



Etude asymptotique et simulation numérique de la propagation Laser en milieu inhomogène

Marie Doumic

► To cite this version:

Marie Doumic. Etude asymptotique et simulation numérique de la propagation Laser en milieu inhomogène. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT : . tel-00142670

HAL Id: tel-00142670

<https://theses.hal.science/tel-00142670>

Submitted on 20 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Spécialité :

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

présentée par

Marie DOUMIC

pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Université Paris VII

Sujet de la thèse :

**ETUDE ASYMPTOTIQUE
ET SIMULATION NUMERIQUE
DE LA PROPAGATION LASER EN MILIEU
INHOMOGENE**

Organisme d'accueil :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

soutenue le 20 mai 2005 devant la commission d'examen

Monsieur Claude BARDOS	Invité
Monsieur Peter MARKOWICH	Rapporteur
Monsieur Thierry COLIN	Rapporteur
Monsieur Bruno DESPRES	Invité
Monsieur François Golse	Directeur de thèse
Monsieur Rémi Sentis	Co-Directeur de thèse

Pour Emmanuel

Pour Chantal Nérot

Remerciements

En tout premier lieu, je voudrais exprimer à François Golse et à Rémi Sentis combien je leur suis reconnaissante d'avoir accepté d'encadrer cette thèse, et de m'avoir proposé un sujet qui m'a passionnée.

Rémi Sentis, par son attention constante, sa présence presque quotidienne, sa patience, a soutenu mon effort de recherche. Il m'a communiqué la joie de voir mes travaux appliqués à un grand projet, et de voir que les résultats numériques, si tangibles, venaient conforter les démonstrations théoriques. Il m'a appris aussi le sens des réalités qu'il faut conserver même dans les recherches les plus abstraites ; je l'en remercie infiniment.

François Golse m'a aidée à développer la partie la plus théorique de ma thèse. Les entretiens avec lui (dont je sortais parfois perplexe, mais qui étaient toujours infiniment éclairants) m'ont obligée à prendre de la hauteur et à resituer mes travaux dans l'édifice général. Il extrayait instantanément le cas général d'un cas particulier et savait me l'expliquer à partir de cas très simples.

J'ai donc eu la chance de travailler avec deux chercheurs de grand renom, dont les approches bien différentes se sont complétées à merveille. Les parties théoriques et numériques ont pu s'équilibrer dans mes travaux. Lors de nos réunions, je me suis souvent sentie bien petite...

Je remercie également Peter Markowich et Thierry Colin d'avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse, et Claude Bardos et Bruno Després d'avoir accepté d'être membres du jury. Merci spécialement à Thierry Colin pour ses ajouts bibliographiques et ce qu'il m'a appris dans son pré-rapport, und ich danke sehr Peter Markowich dafür, dass er nach Paris zu meiner Disputation gekommen ist.

Je voudrais ensuite exprimer toute ma reconnaissance au CEA pour m'avoir accueillie et offert de très bonnes conditions de travail. L'ambiance du « couloir des thésards », si j'en crois mon dernier passage, se perpétue ; je saluerai ici, en espérant n'oublier personne, mes illustres anciens : Frédéric Lagoutière, Christophe Lemaire mon collègue de l'Équipement, Christophe Moreau l'enthousiaste, François de Dortan l'inimitable, David Hateau, Carine Boudesocque, Ian Sollicec avec qui j'ai partagé non seulement un bureau mais aussi un directeur de thèse, et dont j'ai suivi les traces en recherche, Stéphane Jaouen l'heureux père, Philippe Cossé, Elisabeth Varin... et les nouveaux, heureuse troupe bien encadrée par Benjamin Le Creurer.

Avec le CEA, bien sûr, je remercie l'Ecole Normale Supérieure, qui m'a accueillie également et sur une période plus étendue encore. Lieux aimés et arpentés, riches de souvenir ; où j'ai commencé et achevé ma vie d'étudiante ; lieu où l'on n'est jamais vraiment seule dans les bureaux, que ce soit à minuit ou les jours fériés. Merci à Amandine Aftalion qui m'a guidée dans mon choix de thèse, avec beaucoup d'efficacité, de disponibilité et d'attention. Je salue la gentillesse de mes cobureaux, en particulier Chiara Simeoni et Pierre-Emmanuel Jabin, Thodoros Katsaounis et Lobna Derbel. Je remercie encore Jacques Beigbeder pour son aide et son talent inégalé d'administrateur réseau ; Bénédicte Auffray, qui montre que l'administration peut être d'une efficacité remarquable.

Je souhaite également remercier l'Ecole des Ponts et Chaussées, et son directeur des études Alain Neveu. Grâce à sa compréhension, à son souci d'adaptation de la scolarité à chaque élève, j'ai pu continuer mes travaux de recherche en parallèle de mes études. C'est toute la richesse des Ponts de permettre à ses élèves une scolarité sur mesure, loin du « formatage » qui peut parfois se produire ailleurs sous prétexte d'efficacité. Cette souplesse donne aux anciens élèves une ouverture et une panoplie de compétences bien plus larges.

Enfin, et ce n'est pas le moindre, je remercie tous mes proches, tous ceux que j'aime. Une thésarde n'est pas toujours facile à vivre ! Il y a des hauts et des bas, des jours très expansifs et des jours taciturnes. Merci pour votre patience et votre soutien, spécialement à Emmanuel, et à mes parents.

Table des matières

Notations	13
1 Introduction et principaux résultats	15
1.1 Plan de l'étude	16
1.2 Cadre physique et obtention des équations	18
1.2.1 Principaux ordres de grandeur de l'interaction laser-matière .	19
1.2.2 Description bifluide d'un plasma	19
1.2.3 Obtention d'une fermeture pour $\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t}$	21
1.2.4 Comparaison des ordres de grandeur	24
1.3 Résumé de la partie I.	
Etude asymptotique de l'équation de Klein-Gordon : l'équation d'advection-Schrödinger	27
1.4 Résumé de la partie II.	
Problème aux limites pour la propagation oblique	32
1.5 Résumé de la partie III.	
Simulation numérique de l'équation d'advection-Schrödinger	36
1.6 Perspectives	38
Partie I : Approximation d'enveloppe de l'équation de Klein-Gordon	41
2 Développement asymptotique de la solution de l'équation de Klein-Gordon	43
2.1 Etude du problème de Klein-Gordon	44
2.1.1 Position du problème	44

2.1.2	Existence et unicité (rappel)	45
2.1.3	Inégalités d'énergie	47
2.2	Optique géométrique	48
2.2.1	Equation d'enveloppe	49
2.2.2	Equation de la phase : équation eikonale	49
2.2.3	Equation de l'amplitude à l'ordre 1 : équation d'advection	51
2.3	Equation d' <i>advection-Schrödinger</i>	51
2.3.1	Problème exact pour l'amplitude	52
2.3.2	Première approximation : équation d'advection	53
2.3.3	Approximation à l'ordre suivant : équation d'advection-Schrödinger	55
2.4	Orientation du travail	57
3	Rayons droits dans l'espace entier	61
3.1	Approximation d'enveloppe pour l'équation de Klein-Gordon	61
3.2	Résolution par transformée de Fourier	64
3.3	Résultat d'approximation	71
4	Rayons faiblement courbés dans l'espace entier	75
4.1	Développement asymptotique	75
4.1.1	Optique géométrique	75
4.1.2	Développement de type Chapman-Enskog (cf. [12])	77
4.1.3	Développement asymptotique inspiré d'A. Newell	78
4.2	Ecriture dans la géométrie des rayons	81
4.3	Etude du problème approché	82
4.3.1	Résultats d'existence et unicité	82
4.3.2	Régularité	88
4.3.3	Résultat d'approximation	93
5	Cas quasi-statique : Advection-Schrödinger spatial	95
5.1	Introduction	95
5.2	Rayons droits sur tout l'espace	97

5.2.1	Existence et unicité	97
5.2.2	Résultat d'approximation	98
5.3	Rayons faiblement courbés	101
5.3.1	Existence et unicité sur tout l'espace	101
5.3.2	Résultat d'approximation	103
6	Etude sur le demi-espace	107
6.1	Problème de Klein-Gordon	108
6.1.1	Condition au bord du domaine	108
6.1.2	Existence et unicité (rappel)	110
6.1.3	Estimation d'énergie	113
6.2	Analyse asymptotique	115
6.2.1	Equation eikonale	115
6.2.2	Conditions aux limites	116
6.2.3	Estimation d'énergie pour le problème d'advection	118
6.2.4	Choix du problème approché	121
6.3	Retour au développement asymptotique	122
6.4	Problème d'advection-Schrödinger	125
6.4.1	Rayons droits	125
6.4.2	Réécriture du problème	129
6.4.3	Existence et unicité	131
6.4.4	Régularité	134
6.4.5	Résultat d'approximation	137
Partie II : Equation d'advection-Schrödinger et conditions absorbantes		141
7	Boundary Value Problem for an oblique paraxial Model of Light	
	Propagation : the Advection Schrödinger equation	143
7.1	Introduction	143
7.2	Half-space problem	147
7.2.1	Energy estimate	148
7.2.2	Fourier method	150

7.3	The case of the quadrant	156
7.3.1	Fourier transform of the problem.	158
7.3.2	Proof of the theorem 7.3.1.	160
7.3.3	New formulation of the theorem 7.3.2.	162
7.3.4	Estimate of the difference between the solution in the quadrant and the solution in the half-space	165
7.4	Appendix	166
7.4.1	Appendix 1 : Fourier transforms of functions supported in $\mathbb{R}_+$	166
7.4.2	Appendix 2 : Definition of the square root of a differential operator	168

Partie III : Simulation Numérique de l'équation d'advection-Schrödinger 169

8	Numerical Simulation for paraxial Model of Light Propagation in a tilted frame : the Advection-Schrödinger equation	171
8.1	Setting of the problem	172
8.2	Numerical Scheme	174
8.2.1	Initialization	174
8.2.2	First and second stages : Fourier transform	175
8.2.3	Third stage : finite difference scheme	176
8.2.4	2-ray scheme	177
8.3	Properties of the scheme	178
8.3.1	Stability	178
8.3.2	Convergence towards the classical Schrödinger equation	180
8.4	Numerical results	181
8.4.1	Convergence of the scheme	181
8.4.2	Variation of several parameters	183
8.4.3	Two rays crossing	186
8.5	Perspectives	187
8.6	Conclusion	190

9	Annexe 1 : rappel de géométrie	191
9.0.1	Formulaire	191
9.0.2	Géométrie de rayons courbes	191
10	Annexe 2 : note publiée aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences	193
	Bibliographie	195

Principales notations

$\mathcal{S}'$	Espace de Schwartz des distributions tempérées
$\dots + C.C.$	Ajout au terme précédent de son Complexe Conjugué
$\bar{a}$	Complexe conjugué de a
$\vec{k}$	Vecteur directeur des rayons ; $ \vec{k} < 1$ ou $ \vec{k} = 1$ selon le contexte
$x, x_{//}$ ou x_1	Variable dans la direction orthogonale au bord du domaine
$x_{\perp}, y$ ou x_2	Variable dans la direction parallèle au bord du domaine
$\hat{A}$	Quand la variable n'est pas ambiguë, transformée de Fourier de A
$\mathcal{F}_x(A)$	Transformée de Fourier de A dans la variable x
ξ ou ξ_1	En général, variable de Fourier de x ou de x_1
η ou $\xi^{\perp}$	En général, variable de Fourier de y ou de $x_{\perp}$
ω	En général, variable de Fourier de t
$\sqrt{z}, z \in \mathbb{C}$	Détermination principale de la racine, définie par $\mathcal{R}e(\sqrt{z}) > 0$

Chapitre 1

Introduction et principaux résultats

Ce travail de thèse s’est déroulé dans le cadre du projet “laser mégajoule”, en cours de construction au CEA-Cesta de Bordeaux. Il s’agit de la construction d’un laser d’une puissance encore inégalée (1.8 MJ délivrés en 17 nanosecondes). Ce laser est dirigé vers une cible qui contient un gaz dont on souhaite obtenir la fusion. Sous l’action du laser, la matière de la cible s’ionise et se détend dans le vide pour donner naissance à un plasma, lequel rayonne vers une microsphère de verre qu’il contient. La microsphère implose, et, on l’espère, libère ainsi suffisamment d’énergie pour provoquer la fusion thermonucléaire du gaz qu’elle renferme, un mélange de deutérium et de tritium (noté DT). Ce processus est appelé fusion par confinement inertiel (FCI). Les enjeux de cette expérience sont légion, tant du point de vue de la physique des plasmas, de l’astrophysique que des applications possibles de la fusion. Les phénomènes qui se produisent à de telles températures sont encore largement méconnus.

La finalité de notre étude est de modéliser la propagation du laser dans le plasma lorsque la direction de propagation du rayon laser fait un angle d’incidence quelconque avec le bord du domaine où on simule la propagation du laser. En effet, des phénomènes de résonance peuvent provoquer la filamentation du faisceau laser et la rétrodiffusion d’une partie de l’énergie. Ces instabilités peuvent limiter la transmission d’énergie à la cible, d’où la nécessité

de les modéliser précisément. De plus, pour pouvoir modéliser des croisements de faisceaux, il est nécessaire de pouvoir supposer l'angle d'incidence du rayon laser quelconque (et pas nécessairement faible).

1.1 Plan de l'étude

Le modèle physique de la propagation laser, modèle sur lequel est fondé l'ensemble de cette étude, est l'équation des ondes suivante vérifiée par le champ laser Ψ :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \Psi - \Delta \Psi + k_0^2 N(x) \Psi + \frac{\nu}{c} \partial_t \Psi = 0. \quad (1.1.1)$$

Les lettres t et x désignent respectivement les variables de temps et d'espace. Le symbole c est la vitesse de la lumière dans le vide, $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ la pulsation de l'onde laser dans le vide, et ν un coefficient d'absorption. Cette équation est le modèle de référence le plus fréquemment employé dans l'interaction laser-plasma. Un bref rappel de son obtention, à partir des équations de la physique classique, fait l'objet du paragraphe 1.2.

La modélisation numérique directe de l'équation des ondes (1.1.1) n'est pas possible, car les grandeurs mises en jeu sont de tailles très disparates : $0,35 \mu m$ pour la longueur d'onde laser, quelques millimètres pour la taille du plasma par exemple (cf. partie 1.2 pour les principaux ordres de grandeur.) Une modélisation numérique directe nécessiterait une grille beaucoup trop fine. La première étape est donc l'obtention d'une approximation convenable de l'équation (1.1.1). Pour cela, on a recours de façon classique à *l'approximation paraxiale* de l'équation de Maxwell (voir par exemple [6], [32], ou [48]). Le principe de cette approximation est de faire une enveloppe temporelle et spatiale de la solution de l'équation de Maxwell (1.1.1).

La justification théorique de cette approximation est l'objet de la partie I. Pour le problème sur l'espace entier, des résultats plus généraux, pour des équations non linéaires, ont été obtenus par les travaux de Donnat, Joly, Métivier et Rauch des années 90 (voir par exemple [19], [37], [21] et [38]). Le contexte de leurs travaux est le ferromagnétisme et l'étude de l'équation de Maxwell-Bloch (voir par exemple

[20], ou [39]). Dans [19] cependant, la partie linéaire des équations étudiées est à coefficients constants, ce qui n'est pas le cas général de notre étude.

Au début des années 2000, Eric Dumas a continué leurs travaux en étudiant des équations dont la partie linéaire est à coefficients variables et le cas des phases faiblement courbes en régime diffractif, dans [25] et [26] par exemple. On peut aussi citer les travaux de David Lannes ([40] par exemple).

Pour le problème aux limites, dont la justification fait l'objet du chapitre 6, des problèmes non linéaires dans des cas plus généraux ont été étudiés dans la thèse de P. Donnat [18]. Là encore la partie linéaire est supposée à coefficients constants, mais cela s'adapte au cas faiblement variable.

La méthode employée ici a l'avantage de la simplicité. Elle consiste à effectuer le développement asymptotique de l'équation de Klein-Gordon. Cela nous conduit à un problème approché dont on montre qu'il est bien posé. Une estimation d'énergie donne alors la distance entre la solution du problème exact (1.1.1) et la solution du problème approché, justifiant *a posteriori* la validité du développement asymptotique. Nous employons cette méthode dans divers cas : tout d'abord en conservant une dépendance en temps dans l'équation (1.1.1) (chapitres 2 à 4), puis en voyant à quelle condition la solution peut être considérée comme lentement variable en temps (ch. 5). Le problème est d'abord étudié sur l'espace entier pour plus de simplicité (ch. 2 à 5), puis sur le demi-espace (ch. 6). Dans chaque cas, un résultat d'approximation est obtenu, justifiant notre modèle.

En négligeant les variations temporelles de la solution, notre modèle prend la forme d'une équation de Schrödinger où le rôle de la variable temporelle serait joué par la distance selon la direction de propagation. On est donc amené à considérer un modèle où le laplacien dans la direction transverse à la propagation est écrit en coordonnées obliques : l'équation obtenue est appelée "équation d'advection-Schrödinger". Dans le cas où cette direction de propagation est normale à la frontière entrante, on retombe sur le modèle classique paraxial (encore valable pour un angle d'incidence très faible), dont nos travaux constituent un prolongement.

Afin de résoudre numériquement cette équation d'advection-Schrödinger spatiale

(il n’y a plus de variable temporelle) sur un rectangle, il nous faut passer du problème posé sur un demi-espace au problème sur un quart d’espace, et pour cela trouver une condition au bord convenable. C’est l’objet de la partie II : trouver une condition au bord permettant que la solution du problème sur le quart d’espace complété par cette condition soit égale, ou du moins soit la plus proche possible, de la restriction du même problème posé sur le demi-espace. Une telle condition au bord est dite *transparente* si la solution du problème sur le quart d’espace est égale à la restriction de la solution sur le demi-espace, *absorbante* si elle lui est seulement “presque égale”.

La partie II propose une telle condition au bord, et montre que, selon la direction de propagation, cette condition est soit transparente soit absorbante. De plus, par des méthodes de transformée de Fourier, la partie II donne une expression exacte de la solution. Cette expression exacte nous permet, dans la partie III, de proposer une méthode numérique pour simuler la propagation laser avec un angle d’incidence quelconque - et permet en particulier de simuler des croisements de faisceaux. La méthode numérique utilisée est fondée sur la FFT. Les résultats numériques sont exposés.

Les parties II et III ont été résumées dans la note [24], publiée dans les Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, et qui figure en annexe. Chacune d’elle est constituée d’un article à paraître.

1.2 Cadre physique et obtention des équations

L’interaction d’un faisceau laser avec la matière se caractérise tout d’abord par l’ionisation de la surface de cette matière pour former un plasma macroscopiquement neutre. Un plasma est fondamentalement un système de N charges couplées par leurs champs électriques et électromagnétiques. On utilise un formalisme non quantique et non relativiste pour décrire le comportement des champs électromagnétiques et de la matière chargée ; les champs sont décrits par les équations de Maxwell et le plasma est modélisé par deux espèces de particules en interaction, électrons et ions.

1.2.1 Principaux ordres de grandeur de l'interaction laser-matière

durée de l'impulsion	$\tau = 19 \text{ ns}$
vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.10^{10} \text{ cm.s}^{-1}$
longueur d'onde d'interaction	$\lambda_0 = 0,35 \text{ }\mu\text{m}$
pulsation laser	$\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 5,4.10^{15} \text{ s}^{-1}$
densité électronique critique	$n_{cr} = 1.1 \cdot 10^{21}/\lambda_0^2 = 8,16.10^{21} \text{ cm}^{-3}$
largeur typique d'un faisceau	$600 \text{ }\mu\text{m}$
largeur typique d'un speckle	$L = 3 \text{ }\mu\text{m}$
temps caractéristique de variation de l'intensité globale du laser	10^{-10} s.
temps caractéristique de variation locale de l'intensité laser	10^{-12} s.
densité électronique des plasmas étudiés	quelques 10^{20} cm^3 .
températures électroniques	quelques 10^7 K.

1.2.2 Description bifluide d'un plasma

Le plasma peut être modélisé par un mélange de deux fluides : chaque espèce, électrons et ions, est traitée par une approche hydrodynamique, et est caractérisée par sa densité et sa vitesse moyennes ¹. Le couplage champs-matière est assuré par les densités de charges et de courant.

On note par l'indice i ce qui renvoie aux ions, e aux électrons. Pour $j = i$ ou $j = e$, la lettre m_j désigne la masse d'une particule, q_j sa charge, p_j sa pression, n_j la densité de particules, u_j la vitesse fluide de l'espèce considérée. Les lettres en gras désignent des vecteurs. On a $q_e = -e$ et $q_i = Ze$. Le degré d'ionisation est supposé constant.

Le mouvement de chaque fluide est tout d'abord régi par ses équations de continuité (conservation de la masse) et de force (conservation de l'impulsion) :

¹Nous ne développerons pas ici la description microscopique des interactions qui aboutit à cette modélisation. Voir par exemple [36] sur ce sujet.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (1.2.1)$$

$$n_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i \right) = \frac{Z n_i e}{m_i} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}}{c} \right) - \frac{1}{m_i} \nabla p_i - \nu_{ei} n_e \frac{m_e}{m_i} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$n_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e \right) = -\frac{n_e e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}}{c} \right) - \frac{1}{m_e} \nabla p_e + \nu_{ei} n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (1.2.4)$$

On a introduit un terme d'absorption liée à la collision électron-ion : le terme ν_{ei} désigne la fréquence de collision électron-ion. Elle dépend de la température électronique θ_e , que l'on suppose constante (cas isotherme : cf. ci-dessous).

Dans un modèle barotrope, la pression de chaque fluide chargé est relié à sa densité par une équation d'état. Il y a deux cas particuliers classiques :

- le cas adiabatique : on considère que le fluide, à l'échelle de vitesse du phénomène considéré, n'a pas le temps de propager la chaleur. L'équation d'état adiabatique s'écrit :

$$p_j / n_j^\gamma = \text{constante}$$

où $\gamma = (2 + N)/N$, N étant le nombre de degrés de liberté des particules. On utilise ici cette équation d'état pour les ions avec $\gamma = 3$.

- le cas isotherme : à l'opposé du cas précédent, le phénomène étudié est suffisamment lent pour qu'on considère que la conduction thermique est très importante. L'équation d'état isotherme s'écrit :

$$p_j / n_j = \theta_e.$$

On l'utilise ici pour les électrons. Le symbole θ_e désigne la température électronique.

Le modèle bifluide ci-dessus est alors complété par les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e (n_e - Z n_i) \quad (1.2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

où $\mathbf{J} = e(Zn_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$, Z est le degré d'ionisation du plasma et c est la vitesse de la lumière.

On suppose dans toute la suite que l'onde électromagnétique incidente a une polarisation linéaire. Plus précisément, on suppose que l'on peut décomposer le champ électrique $\mathbf{E}$ en une composante transverse $\mathbf{E}^r$ parallèle à un vecteur $\mathbf{e}_{tr}$ fixe et une composante longitudinale $\mathbf{E}^s$ que l'on appelle la partie électrostatique. Par ailleurs, on suppose pour simplifier que le comportement du plasma est tel que $\mathbf{e}_{tr}$ est une direction d'invariance pour n_e et n_i . On décompose également $\mathbf{B} = \mathbf{B}^r + \mathbf{B}^s$, et comme en général il n'existe pas de champ magnétostatique on suppose que $\mathbf{B}^s = 0$. De même, on décompose $\mathbf{J}$ et $\mathbf{u}_e$ en

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^r + \mathbf{J}^s,$$

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^r + \mathbf{u}_e^s.$$

Dérivant en temps l'équation (1.2.8) et utilisant l'équation (1.2.7), on obtient :

$$\nabla \times \nabla \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Comme $\mathbf{E}^s$ est invariant dans la direction $\mathbf{e}_{tr}$, la projection de cette équation sur $\mathbf{e}_{tr}$ est l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^r}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E}^r + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t} = 0. \quad (1.2.9)$$

Cela nous conduit à chercher une fermeture pour la quantité $\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t}$.

1.2.3 Obtention d'une fermeture pour $\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t}$.

On suppose que la vitesse des ions est négligeable par rapport à celle des électrons (car $m_e \ll m_i$) :

$$|\mathbf{u}_i| \ll |\mathbf{u}_e|,$$

donc $|n_i \mathbf{u}_i| \ll |n_e \mathbf{u}_e|$. On suppose de plus qu'il n'y a pas de contribution ionique au courant électrique transverse :

$$\mathbf{u}_i^r = 0.$$

Cela entraîne :

$$\mathbf{J}^r = q_e n_e \mathbf{u}_e^r. \quad (1.2.10)$$

Faisons une projection de l'équation (1.2.4) pour les électrons dans la direction $\mathbf{e}_{tr}$: comme $\mathbf{u}_e^r \cdot \nabla \mathbf{u}_e^r = 0$, et supposant que

$$|\mathbf{E}^s| \ll |\mathbf{E}^r| :$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_e^r}{\partial t} + \mathbf{u}_e^s \cdot \nabla \mathbf{u}_e^r \right) = \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E}^r + \frac{\mathbf{u}_e^r \times \mathbf{B}^r}{c}) - \frac{1}{m_j n_e} \nabla p_j - \nu_{ei} \mathbf{u}_e^r.$$

On approche cette équation par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e^r}{\partial t} - \frac{q_e}{m_e} \mathbf{E}^r + \nu_{ei} \mathbf{u}_e^r = 0. \quad (1.2.11)$$

La justification de cette approximation n'est pas faite ici : voir par exemple [46], [36] puis [4] pour le calcul exact. Cela signifie que les électrons oscillent le long du vecteur $\mathbf{e}_{tr}$ à la fréquence du laser. Cette équation multipliée par $-q_e n_e$ devient :

$$-q_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e^r}{\partial t} + q_e^2 \frac{n_e}{m_e} \mathbf{E}^r - \nu_{ei} q_e n_e \mathbf{u}_e^r = 0.$$

Or, grâce à l'équation de conservation de la masse pour les électrons, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{u}_e^r) = n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e^r}{\partial t} + \mathbf{u}_e^r (-\nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e^r)) = n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e^r}{\partial t}$$

car on a supposé que $\mathbf{e}_{tr}$ était une direction d'invariance pour n_e , *i.e.* que

$$\nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e^r) = 0.$$

Remplaçant $\mathbf{u}_e^r$ par $\mathbf{J}^r$ grâce à l'équation (1.2.10), cela nous donne la fermeture suivante pour $\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t} - \frac{q_e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E}^r + \nu_{ei} \mathbf{J}^r = 0. \quad (1.2.12)$$

Dans le cas où ν_{ei} est négligeable, on obtient à partir de la relation ci-dessus et de l'équation (1.2.9) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}^r - \Delta \mathbf{E}^r + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{n_e}{n_{cr}} \mathbf{E}^r = 0,$$

où l'on suppose la pulsation du laser ω_0 connue et où l'on a défini la densité critique n_{cr} par :

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi q_e^2}{m_e} n_{cr}.$$

On souhaite cependant être plus précis et prendre en compte un petit terme d'absorption fonction de ν_{ei} , sachant que

$$\nu_{ei} \ll \omega_0.$$

On cherche donc une expression de $\mathbf{J}^r$ en fonction de $\mathbf{E}^r$. On suppose que la fonction $\mathbf{E}^r$ varie selon la pulsation ω_0 , *i.e.* que l'on peut écrire, le symbole *C.C.* représentant le complexe conjugué du terme précédent :

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{E}_1^r e^{-i\omega_0 t} + C.C.$$

avec $\mathbf{E}_1^r$ variant lentement en temps par rapport à $e^{-i\omega_0 t}$. L'équation (1.2.12) montre qu'on peut alors écrire de même

$$\mathbf{J}^r = \mathbf{J}_1^r e^{-i\omega_0 t} + C.C.$$

avec $\mathbf{J}_1^r$ variant lentement en temps par rapport à $e^{-i\omega_0 t}$. L'équation (1.2.12) nous donne alors, en première approximation :

$$-i\omega_0 \mathbf{J}_1^r \approx \frac{q_e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E}_1^r \approx i \frac{q_e^2 n_e}{m_e \omega_0} \partial_t \mathbf{E}_1^r.$$

En remplaçant dans l'équation (1.2.12) le terme $\nu_{ei} \mathbf{J}^r$ à l'aide de cette expression, il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{J}^r}{\partial t} - \frac{q_e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E}^r - \nu_{ei} \frac{q_e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \partial_t \mathbf{E}^r = 0.$$

L'équation (1.2.9) devient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}^r - \Delta \mathbf{E}^r + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \frac{n_e}{n_{cr}} \mathbf{E}^r + \frac{\nu_{ei}}{c^2} \frac{n_e}{n_{cr}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^r = 0.$$

On définit alors la densité électronique adimensionnée N par

$$N = \frac{n_e}{n_{cr}}$$

et le coefficient d'absorption

$$\nu = \frac{\nu_{ei}N}{c}.$$

On obtient l'équation suivante, qui sert de base à l'ensemble de notre étude :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}^r - \Delta \mathbf{E}^r + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 N \mathbf{E}^r + \frac{\nu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^r = 0. \quad (1.2.13)$$

L'étude du couplage de l'équation du laser avec les équations d'Euler vérifiées par la densité N n'est pas étudiée ici : on suppose la densité N connue et invariante en temps. Cela est justifié tant que l'on se place loin de la caustique définie par $n_e = n_{cr}$, ce qui est donc supposé tout au long de notre étude.

Cette équation est habituellement appelée "équation de Klein-Gordon amortie".

1.2.4 Comparaison des ordres de grandeur

Variables adimensionnées

Comme la direction du champ $\mathbf{E}^r$ est fixe, dans la suite, il est considéré comme un scalaire, que l'on note Ψ . L'équation de Klein-Gordon s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \Psi - \Delta \Psi + k_0^2 N(x) \Psi + \frac{\nu}{c} \partial_t \Psi = 0. \quad (1.2.14)$$

Ici t est la variable de temps et x la variable d'espace ; $k_0 = \omega_0/c$ où ω_0 est la pulsation de l'onde laser. La pulsation du laser ω_0 est de l'ordre de 10^{16}s^{-1} ce qui correspond à un nombre d'onde k_0 du laser dans le vide très grand — de l'ordre de 10^7m^{-1} .

On choisit donc des échelles de temps $\bar{t}$ et de longueur $\bar{x}$ telles que $c = \frac{\bar{x}}{\bar{t}}$ et des variables sans dimension

$$\hat{t} = \frac{t}{\bar{t}}, \quad \hat{x} = \frac{x}{\bar{x}}, \quad \hat{\nu} = \nu \bar{x}, \quad \epsilon = \frac{1}{k_0 \bar{x}}$$

de sorte que l'équation de Maxwell (1.2.14) dans ces nouvelles variables devient

$$\epsilon^2(\partial_{\hat{t}\hat{t}}\Psi - \Delta_{\hat{x}}\Psi) + N(\hat{x})\Psi + \epsilon^2\hat{\nu}\partial_{\hat{t}}\Psi = 0. \quad (1.2.15)$$

On notera dorénavant t, x, ν etc. ces variables sans dimension, du moins lorsque cet abus de notation ne risquera pas de provoquer de confusion.

Dans la suite, sauf spécification contraire, le problème est posé dans l'espace entier, c'est à dire que x appartient à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$ selon que l'on considère ou non le cas plan.

Comparaison des différents paramètres

Dans le faisceau laser, il apparaît des points chauds, appelés *speckles*. Ce sont des zones dans lesquelles l'intensité laser $|\Psi|^2$ est beaucoup plus élevée que la moyenne. La dimension caractéristique de ces points chauds (speckles) est notée L_{spek} , c'est la demi-largeur d'un speckle. Elle représente la dimension caractéristique de variation d'intensité du champ laser. Le domaine de simulation est en général très grand devant la grandeur L_{spek} . Dans le cas du laser mégajoule, on a

$$L_{spek} \approx 3\mu m.$$

1. Paramètre ϵ .

Le petit paramètre ϵ désigne la grandeur

$$\epsilon = \frac{\lambda_0}{L_{spek}}$$

Dans le cas du laser mégajoule où $L_{spek} \approx 3\mu m$, cela conduit à

$$\epsilon = \frac{\lambda_0}{L_{spek}} \simeq 0.1$$

2. Longueur de variation du plasma.

La longueur caractéristique L_n de la variation de N_0 par rapport à x est au moins de $100\mu m$.

3. Variation de la densité du plasma.

Nous avons écrit que la densité du plasma était

$$N = N_0 + \delta N,$$

où δN vaut quelques % de la densité critique : donc $\delta N = O(\epsilon^2)$ si $\epsilon \simeq 0.1$. Dans toute la partie I (chapitres 2.1 à 6), on suppose δN nul. Par ailleurs, dans la suite, nous supposons que N_0 varie lentement en x :

$$N_0 = \tilde{N}(\epsilon \hat{x}).$$

4. Terme d'absorption.

Pour obtenir l'équation (1.2.14), on a vu en 1.2.3 qu'on a négligé un terme en $O\left(\left(\frac{\nu_{ei}}{\omega_0}\right)^2\right)$ dans l'équation (1.2.14), et qu'on a supposé que $\mathbf{E}^r$ s'écrivait $\mathbf{E}^r = \mathbf{E}_1^r e^{-i\omega_0 t}$, avec $\mathbf{E}_1^r$ variant lentement en temps par rapport à $e^{-i\omega_0 t}$. Nous n'avions pas précisé le rapport entre ces vitesses de variation temporelle : il est en réalité donné par le paramètre ϵ . Par la suite, nous mènerons un développement asymptotique de l'équation (1.2.14) à l'ordre ϵ^2 : pour que ce développement soit licite, il faut donc que les termes négligés en 1.2.3 soient en $o(\epsilon^2)$. Cela signifie :

$$\frac{\nu_{ei}}{\omega_0} \ll \epsilon.$$

(Le développement asymptotique exact qui conduit à cette conclusion est aisé, il n'est pas donné ici afin de ne pas alourdir la lecture.) Cela signifie :

$$\hat{\nu} \ll 1.$$

Dans la suite de notre étude, on notera de façon systématique :

$$\nu_1 = \epsilon \hat{\nu},$$

avec $\nu_1 = O_\epsilon(1)$.

1.3 Résumé de la partie I.

Etude asymptotique de l'équation de Klein-Gordon : l'équation d'advection-Schrödinger

Ce paragraphe présente les principaux résultats de la partie I.

Dans le paragraphe précédent, nous avons justifié l'utilisation de l'équation (1.2.15) comme modèle de base de la propagation laser dans un plasma :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta_x\Psi) + N(x)\Psi + \epsilon^2\nu\partial_t\Psi = 0. \quad (1.3.1)$$

Les variables t et x sont adimensionnées, la densité électronique N est adimensionnée par la densité critique, le symbole ν représente le coefficient d'absorption. On complète cette équation par deux conditions initiales

$$\Psi|_{t=0} = \Psi^{in}, \quad \partial_t\Psi|_{t=0} = \chi^{in}.$$

Par le théorème de Hille-Phillips, la démonstration que ce problème est bien posé est bien connue (théorème 2.1.1). On montre aisément l'estimation d'énergie suivante (théorème 2.1.3) :

Théorème. *Soit $\Psi_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ solution réelle du système suivant, où $S_\epsilon, R_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ sont réelles :*

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi_\epsilon - \Delta_x\Psi_\epsilon) + N(x)\Psi_\epsilon + \epsilon^2\nu\partial_t\Psi_\epsilon = \epsilon S_\epsilon, \text{ dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (1.3.2)$$

$$\Psi_\epsilon|_{t=0} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad (1.3.3)$$

$$\partial_t\Psi_\epsilon|_{t=0} = R_\epsilon \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (1.3.4)$$

Soit $E_\epsilon(t) = \epsilon^2\|\partial_t\Psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon^2\|\nabla\Psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\|\sqrt{N(\cdot)}\Psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. L'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$\sqrt{E_\epsilon(t)} \leq \|S_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))}t + \epsilon\|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (1.3.5)$$

Cette estimation est fondamentale pour estimer la distance entre le problème exact (1.3.1) et le problème approché.

On suppose de plus que

$$\nu = \epsilon \nu_1$$

et que la densité N varie lentement en x :

$$N = \tilde{N}(\epsilon x).$$

La présence dans l'équation (1.3.1) du petit paramètre ϵ devant les dérivées indique que le champ Ψ renferme des oscillations haute fréquence. On va donc chercher une équation d'enveloppe décrivant les variations de Ψ à l'échelle macroscopique : on écrit

$$\Psi(t, x) = A(t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x) - \epsilon t}{\epsilon}} + C.C.,$$

où $C.C.$ désigne le complexe conjugué du terme précédent. C'est l'approximation W.K.B.

Dans l'écriture de l'équation (1.3.1) en fonction de l'amplitude A et de la phase ϕ , l'ordre 0 en ϵ conduit à l'équation eikonale vérifiée par la phase ϕ :

$$|\nabla \phi(y)|^2 = 1 - \tilde{N}(y).$$

On suppose que cette équation possède une solution régulière univaluée sur notre domaine d'étude.

A l'ordre 1 en ϵ , l'amplitude A vérifie une équation d'advection :

$$\partial_t A + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon).$$

C'est l'approximation de l'optique géométrique.

A l'ordre 2 en ϵ , on montre que A vérifie l'équation suivante :

$$2i \left[\partial_t + \nabla \phi \cdot \nabla + \frac{\epsilon}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \right] A + \epsilon \nabla \cdot [(I - \nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla A] = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon^2). \quad (1.3.6)$$

En effectuant un développement asymptotique similaire sur les conditions initiales, choisies convenablement, on complète cette équation par une condition initiale (une seule est nécessaire puisque le problème n'est plus d'ordre 2 mais d'ordre 1 en temps).

Plusieurs formulations possibles de cette équation approchée sont données dans le chapitre 4, selon que l'on se place ou non dans la géométrie des rayons.

Pour fixer les idées, le cas droit est étudié en détail et résolu dans le chapitre 3 grâce aux transformées de Fourier. Cela permet de donner une formulation exacte de la solution (théorème 3.2.1) et un résultat d'approximation (théorème 3.3.1).

Le résultat principal de l'étude du problème ci-dessus sur tout l'espace est donné par le théorème 4.3.5 :

Théorème. *Soit $\tilde{N}$ régulière telle que $0 < N_0 < \tilde{N}(\epsilon x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(\epsilon x)$ solution régulière univaluée de l'équation eikonale (2.2.3). Soit $f_1^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème exact :*

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi) + \tilde{N}(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi &= 0 \\ \Psi|_{t=0} &= A^{in}e^{i\frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C. \\ \partial_t\Psi|_{t=0} + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla\Psi|_{t=0} + i\frac{\tilde{N}(\epsilon x)}{\epsilon}\Psi|_{t=0} &= \epsilon f_1^{in}(x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C. \end{aligned}$$

Soit Ψ_ϵ définie par :

$$\Psi_\epsilon = A_\epsilon(t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.,$$

où $A_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ est l'unique solution du problème approché (cf. théorème 4.3.2) :

$$\begin{aligned} 2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon + \epsilon\nabla \cdot [(I - \nabla\phi^{\otimes 2}(\epsilon x))\nabla A_\epsilon] &= 0, \\ A_{\epsilon|t=0} &= A^{in} \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Pour $T > 0$ fixé, l'inégalité suivante est vérifiée, indépendamment de ν_1 :

$$\begin{aligned} \|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} + \epsilon\|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} + \epsilon\|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} \\ \leq C(N_0, \phi) \left(\epsilon^2\|f_1^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^2 \text{Max}(1, T^5)\|A^{in}\|_{H^8(\mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Afin de se rapprocher du problème stationnaire qui fait l'objet de la modélisation numérique de la partie III, le cas *quasi-statique* est étudié dans le chapitre 5. C'est le cas où l'amplitude A varie lentement en temps, ce qui est vérifié si la condition initiale A^{in} vérifie

$$\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A^{in} \ll 1$$

(cette condition est explicitée dans le théorème ci-dessous). Notant $\vec{k} = \nabla\phi(\epsilon x)$, au lieu du terme $\nabla \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla \right]$, on obtient alors une équation faisant apparaître le laplacien dans la direction orthogonale aux rayons, noté $\Delta_\perp$ et défini par :

$$\Delta_\perp = \nabla \cdot \left[\left(I - \frac{\vec{k}^{\otimes 2}}{|\vec{k}|^2} \right) \nabla \right].$$

Cette équation est la suivante, où $T = \epsilon t$:

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_\epsilon = 0.$$

Le théorème suivant est démontré (théorème 5.3.2) :

Théorème. *Soit $\nu_1 > 0$ constant. Soit $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$. Soit $\tilde{N}$ régulière telle que $0 < N_0 < \tilde{N}(\epsilon x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(\epsilon x)$ solution régulière univaluée de l'équation eikonale (2.2.3). On note $T = \epsilon t$. Soit $\tilde{A}_\epsilon$ l'unique solution du problème approché suivant (cf. théorème 5.3.1) :*

$$\begin{aligned} 2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_\epsilon &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ A_{\epsilon|T=0} &= A^{in} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

On suppose de plus que A^{in} vérifie l'hypothèse (5.1.2), i.e. :

$$\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = O(\epsilon).$$

Soit $f_1^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et Ψ la solution du problème de Klein-Gordon :

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi) + \tilde{N}(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi &= 0 \\ \Psi|_{t=0} &= A^{in}e^{i\frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C. \\ \partial_t\Psi|_{t=0} + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla\Psi|_{t=0} + i\frac{\tilde{N}(\epsilon x)}{\epsilon}\Psi|_{t=0} &= \epsilon f_1^{in}(x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C. \end{aligned}$$

En notant

$$\Psi_\epsilon(t, x) = \tilde{A}_\epsilon(\epsilon t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}$$

l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon^2 \|f_1^{in}\|_{L^2} + \epsilon^2 \text{Max}(1, T_0^5) \left(\|A^{in}\|_{H^8(\mathbb{R}^n)} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2}}{\epsilon} \right).$$

Enfin, le chapitre 6 étudie le problème sur le demi-espace, dans le cas des rayons droits et des rayons lentement variables (*i.e.* N constant ou $N = \tilde{N}(\epsilon x)$.) Afin de simplifier l'étude et sans nuire à la généralité du propos, on suppose que les conditions initiales vérifiées par le problème exact sont nulles :

$$\Psi^{in} \equiv \chi^{in} \equiv 0.$$

Le résultat principal est donné par le théorème 6.4.7 :

Théorème. *Soit $N = N(\epsilon x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $N \geq N_0 > 0$ sur $\mathcal{D}$, $N|_\Gamma = N_b < 1$ constant.*

Soit $\phi \in C_b^\infty(\mathcal{D})$ solution régulière de l'équation eikonale stationnaire

$$|\nabla \phi(y)|^2 = 1 - N(y) \quad \forall y \in \mathcal{D},$$

avec $\nabla \phi|_\Gamma = \vec{k}^b$.

On note $\vec{k} = \nabla \phi(\epsilon x)$.

On suppose de plus que $k_{x_1} \geq k_{x_1}^{inf} > 0$.

Soit $\nu_1 \geq 0$ constant.

Soit $A^b, g^b \in C_b^\infty(\mathbb{R}_t^+; C_c^\infty(\Gamma))$, avec $Supp(A^b, g^b) \subset \mathbb{R}_t^{+} \times B_\Gamma(0, R)$ pour $R > 0$ fixé quelconque.*

Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème exact :

$$\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi + N(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0, \quad (1.3.8)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad (1.3.9)$$

$$\partial_t\Psi|_{t=0} = 0, \quad (1.3.10)$$

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\Psi|_{x_1=0} = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon}A^b + g^b\right)e^{i\frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}. \quad (1.3.11)$$

Soit A_ϵ l'unique solution du problème approché (cf. théorème 6.4.6) :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon + \epsilon\nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2})\nabla A_\epsilon] = 0$$

$$A_{\epsilon|t=0} = 0$$

$$2ik_{x_1}^b(A_{\epsilon|_{x_1=0}} - A^b) = -\epsilon g^b + \epsilon\left((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b})\partial_t + \frac{\vec{k}_\perp^b}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp\right)A^b$$

Soit Ψ_ϵ définie par :

$$\Psi_\epsilon = A_\epsilon(t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

L'inégalité suivante est vérifiée par $E_\epsilon(t)$, avec

$$E_\epsilon(t) = 2N_0 \|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2 :$$

$$E_\epsilon(t) \leq C\epsilon^4(e^t - 1)(1 + t^{10}) \left(\|g^b\|_{\mathcal{C}_b^6(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}^2 + \|A^b\|_{\mathcal{C}_b^7(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}^2 \right).$$

Remarque. Le théorème ci-dessus donne un problème approché pour l'équation de Klein-Gordon sur le demi-espace, mais ce problème est un problème au bord de type Dirichlet. **Il subsiste un problème ouvert : montrer que le problème d'advection-Schrödinger avec une condition au bord mixte de type Neumann-Dirichlet est bien posé, i.e. avec la condition au bord (6.2.25) :**

$$2ik_{x_1}^b(A_{\epsilon|x_1=0} - A^b) + \epsilon(k_{x_1}^b \vec{k}^b \cdot \nabla + \partial_{x_1})A_\epsilon + \epsilon g^b = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

Ce problème est résolu dans la partie II, comme on va le voir, mais uniquement dans le cas où les rayons sont droits et où l'on néglige la variation en temps de A_ϵ .

1.4 Résumé de la partie II.

Problème aux limites pour la propagation oblique

Dans la partie II (chapitre 7), on étudie l'équation de Schrödinger qui provient de l'approximation paraxiale de l'équation de Helmholtz (cas stationnaire de l'équation de Klein-Gordon), dans le cas où la direction de propagation est oblique par rapport à la frontière du domaine. On s'intéresse aux conditions aux limites dans un demi-espace puis dans un quadrant de $\mathbb{R}^2$. On suppose dorénavant que N est constant ou bien (cas plus général) que

$$N = N_0 + \delta N$$

avec $\delta N = O(\epsilon^2)$. Dans la partie III, on propose une méthode numérique pour ce type de modèle.

Partant de l'équation de Klein-Gordon (1.3.1) dans laquelle N est supposé constant, on écrit comme dans la partie I :

$$\Psi = A(t, x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}},$$

où $|\vec{k}|^2 = 1 - N_0$. Ici, on néglige les variations temporelles de A (ce qui est justifié par le chapitre 5). Cela conduit à l'équation suivante vérifiée par A :

$$2i \vec{k} \cdot \nabla A + \epsilon \nabla \cdot \left[(1 - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A \right] + i\epsilon \nu_1 A = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon^2).$$

Cela entraîne, puisque $\vec{k} \cdot \nabla A = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon)$, que l'on peut remplacer $\epsilon \nabla \cdot \left[(1 - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A \right]$ par $\epsilon \Delta_{\perp} A$ où, comme dans le chapitre 5, la notation $\Delta_{\perp}$ désigne le laplacien dans la direction orthogonale aux rayons, appelé *laplacien transverse* :

$$\Delta_{\perp} = \nabla \cdot \left[\left(I - \frac{\vec{k}^{\otimes 2}}{|\vec{k}|^2} \right) \nabla \right].$$

Remarque : on aurait aussi bien pu remplacer $\epsilon \nabla \cdot \left[(1 - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A \right]$ par $\epsilon \Delta A$, puisque l'on s'est borné à supposer le terme $\epsilon \vec{k} \cdot \nabla A$ petit. L'intérêt de l'équation ci-dessus est de séparer les variables, et de permettre l'étude d'une "vraie" équation de Schrödinger.

On peut donc considérer l'équation approchée :

$$2i \vec{k} \cdot \nabla A_{\epsilon} + \epsilon \Delta_{\perp} A_{\epsilon} + i\epsilon \nu_1 A_{\epsilon} = 0.$$

Ainsi, on a encore une fois obtenu une équation d'advection-Schrödinger, purement spatiale cette fois.

Pour la condition au bord du domaine, on fait de même à partir de la condition au bord mixte. La condition (6.2.11) ci-dessous :

$$\left[2i k_{x_1}^b A - \epsilon (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) \right] (A - A^b) = 0$$

devient, lorsqu'on néglige la variation en temps et que l'on considère que $\vec{k} \cdot \nabla A = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon)$:

$$(\epsilon \vec{n} \cdot \nabla_{\perp} + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})(A_{\epsilon} - A^b)_{|\Gamma} = 0.$$

En introduisant le vecteur unitaire $\vec{K} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} 2i\sqrt{1-N_0}\vec{K} \cdot \nabla A_\epsilon + \epsilon\Delta_\perp A_\epsilon + i\epsilon\nu_1 A_\epsilon &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{D} \\ (\epsilon\vec{n} \cdot \nabla_\perp + 2i\vec{K} \cdot \vec{n}\sqrt{1-N_0})(A_\epsilon - A^b)|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

Afin de disposer de vecteurs unitaires, on effectue, dans les parties II et III, un changement de notations par rapport à la partie I : en posant $\varepsilon = \epsilon\sqrt{1-N_0}$, on a donc le système :

$$\begin{aligned} 2i\vec{K} \cdot \nabla A_\epsilon + \varepsilon\Delta_\perp A_\epsilon + i\varepsilon\nu_1 A_\epsilon &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{D} \\ (\varepsilon\vec{n} \cdot \nabla_\perp + 2i\vec{K} \cdot \vec{n})(A_\epsilon - A^b)|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

pour simplifier, on considère le problème en dimension 2 et on note $x = x_1$, $y = x_2$. Le problème est tout d'abord étudié dans le demi-espace. Pour montrer qu'il est bien posé, on exhibe une solution analytique en utilisant la transformée de Fourier par rapport aux variables orthogonales au bord. On a la proposition suivante (théorème 7.2.2) ; ici, on a écrit le vecteur unitaire $\vec{K}$ sous la forme (k_x, k_y) pour être homogène avec les notations des chapitres 7 et 8.

Théorème. *La notation $\sqrt{}$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Le fait que $\nu_1 > 0$ est indispensable pour qu'elle puisse être définie sans ambiguïté. Soit $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées et $g \in \mathcal{S}'$. Il existe une unique distribution tempérée $u \in \mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_y(\mathbb{R}))$ solution du problème (7.2.3) (7.2.4), ci-dessous :*

$$i(k_x\partial_x + k_y\partial_y)u + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2\partial_{yy}^2 - 2k_xk_y\partial_{xy}^2 + k_y^2\partial_{xx}^2)u + i\nu u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

$$i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0} + 2k_x u|_{x=0} = g. \quad (1.4.2)$$

Notant ξ et η les variables de Fourier respectives de x et y , cette distribution s'écrit :

$$\mathcal{F}_y(u; x, \eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g; \eta)}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x},$$

où :

$$R_-(i\eta) = i\frac{k_x\eta}{k_y} - i\frac{k_x}{\epsilon k_y^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}\right).$$

La solution u vérifie également :

$$\left(\partial_x - R_-(i\eta) \right) \mathcal{F}_y(u; x, \eta) = 0.$$

On considère ensuite le problème (1.4.1) sur le quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ et on essaie d'écrire une condition aux limites sortante "transparente" sur la partie de la frontière correspondant à $y = 0$.

Le symbole en ξ (variable duale de x) de l'opérateur d'advection-Schrödinger s'écrit

$$i(k_x \xi + k_y \partial_y) + \frac{1}{2} \epsilon (-k_y^2 \xi^2 - 2ik_x k_y \xi \partial_y + k_x^2 \partial_{yy}) + i\nu = \frac{1}{2} \epsilon k_x^2 (\partial_y - S_+(i\xi)) (\partial_y - S_-(i\xi)),$$

$$\text{sachant que } S_{\pm}(i\xi) = i \frac{k_y}{k_x} \xi - i \frac{k_y}{\epsilon k_x^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{\epsilon k_x}{k_y^2} \xi + 2i\nu \frac{\epsilon k_x^2}{k_y^2}} \right).$$

On complète l'équation (1.4.1) posée sur le quadrant avec la condition entrante (1.4.2) sur la partie de la frontière où $x = 0$, et par la condition

$$(\partial_y - S_+(\partial_x))u = 0, \quad \text{pour } y = 0. \quad (1.4.3)$$

L'intérêt de cette nouvelle condition est expliqué par le théorème suivant (théorème 7.3.2).

Théorème. Soit $g_+ \in H^{-1/2}(\mathbb{R}_+)$ à support dans $\mathbb{R}_+^*$ et soit u la solution de (1.4.1)(1.4.2) posée sur le demi-espace $\{x \geq 0\}$ où g est le prolongement de g_+ par 0 sur $\mathbb{R}_-$. Le problème (1.4.1) posé sur le quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} i(k_x \partial_x + k_y \partial_y)u + \frac{\epsilon}{2} (k_x^2 \partial_{yy}^2 - 2k_x k_y \partial_{xy}^2 + k_y^2 \partial_{xx}^2)u + i\nu u &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ i\epsilon k_y (k_x \partial_y - k_y \partial_x)u|_{x=0} + 2k_x u|_{x=0, y \geq 0} &= g \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}_+, \\ (\partial_y - S_+(\partial_x))u|_{x \geq 0, y=0} &= 0, \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \{0\} = 0 \end{aligned}$$

admet une unique solution $U \in C_b(\mathbb{R}_x^+; L^2(\mathbb{R}_y^+))$. De plus :

1. si $k_y > 0$, U est la restriction de u sur le quadrant :

$$U = u|_{\{y \geq 0\}}. \quad (1.4.4)$$

2. Si $k_y < 0$:

soit, pour tout $a > 0$, $g_a(x_2) = g(x_2 - a)$; notons u_a la solution sur le demi-espace $\{x \geq 0\}$ de (1.4.1)(1.4.2) avec donnée entrante g_a . Lorsque $k_y < 0$ on a :

$$U - u_{a|\{y \geq 0\}} \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_x^+; L^2(\mathbb{R}_y^+)) \quad \text{lorsque } a \rightarrow +\infty. \quad (1.4.5)$$

Cet énoncé signifie que la condition (1.4.3) est *transparente* pour $k_y > 0$ et *absorbante* pour $k_y < 0$. Elle dégénère sur la condition habituelle (cf [2], [17]) quand k_y tend vers 0.

1.5 Résumé de la partie III.

Simulation numérique de l'équation d'advection-Schrödinger

Dans la partie III (chapitre 8), nous présentons la méthode et les résultats numériques sur un problème de type *Schrödinger non-linéaire*. Nous ajoutons au problème (1.4.1) un terme de la forme $f(|u|)$:

$$(k_x \partial_x + k_y \partial_y)u - i \frac{1}{2} \epsilon \Delta_\perp u + \nu u + i f(|u|)u = 0, \quad (1.5.1)$$

$$(i \epsilon \vec{n} \cdot \nabla_\perp - 2k_x)(u - u^{in}) = 0. \quad (1.5.2)$$

Le cas particulier où $f(w) = (e^{-\alpha w^2} - 1)$ où α est une constante positive permet des simulations réalistes d'autofocalisation d'un faisceau laser dans un plasma (voir par exemple [48]). Dans les cas intéressants en pratique, le coefficient ν est petit; de même la constante α est suffisamment petite (de sorte que $f(|u|)$, représentant une variation relative de la densité électronique due au creusement par le faisceau laser, est petite devant 1). Le domaine de simulation est un rectangle : $x \in [0, x_{max}]$, $y \in [y_b, y_u]$. On discrétise la variables d'espace suivant une grille régulière. Les indices correspondant aux variables x et y seront notés respectivement n et j .

La méthode numérique proposée ici est basée sur un algorithme de splitting en trois étapes, où x joue le rôle de variable de temps. On utilise la F.F.T. (Fast Fourier

Transform) pour la prise en compte du terme $e^{-R_-(i\eta)x}$. Soit $\nu_0 = \inf \nu$ et $\nu_1 = \nu - \nu_0$.

Pour passer de x à $x + \delta x$

- *Etape A* : on passe de u^n à $u^{n,b}$ en résolvant sur $[x^n, x^n + \delta x]$ l'équation :

$$(k_x \partial_x + k_y \partial_y)u - i \frac{1}{2} \epsilon \Delta_\perp u + \nu_0 u = 0. \quad (1.5.3)$$

Grâce au théorème 7.2.2, on a :

$$\widehat{u^{n,b}}(\eta) = \widehat{u^n}(\eta) e^{R_-(i\eta)\delta x}.$$

Or, pour une équation d'advection simple, une résolution analytique dans une direction et utilisant la F.F.T. dans l'autre direction engendre des parasites ; c'est pourquoi dans notre cas (qui est une perturbation d'une équation d'advection) on effectue les étapes B et C suivantes.

- *Etape B* : on passe de $u^{n,b}$ à $u^{n,\sharp}$ en résolvant sur $[x^n, x^n + \delta x]$ l'équation :

$$k_x \partial_x u - k_y \partial_y u = 0.$$

- *Etape C* : on passe de $u^{n,\sharp}$ à u^{n+1} en résolvant sur $[x^n, x^n + \delta x]$, l'équation :

$$k_x \partial_x u + k_y \partial_y u + \nu_1 u + i f(|u|)u = 0. \quad (1.5.4)$$

En pratique, les étapes A et B sont effectuées simultanément en variables de Fourier ; partant des valeurs de $(u^n) = (u_j^n)$, on effectue une F.F.T. sur u^n , on multiplie le résultat par $e^{(R_-(i\eta) + i\eta \frac{k_x}{k_y})\delta x}$, puis on retourne en variables physiques par F.F.T. inverse.

Pour l'étape C, on utilise une méthodes de différences finies standard — dans ce cas un schéma décentré upwind — en choisissant les pas δx et δy afin de vérifier le critère de stabilité de C.F.L. $\frac{k_y \delta x}{k_x \delta y} \leq 1$.

Les résultats numériques sont exposés dans le chapitre 8. Ils montrent en particulier que ce schéma permet de simuler des croisements de faisceaux. Les tests de convergence en fonction du pas de discrétisation sont satisfaisants. On vérifie également que le point où l'énergie laser est maximum (focalisation due au terme non linéaire) est à la même distance de l'origine quel que soit l'angle d'incidence du rayon.

1.6 Perspectives

Etude du problème ouvert : équation d'évolution avec condition au bord mixte Neuman-Dirichlet

Le problème d'advection-Schrödinger, donné par l'équation (1.3.6) par exemple, est résolu sur le demi-espace lorsqu'il est complété avec une condition de type Dirichlet (cf. chapitre 6). Lorsqu'il est complété par une condition mixte de type Neuman-Dirichlet, il n'est résolu que dans le cas particulier de la partie II : cas droit et statique.

Couplage avec les équations d'Euler pour la densité

Dans toute notre étude, nous avons supposée connue la densité électronique N . Or, pour compléter le modèle (1.2.13), la densité électronique N est régie par les équations d'Euler suivantes, sachant la vitesse ionique $\mathbf{U}$ égale à la vitesse électronique moyennée sur une période laser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{U} \times \mathbf{U}) &= 0 \\ \frac{\partial(N\mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + c_s^2 \nabla N &= -\gamma N \nabla |\Psi|^2 \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

où Ψ est le champ laser, qui vérifie également l'équation de Klein-Gordon (1.2.13). Ces équations proviennent du modèle bifluide vu précédemment et d'une moyennisation faisant apparaître ce qu'on appelle la *force pondéromotrice*, exprimée par le terme $-\gamma N \nabla |\Psi|^2$. On note c_s la vitesse acoustique ionique (cf 1.2.2). On voit sur ce modèle que c'est la force pondéromotrice qui définit le couplage entre Ψ et N .

La vitesse "lente" des électrons est notée $\mathbf{U}$: dans le cas où $|\mathbf{U}| \ll c_s^2$, on peut déduire du modèle isotherme (1.6.1) une équation des ondes pour N :

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta N = \gamma \nabla \cdot (N \nabla |\Psi|^2) \quad (1.6.2)$$

Ce modèle, comme tous les modèles avec force pondéromotrice, contient déjà l'hypothèse haute fréquence laser puisqu'on a moyenné sur une période laser pour l'obtenir. On pourrait le coupler non directement avec l'équation de Klein-Gordon (1.2.13), ni

avec une approximation paraxiale, mais avec l'équation obtenue par Klein-Gordon : en posant

$$\Psi(t, x) = \psi(t, x)e^{-\frac{it}{\epsilon}}$$

et en négligeant les termes en $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, on obtient

$$2i\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi + \epsilon^2 \Delta \psi + (1 - N)\psi + i\epsilon \nu \psi = 0$$

ce qui est une vraie équation de Schrödinger. On peut envisager de coupler le modèle paraxial oblique (dans une zone) avec le modèle précédent (dans une autre zone).

Poursuite de l'étude numérique

La simulation numérique a été conduite dans le cas de rayons droits ; par des adaptations de la même méthode, notre travail permet d'envisager des simulations paraxiales à l'intérieur d'un domaine où le profil de densité électronique présente une variation à l'échelle macroscopique, ce qui entraîne une variation de la direction de propagation.

Partie I : Approximation d'enveloppe de l'équation de Klein-Gordon

Chapitre 2

Développement asymptotique de la solution de l'équation de Klein-Gordon

Le problème exact vérifié par l'onde laser **sur l'espace entier** fait l'objet de la partie 2.1. Un théorème classique d'existence et d'unicité d'une solution y est rappelé. Le problème aux limites sur un demi-espace est traité ultérieurement, dans la partie 6.1 du chapitre 6.

Les estimations d'énergie, indispensables aux parties suivantes pour établir les résultats d'approximation, sont établies dans la partie 2.1.3.

Dans la partie 2.3, l'idée générale du développement asymptotique est tracée brièvement. Celui-ci est fondé sur l'approximation de l'optique géométrique, exposée dans la partie 2.2, et le prolonge. Il s'agit seulement de donner le fil directeur des chapitres suivants, lesquels détaillent ce développement asymptotique dans divers cas.

2.1 Etude du problème de Klein-Gordon

2.1.1 Position du problème

Equation de l'onde laser

Pour décrire la propagation d'ondes laser dans un milieu inhomogène, le modèle que l'on utilise est l'équation de Maxwell sous la forme (encore appelée équation de Klein-Gordon) :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta_x\Psi) + N(x)\Psi + \epsilon^2\nu\partial_t\Psi = 0, \quad (2.1.1)$$

les variables ayant été préalablement adimensionnées (cf. introduction 1.2.4). La grandeur Ψ est le potentiel-vecteur électromagnétique du laser.

La variable N représente la densité électronique adimensionnée :

$$N = \frac{n_e}{n_{cr}},$$

où n_e est la densité électronique du plasma et n_{cr} la densité critique qui définit la caustique.

La variable ν représente un coefficient d'absorption, par exemple dû à l'interaction électron-ion et défini par :

$$\nu = \frac{\nu_{ei}N}{c},$$

le symbole c représentant la vitesse de la lumière dans le vide et la fréquence ν_{ei} étant la fréquence de collision électron-ion.

Conditions aux limites

Le problème étant d'ordre deux, deux conditions initiales sont nécessaires en $t = 0$ pour que le problème soit bien posé. Si le domaine n'est pas l'espace entier, une condition limite au bord du domaine est également requise : cf partie 6.1.1.

De la façon la plus générale (cf [13] ch. VIII) on pose :

$$\Psi|_{t=0} = \Psi^{in}, \quad (2.1.2)$$

$$\partial_t\Psi|_{t=0} = \chi^{in}. \quad (2.1.3)$$

Par la suite, des conditions de régularité sont imposées à Ψ^{in} et χ^{in} , de façon à ce que les études asymptotiques entreprises soient valides.

L'analyse d'échelle (cf. 1.2.4) nous conduit à poser

$$\nu = \epsilon \nu_1.$$

On notera également

$$\nu^0 = \inf_{\mathbb{R}^n} \nu_1 \geq 0.$$

2.1.2 Existence et unicité (rappel)

Voici un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte pour le problème sur tout l'espace (voir partie 6.1 pour le cas sur un demi-espace).

Théorème 2.1.1 (Rappel) *Soit $\Psi^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\chi^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $N \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $N \geq 0$. Soit $\nu_1, N \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Le problème de Cauchy (2.1.1) (2.1.2) (2.1.3) admet une unique solution $\Psi \in C(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Preuve. Soit $\mathcal{KG}$ l'opérateur de Klein-Gordon défini sur $D(\mathcal{KG}) \subset H$, avec $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(\mathcal{KG}) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{KG} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + \frac{N}{\epsilon^2} & \epsilon \nu_1 \end{pmatrix}.$$

L'équation de Klein-Gordon peut se réécrire

$$\frac{d}{dt}U + \mathcal{KG}U = 0,$$

avec $U = \begin{pmatrix} \Psi \\ \partial_t \Psi \end{pmatrix}$. L'espace H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire suivant :

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \left(1 + \frac{N(x)}{\epsilon^2}\right) u_1 u_2 + v_1 v_2.$$

Pour montrer que $\mathcal{KG}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, on applique le théorème de Hille-Philips à l'opérateur $\mathcal{KG} + I$ (voir [11] p.) Cela revient donc à montrer que l'opérateur $\mathcal{KG} + I$ est maximal monotone.

1. $\mathcal{KG} + I$ est monotone : si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{KG})$ on a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} -v \\ (-\Delta + \frac{N}{\epsilon^2})u + \epsilon\nu_1 v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_H =$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla u - (1 + \frac{N(x)}{\epsilon^2})uv + (-\Delta + \frac{N}{\epsilon^2})(u)v + \epsilon\nu_1 |v|^2.$$

En intégrant par parties :

$$\left\langle \begin{pmatrix} -v \\ (-\Delta + \frac{N}{\epsilon^2})u + \epsilon\nu_1 v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_H + \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_H =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2(1 + \frac{N}{\epsilon^2}) + |v|^2 - uv + \epsilon\nu_1 |v|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \frac{N}{\epsilon^2} |u|^2 + \epsilon\nu_1 |v|^2 \geq 0.$$

2. $\mathcal{KG} + I$ est maximal monotone : il suffit de prouver que $\mathcal{KG} + 2I$ est surjectif de $D(\mathcal{KG})$ dans H . Soit en effet $(f, g) \in H^1 \times L^2(\mathbb{R}^n)$. On cherche $(u, v) \in H^2 \times H^1$ tels que :

$$\begin{aligned} 2u - v &= f \\ -\Delta u + \frac{N}{\epsilon^2}u + \epsilon\nu_1 v + 2v &= g \end{aligned}$$

Cela signifie que $v = 2u - f$ et u est solution de l'équation de Dirichlet suivante, avec $N \geq 0$:

$$-\Delta u + (\frac{N}{\epsilon^2} + 2\epsilon\nu_1 + 4)u = g + (\epsilon\nu_1 + 2)f.$$

Comme $g + (\epsilon\nu_1 + 2)f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on sait qu'il existe une unique solution $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ à ce problème (théorème de Lax-Milgram et régularité par la méthode des quotients différentiels, par exemple) ; v s'en déduit.

D'après le théorème de Hille-Philips, il existe une unique solution $V(t, x) \in C_b^1(\mathbb{R}_+; H) \cap C_b(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{KG}))$ à l'équation $\frac{d}{dt}V + \mathcal{KG}V + V = 0$, ce qui démontre le résultat attendu en posant $U = e^t V$. $\diamond$

Remarque : On peut généraliser ce théorème à $\Psi^{in} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $\chi^{in} \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$; il y a existence et unicité d'une solution $\Psi \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}_+; H^{m-k}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq k$.

2.1.3 Inégalités d'énergie

On démontre ici deux inégalités d'énergie ; la première pour la solution exacte vue ci-dessus, la deuxième en vue de l'estimation d'erreur d'une solution approchée de l'équation de Klein-Gordon (2.1.1).

Théorème 2.1.2 *Soit $\Psi^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $\chi^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, à valeurs réelles. Soit $\Psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ solution réelle du système (2.1.1) (2.1.2) (2.1.3). Soit $E(t)$ défini par :*

$$E(t) = \epsilon^2 \|\partial_t \Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla \Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\sqrt{N(\cdot)} \Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

L'inégalité suivante est vérifiée :

$$E(t) \leq E(0) = \epsilon^2 \|\chi^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla \Psi^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\sqrt{N} \Psi^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

Théorème 2.1.3 *Soit $\tilde{\Psi}_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ solution réelle du système suivant, où $S_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ et $R_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sont réelles :*

$$\epsilon^2 (\partial_{tt} \tilde{\Psi}_\epsilon - \Delta_x \tilde{\Psi}_\epsilon) + N(x) \tilde{\Psi}_\epsilon + \epsilon^3 \nu_1 \partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon = \epsilon S_\epsilon, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad (2.1.4)$$

$$\tilde{\Psi}_{\epsilon|t=0} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad (2.1.5)$$

$$\partial_t \tilde{\Psi}_{\epsilon|t=0} = R_\epsilon \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (2.1.6)$$

Soit $E_\epsilon(t) = \epsilon^2 \|\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla \tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\sqrt{N(\cdot)} \tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. L'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$\sqrt{E_\epsilon(t)} \leq \epsilon \|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|S_\epsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \quad (2.1.7)$$

Preuve.

On démontre les deux théorèmes simultanément.

Comme $\tilde{\Psi}_\epsilon$ est supposée réelle de même que Ψ , l'équation (2.1.4) multipliée par $2\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon$ est :

$$\epsilon^2 \partial_t (|\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon|^2) + \epsilon^2 \partial_t (|\nabla \tilde{\Psi}_\epsilon|^2) - 2\epsilon^2 \nabla \cdot (\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon \nabla \tilde{\Psi}_\epsilon) + N(x) \partial_t |\tilde{\Psi}_\epsilon|^2 + 2\epsilon^3 \nu_1 |\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon|^2 = 2\epsilon S_\epsilon \partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon.$$

La même égalité est vérifiée par Ψ avec $S_\epsilon = 0$.

En intégrant sur $\mathbb{R}^n$, compte tenu de ce que $\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon \nabla \tilde{\Psi}_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^n))$, l'on a :

$$\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} \leq 2\epsilon \|S_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ainsi que :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\epsilon^3 \|\sqrt{\nu_1} \partial_t \Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 0.$$

Cette dernière inégalité implique l'inégalité du théorème 2.1.2.

Comme $\epsilon \|\partial_t \tilde{\Psi}_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{E_\epsilon(t)}$, on a :

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{E_\epsilon(t)}) \leq \|S_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

et en intégrant de 0 à t, comme $E_\epsilon(0) = \epsilon^2 \|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$, l'inégalité (2.1.7) recherchée apparaît.

◇

Le théorème 2.1.3 permet d'évaluer la distance d'une solution approchée $\Psi_\epsilon = \tilde{\Psi}_\epsilon + \Psi$ avec la solution exacte Ψ de (2.1.1) (2.1.2) (2.1.3).

1. Si $N \geq N_0 > 0$ sur $\mathbb{R}^n$, et $(\Psi_\epsilon) = (\Psi + \tilde{\Psi}_\epsilon)$ une famille de solutions approchées, il suffit d'avoir $\|S_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} = o_\epsilon(1)$ et $\|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(\frac{1}{\epsilon})$ pour que $(\Psi_\epsilon)_\epsilon$ converge vers Ψ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.
2. Si $N \geq 0$ et si $\|S_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} = o(\epsilon)$ et $\|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o_\epsilon(1)$, la convergence a lieu dans $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^n))$ et $\partial_t \Psi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \partial_t \Psi$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

2.2 Optique géométrique

La présence dans (2.1.1) du petit paramètre ϵ devant les dérivées indique que le potentiel vecteur Ψ renferme des oscillations à haute fréquence. Comme il n'est pas question de pouvoir discrétiser sur un maillage plus fin que les longueurs d'onde correspondantes, on va chercher une équation d'enveloppe décrivant les variations de Ψ

à l'échelle macroscopique : c'est l'approximation WKB, qui conduit d'abord à l'optique géométrique (dans ce paragraphe) puis à l'approximation paraxiale (dans le paragraphe suivant).

2.2.1 Equation d'enveloppe

Cherchons donc Ψ solution de (2.1.1) sous la forme

$$\Psi(t, x) = A(t, x)e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C., \quad (2.2.1)$$

où $C.C.$ désigne le complexe conjugué du terme précédent. Les dérivées de Ψ s'expriment à l'aide de celles de A et ϕ selon le formulaire suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi &= \left(\partial_t A - \frac{i}{\epsilon} A \right) e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C., \\ \partial_{tt} \Psi &= \left(\partial_{tt} A - \frac{2i}{\epsilon} \partial_t A - \frac{1}{\epsilon^2} A \right) e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C., \\ \nabla \Psi &= \left(\nabla A + \frac{i}{\epsilon} A \nabla \phi \right) e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C., \\ \Delta \Psi &= \left(\Delta A + \frac{2i}{\epsilon} \nabla A \cdot \nabla \phi + \frac{i}{\epsilon} A \Delta \phi - \frac{1}{\epsilon^2} A |\nabla \phi|^2 \right) e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C. \end{aligned}$$

Insérant ces formules dans (2.1.1), on trouve que

$$\begin{aligned} \left(|\nabla \phi|^2 - 1 + N \right) A + i\epsilon \left(-2\partial_t A - \nabla \phi \cdot \nabla A - \nabla \cdot (A \nabla \phi) \right) \\ + \epsilon^2 \left(\partial_{tt} A - \Delta A - i\nu_1 A + \epsilon \nu_1 \partial_t A \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Equation de la phase : équation eikonale

Là où $A \neq 0$, on trouve donc, à l'ordre 0

$$|\nabla \phi|^2 = 1 - N, \quad (2.2.3)$$

qui est l'équation eikonale définissant la géométrie des rayons et des fronts d'onde, ou encore équation d'Hamilton-Jacobi stationnaire. On aurait pu écrire la phase sous la forme $e^{i\frac{\phi(x,t)}{\epsilon}}$ au lieu de $e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}}$, et ϕ aurait alors été solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante :

$$|\nabla \phi(x, t)|^2 - |\partial_t \phi(x, t)|^2 + N = 0.$$

Le recours à une équation d'Hamilton-Jacobi est indispensable si N dépend du temps, ce que nous n'avons pas supposé ici.

On travaille implicitement sur le domaine où l'équation eikonale (2.2.3) possède une solution régulière univaluée. Faute de quoi, il faudrait remplacer l'ansatz (2.2.1) par une distribution lagrangienne (c'est à dire une superposition ou intégrale de quantités comme dans (2.2.1), permettant de considérer non pas les solutions univaluées de (2.2.3) mais les sous-variétés qui sont les graphes de ses solutions multivaluées). Une telle solution est possible pour une fonction $N(x)$ régulière; on choisit pour plus de simplicité $N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < N < 1$, suffisamment petite. La solution eikonale se résout sur un domaine borné, ou bien nécessite une condition à l'infini. Rappelons que si ϕ est une solution régulière univaluée sur l'espace entier, $\Delta\phi > 0$.

Exemple de solution de l'équation eikonale

Sur l'espace entier (donc aussi sur le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$), si $N \equiv N(x)$ et si $\nabla\phi|_{x=0}$ est indépendant de y , il existe une solution ϕ telle que $\nabla\phi$ ne dépende que de x .

En effet, notons $\vec{k}_0 = \sqrt{1 - N(0)}(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Le problème suivant :

$$\begin{aligned} |\nabla\phi|^2 &= 1 - N \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \nabla\phi|_{x=0} &= \vec{k}_0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a pour solution une fonction ϕ qui vérifie :

$$\partial_x\phi = \pm\sqrt{1 - N(x) - \sin^2\alpha(1 - N(0))}.$$

On aura donc une solution univaluée sur tout l'espace *si et seulement si*

$$N(x) < 1 - \sin^2\alpha(1 - N(0)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On voit ainsi que plus l'angle α sera faible, moins la condition sur N sera restrictive.

2.2.3 Equation de l'amplitude à l'ordre 1 : équation d'advection

Après avoir trouvé ϕ , solution de l'équation eikonale univaluée sur tout l'espace, l'équation (2.2.2) devient :

$$2i[\partial_t A + \nabla \phi \cdot \nabla A + \frac{1}{2}(\Delta \phi)A] + i\epsilon \nu_1 A = \epsilon(\partial_{tt} A - \Delta A + \epsilon \nu_1 \partial_t A). \quad (2.2.4)$$

Cette équation est, à l'ordre ϵ près, une équation de transport qui s'écrit :

$$2\partial_t A + \nabla \phi \cdot \nabla A + \nabla \cdot (A \nabla \phi) = 0 \quad \text{mod. } O(\epsilon).$$

Autrement dit, on peut chercher un développement asymptotique de A sous la forme :

$$A \sim \sum_{k \geq 0} \epsilon^k A_k,$$

et en particulier A_0 vérifie :

$$\partial_t A_0 + \nabla \phi \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2}(\Delta \phi)A_0 = 0. \quad (2.2.5)$$

Le terme en $\frac{1}{2}\Delta \phi$ traduit le fait que l'amplitude n'est pas constante le long des rayons à cause de la courbure du front d'onde, ce qui correspond à l'optique géométrique.

A l'ordre 1, l'équation obtenue est :

$$(\partial_t + \nabla \phi \cdot \nabla + \frac{1}{2}\Delta \phi)A_1 = -\frac{i}{2}(\partial_{tt} - \Delta - i\nu_1)A_0$$

A l'ordre $k \geq 2$, le terme A_k vérifie l'équation :

$$(\partial_t + \nabla \phi \cdot \nabla + \frac{1}{2}\Delta \phi)A_k = -\frac{i}{2}(\partial_{tt} - \Delta - i\nu_1)A_{k-1} - \frac{i\nu_1}{2}\partial_t A_{k-2}.$$

2.3 Equation d'*advection-Schrödinger*

Outre la propagation décrite par l'optique géométrique, il y a un effet de diffraction des ondes lumineuses le long des rayons, et cet effet est traduit par le terme $\epsilon \Delta A$ dans (2.2.4). Cependant, le fait que A soit solution de l'équation de transport

dans une première approximation conduit à rechercher une solution A_ϵ sous la forme d'une perturbation d'une solution exacte A_0 de l'équation de transport. A cet effet de diffraction s'ajoute un effet d'absorption, exprimé par le terme $i\epsilon\nu_1 A$.

Cette partie a pour objet de faire l'approximation paraxiale de l'équation (2.2.4), c'est-à-dire de montrer schématiquement comment obtenir une équation approchée de l'équation (2.2.4) qui prenne en compte la diffraction. Un calcul précis, à partir du développement asymptotique ci-dessus, est détaillé dans divers cas particuliers (rayons droits, rayons lentement variables, cas quasi-statique) dans les chapitres suivants 3, 4 et 5. Toute notre étude est par la suite fondée sur des simplifications, des réécritures, des développements asymptotiques de la solution de l'équation (2.2.4).

2.3.1 Problème exact pour l'amplitude

L'approximation de l'optique géométrique revient à supprimer le second membre de l'équation (2.2.4).

Equation de l'amplitude

L'équation exacte est l'équation (2.2.4) :

$$2i[\partial_t A + \nabla\phi \cdot \nabla A + \frac{1}{2}(\Delta\phi)A] + i\epsilon\nu_1 A = \epsilon(\partial_{tt}A - \Delta A + \epsilon\nu_1\partial_t A).$$

Conditions initiales en $t = 0$.

Pour compléter l'équation (2.2.4), deux conditions initiales en $t = 0$ sont nécessaires pour que le problème soit bien posé.

Les conditions initiales (2.1.2) (2.1.3) de l'équation de Klein-Gordon deviennent, pour A :

$$\Psi^{in} = A|_{t=0} e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C.$$

$$\chi^{in} = \left(-\frac{i}{\epsilon}A|_{t=0} + \partial_t A|_{t=0}\right) e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C.$$

Il est nécessaire, pour que l'approximation de l'optique géométrique ait un sens, que ces conditions soient compatibles avec le fait que $\partial_t A = O(1)$ et $\nabla A = O(1)$ par

rapport à ϵ . Cela conduit à écrire les conditions initiales (2.1.2) et (2.1.3) satisfaites par Ψ sous la forme :

$$\Psi|_{t=0} = A^{in} e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \quad (2.3.1)$$

$$\partial_t \Psi|_{t=0} + \nabla \phi \cdot \nabla \Psi|_{t=0} + i \frac{N(x)}{\epsilon} \Psi|_{t=0} = f^{in}(x) e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \quad (2.3.2)$$

Cette forme correspond exactement aux conditions (2.1.2) et (2.1.3) : il suffit de définir A^{in} et f^{in} par

$$\begin{aligned} \Psi^{in} &= A^{in} e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \\ \chi^{in} + \nabla \phi \cdot \nabla \Psi^{in} + i \frac{N(x)}{\epsilon} \Psi^{in} &= f^{in}(x) e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \end{aligned}$$

Ecrire cela signifie tout simplement que $\partial_t \Psi$ vérifie :

$$\partial_t \Psi|_{t=0} = -\frac{i}{\epsilon} \Psi|_{t=0} \quad \text{mod } O_\epsilon(1).$$

Ces conditions se traduisent pour A de la façon suivante :

$$A|_{t=0} = A^{in}(x) \quad (2.3.3)$$

$$\partial_t A|_{t=0} + \nabla \phi \cdot \nabla A|_{t=0} = f^{in}(x) \quad (2.3.4)$$

Proposition 2.3.1 *Soit ϕ une solution régulière univaluée sur tout l'espace de l'équation eikonale (2.2.3). Une fonction $\Psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ est solution de (2.1.1) (2.3.1) (2.3.2) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ssi la fonction $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ définie par (2.2.1) est solution du système (2.2.4) (2.3.3) (2.3.4).*

2.3.2 Première approximation : équation d'advection

On a vu au paragraphe 2.2.3 que si on développe asymptotiquement $A = \sum_{k \geq 0} A_k$, à l'ordre 0 on obtient le problème d'advection suivant :

$$\partial_t A_0 + \nabla \phi \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2}(\Delta \phi) A_0 = 0, \quad (2.3.5)$$

$$A_0|_{t=0} = A^{in}. \quad (2.3.6)$$

L'équation (2.3.5) est d'ordre un tandis que l'équation exacte est d'ordre deux. Pour que le développement asymptotique soit pertinent, il faut que A^{in} et f^{in} vérifient une condition de compatibilité. La condition de compatibilité suivante est obtenue en prenant la valeur de l'équation (2.3.5) en $t = 0$:

$$f^{in} + \frac{1}{2}(\Delta\phi)A^{in} = 0. \quad (2.3.7)$$

Cette condition peut être exprimée pour les valeurs limites de Ψ solution de Klein-Gordon :

$$\chi^{in} + \nabla\phi \cdot \nabla\Psi^{in} + i\frac{N}{\epsilon}\Psi^{in} + \frac{1}{2}(\Delta\phi)\Psi^{in} = 0. \quad (2.3.8)$$

Dans le cas où cette condition ne serait pas vérifiée, le théorème suivant 2.3.1 permet de donner une estimation de la distance entre la solution exacte et la solution approchée à l'ordre 0.

Ecriture exacte de la solution

Définissons les caractéristiques décrivant les trajectoires des rayons, qui sont les courbes $Y_t(x)$ solutions des équations :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_t(x) &= -\nabla\phi(Y_t(x)), \\ Y_0(x) &= x. \end{aligned}$$

L'unique solution du problème (2.3.5) (2.3.6) peut s'exprimer à l'aide des caractéristiques :

$$A_0(t, x) = A^{in}(Y_t(x)) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \Delta\phi(Y_{t-s}(x)) ds\right). \quad (2.3.9)$$

Résultat d'approximation

On peut appliquer le théorème d'estimation d'énergie à A_0 , ce qui nous donne le résultat d'approximation suivant.

Théorème 2.3.1 *Soit $N \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < N(x) < 1$.*

Soit ϕ solution régulière univaluée de l'équation eikonale sur l'espace entier.

Soit $A^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $f^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit Ψ la solution exacte du problème de Klein-Gordon (2.1.1) avec les conditions initiales (2.3.1) et (2.3.2).

Soit A_0 la solution du problème d'advection (2.3.5)(2.3.6).

Soit

$$\Psi_\epsilon = A_0 e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}}.$$

On a l'estimation suivante, pour $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} & \epsilon \|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}(t) + \epsilon \|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}(t) + \|\sqrt{N}(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}(t) \\ & \leq \epsilon C(\phi, T) \left(\|A^{in}\|_{H^2} T + \|f^{in}\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Preuve. On applique le théorème (2.1.3) à $\tilde{\Psi}_\epsilon = \Psi - \Psi_\epsilon$. On a :

1. $R_\epsilon = \partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon) = f^{in} + \frac{1}{2}(\Delta\phi)A^{in}$
2. $\epsilon S_\epsilon = -\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi_\epsilon - N\Psi_\epsilon - \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi_\epsilon$

D'après l'équation (2.2.2) et l'expression exacte de A_0 , on a :

$$|S_\epsilon| = \epsilon \left| (\partial_{tt} - \Delta - i\nu_1 + \epsilon\nu_1\partial_t) \left(A^{in}(Y_t(x)) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \Delta\phi(Y_{t-s}(x)) ds\right) \right) \right|,$$

donc

$$\|S_\epsilon\|_{L^2}(t \leq T) \leq \epsilon C(\phi, T) \|A^{in}\|_{H^2}.$$

L'estimation voulue en découle. $\diamond$

Remarque : La condition de compatibilité (2.3.7) entraîne $R_\epsilon = 0$. Cela serait d'un quelconque intérêt si on avait une meilleure estimation de S_ϵ , ce qui n'est pas le cas avec l'approximation à l'ordre 0.

2.3.3 Approximation à l'ordre suivant : équation d'advection-Schrödinger

Utilisant la technique de Chapman-Enskog (cf. par exemple [12]), on va éliminer la dérivée en temps dans le terme d'ordre ϵ en utilisant la relation (2.2.5) à l'ordre

précédent

$$\partial_t A = -[\nabla\phi \cdot \nabla + \frac{1}{2}(\Delta\phi)]A \quad \text{mod } O(\epsilon).$$

Bien que cette relation soit moins précise, il faut remarquer que l'on cherche à approcher $\epsilon\partial_{tt}A$, de sorte que l'erreur commise sera d'ordre ϵ^2 . On trouve alors que

$$\begin{aligned} \partial_{tt}A &= [\nabla\phi \cdot \nabla + \frac{1}{2}(\Delta\phi)]^2 A \quad \text{mod } O(\epsilon) \\ &= (\nabla\phi)^{\otimes 2} : \nabla^{\otimes 2} A \\ &\quad + [\nabla(\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2) + (\Delta\phi)\nabla\phi] \cdot \nabla A \\ &\quad + [\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\Delta\phi + \frac{1}{4}(\Delta\phi)^2]A \quad \text{mod } O(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

On remplace alors le terme en $\partial_{tt}A$ dans (2.2.4) par son approximation à ϵ près donnée par (2.3.10), ce qui conduit, à l'ordre ϵ^2 près, à :

$$\begin{aligned} 2i(\partial_t A + \nabla\phi \cdot \nabla A) &= \epsilon[-\Delta A + (\nabla\phi)^{\otimes 2} : \nabla^{\otimes 2}]A + \epsilon[\Delta\phi\nabla\phi + \nabla(\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2)] \cdot \nabla A \\ &\quad + [-i(\Delta\phi + \epsilon\nu_1) + \frac{1}{4}\epsilon(\Delta\phi)^2 + \frac{1}{2}\epsilon\nabla\phi \cdot \nabla\Delta\phi]A \quad \text{mod } O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

La relation élémentaire

$$\nabla \cdot (\nabla\phi^{\otimes 2}) = \Delta\phi\nabla\phi + \nabla(\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2)$$

permet d'écrire encore l'équation ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} 2i(\partial_t A + \nabla\phi \cdot \nabla A) + \epsilon\nabla \cdot [(I - (\nabla\phi)^{\otimes 2}) \nabla A] & \\ = [-i(\Delta\phi + \epsilon\nu_1) + \frac{1}{4}\epsilon(\Delta\phi)^2 + \frac{1}{2}\epsilon\nabla\phi \cdot \nabla\Delta\phi]A & \quad \text{mod } O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

En l'absence du terme d'advection $\nabla\phi \cdot \nabla A$ dans le membre de gauche de (2.3.12), on reconnaîtrait une équation du type

$$2i\partial_t A + \nabla \cdot (a(x)\nabla A) = R(x)A$$

où a est un champ de matrices symétriques positives et R une fonction à valeurs complexes, c'est à dire une équation du type de Schrödinger. Dans (2.3.12), le champ de vecteurs ∂_t est remplacé par $\partial_t + \nabla\phi \cdot \nabla$, qui est un opérateur d'advection ; on appellera donc (2.3.12) une équation de type "advection-Schrödinger".

2.4 Orientation du travail

Dans la suite, on suppose soit que les rayons sont droits ($\nabla\phi$ constant) soit que les rayons sont faiblement courbés ($\Delta\phi$ d'ordre ϵ).

On distingue trois analyses possibles de ce problème, correspondant à trois cas particuliers.

1. Les rayons sont droits : voir le chapitre 3. On note

$$\nabla\phi \equiv \vec{k}$$

où $|\vec{k}| = \sqrt{1 - N_0}$ est un vecteur constant. L'équation approchée obtenue est l'équation (3.1.9) :

$$2i(\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon) + \epsilon \nabla \cdot \left[\left(I - \vec{k} \otimes \vec{k} \right) \nabla A_\epsilon \right] + i\epsilon\nu_1 A_\epsilon = 0.$$

En écrivant

$$A_\epsilon(t, x) = \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t \vec{k}),$$

l'équation ci-dessus s'écrit pour $\mathcal{A}_\epsilon$, fonction de la variable $T = \epsilon t$, de façon équivalente :

$$2i\partial_T \mathcal{A}_\epsilon + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k} \otimes \vec{k} \right) \nabla_y \mathcal{A}_\epsilon \right] + i\nu_1 \mathcal{A}_\epsilon = 0.$$

Le problème exact et le problème approché sont résolus et leurs solutions sont formulées explicitement, à l'aide de transformées de Fourier. Le théorème 3.3.1 donne un résultat d'approximation plus précis que le théorème 2.3.1 : $\sqrt{E} = O(\epsilon^2)$ alors que le théorème 2.3.1 dit que $\sqrt{E} = O(\epsilon)$.

2. Les rayons sont faiblement courbés : voir le chapitre 4.

Si $N(x) = \tilde{N}(\epsilon x)$, l'équation approchée obtenue à l'ordre suivant est l'équation (4.2.1) :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + \epsilon \nabla \cdot \left[\left(I - \nabla\phi(\epsilon x) \otimes \nabla\phi(\epsilon x) \right) \nabla A_\epsilon \right] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) A_\epsilon = 0.$$

Dans la géométrie des rayons, on peut encore obtenir l'équation (4.2.4), équivalente à l'équation ci-dessus à un $O(\epsilon^2)$ près :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon + \epsilon \Delta_x^{g_\epsilon} A_\epsilon = 0,$$

où g_ϵ est une métrique appropriée (cf. partie 4.2). On reconnaît ainsi une équation de Schrödinger dans le repère du front d'ondes. La résolution du problème approché est faite dans le repère usuel (équation (4.2.1) et le théorème 4.3.5 donne un résultat d'approximation.

3. Les rayons sont faiblement courbés et la condition initiale sur A^{in} est telle que la solution du problème à l'ordre 0 varie lentement en temps : voir le chapitre 5.

Du problème précédent (2.3.12), un problème plus simple se déduit alors. Il dépend lentement du temps, ce qui conduit à remplacer $A_\epsilon(t)$ par $\tilde{A}_\epsilon(T)$ où $T = \epsilon t$. L'équation obtenue (5.1.4) est la suivante, qui est encore appelée équation d' "advection-Schrödinger" :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_\epsilon = 0.$$

Le terme de laplacien est $\Delta_\perp$, le laplacien dans la direction orthogonale aux rayons. Le problème approché est résolu et le théorème 5.3.2 donne un résultat d'approximation. Dans le cas droit, on obtient une expression explicite pour la solution

En négligeant la dépendance en temps, ce dernier cas permet d'aboutir à une équation d'advection-Schrödinger spatiale, dont l'étude approfondie fait l'objet de la partie II.

Dès à présent, on peut dire que cette étude doit nous mener à appliquer le théorème d'estimation d'énergie 2.1.3 de façon à trouver une évaluation plus précise que pour le problème à l'ordre 0 (cf. théorème 2.3.1), soit $S_\epsilon = O(\epsilon^2)$ et $R_\epsilon = O(\epsilon)$. Cette dernière condition impose, dans la condition initiale (2.3.2), que

$$f^{in} = O(\epsilon),$$

sans quoi l'étude n'a pas d'intérêt.

Dans le chapitre 6, on étudie un problème analogue sur un demi-espace avec une condition entrante imposée.

Chapitre 3

Rayons droits dans l'espace entier

Pour fixer les idées, on s'intéresse dans ce chapitre au cas de rayons droits, qui permet une résolution exacte par transformée de Fourier. On rappelle tout d'abord les calculs classiques montrant comment la diffraction d'ondes planes le long des rayons de l'optique géométrique peut-être décrite par une équation de type Schrödinger.

3.1 Approximation d'enveloppe pour l'équation de Klein-Gordon

De même que dans le cas général au paragraphe 2.2, commençons par écrire ce que signifie l'équation de Klein-Gordon satisfaite par Ψ pour son enveloppe A . On part de l'équation des ondes (2.1.1), mais en supposant les coefficients constants :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi) + N\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0, \quad \text{où } 0 < N < 1. \quad (3.1.1)$$

Ecrivons $\Psi = Ae^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C.$ L'approximation de l'optique géométrique avec correction dispersive vue au paragraphe précédent se réduit de la manière suivante : d'abord, la phase ϕ est linéaire, ie.

$$\phi(x) = \vec{k} \cdot x, \quad \text{où } |\vec{k}| = \sqrt{1-N},$$

qui est l'équation (2.2.3) du paragraphe 2.2. On suppose donc que la première condition initiale pour Ψ est de la forme

$$\Psi|_{t=0} = \Psi^{in} = A^{in} e^{i \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}}.$$

L'amplitude A vérifie l'équation de transport

$$\partial_t A + \vec{k} \cdot \nabla A = 0 \mod O(\epsilon).$$

Autrement dit, en supposant un résultat de stabilité que nous n'énoncerons pas ici, $A \equiv A(t, x)$ est de la forme

$$A(t, x) = \mathcal{A}(x - t \vec{k}) \mod O(\epsilon).$$

Mais comme nous l'avons vu, l'équation vérifiée par la fonction A n'est pas exactement l'équation de transport, mais l'équation :

$$2i[\partial_t A + \vec{k} \cdot \nabla A] = \epsilon(\partial_{tt} A - \Delta A - i\nu_1 A + \epsilon\nu_1 \partial_t A) \quad (3.1.2)$$

qui est l'équation (2.2.4) du paragraphe 2.2.

Changement de variable

L'approximation d'enveloppe consiste à supposer que l'amplitude est une modulation temporelle lente de solutions exactes de l'équation de transport. L'amplitude A solution de (3.1.2) est donc recherchée sous la forme suivante :

$$A(t, x) = \mathcal{A}(\epsilon t, x - t \vec{k})$$

où $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(T, y)$ est une fonction régulière. Effectuant le changement de variables :

$$(t, x) \mapsto (t, y) = (\epsilon t, x - t \vec{k}),$$

l'amplitude $\mathcal{A}$ satisfait l'équation de type Schrödinger - avec perturbation - suivante :

$$\begin{aligned} 2i\partial_T \mathcal{A} + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A} \right] + i\nu_1 \mathcal{A} + \\ 2\epsilon \vec{k} \cdot \nabla_y \partial_T \mathcal{A} - \epsilon^2 \partial_{TT} \mathcal{A} + \epsilon\nu_1 \vec{k} \cdot \nabla \mathcal{A} - \epsilon^2 \nu_1 \partial_T \mathcal{A} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Ici, la nouvelle variable spatiale y correspond au feuilletage de l'espace par les surfaces de phase constante; une autre façon d'exprimer cela est de dire que y est la variable spatiale dans le repère du front d'onde.

Interprétons l'opérateur du second ordre

$$\mathcal{A} \mapsto \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A} \right].$$

La matrice $M = I - \vec{k}^{\otimes 2}$ est symétrique réelle de valeurs propres 1 avec multiplicité $n - 1$ et N avec multiplicité 1; on vérifie aisément qu'elle est inversible d'inverse $M^{-1} = I + \frac{1}{N}P$. Les formules classiques de la géométrie (cf. [44] p. 254) nous apprennent que l'opérateur du second ordre ci-dessus est le laplacien pour la métrique définie par M^{-1} , c'est-à-dire

$$ds^2 = |dx|^2 + \frac{1}{N} |\vec{k} \cdot dx|^2.$$

Conditions initiales pour $\mathcal{A}$

Rappelons les conditions satisfaites par Ψ :

$$\Psi|_{t=0} = A^{in} e^{i \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}} + C.C. \quad (3.1.4)$$

$$\partial_t \Psi|_{t=0} + \vec{k} \cdot \nabla \Psi + i \frac{1 - |\vec{k}|^2}{\epsilon} \Psi = f^{in}(x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}} + C.C. \quad (3.1.5)$$

Rappelons les conditions satisfaites par A :

$$A|_{t=0} = A^{in}, \quad (\partial_t A + \vec{k} \cdot \nabla A)|_{t=0} = f^{in}.$$

Cela entraîne pour $\mathcal{A}$ les conditions suivantes :

$$\mathcal{A}|_{T=0} = A^{in}, \quad (3.1.6)$$

$$\epsilon \partial_T \mathcal{A}|_{T=0} = f^{in}. \quad (3.1.7)$$

Proposition 3.1.1 *Ψ est solution de (3.1.1) (3.1.4) (3.1.5) ssi $\mathcal{A}$ est solution de (3.1.3) (3.1.6) (3.1.7).*

La suite de cette partie a pour but de montrer que si on définit la fonction Ψ_ϵ par :

$$\Psi_\epsilon(t, x) = \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t \vec{k}) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C.$$

avec $\mathcal{A}_\epsilon$ solution de l'équation de Schrödinger suivante, qui est l'équation (3.1.3) tronquée à l'ordre 1 en ϵ :

$$2i\partial_T \mathcal{A}_\epsilon + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A}_\epsilon \right] + i\nu_1 \mathcal{A}_\epsilon = 0, \quad (3.1.8)$$

alors Ψ_ϵ est une “bonne” approximation de la solution Ψ de (3.1.1), et de préciser en quel sens et avec quelle(s) condition(s) initiale(s). Si on revient à l'écriture

$$A_\epsilon(t, x) \equiv \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t \vec{k}),$$

l'équation (3.1.8) ci-dessus s'écrit encore :

$$2i(\partial_t + \vec{k} \cdot \nabla) A_\epsilon + \epsilon \nabla \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla A_\epsilon \right] + i\epsilon \nu_1 A_\epsilon = 0. \quad (3.1.9)$$

3.2 Résolution par transformée de Fourier

Avant de démontrer une estimation d'énergie, montrons d'abord l'existence et l'unicité d'une solution de (3.1.8) (3.1.6).

On se place sur le domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, t) / x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} = \{(y, T) / y \in \mathbb{R}^n, T > 0\},$$

avec le changement de variable $(x, t) \rightarrow (y = x - t \vec{k}, T = \epsilon t)$. Le résultat suivant est vérifié.

Théorème 3.2.1 *Soit $A^{in} \in H_y^s(\mathbb{R}^n)$. On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$2i\partial_T \mathcal{A}_\epsilon + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A}_\epsilon \right] + i\nu_1 \mathcal{A}_\epsilon = 0 \quad \forall (T, y) \in \mathcal{D}, \quad (3.2.1)$$

$$\mathcal{A}_\epsilon|_{T=0} = A^{in} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.2)$$

Le problème (3.2.1) (3.2.2) admet une unique solution $\mathcal{A}_\epsilon \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}_T^+, H^{s-2k}(\mathbb{R}_y^n))$, pour tout $k \geq 0$.

Cette solution s'exprime de façon exacte par transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_y(\mathcal{A}_\epsilon(T, \cdot))(\eta) = \mathcal{F}_y(A^{in})e^{-\frac{\nu_1}{2}T - \frac{iT}{2}(|\eta|^2 - |\vec{k} \cdot \eta|^2)}. \quad (3.2.3)$$

Preuve. Par transformée de Fourier en y du problème (3.2.1) (3.2.2), l'expression (3.2.3) de la solution est immédiate et entraîne les régularités voulues de $\mathcal{A}_\epsilon$, car $\partial_T^k \mathcal{A}_\epsilon = O((1 + |\eta|^2)^k) \mathcal{A}_\epsilon$. $\diamond$

En tronquant l'équation au premier ordre en ϵ , on a supprimé le terme en dérivée seconde de T , ce qui entraîne l'existence et l'unicité d'une solution au problème avec une seule condition initiale : la condition (3.1.7) n'est en général pas vérifiée, sauf si on impose une condition de compatibilité entre A^{in} et f^{in} . La solution obtenue, qui s'écrit :

$$\Psi_\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t \vec{k}) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C.$$

ne peut donc être l'approximation que d'une solution Ψ parmi celles vérifiant (3.1.1) (3.1.4). C'est ce qu'exprime le lemme suivant, qui montre quelle est cette solution $\Psi_L = \mathcal{A}_L(\epsilon t, x - t \vec{k}) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}}$, où $\mathcal{A}_L$ est choisie de façon unique parmi les solutions du système (3.1.3) (3.1.6).

Lemme 3.2.1 Soit $\nu_1 > 0$ et $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé, $0 < |\vec{k}| < 1$, vérifiant la condition suivante :

$$\frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} < 1 - |\vec{k}|^2. \quad (3.2.4)$$

Soit $A^{in} \in H_y^s(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$2i\partial_T \mathcal{A} + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A} \right] + i\nu_1 \mathcal{A} +$$

$$2\epsilon \vec{k} \cdot \nabla_y \partial_T \mathcal{A} - \epsilon^2 \partial_{TT} \mathcal{A} + \epsilon \nu_1 \vec{k} \cdot \nabla \mathcal{A} - \epsilon^2 \nu_1 \partial_T \mathcal{A} = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\mathcal{A}|_{T=0} = A^{in}. \quad (3.2.6)$$

Ce problème étant d'ordre deux en la variable T , il est bien défini lorsqu'on se donne deux conditions en $T = 0$. Il y a donc une infinité de solutions $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+; H_y^{s-k}(\mathbb{R}^n))$ au système (3.2.5)(3.2.6).

2. Notant $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformée de Fourier, on définit

$$\mathcal{A}_L(T, y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\mathcal{F}_y(A^{in}(\eta) e^{R_-(i\eta)T})(y) \right),$$

où :

$$R_-(i\eta) = -\frac{\nu_1}{2} + \frac{i}{\epsilon^2} \left(1 + \epsilon \vec{k} \cdot \eta - \sqrt{1 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta + \epsilon^2 |\eta|^2 - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4}} \right).$$

De plus, il existe $C > 0$ indépendant de ϵ tel que

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_L\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{s-2}(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon^2 C (\|A^{in}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_T \mathcal{A}|_{T=0}\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)}). \quad (3.2.7)$$

Cela signifie que si $\partial_T \mathcal{A}|_{T=0} = O_\epsilon(1)$ alors $\mathcal{A} - \mathcal{A}_L = O(\epsilon^2)$.

Remarque 1 : la condition (3.2.4) signifie que $N \gg O(\epsilon^4 \nu_1^2)$, or on a de toute façon implicitement supposé que $N \gg O(\epsilon^2)$, sans quoi l'approximation de l'optique géométrique est vide de sens. Cette condition (3.2.4) provient du lemme suivant, lequel permet en outre de définir sans ambiguïté la racine dans l'expression de $R_-(i\eta)$.

Lemme 3.2.2 Soit $\vec{k}, \eta \in \mathbb{R}^n$, où $|\vec{k}| < 1$ est fixé et

$$\delta(\eta) = -1 - 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \epsilon^2 |\eta|^2 + \epsilon^4 \frac{\nu_1^2}{4}.$$

δ est négatif quelque soit $\eta \in \mathbb{R}^n$ ssi $\vec{k}$ vérifie :

$$\frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} < 1 - |\vec{k}|^2 = N.$$

Preuve. Notons $\lambda = 1 - |\vec{k}|^2 - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4}$. δ s'écrit en fonction de λ de la façon suivante :

$$\delta = -2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \epsilon^2 |\eta|^2 - |\vec{k}|^2 - \lambda = -(\vec{k} + \epsilon \eta)^2 - \lambda.$$

Cela prouve que $\delta = f(\epsilon\eta)$ s'annule ssi $\lambda < 0$, et que $Max(\delta) = f(-\vec{k}) = -\lambda$. $\diamond$

Remarque 2 : La solution appartient à l'espace $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+; H^{s-k}(\mathbb{R}^n))$, comme il est logique puisque $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de la solution Ψ de l'équation de Klein-Gordon qui appartient aux mêmes espaces. Cependant, pour obtenir des estimations *indépendantes de ϵ* , il est nécessaire de se placer dans des espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+; H^{s-2k})$, qui correspondent aux solutions de l'équation approchée (3.2.1), de type Schrödinger.

Remarque 3 : La condition de variation lente en temps du lemme 3.2.1 n'est qu'un moyen d'exprimer le choix d'une condition qui puisse se prolonger en $T = 0$ de façon régulière : c'est un problème de couche limite et de régularité du prolongement de la solution au bord $T = 0$.

Preuve. Le schéma de cette démonstration est également utilisé dans la partie II (chapitre 7.4.2).

1. Extension de l'équation à l'espace entier.

Supposons que $\mathcal{A}$ soit une solution du problème (3.2.5)(3.2.6) du lemme 3.2.1, et notons B son prolongement à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ entier :

$$B(T, y) = \mathcal{A}(T, y) \mathbb{1}_{T \geq 0}.$$

La fonction B est alors solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 2i\partial_T B + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \vec{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y B \right] + i\nu_1 B + \\ 2\epsilon \vec{k} \cdot \nabla_y \partial_T B - \epsilon^2 \partial_{TT} B + \epsilon \nu_1 \vec{k} \cdot \nabla B - \epsilon^2 \nu_1 \partial_T B = \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$2iA^{in}\delta_{T=0} + 2\epsilon \vec{k} \cdot \nabla A^{in}\delta_{T=0} - \epsilon^2 (\partial_T \mathcal{A})_{T=0} \delta_{T=0} - \epsilon^2 \nu_1 A^{in} \delta_{T=0} - \epsilon^2 A^{in} \delta'_{T=0},$$

et B vérifie de plus $Supp(B) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

2. Résolution par transformée de Fourier du problème sur l'espace entier.

Comme $B \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, il est légitime de considérer sa transformée de Fourier globale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Notant $(\omega, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ les variables de Fourier de (T, y) , la transformée de l'équation (3.2.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{T,y}(B)(\omega, \eta) \left(\right. \\ & \quad \left. -2\omega - (|\eta|^2 - |\vec{k} \cdot \eta|^2) + i\nu_1 + -2\epsilon \vec{k} \cdot \eta \omega + \epsilon^2 \omega^2 + i\epsilon \nu_1 \vec{k} \cdot \eta - i\epsilon^2 \nu_1 \omega \right) \\ & = \mathcal{F}_y(A^{in})(\eta) \left(2i + 2i\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \epsilon^2 \nu_1 - i\omega \epsilon^2 \right) - \epsilon^2 \mathcal{F}_y(\partial_T \mathcal{A}_{T=0})(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Notons P le polynôme du second degré en $i\eta$ et $i\omega$ qui multiplie $\mathcal{F}_{T,y}(B)$:

$$\begin{aligned} P &= \epsilon^2 \omega^2 - 2\omega(1 + \epsilon \vec{k} \cdot \eta + i\frac{\epsilon^2}{2}\nu_1) - |\eta|^2 + |\vec{k} \cdot \eta|^2 + i\nu_1 + i\epsilon \nu_1 \vec{k} \cdot \eta. \\ P &= -\epsilon^2 (i\omega - R_+(i\eta))(i\omega - R_-(i\eta)), \end{aligned}$$

avec :

$$R_{\pm} = \frac{i + i\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^2}{2}\nu_1}{\epsilon^2} \pm \frac{i}{\epsilon^2} \sqrt{1 + \epsilon^2 |\eta|^2 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4}{4}\nu_1^2}. \quad (3.2.10)$$

Par le lemme 3.2.2, la racine $\sqrt{1 + \epsilon^2 |\eta|^2 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4}{4}\nu_1^2}$ est strictement positive, donc $\mathcal{Re}(R_{\pm}) = -\frac{\nu_1}{2} < 0$, ce qui entraîne que $i\omega - R_{\pm}(i\eta) \neq 0$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$. On peut donc diviser les deux membres de l'équation par P , et en simplifiant on obtient :

$$\mathcal{F}_{T,y}(B)(\omega, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \epsilon^2 |\eta|^2 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4}{4}\nu_1^2}} \left(\frac{\alpha_+(\eta)}{i\omega - R_+(i\eta)} - \frac{\alpha_-(\eta)}{i\omega - R_-(i\eta)} \right), \quad (3.2.11)$$

où les distributions $\alpha_{\pm}$ s'écrivent :

$$\alpha_{\pm}(\eta) = i\epsilon^2 R_{\mp} \mathcal{F}_y(A^{in})(\eta) - i\epsilon^2 \mathcal{F}_y(\partial_T \mathcal{A}_{T=0})(\eta). \quad (3.2.12)$$

On utilise alors le lemme 7.2.1 de la partie 7.2.2. En prenant $\theta = R_{\pm}$, on a $\mathcal{Re}(\theta) = -\frac{\nu_1}{2} < 0$, et le lemme permet de conclure :

$$\mathcal{F}_y(B(T, \cdot)) = \mathbb{1}_{T \geq 0} \mathcal{F}_y(\mathcal{A}(T, \cdot)) = \mathbb{1}_{T \geq 0} \frac{\alpha_+ e^{R_+ T} - \alpha_- e^{R_- T}}{2\sqrt{1 + \epsilon^2 |\eta|^2 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4}{4}\nu_1^2}}. \quad (3.2.13)$$

Si l'on n'impose pas d'autre condition sur la solution $\mathcal{A}$ que (3.2.5) (3.2.6), le nombre de solutions est infini.

3. Régularité des solutions.

L'équation (3.2.13) permet d'écrire $\mathcal{A}$ sous la forme :

$$\mathcal{F}_y(\mathcal{A}(T, \cdot))(\eta) = \mathcal{A}_+(\eta)e^{R_+(i\eta)T} + \mathcal{A}_-(\eta)e^{R_-(i\eta)T} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \forall T > 0,$$

avec

$$\mathcal{A}_\pm = \pm \left(\frac{\mathcal{F}_y(\partial_T \mathcal{A}|_{T=0}) - R_\mp \mathcal{F}_y(A^{in})}{R_+ - R_-} \right). \quad (3.2.14)$$

D'une part, en tant que fonctions de η , on a :

$$R_\pm(i\eta) = O(1 + |\eta|), \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \epsilon^2 |\eta|^2 + 2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4}{4} \nu_1^2} = O(1 + |\eta|),$$

donc :

$$\mathcal{A}_\pm = O_\eta(1) \mathcal{F}_y(A^{in}) + O\left(\frac{1}{1 + |\eta|}\right) \mathcal{F}_y(\partial_T \mathcal{A}|_{T=0}).$$

D'autre part $\mathcal{R}e(R_\pm) < 0$, donc $|e^{R_\pm T}| < 1$. Ces deux conditions entraînent que si $A^{in} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_T(\mathcal{A}|_{T=0}) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial_T^k \mathcal{A} \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*, H^{s-k}(\mathbb{R}^n))$, car :

$$\partial_T^k \mathcal{A} = R_+^k \mathcal{A}_+ e^{R_+ T} + R_-^k \mathcal{A}_- e^{R_- T}.$$

4. Caractérisation des solutions lentement variables en temps.

L'idée est simple : montrer que $R_+ = O(\frac{1}{\epsilon^2})$ et que $R_- = O_\epsilon(1)$, et avec quelle dépendance en η . Cela implique que toute solution dont les dérivées à tout ordre en temps sont bornées par rapport à ϵ (dans des espaces H^l convenables) sera égale à $\mathcal{A}_L$. On a

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}_L = \mathcal{A}_+ e^{R_+ T} + (\mathcal{A}_- - \mathcal{F}_y(A^{in})) e^{R_- T}.$$

Comme $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_- = \mathcal{F}_y(A^{in})$, on a $\mathcal{A} - \mathcal{A}_L = \mathcal{A}_+(e^{R_+ T} - e^{R_- T})$: il suffit de montrer que

$$\|\mathcal{F}_y^{-1}(\mathcal{A}_+)\|_{H^{s-2}} \leq C\epsilon^2 (\|A^{in}\|_{H^s} + \|\partial_T \mathcal{A}|_{T=0}\|_{H^{s-2}})$$

pour montrer (3.2.7).

Tout repose sur les estimations en fonction de ϵ et η de $R_{\pm}$. On utilise les deux faits suivants : premièrement, on peut écrire

$$1 - \sqrt{-\delta} = \frac{-2\epsilon \vec{k} \cdot \eta - \epsilon^2 |\eta|^2 - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4}}{1 + \sqrt{\delta}},$$

fraction dont le dénominateur est minoré par $1 + \sqrt{\lambda}$, indépendant de ϵ , ce qui permet une estimation de ce terme.

Deuxièmement, on peut écrire, en notant $y = \epsilon\eta$ et $a \geq 0$ quelconque :

$$\frac{\epsilon\eta}{a + \sqrt{-\delta}} = \frac{y}{a + \sqrt{\lambda + (\vec{k} + y)^2}},$$

fonction qui est bornée sur $\mathbb{R}^n$ par une constante $M(\lambda, |\vec{k}|)$ uniforme en ϵ .

Montrons maintenant les estimations vérifiées par $R_{\pm}$. Le terme C désigne une constante indépendante de ϵ , qui peut dépendre de λ , et n'est pas figée d'une équation à l'autre.

- (a) Il existe $C(\lambda) > 0$ indépendant de ϵ et η tel que $|R_{-}(i\eta)| \leq C(1 + |\eta|^2)$.

En effet, d'après l'expression (3.2.10), on réécrit R_{-} en faisant disparaître les termes en $1 - \sqrt{-\delta}$:

$$R_{-}(i\eta) = -\frac{\nu_1}{2} + \frac{i}{1 + \sqrt{-\delta}} \left(-\eta^2 + \frac{\epsilon^2 \nu_1^2}{4} \right) + \frac{i \vec{k} \cdot \eta}{(1 + \sqrt{-\delta})^2} \left(2 \vec{k} \cdot \eta + \epsilon |\eta|^2 - \frac{\epsilon^3 \nu_1^2}{4} \right).$$

Cette écriture de R_{-} est utilisée dans le schéma numérique de la partie III (cf. 8.2.2).

Le terme en $\epsilon \frac{|\eta|^2 \vec{k} \cdot \eta}{(1 + \sqrt{-\delta})}$ est majoré par $C|\eta|^2$, du fait que la fonction $\epsilon \frac{\vec{k} \cdot \eta}{(1 + \sqrt{-\delta})}$ soit bornée indépendamment de ϵ et η . On peut écrire plus précisément :

$$|R_{-}| \leq C \left(1 + \frac{1 + |\eta|^2}{1 + \sqrt{-\delta}} \right).$$

- (b) Il existe $C(\lambda) > 0$ indépendant de ϵ et η tel que

$$|R_{+}(i\eta) - \frac{2i}{\epsilon^2}| \leq C \frac{1 + |\eta|}{\epsilon}$$

En effet, on peut écrire :

$$R_+ = \frac{2i}{\epsilon^2} + i \frac{\vec{k} \cdot \eta}{\epsilon} - \frac{\nu_1}{2} + \frac{i}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon |\eta|^2 + 2 \vec{k} \cdot \eta - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4}}{1 + \sqrt{-\delta}} \right).$$

Le seul terme qui reste à évaluer pour obtenir l'encadrement de R_+ est le terme $\frac{i|\eta|^2}{1+\sqrt{-\delta}}$. Or, on peut encore l'écrire, avec $y = \epsilon\eta$: $\frac{|\eta|^2}{1+\sqrt{-\delta}} = \frac{|\eta|}{\epsilon} \frac{|y|}{1+\sqrt{-\delta(y)}}$. D'après la deuxième remarque préliminaire, cela implique $\frac{|\eta|^2}{1+\sqrt{-\delta}} \leq M \frac{|\eta|}{\epsilon}$.

(c) Il existe $C(\lambda) > 0$ indépendant de ϵ et η tel que

$$|\mathcal{A}_+(\eta)| \leq C\epsilon^2 (|\mathcal{F}(A^{in})|(1 + |\eta|^2) + |\mathcal{F}(\partial_T \mathcal{A}|_{T=0})|).$$

En effet, d'après l'équation (3.2.14), on a :

$$\mathcal{A}_+ = -\frac{i\epsilon^2}{2} \left(\frac{\mathcal{F}_y(\partial_T \mathcal{A}|_{T=0}) - R_- \mathcal{F}_y(A^{in})}{\sqrt{-\delta}} \right).$$

Comme $|R_-| \leq C(1 + |\eta|^2)$, on a l'inégalité voulue.

Cette dernière estimation nous donne immédiatement l'inégalité (3.2.7).

◇

3.3 Résultat d'approximation

Cette partie permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 Soit $\nu_1 \geq 0$ et $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé, $0 < |\vec{k}| < 1$, vérifiant la condition (3.2.4), i.e. :

$$\frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} < 1 - |\vec{k}|^2.$$

Soit $A^{in} \in H^3(\mathbb{R}^n)$ et $f_1^{in} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Soit Ψ_ϵ la solution du problème (3.1.1) (3.1.4) (3.1.5) avec $f^{in} = \epsilon f_1^{in}$, qui s'écrit encore :

$$\Psi(t, x) = \mathcal{A}(\epsilon t, x - t \vec{k}) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C.$$

où $\mathcal{A}$ est la solution du problème (3.1.3) (3.1.6) (3.1.7).

Soit $\mathcal{A}_\epsilon$ la solution du problème (3.2.1) (3.2.2) du théorème 3.2.1 et :

$$\Psi_\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t \vec{k}) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C.$$

L'estimation suivante est vérifiée :

$$\|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon^2 C t (\|f_1^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|A^{in}\|_{H^3(\mathbb{R}^n)}) \quad (3.3.1)$$

Preuve. On montre les estimations recherchées à l'aide des fonctions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_\epsilon$, et en deux étapes.

1. Estimation de la différence entre la solution $\mathcal{A}$ du problème (3.1.3) (3.1.6) (3.1.7) et la solution $\mathcal{A}_L$ de (3.1.3) (3.1.6) sélectionnée par le lemme 3.2.1.

D'après l'estimation (4c) de la démonstration du lemme 3.2.1, du fait que $\partial_T \mathcal{A}|_{T=0} = f_1^{in}$, on a :

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_L\|_{L^2} = \|\mathcal{A}_+ e^{R_+ T} - \mathcal{A}_+ e^{R_- T}\|_{L^2} \leq \epsilon^2 C \left(\|A^{in}\|_{H^2} + \|f_1^{in}\|_{L^2} \right).$$

2. Estimation de la différence entre la solution $\mathcal{A}_\epsilon$ du problème approché (3.2.1) (3.2.2) et la solution $\mathcal{A}_L$ du lemme 3.2.1. Dans cette estimation, seul A^{in} joue un rôle, f^{in} n'intervient pas.

Soit $\hat{B}(T, \eta) = \mathcal{F}_y(\mathcal{A}_L - \mathcal{A}_\epsilon(T, \cdot))(\eta)$. Cette fonction vérifie le problème suivant :

$$(2i\partial_T - (|\eta|^2 - |\vec{k} \cdot \eta|^2) + i\nu_1) \hat{B} = 2i\epsilon f(\eta) \mathcal{F}_y(A^{in})$$

$$\hat{B}|_{T=0} = 0,$$

où la fonction f est :

$$2if(\eta) = -2i \vec{k} \cdot \eta R_-(i\eta) + \epsilon R_-^2(i\eta) - i\nu_1 \vec{k} \cdot \eta + \epsilon \nu_1 R_-(i\eta).$$

D'après l'estimation (4a) de la démonstration du lemme 3.2.1, comme

$$|R_-| \leq C(1 + \frac{1 + |\eta|^2}{1 + \sqrt{-\delta}}),$$

on a

$$|\epsilon R_-^2| \leq C(\epsilon + |\eta|^3 \frac{\epsilon|\eta|}{1 + \sqrt{-\delta}}) \leq C(1 + |\eta|^3),$$

donc :

$$|f(\eta)| \leq C \left(1 + |\eta|^3 \right)$$

Or comme

$$\hat{B}(T, \eta) = \frac{2\epsilon f(\eta) \mathcal{F}_y(A^{in})}{\nu_1 + i(|\eta|^2 - |\vec{k} \cdot \eta|^2)} (1 - e^{-\frac{\nu_1}{2}T - \frac{iT}{2}(|\eta|^2 - |\vec{k} \cdot \eta|^2)}),$$

on a

$$\|\partial_T B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon C \|A^{in}\|_{H^3(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{\nu_1}{2}T},$$

donc

$$\|B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon^2 C t \|A^{in}\|_{H^3(\mathbb{R}^n)}.$$

Cela achève la démonstration.

◇

Remarque 1 : on aura $\mathcal{A} = \mathcal{A}_L$ ssi la condition suivante est vérifiée par f^{in} :

$$f^{in} = \epsilon \mathcal{F}_y^{-1} \left(R_-(i\eta) \mathcal{F}_y(A^{in}) \right), \quad (3.3.2)$$

ce qui est encore équivalent à la condition initiale suivante pour $\mathcal{A}$ en $T = 0$:

$$(\partial_T - R_-(\nabla)) \mathcal{A}|_{T=0} = 0, \quad (3.3.3)$$

où la racine d'opérateur est définie comme dans l'annexe 7.4.2 du chapitre 7.

Remarque 2 : A moins d'une condition de compatibilité entre f^{in} et A^{in} , exprimée par la remarque 1 ci-dessus, l'analyse asymptotique aux ordres supérieurs ne présente pas d'intérêt : elle réduit de plus en plus l'écart entre $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_\epsilon$ mais la distance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_L$ restera.

Chapitre 4

Rayons faiblement courbés dans l'espace entier

Dans ce chapitre, l'indice de réfraction N varie lentement en x : on fait l'hypothèse qu'il existe $\tilde{N}$ régulier tel que

$$N(x) = \tilde{N}(\epsilon x).$$

Rappelons l'équation de Maxwell (2.1.1), où ν est remplacé par $\epsilon\nu_1$:

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi) + \tilde{N}(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0. \quad (4.0.1)$$

4.1 Développement asymptotique

4.1.1 Optique géométrique

L'approximation de l'optique géométrique du paragraphe 2.2 se simplifie de la façon suivante. D'abord, ϕ est remplacé par $\frac{1}{\epsilon}\phi(\epsilon x)$ dans l'expression de Ψ , qui devient donc :

$$\Psi(t, x) = A(t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}.$$

L'ordre 0 en ϵ de (4.0.1) devient :

$$|\nabla\phi(y)|^2 = 1 - \tilde{N}(y),$$

ainsi ϕ est encore solution de l'équation eikonale. Puis, l'équation (2.2.4) devient :

$$2i[\partial_t A + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A] + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1)A = \epsilon(\partial_{tt} A - \Delta A + \epsilon \nu_1 \partial_t A). \quad (4.1.1)$$

L'avantage d'avoir un rayon lentement variable en ϵ est que A vérifie :

$$\partial_t A + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A = 0 \quad \text{mod } O(\epsilon). \quad (4.1.2)$$

Soit alors $Y_T(y)$ le champ des vecteurs caractéristiques pour cette équation de transport, *i.e.* les courbes solutions des équations :

$$\dot{Y}_T(y) = -\nabla \phi(Y_T(y)), \quad (4.1.3)$$

$$Y_0(y) = y. \quad (4.1.4)$$

Rappelons encore que l'existence d'une solution univaluée ϕ régulière de l'équation n'a lieu en toute généralité que localement. Partout où une solution ϕ existe, son gradient est borné par la donnée au bord ou à l'infini qui le détermine. Ainsi les caractéristiques Y existent-elles sur tout le domaine où une telle solution ϕ est définie. Autrement dit, la seule obstruction à ce que l'approximation de l'optique géométrique soit globale est l'apparition de branches multiples pour la solution de l'équation eikonale.

Comme les solutions de l'équation de transport (4.1.2) sont de la forme :

$$A(t, x) = A^{in}\left(\frac{1}{\epsilon} Y_{\epsilon t}(\epsilon x)\right),$$

il est légitime de chercher A sous la forme :

$$A = \mathcal{A}\left(\epsilon t, \frac{1}{\epsilon} Y_{\epsilon t}(\epsilon x)\right).$$

L'obtention d'une équation approchée de l'équation exacte (4.1.1) satisfaite par l'amplitude A de l'onde peut se faire par deux méthodes, que nous développons dans les paragraphes suivants : méthode de type Chapman-Enskog (cf. [12]) et méthode inspirée du livre d'Alan Newell [45] p.32.

4.1.2 Développement de type Chapman-Enskog (cf. [12])

La méthode de type Chapman-Enskog a été répandue au début des années 70 par J-L. Bona : voir par exemple l'article de Benjamin, Bona, Mahony [5], ou encore, plus récemment, celui de Bona, Chen, Saut [9] où la méthode est appliquée sur des systèmes.

L'équation (4.1.1) peut se réécrire :

$$\partial_t A = -(\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) A - \frac{1}{2} \epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A - \frac{i\epsilon}{2} (\partial_{tt} A - \Delta A + \epsilon \nu_1 \partial_t A).$$

A partir de cette expression, on cherche à supprimer dans les termes correctifs de l'équation (4.1.1) les dérivées en temps. On déduit de l'équation ci-dessus :

$$\partial_{tt} A = -(\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) \partial_t A - \frac{1}{2} \epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \partial_t A - \frac{i\epsilon}{2} (\partial_{ttt} A - \Delta \partial_t A + \epsilon \nu_1 \partial_{tt} A).$$

Développement au premier ordre

Pour avoir une approximation à $O(\epsilon^2)$ près de l'équation (4.1.1), sans dérivée temporelle dans le terme perturbatif, il suffit de calculer le terme $(\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) \partial_t A$ dans l'expression ci-dessus, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} A &= (\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla)^2 A + \frac{\epsilon}{2} \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla [(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A] + i \frac{\epsilon}{2} \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla (\partial_{tt} - \Delta + \epsilon \nu_1 \partial_t) A \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \partial_t A - \frac{i\epsilon}{2} (\partial_{tt} - \Delta + \epsilon \nu_1 \partial_t) \partial_t A. \end{aligned}$$

En regroupant les termes pour faire apparaître le groupement $\partial_t A - \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A$, il vient (cf. formulaire 9.0.1) :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} A &= \nabla \cdot (\nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2} \nabla A) \\ &\quad - \epsilon (\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A) \Delta \phi(\epsilon x) - \frac{\epsilon}{2} \left(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1 + i(\partial_{tt} - \Delta + \epsilon \nu_1 \partial_t) \right) (\partial_t A - \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A) \\ &\quad - \frac{\epsilon^2}{2} \left((\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla \Delta \phi(\epsilon x)) A + 2i \nabla^{\otimes 2} \phi(\epsilon x) : \nabla^{\otimes 2} A + i\epsilon \nabla A \cdot \nabla \Delta \phi(\epsilon x) \right). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Remplaçons dans l'équation (4.1.1) le terme ∂_{tt} par cette expression. Il vient, de façon exacte :

$$2i[\partial_t A + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A] + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A = -\epsilon \nabla \cdot [(I - (\nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2})) \nabla A]$$

$$\begin{aligned}
& -\epsilon^2(\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A)\Delta\phi(\epsilon x) - \frac{\epsilon^2}{2} \left(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1 + i(\partial_{tt} - \Delta + \epsilon\nu_1\partial_t) \right) (\partial_t A - \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A) \\
& - \frac{\epsilon^3}{2} \left((\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla\Delta\phi(\epsilon x))A + 2i\nabla^{\otimes 2}\phi(\epsilon x) : \nabla^{\otimes 2}A + i\epsilon\nabla A \cdot \nabla\Delta\phi(\epsilon x) \right) + \epsilon^2\nu_1\partial_t A.
\end{aligned}$$

Cela entraîne l'équation approchée à l'ordre 1 suivante :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + \epsilon\nabla \cdot ((I - \nabla\phi(\epsilon x))^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon) + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon = 0. \quad (4.1.6)$$

Développement à l'ordre deux

Pour exprimer l'équation à l'ordre suivant, revenons à l'équation (4.1.5) pour supprimer les dérivées en temps dans les termes en $O(\epsilon)$. Pour éviter une écriture trop longue, qui n'est utile que si l'on souhaite développer aux ordres supérieurs, il suffit de remarquer que :

$$\partial_{tt}A = (\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla)^2 A + O(\epsilon) = \nabla \cdot (\nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2} \nabla A) + O(\epsilon),$$

ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned}
& \partial_{tt}A = \nabla \cdot (\nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2} \nabla A) - \epsilon(\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A)\Delta\phi(\epsilon x) \\
& - \frac{\epsilon}{2} \left(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1 + i(\nabla \cdot (\nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2} \nabla A) - \Delta) \right) (-2\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A) + O(\epsilon^2). \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

Cela entraîne l'équation approchée à l'ordre 2 suivante :

$$\begin{aligned}
& 2i[\partial_t A_{\epsilon^2} + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_{\epsilon^2}] + \epsilon\nabla \cdot [(I - (\nabla\phi(\epsilon x))^{\otimes 2}) \nabla A_{\epsilon^2}] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_{\epsilon^2} = \\
& -i\epsilon^2\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla \left[\nabla \cdot [(I - (\nabla\phi(\epsilon x))^{\otimes 2}) \nabla A_{\epsilon^2}] \right]. \quad (4.1.8)
\end{aligned}$$

4.1.3 Développement asymptotique inspiré d'A. Newell

Cette méthode s'inspire de [45] p.32. On écrit le développement asymptotique de A sous la forme :

$$A(t, x) = A_0(t, x) + \epsilon A_1(t, x) + \epsilon^2 A_2(t, x) + \dots$$

Commençons par dériver la condition initiale :

$$A|_{t=0} = A^{in}(x).$$

Cela entraîne :

$$A_0|_{t=0} = A^{in}, \quad A_k|_{t=0} = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

L'équation (4.1.1) devient, en notant $A_{-1} = A_{-2} = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \epsilon^n [2i(\partial_t + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) A_n + i(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_{n-1}] = \\ \sum_{n \geq 0} \epsilon^n [(\partial_{tt} - \Delta) A_{n-1} + \nu_1 \partial_t A_{n-2}] \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Développement à l'ordre 0

La fonction A_0 est solution du problème de transport :

$$2i(\partial_t + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) A_0 = 0, \quad (4.1.10)$$

$$A_0|_{t=0} = A^{in} \quad (4.1.11)$$

Cela entraîne :

$$A_0(t, x) = A^{in} \left(\frac{1}{\epsilon} Y_{\epsilon t}(\epsilon x) \right), \quad (4.1.12)$$

où Y représente les courbes caractéristiques d'équations (4.1.3)(4.1.4).

Développement à l'ordre 1

La fonction A_1 est solution d'un problème de transport avec second membre :

$$2i[\partial_t A_1 + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_1] + i(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_0 = (\partial_{tt} - \Delta) A_0. \quad (4.1.13)$$

$$A_1|_{t=0} = 0. \quad (4.1.14)$$

Exprimons le terme de perturbation $= \epsilon(\partial_{tt} A_0 - \Delta A_0)$ en fonction des dérivées en espace de A_0 , grâce à l'équation de transport qu'elle satisfait :

$$\partial_t A_0 = -\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_0,$$

donc (cf. formulaire en annexe 9.0.1) :

$$\partial_{tt}A_0 = \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla(\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_0) = \nabla \cdot [(\nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla A_0] - \epsilon(\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_0) \Delta\phi(\epsilon x).$$

Cela entraîne que la fonction $A_\epsilon = A_0 + \epsilon A_1$ vérifie l'équation (4.1.6) à un $O(\epsilon^2)$ près. En continuant la même méthode à l'ordre 2, on obtient l'équation (4.1.8).

Il peut être intéressant (pour une autre façon de démontrer le théorème d'approximation 4.3.5) de donner l'écriture exacte de A_1 en fonction de A^{in} . En effet, l'équation (4.1.13) et le résultat ci-dessus nous conduisent à :

$$\partial_t A_1 + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_1 = f(t, x),$$

avec

$$f(t, x) = -\frac{1}{2}(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_0 + \frac{i}{2}\left(\nabla \cdot [I - \nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2}] \nabla A_0\right) - \frac{i\epsilon}{2}\Delta\phi(\epsilon x)(\nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_0),$$

Donc, comme $A_1|_{t=0} = 0$:

$$A_1 = \int_0^t f(s, \frac{1}{\epsilon}Y_{\epsilon(t-s)}(\epsilon x)) ds.$$

Notant

$$\nabla\phi(Y_{\epsilon t}(\epsilon x)) = \tilde{\nabla}\phi(\epsilon t, \epsilon x), \quad \Delta\phi(Y_{\epsilon t}(\epsilon x)) = \tilde{\Delta}\phi(\epsilon t, \epsilon x),$$

on a :

$$A_1 = \int_0^t -\left(\frac{\tilde{\Delta}\phi(\epsilon t, \epsilon x) + \nu_1}{2} - \frac{i}{2}\nabla \cdot [\tilde{I} - (\tilde{\nabla}\phi(\epsilon t, \epsilon x)^{\otimes 2})] \nabla + \frac{i\epsilon}{2}\tilde{\Delta}\phi(\epsilon t, \epsilon x)(\tilde{\nabla}\phi(\epsilon t, \epsilon x) \cdot \nabla)\right)$$

$$A^{in}\left(\frac{1}{\epsilon}Y_{\epsilon(t+s)}(\epsilon x)\right) ds. \tag{4.1.15}$$

N.B. : ainsi, tous les termes en $\nabla\phi(\epsilon x)$ ou $\Delta\phi(\epsilon x)$ sont pris non pas en ϵx mais au point $Y_{\epsilon t}(\epsilon x)$. **Par la suite, afin d'éviter toute confusion, on note**

$$\nabla\phi(Y_{\epsilon t}(\epsilon x)) = \tilde{\nabla}\phi(\epsilon t, \epsilon x).$$

4.2 Ecriture dans la géométrie des rayons

Les deux méthodes asymptotiques ci-dessus ont conduit aux approximations suivantes de l'équation exacte (4.1.1).

1. A l'ordre 1 en ϵ :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + \epsilon \nabla \cdot \left[(I - \nabla \phi(\epsilon x))^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon \right] + i\epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_\epsilon = 0. \quad (4.2.1)$$

2. A l'ordre 2 en ϵ :

$$2i[\partial_t A_{\epsilon^2} + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_{\epsilon^2}] + \epsilon \nabla \cdot \left[\left(I - (\nabla \phi(\epsilon x))^{\otimes 2} \right) \nabla A_{\epsilon^2} \right] + i\epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_{\epsilon^2} = -i\epsilon^2 \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla \left[\nabla \cdot \left[\left(I - (\nabla \phi(\epsilon x))^{\otimes 2} \right) \nabla A_{\epsilon^2} \right] \right]. \quad (4.2.2)$$

Soit alors g_ϵ la métrique définie par

$$g_\epsilon(x) \cdot (\xi, \xi) = |\xi|^2 + \frac{1}{N(\epsilon x)} |\xi \nabla \phi(\epsilon x)|^2; \quad (4.2.3)$$

on notera Δ^{g_ϵ} le laplacien qui lui est associé par la formule usuelle de la géométrie riemannienne (cf. [44] p. 254 et annexe 9.0.2). Plus précisément,

$$\Delta^{g_\epsilon} f(x) = \sqrt{N(\epsilon x)} \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{N(\epsilon x)}} (I - (\nabla \phi(\epsilon x))^{\otimes 2}) \nabla f \right].$$

Ainsi, l'équation (4.2.1) vérifiée par A_ϵ devient

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_\epsilon + \epsilon \Delta_x^{g_\epsilon} A_\epsilon = 0, \quad (4.2.4)$$

toujours à ϵ^2 près. Injectant dans cette dernière équation la forme suivante de l'amplitude :

$$A_\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, \frac{1}{\epsilon} Y_{\epsilon t}(\epsilon x)),$$

on aboutit finalement à

$$2i\partial_T \mathcal{A}_\epsilon(T, y) + i[(\Delta \phi) \circ Y_{-T} + \nu_1](\epsilon y) \mathcal{A}_\epsilon(T, y) + (\Delta_y^{g_\epsilon \circ Y_{-T}} \mathcal{A}_\epsilon)(T, y) = 0 \mod O(\epsilon), \quad (4.2.5)$$

où la métrique $g_\epsilon \circ Y_{-T}$ est l'image directe par le difféomorphisme $x \mapsto \frac{1}{\epsilon} Y_T(\epsilon x)$ de la métrique g_ϵ de (4.2.3). Bien sûr, cette équation est vérifiée seulement à ϵ près.

Cette équation est l'exact analogue dans le cas de rayons faiblement courbés de l'équation de Schrödinger dans le repère du front d'onde qui a été établie dans le paragraphe 3.1, pour le cas de rayons droits. Elle décrit les effets diffractifs le long de rayons faiblement courbés.

On notera que l'utilisation de l'opérateur Δ^{g_ϵ} dans (4.2.4) est un peu arbitraire, car les équations (4.2.1) et (4.2.4) ne diffèrent que par un terme d'ordre ϵ^2 , à savoir

$$\epsilon^2 \frac{1}{2} (\nabla \ln N)(\epsilon x) (I - \nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla A_\epsilon(t, x).$$

L'écriture (4.2.4) présente toutefois l'avantage que le changement de variables par le difféomorphisme $x \mapsto \frac{1}{\epsilon} Y_T(\epsilon x)$ sur l'opérateur du second ordre Δ^{g_ϵ} s'y interprète de façon très simple, puisqu'elle se résume à l'action de ce difféomorphisme sur la métrique g_ϵ , opération qui ne fait intervenir que des éléments différentiels d'ordre 1. En revanche, la résolution théorique de (4.2.1) est plus aisée, car le laplacien $\Delta^{g_\epsilon \circ Y_{-T}}$ est non autonome.

4.3 Etude du problème approché

4.3.1 Résultats d'existence et unicité

Comme on applique le théorème de Hille-Yosida, rappelons tout d'abord une démonstration du théorème suivant (résolution de l'équation elliptique associée).

Théorème 4.3.1 *Soit $\mathcal{AS}$ l'opérateur défini sur $H^2(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\mathcal{AS} = \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla + \frac{\epsilon}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) - i \frac{\epsilon}{2} \nabla \cdot [(I - \nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla], \quad (4.3.1)$$

où $\nu_1 \geq 0$, $\phi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ solution régulière de l'équation eikonale stationnaire :

$$|\nabla \phi(y)|^2 = 1 - N(y),$$

avec $N \geq N_0 > 0$ une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\lambda = 2 \frac{1 - N_0}{N_0}.$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe une unique solution $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathcal{A}Su + i\frac{\lambda}{\epsilon}u = f \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \quad (4.3.2)$$

De plus, si $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\epsilon \|D^{m+2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|D^{m+1}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\epsilon} \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|\phi(\epsilon x)\|_{C_b^{m+3}(\mathbb{R}^n)}, N_0) \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.3.3)$$

La notation $D^m u$ désigne ici le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles d'ordre m de u .

Preuve.

La démonstration s'appuie sur une démonstration classique de régularité (cf. par exemple [11]), mais il est nécessaire de prendre garde au coefficient ϵ pour obtenir l'estimation voulue.

1. Existence et unicité d'une solution faible dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit a_λ la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $-i\mathcal{A}S + \frac{\lambda}{\epsilon}$:

$$a_\lambda(u, u) = -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla u) \bar{u} - C.C. + \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 - |\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla u|^2 - i\nu_1 |u|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\epsilon} |u|^2.$$

L'équation (4.3.2) se réécrit de façon variationnelle dans $H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad a_\lambda(u, v) = -i \int_{\mathbb{R}^n} f v$$

L'opérateur a_λ est coercif et vérifie :

$$C(\epsilon |\nabla u|^2 + \frac{|u|^2}{\epsilon}) \geq \operatorname{Re}(a_\lambda(u, u)) \geq \frac{N_0 \epsilon}{4} |\nabla u|^2 + \frac{1 - N_0}{\epsilon N_0} |u|^2.$$

Cela permet d'appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, et d'obtenir l'inégalité suivante pour la solution $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{1}{\epsilon} \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \leq C(N_0) \|f\|_{L^2}.$$

On a donc obtenu l'existence et l'unicité dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ ainsi qu'une partie de l'inégalité (4.3.3) pour $m = 0$.

2. Régularité de la solution faible : $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Dérivant l'équation dans une direction ∂_{x_i} quelconque (pour être tout à fait rigoureux, il faudrait appliquer la technique des quotients différentiels puisqu'on ne sait pas encore que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$...), on a pour $v = \partial_{x_i} u$, en se rappelant le fait que $\phi = \phi(\epsilon x)$:

$$\mathcal{A}Sv + i\frac{\lambda}{\epsilon}v = \partial_{x_i} f - \epsilon \nabla(\partial_{y_i} \phi(\epsilon x)) \cdot \nabla u - \frac{\epsilon^2}{2} \Delta(\partial_{y_i} \phi(\epsilon x))u - i\frac{\epsilon^2}{2} \nabla \cdot [(\partial_{y_i}(\nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}))\nabla]u.$$

Multipliant par v et prenant la partie imaginaire, cela entraîne, grâce à l'estimation sur a_λ :

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{4}\epsilon \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1-N_0}{\epsilon N_0} \|v\|_{L^2}^2 &\leq \|f\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \\ &+ \epsilon C(\phi) \left(\|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \epsilon \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité vérifiée par u , cela entraîne :

$$\epsilon \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \leq C(\phi) \|f\|_{L^2}.$$

On a donc obtenu l'inégalité (4.3.3) pour $m = 0$. Ceci connu, si $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on peut majorer différemment la partie imaginaire de l'équation satisfaite par v , et écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|v\|_{L^2}^2 &\leq \|f\|_{H^1} \|v\|_{L^2} + \\ &+ \epsilon C(\phi) \left(\|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \epsilon \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité vérifiée par u , cela entraîne :

$$\epsilon^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \leq \epsilon C(\phi) \|f\|_{H^1} (\|v\|_{L^2} + \epsilon \|\nabla v\|_{L^2}),$$

et donc

$$\epsilon \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \leq \epsilon C(\phi) \|f\|_{H^1},$$

ce qui implique

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \epsilon C(\phi) \|f\|_{H^1}.$$

C'est une partie de l'inégalité (4.3.3) pour $m = 1$.

3. Régularité dans H^{m+2} pour $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

On procède ensuite par récurrence sur $m \geq 1$, en prenant comme hypothèse de récurrence :

- (a) l'inégalité (4.3.3) est vérifiée à l'ordre $m - 1$,
- (b) l'inégalité suivante est vérifiée à l'ordre m :

$$\frac{1}{\epsilon} \|u\|_{H^m} \leq C(\phi) \|f\|_{H^m}.$$

Il est immédiat que toutes les dérivées d'ordre $m+1$ de u vérifient une équation du type :

$$\mathcal{AS}(\partial^{(m+1)}u) + i\frac{\lambda}{\epsilon}(\partial^{(m+1)}u) = \partial^{(m+1)}f + \epsilon \sum_{i=0}^{m+2} C_i(\phi(\epsilon x))(D^{(m+2-i)}u).$$

En multipliant par $\partial^{(m+1)}u$ et en prenant la partie imaginaire, cela entraîne, avec $v = \partial^{(m+1)}u$:

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{4}\epsilon \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1 - N_0}{\epsilon N_0} \|v\|_{L^2}^2 \leq \\ \|f\|_{H^m} \|\nabla v\|_{L^2} + \epsilon C(\phi) \|u\|_{H^{m+1}} \left(\epsilon \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

L'inégalité (4.3.3), supposée vérifiée à l'ordre $m - 1$, implique en particulier :

$$\epsilon \|u\|_{H^{m+1}} \leq C(\phi) \|f\|_{H^{m-1}},$$

et l'inégalité devient pour $v = \partial^{(m+1)}u$:

$$\epsilon^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \leq \epsilon C(\phi) \|f\|_{H^m} \left(\|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right).$$

Cela implique :

$$\epsilon \|D^{m+2}u\|_{L^2} + \|D^{m+1}u\|_{L^2} \leq C(\phi) \|f\|_{H^m},$$

et avec l'hypothèse de récurrence cela prouve (4.3.3) à l'ordre m . De plus, si $f \in H^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, on peut interpréter différemment l'équation satisfaite par v , c'est-à-dire :

$$\epsilon \|\nabla \partial^{(m+1)} u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\partial^{(m+1)} u\|_{L^2}^2 \leq C(\phi) \|f\|_{H^{m+1}} (\|\partial^{(m+1)} u\|_{L^2} + \epsilon \|\nabla \partial^{(m+1)} u\|_{L^2}),$$

ce qui entraîne en particulier

$$\frac{1}{\epsilon} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\phi) \|f\|_{H^{m+1}},$$

ce qui implique l'inégalité (3b) à l'ordre $m+1$. Cela achève la démonstration.

◇

Démontrons maintenant un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation d'advection-Schrödinger.

Théorème 4.3.2 *Soient $A^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{N}$, $\nu_1 \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $N = \tilde{N}(\epsilon x) \geq N_0 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ solution régulière de l'équation eikonale stationnaire. On note $\nu^0 = \text{Inf}(\nu_1) \geq 0$.*

Il existe une unique solution $A_\epsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^n))$ au problème suivant :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon +$$

$$\epsilon \nabla \cdot [(I - \nabla \phi^{\otimes 2}(\epsilon x)) \nabla A_\epsilon] = 0, \quad (4.3.4)$$

$$A_{\epsilon|t=0} = A^{in} \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (4.3.5)$$

De plus, A_ϵ vérifie les inégalités suivantes :

1. $\|A_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{\epsilon \nu^0}{2} t},$
2. $\epsilon^2 \|D^2 A_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon \|\nabla A_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|A_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$
 $\leq e^{-\frac{\epsilon \nu^0}{2} t} C(\nu_1, \phi) \left(\epsilon^2 \|D^2 A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon \|\nabla A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right).$

Preuve.

1. Démontrons tout d'abord l'estimation d'énergie 1. Multipliant l'équation (4.3.4) par $\bar{A}_\epsilon$ et prenant la partie imaginaire, il vient :

$$\partial_t |A_\epsilon|^2 + \nabla \phi \cdot \nabla |A_\epsilon|^2 + \epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) |A_\epsilon|^2 + \mathcal{R}e \left(\frac{\epsilon}{2i} \bar{A}_\epsilon (\Delta A_\epsilon - \nabla \cdot (\nabla \phi^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon)) \right) = 0.$$

Or, on a les égalités suivantes :

$$\nabla \cdot (|A_\epsilon|^2 \nabla \phi(\epsilon x)) = \nabla \phi \cdot \nabla |A_\epsilon|^2 + \epsilon \Delta \phi(\epsilon x) |A_\epsilon|^2,$$

$$\bar{A}_\epsilon \Delta A_\epsilon = \nabla \cdot [\bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] - |\nabla A_\epsilon|^2,$$

et

$$\bar{A}_\epsilon \nabla \cdot (\nabla \phi^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon) = \nabla \cdot [\nabla \phi^{\otimes 2} \bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] - |\nabla A_\epsilon \cdot \nabla \phi|^2.$$

Ces deux dernières inégalités impliquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left(\frac{\epsilon}{2i} \bar{A}_\epsilon (\Delta A_\epsilon - \nabla \cdot (\nabla \phi^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon)) \right) &= \mathcal{I}m \left(\epsilon \bar{A}_\epsilon (\Delta A_\epsilon - \nabla \cdot (\nabla \phi^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon)) \right) \\ &= \epsilon \left(\nabla \cdot [\bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] - \nabla \cdot [\nabla \phi^{\otimes 2} \bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] \right). \end{aligned}$$

On en déduit, en intégrant sur tout l'espace :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^n} \partial_t |A_\epsilon|^2 + \nabla \cdot (|A_\epsilon|^2 \nabla \phi(\epsilon x)) + \nu_1 |A_\epsilon|^2 + \\ \epsilon \left(\nabla \cdot [\bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] - \nabla \cdot [\nabla \phi^{\otimes 2} \bar{A}_\epsilon \nabla A_\epsilon] \right) = 0. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green :

$$\frac{d}{dt} \|A_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \epsilon \nu_1 \|A_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 0,$$

ce qui prouve l'inégalité recherchée, et l'unicité d'une solution.

2. Notons $\mathcal{AS}$ l'opérateur défini sur $D(\mathcal{AS}) = H^2(\mathbb{R}^n) \subset H = L^2(\mathbb{R}^n)$ par (4.3.1) :

$$\mathcal{AS} = \nabla \phi \cdot \nabla + \frac{\epsilon}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) - i \frac{\epsilon}{2} \nabla \cdot [(I - \nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla].$$

L'équation (4.3.4) peut se réécrire $\frac{d}{dt} A_\epsilon + \mathcal{AS} A_\epsilon = 0$. Pour montrer que $\mathcal{AS}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, on applique le théorème de Hille-Phillips à l'opérateur $\mathcal{AS} + i \frac{\lambda}{\epsilon}$, avec $\lambda > 0$ choisi comme dans le théorème 4.3.1.

(a) $\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon}$ est monotone : soit $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\operatorname{Re}((\mathcal{AS}u, u)) = \frac{\epsilon}{2} \|\sqrt{\nu_1}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq 0$$

(b) $\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon}$ est maximal monotone : pour cela, il suffit de montrer que $I + \mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon}$ est surjectif de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On cherche donc à résoudre l'équation fortement elliptique suivante :

$$-i\nabla\phi \cdot \nabla u - i\frac{\epsilon}{2}(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1 + 1)u - \frac{\epsilon}{2}\nabla \cdot [(I - \nabla\phi(\epsilon x)^{\otimes 2})\nabla]u + \frac{\lambda}{\epsilon}u = -if.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 4.3.1. La norme définie sur $D(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon}) = H^2(\mathbb{R}^n)$ par $\|(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ est donc équivalente à la norme usuelle de H^2 ; cela est utile pour la démonstration de la régularité (voir plus loin).

3. Le théorème de Hille-Phillips dit alors que le problème

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + (\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})u &= 0 \\ u|_{t=0} &= A^{in} \end{aligned}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^n))$. De plus, u vérifie $\|u(t)\|_{L^2} \leq \|A^{in}\|_{L^2}$ ainsi que l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{L^2} = \|(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})u(t)\|_{L^2} \leq \|(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t}, \quad (4.3.6)$$

ce qui, avec l'inégalité (4.3.3) du théorème 4.3.1 prise en $m = 0$, implique l'inégalité 2 du théorème. Il suffit alors d'écrire $A_\epsilon(t) = u(t)e^{i\frac{\lambda}{\epsilon}t}$.

◇

4.3.2 Régularité

Théorème 4.3.3 *Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, on suppose de plus que $A^{in} \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ pour un $m \in \mathbb{N}$, ϕ , N et $\nu_1 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note toujours $N(\epsilon x) \geq N_0 > 0$ et $\nu_1 \geq \nu^0 \geq 0$.*

Alors la solution A_ϵ du problème (4.3.4) (4.3.5) est dans $\mathcal{C}^{m-j}(\mathbb{R}_+; H^{2j})$ pour tout $0 \leq j \leq m$ et vérifie les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k A_\epsilon\|_{L^2}(t) \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C \sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k A^{in}\|_{L^2}, \quad (4.3.7)$$

et pour $j \leq m$:

$$\epsilon^j \sum_{k=0}^{2m-2j} \epsilon^k \|D^k \partial_t^j A_\epsilon\|_{L^2}(t) \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C \sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k A^{in}\|_{L^2}. \quad (4.3.8)$$

Preuve.

La régularité de A_ϵ découle du fait que

$$H^{2m} = D((\mathcal{A}\mathcal{S} + i\frac{\lambda}{\epsilon})^m).$$

(cf. [11])

On démontre les inégalités recherchées non pas pour A_ϵ mais pour u solution du problème

$$\frac{du}{dt} + (\mathcal{A}\mathcal{S} + i\frac{\lambda}{\epsilon})u = 0, \quad (4.3.9)$$

$$u|_{t=0} = A^{in}, \quad (4.3.10)$$

avec $\lambda > 0$ comme dans le théorème 4.3.1. Il est immédiat que si les inégalités sont vérifiées par u elles le sont également par $A_\epsilon = ue^{i\frac{\lambda}{\epsilon}t}$.

La démonstration se fait par récurrence sur m .

1. $m = 1$: cela correspond au théorème 4.3.2. La relation (4.3.6) montre que $\|\frac{du}{dt}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C(\phi) \left(\frac{1}{\epsilon} \|A^{in}\|_{L^2} + \|\nabla A^{in}\|_{L^2} + \epsilon \|\nabla A^{in}\|_{L^2} \right)$.
2. Ordre $m \geq 2$: on fait l'hypothèse de récurrence que le théorème et les inégalités sont vérifiées pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq m-1$.

Comme $A^{in} \in H^{2m}(\mathbb{R}^n) \subset H^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^{m-j-1}(\mathbb{R}_+; H^{2j})$ pour tout $0 \leq j \leq m-1$ du problème (4.3.9) (4.3.10). Soit

$v = \frac{du}{dt} \in \mathcal{C}^{m-j-2}(\mathbb{R}_+; H^{2j}(\mathbb{R}^n))$. En dérivant l'équation (4.3.9), il apparaît que v est solution du problème :

$$\frac{dv}{dt} + (\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})v = 0, \quad (4.3.11)$$

$$v|_{t=0} = -(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})(A^{in}) \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (4.3.12)$$

Comme $(\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon})(A^{in}) \in H^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$, par hypothèse de récurrence

$$v \in \mathcal{C}^{m-j-1}(\mathbb{R}_+; H^{2j}) \quad \forall 0 \leq j \leq m-1,$$

donc $u \in \mathcal{C}^{m-j}(\mathbb{R}_+; H^{2j})$ pour tout $1 \leq j \leq m$, et on a les inégalités suivantes pour $j \geq 1$:

$$\epsilon^{j-1} \sum_{k=0}^{2m-2j} \epsilon^k \|D^k \partial_t^j u\|_{L^2}(t) \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C \sum_{k=0}^{2m-2} \epsilon^k \|D^k (\mathcal{AS} + i\frac{\lambda}{\epsilon}) A^{in}\|_{L^2}.$$

On voit immédiatement que le second membre est inférieur ou égal à :

$$\leq C' e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k A^{in}\|_{L^2}.$$

Cela nous donne la relation 4.3.8 pour $j \geq 1$. D'autre part, on a déjà par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{2m-2} \epsilon^k \|D^k u\|_{L^2}(t) \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C \sum_{k=0}^{2m-2} \epsilon^k \|D^k A^{in}\|_{L^2}.$$

Il ne reste donc plus qu'à estimer $\epsilon^{2m-1} \|D^{2m-1} u\|_{L^2} + \epsilon^{2m} \|D^{2m} u\|_{L^2}$. Utilisons l'inégalité (4.3.3) avec $f = \mathcal{AS}u + i\frac{\lambda}{\epsilon}u = -\partial_t u \in H^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\epsilon^{2m-1} (\epsilon \|D^{2m} u\|_{L^2} + \|D^{2m-1} u\|_{L^2}) \leq \epsilon^{2m-1} C \|\partial_t u\|_{H^{2m-2}},$$

et la relation 4.3.8 pour $j = 1$:

$$\sum_{k=0}^{2m-2} \epsilon^k \|D^k \partial_t u\|_{L^2}(t) \leq \frac{e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t}}{\epsilon} C \sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k A^{in}\|_{L^2}$$

nous donne l'estimation (4.3.7), qui est aussi égale à l'estimation (4.3.8) pour $j = 0$. $\diamond$

Pour l'estimation d'énergie, nous aurons besoin d'une estimation en $O_\epsilon(1)$ de $\|A_\epsilon\|_{H^4(\mathbb{R}^n)}$: le théorème précédent de régularité ne peut donc être utilisé. Sous des hypothèses plus contraignantes en temps, on montre le résultat suivant.

Théorème 4.3.4 *Sous les hypothèses du théorème 4.3.3, avec $A^{in} \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, la solution A_ϵ du système (4.3.4) (4.3.5) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|A_\epsilon\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}(t) \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} \left(\|A^{in}\|_{H^{2[\frac{m+1}{2}]}} + \text{Max}(1, t^m) C(\phi, N_0) \|A^{in}\|_{H^{2m}(\mathbb{R}^n)} \right),$$

où le crochet $[l]$ désigne la partie entière d'un nombre réel.

Preuve. L'estimation d'énergie du théorème 4.3.2 a déjà montré que :

$$\|A_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t},$$

qui est l'inégalité recherchée pour $m = 0$.

Soit $B = \partial_{x_i} A_\epsilon$ une dérivée partielle de A_ϵ dans une direction quelconque. La dérivée dans la direction x_i du problème (4.3.4) (4.3.5) montre que B est solution du problème suivant :

$$\partial_t B + \mathcal{A}SB = -\epsilon C(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon - \epsilon^2 C'(\epsilon x) A_\epsilon - i \frac{\epsilon^2}{2} C''(\epsilon x) \nabla^2 A_\epsilon \quad (4.3.13)$$

$$B|_{t=0} = \partial_{x_i} A^{in} \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (4.3.14)$$

les terme C , C' , $C''(\epsilon x)$ représentent des dérivées de $\nabla \phi$. Multipliant par $\bar{B}$, intégrant et prenant la partie imaginaire comme précédemment :

$$\partial_t \|B\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu^0 \|B\|_{L^2}^2 \leq C(\phi) \left(\epsilon \|A_\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^2 \|A_\epsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \right) \|B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On utilise alors le résultat de régularité (4.3.7) pour $m = 1$, qui implique :

$$\partial_t \|B\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu^0 \|B\|_{L^2}^2 \leq e^{-\frac{\epsilon\nu^0}{2}t} C(\phi) \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \|B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc

$$2\partial_t (\|B\|_{L^2} e^{\frac{\epsilon\nu^0}{2}t}) \leq C(\phi) \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On intègre de 0 à t :

$$\|B(t)\|_{L^2} e^{\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t} - \|\partial_{x_i} A^{in}\|_{L^2} \leq C(\phi) \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} t.$$

Finalement, en sommant dans toutes les directions :

$$\|\nabla A_\epsilon\|_{L^2}(t) \leq \left(\|\nabla A^{in}\|_{L^2} + C(\phi) \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} t \right) e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t}.$$

Par récurrence sur m , il est immédiat qu'une dérivée d'ordre m de A_ϵ vérifie un problème du type :

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial^{(m)} A_\epsilon) + \mathcal{A} S \partial^{(m)} A_\epsilon &= \epsilon C(\epsilon x) D^m A_\epsilon + \epsilon^2 C'(\epsilon x) D^{m+1} A_\epsilon + \epsilon^2 \sum_{k=0}^m C_k(\epsilon x) D^k A_\epsilon \\ \partial^{(m)} A_{\epsilon|t=0} &= \partial^{(m)} A^{in} \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

En multipliant par $\partial^{(m)} A_\epsilon$ et en prenant la partie réelle :

$$\partial_t \|\partial^{(m)} A_\epsilon\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu^0 \|\partial^{(m)} A_\epsilon\|_{L^2}^2 \leq C(\phi) \left(\epsilon \|A_\epsilon\|_{H^m} + \epsilon^2 \|A_\epsilon\|_{H^{m+1}} \right) \|\partial^{(m)} A_\epsilon\|_{L^2}.$$

Donc comme pour B , et en sommant dans toutes les directions :

$$\|D^m A_\epsilon\|(t)_{L^2} \leq e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t} \left(\|D^m A^{in}\|_{L^2} + C(\phi) \int_0^t ds e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} s} (\epsilon \|A_\epsilon\|_{H^m}(s) + \epsilon^2 \|A_\epsilon\|_{H^{m+1}}(s)) \right).$$

On a donc les deux inégalités suivantes, valables à tout ordre m .

1.

$$\|A_\epsilon\|(t)_{H^m} \leq e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t} \left(\|A^{in}\|_{H^m} + C(\phi) \int_0^t ds e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} s} (\epsilon \|A_\epsilon\|_{H^m} + \epsilon^2 \|A_\epsilon\|_{H^{m+1}}) \right).$$

2. D'après l'inégalité (4.3.7) :

$$\epsilon^m \|A_\epsilon\|(t)_{H^m} \leq C \|A^{in}\|_{H^{2[\frac{m+1}{2}]}} e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t}$$

A partir de ces deux inégalités, si $A^{in} \in H^{2m}$, on montre par récurrence sur k que :

$$\forall m \geq k, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \epsilon^{m-k} \|A_\epsilon\|(t)_{H^m} \leq e^{-\frac{\nu^0 \epsilon}{2} t} C \sum_{i=0}^k t^i \|A^{in}\|_{H^{2[\frac{m+i+1}{2}]}.$$

Pour $k = m$, cela induit le résultat recherché. $\diamond$

4.3.3 Résultat d'approximation

Théorème 4.3.5 *Soit $\tilde{N}$ régulière telle que $0 < N_0 < \tilde{N}(\epsilon x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(\epsilon x)$ solution régulière univaluée de l'équation eikonale (2.2.3). Soit $f_1^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème (2.1.1) (2.3.1) (2.3.2) avec $f^{in} = \epsilon f_1^{in}$. Soit Ψ_ϵ définie par :*

$$\Psi_\epsilon = A_\epsilon(t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.,$$

où $A_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ est l'unique solution du problème (4.3.4) (4.3.5) du théorème 4.3.2. Pour $T > 0$ fixé, l'inégalité suivante est vérifiée, indépendamment de ν_1 :

$$\begin{aligned} & \|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} + \epsilon \|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} + \epsilon \|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \\ & C(N, \phi) \left(\epsilon^2 \|f_1^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^2 \text{Max}(1, T^5) \|A^{in}\|_{H^8(\mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Preuve. On utilise l'estimation d'énergie (2.1.7) du théorème 2.1.3 : il ne reste plus qu'à évaluer $R_\epsilon = \partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)|_{t=0}$ et S_ϵ pour $\tilde{\Psi}_\epsilon = \Psi - \Psi_\epsilon$. Notons que d'après la proposition 2.3.1 on peut écrire $\Psi = A(t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$ avec $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^4(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du système (2.2.4) (2.3.3) (2.3.4).

1. Estimation de R_ϵ

La condition initiale s'écrit :

$$\partial_t \Psi|_{t=0} = (f^{in} - (\nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla + \frac{i}{\epsilon}) A^{in}) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C.$$

D'après sa définition, $\partial_t \Psi_\epsilon$ s'exprime en fonction de A_ϵ :

$$\partial_t \Psi_\epsilon|_{t=0} = (\partial_t A_\epsilon - \frac{i}{\epsilon} A^{in}) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C.$$

A l'aide de l'équation (4.3.4), on peut exprimer $\partial_t A_\epsilon|_{t=0}$ en fonction de A^{in} , et finalement :

$$R_\epsilon = \epsilon \left(f_1^{in} + \frac{1}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A^{in} - \frac{i}{2} \nabla \cdot [(I - \nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2}) \nabla A^{in}] \right) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)}{\epsilon^2}} + C.C.$$

Donc $\|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|f_1^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon C_1 \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}.$

2. Calcul de S_ϵ

$$\epsilon S_\epsilon = \epsilon \left\{ 2i(\partial_t + \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla) A_\epsilon + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_\epsilon - \epsilon(\partial_{tt} - \Delta + \epsilon \nu_1 \partial_t) A_\epsilon \right\} e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

Comme A_ϵ vérifie l'équation (4.3.4), cela entraîne :

$$S_\epsilon = -\epsilon \nabla \cdot [(I - \nabla \phi^{\otimes 2}(\epsilon x)) \nabla A_\epsilon] - \epsilon(\partial_{tt} - \Delta + \epsilon \nu_1 \partial_t) A_\epsilon \Big\} e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

Estimons ce terme. La dérivée de l'équation (4.3.4) permet d'écrire :

$$\partial_{tt} A_\epsilon = \nabla \cdot [\nabla \phi(\epsilon x)^{\otimes 2} \nabla A_\epsilon] + \epsilon P(\nabla) A_\epsilon,$$

où P est un polynôme différentiel d'ordre 4, dont les coefficients s'expriment à l'aide de $\nabla \phi(\epsilon x)$.

Cela entraîne :

$$|S_\epsilon| = \epsilon^2 |P_4(\nabla) A_\epsilon|$$

L'inégalité d'énergie du théorème 4.3.4 pour $m = 4$ permet de conclure. $\diamond$

Chapitre 5

Cas quasi-statique : Advection-Schrödinger spatial

5.1 Introduction

Comme dans le chapitre 4, on suppose que l'indice de réfraction adimensionné N varie lentement en x : $N = \tilde{N}(\epsilon x)$. On remplace $\phi(x)$ par $\frac{1}{\epsilon}\phi(\epsilon x)$, où $|\nabla\phi(y)|^2 = 1 - \tilde{N}(y)$, et on écrit $\vec{k} = \nabla\phi(\epsilon x)$.

On cherche à imposer une condition initiale qui entraîne que la solution de l'équation d'advection-Schrödinger (2.2.4) varie lentement en temps. Or, si a contrario on part du résultat recherché en supposant que l'amplitude A de l'onde ne dépend pas du temps : l'équation (2.2.4) vérifiée par l'amplitude se réduirait à

$$2i \vec{k} \cdot \nabla A + \epsilon \Delta A + i\epsilon(\nu_1 + \Delta_{yy}\phi(\epsilon x))A = 0, \quad (5.1.1)$$

et on voit qu'alors on aurait $\vec{k} \cdot \nabla A = O(\epsilon)$. Dans la géométrie des rayons, l'équation précédente peut se simplifier sous la forme :

$$2i \vec{k} \cdot \nabla A + \epsilon \Delta_{\perp} A + i\epsilon(\nu_1 + \Delta_{yy}\phi(\epsilon x))A = 0 \mod O(\epsilon^2),$$

où $\Delta_{\perp}$ désigne le laplacien dans l'hyperplan orthogonal à la direction des rayons. Ce chapitre montre comment on peut se rapprocher d'une équation de ce type, sans renoncer à la variation temporelle (indispensable quand on étudie le problème sur

l'espace entier), et à quelle condition ce peut être une estimation convenable pour le problème initial. On impose donc dans tout ce chapitre l'hypothèse suivante sur $\Psi^{in} = A^{in} e^{i \frac{\phi(\epsilon x) \cdot x}{\epsilon}}$:

$$\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = O(\epsilon). \quad (5.1.2)$$

Nous verrons que cette propriété entraîne que pour tout temps on a

$$\|\vec{k} \cdot \nabla A\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}(t) = O(\epsilon).$$

Cela permet de simplifier l'opérateur du second ordre intervenant dans (4.3.4) et d'avoir une approximation sur des temps plus longs que dans les chapitres précédents. De plus, cela entraîne $\partial_t A = O(\epsilon)$. Remplaçons donc l'enveloppe A précédente (parties 3 et 4) par une enveloppe variant lentement en temps, qui s'écrit $A(t, x) = \tilde{A}(\epsilon t, x)$. Cela conduit à l'équation suivante, qui remplace l'équation (2.2.4) :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A} + \frac{\epsilon}{2} (\Delta \phi)(\epsilon x) \tilde{A} \right] + i \epsilon \nu_1 \tilde{A} = \epsilon (\epsilon^2 \partial_{TT} \tilde{A} - \Delta \tilde{A} + \epsilon^2 \nu_1 \partial_T \tilde{A}). \quad (5.1.3)$$

Ecrivons $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \epsilon \tilde{A}_1 + \dots$. Les équations suivantes sont vérifiées :

$$2i \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_0 = 0,$$

$$2i \left[\partial_T \tilde{A}_0 + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_1 \right] + i (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_0 = -\Delta \tilde{A}_0.$$

L'équation satisfaite par $\tilde{A}_0$ permet de remplacer $\Delta \tilde{A}_0$ par $\Delta_{\perp} \tilde{A}_0$, c'est-à-dire :

$$\Delta_{\perp} = \nabla \cdot \left[\left(I - \frac{\vec{k} \otimes \vec{k}}{|\vec{k}|^2} \right) \nabla \right].$$

Remarque : Comme $\vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_0 = 0$, la différence entre $\Delta_{\perp} \tilde{A}_{\epsilon}$ et $\Delta^{g_{\epsilon}} \tilde{A}_{\epsilon}$ (opérateur introduit au chapitre précédent) sera seulement un $O(\epsilon)$.

Notant $\tilde{A}_{\epsilon} = \tilde{A}_0 + \epsilon \tilde{A}_1$, cela conduit à l'équation suivante satisfaite par $\tilde{A}_{\epsilon}$ à un $O(\epsilon)$ près :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_{\epsilon} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_{\epsilon} \right] + \epsilon \Delta_{\perp} \tilde{A}_{\epsilon} + i \epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_{\epsilon} = 0. \quad (5.1.4)$$

Les parties suivantes montrent sous quelles conditions initiales cette équation peut effectivement être une bonne approximation de l'équation de Klein-Gordon.

5.2 Rayons droits sur tout l'espace

On suppose dans cette partie que N est constant. On se réfère aux résultats généraux obtenus dans le chapitre 3 mais nous cherchons une solution lentement variable en temps, qui s'écrira donc $A(t, x) = \tilde{A}(\epsilon t, x)$. Cela conduit à l'équation suivante, qui remplace l'équation (3.1.2) :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A} \right] = \epsilon (\epsilon^2 \partial_{TT} \tilde{A} - \Delta \tilde{A} - i\nu_1 \tilde{A} + \epsilon^2 \nu_1 \partial_T \tilde{A}). \quad (5.2.1)$$

Les conditions en $T = 0$ deviennent :

$$\tilde{A}|_{T=0} = A^{in}, \quad \epsilon \partial_T \tilde{A} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A} = f^{in}.$$

Ce n'est jusqu'ici qu'une réécriture équivalente du problème de Klein-Gordon (3.1.3) (3.1.6) (3.1.7). L'équation (5.1.4) satisfaite par $\tilde{A}_\epsilon$ devient :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon \nu_1 \tilde{A}_\epsilon = 0. \quad (5.2.2)$$

Notation : pour un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, on note $y_{//} = \frac{\vec{k} \cdot y}{|\vec{k}|^2} \vec{k}$ et $y_\perp = y - y_{//}$.

5.2.1 Existence et unicité

On note $\hat{p}(\xi)$ la transformée de Fourier en x d'une distribution tempérée p .

Théorème 5.2.1 *Soit $\epsilon > 0$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$, $|\vec{k}| < 1$, et $\nu_1 > 0$ tels que la condition (3.2.4) soit vérifiée :*

$$\frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} < 1 - |\vec{k}|^2.$$

Soit $A^{in} \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Il existe une unique $\tilde{A}_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ solution du problème suivant :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon \nu_1 \tilde{A}_\epsilon = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\tilde{A}_\epsilon|_{T=0} = A^{in}. \quad (5.2.4)$$

De plus, $\tilde{A}_\epsilon$ s'exprime de façon exacte en fonction de la transformée de Fourier en x de A^{in} , que l'on note $\hat{A}^{in}(\xi)$:

$$\tilde{A}_\epsilon(T, x) = \mathcal{F}_x^{-1} \left(\hat{A}^{in} e^{-\frac{\nu_1}{2}T - \frac{i}{2}(|\xi_\perp|^2 + \frac{\vec{k} \cdot \xi}{\epsilon})T} \right).$$

Preuve. En transformée de Fourier en x , l'équation vérifiée par $\tilde{A}_\epsilon$ s'écrit :

$$\partial_T \mathcal{F}_x(\tilde{A}_\epsilon) = \left(-\frac{\nu_1}{2} + \frac{|\xi_\perp|^2}{2i} + \frac{\vec{k} \cdot \xi}{2i\epsilon} \right) \mathcal{F}_x(\tilde{A}_\epsilon).$$

Cela entraîne immédiatement le résultat recherché. $\diamond$

5.2.2 Résultat d'approximation

Le théorème suivant montre dans quel cas cette équation est une bonne approximation du problème initial.

Soient $\epsilon > 0$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$, $|\vec{k}| < 1$, et $\nu_1 > 0$. La densité adimensionnée N est supposée constante. On suppose également que la condition (3.2.4) est vérifiée :

$$\lambda = 1 - |\vec{k}|^2 - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} > 0.$$

Théorème 5.2.2 *Supposons que $A^{in} \in H^3(\mathbb{R}^n)$ vérifie l'hypothèse (5.1.2) :*

$$\| \vec{k} \cdot \nabla A^{in} \|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = O(\epsilon).$$

Soit $\tilde{A}_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^3(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème associé (5.2.3) (5.2.4).

Soit Ψ la solution du problème originel de Klein-Gordon (3.1.1) (3.1.4) (3.1.5) avec $f^{in} = \epsilon f_1^{in}$, $f_1^{in} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'estimation suivante est vérifiée, pour $\Psi_\epsilon = \tilde{A}_\epsilon(\epsilon t, x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C$:

$$\| \Psi - \Psi_\epsilon \|_{L^2}(t) \leq \epsilon^3 C t \left(\| f_1^{in} \|_{L^2} + \| A^{in} \|_{H^3} + \frac{\| (\vec{k} \cdot \nabla) A^{in} \|_{H^1}}{\epsilon} \right).$$

Remarque :

La solution Ψ s'écrit aussi de la façon suivante :

$$\Psi = \tilde{A}(\epsilon t, x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C,$$

où $\tilde{A}$ est solution du problème :

$$\begin{aligned} 2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A} \right] &= \epsilon (\epsilon^2 \partial_{TT} \tilde{A} - \Delta \tilde{A} - i\nu_1 \tilde{A} + \epsilon^2 \nu_1 \partial_T \tilde{A}), \\ \tilde{A}|_{T=0} &= A^{in}, \\ \epsilon \partial_T \tilde{A} + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A} &= \epsilon f_1^{in}. \end{aligned}$$

Preuve. Cette preuve étant bâtie sur le même schéma que la preuve du théorème 3.3.1, elle sera décrite plus brièvement.

1. Ecriture exacte de $\tilde{A}$

Par transformée de Fourier, on montre que la solution du problème exact $\tilde{A}$ s'écrit :

$$\mathcal{F}_x(\tilde{A}(T, \cdot))(\xi) = \tilde{A}_+ e^{r_+(\xi)T} + \tilde{A}_- e^{r_-(\xi)T},$$

avec $r_{\pm} = \frac{i}{\epsilon^2} - \frac{\nu_1}{2} \pm \frac{i}{\epsilon^2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} + 2\epsilon \vec{k} \cdot \xi + \epsilon^2 |\xi|^2}$. En notant

$$\partial_T \tilde{A}|_{T=0} = g^{in} = f_1^{in} - \frac{\vec{k} \cdot \nabla A^{in}}{\epsilon}.$$

on a :

$$\tilde{A}_{\pm} = \pm \frac{\epsilon \hat{g}^{in} - r_{\mp} \hat{A}^{in}}{r_+ - r_-}.$$

Nous notons $\delta = -1 + \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} - 2\epsilon \vec{k} \cdot \xi - \epsilon^2 |\xi|^2$, et utilisons les estimations de la démonstration 3.2.1 concernant δ .

2. Estimation de $\Psi - \Psi_L$, où Ψ_L est une fonction intermédiaire.

D'après l'expression ci-dessus, on a :

$$\tilde{A}_+ = \frac{\epsilon^3 \hat{g}^{in} - \hat{A}^{in} \left(-\frac{\epsilon^2 \nu_1}{2} + i(1 - \sqrt{-\delta}) \right)}{2i\sqrt{-\delta}}.$$

Comme $\sqrt{-\delta} \geq \sqrt{\lambda}$, en notant que

$$1 - \sqrt{-\delta} = \frac{-2\epsilon \vec{k} \cdot \xi - \epsilon^2 |\xi|^2 + \frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4}}{1 + \sqrt{-\delta}},$$

il vient :

$$|\tilde{A}_+| \leq C(\lambda) \left(\epsilon^2 |\hat{f}_1^{in}| + \epsilon^2 (1 + |\xi|^2) |\hat{A}^{in}| + \epsilon |\vec{k} \cdot \xi \hat{A}^{in}| \right).$$

Comme $\tilde{A}_+ + \tilde{A}_- = \hat{A}^{in}$, on a la même estimation pour $|\tilde{A}_- - \hat{A}^{in}|$. Finalement :

$$\|\tilde{A} - \tilde{A}_L(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon^2 C e^{-\frac{\nu_1}{2}T} \left(\|f_1^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\epsilon} \right),$$

où $\tilde{A}_L$ est la fonction intermédiaire définie par :

$$\mathcal{F}_x(\tilde{A}_L) = \hat{A}^{in} e^{r_-(\xi)T}.$$

En particulier, $\tilde{A}_L$ est solution de la même équation que $\tilde{A}$. L'estimation sur $\tilde{A} - \tilde{A}_L$ entraîne celle sur les fonctions Ψ et Ψ_L correspondantes.

3. Estimation de la différence entre Ψ_L et Ψ_ϵ .

Soit $B = \tilde{A}_\epsilon - \tilde{A}_L$. Notant $\hat{B} = \mathcal{F}_x(B)$, cette fonction est solution du problème suivant :

$$2i \left[\epsilon \partial_T \hat{B} + i \vec{k} \cdot \xi \hat{B} \right] - \epsilon |\xi_\perp|^2 \hat{B} + i \epsilon \nu_1 \hat{B} = 2i F(\xi) \hat{A}^{in},$$

$$\hat{B}|_{T=0} = 0,$$

avec $2i F(\xi) = -\epsilon^3 r_-^2 - \epsilon \frac{|\vec{k} \cdot \xi|^2}{|\vec{k}|^2} - \epsilon^3 \nu_1 r_-$. Comme

$$r_- = -\frac{\nu_1}{2} + \frac{i}{1 + \sqrt{-\delta}} \left(-2 \frac{\vec{k} \cdot \xi}{\epsilon} - |\xi|^2 + \frac{\epsilon^2 \nu_1^2}{4} \right)$$

et qu'on sait par l'étude faite dans le lemme 3.2.1 que $\frac{\epsilon \xi}{1 + \sqrt{-\delta}}$ est bornée indépendamment de ϵ et ξ , on a :

$$|r_-| \leq C(1 + \frac{1}{\epsilon} |\xi|) \quad \text{et} \quad |r_-| \leq C(1 + \frac{1}{\epsilon} |\vec{k} \cdot \xi| + |\xi|^2).$$

Donc, en multipliant ces deux estimations :

$$|r_-|^2 \leq C \left(\frac{1}{\epsilon} (1 + |\xi|^3) + \frac{1}{\epsilon^2} |\xi| |\vec{k} \cdot \xi| \right).$$

Finalement, on a :

$$|2F(\xi) \hat{A}^{in}| \leq C \epsilon^2 \left(1 + |\xi|^3 + \frac{|\xi| |\vec{k} \cdot \xi|}{\epsilon} \right) |\hat{A}^{in}|.$$

Or $\hat{B} = \mathcal{F}_x(\tilde{A}_\epsilon - \tilde{A}_L)$ s'écrit :

$$\hat{B}(T, \xi) = \frac{2\epsilon F(\xi) \mathcal{F}_x(A^{in}) (1 - e^{-\frac{\nu_1}{2}T + \frac{i\vec{k} \cdot \xi}{\epsilon}T - \frac{i}{2}|\xi_\perp|^2 T})}{\epsilon\nu_1 - 2i\vec{k} \cdot \xi + i\epsilon|\xi_\perp|^2},$$

Donc

$$\|\partial_T B\|_{L^2} \leq \epsilon^2 C (\|A^{in}\|_{H^3} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^1}}{\epsilon}).$$

En intégrant en $T = \epsilon t$, on obtient :

$$\|\Psi_l - \Psi_\epsilon\| \leq C\epsilon^3 t (\|A^{in}\|_{H^3} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^1}}{\epsilon}).$$

◇

Remarque : l'hypothèse sur la variation faible de A^{in} dans la direction des rayons fait gagner un ordre en ϵ dans l'approximation. Cela est conforme au développement asymptotique à l'ordre 2, qui conduit à l'équation (4.1.8) : on voit que le terme en $O(\epsilon^2)$ du développement est en $\nabla\phi \cdot \nabla A$, donc négligeable.

5.3 Rayons faiblement courbés

Contrairement à l'équation du cas général, pour que le problème soit bien posé il est nécessaire que $\inf_{\mathbb{R}^n} \nu_1 = \nu^0 > 0$. Pour plus de simplicité, on suppose ici $\nu_1 > 0$ constant.

Comme précédemment, soit ϕ solution univaluée de l'équation eikonale $|\nabla\phi(y)|^2 = 1 - \tilde{N}(y)$ sur tout l'espace. On note toujours $\vec{k} = \nabla\phi(\epsilon x)$.

5.3.1 Existence et unicité sur tout l'espace

Théorème 5.3.1 *Soit $\nu_1 > 0$ constant. Soit $A^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe une unique solution $\tilde{A}_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ au problème suivant :*

$$2i \left[\epsilon \partial_T \tilde{A}_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla \tilde{A}_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \quad (5.3.1)$$

$$A_\epsilon|_{T=0} = A^{in} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3.2)$$

De plus, $\|\tilde{A}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|A^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{\nu_1}{2}T}$.

Preuve.

1. Estimation d'énergie.

Multiplions l'équation (5.3.1) par $\tilde{\tilde{A}}_\epsilon$ et prenons la partie imaginaire :

$$\epsilon \partial_T |\tilde{A}_\epsilon|^2 + \vec{k} \cdot \nabla |\tilde{A}_\epsilon|^2 + \epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}_\epsilon + \frac{\epsilon}{2i} (\tilde{\tilde{A}}_\epsilon \Delta_\perp \tilde{A}_\epsilon - \tilde{A}_\epsilon \Delta_\perp \tilde{\tilde{A}}_\epsilon) = 0.$$

Comme $\nabla \cdot (\vec{k} |\tilde{A}_\epsilon|^2) = \vec{k} \cdot \nabla |\tilde{A}_\epsilon|^2 + \epsilon \Delta \phi(\epsilon x) |\tilde{A}_\epsilon|^2$, en intégrant sur l'espace entier, il vient :

$$\frac{d}{dT} \|\tilde{A}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \nu_1 \|\tilde{A}_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 0,$$

ce qui démontre l'inégalité du théorème, et du même coup l'unicité dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$.

2. L'existence provient du théorème de Hille-Phillips. Soit l'opérateur

$$\mathcal{AS}_\perp = \frac{1}{\epsilon} \vec{k} \cdot \nabla - \frac{i}{2} \Delta_\perp + \frac{1}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1),$$

défini sur le domaine

$$D(\mathcal{AS}_\perp) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); 2i \vec{k} \cdot \nabla u + \epsilon \Delta_\perp u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \subset H = L^2(\mathbb{R}^n).$$

Montrons que $\mathcal{AS}_\perp$ est maximal monotone sur H .

- (a) $\mathcal{AS}_\perp$ est monotone : la démonstration est en tout point semblable à celle de l'opérateur $\mathcal{KG}$.
- (b) $\mathcal{AS}_\perp$ est maximal monotone : soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous cherchons une solution $u \in D(\mathcal{AS}_\perp)$ à l'équation :

$$\frac{1}{\epsilon} \vec{k} \cdot \nabla u - \frac{i}{2} \Delta_\perp u + \frac{1}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) u = f.$$

Soit $\eta > 0$, considérons la régularisée elliptique suivante de l'équation ci-dessus :

$$\frac{1}{\epsilon} \vec{k} \cdot \nabla u_\eta - \frac{i}{2} (\Delta_\perp + \eta \Delta_{//}) u_\eta + \frac{1}{2} (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) u_\eta = f. \quad (5.3.3)$$

On peut lui appliquer un théorème de caractérisation des opérateurs auto-adjoints (cf. [47]). En effet, l'opérateur :

$$T_\eta u_\eta = -\frac{i}{\epsilon} \nabla \phi(\epsilon x) \cdot \nabla u_\eta - i \frac{\Delta \phi(\epsilon x)}{2} u_\eta - \frac{1}{2} (\Delta_\perp + \eta \Delta_{//}) u_\eta$$

est un opérateur symétrique fermé sur son domaine, il est donc auto-adjoint ssi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ appartenant à l'ensemble résolvant de T , i.e. tel que $\mu I - T$ soit inversible d'inverse borné. Or, par exemple pour $\mu = \frac{2}{\eta}$, l'opérateur $T_\eta + \mu I$ est coercif, donc on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, et $-\mu \in \rho(T_\eta)$. Cela implique que $\rho(T_\eta) = \mathbb{C}$, en particulier $T_\eta - i\nu_1$ est inversible sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution $u_\eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (5.3.3).

En multipliant l'équation (5.3.3) par $\bar{u}_\eta$ (plus précisément : par une suite régularisante de $\bar{u}_\eta$) et en prenant la partie réelle, il vient :

$$\nu_1 \|u_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \operatorname{Re}(\langle f, u_\eta \rangle_{L^2}),$$

donc $\|u_\eta\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\nu_1}$. Cela permet d'extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En multipliant l'équation par une fonction test $\phi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, on voit que

$$\mathcal{AS}_\perp u = f$$

dans $H^{-2}(\mathbb{R}^n)$. Comme $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cela implique

$$2i \vec{k} \cdot \nabla u + \epsilon \Delta_\perp u \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

donc $u \in D(\mathcal{AS}_\perp)$ est bien solution.

$\mathcal{AS}_\perp$ est donc le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction, et cela induit le théorème.

◇

5.3.2 Résultat d'approximation

Théorème 5.3.2 *Soit $\tilde{A}_\epsilon$ solution du problème (5.3.1) (5.3.2), sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. On suppose de plus que $N \geq N_0 > 0$ et que $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$ vérifie l'hypothèse (5.1.2), i.e. :*

$$\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = O(\epsilon).$$

Soit $f_1^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et Ψ la solution du problème de Klein-Gordon (2.1.1) (2.1.2) (2.1.3). Soit

$$\Psi(t, x) = A(\epsilon t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}$$

et

$$\Psi_\epsilon(t, x) = \tilde{A}_\epsilon(\epsilon t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}.$$

L'estimation suivante est vérifiée :

$$\|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon^2 \|f_1^{in}\|_{L^2} + \epsilon^2 \text{Max}(1, T_0^5) \left(\|A^{in}\|_{H^8(\mathbb{R}^n)} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2}}{\epsilon} \right)$$

Preuve.

Cette estimation a déjà été prouvée entre A_ϵ et A par le théorème 4.3.5, où A_ϵ désigne la solution du problème (4.3.4) (4.3.5) (cf. théorème 4.3.2). On montre donc l'inégalité ci-dessus entre A_ϵ et $\tilde{A}_\epsilon$: l'estimation globale s'en déduit.

Comme on n'a pas montré d'estimation dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ de la solution $\tilde{A}_\epsilon$ du problème approché, il est plus simple d'utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.3.1 Soit $Q_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^n))$ et B_ϵ solution du problème suivant :

$$2i \left[\partial_t B_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla B_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp B_\epsilon + i\epsilon(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) B_\epsilon = Q_\epsilon \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \quad (5.3.4)$$

$$B_\epsilon|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3.5)$$

Alors

$$\|B_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|Q_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^n))} \frac{t}{2}.$$

Preuve. En multipliant l'équation (5.3.4) par $\bar{B}_\epsilon$, en intégrant sur $\mathbb{R}^n$ et en prenant la partie imaginaire, il vient :

$$\frac{d}{dt} \|B_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu_1 \|B_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|Q_\epsilon\|_{L^2} \|B_\epsilon\|_{L^2}.$$

Divisant par $\|B_\epsilon\|$ (supposé non nul), cela entraîne :

$$2 \frac{d}{dt} (\|B_\epsilon\| e^{\frac{\epsilon \nu_1}{2} t}) \leq \|Q_\epsilon\| e^{\frac{\epsilon \nu_1}{2} t},$$

et en intégrant on obtient l'inégalité recherchée. $\diamond$

La fonction $B_\epsilon = A_\epsilon - \tilde{A}_\epsilon$ vérifie les hypothèses de ce lemme avec

$$Q_\epsilon = 2i \left[\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon \right] + \epsilon \Delta_\perp A_\epsilon + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon.$$

Il ne reste donc qu'à évaluer cette quantité. Comme A_ϵ vérifie l'équation (4.3.4), on a :

$$Q_\epsilon = \epsilon \Delta_\perp A_\epsilon - \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A_\epsilon] = \epsilon^2 P(\nabla) A_\epsilon - \epsilon \left(\frac{1}{|\vec{k}|^2} - 1 \right) (\vec{k} \cdot \nabla)^2 A_\epsilon,$$

où P est un opérateur différentiel d'ordre 1, en $O_\epsilon(1)$, qui ne dépend que de la géométrie des rayons. Donc :

$$\|Q_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}(t) \leq C(N, \phi) (\epsilon^2 \|A_\epsilon\|_{H^1}(t) + \epsilon \|\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon\|_{H^1}(t)).$$

On en déduit, en appliquant le théorème 4.3.4 vérifié par A_ϵ :

$$\|Q_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}(t) \leq C(N, \phi) (\epsilon^2 \text{Max}(1, t) \|A^{in}\|_{H^2} + \epsilon \|\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon\|_{H^1}(t)).$$

Il ne reste plus qu'à estimer le terme $\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 5.3.2 *Soit A_ϵ la solution du problème (4.3.4) (4.3.5) avec $A^{in} \in H^4(\mathbb{R}^n)$. L'estimation suivante est vérifiée pour une constante C indépendante de ϵ :*

$$\|\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}(t) \leq C \left(\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon \|A^{in}\|_{H^6(\mathbb{R}^n)} \right) \text{Max}(1, t^3) \quad (5.3.6)$$

Preuve. Comme $\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon = -\partial_t A_\epsilon + \frac{i\epsilon}{2} \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A_\epsilon] - \frac{\epsilon}{2} (\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) A_\epsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}(t) &\leq \|\partial_t A_\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}(t) + \epsilon \|A_\epsilon\|_{H^3(\mathbb{R}^n)}(t) \\ &\leq \|\partial_t A_\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}(t) + \epsilon C(N, \phi) \|A^{in}\|_{H^6(\mathbb{R}^n)}(t) \text{Max}(1, t^3). \end{aligned}$$

La dérivée $\partial_t A_\epsilon$ est solution du problème (4.3.4) (4.3.5) avec comme condition initiale :

$$B^{in} = -\vec{k} \cdot \nabla A^{in} + \frac{i\epsilon}{2} \Delta^{g_\epsilon} A^{in} - \frac{\epsilon}{2} (\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) A^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

On peut lui appliquer le théorème 4.3.4, et l'inégalité d'énergie suivante est donc vérifiée :

$$\|\partial_t A_\epsilon\|_{H^1}(t) \leq C \max(1, t) \|B^{in}\|_{H^2} \leq C \max(1, t) (\epsilon \|A^{in}\|_{H^4} + \|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2}).$$

Le lemme en découle. $\diamond$

On en déduit donc :

$$\|Q_\epsilon\|(t)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon^2 C(N, \phi) (1 + t^3) (\|A^{in}\|_{H^6(\mathbb{R}^n)} + \frac{\|\vec{k} \cdot \nabla A^{in}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}}{\epsilon}).$$

Cela achève la démonstration. L'hypothèse $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$ n'est donc pas nécessaire pour estimer la différence entre A_ϵ et $\tilde{A}_\epsilon$: il suffit que A^{in} soit dans $H^6(\mathbb{R}^n)$. Cependant, pour pouvoir utiliser le théorème 4.3.5 pour estimer la différence $A_\epsilon - A$, il est bien nécessaire d'avoir $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Chapitre 6

Etude sur le demi-espace

On se place sur le demi-espace

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Soit Γ le bord du domaine $\mathcal{D}$:

$$\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normal extérieur à Γ : $\vec{n} = (0, 0, \dots, -1)$.

On suppose que $N|_{\Gamma} = N_b$ est constant et on se donne un vecteur $\vec{k}^b$ tel que

$$|\vec{k}^b| = \sqrt{1 - N_b}.$$

$\vec{k}^b$ étant le vecteur directeur des rayons, on suppose l'onde entrante, *i.e.*

$$\vec{k}^b \cdot \vec{n} < 0,$$

soit $k_{x_1}^b > 0$.

On se place dans le cas lentement variable comme dans les chapitres précédents : $N = \tilde{N}(\epsilon x)$. **On utilise la notation** $\vec{k} = \nabla \phi(\epsilon x)$.

Les études asymptotiques de l'équation de Klein-Gordon faites aux chapitres précédents demeurent bien sûr valables ; il s'agit maintenant de compléter le problème par une condition au bord du domaine *ad hoc*, de voir ce qu'elle implique comme condition au bord pour A , et d'obtenir des résultats d'approximation qui valident le développement asymptotique dans ce nouveau cas.

Hypothèses simplificatrices

Par rapport au chapitre 4, l'intérêt du problème exposé dans ce chapitre est l'étude de la condition au bord du domaine. Pour simplifier la lecture et mettre en évidence cet aspect, les hypothèses suivantes sont donc faites.

1. La densité N est non seulement constante égale à N_b au bord **mais aussi sur un voisinage du bord**. Cette hypothèse permet de se ramener plus aisément au cas de l'espace entier, en raisonnant ainsi : sur un voisinage du bord, on se ramène à la résolution du cas droit (paragraphe 6.4.1) ; à distance du bord tous les résultats de régularité de l'étude sur l'espace entier s'appliquent.
2. Toutes les conditions initiales en $t = 0$ sont nulles. On écrit donc :

$$\Psi^{in} \equiv 0, \quad \chi^{in} \equiv 0. \quad (6.0.1)$$

La résolution lorsque χ^{in} et Ψ^{in} sont non nuls ne pose pas de difficulté supplémentaire par rapport à l'étude sur l'espace entier.

3. Les rayons sont faiblement courbés : $N = \tilde{N}(\epsilon x)$. L'équation de Klein-Gordon étudiée est toujours :

$$\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi + \tilde{N}(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0. \quad (6.0.2)$$

4. Le coefficient d'absorption $\nu_1 \geq 0$ est supposé constant. Le cas où ν_1 est constant uniquement au voisinage du bord du domaine se traite de la même façon.

6.1 Problème de Klein-Gordon

6.1.1 Condition au bord du domaine

La condition au bord est une condition de type onde entrante :

$$(\vec{k}^b \cdot \vec{n} \partial_t - \vec{n} \cdot \nabla)(\Psi - \Psi^b) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

Soit encore :

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})(\Psi - \Psi^b) = 0. \quad (6.1.1)$$

L'écriture (6.1.1) suppose connu un prolongement de la fonction Ψ^b au voisinage de Γ . En fait, il ne faut pas connaître Ψ^b mais $(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\Psi^b = f^b$ sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$.

Par la suite, on souhaite pouvoir écrire la condition (6.1.1) avec une fonction Ψ^b de la forme :

$$\Psi^b(t, x) = A^b(t, x) e^{i \frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}, \quad (6.1.2)$$

où la fonction A^b est régulière et définie sur $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$. Il n'est pas suffisant de connaître la donnée A^b sur Γ , il faut aussi se donner une fonction $g^b = (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})A^b$ définie sur $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$.

On peut alors écrire l'équation (6.1.1) sous la forme suivante :

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\Psi|_{x_1=0} = f^b = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon} A^b + g^b\right) e^{i \frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}. \quad (6.1.3)$$

De plus, si $\Psi|_{t=0} = \Psi^{in}$ et $\partial_t \Psi|_{t=0} = \chi^{in}$, les fonctions Ψ^b , Ψ^{in} et χ^{in} doivent vérifier la condition de compatibilité suivante :

$$(k_{x_1}^b \chi^{in} - \partial_{x_1} \Psi^{in})|_{x_1=0} = f|_{t=0} = (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\Psi^b|_{t=0}. \quad (6.1.4)$$

L'hypothèse simplificatrice (6.0.1) réduit la condition de compatibilité (6.1.4) à :

$$f|_{t=0} = 0,$$

ce que l'on simplifie encore en prenant $Supp(g^b, A^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \times \Gamma$.

Par la suite, pour simplifier, on suppose $\Psi^b|_{x_1=0} \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})$. Le lemme de relèvement suivant est utile pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (application du théorème de Hille-Phillips).

Lemme 6.1.1 *Soit $f^b \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\tilde{\Psi}^b \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^\infty(\mathcal{D}))$ telle que :*

1. $(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\tilde{\Psi}^b|_\Gamma = f^b$ sur $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$.
2. $\tilde{\Psi}^b$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^t \times \Gamma$:

$$\left(\epsilon^2 (\partial_{tt} - \Delta) \tilde{\Psi}^b + \tilde{N}(\epsilon x) \tilde{\Psi}^b + \epsilon^3 \nu_1 \partial_t \tilde{\Psi}^b \right) \Big|_{\mathbb{R}_+^t \times \Gamma} = 0.$$

3. $\tilde{\Psi}^b \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^\infty(\mathcal{D}))$ et $\text{Supp}(\tilde{\Psi}^b) \subset \mathbb{R}_t^+ \times [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$.
4. $\|\partial_t^k \tilde{\Psi}^b\|_{H^m(\mathcal{D})}(t) \leq C(m+k) \|f^b\|_{\mathcal{C}_b^{m+k}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})}$, où $C(m+k)$ ne dépend pas de ϵ .

Preuve. Il suffit de prendre $\tilde{\Psi}^b = \frac{N^b}{\epsilon^2} \frac{x_1^2}{2} - f^b(t, x_2, \dots, x_n)x_1 + N^b$ au voisinage de Γ , puis de lisser $\tilde{\Psi}^b$ et lui donner de fortes propriétés de décroissance. $\diamond$

Remarque 1 : on appelle $\tilde{\Psi}^b$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$ entier, tandis que les expressions ci-dessus de Ψ^b ne sont prises qu'au voisinage de Γ . De plus, on a en général $\tilde{\Psi}_{|\Gamma}^b \neq \Psi^b$, comme le montre le cas ci-dessus appliqué à l'hypothèse $\Psi^b(t, x) = A^b(t, x)e^{i\frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}$.

La condition 2 est nécessaire pour appliquer le théorème de Hille-Phillips avec second membre, cf. démonstration du théorème 6.1.1.

Remarque 2 : A la place de la condition (6.1.1), on aurait pu prendre la condition d'onde entrante suivante :

$$(|\vec{k}^b| \partial_t - \partial_{x_1})(\Psi - \Psi^b)_{x_1=0} = 0, \quad (6.1.5)$$

et on aurait eu également un problème bien posé. La condition (6.1.1) suppose que les ondes sortantes correspondent à un vecteur d'onde $-\vec{k}^b$ opposé au vecteur d'onde de l'onde entrante. Avec la condition (6.1.5), les calculs ultérieurs auraient été similaires mais un peu moins faciles à écrire. Pour ces problèmes de conditions au bord, voir [36] et [34].

6.1.2 Existence et unicité (rappel)

Je rappelle ici la résolution du problème sur le demi-espace, peu différente de celle sur l'espace entier ; une démonstration dans un cas plus général (équations hyperboliques d'ordre 2) se trouve dans [35].

Théorème 6.1.1 Rappel.

Soit $\nu_1 \geq 0$ fixé, $N \in C_b^2(\mathcal{D})$ telle que $N|_\Gamma = N_b \in]0, 1[$. Soit $f^b \in C_b^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})$, et $\text{Supp}(f^b) \subset \mathbb{R}_+^* \times \Gamma$.

Le problème de Cauchy suivant :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi) + N(x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+, \quad (6.1.6)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (6.1.7)$$

$$\partial_t\Psi|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (6.1.8)$$

$$(k_{x_1}\partial_t - \partial_{x_1})\Psi = f^b \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+ \quad (6.1.9)$$

admet une unique solution $\Psi \in C(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^1(\mathcal{D})) \cap C^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{D}))$.

Preuve. Rappel.

On se donne le même opérateur de Klein-Gordon que dans le théorème 2.1.1, et on cherche également à appliquer le théorème de Hille-Yosida. Ce sont les espaces qui changent : le domaine de l'opérateur est $D(\mathcal{KG}) \subset H$, avec

$$H = H^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}),$$

et

$$D(\mathcal{KG}) = \{(u, v) \in H^2(\mathcal{D}) \times H^1(\mathcal{D}); k_{x_1}^b v - \partial_{x_1} u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Rappelons que

$$\mathcal{KG} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + \frac{N}{\epsilon^2} & \epsilon\nu_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\tilde{\Psi}^b$ une fonction comme dans le lemme 6.1.1 : ainsi, la condition (6.1.9) s'écrit aussi :

$$(k_{x_1}\partial_t - \partial_{x_1})(\Psi - \tilde{\Psi}^b) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

Le problème (6.1.6) (6.1.7) (6.1.8) (6.1.9) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U + \mathcal{KG}U &= \frac{d}{dt}U^b + \mathcal{KG}U^b, \\ U_{t=0} &= (-\tilde{\Psi}^b, -\partial_t\tilde{\Psi}^b), \end{aligned}$$

avec $U(t) = \begin{pmatrix} \Psi - \tilde{\Psi}^b \\ \partial_t\Psi - \partial_t\tilde{\Psi}^b \end{pmatrix} \in D(\mathcal{KG})$ et $U^b = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^b \\ \partial_t\tilde{\Psi}^b \end{pmatrix}$. La condition au bord du domaine (6.1.9) est incluse dans le fait que $U \in D(\mathcal{KG})$, et $U(0) \in D(\mathcal{KG})$.

De plus, le terme de second membre de l'équation :

$$G^b = \frac{d}{dt}U^b + \mathcal{KG}U^b = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{tt}\tilde{\Psi}^b - \Delta\tilde{\Psi}^b + \frac{N}{\epsilon^2}\tilde{\Psi}^b + \epsilon\nu_1\partial_t\tilde{\Psi}^b \end{pmatrix},$$

vérifie

1. $G^b \in D(\mathcal{KG})$ car $G^b \in H^2 \times H^1$ et $G^b = 0$ sur Γ (c'est ici que la condition 2 du lemme 6.1.1 intervient).
2. $G^b, \mathcal{KG}(G^b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H)$.

L'espace H est un espace de Hilbert réel muni du même produit scalaire que pour le théorème 2.1.1 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_{\mathcal{D}} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \left(1 + \frac{N(x)}{\epsilon^2}\right) u_1 u_2 + v_1 v_2.$$

Pour montrer que $\mathcal{KG}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, on applique le théorème de Hille-Philips à l'opérateur $\mathcal{KG} + I$, selon la méthode appliquée précédemment. On a déjà montré que le second membre G^b vérifiait les conditions nécessaires pour appliquer le théorème; il reste à montrer que l'opérateur $\mathcal{KG} + I$ est maximal monotone et que $D(\mathcal{KG})$ est dense dans H .

1. $D(\mathcal{KG})$ est dense dans H : la preuve est p.70 de [35] et découle de la densité de $H^\infty \times H^\infty(\mathcal{D})$ dans H , ainsi que de l'existence d'une suite $u_\eta \in H^\infty(\mathcal{D})$, $\|u_\eta\|_{L^2(\mathcal{D})} \rightarrow 0$ et $\partial_{x_1} u_\eta|_\Gamma$ est fixé.
2. $\mathcal{KG} + I$ est monotone : si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{KG})$ on a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{KG} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_{\mathcal{D}} -\nabla v \cdot \nabla u - \left(1 + \frac{N(x)}{\epsilon^2}\right) uv + \left(-\Delta + \frac{N}{\epsilon^2}\right)(u)v + \epsilon\nu_1 |v|^2.$$

En intégrant par parties et sachant que $(u, v) \in D(\mathcal{KG})$, donc $\partial_{x_1} u = k_{x_1}^b v$, on a :

$$-\int_{\mathcal{D}} \Delta uv = \int_{\mathcal{D}} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot (\nabla u) v = \int_{\mathcal{D}} \nabla u \nabla v + \int_{\Gamma} k_{x_1}^b |v|^2.$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} (KG + I)u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_H &= \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 + |u|^2 \left(1 + \frac{N}{\epsilon^2}\right) + |v|^2 (1 + \epsilon\nu_1) - uv + \int_{\Gamma} k_{x_1}^b |v|^2 \\ &\geq \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 + \frac{N}{\epsilon^2} |u|^2 + \epsilon\nu_1 |v|^2 + \int_{\Gamma} k_{x_1}^b |v|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{KG} + I$ est maximal monotone : il suffit de prouver que $\mathcal{KG} + 2I$ est surjectif de $D(\mathcal{KG})$ dans H . Soit en effet $(f, g) \in H^1 \times L^2(\mathcal{D})$. On cherche $(u, v) \in H^2 \times H^1$ tels que $k_{x_1} v = \partial_{x_1} u$ sur Γ et :

$$\begin{aligned} 2u - v &= f \\ -\Delta u + \frac{N}{\epsilon^2} u + \epsilon\nu_1 v + 2v &= g \end{aligned}$$

Cela signifie que $v = 2u - f$ et que $u \in H^2(\mathcal{D})$ est solution du problème mixte suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \left(\frac{N}{\epsilon^2} + 2\epsilon\nu_1 + 4\right)u &= g + (\epsilon\nu_1 + 2)f, \\ \frac{1}{k_{x_1}} \partial_{x_1} u - 2u &= -f \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat se trouve par exemple dans [11] (théorème de Lax-Milgram, relèvement et régularité de la solution faible par la méthode des quotients différentiels). On en déduit v , et que $(u, v) \in D(\mathcal{KG})$.

D'après le théorème de Hille-Philips, il existe une unique solution $V(t, x) \in C_b^1(\mathbb{R}_+; H) \cap C_b(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{KG}))$ à l'équation $\frac{d}{dt}V + \mathcal{KG}V + V = e^{-t}G^b$, ce qui démontre le résultat attendu en posant $U = e^tV$. $\diamond$

6.1.3 Estimation d'énergie

Théorème 6.1.2 *Soit Ψ^{in}, χ^{in} , N , ν_1 comme dans le théorème 6.1.1.*

Soit $S_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$, $R_\epsilon \in L^2(\mathcal{D})$ et $f_\epsilon \in H^1(\mathcal{D})$ réelles. Soit $\tilde{\Psi}_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathcal{D})) \cap \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{D}))$ solution réelle du système :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\tilde{\Psi}_\epsilon - \Delta_x\tilde{\Psi}_\epsilon) + N(x)\tilde{\Psi}_\epsilon + \epsilon^3\nu_1\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon = \epsilon S_\epsilon, \text{ dans } \mathcal{D} \times [0, T], \quad (6.1.10)$$

$$\tilde{\Psi}_\epsilon|_{t=0} = 0; \text{ dans } \mathcal{D}, \quad (6.1.11)$$

$$\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon|_{t=0} = R_\epsilon \text{ dans } \mathcal{D}, \quad (6.1.12)$$

$$(k_{x_1}^b\partial_t - \partial_{x_1})\tilde{\Psi}_\epsilon = \frac{g_\epsilon}{\epsilon} \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times [0, T]. \quad (6.1.13)$$

Soit $E_\epsilon(t) = \epsilon^2\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \epsilon^2\|\nabla\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\sqrt{N(\cdot)}\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})}^2$.

L'inégalité suivante est vérifiée :

$$E_\epsilon(t) \leq \epsilon^2\mathcal{R}_\epsilon e^t + \left(\mathcal{S}_\epsilon^2 + \frac{\mathcal{G}_\epsilon^2}{k_{x_1}^b}\right)(e^t - 1) \quad (6.1.14)$$

où $\mathcal{S}_\epsilon = \|S_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))}$, $\mathcal{R}_\epsilon = \|R_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})}$, et $\mathcal{G}_\epsilon = \|g_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))}$.

Preuve. Comme $\tilde{\Psi}_\epsilon$ est supposée réelle de même que Ψ , l'équation (6.1.10) multipliée par $2\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon$ est :

$$\epsilon^2\partial_t(|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon|^2) - 2\epsilon^2(\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon)\Delta\tilde{\Psi}_\epsilon + 2N\partial_t|\tilde{\Psi}_\epsilon|^2 + 2\epsilon^3\nu_1|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon|^2 = 2\epsilon S_\epsilon\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon.$$

En intégrant sur $\mathcal{D}$, avec les notations du théorème, la formule de Green et la condition au bord entraînent que :

$$\frac{dE_\epsilon}{dt} + 2\epsilon^2 \int_{\Gamma} k_{x_1}^b |\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon|^2 \leq 2\epsilon\mathcal{S}_\epsilon\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})} + 2\epsilon\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma)}\mathcal{G}_\epsilon.$$

Comme

$$2\epsilon\mathcal{S}_\epsilon\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq 2\mathcal{S}_\epsilon\sqrt{E_\epsilon(t)} \leq \mathcal{S}_\epsilon^2 + E_\epsilon(t),$$

ainsi que

$$2\epsilon\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma)}\mathcal{G}_\epsilon \leq k_{x_1}^b\epsilon^2\|\partial_t\tilde{\Psi}_\epsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\mathcal{G}_\epsilon^2}{k_{x_1}^b}$$

on obtient :

$$\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} \leq E_\epsilon(t) + \left(\mathcal{S}_\epsilon^2 + \frac{\mathcal{G}_\epsilon^2}{k_{x_1}^b}\right).$$

En appliquant le lemme de Gronwall, comme $E_\epsilon(0) = \epsilon^2 \|R_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$, l'inégalité (6.1.14) recherchée apparaît. $\diamond$

Remarque : à cause du terme au bord g_ϵ , cette estimation peut être aussi précise que sur l'espace entier, mais diverge en temps à cause du terme en e^t : elle n'est intéressante qu'en temps fini.

6.2 Analyse asymptotique

L'analyse asymptotique de l'équation de Klein-Gordon a déjà été faite dans la partie 4.1, et n'est donc pas refaite ici. Le problème crucial de la résolution sur un demi-espace est **le bon choix des conditions aux limites** pour le problème approché.

6.2.1 Equation eikonale

Rappelons (cf. partie 2.3) que l'approximation de l'optique géométrique, dans le cas de rayons faiblement courbés, consiste à écrire

$$\Psi(t, x) = A(t, x) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}, \quad (6.2.1)$$

et que cela conduit tout d'abord à une solution ϕ de l'équation eikonale :

$$|\nabla \phi(\epsilon x)|^2 = 1 - N(\epsilon x). \quad (6.2.2)$$

La condition au bord (6.1.1), prise avec Ψ^b défini par (6.1.2) :

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) \Psi = (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) (A^b e^{i \frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}})$$

s'écrit en fonction de A et A^b :

$$\left(\left(-i \frac{k_{x_1}^b + \partial_{x_1} \phi(\epsilon x)}{\epsilon} + k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1} \right) A \right) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} = \left(\left(-\frac{2i k_{x_1}^b}{\epsilon} + k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1} \right) A^b \right) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}.$$

Il est naturel d'avoir la condition limite suivante pour ϕ :

$$\nabla \phi|_{x_1=0} = \vec{k}^b. \quad (6.2.3)$$

Rappelons que ϕ est solution régulière univaluée du problème (6.2.2) (6.2.3) sur $\mathcal{D}$.

Remarque : le fait de considérer le problème sur un demi-espace rend inutile et complexe l'écriture de l'équation dans la géométrie des rayons.

6.2.2 Conditions aux limites

Rappelons que l'équation exacte satisfaite par A est :

$$2i[\partial_t A + \vec{k} \cdot \nabla A + \frac{1}{2}\epsilon\Delta\phi(\epsilon x)A] + i\epsilon\nu_1 A = \epsilon(\partial_{tt}A - \Delta A + \epsilon\nu_1\partial_t A). \quad (6.2.4)$$

et que nous étudions une solution du problème approché à l'ordre 1 en ϵ qui s'écrit :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon + \epsilon\nabla \cdot \left[(I - \vec{k}^{\otimes 2})\nabla A_\epsilon \right] = 0. \quad (6.2.5)$$

Conditions initiales

L'étude a déjà été faite dans la partie 2.3. Pour mettre en valeur la spécificité due au demi-espace et simplifier la lecture, on a fait l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\Psi|_{t=0} = 0 \quad (6.2.6)$$

$$\partial_t \Psi|_{t=0} = 0 \quad (6.2.7)$$

Ces conditions se traduisent pour le problème exact par :

$$A|_{t=0} = 0 \quad (6.2.8)$$

$$\partial_t A|_{t=0} = 0 \quad (6.2.9)$$

Pour le problème approché (6.2.5), la condition initiale est :

$$A_{\epsilon}|_{t=0} = 0. \quad (6.2.10)$$

Condition au bord du domaine

On se donne une fonction régulière $A^b(t, x)$ définie sur Γ , telle que $A^b|_{t=0} = \partial_t A^b|_{t=0} = 0$, et on suppose que la condition au bord du domaine vérifiée par Ψ est la condition (6.1.1), avec Ψ^b définie par l'équation (6.1.2) (en fait, il faut aussi supposer que $\partial_{x_1} A^b$ est connu sur le bord Γ : nous verrons ci-dessous comment faire.)

Pour A , on déduit de (6.1.1) et de l'hypothèse (6.1.2) la condition au bord exacte, qui est :

$$\left[2ik_{x_1}^b A - \epsilon(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) \right] (A - A^b) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.11)$$

A l'ordre 0 en ϵ , on obtient une **condition au bord de type Dirichlet** :

$$A = A^b \quad \text{mod } O(\epsilon) \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.12)$$

A l'ordre 1 en ϵ , utilisant l'équation (6.2.4) satisfaite par A , on a (en utilisant la notation $\vec{k} = \nabla \phi(\epsilon x)$) :

$$\partial_t A = -\vec{k} \cdot \nabla A \quad \text{mod } O(\epsilon),$$

ce qui conduit à une **condition au bord de type mixte Neuman-Dirichlet** :

$$\left[2ik_{x_1}^b + \epsilon(k_{x_1}^b \vec{k} \cdot \nabla + \partial_{x_1}) \right] (A_\epsilon - A^b) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.13)$$

Pour éviter de définir A^b au voisinage de Γ , comme en (6.1.3) on suppose que la fonction g^b suivante est une donnée sur Γ :

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A^b = g^b.$$

En conclusion, la condition au bord pour le problème exact s'écrit :

$$2ik_{x_1}^b A - \epsilon(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A = 2ik_{x_1}^b A^b - \epsilon g^b \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

De façon naturelle, on prend comme condition au bord pour le problème approché :

$$2ik_{x_1}^b A_\epsilon + \epsilon(k_{x_1}^b \vec{k} \cdot \nabla + \partial_{x_1}) A_\epsilon = 2ik_{x_1}^b A^b - \epsilon g^b \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.14)$$

Condition de compatibilité

La condition de compatibilité (6.1.4), lorsque $\Psi|_{t=0} = \partial_t \Psi|_{t=0} = 0$, se réduit à :

$$f_{|t=0}^b = \left[-\frac{2i \vec{k}_{x_1}^b}{\epsilon} A^b + g^b \right]_{|t=0} = 0,$$

ce qui implique $A_{|t=0}^b = g_{|t=0}^b = 0$. Pour le problème approché, la condition au bord étant (6.2.14), la condition de compatibilité, lorsque $A^{in} = 0$, devient la même que pour le problème exact, dans le cas où $\Psi^{in} = \chi^{in} = 0$.

Proposition 6.2.1 *Une fonction $\Psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{S}'(\mathcal{D}))$ est solution de (6.0.2) (6.1.3) (6.2.6) (6.2.7) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$ ssi la fonction $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{S}'(\mathcal{D}))$ définie par (6.2.1) est solution du système (6.2.4) (6.2.8) (6.2.9) (6.2.11).*

6.2.3 Estimation d'énergie pour le problème d'advection

Ce paragraphe est le symétrique du paragraphe 2.3.2, où une estimation d'énergie pour le problème d'advection sur l'espace entier est donnée. On fait les hypothèses suivantes.

Hypothèses 6.2.1 Soit $N = N(\epsilon x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $N \geq N_0 > 0$ sur $\mathcal{D}$, $N|_\Gamma = N_b < 1$ constant.

Soit $\phi \in C_b^\infty(\mathcal{D})$ solution régulière de l'équation eikonale stationnaire

$$|\nabla \phi(y)|^2 = 1 - N(y) \quad \forall y \in \mathcal{D},$$

avec $\nabla \phi|_\Gamma = \vec{k}^b$. On note $\vec{k} = \nabla \phi(\epsilon x)$. On suppose de plus que $k_{x_1} \geq k_{x_1}^{inf} > 0$.

Soit $\nu_1 \geq 0$ constant.

Soit $A^b, g^b \in C_b^\infty(\mathbb{R}_t^+; C_c^\infty(\Gamma))$, avec $\text{Supp}(A^b, g^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \times B_\Gamma(0, R)$ pour $R > 0$ fixé quelconque.

Théorème 6.2.1 Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^\infty(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème :

$$\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi + N(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \quad (6.2.15)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.2.16)$$

$$\partial_t\Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.2.17)$$

$$(k_{x_1}^b\partial_t - \partial_{x_1})\Psi|_{x_1=0} = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon}A^b + g^b\right)e^{+i\frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}. \quad (6.2.18)$$

Soit A_0 l'unique solution du problème d'advection suivant :

$$\partial_t A_0 + \vec{k} \cdot \nabla A_0 = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \quad (6.2.19)$$

$$A_0|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (6.2.20)$$

$$A_0|_{x_1=0} = A^b \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma. \quad (6.2.21)$$

Soit Ψ_0 définie par :

$$\Psi_0 = A_0(t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

L'inégalité suivante est vérifiée par $E_0(t)$, avec

$$E_0(t) = 2N_0 \|\Psi - \Psi_0\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\partial_t(\Psi - \Psi_0)\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\nabla(\Psi - \Psi_0)\|_{L^2}^2(t)$$

et avec $t \leq T$ et T fixé :

$$\sqrt{E_0}(t) \leq C(\phi, N_0) e^{\alpha(\phi, N_0)T} \epsilon \left(\|A^b\|_{\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} + \|g^b\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))} \right).$$

Preuve. Il est connu (cf. par exemple [28]) que la solution A_0 peut s'écrire de la façon suivante :

$$A_0(t, x) = A^b(\epsilon t - S(\epsilon x), \frac{1}{\epsilon} Y_{S(\epsilon x)}(\epsilon x)) \mathbb{1}_{\epsilon t - S(\epsilon x) \geq 0}, \quad (6.2.22)$$

où $Y_T(y)$ désigne, comme dans le chapitre 4, les caractéristiques associées à $\nabla\phi$, caractéristiques *backward* i.e. définies par :

$$\frac{d}{dT} Y_T(y) = -\nabla\phi(Y_T(y)), \quad Y_0(y) = y, \quad \forall y \in \mathcal{D}.$$

La fonction $S(y)$ désigne le temps nécessaire pour que la caractéristique passant par y rejoigne la frontière Γ : la fonction S est définie par

$$X(y) := Y_{S(y)}(y) \in \Gamma.$$

La fonction A_0 ainsi que toutes ses dérivées en temps et en espace sont donc bornées dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ dès que la fonction A^b est suffisamment régulière.

Appliquons maintenant l'estimation d'énergie du théorème 6.1.2 avec $\tilde{\Psi}_\epsilon = \Psi - \Psi_0$. On a, avec les notations du théorème :

1. $|R_\epsilon| = |\partial_t A_0|_{t=0} = |\vec{k} \cdot \nabla A_0|_{t=0} = 0.$
2. $S_\epsilon = -\epsilon \left(\partial_{tt} - \Delta - i(\nu_1 + \Delta\phi(\epsilon x)) + \epsilon\nu_1 \partial_t \right) A_0.$
3. $|g_\epsilon| = \epsilon |(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A_0 - g^b|_\Gamma$

Pour obtenir l'inégalité recherchée, il suffit donc d'exprimer les normes $L^2(\mathcal{D})$ des dérivés d'ordre inférieur ou égal à 2 de la solution A_0 en fonction des données du problème et de façon indépendante de ϵ .

On montre les deux résultats ci-dessous, sachant que les estimations pour les dérivées d'ordre supérieur s'obtiennent de même.

1. Pour $t > 0$ fixé, $Supp(A_0(t, .)) \subset B_{\mathcal{D}}\left(0, R + \|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})}t\right)$.

En effet, on peut écrire

$$x = \frac{1}{\epsilon} Y_{S(\epsilon x)}(\epsilon x) + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{S(\epsilon x)} \nabla \phi(Y_s(\epsilon x)) ds.$$

Soit x vérifiant $|x| \geq R + \|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})}t$. Alors si $S(\epsilon x) > \epsilon t$, par définition $A_0(t, x) = 0$; si au contraire $S(\epsilon x) \leq \epsilon t$ la formule ci-dessus implique que $\frac{1}{\epsilon} Y_{S(\epsilon x)}(\epsilon x) \geq R$ donc d'après l'hypothèse sur le support de A^b et avec la relation (6.2.22), $A_0(t, x) = 0$.

Cette relation implique que A_0 et ses dérivées sont dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ pourvu que les fonctions S , A^b , Y soient régulières. On sait déjà que c'est le cas pour A^b (par hypothèse) et pour Y (comme solution d'une équation différentielle ordinaire); la relation ci-dessous montre comment obtenir la régularité de S .

Donc pour $t \leq T$, on a $Supp(D^k A_0) \subset B_{\mathcal{D}}(0, R + \|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})}T)$ donc à l'aide de la formule (6.2.22) on a :

$$\|D^k A_0\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq CT \|A^b\|_{cal C_b^k(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}.$$

2. La fonction S est continuellement dérivable et $|\nabla S(x)| \leq \frac{1}{k_{x_1}^{inf}} e^{\|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})}|S(x)|}$.

En effet, par définition de S on a, en notant $Y_t^1(x)$ la composante de Y dans la direction x_1 :

$$Y_{S(x)}^1(x) = 0.$$

En dérivant en x cette expression, il vient :

$$\nabla Y_{S(x)}^1(x) - \nabla S \partial_{x_1} \phi(Y_{S(x)}(x)) = 0.$$

On en déduit le résultat recherché, sachant que l'équation des caractéristiques permet de majorer Y par la formule :

$$|\nabla Y_t(x)| \leq C e^{\|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})}t}.$$

L'écriture (6.2.22) de A_0 , comme $Supp(A^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \Gamma$, montre que $\partial_t^k A_0 = \epsilon^k \partial_t^k A^b(\dots)$ ce qui permet d'estimer les termes en dérivée temporelle de A_0 dans l'expression de S_ϵ . Pour les termes en dérivées spatiales, la relation 1 implique que $Supp(D^k A_0) \subset B_{\mathcal{D}}(0, R + \|\phi\|_{C_b^1(\mathcal{D})})$ donc $\|D^k A_0\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq C(1 + T)^n \|D^k A_0\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$. Grâce aux estimations sur S et Y et leurs dérivées, obtenues de façon similaire à l'estimation 2, et à l'écriture de A_0 en fonction de A^b , on en déduit :

$$\|D^k A_0\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq C(1 + T)^n e^{\alpha t} \|A^b\|_{C_b^k(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}.$$

Il suffit pour majorer S_ϵ d'appliquer cela avec $k = 2$. $\diamond$

6.2.4 Choix du problème approché

L'estimation précédente montre que si l'on souhaite une estimation d'énergie plus précise, *i.e.* une énergie en $\sqrt{E} = O(\epsilon^2)$, les deux termes S_ϵ et g_ϵ doivent être précisés. Comme on l'a vu au paragraphe 6.2.2, cela conduit à choisir comme problème approché le problème suivant. On écrit $\Delta\phi$ pour $\Delta\phi(\epsilon x)$; on rappelle que $\nabla \cdot \vec{k} = \epsilon \Delta\phi$.

$$2i[\partial_t + \vec{k} \cdot \nabla]A_\epsilon + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2})\nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta\phi + \nu_1)A_\epsilon = 0, \quad (6.2.23)$$

$$A_{\epsilon|t=0} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}, \quad (6.2.24)$$

$$2ik_{x_1}^b A_\epsilon + \epsilon(k_{x_1}^b \vec{k}^b \cdot \nabla + \partial_{x_1})A_\epsilon = 2ik_{x_1}^b A^b - \epsilon g^b \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.25)$$

Ce problème s'apparente à un problème de Schrödinger avec condition au bord de type mixte Neuman-Dirichlet. **Cependant, On ne sait par encore dire si ce problème est ou non bien posé et à quelle condition. Pour contourner cette difficulté et trouver un problème approché, les deux méthodes suivantes peuvent être appliquées.**

1. Retour au développement asymptotique originel : résolution de deux équations.

Ecrivant $A^\epsilon = A_0 + \epsilon A_1$, les termes A_0 et A_1 vérifient chacun une équation de type advection (cf. résolution ci-dessus pour le terme A_0 .) On montre l'estimation d'énergie pour cette fonction. Cette étude fait l'objet de la partie 6.3. L'inconvénient est que la fonction A^ϵ n'est pas elle-même solution d'une équation simple.

2. Equation d'advection-Schrödinger avec condition au bord de type Dirichlet.

Au lieu du problème (6.2.23) (6.2.24) (6.2.25), on résout le problème (6.2.23) (6.2.24) en lui trouvant une condition au bord de type Dirichlet. En remplaçant dans (6.2.25) le terme ϵA_ϵ par ϵA_0 , il vient :

$$2ik_{x_1}^b (A_{\epsilon|_{x_1=0}} - A^b) = -\epsilon g^b - \epsilon (k_{x_1}^b \vec{k}^b \cdot \nabla + \partial_{x_1}) A_0|_\Gamma \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma.$$

A l'aide de l'équation d'advection satisfaite par A_0 , cela se transforme en :

$$2ik_{x_1}^b (A_{\epsilon|_{x_1=0}} - A^b) = -\epsilon g^b + \epsilon \left((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b}) \partial_t + \frac{\vec{k}_\perp^b}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp \right) A^b \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma. \quad (6.2.26)$$

Cette formulation a l'avantage de faire disparaître toute référence à la fonction A_0 .

Cette étude fait l'objet de la partie 6.4.

6.3 Retour au développement asymptotique

Le développement asymptotique de la solution A de l'équation (6.2.4) sous la forme

$$A(t, x) = A_0(t, x) + \epsilon A_1(t, x) + \epsilon^2 A_2(t, x) + \dots$$

a été fait dans la partie 4.1.3. Il ne reste donc plus qu'à écrire le développement asymptotique de la condition au bord. Si la condition au bord exacte s'écrit pour Ψ sous la forme :

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) \Psi|_\Gamma = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon} A^b + g^b \right) e^{i \frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}},$$

la condition exacte pour A est :

$$-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon} A + (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A|_\Gamma = -\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon} A^b + g^b.$$

Ce qui entraîne à l'ordre 1 en ϵ :

$$A_{0|_{x_1=0}} = A^b$$

et à l'ordre 2 en ϵ :

$$-2ik_{x_1}^b A_1 = g^b - k_{x_1}^b \partial_t A^b + \partial_{x_1} A_0|_{x_1=0}.$$

Comme A_0 est solution du problème d'advection, on peut exprimer $\partial_{x_1} A_0$ en fonction des autres dérivées :

$$\partial_{x_1} A_0|_{x_1=0} = -\frac{1}{k_{x_1}^b} (\partial_t + \vec{k}_\perp^b \cdot \nabla_\perp) A^b,$$

où on note $x_\perp = (x_2, \dots, x_n)$.

On aboutit finalement aux problèmes suivants :

1. A l'ordre 1 en ϵ , la fonction A_0 vérifie le problème de transport (6.2.19) (6.2.20) (6.2.21) :

$$\begin{aligned} \partial_t A_0 + \vec{k} \cdot \nabla A_0 &= 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \\ A_0|_{t=0} &= 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, A_0 = A^b \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma. \end{aligned}$$

La résolution de ce problème et l'estimation d'énergie correspondante ont été vues au paragraphe 6.2.3. En particulier, on peut majorer $\|A_0(t, \cdot)\|_{H^m(\mathcal{D})}$ avec $\|A^b\|_{C^m(0, T; C_c^m(\Gamma))}$.

2. A l'ordre 2 en ϵ , la fonction A_1 est solution d'un problème de transport avec second membre :

$$2i[\partial_t A_1 + \vec{k} \cdot \nabla A_1] = -i(\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) A_0 + (\partial_{tt} - \Delta) A_0, \quad (6.3.1)$$

$$A_1|_{t=0} = 0, \quad (6.3.2)$$

$$-2ik_{x_1}^b A_1|_{x_1=0} = g^b - k_{x_1}^b \partial_t A^b|_{x_1=0} - \frac{1}{k_{x_1}^b} (\partial_t + \vec{k}_\perp^b \cdot \nabla_\perp) A^b. \quad (6.3.3)$$

Ce problème ne diffère de celui vérifié par A_0 que par le second membre dans l'équation de transport : il est bien connu (cf. par exemple [28]) qu'un problème de type

$$\partial_t u + \vec{k}(x) \cdot \nabla u = f(t, x) \quad (6.3.4)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (6.3.5)$$

$$u|_{x_1=0} = u^b \quad (6.3.6)$$

a pour solution, avec les notations du paragraphe 6.2.3 pour les caractéristiques et la fonction $S(x)$:

$$u(t, x) = \int_0^t f(s, Y_{t-s}(x)) ds + u^b(t - S(x), Y_{S(x)}(x)). \quad (6.3.7)$$

Les propriétés de régularité de cette solution sont démontrées de la même façon que dans le paragraphe 6.2.3. En particulier, on peut majorer $\|A_1(t, \cdot)\|_{H^m(\mathcal{D})}$ avec $\|A_0\|_{L^\infty(0, T; H^{m+2})}$, $\|g^b - k_{x_1}^b \partial_t A^b - \frac{1}{k_{x_1}^b} (\partial_t + \vec{k}_\perp^b \cdot \nabla_\perp) A^b\|_{C_b^m(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}$, soit finalement de majorer $\|A_1(t, \cdot)\|_{H^m(\mathcal{D})}$ avec $e^{\alpha T} \|A^b\|_{C_b^{m+2}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}$ et $e^{\alpha T} \|g^b\|_{C_b^m(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}$. Le théorème suivant nous donne un résultat d'approximation pour l'ordre deux.

Théorème 6.3.1 *On fait les hypothèses 6.2.1 comme précédemment. Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème :*

$$\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi + N(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3 \nu_1 \partial_t \Psi = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \quad (6.3.8)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.3.9)$$

$$\partial_t \Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.3.10)$$

$$(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})\Psi|_{x_1=0} = f^b e^{i \frac{\vec{k}_\perp^b \cdot x - t}{\epsilon}} = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon} A^b + g^b\right) e^{i \frac{\vec{k}_\perp^b \cdot x - t}{\epsilon}}. \quad (6.3.11)$$

Soit A_0 l'unique solution du problème (6.2.19) (6.2.20) (6.2.21) et A_1 l'unique solution du problème (6.3.1) (6.3.2) (6.3.3). Soit Ψ_ϵ définie par :

$$\Psi_\epsilon = (A_0(t, x) + \epsilon A_1(t, x)) e^{i \frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

L'inégalité suivante est vérifiée par $E_\epsilon(t)$, avec

$$E_\epsilon(t) = 2N_0 \|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2 \|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2 :$$

$$\sqrt{E_\epsilon(t)} \leq C(\phi, N_0) \epsilon^2 e^{\alpha(\phi, N_0)t} (\|A^b\|_{C_b^4(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} + \|g^b\|_{C_b^2(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}).$$

Preuve. On applique l'estimation d'énergie du théorème 6.1.2 à $\tilde{\Psi}_\epsilon = \Psi - \Psi_\epsilon$. Il vient :

1. $S_\epsilon = \epsilon^2 \left((\partial_{tt} - \Delta)A_1 + \epsilon^3 \nu_1 \partial_t (A_0 + \epsilon A_1) - i\epsilon^3 (\nu_1 + \Delta\phi(\epsilon x))A_1 \right).$
2. $R_\epsilon = 0.$
3. $g_\epsilon = \epsilon^2 (k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})A_1|_\Gamma.$

D'après ce qui a été dit sur les propriétés de A_0 et A_1 , cela implique l'estimation recherchée. $\diamond$

6.4 Problème d'advection-Schrödinger

Dans le paragraphe précédent, on a trouvé une approximation $\Psi^\epsilon = A^\epsilon e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}$ de la solution du problème exact, en la décomposant en $A_0 + \epsilon A_1$ et en résolvant deux problèmes, l'un pour A_0 et l'autre pour A_1 .

Afin de pouvoir exprimer une approximation du problème exact sous la forme de la solution d'un seul problème approché, cette partie étudie le problème d'advection-Schrödinger (6.2.23) (6.2.24) (6.2.26). La condition au bord est une condition de type Dirichlet, qui, par rapport à la condition (6.2.21), comporte un terme correctif.

L'étude ci-dessous suit le même schéma que celle qui a été menée dans la partie 4.3 pour la résolution du problème d'advection-Schrödinger sur tout l'espace, aussi les démonstrations sont-elles plus elliptiques et renvoient systématiquement aux démonstrations correspondantes de la partie 4.3.

Rappelons le but de cette étude. Une fonction $A_\epsilon e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}$, où A_ϵ vérifie l'équation approchée (6.2.23), vérifie l'équation de Klein-Gordon avec un reste S_ϵ qui s'exprime en fonction des dérivées d'ordre 4 de A_ϵ (cf. partie 4.3.3). Pour obtenir un résultat d'approximation à l'aide du théorème 6.1.2, une estimation de $\|A_\epsilon\|_{H^4(\mathcal{D})}(t)$ indépendante de ϵ est donc nécessaire. C'est l'objet des théorèmes intermédiaires 6.4.2 à 6.4.5, qui aboutissent à l'existence, l'unicité et la régularité de la solution A_ϵ (théorème 6.4.6), et enfin au résultat d'approximation du théorème 6.4.7.

6.4.1 Rayons droits

On suppose ici, pour fixer les idées et donner une idée de la solution, que la densité $N = cste$ et que les rayons sont droits : $\nabla\phi = \vec{k} = \overrightarrow{cste}$. Cette partie

fournit une expression exacte de la solution, à l'aide de transformées de Fourier. De plus, le cas droit est utile pour démontrer, dans le cas lentement variable, la régularité de la solution au voisinage du bord du domaine.

Théorème 6.4.1 *Soit $A^{in} \in \mathcal{S}'(\mathcal{D})$, $f^b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})$, avec $\text{Supp}(A^{in}), \text{Supp}(f^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Il existe une unique solution A_ϵ du problème suivant sur $\mathbb{R}_+^t \times \mathcal{D}$, au sens des distributions :*

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon] + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla A_\epsilon] + i\epsilon \nu_1 A_\epsilon = 0, \quad (6.4.1)$$

$$A_{\epsilon|t=0} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}, \quad (6.4.2)$$

$$A_{\epsilon|\Gamma} = f^b \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma. \quad (6.4.3)$$

De plus, en notant $x^\perp = (x_2, \dots, x_n)$, A_ϵ s'écrit sous la forme :

$$A_\epsilon = \mathcal{F}_{t,x^\perp}^{-1} \left(\mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0}) e^{R_-(\omega, \xi^\perp)x_1} \right)_{|t \geq 0}, \quad (6.4.4)$$

où $\omega, \xi_1, \xi^\perp$ sont les variables de Fourier respectives de t, x_1 et $x^\perp$, et avec :

$$R_- = -\frac{ik_{x_1}(1 - \epsilon \vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)}{\epsilon(1 - k_{x_1}^2)} - \frac{\sqrt{(1 - k_{x_1}^2)(1 + 2\epsilon\omega + \epsilon^2\xi^{\perp 2} - i\epsilon^2\nu_1) - (1 - \epsilon \vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)^2}}{\epsilon(1 - k_{x_1}^2)}.$$

Si $f^b \in H^{k+m}(\mathbb{R}_t^+; H^{2m}(\Gamma))$, la solution A_ϵ vérifie :

$$\|A_\epsilon\|_{H^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\mathcal{D}))} \leq \frac{C(N_0, \vec{k})}{\nu_1^{1/4}} \|f^b\|_{H^{k+m}(\mathbb{R}_t^+; H^{2m}(\Gamma))},$$

où $C(N_0, \vec{k})$ est indépendant de ϵ .

Preuve. Soit

$$B(t, x) = A_\epsilon(t, x) \mathbb{1}_{x_1 \geq 0} \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

Le problème (6.4.1) (6.4.2) (6.4.3) se réécrit :

$$\begin{aligned} 2i[\partial_t + \vec{k} \cdot \nabla]B + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla B] + i\epsilon \nu_1 B &= 2ik_{x_1} f^b \delta_{x_1=0} \mathbb{1}_{t \geq 0} + \\ \epsilon f^b ((1 - k_{x_1}^2)(\delta'_{x_1=0} + \partial_{x_1} A_{\epsilon|\Gamma} \delta_{x_1=0}) - 2k_{x_1} \vec{k}^\perp \cdot \nabla^\perp f^b \delta_{x_1=0}) &\mathbb{1}_{t \geq 0}. \end{aligned}$$

On en prend la transformée de Fourier, en notant $\hat{B} = \mathcal{F}_{(x,t)}(B)$ et $(\omega, \xi_1, \xi^\perp)$ les variables de Fourier respectives de $(t, x_1, x^\perp)$:

$$\begin{aligned} & \left((-2\omega - 2k_{x_1}\xi_1 - 2\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp) + i\epsilon\nu_1 - \epsilon((1 - k_{x_1}^2)\xi_1^2 + (|\xi^\perp|^2 - |\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp|^2) - 2k_{x_1}\xi_1\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp) \right) \hat{B} \\ &= (2ik_{x_1} + i\epsilon\xi_1(1 - k_{x_1}^2) - 2i\epsilon k_{x_1}\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp) \mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0})(\omega, \xi^\perp) \\ & \quad + \epsilon(1 - k_{x_1}^2) \mathcal{F}_{t,x^\perp}(\partial_{x_1} A_{\epsilon|\Gamma} \mathbb{1}_{t \geq 0})(\omega, \xi^\perp), \end{aligned}$$

ce que l'on symbolise par :

$$P(\omega, \xi_1, \xi^\perp) \hat{B} = \beta(\omega, \xi^\perp) + i\xi_1 \gamma(\omega, \xi^\perp),$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(\omega, \xi^\perp) &= 2ik_{x_1}(1 - \epsilon\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp) \mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0}) + \epsilon(1 - k_{x_1}^2) \mathcal{F}_{t,x^\perp}(\partial_{x_1} A_{\epsilon|\Gamma} \mathbb{1}_{t \geq 0}) \\ \gamma(\omega, \xi^\perp) &= \epsilon(1 - k_{x_1}^2) \mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0}) \end{aligned}$$

De la même façon que dans la partie II (cf. 7.2.2 et 7.3.1 pour des démonstrations plus détaillées) on met en évidence des fractions $\frac{1}{i\xi_1 - W}$. On peut écrire

$$P = -\epsilon\xi_1^2(1 - k_{x_1}^2) - 2\xi_1 k_{x_1}(1 - \epsilon\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp) + i\epsilon\nu_1 - 2\omega - 2\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp - \epsilon(|\xi^\perp|^2 - |\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp|^2),$$

soit encore $P = \epsilon(1 - k_{x_1}^2)(i\xi_1 - R_+(\xi^\perp, \omega))(i\xi_1 - R_-(\xi^\perp, \omega))$ avec

$$\begin{aligned} R_\pm &= -\frac{ik_{x_1}(1 - \epsilon\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)}{\epsilon(1 - k_{x_1}^2)} \pm \\ & \quad \frac{1}{\epsilon(1 - k_{x_1}^2)} \sqrt{(1 - k_{x_1}^2)(1 + 2\epsilon\omega + \epsilon^2\xi^\perp{}^2 - i\epsilon^2\nu_1) - (1 - \epsilon\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)^2}. \end{aligned}$$

où $\sqrt{}$ désigne la détermination principale de la racine (à partie réelle positive); comme $\nu_1(1 - k_{x_1}^2) > 0$, la racine considérée ne s'annule jamais, et $\mathcal{Re}(R_+) > 0$ et $\mathcal{Re}(R_-) < 0$. L'équation se réécrit :

$$\hat{B} = \frac{1}{R_+ - R_-} \frac{1}{\epsilon(1 - k_{x_1}^2)} \left(\frac{\beta(\omega, \xi^\perp) + R_+\gamma(\omega, \xi^\perp)}{i\xi_1 - R_+} - \frac{\beta(\omega, \xi^\perp) + R_-\gamma(\omega, \xi^\perp)}{i\xi_1 - R_-} \right).$$

D'après le lemme 7.2.1 de la partie 7.2.2, pour obtenir une solution à support sur $\mathbb{R}_{x_1}^+$, le terme en facteur de $\frac{1}{i\xi_1 - R_+}$ doit être nul, ce qui implique une "condition transparente" vérifiée par A en $\{x_1 = 0\}$:

$$\beta(\omega, \xi^\perp) + R_+\gamma(\omega, \xi^\perp) = 0.$$

On en déduit l'écriture de la solution (6.4.4).

Cette écriture de la solution montre que dans les hypothèses du théorème (en particulier $Supp(f^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \times \Gamma$), si $f^b \in H^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\Gamma))$, alors

$$A_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_{x_1}^+; H^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\Gamma)))$$

et on a une estimation indépendante de ϵ :

$$\|A_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_1}^+; H^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\Gamma)))} \leq C \|f^b\|_{H^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\Gamma))}.$$

Pour montrer une estimation indépendante de ϵ des dérivées de A_ϵ , il ne reste qu'à apprécier $\partial_{x_1}^k A_\epsilon$. Or on peut écrire :

$$\partial_{x_1}^k (\mathcal{F}_{t,x^\perp}(A_\epsilon \mathbb{1}_{x_1 \geq 0})) = R_-(\omega, \xi^\perp)^k (\mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0}) e^{R_-(\omega, \xi^\perp)x_1} \mathbb{1}_{x_1 \geq 0}).$$

On a donc :

$$\|\partial_{x_1}^k A_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathcal{D})}^2 = \iint_{\omega, \xi^\perp} |\mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0})(\omega, \xi^\perp)|^2 \frac{1}{2|\mathcal{R}e(R_-)|} |R_-(\omega, \xi^\perp)|^{2k} d\omega d\xi^\perp.$$

La fonction R_- peut encore s'écrire d'une façon qui permet de l'estimer indépendamment de ϵ :

$$R_- = \frac{ik_{x_1}}{1 - k_{x_1}^2} \left(\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp + \frac{(1 - k_{x_1}^2)(2\epsilon\omega + \epsilon^2\xi^{\perp 2} - i\epsilon^2\nu_1) + 2\epsilon f k^\perp \cdot \xi^\perp - \epsilon^2(\vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)^2}{k_{x_1}^2(1 + \sqrt{(1 - k_{x_1}^2)(1 + 2\epsilon\omega + \epsilon^2\xi^{\perp 2} - i\epsilon^2\nu_1) - (1 - \epsilon \vec{k}^\perp \cdot \xi^\perp)^2})} \right).$$

De cette écriture, on déduit :

$$|R_-(\omega, \xi^\perp)| \leq C(\vec{k}) (|\xi^\perp|^2 + |\omega|).$$

Finalement :

$$\|\partial_{x_1}^k A_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathcal{D})}^2 = \iint_{\omega, \xi^\perp} |\mathcal{F}_{t,x^\perp}(f^b \mathbb{1}_{t \geq 0})(\omega, \xi^\perp)|^2 \frac{1}{2|\mathcal{R}e(R_-)|} |R_-(\omega, \xi^\perp)|^{2k} d\omega d\xi^\perp.$$

Pour majorer sa partie réelle, écrivons la racine R_- sous la forme :

$$R_- = iW - Q\sqrt{a - i\nu_1},$$

où $Q \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépend que de k_{x_1} , et $a \in \mathbb{R}$ varie. On a donc $\mathcal{R}e(R_-) = -Q\mathcal{R}e(\sqrt{a - i\nu_1})$. On montre à l'aide des formules de trigonométrie qu'on a, pour $a \in \mathbb{R}$ et $\nu_1 > 0$:

$$|\mathcal{R}e(\sqrt{a - i\nu_1})| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + \nu_1^2} + a}{2}}.$$

Cela entraîne $|\mathcal{R}e(\sqrt{a - i\nu_1})| \geq \sqrt{\frac{\nu_1}{2\sqrt{2}}}$. Cela permet de minorer $\mathcal{R}e(R_-)$ indépendamment de ω , $\xi^\perp$ et ϵ :

$$|\mathcal{R}e(R_-)| \geq C\sqrt{\nu_1}.$$

Cela nous permet finalement d'écrire :

$$\|\partial_{x_1}^k A_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathcal{D})} \leq \frac{C}{\nu_1^{\frac{1}{4}}} \|f^b\|_{H^k(\mathbb{R}_t^+; H^{2k}(\Gamma))}.$$

On en déduit l'estimation recherchée. $\diamond$

6.4.2 Réécriture du problème

A partir de ce paragraphe, on revient au cas plus général où les rayons sont lentement variables. **On utilise la notation** $\vec{k} = \nabla\phi(\epsilon x)$.

Comme pour Ψ^b lors de la résolution de l'équation de Klein-Gordon, on réécrit l'équation de façon à obtenir une condition au bord homogène.

Le lemme de relèvement suivant est utile pour appliquer le théorème de Hille-Phillips (cf. démonstration du théorème 6.4.3).

Lemme 6.4.1 *Soit $A^b, g^b \in C_b^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)$ et $\text{Supp}(A^b), \text{Supp}(g^b) \subset \{(t, x); t > 0 \text{ et } x \in \Gamma\}$.*

Soit A_0 la solution du problème d'advection (6.2.19) (6.2.20) (6.2.21).

Il existe un prolongement $\tilde{A}^b$ de A^b sur $\mathbb{R}_t^+ \times \mathcal{D}$ tel que :

1. $2ik_{x_1}^b \tilde{A}^b|_{\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma} = 2ik_{x_1}^b A^b - \epsilon g^b + \epsilon((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b})\partial_t + \frac{\vec{k}_\perp^b}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp) A^b$.
2. $\tilde{A}^b$ "vérifie l'équation d'advection-Schrödinger (6.2.23) sur $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$ ", i.e. vérifie :

$$\left(2i[\partial_t + \vec{k} \cdot \nabla] \tilde{A}^b + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla \tilde{A}^b] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) \tilde{A}^b \right) \Big|_{x_1=0} = 0.$$

3. $\tilde{A}^b \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^\infty(\mathcal{D}))$ et $\text{Supp}(\tilde{A}^b) \subset \{t > 0\} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$.
4. $\|\partial_t^k \tilde{A}^b\|_{H^m(\mathcal{D})}(t) \leq C(m+k)(\|A^b\|_{C_b^{m+k+1}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} + \|g^b\|_{C_b^{m+k}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)})$, où $C(m+k)$ ne dépend pas de ϵ .

Preuve. De façon similaire qu'au lemme 6.1.1, on écrit $\tilde{A}^b = \alpha(t, x_\perp) \frac{x_1^2}{2\epsilon} + \beta(t, x_\perp)$ sur un voisinage de Γ . La condition 1 du lemme s'écrit :

$$\beta(t, x_\perp) = A^b(t, x_\perp) - \frac{\epsilon}{2ik_{x_1}^b} g^b(t, x_\perp) + \frac{\epsilon}{2i(k_{x_1}^b)^2} ((1 + (k_{x_1}^b)^2) \partial_t + \vec{k}_\perp^b \cdot \nabla_\perp) A^b$$

et la condition 2 :

$$2i\partial_t \beta + 2i \vec{k}_\perp^b \cdot \nabla_\perp \beta + \epsilon \nabla_\perp \cdot \left[\left(I - \vec{k}_\perp^{\otimes 2} \right) \nabla_\perp \beta \right] + \alpha (1 - (k_{x_1}^b)^2) + i\epsilon (\Delta \phi(\epsilon x) + \nu_1) \beta = 0,$$

ce qui donne α en fonction de β . On lisse ensuite $\tilde{A}^b$ au-delà de ce voisinage et on lui donne de fortes propriétés de décroissance. $\diamond$

Avec ce lemme, on peut réécrire le problème d'advection-Schrödinger de façon à avoir une condition au bord de Dirichlet homogène : c'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition 6.4.1 *Soit $B = A_\epsilon - \tilde{A}^b$, avec $\tilde{A}^b$ comme dans le lemme 6.4.1, en particulier $\text{Supp}(\tilde{A}^b) \subset \mathbb{R}^{+*} \times \mathcal{D}$. A_ϵ est alors solution du problème (6.2.23) (6.2.24) (6.2.25) ssi B est solution du problème suivant :*

$$2i[\partial_t B + \vec{k} \cdot \nabla] B + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla B] + i\epsilon(\nu_1 + \Delta \phi(\epsilon x)) B = f \quad (6.4.5)$$

$$B|_{t=0} = 0 \quad (6.4.6)$$

$$B|_\Gamma = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (6.4.7)$$

avec

$$f = -2i[\partial_t + \vec{k} \cdot \nabla] \tilde{A}^b - \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2}) \nabla \tilde{A}^b] - i\epsilon(\nu_1 + \Delta \phi(\epsilon x)) \tilde{A}^b,$$

Remarque 1 : Comme la fonction $\tilde{A}^b$ annule l'équation d'advection-Schrödinger (6.2.23) sur $R_t^+ \times \Gamma$, on a $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; H_0^1(\mathcal{D}))$, ce qui est indispensable à la résolution

du système ci-dessus (application du théorème de Hille-Phillips avec second membre : cf. démonstration du théorème 6.4.3).

De même, $\partial_t^k f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; H_0^1(\mathcal{D}))$ car les coefficients de l'équation ne dépendent pas du temps, ce qui est nécessaire pour démontrer la régularité d'une solution (itération du théorème de Hille-Phillips).

Remarque 2 : La fonction $\tilde{A}^b$ est très régulière, et pour tous m, k on peut la choisir telle que sa norme dans $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}_t^+; H^m(\mathcal{D}))$ soit majorée par un multiple de $\|f^b\|_{C_b^{m+k}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})}$. Donc la norme de f dans $\mathcal{C}_b^{k-1}(\mathbb{R}_t^+; H^{m-2}(\mathcal{D}))$ peut être majorée par un multiple de $\|f^b\|_{C_b^{m+k}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{n-1})} e^{-\frac{\epsilon \nu_1}{2} t}$. Ainsi, il suffit d'obtenir une estimation sur B pour en avoir aussitôt une pour A_ϵ .

Les deux parties qui suivent sont consacrées à l'étude de la solution B du problème homogène. Les théorèmes intermédiaires ci-dessous permettent d'obtenir le théorème 6.4.6 d'existence, d'unicité et de régularité pour la solution A_ϵ .

6.4.3 Existence et unicité

L'étude de l'équation elliptique associée à (6.4.5) a été faite sur l'espace entier dans le théorème 4.3.1 ; nous l'entreprenons maintenant sur le demi-espace.

Théorème 6.4.2 *Soit $\mathcal{AS}$ l'opérateur défini sur $H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ par :*

$$\mathcal{AS} = \vec{k} \cdot \nabla + \frac{\epsilon}{2}(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1) - i\frac{\epsilon}{2}\nabla \cdot [(I - \vec{k} \otimes \vec{k})\nabla], \quad (6.4.8)$$

où $\nu_1 \geq 0$ est constant, $\phi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathcal{D})$ solution régulière de l'équation eikonale stationnaire, avec $N \geq N_0 > 0$ une fonction régulière de $\mathcal{D}$. On pose

$$\lambda = 2\frac{1 - N_0}{N_0}.$$

Soit $f \in L^2(\mathcal{D})$. Il existe une unique solution $u \in H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ telle que

$$\mathcal{AS}u + i\frac{\lambda}{\epsilon}u = f \quad \text{sur } \mathcal{D}. \quad (6.4.9)$$

De plus,

on a l'inégalité suivante :

$$\epsilon \|D^2 u\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|Du\|_{L^2(\mathcal{D})} + \frac{1}{\epsilon} \|u\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C(\|\phi\|_{C_b^\infty(\mathcal{D})}, N_0) \|f\|_{L^2(\mathcal{D})}. \quad (6.4.10)$$

De plus, si $f \in H^m(\mathcal{D})$ et $\mathbf{f}$ vérifie $\text{Supp}(f) \subset \mathcal{D} \setminus \Gamma$, alors $u \in H^{m+2}(\mathcal{D})$ vérifie

$$\epsilon \|D^{m+2} u\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|D^{m+1} u\|_{L^2(\mathcal{D})} + \frac{1}{\epsilon} \|u\|_{H^m(\mathcal{D})} \leq C(\|\phi\|_{C_b^\infty(\mathcal{D})}, N_0) \|f\|_{H^m(\mathcal{D})}. \quad (6.4.11)$$

Preuve. On fait constamment référence ici à la démonstration du théorème 4.3.1.

1. Existence et unicité dans $H_0^1(\mathcal{D})$.

La démonstration est la même que dans $H^1(\mathbb{R}^n)$: on applique Lax-Milgram, et on obtient une partie de l'inégalité (6.4.10) pour $m = 0$:

$$\frac{1}{\epsilon} \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \leq C(N_0) \|f\|_{L^2}.$$

2. Régularité de la solution faible : $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Quand on dérive u dans des directions parallèles au bord, *i.e.* dans une direction $x_{i \geq 2}$, la démonstration est la même que dans $\mathbb{R}^n$ car si $u \in H^2 \cap H_0^1(\mathcal{D})$ (pour alléger la démonstration, on suppose déjà connue la régularité de u) alors on sait que $\partial_{x_{i \geq 2}} u \in H_0^1(\mathcal{D})$. On obtient l'inégalité suivante :

$$\epsilon \|\nabla \partial_{x_i} u\|_{L^2} + \|\partial_{x_i} u\|_{L^2} \leq C(\phi) \|f\|_{L^2}.$$

Pour la dérivée dans la direction x_1 , on écrit $\partial_{x_1}^2 u$ en fonction des autres dérivées secondes de u , grâce à l'équation (6.4.9), et on en déduit :

$$\epsilon \|\partial_{x_1}^2 u\|_{L^2} \leq C\left(\frac{1}{\epsilon} \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \epsilon \|\partial_{i \geq 1, j \geq 2}^2 u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right),$$

et on a donc obtenu l'inégalité (6.4.10)

3. Régularité dans H^{m+2}

On se ramène à la démonstration sur tout l'espace grâce au fait que $Supp(f) \subset \mathcal{D} \setminus \Gamma$. $\diamond$

Les théorèmes suivants : existence et unicité, régularité, se démontrent en suivant le même schéma que dans le cas de l'espace entier. Par rapport au chapitre 4, la résolution est simplifiée car la condition initiale A^{in} est nulle ; les espaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ sont remplacés par $H_0^1(\mathcal{D})$; en revanche l'équation d'advection-Schrödinger a un second membre f .

Théorème 6.4.3 *On fait les hypothèses 6.2.1.*

Soit $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^\infty(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}))$ et $Supp(f) \subset \mathbb{R}_t^{+} \times \mathcal{D}$.*

Il existe une unique solution $B \in C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{D})) \cap C(\mathbb{R}_+; H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}))$ au problème suivant :

$$2i[\partial_t B + \vec{k} \cdot \nabla B] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)B + \epsilon \nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2})\nabla B] = f, \quad (6.4.12)$$

$$B|_{t=0} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}. \quad (6.4.13)$$

De plus, B vérifie les inégalités suivantes :

1. $\|B\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))}t$
2. $\epsilon^2\|D^2B(t, \cdot)\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla B(t, \cdot)\|_{L^2} + \|B(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C(\phi, N_0)\|f\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))}(1+t).$

Preuve. Cette démonstration est calquée sur celle du théorème 4.3.2.

1. En multipliant l'équation (6.4.12) par $\bar{B}$ et en en prenant la partie imaginaire, il vient :

$$\partial_t(\|B\|_{L^2} e^{\frac{\nu_1}{2}t}) \leq C e^{\frac{\nu_1}{2}t} \|f\|_{L^2(\mathcal{D})}(t),$$

ce qui prouve l'estimation d'énergie 1.

2. L'existence et l'unicité se démontrent de la même façon que pour le théorème sur tout l'espace 4.3.2, avec

$$D(\mathcal{AS}) = H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}) \subset H = L^2(\mathcal{D}).$$

Le second membre f de l'équation vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \partial_t^k f(t) \in D(\mathcal{AS}) \text{ et } \partial_t^k f, \mathcal{AS} \partial_t^k f \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{D})).$$

λ étant défini dans le théorème 6.4.2, cela permet d'appliquer le théorème de Hille-Phillips au problème :

$$\begin{aligned}\partial_t u + \mathcal{A}S u + i\frac{\lambda}{\epsilon}u &= f e^{-i\frac{\lambda}{\epsilon}t}, \\ u|_{t=0} &= 0,\end{aligned}$$

ainsi qu'ultérieurement à toutes ses dérivées en temps qui vérifient également $\partial_t^k u|_{t=0} = 0$. On écrit alors $B = u e^{i\frac{\lambda}{\epsilon}t}$.

3. En dérivant en temps l'équation satisfaite par B , on obtient pour $H = \partial_t B$ le même problème que pour B mais avec $\partial_t f$ comme second membre :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \mathcal{A}S H &= \partial_t f, \\ H|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

On applique donc l'inégalité 1 à H :

$$\|H\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq C \|f\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))} t,$$

donc comme $\mathcal{A}S B + i\frac{\lambda}{\epsilon}B = -H + f + i\frac{\lambda}{\epsilon}B$, on a, en utilisant la majoration du 1 :

$$\|\mathcal{A}S B + i\frac{\lambda}{\epsilon}B\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq \frac{C}{\epsilon} \|f\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))} (1+t).$$

Avec l'inégalité (6.4.10), on en déduit l'inégalité 2 du théorème. $\diamond$

6.4.4 Régularité

Pour les théorèmes de régularité, on effectue un recouvrement par cartes locales du domaine $\mathcal{D}$, en distinguant deux cas :

1. Loin du bord : la démonstration du cas dans l'espace entier s'applique telle quelle. On a seulement rajouté un second membre à l'équation, et supposé $A^{in} = 0$.
2. Au voisinage du bord : comme on a supposé $N = cste$ au voisinage du bord on se trouve dans le cas droit. On applique alors le théorème 6.4.1 qui donne directement un résultat indépendant de ϵ pour A_ϵ .

Théorème 6.4.4 *Soit $m, j \in \mathbb{N}$. Les hypothèses du théorème 6.4.3 sont supposées vérifiées. La solution B du problème (6.4.12) (6.4.13) est dans $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}_+; H^{2j} \cap H_0^1(\mathcal{D}))$ et vérifie les inégalités suivantes sur tout ouvert $\Omega \subset \subset \mathcal{D}$:*

$$\sum_{k=0}^{2m} \epsilon^k \|D^k B\|_{L^2(\Omega)}(t) \leq C(N, \phi) \|f\|_{\mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))} (1+t), \quad (6.4.14)$$

et pour $j \leq m$:

$$\sum_{k=0}^{2m-2j} \epsilon^k \|D^k \partial_t^j B\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))} \leq C(N, \phi) \|f\|_{\mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))} (1+t). \quad (6.4.15)$$

Preuve. La démonstration est semblable à celle du théorème 4.3.3. On se place en-dehors d'un voisinage du bord, ce qui permet de se ramener au théorème 4.3.3.

La démonstration ci-dessous a donc seulement pour but de montrer quel rôle joue le second membre. Ce second membre vérifie $\partial_{t^k}^k f \in H_0^1(\mathcal{D})$ donc $\partial_t^k f \in D(\mathcal{AS})$, ce qui est nécessaire pour appliquer Hille-Phillips. Par récurrence :

1. $m = 1$: l'assertion (6.4.14) correspond à l'assertion 2 du théorème 6.4.3. Pour $j = 1$, l'assertion (6.4.15) a été prouvée au cours de la démonstration du théorème 6.4.3.
2. $m \geq 2$: on fait l'hypothèse de récurrence forte que les inégalités (6.4.14) et (6.4.15) sont vérifiées à tout ordre $\leq m-1$ pour tout second membre f vérifiant les propriétés demandées. Cela entraîne que $H = \partial_t B$ vérifie, pour tout $0 \leq j \leq m-1$, la relation (6.4.15), c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{2m-2j-2} \epsilon^k \|D^k \partial_t^j H\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} \leq C(N, \phi) \|f\|_{\mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))} (1+t),$$

donc l'inégalité (6.4.15) est vérifiée pour $1 \leq j \leq m$. Il reste à montrer l'assertion (6.4.14), qui est aussi égale à l'assertion (6.4.15) pour $j = 0$. Or l'hypothèse de récurrence étant vérifiée pour la fonction B au rang $m-1$, cela se résume à devoir montrer que :

$$\epsilon^{2m-1} \|D^{2m-1} B\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} + \epsilon^{2m} \|D^{2m} B\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} \leq$$

$$e^{-\frac{\epsilon\nu_1}{2}t}C(N, \phi)\|f_1\|_{\mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{D}))}(1+t).$$

D'après l'inégalité (6.4.11), on a :

$$\begin{aligned} \epsilon\|D^{2m}B\|_{L^2}(t) + \|D^{2m-1}B\|_{L^2}(t) &\leq C\|\mathcal{A}SB + i\frac{\lambda}{\epsilon}B\|_{H^{2m-2}}(t) \\ &\leq C\left(\frac{1}{\epsilon}\|B\|_{H^{2m-2}} + \|\partial_t B\|_{H^{2m-2}} + \|f\|_{H^{2m-2}}\right)(t). \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à B et $\partial_t B$ et on obtient l'inégalité voulue. $\diamond$

Théorème 6.4.5 *Sous les hypothèses du théorème 6.4.4, la solution B du système (6.4.12) (6.4.13) vérifie l'inégalité suivante sur un ouvert $\Omega \subset \subset \mathcal{D}$:*

$$\|B\|_{H^m(\Omega)}(t) \leq (1+t^{m+1})C(\phi, N_0)\|f\|_{\cap \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}_+; H^{m-k}(\mathcal{D}))}.$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du théorème 4.3.4 : elle se fait en dérivant selon les directions de x l'équation (6.4.12). La seule différence est la présence d'un second membre vérifiant, pour tout $k \leq m$:

$$D^k f(t) \in H_0^1(\mathcal{D}), \quad \|D^k f\|_{L^2(\mathcal{D})}(t) \leq C(m, \phi, N_0)\|f\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; H^k(\mathcal{D}))}.$$

$\diamond$

Conclusion : existence, unicité et régularité pour A_ϵ .

Théorème 6.4.6 *On fait les hypothèses 6.2.1.*

Il existe une unique solution $A_\epsilon \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}_+; H^{2j}(\mathcal{D}))$ pour tout (m, j) au problème suivant :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \vec{k} \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_\epsilon + \epsilon\nabla \cdot [(I - \vec{k}^{\otimes 2})\nabla A_\epsilon] = 0 \quad (6.4.16)$$

$$A_{\epsilon|t=0} = 0 \quad (6.4.17)$$

$$2ik_{x_1}^b(A_{\epsilon|x_1=0} - A^b) = -\epsilon g^b + \epsilon\left((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b})\partial_t + \frac{\vec{k}_\perp^b}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp\right)A^b \quad (6.4.18)$$

De plus, A_ϵ vérifie l'inégalité suivante :

$$\|A_\epsilon\|_{H^m(\mathcal{D})}(t) \leq (1+t^{m+1})C(\phi, N_0)(\|A^b\|_{\mathcal{C}_b^{m+3}(\mathbb{R}_+ \times \Gamma)} + \|g^b\|_{\mathcal{C}_b^{m+2}(\mathbb{R}_+ \times \Gamma)}).$$

Preuve. On commence par appliquer le lemme de relèvement 6.4.1, qui permet de trouver une fonction $\tilde{A}^b$ adaptée au problème. On applique alors la proposition 6.4.1 avec $B = A_\epsilon - \tilde{A}^b$. Le second membre f de l'équation vérifiée par B a toutes les propriétés nécessaires pour qu'on puisse appliquer à B les théorèmes 6.4.3 et 6.4.5, qui entraînent :

$$\|B(t, \cdot)\|_{H^m(\mathcal{D})} \leq (1 + t^{m+1})C\|f\|_{\cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+; H^{m-k})}.$$

Donc d'après le lemme de relèvement 6.4.1 :

$$\|B(t, \cdot)\|_{H^m(\mathcal{D})} \leq (1 + t^{m+1})C \left(\|A^b\|_{\mathcal{C}_b^{m+3}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} + \|g^b\|_{\mathcal{C}_b^{m+2}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} \right).$$

Le théorème ci-dessus en découle sur tout ouvert $\Omega \subset\subset \mathcal{D}$. Au voisinage de Γ , comme on a supposé $N = cste$ au voisinage du bord on se trouve dans le cas droit, on applique donc le théorème 6.4.1, puis on effectue un raccordement par cartes locales. $\diamond$

6.4.5 Résultat d'approximation

Théorème 6.4.7 *On fait les hypothèses 6.2.1.*

Soit $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n))$ l'unique solution du problème :

$$\epsilon^2(\partial_{tt} - \Delta)\Psi + N(\epsilon x)\Psi + \epsilon^3\nu_1\partial_t\Psi = 0, \quad (6.4.19)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.4.20)$$

$$\partial_t\Psi|_{t=0} = 0, \quad (6.4.21)$$

$$(k_{x_1}^b\partial_t - \partial_{x_1})\Psi|_{x_1=0} = \left(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon}A^b + g^b\right)e^{i\frac{\bar{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}}. \quad (6.4.22)$$

Soit A_ϵ l'unique solution du problème (6.4.16) (6.4.17) (6.4.18).

Soit Ψ_ϵ définie par :

$$\Psi_\epsilon = A_\epsilon(t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$$

L'inégalité suivante est vérifiée par $E_\epsilon(t)$, avec

$$E_\epsilon(t) = 2N_0\|\Psi - \Psi_\epsilon\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2\|\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2(t) + \epsilon^2\|\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)\|_{L^2}^2 :$$

$$E_\epsilon(t) \leq C\epsilon^4(e^t - 1)(1 + t^{10}) \left(\|g^b\|_{C_b^6(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}^2 + \|A^b\|_{C_b^7(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}^2 \right).$$

Preuve. On utilise l'estimation d'énergie (6.1.14) du théorème 6.1.2 : il ne reste plus qu'à évaluer les termes g_ϵ , R_ϵ et S_ϵ du théorème.

1. Estimation de $g_\epsilon = \epsilon(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1})(\Psi - \Psi_\epsilon)|_{\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma}$

Il est immédiat que

$$G_\epsilon = (g_\epsilon e^{-i \frac{\vec{k}^b \cdot x - t}{\epsilon}})|_{x_1=0} = -2ik_{x_1}^b A^b + \epsilon g^b + 2ik_{x_1}^b A_{\epsilon|_{x_1=0}} - \epsilon [(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A_\epsilon]|_{x_1=0}.$$

En utilisant la condition au bord (6.4.18) vérifiée par A_ϵ , il vient :

$$G_\epsilon = \epsilon \left[(k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b}) \partial_t A^b + \frac{\vec{k}^b \cdot \perp}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp A^b \right] - \epsilon [(k_{x_1}^b \partial_t - \partial_{x_1}) A_\epsilon]|_{x_1=0}.$$

On écrit $G_\epsilon = \alpha + \beta$ avec

$$\alpha = -\epsilon k_{x_1}^b \partial_t (A_{\epsilon|_{x_1=0}} - A^b) = -\frac{\epsilon^2 k_{x_1}^b}{2ik_{x_1}^b} \partial_t \left[-g^b + ((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b}) \partial_t + \frac{\vec{k}^b \cdot \perp}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp) A^b \right],$$

donc

$$\|\alpha\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{D}))} \leq \epsilon^2 C \left(\|g^b\|_{C_b^1(0,T;L^2(\Gamma))} + \|A^b\|_{C_b^2(0,T;L^2(\Gamma)) \cap C_b^1(0,T;H^1(\Gamma))} \right).$$

Et

$$\beta = \epsilon \partial_{x_1} A_\epsilon + \frac{\epsilon}{k_{x_1}^b} \partial_t A^b + \epsilon \frac{\vec{k}^b \cdot \perp}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp A^b.$$

On remplace $\partial_{x_1} A_\epsilon$ par les autres dérivées de A_ϵ , grâce à l'équation d'advection-Schrödinger (6.4.16) satisfaite par la fonction A_ϵ :

$$\beta = -\frac{\epsilon^2}{2ik_{x_1}^b} \nabla \cdot [(I - \nabla \phi^{\otimes 2}(\epsilon x)) \nabla A_\epsilon] - \frac{\epsilon}{k_{x_1}^b} (\partial_t + \vec{k}^b \cdot \perp \cdot \nabla_\perp) (A_\epsilon - A^b).$$

Grâce à la condition au bord (6.4.18), on a :

$$(\partial_t + \vec{k}^b \cdot \perp \cdot \nabla_\perp) (A_\epsilon - A^b) = \frac{\epsilon}{2ik_{x_1}^b} (\partial_t + \vec{k}^b \cdot \perp \cdot \nabla_\perp) \left(-g^b + ((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b}) \partial_t + \frac{\vec{k}^b \cdot \perp}{k_{x_1}^b} \cdot \nabla_\perp) A^b \right).$$

On en déduit :

$$\|\beta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))} \leq C\epsilon^2 \left(\|A_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^3(\mathcal{D}))}^+ \right. \\ \left. \|g^b\|_{C_b^1(0,T;L^2(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Gamma))} + \|A^b\|_{C_b^2(0,T;L^2(\Gamma)) \cap C_b^1(0,T;H^1(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Gamma))} \right).$$

On a donc la même estimation sur G_ϵ . Grâce au fait que les supports de A^b et g^b soient dans $\mathbb{R}_t^+ \times B_\Gamma(0, R)$, on peut remplacer les majorations en $\|A^b, g^b\|_{calC_b^k(0,T;H^m(\Gamma))}$ par des majorations en $\|A^b, g^b\|_{calC_b^{m+k}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)}$, soit en définitive :

$$\|g_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))} \leq \epsilon^2 C \left(\|A_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^3(\mathcal{D}))} + \|g^b\|_{calC_b^1(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} + \|A^b\|_{calC_b^2(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)} \right).$$

2. Estimation de $R_\epsilon = \partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)|_{t=0} = -\partial_t \Psi|_{t=0}$ $R_\epsilon = -(\partial_t A_\epsilon)|_{t=0} e^{i \frac{\vec{k}^b \cdot \vec{x}}{\epsilon}}$. On en déduit, grâce à l'équation (6.4.16) vérifiée par A_ϵ , que $R_\epsilon = 0$.
3. Calcul de S_ϵ

Ce calcul a déjà été fait dans la partie 4.3.3, et on trouve :

$$S_\epsilon = \epsilon^2 P_4(\partial_i) A_\epsilon,$$

où P_4 est un polynôme de degré 4 en les dérivées de A_ϵ . donc l'inégalité de régularité du théorème 6.4.6 pour $m = 4$ permet de conclure que :

$$\|A_\epsilon\|_{H^4(\mathcal{D})}(t) \leq C(1 + t^5) (\|g^b\|_{C_b^6(\mathbb{R}_+ \times \Gamma)} + \|A^b\|_{C_b^7(\mathbb{R}_+ \times \Gamma)}).$$

On en déduit l'estimation recherchée. $\diamond$

Partie II : Equation d'advection-Schrödinger et conditions absorbantes

Article à paraître écrit en collaboration avec F. Golse et R. Sentis, et référencé dans la bibliographie en [22].

Chapitre 7

Boundary Value Problem for an oblique paraxial Model of Light Propagation : the Advection Schrödinger equation

7.1 Introduction

To simulate the propagation of a monochromatic laser beam in a medium where the local refractive index is nearby a constant, it is classical to use the paraxial approximation of the Maxwell equation. This approximation takes into account diffraction and refraction phenomena ; it is intensively used in optic models and in a lot of models related to laser-plasma interaction (cf [32], [6], [48] and the bibliography of these last references). Let us first recall briefly the outlines of this approximation : according to laws of optics, the laser electromagnetic field may be modeled by the solution ψ of the following frequency Maxwell equation (the Helmholtz problem) :

$$\epsilon^2 \Delta \psi + \psi + i2\nu_t \epsilon \psi = 0, \tag{7.1.1}$$

where ϵ^{-1} is the wave number of the laser wave in a medium corresponding to the mean value of the refractive index and $\nu_t = \nu + i\mu$ is a complex coefficient : its real part ν corresponds to a conveniently scaled absorption coefficient and its imaginary part μ to the variation of the refraction index ($1 - 2\epsilon\mu$ is equal to the refractive index up to a multiplicative constant).

Link with Part I.

Notice that neither the coefficient ϵ nor the coefficient ν are here equal to the coefficients ϵ and ν of Part I, which we denote here by ϵ_I and ν_I . Indeed, the function ψ is related to the function Ψ solution of the Klein-Gordon equation (1.3.1) of part I by the relation :

$$\Psi = \psi e^{-i\frac{t}{\epsilon_I}}.$$

This leads to the following equation for the function ψ :

$$(1 - N)\psi + \epsilon_I^2 \Delta \psi - i\epsilon_I \nu_I \psi = 0,$$

Noting $N = N_0 + \delta N$, where N_0 is the dimensionless electron density of the medium, and defining ϵ by

$$\epsilon_I = \epsilon \sqrt{1 - N_0},$$

we have :

$$\epsilon^2 \Delta \psi + \psi - \frac{\delta N}{1 - N_0} \psi + i \frac{\epsilon \nu_I}{\sqrt{1 - N_0}} \psi = 0.$$

Consequently, we have the following relation between ν_t and ν_I :

$$\nu_t = \nu + i\mu = \frac{1}{2} \frac{\nu_I}{\sqrt{1 - N_0}} + \frac{i}{2\epsilon} \frac{\delta N}{1 - N_0}.$$

The first basic assumption is that the wave length $2\pi\epsilon$ is small compared to the size of the simulation domain. Assume also that the light propagates according a fixed direction defined by the unit vector $\vec{k}$, which is related to the vector $\vec{k}_I$ of part I by :

$$\vec{k} = \frac{\vec{k}_I}{|\vec{k}_I|}.$$

Let us denote the longitudinal and the transverse coordinates by $z = \vec{x} \cdot \vec{k}$ and $X = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{k}) \vec{k}$; the gradient with respect to X is denoted $\nabla_{\perp} = \nabla - \vec{k} (\vec{k} \cdot \nabla)$. Now, if we replace ψ by $u \exp(\frac{i \vec{k} \cdot \vec{x}}{\epsilon})$, the equation (7.1.1) may be written as :

$$\epsilon(2i\nu_t u + 2i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} u) + \epsilon^2 \Delta_{\perp} u = -\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} u.$$

where $\Delta_{\perp}$ is the Laplacian operator in the transverse variable. Now, assuming that u is slowly varying with respect to the longitudinal variable, we can neglect the right hand side of the previous equation (we will check this *a posteriori*). Therefore u satisfies the classical paraxial equation for wave propagation, which is a linear Schrödinger equation :

$$i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} u + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} u + i\nu_t u = 0. \quad (7.1.2)$$

Classically, one addresses the paraxial equation only in the case where the laser beam enters the simulation domain with a very small incidence angle that is, say, when the vector $\vec{k}$ is normal to a boundary of the simulation domain. In such a problem, the boundary condition on the entrance boundary $\{x = 0\}$ is straightforward : it is simply the value of the solution, which is a data. On the face $\{y = 0\}$ of the domain parallel to the vector $\vec{k}$, to deal correctly with the boundary conditions one has to introduce a fractional derivative according to the x variable (see [3], [14] for a mathematical approach and [33] for a physical approach ; see also appendix 7.4.2).

But, when the incidence angle between $\vec{k}$ and the normal vector to the entrance boundary $\vec{e}_x$ is not small any more, the classical approach is not valid. One way to overcome this difficulty was proposed in [29] by replacing the transverse Laplacian by a pseudodifferential operator ; but to deal with the spatial envelope this reference writes $\psi = w \exp(\frac{i \vec{e}_x \cdot \vec{x}}{\epsilon})$ and assumes that w is slowly varying with respect to the coordinate $\vec{e}_x \cdot \vec{x}$. Here, we keep the scaling

$$\psi = u \exp(\frac{i \vec{k} \cdot \vec{x}}{\epsilon}), \quad (7.1.3)$$

with u slowly varying with respect to $\vec{k} \cdot \vec{x}$. The aim of this article is to analyse the equation (7.1.2) with an arbitrary angle between $\vec{k}$ and $\vec{e}_x$. First, we have to formulate the right entrance boundary condition and to show that the corresponding problem is well posed. For this purpose, we consider a 2D problem but most of the ideas developed here may be extended to the 3D case.

For the statement of the entrance boundary condition, one assumes that a fixed plane wave $\psi^{in} = u^{in} \exp(\frac{i\vec{k} \cdot \vec{x}}{\epsilon})$ is coming into the domain where u^{in} is a given function of the variable y . Remark that for the Helmholtz problem, the boundary condition is classical and may reads as :

$$(\epsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + i \vec{k} \cdot \vec{n})(\psi - u^{in} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}/\epsilon}) = 0.$$

where $\vec{n}$ is the outwards unit normal to the domain. By using (7.1.3) in this expression, the corresponding entrance boundary condition for the equation (7.1.2) may be written in a natural way as :

$$(\epsilon \vec{n} \cdot \nabla_{\perp} + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})(u - u^{in}) = 0. \quad (7.1.4)$$

For technical reasons which will appear in the sequel, we assume in this paper that

$$\inf_{\vec{x}} \nu(\vec{x}) > 0. \quad (7.1.5)$$

Moreover, in section 2.2 and 3, we assume that the imaginary part μ of ν_t is zero (*i.e.* $N = N_0$) and that ν is a strictly positive constant (notice that the main difficulties concerning the boundary conditions may be seen in this case).

In section 7.2, we analyse the problem (7.1.2) (7.1.4) in the half-space

$$\{(x, y) \quad s.t. \quad x \geq 0\},$$

which is the simplest case. First we show, using classical energy estimates in the space $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, that for any ν_t satisfying (7.1.5) the solution is unique. Then, in the case where ν is a strictly positive constant, we give an exact formula for the solution. This analysis is used in the article [23] to solve numerically the problem (7.1.2) (7.1.4) in the general framework of (7.1.5).

In section 7.3 , we focus on the problem (7.1.2) (7.1.4) in the quadrant $\{(x, y) \text{ s.t. } x \geq 0, y \geq 0\}$. We look for a condition on the boundary $\{y = 0\}$ such that the restricted problem :

1. is well-posed,
2. admits for a solution the restriction to the quadrant of the solution in the half-space.

Such a condition is called a *transparent boundary condition*. If the solution of the quadrant is not the exact restriction of the solution in the half plane, but is close to it in some sense, the boundary condition is called an *absorbing boundary condition*.

We state the right transparent boundary condition on the boundary $\{y = 0\}$, and we analyse the corresponding problem and its relation with the half-space problem. To be more precise, we show that if the ray enters in the quadrant (*i.e* if $\vec{k} \cdot \vec{n} \leq 0$) our condition is a *transparent* one, and only an *absorbing* one if it goes out of it (*i.e* if $\vec{k} \cdot \vec{n} \geq 0$).

7.2 Half-space problem

Here we address a problem where the simulation domain is the half-space

$$\mathcal{D} = \{\vec{x} \cdot \vec{e}_x \geq 0\}.$$

Set $\vec{x} = (x, y)$ and define $\vec{k} = (k_x, k_y)$ to be a unitary vector of the plane which indicates the direction of the laser beam (we must of course have $k_x > 0$). Assuming that (7.1.5) holds and that μ is a bounded function, we consider the following problem in the half-space :

$$i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} u + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} u - \mu u + i\nu u = 0, \quad (7.2.1)$$

$$(i\epsilon D - 2 \vec{k} \cdot \vec{n})(u - u^{in})|_{x=0} = 0, \quad (7.2.2)$$

where we have denoted $D = \vec{n} \cdot \nabla_{\perp} = k_y(k_x \partial_y - k_y \partial_x)$. In the subsection 7.2.1, we use energy methods to prove the uniqueness and the stability of a solution with the

assumption (7.1.5). In the subsection 7.2.2, the Fourier transforms give us a formula to express this solution in the special case where ν is a constant and μ is zero.

7.2.1 Energy estimate

Proposition 1 *Let $u \in H^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ be a solution to the problem (7.2.1) (7.2.2) in the half-plane $\{x \geq 0\}$. We have the two following equivalent identities :*

$$\begin{aligned} i) \quad & \iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 + \int_{\Gamma_0} \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{2} \left| \frac{(i\epsilon D + 2\vec{k} \cdot \vec{n})u}{2|\vec{k} \cdot \vec{n}|} \right|^2 = \\ & \int_{\Gamma_0} |\vec{k} \cdot \vec{n}| \left(|u|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{(i\epsilon D - 2\vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}}{2|\vec{k} \cdot \vec{n}|} \right|^2 \right), \\ ii) \quad & \iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 + \int_{\Gamma_0} |\vec{k} \cdot \vec{n}| |u|^2 = -\mathcal{I}m \left(\int_{\Gamma_0} \bar{u} (\epsilon D + 2i\vec{k} \cdot \vec{n}) u^{in} \right). \end{aligned}$$

Proof. Let us take the scalar product of the equation (7.1.2) with the solution u and compute twice its imaginary part. We find :

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\vec{k} \cdot \vec{\nabla} |u|^2 + \frac{\epsilon}{2i} (\bar{u} \Delta_{\perp} u - u \Delta_{\perp} \bar{u}) + 2\nu|u|^2 \right) dx = 0.$$

We apply the Green formula, and find :

$$\int_{\Gamma_0} \left(|u|^2 \vec{k} \cdot \vec{n} + \frac{\epsilon}{2i} (\bar{u} Du - u D\bar{u}) \right) dS(x) + \iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 dx = 0.$$

To obtain the second estimate, we just use the boundary condition (7.2.2) to replace in this equality the term $\frac{\epsilon}{2i} (\bar{u} Du - u D\bar{u})$:

$$\frac{\epsilon}{2i} (\bar{u} Du - u D\bar{u}) = -2\vec{k} \cdot \vec{n} |u|^2 + \mathcal{I}m (\bar{u} (\epsilon D + 2i\vec{k} \cdot \vec{n}) u^{in}).$$

To obtain the first estimate, we use the following identity :

$$-4i\epsilon \vec{k} \cdot \vec{n} (\bar{u} Du - u D\bar{u}) = |i\epsilon Du - 2\vec{k} \cdot \vec{n} u|^2 - |i\epsilon Du + 2\vec{k} \cdot \vec{n} u|^2.$$

By replacing $\vec{k} \cdot \vec{n}$ by $-\vec{k} \cdot \vec{n}$, we get :

$$\iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 - \int_{\Gamma_0} |u|^2 |\vec{k} \cdot \vec{n}| - \int_{\Gamma_0} \frac{1}{8|\vec{k} \cdot \vec{n}|} (|\epsilon D u + 2i \vec{k} \cdot \vec{n} u|^2 - |\epsilon D u - 2i \vec{k} \cdot \vec{n} u|^2) = 0.$$

According to the boundary condition (7.2.2), this yields the first desired energy estimate. $\diamond$

The first estimate can be interpreted as the conservation of energy, the right hand side being the incoming and the left hand side the outgoing and the absorbed energy. From the second estimate we deduce the following theorem.

Theorem 7.2.1 *Let $(i\epsilon D - 2\vec{k} \cdot \vec{n})u^{in} \in L^2(\mathbb{R})$. If $u \in H^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ is a solution to the problem (7.2.1) (7.2.2) in the half-plane, it is unique. Moreover, we have the following stability estimate, with a constant C independent of ν, μ :*

$$\iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 + \int_{\Gamma_0} |\vec{k} \cdot \vec{n}| |u|^2 \leq C \int_{\Gamma_0} |(i\epsilon D - 2\vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}|^2.$$

Proof. If $(i\epsilon D - 2\vec{k} \cdot \vec{n})u^{in} = 0$ then $\iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 dx = 0$ so $u = 0$, so the solution u is unique. To obtain the stability estimate, we first write that the second estimate of the proposition 1 implies :

$$\int_{\Gamma_0} |\vec{k} \cdot \vec{n}| |u|^2 dS(x) \leq \sqrt{\int_{\Gamma_0} |u|^2 dS(x)} \sqrt{\int_{\Gamma_0} |(\epsilon D + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}|^2 dS(x)},$$

so

$$\sqrt{\int_{\Gamma_0} |u|^2 dS(x)} \leq \frac{1}{|\vec{k} \cdot \vec{n}|} \sqrt{\int_{\Gamma_0} |(\epsilon D + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}|^2 dS(x)}.$$

We report this result in the second estimate of the proposition 1 :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} 2\nu|u|^2 dx + \int_{\Gamma_0} |\vec{k} \cdot \vec{n}| |u|^2 dS(x) &\leq \sqrt{\int_{\Gamma_0} |u|^2 dS(x)} \sqrt{\int_{\Gamma_0} |(\epsilon D + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}|^2 dS(x)} \\ &\leq \frac{1}{|\vec{k} \cdot \vec{n}|} \int_{\Gamma_0} |(\epsilon D + 2i \vec{k} \cdot \vec{n})u^{in}|^2 dS(x). \end{aligned}$$

◇

Remark : the stability result cannot be used to let the absorption tend to zero, since the norm on the left side depends on the coefficient ν . In the section 7.2.2, we prove existence, uniqueness and “real” stability for a much larger class of solutions.

7.2.2 Fourier method

In the sequel of this article, we assume that

$$\mu = 0, \quad \text{and } \nu \text{ is a strictly positive constant}$$

and we write

$$2k_x g = i\epsilon k_y (k_x \partial_y - k_y \partial_x) u^{in} + 2k_x u^{in}.$$

The problem (7.1.2) (7.1.4) may be written under the form :

$$i(k_x \partial_x + k_y \partial_y)u + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2 \partial_{yy}^2 - 2k_x k_y \partial_{xy}^2 + k_y^2 \partial_{xx}^2)u + i\nu u = 0 \text{ on } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (7.2.3)$$

$$i\epsilon k_y (k_x \partial_y - k_y \partial_x) u|_{x=0} + 2k_x u|_{x=0} = g. \quad (7.2.4)$$

In the sequel, we denote the Fourier variables of the variables x and y respectively by ξ and η and the Fourier transform in x and y by $\mathcal{F}_x$ and $\mathcal{F}_y$.

Using Fourier transformation, we claim here that there exists an explicit solution to this problem. Denote

$$R_-(i\eta) = i \frac{k_x \eta}{k_y} - i \frac{k_x}{\epsilon k_y^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}} \right).$$

Theorem 7.2.2 *Here and in the sequel, $\sqrt{}$ denotes the principal determination of the square root (its real part is positive); it is crucial that ν is strictly positive in order to define it without ambiguity.*

Let $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ be the space of tempered distributions and $g \in \mathcal{S}'$. There exists a unique tempered distribution $u \in \mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_y(\mathbb{R}))$ to the problem (7.2.3) (7.2.4), which is :

$$\mathcal{F}_y(u; x, \eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g; \eta)}{1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x},$$

It satisfies also :

$$\left(\partial_x - R_-(i\eta) \right) \mathcal{F}_y(u; x, \eta) = 0.$$

From this theorem, we can deduce the following corollaries :

Corollary 7.2.1 *If $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ then the solution u to the problem (7.2.3) (7.2.4) is in $\mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))$, and the following stability inequality stands for some constant C not depending on the absorption factor ν :*

$$\|u\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))} \leq C \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}.$$

On a general manner, if $g \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, then $u \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, H_y^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ and we have the following inequality :

$$\|u\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}_+, H_y^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))} \leq C \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

The space chosen for the solution is the most convenient because the stability obtained does not depend on the absorption coefficient ν . However, we can find existence and uniqueness of a solution in other spaces, provided other conditions on the initial data g . For instance :

Corollary 7.2.2

1. *If $\frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{(1+|\eta|^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{|\operatorname{Re}(R_-(i\eta))|}} \in L_\eta^2(\mathbb{R})$ then $u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.*
2. *If $\frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{|\operatorname{Re}(R_-(i\eta))|}} \in L_\eta^2(\mathbb{R})$ with $s > 0$ then $u \in L_y^\infty(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}_+))$. in a general manner, if $\frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |R_-(i\eta)|^m}{\sqrt{|\operatorname{Re}(R_-(i\eta))|}} \in L_\eta^2(\mathbb{R})$ then $u \in L_y^\infty(\mathbb{R}, H_x^m(\mathbb{R}_+))$.*

Notice that when $\nu \rightarrow 0$, $\operatorname{Re}(R_-(i\eta))_{\nu=0}$ values zero in a half-line, then with these assumptions u is not uniformly bounded according to the absorption coefficient ν .

The three following subsections are devoted to the proof of theorem 2.

Fourier transform in y of the problem

Let u be a solution of the problem (7.2.3) (7.2.4) and v the extension of u by zero in the whole space : $v(x, y) = u(x, y)\mathbb{1}_{x \geq 0}$. By introducing formally the function v in equation (7.2.3) we get :

$$i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} v + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} v + i\nu v = \left((ik_x - \frac{\epsilon k_y}{2} (2k_x \partial_y - k_y \partial_x)) u(0, y) \right) \delta_{x=0} + \frac{\epsilon k_y^2}{2} u(0, y) \delta'_{x=0}.$$

The meaning of the term $\partial_x u(0, y)$ is given by the entrance boundary condition (7.2.4) :

$$i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} v + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} v + i\nu v = ik_x g(y) \delta_{x=0} - \frac{\epsilon k_y}{2} (k_x \partial_y u(0, y) \delta_{x=0} - k_y u(0, y) \delta'_{x=0}).$$

Assuming that $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, we are allowed to take the Fourier transform of this expression. Let us define $P_{\nu}(X, Y)$ as the polynomial which characterizes the differential operator of the equation, *i.e.* :

$$P_{\nu}(\partial_x, \partial_y) = i(k_x \partial_x + k_y \partial_y) + \frac{\epsilon}{2} (k_y^2 \partial_{xx}^2 - 2k_x k_y \partial_{xy}^2 + k_x^2 \partial_{yy}^2) + i\nu.$$

If we write $u_0(y) = u(0, y)$, the Fourier transform in y of the equation in v reads :

$$P_{\nu}(\partial_x, i\eta) \mathcal{F}_y(v; x, \eta) = \frac{\epsilon k_y^2}{2} \left\{ \left(\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \mathcal{F}_y(g; \eta) - i \frac{k_x}{k_y} \eta \mathcal{F}_y(u_0; \eta) \right) \delta_{x=0} + \mathcal{F}_y(u_0; \eta) \delta'_{x=0} \right\}.$$

We can write

$$P_{\nu}(\partial_x, i\eta) = \frac{\epsilon k_y^2}{2} \left(\partial_x - R_+(i\eta) \right) \left(\partial_x - R_-(i\eta) \right) \quad (7.2.5)$$

where we define :

$$R_{\pm}(i\eta) = i \frac{k_x}{k_y} \eta - i \frac{k_x}{\epsilon k_y^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}} \right).$$

Thus :

$$\begin{aligned} & \left(\partial_x - R_+(i\eta) \right) \left(\partial_x - R_-(i\eta) \right) \mathcal{F}_y(v; x, \eta) = \\ & \left(\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \mathcal{F}_y(g; \eta) - i \frac{k_x}{k_y} \eta \mathcal{F}_y(u_0; \eta) \right) \delta_{x=0} + \mathcal{F}_y(u_0; \eta) \delta'_{x=0}. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

The aim of the following paragraph is to show that there is a unique acceptable solution for this ordinary differential equation.

Fourier transform in x of the problem

Let us take the Fourier transform of the equation (7.2.6). We get :

$$\left(i\xi - R_+(i\eta)\right)\left(i\xi - R_-(i\eta)\right)\mathcal{F}_x\mathcal{F}_y(v; \xi, \eta) = \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2}\mathcal{F}_y(g; \eta) - i\left(\frac{k_x}{k_y}\eta - \xi\right)\mathcal{F}_y(u_0; \eta).$$

Since $\mathcal{R}e(i\xi - R_\pm(i\eta)) \neq 0$, we can divide each side of the equation (7.2.6) by $\frac{2}{\epsilon k_y^2}P_\nu$ (because $\frac{1}{P_\nu}$ is an infinitely derivable function with at most polynomial growth at infinity, we can multiply it with a tempered distribution) and write :

$$\mathcal{F}_x\mathcal{F}_y(v; \xi, \eta) = \frac{\alpha_{1/2}^+(\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{\alpha_{1/2}^-(\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)},$$

where :

$$\begin{aligned}\alpha_{1/2}^+(\eta) &= \frac{R_+(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}\mathcal{F}_y(u_0; \eta) + \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}, \\ \alpha_{1/2}^-(\eta) &= -\frac{R_-(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}\mathcal{F}_y(u_0; \eta) - \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}.\end{aligned}$$

We now use the following lemma :

Lemma 7.2.1 *Let $v(x, y)$ a tempered distribution, $\text{Supp}(v) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, whose Fourier transform verifies an equation of the following form :*

$$\mathcal{F}_x\mathcal{F}_y(v; \xi, \eta) = \frac{\alpha_{1/2}^+(\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{\alpha_{1/2}^-(\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)},$$

where the tempered distributions $\alpha_{1/2}^\pm$ are given.

Then $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, $\alpha_{1/2}^+(\eta) = 0$ and $\alpha_{1/2}^-(\eta) = \mathcal{F}_y(v; 0^+, \eta)$.

Proof. If $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, we can verify immediately that :

$$\frac{1}{i\xi - \theta} = \begin{cases} \mathcal{F}_x(\mathbb{1}_{x \geq 0} e^{\theta x}; \xi) & \text{if } \mathcal{R}e(\theta) < 0 \\ -\mathcal{F}_x(\mathbb{1}_{x \leq 0} e^{\theta x}; \xi) & \text{if } \mathcal{R}e(\theta) > 0 \end{cases}$$

This result may be applied to $\theta = R_+(i\eta)$ and $\theta = R_-(i\eta)$. Since

$$\mathcal{R}e(R_+) = -\mathcal{R}e(R_-) > 0,$$

we get :

$$\mathcal{F}_y(v; x, \eta) = -\alpha_{1/2}^+(\eta)e^{R_+(i\eta)x}\mathbb{1}_{x \leq 0} + \alpha_{1/2}^-(\eta)e^{R_-(i\eta)x}\mathbb{1}_{x \geq 0},$$

which proves that $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$. Since $v(x < 0, y) = 0$, this equality implies $\alpha_{1/2}^+(\eta) = 0$. We take the limit for $x \xrightarrow{\geq} 0$, and find : $\mathcal{F}_y(u; 0, \eta) = \alpha_{1/2}^-(\eta)$. $\diamond$

Explicit writing of the solution

The lemma may be applied to our case, which yields :

$$\mathcal{F}_y(u_0; \eta) = -\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta},$$

and :

$$\mathcal{F}_y(u; x, \eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g; \eta)}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta + 2i\epsilon\nu\frac{k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x}. \quad (7.2.7)$$

This proves the theorem 7.2.2. Notice that we can easily calculate, with this formula, the value of the derivative $\vec{k} \cdot \nabla u$. As soon as u is regular enough to have its Fourier transform in y decreasing rapidly, we can develop it asymptotically in ϵ and ν , and find : $\vec{k} \cdot \nabla u = O(\epsilon + \nu)$.

Proof of the Corollaries

To show the stability result of the corollary 7.2.1, we use the following lemma :

Lemma 7.2.2 *There exists a constant $C > 0$, depending only on the geometry of the problem (i.e. of ϵ , k_x and k_y) and not depending on ν , such that :*

$$\frac{1 + |\eta|^2}{|1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta + 2i\epsilon\nu\frac{k_y^2}{k_x^2}}|^4} \leq \frac{C^4}{16}.$$

Proof. Let us denote $X = 1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta$ and $N = 2\epsilon\nu\frac{k_y^2}{k_x^2}$. Then :

$$\begin{aligned} B(\eta) &= |1 + \sqrt{X + iN}|^2 = |1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{N - iX}|^2 \\ &= 1 + \sqrt{X^2 + N^2} + 2(X^2 + N^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{Arctg}\frac{X}{N}}{2}\right). \end{aligned}$$

The cosine is nonnegative, so we get :

$$B(\eta)^2 \geq (1 + \sqrt{X^2 + N^2})^2 \geq 1 + X^2.$$

Since $1 + |\eta|^2 = 1 + a^2(1 - X)^2$ with $a = \frac{k_x^2}{2\epsilon k_y}$, we study the polynomial $P(X) = c(1 + X^2) - (1 + a^2(1 - X)^2)$, where $c = \frac{C^4}{16}$. We look for a $c > 0$ such that $\forall X \in \mathbb{R}$, $P(X) \geq 0$.

$$P = X^2(c - a^2) + 2a^2X - (1 - c + a^2),$$

and we pick $c = 2a^2 + 1$ (for instance). We can take any $C \geq 2\sqrt{1 + \frac{k_x^2}{\epsilon|k_y|}}$. $\diamond$

We now integrate in η the square modulus of the equation (7.2.7), and since $|e^{R_-(i\eta)x}| = e^{\mathcal{R}e(R_-(i\eta))x} < 1$, we get :

$$\|u(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}_y(g; \eta)|^2 (1 + |\eta|^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta = C^2 \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2.$$

We have proved the stability inequality, and the fact that the solution u is in the space $L_x^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$. The constant C is of order $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. The proof is the same for $g \in H^s(\mathbb{R})$.

In order to prove corollary 7.2.2, we first show that if $s > 0$ and $\frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)(1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{|\mathcal{R}e(R_-(i\eta))|}} \in L_\eta^2(\mathbb{R})$ then $u \in L_y^\infty(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}_+))$. We have :

$$\int_0^\infty |u(x, y)|^2 dx = \int_0^\infty dx \left| \int \frac{e^{i\eta y} d\eta}{2\pi} \frac{2\mathcal{F}_y(g; \eta)}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2} \eta + 2i\epsilon \nu \frac{k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x} \right|^2.$$

We can apply the Cauchy-Schwartz inequality :

$$\int_0^\infty |u(x, y)|^2 dx \leq$$

$$C^2 \int_0^\infty dx \left(\int d\eta |\mathcal{F}_y(g; \eta)|^2 (1 + |\eta|^2)^s e^{2\mathcal{R}e(R_-(i\eta))x} \right) \left(\int d\eta (1 + |\eta|^2)^{-\frac{1}{2}-s} \right).$$

We integrate the first in x , and find, for a constant $A > 0$:

$$\int_0^\infty |u(x, y)|^2 dx \leq A \int d\eta \frac{|\mathcal{F}_y(g; \eta)|^2 (1 + \sqrt{|\eta|})^{2s}}{2|\mathcal{R}e(R_-(i\eta))|}.$$

This shows that $u \in L_y^\infty(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}_+))$ if we suppose for instance

$$\frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)(1 + \sqrt{|\eta|})^s}{\sqrt{|\mathcal{R}e(R_-(i\eta))|}} \in L_\eta^2(\mathbb{R}).$$

To generalize at $H_x^m(\mathbb{R}_+)$, we replace $\mathcal{F}_y(g)$ by $R_-(i\eta)^m \mathcal{F}_y(g; \eta)$.

7.3 The case of the quadrant

We still consider the same problem (7.1.2) (7.1.4) but restricted to the quadrant $\{x, y \geq 0\}$. To find a *transparent* or an *absorbing* boundary condition (cf. introduction) on the boundary $\{y = 0\}$, we formally factorize the differential operator of the advection-Schrödinger equation as follows :

$$P_\nu = i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\epsilon}{2} \Delta_\perp u + i\nu = 0 = \epsilon \frac{k_x^2}{2} (\partial_y - A_+(\partial_x)) (\partial_y - A_-(\partial_x)). \quad (7.3.1)$$

where

$$A_+(\partial_x) = \frac{k_y}{k_x} \partial_x - i \frac{k_y}{\epsilon k_x^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2i\epsilon k_x}{k_y^2} \partial_x + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}} \right),$$

$$A_-(\partial_x) = \frac{k_y}{k_x} \partial_x - i \frac{k_y}{\epsilon k_x^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2i\epsilon k_x}{k_y^2} \partial_x + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}} \right)$$

This means that $A_+(X)$, $A_-(X)$ are the roots of the polynomial $P_\nu(X, Y)$ considered as a polynomial of the variable X .

The aim of this section is to show that the following condition :

$$(\partial_y - A_+(\partial_x)) u|_{y=0} = 0 \quad \forall \quad x > 0$$

is a *transparent* boundary condition if $k_y > 0$ and an *absorbing* boundary condition if $k_y < 0$.

Let us consider the following problem :

$$i(k_x \partial_x + k_y \partial_y)U + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2 \partial_{yy}^2 - 2k_x k_y \partial_{xy}^2 + k_y^2 \partial_{xx}^2)U + i\nu U = 0 \quad \forall x > 0, y > 0, \quad (7.3.2)$$

$$i\epsilon k_y(k_x \partial_y - k_y \partial_x)U|_{x=0} + 2k_x U|_{x=0} = 2k_x g_+ \quad \forall y > 0, \quad (7.3.3)$$

$$\partial_y U|_{y=0} - A_+(\partial_x)(U|_{y=0}) = 0 \quad \forall x > 0, \quad (7.3.4)$$

where we take $g_+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$, $\text{Supp}(g) \subset \mathbb{R}_+^*$.

We give the definition of the square root of a differential operator in the appendix 7.4.2. We can write again the condition (7.3.4) under the following form, to make it resemble the equation (7.3.3) :

$$i\epsilon k_x(k_y \partial_x - k_x \partial_y)U|_{y=0} + k_y(1 + \sqrt{1 + \frac{2i\epsilon k_x}{k_y^2} + 2i\epsilon\nu \frac{k_x^2}{k_y^2}})U|_{y=0} = 0 \quad \forall x > 0.$$

The first step is to give an extended meaning of the boundary condition (7.3.4), for functions whose derivatives at the boundary $\{y = 0\}$ may not be defined. The second step is to show that the extension of the condition (7.3.4) is either a transparent or an absorbing boundary condition for the problem, according to the sign of k_y .

Let us denote u the solution of the half-space problem (7.2.3) (7.2.4) with an entrance boundary condition equal to $g = g_+ \mathbb{1}_{y \geq 0} : g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. We recall that u is given by the formula (7.2.7) :

$$\mathcal{F}_y(u; x, \eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g; \eta)}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta + 2i\epsilon\nu \frac{k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x}.$$

We show the two following theorems.

Theorem 7.3.1 *Let g_+ be a given function such that $\text{Supp}(g) \subset \mathbb{R}_+^*$ and $g_+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$. Let $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, H_y^{\frac{3}{2}+s}(\mathbb{R}_+))$, with $s > 0$, a function satisfying the equations (7.3.2) (7.3.3) with $\partial_y U(x, 0) \in H_x^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$ and $U(x, 0) \in H_x^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$. Then U satisfies (7.3.4) iff U satisfies :*

$$U(x, y) \mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\{ \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U \mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) + \hat{G}(\eta) \} e^{R_-(i\eta)x} \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}, \quad (7.3.5)$$

with :

$$\hat{K}(\eta) = -\frac{R_-(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)} \quad \text{and} \quad \hat{G}(\eta) = -\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}.$$

With this result, we are able to extend the meaning of the equation (7.3.4) in the following way :

Definition 7.3.1 *We say that a function $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}_+))$ is a solution of the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4) iff it is a solution of the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.5).*

Theorem 7.3.2 *Let g_+ be a given function such that $\text{Supp}(g) \subset \mathbb{R}_+^*$ and $g_+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$.*

i) The problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.5) admits a unique solution $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}_+))$.

ii) Let $u \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))$ be the solution of the half-space problem (7.2.3) (7.2.4) with an incoming boundary condition $g = g_+ \mathbb{1}_{y \geq 0}$. We have an explicit formula for U in terms of u , with $u_0(y) = u(0, y)$:

$$U(x, y) \mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\left\{ \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta) + \hat{G}(\eta) \right\} e^{R_-(i\eta)x} \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}, \quad (7.3.6)$$

where $\hat{K} = -\frac{R_- - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+ - R_-}$ and $\hat{G} = -\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g)}{R_+ - R_-}$.

iii) If $k_y > 0$, then $U = u|_{y \geq 0}$.

iv) If $k_y < 0$, and if we take $g(y) = h(y - A)$ with $A > 0$, then we get :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|(u - U) \mathbb{1}_{y \geq 0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))} = 0.$$

7.3.1 Fourier transform of the problem.

Let U be a solution of the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4), $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, H^{\frac{3}{2}+s}(\mathbb{R}_+))$ and V the extension of U by zero in the whole space : $V(x, y) = U(x, y) \mathbb{1}_{x \geq 0} \mathbb{1}_{y \geq 0}$.

We calculate what the problem means for V , and find :

$$\begin{aligned} i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} V + i\nu V = & -\epsilon k_x k_y U(0, 0) \delta_{x=0} \delta_{y=0} + \\ & \left(\left(i k_x - \frac{\epsilon k_y}{2} (2k_x \partial_y - k_y \partial_x) \right) U(0, y) \right) \mathbb{1}_{y \geq 0} \delta_{x=0} + \frac{\epsilon k_y^2}{2} U(0, y) \mathbb{1}_{y \geq 0} \delta'_{x=0} + \\ & \left(\left(i k_y - \frac{\epsilon k_x}{2} (2k_y \partial_x - k_x \partial_y) \right) U(x, 0) \right) \mathbb{1}_{x \geq 0} \delta_{y=0} + \frac{\epsilon k_x^2}{2} U(x, 0) \mathbb{1}_{x \geq 0} \delta'_{y=0}, \end{aligned}$$

which gives, with the two boundary conditions (7.3.3) (7.3.4) :

$$\begin{aligned} i \vec{k} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} V + i\nu V = & -\epsilon k_x k_y U(0, 0) \delta_{x=0} \delta_{y=0} + \\ & \left(i k_x g \delta_{x=0} - \frac{\epsilon k_y}{2} (k_x \partial_y U|_{x=0} \delta_{x=0} - k_y U|_{x=0} \delta'_{x=0}) \right) \mathbb{1}_{y \geq 0} + \\ & \left(i \frac{k_y}{2} (1 - \sqrt{1 + \frac{2i\epsilon k_x}{k_y^2} \partial_x + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}}) U|_{y=0} \delta_{y=0} - \frac{\epsilon k_x}{2} (k_y \partial_x U|_{y=0} \delta_{y=0} - k_x U|_{y=0} \delta'_{y=0}) \right) \mathbb{1}_{x \geq 0}. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

To take the Fourier transform of this expression, we have to proceed carefully with the derivatives of U . Indeed, we can write :

$$\mathcal{F}_x((\partial_x U) \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0) = i\xi \mathcal{F}_x(U \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0) - U(0, 0),$$

and the equivalent formula for $\mathcal{F}_y((\partial_y U) \mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta)$. On the contrary, one directly gets :

$$\mathcal{F}_x\left(\left(\sqrt{1 + \frac{2i\epsilon k_x}{k_y^2} \partial_x + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}} U|_{y=0}\right) \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0\right) = \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_x}{k_y^2} \xi + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}} \mathcal{F}_x(U|_{y=0} \mathbb{1}_{x \geq 0}).$$

We now take the Fourier transform of the formula (7.3.7). The terms depending on $U(0, 0)$ cancel one another, and we furthermore notice that :

$$i \frac{k_y}{2} (1 - \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_x}{k_y^2} \xi + 2i\epsilon \nu \frac{k_x^2}{k_y^2}}) - \frac{i\epsilon k_x k_y}{2} \xi = -\frac{\epsilon k_x^2}{2} A_-(i\xi).$$

Finally, using the polynomial $P_{\nu}(X, Y)$, we get

$$P_{\nu}(i\xi, i\eta) \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y(V; \xi, \eta) =$$

$$\frac{\epsilon k_y^2}{2} \left(\frac{2i k_x}{k_y^2} \mathcal{F}_y(g; \eta) - i \left(\frac{k_x}{k_y} \eta - \xi \right) \mathcal{F}_y(U \mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) \right) + \frac{\epsilon k_x^2}{2} (i\eta - A_-(i\xi)) \mathcal{F}_x(U \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0).$$

Dividing by P_ν written in one of the form (7.3.1) or (7.2.5), the equation in V reads :

$$\mathcal{F}_x \mathcal{F}_y(V; \xi, \eta) = \frac{\alpha^+(\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{\alpha^-(\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)} + \frac{\beta^+(\xi)}{i\eta - A_+(i\xi)} + \frac{\beta^-(\xi)}{i\eta - A_-(i\xi)}, \quad (7.3.8)$$

where $\alpha^\pm$ and $\beta^\pm$ depends on u in the following way :

$$\begin{aligned} \alpha^+(\eta) &= \frac{R_+(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)} \mathcal{F}_y(U\mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) + \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}, \\ \alpha^-(\eta) &= -\frac{R_-(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)} \mathcal{F}_y(U\mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) - \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)}, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

$$\beta^+(\xi) = \mathcal{F}_x(U\mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0),$$

$$\beta^-(\xi) = 0.$$

7.3.2 Proof of the theorem 7.3.1.

Let us take the inverse Fourier transform of the equation (7.3.8), as in the section 7.2.2 for the half-space problem :

$$\begin{aligned} U(x, y)\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0} &= \mathcal{F}_y^{-1} \left(-\alpha^+(\eta) e^{R_+(i\eta)x} \mathbb{1}_{x \leq 0} + \alpha^-(\eta) e^{R_-(i\eta)x} \mathbb{1}_{x \geq 0} \right) \\ &\quad + \mathcal{F}_x^{-1} \left(-\beta^+(\xi) e^{A_+(i\xi)y} \mathbb{1}_{y \leq 0} + \beta^-(\xi) e^{A_-(i\xi)y} \mathbb{1}_{y \geq 0} \right). \end{aligned}$$

If we multiply each side by $\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0}$ and use the fact that $\beta^- = 0$, we obtain the formula (7.3.5) in the theorem 7.3.1, *i.e.* :

$$U(x, y)\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\alpha^-(\eta) e^{R_-(i\eta)x} \right) \mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0}.$$

Indeed, if we denote :

$$\hat{K}(\eta) = -\frac{R_-(i\eta) - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)} \quad \text{and} \quad \hat{G}(\eta) = -\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2} \frac{\mathcal{F}_y(g; \eta)}{R_+(i\eta) - R_-(i\eta)},$$

we get :

$$\alpha^-(\eta) = \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U\mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) + \hat{G}(\eta).$$

This proves that if $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, H_y^{\frac{3}{2}+s}(\mathbb{R}_+))$ is a solution of (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4) then it verifies the equation (7.3.5).

Conversely, let $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, H_y^{\frac{3}{2}+s}(\mathbb{R}_+))$ be a solution of the equation (7.3.5), which verifies also the equations (7.3.2) (7.3.3), and $\partial_y U(x, 0) \in H_x^{-\frac{1}{2}}$ and $U(x, 0) \in H_x^{\frac{1}{2}}$. Assuming no particular condition on the boundary $\{y = 0\}$, we carry out the same computation as in the section 7.3.1, and find :

$$\mathcal{F}_{x,y}(U; \xi, \eta) = \frac{\alpha^+(\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{\alpha^-(\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)} + \frac{\beta^+(\xi)}{i\eta - A_+(i\xi)} + \frac{\beta^-(\xi)}{i\eta - A_-(i\xi)},$$

with the same $\alpha^\pm$ than in the equations (7.3.9) and with :

$$\beta^-(\xi) = -\frac{\mathcal{F}_x\left((\partial_y U - A_+(\partial_x)U)\mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, 0\right)}{A_+(i\xi) - A_-(i\xi)}.$$

We take the inverse Fourier transform and multiply it by $\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0}$, to find :

$$U(x, y)\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1}\left(\alpha^-(\eta)e^{R_-(i\eta)x}\mathbb{1}_{x \geq 0}\right)\mathbb{1}_{y \geq 0} + \mathcal{F}_x^{-1}\left(\beta^-(\xi)e^{A_-(i\xi)y}\mathbb{1}_{y \geq 0}\right)\mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Since U verifies also the equation (7.3.5), which writes :

$$U(x, y)\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1}\left(\alpha^-(\eta)e^{R_-(i\eta)x}\right)\mathbb{1}_{x \geq 0}\mathbb{1}_{y \geq 0},$$

we necessarily have :

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left(\beta^-(\xi)e^{A_-(i\xi)y}\mathbb{1}_{y \geq 0}\right)\mathbb{1}_{x \geq 0} = 0 \quad \forall x > 0, y > 0.$$

The function U being continuous in y , we can take the limit when y tends to zero :

$$\mathcal{F}_x^{-1}(\beta^-(\xi)) = 0 \quad \forall x > 0.$$

Since β^- is the Fourier transform of a distribution null in $\mathbb{R}_-$ (see appendix 7.4.1), it implies that β^- is the Fourier transform of a distribution whose support is included in $\{x = 0\}$. Since $\beta^- \in L^2(\mathbb{R})$, it implies $\beta^- = 0$, which is equivalent to the Fourier transform in x of the transparent boundary condition. We have proved the theorem 7.3.1.

The equation (7.3.4) can be defined only for functions in $H^{\frac{3}{2}+s}$ in the variable y . The theorem 7.3.1 allows us now to extend the condition (7.3.4) by the condition (7.3.5) with the definition 7.3.1 given at the beginning of the section 7.3.

7.3.3 New formulation of the theorem 7.3.2.

We recall formula (7.3.5) :

$$U(x, y) \mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\{ \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U \mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta) + \hat{G}(\eta) \} e^{R_-(i\eta)x} \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}.$$

If we set $U_0(y) = U(0, y) \mathbb{1}_{y \geq 0}$, the formula above taken at $x = 0$ is :

$$U_0(y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U_0; \eta) + \hat{G}(\eta) \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}. \quad (7.3.10)$$

For these equations to make sense, it is sufficient to have $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}_+))$. We prove the following lemma, from which we will easily deduce the theorem 7.3.2.

Lemma 7.3.1

*i) The equation (7.3.5) admits at most one solution $U \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}_+))$; the equation (7.3.10) admits at most one solution $U_0 \in L_y^2(\mathbb{R})$.
ii) The solution $u \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))$ to the problem (7.2.3) (7.2.4) (with $g = g_+ \mathbb{1}_{y \geq 0}$) satisfies equation (7.3.10). Moreover, $U = u|_{y > 0}$ satisfies equations (7.3.2) (7.3.3), and if $\mathbf{k}_y > \mathbf{0}$ it also satisfies equation (7.3.5).*

Proof.

i) The uniqueness of a solution of the equation (7.3.10) in $L^2(\mathbb{R})$ implies that of a solution to the equation (7.3.5) in $\mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}_+))$. Let us take $g = 0$ and suppose that a function $U_0 \in L^2(\mathbb{R})$ verifies :

$$U_0(y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U_0; \eta) \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}.$$

Let $V_0(y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(U_0; \eta) \right)(y)$. The function V_0 verifies the following equation, because $U_0 = V_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}$:

$$V_0(y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(V_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta) \right) = \int_0^\infty K(y-s) V_0(s) ds.$$

We separate V_0 into $V_+ = V_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}$ and $V_- = V_0 \mathbb{1}_{y \leq 0}$. Since $V_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $V_{\pm} \in L^2(\mathbb{R}_{\pm})$ the functions $\hat{V}_{\pm} := \mathcal{F}_y(V_{\pm}; \eta)$ belong to $H^{2\pm}$ (see appendix 7.4.1). The resulting equation writes :

$$\hat{V}_+(\eta)(1 - \hat{K}(\eta)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2} \eta + 2i\nu \epsilon \frac{k_y^2}{k_x^2}}} \right) \hat{V}_+(\eta) = -\hat{V}_-(\eta).$$

The idea is to find an H^{2-} function on the left side, equal to a H^{2+} function on the right side : since $H^{2+} \cap H^{2-} = 0$, it will imply that both sides are null. We use the fact that the function $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2} \eta + 2i\nu \epsilon \frac{k_y^2}{k_x^2}}}$ can be extended analytically by a uniformly bounded function, respectively : in $\mathbb{R}^{2-} = \{\eta - i\lambda, \lambda > 0\}$ if $k_y > 0$, and on $\mathbb{R}^{2+}$ if $k_y < 0$.

1. $k_y > 0$: $1 - \hat{K}(\eta)$ is analytic and uniformly bounded in $\mathbb{R}^{2-}$, so $(1 - \hat{K})\hat{V}_+ \in H^{2-}$, and is equal to $(-\hat{V}_-) \in H^{2+}$, so $V_{\pm} = 0$, so $V_0 = 0$.
2. $k_y < 0$. We write the preceding equation in the following form :

$$\hat{V}_+(\eta) = -(1 - \hat{K}(\eta))^{-1} \hat{V}_-(\eta).$$

$(1 - \hat{K}(\eta))^{-1}$ is analytic and uniformly bounded in $\mathbb{R}^{2+}$, so $(1 - \hat{K})^{-1} \hat{V}_- \in H^{2+}$, and is equal to $(-\hat{V}_+) \in H^{2-}$, so $V_0 = 0$.

ii) Let $u \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))$ be the solution of the problem (7.2.3) (7.2.4) in the half-space, with an entrance boundary condition equal to $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Obviously, u verifies (7.3.2) (7.3.3) since they are the restriction of (7.2.3) (7.2.4). We have seen in the section 7.2 that u verifies :

$$u(x, y) \mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(\alpha_{1/2}^-(\eta) e^{R_-(i\eta)x} \right) \mathbb{1}_{y \geq 0},$$

with $\alpha_{1/2}^-(\eta) = \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u; 0, \eta) + \hat{G}(\eta)$. This is almost equation (7.3.5). **The difference is that in the definition of $\alpha_{1/2}^-$, we have written $\mathcal{F}_y(u; 0, \eta)$ instead of $\mathcal{F}_y(u \mathbb{1}_{y \geq 0}; 0, \eta)$:**

$$\alpha^- = \alpha_{1/2}^- - \hat{K} \mathcal{F}_y(u \mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta).$$

Let us distinguish the two cases, according to the sign of k_y .

1. $k_y > 0$

We have seen in the section 7.2 that u verifies :

$$\mathcal{F}_y(u; 0, \eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g\mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta)}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta + 2i\epsilon\nu\frac{k_y^2}{k_x^2}}}.$$

Since the function $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\epsilon k_y}{k_x^2}\eta + 2i\epsilon\nu\frac{k_y^2}{k_x^2}}}$ can be extended analytically by a uniformly bounded function in $\mathbb{R}^{2-}$, if $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ then $\mathcal{F}_y(u; 0, \eta) \in H^{2-}$, so $u(0, y) = u(0, y)\mathbb{1}_{y \geq 0}$. This shows that in this case, $\alpha^- = \alpha_{1/2}^-$ so u verifies the equation (7.3.5).

2. $k_y < 0$

Let us write $\alpha_{1/2}^-(\eta) = \alpha^-(\eta) + \hat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u\mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta)$, where the definition of α^- is the same as in the equations (7.3.9). Since $u(0, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u\mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta) \in H^{2+}$. The function u verifies the following equation :

$$u(0, y)\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1}(\alpha^-(\eta))\mathbb{1}_{y \geq 0} + \mathcal{F}_y^{-1}(\hat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u\mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta))\mathbb{1}_{y \geq 0}.$$

Since $\hat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u\mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta) \in H^{2+}$, it is the Fourier transform of a function null in $\mathbb{R}_+$, so the last member of the equation value zero. This shows that $u(0, y)$ verifies the equation (7.3.10).

◇

Let us deduce the assertions *i)*, *ii)* and *iii)* of the theorem 7.3.2 from lemma 7.3.1. First, lemma 7.3.1 proves the uniqueness of a solution to the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4). In the case where $k_y > 0$, we have nothing more to prove : the unique solution of the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4) is the restriction to the quadrant of the solution of the half-space problem (7.2.3) (7.2.4).

Let us now take $k_y < 0$. If U exists, it verifies the equation (7.3.10) and we have seen that it is also the case of u , so $U(0, y) = u(0, y)\mathbb{1}_{y \geq 0}$. Replacing $U(0, y)\mathbb{1}_{y \geq 0}$ by $u(0, y)\mathbb{1}_{y \geq 0}$ in the equation (7.3.5) verified by U , this implies necessarily that :

$$U(x, y)\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1}\left(e^{R_-(i\eta)x}\{\hat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u_0\mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta) + \hat{G}(\eta)\}\right)\mathbb{1}_{y \geq 0}.$$

We now have to prove that the function U so-defined is a solution of the problem (7.3.2) (7.3.3) (7.3.4). First, it obviously verifies the equation (7.3.5), so according to the definition 7.3.1 we have only to check equations (7.3.2) and (7.3.3). Let us define :

$$V := \mathcal{F}_y^{-1} \left(e^{R_-(i\eta)x} \{ \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta) + \hat{G}(\eta) \} \right).$$

We have $U = V \mathbb{1}_{y \geq 0}$, so we can check equations (7.3.2) (7.3.3) on V as well. We notice that $V = u - r$, with :

$$\mathcal{F}_y(r; x, \eta) = \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \leq 0}; \eta) e^{R_-(i\eta)x}.$$

The function u verifies obviously equations (7.3.2) (7.3.3), so we have only to check them on the remainder r . Taking its global Fourier transform and multiplying it by P_ν , we find :

$$P_\nu(i\xi, i\eta) \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y(r \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi, \eta) = (i\xi - R_+(i\eta)) \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \leq 0}; \eta)..$$

Since $\mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \leq 0}; \eta) \in H^{2+}$ and $k_y < 0$, the right hand side is the Fourier transform of a distribution null for $y > 0$ (see appendix 7.4.1 for a proof). Thus the remainder r satisfies the Schrödinger equation (7.3.2) in the quadrant. Furthermore, at the boundary $x = 0$, we have :

$$\mathcal{F}_y(r; 0, \eta) = \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \leq 0}; \eta),$$

which is also the Fourier transform of a distribution null for $y > 0$. It proves that $r(0, y > 0) = 0$, so $r(0, \cdot)|_{y > 0}$ verifies the boundary condition (7.3.3).

7.3.4 Estimate of the difference between the solution in the quadrant and the solution in the half-space

In this section we prove the assertion *iv)* of the theorem 7.3.2. Let us assume that $k_y < 0$ and denote by u the solution of the half-space problem and by U that in the quadrant. According to equation (7.3.6), we have :

$$U(x, y) = \mathcal{F}_y^{-1} \left(e^{R_-(i\eta)x} [\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0 \mathbb{1}_{y \geq 0}; \eta) + \hat{G}(\eta)] \right) \mathbb{1}_{y \geq 0},$$

and furthermore u verifies the following equation :

$$u(x, y)\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(e^{R_-(i\eta)x} [\hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u_0; \eta) + \hat{G}(\eta)] \right) \mathbb{1}_{y \geq 0},$$

so by taking the difference, we obtain the relation :

$$(u - U)\mathbb{1}_{y \geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1} \left(e^{R_-(i\eta)x} \hat{K}(\eta) \mathcal{F}_y(u\mathbb{1}_{y \leq 0}; 0, \eta) \right) \mathbb{1}_{y \geq 0}. \quad (7.3.11)$$

Let us now assume that $g(y) = h(y - A)$, $A > 0$, $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ and $Supp(h) \subset \mathbb{R}_+^*$. We can write :

$$\mathcal{F}_y(u_0; \eta) = \frac{\mathcal{F}_y(h; \eta) e^{-i\eta A}}{1 + \sqrt{1 - 2\epsilon \frac{k_y}{k_x^2} \eta + 2i\nu \epsilon \frac{k_y^2}{k_x^2}}} = \mathcal{F}_y(H; \eta) e^{-i\eta A},$$

with a function $H \in L^2(\mathbb{R})$. We then have $u_0 = H(y - A)$, so $\|u_0\mathbb{1}_{y \leq 0}\|_{L^2} = \|H\mathbb{1}_{y \leq -A}\|_{L^2}$, tends to 0 when $A \rightarrow +\infty$. We use the relation (7.3.11) to estimate the difference between the half-space and the quarter plane solutions, since $\mathcal{R}e(R_-(i\eta)) < 0$:

$$\|(u - U)(x, y)\mathbb{1}_{y \geq 0}\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))} \leq \|\hat{K} \mathcal{F}_y(u_0\mathbb{1}_{y \leq 0})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|H\mathbb{1}_{y \leq -A}\|_{L_y^2(\mathbb{R})}.$$

7.4 Appendix

7.4.1 Appendix 1 : Fourier transforms of functions supported in $\mathbb{R}_+$

Background on Hardy classes

Definition : let $h : \mathbb{R}^{2-} \rightarrow \mathbb{C}$. The function h is said to be a *Hardy function* if it verifies the two following properties :

- i) h is analytic in $\mathbb{R}^{2-} = \{\omega = a + ib, b < 0\}$
- ii) $\sup_{b < 0} \|h_b\|_2^2 = \sup_{b < 0} \int_{-\infty}^{\infty} |h(a + ib)|^2 da < \infty$.

The space so-defined is called the *Hardy space* and written as $\mathcal{H}^{2-}$.

Theorem 7.4.1 *Let $h : \mathbb{R}^{2-} \rightarrow \mathbb{C}$. $h \in \mathcal{H}^{2-}$ iff there exists a function $f \in L^2(\mathbb{R})$ such that :*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^{2-}, \quad h(\omega) = \int_0^\infty f(x) e^{i\omega x} dx.$$

Fourier transforms of functions that are identically zero in $\mathbb{R}_-$

According to theorem 7.4.1, the following kinds of tempered distribution $\hat{f}$ are Fourier transforms of tempered distributions f supported in $\mathbb{R}_+$:

1. $\hat{f} \in \mathcal{H}^{2-}(\mathbb{R})$: see theorem 7.4.1.
2. There exists a polynomial $P(i\xi)$ such that $\hat{f} = P(i\xi)\hat{g}(\xi)$, with $\hat{g}$ the Fourier transform of a tempered distribution g , $\text{Supp}(g) \subset \mathbb{R}_+$: indeed, we then have $\hat{f} = \mathcal{F}_x(P(\partial_x)g)$.
3. There exists a Hardy function $\phi \in \mathcal{H}^{2-}$ and a holomorphic function Ψ , bounded on an open neighborhood of $\overline{\mathbb{R}^{2-}}$, such that $f = \phi\Psi$.

Examples :

- (a) the function Ψ is a rational function with no pole in $\overline{\mathbb{R}^{2-}} \cup \{\infty\}$, *i.e.*

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{z - \alpha_i},$$

with $\text{Im}(\alpha_i) > 0$.

- (b) There exists $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s > 0$ such that

$$\Psi(z) = \frac{1}{(1 + i(\alpha z + \beta))^s}.$$

It is sufficient to prove this for $\Psi(z) = \frac{1}{(1+iz)^s}$. On the one hand, we have :

$$1 + iz \in \mathbb{R}_-^m \quad \equiv \quad iz \in (-\infty, -1)$$

$$1 + iz \in \mathbb{R}_-^m \quad \equiv \quad z \in i(1, +\infty).$$

This implies that Ψ is holomorphic on $\mathbb{R}^{2-}$ ($z^s = e^{s \text{Log} z}$ where Log means the principal determination of the Logarithm).

On the other hand, Ψ is bounded on a neighborhood of $\mathbb{R}^{2-}$: if $\mathcal{I}m(z) \leq 0$ we have

$$|\Psi(z)| = \frac{1}{|1 + iz|^s} = \frac{1}{((1 - \mathcal{I}m(z))^2 + \mathcal{R}e(z)^2)^{s/2}} \leq 1.$$

4. The two preceding cases imply that if $\hat{g} \in \mathcal{H}^{2-}$ and $\hat{f} = F(i\xi)\hat{g}$, with F a product of functions of the preceding types, then $\hat{f}$ is the Fourier transform of a distribution whose support is in $\mathbb{R}_+$.

7.4.2 Appendix 2 : Definition of the square root of a differential operator

There are two ways to define properly the square root of the differential operator $-k_y^2 - 2i\epsilon k_x \partial_x - 2i\epsilon \nu k_x^2$.

1. For a function $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$, we can use the Fourier transformation and define :

$$\mathcal{F}_x \left((\sqrt{-k_y^2 - 2i\epsilon k_x \partial_x - 2i\epsilon \nu k_x^2} u) \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi \right) := e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{-ik_y^2 + 2i\epsilon k_x \xi + 2\epsilon \nu k_x^2} \mathcal{F}_x(u \mathbb{1}_{x \geq 0}; \xi).$$

For this definition to be correct, it is necessary to check that the right side is the Fourier transform of a distribution which values zero in $\mathbb{R}_-^*$. This is equivalent to check that it can be extended to $\mathbb{R}^{2-} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b < 0\}$ by a Hardy function in the space $\mathcal{H}^{2-}$ (cf. [27] and section 7.4.1).

2. For a function $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, we can use the following definition :

$$\sqrt{-k_y^2 - 2i\epsilon k_x \partial_x - 2i\epsilon \nu k_x^2}(u) := \frac{\sqrt{2\epsilon k_x} e^{-i\frac{\pi}{4} + (i\frac{k_y^2}{2\epsilon k_x} - \nu k_x)x}}{\sqrt{\pi}} \partial_x \int_0^x \frac{u(s) e^{(-i\frac{k_y^2}{2\epsilon k_x} + \nu k_x)s}}{\sqrt{x-s}} ds.$$

This formula clearly shows that the left-hand side is null in $\mathbb{R}_-^*$.

We show easily that the two definitions are equivalent for $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$; that is the case for instance if $u \in H^{\frac{1}{2}+s}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ for any $s > 0$.

Partie III : Simulation Numérique de l'équation d'advection-Schrödinger

Article à paraître écrit en collaboration avec F. Golse et R. Sentis, et référencé dans la bibliographie en [23]

Chapitre 8

Numerical Simulation for paraxial Model of Light Propagation in a tilted frame : the Advection-Schrödinger equation

Introduction

The simulation of the propagation of a laser wave according to the paraxial approximation has been intensively studied for a long time when the simulation domain is rectangular and the direction of propagation is parallel to one of the principal axis of simulation domain(see for instance [31]). The goal of this article is to deal with the numerical simulation of such a phenomenon when the direction of propagation is not parallel to a principal axis of the simulation domain. It may be crucial for example if we want to simulate several beams with different directions, possibly crossing each other in the same domain.

In the paper [22], we have shown that a good approximation of the laser wave propagation in the half-space $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ is given by the solution of the following problem :

$$i \vec{k} \cdot \nabla u + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} u + i\nu u - \mu u = 0,$$

where we denote by $\vec{k} = (k_x, k_y)$ the unit vector along which the laser wave propagates. Here $\epsilon > 0$ such that $2\pi\epsilon$ is the wave length; ν an absorption coefficient and μ a given function which models the local refraction of the plasma ($1 - 2\epsilon\mu$ is the index of refraction up to a multiplicative constant). Moreover, we have seen that if the entering potential is denoted by u^{in} , the right boundary condition on the incoming boundary $\{x = 0\}$ is :

$$\left(i\epsilon \vec{k}_{\perp} (\vec{k}_{\perp} \cdot \nabla) - 2\vec{k} \right) \cdot \vec{n} (u - u^{in}) = 0,$$

where $(\vec{k}, \vec{k}_{\perp})$ is a direct orthonormal basis and $\vec{n}$ is the exterior normal vector of the boundary $\{x = 0\}$. We have carried out the theoretical analysis of the problem.

In this paper, we consider also another model, namely :

$$i \vec{k} \cdot \nabla u + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp} u + i\nu u - f(|u|)u = 0,$$

where :

$$f(w) = C(e^{-\alpha w^2} - 1), \quad \text{with } \alpha, C \text{ constant,}$$

which allows us taking into account some autofocusing phenomenon which occurs in the laser-plasma interaction (see [48] for instance). From the physical point of view $f(|u|)$ represents a small relative variation of the electronic density of the plasma by the ponderomotive force of the laser. As a matter of fact, if we normalize the potential u , we can assume that the constant C may be equal to 1. We keep this choice in the sequel.

8.1 Setting of the problem

Let us take a simulation domain which is a half-space. If f is set to zero, the previous problem may be written in two dimensions as :

$$i(k_x \partial_x + k_y \partial_y)u + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2 \partial_{yy}^2 - 2k_x k_y \partial_{xy}^2 + k_y^2 \partial_{xx}^2)u + i\nu u = 0 \quad \forall x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (8.1.1)$$

$$i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0} + 2k_x u|_{x=0} = i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0}^{in} + 2k_x u|_{x=0}^{in} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8.1.2)$$

We denote η the Fourier variable of the variable y and $\mathcal{F}$ the Fourier transform in y . Let us denote also :

$$R_-(i\eta) = i\frac{k_x\eta}{k_y} - i\frac{k_x}{\epsilon k_y^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y\eta}{k_x^2} + 2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}\right).$$

In the previous article [22], we have proved the following theorem, where $\mathcal{F}(u; x) = \mathcal{F}(u(x, \cdot))$:

Theorem 8.1.1 *Let $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ be the space of tempered distributions and $g \in \mathcal{S}'$. There exists a unique tempered distribution $u \in \mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_y(\mathbb{R}))$ to the problem (8.1.1)(8.1.2), which is :*

$$\mathcal{F}(u; x) = \frac{2\mathcal{F}(g)}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y\eta}{k_x^2} + 2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x}, \quad (8.1.3)$$

with :

$$g = i\epsilon\frac{k_y}{2k_x}(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0}^{in} + u|_{x=0}^{in}.$$

Our numerical scheme is based on this explicit formula for the solution.

We assume $k_y > 0$ and consider the domain :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, y_0 \leq y \leq y_0 + L_y\}.$$

On this domain, we solve numerically the following equation :

$$i(k_x\partial_x + k_y\partial_y)u + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2\partial_{yy}^2 - 2k_xk_y\partial_{xy}^2 + k_y^2\partial_{xx}^2)u + i\nu u - f(|u|)u = 0, \quad (8.1.4)$$

with a boundary condition on $\{x = 0\}$ given by :

$$i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0} + 2k_x u|_{x=0} = 2k_x g,$$

where g satisfies :

$$2k_x g = i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u|_{x=0}^{in} + 2k_x u|_{x=0}^{in} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8.1.5)$$

It is the same problem as previously, except that :

1. we may allow the absorption ν to x ,
2. we add a term $f(|u|)u$. In the sequel, we use the classical nonlinear term presented in the introduction :

$$f(w) = e^{-\alpha w^2} - 1,$$

where $\alpha \geq 0$ is constant.

The interesting problems involve a very small coefficient ν , and it may be necessary that μ_0 and α be sufficiently small so that there is no blow-ups of the solution.

8.2 Numerical Scheme

One discretizes according to a regular grid. The numerical method is based on a propagation according to x and a splitting in three stages. We write :

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 \quad \text{with} \quad \nu_0 = \inf \nu,$$

so ν_0 is constant and $\nu_1 = \nu_1(x)$ depends only on the variable x . We denote n and j the indices corresponding respectively to the variables x and y : $u_j^n \approx u(n\delta x, j\delta y)$.

8.2.1 Initialization

We use the formula (8.1.3) as if u would be a solution of the equation without the term $f(u)u$:

$$\mathcal{F}(u; 0) = \frac{2\mathcal{F}(g)}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu|_{x=0} \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}}. \quad (8.2.1)$$

We suppose that the initial condition g values approximately zero around the corner points $y = y_0$ and $y = y_0 + L_y$, so we find the initial value of u $(u_j^0)_j$ by taking the FFT (fast Fourier transform) of g , multiplying it with the discretisation of the function of η expressed above, and then taking the IFFT (inverse fast Fourier transform) of the product.

As an initial condition, we take $g = i\epsilon \frac{k_y}{2k_x}(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u_{|x=0}^{in} + u_{|x=0}^{in}$ where u^{in} is either a Gaussian or a super-Gaussian function (*i.e.* functions of type $e^{-(\frac{Y-Y_0}{L})^4}$) according to the transverse variable Y :

$$Y = \vec{k}_\perp \cdot \vec{x} = k_x y - k_y x.$$

For instance, $u^{in} = Ae^{i\lambda}e^{-(\frac{Y-Y_0}{L})^2}$ or $u^{in} = Ae^{i\lambda}e^{-(\frac{Y-Y_0}{L})^4}$, with $A > 0$ the amplitude of the ray and $L > 0$ a characteristic length of the laser beam. For normal values of ϵ , *i.e.* for ϵ not too big, the corrective term $i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)u^{in}$ does not change significantly the result, and it is possible to take simply g to be a Gaussian or a super-Gaussian of the variable $Y_{|x=0} = k_x y$.

8.2.2 First and second stages : Fourier transform

We suppose that the value of u^n is known, and we compute a first intermediate value $u^{n\odot}$ by solving on $[x^n, x^n + \delta x]$ the following equation :

$$(k_x\partial_x + k_y\partial_y)u - i\frac{\epsilon}{2}\Delta_\perp u + \nu_0 u = 0. \quad (8.2.2)$$

We use the theorem 8.1.1, which says that the only solution of this equation equal to u^n on the boundary $\{x = x^n\}$ is given by the formula :

$$\mathcal{F}(u^{n\odot}) = \mathcal{F}(u^n)e^{R_-(i\eta)\delta x},$$

with :

$$R_-(i\eta) = i\frac{k_x\eta}{k_y} - i\frac{k_x}{\epsilon k_y^2}\left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y\eta}{k_x^2} + 2i\nu_0\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}\right).$$

To solve it, we could, after a FFT on (u^n) , multiply it by $e^{R_-(i\eta)\delta x}$ and then do an inverse FFT. But accurately solving an advection equation cannot be carried out by a simple FFT in one direction and an analytical treatment with respect to the other direction. Indeed, it would produce aliasing and symmetry problems : a symmetrical parasite beam appears when the ray propagates. Hence, we correct this first stage by a second one rectifying the direction of the ray. We solve the following inverse advection equation on $[x^n, x^n + \delta x]$:

$$k_x\partial_x u - k_y\partial_y u = 0,$$

and we proceed from $u^{n\circ}$ to $u^{n\#}$. Practically, these two stages are carried out simultaneously, thus we get :

$$\mathcal{F}(u^{n\#}) = \mathcal{F}(u^n) e^{(R_-(i\eta) + i\eta \frac{k_y}{k_x})\delta x}.$$

In fact, for a fixed $\eta \in \mathbb{R}$, $R_- = O_\epsilon(\epsilon + \nu)$, which is expressed by the formula :

$$R_-(i\eta) + i\eta \frac{k_y}{k_x} = -\frac{2\nu}{k_x(1 + \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}})} - \frac{2i\eta\epsilon(\eta - i\nu k_y)}{k_x^3(1 + \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu \frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}})^2}. \quad (8.2.3)$$

This formula is used in the numerical scheme, in order to avoid troubles when ϵ or k_y tends to zero.

After a FFT on (u^n) , we multiply it by $e^{(R_-(i\eta) + i\eta \frac{k_y}{k_x})\delta x}$ and then apply an inverse FFT. We denote $(u_j^{n\#})$ the value of the intermediate function. Of course, in order to use the FFT, it is necessary that the values of u^n coincide on the edges $\{y = 0\}$ and $\{y = L\}$. In fact, we force u^n to be very small in the neighbourhood of these edges (see below).

8.2.3 Third stage : finite difference scheme

First order scheme.

In third stage, we solve on $[x^n, x^n + \delta x]$ the following equation :

$$k_x \partial_x u + k_y \partial_y u + \nu_1(x^n)u + if(|u|)u = 0. \quad (8.2.4)$$

To do this, we use standard finite difference methods. Assume that $k_y > 0$ (the case $k_y < 0$ is similar). We consider a non-centered upwind method, given that the CFL stability criteria $\theta \leq 1$ must be checked, where $\theta = \frac{k_y}{k_x} \frac{\delta x}{\delta y}$. To avoid difficulties on the edge $\{y = 0\}$ we add to ν_1 an absorbing coefficient, denoted by B , which decreases progressively on the first four meshes and is very large for $\{y = 0\}$. This technique was popularized by [7], and tests show that it cancels a small parasite growth of the solution on the edge. The numerical scheme for this stage is :

$$\frac{k_x}{\delta x}(u_j^{n+1} - u_j^{n\#}) + \frac{k_y}{\delta y}(u_j^{n\#} - u_{j-1}^{n\#}) + \left(\nu_1(x^n) + if(|u_{\theta j}^{n\#}|) \right) \left(\frac{u_{\theta j}^{n\#} + u_j^{n+1}}{2} \right) + B_j^n u_j^{n+1} = 0, \quad (8.2.5)$$

where $u_{\theta j}^{n\#} = \theta u_{j-1}^{n\#} + (1 - \theta)u_j^{n\#}$. The point $u_{\theta j}^{n\#}$ represents the point on $\{x = x^n\}$ of the characteristic line passing by (x^{n+1}, y_j) . We initialize the algorithm with $u_{-1}^{n\#} = 0$; see the theoretical study of [22] for a justification of this last point.

Second order scheme

When $\theta = 1$, the previous scheme gives very accurate results, but these results are much worse when $\theta < 1$. Since we want to model simultaneously several beams, we have to improve it in this last case. We choose a flux-limiter method (see [42]), with the Van Leer function as limiter (tests prove it to be the best one). The Van Leer function is :

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda| + \lambda}{1 + |\lambda|},$$

where λ is the ratio of the gradient of the function $u^\#$ in two neighbouring cells. We have to solve simultaneously two scalar equations (one for the real and one for the imaginary part) with the same flux limiter, so we have to choose one single significant quantity to estimate the flux limiter : we chose the energy of the laser, *i.e.* $|u|^2$, and evaluated ϕ in terms of $|u_j|^2$ and not of $|u_j|$:

$$\lambda_j = \frac{|u_j^\#|^2 - |u_{j-1}^\#|^2}{|u_{j+1}^\#|^2 - |u_j^\#|^2}.$$

We now replace, in the first order scheme, the term derivative in y , $u_j^\# - u_{j-1}^\#$, by $F_j - F_{j-1}$ where the flux F_j is defined as :

$$F_j = u_j^\# + \frac{1}{2}(1 - \theta)(u_{j+1}^\# - u_j^\#)\phi(\lambda_j).$$

The second order scheme is now :

$$\frac{k_x}{\delta x}(u_j^{n+1} - u_j^{n\#}) + \frac{k_y}{\delta y}(F_j^n - F_{j-1}^n) + \left(\nu_1(x^n) + if(|u_{\theta j}^{n\#}|) \right) \left(\frac{u_{\theta j}^{n\#} + u_j^{n+1}}{2} \right) + B_j^n u_j^{n+1} = 0. \quad (8.2.6)$$

8.2.4 2-ray scheme

We want to model the case of two rays crossing each other, with two different propagation vectors $\vec{k}^1$ and $\vec{k}^2$ (one with positive and one with negative

y -component : $k_y^1 > 0$ and $k_y^2 < 0$.) To do so, it is necessary to evaluate the nonlinear term $f(|u|)$. Theoretically, the laser energy is :

$$|\Psi|^2 = |u^1 e^{i \frac{\vec{k}^1 \cdot \vec{x}}{\epsilon}} + u^2 e^{i \frac{\vec{k}^2 \cdot \vec{x}}{\epsilon}}|^2 = |u^1|^2 + |u^2|^2 + 2\text{Re}(u^1 u^{2*} e^{i \frac{(\vec{k}^1 - \vec{k}^2) \cdot \vec{x}}{\epsilon}}).$$

But we are in the framework of W.K.B. approximation and we do not model the fluctuation of the solution at the wavelength level. Hence, the term f has to be taken on a function w corresponding to the variation of the index of refraction, which is here the average value of $|u|$ over a wavelength :

$$w = \sqrt{|u^1|^2 + |u^2|^2}.$$

One considers the following model, for $p = 1, 2$:

$$i \vec{k}^p \cdot \nabla u^p + \frac{\epsilon}{2} \Delta_{\perp}^p + i \nu u^p = f(\sqrt{|u^1|^2 + |u^2|^2}) u^p.$$

The first and second stages are the same : for each ray, we consider the equation (8.2.2) with its own propagation direction $\vec{k}^1$ or $\vec{k}^2$, and then an inverse transport equation along this vector. The interaction between the two rays changes only the nonlinear term of the third stage.

8.3 Properties of the scheme

8.3.1 Stability

Theorem 8.3.1 *The numerical first order scheme is monotone decreasing for the l^2 -norm, i.e the following inequality stands :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||(u_j^n)_j||_{l_j^2} \leq ||(u_j^{n+1})_j||_{l_j^2}. \quad (8.3.1)$$

Moreover, the previous inequality is strict if $\nu \neq 0$.

Proof.

1. First and second stages : Fast Fourier Transform

Let us denote by ζ the discrete variable associated to η . On the one hand, since $u^{n\#} = IFFT\left(e^{(R_-(i\zeta)+i\zeta\frac{k_y}{k_x})\delta x} FFT(u^n)\right)$ and since the FFT conserves the l^2 -norm, we have :

$$\|u^{n\#}\|_{l^2} = \|e^{(R_-(i\zeta)+i\zeta\frac{k_y}{k_x})\delta x} FFT(u^n)\|_{l^2}.$$

On the second hand, the inequality $\mathcal{R}e(R_-(i\zeta)) \leq 0$ implies that

$$|e^{(R_-(i\zeta)+i\zeta\frac{k_y}{k_x})\delta x}| \leq 1,$$

with an equality *iff* $\nu_0 = 0$. We deduce that :

$$\|e^{(R_-(i\zeta)+i\zeta\frac{k_y}{k_x})\delta x} U(\zeta)\|_{l^2} \leq \|U(\zeta)\|_{l^2},$$

and conclude :

$$\|u^{n\#}\|_{l^2} \leq \|u^n\|_{l^2},$$

with $\|u^{n\#}\|_{l^2} = \|u^n\|_{l^2}$ *iff* $\nu_0 = 0$.

2. Third stage : upwind scheme

The relation (8.2.5) gives us that :

$$u_j^{n+1} = \frac{\frac{k_x}{\delta_x} u_j^{n\#} - \frac{k_y}{\delta_y} (u_j^{n\#} - u_{j-1}^{n\#}) - \frac{1}{2}(\nu_1 + if(|u_{\theta_j}^{n\#}|)) u_{\theta_j}^{n\#}}{\frac{k_x}{\delta_x} + \frac{1}{2}(\nu_1 + if(|u_{\theta_j}^{n\#}|)) + B_j^n}$$

Provided that $\frac{k_x}{\delta_x} u_j^{n\#} - \frac{k_y}{\delta_y} (u_j^{n\#} - u_{j-1}^{n\#}) = \frac{k_x}{\delta_x} u_{\theta_j}^{n\#}$, we obtain :

$$u_j^{n+1} = \frac{\frac{k_x}{\delta_x} - \frac{1}{2}(\nu_1 + if(|u_{\theta_j}^{n\#}|))}{\frac{k_x}{\delta_x} + \frac{1}{2}(\nu_1 + if(|u_{\theta_j}^{n\#}|)) + B_j^n} u_{\theta_j}^{n\#}.$$

This leads to $\|u^{n+1}\|_{l^2} \leq \|(u_{\theta_j}^{n\#})_j\|_{l^2}$. By the triangle inequality :

$$\|(u_{\theta_j}^{n\#})_j\|_{l^2} \leq \theta \|(u_{j-1}^{n\#})_j\|_{l^2} + (1 - \theta) \|(u_j^{n\#})_j\|_{l^2} \leq \|u^{n\#}\|_{l^2},$$

which concludes the proof.

◇

In the linear case $f = 0$, the scheme is obviously consistent, so the theorem implies the convergence.

8.3.2 Convergence towards the classical Schrödinger equation

Theorem 8.3.2 *If $k_y \rightarrow 0$, the scheme converges to the solution of the classical Schrödinger Cauchy problem :*

$$i\partial_x u + \frac{\epsilon}{2}\partial_{yy}^2 u + i\nu u - f(|u|)u = 0, \quad (8.3.2)$$

$$u|_{x=0} = g. \quad (8.3.3)$$

Proof.

1. Initializing

The formula (8.2.1) used in the scheme shows that

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} \mathcal{F}(u; x=0) = \mathcal{F}(g),$$

so the boundary condition tends to $u|_{x=0} = g$, which is (8.3.3).

2. First and second stages

If k_y tends to zero, *i.e* when the ray tends to be perpendicular to the boundary, the formula (8.2.3) shows that :

$$\lim_{k_y \rightarrow 0} R_-(i\eta) + i\eta \frac{k_y}{k_x} = -\nu - i\frac{\epsilon}{2}\eta^2,$$

so $u^{n\circ}$ given by the first and second stage is the solution of the classical Schrödinger equation with no potential :

$$i\partial_x u + \frac{\epsilon}{2}\partial_{yy}^2 u + i\nu u = 0,$$

which is the limit of the advection-Schrödinger equation.

3. Third stage

It corresponds to a classical discretization of the ordinary differential equation :

$$\partial_x u + \nu_1 u + if(|u|)u = 0.$$

In other words, the scheme is a classical splitting between dispersion and non linearity in the Schrödinger equation (8.3.2).

◇

8.4 Numerical results

Here we give the standard numerical values used in the following results.

1. $L = 2.5 \mu m$: it is approximately the half-width of a speckle of a typical laser beam. For an initial condition, we take a Gaussian $u^{in} = \exp(-(\frac{\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{L})^2)$. In order to simplify the comparison between different angles of incidence for a same beam, we always take the maximum point of u^{in} be the point $(0, 0)$, *i.e.* $Y_0 = 0$. For the cases with only one ray, we take $\vec{k} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$: the ray enters in the domain with an angle of -45° .
2. $\epsilon = 0.05 \mu m$, the wavelength of the laser is $2\pi\epsilon \approx 0.3 \mu m$.
3. $\nu_0 = \nu_1 = 5.10^{-3} \mu m^{-1}$. The fact that $\nu \approx 1/100 \mu m^{-1}$ means that the plasma absorbs $1/e$ of the laser energy on a distance of $100 \mu m$. It may seems exaggerated, but it is also possible to take much smaller absorption values and obtain quite as good results : in other words the absorption does not influence the convergence of the scheme.
4. We take $\alpha = 5.10^{-2}$. It depends on the electronic density of the plasma : in the vacuum α would be null. This size order corresponds either to a dense plasma or to a high laser intensity - since we have taken a normalized u^{in} of intensity equal to 1.

All our figures represent $|u|^2$, which is more significant than $|u|$ since it is the energy. To be easier to read, our examples are variations around the case of an incidence angle of 45° , with the previous orders of magnitude and CFL number equal to 1 (see figure 8.1). With these assumptions, the scheme converges very well as the discretization step decreases.

8.4.1 Convergence of the scheme

We take $\epsilon = 0.05$, $\nu_0 = \nu_1 = 0.0005$, $\alpha = 0.05$, and u^{in} a Gaussian of amplitude 1. Due to the α coefficient, focusing occurs : the beam focuses and reaches a maximum, then decreases, and may even focus several times.

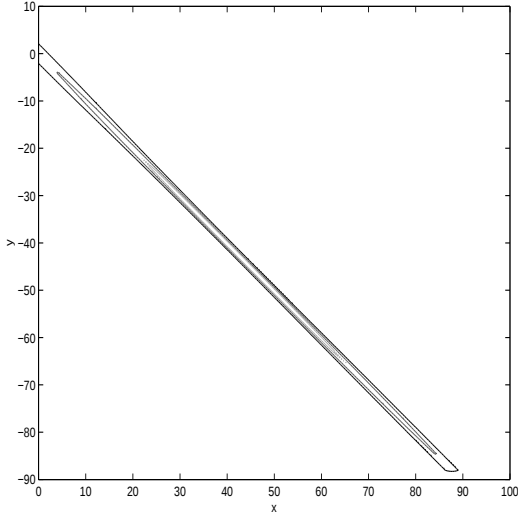


FIG. 8.1 – Reference : $\delta_y = 0.4$, $CFL = 1$.
 $L_{foc} = 60.0$, $Max(|u|^2) = 2.14$

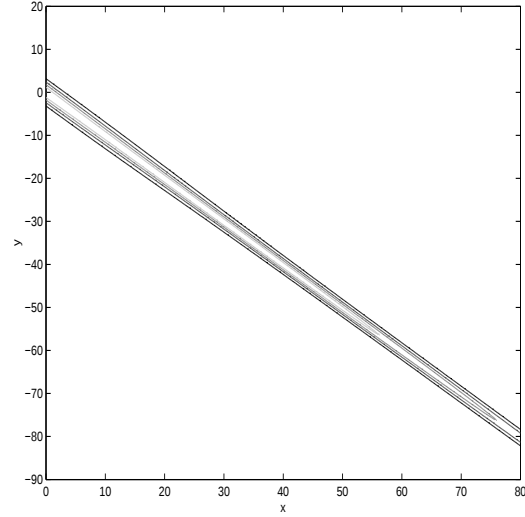


FIG. 8.2 – 1st order scheme with $CFL = 0.7$, $\delta_y = 0.2$. No focusing observed.

Convergence of the first order scheme

If the CFL number is strictly larger than 1, the computed solution blows up, and if $CFL < 1$, the precision quickly vanishes, and the focusing disappears : see figure 8.2.

We now take the CFL number equal to 1. To verify the convergence of the scheme, we look in each case at the focusing maximal point and check whether its distance L_{foc} to the origin of the ray and its maximal value converge. The conclusion is that we reach an accurate result even for $\delta_x = \delta_y = 0.8$: see figures 8.3 and 8.4, to be compared to the reference figure 8.1. The focusing distance L_{foc} lies between 59.4 and 61.5, and the maximum between 2.14 and 2.16, which gives an error less than 3 percents.

Convergence of the second order scheme

After having tested different functions for the flux limiter, which we always apply at $|u|^2$ and not at the real or imaginary part of the solution, it appears that the Van

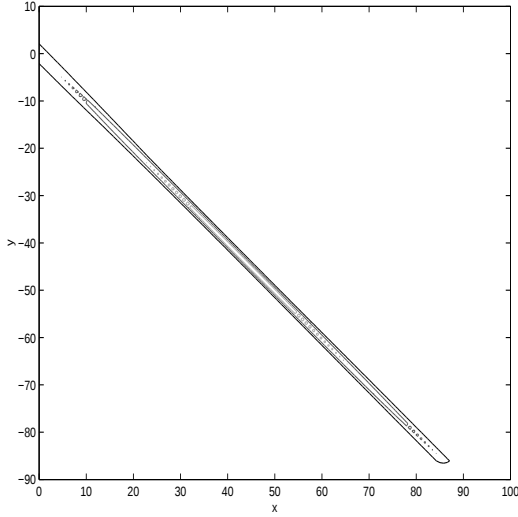


FIG. 8.3 – Low precision. $\delta_x = \delta_y = 0.8$, $L_{foc} = 61.5$ and $Max(|u|^2) = 2.16$

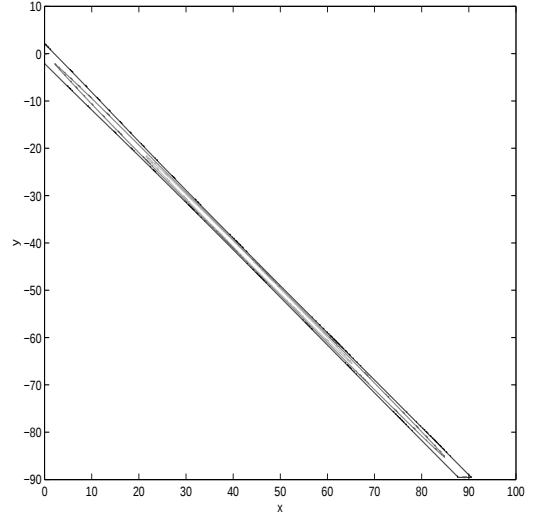


FIG. 8.4 – High precision. $\delta_x = \delta_y = 0.1$, $L_{foc} = 59.4$ and $Max(|u|^2) = 2.14$.

Leer flux function is the one which gives the most accurate results. With $CFL = 0.4$, we obviously need more points than for $CFL = 1$ but manage anyway, with 2^{10} points (that is, with $\delta_y = 0.1$), in finding a correct approximation : see figures 8.5 and 8.6, to be compared to the reference figure 8.1.

8.4.2 Variation of several parameters

Variation of the incidence angle

To test whether the scheme is accurate for various angles, we vary from 5° to 60° (in fact it works also for smaller up to 1° , and bigger up to 80° angles, but this does not have much practical interest), all the other parameters being constant : see figures 8.7 to 8.10, for each of which the convergence of the scheme is very good (we have taken 2^9 points in each direction). We conclude that the focusing distance and the maximum of energy are very well captured : the error is smaller than 5 percents. Hence, our method is valid whatever the angle.

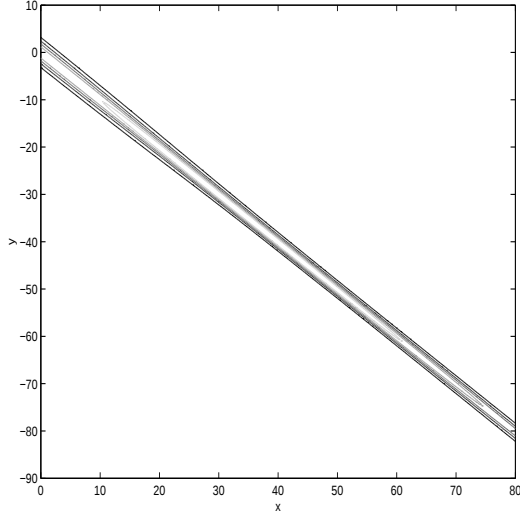


FIG. 8.5 – 2nd order, low precision :
 $\delta_x = 0.16$ and $\delta_y = 0.4$.
 $L_{foc} = 50.7$ and $Max(|u|^2) = 1.24$

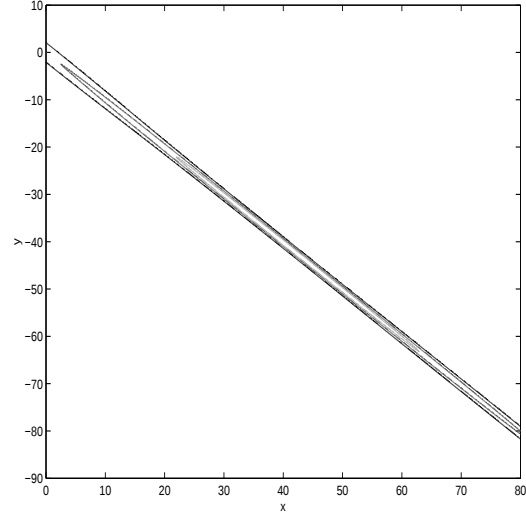


FIG. 8.6 – 2nd order, high precision :
 $\delta_x = 0.04$ and $\delta_y = 0.1$.
 $L_{foc} = 60.5$ and $Max(|u|^2) = 2.06$.

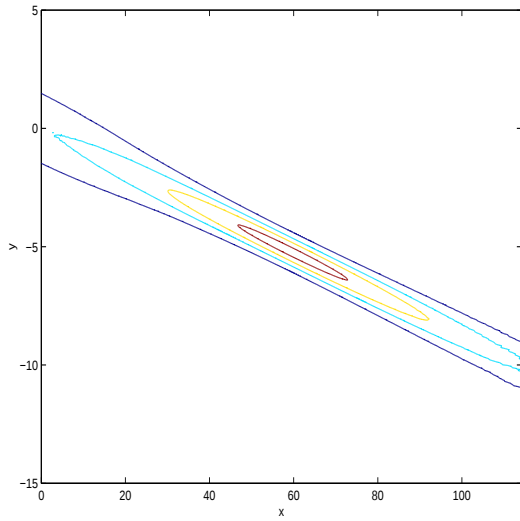


FIG. 8.7 – Incidence angle 5° , $CFL = 1$.
 $L_{foc} = 60.6$ and $Max(|u|^2) = 2.2$

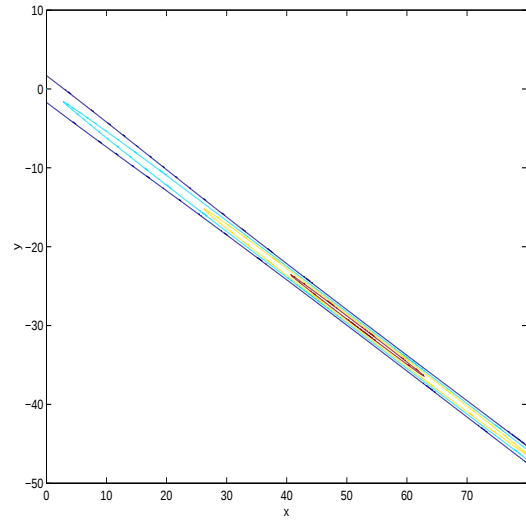


FIG. 8.8 – Incidence angle 30° , $CFL = 1$.
 $L_{foc} = 59.4$ and $Max(|u|^2) = 2.2$

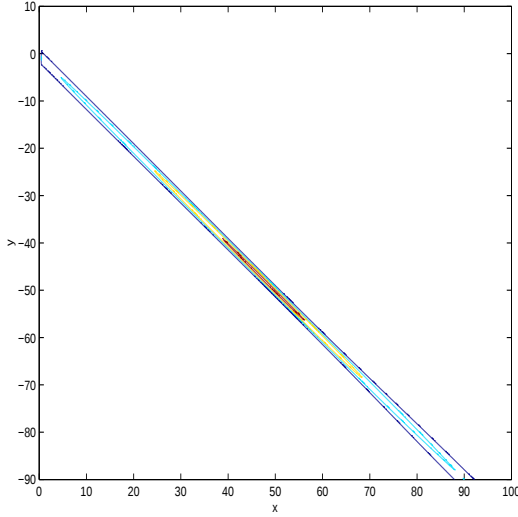


FIG. 8.9 – Incidence angle 45° , $CFL = 1$.
 $L_{foc} = 59.8$ and $Max(|u|^2) = 2.14$

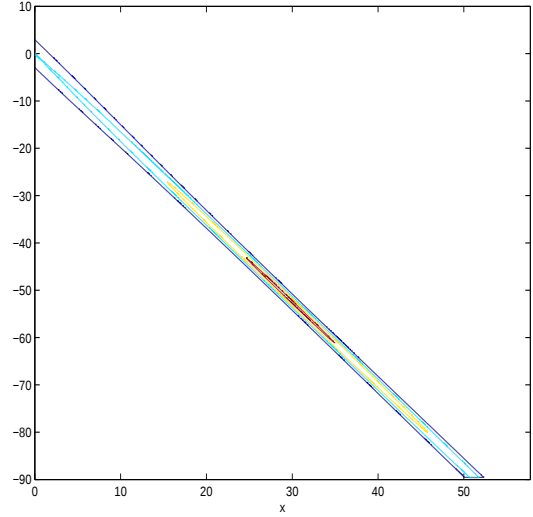


FIG. 8.10 – Incidence angle 60° , $CFL = 1$.
 $L_{foc} = 59.7$ and $Max(|u|^2) = 2.10$

Other parameters

1. **Variation of ϵ** : the diffusion grows with ϵ . We cannot take it too big : the bigger it is, the larger domain must be in order to obtain a converging solution. In addition, the case $\epsilon = 0$ is outside the scope of this work.
2. **Variation of ν_0 and ν_1** : the scheme can also be used with no absorption, the solution still converges if the other parameters are convenient. The repartition of ν_0 and ν_1 changes the solution by less than 2%, and furthermore only at the end of the domain and without changing the shape of the solution.
3. **Variation of α** : for a limit value of α , focusing appears : in our reference case, the limit is for $\alpha = 0.02$. When it is big enough, several focusing points appear, at regular distance from each other : see figure 8.11, where we have taken the reference case with no absorption. This phenomenon depends of course also of the absorption $\nu_0 + \nu_1$. If α becomes too big, there is a filamentation phenomenon, along with multiple focusing points. In figure 8.13, we see two rays crossing in the vacuum, *i.e.* $\alpha = 0$.

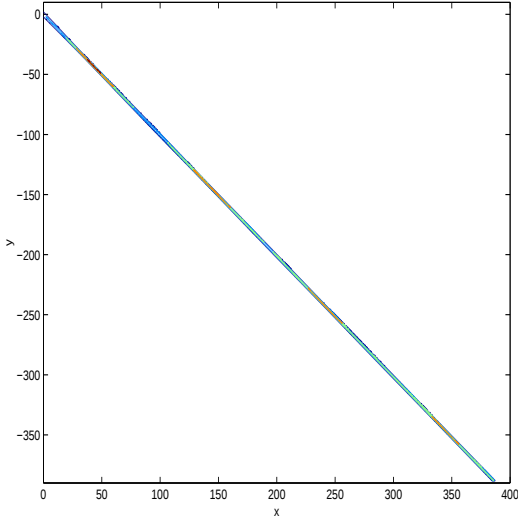


FIG. 8.11 – Multiple and regular focusing observed for $\alpha = 0.05$, $\nu_0 = \nu_1 = 0$, standard hypothesis.

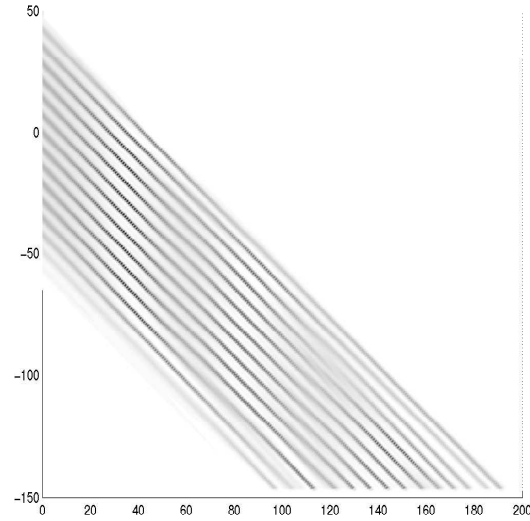


FIG. 8.12 – Whole ray figure : $u^{in} = e^{-(\frac{Y}{40})^6} (1 + 0.3 \cos(2\pi \frac{Y}{5}))$.

4. **Variation of the initial condition** : we now consider (fig. 8.12) not only one speckle but a whole ray, under the form :

$$u^{in} = e^{-|\frac{Y}{L_1}|^6} (1 + 0.3 \cos(2\pi \frac{Y}{L_2})),$$

with $L_1 = 40 \mu m$ the width of the beam, and $L_2 = 2.5 \mu m$ the width of a speckle in the beam.

8.4.3 Two rays crossing

To obtain more accurate results, it is of course better to make the rays enter in the domain with opposite angles : the CFL numbers are then the same for each ray, and it is possible to choose the parameters in such manner that $CFL = 1$.

We take one ray going up, defined by $\vec{k}_1 = (k_x, k_y)$ with $k_y > 0$, and one ray going down, defined by $\vec{k}_2 = (k_x, -k_y)$. We draw $|u^1|^2 + |u^2|^2$.

In the figures 8.14 and 8.15, we take an angle of 30° with the x-axis for each ray, $\alpha = 0.05$ and Gaussians of modulus 1 for initial conditions : $u^{in 1} = A \exp(-(\frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}{L_1})^2)$

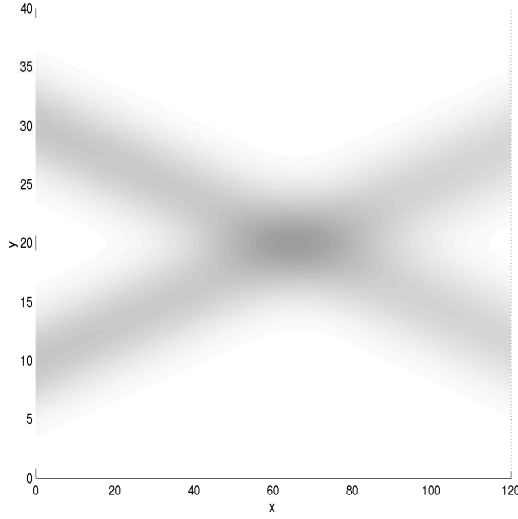


FIG. 8.13 – 2 beams crossing with $\alpha = 0$ (vacuum)

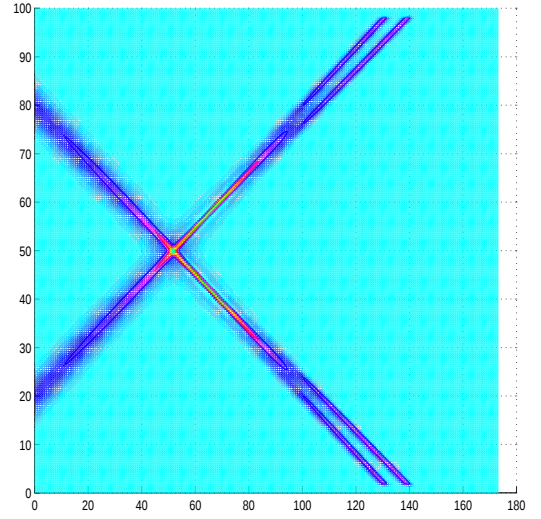


FIG. 8.14 – Angle 30° , $\alpha = 0.05$, interaction of the rays : $Max(|u^1|^2 + |u^2|^2) = 12.3$

and $u^{in 2} = \exp(-(\frac{\vec{k}^2 \cdot \vec{x}}{L_2})^2)$ with $L_1 = L_2 = 5$. To see the influence of the rays on one another, the figure 8.14 draws the two rays interacting (by the numerical scheme of the paragraph 8.2.4), when the figure 8.15 is only the joint drawing of the two independent rays.

We see that the focusing point intensity is higher when rays interact : $Max(|u^1|^2 + |u^2|^2) = 12.3$ instead of 10.6, and the filamentation is more intense.

In the figure 8.16, we see the interaction between a whole ray and a ray of a speckle width :

$$u^{1in} = \exp(-(Y/40)^6) \cdot (1 + 0.3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot Y/10))$$

and $u^{2in} = 0.8 \exp(-(Y/5)^2)$.

8.5 Perspectives

It is of course possible to consider a model where one would couple an advection-Schrödinger equation with an hydrodynamic module, linearised or not. Crossing

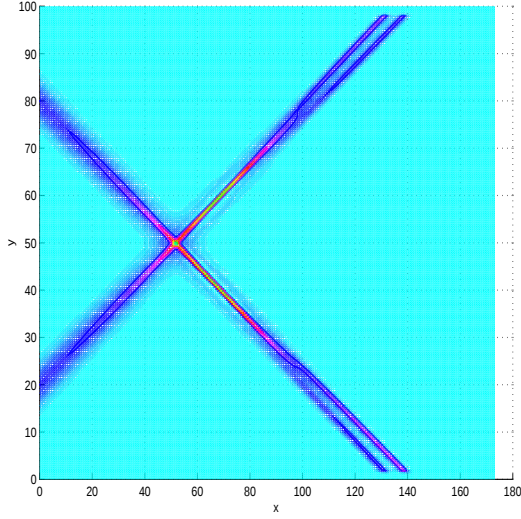


FIG. 8.15 – Angle 30° , $\alpha = 0.05$,
no interaction of the rays : $Max(|u^1|^2 + |u^2|^2) = 10.6$.

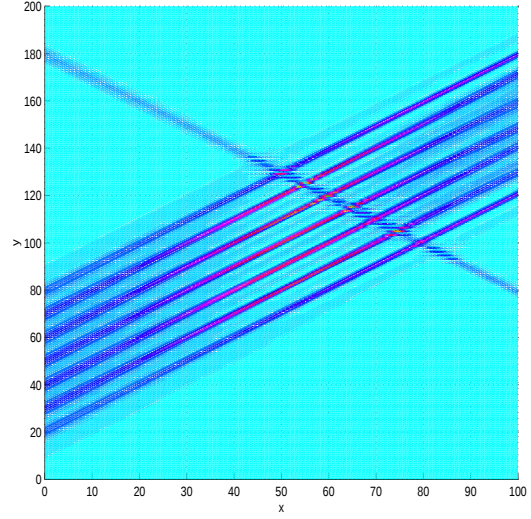


FIG. 8.16 – Angle 45° , $\alpha = 0.05$,
2 different rays.

beam problems, with filamentation and possibly deflexion due to a transverse flow, could then be studied (see [30] or [31]).

Our study also allows carrying out paraxial simulations inside a domain where the electronic density profile presents a non negligible variation at a macroscopic scale, *i.e* at a much bigger scale than the laser wavelength. The variation of the density profile makes the propagation vector $\vec{k}$ vary too.

More precisely, if one takes the electronic density $N(\vec{x})$ rendered non-dimensioned by the critical density, it is possible to write $N(\vec{x}) = N_0(\vec{x}) + 2\mu(\vec{x})\epsilon(1 - N_0(\vec{x}))$, with N_0 a regular slowly varying function and μ bounded. Physically, it means that a macroscopically varying refraction index makes the laser beam change direction globally, what is coupled to a small amplitude refraction appearing at the scale of a couple of laser wavelengths. The latter refraction can come from an electronic density variation at this scale, typically the variation of the plasma in the hot points of the laser (the speckles).

Under these assumptions, one defines first the vector $\vec{k} = \nabla\phi$ obtained by the following eikonal equation resolution, where $\vec{k}^{in}$ is given on the entering boundary

Γ^{in} defined by

$$\Gamma^{in} = \{(x, y) : x = 0, y_0 \leq y \leq y_0 + L_y\}.$$

$$|\nabla\phi|^2 = 1 - N_0, \quad \nabla\phi = \vec{k}^{in} \text{ on } \Gamma^{in}.$$

In the particular case where the domain $\mathcal{D}$ is a half-space orthogonal to the x_1 -direction, and where N_0 depends only on the transverse variable noted $\vec{y}$, the solution of the eikonal equation is : $k_y(\vec{x}) = k_y^{in}(\vec{y})$, $k_x(\vec{x}) = (1 - N_0(\vec{y}) - |k_y^{in}(\vec{y})|^2)^{1/2}$.

Introducing the *orthogonal Laplacian* operator $\Delta_\perp^k$ (*i.e.* orthogonal to the vector field $\vec{k}$) :

$$\Delta_\perp^k \bullet = \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{1} - \frac{\vec{k} \otimes \vec{k}}{|\vec{k}|^2} \right) \nabla \bullet \right], \quad \text{where } \mathbf{1} \text{ is the unit tensor,}$$

the laser potential ψ can be approximated by

$$\psi \simeq u(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} / \epsilon},$$

where u varies slowly in $\vec{x}$ and is solution of

$$i \left(\vec{k} \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \nabla \cdot \vec{k} + \nu u \right) + \frac{1}{2} \epsilon \Delta_\perp^k u - \mu u = 0, \quad .$$

It is also possible to reintroduce a time dependence if either the incoming boundary condition or the function μ is time-dependant. Denoting by c the speed of light (see the heuristic proof in part I, chapter 5), one arrives at :

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{k} \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \nabla \cdot \vec{k} + \nu u \right) + \frac{1}{2} \epsilon \Delta_\perp^k u - \mu u = 0.$$

This is again an advection-Schrödinger equation, generalising the classical equation found if the ray propagates along a fixed direction z and if N_0 depends only on z :

$$i \left(k \partial_z u + \frac{1}{2} u \partial_z k + \nu u \right) + \frac{1}{2} \epsilon \Delta_\perp u - \mu u = 0.$$

This equation is very often used (see for instance [8], where some additional terms are also considered, representing other physical phenomena).

8.6 Conclusion

After a mathematical study, we have presented here a method for the numerical resolution of the advection-Schrödinger equation. It is illustrated by some results. We have also given possible extensions of this model, which could allow one to enlarge the field of application of the program *simulation paraxiale pour l'interaction laser-plasma* of the CEA-DAM.

Chapitre 9

Annexe 1 : rappel de géométrie

9.0.1 Formulaire

a, b désignent des distributions de Schwartz de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$.

On note $\vec{v} \otimes \vec{w}$ le produit tensoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, soit $\vec{v} \otimes \vec{w} = (v_i w_j)$, et $\vec{v}^{\otimes 2} = (v_i v_j)$ le carré tensoriel du vecteur $\vec{v}$.

On note

$$M : N = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} N_{ij}$$

$$\nabla(\nabla a \cdot \nabla b) = \nabla^2 b \cdot \nabla a + \nabla^2 a \cdot \nabla b.$$

$$(\nabla a \cdot \nabla)^2 b = \nabla a \cdot \nabla(\nabla a \cdot \nabla b) = \nabla a^{\otimes 2} : \nabla^{\otimes 2} b + \nabla b \cdot \nabla(\frac{1}{2}|\nabla a|^2)$$

$$(\nabla a \cdot \nabla)^2 b = \nabla a \cdot \nabla(\nabla a \cdot \nabla b) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i a \partial_j a \partial_{ij} b + \partial_i a \partial_{ij} a \partial_j b$$

$$\Delta(\nabla a \cdot \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla \Delta b + \nabla b \cdot \nabla \Delta a + 2\nabla^{\otimes 2} a : \nabla^{\otimes 2} b$$

$$\Delta(\nabla a \cdot \nabla b) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{iij}^3 a \partial_j b + d_{iij}^3 b \partial_j a + 2\partial_{ij}^2 a \partial_{ij}^2 b.$$

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \Delta b$$

$$\nabla \cdot (\nabla a^{\otimes 2} \nabla b) = \nabla a^{\otimes 2} : \nabla^{\otimes 2} b + (\nabla a \cdot \nabla b) \Delta a + \nabla b \cdot \nabla(\frac{1}{2}|\nabla a|^2)$$

$$\nabla \cdot (\nabla a^{\otimes 2} \nabla b) = (\nabla a \cdot \nabla)^2 b + (\nabla a \cdot \nabla b) \Delta a$$

9.0.2 Géométrie de rayons courbes

On s'intéresse maintenant à l'écriture de l'équation des ondes dans la base orthonormée locale de direction X définie par les directions des rayons. On considère

la famille de courbes formée par les rayons, dont on cherche les trajectoires orthogonales. Cela revient à chercher une fonction $\hat{\phi}$ constante sur les surfaces orthogonales aux rayons. On définit ainsi la base :

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}; & \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{1}{|\nabla\phi|} \nabla\phi \cdot \nabla \\ \vec{J} &= \frac{\nabla\hat{\phi}}{|\nabla\hat{\phi}|} & \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{1}{|\nabla\hat{\phi}|} \nabla\hat{\phi} \cdot \nabla\end{aligned}$$

Plusieurs choix sont possibles pour $\hat{\phi}$. On décide de le prendre tel que $\nabla\hat{\phi} = \alpha^{-1}\nabla\phi^\perp$ où α est la solution de $\nabla \cdot (\alpha^{-1}\nabla\phi) = 0$, avec la condition au bord $\alpha|_\Gamma = 1$. L'équation précédente vérifiée par α est équivalente à la condition de Schwartz pour $\hat{\phi}$. Cela signifie aussi que α est le jacobien de la transformation changeant la base canonique en $(\vec{I}, \vec{J})$. De plus, on a $\alpha = \frac{|\nabla\phi|}{|\nabla\hat{\phi}|}$.

Le laplacien et la divergence s'expriment dans cette base sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta f &= |\nabla\hat{\phi}| \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{|\nabla\hat{\phi}|} \frac{\partial f}{\partial X} \right) + |\nabla\phi| \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{|\nabla\phi|} \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \\ \nabla \cdot f &= |\nabla\hat{\phi}| \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{|\nabla\hat{\phi}|} f_{\vec{I}} \right) + |\nabla\phi| \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{|\nabla\phi|} f_{\vec{J}} \right)\end{aligned}$$

Ce sont les formules standard dans une métrique riemannienne. On a en particulier :

$$\Delta\phi = \frac{|\nabla\phi|}{\alpha} \frac{\partial}{\partial X}(\alpha)$$

Chapitre 10

Annexe 2 : note publiée aux
Comptes-Rendus de l'Académie des
Sciences

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* Dover Publications, 1972.
- [2] M. Ehrhardt, A. Arnold, *Discrete Transparent Boundary Conditions for Schrödinger Equations* Riv.Mat. Univ. Parma 6, p57 (2001).
- [3] A. Arnold, *Numerically Absorbing Boundary Conditions for Quantum Evolution Equations*.
- [4] J.D. Benamou, O. Lafitte, R. Sentis, I. Sollic, *A Geometrical Optics based numerical Methods for high Frequency electromagnetic Fields Computations near fold Caustics* (part I). J. Comp. Applied Maths, t. 156 p. 93-125 (2003)
- [5] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, *Model Equations for long Waves in nonlinear dispersive Systems*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 272 47-78, 1972.
- [6] R.L. Berger, B.F. Lasinski and *al*, *Theory and three-dimensional simulation of light filamentation*. Phys. Fluids B 5 p2243-2258 (1993).
- [7] J.P. Berenger, *A Perfectly Matched Layer* J. Comp. Physics 114, p185-200 (1994).
- [8] R.L. Berger, C.H. Still and *al*, *On the dominant and subdominant behaviour of stimulated Raman and Brillouin Scattering*. Phys. Plasmas 5, p.4337 (1998).
- [9] J.L. Bona, M. Chen, J.C. Saut, *Boussinesq Equations and other Systems for small-amplitude long Waves in nonlinear dispersive media I : Derivation and the linear Theory*. 2002, J. Nonlinear Sci. 12, pp. 283-318.

- [10] G. Bonnaud, G. Riazuelo and al. *Paraxial propagation of smooth laser Beams* Proc. IFSA Conf. (Kyoto, sept.2001) K.A. Tanaka, D.D. Meyerhofer, ed. Elsevier (2001) ; F.Valraet, G. Bonnaud, G. Riazuelo, Phys. Plasmas (2001)
- [11] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, Paris, 1999.
- [12] S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1970.
- [13] Robert Dautray-Jacques-Louis Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, 1988, éditions Masson.
- [14] C.H. Bruneau, L. Di Menza *Conditions aux limites transparentes et artificielles*. C.R.Ac.Sciences, I, 320, p.89-94 (1995).
- [15] B. Després, Thèse de l'Université Paris VI (1992).
- [16] B. Després et P. Joly, Rapport INRIA, 1992.
- [17] L. Di Menza *Transparent and absorbing Boundary Conditions for Schrödinger Equations* Num.Funct.Anal. Optimization 18 p 759 (1997).
- [18] P. Donnat, *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1994.
- [19] P. Donnat, J-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Diffraction Nonlinear Geometric Optics I*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1995-1996, pp. XVII 1 - XVII 23.
- [20] P. Donnat, J. Rauch, *Global Solvability of the Maxwell-Bloch equations from nonlinear optics*. Arch. Rat. Mech. Anal., 136(3), 1996.
- [21] P. Donnat, J. Rauch, *Dispersive Nonlinear Geometric Optics*, J. Math. Phys., 38 (1997), pp. 1484-1523.
- [22] M. Doumic, F. Golse, R. Sentis, *Boundary Value Problem for oblique paraxial Model of Light Propagation : the Advection Schrödinger equation*, à paraître.
- [23] M. Doumic, F. Golse, R. Sentis, *Numerical Simulation for paraxial Model of Light Propagation in a tilted frame : the Advection-Schrödinger equation*, à paraître.

- [24] M. Doumic, F. Golse, R. Sentis, *Un modèle paraxial de propagation de la lumière : problème aux limites pour l'équation d'advection Schrödinger en coordonnées obliques*, Compte-Rendus de l'Académie des Sciences.
- [25] E. Dumas, *Un peu d'optique diffractive non linéaire à phases courbes*. Thèse de doctorat de l'université de Rennes I, déc. 2000.
- [26] E. Dumas, *Periodic multiphase diffractive optics with curved phases*. Indiana University Mathematics Journal 52 (2003), no. 3, 769–810.
- [27] H. Dym et H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.
- [28] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Providence RI American Mathematical Society 1998.
- [29] M.D. Feit, J.A. Fleck, *Beam non paraxiality* J. Opt.Soc.Am. B 5 p633-640 (1988).
- [30] J.L. Feugeas *Un modèle Schrödinger paraxial* Rapport Do 509 (14/02/2001)
- [31] J.L. Feugeas, M. Casanova, R. Sentis, *AMR method for the Simulation of Laser-plasma Interaction with full nonlinear Hydrodynamics* Proc. IFSA Conf. (Kyoto, sept.2001) K.A. Tanaka, D.D. Meyerhofer, ed. Elsevier (2001)
- [32] V.A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*. Pergamon, London (1965)
- [33] R. Hadley, *Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method*. IEEE, J. Quantum Electronics, 28, p.363 (1992).
- [34] R.L. Higdon, *Initial-boundary Value Problem for linear hyperbolic Systems*, SIAM Review 28 (1986), p.177-217.
- [35] Mitsuru Ikawa, *Hyperbolic partial differential equations and wave phenomena*, Providence RI : American mathematical society, 2000
- [36] W.L. Kruer, *The Physics of Laser-Plasma Interaction*, Addison-Wesley, New-York (1988).
- [37] J-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Several recent Results in non linear geometric Optics*. Partial Differential Equations and Mathematical Physics, eds L. Hörmander and A. Melinm Birkhäuser Publ. (1996)

- [38] J-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Transparent Nonlinear Geometric Optics and Maxwell-Bloch Equations*. Journal of Differential Equations, vol. 166, Issue 1, 1 sept. 2000, pp. 175-250.
- [39] J-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Global Solutions to Maxwell Equations in a ferromagnetic Medium*. Annales Henri Poincaré, 1, no.2, 307-340, 2000.
- [40] D. Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*. Asymptotic Analysis 18 (1998) pp. 111-146.
- [41] D. Lee, A.D. Pierce, *Parabolic equations developpement in recent decade* J. Comp. Accoustics, 3, p2 (1995).
- [42] Lévêque, *Numerical Methods for Linear Equations*.
- [43] J.L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol.1, éd. Dunod, 1968.
- [44] M. Nakahara *Geometry, topology and physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol 1991.
- [45] A. Newell *Solitons in mathematics and physics*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia 1985.
- [46] D. Pesme, in *La fusion par confinement inertiel*, Dautray-Watteau, ed. Eyrolles, Paris (1995) : tome I. Interaction laser-matière, ch. 2 à 5 "Interaction collisionnelle et collective".
- [47] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. 2, Fourier analysis, self-adjointness*, San Diego CA London Sydney : Academic press, 1975
- [48] H.A. Rose, *Laser beam deflection by flow*. Phys. Plasmas 3, p1709-1727 (1996).
- [49] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. Mc Graw-Hill, New-York (1941).
- [50] V.T. Tikhonchuk, a.a. Zozulya, *Structure of Light beams in self-pumped four wave mixing geometries* Prog.Quant. Electr. 15 p.231 (1992).