



**HAL**  
open science

## Vibro-acoustique de la harpe de concert

Jean-Loïc Le Carrou

► **To cite this version:**

Jean-Loïc Le Carrou. Vibro-acoustique de la harpe de concert. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2006. Français. NNT : . tel-00133443

**HAL Id: tel-00133443**

**<https://theses.hal.science/tel-00133443v1>**

Submitted on 26 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Le Mans, FRANCE

**THÈSE DE DOCTORAT**

*Spécialité : ACOUSTIQUE*

Présentée par

**Jean-Loïc LE CARROU**

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

**VIBRO-ACOUSTIQUE DE LA HARPE DE CONCERT**

---

Soutenue le 8 décembre 2006

devant le jury composé de

<b>V. MARTIN</b>	Directeur de Recherche CNRS, LMP, Saint Cyr l'École	Rapporteur
<b>B. RICHARDSON</b>	Senior Lecturer, Université de Cardiff (RU)	Rapporteur
<b>J.R.F ARRUDA</b>	Professeur, LVA, Campinas (Br)	Président de jury
<b>E. FOLTÊTE</b>	Maître de Conférences, FEMTO-ST, Besançon	Examineur
<b>R. BADEAU</b>	Maître de Conférences, Télécom Paris, Paris	Invité
<b>J. FRANCOIS</b>	PDG de la société CAMAC HARPS, Mouzeil	Invité
<b>N. DAUCHEZ</b>	Maître de Conférences, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
<b>F. GAUTIER</b>	Maître de Conférences, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
<b>J. GILBERT</b>	Directeur de Recherche CNRS, LAUM, Le Mans	Directeur de thèse



*« The moral life of man forms part of the subject-matter of the artist,  
but the morality of art consists in the perfect use of an imperfect medium\* »*  
Preface - The Picture of Dorian Gray, Oscar Wilde (1854-1900)

---

\* *« La vie morale de l'homme est un des sujet que traite l'artiste,  
mais la moralité de l'art consiste dans le parfait usage d'un instrument imparfait »*,  
Préface - Le Portrait de Dorian Gray



## Remerciements

Mes premiers remerciements iront tout naturellement à l'équipe encadrante de ce travail de thèse : MM. Nicolas Dauchez, François Gautier et Joël Gilbert, qui, après m'avoir proposé ce thème de recherche, m'ont fait confiance pendant ces trois années pour mener à bien cette vaste étude. Je leur suis sincèrement reconnaissant pour la qualité ainsi que pour la complémentarité de leur encadrement qui ont fait de ce travail un véritable apprentissage par la recherche. En particulier, merci à Nicolas pour ses remarques toujours pertinentes, merci à Joël pour sa grande disponibilité pour répondre à toutes mes interrogations et pour ses conseils avisés, merci à François pour nos nombreuses discussions scientifiques enrichissantes qui ont grandement contribué au présent travail.

Je remercie le Centre National de la Recherche Scientifique et la région des Pays de la Loire qui ont financé cette thèse au travers d'une Bourse de Docteur Ingénieur.

Je tiens à remercier MM. Vincent Martin et Bernard Richardson qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail et pour l'intérêt qu'ils y ont porté. Je remercie vivement les autres membres du jury MM. Roberto Arruda, Emmanuel Foltête et Roland Badeau qui ont collaboré à cette étude en partageant un peu de leur expérience et de leur savoir-faire. Un grand merci à M. Jakez Francois de la société CAMAC Harps pour le prêt d'une harpe de concert pour toute la durée de la thèse.

Je remercie très chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre aux travaux présentés dans ce manuscrit. En particulier aux harpistes Cécile Thomas, Delphine Armanger, Heather Hule et Rosie Morton qui ont pu se rendre disponibles pour jouer dans des conditions parfois difficiles, aux étudiants stagiaires et de projet avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer (par ordre chronologique) : Nicolas Phan, Thierry Le Van Suu, Eric Boboef, Franck Grignon, Bérangère Delourme, Michiel Renger, Gaylord Desoeuvre, Jacques Cuenca, Luana Marinho do Nascimento et Francois Kerjan. Pour les fructueuses discussions que nous avons pu avoir, merci à Jean-Michel Genevaux, Quentin Leclere, Morvan Ouisse, Laurent Simon, Olivier Dazel, Peter Hoekje, Simon Félix et bien d'autres...

Pour m'avoir permis d'utiliser leur matériel hors-norme, merci au Centre de Transfert de Technologie du Mans et en particulier au département Acoustique et Vibrations. Pour la mise à disposition de leur matériel vidéo, merci au laboratoire d'acoustique d'Edimbourg et en particulier à Murray Campbell et Seona Bromage, pour les mesures effectuées au Mans, merci à Emmanuel Brasseur et Christian Gardiès.

Un remerciement tout particulier à Vincent Doutaut du pôle d'innovation de l'Institut Technologique Européen des Métiers de la Musique, co-initiateur de cette étude et qui a suivi avec intérêt l'avancée des travaux pendant ces trois années.

Je remercie tous les membres du laboratoire et en particulier ceux de l'équipe GTV, récemment rebaptisée « OR Vibro-Acoustique des Structures ». Merci aux doctorants (anciens et nouveaux) qui ont partagé avec moi l'aventure de la thèse et plus particulièrement ceux qui ont participé à nos longues

discussions au Bartho puis au RU maintenant... Merci à Jean-Marc et aux membres du Big Band de l'Université du Maine pour m'avoir montré que la fac n'avait finalement pas le blues.

Merci à mes parents qui me soutiennent depuis de nombreuses années maintenant !

Last but not least, pourrais-je dire, un grand merci à Amélie pour sa précieuse aide lors des relectures nocturnes de mes proses anglaises (allez courage, tu es presque à la dernière page...). Un grand merci aussi pour son soutien de tous les jours. Merci.

Jean-Loïc

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Bibliographie . . . . .	5
<b>I La harpe de concert, présentation générale</b>	<b>7</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>9</b>
<b>1 Description de la harpe de concert</b>	<b>11</b>
1.1 Les origines et l'évolution . . . . .	12
1.2 La harpe de concert <i>Atlantide modèle Prestige</i> . . . . .	16
1.2.1 Les cordes . . . . .	16
1.2.2 La table d'harmonie . . . . .	17
1.2.3 La caisse de résonance . . . . .	18
1.3 Les enjeux actuels . . . . .	19
Bibliographie . . . . .	20
<b>2 Modèle d'excitation</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Description de l'interaction doigt-corde . . . . .	22
2.3 Modèle simple d'interaction doigt-corde . . . . .	24
2.4 Détermination du mouvement du doigt et de la corde . . . . .	27
2.4.1 Phase d' <i>accrochage</i> . . . . .	27
2.4.2 Phase de <i>glissement</i> . . . . .	27
2.4.3 Conditions initiales de la phase d'oscillations libres . . . . .	28
2.5 Détermination des paramètres du modèle . . . . .	29
2.6 Résultats expérimentaux . . . . .	30
2.6.1 Protocole expérimental . . . . .	30
2.6.2 Étude préliminaire avec une caméra classique . . . . .	31
2.6.3 Étude avec une caméra rapide . . . . .	32
2.7 Conclusion . . . . .	35

Annexe 1 . . . . .	37
Bibliographie . . . . .	38
<b>II Interactions Table d'harmonie - Caisse de résonance : vibro-acoustique du corps sonore</b>	<b>39</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>41</b>
<b>3 Experimental study of A0 and T1 modes of the concert harp</b>	<b>45</b>
3.1 Introduction . . . . .	46
3.2 Experimental study of the concert harp . . . . .	48
3.2.1 Experimental procedure . . . . .	48
3.2.2 Experimental modal analysis of the instrument's body . . . . .	49
3.2.3 Analysis of the acoustic response functions of the instrument . . . . .	52
3.3 Identification of A0 and T1 modes of the concert harp . . . . .	54
3.3.1 Frequency response functions of a modified instrument . . . . .	54
3.3.2 Discussion . . . . .	56
3.4 Conclusion . . . . .	57
Bibliography . . . . .	59
<b>4 Modèle vibro-acoustique de la harpe de concert</b>	<b>61</b>
4.1 Introduction . . . . .	62
4.2 Modèle discret à N degrés de liberté . . . . .	63
4.2.1 Description du modèle . . . . .	63
4.2.2 Solutions du système homogène en régime harmonique . . . . .	63
4.2.3 Réponse forcée sur la base du système dissipatif . . . . .	64
4.3 Méthode d'identification des paramètres du modèle . . . . .	64
4.3.1 Procédure générale . . . . .	64
4.3.2 Identification des modes complexes . . . . .	64
4.3.3 Courte revue bibliographique des méthodes d'identification des matrices $\mathbf{M}$ , $\mathbf{B}$ et $\mathbf{K}$ . . . . .	66
4.3.4 Technique d'appropriation par le calcul . . . . .	67
4.4 Problème vibro-acoustique couplé: cas de la harpe de concert . . . . .	67
4.4.1 Modes complexes T1 et A0 . . . . .	68
4.4.2 Calcul des matrices $\mathbf{M}$ , $\mathbf{B}$ et $\mathbf{K}$ . . . . .	69
4.4.3 Forme de la matrice masse $\mathbf{M}$ . . . . .	71
4.5 Conclusion . . . . .	73
Bibliographie . . . . .	75

<b>5</b>	<b>Sound radiation of the concert harp</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	78
5.2	Directivity of the concert harp . . . . .	79
5.2.1	Experimental set-up . . . . .	79
5.2.2	Results . . . . .	80
5.3	Radiation model . . . . .	82
5.3.1	Theory . . . . .	82
5.3.2	Additional assumptions . . . . .	85
5.4	Experimental results . . . . .	86
5.4.1	Preliminaries . . . . .	86
5.4.2	The six-monopole model . . . . .	87
5.4.3	The two-monopole model . . . . .	87
5.4.4	Discussion . . . . .	89
5.5	Conclusion . . . . .	91
	Bibliography . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Interactions Table d'harmonie - Cordes : vibrations par sympathie</b>	<b>95</b>
	<b>Avant-propos</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>Modelling of Sympathetic String Vibrations</b>	<b>99</b>
6.1	Introduction . . . . .	100
6.2	Model of a beam- $N$ strings assembly . . . . .	101
6.2.1	Description of the assembly . . . . .	101
6.2.2	Transfer Matrix for a uniform sub-structure . . . . .	102
6.2.3	Coupling equations at beam-string connection point . . . . .	103
6.2.4	Modes of the assembly . . . . .	105
6.3	The beam-2 Strings assembly case . . . . .	107
6.3.1	Description . . . . .	107
6.3.2	Numerical results . . . . .	108
6.3.3	Experimental modal analysis . . . . .	112
6.3.4	Influence of inharmonicity on string-string mode . . . . .	116
6.4	Conclusion . . . . .	118
	Appendix 1: Transfer matrix of a string's segment . . . . .	119
	Appendix 2: Transfer matrix of a beam's segment . . . . .	119
	Appendix 3: Demonstration of relation (6.19) . . . . .	121
	Bibliography . . . . .	122

<b>7</b>	<b>Identification des phénomènes sympathiques</b>	<b>123</b>
7.1	Introduction . . . . .	124
7.2	Etude d'une harpe simplifiée . . . . .	124
7.2.1	Paramètres du modèle . . . . .	124
7.2.2	Base modale . . . . .	127
7.3	Expérience . . . . .	128
7.3.1	Descriptif du protocole expérimental . . . . .	128
7.3.2	Méthode d'extraction des paramètres . . . . .	130
7.3.3	Résultats . . . . .	134
7.4	Discussion . . . . .	135
7.5	Conclusion . . . . .	137
	Bibliographie . . . . .	139
	<b>Conclusion générale</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Caractéristiques physiques de la harpe</b>	<b>145</b>
A.1	Caractéristiques des cordes de la harpe . . . . .	145
A.2	Caractéristiques géométriques de la harpe . . . . .	147
A.3	Caractéristiques géométriques des événements . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Low frequency model of the sound radiated by a concert harp</b>	<b>149</b>
<b>C</b>	<b>Méthode Impédance</b>	<b>155</b>
C.1	Introduction . . . . .	155
C.2	Formulation en impédance . . . . .	155
C.2.1	Formalisme d'état – Equation d'état . . . . .	155
C.2.2	Matrice admittance . . . . .	156
C.2.3	Equation en admittance . . . . .	156
C.3	Equation de Riccati vérifiée par la matrice admittance d'une corde . . . . .	157
C.4	Equation de Riccati vérifiée par la matrice admittance d'une poutre . . . . .	159
C.5	Conclusion . . . . .	159
	Bibliographie . . . . .	160
<b>D</b>	<b>Modes du système couplé poutre équivalente - 35 cordes</b>	<b>161</b>

# Introduction générale

Instrument de musique utilisé depuis toujours, la harpe protège encore jalousement ses secrets. Fruit d'une lente évolution de plus de trois millénaires, la harpe a suivi un processus empirique d'optimisation de son fonctionnement. Peu d'études existent pour comprendre la manière dont tous ses éléments mécaniques interagissent pour donner à la harpe sa sonorité si particulière. Une approche possible est de procéder à une modélisation physique de l'instrument. Cette approche peut, à terme, aider la facture instrumentale dans ses choix technologiques pour faire évoluer l'instrument.

La modélisation physique des instruments de musique constitue l'une des activités les plus anciennes du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR CNRS 6613). Cette thématique, initiée au début des années 1980, a tout d'abord traité la problématique des instruments de musique à vent. De nombreux travaux visant à comprendre les phénomènes d'excitation (anche simple ou lippale), la propagation des ondes acoustiques dans les tuyaux ou encore l'influence des vibrations de parois sur le rendu sonore, ont fait ou font actuellement l'objet d'études. L'intérêt pour les instruments à cordes est nettement plus récent et le travail de thèse ici présenté est, en fait, le premier sur les cordophones au laboratoire. Initiées par Vincent Doutaut, du pôle d'innovation de l'Institut Technologique Européen des Métiers de la Musique, en collaboration avec la société CAMAC harps, les études concernant la harpe de concert ont vu le jour au laboratoire par l'intermédiaire d'un projet d'étudiants en 2000 [Le Carrou & Massol, 01]. Fort des compétences sur la physique des instruments de musique, regroupées dans l'Opération de Recherche « Physique des Instruments de Musique », et de la connaissance des méthodes expérimentales et théoriques des systèmes vibro-acoustiques, regroupées dans l'Opération de Recherche « Vibro-Acoustique des Structures », cette nouvelle thématique de recherche sur la *vibro-acoustique de la harpe de concert* a débuté en décembre 2003 par l'intermédiaire de la présente thèse.

Du fait de leur particularité sonore, les instruments de musique ont toujours fasciné les scientifiques. De Pythagore à Hermann L. von Helmholtz en passant par Marin Mersenne, leurs expériences ont permis de formaliser des théories toujours en application. Historiquement, ce sont les instruments munis de cordes qui ont fait l'objet des premières recherches, probablement pour leur facilité de mise en œuvre expérimentale. Mais ce n'est que dans la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle que l'étude phy-

sique des instruments de musique a réellement débuté. La recherche du lien entre le rendu sonore et le choix du luthier est l'un des premiers thèmes abordés, comme par exemple l'étude sur la fonction de l'âme du violon par Félix Savart (1791-1841) en collaboration avec le luthier Jean-Baptiste Vuillaume. Cette recherche ayant pour but final, hormis une meilleure compréhension physique de l'instrument, l'amélioration des performances acoustiques du violon. Avec l'apparition de nouveaux moyens expérimentaux, les recherches appliquées aux instruments de musique deviennent plus courantes. Il faut cependant attendre les années 1970, pour qu'apparaissent les premières recherches sur les instruments à cordes pincées. Ainsi, la guitare, au comportement physique proche de la harpe, a été largement étudiée depuis ces années comme par exemple [Jansson, 71], [Firth, 77a].

Le premier article scientifique se rapportant à la harpe est celui de Ian M. Firth dans lequel il décrit le comportement vibratoire et acoustique d'une petite harpe d'Écosse suivant les différentes étapes de sa construction [Firth, 77b]. Cette étude expérimentale est encore aujourd'hui une référence en matière de compréhension physique de l'instrument et marque le début de plusieurs travaux sur différents types de harpes à l'université de St Andrews en Écosse. Notons, par exemple, une étude approfondie menée sur la harpe de concert [Bell, 87]. A différentes étapes de sa construction, le comportement vibratoire de la table d'harmonie ainsi que les modes acoustiques de la cavité rigide sont analysés. De plus, l'étude de l'instrument complet permet de conclure quant à l'influence de la tension des cordes sur son comportement modal, ou encore, de décrire qualitativement son rayonnement. Toutes les attentions sont, par ailleurs, portées sur les reproductions de harpes anciennes afin d'apprécier les choix historiques des facteurs [Firth, 86]. Hormis ces travaux menés à l'université de St Andrews, peu d'études ayant pour objectif la compréhension physique de l'instrument ont été recensées. Nous n'en avons dénombré que deux portant sur la harpe celtique : une étude comparative du comportement modal de la caisse de résonance obtenu expérimentalement et par éléments-finis [Kergourlay & Balmès, 01] et une étude du rayonnement de l'instrument pour valider un modèle numérique prédictif basé sur des éléments de frontière [Le Pichon, 96]. Ces deux études restent marginales sur la harpe où la plupart des travaux sont expérimentaux et dont aucun modèle physique ne découle. Pour la guitare, au contraire, plusieurs modèles décrivant le fonctionnement vibro-acoustique de l'instrument existent. Notons par exemple, des modèles numériques où les différentes équations régissant le comportement de l'instrument sont discrétisées puis résolues [Derveaux *et coll.*, 03]. L'intérêt à terme de ce type de modèle est de proposer aux luthiers un outil permettant d'anticiper le rendu sonore de modifications virtuelles. Une autre approche est d'envisager des modèles vibratoires ou de rayonnement relativement simples dont les paramètres sont mesurés directement sur l'instrument [Wright, 96], [Hill *et coll.*, 04]. Ces modélisations sont non seulement intéressantes pour comprendre le fonctionnement de la guitare mais aussi pour comparer objectivement deux instruments.

La démarche adoptée dans le travail de thèse présenté dans ce mémoire est largement inspirée de cette dernière approche. Nous avons choisi de segmenter les différents éléments constituant la harpe (cordes, table d'harmonie et caisse de résonance) afin de comprendre leurs interactions. Une description

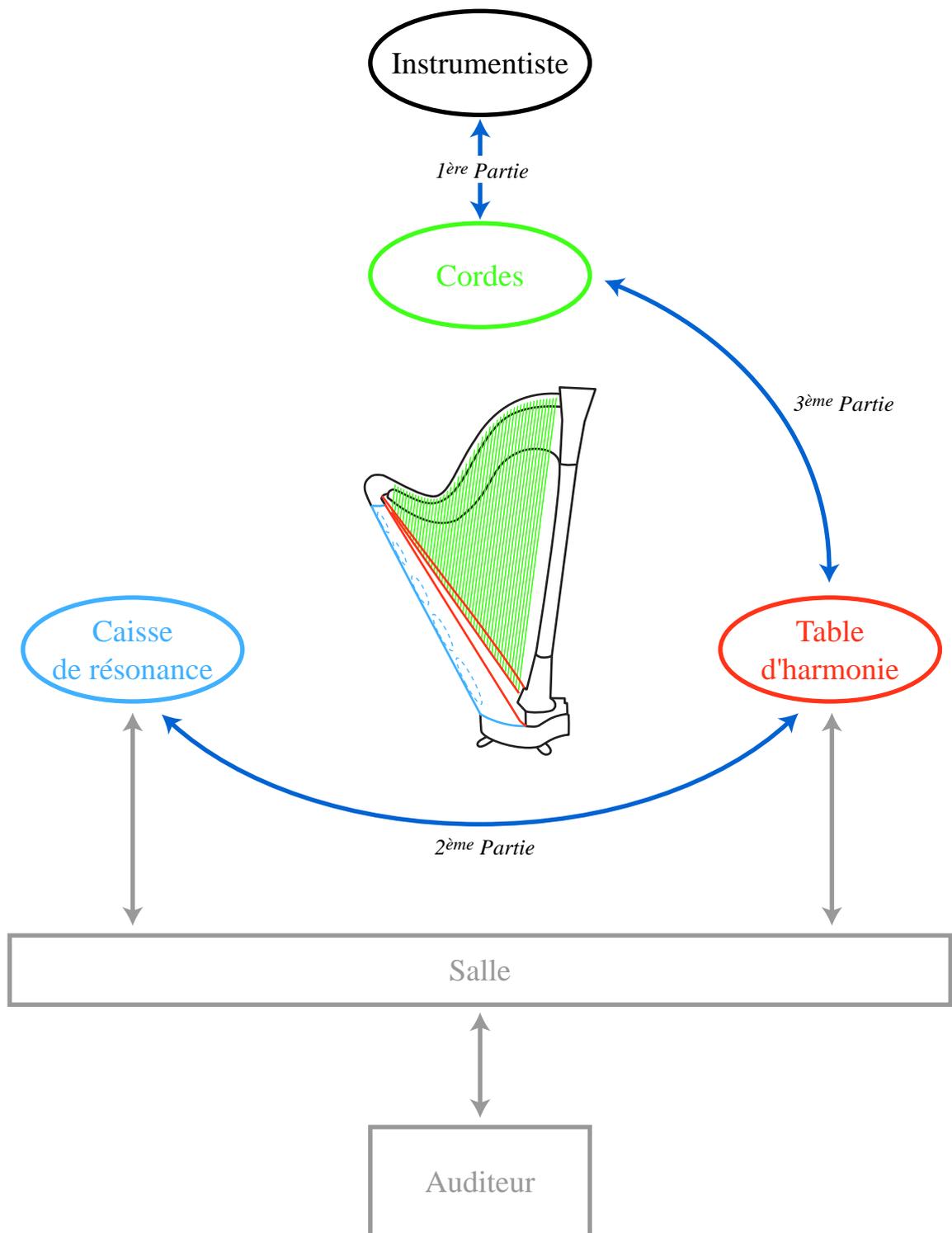


FIG. 1 – Description des différentes interactions entre l'instrumentiste, les éléments constituant la harpe et l'environnement extérieur.

schématique de ces interactions est présentée figure 1. Cette segmentation donne lieu à l'organisation suivante pour le mémoire.

Outre ce chapitre d'introduction, le mémoire est composé de 7 chapitres qui peuvent être classés en trois parties. Les chapitres 1 et 2 (1<sup>ère</sup> partie) présentent la harpe de concert sujet de cette étude, avec une focalisation sur la manière dont l'instrumentiste pince la corde. Les chapitres 3, 4 et 5 (2<sup>ème</sup> partie) traitent de l'interaction entre la table d'harmonie et la caisse de résonance de manière essentiellement expérimentale. Les chapitres 6 et 7 (3<sup>ème</sup> partie) s'intéressent au couplage particulier qui existe entre la table d'harmonie et les cordes, aussi bien de façon théorique qu'expérimentale. Au début de chaque partie, un avant propos décrivant le contexte de l'étude et les principaux résultats obtenus est inséré.

Dans la première partie, nous proposons une présentation générale de la harpe de concert. Cette introduction à l'instrument a pour but, dans le chapitre 1, de découvrir le chemin parcouru par la harpe de l'« arc musical » à sa constitution actuelle. Cette revue historique est importante si l'on souhaite comprendre son fonctionnement actuel et saisir la problématique des facteurs d'instruments. Nous y présentons également les améliorations souhaitées par ceux-ci. Dans le chapitre 2, nous nous intéressons plus particulièrement à la manière dont la harpe est mise en vibration, c'est-à-dire la manière dont les harpistes pincant les cordes. Un modèle simple d'interaction entre le doigt et la corde y est développé.

Dans la deuxième partie, l'interaction entre la caisse de résonance et la table d'harmonie de l'instrument est étudiée en détail. Tout d'abord, dans le chapitre 3, nous nous attachons à identifier expérimentalement la fonction de la caisse de résonance dans le comportement vibro-acoustique de l'instrument. Dans les premières expériences, on identifie une zone de fréquences où cette interaction joue un rôle important. Un modèle décrivant le comportement vibro-acoustique de l'instrument dans cette zone de fréquences est proposé dans le chapitre 4. Les paramètres de ce modèle, en lien avec les choix du facteur, sont obtenus par des méthodes évoluées d'analyse modale et montrent toutes les particularités des mécanismes d'amortissement présents dans l'instrument. Enfin, l'identification des sources acoustiques de la harpe de concert est menée dans le chapitre 5. Une étude du rayonnement de l'instrument est alors mise en place permettant ainsi de le représenter par quelques sources élémentaires. Les résultats trouvés viennent étayer le modèle vibro-acoustique précédemment présenté.

Dans la troisième partie, l'interaction entre les cordes de la harpe et la table d'harmonie fait l'objet d'un travail approfondi. Pour mener à bien la compréhension des phénomènes vibratoires agissant entre ces deux éléments, nous choisissons d'étudier, dans un premier temps, un instrument simplifié. Dans le chapitre 6, le comportement modal de cet instrument est déterminé de manière théorique et validé par confrontation à des résultats expérimentaux. Parmi les modes obtenus, certains semblent jouer un rôle prépondérant dans la mise en oscillation de cordes qui n'ont pourtant pas été jouées. Ce

phénomène, appelé *vibrations par sympathie*, est courant lorsque la harpe est jouée et peut causer des désagréments aux instrumentistes (sensation de *halo sonore*), bien que ce soit une caractéristique du son de l'instrument. Dans un second temps, au chapitre 7, ce modèle vibratoire est appliqué au cas de la harpe de concert permettant de guider l'identification expérimentale de modes *sympathiques*.

Enfin, dans le chapitre de conclusion, nous dressons le bilan de ces travaux et indiquons des pistes pour les prolonger.

## Bibliographie

- [Bell, 87] A. J. Bell. *An acoustical investigation of the concert harp*. PhD dissertation, University of St Andrews, St Andrews, United Kingdom, 1987.
- [Bell, 89] A. J. Bell. The helmholtz resonance and higher air modes of the harp soundbox. *Journal of the Catgut Acoustical Society*, 3(3) : 2-8, 1997.
- [Derveaux *et coll.*, 03] G. Derveaux, A. Chaigne, P. Joly et E. Bécache. Time-domain simulation of a guitar : model and method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(6) : 3368-3383, 2003.
- [Firth, 77a] I.M. Firth. Physics of the guitar at the helmholtz and first top-plate resonances. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61(6) : 588-593, 1977.
- [Firth, 77b] I.M. Firth. On the acoustics of the harp. *Acustica*, 37 : 148-154, 1977.
- [Firth, 86] I.M. Firth. Harps of the baroque period. *Journal of the Catgut Acoustical Society*, 1(3) : 52-61, 1986.
- [Hill *et coll.*, 04] T.J.W. Hill, B.E. Richardson et S.J. Richardson. Acoustical parameters for the characterisation of the classical guitar. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 : 335-348, 2004.
- [Jansson, 71] E.V. Jansson. A study of acoustical and hologram interferometric measurements of the top plate vibrations of a guitar. *Acustica*, 25 : 95-100, 1971.
- [Kergourlay & Balmès, 01] G. Kergourlay et E. Balmès. Dynamic Behaviour of a harp soundboard and soundbox. *Dans Proc. in the 5th Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, Orlando, United States of America, 2001.
- [Le Carrou & Massol, 01] J-L. Le Carrou et B. Massol. *Caractérisation et modélisation du comportement vibratoire d'une table d'harmonie de harpe*. Projet de 2<sup>ème</sup> année École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, Le Mans, 2001.
- [Le Pichon, 96] A. Le Pichon. *Méthode de prédiction du rayonnement acoustique de structures volumiques composées d'une ou plusieurs faces planes vibrantes - Application aux instruments de musique à cordes*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, Paris, 1996.
- [Wright, 96] H. Wright. *The acoustics and psychoacoustics of the guitar*. Thèse de doctorat, Université du Pays de Galles, Cardiff, 1996.



Première partie

La harpe de concert, présentation générale



# Partie 1 : Avant-propos

Dans cette partie, une présentation générale de la harpe de concert est exposée. Cette présentation est importante afin de cerner au mieux l'instrument de musique qui est l'objet du présent travail. Après une description détaillée de la harpe de concert, nous nous focalisons plus particulièrement sur la manière dont l'instrument est joué.

La harpe de concert est un instrument multimillénaire qui a su s'adapter à l'évolution de la musique pour ne pas sombrer dans l'oubli. Une présentation de cet instrument, souvent méconnu, est proposée dans le premier chapitre de ce mémoire. Ses origines, de la préhistoire à l'époque contemporaine, sont exposées afin de comprendre les choix technologiques et acoustiques actuels. L'exemple d'une harpe de concert contemporaine\*, unique harpe utilisée tout au long de l'étude, est ensuite présenté. Chacun de ses éléments fait l'objet d'une description détaillée : la table d'harmonie, la caisse de résonance et les cordes. Une représentation technique de l'instrument ainsi que quelques données géométriques supplémentaires sont fournies dans l'Annexe A. Malgré les innovations apportées à l'instrument, notamment sur les matériaux constituant la table d'harmonie, le rendement sonore de la harpe de concert ne satisfait toujours pas les facteurs. Ils souhaiteraient, de plus, limiter la présence du « halo sonore », sans doute causé par les vibrations par sympathie, gênant les harpistes. Ces deux préoccupations actuelles des facteurs constituent leurs principaux objets d'expérimentation, guidant par la même la présente étude sur le comportement physique de l'instrument.

Pour que l'instrument émette un son, il faut que le musicien pince la corde. Cette action modifie l'état initial de l'instrument engendrant la mise en oscillation des cordes et donc l'apparition d'un son. Cette interaction entre le doigt et la corde de la harpe est un élément important dans la production sonore de l'instrument. Elle fait l'objet d'une étude approfondie, présentée dans le chapitre 2, où un modèle de pincement est développé sur la base de travaux antérieurs appliqués à la guitare†. Les paramètres de ce modèle sont obtenus par la mesure des déplacements du doigt et de la corde réalisée par une caméra vidéo. La particularité du mouvement nécessite l'emploi d'une caméra rapide afin d'obtenir des résultats concluants. Ils révèlent ainsi l'existence de disparités entre les harpistes, reflétant probablement les différences sonores perceptibles entre instrumentistes. De plus, la corde est

---

\*Harpe de concert *Atlantide modèle Prestige* prêtée par la société CAMAC Harps.

†M. Pavlidou. *A physical model of the string-finger interaction on the classical guitar*. PhD thesis, University of Wales, Cardiff, United Kingdom, 1997.

montrée quittant le doigt avec une vitesse non nulle. Ce dernier résultat est important si l'on souhaite initialiser de manière réaliste un programme de synthèse sonore.

# Chapitre 1

## Description de la harpe de concert

### RÉSUMÉ

Connue depuis plus de trois millénaires, la harpe n'a cessé d'évoluer pour s'adapter à la musique. Une description détaillée de l'origine et de l'évolution de la harpe de concert est présentée dans ce chapitre. Cette description permet de comprendre les choix technologiques ou acoustiques effectués par les facteurs sur l'instrument. Le produit de ces évolutions se retrouve dans la harpe de concert étudiée tout au long de ce manuscrit : la harpe de concert *Atlantide modèle Prestige* de la société CAMAC Harps. Toutefois, les facteurs eux-mêmes souhaitent améliorer l'instrument pour augmenter sa puissance rayonnée ou encore limiter la présence du « halo sonore ».

## 1.1 Les origines et l'évolution

Les premières représentations picturales d'instruments à cordes datent de l'Âge de fer [Cizek, 03]. Il est néanmoins probable que l'origine de la harpe soit encore plus ancienne, remontant ainsi au temps des premiers hommes charmés par le son produit par la corde de leur arc au lancer des flèches [Emmanuel, 80].

À partir de l'antiquité, la harpe, instrument déjà mentionné dans l'ancien testament par les psaumes du Roi David, est connue sur tous les continents sous deux formes : la harpe arquée et la harpe angulaire. Introduite durant le III<sup>e</sup> millénaire av. J.-C., la harpe arquée naît dans les civilisations sumérienne et égyptienne avant d'être adoptée par les pays bouddhistes [Larousse, 83], [Grove, 01], [Buchner, 80]. Décrite de façon précise par les hiéroglyphes égyptiens, cette harpe a simplement la forme d'un arc muni d'une caisse de résonance recouverte de peau [Buchner, 80] (figure 1.1). Elle est encore présente aujourd'hui en Orient et sur le continent africain [Emmanuel, 80, Grove, 01]. Avec l'évolution de la musique et plus particulièrement des systèmes d'accord, une augmentation du nombre de cordes s'avère nécessaire. Des modifications sont donc apportées à la structure afin que celle-ci puisse soutenir les nouvelles cordes. C'est ainsi qu'est née la harpe angulaire en Mésopotamie au cours du II<sup>e</sup> millénaire avant J.-C.. Cette nouvelle harpe conquiert alors l'Égypte, succédant à la harpe arquée, et se rencontre également en Perse (voir représentation figure 1.2), en Asie Mineure et en Extrême-Orient [Larousse, 83], [Grove, 01]. La harpe angulaire est constituée de deux parties distinctes, unies par des liens : une mince caisse de résonance recouverte de peau et une console. Les cordes, de l'ordre d'une vingtaine, sont tendues à l'aide de liens attachés à des chevilles [Buchner, 80]. La harpe angulaire est ensuite utilisée dans les îles égéennes, en Grèce et en Italie, où les premières harpes à colonne de soutien font une brève apparition avant de disparaître [Grove, 01]. C'est sous sa forme angulaire que la harpe parvient en Europe de l'Ouest et du Nord dans des circonstances assez confuses [Grove, 01].

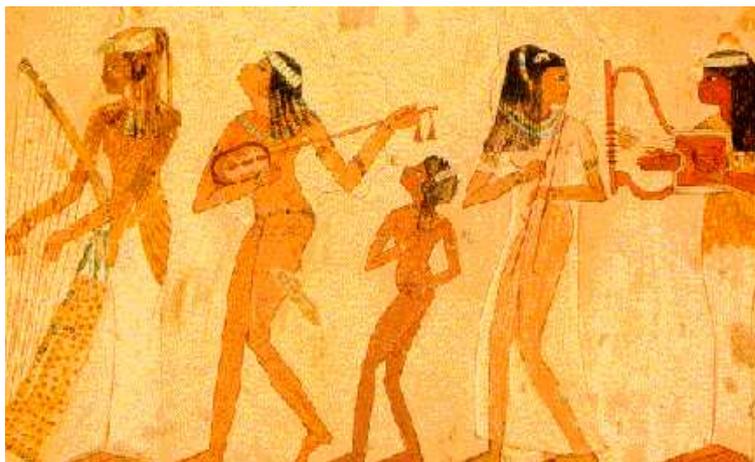


FIG. 1.1 – Harpe arquée, luth, double hauboïs et lyre égyptiens (de gauche à droite). Peinture murale de la nécropole thébaine, vers 1420-1411 av. J.-C., [Buchner, 80].



**FIG. 1.2** – Harpe angulaire. Détail d'une mosaïque, Bishapour, Perse, vers 250-300 av. J.-C. (Musée du Louvre, Paris)

À l'aube du Moyen-Âge, la harpe prend sa forme moderne : triangulaire et dotée d'une colonne qui relie la console au bas de la caisse de résonance. Cette harpe, présente presque exclusivement en Europe, est apparue au VIII<sup>e</sup> ou IX<sup>e</sup> siècle et a donné naissance à deux versions différentes : l'une en Irlande et en Écosse et l'autre dans le reste de l'Europe. Tout comme sa cousine écossaise, la harpe irlandaise est un instrument muni d'une caisse de résonance large et profonde réalisée en un seul bloc de bois, d'une console épaisse et d'un pilier incurvé. Ses trente à cinquante cordes en métal (bronze, or, etc) pincées par les ongles de l'instrumentiste lui confèrent un son qui lui est propre. Cette harpe est utilisée dans ces deux pays encore de nos jours. Dans les autres pays d'Europe, deux types de harpes cohabitent, se différenciant par leur taille et leur nombre de cordes. La petite harpe souvent taillée dans une seule pièce de bois, munie de sept cordes en boyau et en métal, est utilisée par les jongleurs pour accompagner les chansons et les récits. Sa petite taille et sa légèreté permettent à l'instrumentiste de la jouer debout et de la transporter aisément. L'autre harpe, plus grande, se joue en position assise et comporte plus de cordes. Elle est constituée de trois pièces de bois montées comme celles de la harpe de l'ange musicien peint sur la voûte de la cathédrale du Mans, voir figure 1.3 [Buvron *et coll.*, 98]. Au Moyen-Âge, la harpe connaît un grand succès qui s'amointrit à la Renaissance en raison des seules possibilités diatoniques de l'instrument [Emmanuel, 80].

Jusqu'au XVI<sup>e</sup> siècle, des harpes à rangée unique de cordes sont construites. La tonalité de l'instrument n'est changée que par la clé d'accord tournant une cheville modifiant la tension des cordes



FIG. 1.3 – *Ange musicien jouant de la harpe, fresque de la cathédrale Saint Julien du Mans, XIV<sup>e</sup> siècle d'après [Buvron et coll., 98].*

[Emmanuel, 80]. Quelques harpes chromatiques à deux (XVI<sup>e</sup> siècle) ou à trois rangées (XVII<sup>e</sup> siècle) de cordes sont fabriquées en Irlande, en Italie et en Espagne [Larousse, 83], [Grove, 01]. Mais c'est la harpe à rangée unique qui est perfectionnée par des facteurs tyroliens, qui inventent un mécanisme à crochets permettant de raccourcir les cordes d'un demi-ton (1660). Par la suite, Jacob Hochbrücker inséra un système de transmission dans la colonne pour actionner ces crochets par cinq puis sept pédales placées à la base de l'instrument (1720). La harpe est maintenant dite à simple mouvement. Cette première harpe à pédales permet d'élever la note des cordes sélectionnées d'un demi-ton, ce qui offre la possibilité de jouer dans de nombreuses clés. Une illustration de ce type de harpes est proposée figure 1.4 avec quelques détails techniques concernant le système d'accord des cordes et de leur fixation. En France, l'école de la harpe est particulièrement brillante dans la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle [Larousse, 83] où l'instrument est joué jusqu'au sommet du royaume par la reine Marie-Antoinette. Georges Cousineau, facteur de la cour, lui fabriqua une harpe somptueusement ornée avec une mécanique constituée de béquilles remplaçant les crochets [Cizek, 03], [Emmanuel, 80].

Sous l'impulsion d'un harpiste renommé, Jean-Baptiste Krumpholz, Sébastien Érard entreprend de nouvelles recherches en vue de perfectionner la harpe à pédales. Érard est, à l'époque, un brillant facteur de clavecins et de pianos dont il a significativement amélioré la mécanique. En 1794, il dépose le premier brevet anglais pour une harpe. Ce nouvel instrument, fruit de beaucoup d'expérimentations, représente un changement radical dans la construction de la harpe à simple mouvement. Le résonateur barré est

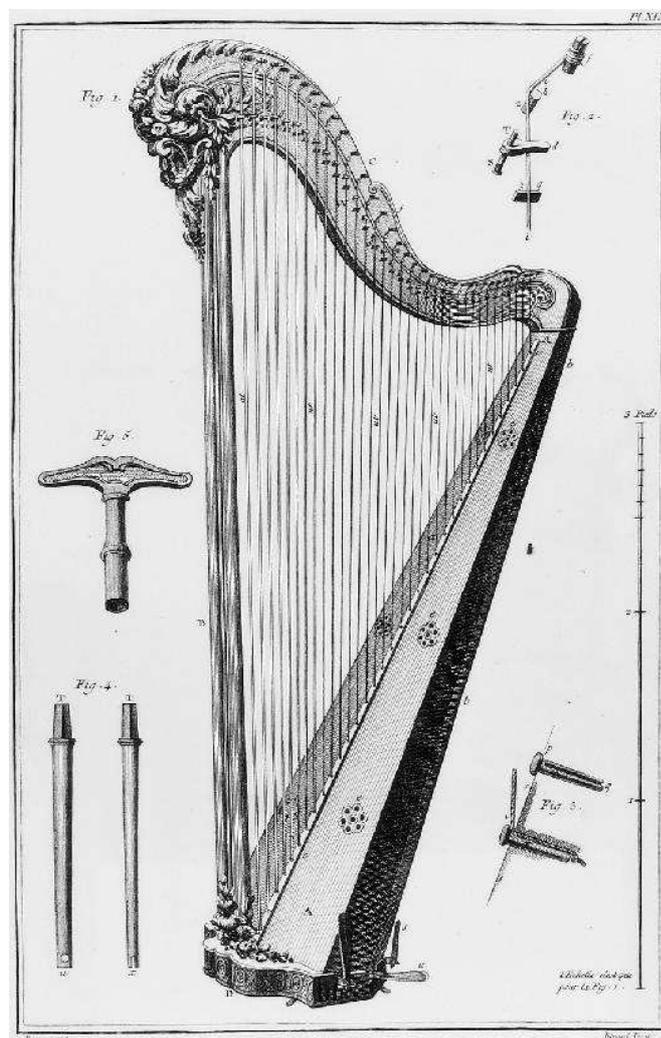


FIG. 1.4 – Harpe à simple mouvement avec quelques détails techniques, dictionnaire des Sciences de Diderot et d'Alembert (1769, Paris).

abandonné en faveur d'un corps constitué de deux parties : une partie avant, la table d'harmonie en pin de Suisse, et une partie arrière arrondie et renforcée par un barrage interne. Pour la résistance et pour la stabilité, la console est construite en contre-plaqué. La mécanique est aussi améliorée au niveau des pédales et du système d'accord logé dans la console. L'élément vraiment révolutionnaire de sa harpe est le système à fourchette qui remplace les crochets [Grove, 01]. Ce dispositif consiste en un disque muni de deux bras en saillie, couramment dénommés « boutons », qui pivote sur lui-même afin de raccourcir la longueur vibrante de la corde [Emmanuel, 80]. La corde est maintenant bloquée fermement en position par la fourchette, évitant ainsi les problèmes de notes « frisées » fréquents avec les autres systèmes [Emmanuel, 80], [Grove, 01].

Après quatorze années de recherche, Sébastien Érard brevète en 1810 la harpe à double mouvement. Grâce à ce système, la même pédale permet de jouer la note en bémol, bécarre ou dièse rendant ainsi

possible de jouer dans toutes les tonalités [Emmanuel, 80]. La harpe est accordée en Do bémol majeur et chacune des sept pédales a trois positions. La harpe d'Érard a 45 cordes et sa mécanique est composée de 1415 pièces permettant de faire fonctionner les 90 fourchettes. À la suite des travaux d'Érard peu d'innovations majeures sont apportées à la harpe de concert jusqu'en 1996 lorsque la société française CAMAC Harps conçoit les harpes « nouvelle génération » [Grove, 01]. Ces harpes ont un poids réduit grâce à l'utilisation de nouveaux matériaux, comme la fibre de carbone et d'aluminium. Par ailleurs, un travail sur l'ergonomie de l'instrument a permis d'optimiser sa taille ainsi que le positionnement des cordes. La mécanique a elle aussi profité d'avancées telles que l'utilisation de câbles souples en acier inoxydable pour remplacer les tringles dans la colonne. Ou encore, le système de fourchettes complètement repensé pour éviter qu'il ne se dérègle à cause de la tension des cordes. La table d'harmonie, quant à elle, est allégée et est renforcée par l'utilisation d'aluminium et de fibre de carbone. Enfin, le système de fixation de la caisse de résonance à la colonne est constitué d'un assemblage d'éléments en aluminium permettant là aussi une meilleure résistance aux efforts exercés dans la harpe.

## 1.2 La harpe de concert *Atlantide modèle Prestige*

La harpe de concert, autre nom de la harpe à pédales, prêtée par la société CAMAC Harps dans le cadre de notre étude est un modèle de la « nouvelle génération », dit harpe de concert *Atlantide modèle Prestige*. Cette harpe profite donc des dernières innovations apportées par l'entreprise et notamment au niveau des nouveaux matériaux pour la fabrication de la table d'harmonie. Par ailleurs, notre harpe d'étude ne comprend pas les quelques 1500 pièces mécaniques réalisant la modulation des notes des cordes puisque l'objet de notre étude se concentre essentiellement sur les éléments acoustiques de l'instrument. Une description détaillée de ces éléments, les cordes, la table d'harmonie et la caisse de résonance, est proposée sur la figure 1.5.

### 1.2.1 Les cordes

La harpe de concert *Atlantide modèle Prestige* compte 47 cordes couvrant 6 octaves et demie de la corde 45 jusqu'à la corde 00, correspondant respectivement à des fréquences fondamentales de 31 Hz à 2960 Hz. Pour couvrir toute la tessiture de l'instrument, les cordes sont constituées de plusieurs matériaux. Pour les notes les plus graves, de la corde 45 à la corde 34, les cordes sont filées en acier. De la corde 33 à la corde 7, les cordes sont en boyau de mouton et, pour le registre le plus aigu, les cordes sont en nylon. Depuis la harpe d'Érard en 1810, certaines cordes sont de couleurs différentes permettant ainsi de mieux les distinguer et les repérer : rouges pour les do et noires pour les fa.

Les cordes sont fixées sur la console par une cheville sur laquelle est enroulée l'extrémité de la corde. Par la rotation de cette cheville, il est possible de plus ou moins tendre la corde permettant ainsi d'accorder l'instrument. À l'autre extrémité, les cordes traversent la table d'harmonie et sont maintenues par un noeud effectué autour d'une barette de blocage. Les cordes sont donc directement liées à la table d'harmonie avec un angle qui est d'autant plus important que les cordes sont aiguës, les



FIG. 1.5 – Description de la harpe de concert Atlantide modèle Prestige prêtée par la société CAMAC Harps.

rendant ainsi non parallèles entre elles. Cette idée, empruntée au plan des cordes baroque, permet une meilleure accessibilité des cordes en gardant une position plus naturelle des mains jusqu'aux cordes les plus difficiles à atteindre dans le registre aigu.

Les caractéristiques des cordes de la harpe de concert prêtée par la société CAMAC Harps dans le cadre du présent travail sont proposées en Annexe A.

### 1.2.2 La table d'harmonie

La table d'harmonie est la partie centrale de l'instrument : elle transforme les vibrations issues des cordes en rayonnement acoustique. Soumise à une charge de près de deux tonnes exercée par les cordes, elle est donc confrontée au paradoxe de toute table d'harmonie d'instrument à cordes : être capable de soutenir la tension des cordes tout en ayant une faible épaisseur et une grande surface afin de pouvoir rayonner efficacement jusqu'aux notes les plus graves. La table d'harmonie d'une harpe doit donc être renforcée le long de son axe central, là où la charge exercée par les cordes est la plus importante, et elle doit être plus souple et légère sur les côtés.

Pour satisfaire à ces conditions, la table d'harmonie de la harpe de concert *Atlantide modèle Prestige* est constituée d'une façade trapézoïdale en western red cedar fil travers, recouverte sur sa face extérieure (face visible de la table) d'un plaquage en érable fils travers. Sur sa face intérieure, face décrite dans

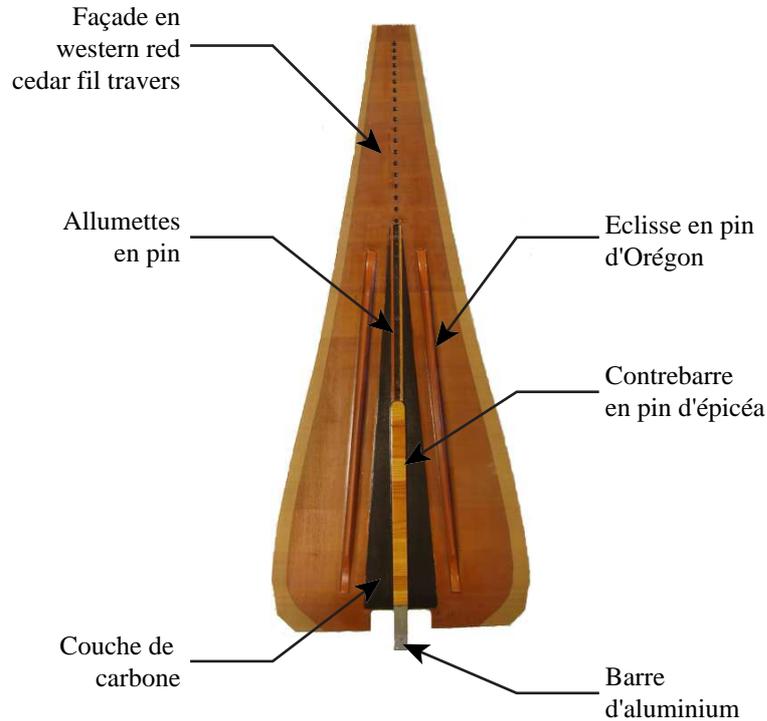


FIG. 1.6 – Description de la table d'harmonie de la harpe de concert Atlantide modèle Prestige.

la figure 1.6, des éclisses, disposées symétriquement de part et d'autre de l'axe de la table, servent à l'équilibrer. Elles empêchent ainsi la table de bomber et de se déformer excessivement sous la tension des cordes. Les éclisses sont fabriquées en pin d'Orégon, et sont fixées sur une couche de carbone par de la résine époxy. La zone comprise entre les deux éclisses est en carbone, avec un double plaquage d'érable fils longs et fils travers à l'intérieur. Sur l'axe de symétrie de la table se trouve une contrebarre en épicéa, à laquelle sont accrochées les cordes. Sous la contrebarre, une barre métallique en aluminium permet de rigidifier l'ensemble de l'axe.

### 1.2.3 La caisse de résonance

La table d'harmonie est fixée par collage et vissage à la caisse de résonance. Depuis la harpe d'Érard, elle est arrondie prenant la forme d'un tronc de cône coupé en deux dans le sens de sa longueur [Emmanuel, 80]. La caisse de résonance est fabriquée en multiplis de hêtre. Des arceaux intérieurs, en multiplis de hêtre renforcés d'aluminium, permettent la mise en forme et le soutien de l'ensemble. Des événements elliptiques sont de plus percés à l'arrière de la caisse de résonance. Leur rôle est avant tout de faciliter l'accès de la main pour le changement des cordes. Il semble que, du point de vue de la caisse de résonance et de la taille des événements, aucun essai d'optimisation n'ait été mené à ce jour.

### 1.3 Les enjeux actuels

Au cours des siècles, la harpe a évolué pour s'adapter aux exigences de la musique. Elle est ainsi passée d'une dizaine à 47 cordes qui peuvent être modulées suivant la tonalité du morceau de musique joué. La technologie mécanique a ainsi permis de rendre ces modulations possibles par l'intermédiaire de pédales mais aussi de solidifier l'ensemble. Les harpes actuelles sont maintenant capables de soutenir la tension des cordes pendant de nombreuses années. Du point de vue acoustique, il est certain que l'utilisation de matériaux résistants et légers comme la fibre de carbone pour la table d'harmonie a dû significativement améliorer le rendement acoustique de l'instrument. Néanmoins, les facteurs de harpes eux-mêmes ne sont pas satisfaits de la puissance rayonnée par leurs instruments. Ils souhaiteraient que le son « porte nettement plus » aux oreilles des auditeurs. Ce reproche fait aux instruments actuels montre qu'une optimisation acoustique est souhaitable pour améliorer la harpe de concert. Par ailleurs, les harpistes sont confrontés à une gêne lorsqu'ils jouent l'instrument. En effet, dans certain cas, lorsqu'une corde est pincée d'autres se mettent aussi à vibrer. Connue sous le nom de « vibrations par sympathie », ce phénomène est une caractéristique sonore de l'instrument mais semble occasionner une gêne pour les harpistes (sensation de « halo sonore »). Les facteurs souhaiteraient donc le limiter afin de faciliter la pratique de l'instrument.

## Bibliographie

- [Buchner, 80] A. Buchner. *Encyclopédie des instruments de musique*. Gründ, Paris, 1980.
- [Buvron et coll., 98] J-M. Buvron. L. Chanteloup et P. Lenoble. *Les anges musiciens de la cathédrale du Mans*. Éditions de la reinette, Le Mans, 2003.
- [Cizek, 03] B. Cizek. *Encyclopédie illustrée des instruments de musique*. Gründ, Paris, 2003.
- [Emmanuel, 80] A. Emmanuel. *La harpe son évolution, ses facteurs*. Dessain et Tolra, Paris, 1980.
- [Grove, 01] *The New Grove Dictionary of Music and Musicians (2nd edition)*. Sadie and Tyrrell, Londres, 2001.
- [Larousse, 83] *Grand Dictionnaire Encyclopédique Larousse*. Larousse, Paris, 1983.

## Chapitre 2

# Modèle d'excitation

### RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, un modèle d'interaction doigt-corde décrivant le pincement d'une corde de harpe est développé. Ce modèle, basé sur des travaux effectués sur la guitare [Pavlidou, 97], décrit la trajectoire de deux masses, l'une modélisant le doigt et l'autre modélisant la corde. Les paramètres de ce modèle sont directement déduits de la mesure des déplacements du doigt et de la corde, obtenus par caméra vidéo. Dans un premier temps, une caméra classique est utilisée, ne donnant pas de résultats concluants en raison de la trop grande rapidité du mouvement. Dans un second temps, l'utilisation d'une caméra rapide rend possible la mesure précise du déplacement du doigt et de la corde, permettant la détermination des paramètres physiques du modèle. Même si les conditions expérimentales rendent leurs comparaisons délicates, elles permettent néanmoins l'obtention d'ordres de grandeur. Il peut également être conclu que la corde quitte le doigt lors du pincement avec une vitesse non nulle, ce qui est à prendre en compte pour initialiser de manière réaliste des programmes de synthèse modale.

## 2.1 Introduction

Le son rayonné par les instruments de musique est non seulement dû aux caractéristiques intrinsèques de l'instrument mais aussi à la façon dont il est joué. Dans la famille des instruments de musique à cordes pincées, les moyens d'excitation sont soit manuels, par un contact direct avec le doigt, soit mécaniques, par l'intermédiaire d'un plectre. Contrairement aux cordes jouées avec le doigt, l'instrumentiste n'a que peu de contrôle sur une note jouée avec un plectre, comme dans le cas du clavecin par exemple [Giordano & Winans, 99]. Avec le doigt, l'instrumentiste contrôle de nombreux paramètres rendant l'excitation dépendante de sa morphologie. Dans le cas du jeu de la guitare classique, le pincement est effectué par l'ongle du musicien et il est bien connu qu'une même guitare peut sonner différemment en fonction de l'instrumentiste [Pavlidou & Richardson, 95]. Pour prendre en compte ce paramètre dans les modèles de synthèse sonore, une fonction représentant l'énergie fournie par le pincement est ajoutée aux équations du mouvement de la corde [Chaigne, 92]. Cette fonction, obtenue expérimentalement, permet d'avoir des résultats réalistes en synthèse sonore [Derveaux *et coll.*, 03], [Bécache *et coll.*, 05] mais ne permet pas de connaître les paramètres pertinents sur lesquels le musicien influe. Ce dernier point a fait l'objet d'une étude approfondie utilisant un modèle d'interaction entre le doigt et la corde [Pavlidou, 97]. Dans ce travail, une description détaillée du pincement de la corde est proposée ainsi que deux modèles d'interaction : l'un ne prenant en compte que les vibrations de la corde selon une direction [Pavlidou & Richardson, 95], l'autre selon deux directions [Pavlidou & Richardson, 97]. Une étude paramétrique a permis de conclure que le pincement est influencé par la caractéristique de friction de l'ongle, la réponse du muscle du doigt, l'admittance d'entrée du corps de l'instrument et la direction du mouvement du doigt [Pavlidou, 97]. Pour la harpe de concert, le pincement de la corde est effectué par la pulpe du doigt. Cette attaque de la corde est caractéristique du son de chaque harpiste rendant possible l'identification de l'instrumentiste dès les premières notes jouées.

L'étude présentée dans ce chapitre a pour but de comprendre la manière dont est jouée la harpe de concert au travers d'un modèle simple d'interaction doigt-corde dont les paramètres sont mesurables. Un résultat découlant de cette étude est la détermination des conditions initiales de la corde à l'instant où elle est lâchée en fonction de paramètres pertinents dépendant de l'instrumentiste. Celles-ci pourront être utilisées pour initialiser un programme de synthèse modale [Woodhouse, 04]. Le chapitre est organisé de la façon suivante : après une description de l'interaction entre le doigt et la corde, un modèle unidimensionnel décrivant l'excitation est proposé. Ensuite, la manière dont est déterminé le mouvement de la corde et du doigt, ainsi que les paramètres du modèle sont exposés. Enfin, une étude expérimentale basée sur la mesure du déplacement du doigt et de la corde à l'aide d'une caméra nous permet d'obtenir les paramètres du modèle.

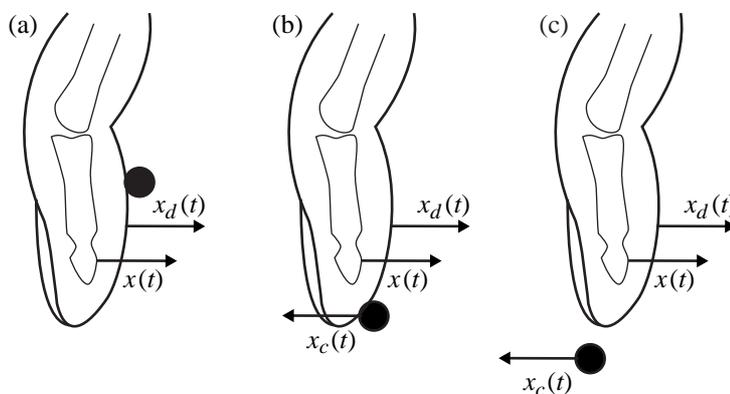
## 2.2 Description de l'interaction doigt-corde

L'interaction entre le doigt de l'instrumentiste et la corde de la harpe commence à l'instant où le doigt touche la corde et se termine lorsque celle-ci est relâchée pour osciller librement. Pour décrire

cette interaction, également appelée pincement en référence aux instruments à cordes pincées dont fait partie la harpe, nous avons mené une expérience très simple consistant à décomposer les images d'un film d'une harpiste professionnelle jouant l'instrument. Trois instants ont pu être définis comme caractéristiques de cette interaction entre le doigt et la corde :

- l'accroche ( $t_a$ ), instant où le doigt touche la corde au niveau de sa première phalange ;
- le début du glissement ( $t_g$ ), instant correspondant au moment où la force de rappel de la corde atteint un maximum, la corde commence alors à glisser sur la pulpe du doigt ;
- le lâcher ( $t_l$ ), instant où la corde quitte l'extrémité du doigt.

Ces trois instants correspondent aux temps initiaux des trois phases présentes durant l'interaction : la phase d'accrochage [ $t_a; t_g$ ], la phase de glissement [ $t_g; t_l$ ] et la phase d'oscillation libre de la corde [ $t_l; +\infty$ ]. Une description schématique de ces trois phases est proposée figure 2.1. Cette description correspond au mode standard de jeu de la harpe de concert en France. Cette façon de jouer l'instrument peut différer selon les pays. Dans le cas de l'école russe, par exemple, on propose de jouer sur le bout des doigts donnant à l'instrument un son qui lui est caractéristique. Dans le cas de la guitare [Pavlidou & Richardson, 95], la corde roule sur le bout du doigt puis est bloquée par l'ongle pendant une période très courte avant de glisser jusqu'au lâcher. La différence majeure entre l'attaque d'une corde de harpe et de guitare est que, dans le cas de la harpe, l'ongle n'a aucun rôle et que la corde glisse uniquement sur la pulpe du doigt.



**FIG. 2.1** – Schéma représentant les trois phases existantes durant l'interaction entre la corde de harpe et le doigt de l'instrumentiste : (a) phase d'accrochage, (b) phase de glissement et (c) phase d'oscillations libres.

Durant la phase de glissement, la force de friction entre le bout du doigt et l'élément de corde détermine à la fois l'instant où la phase de glissement débute et l'instant où cette force a atteint un maximum. Elle détermine aussi la vitesse de la corde au point d'interaction doigt-corde durant toute la phase de glissement. En ce sens, le rôle de la friction entre la pulpe du doigt et la corde est similaire à la friction entre la colophane adhérent sur le crin de cheval de l'archet et la corde du violon. Il est à noter qu'il semble, au vu des images prises lorsque la corde de harpe est jouée, qu'un moment de

torsion appliqué à la corde soit présent lors de la phase de glissement, induisant des mouvements de torsion dans la corde. Ces mouvements de torsion ne sont pas pris en compte dans la modélisation simple de l'interaction présentée dans les paragraphes suivants.

### 2.3 Modèle simple d'interaction doigt-corde

Le modèle d'interaction entre le doigt et la corde présenté par la suite est un modèle unidimensionnel basé sur des travaux antérieurs effectués sur la guitare [Pavlidou & Richardson, 95], [Pavlidou, 97]. Dans ce modèle, uniquement les vibrations transversales de la corde suivant l'axe  $x$ , défini figure 2.2, sont prises en compte. Bien que restrictif, ce modèle est la première étape permettant de comprendre, d'interpréter et de décrire le pincement d'une corde de harpe.

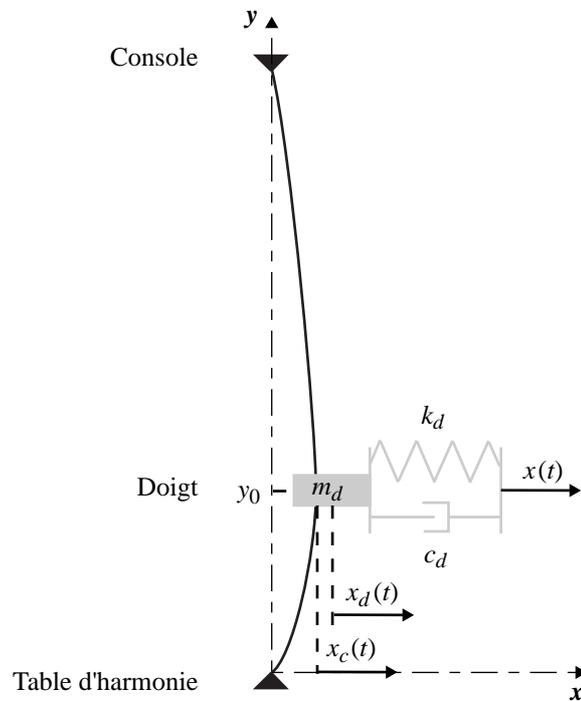


FIG. 2.2 – Schéma décrivant l'interaction entre le doigt et la corde.

La corde considérée est supposée parfaitement flexible, de masse linéique  $\rho$ , de longueur  $L$ , de tension  $T$  uniforme le long de l'axe  $y$  et d'amortissement par frottement visqueux dans l'air  $\beta$  supposé indépendant de la fréquence. De plus, la corde est fixée entre la table d'harmonie et la console, supposées toutes deux parfaitement rigides. La pulpe du doigt de la harpiste, de largeur  $w$ , attaque la corde à la position  $y_0$ . La corde est entraînée suivant la direction  $x$  à une amplitude  $x_c(t)$ .

Le doigt de l'instrumentiste est modélisé par une masse  $m_d$  connectée à une raideur  $k_d$  et un amortissement  $c_d$  pouvant se déplacer uniquement selon l'axe  $x$ . La consigne imposée par le musicien,  $x(t)$ , peut être différente du déplacement effectif de la pulpe du doigt  $x_d(t)$  du fait de

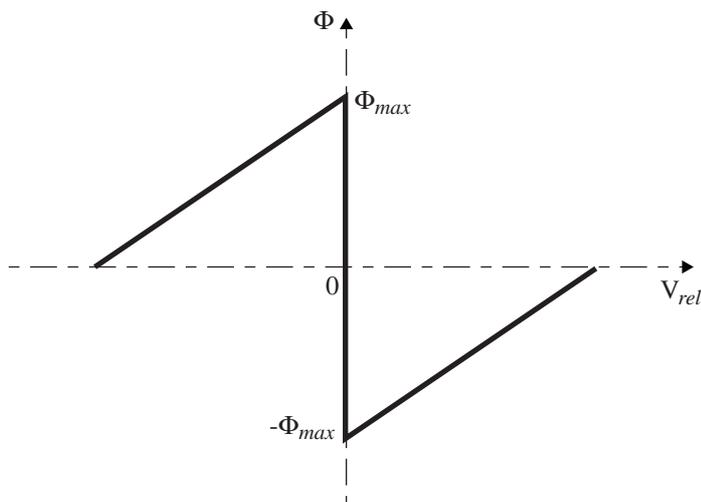


FIG. 2.3 – Caractéristique simplifiée de la force de friction.

la représentation du comportement mécanique de la peau et de la chair par une raideur et un amortissement. Cette consigne représente, en quelque sorte, le mouvement de la phalange (ou dernière phalange) schématisée figure 2.1.

La force de friction existant entre la pulpe du doigt et la corde est, à notre connaissance, une quantité qui n'a pas été encore étudiée expérimentalement. Nous supposons donc que cette force est une fonction de la vitesse relative,  $V_{rel}$ , entre la pulpe du doigt et la corde à l'instar de l'interaction entre l'archet et la corde dans un violon [McIntyre & Woodhouse, 79]. Lors de la simulation de jeu d'une corde de guitare, il a été montré que la forme de cette fonction modifie de façon importante la trajectoire de la corde après le lâcher [Pavlidou & Richardson, 97],[Pavlidou, 97]. Nous choisissons d'utiliser une force de friction simplifiée  $\Phi$  dont la caractéristique en fonction de la vitesse relative  $V_{rel}$  est donnée figure 2.3. Cette fonction est constituée de trois parties : lorsque la corde et la pulpe du doigt sont solidaires ( $V_{rel} = 0$ ), lorsque la vitesse de la corde est inférieure à celle de la pulpe du doigt ( $V_{rel} < 0$ ),

$$\Phi(t) = f_v \left( \frac{dx_c}{dt}(t) - \frac{dx_d}{dt}(t) \right) + \Phi_{max} \quad \forall t \in [t_g; t_l], \quad (2.1)$$

et lorsque la vitesse de la corde est supérieure à celle de la pulpe du doigt ( $V_{rel} > 0$ ),

$$\Phi(t) = f_v \left( \frac{dx_c}{dt}(t) - \frac{dx_d}{dt}(t) \right) - \Phi_{max} \quad \forall t \in [t_g; t_l]. \quad (2.2)$$

Les paramètres  $f_v$  et  $\Phi_{max}$  sont respectivement appelés pente de la caractéristique de friction et force de friction maximale.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément de corde en contact avec le doigt et à l'élément de doigt en contact avec la corde entre les instants d'accrochage  $t_a$  et de lâcher  $t_l$ ,

nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \rho w \frac{\partial^2 x_c(t)}{\partial t^2} = Tw \frac{\partial^2 x_c(t)}{\partial y^2} + \Phi(t) - \beta \rho w \frac{\partial x_c(t)}{\partial t} \\ m_d \frac{d^2 x_d(t)}{dt^2} = k_d (x(t) - x_d(t) - l_d) - \Phi(t) - c_d \frac{dx_d(t)}{dt} \end{cases} \quad \forall t \in [t_a; t_l]. \quad (2.3)$$

Ce système peut être simplifié en supposant que le mouvement du doigt entraînant la corde est « lentement variable » au sens où le système physique doigt-corde évolue lentement par rapport au temps caractéristique de l'oscillation libre de la corde. Cette hypothèse de quasi-staticité entraîne la disparition des termes différentiels : les termes d'inertie et les termes d'amortissement. Par ailleurs, en effectuant un changement de variable adéquat sur  $x_d(t)$ , la longueur à vide du ressort équivalent au doigt  $l_d$  devient la nouvelle origine du mouvement du doigt, le système d'équations (2.3) devient :

$$\begin{cases} Tw \frac{\partial^2 x_c(y_0, t)}{\partial y^2} + \Phi(t) = 0 \\ k_d (x(t) - x_d(t)) - \Phi(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [t_a; t_l]. \quad (2.4)$$

De plus, nous supposons que le déplacement de la corde induit par le doigt est petit par rapport à la longueur de la corde et n'entraîne aucune variation de tension le long de l'axe  $y$ . Ainsi, la force de flexion de la corde qui tend à ramener la corde à sa position au repos,

$$F_f = Tw \frac{\partial^2 x_c(t)}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

peut être simplifiée par la relation géométrique suivante [Valette & Cuesta, 93] :

$$F_f = -k_c x_c(t) \quad \text{avec} \quad k_c = T \left( \frac{1}{y_0 - w/2} + \frac{1}{L - (y_0 + w/2)} \right), \quad (2.6)$$

où  $k_c$  est homogène à une raideur. Le système d'équations (2.4) devient donc :

$$\begin{cases} -k_c x_c(t) + \Phi(t) = 0 \\ k_d (x(t) - x_d(t)) - \Phi(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [t_a; t_l]. \quad (2.7)$$

On peut adjoindre à ce système d'équations (2.7) des conditions sur le déplacement de la corde  $x_c(t)$  au cours du temps. A l'instant d'*accrochage*  $t_a$ , la corde est supposée au repos impliquant la nullité de son déplacement et de sa vitesse,

$$x_c(t_a) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{dx_c}{dt}(t_a) = 0. \quad (2.9)$$

Par ailleurs, à l'instant  $t_g$  où le glissement de la corde sur le doigt débute, le déplacement de la corde  $x_c(t)$  atteint un maximum se traduisant par la nullité de sa dérivée par rapport au temps,

$$x_c(t_g) = x_{cmax} \quad (2.10)$$

$$\frac{dx_c}{dt}(t_g) = 0. \quad (2.11)$$

## 2.4 Détermination du mouvement du doigt et de la corde

Les déplacements de la pulpe du doigt et de la corde régis par le système d'équations simplifiées (2.7) sont mesurés et approchés par une expression polynomiale. Nous différencierons par la suite la phase d'*accrochage* et la phase de *glissement* pour faciliter la résolution du système d'équations (2.7). Une fois les différents déplacements du modèle obtenus, les conditions initiales pour les oscillations libres correspondant à l'état de la corde au moment du lâcher peuvent être déterminées.

### 2.4.1 Phase d'*accrochage*

Durant la phase d'*accrochage*, les déplacements de la pulpe du doigt et de la corde sont égaux puisque le doigt et la corde sont considérés comme solidaires. Ce déplacement est décrit suivant l'ordonnée  $y_0$  par le système suivant :

$$\begin{cases} x_c(t) = x_d(t) \\ x_d(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i \end{cases} \quad \forall t \in [t_a; t_g]. \quad (2.12)$$

Les coefficients du polynôme  $(a_i)_{i=1\dots N}$  sont obtenus à partir des mesures directes du déplacement de la corde (Annexe 1, p. 37). La consigne de l'instrumentiste est, quant à elle, obtenue par la relation

$$x(t) = \left(1 + \frac{k_c}{k_d}\right) x_c(t) \quad \forall t \in [t_a; t_g], \quad (2.13)$$

déduite du système d'équations (2.7).

### 2.4.2 Phase de *glissement*

Durant la phase de *glissement*, la pulpe du doigt et la corde ont des déplacements différents. Ils sont décrits à l'aide de deux polynômes,

$$\begin{cases} x_c(t) = \sum_{i=0}^{n_c} a_i^c t^i \\ x_d(t) = \sum_{i=0}^{n_d} a_i^d t^i \end{cases} \quad \forall t \in [t_g; t_l], \quad (2.14)$$

dont les coefficients  $(a_i^c)_{i=1\dots n_c}$  et  $(a_i^d)_{i=1\dots n_d}$  sont obtenus de la même manière que précédemment en adjoignant les conditions (2.10) et (2.11) lors du début du glissement  $t_g$ . Il est à noter que l'ordre du polynôme décrivant le déplacement de la pulpe du doigt doit satisfaire la relation suivante :

$$n_d = n_c + 1, \quad (2.15)$$

ceci afin qu'il existe une solution non triviale au système d'équations (2.7). Par ailleurs, du fait de la rapidité du mouvement, l'obtention du champ de déplacement de la pulpe du doigt est parfois difficile

à obtenir lors de la phase de *glissement*. En utilisant le système d'équations (2.7) et l'égalité (2.1), il est possible de trouver une relation liant les termes du polynôme décrivant le déplacement du doigt à ceux de la corde par

$$x_d(t) = \sum_{i=1}^{n_c+1} \frac{-k_c a_i^c}{i f_v} (t^i - t_g^i) + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{a_{i+1}^c}{i} (t^i - t_g^i) + \frac{\Phi_{max}}{f_v} (t - t_g) + x_{cmax}. \quad (2.16)$$

La consigne de l'instrumentiste  $x(t)$  est obtenue en substituant le déplacement de la corde  $x_c(t)$  et le déplacement de la pulpe du doigt  $x_d(t)$  déduit de (2.16) dans le système (2.7).

### 2.4.3 Conditions initiales de la phase d'oscillations libres

Les deux phases précédemment exposées permettent d'établir les conditions initiales d'oscillation de la corde. Ces conditions initiales sont particulièrement importantes si l'on veut, par exemple, les implémenter dans un modèle de synthèse modale [Woodhouse, 04], [Cuenca, 05], [Marinho, 05]. Suivant les différentes hypothèses déjà énoncées dans le modèle, nous considérons par la suite qu'aucune oscillation de la corde ne se produit durant la phase d'interaction. De plus, puisque la corde considérée est parfaitement souple, nous supposons que l'allure de la déformée de la corde à l'instant initial est identique à celle donnée figure 2.4.

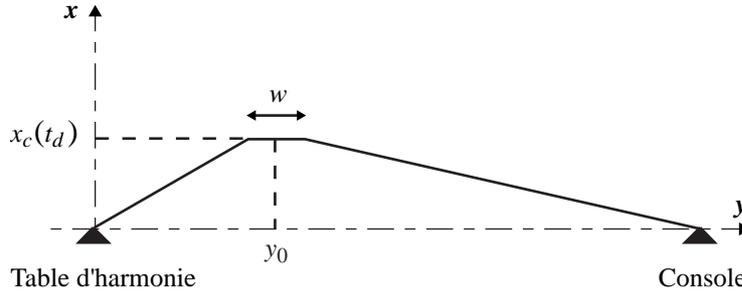


FIG. 2.4 – Déformée de la corde à l'instant initial d'oscillation libre.

En appliquant des relations géométriques, l'expression de la déformée à l'instant initial s'exprime par [Valette & Cuesta, 93] :

$$x_c(y) = x_c(t_i) \frac{y}{y_0 - w/2} \quad \forall y \in [0; y_0 - w/2], \quad (2.17)$$

$$x_c(y) = x_c(t_i) \frac{L - y}{L - y_0 - w/2} \quad \forall y \in [y_0 + w/2; L]. \quad (2.18)$$

Par dérivation en fonction du temps des expressions (2.17) et (2.18), la vitesse le long de la corde devient :

$$\frac{dx_c}{dt}(y) = \frac{dx_c}{dt}(t_i) \frac{y}{y_0 - w/2} \quad \forall y \in [0; y_0 - w/2], \quad (2.19)$$

$$\frac{dx_c}{dt}(y) = \frac{dx_c}{dt}(t_i) \frac{L - y}{L - y_0 - w/2} \quad \forall y \in [y_0 + w/2; L]. \quad (2.20)$$

Il est maintenant possible d'obtenir le profil de vitesse et de déplacement le long de la corde à partir de la connaissance du déplacement et de la vitesse au point de jeu à l'instant  $t_l$ . À noter que l'obtention de la vitesse de la corde à l'instant de lâcher  $t_l$  peut se déduire du polynôme représentant le mouvement de la corde dans la phase de *glissement* par une simple dérivation.

## 2.5 Détermination des paramètres du modèle

Maintenant que les déplacements de la corde et du doigt sont connus entre le moment où la corde est entraînée et le moment où elle est lâchée, tous les paramètres du modèle décrit par le système d'équations (2.7) peuvent être obtenus : la force de friction maximale  $\Phi_{max}$ , la pente de la caractéristique de friction  $f_v$  et la raideur du doigt  $k_d$ .

### Force de friction maximale $\Phi_{max}$

Au début du glissement  $t_g$ , le déplacement de la corde atteint son maximum  $x_{cmax}$ . À cet instant, la première équation du système (2.7) prend la forme suivante :

$$\Phi_{Max} = k_c x_{cmax}, \quad (2.21)$$

avec  $k_c$  un paramètre de la corde homogène à une raideur directement calculée de l'équation (2.6).

### Pente de la caractéristique de friction $f_v$

La pente de la force de friction lorsque la corde glisse sur le doigt est obtenue en considérant l'instant de lâcher  $t_l$ . En effet, à cet instant, la corde quitte le doigt après avoir parcouru la distance  $h_d$  qui peut être mesurée directement sur le doigt de l'instrumentiste. Il vient

$$x_d(t_l) = x_c(t_l) + h_d. \quad (2.22)$$

En écrivant la relation polynômiale à l'instant  $t_l$ , nous obtenons la pente de la caractéristique de friction lors de la phase de glissement :

$$f_v = \frac{\sum_{i=1}^{n_c+1} -\frac{k_c a_i^c}{i} (t_l^i - t_g^i) + \Phi_{max}(t_l - t_g)}{x_c(t_l) + h_c - x_{cmax} - \sum_{i=1}^{n_c} \frac{a_{i+1}^c}{i} (t_l^i - t_g^i)}. \quad (2.23)$$

### Raideur équivalente au doigt $k_d$

La raideur équivalente au doigt  $k_d$  est un paramètre difficile à estimer puisqu'il faut mesurer la consigne de l'instrumentiste  $x(t)$ . Lors de la phase d'*accrochage*, il existe un coefficient de proportionnalité reliant  $x(t)$  à  $x_c(t)$  et dépendant de  $k_d$ . En connaissant ces deux déplacements, la raideur équivalente au doigt peut être obtenue à partir de l'équation (2.13), de la manière suivante :

$$k_d = \frac{k_c x(t)}{x(t) - x_c(t)}. \quad (2.24)$$

## 2.6 Résultats expérimentaux

### 2.6.1 Protocole expérimental

Pour obtenir les paramètres du modèle, il est nécessaire de connaître le déplacement de la phalange (consigne de l'instrumentiste) et le déplacement de la corde à l'endroit du pincement. Ces quantités sont difficilement mesurables par les moyens habituels et nécessitent l'utilisation d'un instrument de mesures particulier tel qu'une caméra vidéo. Par traitement des images, il est possible de suivre un point repère au cours du temps. Cependant, la consigne du musicien reste difficile à obtenir puisqu'elle correspond au déplacement d'un os. Une hypothèse raisonnable est de supposer que ce mouvement est équivalent à celui de l'ongle du doigt ou à l'extrême bout du doigt. Suivant cette hypothèse, deux points de mesure sont donc à suivre au cours du temps : un point sur le doigt et un point sur la corde à l'endroit du pincement.

Une représentation schématique du protocole expérimental est proposée figure 2.5. Le plan de mesure est formé de l'image obtenue par la caméra. Afin d'être en concordance avec le modèle, le plan de mesure est choisi de telle sorte que le déplacement du doigt du ou de la harpiste se trouve dans ce plan. Suivant la manière de jouer des harpistes, il est parfois nécessaire d'orienter la caméra afin de respecter cette condition. Dans la figure 2.5, il est supposé que ce plan est inclus dans celui formé par les cordes.

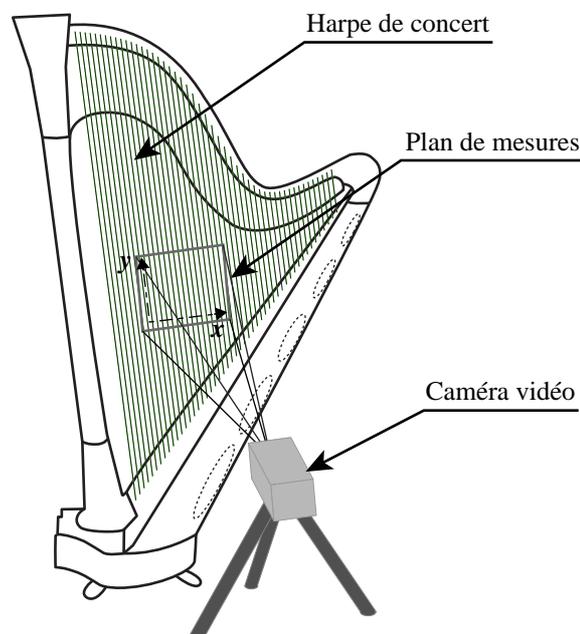


FIG. 2.5 – Protocole expérimental permettant la mesure du déplacement de la corde et du doigt dans un plan.

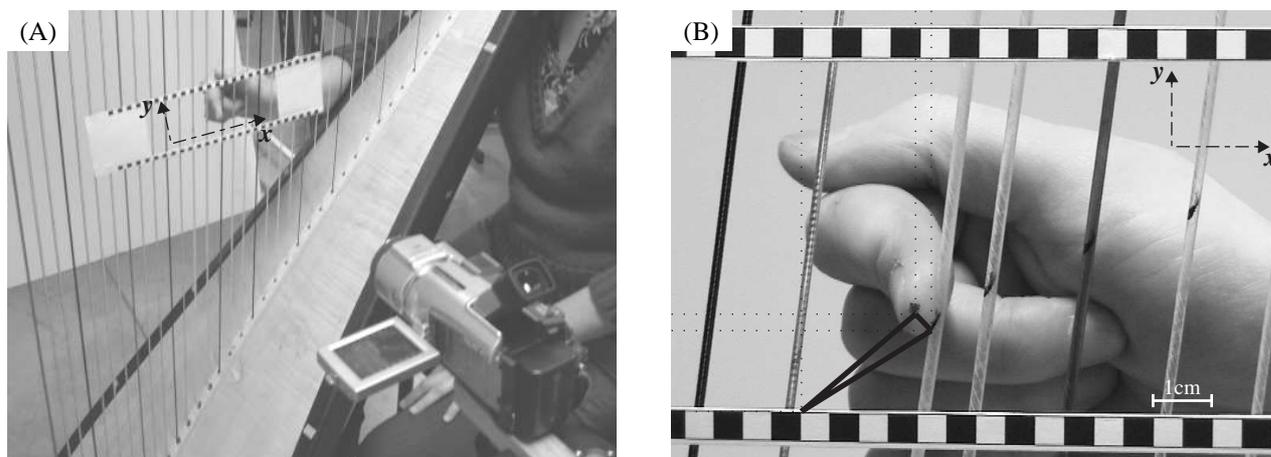


FIG. 2.6 – Descriptif du contexte expérimental : (A) le système de mesure avec le repère fixe sur les cordes de la harpe, (B) image type après identification des points repères.

### 2.6.2 Étude préliminaire avec une caméra classique

La mise en pratique du protocole expérimental précédemment défini a tout d'abord été effectuée avec une caméra vidéo classique à 25 images/s. La harpe de concert *Atlantide modèle Prestige* est jouée au niveau de la corde 33, de fréquence fondamentale théorique 103,8 Hz, au tiers de sa longueur par une instrumentiste confirmée. Chaque pincement de corde est répété 5 fois afin d'estimer une incertitude liée à la répétabilité sur les déplacements mesurés. Dans la figure 2.6, une description du contexte expérimental est proposée avec la photo de l'expérience et une image typique du résultat obtenu. Un repère fixe, collé sur les cordes de la harpe, permet d'obtenir le déplacement du doigt et de la corde dans un même référentiel indépendant du mouvement de l'instrument.

Les déplacements du bout du doigt et de la corde suivant les axes  $x$  et  $y$  sont montrés figure 2.7. L'origine du repère est choisi à l'instant initial. Pour les deux champs de déplacement, seule la coordonnée suivant l'axe  $x$  a une variation importante, la coordonnée suivant l'axe  $y$  étant constante à l'exception du dernier point. Suivant les variations des déplacements le long de l'axe  $x$ , on retrouve les trois phases précédemment identifiées (§ 2.2), en relation avec les trois instants définis dans la figure 2.7, auxquelles une phase supplémentaire d'initialisation du geste a été trouvée :

- $[0, t_a]$  où le doigt se positionne sur la corde, entraînant un déplacement du doigt sans déplacement de la corde ;
- $[t_a, t_g]$  où le doigt bande la corde, le déplacement du bout du doigt est sensiblement proportionnel au déplacement de la corde ;
- $[t_g, t_l]$  où la corde glisse sur le doigt avant le lâcher, ce qui se traduit par un déplacement rapide du doigt et de la corde dans un sens contraire ;
- $[t_l, \infty[$  où la corde oscille librement.

Du fait de la faible fréquence d'échantillonnage de la caméra, l'instant de lâcher est vraisemblablement avant celui défini figure 2.7. La phase de glissement est donc mal identifiée avec ce moyen de

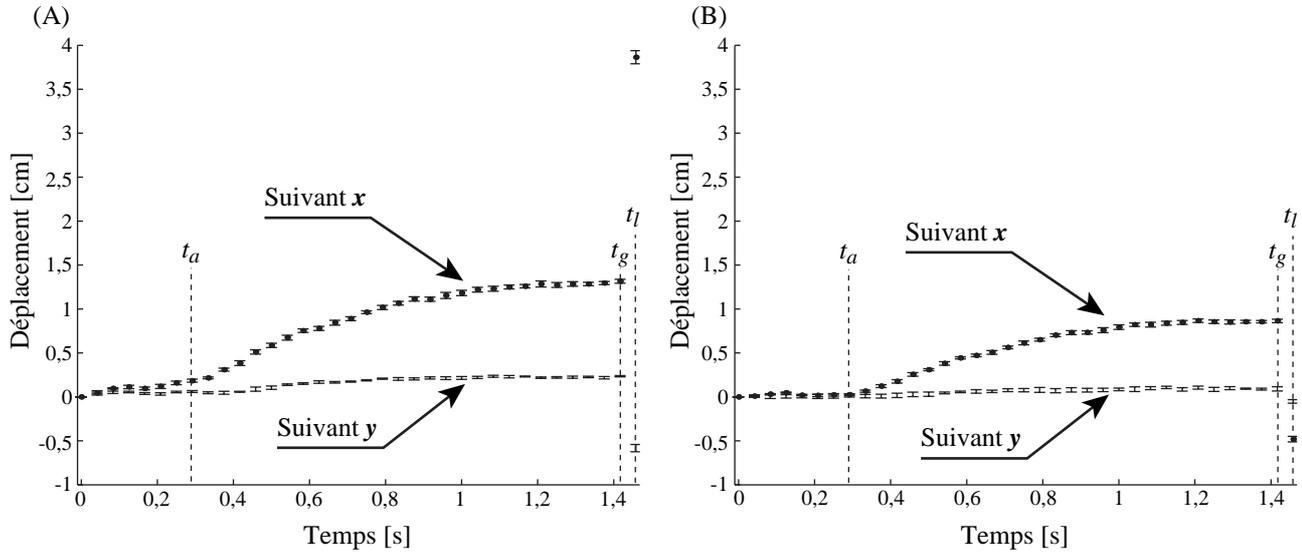


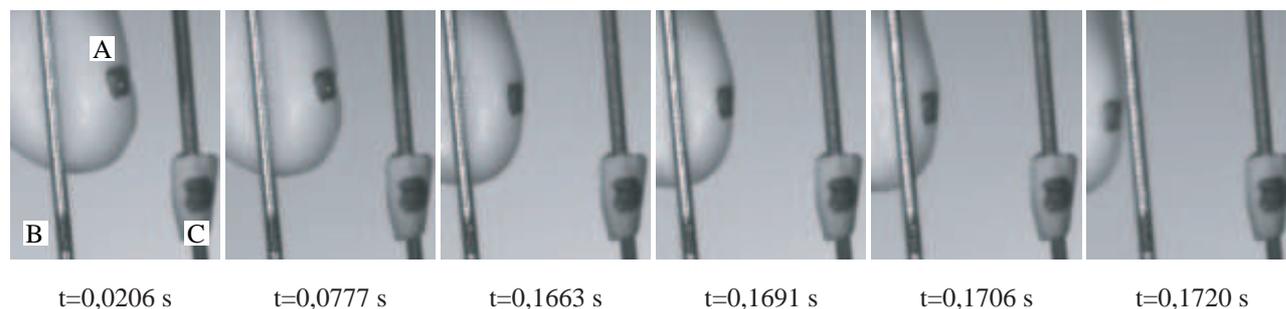
FIG. 2.7 – Déplacement des repères positionnés sur le doigt (A) et sur la corde (B) au cours du temps. Les barres d'erreur indiquent les erreurs de répétabilité obtenues en chaque point.

mesures, rendant impossible l'obtention de la caractéristique de friction et des conditions initiales de la phase d'*oscillation libre*. Cependant, nous pouvons tout de même estimer la force de friction maximale et la raideur équivalente du doigt en supposant que l'instant de début de glissement soit correctement défini. Pour les mesures présentées dans la figure 2.7, nous avons trouvé  $\Phi_{max} = 14,1 \pm 0,3$  N et  $k_d = 2636 \pm 133$  N/m. À noter que  $k_d$  est une valeur globale ne prenant pas en compte les variations dans toute la phase d'*accrochage*.

Cette étude préliminaire, avec une caméra classique, nous permet d'établir une description de l'interaction entre le doigt de l'instrumentiste et la corde de harpe au cours du temps. Ces premiers résultats semblent valider le modèle d'interaction unidimensionnel développé dans ce chapitre puisque le mouvement du doigt s'opère principalement suivant une direction du plan de mesures. Par ailleurs, la faible incertitude de répétabilité obtenue sur les mesures nous prouve que le geste de l'instrumentiste est reproductible. Cependant, les moyens expérimentaux mis en œuvre sont limités pour décrire avec précision la phase de glissement, rendant impossible l'obtention de tous les paramètres du modèle. L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour décrire correctement cette phase de glissement.

### 2.6.3 Étude avec une caméra rapide

Pour augmenter la fréquence d'échantillonnage des images mesurées, une caméra rapide Phantom V4.1 a été utilisée. Ces mesures ont été effectuées à l'Université d'Édimbourg dans le Laboratoire d'Acoustique Musicale [Kerjan, 06]. Dans ce laboratoire, la caméra rapide est principalement utilisée pour l'étude du mouvement des lèvres de joueurs d'instruments en cuivre [Bromage *et coll.*, 05]. Son



**FIG. 2.8** – Images obtenues à différents instants avec la caméra rapide lorsque R. Morton pince la corde de harpe. Les points marqués correspondent (A) au déplacement du bout du doigt, (B) au déplacement de la corde et (C) au repère fixe.

application à l'étude du mouvement d'un doigt et d'une corde a donc nécessité des adaptations tant sur le plan expérimental que sur les moyens de traitement. Dans son mode normal, la caméra peut effectuer des prises de vue à 2100 images/s avec une résolution de  $512 \times 512$  pixels. Au détriment de la résolution, sa vitesse peut être augmentée jusqu'à plus de 40000 images/s. Dans notre étude, la cadence a été réglée à 3500 images/s afin d'obtenir le meilleur compromis entre résolution et fréquence d'échantillonnage. Pour l'expérience, deux harpistes professionnelles de formation classique, H. Yule et R. Morton, sont venues au laboratoire d'Édimbourg avec leurs propres harpes celtiques. Du fait de l'orientation du mouvement du doigt lors du pincement de la corde, la caméra rapide a été orientée à approximativement  $40^\circ$  par rapport à la normale au plan des cordes.

La figure 2.8 illustre le type d'images obtenues avec la caméra rapide lorsque R. Morton pince la corde de si, de fréquence fondamentale 123,5 Hz. Dans cette figure, le doigt entraîne la corde dans les trois premières images puis la corde glisse sur le doigt jusqu'aux oscillations libres de la corde. À la lumière de ces images, il semble clair que la façon de jouer l'instrument semble différente de la manière dont il a été joué dans l'étude préliminaire. Le doigt est incliné de façon plus importante étant presque parallèle à la corde. Ce jeu, nommé « Grandjany » par les harpistes en référence à un harpiste célèbre, est le jeu classique par excellence. Dans la figure 2.8, la référence utilisée dans cette étude est un point collé sur une corde non jouée. À noter que pour faciliter la détection automatique des points repères (A), (B) et (C), le point repère (B) a été positionné en dessous de l'endroit du pincement.

Le pincement est répété plusieurs fois, mais seules quelques courbes ont pu être exploitées. En effet, il arrive que la détection automatique des points repères ne se passe pas correctement entraînant des résultats aberrants. Ce problème arrive lorsque l'orientation du faisceau lumineux n'est pas correcte engendrant de nombreuses ombres. Un autre problème d'origine inconnue a été rencontré lors de l'expérimentation : le saut d'image, n'entraînant aucune mesure à ces instants là.

Dans les figures 2.9 et 2.10, deux mesures obtenues avec les deux instrumentistes sont reportées. La corde pincée par H. Yule est un ré, de fréquence fondamentale 73,7 Hz. Sur ces deux figures, la consigne de l'instrumentiste et le mouvement de la corde sont montrés dans leur repère local ainsi que

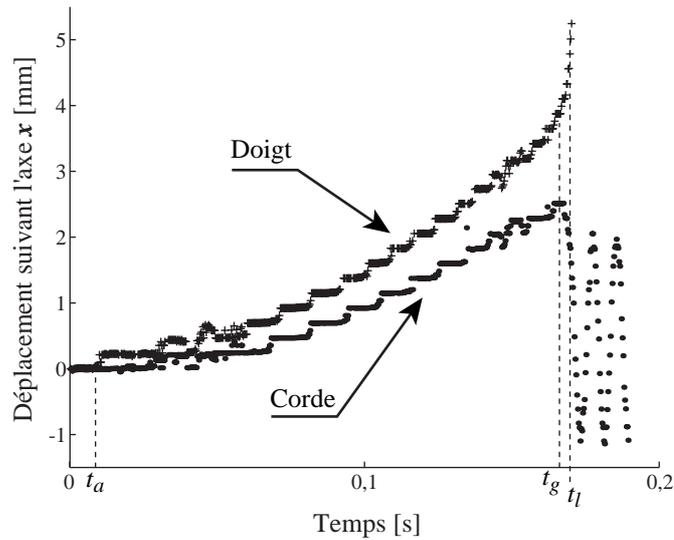


FIG. 2.9 – Déplacement suivant l'axe  $x$  du doigt et de la corde lorsque R. Morton pince la corde.

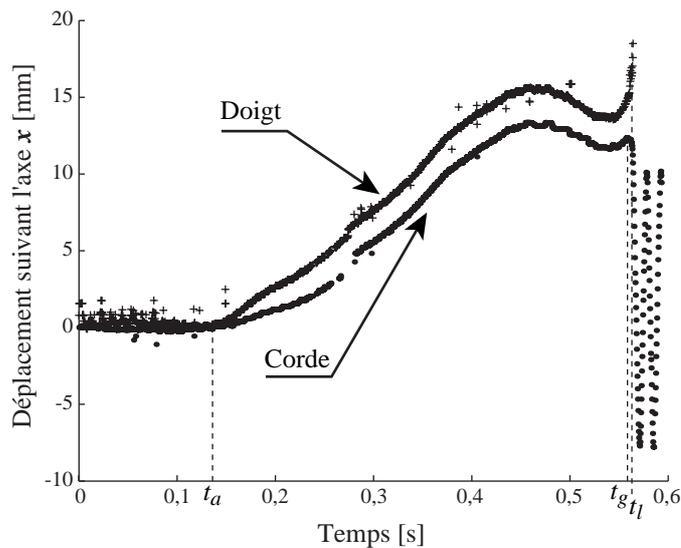


FIG. 2.10 – Déplacement suivant l'axe  $x$  du doigt et de la corde lorsque H. Yule pince la corde.

les instants d'*accroche*, de *glissement* et de *lâcher*. Après l'instant de *lâcher*, la corde oscille librement. Les allures des deux courbes sont résolument différentes dans la phase d'*accroche*. Lorsque R. Morton pince la corde, le mouvement est très rapide entraînant la corde d'une seule traite. Pour H. Yule, le mouvement est plus long avec une pause avant le *glissement*. D'autres mesures confirment la répétabilité de ces manières particulières de jouer l'instrument indépendamment de la corde jouée. Pour les deux harpistes, la durée de la phase de glissement est proche de l'ordre de 0,0049 s pour R. Morton et de 0,0057 s pour H. Yule. La différence entre les deux harpistes se trouve donc principalement dans la

	$k_c$ [N.m <sup>-1</sup> ]	$k_d$ [N.m <sup>-1</sup> ]	$f_v$ [N.m <sup>-1</sup> .s]	$\Phi_{max}$ [N]	$x_c(t_i)$ [m]	$\frac{dx_c}{dt}(t_i)$ [m.s <sup>-1</sup> ]
<i>H. Yule</i>	1456	2296	6,4 10 <sup>-5</sup>	18	0,01	-1,5
<i>R. Morton</i>	2048	3124	3,6 10 <sup>-3</sup>	5	0,001	-0,8

**TAB. 2.1** – Paramètres du modèle et conditions initiales de la phase d’oscillation libre obtenus pour les deux instrumentistes.

phase d’*accroche*.

À partir de ces mesures, il est possible d’obtenir une représentation polynomiale des déplacements. Dans la phase d’*accroche*, les polynômes trouvés sont d’ordre 9 alors que dans la phase de *glissement*, le polynôme représentant le mouvement de la corde est trouvé d’ordre 3. De ces polynômes, les paramètres du modèle et les conditions initiales de la phase d’oscillation libre sont obtenus comme explicité dans les paragraphes précédents (§ 2.4.3 et § 2.5). Pour les deux mesures montrées figures 2.9 et 2.10, ces paramètres sont calculés et proposés dans le tableau 2.1. L’estimation des incertitudes associées à ces paramètres n’a pas été possible en raison du manque de données, comme expliqué précédemment. Ces valeurs permettent, néanmoins, de donner un ordre de grandeur des paramètres du modèle. Il est certain que pour les comparer, il faudrait l’utilisation d’une même harpe avec le pincement par les deux harpistes de la même corde. Dans nos résultats, les tensions des deux cordes sont différentes entraînant une comparaison difficile des paramètres. En ce qui concerne les conditions initiales de la phase d’*oscillation libre*, les résultats expérimentaux montrent clairement que la corde quitte le doigt avec une vitesse non négligeable (voir tableau 2.1).

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, le pincement de la corde de harpe a été étudié en détail. Un modèle simple décrivant l’interaction entre le doigt et la corde avant que celle-ci n’oscille librement a été développé. Pour obtenir les paramètres de ce modèle, des mesures de déplacement du doigt et de la corde ont été mises en place. La rapidité des mouvements et la particularité des objets à suivre a nécessité l’utilisation d’une caméra rapide impliquant la mise en œuvre de traitements adéquats. Les premiers résultats expérimentaux sont encourageants et semblent montrer qu’il est possible d’identifier les paramètres du modèle dépendant principalement de la morphologie de l’instrumentiste. Un résultat issu de ce modèle est la détermination des conditions initiales de la corde à l’instant où elle est lâchée. Les résultats obtenus par le modèle et les mesures montrent que la corde quitte le doigt avec une vitesse non nulle. Pour un modèle réaliste de synthèse sonore, cette vitesse est clairement à prendre en compte pour initialiser un programme de synthèse sonore basé sur une représentation modale.

Le prolongement logique de cette étude est d’effectuer des simulations sonores en faisant varier les paramètres du modèle d’interaction autour de leurs valeurs nominales. Ces simulations pourront alors

nous permettre d'identifier les paramètres qui sont pertinents en ce qui concerne le son musical produit. Concernant les résultats expérimentaux, un travail complémentaire est nécessaire. En effet, l'étude de l'interaction doigt-corde sur plusieurs harpistes jouant le même instrument semble nécessaire car ces paramètres semblent différer grandement entre instrumentistes. De plus, les mesures montrent que les oscillations libres de la corde s'effectuent suivant deux directions de vibrations, appelées polarisations. La mesure du déplacement du doigt et de la corde suivant ces deux directions de vibrations (par deux caméras ou par une caméra avec un jeu de miroir) nous permettrait d'obtenir les paramètres d'un modèle bi-dimensionnel de l'interaction doigt-corde, sans doute plus réaliste.

## Annexe 1

La méthode utilisée pour obtenir les coefficients des polynômes des différents déplacements est exposée dans cette annexe. Considérons un déplacement dont le modèle  $\alpha(t)$  s'exprime comme suit :

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^L \alpha_i t^i \quad \forall t \in [t_d; t_f]. \quad (2.25)$$

Le déplacement est mesuré avec une période d'échantillonnage  $T_e$  et est noté  $\hat{\alpha}(t)$ . Nous souhaitons avoir l'égalité entre le modèle  $\alpha(t)$  et la quantité mesurée  $\hat{\alpha}(t)$ . Il vient donc

$$\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) \quad \forall t \in [t_d; t_f]. \quad (2.26)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}(t_d) = \sum_{i=0}^L \alpha_i t_d^i \\ \hat{\alpha}(t_d + T_e) = \sum_{i=0}^L \alpha_i (t_d + T_e)^i \\ \hat{\alpha}(t_d + 2T_e) = \sum_{i=0}^L \alpha_i (t_d + 2T_e)^i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(t_f) = \sum_{i=0}^L \alpha_i (t_f)^i \end{array} \right. \quad (2.27)$$

À noter qu'il est possible de rajouter des équations supplémentaires à ce système d'équations afin de prendre en compte des vitesses nulles aux différents instants. Écrit sous forme matricielle, le système d'équations (2.27) devient :

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t_d) \\ \hat{\alpha}(t_d + T_e) \\ \hat{\alpha}(t_d + 2T_e) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_d & t_d^2 & t_d^3 & \dots & t_d^L \\ 1 & (t_d + T_e) & (t_d + T_e)^2 & (t_d + T_e)^3 & \dots & (t_d + T_e)^L \\ 1 & (t_d + 2T_e) & (t_d + 2T_e)^2 & (t_d + 2T_e)^3 & \dots & (t_d + 2T_e)^L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & \dots & t_f^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

ou encore de manière condensée :

$$\hat{A} = RA. \quad (2.29)$$

Les coefficients du polynôme  $(\alpha_i)_{i=1\dots L}$  sont alors obtenus par inversion du système matriciel (2.29). Ce système d'équations est, à priori, surdéterminé et l'inversion de la matrice  $R$  est obtenue au sens des moindres carrés.

## Bibliographie

- [Bromage *et coll.*, 05] S. Bromage, M. Campbell et J. Gilbert. Experimental investigation of the open area of the brass player's lips. Dans *Proc. of Forum Acusticum*, Budapest, Hungary, 2005.
- [Bécache *et coll.*, 05] E. Bécache, A. Chaigne, G. Derveaux et P. Joly. Numerical simulation of a guitar. *Computers and Structure*, 83 : 107-126, 2005.
- [Campbell & Greated, 87] M. Campbell et C. Greated. *The musician's guide to acoustics*. Oxford University Press, New York, 1987.
- [Chaigne, 92] A. Chaigne. On the use of finite differences for musical synthesis. Application to plucked stringed instruments. *Journal d'Acoustique*, 5 : 181-211, 1992.
- [Cuenca, 05] J. Cuenca. *Étude de l'excitation d'une corde de harpe*. Rapport de stage de Master 1, Université du Maine, Le Mans, France, 2005.
- [Derveaux *et coll.*, 03] G. Derveaux, A. Chaigne, P. Joly et E. Bécache. Time-domain simulation of a guitar : model and method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(6) : 3368-3383, 2003.
- [Giordano & Winans, 99] N. Giordano et J. P. Winans II. Plucked strings and the harpsichord. *Journal of Sound Vibration*, 224(3) : 455-473, 1999.
- [Kerjan, 06] F. Kerjan. High speed filming, applications to musical acoustics. Rapport de stage de Deust VAS 2, Université du Maine, Le Mans, France, 2006.
- [Marinho, 05] L. Marinho do Nascimento. *Sound simulation of the harp : focus on the finger-string interaction*. Rapport de stage Ingénieur de l'Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brazil, 2005.
- [McIntyre & Woodhouse, 79] M. E. McIntyre et J. Woodhouse. On the fundamentals of bowed-string dynamics. *Acustica*, 43 : 93-108, 1979.
- [Pavlidou, 97] M. Pavlidou. *A physical model of the string-finger interaction on the classical guitar*. PhD thesis, University of Wales, Cardiff, United Kingdom, 1997.
- [Pavlidou & Richardson, 95] M. Pavlidou et B. E. Richardson. The string-finger interaction in the classical guitar. Dans *Proc. of ISMA*, Paris, France, 1995.
- [Pavlidou & Richardson, 97] M. Pavlidou et B. E. Richardson. The string-finger interaction in the classical guitar : theoretical model and experiments. Dans *Proc. of ISMA*, Edinburgh, United Kingdom, 1997.
- [Valette & Cuesta, 93] C. Valette & C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès, Paris, 1993.
- [Woodhouse, 04] J. Woodhouse. On the synthesis of Guitar Plucks. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 : 928-944, 2004.

## Deuxième partie

# Interactions Table d'harmonie - Caisse de résonance : vibro-acoustique du corps sonore



## Partie 2 : Avant-propos

Dans cette partie, le rôle du couplage entre la table d’harmonie et la caisse de résonance de la harpe de concert est étudié. Contrairement au cas de la guitare, il semble que la taille de la cavité et surtout les dimensions et la forme des événements n’aient pas été conçues de façon à augmenter le niveau sonore de l’instrument en basses fréquences. La principale fonction des événements serait de permettre l’accès de la main pour changer les cordes. Certaines harpes ont même une fente sur toute la longueur de la caisse de résonance à la place des 5 événements présents sur notre harpe d’étude. Il s’avère donc que pour la harpe de concert, l’effet du couplage entre la table d’harmonie et la caisse de résonance ne soit pas pris en compte pour dimensionner l’instrument. L’objectif de cette partie est de clarifier le rôle vibro-acoustique exercé par ce couplage afin d’en connaître les conséquences sur le rayonnement basses fréquences de l’instrument. Pour cela, trois chapitres présentent différentes méthodes d’investigation allant du comportement modal du corps sonore à l’identification des sources acoustiques présentes dans l’instrument.

La première étude (chapitre 3) est présentée sous la forme d’un article accepté pour publication à la revue américaine *Journal of the Acoustical Society of America*, rédigé en langue anglaise. Dans cette étude, des modes vibro-acoustiques couplés entre la table d’harmonie et l’air compris dans la caisse de résonance sont identifiés. Pour cela, une analyse modale du corps de l’instrument est tout d’abord menée. Parmi les six modes identifiés, deux ont des déformées modales similaires, caractéristiques d’un couplage vibro-acoustique. Une investigation du champ acoustique dans la caisse de résonance associée à l’étude d’un instrument légèrement modifié (par l’ajout d’une masse sur la table, ou par la modification des événements) confirme la présence de deux modes vibro-acoustiques nommés T1 et A0 en référence aux *Top mode* et *Air mode* obtenus pour d’autres instruments à cordes. Ces deux modes sont dus à l’interaction entre le premier mode de flexion de la table d’harmonie et le premier mode acoustique de la cavité rigide. Ils ont, de plus, la particularité d’avoir des fréquences de résonances situées au début d’une zone de fréquence où la harpe est capable de rayonner de manière importante. Néanmoins, il est montré que la harpe n’utilise pas pleinement les capacités de sa cavité acoustique pour augmenter son rayonnement sonore en basses fréquences, en dessous du premier mode de flexion de la table d’harmonie, contrairement à la guitare.

Les modes A0 et T1 identifiés sont caractéristiques du comportement vibro-acoustique de la harpe de concert en basses fréquences. La deuxième étude (chapitre 4) présente une manière d’utiliser cette

propriété pour obtenir des paramètres mécaniques de l'instrument tels que la masse et la raideur équivalentes à la table d'harmonie, la masse acoustique mise en mouvement dans les événements, la raideur équivalente à la cavité acoustique... Ces paramètres mécaniques sont directement liés aux choix du facteur lors de la fabrication de l'instrument. Pour les obtenir, un modèle vibro-acoustique à deux degrés de liberté est développé autour des deux modes A0 et T1. Les grandeurs physiques de ce modèle sont obtenues à partir de mesures de fonctions de transfert vibratoires et acoustiques effectuées sur l'instrument. Une identification des modes complexes associés aux deux résonances A0 et T1 est alors possible par une méthode classique de lissage des fonctions de transfert. Ensuite, une procédure particulière est appliquée pour déterminer les paramètres de masses, de raideurs et d'amortissements du modèle. Cette détermination reste délicate en raison de la particularité des mécanismes d'amortissement agissant dans le système, nécessitant l'emploi d'une méthode spécifique : la technique d'appropriation par le calcul. La mise en place de cette technique a permis une collaboration avec M. E. Foltête, Maître de conférences au Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat (Institut FEMTO-ST, UMR CNRS 6174) de Besançon. Avec les grandeurs physiques ainsi obtenues, le modèle à deux degrés de liberté développé dans ce chapitre décrit bien les données expérimentales. Ce résultat valide l'approche choisie et montre qu'il est possible d'obtenir des masses, raideurs et amortissements équivalents à l'instrument dans une zone basses fréquences. Le lien entre ces grandeurs physiques et les paramètres mécaniques sur lesquels le facteur de harpes agit n'a pas été complètement établi. Une raison invoquée est le manque de robustesse de la méthode d'identification qui ne permet pas, à l'heure actuelle, de rechercher ces grandeurs physiques sur un grand nombre de harpes.

La dernière étude (chapitre 5) de cette partie est présentée, elle-aussi, sous la forme d'un article soumis pour publication traitant du rayonnement acoustique de la harpe de concert. Cette étude consiste à identifier les sources acoustiques de l'instrument par la méthode des sources équivalentes. Le principe de cette méthode est de représenter le rayonnement acoustique d'une structure par une distribution de sources sonores élémentaires : monopoles ou dipôles. Pour cela, le champ de pression rayonné par l'instrument est mesuré en champ lointain. En dessous de 220 Hz, les mesures montrent que le rayonnement acoustique de l'instrument est omnidirectionnel. Au dessus de cette fréquence caractéristique, les diagrammes de directivité se complexifient au fur et à mesure que la fréquence croît. Le champ de pression ainsi mesuré est substitué par quelques monopoles. Une étude préliminaire, reproduite en annexe B, a montré qu'une seule source acoustique n'était pas suffisante pour décrire le champ acoustique rayonné par la harpe. Dans l'étude présentée dans le chapitre 5, deux modèles formés, pour l'un, par 2 monopoles et, pour l'autre, par 6 monopoles sont étudiés. Les résultats obtenus avec le modèle à 6 sources acoustiques, localisées dans chacun des cinq événements et sur la table d'harmonie, sont en accord avec les mesures intensimétriques directes. Ce modèle valide ainsi la méthode des sources équivalentes comme moyen de recherche de sources acoustiques dans l'instrument. On montre que le modèle constitué de 2 sources acoustiques localisées sur la table d'harmonie et au niveau des événements est représentatif du comportement basses fréquences de l'instrument en lien direct avec les deux modes T1 et A0 précédemment identifiés. Le comportement vibro-acoustique basses fréquences de l'instrument

peut donc être modélisé par deux sources acoustiques, l'une sur la table d'harmonie et l'autre au niveau des événements. Cette étude a fait l'objet d'une collaboration avec M. J.R.F. Arruda, Professeur au Laboratório de Vibroacústica de l'université de Campinas (Brésil).



## Chapter 3

# Experimental study of A0 and T1 modes of the concert harp\*

### ABSTRACT

String instruments are usually composed of a set of strings, a soundboard and a soundbox with sound holes, which is generally designed to increase the sound level by using the acoustic resonances of the cavity. In the case of the harp, the soundbox and especially the sound holes are primarily designed to allow access to the strings for their mounting. An experimental modal analysis, associated to measurements of the acoustic velocity in the holes, shows the importance of two particular modes labeled A0 and T1 as it was done for the guitar and the violin. Their mode shapes involve coupled motions of the soundboard's bending and of the oscillations of the air pistons located in the sound holes. The A0 mode is found above the frequency of the lowest acoustically significant structural mode T1. Thus, the instrument does not really take advantage of the soundbox resonance to increase its radiated sound in low frequencies. However, contribution of mode A0 is clearly visible in the response of the instrument, confirming the importance of the coupling between the soundboard and the cavity.

---

\*Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article écrit en langue anglaise accepté pour publication à la revue *The Journal of the Acoustical Society of America* par J-L. Le Carrou, F. Gautier et E. Foltête le 5 octobre 2006.

### 3.1 Introduction

The harp is one of the oldest string instruments. Its evolution from the prehistoric instrument to the modern concert harp led to the elaboration of constitutive elements which are designed to efficiently radiate the sound. The modern concert harp is composed of a set of strings directly connected to a long thin flat soundboard attached to a fairly solid soundbox with several sound holes. These three elements are coupled in a complex manner and are attached to a base, a pillar and an arm as shown in Figure 3.1.

In a string instrument, the mechanical characteristics of the strings define the note to be played and the soundboard is designed as a sound radiator. Unfortunately, this sound radiator is not efficient in the low-frequency range when the acoustic wave length is greater than the size of the soundboard. An acoustical resonator, called the soundbox, is generally added in order to increase the sound level. The first acoustic resonance of the cavity can be used to reinforce the sound radiation of the instrument. This effect is used in the design of bass-reflex enclosures. The acoustical resonator has been the subject of many studies on the guitar and on the violin [Fletcher & Rossing, 98]: the acoustic motion inside the cavity interacts with the motion of the soundboard to produce two coupled modes. The first mode is called the plate mode and is associated with a strong bending motion of the soundboard. In the case of the guitar and of the violin, this mode is commonly labeled T1 [Firth, 77a], [Moral & Jansson, 82]. The second mode is called the Helmholtz mode or A0 air mode and corresponds to a strong motion of an air piston located in the hole. The A0 air mode contributes to a significant increase of the sound radiation in the low-frequency range. In order to well understand this low-frequency behavior of the guitar or of the violin, simple discrete models have been carried out [Christensen & Vistisen, 80], [Christisen, 82], [Cremer, 84]. The parameters of these models can be obtained from transfer functions measurements on these instruments.

In the case of the harp, the cavity and holes' sizes and shapes are not particularly designed to amplify the sound in the low-frequency range. One of the main reasons for the choice of sizes and locations of the holes is the facility for string mounting. The acoustic role of the holes is not well understood because the harp, and especially the soundbox, has not been the subject of many vibroacoustic studies.

The first study was carried out on the small harp of Scotland [Firth, 77b]. Modal analysis has been performed on the soundboard at different steps of its manufacturing. Air resonances were also investigated in the soundbox alone by burying it into sand in order to damp wall vibrations. No evidence of the presence of a Helmholtz resonance was found. Moreover, in playing configuration, the relationship between vibration modes of the instrument and radiated sound was not investigated. This study was later carried out on a Spanish harp of the baroque period [Firth, 89], close in size to the current concert harp. In this study, it was found that vibroacoustic interactions between soundboard vibrations and the acoustic motions of the air cavity lead to two coupled modes (112 and 146 Hz) having similar shapes and corresponding to A0 and T1 modes, respectively. This kind of result was also found on an unstrung Salvi Orchestra Concert Harp by using holographic interferometric analysis of the soundbox [Bell, 87]. The author of this last study identifies A0 and T1 modes by measuring the

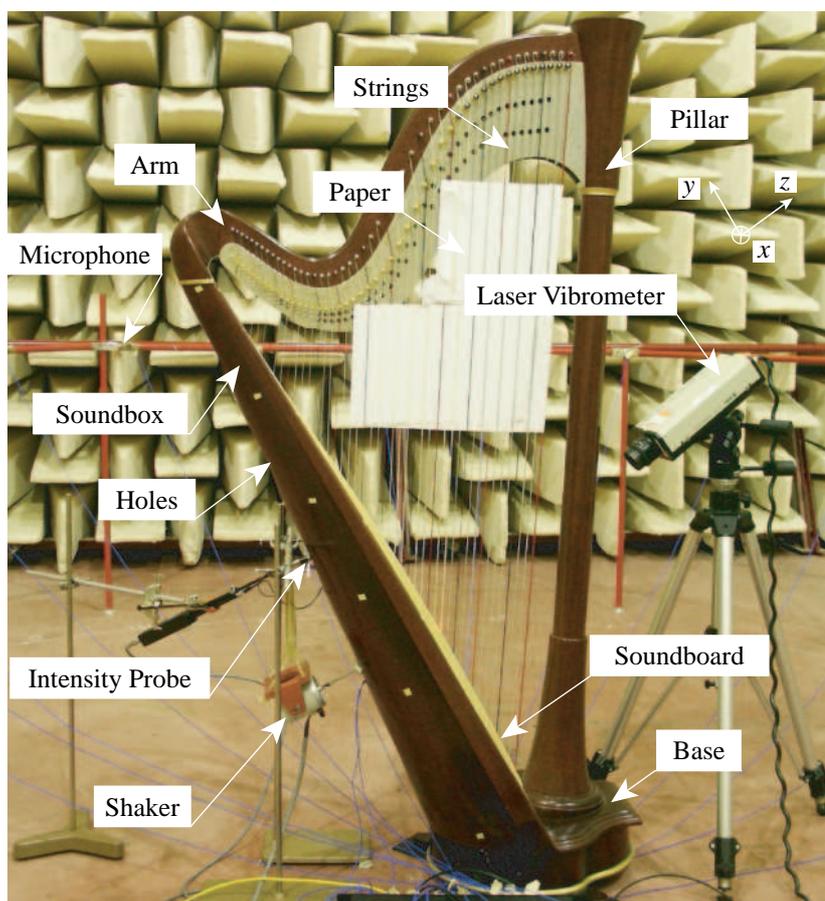
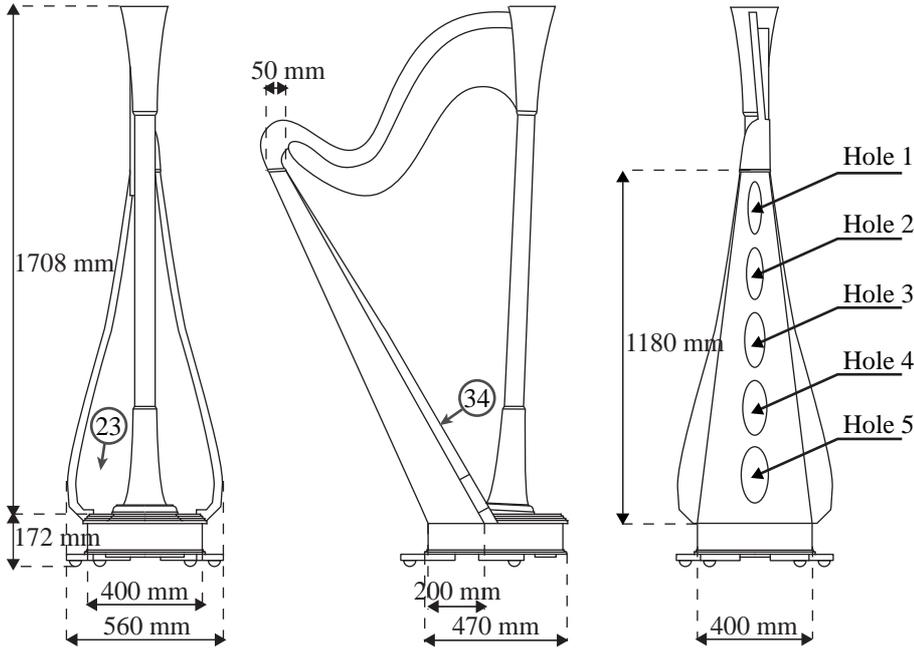


Figure 3.1 – *Experimental setup.*

changes of the structural response when sound holes are closed. For the Salvi Orchestra’s soundbox, another study has confirmed that if wall vibrations are damped by sand, the Helmholtz mode is clearly present in the acoustic response [Bell, 97]. A semi-empirical formula was proposed to predict its eigenfrequency. Another conclusion by Bell is that one of the two coupled modes’ (A0 and T1) presence in the response weakens when the soundboard is stressed by the strings [Bell, 87]. Thus, for a strung harp, the A0 mode is particularly difficult to identify. The reason for that is not clear. This difficulty was also pointed out on a Celtic harp [Le Pichon, 98].

The aim of this paper is to identify the A0 air mode for the concert harp and to investigate the importance of its contribution to the instrument’s response. For this purpose, the paper is divided into two parts. A study of the response functions of the instrument is first performed through the experimental modal analysis of the instrument’s body and through an investigation of the acoustic field in the cavity. Then, the identification of the A0 and T1 modes is achieved by studying a modified instrument.



**Figure 3.2** – Schematic diagram with dimensions of the Atlantide Prestige concert harp. The locations of two characteristic points 34 and 23 and hole number are also shown.

## 3.2 Experimental study of the concert harp

### 3.2.1 Experimental procedure

The vibroacoustic behavior of a concert harp is experimentally investigated. All measurements are performed on an *Atlantide Prestige* concert harp lent by a French harp maker, Camac Harps. A schematic diagram is proposed in Figure 3.2 with the principal dimensions of the instrument. The soundbox of the studied concert harp consists of a 6-mm-thick semi-conical shell with a total volume of the enclosed air of  $0.029 \text{ m}^3$ . On the back of the soundbox, there are five elliptical sound holes whose dimensions are shown in Table 3.1. The concert harp is studied in playing configuration: all strings are mounted and tuned. For these measurements, strings are damped with paper to prevent their vibration while keeping the static deformation and load imposed by them on the soundboard. So, the string modes, including sympathetic modes [Le Carrou *et al.*, 05a], are highly damped and are not evident in the instrument's response.

The experimental setup is shown in Figure 3.1: the instrument is excited by a shaker driven by a white noise connected via a rod, through sound hole 4, to the back of the soundboard. The excitation force  $F$  is measured with an appropriate force sensor directly glued to the back of soundboard. The excitation point is labeled 34, as shown in Figure 3.2, and is located between the Ab and the Bb string (respective fundamental frequencies at 103.8 and 116.5 Hz) attachment points. The vibratory velocity  $\dot{w}$  is measured with a laser vibrometer. The acoustic velocity  $V$  in the middle of the sound holes is measured with an intensity probe. The far field acoustic pressure  $P$  is measured with microphones

<i>No.</i>	<i>Major axis (cm)</i>	<i>Minor axis (cm)</i>
1	16.6	4.8
2	17.2	5.6
3	17.7	7
4	18.1	8
5	18.5	9.3

**Table 3.1** – *Dimensions of the five elliptical sound holes. The two dimensions correspond to the major axis and minor axis of each ellipse.*

placed around the concert harp. Frequency response functions (FRFs)  $H = \dot{w}/F$ ,  $H_V = V/F$ , and  $H_P = P/F$  are then computed by a standard analyzer.

### 3.2.2 Experimental modal analysis of the instrument's body

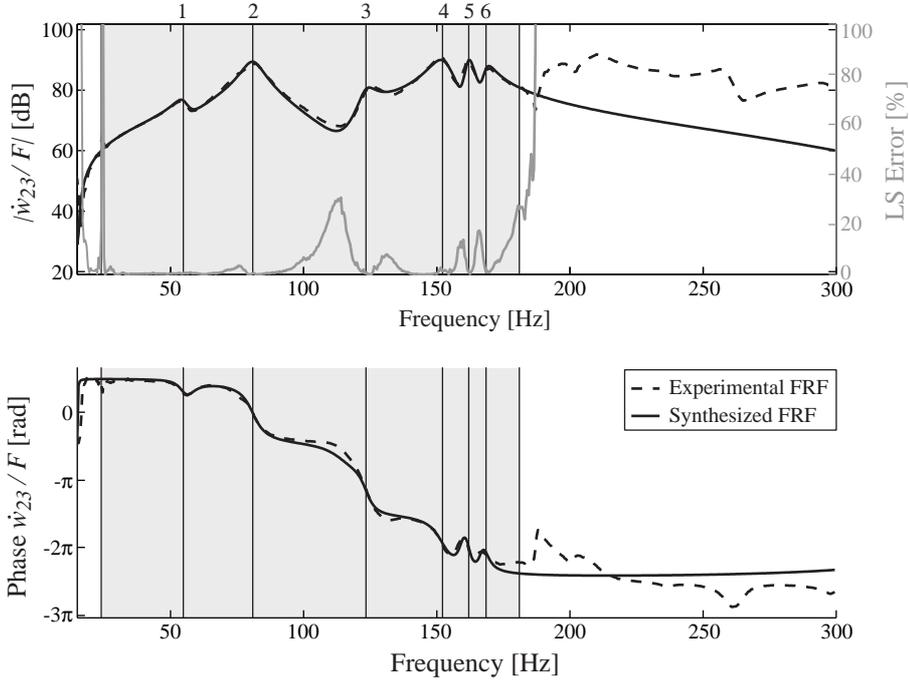
The identification of structural modes of the soundbox in the low-frequency range is carried out by modal testing: eigenfrequencies, mode shapes, and damping parameters can be extracted from response functions measured at different points of the structure. The experimental mesh is composed of 60 points on the soundboard and of 18 points on the curved surface at the back of the harp, as shown on each modal shape in Figure 3.4. The laser vibrometer is adjusted to measure the normal velocity on the soundboard. For each point on the curved surface, both the velocity along the  $z$ -axis and along the  $x$ -axis, defined in Figure 3.1, are measured. Measurements are performed at each mesh point in the frequency range 0 - 300 Hz. A typical example of the measured frequency response functions is shown in Figure 3.3.

The modal identification is carried out using the least square complex exponential Method [Ewins, 94] implemented in the LMS software. Only six consecutive modes in the frequency range 24 - 181 Hz are identified because of the high modal density above 181 Hz as shown by the typical measurement at point 23 ( $H_{23} = \dot{w}_{23}/F$ ) in Figure 3.3. In this figure the synthesized response function ( $\hat{H}_{23}$ ) and the least square error  $\epsilon$ , defined by

$$\epsilon = \frac{|\hat{H}_{23} - H_{23}|^2}{|\hat{H}_{23}|^2}, \quad (3.1)$$

are plotted in order to validate the modal identification. According to this indicator  $\epsilon$ , a good agreement between the measurement and the model can be found. Parameters obtained from this modal analysis are shown in Figure 3.4. The following conclusions can be drawn for each identified mode [Le Carrou *et al.*, 05b].

- (i) Mode 1 has no nodes on its mode shape: the modal displacement is close to a global motion of the body depending on its connections to the arm and to the bottom of the pillar.



**Figure 3.3** – Measured FRF  $\dot{w}_{23}/F$ , synthesized FRF  $\dot{w}_{23}/F$  and least square error  $\epsilon$  are shown versus frequency [Ref 1dB:  $5 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-1} \text{ N}^{-1}$ ]. The grayed area corresponds to the frequency range in which modes have been identified. Numbers associated to vertical lines indicate the modal frequencies given in Figure 3.4.

- (ii) Modes 2 and 3 have common characteristics: The axial profiles of soundboard's displacements are similar to the first two mode shapes of a simply supported-free beam. Note that as for mode 1, the shapes of modes 2 and 3 do not induce a change in the volume of the cavity: a weak coupling of these modes with the fluid inside the cavity can be expected.
- (iii) Modes 4 and 6 have very similar mode shapes. The soundboard's displacement field corresponds to the first bending mode of a quasi-clamped plate. A slight breathing motion of the soundboard is also observed. Shapes of modes 4 and 6 lead to an important change in the volume of the cavity.
- (iv) Mode 5 is a pitch mode. In the measured response functions, this mode is not clearly present. It is actually not well excited since the shaker is connected close to the central line of the soundboard which exactly corresponds to its nodal line. Since the strings are also attached on this nodal line, the role of this mode is not important when the instrument is played. For this reason, it will not be considered afterwards.

The two modes 4 and 6, which have similar shapes, have also been found on an unstrung concert harp [Bell, 87] and on a strung Spanish harp [Firth, 89]. However, when the harp is strung it seems difficult to extract these two similar mode shapes [Bell, 87]. Nevertheless, in our study, these two modes were found in the playing configuration. Moreover, it should be noticed that the displacements of the

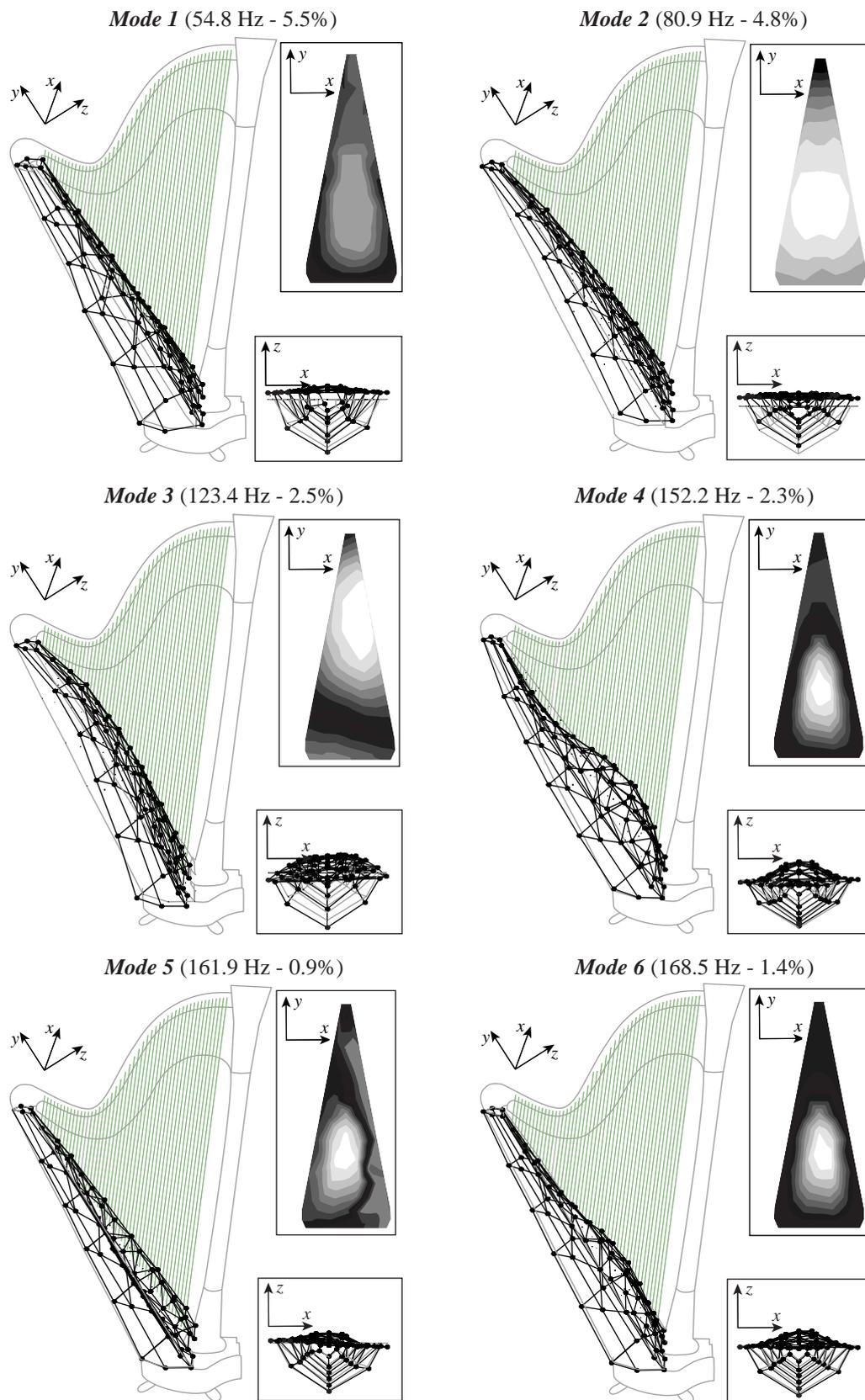
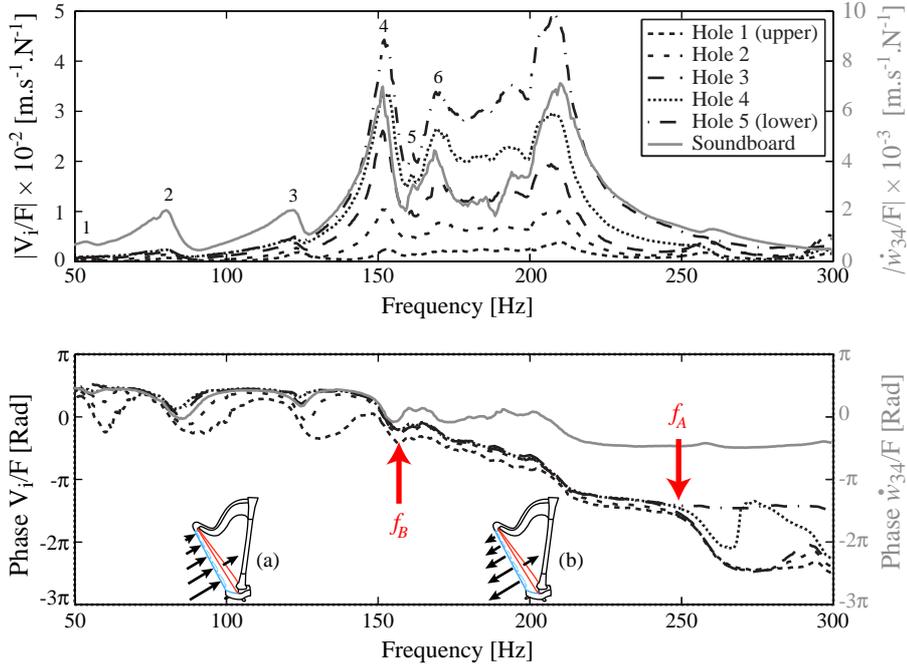


Figure 3.4 – Eigenfrequencies, damping coefficients and mode shapes of identified modes.



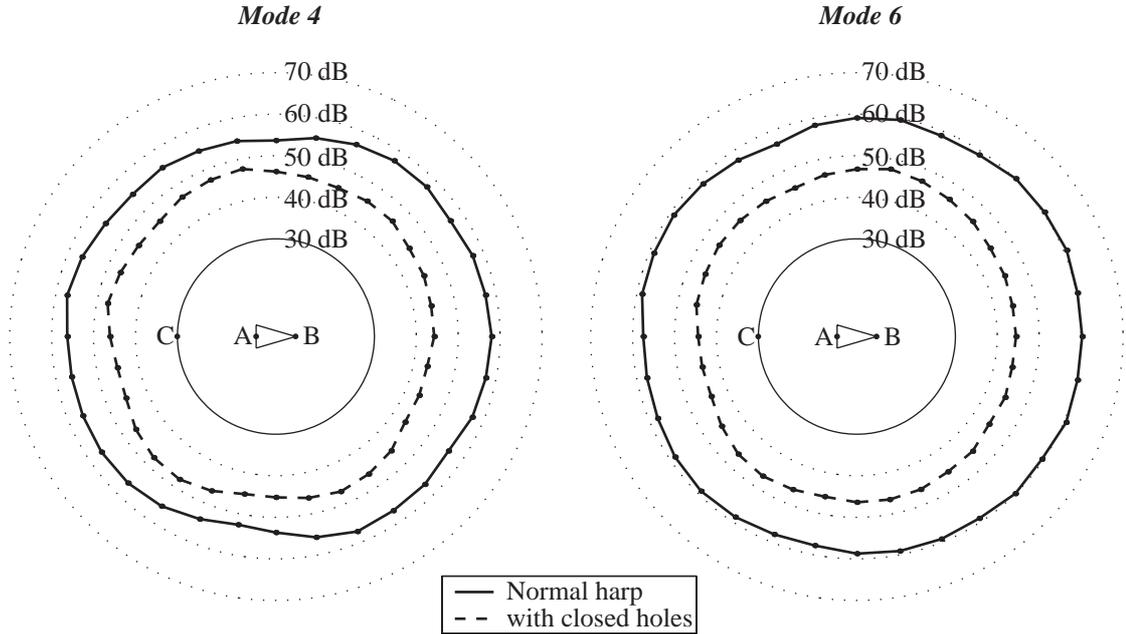
**Figure 3.5** – Magnitude and phase of FRF  $V_i/F$  ( $V_i$ : acoustic velocity in hole  $i$ ) and of  $\dot{w}_{34}/F$  ( $\dot{w}_{34}$ : velocity at point 34 on the soundboard). Note that magnitude scales for these two kinds of FRF are different. Numbers indicate the modal frequencies given in Figure 3.4.

soundbox have the same order of magnitude as those of the soundboard; this is unexpected because the cavity seems to be much more rigid than the soundboard. Such a result was already mentioned for a Celtic harp [Kergourlay & Balmès, 01].

### 3.2.3 Analysis of the acoustic response functions of the instrument

In order to characterize the acoustic field inside the soundbox, the acoustic velocity in each hole has been measured in the low-frequency range 50 - 300 Hz, as shown in Figure 3.5. Measurements are performed using the two microphones of an acoustic intensity probe. After an accurate calibration of the microphones, the acoustic velocity can be computed from the pressure measured at two points close to each other. Each sound hole can be described as an air piston of which the velocity is measured. It is found that the lower the hole is, the higher the magnitude of the velocity of the piston will be. Since the level of acoustic velocity for the upper hole 1 is far smaller than that of the four others, it cannot be considered as significant and will be ignored afterwards. So, in the studied frequency range the four other air pistons are found to be in phase below  $f_A$  ( $= 250$  Hz) and are no longer above. Thus, these measurements show that the acoustic field inside the cavity is mostly governed by the first acoustical mode below  $f_A = 250$  Hz. Above this particular frequency, other acoustical modes like longitudinal or pipe modes are present.

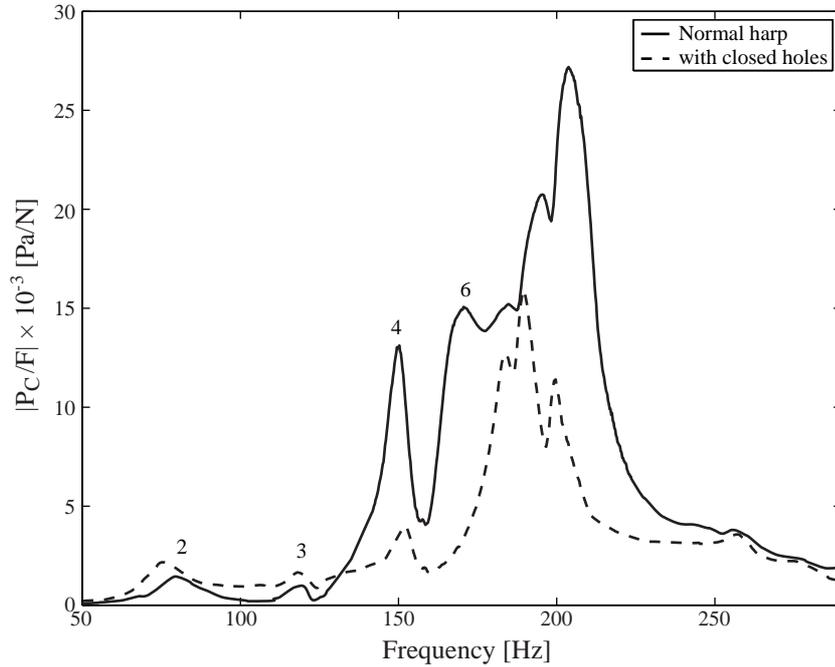
The mobility at excitation point 34 of the soundboard  $\dot{w}_{34}/F$  is also plotted in Figure 3.5. Its phase



**Figure 3.6** – Directivity patterns for modes 4 and 6 in two configurations: normal and with all holes closed by stoppers. Points A and B correspond to the bottom of the pillar and to the top of the soundboard respectively. Point C is the measurement point in front of the harp.

can be compared with the  $V_i/F$  phase,  $V_i$  being the acoustic velocity measured in hole  $i$ . It is found that below a second characteristic frequency,  $f_B$  ( $= 160$  Hz), the soundboard and all air pistons are in phase. Above this frequency  $f_B$ , but below  $f_A$ , the phase difference between FRF  $\dot{w}_{34}/F$  and FRF  $V_i/F$  increases from  $0^\circ$  to  $180^\circ$ . This shows that in the frequency range  $f_A - f_B$ , the soundboard and the air pistons are out-of-phase. These particular phase relationships are schematically represented in Figure 3.5 by arrows in harp drawings (a) and (b). The direction and length of the arrows that are plotted in these diagrams represent the phase and the magnitude of the velocity of the soundboard and of the air pistons below and above  $f_B$ . This result had already been found on another Camac concert harp in a previous paper where the characteristic frequency  $f_B$  was found to equal 175 Hz [Gautier & Dauchez, 04].

In order to find out the implication of the acoustic field inside the soundbox on the acoustic far field of the instrument, we investigate the acoustic pressure around the concert harp. The pressure is measured in an anechoic room by 32 microphones regularly placed around the harp on a 2.35 m radius circle at 1.2 m in height. In the frequency range 50 - 220 Hz, the directivity patterns are found to be nondirectional, as shown in Figure 3.6 for two selected frequencies corresponding to the eigenfrequencies of modes 4 and 6. The acoustic transfer function  $P_C/F$  measured in front of the harp (at the point labeled C defined in Figure 3.6) is also shown in Figure 3.7. As for afterwards measurements, the shaker used for the excitation is connected exactly on the central line of the soundboard and the acoustic effect of the pitch mode is then cancelled out. In Figure 3.7, we note that for a same force



**Figure 3.7** – Frequency response function at point C defined in Figure 6. Numbers indicate the modal frequencies given in Figure 3.4.

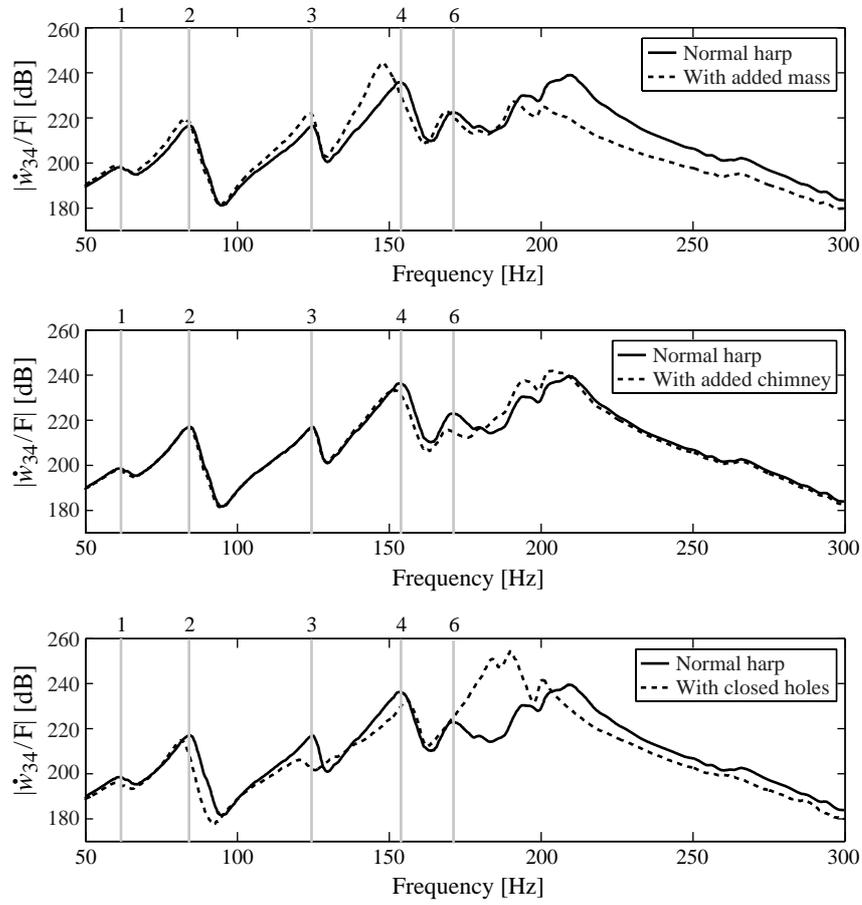
applied by the shaker, the acoustic pressure is much more important in the range 140 - 230 Hz than in the rest of the studied frequency range. Therefore, in a playing configuration, the harp seems to radiate the sound more efficiently in the range 140 - 230 Hz. The first two important peaks of acoustic pressure correspond to the eigenfrequencies of modes 4 and 6. Moreover, modes whose eigenfrequencies are above 200 Hz cannot be individually distinguished and their contribution to the response below 200 Hz is probably not negligible.

To conclude, six structural modes have been identified in the low-frequency range. Among these six modes, two play an important part in the sound radiated by the concert harp. They lead to a strong acoustic radiation, associated to a nondirectional directivity pattern.

### 3.3 Identification of A0 and T1 modes of the concert harp

#### 3.3.1 Frequency response functions of a modified instrument

Considering only frequency response measurements on the instrument's body, modes 4 and 6 have similar mode shapes (see Figure 3.4). However, the air piston motions are different for these two modes. To identify the nature (A0 or T1) of modes 4 and 6, the study of frequency response functions of a slightly modified instrument is performed. Mobilities measured at point 34 on the soundboard for three different configurations are compared with the normal configuration. The amplitude and frequency shifts of peaks are shown in Figure 3.8 and in Table 3.2.



**Figure 3.8** – Magnitude of the FRF  $\dot{w}_{34}/F$  on the soundboard depending on four configurations: normal, mass added on the soundboard, chimney inserted in the lower hole, and with all holes closed. Numbers associated to vertical lines indicate the modal frequencies given in Figure 3.4.

<i>Modes</i>	<i>Resonance frequencies [Hz]</i>				<i>Deviations [Hz]</i>		
	$f$	$f_m$	$f_c$	$f_{cl}$	$f - f_m$	$f - f_c$	$f - f_{cl}$
1	61.5	60	61.5	60	1.5	0	1.5
2	84.5	82	84.5	81.5	2.5	0	3
3	124.5	123.5	124.5	120.5	1	0	4
4	153.5	148.5	152	156	5	1.5	2.5
6	172	168.5	169	-	3.5	3	-

**Table 3.2** – Resonance frequencies for the first six modes according to four configurations of the instrument: normal ( $f$ ), mass loaded on the soundboard ( $f_m$ ), chimney inserted in the lower hole ( $f_c$ ) and holes closed ( $f_{cl}$ ).

The first modification consists of closing the sound holes of the concert harp as shown in Figure 3.9 and labeled (1). Those are closed by using stoppers made with small tar plates. This configuration prevents all fluid motions inside the sound holes. This modification has heavily affected the instrument. Eigenfrequencies of modes 1, 2, and 3 undergo a shift of approximately -2 Hz due to the additional mass loading induced by the stoppers. Two additional peaks are seen below 200 Hz and in the rest of the frequency range the level is lower than in the normal configuration. The peak for mode 6 is no longer distinct. This result is also confirmed by the acoustic pressure measurement in front of the harp as shown in Figure 3.7 when the sound holes are closed. This observation can be interpreted by the fact that the resonance of the open cavity does not exist anymore (see Sec. II.B).

The second modification (2) consists of inserting a 2 cm high chimney in the lower hole of the harp as shown in Figure 3.9. This change induces an increase of the mass of the first air piston. Only two structural modes are affected: modes 4 and 6. This proves that these two modes are coupled to the fluid inside the cavity. The other modes are weakly coupled to the air cavity and do not participate in the acoustic response function as shown in Figure 3.7.

The third modification (3) consists of adding a mass ( $m = 200$  g) on both sides of the central line of the soundboard as shown in Figure 3.9. All eigenfrequencies of structural modes are lowered but modes 4 and 6 more than modes 1, 2, and 3. This is probably due to the fact that the mass is located on the maximum displacement area of these two modes.

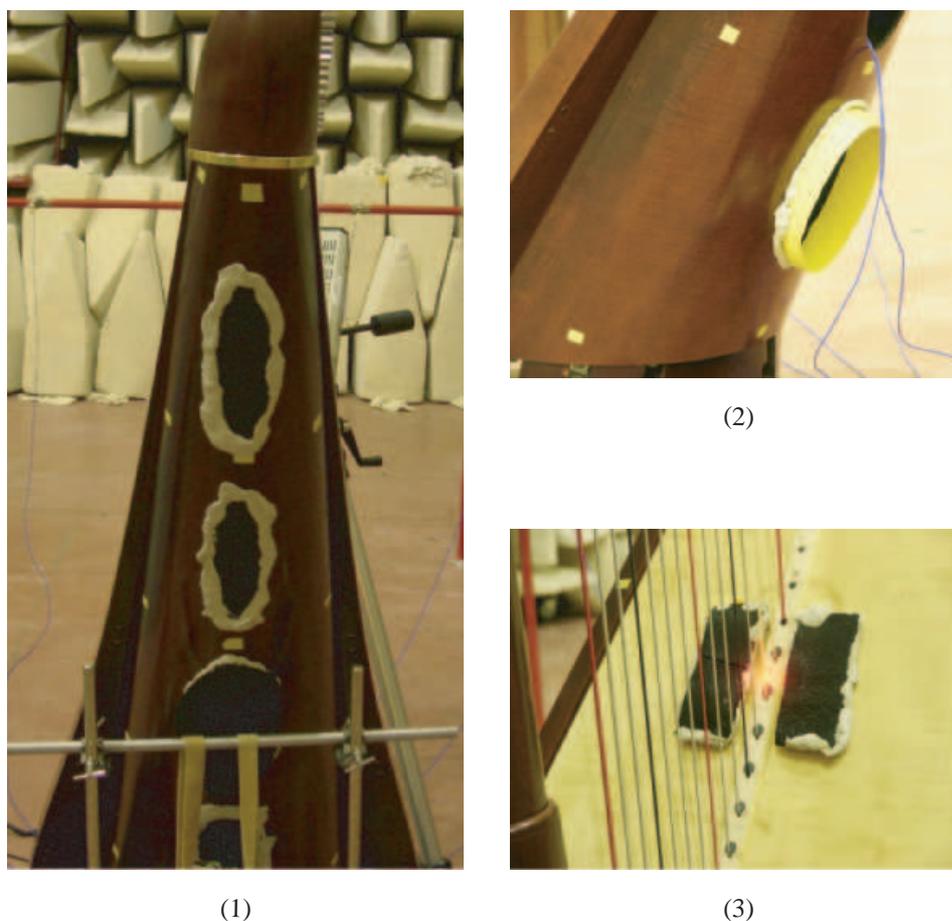
### 3.3.2 Discussion

The most important effects of the modifications (1), (2), and (3) on modes 4 and 6 can be summarized as follows: on one hand, when sound holes are closed mode 6 disappears. On the other hand, when the mass of the soundboard is increased, the eigenfrequency of mode 4 is lowered whereas the eigenfrequency of mode 6 is nearly stable. When the mass of the air pistons is increased, the eigenfrequency of mode 6 is lowered whereas the eigenfrequency of mode 4 undergoes smaller modifications. By considering these experimental results, it can be concluded that modes 4 and 6 involve a coupling between the bending motion of the soundboard mode and the oscillation of the air piston. These two modes can respectively be labeled, with the common notation, T1 and A0.

The fact that the A0 mode is present in the instrument's response clearly depends on the modal density and on the damping coefficients of the acoustical and structural modes. For some configurations, these parameters are such that the contribution of the A0 mode can be a minor one [Richardson, 97]. In our configuration, although sound holes are designed to ease the string mountings, they are found to have a significant influence on the vibroacoustic response of the concert harp. This is confirmed by the measurements of the far field acoustic pressure performed with opened and closed sound holes, as shown in directivity patterns (Figure 3.6) and in the frequency response functions (Figure 3.7).

Contrary to the violin and to the guitar, the A0 mode is above rather than below the frequency of the lowest acoustically significant structural mode T1. The concert harp does not take advantage of the soundbox resonance to increase its sound radiated in low frequencies, below the T1 mode.

Since these two modes, T1 and A0, are dominant in the low-frequency range, the response of the



**Figure 3.9** – *Different configurations of the modified instrument: (1) with all holes closed, (2) with chimney inserted in the lower hole, and (3) with mass added on the soundboard.*

instrument can be approximated by using a two degrees of freedom oscillator model in which one degree is due to the soundboard and the other one to the fluid inside the cavity as it was done for the guitar [Christensen & Vistisen, 80].

### 3.4 Conclusion

This paper deals with the vibroacoustic behavior of a concert harp in the low-frequency range. The nature of the modes of the soundbox coupled to the internal fluid is investigated.

A classic experimental modal analysis has permitted the identification of six modes in the frequency range 24 - 181 Hz. Since the modal density increases with the frequency, mode identification at higher frequencies was not possible. Among the six identified modes, four correspond to global motions of the soundbox, which do not induce a change in the volume of the cavity and are thus weakly coupled to the internal acoustic field. These modes, which mostly depend on the characteristics of the connection

of the soundbox to the arm and to the bottom of the pillar, lead to the weakening of the acoustic radiation. The two remaining modes, called T1 and A0, play an important acoustic role and have the following characteristics. (1) They are associated to coupled motions of the bending vibration of the soundboard and to the oscillations of the air pistons located in the sound holes. They correspond to the first two modes of a Helmholtz resonator with yielding walls. The labels T1 and A0 were used for the guitar and the violin for which this Helmholtz effect is known. (2) Modes T1 and A0 lead to important acoustic radiation: the acoustic pressure radiated by the harp takes high values in the range 140 - 230 Hz and the first two peaks of the pressure amplitude correspond to the resonance frequencies of T1 and A0. (3) The mode shapes of T1 and A0 are such that the displacement of the air pistons located in the five holes are all in phase. For T1, the displacements of these pistons are approximately in phase with the bending displacement of the soundboard. For A0, these motions are approximately out of phase. (4) Contrary to the violin and to the guitar, the A0 mode is above rather than below the frequency of the lowest acoustically significant structural mode T1. Thus, the concert harp does not take advantage of the soundbox resonance to increase its sound radiated in low frequencies. However, the study reveals the importance of the contribution of mode A0 in the response of the instrument, confirming the importance of the coupling between the soundboard and the cavity. This result is valid for the studied harp: *Atlantide Prestige* concert harp. Future works may concern others harps with different characteristics on which the eigenfrequencies of modes A0 and T1 depend: cavity volume, sound holes sizes, and soundboard material.

## Bibliography

- [Bell, 87] A. J. Bell. *An acoustical investigation of the Concert Harp*. PhD dissertation, University of St Andrews, United Kingdom, 1987.
- [Bell, 97] A. J. Bell. The Helmholtz resonance and higher air modes of the harp soundbox. *Journal of the Catgut Acoustical Society*, 3(3): 2-8, 1997.
- [Christensen & Vistisen, 80] O. Christensen and B.B. Vistisen,. Simple model for low-frequency guitar function. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68: 758-766, 1980.
- [Christisen, 82] O. Christensen. Quantitative models for low frequency guitar function. *Journal of Guitar Acoustics*, 6: 10-25, 1982.
- [Cremer, 84] L. Cremer. *The physics of the violin*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, United States of America, 1984.
- [Ewins, 94] D. J. Ewins. *Modal testing: theory and practice*. John Wiley and sons, Somerset, England, 1994.
- [Firth, 77a] I.M. Firth. Physics of the guitar at the Helmholtz and first top plate resonances. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2): 588-593, 1977.
- [Firth, 77b] I. M. Firth. On the acoustics of the harp. *Acustica*, 37: 148-154, 1977.
- [Firth, 89] I. M. Firth. Harps of the baroque period. *Journal of the Catgut Acoustical Society*, 1(3): 52-61, 1989.
- [Fletcher & Rossing, 98] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer, New York, United States of America, 2nd edition, 1998.
- [Gautier & Dauchez, 04] F. Gautier and N. Dauchez. Acoustic intensity measurement of the sound field radiated by a concert harp. *Applied Acoustics*, 65: 1221-1231, 2004.
- [Kergourlay & Balmès, 01] G. Kergourlay and E. Balmès. Dynamic behaviour of a harp soundboard and soundbox. in Proc. in the 5th Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, United States of America, 2001.
- [Le Carrou *et al.*, 05a] J-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez and J. Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. *Acta Acustica United with Acustica*, 91: 277-288, 2005. [Reproduced in Chapter 6]
- [Le Carrou *et al.*, 05b] J-L. Le Carrou, F. Gautier and N. Dauchez. Acoustic radiation of the concert harp in the low frequency range. in Proc. International Congress on Sound and Vibration, Lisbon, Portugal, 2005.

[Le Pichon, 98] A. Le Pichon, *Méthode de prediction du rayonnement acoustique de structures volumiques composées d'une ou de plusieurs faces planes vibrantes, application aux instruments de musique à cordes* (Prediction method of acoustical radiation of volumic structures composed of one or many vibrating faces, application to string instruments) (Ph.D. dissertation, University of Paris XI, Paris, F, 1998) [In French]

[Moral & Jansson, 82] J.A. Moral and E.V. Jansson. Eigenmodes, Input Admittance, and the Function of the Violin. *Acustica*, 50: 329-337, 1982.

[Richardson, 97] B. E. Richardson. *Stringed instruments: plucked*. *Encyclopedia of Acoustics*, Vol. 4: 1627-1634, 1997.

## Chapitre 4

# Modèle vibro-acoustique de la harpe de concert

### RÉSUMÉ

En basses fréquences, les deux résonances T1 et A0 de la harpe de concert jouent un important rôle acoustique. Une manière de comparer objectivement plusieurs harpes est de rechercher des paramètres physiques liés à ces deux résonances. Pour cela, nous développons dans ce chapitre un modèle physique de harpe de concert décrivant le comportement vibro-acoustique de l'instrument autour des deux modes A0 et T1. Dans une plage de fréquences limitée, la harpe peut être décrite par un système linéaire à deux degrés de liberté. Les paramètres sont choisis pour être en lien avec les grandeurs physiques sur lesquelles le facteur intervient, telles que la masse, la raideur et l'amortissement équivalent au système. Pour identifier ces paramètres, deux étapes sont nécessaires : l'obtention des modes complexes associés aux deux résonances puis le calcul des paramètres du modèle discret équivalent (masse, raideur et amortissement). La première étape met en jeu une méthode classique de lissage des fonctions de transfert. La seconde étape est plus ardue du fait de la particularité des mécanismes d'amortissement présents dans le système. Cette étape nécessite l'utilisation d'une méthode spécifique d'identification modale employant « la technique d'appropriation par le calcul ». Un bon accord est trouvé entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle, montrant ainsi qu'en basses fréquences l'instrument peut être représenté par un modèle discret à deux degrés de liberté .

## 4.1 Introduction

L'étude conduite dans le chapitre 3 mène à la conclusion qu'en basses fréquences, deux résonances particulières, nommées T1 et A0, jouent un important rôle acoustique. Ces deux résonances sont liées à la présence de deux modes vibro-acoustiques couplés dus à l'interaction entre le premier mode acoustique de la cavité rigide et le premier mode de flexion de la table d'harmonie *in vacuo*. Comme pour la guitare [Richardson, 97] ou le violon [Hutchins, 90, Hutchins, 62, Cremer, 84], cette caractéristique physique semble conditionner la puissance acoustique et la qualité sonore perçue de l'instrument dans toute sa plage de jeu. Trouver des paramètres d'un modèle physique décrivant le comportement vibro-acoustique de l'instrument autour de ces deux résonances semble donc légitime pour quantifier une certaine *qualité* de l'instrument.

Dans le cas de la guitare, des modèles à deux ou trois degrés de liberté décrivent le comportement vibro-acoustique basses fréquences de l'instrument [Christensen & Vistisen, 80, Christensen, 82]. Les degrés de liberté sont le déplacement de la table d'harmonie et le déplacement du piston d'air compris dans la rose. Pour constituer le modèle à trois degrés de liberté, on leur adjoint le déplacement du fond de la caisse. L'approche adoptée pour l'élaboration de ces modèles est la description physique du système par des équations Newtoniennes du mouvement. Les paramètres des modèles sont déduits des mesures de mobilité effectuées sur la table d'harmonie. Ces paramètres représentent des grandeurs physiques, directement liées aux choix du luthier, comme les masses équivalentes à la table d'harmonie et au piston d'air, les raideurs équivalentes à la table d'harmonie et à la cavité et les paramètres d'amortissement associés. L'obtention de ces grandeurs physiques sur un grand nombre d'instruments peut ainsi permettre leur comparaison objective. Dans ce but, des systèmes de mesures simples d'utilisation sont développés pour que les luthiers puissent recueillir eux-mêmes ces données [Gautier *et coll.*, 05]. Un prolongement possible est la modification virtuelle des paramètres autour de leurs valeurs nominales afin d'écouter le son produit par l'instrument ainsi modifié [Thépenier, 06]. Cet outil permet d'anticiper l'effet de légères modifications de l'instrument sur son rendu sonore. Une autre investigation possible est d'utiliser ces modèles pour connaître l'influence des paramètres des modes sur les attributs perceptifs du son de l'instrument [Wright, 96]. De la même manière que pour la guitare, un modèle discret à quatre degrés de liberté a été développé pour représenter le comportement dynamique du violon en basses fréquences [Cremer, 84]. Parmi ces quatre degrés de liberté, trois sont utilisés pour décrire la caisse et un pour le fluide contenu dans les ouïes. Contrairement au cas de la guitare, les paramètres de ce modèle semblent plus difficiles à estimer avec précision.

Dans le chapitre présenté ici, nous nous attachons à développer un modèle discret dont les paramètres sont mesurables sur la harpe de concert en condition de jeu et, à l'instar des modèles développés pour la guitare, sont représentatifs des grandeurs physiques en lien avec les choix des facteurs. Pour cela, nous choisissons de décrire la harpe de concert par un système linéaire dynamique dont les paramètres de masse, raideur et amortissement sont obtenus expérimentalement. Le chapitre est organisé de la façon suivante : après une présentation d'un modèle discret à N degrés de liberté, les différentes méthodes d'identification des paramètres de masse, de raideur et d'amortissement sont

proposées. Enfin, les résultats d'un modèle restreint à deux degrés de liberté autour des deux modes A0 et T1 de la harpe de concert sont exposés.

## 4.2 Modèle discret à $N$ degrés de liberté

### 4.2.1 Description du modèle

Dans ce chapitre, la harpe de concert est modélisée par un système linéaire dynamique dans lequel l'amortissement est supposé visqueux. L'équation générale du mouvement est [Ewins, 94] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{q}(t)$  est le vecteur associé aux  $N$  degrés de liberté et  $\mathbf{f}(t)$  est le vecteur représentant les forces exercées sur le système. La matrice masse  $\mathbf{M}$  et la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  sont supposées réelles symétriques et définies positives alors que la matrice d'amortissement  $\mathbf{B}$  est supposée être réelle symétrique et semi-définie positive. La dimension de chaque matrice est  $N \times N$  liée aux  $N$  degrés de liberté du système.

### 4.2.2 Solutions du système homogène en régime harmonique

Dans le cas des oscillations libres ( $\mathbf{f}(t) = 0$ ), l'équation caractéristique associée à l'équation matricielle (4.1) correspondant aux solutions harmoniques de la forme  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q} \exp(st)$  s'écrit comme suit :

$$[s^2\mathbf{M} + s\mathbf{B} + \mathbf{K}] \mathbf{Q} = 0. \quad (4.2)$$

Dans l'hypothèse où tous les modes de la structure ont un amortissement inférieur à l'amortissement critique, cette équation (4.2) admet  $2N$  vecteurs propres complexes  $\mathbf{dY}_\nu$  et valeurs propres complexes  $s_\nu$  qui apparaissent par paires conjuguées. Ainsi, pour chaque valeur propre  $s_\nu$  ( $\bar{s}_\nu$ ) est associé un vecteur propre  $\mathbf{dY}_\nu$  ( $\overline{\mathbf{dY}}_\nu$ ). Le couple obtenu pour chacun des modes  $\nu$  ( $s_\nu, \mathbf{dY}_\nu$ ) est appelé un mode complexe du système défini par les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  [Balmès, 97]. Ces vecteurs propres sont normés et vérifient les relations d'orthogonalités définies par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{dY}^T & (\mathbf{dYS})^T \\ \overline{\mathbf{dY}}^T & (\overline{\mathbf{dYS}})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{dY} & \overline{\mathbf{dY}} \\ \mathbf{dYS} & \overline{\mathbf{dYS}} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{2N}, \quad (4.3)$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{dY}^T & (\mathbf{dYS})^T \\ \overline{\mathbf{dY}}^T & (\overline{\mathbf{dYS}})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{dY} & \overline{\mathbf{dY}} \\ \mathbf{dYS} & \overline{\mathbf{dYS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice spectrale regroupant les valeurs propres,  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_N)$ , où  $\mathbf{dY}$  est la matrice modale regroupant les vecteurs propres,  $\mathbf{dY} = [\mathbf{dY}_1, \dots, \mathbf{dY}_N]$ , et où  $\mathbf{E}_{2N}$  est la matrice unité  $\mathbf{E}_{2N} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ .

### 4.2.3 Réponse forcée sur la base du système dissipatif

Dans le cas où aucune hypothèse supplémentaire n'est faite sur l'amortissement (l'amortissement n'est donc pas supposé proportionnel), la réponse forcée harmonique du système peut s'exprimer sur la base du système dissipatif, définie par ses  $N$  vecteurs propres complexes  $\mathbf{dY}_\nu$ , de la façon suivante [Piranda, 01] :

$$y = \sum_{\nu=1}^N \frac{\mathbf{dY}_\nu \mathbf{dY}_\nu^T F}{s - s_\nu} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\overline{\mathbf{dY}_\nu} \overline{\mathbf{dY}_\nu^T} F}{s - \bar{s}_\nu}. \quad (4.5)$$

Cette forme fractionnelle partielle (4.5) montre que l'on peut développer la réponse forcée du système dissipatif sur la base de ses vecteurs propres complexes. La méthode d'identification modale utilisée par la suite est basée sur ce développement.

## 4.3 Méthode d'identification des paramètres du modèle

### 4.3.1 Procédure générale

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  sont les trois paramètres du modèle discret défini par l'équation (4.1). Ces matrices sont calculées à partir des modes complexes identifiés expérimentalement. La description de la procédure mise en place pour l'obtention de ces matrices est le but de cette partie, résumée dans la figure 4.1.

La première étape consiste à calculer les modes complexes par l'utilisation d'une technique classique de lissage des fonctions de transfert [Piranda, 01]. La deuxième étape est l'identification des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  à partir soit des modes complexes, soit des modes réels du système conservatif associé. Une brève revue de deux méthodes d'identification des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  est ainsi proposée. Enfin, une technique d'appropriation est choisie pour déterminer les modes réels à partir des modes complexes afin d'obtenir les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$ , ce qui constitue ici la principale difficulté.

### 4.3.2 Identification des modes complexes

Dans une zone de fréquences contenant  $n$  modes, la réponse du système dissipatif pour une excitation mono-point peut s'exprimer sur la base des modes complexes (voir § 4.2.3) :

$$\frac{y}{F} = \frac{y_{ext}}{F} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\mathbf{dY}_\nu \mathbf{dY}_\nu^T}{s - s_\nu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\overline{\mathbf{dY}_\nu} \overline{\mathbf{dY}_\nu^T}}{s - \bar{s}_\nu}, \quad (4.6)$$

avec

$$\frac{y_{ext}}{F} = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3. \quad (4.7)$$

La fonction de transfert  $\frac{y_{ext}}{F}$  représente l'effet des modes extérieurs à la zone de fréquence d'étude. Pour chaque mode  $\nu$ , le couple  $(s_\nu, \mathbf{dY}_\nu)$  est calculé par ajustement de cette équation aux données expérimentales. La solution est alors obtenue au sens des moindres carrés, comme cela est expliqué en détail dans [Piranda, 01].

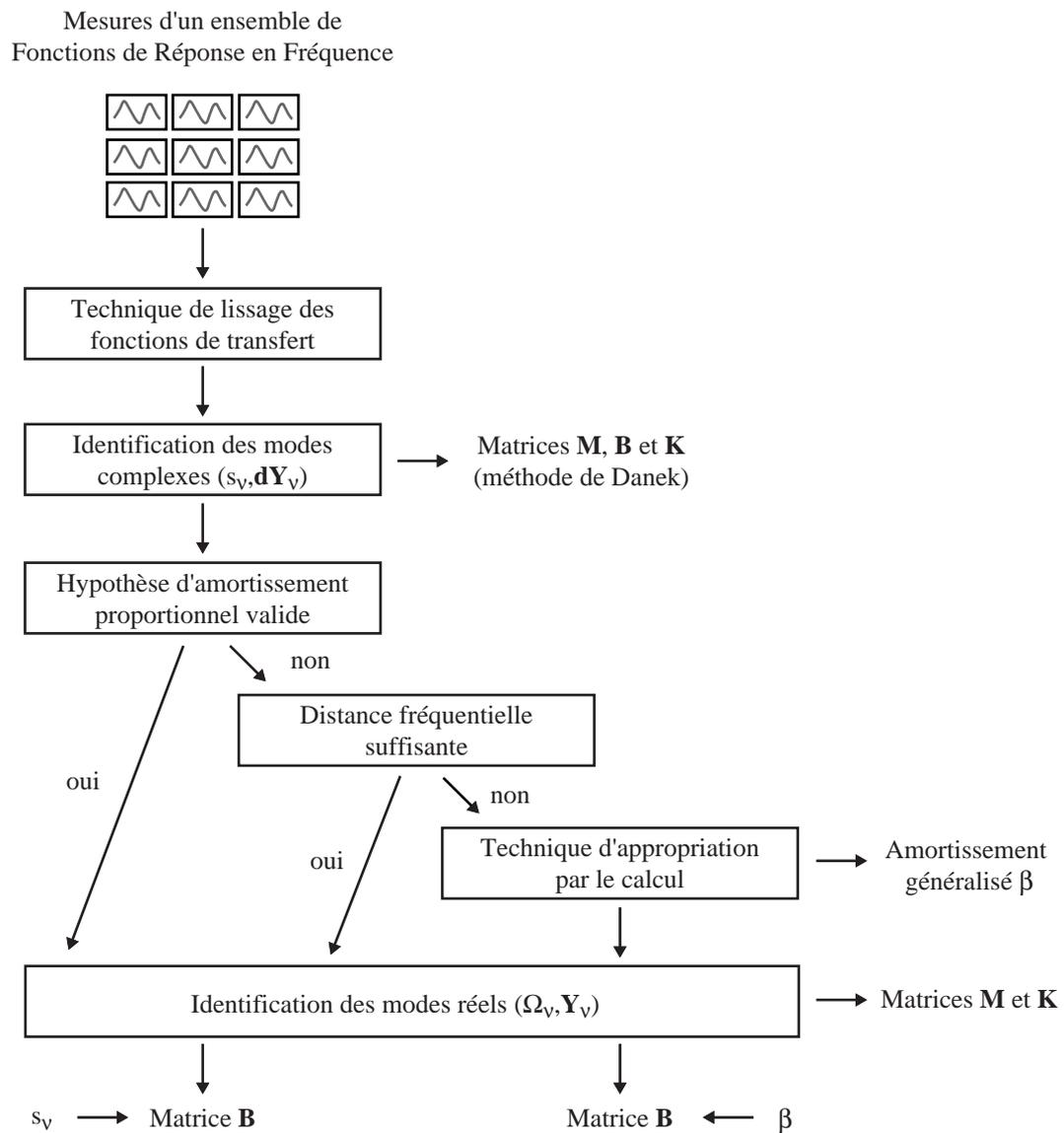


FIG. 4.1 – Description de la procédure d'identification des matrices **M**, **B** et **K**.

### 4.3.3 Courte revue bibliographique des méthodes d'identification des matrices $\mathbf{M}$ , $\mathbf{B}$ et $\mathbf{K}$

L'identification des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  à partir des modes complexes ou des modes réels du système conservatif associé a été étudiée par le passé et diverses méthodes ont été proposées [Foltête *et coll.*, 01, Lancaster & Prells, 05].

#### 4.3.3.1 Identification à partir des modes complexes

La méthode la plus simple consiste à exprimer les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  sous une forme explicite des modes complexes. Une telle forme est obtenue grâce aux relations d'orthogonalité des modes complexes, définies par les équations (4.3) et (4.4) et s'exprime comme suit :

$$\mathbf{M}^{-1} = 2 \Re(\mathbf{dY} \mathbf{S} \mathbf{dY}^T), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{K}^{-1} = -2 \Re(\mathbf{dY} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{dY}^T), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = -2 \mathbf{M} \Re(\mathbf{dY} \mathbf{S}^2 \mathbf{dY}^T) \mathbf{M}, \quad (4.10)$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle. Ces relations donnent directement les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  à partir des vecteurs propres complexes  $\mathbf{dY}$  et des valeurs propres complexes  $\mathbf{S}$  obtenues par lissage. Cependant, il est bien connu que cette méthode, appelée la méthode de Danek, a des limitations dans la pratique : la matrice d'amortissement  $\mathbf{B}$  est très sensible aux erreurs dans l'estimation des caractéristiques modales [Foltête *et coll.*, 01].

#### 4.3.3.2 Identification à partir des modes réels

Une seconde méthode consiste à identifier les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  à partir des vecteurs propres et valeurs propres du système conservatif associé à notre système dissipatif. Ces vecteurs propres et valeurs propres correspondent aux modes réels  $(\Omega_\nu, \mathbf{Y}_\nu)$  du système et satisfont aux propriétés d'orthogonalité relativement aux matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{E}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{\Omega}^2, \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{Y}$  correspond à la matrice modale,  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N]$ , et où  $\mathbf{\Omega}$  correspond à la matrice spectrale,  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$ , regroupant respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres réels. Ces relations d'orthogonalité permettent d'obtenir les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  à partir des modes réels :

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{Y}^T \mathbf{\Omega}^{-2} \mathbf{Y}. \quad (4.12)$$

La matrice d'amortissement  $\mathbf{B}$  du système dissipatif est déduite des vecteurs propres réels  $\mathbf{Y}_\nu$  et des valeurs propres complexes  $s_\nu$ , par la relation suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}^{-T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{Y}^{-1}, \quad (4.13)$$

où  $\boldsymbol{\beta}$  est la matrice des amortissements généralisés. Dans le cas d'un amortissement modal, appelé également amortissement proportionnel,  $\boldsymbol{\beta}$  est diagonale et vérifie  $\boldsymbol{\beta} = \text{diag}(-s_1 - \bar{s}_1, \dots, -s_N - \bar{s}_N)$ .

Dans cette méthode, la principale difficulté est le calcul des modes réels à partir des modes complexes. Dans [Piranda, 01], il est établi que ce calcul est simple si l'hypothèse d'amortissement proportionnel est retenue. Dans ce cas, la relation entre modes complexes et modes réels est donnée par :

$$\mathbf{Y}_\nu = \Re \left( \mathbf{dY}_\nu \sqrt{2j\omega_\nu} \right). \quad (4.14)$$

Quand l'amortissement n'est pas proportionnel, il est montré que la relation (4.14) est encore valide lorsque les fréquences propres sont encore bien séparées, c'est-à-dire, lorsque la distance fréquentielle est supérieure à trois fois la largeur de bande à -3dB [Piranda, 01].

Malheureusement, nous vérifierons par la suite que l'amortissement dans notre système n'est pas proportionnel. En effet, si il l'était, les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres complexes seraient du même ordre de grandeur et de signes opposés [Piranda, 01]. Cette propriété n'est pas satisfaite pour le mode 6 comme nous pouvons le constater en examinant les composantes des vecteurs propres données dans le tableau 4.1. De plus, les fréquences propres des modes T1 et A0 sont trop proches l'une de l'autre : la relation (4.14) ne peut donc pas être appliquée.

#### 4.3.4 Technique d'appropriation par le calcul

Pour calculer les modes réels de notre système, une méthode basée sur la technique d'appropriation est utilisée [Foltête & Piranda, 01, Foltête, 98]. La technique d'appropriation consiste à soumettre une structure à des configurations de forces harmoniques permettant d'exciter chacun des modes du système conservatif. La technique d'appropriation par le calcul employée ici simule l'appropriation a posteriori à partir des mesures de fonctions de transfert obtenues lorsqu'une excitation est appliquée sur chacun des degrés de liberté. Dans certains cas, il n'est pas possible d'appliquer un effort sur chaque degré de liberté. Il est donc parfois nécessaire de simuler l'effort appliqué sur ces degrés de liberté à partir des modes complexes en utilisant une superposition modale classique.

Avec les différentes fonctions de transfert mesurées et simulées, la technique d'appropriation par le calcul est appliquée. Cette technique procède, tout d'abord, à la localisation des modes par un critère de résonance de phase [Foltête, 98]. Ensuite, la simulation des réponses aux forces appropriées mène à l'identification des modes réels. Pour appliquer cette technique d'appropriation par le calcul, nous avons utilisé le logiciel d'analyse modale Modan, développé au Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat de Besançon, dans lequel cette méthode est implémentée.

L'estimation de la totalité des coefficients de la matrice des amortissements généralisés  $\beta$  peut maintenant être effectuée en projetant les modes du système dissipatif sur ceux du système conservatif. Les détails concernant cette estimation sont proposés dans [Foltête, 98, Foltête & Piranda, 01]. La matrice d'amortissement  $\mathbf{B}$  est alors obtenue à partir de l'équation (4.13).

## 4.4 Problème vibro-acoustique couplé : cas de la harpe de concert

Nous avons montré dans le chapitre 3 que le comportement vibro-acoustique de la harpe de concert en basses fréquences peut être décrit par un modèle discret à deux degrés de liberté liés aux deux modes

couplés T1 et A0. Dans cette partie, nous nous attachons donc à identifier les paramètres de masse, de raideur et d'amortissement du modèle discret de la harpe de concert autour de ces deux résonances.

Dans l'étude présentée, nous choisissons d'utiliser comme degrés de liberté le déplacement du piston équivalent à la table d'harmonie et le déplacement du piston d'air équivalent aux 5 events. Dans la zone de fréquences autour des modes A0 et T1, les 5 événements sont en phases nous permettant donc de considérer le mouvement du fluide dans les événements par un seul piston d'air. Les déplacements associés à ces deux degrés de liberté peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur  $\mathbf{q}$  comme suit :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z_5 \\ w_{34} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Le degré de liberté  $z_5$  est défini comme le déplacement du piston d'air mesuré dans l'évent se situant en bas de la harpe où le déplacement est le plus important en basses fréquences. Le degré de liberté  $w_{34}$  correspond, quant à lui, au maximum de déplacement de la table d'harmonie pour les modes T1 et A0. Ces deux degrés de liberté sont schématisés par des flèches dans la figure 4.2.

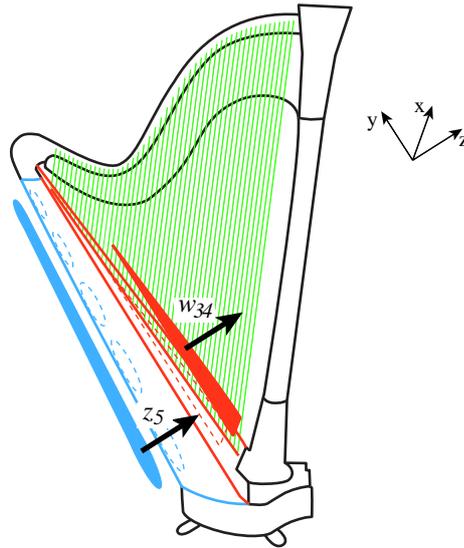


FIG. 4.2 – Description des 2 degrés de liberté choisis pour représenter le système en basses fréquences.

#### 4.4.1 Modes complexes T1 et A0

Pour déterminer les vecteurs propres et valeurs propres des modes complexes A0 et T1, il est nécessaire de mesurer les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) pour chaque degré de liberté. Le protocole expérimental que nous avons utilisé est similaire à celui du chapitre précédent (§ 3.2.1). La table d'harmonie est excitée en bruit blanc par un pot vibrant. Le point d'excitation est choisi exactement au niveau de l'axe central afin d'éviter la présence du mode de tangage dans les FRF (mode 5 trouvé dans le chapitre 3). La vitesse sur la table est mesurée par un vibromètre au point

	<i>Fréquences propres</i>	<i>Vecteurs propres</i>
<b>Mode 4</b> (T1)	$s_4 = -25,3 + j 968,4$	$dY_4 = \begin{pmatrix} 0,0600 - j 0,0743 \\ 0,0086 - j 0,0085 \end{pmatrix}$
<b>Mode 6</b> (A0)	$s_6 = -27,4 + j 1069,2$	$dY_6 = \begin{pmatrix} 0,0757 - j 0,0456 \\ 0,0066 - j 0,0022 \end{pmatrix}$

**TAB. 4.1** – Caractéristiques modales des modes T1 et A0 obtenus par lissage des fonctions de transfert.

d'excitation et la vitesse acoustique dans l'évent du bas de l'instrument est mesurée par une sonde intensimétrique. Les deux modes complexes T1 et A0 sont déterminés par la technique classique de lissage des fonctions de transfert et sont présentés dans le tableau 4.1.

Dans la figure 4.3, les FRF synthétisées à partir des modes complexes identifiés, synthèse obtenue par l'équation (4.6), et les FRF expérimentales sont présentées pour chaque degré de liberté. Un bon accord est trouvé entre les FRF mesurées et synthétisées dans la plage de fréquence d'étude. Ce résultat valide les caractéristiques des modes complexes trouvées.

En examinant en détail les composantes du vecteur propre associé au mode 6, nous pouvons conclure que l'hypothèse d'amortissement proportionnelle n'est pas satisfaite. En effet, comme expliqué § 4.3.3.2, si cette hypothèse était satisfaite, les parties réelle et imaginaire du vecteur propre seraient du même ordre de grandeur, ce qui n'est pas le cas. De plus, les fréquences propres des modes T1 et A0 sont trop proches l'une de l'autre pour que la relation (4.14) soit encore valide. Il vient donc que la seule méthode applicable à notre système pour l'identification des matrices **M**, **B** et **K** est, en plus de la méthode de Danek, la technique d'appropriation par le calcul (voir pour rappel la figure 4.1).

#### 4.4.2 Calcul des matrices **M**, **B** et **K**

L'identification des matrices **M**, **B** et **K** de notre système est présentée ci-dessous. Seules la méthode de Danek et la technique d'appropriation par le calcul sont applicables pour cette identification du fait de la particularité des mécanismes d'amortissement présents dans le système.

La méthode basée sur l'identification des matrices à partir des modes complexes, dite méthode de Danek, nous donne les résultats suivants :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,52 & -4,89 \\ -4,89 & 48,71 \end{pmatrix} [kg], \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -40,96 & 138,68 \\ 138,68 & 1919,70 \end{pmatrix} [kg.s^{-1}], \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 580,23 & -5281,12 \\ -5281,12 & 50861,00 \end{pmatrix} \times 10^3 [kg.s^{-2}]. \quad (4.18)$$

La matrice **B** trouvée ne satisfait pas aux propriétés énoncées dans la formulation du modèle. En effet, on vérifie que la matrice **B** n'est pas semi-définie positive. L'identification proposée par cette méthode

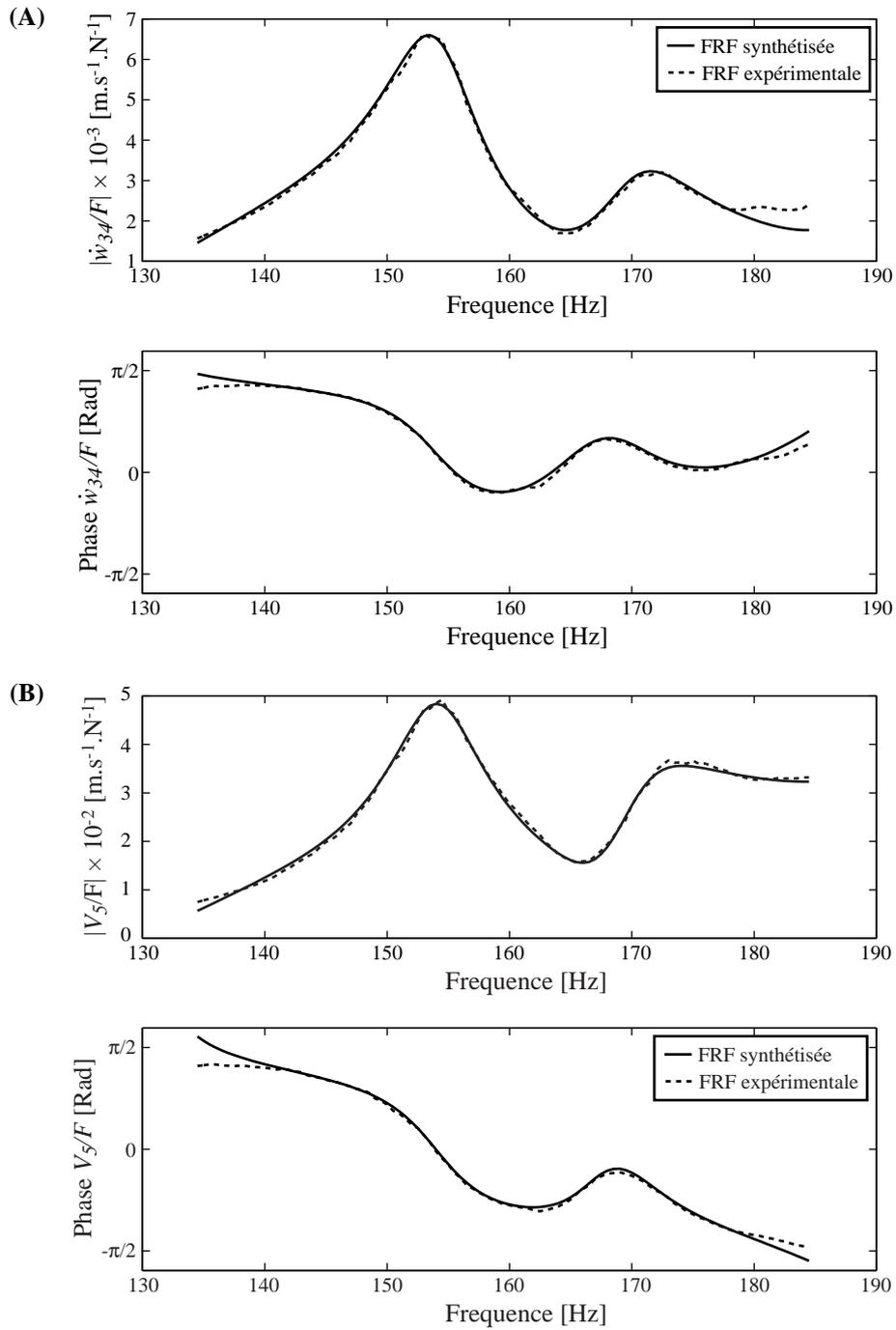


FIG. 4.3 – Amplitude et phase des FRF mesurées et synthétisées sur (A) la table d’harmonie et (B) dans l’évent inférieur 5 (voir figure 4.2). La FRF synthétisée est obtenue en utilisant les modes complexes donnés dans le tableau 4.1.

n'est donc pas satisfaisante.

La technique d'appropriation par le calcul est mise en place pour obtenir les modes réels ainsi que la matrice des amortissements généralisés. Pour appliquer cette technique, les FRF obtenues lorsqu'une excitation est appliquée sur chacun des degrés de liberté doivent être connues. Dans notre cas, il n'est pas possible physiquement d'appliquer un effort sur le degré de liberté fluide  $z_5$ . Il est donc nécessaire de simuler l'effort appliqué sur ce degré de liberté  $F_5$  à partir des modes complexes identifiés. Par superposition modale, nous obtenons les deux FRF manquantes  $w_{34}/F_5$  et  $z_5/F_5$ . A partir des FRF mesurées et simulées, la technique d'appropriation est appliquée, menant à l'identification des modes réels et au calcul de la matrice des amortissements généralisés. Les relations (4.12) permettent de calculer les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  tandis que la matrice  $\mathbf{B}$  est obtenue par la relation (4.13). Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  sont trouvées comme suit :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,54 & -5,02 \\ -5,02 & 49,22 \end{pmatrix} [kg], \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5,37 & -19,67 \\ -19,67 & 205,31 \end{pmatrix} [kg.s^{-1}], \quad (4.20)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 590,41 & -5366,46 \\ -5366,46 & 51310,00 \end{pmatrix} \times 10^3 [kg.s^{-2}]. \quad (4.21)$$

Ces matrices sont trouvées symétriques et définies positives. Pour vérifier que ces matrices représentent bien le comportement vibro-acoustique de la harpe de concert en basses fréquences, deux contrôles sont réalisés :

- Synthèse des modes complexes : les modes complexes associés au système défini par les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  déterminées sont calculés et montrés dans le tableau 4.2. Ils sont trouvés analogues aux modes complexes obtenus directement à partir des mesures, voir tableau 4.1. L'erreur entre les composantes des vecteurs mesurés et synthétisés est trouvée inférieure à 20 %.
- Synthèse des FRF : on compare les FRF synthétisées à partir des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  déterminées avec les FRF mesurées. Comme montré dans la figure 4.4, une bonne concordance est trouvée entre les FRF synthétisées et les FRF expérimentales pour les deux degrés de liberté.

Ces deux contrôles vérifient que les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$ , données par les relations (4.19), (4.20) et (4.21), constituent un modèle satisfaisant de la harpe dans la gamme de fréquences d'étude. Il est à noter, cependant, que les valeurs numériques de ces matrices ne sont que des ordres de grandeurs qui demandent à être estimés avec une incertitude. Malheureusement, la méthode employée manque de robustesse et seules quelques données ont pu être exploitées.

#### 4.4.3 Forme de la matrice masse $\mathbf{M}$

La matrice  $\mathbf{M}$ , donnée par l'expression (4.19), est trouvée non-diagonale. Comme attendu, les termes diagonaux 0.54 et 49.22 ont des ordres de grandeurs bien différents puisqu'ils représentent respectivement la masse équivalente du piston d'air et la masse équivalente de la table d'harmonie.

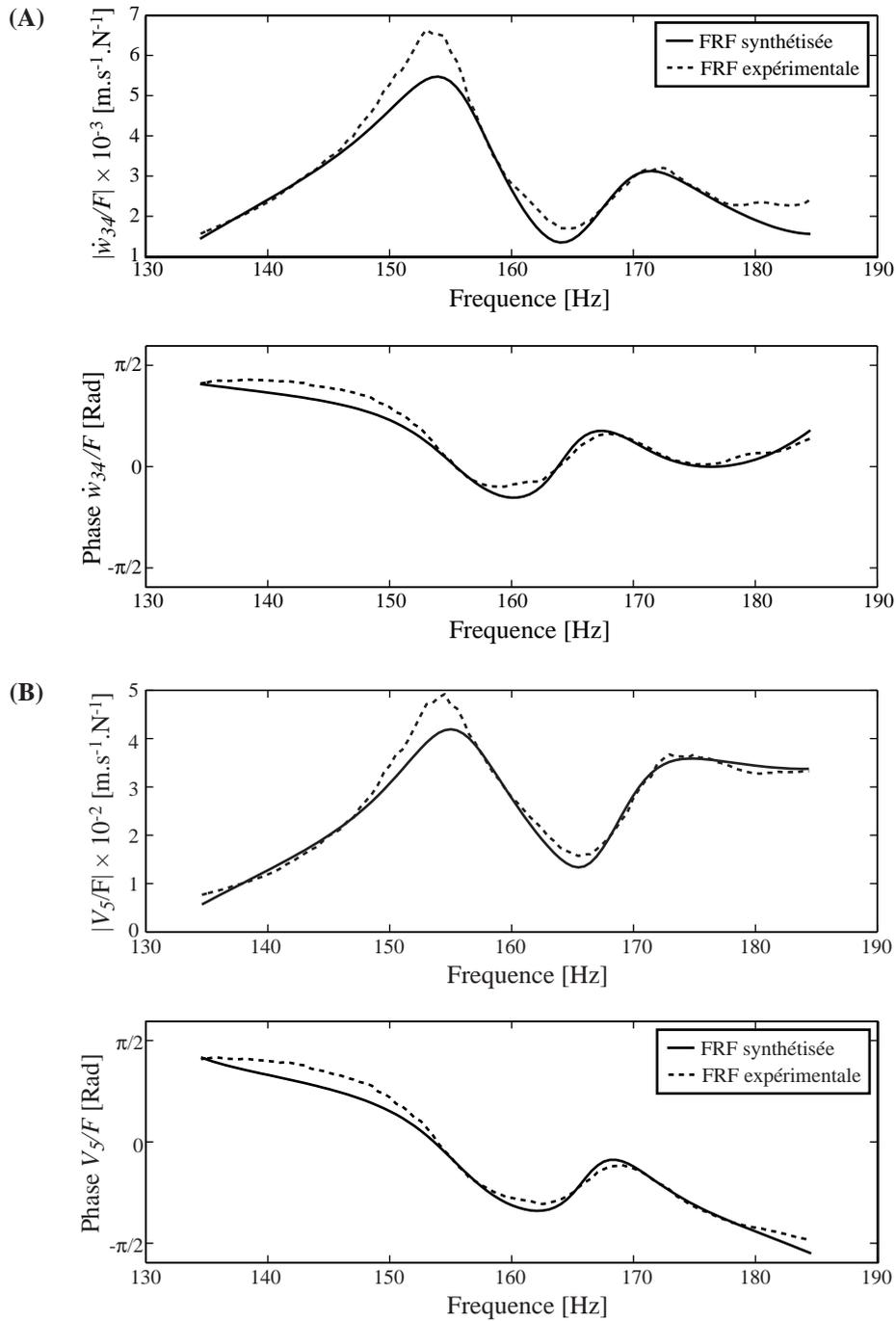


FIG. 4.4 – Amplitude et phase des FRF mesurées et synthétisées sur (A) la table d'harmonie et (B) dans l'évent inférieur 5 (voir figure 4.2). La FRF synthétisée est obtenue en utilisant les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  données par les relations (4.19), (4.20) et (4.21).

	<i>Fréquences propres</i>	<i>Vecteurs propres</i>
<b>Mode 4</b> (T1)	$s_4 = -31,9 + j 976,6$	$dY_4 = \begin{pmatrix} 0,0493 - j 0,0913 \\ 0,0072 - j 0,0106 \end{pmatrix}$
<b>Mode 6</b> (A0)	$s_6 = -32,5 + j 1065,9$	$dY_6 = \begin{pmatrix} 0,0902 - j 0,0471 \\ 0,0081 - j 0,0027 \end{pmatrix}$

**TAB. 4.2** – *Caractéristiques modales des modes T1 et A0 obtenus par les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  données par les relations (4.19), (4.20) et (4.21).*

Les termes extra-diagonaux introduisent des couplages additionnels entre les deux degrés de liberté nous empêchant de représenter simplement l'instrument par la combinaison de masses, raideurs et amortissements comme cela est le cas pour la guitare [Christensen & Vistisen, 80]. Bien que rarement exposée dans la littérature, cette situation est possible pour trois raisons :

- L'existence des termes extra-diagonaux dans la matrice de masse d'un système physique ne réfute aucun principe fondamental. La seule contrainte imposée à la matrice de masse est celle d'être réelle, définie positive [Morand & Ohayon, 95].
- Pour des systèmes mettant en jeu des couplages fluide-structure, l'existence de termes extra-diagonaux a déjà été établie dans le cas général (voir [Fahy, 85] par exemple). Un tel couplage est qualifié de « gyroscopique » dans certains articles tel que [Weinreich, 05]. De façon générale, le rayonnement sonore d'une structure plane peut être décrit par des matrices impédances de rayonnement. Les impédances directes décrivent la charge fluide appliquée à la structure. Les impédances croisées décrivent les couplages inter-modaux induits par les interactions fluide-structure. De telles impédances croisées mènent clairement à des termes extra-diagonaux dans la matrice de masse du système couplé [Fahy, 85].
- Le modèle à deux degrés de liberté qui est proposé ici décrit bien les données expérimentales comme en témoigne la figure 4.4.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la réponse vibro-acoustique de l'instrument est représentée par un modèle à deux degrés de liberté dont les paramètres caractéristiques (matrices de masse, raideur et amortissement) sont déterminés. Les deux degrés de liberté de ce modèle correspondent au déplacement vibratoire au centre de la table d'harmonie et au déplacement du piston d'air contenu dans l'évent inférieur de l'instrument. Un lissage des fonctions de transfert nous permet d'identifier les deux modes complexes associés au système. L'étude de leurs composantes montre que la matrice des amortissements généralisés n'est pas diagonale, ce qui souligne la complexité des mécanismes d'amortissement mis en œuvre dans l'instrument. La détermination des modes réels du système conservatif associé est possible en utilisant une technique d'appropriation par le calcul. Cela permet d'évaluer les matrices de masse et raideur ainsi que la matrice d'amortissement en associant des résultats issus des modes complexes. Un bon

accord entre les FRF mesurées et les FRF synthétisées utilisant ces matrices est trouvé et montre que l'instrument peut être représenté par un modèle discret à deux degrés de liberté en basses fréquences. Cependant, le lien entre les paramètres du modèle et des grandeurs physiques sur lesquelles influe le facteur n'a pu être clairement défini. Une raison invoquée est la faible robustesse de la méthode d'identification des matrices de masse, raideur et amortissement du système. En effet, en mesurant ces paramètres sur un panel de harpes de géométries et de constitutions différentes, il devrait être possible de relier les masses, raideurs et amortissements équivalents à la harpe de concert aux paramètres physiques sur lesquels le facteur intervient : masse de la table d'harmonie, barrage, volume d'air, taille des événements, etc. Une comparaison objective des instruments sera alors possible.

## Bibliographie

- [Balmès, 97] E. Balmès. New results on the identification of normal modes from experimental complex modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2) : 229-243, 1997.
- [Christensen & Vistisen, 80] O. Christensen et B. B. Vistisen. Simple model for low-frequency guitar function. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68(3) :758-766, 1980.
- [Christensen, 82] O. Christensen. Quantitative models for low frequency guitar function. *Journal of Guitar Acoustics*, 6 : 10-25, 1982.
- [Cremer, 84] L. Cremer. *The physics of the violin*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, United States of America, 1984.
- [Ewins, 94] D. J. Ewins. *Modal testing : theory and practice*. John Wiley and sons, Somerset, England, 1994.
- [Fahy, 85] F. Fahy. *Sound and structural vibration*. Academic press, London, 1985.
- [Foltête, 98] E. Foltête. *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Franche-comté, France, 1998.
- [Foltête et coll., 01] E. Foltête, G. M. L. Gladwell et G. Lallement. On the reconstruction of a damped vibrating system from two complex spectra, part 2 ; Experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2) : 219-240, 2001.
- [Foltête & Piranda, 01] E. Foltête et J. Piranda. Transforming complex eigenmodes into real ones based on an appropriation technique. *Journal of Vibration and Acoustics* 123 : 92-97, 2001.
- [Gautier et coll., 05] F. Gautier, J-L. Le Carrou, E. Collin, J. Duffaud et C. Frisson. Helmholtz : un outil de caractérisation des deux premiers modes de la guitare. Journées professionnelles Facture instrumentale & Sciences, bois de substitution et pratique des outils d'analyse, de conception et d'optimisation, UNFI - ITEM, Le Mans 2005.
- [Hutchins, 62] C. M. Hutchins. The physics of violins. *Scientific American*, 207(5) : 78-93, 1962.
- [Hutchins, 90] C. M. Hutchins. A study of the cavity resonances of a violin and their effects on its tone and playing qualities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(1) : 392-397, 1990.
- [Lancaster & Prells, 05] P. Lancaster et U. Prells. Inverse problems for damped vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 383 : 891-914, 2005.
- [Morand & Ohayon, 95] M. Morand et R. Ohayon. *Fluid structure interactions*. John Wiley and Sons, Chichester, England, 1995.
- [Piranda, 01] J. Piranda. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur, traité Mesures et contrôles*, R6(180) : 1-29, 2001.
- [Thépenier, 06] C. Thépenier. *Vibro-acoustique de la guitare : étude de l'influence de certains choix du luthier sur la réponse de l'instrument*, Stage de Master 2, Université du Maine, 2006.
- [Richardson, 97] B. E. Richardson. Stringed instruments : plucked. *Encyclopedia of acoustics*, M. J. Crocker, John Wiley and sons, 1997.

- [Weinreich, 05] G. Weinreich. Interaction of a fluid with almost surrounding shell. *Acta Acustica United with Acustica*, 91 : 197-205, 2005
- [Wright, 96] H. Wright. *The acoustics and psychoacoustics of the guitar*. PhD dissertation, University of Wales, Cardiff, United Kingdom, 1996.
- [Wyckaert *et coll.*, 96] K. Wyckaert, F. Augustinovicz et P. Sas. Vibro-acoustical modal analysis : Reciprocity, model symmetry, and model validity. *Journal of the Acoustical Society of America* 68 : 3172-3181, 1996.

## Chapter 5

# Sound radiation of the concert harp: experimental characterization using the Equivalent Sources Method\*

### ABSTRACT

The concert harp, similar to most string instruments, is a complex sound radiator involving coupling between a flat panel, the soundboard and a cavity with 5 sound holes, the soundbox. The musical sound field produced by the instrument has a complex spatial distribution linked to its sound directivity. The aim of the study is to investigate and model this directivity, which is an important aspect of the vibroacoustic behavior of the instrument. Below 220 Hz, the measured far field sound radiation of the concert harp is found to be non-directional; above this frequency directivity patterns can be observed and they become more complex as frequency increases. According to this experimental study, two models based on the Equivalent Sources Method are developed in order to characterize the instrument as a sound source. The first model composed of six monopoles, one on the soundboard and one on each sound hole, is found in agreement with direct measurements of velocities on the instrument. The second model composed of two monopoles, one on the soundboard and the other one on the sound holes, is linked to a two degree-of-freedom model representative of the vibroacoustic behavior of the concert harp in the low frequency range.

---

\*Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article écrit en langue anglaise et soumis pour publication par J-L. Le Carrou, F. Gautier, J. Gilbert et J.R.F. Arruda.

## 5.1 Introduction

The harp is a string instrument with many variations, whose geometry and string tuning mechanism can be different according to the type: small Welsh, Irish, Scottish, Celtic and Concert harps. The latter, with a larger size than the others, is currently used in symphonic orchestras and is the subject of the present study. From an acoustic point of view, the concert harp is a complex sound source involving coupling between a set of strings, a flat panel called the soundboard, and a cavity with 5 sound holes called the soundbox. The musical sound field produced by the instrument has a complex spatial distribution linked to its sound directivity. The aim of this paper is to investigate and model this directivity in order to confirm aspects of the vibroacoustic behavior of the concert harp previously studied [Le Carrou *et al.*, 05a].

The directivity of the concert harp has not been the subject of many studies. Some important characteristics are gathered in Ref. [Bell, 87]. In this study, the directivity of the instrument is measured on a strung harp excited by a stationary source. A microphone moved around the instrument is used for the sound measurement. Preferential directions for the far field sound radiation of the instrument over a wide range of frequencies are determined: three kinds of radiated sound fields, depending on the frequency, is found. In a low frequency range [0 Hz - 400 Hz], the harp is non-directional, in a medium frequency range [400 Hz - 2000 Hz], the harp is directional with a high sound level on both the front and back sides of the instrument, and in a high frequency range [2000 Hz - 4000 Hz], the instrument radiates more from the back and two major radiation areas are found on the front side. These qualitative results are discussed by the author to determine the optimum position of microphones for sound recording and the optimum location of the concert harp inside an orchestra.

Although few studies concern the concert harp, other string instruments have been the subjects of more thorough investigations. These investigations are often broader studies than simple experimental descriptions of instruments' directivity. Indeed, parameters associated with physical models can be estimated using measurements of the sound field. Such models are essential to understand the origin of instruments' directivity. For the guitar, the acoustic field can be represented by a distribution of monopoles [Christensen, 84] corresponding to each vibrational mode of the top plate. Parameters such as resonance frequencies, damping factors and ratio of the effective piston area to effective mass can be estimated from acoustical measurements. The roles of these physical parameters have been investigated by using psychoacoustical tests [Wright, 96]. An extension [Hill *et al.*, 04] of this monopole-based model allows the key dynamical and acoustical parameters for each mode to be determined. These parameters correspond to the amplitudes of spherical harmonic functions used for describing the radiated sound field of the guitar. This last work is based on a method [Weinreich & Arnold, 80] previously developed for the violin. Actually, to determine the *radiativity* [Weinreich, 83, Weinreich, 85] of different violins, multipole expansion of the sound field was carried out [Weinreich, 83, Fletcher & Rossing, 98]. This concept was used for various applications [Weinreich, 93] from the reconstruction of violin sound to the determination of quality parameters.

More generally, different methods exist to model sound sources [Magalhaes & Tenenbaum, 04].

The sound radiated by a source can be modeled by the Helmholtz integral [Williams, 99]. This radiation problem can be solved for arbitrary sources using numerical methods such as the Boundary Element Method [Wu, 00]. However, when the aim of the model is to be able to reproduce the far field sound field, such a detailed model is not necessary, and more classical wave synthesis methods [Heckl, 89] can be used. The basic idea is to substitute the actual source by a set of simple sources that are able to generate approximately the same sound field [Ochmann, 95]. These substitute sources are usually simple monopoles or dipoles, so that the method is usually called Equivalent Sources Method, Substitute Sources Method or Elementary Sources Method. It has been shown that using a number of simple sources to represent the radiated sound field is equivalent to solving the Helmholtz integral [Koopmann *et al.*, 89]. With the Equivalent Sources Method, the sound radiation problem is written as an algebraic linear system of equations and matrix conditioning problems frequently arise, depending on the number and the order of the elementary sources and their positioning in space. These numerical conditioning problems can be addressed using well-known regularization techniques [Nelson & Yoon, 00].

The aim of the study presented here is to describe the far field sound radiation of the concert harp in low frequencies as a superposition of monopoles. For this purpose, the directivity is measured and then a model of the sound field based on equivalent sources is proposed. Computations of the locations and of the volume flows of these sources are performed from pressure measurements. Finally, analysis of these results provides an interpretation of the vibroacoustic behavior of the instrument.

## 5.2 Directivity of the concert harp

### 5.2.1 Experimental set-up

The experimental set-up shown in Figure 5.1 is used to measure the directivity of a concert harp (*Camac Harps, Atlantide Prestige model*). Measurements are performed in a semi-anechoic room of working volume 1000 m<sup>3</sup>, of valid frequency range of [20 Hz - 20 kHz]. The instrument is excited by a shaker driven by a white noise connected via a rod to the back of the soundboard. The excitation point is located between strings Db and Cb at respective fundamental frequencies of 138.6 Hz and 123.5 Hz. A vertical arch, on which 35 1/4-inch microphones are attached, is fixed whereas the harp and its excitation apparatus rotate by eighteen 10 degree steps about the z-axis. With this set-up, the radiated pressure of the harp in the half-space can be measured. Note that a 180° rotation is enough to obtain the sound field in the whole hemisphere.

The arch dimensions are 4.70 m in width and 3.55 m in height, enabling the positioning of microphones at a distance of 2.35 m from the rotating axis. Taking into account the size of the instrument, the distance between the microphones and the soundbox of the harp is at least  $r = 2$  m. Since the far field approximation is valid for  $kr \gg 1$ , with  $k$  the acoustic wavenumber, we can consider that it is satisfied for frequencies above 100 Hz. Moreover, the distance between 2 microphones was chosen to be 0.2 m in order to have a good measurement mesh resolution. We imposed an upper limit frequency of 500 Hz. In this case, Shannon's principle for the spatial sampling is valid.

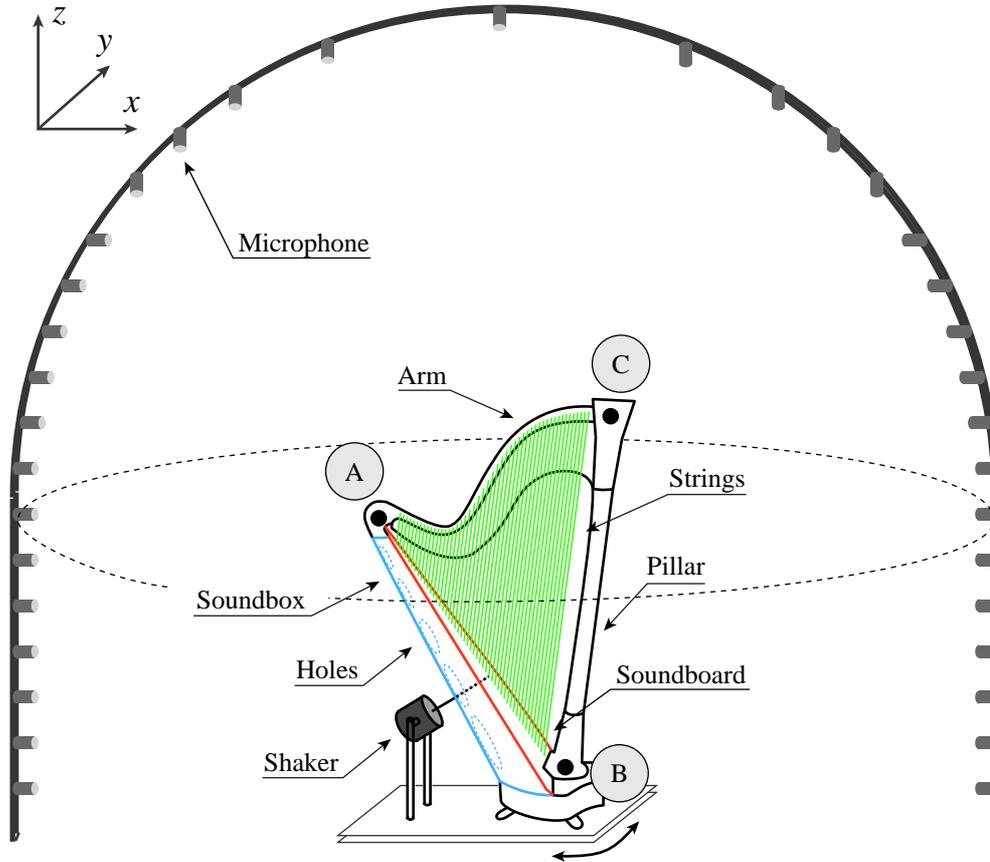


Figure 5.1 – *Experimental Set-up.*

The force applied by the shaker ( $F$ ) to the harp is measured using an appropriate force transducer. Therefore, for each pressure measurement at point  $i$  ( $P_i$ ), the frequency response function  $H_i = P_i/F$  is obtained. This experimental set-up with 613 measurement points is a compromise between practical limitations and a good spatial resolution for the sound field.

### 5.2.2 Results

In this section, the sound radiated by the harp is described. In Figure 5.2, a typical frequency response function obtained at the microphone placed in front of the harp at 1.4 m in height is shown. Representative examples of the sound directivity of the instrument are shown in Table 5.1 for several selected frequencies. These directivity patterns are presented using 2 cross sections: a vertical one, on the strings plane and a horizontal one at 1.4 m high. The triangle (ABC), as defined in figure 5.1 represents the orientation of the concert harp.

The five directivity patterns shown in Table 5.1 are symmetric in relation to the strings plane. The radiated sound is thus the same on each side of the instrument. This result is of course due to the fact that the instrument is excited on its central line along the soundboard and, so, no asymmetric modes of

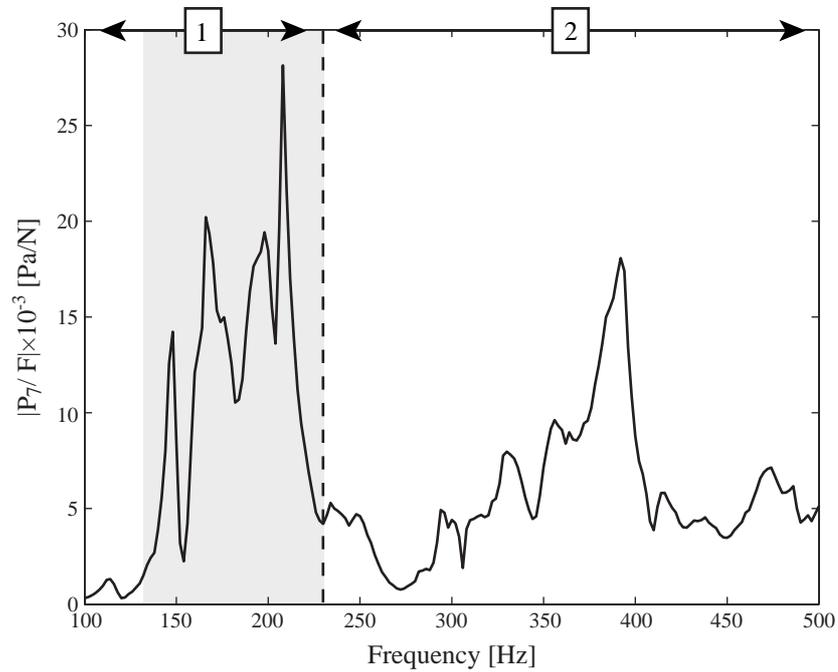


Figure 5.2 – Frequency Response Function at the microphone placed in front of the harp at 1.4 m in height.

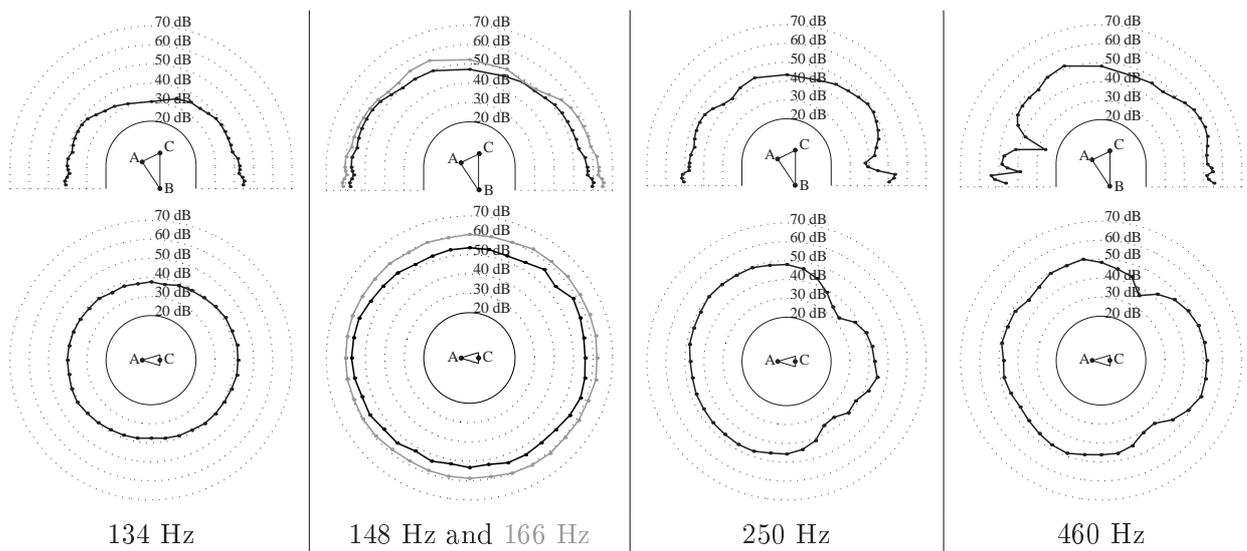


Table 5.1 – Directivity pattern for five selected frequencies 134 Hz, 148 Hz, 166 Hz (in gray), 250 Hz, 460 Hz [Ref 1dB:  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa/N].

the soundboard could be excited. Therefore, this result is expected in a playing configuration because strings are connected to the soundboard on this central line. These directivity patterns include the reflection of the radiated sound on the semi-anechoic room's floor. This reflection phenomenon can explain lobes or widenings in the low part of these patterns.

The description of the directivity patterns can be organized by using 2 frequency ranges (labeled 1 and 2) as defined in Figure 5.2. In range 1, below 220 Hz, the concert harp is non-directional as shown in Table 5.1 for 134 Hz, 148 Hz and 166 Hz. In range 2, above 220 Hz, more complex patterns with lobes appear, as it is the case for 250 Hz and 460 Hz. In the horizontal cross-section, lobes appear on the front and on the back of the instrument. Thus, a directivity dependency is not only found along the z-axis but also around the harp. This result agrees with a straightforward experiment done during the test: when moving around the harp excited in force regime in this frequency range, the instrument is nearly silent at some locations of the room. In order to estimate the frequency at which the concert harp might be expected to pass from non-directional to directional, a common assumption is that the soundboard is a baffled piston for calculating the diffraction frequency [Morse & Ingard, 86] ( $f = c/2\pi a$ ). The radius of the piston is approximated to the moving part of the soundboard in the low frequency range. Then, the diffraction frequency for the concert harp with a radius of 20 cm is evaluated at 270 Hz. This value is very close to the experimental value.

The results obtained here can be compared with those obtained on the *Salvi Orchestra* concert harp [Bell, 87]. These principal areas of radiation for different frequencies are close to those presented here. The only difference is the frequency limit at which the harp becomes non-directional. This limit is at 400 Hz whereas on our *CAMAC Atlantide* concert harp, with similar dimensions as the *Salvi Orchestra* concert harp, this frequency limit is approximately 220 Hz.

## 5.3 Radiation model

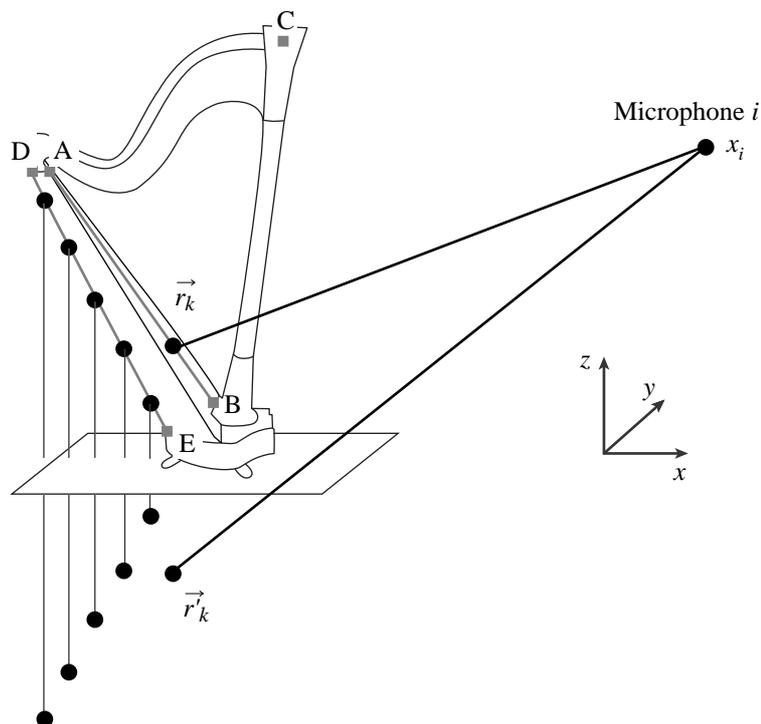
### 5.3.1 Theory

According to the Equivalent Sources Method [Koopmann *et al.*, 89] (ESM), the acoustic field can be expressed as the superposition of elementary fields generated by a distribution of equivalent acoustic monopoles located inside the volume of the actual source. In our case, monopoles are located not only inside the instrument but also in the image space which is symmetric in relation to the floor, as shown in Figure 5.3. Indeed, as it was previously noticed, the radiated sound field of the instrument is due to the direct field and to the reflection field on the semi anechoic room floor.

The pressure radiated at location point  $\vec{x}_i$  is written as follows

$$p(\vec{x}_i, \omega) = \frac{j\rho\omega}{4\pi} \sum_{k=1}^n \left( \frac{e^{-jk\|\vec{r}_k - \vec{x}_i\|}}{\|\vec{r}_k - \vec{x}_i\|} + R \frac{e^{-jk\|\vec{r}_k^{\vec{r}} - \vec{x}_i\|}}{\|\vec{r}_k^{\vec{r}} - \vec{x}_i\|} \right) Q_k, \quad (5.1)$$

where  $\omega$  is the angular frequency and  $\rho$  is the air density. For each of the  $n$  monopoles placed in the physical space at location  $\vec{r}_k$ , a monopole is associated in the image space at position  $\vec{r}_k^{\vec{r}}$ . The volume velocities of the monopoles at locations  $\vec{r}_k$  are denoted  $Q_k$ . The reflection coefficient of the room's



**Figure 5.3** – Schematic diagram of the monopoles model. Monopoles are located along two local axes on the soundboard and on the sound holes.

floor is  $R$  implying that the volume velocities of the  $n$  image sources are  $RQ_k$ . For a perfectly reflexive floor,  $R$  equals 1.

The acoustic pressure (5.1), computed at  $N$  points on locations  $(\vec{x}_i)_{i=1\dots N}$  can be written in a compact matrix form as follows:

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{Q}, \quad (5.2)$$

where

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(\vec{x}_1, \omega) \\ \vdots \\ p(\vec{x}_N, \omega) \end{pmatrix}_{(N,1)}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g(\vec{r}_1, \vec{r}_1^T, \vec{x}_1) & \cdots & g(\vec{r}_n, \vec{r}_n^T, \vec{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g(\vec{r}_1, \vec{r}_1^T, \vec{x}_N) & \cdots & g(\vec{r}_n, \vec{r}_n^T, \vec{x}_N) \end{pmatrix}_{(N,n)},$$

with

$$g(\vec{r}_k, \vec{r}_k^j, \vec{x}_i) = \frac{j\rho\omega}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk\|\vec{r}_k - \vec{x}_i\|}}{\|\vec{r}_k - \vec{x}_i\|} + R \frac{e^{-jk\|\vec{r}_k^j - \vec{x}_i\|}}{\|\vec{r}_k^j - \vec{x}_i\|} \right).$$

Assuming that the locations  $\vec{r}_k$  of the equivalent sources are known, the volume velocity  $\mathbf{Q}$  can be estimated using

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^+ \mathbf{P}. \quad (5.3)$$

Eq. (5.3) corresponds to the optimum solution in the least mean squares sense where  $\mathbf{G}^+$  is the Moore-Penrose generalized inverse of  $\mathbf{G}$ . The solution  $\mathbf{Q}$  is not an exact solution but rather an estimation with inherent error. This error is directly linked to the conditioning of the  $\mathbf{G}$  matrix. If  $\mathbf{G}$  is ill-conditioned, the errors due to the pseudo inversion will be amplified, making the solution unstable for small variations of input data. However, it is possible to lower the sensitivity to the error of the solution by using a regularization method such as the Truncated Singular Value Decomposition (TSVD). This method consists in cancelling the smaller singular values. The  $\mathbf{G}$  matrix can be expanded [Williams, 99] into three matrices by

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (5.4)$$

where  $\mathbf{\Sigma}$  is a diagonal matrix of singular values,  $\mathbf{V}$  is an unitary matrix and  $\mathbf{U}$  is such that  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$ . The  $H$  symbol is used to denote the complex conjugate transposition. According to Eq. (5.3), the pseudo inverse of  $\mathbf{G}$  can be expressed by

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^H. \quad (5.5)$$

Thus, small singular values will result in large elements of matrix  $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ . The TSVD method consists in discarding small singular values of the  $\mathbf{G}$  matrix in order to stabilize the solution. The threshold below which singular values are rejected can be adjusted by a method [Leclère *et al.*, 05] based on the L-curve principle.

In the general case, the positions  $\vec{r}_k$  and the volume velocities  $\mathbf{Q}_k$  of the model are unknown. In order to find optimal values of these parameters, the relative error between the pressure field measured  $\hat{p}(\vec{x}_i, \omega)$  and the model pressure at the same point  $p(\vec{x}_i, \omega)$ ,

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^N |p(\vec{x}_i, \omega) - \hat{p}(\vec{x}_i, \omega)|^2}{\sum_{i=1}^N |p(\vec{x}_i, \omega)|^2}, \quad (5.6)$$

has to be minimized. This minimization is a non-linear problem which has to be solved iteratively. Starting from initial values of the parameters, and assuming that the error function is convex in the vicinity of these initial values, optimum values are computed using a gradient technique.

### 5.3.2 Additional assumptions

In the study presented here, the location and the number of sources are chosen according to preliminary studies and physical reasons. These assumptions are particularly important to reduce computing time for the determination of the optimum parameters of monopoles. Indeed, the minimization procedure explained above can become time consuming when the number of monopoles is important and when their locations are not constrained.

#### 5.3.2.1 Locations of monopoles

It is assumed that the monopoles in the physical space are located on the soundboard and on the sound holes in the symmetric plane of the concert harp. This assumption is justified by a preliminary study [Le Carrou *et al.*, 05b] in which the ESM was applied to the instrument with only one monopole and its image source. In Ref. [Le Carrou *et al.*, 05b], no assumption has been made about its location and the minimization procedure of the relative error (5.6), as described above, has been carried out. As expected, the location of this monopole has been found in the symmetry plane of the concert harp proving that the acoustical sources are located there. Moreover, another study based on acoustic intensity measurements [Gautier & Dauchez, 04] has shown that two distinct acoustic radiation sources can be identified: on the soundboard and on the sound holes. Because of this physical characteristic, it seems natural to constrain the locations of the equivalent acoustical sources on the soundboard and on the sound holes along two segments [AB] and [DE] as shown in Figure 5.3.

#### 5.3.2.2 Number of monopoles

The number of sources considered in the model is arbitrary and can be determined using considerations on the physics of the instrument. Firstly, it is shown [Le Carrou *et al.*, 05a] that each of the five sound holes acts as an air piston at low frequencies and therefore can be modeled by one monopole. By adding one monopole to describe the soundboard radiation, a six-monopole model can be representative of the acoustical sources of the concert harp. Such model is studied in section 5.4.2. Secondly, the possibility of representing the radiation of air pistons by one unique equivalent acoustic monopole is investigated: in this case, the radiation model for the instrument is a two-monopole model presented in section 5.4.3.

#### 5.3.2.3 Simplified minimization procedure

In order to limit computing time, the following procedure is proposed: monopoles are located at different positions along the two segments [AB] and [DE] and the relative error, defined by Eq. (5.6), is computed for each set of locations. For each frequency, optimum values for locations and volume velocities correspond to those which lead to the minimum of the relative error.

For the two models proposed in the study, we retain the following choices. For the six-monopole model, the relative error is computed for a hundred locations for the monopole placed on [AB] whereas the five monopoles on [CD] are supposed to be located at the center of each sound holes according to the physical reason previously mentioned. For the two-monopole model, both segments [AB] and

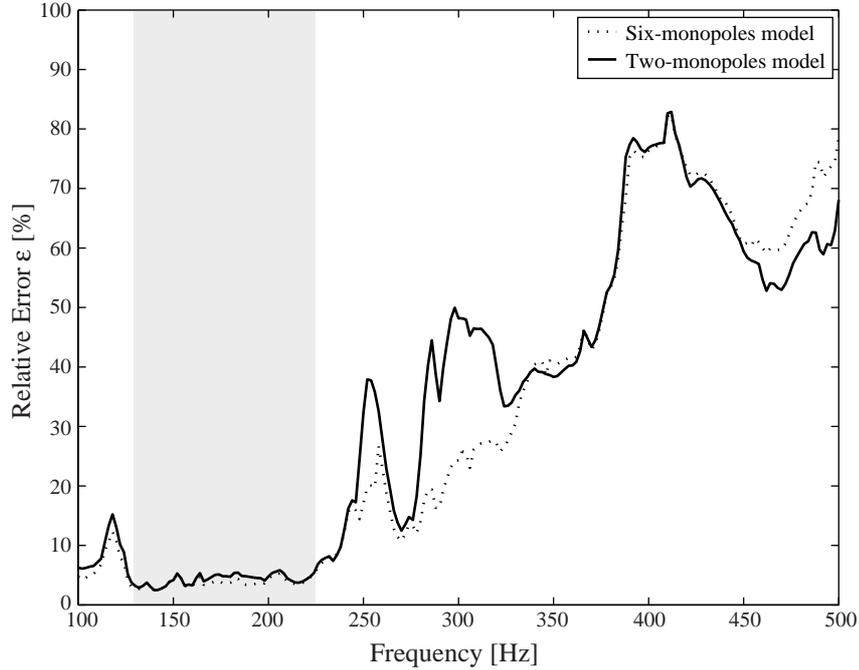


Figure 5.4 – Relative error  $\epsilon$  versus frequency for the two-monopole model and six-monopole model.

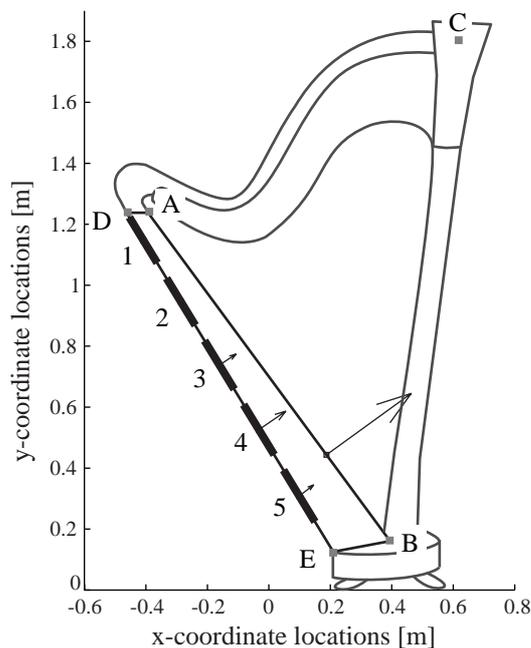
[CD] are discretized in a hundred points and the relative error is computed for each combination of locations on the soundboard and on the sound holes.

## 5.4 Experimental results

### 5.4.1 Preliminaries

The simplified minimization procedure is applied on experimental data. The relative error, defined by Eq. (5.6) is computed for the six-monopole model and for the two-monopole model and shown in Figure 5.4. This relative error takes small values, less than 6% in the frequency range [126 Hz - 224 Hz] corresponding to the greyed area in Figure 5.4. The two models proposed are thus supposed to be valid in this frequency range which will be the only one considered afterwards.

In Figure 5.5, a typical result obtained for the six-monopole model is shown at 148 Hz. A representation using arrows is used to describe the volume velocities: the arrow size is proportional to the magnitude and the arrow orientation characterize the phase. We chose to orient the arrow of the soundboard monopole in the normal direction to the soundboard. For each of the other sources, the arrow's orientation is determined by the relative phase. Using this convention, the orientation of an arrow describes the phase of an equivalent piston representative of the monopole, and would point outward along the local surface normal if the source were in phase with the soundboard. As an example, it is shown in Figure 5.5 that when the sound holes and the soundboard monopoles are



**Figure 5.5** – *Typical result for the six-monopole model at 148 Hz.*

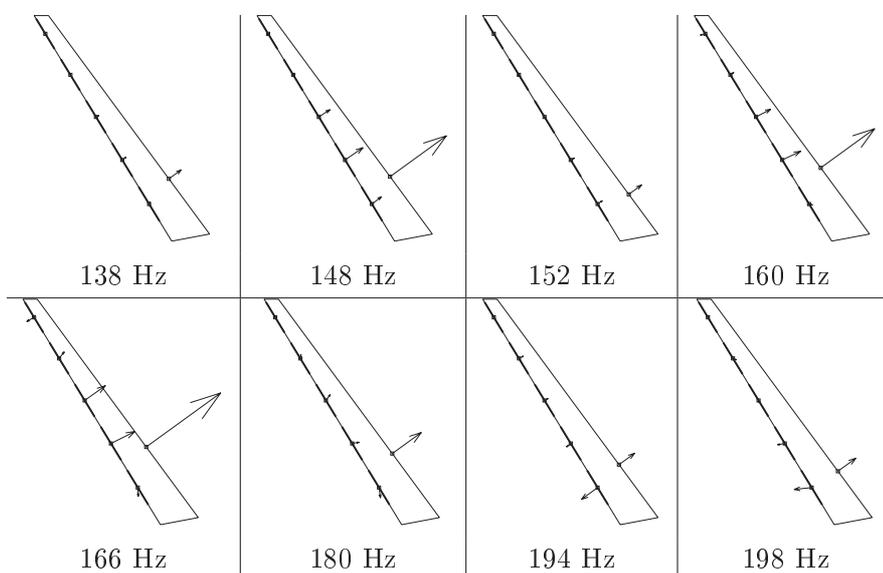
out-of-phase, the corresponding arrows have same directions because the outwards normal directions for soundboard and for sound holes are opposite.

### 5.4.2 The six-monopole model

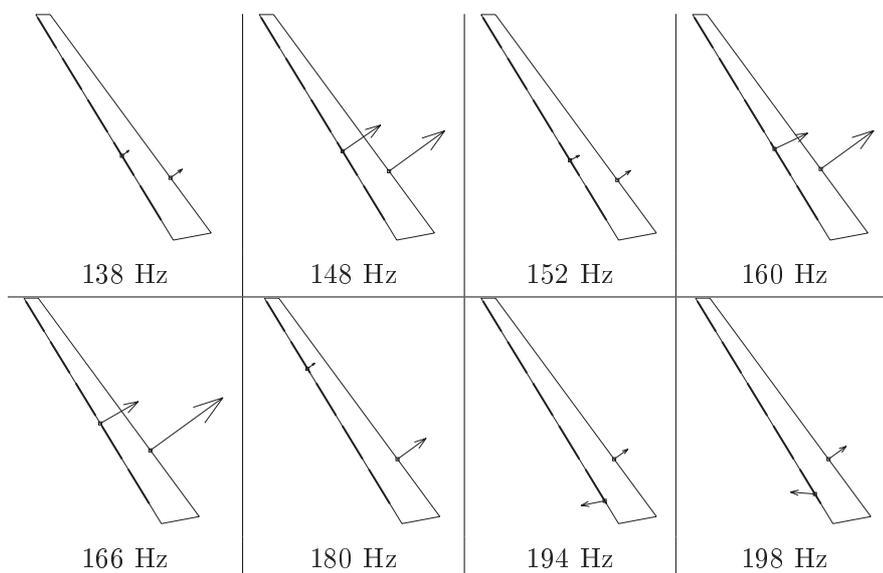
Volume velocities and locations of computed monopoles are shown in Table 5.2 for selected frequencies in the useful frequency range. The soundboard monopole is found to be located in the lower part of the instrument and its exact location does not depend strongly on the frequency. Below 150 Hz, the volume velocities of the sound hole monopoles are in phase with each other and opposite in phase with respect to the soundboard monopole. From 150 Hz to 190 Hz, a transition frequency range is observed in which the relationships between the volume velocities of the sound holes' monopoles are not simple. Above 190 Hz, the sound hole monopoles tends to be in phase with the soundboard monopole as it is shown for 194 Hz and for 198 Hz in Table 5.2.

### 5.4.3 The two-monopole model

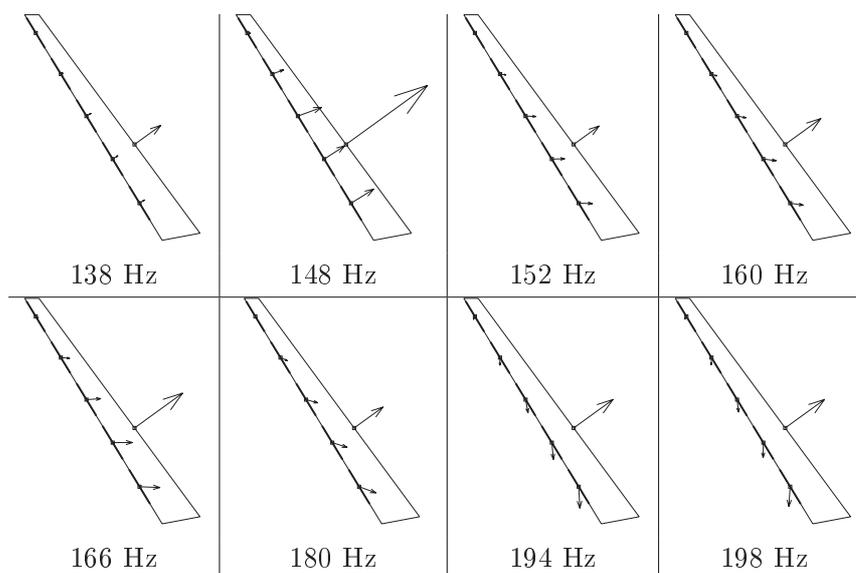
In table 5.3, locations and volume velocities are shown for selected frequencies. As for the six-monopole model, the location of the monopole on the soundboard does not depend on the frequency and is found to be on the lower part of the instrument. Its location is approximately in sound hole 4, as defined in Figure 5.5, below 170 Hz and in sound hole 5 above 190 Hz. Between 170 Hz and 190 Hz, the monopole goes up to the higher hole as shown for 180 Hz in table 5.3. This result was not expected because in low



**Table 5.2** – Volume velocities and locations of monopoles for the six-monopole model. The same arbitrary scaling factor is applied for all figures of Tables II, III and IV.



**Table 5.3** – Volume velocities and locations of monopoles for the two-monopole model. The same arbitrary scaling factor is applied for all figures of Tables II, III and IV.



**Table 5.4** – Volume velocities and locations of monopoles directly measured by an intensity probe. The same arbitrary scaling factor is applied for all figures of Tables II, III and IV.

frequencies the main sound radiation is in the lower part of the concert harp [Gautier & Dauchez, 04]. However, such spacial variation is not surprising if we have in mind the fact that this monopole represents in a global way the acoustic radiation of the five sound holes. As found for the six-monopole model, above 190 Hz, the sound holes and the soundboard monopoles are opposite in phase.

## 5.4.4 Discussion

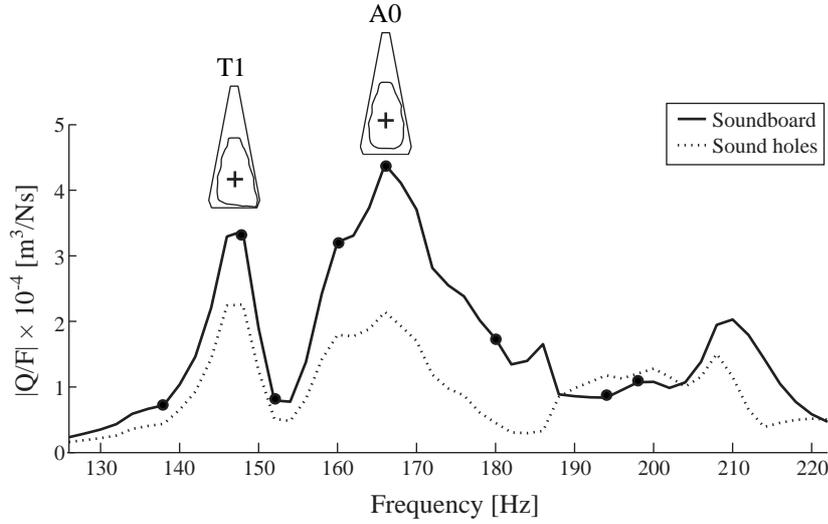
### 5.4.4.1 Velocity measurements

In order to validate the ESM approach, the previous experimental results are compared with the volume velocities estimated from direct velocities measurements. The velocity on the soundboard is measured by using a laser vibrometer and the acoustic particle velocities are measured in each sound hole by using the pair of microphones of an intensity probe. The relationship

$$Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot d\vec{S}, \quad (5.7)$$

where  $\vec{V}$  denotes the velocity measured on surface  $\mathcal{S}$ , can be used to define the effective area for each monopole. Each area corresponds to that of an equivalent moving piston for each source. The area of each piston is adjusted so that the volume velocities estimated from Eq. (5.7) and by ESM are in the same orders of magnitude to within 20%. The volume velocities obtained from Eq. (5.7) are shown in table 5.4 and these results can be directly compared to those obtained with the six-monopole model in Table 5.2.

On the whole, volume velocities that were found are in agreement with the direct measurements, allowing us to validate the ESM approach. Below 154 Hz, the soundboard and sound holes monopoles



**Figure 5.6** – Magnitude of the volume velocities for unit force on the soundboard and on the sound holes of the two-monopole model versus frequency. The selected frequencies which have been presented in table 5.2, 5.3 and 5.4 are indicated by small dots.

are opposite in phase and in phase after approximately 198 Hz. Between 150 Hz and 198 Hz, a transition range exists. In the details, some discrepancies exist between the volume velocities of sound hole monopoles estimated from the six-monopole model and from direct measurements. In Table 5.4, all sound hole monopoles are in phase with each other. In Table 5.2, it is not strictly the case: some sound hole monopoles of small amplitude do not strictly satisfy this property, see for example 160 Hz or 166 Hz in Table 5.2.

#### 5.4.4.2 The concert harp: a radiation model based on 2-dof model

We investigate in this section the possibility of representing the radiation of air pistons by one unique equivalent acoustic monopole. In Figure 5.6, the magnitude of the volume velocities of the two-monopole model are presented versus frequency. In the magnitude curve, two peaks are found at 148 Hz and 166 Hz. They correspond to the eigenfrequencies of two modes of the concert harp which have been studied in a previous paper[Le Carrou *et al.*, 05a]. These modes, labeled T1 and A0 in reference to the classification of the violin and guitar modes, involve coupled motions between the bending vibration of the soundboard and the oscillations of the air pistons located in the sound holes. Modes T1 and A0 lead to important acoustic radiation[Le Carrou *et al.*, 05a] that is also found in the two peaks of the monopoles' volume velocities of the soundboard and of the sound holes. Acoustic radiations of T1 and A0 are thus dominant in the low frequency range. We can therefore consider the concert harp as a 2 degrees of freedom system: one on the soundboard and the other one on the sound holes.

## 5.5 Conclusion

This paper deals with the sound radiated by a concert harp in the low frequency range. For this study, the directivity of the instrument was measured at low frequencies. All directivity patterns are found to be symmetric in relation to the string plane and including the reflection of the radiated sound on the semi-anechoic room's floor. Below 220 Hz, the concert harp is found to be non-directional; above this frequency the directivity presents complex patterns. According to this experimental study, two models based on the Equivalent Sources Method have been developed in order to characterize the instrument as a sound source. These two models are composed of a set of monopoles in the symmetry plane of the concert harp not only located on the instrument but also in the image space to take into account the floor reflection. The first model has six monopoles, one on the soundboard and the others on the sound holes. The second model has one monopole on the soundboard and only one for the description of the sound hole radiation.

For the six-monopole model, results agree with direct measurements of velocities on the soundboard and on the sound holes, thus validating the methodology. Furthermore, for the two-monopole model, the volume velocities of monopoles are found to be at their maximum for two particular frequencies, which correspond to the two modes involving coupled motions between the bending vibration of the soundboard and the oscillations of the air pistons located inside the sound holes known as A0 and T1.

Although the investigated system has a complex geometry, its radiation appears to be well modeled by a few equivalent sources in the frequency range from 126 Hz to 224 Hz.

## Bibliography

- [Bell, 87] A. J. Bell. *An acoustical investigation of the Concert Harp*. PhD dissertation, University of St Andrews, United Kingdom, 1987.
- [Christensen, 84] O. Christensen. An Oscillator Model for Analysis of Guitar Sound Pressure Response. *Acustica*, 54: 289-295, 1984.
- [Fletcher & Rossing, 98] N. H. Fletcher and T.D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer, New York, United States of America, 2nd edition, 1998.
- [Gautier & Dauchez, 04] F. Gautier and N. Dauchez. Acoustic intensity measurement of the sound field radiated by a concert harp. *Applied Acoustics*, 65: 1221-1231, 2004.
- [Hill *et al.*, 04] T. J. W. Hill, B.E. Richardson and S.J. Richardson. Acoustical Parameters for the Characterisation of the Classical Guitar. *Acta Acustica United with Acustica*, 90: 335-348, 2004.
- [Heckl, 89] M. Heckl. Bemerkung zur Berechnung der Schallabstrahlung nach der Methode der Kugelfeldsynthese (Remarks on the calculation of sound radiation using the method of spherical wave synthesis), *Acustica*, 68: 251-257, 1989. [In German]
- [Koopmann *et al.*, 89] G. H. Koopmann, L. Song and J. B. Fahnlne. A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86(6): 2433-2438, 1989.
- [Leclère *et al.*, 05] Q. Leclère, C. Pezerat, B. Laulagnet and L. Polad. Indirect measurement of main bearing loads in an operating diesel engine. *Journal of Sound Vibration*, 286(1-2): 341-361, 2005.
- [Le Carrou *et al.*, 05a] J-L. Le Carrou, F. Gautier and N. Dauchez. Acoustic radiation of the concert harp in the low frequency range. In *Proc. ICSV12*, Lisbon, Portugal, 2005. [Results of that paper are developed in Chapter 3]
- [Le Carrou *et al.*, 05b] J-L. Le Carrou, F. Gautier, J. Gilbert and J. R. F. Arruda. Low frequency model of the sound radiated by a concert harp. In *Proc. Forum Acusticum*, Budapest, Hungary, 2005. [Reproduced in Appendix B]
- [Magalhaes & Tenenbaum, 04] M. B. S. Magalhaes and R. A. Tenenbaum. Sound sources reconstruction techniques: A review of their evolution and new trends. *Acta Acustica United with Acustica*, 90(2): 199-220, 2004.
- [Morse & Ingard, 86] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, New Jersey, United States of America, 1986.
- [Nelson & Yoon, 00] P. A. Nelson and S. H. Yoon. Estimation of acoustic source strength by inverse methods: part II, experimental investigation of methods for choosing regularization parameters. *Journal of Sound Vibration*, 233(4): 669-705, 2000.

- [Ochmann, 95] M. Ochmann. The source simulation technique for acoustic radiation problems. *Acustica*, 81, 512-527, 1995.
- [Weinreich & Arnold, 80] G. Weinreich and E.B. Arnold. Method for measuring acoustic radiation fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68: 404-411, 1980.
- [Weinreich, 83] G. Weinreich. Violin radiativity: concepts and measurements. In *Proc. SMAC 83*, Stockholm, Sweden, 1983.
- [Weinreich, 85] G. Weinreich. Sound hole sum rule and the dipole moment of the violin. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77: 710-718, 1985.
- [Weinreich, 93] G. Weinreich. Radiativity revisited: theory and experiment ten years later. In *Proc. SMAC 93*, Stockholm, Sweden, 1993.
- [Williams, 99] E. G. Williams. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, London, United Kingdom, 1999.
- [Wright, 96] H. Wright. *The acoustics and psychoacoustics of the guitar*. PhD dissertation, University of Wales, United Kingdom, 1996.
- [Wu, 00] T. W. WU (Editor). *Boundary Element in Acoustics: Fundamentals and Computer Codes*. WIT Press Vol.7, Wessex, United Kingdom, 2000.



## Troisième partie

# Interactions Table d'harmonie - Cordes : vibrations par sympathie



## Partie 3 : Avant-propos

Comme la plupart des instruments à cordes, la harpe de concert est composée de plusieurs cordes connectées à un corps vibrant permettant d'amplifier le son, la table d'harmonie. Pour certains accords particuliers des cordes des *vibrations par sympathie* peuvent apparaître. Lorsqu'une corde est pincée, d'autres se mettent aussi à osciller par couplage solidien via le corps de l'instrument. Si ce phénomène est recherché pour des instruments tels que le violon d'amour, le baryton ou encore le sârangî, dans le cas de la harpe de concert, il est à limiter. En effet, cette particularité vibratoire, qui constitue une signature acoustique de l'instrument, peut être agréable pour la sonorité de quelques notes isolées mais peut devenir fort désagréable pour la ou le harpiste lors d'un enchaînement rapide de notes, générant un *halo sonore*. L'objectif de la partie est de comprendre les mécanismes agissant et favorisant la présence d'un tel phénomène dans la harpe de concert. Pour cela, le schéma modal d'un instrument à cordes générique est étudié. Ce modèle est, ensuite, appliqué au cas de la harpe de concert. Son étude conjointe à l'analyse de signaux vibratoires mesurés directement sur l'instrument permet l'identification de la cause des *vibrations par sympathie* présentes dans la harpe de concert.

Dans le chapitre 6, l'étude du phénomène de *vibrations par sympathie* est entreprise sur un instrument à cordes générique : la table d'harmonie est modélisée par une poutre encastree à ses extrémités sur laquelle des cordes sont attachées. La propagation des ondes de flexion et de compression dans chaque sous-structure (cordes et poutre) est décrite par le formalisme du vecteur d'état et la méthode des matrices de transfert. A partir des conditions de couplage entre les sous-structures, les modes de l'assemblage sont déterminés. Suivant la/les sous-structure(s) la/les plus présente(s) dans les déformées modales, ces modes sont classés selon 4 types : modes de type poutre, de type corde, de type poutre-corde, de type corde-corde. Ces derniers sont responsables des *vibrations sympathiques*. L'analyse théorique du schéma modal d'un système constitué de 2 cordes est confirmée par les résultats d'une analyse modale expérimentale. Cependant, la méthode utilisée dans ce chapitre pour décrire la propagation des ondes de flexion et de compression dans chaque sous-structure est connue pour être limitée en fréquence, voir § 6.3.2. Pour pallier cet inconvénient, une autre méthode peut être envisagée : la méthode impédance décrite dans l'Annexe C.

Dans le chapitre 7, l'identification des *vibrations par sympathie* présentes dans la harpe de concert est menée. Dans un premier temps, une étude théorique du schéma modal d'un instrument à 35 cordes

modélisant le comportement vibratoire de la harpe est effectuée. Nous appliquons ici la méthode de modélisation exposée dans le chapitre 6 après avoir recalé les paramètres des cordes et de la poutre équivalente à la table d'harmonie. Parmi un nombre conséquent de modes obtenus (dont une trentaine est reproduite dans l'Annexe D), des modes sympathiques sont identifiés permettant de guider l'étude expérimentale sur l'instrument réel. Dans un second temps, un protocole de mesures basé sur l'arrêt de l'oscillation d'une corde ou sur la mise en oscillation d'une corde dont les voisines sont étouffées est mis en place. Le contenu spectral des signaux vibratoires recueillis sur la table d'harmonie montre la présence de nombreux modes de fréquences très proches qui ne peuvent être séparés par les techniques classiques du traitement du signal. Des algorithmes spécifiques tels que les méthodes à haute résolution sont employés. L'analyse des signaux vibratoires avec ces méthodes a permis la mise en évidence des modes sympathiques responsables des *vibrations par sympathie* dans la harpe de concert. Une très bonne concordance entre les modes obtenus avec l'instrument à cordes générique et ceux obtenus expérimentalement permet de valider l'approche théorique utilisée dans cette étude. L'application des méthodes à haute résolution à notre problématique résulte d'une collaboration avec M. R. Badeau, Maître de conférences à Télécom Paris.

## Chapter 6

# Modelling of Sympathetic String Vibrations\*

### ABSTRACT

String instruments are usually composed of several strings connected to a vibrating body allowing efficient sound radiation. For some special string tunings, sympathetic vibrations can occur: if one string is excited, some others are also excited via the body. In order to investigate this phenomenon, an analytical model of a simplified generic string instrument has been developed. The body of the instrument is represented by a beam clamped at both ends, to which several strings are attached. The state vector formalism and the transfer matrix method are used to describe the propagation of bending and extensional waves in each sub-structure (strings and beam). Coupling conditions between sub-structures take into account the angle formed by the beam and the strings. This leads to a linear system from which the normal modes of the assembly are computed. Numerical computations are carried out in the case of the beam-2 strings assembly and mode shapes are classified thanks to a criterion, the kinetic energy ratio (*KER*). Four kinds of modes may be identified: beam modes, string modes, beam-string modes and string-string modes. The latter are responsible for sympathetic response. An experimental modal analysis carried out on a clamped beam equipped with two strings confirms our theoretical results.

---

\*Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article écrit en langue anglaise dont les références sont les suivantes : J-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez & J. Gilbert, "Modelling of sympathetic string vibrations", *Acta Acustica United with Acustica* Vol. **91**, 277-288 (2005).

## 6.1 Introduction

String instruments are usually composed of several strings connected to a vibrating body allowing efficient sound radiation. The plane part of this vibrating body is called soundboard and is generally a stiffened and tapered plate of complex shape, made from different materials. When no dampers are applied to the strings, important coupling between them can occur via the soundboard: if one string is excited, other strings can vibrate and contribute significantly to the musical sound. This phenomenon is known as *sympathetic vibration* and is defined in the dictionary of acoustics [Morfe, 01] as “resonant or near-resonant response of a mechanical or acoustical system excited by energy from an adjoining system in steady-state vibration”.

For some instruments such as the viola d’amore, the baryton or non-european instruments like the sitar or the sarangi, sympathetic string vibrations result in a characteristic sound quality: these instruments have additional strings designed to be sympathetically excited by the main strings [Greilsame, 81]. In the case of the violin, sympathetic vibration is highlighted in [Hutchin, 90]: “if one plays the D on the violin G string which matches the pitch of the open D string and alternately damps and undamps the open D with a finger, the reading on the meter can be observed to increase about 1-2 dB as the open string is damped. The effect is more noticeable on a cello or bass”.

Numerous strings of the piano are organised in pairs or triplets (bichord or trichord) in which the strings are almost tuned in unison. The coupling of these strings has been investigated in [Gough, 81, Weinreich, 77, Capleton, 04]: a model for the normal modes of strings pairs has been developed taking into account mistuning from unison and the finite admittance of the bridge at the connection point of the strings. The role of string’s polarization is also pointed out: resistive and reactive parts of the admittance may differ for ‘horizontal’ and ‘vertical’ vibration. With this ‘anisotropic boundary conditions’, interactions in the time domain between normal modes lead to beats and double decay rates in the aftersound. Since the hammer excites simultaneously the group of two (or three) strings, the tone does not involve as such a sympathetic vibration. This sympathetic vibration exists when the una corda pedal is used. In this case, the hammer is mechanically shifted and only one string out of two (or two out of three) is struck. Coupling between the initially excited string and the other string leads then to sympathetic vibration [Weinreich, 77].

Note that the sympathetic vibration effect has been included in time domain simulation of piano tones to get realistic synthesis sound. For such simulations, a phenomenological model of the coupling between strings is introduced and no physical model of the coupling are described [Karjalainen & Välimäki, 93].

The harp is the main instrument to which this study can be applied. For this instrument, the sympathetic vibration effect appears as soon as a string is excited because all the strings are undamped. This effect remains even if the excited string is damped. Although this effect is a fundamental characteristic of the instrument, the instrument maker has to design the harp in such a manner that sympathetic vibration remains reasonable. Note that the case of the harp has some particularities: each string is tuned differently from the others and no pair of strings exists. Different strings can interact

even if they are connected to remote points of the soundboard. In this case, the local admittance of the soundboard is not a sufficient parameter and structure-borne sound inside the soundboard has to be taken into account. The whole soundboard and the strings have to be studied as a coupled system.

The aim of this paper is to present a modelling of sympathetic vibration on a simplified string instrument. The main application is related to the case of the harp but the formulation can be adapted to the piano's configuration. This model allows us to determine the normal modes of a structure coupled to a great number of strings and to identify those which are responsible for the sympathetic phenomenon.

The paper is structured as follows: first, the state vector formalism and the transfer matrix method are presented and applied to obtain the normal modes of a beam- $N$  strings assembly. The case of a beam-2 strings assembly is then highlighted. Numerical results for modes shapes of the assembly are given and classification of these modes is proposed using an appropriated criterion. Experimental modal analysis is also performed on the studied beam-2 strings assembly and confirms the theoretical results. Finally, the influence of inharmonicity on the modes, responsible for sympathetic vibration, is studied.

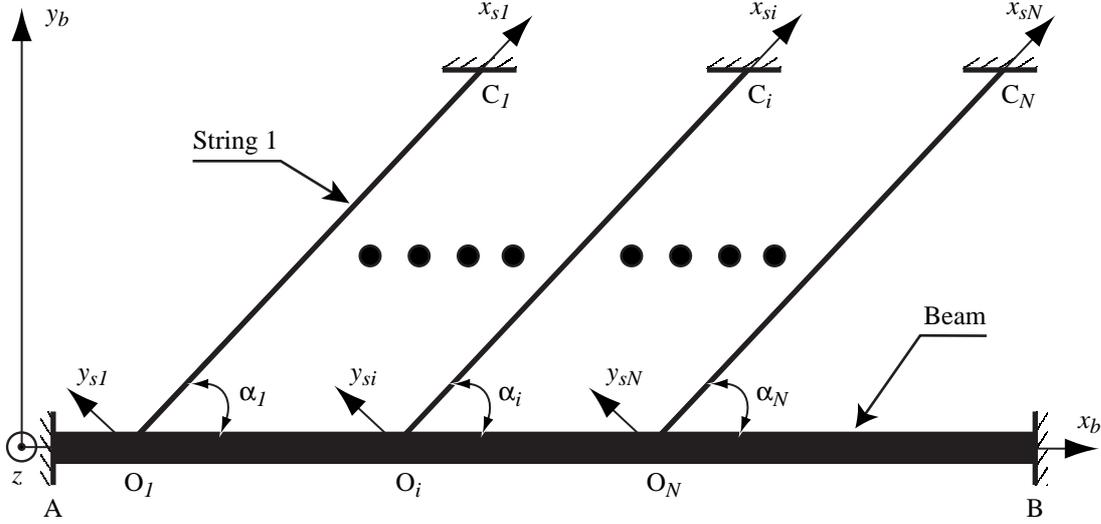
## 6.2 Model of a beam- $N$ strings assembly

In order to investigate couplings between strings via the instrument's soundboard, we consider a simplified configuration: the soundboard is represented by a simple beam, on which several strings are connected. Such a choice allows to describe the structure-borne coupling in an analytical way. The aim of this section is to present a method for calculating modes of a beam- $N$  string assembly: the state vector formalism and the transfer matrix method are applied in this context in order to obtain the normal modes (eigenfrequencies and mode shapes) of the assembly.

### 6.2.1 Description of the assembly

The beam- $N$  strings assembly is described in figure 6.1. This plane assembly is constituted of a uniform, prismatic beam on which  $N$  different strings are connected. The beam is supposed to be clamped at points A and B. The extremity  $O_i$  of the  $i$ -string ( $i=1\dots N$ ) is the string connection point to the beam. The other extremity  $C_i$  of the  $i$ -string is supposed to be simply supported. The angle  $\alpha_i$  between the axis (A,  $x_b$ ) of the beam and the axis (A,  $x_{si}$ ) of the  $i$ -string induces coupling between longitudinal and bending vibrations in the beam and in the  $i$ -string. In the case of the harp, this angle is about  $40^\circ$ .

The chosen configuration is well adapted to the case of the harp: for this instrument, the strings are connected on the symmetry line of the soundboard, and thus its vibrations can be modelled using an equivalent beam.



**Figure 6.1** – Diagram of a clamped-clamped beam connected to several fixed strings. It includes local coordinate systems and the notation used.

### 6.2.2 Transfer Matrix for a uniform sub-structure

In harmonic regime ( $e^{j\omega t}$ ), the vibratory state of each sub-structure (string or beam) of the assembly is described at any point of its neutral line by a state vector denoted by  $\mathcal{X}(x)$  whose components are kinematic and force variables [Pestel & Leckie, 63, Wang & Norris, 95, Moulet, 03]. The same generic name  $x$  is used to denote the space coordinate in the beam and in the strings. It permits us to present in the same manner the motion equations related to beam and to strings. In figure 6.1, the coordinate  $x$  correspond to  $x_b$  for the beam and to  $x_{si}$  for the  $i$ -string. For the  $i$ -string, the state vector is the 4-by-1 vector,

$$\mathcal{X}_s(x) = \begin{pmatrix} u_s(x) \\ w_s(x) \\ N_s(x) \\ Q_s(x) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

where  $u_s, w_s$  are the longitudinal and transversal displacements and  $N_s, Q_s$  are the longitudinal and transversal forces. In the beam, the state vector is the 6-by-1 vector:

$$\mathcal{X}_b(x) = \begin{pmatrix} u_b(x) \\ w_b(x) \\ \theta_b(x) \\ N_b(x) \\ Q_b(x) \\ M_b(x) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

where  $u_b$ ,  $w_b$  and  $\theta_b$  are respectively the longitudinal, transverse displacements and the slope of the beam cross section (figure 6.2) and where  $N_b$ ,  $Q_b$  and  $M_b$  are respectively the longitudinal transverse forces and bending moment. Note that longitudinal displacements are taken into account to ensure kinematic continuities.

The beam and strings bending motions are respectively described in the framework of the elastic string's theory [Valette & Cuesta, 93] and of the Euler-Bernoulli beam model [Gérardin & Rixen, 96]. Extensional motions are described in the framework of classical rod theory [Gérardin & Rixen, 96]. No dissipative phenomena are included. For all these kinematic models, the equations of motion of a sub-structure (beam or string) can be written as a first order differential matrix equation, called state equation,

$$\frac{d\mathcal{X}(x)}{dx} = \mathbf{H}(\omega)\mathcal{X}(x). \quad (6.3)$$

Matrix  $\mathbf{H}(\omega)$  is the characteristic matrix of the sub-structure. Since each sub-structure is supposed to be uniform, the matrix  $\mathbf{H}(\omega)$  is a space invariant matrix depending only on the angular frequency  $\omega$ . The solution of (6.3) can be written [Wang & Norris, 95, Pestel & Leckie, 63] as

$$\mathcal{X}(x) = \mathbf{T}(x, x_0)\mathcal{X}(x_0), \quad (6.4)$$

where  $\mathbf{T}(x, x_0)$  is the transfer matrix between the state vector at point  $x_0$  and the state vector at point  $x$ . This transfer matrix can be straightforwardly determined from matrix  $\mathbf{H}$ . It is given by

$$\mathbf{T}(x, x_0) = \mathbf{E}\mathbf{Q}(x, x_0)\mathbf{E}^{-1}, \quad (6.5)$$

where  $\mathbf{E}$  is the matrix of eigenvectors of matrix  $\mathbf{N}$ , defined by  $\mathbf{H} = j\mathbf{N}$ . Matrix  $\mathbf{E}$  obeys the fundamental relationship,

$$\mathbf{N}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}, \quad (6.6)$$

where  $\mathbf{\Lambda}$  is the diagonal matrix whose terms are the eigenvalues  $((\lambda_k)_{k=1\dots N})$  of the matrix  $\mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_k). \quad (6.7)$$

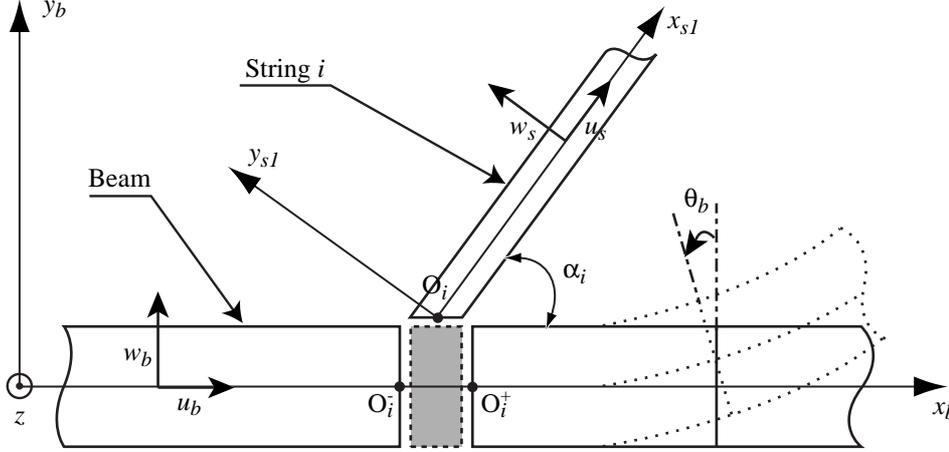
Each eigenvalue  $\lambda_k$  corresponds to a wavenumber. Since the beam and the strings have an axial symmetry, these eigenvalues appear by pairs  $(\lambda_k, -\lambda_k)$  corresponding to wave propagation in two opposite directions. In relation (6.5), the matrix  $\mathbf{Q}(x, x_0)$  is the propagator matrix given by

$$\mathbf{Q}(x, x_0) = \text{diag}\left(e^{j\lambda_k(x-x_0)}\right). \quad (6.8)$$

For beam and string's segments, the expression of the characteristic matrix  $\mathbf{H}(\omega)$  and the transfer matrix  $\mathbf{T}(x, x_0)$  are given in appendices 1 and 2.

### 6.2.3 Coupling equations at beam-string connection point

The connection between the beam and the  $i$ -string is shown in figure 6.2. Points  $\text{O}_i^-$  and  $\text{O}_i^+$  are limit points of the connection volume belonging to the beam's parts. Point  $\text{O}_i$  is the limit point belonging to the  $i$ -string.



**Figure 6.2** – Connection between beam and string including local coordinate system and notations. In grey, the connection volume, supposed to be very small.

Since the connection volume is supposed to be very small, kinematic continuity relations are assumed:

$$u_b(O_i^-) = u_b(O_i^+) \quad (6.9)$$

$$w_b(O_i^-) = w_b(O_i^+) \quad (6.10)$$

$$\theta_b(O_i^-) = \theta_b(O_i^+) \quad (6.11)$$

$$u_s(O_i) = u_b(O_i^+) \cos(\alpha_i) + w_b(O_i^+) \sin(\alpha_i) \quad (6.12)$$

$$w_s(O_i) = -u_b(O_i^+) \sin(\alpha_i) + w_b(O_i^+) \cos(\alpha_i). \quad (6.13)$$

Mass and rotational inertia of the connection volume are ignored, it implies that the sum of the force and of the moment continuity applied to the connection equal zero. Projecting such relations on the local axis ( $x_b, y_b, z$ ) leads to

$$N_b(O_i^+) - N_b(O_i^-) + N_s(O_i) \cos(\alpha_i) - Q_s(O_i) \sin(\alpha_i) = 0 \quad (6.14)$$

$$Q_b(O_i^+) - Q_b(O_i^-) + N_s(O_i) \sin(\alpha_i) + Q_s(O_i) \cos(\alpha_i) = 0 \quad (6.15)$$

$$M_b(O_i^+) - M_b(O_i^-) = 0. \quad (6.16)$$

Using the state vector formalism introduced in (6.1) and (6.2), coupling equations (6.9) to (6.16) can be written on matrix forms as:

$$\mathcal{X}_b(O_i^+) = \mathcal{X}_b(O_i^-) + K_i \mathcal{X}_s(O_i) \quad (6.17)$$

and

$$L \mathcal{X}_s(O_i) + M_i \mathcal{X}_b(O_i^+) = 0, \quad (6.18)$$

where

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$K_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrices  $L$  and  $M_i$  are called continuity matrices. The matrix  $K_i$  is a coupling matrix, depending on the connection angle  $\alpha_i$ , which is responsible for the coupling between longitudinal and transverse motions in each string and in the beam.

#### 6.2.4 Modes of the assembly

The state vector at one point of the assembly depends on the state vector on its boundary points:  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ , ...,  $C_N$ . For these particular points, the number of state vector components is  $12+4N$ : 12 for the beam state vectors ( $\mathbf{x}_b(A)$  and  $\mathbf{x}_b(B)$ ) and  $4N$  for the  $N$  string state vectors ( $\mathbf{x}_s(C_1)$ , ...,  $\mathbf{x}_s(C_i)$ ). Half of these  $12+4N$  state vector components are imposed by boundary conditions. In the case of the clamped beam and of the fixed strings ends that are considered here, every kinematic variables, indicated by index  $k$  (displacements and slopes), are set to zero. Forces variables, indicated by index  $f$  (forces and moments) are unknown and do not equal zero. Equations of the assembly impose  $6+2N$  transfer relations between the  $6+2N$  components of the boundary state vectors.

A first set of  $2N$  equations is given by the following relation, proved in appendix 3, for  $i = 1 \dots N$ ,

$$LT_s(O_i, C_i)\mathbf{x}_s(C_i) + M_i T_b(O_i^+, A)\mathbf{x}_b(A) + \sum_{j=1}^i [M_i T_b(O_i^-, O_j^+) K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)] = 0. \quad (6.19)$$

A second set of 6 equations is obtained when the transfer relation between state vectors  $\mathbf{x}_b(O_N^+)$  and  $\mathbf{x}_b(B)$ , given by

$$\mathbf{x}_b(O_N^+) = T(x_{O_N}, x_B)\mathbf{x}_b(B), \quad (6.20)$$

is associated to the recurrence relation (6.44), leading to:

$$\mathbf{x}_b(A) - T_b(A, B)\mathbf{x}_b(B) + \sum_{j=1}^N [T_b(A, O_j^+) K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)] = 0. \quad (6.21)$$

The set of  $6+2N$  independent scalar relations given above may be written in matrix form as:

$$R \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b(A) \\ \mathbf{x}_b(B) \\ \mathbf{x}_s(C_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(C_N) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline R_3 & R_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b(A) \\ \mathbf{x}_b(B) \\ \mathbf{x}_s(C_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(C_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

where

$$R_1 = \begin{pmatrix} I_6 & -T_b(A, B) \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} T_b(A, O_1^+)K_1T_s(O_1, C_1) & \cdots & T_b(A, O_N^+)K_NT_s(O_N, C_N) \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} M_1T_b(O_1^+, A) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ M_NT_b(O_N^+, A) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} LT_s(O_1, C_1) & 0 & 0 \\ M_2T_b(O_2^-, O_1^+)K_1T_s(O_1, C_1) & LT_s(O_2, C_2) & 0 \\ M_3T_b(O_3^-, O_1^+)K_1T_s(O_1, C_1) & M_3T_b(O_3^-, O_2^+)K_2T_s(O_2, C_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ M_NT_b(O_N^-, O_1^+)K_1T_s(O_1, C_1) & M_NT_b(O_N^-, O_2^+)K_2T_s(O_2, C_2) & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & LT_s(O_{N-1}, C_{N-1}) & 0 \\ \cdots & M_NT_b(O_N^-, O_{N-1}^+)K_{N-1}T_s(O_{N-1}, C_{N-1}) & LT_s(O_N, C_N) \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Thus, the  $12+4N$ -by-1 vector of state vectors at the ends, explicated in the relation (6.22), can be written on the following form taken into account the components set to zero because of boundary conditions:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_b(A) \\ \mathbf{x}_b(B) \\ \mathbf{x}_s(C_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(C_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b^k(A) \\ \mathbf{x}_b^f(A) \\ \mathbf{x}_b^k(B) \\ \mathbf{x}_b^f(B) \\ \mathbf{x}_s^k(C_1) \\ \mathbf{x}_s^f(C_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s^k(C_N) \\ \mathbf{x}_s^f(C_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_b^f(A) \\ 0 \\ \mathbf{x}_b^f(B) \\ 0 \\ \mathbf{x}_s^f(C_1) \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{x}_s^f(C_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0_3 \\ I_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0_3 & 0_3 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0_3 & I_3 & 0_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0_2 & 0_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & I_2 & 0_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & \cdots & 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b^f(A) \\ \mathbf{x}_b^f(B) \\ \mathbf{x}_s^f(C_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s^f(C_N) \end{pmatrix} = Z\mathbf{x}^f, \quad (6.27)$$

where  $\mathbf{x}^f$  denotes the force variables of all state vectors at the boundaries. Therefore,  $6+2N$  relations remain along with the  $6+2N$  unknown variables of state vectors and may be written as

$$(R \cdot Z)\mathbf{x}^f = R_R\mathbf{x}^f = 0. \quad (6.28)$$

	<b>E<sub>2</sub> string</b>	<b>E<sub>3</sub> string</b>	<b>Beam</b>
Length	$L_s = 0.57$ m		$L_b = 1.315$ m
Young Modulus	$E_s = 210$ GPa		$E_b = 71$ GPa
Section	$A_1 = 1.41$ mm <sup>2</sup>	$A_2 = 0.45$ mm <sup>2</sup>	$A_b = 20 \times 8$ mm <sup>2</sup>
Mass per unit length	$\rho_1 = 11 \cdot 10^{-3}$ kg/m	$\rho_2 = 3.7 \cdot 10^{-3}$ kg/m	$\rho_b = 0.416$ kg/m
Frequency	$f_1 = 82.4$ Hz	$f_2 = 164.8$ Hz	
Angle	$\alpha_1 = -43^\circ$	$\alpha_2 = 43^\circ$	
Connection points	A O <sub>1</sub> = 0.54 m	A O <sub>2</sub> = 0.58 m	

**Table 6.1** – Parameters values of the beam-2 strings assembly.

In the case of free vibrations, vector  $\mathcal{X}^f$  is not equal to zero and the matrix  $R_R$  is not an inversible matrix, implying:

$$\det(R_R(\omega)) = 0. \quad (6.29)$$

The angular eigenfrequencies  $\omega_i$  of the system are obtained from equation (6.29). For each  $\omega_i$ , relation (6.28) provides the components of  $\mathcal{X}^f$  (with an unknown multiplicative factor) from which we can perform all state vector components at any point on the assembly by equations (6.44) and (6.20) and thus obtain the associated mode shape.

## 6.3 The beam-2 Strings assembly case

Using the beam- $N$  strings model presented in section 6.2, a numerical application is carried out in the case of the beam-2 strings assembly and validated by an experimental modal analysis.

### 6.3.1 Description

The structure used in experimental and theoretical studies is presented in figure 6.3. It is composed of 2 strings tuned on octave (the frequency of one almost equals the double of the other one's) at  $E_2=82.4$  Hz and  $E_3=164.8$  Hz on the equal temperament scale based on  $A_4=440$  Hz. Note that such values correspond to fundamental frequencies of uncoupled strings, allowing to determine the string's tension if we assume that the beam behaves like a fixed end. In order to avoid static deformation of the beam during the experiment, we choose to fix the strings not only on either side of the beam but also close to each other, (figure 6.3). The strings and beam characteristics used in the numerical applications are presented in table 6.1.

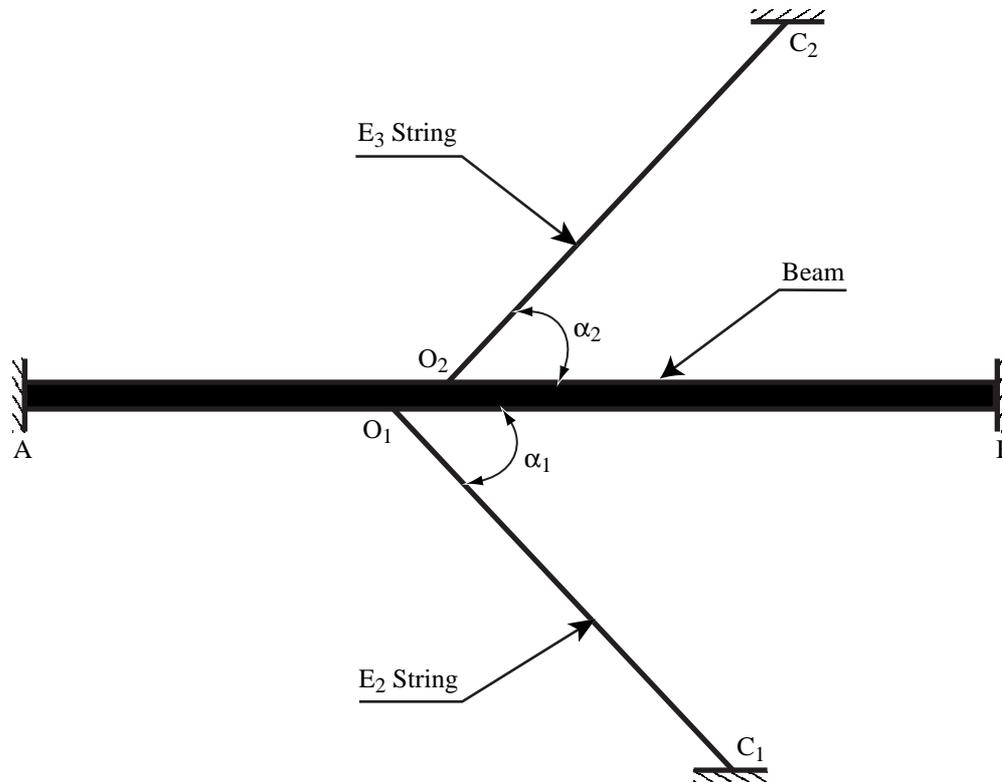


Figure 6.3 – Diagram of beam-2 strings tuned on octave.

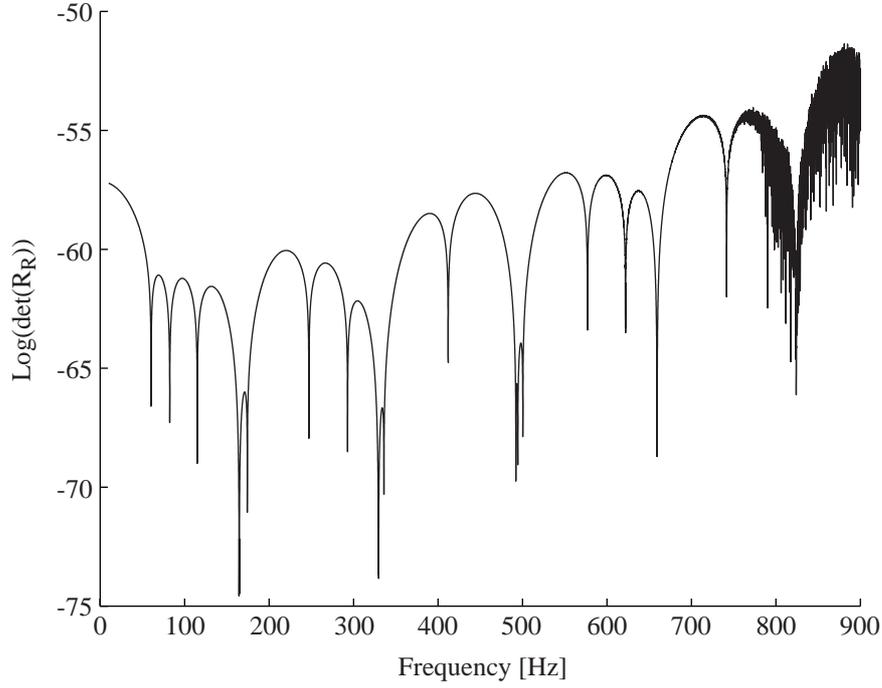
## 6.3.2 Numerical results

### 6.3.2.1 Eigenfrequencies

Eigenfrequencies of the structure are computed from equation (6.29). The logarithm of matrix  $R_R$  determinant is shown in figure 6.4 as a function of frequency. Eigenfrequencies are given by each drop of the curve. We thus obtain 14 eigenfrequencies in the frequency range 0-500 Hz, shown in table 6.2. For high frequencies, above 750 Hz, a numerical divergence occurs in the calculation of this determinant. As the frequency increases, the matrix  $R_R$  becomes ill-conditioned because of exponential terms with real argument present in the propagator matrix  $Q$ , defined by (6.8). This limitation of the transfer matrix method is well known and discussed, for example, in [Pestel & Leckie, 63].

### 6.3.2.2 Modes shapes and orthogonality check

For each eigenfrequency, we perform mode shapes of the structure. Table 6.2 shows the eigenfrequencies of modes and in figure 6.6-A are presented the corresponding mode shapes. Note that because of the transfer matrix method's frequency limitation, only transversal modes are obtained (the first longitudinal mode is about 2000 Hz for a clamped beam with the same characteristics as for the coupled one). To verify the validity of our calculation, we perform an orthogonality test of the modal



**Figure 6.4** – *Logarithm of the  $R_R$  matrix determinant as function of frequency. Each drop corresponds to an eigenfrequency.*

basis using the dot product matrix of modes. This i-by-j Dot Product Matrix can be explicitated for each term,

$$DPM(i, j) = \frac{\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle}{\sqrt{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle} \sqrt{\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle}}, \quad (6.30)$$

where vector  $\Phi_i$  is the mode shape  $i$ ,

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_i \quad (6.31)$$

whose components are longitudinal and transversal displacements, and where the dot product is defined [Gérardin & Rixen, 96] by

$$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = \int_{\mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} \Phi_i^T(x) \Phi_j(x) dx. \quad (6.32)$$

The dot product between modes  $i$  and  $j$  for a conservative structure ( $\mathcal{S}$ ) equals one when  $i = j$  and otherwise equals zero. This is illustrated in figure 6.5, which shows the orthogonality of modes.

### 6.3.2.3 Definition of the criterion for modes classification

In order to classify modes of the assembly, we define an indicator, called kinetic energy ratio ( $KER$ ), allowing us to determine in which sub-structure the modal shape displacement is the most important. Each sub-structure is indexed by  $k$ :  $k=0$  for the beam,  $k=1$  for the  $E_2$  string and  $k=2$  for the  $E_3$

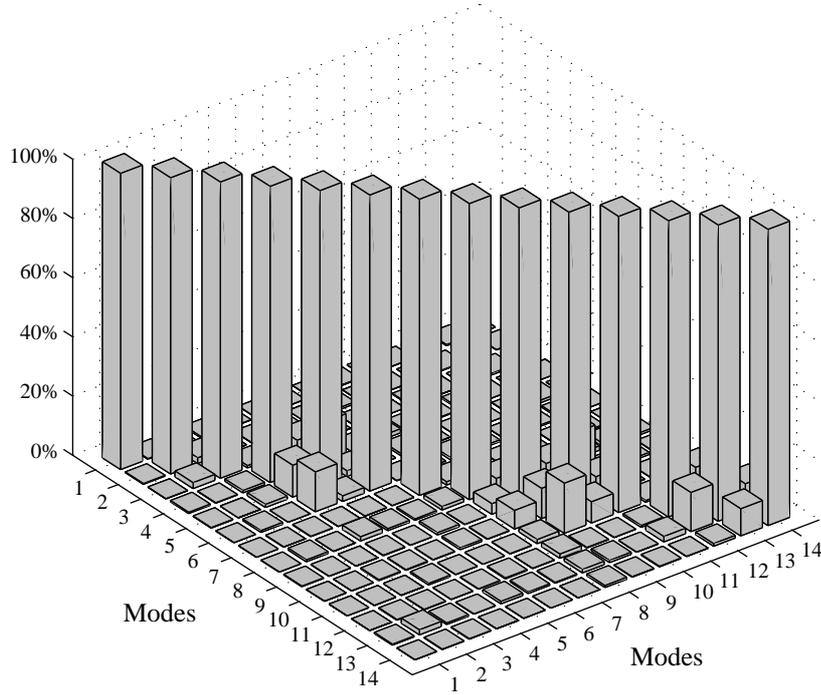


Figure 6.5 – Dot product matrix for the 14 first theoretical modes of the assembly.

string. For each mode  $\Phi_j$ , we define

$$KER_j(k) = \frac{\int_k \rho_k \omega_j^2 \Phi_j^T(x) \Phi_j(x) dx}{\sum_{r=1}^3 \int_r \rho_r \omega_j^2 \Phi_j^T(x) \Phi_j(x) dx} = \frac{\int_k \rho_k \Phi_j^T(x) \Phi_j(x) dx}{\sum_{r=1}^3 \int_r \rho_r \Phi_j^T(x) \Phi_j(x) dx} \quad (6.33)$$

where  $\rho_k$  is the mass per unit length of the sub-structure and  $x$  is the generic space variable defined in the section 6.2.

#### 6.3.2.4 Modes classification

Modes of the studied structure are classified in four families depending on the relative importance of  $KER$  for each sub-structure. This classification is qualitative. Note that an arbitrary threshold on criterion  $KER$  could be defined to fix this classification in a quantitative manner.

- Modes 1, 3, 6, 8, 11, 13 are beam modes: beam  $KER$  is one order higher than the string  $KER$  therefore the beam is the predominant sub-structure. If we compare beam modes (table 6.2 left column) to uncoupled beam modes (middle column), we notice that the beam-string coupling increases the beam mode's eigenfrequencies: each string acts as a stiffener [Oniszczyk, 02]. Moreover, the first eigenfrequencies of an uncoupled beam constrained by no displacement at the positions of string supports (table 6.2 right column) have the same order of magnitude than

Mode $j$	Freq. (Hz)	KER $_j(k)$			Kind of mode	Uncoupled freq. (Hz)			
		$k=0$	$k=1$	$k=2$		Beam*	E <sub>2</sub> String	E <sub>3</sub> String	Beam**
1	60.25	100	0	0	<b>Beam</b>	24.85			76.98
2	82.35	0	100	0	<b>String</b>		82.40		
3	114.95	100	0	0	<b>Beam</b>	68.50			141.18
4	164.45	6	25	69	<b>String-String</b>		164.80	164.80	
5	164.80	0	63	37	<b>String-String</b>				
6	174.20	99	0	1	<b>Beam</b>	134.30			212.72
7	247.10	0	100	0	<b>String</b>		247.20		
8	292.95	99	1	0	<b>Beam</b>	222.00			389.34
9	329.30	11	0	89	<b>Beam-String</b>	331.60	329.60	329.60	418.72
10	329.70	3	97	0	<b>String</b>				
11	335.95	97	0	3	<b>Beam</b>	331.60			418.72
12	412.00	2	98	0	<b>String</b>		412.00		
13	492.10	91	9	0	<b>Beam</b>	463.15			690.04
14	494.40	1	25	74	<b>String-String</b>		494.40	494.40	

**Table 6.2** – Mode number, eigenfrequencies, kinetic energy ratio ( $k=0$  for the Beam,  $k=1$  for the E<sub>2</sub> string and  $k=2$  for the E<sub>3</sub> string) and kinds of modes computed for the beam-2 strings assembly (left column). Eigenfrequencies of uncoupled sub-structures (beam\*, E<sub>2</sub> string, E<sub>3</sub> string) with same characteristics as for coupled ones (middle column). Eigenfrequencies of beam constrained by nodes at the positions of string supports (denoted beam\*\*), obtained by FEM (right column).

those of the beam modes (left column). It indicates that strings approximatively behave as rigid supports. However, the discrepancies between the two sets of eigenfrequencies are all the more important as the frequency is high, and show the importance of the beam-string coupling.

- Modes 2, 7, 10, 12 are string modes: E<sub>2</sub> or E<sub>3</sub> string *KER* is one order higher than the two other *KER* therefore one string is the predominant sub-structure. In table 6.2, string mode frequencies are slightly affected by the beam. This shows that the beam almost behaves like a fixed end for the strings.
- Modes 4, 5, 14 are string-string modes: both string *KER* are of the same order and one order higher than beam *KER*, therefore the two strings are at the same time the predominant sub-structures. Modes 4 and 5 almost correspond to the first mode of the E<sub>3</sub> string and the second mode of the E<sub>2</sub> string. The difference is the relative phase between strings: for mode 4, the two strings are in phase at their connection point on the beam, whereas they are out of phase for mode 5 (figure 6.6-A). This explains the small shift of frequency and the lower participation of the beam for mode 5. Mode 14 corresponds to the third mode of the E<sub>3</sub> string and the sixth mode of the E<sub>2</sub> string. The out of phase corresponding mode cannot be found because of the

frequency limitation of our model.

- Mode 9 is a beam-string mode: both beam  $KER$  and  $E_3$  string  $KER$  are much higher than  $E_2$  string  $KER$  therefore beam and  $E_3$  string are the predominant sub-structures. Note that in association with mode 10, this mode should be expected to be a coupled string-string mode, corresponding to the second mode of the  $E_3$  string and the fourth mode of the  $E_2$  string.

### 6.3.2.5 Definition of the sympathetic mode

We define the string-string mode as the *Sympathetic Mode* where strings  $KER$  have the same order of magnitude and are much higher than the beam  $KER$ . This qualitative definition of the sympathetic mode is consistent with the musician's definition of sympathetic vibrations: when one string is excited another string vibrates. Actually, according to the modal superposition principle [Gérardin & Rixen, 96], the response of the structure in the time domain can be obtained by summing the response of all modes,

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{pmatrix} = \sum_j a_j \Phi_j(x) \cos(\omega_j t), \quad (6.34)$$

where  $t$  is the time and  $a_j$  is the modal amplitude depending on the initial condition

$$a_j = \langle \mathbf{q}(x, 0), \Phi_j \rangle = \int_S \rho_S \begin{pmatrix} u(x, 0) \\ w(x, 0) \end{pmatrix}^T \Phi_j dx. \quad (6.35)$$

The initial velocities equalling zero, terms on the form  $\sin(\omega_j t)$  do not exist in (6.34) as they would be expected to, in the general case. The initial shape  $w(x, 0)$  of a string is given by figure 6.7 in the case of string plucking. If this shape is such that  $a_j$  does not equal zero, mode  $j$  is excited. If this mode is a sympathetic mode, both strings will be excited at the same time and the ratio of energy in each string is given by the  $KER$ .

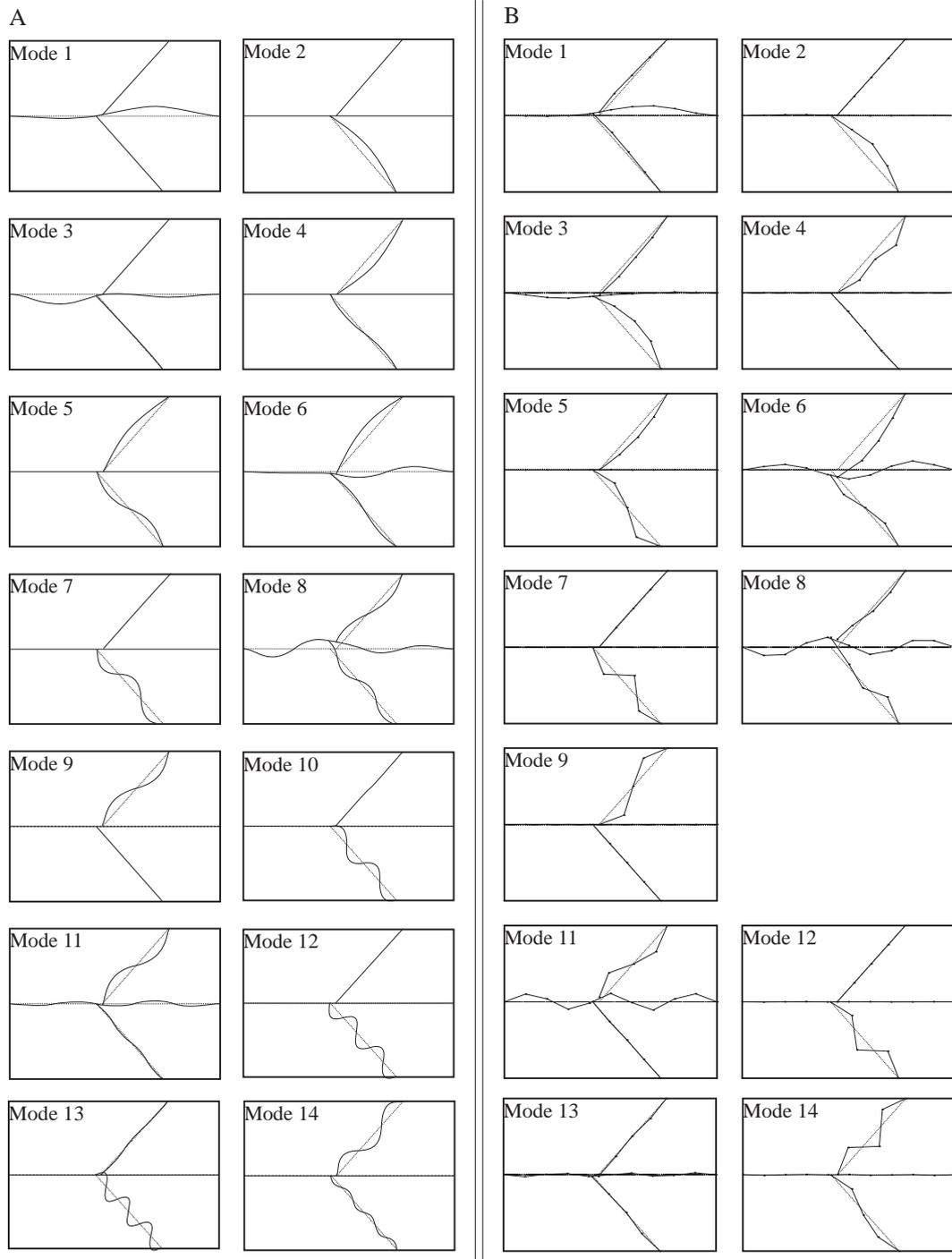
## 6.3.3 Experimental modal analysis

### 6.3.3.1 Description of the experimental setup

The beam-2 strings assembly presented in figure 6.3 is studied by modal testing in order to confirm theoretical results.

The experimental setup is shown in figure 6.8. The beam is clamped onto a frame filled with sand to avoid interference with assembly modes. The steel strings are fixed, on one side, by a ring stuck in the beam, and on the other side, by a guitar tuning machine fixed on the frame. A guitar tuning machine is used to tune the strings at  $E_2$  and  $E_3$ .

The experimental modal testing consists in measuring the frequency response functions between velocity and applied force at different points on the structure. From these data, we may extract



**Figure 6.6** – *A-Theoretical mode shapes obtained by transfer matrix method. Mode number is associated to eigenfrequencies shown in table 6.2. B-Experimental mode shapes obtained by modal analysis on 11 measurement points on the beam and 3 on the string. Eigenfrequency of modes are shown in table 6.3.*

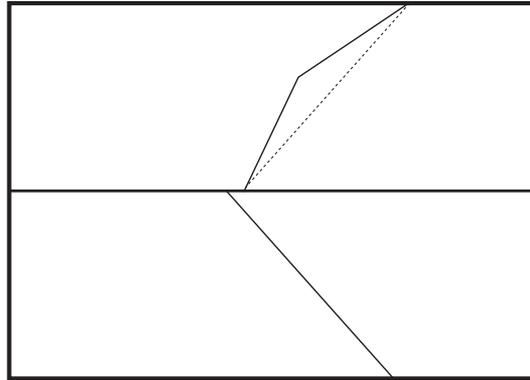


Figure 6.7 –  $E_3$  string initial shape  $w_s(x,0)$  obtained by plucking.

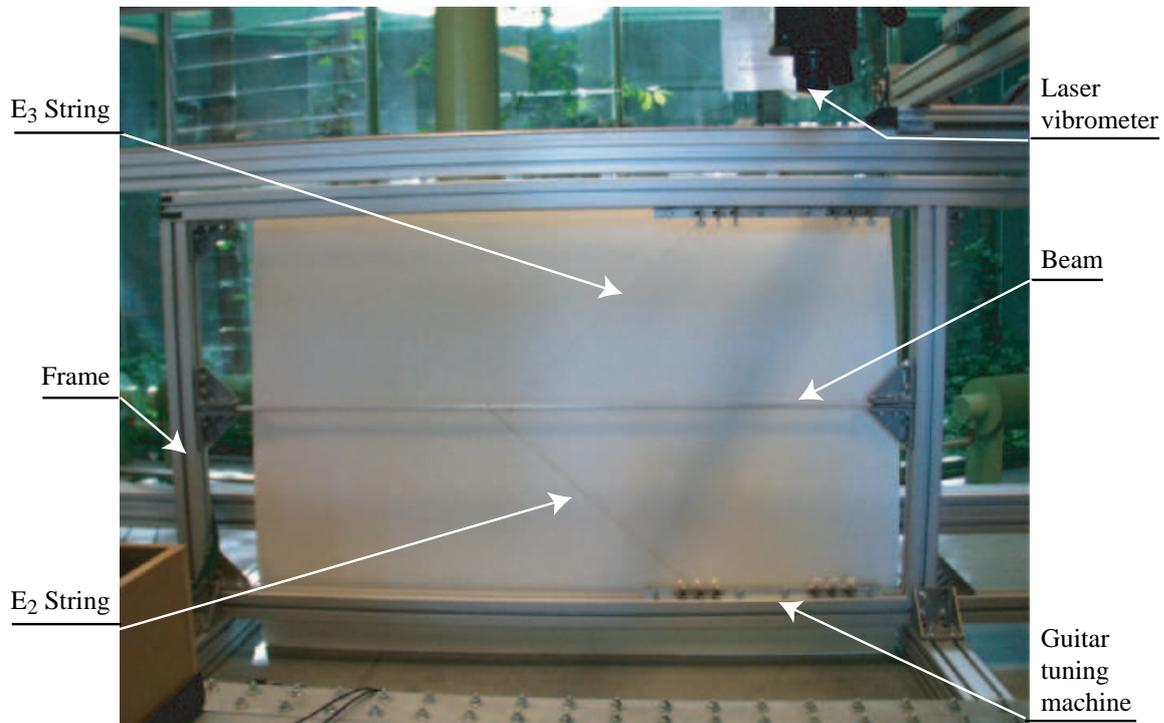


Figure 6.8 – Experimental setup showing the beam-2 strings assembly and the moving laser vibrometer.

eigenfrequencies, mode shapes and damping parameters of the studied structure using the Least Square Complex Exponential Method [Ewins, 94] as implemented in LMS software.

Because it is difficult to hit a string with a hammer, the hammer is used on one point of the beam to excite our system while a laser vibrometer measures the velocity response at all points: 11 on the beam and 3 on each string.

Mode $j$	Freq. (Hz)	KER $_j(k)$			Kind of mode
		$k=0$	$k=1$	$k=2$	
1	52.01	100	0	0	<b>Beam</b>
2	82.70	21	79	0	<b>Beam-String</b>
3	86.31	88	12	0	<b>Beam-String</b>
6	135.30	98	1	1	<b>Beam</b>
4	165.10	6	1	93	<b>String</b>
5	167.00	0	85	14	<b>String-String</b>
8	218.45	99	1	0	<b>Beam</b>
7	250.16	3	97	0	<b>String</b>
11	314.42	99	0	1	<b>Beam</b>
9	330.24	0	0	100	<b>String</b>
12	418.04	1	99	0	<b>String</b>
13	442.09	99	1	0	<b>Beam</b>
14	496.10	14	35	50	<b>Beam-String-String</b>

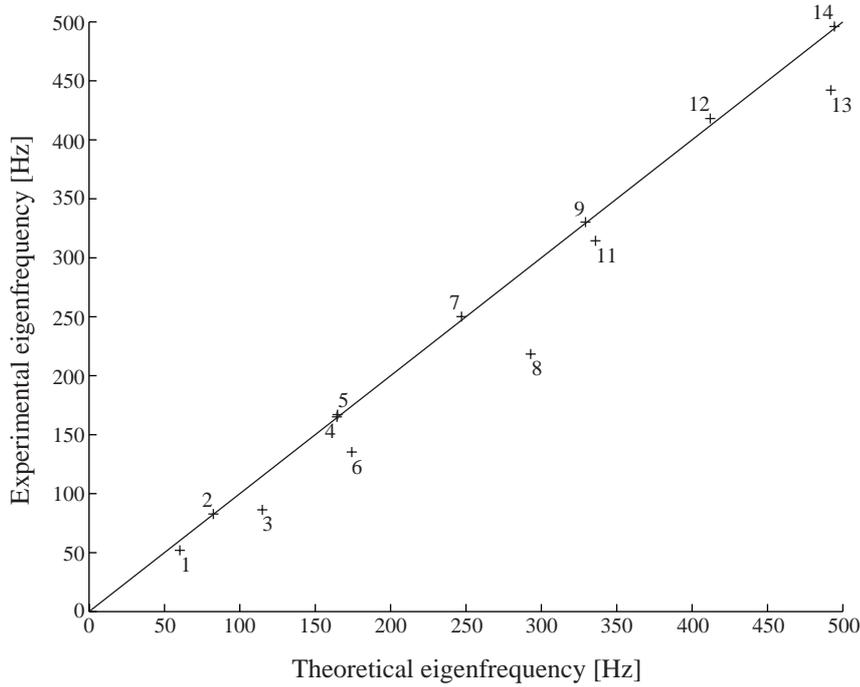
**Table 6.3** – *Experimental eigenfrequencies, kinetic energy ratio and kinds of modes obtained by modal analysis for 2 strings connected to the beam.*

### 6.3.3.2 Results

In table 6.3, the eigenfrequencies resulting from the modal analysis are presented in frequency range 0-550 Hz. In order to compare experimental eigenfrequencies with theoretical ones, we plot experimental against theoretical values, in figure 6.9. Each number of experimental mode corresponds to the number of the associated theoretical mode, obtained by studying mode shapes, (figure 6.6). Note that, in table 6.3, a theoretical mode is missing, mode 10. We suggest that this problem is due to E<sub>2</sub> string measurements. In figure 6.9, we show that there is a good agreement between measured and theoretical modes: the average difference is about 8% with a maximum of about 25% for modes 3 and 8. However, a slight frequency deviation exists for beam modes and this suggests that the ideal clamped end condition is not well satisfied in practice.

For each measured mode, the criterion  $KER$ , defined by equation (6.33), is also computed from the mode shape and then the kind of mode is determined. For the last modes, mode 12 to 14, the two strings  $KER$  are questionable because of few measurement points on strings, as shown in figure 6.6-B, and will not be discussed. Four kinds of mode are also obtained and particularly, string-string modes, although only one string-string mode has been extracted: mode 4.

The good agreement between experimental and theoretical results shows that the transfer matrix method is a valuable approach for the vibratory behaviour of the studied structure, and validates the proposed modes categorization.



**Figure 6.9** – *Experimental eigenfrequencies as a function of theoretical eigenfrequencies. Mode number correspond to table 6.2 theoretical results and table 6.3 experimental results.*

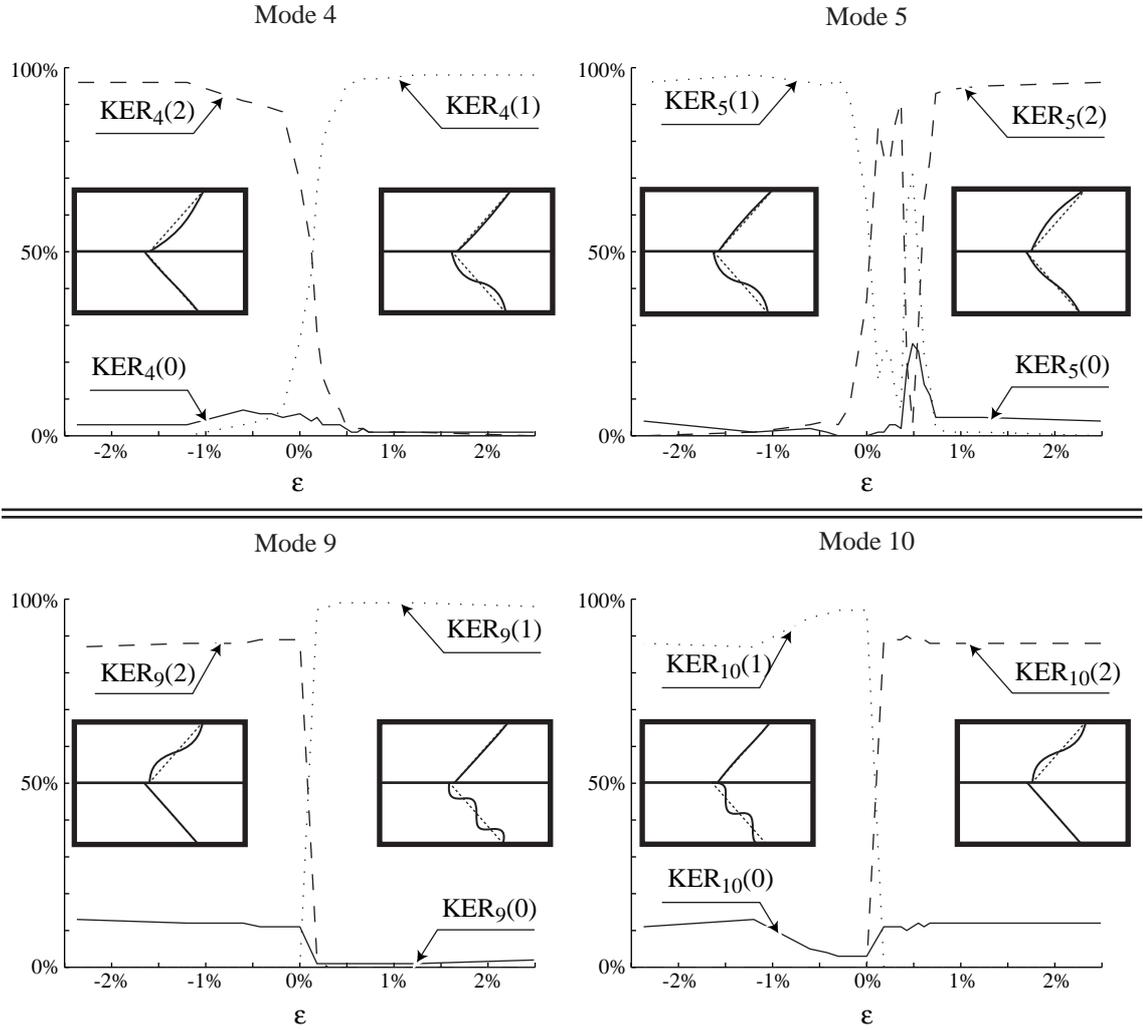
### 6.3.4 Influence of inharmonicity on string-string mode

In order to investigate the sympathetic behaviour of the beam-2 strings model, we study the influence of the inharmonicity of the two strings on the *KER* criterion of string-string modes. Inharmonicity quantifies how out-of-tune the strings are and is defined by

$$\epsilon = \frac{f_2 - 2f_1}{2f_1}, \quad (6.36)$$

where  $f_1$  and  $f_2$  are the fundamental frequencies of the uncoupled  $E_2$  and  $E_3$  strings. For this study, we fix  $f_2$  ( $f_2 = 164.8$  Hz) and only  $f_1$  is modified (from  $f_1 = 80.4$  Hz to  $f_1 = 84.4$  Hz). For a set of strings pair's frequencies, modes of the assembly are performed, by using the theoretical approach given section 6.2, and kinetic energy ratio of each sub-structure for four modes are computed, see figure 6.10. Moreover we show the evolution of mode shapes for two inharmonicities:  $\epsilon = -0.6\%$  and  $\epsilon = 0.6\%$  which respectively correspond to  $f_1 = 82.9$  Hz and  $f_1 = 81.9$  Hz. These mode shapes allow us to link the kinetic energy ratio to its implications for string-string modes when inharmonicity differs from zero.

In figure 6.10, the case studied in section 6.3 can be seen when the two strings are tuned on octave,  $\epsilon = 0$ , and the kinetic energy ratios of the two strings do not equal: 25% and 69% for  $E_2$  string and  $E_3$  string respectively in the case of mode 4, 43% and 37% in the case of mode 10, 0% and 89% in the case of mode 9 and 97% and 0% in the case of mode 10. To obtain equal kinetic energy ratio for



**Figure 6.10** – kinetic energy ratio,  $KER_j(k)$  for each sub-structure  $k$  ( $k = 0$  for the beam,  $k = 1$  for the  $E_2$  string and  $k = 2$  for the  $E_3$  strings) in relation to inharmonicity ( $\epsilon = \frac{f_2 - 2f_1}{2f_1}$ ) on modes 4, 5, 9 and 10. The two mode shapes corresponding to  $\epsilon = -0.6\%$  ( $f_1 = 82.9$  Hz) on the left and  $\epsilon = 0.6\%$  ( $f_1 = 81.9$  Hz) on the right of each curves are shown.

the two strings (close to 50%), the inharmonicity value is approximatively 0.25% which corresponds in musical scale at 4 cents. In order to have the two strings taking an equal part in the sympathetic mode, they must be 4 cents out-of-tune. Note that this value is obtained for curves which have the same aspect, modes 4, 9 and 10, but also for mode 5's curve which is more disrupted. Actually, for this mode there are three values in the case of equipartition of the strings's kinetic energy ratios as shown in figure 6.10.

For modes 4, 5, 9, 10, the strings's  $KER$  have the same evolution: while one of the strings's  $KER$  goes from 0% to 100% the other one goes from 100% to 0%. When the strings's  $KER$  switch, they have the same order of magnitude and thus the string-string mode may appear. Inharmonicity range

of the strings's *KER* switch is different for each mode: mode 4 and 5 ranges are larger than mode 9 and 10. This fact can explain why in the case studied in section 6.3,  $\epsilon = 0$ , string-string modes are not obtained for mode 9 and 10, section 6.3.2.4, for the strings are not exactly 4 cents out-of-tune.

Note that the beam can play an important part in the string-string mode. Actually, for mode 5, the coupling with the beam is simultaneous with the strings's *KER* switch. Thus, at the switching moment it may be obtained not only sympathetic modes but also a beam-string mode.

## 6.4 Conclusion

In order to consider the sympathetic phenomenon, an analytical model of a generic string instrument, composed of a beam- $N$  strings assembly, has been studied by means of the transfer matrix approach, then the modal basis has been derived. A simplified system, a beam-2 strings assembly, has been extensively analysed. One string being tuned on octave away from the other ( $E_2$  and  $E_3$ ), several specific modes called "string-string modes" among three other kinds of modes, are extracted from the modal basis. The modes have been analysed and classified through the comparison of the kinetic energy ratio of each sub-structure ( $E_2$  string,  $E_3$  string and beam). String-string modes are responsible for the sympathetic phenomenon.

Furthermore, the modal basis of the beam-2 strings assembly has been extracted by measurements. A good agreement between eigenfrequencies and mode shapes is highlighted through theoretical results and experiments. Experimental results have been interpreted in terms of kind of modes previously given, and string-string modes have been observed. Moreover we have focussed our attention on the theoretical influence of string's inharmonicity on the string-string mode. On one hand, it is noticeable that the particular case of null inharmonicity between the two strings, does not correspond to the equipartition of the string's kinetic energy ratios. On the other hand, the inharmonicity range in which the string-string mode exists, when that the two string's kinetic energy ratios have the same order of magnitude, is narrow.

The model is one-dimensional and this fact is the main restriction for direct application to a real string instrument. Other limitations are related to the conservative hypothesis, that is retained for the normal mode computation. Moreover, torsional motions of the strings are not taken into account. The limitation of the method is the numerical difficulties of the transfer matrix method which occur at high frequencies.

The method and the results that we have presented are applicable to systems with many strings comparable to real string instruments, such as the harp. Harp players are annoyed by the acoustic consequence of the sympathetic phenomenon caused by the high number of strings. A question is, how can this annoyance be reduced? A way to investigate this problem is to do time domain simulations based on the modal basis of the string instrument, and to show the influence of string-string modes on the radiated sound, for instance. A parametric study of the different characteristics of the simplified instrument can be carried out to see their influence on string-string modes.

## Appendix 1: Transfer matrix of a string's segment

Each string is considered as perfectly flexible and stretched at tension  $T_0$  made from a material whose Young's modulus is  $E_s$  and mass per unit length is  $\rho_s$ . The area of the cross section is denoted  $A_s$ . Strings are submitted to longitudinal and transverse displacements described by the equations of motion given by rod's theory and by string's theory [Valette & Cuesta, 93]. These equations may be written in state form (6.3), in which the characteristic matrix, is given by

$$\mathbf{H}_s(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/E_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/T_0 \\ -\rho_s \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_s \omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

and is associated to the state vector (6.1). Calculation of the eigenvalues of matrix  $\mathbf{N}_s = -j\mathbf{H}_s$  provides the wavenumbers of the longitudinal and transverse waves travelling in the strings:  $k_l$ ,  $-k_l$ ,  $k_t$ ,  $-k_t$ , where

$$k_l = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{E_s A_s}} \quad \text{and} \quad k_t = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{T_0}}. \quad (6.38)$$

Transfer matrix between points at coordinates  $x$  and  $x_0$  is obtained from relation (6.5) as

$$\mathbf{T}_s(x, x_0) = \begin{pmatrix} T_{s11}(x, x_0) & 0 & T_{s13}(x, x_0) & 0 \\ 0 & T_{s22}(x, x_0) & 0 & T_{s24}(x, x_0) \\ T_{s31}(x, x_0) & 0 & T_{s11}(x, x_0) & 0 \\ 0 & T_{s42}(x, x_0) & 0 & T_{s22}(x, x_0) \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

where

$$\begin{aligned} T_{s11}(x, x_0) &= \cos(k_l(x - x_0)), & T_{s13}(x, x_0) &= \frac{k_t}{\rho_s \omega^2} \sin(k_t(x - x_0)), \\ T_{s22}(x, x_0) &= \cos(k_f(x - x_0)), & T_{s24}(x, x_0) &= \frac{k_f}{\rho_s \omega^2} \sin(k_f(x - x_0)), \\ T_{s31}(x, x_0) &= -\frac{\rho_s \omega^2}{k_t} \sin(k_t(x - x_0)), & T_{s42}(x, x_0) &= -\frac{\rho_s \omega^2}{k_f} \sin(k_f(x - x_0)). \end{aligned}$$

## Appendix 2: Transfer matrix of a beam's segment

The beam is supposed to be prismatic and made from material whose Young's modulus is  $E_b$  and mass per unit length is  $\rho_b$ . The area of the cross section is  $A_b$  and the second moment of area is  $I$ . Transverse and longitudinal motions of the beam are respectively described using Euler-Bernoulli theory and rod's theory [Gérardin & Rixen, 96]. Using state vector formalism, the equations of motion

can be written on the form (6.3), in which the characteristic matrix is given by

$$H_b(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/E_b A_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_b I \\ -\rho_b \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_b \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Bending and longitudinal waves propagate with wavenumbers  $k_b$ ,  $-k_b$ ,  $jk_b$ ,  $-jk_b$ ,  $k_r$ ,  $-k_r$ , where

$$k_b = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\rho_b}{E_b I}} \quad \text{and} \quad k_r = \omega \sqrt{\frac{\rho_b}{A_b E_b}}. \quad (6.41)$$

These six values are the eigenvalues of matrix  $N_b = -jH_b$ . Calculation of the associated eigenvectors gives the transfer matrix from relation (6.4). It is convenient to introduce the Duncan's functions [Gérardin & Rixen, 96], defined by the relations, in which  $\xi$  is a real parameter,

$$\begin{aligned} s_1(\xi) &= \sin(\xi) + \sinh(\xi) \\ c_1(\xi) &= \cos(\xi) + \cosh(\xi) \\ s_2(\xi) &= -\sin(\xi) + \sinh(\xi) \\ c_2(\xi) &= -\cos(\xi) + \cosh(\xi), \end{aligned} \quad (6.42)$$

to express the transfer matrix,

$$T_b(x, x_0) = \begin{pmatrix} T_{b11}(x, x_0) & 0 & 0 & T_{b14}(x, x_0) & 0 & 0 \\ 0 & T_{b22}(x, x_0) & T_{b23}(x, x_0) & 0 & T_{b25}(x, x_0) & T_{b26}(x, x_0) \\ 0 & T_{b32}(x, x_0) & T_{b22}(x, x_0) & 0 & T_{b35}(x, x_0) & T_{b36}(x, x_0) \\ T_{b41}(x, x_0) & 0 & 0 & T_{b11}(x, x_0) & 0 & 0 \\ 0 & T_{b52}(x, x_0) & T_{b53}(x, x_0) & 0 & T_{b22}(x, x_0) & T_{b56}(x, x_0) \\ 0 & T_{b62}(x, x_0) & T_{b63}(x, x_0) & 0 & T_{b65}(x, x_0) & T_{b22}(x, x_0) \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

After calculations, we find:

$$\begin{aligned} T_{b11}(x, x_0) &= \cos(k_t(x - x_0)), & T_{b14}(x, x_0) &= \frac{1}{k_t E_b A_b} \sin(k_t(x - x_0)), \\ T_{b22}(x, x_0) &= \frac{1}{2} c_1(k_f(x - x_0)), & T_{b23}(x, x_0) &= \frac{k_f^3 E_b I}{2 \rho_b \omega^2} s_1(k_f(x - x_0)), \\ T_{b25}(x, x_0) &= -\frac{k_f}{2 \rho_b \omega^2} s_2(k_f(x - x_0)), & T_{b26}(x, x_0) &= -\frac{k_f^2}{2 \rho_b \omega^2} c_2(k_f(x - x_0)), \\ T_{b32}(x, x_0) &= \frac{\rho_b \omega^2}{2 k_f^3 E_b I} s_2(k_f(x - x_0)), & T_{b35}(x, x_0) &= -\frac{1}{2 k_f^2 E_b I} c_2(k_f(x - x_0)), \\ T_{b36}(x, x_0) &= \frac{1}{2 k_f E_b I} s_1(k_f(x - x_0)), & T_{b41}(x, x_0) &= -A_b E_b k_t \sin(k_t(x - x_0)), \\ T_{b52}(x, x_0) &= -\frac{\rho_b \omega^2}{2 k_f} s_1(k_f(x - x_0)), & T_{b53}(x, x_0) &= -\frac{k_f^2 E_b I}{2} c_2(k_f(x - x_0)), \\ T_{b56}(x, x_0) &= -\frac{k_f}{2} s_2(k_f(x - x_0)), & T_{b62}(x, x_0) &= \frac{\rho_b \omega^2}{2 k_f^2} c_2(k_f(x - x_0)), \\ T_{b53}(x, x_0) &= \frac{k_f E_b I}{2} s_2(k_f(x - x_0)), & T_{b65}(x, x_0) &= -\frac{1}{2 k_f} s_1(k_f(x - x_0)). \end{aligned}$$

### Appendix 3: Demonstration of relation (6.19)

In this appendix we demonstrate the relation (6.19). This relation can be demonstrated in two steps. The first step is the demonstration of the recurrence relation, defined by, for  $i = 1 \dots N$ ,

$$\mathbf{x}_b(O_i^+) = T_b(O_i^-, A)\mathbf{x}_b(A) + \sum_{j=1}^i [T_b(O_i^-, O_j^+)K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)]. \quad (6.44)$$

- We verify the relation (6.44) for  $i=1$ . In that case (6.44) is written as

$$\mathbf{x}_b(O_1^+) = T_b(O_1^-, A)\mathbf{x}_b(A) + T_b(O_1^-, O_1^+)K_1 T_s(O_1, C_1)\mathbf{x}_s(C_1). \quad (6.45)$$

As  $\mathbf{x}_b(O_1^-) = T(O_1^-, A)\mathbf{x}_b(A)$ ,  $T_b(O_1^-, O_1^+) = I_6$  and  $\mathbf{x}_s(O_1) = T_s(O_1, C_1)\mathbf{x}_s(C_1)$ ,

$$\mathbf{x}_b(O_1^+) = \mathbf{x}_b(O_1^-) + K_1 \mathbf{x}_s(O_1) \quad (6.46)$$

in accordance with (6.17), the relation (6.45) is true.

- We assum that the relation (6.44) is valid for the  $i$ -string, we show that this relation (6.44) is still valid for the  $i + 1$ -string. Let's consider the coupling relation (6.17) induced by the connection between the beam and the  $i + 1$ -string,

$$\mathbf{x}_b(O_{i+1}^+) = \mathbf{x}_b(O_{i+1}^-) + K_{i+1} \mathbf{x}_s(O_{i+1}), \quad (6.47)$$

and taking the form of

$$\mathbf{x}_b(O_{i+1}^+) = T_b(O_{i+1}^+, O_i^+)\mathbf{x}_b(O_i^+) + K_{i+1} T_s(O_{i+1}, C_{i+1})\mathbf{x}_s(C_{i+1}). \quad (6.48)$$

As we have the relation (6.44), the relation (6.45) is equivalent to

$$\mathbf{x}_b(O_{i+1}^+) = T_b(O_{i+1}^-, O_i^+)T_b(O_i^-, A)\mathbf{x}_b(A) + \sum_{j=1}^{i+1} (T_b(O_{i+1}^-, O_j^+)K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)) \quad (6.49)$$

since we have  $T_b(O_{i+1}^-, A) = T_b(O_{i+1}^-, O_i^+)T_b(O_i^-, A)$ , relation (6.49) gives

$$\mathbf{x}_b(O_{i+1}^+) = T_b(O_{i+1}^-, A)\mathbf{x}_b(A) + \sum_{j=1}^{i+1} (T_b(O_{i+1}^-, O_j^+)K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)) \quad (6.50)$$

Relation (6.50) proves that (6.44) is valid for  $i+1$  string.

- Finally, we prove the relation (6.44), for  $i = 1 \dots N$ :

$$\mathbf{x}_b(O_i^+) = T_b(O_i^-, A)\mathbf{x}_b(A) + \sum_{j=1}^i [T_b(O_i^-, O_j^+)K_j T_s(O_j, C_j)\mathbf{x}_s(C_j)]. \quad (6.51)$$

The second step is the inserion in the coupling relation (6.18) of the recurrence relation (6.44). These two relations, (6.18) and (6.44), along with the transfer relation between state vectors  $\mathbf{x}_s(O_i)$  and  $\mathbf{x}_s(C_i)$ , given by

$$\mathbf{x}_s(O_i) = T_s(O_i, C_i)\mathbf{x}_s(C_i), \quad (6.52)$$

leads us to obtain the relation (6.19).

## Bibliography

- [Capleton, 04] B. Capleton. False beats in coupled piano string unisons. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(2): 885-892, 2004.
- [Ewins, 94] D. J. Ewins. *Modal testing: theory and practice*. John Wiley and sons, Somerset, England, 1994.
- [Greilsame, 81] L. Greilsame. *Le baryton du prince esterhazy*. Librairie La flute de Pan, Paris, France, 1981. [In French]
- [Hutchin, 90] C. M. Hutchin. Sympathetic vibration and coupling of resonances. *Journal of the Catgut Acoustical Society*, 1: 40-41, 1990.
- [Gérardin & Rixen, 96] M. Gérardin and D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, France, 1996. [In French]
- [Gough, 81] C. E. Gough. The theory of string resonances on musical instruments. *Acustica*, 49: 124-141, 1981.
- [Karjalainen & Välimäki, 93] M. Karjalainen, V. Välimäki and Z. Jánosy. Towards high-quality sound synthesis of the guitar and string instruments. In *Proc. of ICMC 1993*, Tokyo, Japan, 1993.
- [Morfey, 01] L. C. Morfey. *Dictionary of acoustics*. Academic Press, London, United Kingdom, 2001.
- [Moulet, 03] M-H. Moulet. *Les jonctions en mécanique vibratoire: représentation par matrice de diffusion et caractérisation expérimentale pour des poutres assemblées*. These de Doctorat, Université du Maine, Le Mans, France, 2003. [In French]
- [Oniszczyk, 02] Z. Oniszczyk. Free transverse vibrations of an elastically connected complex beam-string system. *Journal of Sound and Vibration*, 254(4): 703-725, 2002.
- [Pestel & Leckie, 63] E. C. Pestel and F. A. Leckie. *Matrix method in elastomechanics*. McGraw-Hill, New York, United States of America, 1963.
- [Valette & Cuesta, 93] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermes, Paris, France, 1993. [In French]
- [Wang & Norris, 95] Z. Wang and A. N. Norris. Waves in cylindrical shells with circumferential submembers: a matrix approach. *Journal of Sound and Vibration*, 181: 457-484, 1995.
- [Weinreich, 77] G. Weinreich. Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 162(6): 1474-1484, 1977.

## Chapitre 7

# Identification des phénomènes sympathiques

### RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, l'identification des vibrations par sympathie présentes dans la harpe de concert est menée tant sur le plan théorique qu'expérimental. Dans un premier temps, la base modale d'une harpe simplifiée, constituée d'une poutre équivalente à la table d'harmonie connectée à une trentaine de cordes, est obtenue par la méthode développée dans le chapitre précédent [Le Carrou *et coll.*, 05]. Une série de modes sympathiques y est identifiée. Dans un second temps, un protocole expérimental basé sur la mesure du signal vibratoire de la table d'harmonie lorsque l'instrument est joué alors que certaines cordes sont étouffées ou arrêtées est mis en place. Les signaux obtenus présentent la particularité d'avoir de nombreuses composantes spectrales de fréquences très proches. Des moyens spécifiques de traitement sont employés pour les séparer (méthode ESPRIT [Roy *et coll.*, 86]). Les modes sympathiques ainsi identifiés sont trouvés en bonne concordance avec ceux obtenus théoriquement.

## 7.1 Introduction

La harpe est un instrument de musique composé de trois éléments acoustiques : la table d'harmonie, la caisse de résonance et les 47 cordes. Lorsqu'une corde est jouée, sa vibration se transmet à la table d'harmonie. Cette vibration donne lieu à un rayonnement acoustique qui, dans une certaine gamme de fréquence, est amplifiée par la caisse de résonance. Le son émis par l'instrument s'avère être d'une grande complexité allant même jusqu'à occasionner une gêne pour l'instrumentiste qui le décrit comme un « halo sonore ». Il n'est pas rare, en effet, que lorsqu'une corde est mise en vibration de nombreuses autres cordes se mettent elles-aussi à osciller perturbant ainsi le jeu du ou de la harpiste. Ce phénomène, appelé « vibrations par sympathie », est modélisé dans le chapitre précédent à l'aide de la base modale d'un instrument de musique simplifié. Ces vibrations sont occasionnées par l'excitation de modes de cordes couplées de fréquences très proches, appelés modes corde-corde ou *modes sympathiques*. Il apparaît cependant que ce phénomène n'est susceptible de se produire que pour certains accords entre cordes. Une identification d'un tel phénomène présent dans la harpe de concert est proposée dans ce chapitre tant sur le plan théorique qu'expérimental.

Dans un premier temps, l'identification de modes de cordes couplées dans la base modale d'une harpe simplifiée est déterminée (§ 7.2). Dans un second temps, un protocole expérimental basé sur l'arrêt ou l'étouffement de certaines cordes est présenté, permettant la mise en évidence de *modes sympathiques* (§ 7.3). Enfin, une confrontation des résultats expérimentaux et théoriques est entreprise (§ 7.4).

## 7.2 Etude d'une harpe simplifiée

En basses fréquences, le comportement modal de la table d'harmonie de la harpe de concert est semblable à celui d'une poutre bi-encastree comme illustré figure 7.1. Un modèle vibratoire simplifié de la harpe peut donc être constitué d'une poutre connectée à un jeu de cordes, voir figure 7.2. Pour que le comportement modal de cet instrument simplifié soit équivalent à celui de la harpe de concert, les paramètres de chaque élément, poutre et cordes, sont nécessairement recalés. Après cette étape, le calcul de la base modale du système couplé est entrepris en utilisant la méthode développée dans le chapitre 6 [Le Carrou *et coll.*, 05].

### 7.2.1 Paramètres du modèle

Dans ce paragraphe, les paramètres de la poutre et des cordes sont obtenus afin que le modèle simplifié d'instrument à cordes soit représentatif du comportement vibratoire de la harpe de concert en basses fréquences. Pour cela, nous choisissons de recalculer les paramètres de la poutre pour que le premier mode de celle-ci coïncide avec le premier mode de flexion de la table d'harmonie de la harpe cordée (Mode 4 à 152,2 Hz, voir § 3.2.2 p. 49). La déformée modale associée à ce mode peut être décrite schématiquement par une déflexion importante dans les deux tiers inférieurs de la table d'harmonie entre deux encastremets, l'un au niveau de la colonne et l'autre au niveau de la

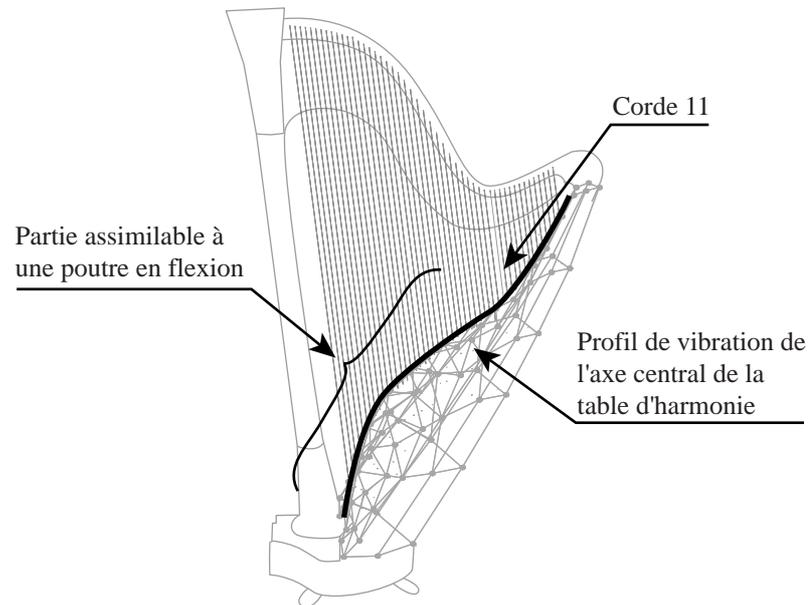


FIG. 7.1 – Déformée modale associée au mode 4 et description du profil vibratoire de l'axe central de la table d'harmonie.

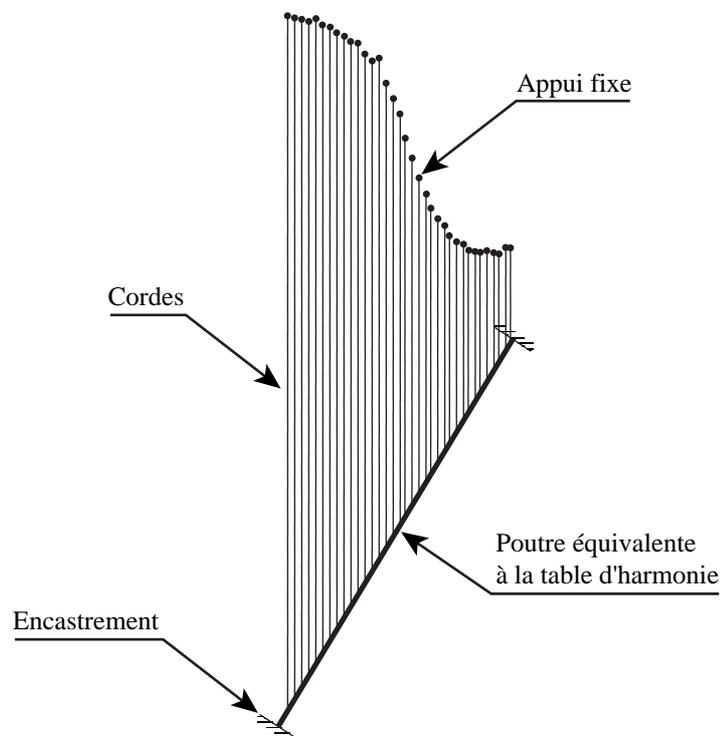


FIG. 7.2 – Représentation schématique du modèle poutre-35 cordes.

<i>Corde</i>	<i>Module d'Young [GPa]</i>	<i>Masse volumique [kg/m<sup>3</sup>]</i>
45 à 34	210	7800
33 à 31	2,52	1680
30 à 26	3.39	1180
25 à 23	3.43	1360
22 à 16	2.86	1340
15 à 13	2.83	1780
12 à 11	3.50	1470

**TAB. 7.1** – *Module d'Young et masse volumique des cordes implémentés dans le modèle.*

corde 11. Les représentations de ce premier mode de flexion et de son profil de vibration sur l'axe central de la table d'harmonie sont illustrées figure 7.1. Au niveau des cordes les plus aiguës, la table d'harmonie est rigidifiée par la proximité du pourtour la liant à la caisse de résonance expliquant l'absence de mouvement en basses fréquences. Ainsi, nous limitons la longueur de la poutre bi-encastree, représentative du comportement vibratoire de la table d'harmonie, à une distance comprise entre la colonne et la corde 11. Le modèle vibratoire est composé d'une poutre de 1 m de long sur laquelle 35 cordes sont connectées. Le recalage des paramètres des cordes et de la poutre est détaillé ci-dessous.

– Cordes

Les paramètres des 35 cordes sont mesurés directement à partir de celles montées sur la harpe de concert de la corde 45 à la corde 11 (la tension des cordes est calculée à partir de la fréquence du fondamental en supposant les cordes fixes à chacune de leurs extrémités). Ces différents résultats sont donnés en Annexe A. Pour le module d'Young et la masse volumique, on fait les hypothèses suivantes : les cordes filées (de la corde 45 à la corde 34) sont en acier et les cordes en boyau de mouton (de la corde 34 à la corde 11) ont des propriétés semblables à celles mesurées sur une autre harpe, pour laquelle ces paramètres sont fournis [Bell & Firth, 86],[Bell, 87]. Une synthèse des valeurs retenues est présentée dans le tableau 7.1.

– Poutre

Les paramètres géométriques de la poutre sont obtenus directement par un relevé effectué sur la table d'harmonie isolée (figure 1.6, p. 18). Par cette méthode, nous obtenons le moment d'inertie moyen de la section droite, égale à 38,9 cm<sup>4</sup>, et la section moyenne, égale à 38,3 cm<sup>2</sup>. La masse volumique, quant à elle, est calculée en divisant la masse de la table d'harmonie par son volume, soit 553 kg/m<sup>3</sup>. Pour ajuster au mieux la valeur du module d'Young, la base modale du modèle vibratoire de la harpe est calculée itérativement afin d'obtenir la fréquence du premier mode de la poutre égale à 150 Hz. Le module d'Young est trouvé égal à 5,9 GPa pour une fréquence du premier mode de poutre à 149,91 Hz. Les propriétés du matériau de la poutre ainsi recalée, sont trouvées proches de celles du bois.

### 7.2.2 Base modale

La base modale de la harpe simplifiée constituée d'une poutre connectée à 35 cordes est obtenue en appliquant la méthode détaillée dans le chapitre 6 [Le Carrou *et coll.*, 05]. Dans la plage de fréquences [0 Hz - 500 Hz], le logarithme du déterminant de la matrice  $R_R$  (défini par l'équation (6.28)) est calculé par pas de 0,01 Hz. L'allure de la courbe représentant cette quantité est identique à celle montrée figure 6.4 et n'est donc pas reproduite ici. Avec l'aide de cette courbe, nous avons identifié 151 modes présents dans la plage de fréquences d'étude. Les déformées modales associées aux modes 6 à 35 sont montrés dans l'Annexe D. De plus, des exemples de déformées modales plus détaillées, associées aux modes 25 à 28, sont représentés figure 7.3. Afin de classer les modes du modèle vibratoire de la harpe, le Kinetic Energy Ratio (KER) est calculé pour chaque sous-structure [Le Carrou *et coll.*, 05] (§ 6.3.2.3, p. 109). Suivant cet indicateur, le mode qualifié de mode de poutre est trouvé proche de 150 Hz, à 149,91 Hz.

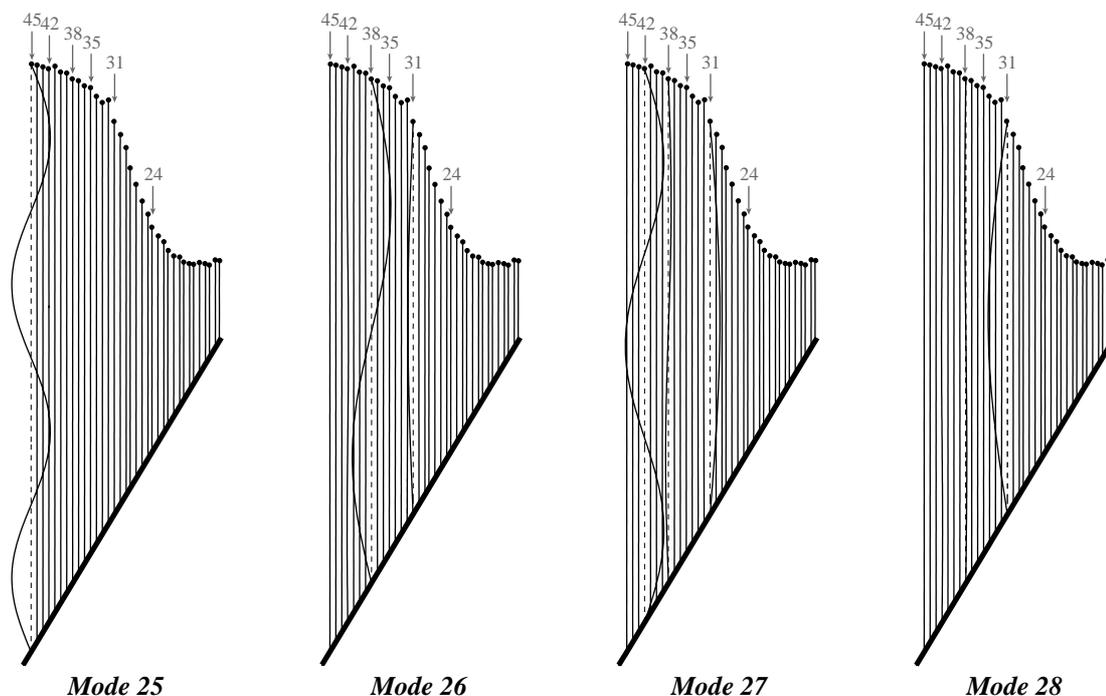


FIG. 7.3 – Déformées modales associées aux modes 25 à 28. Les numéros indiqués au dessus de la console désignent les cordes.

Les fréquences et les KER pour chaque sous-structure des modes 25 à 28 sont rapportés dans le tableau 7.2. Suivant cet indicateur, le mode 25 est un mode de corde n'impliquant aucun autre mouvement de cordes. Pour les modes 26, 27 et 28, le KER est réparti suivant 2 ou 3 cordes : 31, 38 et 42. La corde 31 correspond à l'octave supérieure à la corde 38 qui elle-même a pour octave inférieure la corde 42. Les cordes 24, octave supérieure à la corde 31, et 35, quarte inférieure à la corde 31, ne semblent donc pas agir dans les modes 26, 27 et 28.

<i>Mode</i>	<i>Fréquence</i> [Hz]	<i>KER pour chaque corde</i>						<i>KER</i> <i>Poutre</i>
		<i>45</i>	<i>42</i>	<i>38</i>	<i>35</i>	<i>31</i>	<i>24</i>	
25	122,00	100	0	0	0	0	0	0
26	122,95	0	0	99	0	1	0	0
27	123,29	0	97	1	0	2	0	0
28	123,48	0	1	2	0	97	0	0

**TAB. 7.2** – *Fréquence et Kinetic Energy Ratio pour chaque sous-structure (Cordes 45, 42, 38, 35, 31, 24 et la poutre). KER exprimé en % et arrondi à l'entier le plus proche.*

Dans l'étude paramétrique conduite dans le chapitre 6 (§ 6.3.4 p. 116), il est montré que le seuil à partir duquel une sous-structure prend part à un mode est variable, dépendant de l'inharmonicité entre cordes. En fixant un seuil arbitraire à 1%, les modes 26, 27 et 28 sont définis comme des modes corde-corde, appelés également *modes sympathiques*. A noter que pour ces 4 modes, le changement des caractéristiques de la poutre équivalente ne modifie que très légèrement la répartition du KER, ne changeant en rien nos conclusions. Par contre, il apparaît que pour d'autres modes de vibration la répartition du KER peut être très affectée.

## 7.3 Expérience

### 7.3.1 Descriptif du protocole expérimental

Afin de mettre en évidence de façon expérimentale la présence des *modes sympathiques* au sein de la harpe de concert, le protocole expérimental suivant a été mis en place : la harpe est jouée tandis qu'un signal d'accélération est mesuré sur la table d'harmonie entre les cordes Ré2 et Do2, notées respectivement 30 et 31. Un schéma de l'expérience est proposé figure 7.4. La corde jouée est la corde 31 de fréquence fondamentale 123,5 Hz alors que les autres cordes sont soit totalement étouffées ou soit arrêtées en cours d'oscillation. Les 8 configurations expérimentales étudiées sont les suivantes :

- (1) Cordes libres ;
- (2) Toutes les cordes étouffées à l'exception de la corde 31 ;
- (3) Corde 31 arrêtée ;
- (4) Cordes 24, 31, 35, 38 et 42 arrêtées ;
- (5) Cordes 31 et 24 arrêtées ;
- (6) Cordes 31 et 35 arrêtées ;
- (7) Cordes 31 et 38 arrêtées ;
- (8) Cordes 31 et 42 arrêtées.

Tous les signaux mesurés sont échantillonnés à 4096 Hz et ont une durée de 8 s. L'arrêt est effectué quelques secondes après l'attaque de la corde 31 par les doigts de l'instrumentiste.

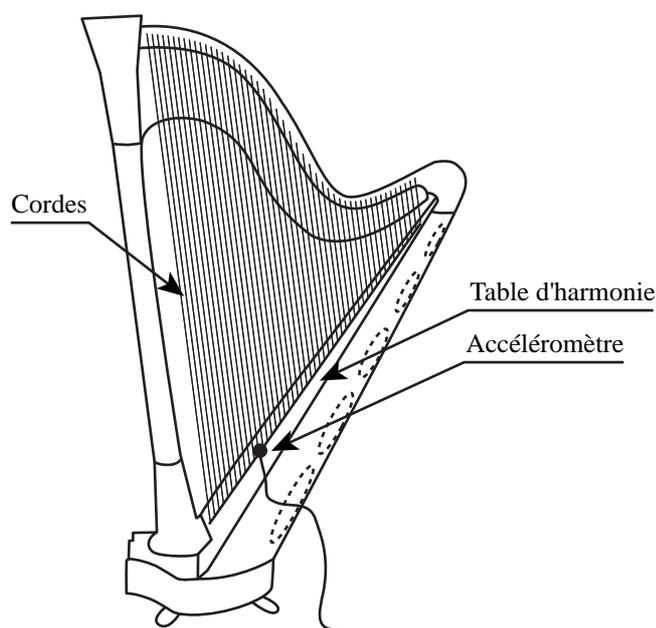
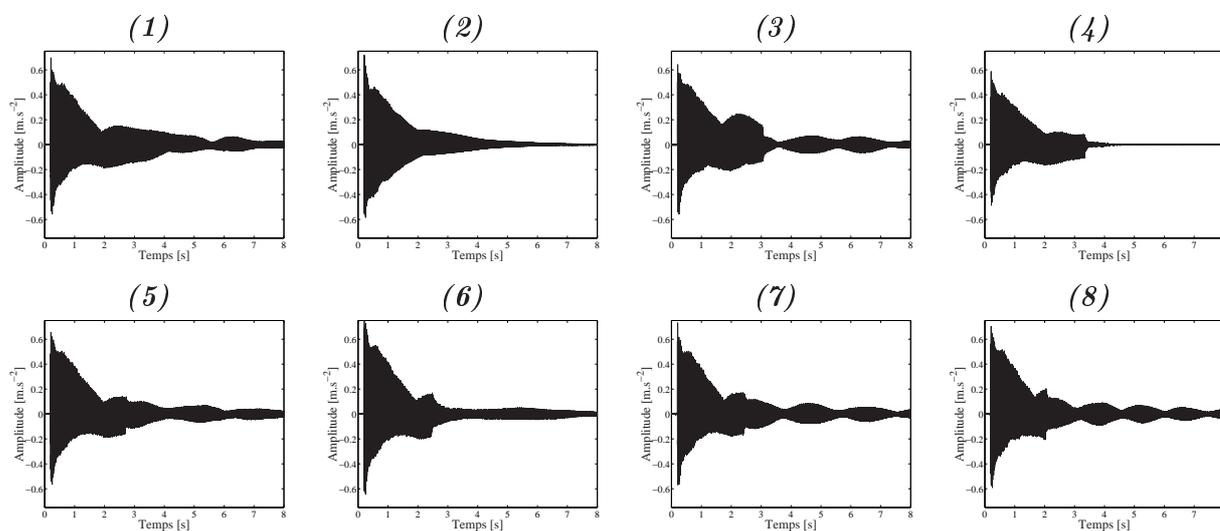


FIG. 7.4 – Représentation schématique du protocole expérimental.



TAB. 7.3 – Signal d'accélération dans les 8 configurations expérimentales : (1) cordes libres, (2) toutes les cordes étouffées à l'exception de la corde 31, (3) corde 31 arrêtée au cours de l'oscillation, (4) cordes 24, 31, 35, 38 et 42 arrêtées au cours de l'oscillation, (5) cordes 31 et 24 arrêtées au cours de l'oscillation, (6) Corde 31 et 35 arrêtées au cours de l'oscillation, (7) cordes 31 et 38 arrêtées au cours de l'oscillation, (8) cordes 31 et 42 arrêtées au cours de l'oscillation.

Les représentations temporelles des signaux mesurés suivant les 8 configurations sont montrées dans le tableau 7.3. Ces représentations mettent en évidence un fait bien connu des harpistes : l'arrêt de la corde jouée n'entraîne pas forcément une diminution rapide du niveau sonore. En effet, nous voyons que dans les configurations (3), (5), (6), (7) et (8), l'amplitude en fin de signal est du même ordre de grandeur que dans le cas où aucune corde n'est étouffée.

### 7.3.2 Méthode d'extraction des paramètres

L'étude spectrale d'un signal d'accélération mesuré sur la harpe est montrée figure 7.5. Plusieurs pics apparaissent clairement à la fréquence fondamentale de la corde jouée et à des fréquences sensiblement harmoniques, appelés partiels. Ces fréquences sont dues à la réponse des modes du système couplé table d'harmonie-cordes excités par le pincement d'une corde. En analysant en détail l'allure du spectre et de la forme d'onde associés au premier partiel, obtenues par filtrage, il s'avère que plusieurs composantes sinusoïdales d'amortissement et de fréquences différentes sont présents, comme illustré figure 7.6. Puisque le système est en oscillation libre, nous pouvons voir là l'effet de la présence de plusieurs modes de fréquences très proches. En effet, bien qu'il n'existe qu'un seul pic dans le premier partiel, la décroissance du signal temporel ne correspond pas à une seule sinusoïde amortie, caractéristique de la réponse d'un seul mode. Dans le spectre du signal associé au premier partiel, les pics liés à chaque composante sinusoïdale ne peuvent être clairement séparés. Ceci montre les limites de l'analyse de Fourier.

La présence de plusieurs modes de vibration de fréquences proches est une caractéristique commune à de nombreux instruments à cordes libres. Diverses méthodes, appliquées aux instruments de musique, permettent l'identification des composantes, comme les méthodes basées sur la transformée de Hilbert [Rossi & Girolami, 01], [David & Boutillon, 97], [David, 99], [Desoeuvre, 05] ou les méthodes dites à haute résolution [Laroche, 93], [David & Boutillon, 97], [Badeau, 05]. Pour l'identification des modes de fréquences proches se trouvant dans le premier partiel, nous avons choisi d'utiliser une méthode à haute résolution : la méthode ESPRIT [Roy *et coll.*, 86].

#### 7.3.2.1 Méthode ESPRIT

La méthode ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [Roy *et coll.*, 86] permet d'estimer les paramètres d'un modèle de signal  $x[t]$ . Suivant l'ESM (Exponential Sinusoidal Model), le signal  $x[t]$  est défini comme suit :

$$x[t] = \sum_{k=1}^K a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)}, t = [1, N] \quad (7.1)$$

où à chaque fréquence  $f_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  sont associés une amplitude réelle ( $a_k > 0$ ), une phase ( $\phi_k \in [-\pi, \pi]$ ) et un facteur d'amortissement ou d'amplification ( $\delta_k \in \mathbb{R}$ ). L'entier  $K$  est le nombre de d'exponentielles complexes. En définissant les amplitudes complexes  $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$  et les pôles complexes  $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$ ,

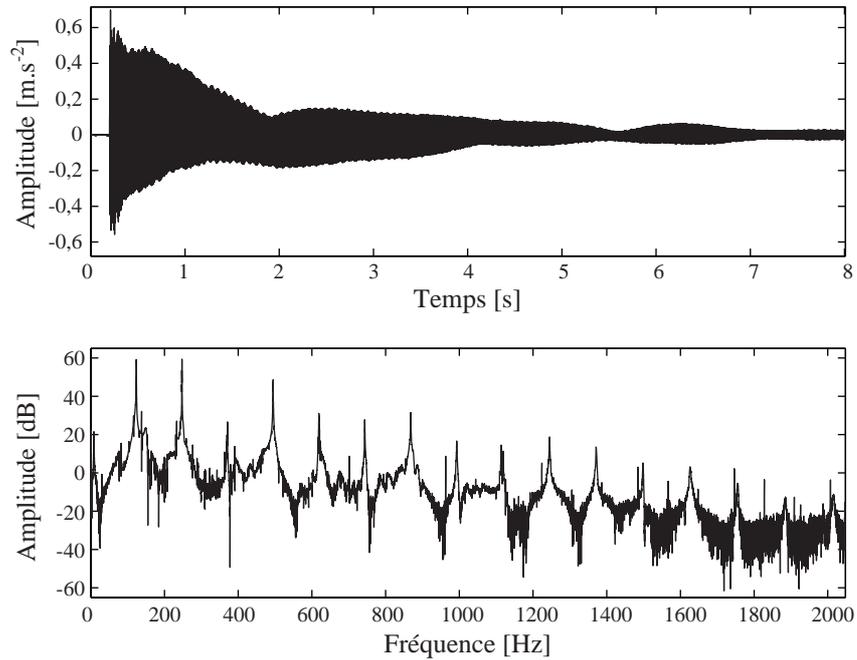


FIG. 7.5 – *Forme d'onde et spectre du signal de vibration mesuré sur la table d'harmonie lorsque la corde 31 est pincée.*

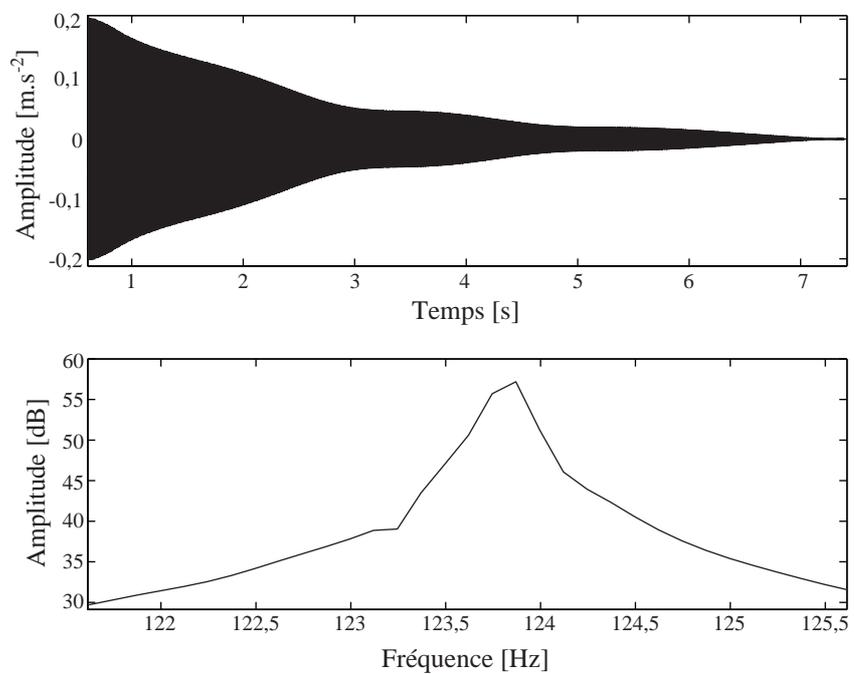


FIG. 7.6 – *Forme d'onde et spectre pour le « partiel 1 » du signal de vibration mesuré sur la table d'harmonie lorsque la corde 31 est pincée.*

le modèle de signal  $x[t]$  est réécrit sous la forme suivante :

$$x[t] = \sum_{k=1}^K \alpha_k z_k^t. \quad (7.2)$$

La méthode ESPRIT consiste à analyser le signal mesuré  $s$  en utilisant un espace signal de dimension  $K$  et des vecteurs de données de longueur  $n$  avec  $n > K$ . On établit que le paramètre  $n$  est optimum lorsqu'il est égal au tiers ou aux deux tiers du nombre total  $N$  d'échantillons du signal [Laroche, 93]. Pour déterminer les pôles complexes  $z_k$ , il faut, dans un premier temps, estimer la matrice de corrélation du signal mesuré  $s$ , définie comme suit :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{ss}} = \frac{1}{N - n + 1} \mathbf{S} \mathbf{S}^H, \quad (7.3)$$

avec

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \cdots & s(N - n + 1) \\ s(2) & s(3) & \cdots & s(N - n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(n) & s(n + 1) & \cdots & s(N) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

$\mathbf{S}$  désigne la matrice de Hankel de dimensions  $n \times (N - n + 1)$  contenant les  $N$  échantillons successifs du signal et l'exposant  $H$  représente le conjugué hermitien. Ensuite, une base  $\mathbf{W}$  de dimensions  $n \times K$  de l'espace signal, défini comme l'espace propre principal de  $\hat{\mathbf{R}}_{\text{ss}}$ , est déterminée en diagonalisant cette matrice. La méthode ESPRIT s'appuie sur une propriété particulière de l'espace signal : l'invariance par décalage de lignes. Cette propriété permet de déterminer les pôles du signal comme valeurs propres de la matrice  $\Phi$  :

$$\Phi = \mathbf{W}_{\downarrow}^+ \mathbf{W}_{\uparrow}, \quad (7.5)$$

où  $\mathbf{W}_{\downarrow}$  et  $\mathbf{W}_{\uparrow}$  sont respectivement les matrices extraites de  $\mathbf{W}$  obtenues en supprimant la dernière ligne et la première ligne. Le symbole  $+$  désigne l'opérateur de pseudo inversion.

Dans un second temps, les amplitudes complexes  $\alpha_k$  des sinusoïdes, groupées dans un vecteur noté  $\alpha$  sont obtenues grâce à la méthode des moindres carrés :

$$\alpha = [\mathbf{V}^N]^+ s. \quad (7.6)$$

Dans l'équation 7.6,  $s$  désigne le vecteur des  $N$  échantillons successifs du signal et  $\mathbf{V}^N$  est la matrice de Vandermonde de dimensions  $N \times K$  définie à partir des pôles estimés à l'aide de la méthode ESPRIT de la manière suivante :

$$\mathbf{V}^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_K^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Les paramètres  $a_k$  et  $\phi_k$ , module et phase de  $\alpha_k$ , sont directement déduits des amplitudes complexes  $\alpha$ .

### 7.3.2.2 Estimation du nombre de composantes

La principale difficulté de la méthode réside dans l'évaluation du nombre  $K$  de composantes présentes dans le signal. La méthode couramment employée est de surestimer ce nombre et de discriminer les résultats aberrants au moyen d'un indicateur tel que l'énergie des composantes ou l'erreur entre les signaux mesuré et reconstruit. D'autres méthodes plus performantes existent pour estimer l'ordre du modèle  $K$  telle que la méthode ESTER (ESTimation ERror) [Badeau, 05], [Badeau *et coll.*, 06]. Cette méthode consiste à calculer une fonction d'erreur inverse,

$$J : p \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2} \quad (7.8)$$

où

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p)\Phi(p), \quad (7.9)$$

et où  $p$  est le nombre de composantes principales introduites dans l'algorithme. Pour déterminer la valeur de  $K$ , on sélectionne la plus grande valeur de  $p$  pour laquelle la fonction  $J(p)$  est supérieure à un certain seuil choisi de façon arbitraire au dessus du bruit contenu dans le signal.

### 7.3.2.3 Mise en œuvre de la méthode ESPRIT

Pour limiter le temps de calcul et augmenter la précision des résultats [Badeau, 05], la mise en œuvre de la méthode ESPRIT est effectuée en suivant la procédure décrite dans la figure 7.7 : après centrage du partiel d'étude autour de la fréquence nulle, un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) sélectionne la bande fréquentielle contenant le partiel à analyser. Afin de conserver la forme du signal, le filtre est choisi à phase linéaire et obtenu par la méthode des fenêtres, implémentée dans Matlab par la fonction `FIR1`. Par nature, le filtre a une réponse transitoire finie qui correspond à la longueur de la réponse impulsionnelle. On peut s'en affranchir en éliminant du traitement les points du signal filtré appartenant à cette phase transitoire [David, 99]. Le signal filtré et centré est décimé de façon importante limitant ainsi le temps de calcul des paramètres par la méthode ESPRIT. Après l'estimation du nombre de composantes par la méthode ESTER précédemment exposée, l'algorithme ESPRIT est alors appliqué. Pour valider les résultats obtenus, une comparaison des signaux mesurés et synthétisés est enfin entreprise.

### 7.3.2.4 Etude d'un cas test

Pour apprécier les performances de l'algorithme ESPRIT, l'exemple réaliste suivant à 2 composantes réelles est étudié :

$$y[t] = 1e^{-0,6t} \cos(2\pi \times 123,49t) + 0,3e^{-0,2t} \cos(2\pi \times 123,5t + \pi) + w[t], \quad t \in [0, 4] \quad (7.10)$$

où  $w[t]$  est un bruit blanc gaussien centré de variance calculée de telle sorte que le Rapport Signal à Bruit (RSB) est choisi égal à 50 dB, correspondant au RSB des signaux d'accélération mesurés sur la harpe. La procédure précédemment expliquée est appliquée à ce signal et la fonction d'erreur inverse

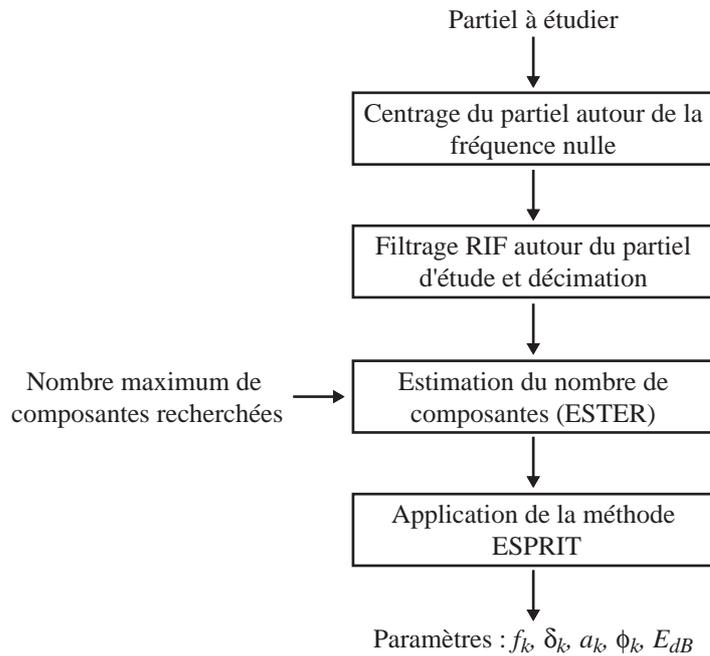


FIG. 7.7 – Procédure de mise en oeuvre de la méthode ESPRIT autour du partiel d'étude.

$J(p)$  est ainsi obtenue (voir figure 7.8). Au vu de cette figure, le nombre de composantes ne fait aucun doute dans le partiel d'étude. En effet, la plus grande valeur de  $p$  pour laquelle la fonction  $J(p)$  est supérieure au seuil défini sur la figure 7.8 est 2. Ainsi, le signal trouvé par l'algorithme ESPRIT après discrimination des composantes aberrantes est la suivante :

$$\hat{y}[t] = 1e^{-0,599t} \cos(2\pi \times 123,489t - 0,011) + 0,3e^{-0,196t} \cos(2\pi \times 123,5t + 3,10), \quad t \in [0, 4]. \quad (7.11)$$

L'erreur entre le signal d'étude et le signal estimé par la méthode ESPRIT est minime, allant jusqu'à 2% sur l'estimation de l'amortissement de la deuxième composante. Cet exemple illustre la méthode ESPRIT et permet d'entrevoir ses performances.

### 7.3.3 Résultats

La procédure de mise en œuvre de la méthode ESPRIT, rappelée figure 7.7, est appliquée aux signaux mesurés sur la harpe de concert dans leur partie finale, c'est à dire entre les instants 4 s et 8 s. A noter que pour chaque configuration, le calcul des coefficients est mené sur 5 mesures afin d'en estimer une incertitude de répétabilité.

Les résultats des paramètres des composantes trouvées dans le premier partiel du signal sont regroupés dans le tableau 7.4. Le nombre de composantes identifiées dans le partiel s'étend de 0, pour la configuration (4), à 4, pour la configuration (1). Dans le tableau 7.4, les composantes ont été classées de la plus énergétique à la moins énergétique, de haut en bas, et alignées afin de faciliter la lecture des composantes manquantes.

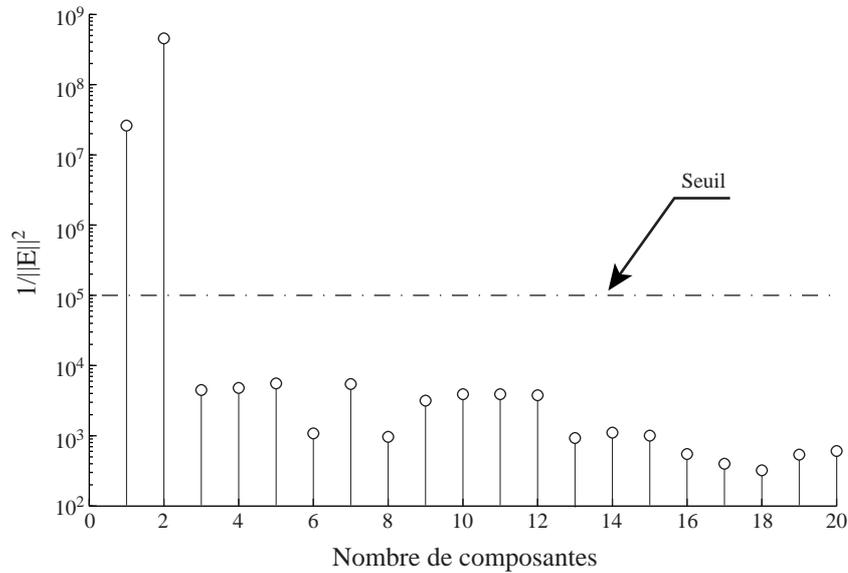


FIG. 7.8 – Erreur inverse obtenue par la méthode ESTER pour le signal test.

D'un point de vue général, les incertitudes de répétabilité obtenues pour les différents paramètres sont extrêmement faibles, inférieures à 1 % pour les fréquences et de l'ordre de 10 % pour les amortissements. Cependant, il peut apparaître pour certaines composantes des incertitudes élevées à l'instar de la dernière composante de la configuration (1). Ceci peut arriver pour des composantes peu présentes, avec une énergie faible, et un RSB faible.

Lorsque l'instrument n'est pas modifié (configurations (1) et (3) à (8)) les paramètres des composantes ne varient que très légèrement, à peine moins de 0,5 % de variation pour les fréquences et, au maximum 30 % de variation pour les amortissements. Ce résultat montre que l'arrêt des cordes ne modifie en rien le comportement vibratoire de l'instrument. Par contre, lorsque du papier est ajouté pour amortir toutes les cordes sauf la corde 31, dans la configuration (2), l'amortissement des composantes est nettement modifié et une légère déviation en fréquence est occasionnée. L'instrument est donc légèrement modifié par l'ajout de papier mais pas suffisamment pour que l'identification de la nature des composantes ne soit plus possible.

Grâce au protocole expérimental développé et à la méthode d'identification utilisée, les composantes présentes dans le partiel 1 ont été obtenues. Les résultats montrent que les paramètres estimés sont répétables et comparables entre deux expériences. L'interprétation de ces résultats est proposée dans la partie suivante en lien avec la base modale de la harpe simplifiée calculée dans la section 7.2.

## 7.4 Discussion

Lorsque la corde 31 de la harpe de concert est libre d'osciller (configuration (1)), deux composantes sinusoïdales ont été identifiées dans le premier partiel. Lorsqu'elle est étouffée (configuration (3) à

		<i>Configurations</i>							
		<i>(1)</i>	<i>(2)</i>	<i>(3)</i>	<i>(4)</i>	<i>(5)</i>	<i>(6)</i>	<i>(7)</i>	<i>(8)</i>
<i>Composantes</i>	123,49±0,01	123,54±0,01							
	-0,68±0,02	-0,57±0,01							
	123,34±0,01		123,35±0,00		123,34±0,00	123,34±0,00	123,30±0,01		
	-0,15±0,03		-0,11±0,01		-0,11±0,01	-0,11±0,01	-0,10±0,01		
	123,08±0,00		123,09±0,01		123,08±0,00	123,08±0,00		123,09±0,01	
	-0,26±0,01		-0,21±0,01		-0,22±0,03	-0,21±0,02		-0,22±0,07	
	123,78±0,02	123,71±0,03							
	-0,15±0,12	-0,54±0,06							

**TAB. 7.4** – *Fréquences et amortissements des composantes identifiées dans le partiel 1 des signaux d'accélération suivant les 8 configurations expérimentales : (1) toutes cordes libres, (2) toutes les cordes étouffées à l'exception de la corde 31, (3) corde 31 arrêtée au cours de l'oscillation, (4) cordes 24 31 35 38 et 42 arrêtées au cours de l'oscillation, (5) cordes 31 et 24 arrêtées au cours de l'oscillation, (6) Corde 31 et 35 arrêtées au cours de l'oscillation, (7) cordes 31 et 38 arrêtées au cours de l'oscillation, (8) cordes 31 et 42 arrêtées au cours de l'oscillation. Les cases grisées correspondent aux composantes non identifiées. L'incertitude indiquée est une incertitude élargie à 95 %.*

(8)), les deux disparaissent. En configuration de jeu, ces deux sinusoïdes ont des fréquences très proches, séparées de 0,3 Hz, et des amortissements et des amplitudes bien différents. En effet, une des composantes a une grande amplitude et un amortissement important tandis que l'autre a une amplitude et un amortissement plus faibles. Ce phénomène est semblable à celui de la corde de piano lorsque les autres cordes d'un même doublet ou triplet sont étouffées [Weinreich, 77]. Son explication vient du fait que la vibration de la corde s'opère selon deux directions, appelées polarisations. Ces deux polarisations sont excitées par l'instrumentiste de façon différente suivant la manière dont la corde est pincée, entraînant des amplitudes initiales différentes. De plus, comme pour le piano, une des polarisations est privilégiée pour transmettre son énergie à la table d'harmonie impliquant une forte décroissance à l'attaque de la note. Ce résultat montre que pour une bonne modélisation du comportement modal de la corde, les deux directions de vibration de la corde sont à prendre en compte. Dans le modèle de la harpe simplifiée, seulement une direction transversale de vibrations est modélisée, ce qui constitue une limitation.

En étouffant certaines cordes en cours d'oscillation, les modes présents dans la réponse de l'instrument sont sélectionnés. Dans les configurations (3), (5) et (6), les mêmes composantes sont présentes ce qui signifie que les modes impliquant les cordes 24 et 35 n'interviennent pas dans la réponse de l'instrument au niveau du premier partiel. Par contre, dans les configurations (7) et (8), il vient, par déduction, que les cordes 38 et 42 participent activement au son émanant de l'instrument. Ce résultat est conforté par la mesure dans la configuration (4) où l'arrêt des cordes 31, 38 et 42

	<i>Fréquences des modes</i>		<i>Erreur</i>
	<i>Expérimentales</i>	<i>Théoriques</i>	
<i>Mode de corde 31</i>	123,49 Hz 123,78 Hz	123,48 Hz	0,01 %
<i>Mode sympathique 31-42</i>	123,30 Hz	123,29 Hz	0,01 %
<i>Mode sympathique 31-38</i>	123,09 Hz	122,95 Hz	0,11 %

**TAB. 7.5** – Comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques issus du modèle vibratoire de la harpe de concert.

entraîne l’extinction du signal vibratoire. Lorsque l’instrumentiste pince la corde 31, 4 modes sont donc mis conjointement en vibration : 2 modes impliquant la corde 31 (1 mode par polarisation), 1 mode impliquant les cordes 31-38 et 1 mode impliquant les cordes 31-42. Ces deux derniers modes sont donc des *modes sympathiques*. L’arrêt de la corde 31 n’entraîne pas forcément l’atténuation de ces modes, ce qui tend à prouver que l’énergie cinétique présente dans les cordes 42 et 38 est nettement plus importante que dans la corde 31. Ces résultats montrent, de plus, que les *modes sympathiques* issus de chaque polarisation de la corde 31 ne sont pas visibles dans la réponse. La raison doit sûrement venir du fait que les composantes issues de ces modes ont des énergies trop faibles pour émerger du bruit.

Ces résultats expérimentaux peuvent être confrontés à ceux issus de la base modale de la harpe simplifiée obtenue § 7.2. La comparaison de ces résultats est synthétisée dans le tableau 7.5. Expérimentalement, nous avons trouvé deux modes mettant principalement en jeu la corde 31 à 123,49 Hz et à 123,78 Hz. Avec le modèle vibratoire de la harpe, le mode de corde associé à la corde 31 est trouvé à 123,48 Hz. Il est à souligner ici que le modèle ne prend en compte qu’une vibration transversale de corde. La comparaison entre le modèle et la mesure est donc très satisfaisante. Pour les *modes sympathiques* 31-42 et 31-38, leurs fréquences sont estimées expérimentalement à 123,30 Hz et à 123,09 Hz. Il est là aussi remarquable d’observer qu’avec le modèle, les fréquences de ces modes sont trouvés à 123,29 Hz et à 122,95 Hz, coïncidant presque parfaitement aux résultats expérimentaux. Mis à part le fait que le modèle vibratoire de la harpe de concert ne prend pas en compte la double polarisation de la corde, les résultats issus du modèle sont en très bon accord avec ceux obtenus expérimentalement, validant l’approche utilisée.

## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle vibratoire d’une harpe de concert simplifiée a été développé en se basant sur les travaux présentés dans le chapitre 6. Ce modèle, constitué d’une poutre connectée à 35 cordes, a permis de calculer les modes propres de l’assemblage. Dans les déformées modales obtenues, des modes de cordes couplées ou, autrement appelés, des *modes sympathiques* ont été identifiés. Ces modes correspondent à des mises en vibration des cordes par couplage solidien via la table d’harmonie. Leur

identification expérimentale a par ailleurs été menée en utilisant une méthode à haute résolution, la méthode ESPRIT. L'erreur entre les résultats expérimentaux et théoriques est très faible, permettant de conclure positivement quant à la validité du modèle. La principale restriction du modèle réside dans le fait qu'une seule polarisation de la corde est prise en compte. Un prolongement à cette étude serait l'ajout d'une polarisation supplémentaire par corde pour représenter le comportement vibratoire de l'instrument. Du point de vue expérimental, une identification des *modes sympathiques* au niveau des autres partiels pourrait permettre d'appréhender le rôle de toutes les cordes dans les phénomènes de vibrations par sympathie induits dans l'instrument.

## Bibliographie

- [Badeau, 05] R. Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 2005.
- [Badeau et coll., 06] R. Badeau, B. David & G. Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2) : 450-458, 2006.
- [Bell & Firth, 86] A. J. Bell et I. M. Firth. The physical properties of gut musical instrument strings. *Acustica*, 60 : 87-89, 1986.
- [Bell, 87] A. J. Bell. *An acoustical investigation of the Concert Harp*. PhD dissertation, University of St Andrews, United Kingdom, 1987.
- [David & Boutillon, 97] B. David et X. Boutillon. Estimation des paramètres modaux d'une corde de guitare en situation de jeu. Dans *Proc. of CFA*, Marseille, France, 1997.
- [David, 99] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, France, 1999.
- [Desoeuvre, 05] G. Desoeuvre. *Etude du rayonnement acoustique d'une harpe de concert*. Rapport de stage ingénieur ESTACA, Université du Maine, 2005.
- [Gough, 81] C. E. Gough. The theory of string resonances on musical instruments. *Acustica*, 49 : 124-141, 1981.
- [Gough, 84] C. E. Gough. The nonlinear free vibration of a damped elastic string. *Journal of the Acoustical Society of America*, 75(6) : 1770-1776, 1984.
- [Laroche, 93] J. Laroche. The use of matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4) : 1958-1965, 1993.
- [Le Carrou et coll., 05] J-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez et J. Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. *Acta Acustica United with Acustica*, 91 : 277-288, 2005.
- [Rossi & Girolami, 01] L. Rossi et G. Girolami. Instantaneous frequency and short term Fourier transforms : application to piano sounds. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110(5) : 2412-2420, 2001.
- [Roy et coll., 86] R. Roy, A. Paulraj et T. Lailath. ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(4) : 1340-1344, 1986.
- [Weinreich, 77] G. Weinreich. Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 162(6) : 1474-1484, 1977.



# Conclusion générale

À travers les études présentées dans ce mémoire, nous avons cherché à acquérir une meilleure connaissance du comportement physique de la harpe de concert. Pour cela, nous avons appliqué diverses méthodes d'analyse utilisées en vibro-acoustique au système complexe que constitue la harpe de concert. Les limites de chacune des approches développées ont été clairement évaluées. Les principales conclusions peuvent-être résumées comme suit.

- *Le pincement d'une corde de harpe est modélisable simplement à l'aide de paramètres mesurables liés à la morphologie des harpistes.*

Afin de comprendre la manière dont est jouée la harpe, un modèle simple de pincement a été développé. Les paramètres de ce modèle sont directement obtenus de la mesure du déplacement du doigt et de la corde. Ces paramètres physiques sont caractéristiques de chaque harpiste puisqu'ils sont en lien avec la morphologie du doigt et le geste instrumental. L'étude permet également la détermination des conditions initiales pour l'oscillation libre de la corde, ce qui constitue une caractéristique utile à un programme de synthèse sonore qui pourrait être développé.

- *La caisse de résonance de la harpe ne joue pas pleinement son rôle de renforcement de la puissance acoustique en basses fréquences.*

En basses fréquences, la harpe est capable de rayonner de manière importante dans la plage de fréquence [140 Hz-230 Hz]. Les deux premiers modes de cette plage de fréquence sont les modes T1 et A0. Ces deux modes proviennent du couplage vibro-acoustique existant entre le premier mode du fluide contenu dans la caisse de résonance et le premier mode de flexion de la table d'harmonie. Contrairement à la guitare, la fréquence du mode A0 est supérieure à celle du mode T1 ne donnant pas lieu à un renforcement de la puissance acoustique en basses fréquences comme c'est généralement le cas pour d'autres instruments.

- *Des paramètres physiques (masse, raideur et amortissement équivalents) en lien avec les choix de fabrication des facteurs sont mesurables directement sur l'instrument.*

En développant un modèle à deux degrés de liberté représentant la réponse vibro-acoustique de la harpe au voisinage des deux modes A0 et T1, il est possible d'identifier des paramètres physiques tel que les masses équivalentes à la table d'harmonie et au volume d'air compris dans

les événements, les raideurs équivalentes à la table d'harmonie et à la cavité acoustique ainsi que les amortissements associés. Ces grandeurs physiques sont directement fonction des choix de fabrication des facteurs d'instruments liés à l'épaisseur de la table, le type de barrage, la taille de la caisse de résonance et des événements, etc. Cette identification nécessite la mesure de deux fonctions de transfert vibratoire et acoustique effectuées sur l'instrument. On peut voir là une manière de caractériser objectivement l'instrument à partir de la mesure de quelques paramètres.

- *Deux sources acoustiques, placées sur la table d'harmonie et au niveau des événements, sont représentatives du rayonnement basses fréquences de l'instrument.*

À partir de l'étude du rayonnement acoustique en champ lointain de la harpe de concert, on montre qu'un modèle constitué de deux sources sonores élémentaires est représentatif du comportement acoustique global de l'instrument en dessous de 220 Hz. Les deux sources sont situées dans le plan de symétrie de l'instrument, sur la table d'harmonie et au niveau des événements. Dans cette zone basses fréquences le rayonnement acoustique de l'instrument est quasiment omnidirectionnel.

- *Le phénomène gênant de halo sonore résultant des vibrations par sympathie est dû à la présence de modes particuliers de cordes, appelés modes « corde-corde » ou modes « sympathiques ».*

À partir d'un modèle d'un instrument de musique à cordes simplifié représentant le comportement vibratoire de la harpe de concert, nous avons montré que le phénomène de *vibrations par sympathie* est lié à la présence de modes particuliers. L'existence ou non de ces modes, dit modes « corde-corde » ou « modes sympathiques », est très dépendante de la façon dont est accordé l'instrument. Par une simple variation de l'accord des cordes le phénomène de *halo sonore* peut disparaître. De manière expérimentale, ce type de modes est aussi identifié sur la harpe de concert validant, par la même, les résultats théoriques obtenus.

À l'issue de ce travail de thèse, de nombreuses perspectives peuvent être proposées. Nous pouvons les différencier suivant deux points de vue : celui des scientifiques et celui du facteur.

D'un point de vue scientifique, l'étude d'un objet vibro-acoustique aussi complexe est passionnante mais reste frustrante par certains aspects : la compréhension d'un phénomène physique engendre la découverte de nombreuses autres inconnues.

Par exemple, la détermination des matrices masses, raideurs et amortissements d'un modèle discret dont les fréquences de résonance sont proches reste encore un sujet ouvert. En effet, même si une procédure a été développée dans ce manuscrit, la robustesse de la méthode reste encore trop faible pour que son utilisation soit possible à grande échelle. De plus, le caractère non-diagonal de la matrice de masse est expliqué par l'existence de couplages inter-modaux induits par le rayonnement de l'instrument. L'étude approfondie d'un modèle analytique d'un instrument simplifié, pouvant être développé à l'aide d'une formulation intégre-modale utilisant des modes identifiés expérimentalement

ou des modes obtenus par une méthode numérique (méthode des éléments-finis par exemple), pourrait confirmer cette explication. Ce type de modèle pourra aussi être utilisé pour comprendre les couplages existant dans l'instrument à des fréquences supérieures à celles des modes vibro-acoustiques couplés T1 et A0, là où le rayonnement sonore de l'instrument est encore important.

Par ailleurs, la modélisation du comportement modal d'un instrument à cordes simplifié a montré les limites de la méthode des matrices de transfert. L'étude envisagée dans ce manuscrit était résolument basses fréquences mais son prolongement à plus hautes fréquences est nécessaire si l'on souhaite étudier l'influence des modes *sympathiques* lorsque des cordes aiguës sont jouées. La méthode impédance, brièvement présentée dans ce mémoire, semble adéquate pour atteindre ce but mais nécessite l'intégration d'une équation de Riccati matricielle. Cette intégration mettra probablement en évidence d'autres limites, notamment numériques, qui seront à évaluer.

Enfin, la synthèse sonore d'un tel modèle est probablement une manière appropriée pour connaître les paramètres mécaniques pertinents qui favorisent la présence de modes *sympathiques* dans le système. Pour initialiser de manière réaliste cette synthèse sonore, c'est à dire spécifier des valeurs réalistes du couple déplacement-vitesse pour la corde à l'instant initial, le modèle d'interaction entre le doigt et la corde est à développer. Ce modèle peut permettre l'identification de paramètres caractéristiques d'instrumentistes différents et par là-même il peut permettre de distinguer de façon objective des gestes instrumentaux.

Du point de vue du facteur, la meilleure compréhension physique de l'instrument est clairement un atout pour appréhender les conséquences de toute future modification.

Une question récurrente relative à la harpe concerne son faible rayonnement acoustique, particulièrement en basses fréquences. Nous avons montré que cela était dû à un accord de la fréquence de résonance de la cavité qui n'était pas en adéquation avec la fréquence de résonance de la table d'harmonie. Une manière de procéder, si l'on souhaite augmenter le rayonnement sonore en dessous de la fréquence de résonance de la table d'harmonie est de diminuer la fréquence de résonance de la cavité. Ceci est possible de deux manières : augmenter le volume de la cavité ou agrandir la taille des événements.

L'origine de la présence du *halo sonore* lié aux *vibrations par sympathie* lorsque l'instrument est joué est maintenant bien comprise. Il s'agit là de la présence de phénomènes particuliers liés au comportement vibratoire de l'instrument. Même si ces phénomènes semblent intrinsèques à la constitution même de l'instrument (vu comme un réseau de cordes connectées à une table d'harmonie vibrante), il ne semble pas impossible de le limiter en modifiant les propriétés mécaniques de la table d'harmonie.

À partir des modèles développés dans le cadre de cette étude sur la harpe de concert, un outil d'aide à la facture instrumentale peut être développé. En effet, il est possible de produire des sons musicaux à partir de ces modèles (modèle discret à deux degrés de liberté complété par un modèle de cordes couplées) en faisant varier leurs paramètres. L'effet de modifications souhaitées par les facteurs lorsqu'une corde est pincée pourrait être prédit par le calcul. Ce pincement serait effectuée de manière réaliste à partir des conditions initiales obtenues dans l'étude menée au chapitre 2. Le rendu sonore

de tels modèles donnerait tout de suite l'indication de l'effet acoustique induit par les modifications. La principale difficulté sera de relier les paramètres mécaniques virtuels à la constitution réelle de l'instrument. Des travaux sont encore à mener dans ce sens.

## Annexe A

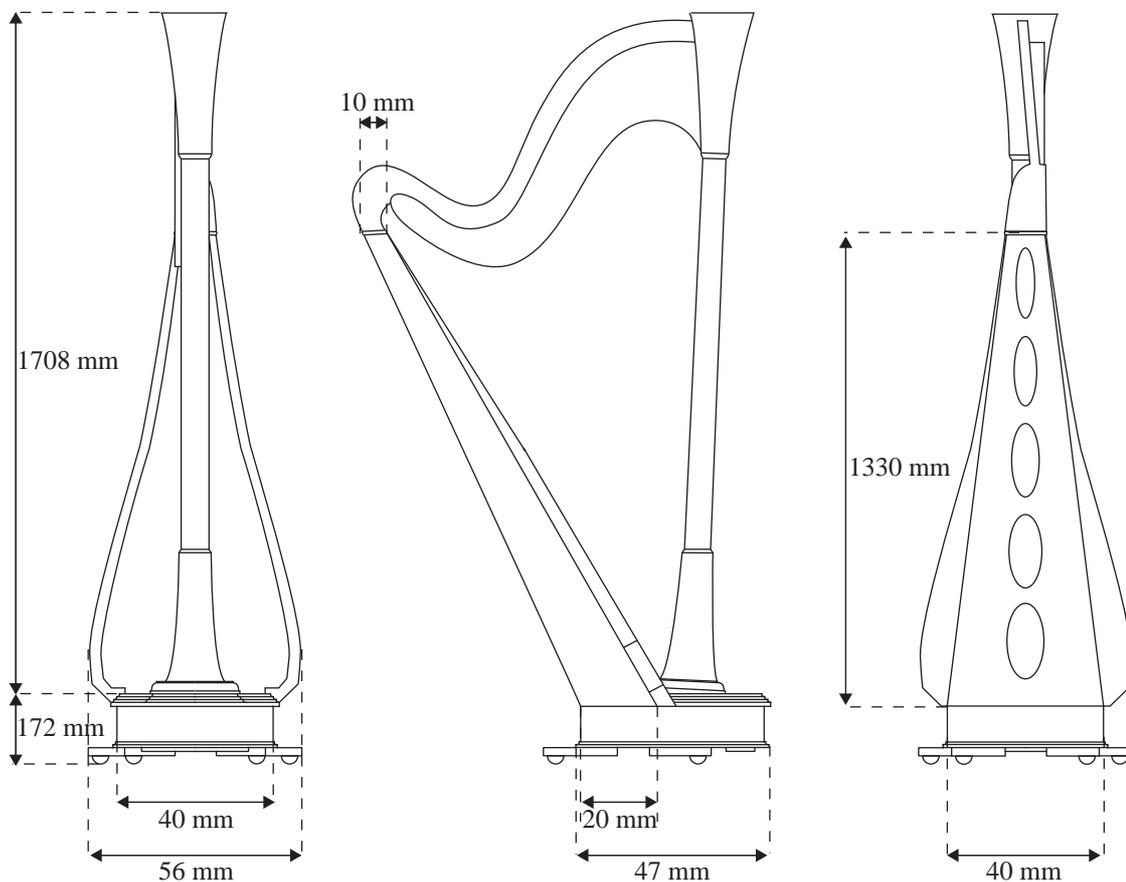
# Caractéristiques physiques de la harpe

### A.1 Caractéristiques des cordes de la harpe

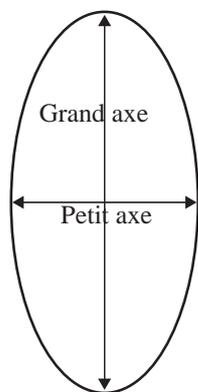
N°	Note	fréquence [Hz]	longueur [cm]	diamètre [mm]	angle [deg]	position [cm]	matériau
00	Gb	2960	7,7	0,5	44	126,3	nylon
0	Fb	2637	8,4	0,52	44	124,3	nylon
1 <sup>ère</sup> octave							
1	Eb	2489	9,1	0,54	44	122,3	nylon
2	Db	2217	10,4	0,56	42	120,3	nylon
3	Cb	1975	11,2	0,58	42	118,3	nylon
4	Bb	1865	11,7	0,6	40	116,4	nylon
5	Ab	1661	12,8	0,62	40	114,2	nylon
6	Gb	1480	13,8	0,64	40	111,5	nylon
7	Fb	1319	15,2	0,66	38	109,2	boyaux
2 <sup>ème</sup> octave							
8	Eb	1245	16,3	0,68	37	106,8	boyaux
9	Db	1109	17,6	0,7	37	104,8	boyaux
10	Cb	987,8	19,3	0,72	37	101,8	boyaux
11	Bb	932,3	20,9	0,78	36	99,2	boyaux
12	Ab	830,6	22,6	0,82	36	96,9	boyaux
13	Gb	740,0	24,5	0,9	36	94,4	boyaux
14	Fb	659,3	26,5	0,94	36	91,8	boyaux
3 <sup>ème</sup> octave							
15	Eb	622,3	28,8	0,98	36	89,4	boyaux
16	Db	554,4	31	1,02	36	86,5	boyaux
17	Cb	493,9	33,3	1,06	36	83,8	boyaux

18	Bb	466,2	36	1,1	36	81,4	boyaux
19	Ab	415,3	39	1,16	36	78,8	boyaux
20	Gb	370,0	42,4	1,22	35	76,2	boyaux
21	Fb	329,6	46	1,24	35	73,5	boyaux
4 <sup>ème</sup> octave							
22	Eb	311,1	50	1,28	35	70,8	boyaux
23	Db	277,2	54,2	1,32	35	68,2	boyaux
24	Cb	246,9	58,8	1,4	35	65,5	boyaux
25	Bb	233,1	64,3	1,48	34	62,8	boyaux
26	Ab	207,7	70	1,58	32	60	boyaux
27	Gb	185,0	76,8	1,68	32	57,2	boyaux
28	Fb	164,8	83,8	1,78	32	54,4	boyaux
5 <sup>ème</sup> octave							
29	Eb	155,6	90,7	1,9	32	51,6	boyaux
30	Db	138,6	97,5	1,96	32	48,8	boyaux
31	Cb	123,5	103	2,1	32	45,8	boyaux
32	Bb	116,5	108,1	2,2	32	43	boyaux
33	Ab	103,8	113,2	2,36	32	40	boyaux
34	Gb	92,5	117,2	1,6	31	37	acier
35	Fb	82,4	121,8	1,74	31	34,2	acier
6 <sup>ème</sup> octave							
36	Eb	77,8	125,4	1,8	31	31,2	acier
37	Db	69,3	128,8	1,94	31	28,2	acier
38	Cb	61,7	132,3	2,04	31	25,2	acier
39	Bb	58,3	136	2,1	31	22,2	acier
40	Ab	51,9	138,9	2,2	31	19,2	acier
41	Gb	46,2	142,8	2,3	31	16,2	acier
42	Fb	41,2	144,7	2,44	31	13,2	acier
7 <sup>ème</sup> octave							
43	Eb	38,9	148	2,72	31	10,2	acier
44	Db	34,6	151,4	2,72	31	7,2	acier
45	Cb	30,9	154	2,96	31	4	acier

## A.2 Caractéristiques géométriques de la harpe



## A.3 Caractéristiques géométriques des événements



N°	Grand axe [cm]	Petit axe [cm]	Épaisseur [cm]
1	17	4,5	0,6
2	17	5,5	0,6
3	18	6,7	0,6
4	18	8	0,6
5	18,5	9	0,6



## Annexe B

# Low frequency model of the sound radiated by a concert harp\*

### AVANT-PROPOS

Cette annexe présente un travail préliminaire au chapitre 5 ayant pour objet l'identification de sources acoustiques de la harpe de concert par la méthode des sources équivalentes. Cette méthode consiste à identifier les sources acoustiques d'un objet rayonnant par une distribution de sources élémentaires. Dans un premier temps, le champ de pression émis par la harpe de concert est mesuré en champ lointain. Ce champ est ensuite substitué par une seule source acoustique dont aucune contrainte de localisation n'est imposée. Suivant un critère d'erreur minimale, la source est trouvée pour certaines fréquences en dehors de l'instrument ne reflétant donc pas correctement son comportement physique. Un second monopole y est donc ajouté, avec cette fois-ci une limitation des positions possibles des monopoles en lien avec le comportement physique de la harpe de concert. Ainsi, les positions des monopoles sont contraintes à la table d'harmonie et au niveau des événements. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec le comportement vibro-acoustique de l'instrument. Ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec M. J.R.F. Arruda, professeur au Laboratório de Vibroacústica de l'université de Campinas (Brésil).

---

\* Cette annexe est un acte de congrès écrit en langue anglaise présenté à Forum Acusticum qui s'est déroulé à Budapest en septembre 2005.



## Low frequency model of the sound radiated by a concert harp

Jean-Loïc Le Carrou, François Gautier, Joël Gilbert

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72 085 Le Mans Cedex 9, France  
e-mail: {jean-loic.le\_carrou,francois.gautier,joel.gilbert}@univ-lemans.fr,

José Roberto de França Arruda

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Rua Mendeliev, 13083-970 Campinas, São Paulo, Brazil  
e-mail: arruda@fem.unicamp.br

The concert harp, as most string instruments, is a complex sound radiator. The aim of this study is to propose a low frequency model of its sound radiation based on multiple monopoles. For this purpose, the radiated acoustic pressure was measured in a semi-anechoic room at more than 600 measurement points over a nearly hemi-spherical surface. Three locations along the soundboard plate were excited with an electronic shaker driven by a white noise signal, permitting the measurement of directivity diagrams. An acoustic monopole distribution is proposed to model the radiated sound in the low frequency range. Estimation of equivalent sources based first on a single monopole description then on a two monopoles description is carried out. The single monopole model is not found to be a physical solution of the sound radiated by the harp. The two monopoles model takes into account both the sound radiation of the soundboard and that of the sound holes located at the back of the soundbox. Computation of their volume velocities and of their positions is obtained by the use of a least squares method. Results show that these equivalent sources are on the symmetry plane of the harp and that this two monopoles description can be considered as a good model of the sound radiated by the harp.

## 1 Introduction

The concert harp is a complex vibroacoustic system composed of a soundboard, of a cavity with sound holes called soundbox and of 47 strings. Its acoustic radiation has not been the subject of many studies. In [1], the author describes three kinds of radiated sound fields of the concert harp depending on the frequency range: in a low frequency range [0 Hz - 400 Hz], the harp is non-directional, in a middle frequency range [400 Hz - 2000 Hz], the harp is directional with a high sound level on both the front and back sides of the instrument and in a high frequency range [2000 Hz - 4000 Hz], the instrument radiates more from the back and two major radiation areas is found on the front side. In another study [2], some characteristics of the directivity of the celtic harp is discussed. The harp is approximately omnidirectional below 714 Hz and, above, lobes of directivity appear. This study is carried out to validate the acoustic radiation prediction of the harp by the Fourier-based Nearfield Acoustic Holography. The aim of these two studies was not to understand the vibroacoustic behaviour of the harp through the modelling of its sound radiation.

Generally speaking, radiation on the front of the soundboard and on the back of the holes of the soundbox are combined to produce a complex directivity pattern. The level and the spatial distribution of the sound pressure depend on the characteristics of these two kinds of acoustic radiators. The aim of this study is to identify such characteristics in the low frequency range. For this purpose,

a measurement of the directivity of the instrument is carried out in section 2. A model of the sound field based on the superposition of acoustic monopoles is developed. In sections 3 and 4, representations of the sound field based on one and two monopoles are given and discussed.

## 2 Harp directivity description

### 2.1 Experimental set-up

The directivity of the sound radiated by a concert harp (*Camac Harps, Atlantide Prestige model*) is measured in a semi-anechoic room, of working volume 1000 m<sup>3</sup> and of valid frequency range of [20 Hz - 20 KHz]. In Figure 1, we show a schematic diagram of the measurement set-up.

The instrument is excited by a shaker driven by a white noise connected via a rod to the back of the soundboard. The acoustic pressure is measured by 35 1/4-inch ICP microphones arranged around the harp on a fixed arch. In order to obtain the sound field in all directions, a system has been set to rotate the harp with the shaker in eighteen 10 degree steps about the *z*-axis. Note that only a semi-circle rotation is sufficient to obtain the sound field on the whole circle. The arch dimensions are 4.70 m in width and 4.55 m in height, enabling the positioning of microphones at a distance of 2.35 m from the rotation axis and of 0.2 m from each other along the *z*-axis. The 34×18+1 measurement mesh obtained with this experimental setup

is a compromise between a good graphical resolution of the sound field and technical restrictions.

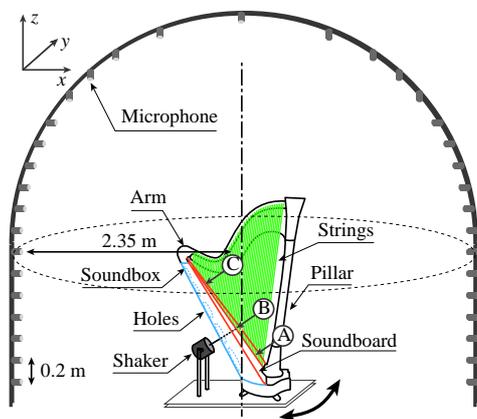


Figure 1: Experimental set-up.

The dependency of directivity diagrams on the excitation locations can be studied by using three possible positions on the soundboard, denoted A, B and C in Figure 1:

- A, between strings 41 and 42 (respective fundamental frequencies at 46.2 and 41.2 Hz);
- B, between strings 30 and 31 (respective fundamental frequencies at 138.6 and 123.5 Hz);
- C, between strings 11 and 12 (respective fundamental frequencies at 932.3 and 830.6 Hz).

The force applied by the shaker at these locations is measured using an appropriate force transducer. Therefore, for each microphone  $i$ , the frequency response function  $H_i = P_i/F$  is measured. This experimental set-up requires some restrictions to the measurement frequency validity domain. The upper limit of the study should be at about 500 Hz in order to take into account the spatial variation of the pressure imposed by the measurement mesh resolution.

## 2.2 Results

In this section, we present the results of the sound field measured by microphones when the harp is excited at point B. In Figure 2, two kinds of directivity diagrams are shown. These patterns are composed of two cross-sections: a vertical one, corresponding to the strings plane, and a horizontal one 1.4 m high. The triangle represents the orientation of the harp.

These two patterns are representative of the instrument directivity in the studied frequency range. In a low frequency range, below 220 Hz, the harp is omnidirectional, as it is the case for the measurements at 166 Hz shown

in Figure 2, and above, more complex patterns with lobes appear, as it is the case for 250 Hz.

Because of the vibroacoustic behaviour of the system, the sound level strongly depends on the frequency. In a previous paper [3], structural and acoustic modes of the harp were identified. Two particular modes, at about 150 Hz and 170 Hz were found to be efficient in radiation because of the coupling of the first bending mode of the soundboard with the air cavity mode. This interesting coupling is also found in directivity patterns which are omnidirectional and with high level sound radiation.

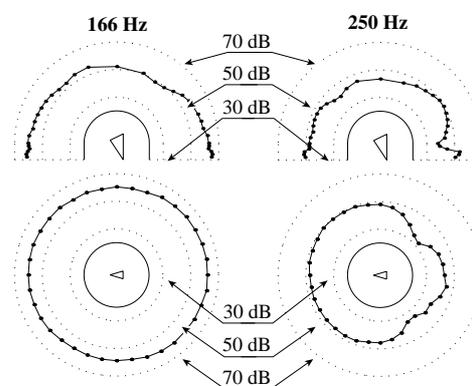


Figure 2: Directivity patterns for two typical frequencies. [Ref 1dB:  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa/N].

The two directivity diagrams shown in Figure 2 are symmetric in relation to the strings plane. Thus, the radiated sound is the same on each side of the instrument. This important result is due to the fact that the instrument is excited on its central line along the soundboard and, so, no asymmetric modes could be excited. Therefore this result can be expected in a playing configuration because strings are connected to the soundboard on this central line.

These directivity diagrams include the reflection on the semi-anechoic room's floor, which can explain lobes or widening out in these patterns. Thus, the directionality of the sound radiation is close to that obtained in a playing configuration. The harp is usually played far away from the walls and touches the floor. The only difference with an actual playing configuration, except for the excitation of the instrument, is that the harp is not leaning on the player's shoulder. This angle between the instrument and the floor is not taken into account in these patterns. Since this angle is only in the order of 10 degrees, it can be considered as small and, thus, does not significantly modify the directivity patterns of the harp. Therefore, the results we obtain with our experimental procedure must be close to what can be observed in the normal playing configuration.

### 3 Model based on a single monopole representation

#### 3.1 Theory

To reconstruct the sound field radiated by the concert harp, a method based on the Equivalent Source Method [4] was used. This method expresses the acoustic field as the result of a distribution of equivalent acoustic monopoles located inside the volume of the actual source.

In the low frequency range defined in the previous part, the harp is non-directional. A simple model of the sound radiated based on a single monopole representation is thus adopted. An image source placed symmetrically in relation to the floor was added to take into account the reflection as shown in Figure 3.

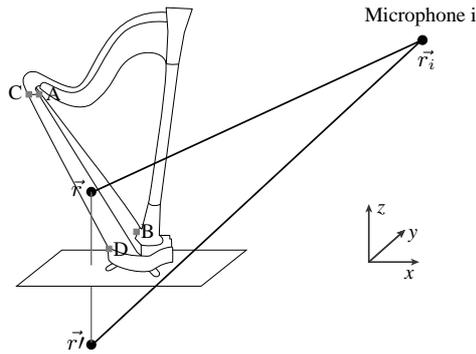


Figure 3: Schematic diagram of the single monopole model of the sound field radiated by the harp.

The pressure radiated at point  $M_i(\vec{r}_i)$  by a monopole located at position  $\vec{r}$  in space is given by

$$p(\vec{r}_i, \omega) = \left( \frac{j\omega\rho}{4\pi} \right) \left( \frac{e^{-jk\|\vec{r}-\vec{r}_i\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|} \right) Q, \quad (1)$$

where  $\omega$  is the angular frequency,  $\rho$  is the density of the air and  $Q$  the volume velocity. Due to sound reflection on the floor, we add to this source point an image monopole with the same volume velocity  $Q$  at position  $\vec{r}_t$  in space. If we consider the reflection coefficient  $R$  of the floor, the pressure radiated by these two monopoles at point  $M_i$  can be written as follows:

$$p(\vec{r}_i, \omega) = \left( \frac{j\omega\rho}{4\pi} \right) \left( \frac{e^{-jk\|\vec{r}-\vec{r}_i\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|} + R \frac{e^{-jk\|\vec{r}_t-\vec{r}_i\|}}{\|\vec{r}_t-\vec{r}_i\|} \right) Q, \quad (2)$$

or

$$p(\vec{r}_i, \omega) = G(\vec{r}, \vec{r}_t, \vec{r}_i) Q. \quad (3)$$

In order to find the parameters of this pressure field model (position  $\vec{r}$  and volume velocity  $Q$ ), we need to minimize the error between the pressure field measured at point

$M_i$ ,  $\hat{p}(\vec{r}_i, \omega)$ , and the model pressure on the same point,  $p(\vec{r}_i, \omega)$ :

$$\varepsilon = \frac{\sum_i |p(\vec{r}_i, \omega) - \hat{p}(\vec{r}_i, \omega)|^2}{\sum_i |\hat{p}(\vec{r}_i, \omega)|^2}. \quad (4)$$

Equation (3) can be written for all the  $N$  measurement points as follows in matrix form:

$$\begin{pmatrix} p(\vec{r}_1, \omega) \\ \vdots \\ p(\vec{r}_i, \omega) \\ \vdots \\ p(\vec{r}_N, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(\vec{r}, \vec{r}_t, \vec{r}_1) \\ \vdots \\ G(\vec{r}, \vec{r}_t, \vec{r}_i) \\ \vdots \\ G(\vec{r}, \vec{r}_t, \vec{r}_N) \end{pmatrix} Q \quad (5)$$

or

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}Q. \quad (6)$$

If the position of the equivalent source  $\vec{r}$  is known, it can be shown that the volume velocity  $Q$  can be obtained by

$$Q = \mathbf{G}^+ \mathbf{P}. \quad (7)$$

Equation (7) corresponds to the optimum solution in the least mean square sense, written for the general case of multiple sources, where  $Q$  is a vector,  $G$  is a matrix, and  $G^+$  is the generalized inverse of Moore-Penrose.

In the general case, location of the equivalent sources are unknown. In order to find optimal parameters, the error function given by equation (4) must be minimized. This minimization is a non-linear problem which has to be solved iteratively. Starting from the initial values of the parameters, and assuming that the error function is convex in the vicinity of these initial values, optimum values are computed using a gradient technique.

Note that this method can be extended with no difficulty to the case of multiple sources with their images.

#### 3.2 Results

Parameters of the single monopole representation described above were computed for each frequency. In this section only results obtained by the pressure measured when the harp is excited at point B are used. Moreover, the floor is supposed to be perfectly reflective and so the coefficient  $R$  in (2) is imposed as equalling 1. Then, volume velocities and positions are computed using the non linear minimization procedure described in the previous section. The main results are presented in Figures 4 and 5 linked to the coordinate system shown in Figure 1. Note that similar results are found for the two other excitation locations on the harp [5].

In Figure 4, the  $y$ -coordinate of the monopole location is found to nearly equal zero. Note that the range of this

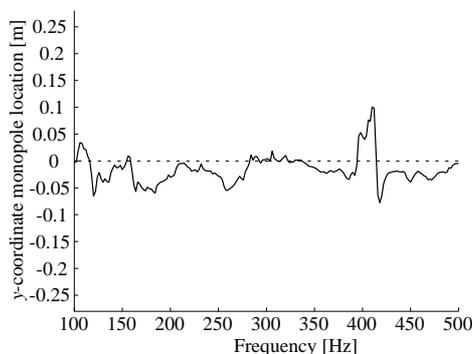


Figure 4: Location of the monopole along the  $y$ -coordinate against the frequency.

Figure is adjusted for the maximum width of the harp. As expected, this Figure shows that the optimal monopole is located on the symmetry plane of the instrument. More precisely, the maximum width of the instrument is of 0.56 m and this coordinate is found to oscillate around zero with values smaller than 0.1 m.

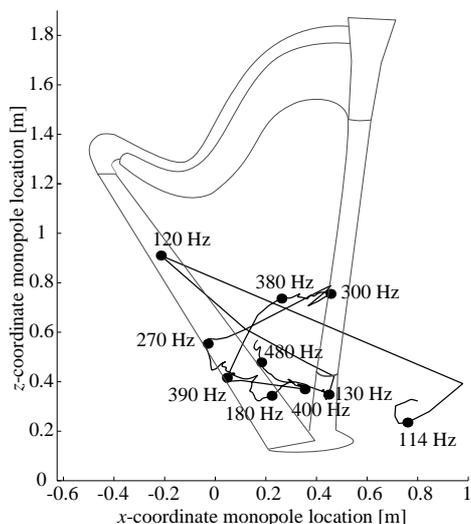


Figure 5: Location of the monopole along the  $x$ -coordinate against  $z$ -coordinate on the strings plan according to the frequency.

In Figure 5, the location of the monopole according to frequency is shown in the symmetry plane of the harp. For some frequencies, the equivalent source of the harp is found outside the instrument. This result shows that the single monopole model is not a physical solution of the sound radiated by the harp. Indeed, in a previous paper [6], two main sources of the sound field were found on the soundboard and on the sound holes. So, the equivalent sources of the harp should be found on the locations corresponding to the elements that compose the harp.

The relative error between measured and synthesized sound fields, see equation (4), is computed for each frequency. The single monopole model is found to be representative of the radiated sound field of the harp in the [150 Hz - 240 Hz] frequency range, since the relative error is under 10%. Outside this range, the single monopole model is not appropriate and certainly has to be improved by adding more monopoles to represent the radiated sound field.

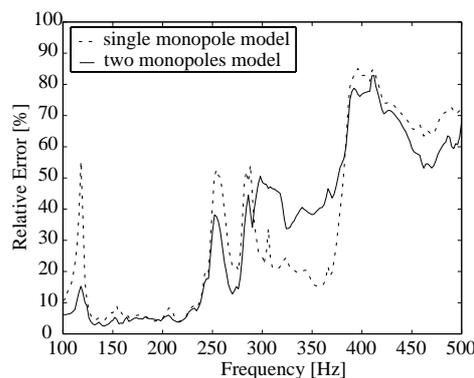


Figure 6: Relative error  $\varepsilon$ , defined in equation 4, against the frequency for the single monopole and two monopoles models.

## 4 Model based on a two monopoles representation

In order to represent the two main acoustic sources by monopoles, the sound field radiated by the harp can be modelled with two monopoles and their corresponding image monopoles. The location of these two monopoles is limited to the soundboard and to the sound holes on the symmetry plane of the harp. These two monopoles are so constrained along the two segments shown in Figure 3, on [AB] for the soundboard and on [CD] for sound holes. Thus, it is possible to carry out the same technique in the case of two monopoles as already explained in section 3. Note that, as in the previous section, only measurement obtained by excitation at point B on the harp is used and the floor is assumed to be perfectly reflective.

So as to reduce the time delay of the computing of the optimum two monopoles, the following procedure is adopted: locations of the monopoles on the soundboard and on the sound holes in the symmetry plane of the harp are imposed. For each pairs of monopole locations, the error between measured and model fields is computed. The two monopoles are found for the minimum error according to the frequency. In Figure 6, the relative error against the frequency is shown. In a low frequency range, the two monopoles model is found to be better than the

Forum Acusticum 2005 Budapest

Le Carrou, Gautier, Gilbert, Arruda

single monopole model.

The computed volume velocities of the two monopoles are shown in Figure 7. The volume velocity on the soundboard is more important than that on the sound holes. Two peaks are found at 148 Hz and at 166 Hz, and can be linked with the two coupled modes studied in a previous paper [3]. Moreover, the phase of these two monopoles is also characteristic of the vibroacoustic behaviour of the harp. Indeed, these monopoles can be interpreted in terms of velocity of the soundboard and of the air pistons as illustrated with schematic arrows in Figure 7. Their phase relationships are simple in the investigated frequency range: they are out-of-phase below a characteristic frequency and in phase above it. This result has also been found in [3], where the phase between the acoustic velocity in the 5 sound holes and the velocity of the soundboard were measured.

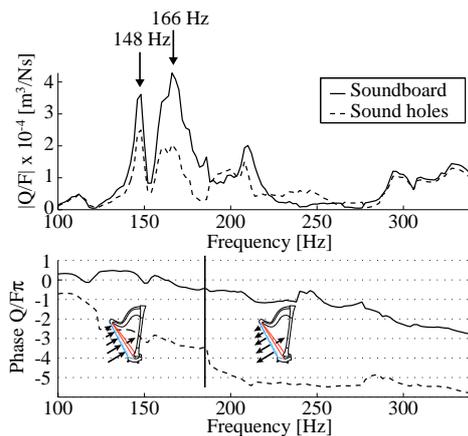


Figure 7: Volume velocities for unit force on the soundboard and on the sound holes. Schematic diagrams show phase relationships between soundboard and air pistons.

## 5 Conclusion

In this paper, the sound radiated by the harp was investigated. For this purpose, two models, based on the Equivalent Source Method have been developed. The first model uses only one monopole with no location restriction. The second is a model with two monopoles located on the soundboard and on the sound holes of the harp. Although the first model is a good approximation in low frequencies of the sound field radiated by the harp, we show that this model does not represent the physical properties of its vibroacoustic behaviour. The second model is thus a better solution to take into account the two main radiated sources: the soundboard and the sound holes. The volume velocities associated to these sources reach their maximum values for two characteristic frequencies

(148 Hz and 166 Hz) which correspond to two particular modes of the vibroacoustic system. These modes are strongly coupled and involve both the air piston motion and the bending motion of the soundboard. Such coupled modes have been extensively studied for the case of the guitar. Investigations in order to quantify and qualify the role played by these modes for the concert harp are under way.

## References

- [1] A.J. Bell, 'An Acoustical Investigation of the Concert Harp'. *PhD Thesis*, University of St. Andrews, United Kingdom, 1987.
- [2] A. Le Pichon, 'Méthode de Prédiction du Rayonnement Acoustique de Structures Volumiques Composées d'une ou plusieurs Faces Planes Vibrantes Application aux Instruments de Musique à Cordes'. *PhD Thesis*, Université de Paris XI, Paris, France, 1996. [In french]
- [3] J-L. Le Carrou, F. Gautier and N. Dauchez, 'Acoustic Radiation of the Concert Harp in the Low Frequency Range', *Proc. Int. Congress on Sound and Vibration*, Lisbon. (2005)
- [4] G.H. Koopman, L. Song and B. Fahnlne, 'A Method for Computing Acoustic Fields Based on the Principle of Wave Superposition', *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 86(6), pp. 2433-2438. (1989)
- [5] D.R.M Renger, 'Harp Acoustic Radiation, Equivalent Sources Estimation', *Master Report*, Université du Maine, Le Mans, France. (2004)
- [6] F. Gautier and N. Dauchez, 'Acoustic Intensity Measurement of the Sound Field Radiated by a Concert Harp', *Applied Acoustics*, Vol. 65, pp. 1221-1231. (2004)

## Acknowledgements

The authors acknowledge the financial support from the CNRS and the Région des Pays de la Loire for Jean-Loïc Le Carrou's PhD studentship. They acknowledge the instrument maker CAMAC Harps for the lent of the concert harp and the CTTM (Le Mans Centre for Technology Transfer) where measurements were performed. The authors also acknowledge Eric Boboeuf and Franck Grignon, ENSIM students (Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans), for setting up the experiment. Lastly, the authors acknowledge Michiel Ranger and Gaylord Desoeuvre for their first computerized models.

## Annexe C

# Méthode Impédance

### C.1 Introduction

Dans le chapitre 6, nous avons développé un modèle d'instrument à cordes générique constitué d'une poutre sur laquelle des cordes sont attachées. Le formalisme du vecteur d'état et la méthode des matrices de transfert sont utilisés pour décrire le comportement vibratoire dans chacune des sous-structures (poutre et cordes). Comme souligné dans le chapitre 6 (§ 6.3.2, p. 108), la méthode des matrices de transfert est connue pour être intrinsèquement limitée en fréquence en raison de termes exponentiels d'argument réel dans la matrice de propagation définie par l'équation (6.8). La figure 6.4 montre un comportement divergent à hautes fréquences (au delà de 750 Hz) pour les valeurs numériques utilisées. Pour s'affranchir de cette limitation une autre méthode, la méthode impédance, peut être employée. En formulant le problème à partir d'un formalisme d'état, nous exposons l'obtention des matrices impédances (ou admittance) d'une corde et d'une poutre.

### C.2 Formulation en impédance

#### C.2.1 Formalisme d'état – Equation d'état

L'état vibratoire du système est représenté par un certain nombre de variables cinématiques  $\boldsymbol{x}_c$  et d'efforts  $\boldsymbol{x}_f$  qui constituent les composantes d'un vecteur d'état  $\boldsymbol{x}$ . En l'absence de forces extérieures, le système d'équations différentielles vérifié par le vecteur d'état, également appelé équation d'état, peut s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d\boldsymbol{x}(x)}{dx} = \mathbf{H}(\omega)\boldsymbol{x}(x) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{x}_f \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{H}(\omega)$  est une matrice caractéristique de la structure considérée, appelée matrice de transition, dépendante de la pulsation  $\omega$ .

### C.2.2 Matrice admittance

On définit  $Y$ , la matrice admittance liant les variables cinématiques aux variables d'efforts par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_c = -j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f. \quad (\text{C.2})$$

La matrice impédance, quant à elle, est déduite directement de la matrice admittance par

$$Y = Z^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

### C.2.3 Equation en admittance

En utilisant la définition de la matrice admittance (C.2), l'équation d'état (C.1) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} -j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} H_1 & H_2 \\ \hline H_3 & H_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

La relation matricielle (C.4) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(-j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f) = H_1(-j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f) + H_2 \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \\ \frac{d}{dx}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_f) = H_3(-j\omega Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f) + H_4 \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \end{cases}, \quad (\text{C.5})$$

ou encore

$$\begin{cases} -j\omega \left( \frac{d}{dx}(Y) \boldsymbol{\mathcal{X}}_f + Y \frac{d}{dx}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_f) \right) = -j\omega H_1 Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f + H_2 \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \\ \frac{d}{dx}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_f) = -j\omega H_3 Y \boldsymbol{\mathcal{X}}_f + H_4 \boldsymbol{\mathcal{X}}_f \end{cases}. \quad (\text{C.6})$$

Par substitution, on obtient :

$$\left[ j\omega \frac{dY}{dx} + \omega^2 Y H_3 Y + j\omega Y H_4 - j\omega H_1 Y + H_2 \right] \boldsymbol{\mathcal{X}}_f = 0. \quad (\text{C.7})$$

Cette équation (C.7) est vrai pour toute valeur du vecteur  $\boldsymbol{\mathcal{X}}_f$  non nulle, il vient :

$$j\omega \frac{dY}{dx} + \omega^2 Y H_3 Y + j\omega Y H_4 - j\omega H_1 Y + H_2 = 0 \quad (\text{C.8})$$

Cette dernière équation portant sur l'admittance  $Y$  est une équation différentielle non-linéaire appelée équation de Riccati matricielle. La résolution de cette équation (C.8) permet l'obtention des matrices impédances ou admittances de la corde et de la poutre.

### C.3 Equation de Riccati vérifiée par la matrice admittance d'une corde

La matrice de transition d'une corde est obtenue directement de ses équations du mouvement, voir Annexe 1 du chapitre 6, p. 119. Nous rappelons ici le résultat :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/ES & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/T_0 \\ -\rho_L\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_L\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C.9)$$

avec  $E$  le module d'Young,  $S$  la section,  $T_0$  la tension de la corde,  $\rho_L$  la masse linéique,  $\omega$  la pulsation. Cette matrice vérifie l'équation d'état (C.1) dont les vecteurs cinématiques et d'efforts sont les suivants :

$$\mathcal{X}_c(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ w(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_f(x) = \begin{pmatrix} N(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}, \quad (C.10)$$

avec  $u$  et  $w$  les déplacements longitudinaux et transversaux, et  $N$  et  $Q$  les efforts longitudinaux et transversaux.

Par identification, nous obtenons chacun des blocs de matrice nécessaire à la résolution de l'équation (C.8) :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1/ES & 0 \\ 0 & 1/T_0 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} -\rho_L\omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho_L\omega^2 \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (C.8) écrite sous forme générale se simplifie car  $H_1$  et  $H_4$  sont nulles. Pour une corde, l'équation de Riccati vérifiée par l'admittance  $Y$  s'écrit donc :

$$j\omega \frac{dY}{dx} + \omega^2 Y H_3 Y + H_2 = 0. \quad (C.11)$$

La résolution de cette équation (C.11) est possible. L'admittance  $Y(x)$ , au point de coordonnée généralisée  $x$  peut être obtenue en fonction de l'admittance  $Y(x_0)$  au point  $x_0$ . La relation liant ces deux quantités, souvent appelée formule de l'impédance ramenée, est démontrée dans les lignes suivantes.

Effectuons un changement de variable adéquat pour obtenir une équation différentielle linéaire du deuxième ordre [Wan, 95]. Posons  $Y = (-j\omega H_3)^{-1} U' U^{-1}$  avec  $U$ , une matrice inversible. Il vient :

$$(-j\omega H_3)^{-1} \left[ \frac{dU'}{dx} U^{-1} + U' \frac{dU^{-1}}{dx} \right] + (-j\omega H_3)^{-1} U' U^{-1} U' U^{-1} + \frac{H_2}{j\omega} = 0. \quad (C.12)$$

Après simplification et en multipliant à droite par  $U$ , nous avons :

$$U'' + KU = 0 \quad \text{avec} \quad K = H_3 H_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_L\omega^2}{ES} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_L\omega^2}{T_0} \end{pmatrix} \quad (C.13)$$

Posons  $c_t = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_L}}$  la vitesse de propagation des ondes de flexion et  $c_l = \sqrt{\frac{ES}{\rho_L}}$  la vitesse de propagation des ondes de compression. La solution suivante en U de l'équation (C.13) est de la forme suivante :

$$U = \begin{pmatrix} C_1 e^{j\frac{\omega}{c_l}x} + C_2 e^{-j\frac{\omega}{c_l}x} & 0 \\ 0 & C_3 e^{j\frac{\omega}{c_t}x} + C_4 e^{-j\frac{\omega}{c_t}x} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

où  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sont les constantes d'intégration dépendantes de la condition initiale. Il est donc maintenant aisé de revenir à la solution en impédance :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \frac{k_l [e^{jk_l x} - \alpha e^{-jk_l x}]}{\omega^3 \rho_L [e^{jk_l x} + \alpha e^{-jk_l x}]} & 0 \\ 0 & \frac{k_t [e^{jk_t x} - \beta e^{-jk_t x}]}{\omega^3 \rho_L [e^{jk_t x} + \beta e^{-jk_t x}]} \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

avec  $k_l = \frac{\omega}{c_l}$ ,  $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ ,  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$  et  $\beta = \frac{C_4}{C_3}$ . En considérant les admittances connues à l'abscisse  $x_0$  ( $Y_{11}(x_0)$  et  $Y_{22}(x_0)$ ), les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être déterminées comme suit :

$$\begin{cases} Y_{11}(x_0) = \frac{k_l}{\omega^3 \rho_L} \left[ \frac{e^{jk_l x_0} - \alpha e^{-jk_l x_0}}{e^{jk_l x_0} + \alpha e^{-jk_l x_0}} \right] \\ Y_{22}(x_0) = \frac{k_t}{\omega^3 \rho_L} \left[ \frac{e^{jk_t x_0} - \beta e^{-jk_t x_0}}{e^{jk_t x_0} + \beta e^{-jk_t x_0}} \right] \end{cases}, \quad (\text{C.16})$$

et, après simplification, nous obtenons les constantes d'intégration suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = \left[ \frac{k_l / (\omega^3 \rho_L) - Y_{11}(x_0)}{k_l / (\omega^3 \rho_L) + Y_{11}(x_0)} \right] e^{2jk_l x_0} \\ \beta = \left[ \frac{k_t / (\omega^3 \rho_L) - Y_{22}(x_0)}{k_t / (\omega^3 \rho_L) + Y_{22}(x_0)} \right] e^{2jk_t x_0} \end{cases}. \quad (\text{C.17})$$

Nous introduisons ici l'admittance caractéristique de corde pour le mouvement longitudinal  $Y_{c1} = \frac{1}{\rho_L c_l \omega^2}$  et  $Y_{c2} = \frac{1}{\rho_L c_t \omega^2}$  transversal. De plus, pour des facilités d'écriture, nous posons  $k_l = k_1$  et  $k_t = k_2$ . En substituant (C.17) à (C.15), nous obtenons :

$$\forall i = [1, 2], \quad Y_{ii}(x) = Y_{ci} \frac{\tanh(jk_i(x - x_0)) + \frac{Y_{ii}(x_0)}{Y_{ci}}}{1 + \frac{Y_{ii}(x_0)}{Y_{ci}} \tanh(jk_i(x - x_0))}, \quad (\text{C.18})$$

qui n'est autre que la formule d'impédance ramenée, classique en théorie des lignes. La matrice Y est donc diagonale :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

## C.4 Equation de Riccati vérifiée par la matrice admittance d'une poutre

La matrice de transition d'une poutre obtenue dans l'Annexe 2 du chapitre 6 (p. 119) est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/EI \\ -\rho A\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho A\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

avec  $E$  le module d'Young,  $A$  la section,  $I$  le moment d'inertie,  $\rho$  la masse linéique,  $\omega$  la pulsation. Cette matrice vérifie l'équation d'état (C.1) dont les vecteurs cinématiques et d'efforts sont les suivants :

$$\mathbf{x}_c(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_f(x) = \begin{pmatrix} N(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.21})$$

avec  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  les déplacements longitudinaux, transversaux et la rotation de section, et  $N$ ,  $Q$  et  $M$  les efforts longitudinaux, transversaux et le moment fléchissant.

Par identification, nous obtenons chacun des blocs de matrice nécessaire à la résolution de l'Équation (C.8) :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} -\rho_L A\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_L A\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contrairement au cas de la corde, l'équation de Riccati (C.8) écrite avec les valeurs ci-dessus des matrices  $(H_i)_{i=1,2,3,4}$  ne peut être résolue, à notre connaissance, que numériquement. La méthode adaptée pour intégrer cette équation (C.8) est un algorithme de type Runge-Kutta. Cette méthode a été utilisée avec succès dans la littérature pour résoudre numériquement des équations de Riccati afin de déterminer la matrice impédance de guide d'onde à section variable [Félix, 02].

## C.5 Conclusion

Dans cette annexe, nous avons proposé une méthode alternative à celle des matrices de transfert pour obtenir l'état vibratoire d'une corde et d'une poutre : la méthode impédance. En formulant le problème, la matrice admittance (matrice inverse de la matrice impédance) est trouvée comme solution d'une équation différentielle matricielle non-linéaire de type Riccati. La résolution analytique de cette équation dans le cas de la corde nous conduit à l'obtention de la formule de l'impédance ramenée. Pour la poutre, la résolution de ce type d'équation n'est possible que numériquement. Néanmoins,

cette méthode reste intéressante car, même si l'impédance de la poutre est résolue numériquement, il est possible d'avoir de meilleurs résultats en hautes fréquences que par la méthode des matrices de transfert. On peut notamment envisager l'utilisation de cette méthode pour le calcul des fréquences et des déformées modales de modes d'ordre élevé.

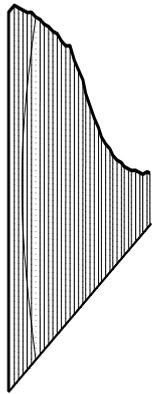
## Bibliographie

- [Wan, 95] F. Wan. *Introduction to the calculus of variations and its applications*. Chapman and Hall, New York, United States of America, 1995.
- [Félix, 02] S. Félix. *Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes et problème avec source dans un écoulement cisailé*. Thèse de doctorat, Université du Maine, France, 2002.

## Annexe D

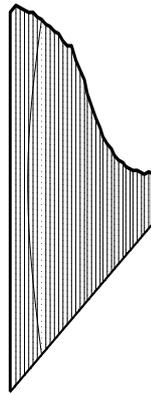
# Modes du système couplé poutre équivalente - 35 cordes

Dans cette annexe sont reproduites les déformées modales ainsi que les fréquences propres des modes associés au système poutre équivalente à la table d'harmonie connectée à un réseau de 35 cordes. Les paramètres du système et la méthode de résolution sont exposés dans le chapitre 7 (§ 7.2, p. 124). Parmi les 151 modes obtenus dans la plage de fréquence [0 Hz-500 Hz], 35 modes sont montrés ci-dessous avec leur type en accord avec le calcul de l'indicateur KER (§ 6.3.2.3, p. 109).



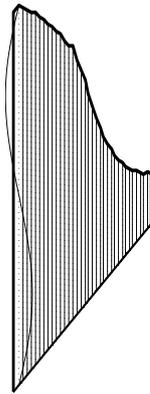
Mode de corde 40

(51,79 Hz)



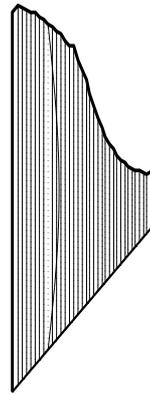
Mode de corde 39

(58,39 Hz)



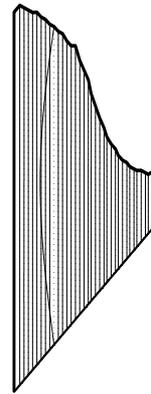
Mode de corde 45

(61,00 Hz)



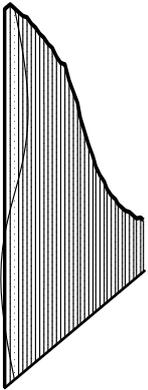
Mode de corde 38

(61,49 Hz)



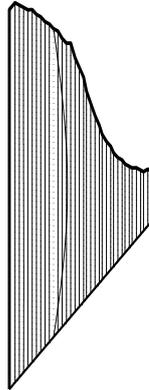
Mode de corde 37

(69,18 Hz)



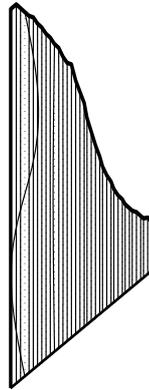
Mode de corde 44

(69,40 Hz)



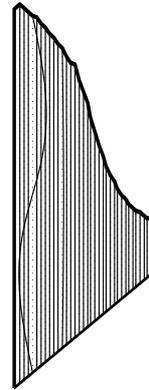
Mode de corde 36

(77,17 Hz)



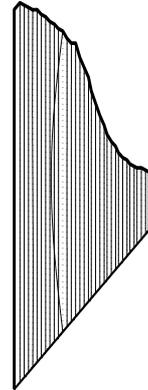
Mode de corde 43

(77,40 Hz)



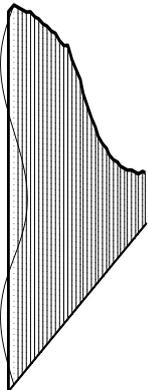
Mode de corde 42

(82,20 Hz)



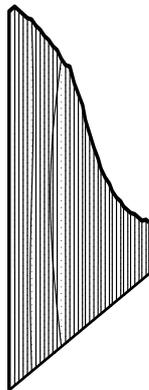
Mode de corde 35

(82,36 Hz)



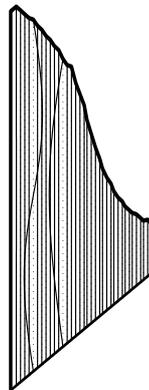
Mode de corde 45

(82,50 Hz)



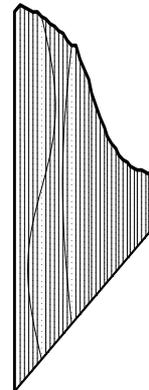
Mode sympathique 41-34

(91,94 Hz)



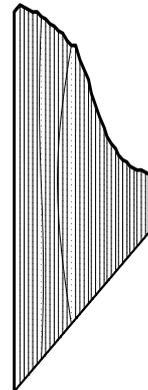
Mode sympathique 41-34

(92,00 Hz)



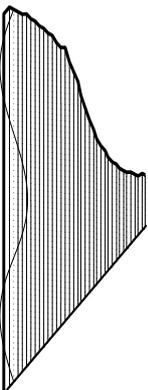
Mode sympathique 40-33

(103,58 Hz)



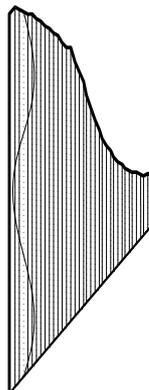
Mode sympathique 40-33

(103,65 Hz)



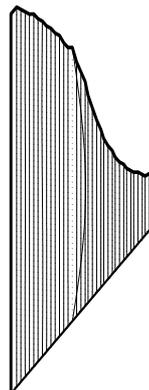
Mode de corde 44

(104,10 Hz)



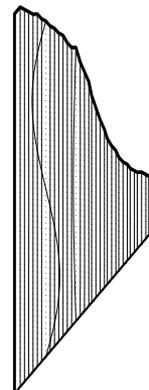
Mode de corde 43

(116,10 Hz)



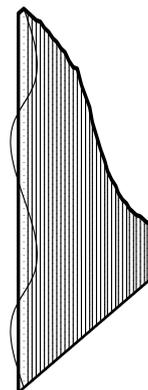
Mode de corde 32

(116,31 Hz)



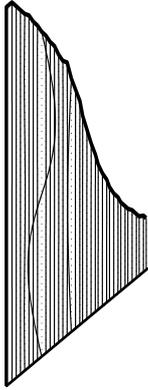
Mode de corde 39

(116,78 Hz)

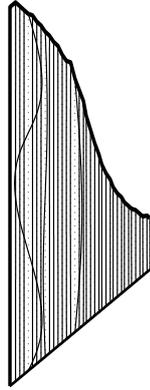


Mode de corde 45

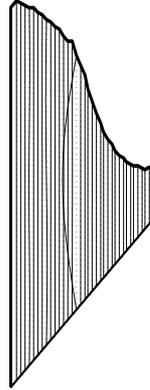
(122,00 Hz)



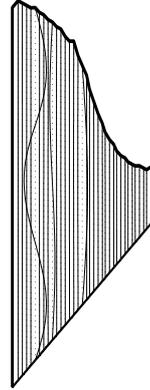
Mode sympathique 38-31  
(122,95 Hz)



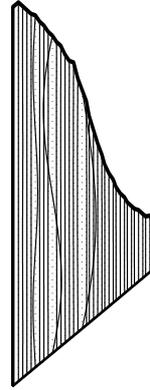
Mode sympathique 42-31  
(123,29 Hz)



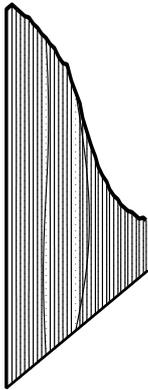
Mode de corde 31  
(123,48 Hz)



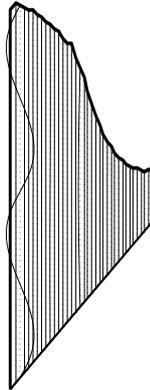
Mode sympathique 41-37  
(137,97 Hz)



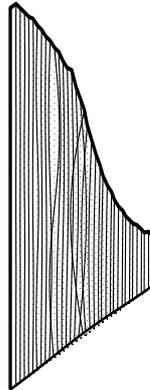
Mode sympathique 37-30  
(138,2 Hz)



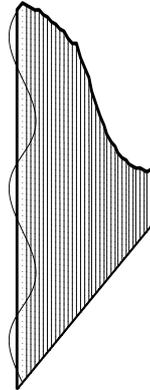
Mode sympathique 30-37  
(138,56 Hz)



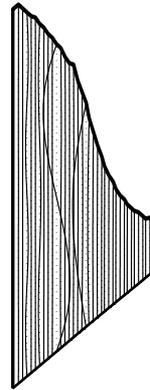
Mode de corde 44  
(138,80 Hz)



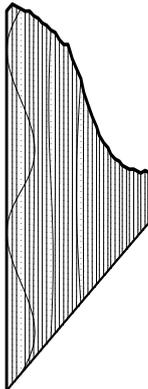
Mode de poutre  
(149,91 Hz)



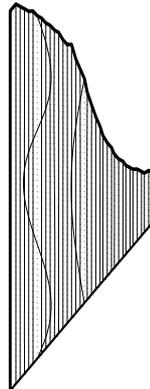
Mode de corde 45  
(152,50 Hz)



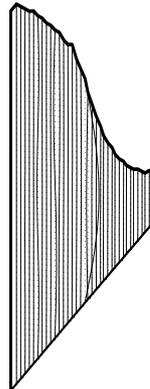
Mode de sympathique 36-29  
(154,65 Hz)



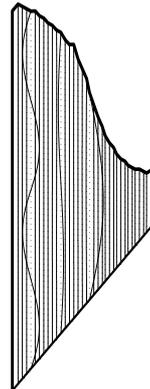
Mode de corde 43  
(154,80 Hz)



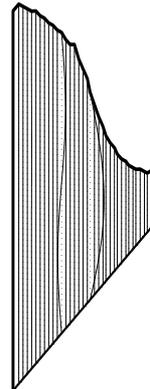
Mode sympathique 40-29  
(155,40 Hz)



Mode sympathique 29-36  
(156,35 Hz)



Mode sympathique 42-28  
(164,40 Hz)



Mode sympathique 28-35  
(164,73 Hz)

## Résumé

La harpe de concert est un instrument à cordes dont les propriétés acoustiques et vibratoires ont fait l'objet de peu d'études. L'objectif visé au cours de ce travail de thèse est de comprendre et de modéliser le comportement vibro-acoustique de cet instrument.

Dans une première partie, une description générale de l'instrument est proposée, de ses origines à sa constitution actuelle. Une attention particulière est ensuite portée à l'interaction entre le doigt et la corde au moment du pincement : l'analyse d'images obtenues avec une caméra rapide permet d'obtenir les paramètres d'un modèle d'interaction.

Dans une deuxième partie, le rayonnement acoustique du corps sonore de l'instrument est étudié. Ce rayonnement met en jeu des couplages entre la table d'harmonie et la caisse de résonance. Une analyse modale, complétée par des mesures de vitesse particulaire acoustique en sortie d'évents permet d'identifier deux modes couplés caractéristiques du comportement vibro-acoustique de l'instrument en basses fréquences. Un modèle discret à 2 degrés de liberté décrivant la réponse de la harpe autour des fréquences de ces deux modes est développé. Du fait de la particularité des mécanismes d'amortissement présents dans le système, l'estimation des paramètres du modèle n'est possible que grâce à l'utilisation d'une méthode « non standard » d'analyse modale : l'appropriation par le calcul. Par ailleurs, le rayonnement acoustique en champ lointain est étudié à l'aide d'une antenne de microphones. La méthode dite des « sources équivalentes » est appliquée afin d'identifier une distribution de monopoles acoustiques rendant compte du rayonnement acoustique de l'instrument. Finalement, en basses fréquences, la harpe de concert est modélisée par 2 sources acoustiques élémentaires, l'une placée sur la table d'harmonie et l'autre au niveau des événements.

La troisième partie est consacrée à l'étude des couplages entre les cordes et la table d'harmonie qui donnent lieu à des phénomènes de résonance par sympathie. Ces couplages sont étudiés au moyen d'un modèle d'instrument à cordes générique constitué d'une poutre encastrée à ses extrémités sur laquelle des cordes sont fixées à leurs extrémités. Le formalisme du vecteur d'état et la méthode des matrices de transfert sont utilisés pour décrire la propagation des ondes de flexion et de compression dans chaque sous-structure (cordes et poutre). À partir des conditions de couplage entre les sous-structures, les modes de l'assemblage sont déterminés et ceux responsables du phénomène de vibration par sympathie sont identifiés. Appliqués au cas de la harpe de concert, ces modes, dit sympathiques, sont également extraits expérimentalement. Les multiples couplages entre les cordes, occasionnés par ces modes, donnent lieu à des signaux musicaux présentant un grand nombre de composantes spectrales, dont les fréquences sont parfois très proches et non résolues dans un même partiel. L'identification de ces composantes est alors effectuée par l'emploi de méthodes spécifiques du traitement du signal : des méthodes à haute résolution.

Des résultats issus de ces travaux sont mis en perspective pour des applications possibles en facture instrumentale.

**Mots-clés : Acoustique musicale, Harpe, Vibro-acoustique, Rayonnement acoustique, Analyse modale, Méthode à haute résolution.**

## Abstract

The acoustical and vibratory properties of the concert harp have not been the subject of many studies. The aim of this PhD thesis is to understand and model the vibro-acoustic behaviour of this string instrument.

First, a general description of the instrument is given, from its origins to its current constitution. More attention is then paid to the finger-string interaction when the string is plucked: the analysis of pictures obtained with a high-speed framing camera gives the parameters of an interaction model.

In the second part, the acoustic radiation of the instrument's body is studied. This radiation implies couplings between the soundboard and the soundbox. A modal analysis, along with measures of acoustic velocities in the sound holes, allows the identification of two coupled modes that are characteristic of the vibro-acoustic behaviour of the instrument in low frequencies. A two degrees of freedom discrete model, describing the harp's response around these two modes' frequencies, is developed. Because of the specificities of the system's damping mechanisms, the model's parameters can only be found through an unusual modal analysis method: the appropriation technique. In addition, the far field acoustic radiation is studied using a microphones array. The equivalent sources method is then applied to identify a range of acoustical monopoles, thus giving an account for the acoustic radiation of the instrument. Finally, in low frequencies, the harp is modeled by two elementary acoustic sources, one on the soundboard and the other one on the sound holes.

The third part is dedicated to the study of the string-soundboard couplings responsible for sympathetic resonances. These couplings are studied using a generic string instrument model made of a clamped beam onto which strings are connected. The state vector formalism and the transfer matrix method are used to describe the propagation of bending and extensional waves in each sub-structure (beam and strings). Coupling conditions between sub-structures lead to the determination of the normal modes of the assembly and to the identification of those which are responsible for the sympathetic vibrations. These sympathetic modes, are then experimentally extracted from the concert harp. The numerous couplings between the strings, caused by these modes, lead to musical waves presenting a large amount of spectral components, of which frequencies can be really close and thus not solved in the same partial. The identification of these components can only be made through signal processing specific techniques that are high-resolution methods.

Prospects of the results obtained throughout this work are then highlighted for possible use in instrument making.

**Keywords : Musical acoustics, Harp, Vibro-acoustic, Acoustic radiation, Modal analysis, High-resolution method.**