorique a est de 0.95 et le décalage temporel théorique de 300 échantillons.

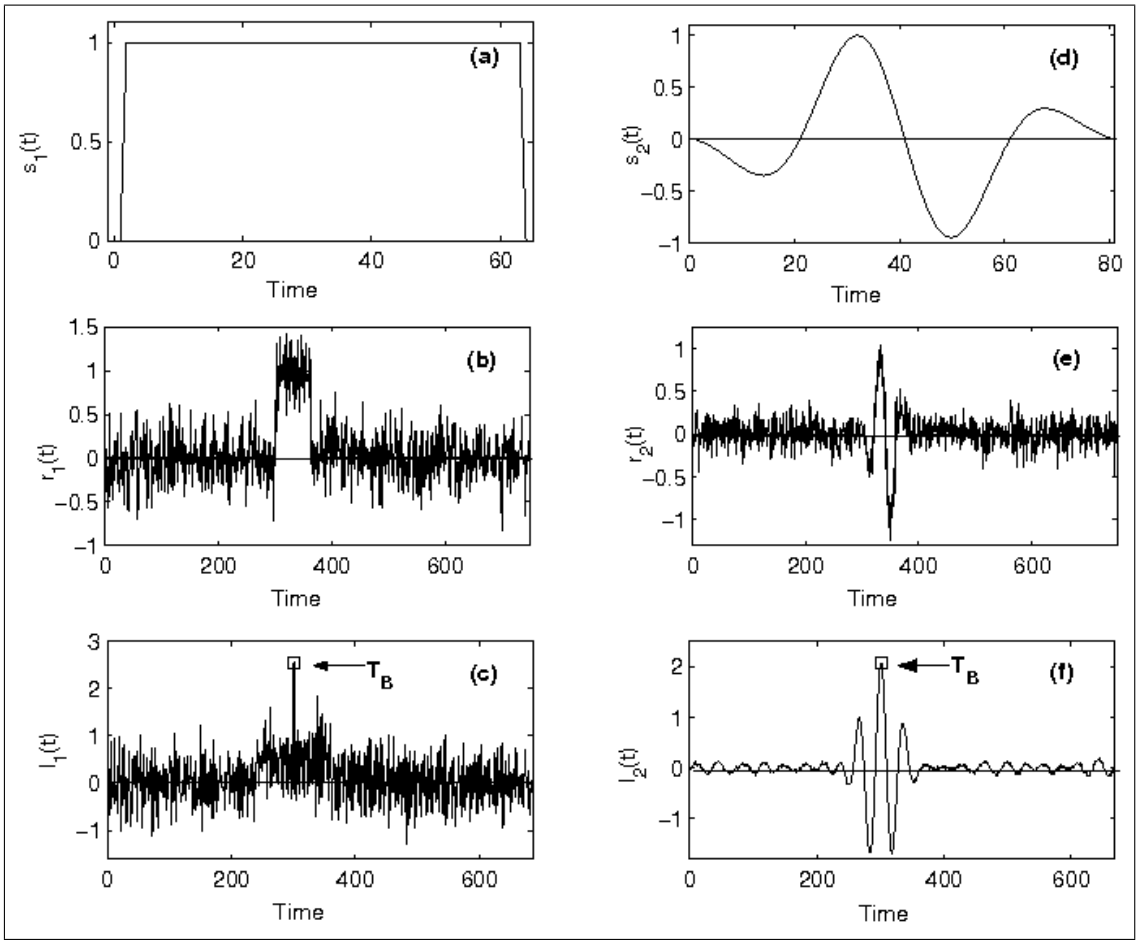


Figure IV.9 — Résultats de détection par $M\mathbb{B}F$ des signaux synthétiques simples ($a = 0.95$, $t_0 = 300$) : **(a)** Premier signal d'émission, $s_1(t)$, **(b)** Écho reçu du premier signal, $r_1(t)$, **(c)** Intégrale I, de $\Psi_{\mathbb{B}_d}$ calculée entre le signal émis $s_1(t)$ et l'écho reçu $r_1(t)$, **(d)** Second signal d'émission, $s_2(t)$, **(e)** Écho reçu du second signal, $r_2(t)$, **(f)** Intégrale I, de $\Psi_{\mathbb{B}_d}$ calculée entre le signal émis $s_2(t)$ et l'écho reçu $r_2(t)$.

Les sorties du détecteur $M\mathbb{B}F$ ($I(t)$) sont illustrées sur la figure IV.9**(c)-(f)** sur laquelle sont indiquées les maxima $t = T_B$ respectivement pour les deux simulations. Le maximum de la fonction $I(t)$ est situé à $T_B = 300$ échantillons (Fig. IV.9**(c)-(f)**). Nous comparons les résultats obtenus avec l'approche $M\mathbb{B}F$ avec l'approche basée sur la corrélation (filtrage adapté ou « matched filter »MF) en fonction du rapport signal à bruit (SNR) (Tab. IV.4). Le SNR varie entre des valeurs comprises entre -6 dB et 9 dB, a est fixé à 0.7. Chacune des valeurs T_B du tableau correspond à la valeur moyenne de 25 réalisations différentes pour chaque SNR. Ces résultats montrent que les performances avec le détecteur $M\mathbb{B}F$ sont très proches de celles que nous pouvons obtenir avec le filtre MF. Les deux méthodes quoique différentes dans leur conception (l'une basée sur un filtre linéaire MF, l'autre sur une approche non-linéaire $M\mathbb{B}F$) sont comparables dans l'estimation de T_B.

	$SNR = -6$ dB		$SNR = -2$ dB		$SNR = 1$ dB	
Signaux	$M\mathbb{B}F$	MF	$M\mathbb{B}F$	MF	$M\mathbb{B}F$	MF
$s_1(t)$	300 ± 1	300 ± 1	300 ± 1	300	300	300
$s_2(t)$	300 ± 2	300 ± 2	300 ± 1	300 ± 1	300 ± 1	300 ± 1

	SNR $=3dB$		SNR $=5dB$		SNR $=9dB$	
Signaux	$M\mathbb{B}F$	MF	$M\mathbb{B}F$	MF	$M\mathbb{B}F$	MF
$s_1(t)$	300	300	300	300	300	300
$s_2(t)$	300 ± 1	300	300 ± 1	300	300	300

Tableau IV.4 — Estimation de T_B en fonction du SNR pour les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ par $M\mathbb{B}F$ et *« matched filter »* (MF).

IV.5.4 Application à l'estimation des retards

Cette partie est une synthèse des travaux réalisée dans le cadre du traitement d'antennes [27, 185]. L'objectif est illustrer la méthodologie de détection par $M\mathbb{B}F$ dans le cadre de l'estimation des temps de retard sur une ligne de capteurs qui seront utilisés en traitement d'antennes.

Nous considérons que le signal $s(t)$ émis par l'émetteur se propage dans un milieu bruité puis est reçu sur une ligne de récepteurs distincts après avoir percuté la cible (Fig. IV.10(a)). Nous proposons d'estimer le retard de propagation T_B entre deux capteurs consécutifs avec la méthode $M\mathbb{B}F$.

Les signaux $r_m(t)$ et $r_k(t)$ captés au cours du temps par deux récepteurs consécutifs vérifient :

$$\begin{cases} r_m(t) = s(t) + n_m(t)\,, \\ r_k(t) = a.s(t-(k-m)T) + n_k(t)\,, \end{cases} \tag{IV.122}$$

où $s(t)$ est l'onde émise par la source, $n_m(t)$ et $n_k(t)$ représentent respectivement le bruit perçu sur les capteurs m et k, a est un coefficient d'atténuation et T est le retard entre deux capteurs consécutifs.

La localisation du maximum d'interaction entre les signaux $r_m(t)$ et $r_k(t)$ permet d'estimer le retard T_{B_Ψ} entre deux capteurs consécutifs :

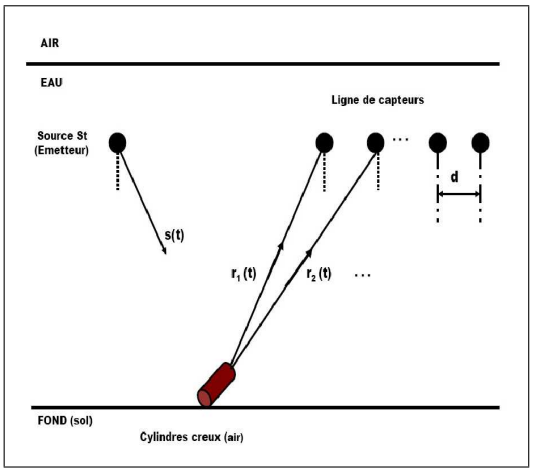
$$T_{B_\Psi} = \underset{t\in T}{Arg\,max} \left[\int_T \Psi_{\mathbb{B}}[r_m(t), r_k(t)]\right], \tag{IV.123}$$

où T_{B_Ψ} est la date correspondant au maximum d'interaction entre $r_m(t)$ et $r_k(t)$.

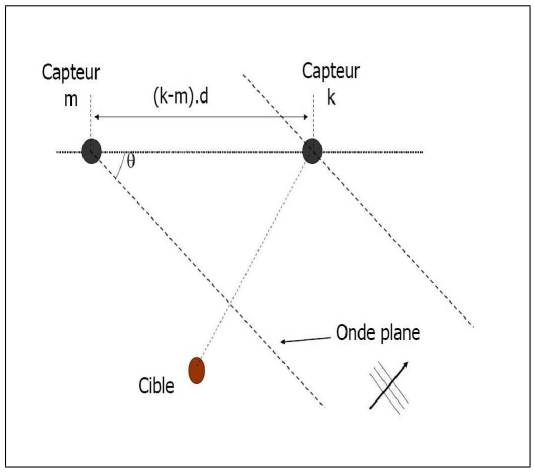
Afin de comparer l'estimation T_{B_Ψ}, nous avons calculé le retard théorique $T_{B_{theo}}$. En effet si l'on considère que la cible est suffisamment distante des récepteurs alors l'onde reçue par les capteurs peut être approximée par une onde plane et le retard consécutif entre les deux récepteurs m et k peut être calculé (théoriquement) par la relation :

$$T_{B_{theo}} = \frac{(k-m).d.\sin\theta}{c}\,, \tag{IV.124}$$

avec c la célérité du milieu, $\delta d = (k-m).d$ l'écart entre deux capteurs consécutifs et θ l'angle de réception (Fig. IV.10(b)).



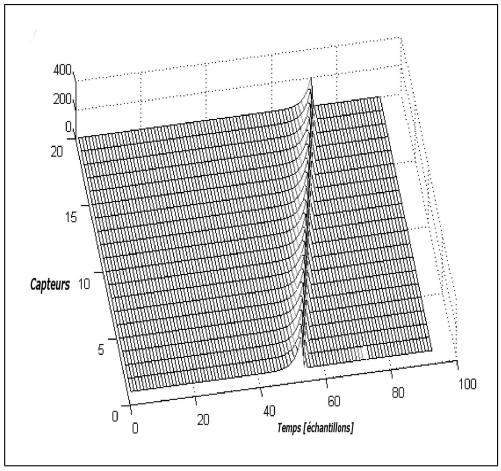
(a) Principe d'acquisition des signaux sur une ligne de capteurs.



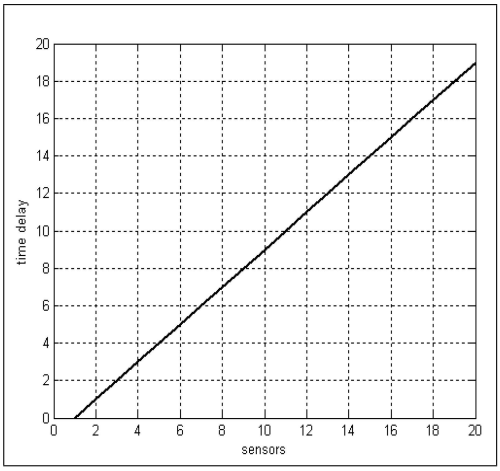
(b) Géométrie utilisée pour estimer le retard entre deux capteurs consécutifs m et k sous l'hypothèse d'onde plane.

Figure IV.10 — Principe d'acquisition des signaux sur une ligne de capteurs et géométrie utilisée pour l'estimation du retard entre deux capteurs consécutifs.

Dans un premier temps, nous validons l'ensemble de la démarche sur des données synthétiques non perturbées. Pour cela, nous simulons l'écho (spéculaire) d'une cible placée en champ libre reçu sur une ligne de 20 capteurs répartis uniformément (Fig. IV.11(a)). Dans ce cas, les retards $T_{B_{theo}}$ sont connus par construction des signaux.



(a) Représentation des signaux captés par les capteurs.



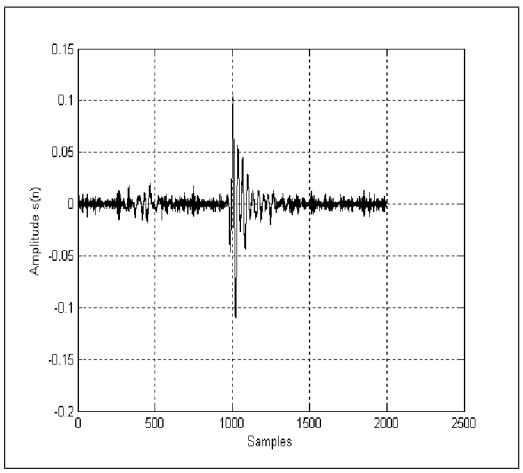
(b) Estimation des retards sur la ligne de capteurs par T_{B_Ψ} et $T_{B_{theo}}$.

Figure IV.11 — Comparaison et résultats d'estimation des retards dans le cas synthétique.

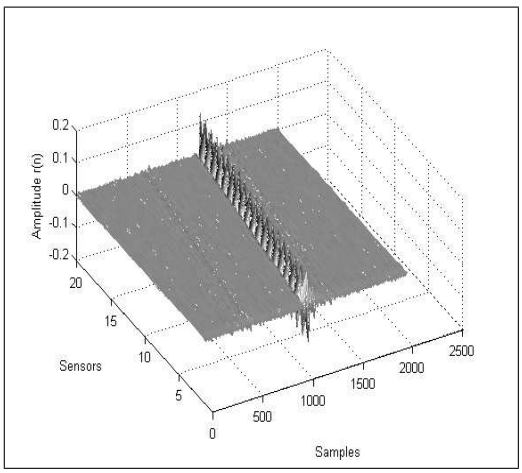
La figure IV.11(b) représente la valeur des retards cumulés en fonction de l'indice du capteur. La référence des retards est prise par rapport au premier capteur. Nous observons que les

retards T_{B_Ψ} et $T_{B_{theo}}$ sont parfaitement confondus (une seule droite est présente). Cela permet de valider sur un cas académique parfaitement maîtrisé l'ensemble de la méthodologie.

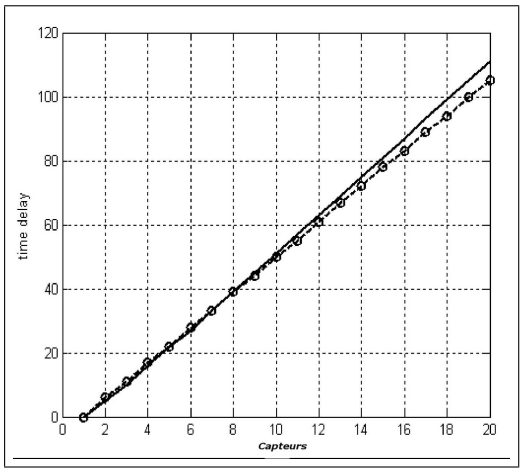
Dans un deuxième temps, nous avons utilisés des mesures effectuées dans une cuve expérimentale où est disposée une ligne de 20 capteurs et les paramètres de l'ensemble de l'expérimentation sont : $c = 1485\ ms^{-1}$, $\theta = 55.5°$, $fe = 10$MHz . Le nombre de points par signaux est de 2000 et la fréquence de travail de l'émetteur est située autour de $350kHz$. La cible est un cylindre métallique creux posé sur le fond et placé dans le faisceau incident de l'onde émise $s(t)$. Afin de calculer $T_{B_{theo}}$, les différents angles θ ont été mesurés ainsi que l'écart $d \approx 1mm$ entre les capteurs. D'autre part, nous réalisons une étape de pré-traitement sur les mesures en utilisant un filtre de Savitzky-Golay [191] du 3^e ordre avec une fenêtre d'analyse de taille 51 (étudié dans le chapitre **III**, section III.3).



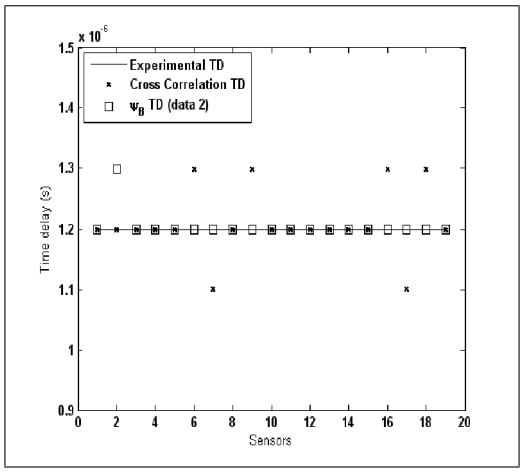
(a) Exemple de signal mesuré par un des 20 capteurs.



(b) Représentation des signaux perçus par les capteurs.



(c) Estimation des retards sur la ligne de capteurs par T_{B_Ψ} et $T_{B_{theo}}$.



(d) Estimation des retards sur la ligne de capteurs par T_{B_Ψ} et $T_{B_{MF}}$.

Figure IV.12 — Comparaison et résultats d'estimation des retards dans le cas réel.

La figure IV.12(a) montre le signal écho reçu sur le premier capteur et la figure IV.12(b) illustre les signaux temporels reçus par les 20 sondes. Visuellement, nous pouvons bien constater les différents retards entre les capteurs.
La figure IV.12(c) permet de comparer les retards T_{B_Ψ} (courbe pleine) et $T_{B_{theo}}$ (courbe en pointillés). La référence des retards est prise par rapport au premier capteur et les courbes représentent les retards cumulés. Nous observons une bonne concordance entre les deux méthodes. Cependant pour les dernières sondes, les retards estimés par les deux approches présentent une différence. L'une des hypothèse pour cet écart peut s'expliquer par le fait que θ et d sont des grandeurs mesurées expérimentalement et donc assujetties à des imprécisions lors de leurs estimations, erreurs répercutées sur $T_{B_{theo}}$. Afin de se s'affranchir de cette contrainte de mesure (et de vérifier aussi l'hypothèse faite à ce sujet), l'estimation des retards a été réalisée avec la corrélation croisée MF (« matched filter »), les retards déduites de cette méthode sont notés $T_{B_{MF}}$. La figure IV.12(d) permet de comparer les retards T_{B_Ψ} et $T_{B_{MF}}$. Les courbes représentent cette fois le retard entre les capteurs consécutifs.

Enfin, nous évaluons aussi l'erreur moyenne quadratique (RMSE pour « Root mean square error ») entre les retards estimés par l'une des deux méthodes ($M\mathbb{B}F$, MF) et ceux théoriques ($T_{B_{theo}}$). L'expression de l'erreur entre T_{B_Ψ} et $T_{B_{theo}}$ est donnée par :

$$RMSE_{(T_{B_\Psi}-T_{B_{theo}})} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[T_{B_\Psi}(i) - T_{B_{theo}}(i)\right]^2}{n-1}}\,.$$

Les retards $T_{B_{theo}}$ sont calculés à partir des données mesurées et en utilisant la relation (Eq. IV.124).

Signaux réels	
$RMSE_{(T_{B_\Psi}-T_{B_{theo}})}$	$RMSE_{(T_{B_{MF}}-T_{B_{theo}})}$
0.0526	0.180

Tableau IV.5 **—** RMSE des retards entre $M\mathbb{B}F$ et « théorique », MF et « théorique »

Nous remarquons d'après la figure IV.12(d) que l'estimation des retards T_{B_Ψ} est très bonne. Cela est d'ailleurs confirmé par la valeur très faible du RMSE (0.0526). Si nous comparons les retards T_{B_Ψ} avec ceux estimés par la méthode standard MF, nous constatons que le RMSE obtenu par MF est $3,42$ plus important que par $M\mathbb{B}F$.
Nous pouvons conclure que l'hypothèse faite sur les erreurs de mesures des angles et des écarts entre les capteurs est valide. En effet, les résultats du tableau IV.5 et de la figure IV.12(d) montrent que les deux approches $M\mathbb{B}F$ et MF sont globalement identiques, avec cependant une certaine « préférence » pour la méthode $M\mathbb{B}F$.

Dans cette partie, la méthode $M\mathbb{B}F$ est appliquée pour l'estimation des retards. Cette méthode détermine l'interaction énergétique entre deux signaux. La détermination du retard repose sur la détection du maximum d'interaction d'après la relation (Eq. IV.123).
Ces quelques résultats nous confortent dans l'intérêt de tenir compte des caractéristiques (pente, dérivée seconde ...) des signaux pour l'estimation de la ressemblance de deux signaux appliqués ici dans une problématique de détection et d'estimation des retards. Pour confirmer l'efficacité de l'approche par $\Psi_{\mathbb{B}}$, celle-ci doit être appliquée à une plus grande classe de signaux

et dans des conditions expérimentales plus variées (condition d'échantillonnage des signaux, répartition des capteurs, caractéristiques et niveaux de bruit ...).

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'opérateur de Teager-Kaiser qui permet d'estimer l'énergie d'un système nécessaire à la génération d'un signal. Cet opérateur ne nécessite pas d'hypothèse de stationnarité du signal. La formulation de l'opérateur montre qu'il est local et facile à mettre en œuvre. En effet, uniquement trois échantillons sont nécessaires pour le calcul de l'énergie à chaque instant. L'opérateur est limité aux signaux mono-composante et à bande étroite. Ainsi, la fréquence d'échantillonnage doit être à peu prés de 8 fois supérieure à la fréquence la plus élevée du signal. Pour le signaux muli-composantes un filtrage passe-bande tel que celui de Gabor ou des ondelettes est nécessaire avant d'appliquer l'opérateur. Au chapitre **V** nous proposons l'EMD comme filtrage passe-bande et montrons comment conjointement avec cet opérateur nous pouvons faire une analyse temps-fréquence des signaux non-stationnaires. L'opérateur de Teager-Kaiser donne l'information liée au carré du produit de la FI par l'enveloppe de la modulation en amplitude. Nous montrons au chapitre **V** comment ce produit est à la base d'un algorithme de démodulation des signaux.

L'opérateur de Teager-Kaiser étant limité aux signaux réels, nous l'avons étendu aux signaux complexes et généralisé aux cas de deux signaux complexes en introduisant un nouveau opérateur d'énergie croisée : $\Psi_{\mathbb{B}}$. Nous avons proposé trois versions discrètes pour son implémentation et montré qu'il utilise, comme dans le cas de Teager-Kaiser, uniquement 3 échantillons à chaque instant ce qui assure une rapidité du calcul et facilité pour la mise en œuvre. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ nous a permis d'établir dans un premier temps le lien avec la distribution de Wigner-Ville et dans un deuxième temps d'étendre ce lien à l'ensemble de la classe de Cohen. Ces résultats théoriques montrent que $\Psi_{\mathbb{B}}$ permet l'analyse des signaux non-stationnaires (de type mono-composante).

Nous avons montré que le nouvel opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ permet de mesurer l'interaction entre deux signaux complexes (mesure de similarité). La maximisation a permis de proposer une nouvelle méthode de détection d'un signal dans un autre et de calculer le temps de retard entre deux signaux. Les résultats obtenus et comparés à la corrélation croisée sont prometteurs. Nous avons enfin proposé une nouvelle mesure de similarité des signaux autour de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ et comparé les résultats de signaux synthétiques à la distance Euclidienne, et la corrélation croisé. Les bons résultats obtenus montrent l'apport de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ et également l'intérêt d'intégrer les variations temporelles (dérivées première et seconde) pour chiffrer la ressemblance entre les séries temporelles. Ainsi, une des applications possibles de cette nouvelle mesure de similarité est l'indexation des séries temporelles.

CHAPITRE V

La Transformation de Huang-Teager (THT)

Sommaire

V.1 Introduction 118
V.2 Analyse temps-fréquence par THT 120
V.2.1 Méthodologie de la description temps-fréquence 120
V.2.2 Application aux signaux multi-composantes 121
V.2.3 Synthèse 130
V.3 Reconnaissance des formes par THT 133
V.3.1 Classification dans le plan temps-fréquence 133
V.3.2 Méthodologie de la reconnaissance des formes : THT_{RdF} 134
V.4 Conclusion 136

Ce chapitre propose une nouvelle description temps-fréquence permettant de faire une synthèse de l'ensemble des méthodes abordées jusqu'à maintenant.

La capacité de la Transformation de Huang à décomposer un signal multi-composantes en signaux de base, de type AM-FM, est à la base de cette nouvelle représentation temps-fréquence. D'autre part, nous avons montré que l'opérateur d'énergie de TKEO (ou extension) permet d'estimer la FI et l'AI d'un signal mono-composante. Ainsi, la démodulation utilisant l'opérateur de TKEO et la décomposition temporelle d'un signal en mono-composante par la transformation de Huang forment la structure de la nouvelle RTF appelée Transformation de Huang-Teager. Cette méthode temps-fréquence est appliquée à des signaux synthétiques et les résultats obtenus en terme de lisibilité et d'identification des composantes d'un signal sont comparés aux méthodes classiques telles que la Wigner-Ville, les ondelettes ou la THH. Enfin, nous proposons une méthodologie de reconnaissance de forme intégrant la Transformation de Huang-Teager comme étape d'analyse des données.

V.1 Introduction

Suite aux diverses études réalisées jusqu'à maintenant, nous avons pu répondre à quelques questions liées à la problématique de l'analyse de signaux non-stationnaires multi-composantes.
Dans un premier temps, nous avons pu établir la nécessité d'utiliser une représentation conjointe en temps et en fréquence et notamment la possibilité de décrire un signal à l'aide des FI et AI.
Dans un deuxième temps, les contraintes présentes aussi bien dans les RTF standards que sur l'opérateur de Hilbert, nous ont conduit à développer une approche de type **« boîte noire »** (qui ne nécessite pas de connaissance initiale sur le signal) pour l'élaboration de la description temps-fréquence.
Finalement suite aux différentes études réalisées, nos choix se sont portés d'une part sur l'EMD pour la décomposition du signal en un ensemble de signaux mono-composante et d'autre part sur l'opérateur d'énergie de TKEO pour l'estimation de la FI et AI de chacune des composantes déterminées précédemment.

Nous allons utiliser l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ pour estimer la FI et l'AI d'un signal réel $x(t)$. Nous considérons $x = y$ et nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x,y]) &\equiv \Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x])\,, \\ &\equiv \Psi_{\mathbb{R}}[x]\,. \end{aligned}$$

L'estimation de la FI et de l' AI d'un signal $x(t)$ s'inspire de l'algorithme de démodulation énergétique de Maragos *et al.* (ESA pour Energy Separation Algorithm) et s'expriment alors, en considérant la partie réelle de $\Psi_{\mathbb{B}}$, [150] :

$$FI(t) \approx \sqrt{\frac{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[\dot{x}(t)])}{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)])}}\,, \tag{V.1}$$

$$AI(t) \approx \frac{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)])}{\sqrt{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[\dot{x}(t)])}}\,. \tag{V.2}$$

Bien évidemment, ces équations ainsi que leurs versions discrètes de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ sont semblables aux expressions présentées dans la littérature. Ainsi, par analogie avec l'expression discrète proposée par Maragos *et al.* [150] appelée $DESA_1$, nous pouvons écrire en considérant $\Psi_{\mathbb{B}}$:

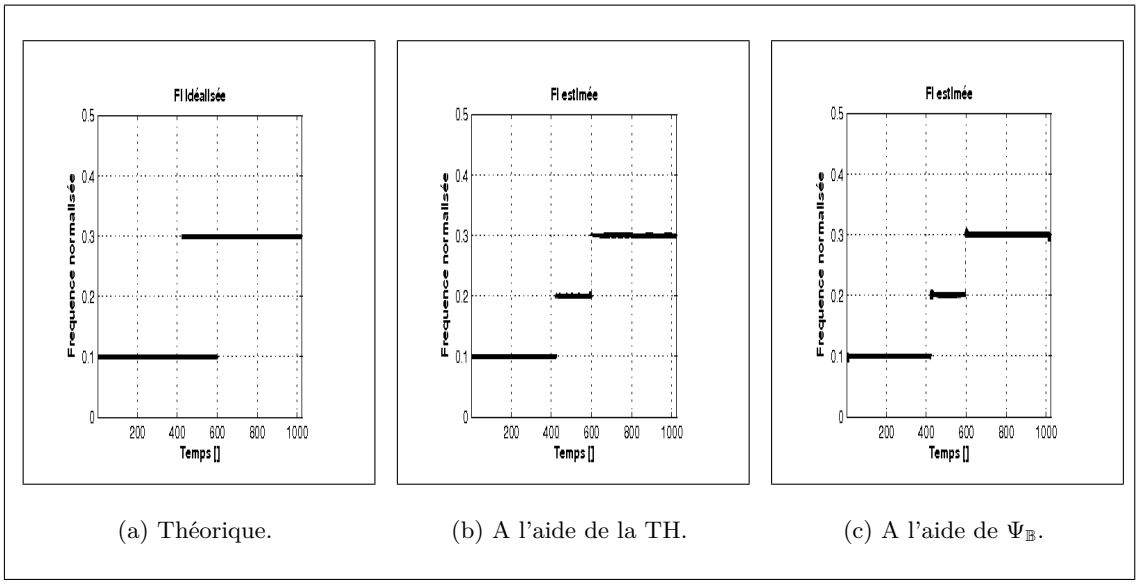
$$\widetilde{FI}(n) = \arccos\left(1 - \frac{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[y_n] + \Psi_{\mathbb{B}}[y_{n+1}])}{4\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x_n])}\right), \tag{V.3}$$

$$\widetilde{AI}(n) = \sqrt{\frac{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x_n])}{1 - \left(1 - \frac{\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[y_n]+\Psi_{\mathbb{B}}[y_{n+1}])}{4\Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x_n])}\right)}}\,, \tag{V.4}$$

avec $y[n] = x_n - x_{n-1}$.

L'estimation de la FI par la relation V.1 ou V.3 d'un signal multi-composantes impose les mêmes contraintes que celles avec la TH. En effet, si nous considérons le signal présenté dans le chapitre **I** utilisé pour montrer les limites de l'interprétation de la TH (Fig. V.1(b)), nous

pouvons observer le même problème d'interprétation de la FI lorsque le signal est constitué de deux composantes.



(a) Théorique. (b) A l'aide de la TH. (c) A l'aide de $\Psi_{\mathbb{B}}$.

Figure V.1 — Estimation de FI d'un signal multi-composantes à l'aide de $\Psi_{\mathbb{B}}$ et comparaison avec la TH.

Sur la figure V.1(c), l'estimation de la FI n'a rien d'étonnant et l'une des solutions possibles est d'appliquer au préalable un banc de filtres (Fig. V.2) pour décomposer le signal multi-composantes en une combinaison de signaux mono-composante [33, 102, 103, 152, 174, 175]. Généralement, les filtres utilisés sont des filtres de Gabor et nécessitent une connaissance initiale des caractéristiques fréquentielles des différentes composantes constituant le signal.

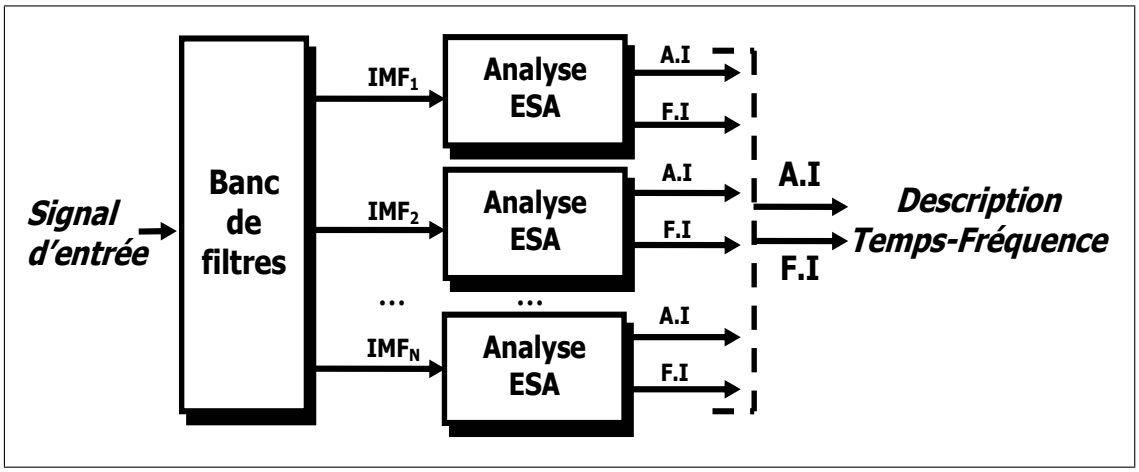


Figure V.2 — Organigramme de l'algorithme multi-résolutions par banc de filtres pour l'estimation des FI et AI d'un signal multi-composantes.

Pour y remédier (connaissance préalable du nombre de composantes, structure du banc de filtres ...), nous proposons d'appliquer l'EMD comme un banc de filtres.

V.2 Analyse temps-fréquence par THT

V.2.1 Méthodologie de la description temps-fréquence

Il faut bien garder à l'esprit que l'EMD ne permet pas d'obtenir directement une représentation temps-fréquence classique comme par exemple la WVD. En fait, c'est l'adjonction d'une méthode d'estimation de l'AI et de la FI de chaque IMF qui permet d'y parvenir. La représentation finale est une représentation de type temps-fréquence.
Bien évidemment il existe d'autres exemples de ce type de combinaison. Ainsi, Huang *et al.* [114] ont utilisé la TH pour estimer les AI et FI (cf. section II.4.3).
Dans [181], Rilling *et al.* proposent une approche basée sur la description temps-fréquence de chaque IMF à l'aide du spectrogramme réalloué. L'objectif est d'étudier la capacité de l'EMD à séparer naturellement les différentes composantes présentes dans un signal.

Pour estimer l'AI et la FI de chaque IMF, nous combinons l'EMD avec l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ et d'appliquer les opérations de démodulation associées à cet opérateur (V.3 et V.4). Cette méthode de représentation temps-fréquence est appelée la Transformation de Huang-Teager (THT) (Fig. V.3).

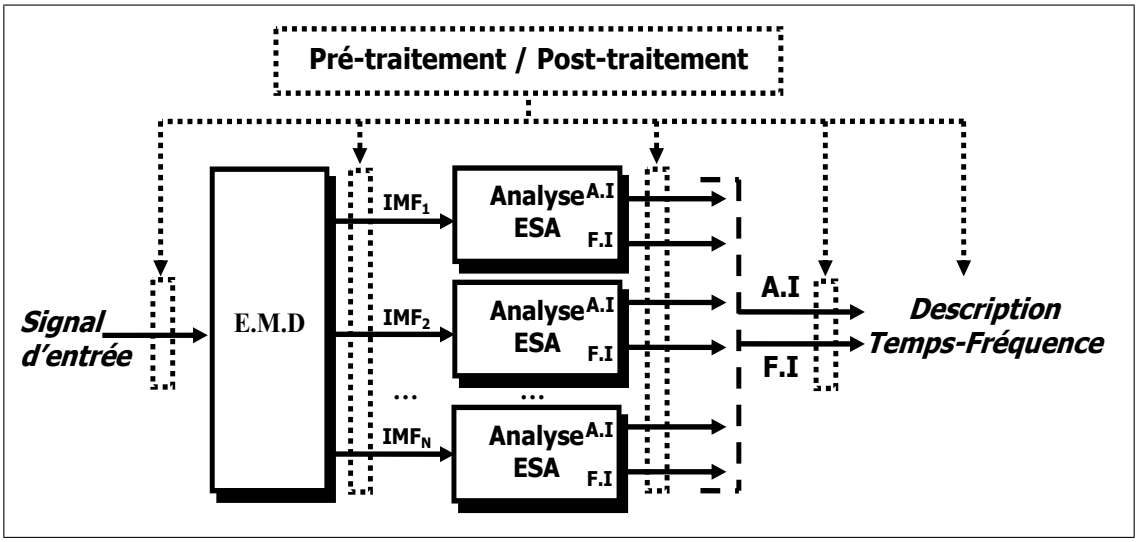


Figure V.3 — Organigramme général de la THT.

Nous pouvons noter que l'EMD remplace le banc de filtres présent sur la figure V.2. Cela a l'avantage de ne nécessiter aucun pré-requis sur les caractéristiques du signal à analyser.
D'autre part, contrairement à la THH (Fig. II.15), l'estimation de la FI et de l'AI est réalisée avec l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ qui ne nécessite pas le calcul du SA. Cela nous permet d'éviter les limitations de la TH indiquées dans les chapitres précédents (**I** et **II**).

Enfin, la construction de l'espace temps-fréquence diffère des méthodes standards comme par exemple la WVD. Ainsi, les approches RTF du chapitre **I** élaborent une description temps-fréquence à partir de laquelle on estime les FI et AI. A l'opposé, la THT estime d'abord les FI et AI du signal pour obtenir finalement une description temps-fréquence. Nous pouvons noter que Berthomier [18] fut l'un des premiers à suggérer de combiner simultanément la FI et une mesure énergétique locale (ici l'AI) pour construire une description conjointe en temps et en fréquence.

Plusieurs versions de la THT sont proposées :

$\underline{THT_{version1}\ :}$ Cette version correspond à la structure de « base » que l'on peut mettre en parallèle avec la THH présentée dans le chapitre (**II**). La méthode permet d'estimer les différentes composantes présentes dans un signal multi-composantes et de décrire celui-ci par ses FI et AI sans aucun pré- ou post-traitement (Fig. V.4(a)).

$\underline{THT_{version2}\ :}$ Dans cette version les FI et AI estimées par la $version1$ sont filtrées par un filtre médian (ou moyenneur) à fenêtre glissante de faible taille (3 à 9) (Fig. V.4(b)).

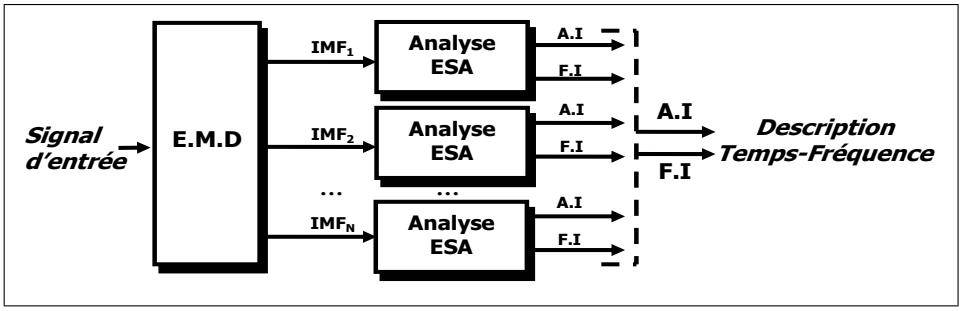
$\underline{THT_{version3}\ :}$ Dans cette version on améliore l'estimation des dérivées de l'opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$. Nous proposons d'approcher le signal au voisinage de chaque point par une spline cubique et d'estimer alors la dérivée au point considéré à partir de cette spline (Fig. V.4(c)). Ce principe de « ré-échantillonnage » a été proposé dans [63] pour l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$.

$\underline{THT_{version4}\ :}$ Dans cette version on propose une présentation temps-fréquence qui s'inspire des méthodes temps-échelle et des transformées en ondelettes [40,145] (Fig. V.4(c)). L'objectif est d'obtenir une description temps-fréquence simplifiée du signal (le squelette) à partir de restrictions sur l'image temps-fréquence à certaines lignes importantes (les arêtes ou lignes de crête du signal). Dans notre cas, le principe est appliqué à la représentation temps-fréquence obtenue avec la $THT_{version3}$. Nous identifions pour chaque valeur de t les points dont l'AI est supérieure à un seuil déterminé à l'avance, et nous leur affectons une valeur 1 ; sinon les valeurs sont considérées comme nulles. L'ensemble des points ainsi obtenus constitue la ligne des crêtes (arêtes) et correspond alors au squelette reliant tous les maxima de la THT.

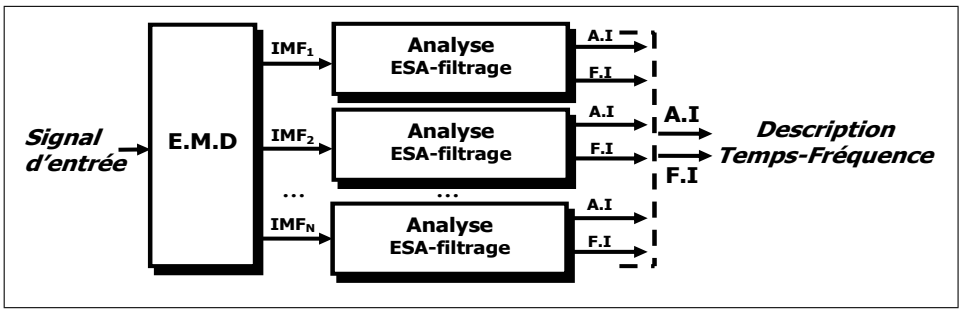
En résumé, la THT permet de décrire le signal dans le plan temps-fréquence par une « collection de lignes » de fréquences instantanées $FI_n(t)$, sur lesquelles on associerait l'évolution de l'$AI_n(t)$ correspondante. Il s'agit, pour toutes les méthodes proposées ci-dessus, d'obtenir une telle description du signal et ce, en mettant l'accent sur la « lisibilité » de la représentation.

V.2.2 Application aux signaux multi-composantes

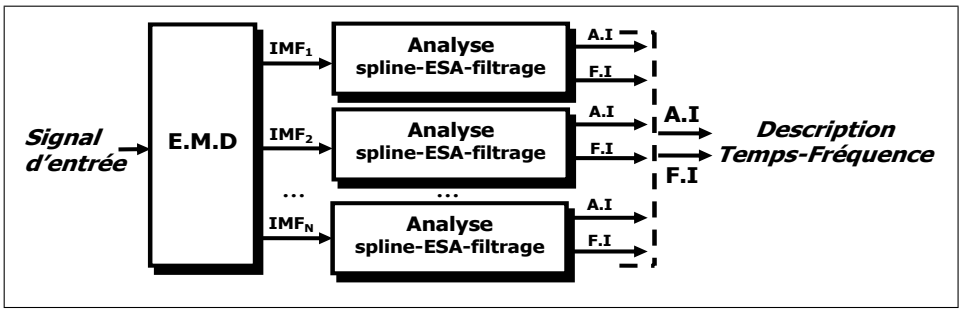
Pour comparer les différentes versions de la THT, nous les appliquons sur les cinq signaux multi-composantes présentés au chapitre **II**. La comparaison portera essentiellement sur la précision de localisation des FI estimées. Cette comparaison n'est pas exhaustive, elle a pour objectif de se donner une idée des différences entre les méthodes mises en jeu.



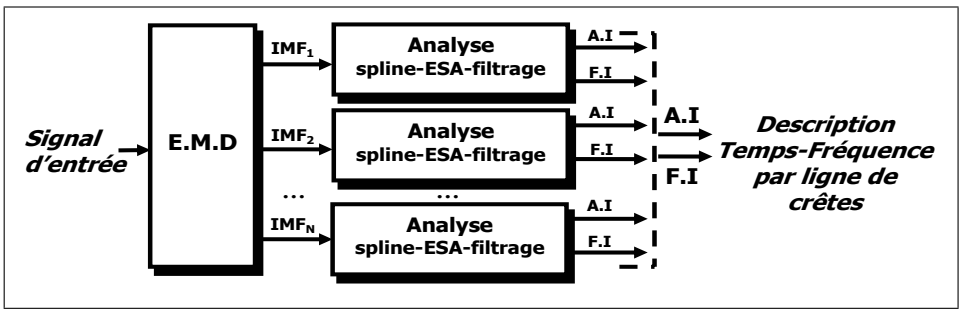
(a) La $THT_{version1}$: sans pré-traitement ni post-traitement.



(b) La $THT_{version2}$: post-traitement des FI et AI par un filtre médian.



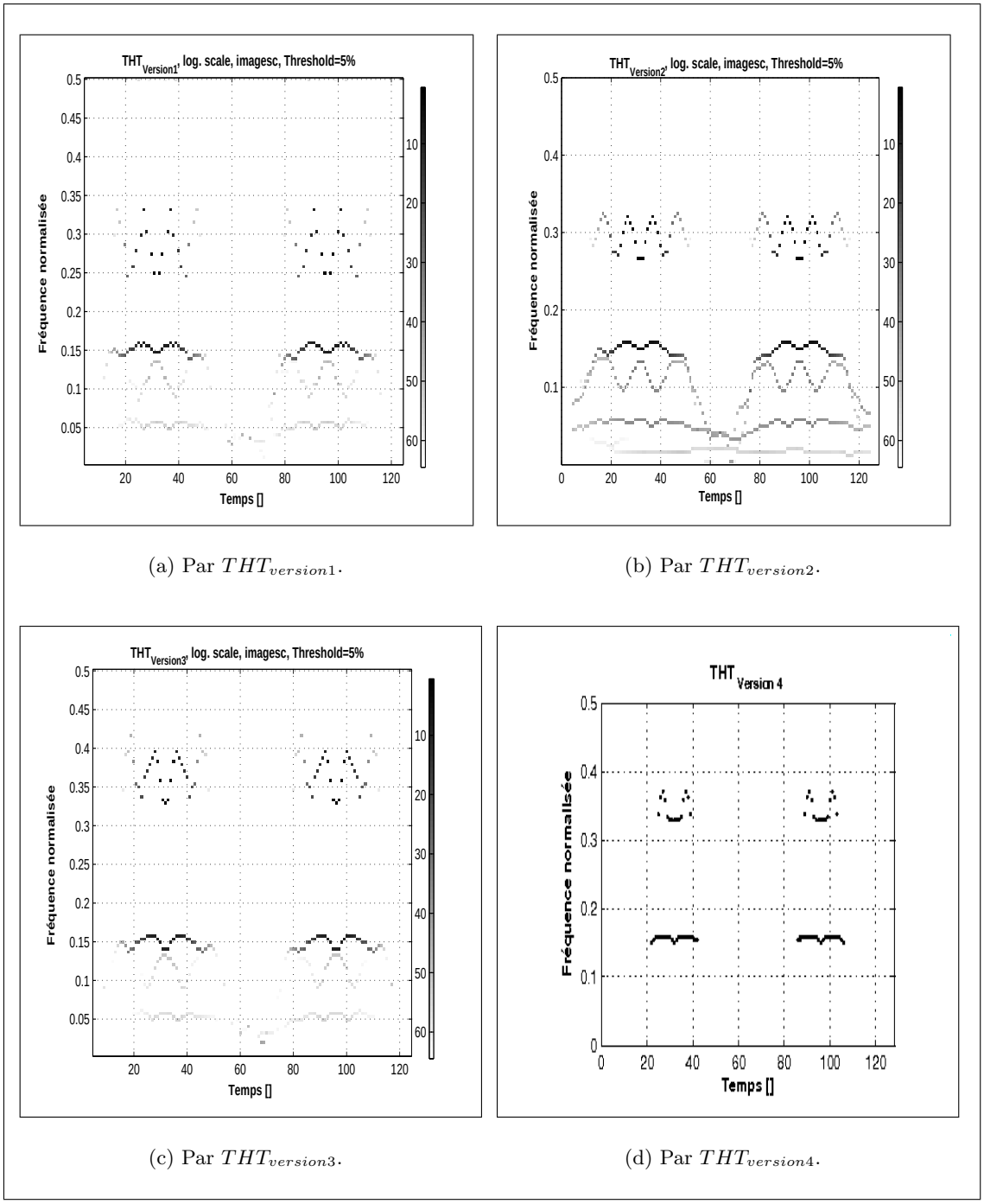
(c) La $THT_{version3}$: estimation des FI et AI avec une étape de ré-échantillonnage.



(d) La $THT_{version4}$: élaboration du plan temps-fréquence par lignes de crêtes.

Figure V.4 — Les quatres versions de la THT .

♦ Le premier signal considéré est constitué des quatre atomes gaussiens élémentaires.



(a) Par $THT_{version1}$.

(b) Par $THT_{version2}$.

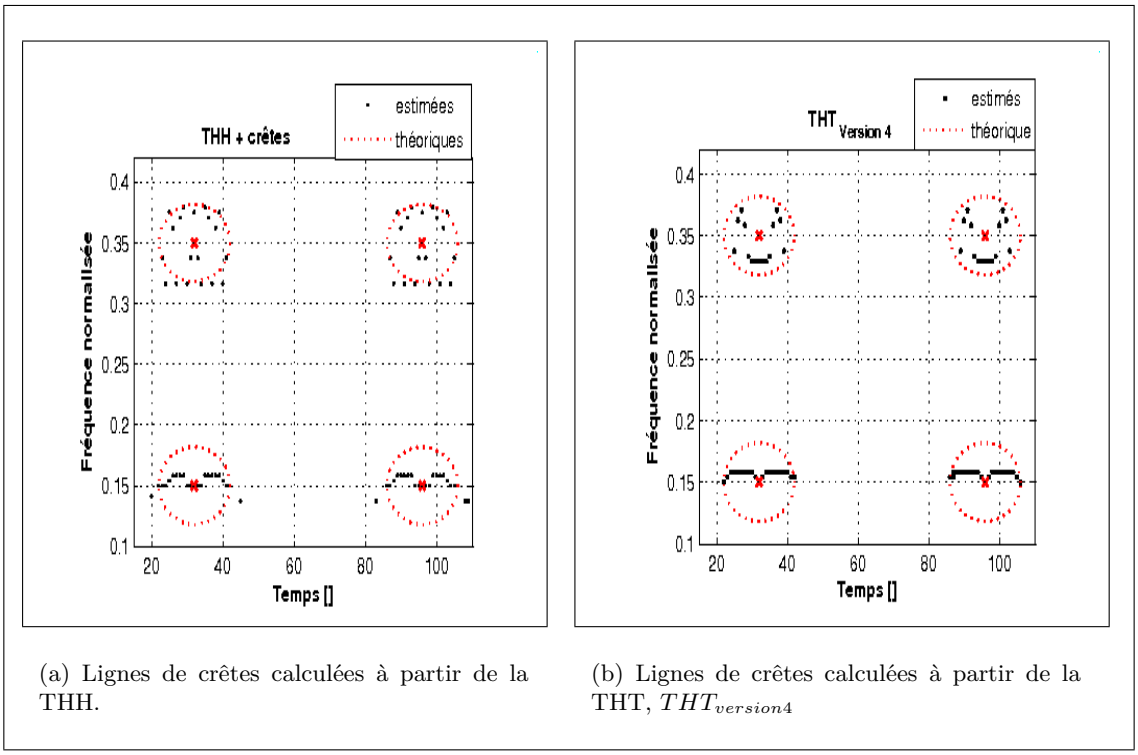
(c) Par $THT_{version3}$.

(d) Par $THT_{version4}$.

Figure V.5 — Description temps-fréquence d'un signal composé de quatre atomes gaussiens par les quatre versions de la THT.

La $THT_{version1}$ détecte bien les quatre atomes gaussiens (Fig. V.5(a)). Cependant, nous constatons que pour les deux atomes de hautes fréquences, la résolution fréquentielle n'est pas très précise au contraire des deux de plus basses fréquences. Le fait d'intégrer un filtre médian de taille 5 permet de réduire sensiblement la dispersion en hautes fréquences (Fig. V.5(b)). Cependant, il faut noter que l'erreur de localisation des hautes fréquences est alors de l'ordre de 0.05 (en fréquence normalisée). En revanche, le fait d'utiliser une étape d'interpo-

lation par des splines cubiques améliore très sensiblement aussi bien la résolution temporelle (qui était déjà satisfaisante par ailleurs) et la résolution fréquentielle (Fig. V.5(c)). En effet, les fréquences estimées des atomes sont de l'ordre de 0.15 pour la basse fréquence et dans l'intervalle $[0.32, 0.37]$ pour la haute fréquence en accord avec la RTF idéalisée (Fig. I.5). D'autre part, nous notons que la description des FI pour chaque atome élémentaire se traduit par des structures oscillantes proches des variations d'amplitude qui apparaissent sur le signal temporel (Fig. I.5).



(a) Lignes de crêtes calculées à partir de la THH.

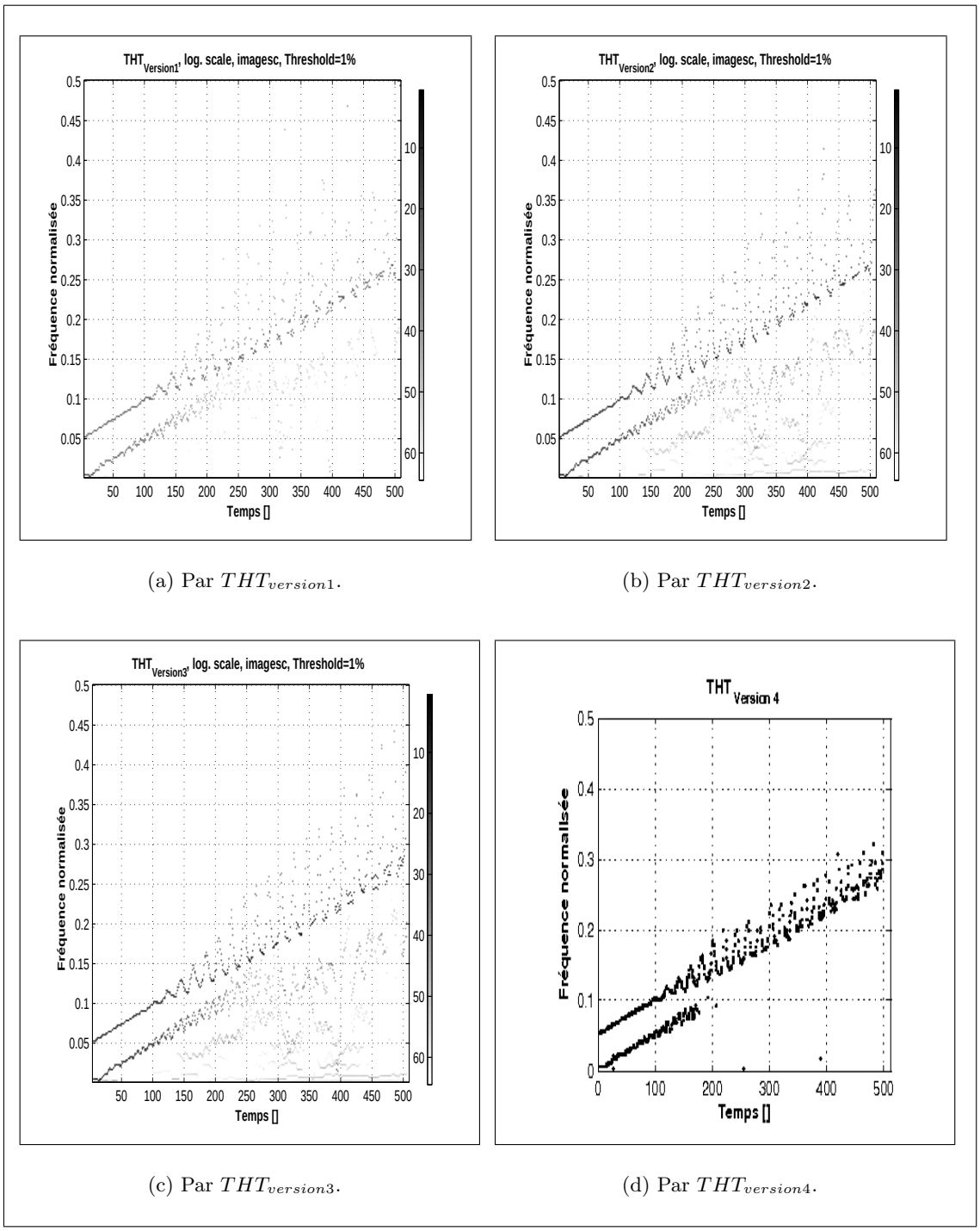
(b) Lignes de crêtes calculées à partir de la THT, $THT_{version4}$

Figure V.6 — Comparaison des lignes de crêtes obtenues par la THH et par la THT.

Si nous observons la ligne de crêtes sur la figure V.6(b), nous pouvons remarquer que l'estimation à l'aide de la THT est équivalente sinon supérieure à l'approche basée sur la THH (Fig. V.6(a)) (afin de comparer les deux méthodes d'analyse, la détermination des lignes de crêtes est aussi réalisée sur la description temps-fréquence obtenue à partir de la THH, voir Figure V.6(a)).

♦ Le second signal est constitué de deux chirps linéaires parallèles.

Dans l'ensemble, les diverses versions de la THT sont globalement identiques (Fig. V.7) : des résolutions temporelle et fréquentielle satisfaisantes pour les basses fréquences puis par la suite un comportement oscillant et divergeant avec la disparition progressive d'une des deux composantes. Cette caractéristique se retrouve aussi avec les ondelettes (cf. section I.3.2). Sur la figure V.7(d), ce phénomène est clairement mis en évidence. Ainsi, les deux fréquences instantanées ne sont pas bien mesurées par les lignes de crêtes, notamment pour les hautes fréquences où les deux chirps interfèrent. Les arêtes suivent ces interférences et ne permettent donc pas d'estimer précisément les deux FI.



(a) Par $THT_{version1}$.

(b) Par $THT_{version2}$.

(c) Par $THT_{version3}$.

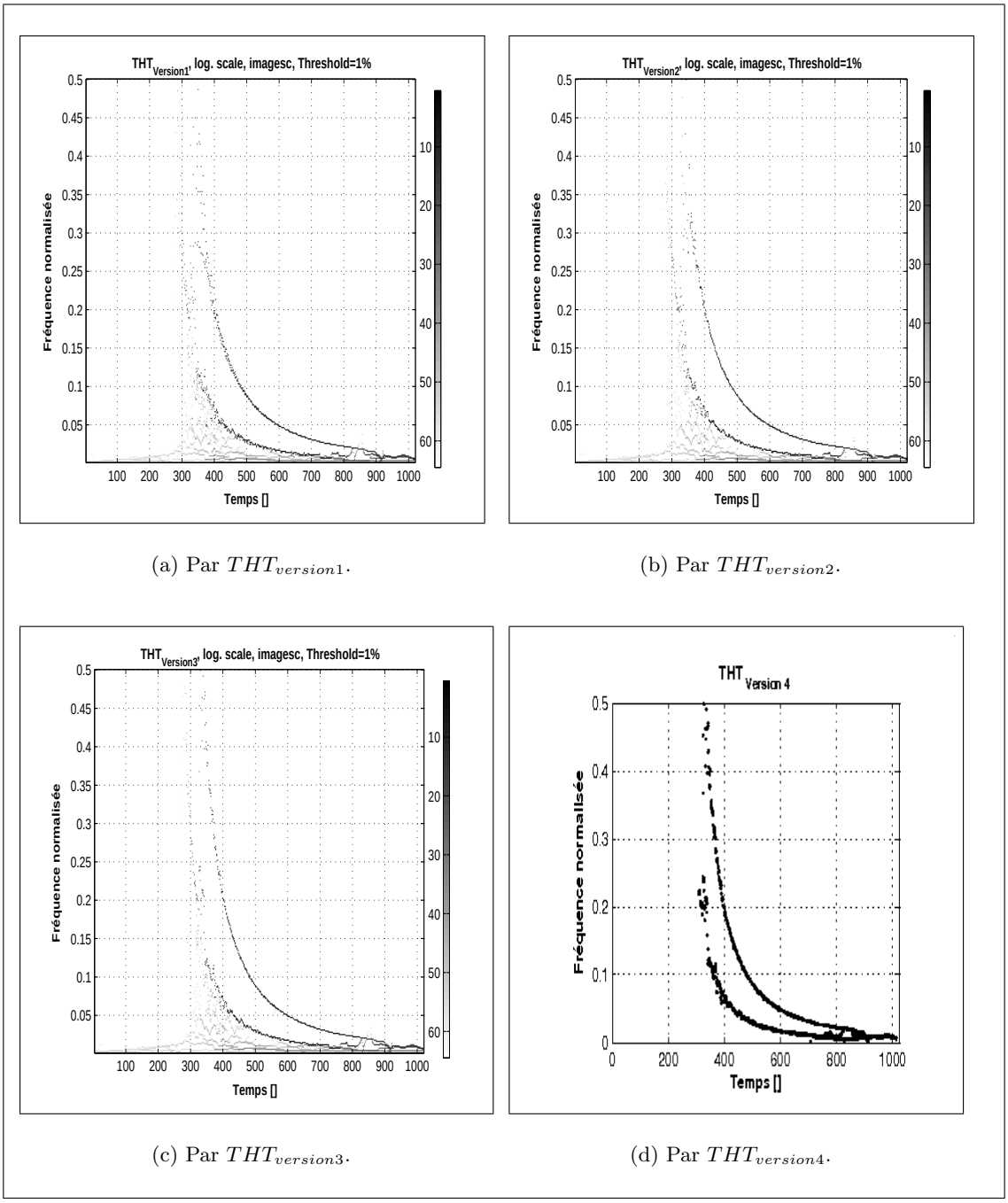
(d) Par $THT_{version4}$.

Figure V.7 — Description temps-fréquence d'un signal composé de deux chirps linéaires parallèles par les quatre versions de la THT.

♦ Le troisième signal est constitué de deux chirps hyperboliques dont les FI tendent toutes deux vers 0 lorsque t augmente.

Globalement, les quatre versions de la THT sont équivalentes avec cependant des meilleures représentations obtenues par la $THT_{version3}$ et la $THT_{version4}$ (Fig. V.8(c) et (d)). En effet, l'estimation des lois d'évolution des deux FI est meilleure dans le domaine des hautes fréquences (Fig. V.8(c) et (d)) par rapport aux deux premières approches. De nouveau, on peut

noter que lorsque les deux chirps interfèrent (dans le domaine des hautes fréquences) alors la composante de plus basse fréquence a tendance à se confondre avec celui de plus haute fréquence. La figure V.8(d) illustre parfaitement ce phénomène. Au début du signal, les deux FI varient très rapidement et une approche telle que la SPWVD (Fig. I.8(b)) permet difficilement d'estimer les deux FI, au contraire des méthodes basées sur la THT. Cela montre clairement qu'une description temps-fréquence à l'aide de la THT adapte sa « fenêtre d'analyse » automatiquement et de façon naturelle par rapport aux oscillations présentes dans le signal considéré.



(a) Par $THT_{version1}$.

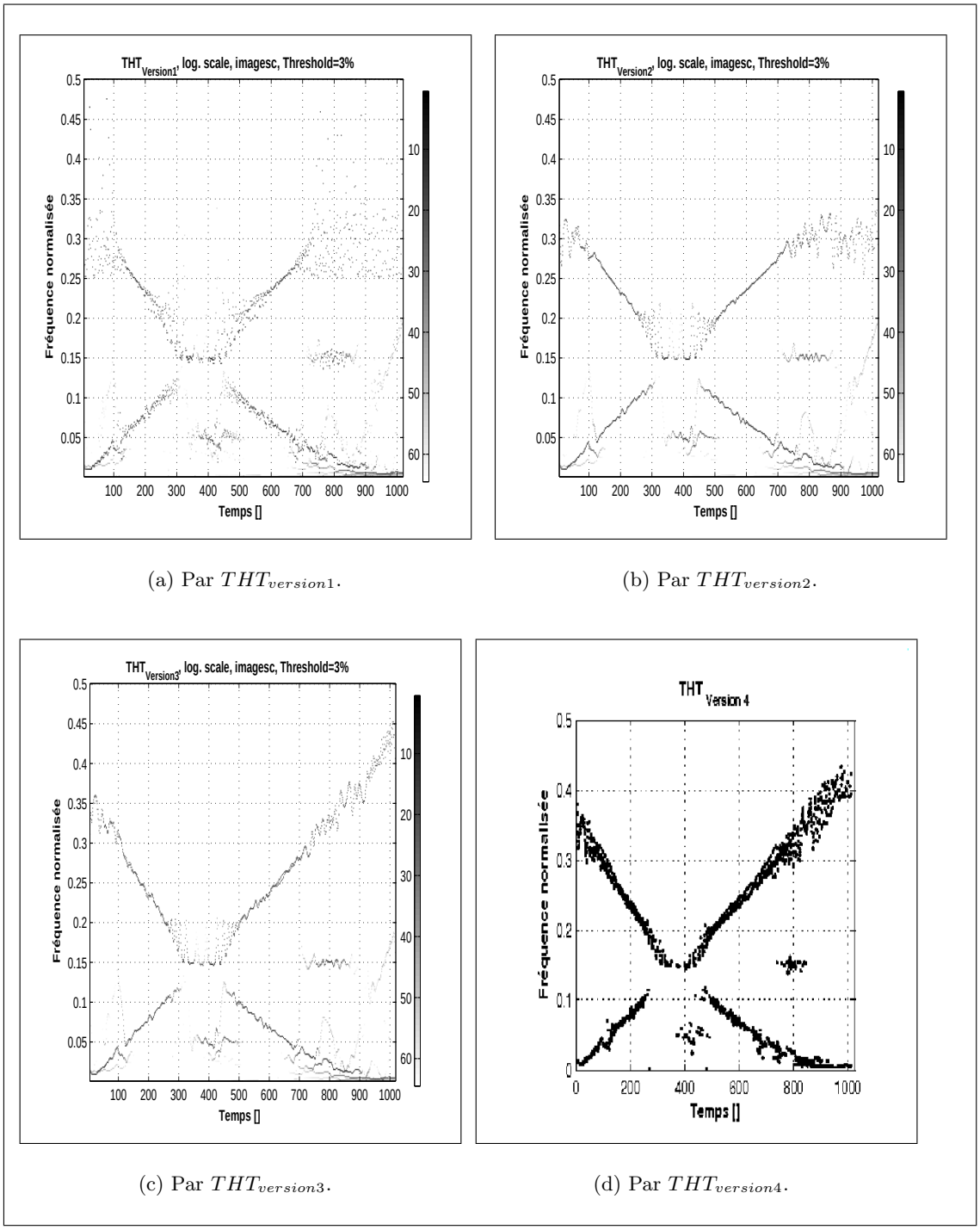
(b) Par $THT_{version2}$.

(c) Par $THT_{version3}$.

(d) Par $THT_{version4}$.

Figure V.8 — Description temps-fréquence d'un signal composé de deux « chirps hyperboliques » par les quatre versions de la THT.

♦ Le quatrième signal est constitué de deux FI, l'une linéaire croissante et l'autre quadratique décroissante, et de deux gaussiennes modulées aux échantillons $t \approx 400$ et $t \approx 800$.



(a) Par $THT_{version1}$.

(b) Par $THT_{version2}$.

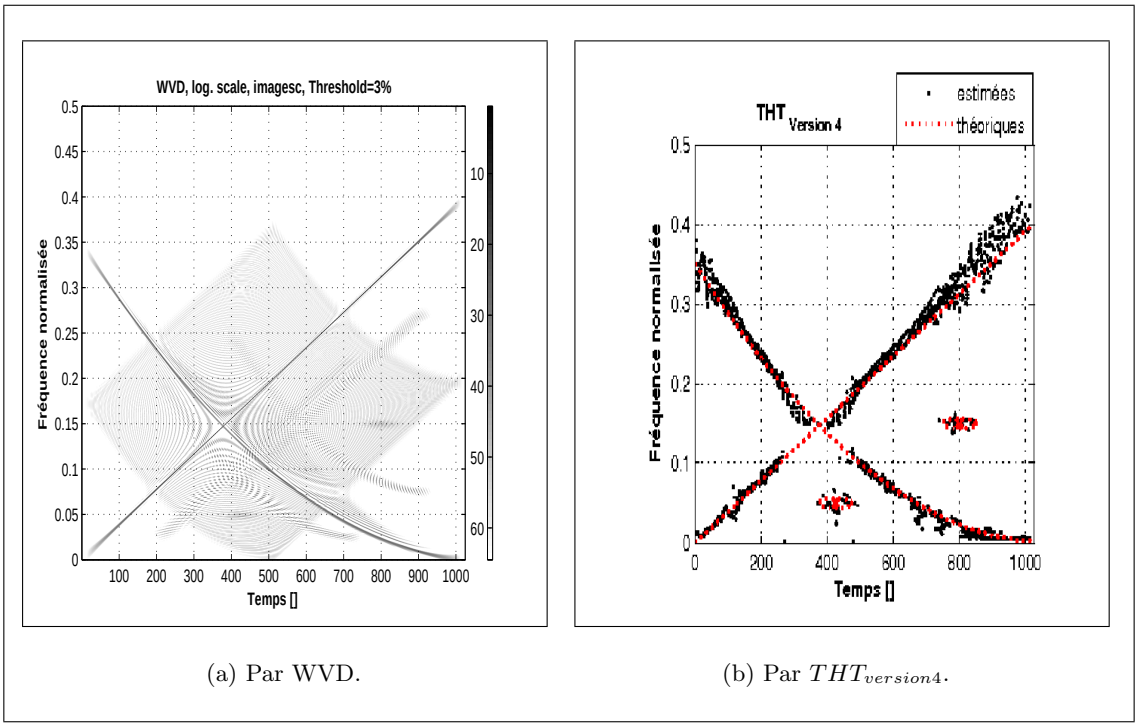
(c) Par $THT_{version3}$.

(d) Par $THT_{version4}$.

Figure V.9 — Description temps-fréquence d'un signal comportant une intersection de FI et deux gaussiennes modulées par les quatre versions de la THT.

La $THT_{version1}$ identifie correctement les différentes lois avec, de nouveau, un étalement des lois fréquentielles dans les hautes fréquences (Fig. V.9(a)). Les résultats obtenus par la $THT_{version3}$ et par la $THT_{version4}$ permettent une meilleure description temps-fréquence, aussi bien du point de vue de la localisation temporelle que de la localisation fréquentielle

(Fig. V.9(c) et (d)). Nous pouvons noter qu'au voisinage de l'intersection des deux FI entre $[350, 400]$, la distance entre les deux lois devient insuffisante pour être correctement dissociée, les plus hautes fréquences supplantant alors les plus basses.



(a) Par WVD.

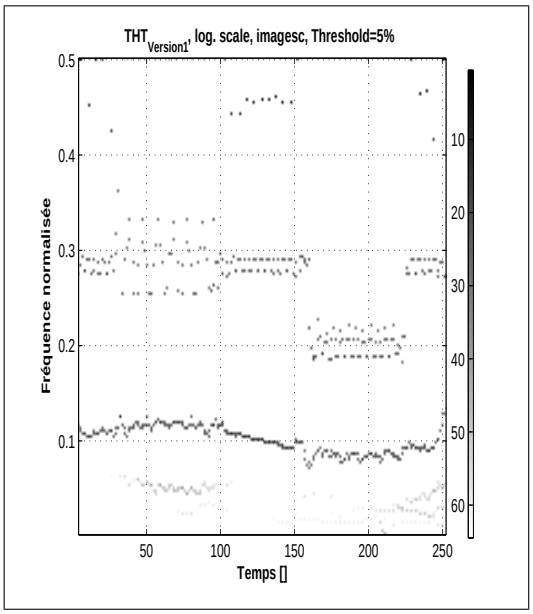
(b) Par $THT_{version4}$.

Figure V.10 — Comparaison des RTF WVD et $THT_{version4}$ pour le signal comportant une intersection de FI et deux gaussiennes modulées.

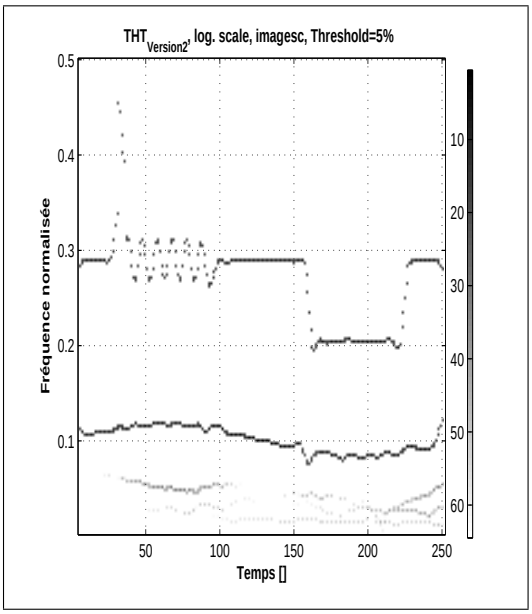
Les figures V.10(a) et V.10(b) permettent de comparer les descriptions obtenues à partir de la WVD et de la $THT_{version4}$. A l'intersection des deux FI, les deux représentations fournissent une description quasi équivalente. La description par la WVD présente néanmoins des interférences qui pourraient être atténuées par d'autres représentations (la SPWVD par exemple). Cependant, contrairement aux RTF « conventionnelles », il faut souligner que la THT a la capacité à s'auto-adapter aux évolutions du signal sans nécessiter de pré-requis.

♦ Le dernier signal est composé de plusieurs FI présentant des transitions brusques.

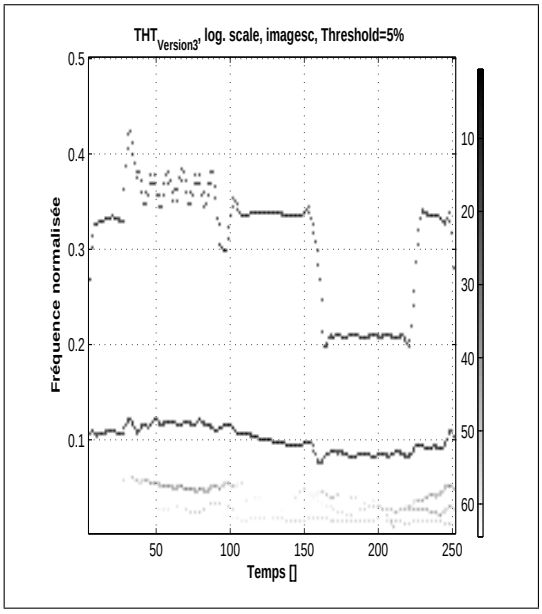
Les différentes versions de la THT mettent en évidence les sauts fréquentiels présents dans ce signal tout en conservant leur capacité à décrire des événements plus lents (FI de forme sinusoïdale) (Fig. V.11). On peut noter que les différentes versions de la THT donnent une description sans interférences (au contraire de la WVD) et permettent un suivi correct des diverses évolutions fréquentielles présentes au cours du temps. Pour les hautes fréquences, les différentes approches présentent un étalement, notamment pour la FI autour de 0.35 présente sur l'intervalle $t \approx [30, 100]$. Les méthodes $THT_{version3}$ et $THT_{version4}$ permettent toutefois de bien estimer cette haute fréquence (Fig. V.11(c) et (d)). Enfin, l'ensemble des approches (et plus particulièrement la $THT_{version3}$ et la $THT_{version4}$) localisent précisément les différents événements temporels. Pour les sauts fréquentiels rapides, les méthodes présentent des pics (cela apparaît notamment très clairement au voisinage de $t = 30$ et $t = 100$). Leur détection peut être un atout dans une perspective de détection d'événements significatifs caractérisés par des sauts fréquentiels.



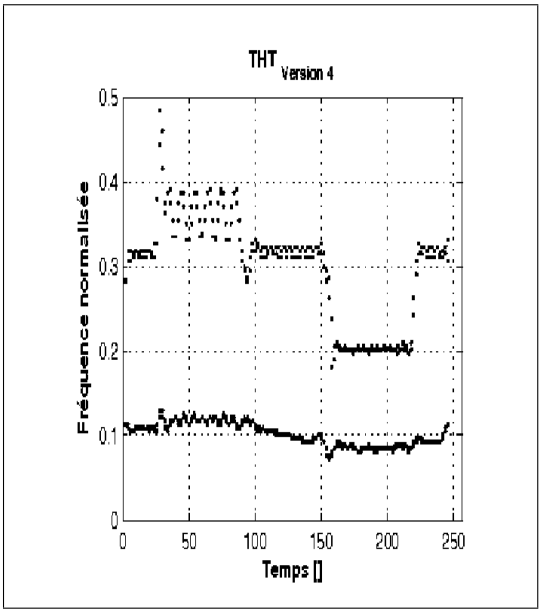
(a) Par $THT_{version1}$.



(b) Par $THT_{version2}$.



(c) Par $THT_{version3}$.



(d) Par $THT_{version4}$.

Figure V.11 **—** Description temps-fréquence d'un signal comportant des ruptures de FI par les quatre versions de la THT.

V.2.3 Synthèse

Dans un souci de synthèse, les descriptions temps-fréquence de la WVD, de la THH et de la THT sur l'ensemble des simulations réalisées sont présentées dans les figures V.13 et V.12.

$\underline{THT_{version1}}$ permet d'estimer et de décrire correctement les différentes FI et AI présentes dans le signal. Cependant, nous notons un étalement fréquentielle important de la FI lorsque celle-ci est située en haute fréquence. Cela s'explique par le fait que l'estimation de la FI est locale et ne nécessite que trois échantillons pour son estimation à un instant t. L'une des premières solutions pour aborder ce problème est la $THT_{version2}$.

$\underline{THT_{version2}}$: l'étalement observé précédemment tend à disparaître au détriment de la localisation précise des diverses FI. Cela est dû essentiellement au fait que l'opérateur d'énergie DESA repose sur la discrétisation de l'opérateur de dérivation (Partie. IV.3.7). La version $THT_{version3}$ permet de résoudre en partie ce problème.

$\underline{THT_{version3}}$: nous pouvons noter une amélioration très notable dans la description temps-fréquence aussi bien au point de vue étalement de la fréquence (dans les hautes fréquences) que pour la localisation de celle-ci. Cependant, cette amélioration se fait au détriment du temps de calcul. Le fait d'interpoler au voisinage de chaque point par une spline cubique s'avère être une opération coûteuse en temps de calcul (environ 10 à 20 fois plus importante par rapport à la méthode $THT_{version1}$).

$\underline{THT_{version4}}$ permet d'obtenir une description synthétique et simplifiée du signal dans le domaine temps-fréquence. La notion d'AI disparaît (dans une certaine mesure) pour ne conserver que les FI constituants le signal. L'image temps-fréquence ainsi obtenue est une représentation binaire (constituée de 0 ou de 1). Cette méthode localise bien les différents événements fréquentiels mais ne permet pas de quantifier finement les différentes contributions à un instant donné t. L'un des avantages de cette représentation est d'obtenir une description condensée du signal dans le plan temps-fréquence.

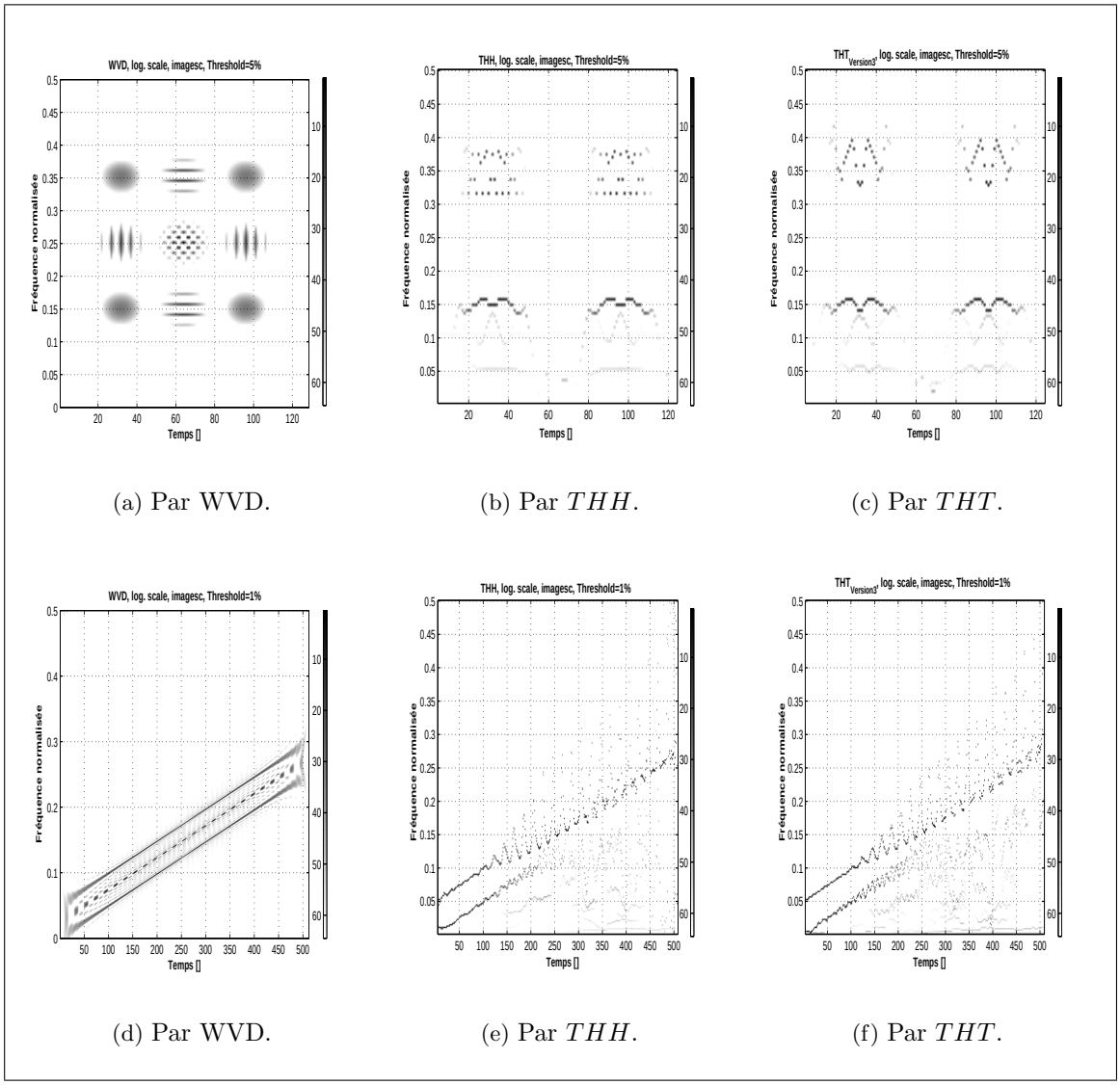
Les méthodes basées sur la THT permettent d'obtenir une description temps-fréquence très souple en ne présupposant aucune hypothèse initiale sur les caractéristiques du signal considéré. La THT **s'auto-adapte** aux différentes variations et oscillations naturelles que peut présenter un signal.

Il est à noter que finalement les deux approches (THT et THH) sont à peu prés équivalentes avec cependant une préférence pour la THT. En effet contrairement à la THH, la THT conserve tout au long l'aspect local du traitement et ne nécessite pas le calcul du SA. D'autre part, l'estimation de la FI et AI est extrêmement simple à mettre en œuvre.

Comparé à d'autres approches classiques comme par exemple la Wigner-Ville, la THT ne présente pas de termes d'interférences et détecte les différentes composantes d'un signal. En revanche, la THT présente une moins bonne localisation des FI pour les hautes fréquences contrairement à la SPWV. A ce niveau, le comportement de la THT est plus proche des méthodes ondelettes. Il est à noter que contrairement aux ondelettes nécessitant l'élaboration de la base de décomposition, l'EMD se distingue par le fait que la base de décomposition n'est pas donnée *a priori* mais est construite à partir des propriétés du signal lui-même.

Les résultats obtenus avec les différentes versions de la THT sont globalement équivalents. Cependant, la $THT_{version3}$ permet une analyse plus fine de la localisation des différentes composantes d'un signal.

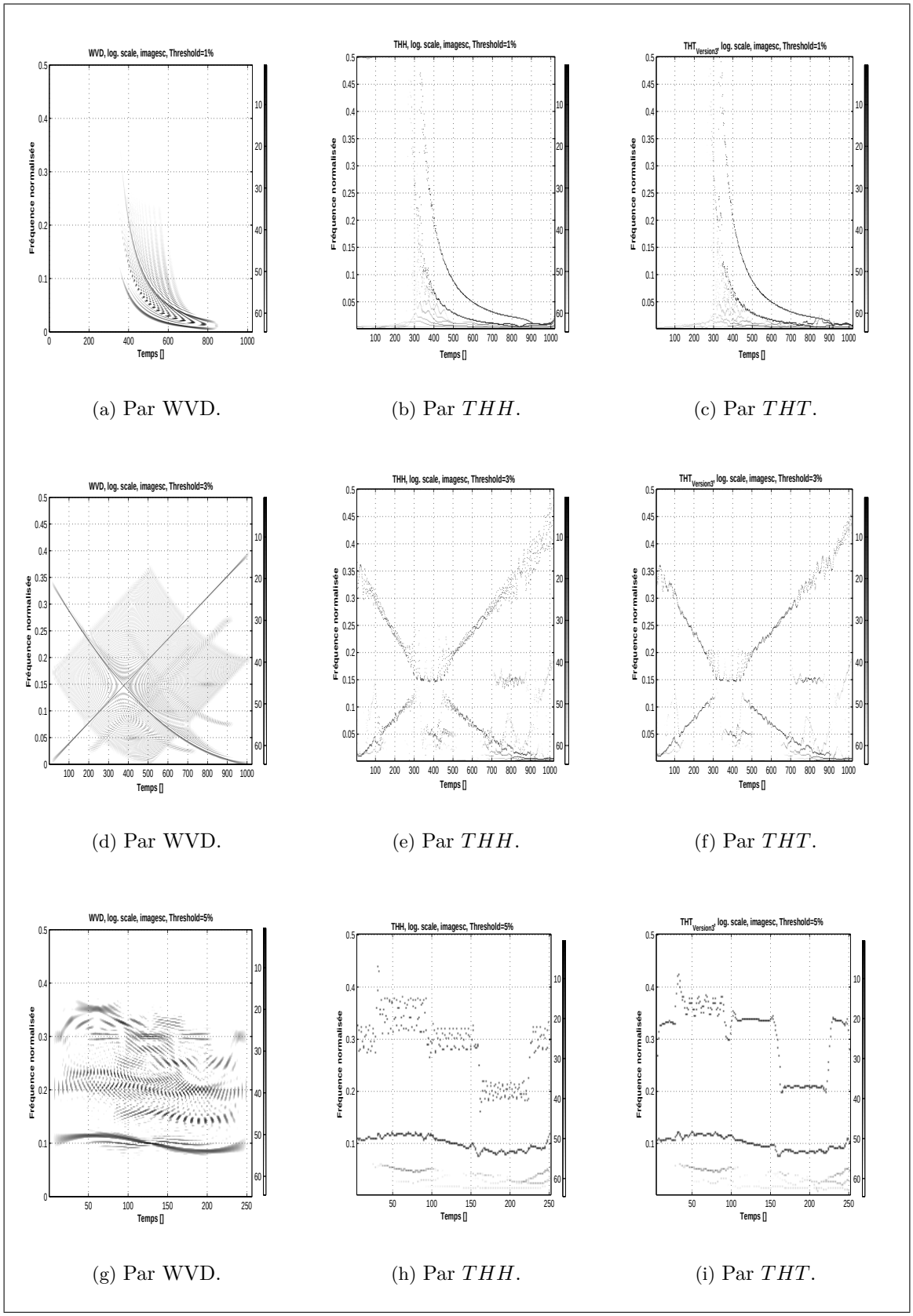
La $THT_{version4}$ peut être intéressante si l'on souhaite connaître uniquement les lois d'évolution les plus significatives dans un objectif de compression de l'image temps-fréquence par exemple.



(a) Par WVD. (b) Par THH. (c) Par THT.

(d) Par WVD. (e) Par THH. (f) Par THT.

Figure V.12 — Synthèse de comparaison des descriptions temps-fréquence à l'aide de la WVD, la THH et la THT sur l'ensemble des signaux testés (voir suite figure V.13).



(a) Par WVD. (b) Par THH. (c) Par THT.

(d) Par WVD. (e) Par THH. (f) Par THT.

(g) Par WVD. (h) Par THH. (i) Par THT.

Figure V.13 — Synthèse de comparaison des descriptions temps-fréquence à l'aide de la WVD, la THH et la THT sur l'ensemble des signaux testés (suite et fin)

V.3 Reconnaissance des formes par THT

V.3.1 Classification dans le plan temps-fréquence

La classification ou reconnaissance des formes (RdF) s'apparente à l'apprentissage ou la découverte de structures appelées classes (ou « pattern ») dans un ensemble de données éventuellement perturbées. L'objectif est de faciliter la communication homme/machine, de permettre l'analyse des données, et de classifier des entités en catégorie à partir d'observations effectuées sur celles-ci.
Les domaines d'applications liés à la RdF sont multiples et variés : la vision artificielle ou le traitement d'images qui sont sans doute l'un des principaux champs d'application de la RdF, l'imagerie bio-médical [14, 107] ou encore sonar [31, 162]. Il existe bien évidemment d'autres applications telles que la reconnaissance et la détection de signaux transitoires (ou non) [125, 156], la reconnaissance des caractères ou de la parole [19, 49, 196], le contrôle de qualité et la détection de défauts [156, 166] ... Dans notre cas, nous nous intéresserons essentiellement aux méthodes de RdF basées sur l'utilisation d'un plan temps-fréquence.

La description temps-fréquence (ou temps-échelle) est un espace discriminant pour la classification de signaux non-stationnaires. Cette idée n'est pas nouvelle, et l'on peut distinguer deux grandes familles de méthodes : l'une *paramétrique* qui nécessite la connaissance d'un modèle statistique des signaux à identifier [75, 129, 192, 203]. Cette première famille a été développée essentiellement dans le cadre de la détection d'un signal bruité qui apparaît alors comme un cas particulier de la classification.

L'autre appelée *non-paramétrique* ne nécessite pas de modèle préalable. Cette deuxième famille de méthodes consiste à construire la procédure de décision sans connaissance du modèle statistique des signaux. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer celles considérant que le plan temps-fréquence est une distribution que l'on compare alors à une référence [8,179,209]. A côté de celles-ci, il existe des méthodes qui considèrent la description temps-fréquence comme une image dont on extrait des motifs ou paramètres discriminants [12, 40, 142, 172]. Dans tous les cas, ces études montrent l'importance du choix de la représentation temps-fréquence [24, 106, 179, 209], de la distance utilisée [160, 209, 210], ainsi que de la règle de décision [56, 57, 179].
Par opposition aux deux méthodes précédentes qui considèrent le plan temps fréquence dans sa globalité où tous les points ont la même importance, on peut envisager de traiter la représentation temps-fréquence comme un espace de dimension importante, dont on extrait les paramètres (vecteurs d'attributs) les plus discriminants dans un objectif de réduction de l'espace. Certaines approches localisent des zones discriminantes dans le plan temps-fréquence [44,68,93]. D'autres, *a contrario*, s'intéressent à l'extraction de composantes pour en déterminer des paramètres discriminants [40, 51, 130]. Parmi celles-ci, nous pouvons citer une méthode utilisant le plan temps-fréquence pour le suivi et l'estimation de la fréquence instantanée. En utilisant des représentations temps-fréquence compatibles avec la localisation de la FI, ces approches extraient la loi d'évolution de la FI, puis ses paramètres ... L'estimation de cette grandeur nécessite une RTF adaptée qui est parfaitement localisée en fréquence et en énergie et sans interférences. L'une des solutions dans ce domaine est la réallocation des espaces temps-fréquences [40] mais il en existe d'autres comme par exemple l'utilisation d'une analyse AR glissante [170] ou encore l'utilisation d'un filtre de Kalman permettant d'estimer de proche en proche la loi d'évolution de la FI [58].

Les procédures de classification dans le plan temps-fréquence sont nombreuses. Une première famille considère le plan temps-fréquence dans son ensemble et compare les RTF à l'aide de distances. Une autre famille tire partie des spécificités des RTF pour extraire des attributs discriminants, permettant de réduire ainsi la dimension de l'espace de décision.

Dans ce travail, nous nous inscrivons plutôt dans la deuxième famille de méthodes avec un intérêt tout particulier pour l'estimation d'attributs à partir des FI et des AI du signal.

V.3.2 Méthodologie de la reconnaissance des formes : THT_{RdF}

Le dispositif que l'on se propose de mettre en œuvre se décompose en cinq grandes étapes (Fig. V.14).

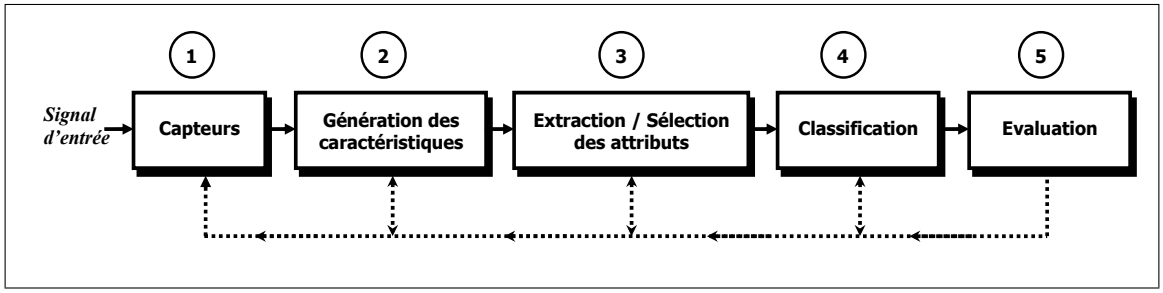


Figure V.14 — Schéma de la structure du processus de THT_{RdF} (phase d'apprentissage).

De l'acquisition des données à la classification, la qualité de reconnaissance dépend grandement de chacune des étapes intermédiaires.

L'*acquisition des données* , (étape 1), peut être de nature différente : signaux et/ou images issus de divers récepteurs. Dans cette étape, la pertinence des données acquises vis à vis de l'application n'est pas étudiée.

L'étape *génération des caractéristiques (ou analyse des données)* ,(étape 2), est primordiale dans le succès de la reconnaissance [67,125]. Celle-ci est généralement effectuée en collaboration avec un expert du domaine. Parmi les données acquises, certaines sont transformées (cas le plus fréquent), d'autres peuvent être utilisées directement, et d'autres sont éliminées car considérées comme non pertinentes par l'expert. La phase d'analyse des données peut être particulièrement complexe à mettre en œuvre.
Dans notre cas, la description des caractéristiques est réalisée par l'intermédiaire de la THT et l'estimation des FI et AI du signal.
Lorsque l'étape d'analyse semble satisfaisante par rapport aux objectifs, le nombre de caractéristiques est probablement important et peut être alors réduit.

L'*extraction/sélection des attributs*, (étape 3), permet de réaliser une sélection parmi les caractéristiques et/ou d'en extraire de nouvelles soit par combinaison, soit par d'autres transformations. Ce faisant, la dimension des données est réduite.
Les méthodes de réduction de dimension sont nombreuses et ont pour objectif principal de conserver le maximum d'informations possible dans un espace de dimension inférieure et cela pour deux raisons principales [50, 67, 125].
La première repose sur la pertinence des caractéristiques. En effet, il est évident que sur l'ensemble des variables considérées, seule une petite partie contient de l'information utile. Il peut être ainsi souhaitable d'effectuer un « résumé » des données pour diminuer la complexité

des données à traiter. Dans ce contexte, on acquiert un nombre maximal d'attributs que l'on réduit pour obtenir un espace de dimension inférieure dans lequel la discrimination est optimale. La deuxième repose sur ce que l'on appelle couramment la malédiction de la dimension (ou phénomène de Hughes) lors de l'apprentissage. En effet, paradoxalement l'augmentation du nombre de caractéristiques n'améliore pas systématiquement la qualité de l'apprentissage et la capacité de généralisation de la RdF.
On fera la distinction entre les *méthodes d'extraction* qui créent de nouvelles variables à partir des anciennes et les *méthodes de sélection* qui cherchent seulement un sous-ensemble d'attributs optimal (ou suffisamment pertinent) suivant un critère donné.
Parmi les *méthodes d'extraction* les plus couramment employées, citons par exemple l'analyse en composantes principales (ACP), l'analyse en composantes curvilignes (ACC), ou encore la projection de Sammon [189]. Les *méthodes de sélection* visent à réduire la dimension de l'ensemble initial en recherchant un sous-ensemble d'attributs tout en maximisant un critère donné en général basé sur une distance comme par exemple celle de Bhattacharya ou de Kullback-Leibler ...
Cependant, cette notion de quantité d'information (et de sa pertinence) est toute relative suivant la méthode utilisée et les objectifs à atteindre [50, 67, 69, 121, 125].

Lorsque l'acquisition, la génération et l'extraction / sélection des attributs sont achevées, il reste à effectuer l'apprentissage proprement dit, appelé encore classification.

Le type de méthodes de *classification*, (étape 4), se décline généralement en deux grandes familles : le *mode supervisé* et le *mode non supervisé* [50, 105]. Si l'on dispose d'un ensemble de points étiquetés, on parlera de classification supervisée. Dans ce cas, les classes d'appartenance des données sont connues. Dans le cas contraire, on effectue une classification non supervisée appelée également classification automatique [105]. Nous nous placerons dans le premier cas à savoir la classification supervisée.
En classification automatique, la recherche d'une partition des données revient à regrouper celles-ci selon une certaine mesure de similarité ou de dissimilarité [105, 125]. La métrique employée peut être de nature géométrique ou probabiliste. On distinguera ainsi les méthodes paramétriques, qui modélisent les données par un ensemble de paramètres à estimer, et les méthodes non paramétriques, qui ne font pas d'hypothèse sur la distribution de ces données [67, 125]. Les algorithmes de classification étant nombreux dans la littérature, des méthodes statistiques en passant par les réseaux de neurones, nous ne nous attarderons pas dessus [50, 67, 105, 121, 125].

Une fois l'apprentissage effectué, le système doit être validé par une phase de test : c'est l'*évaluation du système de RdF*, (étape 5). La phase de généralisation consiste à appliquer les différentes étapes de 1 à 4 sur un signal inconnu (non utilisé lors de la phase d'apprentissage) et en déduire sa classe d'appartenance.

La figure V.15 détaille l'ensemble du processus de RdF mis en place. Nous pouvons remarquer que l'étape de génération des caractéristiques est réalisée à l'aide de la THT. Par la suite, l'extraction et la sélection des attributs est faite sur la représentation temps-fréquence obtenue avec la THT. La connaissance des FI et AI, nous permet alors d'extraire un ensemble d'attributs (essentiellement statistiques dans notre cas) sur chacune des grandeurs instantanées. La dimension des attributs nous conduit à une phase de sélection des attributs (manuelle ou automatique) afin de constituer le vecteur d'attributs permettant par la suite de réaliser la classification proprement dite.

L'avantage d'élaborer un processus de RdF à l'aide de la THT est double. D'une part, la description s'adapte aux caractéristiques des signaux d'entrés. En effet, la représentation

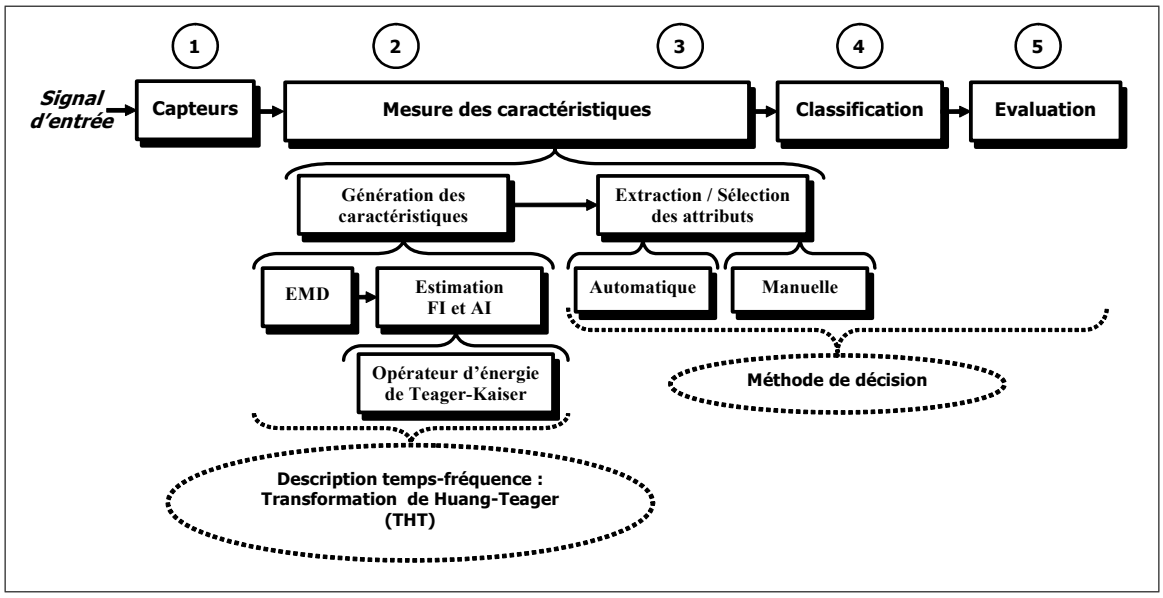


Figure V.15 — Organigramme du processus THT_{RdF} proposé.

temps-fréquence ne nécessite pas de mise au point contrairement à d'autres méthodes plus classiques comme par exemple le choix de la base de décomposition dans les ondelettes. L'analyse temps-fréquence n'est pas dépendante de l'environnement et ne nécessite aucun *a priori* extérieure pour élaborer une description temps-fréquence « pertinente ».
D'autre part, cette méthode de RdF est indépendante de l'application et ne nécessite pas de modification majeure selon les domaines d'utilisations dans la mesure où la pertinence des attributs est réalisée de façon automatique (et non manuelle) lors de la l'étape 3. L'ensemble du processus de RdF apparaît alors comme une méthode de type « boîte noire » où aucun modèle physique (paramétrique) n'est mis à contribution tout au long du traitement.

Cependant, toutes les méthodes de RdF sont tributaires des performances du module d'acquisition des données et surtout de celles du module de description (d'analyse). L'utilisation de la RdF n'apporte pas de solution miracle pour la classification en ce qui concerne le problème épineux de la connaissance globale (phase de généralisation). En effet, la connaissance *a priori* des classes reste nécessaire. Il est évident qu'en pratique, il est relativement rare de disposer d'observations pour tous les états possibles du système. Cette limite est d'ailleurs valable pour toutes les autres approches que l'on souhaite mettre en œuvre.
En revanche parmi les avantages de cette approche de RdF, nous pouvons noter que la connaissance d'un modèle physique du système n'est absolument pas demandée. En effet, au sens strict, la méthode suppose qu'aucun modèle n'est disponible pour décrire les relations de cause à effet. D'autre part, la RdF permet d'appréhender la connaissance *a priori* incomplète des modes de fonctionnement. En effet, si la disposition d'une connaissance globale reste une nécessité dans l'absolu, celle-ci peut être malheureusement incomplète.

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode d'analyse des signaux non-stationnaires multi-composantes basée sur une description temps-fréquence à l'aide de la THT. Cette transformation est l'association de la Transformation de Huang (ou EMD) et de l'opérateur de Teager-Kaiser. Dans un premier temps, L'EMD décompose un signal multi-

composantes en signaux mono-composante de type AM-FM. Dans un deuxième temps, l'opérateur d'énergie estime la FI et l'AI de chaque signal mono-composante. La THT a permet décrire le signal dans le plan temps-fréquence en utilisant les FI estimées sur lesquelles on a associé l'évolution de l'AI correspondante. Cette méthode d'analyse est très simple et entièrement pilotée par les données. Elle n'exige pas de connaissances préalables sur les caractéristiques du signal à analyser.

Les résultats obtenus sur des signaux synthétiques indiquent que notre approche temps-fréquence est relativement efficace pour décrire les signaux en terme de lisibilité et d'identification des composantes d'un signal par rapport aux méthodes classiques telles que la Wigner-Ville ou les ondelettes. Cependant pour des composantes hautes fréquences la méthode trouve ses limites avec un étalement des fréquences souvent important. Pour y remédier, nous avons proposé deux extension majeures : la $THT_{version3}$ et la $THT_{version4}$.

La première version ($THT_{version3}$) fait appel aux splines lors de l'estimation de la FI et AI. l'objectif est d'améliorer le calcul des dérivées première et seconde utilisées par l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser.
La deuxième version ($THT_{version4}$) repose sur une description temps-fréquence simplifiée du signal basée sur l'extraction du squelette fréquentiel (ou arêtes).

L'ensemble de ces méthodes permet d'obtenir des composantes mieux localisées en fréquence. Mêmes si les représentations temps-fréquences de la THH ou de la THT sont à peu prés équivalentes, la THH présente un étalement en fréquence plus important que pour la THT. La THT a une meilleure localisation en fréquence que la THH mais la DWV reste meilleure en terme de localisation. Un des problèmes qui limite les performances aussi bien la THT que la THH n'est pas l'estimation des FI et AI en elle même mais plutôt l'extraction des différentes composantes (IMF) à l'aide de l'EMD. Ce problème est bien illustré par l'exemple de discrétisation d'une sinusoïde dans le (cf. paragraphes II.3.2 et II.4.1). Ainsi, il est intéressant d'étudier l'effet de l'échantillonnage sur la localisation des composantes dans le plan temps-fréquence. Enfin, il important d'étudier des signaux réels ainsi que la robustesse de la THT dans un environnement bruité pour confirmer les résultats obtenus. Une étude préliminaire a déjà été entamée sur des signaux bruités AM-FM à 2 composantes pour l'estimation des FI [28]. Pour conclure, nous pouvons dire que la THT permet une analyse simple des signaux non-stationnaires et multi-composantes entièrement pilotée par les données (aucun pré requis n'est nécessaire)

Enfin, nous avons proposé une méthodologie de reconnaissance des formes qui intègre la THT pour la caractérisation et d'analyse des signaux à classifier : la THT_{RdF}. La problématique d'identification d'un signal se ramène alors à un problème de projection des informations dans un espace susceptible de mettre en exergue les informations nécessaires à la reconnaissance du signal étudié. La phase d'**analyse des données** du processus RdF proposé repose essentiellement sur la description temps-fréquence par THT pour extraire des attributs « pertinent » pour la classification. Nous illustrons au chapitre **VI**, la THT_{RdF} par l'analyse des échos de cibles sonars (synthétiques) suivie de leur classification en cibles manufacturées ou naturelles.

CHAPITRE VI

Analyse d'échos de cibles sonars par THT

Sommaire

VI.1 Introduction 140
VI.2 Analyse des échos de cibles sonars 141
VI.2.1 Mécanismes acoustiques de formation d'écho 141
VI.2.2 Analyse et description par SPWVD 142
VI.2.3 Analyse et description par THT 144
VI.3 Classification des échos de cibles sonars par THT_{RdF} 152
VI.3.1 Position du problème 152
VI.3.2 Identification des échos de cibles sonars 154
VI.4 Conclusion 156

Ce chapitre présente une application de la THT à l'acoustique sous-marine : la description et classification des échos de cibles sonars. Nous nous intéressons essentiellement à la description et à la mise en place d'une méthode de RdF dans le cas d'un objet préalablement détecté et localisé à l'aide d'un sonar actif : le but est d'associer à l'écho recueilli un niveau de connaissance supplémentaire, à savoir la nature de l'objet ayant généré un tel signal écho.

Pour cela, nous analysons l'écho à l'aide de la THT pour identifier les structures pertinentes pour le processus de décision. Cela est réalisé dans la première partie de ce chapitre. Dans le même temps, la description obtenue est comparée à une autre RTF, la SPWVD.
Dans un deuxième temps, l'analyse de la RI nous permet de proposer une méthodologie de RdF utilisant la THT comme outil descriptif du signal pour extraire des attributs pertinents pour la classification. Cette structure de RdF générique est appelée THT_{RdF}. D'autre part, nous définissons une méthodologie de décision sans connaissance préalable, du moins sans la mise en place de modèle physique prédéterminé. La méthode développée n'inclut aucune information préalable ni sur des connaissances possibles du milieu environnant, ni sur la cible elle-même, ni encore sur l'ensemble du processus d'acquisition. Nous validons l'ensemble de la méthodologie sur des signaux synthétiques de RI de cibles (sphériques ou cylindriques)

VI.1 Introduction

La classification de cibles sonars[1] présente un intérêt majeur dans le domaine de la lutte anti-sous-marine [125, 204]. La caractérisation automatique d'un écho de cible sonar (naturelle ou manufacturée) est fortement liée à la signature acoustique produite par celle-ci [34, 61, 83, 84, 88, 142, 205, 213]. L'écho de la cible est un signal non-stationnaire dont les représentations temporelle et spectrale sont fortement conditionnées par les propriétés physiques et géométriques de la cible à détecter.

Les méthodes classiques d'analyse sont basées essentiellement sur des RTF, comme par exemple, la WVD [83, 84, 142, 213]. A l'issue des chapitres II et V, nous avons montré que la THT est particulièrement bien adaptée à l'étude des signaux non-stationnaires. Elle permet en effet d'estimer les FI et AI d'un signal multi-composantes et d'obtenir ainsi une représentation temps-fréquence du signal. Partant de ces constatations, nous proposons de l'appliquer à la description temps-fréquence d'un écho de cible sonar. En effet, cette analyse temps-fréquence nous permettra d'identifier les caractéristiques acoustiques de la cible sonar et de mettre en évidence les phénomènes décrits par les modèles physiques théoriques.

Par la suite, la connaissance et la compréhension du problème direct nous permettent de mettre en place une méthode de RdF générique dite symbolique ne travaillant plus directement sur le signal sonar (ou réponse impulsionnelle (RI)) mais sur une description de plus haut niveau, à savoir un vecteur d'attributs considéré comme représentatif des caractéristiques de la cible sonar. L'ensemble des attributs est déterminé à partir de la représentation temps-fréquence obtenue par la THT et plus précisément à partir des FI et AI du signal.

Dans ce chapitre, l'objectif est de valider le processus de RdF appelé THT_{RdF} et plus particulièrement le fait d'intégrer une phase d'analyse avant la phase de décision proprement dite. Pour cela, l'approche est validée sur un ensemble de signaux synthétiques simulant des RI de cibles sonars de formes sphérique et cylindrique.

Dans un premier temps, nous proposons une étude simplifiée de l'ensemble de la problématique : l'objectif de la classification est tournée vers l'identification et la distinction entre cibles manufacturées et cibles naturelles. Ainsi, par exemple dans le cadre de la guerre des mines, l'objectif est d'identifier les cibles potentiellement hostiles (ici, les cibles creuses) nécessitant un traitement particulier, les autres étant considérées comme neutres. Afin de vérifier l'efficacité de la THT, différents cas ont été testés, dans un deuxième temps, en faisant varier le type de cible (matière, forme ...). Nous supposons que les attributs sélectionnés manuellement sont suffisamment pertinents pour la problématique envisagée : cette étape est réalisée par un expert extérieur (l'utilisateur). Nous jugerons, par la suite, de la validité ou non de cette hypothèse. Enfin, suite à l'étude du paragraphe précédent, le nombre d'IMF sélectionnés est fixé arbitrairement. Dans notre cas, deux classes seront considérées : cible naturelle (pleine) ou manufacturée (creuse). Il existe, en effet, des méthodes d'inférence (utilisant par exemple les critères BIC *Bayesian Information Critérion* ou AIC *Akaike Information criterion*) qui permettent d'estimer le nombre de classes susceptibles d'exister dans un jeu de données. Ce problème n'est pas étudié par la suite.

[1] Une cible sonar est un objet quelconque (manufacturé ou non) détecté par un sonar. Le terme écho de cible sonar désigne sa réponse impulsionnelle. L'écho est un phénomène acoustique de réflexion du son (dans notre cas sur un objet sous-marin). Ce nom provient de la nymphe éponyme de la mythologie grecque, censée incarner ce phénomène.

VI.2 Analyse des échos de cibles sonars

VI.2.1 Mécanismes acoustiques de formation d'écho

Le problème de la diffusion acoustique par des objets immergés dans l'eau a été abondamment étudiée depuis plusieurs décennies [9, 62, 70, 87, 88, 91, 98, 109, 211]. Des recherches menées sur des obstacles cylindriques ou sphériques [9, 34, 88, 142] ont mis en évidence que la pression diffusée $P_{\text{diffusée}}$ par la cible insonifiée par une onde incidente s'écrit comme la somme de différentes contributions (Fig. VI.1) :

$$P_{\text{diffusée}} = P_{\text{géométrique}} + P_{\text{surface}}, \tag{VI.1}$$

avec $P_{\text{diffusée}}$ la pression acoustique diffusée par l'obstacle (fonction de transfert de la RI de la cible sonar), $P_{\text{géométrique}}$ associée à l'ensemble des ondes incidente, réfléchie et transmise (acoustique géométrique) et P_{surface} l'ensemble des ondes de surface (internes ou externes). Cette pression diffusée dépend, entre autre, des propriétés physiques et géométriques de la cible.

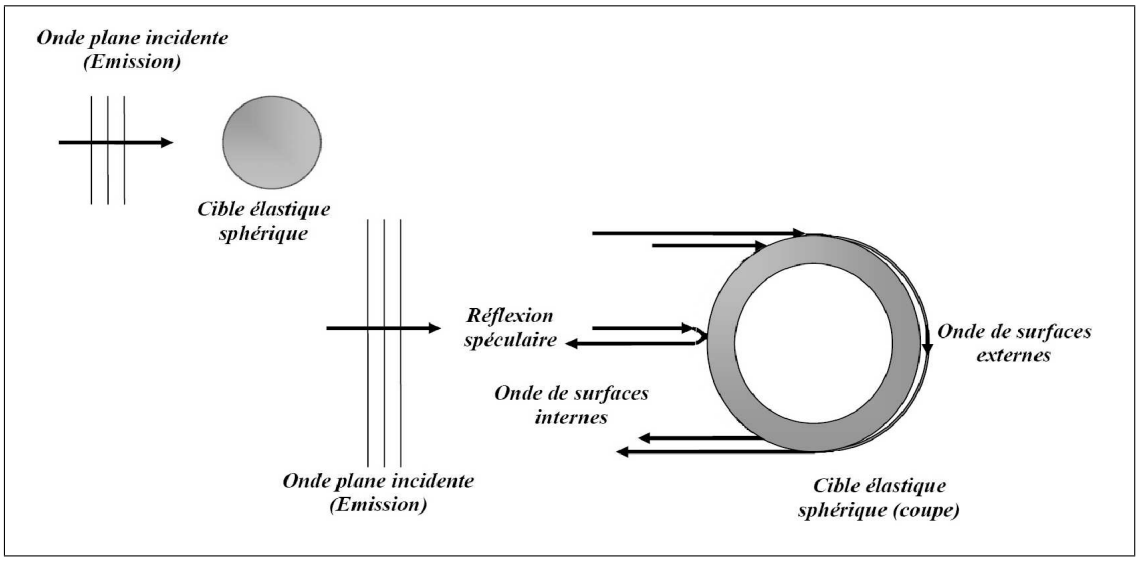


Figure VI.1 — Phénomènes de diffusion acoustique sur une cible (coque sphérique élastique) : propagation des ondes de surfaces et écho spéculaire.

Ainsi, dans le cas de cibles de formes simples à symétrie de révolution, le signal temporel sera constitué d'un écho spéculaire correspondant à la réflexion géométrique et une série d'échos liés aux ondes de surface pouvant effectuer plusieurs tours de la cible. On montre que, pour une longueur d'onde donnée, l'interférence des ondes de surface entre elles se manifeste comme des résonances à la fréquence considérée. Ces résonances apparaissent dans l'expression théorique de la fonction de forme du champ rétrodiffusé par la cible noté $p(\omega)$ dont l'expression est détaillée dans l'annexe C. Cette formulation privilégie l'aspect fréquentiel des phénomènes physiques mis en jeu. Une expression temporelle équivalente est possible en considérant la TF inverse du champ de pression $p(w)$ [88, 91, 142]. Cette RI contient alors toutes les informations de formation de l'écho et une caractérisation est alors envisageable à partir de la connaissance unique de ce signal temporel.

Ainsi, le problème consiste, sous sa forme la plus générale, à caractériser une cible sonar (matériaux, dimensions, forme géométrique ...) en effectuant une analyse de sa RI : il s'agit de l'étude d'un problème inverse.

Ce problème de discrimination des échos de cibles sonar n'est pas nouveau et a été initié avec les travaux de Hoffman [112] ou encore de Chesnut et Floyd [42] basés sur des méthodes dites *temps-domaine*. Différentes études ont ainsi été proposées dans le domaine fréquentiel, mais, par construction, elles ne peuvent mettre en évidence la structure temporelle du champ diffusé. Réciproquement, une analyse temporelle de la RI permet de séparer certains événements (comme les arrivées successives de différentes ondes), mais ne peut fournir aucune information sur leur structure fréquentielle. Pour y remédier des méthodes temps-fréquence ont été proposées.

VI.2.2 Analyse et description par SPWVD

De nombreuses approches ont utilisé une description qui tient compte à la fois du temps et de la fréquence. Ces approches temps-fréquence ont permis une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu permettant ainsi la mise en place de stratégies de classification de cibles [1, 38, 44, 45, 94, 142, 204, 215] et ont montré leur efficacité aussi bien pour la discrimination entre des cibles naturelles et manufacturées que pour l'estimation des caractéristiques physiques des cibles (densité, épaisseur, formes ...).

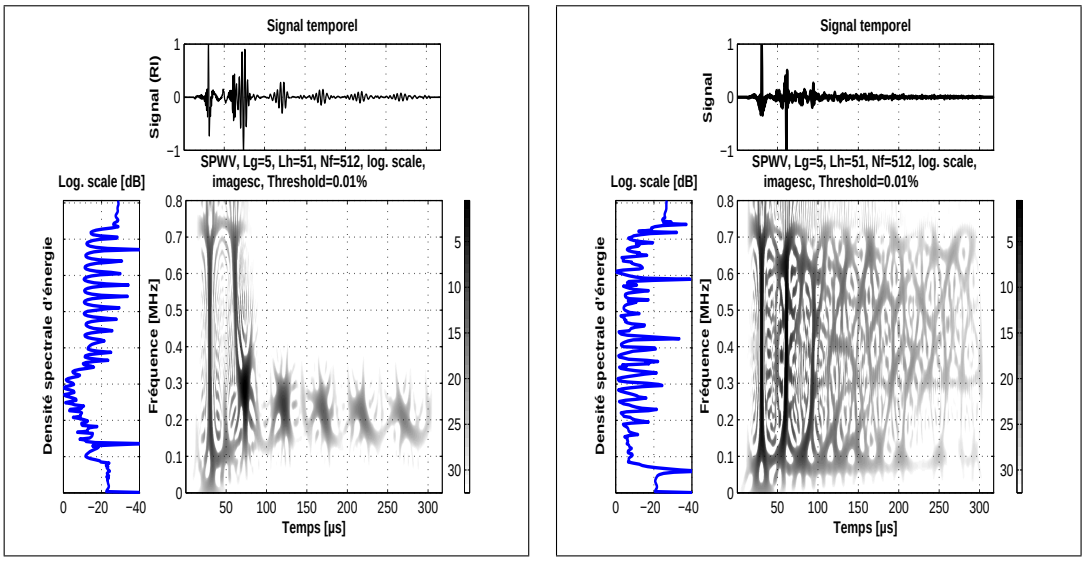
Par exemple, dans [84, 217], la WVD est mise en œuvre pour obtenir une description temps-fréquence des RI de cibles sonar. Les auteurs montrent que ce type de représentation est approprié pour la compréhension des mécanismes de formation des échos de cibles (écho spéculaire, ondes de surface ...).

L'utilisation de la WVD lors de l'analyse d'une RI permet d'estimer la célérité de groupe des ondes de surfaces. En effet, dans [83, 142, 217], les auteurs montrent que la célérité de groupe d'une onde de surface peut être estimée à partir de la différence des retards de groupe entre deux révolutions successives de l'onde autour de la cible. De plus, la mesure de l'étalement temporel de la distribution autour de la fréquence de résonance permet d'estimer l'amortissement de l'onde de surface au cours de sa propagation à la périphérie de la cible [142].

Afin de montrer tout l'intérêt et le bien fondé d'une analyse temps-fréquence, nous avons choisi de nous intéresser au cas d'une sphère de Nickel-Molybdène (pleine ou creuse), cas bien maîtrisé théoriquement et pouvant donc être simulé de manière satisfaisante.

La RTF permet de qualifier correctement le changement local de propriété associé à l'observation du signal et, notamment de mettre en lumière le caractère fugitif du contenu spectral (ou de non propriété) présent dans le signal[2] [83,84,143]. On observe, plus clairement, l'effet de la dispersion des ondes de surface et notamment la variation des fréquences dans le temps. L'ensemble des formes (ou patterns) observées sur l'image temps-fréquence constitue alors ce que l'on appelle la signature acoustique de la cible sonar (Fig. VI.2).

[2]Les réponses impulsionnelles de cibles ont été calculées à l'aide du logiciel DIADEM développé à CPE lyon / LASSO dans le cadre d'études soutenues par la Direction Générale de l'Armement.



(a) Cas d'une sphère creuse ou coque ($b/a = 0.94$).

(b) Cas d'une sphère pleine.

Figure VI.2 — Représentations temps-fréquence (SPWVD) de la RI d'une cible sphérique en Nickel-Molybdène ($a = 15mm$, $c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$).

La signature acoustique est différente suivant le type de cible considérée (Fig. VI.2). On peut remarquer, dans le cas de la sphère creuse, que les ondes de surface s'atténuent rapidement et se concentrent essentiellement en des motifs présents à basse fréquence. A l'opposé, la sphère pleine est décrite par des phénomènes moins localisés dans le plan temps-fréquence.

On y distingue, outre l'écho spéculaire situé au début, une succession d'arrivées qui correspondent à des ondes effectuant plusieurs fois le tour de la sphère et rayonnant de l'énergie vers le milieu extérieur. Dans le cas considéré, le modèle théorique prédit que seules des ondes dispersives de type Lamb (symétriques et antisymétriques) peuvent se propager. C'est ce qui est mis en évidence à l'aide de l'analyse temps-fréquence indiquant les différents types d'ondes de surface que l'on peut observer [83, 216], (Fig. VI.3) :

- *pattern 0* : l'écho spéculaire, réplique du signal émis,
- *pattern 1* : les ondes de Lamb antisymétriques a_0^+,
- *pattern 2* : les ondes de Lamb antisymétriques a_0^-,
- *pattern 3* : les interactions entre a_0^+ et a_0^-,
- *pattern 4* : les ondes de Lamb symétriques S_o.

La méthode basée sur une analyse temps-fréquence ne nécessite qu'une seule RI, et donc une seule mesure dans un cas réel, à l'inverse des méthodes classiques fréquence par fréquence [157].

Cependant, l'un des problèmes que l'on peut rencontrer avec la WVD est l'existence des termes d'interférences dues à la nature bilinéaire de la WVD [20, 76] qui peuvent rendre difficile l'étude et l'interprétation de l'image temps-fréquence. Ils ne correspondent à aucun phénomène physique de propagation. Bien que la plupart de ces difficultés d'interprétation puissent être surmontées en employant des fonctions de filtrage appropriées (cf. section I.3), la méthode reste toujours basée sur l'opérateur de la TF et reste donc tributaire des complications possibles inhérentes à celle-ci.

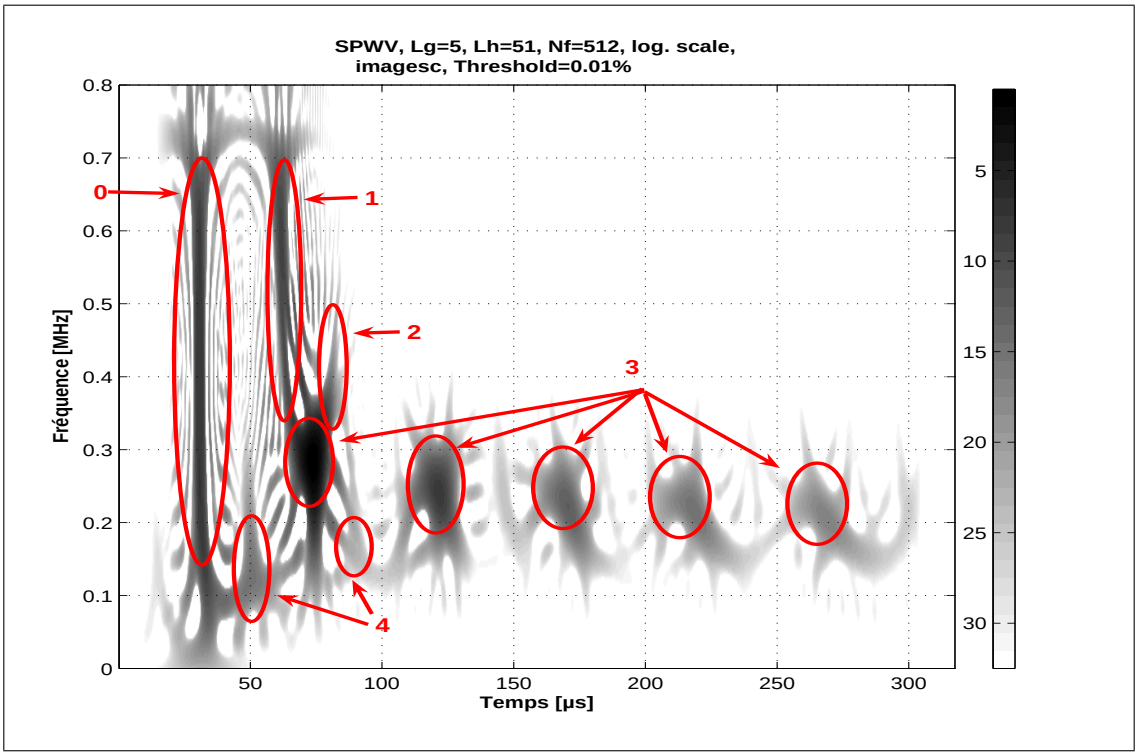


Figure VI.3 — Caractérisation acoustiques des motifs (patterns) temps-fréquence (SPWVD) constituant une RI (Signal de la figure VI.2(a), d'après [83, 216]).

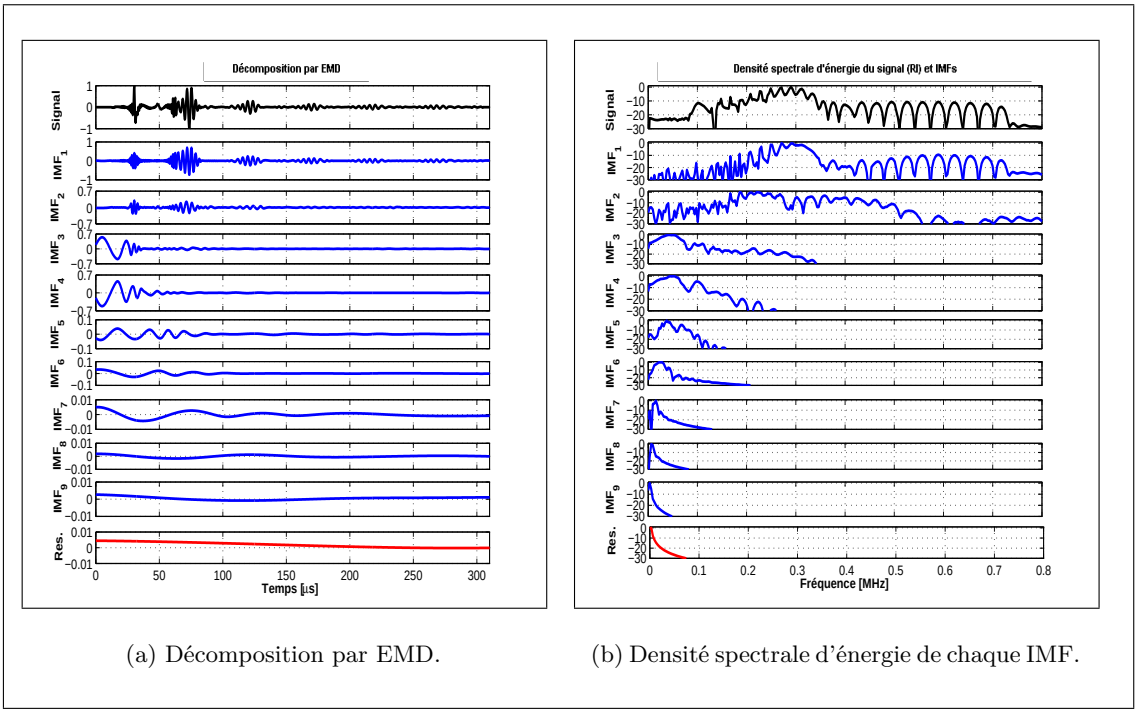
VI.2.3 Analyse et description par THT

Pour éviter les problèmes liés à la TF pour l'analyse de signaux non-stationnaires tels que la RI d'une cible, nous proposons d'utiliser la THT [28, 38]. A l'aide de l'exemple étudié dans le paragraphe précédent sur la coque sphérique, les étapes qui aboutissent à la description temps-fréquence obtenue par la THT peuvent être analysées.

La figure VI.4 montre les différentes IMF dans les domaines temporel et fréquentiel. Nous pouvons constater que l'EMD s'organise spontanément et quasiment comme un banc de filtres passe-bas (résultats déjà observés dans le chapitre II). De plus, on peut remarquer que l'écho spéculaire est bien un signal large bande et qu'il se retrouve présent au début de chacune des IMF (Fig. VI.4(a)). Enfin, les amplitudes globales des IMF successives vont en décroissant. l'EMD se comporte donc bien comme une approche multi-résolution auto-adaptative (cf. chapitre II). D'ailleurs, l'organisation particulière de cette décomposition apparaît clairement sur les RTF des cinq premières IMF (Fig. VI.5).

La figure VI.6 illustre la seconde étape nécessaire à l'estimation des FI et AI de chaque IMF. La figure VI.6(a) représente l'énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ de chaque IMF. Le spéculaire est présent au début de chaque signal, représenté par des amplitudes importantes sur les courbes d'énergie. De plus, l'amplitude de chaque IMF tend vers zéro au cours du temps. Cela exprime parfaitement le fait que l'énergie rétrodiffusée par la cible décroît bien au cours du temps. Enfin, on observe que la valeur moyenne énergétique des IMF successives décroît rapidement au cours du temps pour tendre finalement vers zéro.

La figure VI.6(b) montre la FI de chaque IMF estimée à partir de l'opérateur d'énergie. Les amplitudes des FI, importantes dans les premières IMF, vont en décroissant pour les dernières. La présence de pics de valeurs importantes (autour de $t = 300$ pour l'IMF_6 ou



(a) Décomposition par EMD.

(b) Densité spectrale d'énergie de chaque IMF.

Figure VI.4 — Décomposition par EMD et densité spectrale d'énergie de chaque IMF de la RI d'une coque sphérique en Nickel-Molybdène ($a = 15mm$, $b/a = 0.94$, $c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$).

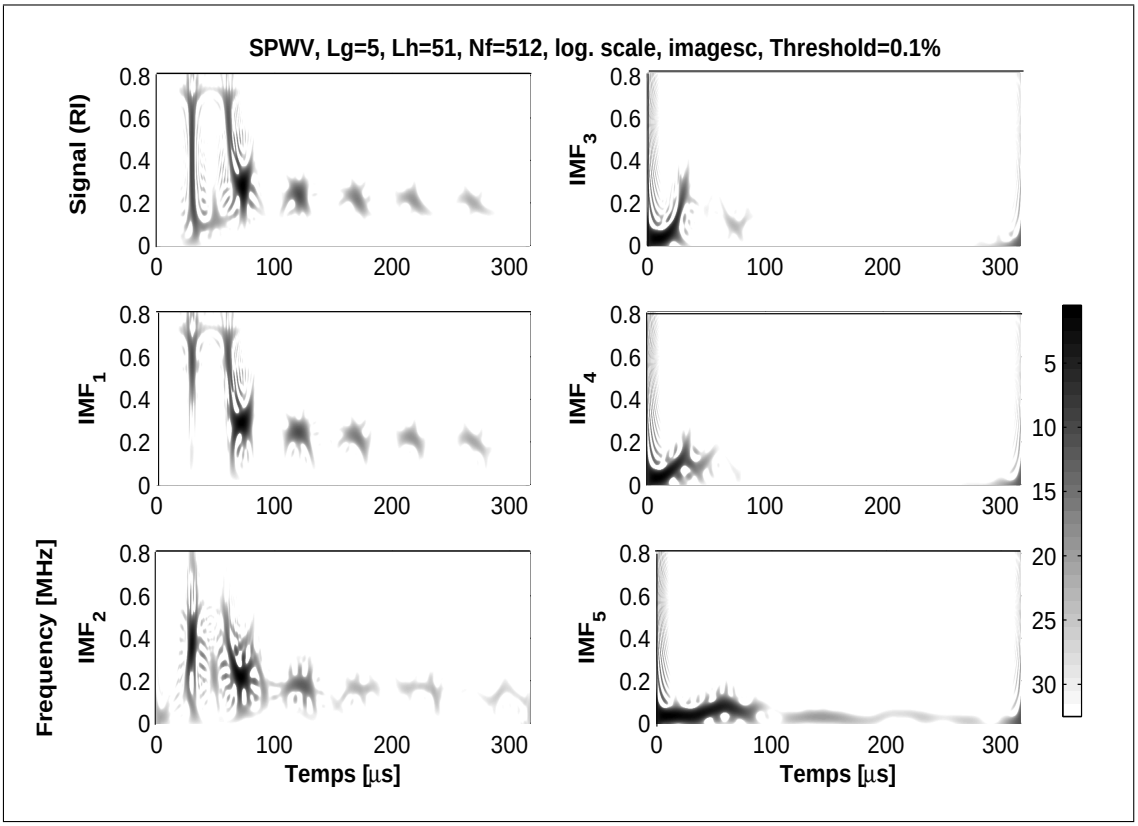
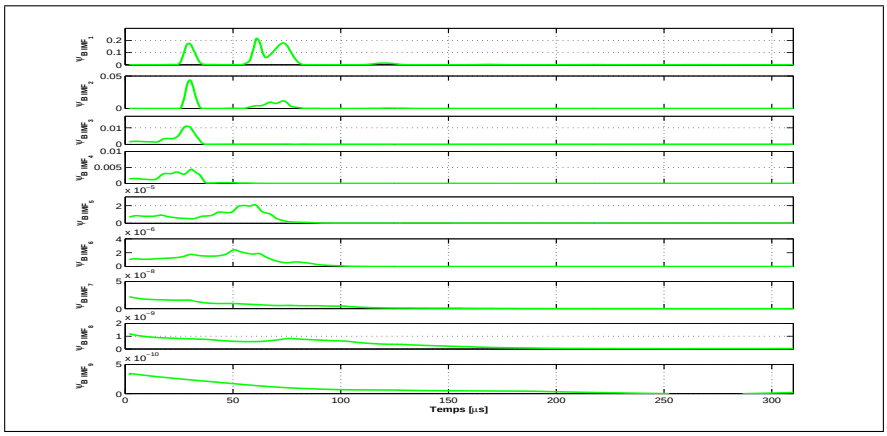
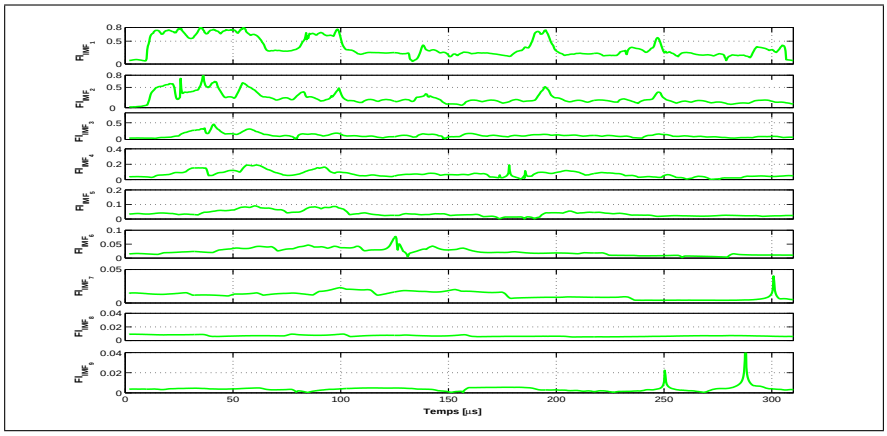


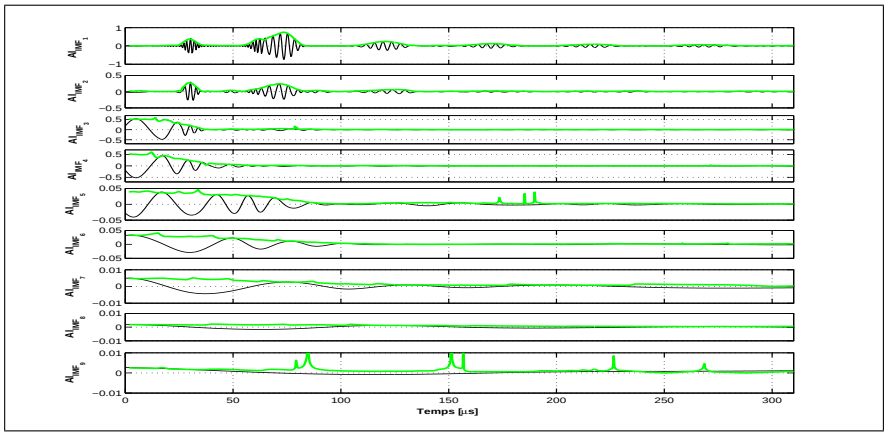
Figure VI.5 — SPWV des cinq premières IMF de la RI d'une cible sphérique creuse (Fig. VI.4).



(a) Estimation des énergies instantanées pour chaque IMF.



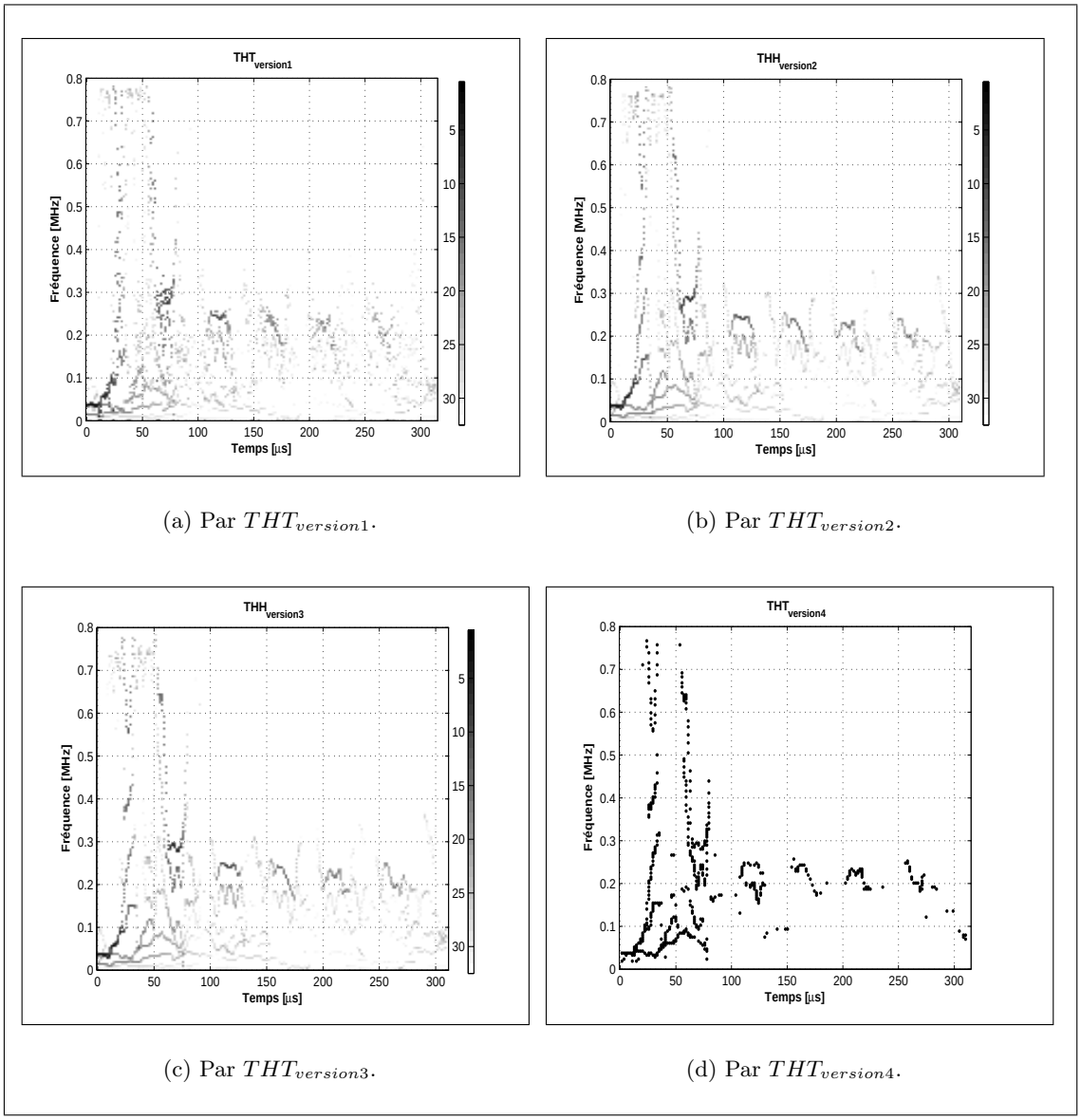
(b) Estimation des FI pour chaque IMF.



(c) Estimation des AI pour chaque IMF (le signal étant superposé à l'enveloppe AI).

Figure VI.6 — Estimation de l'énergie par $\Psi_{\mathbb{B}}$ et des FI et AI par ESA pour chaque IMF de la RI d'une cible sphérique creuse (Fig. VI.4).

encore pour le résidu) peut s'expliquer par le fait que l'estimation de la FI repose sur le calcul d'un rapport de deux quantités $A = \Re(\Psi_{\mathbb{B}}[\dot{x}(t)])$ et $B = \Re(\Psi_{\mathbb{B}}[x(t)])$. Or, si les valeurs discrètes de B deviennent trop petites et que la précision attendue n'est pas suffisante, alors ces valeurs sont considérées comme nulles et par conséquent, $A/B \to +\infty$.
Cette remarque s'illustre parfaitement lors de l'estimation des AI sur la figure VI.6(c). Sur cette figure, nous avons superposé le signal (RI ou IMF) avec l'enveloppe AI. Les AI sont correctement estimées. En effet, les enveloppes coïncident parfaitement avec le signal associé. D'autre part, il faut noter que la valeur moyenne des AI décroît rapidement. Cela corrobore parfaitement les remarques précédentes.



(a) Par $THT_{version1}$.

(b) Par $THT_{version2}$.

(c) Par $THT_{version3}$.

(d) Par $THT_{version4}$.

Figure VI.7 — Descriptions temps-fréquence d'une cible sphérique creuse (Fig. VI.4) obtenues à partir des différentes versions de la THT.

L'ensemble des représentations temps-fréquence de la figure (VI.7) illustre le comportement des différentes versions de la THT sur l'écho d'une coque sphérique. Les phénomènes physiques sont dans l'ensemble identifiables sur les quatre descriptions temps-fréquence. La représentation obtenue à l'aide de la $THT_{version1}$, bien que correcte, ne permet pas d'identifier

aisément les phénomènes (notamment par un trop grand étalement fréquentiel). La description par la $THT_{version2}$ est quasiment équivalente à celle de la $THT_{version3}$. Par contre, par sa finesse d'analyse, la description par la $THT_{version3}$ s'avère plus évidente et permet de mieux faire apparaître les différents motifs identifiés dans la partie précédente (cf. paragraphe VI.2.2). Enfin, même si la représentation $THT_{version4}$ fait apparaître clairement les différents motifs, celle-ci a néanmoins une faiblesse dans le sens où elle ne conserve pas les variations des FI et AI. Cette perte d'information peut être préjudiciable à l'analyse des caractéristiques fines constituant le signal.

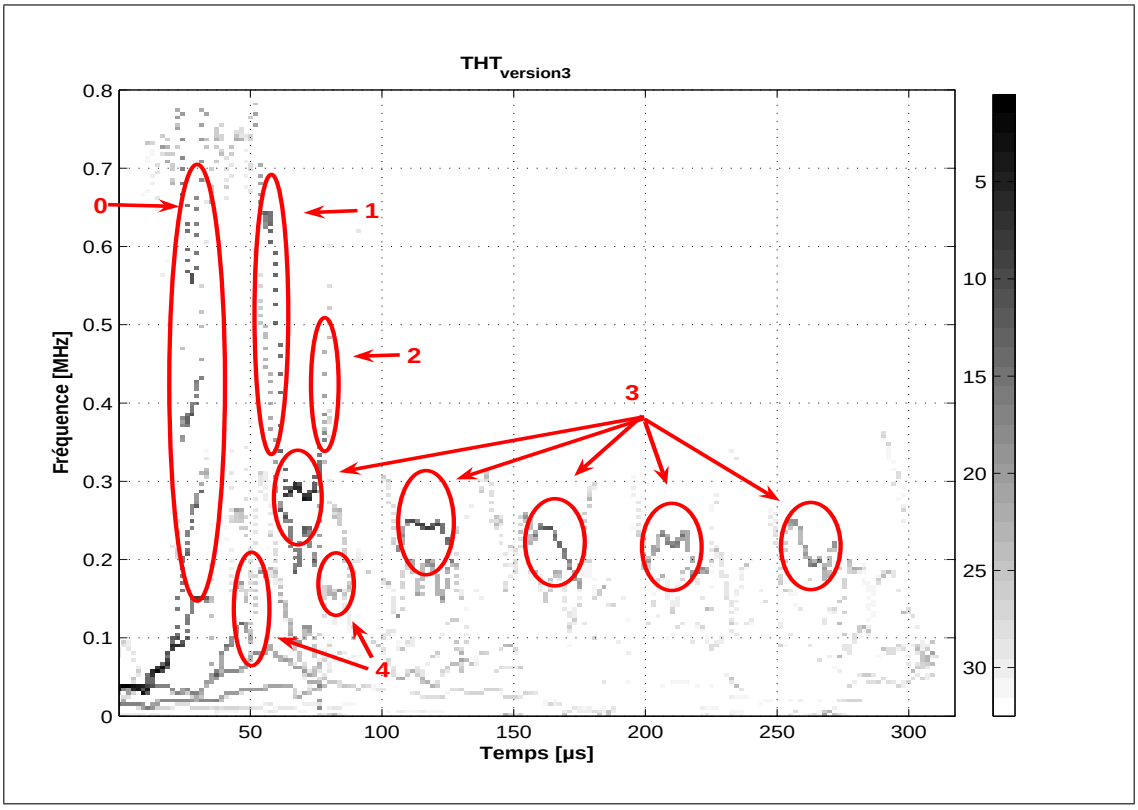
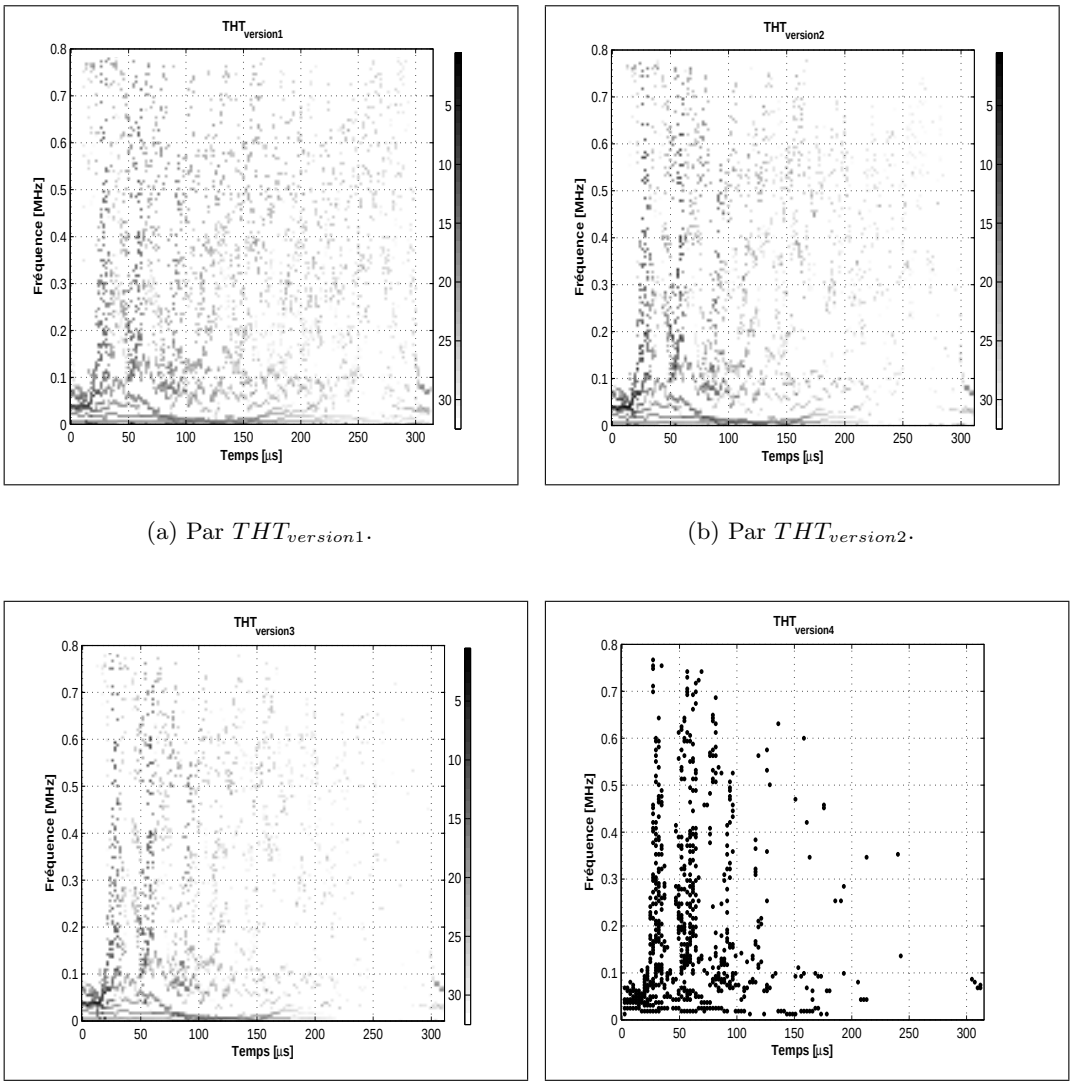


Figure VI.8 — Caractérisation acoustique des motifs (patterns) temps-fréquence par la $THT_{version3}$ constituant la RI (Fig. VI.2(a)) d'une cible sphérique creuse.

La figure VI.8 est à mettre en parallèle avec la figure VI.3 : dans les deux cas, on identifie les différents motifs (patterns) constituant l'écho de la coque. L'écho spéculaire, bien localisé, est un signal qui couvre toute la plage fréquentielle à un instant t donné. De même, les motifs 3 associés à l'interaction entre les ondes de Lamb a_0^+ et a_0^- sont clairement identifiés et parfaitement localisés aussi bien en temps qu'en fréquence. Cette remarque est d'ailleurs valable pour l'ensemble des différents autres motifs.

La THT permet donc d'obtenir une description temps-fréquence instantanée suffisamment pertinente pour identifier les différents phénomènes acoustiques constituant un tel signal. Pour compléter cette analyse, nous allons maintenant étudier différents cas en faisant varier la forme (sphère ou cylindre), la matière (granit, Nickel-Molybdène, ou encore inox) et/ou le contenant (creuse pleine d'air ou pleine).



(a) Par $THT_{version1}$.

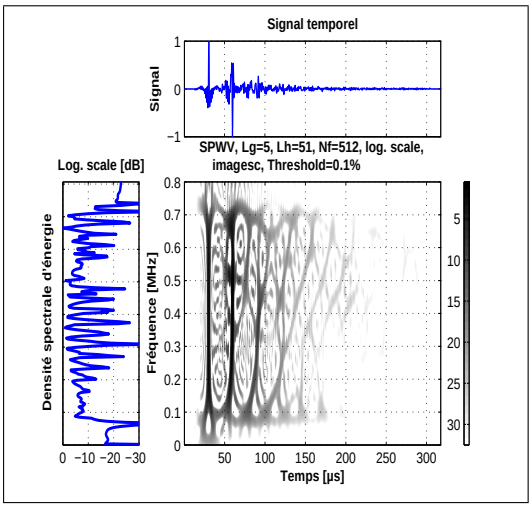
(b) Par $THT_{version2}$.

(c) Par $THT_{version3}$.

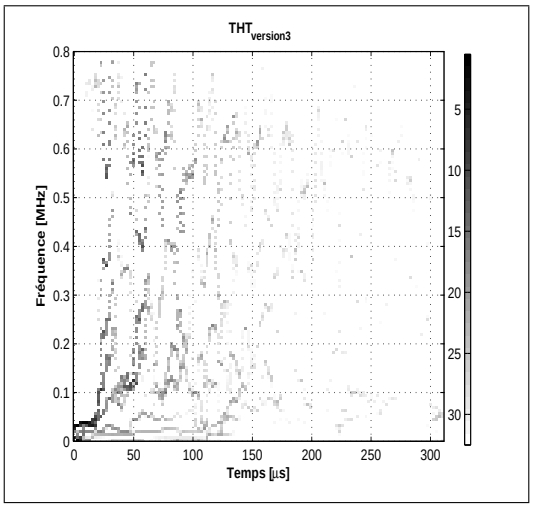
(d) Par $THT_{version4}$.

Figure VI.9 — Descriptions temps-fréquence pour les différentes versions de la THT d'un écho d'une sphère pleine en Nickel-Molybdène ($a = 15mm$, $c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$) (signal décrit par la RTF de la figure VI.2(b)).

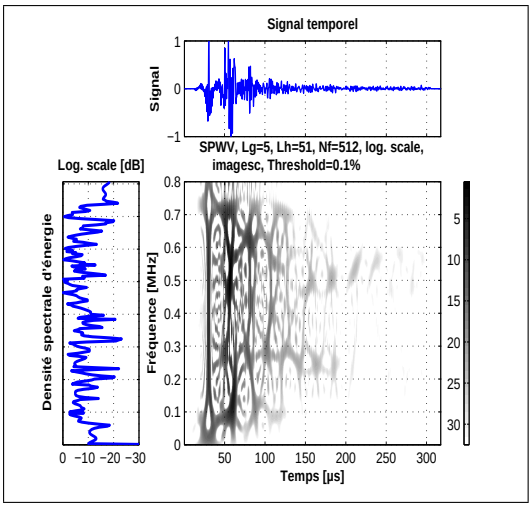
La figure VI.9 illustre la RTF d'un écho d'une sphère pleine en Nickel-Molybdène à l'aide de la THT. Ces descriptions sont à comparer avec la RTF de la figure VI.2(b). On peut remarquer que l'image temps-fréquence construite avec $THT_{version1}$ permet difficilement d'observer les phénomènes acoustiques. En revanche, la $THT_{version3}$ permet de retrouver une description équivalente à celle de la SPWVD (Fig. VI.2(b)). Là encore, l'étude des phénomènes est délicate mais, de manière générale, nous pouvons noter la présence de deux ondes de surface en ($t \approx 50$ et $t \approx 100$), les autres phénomènes acoustiques étant plus diffus tout comme la représentation à partir de la SPWVD. Enfin, la $THT_{version4}$ (Fig. VI.9(d)) met clairement en évidence l'écho spéculaire ainsi que les deux ondes de surface déjà observées sur la figure VI.2(b).



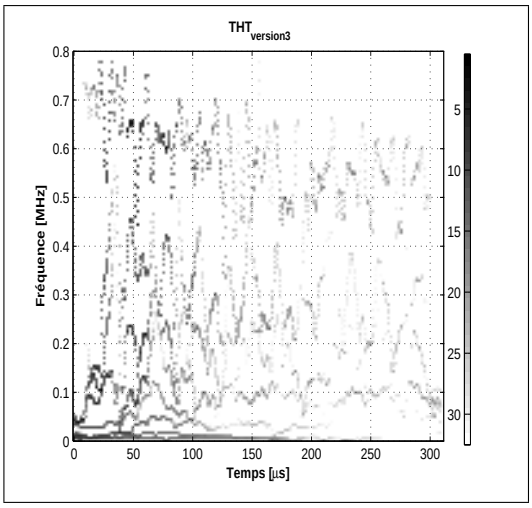
(a) Description par la SPWV d'une cible en inox ($c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$)).



(b) Description par la $THT_{version3}$ d'une cible en inox.



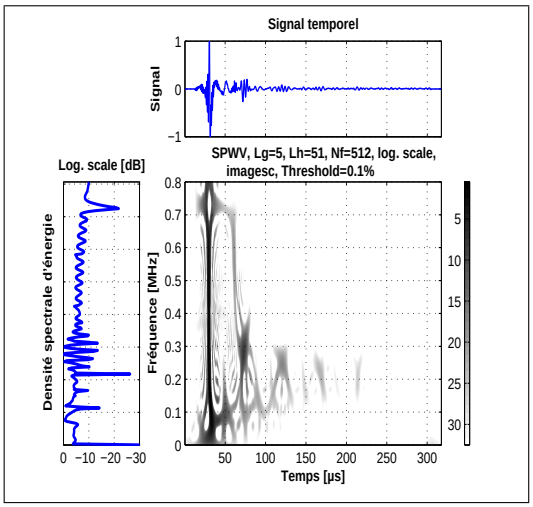
(c) Description par la SPWV d'une cible en granit ($c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$)).



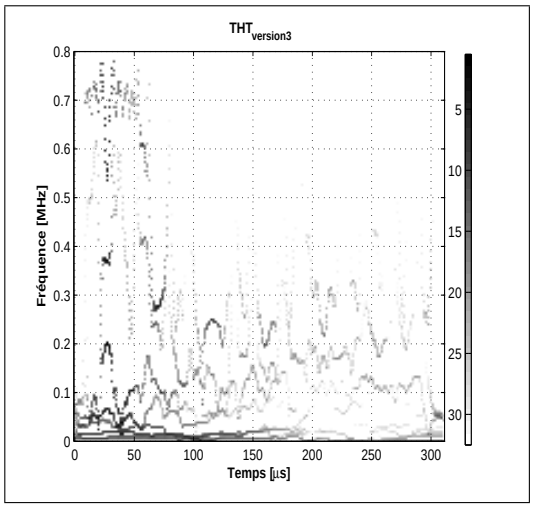
(d) Description par la $THT_{version3}$ d'une cible en granit.

Figure VI.10 — Descriptions temps-fréquence de deux cibles sphériques pleines de matière différente ($a = 15mm$)

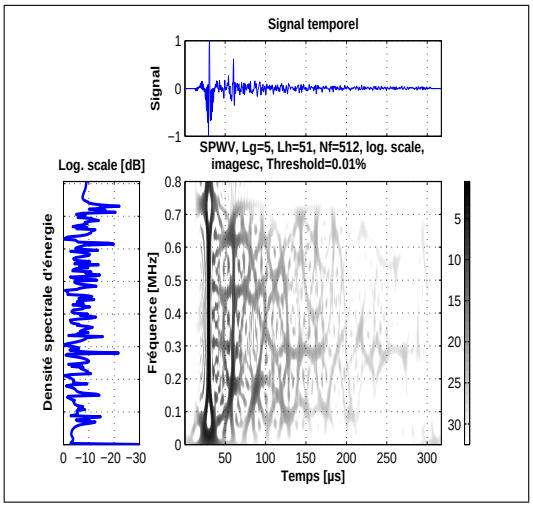
La figure VI.10 permet d'illustrer les caractéristiques du signal selon que la cible pleine est en inox (matériau ferreux) ou en granit (matériau plutôt synonyme d'une cible naturelle que manufacturée). De nouveau, on observe une caractéristique qui semble propre à la cible pleine, à savoir des ondes de surface qui s'atténuent rapidement en cours du temps et sont plutôt large bande (en général, 2 ou 3 patterns clairement identifiables). Enfin, l'analyse des phénomènes acoustiques n'est pas évident pour l'identification et plus particulièrement dans le cas de la cible en granit.



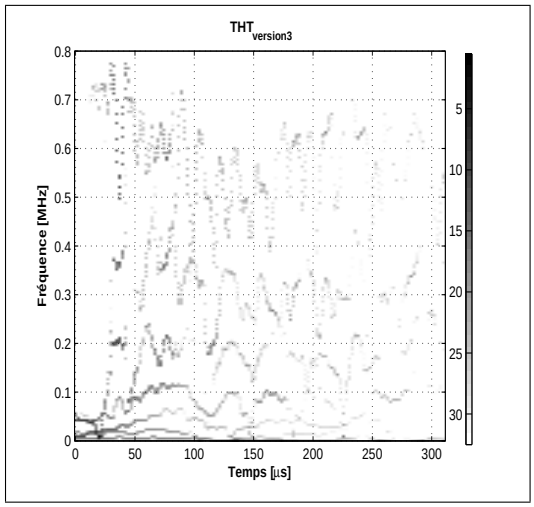
(a) Description par la SPWV d'une cible creuse ($b/a = 0.94$).



(b) Description par la $THT_{version3}$ d'une cible creuse.



(c) Description par la SPWV d'une cible pleine.



(d) Description par la $THT_{version3}$ d'une cible pleine.

Figure VI.11 — Descriptions temps-fréquence d'une cible cylindrique en Nickel-Molybdène ($a = 15mm$, $c_l = 5554m/s$, $c_t = 3021m/s$, $\rho = 9217kg/m^3$), l'axe d'observation étant perpendiculaire à la direction principale du cylindre.

La figure VI.11 permet de comparer les caractéristiques acoustiques du signal pour une cible de forme cylindrique (pleine ou creuse) en Nickel-Molybdène. Pour la cible cylindrique creuse, nous pouvons noter que les phénomènes physiques sont proches de la sphère creuse. L'analyse par la THT met en évidence les différentes ondes de surface en notant toutefois une atténuation plus forte que pour la sphère. Pour le cylindre plein, la description temps-fréquence présente des similitudes avec les sphères pleines. En effet, les ondes de surface ne sont pas nécessairement localisées en basse fréquence mais présentent plutôt un comportement assez étalé en fréquence et sont difficilement identifiables dans les deux représentations (Fig VI.11(b) et VI.11(d)).

Certaines propriétés de l'espace temps-fréquence ne semblent malheureusement pas conservées par la THT comme par exemple la possibilité d'estimer les retards de groupe, qui semblent intéressants pour la caractérisation d'une cible sonar [142]. Nous verrons que cela n'est pas nécessairement préjudiciable dans une démarche d'identification de cible sonar. Par la suite, cette analyse non-linéaire et auto-adaptative permet d'extraire des informations (ou attributs) pertinentes pour l'étape de décision concerant les RI de cibles sonars (classification, reconnaissance de formes, caractérisation fine de la cible).

VI.3 Classification des échos de cibles sonars par THT_{RdF}

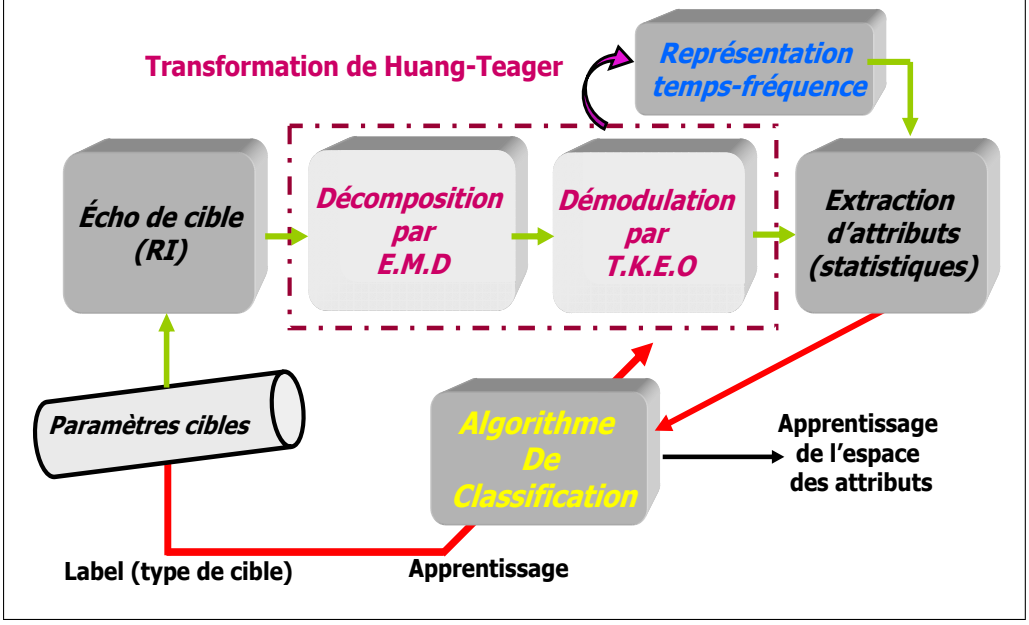
VI.3.1 Position du problème

Dans cette partie, nous récapitulons la structure de RdF mise en oeuvre pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire déterminer la nature de la cible par la seule connaissance de la RI associée. Dans notre cas, le problème de la RdF réside dans l'association intelligente d'un système de description (THT) et d'un système de décision en vue de la classification (cf. section V.3). L'ensemble du traitement est appelé THT_{RdF}.

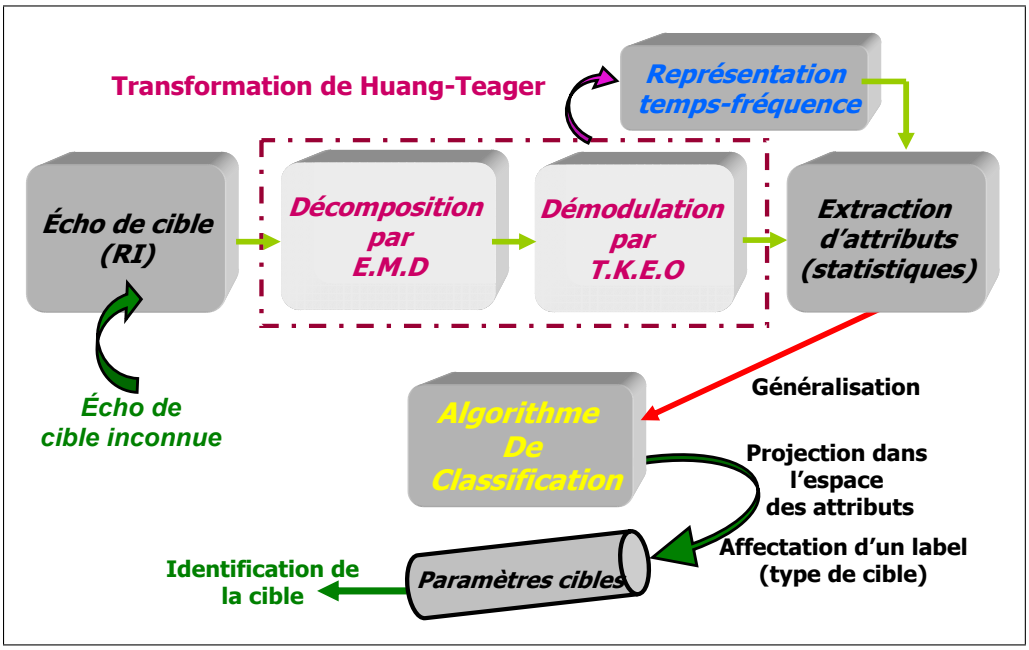
La figure VI.12 détaille l'ensemble de la structure et met en lumière la différence majeur entre la phase d'apprentissage et la phase de généralisation (restitution) respectivement illustrée par les figures VI.12(a) et VI.12(b). La différence entre le processus d'apprentissage et de généralisation est la connaissance ou non de la nature de la cible ayant générée la RI. Cette connaissance permet lors de l'apprentissage d'affecter un label (manufacturée / naturelle) dans l'espace de projection des attributs. Ainsi lors de la restitution, l'espace labélisé lors de la première phase de RdF permet de déduire la nature de la cible associée au signal inconnu. Cette approche est supervisée dans le sens où l'espace des attributs est labelisé lors de la phase d'apprentissage.

Le principe de décision par THT_{RdF} repose sur une phase d'analyse avec la THT qui permet d'estimer, via l'opérateur d'énergie, l'ensembles des FI et AI qui composent le signal (ici une RI). Par la suite, une phase de sélection et de pertinence des vecteurs d'attributs est réalisée : celle-ci peut être soit manuelle et arbitraire, soit ne nécessitant aucune aide extérieure (cas non étudié). Pour finir, un module de classification (simple) est appliqué dans le cadre de l'identification de cibles sonars.

Pour résumer, la problématique de la classification d'une RI se ramène à un problème de projection des informations dans un espace temps-fréquence susceptible de mettre en exergue les informations nécessaires à l'identification de la cible associée au signal étudié. L'espace de projection temps-fréquence est obtenu avec la THT. Cette espace étant extrêmement riche en information, nous réalisons une étape d'extraction et de sélection d'attributs sur l'image temps-fréquence et plus précisément sur les grandeurs instantanées IA et IF.



(a) Phase d'apprentissage.



(b) Phase de restitution (généralisation).

Figure VI.12 — Architecture de la THT_{RdF} (apprentissage et restitution).

L'approche proposée, THT_{RdF}, repose sur la sélection manuelle des attributs parmi l'ensemble des caractéristiques déterminées lors de l'étape d'analyse à l'aide de la THT. Le pseudo-code THT_{RdF} de la méthode d'identification et de classification de l'écho acoustique (RI) se découpe ici en six étapes résumé ci-dessous :

Entrée : $x(t)$ (dans notre cas une RI) ;

Etape 1) Décomposer avec l'EMD $x(t)$, estimation de N IMF ;
Etape 2) Sélectionner $N_s \leq N$ IMF (N_s nombre d'IMF conservé) ;
Etape 3) Appliquer l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ sur les N_s IMF : $\psi_k(t)$, $(k \in \{1, 2, \cdots, N_s\})$;
Etape 4) Démoduler chaque IMF par la méthode ESA et estimer AI $a_k(t)$ et FI $f_k(t)$;
Etape 5) Extraire les attributs :
Pour $a_k(t)$, $f_k(t)$ et $\psi_k(t)$ calculer des attributs globaux :
`Skewness, Kurtosis et Entropie de Shannon ;`
Etape 6) Classifier en utilisant les attributs extraits (ACP ...) ;
Sortie : *Espace des attributs avec affectation des labels.*

Tableau VI.1 — Pseudo-code de THT_{RdF}.

Dans notre cas, l'idée n'est pas tant de développer une structure de classification extrêmement compliquée mais plutôt de montrer la validité de l'approche de RdF tant au niveau de l'analyse temps-fréquence par la THT, qu'au niveau de la sélection et de la réduction des attributs. C'est pourquoi, la méthode de classification proposée ici est extrêmement simple et repose sur l'ACP. La projection dans l'espace des premières composantes principales et la connaissance de la matrice de projection ainsi que des labels permet, lors de la phase de généralisation, d'estimer la nature de la cible (manufacturée ou naturelle). Nous montrons dans le prochain paragraphe que la sélection judicieuse des attributs aboutis à des résultats probants en terme de simplicité de l'approche et des résultats de classification.

VI.3.2 Identification des échos de cibles sonars

L'identification de cible par la méthode THT_{RdF} est appliquée à un ensemble de RI simulées de cible sonar [142]. Nous utilisons 16 RI , lors de la phase d'apprentissage. C'est échos ne sont pas perturbés et permettent d'identifier dans l'espace des attributs la disposition des différents patterns. Pour la phase de généralisation (ou restitution), nous utilisons 8 RI dont les caractéristiques sont inconnues et ne sont pas utilisées lors de la phase d'apprentissage. Les 8 RI inconnues sont bruitées par un bruit blanc gaussien de rapport signal sur bruit de 15 dB. Les caractéristiques des signaux sont présentées dans les tableaux VI.2 et VI.3.

Indice des cibles	Pleine (P) Creuse (C)	Cylindre (Cy) Sphère (Sp)	Labels d'apprentissage
1 (NiMol)	P	Sp	■
2 (Inox)	P	Sp	■
3 (Alu)	P	Sp	■
4 (Pvc)	C	Sp	•
5 (Nylon)	C	Sp	•
6 (NiMol)	C	Sp	•
7 (Inox)	C	Sp	•
8 (Alu)	C	Sp	•
9 (NiMol)	C	Cy	■
10 (Inox)	P	Cy	■
11 (Alu)	P	Cy	■
12 (Pvc)	C	Cy	■
13 (Nylon)	C	Cy	▲
14 (Nimol)	C	Cy	▲
15 (Inox)	C	Cy	▲
16 (Alu)	C	Cy	▲

Tableau VI.2 — Caractéristiques des cibles utilisées pour la phase d'apprentissage

Indice des cibles	Pleine (P) Creuse (C)	Cylindre (Cy) Sphère (Sp)	Labels d'apprentissage
17 (Granit)	P	Sp	□
18 (Marbre)	P	Sp	□
19 (Pvc)	C	Sp	∘
20 (Alu)	C	Sp	∘
21 (Granit)	P	Cy	□
22 (Marbre)	P	Cy	□
23 (Pvc)	C	Cy	△

Tableau VI.3 — Caractéristiques des cibles utilisées pour la phase de généralisation.

La figure VI.13 synthétise l'ensemble des traitements d'identification de cibles sonars. Nous avons représenté l'espace des attributs selon 3 directions principales, à savoir selon les composantes 2, 3 et 4. Cette disposition permet de mieux identifier la position des différents ensembles. Les données utilisées pour l'apprentissage (et donc affectées d'un label) sont indiqués par des symboles de formes pleines et noires tandis que celles pour la généralisation sont symbolisées par des formes creuses. Bien que ce cas d'étude soit simple, il permet néanmoins de valider la pertinence de la structure de RdF que nous proposons : la THT_{RdF}. L'identification des cibles manufacturées et des cibles naturelles est clairement réalisée. Parallèlement, il est à noter que les attributs que nous avons choisis permettent non seulement d'identifier les deux classes initialement prévues (manufacturée et naturelle) mais aussi plus précisément trois groupes à savoir : cylindres creux, sphères creuses et les formes considérées comme naturelles (ou pleines).

Les résultats de l'ACP montrent que lors de la phase d'apprentissage, les attributs associés à chaque cible s'organisent spontanément en ensembles de même catégories (formes, cible naturelles ou manufacturée). Ainsi dans l'espace des attributs, on observe une très bonne séparation des échos, en particulier pour les coques cylindriques. On remarque aussi une bonne

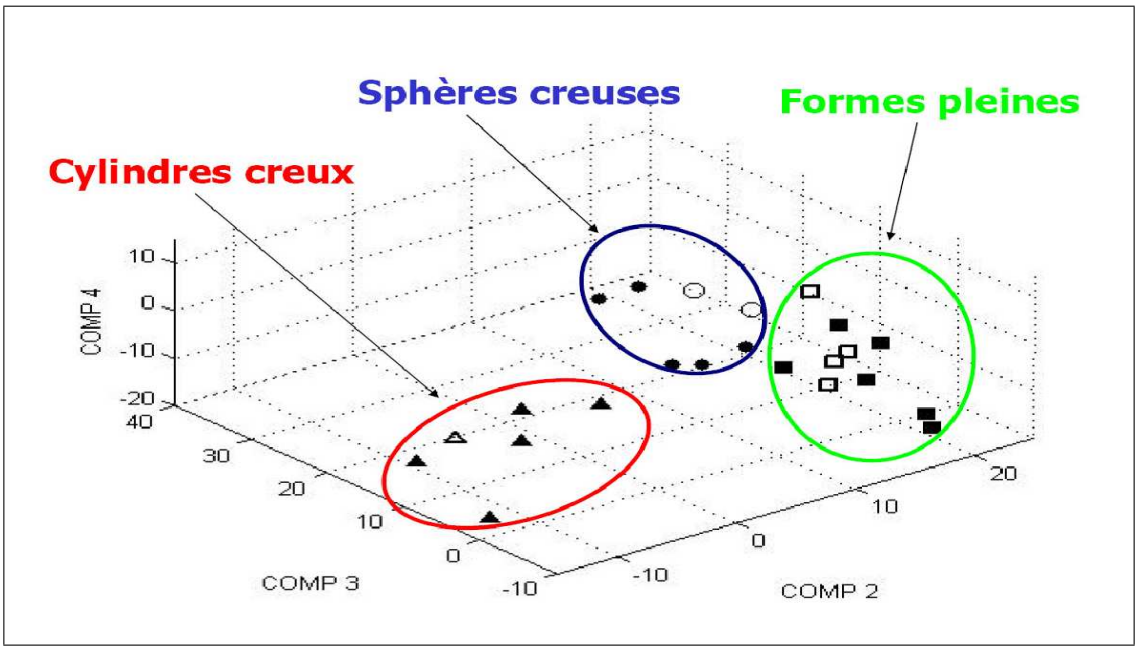


Figure VI.13 — Espace de projection avec l'ACP dans trois directions principales (2,3,4).

séparation entre les coques sphériques et les autre cibles, même si cela semble moins évident par rapport aux coques cylindriques. Cependant, la séparation entre les sphères pleines et les cylindres pleins semble beaucoup moins évidente. Pour des échos de cibles pleines, cette approche ne permet pas de faire la distinction entre les formes (sphères ou cylindres). Ainsi si l'on souhaite faire une RdF des cibles pleines, il est nécessaire d'extraire d'autres attributs pertinents pour cette classification. L'approche montre aussi une bonne généralisation du problème de classification notamment avec les échos proposés lors de la phase de restitution.

D'une part, les résultats présentés prouvent qu'un nombre restreint d'attributs peut être suffisant pour identifier correctement les caractéristiques (formes, coques, non-coques) des RI simulées de cibles sonars. D'autre part, une sélection judicieuse des attributs permet de transposer le problème initial (non-linéaire) de classification à un problème plus simple séparable linéairement (ACP). D'ailleurs, il convient de noter que cette sélection « judicieuse » doit être réellement prise en compte lors de la création du vecteur de forme. En fait, cela est bien connu et correspond à ce que l'on appelle couramment la malédiction de la dimension (ou phénomène de Hughes, « the curse of dimensionality ») [121, 125].

VI.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la THT à l'acoustique sous-marine et plus exactement à l'analyse des caractéristiques acoustiques de la RI d'un écho de cible sonar et à sa classification en cible naturelle ou manufacturée. Nous avons montré, sur des exemples synthétiques de RI de cibles canoniques, l'apport de la représentation temps-fréquence de la THT pour la compréhension des mécanismes de formation des échos et l'identification des différentes signatures acoustiques présentes dans un tel signal. Plus exactement, l'analyse par THT a permis de mettre en évidence les phénomènes physiques tels que les ondes de Lamb ou la réflexion spéculaire. Nous avons validé l'approche en comparant le résultat à une méthode classique utilisant la SPWVD. En effet, dans les deux cas (THT et SPWVD), la RTF permet

d'extraire des informations qualitatives pour identifier la cible (caractéristique physiques et géométriques). Il est important de noter que toute l'analyse est réalisée à partir d'un seul écho de la cible (d'où un intérêt certain de ces méthodes dans le cas de cibles mobiles).

La simplicité d'obtention des caractéristiques acoustiques (une cible $\Leftrightarrow$ un seul écho $\Leftrightarrow$ une RI $\Leftrightarrow$ une analyse par temps fréquence par THT) trouve sa contre-partie dans la complexité des images temps-fréquence et de leur grande *richesse* en information qui peuvent rendre leur interprétation parfois délicate (cela est aussi vrai pour la SPWVD). En revanche, à partir de ces images, nous pouvons extraire un grand nombre d'informations (ici qualitatives) et notamment les différentes ondes de surfaces. L'affinement d'une telle analyse serait de pouvoir estimer des informations plus quantitatives (plus physique) telles que dispersion de vitesse des ondes de surfaces, atténuation des ondes, fréquences de résonances ...

Suite à cette phase d'analyse, nous avons mis au point un protocole de reconnaissances de cibles (naturelle ou manufacturée), basé sur l'interprétation d'images temps-fréquence associées à leurs échos. La problématique quoique simple, nous a permis de valider l'ensemble de la démarche de reconnaissance et de conclure sur la pertinence de l'analyse temps-fréquence par THT.

Ainsi, les résultats de classification ont permis de valider d'une part la pertinence du bloc d'analyse par la THT dans le processus de classification et d'autre part de montrer, au vu du nombre important d'attributs extraits de la représentation, la nécessité d'une phase de sélection des attributs et de leurs pertinences. Nous avons obtenu des taux reconnaissance à voisinant les 100%. Cependant, ce résultat est à relativiser au regard de la taille de la base d'apprentissage et de sa richesse en signaux synthétiques de cibles canoniques. Mais cela ne remet pas en cause l'ensemble des conclusions que nous avons faites, à savoir la pertinence de la THT dans un processus de RdF, la nécessite d'extraire des attributs pertinents et la volonté d'avoir une méthode de classification aussi générique que possible sans pré requis sur les signaux et l'environnement ... Pour valider la méthode, le traitement de signaux réels correspondants à des cibles de diverses caractéristiques physiques est nécessaire (et son en cours de réalisation). D'autre part, l'étude de la robustesse de cette méthode est aussi nécessaire notamment vis à vis de toutes autres perturbations (réverbération, Doppler ...). Enfin, la pertinence des attributs et leur sélection de façon automatique permettrait de rendre cette approche de RdF totalement générique et automatique (l'intervention de l'expert pour la sélection des attributs pertinents ne serait alors plus nécessaire).

Conclusion et perspectives

L'objectif dans ce travail de thèse était de proposer et d'introduire des nouveaux outils de traitement et d'analyse des signaux non-stationnaires multi-composantes. L'idée était de proposer des outils simples et rapides. L'approche que nous avons choisie est centrée essentiellement autour de l'estimation de la fréquence instantanée et de la décomposition temporelle non-linéaire. Les résultats de ces méthodes proposées on été comparés aux méthodes classiques du traitement du signal telles que les filtres linéaires, les ondelettes et la distribution de Wigner-Ville.

Dans les chapitres **I** et **II**, nous avons définit l'ensemble de la problématique associée à l'estimation de la fréquence instantanée et inventorié les outils temps-fréquences déjà existants, pour finalement ne retenir que l'approche proposée par Huang *et al.* [114] : associer la Transformation de Huang ou plus exactement la décomposition en modes empiriques (EMD pour empirical mode decomposition) à une méthode d'estimation de la fréquence instantanée.
L'EMD consiste à décomposer un signal sur une base de fonctions, appelées modes empiriques (ou IMF pour Intrinsic Mode Functions), au même titre q'une décomposition en séries de Fourier ou en ondelettes. La particularité de l'EMD réside dans le fait que la base de décomposition n'est pas donnée *a priori* mais est construite à partir des propriétés du signal lui-même. L'EMD est une méthode locale et pilotée par les données. C'est une des raisons qui a motivé notre choix pour l'EMD. Il a été montré sur la base de simulations au chapitre **II** que les IMF sont orthogonales entre elles et que leur somme est égale au signal d'origine. Nous avons également montré au chapitre **II** que les résultats de la décomposition par EMD sont conditionnés par l'échantillonnage et l'interpolation des signaux. Les résultats présentés montrent que pour une meilleure décomposition un sur-échantillonnage des signaux est nécessaire. Cela étant, une étude sur une très large classe de signaux pour trouver quelle est la bonne fréquence d'échantillonnage s'impose. Nous avons vu que, toujours sur la base de simulations, que l'EMD s'organise en banc de filtres vis à vis d'un bruit blanc Gaussien et qu'il a un comportement similaire à une analyse en ondelettes vis à vis d'une impulsion. La décomposition par EMD a été comparée à celle des ondelettes. Ainsi, l'approche ondelettes apparaît comme méthode paramétrique tandis que l'EMD est plutôt une approche non-paramétrique. Nous avons vu que l'association de l'EMD et de la transformation de Hilbert (THH) est une représentation 2D type temps-fréquence. Les résultats d'analyse temps-fréquence de signaux synthétiques par THH ont été comparées à celles de la DWV et des ondelettes. Globalement la THH donne des résultats comparables aux deux autres méthodes mais sans interférences et avec une détection claire des

différentes lois d'évolution des fréquences (FI). De plus, les transitions en fréquence sont bien mise en évidence. Cependant, la concentration en fréquence reste meilleure avec la WVD.

Dans le chapitre **III**, nous avons exploité l'aspect non-linéaire de la décomposition temporelle des signaux par EMD. Deux nouvelles méthodes de traitement de signaux sont présentées : le filtrage et le débruitage.
Le filtrage est obtenu par la reconstruction partielle du signal en utilisant un nombre réduit d'IMF. Pour ce faire nous proposons un critère énergétique appelé CSME (consecutive MSE) pour déterminer le nombre nécessaire d'IMF. Le CMSE permet d'identifier l'indice de l'IMF à partir duquel il y a un changement significatif en énergie. Cette méthode fait l'hypothèse que le bruit est additif et qu'il est essentiellement réparti sur les premières IMF. Ce filtrage est entièrement piloté par les données et ne nécessite la spécification d'aucun paramètre. Globalement les résultats obtenus sont qualitativement très bons. Les reconstructions partielles estiment correctement les différents signaux originaux. Les gains en termes de rapport signal à bruit varient entre 9 dB et 28 dB. Les résultats sont comparés aux filtres moyenneur et médian et aux ondelettes symmlets de Daubechies d'ordre 5 (avec un débruitage utilisant le seuillage doux). Les résultats sont bien meilleurs que pour le moyenneur et le médian et comparables aux ondelettes. Pour les signaux Doppler et Heavysine les ondelettes donnent de meilleurs résultats que l'EMD. Par contre, pour les signaux Bumps et ECG, le filtrage par EMD dépasse celui des ondelettes. Le meilleur résultat obtenu pour l'ECG, peut s'expliquer en partie par le fait que ce dernier est sur-échantillonné.
Pour améliorer les résultats de ce filtrage et en particulier au niveau des oscillations rapides observées au début du signal Doppler, nous avons traité séparément toutes les IMF et reconstruit le signal complètement : c'est l'approche de débruitage par EMD. En effet, comme toutes les IMF sont conservées par conséquent leurs bandes de fréquences le sont aussi. La méthode est donc vue comme une technique de débruitage. A l'inverse du filtrage, l'approche de débruitage ne fait pas l'hypothèse sur la répartition du bruit sur les IMF. Le bruit est supposé blanc, Gaussien et additif. L'idée du débruitage est de pré-filtrer ou de seuiller (au sens du débruitage par ondelettes) chaque IMF séparément. Nous avons proposé deux types de pré-traitement, l'un utilisant le filtre de Savitzky-Golay et le deuxième est un seuillage qui s'inspire de celui de Donoho et Johnstone pour le débruitage par ondelettes. Dans ce cas, les échantillons d'une IMF dans l'espace des temps sont vus comme des coefficients d'ondelettes dans l'espace dual. Nous avons estimé le niveau du bruit (variance) de chaque IMF séparément et calculé le seuil de Donoho. Nous avons utilisé le seuillage doux qui est moins excessif que le seuillage dur. Pour le filtre de Savitzky-Golay nous avons choisi 3 (largement utilisé en pratique) et une fenêtre d'analyse de taille 7. Nous avons testé le débruitage sur les mêmes signaux et comparé les résultats aux mêmes méthodes que précédemment. Les résultats montrent que les tendances des signaux sont respectées aussi bien au voisinage des singularités qu'au niveau des faibles variations (signaux initiaux constants ou lisses). Comparé au filtrage par EMD les signaux sont mieux reconstruits et avec de meilleurs rapport signal à bruit. Le débruitage doux donne de meilleurs résultats que le moyenneur et le médian pour l'ensemble des signaux et présente des meilleurs rapport signal à bruit pour les signaux Bumps et ECG que les ondelettes. Les résultats du débruitage doux sont intéressants mais un petit moins bons que ceux du débruitage par Savitzky-Golay. Cela étant, le débruitage doux est entièrement automatique et ne nécessite aucun réglage de la part de l'utilisateur. Globalement, les résultats du débruitage par Savitzky-Golay sont meilleurs que ceux de l'ensemble des méthodes y compris le seuillage doux. Ces résultats montrent l'apport de la reconstruction complète et du lissage des IMF par le filtre de Savitzky-Golay. Comme pour le filtrage par EMD, l'analyse d'une large classe

de signaux est nécessaire pour confirmer les résultats présentés. Ainsi pour le débruitage par Savitzky-Golay pour une meilleur reconstruction du signal il est intéressant d'étudier l'effet de la taille de la fenêtre d'analyse du filtre sur le lissage des IMF. Toujours pour rendre le débruitage automatique, nous pouvons également adapter la taille de la fenêtre à chaque IMF et ce en fonction du niveau de bruit correspondant. En outre, nous pouvons imaginer établir d'autres formes de seuillage ou de filtrage comme celles de l'approche ondelettes.

Dans le chapitre **IV**, nous avons présenté les fondements physique et théorique de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser. Nous avons mis l'accent sur le fait que cet opérateur ne calcule pas l'énergie d'un signal mais l'énergie du système qui génère le signal. Cette énergie qui est égale au carré du produit de la fréquence et de l'amplitude du signal est destinée à la démodulation en amplitude et/ou en fréquence du signal (AM-FM). L'opérateur de Teager-Kaiser est limité aux signaux mono-composante et à bande étroite. Nous avons montré que pour appliquer un tel opérateur la fréquence d'échantillonnage doit être à peu prés de 8 fois supérieure à la fréquence la plus élevée du signal. Pour le signaux muli-composantes un filtrage passe-bande tel que celui de Gabor, les ondelettes ou l'EMD est nécessaire avant d'appliquer l'opérateur. Nous avons également présenté l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser qui permet de mesurer l'énergie d'interaction entre deux signaux réels.

Les opérateurs de Teager-Kaiser simple et croisé étant limités aux signaux réels, nous les avons étendus aux signaux complexes et généralisés en introduisant un nouveau opérateur d'énergie croisée appelé $\Psi_{\mathbb{B}}$. Nous avons proposé trois versions discrètes pour son implémentation et montré qu'il utilise, comme dans le cas de Teager-Kaiser, uniquement 3 échantillons à chaque instant ce qui assure une rapidité du calcul et facilité pour la mise en œuvre. Nous avons établit dans un premier temps la relation théorique entre $\Psi_{\mathbb{B}}$ et la distribution de Wigner-Ville et dans un deuxième temps et étendu ce lien à l'ensemble de la classe de Cohen. Ces résultats théoriques montrent que $\Psi_{\mathbb{B}}$ permet l'analyse des signaux non-stationnaires (de type mono-composante). Nous avons montré que $\Psi_{\mathbb{B}}$ permet de mesurer l'interaction entre deux signaux complexes (mesure de similarité). En maximisant cette interaction une nouvelle méthode de détection d'un signal dans un autre et de calcul du temps de retard entre deux signaux est introduite. Les résultats obtenus et comparés à la corrélation croisée sont prometteurs. L'analyse d'une large classe signaux est nécessaire pour confirmer les résultats obtenus. Nous avons enfin proposé une nouvelle mesure de similarité des signaux autour de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ et comparé les résultats de signaux synthétiques à la distance Euclidienne, et la corrélation croisé. Les bons résultats obtenus montrent l'apport de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ et également l'intérêt d'intégrer les variations temporelles (dérivées première et seconde) pour chiffrer la ressemblance entre les séries temporelles. Ainsi, une des applications possibles de cette nouvelle mesure de similarité est l'indexation des séries temporelles.

Le chapitre **V** est une synthèse des précédents chapitres. Une nouvelle méthode temps-fréquence instantanée basée sur l'utilisation conjointe de l'EMD et de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser pour l'analyse les signaux non-stationnaires et multi-composantes est introduite : la Transformation de Huang-Teager (THT).

La THT repose sur l'association de la méthode d'analyse multi-résolution, l'EMD, et de la transformation de Teager-Kaiser pour l'estimation des amplitudes et des fréquences instantanées (respectivement AI et FI) du signal étudié. L'EMD décompose le signal en une somme de signaux oscillants (IMF) suivi par l'application de l'opérateur TKEO pour estimer l'énergie du système et calculer par démodulation l'AI et la FI de chacune des IMF. L'intérêt de l'opérateur TKEO, comparé à la TH, est qu'il est local et fournit des mesures instantanées

de l'AI et de la FI. Par ailleurs il est très simple à mettre en œuvre. L'ensemble des AI et FI ainsi déterminées permet d'obtenir une RTF. Notons que l'approche proposée est différente de celles des RTF classiques dans la mesure où nous estimons d'abord les FI pour construire la description temps-fréquence (et non l'inverse). Quatre versions de la THT sont présentées et leurs résultats comparées et commentées. La quatrième version de la THT est une RTF par ligne de crêtes.

Nous avons comparé, sur des signaux synthétiques, la THT à la THH et à la WVD. La THT est la seule RTF qui identifie correctement les lois d'évolution des FI des signaux analysés. De plus, comparée à la THH et à la WVD, la THT ne nécessite pas le calcul du signal analytique. La THH présente un étalement en fréquence plus important que celui de la THT et de la WVD. La THT a une meilleure localisation en fréquence que la THH mais la DWV reste la meilleure en terme de localisation. Cependant, les résultats de cette distribution sont limités par les interférences. Les résultats de la THT, comme ceux de la THH, sont obtenus sans aucune information a priori sur les caractéristiques du signal étudié et ne présentent pas d'interférences.

Finalement, nous avons proposé un nouveau schéma de reconnaissance des formes (RdF) aussi générique que possible basé sur l'utilisation de la THT comme phase d'analyse des données dans le plan temps-fréquence. Cette méthode est appelée THT_{RdF}. Ainsi, La THT est utilisée en tant qu'outil descriptif du signal pour extraire des attributs pertinents pour la classification des signaux non-stationnaires (RI, ...).

Nous avons présenté dans le chapitre **VI** une application de la THT à l'acoustique sous-marine et plus exactement l'analyse des caractéristiques acoustiques de la réponse impulsionnelle (RI) d'un écho de cible sonar. Le but est d'associer à l'écho recueilli la nature de l'objet ayant donné naissance à un tel signal écho. En effet, l'analyse de la RI par THT nous a permis de mettre en évidence les phénomènes physiques tels que les ondes de Lamb ou la réflexion spéculaire. La comparaison de cette analyse à celle conduite par la SPWVD montre l'intérêt de la THT : absence d'interférences, simplicité du calcul. Partant de cette analyse nous avons extrait des attributs issus des statistiques d'ordre supérieurs pour la classification et l'identification de la cible sonar (naturelle ou manufacturée). De très bons taux de classification ont été obtenus.

Les perspectives de recherches envisagées ainsi que les extensions possibles sont essentiellement basées sur les travaux déjà effectués ou en cours. Les outils théoriques d'analyse et de classification développés dans le cadre de ce travail de thèse nécessitent des améliorations.

Les outils basés sur l'EMD peuvent être appliqués par exemple à la compression de données. En effet, pour comprimer les signaux (audio ...) nous pouvons uniquement coder les extrema des IMF pour reconstruire complètement le signal. Il est intéressant d'étendre l'EMD au cas des images pour le débruitage, la segmentation ou la classification. Dans le cadre d'une extension à l'image, une étude prospective a été réalisée à la fin de ce document. D'autre part, l'EMD nécessiterait une étude théorique plus approfondie. Le fait que cet outil (EMD) soit défini uniquement à partir d'un algorithme et non pas à partir d'un cadre mathématique rigoureux rend son analyse ainsi que l'étude de ses performances difficiles.

Pour ce qui est des approches de filtrage et de débruitage, proposés dans le chapitre III, l'analyse d'une plus large classe de signaux réels permettra de confirmer les résultats obtenus. En outre, nous pouvons imaginer d'établir d'autres formes de seuillage ou de filtrage comme celles utilisées par les ondelettes [11, 145].

Pour l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser, une analyse de robustesse vis à vis du bruit est nécessaire. Nous pouvons également étendre cet opérateur aux ordres supérieurs. Il intéressant d'étendre cet opérateur aux cas 2D. Une des applications possibles du Teager-Kaiser croisé 2D, comme mesure de similarité, pourrait être le recalage d'images ou encore l'indexation des images.

Pour la THT, l'analyse de signaux réels et la robustesse vis à vis du bruit sont indispensables pour confirmer les résultats. Une étude a d'ailleurs déjà été réalisée sur des signaux AM-FM à 2 composantes pour l'estimation des FI [28]. On pourrait imaginer qu'un signal non-stationnaire bruité serait dans un premier temps débruité à l'aide de l'EMD puis dans un deuxième temps analysé avec la THT. Enfin, pour ce qui est de la THT au sein d'un processus de RdF, il serait intéressant par exemple d'étudier la pertinence des attributs choisis pour la classification d'un signal.

Bien que, dans l'ensemble du manuscrit, l'EMD apparaît comme une méthode de décomposition des signaux 1D, on voit actuellement de plus en plus des travaux dans le domaine de l'image. La suite propose alors une synthèse et des perspectives d'études pour étendre cet outil à l'image.

Des études ont été réalisées pour tenter d'étendre l'EMD 1D au domaine de l'image (au même titre que les ondelettes [145, 163]). Ces études proposent essentiellement des méthodes d'amélioration par exemple de l'interpolation des surfaces par les extrema ou des nouveaux critères d'arrêt du tamisage. Les algorithmes proposés sont généralement de simples extensions de l'EMD 1D en 2D mais pas de réels algorithmes 2D au même titre que l'algorithme 1D. Cependant, il est important de noter que les variations d'amplitude d'un signal 1D et celles d'une image ne sont pas comparables. En effet, si nous prenons un profil quelconque d'une image et à l'exception des pixels des contours (discontinuités), les variations d'intensité des pixels sont très faibles (voire nulles dans les zones homogènes) comparées à celles d'un signal 1D classique. Par ailleurs, l'aspect contextuel dans une image ne peut être pris en compte par la simple extension de l'EMD en 2D. Pour toutes ces raisons, il faudrait sans doute revoir le principe même de l'EMD avant de l'étendre au cas 2D.

Sans toutes les lister, nous pouvons citer les principales méthodes d'analyse multi-échelles basées sur de l'EMD :

- la « Décomposition modale empirique bidimensionnelle » ($BEMD$) est proposée par Nunes *et al.* [168, 169]. La détection des extrema dans l'image repose sur une approche morphologique. Pour l'interpolation, les auteurs proposent l'interpolation multi-résolutions par splines et les fonctions radiales de base,
- l'approche $2D-EMD$ est présentée dans [29]. C'est une analyse dite $Nfois1D$. L'EMD $1D$ est appliquée selon des directions privilégiées sélectionnées dans l'image. La notion de voisinage autour d'un pixel n'est pas exploitée, mais l'approche permet quand même de faire ressortir certaines caractéristiques permettant de réaliser par la suite une segmentation de l'image. D'autres études sont basées sur cette notion de décomposition $2D-EMD$ orientée [138, 195],
- une version $2D$ appelée : « Directional empirical mode decomposition » (DEMD) est introduite par Liu *et al.* [137, 138]. Le principe repose sur l'approche $2D-EMD$ et une version $2D$ de la transformée de Hilbert pour l'estimation d'images fréquentielles et d'amplitudes instantanées. Cette approche a été appliquée à l'analyse et la segmentation d'images de textures,

– Linderhed propose une application de l'EMD à la compression de données [133–135]. L'approche est originale dans le sens où celle-ci repose sur un concept dit d'*« empiquency »*.

Au regard de ces nombreuses approches, l'idée de décomposer une image via une version 2D de l'EMD semble très prometteuse aussi bien pour la compression de données [89,133,135], la segmentation multi-échelles, l'analyse de texture [137, 138, 168] ou le débruitage d'images [46, 169] et cela dans de nombreux domaines tels que la médecine [169], le radar [117, 195], l'imagerie satellitaire [139] ou encore en acoustique sous-marine [29].

De façon générale, les méthodes se sont avérées capables de proposer une description multi-filtrée(s) et une décomposition multi-échelles de l'espace image (signal bidimensionnel) satisfaisante mais il reste encore de nombreux problèmes à résoudre tels que :

– l'extraction des extrema locaux et leur interpolation,
– la définition du critère d'arrêt pour le tamisage,
– l'interprétation des images obtenues qui reste quelque peu délicate.

Bibliographie

[1] S. Abeysekera et B. Boashash : Methods of signal classification using the images produced by the wigner distribution. *Patt. Recog. Lett.*, 12(11):717–729, novembre 1991.

[2] A. Addai : Bridge sensor data analysis using the Hilbert-Huang transform. Rapport technique, University of Illinois-Urbana Champaign, 2003.

[3] R. Agrawal, C. Faloutsos et A. Swami : Efficient similarity search in sequence databases. *In Proceedings Int. Conf. of FDOA (FODO)*, pages 69–84, Chicago, octobre 1993.

[4] H. Akima : A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *J. of the ACM*, 17(4):589–602, 1970.

[5] M.A. Al-Alaoui : Novel approach to designing digital differentiators. *IEE Electronics Letters*, 28(15):1376–1378, juillet 1992.

[6] M.A. Al-Alaoui : Novel digital integrator and differentiator. *IEE Electronics Letters*, 29(4):376–378, février 1993.

[7] J. Alon, S. Sclaroff, G. Kollios et V. Pavlovic : Discovering clusters in motion time-series data. *IEEE Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition*, 1:375–381, juin 2003.

[8] R. A. Altes : Detection, estimation, and classification with spectrograms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(4):1232–1246, avril 1980.

[9] R.A. Altes : Sonar for generalized target description and its similarity to animal echolocation systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(1):97–105, 1976.

[10] P.O. Amblard : *Non, non et non, ou quelques études sur et autour des non-propriétés en traitement du signal*. Habilitation à diriger des recherches, INPG, mai 2001.

[11] A. Antoniadis, J. Bigot et T. Sapatinas : Wavelet estimators in nonparametric regression : A comparative simulation study. *J. of Statistical Software*, 6(6):1–83, 2001.

[12] F. Astrade-Carencotte : *Application de techniques de reconnaissance de formes sur la distribution de Wigner-Ville*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[13] F. Auger, P. Flandrin, P. Gonçalvès et O. Lemoine : Time-frequency toolbox for use with matlab, tutorial. Rapport technique, GdR-PRC ISIS, 1998.

[14] R.E. Baddour, M.D. Sherar, J.W. Hunt, G.J. Czarnota et M.C. Kolios : High-frequency ultrasound scattering from microspheres and single cells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(2):934–943, 2005.

[15] G. Bartolini, A. Damiano, G. Gatto, I. Marongiu, A. Pisano et E. Usai : Robust speed and torque estimation in electrical drives by second-order sliding modes. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 11(1):84–90, janvier 2003.

[16] M.J. Bastiaans : Gabor's expansion of a signal into gaussian elementary signals. *Proceedings of the IEEE*, 68(4):538–539, avril 1980.

[17] M.J. Bastiaans, T. Alieva et L. Stankovic : On rotated time-frequency kernels. *IEEE Signal Processing Letters*, 9(11):378–381, 2002.

[18] C. Berthomier : Instantaneous frequency and energy distribution of a signal. *Signal Processing*, 5:31–45, 1983.

[19] L. Besacier : *Un modèle parallèle pour la reconnaissance automatique du locuteur.* Thèse de doctorat, LIA , Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, avril 1998.

[20] A. Boashash : *Time-Frequency Signal Analysis and Processing : A Comprehensive Reference.* Elsevier Ltd., Oxford, UK, 2003.

[21] B. Boashash : *Time-frequency signal analysis*, chapitre Advanced in spectrum Estimation, pages 418–517. edited by S. Hyakin, Prentice-Hall, 1990.

[22] B. Boashash : Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal part i : Fundamentals part ii : Algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(4):520–568, 1992.

[23] B. Boashash : *Time-Frequency Signal Analysis-Methods and Applications.* Longman-Cheshire, Melbourne and John Wiley Halsted Press, New York, 1992.

[24] B. Boashash et P. O'Shea : A methodology for detection and classi cation of some underwater acoustic signals using time-frequency analysis techniques. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 38(11):2872–2883, novembre 1990.

[25] A.O. Boudraa et J.C. Cexus : EMD-based signals filtering. *Digital Signal Processing*, 2005. (Révision n°2, aout 2005).

[26] A.O. Boudraa, J.C. Cexus et Z. Saidi : EMD-based signal noise reduction. *International Journal of Signal Processing*, 1:33–37, 2004.

[27] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, Z. Saidi et K. Abed-Meraim : Interaction measure of AM-FM by cross-ψ_b-energy operator. *In Proceedings of IEEE ISSPA 05*, pages 775–778, Sydney, Australia, septembre 2005.

[28] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, F. Salzenstein et L. Guillon : If estimation using empirical mode decomposition and nonlinear teager energy operator. *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, IEEE-ISCCSP '04*, pages 45–48, mars 2004. Hammamet, Tunisia.

[29] A.O. Boudraa, C. Pollet, J.C. Cexus et Z. Saidi : Caractérisation des fonds marins par décomposition modale empirique. *In Colloque GRETSI 05*, pages 559–562, Louvain-La-Neuve, Belgique, septembre 2005.

[30] A.O. Boudraa, F. Salzenstein et J.C. Cexus : Two-dimensional continuous higher-order energy operators. *Optical Engineering*, 44(11):7001–7006, 2005.

[31] D. Boulinguez : *Reconnaissance 2D et 3D d'objets sous-marins enfouis.* Thèse de doctorat, ENSIETA, Université de Bretagne Occidentale, juillet 2000.

[32] M. Bouvet : *Traitement Des Signaux Pour Les Systèmes Sonar.* CNET-ENST Collection technique et scientifique des télécommunications, Masson, 1991.

[33] A.C. Bovik, P. Maragos et T.F. Quatieri : AM-FM energy detection and separation in noise using multiband energy operators. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(12): 3245–3265, décembre 1993.

[34] D. Brill et G. Gaunaurd : Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(1):1–21, 1987.

[35] J. Carson et T. Fry. : Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation. *J. Bell System Tech.*, 16:513–540, 1937.

[36] J.C. Cexus et A.O. Boudraa : Classification des cibles sonar par approche non-linéaire. *In Colloque Sea Tech Week, 7 JASM*, page 5 pages, Brest, France, octobre 2004.

[37] J.C. Cexus et A.O. Boudraa : Link between cross-wigner distribution and cross-teager energy operator. *IEE Electronics Letters*, 40(12):778–780, 2004.

[38] J.C. Cexus et A.O. Boudraa : Teager-huang analysis applied to sonar target recognition. *International Journal of Signal Processing*, 1:23–27, mars 2004.

[39] S. Chandran et M.K. Ibrahim : DOA estimation of wide-band signals based on time-frequency analysis. *IEEE Oceanic Engineering*, 24(1):116–121, 1999.

[40] E. Chassande-Mottin : *Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non-stationnaires*. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 1998.

[41] V.C. Chen et Hao Ling : *Time-Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis*. Artech House, Boston, London, janvier 2002.

[42] P.C. Chesnut et R.W. Floyd : An aspect independent sonar target recognition method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 70:727–773, 1981.

[43] F. Le Chevalier : *Principe de Traitement Des Signaux Radar et Sonar*. Masson, Paris France, 1989.

[44] P. Chevret, N. Gache et V. Zimpfer : Time-frequency filters for target classification. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(4):1829–1837, octobre 1999.

[45] P. Chevret, F. Magand et L. Besacier : Time-frequency analysis of circumferential wave energy distribution for spherical shells application to sonar target recognition. *Applied Signal Processing*, 3:136–142, 1996.

[46] H. Chunming, G. Huadong, W. Changlin et F. Dian : A novel method to reduce speckle in SAR images. *International Journal of Remote Sensing*, 23(23):5095–5101, décembre 2002.

[47] L. Cohen : Time-frequency distributions. *Proceedings of the IEEE*, 77(7):941–981, 1989.

[48] L. Cohen : *Time-Frequency Analysis*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1995, 1995.

[49] R. Cole, J. Mariani, H. Uszkoreit, G. Varile, A. Zaenen et A. Zampolli : *Survey of the State of the Art in Human Language Technology*. Cambridge University Press, 1998.

[50] A Cornuéjols et L. Miclet : *Apprentisage Artificiel : Concepts et Algorithmes*. Eyrolles, Paris, France, 2002.

[51] H. Cottereau, M. Davy, C. Doncarli et N. Martin : Using ARCAP time-frequency representations for decision. *In Proceedings of EUSIPCO 00*, Tampere, Finlande, septembre 2000.

[52] K. Coughlin et K.K. Tung : *Empirical Mode Decomposition of Climate Variability in the Atmospheric*, chapitre 10. Hilbert-Huang Transform : Introduction and Applications, world scientific publishing ; edited by n. huang and s. shen édition, 2004.

[53] C. Damerval : Empirical mode decomposition. Rapport de dea, Laboratoire de Modelisation et de Calcul (LMC-IMAG), Grenoble, France, juin 2004. adresse internet : http ://www-lmc.imag.fr/lmc-cf/Christophe.Damerval/recherche.html (consulté le 29 septembre 2005).

[54] I. Daubechies : Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41(7):909–996, 1988.

[55] I. Daubechies : Ten lectures on wavelets. *SIAM*, 1992.

[56] M. Davy : *Noyaux optimisés pour la classification dans le plan temps-fréquence – Proposition d'un algorithme constructif et d'une référence bayésienne basés sur les méthodes MCMC – Application au diagnostic d'enceintes acoustiques.* Thèse de doctorat, Université de Nantes, septembre 2000.

[57] M. Davy et C. Doncarli : Optimal kernels of time-frequency representations for signal classication. *IEEE International Symposium on TFTS*, pages 581–584, 1998.

[58] M. Davy, B. Leprettre, C. Doncarli et N. Martin : Tracking of spectral lines in an ARCAP time-frequency representation. *In Proceedings of EUSIPCO 98*, Ile de Rhodes, Grèce, septembre 1998.

[59] C. Demars : *Représentations Bidimensionnelles du signal de parole ; éléments de monographie.* LIMSI, Orsay cedex, Paris, France, mai 2005. adresse internet : http ://www.limsi.fr/Individu/chrd/ftpindex2004.html.html (consulté le 22 septembre 2005).

[60] B. Van der Pol : The fundamental principles of frequency modulation. *Proc. IEE*, 93(3):153–158, 1946.

[61] A. DEREM : Relation entre ondes de surface et l'apparition des résonances. *Revue du CETHEDEC*, 58:43–79, 1979.

[62] A. Derem : Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique. *In La diffusion acoustique*, chapitre 9, pages 189–277. CEDOCAR, 1987.

[63] D. Dimitriadis et P. Maragos : An improved energy demodulation algorithm using splines. *In Proceedings of IEEE ICASSP 01*, pages 3481–3484, Salt Lake, Utah, mai 2001.

[64] D. Dimitriadis et P. Maragos : Robust energy demodulation based on continuous models with application to speech recognition. *In Eurospeech 03*, Geneva, Switzerland, septembre 2003.

[65] D.L. Donoho : De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on Information Theory*, 41(3):613–627, 1995.

[66] D.L. Donoho et I.M. Johnstone : Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455, 1994.

[67] G. Dreyfus, J.M. Martinez, M. Samuelides, M.B. Gordon, F. Badran, S. Thiria et L. Hérault : *Réseaux de Neurones, Méthodologies et Applications.* Eyrolles, Paris, France, 2002.

[68] R. Duda et P. Hart : *Pattern Recognition and Scene Analysis.* John Wiley, New York, 1973.

[69] B. Escofier et J. Pagès : *Analyses Factorielles Simples et Multiples Objectifs, Méthodes et Interprétation*, volume 3e édition. Collection Sciences Sup, Dunod, Paris, France, 1998.

[70] J. J. Faran : Sound scattering by solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 23(4):405–418, 1951.

[71] G. Farin : *Courbes et Surfaces Pour la CGAO.* Masson, Edition Française, 1992.

[72] M. Feldman : Nonlinear system vibration analysis using hilbert transform. forced vibration analysis method 'forcevib'. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(3): 309–318, mai 1994.

[73] M. Feldman et S. Seibold : Damage diagnosis of rotors : Application of hilbert transform and multi-hypothesis testing. *Journal of Vibration and Control*, 1998. accepted for publication.

[74] B.G. Ferguson : Improved time-delay estimates of underwater acoustic signals using beamforming and prefiltering techniques. *IEEE Oceanic Engineering*, 14(3):238–244, 1989.

[75] P. Flandrin : *Représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires*. Thèse de doctorat d'état, INPG, Grenoble, France, mai 1987.

[76] P. Flandrin : *Temps-Fréquence*. Editions Hermès, Paris, 1993.

[77] P. Flandrin : Some aspects of Huang's empirical mode decomposition, from interpretation to applications. *In Int. Conf. On Computational Harmonic Analysis CHA '04*, Nashville, TN, mai 2004.

[78] P. Flandrin et P. Gonçalvès : Sur la décomposition modale empirique. *In Colloque GRETSI 03*, Paris, France, 2003.

[79] P. Flandrin et P. Gonçalvès : Empirical mode decompositions as data-driven wavelet like expansions. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, 2(4):477–496, avril 2004.

[80] P. Flandrin, P. Gonçalvès et G. Rilling : Décomposition modale empirique et filtres equivalents, de l'interprétation à quelques applications. *In Réunion "Décompositions Adaptatives" du GdR ISIS*, Université de Paris XII à Créteil, avril 2004. *http : //perso.ens − lyon.fr/patrick.flandrin/ISIS*$_0$10404.*html* (consulté le 28 septembre 2005).

[81] P. Flandrin, P. Goncalves et G. Rilling : Detrending and denoising with empirical mode decompositions. *In Proceedings of EUSIPCO 04*, Vienna, Austria, septembre 2004.

[82] P. Flandrin, G. Rilling et P. Gonçalvès : Empirical mode decomposition as a filter bank. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(2):112–114, 2004.

[83] P. Flandrin, J. Sageloli, J.-P. Sessarego et M.E. Zakharia : Application of time-frequency analysis to the characterization of surface waves on elastic targets. *Acoust. Lett.*, 10(2):13–28, 1986.

[84] P. Flandrin, J. Sageloli, J.-P. Sessarego et M.E. Zakharia : Application de l'analyse temps-fréquence à la caractérisation de cibles. *In Colloque GRETSI 87*, pages 329–332, Nice, France, juin 1987.

[85] R. Fournier, E. Deléchelle et J. Lemoine : Analyse stochastique non-linéaire du stabilogramme. *In 35ème Congrès International d'Oto-Neurologie*, Créteil, France, mai 2001. Collection Posture et Équilibre. Édition Solal. Marseille. 2003.

[86] R. Fournier, E. Deléchelle et J. Lemoine : Analyse du stabilogramme par décomposition modale empirique. *In GdR ISIS Thème à Journée : Décompositions Adaptatives*, Université de Paris XII, Créteil, (France), avril 2004.

[87] A. Freedman : A mechanism of acoustic echo formation. *Acustica*, 12:11–21, 1962.

[88] N. Gespa : *La Diffusion Acoustique Par Des Cibles Elastiques de Forme Géometrique Simple, Théories et Expérience*. Imprimerie du CEDOCAR, Paris, 1986.

[89] I. Gladkova et L. Roytman Ans J. Weber : Compression of AIRS data using empirical mode decomposition. *In International Symposium on Optical Science and Technology, SPIE's 49th Annual Meeting*, Denver, CO, août 2004.

[90] P. Gonçalvès : *Représentations temps-fréquence et temps-échelle bilinéaires : synthèse et contributions,*. Thèse de doctorat, INP Grenoble, novembre 1993.

[91] R.R. Goodman et R. Stern : Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(3):338–344, mars 1962.

[92] M.M. Goodwin et M. Vetterli : Matching pursuit and atomic signal models based on recursive filter banks. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(7):1890–1901, 1999.

[93] E. Grall-Maës : *Méthodes pour l'analyse et la classification de signaux à l'aide de représentations temps-fréquence. Application à l'électroencéphalogramme du sommeil.* Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1999.

[94] E. Grall-Maes et P. Beauseroy : Mutual information-based feature extraction on the time-frequency plane. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 50(4):779–790, 2002.

[95] A. Grossmann et J. Morlet : Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4):723–736, 1984.

[96] Eric Guilbert : *Détection et correction des intersections entre courbes B-splines. Application à la généralisation cartographique.* Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, novembre 2004.

[97] J.K. Gupta, S.C. Sekhar et T.V. Sreenivas : Performance analysis of AM-FM estimators. *In Proceedings Conference on Convergent Technologies for the Asia-Pacific Region : IEEE TENCON*, volume 3, pages 954–958, Bangalore, India, 2003.

[98] R.H. Hackman et G. S. Sammelmann : Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(5):1813–1825, 1988.

[99] R. Hamila, J. Astola, F.A. Cheikh, M. Gabbouj et M. Renfors : Teager energy and the ambiguity function. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(1):260–262, janvier 1999.

[100] R. Hamila, F.A. Cheikh, J. Vesma, J. Astola et M. Gabbouj : Relationship between the wigner-distribution and the teager energy. *In Proceedings of EUSIPCO 98*, volume 3, pages 1857–1860, Island of Rhodes, Greece, septembre 1998.

[101] R. Hamila, M. Renfors, M. Gabbouj et J. Astola : Time-frequency signal analysis using teager energy. *In Fourth International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, pages 911–914, décembre 1997.

[102] J.P. Havlicek et A.C. Bovik : Multi-component AM-FM image models and wavelet-based demodulation with component tracking. *In ICIP (1)*, pages 41–45, 1994.

[103] J.P. Havlicek, D.S. Harding et A.C. Bovik : Multidimensional quasi-eigenfunction approximations and multicomponent am fm models. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(2):227–242, février 2000.

[104] S. Haykin : *Adaptive Filter Theory.* Prentice Hall, 4 edition (September 2001), 1996.

[105] S. Haykin : *Neural Networks : A Comprehensive Foundation.* 2 Edition. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1999.

[106] C. Heitz : Optimum time-frequency representations for the classi cation and detection of signals. *Applied Signal Processing*, 3:124–143, 1995.

[107] I. L. Herlin, D. Bereziat, G. Giraudon, C. Nguyen et C. Graffigne : Segmentation of echocardiographic images with markov random fields. Rapport technique RR-2424, Rocquencourt , Equipe : MASDA, décembre 1994.

[108] E. Hermanowicz et M. Rojewski : Design of FIR first order digital differentiators of variable fractional sample delay using maximally flat error criterion. *IEE Electronics Letters*, 30(1):17–18, janvier 1994.

[109] R.H. Hickling : Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34:1582–1592, 1962.

[110] F. Hlawatsch et F. Auger : *Temps-Fréquence : Concepts et Outils*. Traité IC2, série Traitement du signal et de l'image, Hermes, Lavoisier, Paris, France, 2005.

[111] L. Hongsheng, C. Wenwu, L. Chao, Z. Zhao et C. Jing : A new approach of signal extension and its application in internet-based remote diagnosis systems. *In The 8th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, Orlando, Florida, USA, juillet 2004.

[112] J.F. Hoofman : Classification of spherical targets using likelihood and quadrature components. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49:23–30, 1971.

[113] N.E. Huang : HHT : A review of the methods and many applications for nonsteady and nonlinear data analysis. *In The 6th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, juillet 2001.

[114] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung et H.H. Liu : The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London*, 454:903–995, 1998.

[115] N.E. Huang, M.L.C. Wu, S.R. Long, S.S.P. Shen, W. Qu, P. Gloersen et K.L. Fan : A confidence limit for the empirical mode decomposition and hilbert spectral analysis. *the Royal Society of London, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2037):2317–2345, 2003.

[116] W. Huang, Z. Shen, N.E. Huang et Y.C. Fung : Engineering analysis of biological variables : An example of blood pressure over 1 day. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 95:4816–4821, avril 1998.

[117] Y. Huanyin, G. Huadong, H. Chunming, L. Xinwu et W. Changlin : A sar interferogram filter based on the empirical mode decomposition method. *In IGARSS '01*, Sydney, Australia, juillet 2001.

[118] C. IOANA : *Contribution à la caractérisation optimale des structures temps-fréquence non-linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, septembre 2003.

[119] F. Jabloun : *Large vocabulary speech recognition in noisy environments*. Thèse de doctorat, The instute of ingineering and sciences of bilkent university, juillet 1998.

[120] F. Jabloun, A.E. Cetin et E. Erzin : Teager energy based feature parameters for speech recognition in car noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 6(10):259–261, octobre 1999.

[121] A. Jain, R. Duin et J. Mao : Statistical pattern recognition : A review. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(1):4–38, 2000.

[122] J.F. Kaiser : On simple algorithm to calculate the 'energy' of signal. *In Proceedings of IEEE ICASSP 90*, pages 381–384, Albuquerque, New Mexico, avril 1990.

[123] J.F. Kaiser : On teager's energy algorithm and its generalization to continuous signals. *In Proc. 4th IEEE Digital signal Processing Worshop*, septembre 1990.

[124] J.F. Kaiser : Some useful properties of teager's energy operators. *In Proceedings of IEEE ICASSP 93*, volume 3, pages 149–152, Minneapolis, NN, avril 1993.

[125] D.H. Kil et F.B. Frances : *Pattern Recognition and Prediction With Applications to Signal Characterization*. AIP Press in Modern Acoustics and signal Processing, Woodbury, New York, 1996.

[126] P. Kuchi : *Gait Recognition Using Empirical Mode Decomposition Based Feature Extraction*. Master, Arizona State University, décembre 2003.

[127] E. Kvedalen : Signal processing using the teager energy operator and other nonlinear operator. Master, University of Oslo Department of Informatics, mai 2003.

[128] P. Lancaster et K. Salkauskas : *Curve and Surface Fitting*. Academic Press, New York, 1986.

[129] O. Lemoine : *Détection de signaux non stationnaires par représentation temps-fréquence*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia antipolis, septembre 1995.

[130] B. Leprettre : *Reconnaissance de signaux sismiques d'avalanches par fusion de données éstimées dans le plan temps-fréquence et polarisation*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble 1, 1996.

[131] Wei Lin et P. Chitrapu : Time-Frequency Distributions Based On Teager-Kaiser Energy Function. *In Proceedings of IEEE ICASSP 96*, volume 3, pages 1818–1821, Atlanta, USA, mai 1996.

[132] Wei Lin, C. Hamilton et P. Chitrapu : A generalization to the teager-kaiser energy function and application to resolving two closely-spaced tones. *In Proceedings of IEEE ICASSP 95*, volume 3, pages 1637–1640, Detroit, Mchigan, mai 1995.

[133] A. Linderhed : 2D empirical mode decompositions in the spirit of image compression. *In Wavelet and Independent Component Analysis Applications IX, SPIE Proceedings*, volume 4738, pages 1–8, avril 2002.

[134] A. Linderhed : *Adaptive Image Compression with Wavelet Packets and Empirical Mode Decomposition*. Thèse de doctorat, Linköping University, Image Coding Group, 2004.

[135] A. Linderhed : Image compression based on empirical mode decomposition. *In Proc. of SSAB 04 Symp. On Image Analysis*, pages 110–113, mars 2004.

[136] A. Linderhed : Variable sampling of the empirical mode decomposition of two-dimensional signals. *Int. J. Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Special Issue on Frame Theory and Sampling Problems in Time-Frequency Analysis and Wavelet Theory (Part II)*, 3(3), septembre 2005.

[137] Z. Liu et S. Peng : Boundary processing of bidimensional EMD using texture synthesis. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(1):33–36, 2005.

[138] Z. Liu, H. Wang et S. Peng : Texture segmentation using directional empirical mode decomposition. *In International Conference on Image Processing, ICIP '04*, pages 279–282, octobre 2004.

[139] S.R. Long : Use of the empirical mode decomposition and hilbert-huang transform in image analysis. *In the 6th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, juillet 2001.

[140] P. Loughlin et B. Tacer : On the amplitude- and frequency-modulation decomposition of signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(3):1594–1601, mars 1996.

[141] C. De Luigi et E. Moreau : An iterative algorithm for estimation of linear frequency modulated signal parameters. *IEEE Signal Processing Letters*, 9(4):127–129, 2002.

[142] F. Magand : *Reconnaissance de cible par sonar actif large bande. Application a des coques de forme simple et à la classification des especes de poissons en mer.* Thèse de doctorat, ICPI Lyon, France, 1996.

[143] F. Magand et P. Chevret : Time frequency analysis of energy distribution for circumferential waves on cylindrical and elastic shells. *Acta Acustica*, 82:707–716, 1996.

[144] S. Mallat : A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet transform. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, 11:674–693, 1989.

[145] S. Mallat : *Une Exploration Des Signaux En Ondelettes.* Ellipses, Paris, France, 2000.

[146] S. Mallat et Z. Zhang : Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41:3397–3415, 1993.

[147] L. Mandel : Interpretation of instantaneous frequency. *J. of Physics Am.*, 42:840–846, 1974.

[148] P. Maragos et A.C. Bovik : Image demodulation using multidimensional energy separation. *J. Opt. Soc. Am.*, 12(9):1867–1876, septembre 1995.

[149] P. Maragos, J.F. Kaiser et T.F. Quatieri : On separating amplitude from frequency modulations using energy operators. *In Proceedings of IEEE ICASSP 90*, volume 2, pages 1–4, 1992.

[150] P. Maragos, J.F. Kaiser et T.F. Quatieri : Energy separation in signal modulations with application to speech analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(10):3024–3051, octobre 1993.

[151] P. Maragos, J.F. Kaiser et T.F. Quatieri : On amplitude and frequency demodulation using energy operators. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(4):1532–1550, avril 1993.

[152] P. Maragos, T. Loupas et V. Pitsikalis : On improving doppler ultrasound spectroscopy with multiband instantaneous energy separation. *In IEEE Proc. DSP*, Greece, 2002.

[153] P. Maragos et A. Potamianos : Higher order differential energy operators. *IEEE Signal Processing Letters*, 2(8):152–154, août 1995.

[154] P. Maragos, A. Potamianos et B. Santhanam : Instantaneous energy operators : Applications to speech processing and communications. *In Proc. IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 955–958, juin 1995.

[155] P. Maragos, T. F. Quatieri et J. F. Kaiser : Speech nonlinearities, modulations, and energy operators. *In Proceedings of IEEE ICASSP 91*, pages 421–424, Toronto, Canada, mai 1991.

[156] N. Martin et C. Doncarli : *Décision Dans Le Plan Temps-Fréquence.* Hermes, Lavoisier, Paris, France, mars 2004.

[157] G. Maze et J. Ripoche : Méthode d'isolement et d'identification des résonances (MIIR) de cylindres et de tubes soumis à une onde acoustique plane dans l'eau. *Rev. Phys. Appl.*, 18:pp. 319, 1983.

[158] Y. Meyer : Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, 662, 1986.

[159] Y. Meyer : *Les Ondelettes, Algorithmes et Applications.* Armand Colin, Paris, France, 1992.

[160] O. Michel, R.G. Baraniuk et P. Flandrin : Time-frequency based distance and divergence measure. *IEEE International Symposium on TFTS*, pages 64–67, 1994.

[161] J. Michelet : *Introduction À L'Histoire Universelle*. Flammarion (1897), Paris, France, 1831.

[162] M. Mignotte : *Segmentation d'images sonar par approche markovienne hierarchique non supervisée et classification d'ombres portées par modèles statistiques*. Thèse de doctorat, Ecole Navale, Brest, France, juillet 1998.

[163] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim et J.M. Poggi : *Les Ondelettes et Leurs Applications*. Lavoisier, Hermes, Paris, France, traité ic2, série traitement du signal et de l'image édition, 2003.

[164] S.K. Mitra, H. Li, I.S. Lin et T.H. Yu : A new class of nonlinear filters for image enhancement. *In Proceedings of IEEE ICASSP 91*, volume 4, pages 2525–2528, 1991.

[165] C.S. Moller-Levet, F. Klawonn, K.H. Cho, H. Yin et O. Wolkenhauer : Fuzzy clustering of short time-series and unevenly distributed sampling points. *In Proc. 5th Int. Symp. on Intell. Data Analysis, LNCS 2810*, pages 330–340, 2003.

[166] T. Newman et A. Jain : A survey of automated visual inspection. *Computer Vision and Image Understanding*, 61:231–262, 1995.

[167] J.P. Nougier : *Méthodes de Calcul Numérique Volume 2 : Fonctions Équations Aux Dérivées*. éditions Hermes, Paris, France, 2001.

[168] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, S. Guyot et Ph. Bunel : Texture analysis based on local analysis of the bidimensional empirical mode decomposition. *Machine Vision and Applications (MVA)*, 16(3):177–188, mai 2005.

[169] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang et P. Bunel : Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition. *Image and Vision Computing Journal (IVC)*, 21(12):1019–1026, novembre 2003.

[170] L. R. Padovese, N. Martin, et J.-M. Terriez : Temps-fréquence pour l'identication des caractéristiques dynamiques d'un pylône de téléphérique. *Traitement du Signal*, 13(3), 1996.

[171] A. Papandreou-Suppappola : *Applications in Time-Frequency Signal Processing*. CRC Press, 2002.

[172] V. Pierson : *Extraction de sous-ensembles temps-fréquence en vue d'une prise de décision en non-stationnaire-Application en accoustique sous-marine*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[173] A. Potamianos et P. Maragos : A comparison of the energy operator and the hilbert transform approach to signal and speech demodulation. *IEEE Signal Processing*, 37:95–120, mai 1994.

[174] A. Potamianos et P. Maragos : Speech formant frequency and bandwidth tracking using multiband energy demodulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(6):3795–3806, juin 1996.

[175] A. Potamianos et P. Maragos : Time-frequency distributions for automatic speech recognition. *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, 9(3):196–200, mars 2001.

[176] J.G. Proakis et D.G. Manolakis : *Digital Signal Processing : Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall ; 3 édition (1996), 1992.

[177] P. Rao et F.J. Taylor : Estimation of if using discrete wigner-ville distribution. *Electronics Letters*, 26:246–248, 1990.

[178] S.O. Rice : Mathematical analysis of random noise. *JL 23*, pages 282–310, 1944.

[179] C. Richard : *Une méthodologie pour la détection à structure imposée. Applications au plan temps-fréquence*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes, décembre 1998.

[180] G. Rilling et P. Flandrin : Décomposition modale empirique : échantillonnage et résolution. *In GdR ISIS, Thème*, Marseille, France, décembre 2004. Journée : Décompositions adaptatives II.

[181] G. Rilling, P. Flandrin et P. Goncalvès : On empirical mode decomposition and its algorithms. *In IEEE-EURASIP, Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP '03*, Grado (I), juin 2003.

[182] G. Rilling, P. Flandrin et P. Goncalvès : Empirical mode decomposition, fractional gaussian noise and hurst exponent estimation. *In Proceedings of IEEE ICASSP 05*, Philadelphia, PA, USA, mars 2005.

[183] S. Rossignol, P. Desain et H. Honing : State-of-the-art in fundamental frequency tracking. *In Proceedings of Workshop on Current Research Directions in Computer Music*, 2001.

[184] J. Rouat : Opérateurs teager et dyn, 1991. dans : Représentations bidimensionnelles d'un signal de parole, éléments de monographie (C. Demars [59]).

[185] Z. Saidi, A.O. Boudraa, J.C. Cexus et S. Bourennane : Time-delay estimation using cross- ψ_b-energy operator. *International Journal of Signal Processing*, 1:28–32, 2004.

[186] N. Saito : *Local feature extraction and its application using a library of bases.* Phd thesis, Yale University, 1994.

[187] F. Salzenstein, A.O. Boudraa et J.C. Cexus : Generalized higher order nonlinear energy operator. *IEICE Transaction Fundamentals, Special Section On Nonlineary Theory and its Applications*, février 2005. (Révision n°1, février 2005).

[188] F. Salzenstein, P. Montgomery, A. Benatmane et A.O. Boudraa : 2D discrete high order energy operators for surface profiling using white light interferometry. *In Proceedings of IEEE ISSPA 03*, volume 1, pages 601–604, Paris, France, 2003.

[189] J.W. Sammon : A non-linear mapping for data structure analysis. *IEEE Transactions on Computers*, C18(5):401–409, mai 1969.

[190] B. Santhanam : *Multicomponent AM-FM Energy Demodulation with Applications to Signal Processing and Communications.* Thèse de doctorat, Georgia, Institute of Technology, novembre 1997.

[191] A. Savitzky et M.J.E. Golay : Smoothing and differentiation, of data by simplified least squares procedures. *Analytical chemistry*, 36:1627–1639, 1964.

[192] A. M. Sayeed et D. L. Jones : Optimal detection using bilinear time- frequency and time-scale representations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(12):2872–2883, décembre 1995.

[193] J. Shekel : Instantaneous frequency. *In Proc. IRE*, volume 41, page 548, 1953.

[194] C. Shu et P. Boulanger : Triangulating trimmed NURBS surfaces. *In International Conference on Curves and Surfaces*, pages 381–388, Saint-Malo, France, mai 2000.

[195] S. Sinclair et G. G. S. Pegram : Empirical mode decomposition in 2-d space and time : A tool for space-time rainfall analysis and nowcasting. *Hydrology and Earth System Sciences*, 9(3):127–137, 2005.

[196] T. Steinherz, E. Rivlin et N. Intrator : Off-line cursive script word recognition : A survey. *International Journal of Document Analysis and Recognition*, 2(2):90–110, 1999.

[197] N. Stevenson, M. Mesbah et B. Boashash : A sampling limit for the empirical mode decomposition. *In Proceedings of IEEE ISSPA 05*, Sydney, australia, août 2005.

[198] B. Tacer et P. Loughlin : Nonstationary signal classification using the joint moments of time-frequency distributions. *Pattern Recognition*, 31(11):1635–1641, 1998.

[199] H. M. Teager et S. M. Teager : A phenomenological model for vowel production in the vocal tract. *In CA : College-Hill*, pages 73–109, San Diego, 1983.

[200] H.M. Teager et S.M. Teager : Evidence for nonlinear speech production mechanisms in the vocal tract. *In Proc. NATO Advanced Study Institute on Speech Production and Speech Modeling*, pages 214–261, juillet 1989.

[201] H.M. Teager et S.M. Teager : Evidence for nonlinear sound production mechanisms in the vocal tract. *In NATO ASI on Speech Production and Speech Modelling*, volume 55(D), pages 241–261, 1990.

[202] B. Torrésani : *Analyse Continue Par Ondelettes.* Physique théorique / Savoirs Actuels, EDP Sciences, Paris, France, 1995.

[203] H. L. Van Trees : *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part I.* John Wiley and Sons, 1968.

[204] A. Trucco : Detection of objects buried in the seafloor by a pattern recognition approach. *IEEE Oceanic Engineering*, 26(4):769–782, octobre 2001.

[205] H. Überall, L. R. Dragonette et L. Flax : Relation between creeping waves and normal modes of a curved body. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61:711–715, 1977.

[206] R.J. Ulman et E. Geraniotis : Wideband TDOA/FDOA processing using summation of short-time CAF's. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(12):3193–3200, 1999.

[207] M. Unser : Splines : A perfect fit for signal and image processing. *In IEEE Signal Processing Magazine*, pages 22–38, novembre 1999.

[208] D. Vakman : On the analytic signal, the teager-kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(4):791–797, avril 1996.

[209] I. Vincent : *Classication de Signaux Non-Stationnaires.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, 1995.

[210] I. Vincent, C. Doncarli et E. Le Carpentier : Non-stationary signals classification using time-frequency distributions. *IEEE International Symposium on TFTS*, pages 233–236, 1994.

[211] P.C. Waterman : New formulation of acoustic scattering. *J. Acoust. Soc. Am.*, 45(6): 1417–1429, 1968.

[212] Z. Wu et N.E. Huang : A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society*, 460(2046):1597 – 1611, juin 2004.

[213] N. Yen, L. R. Dragonette et S.K. Numrich : Time-frequency analysis of acoustic scattering from elastic objects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(6):2359–2370, 1990.

[214] D. Yongjun, W. Wei, Q. Chengchun, W. Zhong et D. Dejun : Boundary-processing-technique in emd method and hilbert transform. *Chinese Science Bulletin*, 46(11):954–961, juin 2001.

[215] M.E. Zakharia et P. Chevret : Neural network approach for inverting velocity dispersion ; application to sediment and to sonar target characterization. *Inverse Problems*, 16(6):1693–1708, 2000.

[216] M.E. Zakharia, P. Chevret et F. Magand : Estimation of shell characteristics using time-frequency patterns and neural network. *In IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings*, page 4 pages, 1996.

[217] M.E. Zakharia, J.-P. Sessarego, J. Sageloli et P. Flandrin : Analyse temps-fréquence appliquée à la caractérisation acoustique de cibles. *J. Acoust.*, 1(1-2):185–188, 1988.

Listes des publications

Les travaux de thèse ont permis la réalisation des publications suivantes :

Type	Nombre
Publications dans des revues internationales	5
Publications en révision dans des revues internationales	3
Publications soumises à des revues internationales	1
Conférences internationales avec comité de lecture et publications des actes	3 (+ 3 acceptées)
Conférences nationales	3
Autres communications	4

Publications dans des revues internationales

[**RI-1**] **J.C. Cexus**, et A.O. Boudraa
Link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator.
IEE Electronics Letters, vol. 40, no. 12, pp. 778-780, 2004.

[**RI-2**] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, et Z. Saidi
EMD-Based Signal Noise Reduction.
International Journal of Signal Processing, vol.1, n°1, pp.33-37, 2004.

[**RI-3**] **J.C. Cexus**, et A.O. Boudraa
Teager-Huang Analysis applied to Sonar Target Recognition.
International Journal of Signal Processing, vol.1, n°1, pp.23-27, 2004.

[**RI-4**] Z. Saidi, A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, et S. Bourennane
Time-Delay Estimation Using Cross-$\Psi_{\mathbb{B}}$-Energy Operator.
International Journal of Signal Processing, vol.1, n°1, pp.28-32, 2004.

[**RI-5**] A.O. Boudraa, F. Salzenstein, et **J.C. Cexus**
2-D Continuous Higher Order Energy Operators.
Optical Engineering, vol. 44, no. 11, pp. 7001-7006, 2005.

Publications en révision dans des revues internationales

[**RI-6**] A.O. Boudraa, et **J.C. Cexus**
EMD-Based Signals Filtering.
Digital Signal Processing, (deuxième révision, Août 2005).

[**RI-7**] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, et L. Marié
Cohen's Class of Time Frequency Distributions and Teager-Kaiser Energy Operator.
IEEE Transaction On Signal Processing, (révision n°1, 2004).

[**RI-8**] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, M. Groussat et P.Brunagel
An Energy-Based Similarity Measure For Time Series.
Digital Signal Processing (première revision, Juin 2005).

Publications soumises à des revues internationales

[**RI-9**] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, et F. Salzenstein
On some properties of the Cross-$\Psi_{\mathbb{B}}$-Energy Operator.
Applied Signal Processing, (soumis janvier 2005).

Publications dans des conférences internationales avec comité de lecture et actes

[CI-1] J.C. Cexus, et A.O. Boudraa
Multi-channel Model for sonar image Segmentation.
IEEE Seventh International Symposium on Signal Processing and its applications, (IEEE-ISSPA 2003), vol. 1, pp. 631-632, Paris, France, 2003.

[CI-2] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, F. Salzenstein, et L. Guillon
IF estimation using empirical mode decomposition and nonlinear Teager energy operator.
IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, (IEEE-ISCCSP 2004), pp. 45-48, Hammamet, Tunisia, 2004.

[CI-3] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, Z. Saidi, et K. Abed-Meraim
Interaction Measure of AM-FM by Cross-$\Psi_{\mathbb{B}}$-Energy Operator.
IEEE Eighth International Symposium on Signal Processing and its applications, (IEEE-ISSPA 2005), vol. 1, pp. 775-778, Sydney, Australia 2005.

[CI-4] A.O. Boudraa et **J.C. Cexus**
Denoising via Empirical Mode Decomposition.
IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, (IEEE-ISCCSP 2006), Marrakech, Maroc, 2006. (acceptée)

[CI-5] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, F. Salzenstein, et A. Beghdadi
EMD-Based Multibeam Echosounder Images Segmentation.
IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, (IEEE-ISCCSP 2006), Marrakech, Maroc, 2006. (acceptée)

[CI-6] A.O. Boudraa, **J.C. Cexus**, F. Salzenstein, et A. Beghdadi
Analysis of nuclear Time Activity Curves by Cross-$\Psi_{\mathbb{B}}$-Energy Operator
IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, (IEEE-ISCCSP 2006), Marrakech, Maroc, 2006. (acceptée)

Conférences nationales

[CN-1] J.C. Cexus, et A.O. Boudraa
Classification des Cibles Sonar par Approche Non-linéaire.
Colloque Sea Tech Week, 7 JASM, 5 pages, Octobre 2004, Brest, France.

[CN-2] A.O. Boudraa, et **J.C. Cexus**
EMD-Based Seafloor Bedforms Characterization.
Colloque Sea Tech Week, Caractérisation in-situ des fonds marins, 2 pages, Octobre 2004, Brest, France.

[CN-3] A.O. Boudraa, C. Pollet, **J.C. Cexus**, et Z. Saidi
Caractérisation des Fonds Marins par Décomposition Modale Empirique.
20e colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, (GRETSI 2005), pp. 559-562, Septembre 2005, Louvain Le Neuve, Belgique.

Autres communications

[A-1] J.C. Cexus
Segmentation par filtrage de Gabor.
Séminaire « groupe de caractérisation des fonds », ENSIETA, février 2003.

[A-2] J.C. Cexus
Classification de cibles en environnement petit fond par approches temps fréquence.
Poster Doctoriales Bretagne 2003, Mur de Bretagne, novembre 2003.

[A-3] J.C. Cexus
Classification de Cibles en environnement petit fond par approches temps fréquence.
Séminaire ERASM, ENSIETA, décembre 2004.

[A-4] J. Poupin, P.J.F. Davie, et **J.C. Cexus**
A revision of the genus Pachygrapsus Randall, 1840 (Crustacea : Decapoda : Brachyura, Grapsidae), with special reference to the Southwest Pacific species.
Zootaxa 1015 : 1-66, juillet 2005)

Annexes

ANNEXE

A Chapitre II

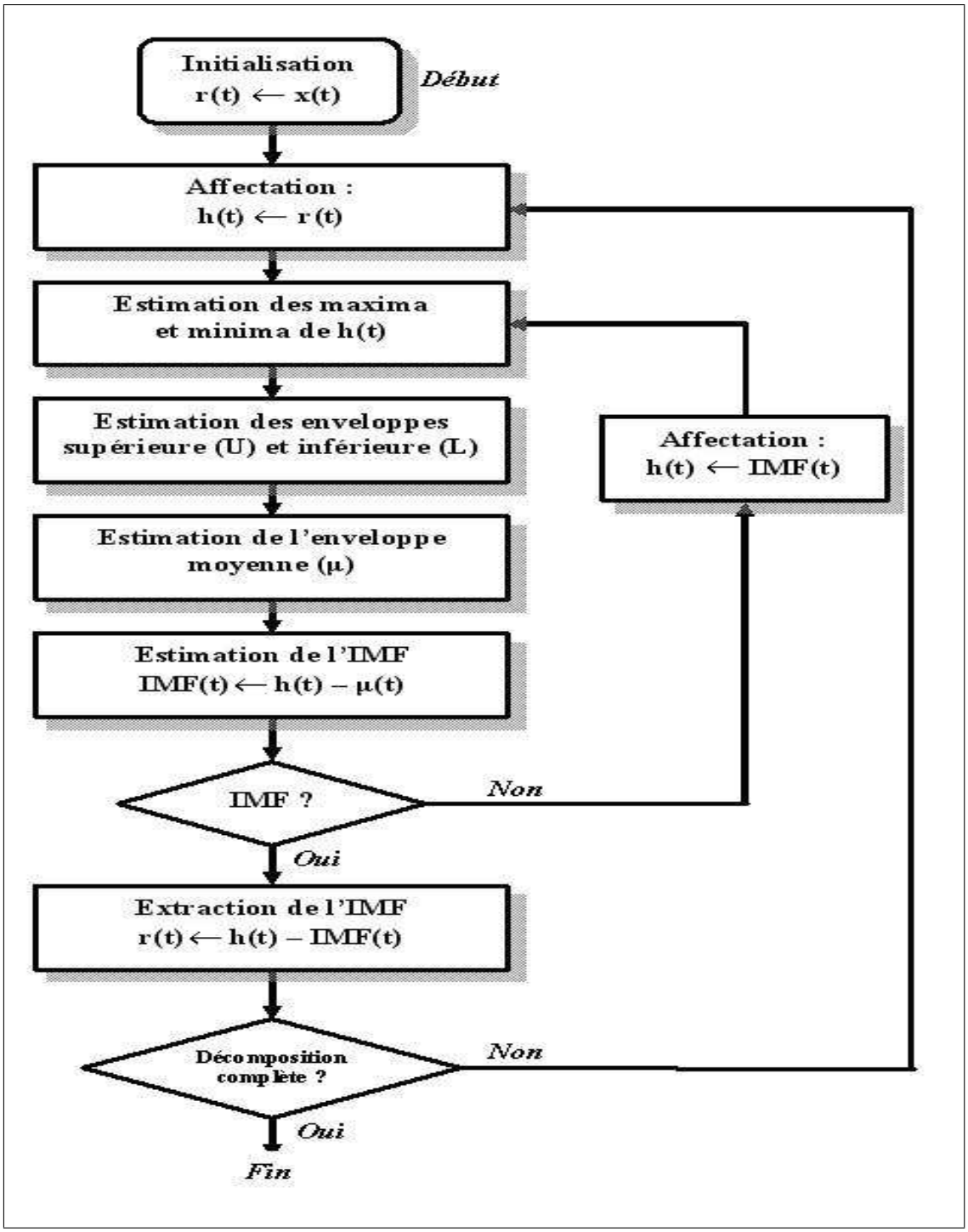


Figure A.1 — Organigramme du Pseudo-code de l'EMD.

ANNEXE B

Chapitre IV

Annexe. B(1) : (démonstration paragraphe IV.3.3.1)

Considérons deux signaux AM-FM : $x(t) = a(t)e^{j\phi_1(t)}$ et $y(t) = b(t)e^{j\phi_2(t)}$. L'énergie d'interaction peut être estimée grâce à l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= \left[\frac{ab}{2}\dot{\phi}^2 + (\dot{a}\dot{b} - \frac{\ddot{a}b + a\ddot{b}}{2})\right]\cos(\phi_{21}) + \\ &\quad \left[\frac{ab}{2}(\ddot{\phi}_{21}) + (a\dot{b} - \dot{a}b)\dot{\phi}^2\right]\sin(\phi_{21}),\end{aligned} \tag{B.1}$$

où $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2$, $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$ et $\ddot{\phi}_{21} = \ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1$.

Démonstration : Si nous calculons les quantités $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}^*(t)\dot{y}(t)$, $x(t)\ddot{y}^*(t)$ et $\ddot{x}^*(t)y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = e^{j\phi_1}[\dot{a} + ja\dot{\phi}_1], \tag{B.2}$$

$$\ddot{x}(t) = e^{j\phi_1}[2j\dot{\phi}_1\dot{a} - a\dot{\phi}_1^2 + \ddot{a} + ja\ddot{\phi}_1], \tag{B.3}$$

$$\dot{x}^*(t)\dot{y}(t) = e^{j\phi_{21}}[\dot{a}\dot{b} + j\dot{a}b\dot{\phi}_2 - ja\dot{b}\dot{\phi}_1 + ab\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2], \tag{B.4}$$

$$x(t)\ddot{y}^*(t) = e^{-j\phi_{21}}[-2j\dot{b}\dot{\phi}_2 - b\dot{\phi}_2^2 + \ddot{b} - jb\ddot{\phi}_2] \times a, \tag{B.5}$$

$$\ddot{x}^*(t)y(t) = e^{j\phi_{21}}[-2j\dot{a}\dot{\phi}_1 - a\dot{\phi}_1^2 + \ddot{a} - ja\ddot{\phi}_1] \times b. \tag{B.6}$$

De façon similaire en calculant les expressions $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ et $\dot{x}(t)\dot{y}^*(t)$ et en substituant les équations (B.2)-(B.6) dans l'expression (IV.31), nous avons :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) = &\frac{1}{2}[(\dot{a}\dot{b} + ab\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2)(e^{j\phi_{21}} + e^{-j\phi_{21}})] \\ &+\frac{1}{2}[j(\dot{a}b\dot{\phi}_2 - a\dot{b}\dot{\phi}_1)(e^{j\phi_{21}} - e^{-j\phi_{21}})] \\ &-\frac{1}{4}[a(-b\dot{\phi}_2^2 + \ddot{b})(e^{j\phi_{21}} + e^{-j\phi_{21}})] \\ &-\frac{1}{4}[a(2\dot{\phi}_2\dot{b} + b\ddot{\phi}_2)(e^{j\phi_{21}} - e^{-j\phi_{21}})] \\ &-\frac{1}{4}[b(-a\dot{\phi}_1^2 + \ddot{a})(e^{j\phi_{21}} + e^{-j\phi_{21}})] \\ &-\frac{1}{4}[b(-2\dot{\phi}_1\dot{a} - a\ddot{\phi}_1)(e^{j\phi_{21}} - e^{-j\phi_{21}})].\end{aligned} \tag{B.7}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= (\dot{a}\dot{b} + ab\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2)\cos(\phi_{21}) \\ &- (\dot{a}b\dot{\phi}_2 - a\dot{b}\dot{\phi}_1)\sin(\phi_{21}) - \frac{1}{2}a(-b\dot{\phi}_2^2 + \ddot{b})\cos(\phi_{21}) \\ &+ \frac{1}{2}a(2\dot{\phi}_2\dot{b} + b\ddot{\phi}_2)\sin(\phi_{21}) - \frac{1}{2}b(-a\dot{\phi}_1^2 + \ddot{a})\cos(\phi_{21}) \\ &- \frac{1}{2}b(-2\dot{\phi}_1\dot{a} + a\ddot{\phi}_1)\sin(\phi_{21}) \end{aligned} \tag{B.8}$$

En factorisant l'expression (B.8) on trouve l'égalité (B.1) démontrée.

■

Annexe. B(2) : (démonstration paragraphe IV.3.3.2)

Proposition 4 *Soient deux signaux x et y :*

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{j\phi_1(t)} + n_1(t) \\ y(t) = \alpha.Ae^{j\phi_2(t-\tau)} + n_2(t) \end{cases} \tag{B.9}$$

où $n_1(t)$ et $n_2(t)$ sont de moyenne nulle, décorrélés, et indépendants de $x(t)$ et $y(t)$. Nous supposons que $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivable en moyenne quadratique. Nous avons alors :

$$E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] = E\left[\Psi_{\mathbb{B}}\left(Ae^{j\phi_1(t)}, \alpha.Ae^{j\phi_2(t-\tau)}\right)\right], \tag{B.10}$$

$$E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] = \frac{\alpha A^2}{2}E\left[\left(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2\right)^2\cos\left(\phi_{21}\right)\right]. \tag{B.11}$$

avec $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$.

Démonstration :

Comme n_1 et n_2 sont de moyennes nulles et dé-corrélés alors :

$$E[n_1.n_2] = E[n_1].E[n_2] = 0 \Rightarrow E[\dot{n}_1.\dot{n}_2] = -\frac{1}{2}E[n_1.\ddot{n}_2] - \frac{1}{2}E[n_2.\ddot{n}_1]. \tag{B.12}$$

D'autre part comme u (respectivement v) et n_2 (respectivement n_1) sont indépendant :

$$E[n_2.u] = E[n_2].E[u] = 0 \Rightarrow E[\dot{n}_2.\dot{u}] = -\frac{1}{2}E[\ddot{n}_2.u] - \frac{1}{2}E[n_2.\ddot{u}]. \tag{B.13}$$

De façon identique :

$$E[\dot{n}_1.\dot{v}] = -\frac{1}{2}E[\ddot{n}_1.v] - \frac{1}{2}E[n_1.\ddot{v}]. \tag{B.14}$$

En outre, il est facile de voir que :

$$E[\dot{n}_2.\dot{u}^*] = -\frac{1}{2}E[\ddot{n}_2.u^*] - \frac{1}{2}E[n_2.\ddot{u}^*]. \tag{B.15}$$

et que :

$$E[\dot{n}_1.\dot{v}^*] = -\frac{1}{2}E[\ddot{n}_1.v^*] - \frac{1}{2}E[n_1.\ddot{v}^*]\,. \tag{B.16}$$

En utilisant les expressions précédentes et si nous exprimons $\Psi_{\mathbb{B}}$ en fonction de u, v, n_1 et n_2 et des dérivées respectives, nous avons :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbb{B}}(x,y) &= \frac{A\alpha}{2}\{\dot{u}^*\dot{v} + \dot{u}\dot{v}^*\} - \frac{A\alpha}{4}\{u\ddot{v}^* + u^*\ddot{v} + \ddot{u}^*v + \ddot{u}v^*\} \\ &\quad +\{A.\dot{u}^*\dot{n}_2 + \alpha.\dot{n}_1\dot{v} + 2.\dot{n}_1\dot{n}_2 + A.\dot{u}\dot{n}_2 + \alpha\dot{n}_1\dot{v}^*\}\,. \end{aligned}\tag{B.17}$$

L'espérance de l'expression B.17 vaut :

$$\begin{aligned}E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] &= A\alpha E[\Psi_{\mathbb{B}}(u,v)] + AE[\dot{u}^*.\dot{n}_2] + \alpha E[\dot{n}_1.\dot{v}] \\ &\quad +2E[\dot{n}_1.\dot{n}_2] + AE[\dot{u}.\dot{n}_2] + \alpha E[\dot{n}_1.\dot{v}^*]\,. \end{aligned}\tag{B.18}$$

Le développement de la quantité $E[\dot{n}_1.\dot{v}^*]$ s'écrit :

$$\begin{aligned}E[\dot{n}_1.\dot{v}^*] &= E[\lim_{h\to 0}\frac{v^*(t+h)-v^*(t)}{h}.\lim_{h'\to 0}\frac{n_1(t+h')-n_1(t)}{h'}] \\ &= \lim_{h,h'\to 0}\frac{1}{hh'}E[v^*(t+h).n_1(t+h') - v^*(t+h).n_1(t) \\ &\quad -v^*(t).n_1(t+h') + v^*(t).n_1(t)] \\ &= \lim_{h,h'\to 0}\frac{1}{h'}[\frac{\Gamma_{n_1v}(t+h',t+h)-\Gamma_{n_1v}(t+h',t)}{h} \\ &\quad -\frac{\Gamma_{n_1v}(t,t+h)-\Gamma_{n_1v}(t,t)}{h}] \\ &= \lim_{h'\to 0}\frac{1}{h'}[\frac{\partial\Gamma_{n_1v}(t+h',t)/\partial t}{h'} - \frac{\partial\Gamma_{n_1v}(t,t)/\partial t}{h'}] \\ &= \frac{\partial^2\Gamma_{n_1v}(t,t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 E[n_1.v^*]}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E[\dot{n}_1.\dot{v}^*] = 0\,. \end{aligned}\tag{B.19}$$

où $\Gamma_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1).Y^*(t_2)]$ est la corrélation croisée des deux processus aléatoire $X(t)$ et $Y(t)$. En utilisant le même raisonnement, nous pouvons montrer aussi que nous avons : $E[\dot{n}_2.\dot{u}] = 0$, $E[\dot{n}_2.\dot{u}^*] = 0$, $E[\dot{n}_1.\dot{v}] = 0$ et $E[\dot{n}_1.\dot{n}_2] = 0$.

Finalement l'expression B.10 est montrée :

$$\begin{aligned}E[\Psi_{\mathbb{B}}(x,y)] &= A\alpha E[\Psi_{\mathbb{B}}(u,v)]\,, \\ &= \frac{\alpha A^2}{2}\left[(\dot{\phi}_1+\dot{\phi}_2)^2\cos(\phi_{21}) + (\ddot{\phi}_1-\ddot{\phi}_2)\sin(\phi_{21})\right]. \end{aligned}\tag{B.20}$$

Pour aboutir à la relation B.11, il suffit de considérer que nous avons, $(\forall(t,\tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \phi_2(t-\tau) &= \phi_1(t-\tau) + \omega(t-\tau)\,, \\ \Rightarrow \dot{\phi}_2(t-\tau) &= \dot{\phi}_1(t-\tau) + \omega\,, \\ \Rightarrow \ddot{\phi}_2(t-\tau) &= \ddot{\phi}_1(t-\tau)\,, \\ \text{et de plus : } \dot{\phi}_2(t) &= \dot{\phi}_1(t) + \omega\,, \\ \Rightarrow \ddot{\phi}_2(t) &= \ddot{\phi}_1(t)\,. \end{aligned} \tag{B.21}$$

■

ANNEXE C

Expression du champ de pression diffusée par une cible sonar

On considère ici l'expression du champ de pression $p(w)$ retrodiffusé par une coque élastique de forme sphérique placée en champ libre. L'onde incidente est supposée plane et la fonction de transfert du capteur est prise à 1) [88, 91, 142] :

$$p(\omega) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \left[j_n(kr) + \frac{d_n^{(1)}}{d_n} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\cos\theta) \,, \tag{C.1}$$

avec

ω	:	la pulsation,
k	:	le nombre d'onde k $=\frac{\omega}{c}$; c la célérité de l'onde dans le milieu,
n	:	le nombre de modes,
p_0	:	l'amplitude de la pression de l'onde plane incidente,
θ	:	coordonnée sphérique du repère(r, θ, φ),
$d_n^{(1)}$etd_n	:	déterminants dépendant des caractéristiques mécaniques de la cible,
r	:	le rayon de la sphère,
P_n	:	le polynôme de Legendre d'ordre n,
j_n	:	la fonction de Bessel sphérique de première espèce d'ordre n,
$h_n^{(1)}$	:	la fonction de Hankel sphérique de premier espèce d'ordre n.

Les résonances correspondent alors aux singularités des fonctions $\frac{d_n^{(1)}}{d_n}$. Nous pouvons observer, de plus, que cette expression du champ $p(w)$ est une série modale, faisant intervenir des fonctions de Bessel j_n et de Hankel $h_n^{(1)}$ d'argument kr, permettant de prendre en compte la propagation de l'onde dans la cible elle-même. Cette solution résulte, d'une part, des conditions limites appliquées sur la cible et, d'autre part, des conditions physiques autres que celles imposées par les interfaces, à savoir que $p(w)$ doit rester fini à l'origine et à l'infini (conditions de Sommerfeld) [88]. De plus, on peut noter que cette expression dépend des caractéristiques mécaniques (densité, célérités transversale et longitudinale), et géométriques (rayons interne et externe) de la cible [88, 142].

Résumé

L'objectif de cette thèse repose sur **le traitement et l'analyse des signaux non-stationnaires, multi-composantes**.

Dans le domaine du traitement, nous proposons pour le filtrage et le débruitage des signaux non-stationnaires de nouveaux outils fondés sur la Transformation de Huang ou plus exactement sur la Décomposition modale empirique (EMD pour empirical mode decomposition), récemment introduite par Huang *et al.*.
En partant de l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser, nous proposons un nouvel opérateur de mesure d'interaction entre deux signaux complexes. Nous montrons que l'opérateur de démodulation de Teager-Kaiser est un cas particulier de ce nouvel opérateur. Nous établissons les liens théoriques entre cet opérateur et les représentations temps-fréquence (RTF) de la classe de Cohen. Par la suite, nous montrons que cet opérateur est adapté à la détection de signaux et à l'estimation des temps de retard entre deux signaux. Enfin, nous montrons que cet opérateur est une mesure de similarité entre deux signaux permettant la classification des signaux.
Pour l'analyse et la description des signaux, nous introduisons une nouvelle méthode de type temps-fréquence basée sur l'utilisation conjointe de l'EMD et de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser appelée la Transformation de Huang-Teager (THT).
Contrairement aux approches ondelettes ou les RTF de la classe de Cohen, la base ou le noyau de décomposition des outils proposés sont intrinsèques au signal. Afin d'illustrer les différents concepts, des résultats de filtrage, de débruitage, de détection, de calcul de temps de retard et d'analyse temps-fréquence de signaux synthétiques et réels sont présentés. Enfin, nous terminons par une application de la THT pour l'analyse et la classification des échos de cibles sonars à partir de leurs réponses impulsionnelles. Nous concluons sur les limites des approches proposées ainsi que sur les perspectives qu'offre ce sujet de recherche.

Mots Clés : Analyse temps-fréquence, Décomposition modale empirique (EMD), Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser, Opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser, Fréquence instantanée, Amplitude instantanée, Signal multi-composantes, Temps de retard, Détection de signaux, Débruitage des signaux, Classification de signaux.

Résumé - Abstract

L'objectif de cette thèse repose sur **le traitement et l'analyse des signaux non-stationnaires, multi-composantes**.

Résumé :
L'objectif de cette thèse est le traitement et l'analyse des signaux non-stationnaires, multi-composantes. Dans le domaine du traitement, nous proposons pour le filtrage et le debruitage des signaux non-stationnaires de nouveaux outils basés sur la Transformation de Huang ou plus exactement sur la Décomposition modale empirique (EMD pour empirical mode decomposition). En partant de l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser, nous proposons un nouvel opérateur de mesure d'interaction entre deux signaux complexes. Nous montrons que l'opérateur de démodulation de Teager-Kaiser est un cas particulier de ce nouvel opérateur. Nous établissons les liens théoriques entre cet opérateur et les représentations temps-fréquence (RTF) de la classe de Cohen. Par la suite, nous montrons que cet opérateur est adapté à la détection de signaux et à l'estimation des temps de retard entre deux signaux. Enfin, nous montrons que cet opérateur est une mesure de similarité entre deux signaux permettant la classification des signaux. Pour l'analyse et la description des signaux, nous introduisons une nouvelle méthode de type temps-fréquence basée sur l'utilisation conjointe de l'EMD et de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser appelée la Transformation de Huang-Teager (THT). Contrairement aux approches ondelettes ou les RTF de la classe de Cohen, la base ou le noyau de décomposition des outils proposes sont intrinsèques au signal. Afin d'illustrer les différents concepts, des résultats de filtrage, de debruitage, de détection, de calcul de temps de retard, et d'analyse temps-fréquence de signaux synthétiques et réels sont présentés. Enfin, nous terminons par une application de la THT pour l'analyse et la classification des échos de cibles Sonars à partir de leurs réponses impulsionnelles.

Abstract :
This work deals with the processing and the analysis of nonstationary multicomponent signals. Two new tools for signals filtering and denoising based on the Empirical mode decomposition (EMD) are presented. A new energy tracking operator for temporal analysis of signals (demodulation, detection, interaction, similarity ...) is introduced. Relationships between this operator and the Cohen's class of time frequency distributions are established. For spectral analysis of nonstationary signals a new transformation called Teager-Haung transforms (THT) is presented. The THT is based on the EMD method and the TK operator to estimate the instantaneous amplitude and frequency of the signals. Results on signals filtering, denoising, detection and time frequency analysis are presented. Finally, a Sonar targets recognition method based on the THT is presented.

Mots Clés :
Analyse temps-fréquence, Décomposition modale empirique (EMD), Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser, Opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser, Fréquence instantanée, Amplitude instantanée, Signal multi-composantes, Temps de retard, Détection de signaux, Débruitage des signaux, Classification de signaux.