

Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles

Stéphane Lejeunes

▶ **To cite this version:**

Stéphane Lejeunes. Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2006. Français. NNT : . tel-00090600

HAL Id: tel-00090600

https://theses.hal.science/tel-00090600

Submitted on 1 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

STÉPHANE LEJEUNES

le 20 Mars 2006

MODÉLISATION DE STRUCTURES LAMIFIÉES ÉLASTOMÉRE - MÉTAL À L'AIDE D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION DE MODÉLES

Directeurs de thèse :
Adnane BOUKAMEL - Bruno COCHELIN

JURY

Mr M. POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Président
Mr N. MOËS	Professeur, École centrale de Nantes	Rapporteur
Mr C. REY	Professeur, École Normale Supérieure de Cachan	Rapporteur
Mr S. MEO	Maître de Conférences, Polytech Tours	Examinateur
Mr E. ZOPPITELLI	Ingénieur, EUROCOPTER Marignane	Examinateur
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	
Mr B. COCHELIN	Professeur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

STÉPHANE LEJEUNES

le 20 Mars 2006

MODÉLISATION DE STRUCTURES LAMIFIÉES ÉLASTOMÉRE - MÉTAL À L'AIDE D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION DE MODÉLES

Directeurs de thèse :
Adnane BOUKAMEL - Bruno COCHELIN

JURY

Mr M. POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Président
Mr N. MOËS	Professeur, École centrale de Nantes	Rapporteur
Mr C. REY	Professeur, École Normale Supérieure de Cachan	Rapporteur
Mr S. MEO	Maître de Conférences, Polytech Tours	Examinateur
Mr E. ZOPPITELLI	Ingénieur, EUROCOPTER Marignane	Examinateur
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	
Mr B. COCHELIN	Professeur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	

A Gilbert et Jeanine Lejeunes,
A Pierre-Albert et Marie Murgier
...

Remerciements

Malgré les apparences, ce manuscrit n'est pas le simple compte rendu d'un ensemble de travaux de recherches, mais il constitue le point final (ou initial ?) d'une expérience bien plus riche. En trois ans, les multiples rencontres, débats ou projets font de la thèse une réelle aventure, et ce d'autant plus lorsque l'on est localisé au sein d'une école d'ingénieurs en pleine restructuration. La phase de rédaction permettant de faire un bilan, j'en profite pour remercier l'ensemble des personnes qui ont participé de près ou de loin à cette dernière.

En premier lieu, je voudrais saluer tout particulièrement trois personnes qui m'ont aidé et soutenu à leur manière : Karine Dadourian, Jean-Marc Martinez et Stéphane Méo. A Karine je dois dire tellement de mercis ... en particulier d'avoir pu supporter de vivre avec une personne inattentive pour cause de calculs à faire tourner (sans parler du bruit du ventilateur du CPU à 2H du mat). Pour Jean-Marc avec qui j'ai partagé bien plus qu'un bureau pendant 4 ans je voudrais qu'il sache que son dynamisme, sa bonne humeur et son amitié m'ont aidé beaucoup plus qu'il ne croit. Et enfin un grand, très grand merci à Stéphane pour nous avoir servi de modèle à Jean-Marc et à moi, ses compétences ainsi que son incroyable facilité à les transmettre, nous ont poussées autant que son amitié.

J'ai ensuite une pensée pour mes deux directeurs de thèse : Adnane Boukamel et Bruno Cochelin. J'ai vraiment pris plaisir à travailler avec vous et je reste admiratif devant votre capacité commune à gérer simultanément et avec brio un nombre impressionnant d'activités (scientifiques ou non !). Plus particulièrement, j'aimerais remercier Adnane d'avoir su me convaincre à la fin de mes études d'ingénieur de suivre un DEA pour faire cette thèse mais également de l'investissement personnel si particulier qui le caractérise (j'espère que l'on pourra continuer à travailler ensemble).

Je remercie également l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté de consacrer un peu de leur temps à examiner mes travaux. Merci donc à Mrs Nicolas Moës et Christian Rey d'avoir bien voulu rapporter sur ce manuscrit, ainsi qu'à Mr Michel Potier-Ferry qui m'a fait le plaisir d'être président de mon jury. Enfin, j'adresse un grand merci à Mr Elio Zoppitelli pour sa disponibilité et son soutien.

Enfin, je ne peux terminer sans avoir un petit mot pour l'ensemble des gens que j'ai aimés côtoyer durant ces trois années, je pense en vrac à Stéphane Bourgeois (pour son humour et sa gentillesse), aux deux compères Thierry Désoyer et Jean Garrigues (toujours prêts à refaire le monde), à Olivier Débordes (pour ses remarques toujours judicieuses), à Jean-Marie Rossi (pour son amitié et ses conseils), à Julie Grandcoin (pour son éternelle bonne humeur) à Rémi Arquier (pour son coté décalé), à Hélène Magoariec (un exemple à suivre ...), à Mohamed Ben Bettaieb (pour son coté volontaire en toute occasion et sa gentillesse), à Norbert Deleutre (un "vrai" marseillais dans le bon sens du terme et un vrai fêtard) et à Franck Pérignon (pour son humour naturel). J'en oublie certainement et je m'en excuse d'avance ...

SOMMAIRE

Glossaire

Introduction

Chapitre 1 Modélisation des comportements hyperélastiques

1.1 Introduction 5
1.2 Principes généraux 6
1.2.1 Objectivité 6
1.2.2 Conditions aux limites 7
1.2.3 Symétries Matérielles 7
1.2.4 Matériaux à contraintes internes 11
1.3 Quelques Modèles 12
1.3.1 Modèles isotropes incompressibles 13
1.3.2 Modèles isotropes compressibles 17
1.3.3 Modèles anisotropes 20
1.3.4 Modèles micro-physiques 21
1.4 Solutions analytiques de problèmes d'équilibre 25
1.4.1 Cas des déformations homogènes 25
1.4.2 Cas des déformations non-homogènes 28
1.5 Stabilité matérielle 31

1.5.1 Conditions physiquement motivées 31
1.5.2 Considérations mathématiques 33
1.6 Identification 36
1.6.1 Identification avec contraintes pour les modèles isotropes incompressibles 36
1.6.2 Quelques applications (modèles isotropes incompressibles) 38
1.7 Conclusion 43
Bibliographie 43

Chapitre 2 Formulations variationnelles des problèmes hyperélastiques
2.1 Introduction 49
2.2 État de l'art 49
2.2.1 Principes variationnels en élasticité linéaire 49
2.2.2 Écriture de la stationnarité 50
2.2.3 Linéarisation des problèmes non-linéaires 50
2.2.4 Généralités sur les problèmes non-linéaires incompressibles 51
2.3 Position du problème 52
2.4 Approches en déplacement 52
2.4.1 Méthode de Pénalité 53
2.4.2 Autres méthodes 56
2.5 Principes variationnels multi-champs 56
2.5.1 Méthode en Lagrangien 57
2.5.2 Méthode en Lagrangien perturbé 58
2.5.3 Méthode en Lagrangien augmenté 62
2.5.4 Méthode de SIMO & TAYLOR 63
2.5.5 Bilan des différentes formes variationnelles 65
2.6 Discrétisation par éléments-finis de la forme en Lagrangien perturbé 66
2.7 Choix des espaces d'interpolation 71
2.7.1 Consistance et patch-test 71
2.7.2 Stabilité et condition *inf-sup* du problème discret de point selle 72
2.7.3 Méthode d'enrichissement de la déformation et modes incompatibles . 73
2.7.4 Éléments retenus et implémentation logiciel 75
2.8 Validation 76
2.8.1 Comparaisons par rapport à une solution analytique 76

2.8.2 Test de convergence 78
2.8.3 Exemples d'instabilités numériques dues à l'interpolation 81
2.9 Conclusion 83
Bibliographie 83

Chapitre 3 Technique de réduction de modèles

3.1 Introduction 89
3.2 Concept de base (« finite-strip ») 92
3.2.1 Réductions pour les lamifiés élastomère-métal 93
3.2.2 Réduction pour la poutre composite E.F.B. 96
3.3 Mise en œuvre de la technique de réduction de modèles 97
3.3.1 Formes de la base de projection 97
3.3.2 Discrétisation 100
3.3.3 Implémentation numérique 104
3.4 Validation à partir d'une solution analytique 106
3.4.1 Comparaison en terme de réponse 106
3.4.2 Comparaison en terme de conditionnement 107
3.5 Validation à partir de réponses numériques 109
3.5.1 Choix d'un modèle de référence 109
3.5.2 Évaluation de l'écart relatif des modèles réduits par rapport aux modèles de référence 115
3.5.3 Comparaison du comportement global et local 121
3.6 Conclusion 136
Bibliographie 136

Chapitre 4 Applications de la méthode de réduction de modèles

4.1 Introduction 141
4.2 Analyse d'une poutre composite 141
4.3 Stabilité d'un lamifié élastomère-métal 145
4.3.1 Méthode de continuation pour le flambement et le post-flambement . . 146
4.3.2 Application de la méthode avec le modèle réduit 2D-1D 149
4.4 Réponse sous chargement cyclique d'un lamifié élastomère-métal 152
4.4.1 Modèle de KELVIN-VOIGT 152

4.4.2 Application avec le modèle réduit 3D-1D 153
4.5 Conclusion 157
Bibliographie 157

Conclusion

Annexes

Annexe A Calcul des tenseurs d'élasticité

Annexe B Conditions aux limites et forces nodales pour les modèles réduits

Annexe C Évolution de er_u et er_p en fonction des ordres de troncature n_u et n_p

Annexe D Comparaison locale des modèles réduits et standards

Index des auteurs

Glossaire

Convention d'écriture

a	Scalaire
$\mathbf{a}$	Vecteur
$\mathbf{A}$	Tenseur d'ordre 2
$\mathbb{A}$	Tenseur d'ordre 4
$\mathscr{A}$	Espace fonctionnel
$\mathbf{I}$	Tenseur identité d'ordre 2 $I_{ij} = \delta_{ij}$ avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$
$\mathbb{I}$	Tenseur identité d'ordre 4 $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$

Mesures des déformations d'un domaine solide continu

$\mathbf{X}$	Position d'un point matériel dans la configuration non déformée.
$\mathbf{x}$	Position d'un point matériel dans la configuration déformée.
$\mathbf{u}$	Champ de déplacement.
$\mathbf{F}$	Gradient de la déformation $\mathbf{F} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I}$
J	Variation locale de volume $J = \det \mathbf{F}$
$\mathbf{C}$	Tenseur de CAUCHY-GREEN droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$
$\mathbf{B}$	Tenseur de CAUCHY-GREEN gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$
$\mathbf{U}$,$\mathbf{R}$	Tenseur droit de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$, tels que : $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$. On a également $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$
$\mathbf{V}$,$\mathbf{R}$	Tenseur gauche de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$, tels que : $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$. On a également $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$
$\mathbf{E}$	Tenseur de GREEN-LAGRANGE $\mathbf{E} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$
$\mathbf{L}$	Tenseur des vitesses de déformation $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$
$\mathbf{D}$	Tenseur taux de déformation $\mathbf{D} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$

Mesures des contraintes d'un domaine solide continu

$\mathbf{\Pi}$	Premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF
$\mathbf{S}$	Second tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de CAUCHY
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes de KIRCHHOFF $\boldsymbol{\tau} = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}$

Quantités physiques

ρ_0	Masse volumique mesurée dans la configuration non-déformée
ρ	Masse volumique mesurée dans la configuration déformée ($\rho = J^{-1}\rho_0$)
ϕ	Dissipation
ψ	Énergie libre de HELMHOLTZ définie par unité de masse

Algèbre tensoriel

$\mathbf{A}^T$	Transposé du tenseur $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^D$	Déviateur de $\mathbf{A}$, tel que : $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A})$
$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$	Trace de $\mathbf{A}$, tel que : $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = A_{ii}$ (dans la notation EINSTEIN)
$\mathrm{Cof}\mathbf{A}$	Tenseur des cofacteurs : $\mathrm{Cof}\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}$
$\otimes$	produit tensoriel des tenseurs d'ordre 2, tel que $\mathbb{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ s'écrive en notation indicielle : $A_{ijkl} = B_{ij}C_{kl}$
:	produit doublement contracté, dans le cas de deux tenseurs d'ordre 2, $c = \mathbf{A} : \mathbf{B}$ s'écrit en notation indicielle $c = A_{ij}B_{ij}$ (dans la notation EINSTEIN)
∇	Gradient dans la configuration non-déformée
∇^s	Gradient symétrique dans la configuration non-déformée $\nabla^s = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla)$
$\oplus$	Opérateur tensoriel d'ordre 2, tel que $\mathbb{A} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$ s'écrive en notation indicielle : $A_{ijkl} = B_{ik}C_{jl}$
$\oslash$	Opérateur tensoriel d'ordre 2, tel que $\mathbb{A} = \mathbf{B} \oslash \mathbf{C}$ s'écrive en notation indicielle : $A_{ijkl} = B_{il}C_{kj}$

Introduction

Les structures lamifiés élastomère-métal sont employées principalement dans deux secteurs industriels bien distincts : la construction (bâtiments, ponts, ...) et les transports (aéronautique, ferroviaire, ...). A titre d'illustration de ces applications, on présente sur la photo du haut de la figure 1, un lamifié en service au sein d'un ouvrage de génie civil (il s'agit du pont de la ville de Charleston, USA). Sur la photo du bas, on peut voir quelques ensembles lamifiés utilisés dans le secteur aéronautique. Les propriétés particulières des élastomères sont exploitées dans ce type de pièces afin de conférer aux lamifiés une capacité à bloquer ou guider des mouvements dans certaines directions et à supporter un chargement dans les autres directions.

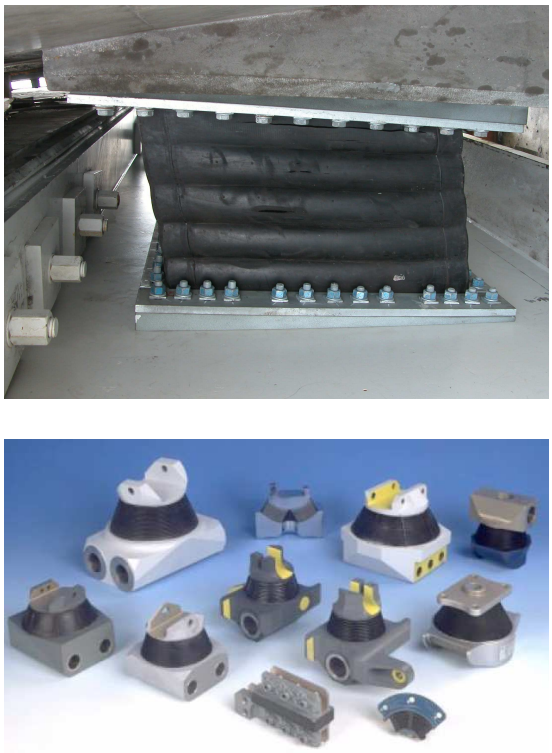


Figure 1 – *Exemples de lamifié élastomère-métal*

Ce travail de thèse, a été à l'origine motivé par une problématique exprimée par la société EUROCOPTER ; en effet la conception des ensembles lamifiés utilisés dans les nouveaux moyeux rotors, induit de nouvelles questions en terme de dimensionnement (par rapport aux précédentes conceptions). En particulier, l'élancement proposé par les nouvelles conceptions, impose la prise en compte de la stabilité du lamifié en liaison directe avec son environnement mécanique (le système d'articulation et

de contrôle de la pâle). Face aux caractéristiques géométriques de ce type de pièce, les outils classiques de modélisation (les éléments-finis,...), sont bien souvent inadaptés, car ils conduisent à des tailles de modèles très importantes.

A travers une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille et la société EUROCOPTER, nous avons développé une technique de réduction de modèles adaptée à ce type de structure. Nous proposons ainsi, des éléments finis hyperélastiques quasi-incompressibles basés sur un enrichissement de la cinématique, et de la pression, suivant une ou plusieurs directions afin de réduire la dimension (et donc la taille) du problème à résoudre.

Ce manuscrit est décomposé en quatre parties qui sont chacune l'occasion d'aborder ou d'approfondir une thématique ayant trait aux développements réalisés.

Le premier chapitre a pour objectif d'offrir une large vue des concepts en lien avec la *modélisation des comportements hyperélastiques*. L'isotropie, l'anisotropie, l'incompressibilité, ..., sont ainsi passées en revue à travers différents modèles de comportements. Les questions de stabilité matérielle sont également abordées, et notamment le couplage de ces dernières avec l'identification de comportements hyperélastiques incompressibles. Des nouvelles stratégies d'identifications sont proposées et misent en oeuvre afin de tenir compte de certains critères de stabilité matérielle.

Le deuxième chapitre concerne l'écriture de *formulations variationnelles de problèmes d'équilibre hyperélastique*. En partant des principes établis dans le cadre de l'élasticité linéaire, une revue bibliographique des formes variationnelles, adaptées aux comportements hyperélastiques incompressibles ou faiblement compressibles, est réalisée. La technique du lagrangien perturbé étant retenue comme base de développement. L'implémentation de cette dernière dans le code de calcul ZéBuLoN est ensuite détaillée. A travers quelques cas tests, les éléments finis, « classiques », qui vont servir de référence à nos modèles réduits, sont validés.

Dans le troisième chapitre, on détaille les bases ainsi que l'implémentation de *la méthode de réduction de modèle* qui est proposée. Cette dernière consiste à formuler des éléments-finis réduits, tirant partie d'une projection des inconnues (cinématique et pression) sur une base de fonctions, suivant une (ou plusieurs) direction(s) d'élancement. La validation de ces éléments est réalisée à l'aide de comparaisons avec des modèles éléments-finis de référence.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on expose quelques *exemples d'applications* directes de la méthode de réduction de modèles sur des cas significatifs, à savoir : l'analyse d'une poutre à section composite (élastomère, fibres de verre ou carbonne), l'étude de stabilité de lamifié élastomère-métal, la détermination de la réponse sous chargement cyclique de lamifié à comportement visco-hyperélastique.

CHAPITRE

1 Modélisation des comportements hyperélastiques

L'hyperélasticité est, de nos jours, un modèle de comportement très répandu, preuve en est sa présence dans quasiment tous les codes de calculs éléments finis (commerciaux ou de recherche). Pour autant, la modélisation des comportements hyperélastiques reste un sujet de recherche encore actif. Le travail initié par R.S. RIVLIN *à la fin de la seconde guerre mondiale sur les caoutchoucs naturels, s'est étendu depuis, à de nombreux matériaux allant du pain aux tissus humains.*

Ce chapitre a pour objectif de balayer un certain nombre de concepts et de modèles ayant trait à la modélisation des comportements hyperélastiques. Une présentation de la stabilité matérielle est également proposée, elle permet de motiver deux méthodes d'identification de modèles hyperélastiques incompressibles prenant en compte des critères de stabilités matérielles. Les méthodes développées sont comparées avec des méthodes existantes sur des essais de traction et de glissement.

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1 Introduction 5
1.2 Principes généraux 6
1.2.1 Objectivité 6
1.2.2 Conditions aux limites 7
1.2.3 Symétries Matérielles 7
1.2.3.a Isotropie 7
1.2.3.b Anisotropie 9
1.2.4 Matériaux à contraintes internes 11
1.3 Quelques Modèles 12
1.3.1 Modèles isotropes incompressibles 13
1.3.2 Modèles isotropes compressibles 17
1.3.3 Modèles anisotropes 20
1.3.4 Modèles micro-physiques 21
1.4 Solutions analytiques de problèmes d'équilibre 25
1.4.1 Cas des déformations homogènes 25
1.4.2 Cas des déformations non-homogènes 28
1.5 Stabilité matérielle 31
1.5.1 Conditions physiquement motivées 31
1.5.2 Considérations mathématiques 33
1.6 Identification 36
1.6.1 Identification avec contraintes pour les modèles isotropes incompressibles 36
1.6.2 Quelques applications (modèles isotropes incompressibles) 38
1.7 Conclusion 43
Bibliographie 43

1.1 Introduction

La classe des matériaux hyperélastiques est d'abord et avant tout définie comme étant une sous classe des matériaux élastiques. En ce sens un matériau hyperélastique possède deux propriétés majeures : il ne dissipe pas d'énergie et toutes les déformations auxquelles il peut être soumis sont réversibles. Néanmoins, l'hyperélasticité se distingue de l'élasticité de part l'approche thermodynamique qui la motive. En postulant l'existence d'un potentiel d'énergie libre de HELMHOLTZ (noté $\psi(\mathbf{F})$), fonction du gradient de la déformation et défini par unité de masse, on peut établir une loi de comportement à partir du second principe thermodynamique. Ainsi, si l'on omet les effets thermiques et en l'absence de dissipation, on arrive a :

$$\phi = \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \dot{\psi} = \left(\mathbf{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0 \qquad \forall \dot{\mathbf{F}} \tag{1.1}$$

Le premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF, $\mathbf{\Pi}$ est donc relié au gradient de la déformation $\mathbf{F}$ par la relation de comportement suivante :

$$\mathbf{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \tag{1.2}$$

En l'absence d'effets thermiques, la distinction entre énergie libre et énergie interne disparait si bien que $\psi(\mathbf{F})$ est aussi appelée densité d'*énergie de déformation*. Construire un modèle de comportement hyperélastique revient donc à postuler une forme de ψ.

Historiquement, les caoutchoucs naturels sont à l'origine du développement des premiers modèles de comportements hyperélastiques. Leurs propriétés de grande déformabilité et l'allure caractéristique en « S » inversé de la courbe de traction uniaxiale ont bien longtemps représenté un challenge en terme de modélisation. Il a fallut attendre les années 40 pour voir se développer les premiers modèles de comportement hyperélastique avec ce qui sera dénommé plus tard la théorie statistique de l'élasticité caoutchoutique, et les années 50 pour voir une seconde branche apparaître avec les modèles phénoménologiques. Si ces derniers ont longtemps focalisé l'attention, ils sont de nos jours largement concurrencés par les modèles statistiques.

Ce chapitre propose principalement une vue synthétique de la modélisation des comportements hyperélastiques. Il s'agit en grande partie d'un travail bibliographique qui s'appuie tout particulièrement sur les ouvrages de HOLZAPFEL [2004], FU & OGDEN [2001] et BARENBLATT & JOSEPH [1997]. Cependant, dans l'objectif de ne pas surcharger la présentation, la description des grandeurs cinématiques et sténiques dans le cadre des grandes déformations n'est pas abordée dans ce manuscrit, si bien que nous renvoyons le lecteur aux travaux de SIDOROFF [1982]; HOLZAPFEL [2004]. Enfin, quelques notions de stabilité matérielle sont décrites, dans l'objectif de présenter deux méthodes d'identification avec contraintes de stabilité pour des comportements isotropes incompressibles.

1.2 Principes généraux

La définition d'une loi de comportement à partir d'une densité d'énergie libre, est évidemment fortement conditionnée par le type de matériau que l'on souhaite modéliser. Le recours à l'expérience pour caractériser les phénomènes physiques en jeu est primordial, afin de postuler une forme de la densité d'énergie. Néanmoins, il existe un certain nombre de principes généraux que doit respecter la densité d'énergie, indépendamment du matériau étudié.

1.2.1 Objectivité

L'objectivité est un principe fondamental que doit respecter toute loi de comportement. Il s'agit de s'assurer que la loi de comportement du milieu étudié est indépendante de la position et de l'orientation du référentiel d'observation. Autrement dit, si l'on change la position ou l'orientation d'un milieu après l'avoir déformé, l'énergie interne doit demeurer inchangée. Dans le cadre de l'hyperélasticité, l'objectivité consiste donc à s'assurer que tout mouvement de corps rigide superposé à une déformation donnée ne change pas la valeur de ψ.

Pour caractériser cette propriété, on définit tout d'abord le groupe des tenseurs orthogonaux noté Orth :

$$\mathbf{Q} \in \text{Orth} : \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T} \tag{1.3}$$

Pour pouvoir respecter le principe d'objectivité, l'énergie ψ ne doit pas être une fonction arbitraire de $\mathbf{F}$, elle doit vérifier l'égalité suivante [1] :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{QF}) \qquad \forall \mathbf{F} \in M_3^+, \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth} \tag{1.4}$$

En utilisant la décomposition polaire de $\mathbf{F}$, tel que $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ et avec $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, on obtient :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T\mathbf{RU}) = \psi(\mathbf{U}) \tag{1.5}$$

Une énergie de déformation fonction du tenseur droit de déformation pure est donc nécessairement objective. On peut également remarquer que le tenseur de CAUCHY-GREEN droit s'écrit, $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ et que le tenseur des déformations de Green-Lagrange est définit à partir de : $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, les trois formes suivantes sont donc nécessairement objectives [2] :

$$\psi(\mathbf{U}) = \psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{E}) \tag{1.6}$$

En utilisant le second principe thermodynamique dans différentes configurations , on peut obtenir les relations de comportement d'un milieu hyperélastique suivant que l'on ait choisi une description Eulérienne, Lagrangienne ou mixte :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}}\mathbf{B}\right) : \mathbf{D} = 0 \quad \forall\mathbf{D} \qquad \text{configuration Eulérienne} \tag{1.7}$$

$$\left(\boldsymbol{\Pi} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}\right) : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad \forall\dot{\mathbf{F}} \qquad \text{configuration mixte} \tag{1.8}$$

$$\left(\mathbf{S} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \forall\dot{\mathbf{E}} \qquad \text{configuration Lagrangienne} \tag{1.9}$$

(1). M_3^+ est l'ensemble des tenseurs d'ordre 3 à déterminant positif.
(2). Par abus de notation la même variable ψ désigne des fonctions d'énergie différentes.

1.2.2 Conditions aux limites

Conventionnellement, on postule l'existence d'un *minimum global* pour l'énergie, lorsque le milieu n'est soumis à aucune déformation. On appelle ce postulat la condition de *normalisation* :

$$\psi(\mathbf{F}=\mathbf{I})=0 \tag{1.10}$$

On peut également choisir de définir une énergie n'induisant pas un état de contrainte particulier à l'état naturel (non déformé). On doit donc avoir :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}}=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}}=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}=0 \tag{1.11}$$

De plus, il faut fournir une énergie infinie pour réduire à zéro ou étirer à l'infini un volume de matière (ou du moins largement plus grande que pour tout autre processus). Ces conditions reviennent à imposer la coercivité de la densité d'énergie libre :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{F})\rightarrow+\infty & \text{si} \quad \lambda_i\rightarrow+\infty \\ \psi(\mathbf{F})\rightarrow+\infty & \text{si} \quad \det\mathbf{F}\rightarrow+\infty \\ \psi(\mathbf{F})\rightarrow+\infty & \text{si} \quad \det\mathbf{F}\rightarrow 0^+ \end{cases} \tag{1.12}$$

où λ_i sont les dilatations principales (les valeurs propres de $\mathbf{U}$).

1.2.3 Symétries Matérielles

1.2.3.a Isotropie

L'isotropie est une caractéristique que possèdent certains matériaux et qui est bien distincte du principe d'objectivité. Un matériau est dit *isotrope* si sa réponse est indépendante (ou faiblement dépendante) de la direction de sollicitation. Cette propriété se traduit par :

$$\psi(\mathbf{F})=\psi(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) \qquad \forall\mathbf{F}\in M_3^+, \forall\mathbf{Q}\in \text{Orth} \tag{1.13}$$

En utilisant la relation (1.6) et l'hypothèse d'isotropie, on peut remarquer que :

$$\psi(\mathbf{C})=\psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)=\psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \tag{1.14}$$

La fonction $\psi(\mathbf{C})$ est donc invariante par rotation. De plus, si l'on fait le choix particulier $\mathbf{Q}=\mathbf{R}$, l'équation (1.13) nous donne :

$$\psi(\mathbf{F})=\psi(\mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T)=\psi(\mathbf{V})=\psi(\mathbf{B}) \tag{1.15}$$

On a ici utilisé le fait que le tenseur de CAUCHY-GREEN Gauche est relié au tenseur gauche de dilatation par la relation : $\mathbf{B}=\mathbf{V}^2$, $\psi(\mathbf{V})$ et $\psi(\mathbf{B})$ sont donc des formes isotropes de l'énergie libre.

L'hypothèse d'isotropie, pour un milieu hyperélastique, induit la question de la représentativité de la fonction d'énergie libre, c'est à dire la nécessité de conserver des variables tensorielles ou vectorielles pour définir cette fonction. Les théorèmes de représentation permettent de répondre à cette attente.

En considérant un tenseur $\mathbf{X}$ (qui dans ce cas peut être $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$ où $\mathbf{C}$), la fonction scalaire isotrope $\phi(\mathbf{X})$ peut s'exprimer en fonction des trois premiers invariants fondamentaux de $\mathbf{X}$. Ces derniers sont déterminés à partir du polynôme caractéristique de $\mathbf{X}$ (voir SIDOROFF [1982])

$$I_1(\mathbf{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{X}) \tag{1.16}$$

$$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}^2(\mathbf{X}) - \mathrm{tr}(\mathbf{X}^2)\right) \underset{\text{si X sym}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{Cof}\mathbf{X}) \tag{1.17}$$

$$I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \tag{1.18}$$

En appliquant le principe de représentation, on peut écrire la densité d'énergie comme une fonction des invariants de $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ ou de $\mathbf{F}$.

$$\psi = \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) = \psi(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B})) = \psi(I_1(\mathbf{F}), I_2(\mathbf{F}), I_3(\mathbf{F})) \tag{1.19}$$

L'hypothèse d'isotropie et le principe de réprésentation permettent donc d'exprimer la loi de comportement à partir des relations constitutives suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho_0 J^{-1}\mathbf{B}\frac{\partial\psi(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B}))}{\partial\mathbf{B}} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0\frac{\partial\psi(I_1(\mathbf{F}), I_2(\mathbf{F}), I_3(\mathbf{F}))}{\partial\mathbf{F}} \tag{1.21}$$

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\frac{\partial\psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}))}{\partial\mathbf{C}} \tag{1.22}$$

De manière générale si l'on définit une énergie, isotrope, en fonction des invariants d'un tenseur $\mathbf{X}$, la variation de $\psi(\mathbf{X})$ par rapport à $\mathbf{X}$ s'écrit, :

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{X}} \tag{1.23}$$

avec, dans le cas où $\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ou $\mathbf{X} = \mathbf{C}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{I} \qquad \frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{X}} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{X} \qquad \frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{X}} = I_3\mathbf{X}^{-1} \tag{1.24}$$

et dans le cas $\mathbf{X} = \mathbf{F}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \qquad \frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{F}} = 2\mathbf{F}(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}) \qquad \frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{F}} = I_3\mathbf{F}^{-T} \tag{1.25}$$

On a donc, en notant $\psi_i = \partial\psi/\partial I_i$:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho_0 J^{-1}\left((\psi_1 + \psi_2 I_1)\mathbf{B} - \psi_2\mathbf{B}^2 + \psi_3 I_3\mathbf{I}\right) \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = 2\rho_0\left((\psi_1 + \psi_2 I_1)\mathbf{F} - \psi_2\mathbf{F}\mathbf{C} + \psi_3 I_3\mathbf{F}^{-T}\right) \tag{1.27}$$

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\left((\psi_1 + \psi_2 I_1)\mathbf{I} - \psi_2\mathbf{C} + \psi_3 I_3\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{1.28}$$

La représentation des milieux isotropes à l'aide des invariants fondamentaux présente un avantage mathématique certain, mais n'est pas exempte de critiques. La première d'entre

elles étant le sens physique de ces invariants (hormis pour I_3). Ainsi, certains auteurs ont proposé d'utiliser des invariants définis à partir d'une autre mesure de la déformation. CRISCIONE ET AL. [2000] utilisent le tenseur de HENCKY ($\boldsymbol{\Gamma} = \ln \mathbf{V}$) et les invariants associés K_1,K_2,K_3 définis de la manière suivante :

$$K_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = \ln(J) \tag{1.29}$$

$$K_2 = |\boldsymbol{\Gamma}^D| = \sqrt{\boldsymbol{\Gamma}^D : \boldsymbol{\Gamma}^D} \tag{1.30}$$

$$K_3 = 3\sqrt{6}\det\left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}^D}{K_2}\right) \tag{1.31}$$

L'énergie libre est donc définie comme une fonction de K_1,K_2,K_3, ces invariants représentent respectivement : le logarithme de la dilatation, l'amplitude de distorsion et le mode de distorsion. Pour certains tests de déformations homogènes, ils présentent l'avantage de conduire à des invariants constants, ce qui peut faciliter l'identification. Une dilatation pure conduit à $K_2 = 0$, un cisaillement pure à $K_3 = 0$, une extension uniaxiale à $K_3 = 1$. Pour tenir compte de la singularité du troisième invariant lorsque $K_2 = 0$, l'énergie s'écrit :

$$\psi = \begin{cases} \psi(K_1,K_2,K_3) & K_2 \neq 0 \\ \psi(K_1) & K_2 = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

Une autre approche fréquemment utilisée pour des milieux isotropes et popularisée par OGDEN, consiste à considérer les élongations principales (c'est à dire les valeurs propres de $\mathbf{V}$ ou de $\mathbf{U}$), tel que :

$$\psi = \psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \tag{1.33}$$

Cette écriture est objective quelle que soit la forme de ψ. En notant $\mathbf{N}_a$ et $\mathbf{n}_a$ les vecteurs propres de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ qui sont liés par : $\mathbf{n}_a = \mathbf{R}\mathbf{N}_a$ ($a = 1,2,3$), on obtient les équations constitutives suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^{3} \rho_0 J^{-1} \lambda_a \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a) \tag{1.34}$$

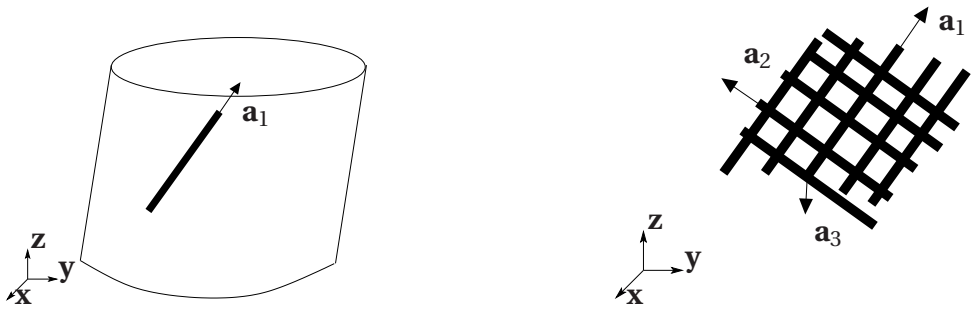
$$\boldsymbol{\Pi} = \sum_{a=1}^{3} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{N}_a) \tag{1.35}$$

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^{3} \rho_0 \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a) \tag{1.36}$$

1.2.3.b Anisotropie

Pour définir une loi de comportement anisotropique, on ne peut plus utiliser directement le principe de représentation (les trois premiers invariants d'un tenseur de déformation ne suffisent plus). Il faut donc ajouter un certain nombre de variables *pertinentes* pour construire un modèle d'énergie libre. Nous présentons ici quelques approches tirées de la littérature pour des matériaux orthotropes ou isotropes transverses (voir figure 1.1).

Une approche élégante qui date de la fin des années 70 et qui a été formalisée par BOEHLER (voir SPENCER & ZHENG [2001]), consiste à trouver une forme de l'énergie qui soit isotrope



(a) isotrope transverse (b) orthotrope

Figure 1.1 – *Exemples d'anisotropies*

de ses arguments afin d'utiliser le principe de représentation et de se ramener à une fonction d'énergie dépendante d'invariants. Pour cela, on définit tout d'abord les tenseurs d'anisotropie notés $\mathbf{M}_i$, construits à l'aide des vecteurs de base unitaires $\mathbf{a}_i$ définis dans la configuration de référence, tels que l'on ait :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i \qquad i = 1,2,3. \qquad \text{dans le cas orthotrope} \tag{1.37}$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1) \qquad \text{dans le cas isotrope transverse} \tag{1.38}$$

Les vecteurs $\mathbf{a}_i$ sont liés à la matière et correspondent à une direction privilégiée du matériau (une direction de fibre, ...). Les tenseurs d'anisotropie sont caractérisés par les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{M}_i = \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_i\mathbf{M}_j = 0, \quad \mathrm{tr}(\mathbf{M}_i) = 1, \quad i \neq j;\ i,j = 1,2,3 \tag{1.39}$$

À partir des $\mathbf{M}_i$ on peut définir le groupe de symétrie $\mathfrak{g}$, (qui est un sous-groupe de Orth) caractérisant les symétries matérielles :

$$\mathfrak{g} = \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth} : \quad \mathbf{Q}\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}_i, \quad i = 1,2,3\} \tag{1.40}$$

La densité d'énergie doit vérifier une condition d'invariance par rapport au groupe de symétrie $\mathfrak{g}$, qui s'exprime par :

$$\psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \psi(\mathbf{C}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathfrak{g} \tag{1.41}$$

Le théorème de RYCHLEWSKI montre que cette condition est satisfaite si et seulement si la densité d'énergie peut-être représentée par une fonction tensorielle qui inclut les tenseurs d'anisotropie dans ses arguments (voir ITSKOV & AKSEL [2004]). On a donc :

$$\psi = \psi_m(\mathbf{C},\mathbf{M}_i) = \psi_m(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T), \quad i = 1,2,3 \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{Orth} \tag{1.42}$$

L'énergie ψ_m est donc une fonction *isotrope* de ses arguments, elle peut donc être construite à partir d'un jeu d'invariants formant une base pour les tenseurs considérés. Les modèles isotropes transverses ou orthotropes utilisent alors les invariants I_1,I_2,I_3 de $\mathbf{C}$ et des invariants mixtes de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{M}$ (ce jeu d'invariant a été proposé par SPENCER) :

$$J_4^i = \mathrm{tr}(\mathbf{C}\mathbf{M}_i) \tag{1.43}$$

$$J_5^i = \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2\mathbf{M}_i) \tag{1.44}$$

on a donc $\psi = \psi(I_1, I_2, I_3, J_4^i, J_5^i)$. En utilisant les dérivées des invariants de $\mathbf{C}$ (eq 1.25) et des invariants mixtes définis par :

$$\frac{\partial J_4^i}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{M}_i \qquad \frac{\partial J_5^i}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{C} \tag{1.45}$$

on obtient la forme suivante des équations constitutives :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{isotrope} + \sum_{i=1}^{3} 2J^{-1}\mathbf{F}\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_4^i}\mathbf{M}_i + \frac{\partial \psi}{\partial J_5^i}(\mathbf{C}\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{C})\right)\mathbf{F}^T \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}_{isotrope} + \sum_{i=1}^{3} 2\mathbf{F}\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_4^i}\mathbf{M}_i + \frac{\partial \psi}{\partial J_5^i}(\mathbf{C}\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{C})\right) \tag{1.47}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{isotrope} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_4^i}\mathbf{M}_i + \frac{\partial \psi}{\partial J_5^i}(\mathbf{C}\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{C})\right) \tag{1.48}$$

$\mathbf{S}_{isotrope}$, $\boldsymbol{\Pi}_{isotrope}$, $\boldsymbol{\sigma}_{isotrope}$ sont les parties des contraintes qui sont analogues à la forme isotrope en remplaçant $\psi(I_1, I_2, I_3)$ par la fonction $\psi(I_1, I_2, I_3, J_4^i, J_5^i)$ dans les expressions (1.26), (1.27) et (1.28). Le tenseur de CAUCHY-GREEN droit peut-être remplacé par $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{U}$.

Une autre approche consiste à approximer l'énergie de déformation par une somme d'énergies associées à une direction privilégiée du matériau (les $\mathbf{a}_i$). Ainsi DIANI ET AL. [2004] utilisent la forme suivante de l'énergie :

$$\psi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left[\psi_d^1\left(\frac{v_i}{||\mathbf{a}_i||^2}\right) + \psi_d^2\left(\frac{z_i}{||\mathbf{a}_i||^2}\right)\right] \tag{1.49}$$

Les ω_i représentent le poids associé à la direction $\mathbf{a}_i$, ψ_d^1 est une énergie élémentaire fonction d'un scalaire v_i qui représente l'extension dans la direction $\mathbf{a}_i$:

$$v_i = (\mathbf{F}\mathbf{a_i})^T(\mathbf{F}\mathbf{a_i}) = \mathbf{C} : (\mathbf{a_i} \otimes \mathbf{a_i}) \tag{1.50}$$

ψ_d^2 est une énergie élémentaire fonction d'un scalaire z_i :

$$z_i = (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{a_i})^T(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{a_i}) = \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{a_i} \otimes \mathbf{a_i}) \tag{1.51}$$

D'autres formes adaptées aux matériaux isotropes transverses ou orthotropes ont été présentées dans la littérature, nous renvoyons le lecteur aux articles de SMITH & RIVLIN [1958]; MENZEL & STEINMANN [2001]; CRISCIONE ET AL. [2002, 2001].

1.2.4 Matériaux à contraintes internes

Mises à part les considérations de symétries matérielles, un matériau peut exhiber un comportement particulier comme l'incompressibilité ou l'inextensibilité dans une direction (notée $\mathbf{a}$). On traduit ce comportement sous la forme d'une (ou plusieurs) contrainte(s) interne(s) au matériau, que l'on exprime la plupart du temps comme une fonction scalaire (notée c) du tenseur gradient de la déformation. On peut, par exemple, rencontrer les contraintes suivantes :

$$c(\mathbf{F}) = \det\mathbf{F} - 1 = 0 \qquad c(\mathbf{F}) = \mathbf{a}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})\mathbf{a} - 1 = 0 \qquad c(\mathbf{F}) = \mathrm{tr}(\mathbf{V}) - 3 = 0 \tag{1.52}$$

Elles représentent respectivement la contrainte d'incompressibilité, d'inextensibilité dans une direction et de BELL. Cette dernière a été établie par J.F. BELL dans les années 80 à partir d'expérimentations réalisées sur des matériaux métalliques soumis à de grandes déformations (voir BEATTY [2001]).

Ces contraintes doivent respecter le principe d'objectivité si bien que l'on doit avoir :

$$c(\mathbf{QF}) = c(\mathbf{F}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{Orth} \tag{1.53}$$

La loi de comportement doit prendre en compte ces contraintes qui sont introduites à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} + q\frac{\partial c}{\partial \mathbf{F}} \tag{1.54}$$

La classe des matériaux exhibant un caractère incompressible ou faiblement compressible est particulièrement importante pour les modèles de comportement hyperélastique. La plupart des élastomères rentrent dans cette catégorie si bien que la grande majorité des modèles hyperélastiques que l'on peut rencontrer dans la littérature ou dans les codes éléments-finis sont incompressibles ou quasi-incompressibles.

Le comportement d'un milieu incompressible s'écrit généralement en choisissant un multiplicateur de Lagrange (noté p) assimilable à une pression telle que cette dernière soit positive dans le cas d'une compression. En utilisant les formes suivantes de la dérivée de la contrainte d'incompressibilité :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \mathrm{cof}\mathbf{F} = J\mathbf{F}^{-T} \qquad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}} = \frac{J}{2}\mathbf{B}^{-1} \qquad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2}\mathbf{C}^{-1} \tag{1.55}$$

on obtient la loi de comportement d'un matériau incompressible dans les différentes configurations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 2\mathbf{B}\frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} - p\mathbf{I} \tag{1.56}$$

$$\mathbf{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathrm{cof}\mathbf{F} \tag{1.57}$$

$$\mathbf{S} = \rho_0 2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - pJ\mathbf{C}^{-1} \tag{1.58}$$

1.3 Quelques Modèles

De nombreuses formes d'énergie hyperélastique ont été proposées dans la littérature depuis la fin des années 40. Ces travaux initialement focalisés sur les caoutchoucs naturels puis sur les élastomères (chargés, synthétiques, etc) se sont depuis étendus à de nombreux matériaux. Lister l'ensemble des approches menées n'est pas l'objet de ce chapitre, on se contentera de présenter quelques modèles isotropes et anisotropes, incompressibles et compressibles, ou encore micro-physiques.

On oppose généralement cette dernière catégorie de modèles, *micro-physiquement motivés*, aux approches dites *phénoménologiques*. En règle générale, les modèles phénoménologiques ne prennent pas directement en considération une micro-structure particulière du matériau, mais se base sur des considérations mathématiques. L'approche phénoménologique ne se résume cependant pas en un simple « lissage de courbe », mais requiert une bonne compréhension des phénomènes physiques en jeu, afin de ne pas trop s'éloigner du comportement réel.

1.3.1 Modèles isotropes incompressibles

• **Le modèle de MOONEY [1940]** est un des premiers modèles d'énergie libre phénoménologiques. L'approche menée par MOONEY est en effet purement mathématique, il considère un volume de matière qu'il soumet à une élongation puis à un cisaillement (figure 1.2).

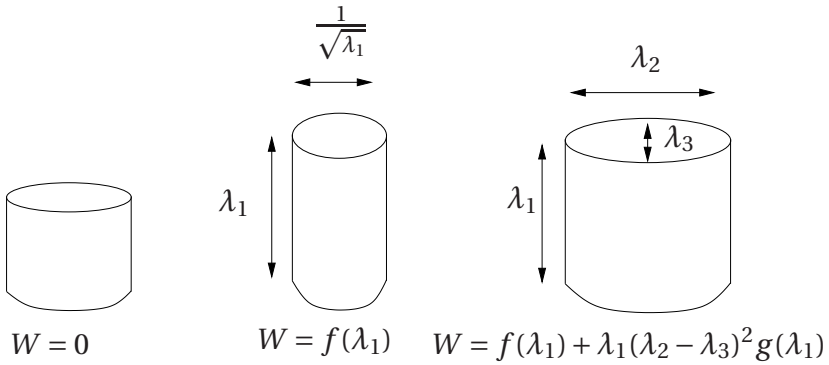


Figure 1.2 – *Déformation d'un volume élémentaire*

Ses hypothèses de départ consistent à utiliser un matériau isotrope, incompressible et pour lequel l'effort de cisaillement est proportionnel à la déformation de cisaillement (dans le cas d'un cisaillement simple). L'auteur remarque que le travail obtenu pour une déformation combinée (élongation puis cisaillement), est de la forme :

$$W = f(\lambda_1) + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) g(\lambda_1) \tag{1.59}$$

En utilisant les hypothèses d'isotropie, et la condition de normalisation de l'énergie (eq. (1.10)), il obtient la forme générale suivante :

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = C_1\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right) + C_2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right) \tag{1.60}$$

avec C_1 et C_2 deux constantes matérielles à identifier.

• **Le modèle de RIVLIN & SAUNDERS [1951]** est une généralisation du modèle précèdent. Il s'agit de considérer l'énergie comme une série polynomiale de (I_1-3) et (I_2-3) :

$$\psi(I_1,I_2)=\sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^j \qquad \text{avec} \quad C_{00}=0 \tag{1.61}$$

Pour déterminer les ordres i et j de la série polynomiale, caractérisant au mieux le comportement d'un caoutchouc vulcanisé, les auteurs réalisent des tests d'extension biaxiale sur une fine plaque en élastomère. Au cours de l'essai, les élongations λ_1 et λ_2 sont contrôlées de manière à faire évoluer un des invariants (I_1 où I_2) tout en fixant l'autre. A partir de la mesure des efforts dans les deux directions, on peut remonter à la variation de $\frac{\partial\psi}{\partial I1}$ et de $\frac{\partial\psi}{\partial I2}$ en fonction de I_1 et I_2 (figure 1.3).

Néanmoins, cette procédure présente l'inconvénient de maximiser l'erreur due à la mesure, en particulier pour des valeurs faibles de la déformation de 2 à 25% (voir CRISCIONE [2003]).

En se basant sur les résultats de tests de cisaillement pure, traction simple, compression, torsion et torsion-traction, les auteurs font l'hypothèse que $\frac{\partial\psi}{\partial I1}$ est constant et que $\frac{\partial\psi}{\partial I2}$ est une fonction de I_2. Ils proposent donc la forme suivante de l'énergie :

$$\psi(I_1,I_2)=C_{10}(I_1-3)+f(I_2-3) \qquad \text{avec } \partial f/\partial I_2 \text{ une fonction décroissante de } I_2 \tag{1.62}$$

Le tableau 1.1 présente quelques formes polynomiales rencontrées dans la littérature. L'approche expérimentale de RIVLIN & SAUNDERS a été reprise par de nombreux auteurs (KAWABATA & KAWAI [1977]; LAMBERT-DIANI & REY [1999]; CRISCIONE [2003]) pour différents types d'élastomères.

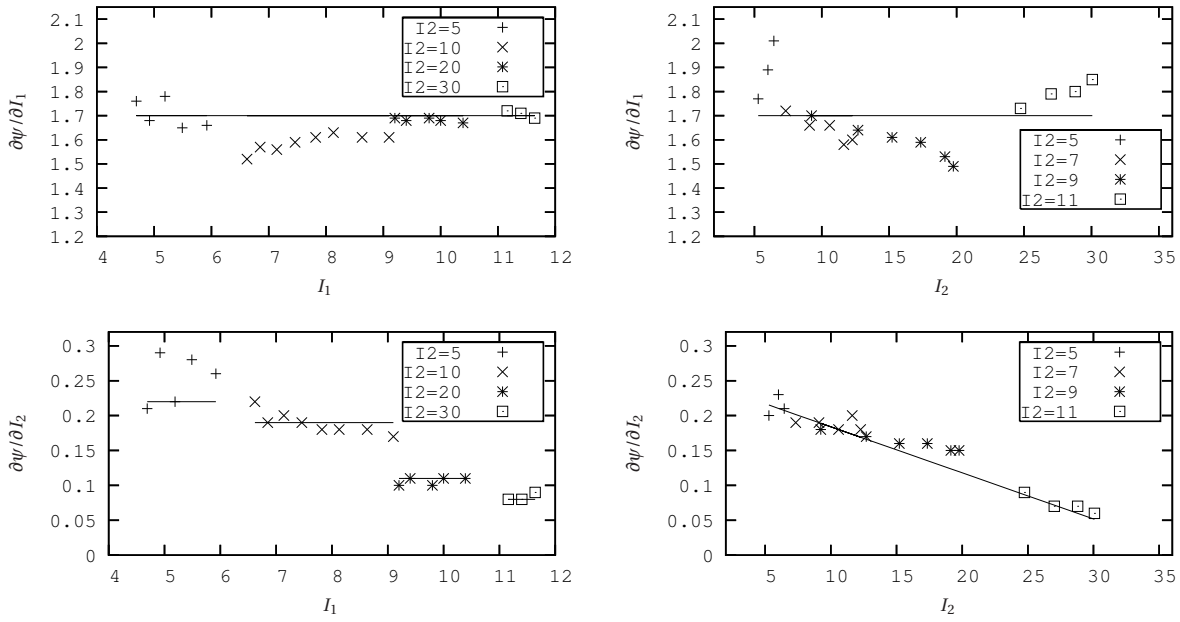


Figure 1.3 – *Évolution de* $\frac{\partial\psi}{\partial I1}$, $\frac{\partial\psi}{\partial I2}$ *en fonction de* I_1 *et* I_2 *(*RIVLIN & SAUNDERS*)*

Référence	Coefficients									
MOONEY [1940]	C_{10}	C_{01}								
JAMES & AL.(1975)	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}					
JAMES & AL.(1975)	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}	C_{21}	C_{12}		C_{30}	C_{03}
ISIHARA & AL.(1951)	C_{10}	C_{01}		C_{20}						
JAMES & AL.(1975)	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}					C_{30}	
RIVLIN & SAWYERS [1976]	C_{10}	C_{01}			C_{02}					
BIDERMAN (1958)	C_{10}	C_{01}		C_{20}					C_{30}	
TSCHOEGL (1971)	C_{10}	C_{01}	C_{11}							
TSCHOEGL (1975)	C_{10}	C_{01}						C_{22}		
YEOH (1990)	C_{10}			C_{20}					C_{30}	
LION (1997)	C_{10}	C_{01}								C_{50}
HAUPT & SEDLAN (2001)	C_{10}	C_{01}	C_{11}		C_{02}				C_{30}	

Tableau 1.1 – *Modèles polynomiaux d'énergie libre*

• **Le modèle de GENT-THOMAS (1958)** est basé sur les mêmes constats que l'approche précédente, une fonction logarithmique du deuxième invariant est choisie à la place de $f(I_2)$:

$$\psi(I_1,I_2) = C_1(I_1-3) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \tag{1.63}$$

• **Le modèle de OGDEN (1972)** est avec les trois modèles précédents, un des plus couramment utilisé.

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p}\left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3\right) \tag{1.64}$$

avec :

$$\sum_{p=1}^{N} \mu_p \alpha_p = 2\mu \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \qquad \text{et} \quad \mu_p\alpha_p > 0 \tag{1.65}$$

où μ est le module de cisaillement.

De nombreuses autres formes de l'énergie ont été développées, chacune étant adaptée à un type de matériau ou un type de réponse spécifique (voir tableau 1.2). Néanmoins, les modèles phénoménologiques présentés plus haut sont les plus représentatifs en terme de modélisation de comportements hyperélastiques incompressibles isotropes.

Référence	Densité d'énergie	Caractéristiques
HART-SMITH (1966)	$\psi = C_1 \int \exp(C_2(I_1-3)^2) dI_1 + C_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$	modèle adapté à un niveau important de déformation (> 500%)
ALEXANDER (1968)	$\psi = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) + C_3 \ln(\frac{I_2-3-C_4}{C_4})$	modèle adapté à un niveau important de déformation
GENT (1996)	$\psi = -\frac{\mu}{2}\ln\left(1-\frac{I_1-3}{J_m}\right)$ avec $I_1 < J_m+3$	modèle tenant compte de l'extensibilité finie des chaînes (μ est le module de cisaillement, J_m la limite d'extension des chaines)
DELFINO ET AL. [1997]	$\psi = \frac{a}{b}\left\{\exp\left[\frac{b}{2}(I_1-3)\right]-1\right\}$	modèle pour les artères carotides, traduisant le phénomène de rigidification sous forte pression
LAMBERT-DIANI & REY [1999]	$\psi = \int \exp\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i (I_1-3)^i dI_1\right\} + \int \exp\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i \ln(I_2)^i dI_2\right\}$	modèle générique, valable pour une large classe d'élastomères et pour des élongations importantes
LAHELLEC [2001]	$\psi = a_1(I_1-3) + 2a_2\sqrt{I_1-3} - \frac{a_2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erfi}(\sqrt{a_3}\sqrt{I_1-3})}{\sqrt{a_3}} + a_4(I_2-3) + 2a_5\sqrt{I_2-3} - \frac{a_5\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erfi}(\sqrt{a_6}\sqrt{I_2-3})}{\sqrt{a_6}}$	modèle adapté aux comportements fortement non-linéaires aux faibles déformations

Tableau 1.2 – *Quelques potentiels, phénoménologiques, d'énergie isotropes incompressibles*

1.3.2 Modèles isotropes compressibles

Pour la plupart des élastomères qui exhibent un comportement compressible, les niveaux d'énergie en jeu pour un test de dilatation ou de glissement sont très différents. FLORY est un des premiers à proposer un découplage de l'énergie en une partie purement isochorique et une partie volumique afin de distinguer les niveaux d'énergies misent en jeu pour ces deux types de déformations. Il propose pour cela une décomposition du gradient de la déformation ou du tenseur de CAUCHY-GREEN droit en deux parties, telles que l'on ait :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}} \qquad \mathbf{C} = (J^{2/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{C}} \tag{1.66}$$

l'énergie est donc découplée de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) + \psi_{vol}(J) \tag{1.67}$$

La partie isochorique de l'énergie ψ_{iso}, peut-être choisie avec l'une des formes présentées plus haut en utilisant les invariants réduits (où invariant de FLORY) ou les déformations principales modifiées :

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \qquad \bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \tag{1.68}$$

$$\bar{\lambda}_a = J^{-1/3} \lambda_a \qquad a = 1,2,3 \tag{1.69}$$

La fonction $\psi_{vol}(J)$ doit être convexe et doit vérifier la condition de normalité : $\psi_{vol}(1) = 0$, la condition de contraintes nulles dans l'état naturel [3] $\psi'_{vol}(1) = 0$ et les conditions de coercivité.

La partie volumique de l'énergie est en général écrite sous la forme :

$$\rho_0 \psi_{vol}(J) = kG(J) \tag{1.70}$$

k étant une constante matérielle assimilable au module de compressibilité si $G''(J) = 1$. On trouve de nombreuses formes de la fonction $G(J)$ dans la littérature, le tableau (1.3) en présente quelques unes.

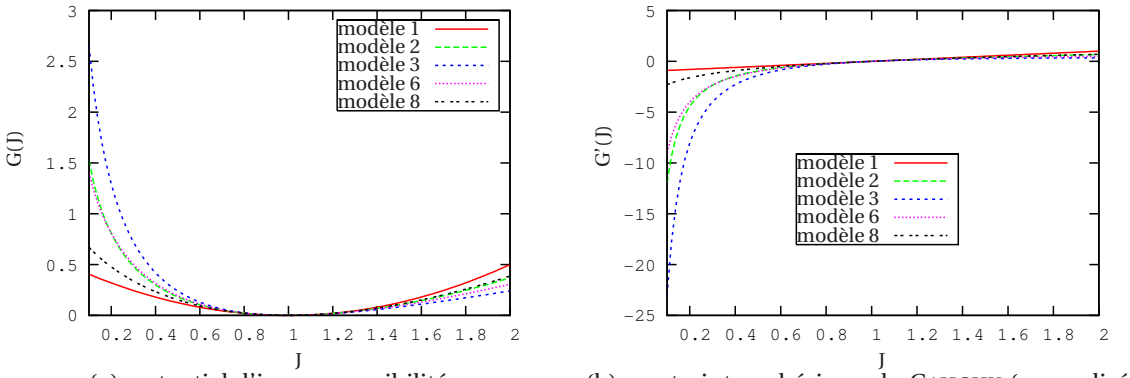
(3). ψ'_{vol} désigne la différentiation de $\psi_{vol}(J)$ par rapport à J

modèle	$G(J)$	$G'(J)$	$G''(J)$	Référence
1	$\frac{1}{2}(J-1)^2$	$J-1$	1	
2	$\frac{1}{4}\left((J-1)^2+(\ln J)^2\right)$	$\frac{1}{2}(J-1+\frac{1}{J}\ln J)$	$\frac{1}{2J^2}(1+J^2-\ln J)$	SIMO & TAYLOR (1982)
3	$\frac{1}{2}(\ln J)^2$	$\frac{1}{J}\ln J$	$\frac{1}{J^2}(1-\ln J)$	SIMO & AL. (1985)
4	$\frac{1}{\beta^2}(\frac{1}{J^\beta}-1+\beta\ln J)$	$\frac{1}{\beta}(\frac{1}{J}-\frac{1}{J^{1+\beta}})$	$\frac{1}{\beta}\frac{1}{J^{2+\beta}}(1+\beta-J^\beta)$	OGDEN (1972)
5	$\frac{1}{4}(J^2-1-2\ln J)$	$\frac{1}{2}(J-\frac{1}{J})$	$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{J^2})$	SIMO & TAYLOR (1991)
6	$J-\ln J-1$	$1-\frac{1}{J}$	$\frac{1}{J^2}$	MIEHE [1994]
7	$J^\beta(\beta\ln J-1)+1$	$\beta^2\frac{1}{J^{1-\beta}}\ln J$	$\beta^2 J^{\beta-2}(1+(\beta-1)\ln J)$	HARTMANN (2002)
8	$J\ln J-J+1$	$\ln J$	$\frac{1}{J}$	LIU & AL. (1994)
9	$\frac{1}{32}(J^2-\frac{1}{J^2})^2$	$\frac{1}{8}(J^3-\frac{1}{J^5})$	$\frac{1}{8}(5\frac{1}{J^6}+3J^2)$	ANSYS (2000)
10	$\frac{J}{\beta}\left(1-\frac{J^{-\beta}}{1-\beta}\right)+\frac{1}{\beta-1}$	$\frac{1}{\beta}\left(1-J^{-\beta}\right)$	$J^{-(1+\beta)}$	MURNAGHAN (1951)
11	$\frac{1}{50}(J^5+J^{-5}-2)$	$\frac{1}{10}(J^4-J^{-6})$	$\frac{1}{10}(4J^3+6J^{-7})$	HARTMANN & NEFF [2003]
12	$\frac{9}{2}(J^{1/3}-1)^2$	$3(J^{-1/3}-J^{-2/3})$	$2J^{-5/3}-J^{-4/3}$	MARC (2003)

Tableau 1.3 – *Quelques fonctions d'incompressibilité*

Les figures 1.4, montrent quelques modèles de potentiel de compressibilité ainsi que la partie sphérique des contraintes associées. Tous ces modèles ne respectent pas de manière triviale les conditions d'admissibilités.

Par exemple, la forme 1 présente l'inconvénient d'avoir une limite finie : $\lim_{J\to 0} G(J) = 1/2$. Le modèle 3 n'est pas convexe pour $J > 2.718$ et le modèle 7 est convexe pour certaines valeurs de β. Néanmoins, lorsque J est proche de 1 tous ces modèles sont équivalents.



(a) potentiel d'incompressibilité

(b) contrainte sphérique de CAUCHY (normalisé par le module de compressibilité)

Figure 1.4 – *Représentation des fonctions d'incompressibilité*

L'écriture de la loi de comportement dans le cas d'une formulation compressible avec dé-

couplage de l'énergie nécessite un peu plus de calcul que le cas incompressible. On obtient par exemple :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho_0 J^{-1}\mathbf{B}\frac{\partial\psi(\mathbf{B})}{\partial\mathbf{B}} = \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{P}_{\bar{B}}\right) + kG'(J)\mathbf{I} \tag{1.71}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0\frac{\partial\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} = (\bar{\boldsymbol{\Pi}} : \mathbb{P}_{\bar{F}}) + kG'(J)\mathrm{Cof}\mathbf{F} \tag{1.72}$$

$$\mathbf{S} = 2\rho_0\frac{\partial\psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} = (\bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P}_{\bar{C}}) + kG'(J)J\mathbf{C}^{-1} \tag{1.73}$$

$\mathbb{P}_{\bar{B}}, \mathbb{P}_{\bar{C}}, \mathbb{P}_{\bar{F}}$ sont des tenseurs d'ordre 4, tels que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho_0 J^{-1}\bar{\mathbf{B}}\frac{\partial\psi_{iso}(\bar{\mathbf{B}})}{\partial\bar{\mathbf{B}}} \qquad \mathbb{P}_{\bar{B}} = J^{2/3}\mathbf{B}^{-1}\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial\mathbf{B}}\mathbf{B} = \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right] \tag{1.74}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0\frac{\partial\psi_{iso}(\bar{\mathbf{F}})}{\partial\bar{\mathbf{F}}} \qquad \mathbb{P}_{\bar{F}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{F}}}{\partial\mathbf{F}} = J^{-1/3}\left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}^{-T}\right] \tag{1.75}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\rho_0\frac{\partial\psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial\bar{\mathbf{C}}} \qquad \mathbb{P}_{\bar{C}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{C}} = J^{-2/3}\left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right] \tag{1.76}$$

$\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre 4. Les opérateurs $\mathbb{P}_{\bar{B}}, \mathbb{P}_{\bar{C}}, \mathbb{P}_{\bar{F}}$ sont les opérateurs déviatoriques associés à chaque configuration (eulérienne, mixte et lagrangienne).

La démonstration de ces relations peut être faite de différentes manières. Par exemple, on a dans la configuration eulérienne :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(\mathbf{B}) &= \dot{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{B}}) + \dot{\psi}_{vol}(J)\\ &= \frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \frac{\partial\psi_{vol}}{\partial J}\dot{J}\\ &= \frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : (J^{-2/3}\dot{\mathbf{B}} - \frac{2}{3}J^{-5/3}\mathbf{B}\dot{J}) + \frac{k}{\rho_0}G'(J)\dot{J}\end{aligned} \tag{1.77}$$

avec $\dot{\mathbf{B}}$ et $\dot{J}$ tels que (en utilisant le tenseur gradient des vitesses $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$) :

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{\overline{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{L}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{L}^T \tag{1.78}$$

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial\mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} = \frac{J}{2}\mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} \tag{1.79}$$

En remplaçant dans (1.77) on a :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(\mathbf{B}) &= \frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \left(J^{-2/3}(\mathbf{L}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{L}^T)\right) - \frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \left(\frac{2}{3}J^{-5/3}\mathbf{B}(\frac{J}{2}\mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}})\right) + \frac{k}{\rho_0}G'(J)\frac{J}{2}\mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}}\\ &= 2J^{-2/3}\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \mathbf{L}\mathbf{B} - 2\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \left(\frac{1}{3}J^{-2/3}\mathbf{B}\left(\mathbf{B}^{-1} : (\mathbf{L}\mathbf{B})\right)\right) + \frac{k}{\rho_0}G'(J)J\mathbf{B}^{-1} : (\mathbf{L}\mathbf{B})\\ &= 2J^{-2/3}\mathbf{B}\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \mathbf{D} - \frac{1}{3}(2J^{-2/3}\mathbf{B}\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \mathbf{I})(\mathbf{I} : \mathbf{D}) + \frac{k}{\rho_0}G'(J)J\mathbf{I} : \mathbf{D}\\ &= \left(2\bar{\mathbf{B}}\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} - \frac{1}{3}(2\bar{\mathbf{B}}\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\bar{\mathbf{B}}} : \mathbf{I})\mathbf{I} + \frac{k}{\rho_0}G'(J)J\mathbf{I}\right) : \mathbf{D}\\ &= \frac{J}{\rho_0}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\end{aligned} \tag{1.80}$$

Pour la partie isochorique de l'énergie, de nombreux auteurs utilisent des modèles isotropes incompressibles, étendus au cas compressible. On peut néanmoins rencontrer quelques modèles plus spécialisés. Par exemple, MOREAU [2000] dans sa thèse propose d'étendre les modèles de néo-HOOKE et de MOONEY par l'ajout d'un terme raidissant aux fortes déformations.

1.3.3 Modèles anisotropes

La littérature offrait jusqu'à présent un choix beaucoup plus restreint pour les modèles anisotropes. Cependant la récente extension du domaine d'application des comportements élastiques non linéaires à de nouveaux types de matériaux, en particulier les biomatériaux, amène de plus en plus d'auteurs à se pencher sur le problème de l'hyperélasticité anisotrope.

• **Le modèle de WEISS ET AL. [1996]** a été développé pour la modélisation des ligaments du genoux humain qui ont un comportement *isotrope transverse*. Les auteurs considèrent l'incompressibilité du matériau et négligent la dépendance en J_5, si bien que l'énergie prend la forme suivante :

$$\psi(I_1,I_2,J_4^1) = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) + C_3\left(\exp(J_4^1-1) - J_4^1\right) \tag{1.81}$$

• **Le modèle de SCHRÖDER ET AL. [2005]** est formulé de manière générale afin de s'adapter au cas isotrope transverse ou orthotrope. Les auteurs utilisent une formulation compressible et s'intéressent tout particulièrement au développement d'une énergie respectant certains critères de stabilité matérielle :

$$\begin{aligned}\psi(I_1,I_2,I_3,J_4^{(i)},J_5^{(i)}) = \alpha_1\frac{I_1}{I_3^{1/3}} + \alpha_1\frac{I_2}{I_3^{1/3}} - \alpha_3\ln I_3 + \alpha_4\left(I_3^{\alpha_5} + I_3^{-\alpha_5} - 2\right)\\ + \alpha_6(J_5^{(i)} - I_1J_4^{(i)} + I_2) + \alpha_7\frac{J_4^{(i)\alpha_8}}{I_3^{1/3}} + \alpha_9(I_1J_4^{(i)} - J_5^{(i)}) + \alpha_{10}J_4^{(i)\alpha_{11}}\end{aligned} \tag{1.82}$$

avec $(i) = (1)$ dans le cas isotrope transverse et $(i) = (1,2)$ dans le cas orthotrope. Pour des considérations de stabilité matérielle, on doit avoir, $\alpha_5 \geq 1$, $\alpha_8 \geq 1$, $\alpha_{11} \geq 1$ les autres paramètres devant être positifs. De plus, pour respecter la condition de contrainte nulle à l'état naturel, on doit également avoir :

$$\left.\begin{aligned}\alpha_7 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2 - 2n\alpha_9 - n\alpha_{10}\alpha_{11}}{n(\alpha_8 - 1/3)}\\ \alpha_6 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2 - 2n\alpha_9 - n\alpha_{10}\alpha_{11}}{n(\alpha_8 - 1/3)}\alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}\alpha_{11}\end{aligned}\right\} \text{pour } n = 1 \text{ ou } n = 2 \tag{1.83}$$

D'autres modèles ont été proposés, par exemple HOLZAPFEL ET AL. [2000] considère un découplage des parties anisotropiques et isotropiques de l'énergie libre.

1.3.4 Modèles micro-physiques

On regroupe sous l'appellation « micro-physique » les modèles prenant en compte la *microstructure* du matériau. Il existe un certain nombre d'outils permettant d'intégrer cette microstructure. Les premiers utilisés proviennent de la physique statistique. On considère que le matériau est formé par un assemblage *amorphe*(4) de chaînes de polymères qui compose la *gomme*, si bien que la plupart des modèles dérivés de cette approche sont regroupés sous l'appellation « modèles statistiques ».

Un des premiers constats expérimentaux qui a conduit au développement de ces modèles n'a paradoxalement rien à voir avec l'observation micro-physique du matériau. JOULE en 1859 reprend des observations qualitatives de GOUGH datant de 1805, et observe qu'un élastomère vulcanisé soumis à un étirement se refroidit pour de faibles niveaux de déformation, puis s'échauffe pour des déformations plus importantes. Il constate également qu'un élastomère se rétracte lorsqu'il est soumis à une augmentation de température. Ces effets sont en opposition avec ceux observés sur les matériaux métalliques, les cristaux, les céramiques ou le verre. Un ressort métallique soumis à une élongation se refroidit (tant que le matériau est dans sa phase élastique). S'il est chauffé, ce même ressort s'allonge.

L'élasticité dans ce type de matériau est due à une variation d'énergie interne. Un matériau métallique ne voit pas son entropie évoluer lorsqu'il est soumis à une déformation, les mécanismes microscopiques sont reliés à de petites variations d'équilibre des atomes composant le réseau cristallin. Pour les élastomères, les expériences de JOULE et GOUGH ainsi que celles de MEYER et FERRY (1935) montrent que l'élasticité est due à une variation d'entropie du réseau. L'énergie provient de mouvements browniens des chaînes du réseau ; c'est le concept de *l'élasticité entropique* (pour une plus ample discussion voir WARD & SWEENEY [2004]).

• **Le modèle de néo-HOOKE** est le premier modèle statistique hyperélastique (TREOLAR 1943). La construction du modèle s'effectue en deux étapes. Il faut tout d'abord approcher l'entropie d'une chaîne de polymère puis construire l'entropie du réseau d'un volume élémentaire représentatif de l'élastomère. On considère donc une chaîne composée de n segments de monomères de longueur l. Si l'on place l'origine d'un repère sphérique en une extrémité de la chaîne, la probabilité de trouver l'autre extrémité dans une coque de rayon r et d'épaisseur dr (voir figure 1.5) peut s'exprimer à travers différentes fonctions de probabilité. On peut choisir une forme *gaussienne* (initialement proposée dans les travaux de KUHN et GRÜN) :

$$p(r) = \left(\frac{1}{l}\sqrt{\frac{3}{2n\pi}}\right)^3 \exp\left[-\frac{3r^2}{2nl^2}\right] \tag{1.84}$$

La loi de BOLTZMANN relie l'entropie d'une chaîne avec la distribution de probabilité $p(r)$ qui représente l'ensemble des configurations possibles de la chaîne (autrement appelée *conformation* de la chaîne) :

$$\eta_{chaîne} = k\ln(p(r)) = C - \frac{3k}{2nl^2}r^2 \tag{1.85}$$

(4). à l'état naturel seulement

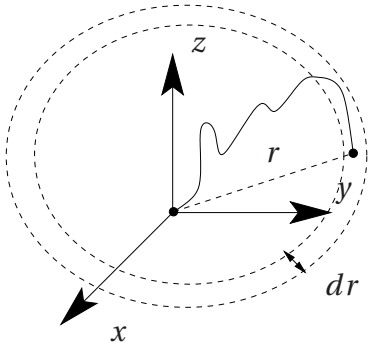


Figure 1.5 – *Chaine de polymère*

k est la constante de BOLTZMANN, C est une constante. Si l'on néglige la participation de l'énergie interne dans l'énergie libre de HELMHOLTZ, on obtient (avec Θ la température absolue) :

$$\psi_{chaîne} = -\eta_{chaîne}\Theta = \frac{3k}{2nl^2}r^2\Theta - C\Theta \tag{1.86}$$

REESE [2003] fait remarquer que la forme du potentiel d'énergie libre induit dans la chaîne un effort toujours positif. Si l'on assume que l'état de contrainte macroscopique d'un réseau de chaînes s'obtient en sommant les efforts dans une même direction et en la divisant par la section du volume macroscopique représentatif, on obtient une somme de termes positifs. Or la configuration au repos d'un réseau de chaînes est supposée sans contrainte, ce qui induirait la nullité de chaque effort et donc une distance initiale entre les extrémités de la chaîne nulle ($r_0 = 0$). Il doit donc exister dans le réseau un effort de compression qui n'est pas pris en compte par le modèle, par exemple les efforts de répulsion interatomique.

L'énergie libre du réseau peut être calculée de la manière suivante (N désigne le nombre de chaînes par élément de volume) :

$$\psi = \int \psi_{chaîne}(r)\,dN \tag{1.87}$$

Si l'on a dans la configuration initiale une distance entre les extrémités de $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ et dans la configuration déformée de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en effectuant l'hypothèse d'affinité du volume macroscopique et en utilisant les déformations principales du tenseur de CAUCHY-GREEN droit, on a (figure 1.6) :

$$x = \lambda_1 x_0 \quad y = \lambda_2 y_0 \quad z = \lambda_3 z_0 \tag{1.88}$$

si r_0,θ_0,φ_0 représentent la position dans le repère sphérique, alors :

$$r^2 = r_0^2(\lambda_1^2 \sin^2\theta_0 \cos^2\varphi_0 + \lambda_2^2 \sin^2\theta_0 \sin^2\varphi_0 + \lambda_3^2 \cos^2\theta_0) \tag{1.89}$$

En utilisant la relation (TREOLAR) :

$$dN = \frac{N}{4\pi}\sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 \tag{1.90}$$

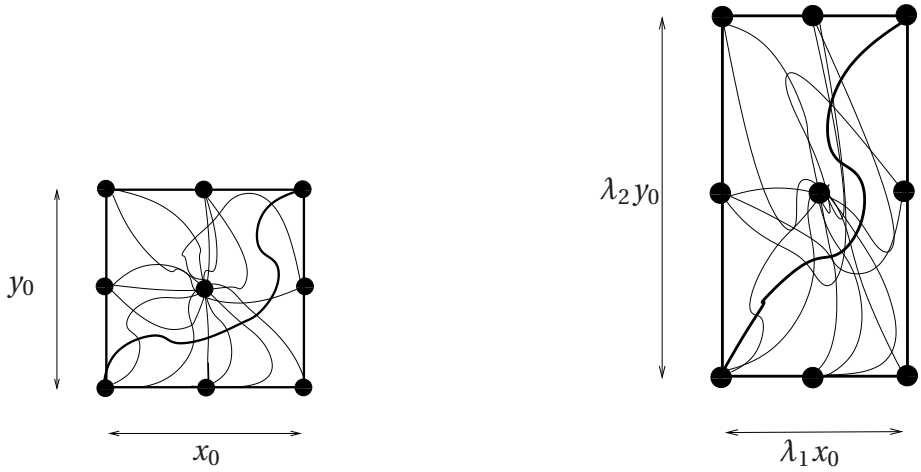


Figure 1.6 – *Configuration non-déformée et déformée d'un réseau macroscopique de chaînes de polymères*

ainsi que les équations (1.86), (1.87), (1.89) et $r_0^2 = nl^2$, on obtient la forme générique du modèle de néo-HOOKE :

$$\psi = \frac{1}{2} Nk\Theta(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \tag{1.91}$$

Le modèle de néo-HOOKE est valable pour des extensions de chaînes modérées ($r \ll nl$). Il ne traduit pas le phénomène de rigidification, caractéristique d'un élastomère pour des déformations importantes.

• **Les modèles non Gaussien** tiennent compte du fait qu'une chaîne de polymère ne peut être étirée à l'infini. Ils sont la plupart du temps basés sur une densité de probabilité utilisant la fonction de LANGEVIN (ce type de fonction de probabilité a été introduit par KHUN & GRÜN et JAMES & GUTH au début de la seconde guerre mondiale), de la forme :

$$p(r) = p_0 \exp\left[-n\left(\frac{r}{L}\beta + \ln\frac{\beta}{\sinh\beta}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \beta = \mathscr{L}^{-1}(r/L) \tag{1.92}$$

$r/L = \mathscr{L}(\beta) = \coth\beta - 1/\beta$ est la fonction de Langevin, la limite d'extensibilité de la chaîne est paramétrée par sa longueur $L = nl$. Le ratio $\lambda_r = r/L$ représente l'élongation de la chaîne, il est compris entre $n^{-1/2}$ et 1 (puisque $r_0 = \sqrt{n}l$). L'énergie libre de la chaîne s'écrit donc :

$$\psi_{chaîne} = nk\Theta\left(\frac{r}{L}\mathscr{L}^{-1}(r/L) + \ln\frac{\mathscr{L}^{-1}(r/L)}{\sinh\mathscr{L}^{-1}(r/L)}\right) + \psi_0 \tag{1.93}$$

ψ_0 est une constante telle que l'énergie vérifie la condition de normalisation (1.10). La fonction de Langevin inverse peut être approchée par un approximant de PADÉ (d'autres auteurs utilisent une approximation en série polynomiale des invariants) :

$$\mathscr{L}^{-1}(\lambda_r) = \lambda_r \frac{3 - \lambda_r^2}{1 - \lambda_r^2} + o(\lambda_r^6) \tag{1.94}$$

Le passage de l'échelle micro à l'échelle macroscopique peut s'effectuer en supposant que la matière du volume élémentaire représentatif est amorphe (la répartition dans l'espace



(a) 8 chaînes, ARRUDA & BOYCE (1993)

(b) 4 chaînes, FLORY & REHNER (1943)

Figure 1.7 – *Type de réseau polymériques complexes*

est donc aléatoire), l'énergie libre du réseau est donc égale à la moyenne de l'énergie d'une chaîne sur une sphère de rayon r_0 (cf. les travaux de WU & VAN DER GIESSEN, BEATTY [2003]). Avec l'hypothèse d'affinité, on retrouve l'approche menée pour le modèle néo-Hookéen. MIEHE ET AL. [2004] proposent un modèle statistique non-Gaussien qui n'utilise pas l'hypothèse d'affinité et qui est basé sur l'homogénéisation de comportement non-linéaire.

On peut également supposer que le réseau est structuré et que l'énergie libre est la somme des énergies dans chaque direction de la structure. JAMES & GUTH ont ainsi proposé un modèle macroscopique formé de trois chaînes de polymères orientées dans les trois directions principales de la déformation. Si $r_o = \sqrt{n_3}l$ est la longueur initiale du vecteur chaîne (n_3 dénote le nombre de monomères formant le réseau de trois chaînes) l'élongation de la chaîne j s'écrit :

$$\lambda_{jr} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{n_3}} \qquad \text{avec} \quad j = 1,2,3 \tag{1.95}$$

λ_j est la déformation macroscopique principale. L'énergie de déformation du réseau prend la forme :

$$\psi = \frac{Nk\Theta}{3} n_3 \sum_{j=1}^{3} \left(\mathscr{L}^{-1}(\lambda_{jr})\lambda_{jr} + \ln\left(\frac{\mathscr{L}^{-1}(\lambda_{jr})}{\sinh \mathscr{L}^{-1}(\lambda_{jr})} \right) \right) + \psi_0 \tag{1.96}$$

D'autres auteurs ont proposé des organisations de réseaux différentes. ARRUDA & BOYCE (1993) considèrent un réseau formé de huit chaînes orientées suivant les diagonales d'un cube unité. Cette organisation particulière permet de relier l'élongation de chaque chaîne avec le premier invariant de la déformation (en utilisant l'hypothèse d'affinité) ce qui en fait un modèle particulièrement simple à implémenter. La densité d'énergie s'écrit dans ce cas :

$$\psi = Nk\Theta n_8 \left(\mathscr{L}^{-1}(\lambda_r)\lambda_r + \ln\left(\frac{\mathscr{L}^{-1}(\lambda_r)}{\sinh \mathscr{L}^{-1}(\lambda_r)} \right) \right) + \psi_0 \tag{1.97}$$

avec :

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{I_1}{3n_8}} \tag{1.98}$$

Le même type d'approche est réalisé par FLORY & REHNER (1943) qui étudient le cas d'un réseau de quatre chaînes, en considérant un tétraèdre bâti sur quatre sommets d'un cube unitaire (voir figure 1.7).

Les modèles micro-physiques présentés dans cette section idéalisent la micro-structure d'un élastomère, ils ne tiennent pas compte, par exemple, de l'enchevêtrement. Il existe cependant des concepts récents permettant d'intégrer une partie des ces effets dans le modèle, traduisant des phénomènes anélastiques qui dépassent le cadre de ce chapitre (voir par exemple les articles de KLÜPPEL & SHRAMM [2000]; MIEHE & GÖKTEPE [2005]). Dans ce domaine, les techniques d'homogénéisation non linéaires semblent être des outils prometteurs (voir PONTE CASTAÑEDA & TIBERIO [1999]; LAHELLEC [2001]).

1.4 Solutions analytiques de problèmes d'équilibre

En 1979, MUNCASTER met en évidence l'impossibilité de mesurer en même temps la déformation et la contrainte en un point interne au solide. Ce simple constat, impose à l'expérimentateur la réalisation de tests pour lesquels au moins une des mesures s'effectue sur le bord du domaine. On a donc besoin de connaître le type de déformations pour lequel les caractéristiques que l'on cherche à mesurer, sont fonctions de quantités mesurées aux bords du domaine. Ce type de déformations est généralement dénommé *solution contrôlable*, il satisfait les équations d'équilibres sans l'ajout de forces de volume et est ainsi entièrement paramétré par des forces surfaciques. Si de plus, cette solution est vraie indépendamment du matériau choisi, elle est appelée *solution universelle*.

RIVLIN est un des premiers à s'être intéressé à ce type de problème. A la fin des années 40, il a cherché à construire et classifier un ensemble de solutions contrôlables en partant d'exemples isotropes et incompressibles (voir BARENBLATT & JOSEPH [1997]). En 1955, ERICKSEN qui généralise le travail initié par RIVLIN, montre que les seules relations universelles que l'on peut établir pour des matériaux hyperélastiques, isotropes et sans contraintes, sont le cas des déformations homogènes.

1.4.1 Cas des déformations homogènes

Ce type de déformations est de loin le plus privilégié par l'expérimentateur. Les cas les plus fréquents sont l'extension uni, bi ou tri-axiale, le cisaillement simple ou pure.

• **L'extension biaxiale** est définie par le gradient de déformation suivant :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix} \tag{1.99}$$

Les deux premiers invariants du tenseur de CAUCHY-GREEN droit s'écrivent dans ce cas :

$$I_1(\lambda) = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \qquad I_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} + \lambda^4 \tag{1.100}$$

L'hypothèse de contraintes planes nous permet d'éliminer l'inconnue pression et l'on obtient les formes suivantes des contraintes :

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = 2\frac{\partial \psi}{\partial I_1}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial I_2}\left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{1.101}$$

• **L'extension uniaxiale** est définie par le gradient de déformation suivant :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \tag{1.102}$$

Les deux premiers invariants du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche sont dans ce cas :

$$I_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \qquad I_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \tag{1.103}$$

L'état de contraintes associés est tel que $\Pi_{22} = \Pi_{33} = 0$ ce qui nous permet d'éliminer l'inconnue pression, on obtient :

$$\Pi_{11} = 2\frac{\partial \psi}{\partial I_1}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial I_2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{1.104}$$

Des exemples schématisés d'éprouvettes correspondant à un essai d'extension equi-biaxiale et un essai d'extension uni-axiale sont présentés sur les figures 1.8 et 1.9.

• **Le glissement simple** est défini par le gradient de déformation suivant :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.105}$$

Les deux invariants du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche sont dans ce cas égaux :

$$I_1(\gamma) = 3 + \gamma^2 \qquad I_2(\gamma) = 3 + \gamma^2 \tag{1.106}$$

Si l'on s'intéresse aux matériaux incompressibles et isotropes, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + 4\frac{\partial \psi}{\partial I_2} + p & 2\gamma(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}) & 0 \\ -\gamma(2\frac{\partial \psi}{\partial I_2} + p) & 2\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + 4\frac{\partial \psi}{\partial I_2} + p & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + 2\frac{\partial \psi}{\partial I_2}(2+\gamma^2) + p \end{bmatrix} \tag{1.107}$$

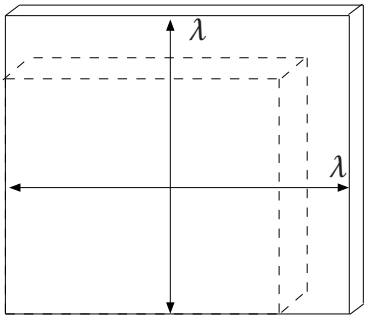
La pression p est indéterminée dans le cas du cisaillement simple.

• **Le cisaillement pur** correspond à un essai d'extension uniaxiale en déformations planes, il est défini par le gradient de déformation suivant :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \tag{1.108}$$

Les deux invariants sont comme dans le cas précédent égaux :

$$I_1(\lambda) = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \qquad I_2(\lambda) = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \tag{1.109}$$



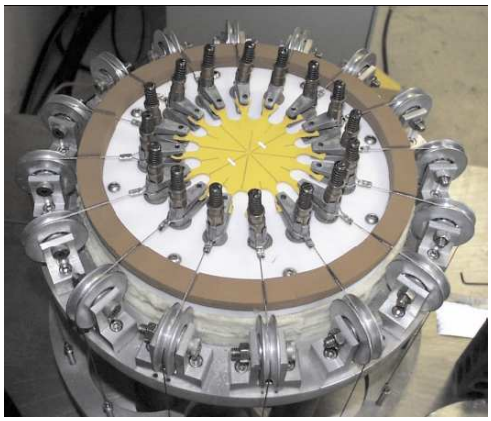
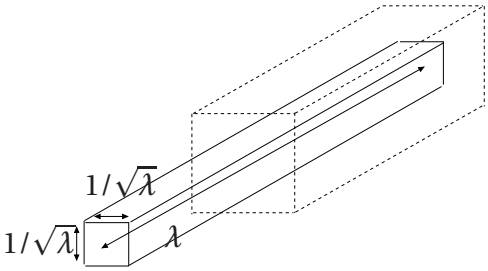


Figure 1.8: Extension equi-biaxiale



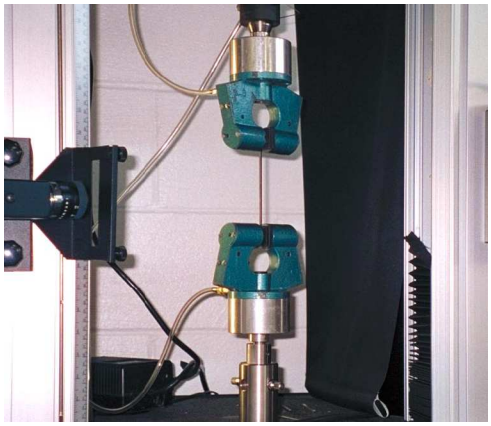


Figure 1.9: Traction uni-axiale

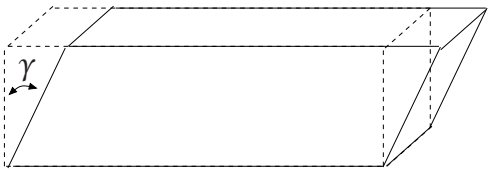




Figure 1.10: Glissement simple

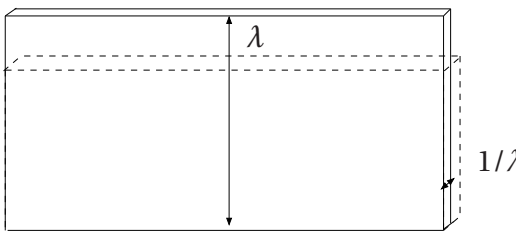




Figure 1.11: Cisaillement pur

L'hypothèse de contraintes planes nous permet d'éliminer l'inconnue pression et l'on obtient les formes suivantes des contraintes :

$$\Pi_{11} = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_1}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right) \quad \Pi_{22} = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_1}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\left(\lambda^2 - 1\right) \tag{1.110}$$

Des exemples schématisés d'éprouvettes correspondant à des essais de glissement simple et de cisaillement pur sont présentés sur les figures 1.10 et 1.11.

1.4.2 Cas des déformations non-homogènes

Si pour des matériaux hyperélastiques isotropes et sans contrainte (de type incompressibilité) on connaît l'ensemble des solutions universelles possibles, il n'en va pas de même pour des matériaux avec contraintes. Dans un soucis de généralisation, RIVLIN a montré qu'il existe cinq familles de déformations contrôlables qui sont des solutions universelles pour la classe des matériaux incompressibles. ERICKSEN, en élargissant le travail de RIVLIN a prouvé qu'il était possible d'étendre ces cinq familles, mais il n'a pu déterminer l'ensemble des solutions universelles.

Les cinq familles de RIVLIN et ERICKSEN sont les suivantes :

- *famille 1* : cas des déformations homogènes.
- *famille 2* : inflation, flexion, torsion, extension d'un cylindre creux. Cette déformation décrit la transformation d'un cylindre creux en un autre cylindre. Le système de coordonnées est pris cylindrique dans les deux configurations

$$r = \sqrt{AR^2 + B}, \qquad \theta = C\Theta + DZ, \qquad z = E\Theta + FZ \tag{1.111}$$

- *famille 3* : inflation, compression d'un secteur d'une coque sphérique. Le système de coordonnées est pris sphérique dans les deux configurations

$$r = (\pm R^3 + A)^{1/3}, \qquad \theta = \pm\Theta, \qquad \phi = \Phi \tag{1.112}$$

- *famille 4* : flexion, extension cisaillement d'un bloc rectangulaire. Cette déformation décrit la transformation d'un parallélépipède rectangle en un cylindre. Dans la configuration de référence le système de coordonnées est pris cartésien, dans la configuration actuelle il est choisi cylindrique.

$$r = \sqrt{2AX}, \qquad \theta = BY, \qquad z = \frac{Z}{AB} - BCY \tag{1.113}$$

- *famille 5* : flexion, extension cisaillement d'un cylindre creux. Cette déformation décrit la transformation d'un cylindre creux en un parallélépipède rectangle. Dans la configuration de référence le système de coordonnées est pris cylindrique, dans la configuration actuelle il est choisi cartésien.

$$x = \frac{1}{2}AB^2R^2, \qquad y = \frac{\Theta}{AB}, \qquad z = \frac{Z}{B} + \frac{C\Theta}{AB} \tag{1.114}$$

Remarque 1.1
Les deux dernières familles restent très conceptuelles et ne correspondent à notre connaissance à aucun essai « physiquement » réalisable ❑

En 1965 SINGH & PIPKIN découvrent une sixième famille de déformations qui conduit à des invariants constants pour un état de déformation non-homogène. Elle est définit par :

$$r = \sqrt{AR^2}, \qquad \theta = D\ln(BR) + C\Theta, \qquad z = FZ \qquad \text{avec ACF=1} \tag{1.115}$$

A titre d'illustration on présente dans la suite un exemple de déformation non-homogène appartenant à la *famille 2*. Cette exemple est souvent utilisé afin d'identifier un comportement hyperélastique (JAZZAR [1993]; HOLZAPFEL ET AL. [2000]).

• **L'extension-inflation d'un tube** conduit à un gradient de déformation dans le repère cylindrique (R,Θ,Z) qui prend la forme suivante :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_\theta(R)\lambda_z} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta(R) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \tag{1.116}$$

avec λ_z qui représente l'extension du tube, $\lambda_\theta(R) = r/R$ caractérise l'inflation du tube. Avec ces notations, la position d'un point dans la configuration déformée s'écrit :

$$r = \sqrt{\frac{R^2 - A^2}{\lambda_z} + a^2} \qquad \theta = \Theta \qquad z = \lambda_z Z \tag{1.117}$$

A et a sont respectivement les rayons internes dans les configurations non déformées et déformées, L et l les hauteurs du tube dans les deux configurations, B et b les rayons externes dans les deux configurations. En utilisant l'équation (1.117) et en posant $\lambda_a = a/A$ et $\lambda_b = b/B$ on peut obtenir les relations :

$$\lambda_a^2\lambda_z - 1 = \frac{R^2}{A^2}(\lambda_\theta^2\lambda_z - 1) = \frac{B^2}{A^2}(\lambda_b^2\lambda_z - 1) \tag{1.118}$$

L'équilibre local en l'absence de forces de volume, se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{1.119}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(b) = 0 \\ \sigma_{rr}(a) = -p_i \end{cases} \tag{1.120}$$

L'intégration de (1.119) nous donne :

$$\sigma_{rr}(\xi) = \int_\xi^b (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\frac{dr}{r} \qquad \text{et} \qquad p_i = \int_a^b (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\frac{dr}{r} \tag{1.121}$$

en différenciant $\lambda_\theta = r/R$ et $r^2 = (R^2 - A^2)/\lambda_z + a^2$, on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{d}r = R\mathrm{d}\lambda_\theta + \lambda_\theta \mathrm{d}R \\ \mathrm{d}R = \lambda_\theta \lambda_z \mathrm{d}r \end{cases} \tag{1.122}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{dr}{r} = (1 - \lambda_\theta \lambda_z)^2 \lambda_\theta^{-1} d\lambda_\theta \tag{1.123}$$

En prenant un modèle d'énergie fonction des dilatations principales et puisque l'état de contraintes associé à la déformation d'extension-inflation est sphérique, avec (1.34) on a :

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\theta} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \lambda_z \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_z} \tag{1.124}$$

On peut garder comme variable indépendante λ_θ. En utilisant conjointement (1.121), (1.124) et (1.123), la valeur de la pression à l'intérieur du cylindre est donnée par :

$$p_i = \int_{\lambda_b}^{\lambda_a} (\lambda_\theta^2 \lambda_z - 1)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\theta} \mathrm{d}\lambda_\theta \tag{1.125}$$

Pour une extension donnée (λ_z fixé), la pression interne devient une fonction de λ_a car, λ_a et λ_b sont liés par l'équation (1.118). L'effort axial est donné par :

$$N = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r \mathrm{d}r \tag{1.126}$$

en utilisant la notation $\sigma_{ii} = \overline{\sigma}_{ii} - p$, l'effort axial peut être exprimé en éliminant la pression hydrostatique (p) tel que :

$$N = 2\pi \int_a^b \left[\int_b^\xi (\overline{\sigma}_{\theta\theta} - \overline{\sigma}_{rr}) \frac{\mathrm{d}r}{r} - \overline{\sigma}_{rr} + \overline{\sigma}_{zz} \right] \xi \mathrm{d}\xi \tag{1.127}$$

à l'aide d'une intégration par partie on arrive à :

$$N = \pi \int_a^b (2\overline{\sigma}_{zz} - \overline{\sigma}_{\theta\theta} - \overline{\sigma}_{rr}) r \mathrm{d}r + a^2 \pi p_i \tag{1.128}$$

Comme pour la pression interne, on peut exprimer l'effort axial uniquement en fonction des dilatations principales :

$$\frac{N}{\pi A^2} = (\lambda_a^2 \lambda_z - 1) \int_{\lambda_b}^{\lambda_a} (\lambda_\theta^2 \lambda_z - 1)^{-2} \left(2\lambda_z \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_z} - \lambda_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\theta} \right) \lambda_\theta \mathrm{d}\lambda_\theta + p_i \lambda_a^2 \tag{1.129}$$

La détermination de solutions universelles est un sujet toujours actif en terme de recherche. L'ensemble des solutions universelles conduisant à des invariants constants, le cas des matériaux anisotropes ou avec contraintes anisotropes en sont des exemples. Sur ces sujets, les articles de BOSI & SALVATORI [1996]; WARNE & WARNE [1998, 1999]; PODIO-GUIDUGLI & TOMASSETTI [1999]; SACCOMANDI [2001] peuvent apporter un éclairage précieux.

1.5 Stabilité matérielle

La stabilité matérielle est abordée, dans cette partie, comme un outil pouvant permettre soit la validation, a posteriori, d'un jeu de coefficients identifié ou l'introduction de nouvelles méthodes d'identification, prenant en compte, a priori, ces conditions. Elle englobe un certain nombre de considérations, qui proviennent d'approches purement mathématiques ou thermodynamiques.

1.5.1 Conditions physiquement motivées

Un certain nombre de restrictions à apporter à la densité d'énergie ont été proposées dans la littérature, nous présentons ici les plus rencontrées.

• **L'inégalité de BAKER-ERICKSEN (1954)** s'écrit :

$$(\sigma_i - \sigma_j)(\lambda_i - \lambda_j) > 0, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \tag{1.130}$$

les σ_k, $k = 1,2,3$ sont les contraintes principales. Cette condition a été développée pour les matériaux isotropes et ne s'applique pas dans le cas des matériaux anisotropes. Elle consiste donc à postuler que la direction de la plus grande contrainte principale correspond à la plus grande dilatation principale.

• **L'inégalité de COLEMAN-NOLL (1959)** consiste à considérer deux états de déformation $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}^*$ reliés par une déformation pure $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{F}^* = \mathbf{GF}$, avec $\mathbf{G}$ définie positive, différente de l'identité. Cette condition s'écrit :

$$\left[\mathbf{\Pi}(\mathbf{F}^*) - \mathbf{\Pi}(\mathbf{F})\right] : \left[\mathbf{F}^{*T} - \mathbf{F}^T\right] > 0 \tag{1.131}$$

Une écriture plus forte de cette condition revient à :

$$(\mathbf{F}^\mathbf{T}.\mathbf{D}) : \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} : (\mathbf{F}^\mathbf{T}.\mathbf{D}) > 0 \tag{1.132}$$

avec $\mathbf{D}$ le taux de déformation eulérien. L'inégalité (1.131) a été critiquée par de nombreux auteurs, RIVLIN [1974] remarque que cette inégalité impose l'unicité de la solution ce qui est en contradiction avec le cas du flambement de structures hyperélastiques.

• **La condition d'élipticité de LEGENDRE-HADAMARD (1901)** s'écrit :

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) > 0, \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}_3^+ \tag{1.133}$$

En définissant le tenseur acoustique noté $\mathrm{Q}(\mathbf{F},\mathbf{b})$ par :

$$\mathrm{Q}(\mathbf{F},\mathbf{b})_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}\right)_{ijkl} b_j b_l \tag{1.134}$$

la condition (1.133) s'interprète comme étant une condition de définie positivité du tenseur acoustique. Ce qui revient à assurer que la vitesse de propagation d'ondes dispersives dans le matériau est réelle et positive.

ABEYARATNE & KNOWLES [1999] ont établi des conditions de stabilité matérielle avec une démarche proche de celle d'HADAMARD dans un cadre général de thermoélasticité non-linéaire. Ils ont notamment distingué le cas adiabatique de celui avec conduction thermique. Dans le cas adiabatique, Ils retrouvent une inégalité de défini positivité d'un tenseur acoustique définit comme suit :

$$\mathsf{H}(\mathbf{F},\mathbf{b},\Theta)_{ik} = \mathsf{Q}(\mathbf{F},\mathbf{b})_{ik} - \left(\frac{\partial^2\psi(\mathbf{F},\Theta)}{\partial\Theta\partial\Theta}\right)^{-1} b_i b_k \tag{1.135}$$

Pour le cas général, les auteurs proposent deux conditions nécessaires et suffisantes pour garantir la stabilité thermoélastique d'un matériau.

• **L'inégalité de HILL (1968)** consiste à vérifier la positivité du produit doublement contracté d'un tenseur taux de contrainte objectif par un taux de déformation objectif. Si $\mathbf{D}$ est le taux de déformation eulérien, m un réel, $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$ la dérivée de Jaumann de $\boldsymbol{\tau}$ (voir SIDOROFF [1982]) et $\mathscr{D}_m\boldsymbol{\tau}/\mathscr{D}_m t$ le taux objectif de contrainte défini par :

$$\frac{\mathscr{D}_m\boldsymbol{\tau}}{\mathscr{D}_m t} = \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} - m(\boldsymbol{\tau}.\mathbf{D} + \mathbf{D}.\boldsymbol{\tau}) \tag{1.136}$$

l'inégalité H_m de HILL s'écrit :

$$\frac{\mathscr{D}_m\boldsymbol{\tau}}{\mathscr{D}_m t} : \mathbf{D} > 0 \qquad \forall \mathbf{D} \neq 0 \tag{1.137}$$

HILL a également introduit une famille de mesures de la déformation $\mathbf{E_m}$ qui possède les mêmes directions propres que $\mathbf{C}$, tel que :

$$\mathbf{E_m} \begin{cases} \frac{\mathbf{U}^{2m}-1}{2m} & \text{si } m \neq 0 \\ \ln(\mathbf{U}) & \text{si } m = 0 \end{cases} \tag{1.138}$$

Il a également montré que l'inégalité H_m était équivalente à la définie positivité du Hessien de ψ par rapport à $\mathbf{E}_m$. HILL recommande d'utiliser la valeur $m = 0$ car pour les matériaux incompressibles, c'est la seule valeur de m qui n'impose pas de restrictions particulières sur la valeur du multiplicateur de Lagrange p. WANG & TRUESDELL ont critiqué ce choix et ont proposé la valeur $m = 3/2$ sur la base de considérations liées à un milieu fluide parfait, non-visqueux.

LEBLOND [1992] a proposé d'utiliser l'inégalité suivante :

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D} > 0 \qquad \forall \mathbf{D} \neq 0 \tag{1.139}$$

Sur des exemples simples il montre que cette inégalité semble raisonnable, contrairement aux inégalités H_0 et $H_{3/2}$ qui autorisent dans certains cas un module de compressibilité négatif où un module de cisaillement négatif.

1.5.2 Considérations mathématiques

La résolution d'un problème d'équilibre hyperélastique conduit généralement à la minimisation d'une fonctionnelle du type :

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F}(\mathbf{v}))\, d\Omega - P_{ext}(\mathbf{v}) \tag{1.140}$$

avec Ω_0 le domaine non déformé occupé par le solide, $\mathbf{v}$ le champ de déplacement inconnu, P_{ext} la puissance des efforts extérieurs. Les outils mathématiques qui sont exposés dans cette partie ont été développés, en premier lieu, pour répondre à la question de l'existence de solutions au problème d'équilibre (donc à l'existence de minima pour $L(\mathbf{v})$). Ils sont néanmoins présentés dans ce chapitre car ces outils se basent sur des propriétés particulières du potentiel d'énergie. De plus, le lien avec les conditions de stabilité thermodynamique est très fort puisque ces propriétés induisent la condition d'élipticité de LEGENDRE-HADAMARD (par exemple DESIMONE & DOLZMANN [2000] utilise le concept de la quasi-convexité en liason directe avec des problèmes de stabilité matérielle).

La *quasi-convexité* est un des premiers résultat qui puisse s'appliquer au cas de l'hyperélasticité. Cette condition due à MORREY [1952], garantie la semi-continuité inférieure de la fonction que l'on cherche à minimiser, ce qui constitue une condition nécessaire pour l'existence de solution au problème de minimisation. Cependant, cette propriété est en générale assez dure à vérifier (voir BALL [2002]).

Pour palier à cette difficulté, J.M. BALL a introduit en 1977 la notion de polyconvexité, un concept mathématique très puissant qui exprime la condition d'existence sous une forme locale. Ce résultat est à ce jour le seul qui permette de construire des potentiels d'énergie conduisant à un problème de minimisation bien posé. Il s'agit néanmoins d'une condition suffisante mais pas toujours nécessaire.

• **La polyconvexité** est basée sur le fait que la densité d'énergie $\psi(\mathbf{F})$ ne peut être convexe sur l'ensemble non convexe M_3^+ pour des raisons de respect de l'indifférence matérielle (voir CIARLET [1986]) . Par contre, si l'on peut écrire $\psi(\mathbf{F})$ sous la forme :

$$\psi(\mathbf{F}) = \overset{\star}{\psi}(\mathbf{F}, \mathrm{Cof}\mathbf{F}, \det\mathbf{F}) \tag{1.141}$$

on dira donc que la fonction $\psi(\mathbf{F})$ est polyconvexe si la fonction $\overset{\star}{\psi}$ est convexe.

Théorème 1.1 (BALL (1977))
Si la densité d'énergie $\psi(\mathbf{F})$ vérifie :

(1) la condition de polyconvexité : il existe une énergie $\overset{\star}{\psi}(\mathbf{F}, Cof\mathbf{F}, \det\mathbf{F})$ convexe telle que l'on vérifie eq. (1.141)
(2) la condition $\psi(\mathbf{F}) \to +\infty$ si $\det\mathbf{F} \to 0$
(3) la coercivité, il existe $\alpha > 0$ et β réel $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$ tel que :

$$\begin{aligned} &\psi(\mathbf{F}) \geq \alpha\left(\|\mathbf{F}\|^p + \|Cof\mathbf{F}\|^q + (\det\mathbf{F})^r\right) + \beta \qquad \text{pour tout} \quad \mathbf{F} \in M_3^+ \\ &\text{ou } \|.\| \text{ représente la norme euclidienne sur } M_3 \end{aligned} \tag{1.142}$$

alors le problème de minimisation admet au moins une solution.

❑

Le théorème 1.1 est le seul résultat d'existence en mécanique non linéaire qui soit suffisamment large pour rester vrai quel que soit le type de conditions traitées et le niveau de déformation imposé. BALL remarque que la condition de polyconvexité implique l'existence d'au moins une solution, indépendamment du type de sollicitation ou des conditions aux limites, ce qui n'est pas forcement réaliste. Il s'agit donc d'une condition *forte*, qui n'est pas forcement respectée par tous les modèles [5]. Un matériau de ST-VENANT-KIRCHOHFF eq. (1.143), n'est pas polyconvexe mais permet d'obtenir, par exemple, la réponse au flambement d'une structure.

$$\bar{\psi}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2 + \mu(\mathrm{tr}\mathbf{E}^2) \tag{1.143}$$

La polyconvexité peut être reliée avec la quasi-convexité et à la condition d'ellipticité d'HADAMARD :

$$\text{polyconvexité} \Rightarrow \text{quasi-convexité} \Rightarrow \text{ellipticité} \tag{1.144}$$

Une énergie polyconvexe est donc matériellement stable au sens de LEGENDRE-HADAMARD. De plus si l'on rajoute les conditions de coercivité, on peut garantir l'existence de solution au problème d'équilibre. Ces conditions sont donc particulièrement intéressantes et induisent uniquement des contraintes sur la forme de l'énergie et sur les valeurs de ces paramètres.

Une propriété fréquemment utilisée dans la littérature pour construire des modèles phénoménologiques polyconvexes consiste à décomposer l'énergie sous la forme suivante :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi_1(\mathbf{F}) + \psi_2(\mathrm{Cof}\mathbf{F}) + \psi_3(\det\mathbf{F}) \tag{1.145}$$

si les fonctions ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont convexes par rapport à leurs arguments alors l'énergie ψ est polyconvexe. Une condition suffisante pour construire une fonction polyconvexe a été proposée par BALL. Si l'on écrit ψ sous la forme $\psi(\mathbf{F}) = \widehat{\psi}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, et si $\widehat{\psi}$ est symétrique, convexe et respectivement monotone (croissante) de ses trois arguments alors $\psi(\mathbf{F})$ est polyconvexe.

Dans le cas de fonctions d'énergie isotrope, MIELKE [2005] propose un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction $\widehat{\psi}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, permettant de construire des fonctions polyconvexes. Ces développements assez théoriques restent peu applicables dans la pratique. Néanmoins, il montre que dans le cas de l'élasticité isotrope incompressible si $\widehat{\psi}(\boldsymbol{\mu})$ est convexe [6] et non décroissante alors ψ est polyconvexe [7] . A l'aide d'un exemple simple, l'auteur souligne que cette condition est suffisante mais pas toujours nécessaire.

STEIGMANN [2003] a récemment proposé une autre propriété permettant de caractériser des fonctions polyconvexes dans le cas de modèles de comportement isotrope. Il utilise les invariants du tenseur de déformation pure droit i_1,i_2,i_3 et la représentation $\psi(\mathbf{F}) = \breve{\psi}(i_1,i_2,i_3)$,

(5). On ne doit pas pour autant bannir les modèles ne respectant pas la polyconvexité

(6). avec le paramétrage $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\mu_2/\mu_1,1/\mu_2)$ tel que $\{\mu \in [1,\infty[^2 | \sqrt{(}\mu_1) \leq \mu_2 \leq \mu_1^2\}$, μ_1 correspond à la plus grande dilatation propre λ_i

(7). sous réserve que si l'on écrit $\psi(\mathbf{F}) = \widehat{\psi}(\boldsymbol{\mu}) + r(\det\mathbf{F})$ la fonction r soit aussi convexe et non décroisante

avec :

$$i_1(\mathbf{U}) = \mathrm{tr}\mathbf{U} \qquad i_2(\mathbf{U}) = \mathrm{tr}(\mathrm{Cof}\mathbf{U}) \qquad i_3(\mathbf{U}) = \det \mathbf{U} \tag{1.146}$$

Cette représentation du comportement isotrope l'amène au résultat suivant :

Théorème 1.2 (STEIGMANN [2003])
Une densité d'énergie de la forme $\overset{\frown}{\psi}(i_1,i_2,i_3)$ *est polyconvexe si :*

- $\overset{\frown}{\psi}$ *est une fonction strictement convexe par rapport à chacun de ses trois arguments*
- $\overset{\frown}{\psi}$ *est une fonction strictement croissante de* i_1 *et* i_2

❑

Il particularise également ce résultat dans le cas incompressible, puisque $i_3 = 1$, les deux conditions deviennent :

- $\overset{\frown}{\psi}$ est une fonction strictement convexe par rapport à i_1 et i_2
- $\overset{\frown}{\psi}$ est une fonction strictement croissante de i_1

Il existe dans la littérature d'autres résultats permettant de construire des potentiels d'énergie polyconvexes. CIARLET [1986] montre qu'une densité d'énergie du type modèle de OGDEN est polyconvexe, sous certaines conditions que doivent resperter les paramètres matériaux.

HARTMANN & NEFF [2003] se sont intéressés à la polyconvexité de fonctions d'énergie libre, isotropes et incompressibles étendues aux cas compressibles. Ils démontrent ainsi que les fonctions polynomiales généralisées dues à RIVLIN & SAUNDERS [1951] ne sont en général pas polyconvexes puisque les termes $(I_2(\overline{\mathbf{C}})-3)^i$ avec $i>1$ ne sont pas polyconvexes. Ils proposent un certain nombre de fonctions de I_1 et I_2, permettant le développement de modèles phénoménologiques polyconvexes. Ces derniers sont présentés dans le tableau 1.4.

$\psi_1(I_1) = (I_1^k - 3^k)^i$	$i \geq 1, k \geq 1$
$\psi_2(I_2) = \left(I_2^{3k/2} - (3\sqrt{3})^k\right)^j$	$j \geq 1, k \geq 1$
$\psi_3(I_1) = \exp(\psi_1(I_1)) - 1$	$j \geq 1, k \geq 1$
$\psi_4(I_2) = \exp(\psi_2(I_2)) - 1$	$j \geq 1, k \geq 1$

Tableau 1.4 – *Fonctions polyconvexes de* $I_1(\overline{\mathbf{C}})$ *et* $I_2(\overline{\mathbf{C}})$

1.6 Identification

L'identification de lois de comportement hyperélastique se ramène dans la plupart des cas à l'écriture d'un problème de minimisation de l'écart entre les valeurs expérimentales et le modèle analytique ou numérique correspondant à l'essai. En général la mesure d'erreur est choisie au sens des moindres carrés. Certains modèles exhibant une dépendance linéaire de leurs paramètres matériaux, conduisent à une méthode des moindres carrés classique. Les autres, nécessitent la misent en oeuvre de méthodes non-linéaires.

Il est de notoriété scientifique que la stratégie d'identification ne conduit pas forcement, et ce pour diverses raisons, à un jeu unique de paramètres. Pour limiter ce problème, nombre d'auteurs ont montré l'intérêt de combiner les essais (en sommant les écarts obtenus sur chaque essai, cf par exemple JAZZAR [1993]; OGDEN ET AL. [2004]), ou d'appliquer une stratégie d'identification spécifique (voir LAMBERT-DIANI & REY [1999]).

La prise en compte des conditions de stabilités matérielles, est réalisée dans la plupart des cas à posteriori, ce qui peut permettre de faire un tri parmi les jeux de paramètres identifiés. Le logiciel éléments-finis ABAQUS propose ainsi un module de validation permettant de vérifier si la fonction d'énergie identifiée respecte le critère de HILL (1.137). HARTMANN [2001] propose d'inclure directement ces contraintes dans la phase d'identification. Il s'intéresse plus particulièrement à la polyconvexité du modèle isotrope incompressible de RIVLIN & SAUNDERS [1951]. Il remarque qu'une condition suffisante revient à imposer la positivité des paramètres et couple l'identification des moindres carrés avec ces conditions en inégalités.

1.6.1 Identification avec contraintes pour les modèles isotropes incompressibles

En reprenant l'idée développée par HARTMANN [2001] pour les modèles polynomiaux, à savoir l'introduction de contraintes de stabilité matérielle dans la procédure d'identification, on peut essayer de développer une procédure suffisamment générale pour s'appliquer à d'autres modèles d'énergie libre. Reste à se poser la question du choix et de la pertinence des conditions à imposer. La polyconvexité semble être une des propriétés les plus intéressantes puisqu'elle garantit l'existence de solutions au problème d'équilibre et qu'elle implique la condition d'ellipticité de LEGENDRE-HADAMARD.

Pour obtenir des contraintes intégrables dans une procédure d'identification, on peut par exemple utiliser le résultat de STEIGMANN [2003]. Celui-ci permet de ramener la condition de polyconvexité en des conditions de convexité et de croissance d'une énergie libre fonction des invariants i_1 et i_2 (en incompressible $i_3 = 1$). Ou encore le résultat de BALL qui revient au même type de conditions mais avec une écriture fonction de λ_1 et λ_2.

Dans le premier cas, on doit vérifier la convexité de l'énergie a priori pour tout $i_1 \geq 3$ et $i_2 \geq 3$. Cependant, CURRIE [2004] a montré que les invariants sont définis sur un espace de définition plus restreint.

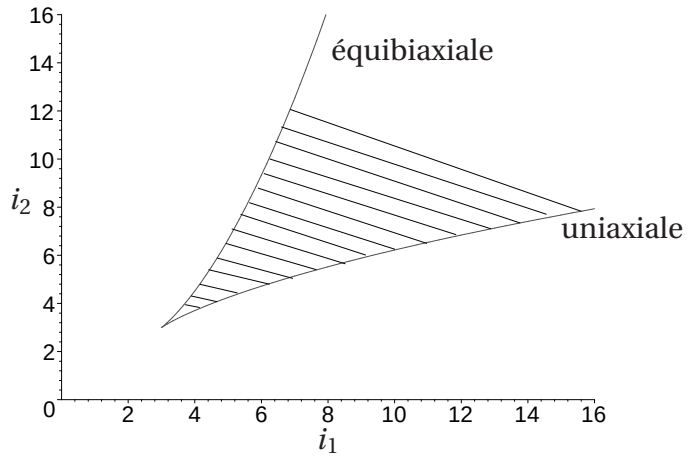


Figure 1.12 – *Région du plan i_1,i_2 conduisant à une déformation réelle*

En effet les élongations principales doivent respecter l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^3 - i_1\lambda^2 + i_2\lambda - 1 = 0 \tag{1.147}$$

En notant :

$$H = (i_1^2 - 3i_2)/9, \qquad G = i_1 i_2/3 - 2(i_1/3)^3 - 1 \tag{1.148}$$

on peut montrer que les élongations principales sont réelles si les invariants vérifient la contrainte :

$$G^2 + 4H^3 \leq 0 \tag{1.149}$$

Ceci conduit à un espace de définition de i_1 et i_2 borné par les racines de l'équation $G^2 + 4H^3 = 0$, c'est à dire l'extension uniaxiale et l'extension équibiaxiale (voir figure 1.12).

On peut donc réaliser une identification avec contraintes de stabilité matérielle en prenant quelques points de la région du plan i_1,i_2 définie par CURRIE et en imposant la convexité et la croissance par rapport à i_1 de la fonction $\psi(i_1,i_2)$. De plus, on peut encore limiter cette région du plan i_1,i_2 en considérant que la plupart des applications que l'on souhaite traiter se situe à un niveau de déformation différent de l'infini. On peut donc se fixer des bornes supérieures de déformation pour lesquelles on souhaite garantir localement la polyconvexité de la fonction d'énergie libre, ce qui conduit au problème de minimisation suivant :

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_n$ représente le jeu des n paramètres matériaux à identifier, $f(\mathbf{a})$ la fonction objectif que l'on cherche à minimiser tel que :

$$f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{\Pi}(\mathbf{a}) - \mathbf{\Pi}_{exp}) \tag{1.150}$$

avec $\mathbf{\Pi}_{exp}$ les valeurs expérimentales, $\mathbf{\Pi}(\mathbf{a})$ les valeurs du modèles et g une fonction mesurant l'écart (au sens des moindres carrés). En écrivant $\psi(\mathbf{F}) = \breve{\psi}(i_1,i_2) + r(\det\mathbf{F})$, on doit donc trouver un jeu de paramètres $\mathbf{u}$ tel que

$$f_s(\mathbf{u}) = \inf_{a\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(\mathbf{a}) | \frac{\partial^2\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})}{\partial i_1^2} \geq 0, \frac{\partial^2\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})}{\partial i_2^2} \geq 0, \frac{\partial\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})}{\partial i_1} \geq 0 \right\} \tag{1.151}$$

Les conditions $\partial^2\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})/\partial i_1^2 \geq 0$, $\partial^2\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})/\partial i_2^2 \geq 0$ et $\partial\breve{\psi}(i_1,i_2,\mathbf{a})/\partial i_1 \geq 0$ sont écrites explicitement en un nombre fini n_c de points de la région du plan i_1,i_2 défini par CURRIE.

En utilisant la condition de BALL, on peut faire le même type d'approche mais en discrétisant le plan λ_1,λ_2 et en écrivant la convexité et la croissance de $\psi(\lambda_1,\lambda_2)$. En notant : $\psi(\mathbf{F}) = \widehat{\psi}(\mu_1,\mu_2/\mu_1,1/\mu_2) + r(\det\mathbf{F})$, on doit donc résoudre le problème suivant :

$$f_b(\mathbf{u}) = \inf_{a\in\mathbb{R}^n}\left\{ f(\mathbf{a}) \,|\, \det(\nabla^2\widehat{\psi}(\mu_1,\frac{\mu_2}{\mu_1},\frac{1}{\mu_2},\mathbf{a})) \geq 0, \frac{\partial\widehat{\psi}(\mu_1,\frac{\mu_2}{\mu_1},\frac{1}{\mu_2},\mathbf{a})}{\partial\mu_1} \geq 0, \frac{\partial\widehat{\psi}(\mu_1,\frac{\mu_2}{\mu_1},\frac{1}{\mu_2},\mathbf{a})}{\partial\mu_2} \geq 0 \right\} \quad (1.152)$$

Comme dans le cas précédent, on écrit les conditions de contraintes en inégalités sur un nombre fini de points du plan défini par $[1,\mu_1^{\max}] \times [1,\mu_2^{\max}]$

Ces deux approches reviennent à un problème de minimisation sous contraintes en inégalités. La plupart des logiciels de calcul scientifique proposent de nos jours des outils performants pour résoudre ce type de problèmes. Ainsi, Matlab propose une fonction, (`fmicon`) pour résoudre des problèmes de minimisation non-linéaires sous contraintes en inégalités. Cette fonction utilise une méthode d'optimisation qui formule le problème à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Le système linéaire ou non-linéaire qui en découle est résolu par une méthode de descente avec approximation du gradient et du hessien de la fonction objectif (et des contraintes).

1.6.2 Quelques applications (modèles isotropes incompressibles)

Afin d'illustrer et de comparer les différentes méthodes, on a réalisé des identifications avec et sans contraintes sur deux essais de montée en charge quasi-statique : un essai de traction uniaxiale et un essai de double cisaillement. Le matériau qui nous intéresse est un caoutchouc chargé de noir de carbonne, de dureté shore 46.

La fonction objectif que l'on cherche à minimiser est une somme de deux erreurs relatives au sens des moindres carrés :

$$f(\mathbf{a}) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{trac}}(\Pi_{trac}(\mathbf{a},\lambda_i) - \Pi_{exp-trac}(\lambda_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_{trac}}(\Pi_{exp-trac}(\lambda_i))^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n_{cis}}(\Pi_{cis}(\mathbf{a},\gamma_i) - \Pi_{exp-cis}(\gamma_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_{cis}}(\Pi_{exp-cis}(\gamma_i))^2} \quad (1.153)$$

avec n_{trac} et n_{cis} le nombre de points de l'essai de traction et de l'essai de cisaillement, $\Pi_{trac}(\mathbf{a},\lambda_i)$ est donné par l'équation (1.104), $\Pi_{cis}(\mathbf{a},\gamma_i)$ est la composante (1,2) du tenseur donné par l'équation (1.107). Nous avons utilisé pour ces identifications 3 modèles phénoménologiques :

– un modèle polynomial de JAMES & AL

$$\psi(I_1,I_2) = C_{10}(I_1-3) + C_{01}(I_2-3) + C_{11}(I_1-3)(I_2-3) + C_{20}(I_1-3)^2 + C_{02}(I_2-3)^2 \quad (1.154)$$

– un modèle polynomial de HAUPT & SEDLAN

$$\psi(I_1,I_2) = C_{10}(I_1-3) + C_{01}(I_2-3) + C_{11}(I_1-3)(I_2-3) + C_{02}(I_2-3)^2 + C_{30}(I_1-3)^3 \quad (1.155)$$

– le modèle de GENT & THOMAS

$$\psi(I_1,I_2) = C_1(I_1-3) + C_2 \ln \frac{I_2}{3} \tag{1.156}$$

Pour ces trois modèles, on peut appliquer quatre méthodes d'identification différentes, une ne prenant en compte aucune considération de stabilité ou d'existence, la méthode de HARTMANN [8], une méthode avec contraintes de STEIGMANN et une méthode avec contraintes de MIELKE. Ces stratégies d'identification ont toutes été implémentées sur Matlab avec la fonction `fmicon`.

• **L'identification sans contraintes** donne des résultats très satisfaisants en terme d'erreur pour les deux modèles polynomiaux et légèrement en retrait pour le modèle de GENT & THOMAS (voir tableau 1.5 et figures 1.13). L'observation de la fonction d'énergie libre en fonction des dilatations principales (λ_1,λ_2), nous alerte cependant sur la possibilité de non respect de certaines conditions de stabilité matérielle. Sur les figures 1.17, on peut voir coloriées en blanc les zones ou le hessien de l'énergie $\widehat{\psi}(\lambda_1,\lambda_2)$ est négatif ce qui est en contradiction avec l'inégalité $H_{1/2}$ de HILL puisque cette dernière implique :

$$\mathbf{A} : \frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{V}} : \mathbf{A} > 0 \qquad \forall \mathbf{A} \neq 0 \tag{1.157}$$

• **L'identification avec contraintes de positivité des paramètres (HARTMANN)** donne des résultats largement moins bons en terme d'erreur (voir tableau 1.5 et figures 1.14). Mais l'énergie ne présente plus de zone de négativité du hessien (figures 1.18). On peut également observer que ce type d'identification conduit à des modèles polynomiaux fonctions seulement de I_1 comme proposé par YEOH (1990) pour les caoutchoucs renforcés par du noir de carbonne. Le modèle de GENT & THOMAS est restreint à un modèle de néo-HOOKE.

• **L'identification avec contraintes de STEIGMANN** est réalisée en limitant la zone d'application des contraintes avec $i_1^{max} = i_2^{max} = 7$ et en utilisant 625 points. Ce qui correspond à 1825 contraintes en inégalités. Le modèle de HAUPT & SEDLAN présente les meilleurs résultats en terme d'erreur (voir tableau 1.5 et figures 1.15). Cependant l'observation de la fonction d'énergie conduit au même constat que pour l'identification sans contraintes. Il existe des zones où le hessien n'est pas défini positif, c'est à dire l'inégalité $H_{1/2}$ de HILL n'est pas respectée. De plus l'énergie atteint des valeurs négatives pour certaines valeurs des dilatations principales (figures 1.19).

• **Pour l'identification avec contraintes de MIELKE**, le plan (λ_1,λ_2) est limité par $\lambda_1^{min} = \lambda_2^{min} = 0.5$ et $\lambda_1^{max} = \lambda_2^{max} = 4$. On utilise 400 points pour discrétiser ce plan, ce qui conduit à 1200 contraintes en inégalités. En comparant les résultats obtenus par la méthode de HARTMANN dans le tableau 1.5. On peut voir un gain significatif en terme d'erreur pour les trois modèles. Quelques zones présentent encore des valeurs négatives pour le hessien de l'énergie (figures 1.20), elles restent cependant très localisées

(8). qui s'applique au modèle de GENT & THOMAS pour les mêmes raisons que les modèles polynomiaux (voir HARTMANN [2001])

modèle	identification	erreur (%)	coefficients (MPa)				
JAMES & AL			C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{02}	C_{20}
	sans contraintes	0.2298	0.7867	-0.5449	-0.6032	0.4385	0.1646
	Hartmann	8.6160	0.1955	0	0	0	0.0151
	Steigman	0.7615	0.4959	-0.2619	-0.0045	0.0020	0.0040
	Mielke	6.2418	0.2535	-0.0605	0.0019	0.0001	0.0126
HAUPT & SEDLAN			C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{02}	C_{30}
	sans contraintes	0.2243	0.6262	-0.3541	-0.0922	0.0754	0.0024
	Hartmann	6.4472	0.2260	0	0	0	0.0018
	Steigman	0.6919	0.5117	-0.2752	-0.0029	0.0027	0.0003
	Mielke	4.0598	0.2679	-0.0332	-0.0032	0	0.0018
GENT & THOMAS			C_1	C_2			
	sans contraintes	6.1652	0.4324	-0.9095			
	Hartmann	13.3535	0.2837	0			
	Steigman	6.1652	0.4324	-0.9095			
	Mielke	11.2500	0.3088	-0.1449			

Tableau 1.5 – *Résultats des différentes identifications*

L'identification avec contraintes de MIELKE semble être le meilleur compromis en terme de respect des contraintes de stabilités matérielles et d'erreur d'identification. On peut également constater que la réponse énergétique des différents modèles pour une déformation ne faisant pas partie du jeu d'essai semble plus réaliste en utilisant l'identification avec contraintes de MIELKE. Par exemple, l'énergie libre pour une déformation biaxiale telle que $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ et d'environ 20 Mpa pour les modèles polynomiaux et 8 Mpa pour le modèle de GENT & THOMAS. Dans le cas d'une identification sans contraintes on a 30 000 Mpa pour le modèle de JAMES & AL, 4000 Mpa pour le modèle de HAUPT & SEDLAN et 8 Mpa pour le modèle GENT & THOMAS.

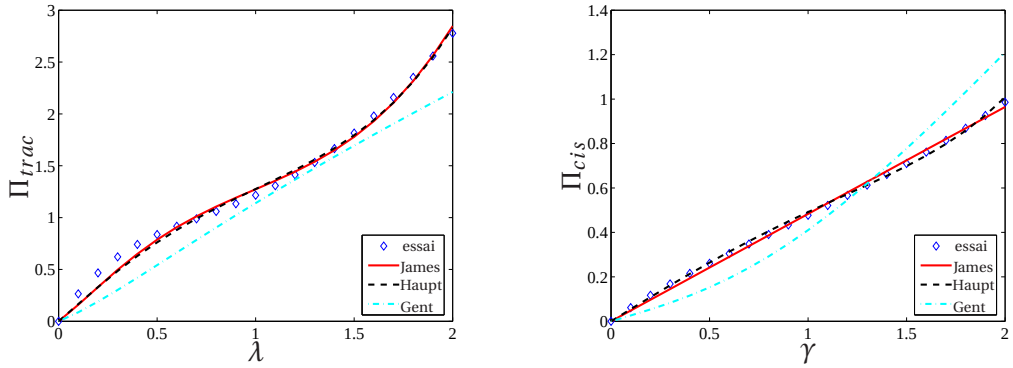


Figure 1.13 – *Identification sans contraintes*

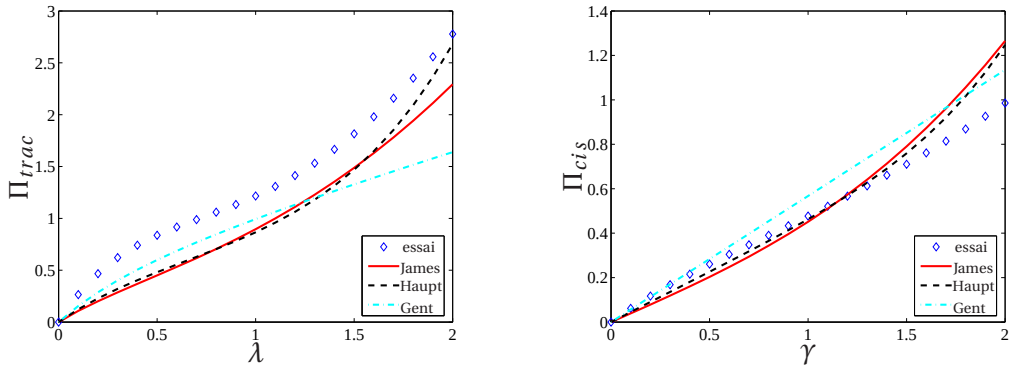


Figure 1.14 – *Identification avec contraintes de positivité des paramètres*

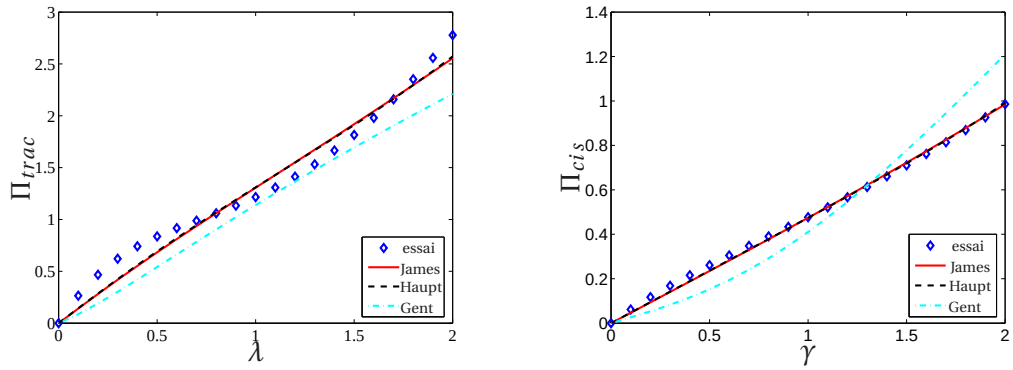


Figure 1.15 – *Identification avec contraintes de* STEIGMANN

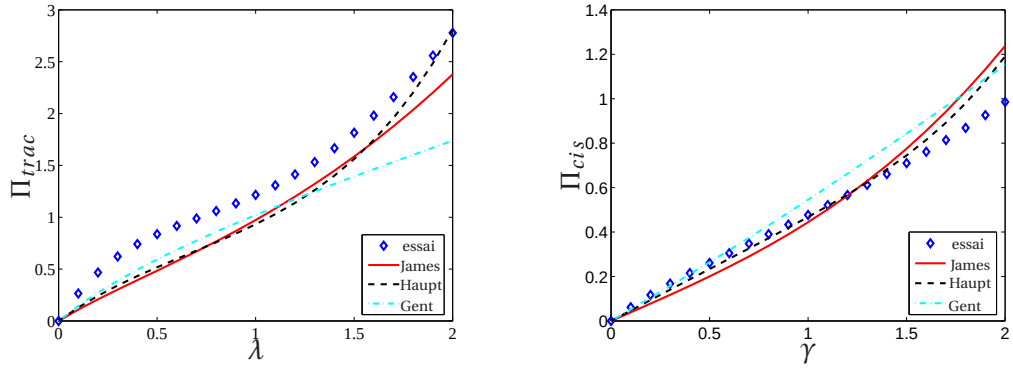
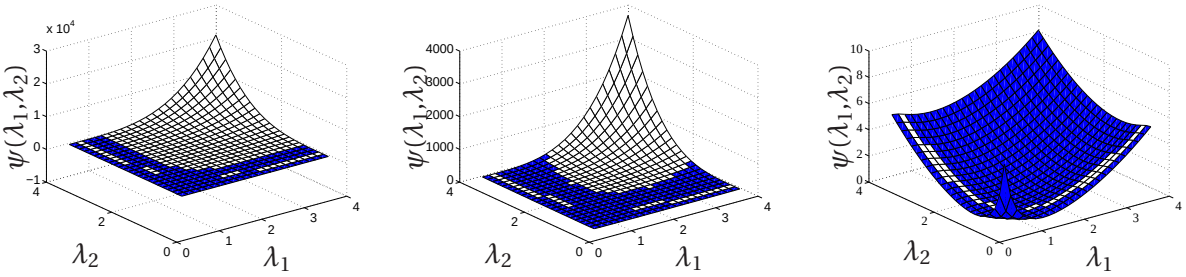
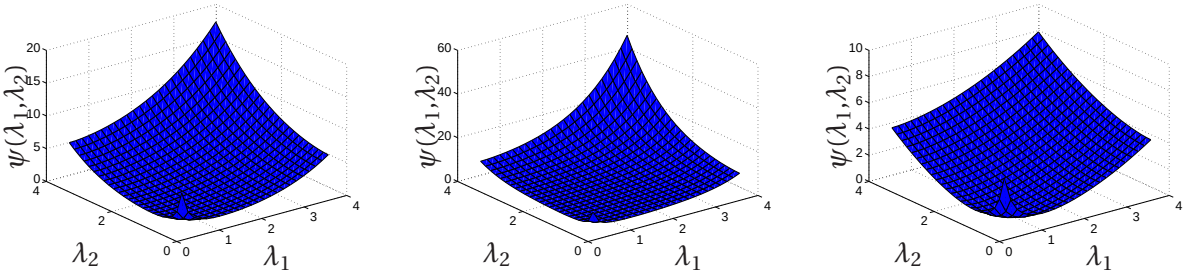


Figure 1.16 – *Identification avec contraintes de* MIELKE



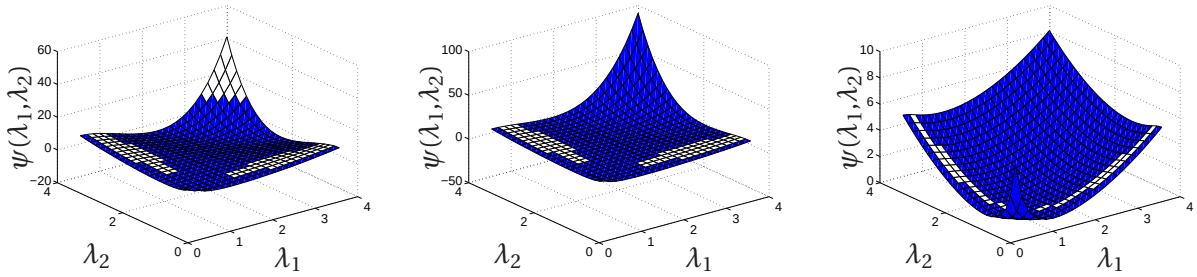
(a) JAMES & AL (b) HAUPT & SEDLAN (c) GENT & THOMAS

Figure 1.17 – *Energie pour l'identification sans contraintes*



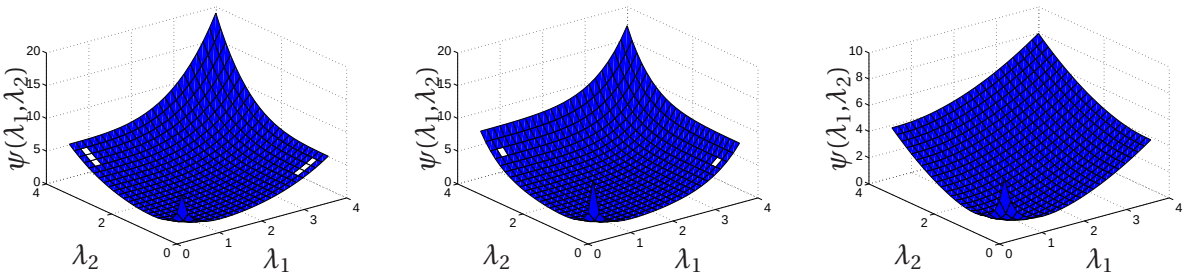
(a) JAMES & AL (b) HAUPT & SEDLAN (c) GENT & THOMAS

Figure 1.18 – *Energie pour l'identification avec contraintes de positivité des paramètres*



(a) JAMES & AL (b) HAUPT & SEDLAN (c) GENT & THOMAS

Figure 1.19 – *Energie pour l'identification avec contraintes de* STEIGMANN



(a) JAMES & AL (b) HAUPT & SEDLAN (c) GENT & THOMAS

Figure 1.20 – *Energie pour l'identification avec contraintes de* MIELKE

1.7 Conclusion

Ce chapitre propose un aperçu bibliographique de la modélisation des comportements hyperélastiques. Il permet de poser les principes généraux nécessaires à ce type de modélisation tel que l'objectivité, l'isotropie et l'anisotropie, les matériaux à contraintes internes. Différentes approches rencontrées dans la littérature sont présentées. Quelques modèles phénoménologiques et micro-physiques sont détaillés pour des comportements incompressibles et compressibles. Enfin, certains modèles de comportements anisotropes récents sont brièvement exposés.

L'apport plus personnel de ce chapitre réside dans l'identification des comportement hyperélastiques incompressibles. C'est dans cet objectif que l'on s'attache aux solutions analytiques de problèmes d'équilibres et que l'on recense les conditions de stabilité matérielle. Le terme *stabilité matérielle* étant utilisé par abus de langage pour désigner à la fois des conditions provenant de considérations thermodynamiquement motivées et des conditions d'existences faisant appel à des outils mathématiques particuliers tels que la *polyconvexité*.

Deux nouvelles stratégies d'identifications intégrant directement des considérations de stabilité matérielle sont présentées. On utilise pour ce faire des résultats dus à STEIGMANN et à MIELKE. Le premier, à partir de la représentation $\breve{\psi}(i_1,i_2)$, exhibe des conditions suffisantes pour assurer la polyconvexité de $\psi(\mathbf{F})$. Le second, généralise un résultat de BALL et développe des conditions suffisantes en utilisant la représentation $\widehat{\psi}(\mu_1,\mu_2/\mu_1,1/\mu_2)$. On effectue une comparaison des résultats d'identifications obtenus avec ces deux nouvelles stratégies et des identifications sans contraintes ou avec contraintes de positivités des paramètres matériaux (initialement proposé par HARTMANN). Ceci en couplant un essai de traction uniaxiale avec un essai de double cisaillement. La stratégie intégrant les contraintes dues à MIELKE présente le meilleur compromis entre résultats d'identification et respect des conditions de stabilité matérielle.

Bibliographie

Abeyaratne, R., & Knowles, J. K. [1999]. On the stability of thermoelastic materials. *Journal of Elasticity*, *53*, 199-213.

Ball, J. M. [2002]. Some open problems in elasticity. In P. Newton, P. Holmes, & A. Weinstein (Eds.), *Geometry, mechanics, and dynamics* (p. 3-59). Springer.

Barenblatt, G. I., & Joseph, D. D. (Eds.). [1997]. *Collected papers of r. s. rivlin*. Springer-Verlag.

Beatty, M. F. [2001]. Hyperelastic bell materials : Retrospection, experiment, theory. In Y. B. Fu & R. W. Ogden (Eds.), *Nonlinear elasticity* (London Mathematical Society ed., p. 58-90). Cambridge university press.

Beatty, M. F. [2003]. An average-stretch full-network model for rubber elasticity. *Journal of Elasticity*, *70*, 65-86.

Bosi, M., & Salvatori, M. C. [1996]. Some non homogeneous deformations for special class of isotropic constrained materials. *Rendiconti di Matematica*, *16*, 689-713.

Ciarlet, P. G. [1986]. *élasticité tridimensionnelle*. Masson.

Criscione, J. C. [2003]. Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing. *Journal of Elasticity, 70*, 129-147.

Criscione, J. C., Douglas, S. D., & Hunter, W. C. [2001]. Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49*, 871-897.

Criscione, J. C., Humphrey, J. D., Douglas, A. S., & Hunter, W. C. [2000]. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48*, 2445-2465.

Criscione, J. C., McCulloch, A. D., & Hunter, W. C. [2002]. Constitutive framework optimized for myocardium and other high-strain, laminar materials with one fiber family. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 50*, 1681-1702.

Currie, P. [2004]. The attainable region of strain-invariant space for elastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics, 39*, 833-842.

Delfino, A., Stergiopulos, N., Moore, J. E., & Meister, J. J. [1997]. Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *Journal of Biomechanics, 30*, 777-786.

DeSimone, A., & Dolzmann, G. [2000]. Material instabilities in nematic elastomers. *Physica D, 136*, 175-191.

Diani, J., Brieul, M., Vacherand, J. M., & Rezgui, A. [2004]. Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials. *Mechanics of Materials, 36*, 313-321.

Fu, Y. B., & Ogden, R. W. (Eds.). [2001]. *Nonlinear elasticity : Theory and applications*. Cambridge university press. (London Mathematical Society Lecture Note Series, 283)

Hartmann, S. [2001]. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures, 38*, 7999-8018.

Hartmann, S., & Neff, P. [2003]. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and Structures, 40*, 2767-2791.

Holzapfel, G. A. [2004]. *Nonlinear solid mechanics*. Wiley.

Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., & Ogden, R. W. [2000]. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity, 61*, 1-48.

Itskov, M., & Aksel, N. [2004]. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal of Solids and Structures, 41*, 3833-3848.

Jazzar, M. [1993]. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse, Université d'Aix-Marseille II.

Kawabata, S., & Kawai, H. [1977]. Strain energy density functions of rubber vulcanizates from biaxial extension. *Adv. Pol. Sci.*, 90-124.

Klüppel, M., & Shramm, J. [2000]. A generalized tube model of rubber elasticity and stress softening of filler reinforced elastomer system. *Macromol. Theory Simul.*, *9*.

Lahellec, N. [2001]. *Homogénéisation et étude expérimentale de composites hyperélastiques et visco-hyperélastiques*. Thèse, Université d'Aix-Marseille II.

Lambert-Diani, J., & Rey, C. [1999]. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. *European Journal of Mechanics and Solids*, *18*, 1027-1043.

Leblond, J. B. [1992]. A constitutive inequality for hyperelastic materials in finite strain. *Eur. J. Mech., A/Solids*, *11*(4), 447-466.

Menzel, A., & Steinmann, P. [2001]. On the comparison of two strategies to formulate orthotropic hyperelasticity. *Journal of Elasticity*, *62*, 171-201.

Miehe, C. [1994]. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *37*, 1981-2004.

Miehe, C., Göktepe, S., & Lulei, F. [2004]. A micro-macro approach to rubber-like materials part i : the non affine micro sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *52*, 2617-2660.

Miehe, C., & Göktepe, S. [2005]. A micro–macro approach to rubber-like materials. part ii : The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *53*.

Mielke, A. [2005]. Necessary and sufficient conditions for polyconvexity of isotropic functions. *Journal of Convex Analysis*, *12*, -.

Mooney, M. [1940]. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, *11*, 582-592.

Moreau, C. [2000]. *Etude expérimentale et numérique de l'hyperélasticité avec prise en compte de la compressibilité*. Thèse, Université de Bretagne Sud.

Morrey, C. B. [1952]. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific Journal of Mathematics*, *2*, 25-53.

Ogden, R. W., Saccomandi, G., & Sgura, I. [2004]. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, *34*, 484-502.

Podio-Guidugli, D., & Tomassetti, G. [1999]. Universal deformations for a class of compressible isotropic hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, *52*, 159-166.

Ponte Castañeda, P., & Tiberio, E. [1999]. Homogenization estimates for hyperelastic composites and particle-reinforced rubbers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *327*, 1297-1304.

Reese, S. [2003]. A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *International Journal of Plasticity*, *19*, 909-940.

Rivlin, R. S. [1974]. Some restrictions on constitutive equations. In J. J. Domingos, M. N. R. Nina, & J. H. Whitelaw (Eds.), *Foundations of continuum thermodynamics* (p. 229-258). Macmilla.

Rivlin, R. S., & Saunders, D. W. [1951]. Large elastic deformations of isotropic materials vii. experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*, *243*, 251-288.

Rivlin, R. S., & Sawyers, K. N. [1976]. The strain-energy function for elastomers. *Transactions of the Sociaty of Rheology*, *20*(4), 545-557.

Saccomandi, G. [2001]. Universal results in finite elasticity. In Y. Fu & R. Ogden (Eds.), *Nonlinear elasticity* (London Mathematical Society ed., p. 97-134). Cambridge university press.

Schröder, J., Neff, P., & Balzani, D. [2005]. A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*.

Sidoroff, F. [1982]. *Cours sur les grandes dèformations* (Rapport Greco nô 51/1982). École d'été de Sophia-Antipolis.

Smith, G. F., & Rivlin, R. S. [1958]. The strain-energy function for anisotropic elastic materials. *Transactions of The American Mathematical Society, 88*, 175-193.

Spencer, A. J. M., & Zheng, Q. S. [2001]. Jean-paul boehler 1942-1998. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49*, 2455-2458.

Steigmann, D. J. [2003]. On isotropic, frame-invariant, polyconvex strain-energy functions. *Q J Mechanics Appl Math., 56*, 483-491.

Ward, I. M., & Sweeney, J. [2004]. *An introduction of he mechanical properties of solid polymers*. 2^{nd} Edition, John Wiley and sons, ltd.

Warne, D. P., & Warne, P. G. [1998]. On non-symmetric deformations of neo-hookean solids. *Journal of Elasticity, 50*, 209-225.

Warne, D. P., & Warne, P. G. [1999]. Plane deformations in incompressible nonlinear elasticity. *Journal of Elasticity, 52*, 129-158.

Weiss, J. A., Maker, B. N., & Govindjee, S. [1996]. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 135*, 107-128.

CHAPITRE

2 Formulations variationnelles des problèmes hyperélastiques

Depuis la démocratisation des moyens informatiques, la plupart des problèmes mécaniques sont résolus à l'aide d'une méthode numérique. Dans la majorité des cas, la méthode des éléments-finis est choisie, principalement pour ses qualités de robustesse par rapport au type d'équations aux dérivés partielles que l'on doit résoudre. Même si pour des problèmes particuliers, comme par exemple, le cas des comportements incompressibles, on peut également rencontrer d'autres types de méthodes (volumes-finis, méthodes sans maillages, ...), ces dernières ont pour base commune la formulation variationnelle du problème.

Ce chapitre s'articule autour des points suivants : après un bref rappel des principes variationnels en élasticité linéaire, on présente les différentes formes, adaptées aux comportements incompressibles ou faiblement compressibles. On détaille ensuite l'implémentation numérique de certaines de ces formulations et les difficultés liées à la contrainte d'incompressibilité. Des techniques de validation à l'aide de patch-tests sont également présentées ainsi que quelques applications.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1 Introduction 49
2.2 État de l'art 49
2.2.1 Principes variationnels en élasticité linéaire 49
2.2.2 Écriture de la stationnarité 50
2.2.3 Linéarisation des problèmes non-linéaires 50
2.2.4 Généralités sur les problèmes non-linéaires incompressibles 51
2.3 Position du problème 52
2.4 Approches en déplacement 52
2.4.1 Méthode de Pénalité 53
2.4.2 Autres méthodes 56
2.5 Principes variationnels multi-champs 56
2.5.1 Méthode en Lagrangien 57
2.5.2 Méthode en Lagrangien perturbé 58
2.5.3 Méthode en Lagrangien augmenté 62
2.5.4 Méthode de SIMO & TAYLOR 63
2.5.5 Bilan des différentes formes variationnelles 65
2.6 Discrétisation par éléments-finis de la forme en Lagrangien perturbé 66
2.7 Choix des espaces d'interpolation 71
2.7.1 Consistance et patch-test 71
2.7.2 Stabilité et condition *inf-sup* du problème discret de point selle 72
2.7.3 Méthode d'enrichissement de la déformation et modes incompatibles 73
2.7.4 Éléments retenus et implémentation logiciel 75
2.8 Validation 76
2.8.1 Comparaisons par rapport à une solution analytique 76
2.8.2 Test de convergence 78
2.8.3 Exemples d'instabilités numériques dues à l'interpolation 81
2.9 Conclusion 83
Bibliographie 83

2.1 Introduction

La mise en œuvre numérique de problèmes hyperélastiques, dans une méthode d'éléments-finis, n'est pas exempte de difficultés. Elles sont liées aux non-linéarités matérielles et géométriques, mais également quand la loi de comportement la vérifie, à la contrainte d'incompressibilité. Des années 70 jusqu'à nos jours, un certain nombre de méthodes ont été proposées dans la littérature afin de répondre à ces problèmes, qui ne sont pas toujours parfaitement maîtrisés.

Ce chapitre propose un aperçu des principes variationnels rencontrés, pour la modélisation de structures hyperélastiques incompressibles. On s'attache, après avoir choisi une forme variationnelle, à décrire la mise en œuvre de cette dernière dans le cadre de la méthode des éléments-finis ainsi que son implémentation dans le logiciel ZéBuLoN. Quelques résultats théoriques sur la stabilité sont ensuite présentés, afin d'aider au choix des espaces d'interpolations des éléments-finis développés. Enfin, on présente quelques exemples de validation à partir de cas tests simples.

2.2 État de l'art

2.2.1 Principes variationnels en élasticité linéaire

L'obtention d'une forme variationnelle adaptée aux comportements hyperélastiques découle, la plupart du temps, de principes élaborés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Il en existe un certain nombre, mais les plus courament utilisés sont : le principe de HU-WASHIZU (équation 2.1), le principe de HELLINGER-REISSNER (équation 2.2) et le théorème du minimum de l'énergie potentielle (équation 2.3). Ils consistent en l'écriture des conditions de stationnarité des fonctionnelles suivantes [(1)] :

$$\mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) d\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{u}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.1}$$

$$\mathscr{L}_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{u}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.2}$$

$$\mathscr{L}_{EP}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla^s \mathbf{u}) : \mathbf{D} : (\nabla^s \mathbf{u}) d\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{u}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.3}$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ext} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \tag{2.4}$$

où $\mathbf{T}_{ext}$ sont les efforts surfaciques imposés sur le contour $\partial\Omega_f$; $\mathbf{u}_{ext}$ les déplacements imposés sur le contour $\partial\Omega_u$ (tel que $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = 0$ et $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f = \partial\Omega$) ; $\mathbf{f}_{ext}$ les efforts volumiques imposés sur le domaine Ω ; $\mathbf{D}$ le tenseur d'élasticité d'ordre 4.

(1). Une présentation plus détaillée de ces principes variationnels peut être trouvée dans TAYLOR [2003]; AURICHIO ET AL. [2004]

Partant de ces principes, un certain nombre d'auteurs ont proposés des formulations spécifiques aux comportements incompressibles. Ainsi HERRMANN est un des premiers à proposer une méthode multi-champs adaptée aux comportements élastiques incompressibles en partant du principe de HELLINGER-REISSNER (voir HERRMANN [1964]). Le principe de HERRMANN a ensuite été étendu aux comportements linéaires orthotropiques par TAYLOR et KEY.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, AURICHIO ET AL. [2004] présentent une synthèse assez complète des méthodes multi-champs adaptées au comportement incompressible, que se soit en terme de formulation variationnelle ou de conditions de stabilité.

2.2.2 Écriture de la stationnarité

L'écriture des conditions de stationnarité d'une forme variationnelle revient à calculer les variations premières de cette forme par rapport à chacun de ses arguments. Ce calcul de variation s'effectue à l'aide d'un opérateur de dérivation directionnelle : la dérivée de GÂTEAUX, notée $D(\bullet)$. Elle est définie à partir de l'existence de la limite suivante :

$$\begin{aligned} &f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \text{ et } \mathscr{U} \subset \mathscr{X} \\ &D_{\mathbf{b}} f(\mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(\mathbf{a}+\varepsilon\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{a}+\varepsilon\mathbf{b})|_{\varepsilon=0^+} \qquad \forall \mathbf{b} \in \mathscr{U}, \quad 0 \le \varepsilon \le 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ peuvent être des arguments scalaires, vectoriels ou tensoriels. Les équations qui découlent des conditions de stationnarité sont appelées *équations d'Euler*. Par exemple, la stationnarité de la forme (2.1) de HU-WASHIZU nous amène au problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}), \forall\ (\delta\mathbf{u},\delta\boldsymbol{\sigma},\delta\boldsymbol{\epsilon}) \text{ tels que } \begin{cases} D_{\delta\mathbf{u}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \\ D_{\delta\boldsymbol{\sigma}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \\ D_{\delta\boldsymbol{\epsilon}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$D_{\delta\mathbf{u}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = -\int_\Omega \delta\mathbf{u}\ (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext})\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{u}(\mathbf{T}_{ext})\, dS \tag{2.7}$$

$$D_{\delta\boldsymbol{\sigma}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon})\, d\Omega \tag{2.8}$$

$$D_{\delta\boldsymbol{\epsilon}} \mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}) = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon} : (\mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\sigma})\, d\Omega \tag{2.9}$$

On retrouve dans la stationnarité de la forme de HU-WASHIZU, l'équation d'équilibre, l'équation de compatibilité, la loi de comportement et les conditions aux limites en efforts imposés.

2.2.3 Linéarisation des problèmes non-linéaires

L'écriture de la stationnarité d'une forme variationnelle nous conduit généralement à un système d'équations non-linéaires de la forme : $\mathbf{r}(\mathbf{a}) = 0$, ou $\mathbf{a}$ contient l'ensemble des variables de cette forme variationnelle (dans le cas précédent : $\mathbf{a} = \{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon}\}$) et $\mathbf{r}$ correspond aux

équations d'Euler. Pour résoudre le système d'équations (2.7), (2.8) et (2.9), on utilise généralement une méthode itérative qui tire partie du développement de Taylor de ce système (dans la plupart des cas il s'agit d'une méthode de NEWTON-RAPHSON). A l'étape $k+1$ de ce processus, on peut *linéariser* le problème autour d'un état connu $\mathbf{a}_k$, tel que :

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}_k + \Delta\mathbf{a}) = \mathbf{r}(\mathbf{a}_k) + \left(D_{\Delta\mathbf{a}}\mathbf{r}(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_k}\right)\Delta\mathbf{a} + o(\Delta\mathbf{a}) \tag{2.10}$$

Le développement de Taylor peut être poursuivi à un ordre supérieur mais dans la plupart des codes éléments finis, il se limite à l'ordre 1, pour des raisons de coût de calcul des dérivées d'ordres supérieurs. Après discrétisation du champ de déplacement, on arrive donc typiquement à la résolution d'un système tangent du type :

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\Delta\mathbf{a} = -\mathbf{r}(\mathbf{a}) \tag{2.11}$$

avec $\mathbf{K}(\mathbf{a}) = D_{\Delta\mathbf{a}}\mathbf{r}(\mathbf{a})$ l'opérateur tangent et $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ le résidu d'équilibre, ces deux quantités étant évaluées à $\mathbf{a} = \mathbf{a}_k$.

2.2.4 Généralités sur les problèmes non-linéaires incompressibles

Les principes variationnels établis dans le cadre de l'élasticité linéaire ont été étendus aux comportements non-linéaires par de nombreux auteurs (voir par exemple SHARIFF [1997]; SHARIFF & PARKER [2000]). Dans le cadre de l'hyperélasticité, ces principes conduisent aux méthodes du *lagrangien perturbé*, du *lagrangien augmenté* ou encore à la formulation *trichamps* de SIMO & TAYLOR, qui sont exposées dans ce chapitre.

Dans la plupart des cas ces principes sont utilisés dans une méthode d'éléments-finis, mais d'autres stratégies ont récemment été adaptées aux comportements incompressibles ou quasi-incompressibles, comme des techniques de type volumes-finis (BIJELONJA ET AL. [2005]), ou sans maillage (de type RKPM dans CHEN, PAN, & WU [1997], de type sphères finis dans DE & BATHE [2001]).

La difficulté principale de la modélisation numérique, à l'aide d'éléments finis, des comportements hyperélastiques incompressibles ou quasi-incompressibles est de construire des éléments stables c'est à dire d'éviter les phénomènes de blocages volumiques ou des modes de déformation de type « sablier ». Il n'est en général pas suffisant de choisir une formulation variationnelle qui semble mathématiquement bien posée pour construire un élément fini fiable, en particulier dans le cas d'éléments C_0 (linéaires en déplacement). Des méthodes de stabilisation ont ainsi été proposées (par exemple dans REESE ET AL. [1999]), permettant d'utiliser des éléments linéaires qui sont particulièrement adaptés à certains types d'analyses comme dans le cas du contact.

En grandes déformations, la forme variationnelle ou forme *faible* des équations d'équilibres peut s'écrire de différentes manières suivant le type de configuration que l'on considère (lagrangienne, eulérienne ou mixte). Dans ce chapitre, on ne considérera que les formes mixtes, ou éventuellement lagrangiennes. Il ne s'agit, bien sûr, que d'un jeu d'écriture, qui traduit la même solution d'équilibre. Le choix d'une description particulière, ne doit cependant pas

être anodin si l'on souhaite utiliser une méthode numérique tirant partie d'une certaine décomposition des non-linéarités (par exemple dans le cadre du flambement linéarisé).

2.3 Position du problème

Le problème mécanique que l'on cherche à résoudre se pose en ces termes ; si Ω_0 est le domaine occupé par le solide dans la configuration initiale, $\partial\Omega_f$ et $\partial\Omega_u$ les parties du contour de Ω_0 où sont appliqués des efforts imposés (tel que $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = 0$ et $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f = \partial\Omega_0$), $\mathbf{u}$ le champ de déplacement inconnu, $\mathrm{div}_{\mathbf{X}}$, l'opérateur divergence dans la configuration initiale, $\mathbf{N}$ la normale au solide prise dans la configuration initiale (sur le contour $\partial\Omega_f$) alors on doit résoudre le système d'équations suivant :

– gradient de la déformation

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I} \tag{2.12}$$

– loi de comportement d'un matériau incompressible

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathrm{Cof}\mathbf{F} \tag{2.13}$$

$$\det \mathbf{F} = 1 \tag{2.14}$$

– équation d'équilibre

$$\mathrm{div}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Pi} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega_0 \tag{2.15}$$

– conditions aux limites

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{N} = \mathbf{t}_{ext} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f \tag{2.16}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ext} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \tag{2.17}$$

Ces équations, écrites dans une description mixte, représentent la forme forte d'un problème mécanique associé à un comportement hyperélastique incompressible. Les formes variationnelles qui sont présentées dans ce chapitre ont pour objet de récrire ce problème mécanique sous une forme intégrale (non-locale) de manière à mettre en œuvre une méthode de discrétisation.

Dans le cas d'un comportement faiblement compressible, les équations (2.14) et (2.13) sont remplacées par (voir 1.3.2) :

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{\Pi} : \mathbb{P}_{\overline{F}}) + kG'(J)\mathrm{Cof}\mathbf{F} \tag{2.18}$$

2.4 Approches en déplacement

Dans le cadre de la méthode des éléments-finis, l'approche en déplacements, c'est à dire en utilisant le principe variationnel du minimum de l'énergie potentielle, est de loin la plus prisée. En considérant la fonctionnelle (2.3), et en utilisant la densité d'énergie libre de Helmoltz ψ, le principe du minimum de l'énergie potentielle revient à trouver le point stationnaire de :

$$\mathscr{L}_{EP}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F}(\mathbf{v}))\, d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext}\, dS \tag{2.19}$$

Ce problème peut encore s'écrire [2] :

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^b,\ \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \text{ tel que :} \qquad D_{\delta\mathbf{v}}\mathscr{L}_{EP}(\mathbf{u}) = 0 \tag{2.20}$$

Le problème (2.20) nous donne explicitement, en considérant le cas des efforts conservatifs [3] :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^b, \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) : \nabla\delta\mathbf{v} - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\ \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \delta\mathbf{v}\ \mathbf{T}_{ext}\, dS = 0\end{array}} \tag{2.21}$$

Si n est la dimension du problème, les espaces des solutions $\mathcal{V}^b$ et des fonctions tests $\mathcal{V}^0$ sont définis par :

$$\mathcal{V}^b = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \mathbf{u} = \mathbf{u}_{ext} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u\} \tag{2.22}$$

$$\mathcal{V}^0 = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u\} \tag{2.23}$$

ou $H^1(\Omega_0)$ est un espace de HILBERT d'ordre 1.

L'équation (2.21) est une forme mixte du problème variationnel, on peut également obtenir une forme lagrangienne du même problème :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^b, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \delta\mathbf{E} - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\ \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \delta\mathbf{v}\ \mathbf{T}_{ext}\, dS = 0\end{array}} \tag{2.24}$$

ou la variation de $\mathbf{E}$ correspond à :

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\nabla\delta\mathbf{v}) = (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s = \left(\nabla\delta\mathbf{v}^T(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{I})\right)_s \tag{2.25}$$

Remarque 2.1
Les formes (2.21) et (2.24) auraient également pu être obtenues avec le principe des puissances virtuelles, et ce sans forcément se restreindre au cas des efforts conservatifs. ❑

Lorsque le matériau est incompressible, il peut sembler physiquement raisonnable de le traiter comme un matériau compressible avec un module de compressibilité tendant vers l'infini. Cette idée simple conduit à une formulation où la seule inconnue est le champ $\mathbf{u}$, elle est appelée *méthode de pénalité*.

2.4.1 Méthode de Pénalité

On peut trouver dans la littérature différentes formulations pénalisées suivant que l'on adopte une vision mathématique ou phénoménologique [4] de la méthode de pénalité. La

(2). La stationnarité d'une forme variationnelle devant être vérifiée indépendamment de la direction de dérivation, on appelle souvent ces variables de dérivation des fonctions « tests » ou encore variables « virtuelles »

(3). Les efforts conservatifs sont définis comme étant les dérivées d'un potentiel, si bien qu'il existe une énergie potentielle.

(4). Le mot phénoménologique se distingue ici d'une approche mathématique par sa phase de modélisation des phénomènes physiques.

première de ces approches revient à considérer la stationnarité de la fonctionnelle suivante (voir par exemple MALKUS & HUGHES [1978]) :

$$\mathscr{L}_{EPP}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F}(\mathbf{v}))d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2\alpha}\Big(U(J(\mathbf{v}))\Big)^2 d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}dS \tag{2.26}$$

où α est un coefficient de pénalité (la contrainte d'incompressiblité correspond ainsi à $\alpha \to 0$).
La fonction de pénalisation $U(J)$ est une fonction positive, coercive, et doit s'annuler uniquement en $J = 1$ (voir tableau 2.1).

$U(J)$	$U'(J)$	Référence
$J-1$	1	
$\ln(J)$	$\frac{1}{J}$	HÄGGBLAD & SUNDBERG (1983)

Tableau 2.1 – *Formes courantes de la fonction de pénalisation*

La stationnarité nous amène au problème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^b,\ \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}^b \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\alpha}U(J(\mathbf{u}))U'(J(\mathbf{u}))\text{cof}\mathbf{F}(\mathbf{u})\right) : \nabla\delta\mathbf{v}d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}dS = 0\end{array}} \tag{2.27}$$

On peut également obtenir une formulation pénalisée en considérant le découplage volumique et isochorique de l'énergie libre, cela revient alors à adopter une hypothèse de compressibilité et à faire tendre ce denier vers un comportement quasi-incompressible, en jouant sur le module de compressibilité. On peut ainsi considérer la stationnarité de (voir HOLZAPFEL [2004]) :

$$\mathscr{L}_{EPP}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \Big(\psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}}) + \psi_{vol}(J(\mathbf{v}))\Big)\, d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}dS \tag{2.28}$$

en prenant une partie volumique telle que $\psi_{vol} = kG(J)$ (des exemples de fonctions de compressibilité sont données dans le tableau 1.3), on obtient le même type de fonctionnelles que précédemment avec $k = \frac{1}{2\alpha}$.

La stationnarité s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^b,\ \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}^b \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\overline{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{u}) : \mathbb{P}_{\bar{F}}(\mathbf{u}) + kG'(J(\mathbf{u}))\text{cof}\mathbf{F}(\mathbf{u})\right) : \nabla\delta\mathbf{v}d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}dS = 0\end{array}} \tag{2.29}$$

La linéarisation des formes variationnelles (2.21) ou (2.24) permet d'illustrer les différences obtenues en terme de structure de l'opérateur tangent suivant que l'on adopte un formalisme Lagrangien ou mixte.

• **Cas Lagrangien**

Si l'on considère le cas de la méthode de pénalité dans un formalisme Lagrangien avec un découplage volumique-isochorique de l'énergie libre, on peut calculer l'opérateur tangent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{u}) &= D_{\Delta\mathbf{v}}\int_{\Omega_0}\mathbf{S}(\mathbf{E}):\delta\mathbf{E}d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0}\left[D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{S}(\mathbf{E}):\delta\mathbf{E}+\mathbf{S}(\mathbf{E}):D_{\Delta\mathbf{v}}\delta\mathbf{E}\right]d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0}\left[\delta\mathbf{E}:\frac{\partial\mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}}:D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{E}+\mathbf{S}(\mathbf{E}):D_{\Delta\mathbf{v}}\delta\mathbf{E}\right]d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0}\left[\delta\mathbf{E}:\mathbb{C}_l(\mathbf{u}):D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{E}+\mathbf{S}(\mathbf{E}):D_{\Delta\mathbf{v}}\delta\mathbf{E}\right]d\Omega \end{aligned} \tag{2.30}$$

Les détails de calcul du tenseur d'élasticité d'ordre 4, $\mathbb{C}_l(\mathbf{u})$ sont donnés dans l'annexe A pour les comportements incompressibles et compressibles.

En utilisant :

$$D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{E} = (\nabla\Delta\mathbf{v}^T\mathbf{F}(\mathbf{u}))_s \tag{2.31}$$

$$D_{\Delta\mathbf{v}}\delta\mathbf{E} = D_{\Delta\mathbf{v}}(\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s = (\nabla\delta\mathbf{v}^T\nabla\Delta\mathbf{v})_s \tag{2.32}$$

et la symétrie du second tenseur des contraintes de PIOLA KIRCHHOFF :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}:(\nabla\delta\mathbf{v}^T\nabla\Delta\mathbf{v})_s &= \frac{1}{2}S_{mn}(\nabla\delta v_{mo}^T\nabla\Delta v_{on}+\nabla\Delta v_{mo}^T\nabla\delta v_{on}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla\Delta v_{on}S_{nm}\nabla\delta v_{om}+\nabla\Delta v_{om}S_{mn}\nabla\delta v_{on}) = (\nabla\Delta\mathbf{v}\mathbf{S}):(\nabla\delta\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

on obtient l'expression de l'opérateur tangent suivante :

$$\boxed{\mathbf{K} = \underbrace{\int_{\Omega_0}\left[(\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F}(\mathbf{u}))_s:\mathbb{C}_l(\mathbf{u}):(\nabla\Delta\mathbf{v}^T\mathbf{F}(\mathbf{u}))_s\right]d\Omega}_{\mathbf{K}_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0}\left[(\nabla\Delta\mathbf{v}\mathbf{S}):(\nabla\delta\mathbf{v})\right]d\Omega}_{\mathbf{K}_g}} \tag{2.34}$$

On peut distinguer deux parties dans l'opérateur tangent associé à un formalisme Lagrangien, la première contient une information de non-linéarité matérielle liée au modèle de comportement choisi (elle est notée $\mathbf{K}_m$), la deuxième partie contient les non-linéarités géométriques (notée $\mathbf{K}_g$), puisque en petites déformations on a $\mathbf{K}_g = 0$. Certaines méthodes numériques exploitent cette décomposition particulière de la matrice tangente, notamment dans le cas du flambement linéarisé (voir par exemple FELIPPA [2001]).

• **Cas mixte**
Dans le cas d'un formalisme mixte, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{\Delta\mathbf{v}} r(\mathbf{u}) &= D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi}(\mathbf{F}) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} [D_{\Delta\mathbf{v}}\mathbf{\Pi}(\mathbf{F}) : \nabla\delta\mathbf{v}]\, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\nabla\delta\mathbf{v} : \frac{\partial\mathbf{\Pi}(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} : \nabla\Delta\mathbf{v}\right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} [\nabla\delta\mathbf{v} : \mathbb{C}_m(\mathbf{u}) : \nabla\Delta\mathbf{v}]\, d\Omega \end{aligned} \tag{2.35}$$

Le calcul de $\mathbb{C}_m$ est présenté dans l'annexe A. L'opérateur tangent s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{K} = \int_{\Omega_0} [\nabla\delta\mathbf{v} : \mathbb{C}_m(\mathbf{u}) : \nabla\Delta\mathbf{v}]\, d\Omega} \tag{2.36}$$

Remarque 2.2
On peut remarquer que contrairement au cas Lagrangien, il n'y a qu'une partie dans l'opérateur tangent qui contient toutes les non-linéarités (matérielles et géométriques). Ce formalisme ne permet donc pas d'utiliser une méthode particulière du type flambement linéarisé.
❑

2.4.2 Autres méthodes

Il existe d'autre méthodes permettant de relaxer la contrainte d'incompressibilité pour une formulation en déplacement. CESCOTTO & FONDER ont ainsi proposé en 1979 une méthode de pénalité qui tient compte d'une valeur moyenne de la variation de volume (voir GADALA [1997]) :

$$\mathscr{L}_{EPM}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \psi(I_1(\mathbf{v}), I_2(\mathbf{v})) d\Omega + \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{\Omega_0} (\frac{1}{\Omega}) \int_{\Omega_0} U(J(\mathbf{v}))\right]^2 d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.37}$$

BONNET & BURTON [1998] proposent une méthode permettant de prendre en compte une moyenne de la variation de volume en un noeud i en effectuant une moyenne des variations de volumes de tous les noeuds situés dans l'entourage de celui-ci, cette approche est reprise dans ANDRADE PIRES ET AL. [2004].

2.5 Principes variationnels multi-champs

Parallèlement aux approches en déplacements où l'on introduit la condition locale d'incompressibilité sous la forme d'une pénalité qui s'ajoute au potentiel d'énergie interne, on peut utiliser une approche multi-champs pour laquelle cette condition est directement prise en compte dans la forme variationnelle à l'aide d'un (ou plusieurs) multiplicateur de Lagrange.

2.5.1 Méthode en Lagrangien

Cette méthode est basée sur une forme variationnelle mixte déplacement-pression qui est une particularisation du principe variationnel de HELLINGER-REISSNER. On considère donc la forme suivante :

$$\mathscr{L}_{HR}(\mathbf{v},q) = \int_{\Omega_0} \left[\psi(I_1(\mathbf{v}),I_2(\mathbf{v})) - q(J(\mathbf{v})-1)\right] d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}\,dS \tag{2.38}$$

q étant un multiplicateur de Lagrange assimilable à une pression. Le problème de minimisation se ramène donc à la recherche du point selle, c'est à dire à trouver le couple $(\mathbf{v},p)$ tel que :

$$(\mathbf{u},p) = \max_{q\in\mathscr{Q}} \min_{\mathbf{v}\in\mathscr{V}^b} \mathscr{L}_{HR}(\mathbf{v},q) \tag{2.39}$$

où l'espace des pressions correspond à l'espace des fonctions de carrés intégrables ; $\mathscr{Q} = \{q \in L^2(\Omega_0)\}$

La stationnarité de (2.38) nous conduit au problème suivant (dans une configuration mixte) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u},p)\in\mathscr{V}^b\times\mathscr{Q},\ \forall(\delta\mathbf{v},\delta q)\in\mathscr{V}^0\times\mathscr{Q},\\ \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\psi(I_1(\mathbf{u}),I_2(\mathbf{u}))}{\partial\mathbf{F}} - p\,\mathrm{cof}\mathbf{F}(\mathbf{u})\right):\nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega - \int_{\Omega_0}\delta\mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega_f}\delta\mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}\,dS = 0\\ \displaystyle\int_{\Omega_0}(J(\mathbf{u})-1)\delta q\,d\Omega = 0\end{array}\right.\end{array}} \tag{2.40}$$

On retrouve dans la première équation d'Euler, le premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF associé à un modèle de comportement isotrope incompressible (voir eq. (1.57)). Pour mettre cette équation d'Euler sous une forme lagrangienne, il suffit de remplacer le tenseur des contraintes par l'expression (1.58). La deuxième équation correspond exactement à la condition locale d'incompressibilité ($J=1$).

La linéarisation de cette forme variationnelle nous conduit à l'opérateur tangent suivant :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_t} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

avec dans le cas :
• **mixte**

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}}D_{\delta\mathbf{v}}\mathscr{L}_{HR}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{v}}\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} - p\,\mathrm{cof}\mathbf{F}\right):\nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega\\
&= \int_{\Omega_0}\nabla\Delta\mathbf{v}:\left(\frac{\partial^2\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}} - pJ(\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-T}\bigcirc\mathbf{F}^{-T})\right):\nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega\\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}}D_{\delta\mathbf{v}}\mathscr{L}_{HR}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{q}}\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} - p\,\mathrm{cof}\mathbf{F}\right):\nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega\\
&= -\int_{\Omega_0}\Delta q\,\mathrm{cof}\mathbf{F}:\nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega
\end{aligned} \tag{2.42}$$

• **Lagrangien**

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HR}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} (\nabla \Delta\mathbf{v}^T \mathbf{F})_s : \left(4\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} - pJ(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2\mathbf{C}^{-1} \oplcirc \mathbf{C}^{-1}) \right) : (\nabla \delta\mathbf{v}^T \mathbf{F})_s d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \nabla \Delta\mathbf{v} : (\mathbf{S} \nabla \delta\mathbf{v}^T) d\Omega \qquad (2.43) \\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HR}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q \mathrm{cof}\mathbf{C} : (\nabla \delta\mathbf{v}^T \mathbf{F})_s d\Omega
\end{aligned}$$

L'inconvénient majeur de cette formulation réside dans la non définie positivité de la matrice tangente. Le système linéaire tangent qui découle de la linéarisation et de la discrétisation éléments finis est généralement résolu par une méthode d'élimination de gauss ou à l'aide d'une méthode itérative de système linéaire. Or ce type de méthode ne peut pas être utilisé dans ce cas particulier, puisque la matrice tangente n'est pas définie positive.

Il existe cependant des alternatives comme, par exemple, la méthode itérative d'UZAWA qui est particulièrement utilisée en mécanique des fluides pour les écoulements incompressibles (voir à titre d'application BENZI ET AL. [2005]).

2.5.2 Méthode en Lagrangien perturbé

■ *Formulation quasi-incompressible*

Afin de régulariser le système tangent (du type 2.41), on peut introduire un terme de perturbation dans la forme variationnelle. On considère donc la fonctionnelle perturbée suivante :

$$\mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{v},q) = \int_{\Omega_0} \left[\psi(I_1(\mathbf{v}),I_2(\mathbf{v})) - qU(J(\mathbf{v})) - \frac{\alpha}{2} q^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS \quad (2.44)$$

où α est un coefficient de perturbation, la valeur $\alpha = 0$ nous ramène au problème purement incompressible précédent. La fonction $U(J)$ peut être choisie parmi celle présentée dans le tableau 2.1. La stationnarité de (2.44) nous conduit au problème suivant (dans une configuration mixte) :

Trouver $(\mathbf{u},p) \in \mathcal{V}^b \times \mathscr{Q}$, $\forall (\delta\mathbf{v},\delta q) \in \mathcal{V}^0 \times \mathscr{Q}$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi(I_1(\mathbf{u}),I_2(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{F}} - pU'(J)\mathrm{cof}\mathbf{F}(\mathbf{u}) \right) : \nabla \delta\mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \big(-\alpha p - U(J(\mathbf{u})) \big) \delta q d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

La première équation d'Euler est identique à la forme obtenue précédemment. La deuxième équation correspond à une loi de compressibilité, où le terme α représente l'inverse du module de compressibilité.

La linéarisation de cette forme variationnelle conduit à l'opérateur tangent suivant :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_t} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \alpha\mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

avec dans le cas :

• **mixte**

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{u}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - pU'(J)\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla\Delta\mathbf{v} : \left(\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} - pJ\left((JU''(J) + U'(J))(\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T}) - U'(J)(\mathbf{F}^{-T} \bigcirc \mathbf{F}^{-T}) \right) \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HPR}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - pU'(J)\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q U'(J)\mathrm{cof}\mathbf{F} : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\alpha\mathbf{M} &= D_{\Delta q} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta q} \int_{\Omega_0} \left(-\delta q U(J) - \alpha p \delta q \right) d\Omega \\
&= -\alpha \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta q d\Omega
\end{aligned} \tag{2.47}$$

• **Lagrangien**

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - pG'(J)\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} (\nabla\Delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s : \left(4\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} - pJ((JU''(J) + U'(J))(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \right. \\
&\quad \left. - 2U'(J)(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) \right) : (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s d\Omega + \int_{\Omega_0} \nabla\Delta\mathbf{v} : (\mathbf{S}\nabla\delta\mathbf{v}^T) d\Omega \\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - pU'(J)\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q U'(J)\mathrm{cof}\mathbf{C} : (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s d\Omega \\
\alpha\mathbf{M} &= D_{\Delta q} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HRP}(\mathbf{u},p) = D_{\Delta q} \int_{\Omega_0} \left(-\delta q U(J) - \alpha p \delta q \right) d\Omega \\
&= -\alpha \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta q d\Omega
\end{aligned} \tag{2.48}$$

■ *Formulation compressible*

On peut également considérer une formulation en Lagrangien perturbé adaptée aux modèles de comportement compressible pour laquelle on ferait varier le module de compressibilité afin de pouvoir représenter un panel de matériaux allant jusqu'à l'incompressibilité

lorsque $k \to \infty$. En utilisant le découplage volumique-isochorique de l'énergie et en considérant J comme une variable indépendante on arrive à la fonctionnelle suivante (RÜTER & STEIN [2000]) :

$$\mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{v},J) = \int_{\Omega_0} \left(\psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + \psi_{vol}(J(\mathbf{v}))\right) d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.49}$$

le potentiel de compressibilité peut être défini par $\psi_{vol}(J) = \frac{1}{2}k(U(J))^2$.

En considérant la pression hydrostatique définie par $p = kU(J)$, on peut, à l'aide d'une transformation de Legendre, définir un potentiel dual $\psi^*_{vol}(p)$ tel que (voir CHEN, HAN, ET AL. [1997]) :

$$\psi^*_{vol}(p) = \sup_{J\geq 0} \left\{pU(J) - \psi_{vol}(J)\right\} \tag{2.50}$$

Si la fonction $\psi_{vol}(J)$ est convexe, un résultat standard de l'analyse convexe montre que la fonction $\psi^*_{vol}(p)$ est convexe, on a de plus la relation suivante :

$$\psi_{vol}(J) = \sup_{p} \left\{pU(J) - \psi^*_{vol}(p)\right\} \tag{2.51}$$

Si l'on peut calculer la fonction inverse de $U(J)$ tel que $J = U^{-1}(p)$, on peut écrire directement la transformée de Legendre, le potentiel dual s'écrit explicitement :

$$\psi^*_{vol}(p) = pU(U^{-1}(p)) - \psi_{vol}(U^{-1}(p)) \tag{2.52}$$

Ainsi si l'on a $U(J) = J - 1$ et $p = kU(J)$, la fonction réciproque s'écrit $U^{-1}(p) = k^{-1}p + 1$. En remplaçant dans (2.52) on obtient :

$$\psi^*_{vol}(p) = \frac{1}{2k}p^2 \tag{2.53}$$

On retrouve le terme de perturbation de la forme précédente où k est l'inverse du coefficient de perturbation.

En utilisant cette transformation de Legendre, le problème dual associé à la fonctionnelle (2.49) s'écrit :

$$\mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{v},q) = \int_{\Omega_0} \left(\psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u})) - qU(J(\mathbf{u})) + \psi^*_{vol}(q)\right) d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.54}$$

La stationnarité de (2.54), avec $U(J) = J - 1$ nous conduit a :

Trouver $(\mathbf{u},p) \in \mathcal{V}^b \times \mathscr{Q}$, $\forall (\delta\mathbf{v},\delta q) \in \mathcal{V}^0 \times \mathscr{Q}$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{F}} - p\,\mathrm{cof}\mathbf{F}(\mathbf{u})\right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(-(J(\mathbf{u}) - 1) - \frac{1}{k}p\right) \delta q d\Omega = 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

L'opérateur tangent garde la même forme que précédemment avec les blocs suivants :
• **dans le cas mixte**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t = D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{F}} - p\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla\Delta\mathbf{v} : \left(\mathbb{C}_m^{iso} - pJ \left[\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-T} \bigcirc \mathbf{F}^{-T} \right] \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\mathbf{G} = D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HPC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{F}} - p\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q \mathrm{cof}\mathbf{F} : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\alpha\mathbf{M} = D_{\Delta q} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta q} \int_{\Omega_0} \left(-\delta q (J-1) - \frac{1}{k} p \delta q \right) d\Omega \\
&= -\frac{1}{k} \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta q d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Le tenseur d'ordre 4, $\mathbb{C}_m^{iso}$ est donné par l'équation (A.18)

• **dans le cas Lagrangien**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t = D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{C}})}{\partial \overline{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\overline{C}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} (\nabla\Delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s : \left(4\mathbb{C}_m^{iso} - pJ \left[\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \right] \right) : (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F}) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \nabla\Delta\mathbf{v} : (S\nabla\delta\mathbf{v}) d\Omega \\
\mathbf{G} = D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HPC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{C}})}{\partial \overline{\mathbf{C}}} : \mathbb{P}_{\overline{C}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta p \mathrm{cof}\mathbf{C} : (\nabla\delta\mathbf{v}\mathbf{F})_s d\Omega \\
\alpha\mathbf{M} = D_{\Delta q} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HRC}(\mathbf{u},p) &= D_{\Delta q} \int_{\Omega_0} \left(-\delta q (J-1) - \frac{1}{k} p \delta q \right) d\Omega \\
&= -\frac{1}{k} \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta q d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

où $\mathbb{C}_{iso}$ donné par l'équation (A.12).

Remarque 2.3
Utiliser un comportement compressible dans une formulation mixte présente l'avantage de pouvoir identifier le multiplicateur de Lagrange p à la pression hydrostatique, ce qui n'est pas le cas en général. De plus, CHEN, HAN, ET AL. *[1997] ont étudié la convergence de solutions discrètes ou continues, quasi-incompressibles vers des solutions incompressibles pour ce type de formulation variationnelle. À l'aide de tests numériques, ils montrent que la vitesse de convergence par rapport au terme de perturbation $(1/k)$ est de 1.*

❑

2.5.3 Méthode en Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté proposée par GLOWINSKI & LE TALLEC [1980, 1982, 1984] consiste à chercher les solutions $\mathbf{u}$ telles que $F(\mathbf{u})$ soit incompressible dans un espace plus grand que celui du problème initial afin d'éviter les phénomènes de blocages. Ils considèrent donc une fonctionnelle « augmentée » permettant de relaxer la relation $\mathbf{F} = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{X}+\mathbf{I}$.

Il s'agit de trouver $(\mathbf{u},\mathbf{F},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{V}^b \times \mathscr{F}^i \times (L^2(\Omega))^{d\times d}$ points stationnaires de :

$$\mathscr{L}_{HWA}(\mathbf{v},\mathbf{G},\boldsymbol{\mu}) = \int_{\Omega_0} \left(\psi(\mathbf{F}(\mathbf{v})) - \boldsymbol{\mu} : (\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{G})\right) d\Omega + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{G}\|^2_{L^2} - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS \tag{2.58}$$

L'espace $\mathscr{F}^i$ étant défini par :

$$\mathscr{F}^i = \left\{\mathbf{G} \in (L^2(\Omega))^{d\times d}, \quad \mathbf{G}^{-T} \in (L^2(\Omega))^{d\times d}, \quad \det\mathbf{G} = 1 \quad \text{dans } \Omega\right\} \tag{2.59}$$

Le terme γ est un coefficient de pénalité.

La stationnarité de cette fonctionnelle nous amène au problème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u},\widetilde{\mathbf{F}},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{V}^b \times \mathscr{F}^i \times (L^2(\Omega))^{d\times d},\ \forall (\delta\mathbf{v},\delta\mathbf{G},\delta\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{V}^0 \times \mathscr{F}^c \times (L^2(\Omega))^{d\times d} \\ \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{F}(\mathbf{u}))}{\partial\mathbf{F}} - \boldsymbol{\lambda} + \gamma(\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \widetilde{\mathbf{F}})\right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext} dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\gamma(\widetilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}(\mathbf{u})) + \boldsymbol{\lambda}\right) : \delta\mathbf{G} d\Omega = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\widetilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}(\mathbf{u})\right) : \delta\boldsymbol{\mu} d\Omega = 0 \end{array}\right. \end{array}} \tag{2.60}$$

L'espace $\mathscr{F}^c$ correspond à l'espace tangent à $\mathscr{F}^i$ au point $\widetilde{\mathbf{F}}$:

$$\mathscr{F}^c = \left\{\mathbf{G} \in (L^2(\Omega))^{d\times d}, \quad (\text{cof}\widetilde{\mathbf{F}})\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega\right\} \tag{2.61}$$

Remarque 2.4
Le multiplicateur (tensoriel) de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ peut s'interpréter comme étant la partie des contraintes liée à la variable pression. Aux points stationnaires, on a : $\boldsymbol{\lambda} = -p\,\text{cof}\widetilde{\mathbf{F}}$

❑

Pour des valeurs de γ « suffisamment » importantes on peut résoudre le système d'équations (2.60) à l'aide d'une méthode itérative d'UZAWA. En supposant $\boldsymbol{\lambda}^n$ connu à l'incrément n, on obtient $(\mathbf{u}^n,\widetilde{\mathbf{F}}^n)$ en résolvant :

$$\left\{\begin{array}{l} D_{\delta\mathbf{v}}\mathscr{L}_{HWA}(\mathbf{u}^n,\widetilde{\mathbf{F}}^n,\lambda^n) = 0 \quad \forall\delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \\ D_{\delta\mathbf{G}}\mathscr{L}_{HWA}(\mathbf{u}^n,\widetilde{\mathbf{F}}^n,\lambda^n) = 0 \quad \forall\delta\mathbf{G} \in \mathscr{F}^c \end{array}\right. \tag{2.62}$$

puis on calcule λ^{n+1} avec :

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^n) - \widetilde{\mathbf{F}}^n\right) \tag{2.63}$$

ρ étant un paramètre de la méthode d'UZAWA ($\rho > 0$). La difficulté de ce problème consiste à trouver la solution du système non-linéaire (2.62). GLOWINSKI & LE TALLEC [1982] ont tout d'abord résolu les cas particuliers des problèmes axisymétriques ou bidimensionnels. Dans le cas général, ils proposent d'utiliser une méthode de relaxation par bloc, consistant à résoudre (2.62) de la manière suivante :
Connaissant $\mathbf{u}_0^n$, on cherche $(\mathbf{u}_{k+1}^n, \widetilde{\mathbf{F}}_{k+1}^n)$ en résolvant successivement :

$$D_{\delta\mathbf{G}}\mathscr{L}_{HWA}(\mathbf{u}_k^n, \widetilde{\mathbf{F}}_{k+1}^n, \lambda^n) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{G} \in \mathscr{F}^c \tag{2.64}$$

$$D_{\delta\mathbf{v}}\mathscr{L}_{HWA}(\mathbf{u}_{k+1}^n, \widetilde{\mathbf{F}}_{k+1}^n, \lambda^n) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathscr{V}^0 \tag{2.65}$$

La recherche de $\widetilde{\mathbf{F}}_{k+1}^n$ à partir de l'équation (2.64), dans l'espace particulier $\mathscr{F}^c$, n'est pas triviale. Dans GLOWINSKI & LE TALLEC [1984], les auteurs proposent une stratégie particulière pour résoudre ce type de problème.

2.5.4 Méthode de SIMO & TAYLOR

SIMO puis TAYLOR ont successivement proposé une forme variationnelle à trois champs dérivée du principe de HU-WASHIZU. L'objectif étant de relâcher l'application de la contrainte d'incompressibilité en utilisant un champ de variation de volume $\widetilde{J}$ comme variable indépendante, ils utilisent le découplage volumetrique-isochorique de l'énergie, tel que :

$$\mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{v}, q, \widetilde{J}) = \int_{\Omega_0} \left[\psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + \psi_{vol}(\widetilde{J}) + q(\widetilde{J} - J(\mathbf{v})) \right] d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext}\, dS = 0 \tag{2.66}$$

L'écriture de la stationnarité de cette fonctionnelle par rapport à ces trois variables donne :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u}, p, \widetilde{J}) \in \mathscr{V}^b \times \mathscr{Q} \times L^2(\Omega),\ \forall (\delta\mathbf{v}, \delta q, \delta\theta) \in \mathscr{V}^0 \times \mathscr{Q} \times L^2(\Omega) \\ \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{F}} - p\,\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v}\, d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext}\, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\widetilde{J} - J(\mathbf{u}) \right) \delta q\, d\Omega = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{vol}(\widetilde{J})}{\partial \widetilde{J}} + p \right) \delta\theta\, d\Omega = 0 \end{array} \right. \end{array}} \tag{2.67}$$

L'opérateur tangent associé à cette forme variationnelle est de la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_t} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

avec dans le cas :

• **mixte**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{\mathbf{F}}} - p\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \Delta\mathbf{F} : \left(\mathbb{C}_m^{iso} - pJ\left(\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-T} \bigcirc \mathbf{F}^{-T} \right) \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\overline{\mathbf{F}}} - p\mathrm{cof}\mathbf{F} \right) : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q \mathrm{cof}\mathbf{F} : \nabla\delta\mathbf{v} d\Omega \\
\mathbf{M} &= D_{\Delta\theta} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\theta} \int_{\Omega_0} \left(\widetilde{J} - J(\mathbf{u}) \right) \delta q d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta\theta d\Omega \\
\mathbf{H} &= D_{\Delta\theta} D_{\delta\theta} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\theta} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{vol}(\breve{J})}{\partial \breve{J}} + p \right) \delta\theta d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \delta\theta \, \frac{\partial^2 \psi_{vol}(\breve{J})}{\partial \breve{J}^2} \Delta\theta d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

• **Lagrangien**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= D_{\Delta\mathbf{v}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\mathbf{v}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{C}})}{\partial \overline{\mathbf{C}}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} (\nabla\Delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s : \left(4\mathbb{C}_l^{iso} - pJ(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2(\mathbf{C}^{-1} \oplcirc \mathbf{C}^{-1}) \right) : (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \nabla\Delta\mathbf{v} : (\mathbf{S}\nabla\delta\mathbf{v}^T) d\Omega \\
\mathbf{G} &= D_{\Delta\mathbf{q}} D_{\delta\mathbf{v}} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\mathbf{q}} \int_{\Omega_0} \left(2\frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{C}})}{\partial \overline{\mathbf{C}}} - p\mathrm{cof}\mathbf{C} \right) : \delta\mathbf{E} d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_0} \Delta q \mathrm{cof}\mathbf{C} : (\nabla\delta\mathbf{v}^T\mathbf{F})_s d\Omega \\
\mathbf{M} &= D_{\Delta\theta} D_{\delta q} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\theta} \int_{\Omega_0} \left(\widetilde{J} - J(\mathbf{u}) \right) \delta q d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \delta q \, \Delta\theta d\Omega \\
\mathbf{H} &= D_{\Delta\theta} D_{\delta\theta} \mathscr{L}_{HWS}(\mathbf{u},p,\widetilde{J}) = D_{\Delta\theta} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \psi_{vol}(\breve{J})}{\partial \breve{J}} + p \right) \delta\theta d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \delta\theta \, \frac{\partial^2 \psi_{vol}(\breve{J})}{\partial \breve{J}^2} \Delta\theta d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Remarque 2.5
Les trois équations d'Euler (2.67) correspondent respectivement à l'équilibre des puissances intérieures et extérieures, à la contrainte d'égalité du champ de dilatation $\widetilde{J}$ avec la variation de volume $J(\mathbf{u})$ calculée à partir du champ de déplacement $\mathbf{u}$ et enfin à l'égalité de la pression hydrostatique avec la partie déviatorique de la contrainte. On peut remarquer que ces équations ne prennent pas en compte la contrainte d'incompressibilité. On obtient donc un opérateur tangent qui ne présente pas l'inconvénient du mauvais conditionnement au voisinage de l'incompressibilité. ❑

Pour imposer la condition d'incompressibilité, SIMO & TAYLOR ont proposé d'utiliser une formulation en Lagrangien augmenté, il suffit de modifier la fonctionnelle $\mathscr{L}_{HWS}$ de la manière suivante :

$$\mathscr{L}_{HWSA}(\mathbf{v},q,\breve{J}) = \int_{\Omega_0} \left[\psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + \psi_{vol}(\breve{J},\lambda) - q(\breve{J} - J(\mathbf{v}))\right] d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{f}_{ext}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\, \mathbf{T}_{ext}\, dS = 0 \tag{2.71}$$

où la partie volumique de l'énergie peut être choisie telle que :

$$\psi_{vol}(\breve{J},\lambda) = kU(\breve{J}) + \lambda(\breve{J} - 1) \tag{2.72}$$

$U(\breve{J})$ étant une fonction de pénalité telle que $U(1) = 0$, k est un coefficient de pénalité, λ un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité. Comme pour la méthode en Lagrangien augmenté de GLOWINSKI & LE TALLEC [1980], on peut utiliser une méthode de résolution itérative de type UZAWA en résolvant le système (2.68) pour un λ_k fixé puis en itérant sur la valeur du multiplicateur de Lagrange de la manière suivante :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + k(\breve{J} - 1) \tag{2.73}$$

jusqu'à ce que la précision désirée $|\breve{J} - 1| < \text{tol}$ soit atteinte.

Cette approche est reprise par WEISS ET AL. [1996] pour modéliser le comportement anisotropique et quasi-incompressible des ligaments du genou humain. Les auteurs utilisent des éléments tridimensionnels d'ordre faible (constants pour la pression et la dilatation, linéaires pour les déplacements). Ils observent globalement un bon comportement des éléments et des déformations de modes sablier uniquement dans le cas de maillages grossiers et réguliers. MIEHE [1994] propose une comparaison de cette méthode avec une formulation de type déplacement avec un enrichissement de l'approximation du gradient de la déformation par des *modes incompatibles*, il constate des résultats assez proches même si la dernière méthode semble être la plus performante.

2.5.5 Bilan des différentes formes variationnelles

Les différentes formes variationnelles décrites plus haut ne sont pas toutes équivalentes, ainsi on peut faire un bref bilan de chacune d'entre-elles afin de motiver notre choix :

– La méthode de pénalité semble très attractive de par sa facilité d'implémentation, cependant elle conduit lorsque $\alpha \to 0$ ou $k \to \infty$ à un système tangent mal conditionné

et exhibe des comportements de blocages [5] des éléments. Pour contourner le problème du conditionnement, des méthodes à intégration réduite ont été proposées. L'*intégration réduite sélective* consiste ainsi à sous intégrer les termes du résidu d'équilibre (c'est à dire provenant de la discrétisation de la forme (2.27) ou (2.29)) et de l'opérateur tangent qui dépendent de la variation de volume.

- La méthode en Lagrangien conduit à un opérateur tangent qui n'est pas défini positif, et qui nécessite donc la mise en oeuvre d'un méthode de résolution adaptée.
- La méthode en Lagrangien perturbé ne présente pas les désavantages des deux méthodes précédentes, elle permet ainsi de relaxer la contrainte d'incompressibilité. De plus, MALKUS & HUGHES [1978] ont montré une équivalence entre la méthode de pénalité avec intégration réduite sélective et la méthode en lagrangien perturbé en un point stationnaire. Ils démontrent l'égalité des deux opérateurs tangents pour peu que le nombre de points d'intégration soit égal au nombre de noeuds de pression de la formulation mixte. Lorsque l'on est au voisinage du point stationnaire, les deux opérateurs diffèrent, ce qui peu induire une vitesse de convergence différente pour les deux méthodes. PAPOULIA [1999] en propose une illustration en comparant la méthode de pénalité avec une méthode mixte à trois champs.
- La méthode en Lagrangien augmenté semble également ne pas être sujette aux problèmes de blocages, elle reste cependant plus délicate à mettre en œuvre que les autres méthodes.
- La méthode de SIMO & TAYLOR, est adaptée pour la modélisation des comportements faiblement compressibles à de forts niveaux de déformations. Cependant la prise en compte de la condition d'incompressibilité n'est pas intrinsèque et il faut mettre en place un algorithme itératif pour respecter cette condition.

Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser une forme variationnelle en Lagrangien perturbé. Cette dernière possède les avantages d'une méthode multi-champs (en particulier un meilleur conditionnement de l'opérateur tangent par rapport à une méthode pénalisée), tout en étant une des plus simples à implémenter dans un code de calcul standard, comparativement aux formes variationnelles proposées par GLOWINSKI ou SIMO.

2.6 Discrétisation par éléments-finis de la forme en Lagrangien perturbé

La mise en oeuvre d'une méthode d'éléments-finis nécessite un certain nombre d'étapes génériques qui sont communes à de nombreux problèmes. Il existe de nombreux ouvrages qui détaillent cette méthode (voir par exemple ZIENKIEWICZ & TAYLOR [2000]; BATOZ & DHATT [1990]; CRISFIELD [1991]), on se contentera donc d'en rappeler quelques grandes lignes afin de poser les notations.

(5). Le blocage se caractérise par un mauvais conditionnement de l'opérateur tangent et une solution nulle en terme de cinématique

– La première étape, consiste à discrétiser le domaine Ω_0 en éléments géométriques « finis » Ω_i^e de telle sorte qu'on ait

$$\bigcup_{i=1}^{nel} \Omega_i^e = \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_i^e \cap \Omega_j^e \quad \text{soit une arréte ou une face si} \quad i \neq j \tag{2.74}$$

– On construit à l'aide de fonctions interpolatrices des approximations de la position et des champs inconnus de chaque élément. Par exemple, si notre seule inconnue est le déplacement, on obtient les formes discrétisées de la position et du déplacement [6] :

$$\mathbf{x}_h^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(\xi,\eta,\zeta)\ X_i^e \qquad \mathbf{u}_h^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i^e(\xi,\eta,\zeta)\ U_i^e \tag{2.75}$$

$(\xi,\eta,\zeta) \in [-1,1]^3$ représentant une paramétrisation de l'élément de référence correspondant à une entité géométrique simple (carré, triangle, cube, prisme, ...), N_i sont les fonctions interpolatrices (généralement des polynômes de Lagrange). n représente le nombre de noeuds (de points d'interpolations) de l'élément de référence, généralement pris sur le bord de l'élément. Les U_i^e sont les degrés de libertés (les coefficients interpolateur) d'un élément (les X_i^e sont les positions des noeuds).

– On construit ensuite les vecteurs et les matrices tangentes associés à la formulation variationnelle adoptée, en utilisant l'interpolation des inconnues. On peut ainsi interpoler le gradient de déformation $\mathbf{F}$ à l'aide de l'opérateur de déformation $[B]$ tel que [7] :

$$\left\{F^e\right\} = \left[B^e\right]\left\{U^e\right\} + \{I\} \tag{2.76}$$

typiquement dans le cas bidimensionnel $[B^e]$ prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{xx} \\ F_{yy} \\ F_{xy} \\ F_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ \vdots \\ U_n^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

– On assemble le système global que l'on résout, puis on réalise toutes les opérations de post-traitements.

Dans le cas de comportements non-linéaires incompressibles ou quasi-incompressibles la plupart de ces étapes ne posent pas de difficultés particulières hormis le choix des fonctions d'interpolations, en particulier dans le cas d'une formulation variationnelle mixte.

La forme discrète du problème variationnel linéarisé nous amène à la résolution d'un système du type :

$$\mathscr{A}_{e=1}^{nel} < \delta U^e, \delta Q^e > \left(\begin{bmatrix} K_t^e(u_h,p_h) & G^e(u_h,p_h) \\ (G^e)^T(u_h,p_h) & \alpha I^e(u_h,p_h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U^e \\ \Delta Q^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_u^e(u_h,p_h) \\ r_p^e(u_h,p_h) \end{Bmatrix} \right) = 0 \tag{2.78}$$

(6). Pour une simplicité de notation, nous considérons ici le cas des éléments isoparamétriques

(7). Dans ce qui suit, un vecteur élémentaire est noté entre accolades $\{\bullet\}$, son transposé est noté $< \bullet >$, une matrice élémentaire s'écrit $[\bullet]$

$\mathscr{A}$ étant l'opérateur d'assemblage.

Deux versions de ce principe variationnel ont été mises en oeuvre, l'une pour des comportements incompressibles, l'autre pour des comportements compressibles.

• **dans le cas d'un potentiel hyperélastique incompressible** (8)

$$
\begin{aligned}
[K_t^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\mathbb{C}_{mi}(u_h) - p_h J\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-T}\bigcirc\mathbf{F}^{-T}\right)\right][B^e]d\Omega \\
[G^e] &= -\int_{\Omega_e} \{N_p^e\} < \text{cof}\mathbf{F} > [B^e]d\Omega \\
[\alpha I^e] &= -\alpha \int_{\Omega_e} \{N_p^e\} < N_p^e > d\Omega \\
[r_u^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\mathbf{\Pi}(u_h) - p_h \text{cof}\mathbf{F}\right] d\Omega - \int_{\Omega_e} \{N_u^e\} < f_{ext} > d\Omega - \int_{\Omega_f\cap\Omega_e} \{N_u^e\} < T_{ext} > dS \\
[r_p^e] &= \int_{\Omega_e} N_p^e(-(J-1) - \alpha(p_h - p_0))d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

• **dans le cas d'un potentiel hyperélastique compressible**

$$
\begin{aligned}
[K_t^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\mathbb{C}_m^{iso}(u_h) - p_h J\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}\bigcirc\mathbf{F}^{-T}\right)\right][B^e]d\Omega \\
[G^e] &= -\int_{\Omega_e} \{N_p^e\} < \text{cof}\mathbf{F} > [B^e]d\Omega \\
[\alpha I^e] &= -\frac{1}{k}\int_{\Omega_e} \{N_p^e\} < N_p^e > d\Omega \\
[r_u^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\overline{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P} - p_h \text{cof}\mathbf{F}\right] d\Omega - \int_{\Omega_e} \{N_u^e\} < f_{ext} > d\Omega - \int_{\Omega_f\cap\Omega_e} \{N_u^e\} < T_{ext} > dS \\
[r_p^e] &= \int_{\Omega_e} N_p^e(-(J-1) - \frac{1}{k}p_h)d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

La constante p_0 introduite dans la forme incompressible permet de tenir compte du décalage d'origine du champ pression. Dans cette formulation, la variable p_h est initialisée à p_0 au départ du calcul afin de garantir un état de contraintes nulles en l'absence de déformations. La valeur de p_0 est fonction des paramètres du modèle de comportement choisi.

Remarque 2.6
Le décalage de la pression peut être illustré par le cas du modèle incompressible de Neo-Hooke, la contrainte s'écrit : $\mathbf{\Pi} = 2a_{10}\mathbf{F} - p\,\text{cof}\mathbf{F}$, *ainsi à l'état naturel (initial), le multiplicateur de Lagrange doit valoir* $p = 2a_{10}$ *afin d'avoir* $\mathbf{\Pi}(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0$. ❑

(8). La forme incompressible a été implémentée avec la fonction $G(J) = J - 1$, par rapport à la forme variationnelle générale (2.45)

Remarque 2.7
Contrairement au cas précèdent, pour une formulation incompressible, le multiplicateur de Lagrange p correspond exactement à la pression hydrostatique et est donc initialisé à 0 au départ du calcul. ❑

Le multiplicateur de Lagrange p_h ne devant pas être continu entre deux éléments, on peut effectuer une opération de condensation statique afin d'éliminer les degrés de libertés de pression du système global, en utilisant [9] :

$$[G^e]^T\{\Delta V^e\} + [\alpha I^e]\{\Delta Q^e\} = -\{r_p^e\} \tag{2.81}$$

en remplaçant ΔQ^e dans le système global, on obtient donc une matrice tangente et un vecteur résidu élémentaire tels que :

$$\begin{aligned} [K^e] &= [K_t^e] - [G^e][\alpha I^e]^{-1}[G^e]^T \\ \{r^e\} &= \{r_u\} - [G^e][\alpha I^e]^{-1}\{r_p^e\} \end{aligned} \tag{2.82}$$

La figure 2.1 présente une synthèse des opérations nécessaires lors d'une boucle de correction de Newton-Raphson pour un élément fini mixte avec condensation statique de la pression.

(9). L'interpolation de la pression étant interne à chaque élément, l'équation (2.81) doit être indépendamment vérifiée pour chaque élément, on peut donc la sortir de l'opérateur d'assemblage dans le système (2.78)

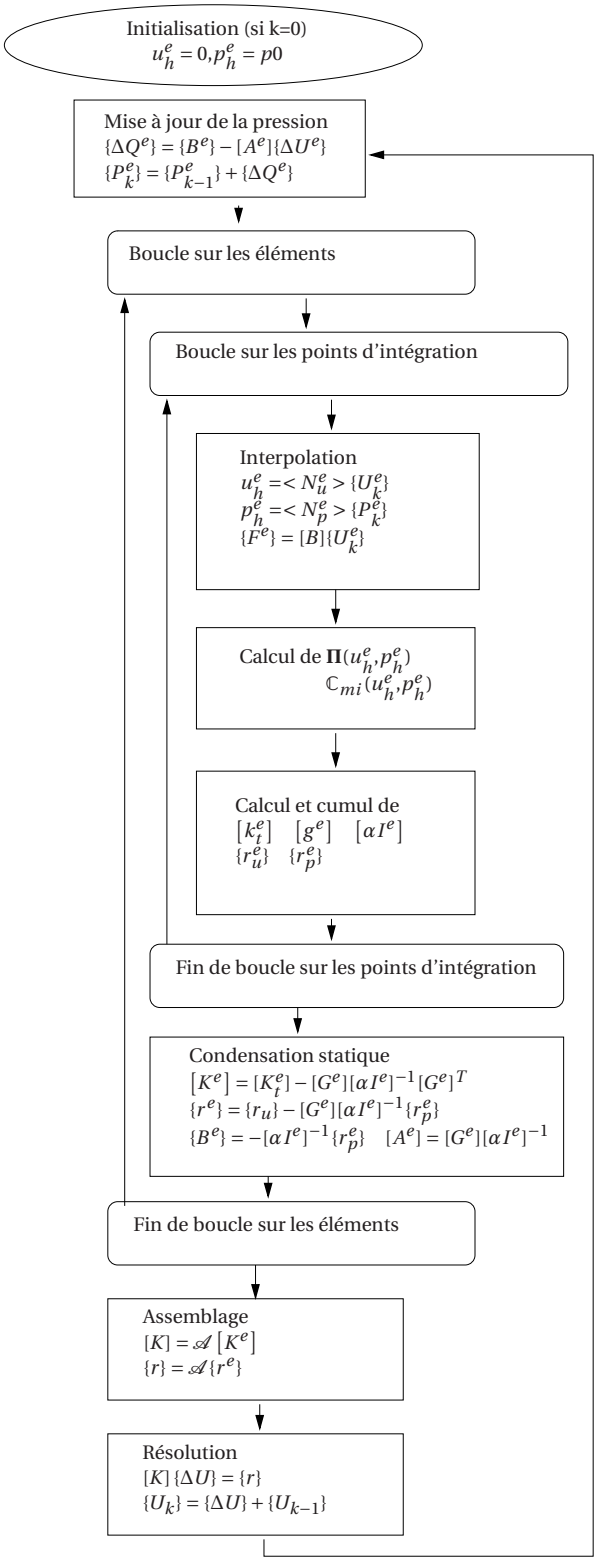


Figure 2.1 – *Organigramme synthétique d'une étape k de correction de Newton-Raphson*

2.7 Choix des espaces d'interpolation

Pour une formulation mixte déplacement/pression avec approximation discontinue de la pression, le choix des fonctions d'interpolation et de l'ordre d'interpolation est crucial. Il existe un certain nombre de critères théoriques ou pratiques (numériques) permettant de faire un tri parmi l'ensemble des possibilités.

2.7.1 Consistance et patch-test

Le patch-test est un test numérique simple permettant de vérifier la consistance et de tester la stabilité d'un élément-fini mixte (voir ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1997]). Développé, au départ, pour l'élasticité linéaire, il est courament utilisé dans les cas non-linéaires. Dans le cas de comportements incompressibles, ce test consiste à considérer différents maillages d'éléments du même type (des patchs) et à vérifier les deux critères suivants :

– On doit tout d'abord s'assurer que le nombre de contraintes n_c (degrés de liberté de pression) reste inférieur au nombre d'inconnues cinématiques n_i, lorsque l'on bloque tous les noeuds situés sur le bord du patch (voir figure 2.2).

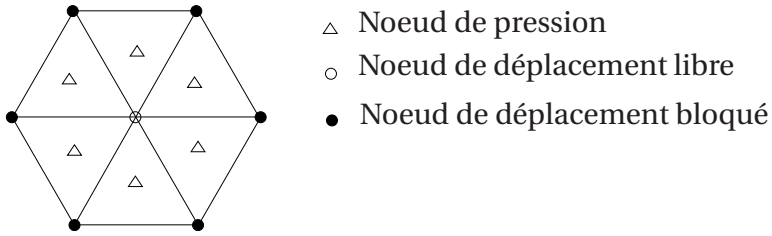


Figure 2.2 – *Exemple de décompte des contraintes sur un patch de T3-P1 ($n_c = 6, n_i = 2$)*

– On doit également s'assurer que le patch ne contient pas de modes de pression autres que le seul et unique mode physique. On calcule pour cela les valeurs propres de la matrice tangente en bloquant tous les degrés de libertés cinématiques, si le nombre de valeurs propres nulles est égal à 1, le test est réussi.

Le tableau 2.2 présente quelques résultats de patch-tests réalisés sur des éléments bidimensionnels avec interpolation discontinue de la pression. La première lettre et le premier chiffre qualifie le type géométrique de l'élément (Q pour quadrangle, T pour triangle) et le nombre de noeuds d'interpolation de la cinématique, le dernier chiffre se rapporte au nombre de noeuds d'interpolation de la pression.

Élément	Q4-P1	Q8-P3	Q9-P3	T3-P1	T6-P1	T6-P3	T7-P3
Patch-test	non	non	oui	non	oui	non	oui

Tableau 2.2 – *Résultats du patch test pour des éléments mixtes pression-déplacement (avec discontinuité entre éléments de la pression)*

2.7.2 Stabilité et condition *inf-sup* du problème discret de point selle

La discrétisation d'une formulation variationnelle avec des méthodes mixtes en petites déformations, conduit à la résolution de systèmes du type (pour une méthode de pénalité), trouver $(u_h, v_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ tel que :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ p_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \tag{2.83}$$

où encore (pour une méthode de perturbation) :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_h \\ p_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \tag{2.84}$$

avec A étant une matrice associée à une forme bilinéaire définie positive.

La condition *inf-sup* où encore appelée LBB (pour LADYZHENSKAYA-BABUŠKA-BREZZI) est une condition nécessaire pour garantir la stabilité du schéma de dicrétisation qui conduit au système (2.83) ou au système (2.84). Elle consiste en l'existence d'une constante γ indépendante de la taille du maillage, telle que (voir par exemple AURICHIO ET AL. [2004]) :

$$\inf_{p_h \in \mathcal{Q}_h} \sup_{u_h \in \mathcal{V}_h} \frac{u_h^T B\, p_h}{\|u_h\|_{\mathcal{V}_h} \|p_h\|_{\mathcal{Q}_h}} \geq \gamma \tag{2.85}$$

Cette condition est suffisante si elle est combinée avec la condition d'ellipticité de la matrice $[A]$, sur le noyau de $[B]$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{il existe une constante positive } \alpha, \text{ indépendante de la taille du maillage, tel que :} \\ &\alpha \|u_h\|_{\mathcal{V}_h} \leq u_h^T A u_h \qquad \forall u_h \in \mathcal{V}_{ker} \end{aligned} \tag{2.86}$$

avec $\mathcal{V}_{ker}$ l'espace défini par :

$$\mathcal{V}_{ker} = \{u_h \in \mathcal{V}_h \quad \text{tel que} \quad B u_h = 0\} \tag{2.87}$$

Remarque 2.8
La condition inf-sup *et l'éllipticité sur le noyau sont des outils mathématiques intéressants, mais le plus souvent difficiles à mettre en oeuvre, la recherche de constantes γ et α, indépendantes de la taille du maillage n'étant pas triviale. Elles dépendent fortement de l'espace d'approximation choisi, si bien que peu d'éléments vérifient ces conditions sauf s'ils ont été conçus pour cela.* ❑

Remarque 2.9
La vérification de la condition LBB avec un élément-fini basé sur une formulation en petites déformations, ne permet pas de conclure sur la stabilité du même élément étendu au cas des grandes déformations (voir par exemple les résultats de WRIGGERS & REESE *[1996];* PANTUSO & BATHE *[1997]).* ❑

BABUŠKA & NARASIMHAN [1997] présentent l'étude de stabilité, sur un cas unidimensionnel simple, de deux approximations éléments-finis qui satisfont le patch-test mais pas forcement la condition LBB. Les auteurs illustrent le fait que la vérification du patch-test ne permet pas de conclure sur la vérification de la condition LBB. De plus, une méthode éléments-finis ne respectant pas la condition LBB peut conduire à une convergence locale optimale, fonction des paramètres d'entrée de la méthode (comme le chargement,...).

CRISFIELD & NORRIS [2000]; BATHE [2001] utilisent une procédure numérique permettant de tester l'évolution de la condition inf-sup (pour un problème donné) sur différentes tailles de maillages. Il s'agit de résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$[K_c]\{\phi\} = \lambda[S]\{\phi\} \tag{2.88}$$

avec, pour une formulation en Lagrangien perturbé :

$$[K_c] = -\alpha[B][C]^{-1}[B]^T \tag{2.89}$$

$$[S] = \int_{\Omega_0}[G]^T[G]dV \tag{2.90}$$

où la matrice G correspond exactement dans cette notation à la matrice B^e de l'équation (2.76). Le test consiste alors à regarder le nombre de modes de pression en calculant :

$$p_{pm} = p_{zero} + 1 - (n_u - n_p + 1) \tag{2.91}$$

p_{zero} étant le nombre de valeurs propres nulles. Si le nombre de mode de pression est nul alors $\sqrt{\lambda}$ est égale à la constante inf-sup γ. Si p_{pm} est positif, la discrétisation éléments-finis peut contenir le mode de pression physique ou des modes non physiques. En éliminant le mode de pression physique (en changeant les conditions aux limites) si $p_{pm} \neq 0$, on peut conclure que le test inf-sup n'est pas passé. Cette méthode, simple à mettre en oeuvre ne s'applique cependant, comme la condition LBB, qu'en petites perturbations.

2.7.3 Méthode d'enrichissement de la déformation et modes incompatibles

De manière générale, pour la modélisation de milieu incompressible, les éléments linéaires en terme de cinématique, quelle que soit l'interpolation de la pression, sont reconnus pour ne pas être fiables. Ce type d'élément est pourtant préféré dans un certain nombre de situations comme par exemple dans le cas du contact. Partant de ce constat, nombre d'auteurs ont essayé de stabiliser ce type d'élément.

SIMO & RIFAI (puis IBRAHIMBEGOVIC & WILSON) ont notamment proposé une méthode d'enrichissement de la déformation qui peut se déduire du principe variationnel de HU-WASHIZU. Si l'on considère la fonctionnelle :

$$\mathscr{L}_{HW}(\mathbf{u},\mathbf{H},\mathbf{\Pi}) = \int_{\Omega_0}\left(\psi(\mathbf{H}) + \mathbf{\Pi}\,(\nabla\mathbf{u} - \mathbf{H})\right)d\Omega - \int_{\Omega}\mathbf{u}\,\mathbf{f}_{ext}dS - \int_{\partial\Omega_f}\mathbf{u}\,\mathbf{T}_{ext}dS \tag{2.92}$$

l'idée de SIMO & RIFAI consiste à décomposer le gradient $\mathbf{H}$ en deux parties ; une partie compatible $\nabla\mathbf{u}$ et une partie incompatible $\overline{\mathbf{H}}$ tel que :

$$\mathbf{H} = \nabla\mathbf{u} + \overline{\mathbf{H}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{F}} = \nabla\mathbf{u} + \overline{\mathbf{H}} + \mathbf{I} \tag{2.93}$$

et avec $\psi(\widetilde{\mathbf{F}})$ un potentiel hyperélastique compressible tel que :

$$\psi(\widetilde{\mathbf{F}}) = \psi_{iso}(\widetilde{\mathbf{F}}) + kG(\det\widetilde{\mathbf{F}}) \tag{2.94}$$

Ce qui nous amène au problème variationnel suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u},\overline{\mathbf{H}},\boldsymbol{\Pi}) \in \mathcal{V}^b \times \mathscr{P} \times \mathscr{P} \ \forall (\delta\mathbf{v},\delta\overline{\mathbf{G}},\delta\boldsymbol{\pi}) \in \mathcal{V}^0 \times \mathscr{P} \times \mathscr{P} \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\mathbf{F}}} : \nabla\delta\mathbf{v} - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{f}_{ext}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}\,\mathbf{T}_{ext}\,dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(-\boldsymbol{\Pi} + \frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\mathbf{F}}}\right) : \delta\overline{\mathbf{G}}\,dV = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \overline{\mathbf{H}} : \delta\boldsymbol{\pi} = 0\end{array}} \tag{2.95}$$

où l'espace $\mathscr{P}$ est défini par :

$$\mathscr{P} = \{\mathbf{H} \in (H^1(\Omega_0))^{d\times d}\} \tag{2.96}$$

Si l'on choisit des fonctions d'interpolation telles que $\int_{\Omega_0} \overline{\mathbf{H}}_h : \delta\boldsymbol{\pi} = 0$ et que $\int_{\Omega_0} \delta\overline{\mathbf{G}}_h : \boldsymbol{\Pi} = 0$, le problème discrétisé revient à :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\mathbf{u}_h,\overline{\mathbf{H}}_h) \in \mathcal{V}_h^b \times \mathscr{P}_h \ \forall (\delta\mathbf{v}_h,\delta\overline{\mathbf{G}}_h) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathscr{P}_h \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\mathbf{F}}} : \nabla\delta\mathbf{v}_h - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}_h\,\mathbf{f}_{ext}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \delta\mathbf{v}_h\,\mathbf{T}_{ext}\,dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\widetilde{\mathbf{F}}}\right) : \delta\overline{\mathbf{G}}_h\,dV = 0\end{array}} \tag{2.97}$$

Les fonctions d'interpolations du gradient incompatible sont, la plupart du temps, discontinues entre éléments (généralement il s'agit de fonctions bulles), ce qui permet de condenser les degrés de liberté liés à ces modes incompatibles (voir par exemple dans GHARZEDDINE & IBRAHIMBEGOVIC [2000]).

Ce type de formulation montre de très bons résultats lorsque l'on fait tendre le module de compressibilité vers l'infini (ou en linéaire le coefficient de poisson vers 0.5) pour des éléments linéaires. Elle a été comparée aux méthodes mixtes ou à la formulation en déplacement par de nombreux auteurs (en linéaire et non linéaire) : AURICCHIO ET AL. [2005]; CHIUMENTI ET AL. [2002]; ZIENKIEWICZ & TAYLOR [2000]; MIEHE [1994].

2.7.4 Éléments retenus et implémentation logiciel

L'implémentation numérique des formes discrétisées compressibles et quasi-incompressibles a été réalisée dans le code de calcul ZéBuLoN. Ce code, initialement développé par l'école des Mines de Paris, l'ONERA et l'INSA de Rouen, est basé sur une architecture objet (il est écrit en C++) permettant ainsi un découplage complet du formalisme mécanique des éléments, de la loi de comportement et de l'interpolation des éléments (voir FOERCH ET AL. [1996]).

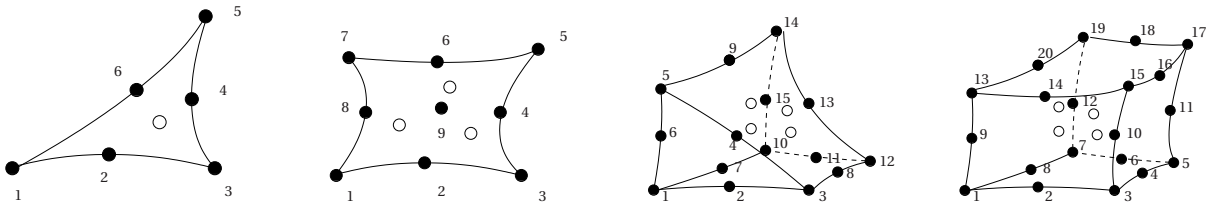
La programmation des deux formes variationnelles retenues a ainsi nécessité la construction de trois objets fondamentaux :

- une classe pour les modèles de comportements hyperélastiques incompressibles, qui effectue le calcul des matrices et vecteurs des équations (2.79) pour des lois hyperélastiques du type RIVLIN & SAUNDERS [1951], GENT-THOMAS (1958), HART-SMITH (1966), ...
- une classe pour les modèles de comportements hyperélastiques compressibles, qui effectue le calcul des matrices et vecteurs des équations (2.80) pour des lois hyperélastiques du type RIVLIN & SAUNDERS [1951] généralisées, HARTMANN & NEFF [2003], GENT-THOMAS (1958), HART-SMITH (1966), ...
- une classe élémentaire qui effectue les opérations détaillées dans le schéma 2.1, en utilisant une des deux classes précédentes.

Les éléments retenus sont présentés dans le tableau 2.3, leur géométrie sur la figure 2.7.4.

Type d'élément	T6P1	Q9P3	Pr15P4	H20P4
Dimension	2D/Axi	2D/Axi	3D	3D
Type Géométrique	Triangle	Quadrangle	Prisme	Hexaèdre
Interpolation des déplacements	Quadratique	Quadratique	Quadratique	Quadratique
Interpolation de la pression	$<1>$	$<1,\xi,\eta>$	$<1,\xi,\eta,\zeta>$	$<1,\xi,\eta,\zeta>$

Tableau 2.3 – *Éléments à interpolation discontinue de la pression*



(a) T6P1 (b) Q9P3 (c) Pr15P4 (d) H20P4

L'implémentation numérique de ces éléments ne présente pas de difficultés particulières. L'intégration numérique des vecteurs et matrices élémentaires est réalisée de manière exacte avec un schéma de Gauss approprié.

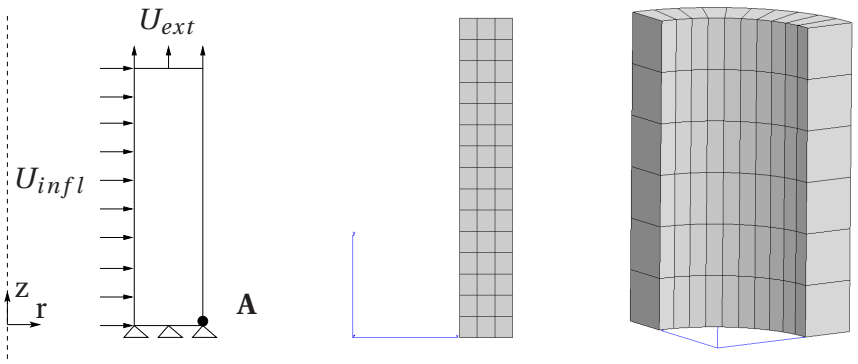
Remarque 2.10
L'élément H20P4 est reconnu pour ne pas vérifier tous les critères de stabilité. L'idéal aurait été d'implémenter un élément H27P4 à interpolation complète de Lagrange. Cependant par manque de temps cet investissement n'a pas été réalisé. Les résultats obtenus avec l'élément H20P4 sont donc à prendre avec la plus grande prudence. ❑

2.8 Validation

On présente dans cette section différentes applications permettant d'illustrer et de tester le comportement des éléments-finis retenus, ceci en terme de convergence, de conditionnement ou de stabilité. On utilise dans ce chapitre, le modèle de comportement de JAMES & AL, identifié avec les contraintes de MIELKE au chapitre 1.

2.8.1 Comparaisons par rapport à une solution analytique

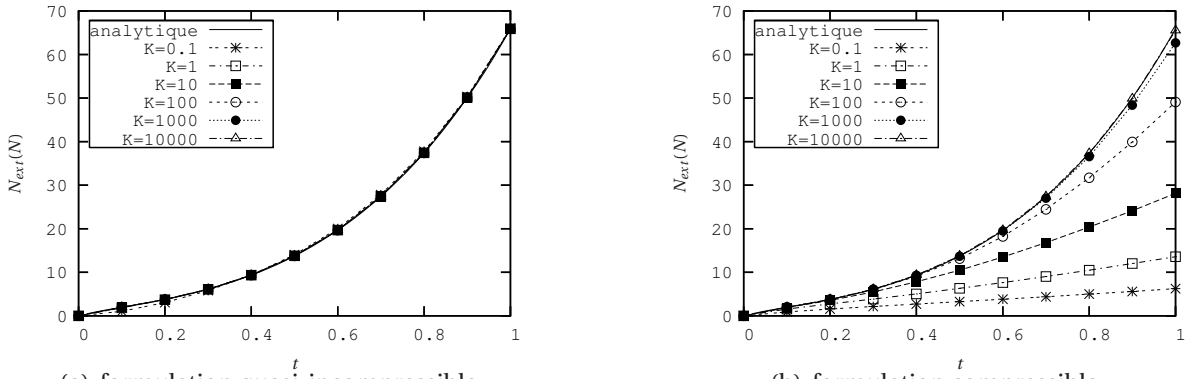
On considère le cas de l'inflation-extension d'un tube hyperélastique incompressible. La solution analytique incompressible, qui est non-homogène, est discutée dans le paragraphe 1.4.2. Le tube considéré a pour hauteur 3 mm, 1 mm de rayon interne, 1,5 mm de rayon externe. Les conditions aux limites, imposées en déplacement, sont représentées sur la figure 2.3(e), avec un déplacement d'extension de $U_{ext} = 15$ mm et une inflation de $U_{infl} = 1$ mm. On utilise un modèle axisymétrique et un modèle tridimensionnel pour traiter ce cas, les maillages sont présentés sur la figure 2.3.



(e) Conditions aux limites (f) modèle Axi (g) modèle 3D

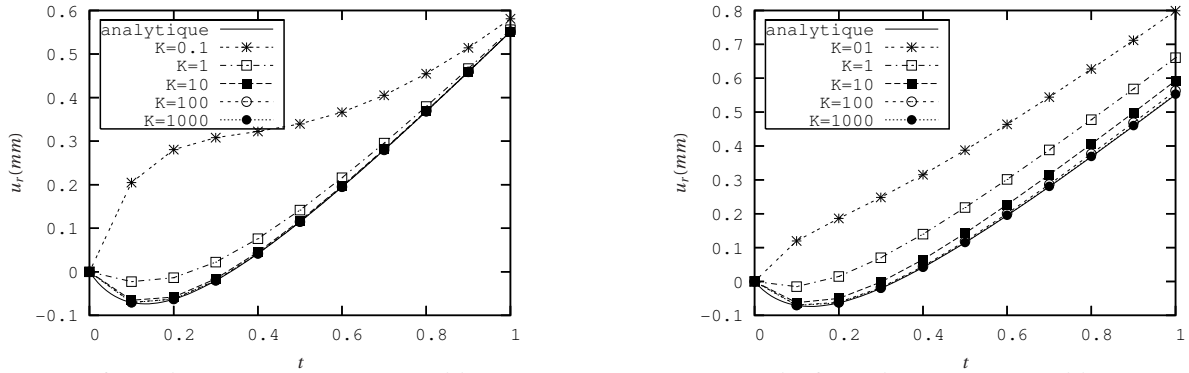
Figure 2.3 – *Modèles du test d'inflations extension*

On compare le résultat des formulations quasi-incompressibles et compressibles afin de caractériser l'influence du module de compressibilité sur la convergence du modèle compressible vers la solution incompressible. Les figures 2.4 et 2.6, présentent l'évolution de la réaction d'extension sur la partie supérieure en fonction du paramètre de chargement, pour deux maillages constitués d'éléments Q9P3 ou H20P1.



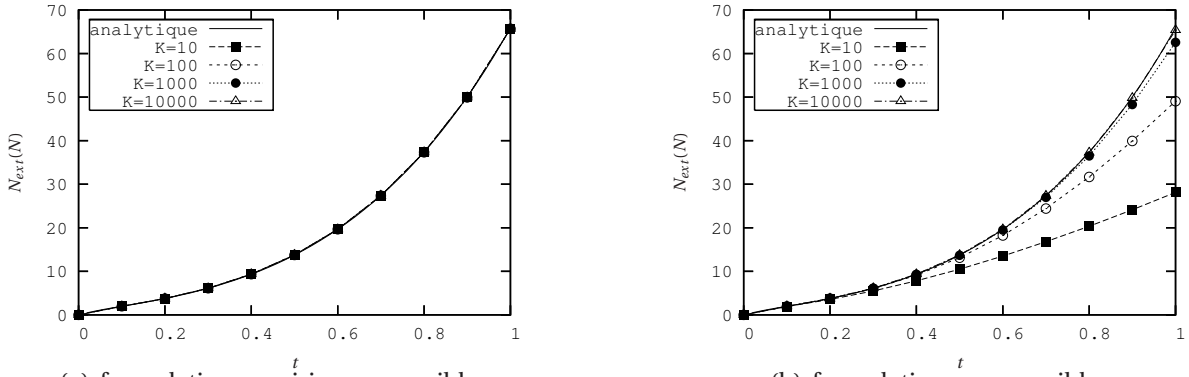
(a) formulation quasi-incompressible (b) formulation compressible

Figure 2.4 – *Effort d'extension en fonction du paramètre de charge (Q9P3)*



(a) formulation quasi-incompressible (b) formulation compressible

Figure 2.5 – *Déplacement du bord externe en fonction du paramètre de charge (Q9P3)*



(a) formulation quasi-incompressible (b) formulation compressible

Figure 2.6 – *Effort d'extension en fonction du paramètre de charge (H20P4)*

On peut remarquer une faible influence du module de compressibilité en terme de réaction d'extension pour la formulation quasi-incompressible. Par contre le déplacement du noeud, noté **A**, sur la figure 2.3(e), dévie de la solution analytique lorsque le module de compressibilité est du même ordre de grandeur que le module de cisaillement du matériau (voir figure 2.5). Pour la formulation compressible, on obtient la convergence vers la solution incompressible pour des valeurs du module de compressibilité supérieures à 1000 Mpa.

Le tableau 2.4 donne les valeurs du conditionnement de la matrice tangente pour le dernier incrément de calcul en fonction du module de compressibilité. On n'observe pas de différences significatives entre les deux formulations.

Kv	10	100	1000	10000
Quasi-incompressible	1.7e2	1.4e3	1.2e4	9.5e4
Compressible	5.0e3	1.4e4	2.6e4	9.8e4

Tableau 2.4 – *Comparaison du conditionnement de la matrice tangente pour des éléments Q9P3*

2.8.2 Test de convergence

Afin de comparer la vitesse de convergence des différents éléments programmés, on réalise un test de cisaillement sur un cube de 2 mm de coté (ou un carré en déformation plane dans le cas bidimensionnel) dont les conditions aux limites sont définies sur la figure 2.7. Le cisaillement est imposé sur la moitié de la partie supérieure avec $U_{cis} = 1$ mm. On mesure l'erreur de discrétisation en observant le déplacement du point A pour différentes tailles de maillages (raffinés uniformément), avec la mesure suivante :

$$err_u = 100 \frac{\|\mathbf{U}_h^A - \mathbf{U}_{fin}^A\|_2}{\|\mathbf{U}_{fin}^A\|_2} \tag{2.98}$$

$\mathbf{U}_{fin}^A$ est le déplacement du noeud A obtenu avec le maillage le plus fin, la norme notée $\|\bullet\|_2$ correspond à la norme 2 euclidienne. Pour ces calculs, le module de compressibilité est fixé à $k = 10000$ Mpa.

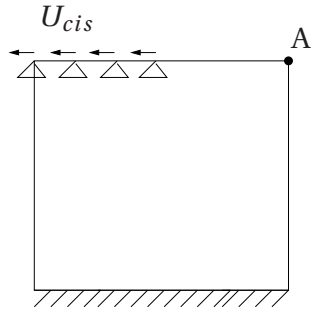


Figure 2.7 – *Condition aux limites du test de cisaillement*

Les courbes de convergences obtenues avec les éléments 2D, sont présentées sur la figure 2.8 pour les deux formulations (compressible et quasi-incompressible). Elles montrent l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'éléments du maillage avec une échelle logarithmique, la pente caractérisant alors la vitesse de convergence. On peut remarquer que la vitesse de convergence est légèrement plus importante avec la formulation compressible pour les deux types d'éléments bidimensionnels (par rapport à la formulation quasi incompressible).

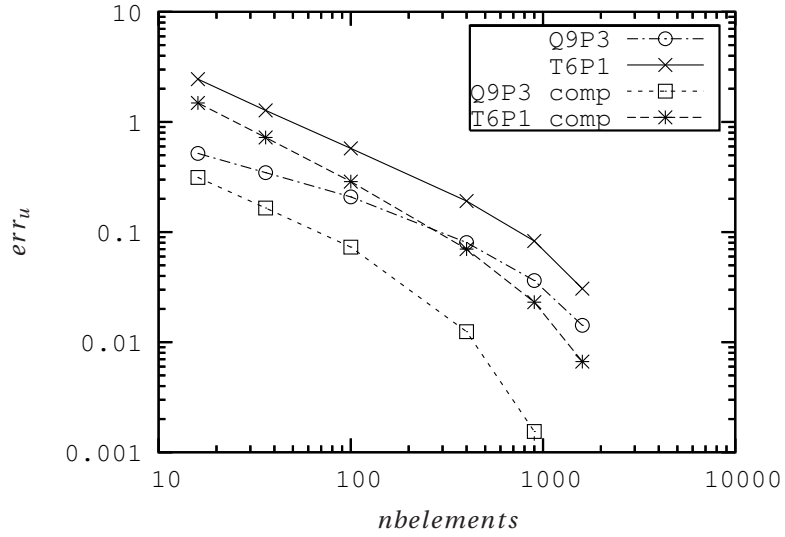


Figure 2.8 – *Erreur de discrétisation pour les éléments 2D*

Pour les éléments 3D (voir figure 2.9), on observe très peu d'écart entre les deux formulations [(10)]. Les différences de convergences entre les éléments triangles et quadrangles sont quasiment négligeables (de même pour les éléments prisme et hexaèdre).

Les déformées et le champ de pression de la formulation quasi-incompressible sont présentés sur la figure 2.11. On peut observer une bonne régularité de la déformée dans les zones les plus sollicitées, ainsi qu'une localisation du champ de pression de mieux en mieux perçue au fur et à mesure du raffinement du maillage.

(10). Un nombre de points plus important pourrait peut-être permettre d'observer les mêmes différences que dans le cas 2D, mais le temps de calcul des modèles 3D est particulièrement prohibitif

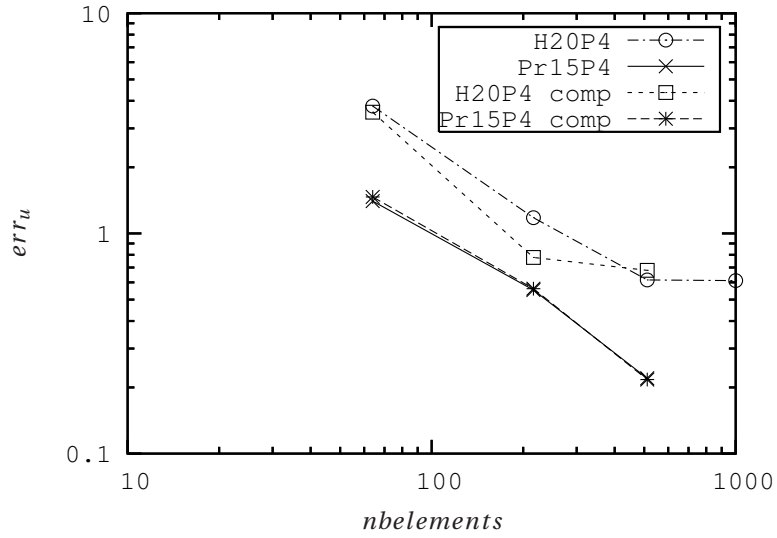
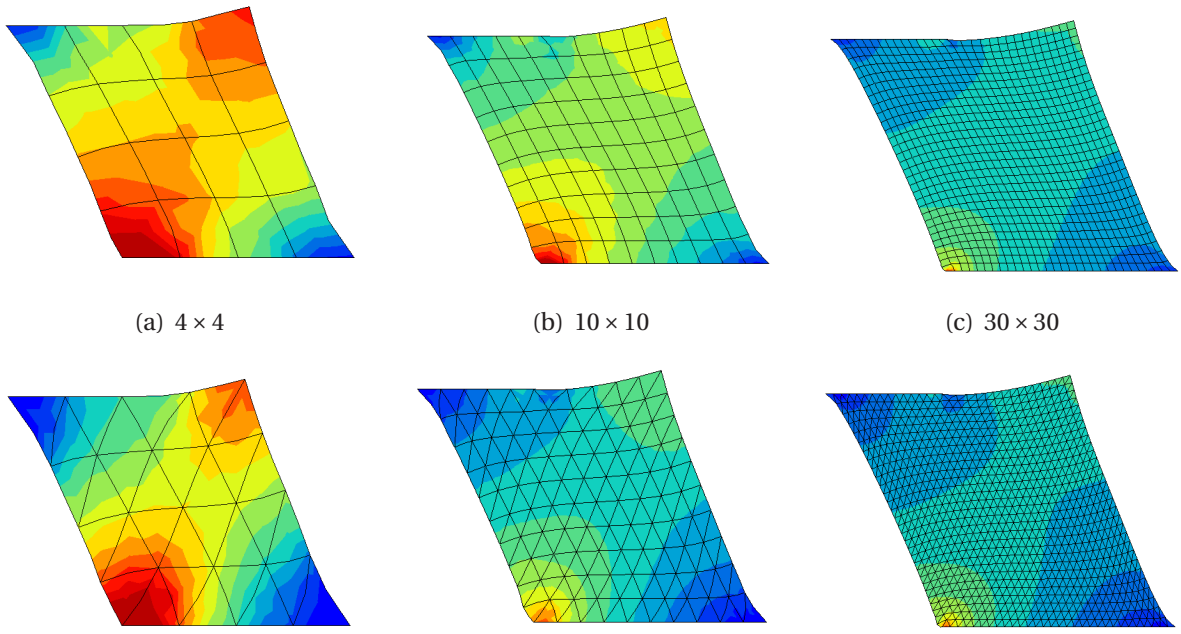


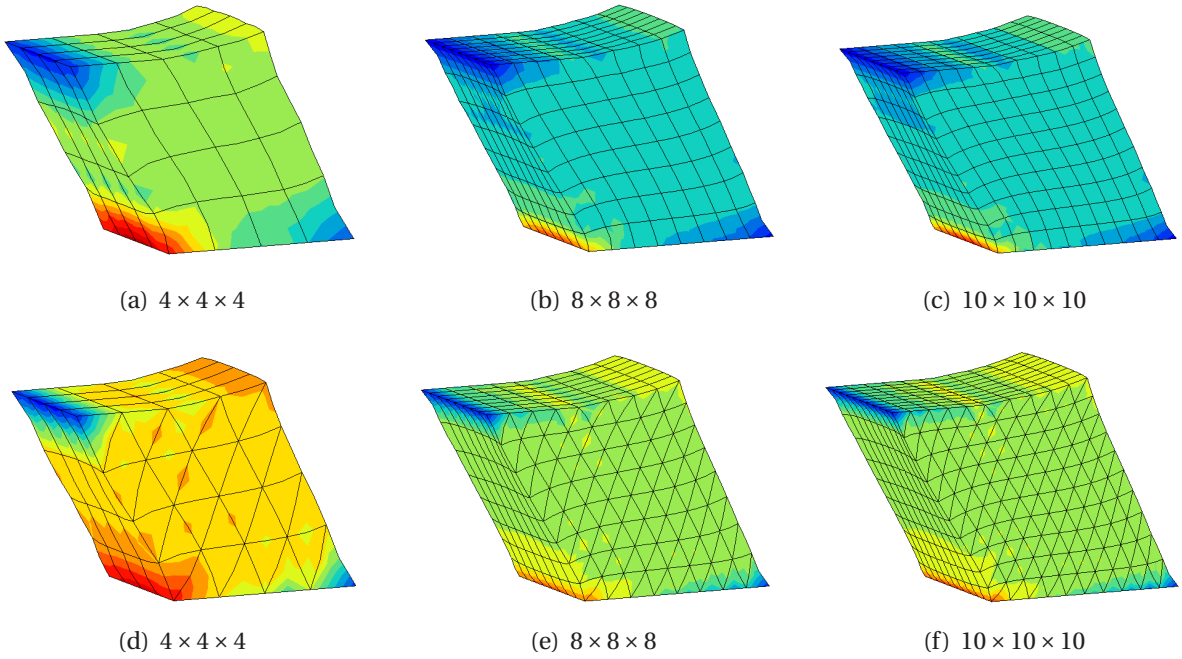
Figure 2.9 – *Erreur de discrétisation pour les éléments 3D*



(a) 4×4 (b) 10×10 (c) 30×30

(d) 4×4 (e) 10×10 (f) 30×30

Figure 2.10 – *Déformées et champs de pression pour la formulation quasi-incompressible, cas 2D*



(a) $4 \times 4 \times 4$ (b) $8 \times 8 \times 8$ (c) $10 \times 10 \times 10$

(d) $4 \times 4 \times 4$ (e) $8 \times 8 \times 8$ (f) $10 \times 10 \times 10$

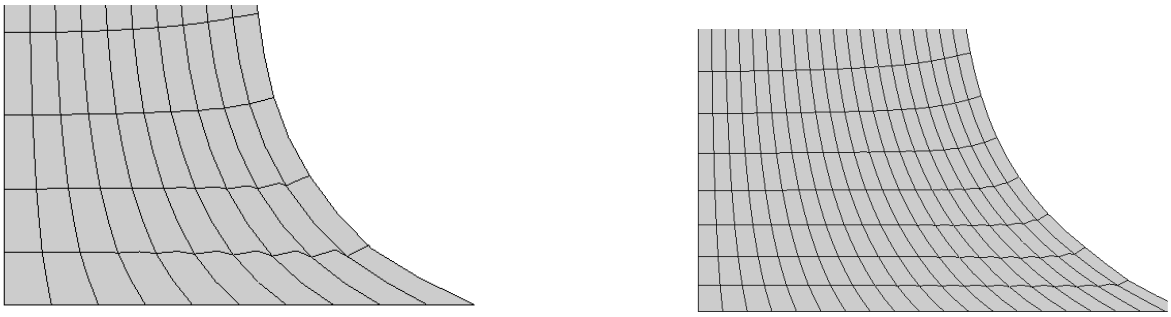
Figure 2.11 – *Déformées et champs de pression pour la formulation quasi-incompressible, cas 3D*

2.8.3 Exemples d'instabilités numériques dues à l'interpolation

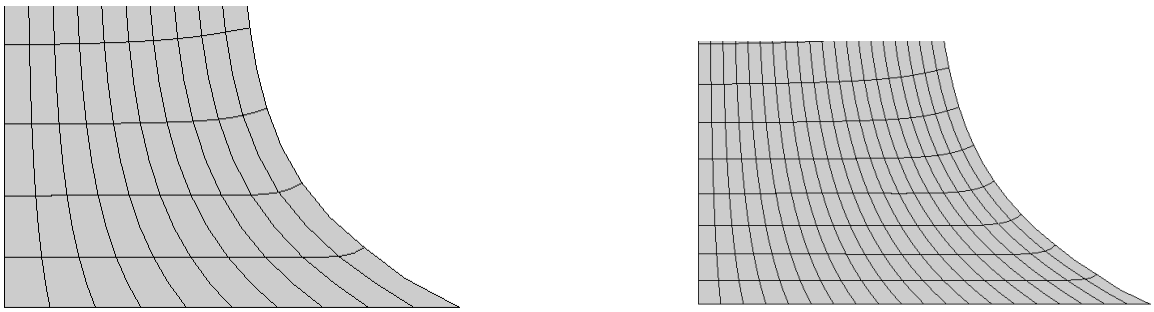
A titre d'illustration, on propose une comparaison entre éléments stables et instables sur deux cas simples. On considère un cube de 2 mm de coté, soumis à un test de traction de 100% en déformations planes et un test de compression de 10% en 3D. On utilise, dans le cas bidimensionnel, des éléments Q9P3 qui vérifient la stabilité au sens inf-sup et le patch-test, ainsi que des éléments Q8P1, qui vérifient le patch test. Pour les maillages en Q8P1, on observe l'apparition d'une valeur propre négative dans la matrice tangente, qui est caractéristique d'une instabilité. On peut également remarquer, sur les figures 2.12 une déformation de type sablier pour les éléments situés prés de la partie inférieure qui est bloquée.

Dans le cas 3D, on observe également l'apparition d'une valeur propre négative dans la matrice tangente. Sur les figures 2.13, on peut voir une déformation caractéristique d'un phénomène de blocage.

Ces deux exemples permettent de mettre en avant l'importance du choix des ordres et des types d'interpolations pour une formulation mixte avec discontinuité de la pression entre éléments. Cet aspect est d'autant plus important lorsque l'on cherche à développer des éléments-finis réduits à base enrichie en grandes déformations.

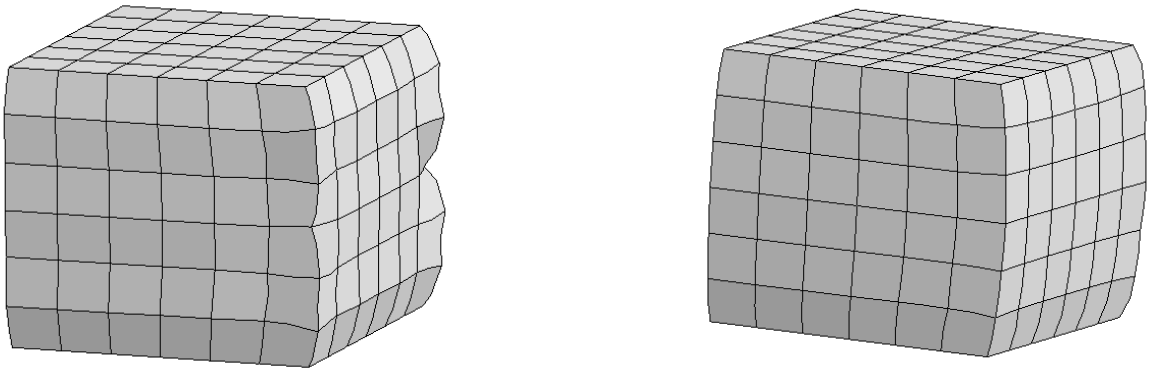


(a) 10×10 Q8P1 (b) 20×20 Q8P1



(c) 10×10 Q9P3 (d) 20×20 Q9P3

Figure 2.12 – *Déformées d'un test de traction pour la formulation quasi-incompressible*



(a) 6×6 H20P1 (b) 6×6 H20P4

Figure 2.13 – *Déformées d'un test de compression pour la formulation quasi-incompressible*

2.9 Conclusion

Une revue bibliographique de quelques formulations variationnelles, adaptées aux comportements hyperélastiques incompressibles, est donnée dans ce chapitre. Les approches en déplacement du type méthode de pénalité ainsi que les méthodes multi-champs dérivées du principe variationnel de HELLINGER-REISNER ou encore HU-WASHIZU sont détaillées.

Pour des raisons de régularisation du problème de point selle et de simplicité de programmation, notre attention se porte plus particulièrement sur la méthode en lagrangien perturbé. Deux versions de cette méthode sont développées ; la première se rapporte au concept des modèles quasi-incompressibles ; pour la seconde, on considère un comportement compressible ou l'inverse du module de compressibilité joue le rôle du coefficient de perturbation. On détaille ensuite l'implémentation de ces dernières dans le logiciel ZeBuLoN.

Pour obtenir un élément-fini consistant et stable, un certain nombre de critères doivent être vérifiés lors du choix des fonctions d'interpolations. On présente ainsi quelques éléments issus de la bibliographie permettant de vérifier la stabilité ou la consistance, comme le critère LBB ou le patch-test de ZIENKIEWICZ.

Les deux formes développées, sont validées par rapport à une solution analytique incompressible non homogène, à partir d'un essai d'inflation-extension d'un cylindre creux. Sur ce test, on observe une convergence de la formulation compressible vers la solution incompressible lorsque l'on augmente le module de compressibilité ; le conditionnement de la matrice tangente étant du même ordre pour les deux formes. Des tests de cisaillement, réalisés sur différents maillages 2D et 3D, semblent exhiber une vitesse de convergence légèrement supérieure pour la forme compressible. Cette dernière semble donc très attractive, puisqu'elle permet de représenter un plus large panel de comportements que la forme incompressible. De plus, elle permet de donner un sens physique au multiplicateur de Lagrange p, puisque la contrainte est projetée avec l'opérateur déviatorique, la variable p correspond exactement à la pression hydrostatique. Enfin, quelques exemples permettant d'illustrer les phénomènes de blocages ou de déformations en mode sablier sont présentés.

Bibliographie

Andrade Pires, F. M., De Souza Neto, E. A., & De La Cuesta Padilla, J. L. [2004]. An assesment of the average nodal volume formulation for the analysis of nearly incompressible solids under finite strains. *Communication in Numerical Methods in Engineering, 20*, 569-583.

Auricchio, F., Da Veiga, L. Beirão, Lovadina, C., & Reali, A. [2005]. An analysis of some mixed finite elements for plane linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194*, 2947-2968.

Aurichio, F., Brezzi, F., & Lovadina, C. [2004]. Mixed finite element methods. In E. Stein, R. De Borst, & T. J. R. Hughes (Eds.), *Encyclopedia of computational mechanics* (p. 237-278). Wiley.

Babuška, I., & Narasimhan, R. [1997]. The babuška-brezzi condition and the patch test : an exemple. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 140*, 183-199.

Bathe, K. J. [2001]. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers and Structures, 79*, 243-252.

Batoz, J. L., & Dhatt, G. [1990]. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes.

Benzi, M., Golub, G. H., & Liesen, J. [2005]. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 1-137.

Bijelonja, I., Demirdzic, I., & Muzaferija, S. [2005]. A finite volume method for large strain analysis of incompressible hyperelastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

Bonnet, J., & Burton, A. J. [1998]. A simple average nodal pressure tetrahedral element for incompressible and nearly incompressible dynamic explicit applications. *Communication in Numerical Methods in Engineering, 14*, 437-449.

Chen, J. S., Han, W., Wu, C. T., & Duan, W. [1997]. On the perturbed lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 142*, 335-351.

Chen, J. S., Pan, C., & Wu, C. T. [1997]. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics, 19*, 211-227.

Chiumenti, M., Valverde, Q., Agelet De Saracibar, C., & Cervera, M. [2002]. A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191*, 5253-5264.

Crisfield, M. A. [1991]. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, essentials* (Vol. 1). John Wiley & Sons.

Crisfield, M. A., & Norris, V. C. [2000]. Lessons for incompressible and near-incompressible elasticity drawn from the driven cavity flow problem. *Computers and Structures, 75*, 529-538.

De, S., & Bathe, K. J. [2001]. Displacement/pressure mixed interpolation in the method of finite spheres. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51*, 275-292.

Felippa, C. A. [2001]. *Non linear finite element methods*. University of Colorado.

Foerch, R., Besson, J., Cailletaud, G., & Pivlin, P. [1996]. Polymorphic constitutive equations in finite element codes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 141*, 355-372.

Gadala, M. S. [1997]. Recent advances in the numerical modeling of constitutive relations. *Finite Elements in Analysis and Design, 24*, 171-185.

Gharzeddine, F., & Ibrahimbegovic, A. [2000]. Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity. *Computational Mechanics, 24*, 419-425.

Glowinski, R., & Le Tallec, P. [1980]. A numerical method in nonlinear incompressible elasticity. *Academie des Sciences (Paris), Comptes Rendus, Serie B-Sciences Physiques., 290*, 23-26.

Glowinski, R., & Le Tallec, P. [1982]. Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods i. two-dimensional and axisymmetric problems. *SIAM J. Appl. Math., 42*, 400-429.

Glowinski, R., & Le Tallec, P. [1984]. Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods ii. three-dimensional problems. *SIAM J. Appl. Math., 44*, 710-733.

Hartmann, S., & Neff, P. [2003]. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and Structures, 40*, 2767-2791.

Herrmann, L. R. [1964]. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible material by a variational theorem. *AAIA J., 3*, 1896-1900.

Holzapfel, G. A. [2004]. *Nonlinear solid mechanics.* Wiley.

Malkus, D. S., & Hughes, T. J. R. [1978]. Mixed finite element methods – reduced and selective integration technique – a unification of concepts. *Comput. Methods Apll. Mech. Engrg., 15*, 63-81.

Miehe, C. [1994]. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37*, 1981-2004.

Pantuso, D., & Bathe, K. J. [1997]. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. *Finite Elements in Analysis and Design, 28*, 83-104.

Papoulia, K. D. [1999]. Mixed and selective reduced integration procedures in large strain hyperelastic analysis of nearly incompressible solids. *Computational Mechanics, 23*, 63-74.

Reese, S., Küssner, M., & Reddy, B. D. [1999]. A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44*, 1617-1652.

Rivlin, R. S., & Saunders, D. W. [1951]. Large elastic deformations of isotropic materials vii. experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London., 243*, 251-288.

Rüter, M., & Stein, E. [2000]. Analysis, finite element computation and error estimation in transversly isotropic nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190*, 519-541.

Shariff, M. H. B. M. [1997]. An extension of hermann's principle to nonlinear elasticity. *Appl. Math. Modelling, 21*, 97-107.

Shariff, M. H. B. M., & Parker, D. F. [2000]. An extension of key's principle to nonlinear elasticity. *Journal of Engineering Mathematics, 37*, 171-190.

Taylor, R. L. [2003]. *Feap–a finite element analysis program, theory manual.* Berckley California.

Weiss, J. A., Maker, B. N., & Govindjee, S. [1996]. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 135*, 107-128.

Wriggers, P., & Reese, S. [1996]. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 135*, 201-209.

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. [1997]. The finite element patch test revisited a computer test for convergence, validation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 149*, 223-254.

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. [2000]. *The finite element method* (Fifth edition ed.). Butterworth-Heinemann.

CHAPITRE

3 Technique de réduction de modèles

La modélisation par éléments-finis de structures industrielles peut rapidement conduire à des tailles de modèles très importantes obligeant l'ingénieur à adopter une stratégie simplificatrice ou à utiliser des ressources informatiques spécifiques. La technique de réduction de modèle présentée dans ce chapitre, a pour objectif de proposer une alternative à cette problématique, en mettant à profit les symétries de la géométrie et du chargement, comme par exemple les lamifiés élastomère-métal ou les structures poutres à base d'élastomère. La méthode proposée est basée sur une approximation des inconnues en série de fonctions continues, réalisée dans une ou plusieurs directions. La difficulté principale, réside dans la prise en compte du comportement non-linéaire quasi-incompressible de l'élastomère, en utilisant les formulations variationnelles du chapitre précédent. Quatre types d'éléments finis réduits sont ainsi développés et validés, chacun étant adapté à une structure particulière, on a ainsi : une réduction 2D-1D pour les lamifiés en déformations planes, une réduction 3D-1D pour les lamifiés tridimensionnels hexaèdriques, une réduction 3D-1D avec série de FOURIER *pour les lamifiés à géométrie de révolution et enfin une réduction 3D-2D pour des structures poutre à section composite.*

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1 Introduction 89
3.2 Concept de base (« finite-strip ») 92
3.2.1 Réductions pour les lamifiés élastomère-métal 93
3.2.2 Réduction pour la poutre composite E.F.B. 96
3.3 Mise en œuvre de la technique de réduction de modèles 97
3.3.1 Formes de la base de projection 97
3.3.2 Discrétisation 100
3.3.3 Implémentation numérique 104
3.4 Validation à partir d'une solution analytique 106
3.4.1 Comparaison en terme de réponse 106
3.4.2 Comparaison en terme de conditionnement 107
3.5 Validation à partir de réponses numériques 109
3.5.1 Choix d'un modèle de référence 109
3.5.2 Évaluation de l'écart relatif des modèles réduits par rapport aux modèles de référence 115
3.5.3 Comparaison du comportement global et local 121
3.6 Conclusion 136
Bibliographie 136

3.1 Introduction

Pour illustrer l'intérêt d'une méthode de réduction de modèles pour des structures du type lamifiés élastomère-métal, on peut observer le cas d'une lamelle d'élastomère en compression et jouer sur son facteur de forme. Considérons une lamelle en déformations planes, encastrée sur sa face inférieure et soumise à un déplacement de compression sur sa face supérieure. Le facteur de forme de la lamelle est défini en fonction de sa largeur L et de son épaisseur e par la relation :

$$S_{2D} = \frac{L}{2e} \tag{3.1}$$

Il caractérise l'aire de la surface chargée par rapport à l'aire de la surface libre. En choisissant un indicateur d'erreur, comme par exemple l'erreur relative commise sur l'énergie de déformation totale (mesurée par rapport à un modèle très finement maillé), on peut observer l'influence du raffinement du maillage sur la réponse du modèle et ceci pour différent facteurs de forme. La figure 3.1 montre l'évolution de cette erreur pour des facteurs de forme de 10, 25 et 40 lorsque le maillage est raffiné uniformément. On utilise pour cette comparaison les éléments Q9P3 et la formulation incompressible développée au chapitre précédent.

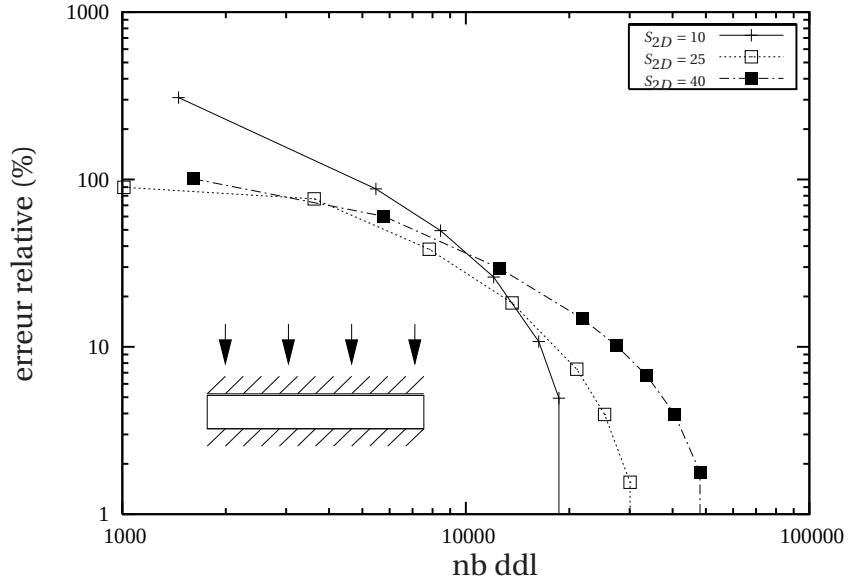


Figure 3.1 – *Évolution de l'erreur en terme d'énergie de déformation pour un test de compression sur une lamelle*

Comme on peut s'y attendre le coût numérique augmente rapidement avec le facteur de forme. Ainsi, si l'on considère un lamifié comparable à ceux utilisés dans les rotors d'hélicoptère (qui ont des facteurs de forme supérieurs à 40 et qui sont composés d'une cinquantaine de lamelles) il faut idéalement plus de 30 000 degrés de liberté par lamelles c'est à dire plus de 1,5 millions de degrés de liberté uniquement pour les lamelles d'élastomère (sans tenir compte des lamelles d'acier). Il semble alors évident que dans le cas d'un problème industriel réel, souvent tridimensionnel, la taille du modèle éléments-finis standard devient

rapidement prohibitive pour obtenir une précision raisonnable. A titre d'illustration, la figure 3.2 présente le maillage d'une butée utilisée dans les rotors d'hélicoptères, en maillant grossièrement on obtient plus de 600 000 degrés de liberté pour la demi-lamelle.

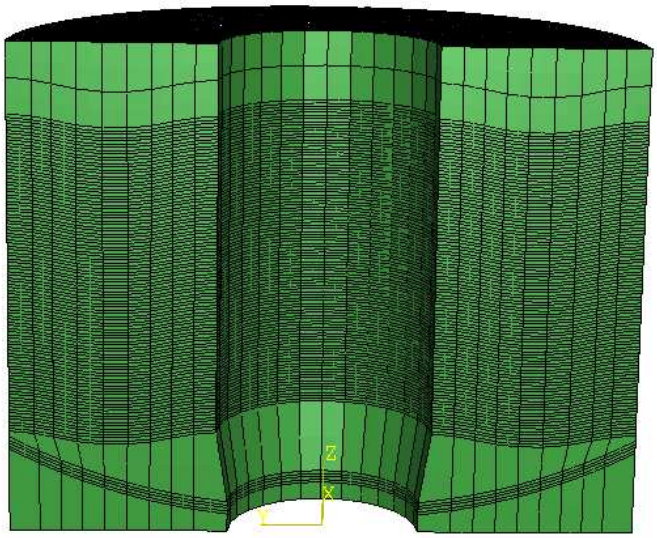
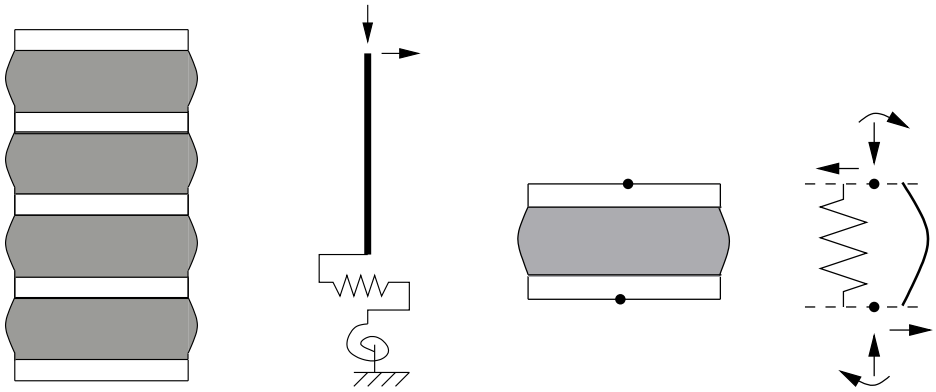


Figure 3.2 – *Maillage d'une demie butée lamifié de force centrifuge, situé dans la tête rotor (plus de 195 000 nœuds)*

Parallèlement aux modèles éléments-finis standards, il existe dans la littérature des approches pouvant servir d'outils de prédimensionnement ou de validation conduisant, pour les structures qui nous intéressent, à des temps de calculs raisonnables ; à savoir :

■ *Les modèles analytiques ou semi-analytiques* sont le plus souvent basés sur des hypothèses cinématiques de poutres, avec cisaillement transverse du type modèle de HARINGX (cf. par exemple BAŽANT & BEGHINI [2005] pour une comparaison avec d'autres modèles de poutres). On peut ainsi trouver des modèles qui assimilent le lamifié élastomère-métal, dans son ensemble, à une structure poutre. Ces modèles permettent d'approximer la réponse globale d'un lamifié pour quelques cas de sollicitations simples ou d'estimer sa charge critique de flambement (voir TSAI & KELLY [2004]; KELLY [2003]; HWANG & CHIOU [1996]; TSAI & HSUEH [2001]; LANZO [2004]). D'autres se restreignent à un mode de sollicitation (compression) pour trouver une solution analytique approchée couche par couche (comme dans [TSAI, 2004] pour des structures lamifiées élastomère-fibres). En parallèle de ces modèles analytiques, on peut trouver des macro-modèles constitués par un assemblage d'éléments mécaniques simples (deux exemples sont présentés sur la figure 3.3), permettant de mieux tenir compte des couplages comportementaux (compression, cisaillement, flexion, ...), certains considérant le lamifié comme structure de base [KOO ET AL., 1999; IIZUKA, 2000], d'autres décomposant le comportement de chaque lamelle [CHANG, 2002; LEJEUNES ET AL., 2003]. Néanmoins, quelle que soit la richesse de ces modèles, ils présentent cependant l'inconvénient majeur de ne fournir aucune information sur l'état de contraintes ou de



(a) modèle du lamifié, IIZUKA (2000) (b) modèle d'une lamelle

Figure 3.3 – *Exemple de modèles semi-analytiques*

déformations local.

■ *Les modèles de comportements équivalents*, obtenu par homogénéisation, peuvent permettre de diminuer la taille du problème initial tout en autorisant l'accès à une information locale. DEVRIES [1998] utilise une méthode d'homogénéisation périodique non-linéaire permettant d'obtenir le comportement global ainsi qu'une estimation de l'état de contrainte d'un lamifié en compression. Cette stratégie ne permet cependant pas de traduire les singularités dues aux effets de bords, là même où l'état de contrainte est maximal. Par ailleurs, DUMONTET [1990], propose une application du problème de couche limite combiné à une méthode d'homogénéisation périodique linéaire. On peut ainsi superposer une solution exponentiellement décroisante, à partir du bord libre, à la solution du problème homogénéisé afin de mieux prendre en compte ces effets locaux. Cette approche n'a cependant pas été menée dans un cadre non-linéaire avec prise en compte de l'incompressibilité, où les effets de bords sont plus diffus.

■ *Les méthodes de parallélisation*, permettent de pallier au problème du temps de calcul. MÉO [2000], propose une méthode de sous-structuration multi-niveaux pour traiter le problème de structures invariantes dans une direction, cette dernière est appliquée au cas du bras rotor élastomèrique qui s'apparente à une poutre élastomèrique renforcée de tige de verre où de carbone (voir MÉO ET AL. [2002]). On peut également trouver d'autres stratégies de sous-structuration, par décomposition de domaines (approche primale où duale de type FETI), qui ont été appliquées au cas des lamifiés élastomère-métal par LÉNÉ & REY [2001]; GOSSELET [2003]. Ces méthodes ne présentent pas de limitations particulières si ce n'est l'investissement à réaliser en terme de moyens informatiques pour profiter pleinement de la parallélisation.

■ *Enfin on peut trouver des éléments-finis spécifiques*, qui permettent dans certains cas de diminuer la taille du problème à résoudre. Par exemple, les éléments-finis hiérarchiques et notamment la p-méthode [(1)], qui combinée avec une stratégie de maillage particulière

(1). La p-méthode consiste à utiliser des fonctions de formes d'ordre élevée afin d'augmenter la performance

(du type maillage adaptatif), peut conduire à une diminution du nombre d'éléments nécessaires. Cette technique à été récemment mise en œuvre pour le cas matériaux hyperélastiques incompressibles, et notamment pour des lamelles planes, par DUSTER ET AL. [2003]. Les éléments pseudo-axisymétriques permettent de traiter le cas des structures à géométrie de révolution sous chargement non symétrique. A l'aide d'une projection des inconnues en série de FOURIER, on peut réduire un problème initialement tridimensionnel en un problème bidimensionnel. BOUKAMEL [1988] a développé dans sa thèse ce type d'éléments dans le cadre d'une formulation variationnelle en Lagrangien perturbé, pour des matériaux hyperélastiques incompressibles (voir également BOUKAMEL ET AL. [1990]). Ce travail a ensuite été repris par MARUSAK & BECKER [1993].

Préalablement au développement de la méthode de réduction de modèles, qui est présentée dans ce chapitre, nous avons réalisé un modèle semi-analytique à l'aide d'une combinaison d'éléments-finis standards (élément de poutre et ressort non-linéaire) pour les lamifiés élastomère-métal (voir LEJEUNES [2002]). Ce type d'approche est rapidement limitatif principalement à cause de la non prise en compte de tous les couplages de comportements et de l'absence d'informations locales sur l'état de contraintes ou de déformation.

La méthode de réduction de modèle qui est proposée, s'inscrit dans la catégorie des éléments-finis spécifiques. Elle permet de réduire la taille du modèle à discrétiser tout en conservant une information locale de bonne qualité. Elle offre, contrairement à la plupart des méthodes décrites plus haut, la possibilité d'enrichir l'approximation de la solution, indépendamment des développements réalisés. De plus, elle peut s'appliquer à différents types de comportements non-linéaires comme par exemple à des lois visco-hyperélastiques [(2)]. Mais cette dernière reste liée aux types de structures traitées, elle fait en ce sens partie des *éléments-finis spécifiques*.

Pour la mise en oeuvre de cette technique de réduction de modèles, on utilise le formalisme variationnel en Lagrangien perturbé décrit au chapitre précédent. On prendra ainsi en compte les deux versions développées, à savoir le cas incompressible ou faiblement compressible, de manière à comparer les performances des deux formes. Enfin on propose quelques exemples de validation à partir de solutions analytiques ou numériques.

3.2 Concept de base (« finite-strip »)

La méthode de réduction de modèles développée, hérite directement des méthodes éléments finis semi-analytiques développées par Y.K. CHEUNG, au milieu des années 70, pour la modélisation de structure plaques élastiques. Ces dernières consistent à discrétiser seule-

d'un élément à traduire les concentrations de contraintes ou de déformations (on combine pour ce faire, des fonctions de formes classiques qui assurent la continuité des déplacements entre éléments avec des fonctions de type bulles, nulles aux bords du domaine)

(2). Il s'agit en particulier du modèle de KELVIN-VOIGT qui présente l'avantage de ne pas s'écrire en fonction de variables internes

ment la section transverse d'un solide prismatique et à choisir des fonctions de formes continues et régulières pour la direction longitudinale, notée $f_i(Z)$ (voir figure 3.4).

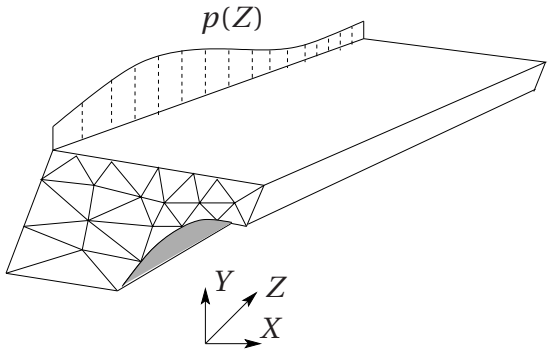


Figure 3.4 – *Réduction 3D-2D (*CHEUNG*)*

Si $\mathbf{u}(X,Y,Z) \in \mathcal{V}_3^b$ est le champ de déplacement inconnu du problème initial, le concept des « finite-strip » de CHEUNG revient à approximer cette inconnue par une projection polynomiale sur la base formée par les $f_i(Z)$:

$$\mathbf{u}(X,Y,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(X,Y) f_i(Z) \qquad f_i(Z) \in \mathscr{P}_i, \mathbf{u}^i(X,Y) \in \mathcal{V}_2^b \tag{3.2}$$

où n_u est l'ordre de troncature de la projection polynomiale, $\mathscr{P}_i$ est l'espace des polynômes d'ordre i définit sur $[-L,+L]$ (si $2L$ est la longueur de la structure dans la direction Z). L'espace des inconnues $\mathcal{V}_2^b$ a été réduit d'une dimension par rapport au problème initial, il est défini par :

$$\mathcal{V}_2^b = \left\{ \mathbf{u}^i(X,Y) \in (H^1(\Omega_0))^2, \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(X,Y) f_i(Z) = \mathbf{u}_{ext}(X,Y,Z) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \right\} \tag{3.3}$$

Cette approximation permet de réaliser une réduction 3D-2D, en contre partie on émet une hypothèse forte de régularité du champ de déplacement et de ses dérivées dans la direction Z. On peut voir cette réduction comme étant l'inverse d'un modèle de poutre, on discrétise uniquement une section, l'évolution du déplacement dans la direction longitudinale étant régie par la projection polynomiale.

Ces méthodes ont depuis trouvé de nombreux domaines d'applications (voir par exemple CHEUNG & JIANG [2001]; CHEUNG & KONG [1995]; CHEUNG & AU [1995]; ZHONG ET AL. [1998]) avec différents types d'approximations (fonctions polynomiales, fonctions splines, ...). A notre connaissance, elles n'ont cependant pas été utilisées dans le cas de comportements non-linéaires incompressibles en grandes déformations.

3.2.1 Réductions pour les lamifiés élastomère-métal

L'idée de base de cette méthode semble appropriée pour les lamifiés élastomère-métal puisque les champs de déformations sont globalement réguliers (hormis près des bords libres)

pour des cas de sollicitations simples (traction, compression, cisaillement et flexion). On peut donc utiliser des projections polynomiales dans la ou les direction(s) d'élancement de la lamelle et discrétiser uniquement l'axe de symétrie du lamifié. Pour les problèmes variationnels multi-champs (formulation u-p), on applique la projection polynomiale sur les deux inconnues : la pression et le déplacement.

Nous proposons ainsi trois types de réductions pour les lamifiés élastomère-métal :

– Une réduction adaptée aux lamifiés plans en déformations planes (2D-1D), voir figure 3.5(a). En introduisant le paramétrage $\xi = 2X/L$, on peut effectuer une approximation des champs cinématique et de pression dans la direction transverse de la lamelle, telle que :

$$\mathbf{u}(X,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}_i(Z)\, T_i(\xi) \tag{3.4}$$

$$p(X,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} p_i(Z)\, T_i(\xi) \tag{3.5}$$

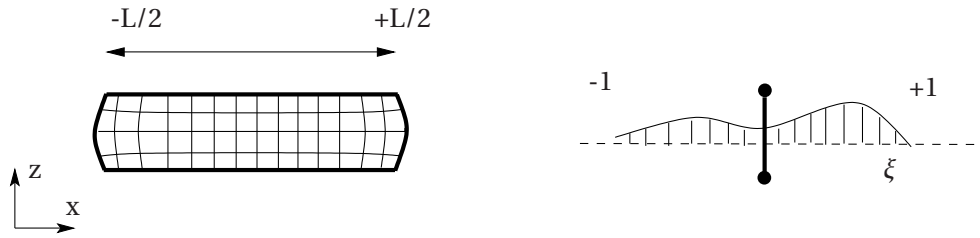
– Une réduction adaptée aux lamifiés plans tridimensionnels hexaèdriques (3D-1D), voir figure 3.5(b). Si A et B sont respectivement la longueur et la largeur d'une lamelle, on peut définir le paramétrage $\xi = 2X/A$ et $\eta = 2Y/B$. A l'aide de ce paramétrage on peut combiner deux approximations dans les deux directions transverses de la lamelle, de façon à obtenir :

$$\mathbf{u}(X,Y,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_u} \mathbf{u}_{ij}(Z)\, T_i(\xi)\, T_j(\eta) \tag{3.6}$$

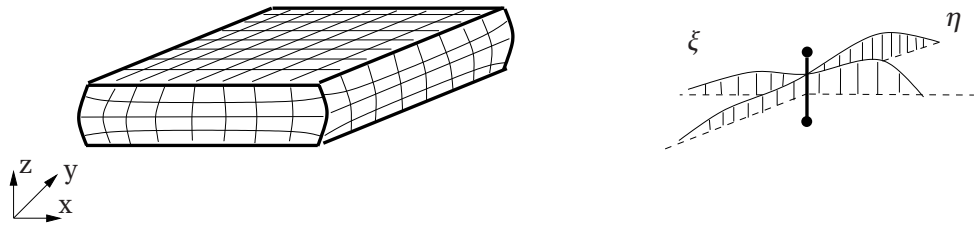
$$p(X,Y,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_p} p_{ij}(Z)\, T_i(\xi)\, T_j(\eta) \tag{3.7}$$

Pour cette réduction, on fait le choix d'utiliser le même ordre de troncature et la même base de projection dans les deux directions transverses, afin de ne pas multiplier le nombre de paramètres du modèle. On peut néanmoins imaginer des situations ou ce choix n'est pas forcément optimal, le cas où une des dimensions est beaucoup plus grande que l'autre en est un exemple.

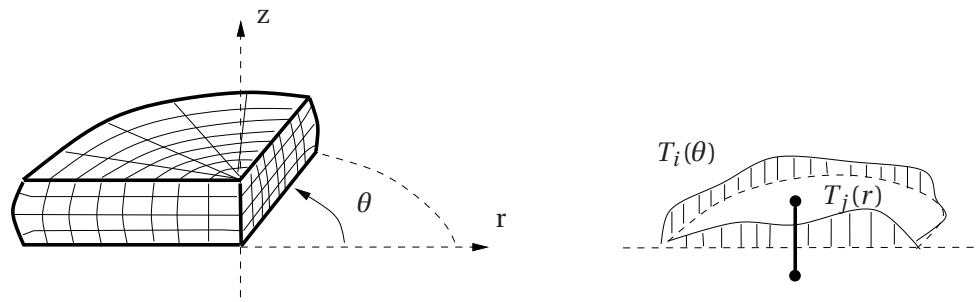
– Une réduction adaptée aux lamifiés de révolution (3D-1D), voir figure 3.5(c). Si R est le rayon d'une lamelle, on peut définir le paramétrage $\xi = (2r/R) - 1$. En utilisant une décomposition en série de FOURIER du déplacement et de la pression et en combinant cette décomposition avec une approximation polynomiale dans le plan de la lamelle,



(a) Réduction 2D-1D



(b) Réduction 3D-1D



(c) Réduction 3D-1D

Figure 3.5 – *Types de réduction proposées*

on a alors dans le cas général en coordonnées cylindriques :

$$u_r(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}}\left(u^s_{r_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\cos(j\theta) + u^a_{r_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\sin(j\theta)\right) \tag{3.8}$$

$$u_\theta(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}}\left(u^s_{\theta_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\sin(j\theta) + u^a_{\theta_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\cos(j\theta)\right) \tag{3.9}$$

$$u_Z(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}}\left(u^s_{Z_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\cos(j\theta) + u^a_{Z_{ij}}(Z)\,T_i(\xi)\sin(j\theta)\right) \tag{3.10}$$

$$p(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_{\theta p}}\left(p^s_{ij}(Z)\,T_i(\xi)\cos(j\theta) + p^a_{ij}(Z)\,T_i(\xi)\sin(j\theta)\right) \tag{3.11}$$

où $n_{\theta u}$ et $n_{\theta p}$ sont le nombre d'harmoniques de la série de FOURIER respectivement pour la cinématique et la pression. Les exposants ^{s} et ^{a} servant à désigner les parties symétriques et antisymétriques. Si l'on considère uniquement les modes de déformations symétriques par rapport au plan $\theta = 0$ et en omettant le premier terme nul de la partie en sinus, on conserve alors uniquement les termes symétriques (en contre partie on ne peut traiter le cas de la torsion) :

$$u_r(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_{\theta u}} \left(u^s_{r_{ij}}(Z)\, T_i(\xi) \cos(j\theta) \right) \tag{3.12}$$

$$u_\theta(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_{\theta u}} \left(u^s_{\theta_{ij}}(Z)\, T_i(\xi) \sin(j\theta) \right) \tag{3.13}$$

$$u_Z(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_{\theta u}} \left(u^s_{Z_{ij}}(Z)\, T_i(\xi) \cos(j\theta) \right) \tag{3.14}$$

$$p(r,\theta,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_{\theta p}} \left(p^s_{ij}(Z)\, T_i(\xi) \cos(j\theta) \right) \tag{3.15}$$

3.2.2 Réduction pour la poutre composite E.F.B.

La structure « Elastomeric Flex Beam » traitée par DELORME [1997] et MÉO [2000] est l'exemple type de structure nécessitant une stratégie de modélisation adaptée pour réduire la taille ou le temps de calcul du modèle. Il s'agit d'une poutre en élastomère renforcée par des tiges en composites unidirectionnels de carbone où de verre (voir figure 3.6). Ses propriétés d'invariance dans la direction Z et sa géométrie de section composite, en font une structure qui peut être traitée par la méthode de réduction proposée par CHEUNG (3D2D).

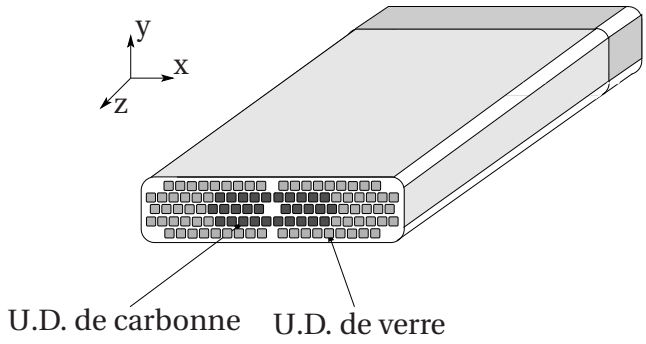


Figure 3.6 – *Poutre composite EFB*

Si l'on définit le paramétrage $\xi = 2Z/L$ (L étant la longueur de la poutre), on peut approximer les inconnues dans la direction d'élongation par :

$$\mathbf{u}(X,Y,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}_i(X,Y)\, T_i(\xi) \tag{3.16}$$

$$p(X,Y,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} p_i(X,Y)\, T_i(\xi) \tag{3.17}$$

3.3 Mise en œuvre de la technique de réduction de modèles

Une fois posées les approximations en série de fonctions de la cinématique et de la pression, il faut choisir une base de projection adaptée au problème à traiter.

3.3.1 Formes de la base de projection

Le choix de la base de projection doit être guidé par un certain nombre de critères, les plus importants étant les suivants :

- Le type de sollicitations mécaniques à prendre en compte : chargement et/ou conditions cinématiques aux bords.
- La capacité de l'approximation à décrire l'évolution des grandeurs mécaniques suivant la où les direction(s) de projection lorsque la structure est soumise à des sollicitations régulières, de type traction, cisaillement ou flexion.
- La capacité de l'approximation à traduire les effets de bords au voisinage des sections extrêmes.

L'objectif étant de trouver une approximation capable de reproduire assez finement les caractéristiques globales (raideurs, ...) et des grandeurs locales (déformations, contraintes, ...) pour des cas de sollicitations simples. Pour ce faire on peut jouer essentiellement sur deux aspects ; les ordres de troncatures de la projection en série et le type de base choisi.

Remarque 3.1
*Certaines propriétés comme l'orthogonalité sont intéressantes car, dans le cas linéaire, elles induisent un découplage du problème initial en une suite de problèmes condensés. Dans le cas non-linéaire, de telles propriétés peuvent a priori influer sur le conditionnement du système d'équations à résoudre (voir [*ZIENKIEWICZ & TAYLOR*, 2000]).* ❑

Pour ce travail, trois types de base de projection ont été retenus :
■ *Base de* LEGENDRE, elle est formée des polynômes construits à partir de la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0(\xi) = 1 \quad L_1(\xi) = \xi \\ L_{i+1}(\xi) = \dfrac{(2i+1)\xi L_i(\xi) - i L_{i-1}(\xi)}{i+1} \end{cases} \tag{3.18}$$

La figure 3.7(a) présente les 5 premiers termes de cette série polynomiale.
Cette base possède les propriétés suivantes :

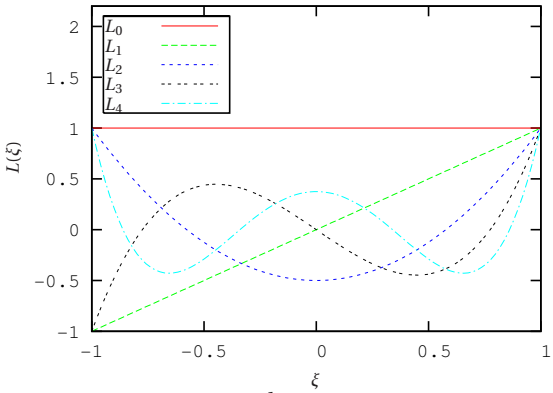
- Orthogonalité :

$$\int_{-1}^{+1} L_i(\xi) L_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \frac{2}{2i+1} \text{ si } i = j \end{cases} \tag{3.19}$$

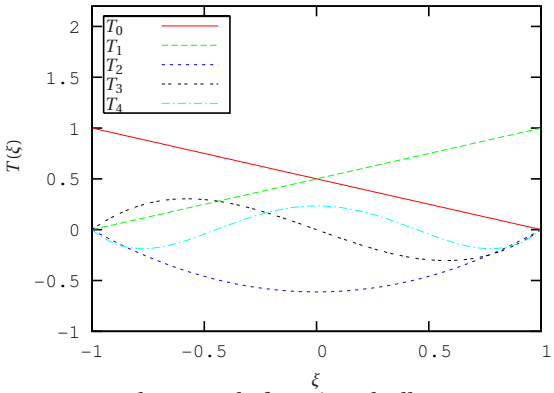
- Symétrie :

$$L_i(-\xi) = (-1)^i L_i(\xi) \tag{3.20}$$

■ *Base polynomiale de fonctions bulles*, associées à des polynômes Lagrange d'ordre 1, permettant d'imposer directement les conditions cinématiques de type translations et/ou rotations. Les fonction bulles constituent ainsi, une correction de l'évolution des grandeurs

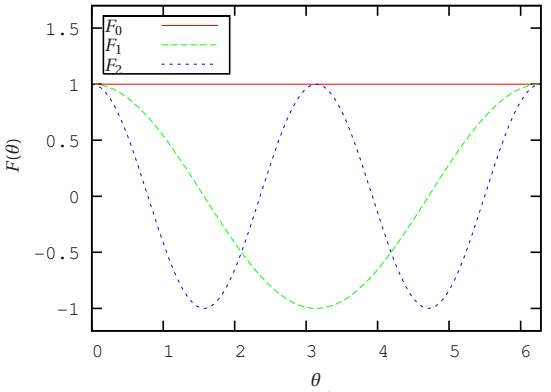


(a) Base de LEGENDRE

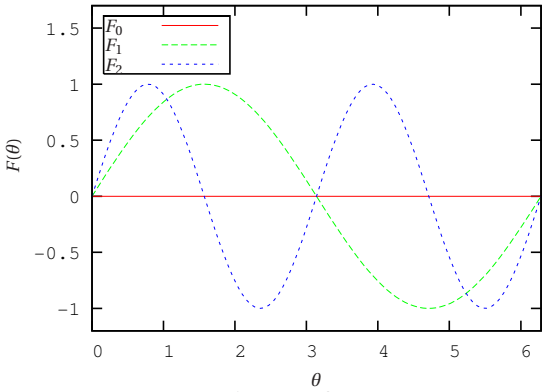


(b) Base de fonctions bulles

Figure 3.7 – *Bases polynomiales*



(a) $\cos(i\theta)$



(b) $\sin(i\theta)$

Figure 3.8 – *Base de* FOURIER

mécaniques dans la direction condensée. Soit de façon formelle :

$$\begin{cases} T_0(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2}, \quad T_1(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2} \\ T_n(\xi) = \dfrac{L_n(\xi) - L_{n-2}(\xi)}{\sqrt{2(2i-1)}} \end{cases} \tag{3.21}$$

$L_n(\xi)$ étant le polynôme de LEGENDRE d'ordre n. La figure 3.7(b) présente les 5 premiers termes de la base. Elle présente également les propriétés suivantes (voir CUGNON [2000]) :

– Orthonormalité des dérivées premières :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dT_i(\xi)}{d\xi} \frac{dT_j(\xi)}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \tag{3.22}$$

– Symétrie :

$$T_i(-\xi) = (-1)^i T_i(\xi) \tag{3.23}$$

– Quasi-orthogonalité (pour $n \geq 2$) :

$$\int_{-1}^{+1} T_i(\xi) T_j(\xi) d\xi = \begin{cases} \dfrac{2}{(2i+1)(2i-3)} \text{ si } i = j \\ \dfrac{-1}{(2i-3)\sqrt{((2i-1)(2i-5))}} \text{ si } j = i-2 \\ \dfrac{-1}{(2i+1)\sqrt{((2i-1)(2i+3))}} \text{ si } j = i+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.24}$$

■ *Base de* FOURIER, elle est constituée des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} F_n^s(\theta) = cos(n\theta) \\ F_n^a(\theta) = sin(n\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi] \tag{3.25}$$

La figure 3.8 présente les trois premières harmoniques de la base de FOURIER. Elle présente également les propriétés suivantes :

– Orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} F_i^s(\theta) F_j^s(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 2\pi \text{ si } i = j = 0 \\ \pi \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\int_0^{2\pi} F_i^a(\theta) F_j^a(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j = 0 \\ \pi \text{ sinon} \end{cases} \tag{3.27}$$

– Nullité des termes croisés :

$$\int_0^{2\pi} F_i^a(\theta) F_j^s(\theta) d\theta = 0 \tag{3.28}$$

– Symétrie :

$$\begin{aligned} F_i^s(-\theta) &= F_i^s(\theta) \\ F_i^a(-\theta) &= -F_i^a(\theta) \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.3.2 Discrétisation

A partir de l'approximation polynomiale des champs cinématiques et de pression, on peut réaliser une discrétisation de type éléments-finis en utilisant des fonctions de formes classiques, basées sur des polynômes de Lagrange.

■ *Pour une réduction 2D-1D,* on réalise une approximation éléments-finis unidimensionnelle dans l'épaisseur de la lamelle (cf. figure 3.5(a)) :

$$\mathbf{u}_h^e(X,Z) = \sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{lu} N_{uj}^e(Z)\mathbf{u}_i^j = \sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi) < N_u^e(Z) > \{u_i^e\} \tag{3.30}$$

$$p_h^e(X,Z) = \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{lp} N_{pj}^e(Z) p_j^i = \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) < N_p^e(Z) > \{p_i^e\} \tag{3.31}$$

Les $N_u^j(Z)$ et $N_p^j(Z)$ sont les polynômes de Lagrange. Pour cette réduction on utilise une interpolation quadratique des déplacements et linéaire de la pression [3] (éléments L3P2).

En effectuant ensuite un choix sur le classement des degrés de liberté, on peut écrire l'opérateur gradient de la manière suivante (u^i et v^i étant les composantes de $\{u^i\}$ dans le repère cartésien) :

$$[B^e]\{U^e\} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x T_0' N_{u1}^e & J_x T_1' N_{u1}^e & \dots & J_x T_{n_u}' N_{u1}^e & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 N'^e_{u1} & T_1 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} N'^e_{u1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_x T_0' N_{u1}^e & J_x T_1' N_{u1}^e & \dots & J_x T_{n_u}' N_{u1}^e & \dots \\ T_0 N'^e_{u1} & T_1 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} N'^e_{u1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\text{au noeud 1}} \begin{Bmatrix} u_0^1 \\ u_1^1 \\ \vdots \\ u_{n_u}^1 \\ v_0^1 \\ v_1^1 \\ \vdots \\ v_{n_u}^1 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

avec les notations : $T_i' = \dfrac{dT_i(\xi)}{d\xi} \qquad J_x = \dfrac{d\xi}{dX} = \dfrac{2}{L} \qquad N'^e_{ui} = \dfrac{dN_{ui}^e}{dZ}$

■ *Pour une réduction 3D-1D* dans le cas de structures planes, on utilise le même type de fonction de formes que dans le cas précédent :

$$\mathbf{u}_h^e(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\eta) \sum_{k=1}^{lu} N_{uk}^e(Z)\mathbf{u}_{ij}^k = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\eta) < N_u^e(Z) > \{u_{ij}^e\} \tag{3.32}$$

$$p_h^e(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_p} T_i(\xi)T_j(\eta) \sum_{k=1}^{lp} N_{pk}^e(Z) p_{ij}^k = \sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_p} T_i(\xi)T_j(\eta) < N_p^e(Z) > \{p_{ij}^e\} \tag{3.33}$$

L'élément fini qui résulte de cette réduction est du même type que dans le cas précédent (L3P2), les fonctions $< N_u^e >$ et $< N_p^e >$ réalisant respectivement une interpolation quadratique des déplacements et linéaire de la pression.

(3). l'interpolation de la pression est discontinue entre éléments

L'opérateur gradient peut s'écrire de la manière suivante (u^i, v^i et w^i étant les composantes de $\{u^i\}$ dans le repère cartésien) :

$$\begin{bmatrix}
J_x T_0' T_0 N_{u1}^e & \dots & J_x T_{n_u}' T_0 N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & J_y T_0 T_0' N_{u1}^e & \dots & J_y T_{n_u} T_0' N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 T_0 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} T_0 N'^e_{u1} & \dots \\
J_y T_0 T_0' N_{u1}^e & \dots & J_y T_{n_u} T_0' N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & T_0 T_0 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} T_0 N'^e_{u1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & J_x T_0' T_0 N_{u1}^e & \dots & J_x T_{n_u}' T_0 N_{u1}^e & \dots \\
0 & \dots & 0 & J_x T_0' T_0 N_{u1}^e & \dots & J_x T_{n_u}' T_0 N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{ab} T_0 T_0' N_{u1}^e & \dots & J_{ab} T_{n_u} T_0' N_{u1}^e & \dots \\
T_0 T_0 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} T_0 N'^e_{u1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
u_{00}^1 \\ \vdots \\ u_{n_u 0}^1 \\ v_{00}^1 \\ \vdots \\ v_{n_u 0}^1 \\ w_{00}^1 \\ \vdots \\ w_{n_u 0}^1 \\ \vdots
\end{Bmatrix}$$

avec : $T_i' = \dfrac{dT_i(\xi)}{d\xi}$ où $T_i' = \dfrac{dT_i(\eta)}{d\eta}$ $\quad J_x = \dfrac{d\xi}{dX} = \dfrac{2}{A}$ $\quad J_y = \dfrac{d\eta}{dY} = \dfrac{2}{B}$ $\quad N'^e_{ui} = \dfrac{dN_{ui}^e}{dZ}$

■ *Pour une réduction 3D-1D* dans le cas de structures à géométrie de révolution, on obtient globalement le même type d'approximation [4] :

$$u_{r_h}^e(r,\theta,Z) = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\cos(j\theta)\sum_{k=1}^{lu} N_{uk}^e(Z)\,u_{r_{ij}}^k = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\cos(j\theta) < N_u^e(Z) > \{u_{r_{ij}}^e\} \tag{3.34}$$

$$u_{\theta_h}^e(r,\theta,Z) = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=1}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\sin(j\theta)\sum_{k=1}^{lu} N_{uk}^e(Z)\,u_{\theta_{ij}}^k = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=1}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\sin(j\theta) < N_u^e(Z) > \{u_{\theta_{ij}}^e\} \tag{3.35}$$

$$u_{Z_h}^e(r,\theta,Z) = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\cos(j\theta)\sum_{k=1}^{lu} N_{uk}^e(Z)\,u_{Z_{ij}}^k = \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{\theta u}} T_i(\xi)\cos(j\theta) < N_u^e(Z) > \{u_{Z_{ij}}^e\} \tag{3.36}$$

$$p_h^e(r,\theta,Z) = \sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_{\theta p}} T_i(\xi)\cos(j\theta)\sum_{k=1}^{lp} N_{pk}^e(Z)\,p_{ij}^k = \sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_{\theta p}} T_i(\xi)\cos(j\theta) < N_p^e(Z) > \{p_{ij}^e\} \tag{3.37}$$

L'élément fini associé à cette réduction est exactement du même type que dans le cas précédent (L3P2).

L'opérateur gradient peut s'écrire de la manière suivante (u^i, v^i et w^i étant les composantes de $\{u^i\}$ dans le repère cylindrique) :

$$\begin{bmatrix}
J_r T_0' N_{u1}^e & \dots & J_r T_{n_u}' N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
\frac{T_0}{r} N_{u1}^e & \dots & \frac{T_{n_u}}{r} N_{u1}^e & \frac{T_0}{r}\cos(\theta) N_{u1}^e & \dots & \frac{T_{n_u}}{r}\cos(\theta) N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} N'^e_{u1} & \dots \\
\frac{T_0}{r} N_{u1}^e & \dots & \frac{T_{n_u}}{r} N_{u1}^e & -\frac{T_0}{r}\sin(\theta) N_{u1}^e & \dots & -\frac{T_{n_u}}{r}\sin(\theta) N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & T_0 \sin(\theta) N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u}\sin(\theta) N'^e_{u1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & J_r T_0' N_{u1}^e & \dots & J_r T_{n_u}' N_{u1}^e & \dots \\
0 & \dots & 0 & J_r T_0' \sin(\theta) N_{u1}^e & \dots & J_r T_{n_u}' \sin(\theta) N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{T_0}{r}\sin(0\times\theta) N_{u1}^e & \dots & -\frac{T_{n_u}}{r}\sin(0\times\theta) N_{u1}^e & \dots \\
T_0 N'^e_{u1} & \dots & T_{n_u} N'^e_{u1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
u_{00}^1 \\ \vdots \\ u_{n_u 0}^1 \\ v_{00}^1 \\ \vdots \\ v_{n_u 0}^1 \\ w_{00}^1 \\ \vdots \\ w_{n_u 0}^1 \\ \vdots
\end{Bmatrix}$$

avec : $T_i' = \dfrac{dT_i(\xi)}{d\xi}$ $\quad J_r = \dfrac{d\xi}{dr} = \dfrac{2}{R}$ $\quad N'^e_{ui} = \dfrac{dN_{ui}^e}{dZ}$

(4). Dans le cas où on ne tient compte que des termes symétriques de la décomposition en série de FOURIER

■ *Pour une réduction 3D-2D,* on utilise une approximation éléments-finis bidimensionnelle, identique à celle présentée dans le chapitre précédent. On obtient :

$$\mathbf{u}_h^e(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{lu} N_{uj}^e(X,Y)\mathbf{u}_i^j = \sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi) < N_u^e(X,Y) > \{u_i^e\} \tag{3.38}$$

$$p_h^e(r,\theta,Z) = \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) \sum_{j=1}^{lp} N_{pj}^e(X,Y) p_i^j = \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) < N_p^e(X,Y) > \{p_i^e\} \tag{3.39}$$

Les éléments finis bidimensionnels obtenus sont choisi du type Q9P3 où T6P1. L'expression des fonctions d'interpolation de la cinématique et de la pression peut être trouvée par exemple dans DHATT & TOUZOT [1984].

Pour cette réduction, l'opérateur gradient peut s'écrire de la manière suivante (u^i et v^i et w^i étant les composantes de $\{u^i\}$ dans le repère cartésien) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0 N_{x\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{x\,u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & T_0 N_{y\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{y\,u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0' N_{u1}^e & \dots & T_{n_u}' N_{u1}^e & \dots \\ T_0 N_{y\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{y\,u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & J_c T_0' N_{u1}^e & \dots & J_c T_{n_u}' N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 N_{x\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{x\,u1}^e & \dots \\ 0 & \dots & 0 & T_0 N_{x\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{x\,u1}^e & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 N_{y\,u1}^e & \dots & T_{n_u} N_{y\,u1}^e & \dots \\ J_c T_0' N_{u1}^e & \dots & J_c T_{n_u}' N_{u1}^e & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\text{au noeud 1}} \dots \begin{Bmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_{n_u}^1 \\ v_0^1 \\ \vdots \\ v_{n_u}^1 \\ w_0^1 \\ \vdots \\ w_{n_u}^1 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

avec : $T_i' = \dfrac{dT_i(\xi)}{d\xi}$ $\quad J_c = \dfrac{d\xi}{Z} = \dfrac{2}{L}$ $\quad N_{x\,ui}^e = \dfrac{\partial N_{ui}^e(X,Y)}{\partial X}$ $\quad N_{y\,ui}^e = \dfrac{\partial N_{ui}^e(X,Y)}{\partial Y}$

Avec ces notations, la méthode de réduction de modèle induit peu de changement dans la formulation variationnelle. Par exemple si l'on reprend la forme en lagrangien perturbé présentée au chapitre précédent (voir paragraphe 2.6), les vecteurs et matrices élémentaires sont faiblement modifiés, par exemple dans le cas d'une réduction 2D-1D on a, avec les notations :

$$\mathbf{F} = [B^e]U^e + \mathbf{I} \tag{3.40}$$

$$p_h = \sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi) < N_p^e > \{Q_i^e\} \tag{3.41}$$

ainsi que les formes suivantes des contraintes :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \tag{3.42}$$

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\partial \psi_{iso}(\overline{\mathbf{F}})}{\partial \overline{\mathbf{F}}} \tag{3.43}$$

• **cas de la formulation incompressible (équations 2.79)**

$$
\begin{aligned}
[K_t^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\mathbb{C}_{mi}(u_h) - p_h J\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-T}\bigcirc\mathbf{F}^{-T}\right)\right][B^e]d\Omega \\
[G^e] &= -\int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi)\{N_p^e\} < \text{cof}\mathbf{F} > [B^e]d\Omega \\
[\alpha I^e] &= -\alpha\int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_p} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_p^e\} < N_p^e > d\Omega \\
[r_u^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T\left[\mathbf{\Pi}(u_h) - p_h\text{cof}\mathbf{F}\right]d\Omega - \int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_u^e\} < f_j^{ext} > d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega_f\cap\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_u^e\} < T_j^{ext} > dS \\
[r_p^e] &= \int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi)N_p^e(-(J-1) - \alpha(p_h - p_0))d\Omega
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

• **cas de la formulation compressible (équations 2.80)**

$$
\begin{aligned}
[K_t^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T \left[\mathbb{C}_m^{iso}(u_h) - p_h J\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}\bigcirc\mathbf{F}^{-T}\right)\right][B^e]d\Omega \\
[G^e] &= -\int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi)\{N_p^e\} < \text{cof}\mathbf{F} > [B^e]d\Omega \\
[\alpha I^e] &= -\frac{1}{k}\int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p}\sum_{j=0}^{n_p} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_p^e\} < N_p^e > d\Omega \\
[r_u^e] &= \int_{\Omega_e} [B^e]^T\left[\overline{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P} - p_h\text{cof}\mathbf{F}\right]d\Omega - \int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_u^e\} < f_j^{ext} > d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega_f\cap\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\xi)\{N_u^e\} < T_j^{ext} > dS \\
[r_p^e] &= \int_{\Omega_e}\sum_{i=0}^{n_p} T_i(\xi)N_p^e(-(J-1) - \frac{1}{k}p_h)d\Omega
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

En tenant compte de la condensation statique des degrés de liberté de pression, on obtient un nombre de degrés de liberté par noeud de :

$$
n_{ddl} = \begin{cases} 2(n_u+1) & \text{dans le cas 2D1D} \\ 3(n_u+1)^2 & \text{dans le cas 3D1D} \\ (n_u+1)(3n_{\theta u}+2) & \text{dans le cas 3D1D de révolution} \\ 3(n_u+1) & \text{dans le cas 3D2D} \end{cases}
$$

Remarque 3.2
La méthode de réduction de modèles a également été implémentée avec un formalisme petites perturbations en élasticité linéaire, afin de pouvoir modéliser, par exemple, les lamelles métalliques d'un lamifié élastomère-métal. ❑

3.3.3 Implémentation numérique

L'implémentation numérique de cette méthode de réduction de modèles a été réalisée de manière à découpler le choix de la base polynomiale, le type de modèle réduit et la formulation mécanique. La programmation orientée objet du C++ a permis de mettre en place des objets spécialisés nécessitant peu de modifications du code original. L'environnement C++ combiné à l'organisation de la plateforme de développements ZéBuLoN, conduisent au final à un logiciel très flexible. Cependant, l'investisement à réaliser en terme de compréhension de l'architecture existante représente la plus grande partie du temps d'implémentation.

Cette dernière a principalement consisté en la programmation des deux objets présentés sur les schémas 3.10 et 3.9. Ces objets permettent de construire les fonctions d'approximations, les opérateurs de dérivations, les schémas d'intégrations, etc. Ainsi, pour utiliser une réduction de modèle dans un formalisme mécanique, on a juste besoin d'ajouter la, ou les boucles sur les points de gauss qui concernent l'intégration des fonctions d'approximations de la base de projection, ainsi que l'appel des fonctions d'interpolations de manière à tenir compte de la décomposition en série (ceci est réalisé à l'aide de l'objet DECOMP).

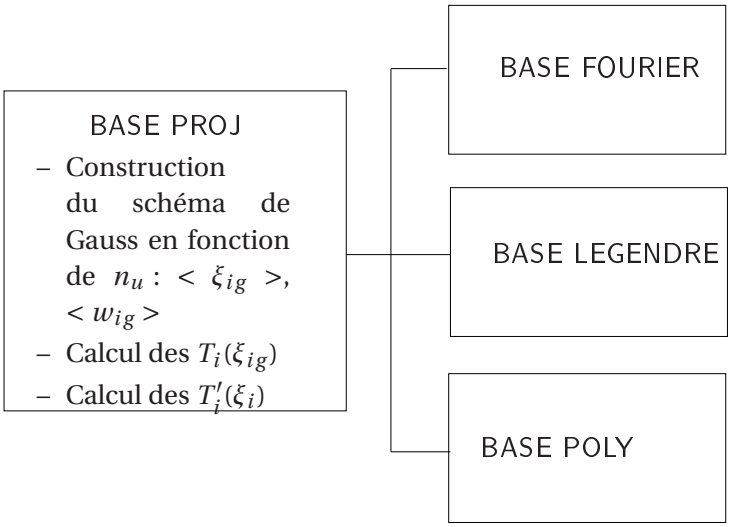


Figure 3.9 – *Objet BASE PROJ*

Pour l'utilisateur cette implémentation permet de laisser libre le choix de la base de projection et l'ordre de troncature. Le fichier d'entrée est structuré de manière à définir facilement ces données indépendamment de la loi de comportement choisie.

Par exemple, pour définir une réduction 3D1D avec trois harmoniques de FOURIER et une base de LEGENDRE tel que $n_u = 6, n_p = 3$ (et un rayon $R = 5$), il suffit de rajouter les lignes suivantes dans le fichier d'entrée ;

```
***base_decomp 3D1D_cyl
**legendreU 6 5.
**fourierU 3
**legendreP 2
**fourierP 3
```

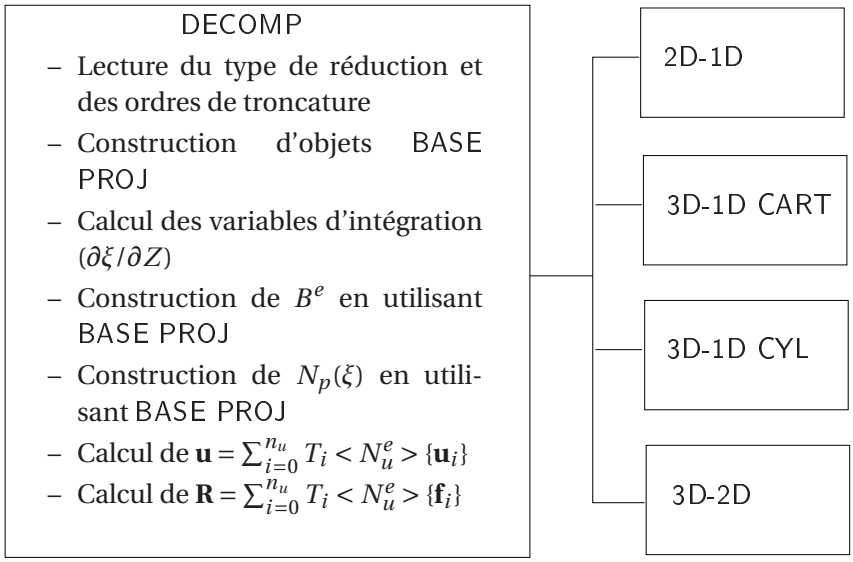


Figure 3.10 – *Objet DECOMP*

Le calcul des intégrales de volume peut être effectué de la manière suivante :

– dans le cas 2D-1D on peut écrire :

$$\int_{\Omega_e} dV = \int_{\xi=-1}^{1} \int_{Z} \frac{dX}{d\xi} d\xi dZ \tag{3.46}$$

– dans le cas 3D-1D cartésien (pour les structures planes parallélépipédiques) on a :

$$\int_{\Omega_e} dV = \int_{\xi=-1}^{1} \int_{\eta=-1}^{1} \int_{Z} \frac{dX}{d\xi} \frac{dY}{d\eta} d\xi d\eta dZ \tag{3.47}$$

– dans le cas 3D-1D cylindrique (pour les structures à géométrie de révolution) on a :

$$\int_{\Omega_e} dV = \int_{\xi=-1}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{Z} r \frac{dr}{d\xi} d\xi d\theta dZ \tag{3.48}$$

– dans le cas 3D-2D on peut écrire :

$$\int_{\Omega_e} dV = \int_{\xi=-1}^{1} \int_{\Omega_{re}} \frac{dZ}{d\xi} d\xi dV_r \tag{3.49}$$

Ω_{re} et dV_r étant respectivement le domaine d'intégration réduit et le volume élémentaire réduit qui dépendent de (X,Y).

Pour les cas 2D-1D, 3D-1D cartésien et 3D-2D, l'intégration numérique suivant les variables ξ et η des matrices et vecteurs élémentaires est réalisée de manière exacte par une méthode de Gauss. L'implémentation de cette méthode a été réalisée de manière à adapter le nombre de points d'intégration à l'ordre de la projection polynomiale (ceci est implémenté dans l'objet BASE PROJ). Ainsi pour un ordre n_u de la cinématique dans la direction de projection, on utilise un schéma à $n_u + 1$ point (l'ordre de la matrice tangente en ξ étant de $2n_u$).

Pour le cas 3D-1D cylindrique, on utilise un schéma d'intégration de Gauss dans la direction ξ et une formule de quadrature de Gauss-Chebyshev dans la direction θ, ainsi l'intégration d'une fonction $f(r,\theta,z)$ peut s'écrire :

$$\int_r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_Z r f(r,\theta,z) dr d\theta dZ = \sum_{j=1}^{J} \frac{2\pi}{J} \int_r \int_Z r f(r,\theta_j,z) dr dZ \quad \text{avec} \quad \theta_j = \frac{2j-1}{J}\pi \tag{3.50}$$

Lorsque l'ordre de troncature de l'approximation en série augmente, le calcul d'intégration des vecteurs et matrices élémentaires prend une part prédominante voir pénalisante sur le temps de calcul total.

Des objets de post-traitements ont également été mis en oeuvre pour permettent une reconstruction de la solution du modèle réduit sur le maillage d'un modèle complet. Les champs de déformations où de contraintes peuvent être ainsi visualisés à partir de ce maillage sans aucune influence sur le temps de calculs total (traitement et post-traitement).

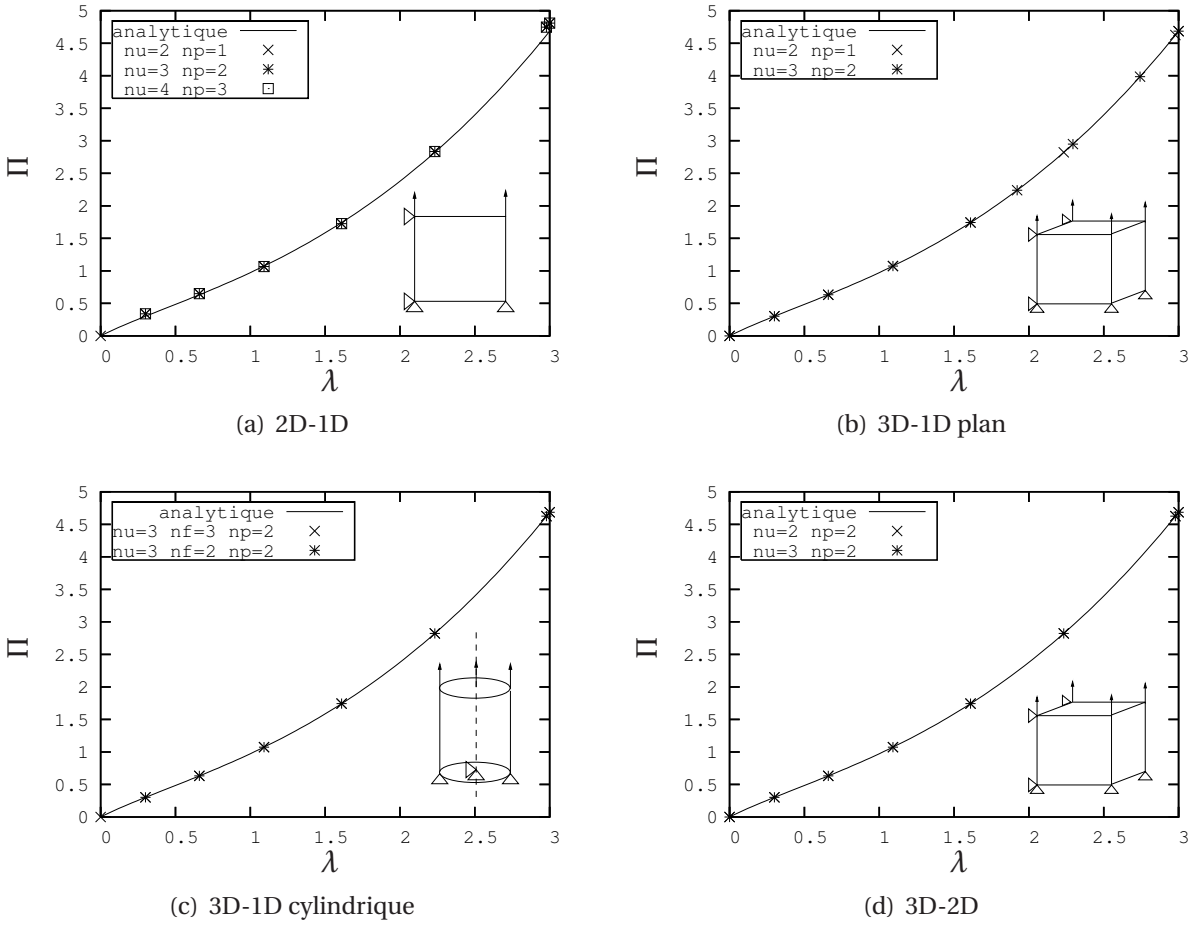
L'annexe B présente l'application de conditions aux limites et le calcul des réactions pour chaque type de modèle réduit. Ces opérations ont été implémentées dans des objets de pré et post-traitements.

3.4 Validation à partir d'une solution analytique

La première étape de validation des éléments-finis réduits, est réalisée à partir de tests de traction homogène sur différentes géométries : un carré unitaire en déformation plane (pour le 2D-1D), un cube unitaire (pour le 3D-1D plan et le 3D-2D) et un cylindre de rayon et de hauteur 1 (pour le 3D-1D cylindrique).

3.4.1 Comparaison en terme de réponse

Les figures 3.11 présentent une comparaison de la contrainte de traction analytique avec celle obtenue par un élément réduit pour une élongation de 300%. Pour ces tests, on utilise la formulation quasi-incompressible avec un module de compressibilité fixé à 10 000 Mpa. Les résultats obtenus pour ces tests sont les mêmes quels que soient la base et le degré d'approximation choisis.



(a) 2D-1D

(b) 3D-1D plan

(c) 3D-1D cylindrique

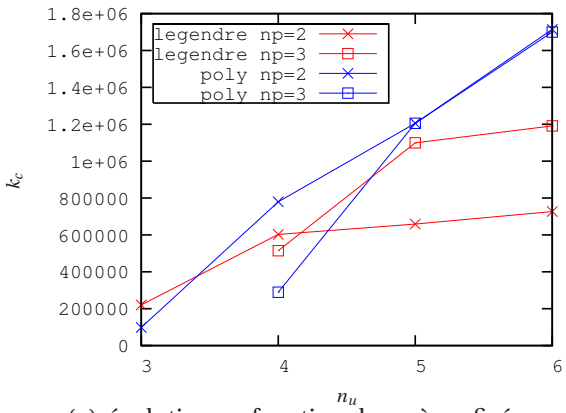
(d) 3D-2D

Figure 3.11 – *Résultats des Tests de traction homogène*

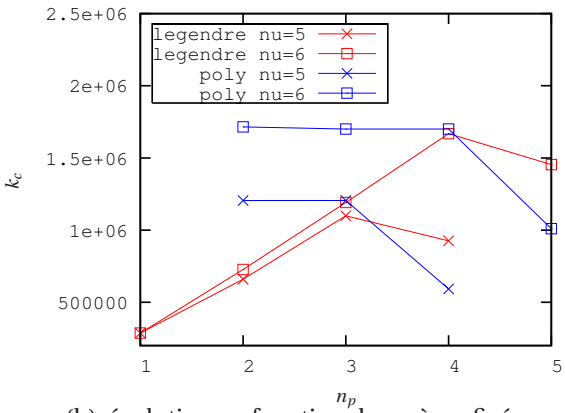
3.4.2 Comparaison en terme de conditionnement

Ce test de validation permet également de comparer le type de base polynomiale choisi en terme de conditionnement de la matrice tangente. Ce dernier est défini comme étant le rapport de la plus grande, sur la plus petite, valeur propre de la matrice tangente, prise à l'équilibre du dernier incrément convergé.

Les figures 3.12 présentent l'évolution du conditionnement pour le modèle réduit 2D-1D avec la formulation quasi-incompressible. On peut tout d'abord constater que lorsque l'on enrichi l'ordre d'approximation de la cinématique, pour un ordre fixé en pression, on a une croissance monotone du conditionnement, quel que soit le type de base choisi (cf. figure 3.12(a)). De plus la base polynomiale de LEGENDRE conduit à un meilleur conditionnement que la base des fonctions bulles (de l'ordre de 30%), ce qui permet d'illustrer l'influence des propriétés d'orthogonalités de cette base, même dans un cas non-linéaire.

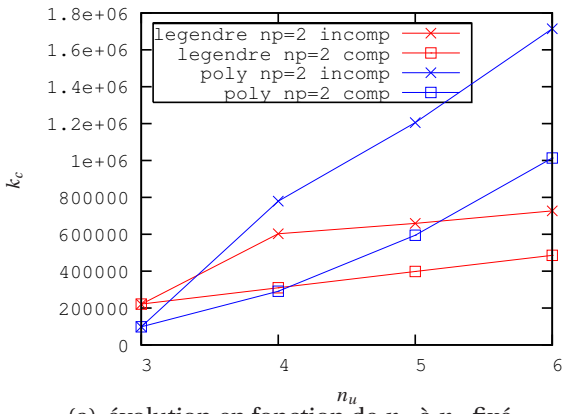


(a) évolution en fonction de n_u à n_p fixé

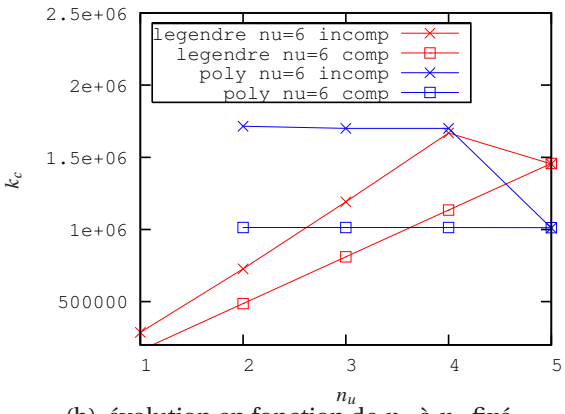


(b) évolution en fonction de n_p à n_u fixé

Figure 3.12 – *Conditionnement de la matrice tangente pour le test de traction avec la formulation quasi-incompressible (modèle 2D-1D)*



(a) évolution en fonction de n_u à n_p fixé



(b) évolution en fonction de n_p à n_u fixé

Figure 3.13 – *Comparaison du conditionnement pour les formulations compressible et quasi-incompressible (modèle 2D-1D)*

Enfin, la figure 3.12(b) nous montre que la valeur $n_p = n_u - 2$ semble être un point remarquable en terme de conditionnement, et ce pour les deux bases.

Si l'on compare les résultats obtenus par les formulations compressibles et quasi-incompressibles (figures 3.13(a) et 3.13(b)), on remarque que la formulation compressible conduit à un meilleur conditionnement avec une évolution plus régulière lorsque l'on fait varier l'ordre d'approximation de la cinématique.

En résumé la base polynomiale de LEGENDRE avec ces propriétés d'orthogonalités dans un formalisme compressible semble donner les meilleurs résultats en terme de conditionnement pour le modèle 2D-1D. On retiendra donc, pour la suite, cette formulation et cette base d'approximation [(5)].

(5). hormis pour le cas 3D-2D, pour lequel la base de fonctions bulles permet une application directe des

3.5 Validation à partir de réponses numériques

Pour caractériser la qualité des solutions obtenues avec les éléments finis réduits, dans des cas de sollicitations où l'on ne dispose pas de solution analytique, nous effectuons des comparaisons avec des modèles de référence qui sont préalablement définis.

3.5.1 Choix d'un modèle de référence

Afin de définir un modèle de référence pour chacun des éléments finis réduit développés, on réalise les tests suivants [(6)] (voir figure 3.14) :

• **Pour les éléments 2D-1D**, on effectue un essai de compression sur une lamelle en déformations planes de 50 mm de longueur pour 1 mm d'épaisseur. La face inférieure de la lamelle est bloquée, la face supérieure est soumise à un déplacement vertical de 0.015 mm (1.5% de compression). Compte tenu des symétries on ne modélise que la moitié de la lamelle.

La figure 3.15 présente l'évolution de l'énergie de déformation totale, lorsque l'on fait varier uniformément la finesse du maillage. Le modèle avec 30 050 degrés de liberté (pour la demi-lamelle) est retenu comme étant le modèle de référence. Ce choix est confirmé par la figure 3.16, puisque le champ de pression, sur ce modèle, semble bien régulier et ne présente pas d'oscillations.

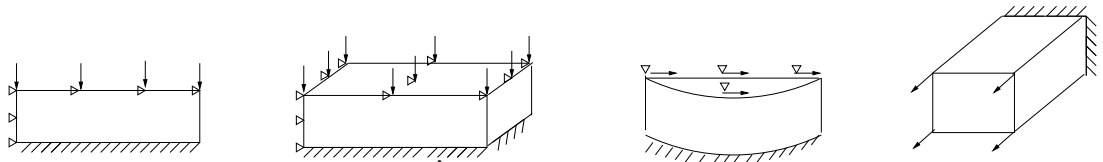


Figure 3.14 – *Tests réalisés pour le choix d'un modèle de référence*

conditions aux limites sur les deux sections extrêmes

(6). On utilise la même formulation et les même caractéristiques matériaux pour tous les modèles présentés.

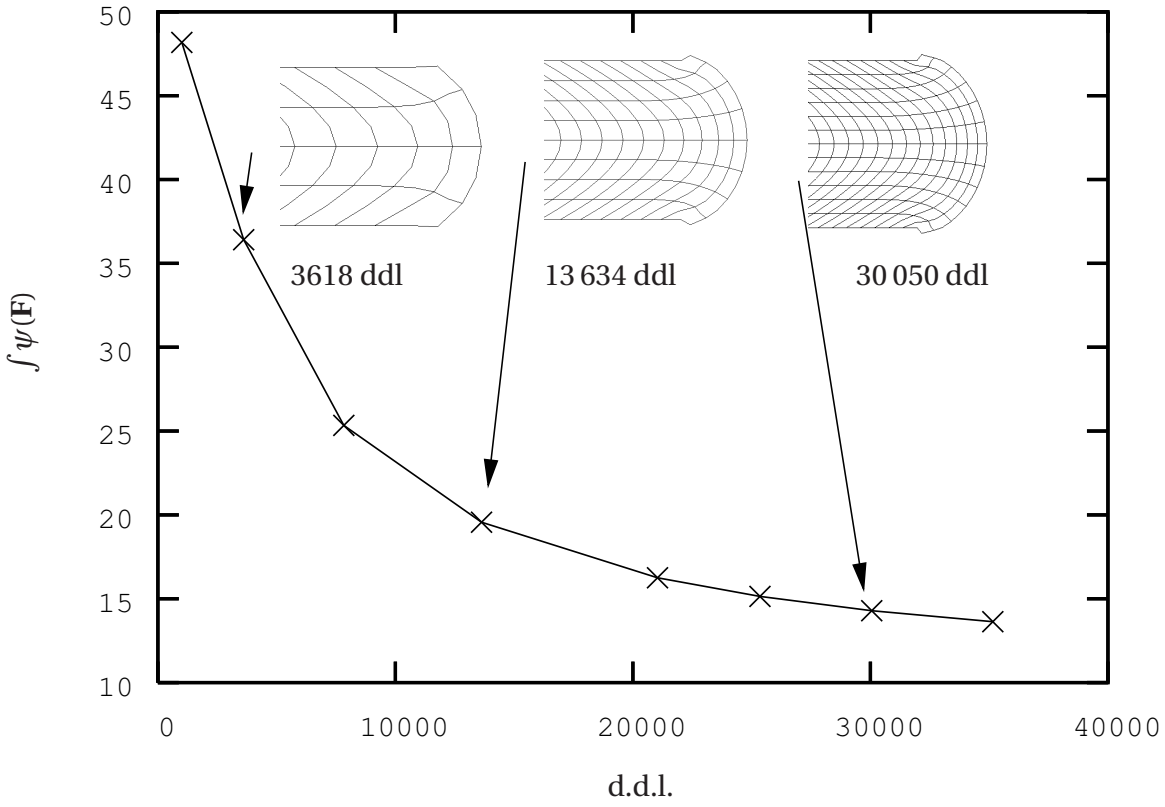


Figure 3.15 – *Évolution de l'énergie de déformation en fonction du nombre de d.d.l. (compression)*

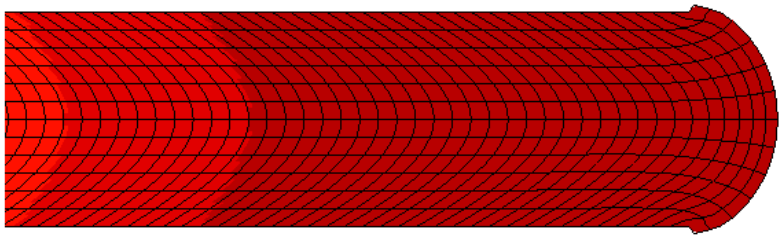




Figure 3.16 – *Champ de pression pour le modèle à* $30050 ddl$

• **Pour les éléments 3D-1D plans**, on réalise également un essai de compression sur une lamelle carrée de 20 mm de côté pour 1 mm d'épaisseur. La face inférieure de la lamelle est bloquée, les deux faces latérales (en y=0, et x=0) respectent des conditions de symétrie, et la face supérieure est soumise à un déplacement vertical de 0.025 mm (mais ne peut se déplacer latéralement). Le quart de la lamelle est modélisé en raffinant uniformément le maillage.

Les résultats de ce test sont présentés sur la figure 3.17. Le modèle avec 42 501 degrés de liberté est retenu pour être le modèle de référence. On peut noter que l'asymptote de convergence ne semble pas complètement atteinte pour ce cas test, le coût de calcul d'un modèle plus fin et nos ressources disponibles, nous ont contraint à ne pas poursuivre plus avant le raffinement du maillage.

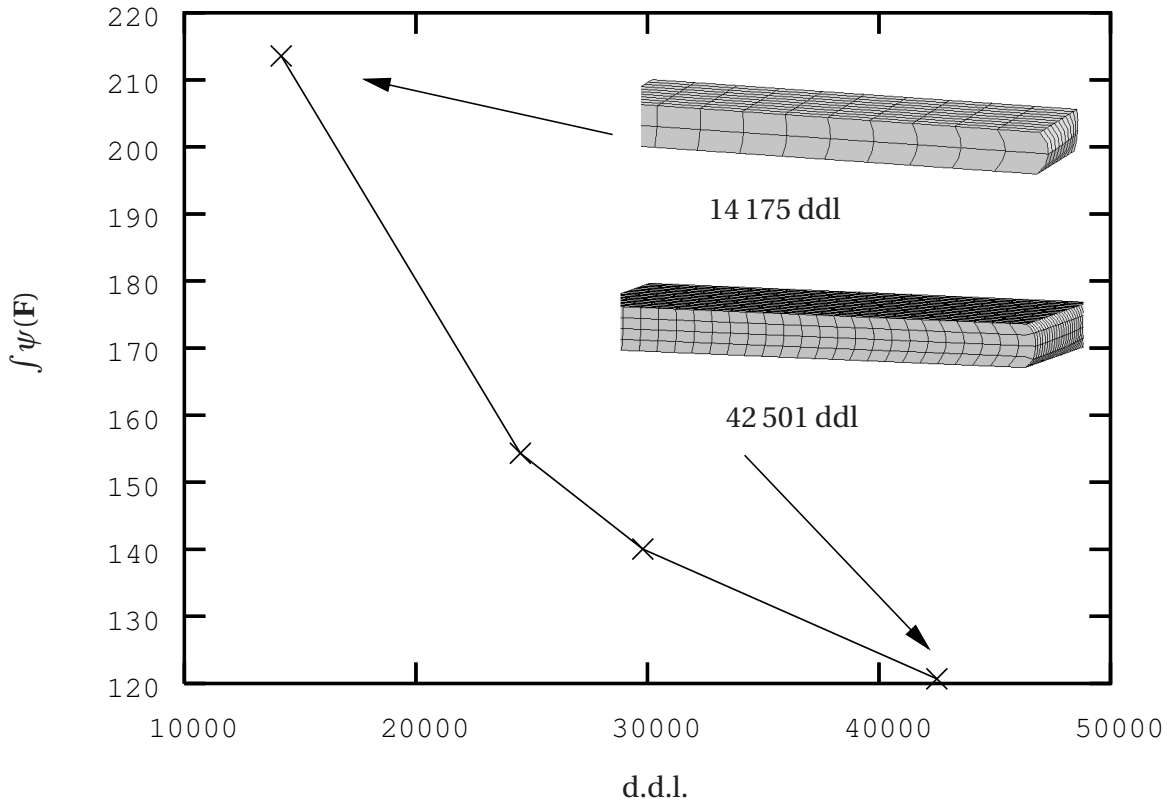


Figure 3.17 – *Évolution de l'énergie de déformation en fonction du nombre de d.d.l. (compression)*

La figure 3.18, présente une iso-couleur du champ de pression, obtenu avec le modèle à 42 501 ddl. Comme pour le cas précédent, on ne constate pas d'oscillation de la pression sur ce test.

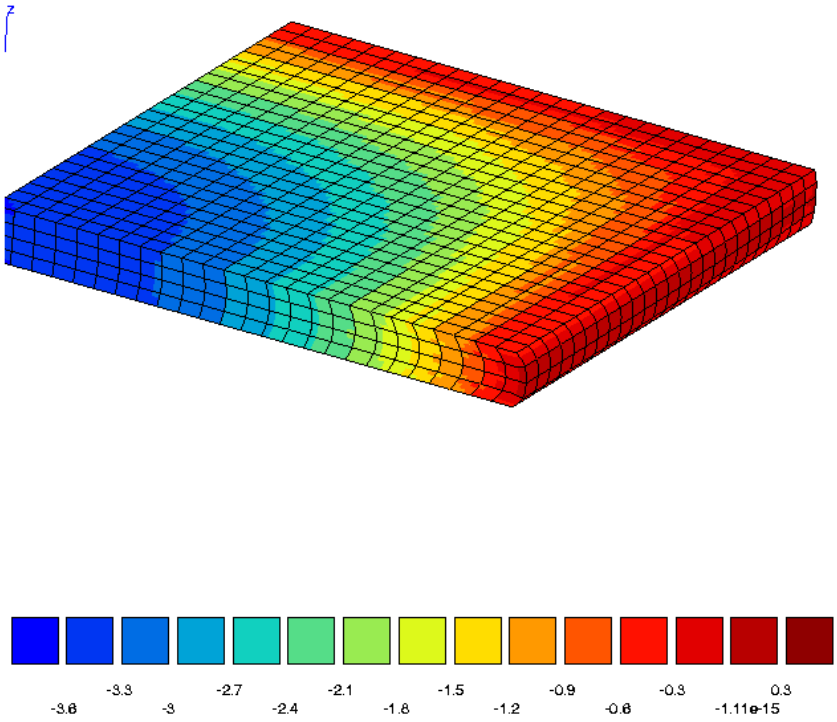


Figure 3.18 – *Champ de pression pour le modèle à* $42\,501 ddl$

• **Dans le cas des éléments 3D-1D pseudo-axisymétriques**, on utilise un essai de cisaillement sur une lamelle de 5 mm de rayon pour 1 mm d'épaisseur. Seule la moitié de la lamelle est modélisée. La face inférieure est encastrée, le plan $\theta = \pm\pi$ est soumis à des conditions de symétrie, la face supérieure subit un déplacement imposé horizontal de 0.7 mm (le mouvement vertical est bloqué).

La figure 3.19 présente les résultats obtenus, le modèle avec 53 124 degrés de liberté est retenu pour être le modèle de référence. Sur la figure 3.20, on constate une oscillation de la pression autour de zéro, sur les faces inférieures et supérieures. Cette instabilité numérique nous indique que l'élément H20P4 ne peut pas être utilisé comme élément de référence, pour des comparaisons en terme de champ de pression ou de contrainte. Dans la suite de ce chapitre, on ne présentera donc pas de comparaison de ce type [(7)].

(7). Une piste, pour éviter ces phénomènes d'oscillation, serait d'implémenter l'élément H27P4 avec interpolation complète Lagrange.

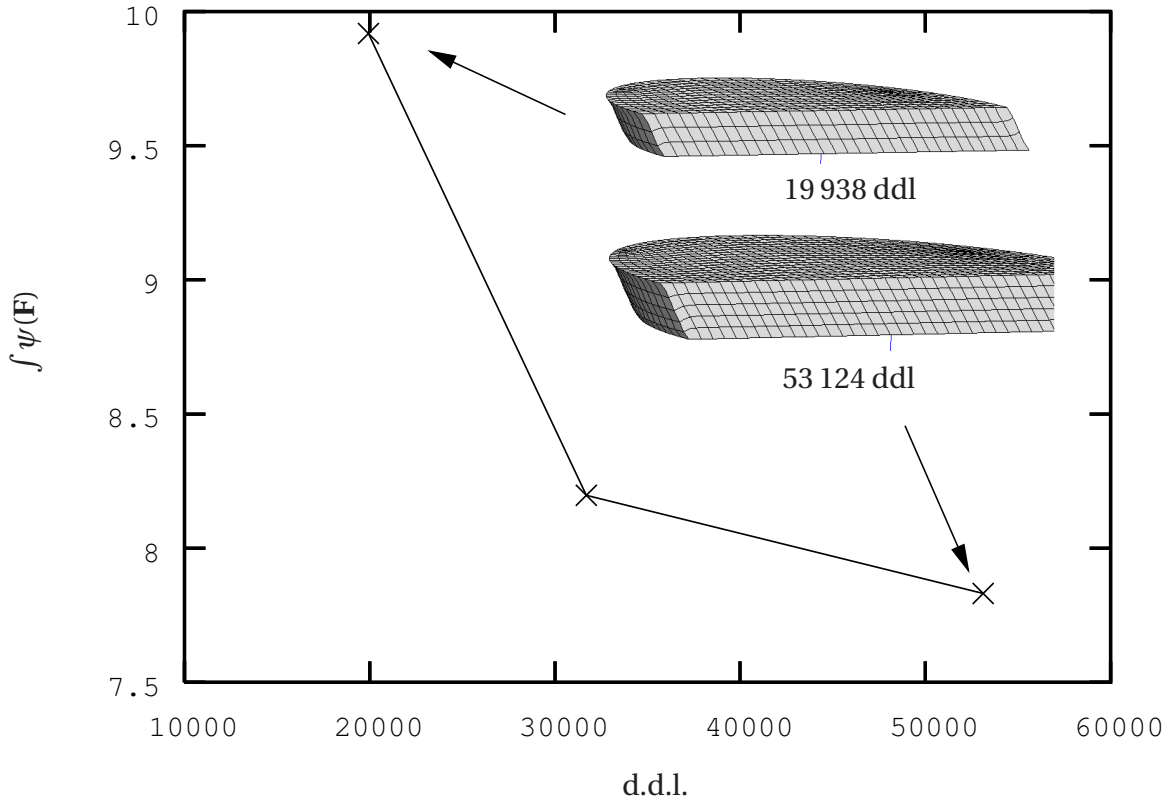


Figure 3.19 – *Évolution de l'énergie de déformation en fonction du nombre de d.d.l. (cisaillement)*

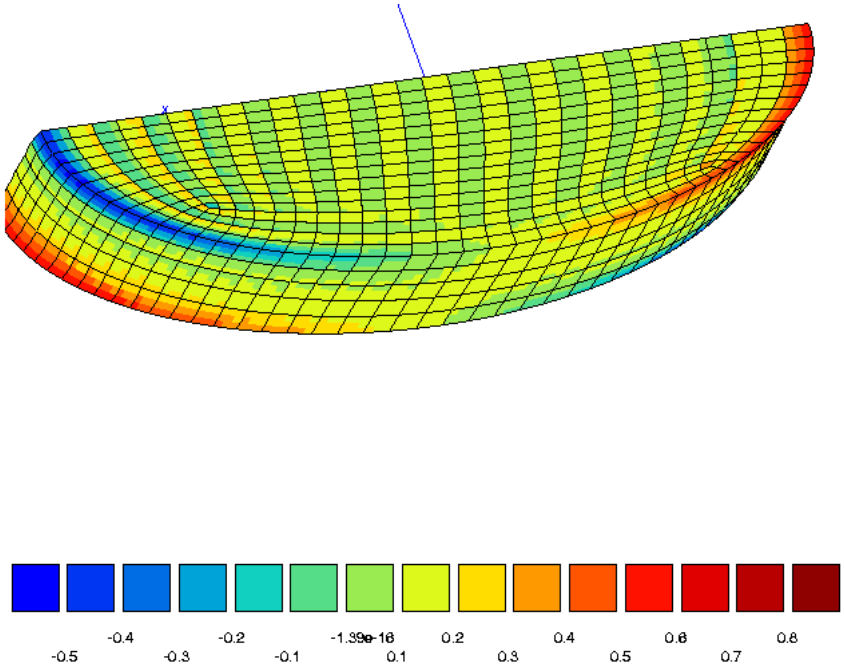


Figure 3.20 – *Champ de pression pour le modèle à* $42501 ddl$

• **Pour les éléments 3D-2D**, un essai traction est réalisé sur un bareau mesurant 2 mm de côté pour 5 mm de long. Une extrémité est encastrée, l'autre est soumise à un déplacement perpendiculaire à la section de 1 mm. Seul le quart de la géométrie est modélisée.

Au vu des résultats présentés sur la figure 3.21, le modèle avec 39 231 degrés de liberté est choisi pour servir de modèle de référence. L'oscillation numérique de la pression, observée sur le cas du cisaillement, n'est pas retrouvée pas sur ce cas test (voir la figure 3.22).

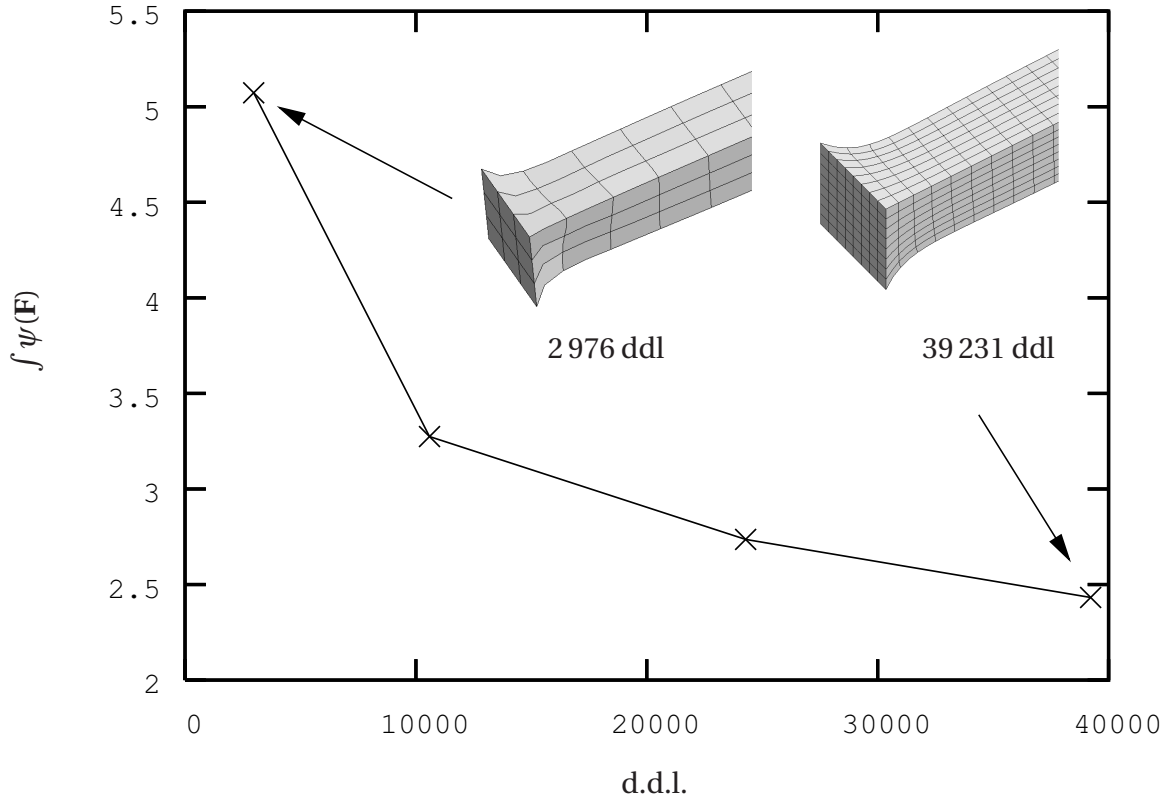


Figure 3.21 – *Évolution de l'énergie de déformation en fonction du nombre de d.d.l. (traction)*

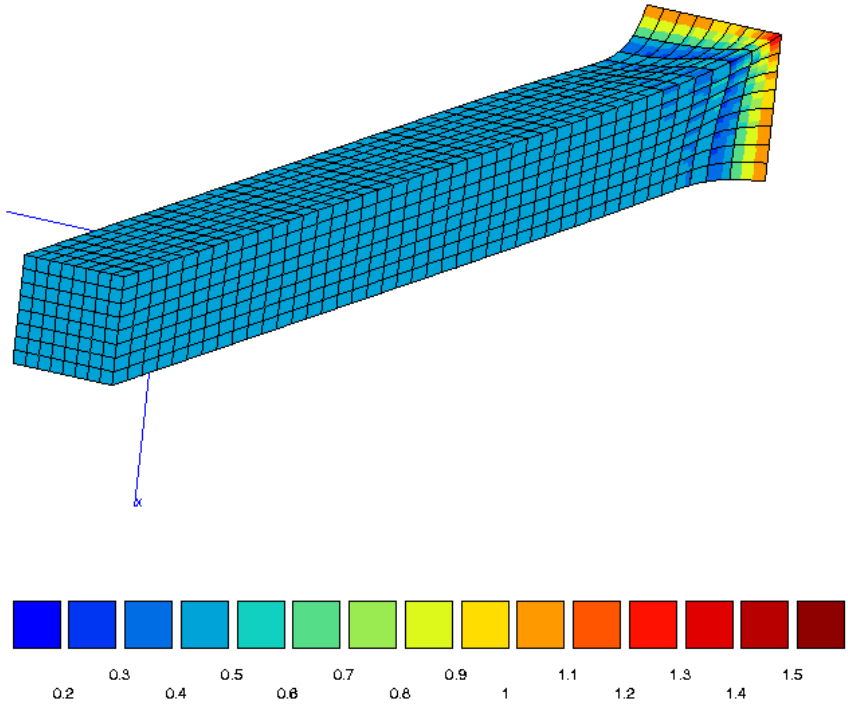


Figure 3.22 – *Champ de pression pour le modèle à* $39231 ddl$

3.5.2 Évaluation de l'écart relatif des modèles réduits par rapport aux modèles de référence

A partir des modèles de référence préalablement définis, on peut caractériser l'influence de l'ordre de troncature des approximations en séries, sur la qualité de la solution obtenue par les modèles réduits. On utilise, pour ce faire, les mesures d'écarts relatifs suivantes :

$$er_u = 100\frac{\|\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h\|}{\|\mathbf{u}_h\|} = 100\frac{\sum_{noeuds}\left[(\mathbf{u}_h^i - \widetilde{\mathbf{u}}_h^i)^T(\mathbf{u}_h^i - \widetilde{\mathbf{u}}_h^i)\right]^{1/2}}{\sum_{noeuds}\left[(\mathbf{u}_h^i)^T(\mathbf{u}_h^i)\right]^{1/2}} \tag{3.51}$$

$$er_p = 100\frac{\|p_h - \widetilde{p}_h\|}{\|p_h\|} = 100\frac{\sum_e\left[\int_\Omega (p_h^e - \widetilde{p}_h^e)^2 d\Omega_e\right]^{1/2}}{\sum_e\left[\int_\Omega (p_h^e)^2 d\Omega_e\right]^{1/2}} \tag{3.52}$$

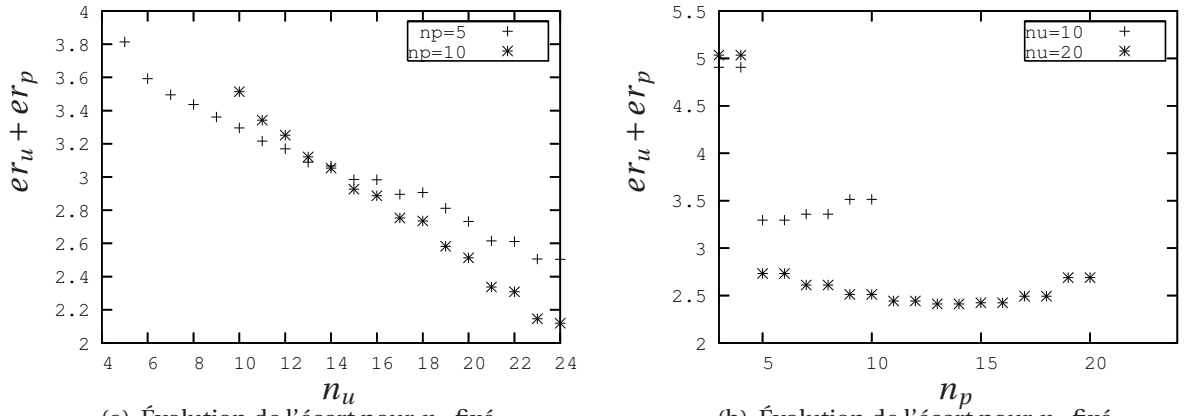
où $\mathbf{u}_h$ et p_h proviennent de la réponse du modèle de référence, et $\widetilde{\mathbf{u}}_h$ et $\widetilde{p}_h$ sont issus du modèle réduit.

Les champs $\widetilde{\mathbf{u}}_h$ et $\widetilde{p}_h$ sont calculés, par une simple opération de post-traitements, à partir de la réponse du modèle réduit aux points de Gauss ou aux noeuds du modèle de référence. Les modèles réduits utilisés pour calculer les erreurs (3.52) et (3.51) constituent la projection géométrique exacte du maillage du modèle de référence, dans l'espace condensé. Ainsi le modèle réduit 2D-1D contient 10 éléments, les modèles 3D-1D cartésien et cylindrique contiennent 4 éléments, le modèle 3D-2D en comprend 49.

Remarque 3.3
Les mesures d'écarts utilisées dans ce paragraphe relèvent d'une démarche ingénieur, elles permettent de qualifier la qualité d'une solution par rapport à un modèle de référence. Cependant, afin de quantifier l'erreur d'un modèle réduit, il faudrait développer un estimateur d'erreur appropriée à la méthode de réduction de modèle (pour des comportements non-linéaires différents estimateurs ont été proposées, voir par exemple LADEVÈZE & MOËS *[1997];* BRINK & STEIN *[1997]).* ❑

■ *Cas du modèle 2D1D*
La figure 3.23(a) montre l'évolution de la somme des écarts relatifs er_u et er_p en fonction de n_u pour différentes valeurs de n_p, on peut remarquer que l'on a une convergence monotone en n_u du modèle réduit vers le modèle de référence (au sens des écarts définies plus haut). Sur la figure 3.23(b) on observe la présence d'un minimum relatif de l'erreur lorsque l'on fixe n_u et que l'on fait varier n_p. On peut donc supposer que pour un ordre de troncature donné de la cinématique, on a existence d'un ordre de troncature optimum pour la pression.

Les évolutions globales de er_u et er_p sont présentées en annexe sur les figures C.1(a) et C.1(b). On peut remarquer que la solution du modèle réduit est très proche (au sens des écarts définis) de celle du modèle de référence ; inférieure à 4% pour er_u et 1% pour er_p.

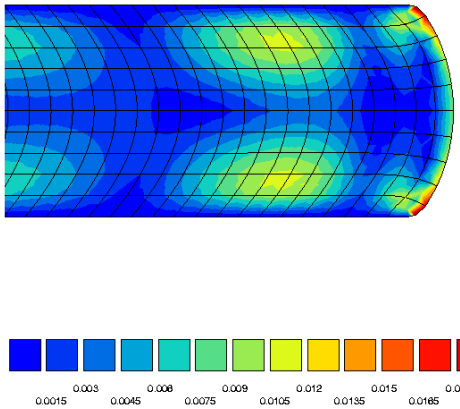


(a) Évolution de l'écart pour n_p fixé (b) Évolution de l'écart pour n_u fixé

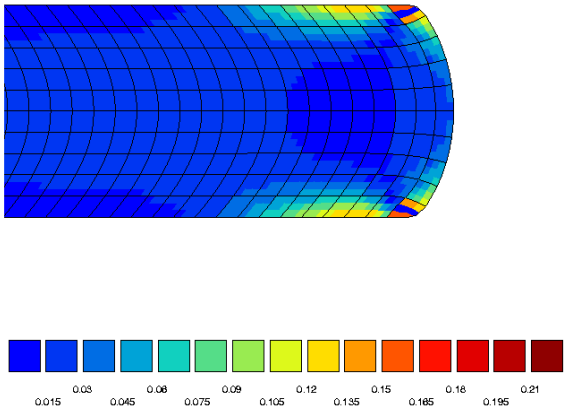
Figure 3.23 – *Test de compression, modèle 2D-1D*

Remarque 3.4
Sur la figure 3.23(b), on observe une évolution par palier, de deux ordres, de l'écart. On peut supposer que cet effet est dû à la parité ou non de la solution par rapport à l'axe $\xi = 0$. Ainsi, pour le cas de la compression sur la lamelle, le champ de pression doit être symétrique par rapport à l'axe $\xi = 0$. Si le degré maximum de la base est pair, enrichir cette dernière d'un ordre n'apportera rien de plus puisque les termes impairs doivent être nuls.

❑



(a) Visualisation de er_u^{loc} aux noeuds du maillage de référence



(b) Visualisation de er_p^{loc} aux points de Gauss du maillage de référence

Figure 3.24 – *Écart local pour le modèle réduit 2D1D ($n_u = 20,\ n_p = 14$)*

Pour identifier la zone où l'écart est le plus important, on utilise les deux mesures d'écarts locaux suivantes :

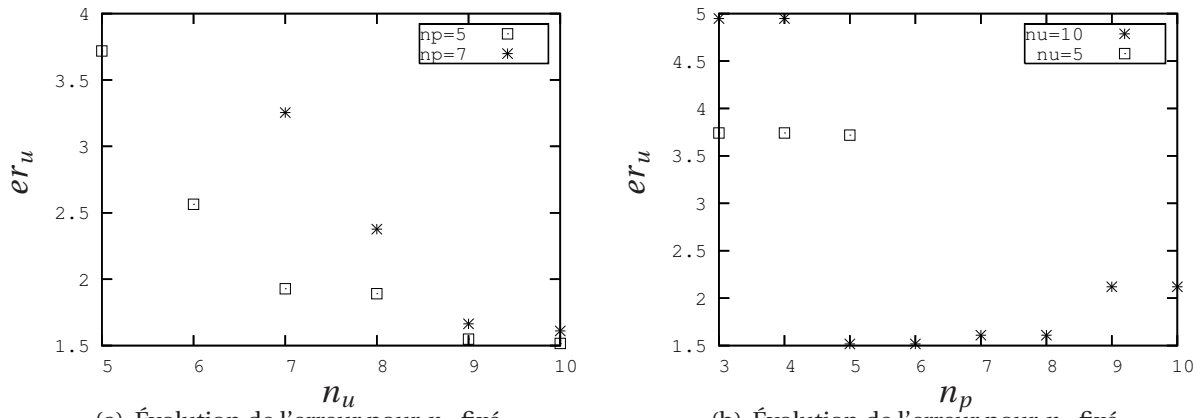
$$er_u^{loc} = \frac{\|\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h\|}{\|\mathbf{u}_h\|} = \frac{\left[(\mathbf{u}_h^i - \widetilde{\mathbf{u}}_h^i)^T(\mathbf{u}_h^i - \widetilde{\mathbf{u}}_h^i)\right]^{1/2}}{\left[(\mathbf{u}_h^i)^T(\mathbf{u}_h^i)\right]^{1/2}} \quad \text{au noeud } i \tag{3.53}$$

$$er_p^{loc} = \frac{\|p_h - \widetilde{p}_h\|}{\|p_h\|} = \frac{\left[(p_h^i - \widetilde{p}_h^i)^2\right]^{1/2}}{\left[(p_h^i)^2\right]^{1/2}} \quad \text{au point de Gauss } i \tag{3.54}$$

on peut caractériser les lieux géométriques où l'approximation en série a le plus de mal à traduire la réponse d'un modèle de référence. Ainsi, comme attendu, le modèle réduit 2D1D présente le plus d'écart vis à vis du modèle de référence près des bords libres, comme le montrent les figures 3.24(a) et 3.24(b). L'écart relatif maximum en terme de cinématique est localement de l'ordre de 2%, alors que pour la pression on arrive localement à 21% (pour $n_u = 20$, $n_p = 14$).

■ *Cas du modèle 3D1D*
Pour ce cas test, en raisons des oscillations numériques observées sur la pression avec les éléments H20P4, on ne présente pas de résultats mesurant l'écart er_p.

On retrouve les mêmes tendances que dans le cas précédent à savoir une décroissance de l'ecart lorsque l'on enrichit l'ordre d'approximation de la cinématique pour un ordre fixé en pression (figure 3.25(a)) et l'existence d'un minimum relatif en pression pour un ordre fixé de la cinématique (figure 3.25(b)).



(a) Évolution de l'erreur pour n_p fixé (b) Évolution de l'erreur pour n_u fixé

Figure 3.25 – *Test de compression, modèle 3D-1D*

Les évolutions globales de er_u et er_p sont présentées en annexe sur les figures C.2(a) et C.2(b), on peut remarquer que l'erreur globale reste faible : moins de 5% pour er_u, moins de 2% pour er_p.

La figure 3.5.2 montre que, comme dans le cas du modèle 2D1D, l'erreur est localisée dans les zones où les effets de bords sont les plus importants (près des bords libres). Les valeurs d'écart relatif local maximum sont très proches du cas précédent, on obtient 2.8% pour la cinématique .

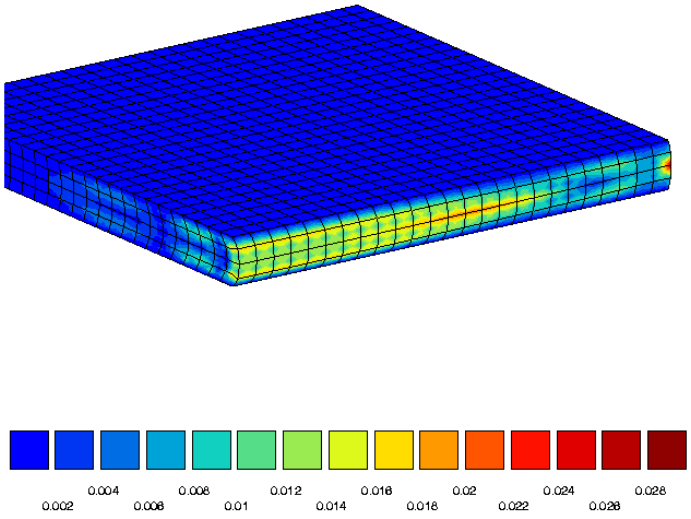
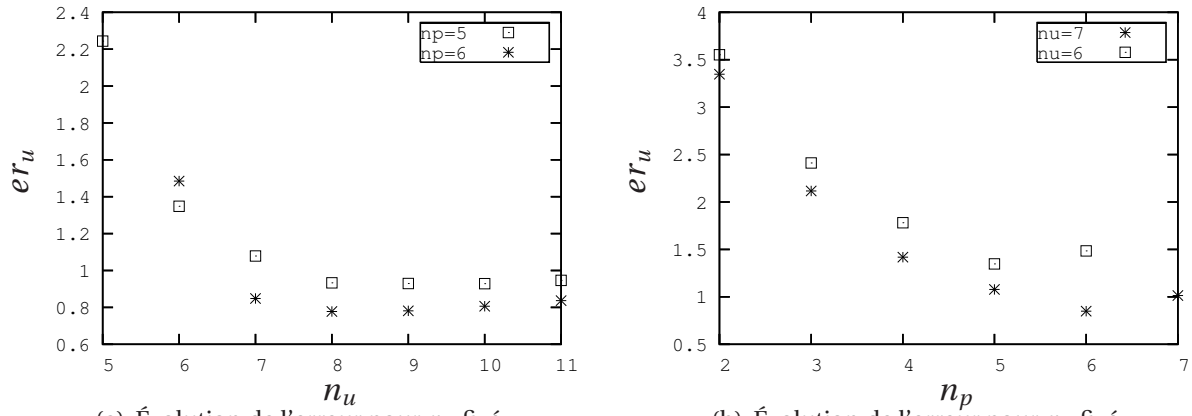


Figure 3.26 – *Écart local er_u^{loc}, pour le modèle réduit 3D1D ($n_u = 10,\ n_p = 5$)*

■ *Cas du modèle 3D1D de révolution*
Sur ce modèle, on peut faire les mêmes remarques que sur les cas précédents. La figure

3.27(a) montre que l'écart diminue lorsque l'on augmente l'ordre de la cinématique pour un ordre fixé de la pression. Sur la figure 3.27(b), on retrouve l'existence d'un optimum en pression.



(a) Évolution de l'erreur pour n_p fixé (b) Évolution de l'erreur pour n_u fixé

Figure 3.27 – *Test de compression, modèle 3D-1D*

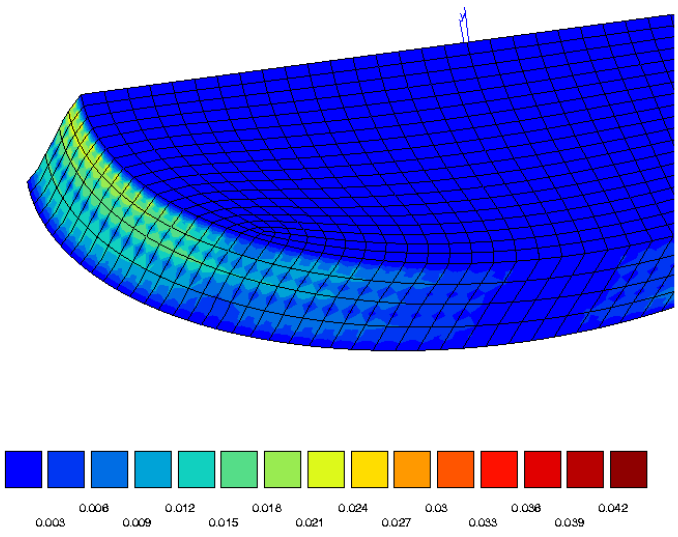


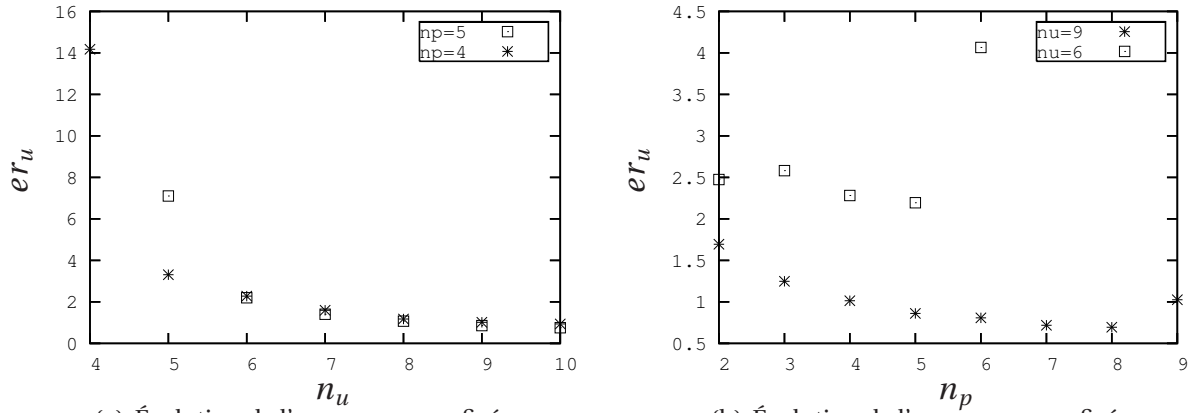
Figure 3.28 – *Écart local er_u^{loc}, pour le modèle réduit 3D1D ($n_u = 9,\ n_p = 3,\ n_{\theta u} = 3,\ n_{\theta p} = 3$)*

La figure 3.28 montre que l'écart local en terme de cinématique demeure prépondérant dans les zones où les effets de bords sont les plus importants (près des bords libres), même si l'écart maximum local er_u^{loc} reste faible : de l'ordre de 4.2%. Pour cet exemple, l'écart relatif global est inférieur à 1.5% pour la cinématique (cf. figures C.3(a) et C.3(b)).

■ *Cas du modèle 3D2D*

Comme pour tous les modèles réduits on retrouve, sur les figures 3.29(a) et 3.29(b), les mêmes tendances que pour les autres modèles réduits, à savoir une diminution de l'erreur lorsque l'on augmente l'ordre de la cinématique pour un ordre fixé de la pression et l'existence d'ordre optimum en pression pour un ordre fixé de la cinématique.

Les figures C.4(a) et C.4(b), présentées en annexe, montent que les erreurs globales er_u et er_p atteintes sont dans la moyenne des autres modèles (de l'ordre de 2% pour er_u et de 10% pour er_p).



(a) Évolution de l'erreur pour n_p fixé (b) Évolution de l'erreur pour n_u fixé

Figure 3.29 – *Test de traction, modèle 3D-2D*

On peut observer sur la figure 3.30, le bon accord du champ cinématique provenant du modèle réduit par rapport à celui obtenu avec le modèle de référence puisque l'on obtient un écart relatif local maximum de 4%.

Les résultats présentés dans ce paragraphe permettent de dégager un comportement commun des 4 types de modèles réduits proposés. L'influence des ordres de troncature est illustré en utilisant deux mesures d'écart qui ne permettent pas de pleinement caractériser la qualité de la réponse de ces modèles réduits. Afin de regarder ce point plus en détail, on propose dans le paragraphe qui suit, une comparaison du comportement global et local, des modèles réduits par rapports aux modèles de référence préalablement définis.

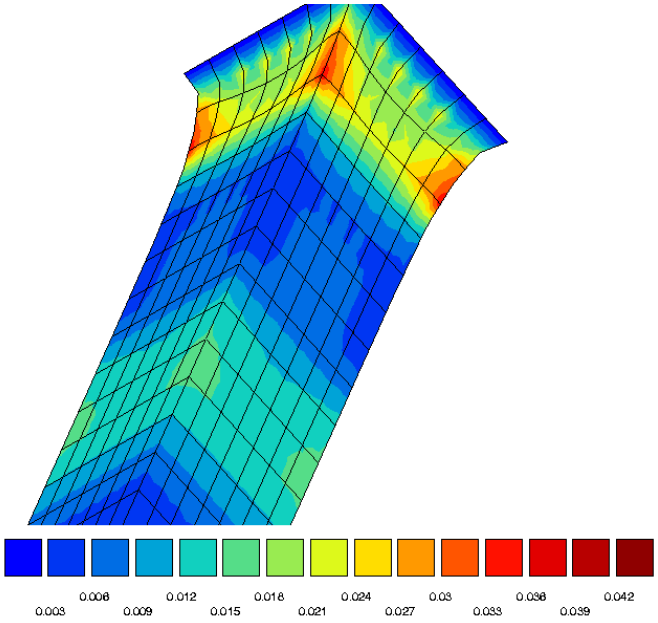


Figure 3.30 – *Écart local er_u^{loc}, pour le modèle réduit 3D2D ($n_u = 10,\ n_p = 9$)*

3.5.3 Comparaison du comportement global et local

Pour comparer le comportement global, on réalise des tests en déplacements imposés sur les modèles réduits et complets. La comparaison s'effectue sur toutes les composantes du torseur des efforts résultants ce qui permet de caractériser la prise en compte des couplages par le modèle réduit.

Pour le comportement local, on propose des comparaisons d'iso-couleurs ou des évolutions du champ de contrainte suivant une direction de la structure. On peut ainsi comparer qualitativement la réponse locale d'un modèle réduit par rapport à un modèle de référence.

■ *Cas du modèle réduit 2D1D*
La lamelle d'élastomère, définie préalablement pour le choix du modèle de référence, est soumise à des tests de compression, cisaillement et flexion. La figure 3.31 présente les résultats d'un test de compression où l'on impose un déplacement vertical sur la partie supérieure tout en bloquant le déplacement transverse et la rotation (la partie inférieure est encastrée). Les figures 3.32, 3.33 et 3.34 correspondent aux résultats d'un test de cisaillement et d'un test de flexion où l'on impose un déplacement transverse, où un angle de rotation autour du centre de la partie supérieure de la lamelle, tout en bloquant les autres degrés de liberté.

On peut constater que le modèle réduit permet de retranscrire les couplages existants entre chaque mode de sollicitation. Ce point est un avantage par rapport aux modèles analytiques de lamifiés que l'on trouve dans la littérature (cf. 3.1). En effet, de part leurs hypothèses simplificatrices sur la cinématique, ces modèles négligent certains termes de couplage.

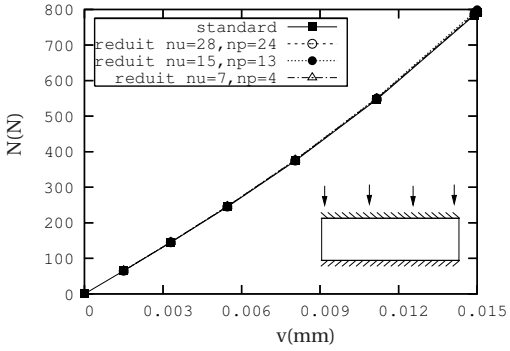
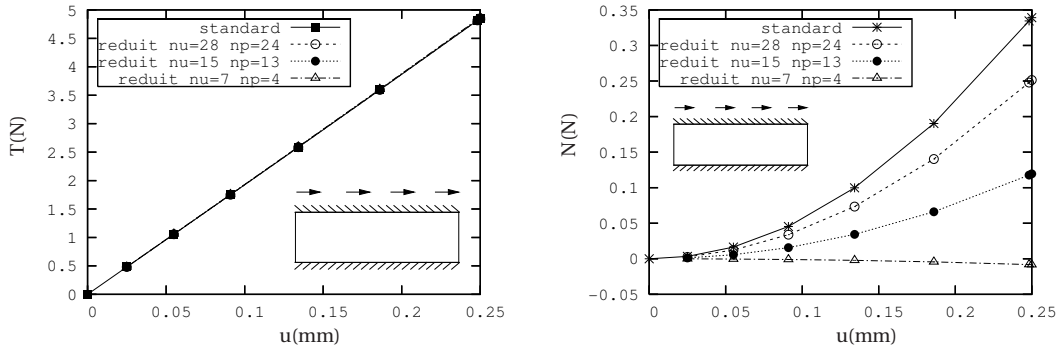
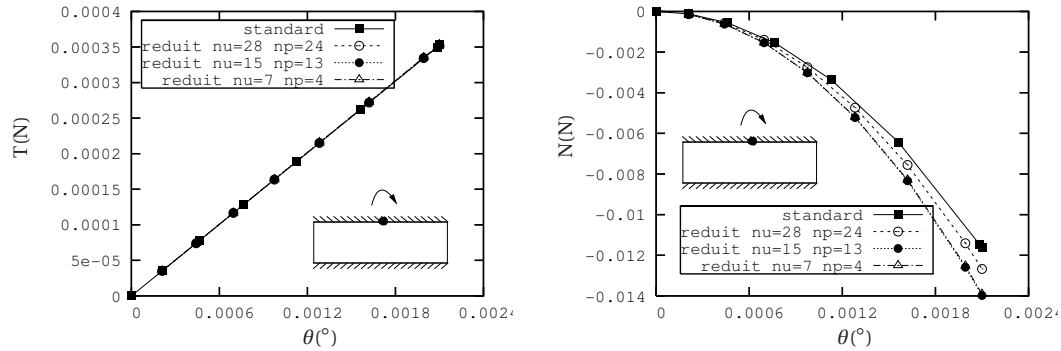


Figure 3.31 – *Test de compression (lamelle d'élastomère)*



(a) résultante tangente (b) résultante normale

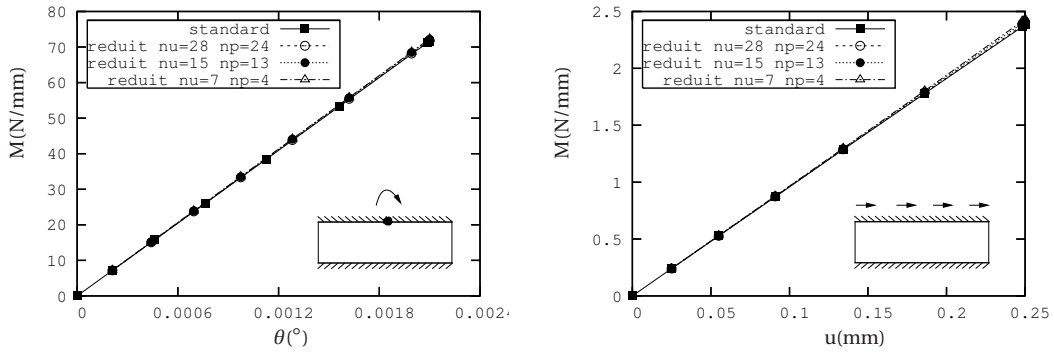
Figure 3.32 – *Test de cisaillement, lamelle d'élastomère (2D)*



(a) résultante tangente (b) résultante normale

Figure 3.33 – *Test de flexion, lamelle d'élastomère (2D)*

Le facteur d'élancement de la lamelle nécessite cependant un ordre relativement important de la base de projection si l'on cherche à obtenir tous les couplages, en particulier le cas du cisaillement ou de la flexion avec l'effort normal (dans l'exemple choisi il faut avoir $n_u = 28$, $n_p = 24$ pour obtenir tous les couplages).

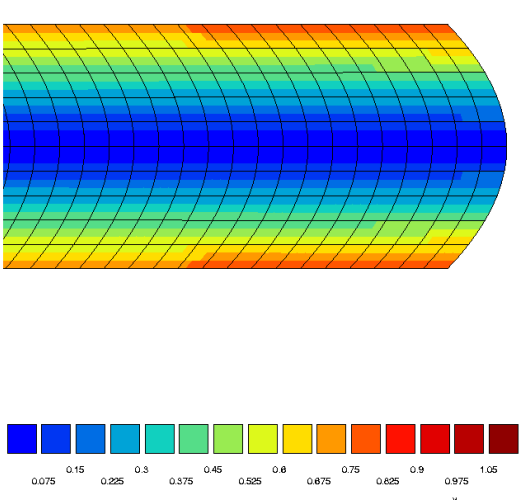


(a) Test de flexion (b) Test de cisaillement

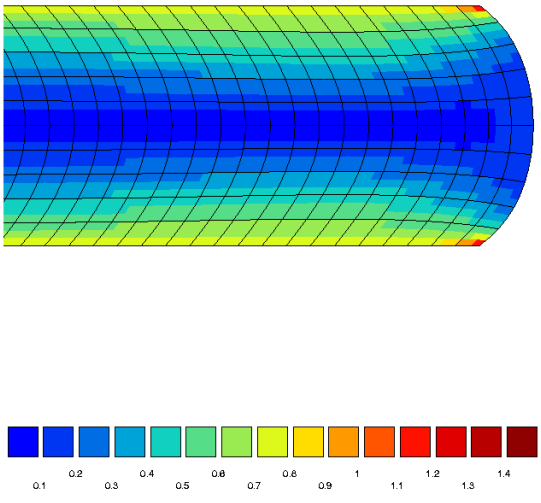
Figure 3.34 – *Moment résultant, lamelle d'élastomère (2D)*

Pour le test de compression de la lamelle en déformation plane, on peut observer sur la figure 3.35 la réponse locale du modèle réduit, au fur et à mesure que l'on augmente l'ordre de troncature. Ainsi, la contrainte de VON-MISES obtenue par le modèle réduit avec $n_u = 28$, $n_p = 22$ est très proche de celle du modèle de référence aussi en bien en terme de valeurs maximales qu'au niveau de la distribution du champ.

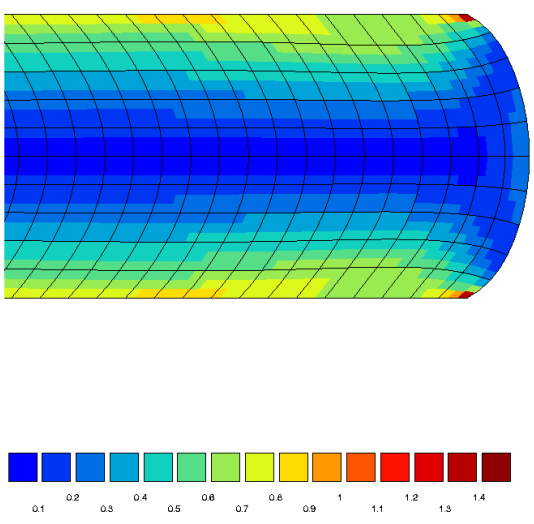
On peut également tracer l'évolution des différentes composantes du tenseur des contraintes de CAUCHY en fonction de la position transversale dans la lamelle. Les figures D.4, présentées en annexe, montrent bien l'effet « régularisant » de l'approximation en série de polynômes. Cette approximation, permet donc de réduire les oscillations numériques dues aux effets de maillage. Un ordre faible de l'approximation retranscrit une bonne estimation de l'allure du champ de contraintes (pour le cas considéré), alors qu'un ordre élevé, reflète assez finement les effets de bords (cf. figure D.4(g)).



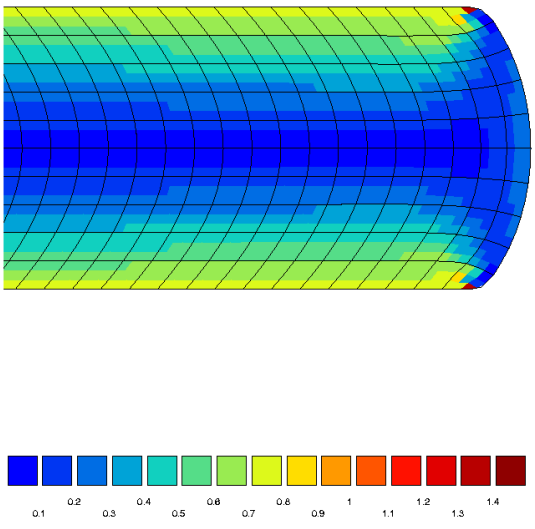
(a) Modèle réduit $n_u = 5, n_p = 4$



(b) Modèle réduit $n_u = 20, n_p = 14$



(c) Modèle réduit $n_u = 28, n_p = 22$



(d) Modèle de référence

Figure 3.35 – *Contrainte de* VON-MISES*, compression d'une lamelle en déformation plane*

Le tableau 3.1 donne une comparaison du temps de calcul du modèle réduit par rapport au modèle de référence. Le gain en taille de modèle et en temps CPU est bien entendu fortement conditionné par l'ordre d'approximation des bases polynomiales. Néanmoins, même à un ordre élevé, le modèle réduit reste largement plus performant en terme de taille (de l'ordre de 25 fois) qu'en terme de temps de calcul (4 fois plus rapide).

modèle	n_u	n_p	nb. d.d.l.	temps CPU (s)	gain en taille	gain en temps
standard (1/2 lamelle)			30 050	131.9		
réduit 2D1D	5	3	210	0.65	143	203
réduit 2D1D	7	4	294	1.27	102	104
réduit 2D1D	15	13	630	8.75	47	15
réduit 2D1D	20	14	840	14	35	9.4
réduit 2D1D	28	22	1176	32.8	25	4

Tableau 3.1 – *Temps de calcul et taille de modèle pour un test de compression sur la lamelle plane*

■ *Cas du modèle réduit 3D1D*
On considère le cas de la lamelle d'élastomère hexaédrique définie précédemment (20 mm de côté pour 1 mm d'épaisseur), elle est soumise à des tests de compression, cisaillement et flexion. La figure 3.36 présente les résultats du test de compression.

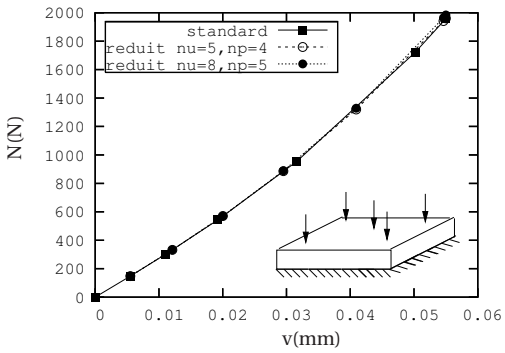
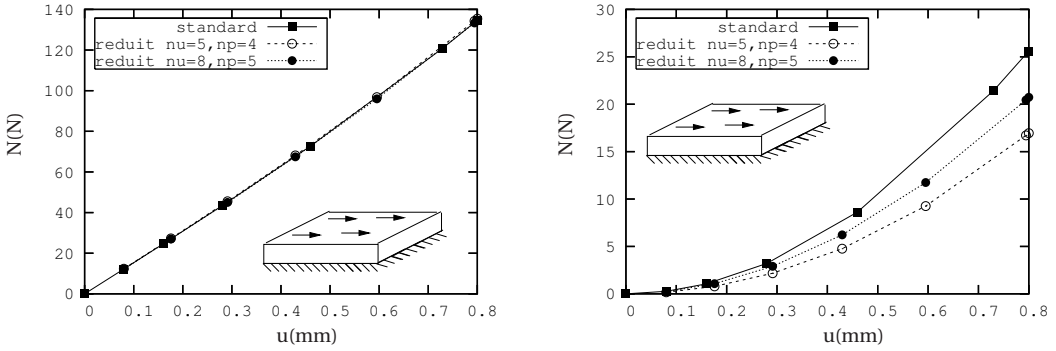


Figure 3.36 – *Test de compression, lamelle d'élastomère (3D)*

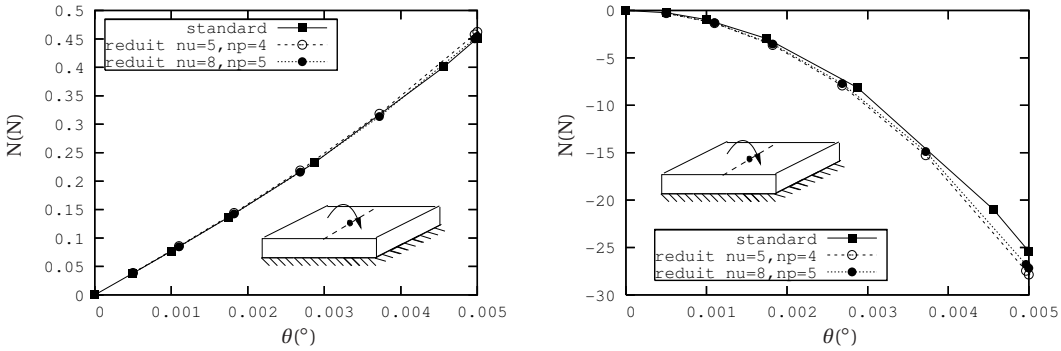
Les figures 3.37, 3.38 et 3.39 correspondent aux résultats d'un test de cisaillement et d'un test de flexion où l'on impose un déplacement transverse ou un angle de flexion sur la partie supérieure, tout en bloquant les autres degrés de liberté.

Sur l'ensemble des résultats, on obtient un très bon accord en terme de comportement global (avec prise en compte de tous les couplages), et ce avec un ordre relativement faible de la base de projection (pour $n_u = 8$ et $n_p = 5$ on a des résultats largement satisfaisants).



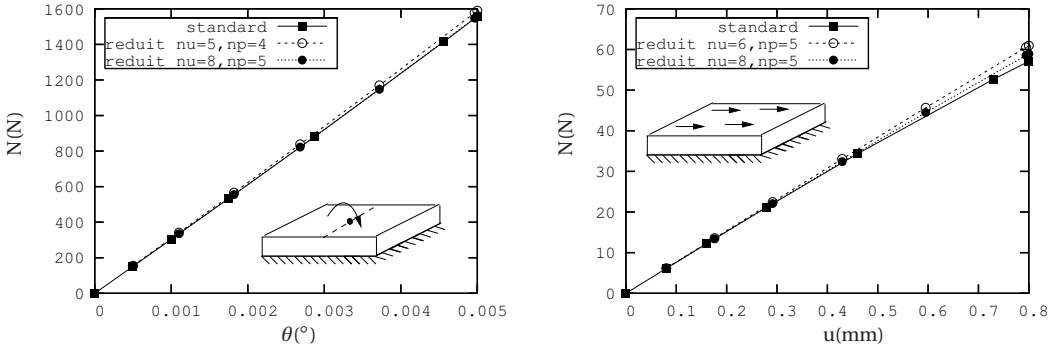
(a) résultante tangente (b) résultante normale

Figure 3.37 – *Test de cisaillement, lamelle d'élastomère (3D)*



(a) résultante tangente (b) résultante normale

Figure 3.38 – *Test de flexion, lamelle d'élastomère (3D)*



(a) Test de flexion (b) Test de cisaillement

Figure 3.39 – *Moment résultant, lamelle d'élastomère (3D)*

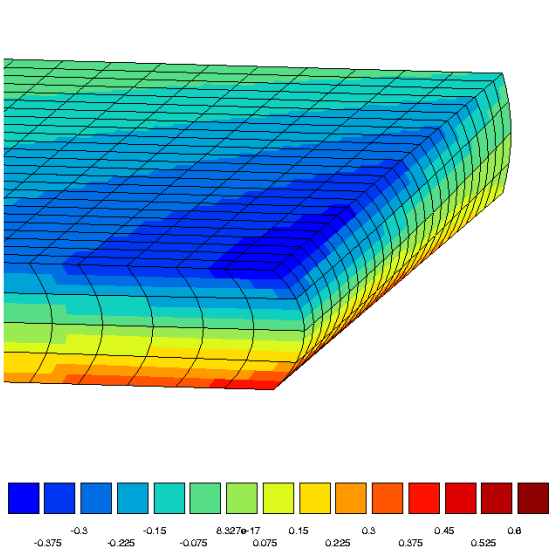
Une comparaison qualitative du comportement local est proposée sur les figures 3.40 à travers la composante de cisaillement, dans le plan de la section, du champ contrainte de CAUCHY. L'approximation en double série de polynômes de l'élément-fini réduit 3D1D retranscrit donc les couplages en terme de comportement global et local pour peu que l'ordre de la base soit suffisant.

Les figures D.2 présentées en annexe montrent plus en détails la comparaison des composantes du tenseur des contraintes de CAUCHY en fonction de l'ordre. Sur la figure D.2(g) on peut observer une oscillation de la contrainte du modèle de référence qui reflète l'instabilité numérique constatée précédemment sur les éléments H20P4. Le modèle réduit ne présente pas ce type d'inconvénients.

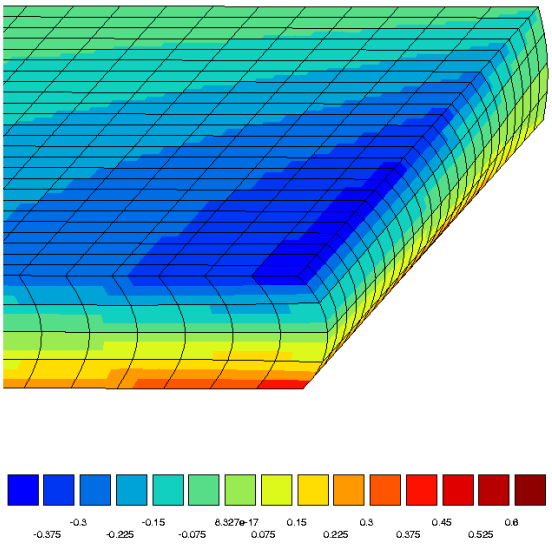
Le tableau 3.2 permet d'illustrer le gain réalisé avec le modèle réduit sur le cas du cisaillement. On retrouve les mêmes ordres de grandeurs qu'avec le modèle précédent.

modèle	n_u	n_p	nb. d.d.l.	temps CPU (s)	gain en taille	gain en temps
standard (1/2 lamelle)			74 427	2701		
réduit 3D1D	5	4	525	33.9	142	79
réduit 3D1D	8	5	1344	579	55	5
réduit 3D1D	10	5	2700	831.3	27	3

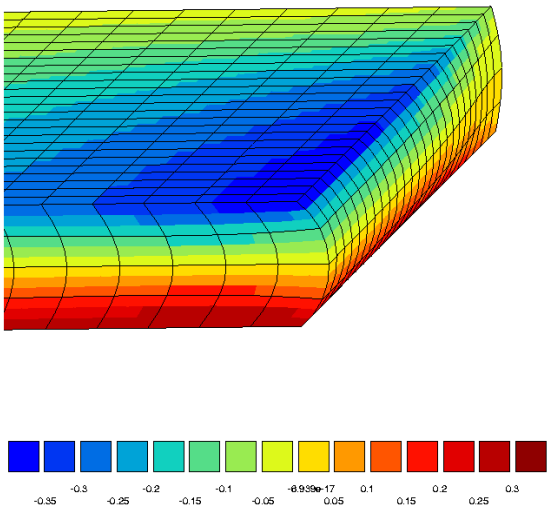
Tableau 3.2 – *Temps de calcul et taille de modèle pour un test de cisaillement sur la lamelle tridimensionnel*



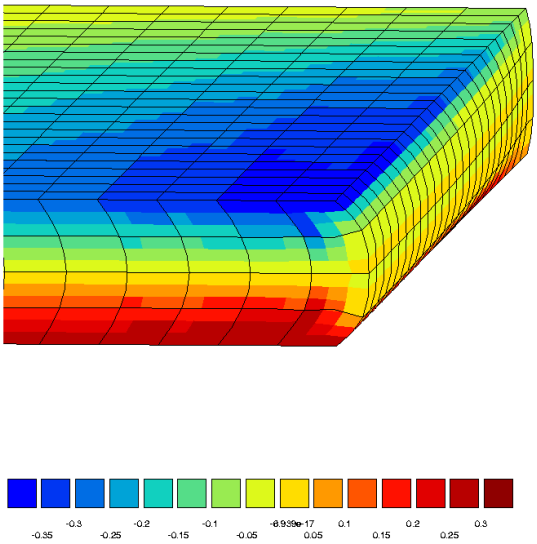
(a) Modèle réduit $n_u = 5, n_p = 4$



(b) Modèle réduit $n_u = 8, n_p = 5$



(c) Modèle réduit $n_u = 10, n_p = 5$



(d) Modèle de référence

Figure 3.40 – σ_{xz}, *compression d'une lamelle tridimensionnelle*

■ *Cas du modèle réduit 3D1D de révolution*

On considère la lamelle d'élastomère cylindrique (5 mm de rayon pour 1 mm d'épaisseur), soumise à des tests de compression, cisaillement et flexion. Pour tous ces tests on utilise 3 harmoniques de FOURIER pour la cinématique et la pression. La figure 3.41 présente les résultats du test de compression. Les figures 3.42, 3.43 et 3.44 correspondent aux résultats des tests de cisaillement et de flexion.

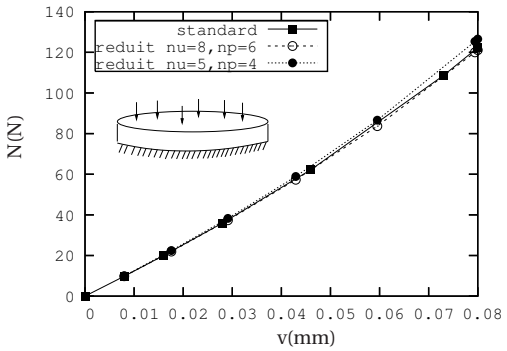
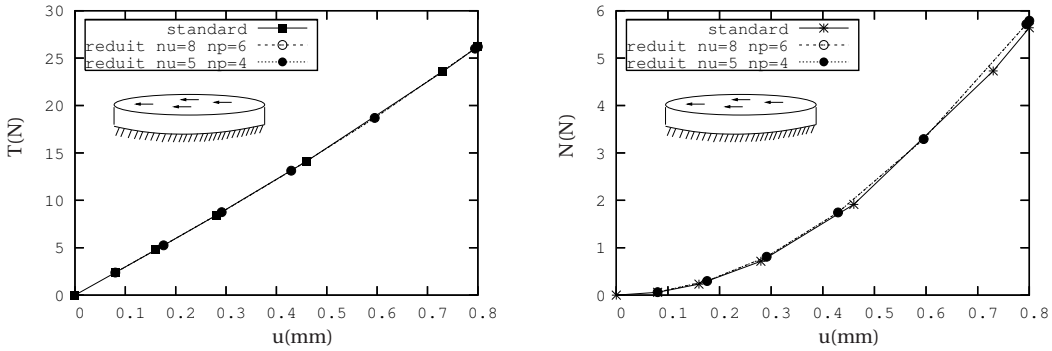


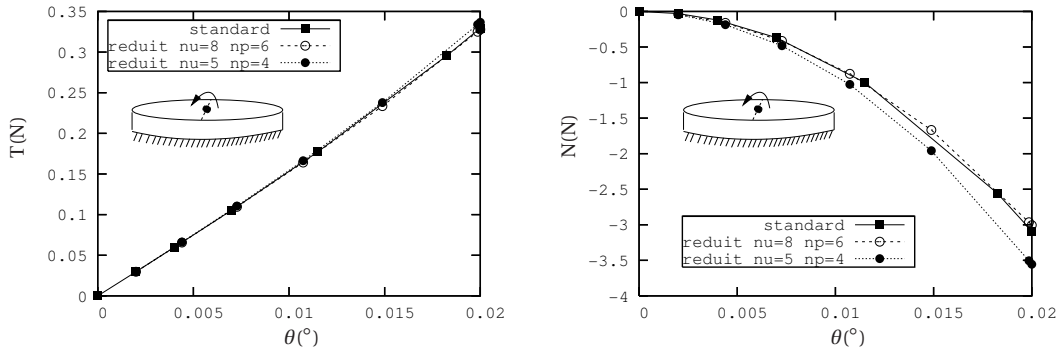
Figure 3.41 – *Test de compression (lamelle d'élastomère)*



(a) résultante tangente (b) résultante normale

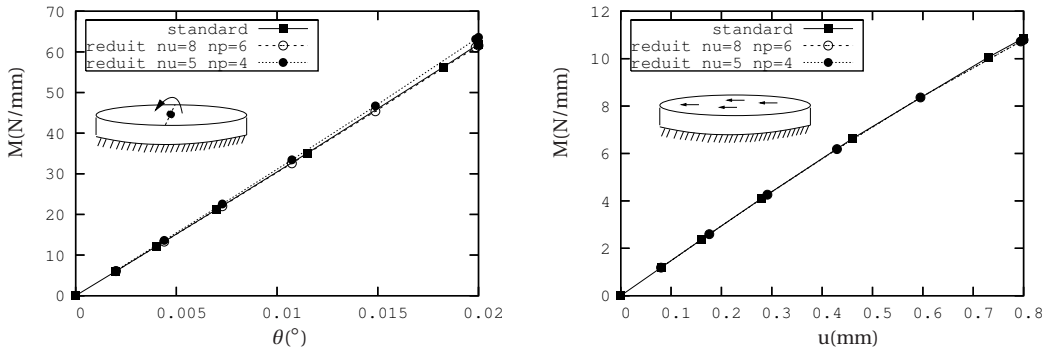
Figure 3.42 – *Test de cisaillement, lamelle d'élastomère (3D)*

On obtient donc un très bon accord en terme de comportement global (avec prise en compte de tous les couplages), et ce avec un ordre relativement faible de la base de projection (pour $n_u = 5$ et $n_p = 4$ on obtient tous les couplages).



(a) résultante tangente (b) résultante normale

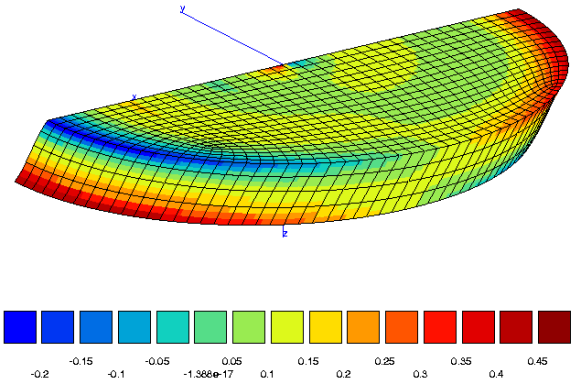
Figure 3.43 – *Test de flexion, lamelle d'élastomère (3D)*



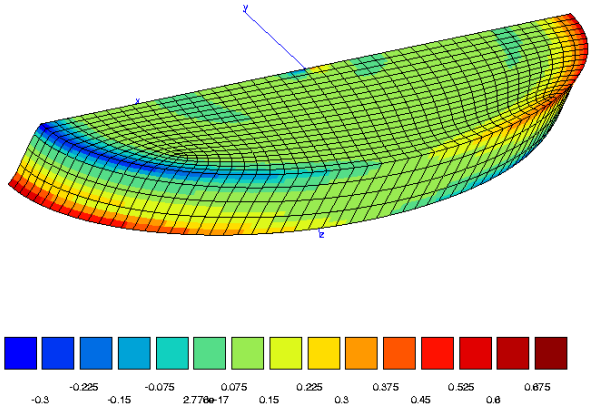
(a) Test de flexion (b) Test de cisaillement

Figure 3.44 – *Moment résultant, lamelle d'élastomère (3D)*

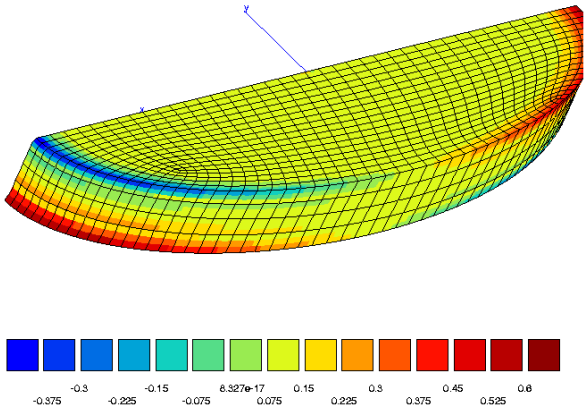
En terme de comportement local, les figures 3.45 présentent une comparaison qualitative de la pression hydrostatique pour le test de cisaillement. On peut remarquer que le phénomène d'oscillation de la pression obtenu avec les éléments H20P4, ne se retrouve pas sur le modèle réduit. Les figures D.3 présentées en annexe montrent plus en détails la comparaison des composantes du tenseur des contraintes de CAUCHY pour le test de compression.



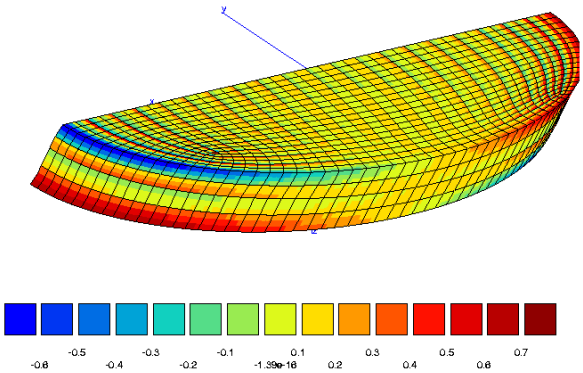
(a) Modèle réduit $n_u = 6, n_p = 4$, trois harmoniques de FOURIER



(b) Modèle réduit $n_u = 8, n_p = 5$, trois harmoniques de FOURIER



(c) Modèle réduit $n_u = 12, n_p = 8$, trois harmoniques de FOURIER



(d) Modèle de référence

Figure 3.45 – *Pression hydrostatique, cisaillement d'une lamelle tridimensionnelle*

Le tableau 3.3 résume les caractéristiques des différents modèles en terme de temps de calcul et de taille de modèle. Ce type de modèle réduit présente un gain particulièrement important pour le cas traité. Le comportement local et global est obtenu avec une bonne précision pour un modèle 50 fois plus performant, que le modèle de référence, en terme de taille et 28 fois plus rapide en terme de temps de calcul.

modèle	n_u	n_p	nb. d.d.l.	temps CPU (s)	gain en taille	gain en temps
standard (1/2 lamelle)			53 124	1429.8		
réduit 3D1D	6	4	528	4.5	101	318
réduit 3D1D	8	6	704	10.9	75	131
réduit 3D1D	12	8	1056	49.79	50	28

Tableau 3.3 – *Temps de calcul et taille de modèle pour un test de cisaillement sur la lamelle tridimensionnel cylindrique avec 3 harmoniques de* FOURIER

■ *Cas du modèle réduit 3D2D*
On considère le barreau d'élastomère défini précédemment (1 mm section carrée pour 5 mm de longueur), soumis à des tests de traction, cisaillement et flexion. La figure 3.46 présente les résultats du test de compression.

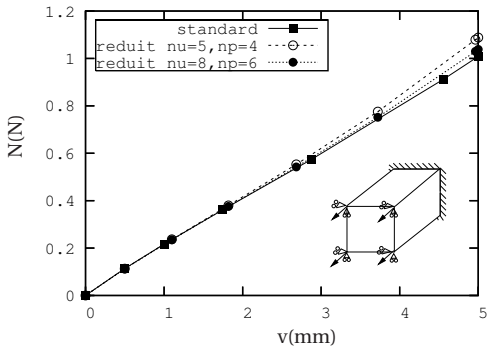
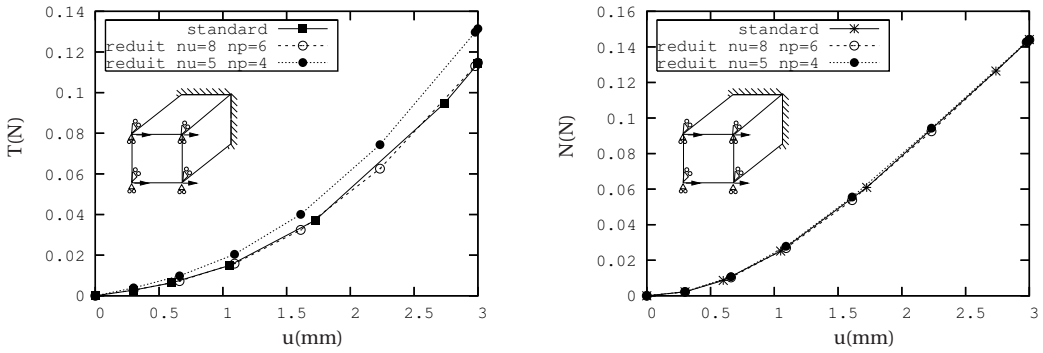


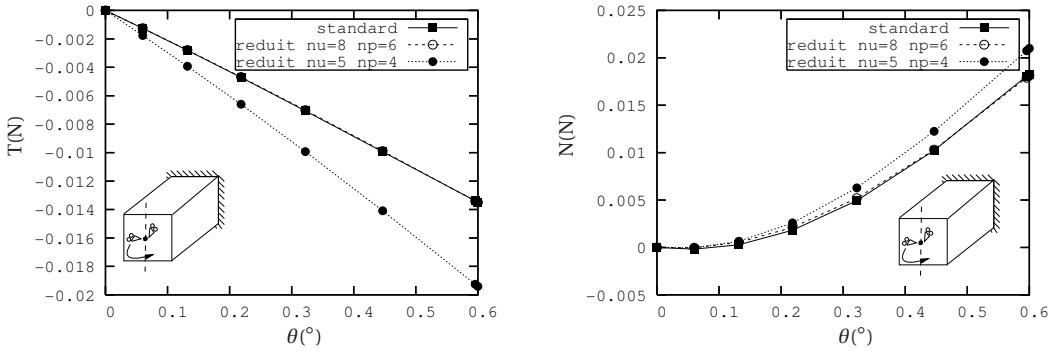
Figure 3.46 – *Test de traction (poutre d'élastomère)*

Les figures 3.47, 3.48 et 3.49 correspondent aux résultats des tests de cisaillement et de flexion où l'on impose un déplacement transverse ou un angle de rotation sur la partie supérieure, tout en bloquant les autres degrés de liberté. Les couplages sont très bien retranscrits par le modèle réduit, et ce avec un ordre relativement faible de la base de projection (pour $n_u = 8$ et $n_p = 6$ on obtient tous les couplages).



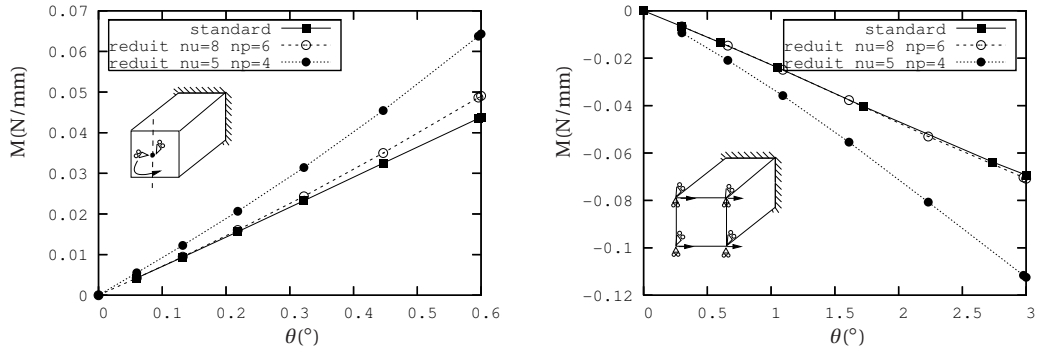
(a) résultante tangente (b) résultante normale

Figure 3.47 – *Test de cisaillement, poutre d'élastomère (3D)*



(a) résultante tangente (b) résultante normale

Figure 3.48 – *Test de flexion, poutre d'élastomère (3D)*



(a) Test de flexion (b) Test de cisaillement

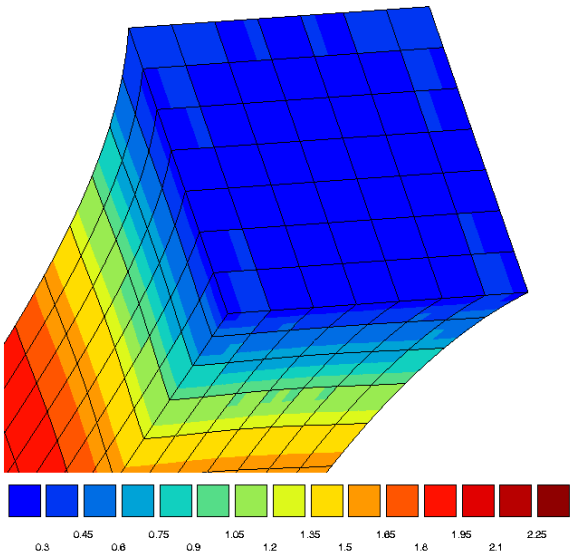
Figure 3.49 – *Moment résultant, poutre d'élastomère (3D)*

En terme de comportement local, on obtient également un bon accord si l'ordre de la base est suffisant (cf. figures 3.50). Les figures D.4, qui sont présentées en annexe, montrent bien à partir du test de traction l'effet oscillant de l'approximation si l'ordre de troncature n'est pas suffisant.

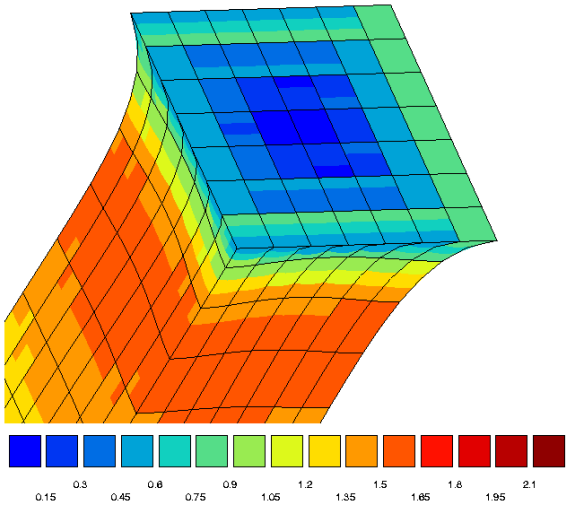
Le tableau 3.4, récapitule les temps de calcul et les tailles de chaque modèle. Le gain observé n'est pas aussi important que celui des autres modèles. Néanmoins, il est facile de concevoir que dans le cas d'un barreau 2 fois plus élancé le temps de calcul du modèle standard sera plus que doublé alors que celui du modèle réduit ne sera pas modifié. Cet exemple permet d'illustrer l'existence d'un point de rendement de chaque modèle réduit qui est fonction des caractéristiques géométriques de la structure (élancement, facteur de forme, ...). En deçà de ce point de rendement le modèle réduit coûte plus cher en temps de calcul même si sa taille est plus petite.

modèle	n_u	n_p	nb. d.d.l.	temps CPU (s)	gain en taille	gain en temps
complet			39 231	1717.7		
réduit 3D2D	5	4	3375	43	11	40
réduit 3D2D	9	8	6075	254.5	6	7
réduit 3D2D	14	12	9450	1014.5	4	1.7

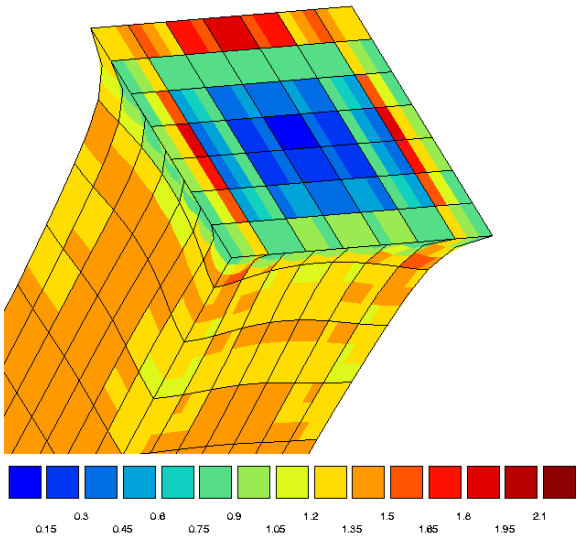
Tableau 3.4 – *Temps de calcul et taille de modèle pour un test de traction sur la poutre en élastomère*



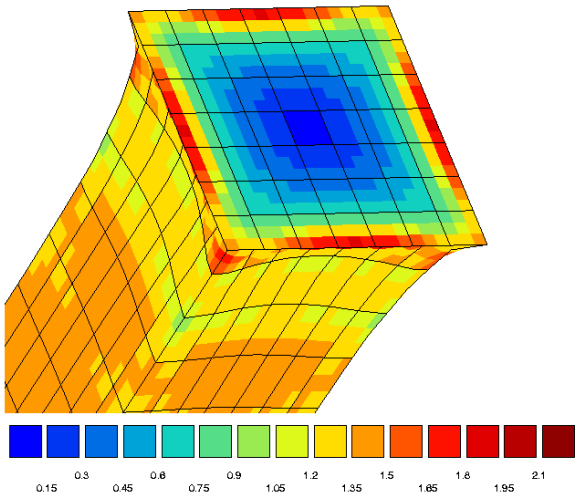
(a) Modèle réduit $n_u = 5, n_p = 4$



(b) Modèle réduit $n_u = 9, n_p = 8$



(c) Modèle réduit $n_u = 14, n_p = 12$



(d) Modèle de référence

Figure 3.50 – *Contrainte de* VON-MISES*, traction d'un bareau élastomèrique*

3.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre, une technique de réduction de modèles pour les comportements hyperélastiques incompressibles ou faiblement compressibles. Elle permet de traiter le cas de structures possédant une propriété d'invariance où de périodicité suivant une (où deux) directions et dont l'analyse directe conduit généralement à un grand nombre de degrés de liberté. Cette technique repose sur le concept des « finite strip » de Y.K. CHEUNG. Ainsi, à l'aide d'une projection des champs inconnus sur une base de fonctions d'ordres suffisamment élevés, on peut condenser une ou plusieurs directions afin de développer un élément-fini semi-analytique spécifique.

En considérant divers types de structures qui vérifient des propriétés d'invariance où de périodicité, quatre types d'éléments-finis réduits ont été développés. Les éléments 2D-1D, permettent de traiter le cas de structures périodiques en déformations planes comme des lamifiés élastomère-métal. Les éléments 3D-1D et 3D-1D de révolution peuvent être utilisés pour le même type de structure, dans un cas tridimensionnel plan (géométrie hexaèdrique) où pour des structures à géométrie de révolution. Enfin, les éléments 3D-2D sont adaptés dans le cas de structures tridimensionnelles, élancées dans une direction (de type poutre).

La validation de ces éléments est ensuite discutée. Elle montre que l'on peut déterminer, de manière assez précise, la réponse globale de structures géométriquement disproportionnées, ainsi que les états locaux de contraintes et de déformation. Cette technique représente donc une alternative intéressante pour des cas de calcul où les disproportions dimensionnelles empêchent tout enrichissement du modèle.

Une comparaison des performances de cette méthode par rapport à des modèles de référence, est détaillée pour chaque type de réduction. Un gain important en terme de taille de modèle est démontré, qui est bien entendu fonction du type de modèle réduit et des caractéristiques géométriques de la structure à analyser. Dans la plupart des cas ce gain en taille conduit également à un gain en temps de calcul même pour des ordres d'approximation importants.

Bibliographie

Bažant, Z., & Beghini, A. [2005]. Stability and finite strain of homogenized structures soft in shear : Sandwich or fiber composites, and layered bodies. *International Journal of Solids and Structures*.

Boukamel, A. [1988]. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

Boukamel, A., Débordes, O., & Jazzar, F. [1990]. *Etude de la fiabilité d'une formulation en éléments finis pseudo-axisymétriques pour les grandes déformations hyperélastiques*. (Non publié)

Brink, U., & Stein, E. [1997]. A posteriori error estimation in large-strain elasticity using

equilibrated local neumann problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *161*, 77-101.

Chang, C.-H. [2002]. Modeling of laminated rubber bearings using an analytical stiffness matrix. *International Journal of Solids and Structures*, *39*, 6055-6078.

Cheung, Y., & Au, F. [1995]. Isoparametric spline finite strip for degenerate shells. *Thin-Walled Structures*, *21*, 65-92.

Cheung, Y., & Jiang, C. [2001]. Finite layer method in analyses of piezoelectric composite laminates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *191*, 879-901.

Cheung, Y., & Kong, J. [1995]. The application of a new finite strip to the free vibration of rectangular plates of varying complexity. *Journal of Sound and Vibration*, *181*, 341-353.

Cugnon, F. [2000]. *Automatisation des calculs éléments finis dans le cadre de la méthode-p*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

Delorme, D. [1997]. *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrice élastomérique*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

Devries, F. [1998]. Homogenization of elastomer matrix composites : method and validation. *Composites Part B*, *29B*, 753-762.

Dhatt, G., & Touzot, G. [1984]. *Une présentation de la méthodes des éléments finis* (2ème édition ed.). Maloine S.A.

Dumontet, H. [1990]. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie Paris 6.

Duster, A., Hartmann, S., & Rank, E. [2003]. p-fem applied to finite isotropic hyperelastic bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, *192*, 5147-5166.

Gosselet, P. [2003]. *Méthode de décomposition de domaine et méthode d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

Hwang, J., & Chiou, J. [1996]. An equivalent linear model of lead-rubber seismic isolation bearing. *International Journal of Solids and Structures*, *18*, 528-536.

Iizuka, M. [2000]. A macroscopic model for predicting large-deformation behaviors of laminated rubber bearings. *Engineering Structures*, *22*, 323-334.

Kelly, J. [2003, july]. Tension buckling in multilayer elastomeric bearings. In *16^{th} engineering mechanics conference*. Seattle.

Koo, G., Lee, J., Yoo, B., & Ohtori, Y. [1999]. Evaluation of laminated rubber bearing for seismic isolation using modified macro-model with parameter equations of instantaneous apparent shear modulus. *Engineering Structures*, *21*, 594-602.

Ladevèze, P., & Moës, N. [1997]. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *157*, 45-68.

Lanzo, A. D. [2004]. On elastic beam models for stability analysis of multilayered rubber bearings. *International Journal of Solids and Structures*, *41*, 5733-5757.

Lejeunes, S. [2002]. *Stabilité de structures lamifiées élastomère-métal*. Rapport de dea, Université d'Aix-Marseille II.

Lejeunes, S., Boukamel, A., Cochelin, B., & Zoppitelli, E. [2003, mai]. Stabilité matérielle et structurelle d'un lamifié élastomère-métal. In *Actes du sixième colloque national en calcul des structures* (Vol. II, p. 535-542). Giens.

Léné, F., & Rey, C. [2001]. Some strategies to compute elastomeric lamified composite structures. *Composite Structures*, *54*, 231-241.

Marusak, R., & Becker, E. [1993]. A finite element procedure for axisymmetric elastomeric solids under general loading. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *36*, 2031-2048.

Méo, S. [2000]. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

Méo, S., Débordes, O., & Boukamel, A. [2002]. Assemblage de structures une à une invariantes dans une direction. *Mécanique & Industries*, *3*, 211-225.

Tsai, H.-C. [2004]. Compression stiffness of infinite-strip bearings of laminated elastic material interleaving with flexible reinforcements. *International Journal of Solids and Structures*, *41*, 6647-6660.

Tsai, H.-C., & Hsueh, S.-J. [2001]. Mechanical proporties of isolation bearings idedntified by a viscoelastic model. *International Journal of Solids and Structures*, *38*, 53-74.

Tsai, H.-C., & Kelly, J. M. [2004]. Buckling load of seismic isolators affected by flexibility of reinforcement. *International Journal of Solids and Structures*.

Zhong, W., Cheung, Y., & Li, Y. [1998]. The precise finite strip method. *Computers and Structures*, *69*, 773-783.

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. [2000]. *The finite element method* (Fifth edition ed.). Butterworth-Heinemann.

CHAPITRE

4 Applications de la méthode de réduction de modèles

La méthode de réduction de modèles développée au chapitre précédent peut s'appliquer et trouver son intérêt dans un certain nombres d'analyses. Dans ce chapitre, on propose trois exemples d'utilisation de cette méthode. Le premier concerne l'étude de la réponse, sous chargement statique, d'une poutre composite à matrice élastomérique (type bras rotor EFB). Cet exemple est traité à l'aide du modèle réduit 3D-2D. Le second exemple consiste en l'analyse de stabilité de lamifiés élastomère-métal à partir d'une méthode de continuation qui a été implémentée dans ZéBuLoN. Cette méthode est basée sur un contrôle dit à « longueur d'arc » de l'incrémentation. Elle est utilisée dans ce cas avec le modèle réduit 2D-1D. Enfin le dernier exemple, présente une extension de la méthode de réduction de modèle à un comportement visco-hyperélastique avec la détermination de la réponse quasi-statique d'un lamifié sous chargement cyclique (modèle réduit 3D-1D).

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1 Introduction 141
4.2 Analyse d'une poutre composite 141
4.3 Stabilité d'un lamifié élastomère-métal 145
4.3.1 Méthode de continuation pour le flambement et le post-flambement . 146
4.3.2 Application de la méthode avec le modèle réduit 2D-1D 149
4.4 Réponse sous chargement cyclique d'un lamifié élastomère-métal 152
4.4.1 Modèle de KELVIN-VOIGT 152
4.4.2 Application avec le modèle réduit 3D-1D 153
4.5 Conclusion 157
Bibliographie 157

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques exemples d'applications de la méthode de réduction de modèles. Le premier d'entre eux correspond à une structure qui à été analysée dans deux thèses, soit avec une méthode d'homogénéisation périodique (DELORME [1997]), soit à l'aide d'une méthode de sous-structuration multi-niveaux (MÉO [2000]) . Dans les deux cas, l'hypothèse forte de linéarité du comportement de l'élastomère est postulée. Ce type de structure, très élancée et invariante suivant la direction de l'élancement, permet de mettre en oeuvre le modèle réduit 3D-2D, en tenant compte de l'ensemble des non-linéarités du problème.

Le deuxième exemple, qui consiste en l'analyse de stabilité d'un lamifié élastomère-métal en déformations planes, permet de tester la capacité de l'approximation à rendre compte des singularités du chemin d'équilibre. On effectue, une comparaison des résultats du modèle réduit avec un modèle de référence, pour différents types de conditions aux limites.

Une extension directe de la méthode de réduction de modèle à un comportement visco-hyperélastique est proposée dans le dernier exemple. Elle consiste à caractériser la réponse d'un lamifié élastomère-métal tridimensionnel, soumis à un chargement cyclique de compression ou de cisaillement. Pour ce faire on a implémenté un modèle de KELVIN-VOIGT qui présente l'avantage de ne pas mettre en oeuvre une variable interne, et qui nécessite donc peu de réaménagements par rapport au cas purement hyperélastique.

4.2 Analyse d'une poutre composite

La poutre composite est constituée de baguettes composites à fibres unidirectionnelles en verre/epoxy ou en carbone/epoxy, noyées dans une matrice élastomérique. Ce type de pièce a vocation à être utilisée dans les rotors d'hélicoptères pour effectuer la liaison mécanique entre une pâle et le moyeu rotor. Ce concept novateur, doit remplacer tout un système d'articulation mécanique afin de réaliser un gain en performance, encombrement et au final en coût. La structure retenue dans cette exemple est une simplification de la pièce étudiée dans les travaux de DELORME [1997] et MÉO [2000]. Pour des raisons de confidentialité, elle ne présente pas exactement la géométrie de la pièce réelle, mais conserve globalement son rapport d'élancement.

La section de cette structure est présentée sur la figure 4.1, elle a pour dimensions caractéristiques : 90 mm de large, 30 mm d'épaisseur et 750 mm de long. Les matériaux composites sont modélisés par une loi élastique linéaire orthotrope, les modules ingénieurs sont présentés dans le tableau 4.1. L'élastomère est représenté par un modèle de MOONEY-RIVLIN avec $a_{10} = 0.31$ Mpa, $a_{01} = 0.11$ Mpa et $K = 5000$ Mpa.

	E_l (Gpa)	E_{t_1} (Gpa)	E_{t_2} (Gpa)	G_l (Gpa)	G_{t_1} (Gpa)	G_{t_2} (Gpa)	ν_{lt_1}	ν_{lt_2}	$\nu_{t_1t_2}$
Verre	55	13	13	3.6	5.2	5.2	0.27	0.27	0.3
Carbonne	125	11	11	5.2	5.2	4.1	0.33	0.33	0.33

Tableau 4.1 – *Caractéristiques ingénieurs des renforts U.D. (l'indice l correspond au sens fibre, t_1 et t_2 aux deux directions transverses)*

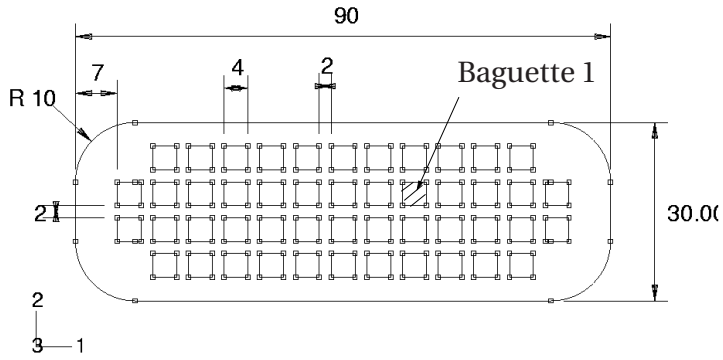


Figure 4.1 – *Section de la poutre composite EFB*

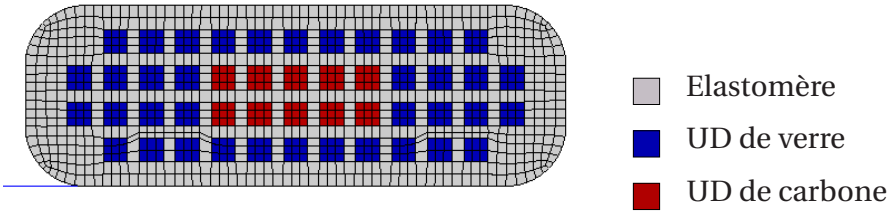


Figure 4.2 – *Maillage de la section en éléments réduits 3D-2D (type q9p3)*

Le cas de charge traité correspond à un essai de traction-cisaillement combiné. Une section extrême de la poutre est encastrée, l'autre est soumisse à un déplacement de 4 mm dans la direction de traction et de 50 mm dans la direction transverse (dans le sens de l'épaisseur). La section de la structure est maillé avec 1117 éléments réduits de type Q9P3 (cf figure 4.2). Avec $n_u = 11$, $n_p = 9$ le modèle réduit comprend 152 361 degrés de liberté. A titre de comparaison, si l'on devait considérer un maillage tridimensionnel de la structure, ayant la même taille élémentaire que le maillage réduit proposé, on obtiendrait plus de 5 millions de degrés de liberté.

La figure 4.3 présente une isocouleur de la contrainte de CAUCHY dans la direction d'élancement de la structure. La figure 4.4 montre l'isocouleur de la contrainte principale maximum dans les baguettes de carbone, on peut localiser en bleu les zones les plus sollicitées, avec une contrainte principale maximale de l'ordre de 2300 Mpa. Les courbes 4.5, permettent de visualiser l'évolution de la contrainte principale [(1)], maximale, le long de la baguette 1 de carbone (voir figure 4.1). On observe de fortes oscillations de la contrainte, qui sont dues à l'ordre d'approximation de la base polynomiale. En effet, pour le cas de charge considérée, le comportement orthotropique des baguettes de renforts nécessite un ordre d'approximation plus élevé afin de diminuer cet effet.

(1). prise le long d'une ligne de points de gauss à l'intérieur de la baguette

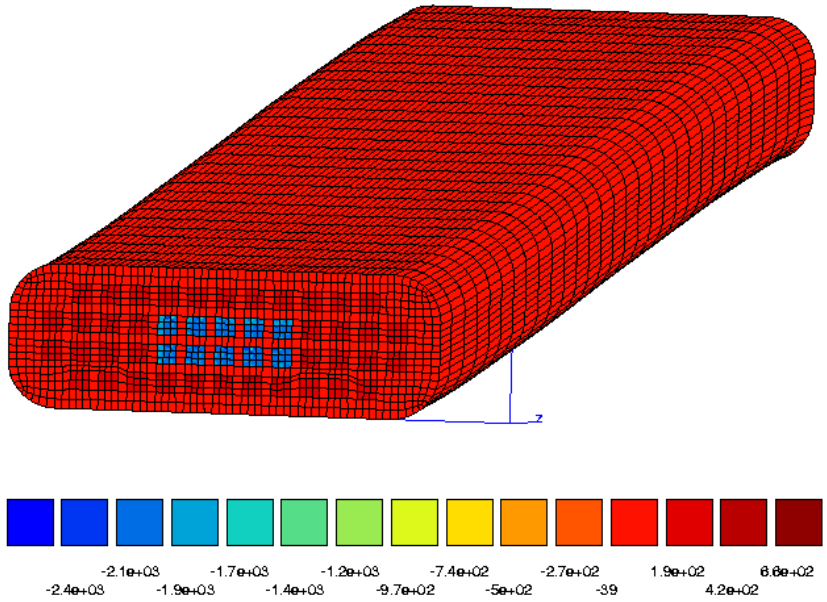


Figure 4.3 – σ_{33} *sur l'ensemble de la structure* ($n_u = 11, n_p = 9$)

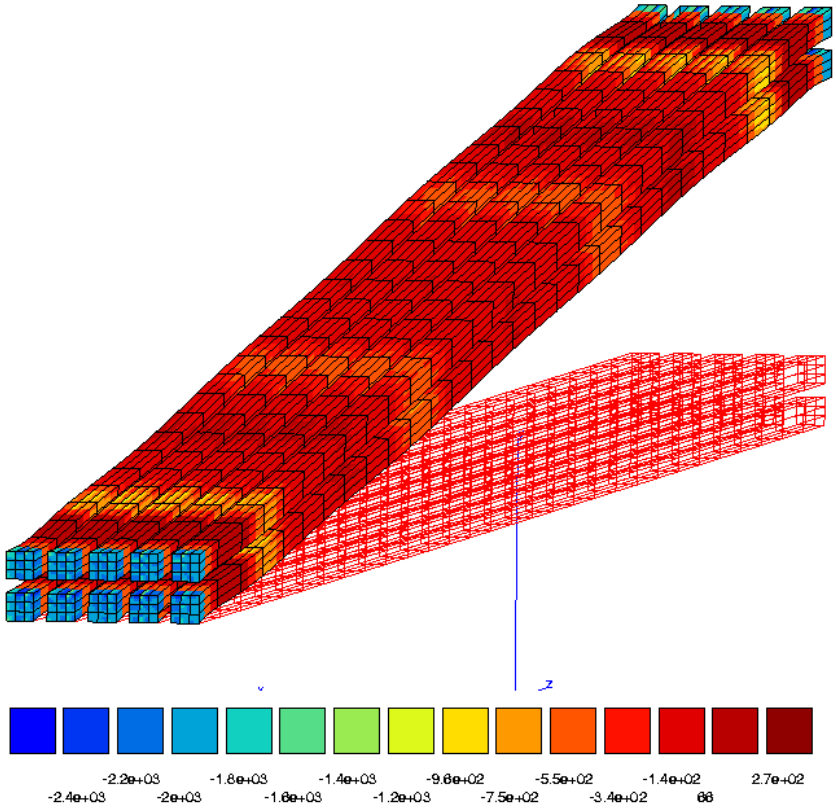


Figure 4.4 – *Contrainte principale maximale dans les baguettes de carbone, configuration déformée et non déformée* ($n_u = 11, n_p = 9$)

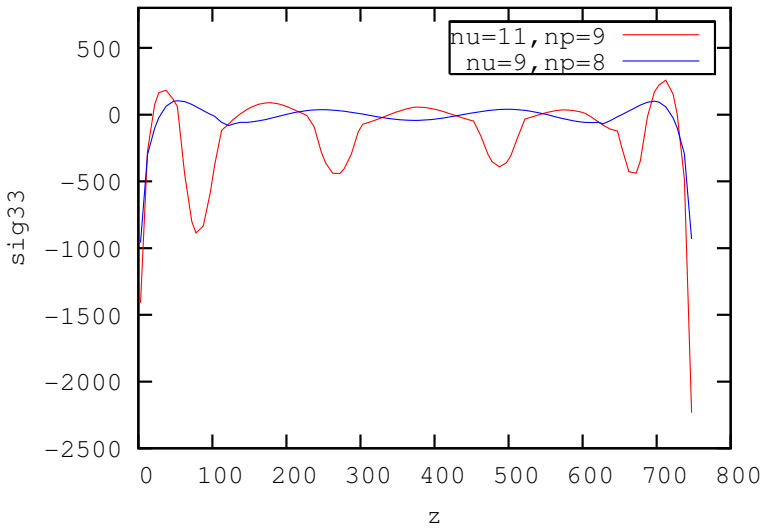


Figure 4.5 – *Contrainte principale maxi dans la baguette de carbone 1 ($n_u = 11, n_p = 9$)*

L'élastomère est, dans l'ensemble, peu sollicité pour ce type d'essai, la figure 4.6 présente la distribution de la pression hydrostatique sur la section encastrée.

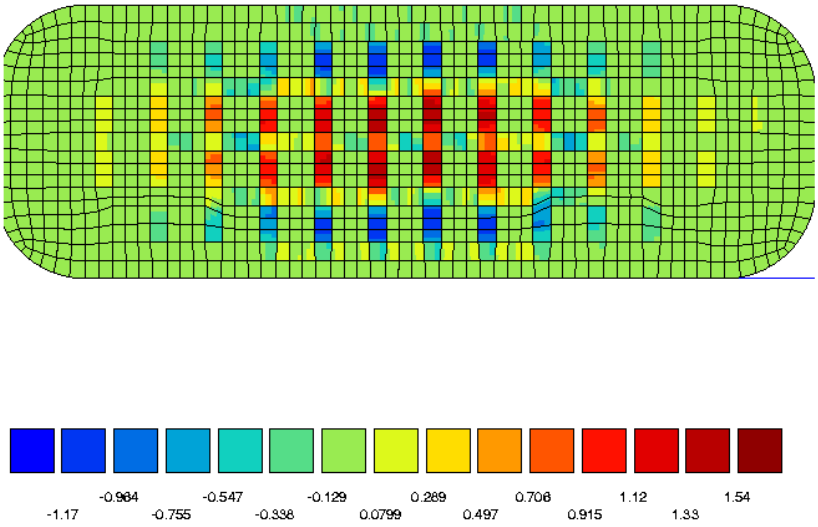


Figure 4.6 – *Pression hydrostatique dans l'élastomère ($n_u = 11, n_p = 9$)*

Le tableau 4.2, donne une estimation des temps de calcul (2) pour un incrément convergé, pour deux ordres d'approximation différents. L'augmentation de l'ordre induit un coût numérique en terme de temps de calcul qui augmente bien plus vite que la taille du modèle. Cet effet est principalement dû à l'effort nécessaire pour intégrer les vecteurs et matrices tangentes.

(2). Sur un pentium 4 2.8Ghz, 1Gb de RAM

modèle	n_u	n_p	nb dof	temps CPU (1 incrément)
réduit 3D2D	9	8	124 659	33min
réduit 3D2D	11	9	152 361	2h11min

Tableau 4.2 – *Taille de modèle et évaluation des temps de calcul pour un incrément convergé (4 itération)*

4.3 Stabilité d'un lamifié élastomère-métal

Il existe de nombreux phénomènes d'instabilités allant du flambement d'EULER jusqu'au chaos. Dans ce travail on se restreint au cas du flambement de structure lamifiée élastomère-métal sous chargement statique de compression. Pour une aperçu plus global des notions qui sont rapidement exposées dans ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur à l'article de BAŽANT [2000], au premier chapitre de thèse de BAGUET [2001], où encore, par exemple, aux ouvrages de THOMPSON [1982] et FELIPPA [2001].

Cette analyse est motivée par la problématique du dimensionnement de butées lamifiées, employées dans les rotors d'hélicoptères. Ce type de structure est principalement soumis à un effort de compression qui est perturbé par des déplacements de cisaillement ou par de la flexion. Au vu de son élancement et de sa position au sein de la tête rotor, l'étude de la stabilité de ce type de pièce constitue un réel besoin pour l'ingénieur ne serait-ce qu'en terme de dimensionnement. La figure 4.7 présente un mode de flambement, obtenu sur une butée lamifiée, avec une méthode de flambement linéarisé (ABAQUS), sur un modèle en petite déformation avec un comportement élastique linéaire de l'élastomère. Le résultat obtenu, a nécessité 1 semaine de calcul sur une machine compaq ES40 (3) en séquentiel.

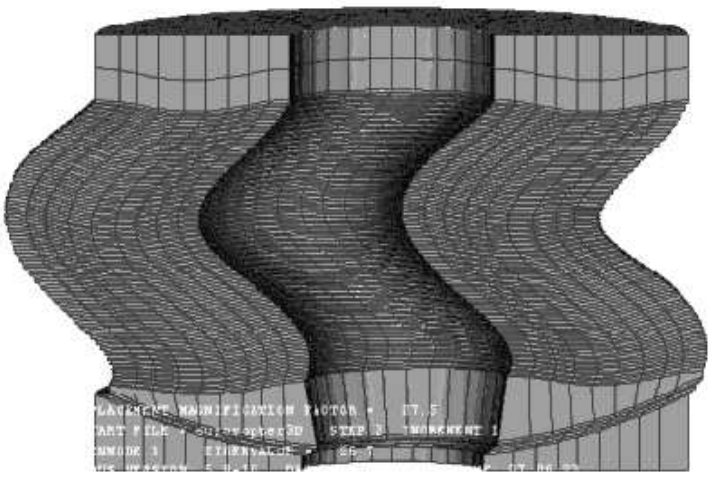


Figure 4.7 – *Mode de flambement de la butée de force centrifuge (résultat ABAQUS en flambement linéarisé)*

(3). 4 processeur alpha EV6 500MHz, 2Gb de RAM

4.3.1 Méthode de continuation pour le flambement et le post-flambement

Avant de détailler la mise en oeuvre de la méthode de continuation adoptée, quelques notions propres à l'analyse de stabilité sont rapidement introduites.

Tout d'abord, on dénomme par point singulier, un point du chemin d'équilibre où l'on a non inversibilité de l'opérateur tangent. Autrement dit, on a, en ce point, apparition d'une ou plusieurs valeurs propres nulles dans l'opérateur tangent. Dans le cas où une seule valeur propre s'annule et que toutes les autres restent positives, ce point est appelé point singulier simple. Si plusieurs valeurs propres s'annulent on a alors un point singulier multiple.

Une manière de caractériser les points singuliers consiste à exprimer l'équilibre de la structure sous la forme générale suivante [(4)] :

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \tag{4.1}$$

où $\mathbf{a}$ est le vecteur des inconnues (typiquement les déplacements nodaux), $\mathbf{R}(\mathbf{a})$ les efforts intérieurs, $\mathbf{P}$ le vecteur des efforts extérieurs appliqués et λ un paramètre de charge. En un point singulier, si $\mathbf{K}$ désigne la matrice tangente (dans le cas des efforts conservatifs : $\mathbf{K} = \partial R(\mathbf{a})/\partial \mathbf{a}$), on a :

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \tag{4.2}$$

ce qui peut également s'écrire :

$$\mathbf{K}\mathbf{z} = 0 \quad \underset{\text{symmétrie de } \mathbf{K}}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{z}^T \mathbf{K} = 0 \tag{4.3}$$

avec $\mathbf{z}$ le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. En écrivant la variation de (4.1), on obtient (uniquement dans le cas des efforts conservatifs) :

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{a} - \mathbf{P}\delta\lambda = 0 \tag{4.4}$$

Si l'on projette (4.4) sur le mode propre $\mathbf{z}$, on arrive à :

$$\mathbf{z}^T \mathbf{P} \delta\lambda = 0 \tag{4.5}$$

On peut donc distinguer deux types de point singuliers, les points limites et les points de bifurcation :

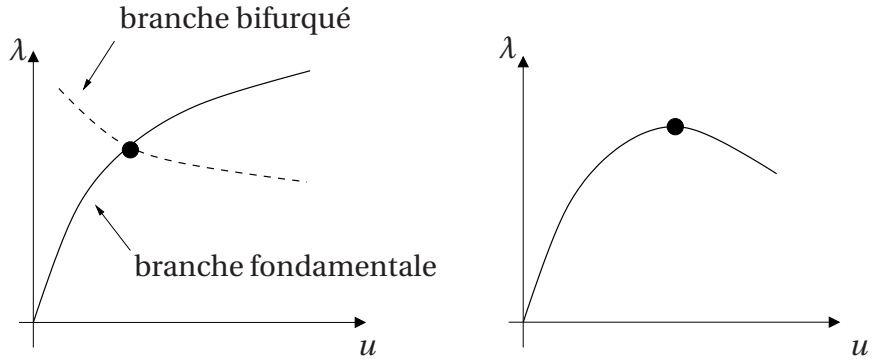
$$\delta\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^T\mathbf{P} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{point limite} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{z}^T\mathbf{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bifurcation} \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

En un point limite, la tangente au chemin d'équilibre est horizontale ($\delta\lambda = 0$), en un point de bifurcation simple deux chemins d'équilibre se superposent et l'incrément de charge ($\delta\lambda$) demeure indéterminé si l'on ne considère pas les termes d'ordres supérieurs (c'est à dire la variation seconde de (4.1)). La figure 4.8 illustre ces deux types de points singuliers.

(4). A l'aide, par exemple, du principe des puissances virtuelles



(a) point de bifurcation (b) point limite

Figure 4.8 – *Points singuliers simples du chemin d'équilibre*

L'étude de stabilité d'une structure se divise dans la plupart des cas en trois parties ; il faut tout d'abord suivre le chemin d'équilibre fondamental ; détecter et caractériser les points singuliers et enfin dans le cas d'un point de bifurcation la branche secondaire doit être explorée.

De nos jours, il existe différentes approches permettant d'atteindre ces objectifs, que l'on peut principalement regrouper en deux catégories, à savoir :

- Les techniques incrémentales-itératives avec contrôle à longueur d'arc qui semblent être les plus populaires (cf. CRISFIELD [1997]; RIKS [2004]), de part leur complémentarité avec la méthode de Newton-Raphson.
- Les méthodes asymptotiques numériques représentent une alternative très intéressante, en particulier en terme de convergence du schéma numérique pour certains types de non-linéarités (cf DAMIL & M. [1990]; COCHELIN [1994]).

Dans ce travail, on a mis en œuvre une méthode qui hérite de la première catégorie. Ainsi, on utilise une méthode à pseudo-longueur d'arc, qui consiste en la résolution du système augmenté suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{r}(\mathbf{a},\lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{a}) - \lambda\mathbf{P} \\ f(\Delta\mathbf{a},\Delta\lambda) = \Delta\mathbf{a}^T\Delta\mathbf{a} - dl^2 \end{array} \right] = 0 \tag{4.9}$$

où $\Delta\mathbf{a}$ est l'incrémentation de déplacement par rapport au dernier point d'équilibre obtenu (la dernière solution convergé), $f(\Delta\mathbf{a},\Delta\lambda)$ la fonction de contrainte (qui détermine le contrôle de l'incrémentation), dl est le rayon initial de la contrainte, $\mathbf{r}(\mathbf{a},\lambda)$ le résidu d'équilibre, $\mathbf{R}(\mathbf{a})$ les efforts intérieurs.

• **Pour la phase de prédiction**, en écrivant le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'équation d'équilibre, autour de la solution précédemment convergée $(\mathbf{a},\lambda)$, on obtient :

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a},\lambda+\Delta\lambda) = \mathbf{r}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}\Delta\mathbf{a} - \Delta\lambda\mathbf{P} + o(\Delta\mathbf{a},\Delta\lambda) = \mathbf{K}\Delta\mathbf{a} - \Delta\lambda\mathbf{P} + o(\Delta\mathbf{a},\Delta\lambda) \tag{4.10}$$

si la matrice tangente est inversible on a :

$$\Delta\mathbf{a} - \Delta\lambda\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = \Delta\mathbf{a} - \Delta\lambda\overline{\Delta\mathbf{a}} = 0 \tag{4.11}$$

en remplaçant $\Delta\mathbf{a}$ obtenu à partir de (4.11) dans la fonction de contrôle $f(\Delta\mathbf{a},\Delta\lambda)$, on obtient :

$$\Delta\lambda = \pm\frac{dl}{\sqrt{\overline{\Delta\mathbf{a}}^T\overline{\Delta\mathbf{a}}}} \tag{4.12}$$

le signe de $\Delta\lambda$ est choisi en fonction du signe de la puissance des efforts extérieurs, tel que :

$$\Delta\lambda = \text{sign}(\mathbf{P}^T\Delta\mathbf{a})\frac{dl}{\sqrt{\overline{\Delta\mathbf{a}}^T\overline{\Delta\mathbf{a}}}} \tag{4.13}$$

• **Pour la phase de correction**, on utilise une procédure linéarisée, proposé par RIKS, qui consiste à imposer au correcteur $\delta\mathbf{a}$ à rester orthogonal au prédicteur $\Delta\mathbf{a}$, tel que la fonction de contrôle devienne (voir figure 4.3.1) :

$$f(\delta\mathbf{a},\delta\lambda) = \Delta\mathbf{a}^T\delta\mathbf{a} = 0 \tag{4.14}$$

on écrit le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'équation d'équilibre, autour de la solution donnée par le prédicteur qui est notée $(\mathbf{a},\lambda)$, on obtient :

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}+\delta\mathbf{a},\lambda+\delta\lambda) = \mathbf{r}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}\delta\mathbf{a} - \delta\lambda\mathbf{P} + o(\delta\mathbf{a},\delta\lambda) \tag{4.15}$$

si la matrice tangente est inversible on a :

$$\delta\mathbf{a} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{a}) - \delta\lambda\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = \delta\mathbf{a} - \overline{\delta\mathbf{a}} - \delta\mathbf{a}_T = 0 \tag{4.16}$$

en utilisant (4.14), on arrive a :

$$\delta\lambda = -\frac{\Delta\mathbf{a}^T\overline{\delta\mathbf{a}}}{\Delta\mathbf{a}^T\delta\mathbf{a}_T} \tag{4.17}$$

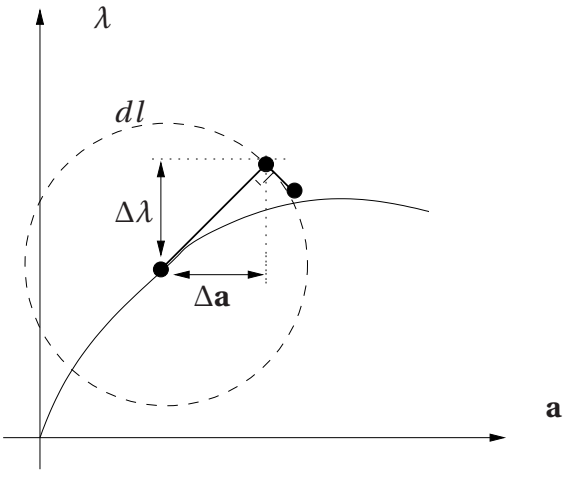


Figure 4.9 – *Méthode à longueur d'arc linéarisé*

Pour détecter un point singulier, on utilise un indicateur, noté τ, basé sur le plus petit pivot de la matrice tangente :

$$\tau = \min\{\text{pivot } \mathbf{K}_T\} \tag{4.18}$$

un point singulier est passé si τ change de signe.
Afin de caractériser ce point singulier, il faut pouvoir le déterminer de manière précise. On utilise pour ce faire une procédure d'encadrement qui consiste à interpoler linéairement l'évolution de τ en fonction du facteur de charge, autour de deux points encadrant la bifurcation, si bien que l'on obtient :

$$\lambda_i = \lambda_{i-2} - \tau_{i-2}\frac{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}}{\tau_{i-1} - \tau_{i-2}} \tag{4.19}$$

où λ_{i-2},λ_{i-1},τ_{i-2},τ_{i-1} sont les valeurs du facteur de charge et de l'indicateur de point singulier pour deux points encadrant la bifurcation. Cette procédure simpliste peut être particulièrement gourmande en calculs de points d'équilibre, des techniques plus directes ont été développées et peuvent être trouvées par exemple dans [MAGNUSSON & SVENSSON, 1998].
Lorsque qu'un point singulier a été obtenu, il est possible de déterminer s'il s'agit d'un point limite en calculant $\mathbf{z}$ le plus petit vecteur propre de $\mathbf{K}$ et en regardant la valeur de :

$$B = \mathbf{z}^T\mathbf{P} \tag{4.20}$$

Remarque 4.1
Dans le cas d'un point de bifurcation, il est possible d'utiliser l'équation de bifurcation (voir CRISFIELD *[1997] section 20.3) pour déterminer la nature exacte de ce point. Cependant ce calcul imposerait l'évaluation des dérivées d'ordres supérieures (la variation seconde de l'équilibre), ce qui n'est pas trivial dans le cadre des formulations en éléments-finis présentées aux chapitres précédents.* ❑

Au point de bifurcation, on peut initier le calcul de la seconde branche d'équilibre en utilisant une procédure simplifiée. Par exemple en choisissant le prédicteur dans la direction du vecteur propre $\mathbf{z}$:

$$\Delta\mathbf{a} = dl\mathbf{z} \qquad \Delta\lambda = 0 \tag{4.21}$$

Cette procédure n'est exacte que si la tangente au second chemin d'équilibre est colinéaire au vecteur propre $\mathbf{z}$ (autrement dit perpendiculaire à la tangente de la branche fondamentale) ce qui n'est qu'un cas particulier de l'ensemble des bifurcations possibles. Néanmoins elle est bien souvent utilisée pour fournir une estimation du prédicteur (voir CRISFIELD [1997]).

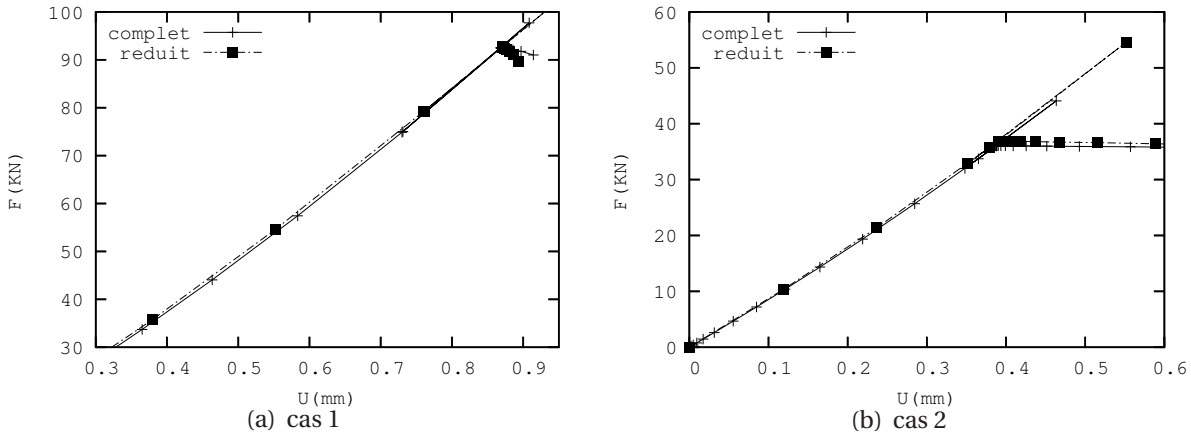
4.3.2 Application de la méthode avec le modèle réduit 2D-1D

A titre d'illustration, nous proposons l'étude de stabilité d'un lamifié élastomère métal en déformations-planes et notamment une comparaison des résultats du modèle réduit par rapport à un modèle standard.

Le lamifié est constitué de 10 lamelles faisant chacune 100 mm de large et respectivement 10 mm d'épaisseur pour l'acier et 10 mm d'épaisseur pour l'élastomère. Le comportement de

l'acier est considéré comme étant élastique, linéaire et isotrope avec les caractéristiques suivantes : $E = 210000$ Mpa et $\nu = 0.3$. L'élastomère est modélisé par une loi de MOONEY-RIVLIN, avec $a_{10} = 0.31$ Mpa et $a_{01} = 0.11$ Mpa, le module de compressibilité est de 5000 Mpa.
Deux cas de conditions aux limites sont traités. Pour le premier la partie inférieure du lamifié est fixée et la partie supérieure est bloquée transversalement et en rotation, alors que pour le second cas cette dernière est libre transversalement (mais toujours bloquée en rotation).

Les figures 4.10, présentent les réponses obtenues par les modèles réduits et standards pour les deux cas de conditions aux limites traités. On obtient un très bon accord en terme de charge critique obtenue, si l'on regarde de près le comportement post-flambé on peut observer une légère différence entre les deux modèles pour le premier cas d'essai. Le modèle réduit semble avoir un comportement plus adoucissant que le modèle standard. Les modes de flambement respectifs à chaque cas d'essais sont identiques pour les deux modèles (voir figure 4.11).



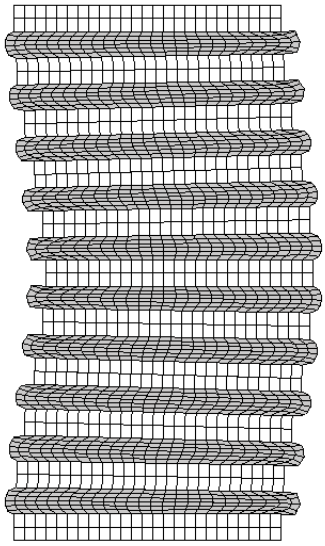
(a) cas 1 (b) cas 2

Figure 4.10 – *Réponse de la structure pour les deux cas de chargement*

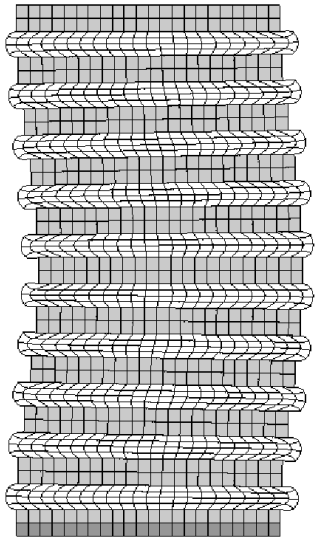
Afin de comparer les performances des deux modèles, le tableau 4.3 présente le temps de calcul ainsi que le nombre de degrés de liberté de chaque modèles.

	ddl	temps CPU	gain
2-D standard	10282	154	
2-D reduit $n_u = 9, n_p = 8$	1494	12	12.8

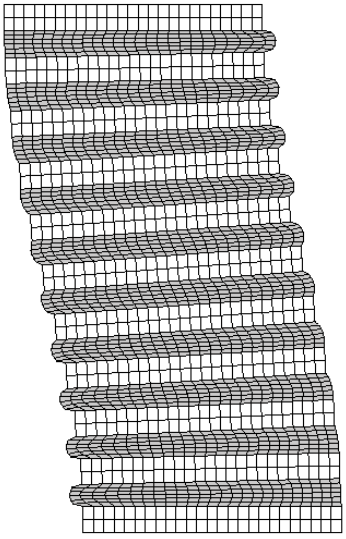
Tableau 4.3 – *Taille des modèles et temps de calcul pour le cas 1*



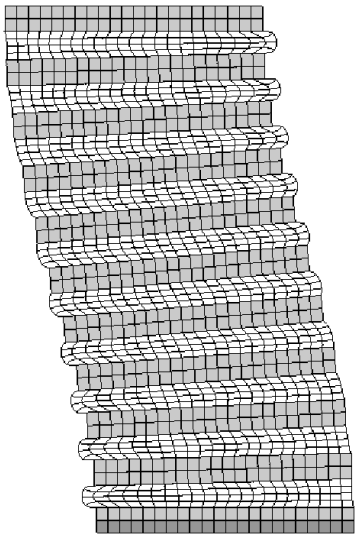
(a) modèle réduit $n_u = 9, n_p = 8$



(b) modèle standard



(c) modèle réduit $n_u = 9, n_p = 8$



(d) modèle standard

Figure 4.11 – *Mode de flambement pour les deux cas d'essai*

4.4 Réponse sous chargement cyclique d'un lamifié élastomère-métal

Cet exemple d'application présente la possibilité d'extension de la méthode de réduction de modèle à d'autres modèles de comportements et notamment à de la visco-hyperélasticité.

4.4.1 Modèle de KELVIN-VOIGT

Le modèle de KELVIN-VOIGT présente l'avantage d'être indépendant de toute variable interne. La représentation rhéologique de ce modèle correspond à l'assemblage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur (voir figure 4.12).

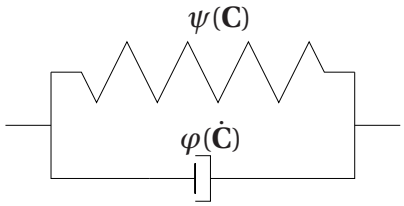


Figure 4.12 – *Modèle de* KELVIN-VOIGT

En postulant l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation, φ de forme quadratique, on peut écrire la loi d'état suivante :

$$\mathbf{\Pi} = 2\mathbf{F}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{C}}}\right] - p\mathrm{Cof}\mathbf{F} \tag{4.22}$$

avec :

$$\varphi = \frac{\nu}{2}\dot{\mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \tag{4.23}$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} - p\mathrm{Cof}\mathbf{F} + 2\nu\mathbf{F}\dot{\mathbf{C}} \tag{4.24}$$

Si l'on note $\mathbf{\Pi}_{hyper}$ la partie hyperélastique de la contrainte, on a :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{hyper} + 2\nu\mathbf{F}\dot{\mathbf{C}} \tag{4.25}$$

En construisant un schéma explicite d'ordre 1 en temps on peut écrire $\mathbf{\Pi}$ au temps t à partir de la connaissance de $\mathbf{F}$ au temps $t - \Delta t$

$$\mathbf{\Pi}(t) = \mathbf{\Pi}_{hyper}(t) + 2\nu\mathbf{F}(t)\left[\frac{\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}(t-\Delta t)}{\Delta t}\right] \tag{4.26}$$

Par rapport à une formulation hyperélastique, seul le terme $\mathbf{K}_t$ est modifié dans le calcul de la matrice tangente :

$$\mathbf{K_t} = \mathbf{K_t}^{hyper} + \frac{\partial \mathbf{F}\dot{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{K_t}^{hyper} + \mathbf{K_t}^{visc} \tag{4.27}$$

En utilisant le schéma explicite d'ordre 1 en temps, le terme $\mathbf{K_t}^{visc}$ peut être calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (F(t)\dot{C}(t))_{ij}}{\partial F(t)_{kl}} &= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial F_{io}(t)C_{oj}(t)}{\partial F_{kl}(t)} - \frac{\partial F_{io}(t)}{\partial F_{kl}(t)}C_{oj}(t-\Delta t)\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial F_{io}(t)}{\partial F_{kl}(t)}C_{oj}(t) + F_{io}(t)\frac{\partial F_{om}(t)^T}{\partial F_{kl}(t)}F_{mj}(t) + F_{io}(t)F^T_{om}(t)\frac{\partial F_{mj}(t)}{\partial F_{kl}(t)} - \frac{\partial F_{io}(t)}{\partial F_{kl}(t)}C_{oj}(t-\Delta t)\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left(\delta_{ik}\delta_{ol}C_{oj}(t) + F_{io}(t)\delta_{mk}\delta olF_{mj}(t) + F_{io}(t)F^T_{om}(t)\delta_{mk}\delta_{jl} - \delta_{ik}\delta_{ol}C_{oj}(t-\Delta t)\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left(\delta_{ik}C_{lj}(t) + F_{il}(t)F_{kj}(t) + F_{io}(t)F^T_{ok}(t)\delta_{jl} - \delta_{ik}C_{lj}(t-\Delta t)\right) \\
\mathbf{K_t}^{visc}(t) &= \frac{2\nu}{\Delta t}\left(\mathbf{I}\odot\mathbf{C}(t) + \mathbf{F}(t)\oslash\mathbf{F}(t) + \mathbf{B}(t)\odot\mathbf{I} - \mathbf{I}\odot\mathbf{C}(t-\Delta t)\right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Le modèle de comportement de KELVIN-VOIGT avec un schéma de résolution explicite a été retenu pour sa facilité d'implémentation. En terme de développement, il a suffit de créer une classe héritant de la classe hyperélastique de manière à ne pas récrire les parties de la contrainte et de la matrice tangente dérivantes d'un potentiel hyperélastique. Ainsi, la classe associée au comportement de KELVIN-VOIGT construit $\mathbf{K}_t^{visc}$ et $\mathbf{\Pi}_{visc}$ et réalise les sommes (4.25) et (4.27).

Remarque 4.2
L'implémentation de ce modèle de comportement a été validée avec des comparaisons par rapport à des résultats expérimentaux (essais de double cisaillement). Néamoins il reste un travail de validation voir de développement à mener, nottament en ce qui concerne le schéma de discrétisation en temps. ❑

4.4.2 Application avec le modèle réduit 3D-1D

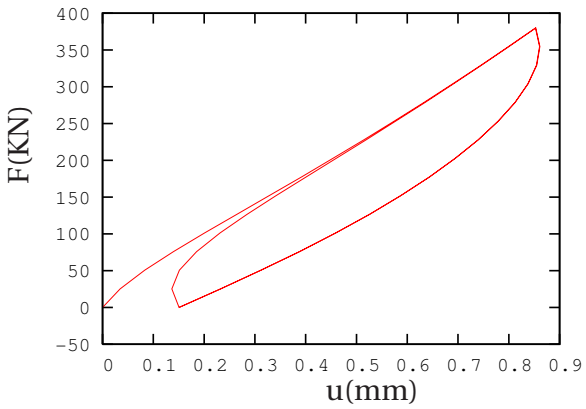
Cette application consiste à déterminer la réponse en quasi-statique[(5)] d'un lamifié plan soumis à un chargement cyclique de compression ou de cisaillement. Ce lamifié est constitué de 10 lamelles de forme carrée mesurant 200 mm de coté, faisant 4 mm d'épaisseur pour l'élastomère et 2 mm pour l'acier. Le comportement de l'acier est considéré comme étant élastique, linéaire et isotrope avec les caractéristiques suivantes : $E = 210\,000$ Mpa et $\nu = 0.3$. Un modèle de JAMES & AL est utilisé pour la partie hyperélastique du modèle de KELVIN-VOIGT, on a $a_{10} = 0.2036$ Mpa, $a_{01} = -0.0133$ Mpa, $a_{20} = 0.0058$ Mpa, $a_{11} = 0.0$, $a_{02} = 0.0048$ Mpa et $k = 2500$ Mpa. Le coefficient de viscosité est de $\nu = 0.026$ Mpa.s.

On considère deux cas de charge. Le premier correspond à un chargement cyclique de compression, imposé à travers une sollicitation triangulaire de 380 kN à 0.5 Hz. Pour le second cas de charge, on impose un préchargement de 228 kN de compression, puis on impose un déplacement de cisaillement d'amplitude progressive de ±20 mm puis ±40 mm à travers une sollicitation triangulaire de 0.5 Hz. Dans l'article de BURTSCHER & DORFMANN [2004], des essais du même type sont réalisés sur la même géométrie de pièce. Cependant par manque

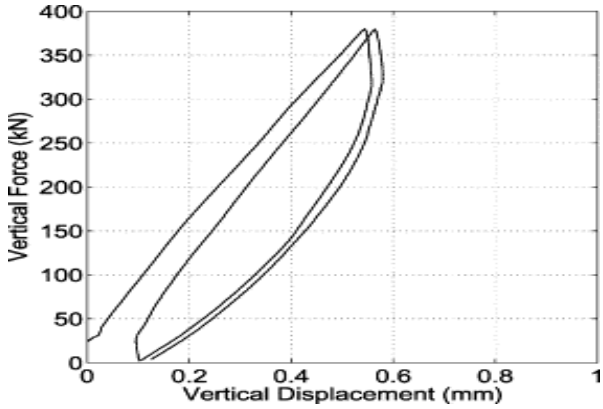
(5). On néglige les termes d'inertie

d'informations sur les données matériaux et les conditions d'essais, nous ne pouvons comparer les résultats que de manière qualitative.

Le modèle réduit 3D1D utilisé comprend 8967 degrés de liberté (avec $n_u = 7, n_p = 5$), le temps de calcul complet de la réponse en compression (deux cycles) est d'environ 6 h pour 60 incréments de calculs. A titre de comparaison le modèle 3D complet aurait nécessité au moins 2.6 million de degrés de liberté. La figure 4.13(a) présente la réponse globale du lamifié pour le cas du chargement de compression.



(a) Réponse du modèle réduit 3D1D, $n_u = 7, n_p = 5$



(b) Résultat expérimental d'après BURTSCHER & DORFMANN (2004)

Figure 4.13 – *Réponse du lamifié en compression*

Au vu des résultats du modèle réduit par rapport à l'expérimental (cf figure 4.13(b)) pour le test de compression, le modèle de KELVIN-VOIGT semble qualitativement capable de reproduire le comportement de l'élastomère au sein de la structure. Les résultats en terme de comportement global pour le cas du cisaillement ne sont pas présentés. En effet, expérimentalement on observe un effet PAYNE (c'est à dire un raidissement aux faibles amplitudes) sur la réponse du lamifié (voir figure 4.14). Le modèle de KELVIN-VOIGT ne permettant pas d'obtenir ce type d'effet, la comparaison avec l'expérimental n'a que peu d'intérêt. Il serait néanmoins intéressant d'implémenter d'autres modèles de comportements viscohyperélastiques comme celui utilisé dans la thèse de MÉO [2000] où ceux récemment développés dans la thèse de MARTINEZ [2005], afin d'éprouver la méthode de réduction de modèle pour des comportements dépendants de variables internes.

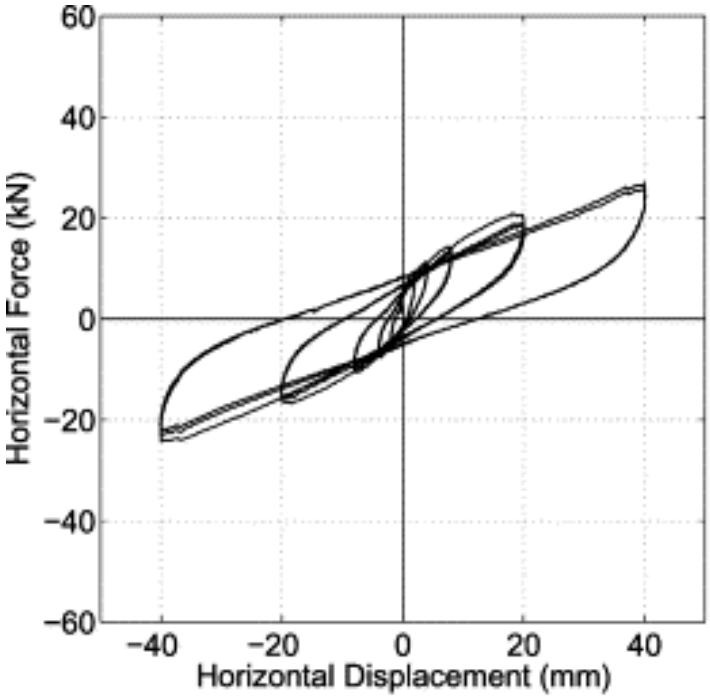
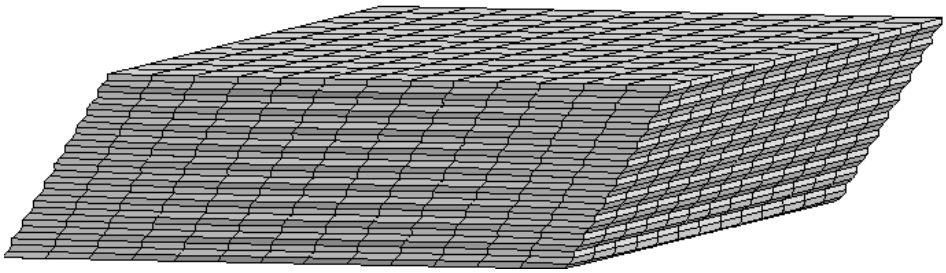
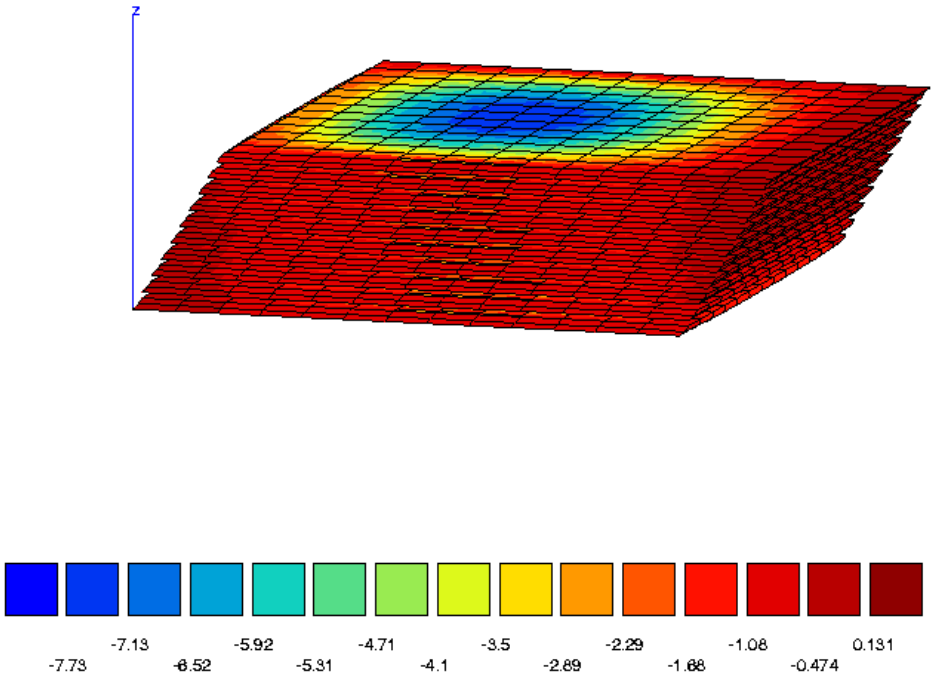


Figure 4.14 – *Résultat expérimentaux pour le test de cisaillement d'après* BURTSCHER & DORFMANN (2004)

Les figures 4.15, présentent une visualisation globale de la déformée et du champ de pression obtenu avec le modèle réduit pour le deuxième cas de charge (cisaillement cyclique avec préchargement de compression).



(a) Déformée globale à t=3.5s



(b) Champ de pression dans les lamelles en élastomère à t=3.5s

Figure 4.15 – *Résultats du modèle réduit 3D1D pour le cisaillement,* $n_u = 7, n_p = 5$

4.5 Conclusion

A travers trois exemples concrets, d'application de la méthode de réduction de modèle, on illustre dans ce chapitre l'utilisation de celle-ci, pour le calcul de structures géométriquement disproportionnées (avec la poutre composite) mais également son extension à d'autres types d'analyses (étude du flambement et réponse visco-hyperélastique).

Ces exemples ouvrent donc la porte à des développements futurs, comme par exemple le cas des comportements à variables internes qui mérite certainement un travail de fond, dépassant largement le cadre de ce chapitre. Notamment pour le cas de la plasticité : en effet la localisation possible de la déformation, nécessite une réflexion sur le type de base de projection à utiliser. De même, pour les structures très élancées, comme la poutre composite où les effets de bords sont très localisés, l'utilisation de fonctions exponentielles dans l'approximation pourait être une piste de recherche.

Un certain nombre d'améliorations peuvent être menées à court terme, par exemple, le choix d'une base d'approximation et d'un ordre propre à chaque constituant du modèle devrait permettre une optimisation du temps de calcul.

Bibliographie

Baguet, S. [2001]. *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique.* Thèe de doctorat, Universitée d'Aix-Marseille II.

Bažant, Z. [2000]. Structural stability. *International Journal of Solids and Structures*, *37*, 55-67.

Burtscher, S., & Dorfmann, A. [2004]. Compression and shear tests of anisotropic high damping rubber bearings. *Engineering Structures*, *26*, 1979-1991.

Cochelin, B. [1994]. *Méthode asymptotiques-numériques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques.* Habilitation à diriger des recherches, Universitée de Metz.

Crisfield, M. [1997]. *Non-linear finite element analysis of solids and structures* (Vol. 2). Wiley.

Damil, N., & M., P.-F. [1990]. A new method to compute perturbed bifurcations : Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering and Sciences*, *28*, 943-957.

Delorme, D. [1997]. *Modélisation numérique du comportement mécanique de matériaux composites à matrice élastomérique.* Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

Felippa, C. A. [2001]. *Non linear finite element methods.* University of Colorado.

Magnusson, A., & Svensson, I. [1998]. Numerical treatment of complete load-deflection curves. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, *41*, 955-971.

Martinez, J. [2005]. *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élasmère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures.* Thèe de doctorat, Universitée d'Aix-Marseille II.

Méo, S. [2000]. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité.* Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

Riks, E. [2004]. Buckling. In E. Stein, R. De Borst, & T. J. R. Hughes (Eds.), *Encyclopedia of computational mechanics* (Vol. 2, p. 139-167). Wiley.

Thompson, J. [1982]. *Instabilities and catastrophes in science and engineering.* Wiley.

Conclusion

Ce travail de thèse aborde différents aspects ayant trait à la modélisation de structures à base d'élastomère, comme par exemple les lamifiés élastomère-métal. Dans la première partie de ce travail et à la suite d'une étude bibliographique, nous avons proposé une nouvelle méthode d'identification de loi de comportements hyperélastiques incompressibles. A l'aide de deux essais de caractérisation (traction et glissement) et en utilisant la propriété de polyconvexité, l'identification d'une loi de comportement respectant le critère d'éllipticité de LEGENDRE-HADAMARD peut se ramener à un problème de minimisation sous contraintes en inégalités. A partir de comparaisons avec des méthodes courrament utilisées, on illustre l'avantage de cette nouvelle stratégie, en terme de respect des critères de stabilité matérielle.

Ce travail préliminaire réalisé, nous avons introduit une méthode de réduction de modèles adaptée à la modélisation de structure géométriquement disproportionnée. Cette dernière se base sur une formulation en éléments-finis semi-analytiques. Pour des géométries élancées, les inconnues du problème ($\mathbf{u}$ et p dans le cas d'une formulation mixte) sont projetées sur une base de fonction continue dans la (ou les) direction(s) d'élancement. On peut donc condenser une ou plusieurs directions géométriques, réduisant ainsi la taille du problème à traiter.

Quatre types d'éléments finis réduits ont été proposés, chacun étant adapté à un type de structure, on a ainsi :

- des éléments réduits 2D-1D, qui permettent, par exemple, de traiter le cas des lamifiés élastomère-métal en déformation plane. A l'aide d'une base de projection polynomiale, on peut condenser, dans l'élément, la direction transverse du lamifié.
- des éléments réduits 3D-1D, adaptés aux lamifiés hexaédriques. Les deux directions transverses peuvent être condensées en utilisant une décomposition multiplicative suivant deux bases polynomiales.

- des éléments réduits 3D-1D pour des lamifiés à géométrie de révolution. Dans un repère cylindrique, on utilise une décomposition multiplicative suivant une base polynomiale (dans la direction r), et une base constituée par des séries de Fourier (fonctions de θ).
- et enfin, des éléments réduits 3D-2D pour des structures de type poutre ou plaque. La projection est réalisée dans la direction de l'élacement.

La validité de ces éléments est discutée dans ce travail, en utilisant des comparaisons avec des modèles de références préalablement établis. On montre ainsi, que l'on peut obtenir le comportement global et local d'un modèle éléments-finis standards avec ce type de modèle réduit. Le gain obtenu en terme de taille de modèle et temps de calcul est illustré pour chaque type d'élément réduit.

Enfin, trois exemples d'applications sont traités. Le premier illustre l'utilisation de la technique de réduction de modèles sur une pièce industrielle, préalablement étudiée dans deux thèses (avec d'autres types de méthodes et pour un comportement linéaire de l'élastomère). Le deuxième, montre que ces éléments peuvent être utilisés avec succès pour déterminer la charge critique de flambement de lamifiés élastomère-métal (en compression). En utilisant une méthode incrémentale - itérative de continuation, on peut en effet obtenir le mode de flambement et la réponse post-flambée d'un lamifié. Enfin le dernier exemple, présente une extension de la méthode aux comportements visco-hyperélastiques (sans variables internes), afin de déterminer la réponse sous chargement cyclique d'un lamifié.

L'ensemble des développements réalisés dans cette thèse ont été implémentés dans le code de calcul ZéBuLoN. En terme d'investissements cela représente une vingtaine de nouvelles classes crées et environ 9000 lignes de code. Ces développements numériques concernent ainsi les domaines suivants :

- la mise en oeuvre des éléments réduits (base de projection, opérateurs de déformations, fonctions d'interpolation, ...)
- l'implémentation de diverses loi de comportements hyperélastiques (modèles de RIVLIN & SAUNDERS, de GENT & THOMAS, de HART-SMITH), ou visco-hyperélastique (modèle de KELVIN-VOIGT)
- l'implémentation de diverses formes variationelles pour l'hyperélasticité quasi-incompressible (Lagrangien perturbé avec potentiel incompressible ou avec découplage additif de l'énergie) ou la visco-hyperélasticité quasi-incompressible (Lagrangien perturbé avec potentiel incompressible et schéma d'Euler explicite en temps)
- la méthode de continuation incrémentale-itérative avec un contrôle à longueur d'arc et détermination de la branche post-flambée.
- et enfin des objets de post-traitements (reconstruction de modèles réduits, calcul des réactions pour les modèles réduits, ...)

Suite aux résultats obtenus, on peut dégager un certain nombre de perspectives :

■ l'utilisation de base de projection et d'ordre d'approximation différent pour chaque constituant du modèle, pourrait permettre une optimisation du temps de calcul. Il faudrait ainsi automatiser la gestion des relations à imposer à la frontière des constituants, pour respecter la continuité des déplacements.

■ l'introduction de fonctions en exponentielles, décroissantes à partir du bord de la structure, dans la base de projection, devrait pouvoir minimiser le nombre de degrés de liberté nécessaires pour traduire les effets de bords. Par exemple dans le cas d'une réduction 2D-1D, on pourrait avoir :

$$\mathbf{u}(X,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}_i(Z)\,T_i(\xi) + \mathbf{u}_+(Z)\exp^{-(1-\xi)a} + \mathbf{u}_-(Z)\exp^{-(1+\xi)a}$$

$$p(X,Z) \approx \sum_{i=0}^{n_p} p_i(Z)\,T_i(\xi) + p_+(Z)\exp^{-(1-\xi)a} + p_-(Z)\exp^{-(1+\xi)a}$$

la difficulté d'une telle approximation provenant de l'identification du coefficient a, qui est lié physiquement à la longueur d'influence des effets de bords par rapport à la longueur d'élancement de la structure.

■ l'extension de la méthode de réduction de modèle à des comportements visco-hyper-élastiques à variables internes (type modèle de ZENER).

■ la mise en oeuvre d'une paramétrisation curviligne des directions projetées, pour adapter la méthode à des multi-couches sphériques (cf. figure 1).

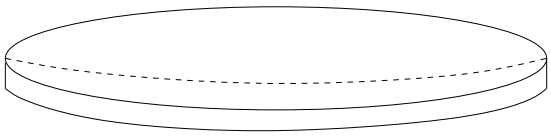


Figure 1 – *Lamelle sphérique*

ANNEXE

A Calcul des tenseurs d'élasticité

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}$

On part de l'égalité :

$$C_{im}C^{-1}_{mj} = \delta_{ij} \tag{A.1}$$

en dérivant par rapport à C_{kl}, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_{im}C^{-1}_{mj}}{\partial C_{kl}} = 0_{ijkl} \\ &\frac{\partial C_{im}}{\partial C_{kl}}C^{-1}_{mj} + C_{im}\frac{\partial C^{-1}_{mj}}{\partial C_{kl}} = 0_{ijkl} \\ &C_{im}\frac{\partial C^{-1}_{mj}}{\partial C_{kl}} = -\delta_{ik}\delta_{ml}C^{-1}_{mj} \end{aligned} \tag{A.2}$$

en multipliant les deux termes de l'égalité par C^{-1}_{pi} :

$$\begin{aligned} &C^{-1}_{pi}C_{im}\frac{\partial C^{-1}_{mj}}{\partial C_{kl}} = -C^{-1}_{pi}\delta_{ik}C^{-1}_{lj} \\ &\frac{\partial C^{-1}_{pj}}{\partial C_{kl}} = -C^{-1}_{pk}C^{-1}_{lj} \end{aligned} \tag{A.3}$$

En utilisant la symétrie de $\mathbf{C}$ on a :

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \tag{A.4}$$

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{F}^{-T}}{\partial \mathbf{F}}$

On part de l'égalité :

$$F_{im}F^{-1}_{mj} = \delta_{ij} \tag{A.5}$$

ou encore :

$$F^{-T}_{im}F^{T}_{mj} = \delta_{ij} \tag{A.6}$$

en dérivant par rapport à F_{kl}, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F^{-T}_{im}F^{T}_{mj}}{\partial F_{kl}} = 0_{ijkl} \\ &\frac{\partial F^{-T}_{im}}{\partial F_{kl}}F^{T}_{mj} + F^{-T}_{im}\frac{\partial F^{T}_{mj}}{\partial F_{kl}} = 0_{ijkl} \\ &F_{jm}\frac{\partial F^{-T}_{im}}{\partial F_{kl}} = -\delta_{jk}\delta_{ml}F^{-T}_{im} \end{aligned} \tag{A.7}$$

en multipliant les deux termes de l'égalité par F^{-1}_{pj} :

$$\begin{aligned} F^{-1}_{pj}F_{jm}\frac{\partial F^{-T}_{im}}{\partial F_{kl}} &= -F^{-1}_{pj}\delta_{jk}F^{-T}_{il} \\ \frac{\partial F^{-T}_{ip}}{\partial F_{kl}} &= -F^{-1}_{pk}F^{-T}_{il} \end{aligned} \tag{A.8}$$

ou encore :

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{-T}}{\partial \mathbf{F}} = -\mathbf{F}^{-T} \bigcirc \mathbf{F}^{-T} \tag{A.9}$$

Calcul de $\mathbb{C}_l$

■ *cas d'un potentiel incompressible*
En prenant $\psi = \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}))$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{li} &= \frac{\partial^2 \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = 4\frac{\partial^2 \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\ &= 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{ij}\partial C_{kl}} \\ &= 4\frac{\partial\left[(\psi_1 + \psi_2 I_1)\delta_{ij} - \psi_2 C_{ij}\right]}{\partial C_{kl}} \\ &= 4\big(\delta_{ij}(\psi_{11}\delta_{kl} + \psi_{12}(\delta_{kl}I_1 - C_{kl}) + \psi_{21}I_1\delta_{kl} + \psi_{22}I_1(\delta_{kl}I_1 - C_{kl}) + \psi_2\delta_{kl}) \\ &\quad -\psi_{21}C_{ij}\delta_{kl} - \psi_{22}(\delta_{kl}I_1 - C_{kl})C_{ij} - \psi_2\delta_{ik}\delta_{jl}\big) \\ &= 4\big((\psi_{11} + (\psi_{12} + \psi_{21})I_1 + \psi_{22}I_1^2 + \psi_2)\delta_{ij}\delta_{kl} - (\psi_{12} + I_1\psi_{22})\delta_{ij}C_{kl} - (\psi_{21} + I_1\psi_{22})C_{ij}\delta_{kl} \\ &\quad + \psi_{22}C_{ij}C_{kl} - \psi_2\delta_{ik}\delta_{jl}\big) \\ &= 4\big((\psi_{11} + (\psi_{12} + \psi_{21})I_1 + \psi_{22}I_1^2 + \psi_2)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} - (\psi_{12} + I_1\psi_{22})\mathbf{I}\otimes\mathbf{C} \\ &\quad -(\psi_{21} + I_1\psi_{22})\mathbf{C}\otimes\mathbf{I} + \psi_{22}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C} - \psi_2\mathbb{I}\big) \end{aligned} \tag{A.10}$$

■ *cas d'un potentiel compressible*
Si l'on a $\psi = \psi_{iso}(I_1(\overline{\mathbf{C}}), I_2(\overline{\mathbf{C}})) + \psi_{vol}(J)$

$$\mathbb{C}_{lc} = \frac{\partial^2 \psi_{iso}(I_1(\overline{\mathbf{C}}), I_2(\overline{\mathbf{C}}))}{\partial \mathbf{E}\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial^2 \psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{E}\partial \mathbf{E}} = 4\frac{\partial^2 \psi_{iso}(I_1(\overline{\mathbf{C}}), I_2(\overline{\mathbf{C}}))}{\partial \mathbf{C}\partial \mathbf{C}} + 4\frac{\partial^2 \psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{C}\partial \mathbf{C}} = 4\mathbb{C}_l^{iso} + 4\mathbb{C}_l^{vol} \tag{A.11}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_l^{iso} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{\mathbf{S}} : \mathbb{P}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{S}_{mn}}{\partial C_{kl}}\mathbb{P}_{mnij} + \overline{S}_{mn}\frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial C_{kl}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{S}_{mn}}{\partial \overline{C}_{op}}\frac{\partial \overline{C}_{op}}{\partial C_{kl}}\mathbb{P}_{mnij} + \overline{S}_{mn}\frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial C_{kl}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}^T : \overline{\mathbb{C}}_l : \mathbb{P} + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \tag{A.12}$$

Le tenseur $\overline{\mathbb{C}}_l$ est identique au tenseur $\mathbb{C}_{li}$ en remplaçant $\mathbf{C}$ par $\overline{\mathbf{C}}$. $\partial\mathbb{P}/\partial\mathbf{C}$ se calcul de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial C_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial C_{kl}}\left[J^{-2/3}\left(\delta_{mi}\delta_{nj}-\frac{1}{3}C_{mn}C^{-1}_{ij}\right)\right]\\ &= -\frac{2}{3}J^{-5/3}\frac{\partial J}{\partial C_{kl}}\left(\delta_{mi}\delta_{nj}-\frac{1}{3}C_{mn}C^{-1}_{ij}\right)-\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}C^{-1}_{ij}+C_{mn}\frac{\partial C^{-1}_{ij}}{\partial C_{kl}}\right)\\ &= -\frac{1}{3}J^{-2/3}C^{-1}_{kl}\left(\delta_{mi}\delta_{nj}-\frac{1}{3}C_{mn}C^{-1}_{ij}\right)-\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}C^{-1}_{ij}+C_{mn}\frac{\partial C^{-1}_{ij}}{\partial C_{kl}}\right)\end{aligned} \tag{A.13}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}:\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{C}} &= -\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\overline{S}_{ij}C^{-1}_{kl}-\frac{1}{3}\overline{S}_{mn}C_{mn}C^{-1}_{ij}C^{-1}_{kl}\right)-\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(C^{-1}_{ij}\overline{S}_{kl}+\overline{S}_{mn}C_{mn}\frac{\partial C^{-1}_{ij}}{\partial C_{kl}}\right)\\ &= -\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\overline{\mathbf{S}}\otimes\mathbf{C}^{-1}-\frac{1}{3}(\overline{\mathbf{S}}:\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)-\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\overline{\mathbf{S}}+(\overline{\mathbf{S}}:\mathbf{C})\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\right)\\ &= -\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\overline{\mathbf{S}}+\overline{\mathbf{S}}\otimes\mathbf{C}^{-1}+(\overline{\mathbf{S}}:\mathbf{C})\left(\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}-\frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\right)\\ &= \frac{J^{-2/3}}{3}(\overline{\mathbf{S}}:\mathbf{C})\left(\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}+\frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)-\frac{J^{-2/3}}{3}\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\overline{\mathbf{S}}+\overline{\mathbf{S}}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\end{aligned} \tag{A.14}$$

Le tenseur $\mathbb{C}^{vol}_l$ est calculé en prenant $\psi_{vol} = kG(J)$

$$\mathbb{C}^{vol}_l = \frac{\left(\partial\frac{1}{2}kJG'(J)\mathbf{C}^{-1}\right)}{\partial\mathbf{C}} = \frac{1}{4}kJ(G'(J)+JG''(J))\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}-\frac{1}{2}kJG'(J)\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1} \tag{A.15}$$

Calcul de $\mathbb{C}_m$

■ *cas d'un potentiel incompressible*
En prenant $\psi = \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}))$ on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_{mi} &= \frac{\partial^2 \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} \\
&= \frac{\partial \left[2(\psi_1 + \psi_2 I_1) F_{ij} - 2\psi_2 F_{ip} C_{pj} \right]}{\partial F_{kl}} \\
&= 2F_{ij}(2\psi_{11} F_{kl} + 2\psi_{12} F_{kp}(I_1 \delta_{pl} - C_{pl}) + 2\psi_{21} I_1 F_{kl} + 2\psi_{22} I_1 F_{kp}(I_1 \delta_{pl} - C_{pl}) + 2\psi_2 F_{kl}) \\
&\quad + 2(\psi_1 + \psi_2 I_1)\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\psi_{21} F_{ip} C_{pj} F_{kl} - 4\psi_{22} F_{km}(I_1 \delta_{ml} - C_{ml}) F_{ip} C_{pj} - 2\psi_2 \delta_{ik}\delta_{pl} C_{pj} \\
&\quad - 2\psi_2 F_{ip}(\delta_{pl} F_{kj} + \delta_{jl} F_{kp}) \\
&= 4(\psi_{11} + I_1(\psi_{12} + \psi_{21}) + I_1^2 \psi_{22} + \psi_2) F_{ij} F_{kl} - 4(\psi_{12} + \psi_{22} I_1) F_{ij} F_{kp} C_{pl} \\
&\quad + 2(\psi_1 + \psi_2 I_1)\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\psi_{21} F_{ip} C_{pj} F_{kl} - 4\psi_{22} I_1 F_{kl} F_{ip} C_{pj} + 4\psi_{22} F_{km} C_{ml} F_{ip} C_{pj} - 2\psi_2 \delta_{ik} C_{lj} \\
&\quad - 2\psi_2 (F_{il} F_{kj} + F_{ip} \delta_{jl} F_{kp}) \\
&= 4(\psi_{11} + I_1(\psi_{12} + \psi_{21}) + I_1^2 \psi_{22} + \psi_2) \mathbf{F} \otimes \mathbf{F} - 4(\psi_{12} + \psi_{22} I_1) \mathbf{F} \otimes (\mathbf{FC}) + 2(\psi_1 + \psi_2 I_1) \mathbb{I} \\
&\quad - 4(\psi_{12} + \psi_{22} I_1)(\mathbf{FC}) \otimes \mathbf{F} + 4\psi_{22} (\mathbf{FC}) \otimes (\mathbf{FC}) - 2\psi_2 \mathbf{I} \odot \mathbf{C} - 2\psi_2 \mathbf{F} \oslash \mathbf{F} - 2\psi_2 \mathbf{B} \odot \mathbf{I}
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

■ *cas d'un potentiel compressible*
Si l'on a $\psi = \psi_{iso}(I_1(\overline{\mathbf{C}}), I_2(\overline{\mathbf{C}})) + \psi_{vol}(J)$

$$
\mathbb{C}_{mc} = \frac{\partial^2 \psi_{iso}(I_1(\overline{\mathbf{C}}), I_2(\overline{\mathbf{C}}))}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} + \frac{\partial^2 \psi_{vol}(J)}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} = \mathbb{C}_m^{iso} + \mathbb{C}_m^{vol} \tag{A.17}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_m^{iso} &= \frac{\partial \overline{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \overline{\Pi}_{mn}}{\partial F_{kl}} \mathbb{P}_{mnij} + \overline{\Pi}_{mn} \frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial F_{kl}} \\
&= \frac{\partial \overline{\Pi}_{mn}}{\partial \overline{F}_{op}} \frac{\partial \overline{F}_{op}}{\partial F_{kl}} \mathbb{P}_{mnij} + \overline{F}_{mn} \frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial F_{kl}} \\
&= \mathbb{P}^T : \overline{\mathbb{C}}_m : \mathbb{P} + \overline{\mathbf{\Pi}} : \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{F}}
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Le tenseur $\overline{\mathbb{C}}_m$ est identique au tenseur $\mathbb{C}_{mi}$ en remplaçant $\mathbf{F}$ par $\overline{\mathbf{F}}$. $\partial\mathbb{P}/\partial\mathbf{F}$ se calcul de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{P}_{mnij}}{\partial F_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial F_{kl}}\left[J^{-1/3}\left(\delta_{mi}\delta_{nj} - \frac{1}{3}F_{mn}F^{-T}_{ij}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{3}J^{-4/3}\frac{\partial J}{\partial F_{kl}}\left(\delta_{mi}\delta_{nj} - \frac{1}{3}F_{mn}F^{-T}_{ij}\right) - \frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}F^{-T}_{ij} + F_{mn}\frac{\partial F^{-T}_{ij}}{\partial F_{kl}}\right) \\
&= -\frac{1}{3}J^{-1/3}F^{-T}_{kl}\left(\delta_{mi}\delta_{nj} - \frac{1}{3}F_{mn}F^{-T}_{ij}\right) - \frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}F^{-T}_{ij} + F_{mn}\frac{\partial F^{-T}_{ij}}{\partial F_{kl}}\right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{p_{ijkl}} &= -\frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\overline{\Pi}_{ij}F^{-T}_{kl} - \frac{1}{3}\overline{\Pi}_{mn}F_{mn}F^{-T}_{ij}F^{-T}_{kl}\right) - \frac{1}{3}J^{-1/3}\left(F^{-T}_{ij}\overline{\Pi}_{kl} + \overline{\Pi}_{mn}F_{mn}\frac{\partial F^{-T}_{ij}}{\partial F_{kl}}\right) \\
&= -\frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\overline{\mathbf{\Pi}}\otimes\mathbf{F}^{-T} - \frac{1}{3}(\overline{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T}\right) - \frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\overline{\mathbf{\Pi}} + (\overline{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{F})\frac{\partial\mathbf{F}^{-T}}{\partial\mathbf{F}}\right) \\
&= -\frac{1}{3}J^{-1/3}\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\overline{\mathbf{\Pi}} + \overline{\mathbf{\Pi}}\otimes\mathbf{F}^{-T} + (\overline{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{F})\left(\frac{\partial\mathbf{F}^{-T}}{\partial\mathbf{F}} - \frac{1}{3}\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T}\right)\right) \\
&= \frac{J^{-1/3}}{3}(\overline{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{F})\left(\mathbf{F}^{-T}\bigcirc\mathbf{F}^{-T} + \frac{1}{3}\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T}\right) - \frac{J^{-1/3}}{3}\left(\mathbf{F}^{-T}\otimes\overline{\mathbf{\Pi}} + \overline{\mathbf{\Pi}}\otimes\mathbf{F}^{-T}\right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Le tenseur $\mathbb{C}^{vol}_l$ est calculé en prenant $\psi_{vol} = kG(J)$

$$\mathbb{C}^{vol}_l = \frac{\left(\partial kJG'(J)\mathbf{F}^{-T}\right)}{\partial\mathbf{F}} = kJ(G'(J) + JG''(J))\mathbf{F}^{-T}\otimes\mathbf{F}^{-T} - kJG'(J)\mathbf{F}^{-T}\bigcirc\mathbf{F}^{-T} \tag{A.21}$$

ANNEXE

B Conditions aux limites et forces nodales pour les modèles réduits

Conditions aux limites en déplacements

L'application de conditions aux limites en déplacements du type traction-compression, flexion où cisaillement est fonction du type de réduction choisi et de la base de projection. On souhaite traiter avec tous ces modèles réduit les cas suivants :

– Dans le cas de lamelles en déformations planes, sur la surface supérieure ou inférieure, on cherche à appliquer une des conditions cinématiques suivantes (dans un repère cartésien) :

$$\mathbf{u}^n_{comp} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ V \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}^n_{cis} = \left\{ \begin{array}{c} U \\ 0 \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}^n_{flex} = \left\{ \begin{array}{c} X(\cos\alpha - 1) \\ X\sin\alpha \end{array} \right\}$$

– Dans le cas de lamelles tridimensionelles, sur la surface supérieure ou inférieure, on cherche à appliquer une des conditions cinématiques suivantes (dans un repère cartésien) :

$$\mathbf{u}^n_{comp} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ V \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}^n_{cis} = \left\{ \begin{array}{c} U \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}^n_{flex} = \left\{ \begin{array}{c} X(\cos\alpha - 1) \\ 0 \\ X\sin\alpha \end{array} \right\}$$

■ *Pour un élément-fini réduit 2D1D*

– La traction-compression dans la direction verticale Z, on a au noeud n :

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ VL_0(\xi) \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ V(L_0(\xi) + L_1(\xi)) \end{array} \right\}$$

– Le cisaillement s'écrit de la même manière que dans le cas précédent mais pour la première composante du vecteur déplacement.

– La flexion d'angle α au noeud n, en tenant compte du paramétrage $\xi = 2X/L$:

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{L}{2}L_1(\xi)(\cos\alpha - 1) \\ \frac{L}{2}L_1(\xi)\sin\alpha \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{L}{2}(L_1(\xi) - L_0(\xi))(\cos\alpha - 1) \\ \frac{L}{2}(L_1(\xi) - L_0(\xi))\sin\alpha \end{array} \right\}$$

■ *Pour un élément-fini réduit 3D1D*, on distingue les cas suivant

– La traction-compression dans la direction verticale Z, on a au noeud n :

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ WL_0(\xi)L_0(\eta) \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ W(L_0(\xi)L_0(\eta) + L_1(\xi)L_0(\eta) \\ +L_0(\xi)L_1(\eta) + L_1(\xi)L_1(\eta)) \end{array} \right\}$$

– Le cisaillement dans une des directions transverses X où Y, on obtient le même type d'expression que pour la traction-compression.

– La flexion d'angle α dans le plan (X,Z), on a au noeud n, avec le paramétrage $\xi = 2X/A$:

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{A}{2} L_1(\xi) L_0(\eta)(\cos\alpha - 1) \\ 0 \\ \frac{A}{2} L_1(\xi) L_0(\eta) \sin\alpha \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{A}{2}(-L_0(\xi)L_0(\eta) + L_1(\xi)L_0(\eta) \\ -L_0(\xi)L_1(\eta) + L_1(\xi)L_1(\eta))(\cos\alpha - 1) \\ 0 \\ \frac{A}{2}(-L_0(\xi)L_0(\eta) + L_1(\xi)L_0(\eta) \\ -L_0(\xi)L_1(\eta) + L_1(\xi)L_1(\eta)) \sin\alpha \end{array} \right\}$$

■ *Pour un élément-finit réduit 3D1D cylindrique*, on retrouve :

– La traction compression dans la direction vertical Z :

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ W L_0(\xi) F^s_0(\theta) \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ W(L_0(\xi) + L_1(\xi)) F^s_0(\theta) \end{array} \right\}$$

– Le cisaillement dans une des directions transverses X où Y, on a au noeud n dans un repère cylindrique :

$$\mathbf{u}^n_{cis} = \left\{ \begin{array}{c} U\cos\theta \\ -U\sin\theta \\ 0 \end{array} \right\}$$

où encore :

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} U L_0(\xi) F^s_1(\theta) \\ -U L_0(\xi) F^a_1(\theta) \\ 0 \end{array} \right\} \qquad \mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} U(L_0(\xi) + L_1(\xi)) F^s_1(\theta) \\ -U(L_0(\xi) + L_1(\xi)) F^a_1(\theta) \\ 0 \end{array} \right\}$$

– La flexion d'angle α dans le plan (X,Z), on a au noeud n dans un repère cylindrique :

$$\mathbf{u}^n_{flex} = \left\{ \begin{array}{c} X(\cos\alpha - 1)\cos\theta \\ -X(\cos\alpha - 1)\sin\theta \\ X\sin\alpha \end{array} \right\}$$

en utilisant $X = r\cos\theta$ et le paramétrage $r = R(\xi - 1)/2$ on obtient :

$$\mathbf{u}^n_{flex} = \left\{ \begin{array}{c} (R/2)(\xi - 1)\cos^2\theta(\cos\alpha - 1) \\ -(R/2)(\xi - 1)\cos\theta\sin\theta(\cos\alpha - 1) \\ (R/2)(\xi - 1)\cos\theta\sin\alpha \end{array} \right\}$$

. ce qui finalement nous donne :

$$\mathbf{u}^n_{Legendre} = \left\{ \begin{array}{c} (R/4)(L_1(\xi) - L_0(\xi))(F^s_0(\theta) + F^s_2(\theta))(\cos\alpha - 1) \\ -(R/4)(L_1(\xi) - L_0(\xi)) F^a_2(\theta)(\cos\alpha - 1) \\ (R/2)(L_1(\xi) - L_0(\xi)) F^s_1(\theta)\sin\alpha \end{array} \right\}$$

.

$$\mathbf{u}^n_{Bulles} = \left\{ \begin{array}{c} (R/2) L_0(\xi)(F^s_0(\theta) + F^s_2(\theta))(\cos\alpha - 1) \\ -(R/2) L_0(\xi) F^a_2(\theta)(\cos\alpha - 1) \\ R L_0(\xi) F^s_1(\theta)\sin\alpha \end{array} \right\}$$

.

Remarque B.3
L'axe de révolution de la structure nécessite de prendre en compte les conditions suivantes : à R=0, on doit avoir U_x,U_y,U_z indépendant de θ avec $U_x = U_r\cos\theta - U_\theta\sin\theta$, $U_y = U_r\sin\theta + U_\theta\cos\theta$. Si l'on décompose les champs U_r, U_θ et U_z en série de FOURIER *on obtient avec deux harmoniques :*

$$U_x = \frac{1}{2}(U_{r1} - U_{\theta 1}) + U_{r0}\cos\theta + \frac{1}{2}(U_{r1} + U_{\theta 1})\cos 2\theta$$
$$U_y = U_{r0}\sin\theta + \frac{1}{2}(U_{r1} + U_{\theta 1})\sin 2\theta$$
$$U_z = U_{z0} + U_{z1}\cos\theta$$

ce qui impose $U_{r0} = 0$, $U_{r1} + U_{\theta 1} = 0$, $U_{z1} = 0$ ❑

Pour respecter les conditions de la remarque précédente dans le cas de la décomposition 3D1D cylindrique, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=0}^{n_u} L_i(-1)U_{r\,ij} = 0 \quad \text{pour } j = 0 \text{ et } j > 2 \\ \sum_{i=0}^{n_u} L_i(-1)U_{\theta\,ij} = 0 \quad \text{pour } j > 2 \\ \sum_{i=0}^{n_u} L_i(-1)U_{Z\,ij} = 0 \quad \text{pour } j > 1 \end{array} \right\}$$

et :

$$\sum_{i=0}^{n_u} L_i(-1)U_{r\,i1} + \sum_{i=0}^{n_u} L_i(-1)U_{\theta\,i1} = 0$$

Ce qui revient à imposer des relations linéaires entre degrés de libertés. L'application des ces conditions avec la base de fonction bulles est plus directe puisqu'il y a un seul terme non nul en $\xi = -1$

■ *Pour une poutre tridimensionnelle (réduction 3D2D)*, avec une base de fonction bulles l'application de conditions limites sur les sections extrêmes se réalise de la même manière que pour un modèle éléments-finis classique. En effet seuls les deux premiers termes de la projection sont différents de zéro en ces sections.

Calcul des forces nodales

Pour calculer l'effort de réaction, dual d'un déplacement, on a besoin des forces nodales équivalentes. Pour des éléments isoparamétriques standards, les forces nodales sont exactement égales aux réactions nodales. Dans le cas des éléments finis-réduits (qui ne sont pas isoparamétriques), ont doit utiliser une matrice de passage pour calculer ces forces nodales.

En écrivant le travail élémentaire virtuel des efforts extérieurs sur le contour $\partial\Omega_u \cap \Omega_e$, on obtient :

– Au noeud n dans le cas d'une réduction 2D-1D ou 3D-2D :

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=0}^{n_u} T_i(\xi)\delta u_i^n \right) \left(\sum_{j=0}^{n_u} T_j(\xi) f_j^n \right) d\xi = \sum_{i=0}^{n_u} \delta u_i^n r_i^n \qquad \text{(B.1)}$$

connaissant les réactions au noeuds n (notée r_i^n), on cherche les forces nodales équivalentes (les f_i^n) à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} r_0^n \\ r_1^n \\ \vdots \\ r_{n_u}^n \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc} \int_{-1}^{1} T_0(\xi)T_0(\xi)d\xi & \int_{-1}^{1} T_0(\xi)T_1(\xi)d\xi & \cdots & \int_{-1}^{1} T_0(\xi)T_{n_u}(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{1} T_1(\xi)T_0(\xi)d\xi & \int_{-1}^{1} T_1(\xi)T_1(\xi)d\xi & \cdots & \int_{-1}^{1} T_1(\xi)T_{n_u}(\xi)d\xi \\ \vdots & & & \\ \int_{-1}^{1} T_{n_u}(\xi)T_0(\xi)d\xi & \int_{-1}^{1} T_{n_u}(\xi)T_1(\xi)d\xi & \cdots & \int_{-1}^{1} T_{n_u}(\xi)T_{n_u}(\xi)d\xi \end{array}\right] = \left\{\begin{array}{c} f_0^n \\ f_1^n \\ \vdots \\ f_{n_u}^n \end{array}\right\} \tag{B.2}$$

on peut donc calculer les forces nodales en inversant la matrice de passage : $\{f^n\} = [\mathbf{P}]^{-1}\{r^n\}$.

Si l'on utilise une base de LEGENDRE la condition d'orthogonalité nous donne une forme particulièrement facile à inverser :

$$\mathbf{P}_{Legendre} = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{2n_u+1} \end{array}\right]$$

pour la base polynomiale de fonctions bulles, on a (pour $n_u = 6$) :

$$\mathbf{P}_{Poly} = \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{(}6) & \frac{1}{30}\sqrt{10} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{(}6) & \frac{1}{30}\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{(}6) & -\frac{1}{6}\sqrt{(}6) & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{105}\sqrt{21} & 0 & 0 \\ \frac{1}{30}\sqrt{(}10) & \frac{1}{30}\sqrt{(}10) & 0 & \frac{2}{21} & 0 & -\frac{1}{105}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{105}\sqrt{21} & 0 & \frac{2}{45} & 0 & -\frac{1}{693}\sqrt{77} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{105}\sqrt{5} & 0 & \frac{3}{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{693}\sqrt{77} & 0 & \frac{2}{117} \end{array}\right]$$

hormis le premier bloc de 4x4 termes, la matrice de passage est tri-diagonale, les termes de chaque diagonale étant calculés avec les formules de quasi-orthogonalités (3.24).

– Au noeud n dans le cas d'une réduction 3D-1D pour des structures planes :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{i,j=0}^{n_u} T_i(\xi)T_j(\eta)\delta u_{ij}^n\right)\left(\sum_{k,m=0}^{n_u} T_k(\xi)T_m(\eta)f_{km}^n\right)d\xi d\eta = \sum_{i,j=0}^{n_u}\delta u_{ij}^n r_{ij}^n \tag{B.3}$$

la matrice de passage $\mathbf{P}_{Legendre}$ est dans ce cas définit par :

$$\mathbf{P}_{Legendre} = \left[\begin{array}{cccc} 2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{2n_u+1}^2 \end{array}\right]$$

Pour la base polynomiale de fonctions bulles, il s'agit d'une combinaison des termes précédents, par exemple pour $n_u = 3$ on obtient :

$$\mathbf{P}_{Poly} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{2}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{4}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{18}\sqrt{6} & -\frac{1}{9}\sqrt{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} & -\frac{1}{15}\sqrt{6} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

– Au noeud n dans le cas d'une réduction 3D-1D pour des structures à géométrie de révolution :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{fu}} T_i(\xi)cos(j\theta)\delta u^n_{r_{ij}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n_u}\sum_{m=0}^{n_{fu}} T_k(\xi)cos(m\theta) f^n_{r_{km}}\right)d\xi d\theta &= \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{fu}} \delta u^n_{r_{ij}} r^n_{r_{ij}} \\
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=1}^{n_{fu}} T_i(\xi)sin(j\theta)\delta u^n_{\theta_{ij}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n_u}\sum_{m=1}^{n_{fu}} T_k(\xi)sin(m\theta) f^n_{\theta_{km}}\right)d\xi d\theta &= \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=1}^{n_{fu}} \delta u^n_{\theta_{ij}} r^n_{\theta_{ij}} \\
\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{fu}} T_i(\xi)cos(j\theta)\delta u^n_{z_{ij}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n_u}\sum_{m=0}^{n_{fu}} T_k(\xi)cos(m\theta) f^n_{z_{km}}\right)d\xi d\theta &= \sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_{fu}} \delta u^n_{z_{ij}} r^n_{z_{ij}}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne une matrice de passage pour les harmoniques en consinus définit par (dans le cas $n_u = 3$, $n_{fu} = 3$) :

$$\mathbf{P}_{Legendre} = \begin{bmatrix} 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\pi \end{bmatrix}$$

et pour les termes en sinus :

$$\mathbf{P}_{Legendre} = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\pi \end{bmatrix}$$

dans le cas d'une base de fonctions bulles on a, pour les termes en cosinus (dans le cas $n_u = 3$, $n_{fu} = 3$) :

$$\mathbf{P}_{Poly} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{3}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi \\ \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{4}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{3}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi \\ \frac{-1}{3}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{3}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{4}{5}\pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{2}{5}\pi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & 0 & \frac{2}{5}\pi \end{bmatrix}$$

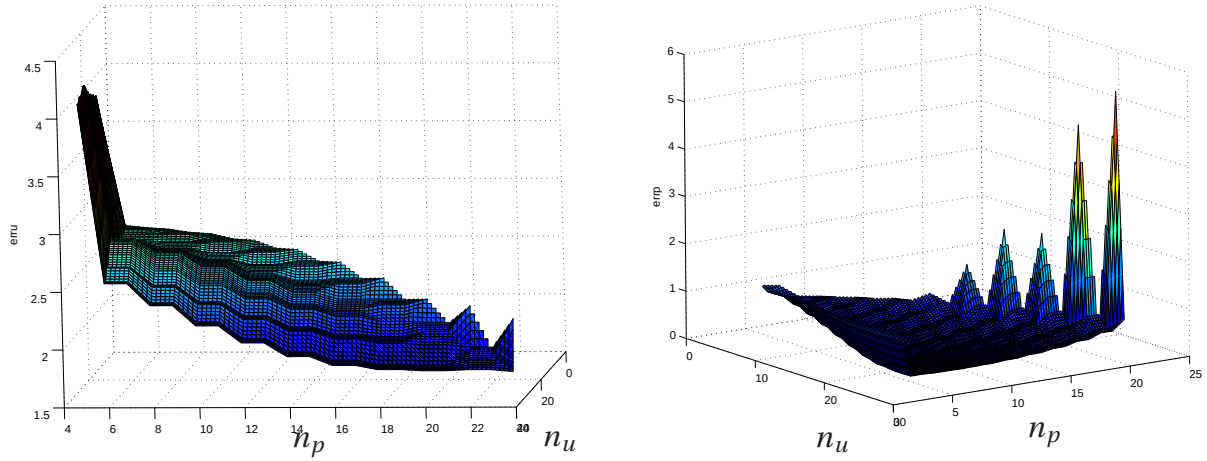
pour les termes en sinus :

$$\mathbf{P}_{Poly} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\pi & 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi \\ \frac{1}{3}\pi & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\pi & 0 & \frac{2}{3}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi \\ \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & \frac{2}{5}\pi & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & \frac{-1}{6}\sqrt{6}\pi & 0 & \frac{2}{5}\pi \end{bmatrix}$$

ANNEXE

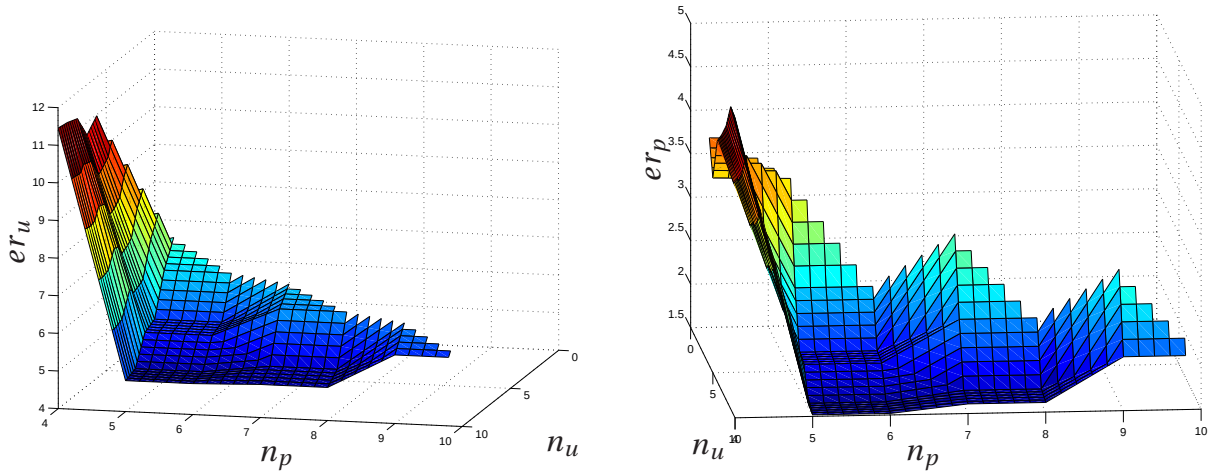
C

Évolution de er_u et er_p en fonction des ordres de troncature n_u et n_p



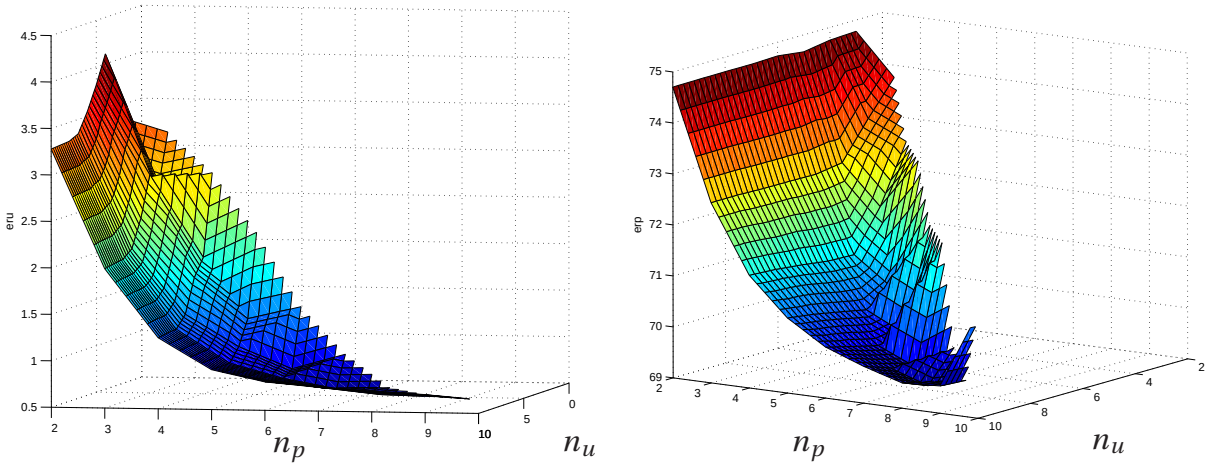
(a) Évolution de er_u (b) Évolution de er_p

Figure C.1 – *Test de compression, modèle 2D1D*



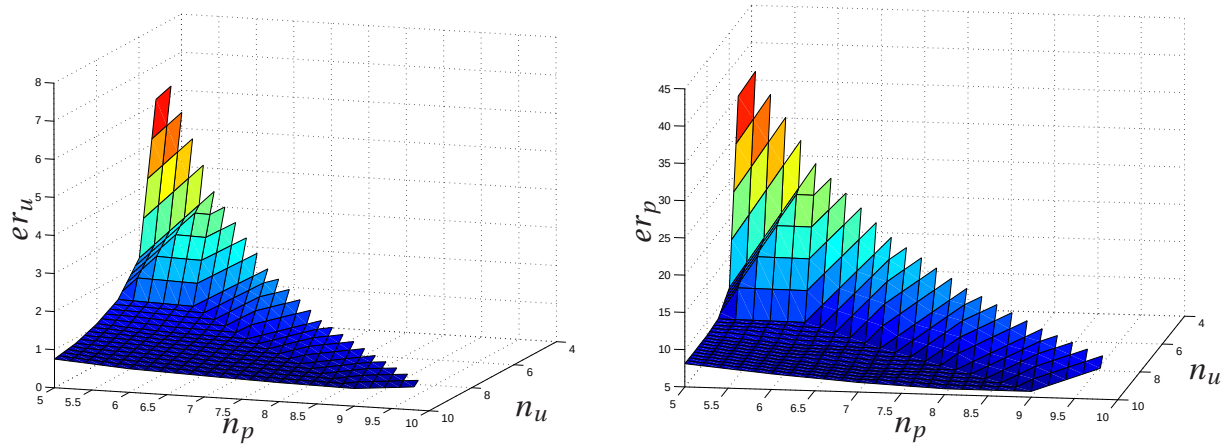
(a) Évolution de er_u (b) Évolution de er_p

Figure C.2 – *Test de compression, modèle 3D1D*



(a) Évolution de er_u (b) Évolution de er_u

Figure C.3 – *Test de cisaillement, modèle 3D1D cylindrique*

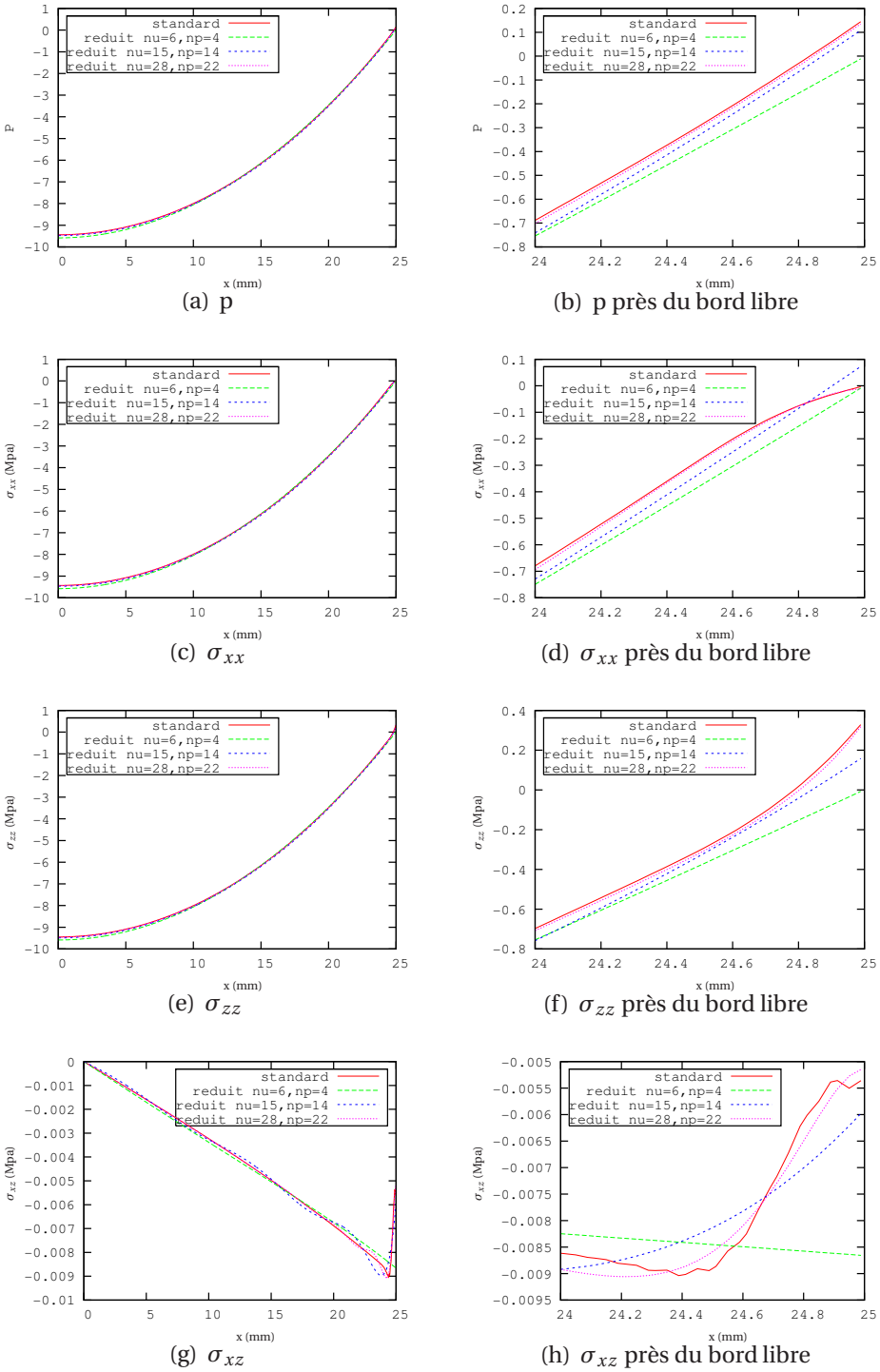


(a) Évolution de er_u (b) Évolution de er_p

Figure C.4 – *Test de traction, modèle 3D2D*

ANNEXE

D Comparaison locale des modèles réduits et standards



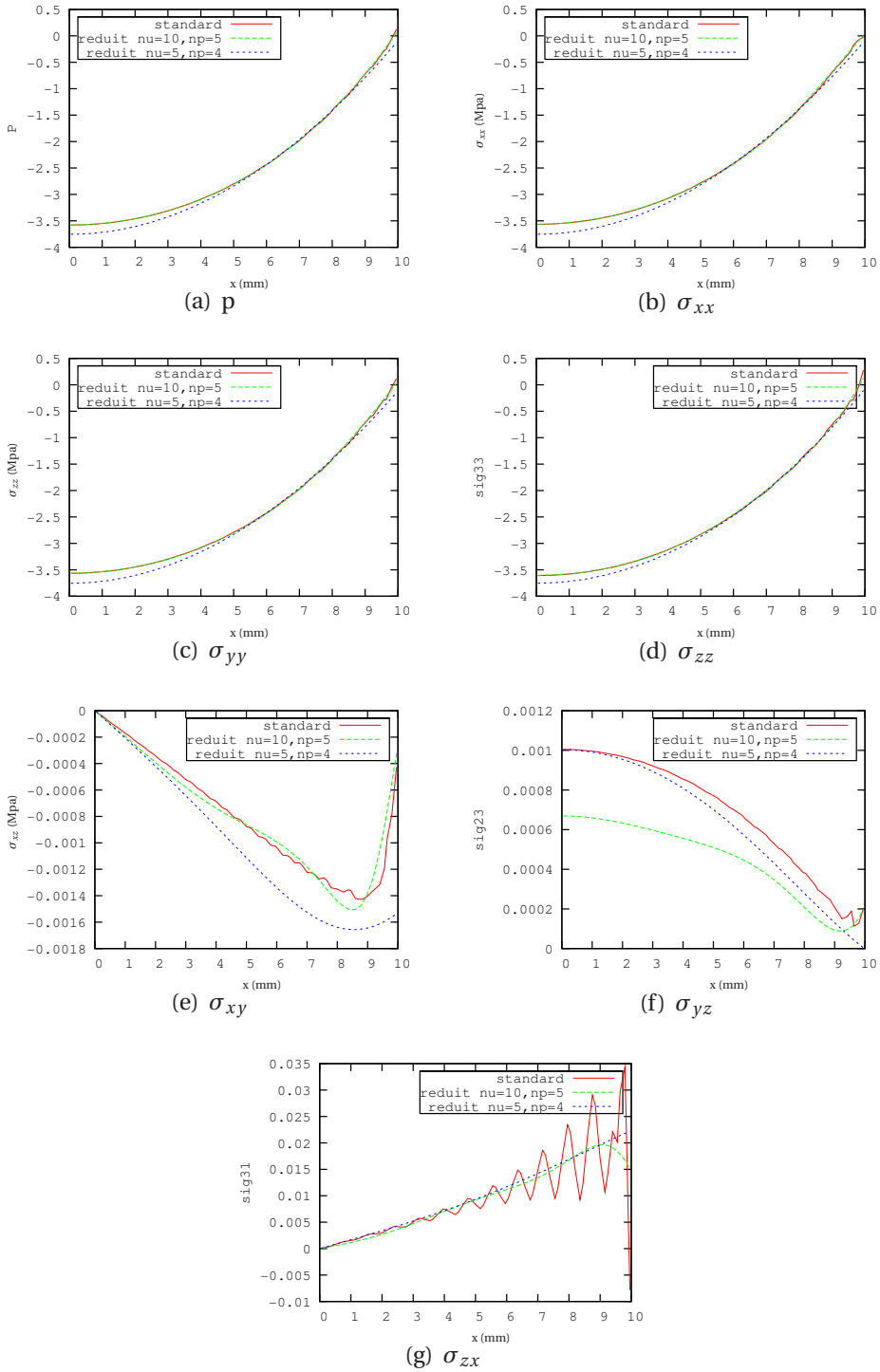
(a) p (b) p près du bord libre

(c) σ_{xx} (d) σ_{xx} près du bord libre

(e) σ_{zz} (f) σ_{zz} près du bord libre

(g) σ_{xz} (h) σ_{xz} près du bord libre

Figure D.1 – *Évolution du champ de contrainte pour une compression de* 1.5% *sur une lamelle en déformation plane à* $Z = 0.51e$ *(modèle 2D1D)*



(a) p (b) σ_{xx}

(c) σ_{yy} (d) σ_{zz}

(e) σ_{xy} (f) σ_{yz}

(g) σ_{zx}

Figure D.2 – *Évolution du champ de contrainte pour une compression de* 2.5% *sur une lamelle tridimensionnelle à* $Z = 0.47e$ *et* $Y = 0.06A$ *(modèle 3D1D)*

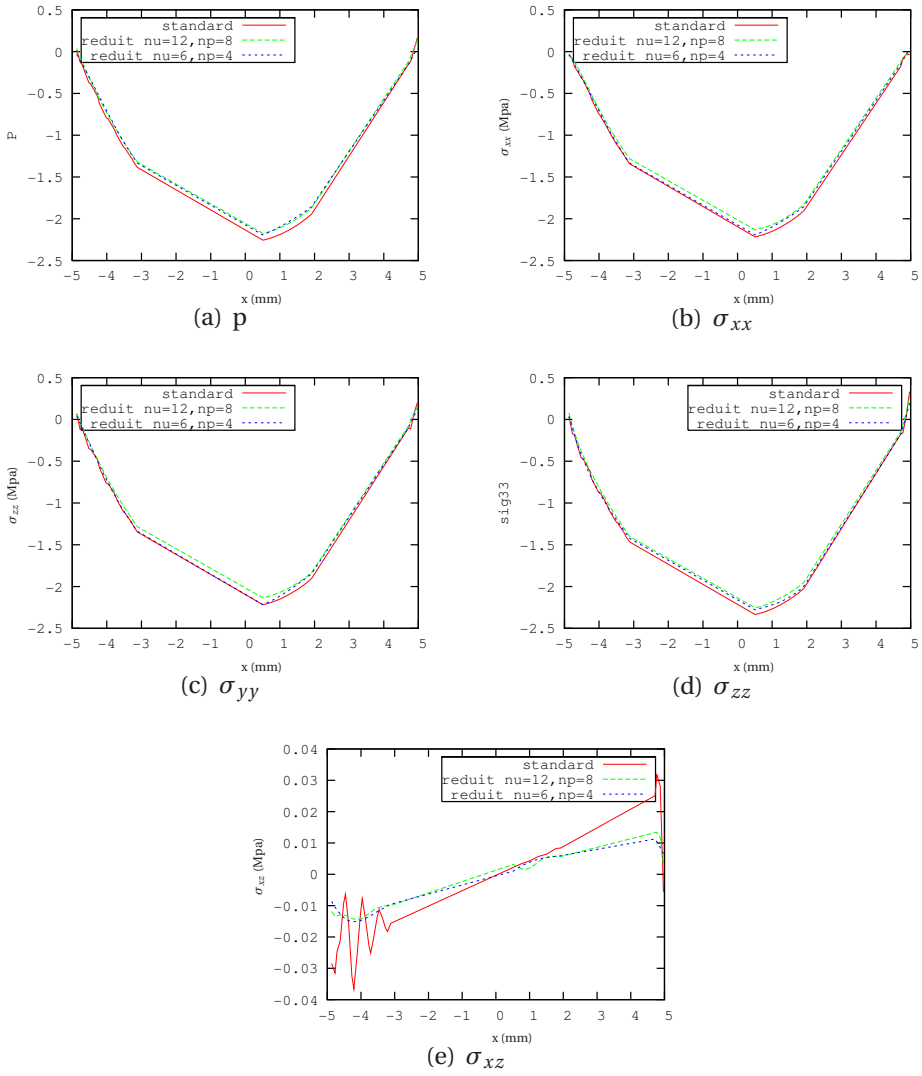


Figure D.3 – *Évolution du champ de contrainte pour une compression de 7% sur une lamelle tridimensionnelle à $Z = 0.47e$ et $Y = 0.027$ (modèle 3D1D cylindrique avec 2 modes de Fourier)*

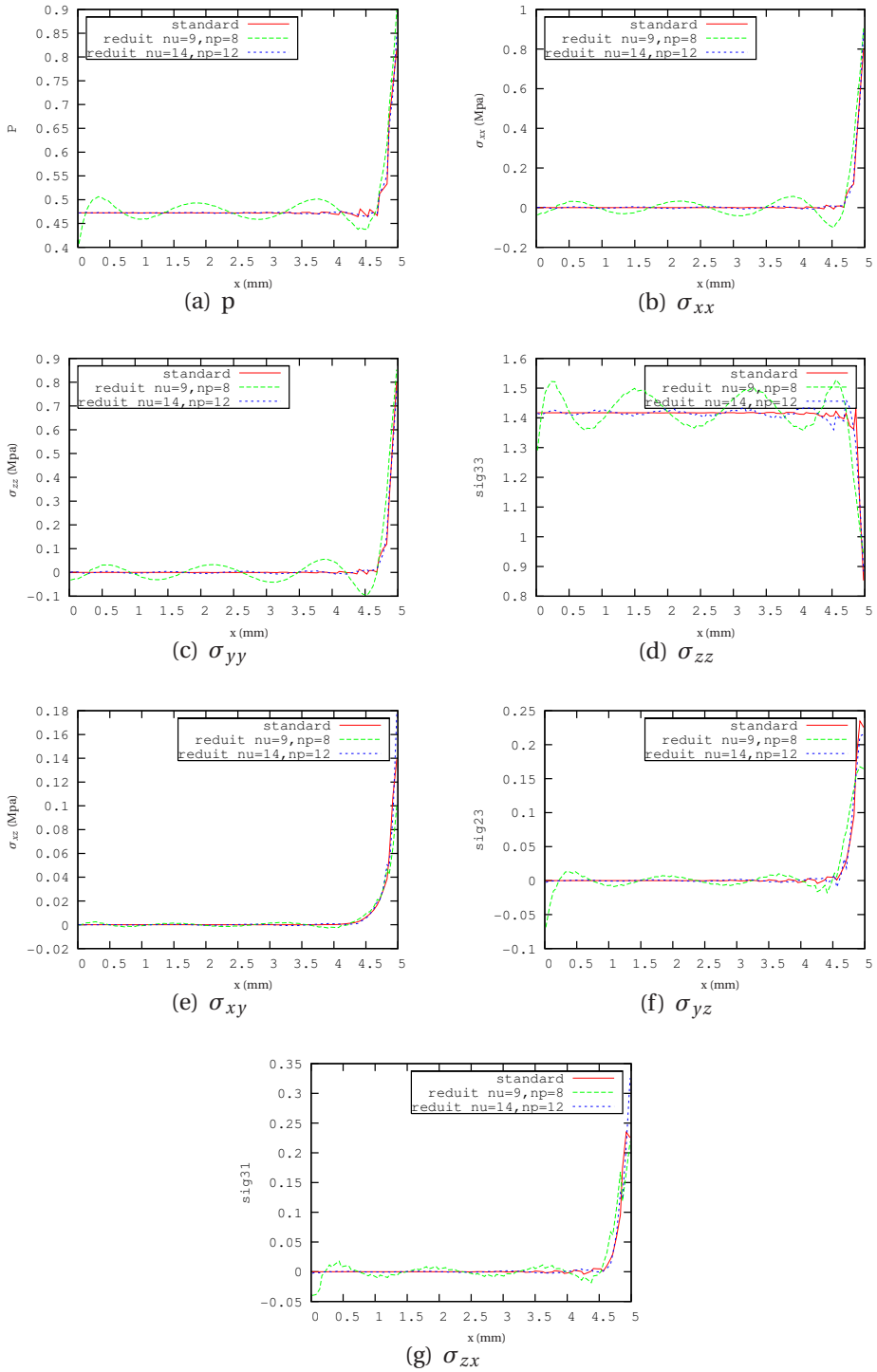


Figure D.4 – *Évolution du champ de contrainte pour une traction de* 80% *sur une poutre tridimensionnelle à* $Y = 0.67e$ *et* $Z = 0.67$ *(modèle 3D2D)*

Index des auteurs

Abeyaratne, R., 32, 43
Agelet De Saracibar, C., 84
Aksel, N., 10, 44
Andrade Pires, F. M., 56, 83
Au, F., 93, 137
Auricchio, F., 74, 83
Aurichio, F., 49, 50, 72, 83

Babuška, I., 73, 84
Baguet, S., 145, 157
Ball, J. M., 33, 43
Balzani, D., 46
Barenblatt, G. I., 5, 25, 43
Bathe, K. J., 51, 72, 73, 84, 85
Batoz, J. L., 66, 84
Bažant, Z., 90, 136, 145, 157
Beatty, M. F., 12, 24, 43
Becker, E., 92, 138
Beghini, A., 90, 136
Benzi, M., 58, 84
Besson, J., 84
Bijelonja, I., 51, 84
Bonnet, J., 56, 84
Bosi, M., 30, 43
Boukamel, A., 92, 136, 138
Brezzi, F., 83
Brieul, M., 44
Brink, U., 116, 136
Burton, A. J., 56, 84
Burtscher, S., 153, 157

Cailletaud, G., 84
Cervera, M., 84
Chang, C.-H., 90, 137
Chen, J. S., 51, 60, 61, 84
Cheung, Y., 93, 137, 138
Chiou, J., 90, 137
Chiumenti, M., 74, 84
Ciarlet, P. G., 33, 35, 44
Cochelin, B., 138, 147, 157
Criscione, J. C., 9, 11, 14, 44
Crisfield, M., 147, 149, 157
Crisfield, M. A., 66, 73, 84
Cugnon, F., 98, 137
Currie, P., 36, 44

Débordes, O., 136, 138
Damil, N., 147, 157
Da Veiga, L. Beirão, 83
De, S., 51, 84
De La Cuesta Padilla, J. L., 83
Delfino, A., 16, 44
Delorme, D., 96, 137, 141, 157

Demirdzic, I., 84
DeSimone, A., 33, 44
De Souza Neto, E. A., 83
Devries, F., 91, 137
Dhatt, G., 66, 84, 102, 137
Diani, J., 11, 44
Dolzmann, G., 33, 44
Dorfmann, A., 153, 157
Douglas, A. S., 44
Douglas, S. D., 44
Duan, W., 84
Dumontet, H., 91, 137
Duster, A., 92, 137

Felippa, C. A., 55, 84, 145, 157
Foerch, R., 75, 84
Fu, Y. B., 5, 44

Göktepe, S., 24, 45
Gadala, M. S., 56, 84
Gasser, T. C., 44
Gharzeddine, F., 74, 84
Glowinski, R., 62, 63, 65, 84, 85
Göktepe, S., 45
Golub, G. H., 84
Gosselet, P., 91, 137
Govindjee, S., 46, 85

Han, W., 60, 61, 84
Hartmann, S., 18, 35, 36, 39, 44, 75, 85, 137
Herrmann, L. R., 50, 85
Holzapfel, G. A., 5, 20, 29, 44, 54, 85
Hsueh, S.-J., 90, 138
Hughes, T. J. R., 54, 66, 85
Humphrey, J. D., 44
Hunter, W. C., 44
Hwang, J., 90, 137

Ibrahimbegovic, A., 74, 84
Iizuka, M., 90, 137
Itskov, M., 10, 44

Jazzar, F., 136
Jazzar, M., 29, 36, 44
Jiang, C., 93, 137
Joseph, D. D., 5, 25, 43

Kawabata, S., 14, 44
Kawai, H., 14, 44
Kelly, J., 90, 137
Kelly, J. M., 90, 138
Klüppel, M., 24, 44
Knowles, J. K., 32, 43
Kong, J., 93, 137
Koo, G., 90, 137
Küssner, M., 85

Léné, F., 91, 138
Ladevèze, P., 116, 137
Lahellec, N., 16, 24, 45
Lambert-Diani, J., 14, 16, 36, 45
Lanzo, A. D., 90, 137
Leblond, J. B., 32, 45
Lee, J., 137
Lejeunes, S., 90, 92, 137, 138
Le Tallec, P., 62, 63, 65, 84, 85
Li, Y., 138
Liesen, J., 84
Lovadina, C., 83
Lulei, F., 45

M., P.-F., 147, 157
Méo, S., 91, 96, 138, 141, 154, 158
Magnusson, A., 149, 157
Maker, B. N., 46, 85
Malkus, D. S., 54, 66, 85
Martinez, J., 154, 157
Marusak, R., 92, 138
McCulloch, A. D., 44
Meister, J. J., 44
Menzel, A., 11, 45
Miehe, C., 18, 24, 45, 65, 74, 85
Mielke, A., 34, 45
Moës, N., 116, 137
Mooney, M., 13, 15, 45
Moore, J. E., 44
Moreau, C., 20, 45
Morrey, C. B., 33, 45
Muzaferija, S., 84

Narasimhan, R., 73, 84
Neff, P., 18, 35, 44, 46, 75, 85
Norris, V. C., 73, 84

Ogden, R. W., 5, 36, 44, 45
Ohtori, Y., 137

Pan, C., 51, 84
Pantuso, D., 72, 85
Papoulia, K. D., 66, 85
Parker, D. F., 51, 85
Pivlin, P., 84
Podio-Guidugli, D., 30, 45
Ponte Castañeda, P., 24, 45

Rank, E., 137
Reali, A., 83
Reddy, B. D., 85
Reese, S., 22, 45, 51, 72, 85
Rey, C., 14, 16, 36, 45, 91, 138
Rezgui, A., 44
Riks, E., 147, 158
Rivlin, R. S., 11, 14, 15, 31, 35, 36, 45, 46, 75, 85
Rüter, M., 60, 85

Saccomandi, G., 30, 45, 46
Salvatori, M. C., 30, 43
Saunders, D. W., 14, 35, 36, 45, 75, 85
Sawyers, K. N., 15, 45
Schröder, J., 20, 46
Sgura, I., 45
Shariff, M. H. B. M., 51, 85
Shramm, J., 24, 44
Sidoroff, F., 5, 8, 32, 46
Smith, G. F., 11, 46
Spencer, A. J. M., 9, 46
Steigmann, D. J., 34–36, 46
Stein, E., 60, 85, 116, 136
Steinmann, P., 11, 45
Stergiopulos, N., 44
Svensson, I., 149, 157
Sweeney, J., 21, 46

Taylor, R., 97, 138
Taylor, R. L., 49, 66, 71, 74, 85, 86
Thompson, J., 145, 158
Tiberio, E., 24, 45
Tomassetti, G., 30, 45
Touzot, G., 102, 137
Tsai, H.-C., 90, 138

Vacherand, J. M., 44
Valverde, Q., 84

Ward, I. M., 21, 46
Warne, D. P., 30, 46
Warne, P. G., 30, 46
Weiss, J. A., 20, 46, 65, 85
Wriggers, P., 72, 85
Wu, C. T., 51, 84

Yoo, B., 137

Zheng, Q. S., 9, 46
Zhong, W., 93, 138
Zienkiewicz, O., 97, 138
Zienkiewicz, O. C., 66, 71, 74, 85, 86
Zoppitelli, E., 138

Résumé : Dans le cadre d'une collaboration avec la société Eurocopter, nous avons développé une technique de réduction de modèles pour la modélisation de structures lamifiées élastomère-métal. Nous avons réalisé des éléments finis "réduits" à partir d'une formulation variationnelle pour des problèmes d'équilibre hyperélastiques quasi-incompressibles. Ces éléments permettent via un enrichissement des champs inconnus (cinématique et pression) de condenser une ou plusieurs directions géométriques, réduisant ainsi la dimension (et donc la taille) du problème à résoudre.
A partir de tests numériques de validations (réalisés comparativement à des modèles de référence), on démontre la fiabilité ainsi que la performance de la méthode mise en oeuvre, que ce soit en terme de comportement global (raideurs effectives, efforts résultants) aussi bien qu'en terme de comportement local (champ de contraintes, ...) pour peu que l'enrichissement de l'approximation soit suffisant.
En guise d'applications, nous avons tout d'abord couplé cette technique de réduction avec une méthode de continuation, afin d'évaluer la limite de stabilité de structures lamifiées élastomère-métal (utilisées pour des applications aéronautiques : butées de pales d'hélicoptères). Puis nous avons réalisé une extension de cette méthode au cas d'un comportement dissipatif de type Kelvin-Voigt visco-hyperélastique. Enfin, nous l'avons utilisé pour analyser la réponse d'une structure poutre à section composite (élastomère et unidirectionels de verre ou de carbone).

Mots clefs : Mots Clés : hyperélasticité, grandes-déformations, incompressibilité, éléments-finis, réduction de modèles, enrichissement

Abstract : In collaboration with Eurocopter, we have developed a reduction model strategy to the simulation of laminated rubber-bearings. In the context of a varational formulation for nearly incompressible hyperelastic bodies, we have carried out reduced finite elements. *Via* an enrichment of the unknown fields, we condensed the direction of length and thus reducing the computing size (and therefore the computing time).
From the results of numerical tests (compared to the numerical response of models of reference) we have illustrated the reliability and the performances of the proposed method. These comparisons are done both on the global response (effective stiffness, resulting loads) and the local response (stress fields, ...).
As an application, we have first used this method together with a continuation strategy to study the structural stability of laminated bearing structures. Then we have realized an extension of this method for dissipative materials (visco-hyperelastic) with a Kelvin-Voigt model. Finally, we have analysed the response of a composite beam (elastomer and glass or carbon unidirectional fibers).

Keywords : hyperelasticity, finite strain, finite element, model reduction, enrichment