



**HAL**  
open science

# Une Approche Multi-échelles pour des Calculs de Structures sur Ordinateurs à Architecture Parallèle

David Dureisseix

► **To cite this version:**

David Dureisseix. Une Approche Multi-échelles pour des Calculs de Structures sur Ordinateurs à Architecture Parallèle. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 1997. Français. <NNT : >. <tel-00083732>

**HAL Id: tel-00083732**

**<https://theses.hal.science/tel-00083732v1>**

Submitted on 7 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan  
par

David DUREISSEIX

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Sujet de la thèse :  
**Une Approche Multi-échelles pour des Calculs de Structures sur  
Ordinateurs à Architecture Parallèle**

Thèse soutenue le 7 Janvier 1997 devant le jury composé de :

G.	DUVAUT	Président
O.	DEBORDES	Rapporteur
P.	LE TALLEC	Rapporteur
D.	AUBRY	Examineur
P.	LADEVÈZE	Examineur
A.	MILLARD	Examineur
F.-X.	ROUX	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)  
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

A tous ceux que j'estime  
et dont j'espère la réciprocité.

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan dans l'équipe « Stratégies pour le non-linéaire et le parallélisme ».

Je tiens à remercier Pierre LADEVÈZE et François-Xavier ROUX pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé tout au long de cette étude.

J'exprime ici aussi toute ma gratitude à Georges DUVAUT pour l'honneur qu'il m'a fait en étant président du jury, à Olivier DEBORDES et Patrick LE TALLEC pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail, ainsi qu'à Denis AUBRY et Alain MILLARD pour avoir été examinateurs de ce mémoire et de sa soutenance.

Enfin, merci à ceux, au laboratoire et un peu à l'extérieur, qui ont contribué à ce travail. Je remercierais en particulier ici Jean-Yves COGNARD et Philippe LORONG pour leur amitié et leur aide précieuse ; ce n'est pourtant pas rendre justice à tous les autres (et ils sont nombreux) qui au travers du soutien sans faille qu'ils m'ont manifesté, des discussions fructueuses qu'ils ont partagées avec moi, de l'ambiance chaleureuse qu'ils entretiennent au laboratoire ou de l'aide amicale qu'ils m'ont apportée, ont aussi participé à la réussite de ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Méthodes de décomposition de domaine</b>	<b>15</b>
1.1 Problème de référence et notations . . . . .	17
1.2 Approches en déplacement . . . . .	19
1.3 Approches duales . . . . .	32
1.4 Préconditionnements . . . . .	38
1.5 Bilan . . . . .	42
<b>2 Une approche à grand incrément de temps</b>	<b>43</b>
2.1 Décomposition en sous-structures et interfaces . . . . .	46
2.2 Algorithme de résolution . . . . .	50
2.3 Convergence . . . . .	59
2.4 Exemples . . . . .	68
<b>3 Discrétisation</b>	<b>88</b>
3.1 Cas d'une formulation en déplacement . . . . .	90
3.2 Discrétisations et propriétés à convergence . . . . .	95
3.3 Unicité . . . . .	103
3.4 Implantation numérique . . . . .	106
3.5 Exemples . . . . .	109
<b>4 Élaboration d'une approche multi-échelles</b>	<b>113</b>
4.1 Techniques à plusieurs échelles . . . . .	115
4.2 Représentation du problème sur deux échelles . . . . .	121
4.3 Couplage avec une décomposition en sous-structures . . . . .	126
4.4 Algorithme itératif . . . . .	128
4.5 Implantation numérique . . . . .	136
<b>5 Exemples, performances et comparaisons</b>	<b>138</b>
5.1 Influence des différentes échelles . . . . .	140
5.2 Performances de l'approche proposée . . . . .	146
5.3 Comparaisons avec la méthode FETI . . . . .	152

<b>Conclusion</b>	<b>166</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>
<b>Annexes</b>	<b>178</b>
<b>A Intégration bord approchée, choix des points d'intégration</b>	<b>179</b>
<b>B Relation locale de comportement du problème 1D</b>	<b>181</b>
<b>C Algorithme du gradient conjugué</b>	<b>184</b>
<b>D Technique de lagrangien augmenté</b>	<b>186</b>

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des condensations . . . . .	23
1.2	Algorithme multi-frontal . . . . .	25
1.3	Algorithme du gradient conjugué distribué condensé . . . . .	28
1.4	Algorithme du gradient conjugué projeté distribué . . . . .	37
2.1	Algorithme issu de la LATIN . . . . .	56
2.2	Caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures . . . . .	69
2.3	Caractéristiques des problèmes à résoudre . . . . .	73
2.4	Résultats et comparaisons avec le problème direct . . . . .	76
2.5	Caractéristiques des problèmes . . . . .	82
2.6	Coût de la résolution . . . . .	84
3.1	Erreurs à convergence suivant la taille du problème . . . . .	110
3.2	Exemples de fonctions de base sur des éléments d'interface . . . . .	112
4.1	Passage entre deux modèles . . . . .	122
4.2	Passage entre deux modèles discrétisés . . . . .	124
4.3	Algorithme à deux échelles . . . . .	130
4.4	Contrainte de Mises et déformées, méthode brute . . . . .	132
4.5	Contrainte de Mises et déformées, deux échelles . . . . .	133
4.6	Contrainte de Mises et déformées . . . . .	134
5.1	Caractéristiques du problème local aux sous-structures . . . . .	142
5.2	Caractéristiques des problèmes traités . . . . .	143
5.3	Taux de convergence $\tau$ en approches mono et multi-échelles . . . . .	143
5.4	Caractéristiques des problèmes, suivant l'échelle de référence . . . . .	144
5.5	Taux de convergence suivant l'échelle de référence . . . . .	145
5.6	Caractéristiques du problème associé aux sous-structures . . . . .	146
5.7	Caractéristiques des problèmes éléments finis à traiter . . . . .	148
5.8	Temps horloge correspondant . . . . .	150
5.9	Caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures . . . . .	153
5.10	Caractéristiques des problèmes à résoudre . . . . .	153
5.11	Caractéristiques du problème à grande échelle . . . . .	153
5.12	Estimation de la convergence des différentes approches . . . . .	161

A.1	Analogie thermique — mécanique . . . . .	180
C.1	Algorithme du gradient conjugué . . . . .	184
C.2	Algorithme du gradient conjugué préconditionné . . . . .	185

# Table des figures

1	Évolution de la puissance de calcul des ordinateurs [Noor 94] . . . . .	9
1.1	Problème de référence . . . . .	17
1.2	Découpage en sous-domaines . . . . .	18
1.3	Notations relatives à un sous-domaine . . . . .	18
1.4	Jonction entre deux sous-domaines . . . . .	20
1.5	Problème test pour la condensation . . . . .	23
1.6	Profils pour deux tailles de problème . . . . .	24
1.7	Conditionnements comparés . . . . .	27
1.8	Notion de voisinage d'un sous-domaine $\Omega^E$ pour la méthode primale .	29
1.9	Découpage en sous-domaines recouvrants . . . . .	31
1.10	Notion de voisinage d'un sous-domaine $\Omega^E$ pour la méthode duale . .	34
2.1	Sous-structure et interface . . . . .	46
2.2	Solution à rechercher . . . . .	49
2.3	Principe de la méthode . . . . .	50
2.4	Interprétation de l'étape locale . . . . .	51
2.5	Interprétation de l'étape linéaire . . . . .	52
2.6	Étape locale . . . . .	53
2.7	Implantation de l'algorithme — architecture . . . . .	55
2.8	Calcul de l'indicateur d'erreur . . . . .	55
2.9	Voisinage de processeurs . . . . .	56
2.10	Synchronisme au cours des itérations . . . . .	57
2.11	Exemple unidimensionnel . . . . .	60
2.12	Modules, fonctions du paramètre $k$ . . . . .	61
2.13	Rayon spectral fonction du paramètre $k$ avec relaxation . . . . .	62
2.14	Choix optimal de direction de recherche en unidimensionnel . . . . .	63
2.15	Problème de la plaque trouée considéré . . . . .	64
2.16	Évolution de la solution en cours d'itération, pour $\mu = 0$ . . . . .	66
2.17	Vérification de la convergence au cours des itérations . . . . .	67
2.18	Influence de la direction de recherche sur la convergence . . . . .	67
2.19	Éprouvette biaxiale . . . . .	68
2.20	Section de l'éprouvette . . . . .	69
2.21	Décomposition en 31 sous-structures et interfaces . . . . .	70

2.22	Maillages testés . . . . .	71
2.23	Déformée et contraintes à l'itération 100 . . . . .	72
2.24	Évolution de l'indicateur $\eta$ au cours des itérations . . . . .	73
2.25	Maillages testés . . . . .	74
2.26	Décomposition en 62 sous-structures et interfaces . . . . .	75
2.27	Temps cumulé en fonction de la taille du problème . . . . .	76
2.28	Déversement du roulement . . . . .	77
2.29	Transformation pour changer de secteur . . . . .	78
2.30	Maillage d'un secteur et décomposition . . . . .	79
2.31	Voisinages pour un secteur . . . . .	79
2.32	Voisinages pour l'ensemble du roulement . . . . .	80
2.33	Contact avec jeu — configuration non déformée . . . . .	80
2.34	Contact avec jeu — configuration déformée . . . . .	80
2.35	Traitement du contact unilatéral parfait avec jeu . . . . .	81
2.36	Différents maillages équivalents pour l'ensemble du roulement . . . . .	82
2.37	Encombrement pour un secteur . . . . .	83
2.38	Encombrement pour traiter la totalité du problème . . . . .	83
2.39	Contrainte de Mises sur les composants du roulement . . . . .	84
2.40	Zones méridiennes des contacts . . . . .	85
2.41	Contrainte de Mises dans les plans méridiens . . . . .	85
2.42	Évolution de l'indicateur $\eta$ au cours des itérations . . . . .	86
2.43	Coût de l'analyse en fonction de la taille du problème . . . . .	86
3.1	Discrétisation des champs bord . . . . .	91
3.2	Convergence pour un problème discrétisé . . . . .	95
3.3	Exemple, maillage et décomposition, et déformée à convergence . . . . .	99
3.4	Élément discontinu d'interface associé au triangle à trois nœuds . . . . .	99
3.5	Discrétisation des champs bord . . . . .	99
3.6	Exemple de champ d'effort discontinu par élément . . . . .	99
3.7	Exemple de champ d'effort issu de la formulation en déplacement . . . . .	100
3.8	Problème de référence . . . . .	109
3.9	Problème traité . . . . .	109
3.10	Décomposition en 42 sous-structures et interfaces . . . . .	110
3.11	Comparaison des solutions à convergence . . . . .	111
4.1	Évolution de l'erreur du gradient conjugué . . . . .	115
4.2	Analyse sur les modes propres aux différentes itérations . . . . .	116
4.3	Projection hiérarchique . . . . .	125
4.4	Structure élancée en flexion . . . . .	131
4.5	Décomposition en 32 sous-structures et interfaces . . . . .	131
4.6	Influence de la direction de recherche — LATIN deux échelles . . . . .	135
5.1	Taux de convergence en fonction des échelles . . . . .	141

---

5.2	Taux de convergence comparés . . . . .	142
5.3	Taux de convergence comparés . . . . .	144
5.4	Problème tridimensionnel testé . . . . .	146
5.5	Décomposition en 32 sous-structures et interfaces . . . . .	147
5.6	Maillage de l'échelle globale . . . . .	149
5.7	Erreur au cours des itérations . . . . .	149
5.8	Erreur au cours du temps . . . . .	151
5.9	Erreur au cours du temps . . . . .	151
5.10	Différentes discrétisations pour le problème sous-structuré . . . . .	152
5.11	Profils des deux problèmes directs testés . . . . .	154
5.12	Profils des différents problèmes . . . . .	155
5.13	Différentes discrétisations pour le problème à grande échelle . . . . .	156
5.14	Tailles comparées des problèmes à grande échelle . . . . .	156
5.15	Tailles comparées des problèmes issus des différentes approches . . . . .	157
5.16	Comparaison des différentes approches, premier problème . . . . .	158
5.17	Comparaison des différentes approches, premier problème . . . . .	159
5.18	Comparaison des différentes approches, deuxième problème . . . . .	160
5.19	Comparaison des différentes approches, deuxième problème . . . . .	160
5.20	Problème de référence . . . . .	162
5.21	Problème traité . . . . .	163
5.22	Contrainte de Mises et déformée de la solution de référence . . . . .	163
5.23	Maillage considéré . . . . .	163
5.24	Géométrie de la fissure . . . . .	164
5.25	Évolution de l'erreur au cours des itérations . . . . .	164
5.26	Évolution de l'indicateur d'erreur $\eta$ au cours des itérations . . . . .	165
A.1	Convection sur une frontière . . . . .	179
B.1	Géométrie . . . . .	181

# **Introduction**

Aujourd'hui encore, le calcul scientifique a des besoins en puissance de calcul qui dépassent les moyens mis à sa disposition. Cette demande toujours accrue a conduit à développer d'une part, des algorithmes de plus en plus performants, et d'autre part, des architectures d'ordinateurs permettant de disposer d'une puissance de calcul accrue. Par exemple, les machines mono-processeur ont vu la puissance de base de leur processeur augmenter notablement ; cependant, des limites physiques sont apparues et pour permettre le passage à une classe de machines supérieure, les architectures vectorielles puis parallèles ont émergé. Aujourd'hui, ces dernières sont celles qui permettent d'atteindre les plus grandes puissances de calcul (figure 1 d'après [Noor 94]), en particulier avec le développement de processeurs et de réseaux d'interconnection permettant d'obtenir un parallélisme « extensible » utilisant pleinement les possibilités d'une machine (choix du nombre de processeurs suivant la taille du problème à traiter, avec pas ou peu de dégradation de performances quand ces deux s'accroissent).

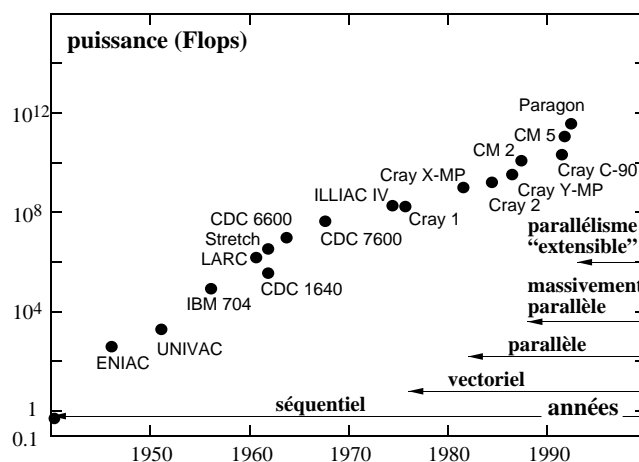


FIG. 1 – Évolution de la puissance de calcul des ordinateurs [Noor 94]

Pour tirer parti de ces nouvelles architectures, des algorithmes adaptés ont dû être développés, la parallélisation automatique de codes de calculs existant sur machines séquentielles ne permettant que difficilement d'atteindre des performances élevées et étant délicate à réaliser sur des architectures à mémoire distribuée.

Dans le domaine du calcul de structures, ces multi-processeurs sont, ou seront, aussi un atout considérables. En effet, la volonté de prendre en compte des effets de structure (zones à fort gradient de contraintes, redistribution de contraintes, . . .), aussi bien que celle de modéliser finement le comportement des matériaux (plasticité, viscoplasticité, matériaux composites, . . .) en développant des lois de comportement sophistiquées prenant en compte de nombreux couplages mécaniques, [Marquis 89], de nombreuses variables internes, [Feyel *et al.* 97], ou même le développement de techniques de calcul adaptées à des problèmes fortement non-linéaires, [Pijaudier-Cabot 91], conduisent à des coûts de calcul qui deviennent prohibitifs, voire hors de portée, pour les architectures séquentielles classiques.

Ces coûts sont issus de deux types distincts de problèmes qui se présentent lors de l'analyse de telles structures : les problèmes non-linéaires, mais généralement locaux en variables d'espace qui traduisent l'évolution du comportement du matériau, et les grands systèmes globaux linéaires, qui traduisent classiquement l'équilibre de la structure. Les premiers peuvent conduire à un parallélisme à grain fin (calculs locaux indépendants, sur des données locales, qui proviennent de l'intégration de la loi de comportement), et peuvent donc être résolus aisément en parallèle par exemple en distribuant les éléments parmi les processeurs disponibles [Barragy et Carey 88], [Whirley *et al.* 89], [Débordes et Michel 89]. Quant aux seconds, dans le cas de sollicitations quasi-statiques ou lentes, ils conduisent à une résolution implicite globale sur toute la structure, qui ne présente donc pas le caractère « parallèle » des équations de comportement du matériau. Notons que dans le cas de sollicitations dynamiques très rapides (suivi de la propagation d'une onde dans une structure, par exemple), des techniques de résolution explicites permettent, outre une écriture plus simple, de ne traiter l'équilibre que de façon quasi-locale et se prêtent donc bien à une résolution en parallèle, [Oakley et Knight, jr. 95], [Fahmy et Namini 95]. Ces techniques ont aussi inspiré des extensions numériques pour les cas statiques, [Hugues *et al.* 83] par exemple.

Outre les techniques de parallélisation automatique déjà mentionnées et qui amènent à un parallélisme que l'on pourrait qualifier de parallélisme « informatique », [Lamour 91], se développent aussi des méthodes de résolution en parallèle de grands systèmes linéaires creux (typiques de ceux auxquels conduit une discrétisation éléments finis), que ce soit de manière directe ou itérative, de façon quasi indépendante du type de problème qui leur a donné lieu [Utku *et al.* 86], [Roditis et Kioussis 90], [Buoni *et al.* 93], [Pan et Reif 93]. Il s'agirait alors de parallélisme « numérique ». Ici, nous nous plaçons dans une troisième catégorie : celle d'un parallélisme « mécanique », dans laquelle se classent les méthodes de type décomposition de domaine [Escaig *et al.* 94], [Farhat et Roux 91], [Yagawa *et al.* 93], [De Roeck *et al.* 92], qui conservent au cours de la résolution la nature du problème mécanique à résoudre.

Pour rompre la globalité en variables d'espace des équations d'équilibre d'une structure, ces méthodes procèdent à une décomposition en sous-domaines pour ne plus faire intervenir qu'une succession de résolution de problèmes quasi-locaux sous-domaine par sous-domaine. Le problème résultant est alors, bien entendu, celui du raccord entre sous-domaines voisins ; il est souvent qualifié de problème condensé sur les interfaces [Roux 90]. Ces approches conduisent à un parallélisme à grain large (le volume de calcul à réaliser par processeur reste élevé vis à vis de la quantité d'informations à échanger avec les autres processeurs au travers du réseau de communication). Généralement, la nature synchrone de ces algorithmes pousse à se préoccuper de l'équilibrage des charges entre processeurs pour obtenir des efficacités élevées [Farhat 88], [Padovan et Kwang 91].

L'objectif à terme est pour nous de pouvoir traiter des problèmes non linéaires d'évolution — principalement en petites perturbations — sur des calculateurs parallèles. En effet, pour des structures discrétisées avec un grand nombre de degrés de

liberté, les besoins en calcul peuvent être qualifiés d'intensifs soutenus dès lors qu'ils mobilisent une grande ressource en terme de puissance de calcul, sur une durée de calcul importante.

Pour ces problèmes non-linéaires d'évolution, une approche dite à grand incrément de temps (méthode LATIN) a été initialement proposée par Ladevèze dans [Ladevèze 85], et est depuis développée au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan. Cette approche constitue le moteur sous-tendant notre étude, même si elle ne se présentera que dans un cas dégénéré puisque nous ne considérerons ici que le cas du comportement élastique linéaire où seule la configuration finale nous intéresse. Dans un tel cadre, l'algorithme qui en résulte se confond avec ceux proposés dans [Lions 90], présenté à partir du cas limite de la méthode de Schwarz avec recouvrement, [Glowinski et Le Tallec 90] et [Ladevèze 85], à partir de lagrangiens augmentés.

L'originalité de l'approche qui sert de base à cette étude consiste en le fait que la structure initiale est décomposée en sous-structures et interfaces, chacune étant une entité mécanique à part entière possédant son propre comportement. L'algorithme de résolution est alors bâti en utilisant la trame de la méthode LATIN appliquée au problème de l'assemblage de sous-structures et d'interfaces, [Ladevèze 87], [Ladevèze 96]. De plus, les inconnues principales intervenant dans ce problème sont à la fois les champs de déplacements et les champs d'effort sur les interfaces, qui traduisent les interactions entre les constituants de l'assemblage. C'est en ce sens que la méthode utilisée est qualifiée de « mixte ». Bien que traitant dans ce travail essentiellement du cas de comportement élastique linéaire du matériau, la démarche de la LATIN est conservée afin de pouvoir se placer dans un cadre de travail bien adapté à la résolution des problèmes non linéaires d'évolution pour faciliter une future généralisation. Le cas linéaire peut alors être envisagé comme un cas dégénéré des problèmes précédents, où le temps ne joue plus de rôle.

Cette démarche a été exploitée dans plusieurs travaux, comme l'utilisation de la modularité de l'approche pour les assemblages de structures, [Danwé 93], ou en introduisant des comportements variés pour les interfaces, tels la prise en compte du contact unilatéral avec frottement, l'utilisation de maillages incompatibles, [Champagney 96], [Blanzé *et al.* 96]; la possibilité d'un traitement en parallèle du problème issu de la décomposition en sous-structures, [Ladevèze 87], [Cognard *et al.* 96], et le test de l'algorithme sur plusieurs types d'architectures multi-processeurs en élasticité bidimensionnelle dans [Lorong 94], [Ladevèze et Lorong 92]. L'utilisation du parallélisme interne aux approches LATIN dans le cas de structures à comportement viscoplastique, soumises à des chargements cycliques, a été abordée dans [Cognard et Ladevèze 91], [Cognard et Ladevèze 93].

Lorsque la taille du problème augmente, les méthodes de décomposition de domaine deviennent plus efficaces que les méthodes directes. Cependant, l'efficacité obtenue n'est pas l'efficacité maximale que l'on pourrait en attendre lorsque le nombre de sous-domaines croît ([Bramble *et al.* 86]); en particulier, l'extensibilité des algorithmes n'est pas assurée. Un effort supplémentaire doit donc être apporté pour améliorer les performances de tels algorithmes. Une vision multi-échelles déjà présente

dans les techniques multi-grilles ou les éléments finis hiérarchiques ([Zienkiewicz *et al.* 83], [Yserentant 86]), peut pallier les précédents inconvénients. Des techniques de propagation rapide d'information parmi les sous-structures lors des itérations de l'algorithme en sont issues, par exemple dans [Mandel 93], [Farhat *et al.* 94]. L'utilisation d'un problème global sur la structure à cette fin est maintenant réalisée dans plusieurs algorithmes de résolution par décomposition de domaine, comme la méthode FETI [Farhat et Roux 91], [Farhat *et al.* 94], pour laquelle le mouvement de solide rigide des sous-domaines doit être introduit ou la « balancing domain decomposition method » où lequel est ajouté cette fois-ci lors de la phase de préconditionnement. Il semble que l'idée de la nécessité d'un problème global sur toute la structure ait été proposée initialement par Bramble dans [Bramble *et al.* 86].

Ici, nous élaborons une extension multi-échelles, dans l'esprit de [Bramble *et al.* 86], de la méthode LATIN associée à une décomposition en sous-structures et interfaces, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Dans une première partie, nous décrivons quelques méthodes de décomposition de domaine en calcul de structures, en nous attachant à faire ressortir l'aspect calcul parallèle (partition des données, synchronisations entre processeurs, ...). En particulier, les approches de Schur primale et duale (dont la méthode FETI) sont détaillées, avec l'utilisation d'un préconditionneur. Ces approches sont issues de l'analyse numérique qui fournit des résultats de convergence asymptotiques. À partir de ceux-ci est introduite la notion d'extensibilité numérique.

La deuxième partie met alors en place l'approche qui sert de base à notre étude : la méthode LATIN couplée à une technique de sous-structuration. La décomposition en sous-structures et interfaces permet de faire jouer un rôle de premier plan à l'entité mécanique « interface », et les efforts et déplacements bord sont traités à égalité d'importance dans l'algorithme qui en est issu. Quelques résultats de convergence sont rappelés et illustrés sur diverses variantes de l'approche. Enfin, l'implantation et la réalisation d'un code prototype dans le cadre du code de calcul par éléments finis CASTEM 2000, permettent de présenter des exemples tridimensionnels à grand nombre de degrés de liberté, sur des calculateurs dont le nombre de processeurs est de l'ordre de 64.

Un aspect numérique important fait l'objet du troisième chapitre, à savoir le choix et l'influence de la discrétisation, en particulier lorsque l'on cherche à conserver la caractéristique, décrite précédemment du point de vue milieu continu de l'algorithme, de ne privilégier ni le déplacement, ni l'effort l'un par rapport à l'autre. Cela conduit à converger vers la solution d'une formulation mixte discrétisée qui conserve un rôle plus important aux interfaces et à l'équilibre.

L'élaboration d'une approche multi-échelles est alors effectuée dans le quatrième chapitre. Il présente quelques approches numériques à plusieurs échelles et réécrit le problème initial comme la superposition d'effets à longueurs de variation distinctes : l'une est liée à une dimension caractéristique de la structure, l'autre, à celle des interfaces du partitionnement de cette même structure. L'algorithme itératif précédent est

alors étendu à cet aspect pour donner l'approche LATIN multi-échelles.

Enfin, le dernier chapitre présente l'influence des échelles exhibées par la structure partitionnée, sur le taux de convergence de l'algorithme, ce qui permet de conclure à son extensibilité. Les performances en sont ensuite illustrées sur un exemple de taille importante, pour montrer la faisabilité de l'approche, et différentes démarches décrites au cours de ce mémoire sont comparées. Le choix du paramètre décrivant les directions de recherche de l'approche proposée est alors mis en évidence comme étant lié aux dimensions des interfaces, et non plus de la structure initiale.

## Principales notations

- Géométrie
  - $\Omega$  structure étudiée,
  - $\partial_1\Omega$  partie de la frontière à déplacement imposé, et
  - $\partial_2\Omega$  partie à effort imposé ;
  - $\Omega^E$  sous-structure,
  - $\Gamma^{EE'}$  interface entre les sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$ .
- Champs et espaces associés
  - $\underline{U}$  champs de déplacement,
  - $\varepsilon(\underline{U})$  déformation associée à  $\underline{U}$ ,
  - $\underline{U}$  ensemble des champs de déplacement à énergie finie,
  - $\underline{U}^0$  ensemble des champs de  $\underline{U}$  cinématiquement admissibles pour des conditions aux limites homogènes ;
  - $\sigma$  champs de contraintes,
  - $\underline{S}$  ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles ;
  - $\underline{W}$  déplacement bord, et
  - $\underline{W}$  son espace associé,
  - $\underline{F}$  effort bord, et
  - $\underline{F}$  son espace associé ;
  - $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  couple déplacement-déplacement bord de la sous-structure  $\Omega^E$ ,
  - $\underline{U}_{\text{ad}}^E$  ensemble de ces couples cinématiquement admissibles,
  - $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$  couple contrainte-effort de la sous-structure  $\Omega^E$ ,
  - $\underline{S}_{\text{ad}}^E$  ensemble de ces couples statiquement admissibles.
- Matériau
  - $\mathbf{K}$  opérateur de Hooke
- De façon générale, l'exposant  $E$  représente une quantité liée à la sous-structure  $\Omega^E$  ; quand cette notation n'est pas employée sur des quantités manifestement locales à la sous-structure  $\Omega^E$ , cela représentera le regroupement de toutes ces quantités (le produit cartésien).  
L'indice  $h$  traduit une quantité discrétisée et la notation  $[\cdot]$  est la représentation matricielle après discrétisation.  
La notation  $\bar{\cdot}$ , quant à elle, concerne une quantité effective, et les indices 1 et 2 se rapportent généralement à des quantités issues respectivement de l'échelle fine et de l'échelle globale.
- Opérateurs particuliers
  - $\mathbb{P}$  opérateur de prolongation
  - $\mathbb{R}$  opérateur de restriction.

# Chapitre 1

## Méthodes de décomposition de domaine

---

<b>1.1</b>	<b>Problème de référence et notations . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Approches en déplacement . . . . .</b>	<b>19</b>
1.2.1	Méthode de Schur primale . . . . .	21
1.2.2	Méthode alternée de Schwarz . . . . .	31
<b>1.3</b>	<b>Approches duales . . . . .</b>	<b>32</b>
1.3.1	Méthode de Schur duale . . . . .	33
1.3.2	Méthode FETI . . . . .	35
<b>1.4</b>	<b>Préconditionnements . . . . .</b>	<b>38</b>
1.4.1	Préconditionneur de Neumann pour le problème primal . . .	38
1.4.2	Balancing method . . . . .	39
1.4.3	Préconditionnement de la méthode FETI . . . . .	40
<b>1.5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>42</b>

---

Les méthodes de décomposition de domaine furent tout d'abord initiées sans chercher explicitement à introduire le parallélisme dans le traitement d'un problème implicite, c'est à dire qui conduit à exprimer un couplage entre toutes les inconnues du problème (pour nous, ce sera la recherche d'un champ de déplacement et d'un champ de contraintes *admissibles* sur toute la structure étudiée). Elles mettent classiquement en jeu une décomposition en sous-domaines recouvrants (méthode de Schwarz) ou non recouvrants (méthode de Schur).

Avec l'avènement des calculateurs parallèles, plus puissants, de nombreuses recherches en mécanique se sont développées afin d'utiliser ces nouvelles architectures, d'abord en mécanique des fluides, puis en calcul de structures. En particulier, l'analyse par éléments finis a conduit au développement de techniques et d'algorithmes nouveaux ([White et Abel 88], [Mackerle 96]). Dans ce cadre, les méthodes de décomposition de domaine connaissent un nouvel essor.

Après avoir introduit le problème de référence qui nous préoccupe ici, nous décrivons donc quelques unes de ces méthodes, utilisées dans l'optique d'une résolution sur calculateurs parallèles. En particulier, les approches primale (privilegiant les quantités cinématiques : le déplacement) et duale (privilegiant les quantités statiques : les efforts) sont étudiées et l'accent est porté sur l'utilisation, imposée ou ajoutée, d'un problème global sur toute la structure afin d'améliorer les performances.

Issues du domaine de l'analyse numérique, les solveurs linéaires en parallèle qui sont construits sur ces approches participent souvent des techniques de gradient conjugué, beaucoup étudiées comme algorithmes itératifs utilisables sur calculateurs multi-processeurs ([Johnsson et Mathur 89], [Mansfield 90], par exemple).

## 1.1 Problème de référence et notations

Nous nous plaçons dans le cadre des petites perturbations et dans la situation particulière où seule la configuration finale occupée par la structure nous intéresse. Aussi, le temps n'est pas un paramètre du problème.

La structure élastique étudiée occupe un domaine  $\Omega$  dont la frontière est notée  $\partial\Omega$ . Elle est soumise à un chargement composé de force de volume  $f_d$ , et de forces surfaciques  $F_d$  sur la portion de frontière  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$ . Sur la portion de frontière  $\partial_1\Omega$ , complémentaire de  $\partial_2\Omega$ , le déplacement  $\underline{U}_d$  est imposé (figure 1.1).

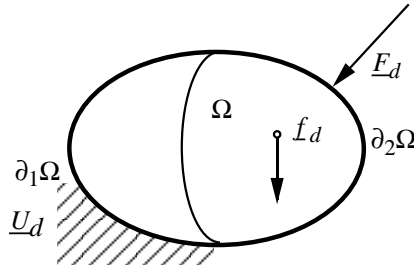


FIG. 1.1 – Problème de référence

Le problème à résoudre consiste alors à trouver un couple  $(\underline{U}(\underline{M}); \underline{\sigma}(\underline{M}))$ ,  $\underline{M} \in \Omega$ , pour lequel :

- Le champ de déplacement  $\underline{U}$  est *cinématiquement admissible*, c'est à dire :

$$\underline{U}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad , \quad \underline{U} \in U$$

où  $U$  est l'ensemble des champs de déplacement à énergie finie, sur  $\Omega$ .

- Le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  est *statiquement admissible*, c'est à dire :

$$\forall \underline{U}^* \in U^0, - \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma}\underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} f_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d \cdot \underline{U}^* dS = 0$$

où  $U^0$  est l'ensemble des champs de déplacement de  $U$  nuls sur  $\partial_1\Omega$  (l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles sera quant à lui noté  $S$ ).

- La relation de comportement est vérifiée :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{K}\underline{\varepsilon}(\underline{U})$$

où  $\mathbf{K}$  est l'opérateur de Hooke caractéristique du matériau.

Un tel problème est évidemment global en variables d'espace (typiquement, les équations d'équilibre couplent les inconnues). Pour rompre cette globalité et ainsi pouvoir facilement traiter le problème de façon parallèle, les techniques de résolution par décomposition de domaine procèdent à un découpage de la structure initiale  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega^E$ ,  $E \in \mathbf{E}$  (figure 1.2). Avec une telle vision du problème, est donc

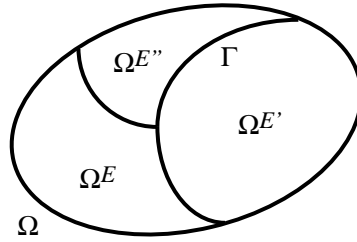


FIG. 1.2 – Découpage en sous-domaines

aussi introduit l'interface unique  $\Gamma$  qui assure globalement le liens entre *tous* les sous-domaines.

Le bord du sous-domaine  $\Omega^E$  sera noté  $\partial\Omega^E$ , dont l'éventuelle partie où le déplacement est imposé est notée  $\partial_1\Omega^E = \partial_1\Omega \cap \partial\Omega^E$ , celle où les efforts sont imposés,  $\partial_2\Omega^E = \partial_2\Omega \cap \partial\Omega^E$ , et la partie complémentaire  $\partial_i\Omega^E$ . On a donc

$$\partial\Omega^E = \partial_1\Omega^E \cup \partial_2\Omega^E \cup \partial_i\Omega^E$$

Le champ d'efforts surfaciques traduisant l'action des autres sous-domaines sur  $\Omega^E$  au travers de  $\Gamma$  sera noté  $\underline{F}^E$ , et le champ de déplacement au même endroit,  $\underline{W}^E$  (figure 1.3). Le champ de contrainte défini sur le sous-domaine  $\Omega^E$  est noté  $\underline{\sigma}^E$ , alors que  $\underline{U}^E$  est le champ de déplacement de ce même sous-domaine.

Nous noterons enfin  $\underline{W}$  et  $\underline{F}$  les espaces dans lesquels doit se faire la recherche des nouvelles quantités introduites que sont les déplacements et efforts bord  $\underline{W}$  et  $\underline{F}$ . Leur choix sera discuté plus en détail lors de la discrétisation.

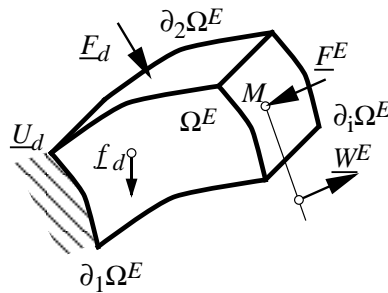


FIG. 1.3 – Notations relatives à un sous-domaine

## 1.2 Approches en déplacement

Après avoir procédé à une décomposition de la structure similaire à celle de la figure 1.2, le problème de référence peut être écrit sous une forme équivalente au sens du modèle milieu continu :

trouver les champs de déplacement et de contraintes  $(\underline{U}^E; \underline{\sigma}^E)$  minimisant une quantité de type erreur en relation de comportement :

$$\Phi(\underline{U}; \underline{\sigma}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[(\underline{\sigma}^E - \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)) \mathbf{K}^{-1} (\underline{\sigma}^E - \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E))] d\Omega \quad [1.1]$$

- pour des champs de déplacement  $\underline{U}^E$  *cinématiquement admissibles* au sens du sous-domaine  $\Omega^E$  :

$$\begin{aligned} \underline{U}^E &\in U^E, \\ \underline{U}^E|_{\partial_1 \Omega^E} &= \underline{U}_d \end{aligned}$$

où  $U^E$  est l'ensemble des champs de déplacement à énergie finie, définis sur  $\Omega^E$  ;

- et pour des champs de contraintes  $\underline{\sigma}^E$  équilibrant les charges éventuelles  $\underline{f}_d$  et  $\underline{F}_d$  :

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^{E^*} \in U^{E^0}, \\ - \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{E^*})] d\Omega + \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E^*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E^*} dS = 0 \end{aligned}$$

qui appartiennent alors à un espace noté  $\mathcal{S}^E$ .  $U^{E^0}$  est alors l'ensemble des champs de déplacement de  $U^E$  nuls sur  $\partial_1 \Omega^E$  ;

- dans le cas d'interfaces parfaites, les champs bord doivent vérifier de plus la continuité à l'interface :

$$\begin{aligned} \underline{U}^E &= \underline{U}^{E'} \text{ sur } \Gamma^{EE'} \\ \underline{\sigma}_{|\Gamma^{EE'}}^E \underline{n} + \underline{\sigma}_{|\Gamma^{EE'}}^{E'} \underline{n}' &= 0 \end{aligned}$$

où l'interface  $\Gamma^{EE'} = \partial_i \Omega^E \cap \partial_i \Omega^{E'}$  a pour normales locales unitaires  $\underline{n}$  et  $\underline{n}'$  ( $\underline{n} + \underline{n}' = 0$ ), ce qui est illustré par la figure 1.4.

Le problème consistant à minimiser le potentiel [1.1] sous les contraintes précédentes se découple alors aisément en deux problèmes de minimisation séparés :

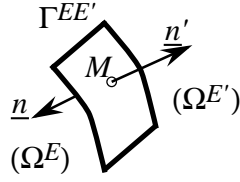


FIG. 1.4 – Jonction entre deux sous-domaines

– un problème en « déplacement »

$$\min_{\substack{\underline{U}^E \in \underline{U}^E \\ \underline{U}^E|_{\Gamma^{EE'}} = \underline{U}^{E'}|_{\Gamma^{EE'}}}} \Phi_1(\underline{U}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)] d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS \right\} \quad [1.2]$$

– un problème en « contraintes »

$$\min_{\substack{\underline{\sigma}^E \in \underline{S}^E \\ \underline{\sigma}^E|_{\Gamma^{EE'}} \underline{n} + \underline{\sigma}^{E'}|_{\Gamma^{EE'}} \underline{n}' = 0}} \Phi_2(\underline{\sigma}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}^E] d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{\partial_1 \Omega^E} \underline{\sigma}^E \underline{n} \cdot \underline{U}_d dS \right\} \quad [1.3]$$

### 1.2.1 Méthode de Schur primale

Aussi appelée méthode de sous-structuration, la méthode du complément de Schur a semble-t-il été introduite dans [Przemieniecki 63]. Elle fut d'abord employée sans souci de parallélisme, comme dans ([Dodds, jr. et Lopez 80]) pour une analyse de structure où les non-linéarités sont confinées dans une zone a priori déterminée (un sous-domaine). Cependant, grâce au partitionnement du domaine qu'elle entraîne, son intérêt est aussi apparu dans la création d'algorithmes adaptés aux calculateurs parallèles.

Considérons ainsi le problème de référence exprimé au travers d'une formulation en déplacements discrétisée par éléments finis [Zienkiewicz et Taylor 91]. On est conduit à résoudre un système linéaire creux, symétrique, défini positif, du type

$$[K][q] = [f] \quad [1.4]$$

Un tel problème est évidemment toujours global en variables d'espace (les équations en question sont couplées).

#### Condensation sur l'interface $\Gamma$

L'approche algébrique consiste alors en une renumérotation formelle des nœuds en vue de présenter un découpage en blocs de la matrice de rigidité  $[K]$  : si l'on numérote en premier les degrés de liberté dont les nœuds sont internes au premier sous-domaine (au sens strict : pas de nœuds sur la frontière qui le sépare des autres sous-domaines), puis ceux du deuxième sous-domaine, ainsi de suite ... jusqu'à numérotter en dernier ceux de l'ensemble des frontières entre sous-domaines  $\Gamma$ . Par exemple, pour une découpe en deux sous-domaines  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$ , on est formellement amené à écrire le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{EE} & 0 & K_{E\Gamma} \\ 0 & K_{E'E'} & K_{E'\Gamma} \\ K_{\Gamma E} & K_{\Gamma E'} & K_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_E \\ q_{E'} \\ q_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_{E'} \\ f_\Gamma \end{bmatrix}$$

Cette expression correspond bien entendu à celle que l'on peut obtenir à partir du problème en déplacement précédent ([1.2], page 20) dans lequel la condition de continuité en déplacement à l'interface  $\Gamma$  est implicitement traitée par choix d'un même degré de liberté de part et d'autre de celle-ci.

La condensation statique sur l'interface  $\Gamma$  du problème discrétisé [1.4] n'est alors rien d'autre qu'une substitution des inconnues  $q_E$  et  $q_{E'}$  (élimination de Gauss par bloc), de façon à se ramener aux seules inconnues  $q_\Gamma$  :

$$[S][q_\Gamma] = [b] \quad [1.5]$$

avec

$$[S] = K_{\Gamma\Gamma} - \sum_{E \in \mathbf{E}} K_{\Gamma E} (K_{EE})^{-1} K_{E\Gamma}$$

$$[b] = f_{\Gamma} - \sum_{E \in \mathbf{E}} K_{\Gamma E} (K_{EE})^{-1} f_E$$

$[S]$  est appelée matrice du complément de Schur ([Bjørstad et Widlund 86], [Agoshkov 88]) et  $[b]$  est le résultat de la condensation des efforts généralisés  $[f]$  sur  $\Gamma$ . Comme  $K_{\Gamma\Gamma}$  peut être considéré comme la contribution à une partie de la rigidité, des éléments de différents sous-domaines, il peut s'écrire

$$K_{\Gamma\Gamma} = \sum_{E \in \mathbf{E}} K_{\Gamma\Gamma}^E$$

et de même,  $[S]$  est l'assemblage des  $[S^E]$ , matrices de rigidités (condensées) des  $\Omega^E$  considérées comme des « super-éléments », qui se trouvent être des matrices pleines. Il en est de même pour  $[f_{\Gamma}]$  et donc pour  $[b]$ , ainsi :

$$[S] = \sum_{E \in \mathbf{E}} [S^E]$$

$$[b] = \sum_{E \in \mathbf{E}} [b^E]$$

où  $\sum$  désigne ici abusivement l'assemblage des matrices locales aux sous-domaines  $[S^E]$ .

Considérons maintenant le problème condensé [1.5]. l'assemblage explicite des  $[S^E]$  peut conduire, lorsque le nombre de degrés de liberté est grand sur l'interface  $\Gamma$  (par exemple, lors d'une décomposition en un nombre élevé de sous-domaines), à une matrice  $[S]$  creuse au sens des super-éléments mais possédant quand même une connectivité élevée et donc une grande largeur de bande. À fin d'illustration, considérons le problème modèle de la figure 1.5 (déformations planes, module d'Young  $E = 200$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , et éléments quadrilatères à 4 nœuds), en utilisant l'algorithme de condensation des super-éléments du code éléments finis CASTEM 2000 ([Verpeaux *et al.* 88]). La matrice du complément de Schur  $[S]$  a été explicitement construite et les remplissages (termes du triangle inférieur stockés en mémoire) des matrices factorisées sont reportés dans la figure 1.2.1 pour deux problèmes de tailles différentes (table 1.1), pour un stockage semi-morse et renumérotation de type Cuthill–McKee, [Cuthill et McKee 69]. Il est à noter qu'au vu de la géométrie particulièrement simple, les matrices obtenues ont des bandes denses.

### Résolution par construction explicite de $[S]$

Une première approche consiste à opérer une résolution directe du problème condensé à partir de cette construction explicite de la matrice de Schur  $[S]$ . Le calcul des rigidités « élémentaires »  $[S^E]$  des super-éléments  $\Omega^E$  est réalisé par une méthode de type

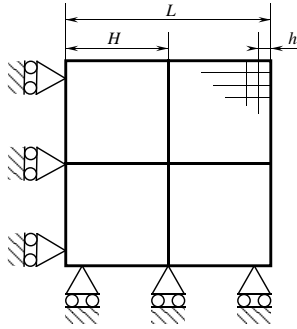


FIG. 1.5 – Problème test pour la condensation

nb de sous-domaines	64	16	4	1
nb ddl $[K^E]$	72	242	882	3362
encombrement $[K^E]$	8 ko	48 ko	337 ko	2.4 Mo
nb ddl $[S]$	1106	498	170	-
encombrement $[S]$	864 ko	393 ko	95 ko	-
nb de sous-domaines	64	16	4	1
nb ddl $[K^E]$	882	3362	13122	51842
encombrement $[K^E]$	0.3 Mo	2 Mo	18 Mo	148 Mo
nb ddl $[S]$	4466	1938	650	-
encombrement $[S]$	13 Mo	6 Mo	1.4 Mo	-

TAB. 1.1 – Caractéristiques des condensations

frontale ([Irons 70]) appliquée aux rigidités des sous-domaines  $\Omega^E$  :

$$[K^E] = \begin{bmatrix} K_{EE} & K_{E\Gamma} \\ K_{\Gamma E} & K_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix}$$

en conservant comme dernier front, l'ensemble des « nœuds maîtres » que constitue  $\partial_i \Omega^E \cap \Gamma$ . Le fait de pouvoir réaliser cette opération sur plusieurs sous-domaines  $\Omega^E$  (simultanément) a conduit à qualifier cette technique de méthode multi-frontale ([Duff 86], [Escaig *et al.* 94], [Farhat et Crivelli 89]).

Bien entendu, la phase d'assemblage des  $[S^E]$  et  $[b^E]$  est séquentielle, ainsi que la résolution du système condensé  $[S][q_\Gamma] = [b]$  (de petite taille s'il y a peu de nœuds sur l'interface  $\Gamma$ , mais de largeur de bande élevée). On peut néanmoins utiliser pour ce système un solveur direct en parallèle, s'il est de taille suffisante pour amortir les coûts de parallélisation de cette phase ([Farhat et Wilson 88], [Heath *et al.* 91], [Gupta *et al.*] par exemple).

L'algorithme de résolution est décrit dans la table 1.2. La phase de post-traitement,

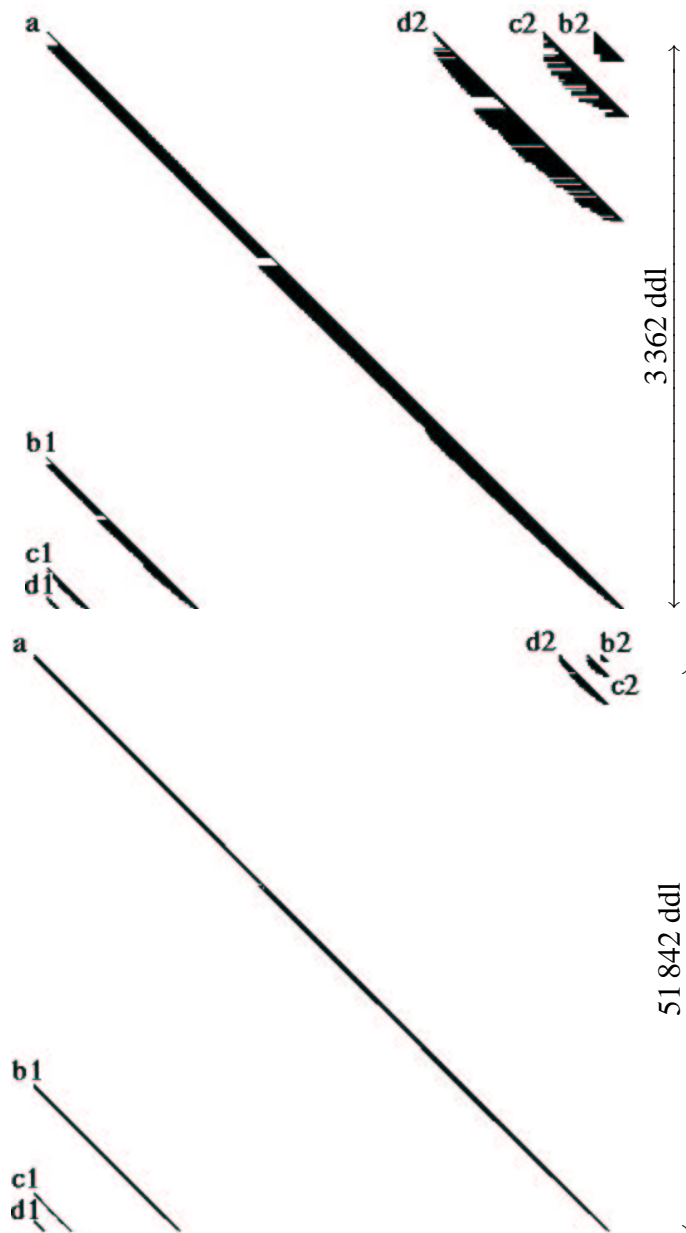
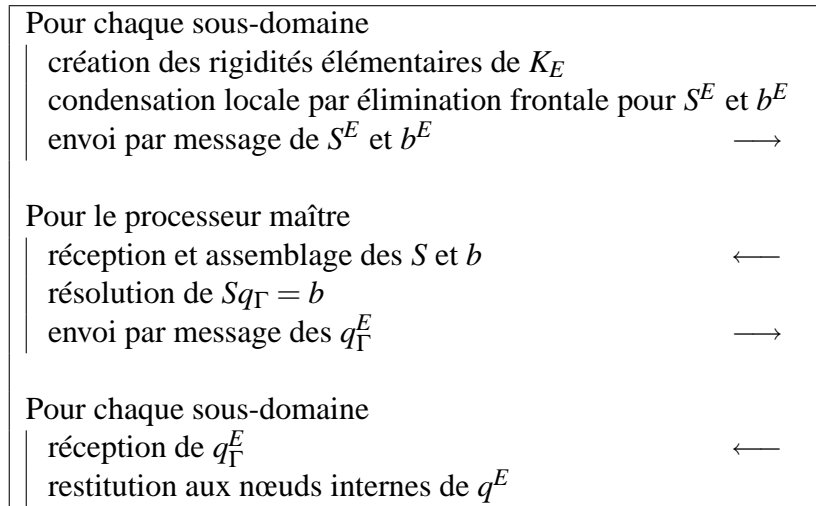


FIG. 1.6 – Profils pour deux tailles de problème (3 362 ddl et 51 842 ddl) :

- a) rigidité totale  $[K]$ ,
- b1)  $[K^E]$  pour 1 sous-domaine parmi 4,
- b2) condensée  $[S]$  de 4 sous-domaines,
- c1)  $[K^E]$  pour 1 sous-domaine parmi 16,
- c2) condensée  $[S]$  de 16 sous-domaines,
- d1)  $[K^E]$  pour 1 sous-domaine parmi 64,
- d2) condensée  $[S]$  de 64 sous-domaines

peu coûteuse, consiste à revenir aux degrés de liberté internes aux sous-domaines par :

$$q^E = K_{EE}^{-1}(f^E - K_{E\Gamma}q_\Gamma)$$



TAB. 1.2 – Algorithme multi-frontal

Comme la figure 1.2.1 l'a déjà illustré, quand le nombre de sous-domaines est important, le nombre de nœuds de  $\Gamma$  peut devenir assez élevé et la taille du problème condensé croît en conséquence. Pour pallier cet inconvénient, des étapes supplémentaires dans la condensation peuvent ainsi être envisagées : condensations successives sur des problèmes de taille de plus en plus réduite ([Escaig *et al.* 94]). Cette méthode apparaît performante, au moins pour des nombres de processeurs modérés (de l'ordre de 10) ([Escaig *et al.* 94]).

Pour conserver un même algorithme de numérotation des degrés de liberté dans la matrice  $[K^E]$ ,  $[K_{EE}]$  peut être numérotée à part, à condition de prévoir un stockage particulier des condensées élémentaires  $[S^E]$  et des blocs qui lui sont connectés suivant des considérations de remplissage optimal ([Escaig 92]).

### Lien entre méthode frontale et condensation

La méthode frontale est en fait une forme récursive de condensation : considérons en effet la phase de traitement de la  $k^{\text{ième}}$  ligne de  $[K^E]$  notée  $[d_k \ A_k]$  où  $d_k$  est le terme diagonal. Notons alors  $[K_k^E]$  la sous-matrice associée aux degrés de liberté  $k$  et suivants,

$$[K_k^E] = \begin{bmatrix} d_k & A_k \\ {}^tA_k & K_{k+1}^E \end{bmatrix}$$

de la même façon, la sous-colonne de  $[f^E]$  constituée des termes  $k$  et suivants est notée  $[f_k^E]$ ,

$$[f_k^E] = \begin{bmatrix} g_k \\ f_{k+1}^E \end{bmatrix}$$

Le traitement de cette ligne par une factorisation de Crout (ou de Choleski), tout comme l'élimination de degré de liberté  $k$  du front, n'est autre qu'une condensation de ce degré de liberté sur les suivants : pour  $k$  croissant,

$$K_{k+1}^E \leftarrow K_{k+1}^E - {}^t A_k d_k^{-1} A_k$$

ainsi que la condensation du second membre — qui correspond à la phase de montée :

$$f_{k+1}^E \leftarrow f_{k+1}^E - {}^t A_k d_k^{-1} g_k$$

Par condensations successives — donc par arrêt prématuré de la factorisation — on construit ainsi :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & d_k & & A_k \\ & & \ddots & \vdots \\ \dots & {}^t A_k & \dots & S^E \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ g_k \\ \vdots \\ b^E \end{bmatrix}$$

Bien entendu, la phase de restitution est conforme au schéma de post-traitement du problème condensé — qui est la phase de descente : pour  $k$  décroissant,

$$q_k^E \leftarrow d_k^{-1} (g_k - A_k \cdot q_{k+1}^E)$$

### Résolution par une méthode de gradient conjugué

Une autre approche consiste à procéder à une résolution ne nécessitant pas d'explicitier la matrice du complément de Schur  $[S]$  ni sa factorisée. De plus, le fait que le conditionnement de  $[S]$  soit meilleur que celui de la matrice de rigidité  $[K]$  plaide en faveur du développement d'algorithmes itératifs de résolution du problème condensé, de type gradient conjugué. En effet, dans [Le Tallec 94], il est montré que le conditionnement de  $[S]$ , pour des maillages et des décompositions en sous-domaines réguliers, est asymptotiquement

$$\kappa([S]) = o\left(\frac{1}{H^2} \left(1 + \frac{H}{h}\right)\right)$$

où  $H$  est la taille des sous-domaines et  $h$  celle des mailles ; le conditionnement de  $[K]$ , quant à lui, est

$$\kappa([K]) = o\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

Pour le problème précédemment décrit figure 1.5, ce conditionnement a été obtenu via la recherche des plus haute et plus basse valeurs propres (algorithmes des puissances inverses et décalage avec algorithme de Lanczos, existants dans le code CAS-TEM 2000) pour diverses valeurs de  $H$  et  $h$ . Il est illustré sur la figure 1.7.

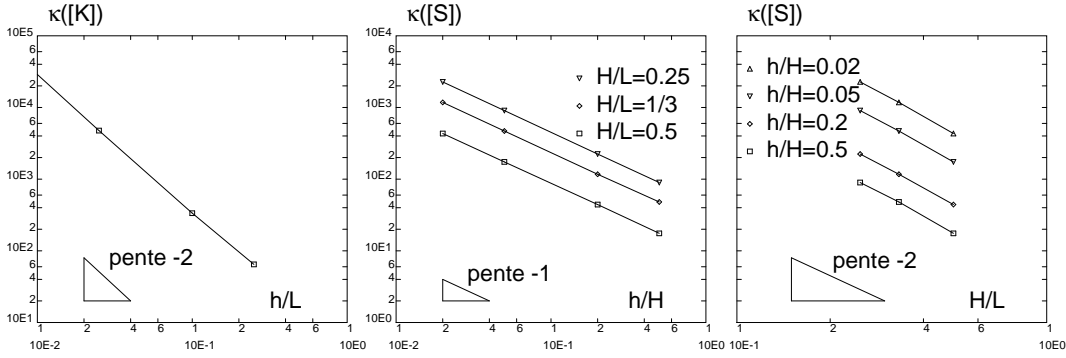


FIG. 1.7 – Conditionnements comparés du problème de départ  $\kappa([K])$  en fonction de  $h$ , et du problème condensé  $\kappa([S])$  en fonction de  $h/H$  et  $H$

Pour une résolution par gradient conjugué du problème condensé, les notations employées sont rappelée en annexe C, page 184. Le produit de  $[S]$  par un vecteur  $[q_\Gamma]$  n'intervient que sous forme de contributions locales  $[S^E][q_\Gamma^E]$  et son évaluation ne nécessite pas la connaissance explicite de  $[S]$  : elle est effectuée en deux temps :

- résolution du problème de Dirichlet avec  $q_\Gamma^E = q_\Gamma^E$ , ce qui demande d'avoir factorisé  $K_{EE}$ ,
- calcul des efforts bord généralisés  $S^E q^E = K_{\Gamma E} q^E + K_{\Gamma \Gamma}^E q_\Gamma^E$ .

où la notation  $[.]$  a été omise pour alléger l'écriture.

L'interprétation de  $S^E$  est alors la suivante : à un champ de déplacement bord imposé comme seul chargement sur  $\partial_i \Omega^E$ ,  $S^E$  fait correspondre le champ d'effort bord associé. À un champ de déplacement bord,  $S$  fait donc correspondre le déséquilibre bord associé.

L'algorithme résultant est alors décrit dans la table 1.3 pour le processeur gérant le sous-domaine  $\Omega^E$ .

On peut noter que les quantités  $\tilde{r}^E$  (respectivement  $r^E$ ) sont les parties « dissociées » (respectivement « dupliquées ») du résidu  $r$  relativement au sous-domaine  $\Omega^E$ , c'est à dire que les valeurs de  $r$  en des mêmes nœuds pour des sous-domaines différents sont obtenues par assemblage de celles des  $\tilde{r}^E$  (respectivement sont les mêmes que celles des  $r^E$ ).

Les simples flèches symbolisent l'envoi ou la réception de messages pour un ou des processeurs particuliers (ceux gérant la ou les sous-domaines connectés au sous-domaine courante), alors que les doubles flèches représentent la participation de tous les processeurs à une opération globale (par exemple, en utilisant des techniques de communication du type descente logarithmique ou diffusion générale, [Kumar *et al.* 94]). L'algorithme présente donc au cours d'une itération deux synchronisations pour des opérations globales et un échange de messages entre processeurs « voisins ».

Ces derniers sont déterminés par la nécessité pour les déplacements sur l'interface  $\Gamma$ , qui sont les inconnues principales, d'avoir une continuité (du moins pour le pro-

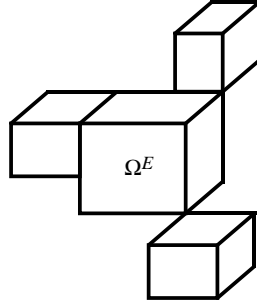
<b>Initialisation</b>	
création des rigidités élémentaires des $K_{EE}$ , $K_{E\Gamma}$ , $K_{\Gamma\Gamma}^E$	
assemblages, factorisation de $K_{EE}$	
condensation des charges, calcul de $b^E$	
à partir d'une solution de départ $q_{ \Gamma_0}^E$ , calcul du résidu d'équilibre $r_0^E$ :	
calcul des contributions $\tilde{r}_0^E = b^E - S^E q_{ \Gamma_0}^E$	
envoi de message $\tilde{r}_0^E$	→
réception et assemblage des $\tilde{r}_0^{E'}$ pour $r_0^E$	←
direction de recherche $d_0^E = r_0^E$	
<b>Itérations</b>	
calcul du produit $S^E d_n^E$	
calcul du pas $\rho_n$ (produit scalaire réparti) :	
calcul des contributions $d_n^E \cdot S^E d_n^E$	
assemblage des contributions pour $d_n \cdot S d_n$	↔
itéré $q_{n+1}^E = q_n^E + \rho_n d_n^E$	
calcul du résidu d'équilibre $r_{n+1}^E$ :	
calcul des contributions $\tilde{r}_{n+1}^E = \tilde{r}_n^E - S^E d_n^E$	
envoi de message $\tilde{r}_{n+1}^E$	→
réception et assemblage des $\tilde{r}_{n+1}^{E'}$ pour $r_{n+1}^E$	←
critère d'arrêt (produit scalaire réparti) :	
calcul des contributions $\tilde{r}_{n+1}^E \cdot r_{n+1}^E$	
assemblage des contributions pour $r_{n+1} \cdot r_{n+1}$	↔
calcul de $\lambda_n$	
direction de recherche $d_{n+1}^E = r_{n+1}^E + \lambda_n d_n^E$	

TAB. 1.3 – Algorithme du gradient conjugué distribué appliqué au problème condensé

blème discrétisé). Le voisinage entre sous-domaines sera alors dicté par le fait que l'intersection entre frontières de deux sous-domaines est non vide ; deux sous-domaines connectés par un coin (ou une arête en 3D) sont donc considérés comme voisins (figure 1.8) et s'ils sont gérés par des processeurs différents, il faudra échanger des messages entre ceux-ci au cours des itérations pour communiquer les quantités bord locales.

### Lien avec le problème non condensé

Le gradient conjugué sur le problème condensé peut s'interpréter comme un gradient conjugué préconditionné (annexe C) sur le problème de départ. Considérons en

FIG. 1.8 – Notion de voisinage d'un sous-domaine  $\Omega^E$  pour la méthode primale

effet un préconditionneur de la forme :

$$\bar{K}^{-1} = \begin{bmatrix} L & -K_E^{-1}K_{E\Gamma} \\ -K_{\Gamma E}K_E^{-1} & -K_{\Gamma E'}K_{E'\Gamma}^{-1} \\ & & \mathbb{I}_d \end{bmatrix}$$

si l'on prend une solution de départ vérifiant l'équilibre intérieur des sous-domaines :

$$q_0 = \begin{bmatrix} K_E^{-1}(f_E - K_{E\Gamma}q_{\Gamma_0}) \\ K_{E'}^{-1}(f_{E'} - K_{E'\Gamma}q_{\Gamma_0}) \\ q_{\Gamma_0} \end{bmatrix}$$

c'est à dire de résidu :

$$r_0 = f - Kq_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{\Gamma_0} = b - Sq_{\Gamma_0} \end{bmatrix}$$

on peut alors montrer que  $L$  n'intervient plus, et que  $q_n$  est de la même forme que  $q_0$ , c'est à dire de résidu nul à l'intérieur des sous-domaines :

$$r_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{\Gamma_n} = b - Sq_{\Gamma_n} \end{bmatrix}$$

Si l'on cherche  $q_{n+1} = q_n + \rho_n d_n$  de façon à minimiser la fonctionnelle  $\Phi_1$  [1.2] discrétisée

$$\Phi_{1h}(q) = \frac{1}{2}q \cdot Kq - f \cdot q$$

alors :

$$\rho_n = \frac{r_n \cdot d_n}{d_n \cdot Kd_n} \quad \text{avec} \quad d_n = \begin{bmatrix} -K_E^{-1}K_{E\Gamma}d_{\Gamma_n} \\ -K_{E'}^{-1}K_{E'\Gamma}d_{\Gamma_n} \\ d_{\Gamma_n} \end{bmatrix}$$

alors  $d_n \cdot Kd_n = d_{\Gamma_n} \cdot Sd_{\Gamma_n}$  et  $r_n \cdot d_n = r_{\Gamma_n} \cdot d_{\Gamma_n}$ . De même, pour l'orthogonalisation de la direction de recherche  $d_{n+1} = \bar{K}^{-1}r_n + \lambda_n d_n$  vis à vis de  $d_n$  :

$$\lambda_n = \frac{\bar{K}^{-1}r_n \cdot Kd_n}{d_n \cdot Kd_n} = \frac{r_{\Gamma_n} \cdot Sd_{\Gamma_n}}{d_n \cdot Kd_n}$$

Il y a donc bien équivalence entre les deux algorithmes.

### 1.2.2 Méthode alternée de Schwarz

Mentionnons aussi un autre type de fractionnement, historiquement introduit par Schwarz ([Schwarz 69]). Dans ce cas, il y a recouvrement partiel des sous-domaines (figure 1.9).

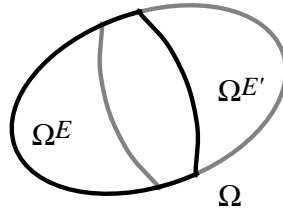


FIG. 1.9 – Découpage en sous-domaines recouvrants

La convergence fait intervenir de nombreux paramètres dus au recouvrement, et de nombreux résultats mathématiques en font mention, par exemple [Lions 88].

Le parallélisme dans cet algorithme de résolution est du type décomposition « rouge-noir » pour lequel une partie des sous-domaines peut être traitée en parallèle (ensemble de sous-domaines non recouvrant entre eux) alternativement avec une autre, [Roux 90]. Dans des cas simples de recouvrement, l'algorithme de Schwarz présente une analogie avec la méthode de Gauss-Seidel par blocs et peut se ramener à une interprétation en tant que sous-partitionnement sans recouvrement [Chan et Goovaerts 92].

Les applications de cette méthode en recouvrement multiple ont aussi été employées, par exemple dans [Badea 91].

### 1.3 Approches duales

Considérons toujours la décomposition en sous-domaines de la figure 1.2. Dualiser la méthode primale consiste à ne plus travailler sur les champs de déplacement bord mais sur les champs d'efforts bords.

Reprenons l'expression en déplacement du problème utilisant la décomposition en sous-domaines [1.2] (page 20). La contrainte de continuité du déplacement bord peut être dualisée par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Le problème devient alors équivalent à trouver le point selle de :

$$L_1(\underline{U}; \underline{F}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)] d\Omega - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS \right\} - \int_{\Gamma} \underline{F} \cdot (\underline{U} - \underline{U}') dS \quad [1.6]$$

$\underline{F}$  est bien entendu, l'effort bord dual du déplacement bord.

À partir d'une telle formulation, on peut construire la méthode de résolution duale de la précédente.

### 1.3.1 Méthode de Schur duale

Si on considère la discrétisation du problème de point selle [1.6], on obtient, dans le cas de deux sous-domaines ([Roux 90]), les équations d'Euler correspondantes (où la notation  $[\cdot]$  a été omise pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} K^E q^E + {}^t B^E F^E &= f^E \\ K^{E'} q^{E'} + {}^t B^{E'} F^E &= f^{E'} \\ B^E q^E + B^{E'} q^{E'} &= 0 \end{aligned}$$

où les  $B^E$  sont les matrices de restriction aux nœuds bord — à une convention de signe près — et  $F^E$  les actions généralisées du sous-domaine  $\Omega^E$  sur  $\Omega^{E'}$  ( $F^{E'} = -F^E$ ). Plaçons nous tout d'abord dans le cas où les matrices de rigidités  $K^E$  sont inversibles (c'est à dire que pour tous les sous-domaines,  $\partial_1 \Omega^E \neq \emptyset$ ). Pour appliquer la même technique de condensation que pour le problème primal, les déplacements sont exprimés en fonction des efforts bord :

$$q^E = (K^E)^{-1} (f^E - {}^t B^E F^E)$$

et la contrainte de continuité en déplacement devient après substitution le problème en effort sur les interfaces :

$$[\Lambda][F] = [c] \quad [1.7]$$

où

$$\begin{aligned} [\Lambda] &= \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E (K^E)^{-1} {}^t B^E = \sum_{E \in \mathbf{E}} \Lambda^E \\ [c] &= \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E (K^E)^{-1} f^E = \sum_{E \in \mathbf{E}} c^E \end{aligned}$$

pour lesquels les derniers  $\sum$  représentent l'assemblage des quantités locales aux sous-domaines  $\Lambda^E$  et  $c^E$ , et où  $[F]$  regroupe toutes les inconnues de type  $F^E$ .

Ici encore, la résolution d'un tel système peut s'effectuer par une méthode de gradient conjugué, pour laquelle le produit  $[\Lambda][F]$  est toujours évalué avec ses contributions :

$$[\Lambda][F] = \sum_{E \in \mathbf{E}} \Lambda^E F^E \quad \text{où} \quad F^{E'} = {}^t B^E F$$

en deux temps :

- résolution du problème de Neumann avec  $F^{E'}$  comme efforts imposés, ce qui demande cette fois-ci d'avoir factorisé la rigidité  $K^E$ ,
- restriction du déplacement obtenu  $q^E$  sur le bord  $\Lambda^E F^{E'} = B^E q^E$

$\Lambda^E$  permet alors à partir d'un champ d'effort bord comme seul chargement, de trouver le champ de déplacement correspondant ; à un champ d'effort bord,  $[\Lambda]$  fait donc correspondre le champ de saut de déplacement bord. Il s'agit bien de la méthode duale de la précédente : au niveau des matrices locales, on a

$$\Lambda^E = (S^E)^{-1}$$

Pour la méthode duale, l'inconnue principale étant un effort à l'interface, elle doit assurer l'équilibre de chaque sous-domaine mais elle n'a pas à être continue en un nœud coin ou arête comme c'était le cas pour le problème primal lorsque l'inconnue principale était le déplacement bord (figure 1.8, page 29). Il n'y a donc ici voisinage entre deux sous-domaine que lorsque la mesure de l'intersection de leur frontière est non nulle (figure 1.10) et non plus seulement lorsque cette intersection est non vide. « L'interconnectivité » entre processeurs sera donc moindre que lors de l'approche primale.

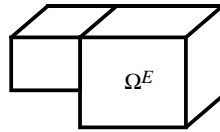


FIG. 1.10 – Notion de voisinage d'un sous-domaine  $\Omega^E$  pour la méthode duale

### 1.3.2 Méthode FETI

Plaçons nous maintenant dans le cas où certains des sous-domaines sont « flottants, » c'est à dire pour lesquels aucune portion de frontière ne possède de condition en déplacement imposé.

La différence d'avec le cas précédent se situe lors de la condensation des efforts ; en effet, le problème de Neumann n'a de solution que si la charge est en équilibre. Dans ce dernier cas, le déplacement n'est alors connu qu'à un mouvement de solide rigide infinitésimal près ([Farhat et Roux 91], [Farhat et Roux 92]) :

$$q^E = K^{E+}(f^E - {}^t B^E F^E) + R^E \alpha^E$$

où  $K^{E+}$  est l'inverse généralisé de la rigidité  $K^E$ ,  $R^E$  l'ensemble des mouvements de solide rigide possibles du sous-domaine  $\Omega^E$  et  $\alpha^E$  les coefficients d'une combinaison linéaire d'entre eux. L'équilibre correspond alors à l'orthogonalité avec tous champs de mouvements de solide rigide :

$$\forall \underline{U}_s^*, \quad \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{U}_s^* dS + \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_s^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}_s^* dS = 0$$

et sous forme discrétisée :

$${}^t R^E (f^E - {}^t B^E F^E) = 0$$

ce qui s'assemble en le système  ${}^t R_B F = d$ , où  $R_B$  est la matrice ligne des mouvements de solide rigide bord  $B^E R^E$ , et  $d$  la matrice colonne des déséquilibres  ${}^t R^E f^E$ .

On en déduit l'expression du nouveau système condensé :

$$\Lambda F = c + R_B \alpha$$

où  $\alpha$  est le vecteur colonne des coefficients  $\alpha^E$ , et  $c$  l'assemblage des charges condensées locales  $B^E K^{E+} f^E$ . Avec les équations d'équilibre des efforts pour chaque sous-domaines, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \Lambda & -R_B \\ -{}^t R_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -d \end{bmatrix} \quad [1.8]$$

Ce dernier est équivalent au problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{{}^t R_B F = -{}^t R_B d} \frac{1}{2} F \cdot \Lambda F - (R_B \alpha + c) \cdot F$$

La technique proposée par la méthode FETI consiste à résoudre ce dernier par gradient conjugué projeté dans le sous-espace des efforts bord équilibrés par sous-domaine. Un projecteur doit donc intervenir pour renvoyer un champ  $F$  dans  $\text{Ker}({}^t R_B)$ . Par exemple ([Farhat et Roux 94]),  $p = I_d - R_B ({}^t R_B R_B)^{-1} {}^t R_B$ .

### Étape de projection

L'équilibrage d'un résidu,  $w = pr$ , consiste donc, connaissant les contributions (déjà notées  $\tilde{r}^E$ ) des sous-domaines à  ${}^tR_B r$ , à déterminer les champs projetés par sous-domaine  $w^E$ . Outre l'assemblage des  $\tilde{r}^E$ , il est donc nécessaire de résoudre un problème global  $({}^tR_B R_B)\bar{r} = r$  dont les restrictions  $\tilde{r}^E$  locales aux sous-domaines permettent de corriger les  $\tilde{r}^E$  :

$$w^E = \tilde{r}^E - \bar{r}^E$$

L'utilisation de ce projecteur  $p$  peut aussi être interprétée comme la recherche dans des champs de déplacement d'une correction en mouvement de solide rigide permettant de vérifier « au mieux » des conditions de continuité en déplacement sur  $\Gamma$ . Considérons en effet une correction aux champs  $q^E$  de la forme  $q^E - R^E \alpha^E$ , qui donne sur le bord  $B^E(q^E - R^E \alpha^E)$ . Une minimisation au sens des moindres carrés du saut de déplacement bord s'écrira alors :

$$\min_{\alpha^E, E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \sum_{E, E'} \left[ B^E(q^E - R^E \alpha^E) + B^{E'}(q^{E'} - R^{E'} \alpha^{E'}) \right]^2$$

soit :

$${}^t(R^E B^E)(B^E R^E)\alpha^E + {}^t(R^{E'} B^{E'})(B^{E'} R^{E'})\alpha^{E'} = {}^t(R^E B^E)(B^E q^E + B^{E'} q^{E'})$$

en notant le saut  $r^E = B^E q^E + B^{E'} q^{E'}$  et en assemblant le système ainsi obtenu :

$$({}^tR_B R_B)\alpha = {}^tR_B r$$

la correction apportée à  $r$  est ainsi de la forme :

$$r - [R_B({}^tR_B R_B)^{-1}({}^tR_B)] r = pr \quad [1.9]$$

Un tel système, global sur tous les sous-domaines, à résoudre lors d'une projection est de taille réduite : en 3D, il porte sur au plus 6 degrés de liberté pour fois le nombre de sous-domaines.

### Algorithme de résolution

L'algorithme résultant est alors décrit dans la table 1.4 pour le processeur gérant le sous-domaine  $\Omega^E$ . La recherche d'une solution de départ  $F_0^E$  satisfaisant

$${}^tR^E(f^E - {}^tB^E F_0^E) = 0$$

peut être cherchée sous la forme  $F_0^E = B^E R^E \beta_0^E$  (c'est à dire un champ équiprojectif) ; l'équilibre global par sous-domaine conduit alors à résoudre :

$$({}^tR_B R_B)\beta_0 = {}^tR_B f$$

Initialisation	
création des rigidités élémentaires de $K^E$	
assemblage, factorisation de $K^E$	
condensation des charges, calcul de $c^E$	
à partir d'une solution de départ $F_0^E$ et $\alpha_0^E = 0$ , calcul du résidu projeté :	
calcul des contributions $\tilde{r}_0^E = c^E - \Lambda^E F_0^E$	
envoi de message $\tilde{r}_0^E$	→
pour la projection :	
réception, assemblage et projection éventuelle de $r_0$ en $w_0$	
envoi de message des $w_0^E$	→
réception des projetés locaux $w_0^E$	←
direction de recherche $d_0^E = w_0^E$	
Itérations	
calcul du produit $\Lambda^E d_n^E$	
calcul du pas $\rho_n = \frac{w_{n-1} \cdot w_{n-1}}{d_n \cdot \Lambda d_n}$	↔
itéré $F_{n+1}^E = F_n^E + \rho_n d_n^E$	
calcul du résidu en saut de déplacement projeté (comme ci-dessus)	↔
critère d'arrêt :	
calcul du produit scalaire réparti $w_{n+1} \cdot w_{n+1}$	↔
calcul de $\lambda_n = \frac{w_{n+1} \cdot w_{n+1}}{w_n \cdot w_n}$	
direction de recherche $d_{n+1}^E = w_{n+1}^E + \lambda_n d_n^E$	

TAB. 1.4 – Algorithme du gradient conjugué projeté distribué

On peut d'autre part remarquer qu'il n'est pas nécessaire de rechercher les mouvements  $\alpha$  dans l'algorithme itératif, puisqu'ils n'interviennent que dans le résidu  $c + R_B \alpha - \Lambda F$  ; or, après projection, on a  $p(R_B \alpha) = 0$ . Il n'est donc évalué qu'en post-traitement ([Farhat et Roux 91]) par :

$$\alpha = ({}^t R_B R_B)^{-1} {}^t R_B (\Lambda F - c) = -({}^t R_B R_B)^{-1} {}^t R_B r$$

## 1.4 Préconditionnements

La convergence des algorithmes de gradient conjugué peut être fortement améliorée par l'utilisation d'un préconditionneur en diminuant le conditionnement du système à résoudre, [Papadrakakis et Dracopoulos 91]. L'algorithme qui en résulte est similaire mais comporte une phase supplémentaire de résolution d'un système dont le second membre est le résidu courant (voir annexe C).

De nombreuses recherches en analyse numérique portent sur la construction de tels préconditionneurs, par exemple dans [Glowinski *et al.* 88] et suivants. Ici, nous nous intéresserons essentiellement aux préconditionneurs de type « Neumann ».

### 1.4.1 Préconditionneur de Neumann pour le problème primal

Dans le cas de figure où tous les sous-domaines possèdent une partie de frontière à déplacement imposé ( $\partial_1 \Omega^E \neq \emptyset$ ), les condensées locales de Schur  $[S^E]$  sont toutes inversibles. La matrice du complément de Schur  $[S]$  étant l'assemblage des  $[S^E]$ , un préconditionneur envisageable est celui qui correspond aux problèmes de Neumann locaux :  $[\bar{S}]^{-1}$  est l'assemblage des  $[S^E]^{-1}$  [De Roeck et Le Tallec 91], [Le Tallec 94].

L'application de  $[\bar{S}]^{-1}$  à un résidu conduit à résoudre des problèmes de Neumann-Dirichlet (puisque  $\partial_1 \Omega^E \neq \emptyset$ ) sous-domaine par sous-domaine pour déterminer le champ de déplacement bord correspondant  $[q_\Gamma^E]$ . Le champ résultant  $[q_\Gamma]$  n'étant plus continu, il est nécessaire de procéder à une opération de pondération (ou de prise de moyenne) des déplacements sur l'interface  $\Gamma$  issus de deux sous-domaines voisins (voire plus dans le cas de nœuds « coins » en 2D et 3D, et de nœuds « arêtes » en 3D).

Pour traiter la phase de préconditionnement, il va donc être nécessaire d'avoir la factorisée de  $[K^E]$ , matrice de rigidité du sous-domaine  $\Omega^E$ . Or, dans la méthode primale, seule la partie  $[K^{EE}]$  est factorisée ; en particulier pour des problèmes de renumérotation, on sera conduit à stocker et factoriser deux matrices distinctes, ce qui peut être très pénalisant sur l'encombrement. De plus, la phase de préconditionnement conduit à pratiquer une montée-descente supplémentaire ; le coût d'une itération comme celui de l'initialisation est donc doublé en première approximation. En contrepartie, un résultat de conditionnement est présenté dans [Le Tallec 94] : dans un cas général de connectivité entre sous-domaines

$$\kappa([\bar{S}]^{-1}[S]) = o\left(\frac{1}{H^2}\left(1 + \log^2 \frac{H}{h}\right)\right)$$

Le préconditionneur est donc

- presque optimal (faible dépendance en  $h$ ),
- non extensible (dépendance en  $H$ ).

### 1.4.2 Balancing method

Une amélioration de ce dernier résultat est obtenue dans la méthode proposée par Mandel dans [Mandel 93] pour la méthode primale, où le preconditionnement s'apparente à celui de Neumann tout en utilisant un problème global sur toute la structure afin de devenir extensible.

Reprenons l'algorithme du gradient conjugué appliqué au problème de Schur primal (table 1.3, page 28). Changeons l'initialisation en la proposition d'un itéré de départ  $[q_{\Gamma_0}]$  mais aussi d'un ensemble de mouvements de solide rigide par sous-domaine  $[\alpha_0]$  déterminé de manière à avoir un résidu  $[r_0]$  équilibré par sous-domaine :  ${}^t R_B r_0 = 0$  (avec les notations du paragraphe 1.3.2, page 35). On peut montrer qu'ayant un tel résidu  $r_n$ , le preconditionneur fait intervenir les problèmes de Neumann locaux inverses généralisés :  $[\bar{S}]^{-1}$  est l'assemblage des  $[S^E]^{-1}$ . La phase supplémentaire consiste à corriger le déplacement  $[q_n]$  ainsi obtenu par des mouvements de solide rigide sur chaque sous-domaine :  $q_n^E - R^E \alpha_n^E$  de façon, après prise de moyenne, à déterminer un nouveau résidu qui soit équilibré par sous-domaine. On souhaite donc avoir sur le résidu  $r_{n+1}$

$${}^t R_B r_{n+1} = 0$$

ce qui s'écrit

$${}^t R_B \left[ r_n - S \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E (q_n^E - R^E \alpha_n^E) \right] = 0$$

Ce qui, avec  ${}^t R_B r_n = 0$ , donne :

$${}^t R_B S R_B \alpha_n = {}^t R_B S \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E q_n^E$$

que l'on peut rapprocher de la phase de projection (ou recollement en moyenne par mouvements de solide rigide) [1.9] de la méthode FETI décrite au chapitre 1.3.2 (page 36).

Les inconvénients du preconditionneur de Neumann demeurent, une opération globale sur l'ensemble de la structure est introduite, la phase de projection est plus coûteuse que celle de la méthode FETI, mais le gain réside dans le conditionnement en  $o(1)$  qui conduit à l'optimalité et l'extensibilité.

#### Remarque

On peut noter ici que la taille maximale du problème global est de 6 fois le nombre de sous-domaines ; il fait intervenir l'opérateur  ${}^t R_B S R_B$  dont la forme indique un problème dans l'ensemble de ces mouvements de solide rigide équivalent au sens de Ritz au problème de Schur primal. Nous reviendrons sur cet aspect lors de l'emploi de plusieurs échelles dans l'algorithme de la méthode LATIN.

### 1.4.3 Préconditionnement de la méthode FETI

Comme pour l'approche primale, il est possible de mettre en place de tels accélérateurs de convergence. Au vu de l'interprétation de  $[\Lambda]$  faite au chapitre 1.3.1, page 33, un choix de préconditionneur  $[\bar{\Lambda}]^{-1}$  consiste à faire correspondre au résidu  $[w]$  en saut de déplacement bord, un champ d'effort  $[\bar{\Lambda}]^{-1}[w]$ . Si l'on souhaite conserver ici le caractère local par sous-domaine, cela peut se traduire par la résolution d'un problème de Dirichlet à déplacement bord imposé  $[w^E]$  sur chaque sous-domaine en parallèle.

#### Préconditionneur de Dirichlet optimal

$[\Lambda]$  étant l'assemblage des  $[\Lambda^E]$ , le préconditionneur peut être choisi comme l'assemblage des  $[\Lambda^E]^{-1} = [S^E]$  :

$$[\bar{\Lambda}]^{-1} = \sum_{E \in \mathbf{E}} K_{\Gamma\Gamma}^E - K_{\Gamma E} (K_{EE})^{-1} K_{E\Gamma}$$

De façon duale au préconditionneur de Neumann, l'inconvénient réside cette fois-ci dans l'assemblage, la factorisation et le stockage de  $[K_{EE}]$  en plus de  $[K^E]$ , et dans les montées-descentes supplémentaires pour évaluer les produits  $[S^E][w^E]$ . Le conditionnement prévisible en résultant, [Farhat *et al.* 94], est :

$$\kappa = o\left(1 + \log^2 \frac{H}{h}\right)$$

donc quasi-optimal.

#### Préconditionneur « lumped »

Un préconditionneur non optimal mais économique a été proposé dans [Farhat et Roux 91]. Comme

$$[\Lambda] = \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E (K^E)^{+t} B^E$$

le choix

$$[\Lambda] = \sum_{E \in \mathbf{E}} B^E K^{Et} B^E = \sum_{E \in \mathbf{E}} K_{\Gamma\Gamma}^E$$

pour approcher le problème dual semble intéressant ; en particulier, il ne fait plus intervenir que des produits matrice-vecteur locaux sur l'interface. Le conditionnement théorique est cette fois-ci :

$$o\left(\frac{H}{h}\right)$$

**Remarque**

Afin de préserver la symétrie, il est nécessaire cette fois-ci de procéder à deux projections par itération, l'une portant sur le résidu et l'autre sur le résidu préconditionné. Une itération comportera alors deux phases globales de détermination de mouvements de solide rigide.

## 1.5 Bilan

Pour pouvoir procéder à un traitement en parallèle de la résolution du problème de référence de calcul de structure, le domaine est partitionné en sous-domaines. Lorsque le partitionnement est assez fin, c'est à dire lorsque le nombre de sous-domaines est élevé, les algorithmes itératifs semblent prendre le pas sur les résolutions directes. Ils peuvent être classés suivant le type de traitement qu'ils utilisent pour les inconnues à l'interface :

- la méthode primale conserve un déplacement continu à la traversée des interfaces et cherche à améliorer le déséquilibre en effort au cours des itérations ;
- la méthode duale propose des efforts en équilibre sur l'interface — qui doivent satisfaire aussi l'équilibre global des sous-domaines — et réduit le saut de déplacement au cours des itérations.

Le parallélisme des algorithmes synchrones qui en résulte est un parallélisme à « gros grain » : il fait intervenir des calculs locaux par processeur importants par rapport au flot de données à échanger entre processeurs. Le degré de parallélisme, ainsi que l'équilibrage des charges, sont donc dictés par le partitionnement en sous-domaines effectué.

Les problèmes qui en résultent se prêtent bien à une résolution sur calculateurs multi-processeurs, mais comme ils restent coûteux, l'intervention de préconditionneurs « parallèles » permet d'améliorer les performances. Pour les approches *cinématiques*, ces derniers mettent en œuvre une approche *statique* duale, et réciproquement.

D'autres approches, qualifiées de *mixtes*, cherchent à traiter de façon égalitaire efforts et déplacements aux interfaces. C'est l'une d'elles qui va être décrite au chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Une approche à grand incrément de temps

---

<b>2.1</b>	<b>Décomposition en sous-structures et interfaces</b>	<b>46</b>
2.1.1	Comportement des sous-structures	46
2.1.2	Comportement des interfaces	47
2.1.3	Solution du problème de référence	48
<b>2.2</b>	<b>Algorithme de résolution</b>	<b>50</b>
2.2.1	Étape locale	50
2.2.2	Étape linéaire	52
2.2.3	Initialisation de l'algorithme	53
2.2.4	Contrôle de l'algorithme	53
2.2.5	Implantation — Synchronisme	54
2.2.6	Équivalence d'algorithmes	57
<b>2.3</b>	<b>Convergence</b>	<b>59</b>
<b>2.4</b>	<b>Exemples</b>	<b>68</b>
2.4.1	Un exemple à grand nombre de degrés de liberté : l'éprouvette biaxiale	68
2.4.2	Exemple de traitement de contact unilatéral avec répétition géométrique : le roulement	77

---

Initialement proposée dans [Ladevèze 85], pour les problèmes non-linéaires d'évolution, la méthode à grand incrément de temps (en anglais, LARge Time INcrement method — LATIN), est une méthodologie de construction d'algorithmes, qui sont en rupture d'avec les méthodes incrémentales classiques. L'intervalle d'étude n'a pas à être découpé en intervalles de temps sur lesquels est postulé une loi d'évolution des inconnues du problème. À chaque itération, l'algorithme construit une approximation de la solution sur tout le domaine et tout l'intervalle de temps, approximation qui s'affine au cours des itérations.

Cette approche repose sur trois principes ([Ladevèze 96]) :

- séparation des difficultés : devant résoudre un problème qui porte sur de grands systèmes globaux en variables d'espace, et des non-linéarités fortes, les équations sont séparées en deux groupes. Le premier comporte les équations *locales* (éventuellement non-linéaires), le second, les équations *linéaires* (éventuellement globales sur la structure).
- approche itérative à deux étapes : on construit alternativement une solution appartenant à chaque groupe d'équations, de façon à ne faire intervenir à chaque fois qu'une seule des difficultés précédentes. *L'étape locale* conduit à des problèmes non-linéaires locaux en variables d'espace, paramétrés par le temps. *L'étape linéaire* conduit à un problème global mais linéaire.
- représentation mécanique adaptée des inconnues : les corrections successives de la solution approchée sont cherchées sous une forme adaptée au problème traité, par exemple une somme de chargements radiaux (produits d'une fonction du temps par une fonction d'espace).

Cette approche a été appliquée aux problèmes d'élasto-plasticité, par exemple dans [Boisse *et al.* 89], de viscoplasticité [Cognard 89a], [Cognard 89b] sous chargements cycliques [Arzt 94], [Cognard et Ladevèze 93]. Elle est utilisée aussi pour les problèmes de dynamique [Royer 90], [Gaignebet 96], [Ladevèze et Lemoussu 96], pour l'analyse du délaminage [Allix 87], ainsi que pour les grandes transformations [Bussy *et al.* 90] et le post-flambage [Boucard 96], [Boucard *et al.* 94].

En ce qui concerne le parallélisme, deux voies sont développées. La première utilise le parallélisme interne à la méthode ([Cognard et Ladevèze 91], [Arzt *et al.* 94]) : la séparation forte du caractère global ou local des équations permet de traiter tous les problèmes locaux (typiquement : l'intégration de la loi de comportement) de façon parallèle. La deuxième, [Ladevèze 87], [Cognard *et al.* 96], traite de la résolution des problèmes implicites de structures par une approche de sous-structuration. Le comportement de la méthodes sur diverses architectures de machines a été testé en élasticité bidimensionnelle [Ladevèze et Lorong 92], [Lorong 94], l'utilisation de la modularité de l'approche, sans forcément une préoccupation pour le calcul parallèle, pour des assemblages de structures, est traitée dans [Danwé 93], [Champaney 96], [Blanzé *et al.* 96].

Dans notre travail, nous sommes concernés par la version de cette approche de sous-structuration dans le cas d'un comportement linéaire du matériau. Le temps n'in-

tervient donc pas à proprement parler, puisque seule la configuration finale nous intéresse : cependant, le schéma des approches LATIN est conservé dans le souci de se placer à l'intérieur un cadre adapté à la résolution de problèmes non-linéaires d'évolution.

Dans ce chapitre, nous présentons la mise en place de l'algorithme au niveau du milieu continu. La discrétisation ne sera abordée qu'au chapitre suivant et les exemples présentés anticipent donc un peu cette partie : ils permettent cependant de qualifier le comportement de la méthode ainsi que son applicabilité sur ordinateur parallèle.

## 2.1 Décomposition en sous-structures et interfaces

Comme précédemment, afin de rompre la globalité de la recherche d'un champ de déplacement et d'un champ de contrainte admissibles sur toute la structure  $\Omega$ , on introduit une partition du milieu, mais cette fois-ci en deux entités distinctes : les *sous-structures* et les *interfaces*, [Ladevèze 87], [Ladevèze 96]. La vision du problème proposée ici consiste à considérer ces deux entités comme des structures à part entière, chacune possédant ses propres variables et les équations traduisant son propre comportement.

Lorsque la structure étudiée résulte d'un assemblage de sous-structures, la partition s'introduit naturellement en utilisant les surfaces de jonction entre les diverses sous-structures. Lorsqu'elle est composée d'une ou d'un nombre réduit de sous-structures massives, la partition peut se faire de façon artificielle au sein des sous-structures, par exemple, à partir de la seule géométrie, en utilisant une décomposition automatique [Farhat 88], [Malone 88], [Padovan et Kwang 91], [Al-Nasra et Nguyen 91], [Dagum 93], [Farhat et Lesoinne 93]. Cette partition peut alors répondre à des impératifs d'optimisation (réduction des communications entre processeurs, vitesse de convergence de l'algorithme) ainsi qu'à l'équilibrage des charges entre processeurs parmi lesquels seront distribuées les sous-structures.

### 2.1.1 Comportement des sous-structures

Considérons une sous-structure  $\Omega^E$ , de frontière  $\partial\Omega^E$ . Elle doit être en équilibre avec un environnement qui est composé de forces de volume  $\underline{f}_d^E$  (appliquées sur  $\Omega^E$ ) ainsi que de déplacements  $\underline{W}^E$  et de densités d'efforts  $\underline{F}^E$  exercés par les interfaces qui entourent  $\Omega^E$  (appliqués sur  $\partial_i\Omega^E$ ) (figure 2.1).

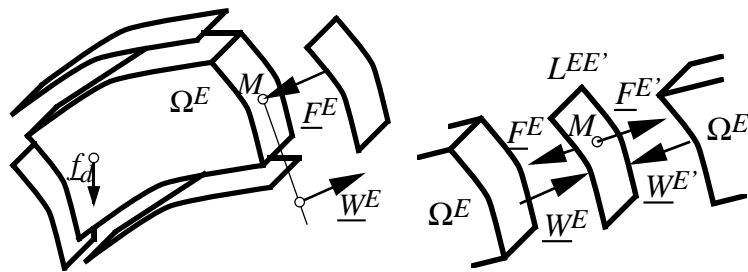


FIG. 2.1 – Sous-structure et interface

L'état courant de la sous-structure  $\Omega^E$  est donc caractérisé par la donnée de la quantité  $\mathbf{s}^E = (\underline{U}^E, \underline{W}^E; \underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$ . Elle doit alors vérifier :

- les équations de liaison : le couple  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  est *cinématiquement admissible au*

sens de la sous-structure  $\Omega^E$

$$\begin{aligned} \underline{U}^E &\in U^E \\ \underline{U}^E|_{\partial_1\Omega^E} &= \underline{U}_d \\ \underline{U}^E|_{\partial_i\Omega^E} &= \underline{W}^E \end{aligned} \quad [2.1]$$

où  $U^E$  est l'ensemble des champs de déplacement définis sur  $\Omega^E$  à énergie finie.

Sous ces conditions, on notera  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E) \in U_{\text{ad}}^E$

- les équations d'équilibre : le couple  $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$  doit être *statiquement admissible au sens de la sous-structure  $\Omega^E$* , c'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^{E*}, \underline{W}^{E*}) \in U_{\text{ad}}^{E0}, \\ - \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{E*})] d\Omega + \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2\Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS + \\ + \int_{\partial_i\Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS = 0 \end{aligned} \quad [2.2]$$

et on notera alors  $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E) \in S_{\text{ad}}^E$ .  $U_{\text{ad}}^{E0}$  est ici l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour des conditions aux limites homogènes, relatifs à la sous-structure  $\Omega^E$ .

- la relation de comportement :

$$\underline{\sigma}^E = \mathbf{K}\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \quad [2.3]$$

Dans le cas purement linéaire des sous-structures, on peut se contenter d'avoir comme inconnues principales les déplacements et efforts bords qui suffisent à retrouver les déplacements et contraintes intérieurs. Le problème de la détermination de ces inconnues vérifiant le comportement des sous-structures est un problème mal posé qui n'assure pas l'unicité de la solution. On verra que l'adjonction de la vérification d'une direction de recherche permet de retrouver un problème standard.

## 2.1.2 Comportement des interfaces

Les interfaces assurent les liaisons entre les sous-structures. Elles ont un comportement qui traduit le type d'interaction présent entre sous-structures adjacentes et peuvent être considérées comme des structures à part entière, même si elles sont surfaciques. Considérons ainsi la liaison  $L^{EE'}$  qui relie les sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  (figure 2.1).

Dans le cas où il s'agit d'une liaison parfaite,  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  et  $(\underline{U}^{E'}, \underline{W}^{E'})$  doivent vérifier :

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{W}^E = \underline{W}^{E'} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'} \quad [2.4]$$

Ce type de liaison est, en particulier, utilisé lors d'une partition artificielle au sein de la structure étudiée.

D'autres types de liaison peuvent être envisagés ([Blanzé *et al.* 96], [Ladevèze 96]). Par exemple, celui traduisant le contact unilatéral sans frottement et sans jeu : en notant  $\underline{n}^{EE'}$  la normale unitaire à l'interface  $\Gamma^{EE'}$  au point courant, orientée de la sous-structure  $\Omega^E$  vers  $\Omega^{E'}$ , et  $\pi$ , l'opérateur de projection orthogonale sur le plan tangent correspondant, on a sur  $\Gamma^{EE'}$

$$\begin{aligned} \underline{F}^E + \underline{F}^{E'} &= 0 \quad \text{et} \quad \pi \underline{F}^E = \pi \underline{F}^{E'} = 0 \\ \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{W}^{E'} - \underline{W}^E) &\geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{n}^{EE'} \cdot \underline{F}^{E'} \geq 0 \\ (\underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{W}^{E'} - \underline{W}^E))(\underline{n}^{EE'} \cdot \underline{F}^{E'}) &= 0 \end{aligned} \quad [2.5]$$

Plusieurs approches sont développées pour traiter de tels problèmes, aussi variées que les approches de type lagrangien augmentés, pénalisation, programmation mathématique, ... [Zhong et Mackerle 92], [Wronski et Jean 95] par exemple.

Les conditions aux limites (sur  $\partial_1 \Omega^E$  et  $\partial_2 \Omega^E$ ) peuvent aussi être prises en compte par l'intermédiaire de liaisons « efforts imposés » ou « déplacements imposés ». Elles peuvent être traitées comme des liaisons parfaites. Toutefois, les conditions en déplacement, ou en effort, sont imposées dans le comportement de ces interfaces :

- interface à déplacement imposé :  $\hat{W}^E = \underline{U}_d$ ,
- interface à effort imposé :  $\hat{F}^E = \underline{F}_d$ .

L'écriture générale du comportement d'une interface, ayant l'équilibre local  $\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0$ , se traduit en considérant la discontinuité en déplacement  $\underline{W}^{EE'} = \underline{W}^{E'} - \underline{W}^E$  sur l'interface  $L^{EE'}$ . Il s'agit d'une grandeur cinématique analogue à une déformation.  $\underline{F}^{EE'} = -\underline{F}^E = \underline{F}^{E'}$  en est la grandeur conjuguée, ici une force. Ainsi la formulation fonctionnelle de la relation de comportement de l'interface est alors donnée par :

$$\underline{F}^{EE'} = \mathbb{H}(\underline{W}^{EE'})$$

$\mathbb{H}$  est un opérateur caractéristique de l'interface. L'idée de modéliser un contact, une liaison, par une entité mécanique surfacique est souvent utilisée dans le domaine du calcul. Pour les méthodes de décomposition de domaine, elle a été introduite par J. Ladevèze dans [Ladevèze 85].

Là encore, la détermination de champs de déplacement et d'efforts astreints à vérifier la comportement des interfaces seul n'a pas une solution unique et il sera nécessaire de vérifier aussi une direction de recherche pour rendre le problème bien posé.

### 2.1.3 Solution du problème de référence

L'état de la structure est alors caractérisé par

$$\mathbf{s} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{s}^E = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} (\underline{U}^E, \underline{W}^E; \underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$$

En suivant la démarche de la méthode LATIN, le premier principe consiste à séparer les difficultés. Le comportement des interfaces [2.4] étant local en variables d'espace,

l'ensemble des  $s$  vérifiant ce comportement est noté  $\Gamma$ . Afin de découpler l'ensemble du problème pour un traitement en parallèle, les équations d'admissibilités des sous-structures [2.1] et [2.2], globales uniquement sous-structure par sous-structure, doivent être séparées de  $\Gamma$ . Le comportement du matériau [2.3], ici élastique linéaire, peut quant à lui être regroupé avec ces dernières équations. L'ensemble des  $s$  vérifiant donc le comportement des sous-structures est noté  $\mathbf{A}_d$ . Le problème de l'assemblage des sous-structures et des interfaces est donc de trouver  $s_{ex}$ , intersection de  $\mathbf{A}_d$  et  $\Gamma$ , ce qui est illustré par la figure 2.2.

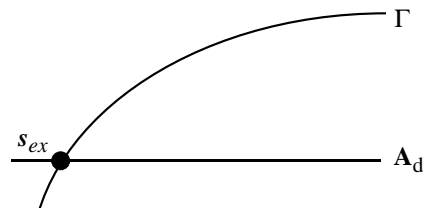


FIG. 2.2 – Solution à rechercher

## 2.2 Algorithme de résolution

Le deuxième point des approches à grand incrément de temps passe par la mise en place d'un algorithme itératif à deux étapes. Il construit successivement une solution approchée appartenant à  $\Gamma$ , puis à  $\mathbf{A}_d$ . Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des directions de recherche (figure 2.3) qui sont les paramètres de la méthode.

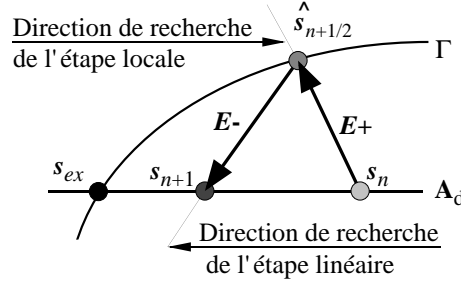


FIG. 2.3 – Principe de la méthode

Chaque itération comprend ainsi deux étapes ; l'une est dite *locale* et l'autre *linéaire*.

### 2.2.1 Étape locale

L'étape locale consiste, connaissant un élément  $s_n$  de  $\mathbf{A}_d$ , à construire  $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$  en vérifiant la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$  :

$$\begin{aligned} (\hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E - \underline{F}_n^E) - k^+(\hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E - \underline{W}_n^E) &= 0 \\ (\hat{\underline{F}}_{n+1/2}^{E'} - \underline{F}_n^{E'}) - k^+(\hat{\underline{W}}_{n+1/2}^{E'} - \underline{W}_n^{E'}) &= 0 \end{aligned} \quad [2.6]$$

en tout point de toute interface  $L^{EE'}$ .  $k^+$  étant un opérateur local en variables d'espace, cette étape ne porte que sur des quantités locales ; elle est donc parfaitement parallélisable.

En particulier pour une interface parfaite, on a explicitement (en omettant les indices  $n$  et  $n + 1/2$  pour alléger les notations) :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{W}}^E &= \underline{\hat{W}}^{E'} = \frac{1}{2}[(\underline{W}^E + \underline{W}^{E'}) - (k^+)^{-1}(\underline{F}^E + \underline{F}^{E'})] \\ \underline{\hat{F}}^E &= -\underline{\hat{F}}^{E'} = \frac{1}{2}[(\underline{F}^E - \underline{F}^{E'}) - k^+(\underline{W}^E - \underline{W}^{E'})] \end{aligned}$$

Une interprétation possible du problème ainsi posé à l'étape locale est celui décrit par la figure 2.4 où le paramètre  $k^+$  de la direction de recherche est l'analogie d'un ressort réparti sur l'interface.

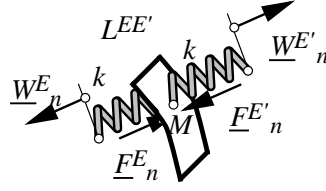


FIG. 2.4 – Interprétation de l'étape locale

Un choix simple pour la forme de  $k^+$  est  $k^+ \mathbb{I}_d$ , où  $k^+$  est un scalaire positif. Pour une interface modélisant le contact sans frottement et sans jeu, la direction de recherche permet alors d'écrire pour la composante normale :

$$\underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{W}}^{E'} + \underline{\hat{W}}^E) = \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{W}^{E'} + \underline{W}^E) - \frac{1}{k^+} \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{F}^{E'} + \underline{F}^E) = b$$

$$\begin{aligned} -\underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) + k^+ \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{\hat{W}}^E) &= \\ &= k^+ \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{W}^{E'} - \underline{W}^E) - \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{F}^{E'} - \underline{F}^E) = a \end{aligned}$$

Le comportement de l'interface permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) &= -2\underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} \leq 0 \\ \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{\hat{W}}^E) &\geq 0 \end{aligned}$$

et d'en déduire que :

$$\begin{aligned} \underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} &= -\underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{F}}^E = \frac{1}{2} | -a | \\ \underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{W}}^{E'} &= \frac{1}{2} (b + \frac{1}{k^+} |a|) \\ \underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{W}}^E &= \frac{1}{2} (b - \frac{1}{k^+} |a|) \end{aligned}$$

Pour les composantes tangentielles,

$$\pi \underline{\hat{F}}^{E'} = \pi \underline{\hat{F}}^E = 0$$

et la direction de recherche donne :

$$\begin{aligned} \pi \underline{\hat{W}}^{E'} &= \pi \underline{W}^{E'} - \frac{1}{k^+} \pi \underline{F}^{E'} \\ \pi \underline{\hat{W}}^E &= \pi \underline{W}^E - \frac{1}{k^+} \pi \underline{F}^E \end{aligned}$$

Il est à noter que le traitement de la non linéarité de contact s'effectue au niveau de l'étape locale ; elle ne modifie ainsi que peu le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence, [Champany *et al.* ].

### 2.2.2 Étape linéaire

L'étape linéaire, quant à elle, demande de construire  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ , connaissant un élément  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  de  $\Gamma$ , en vérifiant la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ , qui est cette fois-ci :

$$(\underline{F}_{n+1}^E - \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E) + \mathbf{k}^-(\underline{W}_{n+1}^E - \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E) = 0 \quad [2.7]$$

en tout point des frontières intérieures  $\partial_i \Omega^E$ . Le problème à résoudre est cette fois-ci global en variables d'espace, sous-structure par sous-structure. Il est facile de vérifier que ce dernier est bien posé en l'illustrant sur la figure 2.5 ; il s'agit d'un problème avec conditions aux limites mixtes, dites de Robin (ou Fourier).

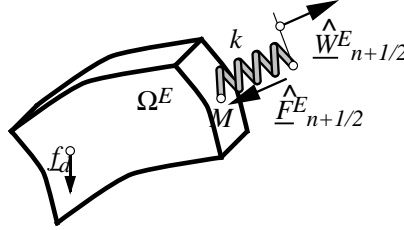


FIG. 2.5 – Interprétation de l'étape linéaire

En effet, en utilisant la direction de recherche [2.7], le problème sur la sous-structure  $\Omega^E$  consiste à trouver  $\mathbf{s}_{n+1}$  avec  $(\underline{U}_{n+1}^E, \underline{W}_{n+1}^E)$  cinématiquement admissible, et la contrainte  $\sigma_{n+1}^E$  vérifiant la relation de comportement  $\sigma_{n+1}^E = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_{n+1}^E)$  ainsi que :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^{E*}, \underline{W}^{E*}) \in U_{\text{ad}}^{E0}, \\ \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\sigma_{n+1}^E \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega + \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{W}_{n+1}^E \cdot \mathbf{k}^- \underline{W}^{E*} dS = \\ = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS + \int_{\partial_i \Omega^E} (\hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + \mathbf{k}^- \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E) \cdot \underline{W}^{E*} dS \end{aligned}$$

Les efforts bords étant alors :

$$\underline{F}_{n+1}^E = \hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E + \mathbf{k}^- \hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E - \mathbf{k}^- \underline{W}_{n+1}^E$$

La résolution de cette étape sera décrite de façon plus détaillée lorsque la discrétisation des inconnues aura été choisie au chapitre 3, page 88. Précisons cependant qu'avec la technique des éléments finis, elle conduira à résoudre un problème de structure à comportement élastique sur  $\Omega^E$ .

Tous les problèmes relatifs aux sous-structures  $\Omega^E$  sont indépendants et peuvent donc être résolus en parallèle. Chacune des deux étapes peut ainsi se paralléliser si l'on distribue les sous-structures et les interfaces parmi les processeurs disponibles.

Dans la suite, pour alléger les notations, on prendra comme paramètres de direction de recherche  $k^+ = k^- = k\mathbb{I}_d$ . Cette forme de direction de recherche sera prise ultérieurement dans tous nos exemples. Dans la version développée actuellement, la valeur de  $k$  est fixée arbitrairement par l'utilisateur. On verra cependant au chapitre 2.3, page 59, qu'une valeur intéressante est liée à une dimension caractéristique de la structure, si celle-ci est massive ; lorsque la structure est élancée et que les effets de flexion sont importants, il est préférable de prendre une longueur caractéristique plus importante.

### 2.2.3 Initialisation de l'algorithme

La recherche d'un élément  $s_0$  admissible peut se faire de différentes manières. Une façon simple de procéder consiste à construire  $\hat{s}_{-1/2} \equiv 0$  qui a les propriétés voulues pour faire partie de  $\Gamma$ , puis avec la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ , de redescendre sur  $\mathbf{A}_d$ .

### 2.2.4 Contrôle de l'algorithme

Un indicateur d'erreur, servant à contrôler la convergence et à arrêter les itérations peut être construit de la manière suivante. Considérons la phase de l'algorithme où l'étape locale a été réalisée (figure 2.6). La direction de recherche de l'étape locale est

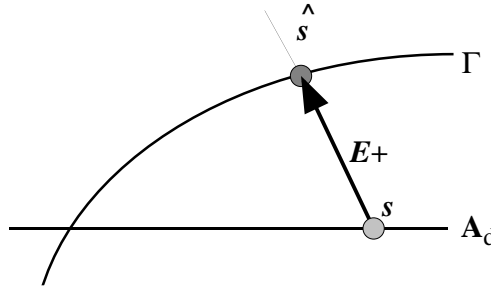


FIG. 2.6 – Étape locale

vérifiée :  $\hat{s} - s \in \mathbf{E}^+$ . La vérification simultanée de celle de l'étape linéaire  $\hat{s} - s \in \mathbf{E}^-$  entraînerait la convergence  $\hat{s} = s$ . On peut donc mettre en place un indicateur traduisant la non-vérification de cette dernière :

$$\varepsilon^E = (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) + k(\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E)$$

et en utilisant une mesure de type erreur en relation de comportement sur  $\mathbf{E}^-$  :

$$e^2 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} \varepsilon^E \cdot k^{-1} \varepsilon^E dS$$

En utilisant le fait que la direction de recherche de l'étape locale est vérifiée, on obtient :

$$e^2 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} \left[ (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot k(\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) + (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot k^{-1}(\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \right] dS$$

d'où l'expression de l'indicateur d'erreur  $\eta$  :

$$\eta^2 = \frac{e^2}{\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} \left[ \underline{W}^E \cdot k \underline{W}^E + \hat{\underline{W}}^E \cdot k \hat{\underline{W}}^E + \underline{F}^E \cdot k^{-1} \underline{F}^E + \hat{\underline{F}}^E \cdot k^{-1} \hat{\underline{F}}^E \right] dS}$$

### 2.2.5 Implantation — Synchronisme

L'implantation de l'algorithme précédent a été réalisée dans le cadre du code éléments finis de type industriel CASTEM 2000, développé au CEA ([Verpeaux *et al.* 88]). Il s'agit d'un code orienté objets intégrant un pré et post-processeur, qui opère sur une base de donnée d'objets par une suite d'opérations élémentaires écrites dans le macro-langage de commande « Gibiane ». Les opérateurs élémentaires sont quant à eux développés dans le langage de programmation « Esope », [Verpeaux 93], transformé en Fortran par un pré-compilateur. Outre la gestion dynamique de la mémoire, l'environnement de programmation utilisé, « Gemat », permet un débordement programmé sur disque.

Afin de tester l'algorithme LATIN sur une architecture parallèle de type MIMD à mémoire partagée ou distribuée, le code prototype spécialisé, un micro-CASTEM 2000, n'utilise que certaines des fonctionnalités d'origine (gestion dynamique des objets et débordement sur disque) et ne possède pas de langage de commande : il ne réalise que la partie résolution du problème, le pré-traitement (réalisation du maillage, décomposition en sous-structures et interfaces) et post-traitement étant réalisés sur une machine « hôte » qui supporte l'intégralité du code, [Millard 92]. Les données du calcul issus du pré-traitement ainsi que les résultats à post-traiter sont transférés par fichier pour pouvoir réaliser le traitement en « batch » sur des machines de production.

La distribution des sous-structures et des interfaces parmi les processeurs de la machine se fait suivant la technique proposée dans [Lorong 94] : un groupe de sous-structures et ses interfaces connectées sont attribués à chaque processeur. Certaines interfaces s'en trouvent dupliquées mais les calculs locaux sur ces dernières étant peu volumineux, cette technique n'est pas pénalisante.

Les échanges d'information entre processeurs sont réalisés par le code, exécuté sur tous les processeurs, avec une technique d'échange de messages. Le code prototype utilise donc, suivant le cas, soit des bibliothèques natives (sur nCUBE 2 et iPSC 860), soit un « standard » d'échange de messages. Le choix de ce dernier s'est porté sur le système PVM (Parallel Virtual Machine), [Geist *et al.* 94], [Champaney *et al.* 96], mais les fonctionnalités requises sont similaires à celles offertes par toutes ces bibliothèques (MPI, NX-lib, ...), figure 2.7.

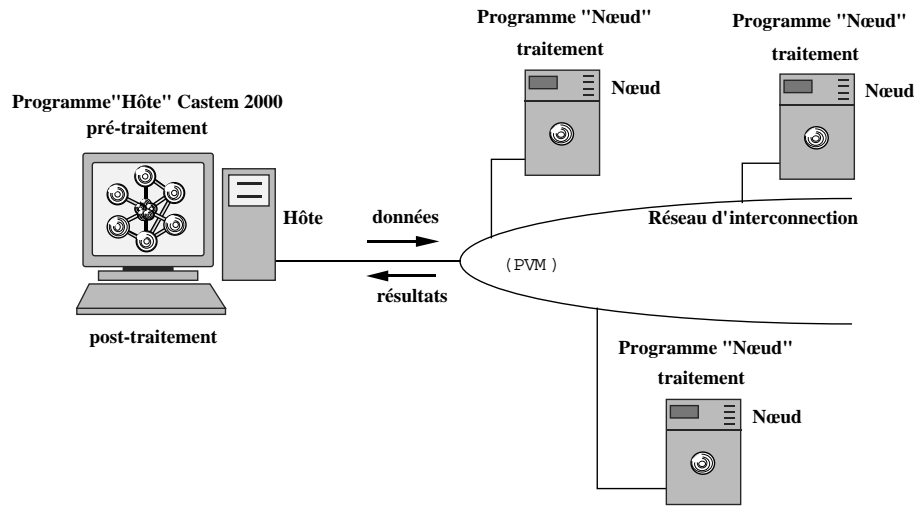


FIG. 2.7 – Implantation de l’algorithme — architecture

Lorsque les sous-structures sont distribuées parmi les nœuds de calcul d’une telle machine multi-processeurs, la sommation sur  $E \in \mathbf{E}$  entraîne donc, lors du calcul des numérateur et dénominateur de  $\eta^2$ , une synchronisation totale entre les processeurs, Un processeur est donc chargé de faire le dernier assemblage des contributions des autres. Par exemple, la figure 2.8 décrit cette opération en utilisant une technique de descente logarithmique. Le processeur maître — celui qui réalise le dernier assemblage — est ici le second. Afin de limiter les phases d’attentes, on peut éviter d’évaluer l’indicateur d’erreur à chaque itération mais choisir de ne le faire qu’après un certains nombre d’itérations : on diminue ainsi le taux de synchronisme de l’algorithme ainsi que les attentes qui lui sont liées. Sans le calcul de l’indicateur  $\eta$ , l’algorithme n’est

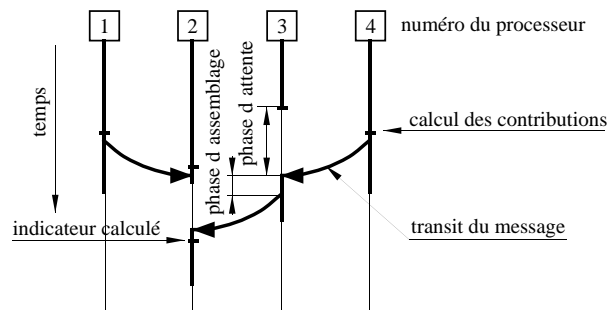


FIG. 2.8 – Calcul de l’indicateur d’erreur

pas totalement synchrone ; en effet, considérons la connectivité ou le voisinage entre sous-structures (et donc entre processeurs) de la figure 2.9, résultant de la nécessité sur calculateurs MIMD à mémoire distribuée des envois de messages pour communiquer.

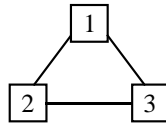


FIG. 2.9 – Voisinage de processeurs

Généralement, de tels envois de messages peuvent être typés par le processeur expéditeur. Le processeur récepteur, lui, peut discriminer les messages suivant le type et/ou suivant l'expéditeur ([IBM 94]). Cette dernière possibilité n'est pas souhaitable ici pour limiter les phases d'attente : les messages sont traités dans l'ordre d'arrivée, comme l'illustre l'algorithme correspondant décrit dans le table 2.1. Sans discrimina-

<b>Pour la sous-structure <math>\Omega^E</math></b>	
<b>Initialisation</b>	
Création des rigidités élémentaires de $[K^E]$ et $[k^E]$	
Assemblage, factorisation de $[K^E] + [k^E]$	
Initialisation de $\hat{\mathbf{s}}_{-1/2}$	
Assemblage du second membre $[f^E]$	
Étape linéaire $([K^E] + [k^E])[q^E] = [f^E]$ , qui fournit $\mathbf{s}_0$	
<b>Boucle sur les itérations</b>	
Boucle sur les interfaces $\Gamma^{EE'}$ de la sous-structure $\Omega^E$	
envoi de $(\underline{W}^E; \underline{F}^E)_n$	→
Boucle	
réception de $(\underline{W}^{E'}; \underline{F}^{E'})_n$	←
Étape locale sur $\Gamma^{EE'}$ pour avoir $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$	
Test de convergence : calcul de $\eta$	↔
Assemblage du second membre $[f^E]$	
Étape linéaire $([K^E] + [k^E])[q^E] = [f^E]$ , qui fournit $\mathbf{s}_{n+1}$	

TAB. 2.1 – Algorithme issu de la LATIN

tion de type, l'aspect partiel de la synchronisation peut se traduire, conformément à la figure 2.10, par une substitution de message d'une itération sur l'autre, ce qui entraîne un désynchronisme d'une itération qui peut perturber fortement le fonctionnement de l'algorithme dont le déroulement n'est plus respecté, et dont la convergence n'est donc plus assurée. Ce cas de figure peut se manifester en cas de calcul non équilibré parmi les processeurs ou lors de l'utilisation d'un réseau de communication fortement chargé. On peut aisément montrer que ce manque de synchronisme peut être comblé en discriminant une itération de la suivante : les itérations paires et impaires utilisent des types de message différents.

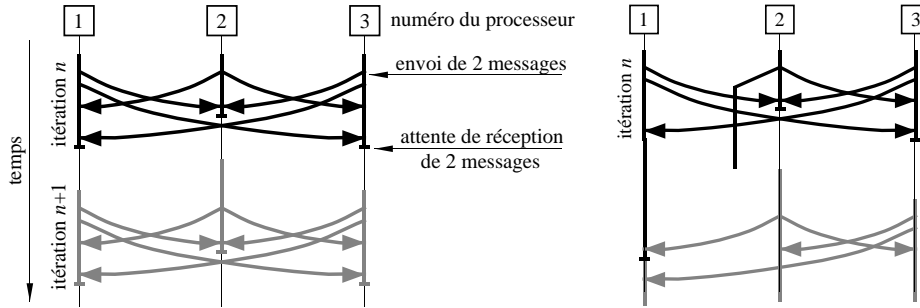


FIG. 2.10 – Synchronisme au cours des itérations : exécution normale et exécution désynchronisée

Rappelons que les algorithmes de type gradient conjugués décrits aux chapitres 1.2.1 et 1.3.2 (pages 21 et 35) possèdent deux phases de synchronisation totale par itération, similaires à celle du calcul de  $\eta$ , afin d'assembler les contributions aux produits scalaires répartis.

Enfin, au vu de la définition de l'entité mécanique surfacique « interface », il est clair que la notion de voisinage est ici similaire à celle de la méthode de Schur duale (chapitre 1.3.1, page 33). L'augmentation de la « connectivité » entre sous-structures serait liée à l'introduction d'interfaces de type différent comme des interfaces « arêtes » linéiques, ou des interfaces « coins » ponctuelles. Dans l'approche présente, le voisinage est uniquement défini comme des intersections de mesure non nulle ; il semble cependant probable que dans le cas d'analyse de plaques, il faille tenir compte de telles interfaces, à cause de la présence possible d'efforts concentrés aux points anguleux.

## 2.2.6 Équivalence d'algorithmes

Dans le cas particulier d'interfaces parfaites et pour le comportement élastique linéaire du matériau, on peut noter que l'algorithme précédent issu de la méthode LATIN se confond avec d'autres algorithmes, proposés à partir de démarches différentes.

En particulier, P.-L. Lions a proposé une technique de décomposition en sous-domaines ([Lions 90]) considérée comme un cas limite de la méthode alternée de Schwarz lorsque le recouvrement des sous-domaines tend vers 0. La propriété vérifiée par deux itérés successifs doit être (en déplacement) :

$$\mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_{n+1}^E)\underline{n}^{EE'} + \mathbf{k}\underline{W}_{n+1}^E = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_{n+1}^{E'})\underline{n}^{EE'} + \mathbf{k}\underline{W}_{n+1}^{E'}$$

qui se traduit aussi par :

$$\underline{F}_{n+1}^E + \mathbf{k}\underline{W}_{n+1}^E = -\underline{F}_n^{E'} + \mathbf{k}\underline{W}_n^{E'}$$

propriété que l'on peut facilement vérifier sur deux itérés  $\mathbf{s}_{n+1}$  et  $\mathbf{s}_n$  de  $\mathbf{A}_d$  issus de la LATIN.

La construction de l'algorithme à partir de lagrangiens augmentés dans [Glowinski et Le Tallec 90] conduit à retrouver étapes linéaire et locale précédentes (voir annexe D, page 186).

Mentionnons aussi les approches de décomposition de domaine présentées par J. Ladevèze, où l'algorithme est directement bâti à partir de lagrangiens [Ladevèze 85].

## 2.3 Convergence

Pour les problèmes non-linéaires d'évolution, comme en dynamique, la dualité adéquate est celle qui met en jeu, d'une part, les quantités statiques définissant l'état courant de la structure ou de l'assemblage étudié, et, d'autre part, les vitesses d'évolution des quantités cinématiques associées. La forme bilinéaire sous-tendant cette dualité est alors interprétée comme une puissance ou une dissipation. De par la nature des problèmes traités ici, le temps n'intervient pas et la solution cherchée est celle de la configuration finale uniquement. En notant  $\mathbf{S}$ , l'espace fonctionnel auquel appartient la solution courante  $\mathbf{s}$ , on se place donc dans un cas « dégénéré » du précédent, où l'espace  $\mathbf{S}$  est alors équipé de la forme bilinéaire « travail » :

$$\begin{array}{l} (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \rightarrow [\mathbf{s}, \mathbf{s}'] \\ \mathbf{S} \times \mathbf{S} \end{array}$$

avec

$$[\mathbf{s}, \mathbf{s}'] = \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} (\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}^E \boldsymbol{\varepsilon}'^E] + \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}'^E \boldsymbol{\varepsilon}^E]) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{\mathbf{F}}^E \cdot \underline{\mathbf{W}}'^E + \underline{\mathbf{F}}'^E \cdot \underline{\mathbf{W}}^E) dS$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées dans le cas de liaisons parfaites ou de contacts unilatéraux sans frottement :

$$\begin{array}{ll} \forall (\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \in \Gamma \times \Gamma & [\hat{\mathbf{s}}' - \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}' - \hat{\mathbf{s}}] \geq 0 \\ \forall (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \in \mathbf{A}_d \times \mathbf{A}_d & [\mathbf{s}' - \mathbf{s}, \mathbf{s}' - \mathbf{s}] \leq 0 \end{array}$$

Il est montré dans [Ladevèze 96] qu'elles permettent de conclure quant à la convergence de l'algorithme si les directions de recherches sont orthogonales au sens de la forme bilinéaire, ce qui se ramène à  $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ .

Dans le cas où l'on prend en compte les conditions aux limites (déplacement ou effort imposé) au travers d'interface, il y a convergence partielle au sens où  $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_{n+1})$  tend vers la solution exacte  $\mathbf{s}_{ex}$ , tout en ayant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[(\boldsymbol{\sigma}_n^E - \boldsymbol{\sigma}_{ex}) \mathbf{K} (\boldsymbol{\sigma}_n^E - \boldsymbol{\sigma}_{ex})] d\Omega = 0$$

La convergence est assurée complètement si, de plus, il existe un point de l'assemblage en lequel le nombre de sous-structures attachées est impair, supérieur à 2.

### Exemple unidimensionnel de la traction pure

À fin d'illustration, prenons le cas unidimensionnel d'une poutre en traction soumise à deux déplacements imposés  $\underline{U}_d^A$  et  $\underline{U}_d^B$  en ses extrémités  $A$  et  $B$ , et décomposée en 2 sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  et 3 interfaces (dont 2 interfaces de déplacement imposé). La figure 2.11 explicite les notations. Supposons connu  $\mathbf{s}_n$  de  $\mathbf{A}_d$  ; l'admis-

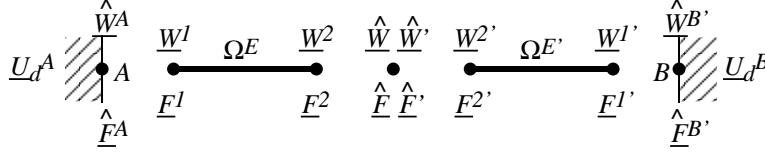


FIG. 2.11 – Exemple unidimensionnel

sibilité se traduit, par exemple sur la sous-structure  $\Omega^E$  dont la raideur est notée  $\kappa$ , par :

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_n^1 \\ \underline{F}_n^2 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} \underline{W}_n^1 \\ \underline{W}_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad [K] = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[K]$  est la matrice de rigidité classique issue du seul comportement matériel de la sous-structure  $\Omega^E$ , elle est symétrique positive mais non définie. L'étape locale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{n+1/2}^A + k\hat{W}_{n+1/2}^A &= \underline{F}_n^1 - k\underline{W}_n^1 + 2kU_d^A, \\ \hat{F}_{n+1/2}^A + k\hat{W}_{n+1/2}^A &= -\underline{F}_n^2 + k\underline{W}_n^2, \\ \hat{F}_{n+1/2}^{B'} + k\hat{W}_{n+1/2}^{B'} &= \underline{F}_n^{1'} - k\underline{W}_n^{1'} + 2kU_d^B, \\ \hat{F}_{n+1/2}^{B'} + k\hat{W}_{n+1/2}^{B'} &= \underline{F}_n^{2'} + k\underline{W}_n^{2'} \end{aligned}$$

L'étape linéaire suivante permet ainsi de trouver  $\mathbf{s}_{n+1}$ . Par exemple, pour  $\Omega^E$ , on obtient :

$$([K] + [k]) \begin{bmatrix} \underline{W}_{n+1}^1 \\ \underline{W}_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{n+1/2}^A + k\hat{W}_{n+1/2}^A \\ \hat{F}_{n+1/2}^A + k\hat{W}_{n+1/2}^A \end{bmatrix}$$

où

$$[k] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sous réserve de stricte positivité de  $k$ ,  $([K] + [k])$  est symétrique définie positive. Notons dès à présent que l'étape linéaire se traduit par un problème de type élasticité linéaire pour lequel  $[K]$  est la rigidité classique due au seul matériau et  $[k]$  une raideur additionnelle qui traduit l'utilisation de la direction de recherche.

Finalement,  $\mathbf{s}_{n+1}$  et  $\mathbf{s}_n$  sont liés de façon affine par :  $[C_{n+1}] = [A][C_n] + [B_d]$  avec

$$[C_n] = \begin{bmatrix} k\underline{W}_n^1 \\ k\underline{W}_n^2 \\ \underline{F}_n^1 \\ \underline{F}_n^2 \\ k\underline{W}_n^{2'} \\ k\underline{W}_n^{1'} \\ \underline{F}_n^{2'} \\ \underline{F}_n^{1'} \end{bmatrix}, \quad [A] = \frac{1}{k+2\kappa} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & \nu & 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa & 0 & \nu & 0 & -\nu & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\kappa & 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & \nu & 0 & -\nu & 0 & -\kappa & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 & -\nu & 0 & \nu \\ 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 & \kappa & 0 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 0 & \kappa & 0 & -\kappa & 0 & \kappa \end{bmatrix}$$

et  $v = k + \kappa$ , et où  $[B_d]$  ne dépend que du chargement donné. La convergence serait alors assurée si tous les modules des valeurs propres de  $[A]$  étaient strictement inférieurs à 1. Ici, les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $[A]$  ont été obtenues à partir d'un outil de calcul formel, ici MATHEMATICA. Elles sont :

$$\left(-1, 0, 0, 0, 0, \frac{2\kappa - k}{2\kappa + k}, \pm \sqrt{\frac{k - 2\kappa}{k + 2\kappa}}\right)$$

et leurs modules sont tracés sur la figure 2.12 en fonction du choix du paramètre  $k$ . On note ainsi que la valeur propre  $-1$  correspond à un déplacement de solide rigide

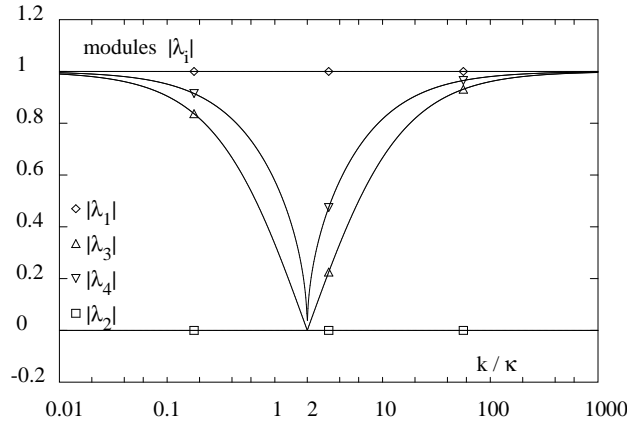


FIG. 2.12 – Modules, fonctions du paramètre  $k$ , des valeurs propres  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{2\kappa - k}{2\kappa + k}, \lambda_4 = \sqrt{\frac{k - 2\kappa}{k + 2\kappa}}$

par sous-structure, ce qui illustre la convergence partielle pré-citée. Si on note  $[C_{ex}]$  la colonne associée à la solution exacte  $\mathbf{s}_{ex}$ ,

$$[C_{ex}] = [A][C_{ex}] + [B_d] \quad \text{et} \quad ([C_{n+1}] - [C_{ex}]) = [A]([C_n] - [C_{ex}])$$

la colonne associée à  $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{n+1} + \mathbf{s}_n) - \mathbf{s}_{ex}$  est alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}([C_{n+1}] - [C_{ex}] + [C_n] - [C_{ex}]) &= [A]^{n-1} \frac{1}{2}([C_2] - [C_{ex}] + [C_1] - [C_{ex}]) \\ &= [A]^{n-1} \frac{1}{2}([A] + \mathbb{I}_d)([C_1] - [C_{ex}]) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $[A]^{n-1} \frac{1}{2}([A] + \mathbb{I}_d)$  étant alors les  $\frac{1}{2}(1 + \lambda_i)\lambda_i^{n-1}$ , toutes de module strictement inférieur à 1, on a donc bien convergence de  $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{n+1} + \mathbf{s}_n)$  vers  $\mathbf{s}_{ex}$ . Il apparaît de plus une valeur optimale de  $k$  égale à  $2\kappa$  sur cet exemple.

De façon générale, on montre également que la quantité :

$$\|\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n\| = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega^E} [(\hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E - \underline{F}_n^E) \cdot \mathbf{k}^{-1}(\hat{\underline{F}}_{n+1/2}^E - \underline{F}_n^E) + (\hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E - \underline{W}_n^E) \cdot \mathbf{k}(\hat{\underline{W}}_{n+1/2}^E - \underline{W}_n^E)] dS \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une fonction décroissante de  $n$  qui tend vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ . Elle peut donc être utilisée pour bâtir des indicateurs d'erreur.

Une variante de la méthode précédente, qui influence les propriétés à convergence, consiste à utiliser un paramètre de relaxation  $\mu$ . L'étape linéaire fournissant l'itéré noté maintenant  $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}$ , le nouvel itéré  $\mathbf{s}_{n+1}$  est défini par :

$$(\mathbf{s}_{n+1} - \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}) + \mu(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n) = 0$$

Pour  $\mu = 0$ , on retrouve la précédente version ; pour  $\mu > 0$ , la convergence est toujours assurée ([Ladevèze 96]).

Sur le même exemple que précédemment, les nouvelles valeurs propres sont les :

$$\frac{\mu + \lambda_i}{\mu + 1}$$

dont on peut montrer que le module est ici toujours strictement inférieur à l'unité. La figure 2.13 reporte le nouveau rayon spectral en fonction du paramètre  $k$  de la direction de recherche et pour plusieurs valeurs du paramètre  $\mu$  de relaxation.

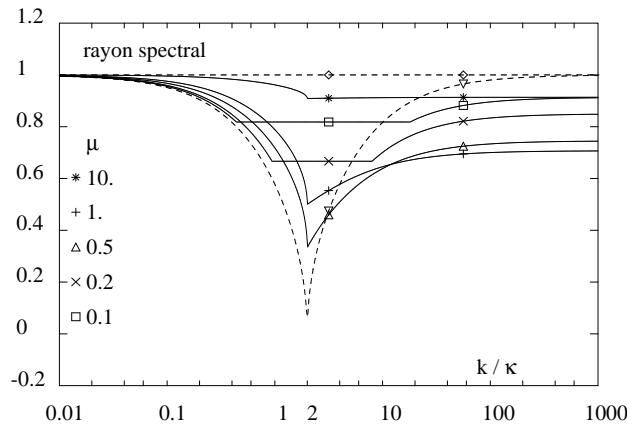


FIG. 2.13 – Rayon spectral fonction du paramètre  $k$  avec relaxation

### Paramètre optimal de direction de recherche

Le paramètre  $k$  de direction de recherche est homogène à une répartition de raideur. Il peut être intéressant de le relier au module d'Young  $E$  du matériau des sous-structures par l'intermédiaire d'une longueur caractéristique  $L_0$  :

$$k = \frac{E}{L_0}$$

Considérons toujours le cas très particulier d'une poutre unidimensionnelle en traction, figure 2.14. Il faut remarquer qu'une direction de recherche ne peut être que locale sur les interfaces puisque celles-ci se réduisent à un point. Dans ces conditions, on peut lier exactement le paramètre  $k$  à une raideur de structure. Par exemple, avec le choix d'un paramètre  $L_0$  variable sur les interfaces et égal à l'abscisse courante, figure 2.14, on peut vérifier que l'on arrive au résultat optimal suivant : pour  $n$  sous-structures, la solution exacte est obtenue en  $n$  itérations.

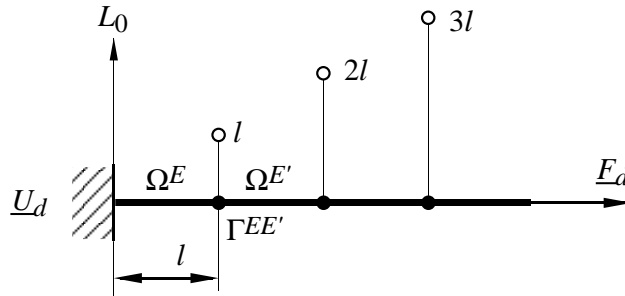


FIG. 2.14 – Choix optimal de direction de recherche en unidimensionnel

Sur l'exemple unidimensionnel à 2 sous-structures précédent, le fait d'avoir 2 encastres double la raideur structurelle et la direction de recherche optimale correspondait à :

$$k = 2\kappa = \frac{E}{l/2}$$

Bien entendu, ce résultat n'est plus valable dès que l'on passe en bidimensionnel, mais une direction de recherche moyenne (c'est à dire choisie uniforme sur les interfaces) conserve la propriété d'être liée à une dimension caractéristique de la totalité de la structure.

On pourra aussi noter qu'une méthode de gradient (sans conjugaison des directions de recherche), par exemple sur le problème condensé de Schur primal [1.5], page 21, peut être présenté sous la même forme avec un choix particulier de directions de recherche :

– pour l'étape linéaire, la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$  peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{s}_n - \hat{\mathbf{s}} \in \mathbf{E}^- \iff \underline{W}_n - \hat{W} = 0$$

en effet, le déplacement vérifie la continuité aux interfaces, ce qui est une caractéristique de  $\hat{\mathbf{s}} \in \Gamma$ .

- pour l'étape locale, la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$  peut, quant à elle, être écrite

$$\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_n \in \mathbf{E}^+ \iff \begin{cases} \hat{W} = \frac{1}{2} \left[ (W_n + W'_n) - \frac{2}{\rho'_n} (F_n + F'_n) \right] \\ \hat{F} = \frac{1}{2} \left[ (F_n - F'_n) - \frac{\rho'_n}{2} (W_n - W'_n) \right] \end{cases}$$

avec  $\rho'_n$  lié au pas optimal (avec les notations de l'annexe C, page 184 pour le gradient) par

$$\rho'_n = \frac{1}{\rho_n} = \frac{r_n \cdot d_n}{d_n \cdot S d_n}$$

L'analogie du paramètre de direction de recherche  $k$  est donc ici  $\rho'_n/2$ . Comme le paramètre de reconjugaison  $\lambda_n$  est ici nul, on a la direction  $d_n = r_n$ , où le résidu  $r_n$  est le déséquilibre à l'interface  $F + F'$ , et donc

$$\frac{\rho'_n}{2} = \frac{1}{2} \frac{r_n \cdot r_n}{r_n \cdot S r_n} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} r_n \cdot S r_n = r_n \cdot \frac{\rho'_n}{2} r_n$$

Le paramètre  $\rho'_n$  est donc ajusté pour avoir, dans la direction  $r_n$ , une énergie de déformation équivalente à celle de la structure considérée.

On peut vérifier que, toujours sur le cas unidimensionnel de la poutre en traction, en testant avec un résidu constant sur toutes les interfaces, on trouve un paramètre  $\rho'_n/2$  dont l'analogie est  $k = E/L$ , avec  $L$ , la longueur de la poutre, c'est à dire le paramètre constant « optimal » précédent.

### Exemple bidimensionnel de la plaque trouée

Considérons maintenant, en déformations planes, le cas d'une plaque trouée en traction dont un quart est représenté sur la figure 2.15, décomposée en 42 sous-structures et interfaces.

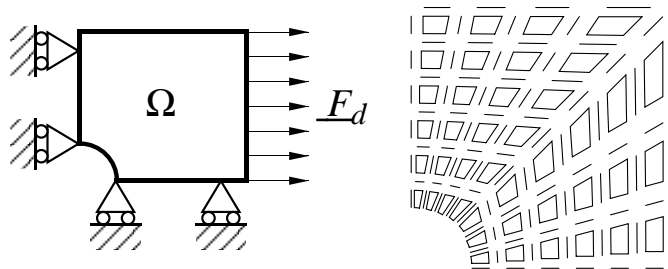
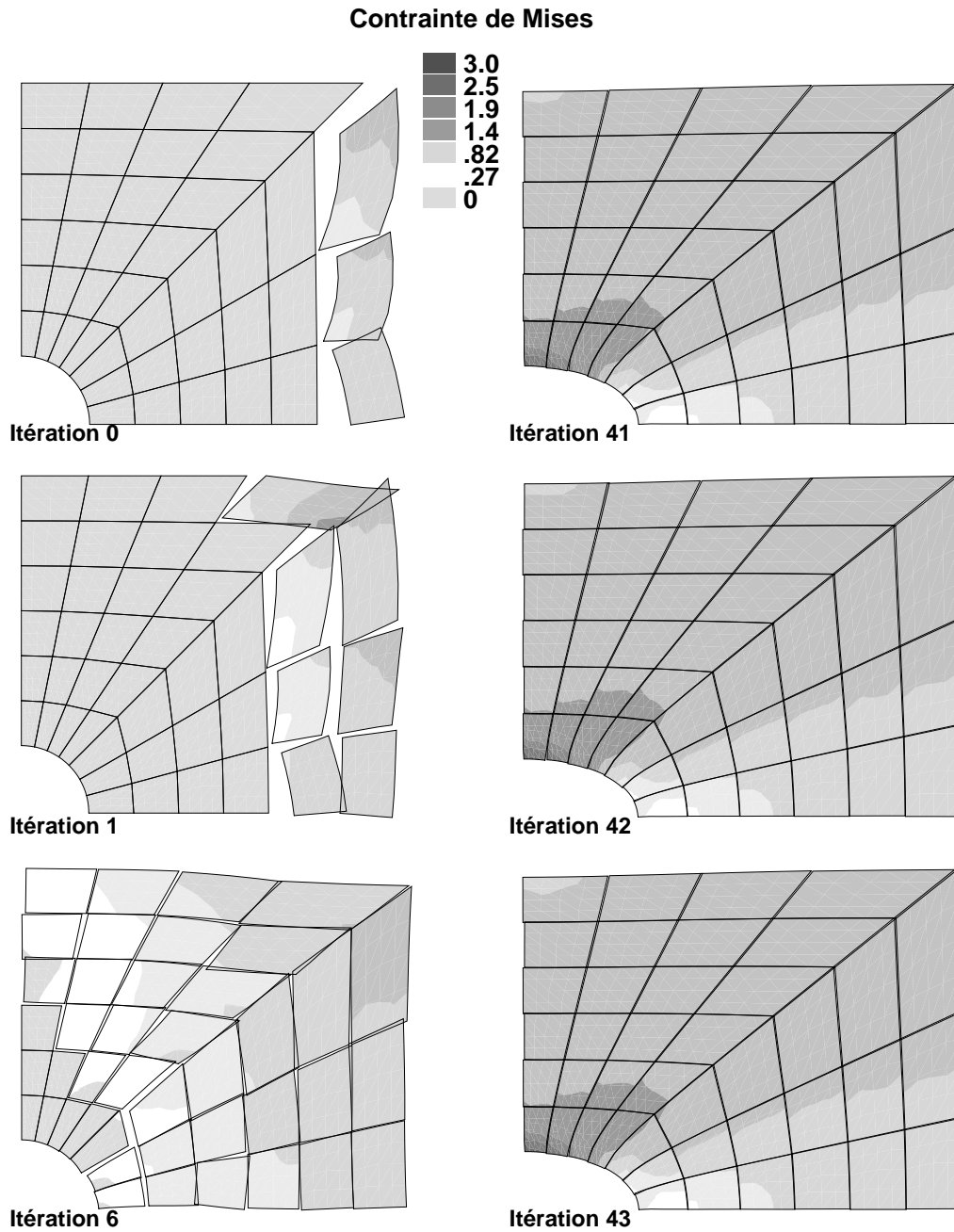


FIG. 2.15 – Problème de la plaque trouée considéré

Si les conditions aux limites de symétries sont prises en compte par l'intermédiaire d'interfaces, comme tous les points des interfaces sont connectés à 2 ou 4 sous-structures, il y a convergence partielle en déplacement. Ceci est visible sur la figure 2.16 qui retrace les déformées et les contraintes de Mises au cours des itérations : on aperçoit la superposition de la solution exacte et d'un mouvement de solide rigide lors des dernières itérations (on pourra noter que sur cet exemple, le paramètre de direction de recherche utilisé n'est pas optimal, mais choisi pour illustrer les propriétés de convergence).

La figure 2.17 présente l'évolution de l'erreur en énergie (qui traduit la convergence en contraintes) et celle de l'indicateur précédemment présenté  $\eta$  (qui prend en compte le saut de déplacement et d'effort entre les sous-structures) en fonction des itérations, dans le cas où  $\mu = 0$ , puis  $\mu = 0,5$  et enfin en prenant en compte directement les conditions aux limites dans l'ensemble  $\mathbf{A}_d$ . C'est cette dernière version qui sera désormais utilisée ici.

Sur cet exemple, la figure 2.18 reporte l'évolution de l'erreur en énergie, en fonction des itérations, pour différentes valeurs de longueurs caractéristiques  $L_0$  de la direction de recherche. La valeur « optimale » est proche de  $0,5H$ , c'est à dire la demi-hauteur de la structure.

FIG. 2.16 – Évolution de la solution en cours d'itération, pour  $\mu = 0$

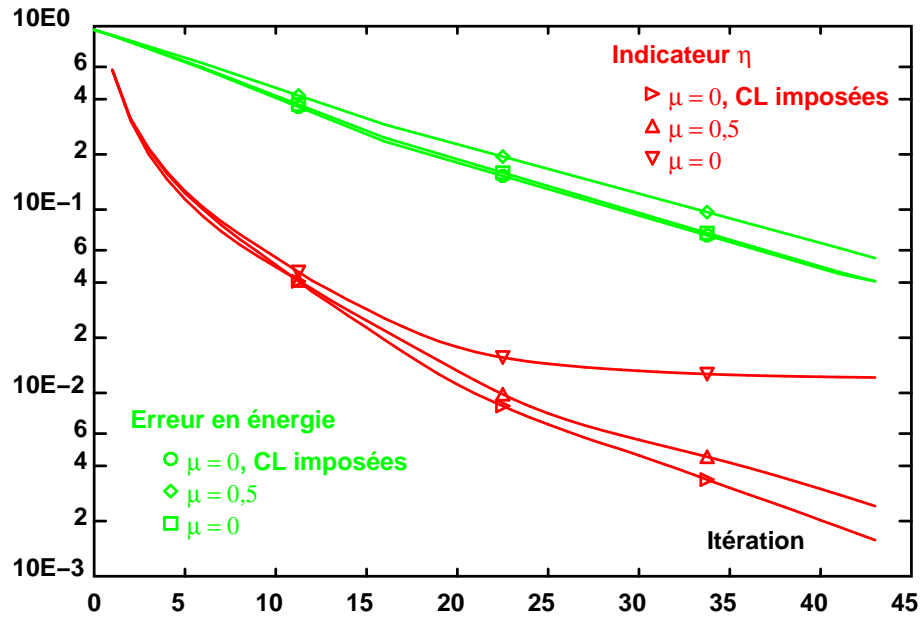


FIG. 2.17 – Vérification de la convergence au cours des itérations

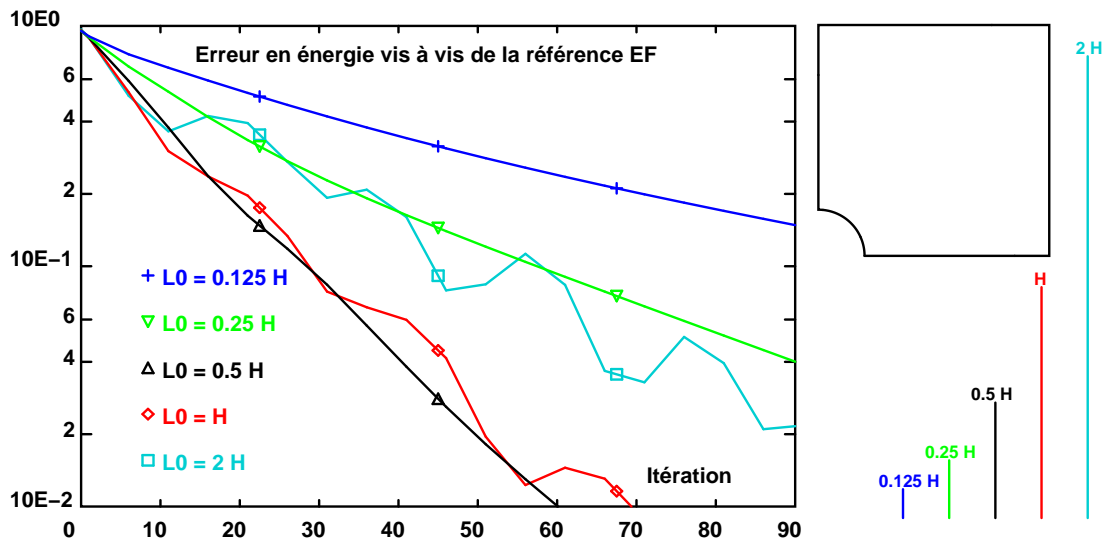


FIG. 2.18 – Influence de la direction de recherche sur la convergence

## 2.4 Exemples

Le but de ce chapitre est d'illustrer le comportement de la méthode sur des problèmes de grande taille, et sur ordinateur à architecture parallèle.

La technique de résolution utilisée est celle des éléments finis en déplacement. Aussi, en anticipant sur le chapitre suivant, précisons dès lors que le problème revient à procéder à une factorisation de Choleski d'une matrice de rigidité sur chaque sous-structure pour la phase d'initialisation, et d'une montée-descente sur chaque sous-structure à chaque itération.

### 2.4.1 Un exemple à grand nombre de degrés de liberté : l'éprouvette biaxiale

Le support pour ce test sur structure tridimensionnelle est représenté sur la figure 2.19. Celle-ci présente les trois quart de l'éprouvette biaxiale utilisée au laboratoire

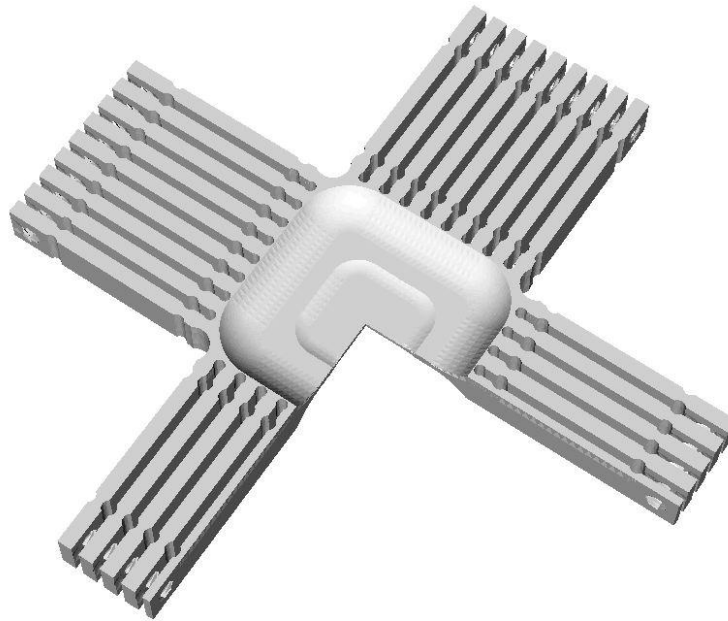


FIG. 2.19 – Éprouvette biaxiale

[Dussotoir 93], [Batisse *et al.* 94], [Cognard *et al.* 96]. La zone utile de l'éprouvette est la partie centrale, présente sur la section de la figure 2.20.

Une analyse de structure a été réalisée sur un seizième de cette éprouvette en prenant en compte les symétries lors de la sollicitation constituée par un déplacement imposé dans les alésages des peignes qui relie l'éprouvette à la machine d'essais ASTREE. Un découpage manuel en 31 sous-structures presque équilibrées a été réalisé

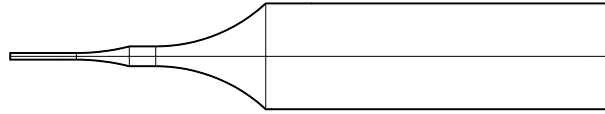


FIG. 2.20 – Section de l'éprouvette

(figures 2.21 et 2.22), en vue du traitement sur la machine CRAY-T3D de l'IDRIS à Orsay, sur laquelle 32 processeurs ont été mobilisés.

Sur cet exemple, une bonne solution est obtenue après 100 itérations, elle est représentée sur la figure 2.23. La figure 2.24 reporte l'évolution de l'indicateur d'erreur  $\eta$  présenté au chapitre 2.2.4, page 53.

Afin de tester l'algorithme sur des cas plus importants, les maillages précédents ont été raffinés pour donner ceux de la figure 2.25 jusqu'à plus de 600 000 degrés de liberté.

Pour un tel problème, la capacité de la machine CRAY-T3D pour 32 processeurs est insuffisante. L'utilisation de 64 processeurs a été nécessaire pour traiter cet exemple, et la structure a cette fois-ci été décomposée en 62 sous-structures et interfaces, figure 2.26.

La convergence de l'algorithme étant peu influencée par le raffinement du maillage, et dépendant en première approximation du nombre de sous-structures dans une même direction ([Cognard *et al.* 96]), 100 itérations sont encore nécessaires ici pour obtenir la solution.

L'influence de la taille du problème a donc ainsi été testée, et les résultats en temps dont reportés dans la figure 2.27. Il s'agit ici du temps CPU cumulé, c'est à dire sommé sur l'ensemble des processeurs utilisés. Il est donc caractéristique du problème traité.

Les caractéristiques moyennes des problèmes liés aux sous-structures sont détaillés dans la table 2.2 Les encombrements nécessaires pour les matrices de rigidité y sont donnés pour un stockage profil de la bande.

Maillage	1 sous-structure (moyenne)		
	nb nœuds	nb ddl	encombrement (profil)
1	2 007	6 020	14,8 Mo
2	3 028	9 084	27 Mo
3	3 836	11 507	43 Mo
a	2 220	6 661	14,5 Mo
b	3 030	9 090	27 Mo
c	3 836	11 507	44 Mo

TAB. 2.2 – Caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures

La table 2.3 rappelle quant à elle les caractéristiques comparées des diverses tailles

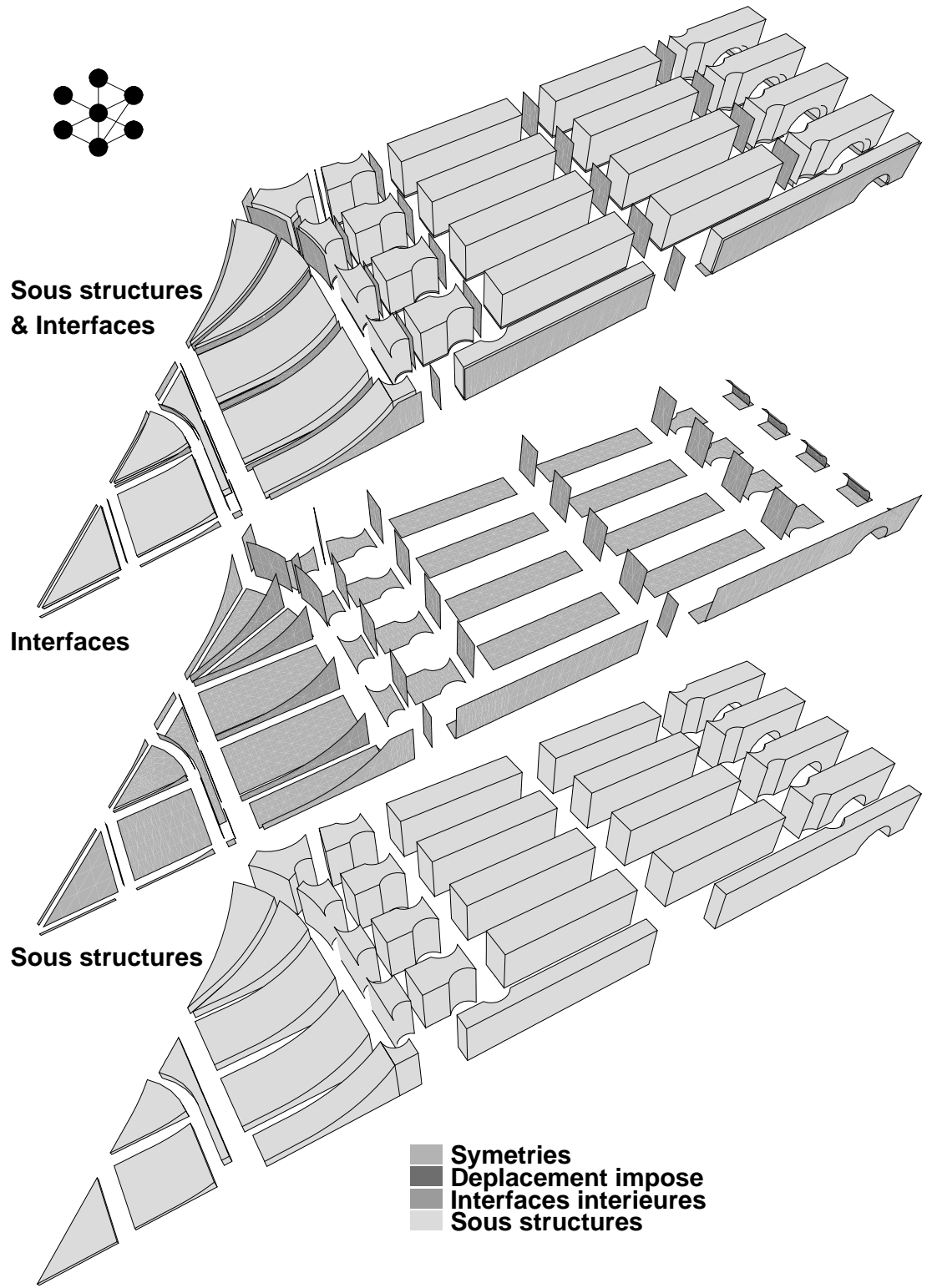


FIG. 2.21 – Décomposition en 31 sous-structures et interfaces

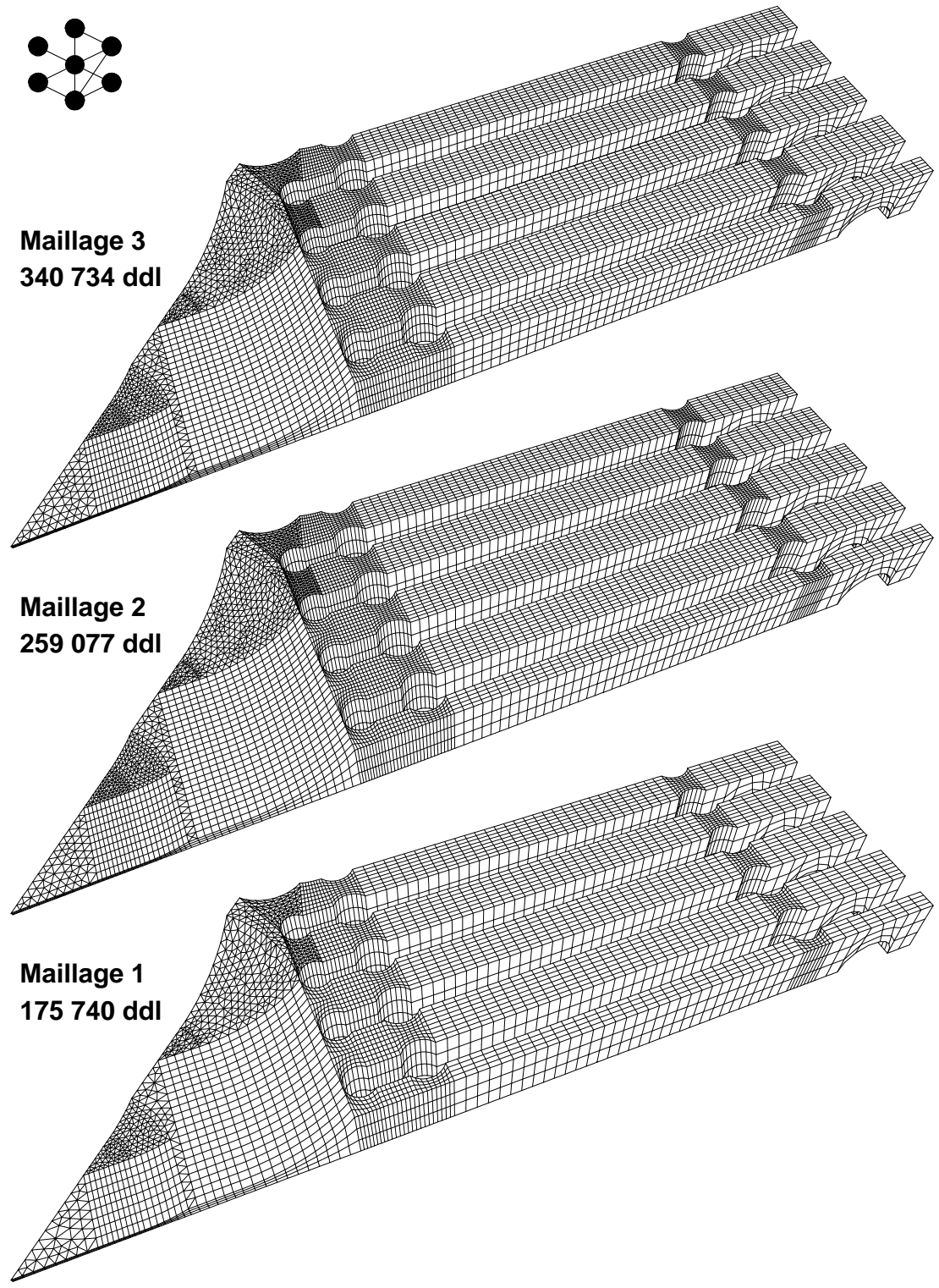


FIG. 2.22 – Maillages testés

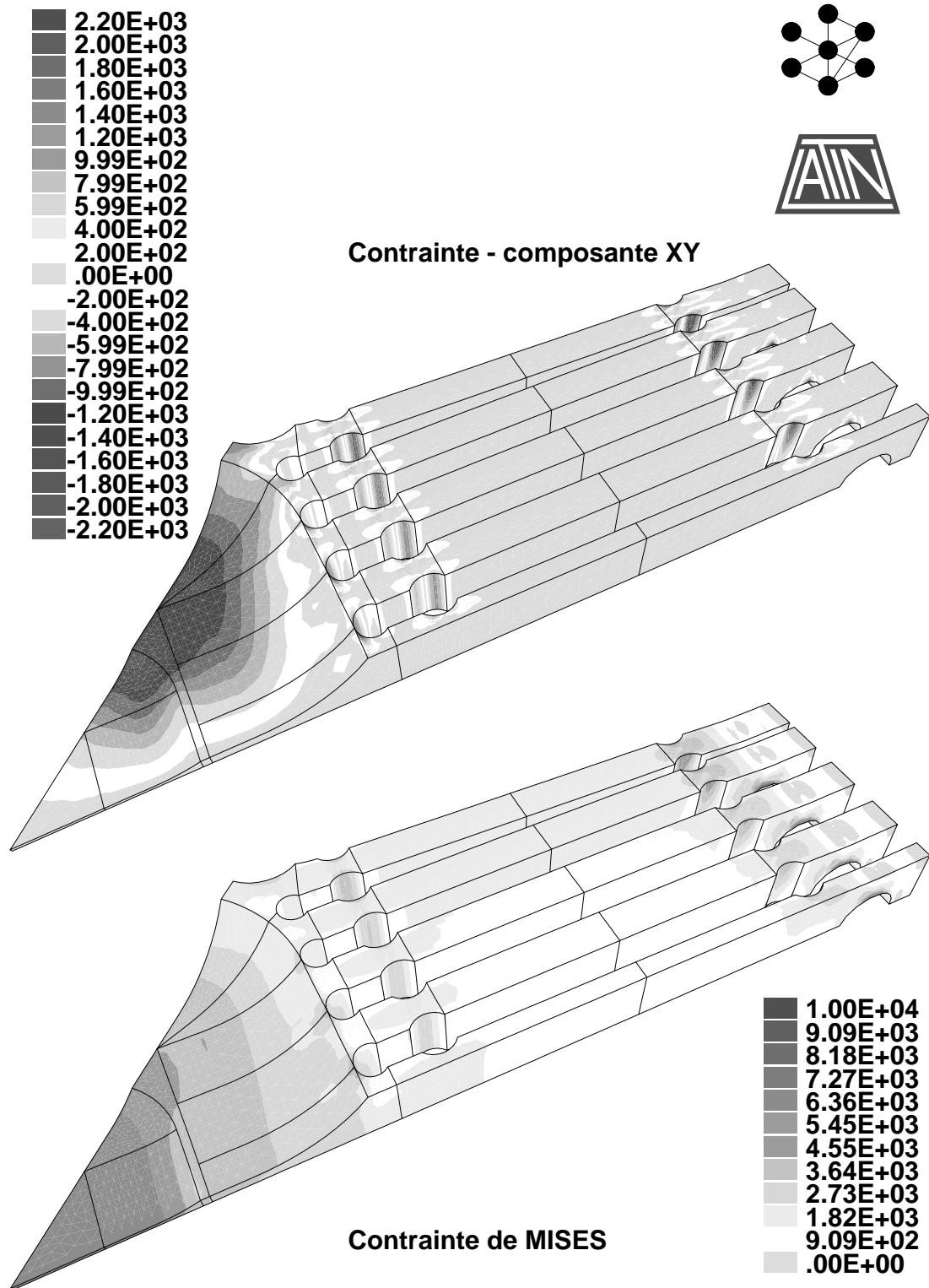
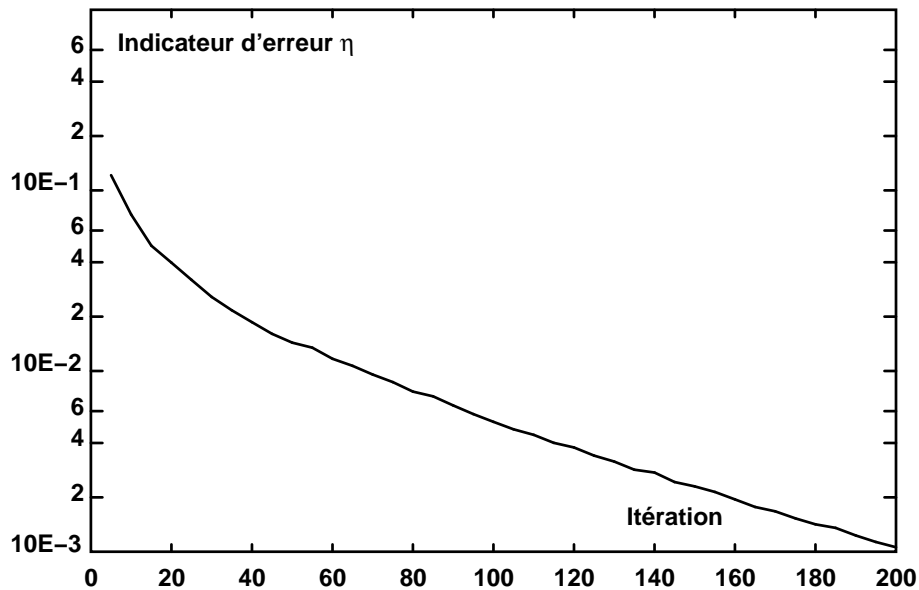


FIG. 2.23 – Déformée et contraintes à l'itération 100

FIG. 2.24 – Évolution de l'indicateur  $\eta$  au cours des itérations

de problème. On pourra remarquer que l'augmentation du nombre de degrés de liberté total pour la technique de sous-structuration provient de la duplication des nœuds sur les interfaces par rapport aux nœuds des frontières des sous-structures lors de la décomposition.

Maillage	sous-structuration (total)			calcul direct		
	nb sstr.	nb ddl	encombrement (profil)	nb élém.	nb ddl	encombrement (profil)
1	31	186 618	0,46 Go	12 015	175 740	2,1 Go
2	31	281 592	0,84 Go	18 449	259 077	4 Go
3	31	356 712	1,3 Go	24 732	340 734	6,4 Go
a	62	413 007	0,9 Go	24 732	340 734	6,4 Go
b	62	563 631	1,7 Go	37 098	483 702	-
c	62	713 424	2,7 Go	49 464	627 486	-

TAB. 2.3 – Caractéristiques des problèmes à résoudre

Avec Jean-Yves Cognard et Laurent Champany ([Champany *et al.* 96]), les mêmes trois premiers problèmes ont été traités sur une machine IBM SP1 du CEA de Saclay avec l'aide de P. Verpeaux. Les temps reportés dans la table 2.4 sont les temps CPU obtenus sur cette machine et les temps totaux correspondent aux temps CPU cumulés sur les 16 processeurs disponibles, parmi lesquels ont été distribuées les 31 sous-structures ; un programme nœud sur chaque processeur doit alors être capable de gérer

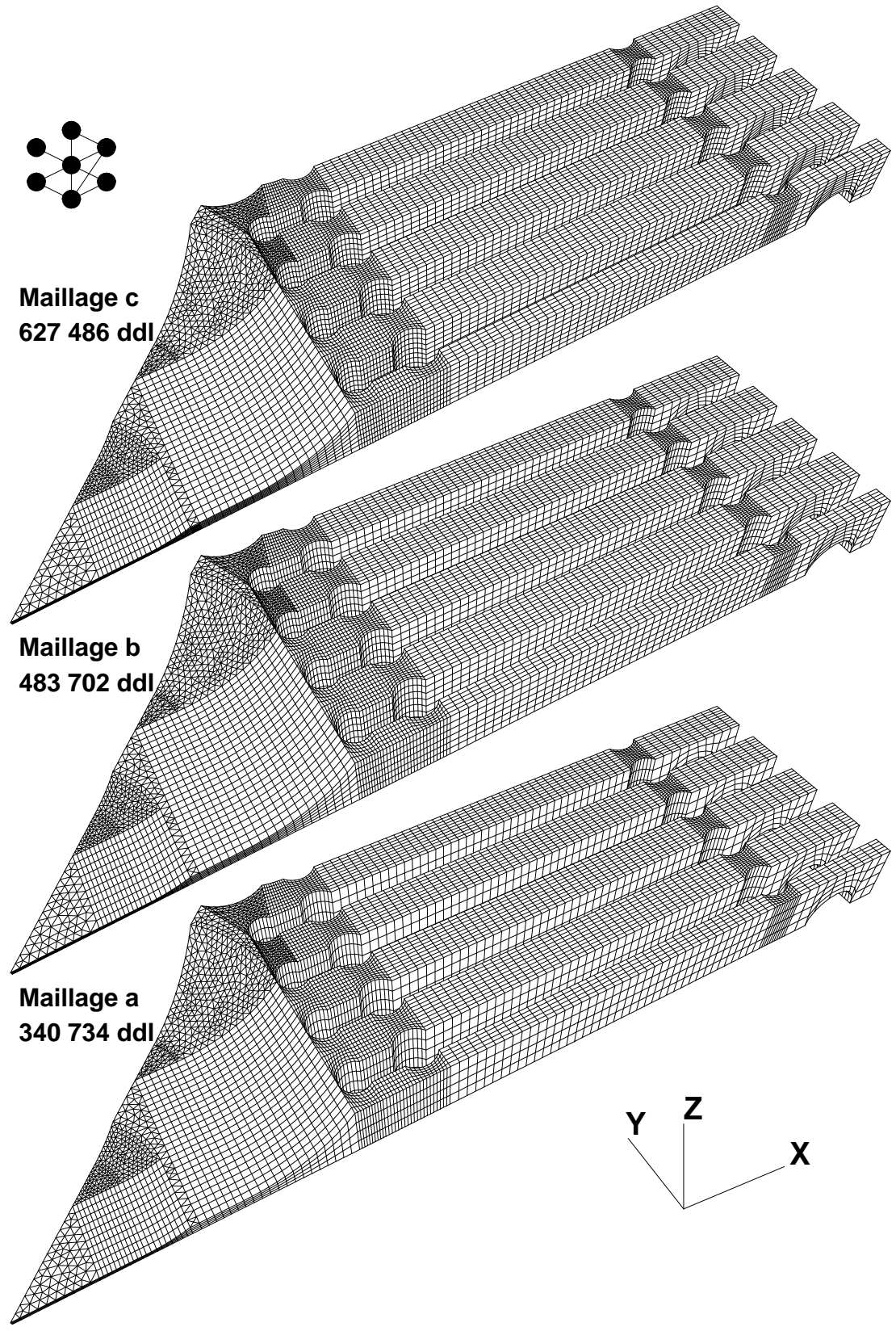


FIG. 2.25 – Maillages testés

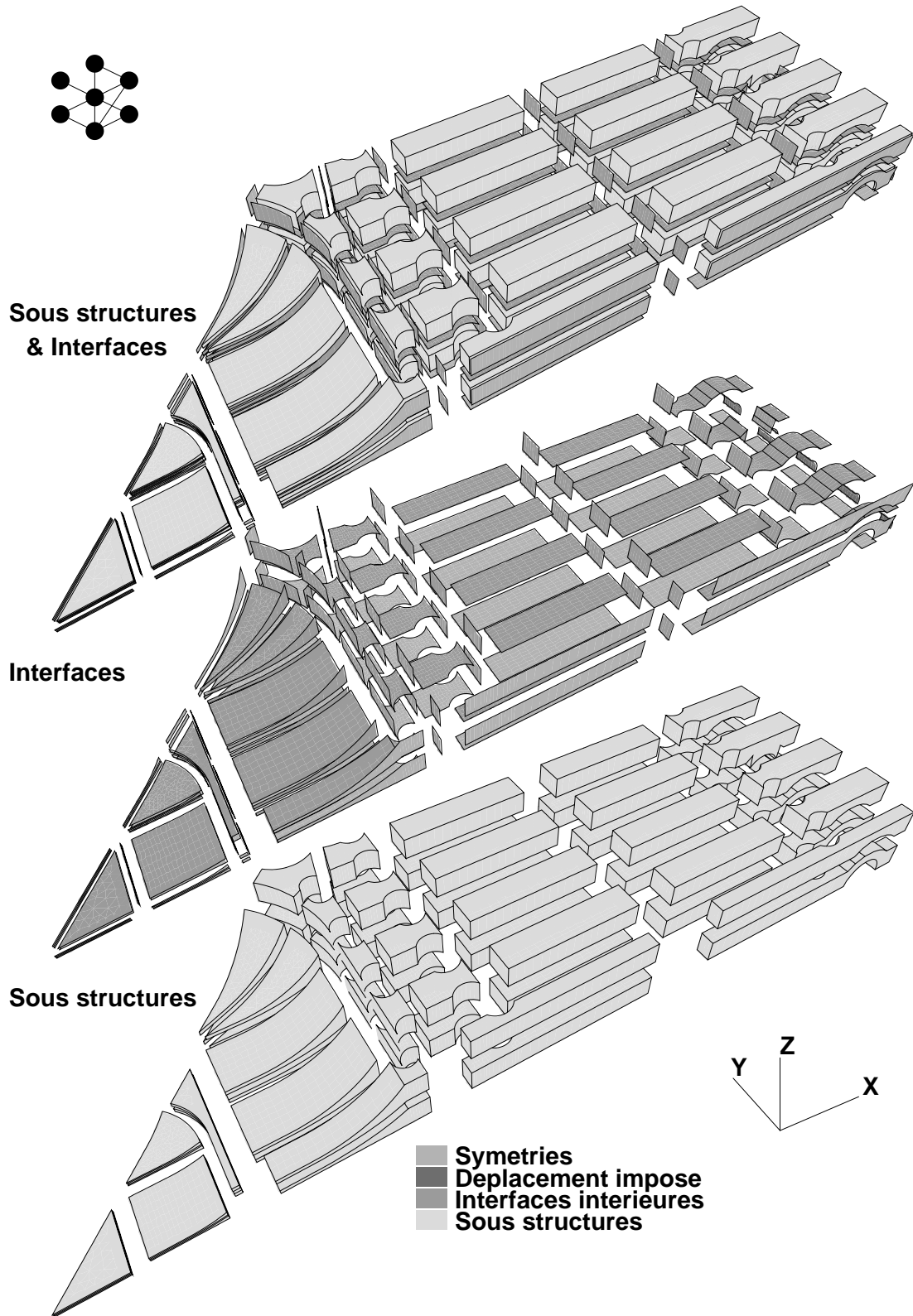


FIG. 2.26 – Décomposition en 62 sous-structures et interfaces

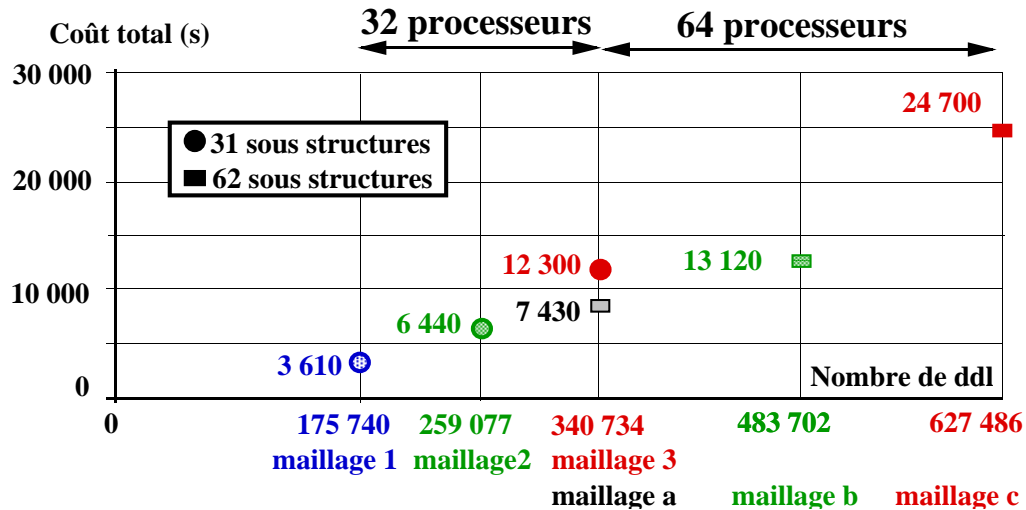


FIG. 2.27 – Temps CPU cumulé du CRAY-T3D en fonction de la taille du problème

plusieurs sous-structures. Seul le premier problème a pu être résolu de façon directe sur un nœud de calcul de l'IBM SP1. Pour les autres, le CRAY C90 de l'IDRIS a pu traiter l'ensemble des 3, ainsi que les problèmes de sous-structuration correspondants (toutes les sous-structures sur un seul processeur).

Maillage	IBM SP1 (16 processeurs)					CRAY C90 (1 processeur)			
	sous-structuration				direct	sous-structuration			direct
	init. (s-s)	itér. (s-s)	total (s-s)	total (100 it.)	total	init.	itér.	total (100 it.)	total
1	37 s	0,6 s	97 s	2 910 s	4 300 s	316 s	5,9 s	935 s	1 100 s
2	70 s	1,0 s	170 s	5 100 s	-	548 s	10 s	1 548 s	2 100 s
3	130 s	1,6 s	290 s	8 700 s	-	861 s	15,5 s	2 411 s	3 050 s

TAB. 2.4 – Résultats et comparaisons avec le problème direct

Pour une décomposition donnée, l'encombrement et le coût de calcul augmentent donc moins rapidement que ceux d'une méthode directe lorsque le nombre de degrés de liberté croît. Les résultats obtenus sur le CRAY C90 ne sont cependant qu'indicatifs car le code n'a pas été optimisé pour la vectorisation, à laquelle la puissance de cette machine est très liée.

### 2.4.2 Exemple de traitement de contact unilatéral avec répétition géométrique : le roulement

Le but de cet exemple est double : tout d'abord, il traite du comportement d'interface contact unilatéral parfait avec jeu, ensuite, il illustre le fait que le traitement des non-linéarités est dédié à l'ensemble  $\Gamma$  et n'intervient qu'à l'étape locale.

Considérons en effet le cas présenté où le matériau des sous-structures  $\Omega^E$  reste élastique linéaire : la matrice de rigidité ( $[K^E] + [k^E]$ ) reste constante au cours des itérations, indépendamment de la relation de comportement des interfaces et du chargement extérieur appliqué. En traitant le cas de multiples second membres lors des montées-descentes de Crout, il est facile de prendre en compte plusieurs chargements simultanément. Ainsi, une même sous-structure gèrera sa propre matrice de rigidité ainsi que simultanément plusieurs champs ( $\underline{U}^E; \underline{\sigma}^E$ ) solutions, et une interface, plusieurs champs ( $\hat{W}^E, \hat{W}^{E'}; \hat{F}^E, \hat{F}^{E'}$ ). Les différents cas de charge ne seront pas alors pris en compte en parallèle mais le calcul parallèle les traitera tous en même temps.

L'exemple présenté porte, lui, sur un roulement à bille à contact oblique SKF 7226B-130, chargé de façon non uniforme, comme le déversement décrit figure 2.28.

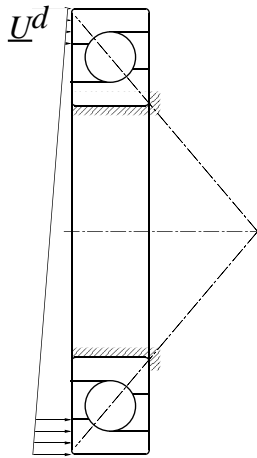


FIG. 2.28 – Déversement du roulement

La géométrie présente une répétition d'un secteur d'un douzième du roulement, bien que ce ne soit pas le cas du chargement. Si l'on considère cet unique secteur, le chargement peut se décomposer en 12 second membres différents simultanés, à une rotation près. Il reste à traiter les conditions de raccord entre secteurs. Ceci est réalisé simplement par une approche de sous-structuration en considérant des interfaces particulières qui peuvent transférer non pas des champs  $\hat{W}^E$  et  $\hat{F}^E$  mais leur transformés  $Q\hat{W}^E$  et  $Q\hat{F}^E$  par une isométrie  $Q$ , entre deux second membres de deux sous-structures.

Par exemple, en tridimensionnel, une rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $\underline{x}$  trans-

fère un vecteur  $\underline{V}$  en  $\mathbb{Q}\underline{V} = \cos\theta\underline{V} + (1 - \cos\theta)\underline{x}(\underline{V} \cdot \underline{x}) + \sin\theta(\underline{x} \wedge \underline{V})$  et une antirotation (rotation de  $\theta$  autour de  $\underline{x}$  puis symétrie plane de normale  $\underline{x}$ ) transfèrera  $\underline{V}$  en  $\mathbb{Q}\underline{V} = \cos\theta\underline{V} - (1 + \cos\theta)\underline{x}(\underline{V} \cdot \underline{x}) + \sin\theta(\underline{x} \wedge \underline{V})$ . Ici, il s'agit d'une rotation de  $\pm 2\pi/12$  autour de  $\underline{x}$ , figure 2.29.

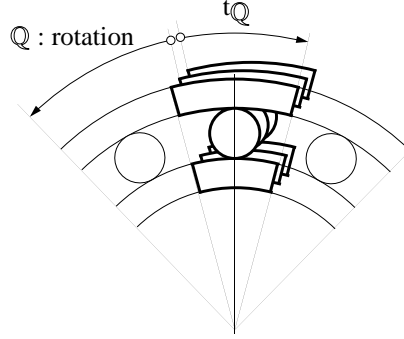


FIG. 2.29 – Transformation pour changer de secteur

Pour traiter cet exemple, une décomposition d'un secteur en 23 sous-structures et interfaces est décrite sur la figure 2.30. Chaque entité traite 12 jeux d'inconnues.

La « connectivité » qui traduit le voisinage entre sous-structures est symbolisé par des segments sur la figure 2.31 ; le roulement complet nécessiterait, quant à lui, la connectivité de la figure 2.32.

### Contact unilatéral avec jeu

Dans le cas où un jeu est présent entre deux sous-structures, le problème de la mise en place du contact unilatéral est plus délicate. En particulier, le modèle à écrire dans l'hypothèse des petites perturbations est à préciser.

La géométrie de l'interface est ainsi donnée par deux surfaces de contact potentiel  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (figure 2.33). Le comportement de l'interface doit alors être écrit sur la configuration non déformée. Entre deux points « homologues »  $\underline{M} \in \Gamma$  et  $\underline{M}' \in \Gamma'$  (c'est à dire pour lesquels après déformation du milieu, les conditions de contact doivent être vérifiées) : pour les composantes normales (figure 2.34) :

$$\begin{aligned} (\underline{M}' + \underline{W}' - \underline{M} - \underline{W}) \cdot \underline{n} &\geq 0 \\ \underline{F}' \cdot \underline{n} = -\underline{F} \cdot \underline{n} &\leq 0 \\ ((\underline{M}' + \underline{W}' - \underline{M} - \underline{W}) \cdot \underline{n}) \cdot (\underline{F}' \cdot \underline{n}) &= 0 \end{aligned}$$

En notant  $j(\underline{M}) = (\underline{M}' - \underline{M}) \cdot \underline{n}$  le jeu initial, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\underline{W}' - \underline{W}) \cdot \underline{n} + j &\geq 0 \\ \underline{F}' \cdot \underline{n} &\leq 0 \\ ((\underline{W}' - \underline{W}) \cdot \underline{n} + j) \cdot (\underline{F}' \cdot \underline{n}) &= 0 \end{aligned}$$

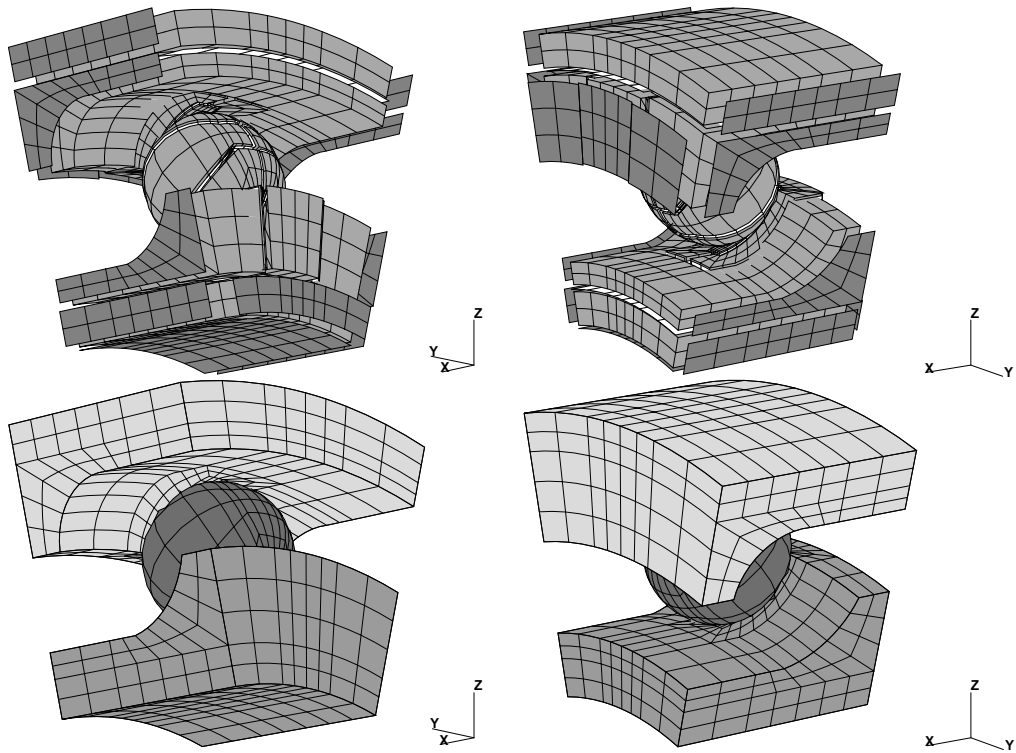


FIG. 2.30 – Maillage d'un secteur et décomposition en 23 sous-structures et interfaces

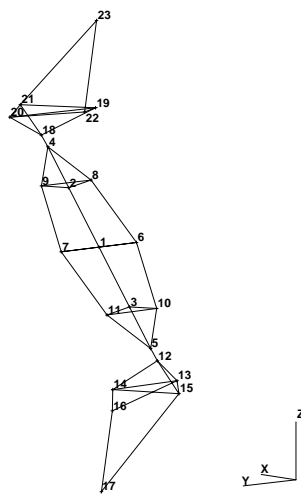


FIG. 2.31 – Voisinages pour un secteur

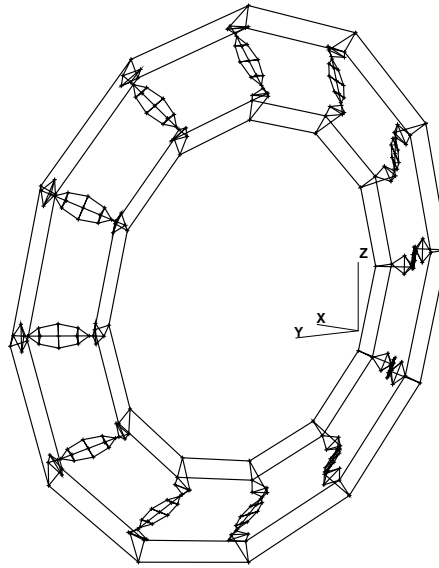


FIG. 2.32 – Voisinages pour l'ensemble du roulement

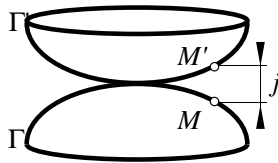


FIG. 2.33 – Contact avec jeu — configuration non déformée

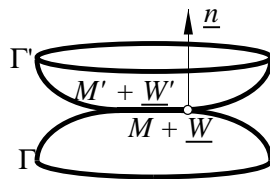


FIG. 2.34 – Contact avec jeu — configuration déformée

Comment choisir *a priori* les couples de points homologues de la configuration non déformée, entre lesquels écrire les conditions ci-dessus ? Quelle est alors la normale  $\underline{n}$  ? Plusieurs possibilités peuvent être envisagées ; par exemple :

- en se donnant les couples de points homologues  $(\underline{M}, \underline{M}')$ , on peut choisir comme normale la moyenne entre les normales aux surfaces non déformées en ces points ;
- en choisissant un champ de normales sur  $\Gamma$ , on en déduit les points homologues en vis à vis sur  $\Gamma'$  ;
- en se donnant les couples de points homologues, la normale peut aussi être prise suivant  $(\underline{M}' - \underline{M})$ .

Cette dernière possibilité a été choisie ici pour sa traduction quasi-immédiate après discrétisation : les maillages  $\Gamma_h$  et  $\Gamma'_h$  sont en effet générés de façon liée (par une transformation géométrique par exemple) ; étant ainsi homéomorphes, ils possèdent la même connectivité. Deux points homéomorphes seront alors homologues pour le contact. La normale et le jeu s'en déduisent alors facilement. Le choix de la transformation géométrique (c'est à dire du champ de normales) fait ainsi partie du modèle HPP. La validité de ce dernier est liée au fait que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont « proches » l'une de l'autre et que les glissements tangentiels restent « faibles », comme pour toute modélisation du contact sous les hypothèses des petites perturbations.

Sur l'exemple présent, les champs de normales sont représentés sur la figure 2.35.

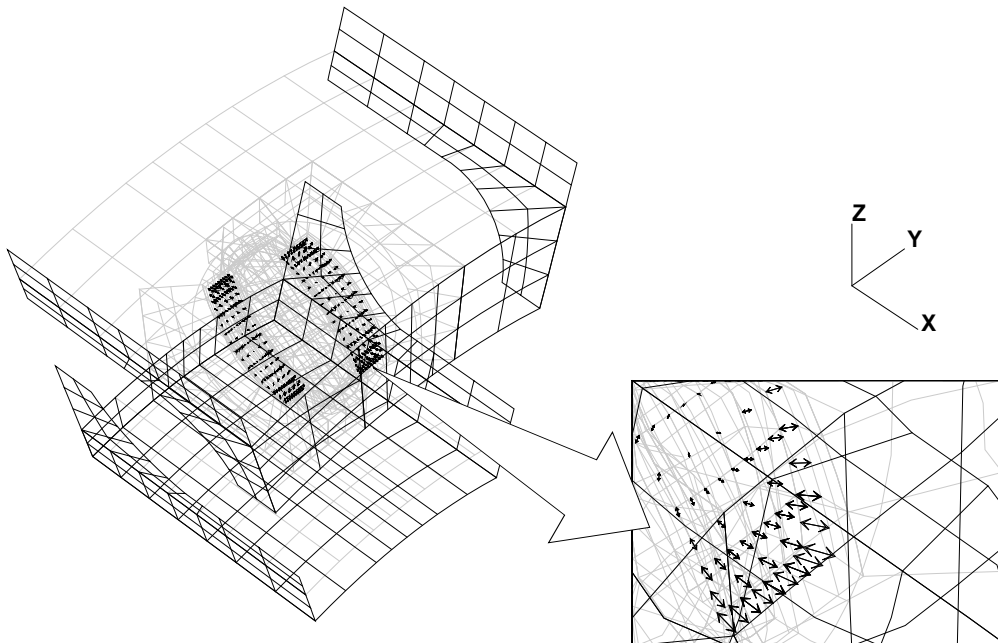


FIG. 2.35 – Traitement du contact unilatéral parfait avec jeu

### Résultats

Ici encore, plusieurs tailles de problèmes ont été testées. Elles correspondent aux maillages tracés sur la figure 2.36.

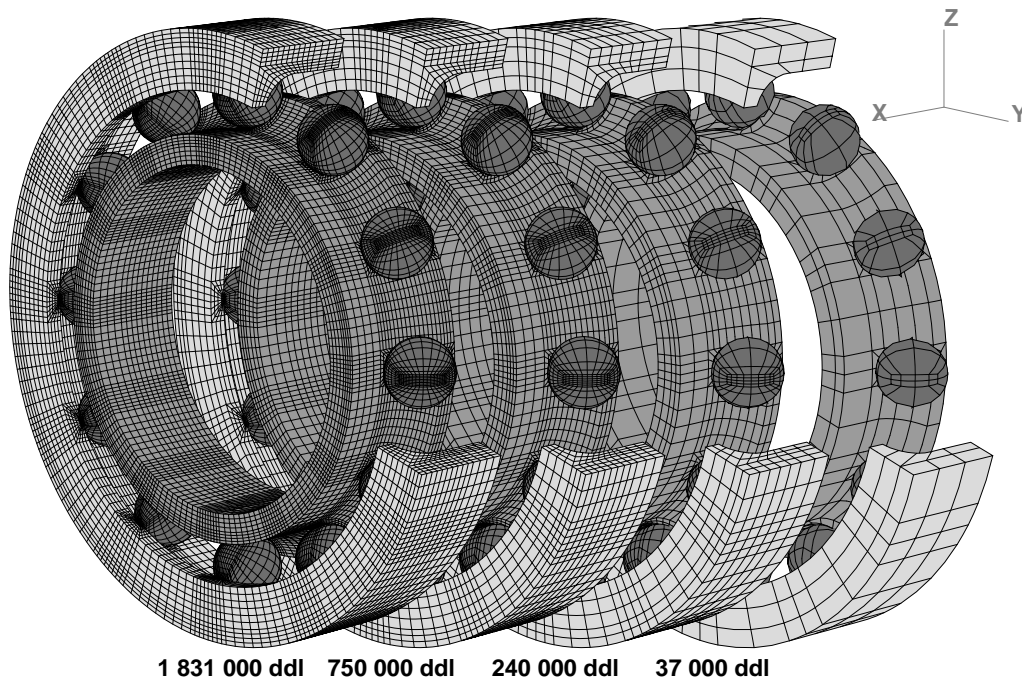


FIG. 2.36 – Différents maillages équivalents pour l'ensemble du roulement

Pour le traitement d'un seul secteur du roulement, les tailles de problèmes sont illustrées par la capacité de stockage nécessaire aux matrices de rigidités sur la figure 2.37. La figure 2.38 présente, elle, la capacité de stockage nécessaire à stocker matrices de rigidités et vecteurs second membres dans le cas d'un calcul direct et de la sous-structuration. La table 2.5 reporte ces diverses caractéristiques.

Maillage	sous-structuration (total)		calcul direct sur un secteur	
	nb ddl total	enc. (rigidité + 2d membre x 12)	nb ddl	enc. (3 rigidités + 2d membre)
1	6 303	3 Mo	3 339	5 Mo
2	30 615	33 Mo	20 697	98 Mo
3	84 931	163 Mo	64 047	664 Mo
4	191 829	610 Mo	155 361	2 943 Mo

TAB. 2.5 – Caractéristiques des problèmes

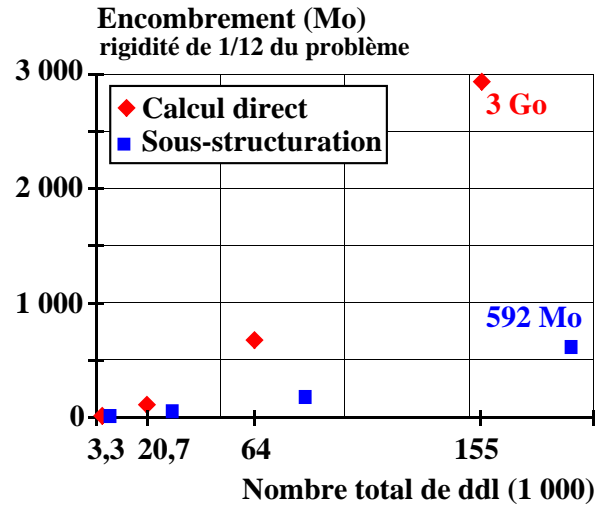


FIG. 2.37 – Encombement pour un secteur

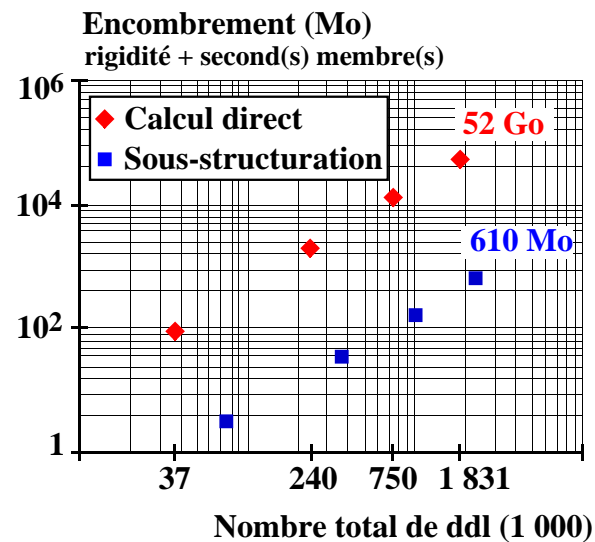


FIG. 2.38 – Encombement pour traiter la totalité du problème

Le type de résultat obtenu est la contrainte de Mises présentée sur la figure 2.39, et l'analyse des zones fortement chargées au niveau des contacts (dans les plans méridiens de la figure 2.40) qui est représentée sur la figure 2.41.

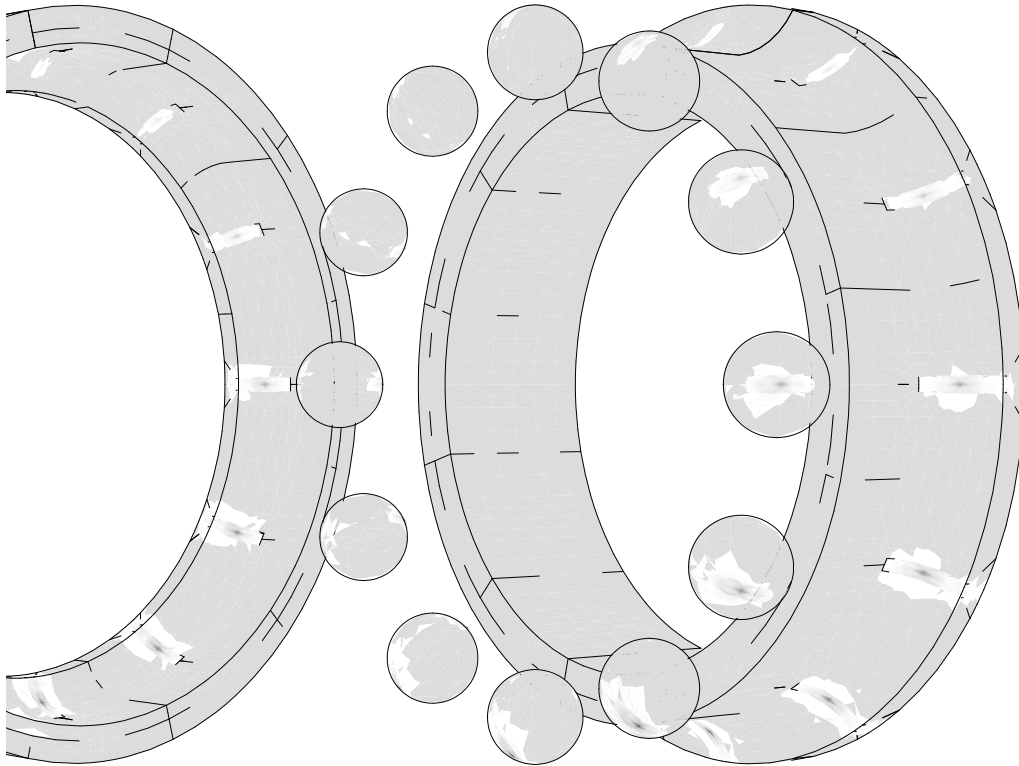


FIG. 2.39 – Contrainte de Mises sur les composants du roulement

Ils ont été obtenus en 200 itérations sur les 12 systèmes simultanés ; la figure 2.42 donne la courbe de l'indicateur d'erreur en fonction des itérations (pour le maillage numéro 2) et le temps CPU cumulé total de l'analyse est reporté sur la figure 2.43, et dans la table 2.6, en fonction de la taille du problème traité.

Maillage	Temps CPU cumulé (CRAY-T3D)		
	initialisation	200 itérations	total
1	52 s	2 500 s	2 600 s
2	160 s	13 150 s	13 300 s
3	650 s	52 800 s	53 400 s
4	2 700 s	398 000 s	401 000 s

TAB. 2.6 – Coût de la résolution

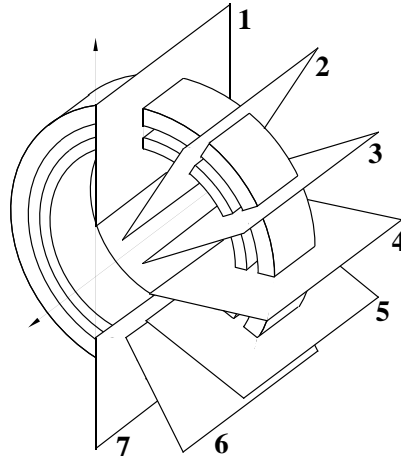


FIG. 2.40 – Zones méridiennes des contacts

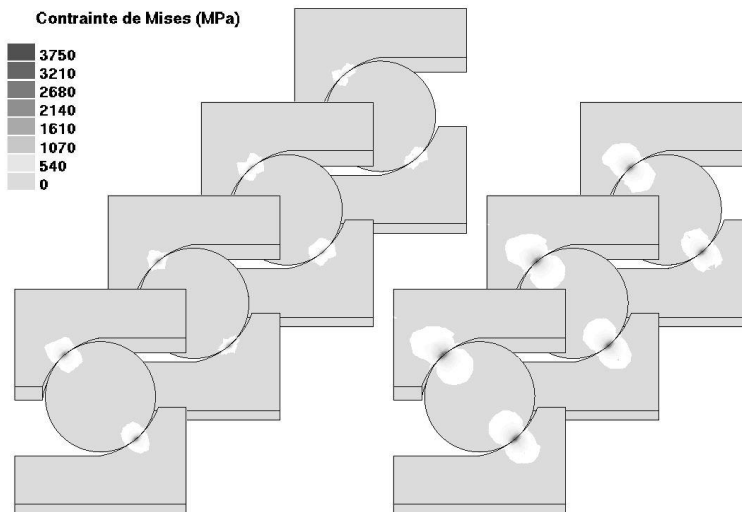


FIG. 2.41 – Contrainte de Mises dans les plans méridiens

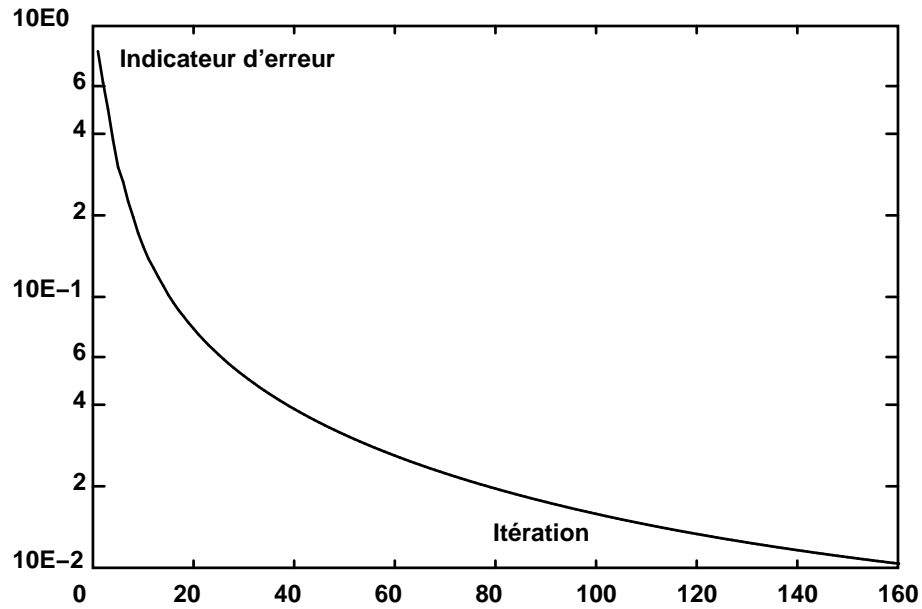
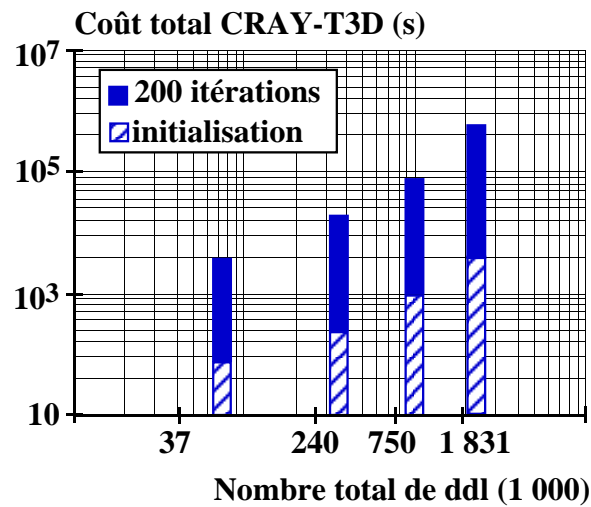
FIG. 2.42 – Évolution de l'indicateur  $\eta$  au cours des itérations

FIG. 2.43 – Coût de l'analyse en fonction de la taille du problème

Ici encore, on observe une réduction importante de l'encombrement lors de l'utilisation d'une sous-structuration ([Fonseka 93]) par rapport au calcul direct sur un secteur, et a fortiori sur la totalité du roulement. Ceci est essentiellement dû à la réduction importante de la largeur de bande des problèmes locaux aux sous-structures : ici les bagues du roulement possèdent une topologie de forme torique très pénalisante pour la largeur de bande.

La séparation des difficultés dans les approches LATIN conduit à ne traiter les non-linéarités qu'au niveau de l'étape locale. Sur ce problème où ces non-linéarités (contact unilatéral sans frottement) sont uniquement liées au comportement des interfaces, il est alors possible de traiter les différents secteurs comme autant de cas de charge différents sur une même géométrie, ce qui s'applique facilement lors d'une technique de sous-structuration, [El Hami et Radi 96]. Un exemple typique d'utilisation d'interfaces particulières comme celles présentées ici, est celui de l'analyse de structures avec conditions de périodicité, comme par exemple, les cellules de matériaux composites, [Charpentier et Maday 95].

# Chapitre 3

## Discrétisation

---

<b>3.1</b>	<b>Cas d'une formulation en déplacement</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>Discrétisations et propriétés à convergence</b>	<b>95</b>
3.2.1	Expression des directions de recherche	96
3.2.2	Exemple	98
3.2.3	Expression de l'admissibilité	101
<b>3.3</b>	<b>Unicité</b>	<b>103</b>
3.3.1	Unicité en contraintes	103
3.3.2	Unicité en déplacement	104
3.3.3	Cas de la formulation en déplacement	105
<b>3.4</b>	<b>Implantation numérique</b>	<b>106</b>
<b>3.5</b>	<b>Exemples</b>	<b>109</b>

---

---

Après avoir mis en place au chapitre précédent une approche mixte en décomposition en sous-structures et interfaces, issue de la méthode LATIN, nous allons étudier plus en détail sa mise en œuvre numérique dans le cadre d'une analyse par éléments finis. Nous nous restreindrons ici au cas de maillages conformes à la traversée des interfaces ; l'aspect incompatibilité de maillages est cependant intéressant lors de l'assemblage de structures a priori distinctes, dont les maillages peuvent éventuellement provenir de sources différentes, [Farhat et Géraudin 92], [Champaney 96].

Le premier type de discrétisation mis en place concerne l'approche cinématique ; bien que la méthode traite de façon complètement symétrique efforts et déplacements, le rôle du déplacement devient alors, après discrétisation, prépondérant par rapport aux quantités statiques. Les propriétés de la solution obtenue à convergence montrent alors que cette dernière est identique à celle classiquement obtenue par résolution directe du problème de référence discrétisé et traité par les mêmes éléments finis en déplacement.

La deuxième approche cherche à rétablir la symétrie précédente. Elle conduit donc à envisager la discrétisation explicite des quantités effort. Comme nous nous plaçons dans le cas de figure de l'élasticité linéaire, toute l'information sur l'état courant d'une sous-structure est connue à partir des seuls efforts et déplacements bords. Ce sera donc sur ces seules quantités que des discrétisations particulières seront choisies. La contrainte ne sera donc pas représentée sous forme d'inconnue, mais comme précédemment, post-traitée. Nous détaillerons les modifications à apporter à l'implantation de l'approche cinématique, la régularité moindre à imposer aux efforts permettant de les substituer localement dans le problème global sur chaque sous-structure. La solution à convergence est, cette fois-ci, celle d'une formulation mixte qui fait jouer un rôle plus important aux interfaces et à l'équilibre.

### 3.1 Cas d'une formulation en déplacement

Le problème posé à l'étape linéaire (chapitre 2.2 page 50) peut se réécrire sous la forme de la minimisation d'un potentiel  $\Psi$  de type « erreur en relation de comportement » :

$$\min_{\substack{(\underline{U}, \underline{W}) \in U_{\text{ad}} \\ (\underline{\sigma}, \underline{F}) \in S_{\text{ad}}}} \Psi(\underline{U}, \underline{W}, \underline{\sigma}, \underline{F}) \quad [3.1]$$

où

$$\Psi = \sum_{E \in \mathbf{E}} \psi^E$$

$$\begin{aligned} \psi^E(\underline{U}^E, \underline{W}^E, \underline{\sigma}^E, \underline{F}^E) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[(\underline{\sigma}^E - \varepsilon(\underline{U}^E)) \mathbf{K}^{-1} (\underline{\sigma}^E - \varepsilon(\underline{U}^E))] d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} [(\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) + \mathbf{k}^- (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E)] \cdot (\mathbf{k}^-)^{-1} [(\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) + \mathbf{k}^- (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E)] dS \end{aligned}$$

pour des couples déplacement–déplacement bord  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  cinématiquement admissibles, et contrainte–effort bord  $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$  statiquement admissibles.

Par choix de la séparation des difficultés lors de la mise en place de l'approche à grand incrément de temps, le problème à traiter est ici forcément linéaire. Le potentiel  $\psi^E$  se découple alors aisément en une partie ne faisant intervenir que les quantités de type cinématique  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$ , et une autre ne faisant intervenir que les quantités de type statique  $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$ . En effet :

$$\begin{aligned} \psi^E(\underline{U}^E, \underline{W}^E, \underline{\sigma}^E, \underline{F}^E) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}^E] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot (\mathbf{k}^-)^{-1} (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) dS + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot \mathbf{k}^- (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS + \\ &- \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega + \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS \end{aligned}$$

et le dernier terme —le terme de couplage—, en utilisant le fait que le couple  $(\underline{\sigma}^E, \underline{F}^E)$  doit être statiquement admissible ([2.2], page 47), devient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega + \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS &= \\ &= - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS - \int_{\partial_1 \Omega^E} \underline{U}_d \cdot \underline{\sigma}^E \underline{n} dS + \\ &+ \int_{\partial_i \Omega^E} (-\hat{\underline{F}}^E \cdot \underline{W}^E - \underline{F}^E \cdot \hat{\underline{W}}^E + \hat{\underline{F}}^E \cdot \hat{\underline{W}}^E) dS \end{aligned}$$

La formulation en déplacement de l'étape linéaire s'en déduit donc de la façon suivante :

$$\min_{(\underline{U}, \underline{W}) \in U_{\text{ad}}} \Psi_1(\underline{U}, \underline{W}) \quad [3.2]$$

où

$$\Psi_1 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \psi_1^E$$

$$\begin{aligned} \psi_1^E(\underline{U}^E, \underline{W}^E) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)] d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot \mathbf{k}^- (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS + \\ & - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS - \int_{\partial_i \Omega^E} \hat{\underline{F}}^E \cdot \underline{W}^E dS \end{aligned}$$

pour un couple  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  cinématiquement admissible.

Considérons maintenant la discrétisation de type éléments finis en déplacement  $\Omega_h^E$  de la sous-structure  $\Omega^E$  (de façon à conserver un maillage conforme de part et d'autre des interfaces) :

$$\underline{U}^E(\underline{M}) = \sum_i q_i^E \underline{\varphi}_i(\underline{M}) \quad \in U_h \subset U$$

où  $\underline{\varphi}_i$  est la fonction de base relative au nœud  $i$  de la discrétisation, et (figure 3.1)

$$\underline{W}^E(\underline{M}) = \sum_i q_i^E \underline{\varphi}_i(\underline{M})|_{\partial_i \Omega^E} \quad \in W_h \subset W$$

afin de satisfaire à la condition d'admissibilité cinématique, pour laquelle on a donc

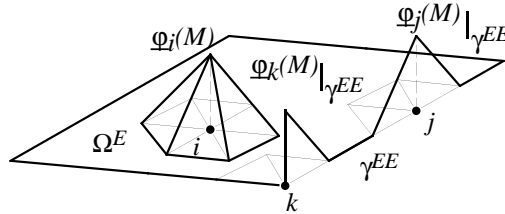


FIG. 3.1 – Discrétisation des champs bord

$W_h = \text{trace } U_h$ , c'est à dire la restriction de  $U_h$  sur le bord, [Bourgat *et al.* 89].

Le problème de minimisation [3.2] est alors approché par son équivalent discrétisé dont la condition de stationnarité s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \sum_j q_j^{E*} \underline{\varphi}_j \in U_h^0, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \sum_{i,j} \left\{ q_i^E \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{\varphi}_i) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{\varphi}_j)] d\Omega q_j^{E*} + q_i^E \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\varphi}_i \cdot \mathbf{k}^- \underline{\varphi}_j dS q_j^{E*} \right\} = \\ = \sum_{E \in \mathbf{E}} \sum_j \left\{ \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{\varphi}_j d\Omega q_j^{E*} + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{\varphi}_j dS q_j^{E*} + \right. \\ \left. + \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{\hat{F}}^E + \mathbf{k}^- \underline{\hat{W}}^E) \cdot \underline{\varphi}_j dS q_j^{E*} \right\} \end{aligned}$$

On retrouve un problème éléments finis classique de type élasticité linéaire sous-structure par sous-structure, formellement identique à celui déjà obtenu dans le cas unidimensionnel au chapitre 2.3 (page 59).

$$([\mathbf{K}^E] + [k^E])[q^E] = [f^E] \quad [3.3]$$

$[\mathbf{K}^E]$  est la matrice de rigidité de la sous-structure  $\Omega^E$ ,  $[k^E]$  est un terme provenant de la direction de recherche  $\mathbf{k}^-$  et toutes deux restent constantes au cours des itérations.  $[\mathbf{K}^E] + [k^E]$  est donc factorisée une fois pour toute lors de l'initialisation de l'algorithme par le processeur gérant la sous-structure  $\Omega^E$ .  $[q^E]$  est le vecteur colonne contenant tous les degrés de liberté  $q_i^E$  de cette dernière et  $[f^E]$  est un terme de charge où interviennent les résultats de l'étape locale précédente ; il est donc nécessaire de ré-assembler ce dernier à chaque itération et de procéder à une montée-descente pour déterminer  $[q^E]$ .

L'obtention d'un champ de contrainte et d'effort peut alors se faire localement en post-traitement de l'étape linéaire, en utilisant les relations de comportement :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^E &= \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \\ \underline{F}^E &= \underline{\hat{F}}^E + \mathbf{k}^- \underline{\hat{W}}^E - \mathbf{k}^- \underline{W}^E \end{aligned}$$

avec  $\underline{W}^E = \underline{U}^E|_{\partial_i \Omega^E}$ . De tels champs ne sont statiquement admissibles qu'en moyenne au sens de la discrétisation éléments finis choisie. En effet, par exemple en l'absence de charges extérieures, ils sont liés par :

$$\forall (\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{ad,h}^0, \quad \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{E*})] d\Omega = \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS$$

En fait, lors de l'étape locale suivante, seuls les champs bords  $\underline{W}^E$  et  $\underline{F}^E$  seront nécessaires ; eux seuls seront donc calculés et le champ de contrainte  $\underline{\sigma}^E$  pourra n'être déterminé qu'en post-traitement de l'ensemble du calcul.

Pour l'étape locale, le choix de la représentation des champs d'interface  $\underline{\hat{W}}$  et  $\underline{\hat{F}}$  est moins immédiat. Ces champs interviennent dans le calcul de la charge  $[f^E]$  et leur

intégration est effectuée de façon approchée à partir de leur évaluation en un certain nombre de points de Gauss. Un choix possible est donc de stocker leurs valeurs en ces points et ainsi d'écrire l'étape locale en ces mêmes points (annexe A, page 181). Dans le cas d'interfaces parfaites, de maillages conformes et si les champs  $\hat{\underline{F}}_{-1/2}$  et  $\hat{\underline{W}}_{-1/2}$  servant à initialiser l'algorithme ont la régularité de  $\underline{W}_h$  par interface, on peut noter qu'au cours des itérations, ils gardent cette régularité. La représentation est alors équivalente à la représentation nodale sur les maillages des interfaces  $\Gamma^{EE'}$ .

Le fait que la solution à convergence soit celle du problème de départ exprimé lui aussi par une formulation en déplacement, [3.19], sera montré au chapitre 3.2.3, page 101.

Notons dès à présent qu'il est aussi possible d'écrire l'étape locale « en moyenne » similaire à celle de l'étape linéaire [3.1], c'est à dire sous forme de minimisation d'un potentiel  $\Phi$  de type « erreur en relation de comportement » :

$$\min_{\substack{\hat{\underline{W}} \in \hat{\underline{W}}, \quad \hat{\underline{W}}^E = \hat{\underline{W}}^{E'} \text{ sur } \Gamma^{EE'} \\ \hat{\underline{F}} \in \hat{\underline{F}}, \quad \hat{\underline{F}}^E + \hat{\underline{F}}^{E'} = 0 \text{ sur } \Gamma^{EE'}}} \Phi(\hat{\underline{W}}, \hat{\underline{F}}) \quad [3.4]$$

où

$$\Phi = \sum_{\Gamma^{EE'}} \phi^{EE'}$$

$$\begin{aligned} \phi^{EE'}(\hat{\underline{W}}^E, \hat{\underline{W}}^{E'}, \hat{\underline{F}}^E, \hat{\underline{F}}^{E'}) = \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) - \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \right] \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} \left[ (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) - \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \right] + \\ \left[ (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) - \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \right] \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} \left[ (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) - \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \right] dS \end{aligned}$$

Ici encore, le problème se découple de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi^{EE'}(\hat{\underline{W}}^E, \hat{\underline{W}}^{E'}, \hat{\underline{F}}^E, \hat{\underline{F}}^{E'}) = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) + (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) + \\ (\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) + (\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot \mathbf{k}^+(\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) dS + \\ - \int_{\Gamma^{EE'}} (\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) + (\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) dS \end{aligned}$$

et le dernier terme —le terme de couplage—, en utilisant le fait que les équations associées à  $\Gamma$  sont vérifiées (comportement des interfaces), s'écrit :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma^{EE'}} (\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) + (\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) dS = \\ = \int_{\Gamma^{EE'}} -\hat{\underline{W}}^E \cdot \hat{\underline{F}}^E - \hat{\underline{W}}^{E'} \cdot \hat{\underline{F}}^{E'} + \hat{\underline{W}}^E \cdot \underline{F} + \hat{\underline{W}}^{E'} \cdot \underline{F}^{E'} + \underline{W} \cdot \hat{\underline{F}}^E + \underline{W}' \cdot \hat{\underline{F}}^{E'} + \\ - \underline{W} \cdot \underline{F} - \underline{W}' \cdot \underline{F}^{E'} dS \end{aligned}$$

avec, par exemple dans le cas d'interfaces parfaites ([2.4], page 47) :

$$-\underline{\hat{W}}^E \cdot \underline{\hat{F}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} = -(\underline{\hat{W}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^E = 0$$

Le cas d'interfaces de contact déjà présenté [2.5] se traite similairement ; en effet, le dernier terme de couplage devient alors :

$$\begin{aligned} -\underline{\hat{W}}^E \cdot \underline{\hat{F}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} &= -(\underline{\hat{W}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^E \\ &= -(\underline{\hat{W}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'}) \cdot \underbrace{(\underline{\pi} \underline{\hat{F}}^E)}_0 + (\underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{F}}^E) \underline{n}^{EE'} \\ &= -\left[ \underline{n}^{EE'} \cdot (\underline{\hat{W}}^E - \underline{\hat{W}}^{E'}) \right] (\underline{n}^{EE'} \cdot \underline{\hat{F}}^E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le problème de l'étape locale consiste ainsi à minimiser les potentiels suivants :

$$\min_{\substack{\underline{\hat{W}} \in \hat{W}, \\ \underline{\hat{W}}^E = \underline{\hat{W}}^{E'} \text{ sur } \Gamma^{EE'}}} \Phi_1(\underline{\hat{W}}) \quad [3.5]$$

où

$$\Phi_1 = \sum_{\Gamma^{EE'}} \phi_1^{EE'}$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{EE'}(\underline{\hat{W}}^E, \underline{\hat{W}}^{E'}) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \mathbf{k}^+ (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) dS + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot \mathbf{k}^+ (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) dS + \\ &+ \int_{\Gamma^{EE'}} \left( \underline{\hat{W}}^E \cdot \underline{F}^E + \underline{\hat{W}}^{E'} \cdot \underline{F}^{E'} \right) dS \end{aligned}$$

et

$$\min_{\substack{\underline{\hat{F}} \in \hat{F}, \\ \underline{\hat{F}}^E + \underline{\hat{F}}^{E'} = 0 \text{ sur } \Gamma^{EE'}}} \Phi_2(\underline{\hat{F}}) \quad [3.6]$$

où

$$\Phi_2 = \sum_{\Gamma^{EE'}} \phi_2^{EE'}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{EE'}(\underline{\hat{F}}^E, \underline{\hat{F}}^{E'}) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}^E) \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}^E) dS + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) \cdot (\mathbf{k}^+)^{-1} (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) dS + \\ &+ \int_{\Gamma^{EE'}} \left( \underline{W}^E \cdot \underline{\hat{F}}^E + \underline{W}^{E'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'} \right) dS \end{aligned}$$

## 3.2 Discrétisations et propriétés à convergence

L'approche précédemment décrite sur le problème continu met en œuvre un algorithme itératif qui, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, fournit la solution au problème de référence ([Ladevèze 96]). On peut donc s'interroger sur l'influence du choix de la discrétisation pour les deux quantités mises en jeu : les efforts et les déplacements.

On se place maintenant à convergence pour un problème discrétisé, c'est à dire que les éléments respectifs  $\mathbf{s}$  et  $\hat{\mathbf{s}}$  de  $\mathbf{A}_{dh}$  et  $\Gamma_h$  n'évoluent plus au cours des itérations (figure 3.2).

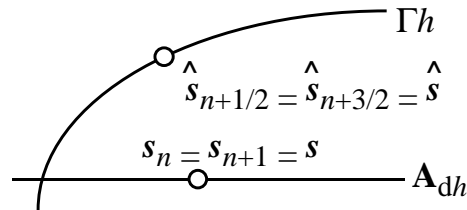


FIG. 3.2 – Convergence pour un problème discrétisé

La formulation en déplacement décrite au chapitre précédent conduit à privilégier les quantités cinématiques, c'est à dire le déplacement bord, par rapport aux quantités statiques, les efforts. La description de l'algorithme au sens du milieu continu traitait, quant à elle, à égalité d'importance ces deux types de quantités. Nous allons ici mettre en place une technique de discrétisation qui se veut respecter cette symétrie.

Choisir une discrétisation revient à choisir les espaces dans lesquels sont décrits les divers champs cherchés. On notera ici :

- $F_h$  l'espace de discrétisation des champs d'efforts  $\underline{F}$  et  $\hat{F}$ , puisqu'ils représentent des quantités de même nature,
- $U_h$  celui de  $\underline{U}$ , ainsi que
- $W_h$  celui de  $\underline{W}$  et  $\hat{W}$ .

Remarquons dès lors que lorsque l'on choisit la formulation en déplacement précédente, le champ de déplacement bord  $\underline{W}$  étant obtenu par une prise de trace du champ de déplacement intérieur,  $\underline{W}^E = \underline{U}|_{\partial_i \Omega^E}$ , l'algorithme impose une continuité supplémentaire aux « coins » (intersection de mesure nulle entre interfaces) pour les champs  $\underline{W}$ .

Le choix de ces espaces de discrétisation se fait en considérant la nature des champs correspondants. Par exemple, pour les quantités *efforts* sur le bord,  $\underline{F}$  et  $\hat{F}$ , sont l'analogue des contraintes pour la mécanique des interfaces. Il est alors naturel de représenter ces quantités avec une interpolation de même type que celle des contraintes ou des déformations, c'est à dire avec un degré d'interpolation en moins que celui des déplacements (et sans imposer de régularité entre les éléments). D'autre part, en privilégiant

la description des interfaces par leur relation de comportement, un saut de déplacement bord peut s'interpréter comme la « déformation » associée à l'effort  $\hat{\underline{F}}$ . Une telle interprétation est classique dans les cas d'étude des interfaces ([Ladevèze 85], [Allix et Ladevèze 92]). On est donc conduit à choisir une discrétisation des déplacements bord telle que  $\boxed{\underline{F}_h = k \underline{W}_h}$ .

### 3.2.1 Expression des directions de recherche

On se placera désormais dans le cas où les directions de recherche des étapes locale et linéaire sont conjuguées, cadre privilégié pour les propriétés de convergence de l'algorithme (chapitre 2.3, page 59), c'est à dire pour lesquelles  $k^+ = k^- = k$ . De plus, pour alléger les notations, le paramètre de direction de recherche sera écrit sous la forme  $k = k \mathbb{1}_d$ .

La direction de recherche de l'étape linéaire ([2.7], page 52)

$$(\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) + k(\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_i \Omega^E$$

est alors vérifiée (en moyenne) au sens suivant :

$$\forall \underline{F}^* \in \underline{F}_h,$$

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} \left[ (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot k^{-1} \underline{F}^{E*} + (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot \underline{F}^{E*} \right] dS = 0 \quad [3.7]$$

quant à l'étape locale, la version discrétisée des équations d'Euler traduisant la stationnarité des potentiels ([3.5] et [3.6]) devient :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\underline{W}}^* \in \underline{W}_h, \quad \hat{\underline{W}}^{E*} = \hat{\underline{W}}^{E'*} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}, \\ \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\hat{\underline{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot k \hat{\underline{W}}^{E*} + \underline{F}^E \cdot \hat{\underline{W}}^{E*} \right] dS + \\ + \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\hat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot k \hat{\underline{W}}^{E'*} + \underline{F}^{E'} \cdot \hat{\underline{W}}^{E'*} \right] dS = 0 \quad [3.8] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\underline{F}}^* \in \underline{F}_h, \quad \hat{\underline{F}}^{E*} + \hat{\underline{F}}^{E'*} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}, \\ \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\hat{\underline{F}}^E - \underline{F}^E) \cdot k^{-1} \hat{\underline{F}}^{E*} + \underline{W}^E \cdot \hat{\underline{F}}^{E*} \right] dS + \\ + \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\hat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) \cdot k^{-1} \hat{\underline{F}}^{E'*} + \underline{W}^{E'} \cdot \hat{\underline{F}}^{E'*} \right] dS = 0 \quad [3.9] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour une quantité  $a^E$  définie sur les interfaces, de pures considérations géométriques conduisent à :

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} a^E dS = \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (a^E + a^{E'}) dS$$

la direction de recherche de l'étape linéaire [3.7] est équivalente à :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\hat{F}}^* \in F_h, \quad \underline{\hat{F}}^{E*} + \underline{\hat{F}}^{E'*} = 0 \text{ sur } \Gamma^{EE'}, \\ \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}^E) \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E*} + (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} \right] dS + \\ + \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E'*} + (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^{E'*} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad [3.10]$$

et simultanément :

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}^E) \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E*} + (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} \right] dS + \\ - \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}^{E'}) \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E'*} - (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^{E'*} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad [3.11]$$

En se restreignant au cas des interfaces parfaites ([2.4], page 47), c'est à dire quand on a sur  $\Gamma^{EE'}$

$$\underline{\hat{W}}^E = \underline{\hat{W}}^{E'} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{F}}^E + \underline{\hat{F}}^{E'} = 0$$

alors

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\hat{W}}^E \cdot \underline{\hat{F}}^E dS = \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{W}}^E \cdot \underline{\hat{F}}^E + \underline{\hat{W}}^{E'} \cdot \underline{\hat{F}}^{E'}) dS = 0$$

Dans ce cas, les expressions [3.9] et [3.10] permettent de vérifier l'expression du raccord en déplacement de la solution :

$$\boxed{\forall \underline{\hat{F}}^* \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{W}^E - \underline{W}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} dS = 0} \quad [3.12]$$

et :

$$\forall \underline{\hat{F}}^{E*} \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ \underline{\hat{F}}^E - \frac{1}{2}(\underline{F}^E - \underline{F}^{E'}) \right] \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E*} dS = 0$$

dans laquelle, en choisissant  $\underline{\hat{F}}^{E*} = \underline{\hat{F}}^E - \frac{1}{2}(\underline{F}^E - \underline{F}^{E'})$ , on a :

$$\boxed{\underline{\hat{F}}^E = \frac{1}{2}(\underline{F}^E - \underline{F}^{E'}) \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}} \quad [3.13]$$

Il reste encore à faire intervenir la seconde partie [3.8] de la direction de recherche de l'étape locale. Au vu des choix de discrétisation, elle s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\hat{F}}^* \in F_h, \quad \underline{\hat{F}}^{E*} + \underline{\hat{F}}^{E'*} = 0, \\ \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} + \underline{F}^E \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E*} \right] dS + \\ - \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ (\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{W}^{E'}) \cdot \underline{\hat{F}}^{E'*} - \underline{F}^{E'} \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E'*} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

Avec la dernière des expressions [3.11] à employer, cela permet d'écrire d'une part :

$$\forall \underline{\hat{F}}^* \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{F}^E + \underline{F}^{E'}) \cdot k^{-1} \underline{\hat{F}}^{E*} dS = 0$$

et, en particulier en choisissant  $\underline{\hat{F}}^{E*} = \underline{F}^E + \underline{F}^{E'}$ , cela permet de montrer :

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}$$

ce qui permet de renforcer la propriété [3.13] en l'égalité des efforts

$$\boxed{\underline{F}^E = \underline{\hat{F}}^E \quad \text{et} \quad \underline{F}^{E'} = \underline{\hat{F}}^{E'} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}} \quad [3.14]$$

D'autre part :

$$\forall \underline{\hat{F}}^* \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \left[ \underline{\hat{W}}^E - \frac{1}{2} (\underline{W}^E + \underline{W}^{E'}) \right] \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} dS = 0$$

ce qui donne avec la première propriété à convergence [3.12] :

$$\boxed{\forall \underline{\hat{F}}^{E*} \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot \underline{\hat{F}}^{E*} dS = 0} \quad [3.15]$$

Toujours au vu des choix de discrétisation, elle s'écrit aussi :

$$\forall \underline{\hat{W}}^* \in W_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E) \cdot k \underline{\hat{W}}^{E*} dS = 0$$

et en prenant  $\underline{\hat{W}}^{E*} = \underline{\hat{W}}^E - \underline{W}^E$ , on obtient l'égalité des déplacements bords :

$$\boxed{\underline{W}^E = \underline{\hat{W}}^E \quad \text{et} \quad \underline{W}^{E'} = \underline{\hat{W}}^{E'} \quad \text{sur} \quad \Gamma^{EE'}} \quad [3.16]$$

L'ensemble des relations [3.14] et [3.16] sont alors les propriétés de la solution à convergence. Elles permettent de vérifier que  $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}$ .

### 3.2.2 Exemple

Afin d'illustrer ces propriétés, considérons l'exemple présenté sur la figure 3.3. les éléments employés sont des triangles à trois nœuds. La définition des espaces de discrétisation en déplacement bord est celle des champs constants par arête (figure 3.4). La représentation des fonctions de base bord analogue à celle de la figure 3.1, page 91 pour le cas de la formulation en déplacement, est cette fois-ci celle de la figure 3.5. On peut vérifier sur la solution déformée, les propriétés à convergence [3.16] en déplacement, c'est à dire la continuité en moyenne seulement (ici, arête par arête d'élément bord) du déplacement élément fini. L'allure des efforts bord, au vu des éléments choisis, est quant à elle conforme à la figure 3.6 dont l'analogie pour l'approche en déplacement serait celle de la figure 3.7.

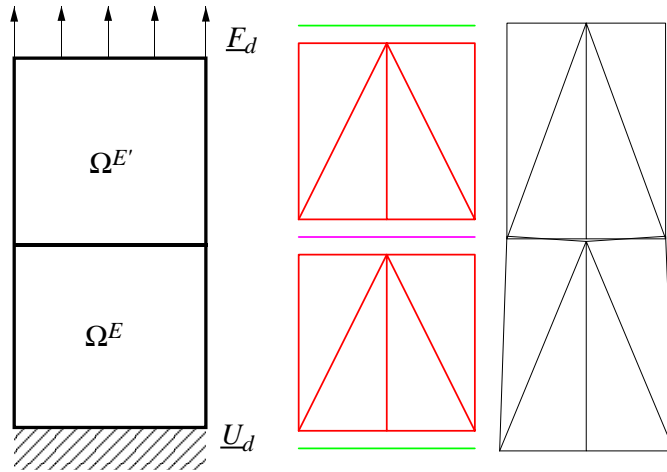


FIG. 3.3 – Exemple, maillage et décomposition, et déformée à convergence

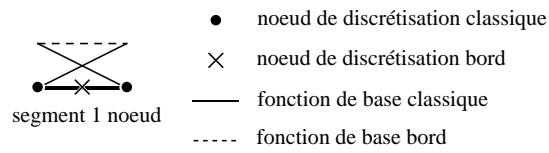


FIG. 3.4 – Élément discontinu d'interface associé au triangle à trois nœuds

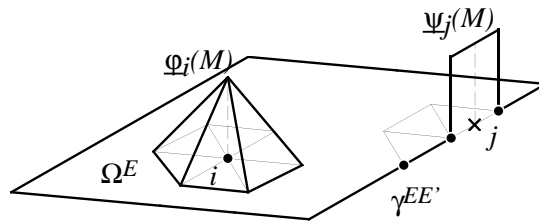


FIG. 3.5 – Discrétisation des champs bord

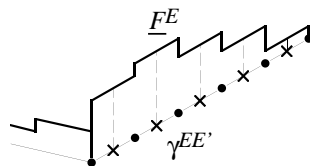


FIG. 3.6 – Exemple de champ d'effort discontinu par élément

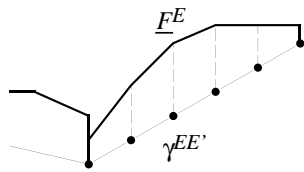


FIG. 3.7 – Exemple de champ d'effort issu de la formulation en déplacement

### 3.2.3 Expression de l'admissibilité

L'admissibilité pour  $s$  s'écrit en déplacement à partir de [3.1] de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{adh}^0, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega + \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{W}^E - \hat{W}^E) \cdot k \underline{W}^{E*} dS + \\ - \int_{\partial_i \Omega^E} \hat{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS \end{aligned}$$

$(\underline{U}, \underline{W}) \in U_{adh}$  correspondant maintenant aux  $\underline{U} \in U_h$  et  $\underline{W} \in W_h$ , liés par la relation :

$$\forall \underline{W}^* \in W_h, \quad \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{U}^E|_{\partial_i \Omega^E} - \underline{W}^E) \cdot k \underline{W}^{E*} dS = 0 \quad [3.17]$$

La propriété de raccord [3.15] permet d'écrire :

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{W}^E - \hat{W}^E) \cdot k \underline{W}^{E*} dS = 0$$

ce qui permet d'exprimer l'admissibilité sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{adh}^0, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega - \int_{\partial_i \Omega^E} \hat{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS = \\ = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS \end{aligned}$$

pour donner la formulation attendue :

pour  $(\underline{U}, \underline{W}) \in U_{adh}$ ,  $\hat{F} \in F_h$ ,  $\hat{F}^E + \hat{F}^{E'} = 0$ , trouver le point selle de

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega - \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \hat{F}^E \cdot (\underline{W}^E - \underline{W}^{E'}) dS + \right. \\ \left. - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS \right\} \quad [3.18] \end{aligned}$$

Enfin, si de plus, on se place dans le cas de l'approche en déplacement du chapitre 3.1, page 90, la formulation [3.18] est toujours valide ; elle correspond à un lagrangien augmenté ([Fortin et Glowinski 82]) qui est équivalent au problème de minimisation sous contrainte :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\underline{U} \in U_h \\ \underline{U}^E|_{\Gamma^{EE'}} = \underline{U}^{E'}|_{\Gamma^{EE'}}}} \left\{ \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega + \right. \\ \left. - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS \right\} \quad [3.19] \end{aligned}$$

qui représente la formulation éléments finis en déplacement du problème de référence.

Il s'agit bien ici de l'approche en déplacement telle qu'elle a pu être décrite au chapitre 1.2, page 19.

Une discrétisation des efforts similaires à la trace sur le bord des déplacements intérieurs est à rapprocher de la méthode « mortar, » pour des maillages conformes.

### 3.3 Unicité

Discutons tout d'abord de l'unicité de la solution de la formulation [3.18] précédente. Pour cela nous noterons

$$A((\underline{U}, \underline{W}); \hat{\underline{F}}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^E)] d\Omega + \\ - \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \hat{\underline{F}}^E \cdot (\underline{W}^E - \underline{W}^{E'}) dS - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS$$

#### 3.3.1 Unicité en contraintes

Le problème consiste à trouver le point selle de  $A$  pour des  $(\underline{U}, \underline{W}) \in U_{adh}$ ,  $\hat{\underline{F}} \in F_h$ ,  $\hat{\underline{F}}^E + \hat{\underline{F}}^{E'} = 0$ . En supposant avoir une solution  $((\underline{U}_{ex}, \underline{W}_{ex}); \hat{\underline{F}}_{ex})$ , qui vérifie donc les conditions de stationnarité :

$$\forall (\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{adh}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega - \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \hat{\underline{F}}^E \cdot (\underline{W}^{E*} - \underline{W}^{E'*}) dS = \\ = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS$$

ce qui traduit l'admissibilité en moyenne, et :

$$\forall \hat{\underline{F}}^* \in F_h, \quad \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} \hat{\underline{F}}^{E*} \cdot (\underline{W}^E - \underline{W}^{E'}) dS = 0$$

ce qui traduit le raccord en déplacement en moyenne. Les inégalités suivantes sont aussi vérifiées.

$$\forall (\underline{U}, \underline{W}) \in U_{adh}, \hat{\underline{F}} \in F_h, \\ A((\underline{U}_{ex}, \underline{W}_{ex}); \hat{\underline{F}}) \leq A((\underline{U}_{ex}, \underline{W}_{ex}); \hat{\underline{F}}_{ex}) \leq A((\underline{U}, \underline{W}); \hat{\underline{F}}_{ex})$$

En écrivant ces inégalités symétriquement avec deux solutions supposées distinctes et notés respectivement 1 et 2, on obtient :

$$A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_2) \leq A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_1) \leq A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_1) \leq \\ \leq A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_2) \leq A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_2)$$

et donc :

$$A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_2) = A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_1) = A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_1) = A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_2)$$

Ceci permet de calculer :

$$\begin{aligned} 0 &= [A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_2) - A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_2)] + \\ &\quad - [A((\underline{U}_1, \underline{W}_1); \hat{\underline{F}}_1) - A((\underline{U}_2, \underline{W}_2); \hat{\underline{F}}_1)] \\ &= \sum_{\Gamma^{EE'}} \int_{\Gamma^{EE'}} (\hat{\underline{F}}_1^E - \hat{\underline{F}}_2^E) \cdot [(\underline{W}_1^E - \underline{W}_2^E) - (\underline{W}_1^{E'} - \underline{W}_2^{E'})] dS \end{aligned}$$

et en utilisant la stationnarité :

$$0 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[(\varepsilon(\underline{U}_1^E) - \varepsilon(\underline{U}_2^E)) \mathbf{K}(\varepsilon(\underline{U}_1^E) - \varepsilon(\underline{U}_2^E))] d\Omega$$

On peut donc conclure quant à l'unicité en déformation,  $\varepsilon(\underline{U}_1) = \varepsilon(\underline{U}_2)$ , donc en contraintes,  $\sigma_1 = \sigma_2$ . D'autre part, les solutions 1 et 2 doivent vérifier l'admissibilité en moyenne déjà mentionnée,

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{adh}^0, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}_i^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega - \int_{\partial_i \Omega^E} \hat{\underline{F}}_i^E \cdot \underline{W}^{E*} dS = \\ = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$

Par différence, avec la propriété d'unicité en déformation, on obtient :

$$\forall \underline{W}^* \in W_h, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} (\hat{\underline{F}}_1^E - \hat{\underline{F}}_2^E) \cdot \underline{W}^{E*} dS = 0$$

Et par choix des discrétisations :

$$\forall \underline{F}^* \in F_h, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} (\hat{\underline{F}}_1^E - \hat{\underline{F}}_2^E) \cdot k^{-1} \underline{F}^{E*} dS = 0$$

En remarquant que les espaces de discrétisation en question ne contraignent pas à la continuité entre éléments de frontière, mais seulement arête par arête en bidimensionnel, ou face par face en tridimensionnel, on peut en conclure à l'unicité en efforts,  $\hat{\underline{F}}_1^E = \hat{\underline{F}}_2^E$ .

### 3.3.2 Unicité en déplacement

L'unicité en déformation (compatible avec un champ de déplacement,  $\varepsilon = \varepsilon(\underline{U})$ ) précédente, implique l'unicité en déplacement à un mouvement infinitésimal de solide rigide près. Autrement dit, la solution discrétisée en déplacement à convergence  $\underline{U}^E$  de la sous-structure  $\Omega^E$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{U}^E = \underline{U}_{ex}^E + \underline{U}_O^E + \underline{M} \underline{O} \wedge \underline{\omega}_O^E$$

où  $\underline{U}_{ex}^E$  est la solution discrète exacte, pour laquelle il y a unicité si le problème de référence (figure 1.1, page 17) est bien posé ; et le torseur de mouvement de solide rigide de la sous-structure  $\Omega^E$  est :

$$V^E = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\omega}_O^E \\ \underline{U}_O^E \end{array} \right\}_O$$

Des propriétés à convergence sur le saut de déplacement [3.16], et de l'admissibilité discrète [3.17], on déduit une propriété de raccord entre les sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  :

$$\forall \underline{F} \in \underline{F}_h, \quad \int_{\Gamma^{EE'}} (\underline{U}^E|_{\partial_i \Omega^E} - \underline{U}^{E'}|_{\partial_i \Omega^{E'}}) \cdot \underline{F}^E dS = 0$$

propriété vérifiée bien entendu par la solution exacte. On obtient donc la propriété de raccord en déplacement :

$$\forall \underline{F} \in \underline{F}_h, \quad (\underline{U}_O^E - \underline{U}_O^{E'}) \cdot \int_{\Gamma^{EE'}} \underline{F}^E dS + (\underline{\omega}_O^E - \underline{\omega}_O^{E'}) \cdot \int_{\Gamma^{EE'}} \underline{OM} \wedge \underline{F}^E dS = 0$$

c'est à dire :

$$T^E \times V^E = 0$$

où  $T^E$  est le torseur résultant de  $\underline{F} \in \underline{F}_h$  sur la sous-structure  $\Omega^E$ . Une condition suffisante d'unicité en déplacement est donc d'avoir sur chaque interface  $\Gamma^{EE'}$  au moins 2 points de discrétisation en bidimensionnel et au moins 3 points de discrétisation non alignés en tridimensionnel.

### 3.3.3 Cas de la formulation en déplacement

Dans le cas de discrétisation en déplacement présenté au paragraphe précédent, la minimisation du convexe [3.19] permet de conclure directement à l'unicité en déplacement, donc en déformation, puis en contraintes.

Une différence notable par rapport au cas précédent, discrétisé, est la continuité renforcée aux nœuds « coins » des champs admissibles  $\underline{W}$ . Les conditions de continuité ne sont plus linéairement indépendantes en général (par exemple, cas d'un coin appartenant à plusieurs interfaces différentes), seule la somme des efforts de part et d'autre sera alors indépendante de la solution. On peut montrer, de plus, que cette somme est conservée au cours des itérations de l'algorithme (du moins dans le cas d'interfaces parfaites) : c'est donc la solution initiale  $\mathbf{s}_0$  qui fixera ces constantes arbitraires.

### 3.4 Implantation numérique

L'étape linéaire discrétisée consiste maintenant :

- à trouver  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E)$  cinématiquement admissible au sens discret, ce qui lie le déplacement intérieur  $\underline{U}^E$  et le déplacement bord  $\underline{W}^E$  de la façon déjà mentionnée [3.17], page 101) :

$$\forall \underline{W}^* \in W_h, \quad \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{U}^E|_{\partial_i \Omega^E} - \underline{W}^E) \cdot k \underline{W}^{E*} dS = 0$$

- à vérifier l'admissibilité statique discrète qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^*, \underline{W}^*) \in U_{adh}^0 \\ \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega = \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS + \\ + \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS \end{aligned}$$

- avec la direction de recherche ([3.7], page 96) :

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}^* \in F_h, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial_i \Omega^E} \left[ (\underline{F}^E - \hat{\underline{F}}^E) \cdot k^{-1} \underline{F}^{E*} + (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot \underline{F}^{E*} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les fonctions de base pour traduire le choix de discrétisation discuté précédemment (paragraphe 3.1, page 90) :

$$\begin{aligned} \underline{U}^E &= \sum_i q_i^E \underline{\phi}_i(\underline{M}) \quad \in U_h^E \\ \underline{W}^E &= \sum_k w_k^E \underline{\psi}_k(\underline{M}) \quad \in W_h^E \\ \underline{F}^E &= \sum_k g_k^E \underline{\psi}_k(\underline{M}) \quad \in F_h^E \end{aligned}$$

l'admissibilité cinématique devient :

$$\sum_k \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\psi}_k \cdot \underline{\psi}_l dS \quad w_k^E = \sum_i \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\phi}_i|_{\partial_i \Omega^E} \cdot \underline{\psi}_l dS \quad q_i^E$$

soit :

$$[M^E][w^E] = [N^E][q^E]$$

où  $[M^E]$  est symétrique, définie positive.

L'admissibilité statique se traduit alors par :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^{E*} = \sum_j q_j^{E*} \underline{\phi}_j, \underline{W}^{E*} = \sum_k w_k^{E*} \underline{\Psi}_k) \in U_{adh}^0 \\ \sum_{i,j} q_i^E \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{\phi}_i) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{\phi}_j)] d\Omega \quad q_j^{E*} = \sum_j \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{\phi}_j d\Omega \quad q_j^{E*} + \\ + \sum_j \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{\phi}_j dS \quad q_j^{E*} + \sum_{k,l} g_k^E \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\Psi}_k \cdot \underline{\Psi}_l dS \quad w_l^{E*} \end{aligned}$$

soit :

$$[q^E] \cdot [K^E][q^{E*}] = [f_d] \cdot [q^{E*}] + [g^E] \cdot [M^E][w^{E*}]$$

Avec la direction de recherche :

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} g_k^E \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\Psi}_k \cdot \underline{\Psi}_l dS \quad w_l^{E*} = \sum_l \int_{\partial_i \Omega^E} (\hat{F}^E + k \hat{W}^E) \cdot \underline{\Psi}_l dS \quad w_l^{E*} + \\ - \sum_{k,l} w_k^E \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{\Psi}_k \cdot k \underline{\Psi}_l dS \quad w_l^{E*} \end{aligned}$$

soit :

$$[g^E] \cdot [M^E][w^{E*}] = [\hat{g}^E] \cdot [w^{E*}] - [w^E] \cdot [k^E][w^{E*}]$$

l'effort  $[g^E]$  peut être substitué dans l'équation d'équilibre pour donner :

$$\begin{aligned} [q^E] \cdot [K^E][q^{E*}] = [f_d] \cdot [q^{E*}] + [\hat{g}^E] \cdot [M^E]^{-1} [N^E][q^{E*}] + \\ - [M^E]^{-1} [N^E][q^E] \cdot [k^E][M^E]^{-1} [N^E][q^{E*}] \end{aligned}$$

Cette opération est peu coûteuse car, au vu de la continuité des fonctions de base bord élément par élément seulement, les matrices  $[M^E]$  et  $[N^E]$  sont des matrices blocs par élément. La substitution peut donc se faire elle aussi élément par élément.

Finalement, le problème à résoudre à l'étape linéaire est le suivant :

$$\left( [K^E] + \underbrace{([M^E]^{-1} [N^E]) [k^E] ([M^E]^{-1} [N^E])}_{[\tilde{k}^E]} \right) [q^E] = \underbrace{[f_d] + ([M^E]^{-1} [N^E]) [\hat{g}^E]}_{[\tilde{f}^E]}$$

qui est donc très similaire à celui obtenu par l'approche purement cinématique ([3.3], page 92).

En post-traitement de ce problème global par sous-structure, le déplacement bord est obtenu par l'admissibilité cinématique discrétisée :

$$[w^E] = [M^E]^{-1} [N^E][q^E]$$

et les efforts bord par la direction de recherche de l'étape linéaire discrétisée :

$$[g^E] = [M^E]^{-1} ([\hat{g}^E] - [k^E][w^E]) = [M^E]^{-1} [\hat{g}^E] - [\tilde{k}^E][q^E]$$

En fait, dans le cas de discrétisation choisie, la direction de recherche est vérifiée exactement. Les efforts bords peuvent donc être obtenus localement en chaque point de discrétisation par la direction de recherche de manière identique à celle utilisée lors de l'approche cinématique :

$$\underline{F}^E = \underline{\hat{F}}^E + \mathbf{k}^- \underline{\hat{W}}^E - \mathbf{k}^- \underline{W}^E$$

Les choix effectués pour l'implantation numérique supplémentaire dans ce cas de discrétisation sont de privilégier le stockage au calcul pour le terme  $[M^E]^{-1}[N^E]$  élément par élément, et bien entendu de conserver toujours les informations nécessaires pour l'intégration sur les éléments bord (valeur aux points d'intégration des fonctions de base pour l'élément de référence, et celle du produit du Jacobien par le poids d'intégration pour les éléments réels) pour le calcul de  $[\tilde{f}^E]$ .

### 3.5 Exemples

Afin de comparer la qualité de la solution obtenue à convergence par les deux types de discrétisations (c'est à dire la solution du problème éléments finis direct [3.19] et celle de la formulation mixte [3.18]), l'exemple traité est celui d'une plaque trouée en déformations planes et en élasticité linéaire de module d'Young  $E = 200$  GPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  dont un quart est représenté sur la figure 3.9.

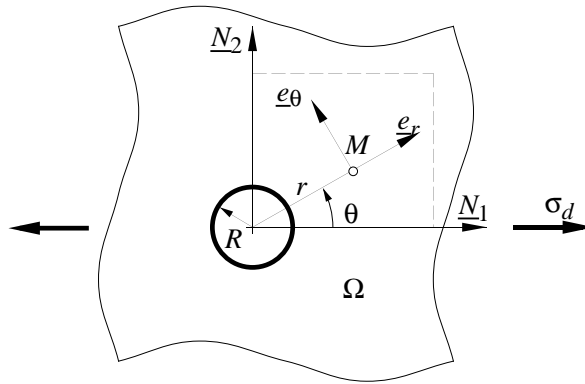


FIG. 3.8 – Problème de référence

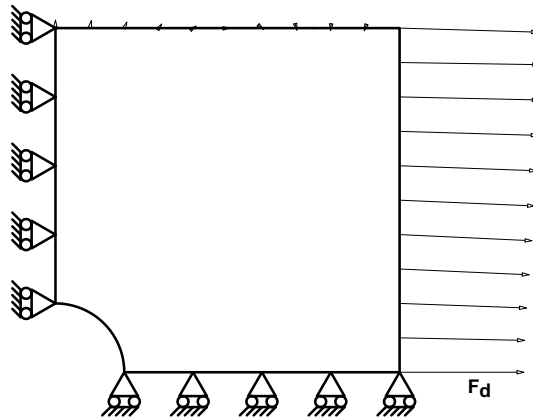


FIG. 3.9 – Problème traité

Elle est soumise à un chargement  $F_d$  tel que la solution du problème milieu continu de référence est la solution analytique en contraintes  $\sigma_{\text{ref}}$  de la plaque trouée infinie en traction (figure 3.8) :

$$\sigma_{\text{ref}} = \frac{\sigma_d}{2} \begin{bmatrix} (1 - \frac{R^2}{r^2}) \left[ 1 + (1 - 3\frac{R^2}{r^2}) \cos 2\theta \right] & -(1 - \frac{R^2}{r^2})(1 + 3\frac{R^2}{r^2}) \sin 2\theta \\ \cdot & (1 + \frac{R^2}{r^2}) - (1 + 3\frac{R^4}{r^4}) \cos 2\theta \end{bmatrix}_{(e_r, e_\theta)}$$

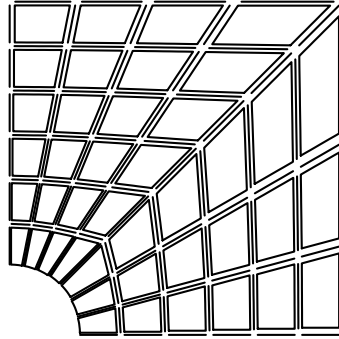


FIG. 3.10 – Décomposition en 42 sous-structures et interfaces

Nombre d'éléments	84	336	1344	5376
Formulation en déplacement	0.254	0.200	0.135	0.082
Formulation mixte	0.205	0.168	0.129	0.082

TAB. 3.1 – Erreurs à convergence suivant la taille du problème

Une décomposition en 42 sous-structures est alors réalisée sur la figure 3.10.

À convergence, les solutions obtenues peuvent être comparées à la solution analytique de référence par l'erreur relative :

$$e_{\text{ref}} = \frac{\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{ref}}\|}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{ref}}\|}$$

où  $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sup \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$  est pris sur les points d'intégration du maillage sous-tendant l'analyse éléments finis. Sont alors illustrées sur la figure 3.11 et reportées dans la table 3.1, les valeurs de  $e$  pour différentes discrétisations (avec des triangles à 3 nœuds) et toujours 42 sous-structures. Ici, l'espace de discrétisation  $W_h$  est le même que celui déjà utilisé dans l'exemple 3.4 de la page 99.

Quand le nombre d'éléments croît (à nombre de sous-structures constant), les deux solutions tendent à devenir équivalentes ; en effet, la proportion du nombre d'éléments bord par rapport à celui des éléments internes décroît alors. Pour la solution en déplacement, comme il s'agit d'un problème sans singularité et que les éléments employés ont un degré d'interpolation de 1, la convergence asymptotique de l'erreur globale en énergie doit être d'ordre 1 en  $h$  qui est la taille des éléments. Comme le nombre d'éléments varie sur cet exemple comme  $h^{-2}$ , sur la figure 3.11 est rappelé la pente de valeur  $-0,5$  ; l'erreur locale finit, elle aussi, par rejoindre ce même degré de convergence.

D'autre part, ce choix particulier de discrétisation permet aussi de réduire la taille des messages en réduisant le nombre d'informations nécessaires pour décrire les quantités bord. Il apparaît aussi que les efforts bords sont liés plus fortement à la contrainte

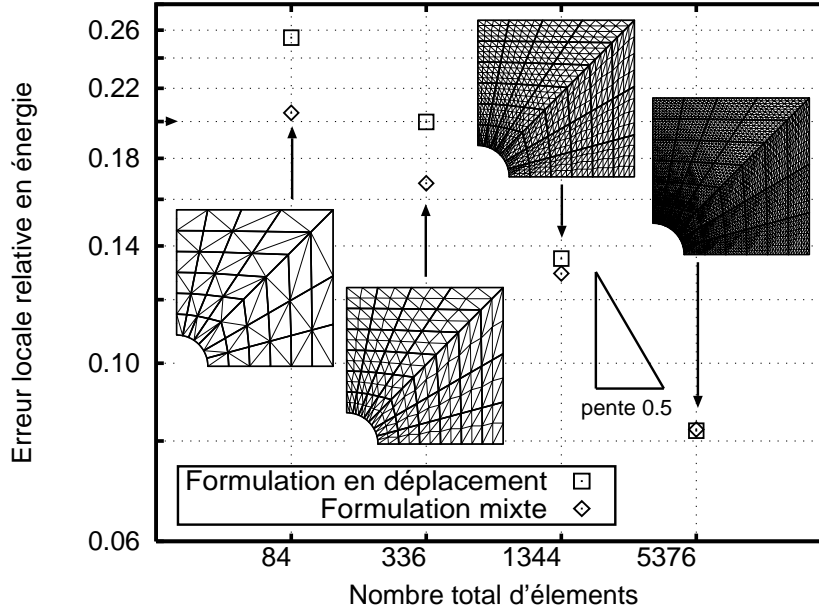


FIG. 3.11 – Comparaison des solutions à convergence

intérieure  $\sigma^E = \mathbf{K}\varepsilon^E$  ; en effet, l'admissibilité sur chaque sous-structure s'écrit :

$$\forall(\underline{U}^{E*}, \underline{W}^{E*}) \in U_{adh}^0,$$

$$\int_{\Omega^E} \text{Tr}[\sigma^E \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega = \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS + \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS$$

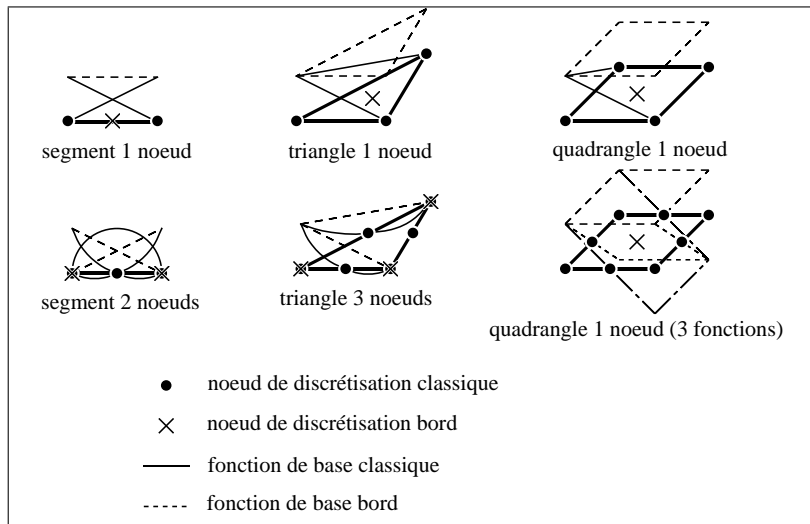
ce qui entraîne :

$$\forall(\underline{U}^{E*}, \underline{W}^{E*}) \in U_{adh}^0, \quad \int_{\partial_i \Omega^E} \sigma^E \underline{n} \cdot \underline{U}^{E*} dS = \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^{E*} dS$$

On peut remarquer de plus que dans le cas des éléments présentés dans l'exemple (où la contrainte est uniforme par élément), cela permet de conclure, pour la solution discrète trouvée, à :

$$\sigma^E \underline{n} = \underline{F}^E \quad \text{sur} \quad \partial_i \Omega^E$$

Bien entendu, d'autres éléments permettant une telle discrétisation sont construits, la table 3.2 les illustre avec les fonctions de base standard en déplacement et celles choisies pour discrétiser les champs bords.



TAB. 3.2 – Exemples de fonctions de base sur des éléments d'interface

# Chapitre 4

## Élaboration d'une approche multi-échelles

---

<b>4.1</b>	<b>Techniques à plusieurs échelles . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>4.2</b>	<b>Représentation du problème sur deux échelles . . . . .</b>	<b>121</b>
4.2.1	Exemple d'une modélisation de type unidimensionnelle . . .	121
4.2.2	Cas de discrétisations de raffinements différents . . . . .	124
<b>4.3</b>	<b>Couplage avec une décomposition en sous-structures . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>4.4</b>	<b>Algorithme itératif . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>4.5</b>	<b>Implantation numérique . . . . .</b>	<b>136</b>

---

---

De façon générale, on peut ranger les approches multi-échelles en mécanique des structures dans trois catégories pour lesquelles les motivations sont a priori assez différentes :

- approche matériau : l'échelle de l'élément de volume est ici la taille caractéristique, et la structure même du matériau (par exemple, dans le cas des composites) ou sa micro-structure (polycristaux) définissent d'autres échelles sur lesquelles peuvent se baser les constructions de lois de comportement.
- approche structure : lors de l'analyse de réponses de structures, il est clair que tous les phénomènes n'ont pas une même longueur de variation (zones à fort gradient, effets de bord). Différentes échelles peuvent alors être mises en évidence, et des algorithmes, bâtis pour en tirer parti (ré-analyse locale, méthode globale/locale, adaptativité de la discrétisation). Cette même approche est utilisée dans une méthode que l'on peut qualifier de « multi-modèles » où le pré-conditionnement s'effectue par une modélisation différente du même problème mécanique de référence ([Bathe *et al.* 90], [Noor et Peters 88]).
- approche algorithmique : l'analyse du comportement des algorithmes itératifs permet de faire ressortir une convergence plus ou moins forte suivant les longueurs de variation des effets à corriger (méthodes multi-grilles).

L'approche que nous mettons en place ici participe des deux dernières motivations. C'est pourquoi nous rappelons quelques techniques numériques utilisant deux ou plusieurs échelles : les méthodes multi-grilles et les éléments finis hiérarchiques. Une abondante littérature existe sur ces deux techniques ; en particulier pour les méthodes multi-grilles et les techniques de décomposition de domaine, une importante base de données est accessible dans [Douglas 92], et l'aspect parallélisme dans [McBryan *et al.* 91].

Une extension multi-échelles est ainsi bâtie, dans l'esprit de [Bramble *et al.* 86] et dans la trame de la méthode LATIN. Une caractéristique importante de celle-ci est alors la longueur associée à la direction de recherche, qui devient une caractéristique d'interface et n'est plus liée comme pour l'approche mono-échelle, à la structure globale.

## 4.1 Techniques à plusieurs échelles

### Méthodes multi-grilles

Historiquement initiées dans [Southwell 35] et [Fedorenko 64], ces méthodes se sont principalement développées pour les problèmes de mécanique des fluides à partir de 1970. Parmi les applications plus récentes au calcul de structures, citons par exemple [Parsons et Hall 90a], [Lebon *et al.* 89].

Leur principe ([Hackbush et Trottenberg 81]) repose sur le fait que les méthodes itératives classiques (gradient conjugué, Gauss-Seidel, Jacobi, relaxation, ...) sont plus efficaces pour réduire les résidus à faible longueur de variation au cours des itérations, que pour les grandes longueurs de variation.

Cela se traduit par une rapide décroissance de l'erreur lors des premières itérations puis une stagnation de celle-ci, ou du moins un taux de convergence diminué. Par exemple, considérons le problème d'une poutre en traction uniformément chargée, discrétisée en 31 éléments identiques (31 segments à 2 nœuds pour 31 degrés de liberté) dont on perturbe la solution de référence éléments finis par tous les modes de la matrice de rigidité (avec une même énergie de déformation sur chaque mode) comme l'illustre la figure 4.1.

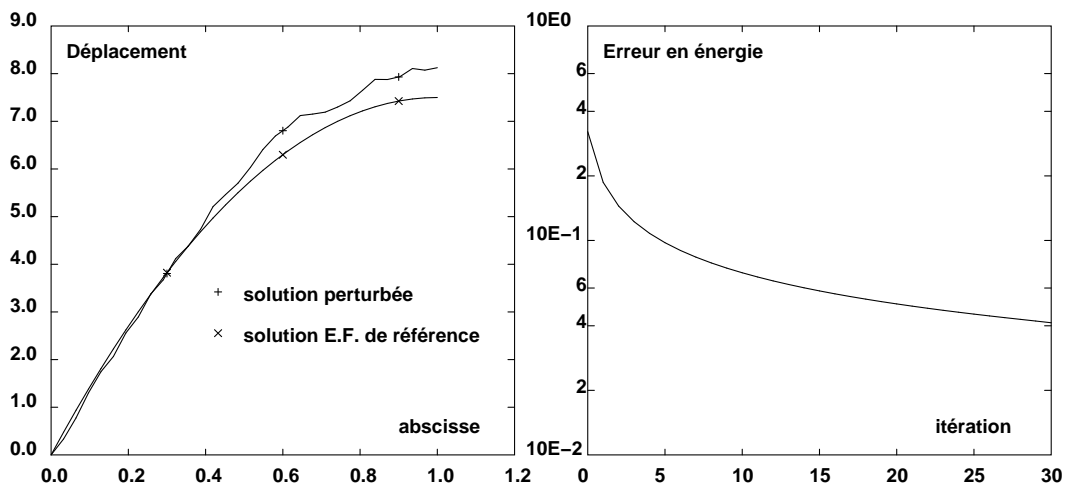


FIG. 4.1 – Solutions initiale et finale, évolution de l'erreur au cours des itérations du gradient conjugué

Sur cette même figure est représentée l'évolution de l'erreur en énergie par rapport à la solution de référence au cours des itérations, lors d'une résolution par gradient conjugué.

On peut alors analyser pour chaque itération, l'écart de la solution courante à la solution de référence, sur ces mêmes modes propres (figure 4.2).

L'idée des méthodes multi-grilles est de réduire d'abord les hautes fréquences de

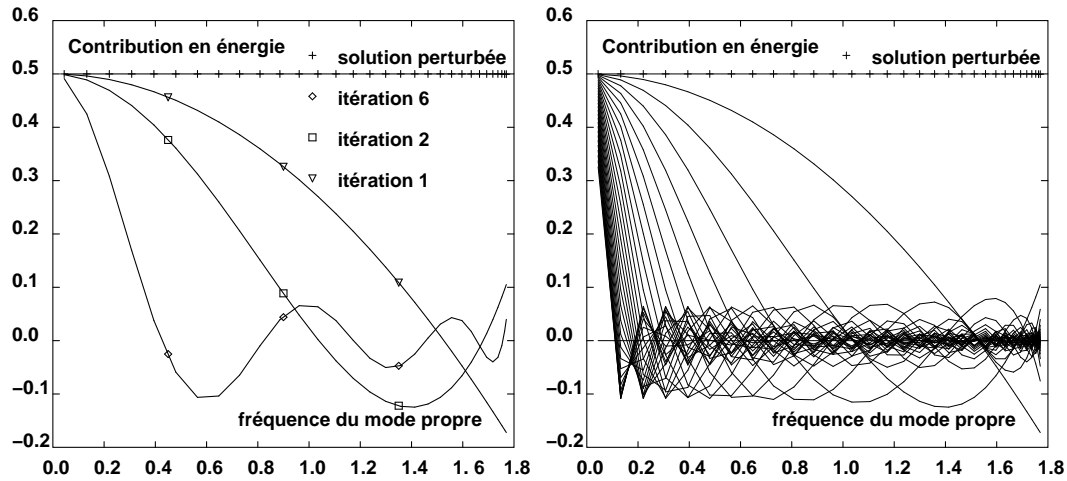


FIG. 4.2 – Analyse sur les modes propres aux différentes itérations

l'erreur par ce genre d'opérateurs, qui sont alors couramment appelés *lisseurs* ; l'erreur résiduelle ayant une grande longueur de variation, on peut la capturer sur un maillage plus grossier.

La méthode 2-grilles, pour traiter un problème issu d'une discrétisation par éléments finis, considère une grille « fine »  $\Omega_h$ , de la forme  $K_h q_h = f_h$ , en notant  $q_h^k$  l'approximation courante de la solution cherchée. L'intervention d'une grille « grossière »  $\Omega_H$  structurée (c'est à dire que  $\Omega_h$  est obtenu à partir de  $\Omega_H$  par subdivision de ses éléments) se fait en trois étapes :

- pré-lissage :  
après quelques itérations du lisseur sur le système  $K_h(q_h - q_h^k) = r_h^k$  (qui cherche à corriger l'approximation  $q_h^k$ ), avec un résidu  $r_h^k$ , on obtient la nouvelle approximation  $q_h^{k+1/2}$  dont l'erreur est  $e_h = q_h - q_h^{k+1/2}$ . Le problème à résoudre est alors  $K_h e_h = r_h$  où  $r_h = f_h - K_h q_h^{k+1/2}$ , qui est a priori aussi coûteux que le problème de départ. Cependant, si le lissage a été bien effectué, la solution  $e_h$  comporte principalement des grandes longueurs de variation ; on peut alors le résoudre de façon approchée par une :
- correction sur grille grossière  $\Omega_H$  :  
on opère tout d'abord une restriction du résidu sur  $\Omega_H$  avec  $r_H = R r_h$ , où  $R$  est un opérateur dit de restriction, pour transférer les informations sur la grille grossière ; puis, on résout le problème grossier de façon directe  $K_H e_H = r_H$ , et on prolonge enfin le résultat sur la grille fine  $\Omega_h$  avec  $v_h = P e_H$ , où  $P$  est un opérateur dit de prolongation, pour transférer les informations sur la grille fine. La nouvelle approximation est alors  $q^{k+1} = q^{k+1/2} + v_h$ .
- éventuellement, si l'opération de prolongation introduit des perturbations à petites longueurs de variation, on peut opérer un post-lissage afin de les éliminer.

Le lisseur, le nombre de pas de lissage, les opérateurs de restriction et de prolongation sont des paramètres de cette méthode.

Dans le cas où la résolution sur grille grossière conduit encore à un problème assez grand pour que des méthodes itératives soient avantageuses par rapport aux méthodes directes, cette résolution peut être traitée récursivement par une méthode 2-grilles. L'algorithme résultant fait intervenir alors plus de deux niveaux de grilles et s'appelle méthode multi-grilles.

Le passage par une grille grossière permet :

- d'avoir une approximation du résultat sur grille fine,
- de corriger le résultat de l'échelle fine par un couplage avec l'échelle grossière.

### Éléments finis hiérarchiques

On souhaite tout d'abord déterminer une solution grossière sur un maillage grossier afin de trouver les zones à raffiner localement. Le but des éléments finis hiérarchiques est de permettre le calcul de la nouvelle solution sur le nouveau maillage tout en conservant le maximum d'informations issues du travail précédent, à savoir : une solution approchée grossière, et une matrice de rigidité grossière assemblée (et éventuellement factorisée) [Adjedj et Aubry 89].

Le principe de ces éléments finis hiérarchiques a été donné dans [Zienkiewicz *et al.* 83] : il consiste à remplacer la base éléments finis classique par une base dite hiérarchique. Le problème  $Kq = f$  posé sur la grille fine peut alors être réécrit en séparant les fonctions de base en deux groupes : celles associées aux éléments grossier (d'indice  $C$ ) et les fonctions de base complémentaires (d'indice  $F$ ). Cela conduit au découpage par blocs :

$$\begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CF} \\ K_{FC} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} \quad [4.1]$$

correspondant à un partitionnement multi-échelles de l'espace éléments finis.

Le conditionnement de  $K$  est amélioré par ce partitionnement, par séparation des effets globaux principaux et couplage des effets locaux. En bidimensionnel et pour un maillage quasi-régulier, on trouve dans [Yserentant 86] qu'il se comporte :

- dans la base hiérarchique, à taille des éléments grossiers  $H$  fixée, comme

$$o(\log^2 \frac{1}{h})$$

- dans la base classique, comme

$$o(\frac{1}{h^2})$$

où  $h$  est la taille (quasi-uniforme) des éléments fins.

De plus, cette approche permet une adaptativité du raffinement. On peut en effet remarquer que le problème  $K_{CC}q_C = f_C$  correspond au problème grossier. Résolu de façon directe, il conduit une approximation de départ pour  $q_C$ . En imaginant l'ajout

d'un seul degré de liberté hiérarchique  $q_F$  on est conduit à écrire comme approximation, connaissant  $q_C$  :

$$q_F = \frac{f_F - K_{FC}q_C}{K_{FF}}$$

On peut en déduire une forme d'approximation possible :

$$\begin{bmatrix} K_{CC} & 0 \\ K_{FC} & D_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix}$$

où  $D_{FF}$  est la diagonale de  $K_{FF}$ , approximation qui possède donc des caractéristiques d'adaptativité et de hiérarchie.

### Lien entre multi-grilles et éléments finis hiérarchiques

Le préconditionnement du problème de départ conduit à la résolution d'un problème du type :

$$\bar{K} \begin{bmatrix} r_C \\ r_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix}$$

où le préconditionneur peut donc être choisi sous la forme :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{CC} & 0 \\ 0 & D_{FF} \end{bmatrix}$$

Une autre technique de résolution, [Wiberg et Müller 88], s'inspire d'une méthode de Jacobi par blocs alternée (ou éventuellement non alternée) : connaissant  $q_F$  (et éventuellement  $q_C$ ) on résout  $K_{CC}q_C = f_C - K_{CF}q_F$  directement, puis (éventuellement en même temps)  $K_{FF}q_F = f_F - K_{FC}q_C$  par une méthode de gradient conjugué que l'on peut préconditionner par  $D_{FF}$ . Écrit sous cette forme, il apparaît bien des termes de couplage entre échelles grossière et fine :  $K_{CF}$  et  $K_{FC}$ . L'adaptativité se manifeste par un ajout de couplages et d'équations. Par exemple avec un deuxième niveau de raffinement  $F'$  :

$$\begin{aligned} K_{CC}q_C &= f_C - K_{CF}q_F - K_{CF'}q_{F'} && \text{directement} \\ K_{FF}q_F &= f_F - K_{FC}q_C - K_{FF'}q_{F'} && \text{par gradient conjugué préconditionné} \\ K_{F'F'}q_{F'} &= f_{F'} - K_{F'C}q_C - K_{F'F}q_F && \text{par gradient conjugué préconditionné} \end{aligned}$$

On s'aperçoit aussi du lien étroit entre les méthodes multi-grilles et les techniques éléments finis hiérarchiques ; ces dernières peuvent être écrites sous la forme :

– lissage sur le problème  $Kq = f$ , qui conduit au résidu

$$\begin{bmatrix} r_C \\ r_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix}$$

- restriction du résidu sur l'échelle grossière

$$r_C = R \begin{bmatrix} r_C \\ r_F \end{bmatrix} \text{ avec } R = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{d_C} & 0 \end{bmatrix}$$

- résolution à l'échelle grossière :  
 $K_{CC}c = r_C$  c'est à dire  $K_{CC}q_C = f_C - K_{CF}q_F$
- prolongation :

$$\begin{bmatrix} q_C \\ 0 \end{bmatrix} = P U_C$$

avec  $P = {}^t R$ , et donc  $q_f$  reste inchangé après passage sur l'échelle grossière.

Les opérations de restriction et prolongation sont ici triviales, et on peut remarquer la conservation de la propriété :  $K_{CC} = RKP$

Enfin, bien que moins immédiate, l'utilisation des éléments finis hiérarchiques au sens de la p-version est aussi possible ([Robinson 86]).

### Utilisation conjointe d'une technique multi-grilles et d'une décomposition de domaine

La première possibilité est d'utiliser la méthode multi-grilles en boucle externe et de résoudre le problème grossier par une décomposition de domaine en parallèle, [Gärtel et Ressel 92]. Les différents niveaux de grilles sont traités séquentiellement. Il s'agit d'une méthode multi-grilles parallélisée par décomposition de domaine.

Considérons toujours la boucle externe ; si deux échelles ont été définies, le système à résoudre est [4.1]. L'opération de lissage, puisqu'elle veut réduire les hautes fréquences, peut se contenter de porter uniquement sur

$$K_{FF}q_F = f_F - K_{FC}q_C = \tilde{f}_F$$

qui s'écrit, si un partitionnement du domaine est effectué, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{EE} & K_{E\Gamma} \\ K_{\Gamma E} & K_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_E \\ q_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_E \\ \tilde{f}_\Gamma \end{bmatrix}$$

et le lissage peut se décomposer en :

- un lissage sur  $K_{EE}q_E = \tilde{f}_E - K_{E\Gamma}q_\Gamma$ ,
- un lissage sur  $K_{\Gamma\Gamma}q_\Gamma = \tilde{f}_\Gamma - K_{\Gamma E}q_E$

qu'il est possible d'effectuer en parallèle, [Griebel 87]. Puis la correction grossière  $K_{CC}q_C = f_C - K_{CF}q_F$  est résolue en parallèle par décomposition de domaine si le partitionnement précédent respecte les échelles. Enfin, on itère avec cet algorithme jusqu'à convergence.

Si l'on commence par partitionner le domaine, le problème s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{EE} & K_{E\Gamma} \\ K_{\Gamma E} & K_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_E \\ q_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_\Gamma \end{bmatrix}$$

avec deux échelles définies sur chaque sous-domaine. Dans un premier temps, on cherche à approcher  $K_{EE}q_E = f_E - K_{E\Gamma}q_\Gamma = \tilde{f}_E$ , où

$$K_{EE} = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CF} \\ K_{FC} & K_{FF} \end{bmatrix}$$

- par lissage de  $K_{FF}q_F = \tilde{f}_F - K_{FC}q_C$ , puis
- par résolution de  $K_{CC}q_C = \tilde{f}_C - K_{CF}q_F$

en parallèle. Puis on cherche à approcher  $K_{\Gamma\Gamma}q_\Gamma = f_\Gamma - K_{\Gamma E}q_E = \tilde{f}_\Gamma$  d'une façon similaire.

Une grande classe d'approches se présente aussi comme l'utilisation de préconditionneur multi-échelles.

Par exemple, dans [Bramble *et al.* 86], pour le cas bidimensionnel où le domaine  $\Omega$  est rectangulaire et le partitionnement  $\Omega^E$  régulier, la condensation sur l'interface  $\Gamma$  conduit à ([1.5], page 21) :

$$[S][q_\Gamma] = [b]$$

Le traitement du problème par la méthode du complément de Schur s'interprète alors ici comme un préconditionnement : la résolution approchée de [1.5] fournit le résidu  $Sq_\Gamma - b$  et le post-traitement permet d'atteindre  $q_E = K_{EE}^{-1}(f_E - K_{E\Gamma}q_\Gamma)$ . Autrement dit, le résidu du problème de départ est :

$$K \begin{bmatrix} q_E \\ q_\Gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_E \\ f_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Sq_\Gamma - b \end{bmatrix}$$

lors d'une itération, on vérifie exactement l'équilibre (au sens éléments finis) dans chaque sous-domaine, mais non sur l'interface. Ce même problème [1.5] peut ensuite être lui même partitionné. Si l'on décompose l'interface  $\Gamma$  en l'ensemble des nœuds intérieurs à chaque interface, d'indice  $I$ , et en les nœuds « coins », intersections de plusieurs interfaces dont l'ensemble est indicé  $V$ ,

$$\begin{bmatrix} S_{II} & S_{IV} \\ S_{VI} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_I \\ q_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_I \\ b_\Gamma \end{bmatrix}$$

Le préconditionneur employé est alors :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & K_{VV} \end{bmatrix}$$

$P$  étant le préconditionneur de Neumann déjà cité, (qui conduit à des problèmes indépendants par interface), et  $K_{VV}$  dont le résultat est la restriction sur  $\Gamma$  de celui de l'opérateur de rigidité associé à la grille grossière définie par les nœuds coins. Une propriété importante de cette approche est qu'elle conduit à un problème dont le conditionnement est quasi-indépendant du nombre de sous-domaines ([Bramble *et al.* 86]).

Pour pallier le manque d'efficacité à grand nombre de sous-domaines d'une méthode de décomposition de domaine, il semble donc qu'il faille faire intervenir un solveur grossier qui permette d'atteindre le comportement global de la structure. Il s'agit donc d'utiliser des échelles adaptées aux phénomènes à prendre en compte.

## 4.2 Représentation du problème sur deux échelles

Une représentation sur deux échelles qui peuvent être issues de deux modélisations différentes du même problème de départ, va nécessairement faire intervenir les quantités cinématiques (déplacements, déformations, ...) et leurs quantités statiques duales (efforts, contraintes, ...) sur chacune des deux modélisations.

Bien évidemment, ces deux modélisations correspondent à deux échelles, dans le sens où les phénomènes qu'elles permettent d'appréhender dans la réponse de la structure possèdent des longueurs de variation différentes. Il faut alors permettre à ces deux modèles de « dialoguer » entre eux. Cela peut être réalisé par l'intermédiaire d'une paire d'opérateurs : suivant la terminologie des approches multi-grilles, [Hackbush et Trottenberg 81], [Le Dain 91], un opérateur de prolongation, noté  $\mathbb{P}$ , et un opérateur de restriction, noté  $\mathbb{R}$ .

Afin d'illustrer le passage entre deux modèles, le paragraphe suivant présente le cas d'une modélisation tridimensionnelle et linéique. La première est ici la référence car elle permet aussi de représenter toutes les longueurs de variation de l'échelle unidimensionnelle.

### 4.2.1 Exemple d'une modélisation de type unidimensionnelle

Prenons comme exemple une structure dont le premier modèle est celui de l'élasticité tridimensionnelle, et le second, celui d'une structure unidimensionnelle, table 4.1. Sur l'échelle décrite par la modélisation tridimensionnelle, les inconnues sont le champ de déplacement  $\underline{U}(\underline{M})$  et le champ de contraintes  $\sigma(\underline{M})$ . L'espace dans lequel  $\underline{U}$  sera cherché est noté  $\underline{U}$ , et celui de  $\sigma$ ,  $\mathcal{S}$ . Il sont mis en dualité par la forme linéaire symétrique en énergie :

$$\langle \sigma, \underline{U} \rangle = \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{U})] d\Omega$$

qui intervient dans l'expression de l'équilibre pour le problème de référence.

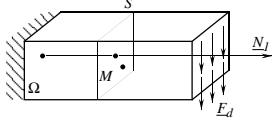
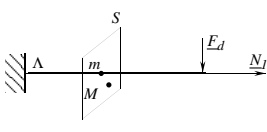
Sur l'échelle décrite par la modélisation unidimensionnelle, les inconnues sont alors le champ de torseurs de déplacement  $V(\underline{m})$  et les quantités duales, le champ de torseurs d'efforts intérieurs  $T(\underline{m})$ . Le point courant est  $\underline{m} = \underline{m}(s)$  où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la ligne moyenne  $\Lambda$ . La forme symétrique en énergie correspondante est :

$$\langle T, V \rangle_g = \int_{\Lambda} T \times D(V) ds$$

où  $D$  est le torseur de déformation obtenu par dérivation spatiale de  $V$  :

$$D(V) = \frac{dV}{ds}$$

Les espaces correspondants sont notés  $U_g$  et  $\mathcal{S}_g$ . La table 4.1 résume ces notations.

modèle		
quantités cinématiques	$\underline{U} \in U \xleftarrow[\text{prolongation}]{\mathbb{P}} V \in U_g$	
relation de comportement	$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}) \quad \updownarrow \quad T = \mathbf{K}_g D(V)$	
quantités statiques	$\sigma \in S \xrightarrow[\text{restriction}]{\mathbb{R}} T \in S_g$	
énergie	$\langle \sigma, \underline{U} \rangle$	$\langle T, V \rangle_g$

TAB. 4.1 – Passage entre deux modèles

L'opérateur de prolongation  $\mathbb{P}$  permet alors de transférer les informations de  $U_g$  vers  $U$ . Afin d'illustrer le passage entre les deux modèles, on peut prendre comme opérateur de prolongation celui de la projection cinématique d'un mouvement de solide rigide par section droite :

$$\underline{U}(\underline{M}) = \mathbb{P}(\underline{M}) V(\underline{m})$$

$\underline{m}$  étant le projeté de  $\underline{M}$  sur la ligne moyenne  $\Lambda$  et où en notant respectivement  $\underline{\omega}$  et  $\underline{u}$  les rotations et déplacements de section,

$$V(\underline{m}) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\omega}(\underline{m}) \\ \underline{u}(\underline{m}) \end{array} \right\}_{\underline{m}}$$

on a

$$\underline{U}(\underline{M}) = \underline{u}(\underline{m}) + (\underline{m} - \underline{M}) \wedge \underline{\omega}(\underline{m})$$

Le choix naturel de l'opérateur de restriction  $\mathbb{R}$ , qui permet, lui, de transférer les informations de  $S$  vers  $S_g$  sous la forme :

$$T(\underline{m}) = \mathbb{R}(\underline{m}) \sigma(\underline{M})$$

consiste alors à transposer  $\mathbb{P}$  vis à vis de la forme symétrique en énergie :  $\mathbb{R} = {}^t\mathbb{P}$ . Autrement dit,

$$\forall V \in U_g, \forall \sigma \in S, \quad \langle \sigma, \mathbb{P}V \rangle = \langle \mathbb{R}\sigma, V \rangle_g$$

Bien évidemment, cela correspond pour notre exemple à prendre :

$$T = \mathbb{R}\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \sigma N_1 ds \\ \int_S (\underline{M} - \underline{m}) \wedge \sigma N_1 ds \end{array} \right\}_{\underline{m}}$$

Les choix de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{R}$  étant effectués, l'écriture du problème de référence permet de déduire celle du problème sur l'échelle unidimensionnelle avec le critère suivant : si la solution cherchée se situe dans  $\mathbb{P}U_g$ , il est exhibé par le problème sur l'échelle unidimensionnelle. On cherche donc :

$$\underline{U} = \mathbb{P}V \text{ cinématiquement admissible} \quad [4.2]$$

$\sigma$  statiquement admissible, c'est à dire

$\forall \mathbb{P}V^*$  cinématiquement admissible à zéro,

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\mathbb{P}V^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \mathbb{P}V^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \mathbb{P}V^* dS \quad [4.3]$$

$$\sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\mathbb{P}V) \quad [4.4]$$

Le premier membre de [4.3] s'écrit aussi :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\mathbb{P}V^*)] d\Omega = \langle \sigma, \mathbb{P}V^* \rangle = \langle \mathbb{R}\sigma, V^* \rangle_g = \langle T, V^* \rangle_g$$

et le second définit la charge  $T_d$  :

$$\int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \mathbb{P}V^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \mathbb{P}V^* dS = \int_{\Lambda} T_d \times V^* ds$$

L'équilibre [4.3] devient donc :

$\forall \mathbb{P}V^*$  cinématiquement admissible à zéro, (ce qui définit  $V^*$   
cinématiquement admissible à zéro au sens du problème unidimensionnel)

$$\langle T, V^* \rangle_g = \int_{\Lambda} T_d \times V^* ds$$

Le point délicat dans ce couplage est la traduction de la relation de comportement entre  $T$  et  $D(V)$ . En effet, sachant que  $\sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\mathbb{P}V)$  et  $T = \mathbb{R}\sigma$ ,

$$T = \mathbb{R} \mathbf{K} \varepsilon(\mathbb{P}V)$$

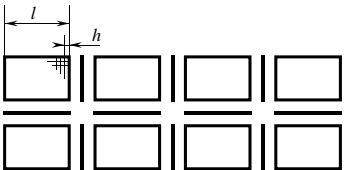
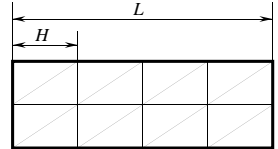
Généralement, cette relation n'est pas locale en termes de  $T$  et  $D$ . Prendre une approximation locale revient donc à affaiblir le critère précédant. Le cas des lignes moyennes droites est cependant une exception dans le cadre de notre exemple, pour laquelle cela reste valable (annexe B, page 181).

De façon générale, on voit ici que le choix de l'opérateur de projection étant réalisé, et comme l'on travaille en superposition sur les deux échelles et non en correction comme dans le cas d'un préconditionneur, le choix de l'opérateur de restriction en découle, ainsi que l'allure du problème sur l'échelle globale. Il a été choisi de travailler ici en prolongation uniquement sur les champs de déplacements, mais une prolongation simultanée des champs de contraintes, par exemple, peut être aussi envisageable. On n'utilisera ici que la première possibilité qui se prête aisément à une analyse par éléments finis en déplacement.

### 4.2.2 Cas de discrétisations de raffinements différents

On se propose maintenant de faire intervenir comme problème à grande longueur de variation, celui défini sur une grille grossière de l'ensemble de la structure  $\Omega$ . L'échelle fine est discrétisée, quant à elle, de façon à pouvoir représenter les effets à faible longueur de variation. Ce dernier problème étant de taille importante, il sera traité par une technique de décomposition en sous-structures conformément à l'approche décrite précédemment (chapitre 2, page 43).

On cherche donc à représenter la solution pour chaque sous-structure  $(\underline{U}^E; \underline{\sigma}^E)$  sur les deux échelles (figure 4.2). Un choix possible est de n'utiliser l'échelle fine

modèle		
quantités cinématiques <hr/> relation de comportement <hr/> quantités statiques	$\underline{U} \in U \xleftarrow[\text{prolongation}]{\mathbb{P}} \bar{U} \in U_g$ $\sigma = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}) \updownarrow \bar{\sigma} = \mathbf{K}_g\varepsilon(\bar{U})$ $\sigma \in S \xrightarrow[\text{restriction}]{\mathbb{R}} \bar{\sigma} \in S_g$	
énergie	$\langle \sigma, \underline{U} \rangle$	$\langle \bar{\sigma}, \bar{U} \rangle_g$

TAB. 4.2 – Passage entre deux modèles discrétisés

que comme correction à apporter aux quantités effectives représentables sur l'échelle globale :

$$(\underline{U}^E; \underline{\sigma}^E) = (\underline{U}_1^E; \underline{\sigma}_1^E) + (\underline{U}_2^E; \underline{\sigma}_2^E) \quad [4.5]$$

où 1 et 2 sont les indices respectifs des grandeurs effectives sur l'échelle globale, et des corrections sur l'échelle fine. Ici, nous utiliserons de plus des grilles dont les éléments sont emboîtés. Dans ce cas, la prolongation peut se faire par une projection de type éléments finis hiérarchiques (figure 4.3). Ainsi, si l'on appelle  $\bar{U}$  et  $\bar{\sigma}$  les champs de déplacement et de contraintes définis sur l'échelle globale,

$$\underline{U}_1 = \mathbb{P} \bar{U} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \mathbb{R} \sigma_1$$

Il est d'autre part naturel de prendre pour  $\mathbb{R}$ , l'opérateur transposé de  $\mathbb{P}$  vis à vis de la forme symétrique en énergie :

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\mathbb{P}^E \bar{U}) \sigma^E] d\Omega = \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\varepsilon(\bar{U}) \sum_{E \in \mathbf{E}} \mathbb{R}^E \sigma^E] d\Omega$$

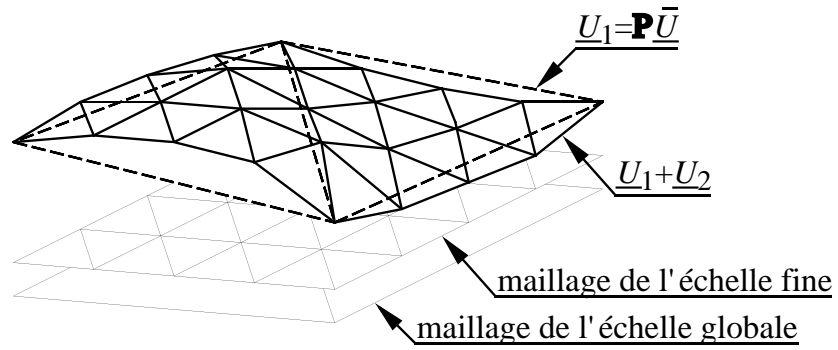


FIG. 4.3 – Projection hiérarchique

où  $\mathbb{P}^E$  et  $\mathbb{R}^E$  sont les restrictions de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{R}$  à la sous-structure  $\Omega^E$ .

### 4.3 Couplage avec une décomposition en sous-structures

On impose donc à l'échelle globale de fournir un problème global sur toute la structure, alors que le problème relatif à l'échelle fine est traité par la technique de décomposition de la structure en sous-structures et interfaces. Dans le cas d'interfaces parfaites, le problème à résoudre se réécrit maintenant :

trouver les couples déplacement bord-effort  $(\underline{W}_2^E; \underline{F}_2^E)$  sur la sous-structuration de l'échelle fine, ainsi que le couple déplacement-contrainte  $(\underline{U}; \underline{\sigma})$  de l'échelle globale, vérifiant :

- les équations de liaison :
  - sur chaque sous-structure  $\Omega^E$ ,  
le couple  $(\underline{U}_2^E, \underline{W}_2^E)$  est cinématiquement admissible au sens de la sous-structure  $\Omega^E$
  - sur l'échelle globale,  
le champ de déplacement effectif  $\underline{U}$  est cinématiquement admissible (c'est à dire que  $\mathbb{P} \underline{U}$  est cinématiquement admissible au sens classique)
- l'équation d'équilibre :
  - sur chaque sous-structure  $\Omega^E$ , le couple  $(\underline{\sigma}_2^E, \underline{F}_2^E)$  doit vérifier

$$\begin{aligned} \forall (\underline{U}^{E*}, \underline{W}^{E*}) \in \underline{U}_{\text{ad}}^{E0}, \\ \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}_2^E \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{E*})] d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{E*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^{E*} dS + \\ + \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}_2^E \cdot \underline{W}^{E*} dS - \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}_1^E \underline{\varepsilon}(\underline{U}^{E*})] d\Omega, \quad [4.6] \end{aligned}$$

- sur l'échelle globale, la contrainte  $\underline{\sigma}$  doit vérifier

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^* \text{ C.A. à zéro,} \\ \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega_1} \underline{f}_d \cdot \mathbb{P} \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega_1} \underline{F}_d \cdot \mathbb{P} \underline{U}^* dS + \\ - \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\underline{\sigma}_2 \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega \quad [4.7] \end{aligned}$$

le chargement pouvant se réécrire sous la forme :

$$\int_{\Omega_1} \underline{f}_d \cdot \mathbb{P} \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega_1} \underline{F}_d \cdot \mathbb{P} \underline{U}^* dS = \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\underline{\sigma}_d \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega$$

- les relations de comportement :
  - sur chaque sous-structure  $\Omega^E$ ,

$$\underline{\sigma}_2^E = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_2^E)$$

$$\underline{\sigma}_1^E = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\mathbb{P}^E \underline{U})$$

– sur l'échelle globale,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \mathbf{K}_1 \varepsilon(\bar{U}) \\ \bar{\sigma}_2|_{\Omega^E} &= \mathbb{R}^E \mathbf{K} \varepsilon(U_2^E)\end{aligned}$$

– le comportement des interfaces :  
sur chaque interface  $\Gamma^{EE'}$

$$\underline{F}_2^E + \underline{F}_2^{E'} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{W}_2^E = \underline{W}_2^{E'}$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas séparation des échelles puisque les termes faisant intervenir les quantités  $\sigma_1^E$  et  $\bar{\sigma}_2$  sont les termes de couplage entre les deux échelles. Si ceux-ci sont donnés, le problème se découple sur chaque échelle.

Il reste à préciser la relation de comportement du problème global, c'est à dire  $\mathbf{K}_1$ . Pour cela, on peut imposer au problème global de donner la solution au problème de départ dans le cas où ce dernier est représentable sur l'échelle globale (ce qui se traduit par des termes de couplage nuls). On peut alors montrer que :

$$\mathbf{K}_1 = \mathbb{R} \mathbf{K} \mathbb{P}$$

On retrouve ainsi la notion de problème équivalent au sens de Ritz. en utilisant comme technique de réduction sur l'échelle globale la recherche de  $\underline{U}$  sous la forme  $\mathbb{P} \bar{U}$ .

## 4.4 Algorithme itératif

La résolution de ce nouveau problème est traitée par dans le même esprit que celui de l'algorithme LATIN mono-échelle, décrit au chapitre 2.2, page 56, en choisissant de garder le problème à grande échelle global sur toute la structure. De plus, on souhaite rechercher successivement une solution approchée dans chacune des deux échelles à chaque itération :

- en supposant connus les couples  $(\bar{U}_n; \bar{\sigma}_n)$  et  $(U_{2,n}^E; \sigma_{2,n}^E)$ , on cherche les couples  $(U_{2,n+1}^E; \sigma_{2,n+1}^E)$  comme précédemment,
- les couples  $(U_{2,n+1}^E; \sigma_{2,n+1}^E)$  étant connus, on recherche le couple  $(\bar{U}_{n+1}; \bar{\sigma}_{n+1})$  par un problème global à grande échelle.

Ce schéma peut être interprété dans l'approche à grand incrément de temps par le choix des groupes d'équations :

- $\mathbf{A}_d$  est l'ensemble des  $\mathbf{s}$  vérifiant les équations de liaison, l'équation d'équilibre, ainsi que les comportements suivants :  $\sigma_2^E = \mathbf{K}\varepsilon_2^E$ ,  $\bar{\sigma} = \mathbf{K}_1\varepsilon(\bar{U})$ ,  $\bar{\sigma}_{2|\Omega^E} = \mathbb{R}^E \mathbf{K}\varepsilon(U_2^E)$ .
- $\Gamma$  est l'ensemble des  $\mathbf{s}$  vérifiant le comportement des interfaces, ainsi que  $\sigma_1^E = \mathbf{K}\varepsilon(\mathbb{P}^E \bar{U})$

Outre les directions de recherche portant sur l'échelle fine sous-structurée, qui demeurent identiques à celles de la version mono-échelle, nous sommes ainsi conduits à considérer des directions supplémentaires. S'agissant de découpler les problèmes traduisant l'admissibilité sur les deux échelles mises en œuvre lors de l'étape linéaire, le choix de la direction de recherche supplémentaire de l'étape locale a été :

$$\hat{U}_{n+1/2} - \bar{U}_n = 0 \quad [4.8]$$

et celui de l'étape linéaire :

$$\sigma_{1,n+1}^E - \hat{\sigma}_{1,n+1/2}^E = 0 \quad [4.9]$$

### Description des nouvelles étapes

Les nouvelles étapes s'écrivent donc de la manière suivante :

- **l'étape locale** consiste à trouver  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  de  $\Gamma$  connaissant  $\mathbf{s}_n$  avec les précédentes directions de recherche.

On est donc amené à chercher d'une part  $(\hat{W}^E, \hat{W}^{E'}; \hat{F}^E, \hat{F}^{E'})_{2,n+1/2}$  vérifiant le comportement des interfaces,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{2,n+1/2}^E + \hat{F}_{2,n+1/2}^{E'} &= 0 \\ \hat{W}_{2,n+1/2}^E &= \hat{W}_{2,n+1/2}^{E'} \end{aligned}$$

ainsi que les directions de recherche

$$\begin{aligned} (\hat{F}_{2,n+1/2}^E - F_{2,n}^E) - \mathbf{k}^+(\hat{W}_{2,n+1/2}^E - W_{2,n}^E) &= 0 \\ (\hat{F}_{2,n+1/2}^{E'} - F_{2,n}^{E'}) - \mathbf{k}^+(\hat{W}_{2,n+1/2}^{E'} - W_{2,n}^{E'}) &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi une résolution semblable à celle de l'algorithme LATIN mono-échelle décrite au chapitre 2.2, page 50.

D'autre part, il faut évaluer aussi le terme de couplage  $\hat{\sigma}_{1,n+1/2}^E$ , ce qui peut être réalisé en vérifiant le comportement

$$\hat{\sigma}_{1,n+1/2}^E = \mathbf{K}\varepsilon(\mathbb{P}^E \hat{\underline{U}}_{n+1/2})$$

ainsi que la nouvelle direction de recherche [4.8]  $\hat{\underline{U}}_{n+1/2} = \underline{U}_n$

- **l'étape linéaire** consiste à trouver  $\mathbf{s}_{n+1}$  de  $\mathbf{A}_d$  connaissant  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  avec les directions de recherche associées.

Dans un premier temps, il faut vérifier l'admissibilité au sens de l'échelle fine : il faut trouver  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E; \sigma^E, \underline{F}^E)_{2,n+1}$  satisfaisant à l'équilibre sur chaque sous-structure [4.6], avec le comportement

$$\sigma_{2,n+1}^E = \mathbf{K}\varepsilon_{2,n+1}^E$$

et les directions de recherche :

$$\begin{aligned} (\underline{F}_{2,n+1}^E - \hat{\underline{F}}_{2,n+1/2}^E) + \mathbf{k}^- (\underline{W}_{2,n+1}^E - \hat{\underline{W}}_{2,n+1/2}^E) &= 0 \\ \sigma_{1,n+1}^E - \hat{\sigma}_{1,n+1/2}^E &= 0 \end{aligned}$$

Connaissant le terme de couplage  $\sigma_{1,n+1}^E$ , ce calcul est similaire à celui nécessité par l'algorithme LATIN mono-échelle.

Il est donc maintenant possible d'obtenir le deuxième terme de couplage

$$\bar{\sigma}_{2,n+1|\Omega^E} = \mathbb{R}^E \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}_{2,n+1}^E)$$

et ainsi, dans le deuxième temps, de vérifier l'admissibilité au sens de la grande échelle : il faut trouver  $(\bar{\underline{U}}_{n+1}; \bar{\sigma}_{n+1})$  satisfaisant à l'équilibre global [4.7], avec le comportement

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \mathbf{K}_1 \varepsilon(\bar{\underline{U}}_{n+1})$$

Cela conduit donc à un calcul de structure sur l'échelle globale.

Les nouvelles directions de recherche introduites, [4.8] et [4.9], sont ici triviales ; en particulier, elles ne nécessitent pas un stockage supplémentaire des quantités  $\hat{\underline{U}}$  et  $\hat{\sigma}_1^E$  qui seront toujours confondues avec  $\underline{U}$  et  $\sigma_1^E$ . En pratique, l'implantation de cet algorithme 2 échelles est réalisée conformément à la table 4.3. On pourra noter l'utilisation d'un premier calcul sur la grande échelle afin d'initialiser la solution.

### Exemple

Considérons l'exemple bidimensionnel présenté sur la figure 4.4. il s'agit d'une structure de type poutre d'élongation

$$\frac{L}{L'} = 4$$

Échelle globale — 1 processeur	Échelle fine — $n$ processeurs
Initialisation réception des $\mathbb{R}^E \mathbf{K}_{\mathbb{P}^E}, \bar{\sigma}_d^E$ ← assemblage des contributions factorisation de $[K_1]$ montée-descente : problème global envoi de $\underline{\bar{U}}$ →	Initialisation calcul des contributions $\mathbb{R}^E \mathbf{K}_{\mathbb{P}^E}$ et $\bar{\sigma}_d^E$ envoi de $\mathbb{R}^E \mathbf{K}_{\mathbb{P}^E}, \bar{\sigma}_d^E$ initialisation de $\hat{\mathbf{s}}$ factorisation de $[K^E + k^E]$ réception de $\underline{\bar{U}}$ calcul du terme de couplage $\sigma_1^E$ montée-descente
Boucle sur les itérations réception des $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ ← assemblage des contributions montée-descente : problème global envoi de $\underline{\bar{U}}$ →	Boucle sur les itérations calcul du terme de couplage $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ envoi de $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ ancienne étape locale indicateur d'erreur ↔ réception de $\underline{\bar{U}}$ calcul du terme de couplage $\sigma_1^E$ montée-descente

TAB. 4.3 – Algorithme à deux échelles

soumise à une répartition de charge parabolique, en déformations planes, et constituée d'un matériau de module d'Young  $E = 200 \text{ GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . La décomposition en 42 sous-structures et interfaces associées, ainsi que le maillage choisi sont représentés sur la figure 4.5. Il s'agit ici d'un maillage régulier d'éléments triangulaires à 6 nœuds.

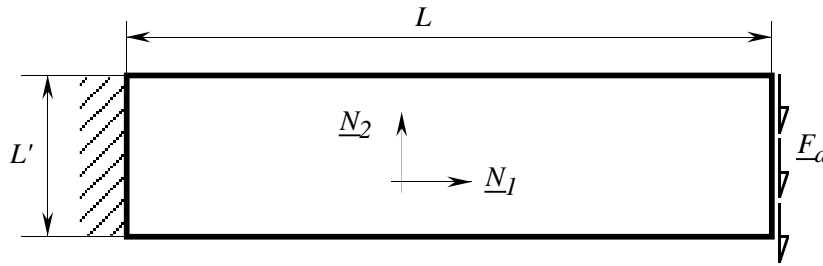


FIG. 4.4 – Structure élancée en flexion

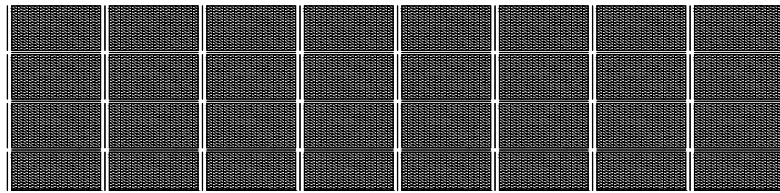


FIG. 4.5 – Décomposition en 32 sous-structures et interfaces

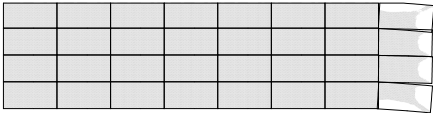
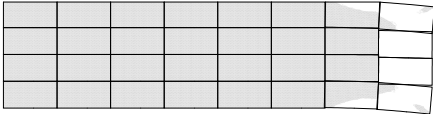
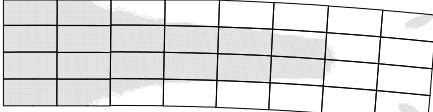


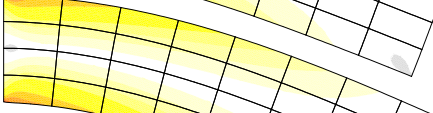
Sur une telle structure élancée travaillant en flexion, il a été montré une difficulté de convergence de l'algorithme due aux effets à grande longueur de variation dans la structure ([Cognard *et al.* 96]). Sans utiliser les deux échelles, le comportement de la méthode « brute » est illustré dans la table 4.4 ; y sont présentés les contraintes de Mises et déformées au cours des itérations, obtenus pour les solutions admissibles  $s_n$ . On peut remarquer ici que l'information se propage à travers la structure d'une couche de sous-structures à chaque itération.

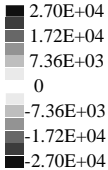
Couplée avec l'approche hiérarchique précédemment décrite, la solution est cherchée alternativement dans les deux échelles définies par les deux discrétisations choisies. La partie de la solution appartenant à chacune de ces dernières est représentée dans la table 4.5 au cours des itérations. La solution totale obtenue est, quant à elle, représentée dans la table 4.6. Cette fois-ci, l'information se propage globalement dans toute la structure à chaque itération, grâce à l'utilisation du problème de l'échelle globale.

Dans le cas d'utilisation de la LATIN mono-échelle, le choix du paramètre de direction de recherche  $k$  a été optimisé sur des exemples semblables (rapidité de convergence maximale en fonction de la forme de  $k$  par essais numériques successifs) : il a été choisi de prendre la valeur « optimale » ([Lorong 94], [Cognard *et al.* 96]) :

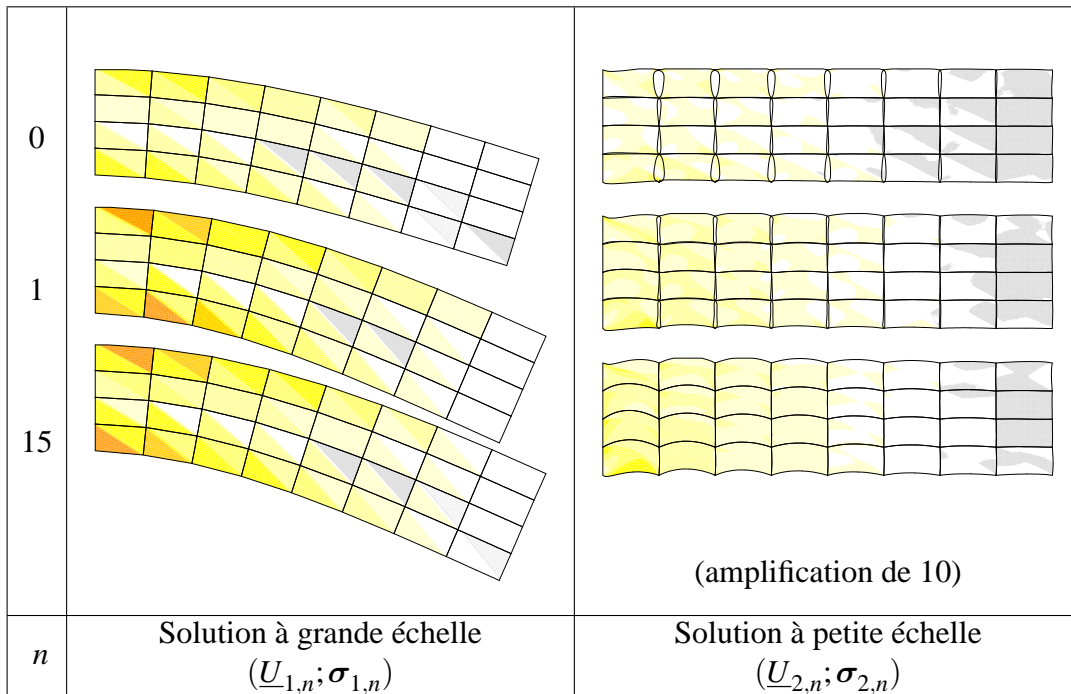
$$k = \begin{bmatrix} \frac{E}{L'} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2L} \end{bmatrix}_{(N_1, N_2)}$$

Généralement, ce paramètre optimal est relié à une longueur caractéristique de la struc-

0		1,
1		0,99
15		0,89
100		0,51
300		0,14
référence		0
$n$	Solution admissible ( $\underline{U}_n; \sigma_n$ )	Erreur



TAB. 4.4 – Contrainte de Mises et déformées au cours des itérations pour la méthode brute



TAB. 4.5 – Contrainte de Mises et déformées au cours des itérations sur les deux échelles

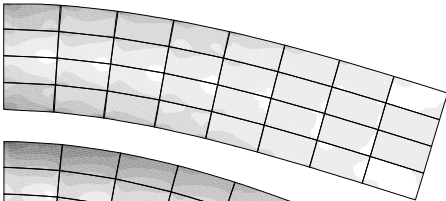


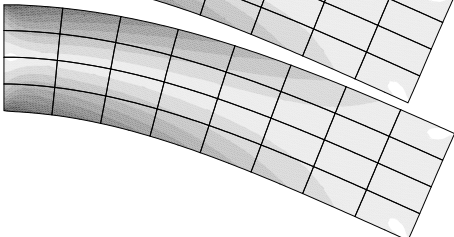
ture toute entière (ou plusieurs longueurs dans cet exemple de structure élancée :  $L'$  et  $2L$ ).

Pour la méthode LATIN à 2 échelles, ce même paramètre a été optimisé sur cet exemple. La figure 4.6 reporte l'évolution de l'erreur en énergie vis à vis de la solution de référence atteinte à convergence, en fonction des itérations pour plusieurs valeurs de longueurs caractéristiques  $L_0$ , ( $k = \frac{E}{L_0}$ ). La valeur choisie précédemment est

$$L_0 = 0,031 L \approx 0,25 l$$

où  $l = L/8$  est une longueur caractéristique des sous-structures. Cette longueur optimale a été sévèrement modifiée par l'utilisation de deux échelles : elle était précédemment liée à une dimension caractéristique de la structure, elle est maintenant liée à une dimension caractéristique des interfaces.

Cette dimension peut être interprétée comme celle de la taille des effets à rechercher dans le problème : sur l'échelle fine, ces effets demeurent liés à la taille des interfaces, les effets à grande longueur de variation ayant été capturés sur la grande échelle, ([Cognard *et al.* 95]).

0		0,45
1		0,19
15		0,025
référence		0
$n$	Solution admissible ( $\underline{U}_n; \underline{\sigma}_n$ )	Erreur

TAB. 4.6 – Contrainte de Mises et déformées au cours des itérations en utilisant deux échelles

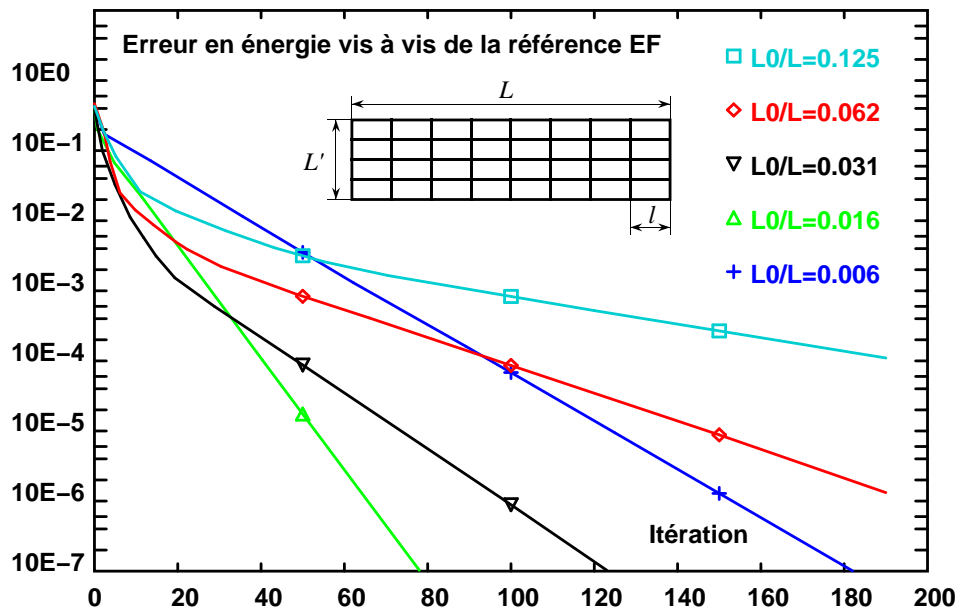


FIG. 4.6 – Influence de la direction de recherche — poutre en flexion, 32 sous-structures, LATIN deux échelles

## 4.5 Implantation numérique

Dans le cas de la représentation des inconnues sur les deux échelles avec projection de type éléments finis hiérarchiques, la discrétisation éléments finis du champ de déplacement est écrite sous la forme [4.5] :

$$\underline{U}^E = \underline{U}_1^E + \underline{U}_2^E \quad , \quad \underline{U}_1^E = \mathbb{P}^E \underline{\bar{U}}$$

avec

$$\underline{\bar{U}} = \sum_j \bar{q}_j \underline{\bar{\Phi}}_j$$

sur le maillage  $\Omega_{1H}$ . Dans le cas de grilles emboîtées,

$$\underline{\bar{\Phi}}_j \in \underline{U}_h \in U_h$$

et donc

$$\underline{\bar{\Phi}}_j = \sum_k \bar{\Phi}_j(x_k) \underline{\Phi}_k$$

où  $x_k$  est la position du nœud courant du maillage  $\Omega_h$  et  $\underline{\Phi}_k$ , la fonction de base associée. alors

$$\underline{\bar{U}} = \sum_j \sum_k \bar{q}_j \bar{\Phi}_j(x_k) \underline{\Phi}_k = \sum_k \underbrace{\sum_j \bar{q}_j \bar{\Phi}_j(x_k)}_{q_{1k}} \underline{\Phi}_k$$

et donc

$$\underline{U}_1 = \sum_k q_{1k} \underline{\Phi}_k$$

ce qui définit au niveau discret l'opérateur de projection :

$$[q_1^E] = [\mathbb{P}^E][\bar{q}] \quad , \quad q_{1k}^E = \sum_j \bar{q}_j \bar{\Phi}_j(x_k) |_{\Omega^E}$$

Pour les éléments isoparamétriques, la position  $X_k$  du nœud courant dans un élément de référence de  $\Omega_{1H}$  est nécessaire pour pouvoir évaluer  $\bar{\Phi}_j(x_k)$ . Elle est obtenue à partir de la position connue  $x_k$  dans l'élément réel en minimisant un écart au sens des moindres carrés :

$$\min_{X_k} \left[ x_k - \sum_j x_j \bar{\Phi}_j(X_k) \right]^2$$

qui est une fonction non-linéaire de  $X_k$ , par une méthode de Newton. En pratique, cela nécessite peu d'itérations par point  $x_k$ , et une seule pour des éléments à fonctions de base linéaires (système linéaire).

L'espace complémentaire de  $\underline{U}_h$  dans  $U_h$  est alors (figure 4.3, page 125) :

$$\sum_E U_{2h}^E$$

La nouvelle matrice de rigidité  $[K_2^E] + [k_2^E]$  s'obtient alors à partir de l'ancienne,  $[K^E] + [k^E]$ , en ôtant les degrés de liberté correspondant aux nœuds des mailles de l'échelle globale  $\Omega_{1H}$ . Cette opération peut bien entendu s'effectuer au niveau des matrices élémentaires.

Une opération supplémentaire à effectuer lors de l'utilisation de 2 échelles est celle de l'évaluation des termes de couplage (chapitre 4.3, page 126) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\sigma_1^E \varepsilon(\underline{U}^{E*})] d\Omega &= \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}^{E*}) \mathbf{K}(\mathbb{P}^E \underline{U})] d\Omega = \\ &= \sum_i q_i^{E*} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{\phi}_i) \mathbf{K}(\mathbb{P}^E \underline{U})] d\Omega = [q^{E*}] \cdot [K^E] [\mathbb{P}^E] [\bar{q}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\bar{\sigma}_2 \varepsilon(\bar{U}^*)] d\Omega &= \sum_E \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\bar{U}^*) \mathbb{R}^E \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}_2^E)] d\Omega = \\ &= \sum_E \sum_j \bar{q}_j^* \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\bar{\phi}_j) \mathbb{R}^E \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}_2^E)] d\Omega = [\bar{q}^*] \cdot \sum_E [\mathbb{R}^E] [K^E] [q_2^E] \end{aligned}$$

Utiliser la dernière expression consiste à effectuer des produits matrices de rigidités-vecteurs, élément par élément ; utiliser l'expression précédente consiste à intégrer sur chaque élément l'analogue d'une charge de correction.

# Chapitre 5

## Exemples, performances et comparaisons

---

<b>5.1</b>	<b>Influence des différentes échelles . . . . .</b>	<b>140</b>
5.1.1	Extensibilité numérique . . . . .	140
5.1.2	Influence de la décomposition . . . . .	142
5.1.3	Influence de l'échelle de la structure . . . . .	143
<b>5.2</b>	<b>Performances de l'approche proposée . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>5.3</b>	<b>Comparaisons avec la méthode FETI . . . . .</b>	<b>152</b>

---

Dans ce chapitre, nous utilisons l'extension multi-échelles de l'approche LATIN en sous-structuration afin de qualifier les rôles joués par les différentes échelles exhibées sur un problème de calcul de structures. En particulier, l'influence de ces échelles sur le taux de convergence de l'algorithme LATIN multi-échelles permet de conclure sur l'extensibilité numérique : à charge de calcul par processeur constante, un accroissement simultané de la taille du problème à traiter, et du nombre de processeurs mobilisés, ne modifie que peu le nombre d'itérations pour atteindre la convergence.

Le gain en performances par rapport à l'approche mono-échelle est ensuite illustré sur un exemple à grand nombre de degrés de liberté. Les approches sont ensuite comparées à différentes variantes de la méthode FETI sur des exemples à géométrie simple, car contrainte ici par l'utilisation de maillages emboîtés et la volonté de tester les algorithmes dans divers cas de figure, entre autres en faisant varier la taille du problème à grande échelle.

## 5.1 Influence des différentes échelles

Nous avons vu que lors d'une décomposition en sous-structures, on introduit une longueur caractéristique des éléments de la décomposition  $l$  en plus de la longueur caractéristique de la structure  $L$ . On notera de plus ici :

- $h$  la taille de maille de l'échelle fine,
- $H$  la taille de maille de l'échelle globale.

En prenant comme solution de référence la solution à convergence ( $\underline{U}_{\text{ref}}; \underline{\sigma}_{\text{ref}}$ ) (ici, la solution obtenue par résolution directe du problème éléments finis de départ), on est à même de définir le taux de convergence de l'écart en énergie par rapport à cette solution

$$e_n^2 = \frac{\int_{\Omega} \text{Tr}[(\underline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_{\text{ref}}) \mathbf{K}^{-1} (\underline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_{\text{ref}})] d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma}_{\text{ref}} \mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}_{\text{ref}}] d\Omega} = \frac{\int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}_n - \underline{U}_{\text{ref}}) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_n - \underline{U}_{\text{ref}})] d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}_{\text{ref}}) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_{\text{ref}})] d\Omega}$$

en fonction des itérations :

$$\tau = -\log \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

dont la valeur est constante en cas de convergence logarithmique, ou pour lequel on prendra la valeur moyenne jusqu'à l'obtention d'une solution acceptable (erreur  $e_n$  inférieure à 1 % par exemple).

### 5.1.1 Extensibilité numérique

Une propriété importante des algorithmes pouvant se prêter à une implantation sur calculateurs parallèles à mémoire distribuée est l'*extensibilité*. En effet, on cherche dans ce cas à adapter la puissance de la machine (par choix d'un certain nombre de processeurs) à la taille du problème. Travaillant à taille de problème local par processeur constant, un algorithme est dit numériquement extensible s'il n'y a pas (ou peu) de perte de convergence lorsque l'on augmente le nombre de processeurs, et donc la taille du problème à traiter. Clairement, l'approche LATIN mono-échelle n'est pas extensible. Bramble a pour la première fois montré dans [Bramble *et al.* 86] que pour les méthodes de décomposition de domaine, une telle extensibilité peut être atteinte en utilisant un problème global sur toute la structure, et qu'il semble difficile de la réaliser sans cela.

Reprenons ici l'exemple 4.4, présenté précédemment (page 131). La figure 5.1 donne le taux de convergence  $\tau$  en fonction des échelles présentes dans le problème, à savoir la taille des sous-structures  $l$  (donc du nombre de ces sous-structures) et le raffinement du maillage  $h$  (donc de la taille du problème local). Dans cet exemple, la taille de maille de l'échelle globale est fixée à la taille des sous-structures :  $H = l$ , et conformément aux résultats précédents, le paramètre de direction de recherche

$$k = \frac{E}{L_0}$$

a été choisi de façon à avoir :

$$L_0 = 0,25 l$$

La direction de recherche « optimale » dépend en effet peu du raffinement du maillage ([Cognard *et al.* 96]).

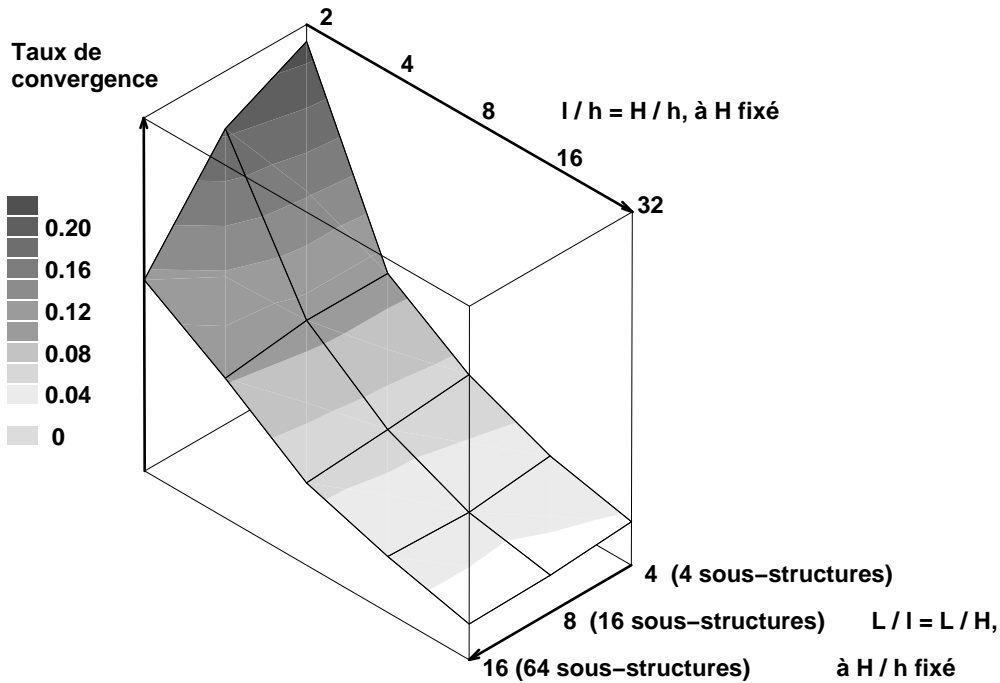


FIG. 5.1 – Taux de convergence en fonction des rapports d'échelles  $L/l$  et des rapports de taille de mailles  $l/h$

Cet exemple montre donc deux types d'influence des échelles utilisées dans le problème.

Tout d'abord, en utilisant l'approche multi-échelles, le taux de convergence devient très peu dépendant du nombre de sous-structures (mis à part le cas de discrétisations très grossières, comme  $l/h$  de l'ordre de 2) ; le prix à payer demeure l'augmentation de la taille du problème à résoudre sur l'échelle globale. Sur cet exemple, on fait en effet varier le nombre de sous-structures en faisant varier  $H$  pour un rapport  $l/h = H/h$  constant (c'est à dire pour une taille de problème par sous-structure constante). Il semble donc que ce taux de convergence dépende peu de  $l$ . Cet aspect va être précisé dans le paragraphe suivant.

D'autre part, il était bien prévisible que plus le problème sur l'échelle globale est proche du problème de référence (le problème éléments finis direct) — c'est à dire, plus  $l/h$  est petit —, plus le taux de convergence est élevé. Sur cet exemple, on fait en effet varier le rapport  $l/h = H/h$  à  $H = l$  fixé. Au moins jusqu'à des valeurs de  $H/h$  de l'ordre de 32, on observe donc numériquement une dépendance du taux de

convergence à  $H/h$ . Une étude asymptotique (quand  $H/h \rightarrow \infty$ ) serait ici nécessaire pour déterminer l'ordre de convergence.

### 5.1.2 Influence de la décomposition

Pour la taille de maille la plus fine ( $l/h = 32$ ), les caractéristiques du problème relatif aux sous-structures sont rappelées dans la table 5.1.

1 sous-structure (éléments triangulaires à 6 nœuds)					
$\frac{l}{h}$	nb nœuds	nb ddl	nb éléments	encombrement	
				factorisée	rigidités élémentaires
32	4 225	8 450	2 048	6,2 Mo	1,3 Mo

TAB. 5.1 – Caractéristiques du problème local aux sous-structures

Le taux de convergence  $\tau$  est alors tracé en fonction du nombre de sous-structures pour les approches mono et multi-échelles sur la figure 5.2.

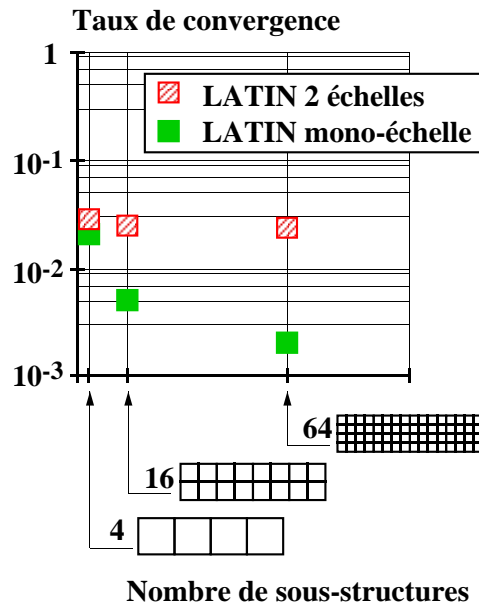


FIG. 5.2 – Taux de convergence comparés pour les approches mono et multi-échelles en fonction du nombre de sous-structures

Pour chacune des décompositions, les caractéristiques du problème de référence sont données dans la table 5.2 et la table 5.3 reporte les valeurs des taux de convergence obtenus.

sous-structuration (total)						calcul direct			
$\frac{L}{L'}$	$\frac{L}{l}$	nb sstr.	nb ddl	encombrement		nb nœuds	nb ddl	nb élém.	enc. factorisée
				fact.	rig. élém.				
4	4	4	33 800	25 Mo	5,2 Mo	16 705	33 410	8 192	33 Mo
4	8	16	135 200	99 Mo	21 Mo	66 177	132 354	32 768	255 Mo
4	16	64	540 800	398 Mo	83 Mo	263 425	526 850	131 072	2 000 Mo*

\* estimé

TAB. 5.2 – Caractéristiques des problèmes traités

$\frac{L}{L'}$	$\frac{L}{l}$	nb sstr.	$\tau$ mono-échelle	$\tau$ multi-échelles
4	4	4	0,02	0,028
4	8	16	0,005	0,024
4	16	64	0,002	0,023

TAB. 5.3 – Taux de convergence  $\tau$  en approches mono et multi-échelles

On vérifie donc sur cet exemple, la forte décroissance du taux de convergence de l'approche mono-échelle, lorsque l'on augmente le nombre de sous-structures. Cela peut être interprété de la façon suivante : lorsque l'on procède à la décomposition en sous-structures, on rompt a priori un certain nombre de couplages (entre toutes les sous-structures) du problème elliptique implicite de départ. Ce sont ces effets qui doivent être recouverts au cours des itérations. Plus la décomposition est fine (c'est à dire plus le nombre de sous-structures est grand), plus il va être difficile d'atteindre ces effets à grande longueur de variation.

L'utilisation simultanée de l'échelle globale permet alors de rapidement les prendre en compte, ce qui se traduit par la faible dépendance du taux de convergence vis à vis du nombre de sous-structures (table 5.3).

### 5.1.3 Influence de l'échelle de la structure

La deuxième manière de faire varier le rapport des échelles  $L/l$  est cette fois-ci de changer la géométrie du problème mécanique de départ en modifiant l'élongation  $L/L'$ . Le chargement est conservé identique. On change donc ce problème en même temps que le nombre de sous-structures tout en gardant une taille de problèmes locaux aux sous-structures constant pour vérifier l'extensibilité.

Taux de convergence et géométrie du problème décomposé sont présentés sur la figure 5.3.

La table 5.4 donne les caractéristiques du problème élément fini direct en comparaison avec celles du problème décomposé, et la table 5.5 rappelle les valeurs des taux

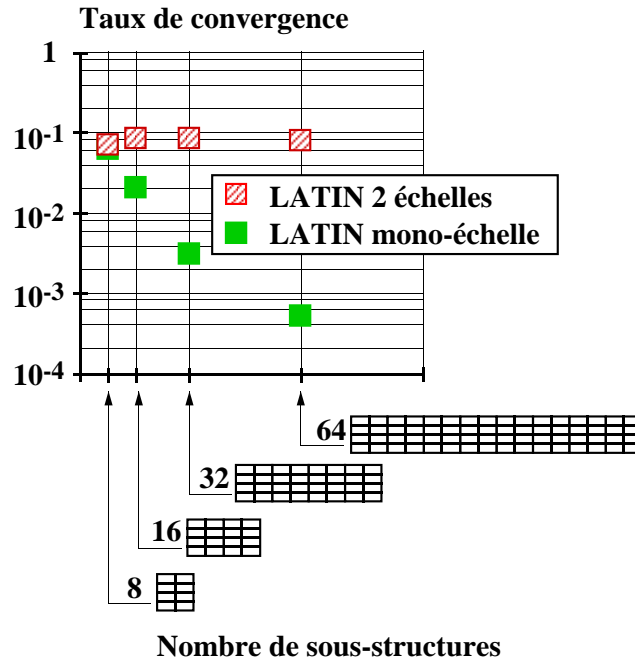


FIG. 5.3 – Taux de convergence comparés pour les approches mono et multi-échelles en changeant l'échelle de référence

de convergence.

sous-structuration (total)						calcul direct			
$\frac{L}{L'}$	$\frac{L}{\bar{l}}$	nb sstr.	nb ddl	encombrement		nb nœuds	nb ddl	nb élém.	enc. factorisée
				fact.	rig. élém.				
1	2	8	67 600	50 Mo	10 Mo	33 153	66 306	16 384	116 Mo
2	4	16	135 200	99 Mo	21 Mo	66 049	132 098	32 768	368 Mo
4	8	32	270 400	199 Mo	42 Mo	131 841	263 682	65 536	914 Mo
8	16	64	540 800	398 Mo	83 Mo	263 425	526 850	131 072	2 000 Mo*

\* estimé

TAB. 5.4 – Caractéristiques des problèmes traités, suivant l'échelle de référence  $L$

On vérifie bien sur ces exemples que la valeur du paramètre de direction de recherche  $L_0$  n'est cette fois plus liée à une longueur caractéristique de la structure  $L$ , comme cela avait été montré au chapitre 2.3, page 63, puisqu'il a été conservé constant au cours de ces différents calculs, sans faire varier notablement le taux de convergence obtenu par l'approche multi-échelles.

$\frac{L}{L'}$	$\frac{L}{l}$	nb sstr.	$\tau$ mono-échelle	$\tau$ multi-échelles
1	2	8	0,062	0,07
2	4	16	0,02	0,084
4	8	32	0,003	0,085
8	16	64	0,0005	0,08

TAB. 5.5 – Taux de convergence  $\tau$  en approches mono et multi-échelles, suivant l'échelle de référence  $L$

## 5.2 Performances de l'approche proposée

Pour pratiquer des prises de temps et donc évaluer les performances, il est intéressant de pouvoir confiner toutes les données en mémoire centrale et ainsi éviter le débordement programmé sur disque qui est l'une des fonctionnalités du code éléments finis CASTEM 2000 ([Verpeaux 93]), dans la trame duquel le code prototype a été implanté. Le test proposé est celui décrit par la figure 5.4 pour lequel le chargement est toujours parabolique.

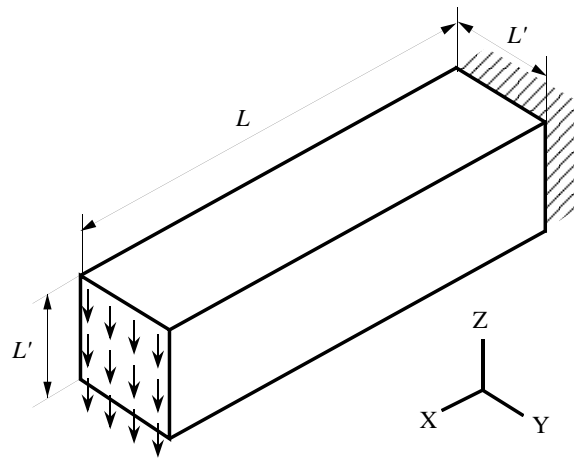


FIG. 5.4 – Problème tridimensionnel testé

La géométrie particulièrement simple permet de réaliser facilement des maillages emboîtés et de régler le nombre de degrés de liberté ainsi que la largeur de bande moyenne des problèmes éléments finis mis en jeu. De plus, les problèmes locaux par sous-structure sont tous de tailles semblables (seuls les nombres d'interfaces connectées à chaque sous-structure ne sont pas toujours identiques). Dans le cas de l'approche LATIN mono-échelle, les charges par processeur pourront donc être assez bien équilibrées.

La décomposition en 32 sous-structures et interfaces ainsi que le maillage correspondant sont représentés sur la figure 5.5. Le problème ainsi associé à chaque sous-structure possède donc une taille décrite par la table 5.6.

1 sous-structure					
nb nœuds	nb ddl	nb éléments	largeur de bande moyenne	encombrement	
				factorisée	rig. élém.
1 505	4 515	256	236	8,5 Mo	3,7 Mo

TAB. 5.6 – Caractéristiques du problème associé aux sous-structures

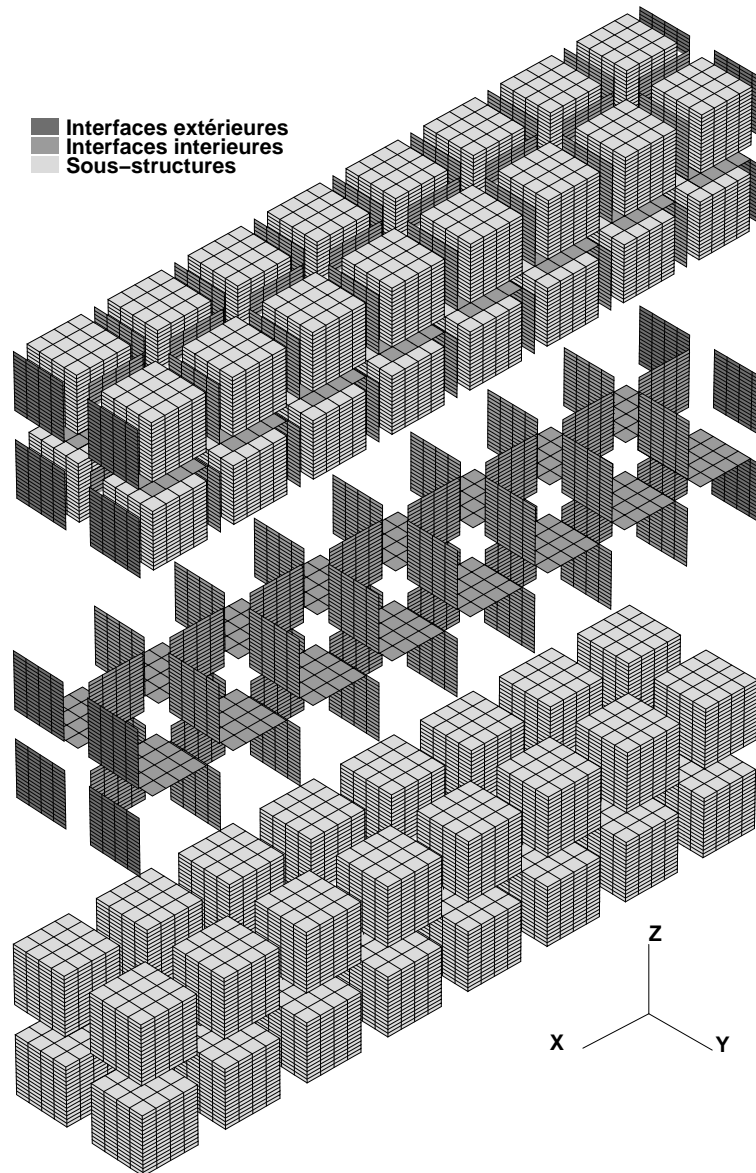


FIG. 5.5 – Décomposition en 32 sous-structures et interfaces

Le problème éléments finis de référence considéré est décrit par la table 5.7. On pourra remarquer la valeur élevée de la largeur de bande moyenne du problème direct, ce qui conduit à la nécessité d'une capacité de stockage importante pour la matrice de rigidité. La réduction drastique de largeur de bande issue de la décomposition (table 5.6) permet de la même façon de réduire le stockage total demandé pour toutes les rigidités des sous-structures.

LATIN mono-échelle		LATIN multi-échelles			calcul direct		
ddl total	enc. total	ddl total	encombrement total		nb ddl	lb moy.	enc.
			fact.	rig. élém.			
144 480	273 Mo	144 723	273 Mo	118 Mo	112 563	3 500*	2 500 Mo*

\* estimé

TAB. 5.7 – Caractéristiques des problèmes éléments finis à traiter

Il est cependant clair ici que le choix qui a été fait de conserver les matrices de rigidité élémentaires en mémoire (c'est à dire de privilégier le stockage par rapport au calcul pour l'évaluation des termes de couplages, chapitre 4.5, page 136) est ici très pénalisant en terme de capacité de stockage demandée. Cela est dû essentiellement au grand nombre d'éléments utilisés, qui comportent de plus un grand nombre de degrés de libertés locaux (éléments cubiques à 20 nœuds ; une matrice élémentaire de rigidité nécessite 14 ko de stockage). L'amélioration du code prototype consisterait donc dans de tels cas à recalculer les termes de couplages sans utiliser les matrices de rigidité élémentaires.

Lors de l'utilisation de la stratégie multi-échelles, le maillage de l'échelle globale est encore ici lié à la taille des sous-structures ( $H = l$  avec les notations du chapitre 5.1 précédent, page 140). Il est représenté sur la figure 5.6, et est composé de 32 éléments cubiques à 8 nœuds.

Le calcul a été réalisé sur la machine massivement parallèle CRAY-T3D de l'IDRIS à Orsay. 32 processeurs ont été utilisés ; à chacun, la gestion d'une sous-structure ainsi que ses interfaces connectées ont été confié. Le traitement du problème de l'échelle globale (factorisation puis montées-descentes) a été de plus surchargé sur le premier nœud de calcul.

Afin de pouvoir, comme précédemment, tracer l'évolution de l'erreur au cours des itérations, la résolution a été poursuivie jusqu'à convergence numérique pour produire une solution de référence. C'est cette dernière qui est utilisée pour contrôler a posteriori la convergence, qui est fournie sur la figure 5.7.

Les prises de temps sont réalisées en temps « horloge » (pas de synchronisation supplémentaires dues aux accès aux disques que se partagent les processeurs) et sont reportés dans la table 5.8. Le temps total correspond ainsi au temps de restitution.

Une fois la mesure de temps précisée, l'efficacité peut être définie ([Karonis 92],

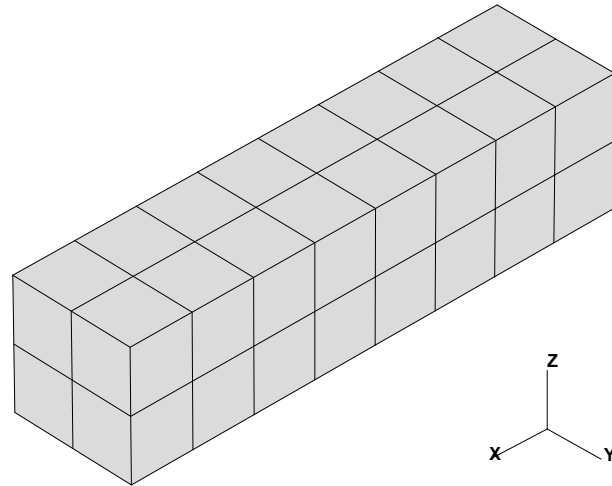


FIG. 5.6 – Maillage de l'échelle globale

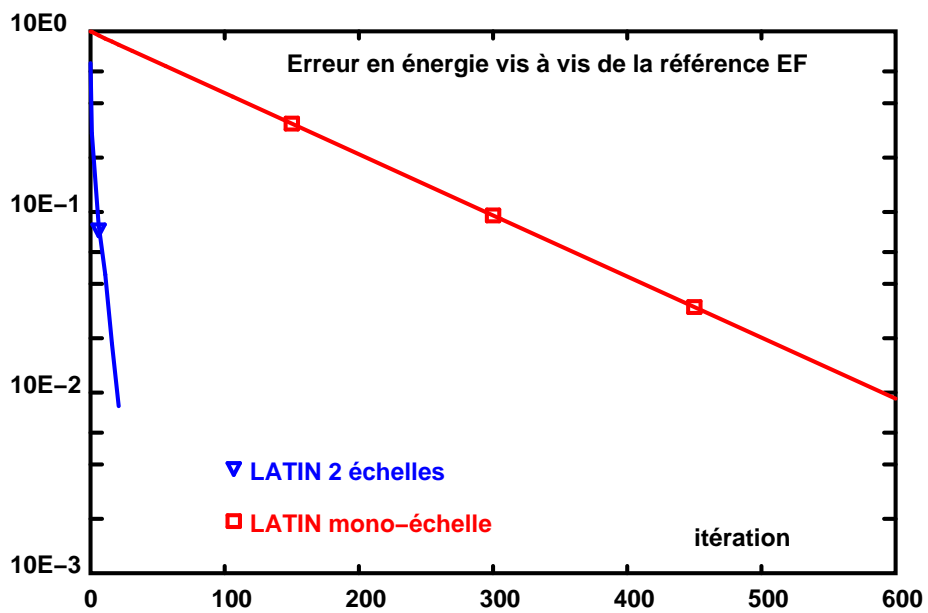


FIG. 5.7 – Erreur au cours des itérations pour les méthodes LATIN mono-échelle et LATIN 2 échelles

[Carmona et Rice 91]) comme étant le rapport entre le temps moyen  $T_{\text{moy}}$  pris par les processeurs pour les seuls traitements numériques et la durée totale de l'exécution de l'algorithme  $T_N$  ( $N$  étant le nombre de processeurs utilisés). La décomposition de la structure en sous-structures fait partie du « pré-processing » et n'est pas prise en compte dans cette partie. Sur machines à mémoire distribuée, le temps moyen est la moyenne des temps  $T_{\text{Cal}}^i$  pris par chaque processeur pour les seuls traitements numériques. Il est en effet aisé de dissocier les zones du programme dédiées aux calculs de celles dédiées à l'envoi ou à la réception de messages. L'efficacité sur ce type de calculateurs s'écrit alors :

$$e_{\text{MD}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{\text{Cal}}^i$$

CRAY-T3D	LATIN mono-échelle	LATIN multi-échelles	calcul direct
temps initialisation	30 s	33 s	
temps 10 itérations	7,3 s	11,5 s	
nb itérations	500	20	1
efficacité $e_{\text{MD}}$	90 %	85 %	
temps total	400 s	56 s	12 h*

\* estimé

TAB. 5.8 – Temps horloge correspondant à la résolution du même problème suivant l'approche employée

Bien entendu, le problème direct ne peut être traité sur un nœud de calcul du multi-processeurs en raison de sa taille ; l'estimation du temps de restitution est donc faite sur la base du temps CPU (on suppose que le problème entier reste en mémoire centrale), en calant une suite de problèmes de taille croissante sur un processeur du CRAY-T3D par rapport à une machine HP-9000/777 mono-processeur, puis en extrapolant sur cette dernière jusqu'à la taille du calcul direct en question. Le nombre d'opérations estimé pour y parvenir permet d'avoir un guide supplémentaire (figure 5.8). On peut vérifier la légère amélioration des performances du processeur DEC $\alpha$ EV4 du CRAY-T3D, par rapport à celui du HP-9000/777 lorsque la taille du problème croît.

L'évolution de l'erreur au cours du temps de calcul est ainsi reportée sur la figure 5.9.

Pour cet exemple, la stratégie multi-échelles se révèle particulièrement efficace. Ceci est dû au fait que l'on trouve à la fois un problème initial à grande largeur de bande et une décomposition en sous-structures équilibrée.

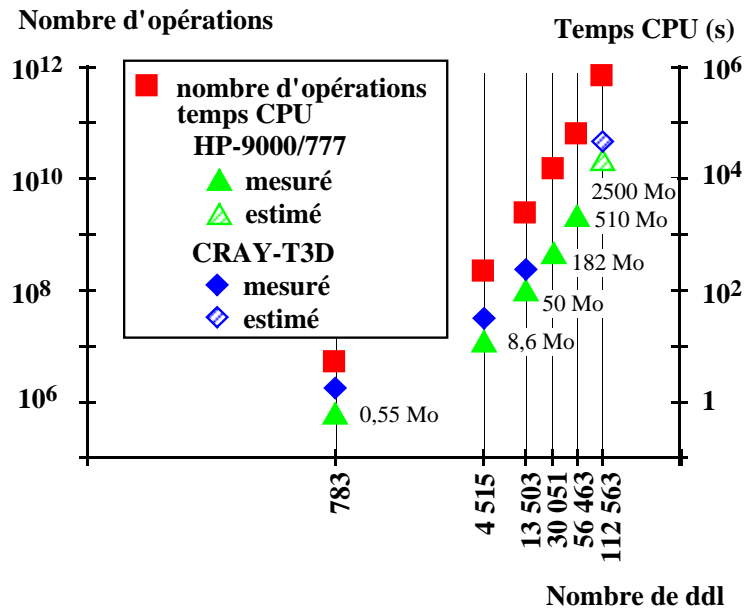


FIG. 5.8 – Erreur au cours du temps pour les méthodes LATIN mono-échelle et LATIN 2 échelles

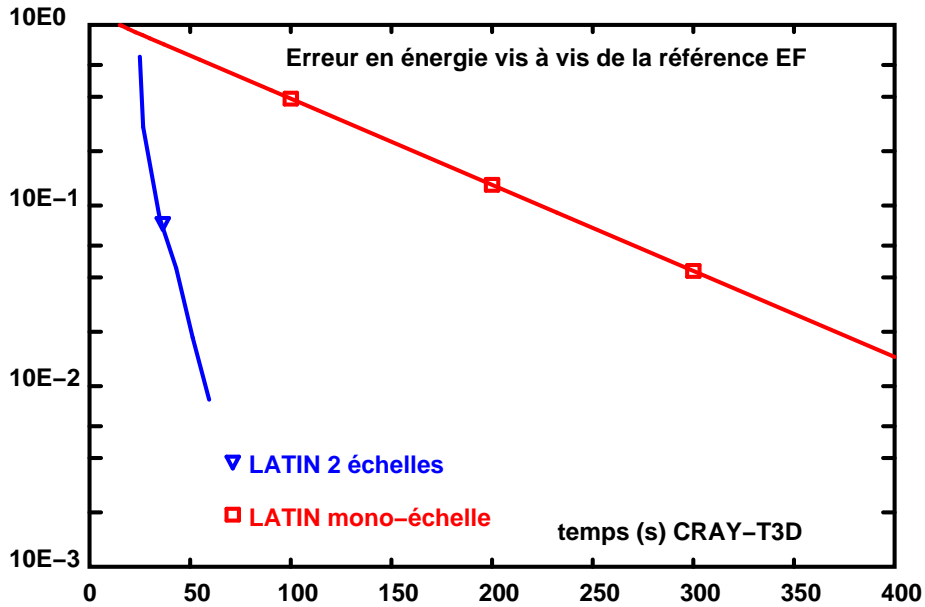


FIG. 5.9 – Erreur au cours du temps pour les méthodes LATIN mono-échelle et LATIN 2 échelles

### 5.3 Comparaisons avec la méthode FETI

En vue de comparer l'approche présentée à d'autres techniques de sous-structuration, nous reprenons l'exemple de flexion déjà décrit dans le chapitre 5.2, page 146.

Afin d'étudier l'influence de la taille du problème, nous allons considérer les deux cas de discrétisation présentés sur la figure 5.10.

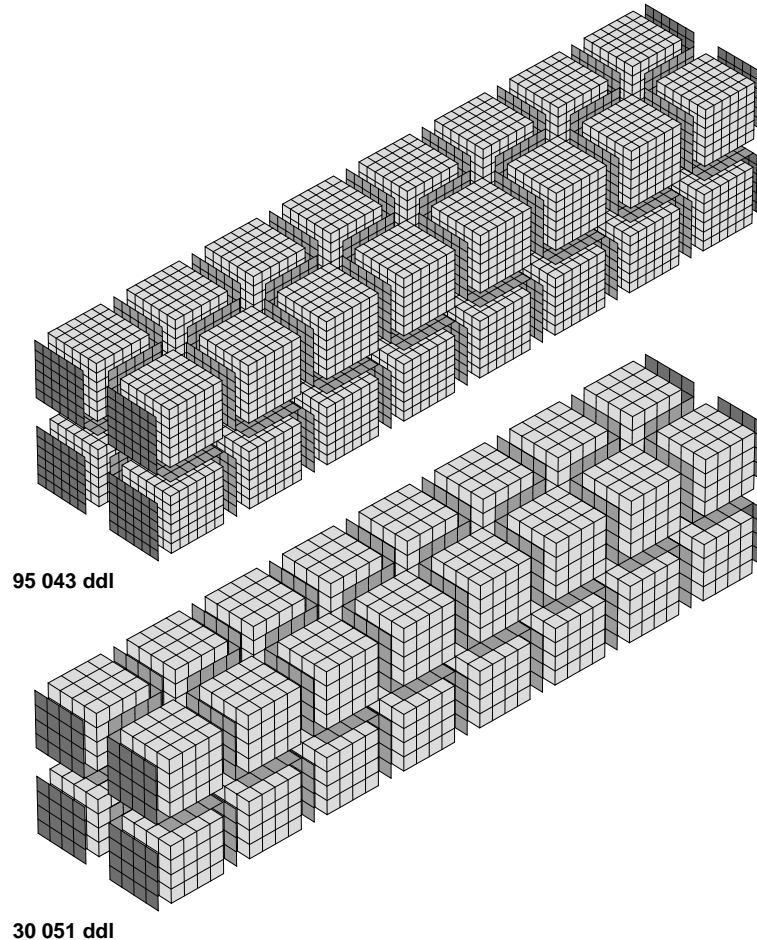


FIG. 5.10 – Différentes discrétisations pour le problème sous-structuré

La décomposition en sous-structures est la même que celle du chapitre 5.2 : le problème de départ est décomposé en 32 sous-structures et interfaces. Les caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures sont décrites dans la table 5.9, alors que la table 5.10 compare les tailles de problèmes lors d'une résolution par sous-structuration, directe, et en assemblant explicitement le complément de Schur (voir chapitre 1.2.1, page 22).

Les remplissages des matrices de rigidité factorisées (triangle inférieur) sont comparés pour les deux problèmes directs sur la figure 5.3, alors que la figure 5.3 compare,

Maillage	1 sous-structure				
	nb nœuds	nb ddl	nb élém.	encombrement	
				fact.	rig. élém.
1	425	1275	64	2,1 Mo	0,96 Mo
2	1 225	3 675	216	12,8 Mo	3,1 Mo

TAB. 5.9 – Caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures

Mail.	sous-structuration			calcul direct			complément de Schur		
	nb ddl total	enc. total		nb élém.	nb ddl	enc.	nb nœuds	nb ddl	enc.
		fact.	rig. élém.						
1	40 800	68,4 Mo	31 Mo	2 048	30 051	184 Mo	2 977	8 931	68 Mo
2	117 600	410 Mo	102 Mo	18 449	95 043	1 252 Mo	6 625	19 875	-

TAB. 5.10 – Caractéristiques des problèmes à résoudre

elle, les tailles des problèmes à grande échelle (illustrés sur la figure 5.13 et décrits dans la table 5.11), le problème local à une sous-structure et la matrice du complément de Schur, dans le cas du petit problème (maillage 1). Ces mêmes données sont tracées sur les figures 5.14 et 5.15.

Maillage	problème à grande échelle			
	nb nœuds	nb ddl	nb élém.	enc. factorisée
a	81	243	32	0,064 Mo
b	425	1 275	256	0,9 Mo
c	1 225	3 675	864	5 Mo
d	8 281	24 843	6 912	112 Mo

TAB. 5.11 – Caractéristiques du problème à grande échelle

Considérons tout d'abord le problème décrit par le maillage 1.

- On notera par « SCHUR » l'algorithme de Schur primal, décrit au chapitre 1.2.1, page 25. Il a été simulé en pratiquant en séquentiel un gradient conjugué non préconditionné sur le problème condensé en déplacement sur les interfaces.
- Les courbes repérées par la mention « FETI » correspondent à la méthode FETI décrite au chapitre 1.3.2 (page 35) dans sa version non préconditionnée. Deux préconditionnements ont été ensuite testés : le préconditionnement de Dirichlet optimal, et le préconditionnement « lumped » (décrits au chapitre 1.4), repérés respectivement par « FETI Dirichlet » et « FETI Lumped ». Ces trois derniers calculs ont été réalisés avec François-Xavier Roux sur une machine PARAGON

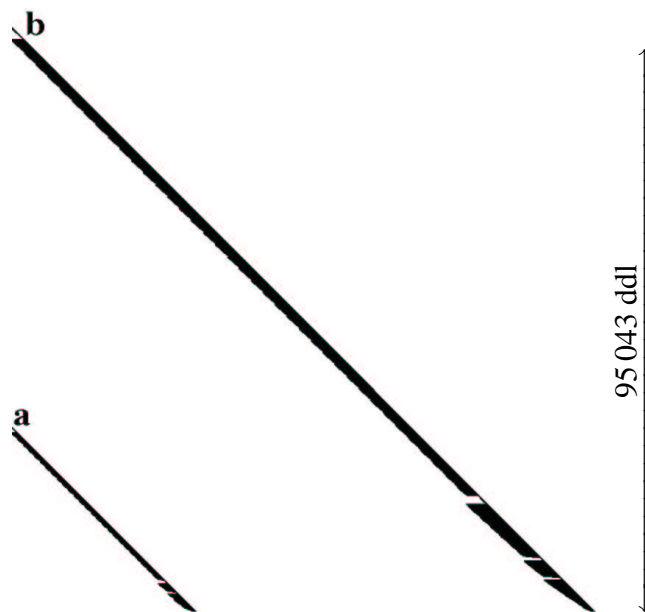


FIG. 5.11 – Profils des deux problèmes directs testés (matrices de rigidité factorisées) :

- a) 30 051 degrés de liberté,
- b) 95 043 degrés de liberté

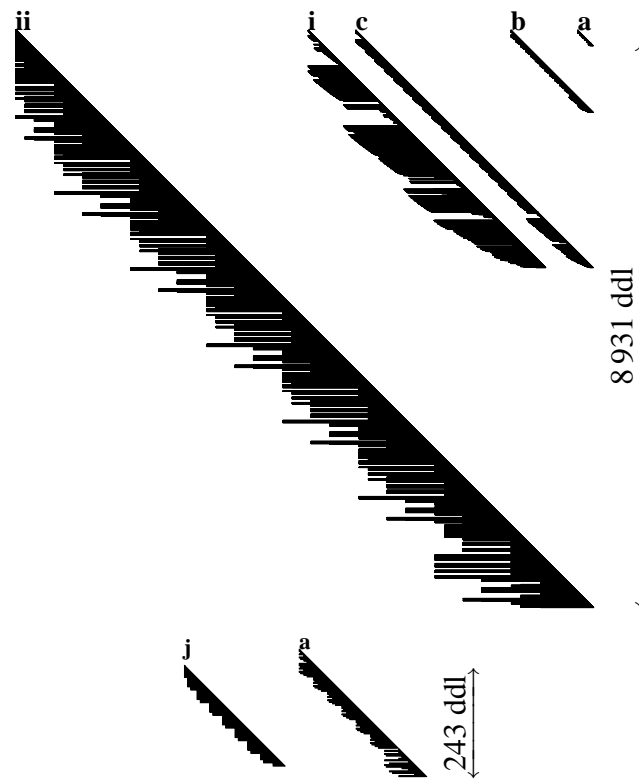


FIG. 5.12 – Profils des différents problèmes relatifs au cas de calcul direct à 30 051 degrés de liberté :

- a) b) c) différentes tailles de problèmes à grande échelle,
- j) mouvements de solides rigides de la méthode FETI,
- i) problème local à une sous-structure,
- ii) problème condensé de Schur

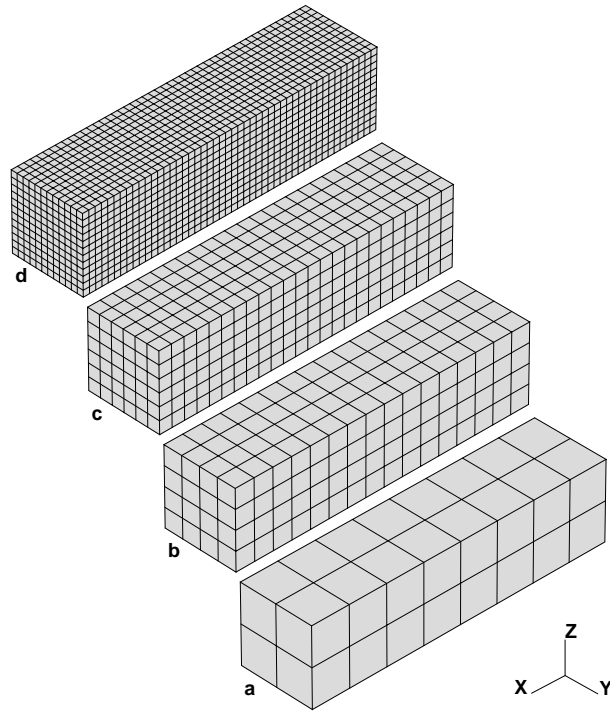


FIG. 5.13 – Différentes discrétisations pour le problème à grande échelle

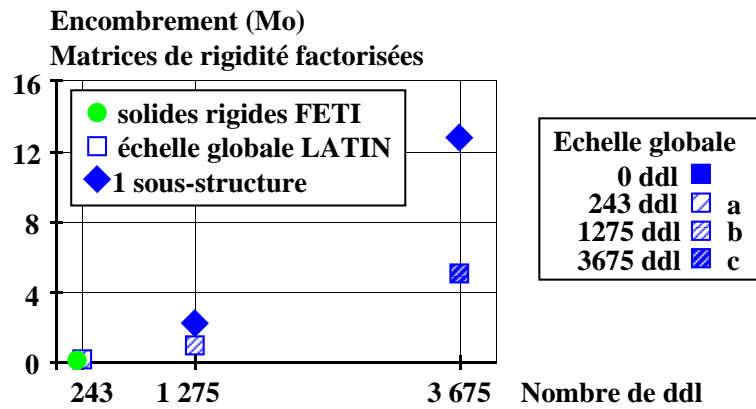


FIG. 5.14 – Tailles comparées des problèmes à grande échelle

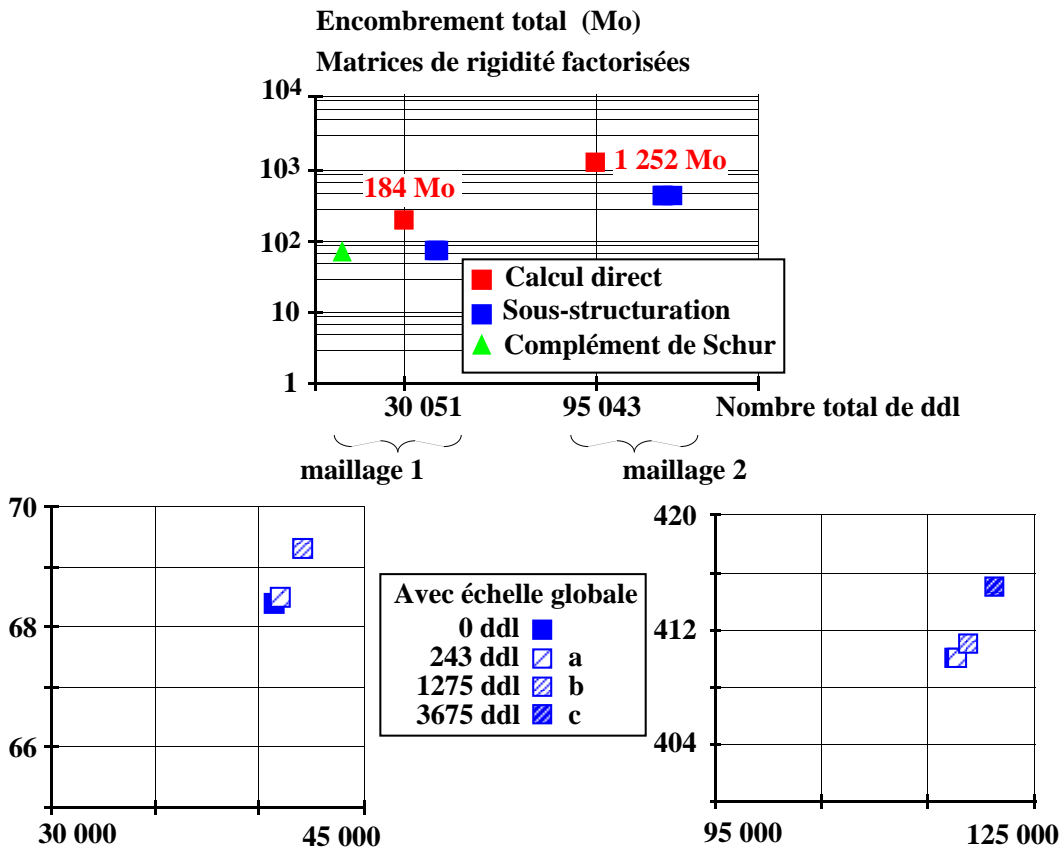


FIG. 5.15 – Tailles comparées des problèmes issus des différentes approches

de l'ONERA-Châtillon.

- Enfin, le repère « LATIN mono-échelle » correspond à l'utilisation de l'algorithme LATIN initial, et les repères « LATIN 2 échelles », à l'utilisation des différentes discrétisations de l'échelle globale décrites dans la table 5.11. Ces trois derniers calculs sont, quant à eux, effectués sur la machine CRAY-T3D de l'IDRIS à Orsay. 32 processeurs ont été utilisés puisque, comme précédemment, le problème à grande échelle est traité par le premier processeur, en plus de sa propre sous-structure.

L'erreur en énergie vis à vis de la solution à convergence est tracée sur la figure 5.16 en fonction des itérations pour les différentes approches.

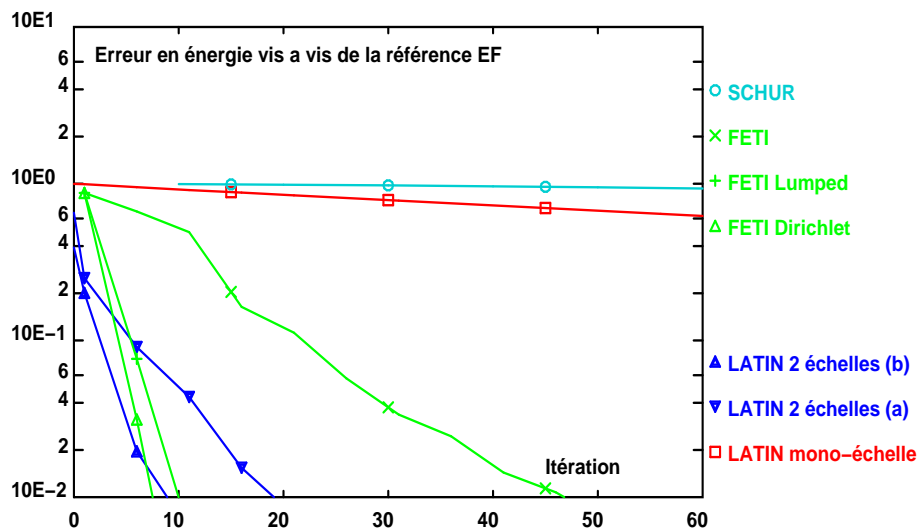


FIG. 5.16 – Comparaison des différentes approches sur le premier problème proposé

Le comportement « algorithmique » ainsi décrit (évolution de l'erreur en fonction des itérations) montre ses insuffisances car il ne permet pas de pondérer les différentes phases des algorithmes en fonction de leur coût. L'approche contraire consisterait à comparer directement les temps de restitution (c'est à dire les temps nécessaires pour obtenir le résultat de l'analyse) des différents algorithmes ; elle a néanmoins l'inconvénient, par la globalité de son analyse, de prendre en compte un nombre très grand de paramètres (qualité d'écriture du code et celle des compilateurs utilisés, performances des systèmes d'entrées-sorties, dépendance aux types d'opérations numériques effectuées suivant le processeur, et indirections et synchronisations dues aux types de réseaux de communication, ...).

Nous avons opté ici pour une approche intermédiaire, qui se veut ne dégager que les grandes tendances des algorithmes. Si on analyse les nombres d'opérations à effectuer lors de ces différentes approches, on s'aperçoit que les phases coûteuses concernent les factorisations des matrices de rigidité pendant l'initialisation, et les montées-descentes des systèmes factorisés pendant les itérations, en plus des phases de synchronisation

entre processeurs. Si l'on souhaite donc comparer les coûts sur les deux précédentes machines parallèles qui ont servi à traiter les exemples précédents, il faut faire intervenir d'une part, les performances de leurs processeurs respectifs et d'autre part, celles du réseau d'interconnection. La phase d'initialisation des différentes approches étant purement parallèle, elle ne fait quasiment intervenir que les capacités du processeur du nœud de calcul. Les temps CPU peuvent donc être transformés en ce qui concerne cette phase en temps équivalents en identifiant le coût de l'initialisation FETI et LATIN mono-échelle, et en les normalisant. Au vu des synchronisations des algorithmes (table 1.4, page 37 pour la méthode FETI et table 2.1, page 56 pour la méthode LATIN) et des opérations à réaliser au cours des itérations, les coûts d'itération FETI et LATIN 2 échelles (a) sont ensuite identifiés et normalisés avec le temps CPU CRAY-T3D cumulé comme base. De cette manière, sont qualifiés les algorithmes les uns par rapport aux autres de façon aussi indépendante que possible de la machine cible. L'évolution des erreurs de référence en fonction du temps équivalent est ainsi reportée sur la figure 5.17.

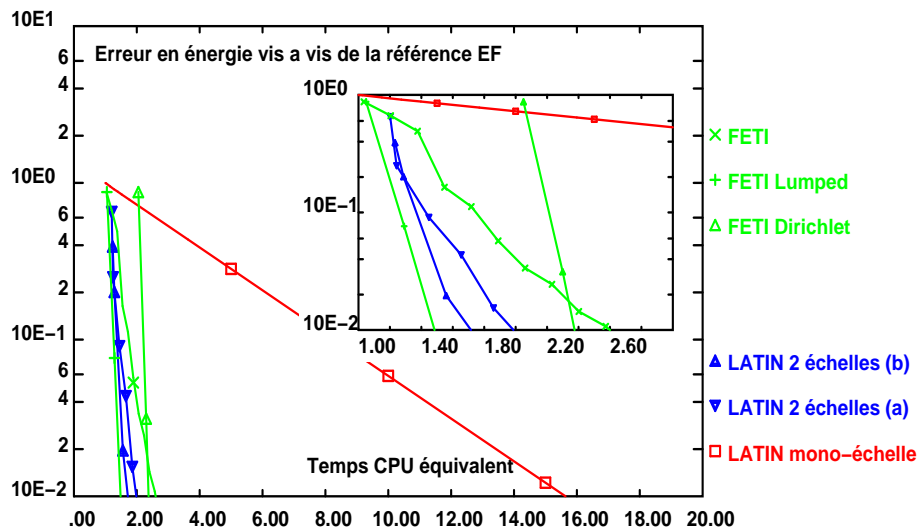


FIG. 5.17 – Comparaison des différentes approches sur le premier problème proposé en temps CPU équivalent

La même démarche a été adoptée pour la deuxième discrétisation envisagée figure 5.10. Elle conduit cette fois-ci aux évolutions de l'erreur au cours des itérations de la figure 5.18 et en fonction d'un deuxième temps équivalent sur la figure 5.19.

On peut de plus noter que pour le premier problème traité, le calcul direct a pu être réalisé et en utilisant le calage de machines présenté au chapitre 5.2, page 151, le coût équivalent en est de 6,5. Pour le second problème, ce coût a été estimé à 18 ; sur ce problème de taille plus importante, il est maintenant même supérieur au coût cumulé nécessité par l'approche mono-échelle.

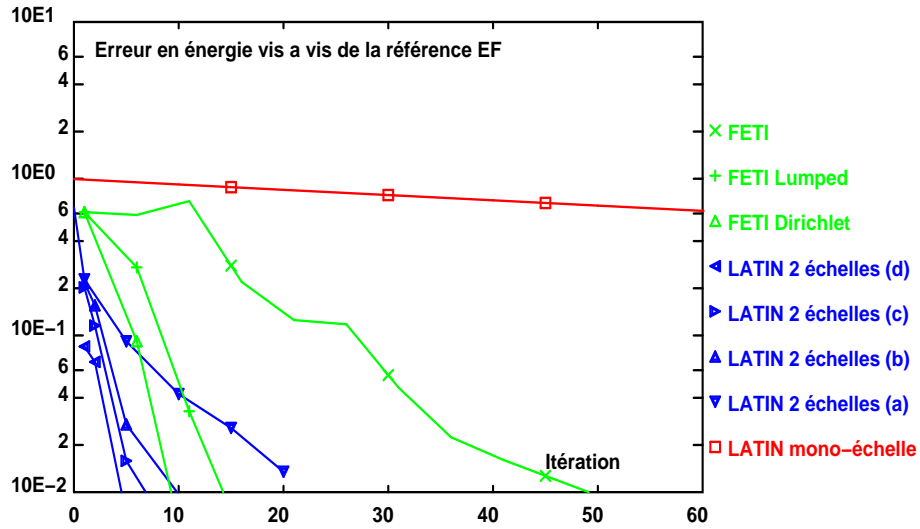


FIG. 5.18 – Comparaison des différentes approches sur le deuxième problème proposé

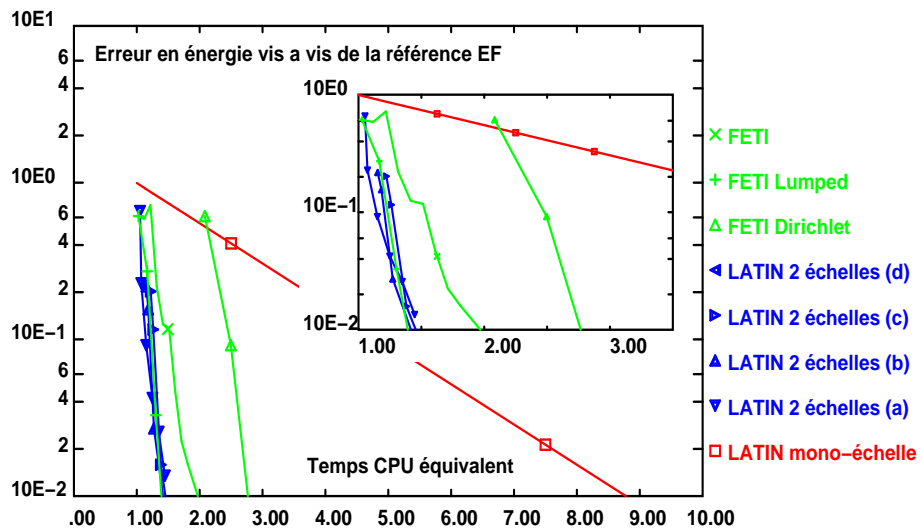


FIG. 5.19 – Comparaison des différentes approches sur le deuxième problème proposé en temps CPU équivalent

Maillage	taux de convergence moyen						
	FETI			LATIN2 échelles			
	Identité	Lumped	Dirichlet	a	b	c	d
1 ( $H/h = 4$ )	0,048	0,22	0,285	0,09	0,17	-	-
2 ( $H/h = 6$ )	0,044	0,14	0,2	0,07	0,17	0,25	0,33
$\frac{\tau_1}{\tau_2}$ obtenu	1,09	1,57	1,42	1,28	1	-	-
$\frac{\tau_1}{\tau_2}$ prévu	-	1,22	1,08	-	-	-	-

TAB. 5.12 – Estimation de la convergence des différentes approches

On peut retrouver ici l'influence du paramètre  $H/h$  dans l'approche LATIN 2 échelles : le taux de convergence augmente quand la taille du problème à grande échelle croît (voir le chapitre 5.1, page 140). En fait, ceci apparaît notamment sur la figure 5.18 pour obtenir une erreur de 1%. Ces indications ne sont donc pas vraiment les valeurs asymptotiques pour lesquelles les tailles de maille doivent tendre vers 0. À titre indicatif cependant, la table 5.12 reporte pour les deux tests précédents les valeurs des taux de convergence moyens pour atteindre une erreur de 1% suivant les approches employées. Pour les approches FETI utilisant une résolution par gradient conjugué, les conditionnements asymptotiques attendus ont été rappelés dans le chapitre 1.4, page 38, et l'annexe C, page 184 relie le taux de convergence asymptotique au conditionnement précédent.

On pourra remarquer enfin le gain apporté en initialisant les algorithmes FETI 2 échelles par la solution de départ sur la grande échelle.

### Problème avec singularité et fort gradient de taille d'élément

Dans cet exemple, on considère une fissure de longueur  $2a$ , dans un milieu bidimensionnel infini, sollicitée en mode 1, en déformation plane (figure 5.20) :

$$\sigma_d = \sigma \underline{N}_2 \otimes \underline{N}_2$$

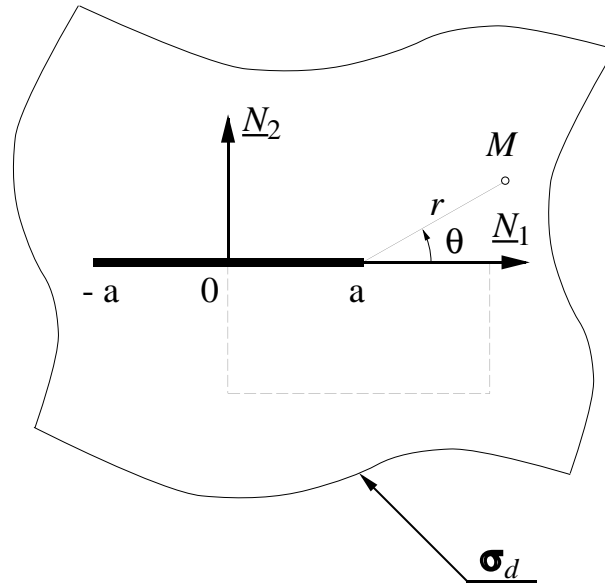


FIG. 5.20 – Problème de référence

Le problème proposé en est une sous-partie, décrite sur la figure 5.21, pour laquelle les charges extérieures sont, sur le bord, les efforts correspondants à la solution de référence du problème de départ, qui est ici la solution asymptotique de Westergaard (figure 5.22) :

$$\sigma_{\text{ref}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cdot & 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}_{(\underline{N}_1, \underline{N}_2)} \quad \text{où } K_I = \sqrt{\pi a} \sigma$$

Le maillage correspondant est tracé sur la figure 5.23 ; il comporte 3 900 éléments triangulaires à 6 nœuds dont la variation de taille relative est d'environ 5 000.

Pour traiter ce problème, une décomposition en 11 sous-structures et interfaces a été réalisée. Elle est présentée sur la figure 5.24 avec le maillage de l'échelle globale qui comporte, quant à lui, 62 éléments triangulaires à 3 nœuds, et toujours la même variation de taille relative.

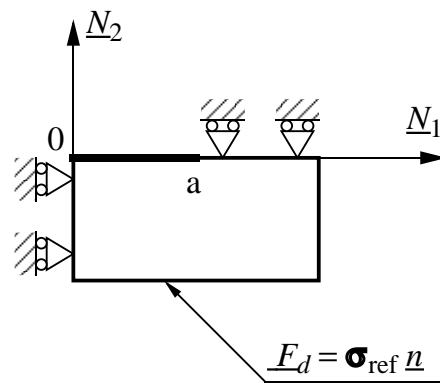


FIG. 5.21 – Problème traité

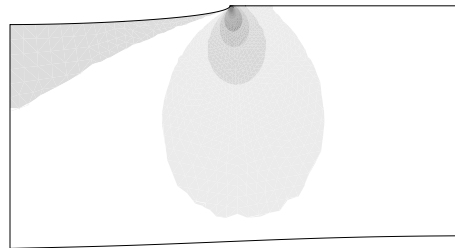


FIG. 5.22 – Contrainte de Mises et déformée de la solution de référence

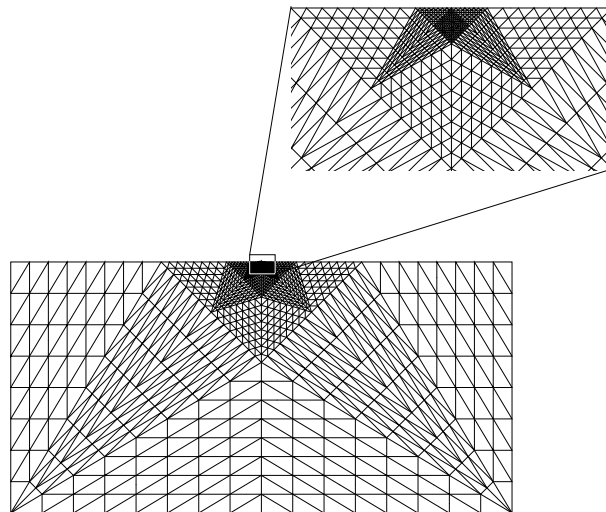


FIG. 5.23 – Maillage considéré

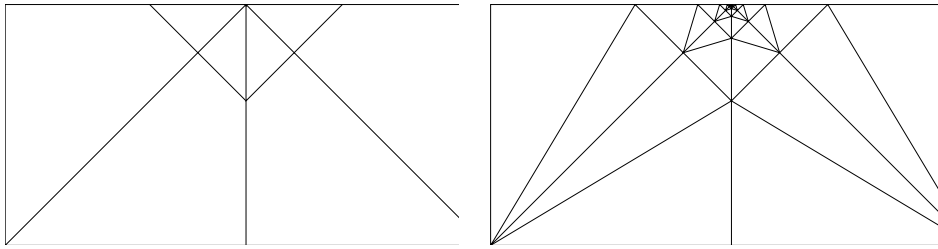


FIG. 5.24 – Géométrie de la fissure ; 11 sous-structures et maillage de l'échelle globale

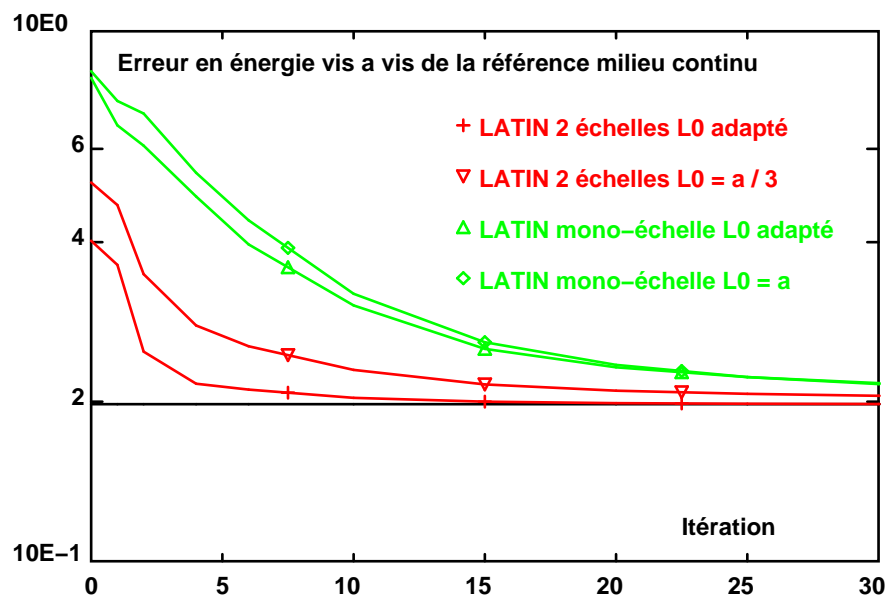


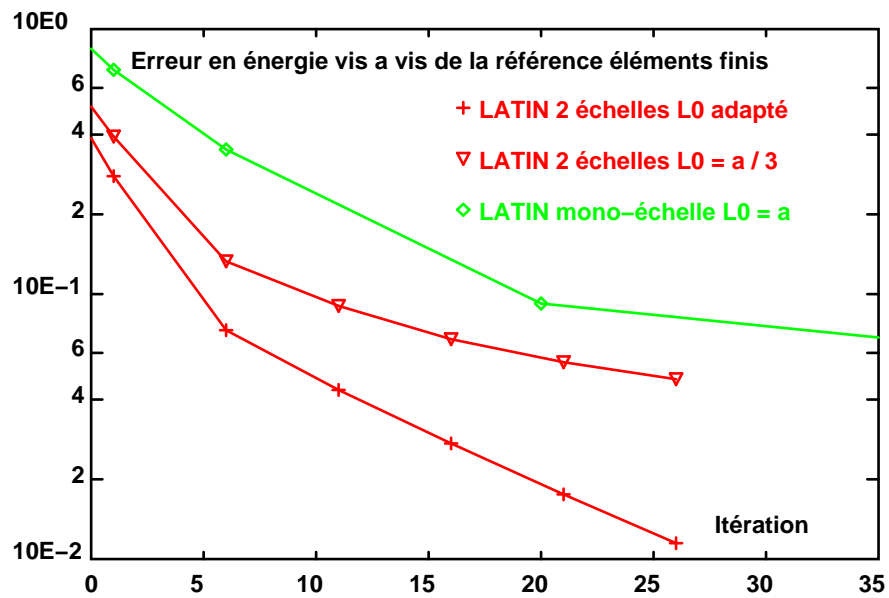
FIG. 5.25 – Évolution de l'erreur au cours des itérations

Les résultats obtenus sur la figure 5.25 montrent l'évolution de l'erreur en énergie vis à vis de la solution de référence milieu continu, en fonction des itérations. L'évolution de l'indicateur d'erreur  $\eta$  est quant à lui tracé sur la figure 5.26.

Les directions de recherche utilisées sont les suivantes :

- pour l'approche LATIN mono-échelle,  $L_0 = a$ ,
- pour l'approche LATIN 2 échelle, deux cas ont été envisagés. Pour le premier, une direction de recherche uniforme  $L_0 = a/3$  est choisie, alors que dans le second cas, cette valeur est adaptée localement sur chaque interface à sa longueur  $l$  :  $L_0 = 0,2l$ .

Cet exemple illustre donc le fait qu'avec une approche multi-échelles, la direction de recherche est un paramètre d'interface et non plus de structure.

FIG. 5.26 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\eta$  au cours des itérations

# **Conclusion**

Dans ce travail, nous nous sommes placés dans le cadre des techniques de décomposition de domaine, en vue de réaliser des calculs de structures sur ordinateurs à architecture parallèle.

L'algorithme de base utilisé est issu des approches à grand incrément de temps lorsqu'elles sont couplées à une technique de sous-structuration. Ici, seul le comportement élastique linéaire des sous-structures a été envisagé : il s'agit donc d'un cas de figure dégénéré, pour lequel seule la configuration finale nous intéresse, par rapport aux problèmes non-linéaires d'évolution pour lesquels la méthode LATIN a été initialement développée. À cause de cela, la dualité effort-déplacement est substituée à celle qui est naturelle — entre effort et vitesse — dans les situations où le temps joue un rôle majeur (dynamique, problèmes d'évolution, etc.).

Pour améliorer les performances de cette approche, une extension multi-échelles de cette dernière est mise en place. Elle consiste à appréhender la solution du problème de structure sur deux échelles distinctes. La première, l'échelle globale, est liée à une longueur caractéristique de la structure ; la deuxième, l'échelle fine, concerne les effets de longueur de variation beaucoup plus courte. En cherchant la solution successivement dans les deux échelles, et en conservant la résolution par éléments finis classique du problème à grande échelle, l'information se propage parmi toutes les sous-structures à chaque itération de l'algorithme.

L'implantation dans le cadre du code éléments finis semi-industriel CASTEM 2000 a permis de montrer la faisabilité de l'approche. La réalisation de ce code prototype spécialisé a conduit à utiliser des calculateurs MIMD à mémoire distribuée avec un nombre de processeurs de l'ordre de 64. Comme le comportement du matériau est ici élastique linéaire, l'objectif est donc la réalisation de calculs de structures implicites de grande taille sur ces architectures parallèles.

Dans ce type de situations, l'approche proposée est comparée à différentes démarches existantes de décomposition de domaine. L'influence de la taille des problèmes et des coûts relatifs des problèmes à grande échelle est illustrée sur des exemples à géométrie simple.

Un aspect numérique important est la mise en œuvre d'une discrétisation traitant à égalité d'importance déplacements et efforts aux interfaces. En particulier, l'influence du choix de cette discrétisation sur la solution obtenue à convergence a été étudiée.

Enfin, un aspect à souligner concerne le contrôle des paramètres de la méthode, c'est à dire la valeur de la longueur caractéristique des directions de recherche de l'algorithme itératif. Avec une approche mono-échelle, il est montré que sa valeur optimale est liée à la dimension de la structure ; avec l'utilisation de l'extension multi-échelles, elle devient cette fois-ci un paramètre d'interface, lié à la sous-structuration qui a été choisie.

Dans la réalisation qui en a été faite ici, le code prototype traite essentiellement les cas de figure où les maillages éléments finis des deux échelles sont emboîtés, ce qui contraint la géométrie et donne peu de souplesse à l'utilisateur. Le traitement à partir de deux maillages indépendants serait donc un important gain en flexibilité. Une

autre perspective à court terme est la possibilité de traitement d'interfaces non parfaites (comme par exemple le contact unilatéral qui a été présenté) à l'intérieur de l'approche multi-échelles.

Bien entendu, l'objectif à plus long terme est le traitement de problèmes non-linéaires tels que ceux engendrés par un comportement plastique ou viscoplastique du matériau, ou par une modélisation plus fine du comportement comme celle nécessitée, par exemple, par l'analyse des structures composites. C'est ce type de problèmes qui entre dans le cadre du calcul intensif de structures, et qui nécessitera, de plus, le développement de techniques de contrôle des algorithmes et de la qualité des solutions obtenues.

# Bibliographie

- [Mandel 93] Mandel J., Balancing domain decomposition, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 9, 1993, pp. 233–241.
- [Millard 92] Millard A., CASTEM 2000 — *Guide du développement*, Rapport CEA-DEMT/92.300, CEA, 1992.
- [Schwarz 69] Schwarz H. A., Über einige Abbildungsaufgaben, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 11, 1869, pp. 65–83.
- [Lions 88] Lions P.-L., On the Schwarz alternating method I, In Glowinski *et al.* [Glowinski *et al.* 88], pp. 1–42.
- [IBM 94] IBM, *IBM AIX PVMe User's Guide and Subroutine Reference*, Technical Report nSH23-0019092, IBM Corp., 1994.
- [Verpeaux 93] Verpeaux P., *Esope - Gemat v10 : manuel d'utilisation*, Rapport CEA-DRN/DMT/SMTS/LAMS, CEA, 1993.
- [Duff 86] Duff I. S., Parallel implementation of multifrontal schemes, *Parallel Computing*, vol. 3, 1986, pp. 192–204.
- [Roux 90] Roux F.-X., Méthodes de résolution par sous-domaines en statique, *La Recherche Aérospatiale*, n1, 1990, pp. 37–48.
- [Farhat 88] Farhat C., A simple and efficient automatic FEM domain decomposer, *Computers & Structures*, vol. 28, n5, 1988, pp. 579–602.
- [Irons 70] Irons B. M., A frontal solution program for finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, 1970, pp. 5–32.
- [Allix 87] Allix O., Délaminage : approche par la mécanique de l'endommagement, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, éd. par Fouet J.-M., Ladevèze P. et Ohayon R., pp. 39–53, Pluralis, 1987.
- [Fedorenko 64] Fedorenko R. P., The speed of convergence of one iterative process, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, 1964, pp. 227–235.
- [Hackbush et Trottenberg 81] Hackbush W. et Trottenberg U., *Multigrid methods*, Springer Verlag, 1981, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 960.
- [Karonis 92] Karonis N. T., Timing parallel programs that use message passing, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, n14, 1992, pp. 29–36.

- [Douglas 92] Douglas C. C., MGNNet : a multigrid and domain decomposition network, *ACM SIGNUM Newsletter*, vol. 27, 1992, pp. 2–8.
- [Lorong 94] Lorong Ph., *Sur une approche parallèle pour le calcul des structures*, Thèse, ENS de Cachan, 1994.
- [Zienkiewicz et Taylor 91] Zienkiewicz O. C. et Taylor R. L., *The finite element method*, Mc Graw-Hill, 1991, quatrième édition.
- [Danwé 93] Danwé R., *Une méthode simplifiée pour l'étude d'assemblage de structures*, Thèse, ENS de Cachan, 1993.
- [Przemieniecki 63] Przemieniecki J. S., Matrix structural analysis of substructures, *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, vol. 1, 1963, pp. 138–147.
- [Fortin et Glowinski 82] Fortin M. et Glowinski R., Méthodes de lagrangien augmenté, *Méthodes Mathématiques de l'informatique*, éd. par Lions P.-L., 1982.
- [Ladevèze 85] Ladevèze P., Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, pp. 41–44, Paris, 1985.
- [Farhat et Wilson 88] Farhat C. et Wilson E., A parallel active column equation solver, *Computers & Structures*, vol. 28, 1988, pp. 289–304.
- [Zhong et Mackerle 92] Zhong Z. et Mackerle J., Static contact problems — a review, *Engineering Computations*, vol. 9, 1992, pp. 3–37.
- [Yserentant 86] Yserentant H., On the multi-level splitting of finite element spaces, *Num. Math.*, vol. 49, 1986, pp. 379–412.
- [Le Tallec 94] Le Tallec P., Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances*, North-Holland, 1994.
- [Ladevèze 87] Ladevèze P., Sur une mécanique parallèle : concepts et outils de calculs, octobre 1987, Séminaire du Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan.
- [Noor 94] Noor A. K., New computing systems, future high performance computing environments and their implications on large-scale problems, In Topping et Papadrakakis [Topping et Papadrakakis 94], pp. 1–22.
- [Marquis 89] Marquis D., *Phénoménologie et thermodynamique : couplages entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement*, Thèse d'état, Université Paris 6, 1989.
- [Feyel et al. 97] Feyel F., Cailletaud G., Kruch S. et Roux F.-X., Application du parallélisme par sous domaines aux modèles à grand nombre de variables internes, mai 1997, à paraître dans les proceedings du 3ème Colloque National en Calcul des Structures.
- [Pijaudier-Cabot 91] Pijaudier-Cabot G., *Première partie : rupture et calculs à la ruine*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris 6, 1991.

- [Barragy et Carey 88] Barragy E. et Carey G. F., A parallel element-by-element solution scheme, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 1988, pp. 2367–2382.
- [Whirley *et al.* 89] Whirley R. G., Hallquist J. O. et Goudreau G. L., An assessment of numerical algorithms for plane stress and shell elastoplasticity on supercomputers, *Engineering Computations*, vol. 6, n2, 1989, pp. 116–126.
- [Débordes et Michel 89] Débordes O. et Michel J. C., Parallélisation des problèmes non-linéaires, In Fouet *et al.* [Fouet *et al.* 90], pp. 223–232.
- [Oakley et Knight, jr. 95] Oakley D. R. et Knight, jr. N. F., Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures. Part III. Parallel implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, 1995, pp. 111–129.
- [Fahmy et Namini 95] Fahmy M. W. et Namini A. H., A survey of parallel nonlinear dynamic analysis methodologies, *Computers & Structures*, vol. 53, n4, 1995, pp. 1033–1043.
- [Hugues *et al.* 83] Hugues T. J. R., Levit I. et Winget J., An element-by element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 36, 1983, pp. 241–254.
- [Lamour 91] Lamour F., Sur la restructuration des boucles fortran en vue de leur parallélisation, *La recherche Aérospatiale*, n5, 1991, pp. 1–8.
- [Utku *et al.* 86] Utku S., Salama M. et Melosh R. J., Concurrent Cholesky factorization of positive definite banded Hermitian matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, 1986, pp. 2137–2152.
- [Roditis et Kiouisis 90] Roditis Y. S. et Kiouisis P. D., Parallel multisplitting, block jacobi type solutions of linear systems of equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, pp. 619–632.
- [Buoni *et al.* 93] Buoni J. J., Farrell P. A. et Ruttan A., Algorithms for LU decomposition on a shared memory multiprocessor, *Parallel Computing*, vol. 19, 1993, pp. 925–937.
- [Pan et Reif 93] Pan V. et Reif J., Fast and efficient parallel solution of sparse linear systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 22, n6, 1993, pp. 1227–1250.
- [Escaig *et al.* 94] Escaig Y., Vayssade M. et Touzot G., Une méthode de décomposition de domaine multifrontale multiniveaux, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 3, 1994, pp. 311–337.
- [Farhat et Roux 91] Farhat C. et Roux F.-X., A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, pp. 1205–1227.
- [Yagawa *et al.* 93] Yagawa G., Yoshioka A., Yoshimura S. et Soneda N., A parallel finite element method with a supercomputer network, *Computers & Structures*, vol. 47, 1993, pp. 407–418.

- [De Roeck *et al.* 92] De Roeck Y.-H., Le Tallec P. et Vidrascu M., A domain decomposed solver for nonlinear elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 1992, pp. 187–207.
- [Padovan et Kwang 91] Padovan J. et Kwang A., Hierarchically parallelized constrained nonlinear solvers with automated substructuring, *Computers & Structures*, vol. 41, n1, 1991, pp. 7–33.
- [Lions 90] Lions P.-L., On the Schwarz alternating method III : a variant for nonoverlapping subdomains, In Chan *et al.* [Chan *et al.* 90], pp. 202–223.
- [Glowinski et Le Tallec 90] Glowinski R. et Le Tallec P., Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method, In Chan *et al.* [Chan *et al.* 90], pp. 224–231.
- [Ladevèze 85] Ladevèze J., Algorithmes adaptés aux calculs vectoriel et parallèle pour des méthodes de décomposition de domaines, *Actes du 3ème colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, éd. par Grellier J. P. et Campel G. M., pp. 893–907, Bastia, novembre 1985.
- [Ladevèze 96] Ladevèze P., *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Paris, Hermès, 1996.
- [Champaney 96] Champaney L., *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*, Thèse, ENS de Cachan, 1996.
- [Blanzé *et al.* 96] Blanzé C., Champaney L., Cognard J.-Y. et Ladevèze P., A modular approach for structures assembly computations. Application to contact problems., *Engineering Computations*, vol. 13, n3, 1996.
- [Cognard *et al.* 96] Cognard J.-Y., Dureisseix D., Ladevèze P. et Lorong Ph., Expérimentation d'une approche parallèle en calcul de structures, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 5, n2, 1996, pp. 197–220.
- [Ladevèze et Lorong 92] Ladevèze P. et Lorong Ph., A large time increment approach with domain decomposition technique for mechanical non linear problems, *Comput. Meths. Appl. Sc. Engng.*, éd. par Glowinski R., INRIA, pp. 569–578, New York, 1992.
- [Cognard et Ladevèze 91] Cognard J.-Y. et Ladevèze P., A parallel computer implementation for elastoplastic calculations with the large time increment method, *Non Linear Engineering Computation*, éd. par Bicanic N., Marcovic P., Owen D. R. J., Jovic V. et Mihanivic A., pp. 1–10, Pineridge Press, 1991.
- [Cognard et Ladevèze 93] Cognard J.-Y. et Ladevèze P., A large time increment approach for cyclic viscoplasticity, *Int. J. of Plasticity*, vol. 9, 1993, pp. 141–157.
- [Bramble *et al.* 86] Bramble J. H., Pasciak J. E. et Schatz A. H., The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I, *Math. Comp.*, vol. 47, n 175, 1986, pp. 103–134.

- [Zienkiewicz *et al.* 83] Zienkiewicz O. C., De S. R. Gago J. P. et Kelly D. W., The hierarchical concept in finite element analysis, *Computers & Structures*, vol. 16, n 1–4, 1983, pp. 53–65.
- [Farhat *et al.* 94] Farhat C., Mandel M. et Roux F.-X., Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 115, 1994, pp. 365–385.
- [White et Abel 88] White D. W. et Abel J. F., Bibliography on finite elements and supercomputing, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 4, 1988, pp. 279–294.
- [Mackerle 96] Mackerle J., Implementing finite element methods on supercomputers, workstations and PCs, *Engineering Computations*, vol. 13, n1, 1996, pp. 33–85.
- [Johnsson et Mathur 89] Johnsson S. L. et Mathur K. K., Experience with the conjugate gradient method for stress analysis on a data parallel supercomputer, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27, 1989, pp. 523–546.
- [Mansfield 90] Mansfield L., On the conjugate gradient solution of the Schur complement system obtained from domain decomposition, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 27, 1990, pp. 1612–1620.
- [Dodds, jr. et Lopez 80] Dodds, jr. R. H. et Lopez L. A., Substructuring in linear and non linear analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, 1980, pp. 583–597.
- [Bjørstad et Widlund 86] Bjørstad P. E. et Widlund O. B., Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 23, n6, 1986, pp. 1097–1120.
- [Agoshkov 88] Agoshkov V. I., Poincaré–Steklov’s operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces, In Glowinski *et al.* [Glowinski *et al.* 88], pp. 73–112.
- [Verpeaux *et al.* 88] Verpeaux P., Charras T. et Millard A., CASTEM 2000 : une approche moderne du calcul des structures, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, éd. par Fouet J.-M., Ladevèze P. et Ohayon R., pp. 261–271, Pluralis, 1988.
- [Cuthill et McKee 69] Cuthill E. et McKee J., Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices, *Proc. of the 24th National Conference of the ACM*, pp. 157–172, 1969.
- [Farhat et Crivelli 89] Farhat C. et Crivelli L., A general approach to non linear finite element computations on shared-memory multiprocessors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 72, 1989, pp. 153–171.
- [Heath *et al.* 91] Heath M. T., Ng E. et Peyton B. W., Parallel algorithms for sparse linear systems, *SIAM Review*, vol. 33, n3, 1991, pp. 420–460.

- [Gupta *et al.* ] Gupta A., Karypis G. et Kumar V., Highly scalable parallel algorithms for sparse matrix factorization, to appear in *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*.
- [Escaig *et al.* 94] Escaig Y., Touzot G. et Vayssade M., Parallelization of a multilevel domain decomposition method, *Computing Systems in Engineering*, vol. 5, n3, 1994, pp. 253–263.
- [Escaig 92] Escaig Y., *Décomposition de domaine multiniveaux et traitements distribués pour la résolution de problèmes de grande taille*, Thèse, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [Kumar *et al.* 94] Kumar V., Grama A., Gupta A. et Karypis G., *Introduction to parallel computing : design and analysis of algorithms*, Addison-Wesley, 1994.
- [Chan et Goovaerts 92] Chan T. F. et Goovaerts D., On the relationship between overlapping and nonoverlapping domain decomposition methods, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 13, 1992, pp. 663–670.
- [Badea 91] Badea L., On the Schwarz alternating method for more than two subdomains for nonlinear monotone problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, n1, 1991, pp. 179–204.
- [Farhat et Roux 92] Farhat C. et Roux F.-X., An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 13, n1, 1992, pp. 379–396.
- [Farhat et Roux 94] Farhat C. et Roux F.-X., Implicit parallel processing in structural mechanics, *Computational Mechanics Advances*, éd. par Oden J. Tinsley, North-Holland, juin 1994.
- [Papadrakakis et Dracopoulos 91] Papadrakakis M. et Dracopoulos M. C., Improving the efficiency of preconditioning for iterative methods, *Computers & Structures*, vol. 41, n6, 1991, pp. 1263–1272.
- [Glowinski *et al.* 88] Glowinski R., Golub G. H., Meurant G.-A. et Périaux J. (édité par), *Domain Decomposition Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [De Roeck et Le Tallec 91] De Roeck Y.-H. et Le Tallec P., Analysis and test of a local domain-decomposition preconditioner, SIAM, pp. 112–128, Philadelphia, 1991.
- [Boisse *et al.* 89] Boisse P., Ladevèze P. et Rougée P., A large time increment method for elastoplastic problems, *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 8, n4, 1989, pp. 257–275.
- [Cognard 89a] Cognard J.-Y., *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrément de Temps*, Thèse, Université Paris VI, 1989.
- [Cognard 89b] Cognard J.-Y., *Le traitement des problèmes non linéaires à grand nombre de degrés de liberté par la méthode à grand incrément de temps*, pp. 211–222, Vol. 4, Fouet *et al.* [Fouet *et al.* 90].

- [Arzt 94] Arzt M., *Approche des phénomènes cycliques par la méthode à grand incrément de temps*, Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [Royer 90] Royer Ch., *Une approche des problèmes de dynamique non-linéaire par la Méthode à Grand Incrément de Temps*, Thèse, Université Paris VI, 1990.
- [Gaignebet 96] Gaignebet Y., *Approche non-incrémentale des calculs de choc pour des structures viscoplastiques*, Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [Ladevèze et Lemoussu 96] Ladevèze P. et Lemoussu H., *Une nouvelle approche pour l'analyse et le calcul de structures soumises à un choc pyrotechnique*, Rapport final CNES 94/cnes/3149, LMT, 1996.
- [Bussy *et al.* 90] Bussy P., Rougée P. et Vauchez P., The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes, *Proceedings of Numerical Methods in Engineering*, pp. 102–109, Swansea, 1990.
- [Boucard 96] Boucard P.-A., *Approche à grand incrément de temps en grandes transformations*, Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [Boucard *et al.* 94] Boucard P.-A., Ladevèze P., Poss M. et Rougée P., A large time increment approach for large displacement problems, In Topping et Papadrakakis [Topping et Papadrakakis 94], pp. 99–107.
- [Arzt *et al.* 94] Arzt M., Cognard J.-Y. et Ladevèze P., A two time scale approach for viscoplastic calculations under cyclic loadings suited to parallel computers, *Proceedings of the Supercomputer Applications in the Transportation Industries*, éd. par Soliman J. I. et Roller D., pp. 693–700, Aachen, Germany, novembre 1994.
- [Ladevèze et Lorong 92] Ladevèze P. et Lorong Ph., Sur une méthode à grand incrément de temps avec décomposition de domaine. premières implémentations sur calculateurs à architecture parallèle, *StruCome 92*, pp. 649–661, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, novembre 1992.
- [Malone 88] Malone G., Automated mesh decomposition and concurrent finite element analysis for hypercube multiprocessor computers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 70, 1988, pp. 27–58.
- [Al-Nasra et Nguyen 91] Al-Nasra M. et Nguyen D. T., An algorithm for domain decomposition in finite element analysis, *Computers & Structures*, vol. 39, n3–4, 1991, pp. 277–289.
- [Dagum 93] Dagum L., Automatic partitioning of unstructured grids into connected components, *Proceedings of the Supercomputing Conference 1993*, pp. 94–101, IEEE, Computer Society Press, 1993.
- [Farhat et Lesoinne 93] Farhat C. et Lesoinne M., Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, 1993, pp. 745–764.
- [Wronski et Jean 95] Wronski M. et Jean M., Some computational aspects of structural dynamics problems with frictional contact, pp. 137–144, New York, 1995.

- [Champaney *et al.*] Champaney L., Cognard J.-Y., Dureisseix D. et Ladevèze P., Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method, to appear in *Computational Mechanics*.
- [Geist *et al.* 94] Geist A., Berguelin A., Dongarra J., Jiang W., Manchek R. et Sunderam V., *PVM : A user's guide and tutorial for networked parallel computing*, Tennessee, MIT Press, 1994.
- [Champaney *et al.* 96] Champaney L., Cognard J.-Y., Dureisseix D. et Ladevèze P., Numerical experimentations of parallel strategies in structural non-linear analysis, *Calculateurs Parallèles*, vol. 8, n2, 1996, pp. 245–249.
- [Lions 89] Lions P.-L., On the Schwarz alternating method II : Stochastic interpretation and order properties, In Chan *et al.* [Chan *et al.* 89], pp. 47–70.
- [Dussotoir 93] Dussotoir C., *Contribution à l'identification automatique de lois de comportement à partir d'essais multiaxiaux*, Mémoire CNAM, 1993.
- [Batisse *et al.* 94] Batisse R., Difant-Jaeckels H., Curie F. et Virely J.-M., Biaxial high cycle fatigue test on a gas transmission pipeline steel, *Proceedings of the Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, pp. 129–142, Saint Germain en Laye, France, mai 1994.
- [Cognard *et al.* 96] Cognard J.-Y., Feuardent V. et Virely J.-M., Optimisation d'une structure pour essais mécaniques biaxiaux, *Proceedings of the First International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, pp. 295–304, Nantes, avril 1996.
- [Fonseka 93] Fonseka M. C. M., A sub-structure condensation technique in finite element analysis for the optimal use of computer memory, *Computers & Structures*, vol. 49, n3, 1993, pp. 537–543.
- [El Hami et Radi 96] El Hami A. et Radi B., Some decomposition methods in the analysis of repetitive structures, *Computers & Structures*, vol. 58, n5, 1996, pp. 973–980.
- [Charpentier et Maday 95] Charpentier I. et Maday Y., Deux méthodes de décomposition de domaine pour la résolution d'équations aux dérivées partielles avec des conditions de périodicité : application à la théorie de l'homogénéisation, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, pp. 359–366, Paris, 1995.
- [Farhat et Géradin 92] Farhat C. et Géradin M., Using a reduced number of lagrangian multiplier for assembling parallel incomplete field finite element approximation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 1992, pp. 333–354.
- [Bourgat *et al.* 89] Bourgat J. F., Glowinski R., Le Tallec P. et Vidrascu M., Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations, In Chan *et al.* [Chan *et al.* 89], pp. 3–16.
- [Allix et Ladevèze 92] Allix O. et Ladevèze P., Interlaminar interface modelling for the prediction of laminates delamination, *Composite Structures*, vol. 22, 1992, pp. 235–242.

- [Bathe *et al.* 90] Bathe K.-J., Lee N.-S. et Bucelem M. L., On the use of hierarchical models in engineering analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182, 1990, pp. 5–26.
- [Noor et Peters 88] Noor A. K. et Peters J. M., A computational strategy for making complicated problems simple, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171, 1988, pp. 167–182.
- [McBryan *et al.* 91] McBryan O. A., Frederickson P. O., Linden J., Schüller A., Solchenbach K., Stüben K., Thole C. A. et Trottenberg U., Multigrid methods on parallel computers — A survey of recent developments, *Impact of Computing in Science and Engineering*, 13, 1991, pp. 1–75.
- [Southwell 35] Southwell R. V., Stress-calculation in frameworks by the method of systematic relaxation of constraints — part I and II, *Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect. A*, vol. 151, 1935, pp. 57–91.
- [Parsons et Hall 90a] Parsons I. D. et Hall J. F., The multigrid method in solid mechanics : part I—algorithm description and behaviour, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, pp. 719–737.
- [Parsons et Hall 90b] Parsons I. D. et Hall J. F., The multigrid method in solid mechanics : part II—practical applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, pp. 739–753.
- [Lebon *et al.* 89] Lebon F., Le Dain M.-A., Bellet M., Chenot J.-L. et Raous M., *Introduction aux méthodes multigrilles en mécanique des structures linéaires et non linéaires*, pp. 215–230, Vol. 3, Fouet *et al.* [Fouet *et al.* 90].
- [Adjedj et Aubry 89] Adjedj G. et Aubry D., Development of a hierarchical and adaptive finite element software, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175, 1989, pp. 153–165.
- [Wiberg et Müller 88] Wiberg N.-E. et Müller P., Formulation and solution of hierarchical finite element equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 1988, pp. 1213–1233.
- [Robinson 86] Robinson J., An introduction to hierarchical displacement elements and the adaptive technique, *Finite Elements in Analysis and Design*, 12, 1986, pp. 377–388.
- [Gärtel et Ressel 92] Gärtel U. et Ressel K., Parallel multigrid : grid partitioning versus domain decomposition, *Proceedings of the Tenth International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, éd. par Glowinski R., INRIA, pp. 559–568, New York, 1992.
- [Griebel 87] Griebel M., *On the combination of the ideas of multilevel solvers using hierarchical bases and the substructuring technique for the finite element method*, TUM-I8709, Technische Universität München, Institut für Informatik, 1987.
- [Le Dain 91] Le Dain M.-A., *Méthode multigrilles et h-adaptation : application au calcul de structures élastiques bidimensionnelles*, Thèse, ENSMP, 1991.

- [Cognard *et al.* 95] Cognard J.-Y., Dureisseix D., Ladevèze P. et Lorong Ph., Une approche multi-échelles en calcul des structures pour ordinateur à architecture parallèle, *Actes du 12ème Congrès Français de Mécanique*, AUM, pp. 101–104, Strasbourg, septembre 1995.
- [Carmona et Rice 91] Carmona E. A. et Rice M. D., Modeling the serial and parallel fractions of a parallel algorithm, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, n°3, 1991, pp. 286–298.
- [Glowinski *et al.* 88] Glowinski R., Golub G. H., Meurant G. A. et Périaux J. (édité par), *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, SIAM, 1988.
- [Topping et Papadrakakis 94] Topping B. H. V. et Papadrakakis M. (édité par), *Advances in parallel and vector processing for structural mechanics*, Edinbourg, Scotland, Civil-Comp Press, 1994.
- [Fouet *et al.* 90] Fouet J.-M., Ladevèze P. et Ohayon R. (édité par), *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, Pluralis, 1990.
- [Chan *et al.* 90] Chan T. F., Glowinski R., Périaux J. et Widlund O. B. (édité par), *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, SIAM, 1990.
- [Chan *et al.* 89] Chan T. F., Glowinski R., Périaux J. et Widlund O. B. (édité par), *Domain Decomposition Methods*, SIAM, Philadelphia, 1989.
- [Roux 90] Roux F.-X., Acceleration of the outer conjugate gradient by reorthogonalization for a domain decomposition method with Lagrange multiplier, In Chan *et al.* [Chan *et al.* 90], pp. 314–321.

## Annexe A

# Intégration bord approchée, choix des points d'intégration

Dans le cadre d'une approche purement cinématique, le choix du type d'approximation lors de l'intégration doit rester cohérent avec la qualité de la discrétisation. Le choix des points d'intégration peut ainsi être réalisé afin d'intégrer exactement (sur l'élément de référence) des quantités du type produit croisé de fonctions de base  $\underline{\Phi}_i|_{\partial_i\Omega^E} \cdot \underline{\Phi}_j|_{\partial_i\Omega^E}$ .

Une telle intégration reste classique dans le cadre éléments finis en calcul thermique pour des conditions de frontière de type convection, figure A.1 et table A.1.

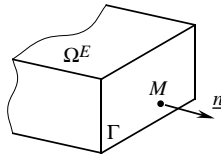


FIG. A.1 – Convection sur une frontière

Elle nécessite une intégration de polynômes de degrés plus élevés que, par exemple, le cas de répartition de charge de degré de variation identique à celui du déplacement bord. Cela conduit généralement à l'utilisation d'éléments finis avec un nombre de points d'intégration augmenté.

quantités « statiques »	flux de chaleur $-\underline{q}$ , $-\underline{q} \cdot \underline{n}$	contrainte, effort $\underline{\sigma}$ , $\underline{F}$
quantités « cinématiques »	température $\theta$ , $\theta _{\Gamma}$	déplacement, déplacement bord $\underline{U}$ , $\underline{W}$
« matériau »	coefficient de convection $h$	direction de recherche $\underline{k}^-$
relation de « comportement »	$\int_{\Gamma} \underline{q} \cdot \underline{n} \theta^* dS =$ $= \int_{\Gamma} h(\theta - \theta_0) \theta^* dS$	$- \int_{\Gamma} (\underline{F} - \hat{\underline{F}}) \cdot \underline{W}^* dS =$ $= \int_{\Gamma} (\underline{W} - \hat{\underline{W}}) \cdot \underline{k}^- \underline{W}^* dS$

TAB. A.1 – Analogie thermique — mécanique

## Annexe B

# Relation locale de comportement du problème 1D

Pour déduire la relation de comportement locale d'une structure unidimensionnelle droite, figure B.1,  $T = \mathbf{K}_g D$ , à partir de la relation de comportement du milieu continu tridimensionnel,  $\sigma = \mathbf{K}\varepsilon$ , il faut identifier celle-ci de la façon suivante :

$$\forall V \in U_g, \quad \mathbb{R} \mathbf{K} \varepsilon(\mathbb{P} V) = \mathbf{K}_g \frac{dV}{ds}$$

avec

$$V = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\omega} \\ \underline{u} \end{array} \right\}_m$$

la déformation  $D$  est notée :

$$D(V) = \frac{dV}{ds} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\gamma} = \frac{d\underline{\omega}}{ds} \\ \underline{\delta} = \frac{d\underline{u}}{ds} + \underline{N}_1 \wedge \underline{\omega} \end{array} \right\}_m$$

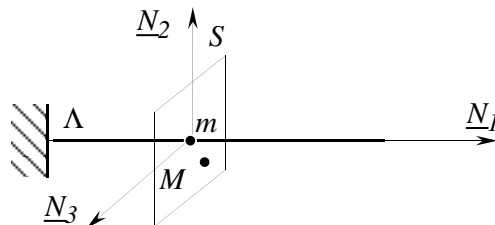


FIG. B.1 – Géométrie

Le déplacement

$$\underline{U} = \underline{u} + (\underline{m} - \underline{M}) \wedge \underline{\omega}$$

permet d'atteindre la partie antiplane du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= [\underline{\delta} + (\underline{m} - \underline{M}) \wedge \underline{\gamma}] \cdot \underline{N}_1 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} [\underline{\delta} + (\underline{m} - \underline{M}) \wedge \underline{\gamma}] \cdot \underline{N}_2 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} [\underline{\delta} + (\underline{m} - \underline{M}) \wedge \underline{\gamma}] \cdot \underline{N}_3\end{aligned}$$

La contrainte normale est ainsi :

$$\sigma \underline{N}_1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}\underline{N}_1 + 2\mu\varepsilon_{12}\underline{N}_2 + 2\mu\varepsilon_{13}\underline{N}_3$$

d'où l'expression de  $T$  :

$$T = \mathbb{R}\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \underline{F} = \int_S \sigma \underline{N}_1 ds \\ \underline{C} = \int_S (\underline{M} - \underline{m}) \wedge \sigma \underline{N}_1 ds \end{array} \right\}_m$$

qui permet de remonter, en notations matricielles dans  $(\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$ , à l'expression de  $\mathbf{K}_g$  :

$$T = \mathbf{K}_g \frac{dV}{ds}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)S & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)I_2 & -(\lambda + 2\mu)I_3 \\ 0 & \mu S & 0 & -\mu I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & \mu I_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I_2 & \mu I_3 & \mu I_0 & 0 & 0 \\ (\lambda + 2\mu)I_2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)J_2 & -(\lambda + 2\mu)J_{23} \\ -(\lambda + 2\mu)I_3 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu)J_{23} & (\lambda + 2\mu)J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix}$$

où interviennent les caractéristiques géométriques de section :

$$\begin{aligned}S &= \int_S dS, & I_2 &= \int_S x_3 dS, & I_3 &= \int_S x_2 dS, & I_0 &= \int_S (x_2^2 + x_3^2) dS, \\ J_2 &= \int_S x_3^2 dS, & J_3 &= \int_S x_2^2 dS, & J_{23} &= \int_S x_2 x_3 dS\end{aligned}$$

Avec une géométrie un peu particulière (symétrie par rapport à  $\underline{N}_2$  et  $\underline{N}_3$ ), on a  $I_2 = I_3 = J_{23} = 0$  et on retrouve une forme diagonale classique :

$$[\mathbf{K}_g] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)J_3 \end{bmatrix}$$

**Remarque**

On ne retrouve pas ici la relation de comportement classique des structures poutres au sens de la résistance des matériaux : en effet celle-ci doit s'obtenir par une hypothèse mixte sur les déplacements (mouvements de solide rigide par section droite) et sur les contraintes (antiplanes), dans le cas où n'apparaît pas de torsion. Afin d'appliquer ici l'approche multi-échelle à une analyse de structure à base d'éléments finis en déplacements, toutes les prolongations ont été choisies de type cinématique ; la projection du champ de déplacement ne constitue donc pas la reconstruction d'un champ de déplacement tridimensionnel à partir d'une analyse en modèle de résistance des matériaux, ce dernier n'ayant pas été choisi ici comme le problème à grande échelle (qui se déduit du choix des prolongations).

# Annexe C

## Algorithme du gradient conjugué

### Notations

Désirant résoudre un système linéaire de type :

$$[K][q] = [f]$$

où  $[K]$  est symétrique, définie positive. L'algorithme du gradient conjugué ne nécessite ni la factorisation de  $[K]$ , ni son assemblage (bien que celui-ci puisse être parfois intéressant du point de vue de l'efficacité numérique). Factorisation et montée-descente sont donc remplacées par un algorithme itératif comportant multiplication matrice-vecteur et réalisation de produits scalaires. La table C.1 présente les notations pour cet algorithme, les crochets  $[\cdot]$  ayant été omis pour alléger la présentation.

<b>Initialisation</b> solution de départ $q_0$ résidu d'équilibre $r_0 = f - Kq_0$ direction de recherche $d_0 = r_0$
<b>Itérations</b> calcul du pas optimal $\rho_n = \frac{r_n \cdot d_n}{d_n \cdot Kd_n} = \frac{r_n \cdot r_n}{d_n \cdot Kd_n}$ itéré $q_{n+1} = q_n + \rho_n d_n$ résidu $r_{n+1} = f - Kq_{n+1} = r_n - \rho_n Kd_n$ paramètre d'orthogonalisation $\lambda_n = -\frac{r_{n+1} \cdot Kd_n}{d_n \cdot Kd_n} = \frac{r_{n+1} \cdot r_{n+1}}{r_n \cdot r_n}$ direction de recherche $d_{n+1} = r_{n+1} + \lambda_n d_n$

TAB. C.1 – Algorithme du gradient conjugué

Parmi les inconvénients de cette méthode, on peut rencontrer, du point de vue efficacité suivant les architectures de machines utilisées, la nécessité de procéder à des

assemblages-désassemblages pour les produits matrice-vecteur, et du point de vue numérique, la perte possible d'orthogonalité des directions de recherche, qui peut conduire à envisager des réorthogonalisations plus ou moins partielles ([Roux 90]).

### Préconditionnement

En vue d'améliorer la convergence, le système linéaire précédant peut être préconditionné par un opérateur  $[\bar{K}]$ , [Papadarakakis et Dracopoulos 91], qui se veut être spectralement proche de  $[K]$  et pouvant participer lui-même à un système linéaire aisément soluble. La technique consiste alors à corriger le résidu  $[r]_n$  à chaque itération pour le remplacer par  $[\bar{r}]_n = [\bar{K}^{-1}][r]_n$  (table C.2).

<p>Initialisation</p> <p>solution de départ <math>q_0</math></p> <p>résidu d'équilibre <math>r_0 = f - Kq_0</math></p> <p>direction de recherche <math>d_0 = \bar{K}^{-1}r_0</math></p>
<p>Itérations</p> <p>calcul du pas optimal <math>\rho_n = \frac{r_n \cdot d_n}{d_n \cdot Kd_n}</math></p> <p>itéré <math>q_{n+1} = q_n + \rho_n d_n</math></p> <p>résidu <math>r_{n+1} = f - Kq_{n+1}</math></p> <p>paramètre d'orthogonalisation <math>\lambda_n = -\frac{\bar{K}^{-1}r_{n+1} \cdot Kd_n}{d_n \cdot Kd_n}</math></p> <p>direction de recherche <math>d_{n+1} = \bar{K}^{-1}r_{n+1} + \lambda_n d_n</math></p>

TAB. C.2 – Algorithme du gradient conjugué preconditionné

### Convergence

Si on connaît le conditionnement  $\kappa$  de l'opérateur linéaire, on peut alors estimer le taux de convergence de l'algorithme. En effet, la décroissance de l'erreur  $e_{n+1}/e_n$  au cours des itérations est bornée par

$$\left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^2$$

donc, lorsque le conditionnement est grand, le taux de convergence

$$\tau = -\log \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

varie en  $\kappa^{-0,5}$

## Annexe D

# Technique de lagrangien augmenté

Reprenons le problème de point selle [1.6] présenté au chapitre 1.3, page 32 : pour  $(\underline{U}^E, \underline{W}^E) \in U_{\text{ad}}^E$ ,  $\underline{F} \in F$ ,  $\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0$  sur  $\Gamma^{EE'}$ , rendre stationnaire :

$$L_1(\underline{U}, \underline{W}; \underline{F}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)] d\Omega - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS - \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{W}^E dS \right\}$$

En introduisant un champ supplémentaire  $\hat{\underline{W}} \in W$ ,  $\hat{\underline{W}}^E = \hat{\underline{W}}^{E'}$  sur  $\Gamma^{EE'}$  ([Glowinski et Le Tallec 90]), il se transforme en :

$$L'_1(\underline{U}, \underline{W}, \hat{\underline{W}}; \underline{F}) = \sum_{E \in \mathbf{E}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^E)] d\Omega - \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^E d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{\partial_2 \Omega^E} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^E dS - \int_{\partial_i \Omega^E} \underline{F}^E \cdot (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS \right\}$$

La construction du lagrangien augmenté se fait avec un paramètre  $k$  en renforçant la contrainte :

$$L_2(\underline{U}, \underline{W}, \hat{\underline{W}}; \underline{F}) = L'_1 + \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\partial_i \Omega^E} (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) \cdot k (\underline{W}^E - \hat{\underline{W}}^E) dS$$

La résolution proposée dans [Glowinski et Le Tallec 90] est alors une variante de la technique d'Uzawa, dénommée aussi ALG3 ([Fortin et Glowinski 82]) :

–  $(\hat{\underline{W}}; \hat{\underline{F}})_{n-1/2}$  étant supposé connu,

on cherche  $(\underline{U}, \underline{W})_n$  en considérant  $L_2(\underline{U}, \underline{W}, \hat{\underline{W}}_{n-1/2})$  avec la direction :

$$\forall (d\underline{U}^E, d\underline{W}^E) \in U_{\text{ad}}^E, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \underline{U}} \cdot d\underline{U} + \frac{\partial L_2}{\partial \underline{W}} \cdot d\underline{W} = 0$$

- puis  $\underline{F}_n$  par
 
$$\underline{F}_n^E = -\underline{\hat{F}}_{n-1/2}^E + k(\underline{W}_n^E - \underline{\hat{W}}_{n-1/2}^E) \text{ sur } \Gamma^{EE'},$$
 ce qui correspond à l'étape linéaire de la LATIN ;
- enfin, on rafraîchit  $(\underline{\hat{W}}; \underline{\hat{F}})$  en

$$\begin{aligned} k\underline{\hat{W}}_{n+1/2}^E + k\underline{\hat{W}}_{n+1/2}^{E'} &= k(\underline{W}_n^E + \underline{W}_n^{E'}) - \underline{F}_n^E - \underline{F}_n^{E'} \quad \text{sur } \Gamma^{EE'} \\ -\underline{\hat{F}}_{n+1/2}^E &= -\underline{F}_n^E + k(\underline{W}_n^E - \underline{\hat{W}}_{n+1/2}^E) \end{aligned}$$

sur  $\Gamma^{EE'}$ , ce qui correspond à l'étape locale de la LATIN.

Cette démarche conduit à la mise en œuvre de la méthode proposée dans [Lions 90].