



Optimisation des méthodes de calculs d'écoulements tourbillonnaires instationnaires

Frédéric Hauville

► To cite this version:

Frédéric Hauville. Optimisation des méthodes de calculs d'écoulements tourbillonnaires instationnaires. Modélisation et simulation. Université du Havre, 1996. Français. NNT : . tel-00125000

HAL Id: tel-00125000

<https://theses.hal.science/tel-00125000>

Submitted on 17 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE
présentée
pour obtenir
Le GRADE de DOCTEUR en SCIENCES
de L'UNIVERSITÉ DU HAVRE
par

Frédéric Hauville

Optimisation des méthodes de calculs
d'écoulements tourbillonnaires
instationnaires

Soutenue le 12 janvier 1996
devant le jury composé de :

Arthuros	Zervos	Président
André	Giovannini	Rapporteur
Spyridon	Voutsinas	Rapporteur
Olivier	Daube	
Alain	Hemon	
Serge	Huberson	

Il est d'usage de se lancer dans un exercice de style que sont les “remerciements” afin de souligner la patience et la gentillesse des nombreuses personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thèse, mais également celles qui m'ont supporté durant ces années. L'exercice est d'autant plus difficile que beaucoup de gens s'y sont lancés et qu'il devient dur d'être original...

Mes remerciements s'adressent donc à :

- JFL, pour m'avoir débauché un jour de régate afin de m'entraîner dans cette aventure.
- Serge, pour avoir réussi à me faire passer cette thèse.
- Michel, Serge et Jacques, pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire (L.M.F., G.E.M.H., La.M.E.).
- Alain, André, Arthouros, Olivier, Serge et Spyros, pour avoir accepté d'être membre de mon jury.
- Alain, pour avoir relu très efficacement ma thèse X fois en ne m'ayant adressé que des cartons jaune
- Cyrille, pour m'avoir appris à faire travailler plusieurs stations à la fois avec P.V.M.
- Benoît, Coste et Yann, pour qui l'anglais est une “vraie” deuxième langue.
- Jérôme, pour m'avoir aidé dans mes débuts d'enseignant.
- Benoît, pour sa disponibilité face à nos petits problèmes informatiques.
- Bruno, pour ses barbecues.
- Benoît, Bernard, Cyrille (2), Didier, Elie, Jojo, Olivier, Patrick, Yann,... qui m'ont supporté dans la salle informatique.
- Yann, pour ce qu'on a partagé.
- Jean-Pierre et Sabine qui se demandent encore ce que j'ai fait pendant ces années.
- Marie, Pénélope et Séraphine, pour m'avoir souvent supporté et toujours soutenu pendant que je jouais avec mes machines...

Table des matières

Introduction	12
I Les outils	15
1 La méthode particulière	17
1.1 Introduction	17
1.2 Le problème continu	19
1.2.1 Décomposition du champ de vitesse	20
1.2.2 Condition limite sur l'obstacle	23
1.2.3 Description lagrangienne de l'écoulement	24
1.2.4 Emission tourbillonnaire	25
1.2.5 Calcul de la pression	26
1.3 Le problème discret	26
1.3.1 Résolution sur le corps	26
1.3.2 Emission particulière	29
1.3.3 Evaluation du champ de vitesse	32
1.3.4 Evolution du sillage (Equation de Helmholtz)	33
1.3.5 Calcul des efforts	34
1.4 Extension aux voilures tournantes	35
2 Décomposition linéaire non linéaire d'écoulements instationnaires	37
2.1 Introduction	37
2.2 Linéarisation fluide - Décomposition de problème	37
2.3 Résolution intégrale sur le corps	39
2.4 Traitement du sillage	42
2.5 Calcul de la pression	43
2.6 Validation numérique	43
2.6.1 linéarisation partielle	43
2.6.2 linéarisation totale	46
2.7 conclusion	49

3	Approximation champ lointain	50
3.1	Introduction	50
3.2	Modèle du champ lointain	54
3.3	Les outils d'analyse utilisés	56
3.3.1	Analyse de sillage	56
3.3.2	Représentation des efforts	59
3.4	L'écoulement de référence	59
3.5	Application de la méthode	62
3.5.1	Etape I1 - position d_1	64
3.5.2	Etape I2 - position d_2	69
3.5.3	Etape II - emplacement de la zone α	79
3.5.4	Etape III - position d_3	80
3.6	conclusion	85
4	La programmation parallèle	87
4.1	Introduction	87
4.2	Nouvel algorithme pour l'évolution du sillage	91
4.2.1	Le modèle théorique	91
4.2.2	Les tests numériques	97
4.3	Algorithme parallèle	113
4.3.1	Le parallélisme maître-esclave	113
4.3.2	Le modèle	115
4.3.3	Les tests numériques	119
4.4	Conclusion	122
II	Applications	125
5	Application aux éoliennes	127
	Notations	128
	Introduction	129
A	Etude d'une éolienne en écoulement non axial	132
5.1	Modèle quasi-statique pour les efforts	134
5.1.1	Analyse en fonction de θ (position de la pale)	134
5.1.2	Les grandeurs axiales du modèle quasi-statique	136
5.1.3	Moments parasites	139
5.2	Analyse du couple et de la poussée	140
5.2.1	Ecoulement axisymétrique	140
5.2.2	Ecoulement non axial : valeur moyenne	142

5.2.3	Ecoulement non axial : fluctuations	143
5.2.4	Ecoulement non axial : effet non linéaire	146
5.3	Analyse en fonction de $\lambda^p(\theta)$	150
5.4	Conclusion	156
B	Analyse du sillage en aval d'une éolienne	159
5.5	Définition de la méthode	159
5.6	Eolienne dans un écoulement axisymétrique	161
5.7	Eolienne en dérapage	162
5.8	Conclusion	166
6	Application aux voiles de bateaux	168
	Quelques définitions	169
	Introduction	171
6.1	Le modèle numérique	172
6.2	Interaction fluide/structure	173
6.2.1	Algorithme pour la déformation souple	175
6.2.2	Algorithme pour la déformation élastique - Calcul des contraintes . .	180
6.3	Interaction entre les voiles	182
6.3.1	Interaction grand-voile/génois	182
6.3.2	Interaction entre 2 voiliers	184
6.4	Effet de la surface libre	187
6.4.1	Effet de réflexion	187
6.4.2	Régimes instationnaires : prise en compte des mouvements du bateau	188
6.5	Une extension au régime instationnaire	190
	Conclusion	194
	Conclusion	195
III	Bibliographie	197
IV	Annexe	205
A	La méthode particulière en pratique...	207
A.1	Adimensionnement du problème	207
A.2	Difficultés	208
B	Limite de Betz	209
C	Evaluation de l'erreur	211

D	La transformée en ondelette	214
E	Triangulation	217
F	Algorithme utilisé pour P.V.M.	219
	Introduction	219
1	Nombre de processus impair	219
2	Nombre de processus pair	224
	Conclusion	233
G	Organigrammes	234
V	Index	239

Liste des Figures

1.1	<i>Ecoulement sur une aile à faible incidence</i>	19
1.2	<i>Allure de l'écoulement à faible incidence</i>	25
1.3	<i>Equivalence doublet-tourbillon</i>	28
1.4	<i>Approximation de sillage non décollé le long d'un bord latéral, pour un obstacle à faible incidence</i>	30
1.5	<i>Définition du repère local et discrétisation</i>	31
2.1	<i>Ecoulement sur une aile à faible incidence</i>	38
2.2	<i>Traction...flexion</i>	40
2.3	<i>Evaluation de la normale déformée</i>	41
2.4	<i>mouvement de lacet</i>	44
2.5	<i>Déphasage entre oscillation et coefficient de portance en fonction du pas de temps</i>	45
2.6	<i>Comparaison entre un calcul non linéarisé et semi-linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une fréquence réduite fixée : a)erreur sur la phase, b)erreur sur l'amplitude</i>	45
2.7	<i>Comparaison entre un calcul non linéarisé et semi-linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a)erreur sur la phase, b)erreur sur l'amplitude</i>	46
2.8	<i>Comparaison entre un calcul non linéarisé, semi-linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a)$f_r = 0.4$, b)$f_r = 2$</i>	47
2.9	<i>Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une fréquence réduite fixée : a)erreur sur la phase, b)erreur sur l'amplitude</i>	47
2.10	<i>Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a)erreur sur la phase, b)erreur sur l'amplitude</i>	48
3.1	<i>Les zones de sillage proche, intermédiaire et lointain</i>	51
3.2	<i>Hélice B4-55 et repère associé</i>	54

3.3	$\alpha(z)$	56
3.4	$\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs	58
3.5	Evolution des composantes du champ de vitesse dans le sillage : a) sans amortissement ; b) avec amortissement	60
3.6	Autospectre de U_r avec et sans amortissement	60
3.7	Iso-valeurs de U_r sur la surface $0.8R_{rotor}$ - Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (référence)	61
3.8	Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence avec et sans amortissement	62
3.9	Détermination de l'emplacement et la taille de la zone α	63
3.10	Evolution des composantes du champ de vitesse pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1	66
3.11	Autospectre (par périodogramme) de U_r pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1	67
3.12	Evolution des composantes du champ de vorticité pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1	68
3.13	Autospectre (par périodogramme) de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1	70
3.14	Analyse par ondelette de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence (a) et pour le cas 2_{d_1} (b)	71
3.15	Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$, b) $\underline{\omega}_r$ - détermination de d_1	71
3.16	Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1	72
3.17	Evolution des composantes du champ de vitesse pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2	73
3.18	Autospectre (par périodogramme) de U_r pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2	74
3.19	Iso-valeurs de U_r sur la surface $R = 0.8$ - Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (cas 2)	75
3.20	Evolution des composantes du champ de vorticité pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2	76
3.21	Autospectre (par périodogramme) de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2	77
3.22	Analyse par ondelette de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence (a) et pour le cas 2_{d_2} (b)	78
3.23	Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$, b) $\underline{\omega}_r$ - détermination de d_2	78
3.24	Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2	79
3.25	Fréquence prédominante sur $\underline{\omega}_r$ - détermination de la position de la zone α	80
3.26	spectre de $\underline{U}_r$ pour les 8 cas et pour le cas de référence	82

3.27	<i>Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 8 cas - détermination de d_3</i>	82
3.28	<i>Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$ 4 premiers cas, b) $\underline{U}_r$ 4 derniers cas</i>	83
3.29	<i>Sillage après 30 tours d'hélice (Cas 7_{d3})</i>	84
3.30	<i>caractéristique après 30 tours a) $\underline{U}_r = f\left(\frac{z}{D}\right)$, b) $S_{U_r U_r}(f_z)$</i>	84
3.31	<i>caractéristique après 30 tours a) $\underline{\omega}_r = \left(\frac{z}{D}\right)$, b) $S_{\omega_r \omega_r}(f_z)$</i>	85
3.32	<i>CF_z après 30 tours sur 1 pale a) en fonction du temps, b) par tranches, c) par facette (tranche 4)</i>	86
4.1	<i>Zone de correction</i>	95
4.2	<i>Ancienne (1) et nouvelle (2) fonction de régularisation. a) $\delta_{obs} = 0.9$; b) $\delta_{sil} = 1.5$</i>	97
4.3	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{X}$; b) $\underline{Y}$; c) $\underline{Z}$</i>	99
4.4	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$</i>	100
4.5	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$</i>	101
4.6	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) C_x par facette ; b) C_x par tranche ; c) C_z par facette ; d) C_z par tranche</i>	102
4.7	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{X}$; b) $\underline{Y}$; c) $\underline{Z}$</i>	104
4.8	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$</i>	105
4.9	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$</i>	106
4.10	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) C_x par facette ; b) C_x par tranche ; c) C_z par facette ; d) C_z par tranche</i>	107
4.11	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{X}$; b) $\underline{Y}$; c) $\underline{Z}$</i>	108
4.12	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$</i>	109
4.13	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$</i>	110
4.14	<i>Ancien et nouvel algorithme : a) C_z en fonction du temps ; b) C_z par tranche</i>	111
4.15	<i>Evolution des différences entre l'ancien et nouvel algorithme en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur</i>	113
4.16	<i>Schéma de calcul pour un nombre de processus pair</i>	117
4.17	<i>Schéma de calcul pour un nombre de processus impair</i>	118
4.18	<i>Evolution du temps passé dans <code>vel_vd</code> en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur</i>	121
4.19	<i>Evolution du temps passé dans <code>vel_vd</code> en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur</i>	122
4.20	<i>Proportion du temps passé dans <code>vel_vd</code> en fonction du nombre de particules par rapport au temps d'une itération</i>	123
5.1	<i>Eolienne en écoulement uniforme non axial</i>	132
5.2	<i>Repérage</i>	134

5.3	<i>Evolution de $n - \tilde{n}$ pour plusieurs angles de dérapage en fonction de θ.</i>	135
5.4	<i>Analyse des efforts.</i>	135
5.5	<i>triangle des vitesses. a)cas axial. b)cas en dérapage.</i>	137
5.6	<i>Ecoulement axial : Evolution des paramètres K_{Tz}^p, K_{Qz}^p et η^p pour 1 pale en fonction de λ.</i>	141
5.7	<i>Forces aérodynamiques sur une pale en coupe.</i>	142
5.8	<i>Comparaison de la version corrigée et non corrigée des coefficients de poussée et couple pour 1 pale en fonction de l'angle de dérapage</i>	143
5.9	<i>Coefficients C_{Tz} et C_{Qz} avec et sans dérapage pour 1 pale au cours d'une rotation.</i>	144
5.10	<i>Fluctuations...</i>	144
5.11	<i>Fluctuations des coefficients de couple (C_{Qz}^p et K_{Qz}^p) et poussée (C_{Tz}^p et K_{Tz}^p) pour 1 pale au cours d'une rotation.</i>	145
5.12	<i>Fluctuations des coefficients de couple (C_{Qz} et K_{Qz}) et poussée (C_{Tz} et K_{Tz}) pour les 3 pales au cours d'une rotation.</i>	146
5.13	<i>Energie spectrale du coefficient C_{Tz}^p pour plusieurs angles de dérapage au cours d'une révolution.</i>	147
5.14	<i>Energie spectrale et déphasage du coefficient de poussée</i>	148
5.15	<i>Rendement (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ.</i>	150
5.16	<i>$\lambda^p(\theta)$ (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ</i>	151
5.17	<i>Variation de $\underline{\mathbf{F}}_\theta$ (a) et $\underline{\mathbf{Q}}_z$ (b) en fonction de la position de la pale</i>	151
5.18	<i>r^* (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ</i>	152
5.19	<i>Variation de C_{Tz} et C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 5^\circ$.</i>	152
5.20	<i>Variation de C_{Tz} et C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 30^\circ$.</i>	153
5.21	<i>Variation de C_{Tz} et de C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour différentes valeurs de γ.</i>	154
5.22	<i>Rendement avec et sans dérapage pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de λ au cours d'une rotation.</i>	154
5.23	<i>Variation de C_{Tz} et de C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 30^\circ$. Comparaison entre le calcul corrigé et non corrigé.</i>	155
5.24	<i>valeur moyenne de $\frac{d_{x1}}{R}$ (a) et $\frac{d_{y1}}{R}$ (b) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ</i>	155

5.25	Valeur moyenne de C_{Tx} (a), C_{Ty} (b), C_{Qx} (c) et C_{Qy} (d) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ . Fluctuation en % de la valeur moyenne de C_{Tx} , C_{Ty} (e) et C_{Qx} et C_{Qy} (f) pour toutes les pales.	157
5.26	$\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs	161
5.27	$\underline{U}_r$, $\underline{U}_\theta$ et $\underline{U}_z$ à $\pm 0.8R_{rotor}$ en aval de l'éolienne en écoulement axial	162
5.28	Iso-valeurs de $\underline{U}_r$, $\underline{U}_\theta$ et $\underline{U}_z$ en aval de l'éolienne en écoulement axial	163
5.29	Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (écoulement axisymétrique)	163
5.30	Iso-valeurs de $\underline{\omega}_x$, $\underline{\omega}_y$, $\underline{\omega}_z$ et $ \underline{\omega} $ dans le plan (xz) en aval de l'éolienne en écoulement axial	164
5.31	Iso-valeurs de $\underline{U}_r$ ($\gamma = 5^\circ$), $\underline{U}_r$ ($\gamma = 30^\circ$), $\underline{U}_\theta$ ($\gamma = 30^\circ$) et $\underline{U}_z$ ($\gamma = 30^\circ$) en aval de l'éolienne en dérapage	165
5.32	Iso-valeurs de $\underline{\omega}_x$, $\underline{\omega}_y$, $\underline{\omega}_z$ et $ \underline{\omega} $ dans le plan (xz') en aval de l'éolienne en dérapage	165
5.33	Iso-valeurs de $ \underline{\omega} $ dans le plan (xz), $ \underline{\omega} $ dans le plan (xz') et $ \underline{\omega} $ dans le plan (yz') en aval de l'éolienne en dérapage	166
5.34	Carte de vitesse alignée avec l'axe moyen du sillage	167
6.1	Repère et angles	170
6.2	Méthode des images	174
6.3	Géométrie G^0 , G^{13} et G^{23} vue de dessus	178
6.4	Virement de bord vue de dessus	179
6.5	Visualisation du sillage (les points correspondant aux particules tourbillonnaires) a) vue suivant z, b) vue suivant y	183
6.6	Portance en fonction de l'envergure pour une G.V. avec et sans foc - Portance en fonction de l'envergure pour un foc avec ou sans G.V.	183
6.7	Position sous le vent	185
6.8	Position défavorable moins "intuitive".	186
6.9	isovaleurs de $\mathcal{R} * 100$ en fonction de la position du voilier 2	186
6.10	les 2 configurations de double modèle : (dm1) le plan de symétrie est la surface libre, (dm2) le plan de symétrie est le pont du voilier	187
6.11	Configuration expérimentale.	188
6.12	Comparaison-numérique expérimentale. (1) Expérimentale, (2) double modèle 1, (3) double modèle 2	189
6.13	Coefficients de poussée et de dérive à différentes hauteurs sur la grand-voile	190
6.14	Localisation de l'affichage	191
6.15	Saut de pression à 15 temps différents sur une période	192
6.16	Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'un d'un génois soumis à une oscillation haute fréquence	193

C.1	$\underline{\mathbf{k}}_z$ et $\underline{\mathbf{k}}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs	212
C.2	Autospectre bidimensionnel	212
D.1	Famille d'ondelette à partir de l'ondelette de Morlet	214
D.2	Coefficients d'ondelette	215
E.1	Symétrie par bloc pour un nombre de processus impair	218

Introduction

Nous étudions les écoulements à l'aide des méthodes de calcul décrivant le transport lagrangien du tourbillon. Ces méthodes sont basées sur une discrétisation volumique des zones tourbillonnaires en particules que l'on suit dans leur mouvement. Ces dernières portent un vecteur tourbillon qui évolue dans le temps en fonction des distorsions locales du champ de vitesse. Elles présentent la particularité d'être bien adaptées à la description d'écoulements complexes. Nous nous intéressons aussi bien à la génération de tourbillon le long des parois solides qu'à son évolution dans l'écoulement.

Le cadre général de cette thèse est l'amélioration de l'efficacité de ces méthodes numériques de calcul d'écoulement tourbillonnaire instationnaire qui ont la réputation d'être coûteuses en temps de calcul.

Le code de calcul au début de l'étude demande environ 50 secondes de *C.P.U.*¹ sur une station de travail type *HP 9000/720* dont la capacité de calcul est d'environ 17 *MFlops*², pour un tour d'une éolienne trois pales avec un maillage 3×8 facettes par pale. Compte tenu d'une vitesse de rotation moyenne de 40 tours/minute sur les éoliennes les plus courantes, cela signifie que le rapport calcul/réel est de 33.33. C'est ce facteur qu'il faut réduire pour atteindre un objectif de calcul temps réel. Cette réduction sera abordée sous trois aspects différents :

1. Décomposition linéaire / non linéaire d'écoulements instationnaires.

L'un des "inconvenients" des méthodes particulières provient du fait que l'aspect non linéaire des équations est complètement considéré, même lorsque les conditions de l'écoulement ne le justifie pas. Dans cette optique, il est nécessaire de définir dans quel domaine temporel un traitement linéarisé est valide, et de mettre en oeuvre ce traitement de façon cohérente avec le traitement non linéaire complet. De plus, il n'est pas rare de rencontrer des problèmes où les effets instationnaires peuvent être décomposés en deux parties : la première correspondant aux mouvements moyens d'amplitude quel-

¹Central Processing Unit

²Million d'opérations flottantes par seconde

conque, la seconde correspondant à de petits mouvements haute fréquence d'amplitude assez faible pour que leurs effets soient approchés par une théorie linéaire. Chaque pas de temps est alors adapté au phénomène modélisé.

2. Approximation du sillage lointain

L'amélioration du modèle consiste à simplifier la description du sillage lointain, en traitant différemment l'évolution dans le temps, des particules éloignées des obstacles. Une des raisons nécessitant cette approximation concerne le transport du tourbillon sur des distances relativement importante sans altérer les caractéristiques de la nappe. En particulier, le calcul de l'évolution du "tourbillon de démarrage" pour un nombre de pas de temps très important devient délicat à cause des forts gradients de vitesse et introduit dans le calcul des erreurs non négligeables, lorsque l'on cherche l'écoulement établi.

3. La programmation parallèle

Lors de la mise au point d'algorithmes pour machines à structure parallèle ou vectorielle, on est confronté à la difficulté de résoudre sur ces machines des équations formulées de façon intégrale. En effet dans la méthode particulaire, la partie rotationnelle du fluide est représentée comme un ensemble de particules porteuses de tourbillons. La vitesse d'une particule est évaluée par les interactions avec les autres particules. Afin d'éviter des communications "longue distance" entre les processeurs, coûteuses en temps, il est nécessaire de modifier l'algorithme de calcul des vitesses, et de l'implémenter judicieusement, afin de conserver la symétrie de la matrice des interactions de particules, par une permutation circulaire des données sur l'ensemble des processeurs, dans le schéma maître-esclave sous *PVM*³.

Nous nous intéressons également aux problèmes d'interaction fluide/structure par la mise en oeuvre de modèles non-linéaires de prédiction des déformations et des vibrations induites sur les solides par le fluide. Nous utilisons pour la partie fluide le code de calcul d'écoulements tourbillonnaires tridimensionnels discrétisés par une méthode particulaire, et pour la partie solide un code de calcul coque élastique utilisant une discrétisation par éléments finis. Les efforts sur l'obstacle calculés par le code fluide sont utilisés comme donnée d'entrée du modèle de coque. Celui-ci calcule alors les déplacements (en hypothèse quasi élastique) qui sont utilisés pour modifier la géométrie prise en compte dans le modèle fluide. Il est évident que ce modèle ne permet de calculer que des interactions basse fréquence du fait des limitations des approches temporelles. La prise en compte des hautes fréquences s'obtient par une méthode de décomposition. Nous nous intéressons au cas où l'écoulement incident est

³Parallel Virtual Machine est un logiciel qui permet l'utilisation d'un ensemble hétérogène de machines fonctionnant sous UNIX, reliées entre elles par un ou plusieurs réseaux, simulant une machine multiprocesseurs de type MIMD (Multiple Instruction Multiple Data) à mémoire distribuée.

un écoulement uniforme auquel se superposent des perturbations instationnaires. Celles-ci sont décomposées en deux parties : les basses fréquences prises en compte à l'aide du modèle précédent et les hautes fréquences pour lesquelles nous utilisons la méthode de linéarisation qui nous permet de nous affranchir des contraintes de limitation.

Ainsi, de façon très naturelle, cette étude se décompose en deux parties distinctes :

- une première concernant les “outils” qui permettent d'améliorer le code de résolution fluide,
- une deuxième très appliquée, concernant des problèmes d'énergie éolien, soit sur des générateurs à hélice (éolienne), soit sur les voiles de bateau pour l'interaction fluide/structure.

Partie I

Les outils

Chapitre 1

La méthode particulaire

1.1 Introduction

L’objet de ce chapitre est de décrire la méthode particulaire de Rehbach [1, 2, 3] mise au point en 1977. Elle permet de modéliser des écoulements tridimensionnels de fluides parfaits incompressibles en régime instationnaire autour de profils minces en utilisant un traitement lagrangien du tourbillon dans le sillage. Ces types d’écoulements peuvent être interprétés comme limite des écoulements réels de fluides visqueux quand le nombre de Reynolds tend vers l’infini (modèle de viscosité évanescence). L’utilisation d’une telle méthode présente les avantages de ne nécessiter d’autre maillage que celui des parois solides et de pouvoir satisfaire immédiatement les conditions à l’infini par décroissance des champs.

L’origine de la modélisation d’un écoulement incompressible non visqueux autour d’obstacles portants remonte à Prandtl ; c’est en 1931 que l’on voit apparaître la première simulation numérique d’un écoulement par une discrétisation particulaire des zones tourbillonnaires. Cette simulation est due à Rosenhead [4, 5] qui donne l’évolution en $2D$ ¹ d’une couche tourbillonnaire décomposée en un système de tourbillons ponctuels dont on suit l’évolution. L’extension de la simulation en $3D$ avec l’apparition du filament tourbillonnaire est développée par Léonard [6].

On sait que l’effet aérodynamique d’une surface portante infiniment mince et de sa nappe peut être représentée par une couche tourbillonnaire ; Belotserkovskii [7, 8] est le premier à utiliser une combinaison de filaments tourbillonnaires en “fer à cheval” et tourbillons libres pour discrétiser une surface portante et une nappe tourbillonnaire. Dans cette approche, pour que la position de la nappe converge de façon continue vers une position d’équilibre, une augmentation progressive de l’incidence, à partir de l’incidence nulle, est nécessaire. Pour chacune des positions intermédiaires, on calcule itérativement une approximation de la

¹Dimensions

position d'équilibre de la nappe. Ce procédé est coûteux en temps de calcul.

Par la suite, ce type de discrétisation est étendu au modèle de “surface portante” [9]. Il consiste à approcher chacun des tourbillons en “fer à cheval” par un segment rectiligne représentant sa partie dite *liée*, qu'on prolonge de part et d'autre par une suite de tourbillons dits *libres*. Le modèle permet de n'imposer la géométrie du système tourbillonnaire que sur l'aile. Par contre, au delà du bord de fuite et des extrémités, les tourbillons évoluent librement pour prendre leur position d'équilibre définie par la condition de continuité de pression à travers la nappe. L'idée, par rapport à la méthode de Belotserkovskii, est d'avoir une bonne approximation de la nappe à l'incidence d'étude pour s'affranchir des incidences intermédiaires.

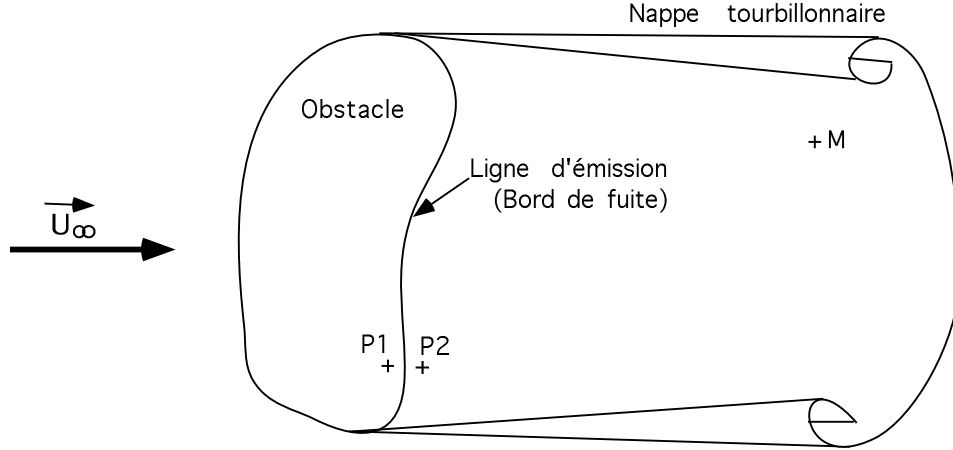
Plutôt que d'utiliser les filaments tourbillonnaires, Hess [10] suggère d'utiliser une distribution surfacique de doublets pour représenter la surface portante et son sillage. Pour calculer la forme du sillage, des panneaux tourbillonnaires sont émis du bord de fuite à chaque pas de temps en respectant la condition de Kutta instationnaire. Ce processus numérique est surtout adapté aux nappes tourbillonnaires sans grande déformation, car pour de forts enroulements, les panneaux deviennent gauches et des instabilités numériques apparaissent.

Pour éviter ces problèmes numériques et calculer des nappes à grande déformation, une autre approche du problème est introduite par Rehbach [1]. Elle est basée sur une discrétisation volumique des zones tourbillonnaires, en particules que l'on suit dans leur mouvement. Ces dernières portent un vecteur tourbillon qui évolue dans le temps en fonction des distorsions locales du champ de vitesse. La modélisation des effets visqueux est effectuée simplement sur le profil par une condition de Kutta-Joukowski [11]. Cette condition impose le non contournement des arêtes anguleuses d'un corps portant par le fluide. Sa formulation la plus générale consiste à écrire l'égalité des pressions intrados et extrados directement au bord de fuite.

Cette méthode est étendue, par Huberson, [12, 13] à l'étude des écoulements autour de profils minces animés de mouvements arbitraires, avec des applications aux hélices de bateaux [14, 15] et aux éoliennes [16, 17, 18].

Cette méthode permet également de traiter des problèmes de corps en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres, avec des études d'écoulements autour de pales d'hélicoptères [19, 20], mais également dans des configurations où les interactions peuvent être fortes entre le sillage engendré par l'un des corps et les autres (voir, par exemple, l'interaction des sillages d'une hélice et d'un safran [21]).

Nous allons maintenant écrire les équations et les conditions aux limites dans le cas d'un obstacle fixe. A la fin de ce chapitre, nous aborderons le problème sous forme discrète, d'un obstacle animé d'un mouvement arbitraire.

Figure 1.1: *Écoulement sur une aile à faible incidence*

1.2 Le problème continu

On représente sur la figure 1.1 l'écoulement sur une aile mince à faible incidence plongée dans un courant uniforme $\underline{U}_\infty$. La nappe tourbillonnaire issue du bord de fuite est due au saut de vitesse tangentielle entre l'intrados et l'extrados.

Outre l'incompressibilité, on suppose que le nombre de Reynolds est très grand et que l'écoulement est non décollé, ce qui permet de conjecturer que les effets de la viscosité ne sont sensibles que dans une zone proche de la paroi et que le rotationnel reste confiné dans des couches de faible épaisseur sur la paroi ou dans le sillage.

Dans le cadre de ces hypothèses, les équations d'Euler se substituent aux équations de Navier-Stokes dans tout le domaine sauf au voisinage de la paroi, siège de la couche limite :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{U} = 0 & \text{équation de continuité} & (a) \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \nabla) \underline{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 & \text{équation du mouvement} & (b) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est le champ de vitesse, $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression et ρ la densité du fluide supposée constante.

Le calcul de cette couche limite n'est pas explicité dans le calcul. Il est remplacé par une condition de fermeture des équations d'Euler analogue à la condition de Kutta-Joukowski pour les écoulements plans.

Le traitement du sillage demeure la vraie particularité de cette méthode et lui donne d'ailleurs son nom : la nappe de sillage sans épaisseur est discrétisée sous forme de particules tourbillonnaires suivies au cours de leur mouvement. Ces particules se déplacent le long des caractéristiques de l'équation de Helmholtz qui régit l'évolution du tourbillon dans un fluide à viscosité évanescence.

En formulation vitesse-tourbillon, en posant $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{U}$, le système précédent (1.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla \cdot \underline{U} = 0 & \text{équation de continuité} & (a) \\ \underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{U} & \text{vecteur tourbillon} & (b) \\ \frac{D\underline{\omega}}{Dt} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{U} & \text{équation d'Helmholtz} & (c) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où :

- $\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \nabla) \underline{\omega}$ est la dérivée particulaire de $\underline{\omega}$
- $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est le champ de vitesse
- $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ est le champ de vortacité

L'équation de Helmholtz (1.2 (c)), obtenue en prenant le rotationnel de l'équation (1.1 (b)) -où $\frac{D\underline{\omega}}{Dt}$ est le *terme de transport* et $(\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{U}$ le *terme de déformation*- décrit la variation dans le temps du vecteur tourbillon attaché à une particule fluide. Cette variation est due au terme de déformation, qui caractérise le changement de vortacité associé au gradient de vitesse.

L'adimensionnement des équations est obtenu de façon immédiate, du fait de l'absence du terme de viscosité ; il suffit en effet de choisir un temps et une longueur caractéristiques, appropriés à la dimension caractéristique du corps et à la vitesse dominante dans le fluide (voir annexe A).

La disparition du terme de pression dans les équations, justifie le choix d'une telle formulation car il est difficile d'obtenir des conditions limites sur celle-ci (le calcul en sera abordé plus tard).

On impose comme conditions aux limites, une composante normale de la vitesse nulle sur toute frontière solide $\partial\mathcal{D}$:

$$\underline{U}(M, t) \cdot \underline{n}(M) = 0 \quad \forall M \in \partial\mathcal{D} \quad (1.3)$$

1.2.1 Décomposition du champ de vitesse

Le caractère potentiel de l'écoulement que nous étudions permet de décomposer (théorème de Green), en chaque point du domaine fluide, le champ de vitesse en une somme de champs élémentaires. En se plaçant dans un repère lié à l'obstacle on distingue deux types d'écoulements potentiels :

- a) LE POTENTIEL EXTÉRIEUR OU POTENTIEL INFINI : il s'agit des caractéristiques de l'écoulement potentiel ϕ_∞ dans lequel évolue le corps que l'on veut étudier. Il est connu et s'exprime souvent analytiquement dans tout le domaine fluide.

- b) LE POTENTIEL DE PERTURBATION : c'est l'effet de la présence du corps, qui agit comme une source de perturbation sur le domaine fluide. Son influence est limitée pratiquement à une portion de l'espace ; elle décroît en r^{-1} à mesure que l'on s'éloigne du corps (r^{-2} pour la vitesse). Cette considération physique se traduit par une décroissance des vitesses induites par la perturbation au fur et à mesure que l'on s'éloigne de celle-ci.

Les équations régissant un écoulement de fluide parfait incompressible et irrotationnel peuvent être résolues par une méthode intégrale. Elles utilisent une décomposition du potentiel de vitesse en une somme de champs de perturbation décroissant à l'infini. Le principe général de ces méthodes est d'associer à chaque perturbation (surface portante, sillage, éventuellement un champ extérieur...) une vitesse induite calculable en chaque point du domaine. La vitesse totale est la somme des vitesses associées à chaque perturbation auxquelles on ajoute la vitesse correspondant au potentiel infini. La vitesse $\underline{\mathbf{U}}$ en chaque point du domaine fluide $\mathcal{D}$, se décompose finalement de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\omega + \underline{\mathbf{U}}_{ext} \quad (1.4)$$

$\underline{\mathbf{U}}_\phi$ et $\underline{\mathbf{U}}_\omega$ sont induits par la présence du corps dans l'écoulement. Cette perturbation est prise en compte sous la forme d'un champ dérivé d'un potentiel noté ϕ , et d'un champ dérivé d'un potentiel vecteur noté $\underline{\psi}$ traduisant respectivement l'influence des parois solides et de l'échappement tourbillonnaire sur les bords du corps. $\underline{\mathbf{U}}_{ext}$ est un champ de vitesse extérieur ; il peut être induit, par exemple, par une surface libre (interaction tourbillon-surface libre [22]), par un autre corps portant avec son sillage (interaction hélice-safran [21]), par des effet d'épaisseur linéarisé [14]...

On va maintenant exprimer chacun de ces 4 champs séparément.

1. $\underline{\mathbf{U}}_\infty = \underline{\nabla}\phi_\infty$ est le champ de vitesse potentiel de l'écoulement infini amont. Il peut être uniforme ou non.
2. $\underline{\mathbf{U}}_\phi = \underline{\nabla}\phi$ est le champ de vitesse de l'écoulement permettant de vérifier les conditions limites sur les parois solides ∂D . En appliquant l'équation de continuité (1.2 (a)) sur le champ de vitesse de perturbation, nous obtenons alors l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

Le potentiel ϕ est calculé par une méthode intégrale : par application de la troisième formule de Green, ϕ s'exprime en fonction d'une distribution surfacique de doublets normaux μ sur $\partial\mathcal{D}$:

$$\phi(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}} \mu(P) \frac{\underline{\mathbf{MP}} \cdot \underline{\mathbf{n}}(P)}{|\underline{\mathbf{MP}}|^3} ds(P) \quad (1.5)$$

La distribution de doublets normaux μ sur la surface, est déterminée par la vérification de la condition de glissement. On déduit alors le champ de vitesse des équations (1.10 (b)) et (1.5) par :

$$\underline{U}_\phi(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}} \mu(P) \underline{\nabla}_M \left(\frac{\underline{MP} \cdot \underline{n}(P)}{|\underline{MP}|^3} \right) ds(P) \quad (1.6)$$

Lors de la formulation numérique du problème, on sera amené à discrétiser l'intégrale sur la surface $\partial\mathcal{D}$, en approchant le squelette de la surface portante par un ensemble de facettes quadrangulaires planes (N_f). C'est pour cela que l'on va expliciter une forme "semi-discrète" de cette intégrale (1.6).

Les facettes servent de support à la distribution de doublet, que l'on suppose constante sur chacune d'elles. On détermine une nouvelle représentation de l'obstacle en utilisant une formule établie par Hess [10], qui permet de transformer une distribution surfacique de doublets, en une distribution linéique de tourbillons ; c'est-à-dire que la vitesse induite par un ensemble de facettes quadrangulaires planes est équivalente à la vitesse induite par un ensemble de 4 segments tourbillonnaires (tourbillons liés aux parois solides) reprenant le contour $\mathcal{C}$ exact de chaque facette :

$$\underline{U}_\phi(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_f} \left[\iint_{S_i} \frac{\underline{\gamma}_{si} \wedge \underline{MP}}{|\underline{MP}|^3} ds(P) + \int_{\mathcal{C}} \gamma_l \frac{\underline{MP} \wedge \underline{dl}}{|\underline{MP}|^3} \right] \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } \quad \underline{\gamma}_{si} &= \underline{n}(P) \wedge \underline{\nabla}_P \mu(P) && \text{(répartition surfacique de tourbillons)} \\ \gamma_l \underline{dl} &= \mu(P) \underline{dl} && \text{(répartition linéique de tourbillons)} \end{aligned}$$

Or, dans notre cas, l'intégrale surfacique est nulle, et donc la loi d'induction des vitesses pour l'obstacle s'écrit :

$$\underline{U}_\phi(M) = -\frac{\mu(P)}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\mathcal{C}} \frac{\underline{MP} \wedge \underline{dl}}{|\underline{MP}|^3} = -\frac{\mu(P)}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\mathcal{C}} \underline{\nabla}_M \left(\frac{1}{|\underline{MP}|} \right) \wedge \underline{dl} \quad (1.8)$$

3. $\underline{U}_\omega = \underline{\nabla} \wedge \underline{\psi}$ est le champ de vitesse associé au sillage tourbillonnaire du profil. En appliquant l'équation (1.2 (b)) sur le champ de vitesse de perturbation, si de plus on cherche une fonction de courant $\underline{\psi}$ telle que $\underline{\nabla} \cdot \underline{\psi} = 0$, nous obtenons alors l'équation de Poisson :

$$\Delta \underline{\psi} = -\underline{\omega} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

De cette équation, nous déduisons la forme intégrale de la vitesse exprimée en fonction du champ de tourbillons et calculée à partir de la formule de Biot-Savart :

$$\underline{U}_\omega(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\underline{\omega}(M') \wedge \underline{MM}'}{|\underline{MM}'|^3} dv(M') \quad (1.9)$$

Cette vitesse est fonction de la position (M') et de l'intensité de chaque particule tourbillonnaire libres ($\underline{\Omega}(M') = \iiint_{\mathcal{P}_i} \underline{\omega}(M') dv(\mathcal{P}_i)$). Ces particules représente de manière discrète le sillage tourbillonnaire. Elles seront introduites dans la section 1.3.

4. $\underline{\mathbf{U}}_{ext}$ est un champ de vitesse extérieur ; il peut être induit par une surface libre, par un autre corps portant avec son sillage, par des effets d'épaisseur linéarisé...

De par la formulation employée, la résolution complète du problème se décompose en un problème sur $\partial\mathcal{D}$ où le terme potentiel assure une non pénétration de l'écoulement et un problème sur $\mathcal{D}$ où l'équation de Helmholtz régit l'évolution de la nappe. Ces deux problèmes sont liés, d'une part, par l'émission tourbillonnaire au bord de fuite et, d'autre part, par la loi de Biot-Savart qui définit l'influence du sillage sur la vitesse dans le reste de l'écoulement.

1.2.2 Condition limite sur l'obstacle

La vérification de la condition de non pénétration sur les frontières solides et l'incompressibilité du fluide conduisent tout d'abord à définir un problème de Neumann extérieur pour le potentiel ϕ :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \mathcal{D} & (a) \\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_\omega + \underline{\mathbf{U}}_{ext}) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\mathcal{D} & (b) \\ \lim_{|\underline{\mathbf{M}}\underline{\mathbf{P}}| \rightarrow \infty} \underline{\nabla}\phi = 0 & & (c) \end{cases} \quad (1.10)$$

Où M est un point de $\mathcal{D}$ et P est un point de la surface solide $\partial\mathcal{D}$.

L'équation (1.10 (a)) est obtenue par application de l'équation de continuité (1.2 (a)) sur le champ de vitesse de perturbation. De plus, on écrit que l'effet de la perturbation s'atténue en s'éloignant du corps jusqu'à s'annuler à l'infini (1.10 (c)). La condition de glissement sur le corps se traduit par l'équation (1.10 (b)).

La distribution de doublets μ sur la surface, qui permet par la suite de déduire $\underline{\mathbf{U}}_\phi(M)$, est déterminée par la résolution de l'équation suivante, où la seule inconnue est la distribution de doublets :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}} \mu(P') \underline{\nabla}_P \left(\frac{\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{P}}' \cdot \mathbf{n}(P')}{|\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{P}}'|^3} \right) \cdot \mathbf{n}(P) ds(P') = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty(P) + \underline{\mathbf{U}}_\omega(P) + \underline{\mathbf{U}}_{ext}(P)) \cdot \mathbf{n}(P) \quad (1.11)$$

Avec P et P' des points de la surface $\partial\mathcal{D}$.

L'intérêt de cette méthode, provient du fait que les conditions à l'infini sont immédiatement vérifiées et que l'on peut calculer l'écoulement en n'importe quel point du domaine $\mathcal{D}$ à partir de la condition de glissement sur le profil.

1.2.3 Description lagrangienne de l'écoulement

L'évolution spatio-temporelle du sillage (position et intensité du tourbillon) est obtenu en écrivant les équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes. On obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \mathbf{U} & (a) \\ \frac{D\mathbf{\omega}}{Dt} = (\mathbf{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{\omega} & (b) \end{cases} \quad (1.12)$$

où :

- $\mathbf{X}$ est la position de la particule
- $\mathbf{U}$ est la valeur du champ de vitesse en $\mathbf{X}$
- $\frac{D\mathbf{\omega}}{Dt}$ est la dérivée particulaire de $\mathbf{\omega}$
- $\mathbf{D} = \nabla \otimes \mathbf{U}$ (où $\otimes$ désigne le produit tensoriel) est le tenseur des taux de déformation. Il existe pour le champ continu trois formulations du terme de déformation strictement équivalentes [22, 23].

- La première consiste à prendre le terme du tenseur des taux de déformation. On a donc sous forme indicielle :

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

- La deuxième consiste à faire apparaître le terme transposé du tenseur des taux de déformation dans l'équation d'Helmholtz :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{\omega}}{Dt} = (\mathbf{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{\omega} \wedge \mathbf{\omega} \\ \mathbf{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{U} \end{cases}$$

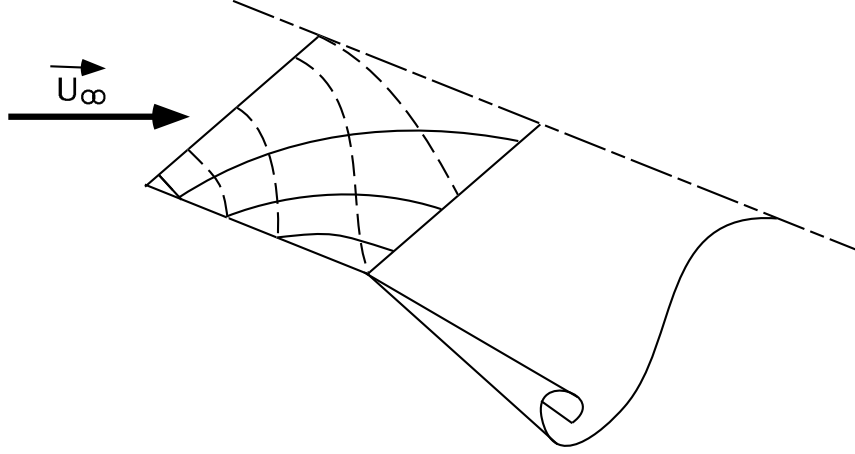
On obtient alors sous forme indicielle :

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.14)$$

C'est cette formulation qui est programmée ; La formulation discrète correspondante sera vue dans la section 1.3.4.

- La dernière consiste à ne prendre que la fraction symétrique du tenseur des taux de déformation (on fait la somme des deux précédentes formulations). On a donc :

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{1}{2}\omega_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

Figure 1.2: *Allure de l'écoulement à faible incidence*

L'équivalence des formulations continues n'est plus forcément vraie pour leurs formes discrètes respectives. Choquin et Cottet [24] ont toutefois montré que la formulation ponctuelle de l'équation (1.14) a la propriété de conserver l'enstrophie.

- $\underline{\omega}$ est le champ de vorticité en $\underline{X}$

1.2.4 Emission tourbillonnaire

Une surface portante à faible incidence (on suppose l'écoulement non décollé) en régime stationnaire, développe une portance qui se traduit localement par une différence de pression entre l'intrados (surpression) et l'extrados (dépression). Au voisinage des bords latéraux, ce saut de pression entraîne le contournement des bords de l'intrados vers l'extrados par le fluide. Ceci a pour effet d'incurver les lignes de courant de l'intrados vers l'extérieur et celles de l'extrados vers l'intérieur (*c.f.* figure 1.2).

Au bord de fuite il y a donc une discontinuité de vitesse tangentielle dans le sens de l'envergure, cette discontinuité étant à la base du sillage tourbillonnaire [25]. Ce sillage, auquel on impose de s'échapper du bord de fuite, est représenté par une nappe tourbillonnaire d'épaisseur nulle, zone de rotationnel de forte intensité, dont on cherche à évaluer le débit dans le fluide.

En imposant la continuité de pression à travers la nappe, on applique la relation de Bernoulli instationnaire des deux côtés du corps (repérés respectivement par les indices + et - pour l'extrados et l'intrados) :

$$\frac{\partial(\phi_+ - \phi_-)}{\partial t} + \frac{(P_+ - P_-)}{\rho} + \frac{1}{2}(\underline{U}_+^2 - \underline{U}_-^2) = 0 \quad (1.16)$$

Au bord de fuite on a :

$$P_+ = P_-$$

De plus μ étant égal au saut du potentiel à travers la couche :

$$\underline{\mathbf{U}}_+ - \underline{\mathbf{U}}_- = \underline{\nabla}(\phi_+ - \phi_-) = \underline{\nabla}\mu$$

En posant :

$$\underline{\mathbf{U}}_m = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{U}}_+ + \underline{\mathbf{U}}_-)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \underline{\mathbf{U}}_m \cdot \underline{\nabla}\mu \equiv \frac{D\mu}{Dt} = 0 \quad (1.17)$$

Cette équation exprime que l'intensité de doublets μ est transportée dans l'écoulement avec la vitesse $\underline{\mathbf{U}}_m$ et ne dépend que de sa valeur à l'instant initial qui est fixée par la condition d'émission déduite de 1.17.

L'intensité de doublet en un point P_2 de la nappe près de la ligne d'émission est égale à l'intensité de doublet du point P_1 immédiatement voisin appartenant à l'obstacle.

Le lien entre la distribution de tourbillons du sillage (tourbillon libre), et la représentation des parois solides sera abordé dans la section 1.3.

1.2.5 Calcul de la pression

La pression est généralement discontinue à travers la paroi d'un obstacle sans épaisseur. Le saut du coefficient de pression $[\mathcal{C}_p]_P$, en un point P de l'obstacle, se déduit de l'équation instationnaire de Bernoulli [26] :

$$[\mathcal{C}_p]_P = -\frac{2}{\underline{\mathbf{U}}_\infty^2} \left(\frac{\partial \mu_P}{\partial t} + \underline{\mathbf{U}}_{mP} \cdot \underline{\nabla}_P \mu_P \right) \quad (1.18)$$

$\underline{\mathbf{U}}_{mP}$ est la moyenne des vitesses de part et d'autre de la surface.

1.3 Le problème discret

L'écoulement autour de l'obstacle est traité par une méthode de singularités [27, 28], alors que dans la zone du sillage, le calcul est effectué par une méthode de discrétisation particulière. Les détails des différentes étapes de ces deux méthodes sont décrits suivant l'algorithme qui a permis l'élaboration du programme particulière.

1.3.1 Résolution sur le corps

Dans le cadre de la méthode de Hess et Smith utilisée pour la résolution sur le corps, l'obstacle est représenté par une répartition surfacique de singularités. Le problème est de trouver l'intensité de cette répartition qui permet de remplir les conditions limites sur l'obstacle (condition de glissement 1.10). Ce résultat est obtenu par un découpage de l'obstacle en

un nombre fini d'éléments de surface -les facettes- support à la distribution de doublets μ introduite précédemment. Cette distribution peut être approchée par des répartitions de doublets constantes par facette. On définit sur chaque facette quadrangulaire un point de contrôle, situé au centre géométrique, sur lequel on va vérifier la condition de glissement. La résolution de l'équation intégrale 1.11, discrète, devient équivalente à un système linéaire, de matrice pleine :

$$[\mathcal{A}][\mu] = [\mathcal{S}] \quad (1.19)$$

Où μ est le vecteur inconnu du système, $\mathcal{S}$ le vecteur connu des conditions aux limites, et $\mathcal{A}$ une matrice carrée appelée "matrice d'influence" qui ne dépend que de la géométrie. Le terme a_{ij} de cette matrice représente l'influence de l'inconnue μ_j sur la condition aux limites S_i .

→ **Calcul des coefficients d'influence**

Pour obtenir les coefficients a_{ij} , on applique la relation permettant de calculer la vitesse induite par un anneau tourbillonnaire en un point quelconque (1.8), au calcul de la composante normale de la vitesse au point de contrôle.

Ainsi, la facette j portant une intensité de doublet constante μ_j induit au point de contrôle i la vitesse :

$$\underline{\mathbf{U}}_{ij} = -\frac{\mu_j}{4\pi} \int_C \underline{\nabla}_i \left(\frac{1}{\underline{\mathbf{r}}_{ij}} \right) \wedge \underline{\mathbf{d}}\mathbf{l} \quad (1.20)$$

On en tire le coefficient d'influence (vitesse normale à l'élément de surface i induite par l'intensité μ_j unité)

$$a_{ij} = -\frac{\underline{\mathbf{n}}_i}{4\pi} \int_C \underline{\nabla}_i \left(\frac{1}{\underline{\mathbf{r}}_{ij}} \right) \wedge \underline{\mathbf{d}}\mathbf{l} \quad (1.21)$$

Pour simplifier, on remplace le contour curviligne $\mathcal{C}_j$ de la facette j par quatre segments de droite (indice n) dont chacun contribue au calcul de la vitesse au point i par : (c.f. figure 1.3)

$$\underline{\mathbf{U}}_{ij}^n = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}|^2} \left[|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1}| + |\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}| \right] \left[1 - \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1}| |\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}|} \right] \quad (1.22)$$

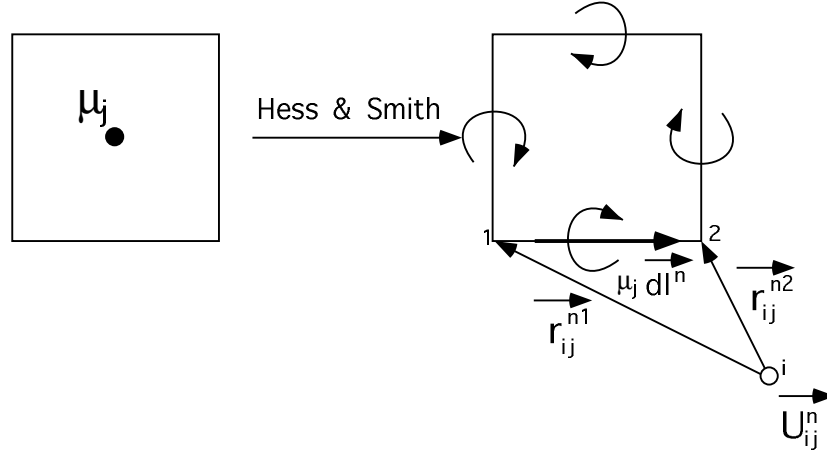
$$\underline{\mathbf{U}}_{ij} = \frac{\mu_j}{4\pi} \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{ij}^n \quad (1.23)$$

et

$$a_{ij} = \frac{\underline{\mathbf{n}}_i}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{ij}^n \quad (1.24)$$

→ **Résolution du système linéaire** (condition de glissement sur l'obstacle)

La résolution du système linéaire (1.19) permet de déterminer l'intensité de la répartition

Figure 1.3: *Equivalence doublet-tourbillon*

de doublets sur l'obstacle, et de là, l'émission tourbillonnaire, ainsi que la vitesse et la pression aux points de contrôle.

Dans la grande majorité des cas (1 seul corps indéformable), le second membre $\mathcal{S}$ est seul affecté par le caractère évolutif de l'écoulement. La matrice $\mathcal{A}$ est donc calculée et inversée une seule fois. La condition de glissement 1.10(b) devient, sous forme discrète, un système linéaire d'ordre N_f (où N_f est le nombre de facettes discrétisant l'obstacle). L'évolution des singularités en fonction du temps est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mu_j(t) \end{bmatrix}_{N_f,1} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{N_f,N_f}^{-1} \begin{bmatrix} s_i(t) \end{bmatrix}_{N_f,1} \quad (1.25)$$

où :

$$s_i(t) = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty(t) + \underline{\mathbf{U}}_\omega(t) + \underline{\mathbf{U}}_{ext}(t)) \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

$\underline{\mathbf{U}}_\omega(t)$ discrétisé sera vu par la suite.

Il est cependant possible, si la matrice d'influence est fonction du temps (cas d'un obstacle déformable ou de plusieurs obstacles en mouvement relatif), de résoudre de manière itérative le système (1.19) par la méthode de Gauss-Seidel. Dans le cas de deux corps indéformables, animés de mouvements propres, plongés dans un écoulement infini, la condition de glissement en notation matricielle (1.19) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{1,1} & \begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{1,2}(t) \\ \begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{2,1}(t) & \begin{bmatrix} \mathcal{A} \end{bmatrix}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

où les blocs $[\mathcal{A}]_{1,1}$ et $[\mathcal{A}]_{2,2}$ sont les matrices d'auto-influence des corps 1 et 2, les blocs $[\mathcal{A}]_{1,2}$ et $[\mathcal{A}]_{2,1}$ représentent les interactions instationnaires des deux corps, μ_k la distribution de doublets associée au corps k , et les $\mathcal{S}_k$ les seconds membres de la condition de glissement ([29]).

1.3.2 Emission particulaire

Le principe de la méthode particulaire consiste à décrire le domaine tourbillonnaire par des particules fixes représentant l'obstacle (tourbillons liés) et des particules mobiles (tourbillons libres), porteuses de tourbillon, émises à chaque itération du bord de fuite de la surface portante et convectées dans le fluide par les équations (1.12).

Le support du tourbillon est discrétisé par des particules $\mathcal{P}_i$ de volume p_i , dont le nombre dépend du produit de la quantité de points d'émission fixés au bord de fuite de l'obstacle par le nombre d'itérations effectuées ($N_p(t)$ particules tourbillonnaires libres et N_j particules tourbillonnaires liées). On représente le vecteur tourbillon de chaque particule (le "poids") par :

$$\underline{\Omega}_i(\underline{\mathbf{X}}_i) = \iiint_{\mathcal{P}_i} \underline{\omega}_i(\underline{\mathbf{x}}, t) dv(\underline{\mathbf{x}}, t) \approx \overline{\underline{\omega}}_i p_i \quad (1.27)$$

(où $\overline{\underline{\omega}}_i$ représente la moyenne pondérée de tourbillon dans la particule $\mathcal{P}_i$), et la position de la particule par :

$$\underline{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{p_i} \iiint_{\mathcal{P}_i} \underline{\mathbf{x}}(t) dv(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (1.28)$$

Ainsi, $\underline{\Omega}_i(\underline{\mathbf{X}}_i)$ est la somme des tourbillons contenus dans la particule $\mathcal{P}_i$ de position $\underline{\mathbf{X}}_i$ (coordonnées lagrangiennes).

Le champ de vortacité s'exprime alors par une somme pondérée des valeurs de cet ensemble fini de vecteurs tourbillons :

$$\underline{\omega}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^{N_p(t)+N_j} \underline{\Omega}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) \xi_\delta(|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_i|) \quad (1.29)$$

où ξ_δ est une fonction régulière, appelée "fonction de régularisation", qui converge vers une mesure de Dirac ξ quand le paramètre $\delta \rightarrow 0$. Cette fonction ξ_δ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_\delta(x) = \xi_\delta(|\underline{\mathbf{x}}|) &= \frac{1}{\delta^3} \xi\left(\frac{x}{\delta}\right) \\ \int_{\mathbb{R}^3} \xi_\delta(x) dx &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}^3} x \xi_\delta(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Une revue des fonctions d'approximation ξ_δ est faite par Beale et Majda [30]. Pour la discrétisation, on suppose que la particule se déplace en bloc avec la vitesse $\underline{\mathbf{U}}_i$ et que

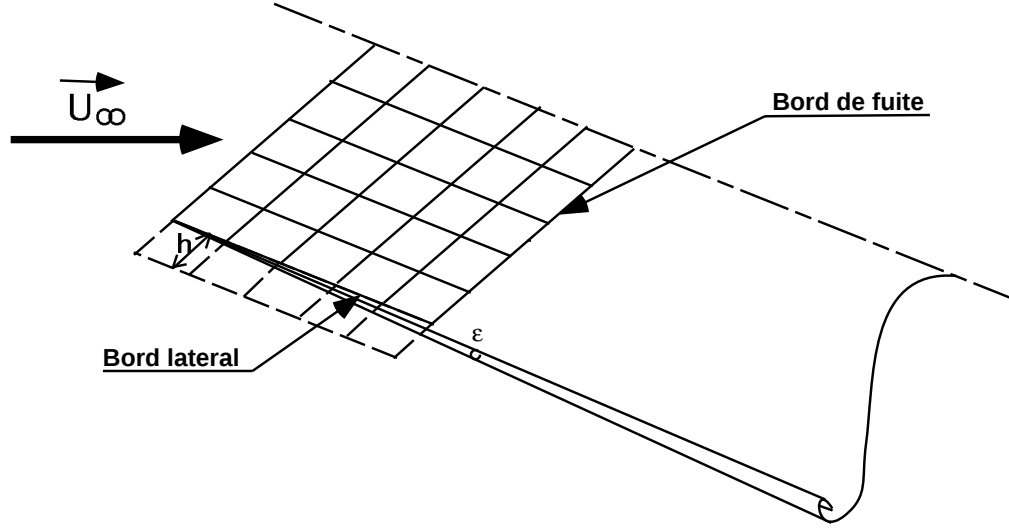


Figure 1.4: *Approximation de sillage non décollé le long d'un bord latéral, pour un obstacle à faible incidence*

l'intensité de tourbillon ω_i est constante à l'intérieur du volume p_i .

Chaque facette de l'obstacle est porteuse d'une répartition surfacique de tourbillons. L'intégration de cette répartition surfacique de tourbillons $\underline{\gamma}_{si}$ (c.f. 1.7) sur la facette S_i définie par : $\underline{\gamma}_{si} = \underline{n}_i \wedge \underline{\nabla}_i \mu_i$ donne sa valeur à $\underline{\Omega}_i$:

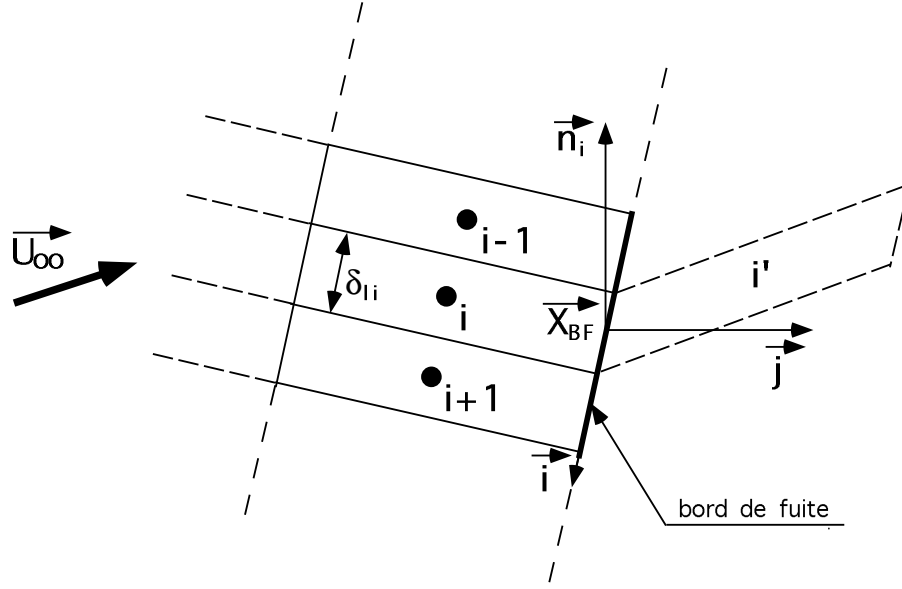
$$\underline{\Omega}_i = \iint_{S_i} \underline{\gamma}_{si} ds(S_i) \quad (1.31)$$

L'un des points délicats du problème numérique est la création du tourbillon sur les lignes d'émission où s'effectue le passage de la discrétisation surfacique sur l'obstacle à la discrétisation volumique des zones tourbillonnaires libres.

L'intensité de la facette fictive i' située en aval de la ligne d'émission de bord de fuite est égale à l'intensité de la facette i sur l'obstacle ($\mu_i = \mu_{i'}$). La facette i' s'oriente suivant la direction locale de la vitesse ($\underline{U}_{bf} = \frac{1}{2}(\underline{U}^+ + \underline{U}^-)$), puis est transformée en une particule tourbillonnaire (c.f. 1.31) qui est transportée dans l'écoulement. De plus, à faible incidence, on suppose que sur un bord latéral, la nappe de tourbillons s'enroule sur elle-même dans une zone dont l'extension reste petite devant le pas de discrétisation spatial : $\epsilon \ll h$ (c.f. figure 1.4). On impose donc des doublets nuls sur les facettes fictives le long des bords latéraux (saut de vitesse nul).

L'émission discrétisée consiste donc à représenter la portion de nappe émise entre l'instant t et $t + \Delta t$ par un ensemble de particules tourbillonnaires, en considérant que le champ de vitesse est constant pendant cet intervalle de temps.

Soit $(\underline{X}_{bf}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{n}_i)$ le repère local au bord de fuite : $\underline{n}_i$ est la normale à la plaque en $\underline{X}_{bf}$, point de contrôle du bord de fuite associé à la facette i , $\underline{i}$ est le vecteur tangent au bord de

Figure 1.5: *Définition du repère local et discrétisation*

fuite et $\underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{n}}_i \wedge \underline{\mathbf{i}}$.

Les relations donnant la position $\underline{\mathbf{X}}_i$ et le poids $\underline{\Omega}_i$ de chaque particule tourbillonnaire i à l'instant de leur création, permettent de définir le transfert de vorticité de la couche limite vers l'écoulement extérieur.

La création de cette portion de nappe provenant de l'émission au bord de fuite de $\underline{\omega}_{bf}$ à la vitesse $\underline{\mathbf{U}}_{bf}$ donne :

$$\underline{\Omega}_i = \int_{\delta t} \int_{\delta l_i} |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \underline{\omega}_{bf} dx dt \quad (1.32)$$

avec $\underline{\omega}_{bf} = \underline{\mathbf{n}}_i \wedge \underline{\nabla}_i \mu_i$

Deux composantes du tourbillon sont calculées : $\underline{\Omega}_i = \Omega x_i \underline{\mathbf{i}} + \Omega y_i \underline{\mathbf{j}}$.

$$\begin{cases} \Omega x_i &= \int_{\delta t} \int_{\delta l_i} |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \left(-\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) dx dt \\ \Omega y_i &= \int_{\delta t} \int_{\delta l_i} |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) dx dt \end{cases} \quad (1.33)$$

La composante suivant $\underline{\mathbf{i}}$ du tourbillon est calculée en appliquant la relation de Bernoulli de part et d'autre du bord de fuite du profil (*c.f.* 1.17). En écrivant que le saut de pression est nul au travers de la nappe tourbillonnaire, on obtient :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \underline{\mathbf{U}}_{bf} \cdot \underline{\nabla} \mu = 0$$

En écrivant sur l'ensemble de la portion de nappe proche de la ligne "bord de fuite" $\underline{\mathbf{U}}_{bf} = |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \underline{\mathbf{j}}$, ce qui revient à supposer que les lignes de courant sont perpendiculaires au bord de

fuite (imposé par la condition de Kutta-Joukowski), il vient :

$$-\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{U}}_{bf}|} \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

On obtient alors :

$$\Omega x_i = \int_{\delta t} \int_{\delta l_i} \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt$$

soit sous forme discrète :

$$\Omega x_i = \delta l_i (\mu_i(t + \Delta t) - \mu_i(t)) \quad (1.34)$$

La composante suivant $\underline{\mathbf{j}}$ est calculée connaissant la distribution de doublets suivant le bord de fuite. On a :

$$\Omega y_i = \int_{\delta t} \int_{\delta l_i} |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \frac{\partial \mu}{\partial x} dx dt$$

soit sous forme discrète :

$$\Omega y_i = \Delta t |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2} \quad (1.35)$$

Pendant l'intervalle de temps Δt , l'intensité et la position de chaque particule est évaluée par ² :

$$\begin{cases} \underline{\Omega}_i = [\delta l_i (\mu_i(t + \Delta t) - \mu_i(t))] \underline{\mathbf{i}} + \left[\Delta t |\underline{\mathbf{U}}_{bf}| \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2} \right] \underline{\mathbf{j}} \\ \underline{\mathbf{X}}_i = \underline{\mathbf{X}}_{bf} + \underline{\mathbf{U}}_{bf} \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (1.36)$$

Voutsinas propose un modèle d'émission légèrement différent dans son code aérodynamique : GENUVP ³. Il consiste à conserver l'émission tourbillonnaire sous la forme d'un treillis de lignes tourbillonnaires, ce qui permet de recalculer la vitesse d'émission au bord de fuite, et ainsi d'établir une convergence de cette vitesse avant d'émettre des particules [31, 32].

1.3.3 Evaluation du champ de vitesse

A un instant t , le domaine tourbillonnaire de l'écoulement est discrétisé par $N_p(t)$ particules tourbillonnaires induisant chacune une vitesse absolue en un point M :

$$\underline{\mathbf{U}}_{\omega p}(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\Omega}_p(t) \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_M)}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_M|^3}$$

Les parois de l'obstacle sont discrétisées par N_f facettes d'intensité $\mu_i(t)$ constante, induisant chacune en un point M une vitesse absolue (*c.f.* 1.22) :

$$\underline{\mathbf{U}}_{\phi i}(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \mu_i(t) \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{Mi}^n$$

²Il s'agit ici uniquement du schéma explicite ($IE = 1$), le schéma a été implicité par Zervos ($IE > 1$) pour le code considéré *publi de Zervos à citer*

³GENeral Unsteady Vortex Particle (NTUA)

La forme discrète de la loi d'induction des vitesses absolues est à un instant t :

$$\underline{\mathbf{U}}(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \left[\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq M}}^{N_p(t)} \frac{\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_M)}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_M|^3} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq M}}^{N_f} \mu_i(t) \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{Mi}^n \right] + \underline{\mathbf{U}}_\infty(M, t) + \underline{\mathbf{U}}_{ext}(M, t) \quad (1.37)$$

1.3.4 Evolution du sillage (Equation de Helmholtz)

La forme discrète du système 1.12 caractérisant l'évolution dans le fluide d'une particule de position $\underline{\mathbf{X}}_i$, et portant un tourbillon $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i$ devient :

$$\begin{cases} \frac{D\underline{\mathbf{X}}_i}{Dt} = (\underline{\mathbf{U}}_\omega + \underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_{ext})(\underline{\mathbf{X}}_i, t) \\ \frac{D\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i}{Dt} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_p(t)} \left(\frac{3}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^5} (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i) (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i))) + \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i) \right) \\ \quad + (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot \nabla) (\underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_{ext})(\underline{\mathbf{X}}_i, t) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}_\omega(\underline{\mathbf{X}}_i, t) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_p(t)} \frac{\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i)}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} \\ \underline{\mathbf{U}}_\phi(\underline{\mathbf{X}}_i, t) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_f} \mu_p(t) \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{ip}^n \quad \text{c.f. 1.22} \end{aligned}$$

$$(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot \nabla) \underline{\mathbf{U}}_\phi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_j} \left(\frac{3}{|\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i|^5} (\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i) (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j \wedge (\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i))) + \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i) \right)$$

où N_j représente le nombre de particules liées à l'obstacle d'intensité $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j$ (équivalence doublet-tourbillon).

La convection des particules se fait avec un schéma d'ordre deux en temps (Adams-Bashforth). Le comportement singulier de ces équations lorsque $\underline{\mathbf{X}}_p$ tend vers $\underline{\mathbf{X}}_i$ conduit à introduire une fonction de régularisation ξ . On remplace le noyau singulier ($\underline{\mathcal{K}} = \frac{\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3}$) par le produit de convolution de ce même noyau avec $\xi_\delta = \frac{1}{\delta^3} \xi \left(\frac{x}{\delta} \right)$ (c.f. 1.30) . on a :

$$\underline{\mathcal{K}}_\delta = \underline{\mathcal{K}} \star \xi_\delta$$

Les fonctions f et ξ sont reliées par l'équation différentielle suivante :

$$\xi(r) = \frac{f'(r)}{4\pi r^2}$$

On a donc pour la loi de Biot-Savart discrétisée :

$$\underline{\mathbf{U}}_\omega(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_p(t)} f\left(\frac{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|}{\delta}\right) \underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge \frac{\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3}$$

Dans notre cas, la fonction de régularisation est :

$$\xi(r) = \frac{3}{4\pi} e^{-r^3} \quad \text{et} \quad f(r) = 1 - e^{-r^3} \quad (1.38)$$

Un modèle de dissipation empirique du sillage consiste à faire décroître l'intensité des particules à mesure qu'elles s'éloignent des surfaces portantes :

$$\begin{cases} \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t + \delta t) = D(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) + \delta t(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) \cdot \underline{\nabla})\underline{\mathbf{U}}) \\ |D| < 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

Ce modèle donne une approximation correcte des effets de diffusion dans le cas où le tourbillon est confiné dans des couches de faible épaisseur.

1.3.5 Calcul des efforts

Le torseur des efforts instationnaires sur le corps au point O est déterminé à partir de la loi de Joukovski de sorte que la force de succion de bord d'attaque soit prise en compte.

Les singularités portées par les surfaces sont les segments tourbillonnaires dérivés de la distribution de doublets constante par facette. La force élémentaire associée au segment tourbillonnaire d'intensité $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_i = \mu(P)\underline{\mathbf{d}}\underline{\mathbf{l}}_i$ portée par le côté i s'exprime par [33] :

$$\underline{\mathbf{f}}_i = \underline{\mathbf{U}}(P_{m,i}) \wedge \underline{\boldsymbol{\Gamma}}_i \quad (1.40)$$

où $\underline{\mathbf{U}}(P_{m,i})$ est la partie finie de la vitesse au milieu $P_{m,i}$ du segment i du corps.

Le moment élémentaire par rapport au point O s'exprime alors par :

$$\underline{\mathcal{M}}_{Oi} = \underline{\mathbf{f}}_i \wedge \underline{\mathbf{OP}}_{m,i} \quad (1.41)$$

On associe au point de contrôle P_k de chaque facette k de surface S_k , un effort $\underline{\mathbf{F}}_k$ et un moment en O $\underline{\mathcal{M}}_{Ok}$:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{F}}_k &= S_k \frac{\partial \mu_k}{\partial t} \underline{\mathbf{n}}_k + \sum_{i=1}^4 v_i \underline{\mathbf{f}}_i \\ \underline{\mathcal{M}}_{Ok} &= \underline{\mathbf{F}}_k \wedge \underline{\mathbf{OP}}_k \end{cases} \quad (1.42)$$

où $v_i = \frac{1}{2}$ si le segment i appartient à 2 facettes, et $v_i = 1$ sinon.

La dérivée temporelle $\frac{\partial \mu_k}{\partial t}$ donne éventuellement un critère de convergence vers l'état stationnaire.

La force totale $\underline{\mathcal{F}}$ et le moment résultant $\underline{\mathcal{M}}_O$ ont respectivement pour expression :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{F}} &= \sum_{k=1}^{N_f} \underline{\mathbf{E}}_k \\ \underline{\mathcal{M}}_O &= \sum_{k=1}^{N_f} \underline{\mathcal{M}}_{Ok} \end{cases} \quad (1.43)$$

1.4 Extension aux voilures tournantes

Nous considérons un corps animé d'une vitesse d'entraînement $\underline{\mathbf{U}}_e$. Le mouvement du corps solide se définit ici comme la combinaison d'une translation $\underline{\mathbf{V}}_0(O)$ et d'une rotation $\underline{\Phi}$:

$$\underline{\mathbf{U}}_e(M) = \underline{\mathbf{V}}_0(O) + \underline{\Phi} \wedge \underline{\mathbf{OM}}$$

Les équations fondamentales de l'écoulement (1.8, 1.9, 1.12, 1.11, 1.18) sont maintenant exprimées dans un repère relatif lié à l'obstacle. Le mouvement d'un point M par rapport à ce repère est :

$$\underline{\mathbf{U}}_r(M) = \underline{\mathbf{U}}_a(M) - \underline{\mathbf{U}}_e(M) \quad (1.44)$$

La condition de glissement qui fait intervenir la vitesse relative (1.44), conduit au même système linéaire 1.25 où seul le second membre change :

$$\mathcal{S}(t) = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty(t) + \underline{\mathbf{U}}_\omega(t) + \underline{\mathbf{U}}_{ext}(t) - \underline{\mathbf{U}}_e(t)) \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

Le modèle d'émission est inchangé ; cependant il doit tenir compte de la vitesse d'entraînement à la paroi. On obtient donc :

$$\begin{cases} \underline{\Omega}_{ia} &= [\delta l_i (\mu_i(t + \Delta t) - \mu_i(t))] \underline{\mathbf{i}} + \left[\Delta t \left| \frac{\underline{\mathbf{U}}_+ + \underline{\mathbf{U}}_-}{2} - \underline{\mathbf{U}}_e \right| \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2} \right] \underline{\mathbf{j}} \\ \underline{\mathbf{X}}_{ir} &= \underline{\mathbf{X}}_{bf} + (\underline{\mathbf{U}}_e + \frac{\underline{\mathbf{U}}_+ + \underline{\mathbf{U}}_-}{2}) \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

L'évaluation du champ de vitesse est inchangée. $\underline{\mathbf{U}}_a(M)$ est la vitesse absolue du point M exprimée dans le repère relatif. Elle est obtenue par (1.4, 1.8 et 1.9), où $\underline{\omega}$ représente le tourbillon absolu.

L'évolution des zones tourbillonnaires est toujours régie par l'équation d'Helmholtz exprimée dans le repère relatif mais pour le tourbillon absolu ($\underline{\omega} = \underline{\nabla} \wedge \underline{\mathbf{U}}_a$). Le système 1.12 devient :

$$\begin{cases} \frac{D\underline{\mathbf{X}}_r}{Dt} = \underline{\mathbf{U}}_a - \underline{\mathbf{U}}_e & (a) \\ \frac{D\underline{\omega}}{Dt} = -(\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\mathbf{U}}_a + (\underline{\Phi} \wedge \underline{\omega}) & (b) \end{cases}$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{\mathbf{U}}_r \cdot \underline{\nabla})$ est la dérivée particulaire dans le repère relatif.

Pour le calcul de la pression et des efforts, la vitesse dans les équations (1.40) et (1.18) est la vitesse relative (1.44), la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement étant connues.

Dans le cas d'une hélice d'axe $O\underline{\mathbf{z}}$, on en déduit les coefficients de poussée et de couple adimensionnés par :

$$\begin{cases} K_T &= \frac{F_z}{\rho n^2 D^4} \\ K_Q &= \frac{M_{Oz}}{\rho n^2 D^5} \end{cases} \quad (1.45)$$

avec :

- n la vitesse de rotation en tours par unité de temps
- D le diamètre de l'hélice
- ρ la densité du fluide
- $\omega = 2\pi n$ la pulsation
- F_z l'effort axial
- M_{Oz} le couple axial

On définit également son paramètre d'avance par : $J = \frac{U_\infty}{nD}$.

Pour une éolienne, on a $\lambda = \frac{R\omega}{U_\infty} = \frac{\pi}{J}$.

Chapitre 2

Décomposition linéaire non linéaire d'écoulements instationnaires

2.1 Introduction

Nous considérons l'écoulement instationnaire d'un fluide parfait dans l'approximation incompressible autour d'une surface portante en mouvement. Les effets instationnaires sont décomposés en deux parties ; la première correspondant au mouvement moyen d'amplitude quelconque, la seconde correspondant à de petits mouvements supposés d'amplitudes assez faibles pour que leurs effets soient approchés par une théorie linéaire. Cette décomposition est utilisée pour construire la solution numérique du problème. L'approximation consiste à écrire les équations fluide sur la géométrie à l'équilibre en tenant compte du mouvement haute fréquence faible amplitude (approché par la théorie linéaire) par un changement d'orientation des normales. La méthode résultante est appliquée au problème de l'écoulement autour d'une plaque plane et sa validité est démontrée par comparaison avec un calcul complètement non linéaire.

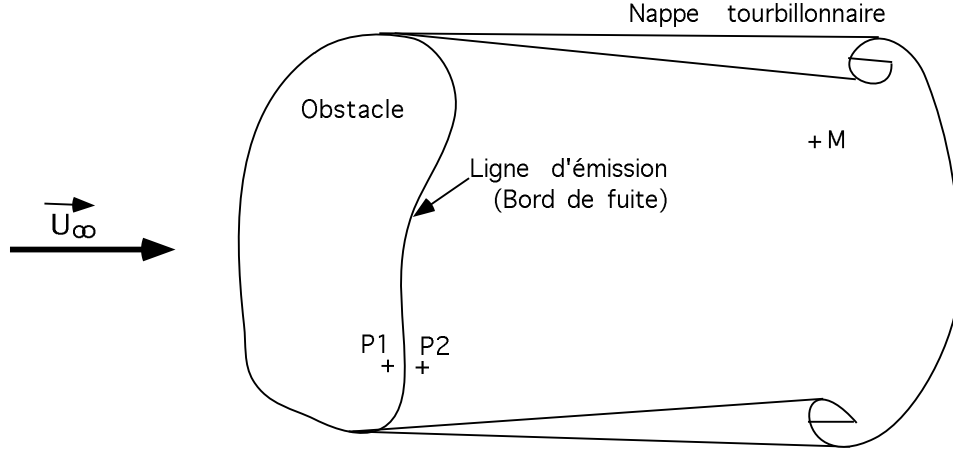
2.2 Linéarisation fluide - Décomposition de problème

Définissons une surface portante SP de surface Γ^0 , autour de laquelle se développe un écoulement stationnaire $\underline{\mathbf{U}}^0(\underline{\mathbf{x}})$. Nous supposons que cet état d'équilibre est soumis à deux types de perturbations : une perturbation de l'écoulement provenant de l'infini amont telle que l'écoulement total s'écrit :

$$\underline{\mathbf{U}}_\infty(t) = \underline{\mathbf{U}}_\infty^0 + \varepsilon \underline{\mathbf{U}}_\infty^1(t) \quad (2.1)$$

et une perturbation de la géométrie de SP qui s'écrit :

$$\underline{\mathbf{X}}(\xi, \eta, t) = \underline{\mathbf{X}}^0(\xi, \eta) + \varepsilon \underline{\mathbf{X}}^1(\xi, \eta, t) \quad (2.2)$$

Figure 2.1: *Ecoulement sur une aile à faible incidence*

Le couple (ξ, η) , appartient à un fermé borné $\bar{\Omega}$ de $\mathcal{R}^2$ et définit, à tout instant, les coordonnées paramétriques sur la surface $\Gamma(t)$ de SP . Nous utilisons la théorie des surfaces portantes pour décrire le comportement du fluide. Nous notons : $\underline{\mathbf{U}}$ le champ des vitesses, ϕ le potentiel des vitesses dans la partie du domaine fluide où l'écoulement est irrotationnel, $\underline{\mathbf{U}}_\infty$ la vitesse uniforme de l'écoulement non perturbé, $\underline{\omega}$ le tourbillon contenu dans le sillage, $\underline{\mathbf{U}}_\omega$ la vitesse induite par ce champ tourbillonnaire, et $\underline{\mathbf{V}}$ la vitesse de la surface portante, c'est-à-dire :

$$\underline{\mathbf{V}} = \varepsilon \frac{d\underline{\mathbf{X}}^1}{dt} \text{ sur } \Gamma(t) \quad (2.3)$$

Les équations régissant le comportement du fluide, écrites dans le repère lié à l'obstacle, sont :

- sur la surface $\Gamma(t)$ (c.f. eq. 1.10) :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \mathcal{D} & (a) \\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_\omega) \cdot \mathbf{n} + \underline{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\mathcal{D} & (b) \\ \lim_{|\mathbf{MP}| \rightarrow \infty} \underline{\nabla}\phi = 0 & & (c) \end{cases} \quad (2.4)$$

- sur le bord de fuite :

$$\begin{cases} \underline{\omega} = \underline{\omega}_e \\ \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_e \end{cases} \quad (2.5)$$

- dans le sillage (c.f. eq. 1.12) :

$$\begin{cases} \frac{D\underline{\mathbf{X}}}{Dt} = \underline{\mathbf{U}} & (a) \\ \frac{D\underline{\omega}}{Dt} = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{\mathbf{U}} & (b) \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\underline{\mathbf{X}}$ et $\underline{\mathbf{U}}$ sont respectivement la position et la vitesse de la particule.

Nous utilisons les développements 2.1 et 2.2 pour séparer le problème instationnaire en un problème non linéaire correspondant à l'effet de l'écoulement moyen sur une surface fixe, et un problème à l'ordre 1 en ε que nous appelons maintenant problème linéarisé. Le problème à l'ordre 0 en ε est résolu par une méthode particulière décrite dans le chapitre 1 ; c'est donc dans ce cadre que nous envisageons de résoudre le problème à l'ordre 1. Nous supposons ici qu'une solution approchée du problème à l'ordre 0 est connue.

La théorie de la surface portante permet de découpler la vérification des conditions aux limites sur la surface portante du calcul de l'évolution du sillage. Ce découplage permet de traiter avec leur spécificité propre chacun de ces aspects. Ceux-ci vont être décrits successivement dans la suite.

Notons que nous utilisons une approche fréquentielle, c'est-à-dire que nous nous intéressons aux perturbations instationnaires pouvant s'écrire sous la forme :

$$\underline{\mathbf{X}}^1 = \tilde{\underline{\mathbf{X}}}^1 e^{i\sigma t}, \quad \underline{\mathbf{n}}^1 = \tilde{\underline{\mathbf{n}}}^1 e^{i\sigma t} \quad (2.7)$$

2.3 Résolution intégrale sur le corps

On décompose les variables sous la forme :

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 \quad \text{et} \quad f^1 = \tilde{f}^1 e^{i\sigma t} \quad (2.8)$$

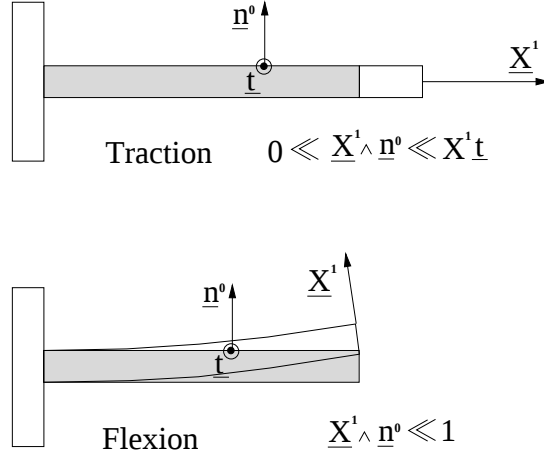
en ne gardant, dans un premier temps, que les termes d'ordre 0 en ε (correspondant à l'état d'équilibre), puis en résolvant le problème d'ordre 1 en ε .

La linéarisation permet d'écrire les équations sur Γ^0 en considérant que la déformation de sa géométrie n'est perceptible que par le changement d'orientation de ses normales [34, 35]. Cette approximation n'est pas un résultat direct du fait que l'amplitude de la déformation est petite : il faut de plus que cette déformation soit orientée selon la normale à Γ^0 , c'est à dire (*c.f.* figure 2.2):

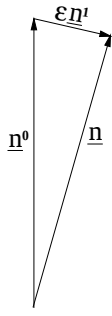
$$\underline{\mathbf{X}}^1 \wedge \underline{\mathbf{n}}^0 \ll 1 \quad (2.9)$$

Si tel n'est pas le cas, il est toujours possible de faire un développement limité autour de Γ^0 mais la formulation devient nettement plus complexe. Dans la mesure où le matériau considéré est très rigide en traction et très souple en flexion, il est logique que les premiers modes excités soient des modes de flexion : ces modes induisant des déplacements normaux à la surface, cette hypothèse est légitime (*c.f.* figure 2.2).

Nous écrivons donc les équations sur Γ^0 en supposant que la normale se décompose sous la

Figure 2.2: *Traction...flexion*

forme :

$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{n}}^0 + \varepsilon \underline{\mathbf{n}}^1$$

(2.10)

En remarquant que :

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \eta} \right\|}$$
(2.11)

On approche $\underline{\mathbf{n}}^1$ sous la forme :

$$\underline{\mathbf{n}}^1 = \frac{1}{\|\underline{\mathbf{n}}^0\|} \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{X}}^0}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}^1}{\partial \eta} + \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}^1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}^0}{\partial \eta} \right]$$
(2.12)

La méthode consiste à appliquer un déplacement élémentaire à chacun des noeuds de la surface portante suivant les trois directions (*c.f.* figure 2.3 dans le cas simple d'une plaque en mouvement de lacet).

Enfin, en décomposant ϕ et $\underline{\mathbf{U}}_\omega$ d'une façon similaire à (2.8), on obtient finalement le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \phi^1 = 0 \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial \underline{\mathbf{n}}^0} = -(\underline{\mathbf{U}}_\infty^0 + \underline{\mathbf{U}}_\omega^0 + \underline{\nabla} \phi^0) \cdot \underline{\mathbf{n}}^1 - (\underline{\mathbf{U}}_\infty^1 + \underline{\mathbf{U}}_\omega^1) \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 + \frac{d\underline{\mathbf{X}}^1}{dt} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 \end{cases} \quad (2.13)$$

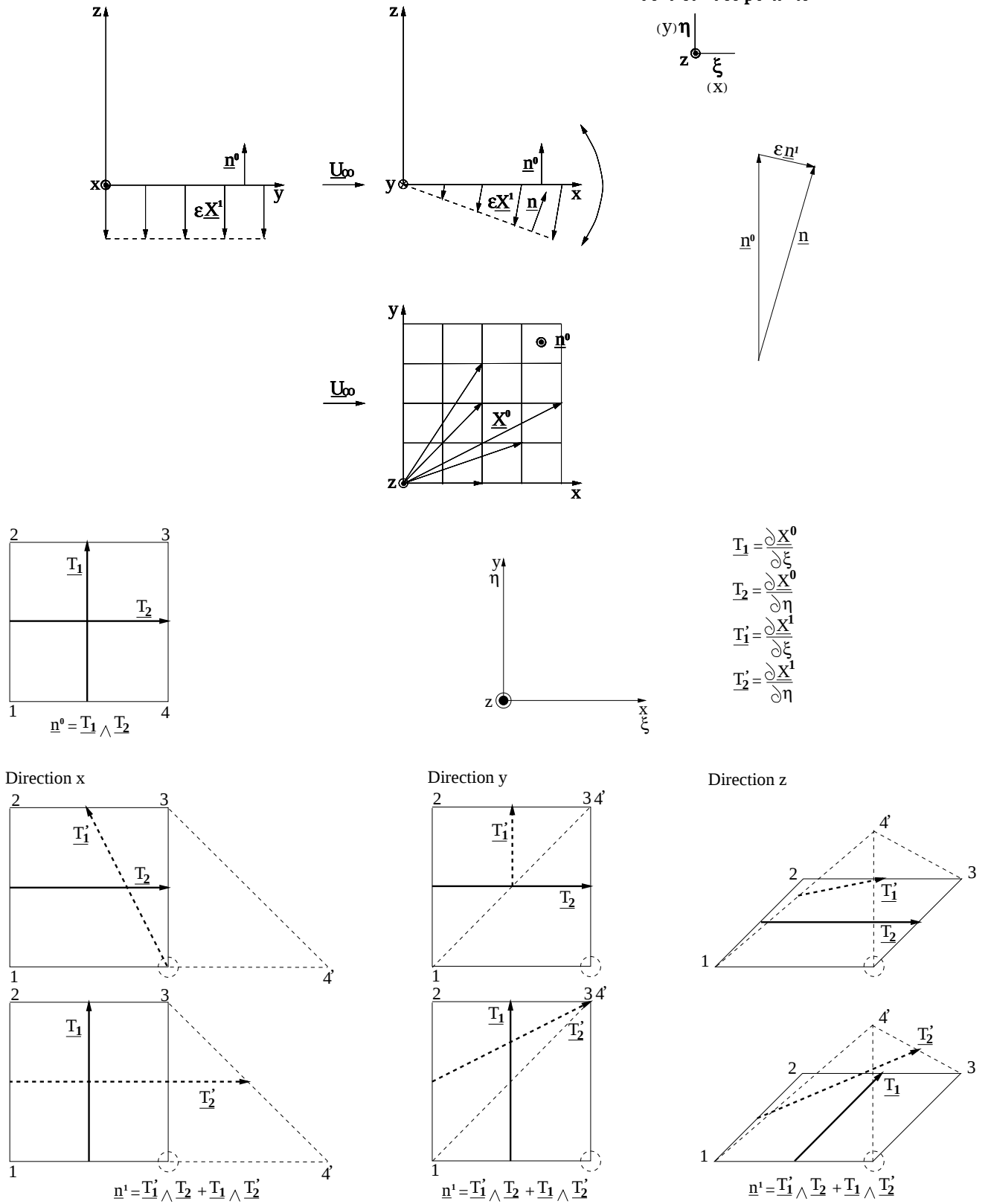


Figure 2.3: Evaluation de la normale déformée

problème qui peut encore être écrit, compte tenu de la linéarité et de 2.7 :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\phi}^1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\phi}^1}{\partial \mathbf{n}^0} = -(\mathbf{U}_\infty^0 + \mathbf{U}_\omega^0 + \nabla \phi^0) \cdot \tilde{\mathbf{n}}^1 - (\tilde{\mathbf{U}}_\infty^1 + \tilde{\mathbf{U}}_\omega^1) \cdot \mathbf{n}^0 + i\sigma \tilde{\mathbf{X}}^1 \cdot \mathbf{n}^0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce problème à l'ordre 1 peut être résolu par une méthode intégrale comme cela est habituel pour les problèmes de surfaces portantes. La condition sur la surface est connue dès lors que l'écoulement incident et les petits mouvements de la surface d'une part, la solution à l'ordre 0 d'autre part, sont connus.

2.4 Traitement du sillage

La linéarisation de la nappe de sillage pour des petites variations de l'angle d'incidence ou un petit mouvement de la surface portante est couramment utilisée dans les méthodes de surfaces ou lignes portantes (*c.f.* [2] où la géométrie du sillage est estimée *a priori*). C'est en revanche une approche nouvelle dans le cadre des méthodes particulières qui ne nécessitent pas une telle approximation pour rendre compte de phénomènes instationnaires (*c.f.* [11, 1]). On pourrait bien sûr figer le sillage et se rapprocher ainsi des méthodes évoquées ci-dessus, en ne faisant varier que l'intensité des particules. Mais chaque particule tourbillonnaire étant le résultat d'une intégration spatiale de la nappe, cette méthode n'est pertinente que dans la mesure où la pas de temps qui régit l'émission est suffisamment faible devant la période de la perturbation instationnaire étudiée. Nous pouvons évaluer les corrections à apporter sur la position des points du sillages ainsi que sur le champ de tourbillon en résolvant les équations du sillage à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{X}^1}{Dt} = \mathbf{U}^1(\mathbf{X}^0) & (a) \\ \frac{D\boldsymbol{\omega}^1}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \nabla) \mathbf{U}^1(\mathbf{X}^0) + (\boldsymbol{\omega}^1 \cdot \nabla) \mathbf{U}^0(\mathbf{X}^0) & (b) \end{cases} \quad (2.15)$$

Toutefois, l'intégration de ces équations sur tout le sillage nécessite un calcul aussi long que pour le problème complètement non linéaire ce qui retire tout intérêt à la linéarisation. Pour l'éviter, nous remarquons que l'influence du sillage sur l'écoulement au voisinage de la surface portante décroît rapidement à mesure que l'on s'en éloigne. Il en résulte que nous pouvons utiliser une méthode de correction partielle : la portion du sillage la plus amont est la plus importante à prendre en compte.

Par ailleurs, dans le cas où les petits mouvements de la surface portante sont de la forme (2.7), nous pouvons directement intégrer les équations sur le sillage en remplaçant le facteur σt par $\sigma(t - t_{bf})$ où t_{bf} est le temps écoulé depuis que la particule du sillage considérée

est passé sur la ligne de séparation, généralement le bord de fuite. Ce résultat est une conséquence directe de l'une des forme de la condition de fermeture utilisée [11] :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

Nous en déduisons que la correction à apporter sur la position et la valeur des particules fluides dans le sillage, et sur le tourbillon, peut être approchée par l'expression :

$$\begin{cases} \delta \tilde{\mathbf{X}}_h^1 = \delta \tilde{\mathbf{X}}^1 \exp \left[-\alpha (\mathbf{X}_{bf}^0 - \mathbf{X}_s^0)^2 \right] \\ \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_h^1 = \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}^1 \exp \left[-\alpha (\mathbf{X}_{bf}^0 - \mathbf{X}_s^0)^2 \right] \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\tilde{\mathbf{X}}_{bf}$ est un point représentatif du bord de fuite, $\tilde{\mathbf{X}}_s$ un point courant du sillage, et α une constante permettant d'ajuster la décroissance du facteur exponentiel de manière à obtenir la précision souhaitée.

Au cours de cette étude, nous négligerons le terme $\mathbf{U}_\omega^1$. Cette hypothèse est brutale car elle consiste à supprimer pour la perturbation l'effet de mémoire du sillage. La comparaison avec un calcul non linéaire nous montrera cependant qu'elle donne des résultats relativement cohérents du point de vue de l'amplitude de la réponse observée. La phase est en revanche inexacte, le retard croissant avec la fréquence de la perturbation. Cette imprécision rend l'exploitation difficile et il nous faudra résoudre ce problème avant d'espérer obtenir des résultats significatifs.

2.5 Calcul de la pression

Finalement, le problème étant résolu par une méthode intégrale, sa solution est exprimée sous la forme d'une répartition de doublets $\mu^1(t)$. En écrivant alors la relation de Bernoulli, le saut de pression $[P^1]_P$, en un point P de l'obstacle, se déduit de μ^1 par:

$$\frac{[P^1]_P}{\rho} = - \left(\frac{\partial \mu_P^1}{\partial t} + \mathbf{U}_{mP}^1 \cdot \nabla_P \mu_P^0 + \mathbf{U}_{mP}^0 \cdot \nabla_P \mu_P^1 \right) \quad (2.18)$$

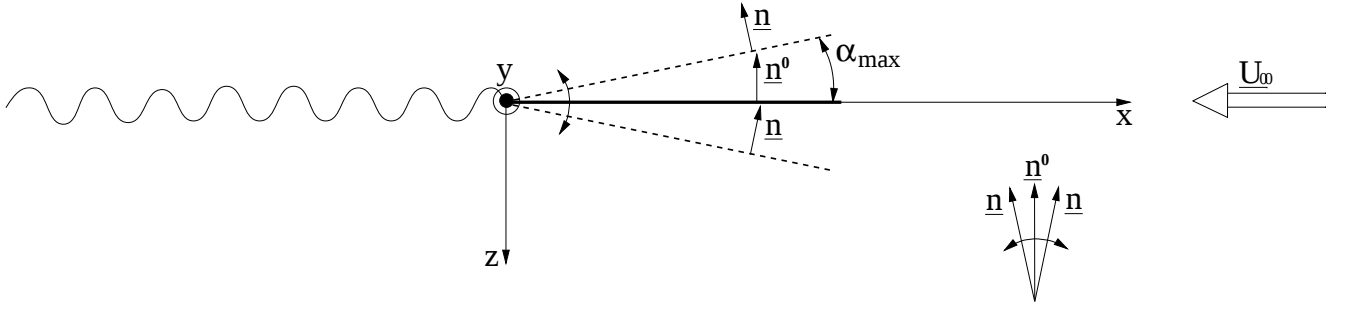
$\mathbf{U}_{mP}^\alpha$ est la vitesse moyenne intrados/extrados. Le problème peut encore être écrit, compte tenu de la linéarité et de 2.8 :

$$\frac{[\tilde{P}^1]_P}{\rho} = - \left(i\sigma \tilde{\mu}_P^1 + \tilde{\mathbf{U}}_{mP}^1 \cdot \nabla_P \mu_P^0 + \mathbf{U}_{mP}^0 \cdot \nabla_P \tilde{\mu}_P^1 \right) \quad (2.19)$$

2.6 Validation numérique

2.6.1 linéarisation partielle

Pour obtenir une version linéarisée de la méthode particulière, nous avons effectué deux approximations principales. Une concerne le traitement de la déformation de la géométrie du

Figure 2.4: *mouvement de lacet*

corps, approchée par une géométrie fixe et des normales mobiles, l'autre consistant purement et simplement à négliger l'effet du sillage. Si la seconde paraît abusive, la première repose elle sur un processus de linéarisation classique et il est donc intéressant de tester sa légitimité indépendamment de la seconde.

Pour ce faire, on définit une plaque plane dont le bord de fuite est alignée avec l'axe $(0, \underline{j})$ et soumise à une rotation oscillante autour de cet axe. Dans sa position moyenne, la plaque à une d'incidence nulle (cf figure 2.4).

Le principe de cette linéarisation partielle est de comparer un calcul non linéaire à un calcul dont la prise en compte du mouvement est simplement rendue par un changement d'orientation des normales. Le sillage, quant à lui, est traité de la même façon dans les deux cas (*c.f.* organigrammes en annexe G).

En notant C^0 la corde de la plaque plane, on définit la fréquence réduite :

$$f_r = \frac{C^0}{TU_\infty} \quad (2.20)$$

où T est la période du mouvement de lacet, c'est-à-dire, en notant α l'angle de rotation instantané, celui-ci vérifie :

$$\alpha = \alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{pour } t > 0 \quad , \quad 0 \text{ sinon} \quad (2.21)$$

Ainsi définie, f_r représente le nombre de périodes du mouvement pendant qu'une particule fluide décrit la longueur de corde de la plaque à une vitesse U_∞ .

Le rapport d'allongement de la plaque et l'angle α_0 étant donnés, la connaissance de f_r suffit à décrire complètement les données du problème écrit dans le cadre de l'approximation fluide parfait.

Le déphasage entre l'oscillation et le coefficient de portance, pour une fréquence réduite donné, est fonction du pas de temps (*c.f.* figure 2.5). Le meilleur compromis temps de calcul / précision est obtenu pour une période d'oscillation décrite en 80 pas de temps.

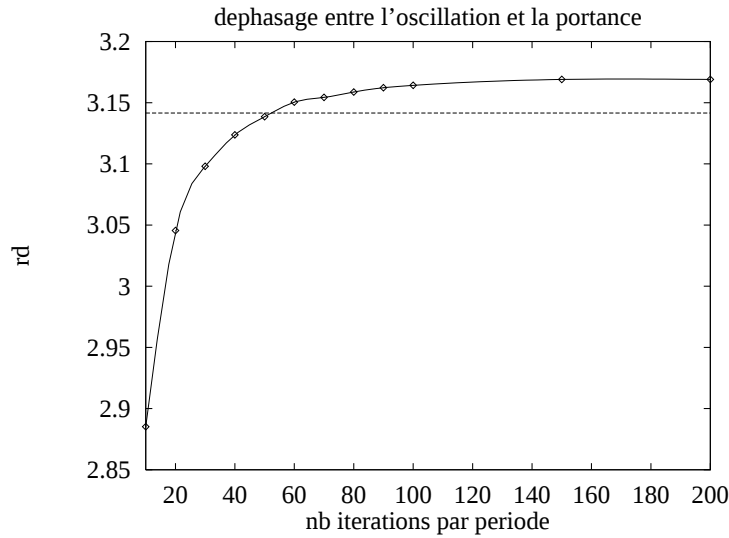


Figure 2.5: Déphasage entre oscillation et coefficient de portance en fonction du pas de temps

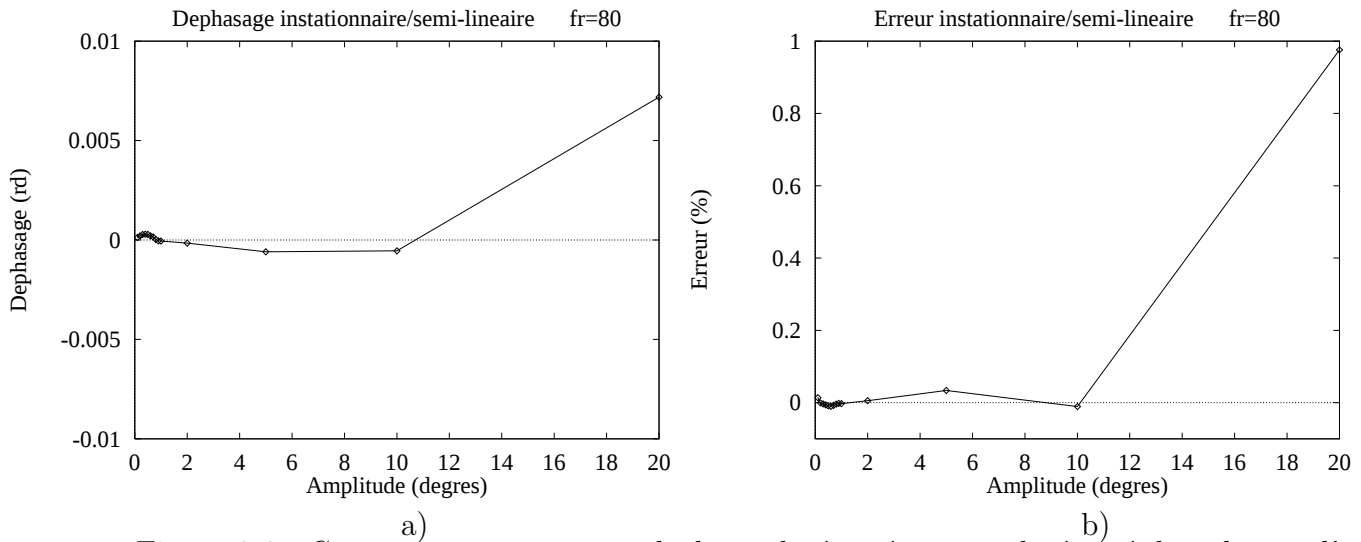


Figure 2.6: Comparaison entre un calcul non linéarisé et semi-linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une fréquence réduite fixée : a) erreur sur la phase, b) erreur sur l'amplitude

Deux séries de calculs sont effectuées :

- la première concerne l'évolution de l'erreur en déphasage et amplitude, pour une fréquence réduite donnée, en fonction de l'amplitude de la perturbation (*c.f.* figure 2.6).
- la seconde concerne les mêmes évolutions, pour une perturbation donnée, en fonction de la fréquence réduite (*c.f.* figure 2.7).

Pour ces séries, le nombre de pas de temps par période est constant.

Les résultats obtenus valident complètement la méthode. En effet, les erreurs sur la phase

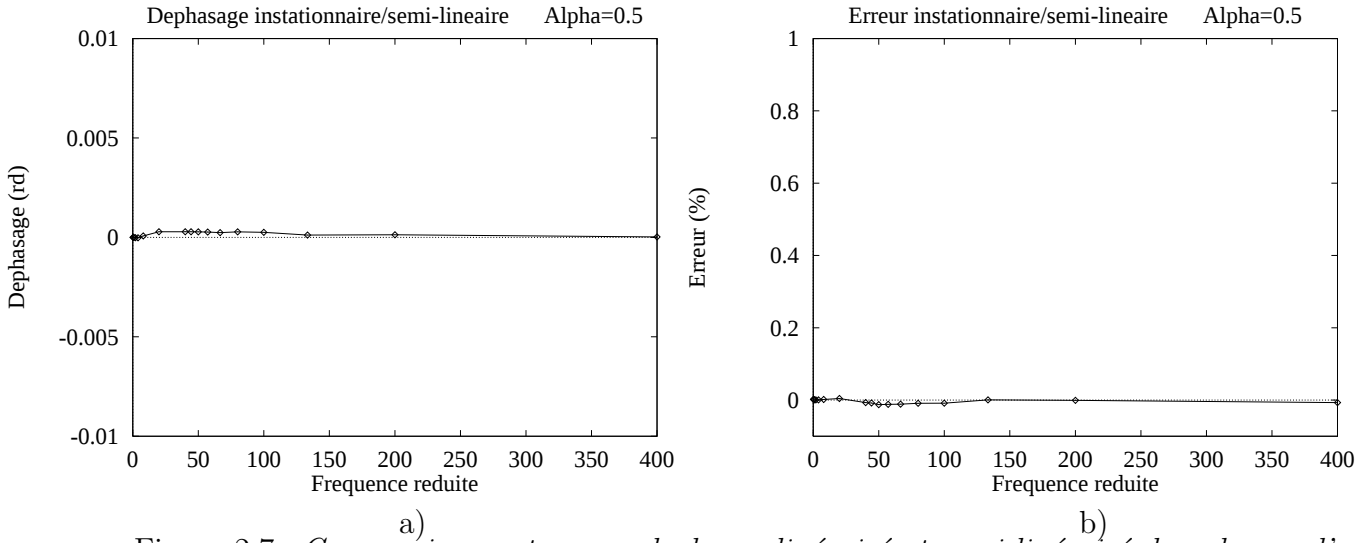


Figure 2.7: *Comparaison entre un calcul non linéarisé et semi-linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a) erreur sur la phase, b) erreur sur l'amplitude*

et l'amplitude sont quasi inexistantes. Cependant le pas de temps doit être calé en fonction de la période de la perturbation instationnaire étudiée. Nous allons maintenant tester cette méthode, en présence d'un mouvement moyen d'amplitude quelconque.

2.6.2 linéarisation totale

La même série de test est effectuée, avec la différence non négligeable, qu'il y a ici un sillage moyen, considéré à l'ordre 0, mais négligé à l'ordre 1 (*c.f.* organigrammes en annexe G). Afin de démontrer l'intérêt de cette décomposition fréquentielle, le sillage moyen est calculé avec un pas de temps nettement supérieur au pas de temps nécessaire à la prise en compte du phénomène instationnaire périodique. Sur la figure 2.8, on représente l'évolution du coefficient de portance en fonction du temps pour des fréquences réduites respectives de 2 et 0.4. Les figures suivantes (2.9 et 2.10), représentent l'évolution des déphasages et des erreurs relatives, pour une amplitude de perturbation fixée en fonction de la fréquence réduite, et pour une fréquence réduite fixée en fonction de l'amplitude de la perturbation.

Les résultats sont tout à fait satisfaisant car le sillage n'étant pas pris en compte pour l'instant, on pourra s'attendre à des résultats nettement meilleurs lorsque cela sera fait. De plus, l'erreur en amplitude la plus forte est obtenue pour les fréquences réduites les plus faibles, c'est-à-dire pour les coefficients de portance les plus faibles (on est en quasi-stationnaire). Or, le but de cette linéarisation consiste à ajouter au mouvement moyen d'amplitude quelconque, des oscillations haute fréquence.

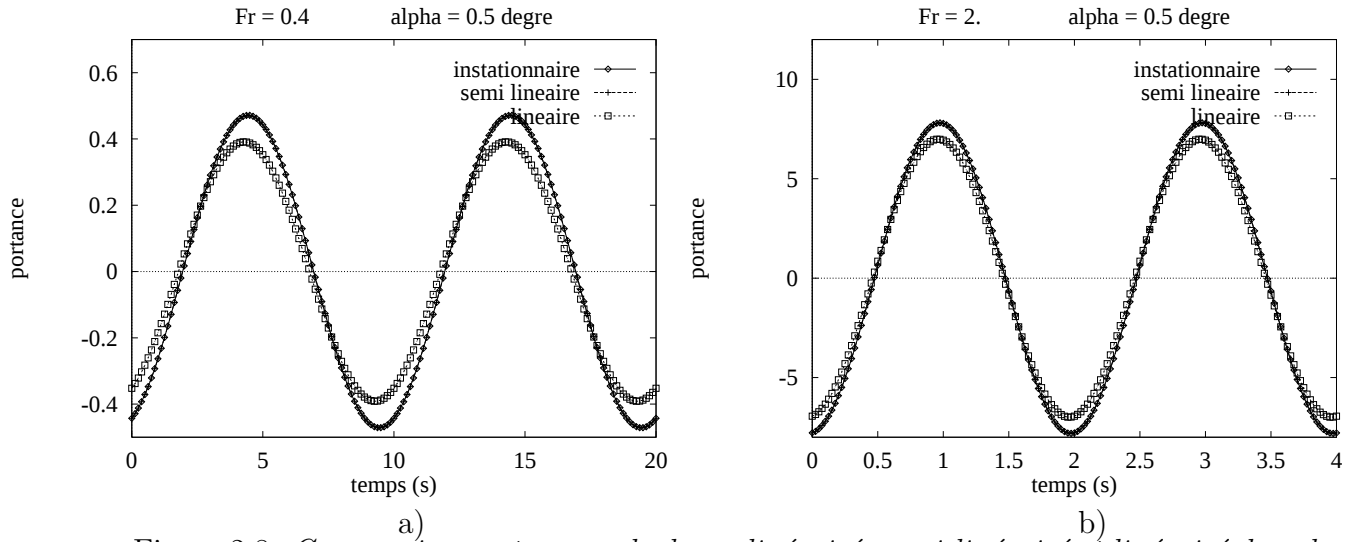


Figure 2.8: Comparaison entre un calcul non linéarisé, semi-linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a) $f_r = 0.4$, b) $f_r = 2$

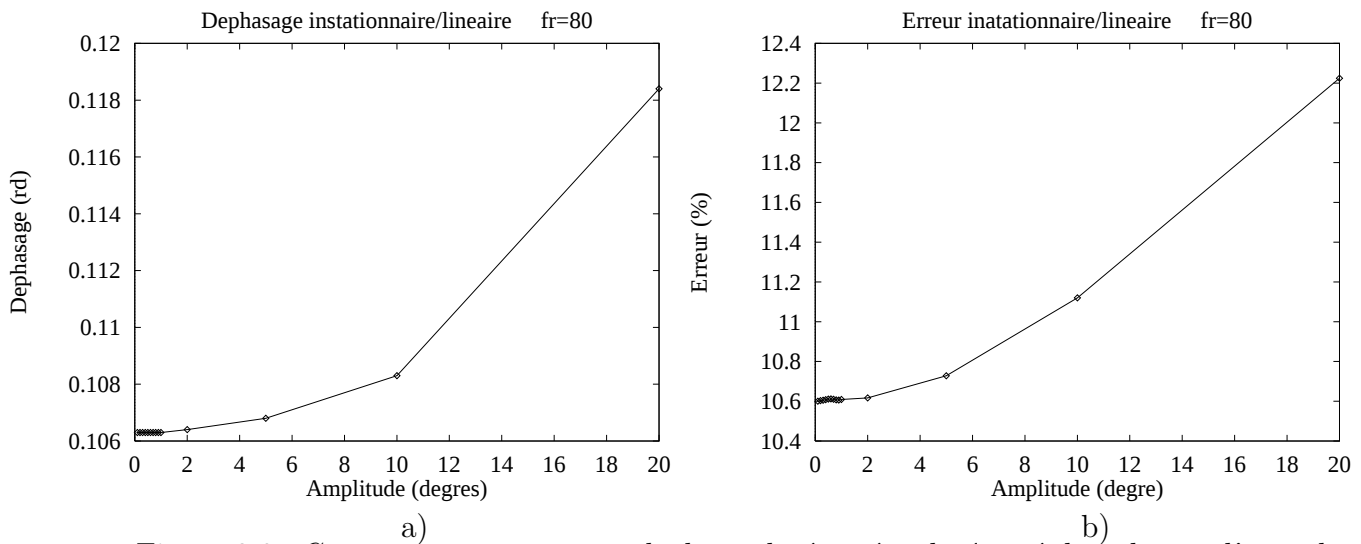


Figure 2.9: Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une fréquence réduite fixée : a) erreur sur la phase, b) erreur sur l'amplitude

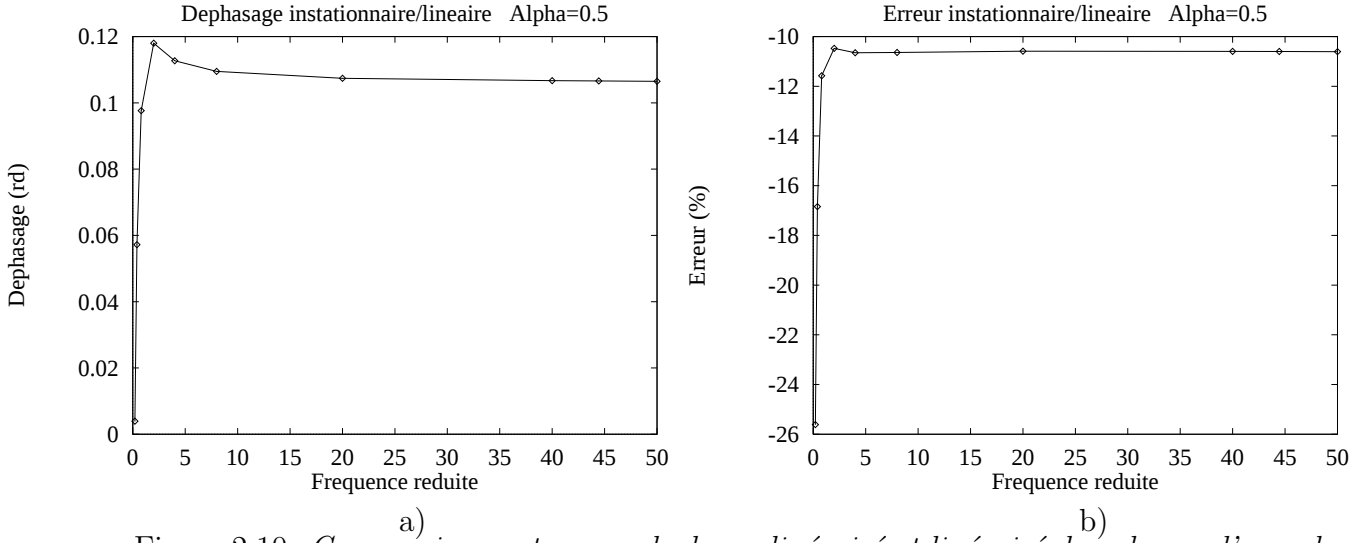


Figure 2.10: Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'une plaque en mouvement de lacet pour une amplitude de perturbation fixée : a) erreur sur la phase, b) erreur sur l'amplitude

Le fait d'ajouter un terme d'énergie cinétique dans la partie solide, permet de prendre en compte les effets dynamiques, qui, couplés à la partie fluide linéarisée précédente, permettra de fournir une explication aux oscillations haute fréquence qui peuvent animer le solide. L'équation discrète à résoudre pour la partie solide est la suivante :

$$M \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} + K \underline{U} = \underline{F}_{ext} \quad (2.22)$$

où M et K correspondent respectivement aux matrices de masse et de rigidité.

En supposant que les efforts extérieurs sont nuls, l'équation d'élasticité dynamique linéarisée se comporte comme un oscillateur pur et, en écrivant :

$$\underline{U} = \underline{U}_s e^{i\omega t} \quad (2.23)$$

dans l'équation discrète, la recherche des modes propres revient classiquement à l'étude de la matrice $M^{-1}K$ dont les valeurs propres λ_i vérifient:

$$\det[K - \lambda M] = 0 \quad (2.24)$$

Les pulsations propres ω_i du système se déduisent ensuite en écrivant :

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (2.25)$$

Notons que les matrices M et K étant symétriques définies positives, la relation précédente ne pose jamais d'ambiguïté.

Le calcul de ces modes propres est de toute première importance. Il définit les fréquences de résonance du système et permet ensuite de résoudre simplement le problème avec second membre (dans la mesure où celui-ci est de type sinusoïdal) en le projetant sur la base des vecteurs propres associés.

2.7 conclusion

Etant donnés le caractère brutal de certaines approximations et la brièveté d'exploitation du couplage, ces résultats ne sont bien sûr qu'indicatifs et leur intérêt principal est de fournir une base à une étude ultérieure plus minutieuse et de plus long terme.

Chapitre 3

Approximation champ lointain

3.1 Introduction

La méthode particulière est basée sur une discrétisation directe de la vorticité dans le sillage ; la plus commune consiste à discrétiser chaque portion de sillage développé par chacune des pales, par des surfaces hélicoïdales support d'une densité surfacique de vorticité. Le sillage correspondant est une nappe tourbillonnaire.

Pour que ce modèle numérique reste efficace, il faut que, non seulement les effets de diffusion ne soient pas trop développés, mais également que la nappe ne subisse pas de grosses déformations, car cela entraîne des instabilités numériques. Ce modèle est donc inexact dans de nombreux cas réels. En effet, un écoulement turbulent, un vent inhomogène ou encore la viscosité du fluide, entraînent une diffusion de la vorticité dans le sillage.

Afin de palier à ces problèmes numériques, la discrétisation de la nappe tourbillonnaire par des surfaces hélicoïdales porteuse de densité surfacique de vorticité est remplacée par une distribution volumique de vorticité en particules que l'on suit dans leur mouvement (traitement Lagrangien). Elles sont porteuses d'un vecteur tourbillon qui évolue dans le temps en fonction des distorsions locales du champ de vitesse (*c.f.* chapitre 1).

On introduit dans ce chapitre une approximation du sillage lointain qui consiste à simplifier l'évolution dans le temps des particules éloignées des surfaces portantes. Une des raisons nécessitant cette approximation concerne le transport du tourbillon sur des distances relativement importantes sans altérer les caractéristiques de la nappe. De plus, la décroissance rapide de l'influence sur les surfaces portantes de la vorticité lorsqu'on s'éloigne vers l'aval, permet de traiter approximativement l'évolution des particules fluides dans l'écoulement aval. Ce principe est régulièrement utilisé dans la réduction de la taille des maillages dans les méthodes eulériennes.

A coté de ces considérations, il est nécessaire d'un point de vue numérique de diminuer

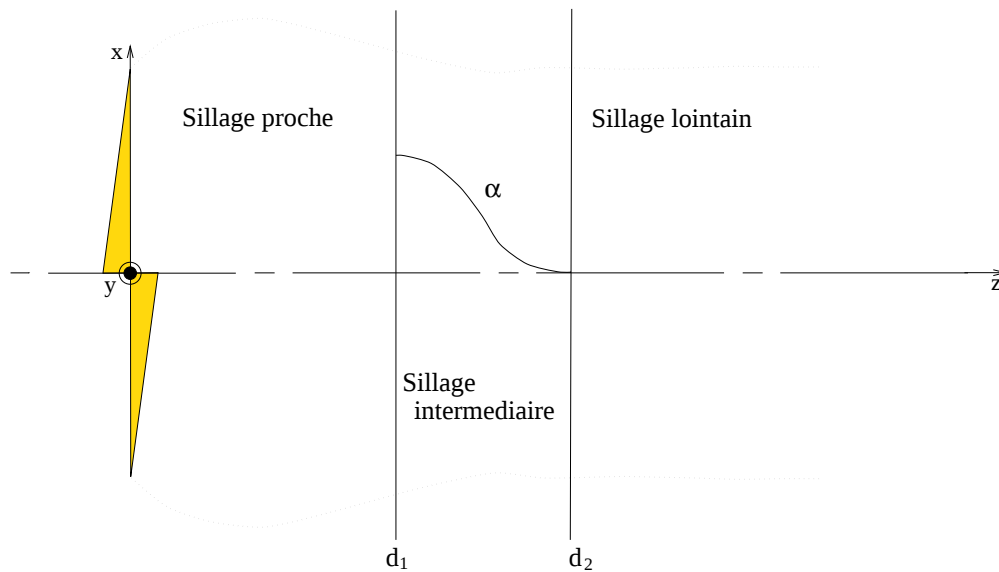


Figure 3.1: *Les zones de sillage proche, intermédiaire et lointain*

le temps de calcul dans l'évaluation des efforts. En effet, les efforts sont calculés à partir de la vitesse en chaque point tourbillon de la surface portante, et les vitesses sont elles-mêmes calculées en considérant toutes les particules : liées et libres. Le sillage étant construit pas à pas par l'émission de particules au bord de fuite, pour un grand nombre de pas de temps, le nombre de particules libres du sillage devient très important et entraîne de nombreux calculs d'interactions, alors que l'influence des particules libres, décroît rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la surface portante. On peut donc ne pas considérer de la même manière les particules éloignées et les particules proches.

On va donc raccorder au modèle complet non linéaire, conservé pour le sillage proche, un modèle linéaire figé (linéaire au sens figé et non au sens du sillage parfait) pour le sillage lointain.

Il est cependant impossible de modifier le traitement du sillage de façon abrupte dans le fluide, car une discontinuité de vorticit   apparaissant dans le sillage entra  nerait une perturbation d  stabilisatrice. Dans certains cas, une onde progressive est cr   e, avec comme cons  quence, une instabilit   num  rique qui peut d  truire le sillage. D'o   l'id  e de d  couper le sillage en trois parties distinctes (*c.f.* fig. 3.1) :

- le mod  le de sillage proche
- le mod  le de sillage interm  diaire
- le mod  le de sillage lointain

Le mod  le de sillage interm  diaire permet une transition progressive entre le mod  le exact et le mod  le approch  .

Avant d'examiner les diff  rentes approximations, il est n  cessaire de rappeler que le

modèle complet non linéaire est basé sur la méthode de la nappe tourbillonnaire, qui consiste en un équilibre entre l'équation du transport du tourbillon et les conditions aux limites définies sur la surface portante. Les différentes parties du sillage sont définies en respectant ces conditions.

- LE MODÈLE DE SILLAGE PROCHE est le modèle exact. Toutes les conditions, l'une pour la pression (continuité de pression au bord de fuite) et deux pour le champ de vitesse (vitesse normale nulle sur la paroi et une condition cinématique) sont respectées.
- LE MODÈLE DE SILLAGE INTERMÉDIAIRE est différent du modèle exact. Seulement deux conditions sont respectées et la troisième, généralement la condition cinématique, est prise en compte de manière approchée. L'approximation la plus commune consiste à utiliser une approximation de la composante radiale du champ de vitesse, par exemple en annulant cette dernière. On verra par la suite, que ce n'est cependant pas cette approximation qui a été utilisée.
- LE CHAMP LOINTAIN est obtenu par un gel du sillage en supposant que :
 - l'équilibre est obtenu,
 - l'écoulement infini amont est uniforme.

Ces dernières hypothèses sont très efficaces vu qu'il est maintenant possible de calculer l'influence de cette partie du sillage par le biais de la formule de Goldstein ¹, qui conduit à un nombre fini et constant de calculs.

Le modèle qui consiste à approcher le sillage par cette méthode, a été utilisé en aérodynamique, dans le cadre d'une nappe tourbillonnaire discrétisée par une distribution surfacique de vorticité, où il s'est avéré tout à fait satisfaisant dans de nombreux cas. Bien que le modèle reste pour l'instant insuffisant pour prendre en compte des effets instationnaire, il fournira cependant une bonne base pour notre approximation du sillage lointain.

Nous allons, décrire la façon d'introduire ce modèle au cadre de la méthode particulaire. De plus, à partir d'une analyse de sillage d'une hélice marine Wageningen type B4-55 [36], pour laquelle les effets non linéaires sont en général très forts, nous allons mettre en évidence l'intérêt de mettre en place ce type de modèle. Cependant, la taille et l'emplacement de la zone "tampon", dont les limites sont des plans situés à des distances d_1 et d_2 en aval du disque rotor (*c.f.* figure 3.1), sont inconnus. Il faut donc établir des critères pour définir ces distances d_1 et d_2 caractérisant cette zone. Ces critères sont rattachés à un champ $f(r, \theta, z)$, où f peut être par exemple la composante radiale, azimutale ou axiale du champ de vitesse ou du tourbillon en coordonnées cylindriques. On étudie ici les variations de cette fonction

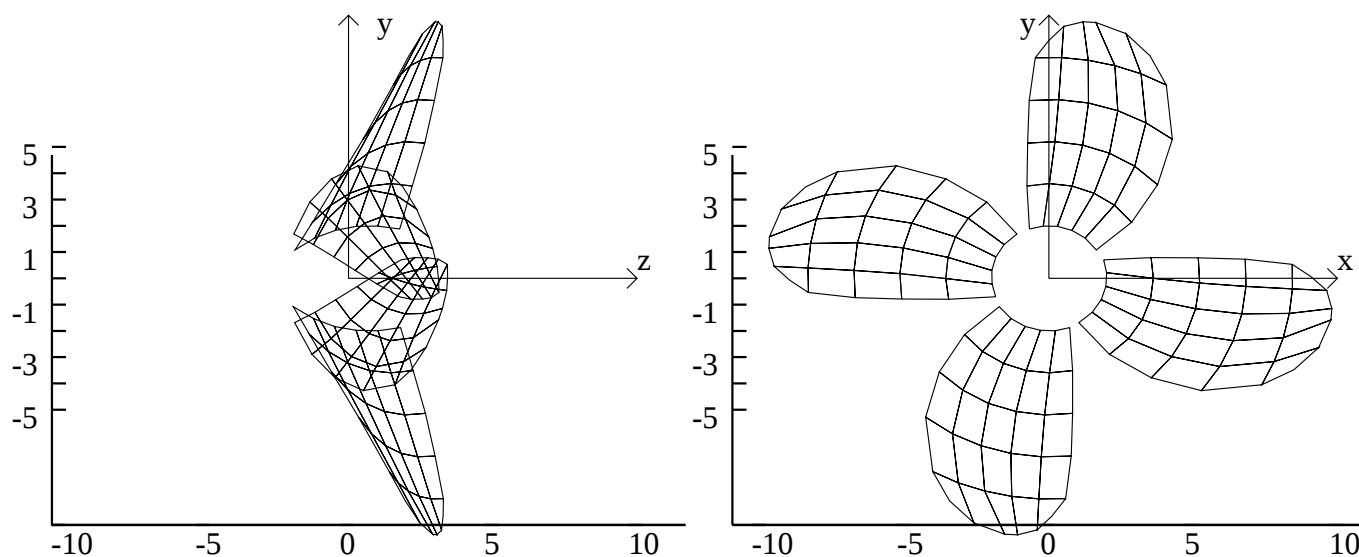
1

pour une valeur moyenne du rayon ($0.8R_{rotor}$) ; plus particulièrement, on considère le sillage (champ de vitesse et de vorticité) en aval de l'hélice, par la projection de ce dernier, sur une surface cylindrique coaxiale avec le rotor. On va pour ce critère, considérer une grandeur qui a un fonctionnement linéaire. Afin d'isoler cette grandeur, on reprend les conclusions d'une récente étude portant sur une analyse de sillage en aval d'une hélice Wageningen type B4-55 [37, 38] :

- Sur ces surfaces cylindriques, les lignes iso-valeurs de la composante radiale de la vitesse sont périodiques spatialement. Les lignes iso-valeurs sont des hélicoïdes régulières avec un niveau maximum constant.
 $\Rightarrow$ Pour la composante radiale, le rotor est classé dans la théorie linéaire.
- Les lignes iso-valeurs des composantes axiales et azimutales du champ de vitesse se rapprochent d'une hélicoïde avec une variation du pas de l'hélice et une diminution des niveaux maximum à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval.
 $\Rightarrow$ Pour les composantes axiales et azimutales, le comportement de l'hélice est non linéaire.

L'analyse réalisée ici est basée sur le comportement linéaire de la composante radiale : plusieurs essais pour différentes valeurs de d_1 et d_2 montrent que ce comportement est conservé. On a alors une onde progressive dans le plan (θ, z) , dont l'évaluation des vecteurs d'onde $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ sera abordé plus tard. Cependant, pour des valeurs non réalistes des positions d_1 et d_2 , on observe une variation du vecteur d'onde $\underline{k}_z$, qui entraîne une direction de propagation de l'onde différente. C'est ce critère qui est utilisé pour optimiser les positions d_1 et d_2 .

Nous allons pour commencer, décrire le modèle du champ lointain, puis dans la section suivante, nous présenterons les outils d'analyse utilisés, et enfin, à partir des résultats du cas de référence, c'est-à-dire en considérant le modèle complet, nous allons établir une méthodologie qui permettra d'optimiser l'emplacement et la taille de la zone tampon dans le modèle du sillage lointain. En pratique, ce traitement est indispensable car le sillage étant construit pas à pas à partir du repos, un fort tourbillon, dit "tourbillon de démarrage" est créé en début de calcul. Pour un nombre de pas de temps très important, le calcul de l'évolution de ce tourbillon (équation d'Helmholtz) devient délicat à cause des forts gradients de vitesse, et introduit dans le calcul des erreurs non négligeables. Cette perturbation, naissant très en aval dans l'écoulement, se développe, progresse vers l'amont et provoque ainsi la déstabilisation du sillage. Cette méthodologie, établie sur le cas du tourbillon de démarrage, n'est cependant pas universelle. Elle peut dépendre de la charge de l'hélice par exemple. Les tests sont effectués sur l'hélice marine (B4-55) présenté figure 3.2, qui sera considérée comme faiblement chargée ($C_t = \frac{8K_t}{J^2\pi} = 0.94$).

Figure 3.2: Hélice B_4-55 et repère associé

3.2 Modèle du champ lointain

L'adaptation du modèle précédent au cadre de la méthode particulaire nécessite la prise en compte des problèmes suivants :

- Dans la méthode particulaire le sillage est construit de manière itérative : les particules tourbillonnaires sont créées le long du bord de fuite et convectées dans l'écoulement. Donc une particule traversera les 3 différentes zones que nous avons défini dans la section précédente : sillage proche, sillage intermédiaire et sillage lointain.
- Dans la méthode particulaire, l'équation de transport du tourbillon est utilisée, et non pas des conditions limites sur la surface du sillage. C'est un avantage car la mise en équilibre de la nappe se fait de manière directe. De plus, les effets de diffusion du sillage peuvent être pris en compte.
- Dans la méthode particulaire, un schéma lagrangien est utilisé. Il est pas possible dans ce cadre d'utiliser toutes sortes de lissage comme par exemple des techniques de relaxation.

Nous proposons de construire dans un cadre particulaire un modèle similaire à celui utilisé dans le modèle de la nappe tourbillonnaire, pour les zones de sillage proche et lointain. Le sillage intermédiaire sera considéré comme une zone "tampon" qui permettra la compatibilité entre les 2 zones. Les équations à résoudre sont :

- SILLAGE PROCHE

On utilise l'équation complète de Navier-Stokes en formulation vitesse-tourbillon. Pas d'approximation mais une discrétisation numérique est utilisée. L'évolution dans le

temps des particules est gouvernée par le système d'équations intégral-différentiel suivant (*c.f.* section 1.3.4) :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{X}_i}{Dt} = (\mathbf{U}_\omega + \mathbf{U}_\phi + \mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{ext})(\mathbf{X}_i, t) \\ \frac{D\mathbf{\Omega}_i}{Dt} = (\mathbf{\Omega}_i \cdot \nabla)(\mathbf{U}_\omega + \mathbf{U}_\phi + \mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{ext})(\mathbf{X}_i, t) + \nu \Delta \mathbf{\Omega}_i \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{\Omega}_i$ correspondent respectivement à la position et au poids de la particule i (*c.f.* chapitre 1) et $\nu \Delta \mathbf{\Omega}_i$ au terme de diffusion.

- SILLAGE LOINTAIN

Pour cette zone, nous introduisons dans les équations précédentes l'hypothèse du sillage gelé : $\mathbf{U} = \mathbf{U}_\infty$. Dans le modèle de nappe tourbillonnaire, il n'y a pas de diffusion, et donc le transport du tourbillon par les particules lointaines est constant. Le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{X}_i}{Dt} = \mathbf{U}_\infty(\mathbf{X}_i, t) \\ \frac{D\mathbf{\Omega}_i}{Dt} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Il doit être noté que la deuxième équation n'est pas consistante avec les eq. (3.1), vu que la redistribution de la vorticité due à la diffusion devrait décroître en aval. On introduit donc un traitement empirique de la dissipation du sillage, qui consiste à faire décroître l'intensité des particules à mesure qu'elles s'éloignent des surfaces portantes :

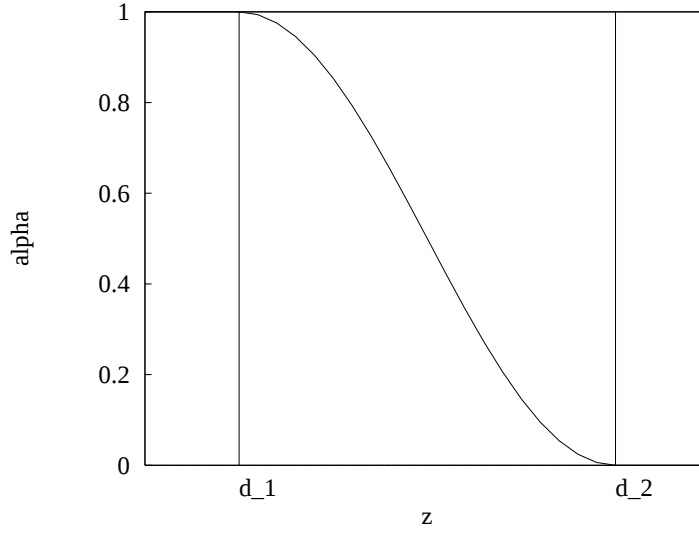
$$\mathbf{\Omega}(t + dt) = D [\mathbf{\Omega}(t, \delta t)] + \delta t (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} \quad (3.3)$$

avec $|D| < 1$: D étant le facteur de dissipation

- SILLAGE INTERMÉDIAIRE

Il permet une transition souple entre les 2 domaines précédents repérés par les distances d_1 et d_2 . Le schéma le plus simple consiste à combiner les 2 systèmes d'équations précédents. On considère une fonction $\alpha(z)$ qui vérifie les conditions suivantes (*c.f.* figure 3.3) :

- $\alpha(z) = 0$ pour $z \geq d_2$
- $\alpha(z) = 0.5$ pour $z = \frac{d_1 + d_2}{2}$
- $\alpha(z) = 1$ pour $z \leq d_1$
- $\frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} = 0$ pour $z = d_1$ et $z = d_2$

Figure 3.3: $\alpha(z)$

Par exemple (*c.f.* figure 3.3) :

$$\begin{cases} \alpha(z) = 1 & \text{pour } z \leq d_1 \\ \alpha(z) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\pi \frac{z - d_1}{d_2 - d_1} \right) + 1 \right] & \text{pour } d_1 < z < d_2 \\ \alpha(z) = 0 & \text{pour } z \geq d_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Les équations d'évolution temporelle pour les particules sont :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{X}_i}{Dt} = \alpha (\mathbf{U}_\omega + \mathbf{U}_\phi + \mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{ext}) (\mathbf{X}_i, t) + (1 - \alpha) \mathbf{U}_\infty (\mathbf{X}_i, t) \\ \frac{D\mathbf{\Omega}_i}{Dt} = \alpha (\mathbf{\Omega}_i \cdot \nabla) (\mathbf{U}_\omega + \mathbf{U}_\phi + \mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{ext}) (\mathbf{X}_i, t) + \alpha \nu \Delta \mathbf{\Omega}_i \end{cases} \quad (3.5)$$

Le modèle du champ lointain étant maintenant défini, nous allons, à partir de tests numériques (analyse spectrale du sillage) sur une hélice faiblement chargée, plongée dans un écoulement uniforme axisymétrique, déterminer la taille et la position de la zone “ α ” optimale pour un temps de calcul minimal, sans altérer les caractéristiques du sillage, sur un très grand nombre de tours, de telle sorte que les caractéristiques spectrales du sillage soient conservées.

3.3 Les outils d'analyse utilisés

3.3.1 Analyse de sillage

Pour un écoulement donné, on isole un cylindre de section circulaire ($R_{\text{cylindre}} = 0.8 * R_{\text{hélice}}$), de longueur $5D_{\text{hélice}}$, aligné sur l'axe de l'hélice, et placé juste derrière cette

dernière. Sur ce cylindre, discrétisé en 64 points suivant θ ($\delta\theta = 5.625^\circ$), par 512 points suivant z ($\delta z = \frac{3.5}{D}$), on réalise des cartes de vitesse et vorticité en coordonnées cylindriques. Le champ de vitesse est donné par (*c.f.* chapitre 1) :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = (\underline{\mathbf{U}}_\omega + \underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_{ext}) (\underline{\mathbf{X}}, t)$$

et le champ de vorticité s'exprime par une somme pondérée des vecteurs tourbillons $\underline{\mathbf{\Omega}}_i$ portés par chaque particule (*c.f.* chapitre 1) :

$$\underline{\omega}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^{N_p(t)+N_j} \underline{\mathbf{\Omega}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) \xi_\delta (|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_i|) \quad (3.6)$$

où ξ_δ est une fonction régulière qui converge vers une mesure de Dirac ξ quand le paramètre $\delta \rightarrow 0$, $N_p(t)$ le nombre de particules libre du sillage et N_j le nombre de particules liées à l'obstacle après équivalence doublet-tourbillon.

Sur ces cartes de vitesse et vorticité, correspondant à la développée de la surface cylindrique sur un plan $(\theta, \frac{z}{D})$, on réalise les 3 analyses suivantes :

1. Tracé des lignes iso-valeurs pour les 3 composantes du champ de vitesse et de vorticité.
2. Détermination de la répartition spectrale de puissance pour la composante $u(\theta, \frac{z}{D})$ concernée. L'estimateur utilisé est le périodogramme défini à partir de l'autospectre bidimensionnel du signal :

$$S_{uu}(f_\theta, f_z) = \frac{1}{2\pi z_{max}} \tilde{u}(f_\theta, f_z) \cdot \tilde{u}^*(f_\theta, f_z)$$

où $*$ désigne le conjugué, z_{max} la longueur d'observation du signal et $\tilde{u}(f_\theta, f_z) = TF[u(\theta, z)]$. On a :

$$\tilde{u}(f_\theta, f_z) = \int_0^{z_{max}} \int_0^{2\pi} u(\theta, \frac{z}{D}) e^{-j(2\pi f_z \frac{z}{D} + 2\pi f_\theta \theta)} dz d\theta$$

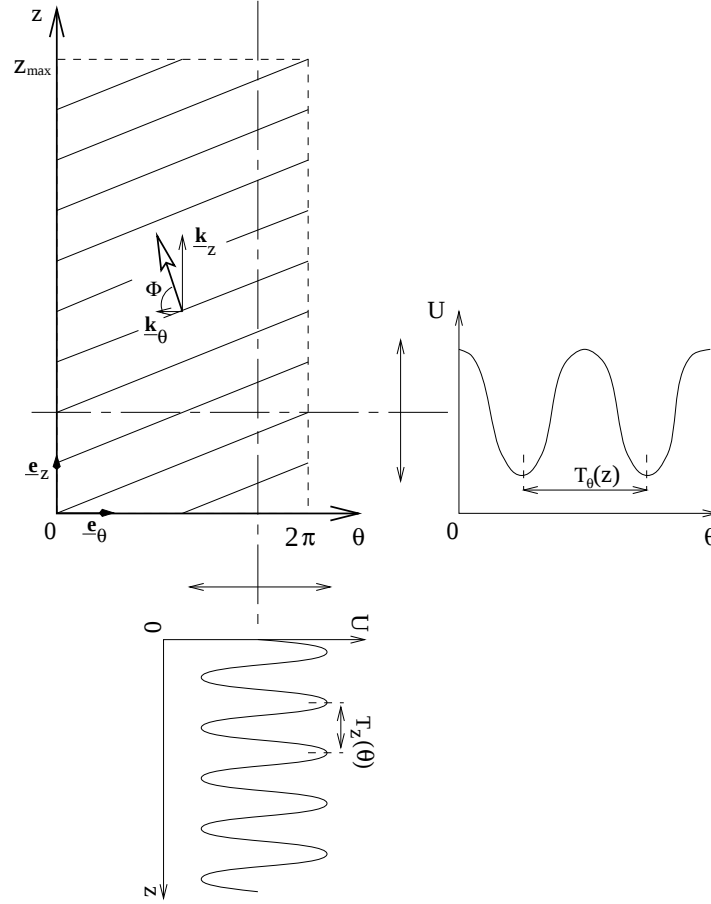
On en déduit alors la direction de propagation de l'onde (*c.f.* figure 3.4) :

$$\tan \Phi = \frac{k_z}{k_\theta}$$

où $f_z = k_z \frac{D}{2\pi}$ et $f_\theta = k_\theta \frac{1}{2\pi}$,

ainsi qu'une estimation de l'erreur (*c.f.* annexe C) :

$$\delta\Phi = \frac{2\pi}{D N_z \delta z} \left(\frac{k_\theta}{k_\theta^2 + k_z^2} \right)$$

Figure 3.4: $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs

3. Le long d'une génératrice du cylindre, on représente la variation des composantes du champ de vitesse et vorticité en coordonnées cylindriques, en fonction de $\frac{z}{D}$ ($u_\theta(\frac{z}{D})$, u_θ correspondant à l'une des composantes précédentes et $\frac{z}{D}$ la distance axiale). Cette génératrice est située dans le plan méridien (plan (x, z)).

Sur $u_\theta(\frac{z}{D})$, on détermine la répartition spectrale de puissance. L'estimateur utilisé est maintenant :

$$S_{u_\theta u_\theta}(k_z) = \frac{1}{z_{max}} (\tilde{u}_\theta(f_z) \cdot \tilde{u}_\theta^*(f_z))$$

avec

$$\tilde{u}_\theta(f_z) = \int_0^{z_{max}} u_\theta(\frac{z}{D}) e^{-j(2\pi f_z \frac{z}{D})} dz$$

Sur $u_\theta(\frac{z}{D})$, on réalise également une transformée en ondelette [39] afin de mieux apprécier l'évolution longitudinale des vecteurs d'onde $\underline{k}_z$ en fonction de $\frac{z}{D}$ (c.f. annexe D). On représente alors les coefficients d'ondelette

$$W_{u_\theta}(f_z, \frac{z}{D}) = \int_0^{z_{max}} u_\theta(\frac{z}{D}) \cdot \psi_{f_z, z}(\frac{z}{D}) dz$$

De cette analyse, on trace l'évolution des fréquences prédominantes en fonction de la distance axiale, correspondant au maximum du coefficient d'ondelette pour une abscisse $\frac{z}{D}$ donnée.

3.3.2 Représentation des efforts

Sur l'hélice B4-55 discrétisé en 5×5 facettes par pales, on représente les efforts globaux sur une pale en fonction du temps (24 pas de temps correspondant à un tour d'hélice), dans le repère lié à l'hélice.

Dans la section suivante, nous allons présenter les caractéristiques du sillage, ainsi que la poussée d'une pale pour le cas de référence, c'est-à-dire le calcul réalisé en l'absence de l'approximation de sillage lointain. Ces caractéristiques seront systématiquement confrontés à l'ensemble des résultats issus des tests numériques, pour lesquels le modèle de sillage lointain sera introduit. Ces confrontations permettront de rejeter les cas pour lesquels les caractéristiques du sillage seront affectées par l'introduction de cette zone α .

3.4 L'écoulement de référence

Le cas de référence est constitué par l'ensemble du sillage avec le modèle complet. On représente sur la figure 3.5 les composantes U_r , U_θ et U_z du champ de vitesse en coordonnées cylindriques, avec amortissement ², sur un axe situé dans le plan méridien parallèle à $0.8R_{rotor}$ à l'axe de l'hélice. La distance axiale est exprimée en nombre de diamètres. On s'intéresse à la composante U_r , qui a un comportement linéaire. On remarque que la fonction $U_r = f\left(\frac{z}{D}\right)$ est quasi-sinusoïdale ; ce qui se retrouve sur l'autospectre estimé par périodogramme de la figure 3.6, qui fait émerger un pic pour $k_z = 1.587$ (la fréquence de l'autospectre est liée au vecteur d'onde par : $f_z = k_z \frac{D}{2\pi}$). Le premier pic ($f = 0.2658$) correspond à une oscillation très basse fréquence dont la période d'oscillation correspond approximativement à la longueur d'observation ($T_{bf} = 3.7D$) du signal.

Le fait d'introduire l'amortissement sur un tour ne modifie pas les fréquences, mais augmente sensiblement l'énergie spectrale.

Sur la figure 3.7, on représente les lignes iso-valeurs de la composante radiale de la vitesse ainsi que l'autospectre bidimensionnel. La structure du champ observé correspond manifestement à une onde plane dont on peut facilement vérifier la direction de propagation. A la valeur repérée précédemment ($k_z = 1.587$) correspond une valeur de $k_\theta = 4$ (c'est-à-dire le nombre Z de pales). Ces 2 vecteurs sont les composantes d'un vecteur d'onde, précisément celui de l'onde plane. On obtient donc :

$$\Phi = 21^\circ 38' 55''$$

²Forte dissipation des premières particules émises dans le premier tour par une évolution progressive du facteur de dissipation D de $0.25D_0$ à D_0 (D_0 étant la dissipation du tourbillon dans le sillage).

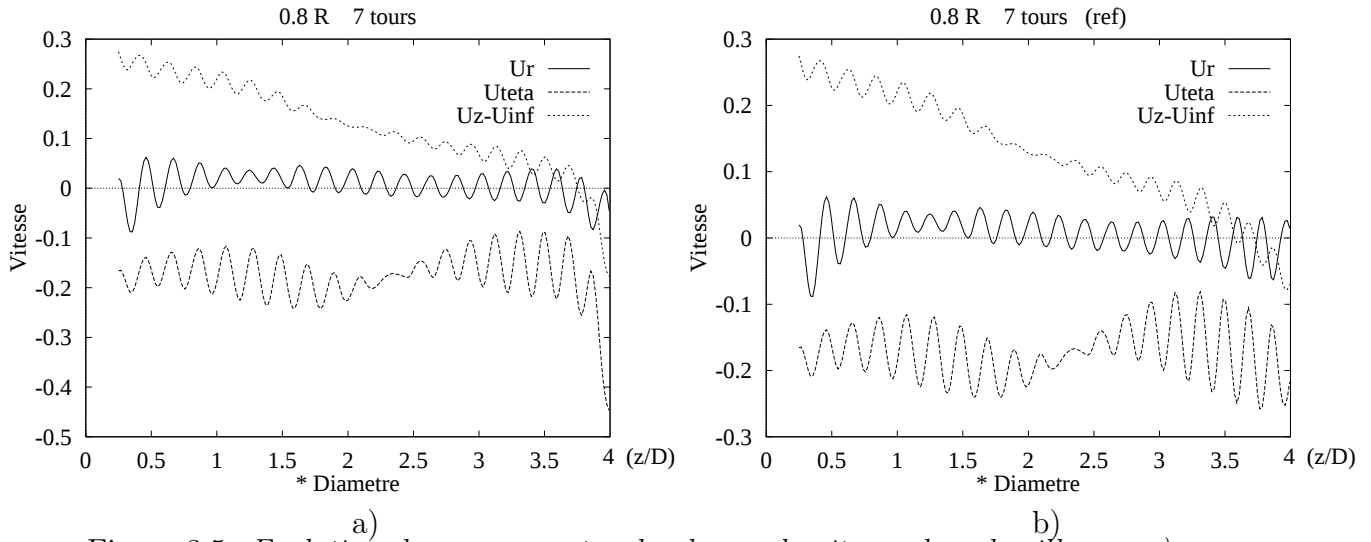


Figure 3.5: *Evolution des composantes du champ de vitesse dans le sillage : a) sans amortissement ; b) avec amortissement*

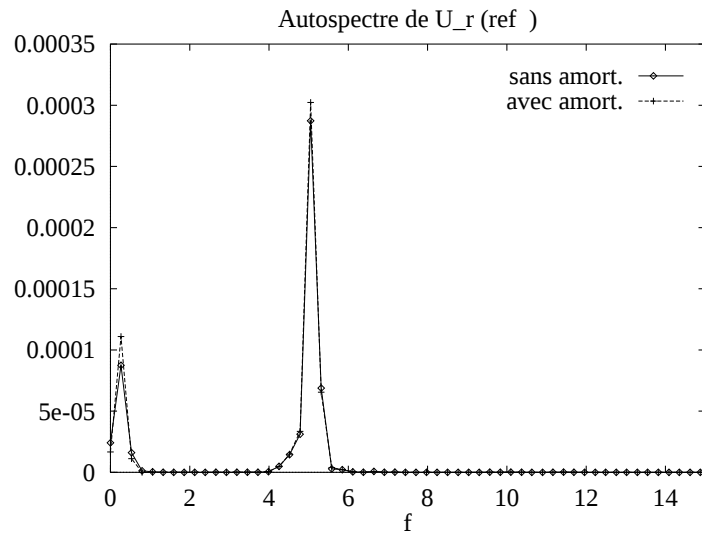


Figure 3.6: *Autospectre de U_r avec et sans amortissement*

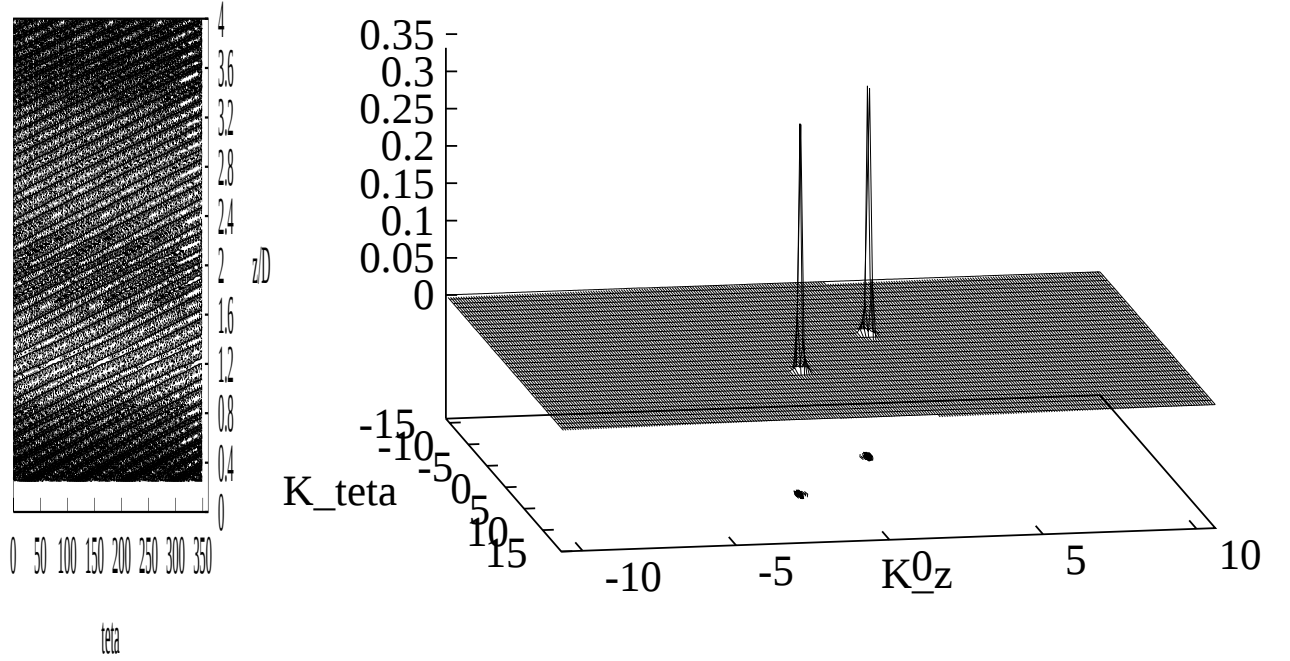


Figure 3.7: Iso-valeurs de U_r sur la surface $0.8R_{rotor}$ - Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (référence)

et :

$$\delta\Phi = 52'$$

On représente sur la figure 3.8 l'évolution de l'effort axial sur une pale en fonction du temps (entre le 3^{ième} et le 7^{ième} tour) pour le cas de référence avec ou sans atténuation. On remarque que l'atténuation, en modifiant l'intensité des efforts de moins de 1%, augmente la stabilité de l'écoulement sans en modifier les caractéristiques ($\Phi = 21^\circ 38' 55''$). On va donc à partir de maintenant considérer que l'écoulement de référence est celui pour lequel le champ de vitesse est calculé complètement à partir de la loi de Biot-Savart, avec l'atténuation sur un tour.

Nous allons, à partir du cas de référence, pour lequel le "tourbillon de démarrage" (dû au gradient de vitesse très important), considéré comme une perturbation dans l'écoulement, établir une méthodologie qui permettra d'optimiser la taille et l'emplacement optimum de la zone tampon, par les tests systématiques analyse de sillage et représentation des efforts) présentés dans la section précédente, de telle sorte que cette perturbation ne "remonte" pas dans l'écoulement en détruisant le sillage régulier.

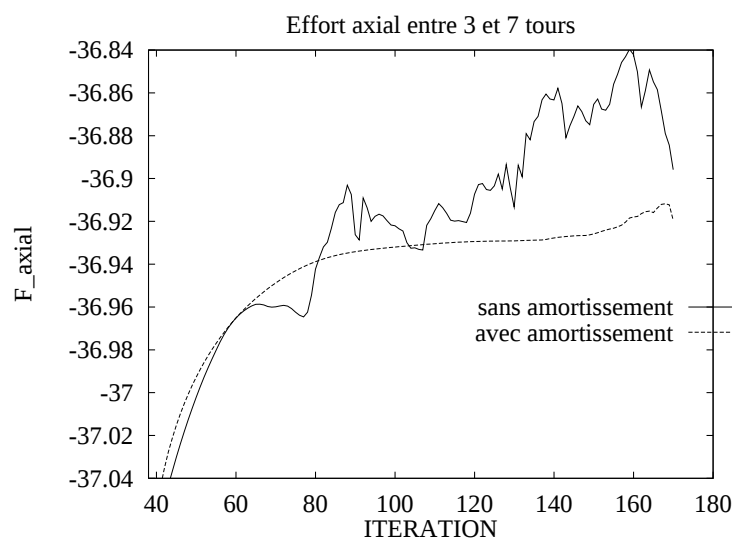


Figure 3.8: *Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence avec et sans amortissement*

3.5 Application de la méthode

A partir des caractéristiques de l'écoulement de référence, on va optimiser la position et la taille de la zone α en effectuant des tests systématiques pour différentes valeurs de d_1 et d_2 . De plus, la longueur d'observation étant de l'ordre de 4 à 5 diamètres, afin d'avoir un sillage bien établi, les calculs seront effectués pour environ 10 tours d'hélice. En amont de la distance d_1 , le sillage dit "proche" est calculé avec la loi de Biot-Savart ; en aval de la distance d_2 , le sillage dit "lointain" est convecté à la vitesse infini amont ; dans la zone α (ou zone "tampon", entre les distances d_1 et d_2), le sillage dit "intermédiaire" est calculé en partie par Biot-Savart et en partie convecté à la vitesse infini amont (*c.f.* section 3.2).

La recherche de l'emplacement et la taille de la zone α va se faire de la façon suivante (*c.f.* figure 3.9) :

Etape I Détermination de la taille de la zone α .

Etape I1 Détermination de d_1 :

Pour déterminer d_1 , on fixe arbitrairement d_2 à une valeur assez importante ($d_2 = 2.8D$), puis on fait varier la zone α de 0 ($d_1 = d_2$) à $1.6D$ ($d_1 = 1.2D$ et $d_2 = 2.8D$) par pas de $0.4D$. 5 tests sont donc effectués.

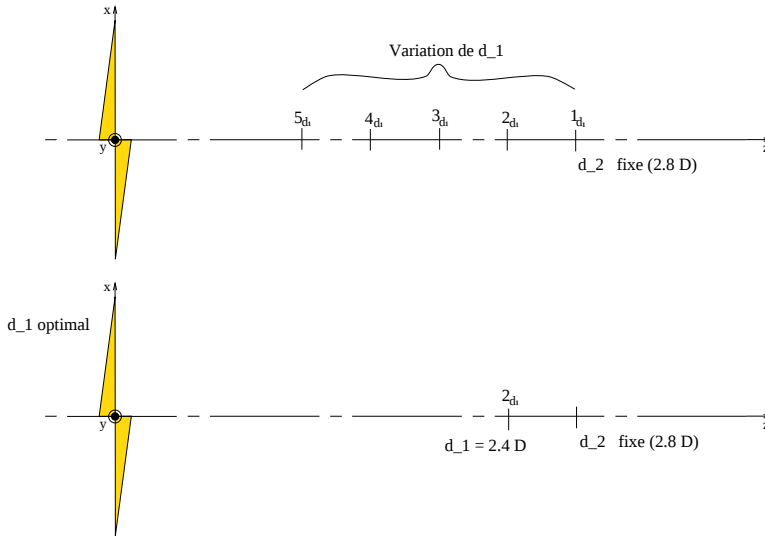
On verra par la suite que d_1 optimal est obtenu pour $2.4D$.

Etape I2 Détermination de d_2 :

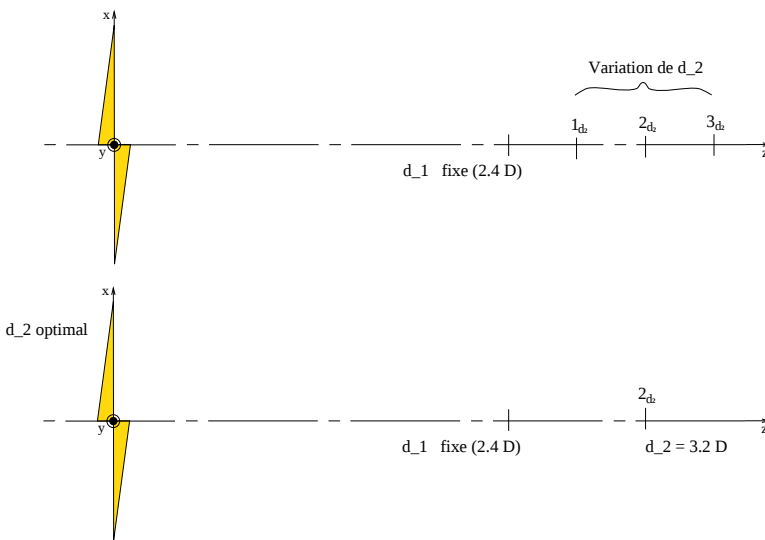
Pour déterminer d_2 , on fixe arbitrairement d_1 à la distance calculée à l'étape I1,

Etape I : détermination de la taille de la zone alpha

Etape I.1 : détermination de d_1



Etape I.2 : détermination de d_2



Etape II : détermination de l'emplacement de la zone alpha

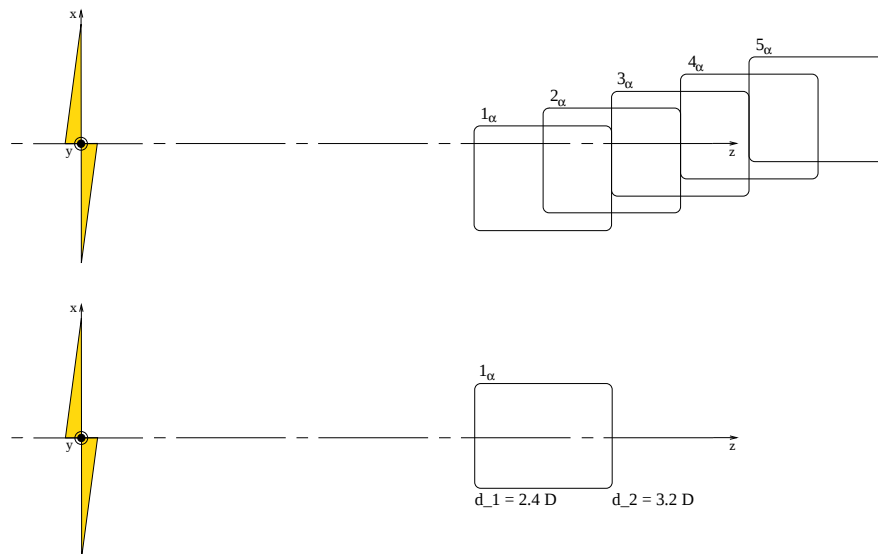


Figure 3.9: Détermination de l'emplacement et la taille de la zone α

puis on fait varier la zone α de $0.4D$ ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 2.8D$) (cas 2_{d_1} précédent) à $1, 2D$ ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 3.6D$) par pas de $0.4D$. 3 tests sont donc effectués.

On verra par la suite que d_2 optimal est obtenu pour $3.2D$.

A présent, la taille de la zone tampon est déterminée ($0.8D$: correspondant approximativement à 1 tour d'hélice). Il ne reste plus qu'à la situer par rapport au disque rotor.

Etape II Détermination de l'emplacement de la zone α .

Afin d'optimiser l'emplacement de la zone α , on va déplacer cette dernière plus en aval dans l'écoulement par pas de $0.4D$, de la position précédente ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 3.2D$) à la position ($d_1 = 4D$ et $d_2 = 4.8D$). 5 tests sont donc effectués.

On verra par la suite que l'emplacement optimal est : $d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 3.2D$.

Dans certains cas, si on s'intéresse uniquement aux efforts sur l'obstacle et au sillage proche, on peut envisager de mettre en place une distance d_3 située très en aval, à partir de laquelle on supprime les particules. On va donc à présent optimiser cette distance d_3 .

Etape III Détermination de d_3 .

Pour déterminer d_3 , on fixe la zone α dans sa position optimum calculée à l'étape II, puis on fait varier d_3 de l' ∞ à $0.4D$ ($d_1 = 2.4D$, $d_2 = 3.2D$ et $d_3 = 3.6D$) par pas de $0.4D$. 8 tests sont effectués.

On verra par la suite que d_3 optimal est obtenu pour $4D$.

Nous allons maintenant, pour les étapes décrites précédemment, détailler chaque cas. Pour chacun d'entre eux, nous allons présenter les résultats de l'analyse de sillage et justifier le choix optimal.

3.5.1 Etape I1 - position d_1

Dans un premier temps, on fixe arbitrairement la distance $d_2 = 2.8D$ (soit environ 3 tours d'hélice), correspondant à une distance assez importante en aval. Par des tests systématiques, on fait varier la zone α de 0 ($d_1 = d_2$) à $1.6D$ ($d_1 = 1.2D$ et $d_2 = 2.8D$). 5 cas sont donc considérés :

- Référence
- Cas 1_{d_1} : $d_1 = d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice)
- Cas 2_{d_1} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice) et $d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice)

- Cas 3_{d_1} : $d_1 = 2D$ (2 tours d'hélice) et $d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice)
- Cas 4_{d_1} : $d_1 = 1.6D$ (1.5 tours d'hélice) et $d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice)
- Cas 5_{d_1} : $d_1 = 1.2D$ (1 tour d'hélice) et $d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice)

Sur la figure 3.10, on représente l'évolution des composantes du champ de vitesse en fonction de la distance axiale, en aval de l'hélice, exprimées en nombre de diamètres, pour les cas précédents. On voit très nettement que l'introduction de la zone tampon modifie l'évolution des composantes du champ de vitesse. Pour les analyses spectrales, on s'intéressera, comme précédemment, à la composante radiale du champ de vitesse. On voit très nettement sur la figure 3.10 et 3.11 que cette zone modifie les caractéristiques de l'écoulement. Dès que la zone α est introduite, l'énergie spectrale est plus faible. De plus, plus la distance d_1 est faible, plus la raie significative ($k_z = 1.5865$) s'élargit à la base en se décalant vers une fréquence un peu plus élevée ($k_z = 1.670$) jusqu'à donner naissance à une deuxième raie à une fréquence légèrement inférieure ($k_z = 1.3358$). Le deuxième pic à la fréquence 4.252, correspondant au vecteur d'onde $\underline{k}_z = 1.3358\underline{z}$, laisse penser que le signal ($U_r = f\left(\frac{z}{D}\right)$) pour les cas 3_{d_1} , 4_{d_1} et 5_{d_1} a une structure un peu plus complexe que celui de référence. On peut éventuellement mettre en évidence un phénomène de battement bien que l'énergie spectrale du deuxième pic soit très largement inférieure. Dans ce cas, la longueur d'onde λ_b du battement correspondrait à :

$$\lambda_b = \frac{2\pi}{k_{z2} - k_{z1}} \frac{1}{D} = 0.94$$

Le premier pic ($f = 0.2658$), que l'on retrouve pour tous les cas, correspond à une oscillation très basse fréquence dont la période d'oscillation correspond approximativement à la longueur d'observation ($T_{bf} = 3.7D$) du signal.

L'autospectre bidimensionnel de la composante U_r (*c.f.* figure 3.11) permet de rejeter les cas 3_{d_1} , 4_{d_1} et 5_{d_1} . Pour ces 3 cas, on ne retrouve plus le même vecteur d'onde $\underline{k}_z$, ce qui entraîne une direction de propagation de l'onde plane différente : $\Phi = 22^\circ 40' 31''$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la vorticité dans le sillage. Nous représentons sur la figure 3.12 l'évolution des composantes du champ de vorticité ($\underline{\omega}$) en coordonnées cylindriques, pour un axe situé dans le plan m ridien  $0.8R_{rotor}$, en fonction de la distance axiale en diamètre, pour le cas de référence ainsi que pour les 5 cas précédents.

Nous voyons que la distribution de vorticité dans le sillage (*c.f.* figure 3.12) est modifiée dès lors que cette zone α est introduite. Une analyse spectrale de la composante radiale du champ de vorticité pour les mêmes cas précédents est représenté figure 3.13. Pour l'écoulement de

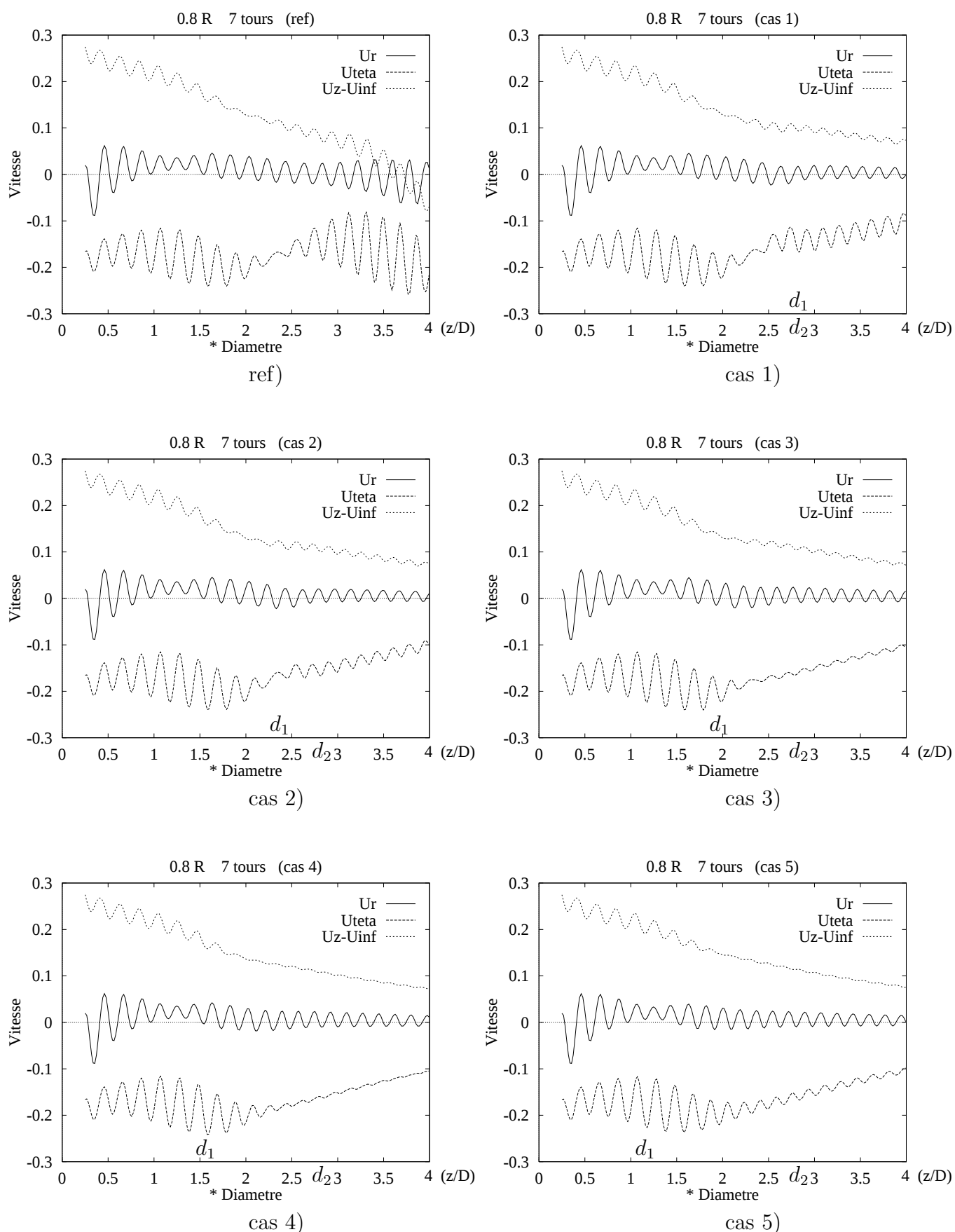


Figure 3.10: Evolution des composantes du champ de vitesse pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1

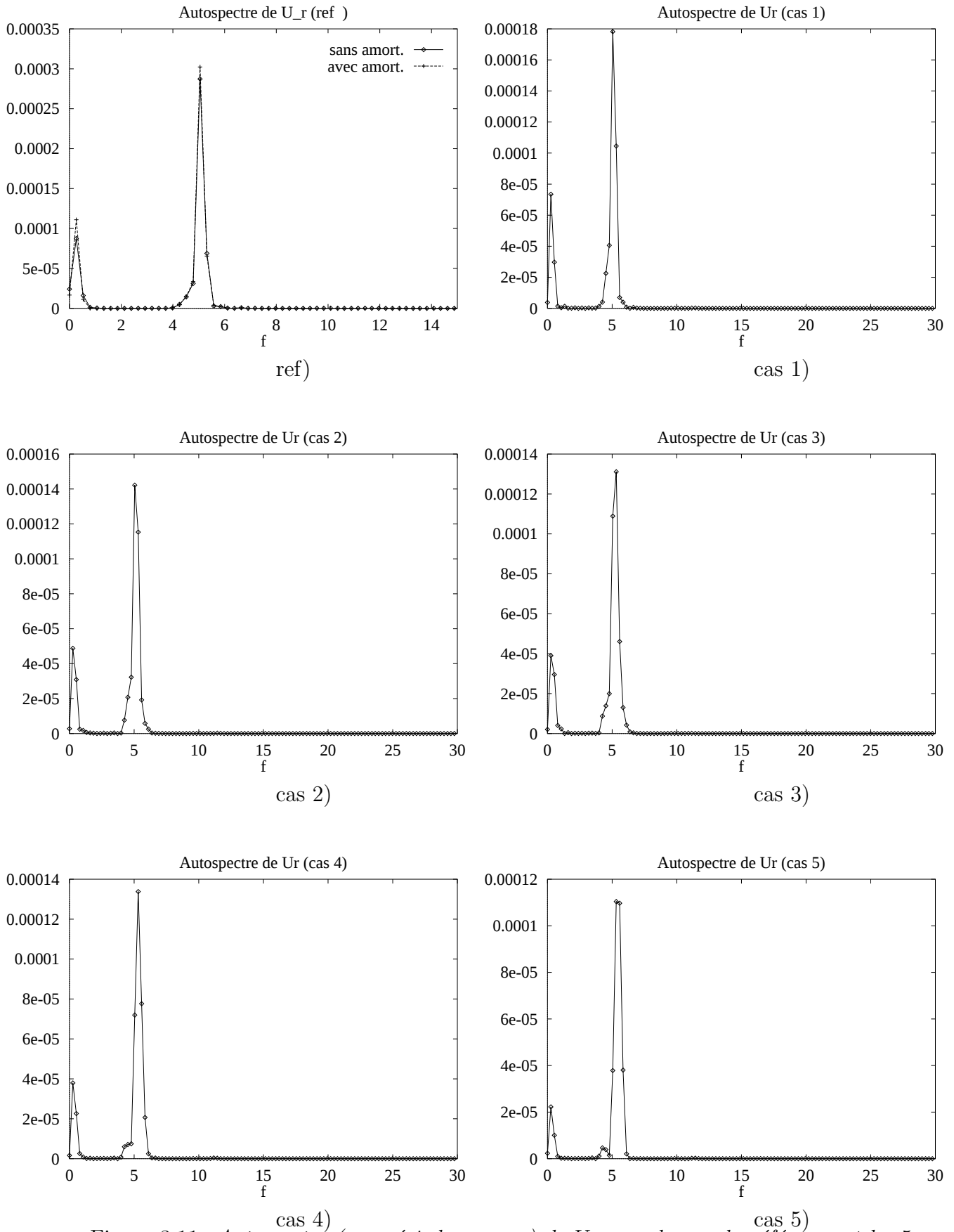


Figure 3.11: Autospectre (par périodogramme) de U_r pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1

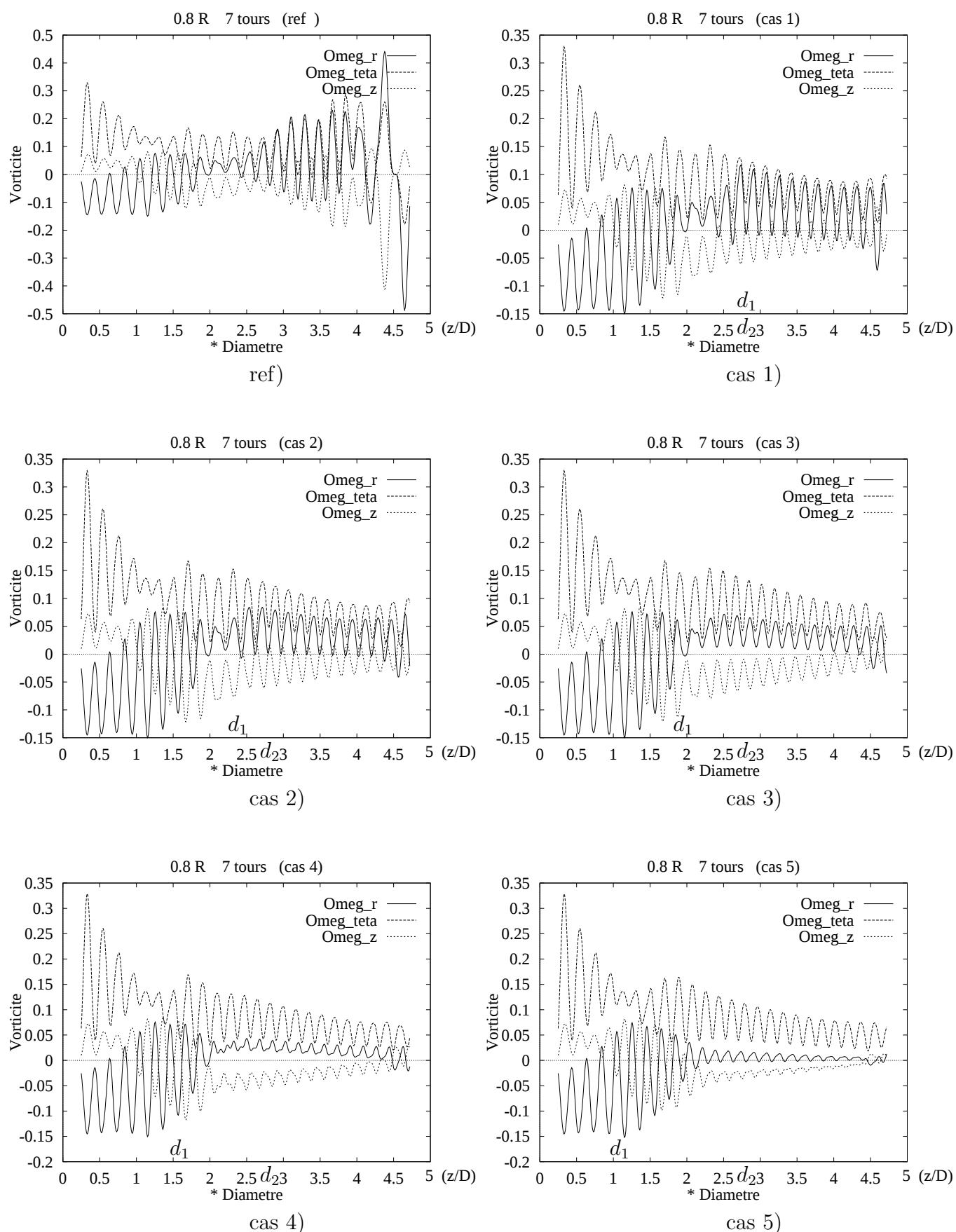


Figure 3.12: Evolution des composantes du champ de vorticité pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1

référence, on observe un battement de longueur d'onde :

$$\lambda_b = \frac{2\pi}{k_{z2} - k_{z1}} \frac{1}{D} = \frac{1}{f_2 - f_1} = 2.242$$

Lorsque la distance d_1 diminue, la longueur d'onde du battement est différente ($\lambda_b = 1.495$). Pour le dernier cas, on n'observe plus de battement, mais un seul pic à la fréquence correspondant au premier vecteur d'onde ($k_{z1} = 1.543$).

Le premier pic ($f = 0.2232$), que l'on retrouve pour tous les cas, correspond à une oscillation très basse fréquence dont la période d'oscillation ne correspond pas à la longueur d'observation ($T_{bf} = 4.5D$) du signal.

Une analyse par ondelette des composantes radiales, azimutales et axiales du champ de vitesse et vortacité, en fonction de la distance en aval de l'hélice, confirme la destruction du sillage lorsque la distance d_1 diminue. On représente sur la figure 3.14 l'analyse par l'ondelette de Morlet (*c.f.* annexe D) de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et pour le cas 2_{d_1} .

Sur la figure suivante (*c.f.* figure 3.15), on représente l'évolution des fréquences prédominantes (analyse par ondelette), en fonction de la distance en aval de l'hélice exprimée en nombre de diamètres, pour les 5 cas précédents ainsi que pour le cas de référence, des composantes radiales du champ de vitesse et vortacité.

Il apparaît clairement que l'introduction de la zone α perturbe l'écoulement ; cependant, pour les cas 1_{d_1} et 2_{d_1} le sillage ne diffère du cas de référence qu'après une distance $d > 2.8D$, distance à partir de laquelle on convecte le sillage à la vitesse infini amont.

Sur la figure suivante (*c.f.* 3.16), on représente l'évolution de l'effort axial sur une pale en fonction du temps, entre le 3^{ième} et le 7^{ième} tour, pour le cas de référence et les 5 cas précédents. Le fait d'introduire la zone α , a peu d'influence sur le calcul des efforts. En effet, dans les 5 cas précédents l'erreur est inférieure à 0.2% par rapport à l'écoulement de référence.

A l'issue de cette première étude, il s'avère que le meilleur compromis effort-écoulement par rapport au temps de calcul est obtenu pour $d_1 = 2.4D$ correspondant au cas 2_{d_1} précédent ; distance pour environ 2.5 tours d'hélice.

Dans la suite, nous allons fixer la distance d_1 à $2.4D$, puis faire évoluer la distance d_2 .

3.5.2 Etape I2 - position d_2

Dans un second temps, la distance d_1 étant donc fixé $2.4D$, par des tests systématiques, on fait évoluer la zone α de $0.4D$ ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 2.8D$ à $1.2D$ ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 3.6D$)). 3 cas sont considérés :

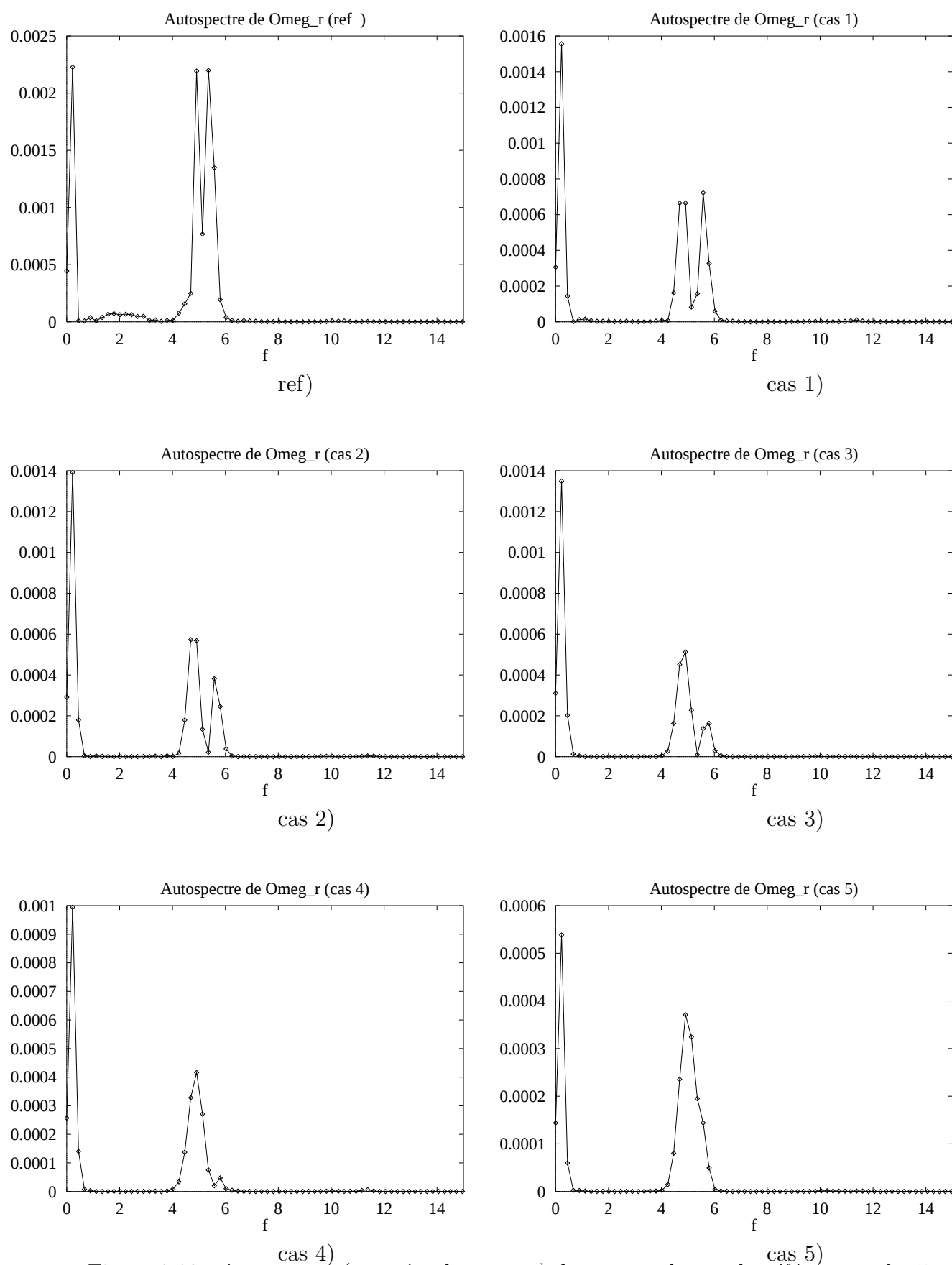


Figure 3.13: Autospectre (par périodogramme) de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1

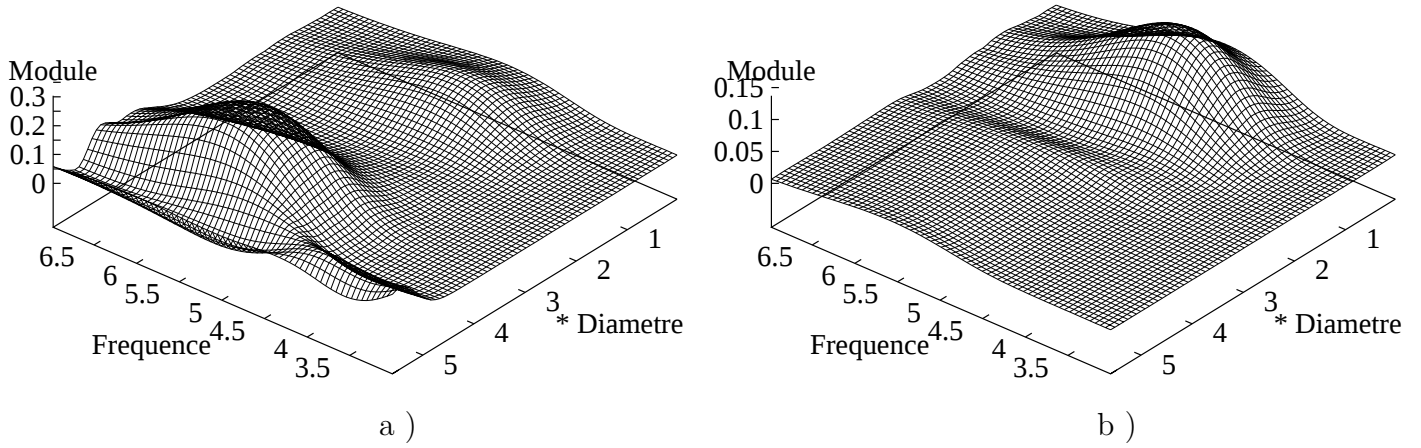


Figure 3.14: Analyse par ondelette de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence (a) et pour le cas $2d_1$ (b)

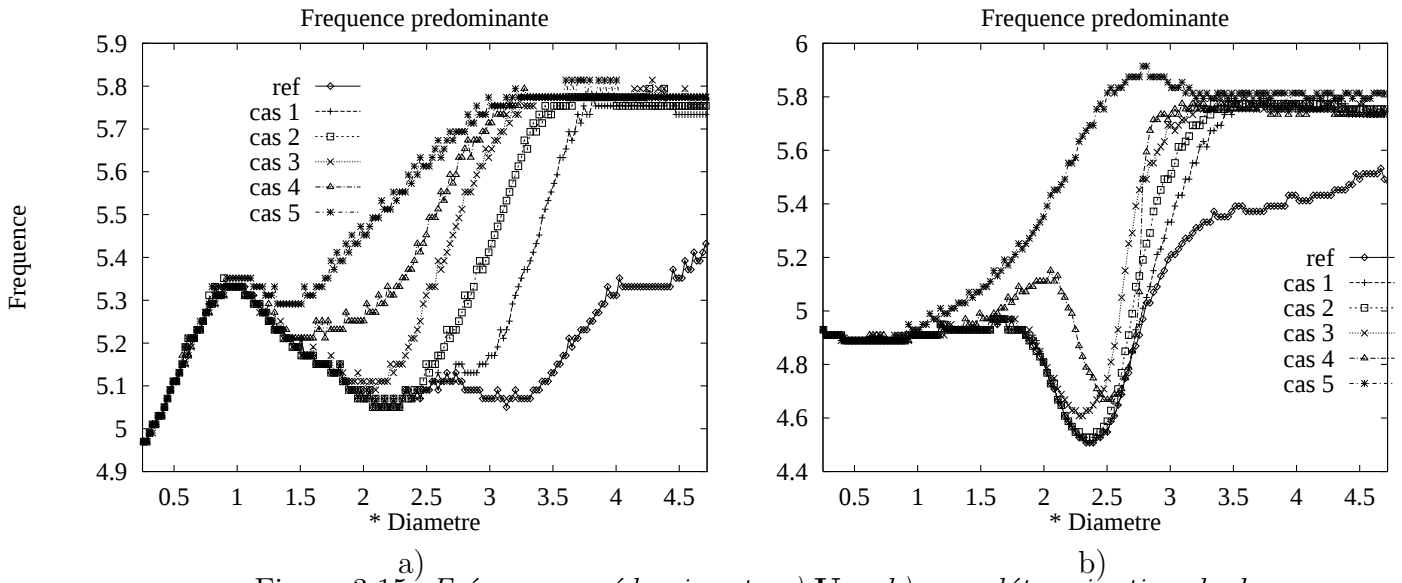


Figure 3.15: Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$, b) $\underline{\omega}_r$ - détermination de d_1

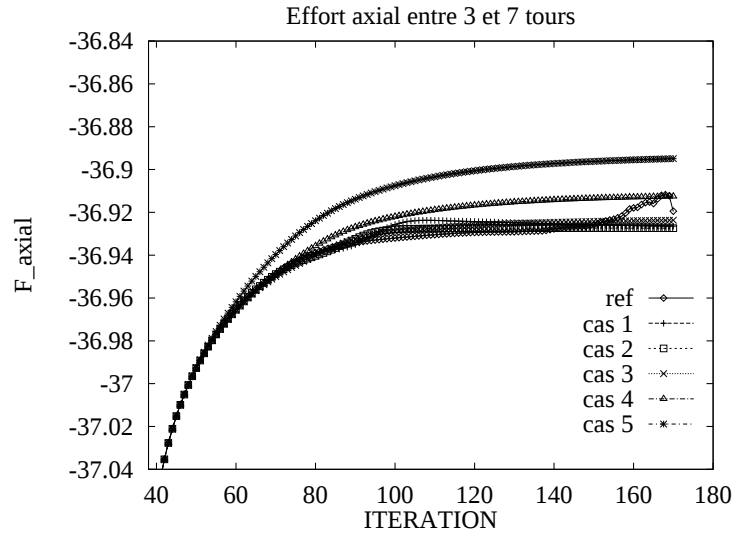


Figure 3.16: *Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 5 cas - détermination de d_1*

- Référence
- Cas 1_{d_2} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice) et $d_2 = 2.8D$ (3 tours d'hélice) (cas 2_{d_1} précédent)
- Cas 2_{d_2} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice) et $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice)
- Cas 3_{d_2} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice) et $d_2 = 3.6D$ (4 tours d'hélice)

En amont de d_1 , le sillage dit “proche” est calculé avec la loi de Biot-Savart ; en aval de d_2 , le sillage dit “lointain” est convecté à la vitesse infini amont ; dans la zone α , le sillage dit “intermédiaire” est calculé en partie avec la loi de Biot-Savart et en partie convecté à la vitesse infini amont (*c.f.* section 3.2). Vu les calculs qui sont fait dans la zone α , il est nécessaire de réduire cette zone au maximum.

Sur la figure 3.17 on représente l'évolution des composantes du champ de vitesse en fonction de la distance axiale, en aval de l'hélice, exprimées en nombre de diamètres pour les cas précédents. L'introduction de la zone tampon modifie les composantes du champ de vitesse. Pour les analyses spectrales, on s'intéressera, comme précédemment, à la composante radiale du champ de vitesse.

L'analyse spectrale de la composante radiale de la vitesse pour les 3 cas précédents ainsi que pour le cas de référence est présenté figure 3.18. Pour l'ensemble des spectres, on retrouve les 2 fréquences : $f_1 = 0.2658$, correspondant à l'oscillation très basse fréquence dont la période

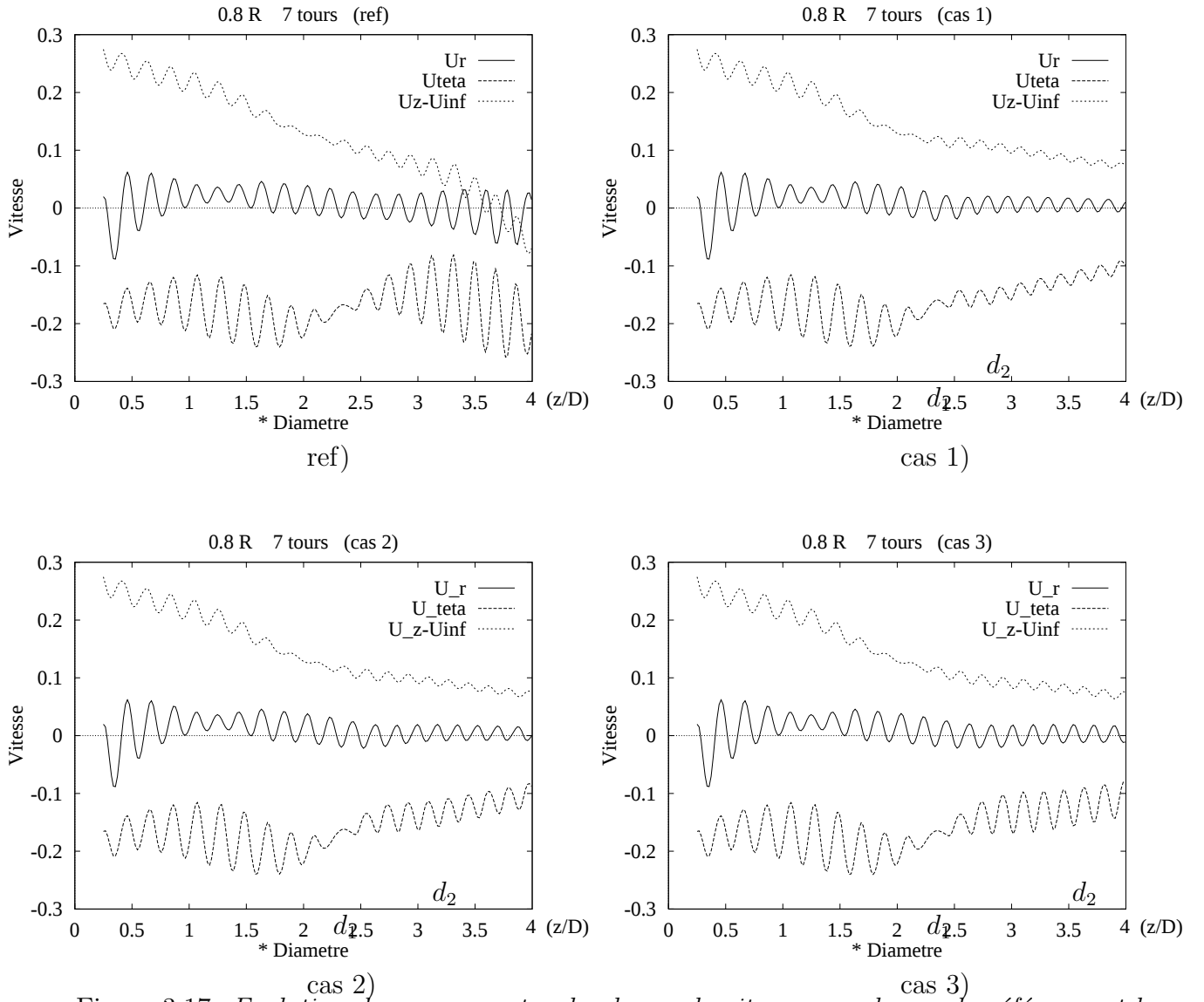


Figure 3.17: Evolution des composantes du champ de vitesse pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2

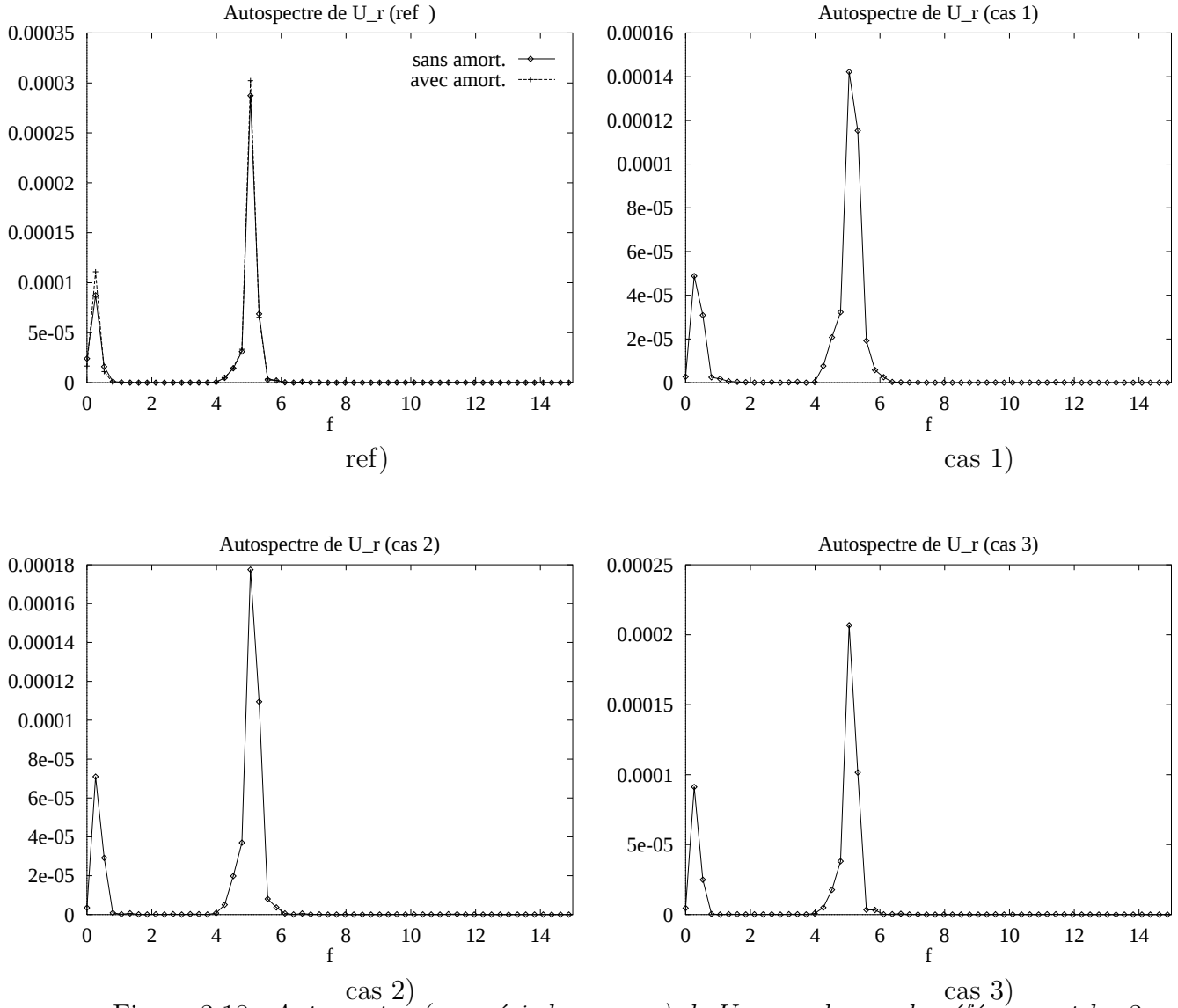


Figure 3.18: Autospectre (par périodogramme) de U_r pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2

d'oscillation correspond approximativement à la période d'observation, et $f_2 = 5.050$ correspondant au vecteur d'onde $\underline{k}_z = 1.5865\underline{z}$. Cependant, plus la zone α s'élargit, plus l'énergie spectrale augmente pour se rapprocher du cas de référence.

l'autospectre bidimensionnel de la composante U_r ne nous permet pas d'avoir plus d'informations. En effet, pour l'ensemble des cas précédents, la direction de propagation de l'onde plane est inchangée ($\Phi = 21^\circ 38' 55''$). On représente sur la figure 3.19 la carte d'iso-valeurs de la composante U_r sur la surface $R = 0.8R_{rotor}$ ainsi que l'autospectre bidi-

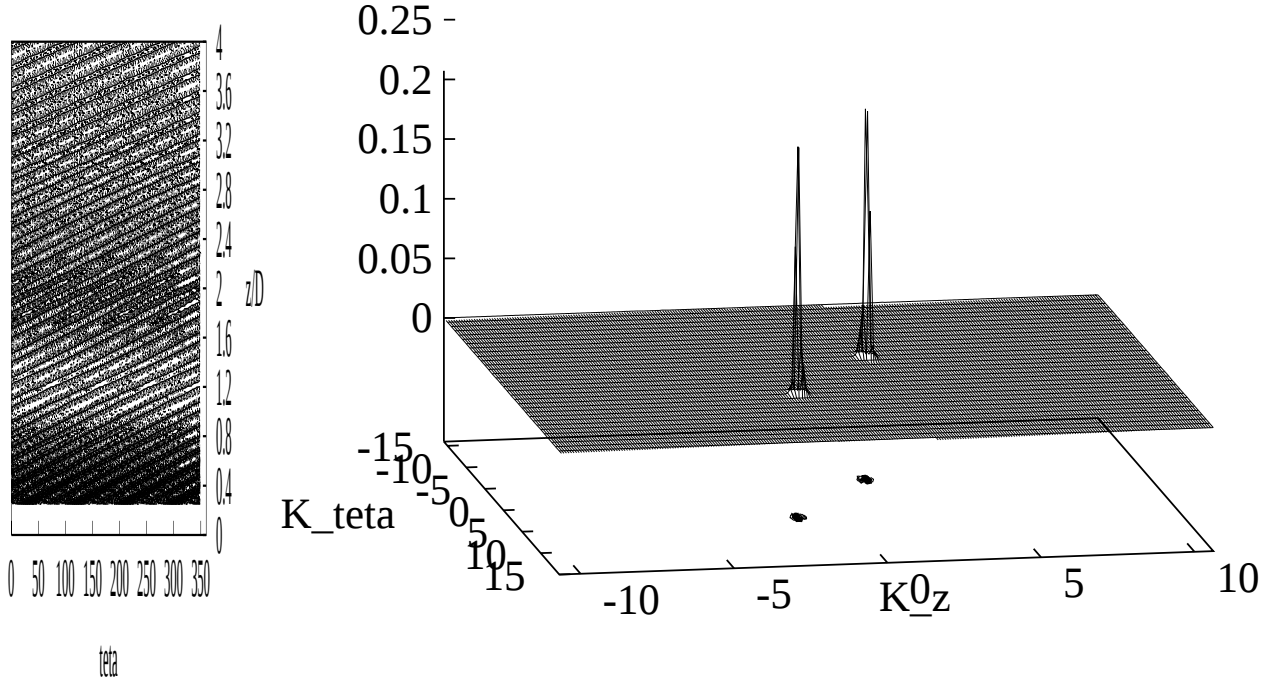


Figure 3.19: Iso-valeurs de U_r sur la surface $R = 0.8$ - Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (cas 2)

mensionnel de cette même composante pour le cas 2_{d_2} .

On représente sur les 2 figures suivantes (*c.f.* figures 3.20 et 3.21), l'évolution des composantes en coordonnées cylindriques du champ de vorticité pour un axe situé dans le plan méridien à $0.8R_{rotor}$, en fonction de la distance axiale (z/D), et l'analyse spectrale de la composante radiale de ce même champ, pour l'ensemble des cas précédents. Le pic basse fréquence ($f = 0.2232$) est présent sur tous les spectres avec sensiblement la même énergie, par contre on ne retrouve pas la longueur d'onde du battement du cas de référence ($\lambda_b = 2.242$).

Sur la figure 3.22 on représente l'analyse par ondelette de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et pour le cas 2_{d_2} . La différence de module traduit bien la faiblesse du signal pour des distances supérieures à $2.8D$.

Sur la figure 3.22, on représente l'évolution des fréquences prédominantes (analyse par ondelette), pour les 3 cas précédents, des composantes radiales du champ de vitesse et vorticité, en fonction de la distance axiale. L'erreur sur les fréquences est relativement faible (inférieure à 7% pour la composante $\underline{\omega}_r$ du cas 2_{d_2} et 8% pour la composante $\underline{U}_r$ du même cas).

Sur la figure suivante (figure 3.24), on représente l'évolution de l'effort axial sur une pale en fonction du temps, entre le 3^{ème} et le 7^{ème} tour, pour le cas de référence et les 3 cas

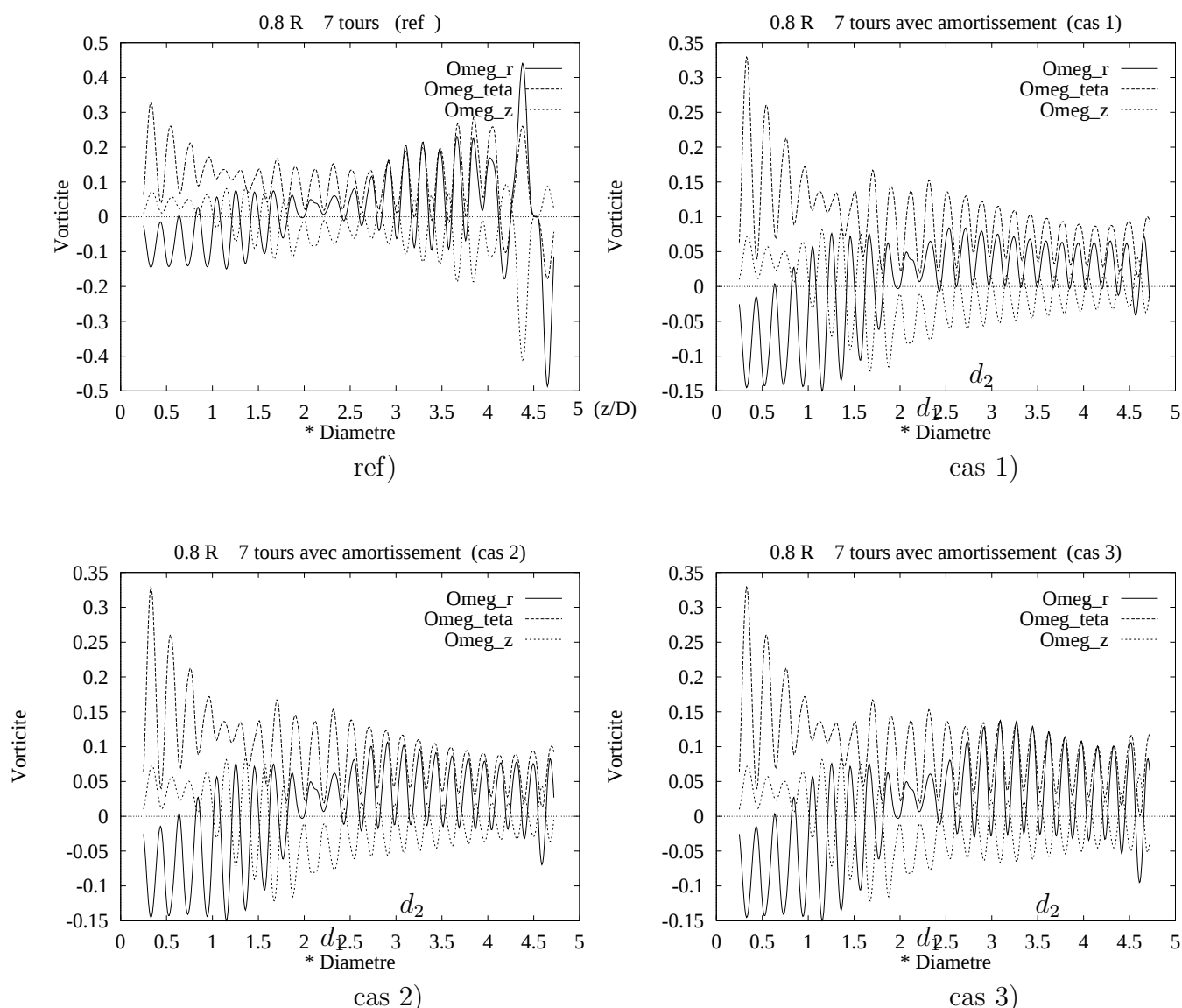


Figure 3.20: Evolution des composantes du champ de vorticité pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2

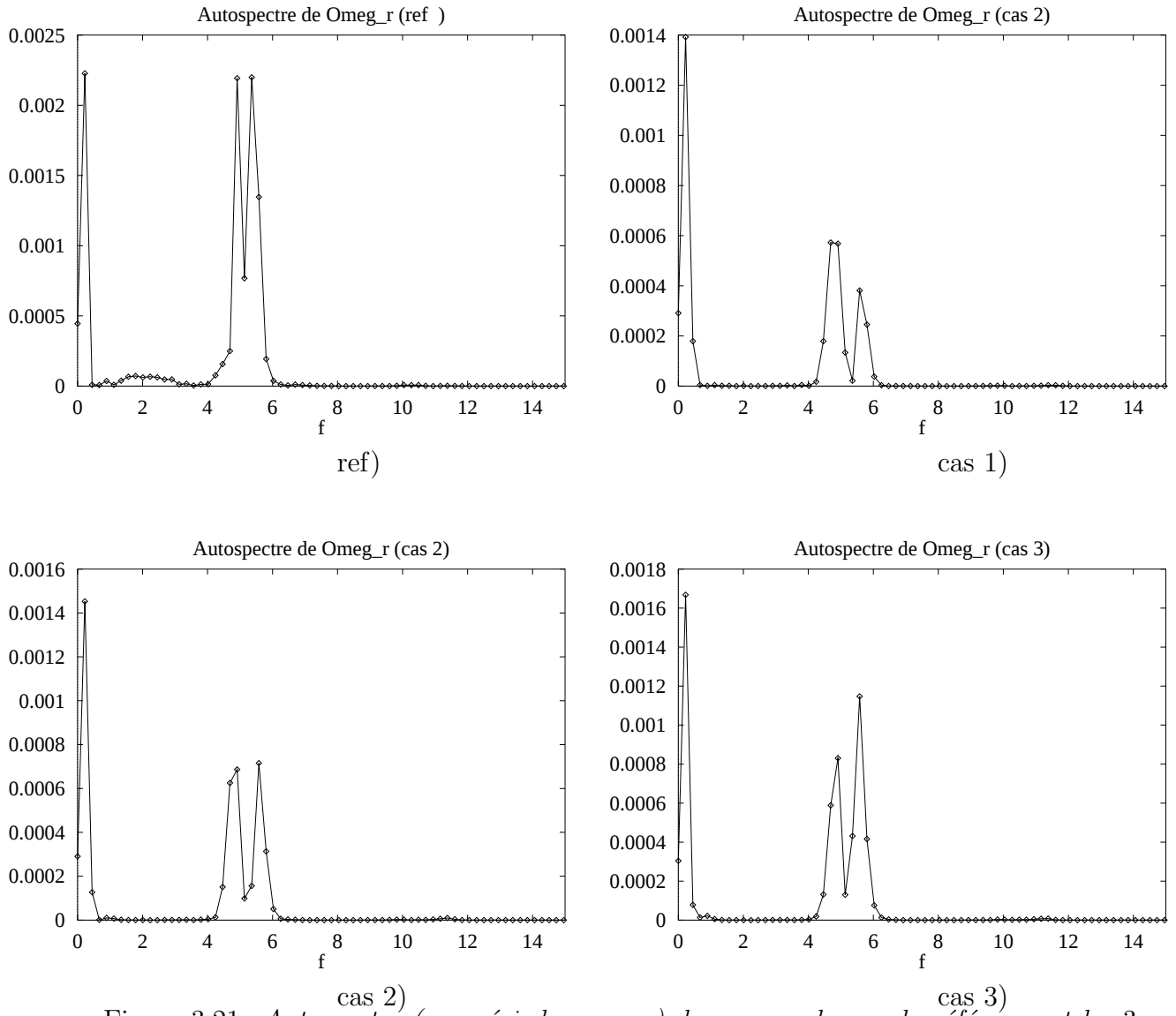


Figure 3.21: Autospectre (par périodogramme) de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2

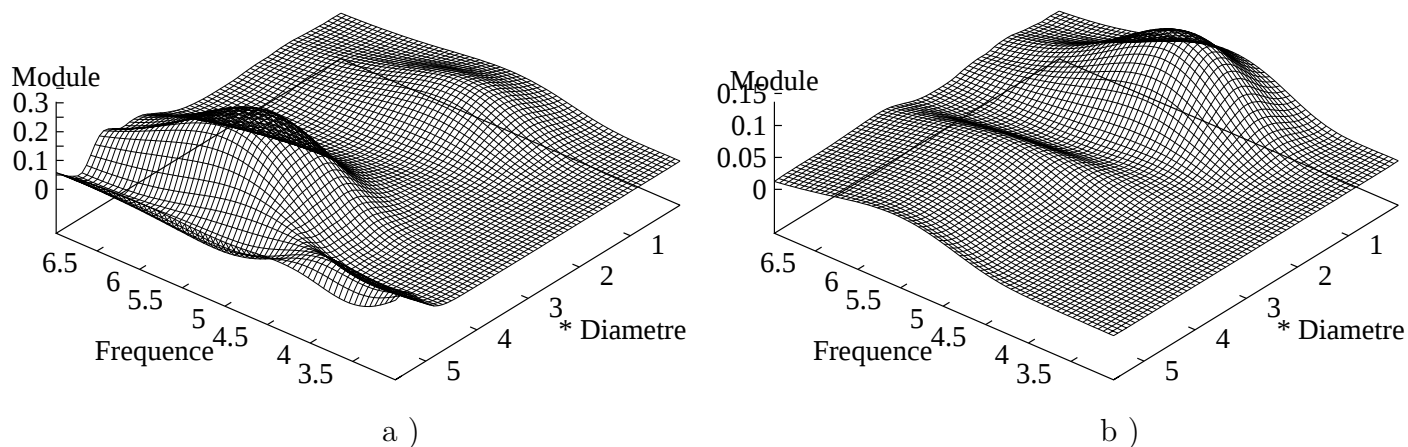


Figure 3.22: Analyse par ondelette de $\underline{\omega}_r$ pour le cas de référence (a) et pour le cas 2_{d_2} (b)

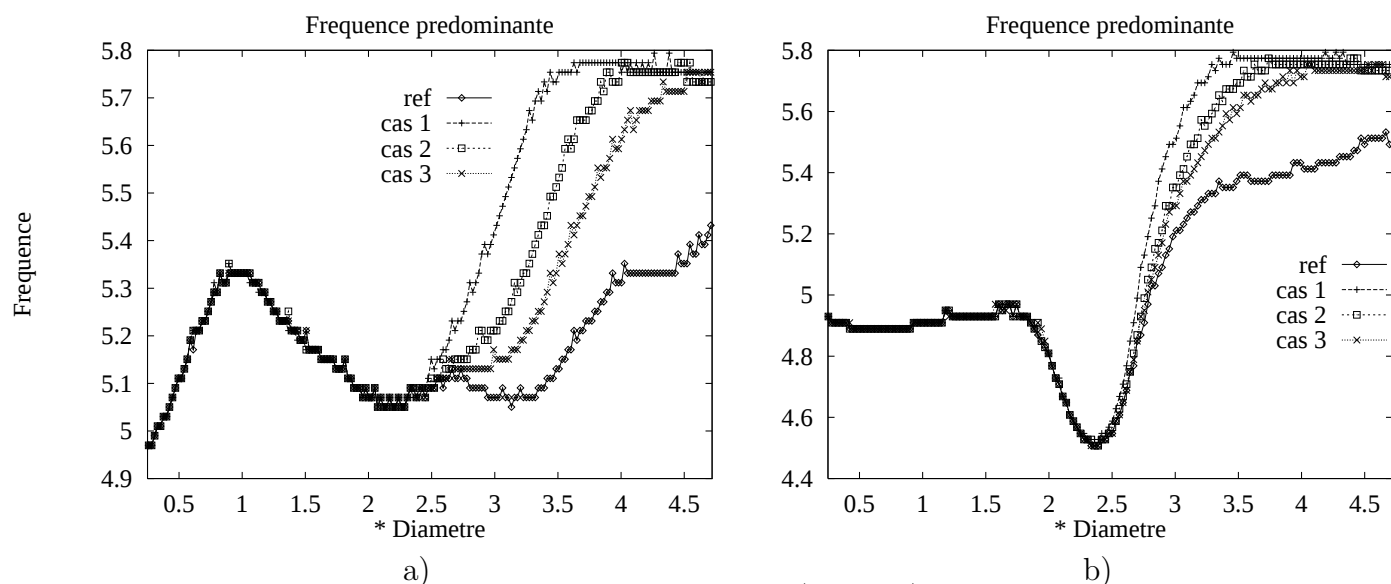


Figure 3.23: Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$, b) $\underline{\omega}_r$ - détermination de d_2

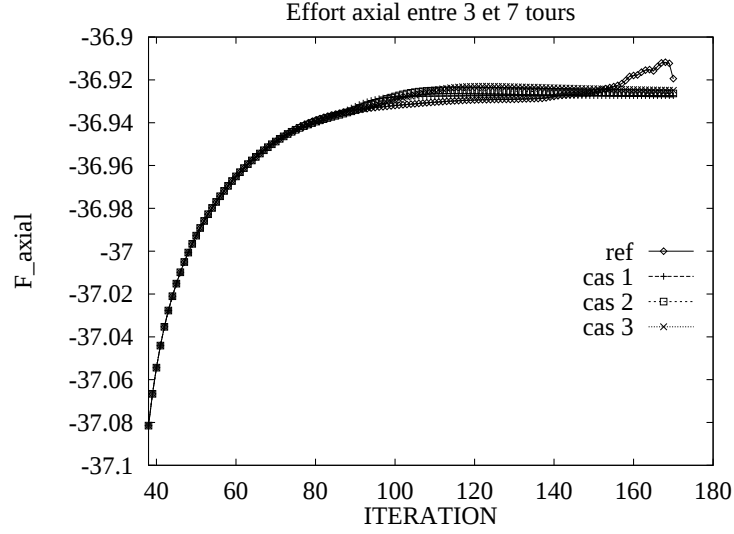


Figure 3.24: *Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 3 cas - détermination de d_2*

précédents. Le fait d'introduire la zone α , a peut d'influence sur le calcul des efforts. En effet, dans les 3 cas précédents, l'erreur est inférieure à 0.1% par rapport à l'écoulement de référence.

Le fait d'agrandir cette zone α , apporte peut d'informations supplémentaires en terme de sillage (fréquence et module des signaux de vitesse et vorticité) et n'affine pas les efforts. Par contre, le temps de calcul de la vitesse est très supérieur dans cette zone, et donc, le meilleur compromis effort-écoulement / temps de calcul est obtenu pour le cas 2_{d_2} , c'est-à-dire pour $d_2 = 3.2D$: distance pour environ 3.5 tours d'hélice.

La taille de la zone α étant fixée, il faut maintenant situer cette zone dans l'écoulement.

3.5.3 Etape II - emplacement de la zone α

La taille de la zone α est fixée à $0.8D$, soit environ 1 tour d'hélice. Par des tests systématiques, on déplace cette zone plus en aval dans l'écoulement. 5 cas sont considérés :

- cas 1_α : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice) et $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) (cas 2_{d_2} précédent)
- cas 2_α : $d_1 = 2.8D$ (3 tours d'hélice) et $d_2 = 3.6D$ (4 tours d'hélice)
- cas 3_α : $d_1 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_2 = 4D$ (4.5 tours d'hélice)

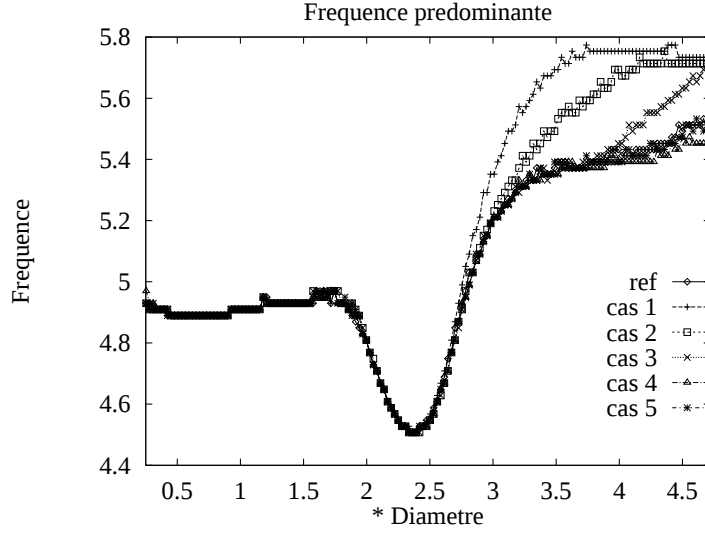


Figure 3.25: *Fréquence prédominante sur $\underline{\omega}_r$ - détermination de la position de la zone α*

- cas 4_α : $d_1 = 3.6D$ (4 tours d'hélice) et $d_2 = 4.4D$ (5 tours d'hélice)
- cas 5_α : $d_1 = 4D$ (4.5 tours d'hélice) et $d_2 = 4.8D$ (5.5 tours d'hélice)

On représente sur la figure 3.25 l'évolution des fréquences prédominantes en fonction de la distance en aval de l'hélice, pour différentes position de la zone tampon. Le fait de reculer la zone tampon plus en aval dans l'écoulement, permet de recalculer les fréquences prédominantes de la composante radiale du champ de vorticité sur le cas de référence. Cependant, le gain d'information au regard du temps de calcul n'est pas énorme (dans le cas 2_{d_2} précédent la perte d'information en terme de fréquence était inférieure à 8%), et de plus, le fait de mettre en place cette zone n'entraîne pas une perturbation dans le sillage qui se propage vers l'amont. Il n'est donc pas nécessaire de reculer cette zone ($d_1 = 2.4D$ et $d_2 = 3.2D$).

Le fait de mettre en place cette zone α permet d'envisager des calculs sur un nombre de tours très important. Cependant, si seul les efforts sur les pales ou le sillage proche de l'hélice nous intéresse, il est possible, à partir d'une certaine distance d_3 , de supprimer les particules. On va donc déterminer maintenant la position de d_3 .

3.5.4 Etape III - position d_3

En effet, lors des calculs de vitesse et déformation en chaque point particulaire du sillage, on fait une sommation sur l'ensemble des particules. Or l'influence de ces dernières décroît en $\frac{1}{r^2}$. On peut donc s'affranchir de la contribution des particules éloignées de l'obstacle. Nous fixons les distances d_1 et d_2 correspondant du cas 1_α précédent. Puis nous faisons

évoluer la distance d_3 de l' ∞ à $3.6D$. 8 cas sont considérés :

- cas 1_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = \infty$
- cas 2_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 6D$ (7 tours d'hélice)
- cas 3_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 5.6D$ (6.5 tours d'hélice)
- cas 4_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 5.2D$ (6 tours d'hélice)
- cas 5_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 4.8D$ (5.5 tours d'hélice)
- cas 6_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 4.4D$ (5 tours d'hélice)
- cas 7_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 4D$ (4.5 tours d'hélice)
- cas 8_{d_3} : $d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 3.6D$ (4 tours d'hélice)

Sur la figure 3.26, on représente les spectres des variations de U_r en fonction de la distance axiale (exprimée en nombre de diamètres), pour les 8 cas et pour le cas de référence. Ces spectres montrent que le fait de ne plus tenir compte des dernières particules du sillage, n'entraîne aucune modification en terme de fréquence ; si ce n'est la basse fréquence du dernier cas. Par contre l'énergie spectrale pour tous les cas est modifiée.

Sur la figure 3.27, on représente l'évolution de l'effort axial sur une pale en fonction du temps, entre le 3^{ième} et le 7^{ième} tour, pour le cas de référence et les 8 cas précédents. Le fait d'introduire la zone α , a peu d'influence sur le calcul des efforts. En effet, dans les 8 cas précédents, l'erreur est inférieure à 0.05% par rapport à l'écoulement de référence. Cependant, on observe un saut d'effort dû à l'aspiration des particules.

Un autospectre bidimensionnel de la composante U_r ne nous permet pas d'avoir plus d'informations. En effet, pour l'ensemble des cas précédents, la direction de propagation de l'onde plane est inchangée ($\Phi = 21^\circ 38' 55''$) (zone comprise entre 0 et 4 diamètres).

Sur la figure 3.28, on représente l'évolution des fréquences prédominantes (analyse par ondelette), pour les 8 cas précédents, de la composante radiale du champ de vitesse, en

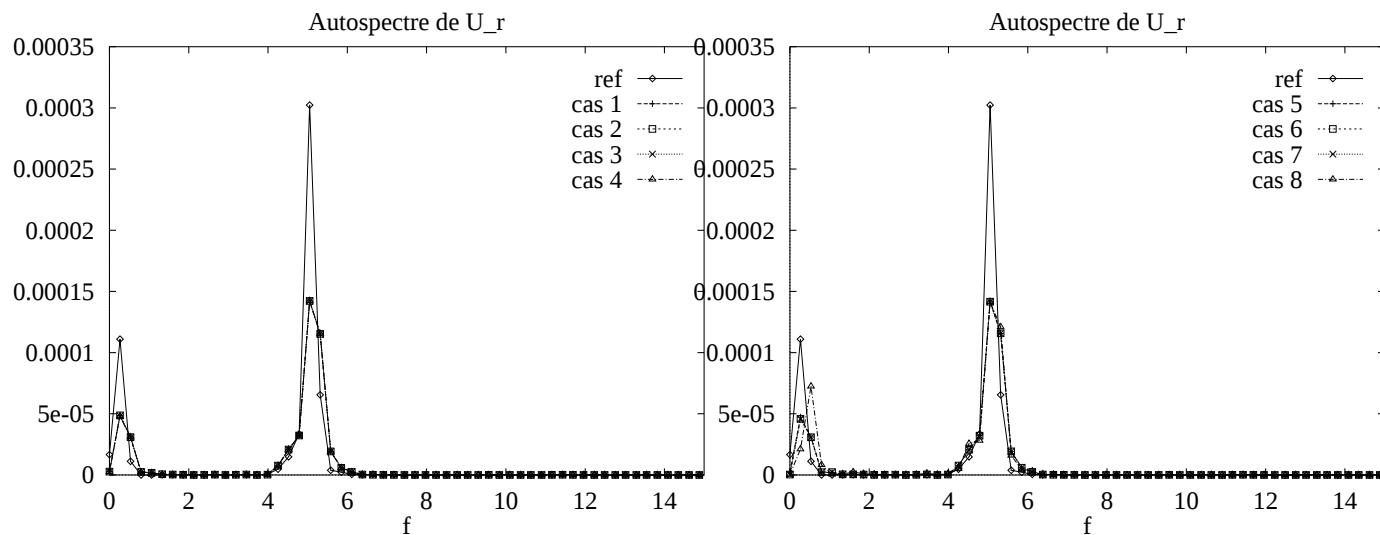


Figure 3.26: *spectre de $\underline{U}_r$ pour les 8 cas et pour le cas de référence*

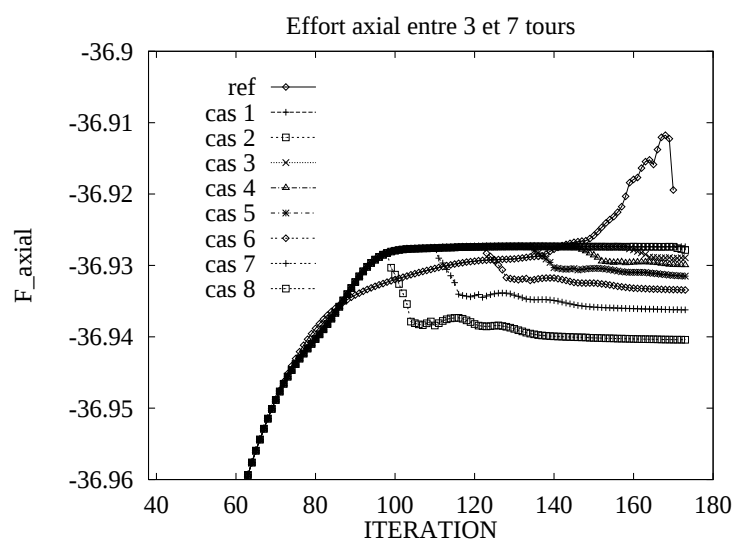


Figure 3.27: *Effort axial sur une pale de l'hélice pour le cas de référence et les 8 cas - détermination de d_3*

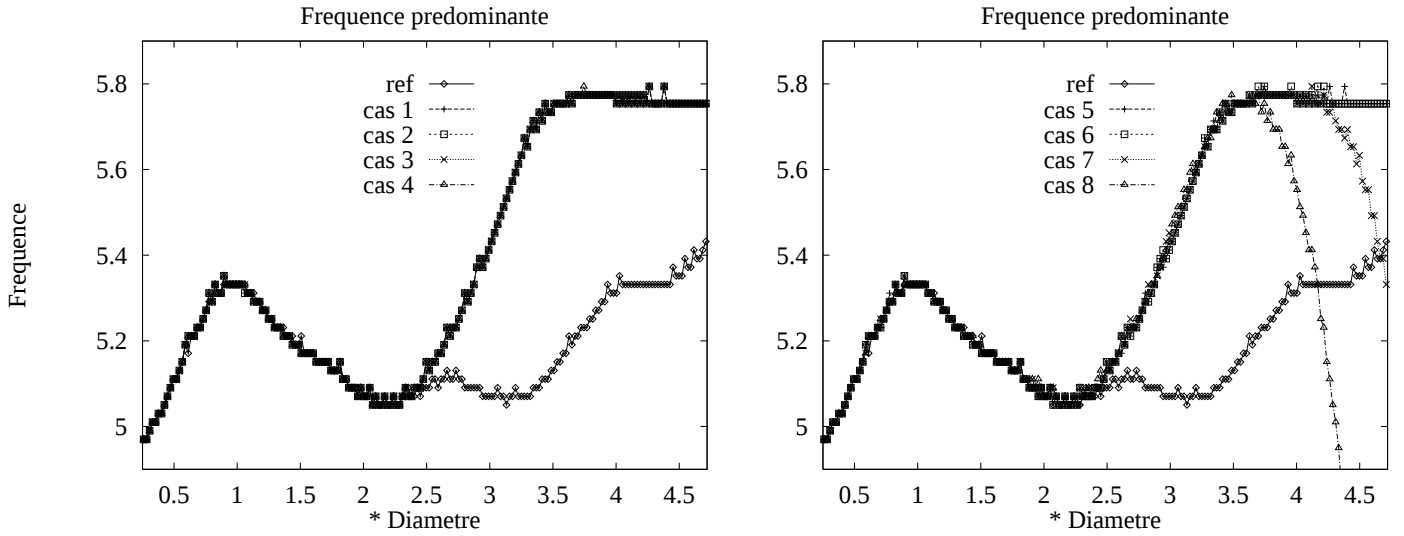


Figure 3.28: *Fréquence prédominante a) $\underline{U}_r$ 4 premiers cas, b) $\underline{U}_r$ 4 derniers cas*

fonction de la distance axiale. L'erreur sur les fréquences est relativement faible (inférieure à 8% pour les 7 premiers cas). La chute de fréquence pour les 2 derniers cas après $3.5D$ s'explique par le fait qu'après cette distance, on n'a plus de sillage.

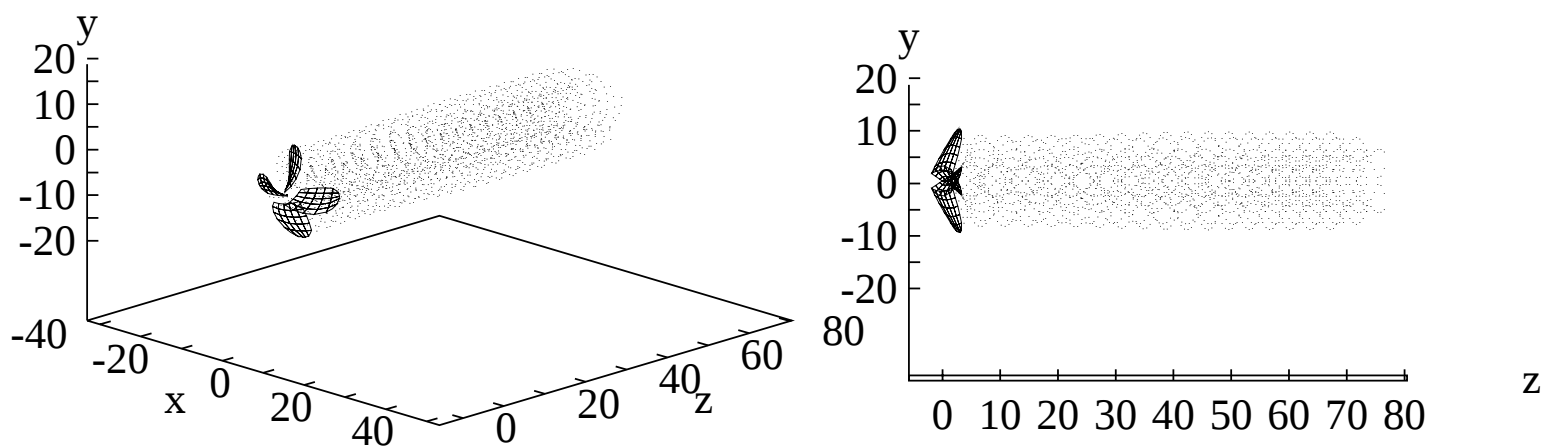
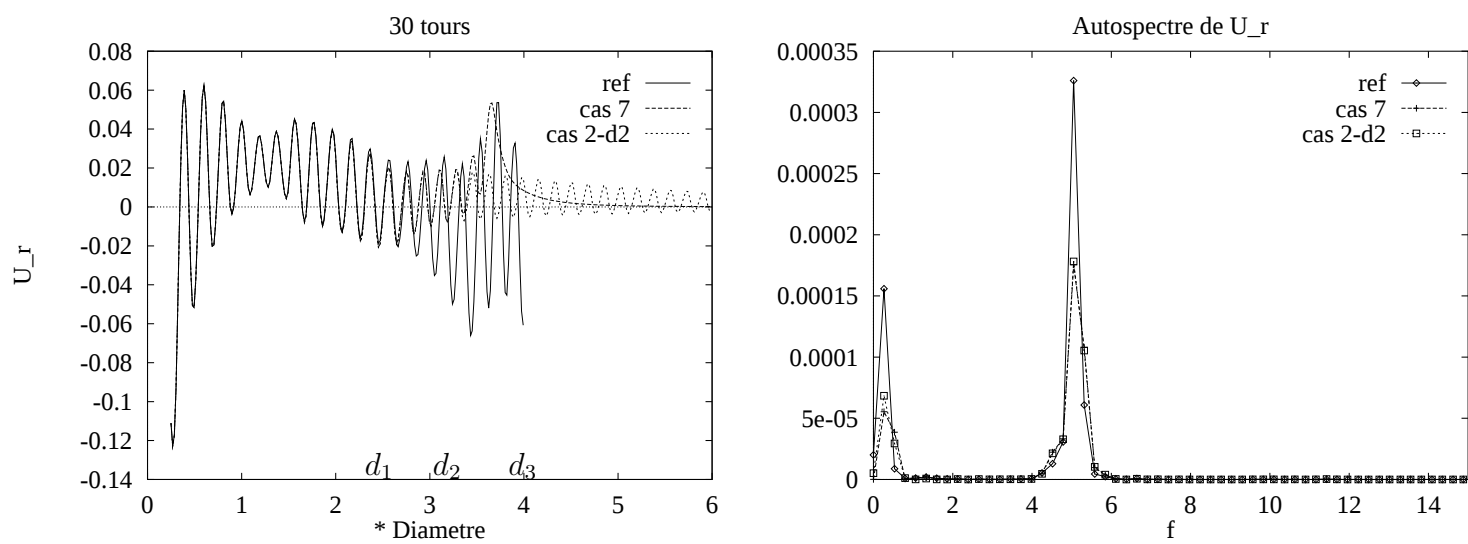
La distance d_3 optimum n'existe pas. Elle est directement fonction de la taille du sillage souhaitée. Il ne faut cependant pas aller au dessous de $4D$ pour un problème de convergence d'efforts.

Une carte de vitesse pour un calcul sur 30 tours d'hélice à été effectué avec la configuration suivante :

$d_1 = 2.4D$ (2.5 tours d'hélice), $d_2 = 3.2D$ (3.5 tours d'hélice) et $d_3 = 4D$ (4.5 tours d'hélice)

Sur la figure 3.29, on représente les caractéristiques du sillage de l'hélice B4-55 obtenu après 30 tours d'hélice.

Sur les figures suivantes (*c.f.* figures 3.30 et 3.31), on représente l'évolution des composantes radiales du champ de vitesse et vorticité en fonction de la distance axiale, ainsi que le spectre de ces signaux, pour le cas de référence et pour un calcul dans les conditions énumérées ci dessus après 30 tours d'hélice. On voit sur ces figures que les caractéristiques du sillage après 30 tours d'hélice sont pratiquement inchangées dans la zone comprise entre 0 et $3.5D$. De plus, bien qu'un saut apparaisse dès lors qu'on "aspire" les particules (après d_3), l'erreur est très faible (0.4%).

Figure 3.29: *Sillage après 30 tours d'hélice (Cas 7_{d3})*Figure 3.30: *caractéristique après 30 tours a) $\underline{U}_r = f\left(\frac{z}{D}\right)$, b) $S_{U_r U_r}(f_z)$*

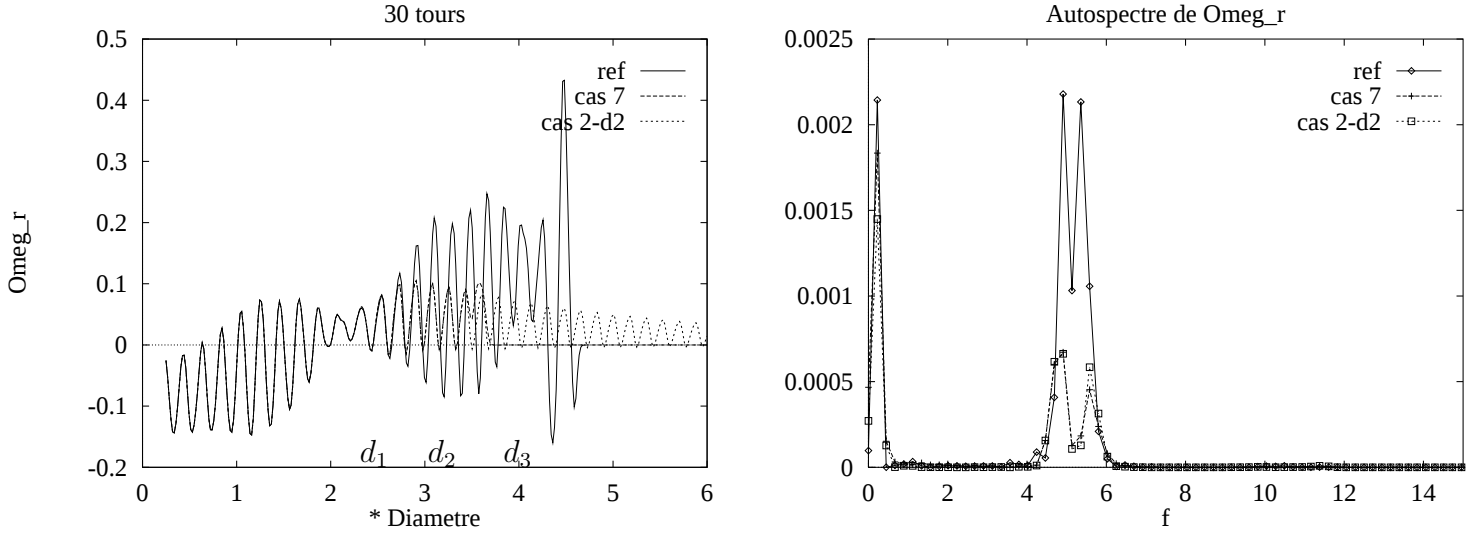


Figure 3.31: caractéristique après 30 tours a) $\underline{\omega}_r = \left(\frac{z}{D}\right)$, b) $S_{\omega_r \omega_r}(fz)$

3.6 conclusion

L'inconvénient des méthodes particulières, dont le sillage évolue à chaque pas de temps, par l'émission de particules du bord de fuite, est d'avoir un temps de calcul par itération évolutif. Par cette méthode du champ lointain, on peut désormais figer le temps de calcul pour l'équilibre de la nappe, et donc envisager des calculs sur un grand nombres de tours. En effet, dès lors que le sillage est établi et que ce dernier atteint d_3 , le temps de calcul pour une itération est constant. De plus, le fait de ne pas tenir compte des particules au delà de cette distance, entraîne une perturbation qui se manifeste par un saut sur la représentation des efforts, mais ne modifie pas les caractéristiques du sillage.

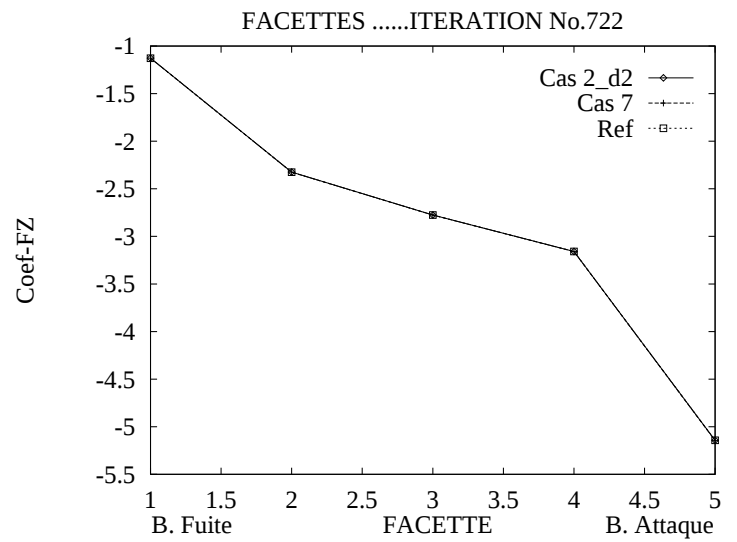
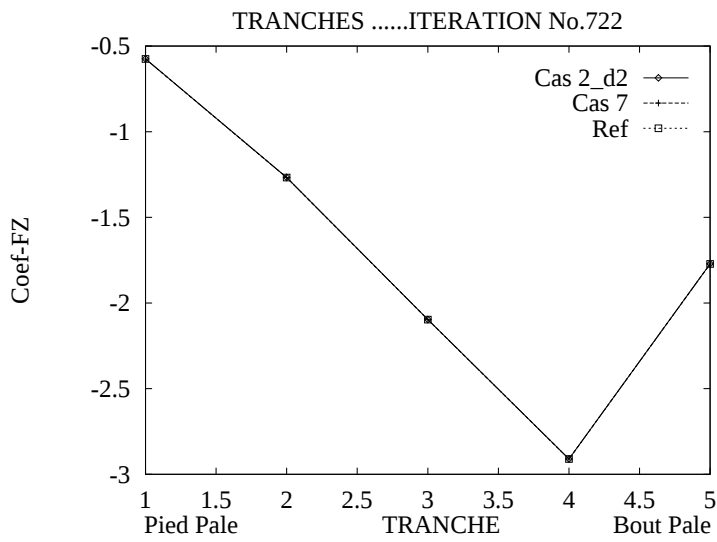
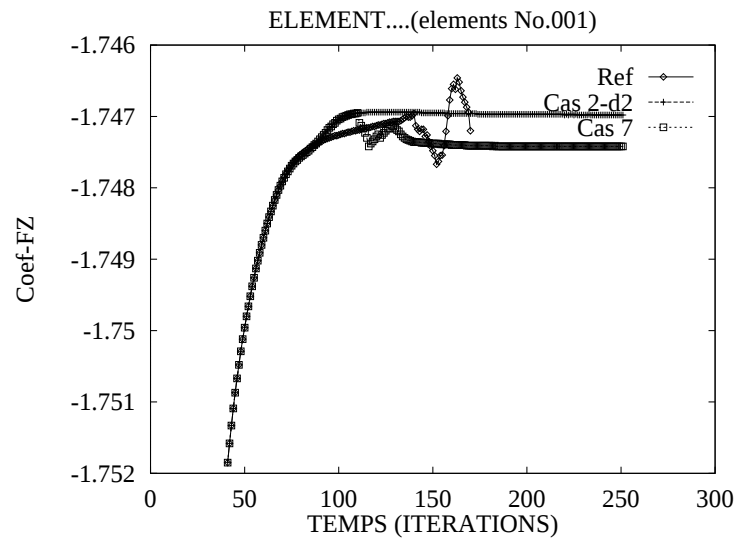


Figure 3.32: CF_z après 30 tours sur 1 pale a) en fonction du temps, b) par tranches, c) par facette (tranche 4)

Chapitre 4

La programmation parallèle

4.1 Introduction

Le parallélisme permet de traiter plus vite des problèmes plus grands. Mais aussi et peut être surtout, il permet de traiter de nouveaux problèmes, d'aller plus loin, d'apporter des solutions globales à des problèmes qui n'étaient abordés que partiellement, de modéliser globalement des situations complexes et d'étudier leur évolution sur des intervalles de temps très longs [40, 41, 42].

De nombreuses variétés d'architectures multiprocesseurs ont vu le jour, et pour les classer, le critère le plus couramment utilisé est le mode de contrôle des suites d'opérations élémentaires effectuées par les différents processeurs. On distingue notamment les deux structures suivantes :

1. Les machines *SIMD* (Single Instruction Multiple Data)
2. Les machines *MIMD* (Multiple Instruction Multiple Data)

Un ordinateur de type *SIMD* possède plusieurs unités de traitement (processeur) sous le contrôle de la même unité de commande (séquenceur). Toutes ces unités reçoivent la même instruction (ou le même programme, auquel cas on parle d'une structure *SPMD* : Single Program Multiple Data) diffusée par l'unité de commande, mais opèrent sur des données distinctes, provenant de flots de données distincts. Chaque Unité de traitement exécute la même instruction au même moment, on obtient un fonctionnement synchrone des processeurs. La mémoire peut être partagée (accessible à l'ensemble des processeurs) ou distribuée (chaque processeur a sa mémoire). Un réseau d'interconnexion est nécessaire dans les deux cas. La mémoire partagée a des limites : en effet, il y a souvent des conflits d'accès (deux processeurs ne peuvent accéder à une même adresse en même temps), si bien que la mémoire est segmentée par blocs qui sont attribués aux processeurs. L'orientation actuelle consiste à utiliser des noeuds de calcul composé de processeurs dotés de mémoire propre avec des

unités de transferts de mémoire à mémoire entre les processeurs, si bien que la mémoire peut être adressée de manière globale. On parle alors de mémoire virtuelle partagée. Dans ce type de configuration, on trouve par exemple le *Cray – T3D*, dont le nombre de noeuds peut aller jusqu'à 2048. En chacun de ces noeuds on trouve des processeurs *DecAlpha* 64 bits possédant 16 à 64 *MO* de mémoire. Plus classiquement, les machines *SIMD* possèdent beaucoup de processeurs peu puissants (plusieurs milliers, voir plusieurs dizaines de milliers). Elle s'applique à une classe restreinte de problèmes (DATA PARALLEL) mais se programme facilement tout en gardant une bonne portabilité. Les exemples les plus connus sont la *CM2*, et la *MasPar* [43].

Un ordinateur de type *MIMD* possède un nombre limité de processeurs puissants. La différence profonde entre cette structure et la précédente est le fait que, dans ce cas, chaque processeur possède son propre séquenceur et exécute son propre programme. La plupart des architectures *MIMD* commerciales sont faiblement couplées, ce qui signifie que les interactions entre les processeurs sont peu importantes (*IBM3081/3084..*). Traditionnellement, on considère aussi des architectures *MIMD* fortement couplées comme des calculateurs où des processeurs indépendants et asynchrones partagent une mémoire commune, comme par exemple le *Cray – T3D*. Depuis plusieurs années, on voit apparaître de nombreuses machines hautement parallèles elles aussi fortement couplées malgré l'absence de mémoire commune, mais organisées autour d'un réseau d'interconnexions à haut débit souvent reconfigurables, comme par exemple les machines Hypercube ou l'*iPSC/860* d'INTEL [44].

Des travaux précédents menés sur l'Hypercube de Caltech (A.Léonard, P.Pepin, P.Koumoutsakos...) et sur la *CM2* de Cachan (J.P.Choquin et S.Huberson) montre que ce type de machine semble relativement bien adaptée aux méthodes de discrétisation particulières que nous utilisons [45, 46, 47]. Dans la méthode particulaire, la partie rotationnelle du fluide est représentée comme un ensemble de particules porteuses de tourbillons. Chaque particule étant suivie dans son mouvement. La vitesse d'une particule est évaluée par les interactions avec les autres particules.

Une première idée était d'associer une particule (position, poids et vitesse) à un processeur ; mais, contrairement aux travaux de Choquin, le nombre de particules n'est pas figé au départ mais croît à chaque itération par le processus d'émission des particules des frontières solides, ce qui ne rend pas envisageable ce type d'algorithme ; de plus, des interactions longues distances entraînent de nombreuses communications inter unités très coûteuses en temps.

Une autre idée était de dupliquer l'information (position, poids et vitesse des particules) ce qui entraîne de travailler sur des tableaux de taille $N \times N$ (N étant le nombre de particules).

Ce type d'algorithme a l'avantage d'être très rapide, mais conduit très vite à des problèmes de mémoire. De plus, les communications se font de manière globale en début et fin de calcul, ce qui entraîne un très mauvais partage entre le temps de communication et le temps de calcul, et donc des conflits mémoire.

Une collaboration avec le *LIP* de Lyon nous a orienté vers une machine *MIMD* à mémoire distribuée tel que l'*iSPC/860*. La programmation de ce type de machine est nettement moins aisée et a nécessité de passer par une phase intermédiaire : *PVM* (Parallel Virtual Machine). *PVM* est un logiciel qui permet l'utilisation d'un ensemble hétérogène de machines fonctionnant sous UNIX et reliées entre elles par un ou plusieurs réseaux, qui simule une machine *MIMD* à mémoire distribuée [48, 49, 50, 51]. Le concept de base de *PVM* est d'utiliser les machines les mieux appropriées pour une application. L'utilisateur compile sur chaque machine "enrôlée" (machine dont le demon *PVM* est actif), vue comme un composant et identifiée par un nom, les programmes qui seront la base des processus. *PVM* se compose de bibliothèques qui existent pour toutes les machines et que l'utilisateur peut appeler. Elles fournissent, en outre, les fonctions suivantes :

- L'enregistrement d'un composant dans le système. C'est-à-dire lancer le demon UNIX sur une machine afin de l'enrôler. Cette dernière est alors coopérante dans la "machine virtuelle".

Et par l'intermédiaire de bibliothèques de fonctions ou sous-programmes écrites en C ou Fortran que l'on peut appeler d'un programme, les fonctions suivantes sont disponibles :

- Le lancement des exécutables sur les machines distantes (ou composant).
- Le séquençement des différents composants.
- Les communications entre les composants. Communication point à point ou communications globales (BroadCast).
- Les barrières de synchronisation.
- Eventuellement, de changer les configurations des machines...

Le code de calcul actuel demande environ 50 secondes de C.P.U. sur une station de travail type HP 9000/720 dont la capacité de calcul est d'environ 17MFlops, pour un tour d'éolienne avec un maillage 3×8 facettes par pales et environ 3500 particules libres dans le sillage. Compte tenu d'une vitesse de rotation moyenne de 40 tours/minute sur les machines les plus courantes, cela signifie que le rapport calcul/réel est de 33.33. C'est par ce facteur qu'il faut diviser le temps de calcul pour atteindre l'objectif temps réel.

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****					
3	88.7	10328.57	10328.57	2076700	4.97	nvqv1p3
4	10.1	11506.33	1177.77	1048350	1.12	ano1p2
5	0.3	11541.34	35.01			_mcount
6	0.1	11558.33	16.98	7371870	0.00	graf1a
7	0.1	11568.71	10.38	4020871	0.00	chb
8	0.1	11578.69	9.98	721	13.84	vitess
9	0.1	11587.76	9.07	2076700	0.00	nvqv
10	0.1	11595.83	8.06	1053090	0.01	vitpot
11	0.1	11603.84	8.01	1053090	0.01	grave2

Tableau 4.1: *Temps passé dans chaque routine et fonction pour l'algorithme de base*

D'autre part, le tableau suivant (*c.f.* tableau 4.1) indique les temps CPU passés dans chaque routine, lors d'un calcul simple d'écoulement uniforme autour d'un profil portant d'allongement un, avec en fin de calcul plus de 7000 particules. On voit que l'on passe presque 99% du temps CPU dans le calcul de vitesse et déformation (88.7% dans **nvqv1p3** : vitesse et déformation en formulation "particulaire" ; et 10.1% dans **ano1p2** : vitesse en formulation "segment") : on verra par la suite les deux formulations utilisées.

Afin d'approcher l'objectif temps réel, nous avons montré dans le chapitre 3 qu'il était possible, en fonction de la précision souhaitée, de simplifier la représentation du sillage dès lors que l'on s'éloigne un peu du disque rotor. De plus, du point de vue des algorithmes, la représentation particulaire du sillage tourbillonnaire et de l'obstacle ont été modifiée de façon à regrouper ces calculs en une routine commune et l'adapter au schéma classique du parallélisme maître-esclave sous *PVM* :

- Un processus maître commence le traitement, lance les processus esclaves, leurs donne du travail et récupère les résultats.
- Les processus esclaves attendent le travail, l'exécutent et rendent la main.

Dans la suite du chapitre, c'est ce dernier point que nous allons détailler. Dans un premier temps, nous allons expliciter les modifications d'algorithme qui nous permettent d'évaluer les interactions des particules entre elles. A travers la représentation des efforts, la position, le poids et la vitesse de chaque particule, nous allons montrer la validité de ce dernier. Puis dans un second temps, nous allons quantifier les gains en terme de temps (CPU ou REAL) par rapport au calcul de base présenté au chapitre 1. Et enfin, nous allons montrer la faisabilité et l'intérêt de passer par une structure multiprocesseurs pour s'approcher du temps réel.

4.2 Nouvel algorithme pour l'évolution du sillage

4.2.1 Le modèle théorique

(c.f. chapitre 1) La forme discrète du système d'équations d'Euler en formulation vitesse-tourbillon, caractérisant l'évolution dans le fluide d'une particule de position $\underline{\mathbf{X}}_i$, et portant un tourbillon $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{D\underline{\mathbf{X}}_i}{Dt} = (\underline{\mathbf{U}}_\omega + \underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_{ext})(\underline{\mathbf{X}}_i, t) \\ \frac{D\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i}{Dt} = - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_p(t)} \left(\frac{3}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^5} (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i) (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i))) + \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i) \right) \\ + (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot \nabla) (\underline{\mathbf{U}}_\phi + \underline{\mathbf{U}}_\infty + \underline{\mathbf{U}}_{ext})(\underline{\mathbf{X}}_i, t) + \nu \Delta \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}_\omega(\underline{\mathbf{X}}_i, t) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_p(t)} \frac{\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i)}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} \\ \underline{\mathbf{U}}_\phi(\underline{\mathbf{X}}_i, t) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_f} \mu_p(t) \sum_{n=1}^4 \underline{\mathbf{U}}_{ip}^n \\ \underline{\mathbf{U}}_{ip}^n &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_2}|^2} \left[|\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_1}| + |\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_2}| \right] \left[1 - \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_1} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_1}| |\underline{\mathbf{r}}_{ip}^{n_2}|} \right] \quad (c.f. section 1.3.1) \\ (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot \nabla) \underline{\mathbf{U}}_\phi &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_j} \left(\frac{3}{|\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i|^5} (\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i) (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i \cdot (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j \wedge (\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i))) + \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_i|^3} (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i) \right) \end{aligned}$$

où N_f représente le nombre de facettes porteuses d'une densité surfacique de doublets discrétisant l'obstacle, N_j le nombre de particules liées à l'obstacle, après équivalence doublet-tourbillon, d'intensité $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j$ et $N_p(t)$ le nombre de particules libres dans le sillage d'intensité $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p$.

Il y a deux façons de calculer la vitesse dans le code actuel : la formulation particulaire, utilisée pour calculer $\underline{\mathbf{U}}_\omega(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$, et la formulation segment, utilisée pour calculer $\underline{\mathbf{U}}_\phi(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$. Ces deux méthodes sont asymptotiquement équivalentes. Pour le champ proche, elles diffèrent significativement ; l'erreur dans le cas d'une facette unité étant à peu près d'un facteur 2. C'est pour cette raison que les 2 méthodes sont présentes dans le code actuel. Cette dualité est toutefois gênante car elle limite l'utilisation de la formule particulaire au seul sillage.

L'idée qui est développée consiste à calculer la vitesse et la déformation en tout point particulaire de la surface portante et du sillage, en utilisant la formulation particulaire, et à

utiliser une correction locale de la vitesse pour les particules liées de la surface portante et les particules libres du sillage proche, en substituant pour ces particules, la formulation segment à la formulation ponctuelle.

Dans un premier temps, nous allons considérer les particules liées comme des particules libres, ce qui nous permet de calculer la vitesse et la déformation en chaque point particulaire en utilisant la formulation particulaire :

- Calcul de la vitesse par Biot-Savart en tout point particulaire (l) :

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_l, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{N_j + N_p(t)} \frac{\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l)}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l|^3}$$

- Calcul de la déformation en tout point particulaire (l) :

$$\underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}_l, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{N_j + N_p(t)} \left(\frac{3}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l|^5} (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l) (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_l \cdot (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge (\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l))) + \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{X}}_l|^3} (\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_l) \right)$$

Où $ltot = N_j + N_p(t)$ représente respectivement l'ensemble des particules liées et libres de position $\underline{\mathbf{X}}_l$. Le fait de se ramener au calcul de la vitesse et déformation induite par une distribution de particules sur elles-mêmes permet déjà d'utiliser une triangulation de la matrice qui divise les calculs nécessaires par deux (voir annexe E).

Et dans un second temps, du fait que la formulation particulaire a été utilisée pour calculer la vitesse en tout point particulaire (surface portante et sillage), il faut corriger cette dernière pour les particules liées de la surface portante et pour les particules libres du sillage proche. Le calcul des vitesses est légèrement différent si l'on s'intéresse à la vérification de la condition de glissement et à la vitesse d'émission, calculée au point de contrôle de la facette, ou à l'évaluation de la vitesse sur un point tourbillonnaire de la surface portante, ou du sillage. Nous allons détailler ces trois points séparément :

1. EVALUATION DES VITESSES SUR LES POINTS DE CONTRÔLE

Dans l'initialisation, avant le calcul de la matrice, on repère pour tous les points de contrôle (i) des facettes discrétisant l'obstacle, les huit particules liées les plus proches (j) qui serviront pour la correction locale de la vitesse. Pour ces particules on calcule et stocke également les coefficients de pondération qui serviront à l'interpolation des vitesses au point de contrôle :

$$COEF(i, j) = \frac{r_{ij}^{-1}}{\sum_{j=1}^8 r_{ij}^{-1}}$$

Le calcul de la correction est assez simple : il est fait pour chaque point de contrôle, connaissant les vitesses en chaque point tourbillonnaire : $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_l, t)$ pour l variant de 1 à $ltot$,

- on calcule les vitesses aux 8 points tourbillons repérés précédemment en ne considérant que ces 8 dernières particules. De la même manière, le fait de se ramener au calcul de la vitesse induite par une distribution de particules sur elles-mêmes permet également d'utiliser une triangulation de la matrice qui divise les calculs nécessaires par deux.

$$\underline{\mathbf{V}}^1(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^8 \underline{\mathbf{V}}_{jk}(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$$

où $\underline{\mathbf{V}}_{jk}(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$ est la contribution du point tourbillon k sur j :

$$\underline{\mathbf{V}}_{jk}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = -\frac{1}{4\pi} f\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_k - \underline{\mathbf{X}}_j}{\delta}\right) \underline{\boldsymbol{\Omega}}_k(t) \wedge \frac{(\underline{\mathbf{X}}_k - \underline{\mathbf{X}}_j)}{|\underline{\mathbf{X}}_k - \underline{\mathbf{X}}_j|^3}$$

Où f est une fonction de régularisation qui sera décrite plus tard.

- pour ces 8 points tourbillonnaires, on retranche à la vitesse calculée précédemment ($\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$), les contributions des 8 particules ($\underline{\mathbf{V}}^1(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$), puis on interpole cette nouvelle vitesse au point de contrôle :

$$\underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \sum_{j=1}^8 \left[\left(\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) - \underline{\mathbf{V}}^1(\underline{\mathbf{X}}_j, t) \right) * COEF(i, j) \right]$$

Cette vitesse ($\underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$) est une vitesse interpolée au point de contrôle dont les 8 particules les plus proches ne sont pas prises en compte. On va donc maintenant en tenir compte sous la forme d'un segment tourbillonnaire :

- calcul de la vitesse au point de contrôle par la formulation segment en ne considérant que les 8 particules les plus proches :

$$\underline{\mathbf{U}}^3(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^8 \mu_j(t) \underline{\mathbf{U}}_{ij}^n(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$$

où $\underline{\mathbf{U}}_{ij}^n(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$ est la contribution sur i du tourbillon j porté par le segment n de la facette dont la particule appartient (ce segment est repéré dans l'initialisation) :

$$\underline{\mathbf{U}}_{ij}^n(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}|^2} \left[|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1}| + |\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}| \right] \left[1 - \frac{\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_1}| |\underline{\mathbf{r}}_{ij}^{n_2}|} \right] \quad (c.f. \text{ section 1.3.1})$$

- La vitesse corrigée au point de contrôle (i) est obtenue en ajoutant à la vitesse $\underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$ la vitesse $\underline{\mathbf{U}}^3(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$:

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{X}}_i, t) + \underline{\mathbf{U}}^3(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$$

Ce calcul est réalisé pour l'ensemble des facettes discrétisant l'obstacle.

2. EVALUATION DES VITESSES SUR LES PARTICULES LIÉES

Ce calcul n'est nécessaire que pour le calcul des efforts, il n'est donc pas fait systématiquement. Dans l'initialisation, on repère pour chaque point tourbillonnaire de la surface portante (k) les huit particules liées les plus proches (j) qui serviront pour la correction locale de la vitesse.

Le calcul de la correction est alors encore plus simple que précédemment : il est fait pour l'ensemble des points tourbillonnaires de la surface portante, connaissant les vitesses en chaque point tourbillonnaire : $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_l, t)$ pour l variant de 1 à $ltot$,

- on soustrait à $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$ la contribution des 8 particules repérées précédemment :

$$\underline{\mathbf{V}}^2(\underline{\mathbf{X}}_k, t) = \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_k, t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^8 \underline{\mathbf{V}}_{kj}(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$$

où $\underline{\mathbf{V}}_{kj}(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$ est la contribution du point tourbillon j sur k :

$$\underline{\mathbf{V}}_{kj}(\underline{\mathbf{X}}_k, t) = -\frac{1}{4\pi} f\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_k}{\delta}\right) \underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t) \wedge \frac{(\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_k)}{|\underline{\mathbf{X}}_j - \underline{\mathbf{X}}_k|^3}$$

- calcul de la vitesse au point tourbillonnaire k par la formulation segment en ne considérant que les 8 particules j les plus proches :

$$\underline{\mathbf{V}}^3(\underline{\mathbf{X}}_k, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^8 \mu_j(t) \underline{\mathbf{U}}_{kj}^n(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$$

où $\underline{\mathbf{U}}_{kj}^n(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$ est la contribution sur k du tourbillon j porté par le segment n de la facette dont la particule appartient (ce segment est repéré dans l'initialisation) :

$$\underline{\mathbf{U}}_{kj}^n(\underline{\mathbf{X}}_k, t) = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n1} \wedge \underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n2}|^2} \left[|\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n1}| + |\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n2}| \right] \left[1 - \frac{\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n1} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n1}| |\underline{\mathbf{r}}_{kj}^{n2}|} \right] \quad (c.f. \text{ section 1.3.1})$$

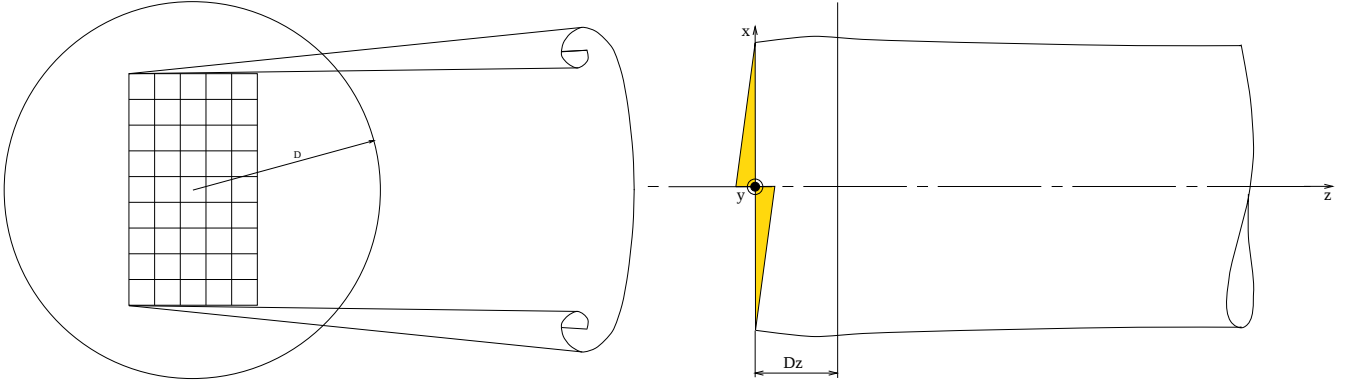
- La vitesse corrigée au point tourbillonnaire (k) est obtenu en ajoutant à la vitesse $\underline{\mathbf{V}}^2(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$ la vitesse $\underline{\mathbf{V}}^3(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$:

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}_k, t) = \underline{\mathbf{V}}^2(\underline{\mathbf{X}}_k, t) + \underline{\mathbf{V}}^3(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$$

Ce calcul est réalisé pour l'ensemble des segments tourbillonnaires représentant l'obstacle.

3. EVALUATION DES VITESSES ET DÉFORMATIONS SUR LES PARTICULES LIBRES

On n'applique pas de correction pour le calcul de la déformation, vu que ce dernier, dans le code actuel, est effectué de la même manière pour les particules libres et liées. La déformation en chaque point particulaire est donc déjà calculée.

Figure 4.1: *Zone de correction*

Il n'y a pas d'initialisation concernant la recherche des particules les plus proches de celle concernée, vu qu'elles sont créées à chaque pas de temps. Un premier test est donc effectué afin de vérifier si le point tourbillonnaire est proche de la surface portante. Si tel est le cas, la vitesse en ce point doit être corrigée. On définit une zone arbitraire (*c.f.* figure 4.1), comprise pour les hélices (ou tout obstacle tournant) entre l'obstacle et une distance Dz en aval du disque rotor, et pour un profil (ou tout obstacle fixe), on définit une sphère centrée sur l'obstacle de rayon D . Ce test est nécessaire, car une recherche systématique des huit particules les plus proches du point tourbillonnaire courant ainsi qu'une correction systématique de la vitesse, demanderaient trop de temps, alors que cette dernière n'est pas nécessaire dès lors que le point courant est suffisamment éloigné de la surface portante. En effet l'influence d'une particule en terme de vitesse décroît en $\frac{1}{r^2}$.

La distance Dz fixée arbitrairement est obtenue de la manière suivante : à partir du centre de l'obstacle, on recherche la particule liée la plus éloignée suivant la direction axiale. A cette distance, on ajoute $4 * \delta_{obs}$, où δ_{obs} représente le noyau de la fonction de régularisation pour les particules liées. De la même manière, on obtient le rayon D de la sphère en évaluant la distance du centre de l'obstacle à la particule liée la plus éloignée, à laquelle on rajoute $4 * \delta_{obs}$.

Pour l'ensemble des particules libres du sillage, on regarde si la particule concernée (k) est comprise ou non dans la zone définie précédemment. Si elle n'y est pas, on n'effectue pas de correction pour la vitesse. On aura alors :

$$\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_k, t) = \underline{\mathbf{V}}(\mathbf{X}_k, t)$$

$\underline{\mathbf{V}}(\mathbf{X}_k, t)$ étant la vitesse connue pour chaque point tourbillonnaire.

Dans le cas contraire, si la particule (k) est dans la zone définie précédemment, on effectue alors une correction de la vitesse. A la différence des deux cas précédents, les 8 particules liées (j) les plus proches du point tourbillonnaire (k) ne peuvent pas être repérées dans l'initialisation, ce dernier n'étant pas encore créé. On doit donc repérer systématiquement, parmi toutes les particules liées de la surface portante, les 8 particules qui serviront pour la correction locale de la vitesse. On voit que ce type d'algorithme peut être très pénalisant dans le cas d'un obstacle modélisé par un nombre important de segments tourbillonnaires. Dans ce cas, il faudra optimiser l'algorithme de recherche des 8 particules liées. Ces particules étant repérées, la correction est alors identique au cas 2 précédent. c'est-à-dire :

- soustraire à $\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_k, t)$ la contribution des 8 particules liées j ,
- calcul de la vitesse au point tourbillonnaire k par la formulation segment en ne considérant que les 8 particules liées j les plus proches,
- la vitesse corrigée au point tourbillonnaire k est la somme des deux vitesses précédentes.

On peut cependant obtenir une vitesse en un point quelconque du sillage, pour le calcul d'une carte de vitesse par exemple, en effectuant une interpolation au point courant, des 8 particules liées ou libres les plus proches, puis en effectuant une correction si nécessaire. Dans ce cas, la correction et le test sur la correction, sont identiques au cas 3 précédent.

4. RÉGULARISATION DE LA VITESSE ET DE LA DÉFORMATION

Dans le code actuel, la fonction de régularisation utilisée dans les calculs de vitesse et déformation est la suivante (*c.f.* équations 1.29 et 1.30 et section 1.3.4) :

$$\xi(r) = \frac{3}{4\pi} e^{-r^3} \quad \text{et} \quad f(r) = 1 - e^{-r^3} \quad (4.1)$$

Cependant, afin d'éviter d'effectuer un test systématique lors de la régularisation de la vitesse, très pénalisant en temps pour une version parallélisée, la fonction de régularisation est modifiée. En effet, lors du calcul de la vitesse en tout point particulière, l'influence d'une particule sur elle-même ne peut être prise en compte avec la première fonction de régularisation (4.1), car elle entraîne une division par 0 sur les calculs de vitesse et déformation. De plus, la nouvelle fonction de régularisation (4.2) est plus stable. Nous optons donc pour cette fonction de régularisation :

$$\xi(r) = \frac{3}{4\pi} \frac{r^3}{(1 + r^6)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad f(r) = \frac{r^3}{(1 + r^6)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.2)$$

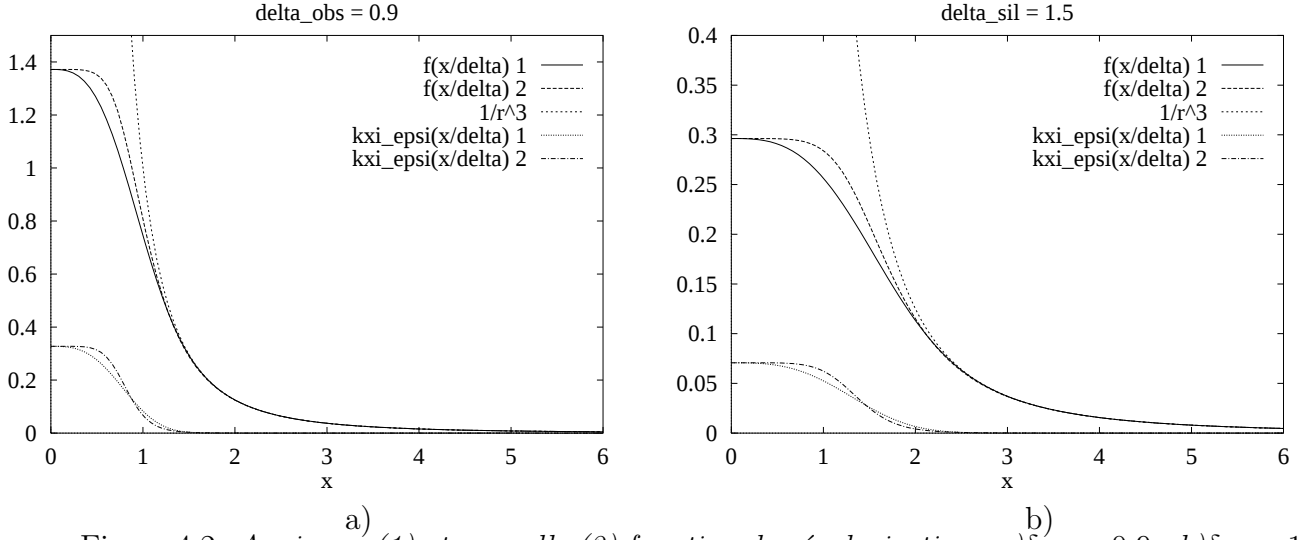


Figure 4.2: Ancienne (1) et nouvelle (2) fonction de régularisation. a) $\delta_{obs} = 0.9$; b) $\delta_{sil} = 1.5$

Sur la figure 4.2, nous représentons les deux fonctions de régularisation pour $\delta_{obs} = 0.9$ et $\delta_{sil} = 1.5$.

4.2.2 Les tests numériques

Présentation des simulations calculées

Afin de tester ce nouvel algorithme, nous avons effectué plusieurs essais numériques. Le premier d'entre eux s'est porté sur le cas simple d'un profil d'allongement un, placé dans un écoulement uniforme. Le profil portant considéré est une plaque 10×10 facettes (soit 220 particules liées) dont le bord d'attaque est confondu avec l'axe y . L'écoulement infini amont est confondu avec l'axe z . La plaque est à une incidence de $14^\circ 5$. On ne considère pas d'émission de bord latéral. Le calcul est lancé sur 98 itérations avec un pas de temps de 0.6, ce qui correspond à un sillage qui s'étale sur plus de 6 cordes. 10 particules sont émises à chaque pas de temps, soit à la fin de la simulation 1000 particules libres.

Le deuxième d'entre eux concerne un calcul dans les mêmes conditions précédentes, mais avec une émission de bord latéral, afin de tester le cas où les enroulements tourbillonnaires peuvent provoquer des difficultés par la proximité de ces derniers du profil émetteur, entraînant des corrections quasi systématiques pour les particules libres formant ces enroulements. Nous émettons 30 particules par itération, soit un total de 3000 particules libres à la fin de la simulation.

Un dernier test est effectué sur une hélice Wageningen type B4-55 [36] plongée dans

un écoulement uniforme axisymétrique pour un paramètre d'avance $J = \frac{U_\infty}{nD} = 0.7$. Cette dernière est discrétisée en 5×5 facettes par pales, soit 240 particules liées pour l'ensemble des 4 pales. Le calcul est effectué sur 20 tours, avec 20 particules émises à chaque itération, soit un total de 9640 particules libres à la fin de la simulation. Le sillage s'étale sur plus de 15 diamètres.

Pour chaque test, on représente l'évolution des positions, vitesses et intensités des particules issues d'un point d'émission. On représente également les coefficients de portance et trainée pour le profil, et le coefficient de poussée pour l'hélice. Ces représentations sont commentées dans la section suivante.

Comparaison des résultats obtenus avec les deux algorithmes

Nous allons pour commencer traiter le premier cas : on représente sur les figures suivantes (*c.f.* 4.3, 4.4 et 4.5) l'évolution des positions, vitesses et poids des particules issues du premier point d'émission (correspondant au point du bord de fuite le plus proche d'un bord latéral), pour l'algorithme de base, c'est-à-dire vitesse calculée avec les deux formulations (formulation "segment" pour les particules liées et la formulation "particulaire" pour les particules libres *c.f.* chapitre 1), et le nouvel algorithme qui consiste à calculer la vitesse avec la formulation "particulaire" et appliquer une correction pour les particules liées et les particules libres proches de la surface portante (*c.f.* section 4.2.1).

Le fait de changer d'algorithme ne modifie pas le sillage. En effet après 98 itérations, la position et le poids des particules sont pratiquement inchangées pour un gain en temps CPU de l'ordre de 20%. Ce dernier point sera détaillé dans la section suivante (*c.f.* section 4.2.2).

Sur la figure suivante (*c.f.* 4.6), on représente les coefficients de portance (X) et trainée (Z) pour la cinquième tranche en fonction des facettes pour les deux algorithmes, ainsi que ces mêmes coefficients en fonction des tranches.

Les courbes d'efforts obtenues avec les deux algorithmes sont très satisfaisantes. En effet, l'erreur pour la portance est de l'ordre de 0.25% et pour la trainée, elle est tout juste égal à 2%. Sachant que la trainée est de toute façon mal prise en compte dans ce type d'approche, cette erreur n'est donc pas significative. Lorsque l'on traite toutes les particules avec la formulation particulaire, sans appliquer de correction locale sur la vitesse (avec la formulation segment) pour les particules liées et les particules libres proches de la surface portante, l'erreur sur la vitesse et les efforts est de l'ordre d'un facteur 2 pour des facettes unité, tandis qu'avec la correction locale, lorsque les enroulements tourbillonnaires proches

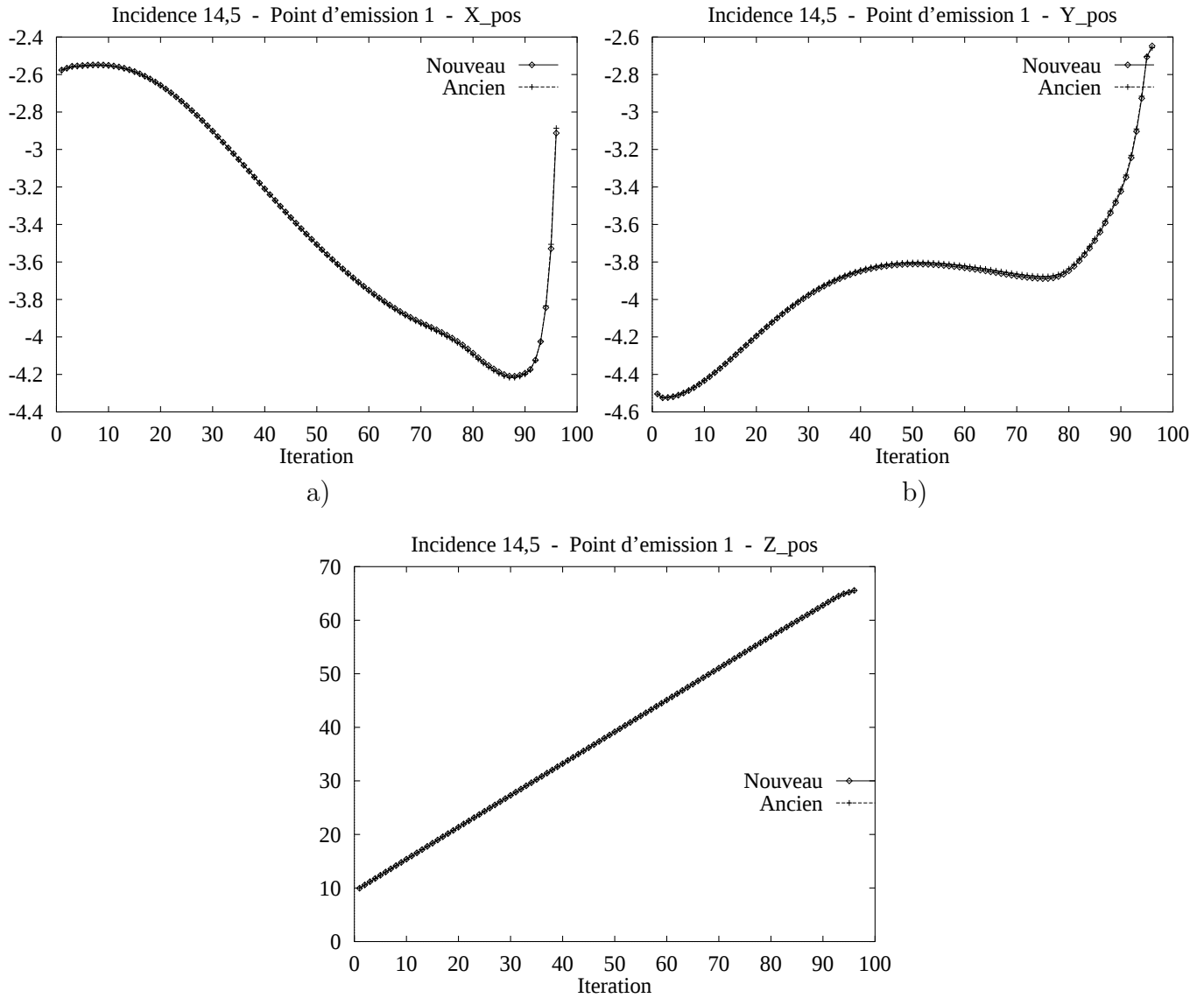


Figure 4.3: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) X ; b) Y ; c) Z

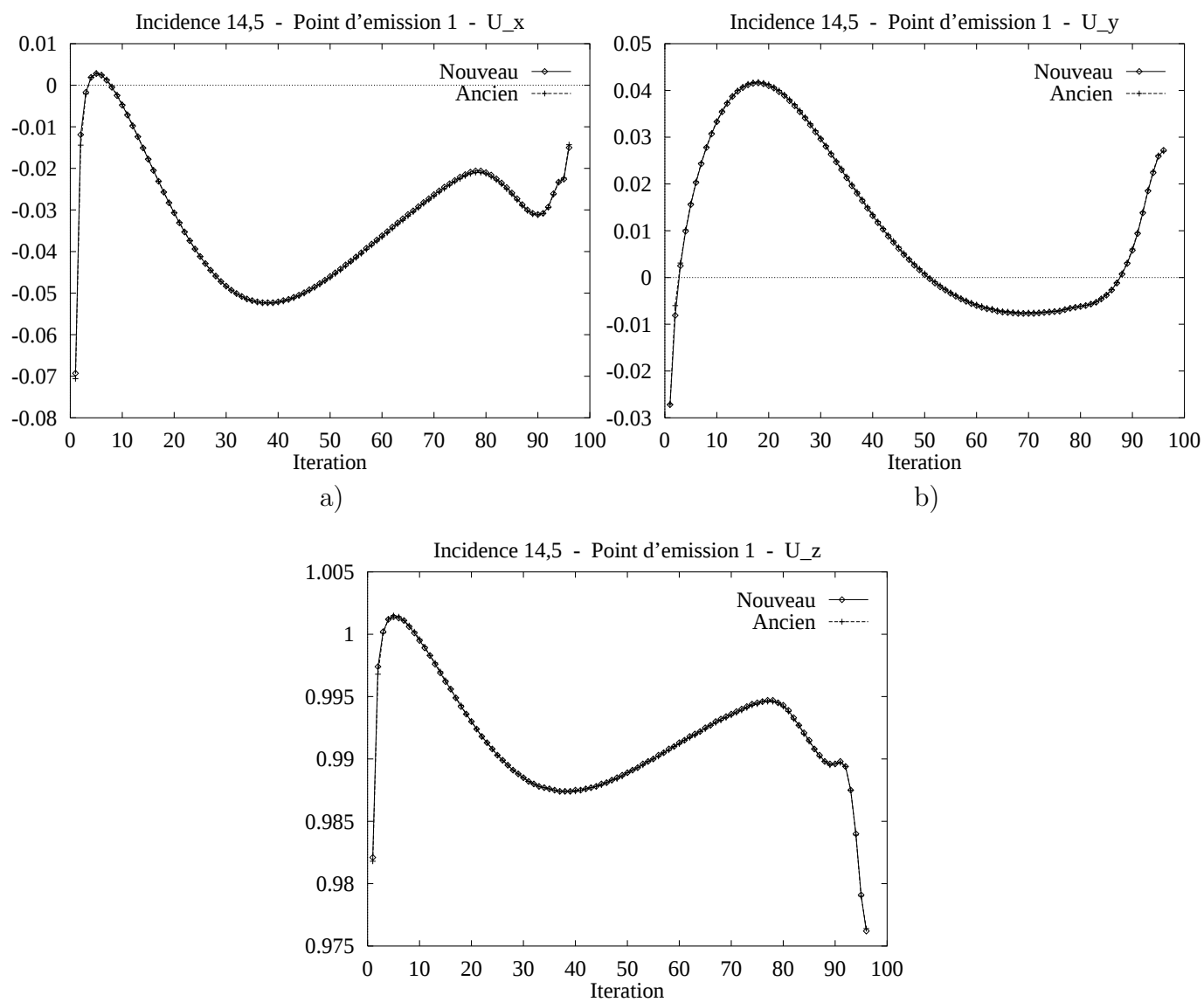


Figure 4.4: *Ancien et nouvel algorithme* : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$

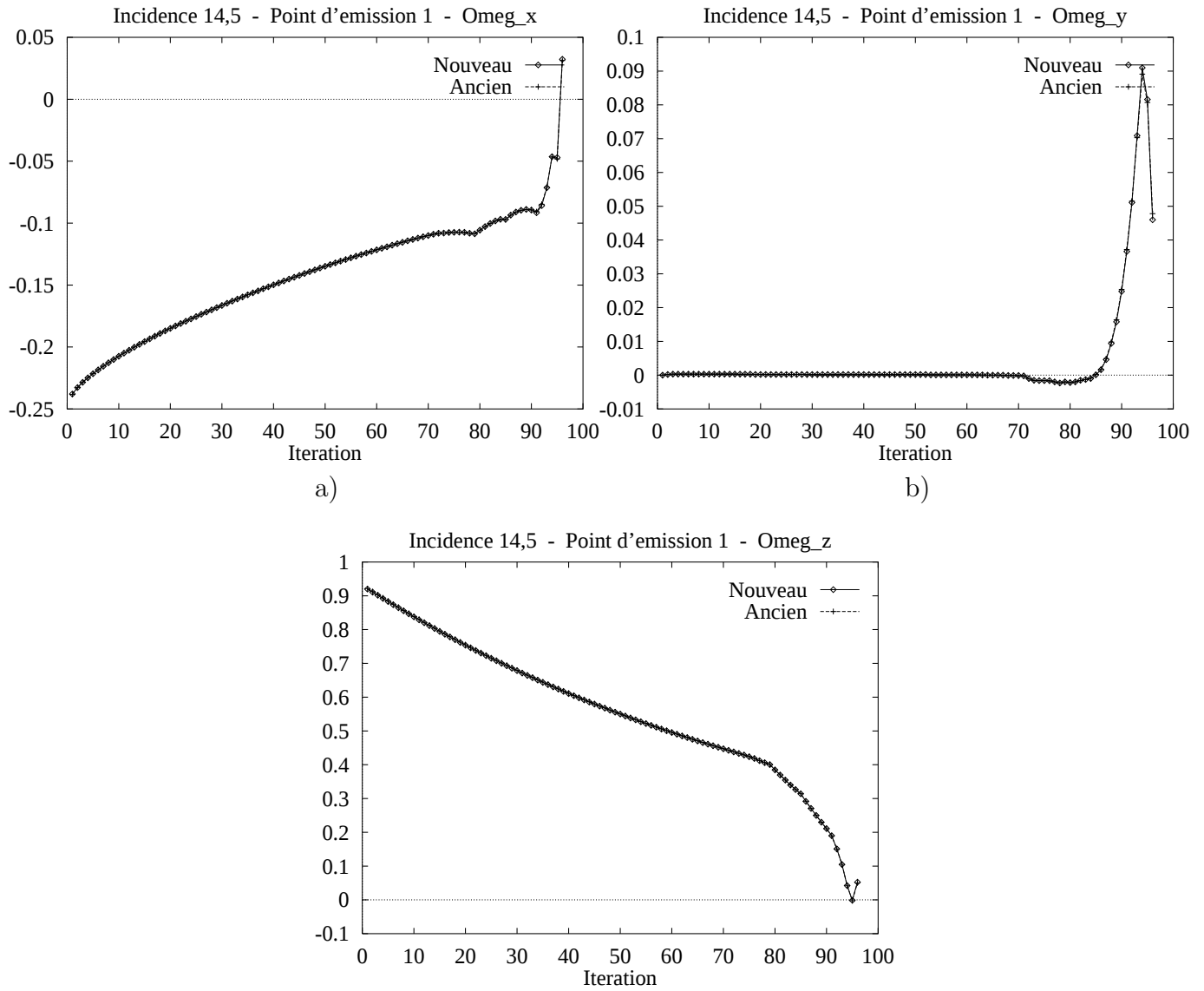


Figure 4.5: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$

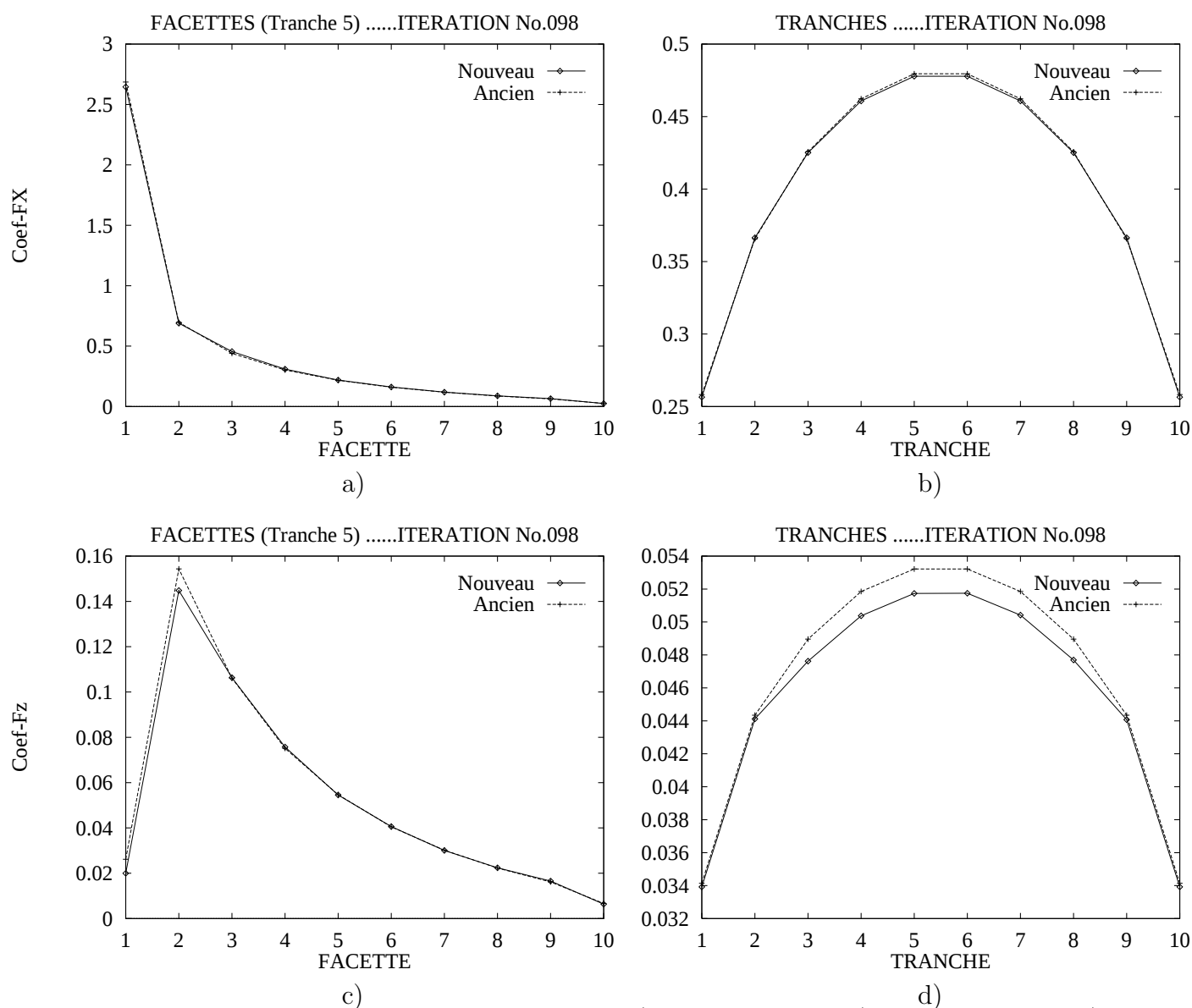


Figure 4.6: Ancien et nouvel algorithme : a) C_x par facette ; b) C_x par tranche ; c) C_z par facette ; d) C_z par tranche

de la surface portante ne sont pas importants, les résultats sont tout à fait satisfaisants.

On s'intéresse maintenant au deuxième cas, c'est-à-dire en considérant une émission de bord latéral. On représente les quantités précédentes pour les particules issues du point d'émission situé sur un bord latéral près du bord d'attaque. Celles-ci étant les plus sollicitées pour la correction. On représente donc sur les figures suivantes (*c.f.* 4.7, 4.8 et 4.9) l'évolution des positions, vitesses et poids des particules issues du premier point d'émission, pour les deux algorithmes présentés (algorithme avec les deux formulations (*c.f.* chapitre 1), et algorithme avec la formulation "particulaire" et correction éventuelle (*c.f.* section 4.2.1)). En présence de forts enroulements, le fait de changer d'algorithme modifie quelque peu le sillage. Cependant, l'erreur sur la portance est inférieure à 1.35%, et celle sur la trainée est toujours d'environ 2% (*c.f.* 4.10). Le gain de temps CPU est moins significatif, car il y a une correction presque systématique, pour les particules libres émises des bords latéraux. Cette correction est la plus pénalisante car on doit effectuer la recherche des huit particules les plus proches, parmi toutes les particules liées (dont le nombre peut être très élevé pour les obstacles de grandes dimensions), pour toutes les particules libres traitées (c'est-à-dire comprises dans le volume de correction (*c.f.* section 4.2.1)). Néanmoins, le gain de temps CPU est légèrement supérieur à 10% (*c.f.* section 4.2.2). Sur la figure suivante (*c.f.* 4.10), on représente les coefficients de portance (X) et trainée (Z) pour la cinquième tranche, en fonction des facettes pour les deux algorithmes, ainsi que ces mêmes coefficients en fonction des tranches.

Le dernier cas considéré concerne l'écoulement autour d'une hélice marine. On représente sur les figures 4.11, 4.12 et 4.13 l'évolution des positions, vitesses et poids des particules issues d'un point d'émission de bout de pale, pour les deux algorithmes présentés. Le sillage n'est pratiquement pas modifié par ce nouveau traitement, et de plus, le tourbillon de démarrage est mieux évacué (*c.f.* figure 4.12). L'erreur sur la poussée est inférieure à 0.5% (*c.f.* 4.14) et les gains de temps CPU sont du même ordre que pour le test précédent. Sur la figure suivante (*c.f.* 4.14), on représente le coefficient de poussée (Z) pour une pale en fonction du temps, ainsi que ce même coefficient en fonction des tranches au bout de 20 tours, pour les deux algorithmes. La première tranche correspondant à la tranche de pied de pale.

Sans prendre en compte les gains de temps, on a montré à travers ces trois tests, que le nouvel algorithme était plus que satisfaisant. Les caractéristiques du sillage ne sont partiellement modifiées que pour le test 2, c'est-à-dire lorsque les enroulements tourbillonnaires le long de l'obstacle sont très importants. Cependant, on peut éventuellement envisager une correction, non plus en prenant en compte les 8 particules les plus proches, mais en considérant l'ensemble des particules liées comprises dans un certain volume autour du point

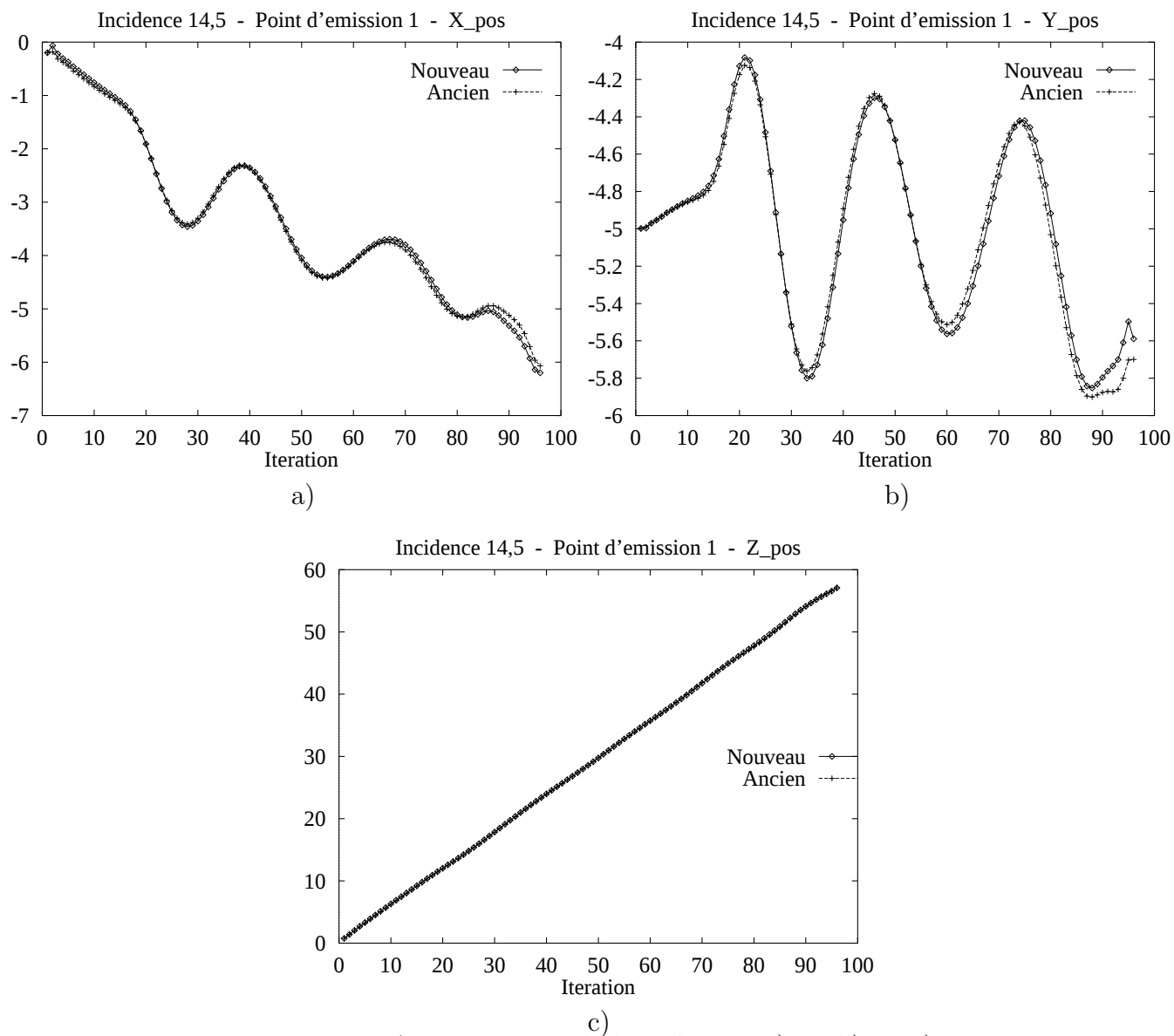


Figure 4.7: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{X}$; b) $\underline{Y}$; c) $\underline{Z}$

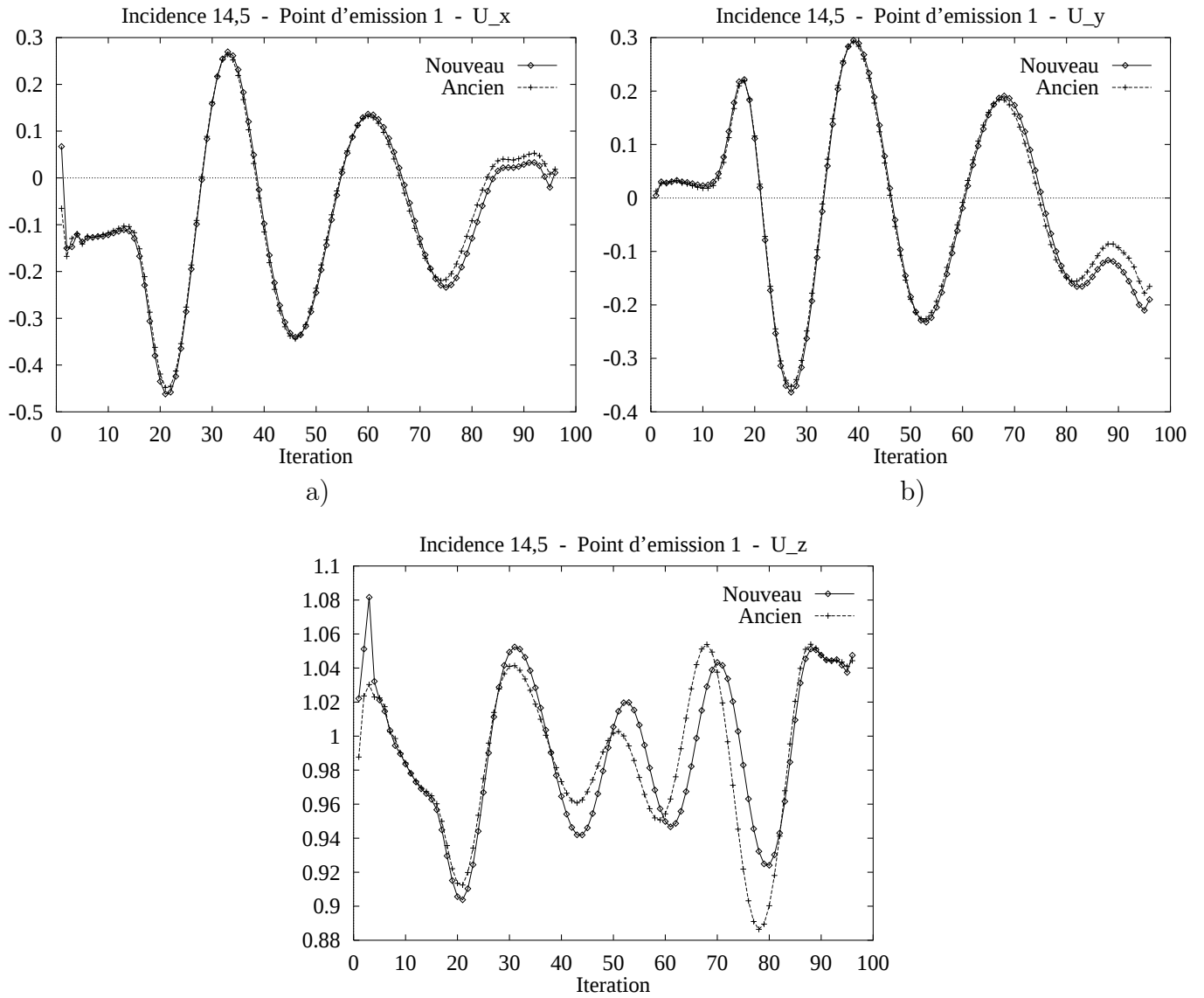


Figure 4.8: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$

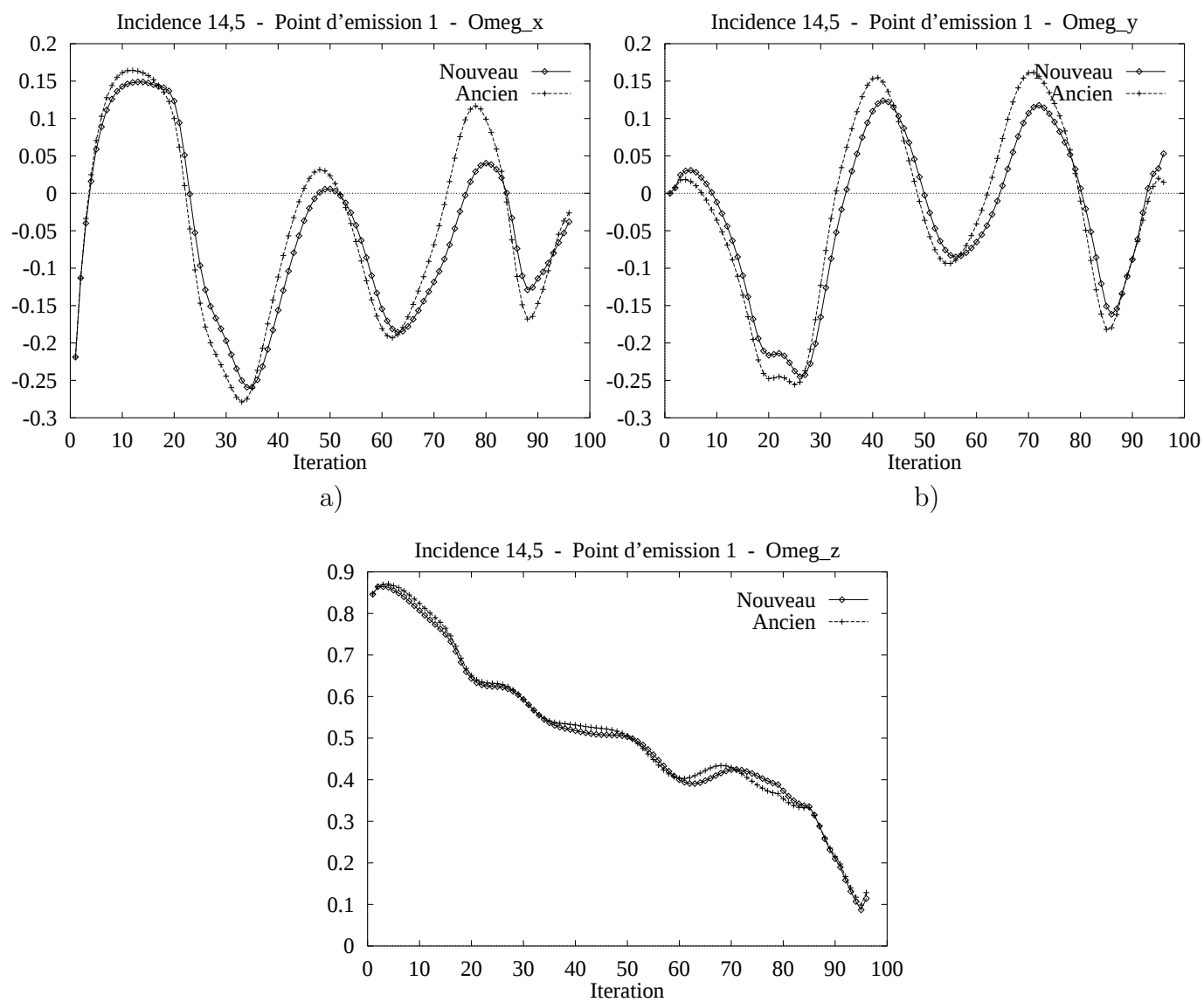


Figure 4.9: *Ancien et nouvel ^{c)}algorithme* : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$

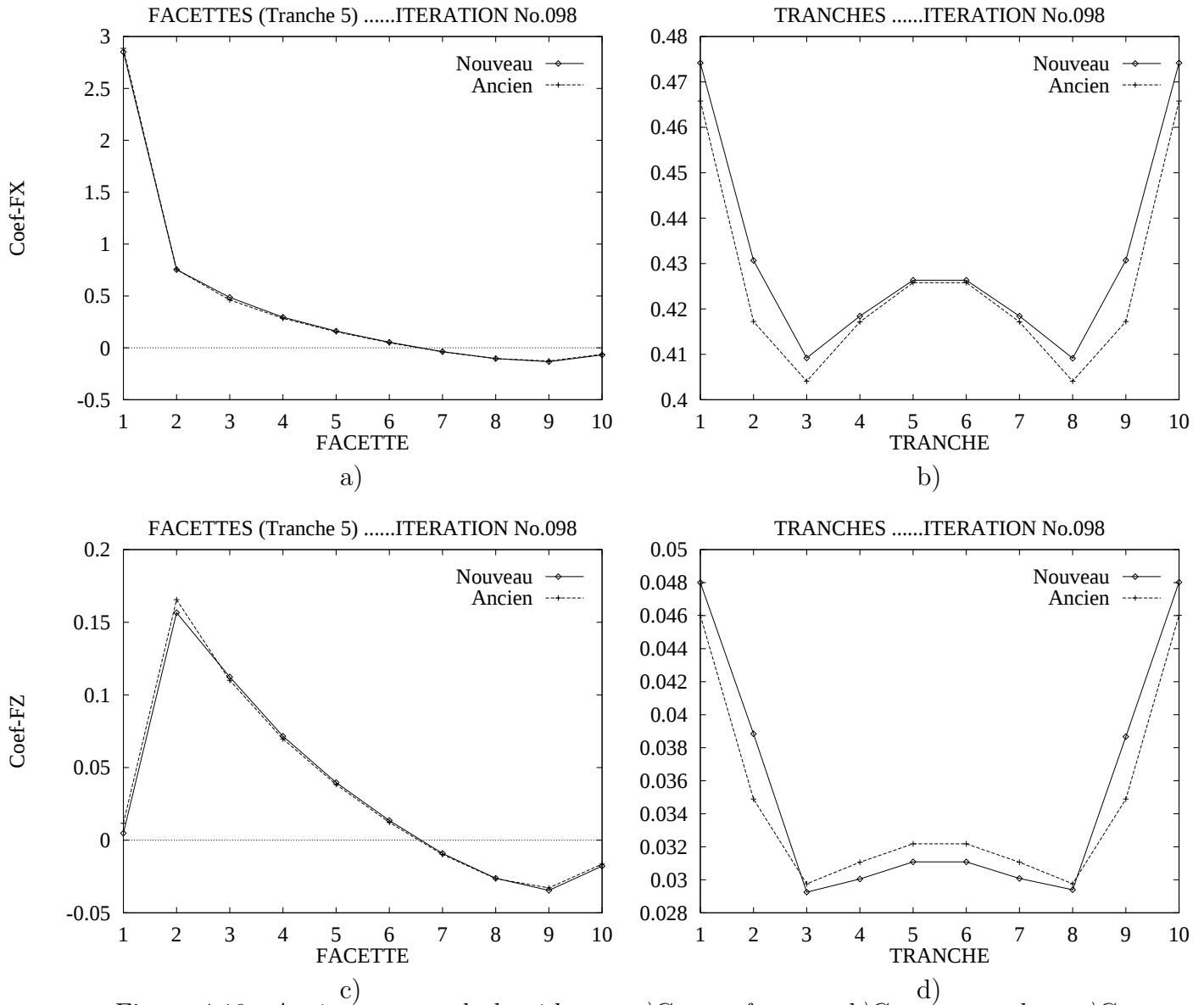


Figure 4.10: Ancien et nouvel algorithme : a) C_x par facette ; b) C_x par tranche ; c) C_z par facette ; d) C_z par tranche

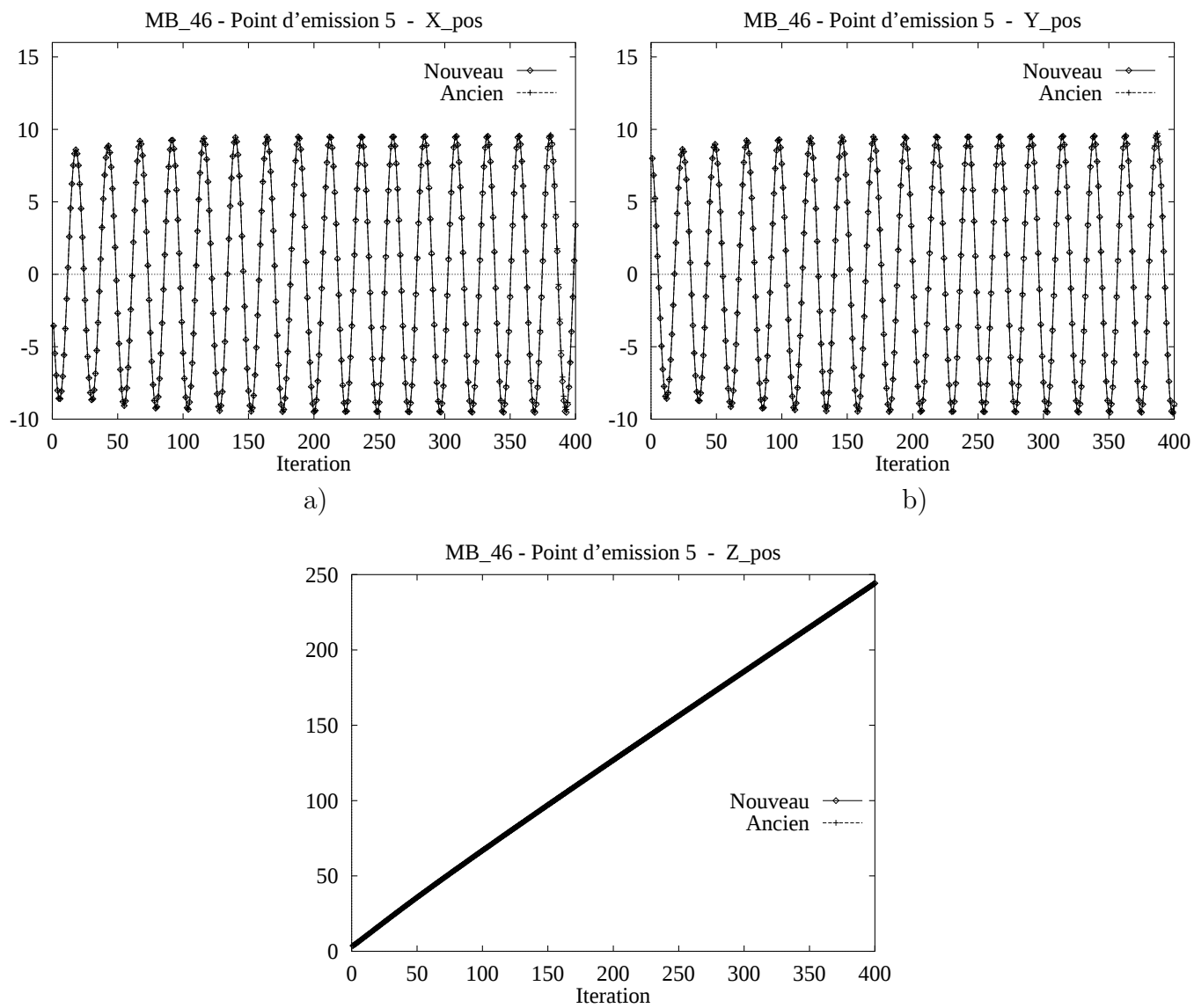


Figure 4.11: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{X}$; b) $\underline{Y}$; c) $\underline{Z}$

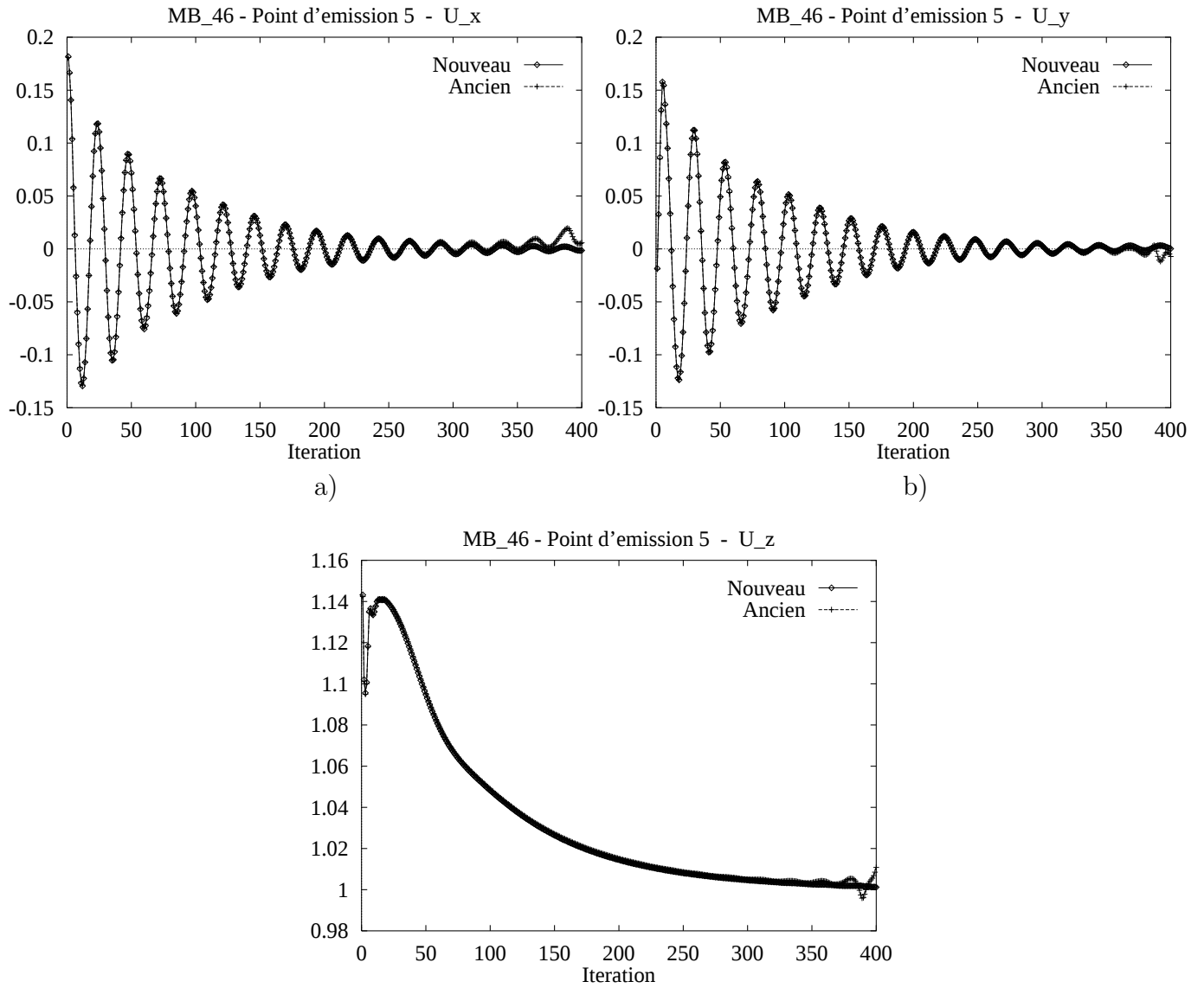


Figure 4.12: ^{c)}Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{U}_x$; b) $\underline{U}_y$; c) $\underline{U}_z$

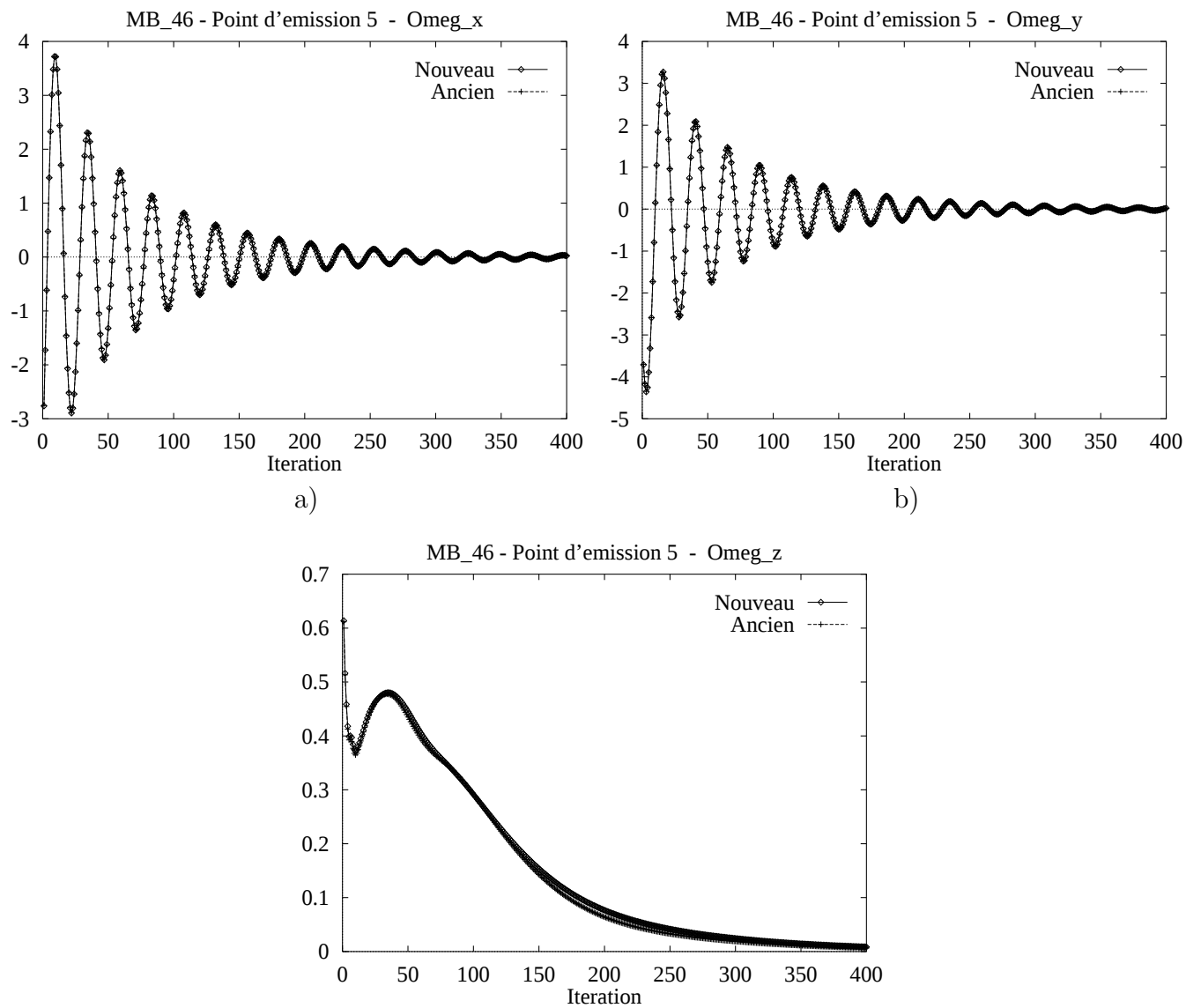


Figure 4.13: ^{c)} Ancien et nouvel algorithme : a) $\underline{\Omega}_x$; b) $\underline{\Omega}_y$; c) $\underline{\Omega}_z$

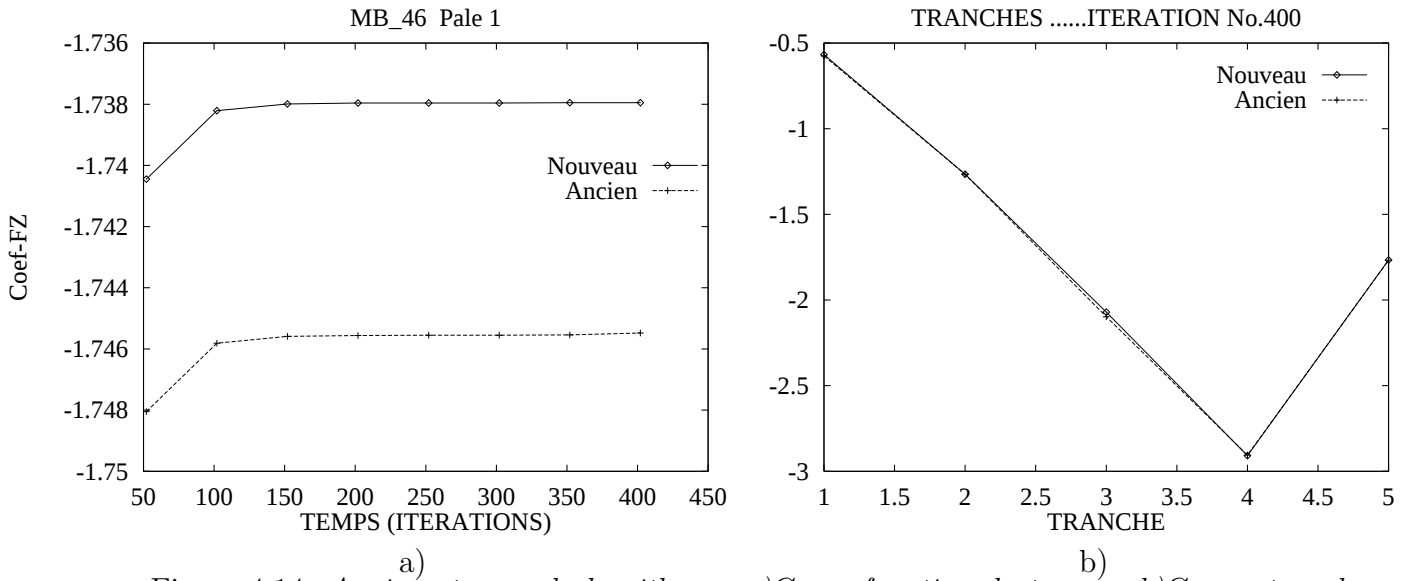


Figure 4.14: Ancien et nouvel algorithme : a) C_z en fonction du temps ; b) C_z par tranche

de calcul. Par cet artifice, nous pourrions, suivant les cas traités, considérer un volume plus ou moins important, et donc une correction où le nombre de particules liées pourrait être nettement supérieure à 8.

Les coefficients de poussée et portance sont bien évalués, avec une erreur sur la portance inférieure à 1.35% dans le cas le plus défavorable. La trainée est par contre moins bien prise en compte, mais ce n'est pas significatif, car de par la méthode utilisée, on ne considère que la trainée induite, et donc cette dernière est de toute façon sous-évaluée.

Nous allons maintenant faire quelques remarques sur les performances en terme de temps du nouvel algorithme.

Estimation de la performance du nouvel algorithme

Pour ces deux précédentes simulations numériques, nous avons lancé un "profilier"¹ afin de déterminer les temps CPU passés dans chaque routine. Dans un premier temps, nous allons faire quelques remarques sur le premier cas, c'est-à-dire pour le cas de la plaque plane sans émission de bord latéral. Par la suite, nous nous intéresserons au deuxième cas, c'est-à-dire avec émission de bord latéral, et enfin, nous terminerons par une comparaison directe des deux cas précédents. `vel_vd` est la routine dans laquelle s'effectue les calculs de vitesse et déformation en tout point particulière en utilisant la triangulation ; `vel_v1` est la routine qui permet de calculer la vitesse en chaque point tourbillonnaire de la surface portante en utilisant la triangulation pour les particules liées, auxquelles on ajoute la contribution des particules libres avec `biotsav_v`. En effet, pour la vérification de la condition de glissement

¹Logiciel qui permet de comptabiliser les temps CPU passés dans chaque routine et fonction

Test 1 : Sans émission de B.L.

(98 iter, 220 p. liées, 1000 p. libres)

Test 2 : Avec émission de B.L.

(98 iter, 220 p. liées, 3000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name	1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****	*****	*****	*****	*****	*****	2	*****	*****	*****	*****	*****	*****
3	50.7	468.80	468.80	97	4832.99	vel_vd	3	72.5	2890.43	2890.43	97	29798.25	vel_vd
4	33.3	777.00	308.19	209224	1.47	biotsav_v	4	23.2	3814.60	924.17	223882	4.13	biotsav_v
5	9.6	865.71	88.71	480	184.81	vel_v1	5	2.2	3903.17	88.57	480	184.52	vel_v1
6	1.4	878.95	13.24	42691	0.31	velcontrib	6	0.4	3918.03	14.87	48471	0.31	velcontrib
7	0.7	885.75	6.81	66315	0.10	anneau	7	0.2	3926.95	8.92	86753	0.10	anneau
8	0.5	890.14	4.39	109486	0.04	vitpot	8	0.2	3934.20	7.25	139680	0.05	recherch
9	0.5	894.50	4.35			\$\$\$null	9	0.2	3941.45	7.24	214146	0.03	vitpot
10	0.3	897.08	2.58	97	26.60	pparo6	10	0.1	3946.18	4.73	1499118	0.00	grafia
11	0.3	899.60	2.52	289	8.72	pmv	11	0.1	3950.62	4.45			\$\$\$null
12	0.3	902.07	2.48			_mcount	12	0.1	3954.84	4.21	779719	0.01	chb
13	0.2	904.33	2.26	766498	0.00	grafia	13	0.1	3958.98	4.14			_mcount
14	0.2	906.56	2.23	10289	0.22	tp	14	0.1	3961.96	2.98	97	30.72	pparo6
15	0.2	908.76	2.20	1	2200.00	matinv	15	0.1	3964.53	2.56	208190	0.01	vel2
16	0.2	910.87	2.10	374539	0.01	chb	16	0.1	3967.03	2.51	289	8.69	pmv
17	0.2	912.91	2.05	1	2050.00	initvel	17	0.1	3969.49	2.46	214146	0.01	grave2
18	0.2	914.43	1.52	1	1520.00	pmm	18	0.1	3971.74	2.24	10289	0.22	tp
19	0.2	915.88	1.44	109290	0.01	vel2	19	0.1	3973.93	2.19	1	2190.00	matinv
20	0.1	917.17	1.30	109486	0.01	grave2	20	0.1	3976.01	2.08	1	2080.00	initvel
21	0.1	918.42	1.25	10930	0.11	write							
22	0.1	919.50	1.07	46560	0.02	recherch							
23	0.1	920.38	0.88	10000	0.09	vel3							

Tableau 4.2: Estimation des temps CPU passés dans les différentes routines pour le nouvel algorithme. Profil à 14°5 avec et sans émission de bord latéral

et pour les boucles internes sans émission (qui permettent d'affiner l'émission), le calcul de la déformation n'est pas nécessaire et donc, le fait d'utiliser cette routine, nous affranchit de calculs inutiles qui deviennent très importants lorsque le nombre de particules libres augmente. Les autres routines : `biotsav_v`, `velcontrib`, `anneau` servent pour la correction de la vitesse. On voit que presque 95% du temps CPU est consacré au calcul de la vitesse et que presque tout ce temps CPU est localisé dans deux routines (*c.f.* table 4.2). En ce qui concerne le deuxième cas, les remarques précédentes s'appliquent également. On peut remarquer que les temps CPU de recherche et correction sont nettement plus élevés. Cela est dû en partie à l'émission de bord latéral comme cela a été précisé plus haut. Plus le nombre de particules augmente, plus le temps CPU passé dans `vel_vd` s'allonge. Une augmentation de 60% de particules entraîne une augmentation de 30% du temps CPU passé dans la routine précédente. Lorsque l'on traite un problème sur une hélice marine, telle que la B4-55 (*c.f.* chapitre 3), le nombre de particules émises sur un tour n'étant jamais inférieure à 480, après six tours, on est dans les mêmes ordres de grandeur concernant le temps CPU passé dans `vel_vd`.

On représente sur la figure 4.15 la différence de temps REAL de calcul de la vitesse et de la déformation entre les deux algorithmes en fonction du nombre de particules, pour le test 2. Lorsque le nombre de particules est faible, l'ancien algorithme est plus efficace. Cela est dû au fait que pour le nouvel algorithme, on fait une correction systématique de la vitesse, car toutes les particules sont sur ou proche de la surface portante. Cependant, la tendance s'inverse très rapidement, pour se stabiliser sur un facteur temps REAL gagné de l'ordre

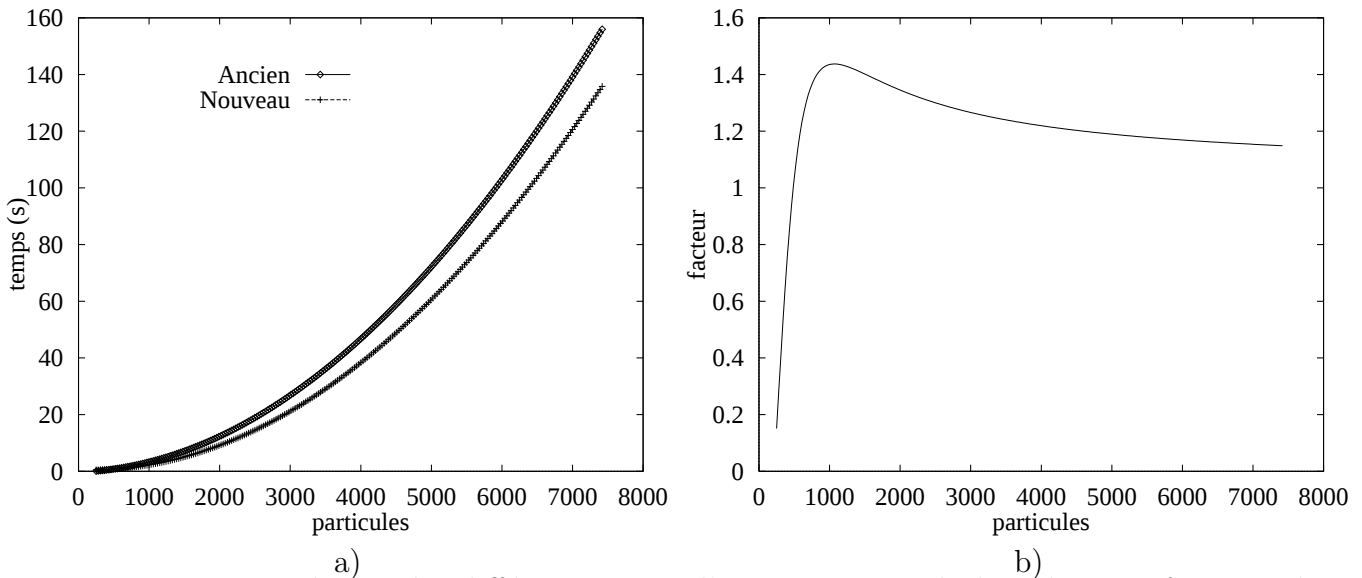


Figure 4.15: Evolution des différences entre l'ancien et nouvel algorithme en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur

de 1.2. De plus, le pourcentage de temps REAL passé dans `vel_vd`, par rapport au temps REAL d'une itération, augmente rapidement en fonction du nombre de particules. Lorsque celui-ci est supérieur à 5000, le pourcentage est supérieur à 85%. D'où l'intérêt de regrouper au maximum les calculs de vitesse et déformation dans une seule routine. En effet, il suffit d'optimiser cette dernière pour s'approcher de l'objectif temps réel. On va donc à présent, montrer qu'il est possible de diminuer le temps de calcul de manière très significative, en parallélisant le calcul sur plusieurs machines grâce à *PVM*.

4.3 Algorithme parallèle

Dans ce qui va suivre, nous allons transformer la routine de calcul de vitesse et déformation (`vel_vd`) et l'adapter pour *PVM*, à partir du schéma classique du parallélisme maître-esclave.

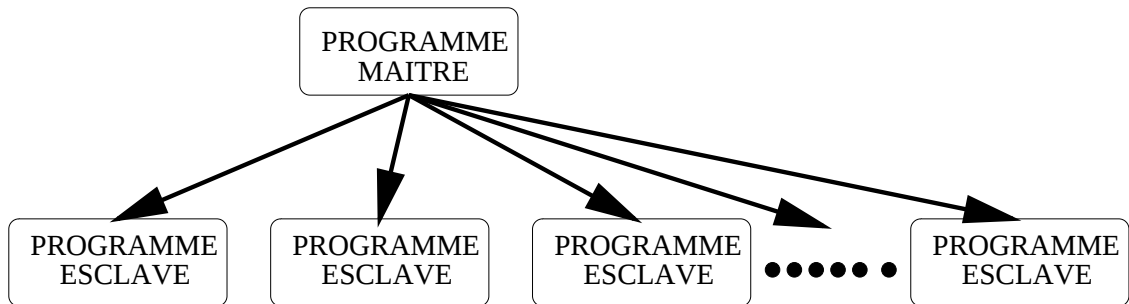
4.3.1 Le parallélisme maître-esclave

Le principe général de ce type de parallélisme est le suivant :

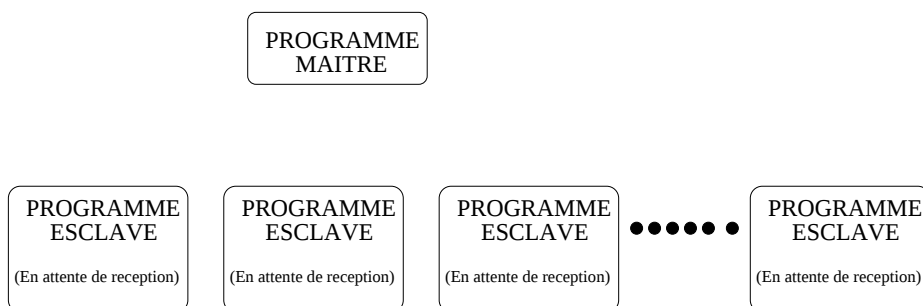
- Le processus maître commence le traitement, lance les processus esclaves, leur donne du travail et récupère les résultats.
- Les processus esclaves attendent le travail, l'exécutent et rendent la main.

Nous allons maintenant détailler les étapes successives :

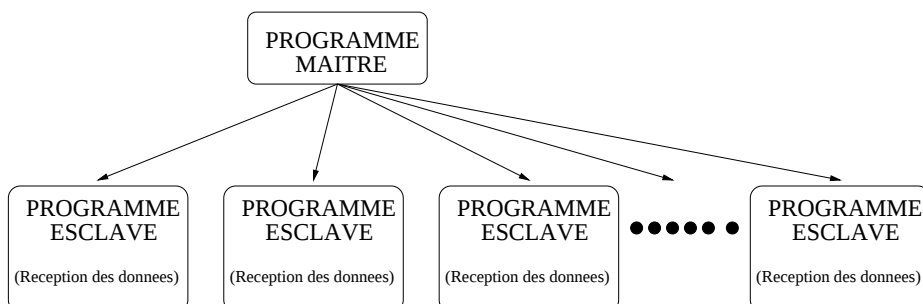
ETAPE 1 Le programme maître lance les programmes sur les processeurs esclaves par la fonction `PVMFSPAWN`



ETAPE 2 Le programme maître prépare l'envoi des données par la fonction PVMFINITSEND ; les processus esclaves se mettent en attente de réception par la fonction PVMFRECV

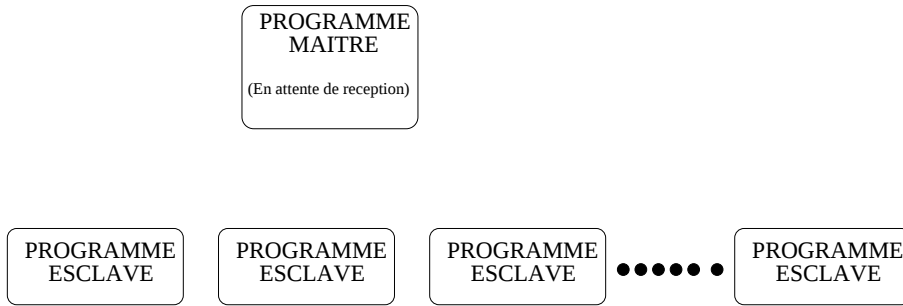


ETAPE 3 Le programme maître envoie les données aux programmes esclaves par la fonction PVMFPACK ; les processus esclaves les réceptionnent par la fonction PVMFUNPACK

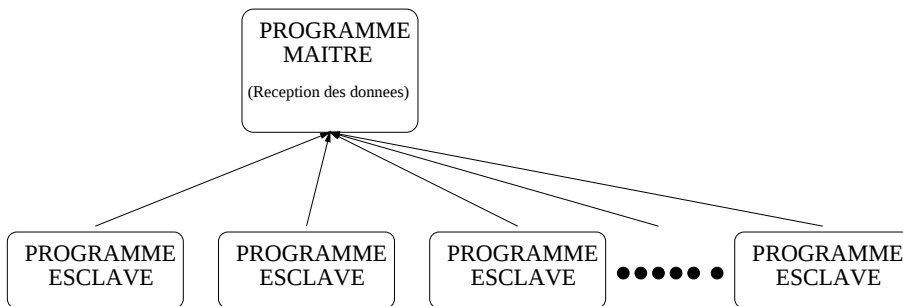


ETAPE 4 L'ensemble des programmes s'exécute

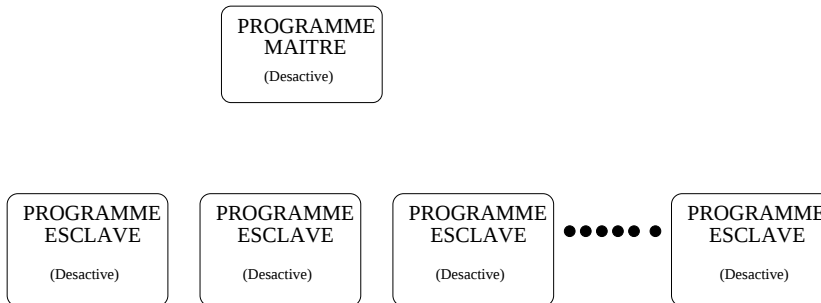
ETAPE 5 Le programme maître se met en attente de réception des résultats par la fonction PVMFRECV ; les processus esclaves se préparent à les envoyer par la fonction PVMFINITSEND



ETAPE 6 Les différents processus renvoient leurs données vers le programme maître par la fonction PVMFPACK ; le programme maître les réceptionne par la fonction PVMFUNPACK



ETAPE 7 Les processus sont désactivés par la fonction PVMFEXIT



Dans notre cas, pendant la phase de calcul, les processus maître et esclaves font les mêmes opérations qui seront détaillées dans la section suivante. Cette phase comporte des calculs et des communications. En effet, des données circulent $\left(\frac{N\$PES}{2} + 1\right)$ fois cycliquement (où $N\$PES$ est le nombre de processus) entre les processus. Les étapes 2,3,4,5 et 6 sont donc présentes dans la phase de calcul (ETAPE 4).

4.3.2 Le modèle

Cette routine calcule la vitesse et la déformation induite par une distribution de particules sur elle-même, ce qui permet d'utiliser la symétrie de la matrice, et de diviser ainsi les calculs par deux en triangulant la matrice des interactions de particules. Notre premier

objectif est donc de garder cette structure. Sous *PVM*, on peut faire tourner un nombre quelconque de processus indépendamment du nombre de processeurs. Nous allons donc définir pour commencer un nombre $N\$PES$ processus, supérieur ou égal au nombre de processeurs. Dans tous les cas, le facteur de gain sera au plus égal au nombre de processeurs : on espère seulement s'y approcher.

Dans un premier temps, nous allons diviser le nombre de particules par blocs, dont la moitié permuteront cycliquement sur les processus voisins. Cette demi-permutation cyclique nous permet en partie de garder la triangulation. En partie seulement car à la première et à la dernière (si le nombre de processus est pair) itération de permutation, on calcule deux fois les mêmes quantités. En effet chaque processus fait une double boucle sur son bloc (*c.f.* figure 4.16, annexe E et F).

La démarche est la suivante :

- Le processus maître distribue les données au processus esclaves. les données sont distribuées par pas de $N\$PES$. Lorsque le nombre de processus n'est pas un multiple du nombre de données, on complète par un 0 afin que tous les processus aient le même nombre de données. Les données transmises sont : la position et le poids de chaque particule tourbillonnaire, ainsi que la taille du noyau de régularisation, et évidemment le nombre de données transmises. Une fois tous les processus esclaves servis, le maître prend les données restantes.
- Première itération de circulation :
pour chaque processus, calcul de la vitesse et la déformation en chaque point particulière présent dans le processus, en ne tenant compte que de ses particules. Afin de ne pas comptabiliser deux fois l'influence des particules, lors de cette première itération de couplage, on divise par deux les contributions. On pourrait cependant trianguler localement ce calcul, et ainsi prendre en compte la symétrie de la matrice des interactions des particules.
- A la fin des calculs, on permute cycliquement les données en transmettant les tableaux au processus suivant, ainsi qu'une partie des tableaux de vitesse et déformation (voir annexe F) qui seront mis à jour avec les données locales du processeur qui reçoit ces tableaux, ce qui permet de prendre en compte la symétrie.
- Les données circulent $\left(\frac{N\$PES}{2} + 1\right)$ fois : ce qui est suffisant, compte tenu de la symétrie du calcul.
- boucle de fin de circulation :
Le processus maître se met en attente : dès qu'un processus esclave a fini les calculs,

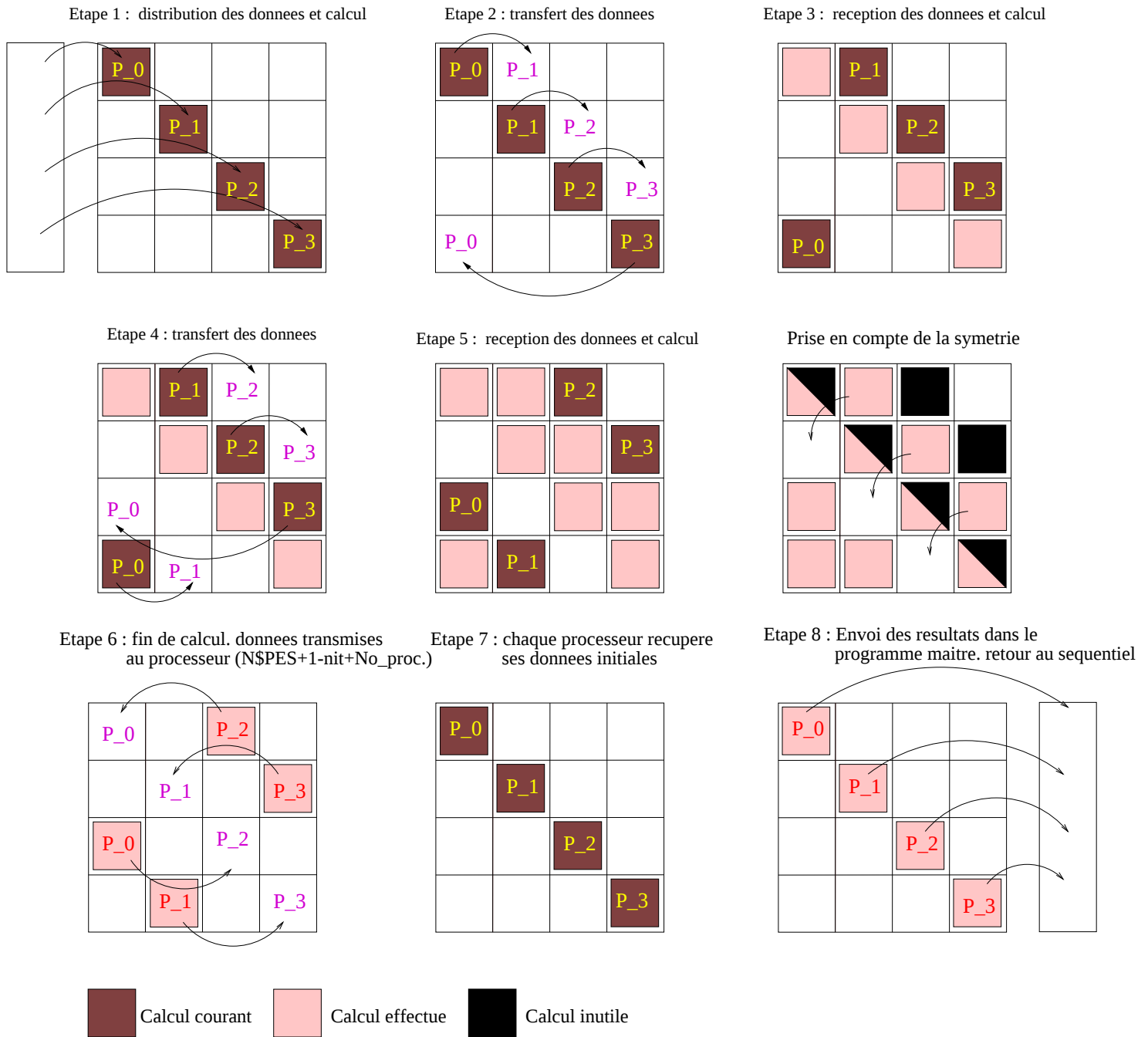


Figure 4.16: Schéma de calcul pour un nombre de processus pair

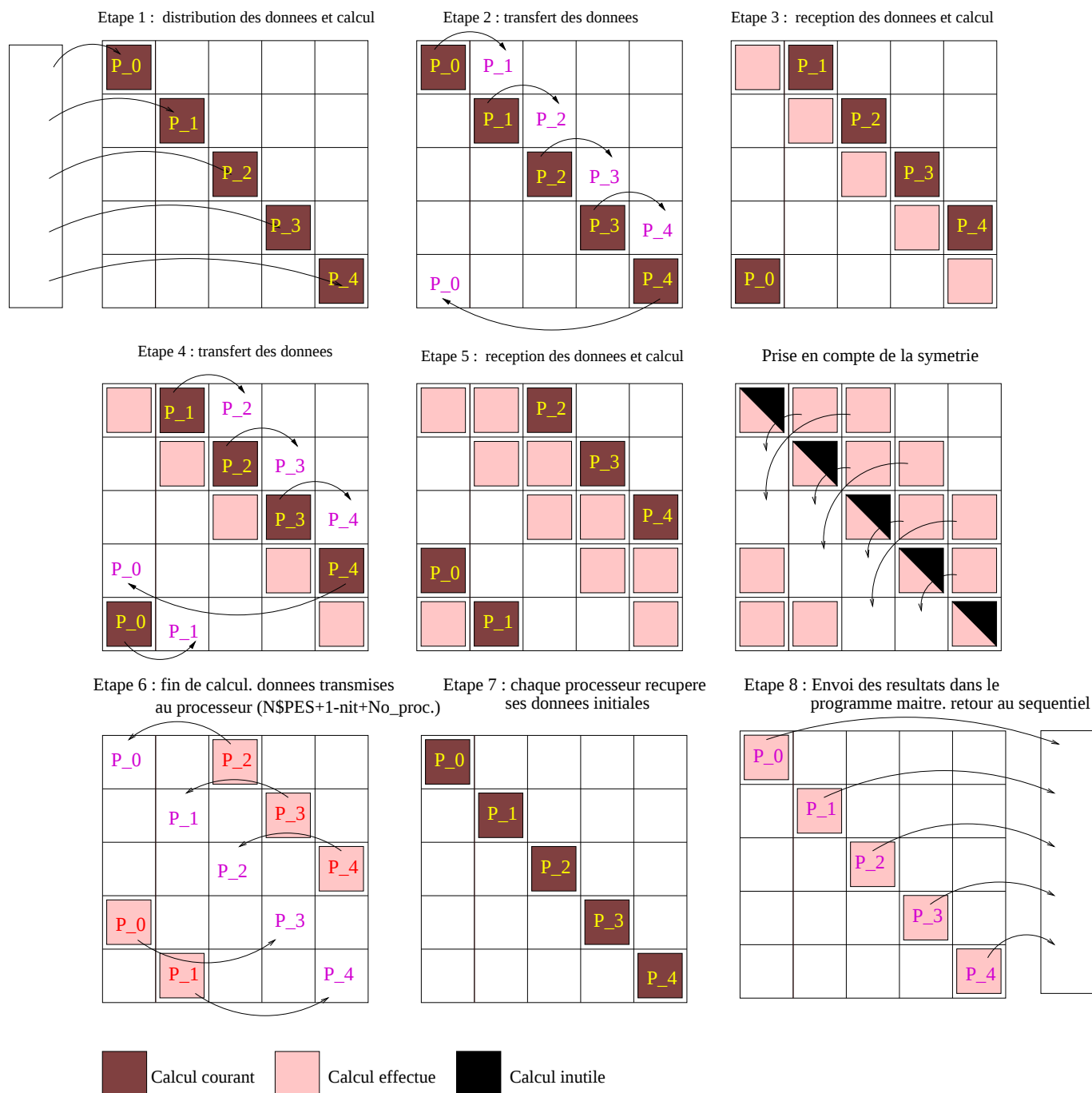


Figure 4.17: Schéma de calcul pour un nombre de processus impair

il envoie ses données au maître ainsi que son numéro d'identification, afin de ranger les résultats à leur place. Les calculs finaux prennent en compte le cumul des calculs effectués par le processus, auquel on ajoute les contributions des données locales des autres processus par l'intermédiaire des tableaux (vitesse et déformation) qui ont circulés cycliquement. Lorsque tous les processus esclaves ont “rendu la main”, les calculs se poursuivent séquentiellement.

Nous allons maintenant effectuer les tests numériques pour les deux cas précédents.

4.3.3 Les tests numériques

Nous prenons arbitrairement un nombre de processus N_{PES} égal à 5 sur 4 stations de travail (2 HP 9000/712, 1 HP 9000/720 et 1 HP 9000/735). Ce choix est motivé par le fait que l'on ne dispose que de quatre stations et que pour des raisons évidentes d'optimisation, il est préférable de prévoir un nombre de processus impair, sans pour autant surcharger les machines. Le parc machine n'étant pas homogène, alors que les processus esclaves sont identiques, le temps d'exécution sera calé sur la machine la moins rapide, c'est-à-dire la station HP 9000/712. Les gains de temps seront donc qu'approximatifs (sous évalués).

Tout d'abord, au regard des tableaux concernant le test 1 (*c.f.* table 4.3), on constate que le facteur temps CPU gagné en fin de calcul est d'environ 2. De plus, la routine parallélisée ne prend plus que 21.5% du temps CPU global au lieu de 50.7%. Lors du test, nous n'avons considéré que 4 processeurs (4 machines), de plus, même si les temps de transfert des données par le réseau sont négligeables face au temps de calcul, on peut espérer obtenir des gains plus importants sur une machine multiprocesseurs du type *MIMD*, où les temps de communication sont inférieurs à ceux résultant du transfert sur réseau. Les gains de temps espérés sur ce type de machine seront donc sûrement plus importants.

Lorsque le nombre de particules traitées augmente, les gains sont encore plus élevés, avec un facteur temps CPU gagné supérieur à 2.4 dans le cas 2 en fin de calcul (*c.f.* table 4.4). Toutes les considérations précédentes sont d'autant plus valables que le nombre de particule augmente.

Sur la figure suivante (*c.f.* figure 4.18), on représente l'évolution du temps REAL ² passé dans la routine de calcul des vitesses et déformations en fonction du nombre de particules pour les calculs séquentiels et parallélisés, ainsi que le facteur temps REAL gagné. Ce test a été effectué dans les mêmes conditions que dans le cas 2 sur 242 itérations (on représente les temps CPU passés dans chaque routine dans les tableaux suivants - *c.f.* table 4.5) : le facteur temps REAL gagné sur une itération est supérieur à 2.5, dès que le nombre de particules est

²Le temps REAL est fonction de la charge de la machine, des communications (réseau)...

Test 1 : Sans émission de B.L. séquentiel

(98 iter, 220 p. liées, 1000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****					
3	50.7	468.80	468.80	97	4832.99	vel_vd
4	33.3	777.00	308.19	209224	1.47	biotsav_v
5	9.6	865.71	88.71	480	184.81	vel_v1
6	1.4	878.95	13.24	42691	0.31	velcontrib
7	0.7	885.75	6.81	66315	0.10	anneau
8	0.5	890.14	4.39	109486	0.04	vitpot
9	0.5	894.50	4.35			\$\$mull
10	0.3	897.08	2.58	97	26.60	pparo6
11	0.3	899.60	2.52	289	8.72	pmv
12	0.3	902.07	2.48			_mcount
13	0.2	904.33	2.26	766498	0.00	grafia
14	0.2	906.56	2.23	10289	0.22	tp
15	0.2	908.76	2.20	1	2200.00	matinv
16	0.2	910.87	2.10	374539	0.01	chb
17	0.2	912.91	2.05	1	2050.00	initvel
18	0.2	914.43	1.52	1	1520.00	write
19	0.2	915.88	1.44	109290	0.01	vel2
20	0.1	917.17	1.30	109486	0.01	grave2
21	0.1	918.42	1.25	10930	0.11	write
22	0.1	919.50	1.07	46560	0.02	recherch
23	0.1	920.38	0.88	10000	0.09	vel3

Test 1 : Sans émission de B.L. avec PVM

(98 iter, 220 p. liées, 1000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****					
3	52.3	312.35	312.35	209224		1.49 biotsav_v
4	21.5	440.60	128.25	97		1322.16 vel_vd
5	14.9	529.61	89.01	480		185.44 vel_v1
6	2.2	542.99	13.38	42691		0.31 velcontrib
7	1.3	550.50	7.51	109486		0.07 vitpot
8	1.2	557.89	7.40	66315		0.11 anneau
9	0.8	562.40	4.51			\$\$mull
10	0.5	565.42	3.02	97		31.13 pparo6
11	0.5	568.25	2.83			_mcount
12	0.4	570.80	2.55	289		8.82 pmv
13	0.4	573.07	2.27	1		2270.00 matinv
14	0.4	575.28	2.21	374539		0.01 chb
15	0.4	577.48	2.20	766498		0.00 grafia
16	0.3	579.54	2.06	10289		0.20 tp
17	0.3	581.57	2.03	1		2030.00 initvel
18	0.3	583.45	1.88	109290		0.02 vel2
19	0.3	585.23	1.78	109486		0.02 grave2
20	0.3	586.75	1.52	1		1520.00 pmm
21	0.2	587.93	1.18	12563		0.09 _write
22	0.2	588.90	0.97	46560		0.02 recherch
23	0.1	589.70	0.80	10000		0.08 vel3
24	0.1	590.41	0.71	190149		0.00 _memcpy
25	0.1	591.06	0.65	112913		0.01 chr
26	0.1	591.69	0.63	289		2.18 vitess
27	0.1	592.31	0.62	1		620.00 init
28	0.1	592.71	0.40	480		0.83 vel_v

Tableau 4.3: Estimation des temps CPU passés dans les différentes routines pour le nouvel algorithme. Profil à 14°5 sans émission de bord latéral. Comparaison entre un calcul séquentiel et un calcul parallèle sous PVM

Test 2 : Avec émission de B.L. séquentiel

(98 iter, 220 p. liées, 3000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****					
3	72.5	2890.43	2890.43	97	29798.25	vel_vd
4	23.2	3814.60	924.17	223882	4.13	biotsav_v
5	2.2	3903.17	88.57	480	184.52	vel_v1
6	0.4	3918.03	14.87	48471	0.31	velcontrib
7	0.2	3926.95	8.92	86753	0.10	anneau
8	0.2	3934.20	7.25	139680	0.05	recherch
9	0.2	3941.45	7.24	214146	0.03	vitpot
10	0.1	3946.18	4.73	1499118	0.00	grafia
11	0.1	3950.62	4.45			\$\$mull
12	0.1	3954.84	4.21	779719	0.01	chb
13	0.1	3958.98	4.14			_mcount
14	0.1	3961.96	2.98	97	30.72	pparo6
15	0.1	3964.53	2.56	208190	0.01	vel2
16	0.1	3967.03	2.51	289	8.69	pmv
17	0.1	3969.49	2.46	214146	0.01	grave2
18	0.1	3971.74	2.24	10289	0.22	tp
19	0.1	3973.93	2.19	1	2190.00	matinv
20	0.1	3976.01	2.08	1	2080.00	initvel

Test 2 : Avec émission de B.L. avec PVM

(98 iter, 220 p. liées, 3000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****					
3	52.8	925.45	925.45	223882		4.13 biotsav_v
4	36.9	1572.09	646.64	97		6666.39 vel_vd
5	5.1	1661.20	89.11	480		185.65 vel_v1
6	0.9	1677.01	15.81	48471		0.33 velcontrib
7	0.5	1686.56	9.54	214146		0.04 vitpot
8	0.5	1695.79	9.23	86753		0.11 anneau
9	0.4	1702.84	7.05	139680		0.05 recherch
10	0.3	1707.83	4.99	1499118		0.00 grafia
11	0.3	1712.28	4.46			_mcount
12	0.2	1716.63	4.35			\$\$mull
13	0.2	1720.50	3.87	779719		0.00 chb
14	0.2	1723.32	2.82	97		29.07 pparo6
15	0.1	1725.82	2.50	214146		0.01 grave2
16	0.1	1728.29	2.47	289		8.55 pmv
17	0.1	1730.69	2.40	208190		0.01 vel2
18	0.1	1733.03	2.33	10289		0.23 tp
19	0.1	1735.23	2.21	1		2210.00 matinv
20	0.1	1737.27	2.03	1		2030.00 initvel
21	0.1	1738.93	1.67	1		1670.00 pmm
22	0.1	1740.47	1.54	13696		0.11 _write
23	0.1	1741.93	1.46	289		5.05 vitess
24	0.1	1743.29	1.35	219553		0.01 chr
25	0.1	1744.54	1.25	211086		0.01 _memcpy

Tableau 4.4: Estimation des temps CPU passés dans les différentes routines pour le nouvel algorithme. Profil à 14°5 avec émission de bord latéral. Comparaison entre un calcul séquentiel et un calcul parallèle sous PVM

Test 3 : Avec émission de B.L. séquentiel

(242 iter, 220 p. liées, 8000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****	*****	*****	*****	*****	*****
3	87.4	11096.95	11096.95	241	46045.46	vel_vd
4	11.3	12531.80	1434.84	440746	3.26	biotsav_v
5	0.5	12589.39	57.59	1200	47.99	vel_v1
6	0.1	12606.83	17.45			_mcount
7	0.1	12622.00	15.18	7371870	0.00	grafia
8	0.1	12631.56	9.55	4020871	0.00	chb
9	0.1	12640.73	9.17	119031	0.08	velcontrib
10	0.1	12647.64	6.91	1053090	0.01	grave2
11	0.1	12654.29	6.66	215777	0.03	anneau
12	0.0	12660.60	6.31	867600	0.01	recherch
13	0.0	12666.54	5.94	1053090	0.01	vitpot
14	0.0	12671.74	5.20	1038350	0.01	vel2
15	0.0	12675.78	4.05	721	5.62	vitesse
16	0.0	12678.77	2.99	27056	0.11	write
17	0.0	12681.23	2.46	1062961	0.00	chr
18	0.0	12683.09	1.86	241	7.72	pparo6
19	0.0	12684.49	1.40	241	5.81	euler
20	0.0	12685.77	1.28			\$\$dyncall

211 mn

Test 3 : Avec émission de B.L. avec PVM

(242 iter, 220 p. liées, 8000 p. libres)

1	%time	cumsecs	seconds	calls	msec/call	name
2	*****	*****	*****	*****	*****	*****
3	56.8	2094.72	2094.72	241	8691.78	vel_vd
4	38.1	3500.55	1405.83	440746	3.19	biotsav_v
5	1.6	3558.07	57.52	1200	47.93	vel_v1
6	0.5	3577.32	19.25			_mcount
7	0.4	3591.92	14.61	7371870	0.00	grafia
8	0.3	3601.28	9.36	119031	0.08	velcontrib
9	0.2	3609.82	8.54	4020871	0.00	chb
10	0.2	3616.76	6.94	867600	0.01	recherch
11	0.2	3623.41	6.66	1053090	0.01	grave2
12	0.2	3629.79	6.38	215777	0.03	anneau
13	0.2	3635.95	6.16	1053090	0.01	vitpot
14	0.1	3640.95	5.00	1038350	0.00	vel2
15	0.1	3645.93	4.99	397215	0.01	_memcpy
16	0.1	3650.39	4.46	40007	0.11	write
17	0.1	3654.41	4.02	721	5.58	vitesse
18	0.1	3657.44	3.03	24402	0.12	read
19	0.1	3660.02	2.58	1062961	0.00	chr
20	0.1	3662.30	2.28	31740	0.07	_select

61 mn

Tableau 4.5: Estimation des temps CPU passés dans les différentes routines pour le nouvel algorithme. Profil à 14°5 avec émission de bord latéral. Comparaison entre un calcul séquentiel et un calcul parallèle sous PVM sur 242 itérations

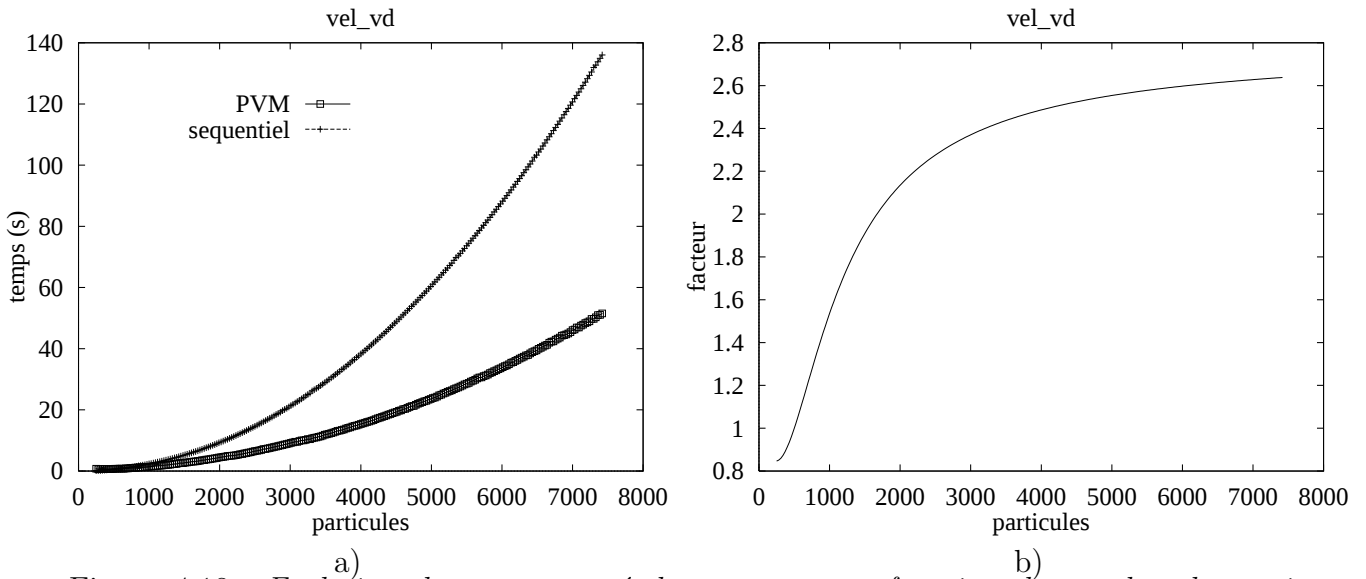


Figure 4.18: Evolution du temps passé dans `vel_vd` en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur

supérieur à 3500. Le gain de temps CPU total sur 242 itérations est alors supérieur à 3.45 pour 4 processeurs.

Un essai numérique a été effectué sur l'hélice B4-55 présentée au chapitre 3 sur 20 tours, soit en fin de calcul presque 10000 particules. Sur la figure suivante (*c.f.* figure 4.19), on représente l'évolution du temps REAL consacré au calcul des vitesses et déformations en

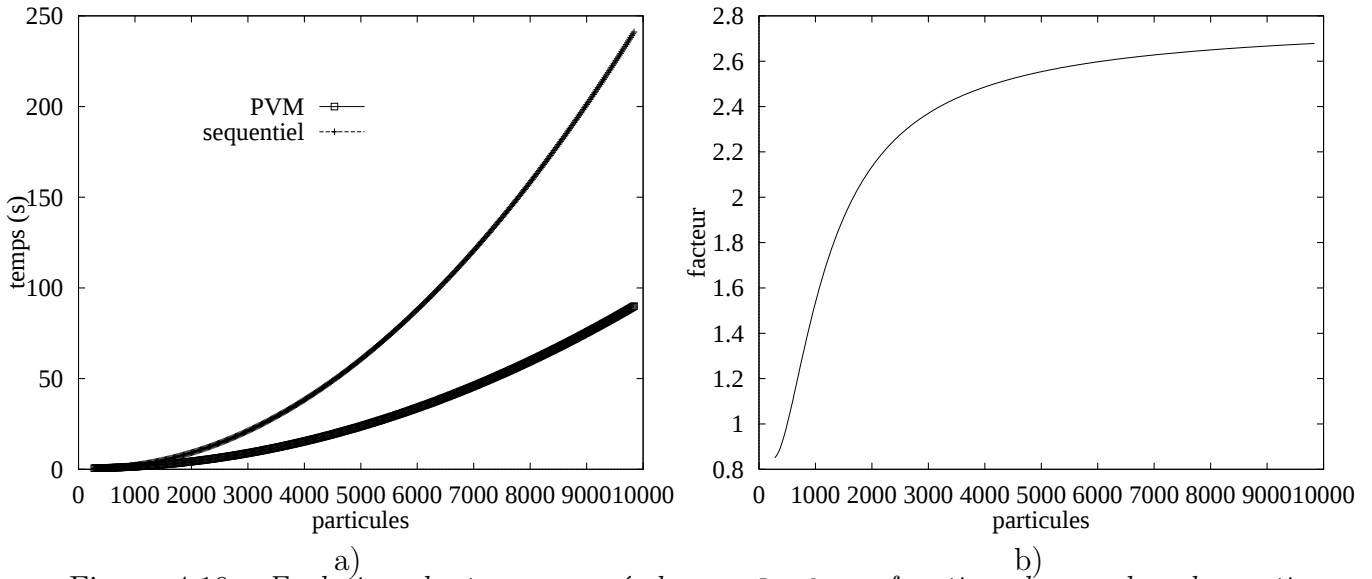


Figure 4.19: Evolution du temps passé dans `vel_vd` en fonction du nombre de particules : a) temps REAL b) facteur

fonction du nombre de particules pour les calculs séquentiels et parallélisés, ainsi que le facteur temps REAL gagné. Dès que le nombre de particules est supérieur à 3500, le facteur temps REAL gagné sur un calcul de vitesse et déformation est supérieur à 2.5. A l'issue des 20 tours d'hélice, le gain en temps CPU est supérieur à 3, toujours pour 4 processeurs. Sur la figure suivante (*c.f.* figure 4.20), on représente le pourcentage du temps REAL passé dans la routine `vel_vd` par rapport au temps REAL total de toutes les routines, dans le cas séquentiel et le cas parallélisé. On voit que plus le nombre de particules augmente, plus le temps passé dans `vel_vd` augmente. Cependant, il est nettement inférieur dans le cas parallélisé. Plus le nombre de processus est important, moins le temps passé dans `vel_vd` est important.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'intérêt de centraliser les calculs de vitesse en modifiant l'algorithme de calcul. En effet, le fait de traiter toutes les particules comme des particules libres, en appliquant une correction sur la vitesse pour celles qui le nécessitent, permet d'envisager des gains de temps énormes sans perte d'informations significatives : on obtient un facteur de gain de temps REAL de 2.5 dès que le nombre de particules est supérieur à 3500. De plus, si on regarde le temps de calcul total, pour le cas de l'hélice par exemple, on obtient un facteur de gain de temps CPU d'environ 3 sur seulement quatre processeurs, qui en plus n'ont pas tous la même puissance de calcul (gains en temps sous évalués). Les temps de transferts de données sont largement inférieurs au temps de calcul,

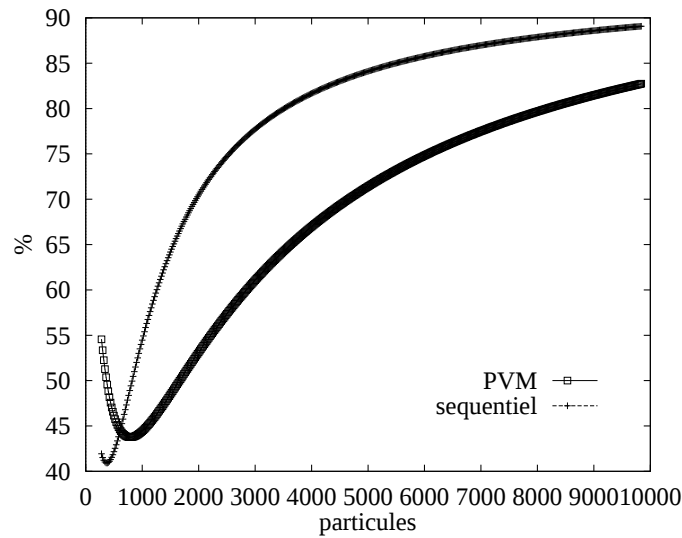


Figure 4.20: *Proportion du temps passé dans `vel_vd` en fonction du nombre de particules par rapport au temps d'une itération*

mais sur une machine multiprocesseurs du type *MIMD*, où les réseaux d'interconnexion sont très évolués, on pourra encore accroître nos gains de temps.

Nous avons montré également, à partir de *PVM*, la faisabilité de parallélisation de la routine de calcul de vitesse et déformation (`vel_vd`). De plus, les routines qui demandent maintenant le plus de temps sont `vel_v1` et `biotsav_v`. Ces routines sont construites d'une manière similaire à `vel_vd`, il est donc tout à fait envisageable de les paralléliser également.

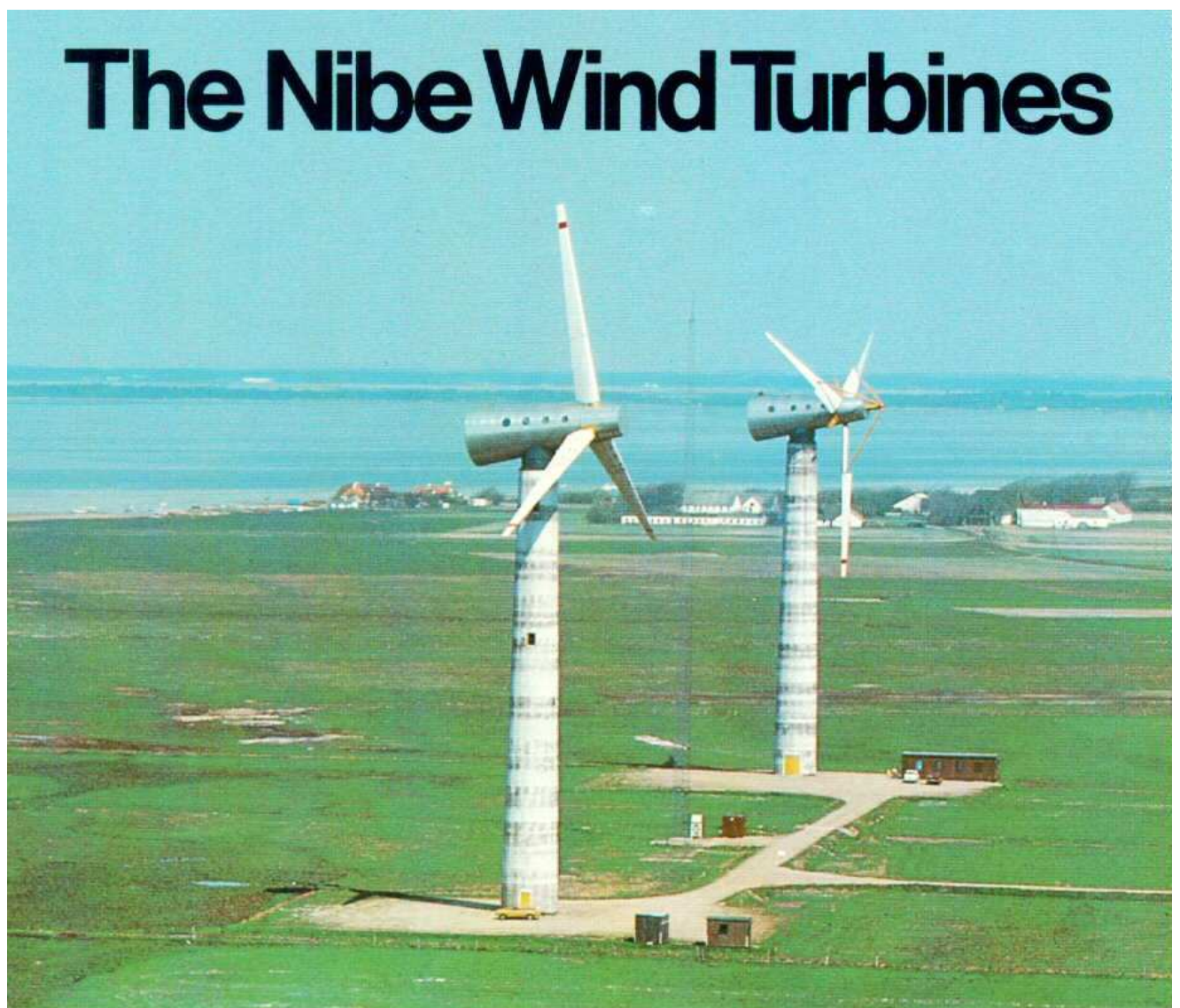
A travers ce chapitre, nous avons montré que les facteurs de temps gagné sont assez proches du nombre de processeurs, ce qui montre l'efficacité de la parallélisation de la méthode. Cela s'explique par le faible coût des communications au regard des temps de calculs. En effet, le découpage par blocs des calculs permet d'optimiser ces derniers points en prenant en compte la symétrie du calcul des interactions des particules. Il est donc maintenant envisageable d'approcher le temps réel en obtenant le gain de rapport 33 qui est précisé au début de ce chapitre. Pour cela, il faudrait faire coopérer environ 40 machines sous *PVM*, ou utiliser une machine massivement parallèle de type *MIMD*.

Partie II

Applications

Chapitre 5

Application aux éoliennes



Notations

n	:	Vitesse de rotation de l'éolienne en tours par unité de temps
$\mathcal{O}$	:	Vitesse angulaire de l'éolienne : $\mathcal{O} = 2\pi n$
γ	:	Angle d'inclinaison de l'écoulement uniforme, défini dans le plan xOz .
θ	:	Position angulaire de la pale maîtresse : $\theta = \mathcal{O}t + \theta_0$
$\lambda = \frac{\pi D n }{V_\infty}$	:	Paramètre d'avance associé à la pale, défini positif.
$\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \gamma}$	:	Paramètre d'avance associé à la pale, défini par rapport à la vitesse axiale de l'éolienne : $v_z = V_\infty \cos \gamma$. λ_z est instationnaire lorsque l'hélice est en écoulement non axial (<i>c.f.</i> section 5.1.2 $\lambda_z(\theta)$).
K_{Tz}	:	Coefficient de poussée de l'éolienne
K_{Qz}	:	Coefficient de couple de l'éolienne
K_{Tx}, K_{Ty}	:	Forces transversales adimensionnées
K_{Qx}, K_{Qy}	:	Couples transversaux adimensionnés
Z	:	Nombre de pales
R	:	Rayon de l'éolienne
D	:	Diamètre de l'éolienne
S	:	Surface du disque rotor
F_x, F_y, F_z	:	Forces sur les 3 directions ($\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}$)
Q_x, Q_y, Q_z	:	Moments par rapport à O sur les 3 directions ($\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}$)
ρ	:	Densité du fluide
$(\mathcal{O}, x, y, z)$	:	Repère absolu (<i>c.f.</i> figure 5.2)
$(\mathcal{O}, x', y', z')$	:	Repère relatif associée à une pale (<i>c.f.</i> figure 5.2)
(r, θ, z)	:	Base cylindrique associée à une pale (<i>c.f.</i> figure 5.2)
$\underline{\mathbf{U}}_x, \underline{\mathbf{U}}_y, \underline{\mathbf{U}}_z$	:	Champ de vitesse (coordonnées cartésiennes)
$\underline{\mathbf{U}}_r, \underline{\mathbf{U}}_\theta, \underline{\mathbf{U}}_z$	:	Champ de vitesse (coordonnées cylindriques)
$\underline{\mathbf{U}}$	:	Champ de vitesse
$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \wedge \underline{\mathbf{U}}$	:	Champ de rotationnel de la vitesse
$\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i$	:	Vecteur tourbillon associé à la particule i
$\underline{\mathbf{V}}_\infty$	:	Vitesse infini amont
V_∞	:	Module de la vitesse infini amont

L'axe Oz est toujours confondu avec l'axe de l'éolienne.

Introduction

La transformation de l'énergie éolienne en énergie électrique remonte au début des années 1800, mais c'est bien plus tard, après des recherches aérodynamiques importantes, qu'apparaissent les premières réalisations d'aérogénérateurs de grande puissance (100 à 1000 *kW*), montrant que la production d'énergie électrique à partir de l'énergie éolienne était fiable.

“Malheureusement”, à cette époque (début des années 1960), le coût du kilowatt fourni par l'énergie éolienne était inaccessible face à l'énergie thermique. La tendance s'inversera dans les années 70 et les recherches reprirent.

Les machines actuellement les plus répandues sont les machines à axe horizontal, parallèle à la direction du vent, bi- ou tripales. Elles ont le meilleur rendement par rapport à l'énergie maximum récupérable sur un rotor (limite de Betz : $P = 0.29D^2V_\infty^3$ où P est la puissance, D est le diamètre de l'éolienne et V_∞ la vitesse instantanée du vent) (voir annexe B).

L'utilisation correcte de l'énergie éolienne nécessite un choix très judicieux du site en fonction des vitesses moyennes de vent, des rafales, des directions, des obstacles...[52, 53, 54, 55]

L'étude du comportement des hélices dans des écoulements instationnaires peut permettre non seulement le dimensionnement des différents éléments de l'aérien qui subit des efforts instationnaires [56], mais également l'optimisation de sa régulation ; cette dernière agissant par exemple sur la charge du générateur, ou sur le calage des pales. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'écoulement autour d'une éolienne à pales de fort allongement : NIBE [57].

Hormis tous les problèmes de site, l'étude d'une éolienne plongée dans des conditions de vent réelles reste un problème très complexe, car difficilement modélisable. Dans un premier temps (*c.f.* chapitre 5 **A**), nous allons nous intéresser aux coefficients de poussée et de couple d'une éolienne plongée dans un écoulement uniforme axial ou non axial [58]. On caractérisera les conditions de fonctionnement de l'éolienne par le paramètre d'avance stationnaire :

$$\lambda = \frac{\pi D |n|}{V_\infty}$$

Pour commencer cette partie **A**, nous allons, à partir des coefficients de poussée et de

couple, étudier le comportement d'une éolienne plongée dans un écoulement axial uniforme, pour diverses conditions de fonctionnement ($4 < \lambda < 13$).

Par la suite, nous allons nous intéresser aux fluctuations de direction du vent. L'écoulement considéré sera uniforme et stationnaire, mais aura une direction faisant un angle par rapport à l'axe de l'éolienne. Cet angle noté : γ caractérisera le dérapage (*c.f.* fig. 5.1). A partir d'un cas arbitraire de référence en écoulement axial, pour lequel $\lambda = 9.56 = \lambda_{ref}$, qui correspond à une vitesse de rotation de 35 tr/mn , d'un rotor de 40 m de diamètre, plongé dans un écoulement infini amont de 7.66 ms^{-1} , nous allons considérer plusieurs cas de dérapage ($5^\circ < \gamma < 60^\circ$). Afin d'effectuer une comparaison systématique entre ces différents cas d'écoulements, nous allons introduire un nouveau paramètre d'avance :

$$\lambda_z = \frac{\pi D |n|}{\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{z}}$$

En effet ce paramètre est directement relié au flux Φ de l'écoulement incident au travers du disque de l'hélice ($\Phi = \frac{\pi^2 D^3 n}{4 \lambda_z}$), indépendant de γ . Pour tous ces cas de dérapage, seul $\mathbf{V}_\infty$ sera modifié. Cependant, pour pouvoir effectuer des comparaisons entre les différents cas d'écoulements considérés, la composante suivant $\mathbf{z}$ de $\mathbf{V}_\infty$ sera conservée ($\lambda_z = \lambda_{ref} = 9.56$) ; la vitesse de rotation de l'éolienne étant constante et égale au cas de référence (le flux d'air traversant le disque rotor est constant).

A travers ces cas d'écoulements uniformes non axial, nous allons mettre en évidence, par la variation périodique des coefficients de poussée et couple, le caractère instationnaire de l'écoulement sur une section de pale. Nous allons introduire une correction systématique des paramètres caractérisant le fonctionnement de l'éolienne, afin de prendre en compte cette instationarité due au dérapage. Pour ce faire, nous présenterons le modèle quasi-linéaire introduit par P.Cassella [59], à la différence près que nous n'allons pas négliger les efforts et couples transversaux dus à la géométrie tridimensionnelle des pales, ce qui amènera à développer une analyse sur l'aspect linéaire / non linéaire.

Et enfin, pour clore cette première partie, nous allons effectuer une comparaison entre un calcul incluant cette correction et un calcul non corrigé, en fonction de la position de la pale et en fonction d'un paramètre d'avance instationnaire que l'on introduira.

Dans un deuxième temps (*c.f.* chapitre 5 **B**), nous nous intéresserons à l'éolienne, non plus à travers les coefficients de poussée et couple, mais à travers son sillage. Dans cette partie **B**, à partir d'un cas simple d'écoulement uniforme axial autour d'une éolienne, pour lequel l'observation des composantes axiales, radiales et azimutales développées sur une portion de cylindre circulaire fait apparaître un fonctionnement linéaire, on va étudier de quelle manière apparaissent les non linéarités lorsque cette même éolienne est placée dans un écoulement

uniforme non axial.

Les écoulement considérés seront modélisés par une méthode tridimensionnelle intégrale avec traitement lagrangien du tourbillon (*c.f.* chapitre 1). L'intérêt essentiel d'un calcul intégral en fluide parfait est évidemment la "simplicité" qu'il représente par rapport à un calcul Navier-Stokes permettant une représentation convenable des phénomènes.

A Etude d'une éolienne en écoulement non axial

En écoulement axial uniforme, l'action aérodynamique sur chaque élément de pale demeure constante dans toutes les positions angulaires, la vitesse relative et l'angle d'attaque étant constants : l'écoulement de fluide parfait est alors stationnaire dans le repère de l'hélice. Seuls les paramètres suivants sont alors retenus :

- le paramètre d'avance $\lambda = \frac{\pi D |n|}{V_\infty}$,
- le coefficient de poussée $K_{Tz} = \frac{F_z}{\rho n^2 D^4}$,
- le coefficient de couple $K_{Qz} = \frac{Q_z}{\rho n^2 D^5}$

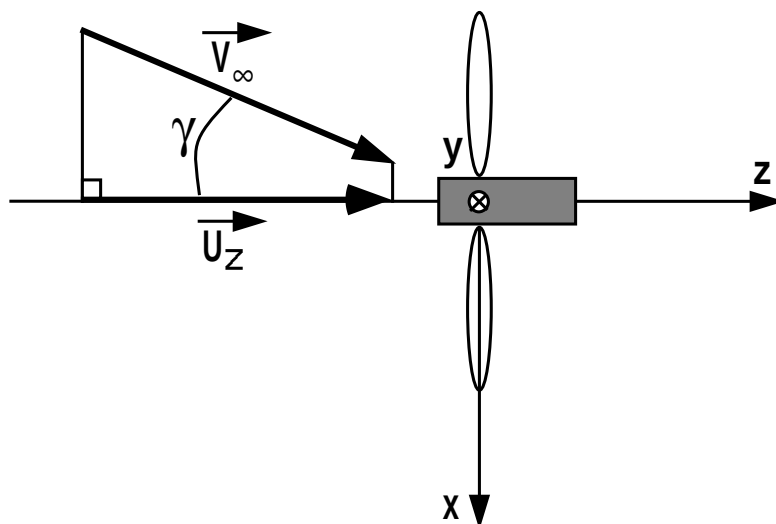


Figure 5.1: *Eolienne en écoulement uniforme non axial.*

Les couples et les efforts transversaux globaux (ie sur l'ensemble des pales) sont nuls. L'action aérodynamique totale se réduit ainsi à une poussée K_{Tz} et un couple K_{Qz} .

Par contre, en dérapage (caractérisé par un angle γ dans le plan (xz) - *c.f.* figure 5.1), les variables K_{Tz} et K_{Qz} deviennent instationnaires ; elles dépendent de la position angulaire de la pale et sont donc fonction de θ mais également fonction d'un paramètre d'avance "périodique" que l'on va définir comme suit (*c.f.* section 5.1.2) :

$$\lambda_z(\theta) = \frac{\pi D |n - \tilde{n}|}{\underline{\mathbf{V}}_\infty \cdot \underline{\mathbf{z}}} \quad (5.1)$$

Où $\tilde{n}$ modélisera la fluctuation périodique de vitesse angulaire due au dérapage.

Pour signifier sur l'ensemble des grandeurs de couples et d'efforts que l'on prend en compte cette correction de n en $n - \tilde{n}$, on remplace dans les notations K par $\mathcal{C}$. Ainsi, par exemple, on définit le coefficient de poussée corrigé :

$$\mathcal{C}_{Tz}^p(\theta) = \frac{F_z^p(\theta)}{\rho (n - \tilde{n})^2 D^4}$$

l'indice p supérieur repère une grandeur relative à une pale seule.

De plus, l'action aérodynamique totale se traduit non seulement par la poussée $K_{Tz} = \sum_{i=1}^Z K_{Tz}^{p_i}$ et le couple axial K_{Qz} , mais aussi par des grandeurs transversales :

- Forces transversales, caractérisées par K_{Tx} et K_{Ty} ,
- Moments par rapport aux axes Ox et Oy , caractérisés par K_{Qx} et K_{Qy} .

Toutes ces grandeurs instationnaires, fonction de la position angulaire de l'hélice, repérée par l'angle θ de la pale maîtresse (*c.f.* figure 5.2), peuvent entraîner des vibrations de structure. De plus, l'écart de la valeur moyenne des fluctuations, par rapport au cas axial de référence n'est pas nécessairement nul, et ainsi par exemple, peut augmenter les efforts de traînée.

L'écoulement en dérapage est défini par rapport à une expérience en écoulement axial. Entre ces deux expériences, la composante suivant z de $\underline{\mathbf{V}}_\infty$ se conserve, et non pas $|\underline{\mathbf{V}}_\infty|$ (*c.f.* eq. 5.1).

En premier lieu, on va expliciter le modèle linéaire introduit par P.Cassella [59], qui permet d'apporter une correction aux paramètres globaux de poussée et de couple. Puis on effectuera une comparaison entre un calcul où cette correction est incluse, et un autre, où elle ne l'est pas. Pour ce faire, nous allons nous intéresser aux coefficients de poussée et de couple, sur une pale supposée sans masse et indéformable, et mettre en évidence l'intérêt d'apporter une correction sur ces coefficients, afin de mieux apprécier les efforts instationnaires subits par une pale de l'éolienne. Et enfin, à l'analyse des résultats, on repérera les éventuelles non linéarités.

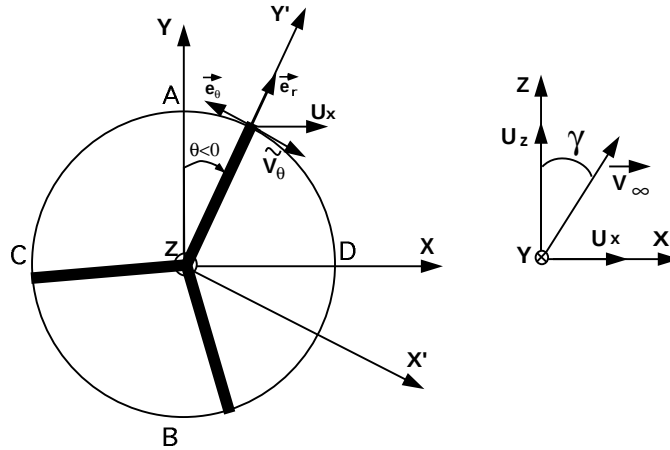


Figure 5.2: Repérage.

5.1 Modèle quasi-statique pour les efforts

Avant d'introduire les grandeurs du modèle quasi-statique, nous allons mettre en évidence le caractère instationnaire de l'écoulement, sur une section de pale d'une éolienne plongée dans un écoulement uniforme non axial, en fonction de la position de la pale.

5.1.1 Analyse en fonction de θ (position de la pale)

Lorsque l'éolienne fonctionne en dérapage ($\gamma \neq 0$), la composante de l'écoulement infini amont projetée sur $\underline{z}$ et la vitesse de rotation sont identiques au cas axial de référence. Par contre, la composante suivant $\underline{x}$ de $\underline{V}_\infty$ notée $\underline{U}_x$ (proportionnelle à $\tilde{n}$ (*c.f.* eq. 5.5)) n'étant pas nulle, on observe localement des variations de module et d'incidence du vent apparent (*c.f.* figures 5.1, 5.2 et 5.4).

On va analyser, au cours d'une révolution de la pale maîtresse, les différences entre le cas axial de référence et un cas de dérapage :

Pour $\theta = 0$, la pale maîtresse étant confondue avec l'axe Oy (point : A, figures 5.2 et 5.4), la composante $\underline{U}_x$ "accompagne" le déplacement de la pale, ce qui se traduit localement par une diminution du module du vent apparent et une augmentation de l'incidence. Nous observons sur la figure 5.3 que la contribution $|n - \tilde{n}|$ est alors minimale.

Inversement, pour $\theta = \pi$; la pale maîtresse est encore confondue avec Oy (point : B, figures 5.2 et 5.4) ; la composante $\underline{U}_x$ "s'oppose" au déplacement de la pale, ce qui se traduit localement par une augmentation du module du vent apparent et une diminution de l'incidence. Nous observons alors (*c.f.* fig. 5.1.2) que la contribution $|n - \tilde{n}|$ est maximale. Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (point : D) et $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ (point : C) (*c.f.* fig. 5.2), $\underline{U}_x = 0$, l'éolienne se trouve dans les conditions de l'écoulement axial de référence, la contribution $\tilde{n}$ due au dérapage est alors nulle.

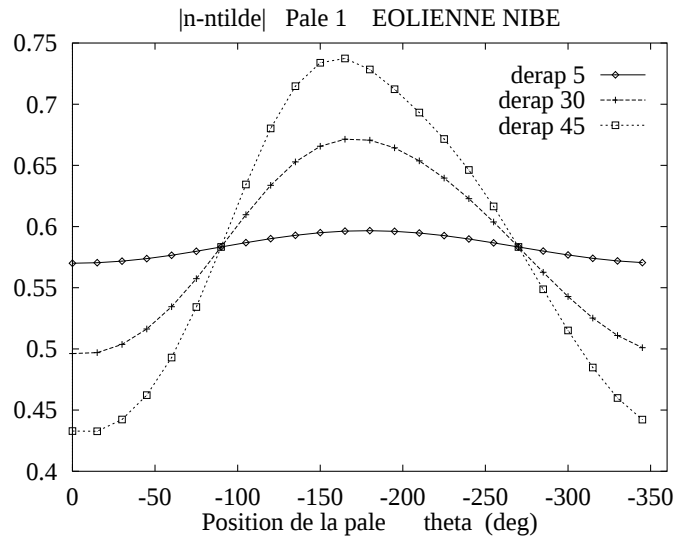


Figure 5.3: Evolution de $|n - \tilde{n}|$ pour plusieurs angles de dérapage en fonction de θ .

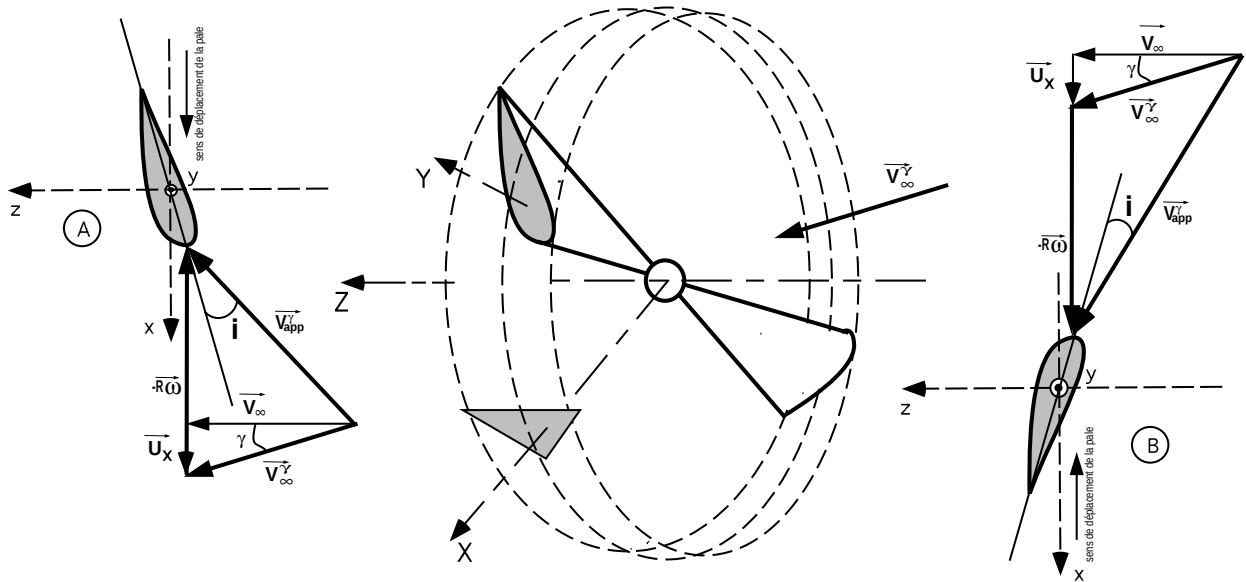


Figure 5.4: Analyse des efforts.

Du fait que le module et l'incidence du vent apparent dépendent de la position angulaire de la pale maîtresse (θ), l'effort aérodynamique est lui même fonction de θ . La projection de ce dernier sur $\underline{\mathbf{e}}_\theta$ donne la force $\underline{\mathbf{F}}_\theta$ qui induit le couple $\underline{\mathbf{Q}}_z$.

5.1.2 Les grandeurs axiales du modèle quasi-statique

Nous reprenons la théorie de P.Cassella qui établit des expressions analytiques conduisant aux coefficients de poussée $\mathcal{C}_{Tz}^p$ et de couple $\mathcal{C}_{Qz}^p$ de l'hélice en écoulement non axial, en fonction du paramètre d'avance $J = \frac{V_\infty}{nD}$ et de l'angle d'inclinaison γ . Ce modèle considère la modification d'écoulement incident pour chaque section de pale provoquée par γ , en fonction de θ . Ce modèle présente l'intérêt de définir le fonctionnement par rapport aux situations statiques, c'est-à-dire l'ordre zéro en temps.

Nous allons reprendre cette analyse, mais avec une différence fondamentale par rapport à P.Cassella : nous n'allons pas négliger les efforts moyens suivant y dus à la géométrie tridimensionnelle des pales.

En considérant que la composante azimutale v_θ de la vitesse incidente dans le plan xOy de l'éolienne a une partie fluctuante :

$$\underline{\mathbf{v}}_\theta = (R\mathcal{O} + \tilde{v}_\theta) \underline{\mathbf{e}}_\theta \quad (5.2)$$

où $\tilde{v}_\theta$ est due à la projection de $\underline{\mathbf{V}}_\infty$ relativement à la direction azimutale :

$$\tilde{v}_\theta = \underline{\mathbf{V}}_\infty \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta$$

on a :

$$\tilde{v}_\theta = -V_\infty \sin \gamma \cos \theta \quad (5.3)$$

On peut relier cette fluctuation à une fluctuation de vitesse angulaire :

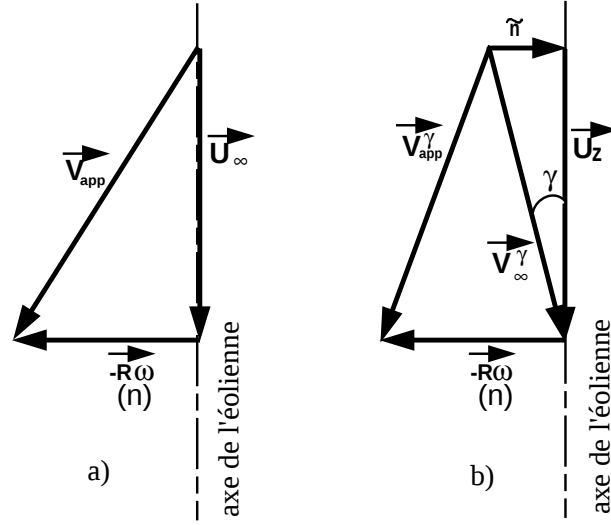
$$\tilde{v}_\theta = \tilde{\mathcal{O}} r^* R = 2\pi \tilde{n} r^* R \quad (5.4)$$

où R est le rayon de l'éolienne, et r^* une valeur adimensionnelle de rayon, définissant la proportionnalité entre $\tilde{v}_\theta$ et $\tilde{n}$, et dont l'expression sera établie plus loin. D'où :

$$\tilde{n} = -\frac{V_\infty \sin \gamma \cos \theta}{2\pi r^* R} = -\frac{V_\infty \cos \theta a(r^*, \gamma)}{\pi D} \quad (5.5)$$

avec :

$$a(r^*, \gamma) = \frac{\sin \gamma}{r^*} \quad (5.6)$$

Figure 5.5: *triangle des vitesses. a)cas axial. b)cas en dérapage.*

Sachant que $\underline{V}_\infty \cdot \underline{z} > 0$, le paramètre d'avance axial est défini positif comme suit :

$$\lambda_z = \frac{R|\mathcal{O}|}{\underline{V}_\infty \cdot \underline{z}} = \frac{\pi D n}{v_z} \quad \text{pour } n > 0 \quad (5.7)$$

$$= -\frac{\pi D n}{v_z} \quad \text{pour } n < 0 \quad (5.8)$$

on déduit deux expressions pour $\tilde{n}$ en fonction du signe de n :

$$\begin{cases} \tilde{n} = -\frac{\cos \theta a(r^*, \gamma) n}{\lambda} & \text{pour } n > 0 \\ \tilde{n} = \frac{\cos \theta a(r^*, \gamma) n}{\lambda} & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

On définit le paramètre d'avance instationnaire en soustrayant à n la contribution $\tilde{n}$ due au dérapage (*c.f.* figure 5.5) :

$$\begin{cases} \lambda_z(\theta) = \frac{(n - \tilde{n}) \pi D}{v_z} & \text{pour } n > 0 \\ \lambda_z(\theta) = \frac{-(n - \tilde{n}) \pi D}{v_z} & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Il vient donc, en utilisant les relations précédentes :

$$\begin{cases} \lambda_z(\theta) = \frac{\lambda + \cos \theta a(r^*, \gamma)}{\cos \gamma} & \text{pour } n > 0 \\ \lambda_z(\theta) = \frac{\lambda - \cos \theta a(r^*, \gamma)}{\cos \gamma} & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

De la même manière, sachant que le coefficient de poussée stationnaire pour une pale en écoulement axial est :

$$K_{Tz}^p = \frac{F_z^p}{\rho n^2 D^4} = \frac{K_{Tz}}{Z} \quad (5.12)$$

on définit une expression pour le coefficient de poussée instationnaire $\forall n$:

$$\mathcal{C}_{Tz}^p(\theta) = \frac{F_z^p(\theta)}{\rho (n - \tilde{n})^2 D^4} \quad (5.13)$$

D'où le coefficient de poussée instationnaire en fonction du paramètre d'avance $\lambda_z(\theta) \forall n$:

$$\mathcal{C}_{Tz}^p(\theta) = \frac{F_z^p(\theta) \lambda^2}{\rho n^2 D^4 \lambda_z(\theta)^2 \cos^2 \gamma} \quad (5.14)$$

Le coefficient de couple stationnaire pour une pale en écoulement axial est :

$$K_{Qz}^p = \frac{Q_z^p}{\rho n^2 D^5} = \frac{K_{Qz}}{Z} \quad (5.15)$$

ce qui conduit à définir $\forall n$:

$$\mathcal{C}_{Qz}^p(\theta) = \frac{Q_z^p(\theta)}{\rho (n - \tilde{n})^2 D^5} \quad (5.16)$$

et :

$$\mathcal{C}_{Qz}^p(\theta) = \frac{Q_z^p(\theta) \lambda^2}{\rho n^2 D^5 \lambda_z(\theta)^2 \cos^2 \gamma} \quad (5.17)$$

On peut également exprimer le coefficient de charge stationnaire :

$$C_h = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho S V_\infty^2} = \frac{8 K_{Tz} \lambda^2}{\pi^3} \quad (5.18)$$

où S est la surface du disque rotor ($\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{z}}$).

Ce même coefficient en instationnaire s'écrit :

$$C_h(\theta) = \frac{8 \mathcal{C}_{Tz}(\theta) \lambda_z^2(\theta)}{\pi^3} \quad (5.19)$$

Le rendement stationnaire de l'éolienne défini par :

$$\eta = \frac{\mathcal{O} Q_z}{(\frac{1}{2} \rho S v_z^2) \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_\infty} \quad (5.20)$$

devient en instationnaire :

$$\eta(\theta) = \frac{16 Q_z(\theta) \lambda_z(\theta)}{\rho \pi D^3 \underline{\mathbf{V}}_\infty^2 \cos^2 \gamma} \quad (5.21)$$

où $\underline{\mathbf{n}}$ est la normale au plan du disque rotor ($\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{z}}$).

Le rayon r^* (*c.f.* équation 5.4) précédemment introduit pour exprimer la proportionnalité entre $\tilde{v}_\theta$ et $\tilde{n}$ peut également être défini par :

$$Q_z = F_\theta r^* R \quad (5.22)$$

où $\underline{\mathbf{F}}_\theta = F_\theta \underline{\mathbf{e}}_\theta$ est l'effort dans le plan (xy) (plan du disque rotor) qui fournit le couple Q_z . Comme

$$F_\theta = \underline{\mathbf{F}}_{pale} \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta \quad (5.23)$$

et connaissant $\underline{\mathbf{F}}_{pale}$ et Q_z , on en déduit r^* par :

$$r^{*p}(\theta) = \frac{Q_z^p(\theta)}{R F_\theta^p(\theta)} \quad (5.24)$$

dès lors que $\underline{\mathbf{e}}_\theta$, orthogonal au rayon choisi comme générateur de la pale et dans le plan xOy (*c.f.* figure 5.2), est connu.

5.1.3 Moments parasites

L'asymétrie des efforts s'exprime par la présence de couples globaux autres que Q_z . Ces couples parasites augmentent les vibrations engendrées par le couple axial instationnaire sur l'ensemble hélice-ligne d'arbre, dangereuses pour la tenue mécanique des pales d'hélice, elles-mêmes soumises alors à une fatigue sous contraintes cycliques. Une part des excitations se transmet par voie solidienne à l'ensemble du système (ligne d'arbre, génératrice...), et au delà, à la structure elle-même au travers des paliers, de la butée et du berceau de la génératrice. Ce type d'excitation à transmission purement solide est directement relié aux fluctuations de charge (ou portance instationnaire) de chacune des sections de pales, en incidence périodique par rapport à l'écoulement de rencontre.

Ainsi, on définit l'excentricité $\underline{\mathbf{OM}}_i$ des efforts sur une pale d'hélice :

$$\underline{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^Z \underline{\mathbf{F}}_i \wedge \underline{\mathbf{OM}}_i \quad (5.25)$$

Si on néglige l'excentricité des efforts suivant $\underline{\mathbf{z}}$ (qui est en $o\gamma^3$), on définit l'excentricité des efforts sur l'hélice de la manière suivante :

$$Q_x = \sum_{i=1}^Z d_{y_i} F_{z_i} \quad (5.26)$$

$$Q_y = - \sum_{i=1}^Z d_{x_i} F_{z_i} \quad (5.27)$$

Dans la suite, nous allons à partir de plusieurs cas numériques d'écoulements uniformes, axisymétriques et non axisymétriques ($5^\circ < \gamma < 60^\circ$), sur une éolienne à fort allongement (éolienne NIBE), mettre en évidence l'intérêt de prendre en compte la contribution de vitesse $\tilde{n}$ développé dans ce chapitre. Nous allons mettre ce point en évidence sur les coefficients de couple et de poussée à partir d'une comparaison entre un calcul corrigé, c'est-à-dire en tenant compte de $\tilde{n}$ ($\mathcal{C}_{Tz}(\theta)$, $\mathcal{C}_{Qz}(\theta)$,.... pour une pale ou pour toutes les pales), et un calcul non corrigé ($K_{Tz}(\theta)$, $K_{Qz}(\theta)$,....). Ce dernier étant également instationnaire du

fait que les efforts ou les couples mis en jeu dépendent de la position de la pale. Nous allons mettre également en évidence l'aspect tridimensionnel des efforts mis en jeu à partir de l'excentricité des efforts entraînant des couples transversaux dès lors que l'éolienne est soumise à un écoulement uniforme non axial.

5.2 Analyse du couple et de la poussée

La vitesse de rotation de l'éolienne est constante pour tous les cas d'écoulements considérés. De plus, l'écoulement est dans tous les cas uniforme, qu'il soit axisymétrique ou non. Lorsque l'éolienne est placée dans un écoulement non axial, on a pris arbitrairement $\lambda_z = 9.56$ ¹.

5.2.1 Ecoulement axisymétrique

On considère l'écoulement sur la Nibe, pour plusieurs valeurs du paramètre d'avance ($4.78 < \lambda_z < 13.28$). Le tableau suivant donne les paramètres de couple, poussée et rendement pour une pale. L'écoulement étant stationnaire dans le repère de l'éolienne, ces coefficients sont constants au cours de la rotation et identiques pour chacune des pales. Pour obtenir les performances du rotor, il suffit de multiplier par 3 ($Z = 3$) les valeurs contenues dans ce tableau.

λ_z	K_{Tz}^p	K_{Qz}^p	η^p
4.78172	$2.61453 \cdot 10^{-2}$	$-2.37564 \cdot 10^{-3}$	0.134031
5.48587	$2.04137 \cdot 10^{-2}$	$-1.61923 \cdot 10^{-3}$	0.137948
6.76297	$1.33321 \cdot 10^{-2}$	$-8.63893 \cdot 10^{-4}$	0.137893
8.15998	$8.37753 \cdot 10^{-3}$	$-4.54945 \cdot 10^{-4}$	0.127555
8.28292	$8.03172 \cdot 10^{-3}$	$-4.30107 \cdot 10^{-4}$	0.126124
9.40597	$5.34692 \cdot 10^{-3}$	$-2.53821 \cdot 10^{-4}$	0.108995
9.56429	$5.02636 \cdot 10^{-3}$	$-2.34738 \cdot 10^{-4}$	0.105977
10.98459	$2.62205 \cdot 10^{-3}$	$-1.05065 \cdot 10^{-4}$	0.071859
13.283	$-3.36898 \cdot 10^{-5}$	$1.03762 \cdot 10^{-5}$	-0.012548

Pour $4 < \lambda_z < 12$, les évolutions des paramètres de l'éolienne en fonction du paramètre d'avance sont représentés sur la figure 5.6 ; pour $\lambda_z = 13.283$, l'éolienne fonctionne en hélice propulsive : l'incidence est négative.

$K_{Qz}^p < 0$ s'explique par le fait que l'éolienne a son vecteur rotation porté sur les $\underline{z}$ négatifs : $\underline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}\underline{z}$ avec $\mathcal{O} < 0$ (figure 5.2 et 5.7).

On va maintenant considérer plusieurs situations de dérapage ($5^\circ < \gamma < 60^\circ$). A travers ces différents calculs d'écoulements non axiaux, nous allons effectuer en parallèle, une triple

¹La composante suivant $\underline{z}$ de $\underline{\mathbf{V}}_\infty$ est conservée et non pas $|\underline{\mathbf{V}}_\infty|$ ($\lambda_z = \lambda_{derapage} \cos \gamma = \lambda_{ref} = 9.56$).

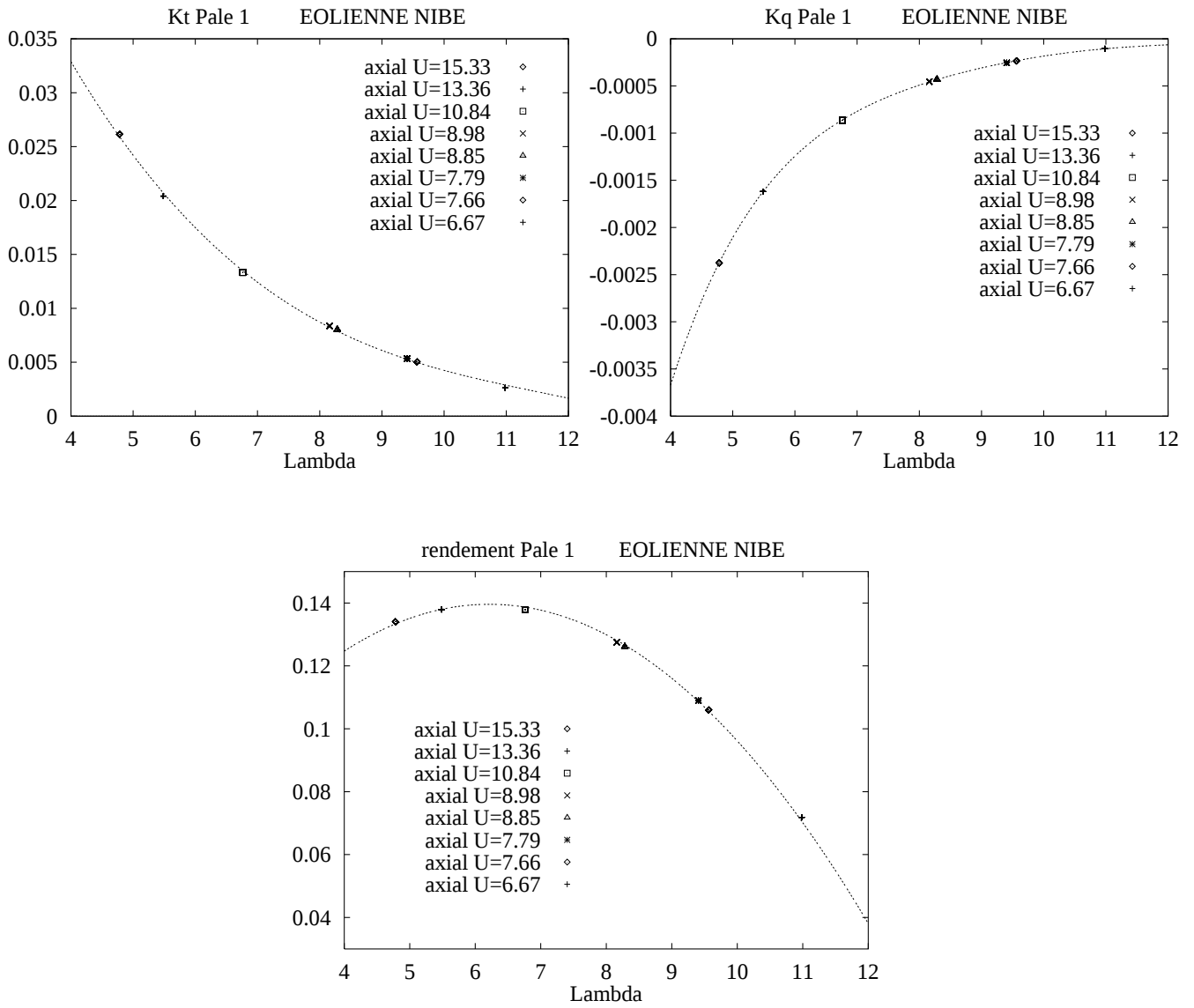


Figure 5.6: *Ecoulement axial : Evolution des paramètres K_{Tz}^p , K_{Qz}^p et η^p pour 1 pale en fonction de λ .*

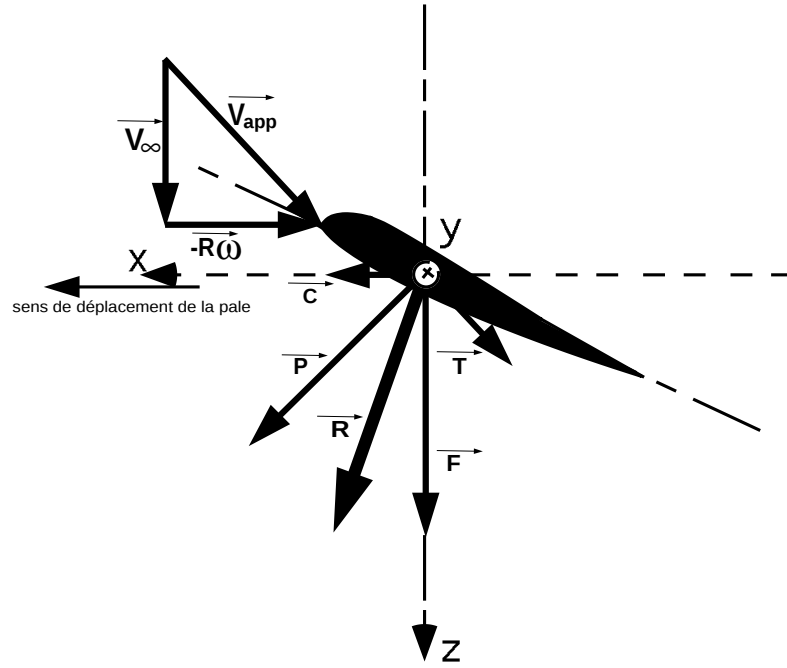


Figure 5.7: *Forces aérodynamiques sur une pale en coupe.*

comparaison sur les coefficients de poussée et couple de l'éolienne NIBE. Une comparaison sur ces coefficients, dans leurs version corrigée ($\mathcal{C}_z$) et non corrigée (K_z), entre l'écoulement axial de référence ($\lambda_z = 9.56$) et l'écoulement de dérapage, pour lequel la composante suivant z de $\underline{V}_\infty$ est conservée. Pour mener à bien ces comparaisons, nous allons considérer 3 critères. Dans un premier temps, seule la valeur moyenne sera considérée, puis les fluctuations autour de cette valeur moyenne et enfin, l'énergie spectrale.

5.2.2 Ecoulement non axial : valeur moyenne

Dans cette section, on va considérer la moyenne des coefficients de poussée et couple, pour la pale 1 définie comme :

$$\overline{f^{p_1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{p_1}(\theta) d\theta$$

Etant donné que nous sommes en écoulement uniforme, les résultats sur les pales 2 et 3, qui sont déphasés respectivement de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ par rapport à la pale maîtresse, seront identiques. Les performances de l'éolienne sont obtenues en additionnant les performances de chacune des pales.

On note : $\overline{\mathcal{C}_{Tz}^p}$, la moyenne sur un tour du coefficient de poussée corrigé pour 1 pale (*c.f.* pages 133, 138 et 139). Ce même coefficient non corrigé est noté : $\overline{K_{Tz}^p}$. De la même manière, la moyenne sur un tour du coefficient de couple corrigé pour 1 pale est noté : $\overline{\mathcal{C}_{Qz}^p}$ et le même coefficient non corrigé est noté : $\overline{K_{Qz}^p}$. En enlevant l'indice p supérieur, on obtient la moyenne

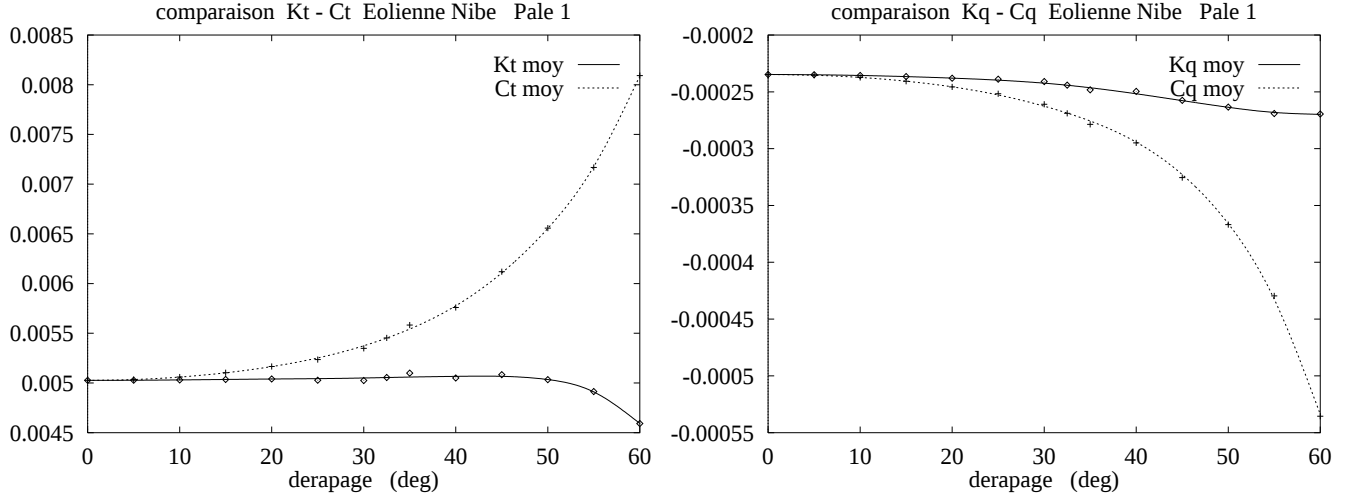


Figure 5.8: Comparaison de la version corrigée et non corrigée des coefficients de poussée et couple pour 1 pale en fonction de l'angle de dérapage

sur un tour des performances de l'éolienne.

La figure 5.8 montre que les valeurs des coefficients de couple corrigé et non corrigé, sur une pale en dérapage est supérieure (en module) à la valeur de l'expérience axiale (c'est-à-dire pour $\gamma = 0$) de référence ($K_{Q_z}^p = -2.34738 \cdot 10^{-4}$), pour laquelle le flux au travers du disque de l'hélice est identique, c'est-à-dire pour :

$$\lambda_z = \lambda_{\text{derapage}} \cos \gamma = \lambda_{\text{ref}} = 9.56429$$

Cependant, $\overline{C_{Q_z}^p}$ augmente nettement plus vite que $\overline{K_{Q_z}^p}$.

A l'opposé, le coefficient de poussée non corrigé ($\overline{K_{T_z}^p}$), ne suit pas cette évolution. En effet, à partir d'un dérapage de 45° , les performances de poussée de l'éolienne chutent par rapport à l'expérience axiale de référence ($K_{T_z}^p = 5.02636 \cdot 10^{-3}$), alors que ce même coefficient dans sa version corrigée augmente.

Les quantités moyennes globales des coefficients de poussée et de couple caractérisant l'éolienne, sont égales à Z fois la moyenne temporelle sur 1 tour pour une pale (écoulement uniforme). Ils suivent donc la même évolution.

Nous allons maintenant nous intéresser aux fluctuations de ces coefficients autour de leur valeur moyenne.

5.2.3 Ecoulement non axial : fluctuations

La figure 5.9 représente les variations pendant un tour d'hélice de $\mathcal{C}_{T_z}^p(\theta)$ et $\mathcal{C}_{Q_z}^p(\theta)$ pour plusieurs angles de dérapage.

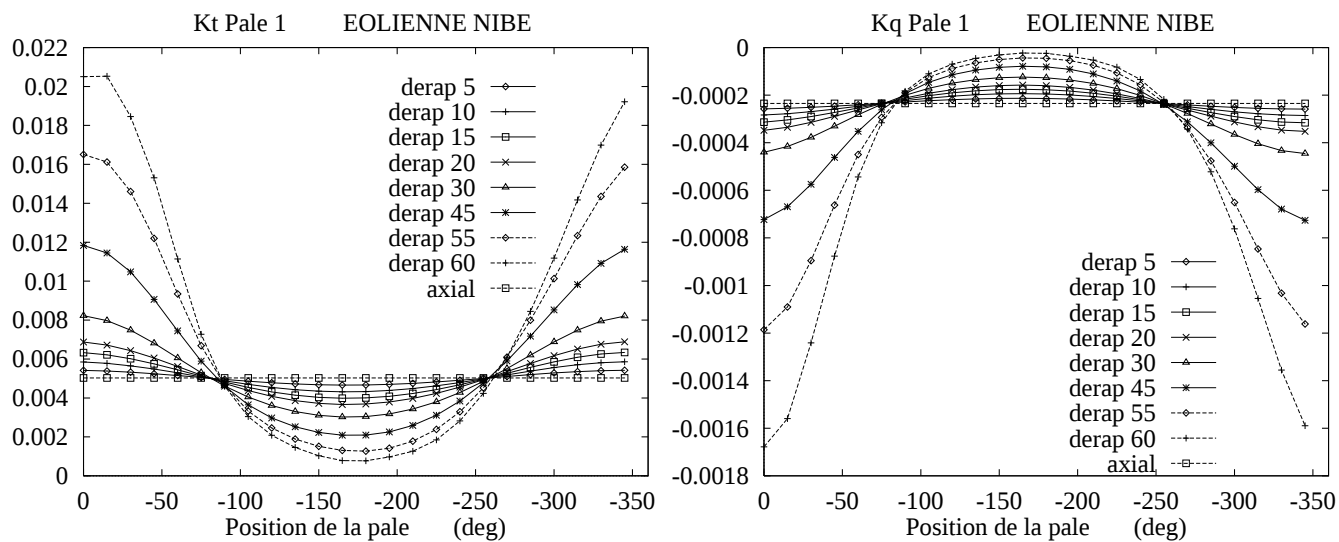


Figure 5.9: Coefficients C_{Tz} et C_{Qz} avec et sans dérapage pour 1 pale au cours d'une rotation.

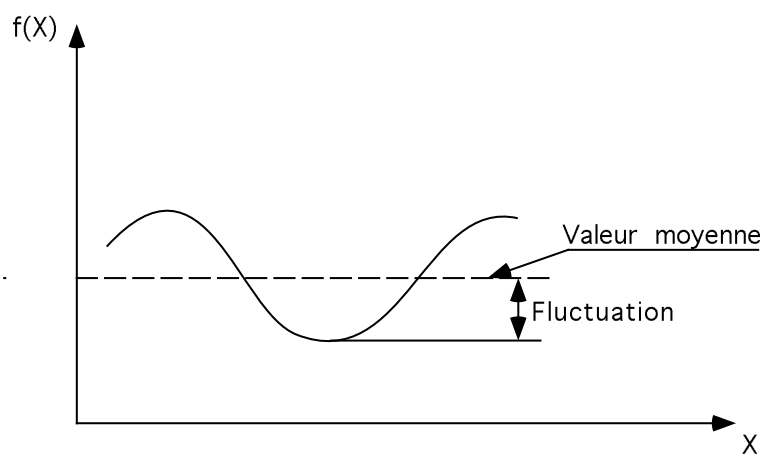


Figure 5.10: Fluctuations...

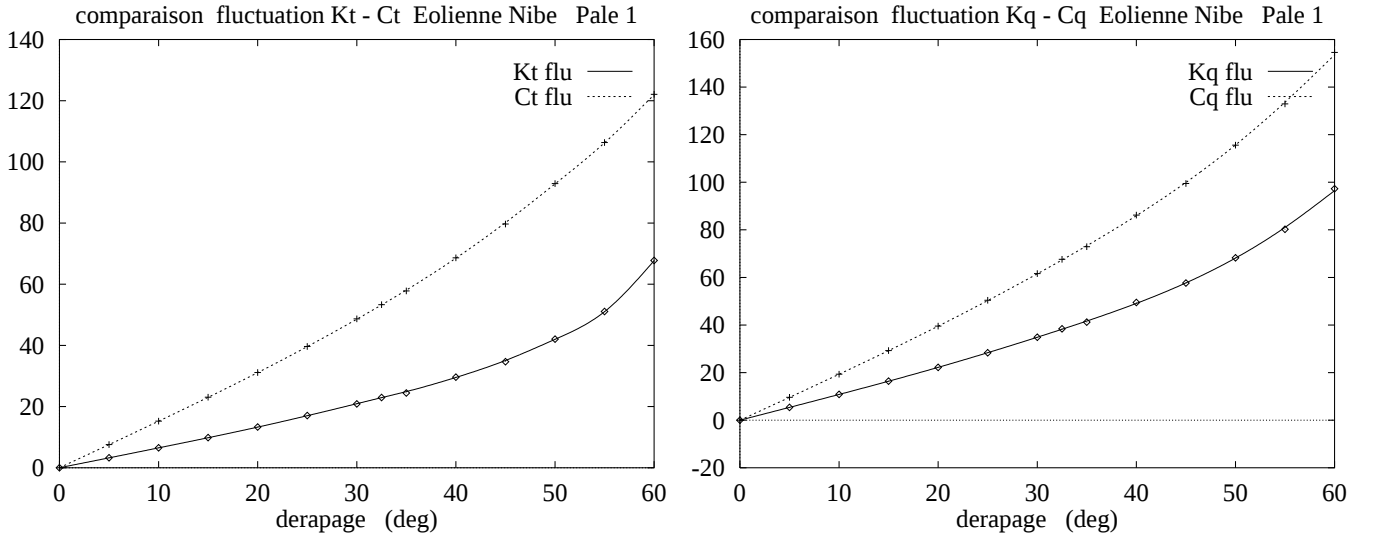


Figure 5.11: *Fluctuations des coefficients de couple (C_{Qz}^p et K_{Qz}^p) et poussée (C_{Tz}^p et K_{Tz}^p) pour 1 pale au cours d'une rotation.*

L'amplitude des fluctuations, définies par le niveau crête-valeur moyenne (*c.f.* figure 5.10), en pourcent de la valeur moyenne, de C_{Tz}^p , C_{Qz}^p (correspondant aux valeurs corrigées des coefficients de couple et poussée), K_{Tz}^p et K_{Qz}^p (correspondant aux valeurs non corrigées de ces mêmes coefficients), au cours d'une révolution de la pale maîtresse, en fonction de l'angle de dérapage, est représenté sur la figure 5.11.

On constate que l'amplitude des oscillations pour les coefficients de poussée et de couple dans leur version corrigée est nettement plus prononcée que dans le cas contraire.

Les coefficients de couple, poussée, et rendement sur les autres pales sont obtenus par une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{Z}$ par rapport à la pale maîtresse, puis additionnés pour obtenir la résultante sur l'hélice. On montre sur la figure 5.12 que plus le dérapage est important, plus les oscillations des coefficients globaux de poussée et de couple, dans leur version corrigée ou non, sont importantes. On met ainsi en évidence que des non linéarités apparaissent lorsque le dérapage augmente.

En effet, pour que des oscillations apparaissent, il est évident que tous les modes de la réponse fréquentielle du coefficient considéré, n'ont pas le même déphasage d'une pale à l'autre.

Le fait de ne pas inclure sur les coefficients de forces (K_T) et de couples (K_Q) ces corrections développés dans la section 5.1.2, entraîne non seulement une sous-évaluation de la valeur moyenne de ceux-ci, mais de plus, atténue les oscillations au cours de la rotation (voir figures 5.8, 5.11 et 5.12).

Les oscillations des coefficients de poussée et de couple, pour 1 pale plongée dans un écoulement non axial en fonction de θ (*c.f.* fig. 5.11), résultent des conditions d'écoulement

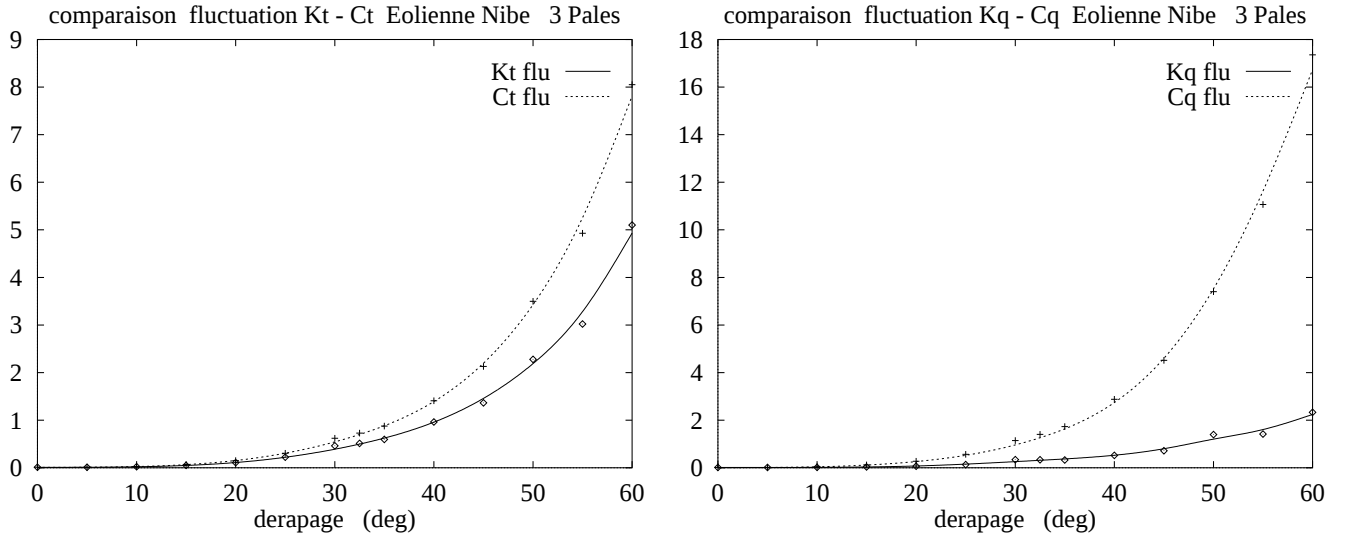


Figure 5.12: *Fluctuations des coefficients de couple (C_{Qz} et K_{Qz}) et poussée (C_{Tz} et K_{Tz}) pour les 3 pales au cours d'une rotation.*

différents en fonction de la position de la pale. Au cours d'une révolution, toutes les pales subissent les mêmes variations, mais à des positions différentes. Il en résulte que le tracé de l'évolution des coefficients en fonction de θ , est déphasé de $\frac{2\pi}{Z}$. Cependant, pour l'ensemble des 3 pales, on observe également des oscillations (*c.f.* fig. 5.12). Elles sont dues au fait que le déphasage entre 2 pales, pour l'ensemble des fréquences n'est pas constant et égal à $\frac{2\pi}{Z}$.

Nous allons maintenant mettre en évidence ce dernier point à travers une analyse spectrale.

5.2.4 Ecoulement non axial : effet non linéaire

Une analyse spectrale du coefficient de poussée corrigé pour 1 pale (C_{Tz}^p) fait apparaître des phénomènes non linéaires lorsque l'inclinaison γ augmente (*c.f.* fig. 5.13).

En effet, à la fréquence $f = 2.7710^{-3} Hz$ (correspondant à une période sur une révolution), viennent s'ajouter d'autres fréquences en fonction de l'angle de dérapage.

Dans le cas de l'éolienne NIBE (3 pales à 120°), une analyse spectrale du coefficient de poussée pour chacune des pales (P_1 , P_2 et P_3) dans le cas d'un dérapage de 60° , révèle 3 harmoniques en plus de la fréquence fondamentale (*c.f.* fig. 5.14). Cependant, on peut remarquer que les 3 spectres, correspondant aux pales 1, 2 et 3, sont équivalents. Les 3 pales dans un écoulement uniforme non axial jouent le même rôle.

De plus, on peut remarquer sur cette figure, que même si le déphasage entre 2 pales, aux fréquences multiples de la fréquence fondamentale est constant, la valeur de ce déphasage est différente aux fréquences considérées. Ce qui entraîne l'apparition des oscillations observées

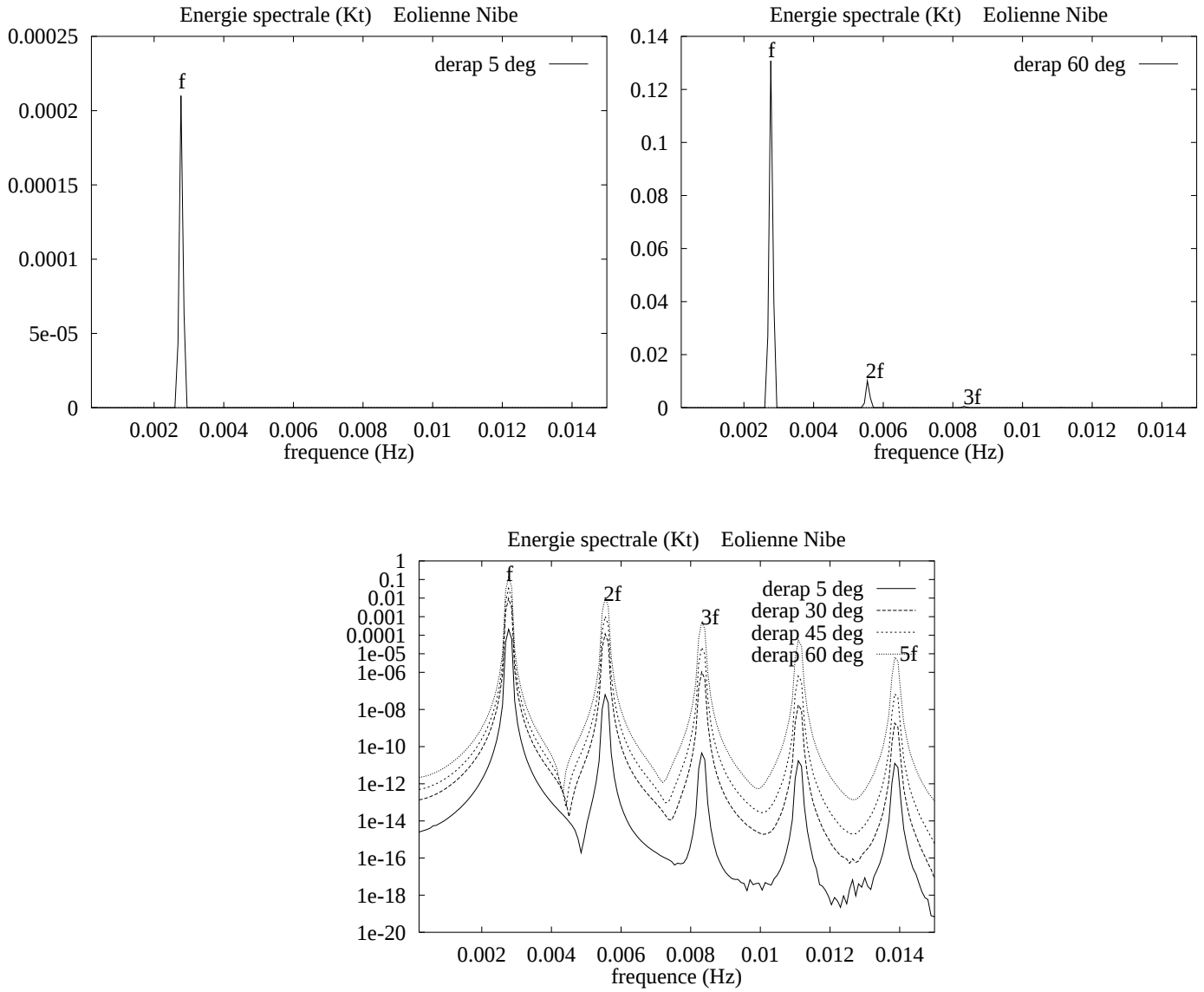
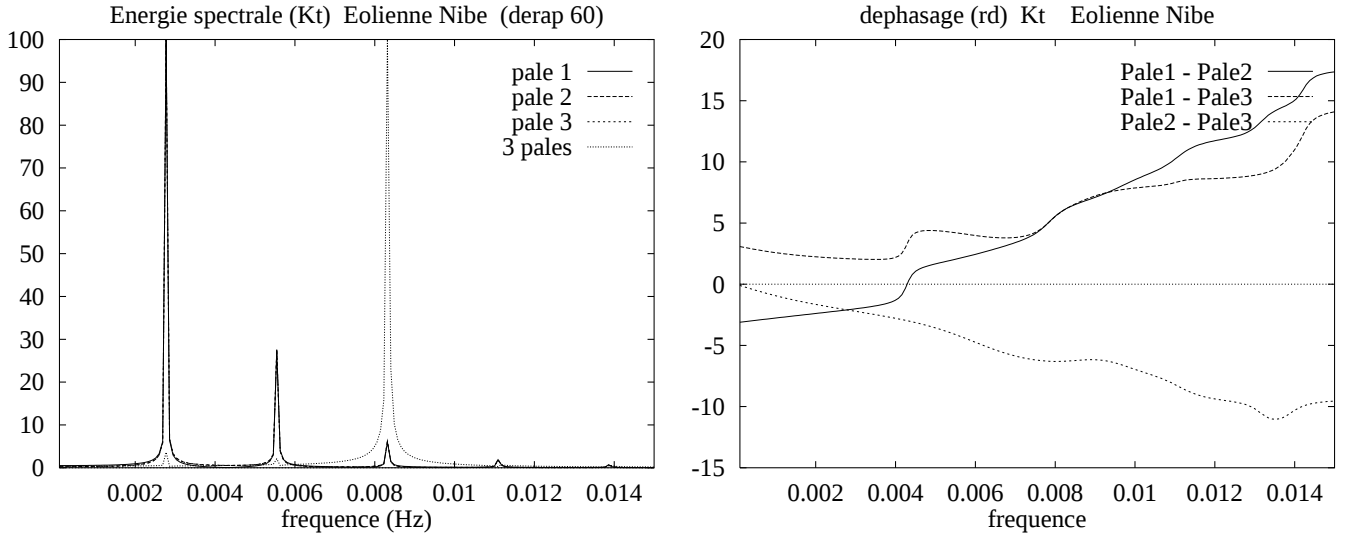


Figure 5.13: *Energie spectrale du coefficient $C_{T_z}^p$ pour plusieurs angles de dérapage au cours d'une révolution.*

Figure 5.14: *Energie spectrale et déphasage du coefficient de poussée*

précédemment.

Par contre, on remarque que la fréquence fondamentale du coefficient de poussée global ($8.3310^{-3} Hz$), correspond au troisième mode du coefficient de poussée pour une pale. De plus, on observe 2 sous-harmoniques correspondant aux modes 1 et 2 de ce même coefficient, qui sont dues au fait que nous ne sommes pas tout à fait à l'état stationnaire.

On peut donc approcher le coefficient de poussée de chaque pale, par une somme de 4 sinusoïdes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Tz}^{P_1} &= A_1^{P_1} \cos(\omega t) + A_2^{P_1} \cos(2\omega t) + A_3^{P_1} \cos(3\omega t) + A_4^{P_1} \cos(4\omega t) \\ \mathcal{C}_{Tz}^{P_2} &= B_1^{P_2} \cos(\omega t + \phi_{B_1}) + B_2^{P_2} \cos(2\omega t + \phi_{B_2}) + B_3^{P_2} \cos(3\omega t + \phi_{B_3}) + B_4^{P_2} \cos(4\omega t + \phi_{B_4}) \\ \mathcal{C}_{Tz}^{P_3} &= C_1^{P_3} \cos(\omega t + \phi_{C_1}) + C_2^{P_3} \cos(2\omega t + \phi_{C_2}) + C_3^{P_3} \cos(3\omega t + \phi_{C_3}) + C_4^{P_3} \cos(4\omega t + \phi_{C_4}) \end{aligned}$$

Or, on peut facilement retrouver les déphasages ϕ_x de la manière suivante :

pour la pale 2 :

$$\mathcal{C}_{Tz}^{P_2} = B_1^{P_2} \cos(\omega[t + \tau_B]) + B_2^{P_2} \cos(2\omega[t + \tau_B]) + B_3^{P_2} \cos(3\omega[t + \tau_B]) + B_4^{P_2} \cos(4\omega[t + \tau_B])$$

$$\begin{aligned} \omega\tau_B &= \phi_{B_1} = \frac{2\pi}{3} & \Rightarrow \tau_B &= \frac{2\pi}{3\omega} \\ 2\omega\tau_B &= \phi_{B_2} & \Rightarrow \phi_{B_2} &= \frac{4\pi}{3} \\ 3\omega\tau_B &= \phi_{B_3} & \Rightarrow \phi_{B_3} &= \frac{6\pi}{3} = 0 \\ 4\omega\tau_B &= \phi_{B_4} & \Rightarrow \phi_{B_4} &= \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

pour la pale 3 :

$$\mathcal{C}_{Tz}^{P_3} = C_1^{P_3} \cos(\omega[t + \tau_C]) + C_2^{P_3} \cos(2\omega[t + \tau_C]) + C_3^{P_3} \cos(3\omega[t + \tau_C]) + C_4^{P_3} \cos(4\omega[t + \tau_C])$$

$$\begin{aligned}
\omega\tau_C &= \phi_{C_1} = \frac{4\pi}{3} &\Rightarrow \tau_C &= \frac{4\pi}{3\omega} \\
2\omega\tau_C &= \phi_{C_2} &\Rightarrow \phi_{C_2} &= \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \\
3\omega\tau_C &= \phi_{C_3} &\Rightarrow \phi_{C_3} &= \frac{12\pi}{3} = 0 \\
4\omega\tau_C &= \phi_{C_4} &\Rightarrow \phi_{C_4} &= \frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Le coefficient de poussée total est la somme des coefficient de poussée des 3 pales, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{Tz} &= \cos(\omega t) \left(A_1^{P_1} - \frac{B_1^{P_2}}{2} - \frac{C_1^{P_3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) (-B_1^{P_2} + C_1^{P_3}) \\
&+ \cos(2\omega t) \left(A_2^{P_1} - \frac{B_2^{P_2}}{2} - \frac{C_2^{P_3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) (+B_2^{P_2} - C_2^{P_3}) \\
&+ \cos(3\omega t) \left(A_3^{P_1} + B_3^{P_2} + C_3^{P_3} \right) \\
&+ \cos(4\omega t) \left(A_4^{P_1} - \frac{B_4^{P_2}}{2} - \frac{C_4^{P_3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) (-B_4^{P_2} + C_4^{P_3})
\end{aligned}$$

Or, vu que les 3 pales jouent le même rôle, à l'état stationnaire on a :

$$\begin{aligned}
A_1^{P_1} &= B_1^{P_2} = C_1^{P_3} = \mathcal{A}_1 \\
A_2^{P_1} &= B_2^{P_2} = C_2^{P_3} = \mathcal{A}_2 \\
A_3^{P_1} &= B_3^{P_2} = C_3^{P_3} = \mathcal{A}_3 \\
A_4^{P_1} &= B_4^{P_2} = C_4^{P_3} = \mathcal{A}_4
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\mathcal{C}_{Tz} = 3\mathcal{A}_3 \cos(3\omega t)$$

On retrouve bien sur la figure 5.14 le pic de fréquence de $\mathcal{C}_{Tz}$ à $3f$. Plus le dérapage est important, plus $\mathcal{A}_3$ est important, et donc les oscillations sont d'autant plus prononcées.

La fréquence fondamentale du coefficient de poussée d'une éolienne à Z pales, est égal à Z fois la fréquence fondamentale de ce même coefficient pour 1 pale.

On retrouve ces mêmes phénomènes sur le rendement. On représente sur la figure 5.15 les variations, en valeur moyenne et fluctuation, pendant un tour d'hélice, du rendement pour 1 pale et pour toutes les pales, en fonction de l'angle de dérapage. Cette grandeur est fonction du coefficient couple corrigés ainsi que du coefficient d'avance instationnaire (*c.f.* section 5.1.2 eq. 5.21 et 5.11).

Jusqu'à présent, nous avons développé une analyse concernant les paramètres de l'éolienne, en fonction de la position de la pale maîtresse. A partir de maintenant, nous n'allons plus

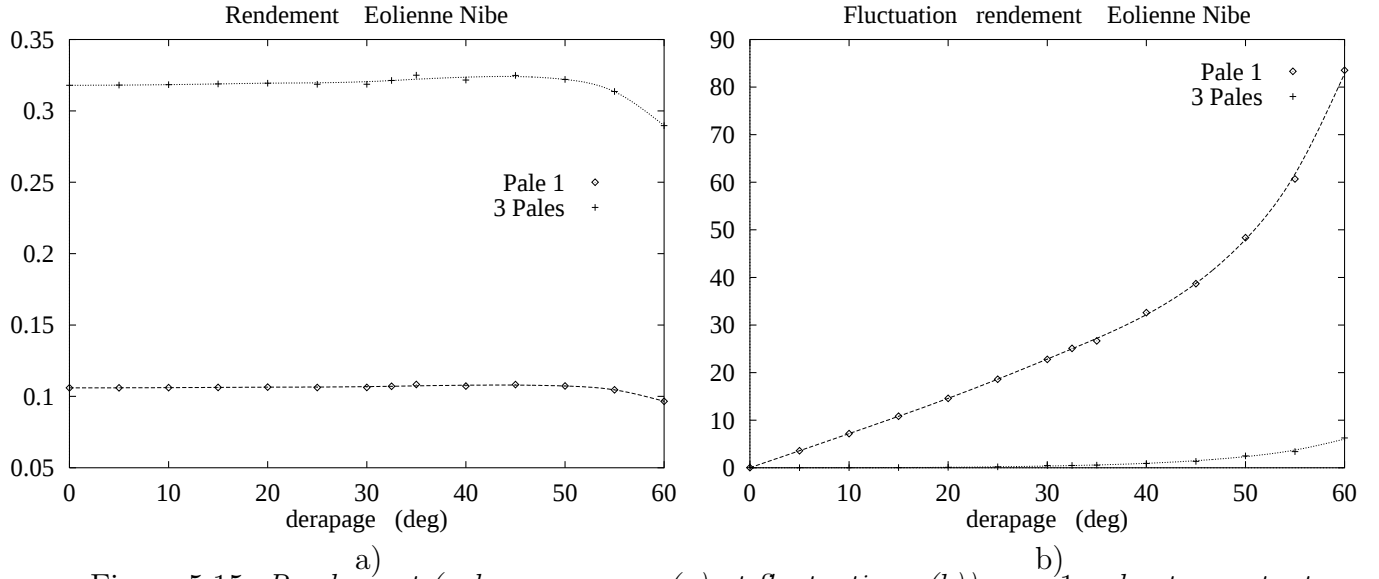


Figure 5.15: *Rendement (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ .*

considérer les coefficients de couple et poussée comme une fonction de θ , mais comme une fonction du paramètre d'avance instationnaire (qui est fonction de la position de la pale) (c.f. eq. 5.10). On va mettre ainsi en évidence l'intérêt de prendre en compte cette correction $\tilde{n}$ lorsque l'éolienne est plongée dans un écoulement uniforme non axial.

5.3 Analyse en fonction de $\lambda^p(\theta)$

On représente sur la figure 5.16 les variations, en valeur moyenne et fluctuations, au cours d'une révolution de la pale maîtresse, du paramètre d'avance instationnaire ($\lambda^{p1}(\theta)$), en fonction de l'angle de dérapage.

Du fait que le module et l'incidence du vent apparent dépendent de la position angulaire de la pale maîtresse (θ), l'effort aérodynamique est lui même fonction de θ . La projection de ce dernier sur $\underline{e}_\theta$ donne la force $\underline{F}_\theta$ qui induit le couple $\underline{Q}_z$ (c.f. figure 5.17). Connaissant $\underline{F}_\theta$ et $\underline{Q}_z$, on en déduit le rayon équivalent r^* qui représente la proportionnalité entre $\tilde{v}_\theta$ et $\tilde{n}$ (c.f. équation 5.24). Il représente également la position du point d'application de $\underline{F}_\theta$. On représente sur la figure 5.18 les variations, en valeur moyenne et fluctuations, de ce point d'application au cours d'une révolution de la pale maîtresse.

On note $n^{p1}(\theta, \gamma) = |n - \tilde{n}|(\theta, \gamma)$, l'évolution de la contribution $\tilde{n}$ due au dérapage, en fonction de la position de la pale (θ) et du dérapage (γ), pour la pale maîtresse. On a vu précédemment que $n^{p1}(0, \gamma)$ était minimal et $n^{p1}(\pi, \gamma)$ était maximal.

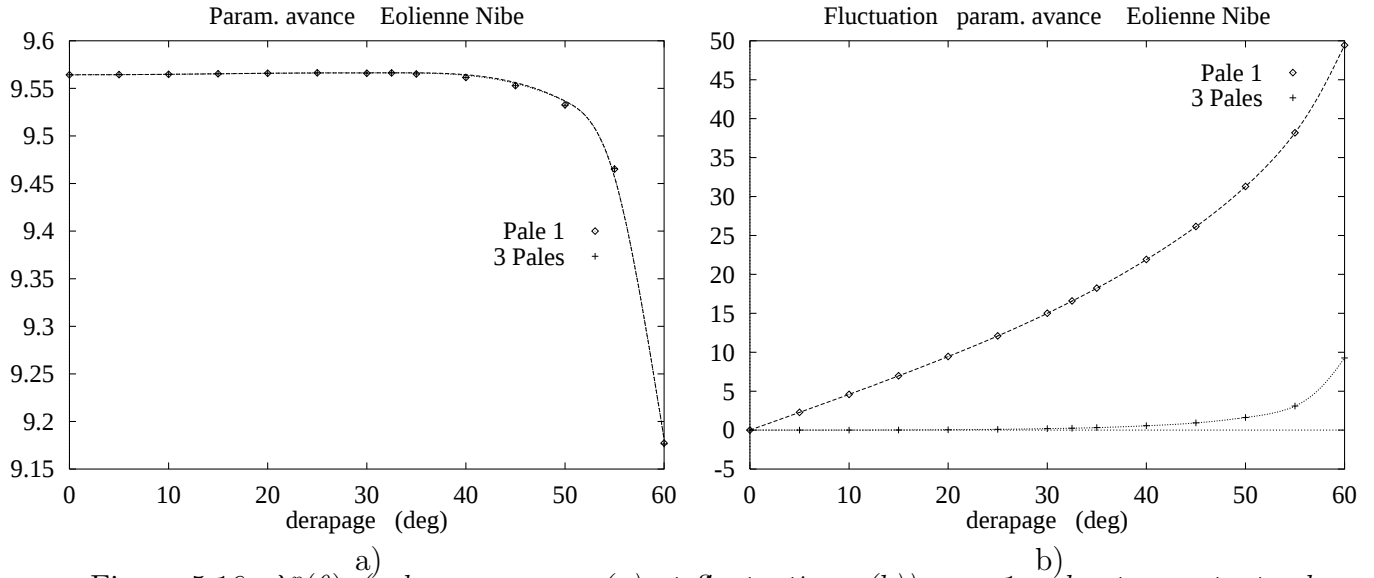


Figure 5.16: $\lambda^p(\theta)$ (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ

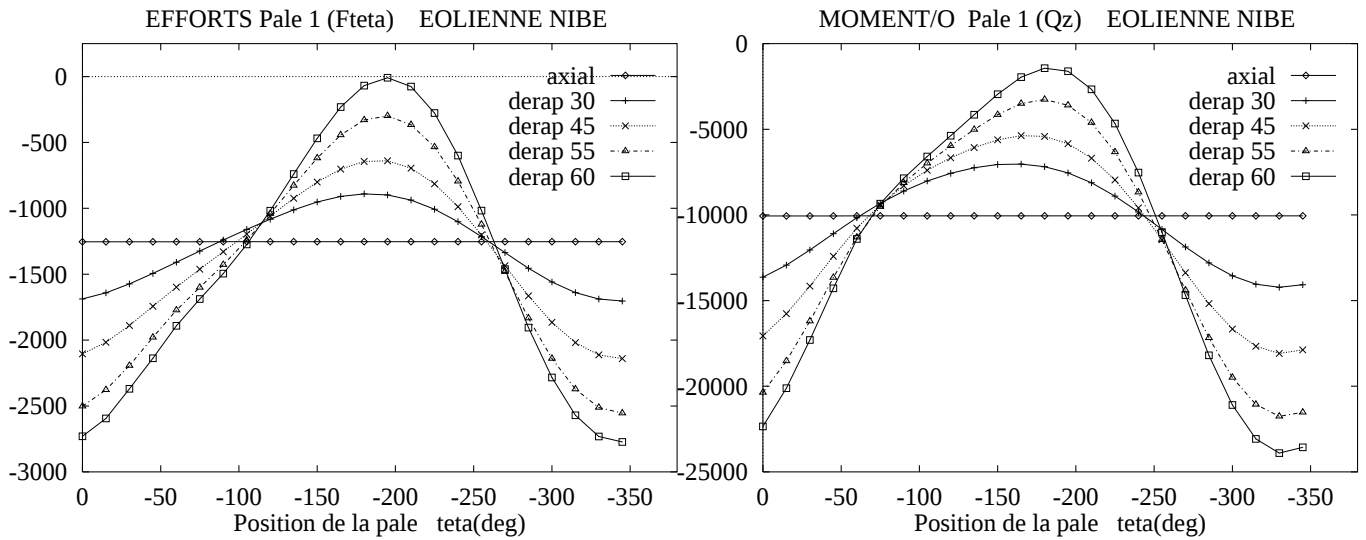


Figure 5.17: Variation de $\underline{F}_{\theta}$ (a) et $\underline{Q}_z$ (b) en fonction de la position de la pale

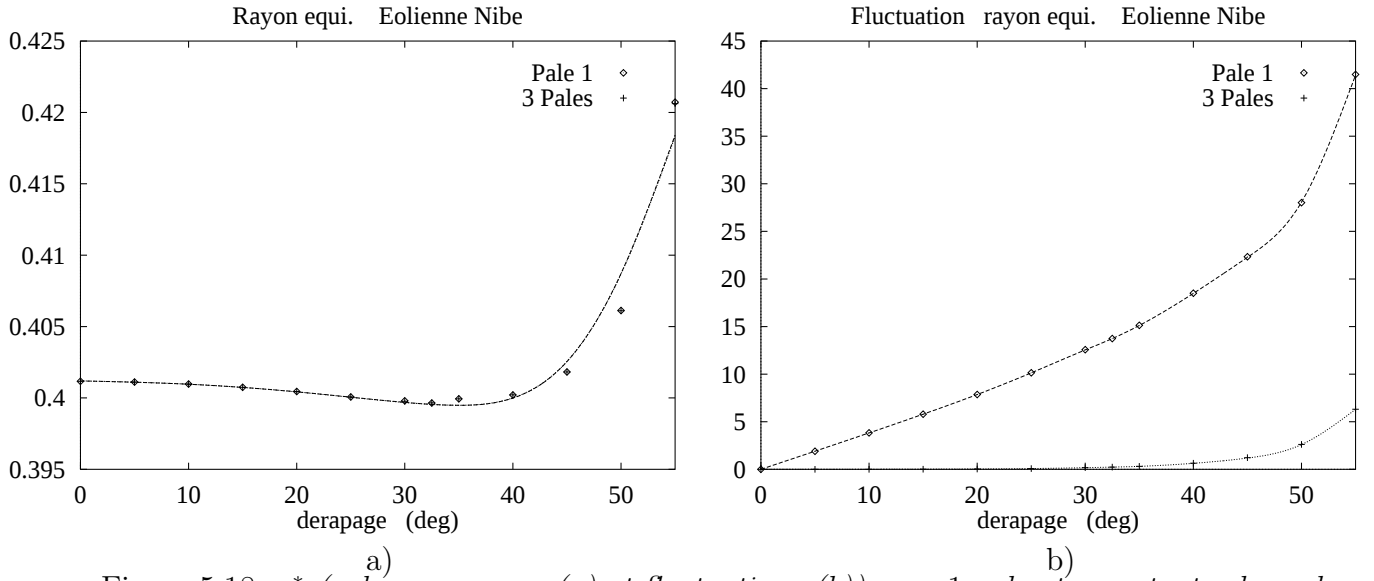


Figure 5.18: r^* (valeur moyenne (a) et fluctuations (b)) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ

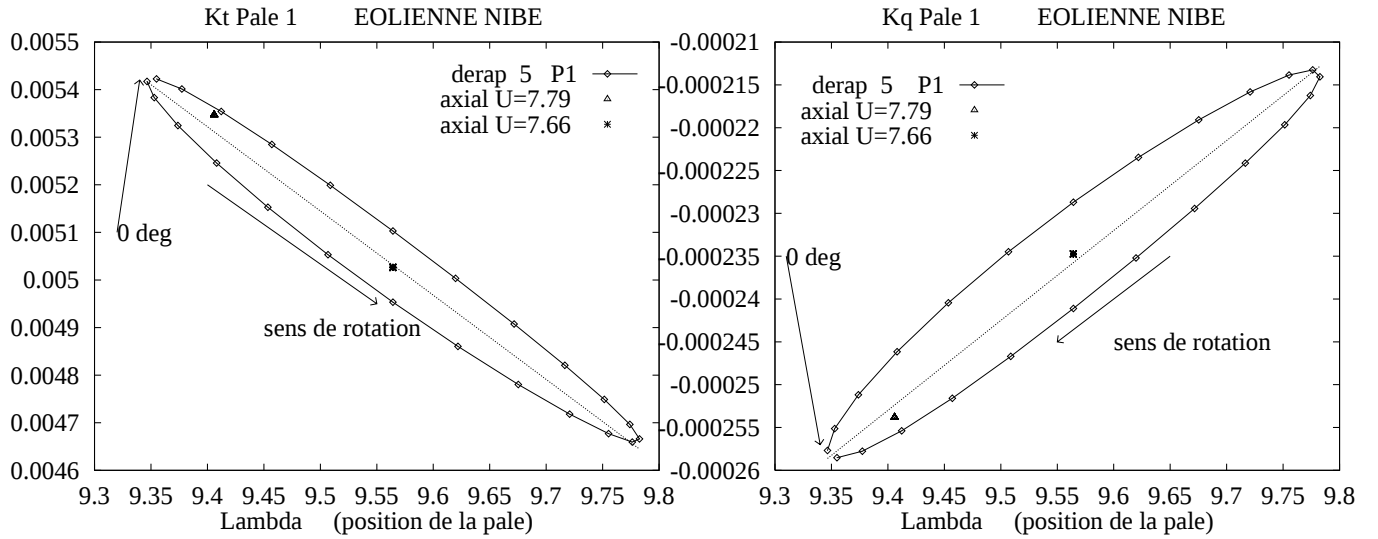


Figure 5.19: Variation de C_{Tz} et C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 5^\circ$.

La figure 5.19 nous donnent l'évolution de C_{Tz}^p et de C_{Qz}^p , en fonction de $\lambda^p(\theta)$ pour $\gamma = 5^\circ$. On a placé en outre sur cette figure les points, déterminées pour des écoulements axiaux, correspondant à plusieurs valeurs de λ . Pour les deux valeurs de θ correspondant au même λ^p , les 2 valeurs de C_{Tz}^p (phase pour laquelle n^{p1} part d'un minimum pour aller vers un maximum ($A \rightarrow D \rightarrow B$) et la phase inverse ($B \rightarrow C \rightarrow A$)) ne coïncide pas avec K_{Tz}^p de l'écoulement axial. La courbe $C_{Tz}^p(\lambda^p)$ est une "ellipse" régulière.

Les coefficients considérés étant le rapport de l'effort axial (ou du couple axial) sur le

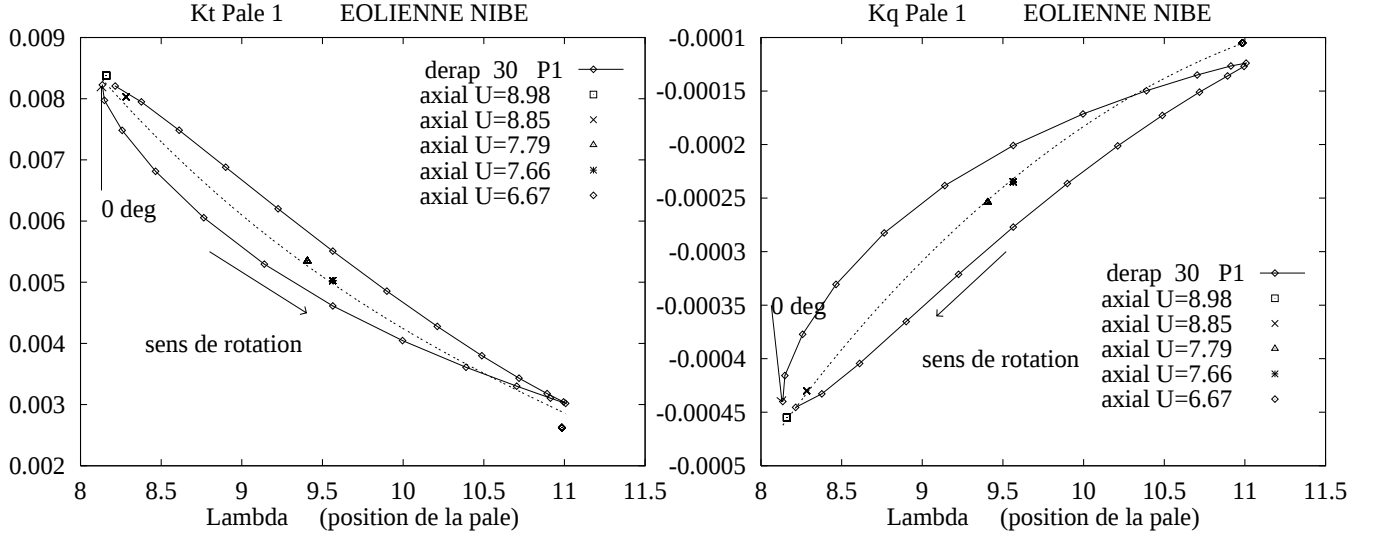


Figure 5.20: Variation de C_{Tz} et C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 30^\circ$.

paramètre d'avance instationnaire au carré (à une constante près) (*c.f.* eq. 5.14, 5.17), "l'ellipse" est due au fait que l'effort axial et le paramètre d'avance ne sont pas tout à fait en opposition de phase. Si cela était, "l'ellipse" se ramènerai à une courbe qui se superposerai à celle correspondant aux divers cas axisymétriques.

Lorsque γ augmente, les fluctuations autour de leur valeur moyenne, de l'effort axial et surtout du paramètre d'avance (qui est élevé au carré dans l'expression des coefficients de couple et poussée), entraîne une déformation de "l'ellipse" régulière en une "ellipse" irrégulière avec un point anguleux pour $\theta = \pi$ dans le cas d'un dérapage de 30° (qui correspond à un paramètre d'avance $\lambda^p(\theta) = 11$) (*c.f.* fig. 5.20).

Pour des angles de dérapage supérieurs à 30° (*c.f.* fig. 5.21), on observe un changement pour $\lambda^p(\theta) > 11$. En effet, à partir de cette valeur du paramètre d'avance, le coefficient de poussée est supérieur dans la phase $A \rightarrow D \rightarrow B$ que dans l'autre phase ($B \rightarrow C \rightarrow A$). Ces observations sont également vraies pour le coefficient de couple et pour le rendement (*c.f.* fig. 5.22). Cette singularité est due aux phénomènes non linéaires, qui se manifestent par l'apparition d'harmoniques sur $\underline{\mathbf{F}}_z^p(\theta)$, $\underline{\mathbf{Q}}_z^p(\theta)$, $\lambda^p(\theta)$,... (*c.f.* section précédente), lorsque le dérapage augmente.

Si le modèle quasi-statique de P.Cassella [59] s'appliquait exactement, ces courbes (axiales et dérapage) se superposeraient : on met ainsi en évidence les limites de ce modèle. Des effets instationnaires agissent. Cependant, on met en évidence sur la courbe 5.23 que la version corrigée (notée $\mathcal{C}$) est nettement plus proche de la vérité. En effet, le grand axe de "l'ellipse" dans sa version non corrigée (K), ne se superpose pas à la courbe passant par les valeurs obtenues dans des écoulements axisymétriques, mais fait un angle d'environ 25°

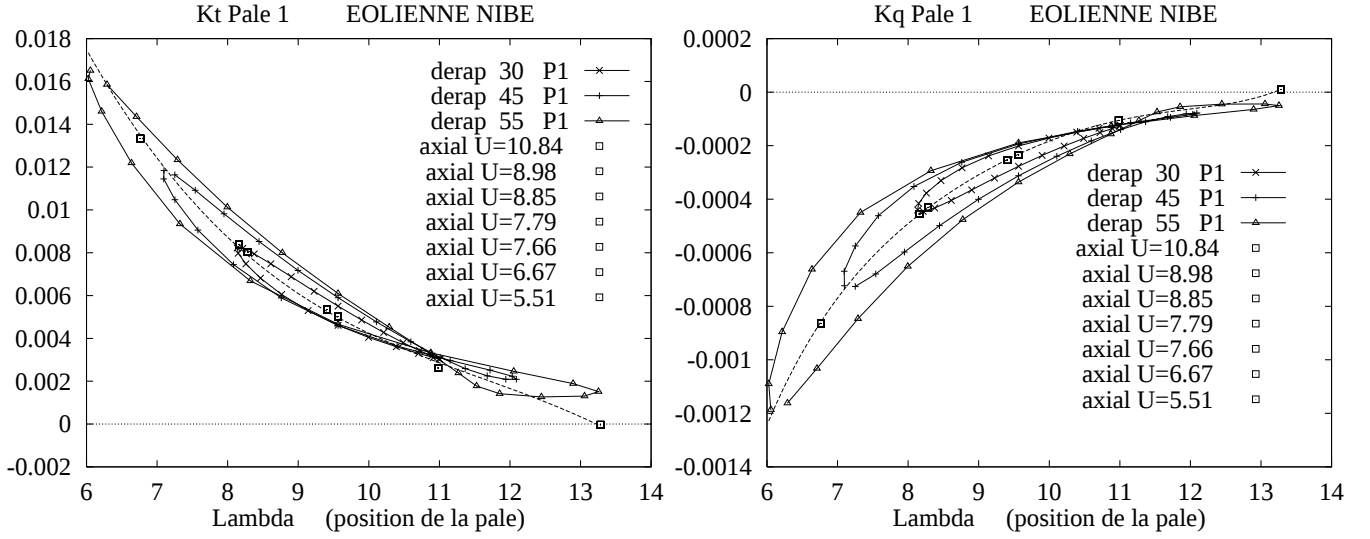


Figure 5.21: Variation de C_{Tz} et de C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour différentes valeurs de γ .

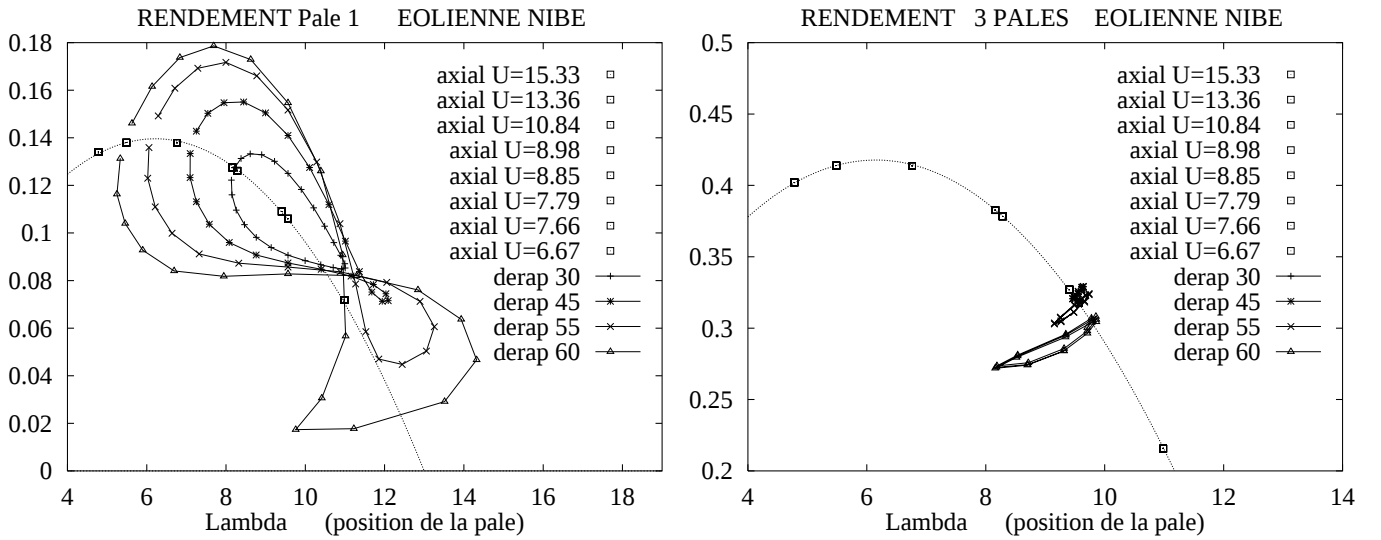


Figure 5.22: Rendement avec et sans dérapage pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de λ au cours d'une rotation.

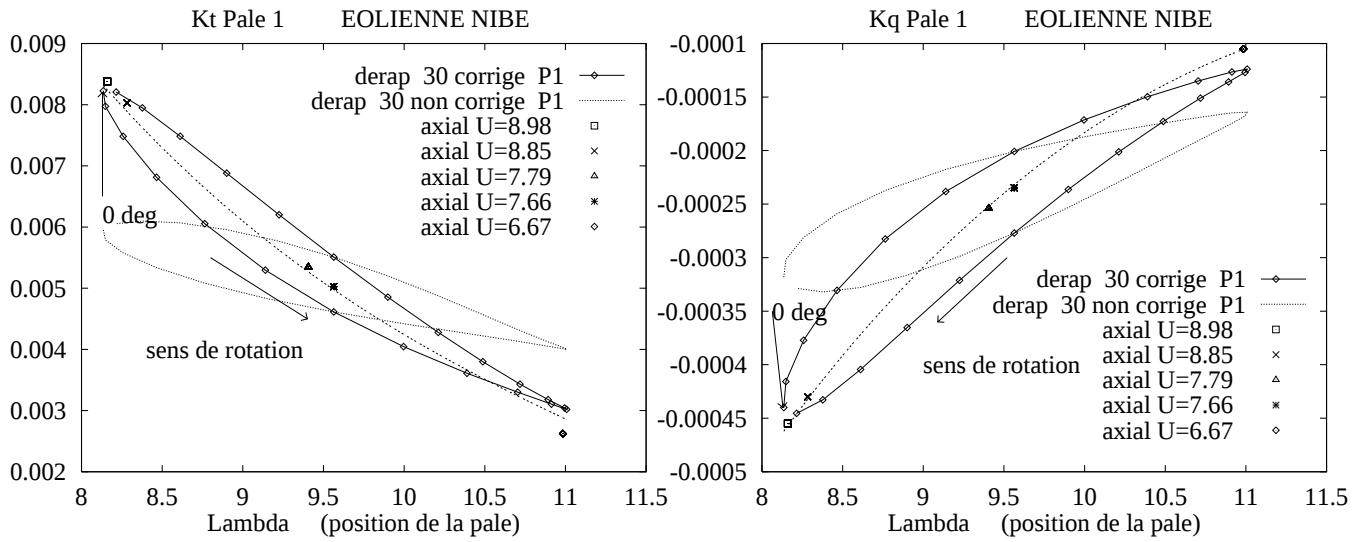


Figure 5.23: Variation de C_{Tz} et de C_{Qz} en fonction de $\lambda^p(\theta)$ au cours d'une rotation pour $\gamma = 30^\circ$. Comparaison entre le calcul corrigé et non corrigé.

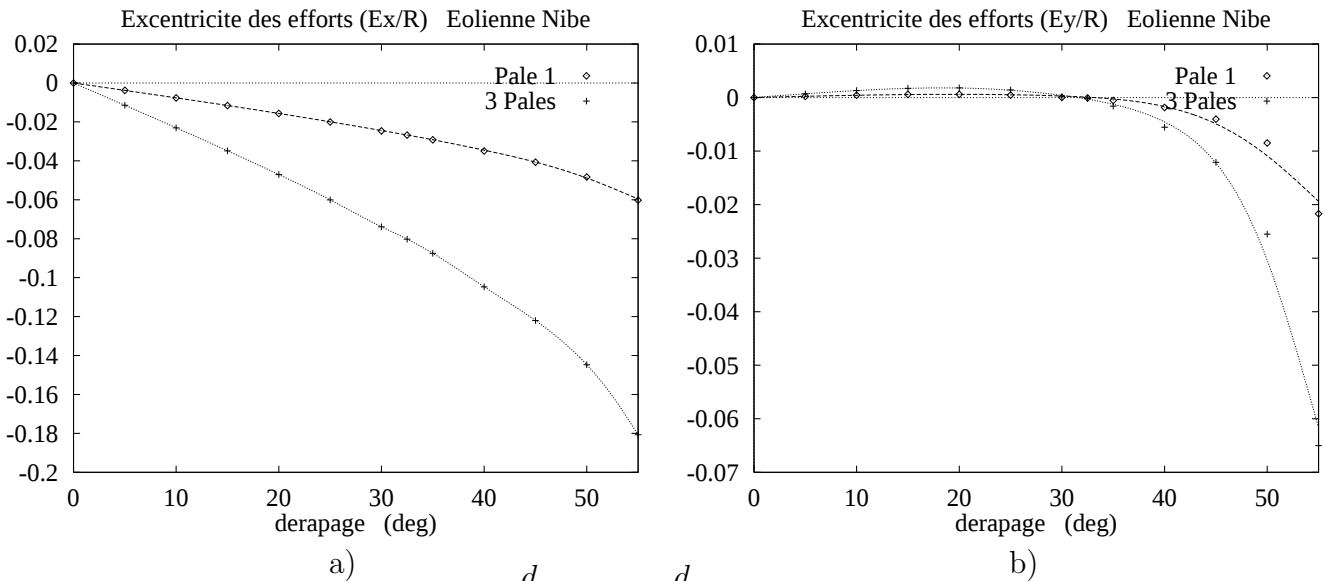


Figure 5.24: valeur moyenne de $\frac{d_{x1}}{R}$ (a) et $\frac{d_{y1}}{R}$ (b) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ

avec celle-ci. Même si $K_{Tz}^p(\theta)$ est en phase avec $C_{Tz}^p(\theta)$, la valeur moyenne est plus faible, et les oscillations moins prononcées.

Nous allons maintenant considérer les couples et les efforts non axiaux. La figure suivante (c.f. fig. 5.24) caractérise l'excentricité des efforts. On représente la variation en valeur moyenne de $\frac{d_{x1}}{R}$ et $\frac{d_{y1}}{R}$ (c.f. section 5.1.3). Il apparaît que lorsque l'éolienne est plongée

dans un écoulement uniforme non axisymétrique, le point d'application de l'effort de poussée qui engendre le couple Q_z est désaxé, et provoque ainsi des couples parasites engendrant des contraintes cycliques.

On retrouve bien les caractéristiques données dans la section 5.1.2 : les efforts transversaux $\mathcal{C}_{T_x}$ et $\mathcal{C}_{T_y}$ ainsi que les moments non axiaux par rapport à O $\mathcal{C}_{Q_x}$ et $\mathcal{C}_{Q_y}$ sont nuls en écoulement axial, alors qu'ils ne le sont pas dans le cas d'un écoulement uniforme en dérapage. La figure suivante (*c.f.* fig. 5.25) donne l'évolution en valeur moyenne et fluctuations de ces paramètres transversaux.

5.4 Conclusion

Dans le modèle de Cassella, l'équation 5.11 permet de prévoir l'excursion en λ notée $\delta\lambda$, en supposant r^* non plus comme une fonction de θ mais comme une constante (ce qui est vrai en moyenne pour des angles de dérapage inférieur à 45° *c.f.* fig. 5.18). A partir des pentes $\frac{\partial K_{T_z}}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial K_{Q_z}}{\partial \lambda}$ déterminées par l'évolution des coefficients de couple (K_{T_z}) et poussée (K_{Q_z}) en fonction du paramètre d'avance dans les cas d'écoulements axisymétriques, on prédit les excursions de ces coefficients notés $\delta\mathcal{C}_{T_z}$ et $\delta\mathcal{C}_{Q_z}$.

En prenant en compte l'évolution en fonction de la position de la pale, de tous les paramètres étudiés dans la section 5.1.2, on met en évidence, que, lorsque le dérapage augmente, des effets non linéaires se manifestent, non seulement par l'apparition d'harmoniques, mais également par des déphasages non constants (pour un même paramètre entre 2 pales ou pour 2 paramètres sur une même pale) pour chacun des modes (*c.f.* section 5.2.4). Ces considérations montrent que l'évolution des coefficients caractérisant l'éolienne (ou une pale) en fonction du paramètre d'avance, n'est pas une courbe, mais une conique. Une pale ne subit pas les mêmes efforts lorsque la composante de vitesse due au dérapage ($\underline{U}_x$) s'oppose au déplacement de cette dernière ou au contraire l'accompagne. Ces effets se manifestent par l'apparition de moments non axiaux avec tous les problèmes que cela peut engendrer. Le modèle de Cassella permet de déterminer $\delta\mathcal{C}_{T_z}$ et $\delta\mathcal{C}_{Q_z}$ à partir de $\delta\lambda$ mais ne permet pas de mettre en évidence ce qui précède.

Par contre, le fait de ne pas prendre en compte la contribution de vitesse due au dérapage, mais en considérant tout de même que le couple ou l'effort axial sont fonction de θ , entraîne une sous évaluation de δK_{T_z} et δK_{Q_z} à partir de $\delta\lambda$ (*c.f.* fig. 5.23).

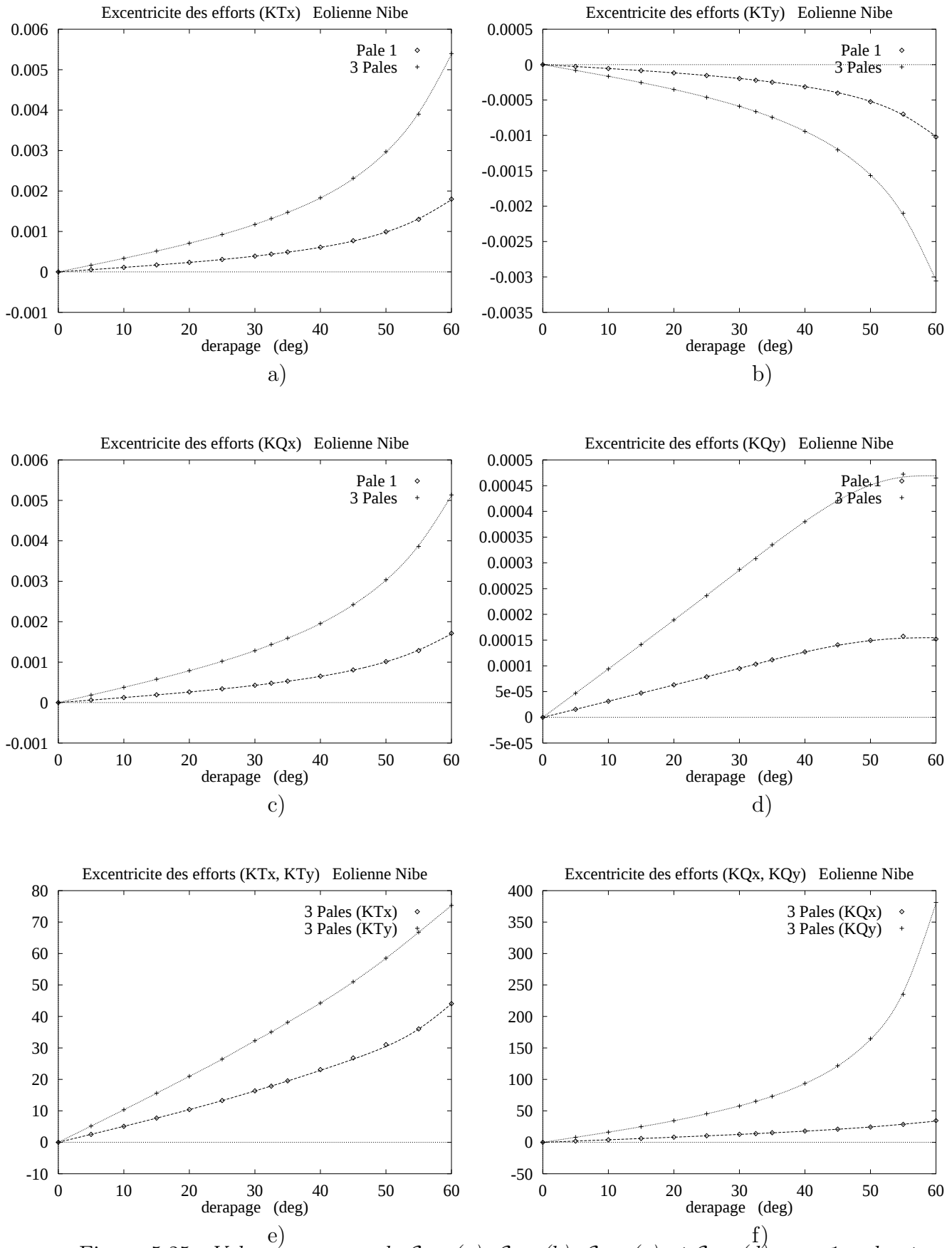


Figure 5.25: Valeur moyenne de C_{Tx} (a), C_{Ty} (b), C_{Qx} (c) et C_{Qy} (d) pour 1 pale et pour toutes les pales en fonction de γ . Fluctuation en % de la valeur moyenne de C_{Tx} , C_{Ty} (e) et C_{Qx} et C_{Qy} (f) pour toutes les pales.

B Analyse du sillage en aval d'une éolienne

L'analyse des performances des éoliennes à axe horizontal se fait le plus souvent en supposant que l'écoulement perturbé par cette dernière, est initialement uniforme et parallèle à son axe de rotation. Ces conditions idéales sont nécessaires à la mise en oeuvre de la plupart des outils théoriques de prédiction, de la théorie de Froude aux simulations numériques les plus précises. Elles ne sont malheureusement jamais réalisées dans les cas réels car, le caractère rotationnel de l'écoulement amont d'une part (couche limite atmosphérique...), les aspects instationnaires périodiques d'autre part (éolienne dans un écoulement uniforme dont les lignes de courant ne sont pas parallèles à l'axe de l'éolienne *c.f.* section 5 A...) apparaissent comme des perturbations de l'écoulement en amont du disque rotor. Il est évident que ces deux perturbations peuvent être simultanément présentes, et qu'elles interagissent généralement de façon complexe.

Dans cette partie, nous allons étudier le sillage d'une éolienne placée dans un écoulement instationnaire périodique. Ce dernier étant provoqué par les conditions non uniformes rencontrées par les pales lors de leur mouvement de rotation.

Dans un premier temps nous décrirons la méthode d'analyse qui nous permettra d'apprécier le fonctionnement de la machine à travers une grandeur représentative du sillage. Puis, à partir d'un écoulement uniforme axial autour d'une éolienne, pour lequel l'observation de cette grandeur fait apparaître un fonctionnement linéaire, on va étudier de quelle manière apparaissent les non linéarités lorsque l'éolienne est placée dans un écoulement instationnaire.

5.5 Définition de la méthode

La méthode est basée sur une estimation des effets instationnaires non linéaires à partir d'une analyse d'une quantité représentative du sillage de l'éolienne [37, 38]. Cette quantité est rattachée à un champ $f(r, \theta, z)$, où f peut être par exemple la composante radiale, azimutale ou axiale du champ de vitesse ou du tourbillon en coordonnées cylindriques. On étudie ici les variations de cette fonction pour une valeur moyenne du rayon ($0.8R_{rotor}$) ; plus particulièrement, on analyse le sillage (champ de vitesse et de vortacité) en aval de l'éolienne,

par la projection de ce dernier, sur une surface cylindrique coaxiale avec le rotor.

Les quantités analysées sont (*c.f.* chapitre 1) :

- le champ de vitesse calculé à partir du champ de vorticit   gr  ce    la relation int  grale de Biot-Savart :

$$\underline{\mathbf{U}}_{\omega}(\underline{\mathbf{x}}, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{N_p(t)} f\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{x}}}{\delta}\right) \underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \wedge \frac{\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{x}}}{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{x}}|^3} \quad (5.28)$$

- le champ de vorticit   calcul      partir de la repr  sentation particulaire :

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{p=1}^{N_j + N_p(t)} \underline{\boldsymbol{\Omega}}_p(t) \xi_{\delta}(|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_p|) \quad (5.29)$$

o   $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_p$ est le vecteur tourbillon port   par la $p^{\text{i  me}}$ particule, N_j le nombre de particules tourbillonnaires li  es    l'obstacle apr  s   quivalence doublet-tourbillon, $N_p(t)$ le nombre de particules tourbillonnaires libres discr  tisant le sillage et ξ_{δ} la fonction de r  gularisation des champs (*c.f.*   quation 1.29 et 1.38) avec :

$$\xi_{\delta}(|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_p|) = \frac{3}{4\pi\delta^3} e^{-\left(\frac{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_p|^3}{\delta^3}\right)}$$

et :

$$f\left(\frac{\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{x}}}{\delta}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{|\underline{\mathbf{X}}_p - \underline{\mathbf{x}}|^3}{\delta^3}\right)}$$

La m  thode consiste    tracer les lignes iso-valeurs des 3 composantes du champ de vitesse sur une carte $(\theta, \frac{z}{D})$ correspondant    la d  velopp  e de la surface cylindrique. Sur cette carte on d  termine la r  partition spectrale de puissance de la composante $u(\theta, z)$ concern  e. L'estimateur utilis   est le p  riodogramme d  fini    partir de l'autospectre bidimensionnel du signal :

$$S_{uu}(f_{\theta}, f_z) = \frac{1}{2\pi z_{max}} \tilde{u}(f_{\theta}, f_z) \cdot \tilde{u}^*(f_{\theta}, f_z)$$

o   $*$ d  signe le conjugu  , z_{max} la longueur d'observation du signal et $\tilde{u}(f_{\theta}, f_z) = TF[u(\theta, z)]$.

On a :

$$\tilde{u}(f_{\theta}, f_z) = \int_0^{z_{max}} \int_0^{2\pi} u(\theta, z) e^{-j(2\pi f_z z + 2\pi f_{\theta} \theta)} dz d\theta$$

On en d  duit alors la direction de propagation de l'onde (*c.f.* figure 5.26) :

$$\tan \Phi = \frac{k_z}{k_{\theta}}$$

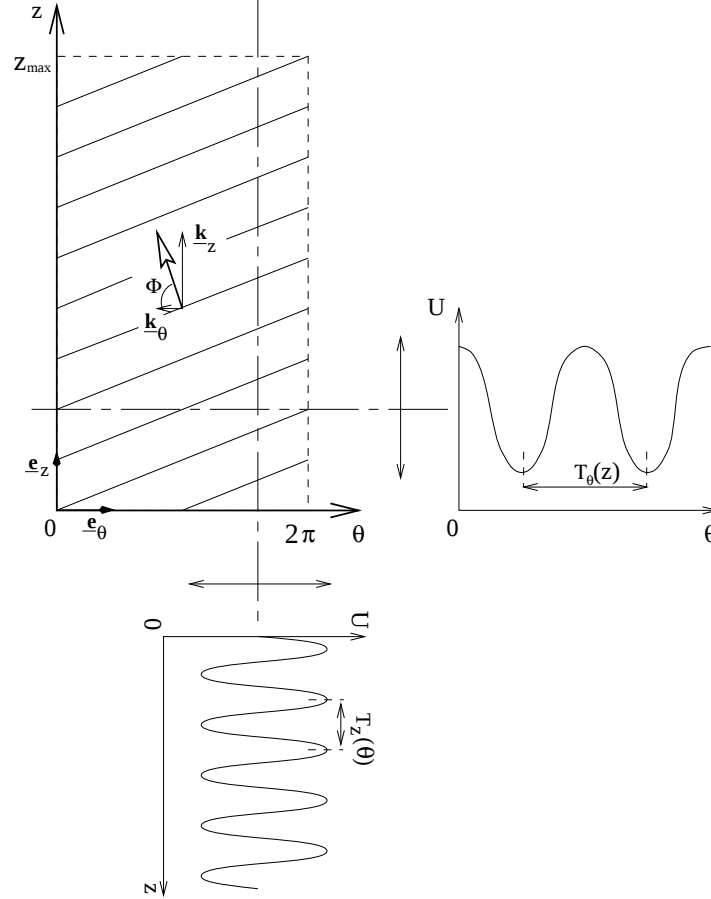


Figure 5.26: $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs

où $f_z = k_z \frac{D}{2\pi}$ et $f_\theta = k_\theta \frac{1}{2\pi}$ ainsi qu'une estimation de l'erreur (c.f. annexe C) :

$$\delta\Phi = \frac{2\pi}{D N_z \delta z} \left(\frac{k_\theta}{k_\theta^2 + k_z^2} \right)$$

Sur une génératrice de ce cylindre, on représente l'évolution des mêmes composantes en fonction de la distance axiale ($\frac{z}{D}$).

On représente également les lignes iso-valeurs des 3 composantes du champ de vorticité dans le plan perpendiculaire au plan du disque rotor contenant l'axe de l'éolienne (x, z).

5.6  olienne dans un écoulement axisymétrique

On représente sur la figure 5.27 les composantes U_r , U_θ et U_z de la vitesse en coordonnée cylindrique, sur les deux génératrices du cylindre appartenant au plan (x, z) , pour l'éolienne en écoulement axial uniforme.

Sur la figure suivante (figure 5.28), on présente la structure du sillage observé en aval d'une l'éolienne en écoulement axial uniforme : l'écoulement établi est stationnaire dans le repère de l'éolienne. Plus précisément, on représente les lignes iso-valeurs des composantes radiale, azimutale et axiale de vitesse, développé sur une portion de cylindre circulaire. On s'intéresse

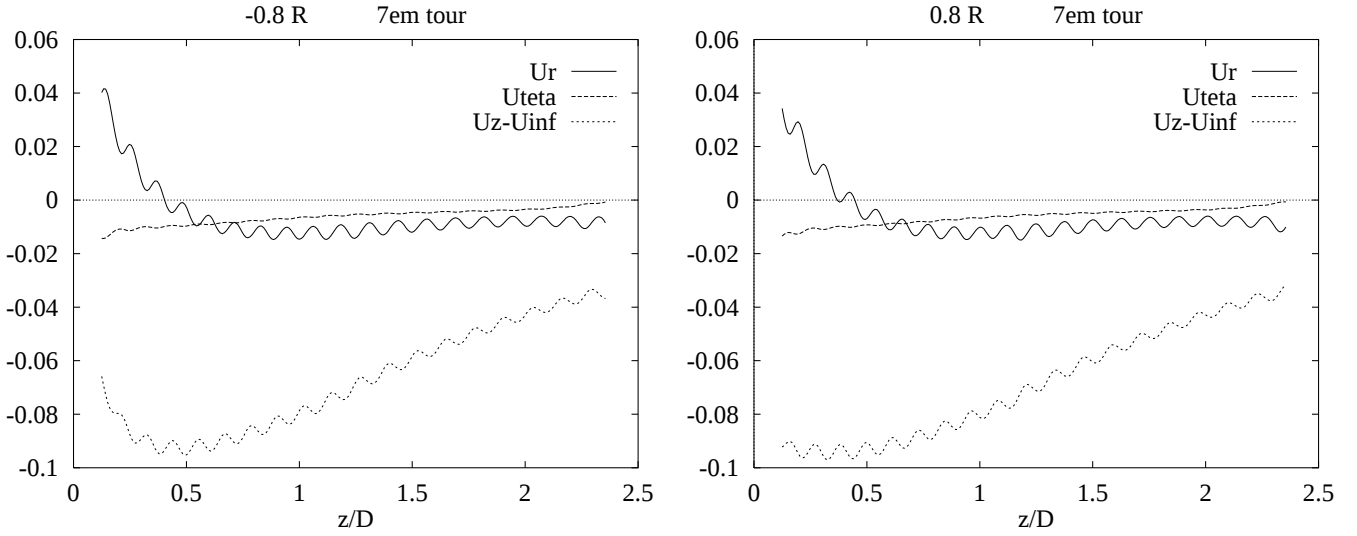


Figure 5.27: $\underline{U}_r$, $\underline{U}_\theta$ et $\underline{U}_z$ à $\pm 0.8R_{rotor}$ en aval de l'éolienne en écoulement axial

à la composante radiale qui manifestement a un comportement linéaire. Outre l'apparition d'harmoniques, le comportement linéaire peut être apprécié par la pente des lignes iso-valeurs, qui définit la vitesse d'échappement du sillage, et peut être comparée à la valeur issue d'une théorie linéaire. On représente l'autospectre bidimensionnel de la composante radiale sur la figure 5.29. La structure du champ observé correspond manifestement à une onde plane dont on peut facilement vérifier la direction de propagation. A la valeur $k_\theta = 3$ (c'est-à-dire le nombre Z de pales), correspond une valeur $k_z = 1.262$. Ces 2 vecteurs sont les composantes d'un vecteur d'onde, précisément celui de l'onde plane. On obtient donc :

$$\Phi = 22^\circ 50'$$

et :

$$\delta\Phi = 1^\circ 8'$$

On représente sur la figure 5.30 les lignes iso-valeurs des trois composantes de vorticité ainsi que son module, dans le plan méridien (x, z) .

5.7 Eolienne en dérapage

La même éolienne placée en dérapage fait apparaître les distorsions du sillage (le cylindre considéré n'est plus coaxial au rotor mais est aligné sur l'écoulement infini amont) (*c.f.* figure 5.31). Les effets non linéaires se manifestent de plusieurs façons :

- Les niveaux maximum diminuent. Cet effet peut probablement être attribué à la différence de pas du sillage selon que l'on se trouve proche ou non de l'axe de l'éolienne. Il en résulte une sorte d'homogénéisation qui se traduit par un effondrement des niveaux

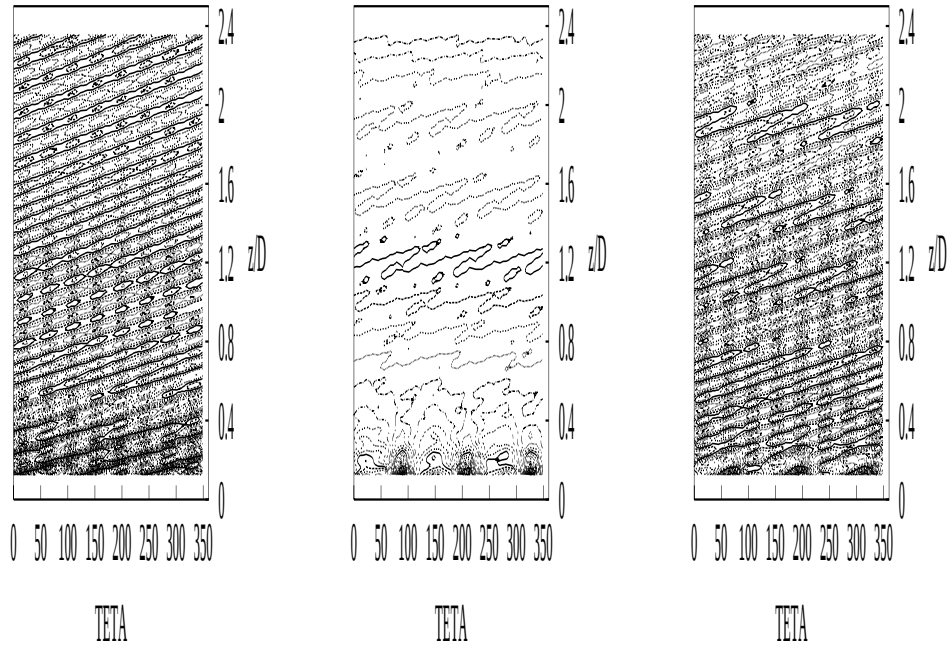


Figure 5.28: Iso-valeurs de $\underline{U}_r$, $\underline{U}_\theta$ et $\underline{U}_z$ en aval de l'éolienne en écoulement axial

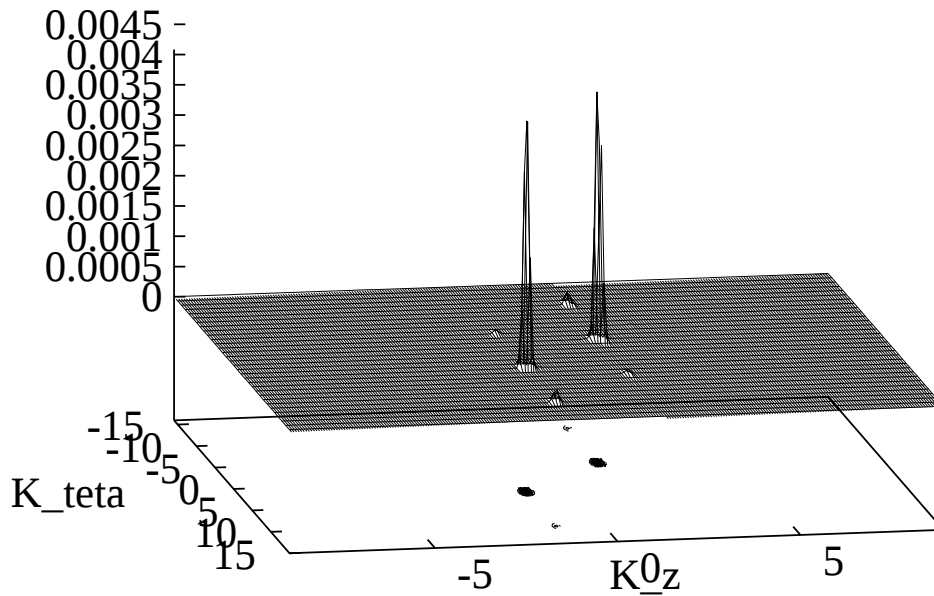


Figure 5.29: Autospectre bidimensionnel $S_{U_r U_r}(k_z, k_\theta)$ (écoulement axisymétrique)

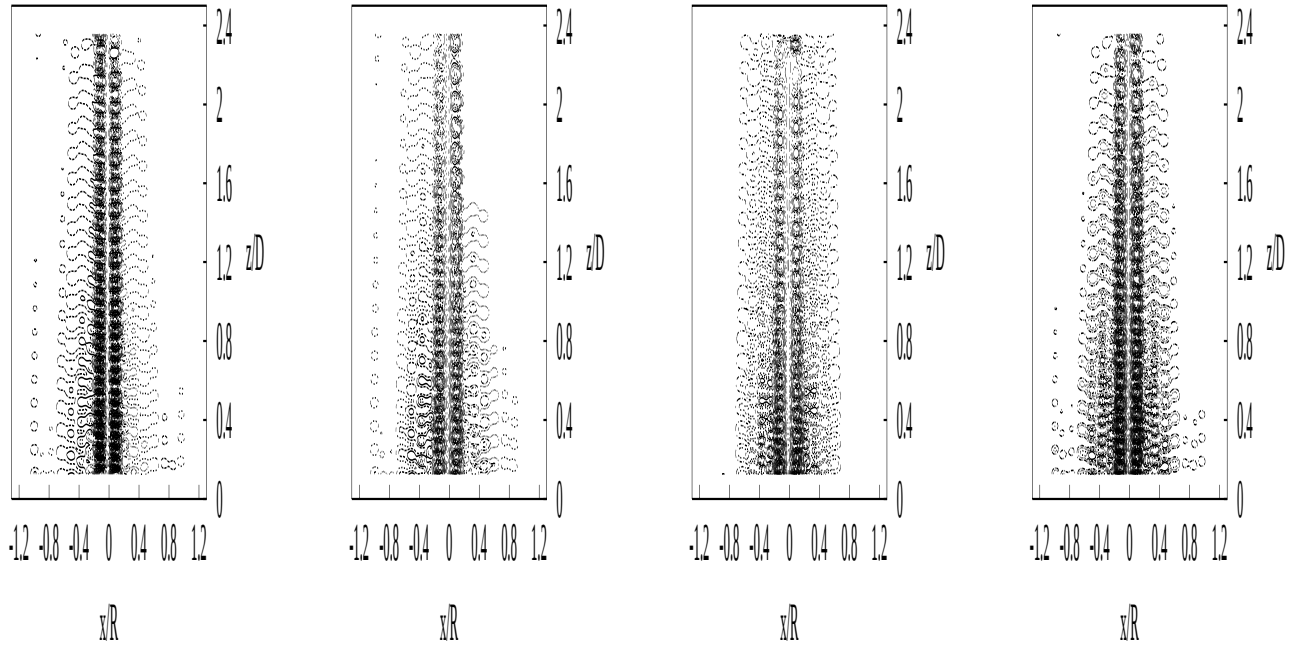


Figure 5.30: Iso-valeurs de $\underline{\omega}_x$, $\underline{\omega}_y$, $\underline{\omega}_z$ et $|\underline{\omega}|$ dans le plan (xz) en aval de l'éolienne en écoulement axial

maximums, comme dans un processus de diffusion, et par un élargissement des lignes iso-valeurs.

- Variation du pas de l'hélice à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval
- Contraction ou expansion du sillage.

Nous avons vu que le sillage en écoulement axial pouvait se caractériser par des hélicoïdes dont le pas pouvait se déterminer par un traitement d'une carte de vitesse pris sur un cylindre dans l'axe de l'hélice, une analyse spectrale de cette carte nous donnait le vecteur d'onde $\underline{k} = k_z \underline{e}_z + k_\theta \underline{e}_\theta$. Dans le cas où l'écoulement n'est plus axial, on ne peut pas s'appuyer sur un support symétrique. Quelques essais de mesures de carte de vitesse s'appuyant sur un support cylindrique décentré par rapport à l'axe de l'hélice et d'axe parallèle à l'écoulement incident ont été menés sans grands résultats. Voir figure 5.31.

On représente les lignes iso-valeurs des 3 composantes de $\underline{\omega}$ ainsi que son module dans le plan xz' , plan perpendiculaire au plan du disque rotor contenant l'axe de l'éolienne, où z' est le vecteur tangent à l'écoulement infini amont (c.f. figure 5.32).

On constate évidemment une inclinaison dans le plan xOz des iso-valeurs de $\underline{\omega}$, mais aussi dans le plan yOz' (c.f. figure 5.33), mettant ainsi en évidence le caractère tridimensionnel de l'écoulement que nous avons déjà vu dans la section 5.3.

Cela peut être interprété par le fait que l'augmentation de la vitesse de rotation (relation 5.5), provoque un échappement des filaments tourbillonnaires à une vitesse différente suivant

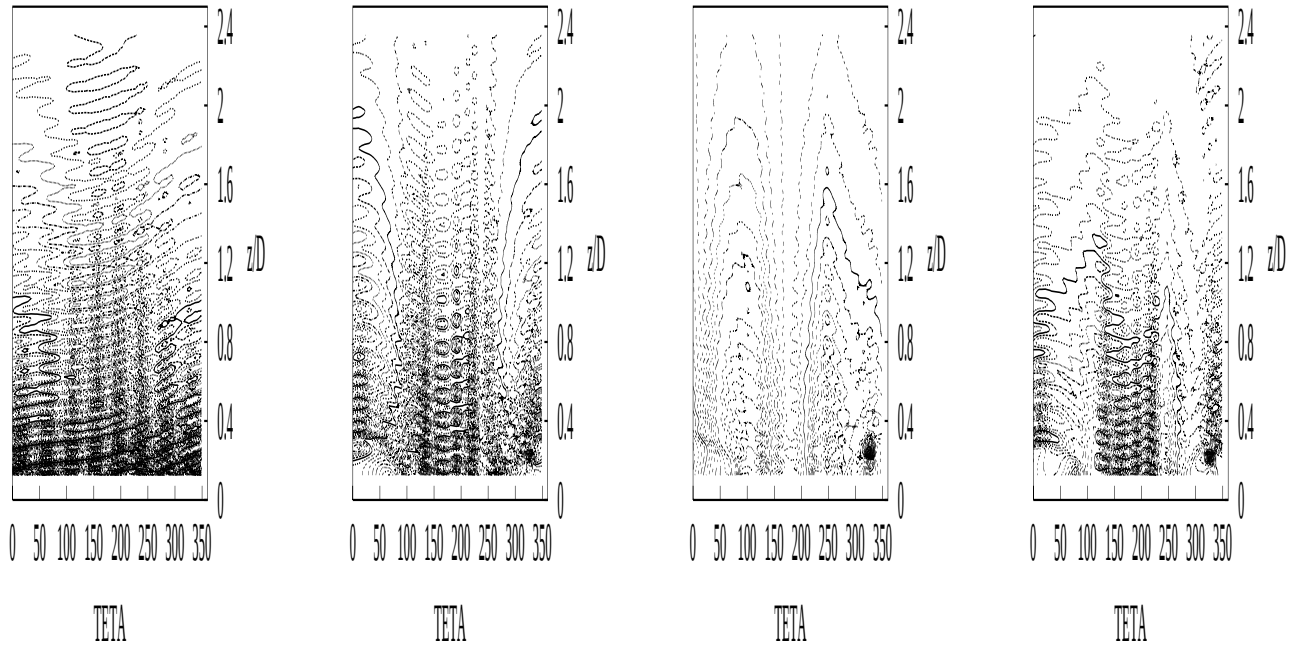


Figure 5.31: Iso-valeurs de $\underline{U}_r$ ($\gamma = 5^\circ$), $\underline{U}_r$ ($\gamma = 30^\circ$), $\underline{U}_\theta$ ($\gamma = 30^\circ$) et $\underline{U}_z$ ($\gamma = 30^\circ$) en aval de l'éolienne en dérapage

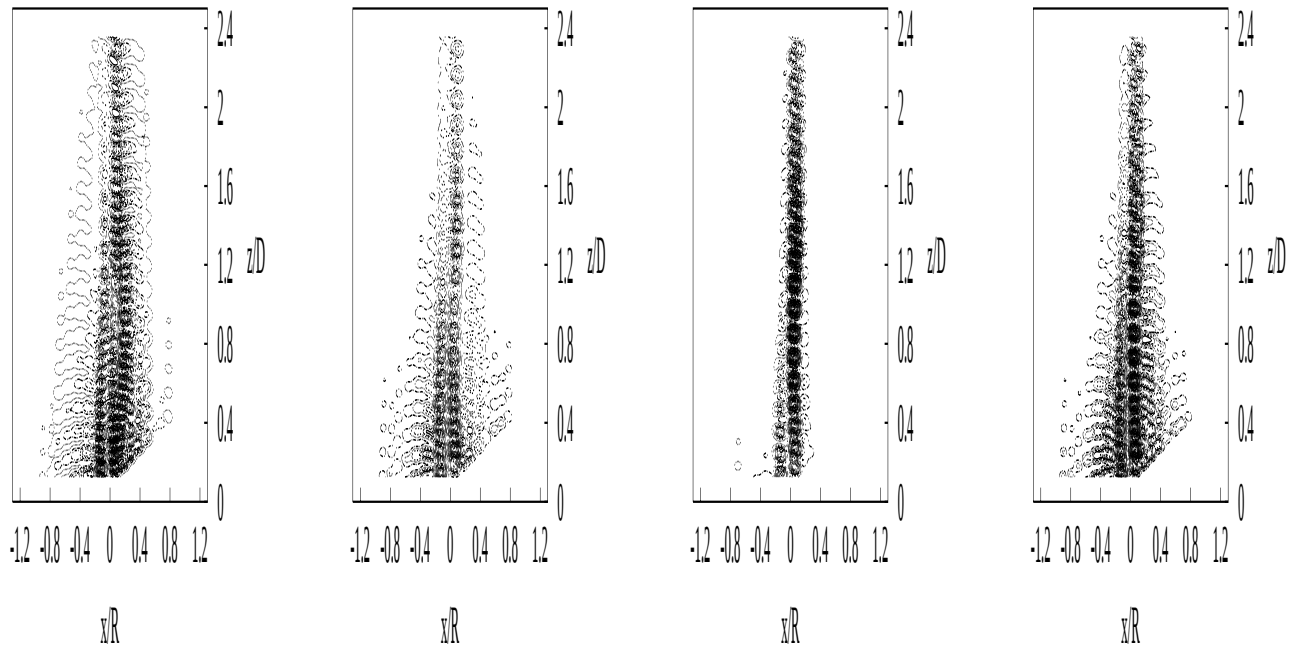


Figure 5.32: Iso-valeurs de $\underline{\omega}_x$, $\underline{\omega}_y$, $\underline{\omega}_z$ et $|\underline{\omega}|$ dans le plan (xz') en aval de l'éolienne en dérapage

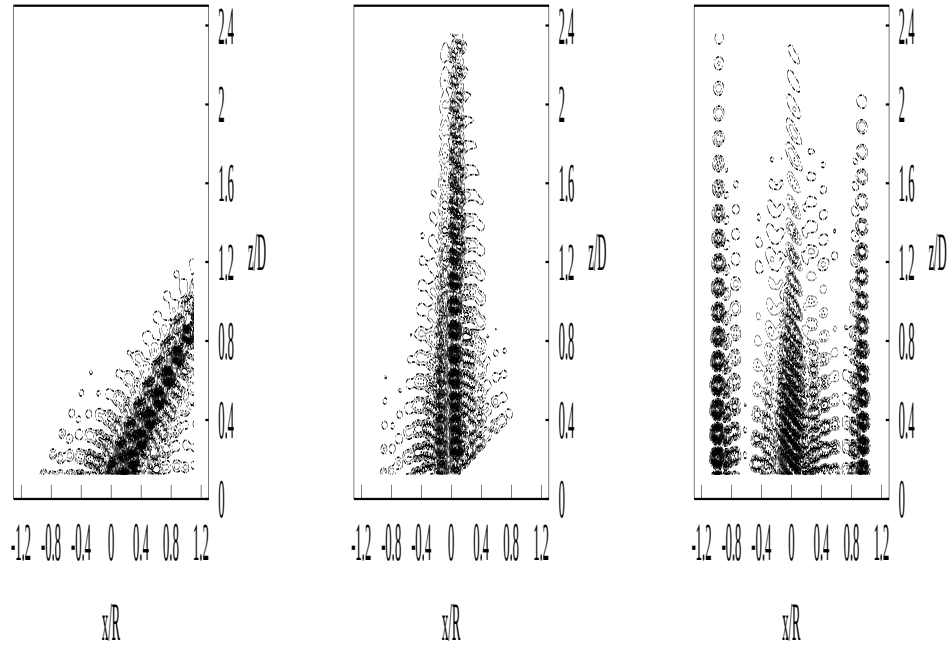


Figure 5.33: Iso-valeurs de $|\underline{\omega}|$ dans le plan (xz) , $|\underline{\omega}|$ dans le plan (xz') et $|\underline{\omega}|$ dans le plan (yz') en aval de l'éolienne en dérapage

la position angulaire de la pale. Ainsi les particules émises ont une composante suivant $\theta = \omega t + \theta_0$ qui varie suivant la position de la pale au cours de sa rotation. Cette interprétation est renforcée par la figure 5.32, qui montre la nature très différente du sillage en comparaison avec l'écoulement axial. On peut définir l'effet de souffle sur la figure 5.32(d) comme la zone où se produit une organisation tourbillonnaire parallèlement à l'axe de l'hélice. Cet effet provoque un dédoublement des structures tourbillonnaires de pied de pale, sensible sur une distance de $1,2D$ en aval de l'éolienne. Plus en aval, l'effet de l'écoulement incident désaxé redevient prédominant.

5.8 Conclusion

Lorsqu'une éolienne à axe horizontal est plongée dans un écoulement uniforme et parallèle à l'axe de cette dernière, l'écoulement est alors stationnaire dans le repère de l'hélice. L'analyse d'une quantité représentative du sillage (en l'occurrence la composante radiale de la vitesse), développée sur une portion de cylindre circulaire, fait apparaître un fonctionnement linéaire. En effet, la répartition spectrale de puissance $S_{u_r, u_r}(f_z, f_\theta)$ de cette composante fait émerger un pic, dont les fréquences correspondent aux composantes $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ d'un vecteur d'onde plane caractérisant l'échappement tourbillonnaire.

En revanche, lorsque l'éolienne est en dérapage, l'écoulement dans le repère de l'hélice est alors instationnaire. Cette instationarité est provoquée par les conditions non uniformes

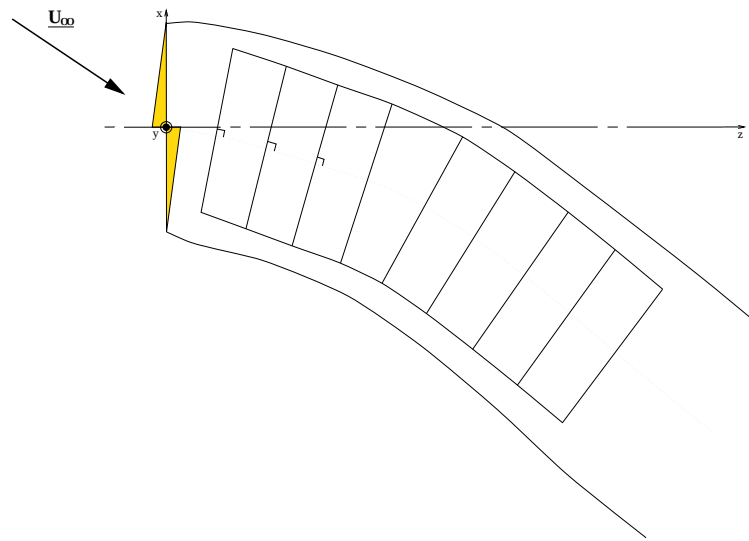


Figure 5.34: *Carte de vitesse alignée avec l'axe moyen du sillage*

rencontrées par les pales lors de leur mouvement de rotation. La représentation, sur la développée d'une surface cylindrique, de la composante radiale de vitesse dans cette instationarité périodique, fait apparaître un fonctionnement non linéaire. Cependant, afin d'obtenir plus de renseignements à partir du traitement effectué sur la carte de vitesse, correspondant à la développée de la surface cylindrique sur le plan (θ, z) , il faudrait que cette dernière soit coaxiale à l'axe moyen du sillage (*c.f.* figure 5.34).

Chapitre 6

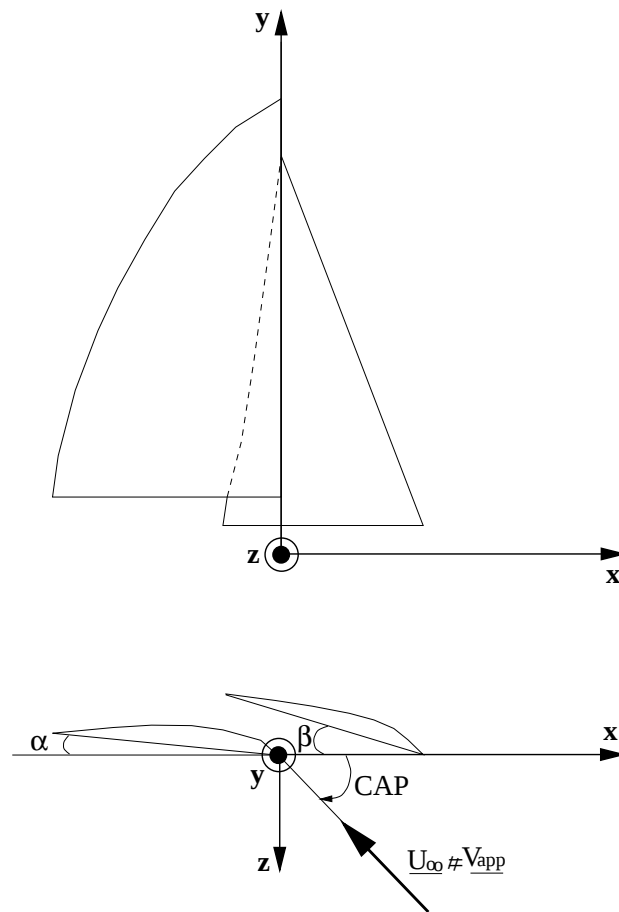
Application aux voiles de bateaux



AMERICA'S CUP '95. COPYRIGHT RESERVED
TEAM NZL ZEALAND SAILING AHEAD OF TEAM USA & SHIPS DURING
THE 1995 RACE ON 11 MAY
PHOTO CREDIT: K. COOK/SCIENCE / PPA MEDIALINK

Quelques définitions

<i>Allure aspirante</i>	: plage de cap où la force propulsive est induite par un écoulement laminaire sur les voiles
<i>Allure de près</i>	: désigne un cap où le voilier remonte le lit du vent au plus près
<i>Allure portante</i>	: plage de cap où la force propulsive provient d'une poussée type "parachute"
<i>Angle de cap</i>	: angle axe du bateau/vent apparent
<i>Angle de gîte</i>	: inclinaison du voilier
<i>Angle d'incidence</i>	: angle bas de la voile/vent apparent
<i>Angle d'ouverture</i>	: angle bas de la voile/axe du bateau
<i>Bôme</i>	: barre fixant la bordure de la grand-voile
<i>Bordure</i>	: côté bas d'une voile
<i>Chute</i>	: côté arrière d'une voile (bord de fuite)
<i>Corde</i>	: droite joignant les deux extrémités d'un profil
<i>Etai</i>	: câble soutenant le guindant de la voile d'avant
<i>Ecoute</i>	: câble relié au point d'écoute réglant l'ouverture de la voile
<i>Foc</i>	: voile située à l'avant
<i>Force de dérive</i>	: composante aérodynamique orthogonale à l'axe du voilier
<i>Force propulsive</i>	: composante aérodynamique parallèle à l'axe du bateau
<i>Génois</i>	: grand foc utilisé dans un vent modéré
<i>Gréement</i>	: ensemble de voiles d'un même voilier
<i>Gréement Marconi</i>	: ensemble de voiles triangulaires "classique"
<i>Guindant</i>	: côté avant d'une voile (bord d'attaque)
<i>Lattes</i>	: baguettes renforçant la grand-voile
<i>Match racing</i>	: régate confrontant deux voiliers sur un parcours donné
<i>Point d'amure</i>	: extrémité amont et basse d'une voile
<i>Point d'écoute</i>	: extrémité avale et basse d'une voile
<i>Point de drisse</i>	: extrémité haute d'une voile
<i>Portance</i>	: composante aérodynamique orthogonale au vent apparent
<i>Profil</i>	: section horizontale d'une voile
<i>trainée</i>	: composante aérodynamique parallèle au vent apparent
<i>Vent réel</i>	: vent soufflant effectivement sur le plan d'eau
<i>Vent apparent ou relatif</i>	: vent perçu par le voilier, compte tenu de sa vitesse propre
<i>Vrillage</i>	: différence d'orientation des cordes des profils de la voile

Figure 6.1: *Repère et angles*

- α angle d'ouverture de la grand-voile
- β angle d'ouverture du génois

Introduction

La simulation numérique d'écoulement autour de voiles de navire peut être obtenu à partir de modèles développés pour l'aéronautique. Bien que cela puisse fournir un point de départ, on s'est rapidement rendu compte que les aspects originaux du problème, tel que l'écoulement complètement instable dans lequel fonctionne habituellement les voiles, nécessite un effort significatif avant qu'une quelconque prédiction utile puisse être atteinte [60, 61]. Une part importante du travail numérique a été effectué ces dernières années en ce qui concerne le problème de l'interaction fluide structure. L'originalité des voiles tient dans sa flexibilité importante, si bien qu'une théorie non linéaire a dû être développée pour les calculs de structure [62, 63, 64]. Le deuxième point, à savoir l'instabilité des écoulements rencontrés, a été moins étudié bien que l'on sache qu'il peut être à l'origine de variations de pressions importantes sur les voiles. Il y a encore un manque de données expérimentales sur ce point et aucun progrès ne peut être envisagé dans ce domaine, sans indication précise incluant simultanément les mouvements du bateau, la répartition de pression sur les voiles et leurs géométries. Néanmoins nous avons essayé de développer un modèle intégrant autant que possible tous ces effets.

Nous utilisons pour la partie fluide, un code de calcul tridimensionnel d'écoulement tourbillonnaire instationnaire, par une méthode particulière. Sa caractéristique principale est de traiter le sillage discrétisé sous forme de particules élémentaires dotées d'une intensité tourbillonnaire et d'une vitesse, leur évolution au cours du temps étant régie par l'équation d'Helmholtz : cette approche lagrangienne permet un temps de calcul réduit tout en n'ayant pas à faire d'hypothèses préalables quant à la forme du sillage (*c.f.* chapitre 1).

Pour la partie solide, nous utilisons un code de calcul coque élastique utilisant une discrétisation par éléments finis. Cependant, on verra par la suite que le problème de structure est résolu en utilisant un algorithme en deux étapes (*c.f.* section 6.2). La première étape que nous nommerons "déformation souple", se traduit en général par de grands déplacements et est essentiellement observée au cours des régimes transitoires, tels que le gonflement de la voile et le virement de bord. La deuxième étape, que nous nommerons "déformation élastique", fait intervenir les petits déplacements.

On présentera des résultats sur les interactions entre une grand-voile et un génois, mais

également des résultats concernant les interactions entre plusieurs voiliers (*c.f.* section 6.3). Nous mettrons en évidence des problèmes liés à la surface de la mer (*c.f.* section 6.4.1) et aux mouvements du bateau (*c.f.* section 6.4.2). Pour finir, nous présenterons des résultats obtenus à partir d'un couplage aéroélastique dynamique, fondé sur une double linéarisation autour d'une position d'équilibre regroupant un certain état du fluide et une forme de voile issue du mode de déformation souple (*c.f.* section 6.2.1).

6.1 Le modèle numérique

Nous n'allons pas dans cette section détailler le principe de la méthode particulière qui fait l'objet d'un chapitre à part entière (*c.f.* chapitre 1), mais nous allons nous intéresser aux traitement des parois solides. En effet nous allons considérer deux types de corps : le premier étant la surface portante discrétisée par une distribution surfacique de doublet, et le second un corps non portant, qui peut être par exemple le pont du bateau ou la surface libre, discrétisé par une distribution surfacique de sources.

La vérification de la condition de non pénétration sur les frontières solides et l'incompressibilité du fluide conduisent à définir un problème de Neumann extérieur pour les potentiels ϕ_σ et ϕ_{sp} correspondant respectivement aux potentiels de perturbations dus au corps non portant et à la surface portante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_{sp} = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \\ \frac{\partial\phi_{sp}}{\partial\mathbf{n}_{sp}} = -(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_\omega + \nabla\phi_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{sp} & \text{sur } \partial\mathcal{D}_{sp} \\ \lim_{|\mathbf{MP}| \rightarrow \infty} \nabla\phi_{sp} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (6.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_\sigma = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \\ \frac{\partial\phi_\sigma}{\partial\mathbf{n}_\sigma} = -(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_\omega + \nabla\phi_{sp}) \cdot \mathbf{n}_\sigma & \text{sur } \partial\mathcal{D}_\sigma \\ \lim_{|\mathbf{MP}| \rightarrow \infty} \nabla\phi_\sigma = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (6.2)$$

où M est un point de $\mathcal{D}$ et P est un point de la surface solide $\partial\mathcal{D}_\sigma$ ou $\partial\mathcal{D}_{sp}$.

Ces deux problèmes couplés sont résolus séquentiellement.

Le potentiel ϕ_{sp} est résolu par une méthode intégrale : par application de la troisième formule de Green, ϕ_{sp} s'exprime en fonction d'une distribution surfacique de doublets normaux μ sur $\partial\mathcal{D}_{sp}$:

$$\phi_{sp}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}_{sp}} \mu(P) \frac{\mathbf{MP} \cdot \mathbf{n}_{sp}(P)}{|\mathbf{MP}|^3} ds(P) \quad (6.3)$$

La distribution de doublets normaux μ sur la surface, est déterminée par la vérification de la condition de glissement. On déduit alors le champ de vitesse des équations (6.1 (b)) et (6.3) par :

$$\mathbf{U}_{\phi_{sp}}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}_{sp}} \mu(P) \nabla_M \left(\frac{\mathbf{MP} \cdot \mathbf{n}_{sp}(P)}{|\mathbf{MP}|^3} \right) ds(P) \quad (6.4)$$

De même ϕ_σ est résolu par une méthode intégrale : par application de la troisième formule de Green, ϕ_σ s'exprime en fonction d'une distribution surfacique de sources σ sur $\partial\mathcal{D}_\sigma$:

$$\phi_\sigma(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}_\sigma} \sigma(P) \frac{1}{|\underline{\mathbf{MP}}|} ds(P) \quad (6.5)$$

La distribution de sources σ sur la surface, est déterminée par la vérification de la condition de glissement. On déduit alors le champ de vitesse des équations (6.2 (b)) et (6.5) par :

$$\underline{\mathbf{U}}_{\phi_\sigma}(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{D}_\sigma} \sigma(P) \underline{\nabla}_M \left(\frac{1}{|\underline{\mathbf{MP}}|} \right) ds(P) \quad (6.6)$$

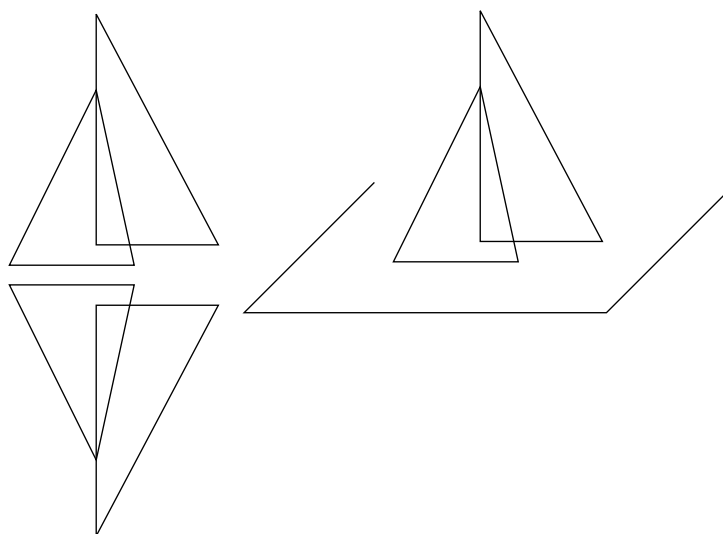
Lors de la formulation numérique du problème, on sera amené à discrétiser l'intégrale sur les surfaces $\partial\mathcal{D}_\sigma$ et $\partial\mathcal{D}_{sp}$, en approchant le squelette des surfaces portantes et non portantes par un ensemble de facettes quadrangulaires planes, $N_{f_{sp}}$ support de la distribution de doublet, et N_{f_σ} support de la distribution de sources, que l'on suppose constante sur chacune d'elles. Bien que le modèle numérique ait déjà été testé pour différents problèmes aérodynamiques, une série de tests comparatifs numérique/expérience (en soufflerie) a été effectuée sur des voiles indéformables afin de valider la modélisation fluide de notre code numérique. L'ensemble des résultats est accessible dans [65], cependant un bref récapitulatif est présenté dans le tableau suivant (cf tableau 6.1).

Il s'agit de cinq génois différents de type 12m *JI* (ancienne jauge de l'America) placés dans un écoulement à 11, 15 et 19 degrés d'incidence. La bordure du génois étant en contact avec le sol du tunnel, un double modèle numérique est utilisé de manière à prendre en compte le plan de glissement. Il s'agit de remplacer la voile et son support par deux voiles symétriques par rapport au plan considéré (*c.f.* figure 6.2). De façon discrète, des arguments de symétrie utilisés dans le calcul des coefficients de la matrice d'influence évitent de doubler la taille de celle-ci.

Les résultats concernant la portance (Cl) sont remarquables (moins de 5% d'écart). Par contre la trainée (Cd) est sous-évaluée, ce qui ne nous surprend pas car seul la trainée induite est calculée.

6.2 Interaction fluide/structure

Si ce problème appartient à la catégorie générale des études fluide/structure, les caractéristiques mécaniques dans la fabrication des voiles sont à l'origine de difficultés assez nouvelles : en effet, dès que la voile se “gonfle” dans le vent, elle est censée se comporter comme une membrane rigide, et la théorie générale des petits déplacements peut être appliquée. Cela tient tant que le module de Young des fibres est suffisamment grand pour que leur allongement reste faible. Cela étant, le passage d'un état “gonflé” à un autre est

Figure 6.2: *Méthode des images*

	foc type 1.			foc type 2.			foc type 3.		
	11°	15°	19°	11°	15°	19°	11°	15°	19°
expérience									
Cl.....	0.88	1.21	1.44	0.75	1.10	1.37	1.07	1.33	1.48
Cd.....	0.095	0.14	0.22	0.066	0.11	0.18	0.11	0.17	0.26
numérique									
Cl.....	0.88	1.14	1.37	0.80	1.17	1.32	1.08	1.34	1.55
Cd.....	0.053	0.09	0.13	0.05	0.10	0.13	0.08	0.12	0.16

	foc type 4.			foc type 5.		
	11°	15°	19°	11°	15°	19°
expérience						
Cl.....	1.08	1.37	1.54	0.83	1.19	1.41
Cd.....	0.13	0.18	0.25	0.08	0.13	0.21
numérique						
Cl.....	1.08	1.38	1.55	0.82	—	1.49
Cd.....	0.095	0.13	0.17	0.05	0.07	0.14

Tableau 6.1: *Comparaison entre données numériques et expérimentales.*

accompli grâce à la flexibilité de la voile plus qu'à sa déformation. En conséquence une voile peut voir sa forme évoluer sans modifier son énergie interne. Ce phénomène peut d'ailleurs être prévu par un modèle mécanique qui intègre les grands déplacements, mais nous avons considéré que ce type de modèle était trop complexe pour être utilisé dans un premier calcul fluide/structure.

Cette considération nous amène à une méthode qui distingue deux étapes dans la prédiction de l'équilibre de la forme de la voile dans un écoulement donné. La méthode tridimensionnelle particulière est couplée avec un algorithme d'optimisation qui calcule une forme de la voile en la considérant comme parfaitement souple et inextensible. C'est-à-dire que dans cette première étape, on considère une déformation sans traction : l'idée de ce couplage numérique est de calculer le champ de pression aérodynamique sur la géométrie de départ (G^0), et d'en évaluer l'évolution à partir de la maximisation du travail des forces aérodynamiques. Un schéma itératif est alors utilisé pour obtenir la forme convergée de la voile, autrement dit, la forme d'équilibre de celle-ci dans un écoulement stationnaire, avant de subir une extension élastique de son tissu.

Une fois ce calcul accompli, la même méthode particulière est alors couplée avec une méthode classique d'éléments finis basée sur un modèle de coque élastique, lequel calcule les contraintes sur la voile en considérant l'hypothèse des petits déplacements. L'idée de ce couplage consiste à déterminer le couple champ de déplacement/champ de saut de pression ($\underline{\mathbf{V}}, P$) tel que :

- $\underline{\mathbf{V}}$ soit la solution du calcul élastique prenant comme second membre le champ de saut de pression P
- P corresponde au champ de pression stationnaire associé à la géométrie $G^\alpha + \underline{\mathbf{V}}$ (les caractéristiques de l'écoulement étant données)

Un schéma itératif est alors utilisé pour obtenir la forme finale de la voile, ainsi que les contraintes internes du tissu.

6.2.1 Algorithme pour la déformation souple

Dans cette étape, la voile est considérée comme infiniment souple et inextensible, c'est-à-dire qu'on néglige non seulement les variations d'énergie interne provenant des déformations élastiques, mais également celles provenant des déformations de flexion. Toutes les formes compatibles auront donc la même énergie interne et la seule contribution de la variation d'énergie du système est due au travail des forces de pression.

Notons $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}})$ le déplacement de la voile et $\mathcal{E}$ l'ensemble des déplacements admissibles qui vérifie la contrainte d'inextensibilité. On note $P(\underline{\mathbf{X}})$ la différence de pression entre l'intrados et l'extrados. Considérons une forme initiale ayant pour géométrie G^0 . Avec la pression P^0 calculée pour la géométrie G^0 dans un écoulement stationnaire, le système non linéaire à

résoudre s'écrit :

$$\max_{\underline{\mathbf{U}} \in \mathcal{E}} \left(\int_{G^0} \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot P(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{n}} dx \right) \quad (6.7)$$

Le champ de déplacement maximal $\underline{\mathbf{U}}^1$ est alors utilisé pour évaluer une nouvelle géométrie $G^1 = G^0 + \underline{\mathbf{U}}^1$. Les forces de pression sont calculées sur la nouvelle géométrie G^1 et un schéma itératif est utilisé jusqu'à la convergence.

D'un point de vue discret, la voile est constituée de facettes quadrangulaires sur lesquelles la pression est calculée dans le modèle aérodynamique. De ce champ de pression, on détermine une force $\underline{\mathbf{F}}_i$ responsable du déplacement, en chaque noeud $\underline{\mathbf{X}}_i$ du réseau ; cette force étant calculée à partir de la pression sur les différentes facettes adjacentes au noeud considéré. Le problème d'optimisation consiste à maximiser les déplacements en considérant les efforts $\underline{\mathbf{F}}_i$ en chacun des noeuds $\underline{\mathbf{X}}_i$ (*c.f.* eq. 6.8 (a)). La contrainte d'inextensibilité s'écrit en considérant que la longueur des segments qui joignent les noeuds entre eux doit rester constante pendant tout le calcul (*c.f.* eq. 6.8 (b)), la taille initiale de chaque segment étant calculée sur la géométrie G^0 . Le problème discret s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max \left(\sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{F}}_i \cdot (\underline{\mathbf{X}}_i - \underline{\mathbf{X}}_i^0) \right) & (a) \\ \left(\underline{\mathbf{X}}_i - \underline{\mathbf{X}}_{v(i)} \right)^2 = \left(\underline{\mathbf{X}}_i^0 - \underline{\mathbf{X}}_{v(i)}^0 \right)^2 \quad i = 1, \dots, N & (b) \\ \underline{\mathbf{X}}_{bl(i)} = \underline{\mathbf{X}}_{bl(i)}^0 \quad i = 1, \dots, BL & (c) \end{array} \right. \quad (6.8)$$

où $v(i)$ est l'ensemble des indices des noeuds adjacent au noeud i , $bl(i)$ est l'ensemble des BL noeuds dont les conditions sont fixées, et N le nombre de noeuds du réseau. le problème est résolu par une méthode classique d'optimisation sous contraintes non linéaires développée par [66] [67].

Résultats sur un génois

Une forme initiale du génois est définie en considérant un rond de chute, de bordure et de guindant, par une flèche maximale et sa position en proportion de la longueur du coté concerné, dans le plan passant par les points d'amure, de drisse et d'écoute. Ces trois points représentant le triangle de base. Le creux du génois est déterminé par une valeur de creux maximum et de sa position, en proportion de la longueur de corde, pour un certain nombre de cordes de la voile. Dans cette étude, le creux est défini en bas, quart bas, mi-hauteur, quart haut et en haut de la voile. De plus, on définit le vrillage par un angle entre les cordes concernées et la corde bas, ou éventuellement par une flèche maximale et sa position en proportion de la longueur de chute, dans le plan perpendiculaire au plan passant les trois

points précédents. On définit également une ouverture de voile par une valeur angulaire entre la corde bas et l'axe du navire.

Le génois est alors discrétisé en 8×8 facettes qui est un bon compromis entre la précision de la méthode particulière et le temps CPU nécessaire pour l'algorithme d'optimisation sous contrainte. La forme d'équilibre est calculée pour des incidences de 13 et 23 degrés. La convergence est obtenue après cinq itérations de couplage, lorsque il n'y a plus d'évolution significative de la géométrie. Notons G^{13} et G^{23} les formes convergées. La forme initiale et les différentes géométries convergées sont représentées dans le plan (x, z) (*c.f.* figure 6.1), correspondant à une vue de dessus, sur la figure 6.3.

De plus, notons S^0 la surface de G^0 et considérons la norme discrète :

$$| G^\alpha - G^0 | = \frac{1}{\sqrt{S^0}} \max_{i=1,N} || \underline{\mathbf{X}}_i^\alpha - \underline{\mathbf{X}}_i^0 || \quad (6.9)$$

La comparaison entre la forme initiale et les formes finales donne :

$$\begin{aligned} | G^{13} - G^0 | &= .075 \\ | G^{23} - G^0 | &= .077 \end{aligned}$$

Il est difficile de commenter ces calculs car il n'existe pas de résultats expérimentaux valables pour chacun de ces cas. Cependant, les formes convergées semblent mieux adaptées aux formes réelles, la géométrie G^0 ayant une forme peu réaliste. Notons que les caractéristiques des géométries des formes résultantes sont très différentes de G^0 ce qui tend à justifier l'utilisation du premier mode de déformation.

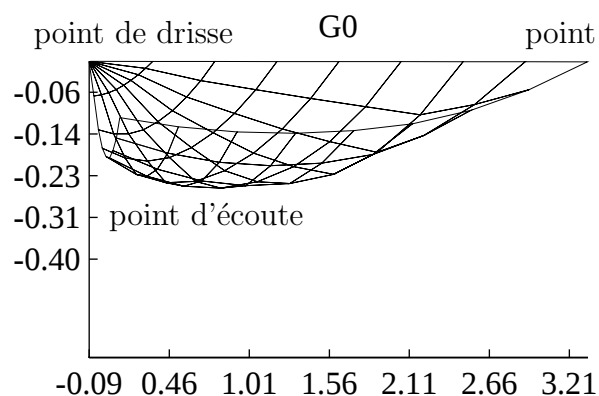
Simulation du virement de bord

Afin d'examiner le comportement de la méthode de couplage, un autre calcul est effectué. Une géométrie G^{23} , discrétisée en 8×8 facettes, dont les points d'amure, d'écoute et de drisse sont situés dans le plan (x, y) , est placée dans un écoulement avec un angle d'incidence de -23° . La description du calcul est représenté dans le plan (x, z) sur la figure 6.4.

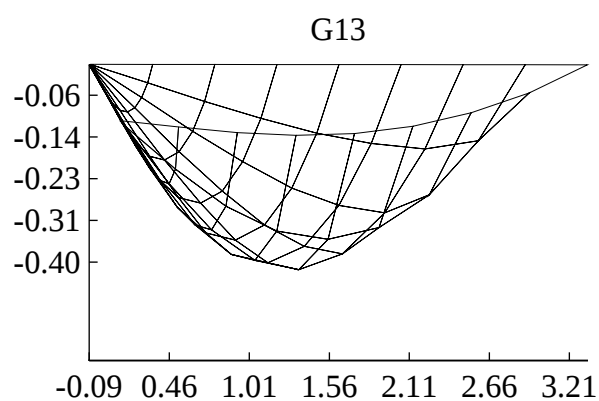
Pour tester la consistance de la méthode, on compare la géométrie de départ G^{23} à la géométrie finale G^{-23} par la norme précédemment définie :

$$| G^{23} - \mathcal{S}(G^{-23}) | = .001 \quad (6.10)$$

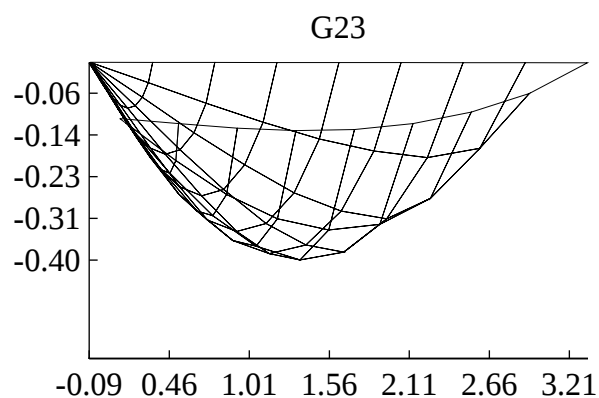
où $\mathcal{S}(G^{-23})$ représente la forme symétrique de G^{-23} par rapport au plan passant par les points d'amure d'écoute et de drisse. Du point de vue qualitatif et quantitatif, ces résultats peuvent être satisfaisants.



Géométrie G^0			
Hauteur	Creux max	Position du creux max	Vrillage
Haut	0.13	0.50	00.0
$\frac{3}{4}$ Haut	0.13	0.50	25.2
Milieu	0.09	0.37	14.7
$\frac{1}{4}$ Bas	0.10	0.38	06.7
Bas	0.05	0.50	00.0



Géométrie G^{13}			
Hauteur	Creux max	Position du creux max	Vrillage
Haut	0.13	0.50	00.0
$\frac{3}{4}$ Haut	0.31	0.51	17.4
Milieu	0.26	0.51	12.1
$\frac{1}{4}$ Bas	0.21	0.50	05.5
Bas	0.04	0.50	00.0



Géométrie G^{23}			
Hauteur	Creux max	Position du creux max	Vrillage
Haut	0.13	0.50	00.0
$\frac{3}{4}$ Haut	0.33	0.50	16.6
Milieu	0.28	0.50	11.3
$\frac{1}{4}$ Bas	0.21	0.50	07.0
Bas	0.04	0.50	00.0

Figure 6.3: Géométrie G^0 , G^{13} et G^{23} vue de dessus

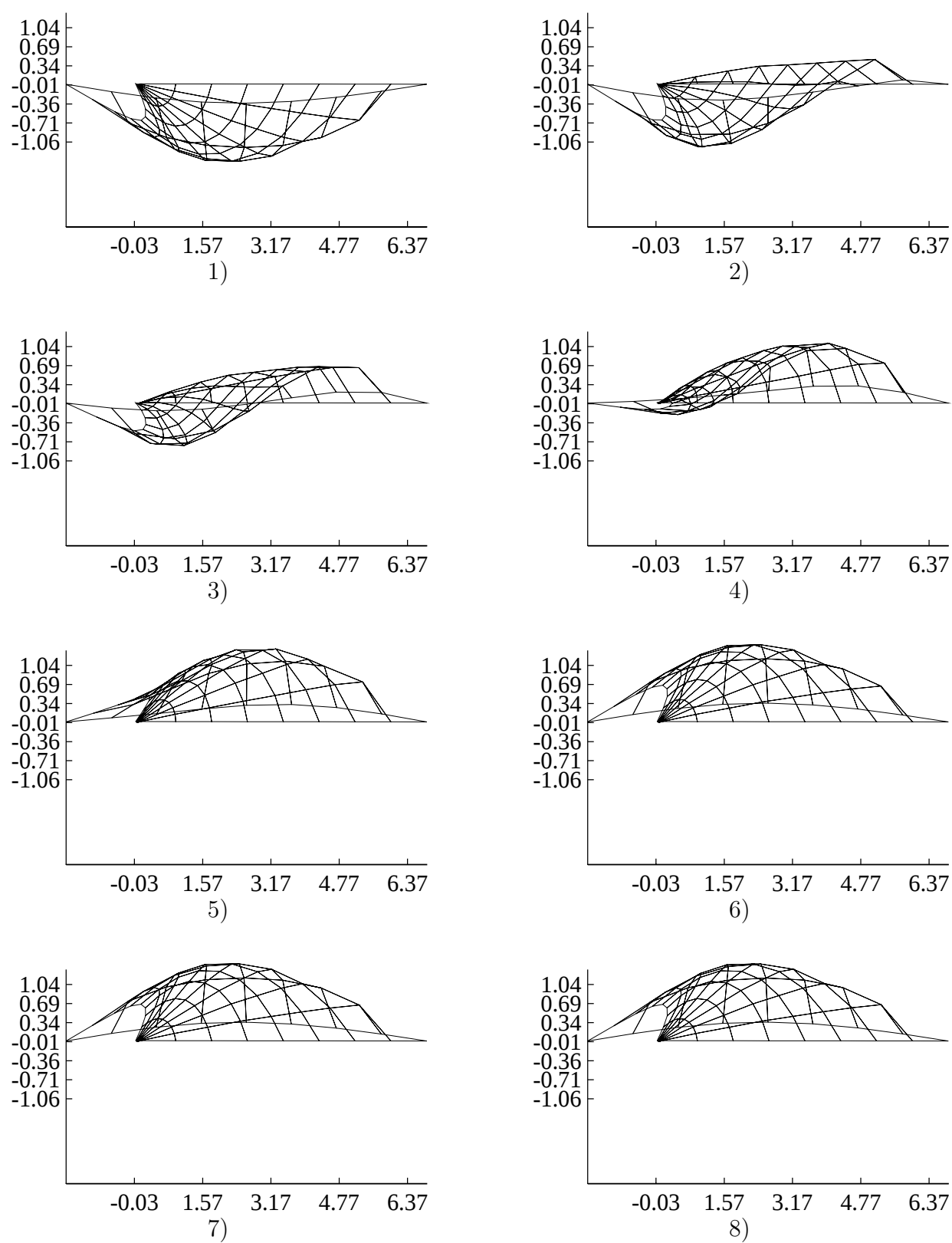


Figure 6.4: *Virement de bord vue de dessus*

6.2.2 Algorithme pour la déformation élastique - Calcul des contraintes

On considère maintenant la voile correctement chargée, c'est-à-dire que la voile s'ajuste parfaitement à l'écoulement incident, et donc aucun déplacement en flexion ne sera attendu. Sa forme convergée est utilisée dans le second calcul qui prend en compte l'élasticité des fibres. Désormais l'élasticité de la voile étant considérée, la restriction principale dans cette partie, concerne les petits déplacements. Cette hypothèse est valide tant que le module de Young reste grand ($\approx 50 \text{ MPa}$). (Par exemple, une fibre cylindrique, de rayon de $10^{-4}m$, de longueur $1m$, fixé à l'une de ses extrémités, et subissant à l'autre une force de 9.81 N s'allongera seulement de $6 \cdot 10^{-3}m$).

Pour le calcul des déplacements élastiques, un modèle de coque fine élastique est couplée avec la méthode particulière. La théorie des coques élastiques est détaillée dans [68] et la méthode utilisée pour la programmer est présentée en [69]. Rappelons l'idée que l'approximation des corps minces est de diviser l'équation élastique en deux problèmes différents : le problème membranaire (traction), qui permet d'évaluer la déformation plane induite par un chargement plan, et le problème de flexion, qui estime les déplacements normaux correspondants à un chargement normal ([70] P.67 et p.73) :

$$\begin{cases} -2 \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial \epsilon_{ij}(u,v)}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \epsilon_{kk}(u,v)}{\partial x_i} \right] = F_i \quad (i,j,k) \in \{1,2\} \\ \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w = F_3 \end{cases} \quad (6.11)$$

où E correspond au module d'Young, ν au coefficient de poisson, h à l'épaisseur, (u,v,w) aux déplacements de l'élément de surface et $\epsilon(u,v)$, représente le tenseur des déformations planes, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} & \epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (6.12)$$

Avec l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, la surface de la voile est discrétisée en N^t facettes triangulaires, sur lesquelles la matrice élémentaire de rigidité est évaluée. L'assemblage de ces matrices élémentaires donne la matrice de rigidité globale K^α dépendant de la géométrie G^α de la voile. Notons que, le calcul élastique étant linéaire, la matrice de rigidité K^α est calculée une fois pour toutes. Le problème couplé à résoudre s'écrit :

$$K^\alpha \cdot \underline{\mathbf{U}} - P(G^\alpha + \underline{\mathbf{U}}) = 0 \quad (6.13)$$

où $P(G^\alpha + \underline{\mathbf{U}})$ représente le champ de saut de pression calculée par la méthode particulière sur la géométrie G^α , en considérant le champ de déplacement $\underline{\mathbf{U}}$.

Notons que d'un point de vue discret, la convergence de la méthode directe de couplage ne peut pas être atteinte. En effet si l'algorithme de couplage s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{U}}^0 = 0 \\ P^n = P(G^\alpha + \underline{\mathbf{U}}^n) \\ \underline{\mathbf{U}}^{n+1} = (K^\alpha)^{-1} P^n \end{cases} \quad (6.14)$$

Des oscillations parasites sont observées sur la chute. Ce phénomène peut être expliqué par le fait qu'avec un tel couplage, le champ de pression n'est réactualisé qu'une fois prédite la totalité de la déformation appliquée à la géométrie. Ce qui entraîne une surestimation des contraintes. Or d'un point de vue expérimental, le champ de pression évolue simultanément avec la déformation de la voile. Pour parer cette difficulté, une procédure de sous-relaxation est mise en place de façon à donner un temps virtuel au calcul des contraintes élastiques, et ainsi, de recalculer la pression avant que la voile n'ait convergée vers sa solution élastique, évaluée par la méthode des éléments finis. Ainsi la formulation utilisée s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{U}}^0 = 0 \\ P^n = P(G^\alpha + \underline{\mathbf{U}}^n) \\ \delta \underline{\mathbf{U}}^n = (K^\alpha)^{-1} P^n \\ \underline{\mathbf{U}}^{n+1} = (1 - \omega) \cdot \underline{\mathbf{U}}^n + \omega \cdot \delta \underline{\mathbf{U}}^n \end{cases} \quad (6.15)$$

où w correspond au coefficient de relaxation.

Les calculs suivants ont été effectués avec une forme G^{23} . L'incidence est bien sur de 23° et deux vitesses de vent ont été utilisées 20 nds (10.3 ms^{-1}) et 30 nds (15.4 ms^{-1}). la valeur du module d'Young, du coefficient de poisson et de l'épaisseur sont respectivement 50 MPa , 0.3 et $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Le tissu est considéré comme isotrope. Dans chacun des cas w est égal à 0.1 , et 20 itérations de couplage ont été nécessaires pour obtenir la solution convergée. Les formes finales appelées respectivement $G_{20 \text{ nds}}^{23}$ et $G_{30 \text{ nds}}^{23}$ ont une géométrie très proche de celle de G^{23} :

$$\begin{aligned} | G_{20 \text{ nds}}^{23} - G^{23} | &= 7.9 \cdot 10^{-3} \\ | G_{30 \text{ nds}}^{23} - G^{23} | &= 1.66 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Manifestement l'allongement des fibres reste petit même avec une vitesse de vent égal à 30 nds qui représente un vent fort. Il est cependant surprenant, que pour une géométrie finale proche de la géométrie initiale, l'algorithme nécessite un petit coefficient de relaxation pour converger. Cela est sûrement dû au fait, que de par sa fabrication, la rigidité de flexion est pratiquement nulle. Ainsi, dès qu'il n'y a pas adéquation entre la forme de la voile et le champ de pression, la rigidité de traction ne peut compenser le chargement extérieur, et les déplacements calculés par la méthode des éléments finis linéarisés sont donc surestimés. Pour appuyer nos affirmations, nous utilisons la géométrie initiale G^0 , correspondant à la forme initiale dans l'algorithme de déformation souple. En dépit du coefficient de relaxation,

l'angle et la vitesse du vent étant définis, l'algorithme de déformation élastique ne converge pas.

En conclusion, d'un point de vue aérodynamique, les différences réelles de comportement de voiles placées dans différents écoulements stationnaires sont dues à leur flexibilité. En effet, le deuxième pas de calcul qui met en oeuvre le calcul élastique ne change pas la forme globale de la voile. Cependant, ce calcul numérique reste utilisable pour évaluer les tensions internes, et en outre, reste une bonne façon de vérifier si le résultat du premier pas de calcul est cohérent. En effet, l'exemple ci-dessus prouve que si tel n'est pas le cas, la convergence ne peut pas être respectée.

6.3 Interaction entre les voiles

6.3.1 Interaction grand-voile/génois

L'effet du génois sur la grand-voile est clairement détaillé dans [71, 72]. Le phénomène consiste en une déviation par le génois de l'écoulement sur la grand-voile, et donc en une diminution de l'incidence effective sur la grand-voile. Cela signifie que le pic de vitesse de succion de bord d'attaque sur la voile est réduit, entraînant ainsi la décroissance du saut de pression et donc une décroissance de la portance, mais par contre il diminue également le risque de décollement ; la grand-voile peut donc être efficace à des grand angles d'incidence sans décrochage.

Au contraire l'effet de la grand-voile sur le génois se traduit par une augmentation de la portance du génois. En effet la chute du génois est dans une zone dépressionnaire du fait de la présence de l'extrados de la grand-voile, l'écoulement s'en trouve donc accéléré sous le vent du génois, ce qui entraîne l'augmentation de portance. De plus, la vitesse élevée sous le vent du génois signifie qu'il peut travailler à des grands angles d'incidence avant le décrochage. Donc, l'efficacité du génois est considérablement augmentée.

De manière plus visuelle, on peut constater que le sillage tourbillonnaire émis au bord de fuite du foc semble "aspiré" par la grand-voile, en ce sens qu'il longe l'extrados de celle-ci (cf figure 6.5). Ceci décrit correctement le caractère attractif de la zone dépressionnaire présente à l'extrados de la grand-voile et l'on imagine aisément que la présence d'un sillage tourbillonnaire dans son voisinage nuit à l'efficacité de celle-ci.

On peut voir ici un des avantages de la discrétisation particulière ; les méthodes numériques nécessitant une estimation *a priori* de la géométrie du sillage aura beaucoup de difficultés à approcher ce type de phénomènes.

Pour mettre en valeur cette interaction, un test sur gréement de type 12m *JI* a été effectué. Les répartitions de portance en fonction de l'envergure, qui correspond de façon discrète à la sommation par tranche sur le maillage, sont reportées sur la figure 6.6.

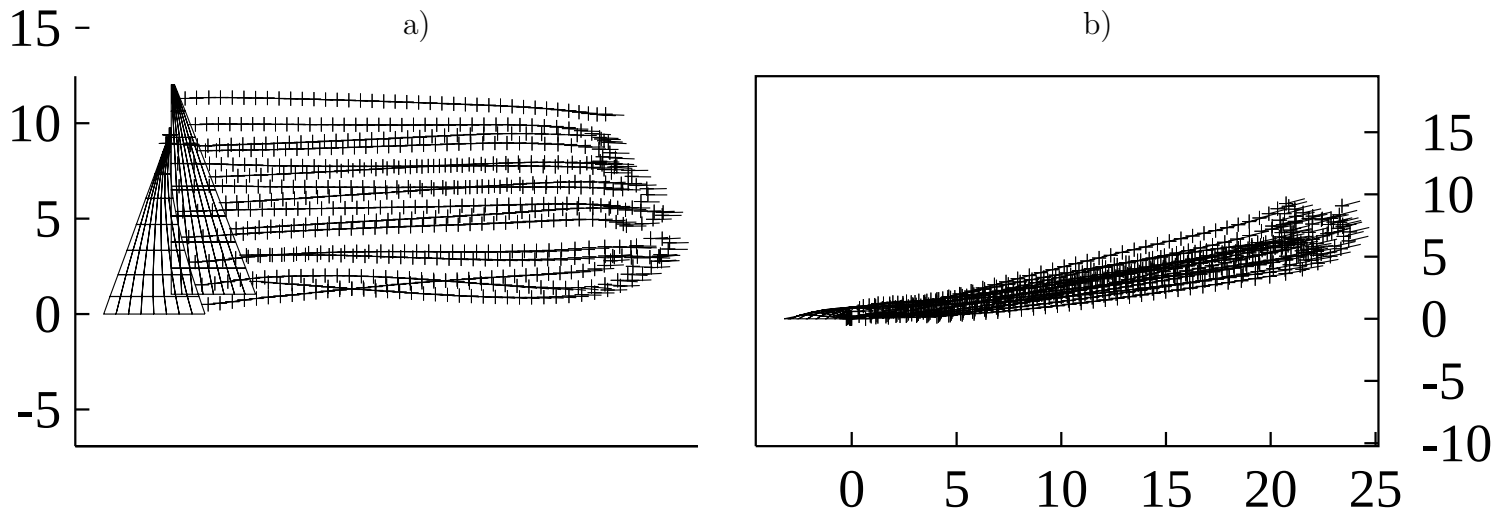


Figure 6.5: Visualisation du sillage (les points correspondant aux particules tourbillonnaires)
a) vue suivant z , b) vue suivant y

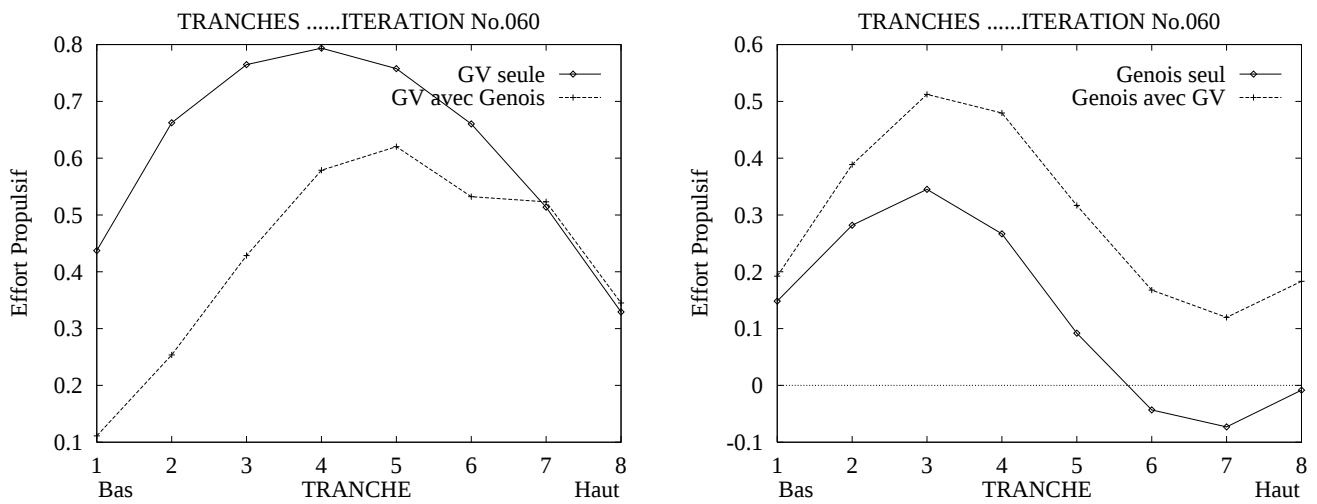


Figure 6.6: Portance en fonction de l'envergure pour une G.V. avec et sans foc - Portance en fonction de l'envergure pour un foc avec ou sans G.V.

Le gain de portance sur le génois ainsi que la perte de portance sur la grand-voile apparaissent de façon claire. De plus, on peut noter que la portance du haut de la grand-voile, qui se trouve au dessus du génois, est plutôt constant dans les deux cas.

6.3.2 Interaction entre 2 voiliers

Lors d'une régates type america's cup, les voiliers concourent deux par deux sur des parcours bien déterminés. les voiliers naviguent bord à bord la plupart du temps. le voilier qui se trouve devant ne doit pas nécessairement quitter son adversaire, car ceci lui permettrait de bénéficier de conditions de vent différentes des siennes. Dans ces circonstances il est bien connu que le voilier sous le vent d'un autre est désavantagé car il navigue dans un écoulement perturbé (*c.f.* figure 6.7).

Par analogie avec le problème d'interaction entre le génois et la grand-voile, la position illustrée sur la figure 6.8 est bien connue comme étant défavorable pour le voilier au vent. La position relative des 2 voiliers est tout à fait similaire à celle du génois et le la grand-voile d'un même voilier navigant à grande incidence.

On peut donc attendre une perte d'efficacité sur le voilier arrière (voilier au vent), accompagné d'un gain pour le voilier de tête (voilier sous le vent) qui profitera de conditions meilleures. Ces variations d'efficacité sont relatives aux performances d'un voilier fonctionnant seul. Ainsi, pour quantifier ces interactions, 2 gréements identiques et similaires au gréement précédent sont utilisés. Les résultats suivants sont reportés sur une carte d'isovaleurs. Le voilier de tête est positionné à l'origine des axes ; on calcule la résultante aérodynamique de ces deux voiliers pour différentes positions du second. L'unité de distance élémentaire est $\Delta x = C^0$, C^0 étant la longueur de la Bôme. les résultats sont exprimés par la différence de force propulsive entre voilier mobile (bateau 2) et celui fixe (bateau 1), divisée par la force propulsive d'un des deux voiliers placé seul dans l'écoulement (*c.f.* figure 6.9). avec :

$$\mathcal{R} = \frac{F_{x2} - F_{x1}}{F_{x \text{ seul}}} \quad (6.16)$$

Dans la zone sous le vent du premier voilier, il apparaît une frontière sur laquelle le rapport $\mathcal{R} = 0$. De chaque coté de cette frontière, $|\mathcal{R}|$ peut prendre des valeurs très importantes (gain ou perte allant jusqu'à 30 %).

Ces résultats permettent de mieux comprendre la stratégie du match racing : ceci montre l'intérêt du virement de bord afin de limiter la navigation des bateaux sur la même amure. En effet, la difficulté pour un voilier de "passer", au vent ou sous le vent, l'autre voilier navigant sur la même amure, est clairement démontrée.

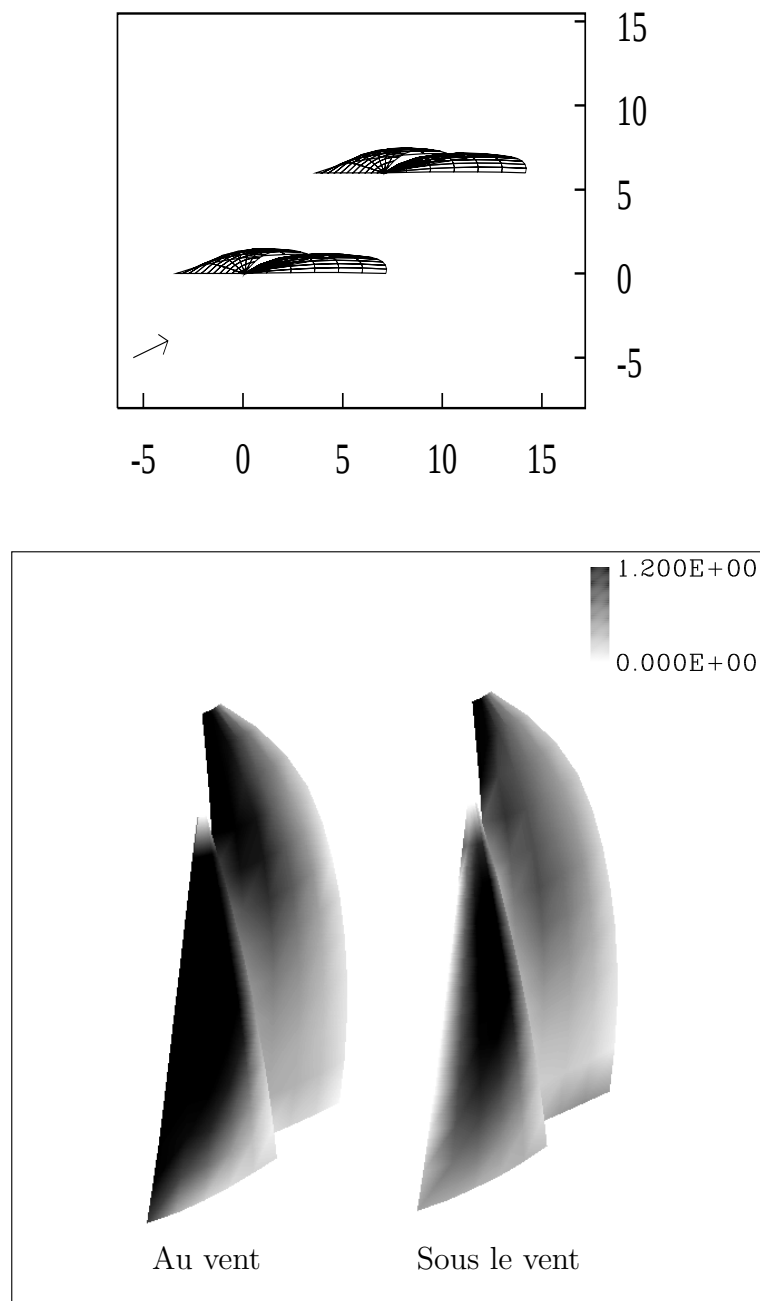


Figure 6.7: *Position sous le vent*

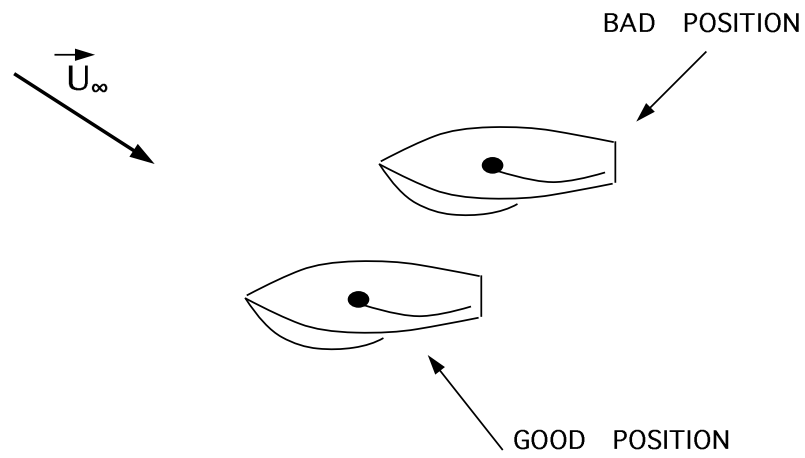


Figure 6.8: *Position défavorable moins "intuitive".*

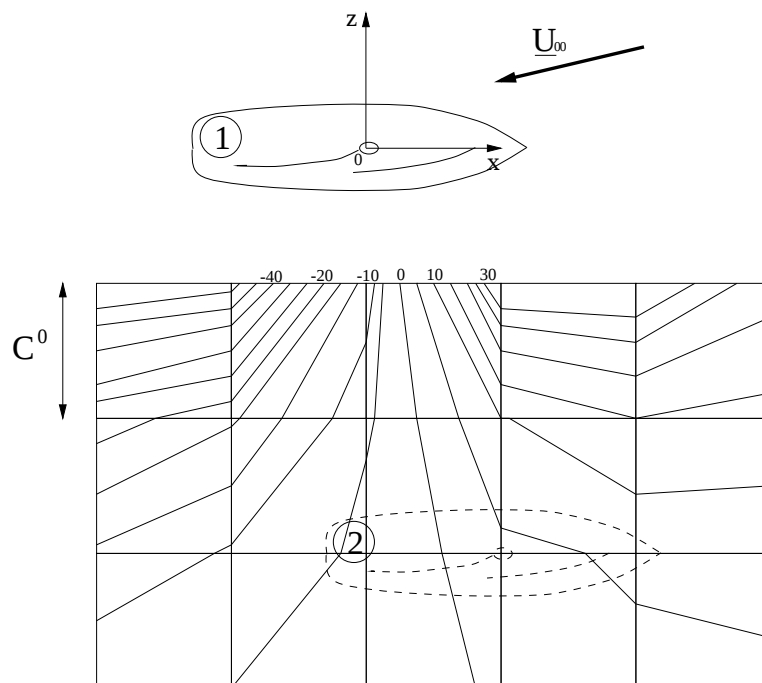


Figure 6.9: *isovaleurs de $\mathcal{R} * 100$ en fonction de la position du voilier 2*

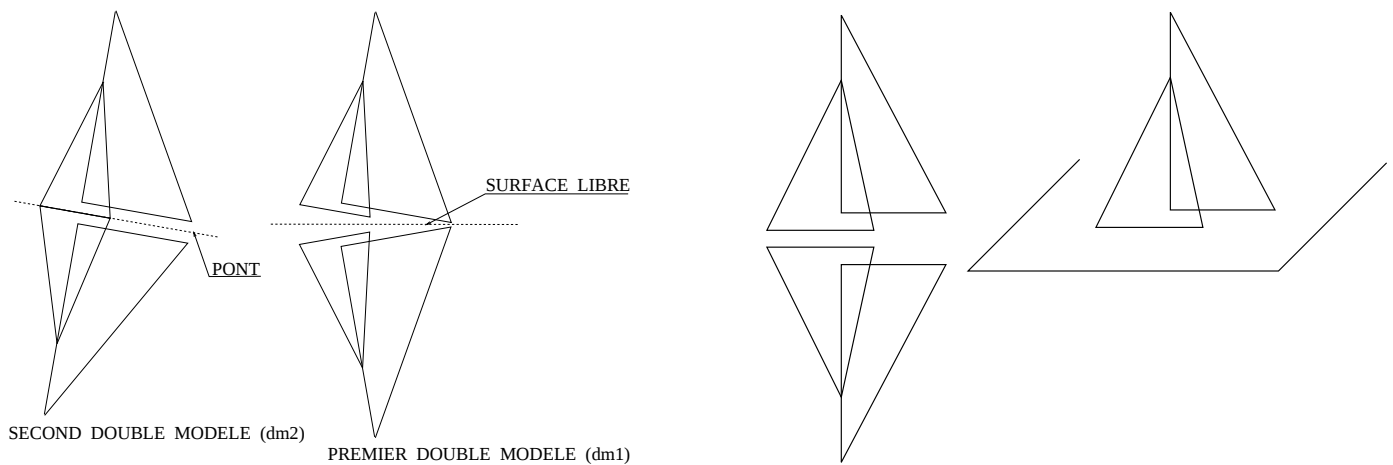


Figure 6.10: les 2 configurations de double modèle : (dm1) le plan de symétrie est la surface libre, (dm2) le plan de symétrie est le pont du voilier

6.4 Effet de la surface libre

Deux effets non négligeables peuvent être attribués à la surface libre : perturbation de l'écoulement par réflexion sur cette dernière et mouvement du bateau. Le dernier est de loin celui le plus important, il est responsable de plus de 50% des efforts instationnaires sur les voiles. Ces 2 aspects sont considérés successivement :

6.4.1 Effet de réflexion

Considérons l'écoulement autour du bas de la voile. La surface libre et le pont du navire limitent le contournement naturel de la bordure par le fluide. D'un point de vue numérique, ces plans de glissement sont obtenus par le classique double modèle (méthode des images). Deux situations différentes peuvent être considérées selon les effets dominants : dans le premier cas, la symétrie plane est assimilée à la surface libre, alors le mat fait un angle avec la perpendiculaire de la surface correspondante, correspondant à l'angle de tangage. Dans le second cas, la symétrie plane est orthogonale au mat ; elle peut être considérée comme une bonne approximation de la géométrie du pont, bien que l'espace de cette partie du bateau est manifestement limité. les différentes configurations sont illustrées sur la figure 6.10.

Pour l'analyse de ces résultats une comparaison avec l'expérience est nécessaire. Les résultats expérimentaux ont été obtenus dans le tunnel aérodynamique de l'ENSMA [73]. le grément était celui d'un 12m *JJ* placé sur une coque avec un angle de gîte de 20° (*c.f.* figure 6.11). plusieurs angles ont été testés entre 19° et 26° . L'angle entre l'axe de la coque et la grand-voile, et l'axe de la coque et le génois étaient respectivement de 3.5° et 7° . Pour une telle

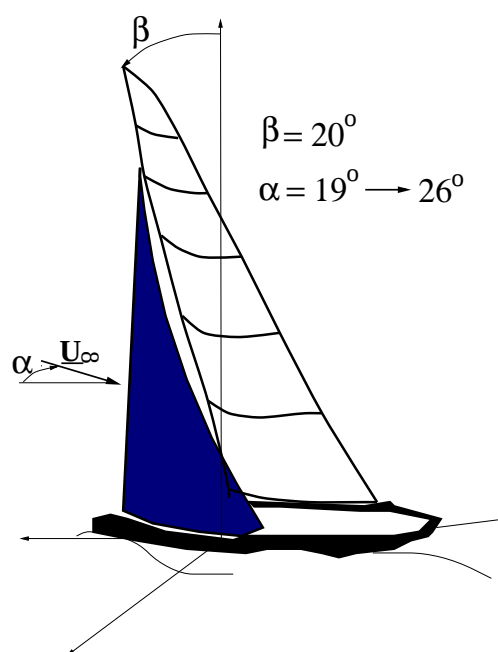


Figure 6.11: *Configuration expérimentale.*

configuration, une bonne approximation de la simulation numérique passe sans doute par le maillage de la carène sur laquelle on impose une condition de non pénétration. Cependant, même si cette modélisation ne pose pas un problème numérique, le maillage des frontières solides pose un réel problème. Nous allons commenter les résultats obtenus en modélisant les frontières non pas par un maillage de celles-ci, mais par les deux doubles modèles. Ces résultats se présentent sous la forme de mesure du coefficient de portance et de trainée aux différentes incidences. Les résultats numériques pour les 2 cas décrits précédemment sont présentés sur la figure 6.12. On peut supposer que la première hypothèse, c'est-à-dire une symétrie par rapport à la surface de l'eau, semble être la bonne pour l'ensemble portance-trainée bien que l'accord est loin d'être satisfaisant pour la trainée. La non considération des effets de frottement dans notre modèle, ne peut manifestement pas suffire à justifier cette sous-évaluation.

6.4.2 Régimes instationnaires : prise en compte des mouvements du bateau

Nous avons utilisé un modèle de mouvement harmonique des voiles, afin d'estimer l'importance des effets instationnaires en terme de force propulsive et dérive. L'effet le plus important est probablement dû à l'effet instationnaire du tangage, ce dernier est relativement fort pour des vagues caractéristiques, il peut être grossièrement simulé en imposant un mouvement harmonique. Il est connu que ce type de déplacement est directement re-

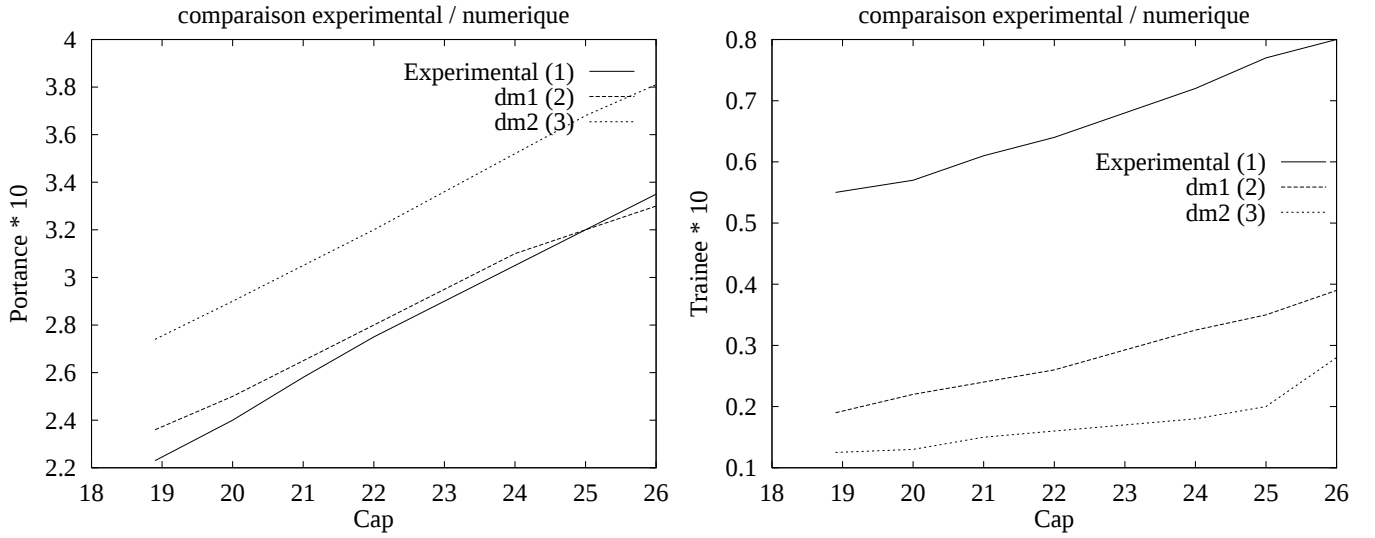


Figure 6.12: Comparaison-numérique expérimentale. (1) Expérimentale, (2) double modèle 1, (3) double modèle 2

sponsable de la perte d'efficacité des voiles sur les vagues. C'est une limitation quant à l'utilisation des grands gréements qui permettent d'augmenter l'efficacité propulsive avec un gradient de vent vertical. Il est donc intéressant d'évaluer les parts respectives de ces deux précédents effets. Le déplacement est décrit par l'angle entre le mat et la normale à la surface libre, dans le plan perpendiculaire à la surface libre et contenant l'axe du bateau, sous forme d'une loi sinusoïdale :

$$\alpha = \alpha_0 \sin(2\pi t/T)$$

La rotation s'effectue autour du centre d'inertie du bateau. Le rapport entre la hauteur H du mat et une échelle de longueur, obtenu par le produit de la période d'oscillation T par la vitesse du champ infini non perturbé $\underline{U}_\infty$, permet d'adimensionner le problème :

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\underline{U}_\infty T}$$

On considère un mouvement de tangage à $\mathcal{R} = 2$, pour différente amplitude de mouvement ($2^\circ < \alpha^0 < 10^\circ$), sur une grand-voile de 12m *JI*. On observe alors une perte de force propulsive (effort aérodynamique projeté sur l'axe du navire) moyenne (inférieure à 10% pour une amplitude de 10°), vis à vis de la valeur stationnaire correspondante, alors que la perte sur la force de dérive (effort aérodynamique projeté sur la perpendiculaire au plan de tangage) est quasi inexistante.

Sur la figure 6.13, on représente les variations des efforts propulsifs et de dérive pour différentes hauteurs en fonction du temps. On peut remarquer tout d'abord que globalement, l'effort propulsif est maximal lorsque l'angle de tangage algébrique est minimal (position la plus avancée du mat), et que la force de dérive est quant à elle maximale lorsque le mat passe par la verticale en avançant, correspondant à un vent apparent maximal et

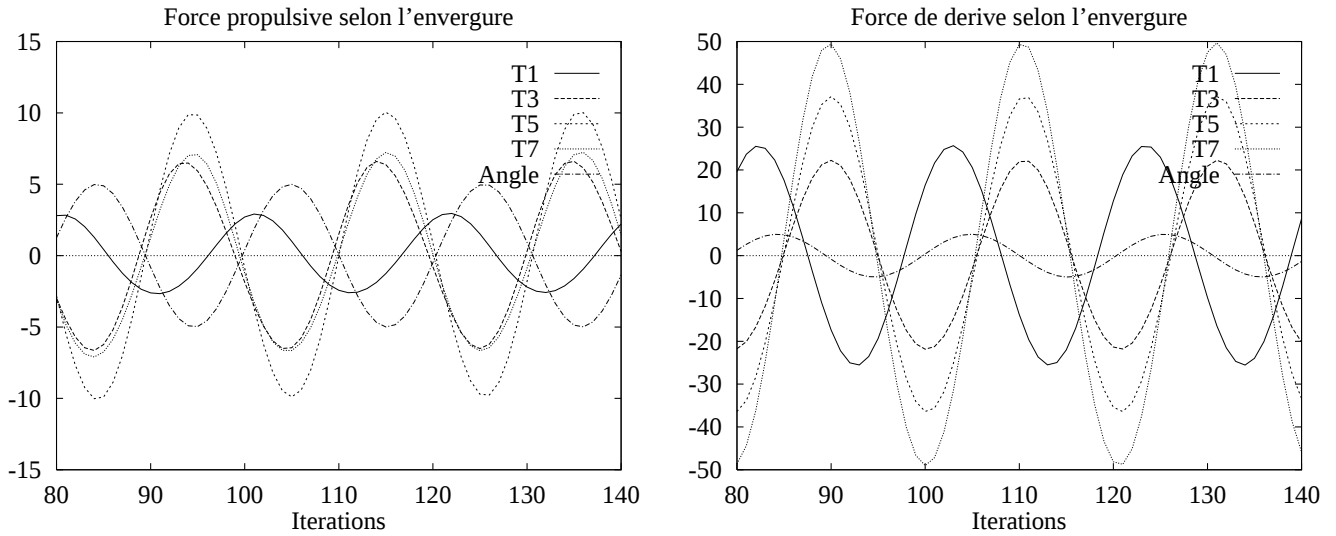


Figure 6.13: *Coefficients de poussée et de dérive à différentes hauteurs sur la grand-voile*

une incidence minimale. On remarque également que le bas de la voile a un comportement différent des autres tranches. Cette singularité est due au fait que le mouvement de tangage est plutôt perçu comme un mouvement de translation verticale alterné, avec la possibilité d’une recirculation latérale. Les effets sur le haut de la voile sont quand à eux beaucoup plus marqués, avec des variations allant jusqu’à 50%, sans pour autant avoir une perte d’efficacité significative. La distribution de saut de pression sur une voile pendant ce mouvement est représentée figures 6.14 et 6.15.

Il semble que la perte d’efficacité significative, d’une voile soumise à un mouvement de tangage dans le cas réel, que l’on ne retrouve pas numériquement, est due non seulement au fait, que le mouvement harmonique utilisé est trop “idéalisé”, mais également due au fait, que de par le mouvement de tangage, les variations importantes de module et d’incidence du vent apparent entraîneraient des décollements qui ne sont pas pris en compte dans notre modèle.

6.5 Une extension au régime instationnaire

La décomposition en deux modes de déformation qui nous permet de calculer la forme d’équilibre d’une voile dans un écoulement stationnaire ne s’étend pas naturellement au régime instationnaire. En effet dès lors que la voile est soumise à un écoulement perturbé, il est tout à fait concevable que certaines parties aient un comportement vibratoire mettant en oeuvre l’élasticité des fibres, alors que d’autres parties se déplacent suivant le mode de déformation souple.

Cela étant, la considération instationnaire de chaque mode pris séparément est susceptible de fournir des indications sur le comportement global du système (air+voile). D’une part,

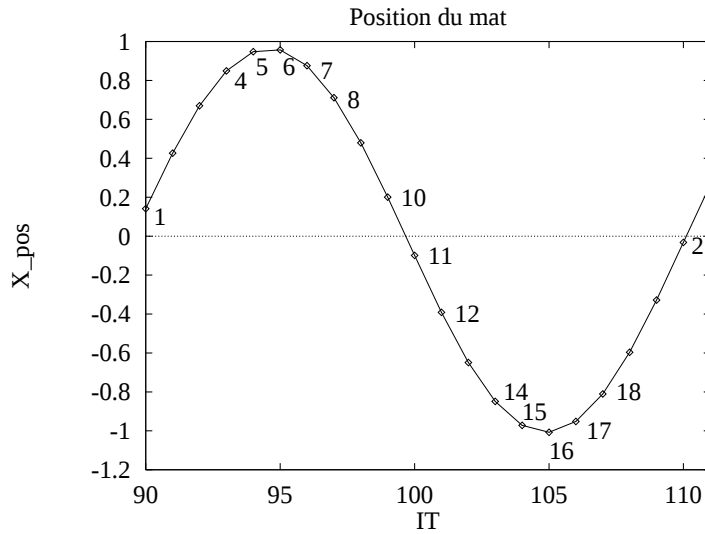
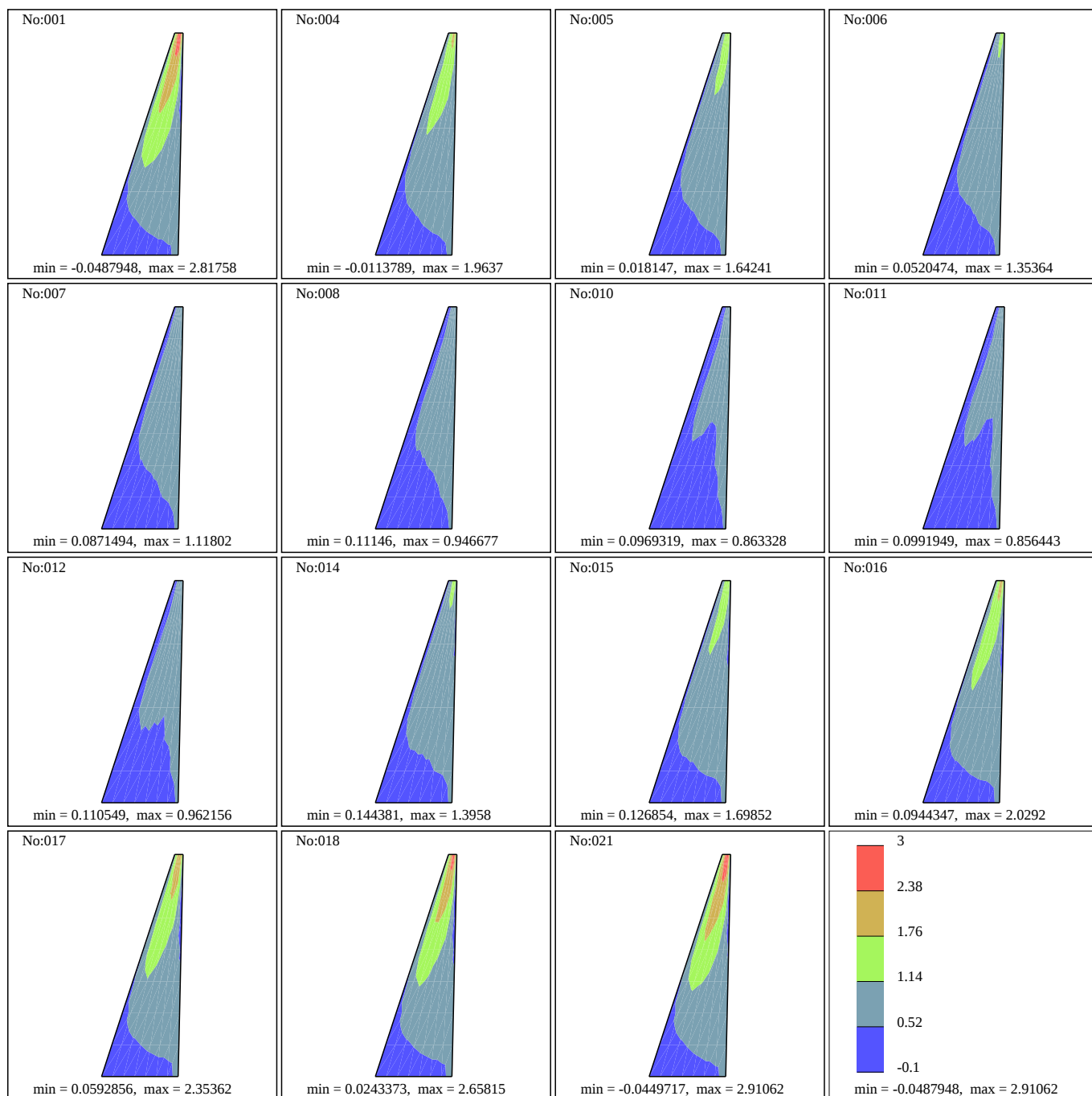


Figure 6.14: Localisation de l'affichage

en négligeant l'élasticité, l'introduction d'un terme d'énergie cinétique dans la fonctionnelle d'optimisation du mode de déformation souple nous donnerait sans doute de plus amples informations sur les oscillations lentes et de grandes amplitudes observées sur la voile en présence d'une houle.

D'autre part, en prenant comme géométrie d'équilibre la forme issue du mode de déformation souple, on peut substituer au calcul élastique statique un couplage dynamique linéarisé, ce type d'approche donnant accès aux modes vibratoires élastiques de la voile couplée avec le fluide qui l'entoure et, nous l'espérons, pouvant fournir une explication aux petites oscillations hautes fréquences qui animent le tissu. Notons que ce type d'oscillations peut être observés en soufflerie, c'est-à-dire dans un écoulement particulièrement pur.

C'est ce deuxième axe d'investigation que nous avons développé dans le chapitre 2. Nous représentons ici la réponse d'un génois de type 12m *JI*, placé dans un écoulement stationnaire, soumis à une oscillation haute fréquence (*c.f.* figure 6.16).

Figure 6.15: *Saut de pression à 15 temps différents sur une période*

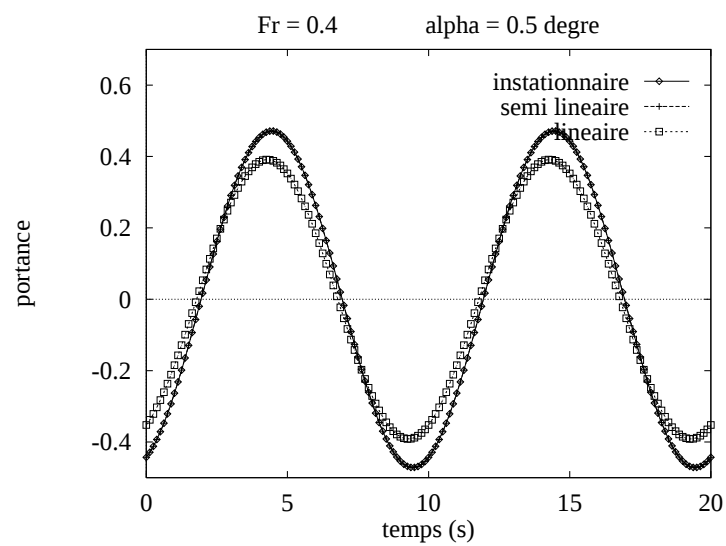


Figure 6.16: Comparaison entre un calcul non linéarisé et linéarisé dans le cas d'un d'un génois soumis à une oscillation haute fréquence

Conclusion

Il est relativement difficile de conclure quant à la précision et à la fiabilité de la méthode présentée à cause du manque de confrontations aux résultats expérimentaux. Cependant les résultats obtenus d'un point de vue qualitatif nous semblent pertinents au regard des observations faites "in situ". Le modèle numérique peut cependant être amélioré dans plusieurs directions : la première consiste à prendre en compte les mouvements du bateau, ainsi que les inhomogénéités du vent de manière plus réalistes. Cette phase ne peut être envisagée sans un travail de collecte de données expérimentales. La deuxième concerne l'amélioration du modèle fluide/structure par la prise en compte dans le modèle dynamique linéarisé du sillage de manière plus satisfaisante.

Conclusion

Dans cette étude, nous avons donné une approche d'optimisation de code de calcul numérique, en particulier une amélioration de l'efficacité de calcul d'écoulements tourbillonnaires instationnaires par des méthodes particulières.

Nous avons montré dans le chapitre 4 que, bien que les deux formulations de vitesses (anneau et particulière) sont mathématiquement équivalentes, elles diffèrent numériquement, d'où l'intérêt de centraliser les calculs de vitesse en modifiant l'algorithme de calcul. Ce nouvel algorithme consiste à ne considérer qu'une seule formulation -particulaire- et d'appliquer une correction locale. Il a été testé sous *PVM* où il s'est montré très performant. En effet, du fait de la conservation de la symétrie de la matrice d'interaction de particules, par des permutations circulaires des données entre les processeurs, on limite non seulement les communications entre les processeurs, mais de plus, les phases de calculs et de communications sont équilibrées, ce qui nous permet d'obtenir un gain d'un facteur 3 sur seulement 4 processeurs, pour 20 tours d'hélice, correspondant en fin de calcul à environ 10 000 particules tourbillonnaires.

Nous pouvons envisager d'augmenter ce facteur de gain de deux manières :

- Du fait de la modification de l'algorithme, nous sommes amenés à effectuer une correction locale de la vitesse. Les routines de correction sont semblables à celle du calcul de vitesse, et sont très coûteuses en temps, il est donc tout à fait concevable de les paralléliser également.
- Dans un premier temps, *PVM* nous a semblé nécessaire pour valider notre algorithme de calcul de vitesse, il est maintenant envisageable de passer sur une machine hautement parallèle, dont les réseaux d'interconnexion entre les processeurs, minimisent les temps de communications.

Dans le chapitre 3, nous avons mis en évidence l'intérêt de simplifier le sillage par une linéarisation de ce dernier lorsqu'on est loin des obstacles. En effet le gel du sillage permet

de transporter les tourbillons sur de très grandes distances sans altérer les caractéristiques de la nappe tourbillonnaire. De plus, le fait de limiter le sillage dans l'espace, par l'absorption des particules très éloignées de l'obstacle, permet de figer le temps de calcul sur un pas de temps, et donc d'envisager des calculs sur un nombre de tours d'hélice très important.

Il est évident que cette simplification du sillage lointain, couplé avec l'algorithme parallèle, permet d'envisager la modélisation des phénomènes en temps réel.

Le dernier point étudié dans le chapitre 2 concerne la linéarisation des équations "fluide" et permet d'envisager des calculs de vibrations de structures.

L'une des applications concerne les écoulements autour des voiles de bateaux dont l'écoulement est essentiellement instationnaire et le plus souvent localement turbulent. De plus, la houle que le voilier est amené à rencontrer est en général suffisamment importante pour avoir une influence conséquente sur l'ensemble du fonctionnement des voiles. Il est donc tout à fait concevable de considérer que certaines zones aient un comportement vibratoire mettant en oeuvre l'élasticité des fibres, tandis que d'autres se déplacent suivant un mode de déformation souple (*c.f.* chapitre 6). Par cette méthode de décomposition, les oscillations haute fréquence sont traitées linéairement ce qui nous permet de nous affranchir des contraintes de limitation de fréquence des approches temporelles.

Ce modèle n'est cependant pas restrictif aux voiles de bateaux, mais peut tout à fait être adaptés à d'autres problèmes de vibration de structures (éoliennes...).

Partie III

Bibliographie

Bibliographie

- [1] C. REHBACH. Calcul numérique d'écoulements tri-dimensionnels instationnaires avec nappes tourbillonnaires. *La Recherche Aérospatiale*, 5:289–298, 1977.
- [2] C. REHBACH. Numerical calculation of three dimensional unsteady flows with vortex sheets. *AIAA, 16th Huntsville*, paper 1978-111, 1978.
- [3] C. REHBACH. Calcul d'écoulements tri-dimensionnels instationnaires de fluide parfait avec nappes tourbillonnaires. Document ONERA - Rapport 10/1737 AY 306, 12/1737 AY 308 et 13/1737 AY 312, 1979 - 1980.
- [4] ROSENHEAD. The formation of vortices from a surface discontinuities. *Proc. Roy. Soc. London*, A(134):170–192, 1931.
- [5] ROSENHEAD. The point vortex approximation of a vortex sheet. *Proc. Roy. Soc. London*, A(134):1041–1081, 1932.
- [6] A. LEONARD. Vortex methods for flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 37:289–335, 1980. Review.
- [7] S.M. BELOTSEKOVSKII. Calculation of the flow about wings of arbitrary planform at a wide range of angles of attack. *Mekhanika Zhidkosti 1 Gaza 4 (article original)*, pages 32–44, 1968.
- [8] S.M. BELOTSEKOVSKII. Calculation of the flow about wings of arbitrary planform at a wide range of angles of attack. *R.A.E. Library translation 1433*, 1970.
- [9] C. REHBACH. Calcul d'écoulements autour d'ailes sans épaisseur avec nappe tourbillonnaires évolutives. *La recherche Aérospatiale*, 2:53–61, 1973.
- [10] J.L. HESS. Calculation of potential flow about arbitrary three-dimensional lifting bodies. *Douglas Aircraft Company Rept*, AD 699615, 1969.
- [11] R. LEGENDRE. La condition de joukowski en écoulement tridimensionnel. *La Recherche Aérospatiale*, 5:241–248, 1972.

- [12] S. HUBERSON. Calculs d'écoulements tridimensionnels instationnaires incompressible par une méthode particulaire. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 3(1):805–819, 1984.
- [13] S. HUBERSON. *Modélisation asymptotique et simulation numérique d'écoulements tourbillonnaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) - LIMSI-CNRS, 1986.
- [14] A. HEMON. *Contribution à la résolution numérique de problèmes de l'hydrodynamique navale*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) - LIMSI-CNRS, 1990.
- [15] A. HEMON & S. HUBERSON. Résolution numérique de problèmes non linéaires de l'hydrodynamique navale. In *2^{ème} Journées de l'hydrodynamique*, Nantes, 1989.
- [16] A. ZERVOS & S. HUBERSON & A. HEMON. Three dimensional free wake calculation of wind turbine wakes. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 27:65–76, 1989.
- [17] A. HEMON & A. ZERVOS & S. HUBERSON. Numerical computation of unsteady forces on a hawt. In *10th European Wind Energy conference Glasgow*, 1989.
- [18] A. HEMON & S. HUBERSON & A. ZERVOS. Numerical study of wind turbine operation in complex terrain. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1990.
- [19] B. CANTALOUBE & S. HUBERSON. Calcul d'écoulements de fluide incompressible non-visqueux autour de voilures tournantes par une méthode particulaire. *La Recherche Aérospatiale*, 6:403–415, 1984.
- [20] B. CANTALOUBE. Numerical technology calculation of rotor performances in real flight configurations. In *International Conference on Rotorcraft Basic Research*. Research Triangle Park, North Carolina, 1985. TP ONERA n° 1985-13.
- [21] F. ROUFFI. *Résolution numérique de problèmes non-linéaires de l'hydrodynamique navale : manoeuvrabilité et tenue à la mer de navires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris6) - LIMSI-CNRS, 1992.
- [22] E. RIVOALEN. *Etude numérique et expérimentale de tourbillons de sillage proches d'une surface libre*. PhD thesis, Université du Havre - GEMH, 1994.
- [23] J.P. CHOQUIN. *Simulation numérique d'écoulements tourbillonnaires de fluides incompressibles par des méthodes particulières*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1987.

- [24] J.P. CHOQUIN & G.H. COTTET. Sur l'analyse d'une classe de méthodes de vortex tridimensionnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 306 Série II:739–742, 1988.
- [25] T. CHARVET. *Résolution numérique de problèmes liés au comportement des voiles de bateau*. PhD thesis, Ecole Polytechnique - LIMSI-CNRS, 1992.
- [26] B. CANTALOUBE & C. REHBACH. Calcul de la pression dans un écoulement rotationnel incompressible de fluide parfait. *La Recherche Aéronautique*, 2:57–61, 1988.
- [27] J. BOUSQUET. *Méthode des singularités, théorie et applications*. Ecole nationale de l'aéronautique et de l'espace, 1982.
- [28] D. EUVRARD. *La méthode des singularités*. Paris 6, éd. corrigée, 1992.
- [29] B. MARICHAL & F. HAUVILLE. Numerical calculation of an incompressible, inviscid three-dimensional flow about a wind turbine with partial span pitch control. In *contract JOU2-CT92-0186*, 1994.
- [30] J.T. BEALE & A. MAJDA. High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels. *Journal of Computational Physics*, 58:188–208, 1985.
- [31] S.G. VOUTSINAS. *Theoretical and numerical analysis of three dimensional subsonic inviscid flows*. PhD thesis, NTUA, Department of Mechanical Engineering, 1990.
- [32] S.G. VOUTSINAS & M.A. BELESSIS & S.HUBERSON. Analysis of dynamic inflow effects using vortex particle approximations. Technical report, Progress Report JOUR-0083, May 1992.
- [33] T.S. LUU & G. COULMY. Principe et application de la méthode des singularités à répartition discrétisée en hydro et aérodynamique. Notes et documents LIMSI : 90.11, 1990.
- [34] J.L. GUERMOND. Collocation methods and lifting surfaces. *Eur. J. of Mech., B/Fluids*, 8(4):293–305, 1989.
- [35] J.L. GUERMOND & A. SELLIER. A unified lifting-line theory. *J.Fluid Mech.*, 229:427–451, 1991.
- [36] J.D. VAN MANEN & W.C. OOSTERVELD. Analysis of ducted-propeller design. *S.N.A.M.E.*, 13, nov. 1966. publi. 288 of the N.S.M.B. Progress - vol.9 N° 23.
- [37] S. HUBERSON & A. HEMON. Etude numérique d'une hélice en écoulement instationnaire. Rapport intermédiaire de contrat D.R.E.T. 89/253, 1990.

- [38] S. HUBERSON & A. HEMON. Etude numérique d'une hélice en écoulement instationnaire. Rapport intermédiaire de contrat D.R.E.T. 89/176, 1992.
- [39] C. BREARD & C. GONDOIN. Réalisation d'un logiciel de transformée en ondelette permettant de traiter des signaux simulés numériquement. Technical report, Projet de maîtrise de mécanique, 1991.
- [40] M. COSNARD & M. NIVAT & Y. ROBERT. *Algorithmique parallèle*. Masson, Paris, 1992.
- [41] G.R. PERRIN. Programmation parallèle : point de vue sur les langages et les méthodes. *Techniques et Sciences Informatiques*, 6(2):103–113, Février 1987.
- [42] M. COSNARD & Y. ROBERT. Algorithmique parallèle : une étude de complexité. *Technique et Sciences Informatiques*, 6(2):115–125, Février 1987.
- [43] C. GERMAIN-RENAUD & J.P. SANSONNET. *Les ordinateurs massivement parallèles*. 1991.
- [44] M. COSNARD & D. TRYSTRAM. *Algorithmes et architectures parallèles*. Inter Editions, Paris, 1993.
- [45] ETCA. *Journées du site expérimental en hyperparallélisme - Tome 1*, 1991.
- [46] ETCA. *Journées du site expérimental en hyperparallélisme - Tome 2*, 1991.
- [47] *Second International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Method*, Montréal, Canada, August 20-24 1995.
- [48] J.P. BANATRE. *La programmation parallèle outils, méthodes et éléments de mise en oeuvre*. 1991.
- [49] G. AUTIE & A. FERREIRA & al. *Algorithmes parallèles analyse et conception*. 1994.
- [50] H.P. CHARLES. *De la micro-optimisation à l'algorithmique parallèle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (LIP-IMAG), 1993.
- [51] H.P. CHARLES. Processeurs pipe-lines et optimisation de code. Technical Report 91-40, LIP, 1991.
- [52] L.L. FRERIS. *Wind Energy Conversion System*. Prentice Hall International (UK) Ltd, 1990.
- [53] D. LE GOURRIERE. *Energie éoliennes : théorie, conception et calcul pratique des installations*. Eyrolles, 1980.

- [54] L. CUNTY. *Eoliennes et aérogénérateurs*. Edisud, La calade, 1979.
- [55] H. LANOY. *Les aéromoteurs modernes*. Librairie des sciences, Girardot et *C^{ie}*, 1944.
- [56] A. BOVIS & C. CRANCE & J.L. GUERMOND. Efforts hydrodynamiques fluctuants exercés sur une hélice de navire. *ATMA*, pages 143–179, 1985.
- [57] G.J. TAYLOR. Wake measurements on the nibe wind-turbines in denmark -part 2 : data collection and analysis. Technical report, CEC Contract No EN3W.0039.UK(H1) - ES-TBL/L/0158/R90, National Power - Technology and Environment Center, Leatherhead, U.K., 1990.
- [58] V. RUGGIERO & G. VENTURINI. Propeller in inclined flow for fast craft. *The society of naval architects and marine engineers*, 7, 1988.
- [59] P. CASSELLA & M. MANDARINO & S. MIRANDA & A. SCARMADELLA. Hélice en écoulement non axial : performances hydrodynamiques, méthodologie expérimentale et analyse des essais en bassin. *ATMA*, pages 801–831, 1990.
- [60] J.H. MILGRAM. The anatical design of yacht sails. *Transactions S.N.A.M.E.*, pages 118–160, 1968.
- [61] J.H. MILGRAM. Nonlinear two-dimensional sail theory. *The Physics of Fluids*, 25, 3:420–423, March 1982.
- [62] P.S. JACKSON. A simple model for elastic two-dimensional sails. *AIAA Journal, Technical Notes*, 01/1983:153–155, janvier 1983.
- [63] P.S. JACKSON & G.W. CHRISTIE. Numerical analysis of three-dimensional elastic membrane wings. *AIAA Journal*, 25, 5:676–682, 1986.
- [64] P.S. JACKSON. The analysis of the three-dimensional sails. *Proceedings of the 10th Canadian Congress of Applied Mechanics*, pages 59–67, 1985. Univ. of Western Ontario, London, Canada,.
- [65] T. CHARVET & S. HUBERSON. Numerical calculation of the flow around sails. *Eur. J. of Mech., B/Fluids*, 11:599–610, 1992.
- [66] M.J.D. POWELL. On the quadratic programming algorithm of goldfarb and idnani. *Mathematical Programming Study*, 25:46–61, 1985.
- [67] M.J.D. POWELL. Harwell library, subroutine vf13. Cambridge University, 1987.
- [68] P.DESTUYNDER. *Modélisation des coques minces élastiques*. Collection Physique fondamentale et appliquée, 1990.

- [69] O.C. ZIENKIEWICZ. *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur*, chapter 10 & 11, pages 173–227. 1973.
- [70] L.LANDAU & E.LIFCHITZ. *Physique théorique - Théorie de l'élasticité*, volume 7. Mir edition, 1990.
- [71] C.A. MARCHAJ. *Aero-hydrodynamics of sailing*. Granada Publishing, London Toronto Sydney New York, adlard coles limited edition, 1979.
- [72] C.A. MARCHAJ. *Sailing theory and practice*. Granada Publishing, London Toronto Sydney New York, adlard coles limited edition, 1971.
- [73] M. KERMAREC. *Méthode de ligne portante appliquée aux voiles de bateau*. Rapport interne C.R.A.I.N., 1986.
- [74] P. FLANDRIN. *Temps-fréquence*. 1991.

Partie IV

Annexe

Annexe A

La méthode particulière en pratique...

A.1 Adimensionnement du problème

Le calcul de l'écoulement se plaçant dans le cadre de l'approximation fluide parfait, seules une vitesse et une longueur caractéristique sont nécessaires (section 1.2). A ces grandeurs vient s'ajouter une masse pour l'adimensionnement des efforts. En considérant $|\underline{\mathbf{U}}_{\infty r}|$ la valeur réelle de l'intensité de l'écoulement infini amont, L_r une grandeur caractéristique du problème et ρ_r la masse volumique de l'écoulement, on obtient les grandeurs adimensionnelles (L^* , T^* et M^*) de la manière suivante (l'indice hu correspond aux grandeurs "code", l'exposant $*$ aux grandeurs adimensionnelles et l'indice r aux grandeurs physiques) :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^* = \frac{L_r}{L_{hu}^*} \\ T^* = \frac{L^*}{U^*} \\ \Rightarrow T^* = \frac{L^*}{U_{\infty r}} \\ M^* = \frac{M_r}{M_{hu}} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad U^* = \frac{U_{\infty r}}{U_{hu}} = \frac{U_r}{1} \quad \text{or} \quad M = \rho L^3$$
$$\begin{array}{l} \text{donc} \quad M^* = \frac{\rho_r L_r^3}{\rho_{hu} L_{hu}^3} = \frac{\rho_r L_r^3}{L_{hu}^3} \\ \Rightarrow M^* = \rho_r L^{*3} \end{array}$$

Une fois le calcul effectué, les grandeurs réelles de vitesse et de longueur s'obtiennent en effectuant la transformation inverse. En ce qui concerne la pression et les efforts, on aura simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{E}}_r = \underline{\mathbf{E}}_{hu}(M^* L^* T^{*-2}) \\ p_r = p_{hu}(M^* L^{*-1} T^{*-2}) \end{array} \right.$$

Pour le cas des voiles, nous choisirons comme longueur caractéristique la taille C^0 de sa base, c'est-à-dire la longueur de corde de la bordure, ainsi que le coefficient A déterminant le rapport de taille entre la hauteur de la voile et sa base.

Pour le cas des hélices marines ou des éoliennes, la longueur caractéristique sera son diamètre.

A.2 Difficultés

On remarque que l'approche est complètement instationnaire ; la résolution se fait explicitement dans le domaine temporel. La méthode particulière est considéré comme robuste pour transporter le tourbillon sur des distances relativement importantes sans altérer les caractéristiques de la nappe par exemple par la diffusion numérique qui tendrait à un épaissement de celle-ci comme cela est le cas pour des méthodes utilisant un maillage de l'espace. Il se pose quand même le problème de l'intégration en temps de l'équation d'Helmholtz et de l'évaluation correcte du terme de déformation du tourbillon. Par ailleurs, le sillage étant construit pas à pas à partir du repos, un fort tourbillon, dit tourbillon de démarrage est créé au début du calcul, comme pour un écoulement réel. Pour un nombre d'itérations très important, Le calcul de l'évolution de ce tourbillon devient délicat et introduit dans le calcul des erreurs non négligeables.

Annexe B

Limite de Betz

L'énergie fournie par le vent est une énergie cinétique, fonction de la masse et de la vitesse du volume d'air. En considérant la masse volumique de l'air constante, on peut dire que l'énergie fournie par le vent est fonction uniquement de sa vitesse.

L'énergie cinétique de la masse d'air en mouvement est égal à :

$$E = \frac{1}{2} m_a V_\infty^2$$

Considérons un dispositif quelconque de récupération de cette énergie de surface est S . En faisant l'hypothèse que la vitesse du vent est constante en chaque point de cette surface, la puissance théoriquement récupérable est donc égal à :

$$P = \frac{1}{2} \rho_a S V_\infty^3$$

Malheureusement, toute cette énergie ne peut être captée car la vitesse en aval du dispositif de récupération n'est jamais nulle et le théorème de Betz montre que le maximum d'énergie pratiquement récupérable est égal à $\frac{16}{27}$ ($\approx 60\%$) de l'énergie totale. Soit une puissance $P = 0.37 S V_\infty^3$ maximale récupérable : c'est la limite de Betz.

Dans le cas d'une hélice, S est la surface balayée par cette hélice. Pour une éolienne de diamètre D , la limite de Betz est égal à :

$$P = 0.29 D^2 V_\infty^3$$

L'énergie fournie par l'aéromoteur est toujours de l'énergie mécanique que l'on utilise directement (pompage) ou que l'on transforme selon les besoins. La limite de Betz doit donc être affectée de tous les rendements propres aux différentes transformations (l'hélice, le multiplicateur ou le réducteur, l'alternateur...). De plus le rendement de chaque élément varie avec le régime de fonctionnement lié à la vitesse de rotation de l'hélice, ce qui en dehors du régime nominal diminue encore le rendement global du dispositif. Pour les aérogénérateurs classiques actuellement commercialisés, le rendement en énergie électrique varie entre 30

et 50% de la limite de Betz (pour leur vitesse nominale). Les aérogénérateurs de grande puissance ($> 100kW$), dont chaque étage était très soigné, avaient un rendement d'environ 80% de la limite de Betz.

Annexe C

Evaluation de l'erreur

Dans cette annexe, nous expliquons le traitement qui est effectué sur un champ du type :

$$u(z, \theta) = A(z, \theta) \cos(k_z z + k_\theta \theta)$$

afin de déterminer les vecteurs d'onde $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ qui sont les composantes de l'onde plane, ainsi que la direction de propagation de cette dernière, qui fait un angle Φ avec $\underline{k}_\theta$. On remarque que par la discrétisation et l'effet de domaine borné, la direction de propagation est connue qu'à $\delta\Phi$ près. Nous allons donner une estimation de cette erreur.

Sur la figure C.1, on représente les valeurs maximales de la fonction précédente sur le plan (θ, z) . Cette représentation "idéale" peut être similaire à celle obtenue à partir du tracé des lignes iso-valeurs d'une composante de vitesse sur le plan (θ, z) , correspondant à la développée de la carte de vitesse, située sur un cylindre de rayon $0.8 * R_{\text{hélice}}$ aligné sur l'axe de l'hélice, dont la longueur d'observation en aval est de l'ordre de 5 diamètres. Lorsque la composante étudiée a un comportement linéaire, on le retrouve sur les pentes des lignes iso-valeurs qui caractérise l'onde plane.

Sur cette carte, on détermine la répartition spectrale de puissance. L'estimateur utilisé est le périodogramme défini à partir de l'autospectre bidimensionnel du signal :

$$S_{uu}(f_\theta, f_z) = \frac{1}{2\pi z_{\max}} \tilde{u}(f_\theta, f_z) \cdot \tilde{u}^*(f_\theta, f_z)$$

où $*$ désigne le conjugué, $z_{\max}$ la longueur d'observation du signal et $\tilde{u}(f_\theta, f_z) = TF[u(\theta, z)]$.

On a :

$$\tilde{u}(f_\theta, f_z) = \int_0^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} u(\theta, z) e^{-j(2\pi f_z z + 2\pi f_\theta \theta)} dz d\theta$$

Avec les vecteurs d'onde $\underline{k}_z$ et $\underline{k}_\theta$ (*c.f.* figure C.1) correspondant au pic du spectre de puissance (*c.f.* figure C.2).

$$\underline{k}_\theta = k_\theta \underline{e}_\theta$$

$$k_\theta = 2\pi f_\theta$$

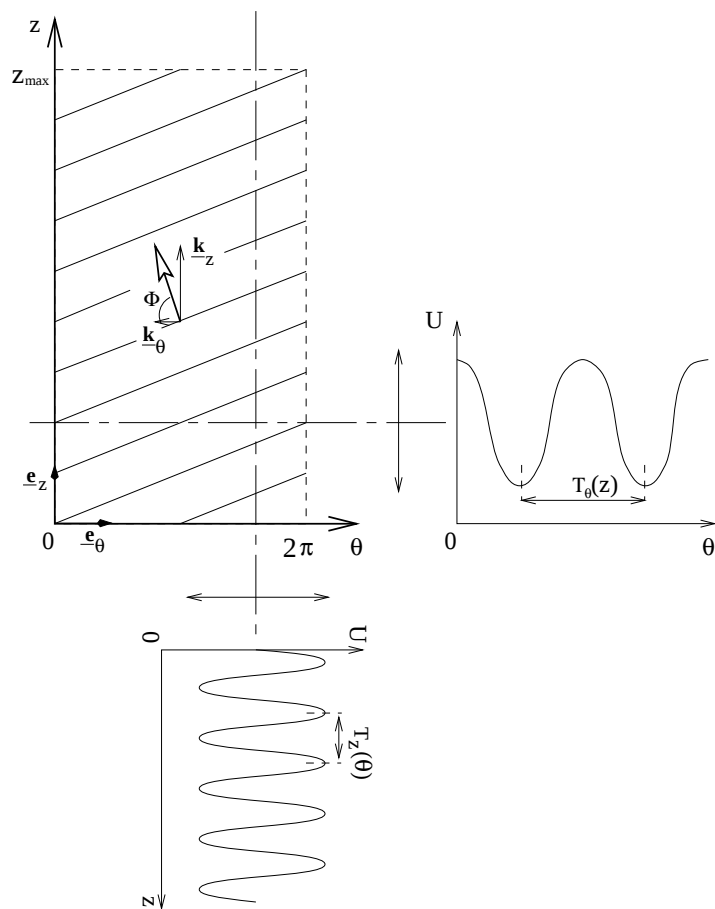
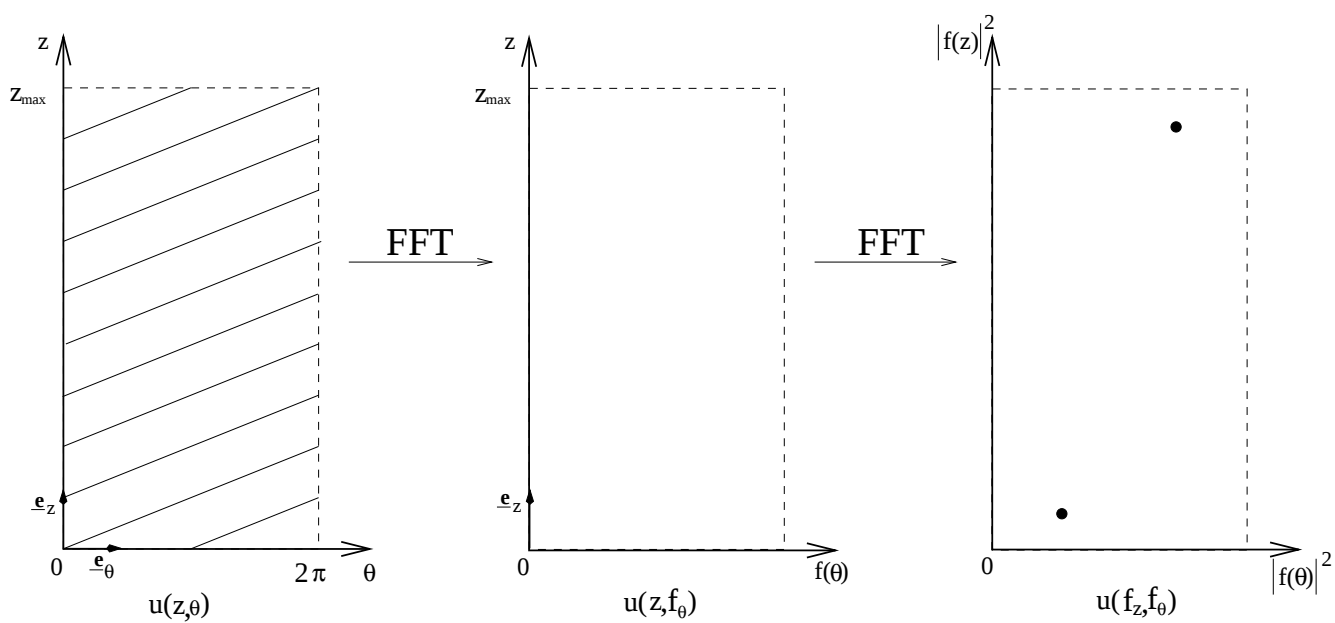
Figure C.1: $\underline{\mathbf{k}}_z$ et $\underline{\mathbf{k}}_\theta$ sur une carte d'iso-valeurs

Figure C.2: Autospectre bidimensionnel

Or, la valeur de f_θ pour laquelle $S_{uu}(f_\theta, f_z)$ est important, est directement relié au nombre Z de pales :

$$T_\theta = \frac{2\pi}{Z}$$

et donc $k_\theta = Z$.

Par contre, il n'en est pas de même dans la direction z : l'effet de domaine fini et de Transformée de Fourier Discrète se traduit par une quantification de k_z . Il s'en suit une erreur sur l'évaluation de l'angle Φ . C'est cette erreur que l'on va estimer ici.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{k}}_z &= k_z \underline{\mathbf{e}}_z \\ k_z &= 2\pi f_z \\ \delta k_z &= 2\pi \delta f_z = 2\pi \frac{1}{N_z \delta z}\end{aligned}$$

$N_z \delta z$ représente le domaine d'observation et $\pi \delta f_z$ l'écart minimal entre 2 ondes successives.

On va maintenant évaluer l'erreur commise sur le calcul de Φ :

$$\begin{aligned}\tan \Phi &= \frac{k_z}{k_\theta} \\ \frac{d \tan \Phi}{d \Phi} &= 1 + \tan^2 \Phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Phi &= \frac{d \tan \Phi}{1 + \tan^2 \Phi} \\ &= \frac{dk_z}{k_\theta} \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \Phi} \right) \\ &= \frac{dk_z}{k_\theta} \left(\frac{k_\theta^2}{k_\theta^2 + k_z^2} \right)\end{aligned}$$

on a alors :

$$\delta \Phi = \frac{2\pi}{N_z \delta z} \left(\frac{k_\theta}{k_\theta^2 + k_z^2} \right)$$

Cette erreur est directement liée à la discrétisation en $\underline{\mathbf{e}}_z$ et au domaine d'observation.

Annexe D

La transformée en ondelette

Les représentations conjointes temps-fréquence sont particulièrement intéressantes pour l'étude des signaux non stationnaires [74]. L'analyse par ondelette est une méthode d'analyse qui ne privilégie aucune échelle particulière. Le principe général du traitement consiste, à partir d'une fonction mère $\psi(t)$, type ondelette de Morlet :

$$\psi(t) = \cos(5t) e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

de définir une famille d'ondelette :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où b caractérise un centrage en temps et a l'échelle de fréquence (*c.f.* figure D.1).

Ces familles d'ondelettes permettent de décomposer le signal sous forme de coefficients :

$$W_s(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \cdot \psi_{a,b}(t) dt$$

Ce qui revient à positionner l'ondelette en b par translation en temps, la contracter ou la dilater autour de ce point, suivant la valeur du paramètre a , et ainsi obtenir le coefficient

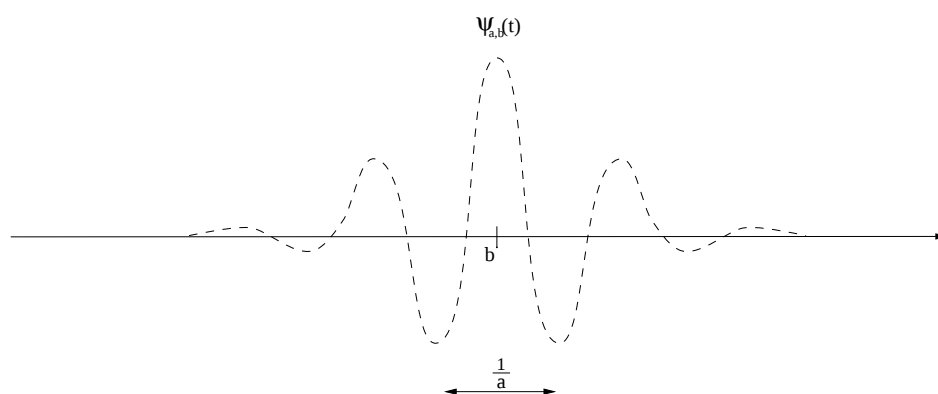


Figure D.1: *Famille d'ondelette à partir de l'ondelette de Morlet*

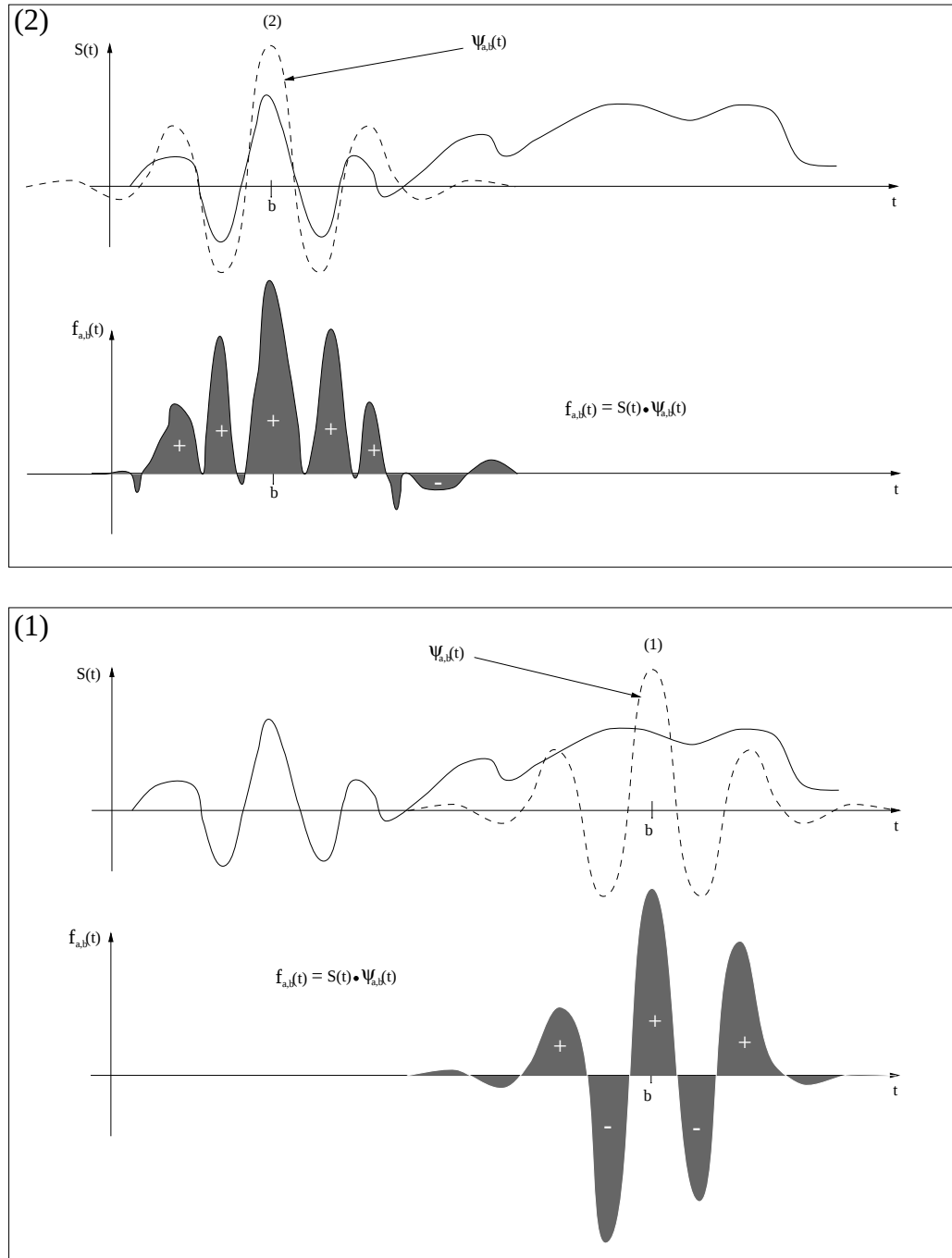


Figure D.2: *Coefficients d'ondelette*

$W_s(a, b)$. L'ondelette peut ainsi effectuer un “zooming” sur n'importe quelle portion du signal, et s'adapter ainsi à l'échelle des différents phénomènes constitutifs du signal. Les coefficients $W_s(a, b)$ seront d'autant plus grands que les variations du signal seront comparables localement à celle de l'ondelette, et d'autant plus petits dans le cas inverse [39].

Le coefficient d'ondelette $W_s(a, b)$ d'un signal $S(t)$ dépend de la forme de celui-ci au voisinage de l'abscisse b . Quand $S(t)$ est à peu près constant (*c.f.* figure D.2 (1)) autour

de abscisse b , le produit de $S(t)$ par l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ (d'aire nulle) a une aire très petite, autrement dit $W_s(a, b)$ est très petit. Au contraire, quand le fragment du signal autour de abscisse b est très irrégulier (*c.f.* figure D.2 (2)), et que ses variations sont de "fréquence" comparable à celle de l'ondelette, l'aire du produit signal-ondelette (donc $W_s(a, b)$) est beaucoup plus grande.

Annexe E

Triangulation

Le fait de calculer la vitesse et la déformation induite par une distribution de particules sur elles-mêmes permet d'utiliser la symétrie de la matrice qui divise les calculs nécessaires par deux. Soit i et j deux points tourbillonnaires, le principe du calcul est le suivant (vitesse et déformation initialisés à zéro avant le calcul) :

Pour $i = 1$, au nombre total de particules -1 ($ltot - 1$)

Pour $j = i + 1$, au nombre total de particules

Calcul de la vitesse :

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) + \underline{\mathbf{V}}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$$

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) + \underline{\mathbf{V}}_{ji}(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$$

Calcul de la déformation :

$$\underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) + \underline{\mathbf{G}}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}_i, t)$$

$$\underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) + \underline{\mathbf{G}}_{ji}(\underline{\mathbf{X}}_j, t)$$

fin de boucle

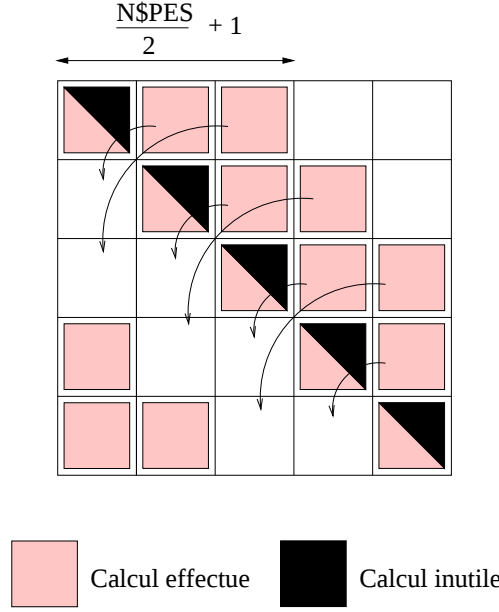
fin de boucle

avec pour la vitesse et la déformation régularisées :

$$\underline{\mathbf{V}}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_j^6\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\underline{\mathbf{R}}_{ij} \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t)\right)$$

$$\underline{\mathbf{V}}_{ji}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_i^6\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\underline{\mathbf{R}}_{ij} \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t)\right)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}_i, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\underline{\mathbf{R}}_{ij}^4}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_j^6\right)^{\frac{3}{2}}} \underline{\mathbf{R}}_{ij} \left(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) \cdot \left(\underline{\mathbf{R}}_{ij} \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t)\right)\right) + \frac{1}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_j^6\right)^{\frac{1}{2}}} \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t) \right]$$

Figure E.1: *Symétrie par bloc pour un nombre de processus impair*

$$\underline{\mathbf{G}}_{ji}(\underline{\mathbf{X}}_j, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\underline{\mathbf{R}}_{ij}^4}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_i^6\right)^{\frac{3}{2}}} \underline{\mathbf{R}}_{ij} \left(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t) \cdot \left(\underline{\mathbf{R}}_{ij} \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) \right) \right) - \frac{1}{\left(\underline{\mathbf{R}}_{ij}^6 + \delta_i^6\right)^{\frac{1}{2}}} \underline{\boldsymbol{\Omega}}_i(t) \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}_j(t) \right]$$

Dans la version parallélisée, on n'utilise pas la triangulation localement, mais une triangulation par blocs (*c.f.* figure E.1). En effet, la boucle sur i correspond aux données du processus local, tandis que la boucle sur j correspond aux données des autres processus présent cycliquement (*c.f.* annexe F). Cependant, après $\left(\frac{N\$PES}{2} + 1\right)$ boucles de circulations, la triangulation est conservée globalement. A la première boucle de circulation, on pourrai envisager un traitement spécifique qui prenne en compte localement cette triangulation.

Annexe F

Algorithme utilisé pour P.V.M.

Introduction

On définit $N\$PES$ processus qui sont dispatchés sur les machines “enrôlées”. On peut évidemment avoir plusieurs processus par processeurs. L’ensemble des calculs, relatifs aux calculs de vitesse et déformation, seront pratiquement divisés par le nombre de processus. En effet, il faut tenir compte des transferts de données entre les processus. De plus, pour l’algorithme que l’on utilise, des calculs inutiles sont effectués à la première et éventuellement à la dernière itération lorsque le nombre de processus est pair. Dans ce qui va suivre, nous allons, pour un nombre de processus choisi arbitrairement ($N\$PES = 3$) et un nombre de particules choisi arbitrairement également ($Ltot = 10$) décrire les étapes de calcul pour les différents processus, d’abord dans le cas d’un nombre de processus impair, dont le nombre de données n’est pas un multiple du nombre de processus, puis dans le cas d’un nombre de processus pair.

1 Nombre de processus impair

Nous avons 3 processus :

- Processus maître : Pp_0
- Processus esclave 1 : Pe_1
- Processus esclave 2 : Pe_2

Etape 1 Le processus maître distribue les données ($nt = \frac{Ltot}{N\$PES}$), par pas de $N\$PES$, aux processus esclaves et à lui même. nt est obtenu par une division entière. Si le nombre de processus n’est pas un multiple du nombre de données, nt est alors incrémenté de 1 et on complète les données de certains processus par un 0, ce qui entraîne peu de calculs inutiles, pour une grande facilité de gestion.

$\underline{Pe}_1 : 2, 5, 8, 0$

$\underline{Pe}_2 : 3, 6, 9, 0$

$\underline{Pp}_0 : 1, 4, 7, 10$

Les données distribuées sont la position, l'intensité et le noyau de chaque particule ainsi que le nombre de données nt .

Etape 2 (première itération de circulation : $nit = 1$) Calcul des vecteurs vitesse et déformation en ne tenant compte que des données présentes (On ne détaille les calculs que pour la vitesse). Pour la première rotation, et pour la dernière (lorsque le nombre de processus est pair), les résultats sont divisés par 2. En effet, du fait que l'on fait une double boucle sur la totalité des données ($i = 1, nt$ et $j = 1, nt$), et que l'on calcule $\underline{V}_{ij}$ et $\underline{V}_{ji}$ (*c.f.* annexe E), on effectue deux fois le même calcul. On a :

$$\begin{aligned} V(1) &= [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 \\ V(4) &= [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 \\ V(7) &= [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 \\ V(10) &= [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 \end{aligned}$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pe_1 (suivant).

$$\begin{aligned} V_1(1) &= [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 \\ V_1(4) &= [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 \\ V_1(7) &= [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 \\ V_1(10) &= [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 \end{aligned}$$

Pendant que le processus maître fait ces calculs, les processus esclaves font la même chose avec leurs données respectives qui ont été transmises par le processus maître :

- Pe_1 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(2) &= [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{2,8} + V_{2,0}] / 2 \\ V(5) &= [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 \\ V(8) &= [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 \\ V(0) &= [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 = 0 \end{aligned}$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pe_2 (suivant).

$$V_1(2) = [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{3,8} + V_{2,0}] / 2$$

$$\begin{aligned}
V_1(5) &= [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 \\
V_1(8) &= [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 \\
V_1(0) &= [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 = 0
\end{aligned}$$

- Pe_2 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned}
V(3) &= [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 \\
V(6) &= [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 \\
V(9) &= [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 \\
V(0) &= [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 = 0
\end{aligned}$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pp_0 (suivant).

$$\begin{aligned}
V_1(3) &= [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 \\
V_1(6) &= [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 \\
V_1(9) &= [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 \\
V_1(0) &= [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 = 0
\end{aligned}$$

Etape 3 (deuxième et dernière itération de circulation : $nit = 2$) (la dernière itération de circulation est obtenu par la division entière : $\frac{N\$PES}{2} + 1$). Réception des données de Pe_2 puis calcul. Les vitesses calculées seront transmises au processus : $N\$PES + 1 - nit + n^o_{proc}$. (modulo $N\$PES$).

$$\begin{aligned}
V(1) &= [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 + [V_{1,3} + V_{1,6} + V_{1,9} + V_{1,0}] \\
V(4) &= [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 + [V_{4,3} + V_{4,6} + V_{4,9} + V_{4,0}] \\
V(7) &= [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 + [V_{7,3} + V_{7,6} + V_{7,9} + V_{7,0}] \\
V(10) &= [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 + [V_{10,3} + V_{10,6} + V_{10,9} + V_{10,0}]
\end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_2 (fin de rotation).

$$\begin{aligned}
V_2(3) &= [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 + [V_{3,1} + V_{3,4} + V_{3,7} + V_{3,10}] \\
V_2(6) &= [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 + [V_{6,1} + V_{6,4} + V_{6,7} + V_{6,10}] \\
V_2(9) &= [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 + [V_{9,1} + V_{9,4} + V_{9,7} + V_{9,10}] \\
V_2(0) &= [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,1} + V_{0,4} + V_{0,7} + V_{0,10}]
\end{aligned}$$

Pendant que le processus maître fait ces calculs, les processus esclaves font la même chose avec leurs données respectives issues de Pp_0 et Pe_1 :

- Pe_1 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(2) &= [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{2,8} + V_{2,0}] / 2 + [V_{2,1} + V_{2,4} + V_{2,7} + V_{2,10}] \\ V(5) &= [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 + [V_{5,1} + V_{4,4} + V_{5,7} + V_{5,10}] \\ V(8) &= [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 + [V_{8,1} + V_{8,4} + V_{8,7} + V_{8,10}] \\ V(0) &= [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,1} + V_{0,4} + V_{0,7} + V_{0,10}] \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pp_0 (fin de rotation).

$$\begin{aligned} V_2(1) &= [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 + [V_{1,2} + V_{1,5} + V_{1,8} + V_{1,0}] \\ V_2(4) &= [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 + [V_{4,2} + V_{4,5} + V_{4,8} + V_{4,0}] \\ V_2(7) &= [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 + [V_{7,2} + V_{7,5} + V_{7,8} + V_{7,0}] \\ V_2(10) &= [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 + [V_{10,2} + V_{10,5} + V_{10,8} + V_{10,0}] \end{aligned}$$

- Pe_2 Réception des données de Pe_1 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(3) &= [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 + [V_{3,2} + V_{3,5} + V_{3,8} + V_{3,0}] \\ V(6) &= [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 + [V_{6,2} + V_{6,5} + V_{6,8} + V_{6,0}] \\ V(9) &= [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 + [V_{9,2} + V_{9,5} + V_{9,8} + V_{9,0}] \\ V(0) &= [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_1 (fin de rotation).

$$\begin{aligned} V_2(2) &= [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{2,8} + V_{2,0}] / 2 + [V_{2,3} + V_{2,6} + V_{2,9} + V_{2,0}] \\ V_2(5) &= [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 + [V_{5,3} + V_{4,6} + V_{5,9} + V_{5,0}] \\ V_2(8) &= [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 + [V_{8,3} + V_{8,6} + V_{8,9} + V_{8,0}] \\ V_2(0) &= [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] \end{aligned}$$

Etape 4 Fin de rotation : Réception des données.

- Pp_0 Recup. de Pe_1

$$V(1) = [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 + [V_{1,3} + V_{1,6} + V_{1,9} + V_{1,0}]$$

$$\begin{aligned}
& + [V_{1,1} + V_{1,4} + V_{1,7} + V_{1,10}] / 2 + [V_{1,2} + V_{1,5} + V_{1,8} + V_{1,0}] \\
V(4) & = [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 + [V_{4,3} + V_{4,6} + V_{4,9} + V_{4,0}] \\
& + [V_{4,1} + V_{4,4} + V_{4,7} + V_{4,10}] / 2 + [V_{4,2} + V_{4,5} + V_{4,8} + V_{4,0}] \\
V(7) & = [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 + [V_{7,3} + V_{7,6} + V_{7,9} + V_{7,0}] \\
& + [V_{7,1} + V_{7,4} + V_{7,7} + V_{7,10}] / 2 + [V_{7,2} + V_{7,5} + V_{7,8} + V_{7,0}] \\
V(10) & = [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 + [V_{10,3} + V_{10,6} + V_{10,9} + V_{10,0}] \\
& + [V_{10,1} + V_{10,4} + V_{10,7} + V_{10,10}] / 2 + [V_{10,2} + V_{10,5} + V_{10,8} + V_{10,0}]
\end{aligned}$$

• Pe_1 Recup. de Pe_2

$$\begin{aligned}
V(2) & = [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{2,8} + V_{2,0}] / 2 + [V_{2,1} + V_{2,4} + V_{2,7} + V_{2,10}] \\
& + [V_{2,2} + V_{2,5} + V_{2,8} + V_{2,0}] / 2 + [V_{2,3} + V_{2,6} + V_{2,9} + V_{2,0}] \\
V(5) & = [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 + [V_{5,1} + V_{5,4} + V_{5,7} + V_{5,10}] \\
& + [V_{5,2} + V_{5,5} + V_{5,8} + V_{5,0}] / 2 + [V_{5,3} + V_{5,6} + V_{5,9} + V_{5,0}] \\
V(8) & = [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 + [V_{8,1} + V_{8,4} + V_{8,7} + V_{8,10}] \\
& + [V_{8,2} + V_{8,5} + V_{8,8} + V_{8,0}] / 2 + [V_{8,3} + V_{8,6} + V_{8,9} + V_{8,0}] \\
V(0) & = [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,1} + V_{0,4} + V_{0,7} + V_{0,10}] \\
& + [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}]
\end{aligned}$$

Envoi des résultats dans Pp_0

• Pe_2 Recup. de Pp_0

$$\begin{aligned}
V(3) & = [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 + [V_{3,2} + V_{3,5} + V_{3,8} + V_{3,0}] \\
& + [V_{3,3} + V_{3,6} + V_{3,9} + V_{3,0}] / 2 + [V_{3,1} + V_{3,4} + V_{3,7} + V_{3,10}] \\
V(6) & = [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 + [V_{6,2} + V_{6,5} + V_{6,8} + V_{6,0}] \\
& + [V_{6,3} + V_{6,6} + V_{6,9} + V_{6,0}] / 2 + [V_{6,1} + V_{6,4} + V_{6,7} + V_{6,10}] \\
V(9) & = [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 + [V_{9,2} + V_{9,5} + V_{9,8} + V_{9,0}] \\
& + [V_{9,3} + V_{9,6} + V_{9,9} + V_{9,0}] / 2 + [V_{9,1} + V_{9,4} + V_{9,7} + V_{9,10}] \\
V(0) & = [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,2} + V_{0,5} + V_{0,8} + V_{0,0}] \\
& + [V_{0,3} + V_{0,6} + V_{0,9} + V_{0,0}] / 2 + [V_{0,1} + V_{0,4} + V_{0,7} + V_{0,10}]
\end{aligned}$$

Envoi des résultats dans Pp_0

Etape 5 Transfert des données dans le COMMON :

Transfert des tableaux locaux du processus maître dans le COMMON, puis réception des données des processus esclaves, que l'on place également dans le COMMON.

Lors de la première itération de circulation, on divise les résultats du calcul de vitesse et déformation par 2, car sinon ils seraient comptabilisés 2 fois.

2 Nombre de processus pair

Dans ce qui va suivre, nous allons pour un nombre de processus choisi arbitrairement ($N\$PES = 4$) et un nombre de particules choisi arbitrairement également ($Ltot = 16$) décrire les étapes de calcul pour les différents processus.

Nous avons 3 processus :

- Processus maître : Pp_0
- Processus esclave 1 : Pe_1
- Processus esclave 2 : Pe_2
- Processus esclave 2 : Pe_3

Etape 1 Le processus maître distribue les données ($nt = \frac{Ltot}{N\$PES}$), par pas de $N\$PES$, aux processus esclaves et à lui même. On complète les données par un 0 lorsque le nombre de processus n'est pas un multiple du nombre de données. Le nombre nt de données est alors incrémenté de 1.

$\underline{Pe_1}$: 2, 6, 10, 14

$\underline{Pe_2}$: 3, 7, 11, 15

$\underline{Pe_3}$: 4, 8, 12, 16

$\underline{Pp_0}$: 1, 5, 9, 13

Les données distribuées sont la position, l'intensité et le noyau de chaque particule ainsi que le nombre de données nt .

Etape 2 (première itération de circulation : $nit = 1$) Calcul des vecteurs vitesse et déformation en ne tenant compte que des données présentes (On ne détaille les calculs que pour la vitesse). Pour la première rotation, et pour la dernière (lorsque le nombre de processus est pair), les résultats sont divisés par 2. On a :

$$V(1) = [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2$$

$$V(5) = [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2$$

$$V(9) = [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2$$

$$V(13) = [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pe_1 (suivant).

$$V_1(1) = [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2$$

$$V_1(5) = [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2$$

$$V_1(9) = [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2$$

$$V_1(13) = [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2$$

Pendant que le processus maître fait ces calculs, les processus esclaves font la même chose avec leurs données respectives qui ont été transmises par le processus maître :

- Pe_1 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$V(2) = [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2$$

$$V(6) = [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2$$

$$V(10) = [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2$$

$$V(14) = [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pe_2 (suivant).

$$V_1(2) = [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2$$

$$V_1(6) = [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2$$

$$V_1(10) = [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2$$

$$V_1(14) = [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2$$

- Pe_2 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$V(3) = [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2$$

$$V(7) = [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2$$

$$V(11) = [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2$$

$$V(15) = [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pp_3 (suivant).

$$\begin{aligned}
 V_1(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 \\
 V_1(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 \\
 V_1(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 \\
 V_1(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2
 \end{aligned}$$

- Pe_3 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned}
 V(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 \\
 V(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 \\
 V(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 \\
 V(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2
 \end{aligned}$$

Calcul des mêmes vitesses qui seront transmises au processus Pp_0 (suivant).

$$\begin{aligned}
 V_1(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 \\
 V_1(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 \\
 V_1(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 \\
 V_1(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2
 \end{aligned}$$

Etape 3 (deuxième itération de circulation : $nit = 2$) Réception des données de Pe_3 puis calcul.

$$\begin{aligned}
 V(1) &= [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,4} + V_{1,8} + V_{1,12} + V_{1,16}] \\
 V(5) &= [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,4} + V_{5,8} + V_{5,12} + V_{5,16}] \\
 V(9) &= [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,4} + V_{9,8} + V_{9,12} + V_{9,16}] \\
 V(13) &= [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,4} + V_{13,8} + V_{13,12} + V_{13,16}]
 \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_1 (suivant)

$$\begin{aligned}
 V_2(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,1} + V_{4,5} + V_{4,9} + V_{4,13}] \\
 V_2(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,1} + V_{8,5} + V_{8,9} + V_{8,13}] \\
 V_2(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,1} + V_{12,5} + V_{12,9} + V_{12,13}] \\
 V_2(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,1} + V_{16,5} + V_{16,9} + V_{16,13}]
 \end{aligned}$$

Pendant que le processus maître fait ces calculs, les processus esclaves font la même chose avec leurs données respectives issues de Pp_0 , Pe_1 et Pe_2 :

- Pe_1 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(2) &= [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,1} + V_{2,5} + V_{2,9} + V_{2,13}] \\ V(6) &= [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,1} + V_{6,5} + V_{6,9} + V_{6,13}] \\ V(10) &= [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,1} + V_{10,5} + V_{10,9} + V_{10,13}] \\ V(14) &= [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,1} + V_{14,5} + V_{14,9} + V_{14,13}] \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_2 (suivant)

$$\begin{aligned} V_2(1) &= [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,2} + V_{1,6} + V_{1,10} + V_{1,14}] \\ V_2(5) &= [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,2} + V_{5,6} + V_{5,10} + V_{5,14}] \\ V_2(9) &= [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,2} + V_{9,6} + V_{9,10} + V_{9,14}] \\ V_2(13) &= [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,2} + V_{13,6} + V_{13,10} + V_{13,14}] \end{aligned}$$

- Pe_2 Réception des données de Pe_1 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,2} + V_{3,6} + V_{3,10} + V_{3,14}] \\ V(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,2} + V_{7,6} + V_{7,10} + V_{7,14}] \\ V(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,2} + V_{11,6} + V_{11,10} + V_{11,14}] \\ V(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,2} + V_{15,6} + V_{15,10} + V_{15,14}] \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_3 (suivant)

$$\begin{aligned} V_2(2) &= [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,3} + V_{2,7} + V_{2,11} + V_{2,15}] \\ V_2(6) &= [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,3} + V_{6,7} + V_{6,11} + V_{6,15}] \\ V_2(10) &= [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,3} + V_{10,7} + V_{10,11} + V_{10,15}] \\ V_2(14) &= [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,3} + V_{14,7} + V_{14,11} + V_{14,15}] \end{aligned}$$

- Pe_3 Réception des données de Pe_2 puis calcul.

$$\begin{aligned} V(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,3} + V_{4,7} + V_{4,11} + V_{4,15}] \\ V(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,3} + V_{8,7} + V_{8,11} + V_{8,15}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,3} + V_{12,7} + V_{12,11} + V_{12,15}] \\
V(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,3} + V_{16,7} + V_{16,11} + V_{16,15}]
\end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pp_0 (suivant)

$$\begin{aligned}
V_2(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,4} + V_{3,8} + V_{3,12} + V_{3,16}] \\
V_2(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,4} + V_{7,8} + V_{7,12} + V_{7,16}] \\
V_2(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,4} + V_{11,8} + V_{11,12} + V_{11,16}] \\
V_2(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,4} + V_{15,8} + V_{15,12} + V_{15,16}]
\end{aligned}$$

Etape 4 (troisième et dernière itération de circulation : $nit = 3$) (la dernière itération de circulation est obtenu par la division entière : $\frac{N\$PES}{2} + 1$). Réception des données de Pe_3 puis calcul. Les vitesses calculées seront transmises au processus : $N\$PES + 1 - nit + n^o_{proc}$. (modulo $N\$PES$).

$$\begin{aligned}
V(1) &= [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,4} + V_{1,8} + V_{1,12} + V_{1,16}] \\
&+ [V_{1,3} + V_{1,7} + V_{1,11} + V_{1,15}] / 2 \\
V(5) &= [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,4} + V_{5,8} + V_{5,12} + V_{5,16}] \\
&+ [V_{5,3} + V_{5,7} + V_{5,11} + V_{5,15}] / 2 \\
V(9) &= [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,4} + V_{9,8} + V_{9,12} + V_{9,16}] \\
&+ [V_{9,3} + V_{9,7} + V_{9,11} + V_{9,15}] / 2 \\
V(13) &= [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,4} + V_{13,8} + V_{13,12} + V_{13,16}] \\
&+ [V_{13,3} + V_{13,7} + V_{13,11} + V_{13,15}] / 2
\end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_2 (fin de rotation)

$$\begin{aligned}
V_1(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,4} + V_{3,8} + V_{3,12} + V_{3,16}] \\
&+ [V_{3,1} + V_{3,5} + V_{3,9} + V_{3,13}] / 2 \\
V_1(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,4} + V_{7,8} + V_{7,12} + V_{7,16}] \\
&+ [V_{7,1} + V_{7,5} + V_{7,9} + V_{7,13}] / 2 \\
V_1(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,4} + V_{11,8} + V_{11,12} + V_{11,16}] \\
&+ [V_{11,1} + V_{11,5} + V_{11,9} + V_{11,13}] / 2 \\
V_1(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,4} + V_{15,8} + V_{15,12} + V_{15,16}] \\
&+ [V_{15,1} + V_{15,5} + V_{15,9} + V_{15,13}] / 2
\end{aligned}$$

Pendant que le processus maître fait ces calculs, les processus esclaves font la même chose avec leurs données respectives issues de Pe_3 , Pp_0 et Pe_1 :

- Pe_1 Réception des données de Pp_0 puis calcul.

$$\begin{aligned}
 V(2) &= [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,1} + V_{2,5} + V_{2,9} + V_{2,13}] \\
 &+ [V_{2,4} + V_{2,8} + V_{2,12} + V_{2,16}] / 2 \\
 V(6) &= [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,1} + V_{6,5} + V_{6,9} + V_{6,13}] \\
 &+ [V_{6,4} + V_{6,8} + V_{6,12} + V_{6,16}] / 2 \\
 V(10) &= [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,1} + V_{10,5} + V_{10,9} + V_{10,13}] \\
 &+ [V_{10,4} + V_{10,8} + V_{10,12} + V_{10,16}] / 2 \\
 V(14) &= [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,1} + V_{14,5} + V_{14,9} + V_{14,13}] \\
 &+ [V_{14,4} + V_{14,8} + V_{14,12} + V_{14,16}] / 2
 \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_3 (fin de rotation)

$$\begin{aligned}
 V_1(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,1} + V_{4,5} + V_{4,9} + V_{4,13}] \\
 &+ [V_{4,2} + V_{4,6} + V_{4,10} + V_{4,14}] / 2 \\
 V_1(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,1} + V_{8,5} + V_{8,9} + V_{8,13}] \\
 &+ [V_{8,2} + V_{8,6} + V_{8,10} + V_{8,14}] / 2 \\
 V_1(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,1} + V_{12,5} + V_{12,9} + V_{12,13}] \\
 &+ [V_{12,2} + V_{12,6} + V_{12,10} + V_{12,14}] / 2 \\
 V_1(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,1} + V_{16,5} + V_{16,9} + V_{16,13}] \\
 &+ [V_{16,2} + V_{16,6} + V_{16,10} + V_{16,14}] / 2
 \end{aligned}$$

- Pe_2 Réception des données de Pe_1 puis calcul.

$$\begin{aligned}
 V(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,2} + V_{3,6} + V_{3,10} + V_{3,14}] \\
 &+ [V_{3,1} + V_{3,5} + V_{3,9} + V_{3,13}] / 2 \\
 V(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,2} + V_{7,6} + V_{7,10} + V_{7,14}] \\
 &+ [V_{7,1} + V_{7,5} + V_{7,9} + V_{7,13}] / 2 \\
 V(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,2} + V_{11,6} + V_{11,10} + V_{11,14}] \\
 &+ [V_{11,1} + V_{11,5} + V_{11,9} + V_{11,13}] / 2 \\
 V(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,2} + V_{15,6} + V_{15,10} + V_{15,14}] \\
 &+ [V_{15,1} + V_{15,5} + V_{15,9} + V_{15,13}] / 2
 \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pp_0 (fin de rotation)

$$\begin{aligned}
 V_1(1) &= [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,2} + V_{1,6} + V_{1,10} + V_{1,14}] \\
 &+ [V_{1,3} + V_{1,7} + V_{1,11} + V_{1,15}] / 2 \\
 V_1(5) &= [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,2} + V_{5,6} + V_{5,10} + V_{5,14}] \\
 &+ [V_{5,3} + V_{5,7} + V_{5,11} + V_{5,15}] / 2 \\
 V_1(9) &= [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,2} + V_{9,6} + V_{9,10} + V_{9,14}] \\
 &+ [V_{9,3} + V_{9,7} + V_{9,11} + V_{9,15}] / 2 \\
 V_1(13) &= [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,2} + V_{13,6} + V_{13,10} + V_{13,14}] \\
 &+ [V_{13,3} + V_{13,7} + V_{13,11} + V_{13,15}] / 2
 \end{aligned}$$

- Pe_3 Réception des données de Pe_2 puis calcul.

$$\begin{aligned}
 V(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,3} + V_{4,7} + V_{4,11} + V_{4,15}] \\
 &+ [V_{4,2} + V_{4,6} + V_{4,10} + V_{4,14}] / 2 \\
 V(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,3} + V_{8,7} + V_{8,11} + V_{8,15}] \\
 &+ [V_{8,2} + V_{8,6} + V_{8,10} + V_{8,14}] / 2 \\
 V(12) &= [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,3} + V_{12,7} + V_{12,11} + V_{12,15}] \\
 &+ [V_{12,2} + V_{12,6} + V_{12,10} + V_{12,14}] / 2 \\
 V(16) &= [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,3} + V_{16,7} + V_{16,11} + V_{16,15}] \\
 &+ [V_{16,2} + V_{16,6} + V_{16,10} + V_{16,14}] / 2
 \end{aligned}$$

Calcul des vitesses qui seront transmises au processus Pe_1 (fin de rotation)

$$\begin{aligned}
 V_1(2) &= [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,3} + V_{2,7} + V_{2,11} + V_{2,15}] \\
 &+ [V_{2,4} + V_{2,8} + V_{2,12} + V_{2,16}] / 2 \\
 V_1(6) &= [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,3} + V_{6,7} + V_{6,11} + V_{6,15}] \\
 &+ [V_{6,4} + V_{6,8} + V_{6,12} + V_{6,16}] / 2 \\
 V_1(10) &= [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,3} + V_{10,7} + V_{10,11} + V_{10,15}] \\
 &+ [V_{10,4} + V_{10,8} + V_{10,12} + V_{10,16}] / 2 \\
 V_1(14) &= [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,3} + V_{14,7} + V_{14,11} + V_{14,15}] \\
 &+ [V_{14,4} + V_{14,8} + V_{14,12} + V_{14,16}] / 2
 \end{aligned}$$

Etape 5 Fin de rotation : Réception des données.

• Pp_0 Recup. de Pe_2

$$\begin{aligned}
V(1) &= [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,4} + V_{1,8} + V_{1,12} + V_{1,16}] \\
&+ [V_{1,3} + V_{1,7} + V_{1,11} + V_{1,15}] / 2 \\
&+ [V_{1,1} + V_{1,5} + V_{1,9} + V_{1,13}] / 2 + [V_{1,2} + V_{1,6} + V_{1,10} + V_{1,14}] \\
&+ [V_{1,3} + V_{1,7} + V_{1,11} + V_{1,15}] / 2 \\
V(5) &= [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,4} + V_{5,8} + V_{5,12} + V_{5,16}] \\
&+ [V_{5,3} + V_{5,7} + V_{5,11} + V_{5,15}] / 2 \\
&+ [V_{5,1} + V_{5,5} + V_{5,9} + V_{5,13}] / 2 + [V_{5,2} + V_{5,6} + V_{5,10} + V_{5,14}] \\
&+ [V_{5,3} + V_{5,7} + V_{5,11} + V_{5,15}] / 2 \\
V(9) &= [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,4} + V_{9,8} + V_{9,12} + V_{9,16}] \\
&+ [V_{9,3} + V_{9,7} + V_{9,11} + V_{9,15}] / 2 \\
&+ [V_{9,1} + V_{9,5} + V_{9,9} + V_{9,13}] / 2 + [V_{9,2} + V_{9,6} + V_{9,10} + V_{9,14}] \\
&+ [V_{9,3} + V_{9,7} + V_{9,11} + V_{9,15}] / 2 \\
V(13) &= [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,4} + V_{13,8} + V_{13,12} + V_{13,16}] \\
&+ [V_{13,3} + V_{13,7} + V_{13,11} + V_{13,15}] / 2 \\
&+ [V_{13,1} + V_{13,5} + V_{13,9} + V_{13,13}] / 2 + [V_{13,2} + V_{13,6} + V_{13,10} + V_{13,14}] \\
&+ [V_{13,3} + V_{13,7} + V_{13,11} + V_{13,15}] / 2
\end{aligned}$$

• Pe_1 Recup. de Pe_3

$$\begin{aligned}
V(2) &= [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,1} + V_{2,5} + V_{2,9} + V_{2,13}] \\
&+ [V_{2,4} + V_{2,8} + V_{2,12} + V_{2,16}] / 2 \\
&+ [V_{2,2} + V_{2,6} + V_{2,10} + V_{2,14}] / 2 + [V_{2,3} + V_{2,7} + V_{2,11} + V_{2,15}] \\
&+ [V_{2,4} + V_{2,8} + V_{2,12} + V_{2,16}] / 2 \\
V(6) &= [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,1} + V_{6,5} + V_{6,9} + V_{6,13}] \\
&+ [V_{6,4} + V_{6,8} + V_{6,12} + V_{6,16}] / 2 \\
&+ [V_{6,2} + V_{6,6} + V_{6,10} + V_{6,14}] / 2 + [V_{6,3} + V_{6,7} + V_{6,11} + V_{6,15}] \\
&+ [V_{6,4} + V_{6,8} + V_{6,12} + V_{6,16}] / 2 \\
V(10) &= [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,1} + V_{10,5} + V_{10,9} + V_{10,13}] \\
&+ [V_{10,4} + V_{10,8} + V_{10,12} + V_{10,16}] / 2 \\
&+ [V_{10,2} + V_{10,6} + V_{10,10} + V_{10,14}] / 2 + [V_{10,3} + V_{10,7} + V_{10,11} + V_{10,15}] \\
&+ [V_{10,4} + V_{10,8} + V_{10,12} + V_{10,16}] / 2 \\
V(14) &= [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,1} + V_{14,5} + V_{14,9} + V_{14,13}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [V_{14,4} + V_{14,8} + V_{14,12} + V_{14,16}] / 2 \\
& + [V_{14,2} + V_{14,6} + V_{14,10} + V_{14,14}] / 2 + [V_{14,3} + V_{14,7} + V_{14,11} + V_{14,15}] \\
& + [V_{14,4} + V_{14,8} + V_{14,12} + V_{14,16}] / 2
\end{aligned}$$

Envoi des résultats dans Pp_0

• Pe_2 Recup. de Pp_0

$$\begin{aligned}
V(3) &= [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,2} + V_{3,6} + V_{3,10} + V_{3,14}] \\
&+ [V_{3,1} + V_{3,5} + V_{3,9} + V_{3,13}] / 2 \\
&+ [V_{3,3} + V_{3,7} + V_{3,11} + V_{3,15}] / 2 + [V_{3,4} + V_{3,8} + V_{3,12} + V_{3,16}] \\
&+ [V_{3,1} + V_{3,5} + V_{3,9} + V_{3,13}] / 2 \\
V(7) &= [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,2} + V_{7,6} + V_{7,10} + V_{7,14}] \\
&+ [V_{7,1} + V_{7,5} + V_{7,9} + V_{7,13}] / 2 \\
&+ [V_{7,3} + V_{7,7} + V_{7,11} + V_{7,15}] / 2 + [V_{7,4} + V_{7,8} + V_{7,12} + V_{7,16}] \\
&+ [V_{7,1} + V_{7,5} + V_{7,9} + V_{7,13}] / 2 \\
V(11) &= [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,2} + V_{11,6} + V_{11,10} + V_{11,14}] \\
&+ [V_{11,1} + V_{11,5} + V_{11,9} + V_{11,13}] / 2 \\
&+ [V_{11,3} + V_{11,7} + V_{11,11} + V_{11,15}] / 2 + [V_{11,4} + V_{11,8} + V_{11,12} + V_{11,16}] \\
&+ [V_{11,1} + V_{11,5} + V_{11,9} + V_{11,13}] / 2 \\
V(15) &= [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,2} + V_{15,6} + V_{15,10} + V_{15,14}] \\
&+ [V_{15,1} + V_{15,5} + V_{15,9} + V_{15,13}] / 2 \\
&+ [V_{15,3} + V_{15,7} + V_{15,11} + V_{15,15}] / 2 + [V_{15,4} + V_{15,8} + V_{15,12} + V_{15,16}] \\
&+ [V_{15,1} + V_{15,5} + V_{15,9} + V_{15,13}] / 2
\end{aligned}$$

Envoi des résultats dans Pp_0

• Pe_3 Recup. de Pe_1

$$\begin{aligned}
V(4) &= [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,3} + V_{4,7} + V_{4,11} + V_{4,15}] \\
&+ [V_{4,2} + V_{4,6} + V_{4,10} + V_{4,14}] / 2 \\
&+ [V_{4,4} + V_{4,8} + V_{4,12} + V_{4,16}] / 2 + [V_{4,1} + V_{4,5} + V_{4,9} + V_{4,13}] \\
&+ [V_{4,2} + V_{4,6} + V_{4,10} + V_{4,14}] / 2 \\
V(8) &= [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,3} + V_{8,7} + V_{8,11} + V_{8,15}] \\
&+ [V_{8,2} + V_{8,6} + V_{8,10} + V_{8,14}] / 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [V_{8,4} + V_{8,8} + V_{8,12} + V_{8,16}] / 2 + [V_{8,1} + V_{8,5} + V_{8,9} + V_{8,13}] \\
& + [V_{8,2} + V_{8,6} + V_{8,10} + V_{8,14}] / 2 \\
V(12) & = [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,3} + V_{12,7} + V_{12,11} + V_{12,15}] \\
& + [V_{12,2} + V_{12,6} + V_{12,10} + V_{12,14}] / 2 \\
& + [V_{12,4} + V_{12,8} + V_{12,12} + V_{12,16}] / 2 + [V_{12,1} + V_{12,5} + V_{12,9} + V_{12,13}] \\
& + [V_{12,2} + V_{12,6} + V_{12,10} + V_{12,14}] / 2 \\
V(16) & = [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,3} + V_{16,7} + V_{16,11} + V_{16,15}] \\
& + [V_{16,2} + V_{16,6} + V_{16,10} + V_{16,14}] / 2 \\
& + [V_{16,4} + V_{16,8} + V_{16,12} + V_{16,16}] / 2 + [V_{16,1} + V_{16,5} + V_{16,9} + V_{16,13}] \\
& + [V_{16,2} + V_{16,6} + V_{16,10} + V_{16,14}] / 2
\end{aligned}$$

Envoi des résultats dans Pp_0

Etape 5 Transfert des données dans le COMMON :

Transfert des tableaux locaux du processus maître dans le COMMON, puis réception des données des processus esclaves, que l'on place également dans le COMMON.

Lors de la première et de la dernière itération de circulation, on divise les résultats du calcul de vitesse et déformation par 2, car sinon ils seraient comptabilisées 2 fois.

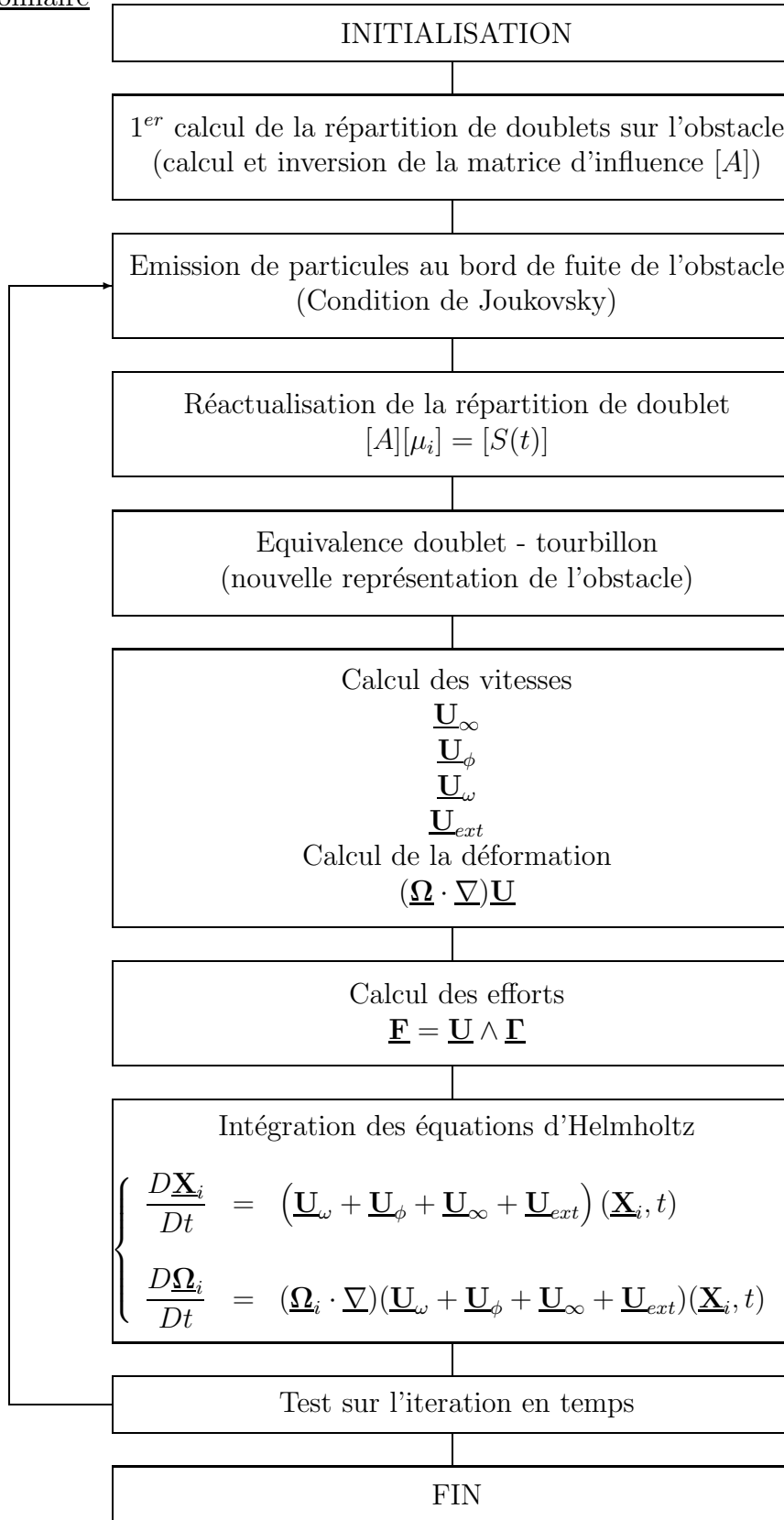
Conclusion

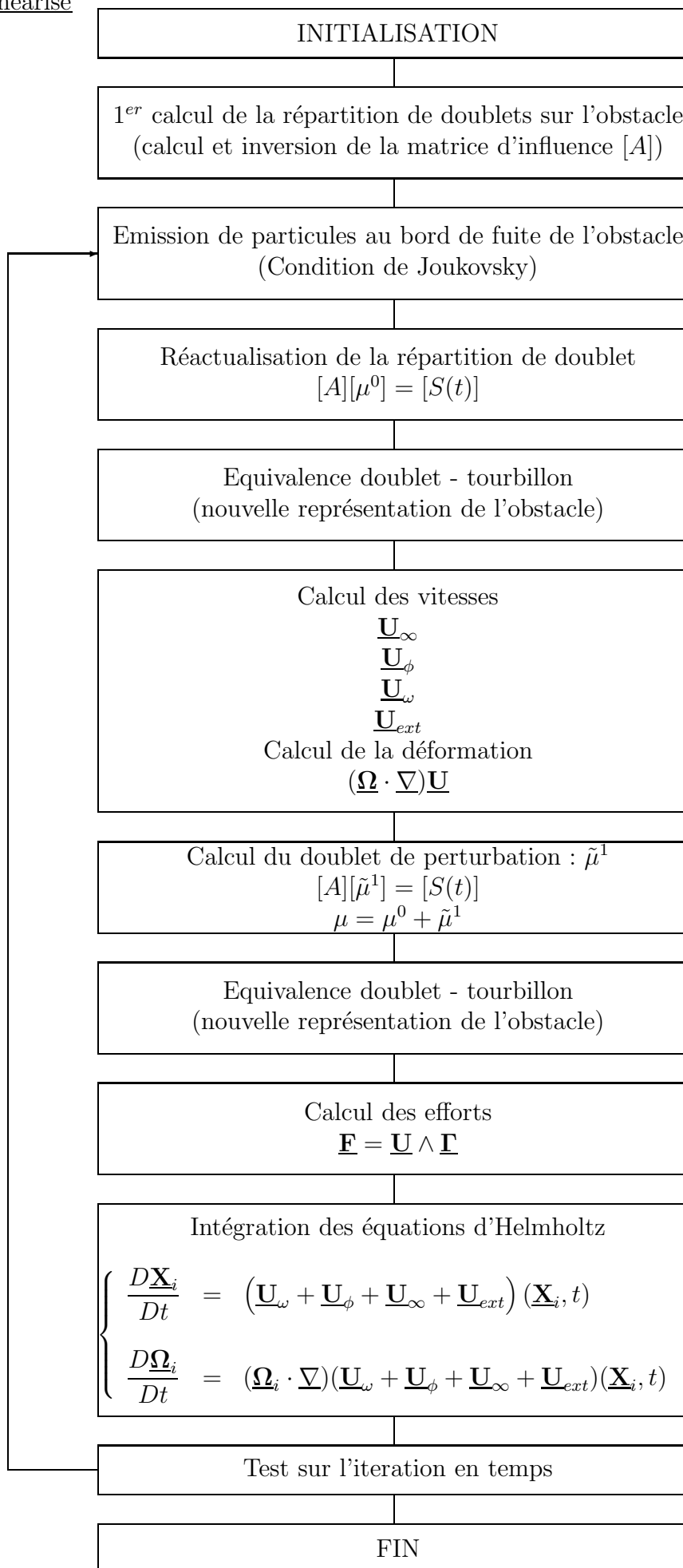
Afin d'optimiser les calculs, il faut faire en sorte que le nombre de processus soit un multiple du nombre nt de données, et de plus, il faut avoir un nombre de processus impair.

Annexe G

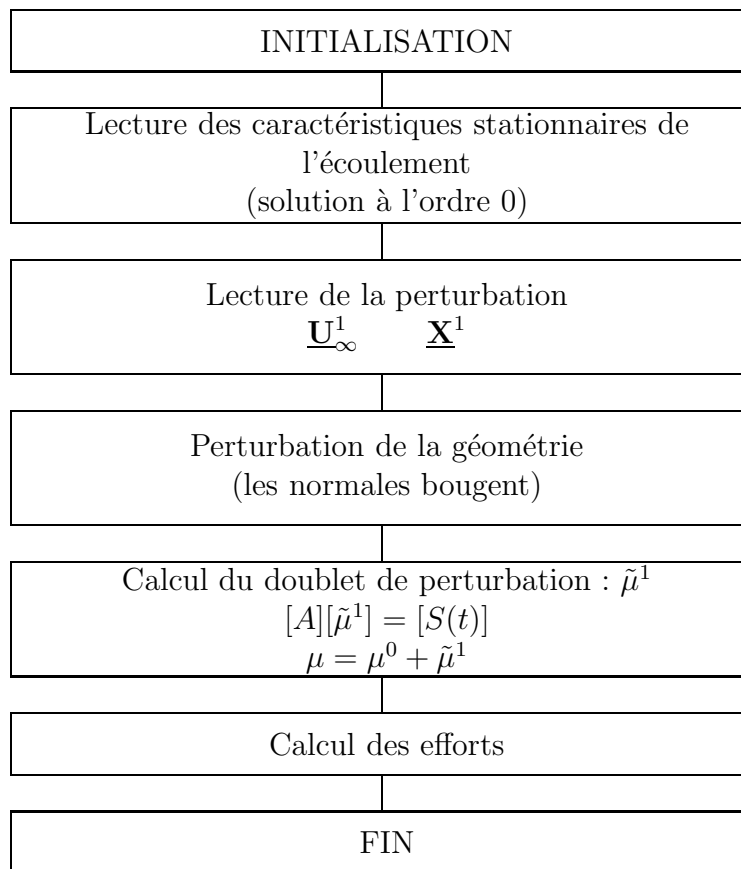
Organigrammes

Calcul Instationnaire



Calcul semi-linéarisé

Calcul linéarisé



Partie V

Index

Index

- Helmholtz**, 12, 25
Adams-Bashforth, 25
Bernoulli, 17, 18, 23
Betz, 121, 201
Biot-Savart, 14
Euler, 11, 16
Gauss-Seidel, 20
Green, 12, 13, 164, 165
Helmholtz, 11, 15, 16, 27
Kutta-Joukowski, 10, 11, 24
Laplace, 13
Navier-Stokes, 11
Neumann, 15, 164
Poisson, 14
Reynolds, 11
- Adimensionnelle, 199
Analyse du sillage, 151
Analyse spectrale, 138
- Bord de fuite, 10, 11, 15, 17, 21–23
Bords latéraux, 17, 22
- Champ de pression, 11
Champ de vitesse, 10–12, 15, 16, 22, 24, 120
Champ de vorticité, 12, 14, 17, 21, 120
Coefficient de charge, 130
Coefficient de couple, 120, 124, 128, 130, 134, 145
Coefficient de poussée, 120, 124, 128, 129, 135, 138
Coefficients d’influence, 19
- Conditions aux limites, 12–15, 18, 20, 164, 165
Couche limite, 11, 23
- Décollé, 11, 17
Déformation, 12, 16
Dérapage, 125, 126, 129, 132
Dérivée particulaire, 12, 16, 28
Discret, 18
dissipation, 26
Doublet, 13–15, 18–22, 24, 26, 164, 165
- Ecoulement, 11, 12
Ecoulement non axial, 124
Effort, 26, 120, 126
Emission tourbillonnaire, 15, 17, 20, 21, 24
Equation de continuité, 11, 12
Extrados, 11
- Facette, 14, 19, 20, 22, 24
Fluide Parfait, 13
Fonction de régularisation, 21, 25
- GENUVP, 24
- Incidence, 9, 11, 17, 22, 126, 131
Incompressible, 11, 13
Intrados, 10, 11, 17
Irrotationnel, 13
- Lagrange, 16, 21
Ligne d’émission, 18, 22
- Méthode intégrale, 164, 165
Méthode intégrale, 13, 14, 19, 165

Méthode particulière, 9, 21, 199
Matrice d'influence, 19–21
Modes, 137

Nappe tourbillonnaire, 9, 11, 17, 23
Non linéaire, 138

Paramètre d'avance, 28, 120–122, 124, 125,
128, 129, 142
Particules, 21
Particules tourbillonnaires, 11, 22, 24
Point de contrôle, 19, 20, 22, 26
Potentiel, 12, 13, 15, 164
Pression, 10, 12, 18, 20, 28

Rendement, 130
Rotationnel, 11, 12, 17

Saut de pression, 17, 23
Saut de vitesse, 11, 22
Sillage, 9–11, 13–18, 25
Singularité, 18, 20, 26
sources, 165
Surface portante, 9, 10, 13, 14, 17, 21, 165
Système linéaire, 19, 27

Tourbillon, 11, 12, 14, 18, 21, 23

Vent apparent, 126
Viscosité, 9, 11, 12
Vitesse d'entraînement, 27
Vitesse induite, 13, 14, 19
Voilures tournantes, 27

Résumé : Nous étudions les écoulements à l'aide des méthodes de calcul décrivant le transport du tourbillon. Ces méthodes sont basées sur une discrétisation volumique des zones tourbillonnaires en particules que l'on suit dans leur mouvement. Ces dernières portent un vecteur tourbillon qui évolue dans le temps en fonction des distorsions locales du champ de vitesse.

Ces modélisations numériques d'écoulements tourbillonnaires instationnaires en formulation lagrangienne présentent la particularité d'être bien adaptées à la description de phénomènes complexes, mais ont la réputation d'être coûteuses en temps de calcul.

Le cadre général de cette thèse est l'amélioration de l'efficacité de ces méthodes sous trois aspects :

- décomposition linéaire / non linéaire

Les effets instationnaires sont décomposés en deux parties : la première correspondant aux mouvements moyens d'amplitude quelconque, la seconde correspondant à de petits mouvements haute fréquence d'amplitude assez faible pour que leurs effets soient approchés par une théorie linéaire.

- approximation par domaine

L'amélioration du modèle consiste à simplifier la description du sillage lointain, en traitant différemment l'évolution dans le temps, des particules éloignées des obstacles.

- la programmation parallèle

La vitesse d'une particule est évaluée par les interactions avec les autres particules. Afin d'éviter des communications longue distance entre les processeurs qui sont coûteuses en temps, il est nécessaire de modifier l'algorithme de calcul des vitesses, et de l'implémenter judicieusement, afin de conserver la symétrie de la matrice des interactions de particules, par une permutation circulaire des données sur l'ensemble des processeurs, dans le schéma maître-esclave sous Parallel Virtual Machine.

Des applications concernant des problèmes d'énergie éoliens, soit sur des générateurs à hélice (éolienne), soit sur les voiles de bateau pour l'interaction fluide/structure sont développés.

Mots clés : méthode particulaire, écoulement tridimensionnel, méthode des singularités, approximation par domaine, programmation parallèle, Parallel Virtual Machine, traitement du signal, décomposition linéaire-non linéaire.

Title : Optimization of calculation methods for unsteady vortical flows

Abstract : The vortex particle methods is used to study numerically unsteady three dimensional flows about lifting surfaces. These methods are based on a discretisation of the vortical zones into particles whose movement is tracked. These particles carry a vortex vector which evolves with time according to local distortions of the velocity field.

These numerical modelizations of unsteady vortical flows in Lagrangian formulation have the peculiarity of being well adapted to the description of complex phenomena, although they are known to be costly in terms of computing time.

The general purpose of this thesis is the improvement of these methods under three aspects :

- linear / non linear decomposition

The unsteady effects are split into two parts : the first one corresponding to average motions of any range, the second one corresponding to high frequency small motions of moderate range, so that their effects can be approximated by a linear theory.

- far field approximation

The improvement of the pattern consists in simplifying the description of the remote wake by treating differently the evolution in time of the remote particles.

- parallel programming

The velocity of a particle is estimated by its interactions with other particles. In order to avoid long-distance communications between processors which are time consuming, it is necessary to modify the velocity calculation algorithm and to implement it judiciously in order to keep the symmetry of the interaction particles matrix by means of circular permutation of the data on all the processors, in the master-slave scheme under Parallel Virtual Machine.

Applications regarding wind energy problems, either on wind turbine or on sail boat for the fluid/structure interactions are developed.

Keywords : vortex methods, three dimensional flows, panel methods, far field approximation, parallel programming, Parallel Virtual Machine, signal processing, linear - non linear decomposition.