



HAL
open science

Corrélation optique optimale et application aux architectures cohérentes et incohérentes

Vincent Laude

► **To cite this version:**

Vincent Laude. Corrélation optique optimale et application aux architectures cohérentes et incohérentes. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 1994. Français. NNT: . tel-00143607

HAL Id: tel-00143607

<https://theses.hal.science/tel-00143607>

Submitted on 26 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

n° d'ordre :

**UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY**

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES
de l'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY**

PAR

Vincent LAUDE

SUJET :

**Corrélation optique optimale
et
application aux architectures
cohérentes et incohérentes**

Soutenue le 19 décembre 1994

devant la commission d'examen composée de :

MM.	Ch.	IMBERT	Président
	P.	AMBS	Rapporteur
	J.-L.	DE BOUGRENET DE LA TOCNAYE	Rapporteur
	C.	BOCCARA	
	P.	CHAVEL	
	Ph.	RÉFRÉGIER	

À ma famille
À Nadine

Remerciements

Je remercie Christian Imbert, directeur de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée et de l'École Supérieure d'Optique, d'avoir accepté la présidence du jury.

Mes vifs remerciements vont à Claude Boccara, Professeur à l'École Supérieure de Physique–Chimie de Paris, qui m'a fait l'honneur de participer au jury.

Je tiens à remercier Pierre Ambs, Professeur des Universités, ainsi que Jean–Louis de Bougrenet de la Tocnaye, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, qui ont accepté de bonne grâce la tâche ingrate de rapporteur.

Je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance pour Pierre Chavel, Directeur de Recherche à l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée, qui en tant que directeur de thèse m'a consacré beaucoup de son temps, et dont la culture et la rigueur scientifique ont influencé fortement tant mes travaux que ce mémoire.

J'exprime ma profonde gratitude pour Philippe Réfrégier, mon directeur de travaux au Laboratoire Central de Recherches de Thomson–CSF, dont la disponibilité, le dynamisme et la créativité ont été déterminants pour tous les aspects de ce travail. Il est à l'origine de beaucoup des résultats présentés dans ce mémoire, et fut un guide et un soutien permanent.

Je remercie Bahram Javidi, Professeur à l'Université du Connecticut aux USA, avec qui j'ai eu l'honneur et la chance de collaborer.

Je voudrais remercier pour leur bon accueil et leurs conseils tous les membres du Groupe de Physique des Images de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée, et en particulier Line Garnero.

Mes vifs remerciements vont à Dominique Broussoux et Guy de la Forest, de Thomson Brandt Armements, avec qui j'ai collaboré pour la partie “corrélation incohérente par ombroscopie”.

Je tiens à remercier toutes les personnes du Laboratoire Central de Recherches que j'ai côtoyées pendant ces trois années : Jean–Pierre Huignard, qui m'a accueilli au sein du Laboratoire Optique et Traitement du Signal, et tous les membres de ce laboratoire ; Sylvie Tonda qui a corrigé en détail les premières versions de ce mémoire ; Stéphane Formont qui a concrétisé certaines de nos idées théoriques ; Jean Figue à qui j'ai emprunté nombre de développements informatiques ; Philippe Michel ingénieur système sans qui la Terre ne saurait tourner ; Paul Mitelette qui a réalisé la mécanique du corrélateur incohérent ; Catherine Salou et Olivier N'Guyen–Khac que j'ai eu le plaisir de diriger au cours de leur stage.

Enfin, j'ai une pensée émue pour tous les thésards du Laboratoire Central de Recherches et d'ailleurs avec qui j'ai partagé la pénombre des laboratoires et la lumière crue des écrans d'ordinateur, mais aussi les petits fours et le champagne de leurs pots de thèse.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
I Corrélation optique et filtrage optimal	15
1 Corrélation et reconnaissance de formes	17
1.1 Définitions et Notations	18
1.1.1 Notations pour les images	18
1.1.2 Images scène, référence, fond et bruit	19
1.2 Critères de qualité pour l'opération de corrélation	20
1.2.1 Efficacité	21
1.2.2 Robustesse au bruit	21
1.2.3 Discrimination et finesse du pic de corrélation	22
1.2.4 Synthèse	24
1.3 Conclusion	25
2 Filtres de corrélation numérique optimaux	27
2.1 Filtres optimisant un critère	27
2.1.1 Filtre de phase	27
2.1.2 Filtre adapté	28
2.1.3 Filtres inverse, discriminant et non-linéaire	28
2.1.4 Synthèse	29
2.2 Filtres à compromis optimal	29
2.3 Conclusion	33
3 Interprétation bayésienne de la corrélation	35
3.1 Modèle de l'image scène	35
3.2 Maximum <i>a posteriori</i> et corrélation	37
3.2.1 Principe du maximum <i>a posteriori</i>	37
3.2.2 Modèle du fond	37
3.2.3 Solution MAP et corrélation	38
3.2.4 Généralisation à l'estimation de paramètres	39
3.3 Conclusion	40
4 Architectures optiques	41
4.1 Composants de représentation d'images	41
4.2 Corrélateurs optiques en éclairage cohérent	42
4.2.1 Montage de Vander Lugt	42

4.2.2	Synthèse de pupille	43
4.2.3	Transformation de Fourier conjointe	43
4.3	Corrélateurs optiques en éclairage incohérent	44
4.3.1	Ombroscopie	44
4.3.2	Holographie incohérente	45
4.3.3	Synthèse de pupille	46
4.4	Conclusion	46
II	Filtrage multi-critères contraint	49
5	Codage des images sur les modulateurs	51
5.1	Caractéristiques du codage	51
5.2	Caractérisation d'un SLM à cristal liquide nématique en hélice	54
5.2.1	Mesure de transmission	54
5.2.2	Mesure du déphasage	55
5.2.3	Fluctuations temporelles de la transmission	56
5.2.4	État de polarisation	56
5.2.5	Synthèse: couplage amplitude-phase	57
5.3	Importance du codage des images pour la corrélation	58
5.4	Conclusion	59
6	Filtrage multi-critères	61
6.1	Définitions	61
6.2	Interprétation géométrique des compromis optimaux	63
6.3	Transformation des critères	65
6.3.1	Approche générale	66
6.3.2	Exemples d'application	67
6.4	Conclusion	68
6.A	Annexe: démonstrations des propriétés	69
6.A.1	Prévalence des filtres OT	69
6.A.2	Procédé d'obtention des filtres OT	69
6.A.3	Existence des filtres OT	70
6.A.4	Transformation des OCS	71
7	Filtrage dans l'espace de Fourier	73
7.1	Études antérieures	73
7.2	Algorithme	74
7.3	Résultats	77
7.4	Exemples de filtres optimaux contraints	81
7.5	Conclusion	83
7.A	Annexe: démonstration des résultats	83
8	Filtrage dans l'espace objet	87
8.1	Corrélation incohérente par ombroscopie	87
8.1.1	Filtrage contraint	87
8.1.2	Filtrage bipolaire contraint	89
8.1.3	Comparaison	90
8.1.4	Sélection des parties positives et négatives	91
8.2	Corrélation cohérente	92
8.2.1	Optimisation contrainte	92

8.2.2	Corrélation non-linéaire	93
8.3	Conclusion	96
8.A	Annexe : algorithme de gradient-projection	96
9	Illustration des capacités de filtrage	99
9.1	Paramètres d'une application de poursuite	99
9.1.1	Décomposition des informations <i>a priori</i>	99
9.1.2	Modèles d'images scène	100
9.1.3	Procédure d'évaluation	102
9.2	Filtrage représentatif de chaque architecture	104
9.2.1	Filtrage linéaire (CPS et SCC)	104
9.2.2	Filtrage non-linéaire (JTC)	104
9.3	Cas additif	105
9.4	Cas disjoint	107
9.5	Conclusion	109
III	Corrélation incohérente par ombroscopie	113
10	Étude géométrique de l'ombroscopie	115
10.1	Principe de la corrélation par ombroscopie	115
10.1.1	Historique	115
10.1.2	Description	117
10.2	Influence de la pixélisation	118
10.2.1	Relation entrée-sortie	118
10.2.2	Notations	119
10.2.3	Pixels infiniment petits	120
10.2.4	Limite de l'optique géométrique	121
10.3	Première étude de la résolution de l'ombroscopie	123
10.4	Conclusion	124
10.A	Annexe : coefficients de convolution dans la limite géométrique	124
11	Ombre et diffraction	127
11.1	Expression de la diffraction	127
11.1.1	Fonction de transfert incohérente	127
11.1.2	Propagation du flux lumineux	128
11.1.3	Relation entrée-sortie	129
11.1.4	Propriétés des coefficients de diffraction	130
11.2	Cas des pixels rectangulaires	131
11.2.1	Expression en fonction de l'intégrale de Fresnel	131
11.2.2	Estimation de la résolution	132
11.2.3	Exemples d'ombres	134
11.3	Conclusion	134
11.A	Annexe : approximation de Fresnel de la diffraction	136
12	Effets photométriques	139
12.1	Poids des connexions pour la corrélation	139
12.1.1	Luminance de la source diffuse	139
12.1.2	Indicatrice de luminance lambertienne	140
12.1.3	Poids des connexions avec un diffuseur réel	141
12.2	Post-corrrection	143

12.2.1	Correction exacte in-situ dans l'hypothèse gaussienne	143
12.2.2	Correction après détection	144
12.3	Conclusion	147
12.A	Annexe: influence des poids des connexions sur la corrélation	147
13	Conception d'un corrélateur ombroscopique	149
13.1	Choix d'un montage de corrélation	149
13.1.1	Corrélateur avec ou sans lentille?	149
13.1.2	Corrélateur avec blocs de verre	150
13.1.3	Paramètres du corrélateur et simulation numérique	150
13.2	Compromis entre diffraction et photométrie	151
13.2.1	Condition sur la diffraction	151
13.2.2	Condition sur les non-uniformités photométriques	152
13.2.3	Compromis	153
13.3	Caractéristiques de la source	153
13.4	Caractéristiques des modulateurs	155
13.4.1	Non-linéarité de la transmission en intensité	155
13.4.2	Contraste des modulateurs	155
13.4.3	Couplage amplitude-phase du second modulateur	157
13.5	Caractéristiques de la détection	157
13.6	Conclusion	158
14	Réalisation et étude expérimentale d'un corrélateur ombroscopique	161
14.1	Montage de corrélation	161
14.2	Résultats en filtrage adapté	163
14.2.1	Validation sur un exemple simple	163
14.2.2	Comparaison simulation numérique/expérience	164
14.3	Résultats en filtrage bipolaire	165
14.3.1	Filtres à compromis optimal	165
14.3.2	Filtres à compromis optimal avec apprentissage	168
14.4	Conclusion	169
	Conclusion	173
	Références bibliographiques	179
A	Annexe – Modélisation des architectures de corrélation cohérentes	187
A.1	Corrélation par synthèse de pupille cohérente	187
A.1.1	Notations	187
A.1.2	Conditions d'échantillonnage	189
A.1.3	Mesure de la corrélation	190
A.2	Corrélation par transformation de Fourier conjointe	192
A.2.1	Notations	192
A.2.2	Conditions d'échantillonnage	193
A.2.3	Mesure de la corrélation	194
A.3	Conclusion	195
A.4	Annexe: influence de la pixélisation	195
A.4.1	Corrélation par synthèse de pupille	195
A.4.2	Corrélation par transformation de Fourier conjointe	197

Introduction

L'apparition récente de nouveaux composants a suscité un vif regain d'intérêt pour les méthodes de corrélation optique. En particulier, les modulateurs spatiaux de lumière permettent de transcrire rapidement sur un faisceau optique des images stockées dans la mémoire d'un ordinateur, ou présentées sous forme d'un signal vidéo. Ils autorisent donc la réalisation de systèmes hybrides, où l'information est transférée et stockée électroniquement, et les calculs effectués optiquement.

Parallèlement, les progrès en matière d'algorithmes de corrélation, ou plus généralement de filtrage global, font que ceux-ci permettent de résoudre des problèmes difficiles de la reconnaissance de forme.

Malgré l'avantage inhérent du parallélisme que présente le calcul optique analogique vis à vis de son homologue numérique, il ne peut prétendre dépasser celui-ci en termes de performances de filtrage. Il y a à cela deux raisons essentielles :

- *de par la nature analogique du calcul effectué, la mesure du produit de corrélation de deux images ne peut être obtenue avec une précision arbitraire ;*
- *la nature physique du support utilisé pour représenter les images, par exemple les modulateurs spatiaux de lumière, restreint la gamme des algorithmes de filtrage global effectivement réalisables optiquement, et par là même les performances finales du système du point de vue du traitement du signal.*

La question à laquelle nous tenterons de répondre partiellement est la suivante : comment faire en sorte que la corrélation optique se rapproche le plus possible de son idéal numérique, et ce tant du point de vue de la précision du calcul effectué, c'est à dire de la fidélité de son implantation pratique, que des capacités de filtrage du système résultant au sens du traitement du signal ?

Dans la première partie de ce mémoire, nous situerons le contexte dans lequel se sont déroulés nos travaux. Dans la seconde partie, nous proposerons une méthode pour l'obtention de filtres de corrélation optique optimaux. Cette méthode sera illustrée pour différentes architectures de corrélation optique. Dans la troisième partie, nous présenterons une analyse détaillée de la corrélation optique incohérente suivant le principe de l'ombroscopie. Nous montrerons comment réaliser des compromis entre les différentes limitations de cette architecture et appliquer la méthode multi-critères précédente afin d'optimiser son fonctionnement, et illustrerons ces résultats expérimentalement.

Contexte

La reconnaissance de formes, apparue en tant que domaine du traitement de l'information il y a une quarantaine d'année, a pour but la détection de la présence et l'estimation de la forme d'objets, au sens général, dans un signal résultant d'une mesure. Ce signal peut être une image d'une scène acquise par une caméra, un enregistrement sonore d'une conversation, ou encore tout autre mesure issue de capteurs divers.

Nous nous sommes limités au cours de nos travaux au cas des images. Le type de problème que nous considérerons s'apparente à la perception visuelle chez les êtres vivants. Mais même lorsque ceux-ci sont dotés d'un système visuel plus fruste que celui des mammifères, comme c'est le cas par exemple pour les insectes, ils sont capables de résoudre des problèmes à l'heure actuelle hors de portée des systèmes automatiques de reconnaissance de formes.

De fait, l'intérêt des méthodes de reconnaissance de formes ne réside pas tant en une imitation de la façon dont les êtres vivants réagissent aux stimuli sensoriels, qu'en la possibilité d'automatiser certaines tâches, certes simples, mais essentielles pour la conception de robots, ou de façon générale de systèmes devant prendre des décisions autonomes.

Du fait de sa structure bi-dimensionnelle, une image de résolution raisonnable comporte généralement un grand nombre de pixels, donc un volume de données important. Pour une image monochrome de 256 par 256 pixels par exemple, nous disposons de 65536 valeurs de luminance, et du triple si l'image est en couleur.

Si à l'heure actuelle le stockage de tels volumes de données pose peu de problèmes aux calculateurs numériques, la question du temps de calcul est par contre souvent critique. Pour pallier cette difficulté, il peut être intéressant de réduire le volume des données, opération qui rentre dans la classe des prétraitements. Une idée très répandue est que l'information contenue dans une image est localisée principalement au niveau des transitions brusques de luminance, c'est à dire au niveau des contours de l'image. Dans de nombreuses méthodes classiques, la première étape sera donc d'obtenir ces contours à travers une segmentation de l'image. Dans un second temps, il s'agira de coder les contours ainsi obtenus, et de les comparer à des modèles des objets à reconnaître. Parmi les méthodes de codage des contours très souvent utilisées, nous pouvons citer entre autres les descripteurs de Fourier, les moments binaires, ou les techniques basées sur une description polygonale.

Ces approches donnent en général de bons résultats dans des situations où les conditions de travail sont bien définies, en termes d'éclairage et de niveau de bruit par exemple. Elles sont cependant assez sensibles à des perturbations de la forme des objets observés par rapport au modèle utilisé. De plus, du fait de l'usage d'opérateurs différentiels pour l'obtention des contours, elles sont souvent très sensibles aux bruits non prévus.

À l'inverse, les méthodes globales considèrent l'image dans son ensemble, sans chercher à réduire le volume des données. Elles réalisent une comparaison entre l'image observée et une image, ou un ensemble d'images, de référence. Parmi elles, la corrélation est la plus connue. Elle consiste en la comparaison d'une image avec toutes les versions translatées d'une autre image. En fait, cette propriété de translation fait que l'opération de corrélation est bien adaptée pour la recherche de la position d'un objet de référence dans une image scène. Pour cette raison, la corrélation a surtout été employée en traitement d'images pour le recalage de données issues de capteurs différents.

Cependant, elle a jusqu'à une époque récente suscité peu d'intérêt en reconnaissance de formes. En effet, elle nécessite une puissance de calcul importante pour travailler sur des images de résolution acceptable. Mais surtout, les limitations du filtre adapté, qui est resté pendant longtemps quasiment le seul filtre de corrélation utilisé, ont été jugées trop sévères.

Aujourd'hui, la puissance des calculateurs numériques s'étant très nettement améliorée, il devient possible de calculer le produit de corrélation de deux images de taille raisonnable (256 par 256 pixels)

à la cadence vidéo ou presque. En particulier, les processeurs digitaux de traitement du signal (en anglais DSP, pour Digital Signal Processor) sont des candidats intéressants pour la construction de corrélateurs numériques.

Parallèlement, la corrélation optique est un domaine de recherche actuellement très actif. En 1943 déjà, Robertson [1] avait montré comment le principe de l'ombroscopie (en anglais Shadow-Casting) permet de réaliser en éclairage spatialement incohérent le produit de corrélation de deux images. Après l'apparition des lasers, Vander Lugt [2] proposa en 1964 le principe d'un corrélateur holographique en éclairage spatialement cohérent, puis Weaver et Goodman [3] en 1966 donnèrent le principe du corrélateur à transformée de Fourier conjointe (en anglais JTC, pour Joint Transform Correlator), fonctionnant également en éclairage spatialement cohérent.

L'avantage inhérent à l'optique est qu'elle permet d'obtenir le produit de corrélation de deux images de façon quasiment instantanée. Pendant longtemps pourtant, le développement de la corrélation optique a été freiné par l'absence de composants adaptés. Cette situation a maintenant changé, car nous disposons :

- de sources laser compactes pour la production d'éclairages cohérents de bonne qualité ;
- de caméras CCD (Coupled Charge Device) de bonne sensibilité et résolution pour la détection ;
- de modulateurs spatiaux de lumière (en anglais SLM, pour Spatial Light Modulator) servant d'interface entre les images, stockées et transmises électroniquement, et les modulations de fronts d'onde optiques nécessaires.

Il faut noter que même si le produit de corrélation de deux images est obtenu optiquement de façon quasiment instantanée, un corrélateur optique sera limité en cadence de fonctionnement par ses éléments d'interface électronique/optique (SLM) et optique/électronique (CCD).

La possibilité de calculer en un temps raisonnable le produit de corrélation de deux images, soit numériquement, soit optiquement, étant assurée, il reste la seconde objection à l'utilisation de la corrélation pour la reconnaissance de formes que nous signalions plus haut, à savoir la question de la qualité de l'opération de corrélation du point de vue du traitement du signal.

Ces dix dernières années ont vu d'importants progrès dans la conception des filtres de corrélation. Rapidement, le problème a été envisagé en termes de filtrage linéaire. Ces études, plus proches de la reconnaissance de formes et du traitement du signal, ont visé à la prise en compte des conditions opérationnelles d'utilisation de filtres de corrélation. Notamment, de nombreux travaux ont traité la détermination de filtres présentant des propriétés de robustesse aux perturbations (bruit, déformation des objets analysés, ...). L'utilisation de techniques d'apprentissage a donné naissance à une importante classe de filtres déterminés à partir d'exemples représentatifs des déformations attendues de l'objet à reconnaître, ou d'une invariance à ces déformations que l'on souhaite obtenir. Enfin, l'impact des contraintes technologiques d'implantation des filtres – numériques – sur les supports optiques a commencé d'être analysé rigoureusement.

Thèse soutenue

Nous l'avons vu, les composants d'interface disponibles à l'heure actuelle permettent la réalisation de corrélateurs optiques reprogrammables. Il est habituel en optique de raisonner sur des fonctions complexes continues spatialement, l'amplitude complexe des ondes et les fonctions de transmission par exemple. À l'inverse, le traitement d'images considère des objets discrets par nature, les suites de valeurs des pixels des images.

Les modulateurs spatiaux de lumière d'une part, et les caméras de type CCD d'autre part, qui sont les composants d'interface des corrélateurs optiques entre le domaine de l'optique et celui du traitement d'images, sont donc des composants hybrides, qui conservent la structure pixélisée des images, ainsi que la nature continue des grandeurs optiques à l'intérieur de leurs pixels.

Cette ambivalence fait que si l'information (les images) qui est introduite dans le corrélateur optique et qui en sort est discrète, le traitement de cette information est réalisé de manière analogique ou continue. La figure 0.1 schématise le principe des corrélateurs optiques en tant que processeurs d'images.

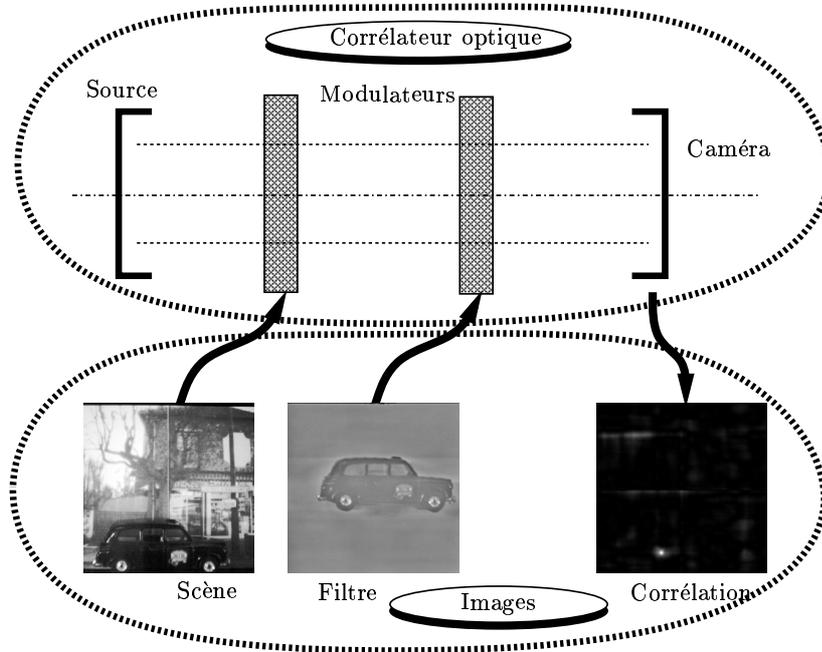


Figure 0.1 : Schéma de principe d'un corrélateur optique en tant que processeur d'image.

En tout état de cause, aucun corrélateur optique ne peut calculer un produit de corrélation avec la même précision qu'un corrélateur numérique. Il convient donc de préciser les règles suivant lesquelles un corrélateur optique doit être conçu pour réaliser la tâche qui lui est impartie.

La plupart des filtres globaux calculés pour répondre à des critères du traitement du signal le sont en fait pour des corrélateurs numériques. Les contraintes supplémentaires dictées par la réalisation optique de la corrélation avec ces filtres doivent donc être prises en compte lors de la conception des filtres.

En résumé, la question en filigrane de ce mémoire sera la suivante : *comment faire en sorte que la corrélation optique se rapproche le plus possible de son idéal numérique, et ce tant du point de vue de la précision du calcul effectué, c'est à dire de la fidélité de son implantation pratique, que des capacités de filtrage du système résultant au sens du traitement du signal ?*

Plan du mémoire

Le présent mémoire est divisé en trois parties.

Première partie

La première partie a pour but de préciser le contexte dans lequel notre travail a été effectué.

Le premier chapitre introduira diverses notions et notations qui seront utiles par la suite. En particulier, il définira les problèmes typiques de reconnaissance de formes que nous envisagerons, et

la notion de critère pour les filtres de corrélation. Ces critères ont pour but de mesurer de façon quantitative des propriétés désirables des filtres de corrélation.

Au cours du second chapitre, les expressions et les propriétés de différents filtres de corrélation numérique de la littérature seront rappelées. En particulier, la notion d'optimalité des filtres en regard des critères sera introduite.

Après ces rappels, nous donnerons dans le troisième chapitre une approche "bayésienne" de la corrélation, qui permet de justifier théoriquement les méthodes de filtrage global pour certaines applications de reconnaissance de formes. Nous le montrerons, cette méthode permet par ailleurs de généraliser les filtres linéaires décrits au troisième chapitre à des méthodes de filtrage non-linéaire.

Le quatrième chapitre présentera quant à lui les architectures de corrélation optique que nous étudierons : corrélation par synthèse de pupille cohérente, par transformation de Fourier conjointe et par ombroscopie. Pour chacune de ces architectures, une distinction sera faite entre leurs réalisations continues, où l'information est entrée sur des transparences de type photographique ou des hologrammes, et leurs réalisations discrètes, où l'information est entrée sur des modulateurs spatiaux de lumière pixélisés.

Seconde partie

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à une méthode d'optimisation des filtres de corrélation que nous avons développée. Cette méthode prend en compte la contrainte imposée par l'affichage des filtres sur un modulateur donné.

Le cinquième chapitre présentera le problème du codage des images sur les modulateurs spatiaux de lumière. Il s'agira précisément de déterminer de quelle façon une image est transcrite sur un faisceau optique, à travers la modulation de la transmission d'un SLM, et l'influence que cette transformation aura sur le fonctionnement d'un corrélateur optique.

À partir de cette description phénoménologique, le sixième chapitre présentera notre méthode d'optimisation contrainte multi-critères de façon générale, et en précisera l'intérêt et certaines propriétés.

Cette méthode sera appliquée au septième chapitre à l'architecture de corrélation optique par synthèse de pupille cohérente. Nous y donnerons un algorithme efficace pour obtenir les filtres de corrélation optimaux pour un domaine de codage quelconque, ainsi que des simulations numériques pour des modulateurs spatiaux de lumière existants.

Au huitième chapitre, nous appliquerons notre méthode d'optimisation contrainte multi-critères aux architectures de corrélation optique par ombroscopie et par transformation de Fourier conjointe. Nous introduirons en particulier une méthode de filtrage bipolaire pour l'architecture de corrélation optique par ombroscopie.

Dans le neuvième chapitre, nous utiliserons les résultats précédents afin d'illustrer les capacités de filtrage propres à chacune des architectures sur une application de poursuite de cible dans divers types de fonds.

Troisième partie

Si les architectures de corrélation optique par synthèse de pupille cohérente et par transformation de Fourier conjointe ont suscité un intérêt important, se traduisant par de nombreuses études théoriques et réalisations expérimentales, il n'en va pas de même pour l'architecture de corrélation optique par ombroscopie. Se basant sur une analyse, de notre point de vue trop rapide, de la perte de résolution causée par la diffraction, différents auteurs ont jugé les performances théoriques de cette architecture trop faibles en comparaison à celles des architectures cohérentes, à la suite de quoi elle a été quasiment abandonnée. Une grande part de notre travail a donc été consacrée à une "réhabilitation" de cette architecture à la lumière des nouveaux composants, et fait l'objet de la troisième partie.

Le dixième chapitre présentera les notations que nous utiliserons, et discutera les conditions géométriques de fonctionnement du corrélateur.

Le onzième chapitre sera consacré à l'étude de la perte de résolution due à la diffraction. Il introduira la notion d'ombre et son évaluation quantitative, et discutera l'effet de la diffraction sur la mesure du produit de corrélation.

Le douzième chapitre décrira les effets photométriques, notamment liés aux imperfections du diffuseur assurant l'incohérence spatiale du corrélateur, et discutera la possibilité de les corriger.

Dans le treizième chapitre, la modélisation décrite dans les trois chapitres précédents sera utilisée pour obtenir les domaines des paramètres géométriques du corrélateur qui réalisent un compromis entre dégradations dues à la diffraction et aux effets photométriques. Des exemples de simulations seront présentés pour illustrer ce compromis.

Le quatorzième chapitre montrera les résultats expérimentaux obtenus, en les comparant aux simulations numériques correspondantes. Nous démontrerons ainsi l'efficacité de la méthode de représentation bipolaire des filtres de corrélation optimaux introduite dans la seconde partie.

Enfin, dans le chapitre de conclusion qui clôt ce mémoire, nous ferons une synthèse des résultats les plus significatifs que nous avons obtenus, et nous évoquerons les perspectives qu'ils ouvrent pour la corrélation optique.

Partie I

Corrélation optique et filtrage optimal

Les chapitres qui suivent forment une introduction au domaine de la reconnaissance de formes, et plus particulièrement aux méthodes de corrélation. Nous y présentons le type de problèmes de reconnaissance de formes que nous envisagerons dans la suite de ce mémoire, et l'intérêt que peut présenter la corrélation dans ce cadre. Nous exposons différentes techniques d'optimisation des filtres de corrélation numérique visant à leur conférer diverses propriétés mesurées par des critères. Nous montrons que cette méthode heuristique basée sur l'optimisation de critères peut être interprétée et justifiée dans un cadre bayésien. Enfin nous décrivons les architectures optiques reprogrammables permettant de mesurer le produit de corrélation de deux images.

Chapitre 1

Corrélation et reconnaissance de formes

De façon générale, les approches fondées sur la corrélation tentent de comparer un objet à un certain nombre d'éléments de référence, en vue de le classer.

Par exemple, supposons que nous disposions d'une image scène, dans laquelle nous savons que l'objet recherché est présent, mais en une position inconnue qu'il s'agit d'estimer. Les éléments de référence utilisés pour la comparaison seront alors toutes les versions translatées du modèle de l'objet recherché dont nous disposons.

À ce stade, le choix de la corrélation plutôt que d'une autre méthode de reconnaissance de formes peut sembler arbitraire. La motivation de ce choix s'explique, en partie, par certaines propriétés intéressantes de la corrélation :

- linéarité,
- invariance par translation,
- expressions simples dans le domaine de Fourier,
- calculs rapides dans le domaine de Fourier.

En particulier, la propriété d'invariance par translation fait que, dans le cas de l'estimation de la position d'un objet, la comparaison avec toutes les versions translatées est réalisée en une seule opération de corrélation.

Cependant, ces propriétés ne sauraient à elles seules rendre la corrélation plus intéressante que d'autres méthodes concurrentes. En fait, il est bien connu en traitement du signal que la solution optimale, au sens de la théorie de la décision, de la détection ou de l'estimation de la position d'un objet noyé dans un bruit additif stationnaire gaussien est donnée par la corrélation de la scène observée avec un filtre particulier, dit *filtre adapté*. Nous montrerons au chapitre 3 comment ce résultat peut être généralisé à des modèles de l'image scène plus réalistes, faisant en particulier intervenir un fond structuré sur lequel apparaît l'objet recherché.

La corrélation a également été appliquée à d'autres problèmes de classification ou d'estimation de paramètres, en particulier pour l'estimation de l'attitude d'objets dans un plan ou dans l'espace. Pour tous ces problèmes, il a été montré que la corrélation fournit des résultats fiables, et ce même dans des conditions difficiles, où les méthodes classiques fondées sur une segmentation préalable de l'image scène auraient échoué. C'est cette observation, à notre sens, qui fait que la corrélation est un outil intéressant pour la reconnaissance de formes.

L'opérateur de base étant choisi, l'objectif poursuivi par les techniques de corrélation consiste à rendre les objets de référence (que nous appellerons *filtres de corrélation*, ou par abus de langage simplement *filtres*) les plus pertinents possible vis à vis du problème à résoudre. Il convient de bien

remarquer que les caractéristiques recouvertes par le terme *pertinent* dépendent du problème traité. Elles peuvent même être antagonistes pour deux problèmes différents.

Par ailleurs, nous serons conduits à introduire des opérations ressemblant à la corrélation, mais pour lesquels la propriété de linéarité sera perdue. En tout état de cause il conviendrait alors de parler de *filtrage global*.

1.1 Définitions et Notations

1.1.1 Notations pour les images

Nous considérerons des images carrées de \sqrt{N} par \sqrt{N} pixels, soit au total N pixels. Afin de simplifier les écritures des différentes expressions faisant intervenir les images, nous représenterons celles-ci sous forme de vecteurs, en supposant une lecture lexicographique¹. Ainsi, elles ne dépendront que d'un seul indice, variant de 0 à $N - 1$. Le pixel situé sur la ligne i et la colonne j sera ainsi représenté par l'indice $m = \sqrt{N} \cdot i + j$:

$$i \begin{pmatrix} \rightarrow & \cdots & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \rightarrow & \square & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \rightarrow & \cdots & \rightarrow \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nous considérerons que les valeurs des pixels des images sont des nombres complexes, de sorte qu'un vecteur sera un élément de \mathbb{R}^N . Les conventions que nous adopterons sont les suivantes :

- x : pour un scalaire, élément de \mathbb{R}
- x^* : la valeur complexe conjuguée du scalaire x
- $|x|$: le module du scalaire x
- \mathbf{x} : pour un vecteur, dont la première coordonnée est x_0 , et la dernière est x_{N-1}
- \mathbf{x}^T : le vecteur transposé du vecteur \mathbf{x}
- \mathbf{x}^\dagger : le vecteur transposé conjugué du vecteur \mathbf{x}
- $\|\mathbf{x}\|$: la norme euclidienne du vecteur \mathbf{x}

L'élément courant de l'image (du vecteur) \mathbf{x} sera ainsi noté x_m .

De manière générale nous ajouterons le symbole $(\hat{\cdot})$ pour désigner des expressions dans l'espace de Fourier. Les lettres majuscules seront réservées aux matrices de taille N par N . Ainsi la transformation de Fourier sera représentée par l'opérateur F , et nous aurons :

$$\hat{\mathbf{x}} = F\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = F^{-1}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \hat{A} = FAF^{-1}, \quad (1.1)$$

où A est une matrice de N par N pixels. L'élément courant de l'image (ou vecteur) $\hat{\mathbf{x}}$ sera noté \hat{x}_n . La matrice F vérifie $F^{-1} = N F^\dagger$, et ses éléments s'écrivent :

$$F_{n_1, n_2, m_1, m_2} \triangleq \frac{1}{N} \exp\left(-2i\pi \frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{\sqrt{N}}\right), \quad (1.2)$$

avec $i^2 = -1$, et où (m_1, m_2) sont les coordonnées d'un pixel considéré sur l'image, et (n_1, n_2) les coordonnées d'un pixel de la transformée de Fourier de l'image. Nous pouvons remarquer qu'il faut que la transformée de Fourier soit définie à partir de la représentation bi-dimensionnelle des images, et non pas de la représentation lexicographique. Enfin, nous désignerons par *Id* l'opérateur identité dans l'espace considéré.

¹Cette lecture lexicographique de l'image s'effectue par convention de gauche à droite et de haut en bas.

L'opération de corrélation entre deux images \mathbf{h} et \mathbf{x} sera notée $[\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}]$. Nous aurons donc :

$$[\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}]_k = c_k \triangleq \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N h_m^* x_{m+k} . \quad (1.3)$$

Dans cette définition, ainsi que dans toutes les expressions impliquant l'opération de corrélation de deux images, nous supposons implicitement des conditions aux bords circulaires ; c'est à dire que $m+k$ doit se lire $m+k \text{ modulo } N$. Cette convention est utilisée afin de pas alourdir les notations. Définissant par $\hat{\mathbf{c}}$ la transformée de Fourier de l'image \mathbf{c} , par propriété de la transformation de Fourier (théorème de convolution), nous aurons également :

$$\hat{c}_n = \hat{h}_n^* \hat{x}_n . \quad (1.4)$$

Nous aurons besoin également de la matrice de corrélation D d'une image \mathbf{x} , dont les éléments sont par définition :

$$D_{m,m'} = \frac{1}{N} \sum_{m''=1}^N x_{m''+m}^* x_{m''+m'} = \frac{1}{N} \sum_{m''=1}^N x_{m''+(m-m')}^* x_{m''} = D_{m-m',0} .$$

Une matrice vérifiant cette propriété de *stationnarité* est dite de Toeplitz, et admet une matrice transformée de Fourier diagonale, dite densité spectrale de l'image \mathbf{x} , et dont les éléments diagonaux s'écrivent :

$$\hat{D}_{n,n} = |\hat{x}_n|^2 .$$

Par la suite, il nous arrivera d'abrégier $D_{m+m',m'}$ par D_m , et $\hat{D}_{n,n}$ par \hat{D}_n , afin de simplifier les notations.

1.1.2 Images scène, référence, fond et bruit

Par la suite, nous ferons souvent référence à un certain nombre d'images qui constituent le modèle de formation de l'image scène que nous considérerons. Nous introduisons donc les notations suivantes :

- **Image scène (\mathbf{x})** : c'est l'image qui est analysée. Nous considérerons qu'elle est le résultat de l'échantillonnage du signal vidéo délivré par une caméra observant une scène du monde réel.
- **Image référence (\mathbf{r})** : c'est un modèle de l'objet de référence recherché dans l'image scène. Nous devons donc considérer que cette image est soit le résultat d'une modélisation mathématique de l'apparence de l'objet recherché (synthèse), soit le résultat d'une acquisition séparée d'une image de l'objet recherché, réalisée dans des conditions contrôlées afin de ne garder que les informations relatives à cet objet.
- **Image fond (\mathbf{b})²** : c'est dans l'image scène tous les éléments structurés qui n'appartiennent pas à l'objet de référence. Si l'image scène représente par exemple une voiture roulant sur une route de campagne, et que l'on cherche à déterminer la position de la voiture dans cette image, le fond sera constitué de la route, des champs avoisinants, de la végétation... Il faut noter que, sauf pour des applications spécifiques, on connaît en général relativement mal la structure exacte du fond, et que celui-ci change d'une image scène à l'autre.
- **Image de bruit (\mathbf{n})³** : elle représente l'incertitude quant à l'apparence exacte de l'image de référence dans l'image scène. Cette incertitude peut en fait avoir deux origines différentes, qui sont généralement combinées :

²Le symbole \mathbf{b} est utilisé pour l'anglais *background*.

³Le symbole \mathbf{n} est utilisé pour l'anglais *noise*.

- Elle peut résulter de la présence d'un bruit d'acquisition qui se sur-imprime à l'objet de référence. L'image de bruit est dans ce cas une réalisation d'une variable vectorielle aléatoire, dont il conviendra de définir les propriétés statistiques.
- Elle peut résulter d'une incertitude de modélisation de l'objet de référence, quand l'objet recherché dans l'image scène est légèrement différent du modèle qui en a été fait. Il faut noter que l'introduction de cette incertitude peut être parfaitement volontaire, comme nous pourrions le faire dans l'exemple précédent pour pouvoir estimer aussi bien la position d'une berline que celle d'un cabriolet.

Le chapitre 3 précisera la signification et la portée de ce modèle de formation de l'image scène, en lui donnant un contenu probabiliste. Finalement, il peut être exprimé par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{b} + \mathbf{n} . \quad (1.5)$$

Ces différentes notions sont illustrées par la figure 1.1.

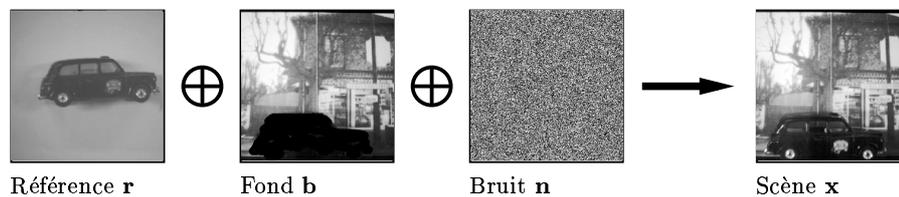


Figure 1.1 : Modèle de formation de l'image scène à partir de l'image de référence, de l'image de fond et de l'image de bruit.

1.2 Critères de qualité pour l'opération de corrélation



Figure 1.2 : Corrélation d'une scène \mathbf{x} avec un filtre \mathbf{h} .

L'opération de corrélation de l'image filtre \mathbf{h} et de l'image scène \mathbf{x} est représentée de manière schématique sur la figure 1.2. Le filtre \mathbf{h} est déterminé – nous préciserons comment ultérieurement – de façon à ce que dans l'image de corrélation apparaisse un *pic*, dont la position du maximum correspond à la position de l'objet recherché dans l'image scène.

En réalité, il n'apparaît pas en général un seul pic dans l'image de corrélation. En utilisant notre modèle de formation d'image (1.5), la corrélation des images filtre \mathbf{h} et scène \mathbf{x} devient :

$$\mathbf{h} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{n} . \quad (1.6)$$

L'image de corrélation comporte ainsi trois termes. Le premier, $\mathbf{h} \otimes \mathbf{r}$, donne un pic dont la position du maximum correspond à la position de l'objet recherché. Le second terme, $\mathbf{h} \otimes \mathbf{b}$, donne un ensemble de pics *parasites*, mais n'apparaissant pas au même endroit que le pic correspondant à l'objet recherché. Il faudra donc faire en sorte que celui-ci ne soit dépassé par aucun des pics parasites. Le dernier terme, $\mathbf{h} \otimes \mathbf{n}$, représente les fluctuations de l'ensemble de l'image de corrélation, ou, de façon équivalente, l'incertitude associée au calcul de celle-ci.

Afin d'assurer une reconnaissance correcte de la position de l'objet recherché, il convient donc de réduire ou de contrôler l'influence du fond et du bruit présents dans l'image scène, et cela pourra être réalisé à travers la conception du filtre \mathbf{h} , en utilisant l'information *a priori* dont on dispose sur le problème considéré.

Pour préciser le comportement de la corrélation de l'image filtre \mathbf{h} et de l'image scène \mathbf{x} , il est utile d'introduire la notion de *critère*. Un critère est une mesure d'une certaine propriété de la corrélation obtenue. Mathématiquement, c'est une application de l'espace des images filtres dans l'ensemble des nombres réels, qui à chaque filtre associe un nombre mesurant une qualité de la corrélation :

$$\begin{aligned} E & : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{W} \\ \mathbf{h} & \rightarrow E(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Nous rappelons dans le reste de cette section les expressions de différents critères considérés classiquement. Cette présentation est légèrement originale, dans le sens où notre interprétation de ces critères diffère de celle généralement admise dans la littérature, en particulier en ce qui concerne l'influence du fond.

1.2.1 Efficacité

Le premier critère que nous considérerons est l'*efficacité* de la corrélation [4, 5, 6]. En effet, il faut pouvoir contrôler la hauteur du pic de corrélation du filtre \mathbf{h} avec la référence \mathbf{r} , puisque c'est la position de ce pic qui doit donner la position de l'objet recherché. L'efficacité est définie par [7] :

$$\boxed{\eta(\mathbf{h}) \triangleq |[\mathbf{h} \otimes \mathbf{r}]_0|^2 = \frac{1}{N^2} |\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2 = |\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2 .} \quad (1.8)$$

Ainsi définie, l'efficacité ne dépend que de la référence considérée. Il faut noter qu'elle ne considère qu'un pixel de l'image de corrélation, à l'exclusion des autres. Cependant, le fait de la définir pour le pixel 0 n'est pas gênant, car, du fait de l'invariance par translation de l'opération de corrélation, le pic suit l'objet recherché si celui-ci se déplace.

Dans le cas de la corrélation numérique, l'efficacité, qui mesure la hauteur du pic de corrélation recherché, n'a de sens qu'en comparaison aux hauteurs des pics parasites.

Par contre, dans le cas de la corrélation optique, l'efficacité prend un sens tout particulier, car elle représente la quantité d'énergie reçue par le capteur mesurant la corrélation et utile pour la détection du pic de corrélation. Nous parlerons alors d'*efficacité optique* pour insister sur son rôle.

1.2.2 Robustesse au bruit

Comme l'exprime la relation (1.6), la présence d'un bruit \mathbf{n} sur l'image scène conduit à des fluctuations dans l'image de corrélation. Il est alors naturel de chercher à réduire ces fluctuations.

Cependant, la réduction des fluctuations dues au bruit se fait en général *en moyenne*⁴ [8, 9], bien qu'on ne dispose en pratique que d'une seule *réalisation* de ce bruit. C'est bien sûr une limitation de l'efficacité de cette méthode, qui sera précisée au chapitre 3.

⁴Le bruit présent dans l'image scène peut être considéré comme une réalisation d'une variable vectorielle aléatoire. La moyenne s'entend alors sur toutes les réalisations possibles du bruit, c'est donc une espérance mathématique.

Nous supposons que le bruit \mathbf{n} est centré, c'est à dire de valeur moyenne nulle, et de plus qu'il est stationnaire au second ordre. La valeur moyenne de l'image de corrélation du filtre avec la scène est alors :

$$\langle \mathbf{h} \circledast \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{h} \circledast (\mathbf{r} + \mathbf{b} + \mathbf{n}) \rangle = \mathbf{h} \circledast (\mathbf{r} + \mathbf{b}) + \mathbf{h} \circledast \langle \mathbf{n} \rangle = \mathbf{h} \circledast (\mathbf{r} + \mathbf{b}) . \quad (1.9)$$

La variance de l'image de corrélation au pixel k est :

$$\text{var}(c_k) = \langle |[\mathbf{h} \circledast \mathbf{x}]_k - \langle [\mathbf{h} \circledast \mathbf{x}]_k \rangle|^2 \rangle = \langle |[\mathbf{h} \circledast \mathbf{n}]_k|^2 \rangle . \quad (1.10)$$

En utilisant la relation (1.3), nous pouvons écrire :

$$\text{var}(c_k) = \frac{1}{N^2} \langle \left| \sum_m h_m^* n_{m+k} \right|^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_{m'} h_m^* \langle n_{m+k} n_{m'+k} \rangle h_{m'}$$

L'hypothèse de stationnarité au second ordre du bruit implique que :

$$S_{m+k, m'+k} = \langle n_{m+k} n_{m'+k} \rangle = \langle n_m n_{m'} \rangle = S_{m, m'}$$

où S est la matrice de covariance du bruit. L'expression précédente implique que S est une matrice de *Tœplitz*. Si la matrice S comporte N par N éléments, seuls N d'entre eux au plus sont indépendants. Une propriété importante des matrices de ce type est que leur transformée de Fourier est diagonale. Au final, la variance de la corrélation est indépendante du pixel où elle est évaluée, c'est donc une constante, que nous noterons MSE^5 [8, 9] :

$$\boxed{\text{MSE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger S \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{S} \hat{\mathbf{h}} .} \quad (1.11)$$

Le critère de qualité généralement utilisé pour caractériser la robustesse d'un système vis à vis du bruit est le SNR^6 ou *rapport signal à bruit*. Dans notre cas, le signal est représenté par le module carré du maximum du pic de corrélation avec l'objet recherché, c'est à dire l'efficacité définie plus haut, et la puissance du bruit est caractérisé par le MSE. Le SNR s'écrit donc [8, 9] :

$$\boxed{\text{SNR}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{MSE}(\mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2}{\mathbf{h}^\dagger S \mathbf{h}} = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{S} \hat{\mathbf{h}}} .} \quad (1.12)$$

1.2.3 Discrimination et finesse du pic de corrélation

Quand l'image scène présente un fond structuré important, des pics parasites apparaissent dans l'image de corrélation autour du pic correspondant à l'objet recherché. Il suffit alors que l'amplitude d'un de ces pics parasites dépasse celle du pic attendu pour que nous fassions une erreur sur l'estimation de la position de l'objet recherché. Si nous connaissons *exactement* la nature du fond, il nous suffirait de le soustraire de la scène pour éviter ce problème. Mais ce n'est en général pas le cas, car le nombre de fonds possibles, à supposer que ceux-ci puissent être dénombrés, est bien trop grand. Même en supposant que nous connaissons la nature des objets présents dans le fond, – par exemple des arbres, des champs, des maisons... – nous n'aurons en général pas d'information sur leur position dans la scène.

Supposons pour l'heure que nous puissions fournir un modèle de l'image de fond. Plutôt que de tenter de réduire les hauteurs de chacun des pics parasites, ce qu'il est peu probable de pouvoir faire en pratique, il est habituel [10] de chercher à faire en sorte que l'image de corrélation du filtre avec le

⁵ *Mean Square Error*, erreur quadratique moyenne.

⁶ *Signal to Noise Ratio*, rapport signal à bruit.

fond soit proche de l'image nulle. Cette réduction de la corrélation avec le fond est alors envisagée en considérant l'écart quadratique moyen avec l'image nulle :

$$\text{BCPE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{N} \sum_k |[\mathbf{h} \otimes \mathbf{b}]_k|^2$$

Intuitivement, plus cette quantité sera petite, moins il sera *probable* que l'amplitude des pics parasites soit importante. En développant cette expression, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_k |[\mathbf{h} \otimes \mathbf{b}]_k|^2 &= \frac{1}{N} \sum_k \left| \frac{1}{N} \sum_m h_m^* b_{m+k} \right|^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_{m'} h_m^* h_{m'} \left(\frac{1}{N} \sum_k b_{m+k} b_{m'+k}^* \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger D_b \mathbf{h} \\ &= \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_b \hat{\mathbf{h}} \end{aligned}$$

où nous avons introduit la matrice de covariance du fond D_b , ainsi que sa transformée de Fourier la densité spectrale du fond \hat{D}_b . Rappelons que $[\hat{D}_b]_n = |\hat{b}_n|^2$. Nous obtenons ainsi une forme quadratique du filtre qui définit le critère BCPE⁷ :

$$\boxed{\text{BCPE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger D_b \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_b \hat{\mathbf{h}} .} \quad (1.13)$$

Il peut être de plus intéressant de comparer cette valeur à l'efficacité de la corrélation, ce qui conduit à définir le critère PBCE⁸ :

$$\boxed{\text{PBCE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{BCPE}(\mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2}{\mathbf{h}^\dagger D_b \mathbf{h}} = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_b \hat{\mathbf{h}}} .} \quad (1.14)$$

Il reste qu'il faut donner une valeur à D_b , ou de façon équivalente à \hat{D}_b . Deux cas peuvent alors se présenter suivant l'information disponible *a priori* sur l'image de fond :

1. La nature des objets présents dans le fond est connue.

Nous disposons alors d'une liste d'images représentant les objets à rejeter, soit (\mathbf{y}^l) , où l varie de 1 à L , nombre de ces images. Nous pouvons estimer la densité spectrale du fond par une combinaison des densités spectrales de ces images. Le BCPE devient alors le ROCPE⁹ [10, 11] :

$$\text{ROCPE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger K \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{K} \hat{\mathbf{h}} \quad \text{où} \quad \hat{K}_n = \sum_{l=1}^L |\hat{y}_n^l|^2 . \quad (1.15)$$

De même le PBCE devient alors le critère DC¹⁰ :

$$\text{DC}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{ROCPE}(\mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2}{\mathbf{h}^\dagger K \mathbf{h}} = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{K} \hat{\mathbf{h}}} . \quad (1.16)$$

Il est aisé de s'assurer que si $\text{ROCPE}(\mathbf{h})$ est petit, ou si $\text{DC}(\mathbf{h})$ est grand, chacun des pics parasites correspondant à la présence d'un des objets \mathbf{y}^l sera réduit. Cependant, le défaut de ce critère est qu'il n'apporte aucune garantie quand un objet parasite non prévu est présent dans la scène.

⁷ *Background Correlation Plane Energy*, énergie de la corrélation avec le fond.

⁸ *Peak to Background Correlation Energy*, rapport du pic à l'énergie de la corrélation avec le fond.

⁹ *Rejected Objects Correlation Plane Energy*, énergie du plan de corrélation avec les objets à rejeter.

¹⁰ *Discrimination Capability*, capacité de discrimination.

2. La nature des objets présents dans le fond est inconnue.

Dans cette situation, nous avons peu d'informations *a priori*, hormis l'image scène \mathbf{x} dont nous disposons, ainsi que le modèle de l'objet de référence \mathbf{r} , ce qui conduit aux deux possibilités suivantes :

- (a) Nous voulons nous prémunir contre des pics parasites provenant d'objets *ressemblant à l'objet de référence*. Intuitivement, il est clair que cette situation est très gênante, car elle peut conduire à des ambiguïtés importantes. Le BCPE devient alors le CPE¹¹ [8] :

$$\text{CPE}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger D_r \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_r \hat{\mathbf{h}} , \quad (1.17)$$

où D_r est la matrice d'autocorrélation de l'image de référence, et \hat{D}_r sa transformée de Fourier ou densité spectrale. Rappelons que $[\hat{D}_r]_n = |\hat{r}_n|^2$. Le PBCE devient alors le PCE¹², ou *finesse du pic de corrélation* :

$$\text{PCE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{CPE}(\mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2}{\mathbf{h}^\dagger D_r \mathbf{h}} = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_r \hat{\mathbf{h}}} . \quad (1.18)$$

- (b) Nous pouvons observer que toute l'information nécessaire sur le fond est en fait présente dans l'image scène, même si référence et bruit s'y trouvent également. Dans le cas, relativement fréquent, où la majeure partie de l'énergie de l'image scène correspond en fait au fond, par exemple quand l'objet de référence est petit, il est naturel d'estimer la densité spectrale du fond par celle de la scène. Le BCPE devient alors le SCPE¹³ [12] :

$$\text{SCPE}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N^2} \mathbf{h}^\dagger D_x \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_x \hat{\mathbf{h}} , \quad (1.19)$$

et le PBCE devient le PSCE¹⁴ :

$$\text{PSCE}(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{SCPE}(\mathbf{h})} = \frac{|\mathbf{h}^\dagger \mathbf{r}|^2}{\mathbf{h}^\dagger D_x \mathbf{h}} = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{r}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_x \hat{\mathbf{h}}} . \quad (1.20)$$

Rappelons que dans ces expressions $[\hat{D}_x]_n = |\hat{x}_n|^2$. Contrairement aux autres critères définis précédemment, le SCPE comme le PSCE dépendent de l'image scène analysée.

1.2.4 Synthèse

Les différents critères de qualité pour la corrélation que nous avons définis peuvent être classés en trois catégories, qui correspondent aux différents termes de notre modèle (1.5) de formation d'image :

- efficacité de la corrélation du filtre avec l'image de référence ;
- résistance au bruit, ou aux incertitudes de modélisation ;
- discrimination du fond structuré.

Le tableau 1.1 résume ce classement.

Nous n'avons pas rappelé ici tous les critères qui peuvent être trouvés dans la littérature [13, 14], mais seulement les plus courants. Ils ont en commun d'avoir des expressions relativement simples, qui

¹¹ *Correlation Plane Energy*, énergie du plan de corrélation, sous-entendu avec l'objet de référence.

¹² *Peak to Correlation Energy*, rapport du pic à l'énergie de corrélation, sous-entendu avec l'objet de référence.

¹³ *Scene Correlation Plane Energy*, énergie du plan de corrélation avec la scène.

¹⁴ *Peak to Scene Correlation Energy*, rapport du pic à l'énergie de la corrélation avec la scène.

efficacité	$\eta(\mathbf{h})$	
résistance au bruit	MSE(\mathbf{h}) et SNR(\mathbf{h})	
discrimination du fond	BCPE(\mathbf{h}) et PBCE(\mathbf{h})	
	DSP d'objets à discriminer	ROCPE(\mathbf{h}) et DC(\mathbf{h})
	DSP de la référence	CPE(\mathbf{h}) et PCE(\mathbf{h})
	DSP de la scène	SCPE(\mathbf{h}) et PSCE(\mathbf{h})

Tableau 1.1 : Classement des critères de corrélation présentés, suivant le type de propriété de la corrélation mesurée. DSP : densité spectrale de puissance.

permettent d'obtenir des solutions analytiques au problème de l'optimisation des filtres de corrélation, que présente le chapitre suivant.

Pour représenter le même problème de l'estimation de la position d'un objet de référence dans une scène, d'autres modèles de formation de l'image scène ont été proposés. En particulier, il a été proposé de modéliser le fond comme un bruit *disjoint* [15] de la référence, c'est à dire que les supports de ces deux images ne se recouvrent pas. Les méthodes d'optimisation qui en résultent dépassent le cadre de notre étude, c'est pourquoi nous ne les détaillerons pas plus.

1.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le *modèle* de l'image scène que nous considérerons tout au long de ce mémoire. L'image scène est composée de trois éléments : la référence en une position inconnue qu'il s'agit d'estimer, le fond, constitué des objets structurés autres que la référence elle-même, et le bruit.

Pour le problème de l'estimation de la position de la référence dans la scène, la corrélation de la scène avec un filtre s'avère très utile. Elle est même optimale pour ce problème sous certaines hypothèses, comme nous le montrerons au chapitre 3.

Nous avons rappelé les expressions de différents *critères* qui servent à caractériser le résultat donné par la corrélation. Ils permettent une mesure relativement objective des capacités de filtrage, au sens du traitement du signal, de l'opération de corrélation.

Chapitre 2

Filtres de corrélation numérique optimaux

Nous avons défini au chapitre précédent le type de problème de reconnaissance de formes que nous allons considérer au long de ce mémoire. Il s'agit d'estimer la position d'un objet de référence dans une image scène contenant également un fond structuré et du bruit. Nous avons également présenté un certain nombre de critères mesurant la qualité de la corrélation de la scène avec un filtre donné.

Le présent chapitre propose une revue de différents filtres dits optimaux, dans le sens où ils optimisent un critère, ou réalisent un compromis optimal entre plusieurs critères. Nous utilisons le vocable *filtres de corrélation numérique* car l'optimisation est faite sans tenir compte de contraintes d'implantation optique de ces filtres, à l'exception du filtre de phase.

Nous procéderons en deux temps, en examinant tout d'abord les filtres optimisant un unique critère de corrélation, puis ceux réalisant de façon optimale des compromis entre plusieurs critères.

2.1 Filtres optimisant un critère

2.1.1 Filtre de phase

Le filtre de phase (POF, pour *Phase-Only Filter*) a motivé une quantité importante de travaux et suscité un nombre considérable de publications [4, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 10]. Son expression dans le domaine de Fourier est la suivante :

$$\hat{h}_n = \frac{\hat{r}_n}{|\hat{r}_n|}. \quad (2.1)$$

Son intérêt provient de ce que, employé dans le plan de Fourier d'un corrélateur optique, le filtre de phase n'absorbe aucune énergie, puisque sa transmission en intensité est toujours égale à 1. C'est donc le filtre qui est optimal pour le critère *efficacité optique*.

Il a été montré par ailleurs [17] que ce filtre présente de bonnes capacités de discrimination et donne naissance à des pics de corrélation très étroits. De plus, un tel filtre est très simple à réaliser sur des supports optiques, et pendant longtemps, il est apparu comme un compromis intéressant entre le filtre adapté et le filtre inverse, deux filtres que nous décrirons plus loin. On peut par exemple, pour réaliser un filtre de phase, utiliser un hologramme blanchi, ou un modulateur spatial de lumière.

Cependant, l'important engouement suscité par le filtre POF est resté principalement limité à la communauté de l'optique. En effet, il possède une faible résistance au bruit, caractérisée par une valeur du critère SNR faible en général. Ce défaut provient de l'absence de filtrage du bruit, puisque le filtre de phase n'absorbe aucune énergie. De plus, ce filtre est très sensible à de légères modifications de l'apparence de l'objet recherché dans l'image scène, dues par exemple à une rotation ou un changement d'échelle, ou plus généralement à une déformation géométrique.

En fait, dans le cas de la corrélation numérique, l'efficacité n'est pas primordiale, car on peut effectuer le calcul de la corrélation avec une précision arbitraire. Il est donc plus important de s'intéresser à la résistance au bruit et à la capacité de discrimination des filtres.

2.1.2 Filtre adapté

Pour mesurer la résistance au bruit de la corrélation, nous avons introduit au chapitre précédent le critère SNR, ou rapport signal à bruit. Le filtre qui optimise ce critère est le filtre adapté [25], dont l'expression dans le domaine de Fourier est :

$$\hat{h}_n = \frac{\hat{r}_n}{\hat{S}_n} . \quad (2.2)$$

Ce filtre réalise bien un filtrage du bruit, puisqu'il conserve la transformée de Fourier de la référence avec un facteur inversement proportionnel à la densité spectrale du bruit. Cela revient à faire d'autant moins confiance à la fréquence n que le bruit y est supposé important. En particulier, quand le bruit en entrée est blanc, sa densité spectrale est uniforme, et le filtre adapté est simplement $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{r}}$, c'est à dire la référence elle-même.

En contrepartie de son excellente résistance au bruit, le filtre adapté présente des performances très faibles en termes de discrimination. En clair, il a tendance à donner des pics de corrélation importants avec tout objet ressemblant à la référence.

2.1.3 Filtres inverse, discriminant et non-linéaire

Nous avons introduit au chapitre précédent le critère PBCE visant à réduire l'amplitude des pics de corrélation parasites apparaissant quand l'objet de référence est présenté sur un fond structuré. Pour rappel, ce critère est :

$$\text{PBCE}(\mathbf{h}) = \frac{|\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{\mathbf{x}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{D}_b \hat{\mathbf{h}}} ,$$

où \hat{D}_b est une estimée de la densité spectrale de l'image de fond. Dans le cas où \hat{D}_b est estimée à partir d'une liste d'images à rejeter, ce critère est noté DC ; quand on souhaite se prémunir contre des objets ressemblant à l'objet de référence, il est noté PCE ; enfin quand \hat{D}_b est estimée directement par la densité spectrale de l'image scène, il est noté PSCE.

L'expression du filtre optimal pour le critère PBCE s'exprime simplement dans l'espace de Fourier par :

$$\hat{h}_n = \frac{\hat{r}_n}{[\hat{D}_b]_n} . \quad (2.3)$$

De façon intuitive, nous pouvons remarquer que cela revient à faire d'autant moins confiance à la fréquence n que le fond est supposé important pour cette fréquence. Le tableau 2.1 présente les filtres optimaux suivant le critère de discrimination utilisé. Ces filtres sont le filtre discriminant, introduit par Yaroslavsky [10], le filtre inverse, bien connu en traitement du signal [25], et le filtre non-linéaire [12] que nous avons introduit récemment.

Ces filtres ont en commun d'être très instables [94], ce qui a pour conséquence qu'ils sont très sensibles au bruit ou aux distorsions sur les images à analyser. En particulier, le filtre inverse s'écrit dans le domaine de Fourier :

$$\frac{\hat{r}_n}{[\hat{D}_r]_n} = \frac{\hat{r}_n}{|\hat{r}_n|^2} .$$

On peut donc remarquer qu'il amplifie fortement les fréquences spatiales qui sont faiblement présentes dans le spectre de l'objet. En outre, les objets naturels présentent en général un spectre en forme de

	Estimation de \hat{D}_b	\hat{K} (objets à rejeter)	\hat{D}_r (référence)	\hat{D}_x (scène)
Critère	$\text{PBCE}(\mathbf{h}) = \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{BCPE}(\mathbf{h})}$	$\frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{ROCE}(\mathbf{h})}$	$\frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{CPE}(\mathbf{h})}$	$\frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{SCPE}(\mathbf{h})}$
Filtre optimal	$\frac{\hat{r}_n}{[\hat{D}_b]_n}$	$\frac{\hat{r}_n}{\hat{K}_n}$ filtre discriminant	$\frac{\hat{r}_n}{[\hat{D}_r]_n}$ filtre inverse	$\frac{\hat{r}_n}{[\hat{D}_x]_n}$ filtre non-linéaire

Tableau 2.1 : Filtres optimisant la discrimination entre la référence et le fond, suivant le critère de discrimination choisi.

courbe en cloche centrée sur la fréquence nulle, c'est à dire qu'ils contiennent peu d'énergie dans les hautes fréquences. On voit que le filtre inverse a tendance à favoriser les fréquences hautes, c'est à dire les contours des objets à reconnaître. C'est un filtre passe-haut. Mais, de plus, quand l'énergie du bruit n'est pas négligeable dans les hautes fréquences, et que cela n'a pas été pris en compte dans le modèle, le bruit sera fortement amplifié. L'image de corrélation sera alors contaminée par un important bruit haute-fréquences. La même remarque est valable pour les filtres discriminants et non-linéaires.

2.1.4 Synthèse

La figure 2.1 précise le comportement des différents filtres introduits dans cette section. La première ligne montre l'image scène utilisée, ainsi que l'image de référence (la voiture) orientée comme dans la scène et tournée de 4° . Dans une situation réaliste, cette légère rotation pourrait être une erreur de modélisation du problème. Les lignes suivantes montrent les filtres adaptés au bruit blanc, inverse et de phase, ainsi que leurs corrélations respectives avec la scène. Le filtre adapté est très peu discriminant, mais relativement insensible à une faible rotation. Au contraire, le filtre inverse est très discriminant, mais ne résiste pas à une faible rotation : il est très instable. Le filtre de phase présente un comportement intermédiaire, quoique plus proche du filtre inverse. Il ne résisterait pas à une rotation plus importante.

En fait, on peut dire de ces filtres qu'ils sont sur-spécialisés, le filtre adapté pour la résistance au bruit, le filtre inverse pour la discrimination, et le filtre de phase pour l'efficacité optique. Nous allons voir dans la section suivante comment il est possible de réaliser des *compromis* entre ces différentes qualités de la corrélation pour éviter la sur-spécialisation des filtres.

2.2 Filtres à compromis optimal

Nous allons rappeler ici brièvement le principe des filtres à compromis optimal [26, 27, 28, 29]. Une approche plus générale sera donnée au chapitre 6.

Considérons simultanément le critère SNR, mesurant la résistance au bruit, et le critère PBCE, mesurant la capacité de discrimination du fond. Plutôt que d'optimiser séparément ces deux critères,

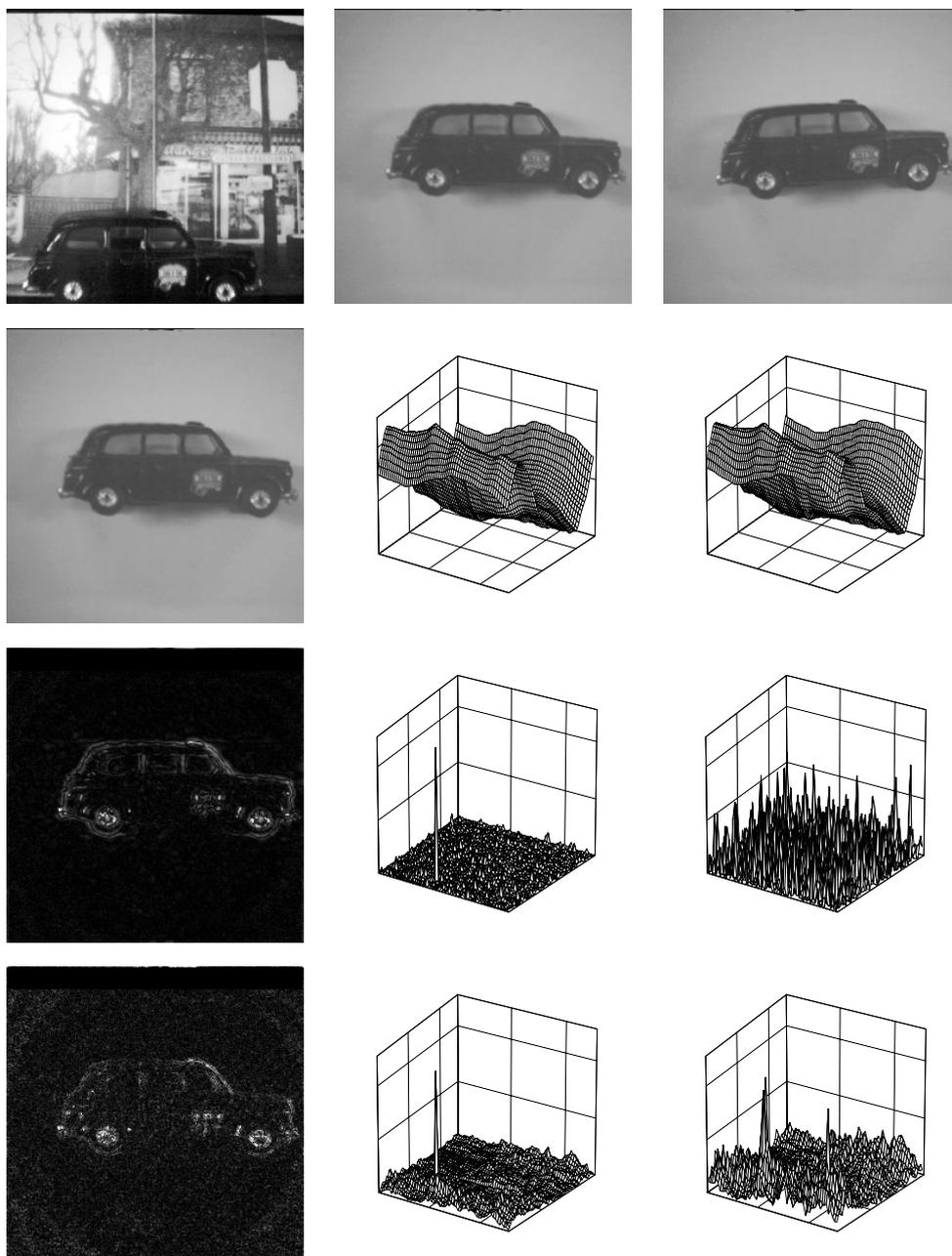


Figure 2.1 : Exemples de filtres. De haut en bas, et de gauche à droite: image scène, référence, référence tournée de 4° ; réponse percussive du filtre adapté au bruit blanc, corrélation avec la scène, puis corrélation avec la scène mais avec le filtre adapté calculé pour la référence tournée; idem pour le filtre inverse, mais pour la clarté de l'affichage c'est le module carré de la réponse percussive qui est représenté; idem pour le filtre de phase.

comme nous l'avons fait précédemment, commençons par fixer la valeur de $PBCE(\mathbf{h})$. Parmi tous les filtres \mathbf{h} qui donnent cette valeur fixe du critère PBCE, le plus intéressant est certainement celui qui maximise le critère SNR.

Représentons ce principe sur le graphe de la figure 2.2. En abscisse, nous portons la valeur $SNR(\mathbf{h})$ d'un filtre \mathbf{h} , et en ordonnée la valeur $PBCE(\mathbf{h})$. Choisissons une valeur fixe pour $PBCE(\mathbf{h})$. Tous les filtres qui donnent cette valeur sont représentés par des points d'une droite parallèle à l'axe des abscisses. Parmi ces filtres, le plus intéressant est celui qui a la plus grande valeur $SNR(\mathbf{h})$. Si nous répétons cette procédure pour toutes les valeurs possibles de $PBCE(\mathbf{h})$, nous obtenons une courbe concave, qui représente *les compromis optimaux* entre les critères SNR et PBCE [26]. Cette courbe est appelée OCC¹. Nous reviendrons sur cette construction géométrique au chapitre 6 en en donnant une nouvelle interprétation plus précise.

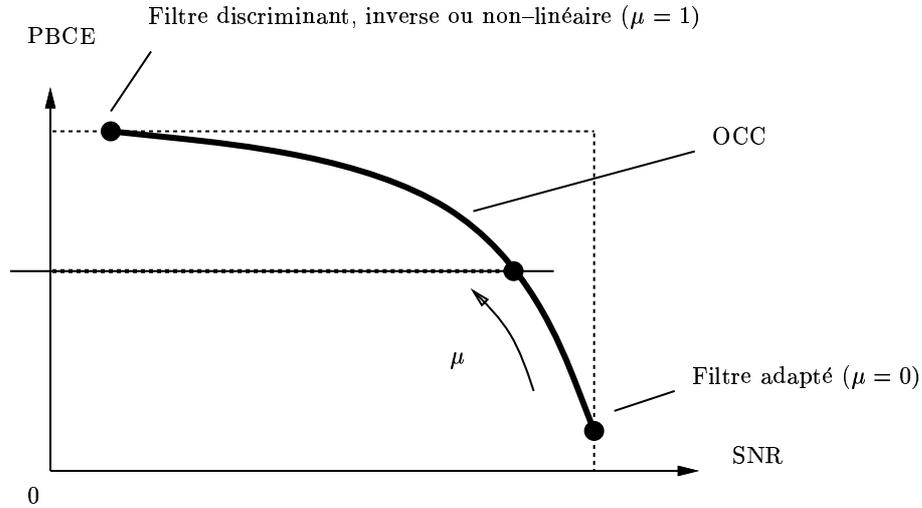


Figure 2.2 : Principe des filtres à compromis optimal. Courbe des caractéristiques optimales (OCC).

Il reste maintenant à obtenir l'expression des filtres à compromis optimal. Maximiser un critère est équivalent à minimiser son inverse. Nous pouvons donc écrire le problème sous la forme suivante :

$$\min_{\mathbf{h}} \left\{ \frac{MSE(\mathbf{h})}{\eta(\mathbf{h})} \right\} \text{ sous contrainte que } \frac{BCPE(\mathbf{h})}{\eta(\mathbf{h})} = C^{ste} .$$

À ce problème nous pouvons associer la fonction de Lagrange [30, 31] :

$$\mathcal{L}(\mathbf{h}) = \frac{MSE(\mathbf{h})}{\eta(\mathbf{h})} + \alpha \frac{BCPE(\mathbf{h})}{\eta(\mathbf{h})} = \frac{MSE(\mathbf{h}) + \alpha BCPE(\mathbf{h})}{\eta(\mathbf{h})} ,$$

où en principe le paramètre α doit être identifié par la contrainte $PBCE(\mathbf{h}) = C^{ste}$. Fixons pour l'heure le paramètre α . La minimisation de la fonction de Lagrange précédente est équivalente au problème suivant :

$$\min_{\mathbf{h}} \{MSE(\mathbf{h}) + \alpha BCPE(\mathbf{h})\} \text{ sous contrainte que } \eta(\mathbf{h}) = C^{ste'}$$

À ce problème nous pouvons de nouveau associer une fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}'(\mathbf{h}) = MSE(\mathbf{h}) + \alpha BCPE(\mathbf{h}) - \beta \eta(\mathbf{h}) ,$$

¹ *Optimal Characteristics Curve*, courbe des caractéristiques optimales.

où en principe le paramètre β doit être identifié par la contrainte $\eta(\mathbf{h}) = C^{\text{ste}'}$. Écrivons la fonction de Lagrange $\mathcal{L}'(\mathbf{h})$ sous la forme :

$$\mathcal{L}'(\mathbf{h}) = [(1 - \mu) \text{MSE}(\mathbf{h}) + \mu \text{BCPE}(\mathbf{h}) - \lambda \eta(\mathbf{h})] (1 + \alpha) ,$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} \mu &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} \\ \lambda &= \frac{\beta}{1 + \alpha} \end{cases}$$

Du fait de cette normalisation, μ peut varier entre 0 et 1. Nous pouvons écrire, en utilisant les définitions (1.11) et (1.13) des critères MSE et BCPE :

$$(1 - \mu) \text{MSE}(\mathbf{h}) + \mu \text{BCPE}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^\dagger B_\mu \mathbf{h} = \frac{1}{N} \mathbf{h}^\dagger \hat{B}_\mu \mathbf{h} , \quad (2.4)$$

avec :

$$\hat{B}_\mu = (1 - \mu) \hat{S} + \mu \hat{D}_b . \quad (2.5)$$

Ainsi définie, \hat{B}_μ est une matrice diagonale, combinaison linéaire des densités spectrales du bruit et du fond. Les filtres minimisant $\mathcal{L}'(\mathbf{h})$ sont de la forme [26] :

$$\boxed{\hat{h}_n^{OT} = \frac{\hat{r}_n}{[\hat{B}_\mu]_n} = \frac{\hat{r}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu [\hat{D}_b]_n} .} \quad (2.6)$$

Ces filtres sont notés \mathbf{h}^{OT} pour *Optimal Trade-off filters*, ou filtres à compromis optimal. Quand le paramètre μ varie entre 0 et 1, nous obtenons tous les points de l'OCC représentée sur la figure 2.2. Pour $\mu = 0$, nous retrouvons le filtre adapté donné par l'expression (2.2), et pour $\mu = 1$ le filtre discriminant, inverse ou non-linéaire de l'expression (2.3), suivant l'approximation choisie pour le fond.

En particulier, si nous choisissons comme approximation de la densité spectrale du fond celle de la scène elle-même, nous obtenons une classe de filtres non-linéaires optimaux, que nous avons proposés dans [12, 32] :

$$\boxed{\hat{h}_n^{NL} = \frac{\hat{r}_n}{[\hat{B}_\mu]_n} = \frac{\hat{r}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu |\hat{x}_n|^2} .} \quad (2.7)$$

Ces filtres sont non-linéaires car ils dépendent de la scène analysée, ils réalisent de fait un filtrage auto-adaptatif du fond. Du fait de la non-linéarité, il est plus juste de parler de filtrage global plutôt que de corrélation. Nous avons montré [12] que ces filtres sont très performants.

Le tableau 2.2 montre l'expression de l'image de corrélation dans le plan de Fourier pour les filtres à compromis optimal, suivant que la densité spectrale du fond est estimée par celle de la référence (filtre OT classique [26]) ou de la scène (filtrage non-linéaire [12]). Nous pouvons observer que les rôles de la référence et de la scène sont échangés dans ces expressions.

Afin d'illustrer qualitativement les capacités des filtres à compromis optimal, la figure 2.3 reprend l'exemple de la figure 2.1, mais avec deux filtres OT pour une valeur de μ faible et une valeur de μ grande, et pour le filtrage non-linéaire optimal. Le bruit est supposé blanc. Les réponses percussionnelles représentées sont celles du filtre dans le cas OT, et celle de la *scène filtrée* dans le cas non-linéaire :

$$\text{TF}^{-1} \left[\frac{\hat{x}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu |\hat{x}_n|^2} \right] .$$

Ce choix est fait afin de montrer l'effet de l'échange des rôles de la référence et de la scène analysée dans l'opération de filtrage.

corrélation avec le filtre OT	filtrage non-linéaire
$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu \hat{r}_n ^2}$	$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu \hat{x}_n ^2}$

Tableau 2.2 : Expressions comparées de la corrélation avec le filtre OT et du filtrage non-linéaire optimal.

Nous pouvons observer le bon comportement du filtre OT, et le comportement encore meilleur du filtre non-linéaire. En fait, dans l'image scène de cet exemple, nous sommes en présence d'un fond structuré très important dans lequel l'énergie de l'objet recherché, c'est à dire la voiture, est relativement faible. De fait, l'estimation de la densité spectrale du fond par celle de la scène est meilleure que l'estimation par la densité spectrale de la référence, ce qui explique le meilleur comportement du filtrage non-linéaire.

2.3 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les principaux filtres pour la reconnaissance de formes par corrélation, ou plus généralement par filtrage global, qui optimisent un unique critère :

- le filtre de phase, qui optimise l'efficacité optique ;
- le filtre adapté, qui optimise le critère SNR, ou la résistance au bruit ;
- les filtres inverse, discriminant et non-linéaire qui optimisent la discrimination du fond, suivant le modèle choisi pour décrire la densité spectrale du fond.

Nous avons vu également que les filtres OT réalisent un compromis optimal entre différents critères, et permettent de passer continûment du filtre adapté au filtre inverse, ou du filtre adapté au filtre non-linéaire par exemple.

Il a été montré que ces filtres à compromis optimal, adaptés à la corrélation numérique, sont performants, même dans des conditions de bruit très défavorables. Notre opinion est que la corrélation optique, pour ne pas être trop défavorisée par rapport à son homologue numérique, doit pouvoir permettre au moins de façon approchée de telles capacités de filtrage. Cette question fera l'objet de la seconde partie de ce mémoire.

Nous n'avons pas présenté un certain nombre d'autres méthodes de filtrage numérique, et en particulier les méthodes d'apprentissage, qui permettent de réaliser des filtres invariants ou tolérants à des déformations géométriques. Malgré leur importance, elles dépassent le cadre de notre propos.

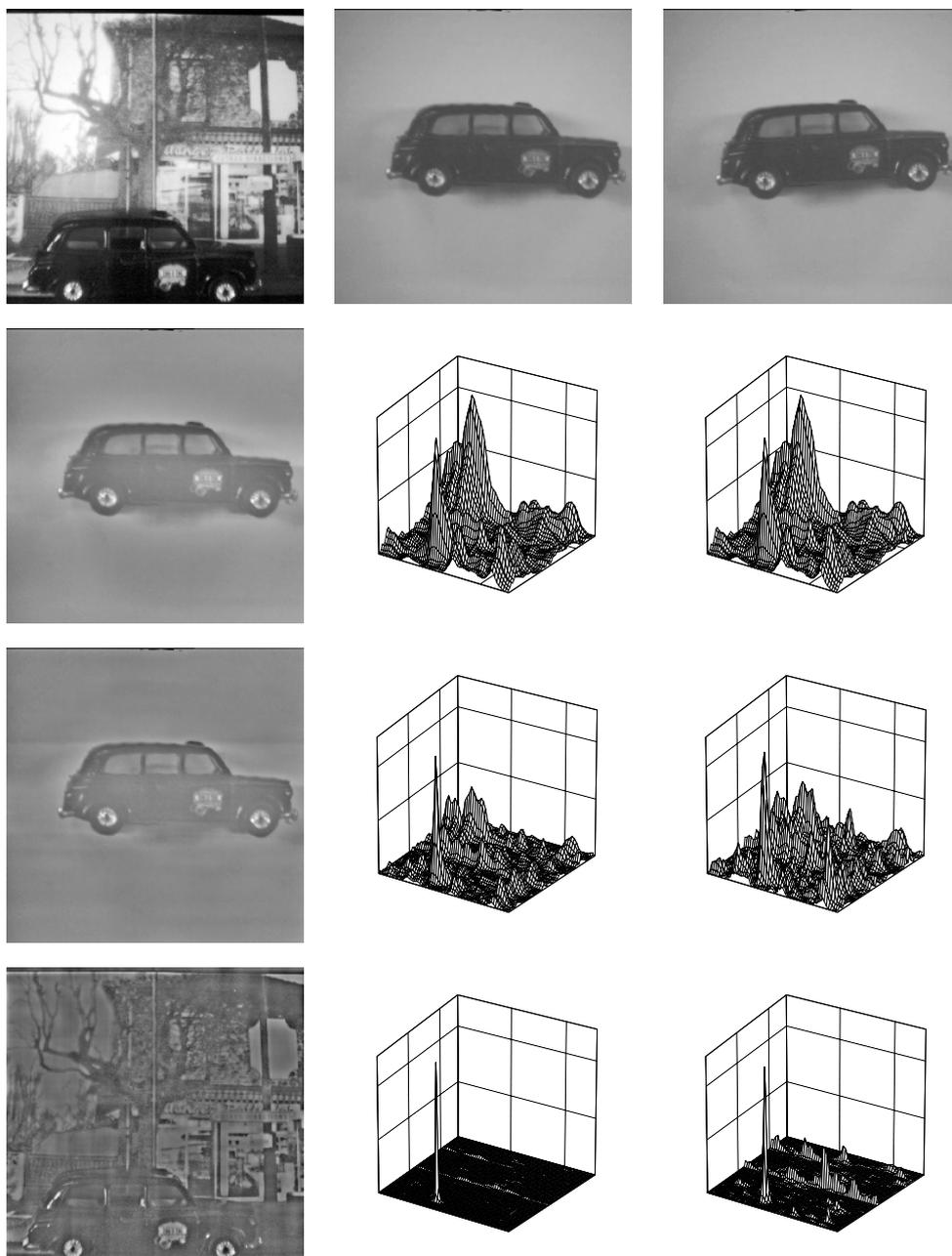


Figure 2.3 : Exemples de filtres. De haut en bas, et de gauche à droite : image scène, référence, référence tournée de 4° ; réponse percussive du filtre OT adapté au bruit blanc pour μ faible, corrélation avec la scène, puis corrélation avec la scène mais avec le filtre adapté calculé pour la référence tournée ; idem pour le filtre OT adapté au bruit blanc pour μ fort ; réponse percussive de la scène *filtrée* dans le cas du filtrage non-linéaire optimal adapté au bruit blanc, corrélation avec la référence, puis avec la référence tournée. Le noir représente le niveau minimum (négatif pour les filtres) des images, le blanc représente le niveau maximum des images, le niveau 0 des filtres est une teinte de gris.

Chapitre 3

Interprétation bayésienne de la corrélation

Nous avons vu au chapitre précédent les filtres de corrélation numérique optimaux qui optimisent certains critères définis dans le but de conférer à la corrélation des propriétés objectives. Cette optimisation peut porter sur un critère unique, ou réaliser un compromis entre plusieurs critères. Dans la pratique, ces différents filtres s'avèrent performants, surtout les filtres à compromis optimal, comme différents travaux ont pu le montrer.

Pourtant, le choix de la corrélation peut apparaître arbitraire pour un problème de reconnaissance de formes. De fait, la littérature sur les méthodes de corrélation appliquées à la reconnaissance de formes est principalement limitée aux seuls journaux et traités d'optique. Il manque donc une justification théorique des méthodes de corrélation.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode originale, qui s'appuie sur une formulation dite "bayésienne" [33] du problème de l'estimation de la position d'une référence dans une image scène. Cette approche, nous allons le voir, donne une assise théorique aux méthodes de corrélation pour ce type de problème, quand on se limite à une description statistique au second ordre des différentes quantités intervenant, et permet de retrouver les résultats obtenus par optimisation de critères.

3.1 Modèle de l'image scène

Nous allons reprendre et préciser le modèle de l'image scène que nous avons fait au chapitre 1. Par hypothèse, nous supposons que nous disposons d'une image scène, notée \mathbf{x} , qui contient la référence \mathbf{r} que nous recherchons noyée dans un fond \mathbf{b} . Le fond peut être constitué de divers objets, de végétation,... C'est au sens large le paysage dans lequel nous est présentée la référence. Le problème que nous devons résoudre est d'estimer la position de la référence dans la scène, cette position pouvant *a priori* être quelconque. Nous pourrions considérer un problème plus général, où il s'agirait non seulement d'estimer la position, mais également l'attitude ou l'échelle de la référence [32]. Nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir notre propos. Nous pouvons prendre pour modèle de notre image scène :

$$\boxed{\mathbf{x} = T_t \mathbf{r} + \mathbf{b}} \quad (3.1)$$

où T_t représente l'opérateur de translation déplaçant la référence du centre de la scène vers la position \mathbf{t} :

$$T_t r_m = r_{m-t} \quad (3.2)$$

Dans l'expression (3.1) les quantités connues sont l'image scène \mathbf{x} et la référence \mathbf{r} . La translation T_t est l'inconnue du problème, et le fond \mathbf{b} est une image inconnue *a priori*, qui intervient donc comme un paramètre de *nuisance*, puisqu'il faudra l'éliminer au cours de la résolution du problème.

Maintenant, il est clair qu'un tel modèle ne peut être qu'approximatif, et cela pour au moins deux raisons. La première est que la caméra qui sert à l'observation de la scène n'en réalise qu'une mesure approximative, en ce qu'elle présente toujours un bruit d'acquisition, et qu'elle peut déformer la référence suivant son angle d'observation ou les aberrations géométriques qui l'affecte. La seconde raison est que notre connaissance de la référence est liée à un modèle que nous nous faisons d'elle, par exemple déterminé par une image acquise par ailleurs, mais que ce modèle ne peut jamais être parfaitement exact. En tout état de cause, il faut préciser cette incertitude, ce que nous allons faire en termes de probabilité d'observation de la scène.

Pour décrire un état de connaissance incertain, nous allons utiliser le formalisme de la théorie des probabilités au sens des expressions logiques ou "bayésienne". Nous définissons les propositions logiques suivantes :

X : la scène observée est \mathbf{x} ;

H_t : la translation de la référence dans la scène est T_t ;

B : le fond est \mathbf{b} ;

I : toutes autres informations disponibles (en particulier que la référence est présente).

À la place de notre modèle certain d'observation de la scène, représenté par l'expression (3.1), nous nous donnons la probabilité *a priori* d'observation de la scène $p(X|H_t B I)$, c'est à dire la probabilité d'observer l'image \mathbf{x} sachant que la référence est présente, traduite au pixel t , et apparaît sur le fond \mathbf{b} . Cette probabilité représente la confiance que nous accordons à notre modèle de formation de l'image scène. Elle est dite *a priori* [33], car c'est l'observateur qui doit la fixer en vertu de ce qu'il sait de la façon dont l'image scène est obtenue. C'est donc dans sa formulation que s'exprime l'arbitraire de la méthode.

Nous choisissons pour la probabilité *a priori* d'observation de l'image scène une loi normale (gaussienne) multivariée de moyenne $(T_t \mathbf{r} + \mathbf{b})$ et de covariance Σ :

$$\begin{aligned} p(X|H_t B I) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - T_t \mathbf{r} - \mathbf{b})^\dagger \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - T_t \mathbf{r} - \mathbf{b})\right) \\ &= \mathcal{N}(T_t \mathbf{r} + \mathbf{b}, \Sigma) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans cette expression, N est le nombre de pixels des images, et Σ est une matrice de N par N éléments, dite matrice de covariance de la loi normale. Nous supposons que cette matrice est de Tœplitz, c'est à dire que la probabilité d'observation de la scène est stationnaire, et de plus qu'elle est inversible. Nous avons en particulier :

$$\langle x_m \rangle = \int dp(X|H_t B I) x_m = T_t r_m + b_m, \quad \forall m, \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \langle (x_m - \langle x_m \rangle)^* (x_{m'} - \langle x_{m'} \rangle) \rangle &= \int dp(X|H_t B I) (x_m - \langle x_m \rangle)^* (x_{m'} - \langle x_{m'} \rangle) \\ &= \Sigma_{m,m'}, \quad \forall m, m'. \end{aligned} \quad (3.4b)$$

La raison du choix d'une loi normale est qu'une telle distribution est celle qui présuppose, au second ordre statistique, le moins d'information *a priori* en dehors des hypothèses exprimées par les expressions logiques H_t , B et I . En effet, la maximisation de l'entropie de la distribution $p(X|H_t B I)$ sous contrainte des équations (3.4) conduit à la loi normale (3.3). Une discussion plus approfondie dépasserait le cadre de notre propos, mais le lecteur pourra se reporter aux références [34] ou [30]. Il doit être clair cependant que notre description statistique du modèle de l'image scène est limitée au second ordre, c'est à dire déterminée par la valeur moyenne et la matrice de covariance de la distribution.

Dans l'approche "fréquentielle" classique des probabilités, la matrice de covariance Σ peut être comprise comme la matrice de covariance du bruit d'acquisition de l'image scène. Mais du point de vue "bayésien" que nous avons adopté, elle permet de plus d'introduire une incertitude dans le modèle

de l'image de référence. Dans ce cas, elle permet une régularisation du problème, comme nous le verrons plus loin.

Une propriété intéressante des lois normales est qu'elles conduisent à des calculs analytiques plus simples en général que d'autres distributions [34], hormis les distributions triviales, qui présentent peu d'intérêt en pratique pour un modèle de formation d'image.

3.2 Maximum *a posteriori* et corrélation

3.2.1 Principe du maximum *a posteriori*

Maintenant que nous nous sommes donnés un modèle statistique de formation de l'image scène, nous pouvons revenir au problème de départ : nous devons estimer la position de la référence dans la scène, compte tenu de ce que nous savons que la référence est présente, et que nous disposons d'une observation de la scène. Le principe du maximum *a posteriori* (MAP) [30] nous indique qu'il faut choisir l'hypothèse de translation qui maximise la probabilité *a posteriori* de l'hypothèse de translation $p(H_t|XI)$:

$$\boxed{\text{Argmax}_{H_t} [p(H_t|XI)]} . \quad (3.5)$$

Il s'agit simplement de choisir l'hypothèse la plus probable compte-tenu de toute l'information dont nous disposons.

Afin de pouvoir utiliser cette règle de sélection, il nous faut relier la probabilité *a posteriori* $p(H_t|XI)$ aux probabilités *a priori* de notre problème. Pour cela, nous pouvons utiliser la règle de Bayes :

$$\boxed{p(H_t|XI) = \frac{p(H_t|I)}{p(X|I)} p(X|H_tI)} , \quad (3.6)$$

qui relie la densité de probabilité *a posteriori* (membre de gauche) aux densités de probabilité *a priori* (membre de droite). La densité de probabilité *a priori* $p(H_t|I)$ doit être choisie uniforme, car l'information fournie par la proposition logique I ne privilégie aucune hypothèse de centrage. Dans le cas où nous saurions que la référence a une plus grande probabilité d'apparaître en certains endroits de l'image scène, il faudrait bien sûr tenir compte de cette information supplémentaire, et $p(H_t|I)$ ne serait plus uniforme. Par souci de simplicité de notre exposé, nous n'envisagerons pas ce cas. La densité de probabilité *a priori* $p(X|I)$ ne dépend pas de l'hypothèse de centrage H_t , de sorte que le critère de sélection représenté par l'expression (3.5) devient :

$$\text{Argmax}_{H_t} [p(X|H_tI)] , \quad (3.7)$$

qui est connu comme le principe du maximum de vraisemblance (ML^1), qui s'identifie dans notre cas au principe de maximum *a posteriori*.

3.2.2 Modèle du fond

Il faut maintenant relier $p(X|H_tI)$ à notre modèle d'observation de la scène $p(X|H_tBI)$. L'image de fond \mathbf{b} est inconnue, et apparaît comme un paramètre de nuisance qu'il est nécessaire d'éliminer. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation suivante :

$$p(X|H_tI) = \int dp(B|H_tI) p(X|H_tBI) . \quad (3.8)$$

Pour pouvoir poursuivre, il faut nous donner un modèle statistique de l'image de fond \mathbf{b} , à travers la densité de probabilité *a priori* $p(B|H_tI)$. Cette tâche est ardue, car le fond est en principe indéterminé,

¹ *Maximum Likelihood*.

son apparence exacte dépendant de l'application particulière visée. Nous allons faire ici l'hypothèse très forte que la densité de probabilité *a priori* $p(B|H_t I)$ ne dépend pas de l'hypothèse de translation, de sorte que $p(B|H_t I) = p(B|I)$. Cette hypothèse se heurte à l'intuition, puisque pour une translation de la référence donnée, les pixels du fond à l'intérieur du *support* de la référence sont nécessairement nuls, et que ce "découpage" du fond dû à la référence se déplace avec celle-ci. On dit alors que le fond et la référence ne se recouvrent pas. Des études prenant en compte cette information supplémentaire de non-recouvrement ont été effectuées [15], mais elles sortent du cadre de notre analyse. Nous conserverons donc l'hypothèse $p(B|H_t I) = p(B|I)$, tout en gardant à l'esprit que c'est là probablement le talon d'Achille de notre approche.

Nous allons supposer que l'image fond peut être déterminée statistiquement au second ordre par sa valeur moyenne et sa matrice de covariance. Par application du principe du maximum d'entropie [30], comme dans le cas du modèle de l'image scène, nous écrirons donc :

$$p(B|I) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |D_b|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \langle \mathbf{b} \rangle)^\dagger D_b^{-1} (\mathbf{b} - \langle \mathbf{b} \rangle)\right) = \mathcal{N}(\langle \mathbf{b} \rangle, D_b) . \quad (3.9)$$

Comme pour la matrice Σ , nous supposons que la matrice D_b est de Tœplitz, mais de plus que la valeur moyenne $\langle \mathbf{b} \rangle$ est constante. Ces deux hypothèses sont équivalentes à la stationnarité au second ordre de la statistique de l'image de fond, ou encore à l'invariance par translation du modèle. Pour justifier cette simplification, qui nous sera très utile, nous pouvons considérer que notre connaissance du fond est très peu précise. En l'absence d'information supplémentaire, nous n'avons pas de raison d'attribuer plus ou moins d'importance à tel ou tel pixel. Dans le cadre de la théorie bayésienne des probabilités, cela signifie qu'il faut assigner la même probabilité *a priori* à tous les pixels de l'image de fond, et que la fonction de corrélation de deux pixels ne peut dépendre que de leur distance dans l'image.

3.2.3 Solution MAP et corrélation

$p(X|H_t I)$ dans l'expression (3.8) apparaît maintenant comme la convolution de deux lois normales, opération dont on sait qu'elle donne une loi normale de valeur moyenne somme et de matrice de covariance somme de celles des deux lois normales convoluées :

$$p(X|H_t I) = \mathcal{N}(T_t \mathbf{r} + \langle \mathbf{b} \rangle, \Sigma + D_b) . \quad (3.10)$$

À partir de l'expression (3.10), nous pouvons maintenant déterminer la meilleure hypothèse de translation au sens du principe du maximum *a posteriori*. En effet, nous pouvons écrire :

$$\ln p(X|H_t I) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma + D_b| - \frac{1}{2} [\mathbf{x} - T_t \mathbf{r} - \langle \mathbf{b} \rangle]^\dagger (\Sigma + D_b)^{-1} [\mathbf{x} - T_t \mathbf{r} - \langle \mathbf{b} \rangle] .$$

Cette expression doit être maximisée, conformément à la règle (3.7), en considérant seulement les hypothèses de centrage. Du fait de la stationnarité supposée des matrices de covariance Σ et D_b , l'opérateur de translation commute avec la matrice $(\Sigma + D_b)^{-1}$. De plus, les opérateurs de translation vérifient $T_t^\dagger = T_t^{-1}$. Nous pouvons donc écrire :

$$(\Sigma + D_b)^{-1} [T_t \mathbf{r}] = T_t [(\Sigma + D_b)^{-1} \mathbf{r}] ,$$

et

$$[T_t \mathbf{r}]^\dagger (\Sigma + D_b)^{-1} [T_t \mathbf{r}] = \mathbf{r}^\dagger (\Sigma + D_b)^{-1} \mathbf{r} .$$

Nous obtenons donc :

$$\ln p(X|H_t I) = A + \text{Re} \left\{ [\mathbf{x} - \langle \mathbf{b} \rangle]^\dagger T_t [(\Sigma + D_b)^{-1} \mathbf{r}] \right\} ,$$

où A est une constante qui rassemble tous les termes qui ne dépendent pas de l'hypothèse de translation H_t . Définissons le filtre \mathbf{h}^o par :

$$\boxed{\mathbf{h}^o = (\Sigma + D_b)^{-1} \mathbf{r}} . \quad (3.11)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\ln p(X|H_t I) = A + \text{Re} \left\{ [\mathbf{x} - \langle \mathbf{b} \rangle]^\dagger [T_t \mathbf{h}^o] \right\} .$$

La moyenne du fond étant supposée constante, $\langle \mathbf{b} \rangle = B I_d$, nous avons :

$$\langle \mathbf{b} \rangle^\dagger [T_t \mathbf{h}^o] = B \sum_m h_{m-t}^o = B \sum_m h_m^o ,$$

qui est donc une constante. De plus :

$$\text{Re} \left\{ \mathbf{x}^\dagger [T_t \mathbf{h}^o] \right\} = \text{Re} \left\{ [\mathbf{h}^o \circledast \mathbf{x}]_t \right\} .$$

Donc au final, l'hypothèse de translation la plus probable est donnée par la position du maximum de la corrélation du filtre \mathbf{h}^o avec la scène \mathbf{x} :

$$\boxed{\text{Argmax}_t [\text{Re} \{ [\mathbf{h}^o \circledast \mathbf{x}]_t \}]} . \quad (3.12)$$

Ce résultat est fondamental, puisqu'il justifie l'usage de la corrélation pour l'estimation de la position d'un objet de référence dans une scène. Il est intéressant d'exprimer le filtre optimal \mathbf{h}^o de l'équation (3.11) dans l'espace de Fourier. Les matrices Σ et D_b étant de Toeplitz et circulantes, leurs matrices transformées de Fourier sont diagonales, et nous pouvons écrire :

$$\hat{h}_n^o = \frac{\hat{r}_n}{\hat{\Sigma}_n + [\hat{D}_b]_n} . \quad (3.13)$$

Cette expression est à rapprocher de celle (2.6) des filtres à compromis optimal pour le rapport signal à bruit et la discrimination décrits au chapitre précédent :

$$\hat{h}_n^{oT} = \frac{\hat{r}_n}{[\hat{B}_\mu]_n} = \frac{\hat{r}_n}{(1 - \mu) \hat{S}_n + \mu [\hat{D}_b]_n} .$$

Il est possible d'identifier formellement ces deux expressions en posant :

$$\mathbf{h}^o = \mu \mathbf{h}^{oT} \quad \text{avec} \quad \Sigma = \frac{1 - \mu}{\mu} S .$$

Il est alors possible d'interpréter le paramètre μ comme mesurant la *confiance* que nous plaçons en notre modèle de la scène, que cette incertitude résulte d'un bruit d'acquisition ou d'un défaut du modèle. Prendre μ proche de 0, c'est à dire considérer le filtre adapté, signifie alors que notre confiance est faible ; au contraire prendre μ proche de 1 signifie que nous considérons notre modèle comme presque exact. Prendre une valeur de μ intermédiaire permet de faire un compromis entre ces deux positions extrêmes.

3.2.4 Généralisation à l'estimation de paramètres

Nous avons montré [12] que la méthode précédente peut être étendue au cas de l'estimation de paramètres. Dans ce type de problèmes, la référence est supposée présente dans l'image scène, mais ayant subi une *déformation géométrique*, telle qu'une rotation, un changement d'échelle ou la translation déjà considérée. Si cette déformation dépend d'un ensemble de paramètres, il est alors possible d'estimer ceux-ci en effectuant des corrélations avec des filtres optimaux tels que décrits précédemment.

La démonstration de cette propriété dépassant le cadre de notre propos, nous ne la donnerons pas ici. Nous donnons simplement la solution au problème de l'estimation de la position de la référence quand un facteur d'éclairément de la référence dans la scène est inconnu. Dans ce cas, le modèle de l'image scène devient :

$$\mathbf{x} = aT_t\mathbf{r} + \mathbf{b} , \quad (3.14)$$

où a est le facteur d'éclairément inconnu. La position la plus probable de la référence est alors donnée par [12] :

$$\boxed{\text{Argmax}_t \left[|[\mathbf{h}^o \circledast \mathbf{x}]_t|^2 \right] .} \quad (3.15)$$

Il faut donc chercher la position du maximum du module carré de la corrélation du filtre optimal \mathbf{h}^o avec la scène \mathbf{x} . Cette solution permet en particulier de se prémunir contre des *inversions de contraste*, quand la référence apparaît plus sombre dans la scène que le fond. C'est finalement la règle (3.15) que nous conserverons comme solution du problème de l'estimation de la position de la référence dans la scène.

3.3 Conclusion

Nous avons donné une justification au sens du principe du maximum *a posteriori* (MAP) de l'usage de la corrélation pour le problème de l'estimation de la position d'une référence dans une image scène. Quand à la fois l'incertitude de modélisation et la probabilité du fond sont représentées par des lois normales, la solution MAP s'identifie avec la corrélation de la scène avec un filtre de corrélation à compromis optimal entre robustesse au bruit et capacité de discrimination du fond.

Par la suite, nous utiliserons seulement l'optimisation de critères pour la conception des filtres de corrélation, car cette méthode est plus aisée mathématiquement que le formalisme bayésien des probabilités. Cette simplification se fera en pratique sans perte de rigueur, puisqu'il est toujours possible de donner après coup un sens probabiliste aux solutions obtenues par optimisation de critères, et permettra d'obtenir plus simplement des solutions analytiques.

Chapitre 4

Architectures optiques

Ce chapitre propose une revue de différents dispositifs optiques permettant de réaliser le produit de corrélation de deux images. Les composants permettant de représenter soit une image, soit sa transformée de Fourier, seront tout d'abord rappelés. Puis les différentes architectures optiques de corrélation seront présentées et classées suivant qu'elles utilisent un éclairage spatialement cohérent ou incohérent. Cette présentation sera très succincte en regard de l'imposante littérature sur le sujet. À partir de cette analyse, nous choisirons trois architectures permettant de réaliser des processeurs d'images, tels que définis dans l'introduction.

4.1 Composants de représentation d'images

Afin de mesurer optiquement le produit de corrélation des images scène et filtre, il faut pouvoir transcrire ces images sur un faisceau optique. En outre, ces images peuvent être présentées soit dans l'espace direct, soit dans l'espace de Fourier.

Les images du monde réel, acquises grâce à un appareil photographique ou à une caméra, peuvent être considérées comme des tableaux bi-dimensionnels de valeurs de *luminance*, c'est à dire de nombres réels positifs. Mais la transformée de Fourier d'une telle image est, quant à elle, un tableau bi-dimensionnel de nombres complexes, qui peuvent être décomposés en amplitude et en phase. Cette différence de nature fait que certains composants sont adaptés à la représentation des images dans l'espace direct, et d'autres dans l'espace de Fourier.

Une qualité importante pour un composant de représentation d'images est d'être reprogrammable. Sauf pour des applications de reconnaissance de formes très particulières, à la fois l'image scène et l'image filtre doivent pouvoir être changées rapidement et aisément, et si possible sans intervention humaine. Cette condition est nécessaire pour qu'une architecture optique de corrélation présente une généralité qui ne soit pas trop éloignée de celle d'un système numérique équivalent.

Diapositives et masques de transmission Les diapositives et plus généralement les masques de transmission ont été les premiers éléments utilisés pour inscrire une image sur un faisceau optique dans un corrélateur [1, 35]. S'ils possèdent une très bonne résolution et sont naturellement adaptés aux images dans l'espace direct, ils présentent l'inconvénient de figer l'image.

Hologrammes Les hologrammes ont commencé d'être utilisés en corrélation optique en 1964 [2]. Ils permettent théoriquement d'enregistrer la transformée de Fourier d'une image quelconque, et sont donc adaptés à la représentation dans l'espace de Fourier. Comme les diapositives, ils sont figés.

Modulateurs spatiaux de lumière Les modulateurs spatiaux de lumière (SLM¹) sont des composants passifs reprogrammables capables de moduler un front d'onde, en agissant sur la polarisation, l'amplitude ou la phase de celui-ci [36]. Les plus utilisés des SLM sont les écrans à cristaux liquides. Pendant longtemps, la réalisation de corrélateurs optiques reprogrammables a été gênée par l'absence de SLM de qualité acceptable. Mais depuis quelques années, des progrès importants ont été réalisés, grâce notamment aux efforts consentis par les industries de l'électronique grand public pour les écrans ou la projection vidéo.

L'adressage des SLM peut être soit optique (OA-SLM²) soit électrique (EA-SLM³). Dans le cas de l'adressage optique, une répartition d'éclairement donnée par une première source est utilisée pour commander la modification d'un front d'onde émis par une seconde source. Ce type de modulateur est souvent utilisé pour transcrire une image de bonne résolution, formée par exemple par un système d'imagerie optique incohérent, sur un faisceau laser [37, 38, 39]. Les OA-SLM ont été utilisés dans les corrélateurs optiques, mais cèdent le pas depuis quelques années aux EA-SLM.

Les EA-SLM sont des composants pixélisés, chaque pixel étant individuellement contrôlé par une tension de commande. Ils sont très pratiques, car adaptés aux standards électroniques de stockage (mémoires) et de transmission d'images. Ils permettent la réalisation simple de corrélateurs hybrides optique / électronique. En comparaison aux OA-SLM, les EA-SLM présentent une résolution moindre, mais suffisante pour la reconnaissance de formes.

Les SLM permettent en principe de transcrire sur un faisceau optique une image à valeurs réelles ou complexes, par modulation d'amplitude et de phase. Ils sont donc adaptés à la représentation des images dans l'espace direct ou de Fourier. Cependant, pour les composants disponibles à l'heure actuelle, l'ensemble des valeurs d'amplitude et de phase effectivement accessibles est réduit à un certain domaine, dit de codage, qui dépend du modulateur. Le chapitre 5 précisera cette importante caractéristique des SLM.

4.2 Corrélateurs optiques en éclairage cohérent

Les corrélateurs optiques en éclairage cohérent qui seront décrits dans cette section ont tous en commun d'utiliser la propriété qu'ont les lentilles de pouvoir réaliser la transformation de Fourier d'une image [40]. Grâce à la propriété de transformation d'un produit de convolution, il s'agira d'abord de réaliser le produit des transformées de Fourier de deux images, avant d'appliquer une nouvelle transformation de Fourier sur le résultat. C'est la façon de réaliser ce produit qui différencie les architectures cohérentes [41, 42].

4.2.1 Montage de Vander Lugt

Le plus connu et le plus utilisé historiquement des corrélateurs optiques en éclairage cohérent est certainement celui dit de Vander Lugt [2], ou VDL, schématisé sur la figure 4.1. Dans un premier temps, le filtre \mathbf{h} est enregistré dans le domaine de Fourier sous forme d'un hologramme, figure 4.1-(a). Dans un second temps, ce hologramme est relu en l'éclairant par la transformée de Fourier de l'image scène \mathbf{x} , figure 4.1-(b).

Un SLM peut être employé pour l'affichage de l'image filtre \mathbf{h} lors de l'étape d'écriture, et de l'image scène \mathbf{x} lors de la relecture.

L'hologramme peut être soit enregistré dans une émulsion, ce qui nécessite un développement entre les étapes d'écriture et de relecture, soit enregistré dans une couche de photo-polymère. Il peut également être synthétique [43]. Pour chacune de ces solutions, le filtre enregistré est figé. Pour pouvoir

¹ *Spatial Light Modulator*, modulateur spatial de lumière.

² *Optically Addressed Spatial Light Modulator*, modulateur spatial de lumière adressé optiquement.

³ *Electrically Addressed Spatial Light Modulator*, modulateur spatial de lumière adressé électriquement.

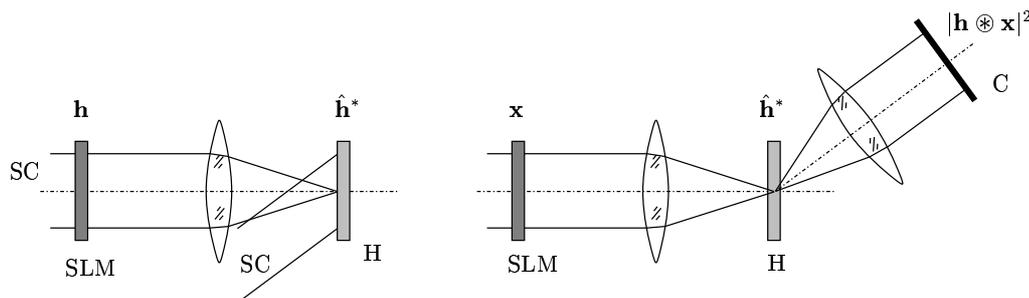


Figure 4.1 : Principe du corrélateur de Vander Lugt. (a) – enregistrement du hologramme. (b) – relecture du hologramme. H : hologramme ; C : caméra ; SC : source cohérente.

disposer simultanément de plusieurs filtres, il est alors nécessaire d’enregistrer chacun d’eux, puis de les placer sur un barillet ou de les multiplexer spatialement [44, 45, 46].

Il a été démontré expérimentalement que le montage de Vander Lugt permet d’obtenir avec une bonne fidélité le produit de corrélation de deux images [41, 42, 47].

4.2.2 Synthèse de pupille

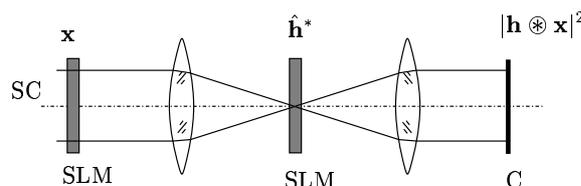


Figure 4.2 : Principe de la corrélation par synthèse de pupille. C : caméra ; SC : source cohérente.

Si dans le montage de Vander Lugt l’hologramme est remplacé par un SLM [48], figure 4.2, le problème de l’enregistrement du hologramme peut être évité. En l’absence d’une nomenclature officielle, nous désignerons ce montage par le sigle CPS pour *Coherent Pupil Synthetis*⁴. Dans ce cas, l’image scène x est affichée à l’aide d’un premier SLM, et c’est le complexe conjugué \hat{h}^* de la transformée de Fourier du filtre h qui est affiché sur le second SLM. Ce montage a reçu une attention toute particulière depuis quelques années, et a même donné lieu à des réalisations commerciales [49].

Par rapport au montage original de Vander Lugt, cette solution présente l’avantage d’être entièrement reprogrammable, le chargement des images étant assuré par une électronique annexe. Cependant, en comparaison à un hologramme, la gamme des valeurs de transmission complexe dont dispose un SLM est à l’heure actuelle nettement réduite, comme nous le montrerons au chapitre 5. Il convient alors d’adapter le filtre au support qui doit le recevoir, problème qui fait l’objet de la seconde partie de ce mémoire.

4.2.3 Transformation de Fourier conjointe

Weaver et Goodman [3] ont proposé en 1966 le principe de la corrélation par transformation de Fourier conjointe, schématisé sur la figure 4.3. Celui-ci consiste à présenter côte à côte les images scène et filtre, à réaliser une transformation de Fourier dite *conjointe* de l’image composée, à en prendre le module carré grâce à un élément non linéaire, et finalement à appliquer de nouveau une transformation de Fourier.

⁴synthèse de pupille cohérente

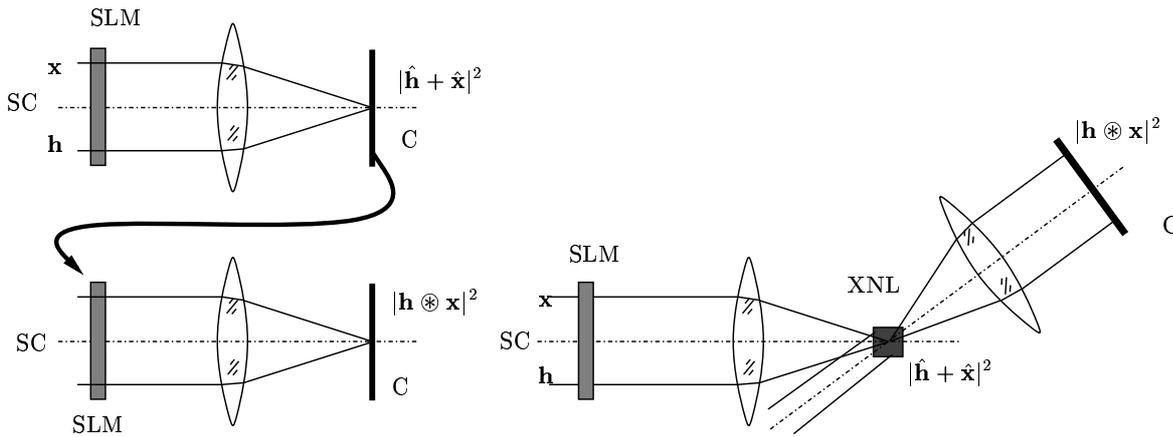


Figure 4.3 : Principe de la corrélation par transformation de Fourier conjointe. (a) – l'élément non-linéaire est une caméra. (b) – l'élément non-linéaire est un cristal. C : caméra ; SC : source cohérente ; XNL : cristal non-linéaire.

Suivant la nature de l'élément non-linéaire utilisé, différents montages sont possibles. Les plus répandus sont ceux utilisant une caméra [50], figure 4.3–(a), et ceux utilisant un cristal photo-réfractif [51, 52, 53, 54], figure 4.3–(b). Il est également possible d'employer un SLM adressé optiquement [55, 56].

Si les images scène et filtre sont présentées sur des SLM, le corrélateur sera reprogrammable. Pratiquement, le même SLM peut être utilisé pour afficher côte à côte ces deux images.

4.3 Corrélateurs optiques en éclairage incohérent

Les corrélateurs optiques en éclairage spatialement incohérent que nous présentons sont de principe moins simple que les corrélateurs cohérents précédents. En effet, il n'est plus possible dans ce cas d'obtenir la transformée de Fourier d'une image par une simple lentille.

Cependant, les systèmes optiques en éclairage spatialement incohérent présentent un certain nombre d'avantages par rapport aux systèmes cohérents, tous liés à la notion de *redondance*⁵ [57] de l'information optique :

- bruit optique (*speckle*) réduit ;
- tolérance de centrage des éléments plus lâche ;
- état de surface des éléments, en particulier des SLM, beaucoup moins critique.

En contrepartie, ils ne permettent d'utiliser que des filtres à valeurs réelles et positives.

4.3.1 Ombroscopie

La corrélation en éclairage incohérent suivant le principe de l'ombroscopie, ou *shadow-casting*, est historiquement la plus ancienne [1, 35], et à l'heure actuelle probablement la moins étudiée. Nous désignerons les corrélateurs utilisant ce principe par le sigle SCC, pour *Shadow-Casting Correlator*⁶.

⁵La redondance signifie intuitivement que pour aller d'une cellule de résolution de la source à une cellule de résolution du détecteur, la lumière peut emprunter un grand nombre de chemins, ou canaux. Ce nombre est bien plus petit en éclairage cohérent. En conséquence, la coupure ou la dégradation d'un canal a moins de conséquence en éclairage incohérent.

⁶Corrélateur ombroscopique.

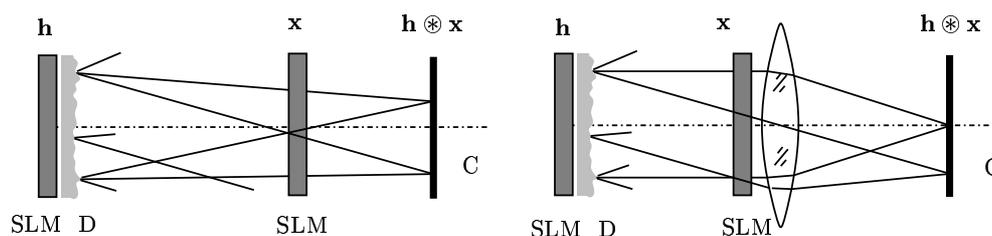


Figure 4.4 : Principe de la corrélation ombroscopique. (a) – montage sans lentille. (b) – montage à l’infini. D: diffuseur ; C: caméra.

Le principe de l’ombroscopie a été employé pour d’autres applications que la corrélation, en particulier pour le calcul optique numérique [58, 59, 60].

Le principe de l’ombroscopie repose entièrement sur l’optique géométrique, et est illustré par la figure 4.4. La figure 4.4–(a) représente un corrélateur *sans lentille*. Un diffuseur est placé dans le même plan qu’un premier SLM. L’ensemble, éclairé par une source principale, constitue donc une source modulable diffuse, à la manière d’un écran de télévision. Le diffuseur doit être choisi suffisamment lambertien pour répartir l’énergie lumineuse isotropiquement. À une distance d de cet ensemble se trouve un second SLM, et à une distance $d + p$ un écran ou une caméra. En chaque point de la caméra sont sommés des rayons issus de toute la surface du diffuseur, puis passés à travers le second modulateur. La région du second SLM interceptée par ce cône de rayons se déplace avec le point de la caméra, ce qui réalise bien un produit de corrélation.

Il faut noter que les dimensions de l’image inscrite sur le premier SLM doivent être homothétiques de celles de l’image inscrite sur le second, d’un facteur $(d + p)/p$. Sous cette condition, le montage permet de mesurer le produit de corrélation des deux images.

La figure 4.4–(b) représente un corrélateur ombroscopique quand les deux images sont présentées à la même échelle. Dans ce cas, le plan de corrélation se trouve rejeté à l’infini, et peut être observé au foyer d’une lentille.

Si le principe de l’ombroscopie a été presque abandonné depuis les années 1960 au profit des corrélateurs cohérents, c’est que des calculs, menés dans le cas du corrélateur de la figure 4.4–(b), ont montré que celui-ci était sévèrement limité en résolution par la diffraction. Dans la troisième partie de ce mémoire, consacrée à une “réhabilitation” du principe ombroscopique, nous montrerons que cette conclusion peut être largement tempérée pour certaines configurations.

4.3.2 Holographie incohérente

Le principe de la corrélation holographique incohérente [61, 57, 62], schématisé sur la figure 4.5, est en quelque sorte la version en éclairage incohérent du corrélateur de Vander Lugt. Comme lui, il nécessite deux étapes, une pour l’écriture du hologramme, et une pour sa relecture, et le plus souvent une étape supplémentaire de développement. Il faut noter que dans l’étape d’écriture, l’éclairage doit être cohérent. L’onde de référence doit être plane et monochromatique, issue d’une source laser par exemple, et l’onde éclairant le SLM doit provenir de la même source. Par contre, dans l’étape de relecture, la source peut être incohérente, à la fois spatialement et temporellement, et donc moins coûteuse.

En comparaison au corrélateur de Vander Lugt, le corrélateur holographique incohérent, comme les autres corrélateurs incohérents, offre l’avantage d’être moins sensible au bruit optique et aux décentrages, mais l’inconvénient de ne pouvoir utiliser que des filtres à valeurs réelles positives. Il a donné lieu, à notre connaissance, à au moins une réalisation commerciale [63].

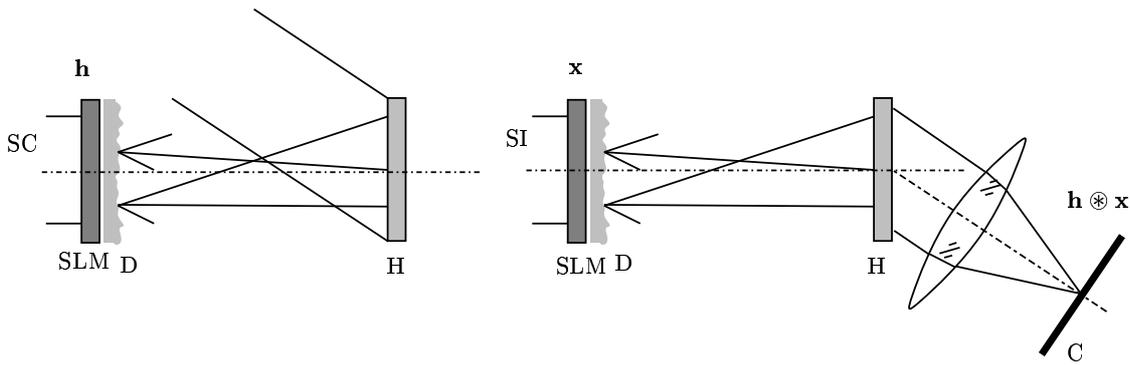


Figure 4.5 : Principe de la corrélation par holographie incohérente. (a) – écriture du hologramme en éclairage cohérent. (b) – relecture en éclairage incohérent. D : diffuseur ; C : caméra ; SC : source cohérente ; SI : source incohérente ; H : hologramme.

4.3.3 Synthèse de pupille

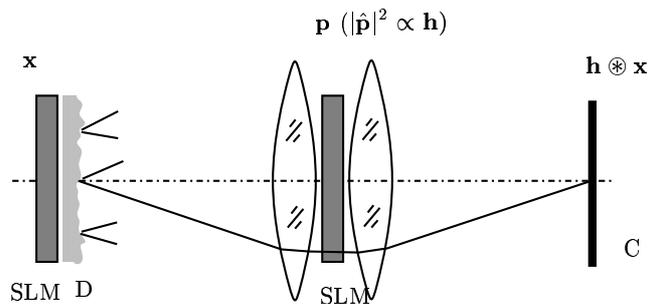


Figure 4.6 : Principe de la corrélation par synthèse de pupille incohérente. D : diffuseur ; C : caméra.

Si dans le montage précédent l'hologramme est remplacé par un second SLM, afin de rendre le corrélateur reprogrammable, il est possible d'imaginer une solution du type représenté sur la figure 4.6. Nous représenterons ce montage par le sigle IPS, pour *Incoherent Pupil Synthesis*⁷. Par principe, le second SLM est placé dans la pupille d'un système d'imagerie optique, et l'image inscrite est calculée de telle sorte que la réponse percussionnelle du système soit le filtre h ⁸.

Le principal défaut pratique de ce corrélateur est la grande complexité du calcul de l'image à présenter sur le second SLM. La fonction pupille inscrite sur le SLM intervient en effet sous la forme de son auto-corrélation, et le problème de l'obtention d'une réponse percussionnelle donnée appartient donc à la classe des problèmes de déconvolution, auxquels on ne sait donner en général que des solutions itératives [64]. De plus, la contrainte supplémentaire de représentation de la fonction pupille sur un SLM rend le calcul des filtres très malaisé en pratique.

4.4 Conclusion

Comme nous l'avons dit, nous ne souhaitons conserver, pour la suite de notre étude, que les montages de corrélation optique reprogrammables, c'est à dire utilisant des SLM pour représenter les images

⁷Synthèse de pupille incohérente.

⁸En tout état de cause, ce montage réalise un produit de convolution et non de corrélation, mais il suffit de considérer la transposée de l'image inscrite sur le second SLM pour se ramener à une corrélation.

filtre et scène. Notre position est que si le temps de calcul de la corrélation n'entre pas en ligne de compte, il n'y a pas d'intérêt pratique à ne pas utiliser un calculateur numérique, qui fournira sans équivoque un résultat plus précis que son homologue optique.

Ce faisant, nous écartons *a priori* les solutions intéressantes que sont les corrélateurs holographiques, en éclairage cohérent ou incohérent, pour lesquels les filtres sont enregistrés sur des films. Ces solutions peuvent être performantes et bien adaptées à des applications spécifiques [44, 65].

Les corrélateurs optiques reprogrammables que nous avons présentés plus haut peuvent être classés en quatre types, suivant que l'éclairage est cohérent ou incohérent, et que le filtre est présenté dans l'espace direct (réponse percussionnelle) ou de Fourier (sous forme d'une fonction pupille). Le tableau 4.1 résume ce classement.

Filtre de corrélation	Éclairage cohérent	Éclairage incohérent
Réponse percussionnelle	Transformation de Fourier conjointe (JTC)	Ombroscopie (SCC)
Fonction pupille	Synthèse de pupille cohérente (CPS)	Synthèse de pupille incohérente (IPS)

Tableau 4.1 : Architectures de corrélation optique reprogrammables.

Par ailleurs, nous avons écarté, sans les mentionner, un certain nombre d'architectures de corrélation optique reprogrammables, mais peut-être, sans jugement de valeur, plus "exotiques". C'est en particulier le cas de dispositifs utilisant des défecteurs, par exemple mécaniques ou acousto-optiques [41, 42, 62].

Partie II

Filtrage multi-critères contraint

Les chapitres qui suivent exposent une généralisation du principe des filtres de corrélation optimaux, en ce sens qu'ils optimisent un ensemble de critères chargés de mesurer la qualité de l'opération de filtrage réalisée. Quand l'image représentant le filtre de corrélation doit être inscrite sur un modulateur spatial de lumière, l'ensemble des valeurs admissibles des pixels de cette image est restreint à un certain domaine, dit de codage. Nous proposons une méthode visant à optimiser l'ensemble des critères considérés pour un domaine de codage quelconque. Cette méthode est appliquée à différents montages de corrélation optique, puis illustrée pour une application de poursuite.

Chapitre 5

Codage des images sur les modulateurs

Dans ce chapitre, nous présentons le problème du codage des images sur les modulateurs spatiaux de lumière (SLM). Rappelons que les SLM sont essentiels à notre sens pour la réalisation de corrélateurs optiques reprogrammables. Notre but étant de coder des images dans le domaine objet ou dans celui de Fourier, il serait souhaitable de disposer de toute valeur de transmission complexe, en amplitude et en phase. Or, dans l'état actuel de la technologie, il s'avère que les SLM ne permettent d'atteindre qu'une gamme limitée de valeurs de transmission complexe, qui dépend du SLM considéré, et que nous nommerons *domaine de codage*. Cette limitation a une incidence très marquée sur les performances des corrélateurs optiques, et doit en particulier être prise en compte pour la conception de filtres de corrélation adaptés.

Nous commencerons par donner les caractéristiques des SLM importantes de notre point de vue pour la corrélation optique. Nous illustrerons notre propos d'une part par quelques exemples de SLM d'emploi répandu et d'autre part par un exemple de mesures des caractéristiques d'un SLM que j'ai effectuées dans le cadre de cette thèse. Enfin, nous envisagerons les conséquences que la prise en compte du domaine de codage entraîne suivant que l'on s'intéresse au codage de l'image scène ou à celui du filtre.

Par souci de concision, nous ne rentrerons pas dans le détail du fonctionnement des divers SLM que nous évoquerons. Nous nous attacherons plutôt aux seules caractéristiques importantes en pratique pour la corrélation optique.

5.1 Caractéristiques du codage

Les SLM à adressage électrique (EA-SLM) auxquels nous nous sommes volontairement limités, comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, ont en commun de présenter une structure pixélisée. Nous supposerons, ce qui est en général valable en première approximation, que chaque pixel peut être adressé indépendamment. Cet adressage se fait au moyen d'une tension de commande, qui permet de moduler la transmission en amplitude complexe du pixel. Nous considérerons de plus que les caractéristiques de cette modulation sont identiques pour tous les pixels du SLM.

De cette description globale, nous pouvons induire les conséquences suivantes :

- La modulation est passive, c'est à dire que l'onde optique est simplement atténuée ou déphasée. Le domaine de codage d'un SLM est donc nécessairement contenu dans le disque unité du plan complexe.
- À chaque valeur de la tension de commande correspondant une valeur de transmission du pixel, le domaine de codage est au mieux une courbe continue dans le disque unité si la modulation

est elle-même continue, et un ensemble discret de points du disque unité si la modulation est elle-même discrète.

La figure 5.1 illustre ces deux caractéristiques. La figure 5.1–(a) représente le domaine de codage en général ; il est constitué de l'ensemble des valeurs de transmission complexe qu'il est possible d'obtenir, repérées par leur module ρ et leur phase ϕ . La figure 5.1–(b) représente le domaine de codage d'un modulateur "idéal", qui permettrait d'atteindre toutes les valeurs de transmission complexe dans le disque unité ; un hologramme est ce qui s'en rapproche le plus en pratique, mais il est en principe possible d'obtenir le codage dans le disque unité en cascasant deux SLM [66], même si cela n'a pas été démontré expérimentalement à notre connaissance. La figure 5.1–(c) représente le domaine de codage d'un modulateur de phase pure ; un tel SLM peut être réalisé par contrôle de la biréfringence de cristaux liquides nématiques [67, 68, 69]. La figure 5.1–(d) représente le domaine de codage d'un modulateur d'amplitude pure [70] ; un tel SLM est difficile à réaliser en pratique en éclairage cohérent, car une modulation d'amplitude est en général couplée à une modulation de phase. Ceci est surtout vrai pour les SLM à cristal nématique en hélice. Par contre la modulation d'amplitude pure est la règle quand l'éclairage est incohérent dans le plan du SLM, puisque toute modulation de phase "disparaît" quand on considère l'intensité de l'onde modulée. La figure 5.1–(e) représente le domaine de codage d'un modulateur binaire de phase, qui ne comporte que deux points opérationnels [71] ; pour réaliser un tel modulateur, on utilise un matériau bistable, par exemple des cristaux liquides ferroélectriques smectiques. La figure 5.1–(f) représente le domaine de codage d'un modulateur ternaire, qui comporte trois points opérationnels ; un modulateur de ce type peut être réalisé grâce à une valve magnéto-optique [72].

Les différents domaines de codage décrits précédemment sont tous plus ou moins idéalisés. Les figures 5.1–(g), 5.1–(h) et 5.1–(i) présentent des domaines de codage effectivement mesurés sur un SLM à cristal nématique en hélice [73, 70, 74, 75, 76]. La méthode de mesure de ces caractéristiques est décrite dans la section 5.2 de ce chapitre. Les SLM à cristal nématique en hélice sont certainement les plus utilisés à l'heure actuelle. Cela tient à ce que ce type de modulateur a été largement développé pour les besoins de la visualisation d'images par l'industrie de l'électronique grand public. En éclairage cohérent, quand on cherche à obtenir un contraste maximal, intéressant en pratique pour la corrélation, on obtient un domaine de codage en forme d'une spirale [73], figure 5.1–(g), qui traduit que les modulations en amplitude et en phase qu'encourt l'onde sont couplées de façon linéaire en première approximation [73]. Le contraste est défini comme le rapport de la transmission en intensité maximale sur la transmission minimale [36]. Un bon contraste permet donc de représenter approximativement des valeurs de transmission nulles, ce qui est important pour la représentation des filtres dans le domaine de Fourier, ce que montrera le chapitre 7. Une autre possibilité avec un tel SLM est représenté par exemple sur la figure 5.1–(h), qui correspond à un contraste faible [75, 76]. En fait, en éclairage cohérent, il est possible d'obtenir une certaine variété de domaines de codage, même si la plupart ne sont pas intéressants pour la corrélation. En éclairage incohérent par contre, figure 5.1–(i), seule la modulation d'amplitude est possible, et il y a toujours intérêt à choisir le meilleur contraste possible, ce que montrera le chapitre 8. La seule différence avec le modèle idéal de la modulation d'amplitude pure de la figure 5.1–(d) est que le contraste est fini en pratique.

De notre point de vue, le domaine de codage d'un modulateur, qui lui est caractéristique, détermine en grande partie les capacités de filtrage d'un corrélateur optique utilisant ce modulateur. De sorte que le choix d'un modulateur particulier est loin d'être anodin, et doit être fait pour l'architecture de corrélation optique considérée. Dans la section qui suit, nous examinons les conséquences sur la corrélation qu'induit la considération du domaine de codage.

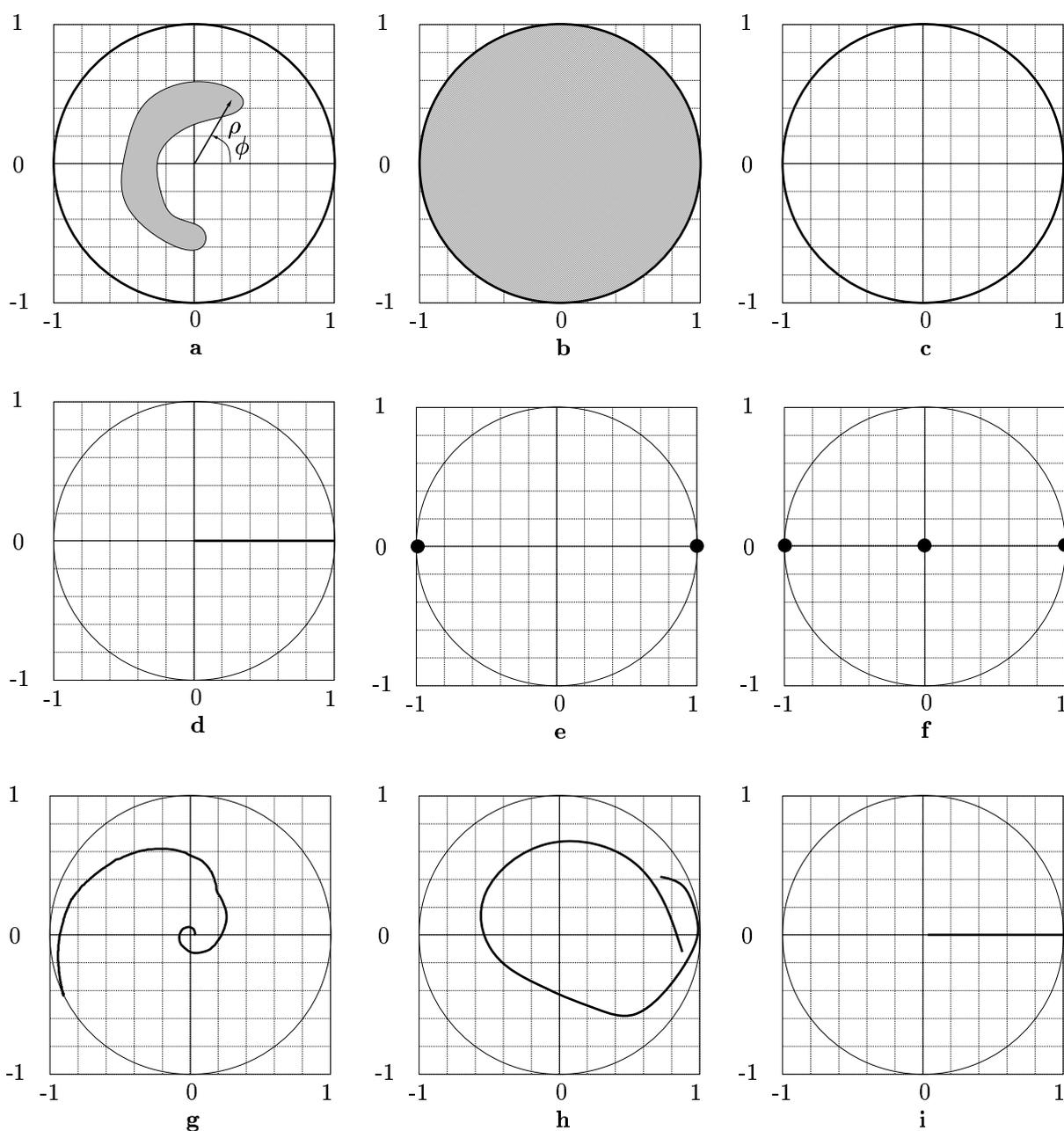


Figure 5.1 : Domaines de codage associés à divers modulateurs. (a) – Schéma représentatif du domaine de codage d'un modulateur, c'est à dire un domaine du disque unité dans le plan complexe, constitué d'un certain nombre de valeurs de transmission en amplitude (ρ) et en phase (ϕ). (b) – Modulateur (fictif) pouvant adresser tous les points du disque unité. (c) – Modulateur de phase pure. (d) – Modulateur d'amplitude pure. (e) – Modulateur binaire de phase. (f) – Modulateur ternaire. (g) – Modulateur à cristal liquide nématique en hélice en éclairage cohérent, en configuration de contraste maximum. (h) – Modulateur à cristal liquide nématique en hélice en éclairage cohérent, pour une autre configuration. (i) – Modulateur à cristal liquide nématique en hélice, en éclairage incohérent.

5.2 Caractérisation d'un SLM à cristal liquide nématique en hélice

Nous donnons maintenant un exemple pratique d'obtention du domaine de codage d'un SLM donné, en l'occurrence à cristal liquide nématique en hélice. Les tensions de commande qui contrôlent la transmission des pixels sont issues d'un signal vidéo représentant une image en 256 niveaux de gris. Les écrans à cristal liquide de type nématique en hélice que nous avons étudiés ont été retirés d'un vidéo-projecteur commercial (Epson VP 2000). Ces écrans sont au nombre de trois, pour les trois bandes spectrales rouge, verte et bleue nécessaires pour la projection en couleur. Nous les utilisons individuellement de façon monochrome.

5.2.1 Mesure de transmission

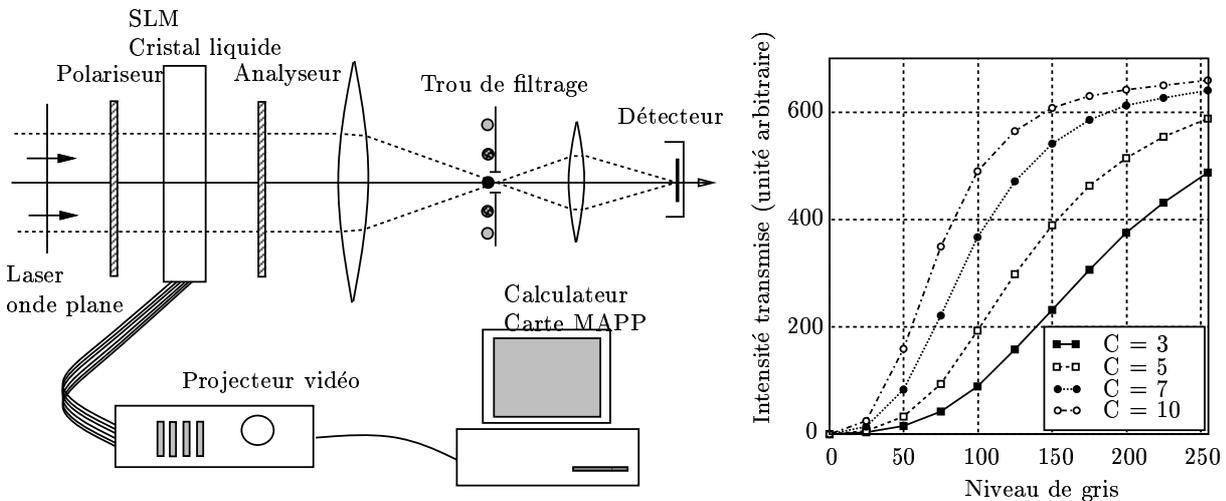


Figure 5.2 : (a) – Principe de la mesure de la transmission du SLM en fonction du niveau de gris. La carte de traitement d'images MAPP sert à inscrire les images dans l'entrée vidéo du projecteur. (b) – Transmission mesurée du SLM en fonction du niveau de gris.

Le montage utilisé est présenté figure 5.2-(a). La source d'éclairage peut être soit un laser (laser Argon, longueur d'onde 514 nm pour nos mesures), soit une source blanche halogène. Le faisceau est collimaté pour obtenir un éclairage uniforme sur une large surface de l'écran. Les mesures sont donc moyennées sur un grand nombre de pixels. Le polariseur est dirigé suivant l'axe des molécules sur la face d'entrée (axe 1) ou orthogonalement à cet axe (axe 2), tandis que l'analyseur est dirigé suivant l'axe correspondant sur la face de sortie. Les cristaux liquides utilisés sont du type nématique twisté, et l'angle effectif déterminé par le polariseur et l'analyseur est d'environ 80° .

L'électronique de commande du projecteur étant utilisée pour inscrire les images, nous ne pouvons avoir accès aux tensions effectivement appliquées aux électrodes contrôlant les pixels. Nos mesures sont donc présentées en fonction du niveau de gris de l'image d'entrée. De plus, le réglage des potentiomètres du projecteur est très important ; les mesures dépendent donc des réglages de "Brightness" (offset) et de "Contrast" (gain), qui peuvent varier chacun de 0 à 10.

En pratique, le contraste maximum est obtenu pour un réglage du potentiomètre de "Brightness" bien déterminé. Tous les résultats expérimentaux sont donnés pour ce réglage optimum. Les images présentées sont uniformes avec un certain niveau de gris, variant de 0 à 255. Des mesures ont été effectuées avec les trois écrans disponibles, leurs résultats sont similaires hormis de petites variations d'un échantillon à l'autre.

La figure 5.2-(b) représente la transmission en intensité en fonction du niveau de gris. La forme de

Éclairage	lumière blanche	Laser Argon $\lambda = 514.5 \text{ nm}$	Laser He-Ne $\lambda = 632.8 \text{ nm}$
Contraste	~ 60	~ 1000	~ 1300

Tableau 5.1 : contrastes suivant le type d'éclairage.

ces courbes de transmission est à peu près identique pour l'éclairage monochromatique ou polychromatique, il dépend donc très peu de la longueur d'onde d'éclairage. La seule différence provient du contraste (rapport des transmissions pour les niveaux de gris 255 et 0). Les courbes de transmission peuvent être rendues approximativement linéaires en appliquant une table de transcodage (Look Up Table) à l'image d'entrée.

L'effet du potentiomètre "Contrast" est clair : les différentes courbes se déduisent l'une de l'autre par une affinité suivant l'axe des niveaux de gris. Pour un niveau de gris donné, plus la valeur du potentiomètre "Contrast" est élevée, plus la transmission en intensité est élevée.

Les valeurs de contraste sont données dans le tableau 5.1. Le contraste est très grand en lumière monochromatique, et se dégrade en lumière polychromatique. En fait, l'écran à cristal liquide ne peut être optimisé que pour une longueur d'onde à la fois, ce qui explique ce résultat. Il convient cependant de remarquer qu'un contraste de 60 est considéré comme bon en traitement optique du signal, et donc qu'une source blanche peu onéreuse peut être employée pour le corrélateur.

5.2.2 Mesure du déphasage

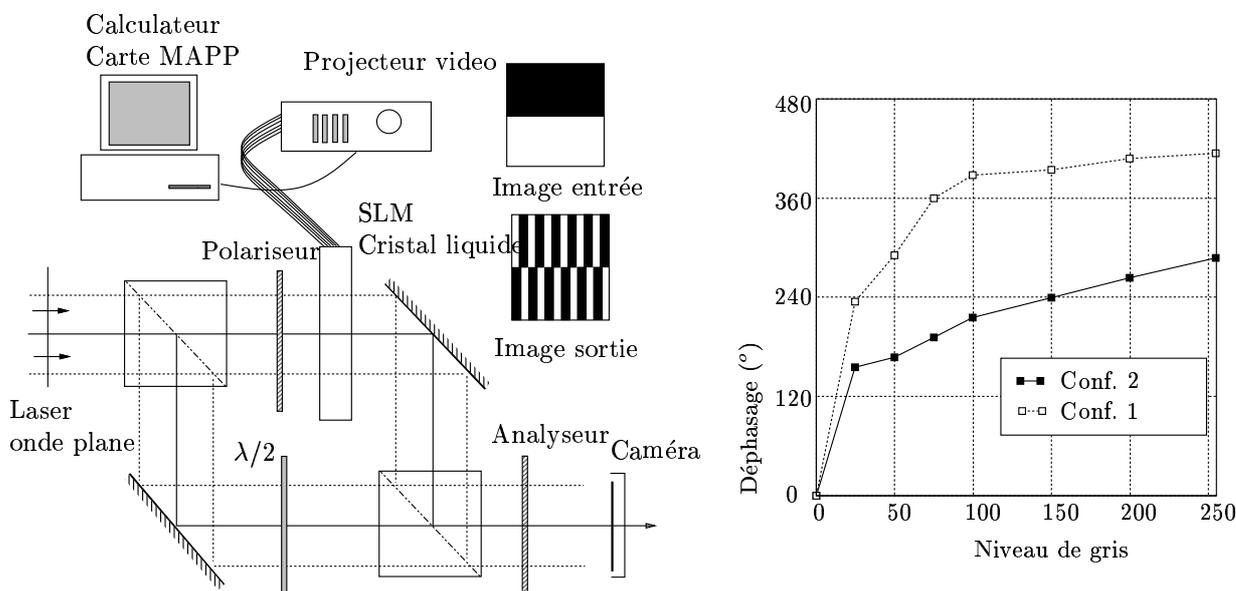


Figure 5.3 : (a) – Montage de mesure du déphasage entre un niveau de gris N et le niveau de gris nul (interféromètre de Mach-Zehnder). (b) – Déphasage mesuré entre un niveau de gris N et le niveau de gris 0.

Nous cherchons à déterminer le déphasage existant entre les différents niveaux de gris présentés, l'analyseur et le polariseur étant placés dans la même configuration que précédemment. Nous utilisons le montage décrit dans la référence [73], schématisé sur la figure 5.3-(a). Le niveau de gris 0 est pris comme référence des déphasages. Le SLM est placé dans un des bras d'un interféromètre de type

Mach-Zehnder. Il existe un léger coin d'air entre les deux bras, de sorte que nous observons des franges rectilignes d'égale inclinaison. Les images présentées sont composées de deux parties uniformes, une partie noire et une partie grise dont nous faisons varier le niveau de gris. Du fait du déphasage entre les deux parties de l'image, les deux systèmes de franges se décalent d'une quantité proportionnelle à leur déphasage.

La figure 5.3-(b) présente nos résultats. Nous pouvons noter que le déphasage est toujours plus important pour l'axe 1 (que nous supposons être l'axe des molécules de cristal liquide) que pour l'axe 2 qui lui est orthogonal. Le déphasage maximum mesuré est très élevé puisqu'il dépasse 300° .

5.2.3 Fluctuations temporelles de la transmission

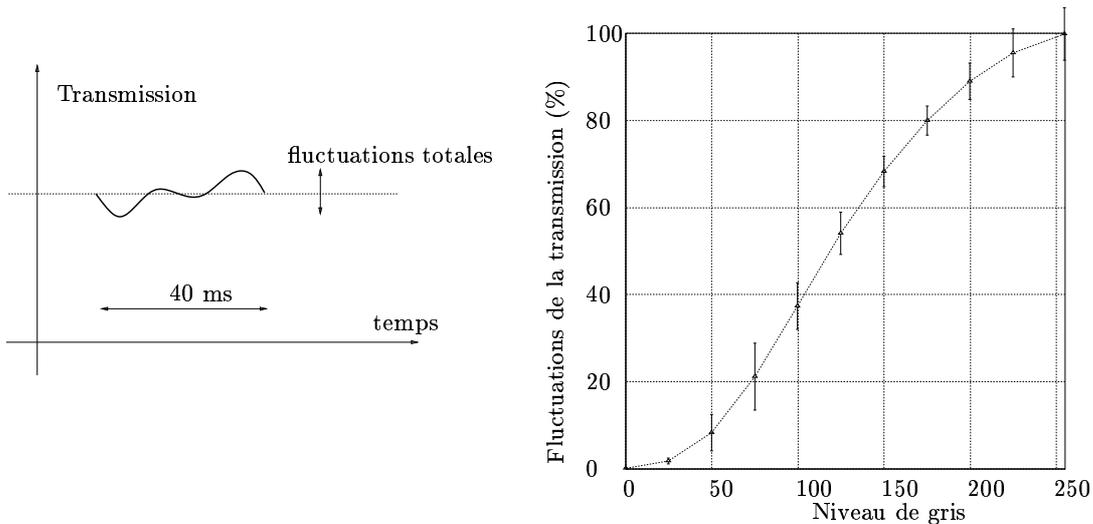


Figure 5.4 : (a) – Allure des fluctuations de l'intensité transmise par un SLM. (b) – Fluctuations temporelles de l'intensité transmise par un SLM, représentées sous forme de barres d'erreur autour de la transmission moyenne.

Les écrans à cristal liquide fonctionnant au standard vidéo, les images sont écrites à la fréquence correspondante, soit 25 Hz (les deux trames du signal d'entrée sont écrites simultanément). Pour étudier les conséquences de ce balayage, nous reprenons le montage de la figure 5.2, mais en visualisant la tension en sortie du détecteur sur un oscilloscope. Nous observons ainsi des fluctuations temporelles périodiques de la transmission en intensité, de période 25 Hz . La figure 5.4-(a) présente qualitativement l'allure des courbes observées sur l'écran de l'oscilloscope. La figure 5.4-(b) présente les fluctuations totales (différence du maximum et du minimum) comme des barres d'erreur autour de la transmission moyenne.

Dans notre cas, à la cadence vidéo, les fluctuations sont moyennées et nous pouvons assimiler l'intensité transmise par le SLM à sa moyenne. Les niveaux de gris sont donc utilisables sans problème pour le corrélateur.

5.2.4 État de polarisation

En utilisant le même montage que précédemment, nous pouvons faire tourner l'analyseur pour obtenir la forme de la polarisation de l'onde en sortie du SLM. Si le cristal liquide peut être considéré comme linéaire, alors la polarisation de l'onde en sortie doit être elliptique si la polarisation de l'onde en entrée est elle-même elliptique (une polarisation rectiligne est un cas particulier d'une polarisation elliptique). Nous observons expérimentalement que la polarisation en sortie est bien elliptique dans le cas où nous

travaillons à une fréquence de 25 Hz (nous observons alors la valeur moyenne de l'intensité) dans le cas d'un éclairage monochromatique. Dans le cas de la source blanche, il n'est plus possible en théorie de parler de polarisation elliptique, puisque les polarisations elliptiques pour chaque longueur d'onde s'ajoutent et ne résultent pas nécessairement en une polarisation elliptique "globale". Cependant, pour les mesures que nous avons effectuées cette propriété est vraie en première approximation, et nous ferons un abus de langage en parlant de polarisation elliptique même dans le cas de notre source blanche.

Nous avons mesuré les paramètres géométriques des ellipses en sortie du SLM en fonction du niveau de gris. La figure 5.5-(a) présente la rotation des axes propres de l'ellipse quand le niveau de gris augmente (les potentiomètres "Brightness" et "Contrast" sont fixes). Nous voyons que cette rotation est une fonction continue du niveau de gris, et que sa valeur maximale est environ de 80° , soit l'angle total de l'hélice formée par les molécules de cristal liquide au repos. La figure 5.5-(b) présente l'ellipticité correspondante (rapport de l'intensité suivant le petit axe et de l'intensité suivant le grand axe).

Plutôt que de représenter les valeurs des intensités suivant les axes propres des ellipses, nous avons représenté leur rapport, mais cela ne fait pas perdre de paramètre car l'énergie totale de l'onde est constante.

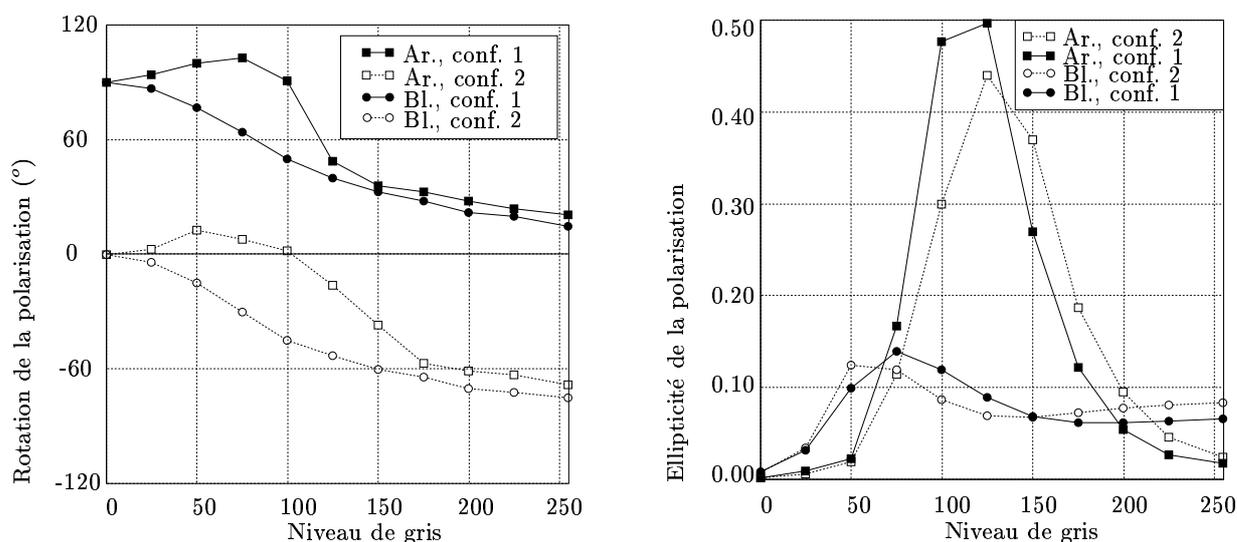


Figure 5.5 : (a) – Rotation des axes de la polarisation elliptique sortante pour une source laser Argon (Ag.) ou blanche (Bl.). (b) – Ellipticité de la polarisation elliptique sortante.

5.2.5 Synthèse : couplage amplitude-phase

Nous présentons ici une méthode numérique pour tenir compte du codage effectivement réalisé par les valves Epson. Elle nous sera utile pour évaluer l'influence du couplage amplitude-phase sur le comportement d'un corrélateur dans le cadre d'une simulation numérique.

De l'observation des courbes de modulation intensité et déphasage en fonction du niveau de gris que nous avons mesurées pour les valves Epson, nous pouvons déduire la forme suivante pour l'amplitude complexe en sortie de la valve :

$$t(V) = \delta + (1 - \delta) a(V) \exp[i \phi(V) \phi_{max}] \quad (5.1)$$

Les différents termes ont le sens suivant :

- δ est l'inverse du contraste en amplitude ;
- ϕ_{max} est le déphasage maximum ;
- $a(V)$ et $\phi(V)$ représentent la dépendance de la transmission en amplitude et du déphasage avec la tension appliquée, paramétrés par la valeur du potentiomètre "Contrast".

Au total, l'expression (5.1) détermine complètement et de façon synthétique la modulation complexe de l'onde lumineuse en sortie d'un SLM Epson.

5.3 Importance du codage des images pour la corrélation

Le domaine de codage associé à chaque modulateur détermine le type des images qui pourront être représentées. De plus, cette contrainte s'exerce de façon différente suivant que l'on veut représenter une image ou sa transformée de Fourier. Les trois corrélateurs optiques reprogrammables que nous avons choisi d'étudier comportent chacun deux SLM, chargés de représenter la scène analysée et le filtre. Ces architectures ont été décrites au chapitre 4. Le tableau 5.2 montre sur quelles images les contraintes de codage dues aux deux SLM s'appliquent.

Corrélateur	CPS	JTC	SCC
	synthèse de pupille cohérente	transformée de Fourier conjointe	ombroscopie
Éclairage	cohérent	cohérent	incohérent
Premier SLM scène	\mathbf{x}	\mathbf{x}	\mathbf{x}
Second SLM filtre	$\hat{\mathbf{h}}^*$	\mathbf{h}	\mathbf{h}

Tableau 5.2 : Images sur lesquelles s'exerce la contrainte de codage associée aux SLM d'un corrélateur optique.

Au chapitre 1, où nous avons décrit le modèle de l'image scène, nous avons observé que celle-ci est à valeurs réelles positives. De plus, au chapitre 2, nous avons vu que les filtres numériques optimaux sont à valeurs réelles positives ou négatives dans l'espace objet, et à valeurs complexes dans l'espace de Fourier. Nous pouvons donc faire les remarques suivantes :

- **Codage de l'image scène**
 - **CPS et JTC** – Nous avons dit plus haut que nous ne connaissons pas de SLM réalisant un codage en amplitude pure en éclairage cohérent. Par conséquent, en pratique, il n'est pas possible d'inscrire exactement l'image scène voulue dans le cas des corrélateurs cohérents CPS et JTC.
 - **SCC** – Tout SLM présentant un contraste acceptable permet de représenter relativement correctement une image scène quelconque en éclairage incohérent.

- **Codage du filtre**

- **CPS** – Aucun SLM ne permet d’obtenir une transmission complexe quelconque. Cela implique que les filtres numériques optimaux ne sont pas utilisables tels quels pour ce corrélateur.
- **JTC** – De façon similaire, aucun SLM ne permet d’obtenir un codage sur toute la droite réelle en éclairage cohérent, et donc les filtres numériques optimaux ne sont pas non plus utilisables tels quels. En effet, ceux-ci sont réels dans le domaine objet.
- **SCC** – En éclairage incohérent se rajoute le fait que le codage est nécessairement réel positif, et donc encore une fois les filtres numériques optimaux ne sont pas utilisables tels quels.

Les filtres numériques optimaux que nous avons décrits au chapitre 2 sont tous obtenus par minimisation d’un critère, ou en cherchant un compromis optimal entre plusieurs critères. Dans le cas des corrélateurs optiques, il faut tenir compte en plus, dans ce problème d’optimisation, de la contrainte imposée par le codage du filtre. Cette contrainte intervient en restreignant l’ensemble de définition des filtres possibles. Par suite, nous pouvons définir les *filtres optiques optimaux* qui sont les solutions de cette optimisation sous contrainte, et qui dépendront à la fois du type d’architecture de corrélation utilisée ainsi que du SLM choisi. Dans les chapitres 6, 7 et 8 qui complètent cette seconde partie, je propose une généralisation de la méthode des compromis optimaux aux corrélateurs optiques, puis je donne des algorithmes pratiques pour obtenir ces filtres.

Pour ce qui est de l’influence du codage de l’image scène [77], il est seulement possible d’analyser l’effet d’un codage particulier sur la mesure de la corrélation. Cet effet peut être mesuré en comparant les valeurs des critères obtenues pour différents SLM. En fait, le codage de l’image scène influe directement sur l’apparence de l’image de référence dans l’image scène. Par suite, les filtres optiques optimaux dépendent également du codage de l’image scène [78], comme nous l’illustrerons au chapitre 9.

5.4 Conclusion

Nous avons défini le domaine de codage associé à un SLM particulier. Ce domaine, qui est un sous-ensemble du disque unité dans le plan complexe, peut affecter des formes très diverses. En particulier, pour les écrans à cristal liquide nématique en hélice couramment utilisés, la recherche d’un contraste maximal conduit à une forme hélicoïdale du domaine de codage, ainsi que nous l’avons vérifié expérimentalement, avec en particulier un déphasage maximum qui peut dépasser 2π .

Pour un corrélateur optique, le choix des SLM servant à afficher les images scène et filtre revêt un caractère primordial, car les domaines de codage de ces SLM déterminent au final les capacités de filtrage au sens du traitement du signal qu’il est possible d’atteindre.

En particulier, le calcul de filtres adaptés à un corrélateur optique donné doit faire intervenir la contrainte du codage. Nous avons défini ainsi les *filtres optiques optimaux*, qui sont solution de ce problème d’optimisation sous contrainte, et qui dépendent de l’architecture de corrélation considérée ainsi que des SLM utilisés.

Dans les chapitres qui suivent, je présente une méthode de résolution du problème d’optimisation des filtres sous contrainte d’implantation optique, qui sera ensuite appliquée à trois architectures de corrélation optique reprogrammables.

Chapitre 6

Filtrage multi-critères

Au chapitre 2, nous avons présenté les filtres de corrélation numérique optimaux. La technique d'optimisation des critères de corrélation qui est utilisée pour leur obtention ne tient pas compte des contraintes imposées par leur réalisation optique. En effet, dans le cas numérique, les filtres sont supposés implicitement éléments de l'espace vectoriel \mathbb{R}^N . Or, nous avons vu au chapitre 5 que le domaine de codage, c'est à dire l'ensemble des couples d'amplitude et de phase, correspondant à chaque modulateur est restreint. De fait, il est nécessaire de disposer d'une méthode mathématique pour obtenir les filtres optimaux pour chaque support optique, puisque ceux-ci seront différents d'un support à l'autre. Dans ce chapitre, je présente une méthode qui généralise la méthode des compromis optimaux à un support optique quelconque, et j'en donne quelques propriétés qui en font tout l'intérêt pratique.

Indépendamment de son application aux corrélateurs optiques, cette méthode permet également de formaliser le principe des filtres à compromis optimal, et ce même pour leur application à des systèmes numériques.

6.1 Définitions

Espace des filtres – Nous avons défini au chapitre 5 le domaine de codage \mathcal{D} d'un SLM. \mathcal{D} est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , qui de plus est contenu dans le disque unité. Désignons par \mathcal{H} l'ensemble de définition des filtres SLM. Si les filtres à inscrire sur le SLM doivent être exprimés dans l'espace objet, nous aurons :

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{h} \mid h_m \in \mathcal{D}, \forall m\} = \mathcal{D}^N \quad (6.1)$$

Et si c'est au contraire la transformée de Fourier $\hat{\mathbf{h}}$ qui doit être inscrite sur le SLM :

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{h} \mid \hat{h}_n \in \mathcal{D}, \forall n\} \quad (6.2)$$

Nous pouvons définir de façon formelle la transformée de Fourier $\hat{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} comme étant l'ensemble des transformées de Fourier $\hat{\mathbf{h}}$ des filtres \mathbf{h} de \mathcal{H} :

$$\hat{\mathcal{H}} \triangleq \{\hat{\mathbf{h}} \mid \mathbf{h} \in \mathcal{H}\} \quad (6.3)$$

Par conséquent, la définition (6.2) peut être écrite $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{D}^N$. Le domaine de codage \mathcal{D} étant relativement quelconque, il n'y a pas en général de relation simple entre \mathcal{H} et $\hat{\mathcal{H}}$. Tous deux sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^N , espace vectoriel normé.

Compacité du domaine de codage – Les différents exemples de domaines de codage vus au chapitre 5 peuvent être classés en deux catégories :

- Codages *connexes*, c'est à dire qu'il est possible de passer continûment d'un point de codage à un autre. Cette propriété topologique est illustrée par la figure 6.1. Les codages dans le disque unité, en amplitude et en phase sont des exemples de codages connexes.
- Codages *discrets*, c'est à dire constitués d'un nombre fini de couples d'amplitude et de phase. C'est le cas de tous les SLM adressés en niveaux de gris. Les codages binaires et ternaires sont des exemples de codages discrets.

En fait, que le domaine de codage \mathcal{D} soit connexe ou discret, il est *compact*¹ [79]. C'est cette propriété de compacité qui est importante pour les résultats qui suivront, et qui permet en particulier de définir des filtres à compromis optimal pour un domaine de codage quelconque, pourvu qu'il soit compact.

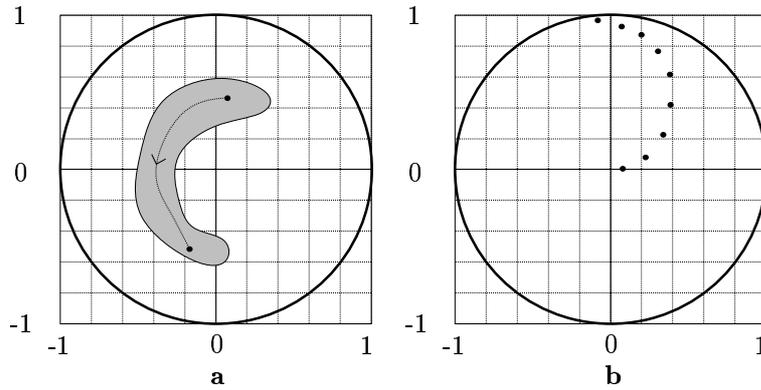


Figure 6.1 : Représentation schématique des domaines de codage. (a) – Codage connexe ; entre deux points il existe au moins un chemin continu. (b) – Codage discret.

Espace des critères – Supposons que nous avons choisi un ensemble de p critères $(E_i(\mathbf{h}))$ pour caractériser l'opération de corrélation avec un filtre \mathbf{h} . Comme nous l'avons défini au chapitre 2, un critère est défini comme une application continue de l'espace des filtres \mathcal{H} dans l'ensemble \mathbb{W}^+ des nombres réels positifs. De plus, du point de vue d'un critère E donné, nous considérerons qu'un filtre sera d'autant meilleur que la valeur $E(\mathbf{h})$ sera petite. La généralisation de la méthode qui va être présentée à des critères pouvant prendre des valeurs négatives ou qu'il s'agit de maximiser se fait en fait sans difficultés particulières. Nous ne prenons les hypothèses de positivité et de minimisation des critères que pour simplifier l'exposé de la méthode.

À chaque filtre \mathbf{h} nous associons ainsi un vecteur à p composantes $(E_i(\mathbf{h}))$ de $(\mathbb{W}^+)^p$ qui représente les qualités du filtre du point de vue des critères choisis.

Application canonique de l'espace des filtres dans l'espace des critères – Soit l'application qui à un filtre associe ses p valeurs des critères :

$$\mathcal{A} \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow (\mathbb{W}^+)^p \\ \mathbf{h} & \mapsto (E_i(\mathbf{h}))_{i \in [1,p]} \end{cases} \quad (6.4)$$

Soit de plus \mathcal{C} l'image de l'ensemble des filtres \mathcal{H} dans l'application \mathcal{A} :

$$\mathcal{C} \triangleq \mathcal{A}(\mathcal{H}) \quad (6.5)$$

¹Dans un espace vectoriel normé, tout ensemble fermé et borné est compact. \mathcal{D} est borné par le cercle unité, et nous admettons qu'il est fermé.

\mathcal{C} est en définitive l'ensemble des valeurs des critères engendré par les filtres réalisables, c'est à dire compatibles avec la contrainte de support. Nous pouvons définir des classes d'équivalence de la façon suivante: deux filtres appartiennent à la même classe d'équivalence si les valeurs des critères pour ces filtres sont les mêmes. Cette notion d'équivalence est bien intuitive, car deux filtres ayant les mêmes propriétés du point de vue du résultat final de la corrélation peuvent être choisis indifféremment. Nous avons les propriétés suivantes :

- L'application \mathcal{A} est continue, car chacun des critères est une fonction continue. Pratiquement, la continuité de \mathcal{A} permet de transférer certaines des propriétés de \mathcal{H} à \mathcal{C} . En particulier, si \mathcal{H} est connexe, \mathcal{C} est également connexe, et si \mathcal{H} est compact, \mathcal{C} est également compact.
- La restriction de $(W^+)^p$ à \mathcal{C} rend \mathcal{A} surjective. Cela signifie qu'à chaque point de \mathcal{C} correspond au moins un filtre dans \mathcal{H} .
- L'application \mathcal{A} peut être rendue bijective en la restreignant de plus aux classes d'équivalence. En d'autres termes, à chaque classe d'équivalence correspond un vecteur de valeurs des critères et inversement. Cette dernière simplification permet de travailler indifféremment dans l'espace des filtres et dans celui des critères.

Ces différentes notions sont résumées sur la figure 6.2.

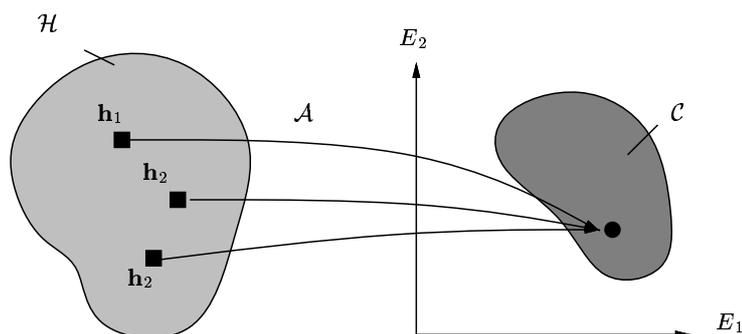


Figure 6.2 : Application \mathcal{A} de l'ensemble des filtres \mathcal{H} dans l'espace des critères. Les filtres \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 et \mathbf{h}_3 conduisent aux mêmes valeurs des critères, ils appartiennent à la même classe d'équivalence.

6.2 Interprétation géométrique des compromis optimaux

La figure 6.3 représente \mathcal{C} , l'ensemble des points représentatifs des filtres dans l'espace des critères, dans le cas de trois critères. Cet ensemble est constitué de toutes les valeurs des critères qui sont compatibles avec un SLM particulier. En pratique, il est cependant hors de question de calculer tous les points de \mathcal{C} , ce qui devrait être fait de façon exhaustive, en testant tous les filtres possibles. Pour des images de résolution raisonnable cela représenterait un temps de calcul prohibitif.

En fait, nous n'avons besoin que des *meilleurs* points de \mathcal{C} . En effet, étant donné un filtre \mathbf{h}_1 , s'il existe un filtre \mathbf{h}_2 tel que *toutes* les valeurs de ses critères soient meilleures, c'est à dire plus petites, alors \mathbf{h}_2 est plus intéressant que \mathbf{h}_1 . La contraposée de cette proposition logique permet de généraliser la définition de l'ensemble \mathcal{S}_{OT} des filtres à compromis optimal[80, 81], ou filtres OT² :

² *Optimal Trade-off*, compromis optimal.

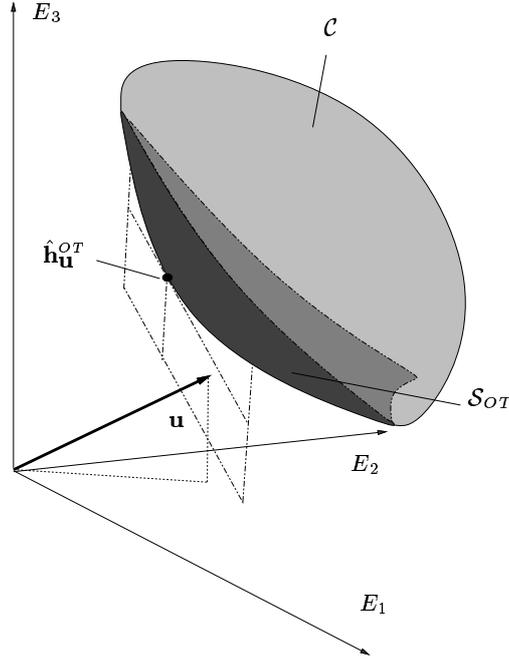


Figure 6.3 : Comparaison des filtres par leurs valeurs de critères, cas de 3 critères. L'ensemble \mathcal{C} est formé de toutes les combinaisons des valeurs de critères générées par les filtres qui satisfont la contrainte de codage SLM. \mathcal{S}_{OT} est l'ensemble des filtres OT, qui sont obtenus en cherchant les plans tangents à \mathcal{C} , référencés par le vecteur normal \mathbf{u} , c'est à dire l'enveloppe convexe de \mathcal{C} .

Définition 1 (Filtres OT) *Un filtre est OT s'il est meilleur que tout autre filtre pour au moins un critère :*

$$\mathbf{h}^{OT} \in \mathcal{S}_{OT} \iff \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}, \exists i \in [1, p], E_i(\mathbf{h}^{OT}) \leq E_i(\mathbf{h}) \quad (6.6)$$

L'ensemble \mathcal{S}_{OT} des filtres OT est donc contenu dans \mathcal{H} . À partir de cette définition, il est possible de montrer la propriété suivante[81, 11], dont la démonstration est donnée en annexe :

Propriété 1 (Prévalence des filtres OT) *Si \mathcal{C} est compact, alors quel que soit le filtre considéré, il existe toujours un filtre OT dont les performances sont meilleures (ou égales) :*

$$\forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}, \exists \mathbf{h}^{OT} \in \mathcal{S}_{OT}, \forall i, E_i(\mathbf{h}^{OT}) \leq E_i(\mathbf{h}) \quad (6.7)$$

Cette propriété est fondamentale, car elle signifie la supériorité de l'approche des compromis optimaux sur toute autre méthode de calcul des filtres, à la lumière des critères choisis bien sûr. Elle en est donc la justification pratique.

Il reste qu'une méthode d'obtention des filtres OT est nécessaire. La propriété suivante donne un moyen de les obtenir :

Propriété 2 (Procédé d'obtention des filtres OT) *Un filtre qui minimise une combinaison linéaire des critères est nécessairement un filtre OT :*

$$\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{OT} = \underset{\mathbf{h} \in \mathcal{H}}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h}) \right\} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = 1 \quad (6.8)$$

La démonstration de cette propriété est donnée en annexe. Nous pouvons en donner une interprétation géométrique simple. En effet, considérons sur la figure 6.3 un vecteur unitaire \mathbf{u} du premier quadrant, de p coordonnées (α_i) . De tous les plans orthogonaux au vecteur \mathbf{u} , celui qui est tangent à \mathcal{C} définit un filtre OT à l'intersection. Quand le vecteur unitaire \mathbf{u} décrit le premier quadrant, nous obtenons ainsi *une partie de l'enveloppe convexe* de \mathcal{H} , en fait celle qui est la plus proche des axes. Cette surface, que nous appellerons OCS³ par généralisation de l'OCC définie au chapitre 2, est l'image par l'application \mathcal{A} de l'ensemble \mathcal{S}_{OT} des filtres OT :

$$\text{OCS} \triangleq \mathcal{A}(\mathcal{S}_{OT}) \quad (6.9)$$

En fait, la propriété 2 n'assure pas que l'on puisse trouver *tous* les filtres OT par minimisation d'une combinaison linéaire des critères. La propriété suivante, dont la démonstration est donnée en annexe, précise dans quelles conditions un filtre OT peut être trouvé ainsi :

Propriété 3 (Existence des filtres OT) *Quand \mathcal{C} est convexe, la réciproque de la propriété 2 est vraie :*

$$\forall \mathbf{h}^{OT}, \exists (\alpha_i), \text{ tel que } \mathbf{h}^{OT} \text{ minimise } \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h})$$

Si \mathcal{C} n'est pas convexe mais seulement connexe, seule la partie convexe de l'OCS est obtenue. Quand \mathcal{C} est discret, c'est à dire quand le domaine de codage \mathcal{D} est lui-même discret, la propriété précédente reste vraie au sens où la convexité est définie pour des surfaces polygonales.

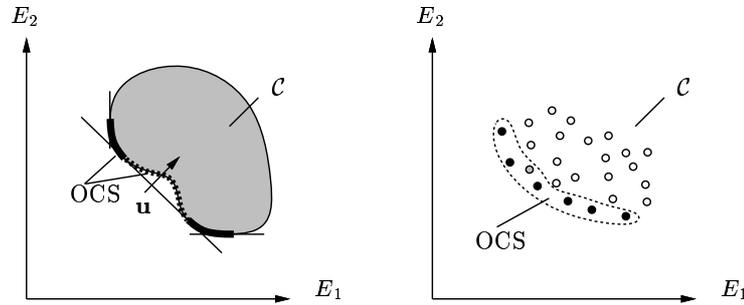


Figure 6.4 : Illustration de la propriété 3. (a) – Quand \mathcal{C} est connexe, la minimisation d'une combinaison linéaire de critères permet d'obtenir la partie convexe de l'OCS. (b) – Extension de la notion de partie convexe de l'OCS quand \mathcal{C} est discret.

La propriété 3 est illustrée par la figure 6.4. Dans le cas où \mathcal{C} est connexe, figure 6.4–(a), si l'OCS n'est pas globalement convexe, quand le vecteur \mathbf{u} balaie le premier quadrant des *sauts* d'une partie convexe à une autre interviennent. Cette situation ne peut se produire que s'il existe plus de deux filtres solutions du problème de minimisation n'appartenant pas à la même classe. Dans le cas discret, schématisé figure 6.4–(b), cette notion peut être généralisée.

6.3 Transformation des critères

Le but de cette section est de montrer que la méthode d'optimisation choisie est en fait très générale et très pratique. En effet, l'optimisation de critères d'expression compliquée, contenant par exemple

³Optimal Characteristics Surface, surface des caractéristiques optimales.

des fractions ou des fonctions non-linéaires, peut être remplacée par l'optimisation de critères plus simples par un *changement de variable* adéquat.

6.3.1 Approche générale

Considérons p critères. Pour un domaine de codage donné \mathcal{D} , nous avons obtenu une surface des caractéristiques optimales (OCS), de dimension $p - 1$ ⁴.

Supposons que les critères soient transformés par un "changement de variable" en un autre système de critères. Que devient l'OCS dans le nouveau repère ? Et plus particulièrement, peut-on calculer les filtres optimaux pour le nouveau système de critères à partir des filtres optimaux pour l'ancien système de critères ?

Soient les p critères $\{E_i, i \in [1, p]\}$, associés à l'énergie :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \triangleq \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h}) \quad (6.10)$$

Nous définissons de plus les coordonnées z_i dans l'espace des critères, où i varie de 1 à p . Un filtre \mathbf{h} est représenté dans cet espace par ses coordonnées $z_i = E_i(\mathbf{h})$. Les filtres optimaux pour l'énergie de l'expression (6.10) définissent une OCS dont l'équation peut être mise sous la forme :

$$H(z_1, \dots, z_p) = H(\mathbf{z}) = 0 \quad (6.11)$$

avec la relation suivante :

$$\alpha_i \propto \frac{\partial H}{\partial z_i}(\mathbf{z}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \propto \nabla H(\mathbf{z}) \quad (6.12)$$

où le symbole \propto signifie que les deux vecteurs sont colinéaires, et ∇ est l'opérateur gradient.

Considérons maintenant les p critères transformés $\{z'_i, i \in [1, p]\}$ dans un changement de variable couplé général :

$$z'_i = g_i(z_1, \dots, z_p), \quad \forall i \in [1, p] \quad \text{ou} \quad \mathbf{z}' = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (6.13)$$

Dans cette expression, \mathbf{g} est une fonction vectorielle. Ces équations définissent un changement de variable si la matrice des dérivées partielles de la transformation est inversible, c'est à dire que son déterminant ou jacobien n'est pas nul :

$$J_{i,j} \triangleq \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right), \quad \forall i, j \in [1, p] \quad (6.14)$$

$$|J| \neq 0 \quad (6.15)$$

L'équation de l'OCS dans le nouveau repère devient simplement :

$$H'(z'_1, \dots, z'_p) = H'(\mathbf{z}') = H(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{z}')) = 0 \quad (6.16)$$

qui permet de représenter graphiquement l'OCS dans le système de critères transformé. À cette OCS transformée sont associés les vecteurs normaux \mathbf{u}' tels que :

$$\mathbf{u}' \propto \nabla H'(\mathbf{z}') \quad (6.17)$$

Nous avons alors la propriété suivante, dont la démonstration est donnée en annexe, qui indique comment se transforment les filtres OT dans la transformation des critères :

⁴La donnée des valeurs de $p - 1$ critères d'un point de l'OCS détermine la valeur du critère restant.

Propriété 4 (Transformation des OCS) *Le filtre OT associé au vecteur directeur \mathbf{u} dans le système de critères de départ est également un filtre OT dans le système de critères transformé, associé au vecteur directeur \mathbf{u}' tel que :*

$$\mathbf{u} = \frac{J^T \mathbf{u}'}{\|J^T \mathbf{u}'\|} \quad \text{et inversement} \quad \mathbf{u}' = \frac{(J^T)^{-1} \mathbf{u}}{\|(J^T)^{-1} \mathbf{u}\|} \quad (6.18)$$

Le passage de \mathbf{u} à \mathbf{u}' est possible chaque fois que :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j J_{j,i}^{-1} \geq 0, \quad \forall i \in [1, p] \quad (6.19)$$

Réciproquement, le passage de \mathbf{u}' à \mathbf{u} est possible chaque fois que :

$$\sum_{j=1}^p \alpha'_j J_{j,i} \geq 0, \quad \forall i \in [1, p] \quad (6.20)$$

Ce résultat montre qu'il est en pratique aisé d'obtenir les filtres optimaux pour p critères d'expressions compliquées, s'il est possible de les exprimer à l'aide de p critères d'expression plus simple, pour lesquels on sera capable de résoudre le problème d'optimisation d'une combinaison linéaire des critères. Cette propriété sera utilisée dans les chapitres 7 et 8 qui suivent.

6.3.2 Exemples d'application

Transformation logarithmique – Il peut être intéressant d'exprimer les valeurs des critères en coordonnées logarithmiques, car leur dynamique de variation peut être importante. Dans ce cas nous aurons :

$$z'_i = \ln(z_i), \quad \forall i \in [1, p]$$

de sorte que la matrice des dérivées partielles est :

$$J_{i,j} = \frac{1}{z_i} \delta_{i-j}$$

dont le jacobien

$$|J| = \left(\prod_{i=1}^p z_i \right)^{-1}$$

ne s'annule jamais. Donc :

$$J_{i,j}^{-1} = z_i \delta(i-j)$$

Et finalement les coordonnées du vecteur normal \mathbf{u}' sont :

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 z_i^2}}$$

Résistance au bruit, discrimination et efficacité – Les critères, introduits au chapitre 1, utilisés pour mesurer la résistance au bruit et la discrimination des filtres, respectivement SNR et PCE sont des quotients de formes quadratiques :

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{\eta}{\text{MSE}} \\ \text{PCE} &= \frac{\eta}{\text{PCE}} \end{aligned}$$

Plutôt que de chercher les filtres OT pour les trois critères $(\text{SNR}^{-1}, \text{PCE}^{-1}, \eta^{-1})^5$, il est plus facile de chercher les filtres OT pour les trois critères $(\text{MSE}, \text{CPE}, |c_0|^{-1})$. Si de plus nous désirons tracer les logarithmes des critères, la transformation s'écrit :

$$\begin{aligned}\log \text{SNR}^{-1} &= 2 \log |c_0|^{-1} + \log \text{MSE} \\ \log \text{PCE}^{-1} &= 2 \log |c_0|^{-1} + \log \text{CPE} \\ \log \eta^{-1} &= 2 \log |c_0|^{-1}\end{aligned}$$

Soit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} \log \text{SNR}^{-1} \\ \log \text{PCE}^{-1} \\ \log \eta^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \log \text{MSE} \\ \log \text{CPE} \\ \log |c_0|^{-1} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas la matrice des dérivées partielles est constante, et son Jacobien ne s'annule jamais. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \alpha_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_3/2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2} \\ \alpha'_2 &= \alpha_2 / \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_3/2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2} \\ \alpha'_3 &= (\alpha_3/2 - \alpha_1 - \alpha_2) / \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_3/2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2}\end{aligned}$$

Nous voyons ici qu'il faut restreindre ces solutions par la condition (6.19), qui s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\alpha_3}{2} \geq \alpha_1 + \alpha_2$$

c'est à dire que certains filtres OT pour $(\text{MSE}, \text{CPE}, |c_0|^{-1})$ ne le sont plus pour $(\text{SNR}^{-1}, \text{PCE}^{-1}, \eta^{-1})$. Cette restriction n'est cependant pas gênante, car le vecteur unitaire \mathbf{u}' décrit néanmoins tout le premier quadrant. En résumé, l'ensemble des filtres à compromis optimal pour les critères SNR, PCE et η est inclus dans l'ensemble des filtres à compromis optimal pour les critères MSE, CPE et $|c_0|$.

6.4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode qui permet à la fois de formaliser le principe des filtres numériques à compromis optimal entre critères, et de le généraliser à un domaine de codage quelconque. Pour ces filtres contraints à compromis optimal, nous avons montré quatre propriétés qui font l'intérêt de la méthode :

1. *Prévalence des filtres OT*: quel que soit un filtre donné, il est toujours possible de trouver un filtre OT de performances supérieures.
2. *Procédé d'obtention des filtres OT*: la minimisation d'une combinaison linéaire des critères permet d'obtenir un filtre OT.
3. *Existence des filtres OT*: nous avons étudié des conditions pour que la réciproque de la propriété précédente soit vraie.
4. *Transformation des OCS*: nous avons montré comment se transforment les filtres OT dans une transformation des critères. Cette dernière propriété permet de simplifier la procédure d'obtention des solutions, quand les critères considérés s'expriment à l'aide des critères plus simples.

Dans les deux chapitres qui suivent, nous appliquons notre méthode d'optimisation multi-critères aux architectures de corrélation.

⁵Nous considérons les inverses de ces critères afin d'avoir un problème de minimisation et non de maximisation.

6.A Annexe : démonstrations des propriétés

6.A.1 Prévalence des filtres OT

Si \mathcal{C} est compact, alors quel que soit le filtre considéré, il existe toujours un filtre OT dont les performances sont meilleures (ou identiques) :

$$\forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}, \exists \mathbf{h}^{OT} \in \mathcal{S}_{OT}, \forall i, E_i(\mathbf{h}^{OT}) \leq E_i(\mathbf{h})$$

Rappelons que \mathcal{C} est l'image de \mathcal{H} par l'application continue \mathcal{A} qui permet de passer des filtres à leur représentation en critères :

$$\mathcal{A} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} \rightarrow (\mathbb{W}^+)^p \\ \mathbf{h} \mapsto (E_i(\mathbf{h}))_{i \in [1,p]} \end{array} \right.$$

Soit un filtre particulier \mathbf{h} , et son point représentatif $E(\mathbf{h})$. Définissons le parallélépipède rectangle (de dimension p) $\square(\mathbf{h})$ par :

$$\square(\mathbf{h}) = \{E \in (\mathbb{W}^+)^p ; \forall i \in [1,p], 0 \leq E_i \leq E_i(\mathbf{h})\}$$

$\square(\mathbf{h})$ est fermé et borné, donc compact. Soit $I(\mathbf{h}) = \square(\mathbf{h}) \cap \mathcal{C}$. $I(\mathbf{h})$ est non-vidé puisqu'il contient au moins $E(\mathbf{h})$. De plus, $I(\mathbf{h})$ est compact comme intersection de deux compacts. $I(\mathbf{h})$ contient les points représentatifs de tous les filtres dont les performances sont supérieures ou égales à celles de \mathbf{h} .

Définissons le filtre \mathbf{h}^0 par :

$$\mathbf{h}^0 = \mathcal{A}^{-1} \left(\min_{E \in I(\mathbf{h})} \{E_1\} \right)$$

Cette équation signifie qu'il faut choisir le point E de $I(\mathbf{h})$ dont la première coordonnée est la plus petite ; ce point existe toujours puisque $I(\mathbf{h})$ est compact. Son antécédent \mathbf{h}^0 existe toujours, mais n'est pas nécessairement unique, puisque \mathcal{E} est une surjection de \mathcal{D}^N dans $I(\mathbf{h})$, mais il suffit de choisir un tel filtre.

Remarquons que $\mathbf{h}^0 \in \mathcal{A}^{-1}(I(\mathbf{h}))$, ce qui implique que $\forall i, E_i(\mathbf{h}^0) \leq E_i(\mathbf{h})$. Pour démontrer la propriété, il suffit donc de vérifier que \mathbf{h}^0 est un filtre OT.

Nous pouvons écrire que $\mathcal{C} = I(\mathbf{h}) \cup (\mathcal{C}/I(\mathbf{h}))$ avec $I(\mathbf{h}) \cap (\mathcal{C}/I(\mathbf{h})) = \emptyset$, c'est à dire que \mathcal{C} est la réunion disjointe de $I(\mathbf{h})$ et de $\mathcal{C}/I(\mathbf{h})$. La notation $(\mathcal{C}/I(\mathbf{h}))$ représente l'ensemble des points de \mathcal{C} qui ne sont pas dans $I(\mathbf{h})$. Quel que soit le filtre dont le point représentatif est dans $I(\mathbf{h})$, le premier critère de \mathbf{h}^0 est meilleur. De plus, par définition de $\square(\mathbf{h})$, quel que soit le filtre dont le point représentatif est dans $\mathcal{C}/I(\mathbf{h})$, au moins un des ses critères est strictement supérieur à celui de \mathbf{h} , donc à celui de \mathbf{h}^0 . \mathbf{h}^0 est donc un filtre OT.

6.A.2 Procédé d'obtention des filtres OT

Un filtre qui minimise une combinaison linéaire des critères est nécessairement un filtre OT :

$$\mathbf{h}_u^{OT} = \underset{\mathbf{h} \in \mathcal{D}^N}{\text{Argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h}) \right\} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = 1$$

Considérons un filtre \mathbf{h}^0 qui minimise $g(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h})$ dans \mathcal{D}^N , mais qui n'est pas un filtre OT. Alors par négation de la définition (6.6), il existe un filtre $\hat{\mathbf{h}}$ élément de \mathcal{D}^N tel que $\forall i, E_i(\hat{\mathbf{h}}) > E_i(\mathbf{h}^0)$. Mais alors $g(\hat{\mathbf{h}}) < g(\mathbf{h}^0)$, ce qui contredit la définition de \mathbf{h}^0 . Donc $\hat{\mathbf{h}}^0$ est un filtre OT.

6.A.3 Existence des filtres OT

Quand \mathcal{C} est convexe, la réciproque de la propriété 2 est vraie :

$$\forall \mathbf{h}^{OT}, \exists \mathbf{u} = (\alpha_i), \text{ tel que } \mathbf{h}^{OT} \text{ minimise } g(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i E_i(\mathbf{h})$$

Si \mathcal{C} n'est pas convexe mais seulement connexe, seule la partie convexe de l'OCS est obtenue. Quand \mathcal{C} est discret, c'est à dire quand le domaine de codage \mathcal{D} est lui-même discret, la propriété précédente reste vraie au sens où la convexité est définie pour des surfaces polygonales.

Raisonnons sur deux critères pour simplifier la présentation de la démonstration. Elle se généralise simplement à un nombre de critères plus grand. Pour chaque filtre OT \mathbf{h}^{OT} , définissons les trois ensembles disjoints :

$$\begin{aligned} S_d &\triangleq \{E(\mathbf{h}) \in \mathcal{C}, E_1(\mathbf{h}) < E_1(\mathbf{h}^{OT}) \text{ et } E_2(\mathbf{h}) > E_2(\mathbf{h}^{OT})\} \\ S_g &\triangleq \{E(\mathbf{h}) \in \mathcal{C}, E_1(\mathbf{h}) > E_1(\mathbf{h}^{OT}) \text{ et } E_2(\mathbf{h}) < E_2(\mathbf{h}^{OT})\} \\ S_c &\triangleq \{E(\mathbf{h}) \in \mathcal{C}, E_1(\mathbf{h}) \geq E_1(\mathbf{h}^{OT}) \text{ et } E_2(\mathbf{h}) \geq E_2(\mathbf{h}^{OT})\} \end{aligned}$$

Par définition des filtres OT, il ne peut pas exister de filtre dont les deux critères soient meilleurs que ceux de \mathbf{h}^{OT} , et donc $\mathcal{C} = S_d \cup S_g \cup S_c$. Cette union est disjointe.

Construisons \mathbf{u} tel que \mathbf{h}^{OT} minimise $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$. Ce vecteur doit vérifier :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{h}^d \in \mathcal{A}^{-1}(S_d) \quad , \quad \alpha_1 E_1(\mathbf{h}^d) + \alpha_2 E_2(\mathbf{h}^d) &\geq \alpha_1 E_1(\mathbf{h}^{OT}) + \alpha_2 E_2(\mathbf{h}^{OT}) \\ \forall \mathbf{h}^g \in \mathcal{A}^{-1}(S_g) \quad , \quad \alpha_1 E_1(\mathbf{h}^g) + \alpha_2 E_2(\mathbf{h}^g) &\geq \alpha_1 E_1(\mathbf{h}^{OT}) + \alpha_2 E_2(\mathbf{h}^{OT}) \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{A}^{-1}(S_c)$ cette propriété est toujours vérifiée. Nous avons donc :

$$\forall \mathbf{h}^d \in \mathcal{A}^{-1}(S_d), \forall \mathbf{h}^g \in \mathcal{A}^{-1}(S_g), \quad \left| \frac{E_2(\mathbf{h}^d) - E_2(\mathbf{h}^{OT})}{E_1(\mathbf{h}^d) - E_1(\mathbf{h}^{OT})} \right| \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq \left| \frac{E_2(\mathbf{h}^g) - E_2(\mathbf{h}^{OT})}{E_1(\mathbf{h}^g) - E_1(\mathbf{h}^{OT})} \right|$$

Donc (cette équation a un sens sous la seule hypothèse que \mathcal{C} est compact⁶) :

$$\max_{\mathbf{h}^d \in \mathcal{A}^{-1}(S_d)} \left| \frac{E_2(\mathbf{h}^d) - E_2(\mathbf{h}^{OT})}{E_1(\mathbf{h}^d) - E_1(\mathbf{h}^{OT})} \right| \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq \min_{\mathbf{h}^g \in \mathcal{A}^{-1}(S_g)} \left| \frac{E_2(\mathbf{h}^g) - E_2(\mathbf{h}^{OT})}{E_1(\mathbf{h}^g) - E_1(\mathbf{h}^{OT})} \right| \quad (6.21)$$

En fait, quand \mathcal{C} est connexe, les deux termes qui encadrent α_1/α_2 sont les dérivées à droite D^d et à gauche D^g sur l'OCS au point $E(\mathbf{h}^{OT})$. La condition $D^d \leq D^g$ signifie que \mathcal{C} est convexe. Quand ces deux dérivées sont égales, \mathcal{C} est localement strictement convexe, et \mathbf{u} est unique. Quand $D^d < D^g$, \mathcal{C} est localement convexe, et il y a une infinité de solutions pour \mathbf{u} . Quand $D^d > D^g$, \mathcal{C} est localement concave, et il n'y a pas de solution.

Nous voyons donc que partout où l'OCS est localement convexe, nous pouvons trouver au moins un vecteur normé \mathbf{u} tel que \mathbf{h}^{OT} minimise $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$. Au total nous obtenons une partie de l'enveloppe convexe de l'OCS, qui est d'un seul tenant si l'OCS est elle-même globalement convexe.

Quand \mathcal{C} est discret, donc compact car de plus borné, l'équation (6.21) reste valable. Elle définit une notion de convexité pour des surfaces polygonales. Les conclusions précédentes restent valables dans ce sens.

⁶La condition de compacité est suffisante pour pouvoir définir le min et le max d'un ensemble.

6.A.4 Transformation des OCS

Le filtre OT associé au vecteur directeur \mathbf{u} dans le système de critères de départ est également un filtre OT dans le système de critères transformé, associé au vecteur directeur \mathbf{u}' tel que :

$$\mathbf{u} = \frac{J^T \mathbf{u}'}{\|J^T \mathbf{u}'\|} \quad \text{et inversement} \quad \mathbf{u}' = \frac{(J^T)^{-1} \mathbf{u}}{\|(J^T)^{-1} \mathbf{u}\|}$$

Le passage de \mathbf{u} à \mathbf{u}' est possible chaque fois que :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j J_{j,i}^{-1} \geq 0, \quad \forall i \in [1, p]$$

Réciproquement, le passage de \mathbf{u}' à \mathbf{u} est possible chaque fois que :

$$\sum_{j=1}^p \alpha'_j J_{j,i} \geq 0, \quad \forall i \in [1, p]$$

De l'équation (6.16) nous pouvons déduire :

$$dH'(\mathbf{z}') = dH(\mathbf{z}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{z}' = \mathbf{g}(\mathbf{z})$$

Nous pouvons développer le premier membre de cette égalité de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dH' &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial H'}{\partial z_i} dz_i \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial H'}{\partial z'_j} \frac{\partial z'_j}{\partial z_i} dz_i \\ &\propto \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha'_j \frac{\partial g_j}{\partial z_i} dz_i \\ &\propto \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha'_j J_{j,i} dz_i \end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha'_j J_{j,i} dz_i \propto \sum_{i=1}^p \alpha_i dz_i$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la variation $d\mathbf{z}$, donc :

$$\alpha_i \propto \sum_{j=1}^p \alpha'_j J_{j,i}$$

En normalisant cette dernière relation, nous obtenons donc :

$$\mathbf{u} = \frac{J^T \mathbf{u}'}{\|J^T \mathbf{u}'\|} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}' = \frac{(J^T)^{-1} \mathbf{u}}{\|(J^T)^{-1} \mathbf{u}\|}$$

Il reste à s'assurer que les coordonnées du vecteur unitaire transformé sont toutes positives, soit par exemple dans le cas du passage de \mathbf{u} à \mathbf{u}' :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j J_{j,i}^{-1} \geq 0, \quad \forall i \in [1, n] \quad (6.22)$$

Chapitre 7

Filtrage dans l'espace de Fourier

J'ai présenté au chapitre précédent une généralisation de la méthode des compromis optimaux entre critères à la conception de filtres de corrélation adaptés à un support optique. Dans ce chapitre, j'applique cette méthode au cas du corrélateur CPS utilisant le principe de la synthèse de pupille cohérente. Je présente un algorithme permettant d'obtenir les filtres à compromis optimal pour un domaine de codage quelconque. Je montre que la comparaison des surfaces caractéristiques optimales (OCS) correspondant à chaque SLM permet d'établir une hiérarchie des SLM, suivant les performances qu'ils permettent d'atteindre avec l'architecture CPS.

7.1 Études antérieures

Nous rappelons sur la figure 7.1 le schéma de principe du corrélateur CPS, présenté au chapitre 4. C'est le complexe conjugué de la transformée de Fourier du filtre qui doit être représenté sur le second SLM, de sorte que dans ce cas la contrainte de codage pour le filtre s'écrit :

$$\hat{h}_n^* \in \mathcal{D} \quad (7.1)$$

où \mathcal{D} est le domaine de codage du modulateur.

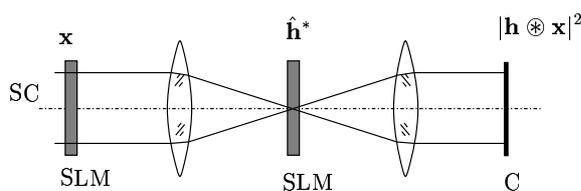


Figure 7.1 : Principe de la corrélation par synthèse de pupille. C : caméra ; SC : source cohérente.

À notre connaissance, au moins deux approches différentes de celle que nous allons présenter ont été proposées pour la conception de filtres de corrélation contraints dans le domaine de Fourier au domaine de codage d'un SLM.

Juday [82] a proposé en 1989 d'optimiser une *métrique* construite dans le but d'obtenir certaines propriétés du filtre. Le terme métrique recouvre une distance du filtre contraint à un filtre numérique optimal [83]. À partir de ce principe, des algorithmes ont été proposés, et des exemples de filtres contraints ainsi obtenus ont été présentés [84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 83]. Cette méthode se trouve de fait généralisée par notre méthode multi-critères, et les filtres obtenus par la méthode de Juday sont par conséquent des cas particuliers de ceux obtenus avec la notre. La possibilité que nous possédons d'appliquer une transformation des critères préalablement à l'optimisation nous permet de simplifier

nettement les développements mathématiques, et rend l'implantation des algorithmes obtenus plus efficace.

Mait *et al.* [92] ont proposé en 1993 d'approximer un filtre numérique optimal donné par un filtre contraint à un domaine de codage en minimisant la distance quadratique entre ces deux images. L'avantage de cette minimisation est qu'elle est en général relativement simple à effectuer à l'aide d'un algorithme itératif classique. Mais en contrepartie, rien ne garantit l'optimalité du filtre contraint résultant, puisque les critères qui avaient servis pour le calcul du filtre numérique optimal de départ sont ensuite oubliés pour l'imposition de la contrainte. En fait, cette méthode provient du domaine des hologrammes synthétiques (CGH¹) où il est connu qu'il est possible d'obtenir une réponse percussive de filtre quelconque avec un domaine de codage quelconque pourvu que l'on dispose d'une résolution arbitraire dans le plan de Fourier, où est défini l'hologramme synthétique [93]. Or, pour l'architecture de corrélation par synthèse de pupille que nous considérons ici, la résolution dans le plan de Fourier doit être la même que dans le plan de l'image scène ainsi que l'imposent les conditions d'échantillonnage que nous démontrons dans l'annexe A à la fin de ce mémoire.

Notre méthode d'optimisation multi-critères décrite au chapitre précédent sera ici appliquée dans le cas de trois critères, le SNR ou résistance au bruit, le PBCE ou capacité de discrimination du fond, et l'efficacité optique η . Nous avons montré au chapitre 3 que le principe du maximum *a posteriori* appliqué à notre modèle de l'image scène conduit à effectuer la corrélation de la scène avec un filtre (numérique) à compromis optimal entre les critères SNR et PBCE, ce qui justifie le choix de ces deux critères. Nous considérons de plus l'efficacité optique de la corrélation, car il ne suffit pas que celle-ci soit performante au sens du traitement du signal, il faut également que le résultat soit détectable optiquement.

Pour ces trois critères, les filtres à compromis optimal ont déjà été obtenus pour le codage dans le disque unité complet [80], et pour les codages binaire de phase et ternaire [24]. Les algorithmes correspondants sont particularisés pour ces domaines de codage. Dans la section suivante, nous généralisons ces approches en proposant un algorithme valable quelle que soit la forme du domaine de codage.

7.2 Algorithme

Nous donnons dans cette section le seul principe de l'algorithme, tous les développements mathématiques sont en annexe. Nous voulons obtenir les filtres à compromis optimal entre les critères SNR, PBCE et η . Comme nous l'avons montré au chapitre 6, nous pouvons effectuer un *changement de critères* pour nous ramener à un problème d'optimisation plus simple. La transformation que nous allons utiliser permet de passer des critères (SNR, PBCE, η) aux critères (MSE, BCPE, $|c_0|$) dont les expressions sont rappelées dans le tableau 7.1.

La fonction énergie que nous devons minimiser est la suivante :

$$E(\mathbf{h}) = \alpha \text{MSE}(\mathbf{h}) + \beta \text{BCPE}(\mathbf{h}) - 2\gamma |c_0(\mathbf{h})|, \quad (7.2)$$

sous contrainte que $\hat{h}_n^* \in \mathcal{D}$. $(\alpha, \beta, 2\gamma)$ sont les trois coordonnées positives d'un vecteur unitaire \mathbf{u} du premier quadrant, ce qui implique que $\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma^2 = 1$. Le signe moins devant $|c_0|$ remplace simplement une maximisation par une minimisation, et le facteur 2 est introduit pour simplifier les expressions qui vont suivre mais n'a pas de sens particulier. L'expression (7.2) peut être écrite dans l'espace de Fourier :

$$E(\mathbf{h}) = \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n |\hat{h}_n|^2 - 2\gamma \left| \sum_n \hat{h}_n^* \hat{r}_n \right|. \quad (7.3)$$

où la matrice diagonale $\hat{B}_{\mathbf{u}}$ est définie par $\hat{B}_{\mathbf{u}} = \alpha \hat{S} + \beta \hat{D}_b$. Comme il est montré en annexe, la minimisation de cette fonction énergie sans considérer la contrainte de codage conduit au filtre numérique

¹ Computer Generated Holography.

$\text{SNR}(\mathbf{h}) = \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{MSE}(\mathbf{h})}$	$\text{PBCE}(\mathbf{h}) = \frac{\eta(\mathbf{h})}{\text{BCPE}(\mathbf{h})}$	$\eta(\mathbf{h}) = c_0(\mathbf{h}) ^2$
$\text{MSE}(\mathbf{h}) = \sum_n \hat{S}_n \hat{h}_n ^2$	$\text{BCPE}(\mathbf{h}) = \sum_n [\hat{D}_b]_n \hat{h}_n ^2$	$ c_0(\mathbf{h}) = \left \sum_n \hat{h}_n^* \hat{r}_n \right $

Tableau 7.1 : Rappel des expressions de différents critères. \hat{S} est la densité spectrale du bruit, et \hat{D}_b la densité spectrale du fond.

à compromis optimal entre les critères SNR et PCE :

$$\boxed{(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n = \gamma \frac{\hat{r}_n}{[\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n}} \quad (7.4)$$

Sur la figure 7.2–(b) est représenté un histogramme complexe² typique d'un tel filtre OT $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0$, calculé à partir de la référence de la figure 7.2–(a). Chaque point de cet histogramme correspond à une valeur complexe $(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n$. Dans cette représentation, γ apparaît comme un paramètre d'échelle, qui mesure la saturation du filtre, dans le sens où il détermine le nombre de points de l'histogramme qui sont en dehors du disque unité. $\hat{r}_k^*/[\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n$ détermine pour sa part l'allure de l'histogramme. On peut voir que certains points de l'histogramme peuvent être très loin du domaine de codage, illustré sur l'exemple de la figure 7.2–(b) par une spirale, qui correspond au cas des SLM à cristal liquide nématique en hélice.

Comme il est démontré en annexe, la minimisation de la fonction énergie de l'équation (7.3) est équivalente à la minimisation de la fonction énergie modifiée :

$$\boxed{E_{\varphi}(\mathbf{h}) = \sum_n \left| \hat{h}_n^* - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n^* \exp(i\varphi) \right|^2}, \quad (7.5)$$

avec $\hat{h}_n^* \in \mathcal{D}$, et où $\varphi \in [0, 2\pi]$ est un paramètre de rotation à optimiser. Cette expression est en fait la distance euclidienne entre les filtres $\hat{\mathbf{h}}$ et $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0 \exp(-i\varphi)$. S'il était représenté sur la figure 7.2–(b), l'histogramme complexe du filtre $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0 \exp(-i\varphi)$ serait simplement celui de $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0$ tourné de l'angle $(-\varphi)$. Pour une valeur de l'angle φ fixée, la somme dans l'équation (7.5) est minimisée si tous ses termes sont minimisés. Cela est obtenu quand le point \hat{h}_n^* est la projection euclidienne du point $(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n^* \exp(i\varphi)$ sur le domaine de codage \mathcal{D} , pour chaque fréquence spatiale n . Nous écrivons ce filtre projeté :

$$\boxed{(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi})^* = \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \left[(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0)^* \exp(i\varphi) \right]}, \quad (7.6)$$

où $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\cdot]$ représente l'opérateur de projection sur le domaine de codage. Définissons la fonction :

$$f_{\mathbf{u}}(\varphi) = \text{E} \left(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi} \right) = \text{E} \left(\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \left[(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0)^* \exp(i\varphi) \right]^* \right), \quad (7.7)$$

²L'histogramme (complexe) d'une image à valeurs complexes est défini de façon similaire à celui d'une image à valeurs réelles. Chaque point de l'histogramme représente le nombre des pixels de l'image ayant une valeur spécifiée. La fonction obtenue étant à deux variables, la partie réelle et la partie imaginaire des valeurs, elle est représentée dans le plan complexe, le nombre de pixels étant codé en niveaux de gris.

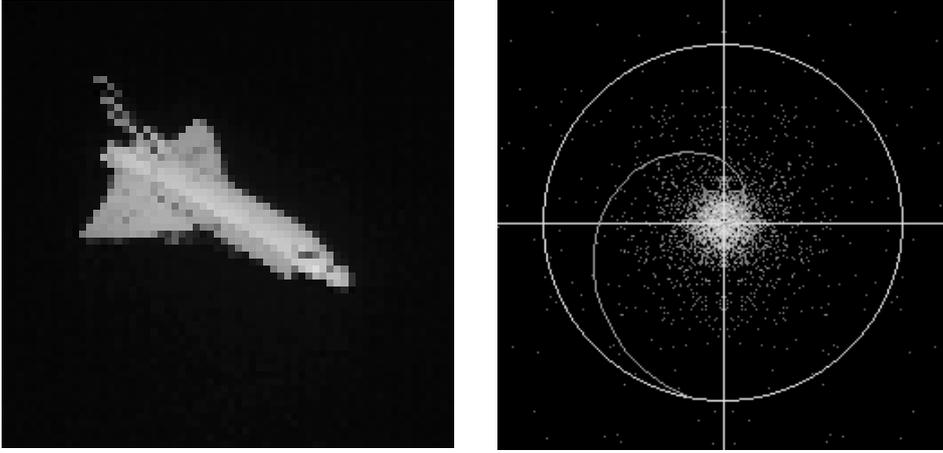


Figure 7.2 : (a) – Image de référence de taille 64×64 utilisée pour les simulations numériques. (b) – Un histogramme complexe typique d'un filtre OT numérique généré à partir de la référence. Chaque point de l'historgramme doit être projeté sur le domaine de codage, représenté ici par une spirale. Pour trouver l'optimum global, le domaine de codage subit une rotation dans le plan complexe (voir texte).

obtenue en injectant $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi}$ dans (7.3). Une fonction typique $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$ est représentée sur la figure 7.3, qui a été obtenue en considérant le codage en spirale et l'image de référence de la figure 7.2. Ainsi qu'il est montré en annexe, une fois obtenu, l'angle φ_o qui minimise cette fonction donne le filtre SLM optimal qui minimise l'énergie $E(\hat{\mathbf{h}})$ dans \mathcal{D}^N , en remplaçant simplement φ par φ_o dans l'équation (7.6). Ainsi, le problème d'optimisation de l'équation (7.2), une recherche parmi tous les filtres qui sont compatibles avec la contrainte de codage, a été remplacé par une simple recherche sur un paramètre réel continu φ . Il est montré en annexe que $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$ est toujours une fonction continue, quelle que soit la forme du domaine de codage \mathcal{D} . Cette propriété permet d'utiliser des méthodes très simples pour la détermination de l'angle optimal.

Comme dans la méthode de Mait [92], nous obtenons qu'il faut minimiser la distance entre un filtre numérique optimal et son approximation contrainte, mais la différence réside en ce qu'il faut opérer une recherche sur un paramètre supplémentaire, l'angle de rotation φ . La détermination de la valeur optimale de cet angle conduit directement au filtre optimal contraint.

Nous pouvons maintenant donner un algorithme simple pour obtenir l'OCS pour un domaine de codage \mathcal{D} quelconque.

- Pour un vecteur directeur unitaire \mathbf{u} donné :
 - Calculer le filtre OT numérique $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^0$ par l'expression (7.4).
 - Pour chaque valeur de l'angle φ :
 - * calculer le filtre projeté $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi}$ de l'expression (7.6),
 - * calculer la valeur correspondante de l'énergie $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$ de l'expression (7.7).
 - Sélectionner l'angle φ_o , qui minimise $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$. Le filtre SLM optimal est alors le filtre projeté $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi_o}$.
 - Calculer les valeurs des critères SNR, PCE et η_H pour le filtre $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{u}}^{\varphi_o}$. Un point de l'OCS est ainsi obtenu.
- Répéter les étapes précédentes pour un autre vecteur directeur unitaire \mathbf{u} .

De façon pratique, pour les résultats de simulation numérique qui sont exposées dans la section

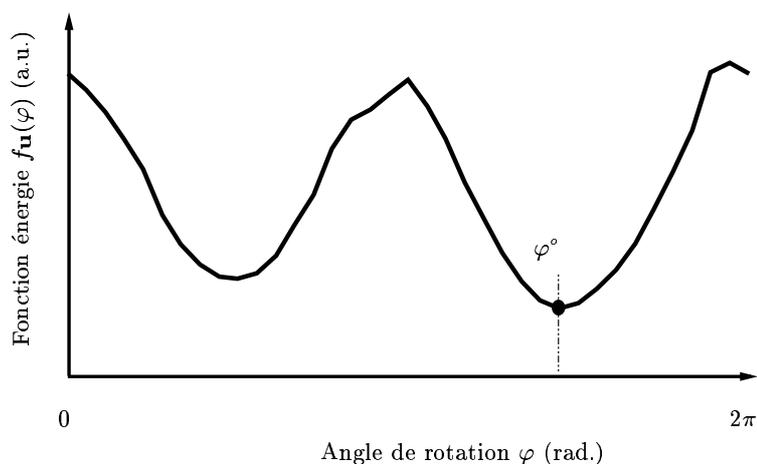


Figure 7.3 : Une fonction typique $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$, obtenue pour le codage en spirale et l'image de référence de la figure 7.2, qui mesure la qualité des filtres projetés en fonction de l'angle de rotation φ . L'angle optimal φ^o donne le filtre SLM à compromis optimal.

suivante, nous avons calculé $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$ tous les 10° , puis gardé le minimum. Pour les domaines de codage considérés, cet échantillonnage lâche permet toujours de s'approcher suffisamment près du minimum global. L'étape de l'algorithme la plus gourmande en temps de calcul est la projection, qui dépend directement du nombre de points utilisé pour définir le domaine de codage.

Nous avons également développé un algorithme itératif, toujours convergent, qui permet d'obtenir la valeur exacte de l'angle optimal. Son principe et la démonstration de sa convergence sont donnés en annexe.

7.3 Résultats

Dans cette section, les résultats précédents sont utilisés pour caractériser des domaines de codage typiques, à travers les performances de leurs filtres à compromis optimal associés, pour les critères SNR, PCE and η . Nous considérons sept domaines de codages, qui ont été présentés au chapitre 5, figure 5.1. Il s'agit des codages dans le disque unité, de phase pure, d'amplitude pure, en spirale, binaire de phase et ternaire. Pour le codage en spirale, correspondant aux SLM à cristal liquide nématique en hélice, deux déphasages extrêmes sont considérés, 180° et 360° . Ces deux codages sont quantifiés sur 32 niveaux le long de la spirale. Pour chacun des sept codages, l'OCS, ou surface des caractéristiques optimales, a été générée avec l'image de référence de la figure 7.2-a. Le codage réalisé par le modulateur qui reçoit l'image scène est supposé en amplitude pure.

Comme tous les domaines de codage pour le filtre que nous considérons sont des sous-ensembles du disque unité du plan complexe, il est clair que ce dernier domaine de codage doit permettre d'obtenir les meilleures performances. En conséquence, nous normaliserons les trois critères par les valeurs maximales qu'ils atteignent pour le codage dans le disque unité, et nous les exprimerons en décibels, c'est à dire $10 \log(E/E_{max})$ pour le critère E .

Nous avons vu au chapitre 2 que l'efficacité optique η est maximisée par le filtre de phase pure $\hat{h}_n = \hat{r}_n^*/|\hat{r}_n|$, ce qui conduit à $(\eta_H)_{max} = (\sum_n |\hat{r}_n|)^2$. Ce filtre est obtenu avec le codage dans le disque unité quand le paramètre γ tend vers $1/2$, c'est à dire quand le filtre est complètement saturé. Le filtre de phase pure est obtenu également de façon directe avec le codage de phase pure.

De façon similaire, le rapport signal à bruit (SNR) est maximisé par le filtre adapté $\hat{h}_n = \gamma \hat{r}_n/\hat{S}_n$, ce qui donne $(SNR)_{max} = \sum_n |\hat{r}_n|^2/\hat{S}_n$. Le filtre adapté est obtenu avec le codage dans le disque unité

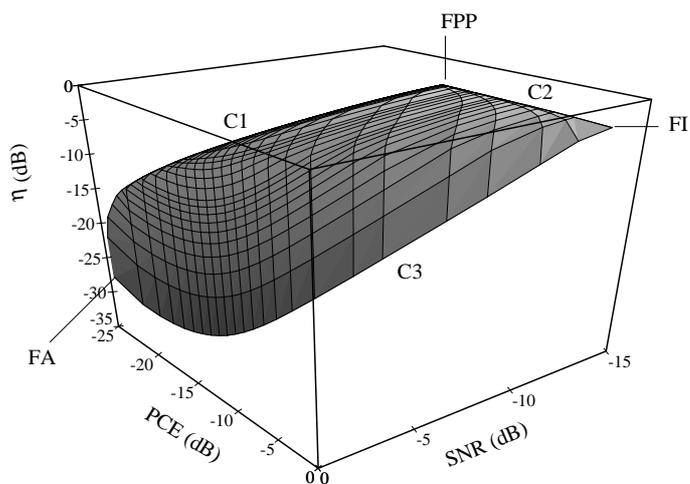


Figure 7.4 : Surface des caractéristiques optimales (OCS) pour le codage dans le disque unité. Les courbes des bords $C1$, $C2$ and $C3$ représentent respectivement les compromis optimaux entre les critères SNR et η , PCE et η , et SNR et PCE. FA : filtre adapté, FI : filtre inverse, FPP : filtre de phase pure.

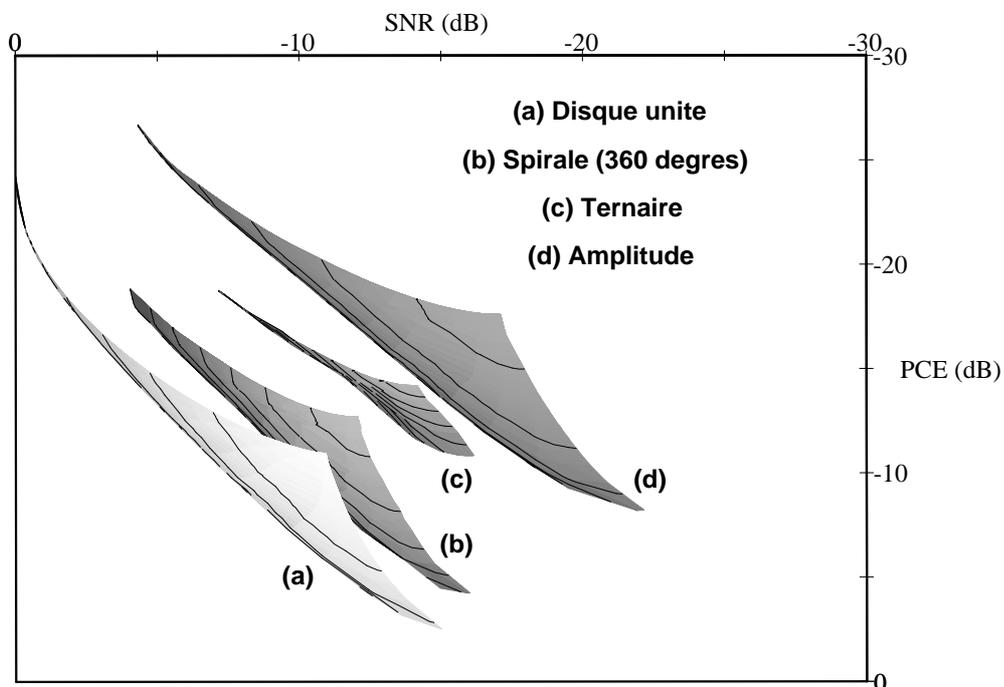


Figure 7.5 : Vue de dessus des surfaces des caractéristiques optimales (OCS) pour différents domaines de codage. L'efficacité optimale croît avec les niveaux de gris.

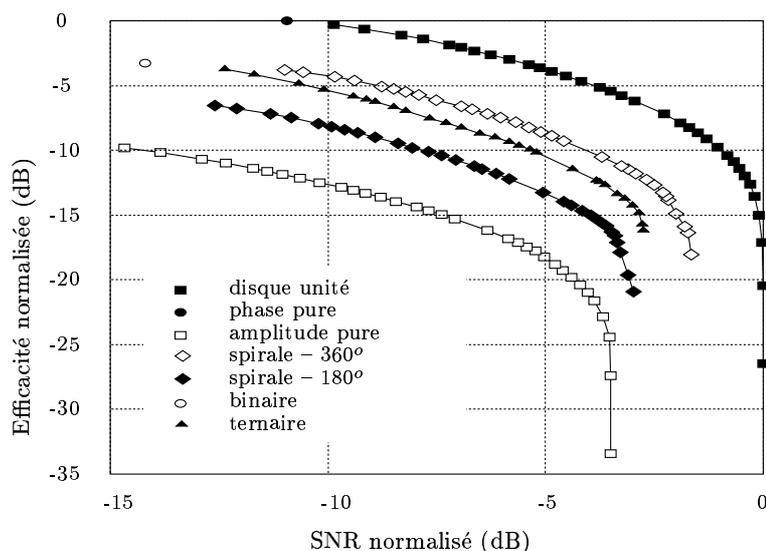


Figure 7.6 : Compromis optimaux entre les critères SNR and η , pour différents domaines de codage.

pour $\beta = 0$, et quand γ est suffisamment petit pour éviter toute saturation.

Enfin, la finesse du pic de corrélation (PCE) est maximisée par le filtre inverse $\hat{h}_n = \gamma \hat{r}_n / |\hat{r}_n|^2$, ce qui donne $(PCE)_{max} = N$. Le filtre inverse est obtenu avec le codage dans le disque unité pour $\alpha = 0$, et quand γ est suffisamment petit pour éviter toute saturation.

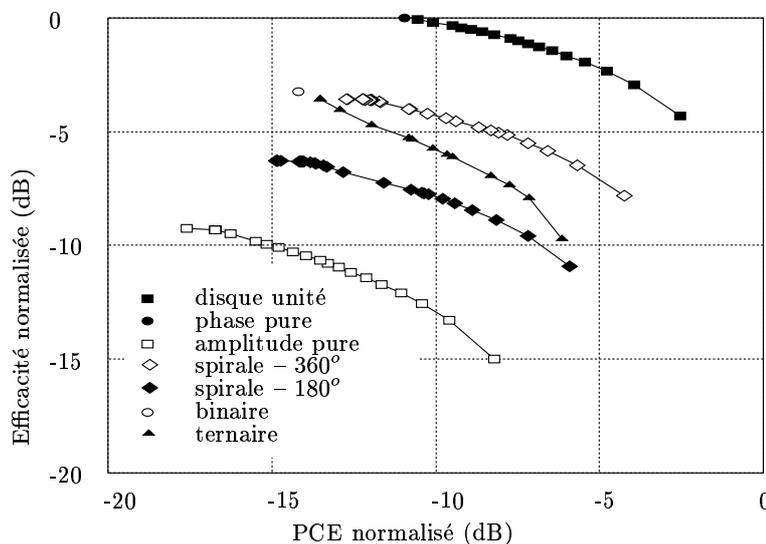


Figure 7.7 : Compromis optimaux entre les critères PCE and η , pour différents domaines de codage.

La surface des caractéristiques optimales pour le codage dans le disque unité est montrée sur la figure 7.4. Les filtres de phase pure, inverse et adapté apparaissent comme des points limites de cette surface. Nous pourrions de la même façon montrer les OCS pour les autres domaines de codage que nous considérons, mais il est difficile de comparer visuellement de telles surfaces. La figure 7.5 en montre quelques-unes en vue de dessus. Nous utiliserons plutôt les courbes des bords des OCS, notées $C1$, $C2$ and $C3$ sur la figure 7.4, qui correspondent à des compromis particuliers que nous allons

détailler.

La figure 7.6, qui correspond à $C1$, présente les compromis optimaux entre les critères SNR et η . Elle peut être simplement obtenue en imposant $\beta = 0$, c'est à dire en ne prenant pas en compte le critère PCE, et en faisant varier γ par exemple (parmi les trois coordonnées (α, β, γ) du vecteur unitaire \mathbf{u} , seules deux sont indépendantes.).

De façon similaire, la figure 7.7, qui correspond à $C2$, présente les compromis optimaux entre les critères PCE et η . Elle peut être simplement obtenue en imposant $\alpha = 0$, c'est à dire en ne prenant pas en compte le critère SNR, et en faisant varier γ .

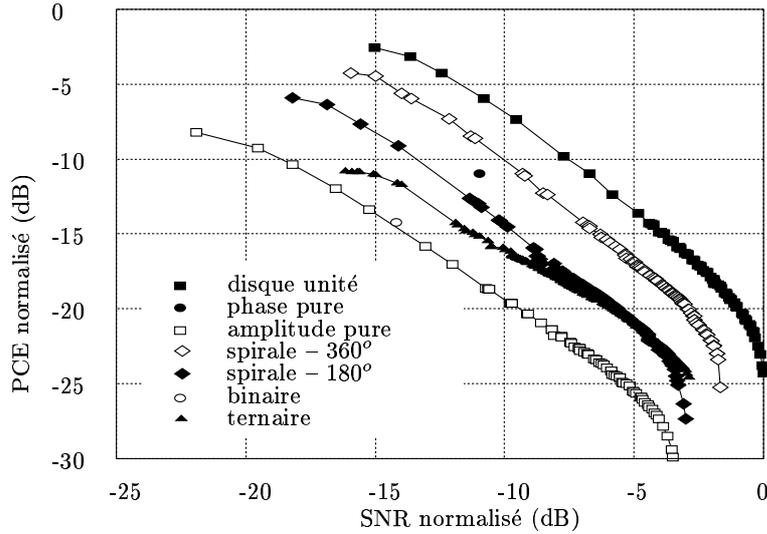


Figure 7.8 : Compromis optimaux entre les critères SNR and PCE, pour différents domaines de codage.

La figure 7.8, qui correspond à $C3$, présente les compromis optimaux entre les critères SNR et PCE. Elle peut être obtenue simplement en faisant varier α par exemple, et en optimisant γ pour chaque valeur de α . Même si l'analyse qui suit n'utilise que les trois sections $C1$, $C2$ et $C3$ des OCS, d'autres pourraient être utilisées, par exemple des coupes à efficacité optique constante.

À partir des figures 7.6, 7.7 et 7.8, une hiérarchie relativement stricte entre les codages s'établit. Comme nous l'attendions intuitivement, le codage dans le disque unité permet les meilleures performances. C'est le seul domaine de codage qui peut être utilisé pour représenter un filtre OT numérique quelconque, pourvu que le paramètre de saturation γ soit suffisamment petit, ce qui bien sûr conduit à une efficacité optique faible.

Avec les codages de phase pure et binaire de phase pure, il n'y a aucun moyen de réaliser des compromis entre les trois critères choisis. C'est à dire que l'OCS se réduit dans ce cas à un unique point. Ces deux codages sont en fait totalement sur-spécialisés pour l'efficacité optique.

Le codage en amplitude pure conduit toujours aux plus mauvaises performances de tous les codages testés. Il est déraisonnable de vouloir utiliser ce type de codage en pratique.

Pour le codage en spirale, associé aux SLM à cristal liquide nématique en hélice, il semble que les filtres réalisables soient d'autant plus performants que le déphasage extrême est important. Nous avons tracé des OCS pour d'autres valeurs du déphasage qui confirment ce résultat, bien que nous ne les montrions pas ici par souci de concision.

Le codage ternaire conduit à des performances relativement bonnes, surtout si l'on considère qu'il n'utilise que trois niveaux, et de façon surprenante ces performances sont presque toujours supérieures à celles du codage en spirale avec un déphasage maximal de 180° , qui pour sa part utilise 32 niveaux.

Ces différents exemples montrent que c'est bien la forme du domaine de codage qui détermine les capacités de filtrage du corrélateur CPS. Pour ce corrélateur, seul le codage dans le disque unité complet

permet d'implanter optiquement un filtre numérique optimal. Malheureusement nous ne connaissons pas de SLM permettant de réaliser ce domaine à l'heure actuelle. Cela devrait être possible en cascasant deux SLM [66], mais n'a pas été démontré expérimentalement à notre connaissance.

7.4 Exemples de filtres optimaux contraints

Pour les exemples qui vont suivre, l'image de référence et l'image scène de la figure 7.9 ont été utilisées. Ces deux images ont une résolution de 128 par 128 pixels. Le fond présent dans l'image scène, qui simule un nuage, a été obtenu comme une réalisation d'un bruit gaussien stationnaire dit en $1/f^4$ [28]³. Ce fond a été ajouté à la référence tournée de 8° . Le rapport signal à bruit en entrée⁴ dans l'image scène est de -8.2 dB.

Domaine de codage	SNR (dB)	PCE (dB)	η_H (dB)	angle optimal φ°
non-contraint	-6.52	-8.63	-	-
disque unité	-6.69	-8.54	-3.90	-
phase pure	-9.43	-9.28	0	-
amplitude pure	-11.94	-14.78	-14.75	0°
spirale de 180°	-10.11	-11.53	-10.45	60°
spirale de 360°	-8.35	-9.65	-6.93	120°
binaire de phase pure	-12.61	-12.45	-3.22	0°
ternaire	-10.44	-13.55	-9.76	0°

Tableau 7.2 : Résultats de l'optimisation des filtres pour différents domaines de codage.

Pour les différents domaines de codage présentés plus haut, nous avons calculé les filtres à compromis optimal contraints pour les mêmes paramètres de compromis (α, β, γ) , afin d'illustrer les différences entre filtres dues seulement au domaine de codage. Le paramètre γ est fixé de telle sorte que la moitié de l'énergie de la densité spectrale de puissance du filtre OT non-contraint soit dans le disque unité, et α est fixé arbitrairement. Tous les filtres sont optimisés pour un modèle de bruit blanc, c'est à dire différent de celui utilisé pour la génération de l'image scène. Le tableau 7.2 montre les résultats de l'optimisation des filtres en termes des valeurs normalisées des critères SNR, PCE et η_H , ainsi que du paramètre angulaire optimal φ° quand il présente un sens. La figure 7.9 montre les réponses percussionnelles des différents filtres, à côté des corrélations correspondantes avec l'image scène. Dans l'ordre décroissant de la qualité du résultat, les filtres non-contraint, contraint au disque unité, aux spirales de 360° et 180° et le filtre ternaire donnent la position correcte de la référence, cependant que les filtres contraints aux codages en amplitude pure et en phase pure et le filtre binaire de phase échouent. Le classement dans cette situation peut sembler étonnant étant donné que les valeurs des critères du tableau 7.2 sont meilleures pour le filtre de phase pure que pour le filtre contraint à la spirale de 180° par exemple. Cela est dû aux perturbations conjointes que créent la rotation de la référence et le défaut de modélisation du fond. Si nous avons testé ces filtres pour une image scène

³C'est à dire dont la densité spectrale de puissance est isotrope, et varie comme la puissance quatrième de la fréquence spatiale.

⁴Ce rapport signal à bruit en entrée est défini comme le rapport des puissances de l'image de référence et du fond. Ces puissances sont évaluées à l'intérieur du support de la référence.

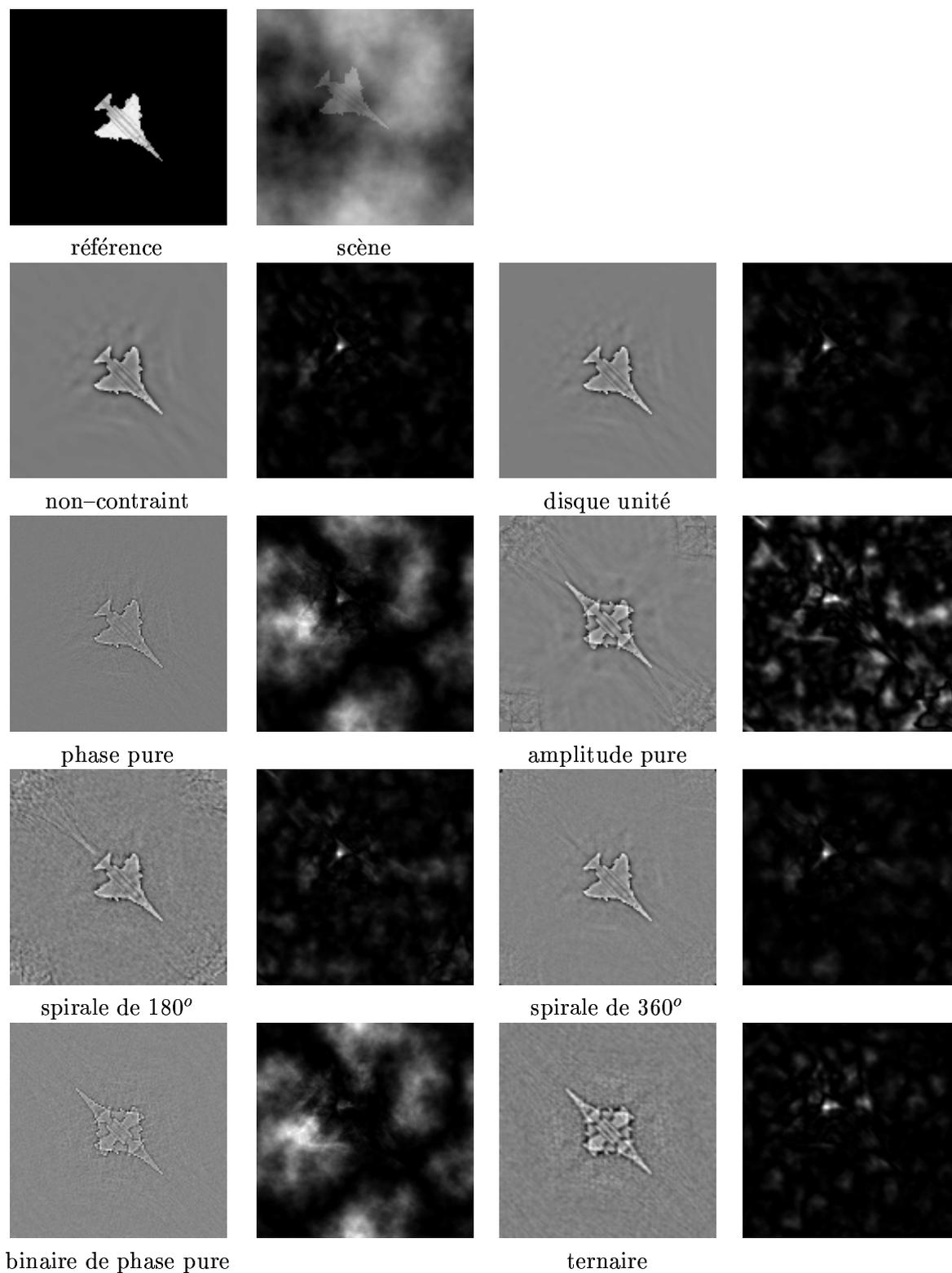


Figure 7.9 : Exemples de filtres à compromis optimal contraints. Les images ont une résolution de 128 par 128 pixels. Hormis pour la première ligne, les première et troisième colonnes montrent les réponses percussionnelles des filtres, et les seconde et quatrième les corrélations correspondantes avec l'image scène.

composée de la référence non tournée plongée dans une réalisation de bruit blanc additif, les résultats auraient suivi l'ordre établi par la valeur du critère SNR du tableau 7.2. Cet exemple souligne l'importance de la stabilité des filtres soumis à des perturbations inconnues [94].

7.5 Conclusion

Nous avons appliqué la méthode d'optimisation multi-critères sous contrainte d'implantation optique, décrite au chapitre 6, au corrélateur optique CPS fonctionnant suivant le principe de la synthèse de pupille cohérente. Pour les critères de résistance au bruit (SNR), de discrimination du fond (PCE) et d'efficacité optique η , nous avons proposé et développé un algorithme rapide et simple permettant d'obtenir les filtres à compromis optimal pour un domaine de codage quelconque. Nous avons obtenu les surfaces caractéristiques optimales (OCS) pour divers domaines de codage, et les avons utilisées pour comparer ces domaines du point de vue des performances qu'ils permettent d'obtenir.

Une hiérarchie relativement stricte entre les codages s'établit. Comme nous l'attendions intuitivement, le codage dans le disque unité permet les meilleures performances. C'est le seul domaine de codage qui peut être utilisé pour représenter un filtre à compromis optimal numérique quelconque. Les codages en spirale et ternaire présentent ensuite un compromis intéressant entre le nombre de valeurs de codage et les performances de filtrage. Les codages de phase pure et binaire de phase pure ne permettent pas de réaliser des compromis entre critères, et enfin le codage en amplitude pure est très mal adapté à la représentation de filtres dans le domaine de Fourier.

La méthode d'optimisation et les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés en partie dans [7]. Nous n'avons pas mis en oeuvre expérimentalement les filtres optimaux contraints que nous avons obtenus. Cela constituerait une suite intéressante à nos travaux.

7.A Annexe : démonstration des résultats

Dans cette annexe, nous montrons différents résultats admis dans le corps du texte.

Fonction énergie modifiée – La fonction énergie de l'expression (7.3) s'écrit :

$$E(\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{h}} - 2\gamma |\hat{\mathbf{h}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{r}}| .$$

Il s'agit de minimiser cette énergie tout en respectant la contrainte de codage du filtre. Introduisons la fonction énergie modifiée :

$$E_\varphi(\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{h}} - 2\gamma \Re \left(\hat{\mathbf{h}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{r}} \exp(-i\varphi) \right) , \quad (7.8)$$

où $\Re(\cdot)$ représente la partie réelle d'un nombre complexe, et φ est un paramètre réel appartenant à $[0, 2\pi]$. En définissant $\phi(\mathbf{h})$ comme la phase du centre de la corrélation $\hat{\mathbf{h}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{r}}$, nous pouvons écrire :

$$E_\varphi(\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{h}} - 2\gamma |\hat{\mathbf{h}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{r}}| \cos(\phi(\mathbf{h}) - \varphi) , \quad (7.9)$$

ce qui implique :

$$E_\varphi(\mathbf{h}) \geq E(\mathbf{h}), \text{ avec égalité ssi } \phi(\mathbf{h}) = \varphi. \quad (7.10)$$

Minimum de la fonction énergie modifiée – Afin de trouver le minimum de $E_\varphi(\mathbf{h})$ sans prendre en compte la contrainte de codage, considérons une petite variation $\delta\mathbf{h}$ du filtre \mathbf{h} . La variation correspondante $\delta E_\varphi(\mathbf{h})$ de la fonction énergie modifiée $E_\varphi(\mathbf{h})$ s'écrit :

$$\delta E_\varphi(\mathbf{h}) = E_\varphi(\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}) - E_\varphi(\mathbf{h}) , \quad (7.11)$$

dont le premier ordre est :

$$\delta E_\varphi(\mathbf{h}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \delta \hat{\mathbf{h}}^\dagger \hat{B}_\mathbf{u} \hat{\mathbf{h}} - \gamma \delta \hat{\mathbf{h}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{r}} \exp(-i\varphi) \right\}. \quad (7.12)$$

Il est facile de vérifier que l'annulation de cette variation du premier ordre conduit au filtre $\mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)$, où $\mathbf{h}_\mathbf{u}^0$ est le filtre numérique optimal donné par l'équation (7.4). De plus, après quelques calculs, on montre que :

$$E_\varphi(\mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)) = E(\mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)) = E(\mathbf{h}_\mathbf{u}^0), \quad (7.13)$$

et que la fonction énergie modifiée prend la forme suivante :

$$E_\varphi(\mathbf{h}) = \left(\hat{\mathbf{h}}^* - \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^0 \right)^* \exp(i\varphi) \right)^\dagger \hat{B}_\mathbf{u} \left(\hat{\mathbf{h}}^* - \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^0 \right)^* \exp(i\varphi) \right) + E(\mathbf{h}_\mathbf{u}^0). \quad (7.14)$$

Le membre de droite de cette dernière équation est composée de deux termes. Le premier est une forme quadratique définie positive, qui ne s'annule que lorsque $\mathbf{h} = \mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)$, et le second membre est une constante qui ne dépend pas du paramètre angulaire φ . Grâce à ces propriétés, il est aisé de voir que le filtre $\mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)$ minimise l'énergie modifiée $E_\varphi(\mathbf{h})$ quand la contrainte de codage n'est pas prise en compte. Et de plus, puisque $\hat{B}_\mathbf{u}$ est une matrice diagonale d'éléments réels positifs, la minimisation de $E_\varphi(\mathbf{h})$ en tenant compte de la contrainte de codage est équivalente à la minimisation de la distance euclidienne de l'expression (7.5). Pour une valeur du paramètre angulaire φ fixée, le filtre qui minimise $E_\varphi(\mathbf{h})$ en considérant la contrainte de codage est donc le filtre projeté $\mathbf{h}_\mathbf{u}^\varphi = \mathcal{P}_\mathcal{D} \left[\left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^0 \right)^* \exp(i\varphi) \right]^*$ de l'équation (7.6), où l'opérateur de projection sur le domaine de codage $\mathcal{P}_\mathcal{D}[\cdot]$ a été défini plus haut.

Angle de rotation optimal – Considérons un filtre $\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D}$ qui minimise l'énergie $E(\mathbf{h})$ quand la contrainte de codage est prise en compte. En appliquant la relation (7.10), nous pouvons écrire pour toute valeur du paramètre angulaire φ :

$$E_\varphi \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^\varphi \right) \geq E \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^\varphi \right) \geq E \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^\mathcal{D} \right), \quad (7.15)$$

d'où il vient, en utilisant la définition (7.7) de la fonction $f_\mathbf{u}(\varphi)$:

$$\operatorname{Min}_{\varphi \in [0, 2\pi]} \{ f_\mathbf{u}(\varphi) \} \geq E \left(\hat{\mathbf{h}}_\mathbf{u}^\mathcal{D} \right). \quad (7.16)$$

De plus, en définissant l'angle $\varphi^\circ = \phi(\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D})$, à partir de la relation (7.10) nous avons $E_{\varphi^\circ}(\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D}) = E(\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D})$. De plus, $\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D}$ minimise la fonction $E_{\varphi^\circ}(\mathbf{h})$ quand on considère la contrainte de codage, comme le montre la relation (7.15). Ce dernier résultat peut être écrit $f_\mathbf{u}(\varphi^\circ) = E(\mathbf{h}_\mathbf{u}^\mathcal{D})$, qui montre que l'inégalité de la relation (7.16) est en fait une égalité. Finalement, pour trouver le filtre à compromis optimal qui minimise l'énergie $E(\hat{\mathbf{h}})$ sous contrainte de codage, il suffit de chercher l'angle φ° qui minimise la fonction $f_\mathbf{u}(\varphi)$.

continuité de la fonction énergie angulaire – Pour démontrer que la fonction $f_\mathbf{u}(\varphi)$ est continue, il suffit de remarquer que cette fonction est en fait une distance du filtre $\mathbf{h}_\mathbf{u}^0 \exp(-i\varphi)$ au domaine de codage. Par suite, il suffit que le domaine de codage soit *compact* pour que cette distance soit continue [79].

Algorithme itératif de recherche de l'angle optimal – Le principe de l'algorithme est le suivant :

- **Initialisation** : Calculer le filtre optimal sans contrainte $\mathbf{h}_\mathbf{u}^0$ de l'expression (7.4) ; Initialiser l'angle φ .

- **Itération :**

- Calculer le filtre projeté $\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi}$,
- Actualiser φ par $\varphi = \phi(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi})$;

- **Arrêt :** φ ne varie plus.

Comme nous le montrons ci-dessous, cet algorithme est toujours convergent. Cependant, il peut converger aussi bien vers un minimum local que vers le minimum global de la fonction $f_{\mathbf{u}}(\varphi)$, suivant la valeur initiale de l'angle φ . Une solution pratique pour obtenir le minimum global est de partir de la solution approchée à 10 degrés près décrite dans le texte.

Pour prouver la convergence de l'algorithme, puisque l'énergie est minorée car positive, il suffit de montrer que l'énergie décroît à chaque itération. Appelons φ_n la valeur du paramètre φ à l'itération n . La valeur de l'énergie à la fin de l'itération n est :

$$E^{(n)} = E(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_n}) = f(\varphi_n)$$

Le paramètre φ est actualisé par :

$$\varphi_{n+1} = \phi(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_n})$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} E^{(n)} &= E(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_n}) = E_{\varphi_{n+1}}(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_n}) && \text{car } \varphi_{n+1} = \phi(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_n}) \\ &\geq E_{\varphi_{n+1}}(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_{n+1}}) && \text{car } \mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_{n+1}} \text{ minimise } E_{\varphi_{n+1}} \\ &\geq E(\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^{\varphi_{n+1}}) = E^{(n+1)} && \text{d'après (7.10)} \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\varphi_{n+1} = \varphi_n$, ce qui est la condition d'arrêt. Nous avons ainsi montré la convergence stricte de l'algorithme.

Chapitre 8

Filtrage dans l'espace objet

J'ai présenté au chapitre précédent une méthode de calcul des filtres optimaux représentables dans l'espace de Fourier sur un SLM, pour le corrélateur cohérent CPS. Dans ce chapitre, je propose une méthode similaire, toujours basée sur le principe de l'optimisation multi-critères décrite au chapitre 6, mais cette fois pour la représentation des filtres dans l'espace objet pour le corrélateur incohérent SCC. Je propose également une méthode de filtrage *bipolaire* qui permet de s'affranchir de la contrainte de positivité pour les valeurs du filtre imposée par la nature incohérente de l'éclairage. Cette méthode s'avère très performante, puisqu'elle permet de représenter optiquement un filtre numérique à compromis optimal quelconque.

Pour le corrélateur cohérent JTC, pour lequel le filtre est également représenté dans l'espace objet, nous ne savons résoudre le problème d'optimisation multi-critères que lorsque le filtre est codé en amplitude pure, comme nous le discuterons. Cependant, nous le verrons, une modification du dispositif expérimental permet de s'affranchir de cette difficulté.

8.1 Corrélation incohérente par ombroscopie

Nous rappelons sur la figure 8.1 le schéma de principe du montage de corrélation incohérente par ombroscopie (SCC). Le filtre h est représenté dans l'espace objet sur le premier modulateur.

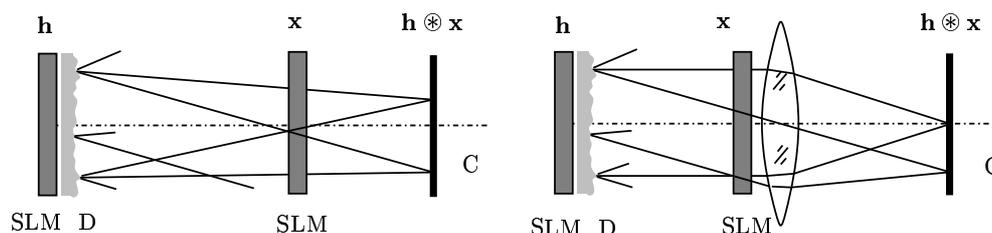


Figure 8.1 : Schéma de principe du montage de corrélation incohérente par ombroscopie (SCC). (a) – montage sans lentille. (b) – montage à l'infini. D : diffuseur ; C : caméra.

8.1.1 Filtrage contraint

Comme dans le chapitre précédent, nous cherchons les compromis optimaux entre les critères SNR (rapport signal à bruit), PBCE (discrimination du fond), et η (efficacité). Mais maintenant, la contrainte de codage pour le filtre est appliquée dans l'espace objet. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 6, nous pouvons, pour rechercher les compromis optimaux entre les critères SNR, PBCE et η , nous

ramener au critères MSE, CPE et $|c_0|$. La nature incohérente de l'éclairage fait que nous n'avons pas besoin d'introduire une phase supplémentaire à optimiser, contrairement à ce qui était nécessaire avec l'architecture CPS fonctionnant en éclairage cohérent. Nous devons donc minimiser la fonction énergie suivante, similaire à l'expression (7.14) :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_{m'} (h_m - (h_{\mathbf{u}}^0)_m) [B_{\mathbf{u}}]_{m-m'} (h_{m'} - (h_{\mathbf{u}}^0)_{m'}) = \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n |\hat{h}_n - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n|^2 \quad (8.1)$$

où $\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^0$ est un filtre à compromis optimal non-contraint, et $B_{\mathbf{u}}$ la matrice de compromis entre les critères MSE et BCPE :

$$(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n = \gamma \frac{\hat{r}_n}{[\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n} \quad , \quad B_{\mathbf{u}} = \alpha S + \beta D_b \quad . \quad (8.2)$$

(α, β, γ) sont les coordonnées du vecteur unitaire du premier quadrant \mathbf{u} , et S et D_b sont les matrices de covariance du bruit et du fond. La contrainte de codage s'applique sur le filtre \mathbf{h} .

Comme dans le cas des filtres contraints dans l'espace de Fourier du chapitre précédent, la fonction $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ est une distance du filtre contraint \mathbf{h} au filtre à compromis optimal non-contraint $\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^0$. La fonction $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ est également une forme quadratique définie positive, qui ne s'annule que si $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{\mathbf{u}}^0$. Si cette forme quadratique est diagonale dans l'espace de Fourier, elle ne l'est malheureusement pas dans l'espace objet. En conséquence, le filtre optimal contraint \mathbf{h} n'est pas simplement la projection du filtre numérique à compromis optimal sur le domaine de codage, car $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ ne définit pas une distance euclidienne.

Au problème d'optimisation ainsi posé, on ne peut donner que des solutions itératives, ce qui complique la procédure d'obtention des filtres optimaux contraints. Pour les résultats qui vont être présentés, nous avons utilisé un algorithme de gradient-projection dont le principe est décrit en annexe. En pratique, nous ne sommes assuré de la convergence d'un tel algorithme vers le filtre optimal contraint que si le domaine de codage est *convexe* [31].

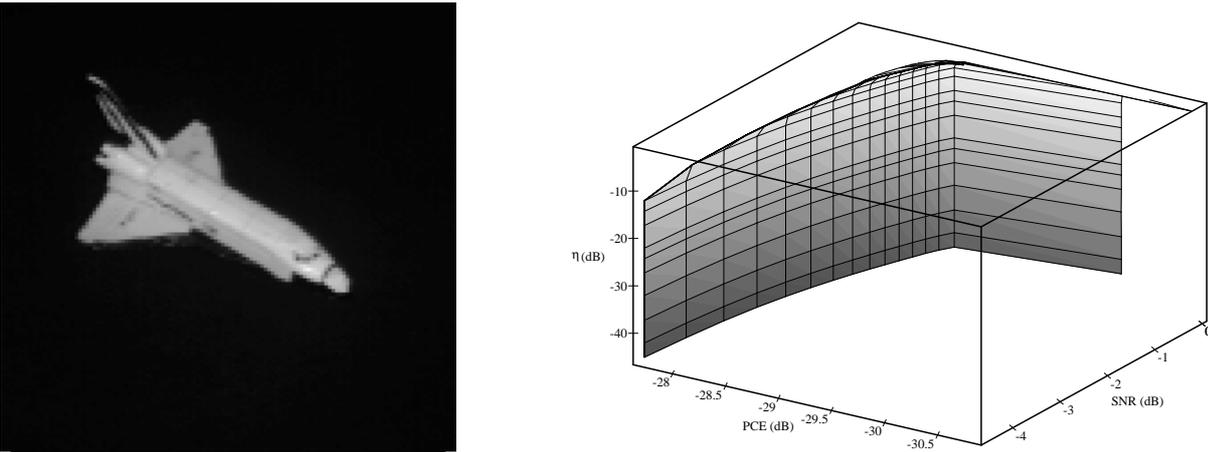


Figure 8.2 : (a) – image de référence utilisée pour les simulations, de 128 par 128 pixels. (b) – Surface des caractéristiques optimales (OCS) pour l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie, quand le domaine de codage du filtre est le segment $[0, 1]$.

Du fait de la nature incohérente de l'éclairage, le domaine de codage pour le filtre est nécessairement contenu dans le segment $[0, 1]$, qui est un ensemble convexe. Les SLM à cristal liquide commerciaux

permettant de réaliser effectivement ce domaine de codage, c'est le seul que nous avons besoin de considérer.

La figure 8.2–(a) représente l'image de référence utilisée pour les simulations. Elle comporte 128 par 128 pixels. La surface des caractéristiques optimales (OCS) de la figure 8.2–(b) représente les compromis optimaux entre les critères SNR, PCE et η quand le domaine de codage du filtre est le segment $[0, 1]$. On peut observer que la valeur du critère PCE est toujours très mauvaise, et que la valeur du SNR varie peu. De fait, avec un tel codage, les filtres à compromis optimal s'écartent très peu du filtre adapté. Par conséquent, les capacités de discrimination de ces filtres seront toujours mauvaises, ce qui se traduira par la présence de pics secondaires importants dans l'image de corrélation.

Ce défaut de discrimination s'explique naturellement par l'impossibilité de coder des valeurs négatives pour le filtre. Afin de tenter d'améliorer les capacités de filtrage de l'architecture de corrélation par ombroscopie, nous avons mis en oeuvre une méthode de filtrage *bipolaire*.

8.1.2 Filtrage bipolaire contraint

L'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie permettant de mesurer un produit de corrélation de façon linéaire, il est possible pour représenter un filtre à valeurs réelles positives ou négatives de découper celui-ci en deux parties suivant le schéma dit *bipolaire* [57] :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^+ - \mathbf{h}^- \text{ avec } \mathbf{h}^+ \text{ et } \mathbf{h}^- \in [0, 1]^N \quad (8.3)$$

Le filtre \mathbf{h} est alors élément de $[-1, 1]^N$, ce qui correspond au domaine de codage virtuel $[-1, 1]$.

Le principe du filtrage bipolaire est alors d'enregistrer les deux corrélations $\mathbf{c}^+ = \mathbf{h}^+ \circledast \mathbf{x}$ et $\mathbf{c}^- = \mathbf{h}^- \circledast \mathbf{x}$, puis de prendre le carré de la différence de ces deux images, ce qui donne :

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^-|^2 = |\mathbf{h}^+ \circledast \mathbf{x} - \mathbf{h}^- \circledast \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{h} \circledast \mathbf{x}|^2 \quad (8.4)$$

De cette manière, il est possible de coder un filtre présentant des valeurs négatives. L'inconvénient de la méthode bipolaire est qu'il faut mesurer deux produits de corrélation au lieu d'un seul pour obtenir le résultat final. L'avantage, nous allons le voir, est que les capacités de filtrage sont grandement améliorées.

Les méthodes de représentation bipolaire d'images ont été principalement discutés dans la littérature dans le cadre de la synthèse de pupille incohérente [95, 64]. Dans ce cas, la détermination des parties positives et négatives du filtre bipolaire conduit à des méthodes d'optimisation relativement complexes, puisque les deux parties sont représentées dans l'espace de Fourier, où s'exerce donc la contrainte de codage, et que la pupille effective est la différence de leurs modules carrés. Ces méthodes sont adaptées au montage de corrélation incohérente par synthèse de pupille (IPS).

Dans le cas de la corrélation incohérente par ombroscopie, la détermination des parties positives et négatives du filtre bipolaire s'avère nettement plus simple, comme nous allons le discuter.

Remarquons tout d'abord qu'il existe en général une infinité de décompositions bipolaires possibles pour un filtre donné. En effet, il est possible d'ajouter une image \mathbf{f} relativement quelconque aux parties positives et négatives du filtre, selon le schéma :

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}^+ + \mathbf{f}] - [\mathbf{h}^- + \mathbf{f}] \text{ avec } [\mathbf{h}^+ + \mathbf{f}] \text{ et } [\mathbf{h}^- + \mathbf{f}] \in [0, 1]^N \quad (8.5)$$

Nous discuterons plus loin comment nous proposons de calculer les parties positives et négatives du filtre bipolaire. La linéarité de la mesure du produit de corrélation assurée par le principe de l'ombroscopie fait que les expressions des critères de corrélation ne changent pas quand on considère un filtrage bipolaire. Cela implique que la fonction énergie qu'il faut minimiser est toujours donnée par l'expression (8.1), mais cette fois-ci le domaine de codage du filtre est le segment $[-1, 1]$. Il est clair que le critère efficacité η n'est plus dans ce cas représentatif de la quantité de lumière mesurée, c'est à dire de l'efficacité *optique*, mais seulement du signal utile pour la corrélation.

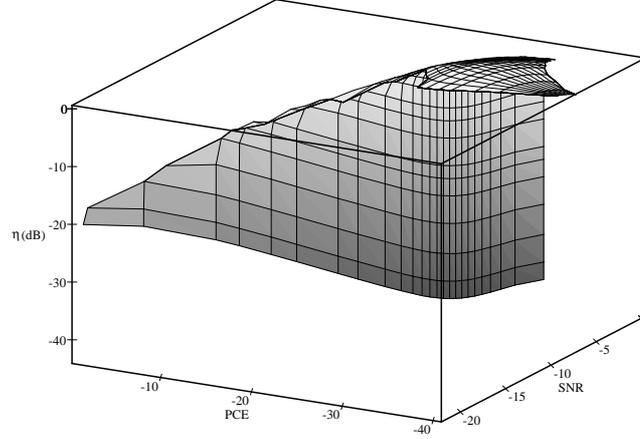


Figure 8.3 : Surface des caractéristiques optimales (OCS) pour l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie, pour les filtres bipolaires, c'est à dire quand le domaine de codage du filtre est le segment $[-1, 1]$.

La figure 8.3 représente la surface des caractéristiques optimales des filtres bipolaires, pour l'image de référence de la figure 8.2–(a). On peut observer qu'il est maintenant possible d'obtenir des filtres présentant une très bonne capacité de discrimination du fond, mesurée par le critère PCE. En fait, notre méthode de filtrage bipolaire permet de représenter un filtre numérique à compromis optimal quelconque dans l'espace objet. En effet, nous avons vu au chapitre 2 que ceux-ci sont à valeurs réelles dans l'espace objet, il suffit donc de donner à la coordonnée γ du vecteur unitaire \mathbf{u} une valeur telle que le filtre numérique à compromis optimal $\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^0$ défini par l'équation (8.2) soit tout entier contenu dans le domaine de codage $[-1, 1]$. Dans ce cas, la fonction énergie $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ de l'équation (8.1) s'annule exactement. Pratiquement, il faut ajuster le paramètre γ pour être juste à la limite de saturation :

$$\gamma^{-1} = \max_m \left(\left| \text{DFT}^{-1} \left[\hat{B}_{\mathbf{u}}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \right] \right| \right)_m \quad (8.6)$$

Dans cette équation, DFT^{-1} représente la transformée de Fourier discrète inverse. Un algorithme itératif n'est plus nécessaire pour déterminer les filtres optimaux, mais l'efficacité n'est plus prise en compte. Les filtres ainsi obtenus ne dépendent plus que d'un unique paramètre, α ou β , et sont les filtres à compromis optimal entre les critères SNR et BCPE.

8.1.3 Comparaison

La figure 8.4 illustre le gain en capacité de discrimination qu'apportent les filtres bipolaires optimaux. La figure 8.4–a présente les courbes des caractéristiques optimales (OCC) entre les critères SNR et PCE pour les filtres bipolaires et contraints au segment $[0, 1]$. L'OCC des filtres bipolaires est exactement celle des filtres numériques à compromis optimal. Le gain en capacité de discrimination apparaît très clairement. Les efficacités η correspondantes sont également représentées. L'efficacité maximale qui sert pour la normalisation est celle du filtre uniformément à 1.

La figure 8.4–(b) présente les effets d'une quantification des filtres bipolaires postérieure à leur calcul. En effet, les images inscrites sur les SLM le sont en général en niveaux de gris. Au lieu d'être

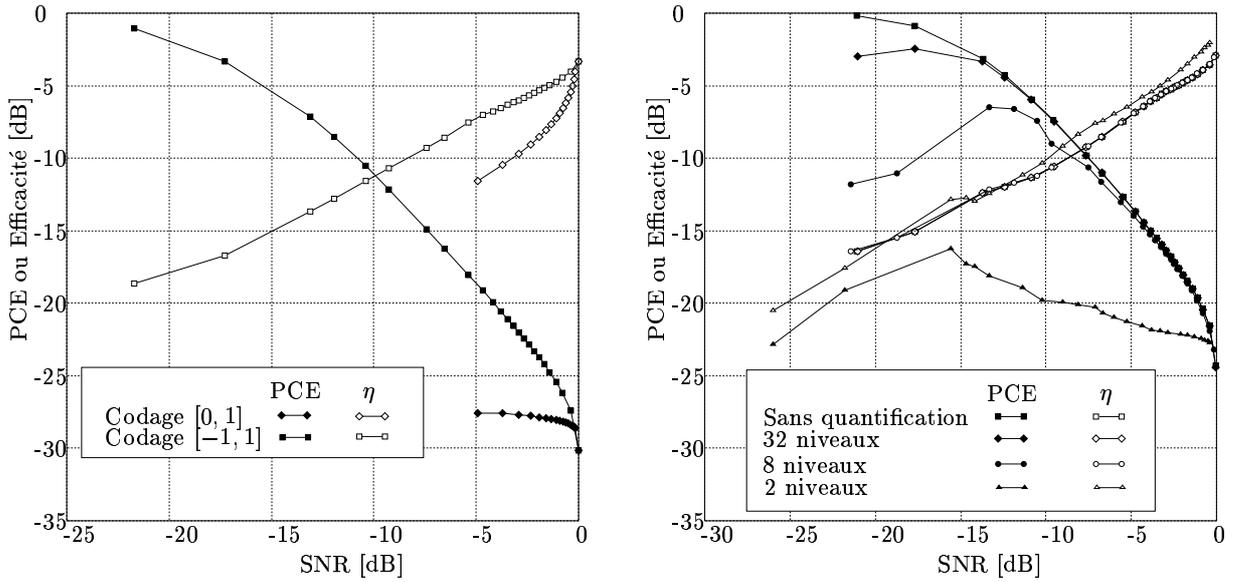


Figure 8.4 : (a) – Courbes des caractéristiques optimales (OCC) entre les critères SNR et PCE pour les filtres bipolaires et contraints au segment $[0, 1]$, et efficacités correspondantes. (b) – Effet de la quantification des filtres bipolaires sur les critères.

le segment continu $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$, le domaine de codage est alors discret, c'est à dire constitué d'un certain nombre de valeurs de transmission. Notre algorithme d'optimisation par gradient ne convergeant que pour des domaines de codage convexes, nous avons pris le parti de quantifier *a posteriori* les filtres optimaux pour les segments $[0, 1]$ et $[-1, 1]$. La figure 8.4–(b) montre la dégradation des valeurs des critères à mesure que le nombre de niveaux de gris diminue. En pratique, cet effet peut être négligé quand on dispose de plus de 32 niveaux, ce qui est tout à fait compatible avec les SLM à cristal liquide actuels, et quand on ne cherche pas à représenter un filtre trop proche du filtre inverse.

8.1.4 Sélection des parties positives et négatives

Nous avons vu comment il est possible d'obtenir les filtres bipolaires optimaux, il faut maintenant parvenir à les décomposer en parties positive et négative.

Contrairement aux montages cohérents pour lesquels il convient d'économiser sur la puissance de la source (laser) en augmentant l'efficacité optique des filtres, dans un montage incohérent nous pouvons disposer de sources blanches de puissance pour un faible coût. Un paramètre peut-être plus important est d'optimiser l'utilisation de la dynamique de la caméra d'acquisition des images de corrélation.

Définissons les filtres \mathbf{h}^+ et \mathbf{h}^- par :

$$\begin{cases} h_m^+ = \max(0, h_m) \\ h_m^- = \max(0, -h_m) \end{cases} \quad (8.7)$$

Cette définition correspond à la définition usuelle des parties positives et négatives d'une fonction [57]. C'est la décomposition qui donne les plus petites valeurs possibles pour \mathbf{h}^+ et \mathbf{h}^- en tous points m . Nous avons vu que nous pouvons ajouter une image positive relativement quelconque \mathbf{f} à \mathbf{h}^+ et \mathbf{h}^- . Pourtant, il est clair que cet ajout n'apporte aucune information utile dans le plan de corrélation. En fait, si nous considérons les deux points suivants, importants en pratique :

- le plan de corrélation est quantifié par le système d'acquisition après la caméra,

- le bruit de détection dépend directement du signal détecté,

il est clair que l'ajout d'une image f va à l'encontre de la réduction de ces deux effets, et qu'il faut donc prendre $f = 0$, ce que nous ferons toujours par la suite.

La figure 8.5 présente un exemple de décomposition bipolaire, et de sélection des parties positives et négatives du filtre.



Figure 8.5 : Exemple de sélection des parties positives et négatives d'un filtre bipolaire. (a) – Filtre (bipolaire) à compromis optimal contraint au segment $[-1, 1]$. (b) – Partie positive. (c) – Partie négative.

8.2 Corrélation cohérente

Comme dans le cas de la corrélation optique incohérente par ombroscopie, les corrélateurs cohérents que nous avons présenté au chapitre 4 sous le nom générique de JTC emploient un filtre présenté sur un SLM dans l'espace direct. C'est donc également dans cet espace que s'exerce la contrainte de codage du filtre. Nous rappelons sur la figure 8.6 deux schémas de principe possibles pour ce type de corrélateurs.

8.2.1 Optimisation contrainte

Le problème du calcul des filtres optimaux contraints à un domaine de codage donné s'exprime de la même façon que pour la corrélation incohérente par ombroscopie, à la différence qu'à la fois l'amplitude et la phase du codage interviennent. Il s'agit toujours de déterminer le minimum de la fonction énergie $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ de l'équation (8.1). À notre connaissance, il n'y a pas d'algorithme permettant d'obtenir à coup sûr les filtres optimaux quand le domaine de codage n'est pas convexe.

Les domaines de codage en éclairage cohérent qui sont convexes ne sont pas la règle. En fait, seul le cas du codage en amplitude pure est obtenu simplement. Ce codage est bien convexe, et les filtres optimaux correspondants sont exactement ceux que nous avons obtenus plus haut pour la corrélation par ombroscopie quand les valeurs du filtre sont contraintes au segment $[0, 1]$. Nous avons vu que ces filtres présentent des capacités de discrimination faibles, ce qui réduit leur intérêt. De plus, une méthode semblable à celle du filtrage bipolaire, que nous avons introduit pour améliorer les capacités de discrimination, n'est pas applicable puisque la mesure de la corrélation n'est plus linéaire mais quadratique.

Cependant, il est possible de contourner la difficulté théorique du calcul des filtres optimaux en utilisant certaines propriétés des montages optiques que nous allons décrire.

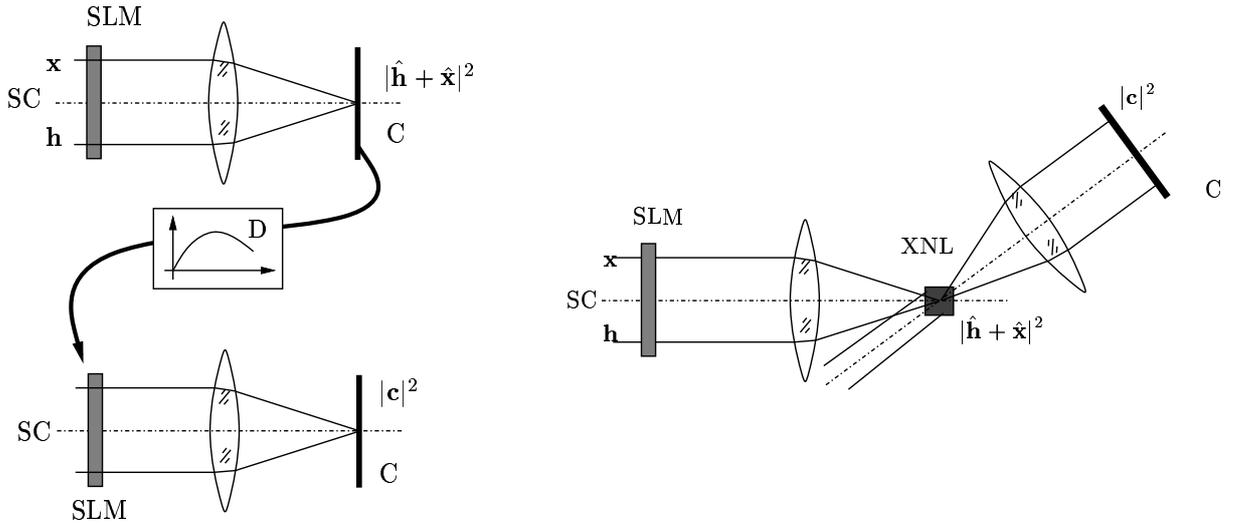


Figure 8.6 : Principe de la corrélation par transformation de Fourier conjointe. (a) – l'élément non-linéaire est une caméra. (b) – l'élément non-linéaire est un cristal . C : caméra; SC : source cohérente; XNL : cristal non-linéaire.

8.2.2 Corrélation non-linéaire

JTC non-linéaire avec une caméra – Analysons le fonctionnement du corrélateur JTC non-linéaire de la figure 8.6-(a). Supposons dans un premier temps qu'il n'y a pas de non-linéarité appliquée sur le spectre conjoint. Notons \mathbf{f} l'image, composée de la scène et du filtre décalés, présentée en entrée :

$$\mathbf{f} = T_t[\mathbf{x}] + T_{-t}[\mathbf{h}] \quad (8.8)$$

où nous avons supposé sans perte de généralité que les images scène et filtre sont décalées de la quantité t de part et d'autre de l'axe optique, et $T_t[\cdot]$ représente l'opérateur de translation de la quantité t , mesurée en pixels. Dans une première étape, le module carré de la transformée de Fourier de cette image est enregistrée par une caméra :

$$|\hat{f}_n|^2 = \left| \exp\left(-2i\pi\frac{nt}{N}\right) \hat{x}_n + \exp\left(2i\pi\frac{nt}{N}\right) \hat{h}_n \right|^2 \quad (8.9)$$

où N est le nombre de pixels total. Dans la seconde étape, cette image est inscrite sur le second SLM, une nouvelle transformée de Fourier est prise, dont le module carré est enregistré par une seconde caméra. En sortie nous obtenons donc :

$$|TF[|\hat{\mathbf{f}}|^2]|^2 = |\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}|^2 = |\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + T_{-2t}[\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}] + T_{2t}[\mathbf{x} \otimes \mathbf{h}]|^2 \quad (8.10)$$

Les images \mathbf{x} et \mathbf{h} étant disjointes, cette expression s'écrit sous forme de trois termes disjointes spatialement :

$$|TF[|\hat{\mathbf{f}}|^2]|^2 = |\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}|^2 + |T_{-2t}[\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}]|^2 + |T_{2t}[\mathbf{x} \otimes \mathbf{h}]|^2 \quad (8.11)$$

Le second terme de cette expression donne la corrélation des images scène et filtre.

Prenons maintenant en compte la présence de la non-linéarité D . Javidi a proposé un formalisme général pour obtenir l'expression de la transformée de Fourier du spectre conjoint après son passage dans l'élément non-linéaire [96, 97, 98]. Nous indiquerons seulement ici les grands traits de son raisonnement. L'expression (8.9) peut être écrite, en intervertissant le filtre et la référence :

$$|\hat{f}_n|^2 = |\hat{x}_n|^2 + |\hat{r}_n|^2 + \exp\left(-4i\pi\frac{nt}{N}\right) \hat{r}_n^* \hat{x}_n + \exp\left(4i\pi\frac{nt}{N}\right) \hat{r}_n \hat{x}_n^* \quad (8.12)$$

Cette densité spectrale de l'image \mathbf{f} ou spectre conjoint fait intervenir la somme des densités spectrales des images scène et référence, ainsi la densité spectrale d'intercorrélacion de ces images, modulée par un facteur de phase. L'effet de la non-linéarité est de créer des harmoniques de cette modulation, qui se manifestent par des ordres de diffraction séparés angulairement lors de l'étape de relecture. Dans le cas où la non-linéarité D est une loi de puissance¹, la transformée de Fourier de l'amplitude dans le plan de corrélacion peut s'écrire :

$$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{(|\hat{x}_n| |\hat{r}_n|)^\kappa} \quad (8.13)$$

où κ est une constante variant entre 0 et 1. Cette expression peut sembler parfaitement arbitraire, et elle fut effectivement obtenue sur des bases empiriques, mais il s'avère néanmoins qu'elle conduit à un filtrage aux performances tout à fait correctes, ainsi que nous le montrerons au chapitre 9. Il est important de remarquer que le filtrage se fait sans qu'il soit nécessaire de calculer un filtre mais simplement en utilisant directement la référence, et qu'il est réalisé grâce à une non-linéarité fixe.

L'influence du domaine de codage va porter sur les images scène et référence présentées dans l'espace objet en entrée du corrélacion, modifiant de ce fait l'image \hat{c} donnée par l'expression (8.13), mais elle va également porter sur l'image \hat{c} du fait de l'inscription de celle-ci sur le second modulateur.

JTC et VDL non-linéaires avec un cristal photo-réfractif – Il est également possible de réaliser une méthode de filtrage semblable à celle que nous venons de décrire, à l'aide d'un élément optique non-linéaire, tel un cristal photo-réfractif.

Considérons le montage schématique de la figure 8.7-(a). L'indice de réfraction du cristal est modulé par les interférences de deux faisceaux d'amplitudes U_1 et U_2 issus du même laser, à travers l'effet photo-réfractif. Un troisième faisceau d'amplitude U_3 , issu d'un autre laser dont la longueur d'onde moyenne est telle qu'il ne participe pas à l'effet photo-réfractif, est diffracté par le réseau d'indice. L'intensité du faisceau d'amplitude U_4 diffracté est acquise par une caméra.

En première approximation, il est possible de montrer [99, 54] que l'efficacité de diffraction est proportionnelle au taux de modulation des franges d'interférence, de sorte que l'amplitude U_4 prend la forme :

$$U_4 \propto \frac{U_1^* U_2 U_3}{|U_1|^2 + |U_2|^2} \quad (8.14)$$

Ainsi que nous l'avons proposé dans [12], suivant l'information transportée par les faisceaux U_1 , U_2 et U_3 , il est alors possible d'obtenir trois configurations résumées sur le tableau 8.1, et schématisées sur les figures 8.7-(b), 8.7-(c) et 8.7-(d). Ces corrélacion réalisent respectivement les filtrages NL-JTC (JTC non-linéaire), et les filtrages à compromis optimal entre les critères SNR pour un bruit blanc et capacité de discrimination PCE et PSCE.

Prenons par exemple le cas NL-JTC, pour lequel les images scène et référence sont présentées sur les bras d'écriture, et le faisceau de lecture est une onde plane :

$$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{\sigma^2 + |\hat{x}_n|^2 + |\hat{r}_n|^2} \quad (8.15)$$

où σ est une constante introduite pour *régulariser* cette expression [12, 94, 32]. La constante σ dans l'expression (8.15) est en fait proportionnelle à l'intensité $|U_3|^2$ du faisceau de lecture U_3 , qui est dans ce cas une onde plane, et provient d'un couplage faible du faisceau de lecture avec les faisceaux d'écriture [99, 54]. Nous avons omis d'inclure ce terme dans l'expression (8.14), afin d'insister sur sa symétrie.

Comme précédemment, le filtrage se fait sans qu'il soit nécessaire de calculer un filtre mais simplement en utilisant directement la référence

¹C'est à dire si $D(E) \propto E^{(1-\kappa)}$.

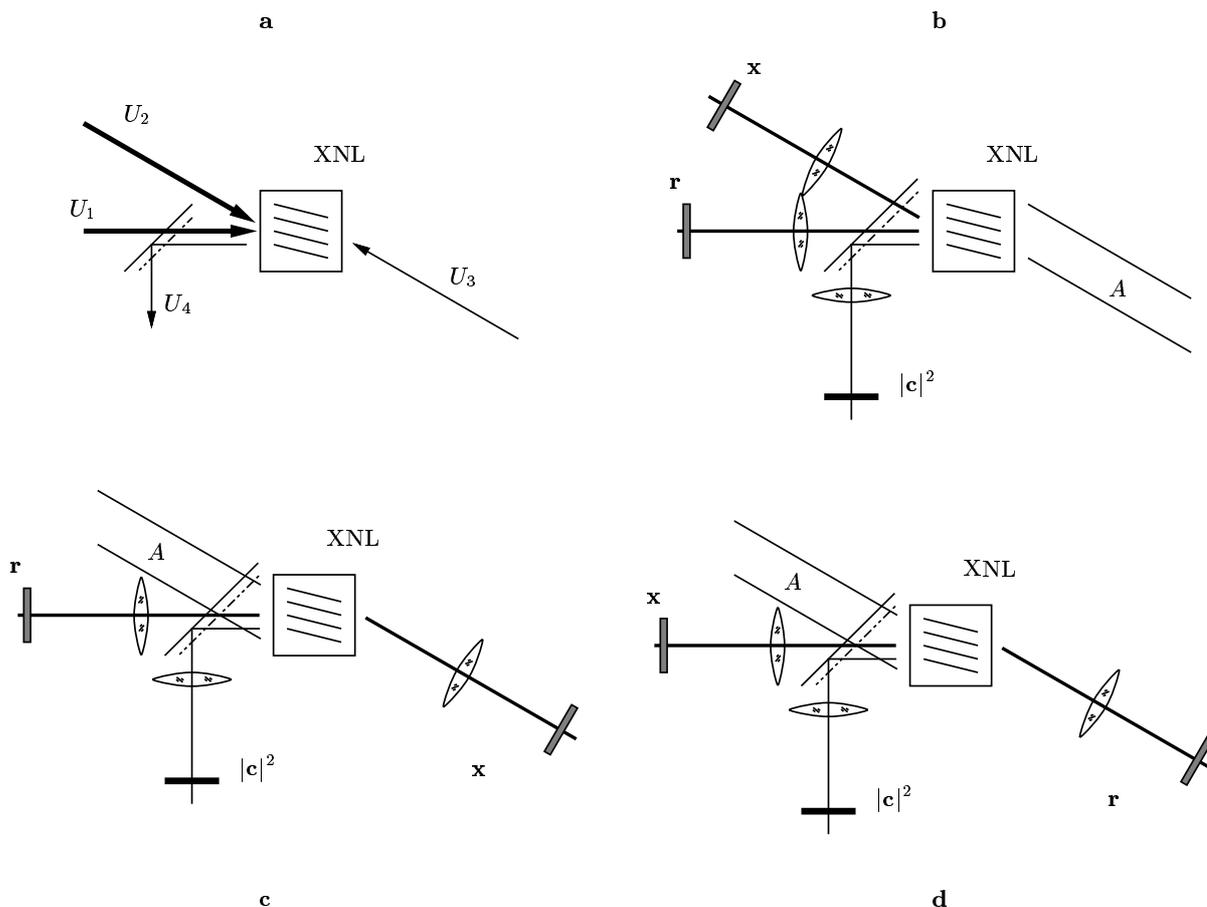


Figure 8.7 : Configurations possibles pour un corrélateur cohérent utilisant un cristal photo-réfractif. XNL : cristal non-linéaire photo-réfractif.

Écriture		Lecture	Amplitude diffractée	Type	Figure 8.7
U_1	U_2	U_3	U_4		
\hat{r}	\hat{x}	A	$\frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{ \hat{x}_n ^2 + \hat{r}_n ^2}$	NL-JTC	(b)
\hat{r}	A	\hat{x}	$\frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{A^2 + \hat{r}_n ^2}$	VDL	(c)
\hat{x}	A	\hat{r}	$\frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{A^2 + \hat{x}_n ^2}$	NL-VDL	(d)

Tableau 8.1 : Configurations possibles pour un corrélateur cohérent utilisant un cristal photo-réfractif.

L'influence du domaine de codage va porter sur les images scène et référence présentées dans l'espace objet en entrée du corrélateur, modifiant de ce fait la corrélation finale obtenue.

8.3 Conclusion

Nous avons étudié la possibilité de réaliser un filtrage optimal dans un corrélateur optique quand la contrainte de codage pour le filtre s'exerce dans l'espace objet.

Pour l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie, le codage du filtre est nécessairement en amplitude pure, et nous avons montré que les filtres à compromis optimal réalisables présentent des capacités de discrimination faible. Afin de pallier ce problème, nous avons proposé une méthode de filtrage bipolaire, qui demande de mesurer deux corrélations au lieu d'une, mais permet en principe d'implanter optiquement un filtre numérique optimal quelconque.

Dans le cas des corrélateurs cohérents, la recherche des filtres à compromis optimal quand le domaine de codage du filtre n'est pas convexe est un problème difficile. Cependant, des réalisations optiques particulières permettent d'effectuer des filtrages optimaux, sans qu'il soit nécessaire de calculer un filtre, puisque c'est directement l'image de référence qui est présentée dans l'espace objet.

8.A Annexe : algorithme de gradient-projection

Nous utilisons un algorithme de gradient-projection car nous cherchons à minimiser une fonction énergie quadratique sur un ensemble convexe (\mathcal{D}^N), et que dans ce cas un tel algorithme est toujours convergent [31, 100].

Nous appelons $\mathbf{h}^{(q)}$ le filtre estimé à la q^{ime} itération, et $\hat{\mathbf{h}}^{(q)}$ sa transformée de Fourier. L'algorithme est le suivant :

1. Initialisation: $\mathbf{h}^{(0)} = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}_{\mathbf{u}}^0]$
2. Itération: $\mathbf{h}^{(q+1)} = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^{(q)} + d\mathbf{h}^{(q)}]$

où $d\mathbf{h}^{(q)}$ est le terme d'itération du gradient, et $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ représente l'opérateur de projection sur le domaine de codage convexe.

A partir de l'équation (8.1), nous pouvons obtenir, par différentiation dans l'espace de Fourier de la fonction énergie $g(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ en \hat{h}_n , le terme d'itération du gradient par :

$$d\hat{h}_n^{(q)} = -2\epsilon [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n \left(\hat{h}_n^{(q)} - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n \right) \quad (8.16)$$

où ϵ est un paramètre réel positif. Pour expliquer ce choix particulier, nous pouvons vérifier que cette formule de remise à jour permet de faire décroître l'énergie à chaque itération (nous négligeons pour cela l'influence de la projection) :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{h}^{(q+1)}) - g(\mathbf{u}, \mathbf{h}^{(q)}) &= 2\Re \left\{ \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n d\hat{h}_n^{(q)} \left(\hat{h}_n^{(q)} - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n \right)^* \right\} + \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n \left| d\hat{h}_n^{(q)} \right|^2 \\ &= -4\epsilon \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n^2 \left| \hat{h}_n^{(q)} - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n \right|^2 + 4\epsilon^2 \sum_n [\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n^3 \left| \hat{h}_n^{(q)} - (\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n \right|^2 \\ &= -A\epsilon + B\epsilon^2 \end{aligned}$$

Nous voyons donc que si le paramètre ϵ est suffisamment petit, cette variation est toujours négative à tous les pas de l'itération. Remarquons de plus que le choix de multiplier par $[\hat{B}_{\mathbf{u}}]_n$ dans l'expression (8.16) est arbitraire. Ce terme peut être compris comme l'importance relative de chaque fréquence à considérer pour la mise à jour du filtre.

Nous pouvons soit choisir le paramètre ϵ de façon heuristique, soit estimer sa valeur optimale, dans ce cas l'algorithme est de type gradient conjugué [31]. Nous obtenons immédiatement qu'il faut choisir $\epsilon = A/2B$. Cependant, nous avons observé en simulation que la projection modifie de façon importante cette valeur optimale de ϵ , et que l'algorithme converge plus vite en surévaluant le paramètre ϵ .

Chapitre 9

Illustration des capacités de filtrage

Dans ce chapitre, nous voulons illustrer les différences entre les architectures de corrélation du point de vue de leurs capacités de filtrage. En effet, nous avons vu dans les chapitres précédents que les contraintes de représentation des images dans les corrélateurs optiques conduisent à des solutions optimales différentes suivant l'architecture. La question qui s'ensuit naturellement est alors de savoir si les performances de ces architectures sont identiques ou si l'une d'entre elles est résolument plus efficace que les autres.

Nous donnerons une réponse très partielle à cette question, pour une application de poursuite. En effet, nous verrons que pour définir une application réaliste il est nécessaire d'employer un nombre de paramètres relativement grand, ce qui place une recherche exhaustive au delà de toute atteinte. Cependant, nous montrerons que pour chacune des architectures étudiées il existe des filtres performants dans des situations diverses. Notre volonté dans ce chapitre est bien d'*illustrer* les capacités de filtrage des architectures optiques de corrélation, et non de les caractériser.

9.1 Paramètres d'une application de poursuite

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une application de poursuite d'une cible. Nous allons expliciter la problématique que nous considérerons.

9.1.1 Décomposition des informations *a priori*

Quelle que soit l'application visée, air-air, sol-air, air-sol ou sol-sol, les images analysées ont en commun les éléments suivants :

- une **cible** recherchée ; notée **t** (de l'anglais *target*). La cible recherchée dépend naturellement de l'application considérée. Le type de la cible n'influe pas directement sur les performances des algorithmes de corrélation, mais son apparence et sa taille sont elles très importantes. En particulier le nombre de pixels effectivement utilisés est un paramètre qu'il est important de prendre en compte. La position exacte de la cible dans l'image scène analysée est inconnue, et c'est elle que nous voulons estimer.
- un modèle de cette cible, dite **référence** et que l'on note **r**. L'image de référence qui est utilisée pour le calcul des filtres de corrélation est un modèle de la cible recherchée. Elle n'est donc pas la cible elle-même, et peut être légèrement différente de la cible quand l'information disponible *a priori* n'est pas assez précise.
- un **fond** **b** (de l'anglais *background*) sur lequel se présente la cible. Le type du fond dépend très nettement de l'application considérée :

- Pour les applications air–air et sol–air, c’est à dire quand la cible est vue sur fond de ciel, les fonds sont peu structurés. Ils peuvent être par exemple constitués de nuages, de variation de luminance du fond du ciel... Ces fonds peuvent être en bonne approximation simulés par des réalisations de bruits plus ou moins colorés [28].
- Pour les applications air–sol, c’est à dire quand la cible est vue sur fond de sol, les fonds sont très structurés, par exemple constitués de végétation, de routes, d’habitations... Ces fonds ne peuvent pas être simulés simplement, nous utiliserons donc des images réelles.

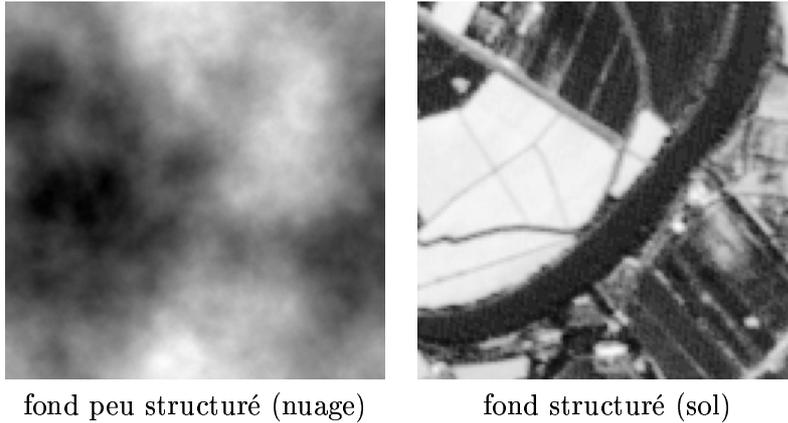


Figure 9.1 : Exemples d’images fond. L’image de gauche, le nuage, est une image synthétique obtenue comme réalisation d’un bruit coloré, ici en $1/f^4$. L’image de sol est une image réelle.

9.1.2 Modèles d’images scène

Déformation géométrique de la cible

La référence n’étant qu’un modèle approché de la cible, ces deux objets ont peu de chances d’être totalement identiques. Par rapport à la référence, nous considérerons que la cible peut subir les déformations géométriques suivantes :

- Rotation d’un angle ω dans le plan de la référence ;
- Dilatation ou réduction (homothétie) d’un facteur ρ ;
- Translation au pixel p .

Nous écrirons donc :

$$\mathbf{t} = T_p H_\rho R_\omega \mathbf{r} . \quad (9.1)$$

Cette écriture signifie que la rotation est appliquée avant l’homothétie, et la translation en dernier lieu. L’ordre d’application de la rotation et de l’homothétie est sans importance, mais la translation intervient toujours en dernier. Les trois paramètres (p, ρ, ω) jouent des rôles différents, puisque nous voulons estimer la position de la cible, c’est à dire évaluer p , mais qu’il est seulement nécessaire d’avoir une certaine *tolérance* sur la dilatation et la rotation.

Par ailleurs, nous définissons le *support* de la cible $\Sigma_{\mathbf{t}}$ comme l’image binaire qui prend la valeur 1 *dans* la cible et 0 *en dehors*. Nous pouvons définir de même le support de la référence $\Sigma_{\mathbf{r}}$. Les deux images binaires $\Sigma_{\mathbf{t}}$ et $\Sigma_{\mathbf{r}}$ vérifient la relation :

$$\Sigma_{\mathbf{t}} = T_p H_\rho R_\omega \Sigma_{\mathbf{r}} . \quad (9.2)$$

Modèles additif et disjoint de composition de la cible et du fond

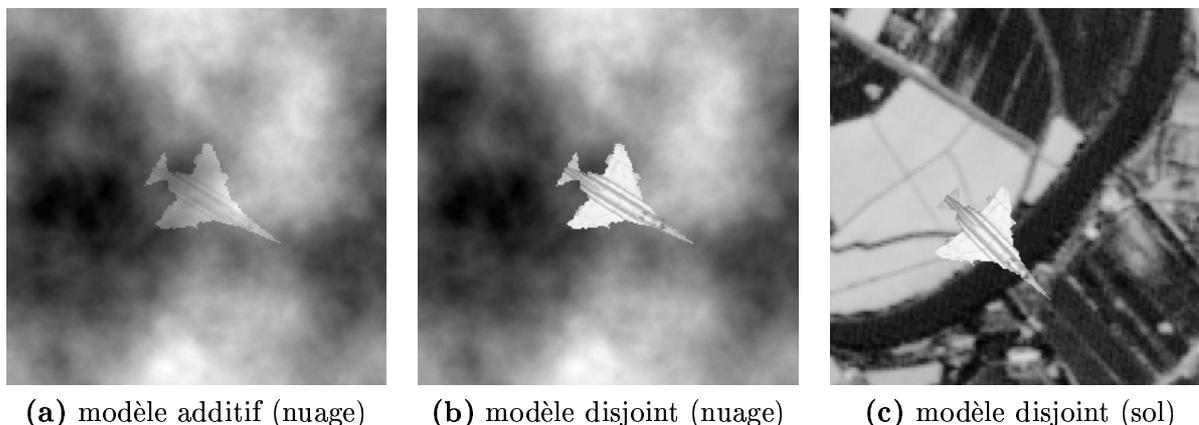


Figure 9.2 : Illustration de la différence entre les modèles additif et disjoint de composition de l'image scène.

Nous devons maintenant composer la cible et le fond pour former la scène. Pour ce faire nous considérerons deux types de situations :

- (a) Dans le cas air–air ou sol–air, la cible (l'avion) apparaît *dans* le fond (les nuages), figure 9.2–(a). Nous parlerons alors de modèle **additif** de composition de la cible et du fond, et nous écrirons :

$$\mathbf{x} = (1 - \chi) \Sigma_{\mathbf{t}} \mathbf{t} + \chi \mathbf{b} , \quad (9.3)$$

ou encore

$$\mathbf{x} = (1 - \chi) T_p H_\rho R_\omega (\Sigma_{\mathbf{r}} \mathbf{r}) + \chi \mathbf{b} . \quad (9.4)$$

Dans cette expression, χ est un paramètre qui règle la *luminance* relative de la cible et du fond. Il varie entre 0 et 1, ce qui permet de passer continûment de la référence seule au fond seul dans l'image scène. Ce paramètre χ de luminance permet de faire varier la valeur du rapport signal à bruit en entrée¹ (SNR_e) défini classiquement [28] par :

$$\text{SNR}_e = \frac{(1 - \chi)^2}{\chi^2} \frac{\left(\frac{1}{P} \sum_m t_m^2 \right)}{\left(\frac{1}{N} \sum_m b_m^2 \right)} , \quad (9.5)$$

où P est le nombre de pixels de valeur non–nulle du support de la cible et N est le nombre total de pixels de la scène. Il s'agit du rapport des puissances respectives de la cible et du fond. Lorsque le paramètre de luminance χ varie entre 0 et 1, le rapport signal à bruit en entrée SNR_e varie entre $+\infty$ et 0. En toute rigueur, pour que cette définition ait un sens, il faut supposer le fond stationnaire, afin que la valeur de SNR_e ne varie pas avec la position effective de la cible dans la scène. Cette condition n'est bien–sûr en général qu'approchée.

- (b) La cible apparaît *sur* le fond, en se détachant sur lui. Cette situation est typique des images d'une cible sur fond de sol, figure 9.2–(c), mais également d'un avion se détachant sur un nuage

¹Ce rapport signal à bruit en entrée ne doit pas être confondu avec le critère rapport signal à bruit pour l'opération de corrélation défini au chapitre 1. Ce dernier est par opposition un rapport signal à bruit en sortie.

ou le fond du ciel, figure 9.2-(b). Nous parlerons alors de modèle **disjoint** de composition de la cible et du fond, et nous écrirons :

$$\mathbf{x} = (1 - \chi) \Sigma_{\mathbf{t}} \mathbf{t} + \chi (1 - \Sigma_{\mathbf{t}}) \mathbf{b} , \quad (9.6)$$

ou encore

$$\mathbf{x} = (1 - \chi) \Sigma_{\mathbf{t}} (T_p H_\rho R_\omega \mathbf{r}) + \chi (1 - \Sigma_{\mathbf{t}}) \mathbf{b} . \quad (9.7)$$

La différence avec le modèle additif précédent réside en l'application sur le fond du *complémentaire du support de la cible* ($1 - \Sigma_{\mathbf{t}}$). Cela correspond bien au cas où la cible occulte partiellement le fond.

Contrairement au cas additif, la valeur du signal à bruit en entrée SNR_e ne représente pas fidèlement les proportions relatives de la cible et du fond. En effet, une partie variable du fond est occultée suivant la position de la cible. Il est donc nécessaire de trouver une mesure dépendant de la position de la cible dans la scène qui puisse caractériser la dynamique de la cible par rapport à celle du fond. Nous proposons d'introduire la notion de *visibilité locale* définie par :

$$V = \frac{(1 - \chi)^2 \left(\frac{1}{P} \sum_{\Sigma_{\mathbf{t}}} t_m^2 \right) - \chi^2 \left(\frac{1}{P'} \sum_{\Sigma'_{\mathbf{t}}} b_m^2 \right)}{(1 - \chi)^2 \left(\frac{1}{P} \sum_{\Sigma_{\mathbf{t}}} t_m^2 \right) + \chi^2 \left(\frac{1}{P'} \sum_{\Sigma'_{\mathbf{t}}} b_m^2 \right)} . \quad (9.8)$$

Dans cette expression, $\Sigma'_{\mathbf{t}}$ représente l'*extérieur* du support de la cible. Nous pouvons le définir de la manière suivante: nous dilatons le support de la cible jusqu'à doubler sa surface, puis nous retranchons le support de la cible. Nous obtenons ainsi globalement le même nombre de pixels pour les images binaires $\Sigma_{\mathbf{t}}$ et $\Sigma'_{\mathbf{t}}$. Cette procédure est parfaitement arbitraire, mais permet de tenir compte de l'information locale en comparant la puissance de la cible à celle du fond environnant. La visibilité locale varie entre -1 et 1 quand le paramètre de luminance χ varie entre 0 et 1^2 . Quand χ est proche de 0 , la cible est pratiquement seule présente dans la scène, et la visibilité locale est proche de 1 . Quand χ est proche de 1 , la cible se détache en noir sur le fond, et est donc très contrastée même si sa puissance est très faible, ce que traduit la valeur -1 de la visibilité. La situation la plus gênante intervient en fait quand la visibilité est proche de 0 , c'est à dire quand les puissances de la cible et du fond avoisinant s'équivalent, comme nous le montrerons. La figure 9.3 montre que pour le même rapport signal à bruit en entrée des valeurs de visibilité locale très distinctes peuvent être obtenues suivant la position de la cible dans l'image scène.

Il est clair qu'en réalité l'image observée ne se réduirait pas simplement à l'un des deux modèles additif ou disjoint que nous venons de définir. En particulier, nous n'avons pas pris en compte le bruit du capteur, l'éclairage non-uniforme de la cible... Nous avons choisi une solution de complexité intermédiaire, dépendant d'un nombre réduit de paramètres, tout en restant relativement réaliste.

9.1.3 Procédure d'évaluation

Pour évaluer l'influence des différents paramètres de composition des images scène que nous venons de décrire, nous allons procéder en en faisant varier un tout en gardant les autres fixés. Le tableau 9.1 résume les différents tests que nous allons utiliser.

²Quelle que soit la définition choisie pour $\Sigma'_{\mathbf{t}}$, cette variation est la même.

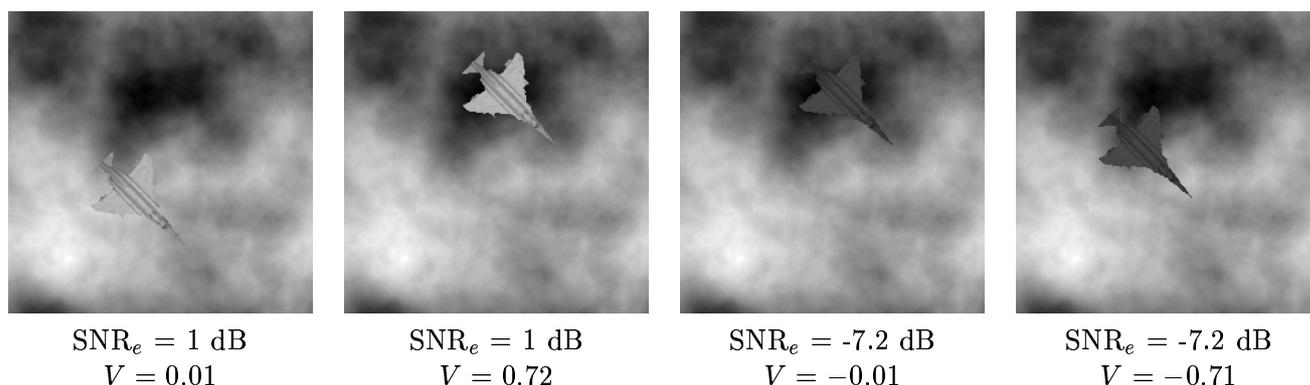


Figure 9.3 : Illustration de la différence entre rapport signal à bruit en entrée et visibilité locale.

Paramètre	Mesure	
	modèle additif	modèle disjoint
Homothétie ρ	Tolérance en échelle	
Rotation ω	Tolérance en rotation	
Luminance relative χ	SNR _e minimal	plage de visibilité V

Tableau 9.1 : Définition des tests des filtres de corrélation.

- **Tolérance en rotation** – Nous caractériserons la tolérance en rotation par l’angle limite ω dont peut tourner la cible sans que l’estimation de position donnée par la réponse du filtre devienne erronée³. Nous tiendrons compte du fond pour cette mesure.
- **Tolérance en échelle** – Nous caractériserons la tolérance en échelle des filtres de corrélation par la plage des valeurs du facteur d’échelle ρ telles que la réponse du filtre reste correcte, suivant le même critère d’échec que pour la tolérance en rotation.
- **SNR_e minimal (modèle additif)** – Pour un fond donné, nous ferons varier la luminance relative χ de la cible et du fond de 1 (cible seule) vers 0 (fond seul), ce qui permet de faire décroître la valeur du rapport signal à bruit SNR_e de $+\infty$ vers $-\infty$. La valeur limite de SNR_e au dessus de laquelle l’estimation de position est correcte fournit une mesure directe de la tolérance “au bruit” des filtres de corrélation.
- **Plage de visibilité (modèle disjoint)** – Pour un fond donné, nous ferons comme précédemment varier la luminance relative χ , ce qui permet de faire décroître la valeur de la visibilité V de 1 vers -1 . La plage de visibilité V pour laquelle l’estimation de position est correcte fournit une mesure directe de la tolérance “au contraste local” des filtres de corrélation.

³La position est considérée correcte quand l’erreur de position est inférieure à 1% de la taille de l’image (valeur arbitraire).

9.2 Filtrage représentatif de chaque architecture

9.2.1 Filtrage linéaire (CPS et SCC)

Les architectures de corrélation cohérente par synthèse de pupille (CPS) et de corrélation incohérente par ombroscopie (SCC) permettent toutes deux la représentation de filtres à compromis optimal contraints. Nous l'avons vu aux chapitres précédents, la différence entre les deux réside dans l'application de la contrainte de codage dans le domaine de Fourier (CPS) ou dans le domaine direct (SCC). Pour ces deux architectures, nous partons du même filtre à compromis optimal non-contraint donné par l'expression (7.4) :

$$(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n = \gamma \frac{\hat{r}_n}{\alpha \hat{S}_n + \beta [\hat{D}_b]_n}, \quad (9.9)$$

où nous rappelons que \hat{D}_b est la densité spectrale estimée du fond, \hat{S}_n celle du bruit et (α, β, γ) sont les coordonnées du vecteur unitaire \mathbf{u} correspondant à un compromis particulier. Nous écrirons dans ce chapitre le vecteur unitaire \mathbf{u} en coordonnées sphériques, c'est à dire que nous posons :

$$\begin{cases} \alpha &= \cos \theta \cos \phi \\ \beta &= \sin \theta \cos \phi \\ \gamma &= \sin \phi \end{cases} . \quad (9.10)$$

L'expression (9.9) devient alors :

$$\boxed{(\hat{h}_{\mathbf{u}}^0)_n = \tan \phi \frac{\hat{r}_n}{\cos \theta \hat{S}_n + \sin \theta [\hat{D}_b]_n}} . \quad (9.11)$$

Corrélation incohérente par ombroscopie (SCC) – Avec la technique bipolaire de représentation des filtres de corrélation que nous avons définie au chapitre 8, il est possible d'employer un filtre linéaire quelconque, et en particulier de la forme (9.11). Dans la partie suivante, nous montrerons expérimentalement ce résultat. Les performances de filtrage pour cette architecture sont donc par principe identiques à celles du filtrage numérique équivalent, aux erreurs expérimentales près bien entendu.

Le paramètre angulaire ϕ n'intervient pas, puisque le facteur $\tan \phi$ est fixé pour que la dynamique dans le domaine direct du filtre bipolaire corresponde au domaine de codage (filtres dits saturés, définis au chapitre 8). Par ailleurs, les domaines de codage de la scène et du filtre sont toujours en amplitude pure.

Corrélation par synthèse de pupille cohérente (CPS) – Nous avons montré au chapitre 7 que le filtre à compromis optimal contraint à un domaine de codage est défini comme la projection-rotation du filtre numérique optimal de l'expression (9.11) sur le domaine de codage du filtre. Il dépend directement du paramètre angulaire ϕ , qui règle la *saturation* des fréquences spatiales du filtre.

Le domaine de codage de la scène, qui peut être aussi varié que celui du filtre, influe directement sur le calcul du filtre et sur la corrélation mesurée. En effet, pour le calcul du filtre, l'image de référence de l'expression (9.11) doit subir l'application de la fonction de transmission du modulateur préalablement à la transformation de Fourier, car c'est l'image de référence codée qu'il s'agit de reconnaître.

9.2.2 Filtrage non-linéaire (JTC)

Pour les deux architectures précédentes, le filtre doit être calculé préalablement à son utilisation dans le corrélateur. Avec les corrélateurs par transformation de Fourier conjointe (JTC) non-linéaires, la situation est différente puisque c'est directement la référence qui est présentée à côté de la scène et

non un filtre calculé. C'est la forme de la non-linéarité qui fixe le filtrage effectivement réalisé par le corrélateur.

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre 4, il existe à l'heure actuelle deux types de corrélateurs JTC non-linéaires suivant que :

- La non-linéarité résulte d'une détection du spectre conjoint de la scène et de la référence, suivie du passage du signal électrique résultant dans une non-linéarité, et enfin d'un ré-affichage sur un second modulateur. Comme nous l'avons décrit au chapitre 4, dans le cas où la non-linéarité est une loi de puissance κ du spectre conjoint, la corrélation mesurée peut s'écrire :

$$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{(|\hat{r}_n| |\hat{x}_n|)^\kappa} . \quad (9.12)$$

- La non-linéarité résulte d'une interaction à quatre ondes dans un milieu optique non-linéaire (photo-réfractif). Dans ce cas nous avons vu au chapitre 4 que la corrélation mesurée est donnée par :

$$\hat{c}_n = \frac{\hat{r}_n^* \hat{x}_n}{\sigma^2 + |\hat{r}_n|^2 + |\hat{x}_n|^2} . \quad (9.13)$$

Dans ces deux cas, les images scène et de référence doivent subir l'application de la fonction de transmission du modulateur préalablement à la transformation de Fourier.

9.3 Cas additif

La figure 9.4 présente la séquence de test en rotation, et la figure 9.5 la séquence de test de résistance au bruit. Le tableau 9.2 résume les résultats sur ces séquences test de différents filtres. Le choix des paramètres utilisés pour ces filtres est relativement subjectif, mais ne privilégie pas spécialement un critère d'optimisation plutôt qu'un autre, en particulier la discrimination par rapport à la résistance au bruit ou inversement.

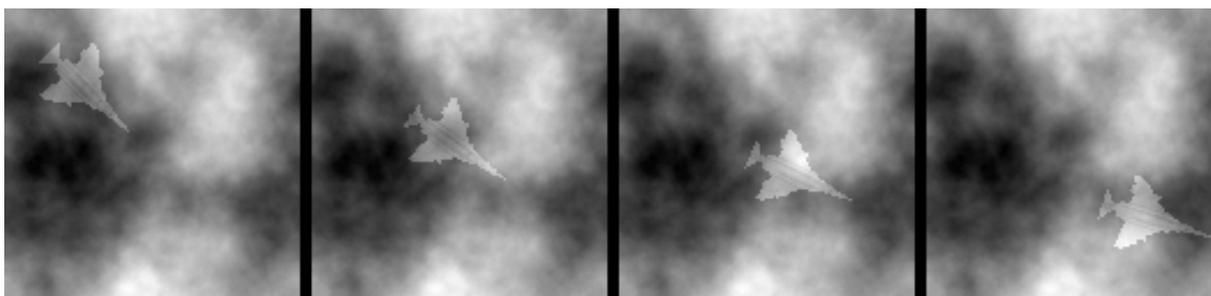


Figure 9.4 : Quelques images de la séquence de test en rotation dans le cas additif ($\omega = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 28^\circ$). La séquence va de 0° à 28° par pas de 2° . $\text{SNR}_e = -8.2$ dB sur l'ensemble de la séquence.

Filtres linéaires – Pour tous les filtres linéaires, les résultats sont nettement meilleurs quand la densité spectrale de puissance \hat{S} estimée du bruit est proche de celle du nuage synthétique utilisé pour la composition des images de la séquence. Cela implique qu'il faut connaître par avance la nature du fond. En l'absence de cette information, il est naturel de considérer un modèle de bruit blanc, c'est à dire faire le choix de ne favoriser aucune fréquence spatiale *a priori*. Ce choix conduit à des résultats moins bons qu'avec le vrai modèle de bruit, mais cependant corrects [28].

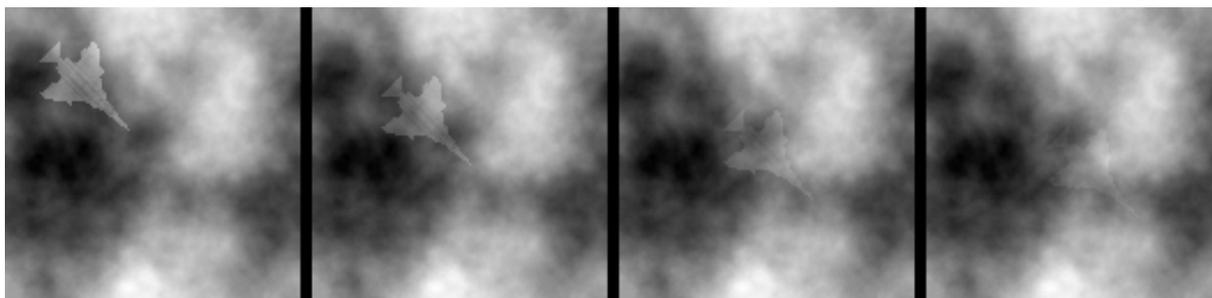
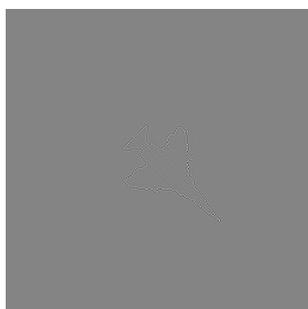
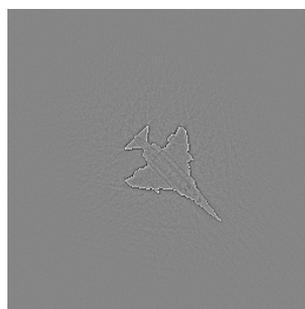


Figure 9.5 : Quelques images de la séquence de test de résistance au bruit dans le cas additif ($\text{SNR}_e = -8.2, -11.9, -16.2, -20$ dB). La séquence va de -8.2 à -36 dB, $\omega = 0$ sur l'ensemble de la séquence.



$\theta = 60^\circ$, non contraint



$\theta = 60^\circ$, $\phi = 1^\circ$, contraint dans le disque unité

Figure 9.6 : Illustration de la régularisation opérée par la projection sur le domaine de codage du filtre pour l'architecture CPS. Réponses percussionnelles des filtres pour un modèle de bruit en $1/f^4$ et une résolution des images 256 par 256 pixels.

Il est intéressant de constater que la tolérance en rotation du filtre CPS contraint dans le disque unité est nettement supérieure à celle du filtre non-contraint pour les mêmes paramètres, sans que sa résistance au fond soit par ailleurs trop détériorée. En fait, la projection sur le domaine de codage opère une *régularisation* [94, 32] du filtre, en saturant les fréquences spatiales qui contiennent trop d'énergie et peuvent fortement amplifier le bruit. La figure 9.6 illustre ce phénomène. Elle représente les réponses percussionnelles des deux filtres contraint et non-contraint. Les contours de la réponse percussionnelle sont plus épais pour le filtre contraint, ce qui explique une tendance naturelle à mieux tolérer une légère rotation de la cible.

Il apparaît clairement que le filtre de phase et le filtre binaire de phase présentent des performances largement inférieures à celles des autres filtres contraints. De plus, le choix d'un type de codage de la scène autre que l'amplitude pure ne fait que dégrader les performances des filtres linéaires [23, 77].

Filtrage non-linéaire – Il apparaît que les performances des architectures de filtrage non-linéaire sont tout à fait comparables avec celles des filtres linéaires, et ce bien qu'aucune information sur la nature du fond n'ait été utilisée pour définir le filtrage réalisé. En fait, lorsque la nature du fond est connue les filtres linéaires les moins contraints sont plus performants en ce qui concerne la résistance au bruit. Cependant, même si cela n'est pas montré dans le tableau 9.2, les filtres linéaires calculés pour un modèle de bruit blanc deviennent nettement moins performants que les solutions non-linéaires. Il est alors intéressant d'étudier ces capacités d'adaptativité pour des fonds différents. Le tableau 9.3 montre la résistance au bruit des solutions non-linéaires pour trois types de bruit, en la comparant

Filtre	Paramètres	Codage scène	Codage filtre	Angle ($^{\circ}$)	SNR _e (dB)	Échelle (%)
SCC	$\theta = 60$	amplitude	(bipolaire)	8	< -36	92 - 116
CPS	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	disque	14	< -36	92 - 120
	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	spirale	12	< -36	92 - 120
	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	ternaire	8	-29.9	88 - 120
	-	amplitude	binaire	2	-11.8	96 - 112
	-	amplitude	phase	6	-16.2	88 - 120
	$\theta = 60, \phi = 1$	spirale	spirale	10	-23.7	84 - 124
κ -NL-JTC	$\kappa = 0.7$	amplitude	amplitude	12	< -36	84 - 120
	$\kappa = 0.7$	phase	phase	10	-29.9	84 - 112
	$\kappa = 0.7$	spirale	spirale	10	-23.7	84 - 112
σ -NL-JTC	$\sigma^2 = 0.005$	amplitude	amplitude	14	-21.7	84 - 116
	$\sigma^2 = 0.005$	phase	phase	12	-26.3	84 - 112
	$\sigma^2 = 0.005$	spirale	spirale	14	-21.7	84 - 116

Tableau 9.2 : Performances des différents filtres optiques optimaux dans le cas additif, pour une application de poursuite d'un avion dans les nuages (modélisés par un bruit en $1/f^4$). Les filtres linéaires sont calculés pour un modèle de bruit en $1/f^4$. Résolution de calcul 256 par 256 pixels.

à celle des meilleures solutions linéaires. Il apparaît clairement que les solutions linéaires sont très spécialisées pour le modèle de bruit utilisé pour l'optimisation, et résistent moins bien à des situations imprévues que les solutions non-linéaires.

9.4 Cas disjoint

Pour cette étude dans le cas disjoint, nous nous intéresserons à des types de fonds variés, présentés sur la figure 9.7 :

- trois types de fond simulés par des images de bruits décorrélé (bruit blanc), légèrement corrélé (bruit en $1/f^2$) et très corrélé (bruit en $1/f^4$) ;
- un fond structuré.

La figure 9.8 présente la séquence de test en rotation pour le fond structuré, et la figure 9.9 la séquence de test de plage de visibilité pour le même fond structuré. Le tableau 9.4 résume les résultats sur les séquences test de tolérance en rotation et en échelle des mêmes filtres que dans le cas additif. Le tableau 9.5 résume les résultats sur les séquences de test de la plage de visibilité.

Les conclusions du cas additif en ce concerne la résistance à la rotation et à l'échelle restent globalement valables dans le cas disjoint. En fait, il s'avère que ces caractéristiques dépendent principalement du fond, et plus particulièrement de la valeur locale de la visibilité. En effet, si quand la cible n'est

Filtre	Paramètres	Codage scène	Codage filtre	SNR _e limite (dB)		
				fond 1/f ⁰	fond 1/f ²	fond 1/f ⁴
κ-NL-JTC	κ = 0.7	amplitude	amplitude	-26.3	-20	< -36
σ-NL-JTC	σ ² = 0.005	amplitude	amplitude	-29.9	-16.2	-21.7
SCC	θ = 60, 1/f ⁴	amplitude	(bipolaire)	> -8.2	-12	< -36
SCC	θ = 60, 1/f ⁰	amplitude	(bipolaire)	-30	-13.8	> -8.2

Tableau 9.3 : Comparaison du SNR_e limite pour les filtres non-linéaires et linéaires pour différents bruits constituant le fond. Résolution des images 256 par 256 pixels.

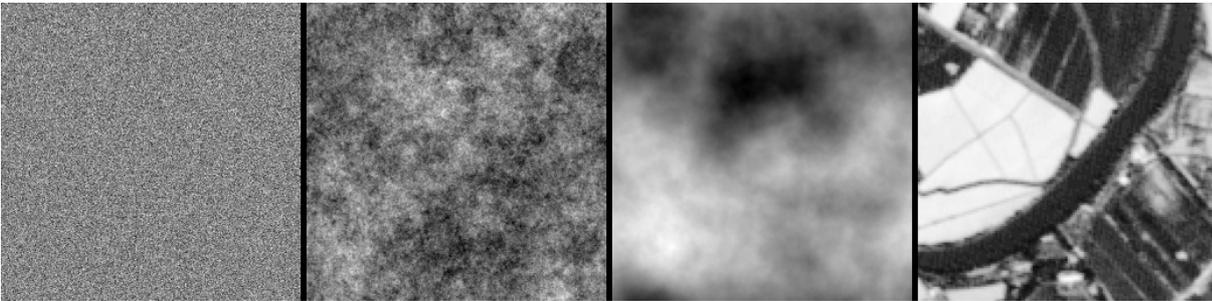


Figure 9.7 : Images fond utilisées pour les tests en modèle disjoint de composition de la cible et du fond. De gauche à droite, réalisation de bruit en 1/f⁰ (bruit blanc), en 1/f², en 1/f⁴, fond structuré.

pas tournée la corrélation échoue déjà du fait de la valeur de la visibilité, il n'y a aucune chance qu'elle réussisse quand la cible est tournée. Dans le cas additif cette remarque est également valable en remplaçant simplement la visibilité par le rapport signal à bruit en entrée SNR_e. La différence est que la plage de visibilité pour laquelle le filtre donne un résultat correct dépend de façon très critique du type de fond, ainsi que le montre le tableau 9.5, mais également des paramètres du filtrage et du codage des images. En particulier, le fond structuré semble bien plus gênant que les autres fonds étudiés, que le filtrage soit linéaire ou non-linéaire, et ce surtout pour les contrastes négatifs.

En ce qui concerne la tolérance en échelle, la visibilité varie fortement dans une séquence test avec le paramètre d'homothétie ρ . Pour la rotation par contre, la visibilité est pratiquement constante en général. La conséquence est que la tolérance en échelle dépend de façon critique du fond et qu'il est très difficile d'en faire une mesure qui ait un sens hors d'une plage expérimentale réduite. De façon générale, si l'on peut dire que dans le cas additif la dégradation des performances de filtrage varie de manière continue avec l'importance relative du fond par rapport à la cible, la situation est bien plus complexe dans le cas disjoint.

Une surprise importante provient du bon comportement du filtre de phase dans le cas disjoint, alors qu'elles étaient relativement faibles dans le cas additif. Nous ne savons pas expliquer ce résultat simplement.

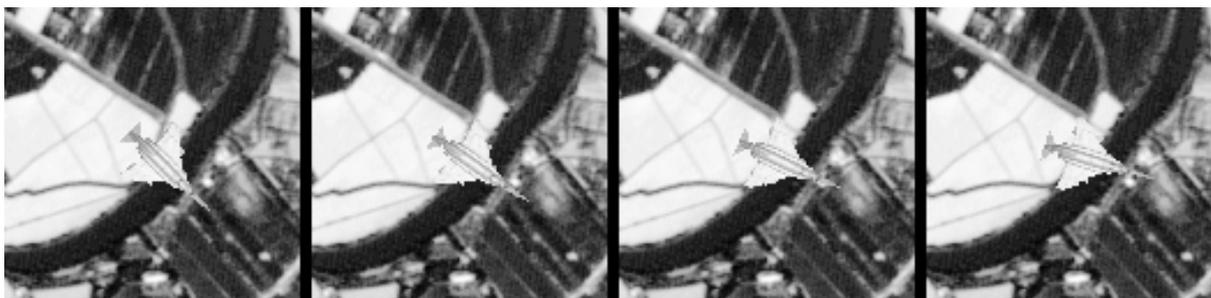


Figure 9.8 : Quelques images de la séquence de test en rotation dans le cas disjoint sur fond structuré ($\omega = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 28^\circ$). La séquence va de 0° à 28° par pas de 2° . $V = 0$ sur l'ensemble de la séquence.

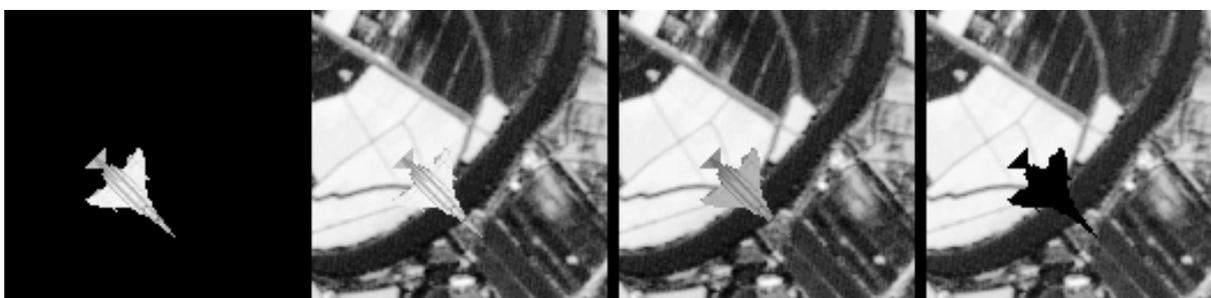


Figure 9.9 : Quelques images de la séquence de test de résistance à la visibilité dans le cas disjoint sur fond structuré ($V = 1, 0, -0.27, -1$). La séquence va de $V = 1$ à -1 . $\omega = 0$ sur l'ensemble de la séquence.

9.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré les performances de filtrage des différentes architectures de corrélation optique pour une application de poursuite d'une cible. Les tests qui ont été effectués ne correspondent pas aux critères ayant servi à la définition des filtres, mais à des conditions opérationnelles de l'application de poursuite :

- Nous avons considéré des déformations géométriques de la cible, rotation et homothétie, et mesuré les tolérances à ces perturbations.
- Nous avons défini deux modèles de composition de l'image scène, additif (la cible apparaît *dans* le fond) et disjoint (la cible apparaît *sur* le fond). Nous avons vu que les résultats obtenus sont relativement différents dans ces deux cas. Dans le cas disjoint, nous avons introduit un nouveau critère, la *visibilité*, qui mesure le contraste local de la cible par rapport au fond.

Nous avons vu que le nombre de paramètres nécessaires pour définir une application de poursuite simple est trop important pour espérer réaliser une évaluation exhaustive des performances de filtrage des différentes solutions de filtrage. C'est pourquoi nous avons fait le choix de quelques tests particuliers. De plus nous n'avons pas cherché à optimiser les paramètres des filtres pour chaque situation différente.

Les critères que nous avons utilisés pour comparer les filtres de corrélation sont la robustesse à la rotation, la résistance au bruit et l'influence de la taille de l'image dans la scène par rapport à celle de la référence. Ce dernier critère n'est pas vraiment discriminant dans la mesure où tous les filtres étudiés

Filtre	Paramètres	Codage		Angle (°)		Échelle (%)	
		scène	filtre	$1/f^4$	struct.	$1/f^4$	struct.
SCC	$\theta = 60$	amplitude	(bipolaire)	4	18	76 – 128	76 – 136
CPS	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	disque	10	16	76 – 128	76 – 136
	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	spirale	10	10	76 – 128	96 – > 140
	$\theta = 60, \phi = 1$	amplitude	ternaire	6	0	76 – 128	–
	–	amplitude	binaire	4	4	72 – 128	84 – 128
	–	amplitude	phase	12	14	76 – 128	76 – 128
	$\theta = 60, \phi = 1$	spirale	spirale	10	2	76 – 120	88 – 132
κ -NL-JTC	$\kappa = 0.7$	amplitude	amplitude	10	16	76 – 120	84 – 128
	$\kappa = 0.7$	phase	phase	8	8	72 – 120	84 – 120
	$\kappa = 0.7$	spirale	spirale	4	10	76 – 120	80 – 120
σ -NL-JTC	$\sigma^2 = 0.005$	amplitude	amplitude	12	8	76 – 120	76 – 120
	$\sigma^2 = 0.005$	phase	phase	6	8	76 – 128	84 – 132
	$\sigma^2 = 0.005$	spirale	spirale	6	8	76 – 120	76 – 120

Tableau 9.4 : Performances en rotation des différents filtres dans le cas disjoint. Les filtres linéaires sont adaptés au fond de test. Résolution des images 64 par 64 pixels.

tolèrent une variation d'environ 20% autour de la taille de la référence. De même, en ce qui concerne la rotation, quasiment tous les filtres ont un angle limite de rotation dont la valeur oscille autour de 10° . C'est donc la robustesse au bruit qui permet de différencier notablement les performances de ces filtres. Ce résultat n'est pas étonnant dans la mesure où les critères habituellement utilisés pour l'optimisation des filtres de corrélation prennent en compte la résistance au bruit de façon explicite (critères de type SNR et discrimination du fond PBCE), mais ne supposent pas de modèle explicite des déformations que la cible peut subir par rapport à la référence.

Nous avons montré que les filtres non-linéaires, et plus particulièrement le filtre de Javidi pour une puissance $\kappa = 0.7$, le filtre NL-JTC avec un coefficient σ proche de 0,005 sont généralement plus performants que les filtres linéaires, quel que soit le modèle de construction utilisé pour les images scène, quand la nature du fond est inconnue. Par contre, la connaissance à priori de la densité spectrale du fond pour les filtres linéaires permet d'atteindre le niveau de résultat des filtres non-linéaires dans le cas disjoint, voir de le dépasser dans le cas additif.

La nouvelle classe des algorithmes de filtrage adaptatifs ouvre des perspectives très intéressantes pour la corrélation optique mais également pour les systèmes numériques de reconnaissance de formes. Elle donne l'espoir d'aller au delà des limitations classiques du filtrage linéaire. C'est de notre point de vue la direction la plus fructueuse pour les futures études en corrélation, ou de façon plus appropriée en "filtrage global".

Filtre	Paramètres	Cod. scène	Cod. filtre	plage d'échec en visibilité V			
				$1/f^0$	$1/f^2$	$1/f^4$	fond struct.
SCC	$\theta = 80$	amp.	(bipo.)	$[-0.09, -0.04]$	$[-0.21, -0.04]$	–	$[-0.76, -0.07]$
CPS	$\theta = 60, \phi = 1$	amp.	disque	$[-0.09, -0.04]$	$[-0.21, -0.04]$	$[-0.06, 0.06]$	$[-0.76, -0.07]$
	$\theta = 60, \phi = 1$	amp.	spir.	$[-0.09, 0]$	$[-0.3, -0.13]$	$[0.06, 0.13]$	$[-0.88, 0]$
	$\theta = 60, \phi = 1$	amp.	tern.	$[-0.04, 0]$	$[-1, 1]$	$[0.03, 0.11]$	$[-1, 0.16]$
	–	amp.	bin.	$[-0.09, 0]$	$[-0.3, 0.17]$	$[-0.49, 0.22]$	$[-0.75, 0.04]$
	–	amp.	phase	$[-0.09, 0]$	$[-0.21, 0.08]$	$[-0.13, 0.11]$	$[-0.44, 0.07]$
	$\theta = 20, \phi = 1$	spir.	spir.	$[-0.09, -0.04]$	$[-1, -0.17]$	–	$[-1, 0.04]$
κ -NL-JTC	$\kappa = 0.7$	amp.	amp.	$[-0.09, -0.04]$	$[-0.12, 0.08]$	–	$[-0.44, -0.03]$
	$\kappa = 0.7$	phase	phase	$[0, 0.11]$	$[-0.3, 0.13]$	–	$[-1, -0.6]$
	$\kappa = 0.7$	spir.	spir.	–	$[-0.3, 0.08]$	–	$[-1, -0.76]$
σ -NL-JTC	$\sigma^2 = 0.005$	amp.	amp.	$[-0.09, 0.04]$	$[-0.3, 0.13]$	$[-0.01, 0.06]$	$[-0.44, 0]$
	$\sigma^2 = 0.005$	phase	phase	$[0.04, 0.11]$	$[-0.43, 0.17]$	–	$[-1, -0.6]$
	$\sigma^2 = 0.005$	spir.	spir.	–	$[-1, 0.13]$	–	$[-1, -0.76]$

Tableau 9.5 : Performances en visibilité des différents filtres dans le cas disjoint. Les filtres linéaires sont adaptés au fond de test. Résolution des images 64 par 64 pixels.

Partie III

Corrélation incohérente par ombroscopie

Dans les chapitres qui suivent, nous proposons une modélisation de l'architecture de corrélation optique incohérente, fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie. Supposant une structure pixelisée des différents éléments d'affichage et de capture des images à corrélérer, nous introduisons une formulation discrète de l'opération de corrélation optique. Les effets physiques, liés à la diffraction et aux non-uniformités photométriques dans le montage, sont ainsi représentés par des matrices agissant sur les images d'entrée pour former l'image de corrélation.

Cette modélisation de l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie est ensuite appliquée à l'étude d'un montage de corrélation optique reprogrammable. Nous exposons comment la nécessité de réaliser un compromis entre effets liés à la diffraction et aux non-uniformités photométriques conduit au choix des dimensions géométriques du montage. Des expériences illustrent les performances d'un tel corrélateur utilisant la méthode de filtrage multi-critères contrainte décrite dans la seconde partie.

Chapitre 10

Étude géométrique de l'ombroscopie

Dans ce chapitre, je présente une étude géométrique du montage de corrélation optique incohérent fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie, ou projection d'ombre. La portée de cette étude est plus générale que sa seule application à la corrélation, puisque, nous le verrons, le principe de l'ombroscopie permet de réaliser d'autres types de calculs optiquement.

L'originalité de cette étude, par rapport aux modèles classiques connus depuis longtemps, réside en la prise en compte de la nature discrète de l'information traitée qui résulte de l'utilisation de composants pixélisés pour la représentation des images.

10.1 Principe de la corrélation par ombroscopie

10.1.1 Historique

Les systèmes optiques fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie sont connus depuis longtemps, en fait depuis au moins 1943 [1]. Ils permettent d'obtenir très simplement le produit de corrélation ou de convolution de deux images représentées dans l'espace objet [57]. En tant que corrélateurs, ils furent tout d'abord utilisés en cristallographie pour l'analyse de clichés de diffraction en rayons X [1, 35]. En dehors de son application à la corrélation, le principe de l'ombroscopie a été étudié pour réaliser optiquement des opérations logiques [59], de morphologie mathématique [101], ou encore de substitution symbolique [60]. En fait, comme nous le verrons plus loin, il est possible de réaliser une transformation bilinéaire relativement quelconque de deux images, dont les exemples précédemment cités sont des cas particuliers.

Pour la corrélation, les architectures fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie ont été presque complètement délaissées au profit des architectures cohérentes depuis l'apparition des sources lasers. Nous reviendrons sur les raisons de cet abandon à la fin de ce chapitre.

Le plus simple des montages fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie est représenté sur la figure 10.1. Il se compose de trois plans. Dans le premier, que nous noterons \mathcal{P}_1 , se trouve une source *diffuse*. Celle-ci peut être constituée par exemple par un tube de type télévision (CRT¹) [61], par une matrice de diodes laser ou de diodes électroluminescentes (LED²) [102], ou encore par une transparence ou un SLM suivi d'un diffuseur [103, 104]. Dans ce dernier cas, cet ensemble est éclairé par une source primaire. La figure 10.2 résume ces diverses possibilités.

Dans un second plan \mathcal{P}_2 à une distance d se trouve un autre SLM ou une transparence, et dans un troisième plan \mathcal{P}_3 à une distance p se trouve un écran ou une caméra. La distance d est toujours positive, mais la distance p peut être aussi bien positive que négative. Dans ce dernier cas, le plan \mathcal{P}_3 doit être observé grâce à un système optique additionnel, figure 10.3–(a).

¹ *Cathode Ray Tube.*

² *Light Electroluminescent Diode.*

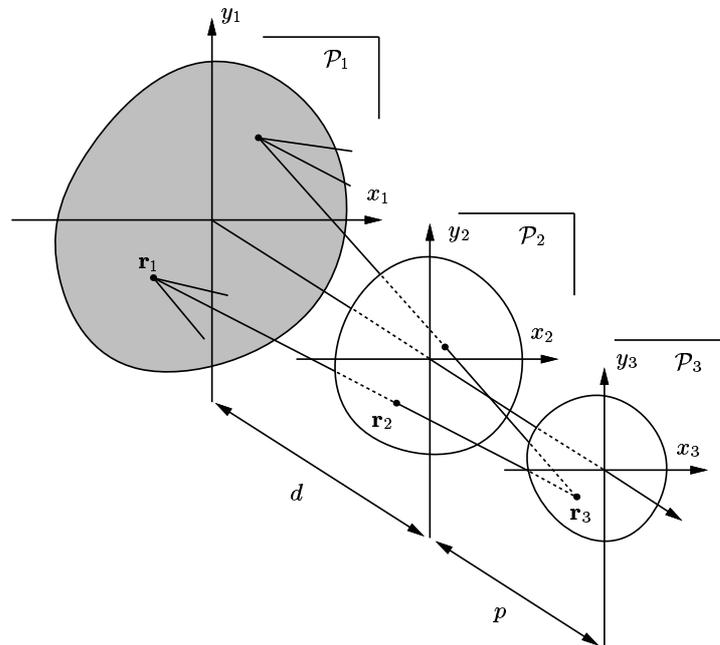


Figure 10.1 : Principe de l'ombroscopie. Ce schéma général comporte trois plans. Dans le premier, \mathcal{P}_1 , se trouve une source diffuse. Dans le second, \mathcal{P}_2 , se trouve une transmittance. Enfin dans le dernier, \mathcal{P}_3 , est placé un écran ou une caméra.

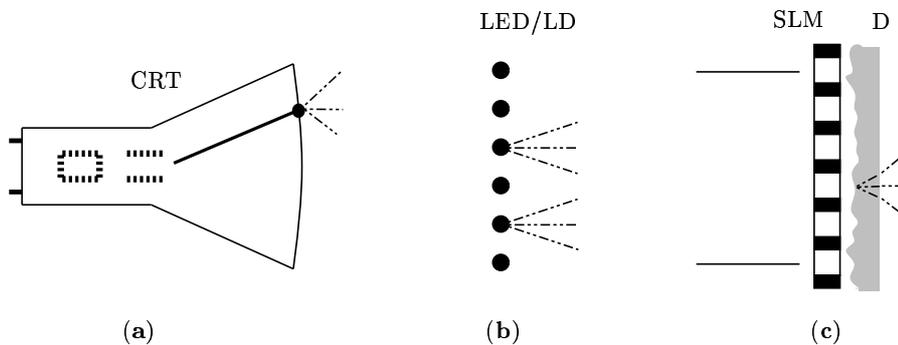


Figure 10.2 : Différentes possibilités pour réaliser la source diffuse du plan \mathcal{P}_1 . (a) – tube CRT; (b) – matrice de LED ou de diodes laser (LD); (c) – SLM suivi d'un diffuseur (D).

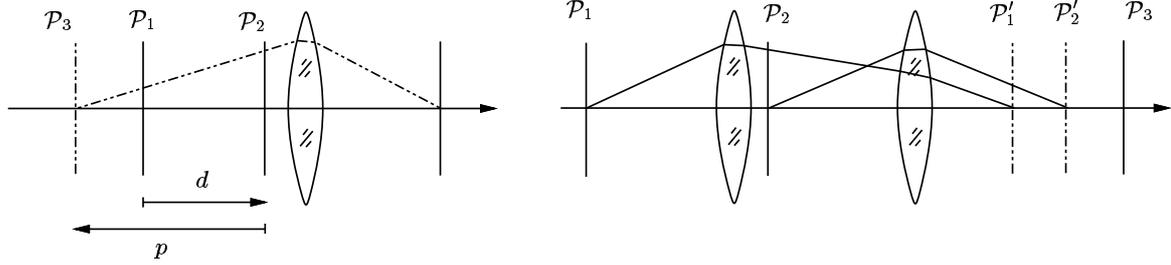


Figure 10.3 : Variations sur le thème de l'ombroscopie. (a) – la distance p est négative, le plan de détection \mathcal{P}_3 doit être observé grâce à un système optique additionnel ; (b) – si des lentilles sont placées entre les trois plans \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 , il suffit de considérer les images de ces plans.

Le premier plan étant une source diffuse, c'est à dire que la condition d'incohérence spatiale est supposée vérifiée, le système se comporte plus ou moins selon les lois de l'optique géométrique, suivant le rapport des longueurs caractéristiques du montage avec la longueur d'onde utilisée. Cela implique qu'il faut prendre en compte la diffraction pour une analyse plus détaillée. Nous reviendrons plus loin sur ce problème. Pour commencer, nous allons nous intéresser au principe purement géométrique de l'ombroscopie.

Le système de base de la figure 10.1 peut être généralisé [61, 105, 57] en introduisant une lentille, ou même plusieurs lentilles, entre la source et le plan intermédiaire, et entre le plan intermédiaire et le plan de détection, figure 10.3–(b). En considérant les images \mathcal{P}'_1 et \mathcal{P}'_2 des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 à travers les lentilles, on se ramène alors simplement au cas de la figure 10.1, du moins du point de vue de l'optique géométrique. Dans tout ce qui suivra, nous ne considérerons que le cas simple de la figure 10.1, et nous indiquerons le cas échéant comment nos résultats seraient modifiés dans le cas général.

10.1.2 Description

Afin d'analyser le principe de l'ombroscopie, raisonnons en termes d'optique géométrique. Avec les notations de la figure 10.1, un rayon émis par le point \mathbf{r}_1 , de coordonnées (x_1, y_1) , du plan de la source diffuse, et arrivant au point \mathbf{r}_3 du plan de détection intercepte le plan intermédiaire au point \mathbf{r}_2 tel que :

$$\boxed{\frac{\mathbf{r}_2}{d'} = \frac{\mathbf{r}_1}{d} + \frac{\mathbf{r}_3}{p}}, \quad (10.1)$$

où la distance algébrique d' est définie par :

$$\boxed{\frac{1}{d'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p}}. \quad (10.2)$$

Considérons les surfaces élémentaires $d\mathbf{r}_1$ and $d\mathbf{r}_3$ centrées aux points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_3 . La source et le système optique peuvent être caractérisés par le flux élémentaire $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_3$ qui est émis dans l'élément de surface $d\mathbf{r}_1$ et reçu par l'élément de surface $d\mathbf{r}_3$. La quantité photométrique $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)$ a la dimension d'une puissance rapportée à une distance à la puissance 4. Deux transmittances M_1 and M_2 sont placées respectivement dans les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . L'éclairement au point \mathbf{r}_3 est alors donné par la contribution de tous les éléments source $d\mathbf{r}_1$:

$$E(\mathbf{r}_3) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{r}_1 \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) M_1(\mathbf{r}_1) M_2 \left(d' \left(\frac{\mathbf{r}_1}{d} + \frac{\mathbf{r}_3}{p} \right) \right). \quad (10.3)$$

Cette expression montre que l'opération réalisée par ombroscopie est de façon générale, et dans la limite de l'approximation géométrique, une transformation bilinéaire, avec un noyau positif ξ , de deux

fonctions positives M_1 and M_2 . Le noyau ξ inclut tout ce qui concerne la photométrie du montage, c'est à dire les caractéristiques de la source diffuse, ainsi que celles des diaphragmes et des lentilles éventuels dans le cas général. C'est ce noyau qu'il est possible de façonner afin de réaliser une certaine opération. C'est ainsi que sont réalisées les opérations logiques, de morphologie mathématique, ou encore de substitution symbolique que nous citons plus haut. Pour la corrélation, il faut imposer que ξ soit constante.

Introduisons les signes ϵ et ϵ' définis par :

$$\begin{cases} \frac{d'}{d} = \epsilon \frac{|d'|}{d}, & \epsilon = \pm 1, \\ \frac{d'}{p} = \epsilon' \frac{|d'|}{|p|}, & \epsilon' = \pm 1. \end{cases} \quad (10.4)$$

Les valeurs que peuvent prendre les signes ϵ et ϵ' sont résumées dans la table 10.1.

p	$-\infty \dots -d$	$-d \dots 0$	$0 \dots +\infty$
ϵ	+	-	+
ϵ'	-	+	+

Tableau 10.1 : Valeurs des signes ϵ et ϵ' en fonction de la distance p séparant le plan \mathcal{P}_2 du plan \mathcal{P}_3 .

L'expression (10.3) devient :

$$E(\mathbf{r}_3) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{r}_1 \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) M_1(\mathbf{r}_1) M_2 \left(\epsilon \frac{|d'|}{d} \mathbf{r}_1 + \epsilon' \frac{|d'|}{|p|} \mathbf{r}_3 \right). \quad (10.5)$$

Prenons le cas de la corrélation ou de la convolution. Supposons que nous ayons pu réaliser un noyau $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)$ constant – nous ne précisons pas de quelle façon pour le moment, nous reviendrons sur ce point au chapitre 12. Définissons le grandissement :

$$G = \frac{d}{|d'|} = \left| \frac{d+p}{p} \right|, \quad (10.6)$$

et supposons que la transmittance M_2 est identique à la transmittance M_1 , mais agrandie d'un facteur G . Nous voyons alors grâce à l'expression (10.4) que nous obtenons l'auto-corrélation de M_1 si $\epsilon = 1$, et l'auto-convolution si $\epsilon = -1$. Si $\epsilon' = -1$, la corrélation ou la convolution est observée inversée par rapport à l'origine du plan \mathcal{P}_3 .

L'importance cruciale du facteur de grandissement G apparaîtra dans le chapitre suivant quand nous prendrons en compte les effets de la diffraction.

10.2 Influence de la pixélisation

Nous particularisons maintenant notre étude au cas où les trois plans possèdent une structure pixélisée.

10.2.1 Relation entrée-sortie

Comme nous venons de le voir, l'opération réalisée est par essence continue. Si la description dans le cadre de l'optique géométrique que nous avons utilisée était valable, nous pourrions utiliser une résolution arbitraire pour chacune des fonctions en entrée, et par suite nous obtiendrions également une résolution arbitraire en sortie. Green [106] a analysé les effets de la diffraction sur la résolution

qui peut être utilisée dans chaque plan. À cet effet, il a proposé de considérer des cellules de résolution circulaires dans les deux premiers plans, et de définir la résolution en sortie dans le troisième plan par la condition que les taches élémentaires de diffraction soient résolues. Plus récemment, Raj *et al.* [102] ont proposé une analyse similaire dans le cas où la source diffuse du premier plan est constituée d'une matrice de sources élémentaires éparses³, par exemple une matrice de LED ou de diodes laser. Nous reprendrons à la fin de ce chapitre les résultats de leurs analyses.

En poursuivant leur idée, nous pouvons remarquer qu'en général les SLM où les sources modulées, comme les tubes CRT, et les matrices de LED ou de diodes laser, sont des composants discrets par nature. Nous entendons par là que même si la lumière modulée peut et doit être décrite par une fonction continue, l'amplitude complexe de l'onde dans l'approximation scalaire de l'optique physique, l'information en entrée du composant est une image au sens du traitement numérique d'images, c'est à dire que c'est une liste, ou une matrice, de valeurs scalaires, en général réelles. C'est le cas, par exemple, lorsque la modulation de la transmission des pixels du composant dépend d'une tension appliquée.

Nous noterons I_1 et I_2 les images inscrites sur les modulateurs des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . De plus, quand une caméra, par exemple une caméra CCD, est utilisée dans le plan de sortie, l'éclairement est lui-même échantillonné, c'est à dire intégré sur chaque pixel de la caméra, et en sortie nous obtenons une image I_3 . Il est ainsi clair que le nombre de pixels dans chaque plan définit la résolution maximale qu'il est possible d'atteindre avec un tel processeur. Mais, du point de vue de l'optique physique, la résolution effective du système est imposée par les effets de diffraction.

Par la suite, nous considérerons que les trois plans sont pixélisés. Ainsi, il est possible d'imaginer que notre système est une boîte noire, qui reçoit deux images en entrée, et produit une image en sortie. De la sorte, il s'agit d'un processeur d'images, pour lequel il faut trouver une relation entre entrée et sortie, cette relation étant discrète *par nature*. Toutes les quantités décrivant le montage ainsi que les effets physiques intervenant devront être ainsi inclus dans la relation entrée-sortie sous forme de paramètres. Notre but en recherchant une telle relation est de prévoir et de simuler le comportement du système en fonction de sa fonctionnalité. Étant donnée une application définie, c'est à dire étant données la résolution et les caractéristiques des images à traiter, nous voudrions pouvoir déterminer les caractéristiques géométriques du montage à utiliser.

10.2.2 Notations

Considérons maintenant comment l'image en entrée I_1 est utilisée dans le premier plan pour moduler la source. Une fonction pixel élémentaire p_1 est répétée périodiquement sur une maille rectangulaire de période \mathbf{b}_1 , ainsi qu'il est représenté sur la figure 10.4. La fonction pixel p_1 est binaire⁴ et ne se recouvre pas avec ses voisins. Le pixel \mathbf{m} du modulateur reçoit l'élément d'image $I_1(\mathbf{m})$, et par suite la lumière émise par la source est modulée par une transmission en intensité $T_1(I_1(\mathbf{m}))$, et ce de façon uniforme à l'intérieur du pixel. Cette transmission est une quantité réelle variant entre 0 and 1. Nous considérerons par la suite le vecteur sans dimension \mathbf{R}_1 de coordonnées $X_1 = x_1/b_{1x}$ et $Y_1 = y_1/b_{1y}$. Avec ce modèle, la fonction M_1 peut être écrite :

$$M_1(\mathbf{R}_1) = \sum_{m_x=-M_x}^{M_x} \sum_{m_y=-M_y}^{M_y} T_1(I_1(\mathbf{m})) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) ,$$

ou en notation abrégée :

$$\boxed{M_1(\mathbf{R}_1) = \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) .} \quad (10.7)$$

L'image en entrée I_1 est constituée de $(2M_x + 1)$ par $(2M_y + 1)$ pixels. Par la suite, nous écrirons toujours implicitement $\sum_{m_x=-M_x}^{M_x} \sum_{m_y=-M_y}^{M_y} = \sum_{\mathbf{m}}$.

³Il s'agit là d'une traduction approximative de l'anglais *dilute light-source array*.

⁴C'est à dire qu'elle peut prendre uniquement les valeurs 0 ou 1.

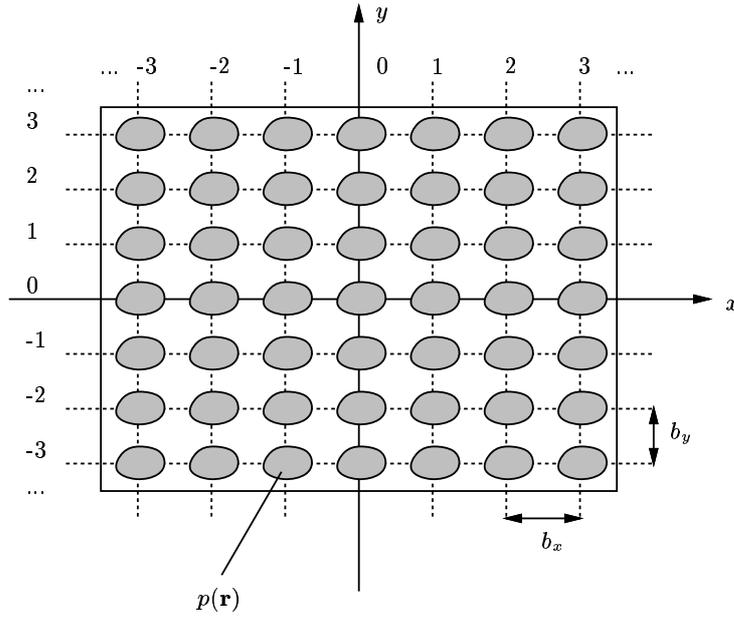


Figure 10.4 : Structure de chacun des trois plans pixelisés. La fonction pixel élémentaire p est répétée périodiquement le long des axes x (période b_x) et y (période b_y) sur une maille rectangulaire. Les pixels sont numérotés à partir de l'axe optique.

Le plan intermédiaire possède une structure semblable, et nous pouvons écrire de façon similaire à l'expression (10.7) pour la fonction M_2 :

$$M_2(\mathbf{R}_2) = \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}) , \quad (10.8)$$

où l'image en entrée I_2 possède $(2N_x + 1)$ par $(2N_y + 1)$ pixels, et T_2 est la transmission en intensité du second modulateur. Le vecteur sans dimension \mathbf{R}_2 est défini par ses coordonnées $X_2 = x_2/b_{2x}$ et $Y_2 = y_2/b_{2y}$, où \mathbf{b}_2 est la période de la maille du plan \mathcal{P}_2 .

Dans le plan de détection, nous supposons que les pixels p_3 sont également répétés sur une maille rectangulaire de période \mathbf{b}_3 . L'image en sortie I_3 comporte $(2K_x + 1)$ par $(2K_y + 1)$ pixels et est donnée par :

$$I_3(\mathbf{k}) = S_3 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 E(\mathbf{R}_3) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) , \quad (10.9)$$

c'est à dire l'éclairement intégré sur la surface du k -ième pixel de détection. $S_3 = b_{3x}b_{3y}$ est la surface telle que $d\mathbf{r}_3 = S_3 d\mathbf{R}_3$. Par la suite, nous écrirons de façon similaire $S_1 = b_{1x}b_{1y}$ et $S_2 = b_{2x}b_{2y}$.

10.2.3 Pixels infiniment petits

Considérons tout d'abord que les trois fonctions pixel p_1 , p_2 and p_3 sont des fonctions de Dirac. Cette hypothèse n'est, bien entendu, pas du tout physique. Cependant, il est possible d'imaginer des pixels infiniment petits, même si lorsque leur surface tend vers 0 de moins en moins de lumière peut atteindre le troisième plan, et y être détectée. Dans ce cas, l'expression (10.5) devient :

$$E(\mathbf{R}_3) \propto \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) S_1 \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) \delta\left(\frac{d'}{d} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} \mathbf{R}_1 + \frac{d'}{p} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_2} \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}\right) ,$$

$$E(\mathbf{R}_3) \propto S_1 \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) \xi(\mathbf{m}, \mathbf{R}_3) \delta\left(\frac{d'}{d} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} \mathbf{m} + \frac{d'}{p} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_2} \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}\right) .$$

Dans ces expressions, le facteur de proportionnalité tend vers 0 avec la surface des pixels. Par ailleurs, par souci de concision, nous employons la notation abusive :

$$\frac{d'}{d} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} \mathbf{m} + \frac{d'}{p} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_2} \mathbf{R}_3 - \mathbf{n} ,$$

pour représenter le vecteur à deux composantes radiales :

$$\left(\frac{d'}{d} \frac{b_{1x}}{b_{2x}} m_x + \frac{d'}{p} \frac{b_{3x}}{b_{2x}} R_{3x} - n_x ; \frac{d'}{d} \frac{b_{1y}}{b_{2y}} m_y + \frac{d'}{p} \frac{b_{3y}}{b_{2y}} R_{3y} - n_y \right) .$$

À partir de l'expression (10.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{k}) &\propto S_3 E(\mathbf{k}) \\ &\propto S_1 S_3 \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) \xi(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \delta \left(\frac{d'}{d} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} \mathbf{m} + \frac{d'}{p} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_2} \mathbf{k} - \mathbf{n} \right) , \end{aligned} \quad (10.10)$$

Si toute l'information contenue dans les images en entrée I_1 and I_2 doit être utilisée par le système, à tous pixels \mathbf{m} et \mathbf{n} des images en entrée doit correspondre un pixel \mathbf{k} de l'image de sortie tel que :

$$\mathbf{n} = \frac{d'}{d} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} \mathbf{m} + \frac{d'}{p} \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_2} \mathbf{k} . \quad (10.11)$$

L'expression (10.11) est une version discrète de l'expression continue (10.1), et il est facile de montrer qu'elle implique :

$$\boxed{\mathbf{b}_2 = \left| \frac{d'}{d} \right| \mathbf{b}_1 = \left| \frac{d'}{p} \right| \mathbf{b}_3 ,} \quad (10.12)$$

ou encore :

$$\boxed{\mathbf{b}_2 = \frac{1}{G} \mathbf{b}_1 = \frac{|G - \epsilon|}{G} \mathbf{b}_3 ,} \quad (10.13)$$

Cette condition revient à dire que deux des trois mailles rectangulaires portant les pixels doivent être images dans une homothétie centrée à l'origine de celle qui reste, comme le représente la figure 10.5. Si nous avons considéré des mailles de formes arbitraires à la place de mailles rectangulaires, cette condition serait toujours valable. Cela implique que les trois mailles portant les pixels doivent être identiques à un facteur d'échelle près, donné par la relation (10.12) ou (10.13). L'expression (10.11) devient alors simplement :

$$\boxed{\mathbf{n} = \epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k} ,} \quad (10.14)$$

qui représente la correspondance géométrique entre pixels, et l'expression (10.10) se réduit à :

$$I_3(\mathbf{k}) \propto S_1 S_3 \sum_{\mathbf{m}} \xi(\mathbf{m}, \mathbf{k}) T_1(I_1(\mathbf{m})) T_2(I_2(\epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k})) . \quad (10.15)$$

Cette expression est une version discrète de l'expression (10.5), quand chacune des trois fonctions pixel est très petite, et ne résulte en fait que de la structure maillée des trois plans. Elle prend la forme d'une transformation bilinéaire, mais agissant cette fois sur des images et non plus sur des transmittances.

10.2.4 Limite de l'optique géométrique

Étendons maintenant le résultat précédent à des fonctions pixel de formes quelconques. Nous conservons la condition d'homothétie (10.12) ou (10.13) que doivent vérifier les mailles des trois plans. L'expression (10.5) de l'éclairement dans le plan de détection devient, en remplaçant les transmittances M_1 et M_2 par leurs expressions (10.7) et (10.8) :

$$E(\mathbf{R}_3) = \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) S_1 \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) p_2(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) .$$

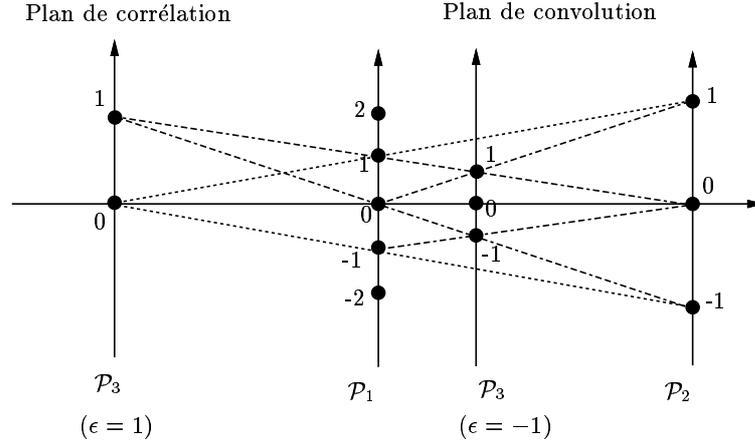


Figure 10.5 : Condition d'homothétie entre les mailles portant les pixels des trois plans \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 .

Et par suite l'expression (10.9) donnant l'image en sortie devient :

$$I_3(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) S_1 S_3 \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 \xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) p_2(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) . \quad (10.16)$$

Nous supposons que la fonction ξ , qui est caractéristique de la photométrie du montage, varie lentement à l'échelle des mailles portant les pixels, de sorte que $\xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3)$ peut être remplacée par $\xi(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ à l'intérieur des pixels \mathbf{m} et \mathbf{k} des plans source et de détection. Cette approximation est en général valable, pourvu que les pixels soient suffisamment nombreux dans chaque plan. Nous définissons alors la quantité :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = S_1 S_3 \xi(\mathbf{m}, \mathbf{k}) , \quad (10.17)$$

qui est représentative du flux lumineux contenu dans le pinceau de rayons joignant le pixel émetteur \mathbf{m} au pixel récepteur \mathbf{k} , et possède la dimension d'une puissance. Nous pouvons alors écrire :

$$I_3(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} T_2(I_2(\mathbf{n})) Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) p_2(\epsilon(\mathbf{R}_1 + \mathbf{m}) + \epsilon'(\mathbf{R}_3 + \mathbf{k}) - \mathbf{n}) . \quad (10.18)$$

En introduisant :

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} - \epsilon \mathbf{m} - \epsilon' \mathbf{k} , \quad (10.19)$$

l'expression (10.18) devient :

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) T_1(I_1(\mathbf{m})) \mathcal{G}[I_2](\epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k}) ; \\ \mathcal{G}[I_2](\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) T_2(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q})) ; \\ A(\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) p_2(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) . \end{aligned} \quad (10.20)$$

L'expression (10.20) est la généralisation de l'expression (10.15) pour des fonctions pixel arbitraires dans la limite de l'optique géométrique. Elle affecte toujours la forme d'une transformation bilinéaire,

mais agissant cette fois-ci sur l'image $\mathcal{G}[I_2]$ au lieu de l'image $T_2(I_2)$. Les coefficients $A(\mathbf{q})$ sont sans dimension et positifs, vérifient $\sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) \leq 1$, et s'annulent dès que $|q_x|$ ou $|q_y|$ dépassent 1, ainsi qu'il est démontré en annexe. Ainsi, l'image $\mathcal{G}[I_2]$ est le résultat d'un filtrage passe-bas de l'image $T_2(I_2)$, et plus précisément une convolution avec un noyau de flou de taille $3 * 3$. De façon intuitive, l'effet maximal de ce flou sera atteint pour les fonctions pixel les plus larges, c'est à dire pour :

$$\begin{cases} p_1(\mathbf{R}_1) = \text{rect}(\mathbf{R}_1) \\ p_2(\mathbf{R}_2) = \text{rect}(\mathbf{R}_2) \\ p_3(\mathbf{R}_3) = \text{rect}(\mathbf{R}_3) \end{cases}$$

Dans ce cas, il est facile de montrer que le noyau de flou est :

$$A \propto \begin{pmatrix} 1/64 & 6/64 & 1/64 \\ 6/64 & 36/64 & 6/64 \\ 1/64 & 6/64 & 1/64 \end{pmatrix}$$

et dans ce cas seulement $\sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) = 1$.

En tout état de cause, cet effet de flou géométrique n'est jamais très important, et ne réduit pas de façon très significative la résolution en sortie. Nous allons voir en fait que les limitations qu'imposent la diffraction peuvent être bien plus sévères.

10.3 Première étude de la résolution de l'ombroscopie

Green [106] a étudié la résolution maximale que le principe de l'ombroscopie permet d'atteindre. Son analyse est fondée sur le critère de Rayleigh, qui permet classiquement d'estimer le nombre de points résolubles en présence de diffraction [107].

Il considère des cellules de résolution circulaires dans les deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 . Avec nos notations, cela revient à considérer des pixels de forme circulaire, centrés sur les noeuds de mailles carrées, de pas $b_{1x} = b_{1y} = 2\rho_1$ et $b_{2x} = b_{2y} = 2\rho_2$. À l'aide du critère de Rayleigh, Green montre alors que :

$$\rho_1 \rho_2 = \alpha \lambda d, \quad (10.21)$$

où λ est la longueur d'onde d'éclairage, et α est une certaine constante, que l'on considère en général égale à 0.61^5 [108]. Avec nos notations, nous pouvons encore écrire cette relation sous la forme :

$$S_1 S_2 = 4 \alpha^2 \lambda^2 d^2 \quad (10.22)$$

À partir des formes équivalentes (10.21) ou (10.22), il est alors possible de calculer le produit des nombres de cellules de résolution disponibles dans les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . En effet, ces nombres sont avec nos notations :

$$\begin{cases} (2M_x + 1)(2M_y + 1) = \frac{\mathcal{A}_1}{S_1}, \\ (2N_x + 1)(2N_y + 1) = \frac{\mathcal{A}_2}{S_2}, \end{cases} \quad (10.23)$$

où \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont les surfaces utiles des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Par suite, nous obtenons :

$$\boxed{(2M_x + 1)(2M_y + 1)(2N_x + 1)(2N_y + 1) = \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{4 \alpha^2 \lambda^2 d^2}} \quad (10.24)$$

⁵Cette valeur correspond à la demi-largeur de la tache d'Airy.

Prenons un exemple numérique. Supposons que dans les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 soient placés des modulateurs carrés de 2 centimètres de côté, que la distance d soit de 5 cm et que la longueur d'onde soit de 0.5 μm . En supposant de plus $M_x = M_y = N_x = N_y$, il vient :

$$2M_x + 1 \approx 115 ,$$

c'est à dire qu'il est possible d'utiliser des images de 115 par 115 pixels environ dans chacun des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 suivant cette estimation. Ce nombre correspond à un diamètre d'environ 175 μm pour les pixels.

Il faut noter que le nombre de cellules de résolution donné par la relation (10.24) ne dépend pas de la distance du second plan à la caméra, ou de façon équivalente du facteur de grandissement G . Ce dernier peut être utilisé en fait pour répartir différemment la résolution totale disponible entre les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Par exemple pour $G = 2$, nous pourrions utiliser 57 par 57 pixels pour la première image, et 227 par 227 pixels pour la seconde. Nous verrons l'intérêt d'une telle procédure au chapitre 13.

Il faut garder à l'esprit que l'estimation de la résolution des montages ombroscopiques fournie par la relation (10.24) n'est qu'approximative, et est particularisée pour les pixels de forme circulaire. Nous introduisons au chapitre suivant un calcul exact, bien que moins immédiat, de cette résolution, pour des pixels de forme quelconque.

10.4 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une étude géométrique du principe de l'ombroscopie, dans le cas où les trois plans source, intermédiaire et de détection sont pixélisés. Les deux principaux résultats qui ressortent de cette étude sont que :

- les mailles portant les pixels des trois plans doivent être homothétiques, c'est à dire identiques à un facteur d'échelle près ;
- l'effet de la taille finie des pixels se traduit par un flou géométrique de l'image inscrite dans le plan intermédiaire, ce flou étant faible car résultant de la convolution de l'image avec un noyau de taille 3 par 3 pixels au plus.

Nous avons clos ce chapitre par une première étude simplifiée de la perte de résolution que cause la diffraction. L'ordre de grandeur pour le nombre de pixels résolus qui en découle, montre que l'ombroscopie ne peut pas prétendre au traitement d'images de forte résolution, à la différence de l'optique cohérente. L'intérêt de l'ombroscopie réside plutôt dans la compacité et le faible coût des montages qu'elle autorise.

Le chapitre qui suit propose un calcul exact des effets de la diffraction, qui permet une estimation plus précise de la perte de résolution.

10.A Annexe : coefficients de convolution dans la limite géométrique

Les coefficients $A(\mathbf{q})$ définis par l'expression (10.20) :

$$A(\mathbf{q}) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) p_2(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) ,$$

s'annulent dès que $|q_x|$ ou $|q_y|$ dépassent 1. En effet, puisque les fonctions pixel $p_1(\mathbf{R}_1)$ et $p_3(\mathbf{R}_3)$ sont nécessairement nulles en dehors du carré $[-0.5, 0.5]^2$, en raison de la condition de non-recouvrement des pixels, la quantité $\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}$ prend ses valeurs dans $[-1 - q_x, 1 - q_x] * [-1 - q_y, 1 - q_y]$, qui

est un carré qui n'a pas d'intersection avec le plus grand support possible du pixel p_2 , $[-0.5, 0.5]^2$, si $|q_x|$ ou $|q_y|$ dépassent 1. Cela montre que A est une matrice d'au plus $3 * 3$ éléments. De plus,

$$\sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) \sum_{\mathbf{q}} p_2(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) .$$

La condition de non-recouvrement impose que la fonction $\sum_{\mathbf{q}} p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{q})$ est majorée par 1, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) &\leq \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) \\ &\leq 1 . \end{aligned}$$

Chapitre 11

Ombre et diffraction

Dans ce chapitre, je propose une étude précise des effets de la diffraction, dans la limite de l'approximation de Fresnel de la diffraction, pour les montages optiques fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie. Ce formalisme est adapté au cas où les trois plans source, intermédiaire et de détection sont pixélisés.

Je montre que la relation entrée–sortie, reliant les deux images en entrée des modulateurs à l'image en sortie de la caméra, prend la forme d'une transformation bilinéaire agissant sur l'image du plan source et l'ombre de l'image du plan intermédiaire. Cette ombre est la fonction de transfert *discrète* du système, c'est une image qui se déduit de l'image intermédiaire par l'action d'un tenseur d'ordre 4, dont les coefficients ne dépendent que de la géométrie du montage. Cette écriture permet de simuler très efficacement le système, mais également d'estimer précisément la perte de résolution causée par la diffraction.

11.1 Expression de la diffraction

11.1.1 Fonction de transfert incohérente

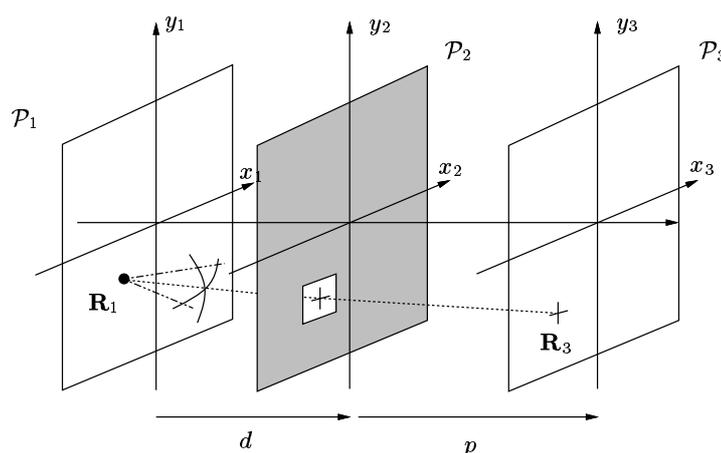


Figure 11.1 : Diffraction d'une onde sphérique par un pixel du second plan.

Nous conservons les notations introduites dans le chapitre précédent pour les différentes quantités physiques et les paramètres géométriques du montage.

L'hypothèse d'incohérence spatiale de la lumière émise par la source diffuse du plan \mathcal{P}_1 permet de considérer que tous les points sources sont indépendants, et donc que leurs contributions s'ajoutent

en intensité.

Considérons un point source \mathbf{R}_1 du plan \mathcal{P}_1 , figure 11.1. L'onde sphérique émise au point \mathbf{R}_1 est diffractée par les pixels du second plan \mathcal{P}_2 . Nous supposons que nous pouvons utiliser l'approximation scalaire de Fresnel¹ de la diffraction, qui est valable [107] dans notre cas sous les deux conditions suivantes :

- les dimensions des pixels du second plan sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde moyenne d'éclairage ;
- l'ouverture angulaire du montage n'est pas trop importante.

Dans le cadre de l'approximation de Fresnel, comme il est montré en annexe, la fonction de transfert incohérente qui décrit la propagation du point source \mathbf{R}_1 au point de détection \mathbf{R}_3 peut être écrite :

$$H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) = \left| \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) F_\lambda(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) \right|^2, \quad (11.1)$$

où la sommation discrète sur \mathbf{n} représente la contribution de tous les pixels du second modulateur, et :

$$F_\lambda(\mathbf{U}) = \frac{S_2}{\lambda|d'|} \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(\frac{i\pi b_{2x}^2}{\lambda|d'|} (X_2 - U_x)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi b_{2y}^2}{\lambda|d'|} (Y_2 - U_y)^2\right), \quad (11.2)$$

est l'amplitude complexe de la tache de diffraction de Fresnel dans le plan \mathcal{P}_3 créée par la diffraction de l'onde sphérique issue de l'origine du plan \mathcal{P}_1 par un unique pixel p_2 centré à l'origine du plan \mathcal{P}_2 . Cette écriture repose sur l'invariance par translation des effets de diffraction, qui est une conséquence de l'approximation de Fresnel : si le point source ou le centre du pixel diffractant sont déplacés, la tache de diffraction ne change pas de forme, mais son centre se déplace simplement suivant les lois de l'optique géométrique. La tache de diffraction F_λ est indicée par la longueur d'onde car sa forme dépend de celle-ci.

Quand on considère l'influence de tous les pixels du second plan, leurs contributions s'ajoutent de façon *cohérente*, ce qu'exprime l'expression (11.1). Cela provient de ce que tous ces pixels diffractent la *même* onde sphérique. Leurs contributions sont de plus pondérées par la transmission *en amplitude* $t_2(I_2(\mathbf{n}))$ du second modulateur au pixel \mathbf{n} .

11.1.2 Propagation du flux lumineux

Dans le chapitre précédent, où nous avons étudié les propriétés géométriques de l'ombroscopie, nous n'avons pas considéré l'influence du contenu spectral de la source. Cependant, comme nous l'avons remarqué plus haut, la fonction de transfert incohérente H_λ dépend de la longueur d'onde. L'expression de l'image en sortie (10.9) du chapitre précédent peut être réécrite :

$$I_3(\mathbf{k}) = S_3 \int B(\lambda) d\lambda \int_{\mathcal{P}_3} E_\lambda(\mathbf{R}_3) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{R}_3, \quad (11.3)$$

où $B(\lambda)$ représente le *spectre* de la source si celle-ci est temporellement incohérente, et $B(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ si l'éclairage est quasi-monochromatique autour de la longueur d'onde λ_0 . La fonction $B(\lambda)$ est supposée normée par :

$$\int B(\lambda) d\lambda = 1. \quad (11.4)$$

L'expression (11.3) représente toujours l'éclairement dans le plan de détection intégré sur la surface du pixel \mathbf{k} , la contribution de chaque longueur d'onde s'ajoutant indépendamment de ses consœurs.

¹Ou approximation de Huygens–Fresnel–Kirchoff [107].

E_λ représente l'éclairement à la longueur d'onde λ , et peut être obtenu en généralisant l'expression (10.5) du chapitre précédent :

$$E_\lambda(\mathbf{R}_3) = S_1 \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) M_1(\mathbf{R}_1) H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) . \quad (11.5)$$

Une telle équation peut être écrite grâce à l'hypothèse d'incohérence spatiale de la source. En effet, chaque point source \mathbf{R}_1 , qui intervient avec le poids $M_1(\mathbf{R}_1)$, c'est à dire la transmission en intensité au point \mathbf{R}_1 , crée la répartition d'éclairement $H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3)$ dans le plan de détection sous la seule action de la diffraction. Le facteur photométrique $\xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3)$ intervient pour corriger la contribution relative de chacun des *canaux* liant un point source et un point de détection. L'hypothèse de variation lente du facteur photométrique $\xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3)$ implique ici que la propagation du flux lumineux ne dépend pas du chemin effectivement pris par la lumière pour aller du point \mathbf{R}_1 au point \mathbf{R}_3 . Cela signifie que nous devons nous placer dans un cas de diffraction *faible*, où les "rayons" contribuant effectivement à former la tache de diffraction de Fresnel ne s'écartent pas trop de la condition de l'optique géométrique. Nous verrons plus loin ce qu'une telle condition suppose, et comment elle peut être quantifiée.

11.1.3 Relation entrée–sortie

Comme il est montré en annexe, l'expression (10.20) du chapitre précédent, qui donne la relation entrée–sortie discrète dans le cadre de l'approximation géométrique, devient dans le cadre de l'approximation de Fresnel de la diffraction :

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) T_1(I_1(\mathbf{m})) \mathcal{O}[I_2](\epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k}) , \\ \mathcal{O}[I_2](\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}'} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') t_2(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q})) t_2^*(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q}')) , \\ V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= \int B(\lambda) d\lambda \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 \\ &\quad p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) F_\lambda(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) F_\lambda^*(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{q}') . \end{aligned} \quad (11.6)$$

Le facteur photométrique Q , qui mesure le flux lumineux se propageant du pixel \mathbf{m} du plan source au pixel \mathbf{k} du plan de détection, a été défini au chapitre précédent par la relation (10.17) :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = S_1 S_3 \xi(\mathbf{m}, \mathbf{k}) .$$

Les expressions (11.6) constituent la relation entrée–sortie discrète des systèmes ombroscopiques pixelisés dans le cadre de l'approximation de Fresnel de la diffraction. En dépit de leur apparente complexité, ces expressions possèdent un sens physique relativement simple.

- En supposant que le facteur photométrique Q soit constant, et que seul le pixel source central soit allumé, il est facile de voir que $\mathcal{O}[I_2]$ serait l'image en sortie du système. L'image $\mathcal{O}[I_2]$ peut donc être interprétée comme l'*ombre* de l'image I_2 projetée sur les pixels de détection par un unique pixel source. Il s'agit en quelque sorte de la version discrète de la fonction de transfert incohérente du système.
- Les uniformités photométriques sont quant à elles regroupées dans le noyau Q . L'hypothèse de variabilité lente de cette "enveloppe" photométrique permet de séparer les effets photométriques des effets de diffraction, pourvu que nous soyons dans un régime de diffraction *faible*, ainsi que nous l'avons noté plus haut. La transformation bilinéaire que la relation discrète entrée–sortie

définit opère sur les images $T_1(I_1)$ et $\mathcal{O}[I_2]$. À la différence du résultat similaire donné par l'expression (10.20) dans le cadre de l'approximation géométrique, c'est l'ombre de l'image I_2 qui intervient, et non plus directement l'image I_2 elle-même. Il faut noter également que l'ombre dépend du codage en amplitude et non du codage en intensité du second modulateur.

- Les coefficients $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ qui relient l'image en entrée I_2 à son ombre $\mathcal{O}[I_2]$ contiennent toutes les informations relatives à la géométrie du montage et aux effets de la diffraction. Il est possible de les interpréter de la façon suivante. Étant donné un pixel source \mathbf{m} et un pixel de détection \mathbf{k} , un rayon allant du centre du pixel \mathbf{m} au centre du pixel \mathbf{k} passerait par le centre du pixel du plan intermédiaire $\mathbf{n} = \epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k}$ dans le cadre de l'approximation géométrique. Mais en raison de la diffraction, les interférences des ondes qui sont passées à travers les pixels $\mathbf{n} + \mathbf{q}$ et $\mathbf{n} + \mathbf{q}'$, voisins du pixel \mathbf{n} , sont enregistrées par le pixel \mathbf{k} du plan de détection, et contribuent d'une quantité proportionnelle à $2\text{Re}\{V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') t_2(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q})) t_2^*(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q}'))\}$, où $\text{Re}\{z\}$ représente la partie réelle du nombre complexe z . À mesure que \mathbf{q} et \mathbf{q}' deviennent importants, le coefficient $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ tend vers 0. V est de façon générale un tenseur d'ordre 4, et son extension, que l'on peut définir par les indices \mathbf{q} et \mathbf{q}' pour lesquels $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ n'est pas négligeable, est représentative de l'importance des effets de diffraction dans le système. Elle détermine au final la résolution effective de l'opération bilinéaire réalisée. Nous donnerons plus loin des exemples de ce phénomène de perte de résolution due à la diffraction.

En pratique, l'expression (11.6) permet de simuler efficacement le comportement d'un système optique fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie. Cette formulation discrète offre les avantages suivants :

- La solution discrète (11.6) est exacte, dans la limite de l'approximation de Fresnel. Il faut noter qu'elle englobe au total 9 intégrations continues et 6 sommations discrètes. Une méthode de simulation classique, telle une méthode de lancer de rayons qui équipe différents logiciels de calcul optique, monopoliserait un ordinateur pendant un temps infiniment plus long.
- Les coefficients $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ peuvent être tabulés une fois pour toute pour un montage donné, et ce de façon indépendante des images I_1 et I_2 qui sont inscrites sur les modulateurs. De plus, le calcul de l'ombre de l'image I_2 est fait de façon indépendante de l'image I_1 .

11.1.4 Propriétés des coefficients de diffraction

Quelles que soient les formes des pixels $p_1(\mathbf{R}_1)$, $p_2(\mathbf{R}_2)$ et $p_3(\mathbf{R}_3)$, les coefficients de diffraction $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ vérifient la propriété de symétrie hermitienne :

$$V(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = V^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}') . \quad (11.7)$$

De plus, ils peuvent être reliés aux coefficients de flou géométrique $A(\mathbf{q})$ introduits au chapitre précédent dans la limite de l'optique géométrique, au travers des relations :

$$\sum_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) , \quad (11.8)$$

$$\sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 0 . \quad (11.9)$$

Les démonstrations de ces propriétés sont données en annexe.

Il est également possible de retrouver le résultat du chapitre précédent, qui avait été obtenu dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, à la limite où la longueur d'onde tend vers 0. En effet, on peut montrer en théorie des distributions la propriété suivante :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{S_2}{\lambda |d'|} \exp \left(\frac{i\pi b_{2x}^2}{\lambda |d'|} (X_2 - U_x)^2 \right) \exp \left(\frac{i\pi b_{2y}^2}{\lambda |d'|} (Y_2 - U_y)^2 \right) \right] = \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{U}) .$$

Cette limite doit être comprise au sens des distributions. En utilisant l'expression (11.2), on obtient alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [F_\lambda(\mathbf{U})] = \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{U}) = p_2(\mathbf{U}) .$$

En posant formellement $B(\lambda) = \delta(\lambda)$, il vient :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')] = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) p_2(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) p_2(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}') .$$

Les pixels du second modulateur étant disjoints, l'expression précédente n'est non nulle que si $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$, et nous avons alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} [V(\mathbf{q}, \mathbf{q})] &= A(\mathbf{q}) , \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} [V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')] &= 0 \quad \text{si } \mathbf{q}' \neq \mathbf{q} . \end{aligned}$$

Ceci montre que l'opérateur \mathcal{O} , qui décrit l'effet de la diffraction, s'identifie avec l'opérateur de flou géométrique \mathcal{G} défini au chapitre précédent, à la limite où la longueur d'onde tend vers 0.

11.2 Cas des pixels rectangulaires

Le cas particulier des pixels rectangulaires est très important en pratique, car la grande majorité des SLM et des caméras, du moins les caméras CCD, utilisent de tels pixels. Cette forme particulière permet de simplifier le calcul des coefficients de diffraction comme nous allons le montrer, et permet d'obtenir des règles quantitatives pour mesurer la perte de résolution associée à la diffraction.

11.2.1 Expression en fonction de l'intégrale de Fresnel

Si les pixels du plan intermédiaire \mathcal{P}_2 sont de forme rectangulaire, nous pouvons écrire :

$$p_2(\mathbf{R}_2) = \text{rect}\left(\frac{X_2}{\tau_{2x}}\right) \text{rect}\left(\frac{Y_2}{\tau_{2y}}\right) , \quad (11.10)$$

où les paramètres τ_{2x} et τ_{2y} représentent les *taux de remplissage* des pixels, ce sont des nombres sans dimension compris entre 0 et 1. Les dimensions des pixels sont alors :

$$\begin{cases} a_{2x} = \tau_{2x} b_{2x} , \\ a_{2y} = \tau_{2y} b_{2y} . \end{cases} \quad (11.11)$$

La figure 11.2-(a) schématise cette situation. La fonction pixel rectangulaire possède la propriété d'être séparable, ce qui permet de simplifier les calculs qui vont suivre. La tache de diffraction de Fresnel devient dans ce cas :

$$F_\lambda(\mathbf{U}) = \frac{b_{2x} b_{2y}}{\lambda |d'|} \int_{-\frac{\tau_{2x}}{2}}^{\frac{\tau_{2x}}{2}} dX_2 \exp\left(\frac{i\pi b_{2x}^2}{\lambda |d'|} (X_2 - U_x)^2\right) \int_{-\frac{\tau_{2y}}{2}}^{\frac{\tau_{2y}}{2}} dY_2 \exp\left(\frac{i\pi b_{2y}^2}{\lambda |d'|} (Y_2 - U_y)^2\right) . \quad (11.12)$$

Définissons les coefficients de Fresnel α_x et α_y par :

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{\tau_{2x} b_{2x}}{\sqrt{\lambda |d'|}} = \frac{a_{2x}}{\sqrt{\lambda |d'|}} , \\ \alpha_y = \frac{\tau_{2y} b_{2y}}{\sqrt{\lambda |d'|}} = \frac{a_{2y}}{\sqrt{\lambda |d'|}} . \end{cases} \quad (11.13)$$

Nous verrons plus loin que les valeurs des coefficients de Fresnel α_x et α_y sont caractéristiques de l'importance de la diffraction. Introduisons la fonction intégrale de Fresnel [109] définie par :

$$\psi(\nu) = \int_0^\nu \exp(i\pi t^2) dt . \quad (11.14)$$

Cette fonction est tabulée dans de nombreux ouvrages, ou peut aisément être évaluée par un développement en série limitée ou asymptotique. Au final, l'expression (11.11) peut s'écrire :

$$F_\lambda(\mathbf{U}) = \tau_{2x}\tau_{2y} \left[\psi\left(\alpha_x\left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} + \frac{1}{2}\right)\right) - \psi\left(\alpha_x\left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \left[\psi\left(\alpha_y\left(\frac{U_y}{\tau_{2y}} + \frac{1}{2}\right)\right) - \psi\left(\alpha_y\left(\frac{U_y}{\tau_{2y}} - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad (11.15)$$

Cette expression permet de calculer très simplement la tache de diffraction de Fresnel d'un pixel rectangulaire. Elle dépend des deux paramètres réduits α_x et α_y , ainsi que des taux de remplissage du second modulateur τ_{2x} et τ_{2y} . Nous allons voir l'influence de ces paramètres sur la perte de résolution.

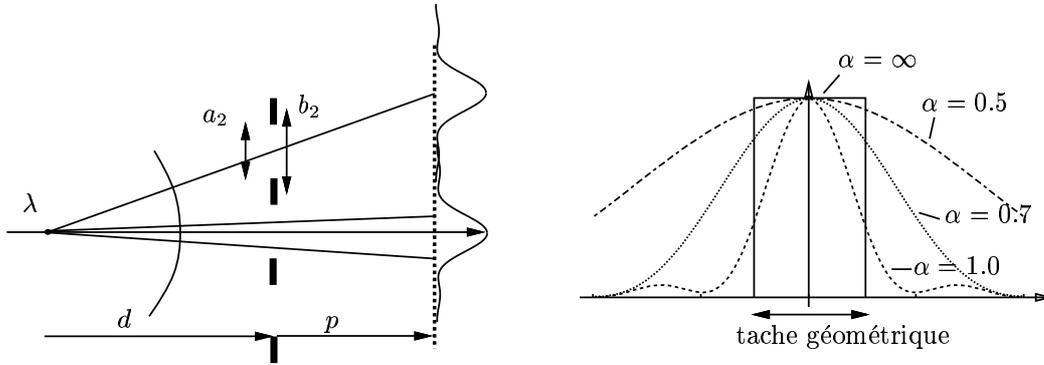


Figure 11.2 : (a) – Représentation schématique de la diffraction par une structure de pixels rectangulaires, vue en coupe. Le taux de remplissage τ_2 est défini comme le rapport de la largeur d'un pixel sur l'espacement entre pixels. (b) – Vue en coupe de la tache de diffraction de Fresnel, en fonction du coefficient de Fresnel α . Plus la valeur de α est faible, plus la tache s'élargit.

11.2.2 Estimation de la résolution

La fonction intégrale de Fresnel étant impaire, on vérifie facilement que la fonction F_λ est paire :

$$F_\lambda(-\mathbf{U}) = F_\lambda(\mathbf{U}) .$$

De plus, comme il est montré en annexe, les extremums de F_λ seront obtenus pour :

$$\begin{cases} U_x = \frac{\tau_{2x}}{\alpha_x^2} z_x , z_x \in \mathbb{T} , \\ U_y = \frac{\tau_{2y}}{\alpha_y^2} z_y , z_y \in \mathbb{T} . \end{cases} \quad (11.16)$$

Nous obtenons les minimums pour z_x ou z_y impair, et les maximums pour z_x ou z_y pair.

La figure 11.2-(b) représente des vues en coupe du module carré de la fonction F_λ pour différentes valeurs du coefficient de Fresnel α , et pour $\tau_2 = 1$. Quand $\alpha = \infty$ nous sommes dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, et l'ombre d'un pixel projetée dans le plan de détection

n'est pas déformée, c'est à dire qu'elle reste rectangulaire. À mesure que la valeur du coefficient de Fresnel α décroît, l'ombre du pixel s'élargit : elle devient de plus en plus "floue".

Nous proposons de caractériser l'importance de ce flou suivant les axes x et y par les valeurs des coefficients réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} . En effet, le premier minimum de la fonction F_λ intervient, comme l'indique l'expression (11.15), pour $z_x = 1$ suivant l'axe x , c'est à dire pour $U_x = (\alpha_x^2/\tau_{2x})^{-1}$. La fonction F_λ étant paire, la quantité α_x^2/τ_{2x} mesure approximativement l'inverse de sa largeur à mi-hauteur suivant l'axe x . De façon similaire, le premier minimum de la fonction F_λ suivant l'axe y intervient pour $U_y = (\alpha_y^2/\tau_{2y})^{-1}$, et cette quantité mesure approximativement l'inverse de sa largeur à mi-hauteur suivant l'axe y .

Le tableau 11.1 résume cette estimation de l'importance de l'effet de la diffraction en fonction des valeurs des paramètres réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} .

α_x^2/τ_{2x} ou α_y^2/τ_{2y}	$0 \leftarrow$	≈ 1	$\rightarrow \infty$
Régime	diffraction de Fraunhofer	diffraction de Fresnel	optique géométrique
Flou de l'ombre	très important	intermédiaire	faible

Tableau 11.1 : Régime de diffraction et importance du flou de l'ombre en fonction des paramètres réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} .

Il est possible d'exprimer les paramètres réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} sous plusieurs formes équivalentes, qui permettent de juger de l'influence des différents facteurs géométriques d'un système ombroscopique sur l'importance de la diffraction. Par exemple pour α_x^2/τ_{2x} :

$$\alpha_x^2/\tau_{2x} = \frac{1}{\tau_{2x}} \frac{a_{2x}^2}{\lambda|d'|} = \frac{G}{\tau_{2x}} \frac{a_{2x}^2}{\lambda d} = G \frac{a_{2x} b_{2x}}{\lambda d}, \quad (11.17)$$

où G , défini au chapitre précédent par l'équation (10.6), est le facteur de grandissement de l'image présentée sur le premier modulateur par rapport à l'image présentée sur le second modulateur. Rappelons que pour G et d fixés, la distance p du second modulateur à la caméra est fixée.

Ces relations permettent de prévoir simplement l'importance de la perte de résolution liée à la diffraction pour un montage donné. Le choix d'un modulateur pourra être guidé par les considérations suivantes :

- plus les pixels sont petits, plus le flou de l'ombre sera important ;
- plus le taux de remplissage du modulateur (la surface occupée par les pixels) sera important, plus le flou de l'ombre sera important.

De façon similaire, le dimensionnement du montage devra tenir compte des indications suivantes :

- bien évidemment, pour les longueurs d'onde courtes, le flou de l'ombre sera moins important ;
- plus la distance séparant les deux premiers plans sera courte, moins le flou de l'ombre sera important ;
- plus le facteur de grandissement de la première image par rapport à la seconde sera grand, moins le flou de l'ombre sera important ; de façon équivalente, plus la caméra est proche, moins le flou de l'ombre sera important.

Pour connaître exactement la perte de résolution, il est nécessaire de calculer les coefficients de diffraction du tenseur V . En effet, nous l'avons remarqué plus haut, le nombre des coefficients du tenseur $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ dont la valeur n'est pas négligeable permet une estimation directe de la perte de résolution associée à la diffraction. L'expression (11.6) des coefficients $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ fait intervenir une double intégration sur la surface des pixels du plan source et des pixels de détection. En fait, comme nous l'avons vérifié en simulation, plus les taux de remplissage de ces plans sont petits, moins la perte de résolution est importante. En contrepartie, les pertes photométriques par effet de masquage sont plus importantes dans ce cas.

En déclarant négligeables les coefficients de diffraction $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ dont le module est mille fois plus faible que celui du coefficient central $V(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, et pour des taux de remplissage des plans source et de détection proches de 1, nous avons obtenu une estimation de la taille du tenseur V en fonction des coefficients réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} . Le tableau 11.2 présente cette estimation.

	$5 \leq \alpha_x^2/\tau_{2x} \leq 1$	$1 \leq \alpha_x^2/\tau_{2x} \leq 0.2$	$0.2 \leq \alpha_x^2/\tau_{2x} \leq 0.1$
$5 \leq \alpha_y^2/\tau_{2y} \leq 1$	$5^2 5^2$	$7^2 5^2$	$9^2 5^2$
$1 \leq \alpha_y^2/\tau_{2y} \leq 0.2$	$5^2 7^2$	$7^2 7^2$	$9^2 7^2$
$0.2 \leq \alpha_y^2/\tau_{2y} \leq 0.1$	$5^2 9^2$	$7^2 9^2$	$9^2 9^2$

Tableau 11.2 : Taille approximative du tenseur V des coefficients de diffraction en fonction des paramètres réduits α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} .

11.2.3 Exemples d'ombres

La figure 11.3 présente un exemple de simulation d'ombres pour différentes valeurs des coefficients α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} . Pour ces simulations, nous avons pris $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$ et $\tau_{2x} = \tau_{2y} = 1$. Le codage de l'image présentée sur le second modulateur est supposé en amplitude pure. Nous pouvons observer la dégradation de l'image transformée par rapport à l'original quand la valeur du coefficient α diminue. Visuellement, cette dégradation ressemble bien à un *flo*.

Il est également possible de mesurer directement l'ombre sur la caméra d'une image présentée sur le second modulateur. Nous avons effectué cette expérience avec un SLM à cristal liquide nématique en hélice de type Epson, dont nous avons présenté la caractérisation au chapitre 5. L'onde sphérique a été produite en éclairant un petit trou placé devant un diffuseur. La figure 11.4-(a) présente un résultat expérimental ainsi obtenu. Le rapport signal à bruit de l'acquisition de l'ombre est relativement faible du fait du peu de lumière disponible pour la détection.

En mesurant directement sur le montage les différentes dimensions géométriques, nous avons ensuite effectué une simulation numérique, dont le résultat est présenté sur la figure 11.4-(b). Le codage de l'image présentée sur le second modulateur qui a été utilisé pour la simulation est celui du SLM, mesuré au chapitre 5, qui affecte une forme de spirale. On observe une bonne adéquation entre l'expérience et la simulation.

11.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une étude des effets de la diffraction, dans la limite de l'approximation de Fresnel de la diffraction, dans les montages optiques fonctionnant suivant le principe de

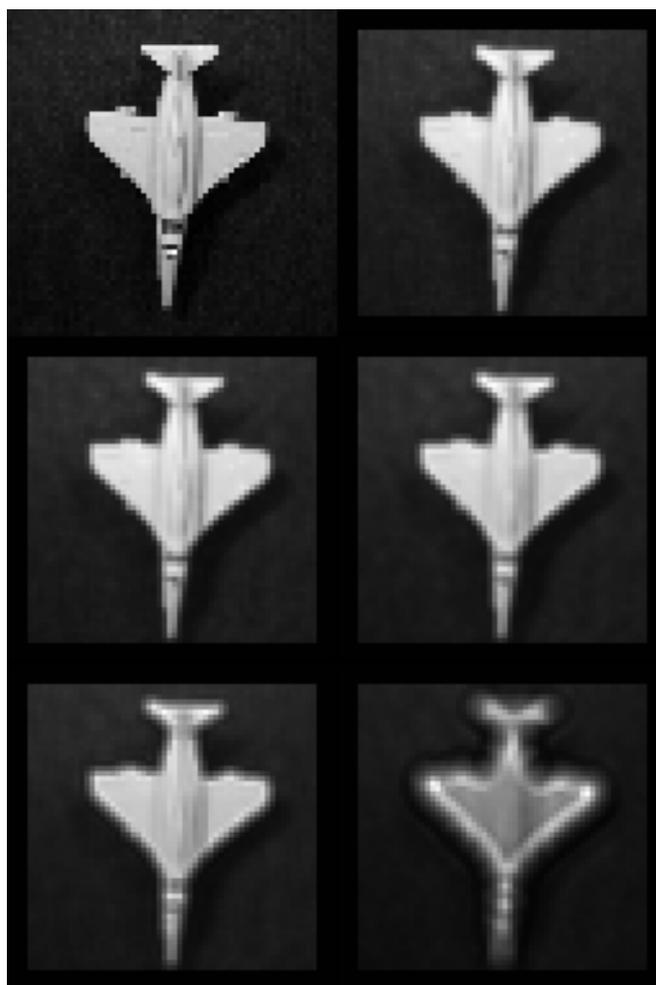


Figure 11.3 : Simulation de l'effet de la diffraction, pour des images de taille 64 par 64, $\tau_{2x} = \tau_{2y} = 1$. Les 6 images correspondent à $\alpha = \alpha_x = \alpha_y = \infty$ (pas de diffraction), $\alpha = 5.0$, $\alpha = 1.0$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.3$.

l'ombroscopie. Ce formalisme est adapté au cas où les trois plans source, intermédiaire et de détection sont pixélisés.

Nous avons montré que la relation entrée–sortie discrète prend la forme d'une transformation bilinéaire agissant sur l'image du plan source et l'ombre de l'image du plan intermédiaire. Cette ombre est la fonction de transfert *discrète* du système, c'est une image qui se déduit de l'image intermédiaire par l'action d'un tenseur d'ordre 4, dont les coefficients ne dépendent que de la géométrie du montage. Bien évidemment, le résultat de l'étude géométrique du chapitre précédent est retrouvé à la limite où la longueur d'onde tend vers 0.

Pratiquement, cette écriture permet de simuler très efficacement et précisément le système, quelles que soient les formes des pixels des modulateurs et de la caméra. Nous avons étudié plus particulièrement le cas fréquent en pratique où les pixels du second modulateur sont de forme rectangulaire. Nous avons pu alors mesurer l'importance de la perte de résolution à l'aide de paramètres réduits comparant les dimensions géométriques du montage à la longueur d'onde.

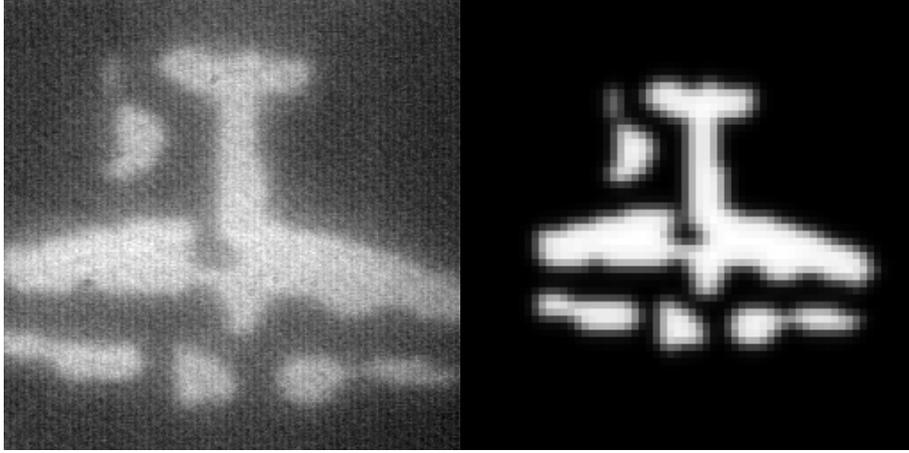


Figure 11.4 : Comparaison d'une ombre expérimentale et simulée. (a) – ombre expérimentale. (b) – ombre simulée.

11.A Annexe : approximation de Fresnel de la diffraction

Fonction de transfert incohérente – Dans l'approximation de Fresnel de la diffraction [107], la fonction de transfert incohérente du système peut être écrite :

$$H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) \propto \left| \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 m_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(b_{2x} \cdot X_2 - b_{1x} \cdot X_1)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(b_{2y} \cdot Y_2 - b_{1y} \cdot Y_1)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(b_{2x} \cdot X_2 - b_{3x} \cdot X_3)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(b_{2y} \cdot Y_2 - b_{3y} \cdot Y_3)^2\right) \right|^2. \quad (11.18)$$

Cette expression prend en compte la propagation d'une onde sphérique du plan \mathcal{P}_1 au plan \mathcal{P}_2 , qui est ensuite diffractée dans le plan \mathcal{P}_2 par la transmittance en amplitude m_2 , et enfin la propagation jusqu'au plan \mathcal{P}_3 . Le facteur de proportionnalité sera identifié pas la suite. En utilisant l'identité :

$$\frac{(b_{2x} \cdot X_2 - b_{1x} \cdot X_1)^2}{d} + \frac{(b_{2x} \cdot X_2 - b_{3x} \cdot X_3)^2}{p} = \frac{(b_{3x} \cdot X_3 - b_{1x} \cdot X_1)^2}{|d+p|} + \frac{(b_{2x} \cdot (X_2 - \epsilon X_1 - \epsilon' X_3))^2}{|d'|}, \quad (11.19)$$

et une identité similaire pour les coordonnées suivant l'axe y , l'expression (11.18) devient :

$$H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) \propto \left| \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 m_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(\frac{i\pi b_{2x}^2}{\lambda |d'|} (X_2 - \epsilon X_1 - \epsilon' X_3)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi b_{2y}^2}{\lambda |d'|} (Y_2 - \epsilon Y_1 - \epsilon' Y_3)^2\right) \right|^2. \quad (11.20)$$

En injectant dans cette équation l'expression suivante de la transmission complexe dans le plan \mathcal{P}_2 :

$$m_2(\mathbf{R}_2) = \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}), \quad (11.21)$$

où $t_2(I_2(\mathbf{n}))$ est la transmission en amplitude au pixel \mathbf{n} , nous obtenons :

$$H_\lambda(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) = \left| \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) F_\lambda(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) \right|^2, \quad (11.22)$$

où :

$$F_\lambda(\mathbf{U}) = \frac{S_2}{\lambda |d'|} \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(\frac{i\pi b_{2x}^2}{\lambda |d'|} (X_2 - U_x)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi b_{2y}^2}{\lambda |d'|} (Y_2 - U_y)^2\right), \quad (11.23)$$

est la tache de diffraction de Fresnel dans le plan \mathcal{P}_3 d'un pixel unique p_2 centré à l'origine du plan \mathcal{P}_2 . Le facteur de proportionnalité dans l'expression (11.23) est obtenu en exprimant la condition de conservation de l'énergie :

$$\int |F_\lambda(\mathbf{U})|^2 d\mathbf{U} = \int_{\mathcal{P}_2} |p_2(\mathbf{R}_2)|^2 d\mathbf{R}_2 = \int_{\mathcal{P}_2} p_2(\mathbf{R}_2) d\mathbf{R}_2.$$

Nous avons ainsi obtenu les expressions (11.1) et (11.2).

Relation entrée–sortie – À partir des expressions (11.3) et (11.5), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{k}) &= S_1 S_3 \int B(\lambda) d\lambda \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) \sum_{\mathbf{n}'} t_2^*(I_2(\mathbf{n}')) \\ &\quad \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 \xi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) \\ &\quad F_\lambda(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) F_\lambda^*(\epsilon \mathbf{R}_1 + \epsilon' \mathbf{R}_3 - \mathbf{n}'), \end{aligned} \quad (11.24)$$

et les expressions (11.6) sont simplement obtenues en posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{n} - \epsilon \mathbf{m} - \epsilon' \mathbf{k}, \\ \mathbf{q}' &= \mathbf{n}' - \epsilon \mathbf{m} - \epsilon' \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Propriétés des coefficients de diffraction – Quelle que soit la longueur d'onde d'éclairage, l'énergie contenue dans l'ombre de l'image inscrite sur le second modulateur doit rester constante. En effet, c'est la diffraction qui donne naissance à cette ombre, et qui agit en répartissant différemment l'énergie incidente suivant la longueur d'onde d'éclairage, toutes les autres grandeurs physiques restant par ailleurs constantes. Mais cette répartition se fait par principe sans pertes.

L'énergie contenue dans l'ombre est proportionnelle à :

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathcal{O}[I_2](\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}'} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') t_2(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q})) t_2^*(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q}')),$$

et devient à la limite de l'optique géométrique :

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathcal{G}[I_2](\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) T_2(I_2(\mathbf{n} + \mathbf{q})).$$

Ces deux quantités doivent être égales, puisque la limite de l'optique géométrique est obtenue pour les très courtes longueurs d'onde, et ce quelle que soit l'image I_2 .

- En prenant une image I_2 constante, il vient :

$$\sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}'} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}').$$

- En prenant $I_2 = \delta_{\mathbf{n}}^2$, il vient :

$$\sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}) .$$

En combinant ces deux dernières expressions, on voit également que :

$$\sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 0 .$$

Nous avons ainsi retrouvé les expressions (11.8).

Extremums de la tache de diffraction de Fresnel dans le cas des pixels rectangulaires –

La dérivée de la fonction intégrale de Fresnel définie par l'expression (11.14) est simplement :

$$\frac{d\psi(\nu)}{d\nu} = \exp(i\pi\nu) ,$$

à partir de quoi il est facile de déduire de l'expression (11.15) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\lambda(\mathbf{U})}{\partial U_x} &= \tau_{2y} \alpha_x \left[\exp \left(i\pi \alpha_x^2 \left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) - \exp \left(i\pi \alpha_x^2 \left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right] \\ &\quad \left[\psi \left(\alpha_y \left(\frac{U_y}{\tau_{2y}} + \frac{1}{2} \right) \right) - \psi \left(\alpha_y \left(\frac{U_y}{\tau_{2y}} - \frac{1}{2} \right) \right) \right] . \end{aligned}$$

Cette dérivée partielle s'annule si :

$$\alpha_x^2 \left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} + \frac{1}{2} \right)^2 = \alpha_x^2 \left(\frac{U_x}{\tau_{2x}} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2z_x , \quad z_x \in \mathbb{T} ,$$

c'est à dire si :

$$U_x = \frac{\tau_{2x}}{\alpha_x^2} z_x .$$

On obtient de façon similaire les extremums pour la coordonnées U_y :

$$U_y = \frac{\tau_{2y}}{\alpha_y^2} z_y , \quad z_y \in \mathbb{T} .$$

²Il s'agit ici du symbole de Kronecker, et non d'une fonction de Dirac. $\delta_{\mathbf{n}}$ représente l'image dont le seul pixel non nul est le pixel central.

Chapitre 12

Effets photométriques

Les deux chapitres précédents ont présenté une étude relativement générale de la géométrie des montages fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie, et des effets de la diffraction sur la résolution de l'image mesurée.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la mesure de la corrélation de deux images, et plus particulièrement à son aspect photométrique. Nous verrons qu'en général il n'est pas possible, ou en tout cas pratiquement très difficile, d'équilibrer tous les canaux du corrélateur, et que ce défaut se traduit par une perte de l'invariance par translation du résultat mesuré. Nous évaluerons cet effet par simulation.

Pour rétablir l'invariance par translation, il est possible de corriger les non-uniformités photométriques. Je propose une méthode de correction exacte *in-situ*, mais demandant une grande dynamique de correction, et une méthode de post-correction approchée, pour laquelle la dynamique de correction est bien plus faible.

12.1 Poids des connexions pour la corrélation

12.1.1 Luminance de la source diffuse

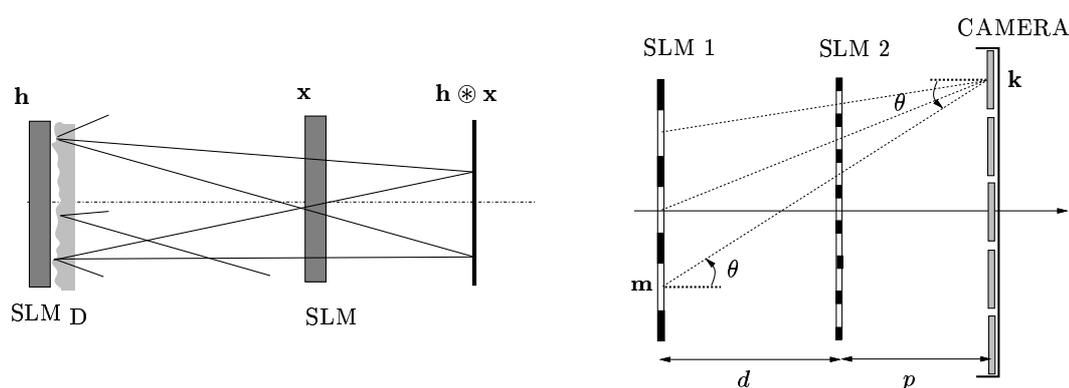


Figure 12.1 : Le problème de l'inclinaison des faisceaux : plus le pixel émetteur est éloigné du centre, plus sa surface apparente s'amenuise ; il en est de même pour le pixel récepteur ; de plus la distance que doit parcourir l'énergie lumineuse augmente.

Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, l'image en sortie d'un système optique fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie, dans le cas où les trois plans sont pixélisés, se met sous

la forme :

$$I_3(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) T_1(I_1(\mathbf{m})) \mathcal{O}[I_2](\epsilon \mathbf{m} + \epsilon' \mathbf{k}) , \quad (12.1)$$

où $\mathcal{O}[I_2]$ est l'ombre de l'image I_2 présentée sur modulateur du second plan, et $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ est le flux lumineux qui se propage du pixel source \mathbf{m} au pixel de détection \mathbf{k} . $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ représente le poids d'un canal du système ombroscopique.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au cas particulier de la corrélation. Nous devons donc fixer $\epsilon = \epsilon' = 1$. De plus, il faudrait que le poids de chacun des canaux du corrélateur, donné par $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$, soit constant pour que l'expression (12.1) s'identifie avec l'opération de corrélation mathématique de l'image codée $T_1(I_1)$ et de l'ombre $\mathcal{O}[I_2]$ de l'image I_2 .

Nous avons vu au chapitre 10 que la source diffuse du plan \mathcal{P}_1 peut être constituée par exemple par un tube CRT, une matrice de LED ou de diodes laser, ou encore par un SLM suivi d'un diffuseur. Pour ces diverses réalisations, nous supposons que les propriétés photométriques de la source sont indépendantes de pixel d'émission \mathbf{m} , c'est à dire que la source peut être caractérisée par sa *luminance* $L(\theta, \phi)$. Les angles (θ, ϕ) sont définis sur la figure 12.1. La luminance d'une source étant de façon générale une fonction lentement variable de la direction d'émission, nous noterons abusivement $L(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = L(\theta, \phi)$ où la direction (θ, ϕ) est déterminée par les centres des pixels \mathbf{m} et \mathbf{k} .

Sans tenir compte de la présence du deuxième modulateur, le flux qui traverse chacune des connexions reliant un pixel émetteur \mathbf{m} à un pixel récepteur \mathbf{k} est donné par le produit de l'étendue géométrique définie par les deux pixels et de la luminance dans la direction qui joint leurs centres (figure 12.1) :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = L(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \frac{(\tau_1 S_1 \cos \theta) (\tau_3 S_3 \cos \theta)}{((d+p)/\cos \theta)^2} . \quad (12.2)$$

Dans cette équation $\tau_1 S_1 \cos \theta$ représente la surface apparente du pixel émetteur et $\tau_3 S_3 \cos \theta$ la surface apparente du pixel récepteur. La distance $(d+p)/\cos \theta$ tient compte de l'atténuation de l'onde sphérique émise par le pixel m et reçue par le pixel k du fait de l'inclinaison des faisceaux. Les taux de remplissage τ_1 et τ_3 des plans source \mathcal{P}_1 et de détection \mathcal{P}_3 sont définis par :

$$\begin{cases} \tau_1 &= \int_{\mathcal{P}_1} p_1(\mathbf{R}_1) d\mathbf{R}_1 , \\ \tau_3 &= \int_{\mathcal{P}_3} p_3(\mathbf{R}_3) d\mathbf{R}_3 . \end{cases} \quad (12.3)$$

Ces coefficients sont toujours inférieurs à 1, et contiennent les pertes photométriques par occultation dans les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 . L'expression (12.2) peut encore s'écrire :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) = L(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \frac{\tau_1 \tau_3 S_1 S_3}{(d+p)^2} \cos^4 \theta , \quad (12.4)$$

avec :

$$\cos^4 \theta = \frac{(d+p)^4}{\left((d+p)^2 + (m_x b_{1x} - k_x b_{3x})^2 + (m_y b_{1y} - k_y b_{3y})^2 \right)^2} . \quad (12.5)$$

Nous trouvons donc que plus les pixels émetteur et récepteur sont éloignés transversalement, plus le flux reçu diminue suivant une loi en $\cos^4 \theta$. C'est à dire que même si l'indicatrice de luminance de la source est parfaitement lambertienne, les poids des connexions $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ ne sont pas tous égaux, et la corrélation exacte ne peut pas être obtenue.

12.1.2 Indicatrice de luminance lambertienne

Nous allons dans un premier temps supposer que l'indicatrice de luminance de la source est parfaitement lambertienne, c'est à dire que la luminance est indépendante de la direction d'émission. Cette

situation correspond au cas le plus favorable, même s'il est difficile d'obtenir une telle indicatrice de luminance en pratique. Notre but est ici d'obtenir une borne supérieure des performances des montages ombroscopiques pour la corrélation. Dans le cas lambertien, nous avons vu précédemment que le poids d'une connexion varie comme la puissance quatrième du cosinus de l'angle θ . L'effet de cette non-uniformité est donc d'autant plus important que le montage de corrélation est ouvert. De plus, les canaux contribuent d'autant moins au résultat final mesuré que les directions auxquelles ils correspondent sont inclinées.

L'importance exacte de cette perturbation peut être estimée par simulation. Nous donnons en annexe une méthode pratique pour réaliser efficacement cette simulation. La figure 12.2 présente des exemples pour lesquels la distance d est relativement petite, ce qui est la situation la plus défavorable. Nous pouvons en conclure que l'effet de non-uniformité photométrique est faible pour un diffuseur lambertien, sinon négligeable. Cependant, il est en pratique très difficile d'obtenir un diffuseur lambertien, et ce cas n'est pas très réaliste. Nous allons voir qu'avec un diffuseur réel l'effet peut être bien plus important.

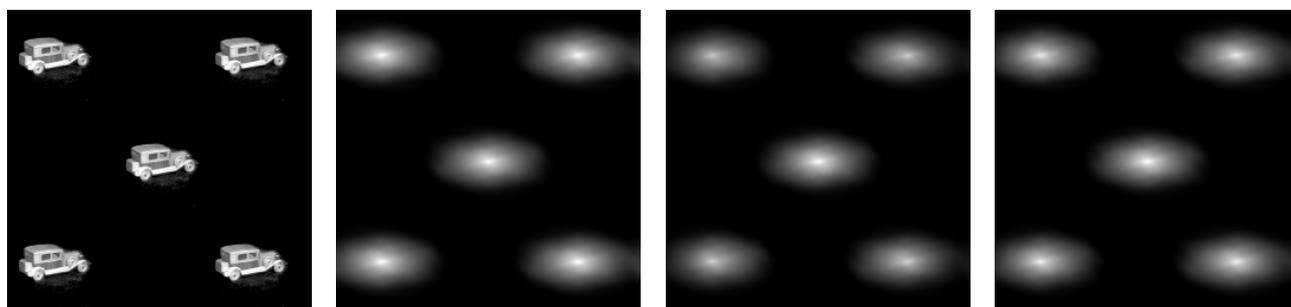


Figure 12.2 : Simulation numérique de l'effet de la non-uniformité photométrique dans le cas d'un diffuseur lambertien. Le grandissement G est égal à 4. (a) – image scène, la référence est le taxi; (b) – corrélation numérique; (c) – simulation numérique, la distance d séparant les deux modulateurs est de 3 centimètres. Les pics secondaires représentent 82% du pic central; (d) – simulation numérique, la distance d séparant les deux modulateurs est de 5 centimètres. Les pics secondaires représentent 94% du pic central.

12.1.3 Poids des connexions avec un diffuseur réel

Prenons maintenant en compte l'indicatrice de luminance d'un diffuseur réel. Nous avons mesuré expérimentalement l'indicatrice de luminance de trois diffuseurs du commerce :

- une lame de verre dépolie sur une face ;
- une lame dite “marata”, dépolie sur une face ;
- un dépoli dans la masse.

Pour effectuer ces mesures, nous avons éclairé le diffuseur en lumière collimatée, et placé un petit trou contre le diffuseur. En déplaçant un détecteur de petite taille à distance du trou source nous avons ainsi mesuré l'éclairement produit, en fonction de l'angle de diffusion.

Pour ces mesures, le détecteur a été déplacé dans un plan, de sorte que l'éclairement obtenu est directement proportionnel au facteur $L(\theta, \phi) \cos^4(\theta)$ de l'expression (12.2) du poids des connexions.

Après examen des résultats, nous avons observé pour les différents diffuseurs une forme gaussienne pour le poids des connexions, et avons postulé un modèle de la forme :

$$L(\theta, \phi) \cos^4(\theta) \propto \exp\left(-\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_0}\right), \quad (12.6)$$

où $\tan \theta_0$ est la demi-largeur à $1/e$ de la gaussienne. Il est clair que cette expression n'est pas sensée représenter exactement les caractéristiques de la lumière diffusée, en ce sens qu'il s'agit d'un postulat empirique. Il s'avère simplement que nos données s'accordent avec une bonne précision à ce modèle. Pratiquement, la forme gaussienne présente deux propriétés intéressantes :

- la forme des poids des connexions ne dépend que d'un unique paramètre, la demi-largeur à $1/e$ de la gaussienne ;
- le calcul des effets de cette forme sur la corrélation mesurée peut être simplifié pour la simulation numérique, ainsi que nous le discutons en annexe.

Le tableau 12.1 donne les valeurs des demi-largeurs à $1/e$ estimées pour les trois diffuseurs que nous avons considérés.

diffuseur	θ_o
dépoli en surface	$\approx 10^\circ$
marata	$\approx 12^\circ$
dépoli dans la masse	$\approx 23^\circ$

Tableau 12.1 : Demi-largeurs à $1/e$ dans l'approximation gaussienne des indicatrices de luminances de trois diffuseurs standards.

Bien que l'indicatrice de luminance du dépoli dans la masse soit relativement proche de celle d'un diffuseur lambertien dans la limite de l'ouverture du corrélateur, ce diffuseur n'est pas favorable pour recevoir l'image projetée directement par le premier SLM, du fait du trajet des rayons lumineux dans l'épaisseur du diffuseur qui induit une perte de résolution pour le filtre, d'autant plus importante que l'épaisseur traversée est grande.

Les diffuseurs en surface sont *a priori* mieux adaptés de ce point de vue, mais en contrepartie leur indicatrice de luminance est beaucoup plus concentrée sur l'axe.

Dans le cas du corrélateur sans lentille :

$$\tan^2 \theta = \frac{(b_{3x} k_x - b_{1x} m_x)^2 + (b_{3y} k_y - b_{1y} m_y)^2}{(d + p)^2}. \quad (12.7)$$

Les poids de connexion dans l'approximation gaussienne de l'expression (12.6) prennent alors la forme suivante :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto \exp\left(- (B_{3x} k_x - B_{1x} m_x)^2 - (B_{3y} k_y - B_{1y} m_y)^2\right), \quad (12.8)$$

avec :

$$\begin{cases} B_{3x} = \frac{b_{3x}}{(d + p) \tan \theta_0}, \\ B_{3y} = \frac{b_{3y}}{(d + p) \tan \theta_0}, \\ B_{1x} = \frac{b_{1x}}{(d + p) \tan \theta_0}, \\ B_{1y} = \frac{b_{1y}}{(d + p) \tan \theta_0}. \end{cases} \quad (12.9)$$

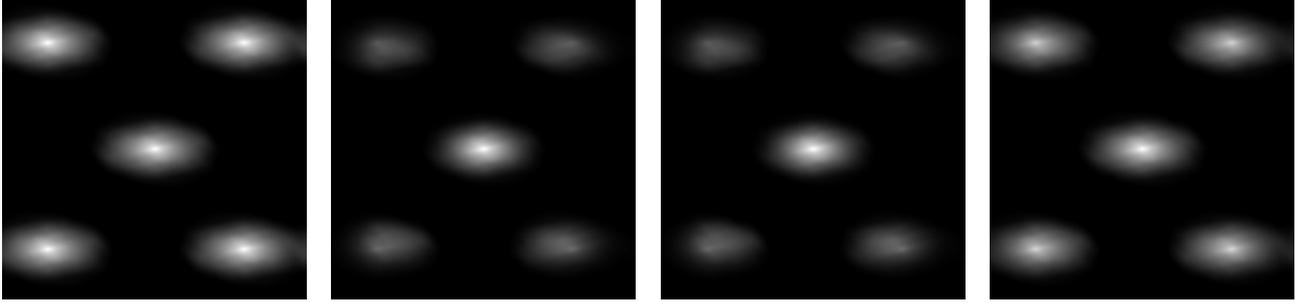


Figure 12.3 : Simulation numérique de l'effet de la non-uniformité photométrique dans le cas de diffuseurs réels (approximation gaussienne). Le grandissement G est égal à 4. L'image scène est celle de la figure 11.1, la référence également ; (a) – corrélation numérique ; (b) – simulation numérique, la demi-largeur à $1/e$ est $\theta_o = 10^\circ$ (dépoli en surface). Les pics secondaires représentent 42% du pic central ; (c) – simulation numérique, la demi-largeur à $1/e$ est $\theta_o = 12^\circ$ (marata). Les pics secondaires représentent 53% du pic central. (d) – simulation numérique, la demi-largeur à $1/e$ est $\theta_o = 23^\circ$ (dépoli dans la masse). Les pics secondaires représentent 84% du pic central.

12.2 Post-correction

12.2.1 Correction exacte in-situ dans l'hypothèse gaussienne

L'équation (12.9) ci-dessus permet de se rendre compte qu'il est possible de corriger exactement l'influence de la photométrie dans le cas où le poids de connexions possède une forme gaussienne. En effet, définissons les fonctions correctrices suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{m}) &= \exp\left((B_{1x}^2 + B_{3x}B_{1x})m_x^2\right) \exp\left((B_{1y}^2 + B_{3y}B_{1y})m_y^2\right) , \\ \gamma_2(\mathbf{m} + \mathbf{k}) &= \exp\left(-B_{3x}B_{1x}(m_x + k_x)^2\right) \exp\left(-B_{3y}B_{1y}(m_y + k_y)^2\right) , \\ \gamma_3(\mathbf{k}) &= \exp\left((B_{3x}^2 + B_{3x}B_{1x})k_x^2\right) \exp\left((B_{3y}^2 + B_{3y}B_{1y})k_y^2\right) , \end{cases} \quad (12.10)$$

qui sont telles que :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto (\gamma_1(\mathbf{m}) \gamma_2(\mathbf{m} + \mathbf{k}) \gamma_3(\mathbf{k}))^{-1} . \quad (12.11)$$

Si chacune de ces fonctions correctrices est respectivement appliquée à $T_1[I_1]$, $\mathcal{O}[I_2]$ et I_3 , le résultat de la mesure du produit de corrélation sera :

$$\begin{aligned} \gamma_3(\mathbf{k}) I_3(\mathbf{k}) &= \gamma_3(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) [\gamma_1(\mathbf{m}) T_1(I_1(\mathbf{m}))] [\gamma_2(\mathbf{m} + \mathbf{k}) \mathcal{O}[I_2](\mathbf{m} + \mathbf{k})] \\ &\propto \sum_{\mathbf{m}} T_1(I_1(\mathbf{m})) \mathcal{O}[I_2](\mathbf{m} + \mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (12.12)$$

Il est important de remarquer que ces fonctions correctrices sont indépendantes des images à représenter. Les fonctions γ_1 et γ_3 amplifient les valeurs des pixels éloignés du centre des images, tandis que la fonction γ_2 opère de façon inverse.

Pratiquement, nous avons deux possibilités pour opérer cette correction :

- Changer les valeurs de transmission des pixels inscrits sur les SLM, et appliquer une fonction correctrice multiplicative sur la détection de façon numérique. Cette solution ne nécessite pas d'éléments optiques supplémentaires, mais elle conduit à une perte de dynamique de codage.

- Placer des transparences de transmission correspondant à γ_1 , γ_2 et γ_3 dans chacun des trois plans des SLM et de la caméra. Cette solution est clairement liée à une perte d'efficacité lumineuse.

Pour ces deux possibilités, le paramètre limitatif est la dynamique de correction qui est nécessaire. Nous la définissons comme le rapport du maximum sur le minimum d'une des fonctions de correction :

$$\text{Dyn}_i = \frac{\max[\gamma_i]}{\min[\gamma_i]} . \quad (12.13)$$

Le tableau 12.2 montre la dynamique de correction nécessaire pour l'image filtre inscrite sur le premier modulateur en fonction de la demi-largeur à $1/e$ de l'indicatrice de luminance du diffuseur.

u_o ($^\circ$)	10	12	23
Dyn_1	560	116	3

Tableau 12.2 : Dynamique de correction nécessaire suivant la demi-largeur à $1/e$ de l'indicatrice de luminance du diffuseur (approximation gaussienne).

En fait, nous pouvons nous rendre compte que la dynamique de correction nécessaire est excessive, et en pratique irréaliste. La dynamique ne devient raisonnable que lorsque les effets de la photométrie deviennent négligeables, c'est à dire lorsque la correction n'est plus nécessaire. La séparation en trois termes de la gaussienne se traduit par une dynamique étendue de façon artificielle. Si cette méthode est adaptée à la simulation numérique du comportement du corrélateur, elle ne peut pas servir à la correction des effets de la photométrie.

12.2.2 Correction après détection

Nous présentons ici une méthode de correction approchée, qui utilise seulement une correction *a posteriori* de la détection du produit de corrélation, c'est à dire que seule une fonction correctrice γ_3 est utilisée. L'idée est d'associer à chaque filtre \mathbf{h} , calculé pour répondre à certains critères, une fonction correctrice permettant de retrouver l'invariance par translation du corrélateur. Nous voulons de la sorte séparer la partie algorithmique de la corrélation de sa réalisation pratique par un système optique ou numérique. Le problème à résoudre est le suivant :

Problème : Soit une image de référence \mathbf{r} . Supposons que nous disposons d'un filtre \mathbf{h} , qui a été synthétisé à partir de \mathbf{r} , par exemple suivant la méthode de filtrage bipolaire présentée au chapitre 8. Nous voulons que le corrélateur réponde correctement quand la scène \mathbf{x} présentée contient la référence \mathbf{r} , et ce quelle que soit la position de celle-ci. Nous pouvons donc écrire :

$$x_{\mathbf{n}} = r_{\mathbf{n}-\mathbf{k}_o} ,$$

qui signifie que la référence est présente dans la scène, et est centrée en k_o . Le résultat donné par le corrélateur est :

$$c_{\mathbf{k}} = \gamma_3(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) h_{\mathbf{m}} x_{\mathbf{m}+\mathbf{k}} = \gamma_3(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) h_{\mathbf{m}} r_{\mathbf{m}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_o} .$$

Maintenant, nous voudrions que quel que soit le centrage de la référence, c'est à dire quel que soit \mathbf{k}_o , le corrélateur corrigé donne le résultat exact :

$$c_{\mathbf{k}_o} = \gamma_3(\mathbf{k}_o) \sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}_o) h_{\mathbf{m}} r_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{m}} r_{\mathbf{m}} .$$

De sorte que la fonction correctrice à appliquer est :

$$\gamma_3(\mathbf{k}_o) = \frac{\sum_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{m}} r_{\mathbf{m}}}{\sum_{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}, \mathbf{m} + \mathbf{k}_o) h_{\mathbf{m}} r_{\mathbf{m}}} . \quad (12.14)$$

Ce type de correction présente les propriétés suivantes :

- La correction est exacte, par définition, si la scène \mathbf{x} ne contient que la référence \mathbf{r} , et ce quelle que soit la position effective de la référence. Par contre, rien ne garantit *a priori* le bon comportement de la correction quand la scène contient en plus du bruit ou un fond structuré. Nous verrons plus loin ce qu'il advient dans ce cas.
- Contrairement à la correction exacte discutée plus haut, la fonction correctrice dépend directement à la fois de la référence et du filtre employé.
- Dans le cas où l'indicatrice de luminance du diffuseur est gaussienne, la fonction correctrice se calcule simplement par un algorithme de transformée de Fourier discrète, comme indiqué plus haut.

De la même façon que pour la correction exacte, il est possible de calculer la dynamique de correction nécessaire de l'expression (12.13), mais pas de façon analytique. La figure 12.4 représente l'évolution de la dynamique de correction pour une image particulière en fonction de la demi-ouverture de la gaussienne modélisant l'indicatrice de luminance.

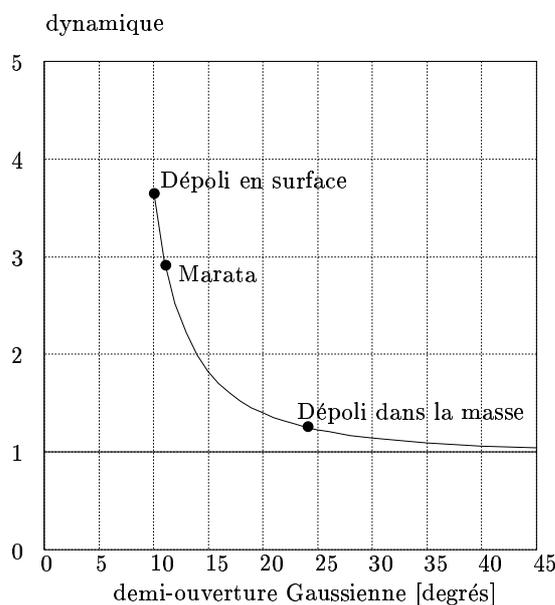


Figure 12.4 : dynamique de correction *a posteriori* (image taxi). Valves Epson, $d = 5\text{cm}$, $G = 4$.

La figure 12.5 représente la référence, la scène et la corrélation numérique correspondante, qui est l'idéal à atteindre. En bas à gauche, la prise en compte de la photométrie, et en bas à droite la photométrie corrigée. Nous pouvons noter que nous retrouvons exactement l'amplitude des pics de corrélation, mais que leur forme est un peu modifiée. Noter la présence de leurres, la navette et le camion. En bas à gauche, la prise en compte de la photométrie, et en bas à droite la photométrie corrigée. Nous pouvons noter que la correction ne dégrade pas trop le rapport de sécurité référence/leurres.

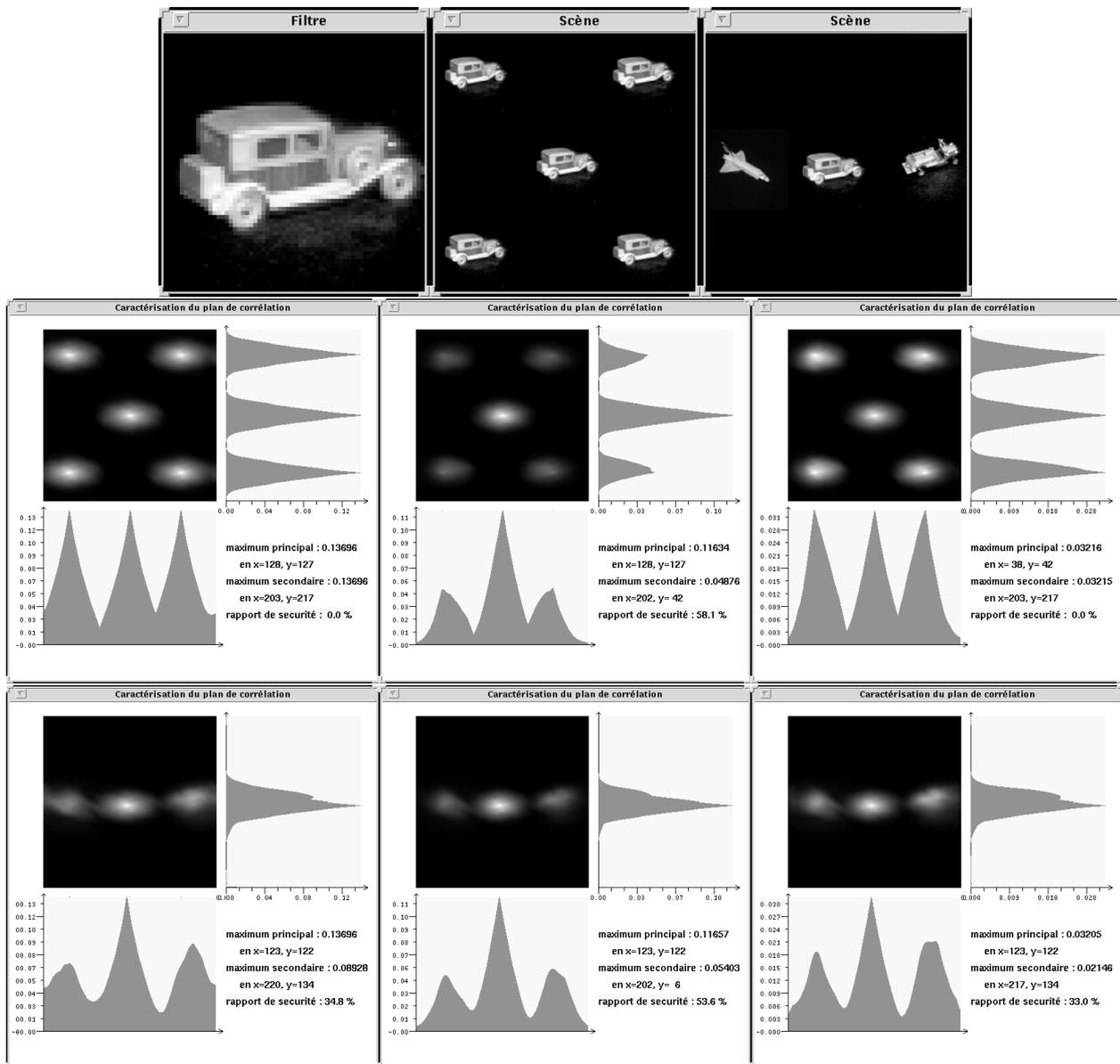


Figure 12.5 : En haut, images référence , première scène, seconde scène. Au centre, pour la première image scène, corrélation numérique, prise en compte de la luminance gaussienne du diffuseur, pour $u_o = 10^\circ$, puis corrélation corrigée. En bas, pour la seconde image scène, corrélation numérique, prise en compte de la luminance gaussienne du diffuseur, pour $u_o = 10^\circ$, puis corrélation corrigée. Valves Epson, $d = 5\text{cm}$, $G = 4$. Les courbes sur les côtés des images de corrélation représentent les projections horizontales et verticales des maximums (suivant une ligne).

12.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude des propriétés photométriques du montage de corrélation incohérente par ombroscopie. Pour la corrélation, les poids des canaux, c'est à dire le flux lumineux se propageant d'un pixel source à un pixel de détection, devraient être tous égaux. Or même en utilisant une source dont l'indicatrice de luminance est lambertienne, c'est à dire isotrope, ce n'est pas le cas, et l'on détecte d'autant moins d'énergie dans le plan de corrélation que l'on s'écarte de l'axe optique. Quand l'indicatrice de diffusion d'un diffuseur réel est prise en compte, cet effet est encore beaucoup plus marqué, et se traduit par une importante perte de l'invariance par translation de la mesure de la corrélation.

J'ai proposé une méthode de post-corréction efficace de l'effet de non-uniformité photométrique, qui permet de restaurer l'invariance par translation, au moins dans un sens limité, dans le sens où la corrélation du filtre avec la référence est corrigée, tandis que la déformation de la corrélation du filtre avec le fond reste faible. De plus, la dynamique nécessaire pour cette correction reste inférieure à 4 pour les diffuseurs que nous avons analysés, même pour un diffuseur dépoli classique. Il est donc possible par cette méthode d'éviter le calcul d'un diffuseur holographique [110] spécialisé.

Nous verrons de plus au chapitre 14 que l'emploi de la méthode de filtrage bipolaire permet dans une large mesure de se passer d'une correction de l'effet de non-uniformité photométrique pour les applications de localisation d'un objet dans une image scène.

12.A Annexe : influence des poids des connexions sur la corrélation

Indicatrice de luminance lambertienne – Nous allons introduire ici une approximation au second ordre des poids des connexions qui permettra de retrouver une expression plus calculable dans le cas où le diffuseur est lambertien. Dans ce cas, nous avons :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{b_x k_x - b_{1x} m_x}{d+p}\right)^2 + \left(\frac{b_y k_y - b_{1y} m_y}{d+p}\right)^2\right)^2}. \quad (12.15)$$

Nous posons :

$$\begin{cases} B'_{3x} = \frac{b_{3x}}{d+p}, \\ B'_{3y} = \frac{b_y}{d+p}, \\ \\ B'_{1x} = \frac{b_{1x}}{d+p}, \\ B'_{1y} = \frac{b_{1y}}{d+p}, \\ \\ B_x = B'_{3x} + B'_{1x}, \\ B_y = B'_{3y} + B'_{1y}. \end{cases}$$

Ces quantités sont sans dimension et petites devant 1 et nous avons :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto \frac{1}{\left(1 + (B'_{3x} k_x - B'_{1x} m_x)^2 + (B'_{3y} k_y - B'_{1y} m_y)^2\right)^2}.$$

Nous posons de plus :

$$\mathbf{n} = \mathbf{m} + \mathbf{k}.$$

Donc :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto \frac{1}{\left(1 + (B_{3x}n_x - B_x m_x)^2 + (B_{3y}n_y - B_y m_y)^2\right)^2}.$$

Nous pouvons maintenant développer cette expression au second ordre pour les distances :

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto 1 - 2 \left(B_{3x}^2 n_x^2 + B_{3y}^2 n_y^2\right) - 2 \left(B_x^2 m_x^2 + B_y^2 m_y^2\right) + 4 \left(B_{3x} n_x B_x m_x + B_{3y} n_y B_y m_y\right).$$

Finalement :

$$\boxed{I_3 \propto T_1[I_1] \otimes \left[\left(1 - 2 \left(B_{3x}^2 n_x^2 + B_{3y}^2 n_y^2\right)\right) \mathcal{O}[I_2] \right] + 4 [C_x m_x T_1[I_1]] \otimes [B_x n_x \mathcal{O}[I_2]] + 4 [C_y m_y T_1[I_1]] \otimes [B_y n_y \mathcal{O}[I_2]] - 2 \left[(C_x^2 m_x^2 + C_y^2 m_y^2) T_1[I_1]\right] \otimes \mathcal{O}[I_2] } \quad (12.16)$$

Cette expression permet de calculer la corrélation géométrique beaucoup plus rapidement par FFT.

Indicatrice de luminance gaussienne – Nous allons voir que l'hypothèse d'une forme gaussienne pour l'indicatrice de luminance du diffuseur permet de calculer simplement l'influence de la photométrie par FFT. À partir de l'expression (12.11) nous pouvons écrire :

$$I_3(\mathbf{k}) = \gamma_3^{-1}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{m}} \left[\gamma_1^{-1}(\mathbf{m}) T_1(I_1(\mathbf{m})) \right] \left[\gamma_2^{-1}(\mathbf{m} + \mathbf{k}) \mathcal{O}[I_2](\mathbf{m} + \mathbf{k}) \right].$$

Cette dernière expression fait apparaître la corrélation des images $T_1(I_1)$ et $\mathcal{O}[I_2]$ multipliées par des gaussiennes, et un autre terme gaussien ne dépendant que du point considéré du plan de corrélation. La séparation des variables ainsi introduite permet de calculer le produit de corrélation à l'aide seulement de FFT.

Chapitre 13

Conception d'un corrélateur ombroscopique

L'objet de ce chapitre est la conception d'un corrélateur en éclairage spatialement incohérent suivant le principe de l'ombroscopie. Cette étude sera appliquée au chapitre suivant pour la réalisation expérimentale d'un tel corrélateur. Nous discutons dans un premier temps le choix du montage optique, ainsi que ses dimensions géométriques. Nous montrons comment il est possible de réaliser un compromis entre la perte de résolution due à la diffraction et la perte d'invariance par translation due aux non-uniformités photométriques. Puis nous discutons les limitations liées aux imperfections des différents composants utilisés : source, modulateurs spatiaux de lumière et caméra. Nous illustrons ces différents points par des simulations numériques.

13.1 Choix d'un montage de corrélation

13.1.1 Corrélateur avec ou sans lentille ?

Nous avons vu au chapitre 10, figure 10.3, que des lentilles, ou plus généralement des systèmes optiques, peuvent être placés entre les deux modulateurs, et entre le second modulateur et la caméra. Nous avons remarqué alors qu'il suffit de considérer les images des différents plans à travers tous les systèmes optiques pour se ramener au cas du corrélateur sans lentille. En tout état de cause, l'ajout de lentilles intermédiaires ne peut pas à proprement parler améliorer le fonctionnement du corrélateur, mais permet seulement d'ajuster les dimensions des pixels des différents plans le cas échéant. De plus, l'emploi de lentilles intermédiaires présente les inconvénients suivants :

- dans le cas où une source blanche est employée, les aberrations chromatiques risquent d'être importantes ;
- les aberrations géométriques, et en particulier la courbure de champ, risquent de rendre caduque la condition (10.13) d'homothétie exacte des mailles des différents plans représentée sur la figure 10.5, et donc de perturber fortement la mesure de la corrélation :

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{G} \mathbf{b}_1 = \frac{|G-1|}{G} \mathbf{b}_3 , \quad (13.1)$$

où pour rappel G est le facteur d'homothétie et \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 et \mathbf{b}_3 sont les vecteurs espacement des mailles des trois plans pixélisés.

Pour ces raisons, nous pensons qu'il est plus avantageux de choisir le montage de corrélation par ombroscopie sans lentille.

13.1.2 Corrélateur avec blocs de verre

Il est également possible de placer des blocs de verre entre les deux modulateurs et entre le second modulateur et la caméra ainsi que le représente la figure 13.1. L'idée sous-jacente est que la longueur d'onde dans le verre est plus courte que dans l'air, ce qui doit réduire l'importance de la diffraction.

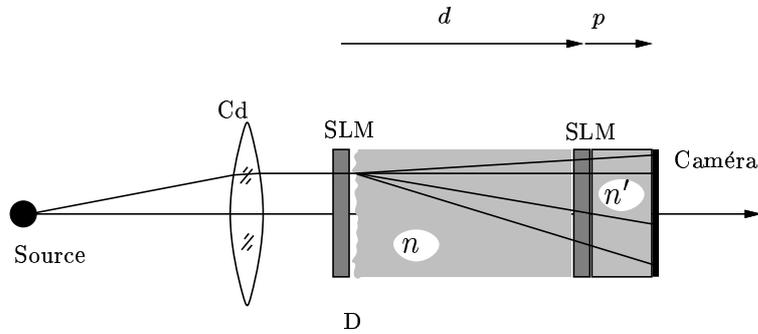


Figure 13.1 : Corrélateur ombroscopique avec des blocs de verre placés entre les deux modulateurs et la caméra.

Pour que la condition d'homothétie entre les plans (13.1) reste valable, il est nécessaire que les indices n et n' soient égaux, afin que les déviations des faisceaux lumineux soient les mêmes avant et après le second modulateur. Supposons que les pixels du second modulateur soient carrés de côté a_2 . Comme nous l'avons montré au chapitre 11, l'importance de la diffraction peut être estimée par le paramètre de Fresnel α :

$$\alpha^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{G a_{2x}^2}{d} = \frac{n}{\lambda_o} \frac{G a_{2x}^2}{d}, \quad (13.2)$$

où λ_o est la longueur d'onde dans l'air. Toutes choses égales par ailleurs, l'ajout d'un milieu diélectrique d'indice supérieur à 1 entre les trois plans du corrélateur permet d'augmenter la valeur du paramètre de Fresnel, et donc en principe de réduire l'importance de la diffraction. Ce raisonnement est cependant trompeur car le travail demandé au diffuseur est plus important. En effet, les angles de diffusion dans le verre sont environ n fois plus petits que dans l'air, et l'indicatrice de luminance du diffuseur, mesurée dans l'air, doit être plus large angulairement d'un facteur n . En fait, pour le même facteur d'homothétie G , un corrélateur sans verre intermédiaire dont les modulateurs sont espacés de la distance d est équivalent du point de vue de la diffraction et de la photométrie à un corrélateur avec verre intermédiaire d'indice n dont les modulateurs sont espacés de la distance $n \times d$, en clair n fois plus encombrant, ce qui en limite l'intérêt.

13.1.3 Paramètres du corrélateur et simulation numérique

La discussion de la section précédente nous permet maintenant de représenter le corrélateur que nous allons étudier dans le reste de ce chapitre et dans le chapitre suivant, c'est à dire le corrélateur sans lentille le plus simple, avec comme seule condition $G > 1$ pour que le plan de corrélation soit à distance finie. La figure 13.2 montre les différents paramètres physiques intervenant dans le modèle du corrélateur, et dont nous allons discuter l'importance. Le tableau 13.1 montre quels effets, diffraction, photométrie ou autres, sont concernés par chacun de ces paramètres.

Du fait de la grande simplicité de ce montage de corrélation, il est possible de réaliser une simulation numérique relativement précise de la mesure de la corrélation de deux images. Pour ce faire, nous pouvons employer directement les expressions discrètes (11.6) qui décrivent complètement le corrélateur.

éléments	paramètres	diffraction	photométrie	autres effets
géométrie du corrélateur	distance d	•	•	—
	facteur d'homothétie G	•	•	—
SLM n°1	nombre de pixels	—	•	—
	espacement des pixels	•	•	—
	dimensions des pixels	•	—	—
	contraste	—	—	•
	codage T_1	—	—	•
SLM n°2	nombre de pixels	—	•	—
	espacement des pixels	•	•	—
	dimensions des pixels	•	—	—
	contraste	—	—	•
	codage t_2	•	—	—
source	spectre d'émission	•	—	—
diffuseur	indicatrice de luminance	—	•	—
caméra	sensibilité spectrale	•	—	—
	dynamique d'acquisition	—	—	•
	bruit de détection	—	—	•

Tableau 13.1 : Les paramètres du modèle du corrélateur, et les limitations physiques qu'ils concernent. Le symbole • indique qu'un paramètre doit être pris en compte, le symbole — qu'il n'intervient pas.

13.2 Compromis entre diffraction et photométrie

Les considérations précédentes nous ont permis de sélectionner le montage de corrélation, mais il reste à en fixer les dimensions géométriques, c'est à dire la distance d entre les modulateurs et le facteur d'homothétie G . Pour cela, il faut considérer les limitations de principe qu'imposent diffraction et non-uniformités photométriques.

13.2.1 Condition sur la diffraction

En ce qui concerne la diffraction, nous avons vu au chapitre 11 que l'importance de la perte de résolution qu'elle cause peut être approximativement mesurée dans le cas de pixels rectangulaires pour le modulateur du plan intermédiaire par les deux coefficients réduits (expression (11.17)) :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_x^2}{\tau_{2x}} = \frac{G}{d} \frac{a_{2x}^2}{\tau_{2x} \lambda} \\ \frac{\alpha_y^2}{\tau_{2y}} = \frac{G}{d} \frac{a_{2y}^2}{\tau_{2y} \lambda} \end{cases} \quad (13.3)$$

où a_{2x} et a_{2y} sont les dimensions des pixels rectangulaires, τ_{2x} et τ_{2y} sont les taux de remplissage suivant les deux directions, et λ la longueur d'onde. Pour une source et un modulateur du plan intermédiaire donnés, les paramètres α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} ne dépendent que du rapport G/d . Afin de limiter la perte de résolution par diffraction, il est alors possible de fixer une valeur minimale pour α_x^2/τ_{2x} et α_y^2/τ_{2y} , qui à son tour fixe une valeur minimale pour le rapport G/d . Le tableau 11.2 peut guider pour le choix de la valeur minimale à imposer, sachant que c'est au final le type des images à traiter qui importe, principalement suivant la taille en nombre de pixels de la référence cherchée.

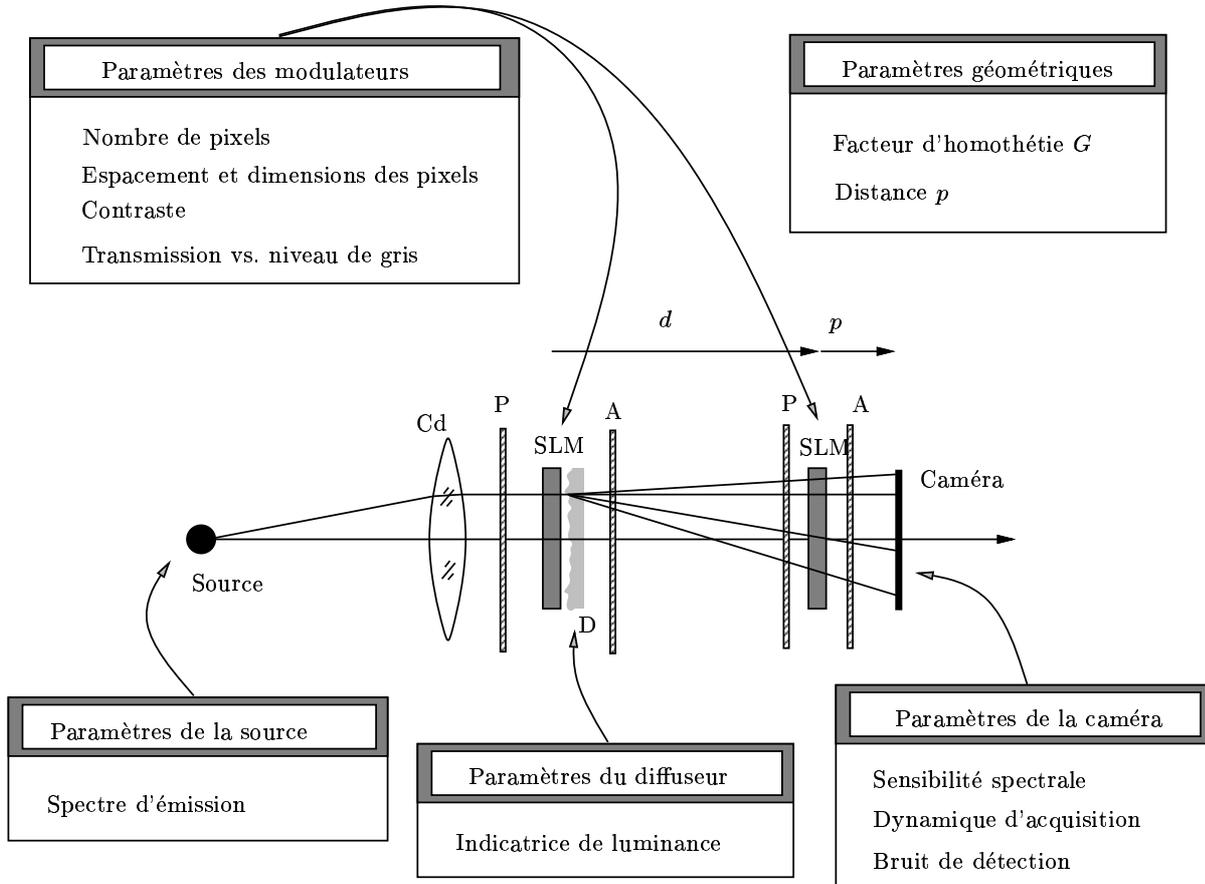


Figure 13.2 : Montage de corrélation par ombroscopie à distance finie et définition des différents paramètres physiques intervenant dans le modèle du corrélateur.

13.2.2 Condition sur les non-uniformités photométriques

En ce qui concerne la perte d'invariance par translation causée par les non-uniformités photométriques, nous avons vu au chapitre 12 que son importance est directement liée à la forme des poids des connexions $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ entre un pixel source \mathbf{m} et un pixel de détection \mathbf{k} . Dans le cas des diffuseurs standards que nous avons décrits au chapitre 12, ces poids affectent avec une bonne approximation une forme gaussienne, expressions (12.6) et (12.7), qui dépend de la demi-largeur à $1/e$ de la gaussienne, $\tan \theta_o$:

$$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k}) \propto \exp \left(\frac{(b_{3x} k_x - b_{1x} m_x)^2 + (b_{3y} k_y - b_{1y} m_y)^2}{(d + p)^2 \tan^2 \theta_o} \right) \quad (13.4)$$

avec la relation :

$$d + p = \frac{G}{G - 1} d \quad (13.5)$$

Afin de limiter la perte d'invariance par translation, il est possible d'imposer que la quantité $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ soit supérieure à une valeur spécifiée en bord de champ. Au final, pour un diffuseur, un modulateur d'entrée et une caméra donnés, c'est la distance $dG/(G - 1)$ qui doit être supérieure à une certaine valeur spécifiée.

13.2.3 Compromis

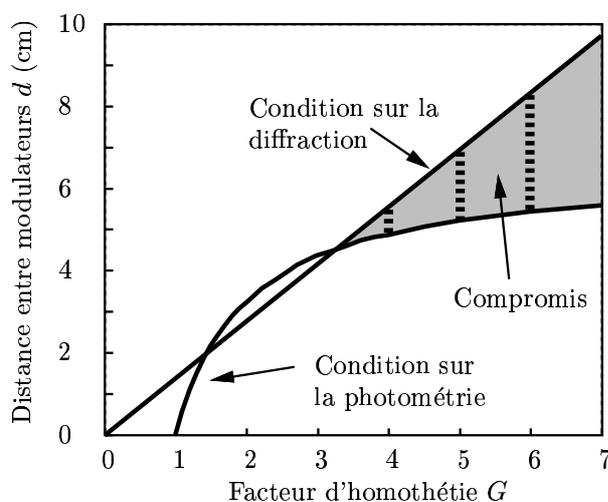


Figure 13.3 : Compromis géométriques entre la distance d séparant les deux modulateurs et le facteur d'homothétie G de l'image filtre par rapport à l'image scène, quand les deux plans source et intermédiaire comportent des modulateurs Epson, pour une longueur d'onde de 500 nm, et pour un diffuseur de type dépoli en surface.

Nous pouvons maintenant représenter les deux conditions obtenues pour limiter les effets de la diffraction et des non-uniformités photométriques, sous la forme d'un graphe reliant la distance d séparant le plan de la source diffuse du plan intermédiaire et le facteur d'homothétie G de l'image filtre par rapport à l'image scène. La figure 13.3 donne un exemple d'un tel graphe.

La condition sur la diffraction est représentée par une droite sur ce graphique :

$$\frac{G}{d} \geq A ,$$

et la condition photométrique par un arc d'hyperbole :

$$\frac{dG}{G-1} \geq B .$$

Dans ces deux conditions A et B sont des constantes déterminées respectivement par les conditions de l'application. La région où ces deux conditions sont compatibles définit les compromis possibles entre diffraction et photométrie, et permet de choisir les dimensions géométriques du montage qui assurent le meilleur fonctionnement du corrélateur.

13.3 Caractéristiques de la source

Le seul paramètre de notre modèle pour la source est son spectre en longueur d'onde $B(\lambda)$ ¹. Jusqu'à présent, nous avons toujours estimé les effets de la diffraction pour une source monochromatique. Qu'advient-il dans le cas d'une source blanche ou polychromatique ?

Du fait de l'absence de lentilles dans notre montage de corrélation, les seuls éléments dispersifs potentiels sont les lames de verre des modulateurs ou des polariseurs éventuels. Si leurs épaisseurs restent relativement faibles, les aberrations chromatiques induites resteront faibles. L'emploi d'une source blanche à large spectre est donc géométriquement possible. Nous avons vu au chapitre 11 que

¹Rappelons que la fonction $B(\lambda)$ inclut également la sensibilité spectrale du détecteur.

l'influence de la diffraction est complètement décrite par les coefficients de diffraction de l'expression (11.6) :

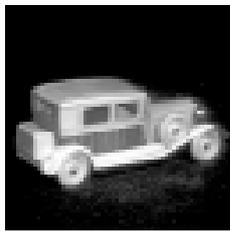
$$V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int B(\lambda) d\lambda V_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}') , \quad (13.6)$$

où les coefficients $V_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ de diffraction pour la longueur d'onde λ sont donnés pour mémoire par :

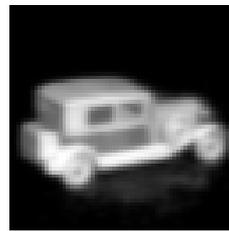
$$V_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_1(\mathbf{R}_1) p_3(\mathbf{R}_3) I_\lambda(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}) I_\lambda^*(\epsilon\mathbf{R}_1 + \epsilon'\mathbf{R}_3 - \mathbf{q}') , \quad (13.7)$$

où I_λ est la tache de diffraction de Fresnel d'un pixel du second modulateur. L'importance de la diffraction pour la longueur d'onde λ peut être évaluée par la taille du tenseur V_λ , c'est à dire le nombre de coefficients de diffraction non négligeables. Pour un pixel donné, cette taille est d'autant plus grande que la longueur d'onde est grande.

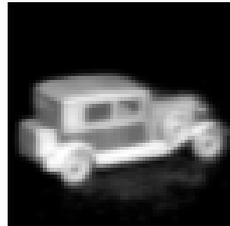
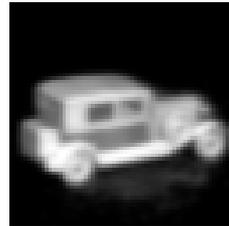
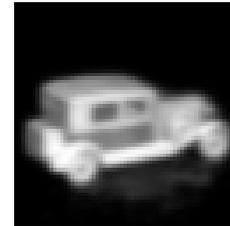
Comme l'indique l'expression (13.6), le tenseur V des coefficients de diffraction pour une source polychromatique est simplement la moyenne pondérée par le spectre de la source des tenseurs monochromatiques V_λ . Par conséquent, nous pouvons nous attendre logiquement à ce que la taille du tenseur de diffraction pour une source blanche soit intermédiaire de celles correspondant aux longueurs d'onde extrêmes du spectre. La figure 13.4 illustre ce propos. Pour cet exemple, le spectre de la source couvre le domaine visible, et l'intégrale de l'expression (13.6) est simplement évaluée sur sept longueurs d'onde entre 400 et 700 nanomètres. La figure montre la scène originale, et l'ombre résultante après application du tenseur de diffraction. En pratique, la longueur d'onde centrale du spectre peut être utilisée pour évaluer l'importance de la diffraction.



scène



ombre (source blanche)

ombre ($\lambda = 400$ nm)ombre ($\lambda = 550$ nm)ombre ($\lambda = 700$ nm)

longueur d'onde λ (nm)	400	450	500	550	600	650	700
spectre $B(\lambda) \Delta\lambda$ (u.a.)	0.3	0.65	0.9	1.0	0.8	0.55	0.2

Figure 13.4 : Diffraction avec une source blanche. La simulation numérique est réalisée pour des modulateurs Epson, $d = 5$ cm, $G = 4$.

13.4 Caractéristiques des modulateurs

13.4.1 Non-linéarité de la transmission en intensité

Comme nous l'avons décrit au chapitre 5, la transmission en intensité d'un modulateur spatial de lumière n'est pas nécessairement linéaire avec la tension de commande appliquée à un pixel du modulateur, ou de façon équivalente avec le niveau de gris. Cette non-linéarité pose problème puisque l'apparence de la cible sur le modulateur dépend de son niveau de gris moyen dans la scène, ou encore des conditions d'éclairage de la cible dans la scène. De même, le filtre calculé et le filtre représenté sur un modulateur seront légèrement différents, ce qui peut détériorer les performances du corrélateur.

Dans le cas où la non-linéarité est légère, ces effets peuvent être négligés. Dans le cas contraire, il est facile de les corriger en appliquant aux images en entrée du corrélateur des tables de transcodage (LUT²) inverses des non-linéarités des transmissions des modulateurs.

13.4.2 Contraste des modulateurs

S'il est possible de corriger simplement les non-linéarités des transmissions des modulateurs, il subsiste le problème du contraste fini de ces modulateurs. Nous allons étudier ici l'influence de ce contraste fini sur l'opération de corrélation réalisée par le montage de corrélation par ombroscopie.

Influence sur une corrélation

Nous notons \otimes l'opération réalisée par le corrélateur entre les deux transmissions en intensité des valves.

Nous supposons dans cette section que les transmissions en intensité des valves sont simplement reliées aux images \mathbf{h} et \mathbf{x} injectées par :

$$\begin{cases} T_1(\mathbf{h}) = \delta \mathbf{1} + (1 - \delta) \mathbf{h} \\ T_2(\mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{1} + (1 - \epsilon) \mathbf{x} \end{cases} \quad (13.8)$$

où $\mathbf{1}$ représente l'image uniforme dont tous les pixels sont à 1, \mathbf{h} et \mathbf{x} sont supposées normalisées à 1, et δ et ϵ mesurent les contrastes des deux valves. Ces dernières quantités sont relativement petites devant 1 pour les modulateurs Epson par exemple, et tendent vers 0 quand le contraste augmente. Dans ce modèle simplifié de la transmission des modulateurs nous négligeons donc l'effet du contraste sur l'ombre de l'image \mathbf{x} . Nous reviendrons sur ce point plus loin. Par ailleurs, nous supposons que la caméra a une réponse linéaire en intensité, de sorte que l'image en sortie du corrélateur est :

$$\mathbf{c} = T_1(\mathbf{h}) \otimes T_2(\mathbf{x}) \quad (13.9)$$

Nous reviendrons plus loin sur les problèmes liés à la dynamique d'acquisition de la caméra. Nous pouvons écrire :

$$T_1(\mathbf{h}) \otimes T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{\delta \epsilon [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}]}_{\text{fond constant}} + \underbrace{(1 - \delta) \epsilon [\mathbf{h} \otimes \mathbf{1}]}_{\text{plateaux parasites}} + \underbrace{\delta (1 - \epsilon) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}]}_{\text{plateaux parasites}} + \underbrace{(1 - \delta)(1 - \epsilon) [\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}]}_{\text{corrélation}} \quad (13.10)$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes sur cette expression :

- le dernier terme représente la partie utile de la corrélation, celle-ci est atténuée quand le contraste est fini ;

²Look Up Table.

- le premier terme n'est qu'un fond constant qui ne perturbe pas la mesure, car il ne dépend pas de l'image scène \mathbf{x} , même s'il utilise inutilement une partie de la dynamique d'acquisition ;
- le second terme rajoute des "plateaux" sous le pic de corrélation, dont la hauteur est proportionnelle aux intégrales des objets présents dans l'image scène \mathbf{x} . Cette intégrale est prise dans le support du filtre, qui est une fonction fenêtre se déplaçant dans le plan de l'image scène. Ces "plateaux" vont donc changer la hauteur des pics de corrélation, et peuvent par conséquent détruire le seuil de fausse alarme entre pic principal et pics secondaires. En particulier, si la référence recherchée dans la scène possède une énergie, mesurée par son intégrale, faible par rapport à celles des leurres, les "plateaux" sous les intercorrélations filtre-leurre seront plus élevés que sous la corrélation filtre-référence.

Le terme le plus gênant étant $\delta(1 - \epsilon)[\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}]$, il est clair qu'il faut principalement pour la réalisation optique soigner le contraste du premier modulateur, c'est à dire celui qui reçoit le filtre. La figure 13.5 présente un cas limite où un contraste trop faible pour le premier modulateur peut faire échouer la reconnaissance de la position d'une cible par corrélation. Le taxi à reconnaître dans l'image scène apparaît plus sombre que les leurres qui l'entourent, ce qui fait que la corrélation du taxi avec le filtre adapté (première coupe) est juste au dessus de la corrélation avec le camion. Pour $\delta = 1/3$ (contraste 2) ou $\delta = 1/5$ (contraste 4), cette situation est inversée. En pratique, un contraste de 20 ou plus pour le premier modulateur peut être considéré comme suffisant, suivant le type des images analysées bien entendu. Cette valeur est tout à fait compatible avec les modulateurs usuels, tel le modulateur Epson décrit au chapitre 5, et que nous avons utilisé pour les expériences décrites au chapitre suivant.

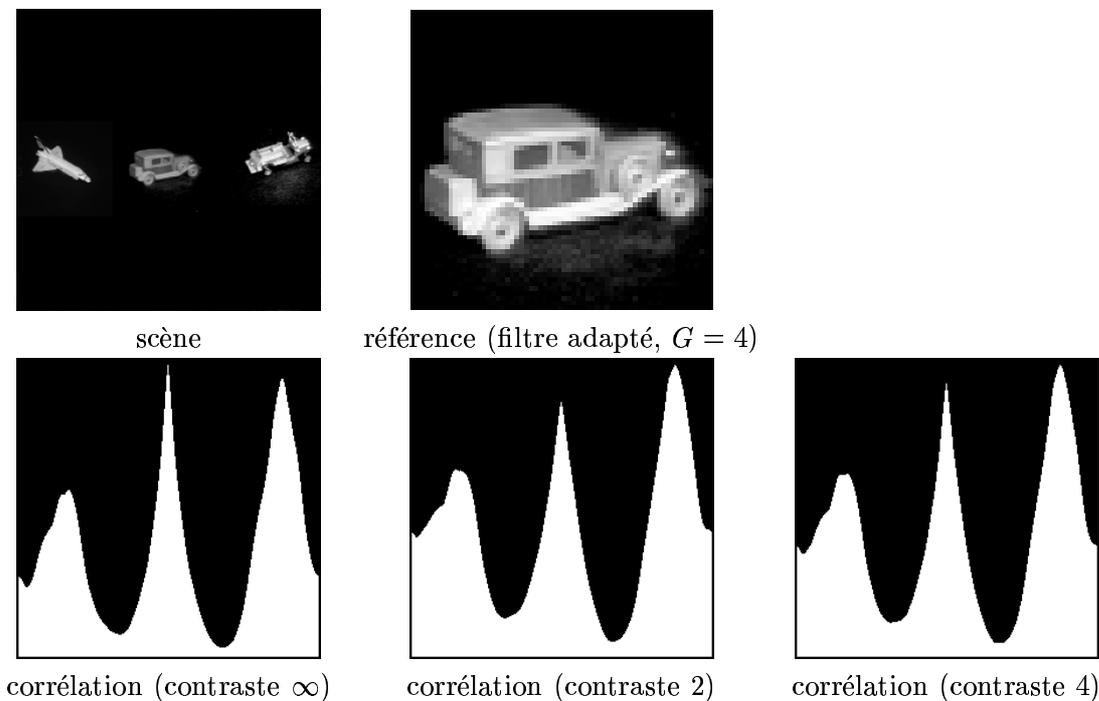


Figure 13.5 : Illustration de l'effet d'un faible contraste du modulateur recevant le filtre. Les coupes représentées sont les projections des maximums de corrélation suivant l'axe y .

Influence sur une corrélation bipolaire

Dans le cas où nous voulons réaliser une corrélation de la scène avec un filtre bipolaire, nous présentons successivement les images \mathbf{h}^+ et \mathbf{h}^- . Notons $\Delta\mathbf{h}$ leur différence. Nous obtenons après soustraction des deux acquisitions :

$$(T_1(\mathbf{h}^+) - T_1(\mathbf{h}^-)) \otimes T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{(1 - \delta)\epsilon[\Delta\mathbf{h} \otimes \mathbf{1}]}_{\text{fond constant}} + \underbrace{(1 - \delta)(1 - \epsilon)[\Delta\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}]}_{\text{corrélation}} \quad (13.11)$$

Par rapport à l'influence du contraste sur la corrélation d'un seul filtre positif, il ne reste plus qu'un fond constant perturbateur qui ne dépend pas de la scène considérée. Si de plus le filtre bipolaire est à moyenne nulle, ce qu'il est aisé d'imposer, l'image mesurée sera alors directement :

$$(1 - \delta)(1 - \epsilon)(\Delta\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}), \quad (13.12)$$

soit la corrélation recherchée. Nous voyons donc que le filtrage bipolaire permet de s'affranchir du problème du contraste fini des modulateurs, tandis que la corrélation avec un filtre positif unique y est bien plus sensible. Le seul problème pouvant subsister avec le filtrage bipolaire est une perte de dynamique d'acquisition de la caméra due au fond constant apparaissant sur chacune des corrélations positives et négatives avant soustraction.

13.4.3 Couplage amplitude-phase du second modulateur

Nous avons vu au chapitre 5 que les modulateurs spatiaux de lumière sont souvent caractérisés par un domaine de codage tel que l'amplitude et la phase de la transmission complexe sont couplées. C'est le cas par exemple du codage en spirale décrivant approximativement les modulateurs à cristal liquide nématique en hélice. Or, l'ombre de l'image scène dépend de la transmission en amplitude complexe du second modulateur, comme l'expriment les expressions (11.6).

Comme il est difficile d'évaluer analytiquement cet effet, nous l'avons simulé pour des modulateurs de type Epson, décrits au chapitre 5. La figure (13.6) présente l'ombre d'une image scène pour différentes valeurs du déphasage maximal du codage en spirale, et pour une configuration du corrélateur ($d = 5\text{cm}$ et $G = 4$). Nous pouvons noter que plus le déphasage maximal augmente, plus il semble que les contours de l'objet soient conservés (visuellement, le flou est moins important). Est-ce à dire pour autant que le résultat de la corrélation doit être meilleur quand le déphasage maximum augmente ? En fait, comme nous l'avons observé par simulation, la mesure de la corrélation ne dépend quasiment pas du couplage amplitude-phase pour les paramètres géométriques que nous utilisons, mais principalement de la transmission en intensité du second modulateur. Cette propriété permet de simplifier le calcul de l'ombre d'une image scène, mais également le choix d'un modulateur. À titre d'illustration, nous avons calculé l'ombre de la même image scène mais codée en phase pure. Bien que les contours du taxi deviennent légèrement apparents sur la caméra – alors que l'image apparaît blanche sur le modulateur – le contraste de ces contours reste faible, et en particulier la corrélation avec une telle ombre n'est pas très satisfaisante.

13.5 Caractéristiques de la détection

Nous avons envisagé les conséquences sur la mesure de la corrélation des imperfections des modulateurs d'entrée, du point de vue du codage qu'ils réalisent. L'élément de sortie du montage, la caméra, possède également des limitations d'ordre pratique. En particulier :

- La dynamique d'acquisition est limitée. Avec une caméra standard, le nombre de niveaux après quantification est de l'ordre de 64, ce qui correspond à 6 bits de résolution. Cette limitation n'en est pas vraiment une quand on ne cherche que le maximum d'une corrélation unique, mais peut devenir un problème avec la méthode de filtrage bipolaire.

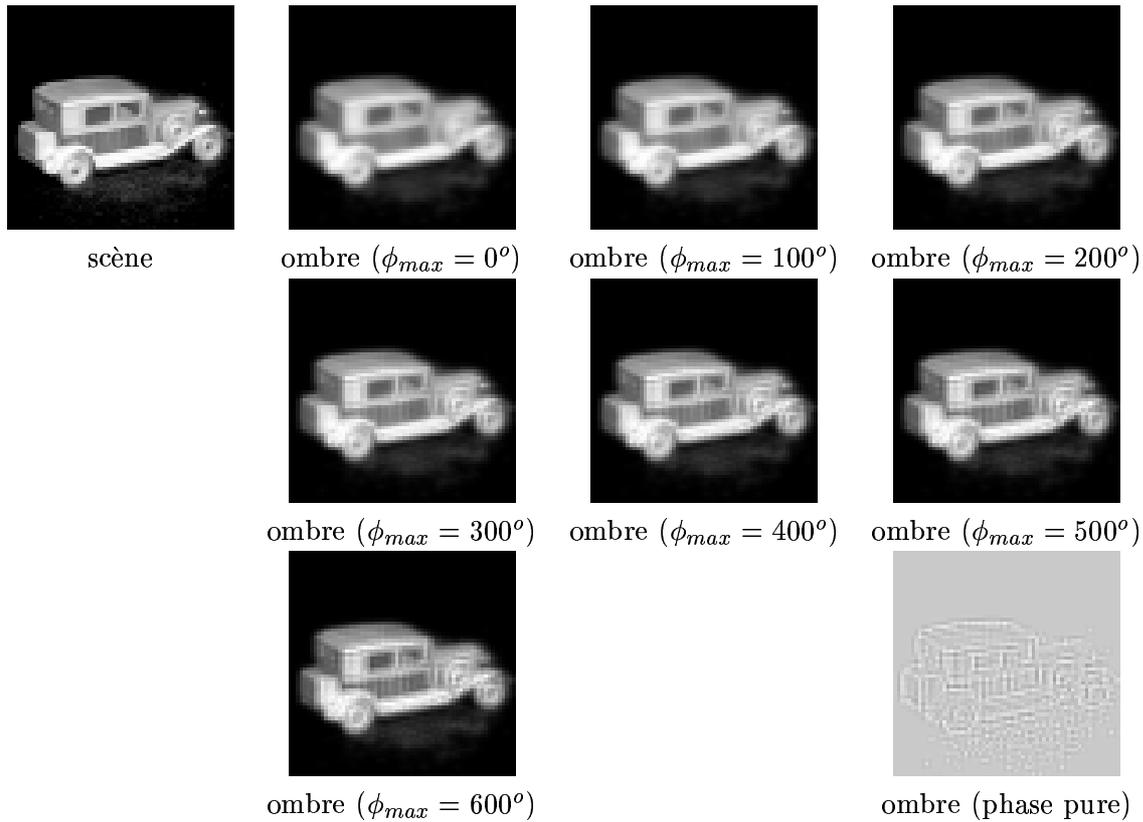


Figure 13.6 : Influence du couplage amplitude–phase du second modulateur sur l’ombre d’une image scène. Les ombres sont calculées pour le codage en spirale pour différentes valeurs du déphasage maximum, puis pour le codage en phase pure. Dimensions et espacement des pixels : Epson, $d = 5\text{cm}$, $G = 4$.

- Le bruit d’acquisition peut en première approximation être supposé indépendant du signal mesuré, c’est à dire l’image de corrélation. En fait, le rapport signal à bruit de l’acquisition dépend en pratique principalement de la puissance de la source utilisée, et il est donc en principe possible d’agir sur ce paramètre expérimental. On peut s’attendre à ce que le bruit d’acquisition ait beaucoup plus d’influence sur la corrélation bipolaire que sur une corrélation unique, puisque l’opération de soustraction est généralement réputée en électronique pour être très sensible au bruit.

Cependant, nous montrerons expérimentalement au chapitre suivant que ces facteurs ne sont pas tellement limitatifs en pratique pour le filtrage bipolaire même avec une caméra standard.

13.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d’abord montré que le corrélateur ombroscopique sans lentille, le plus simple, est probablement le plus intéressant. De par sa grande simplicité, il est d’un faible coût, d’un encombrement réduit et d’une grande robustesse. D’un point de vue pratique, c’est là son argument principal vis à vis des corrélateurs cohérents.

Nous avons montré qu’il est nécessaire de réaliser un compromis entre perte de résolution due à la diffraction et perte d’invariance par translation due aux non-uniformités photométriques, et que cela conduit au choix des dimensions géométriques du corrélateur. Pour les modulateurs spatiaux de

lumière Epson, pour une longueur d'onde de 500 nm, et pour un diffuseur de type dépoli en surface, nous avons ainsi déterminé les valeurs $d = 5.5$ cm pour l'espacement des modulateurs et $G = 4$ pour le facteur d'homothétie du filtre par rapport à l'image scène.

Enfin, nous avons étudié les limitations liées aux imperfections des différents composants utilisés : source, modulateurs spatiaux de lumière et caméra. Nous les avons illustrées par des simulations numériques. Aucun des composants précités n'a besoin de tolérances étroites. En effet, la source peut être blanche, le contraste des modulateurs ne doit simplement pas être trop faible (en pratique un contraste supérieur à 20 est largement suffisant), le couplage amplitude-phase du codage du second modulateur peut être négligé, et la caméra peut être de type CCD standard.

Chapitre 14

Réalisation et étude expérimentale d'un corrélateur ombroscopique

Dans les chapitres précédents de cette troisième partie, nous avons discuté les limitations théoriques et pratiques de la corrélation incohérente par ombroscopie. En particulier, dans le chapitre 13, nous avons étudié les compromis géométriques pour le montage qui conduisent à limiter conjointement la perte de résolution causée par la diffraction et la perte de l'invariance par translation due aux non-uniformités photométriques. Pour les modulateurs spatiaux de lumière Epson, pour une longueur d'onde de 500 nm, et pour un diffuseur de type dépoli en surface, nous avons ainsi déterminé les valeurs $d = 5.5$ cm pour l'espacement des modulateurs et $G = 4$ pour le facteur d'homothétie du filtre par rapport à l'image scène.

Dans ce chapitre, nous appliquons ces différents résultats à la réalisation d'un corrélateur reprogrammable, le premier de ce type à notre connaissance. Nous vérifions expérimentalement son bon fonctionnement, ainsi que l'adéquation des résultats expérimentaux avec les prévisions théoriques et par simulation numérique. Nous mettons en œuvre et démontrons la grande efficacité de la méthode de filtrage bipolaire que nous avons introduite au chapitre 8. Nous étendons de plus celle-ci aux filtres optimaux avec apprentissage (filtres de type SDF¹ et leurs variantes). Plus généralement cette extension peut se faire pour tout filtrage linéaire de l'image scène.

14.1 Montage de corrélation

La figure 14.1 schématise le corrélateur ombroscopique que nous avons réalisé pour en démontrer le principe. Les divers éléments optiques utilisés sont tous tout à fait standards et de faible coût :

- La source est une lampe halogène, donc à large spectre. Le faisceau d'éclairage est collimaté approximativement par une simple lentille, afin d'obtenir un contraste satisfaisant pour le premier modulateur² (environ 30), ainsi qu'un éclairage uniforme sur la surface de celui-ci.
- Le diffuseur est une simple lame de verre dépolie sur une face. Nous avons dit au chapitre 12 que pour ce type de diffuseur l'expression du poids des connexions peut être approchée par une gaussienne avec une bonne précision. La demi-largeur angulaire à $1/e$ pour notre diffuseur est $\theta_o = 10^\circ$. La face dépolie est placée en contact avec la lame de sortie du premier modulateur.

¹*Synthetic Discriminant Function*, fonction synthétiques discriminantes.

²Rappelons en effet qu'au chapitre 13, lors de l'étude de l'influence sur la mesure de la corrélation de la finitude du contraste des modulateurs, nous avons montré que c'est le contraste du modulateur qui reçoit le filtre qui importe le plus.

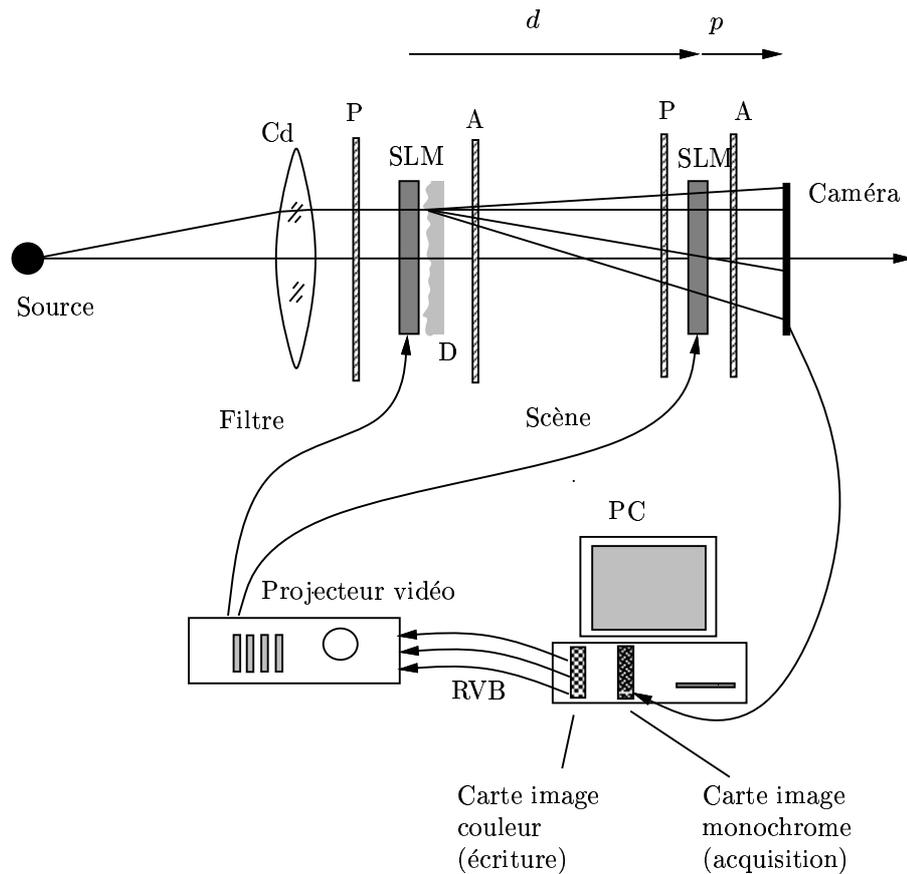


Figure 14.1 : Montage de corrélation par ombroscopie à distance finie. Les images d'entrée h et x sont présentées sur les SLM extraits d'un vidéo-projecteur Epson. Un polariseur (P) et un analyseur (A) encadrent chacun des modulateurs. Le faisceau d'éclairage, fourni par une source blanche standard, est collimaté avec un condenseur (Cd). Un ordinateur permet l'écriture et l'acquisition des images.

- Les modulateurs³ sont ceux qui ont été décrits au chapitre 5. Ils sont encadrés par un polariseur et un analyseur servant à optimiser leur contraste.
- La caméra est une CCD standard.

Les dimensions géométriques retenues pour le montage sont :

$$d = 5.5 \text{ cm et } G = 4 .$$

Ces valeurs correspondent au résultat de l'analyse menée au chapitre précédent pour les compromis entre perte de résolution et perte d'invariance par translation.

Pour pouvoir écrire simultanément deux images indépendantes, c'est à dire le filtre et l'image scène, sur les deux SLM, nous avons utilisé une carte d'acquisition-affichage d'images couleurs⁴. Une autre carte d'acquisition d'images monochrome⁵ sert pour l'acquisition de la sortie de la caméra observant le plan de corrélation. Ces deux cartes sont montées dans un ordinateur de type PC, qui sert également à la commande complète du corrélateur.

La mémoire vidéo de la carte couleur contient une image de 512 par 512 pixels codés sur 16 bits, en trois composantes RGB⁶. La composante verte est codée sur 6 bits, soit 64 niveaux de gris,

³Ces SLM sont extraits du vidéo-projecteur Epson VP-2000.

⁴Carte PICX, Synaps.

⁵Carte MAPP, Synaps.

⁶Red, Green, Blue, rouge, vert, bleu.

tandis que les composantes rouge et bleue sont codées sur 5 bits chacune, soit 32 niveaux de gris. Le nombre de niveaux de gris utilisables pour chacun des modulateurs est donc réduit, mais les trois écrans peuvent être adressés simultanément au travers de l'électronique d'interface du vidéo-projecteur. La composante de couleur comportant le plus grand nombre de niveau de gris est utilisée pour le filtre. La carte monochrome d'acquisition permet de numériser la mesure de la corrélation fournie par la caméra sur 8 bits, soit 256 niveaux de gris. Une interface logicielle a été écrite pour pouvoir utiliser simultanément les cartes couleur (écriture) et monochrome (acquisition), et gérer la méthode de filtrage bipolaire, voir tableau 14.1. Au final, la cadence de fonctionnement du corrélateur n'est limitée que par les temps d'inscription et d'acquisition des images, c'est à dire par l'interface optique/électronique. Notre but étant principalement de démontrer expérimentalement l'application du principe de l'ombroscopie à la corrélation optique, nous n'avons pas cherché à améliorer l'aspect rapidité de calcul.

Carte couleur	Carte monochrome	Calculateur
Écriture filtre + (\mathbf{h}^+) Écriture scène (\mathbf{x})	Acquisition corrélation + ($\mathbf{c}^+ = \mathbf{h}^+ \otimes \mathbf{x}$)	
Écriture filtre - (\mathbf{h}^-)	Acquisition corrélation - ($\mathbf{c}^- = \mathbf{h}^- \otimes \mathbf{x}$)	
		Soustraction + module carré : $ \mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^- ^2 = \mathbf{h} \otimes \mathbf{x} ^2$ Localisation du maximum

Tableau 14.1 : Séquence des opérations pour la réalisation expérimentale du filtrage bipolaire.

14.2 Résultats en filtrage adapté

Dans un premier temps, nous présentons nos résultats expérimentaux pour le filtrage adapté simple, c'est à dire pour la corrélation de la référence avec l'image scène. Notre but est ainsi de démontrer tout d'abord sur un exemple simple le principe de la corrélation incohérente par ombroscopie, puis l'adéquation des résultats expérimentaux avec les prévisions théoriques et par simulation. Dans la section suivante, nous poursuivrons avec l'étude expérimentale du filtrage bipolaire.

14.2.1 Validation sur un exemple simple

La figure 14.2 présente un résultat expérimental de corrélation pour des lettres d'imprimerie. Ces images sont binaires et les objets représentés de forme très simple. Cela permet d'obtenir une forme très caractéristique pour le produit de corrélation des images qui favorise la comparaison entre expérience et théorie. La corrélation idéale de la figure 14.2 est la corrélation numérique de la référence et de la scène, sans prendre en compte les limitations optiques. Les dimensions des lettres étant relativement importantes, la perte de résolution par diffraction peut être négligée. Cette dimension étant par ailleurs relativement petite à l'échelle des non-uniformités photométriques, celles-ci peuvent être également négligées. Les images étant binaires, le signal détecté est important et le rapport signal à bruit de

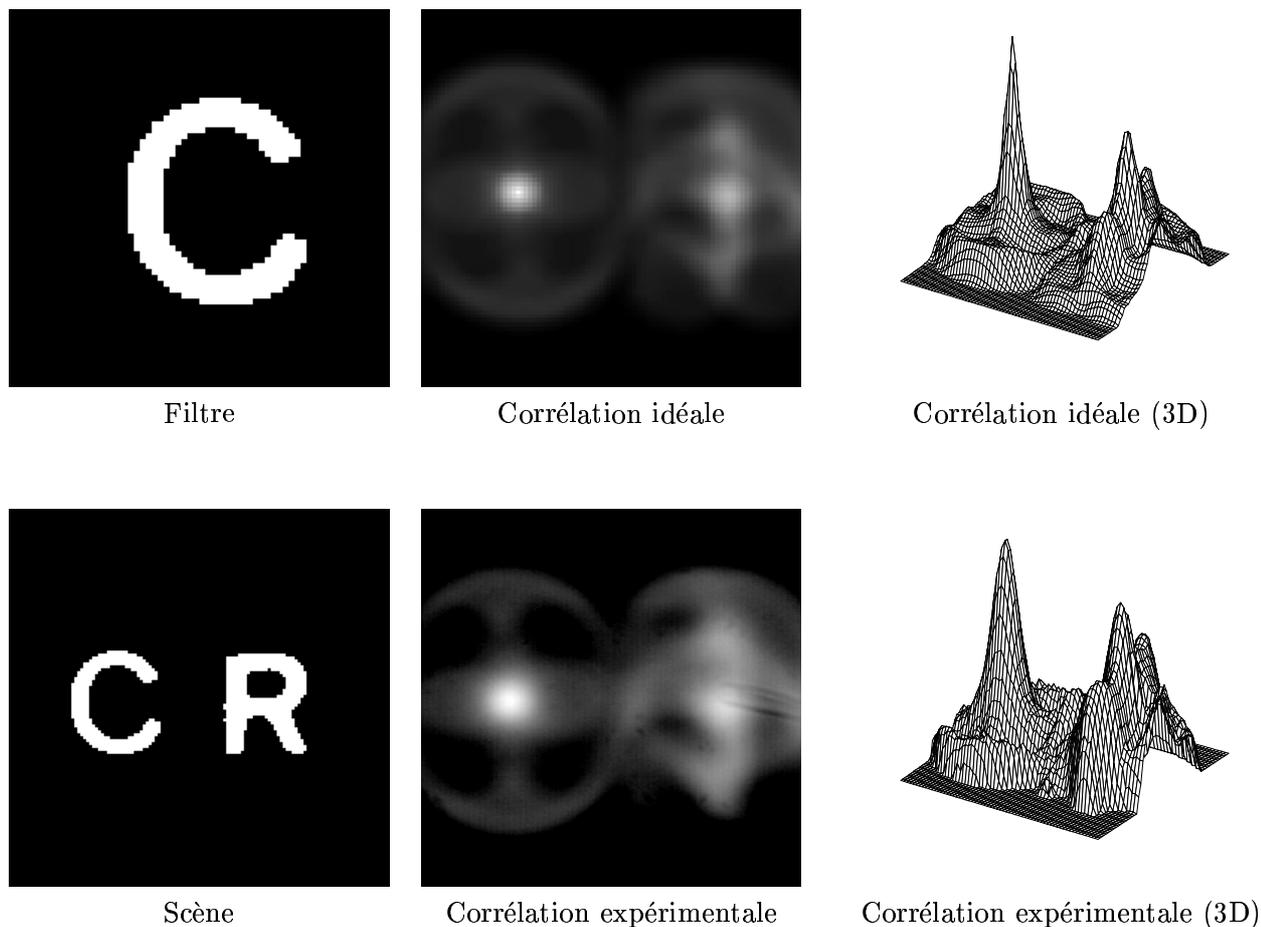


Figure 14.2 : En haut, l'image contenant la lettre C est le filtre, l'image contenant les lettres RC est la scène. Au milieu à gauche, la corrélation idéale; au milieu à droite le résultat expérimental de la corrélation. En bas, vues en trois dimensions des corrélations idéale et expérimentale.

la détection est relativement grand. Au final, les perturbations les plus importantes sont dues au contraste fini des modulateurs.

On peut observer la très bonne adéquation des formes des pics de corrélation idéaux et simulés, puisqu'il est possible de retrouver chacun des détails de l'image de corrélation idéale dans l'image de corrélation expérimentale. Cela signifie que l'ombroscopie permet de mesurer un vrai produit de corrélation de deux images, ce que nous traduirons par le terme de *fidélité*. La différence principale entre les deux images de corrélation théorique et expérimentale se situe au niveau des faibles niveaux de signal, les forts niveaux n'étant pas trop modifiés. Notre critère de localisation d'un objet étant la position du maximum de corrélation, cela ne porte cependant pas à conséquence.

14.2.2 Comparaison simulation numérique/expérience

Afin de comparer les résultats obtenus par simulation et expérimentalement, nous nous intéressons maintenant à une image scène plus complexe, bien que toujours binaire, figure 14.3. Cette image scène comporte un fond très structuré. Le filtre adapté est l'image de l'avion de référence. La corrélation idéale est la corrélation numérique des images scène et référence. La corrélation simulée tient compte de tous les paramètres décrits au chapitre précédent, et en particulier de la diffraction, des

non-uniformités photométriques, du contraste fini des modulateurs... Ces images démontrent que la simulation numérique est très proche de la corrélation expérimentale.

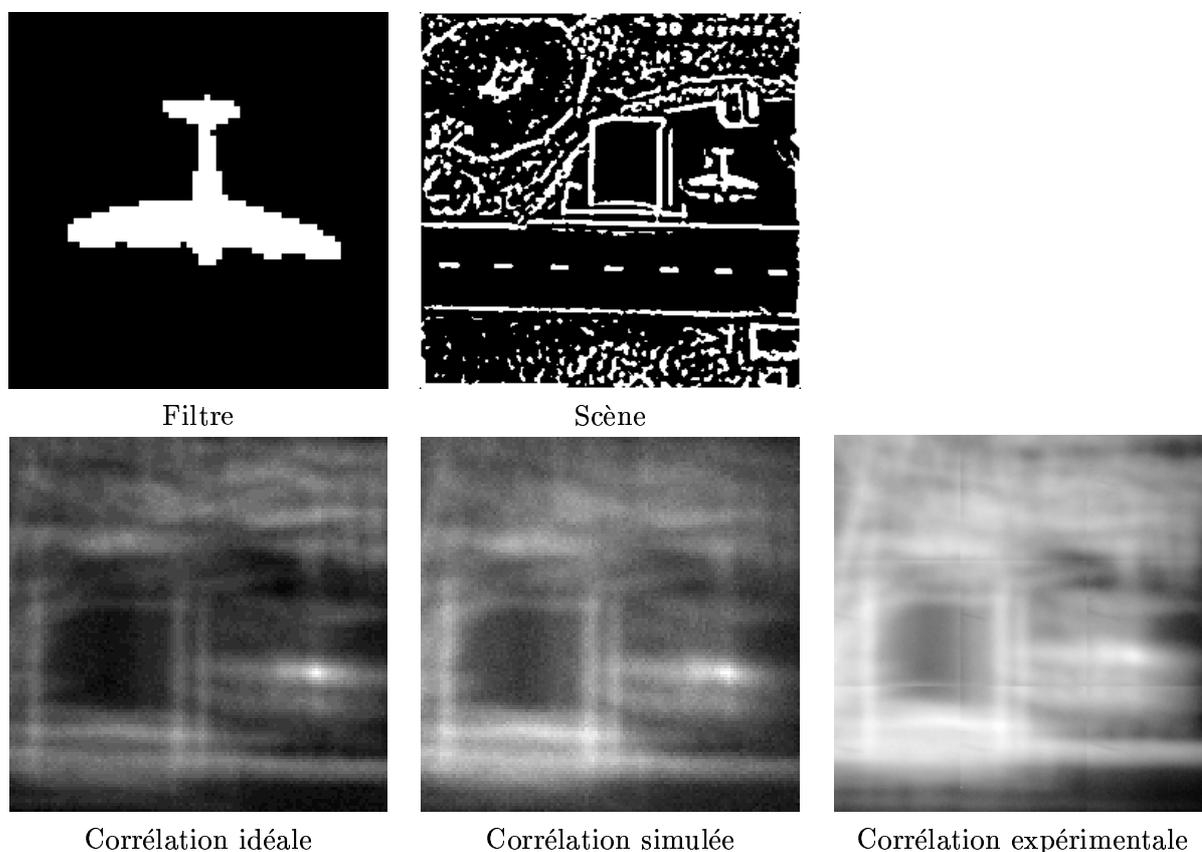


Figure 14.3 : Comparaison des résultats expérimentaux avec la simulation numérique pour une image scène présentant un fond structuré, et pour le filtre adapté. La simulation numérique tient compte de tous les paramètres géométriques mesurés sur le montage ($G = 4$, $d = 5.5$ cm).

14.3 Résultats en filtrage bipolaire

Nous présentons maintenant des résultats expérimentaux en filtrage bipolaire. Nous allons tout d'abord voir la réalisation pratique du filtrage bipolaire à compromis optimal introduit au chapitre 8. Puis nous verrons que cette méthode peut être simplement étendue pour représenter un filtre linéaire quelconque. Nous prendrons pour exemple les filtres OT-SDF⁷, qui sont des filtres avec apprentissage.

14.3.1 Filtres à compromis optimal

Nous avons introduit au chapitre 8 une méthode de filtrage bipolaire à compromis optimal entre des critères de corrélation. Nous reprenons ici l'exemple des compromis optimaux entre les critères SNR, ou rapport signal à bruit, et PCE, ou finesse du pic de corrélation, introduits au chapitre 1. Le modèle de bruit utilisé pour le calcul des filtres est un bruit blanc. Rappelons que nous avons montré comment tout filtre à compromis optimal peut être représenté à l'aide d'une partie positive et d'une partie négative dans l'espace objet.

⁷ *Optimal Trade-off Synthetic Discriminant Function.*

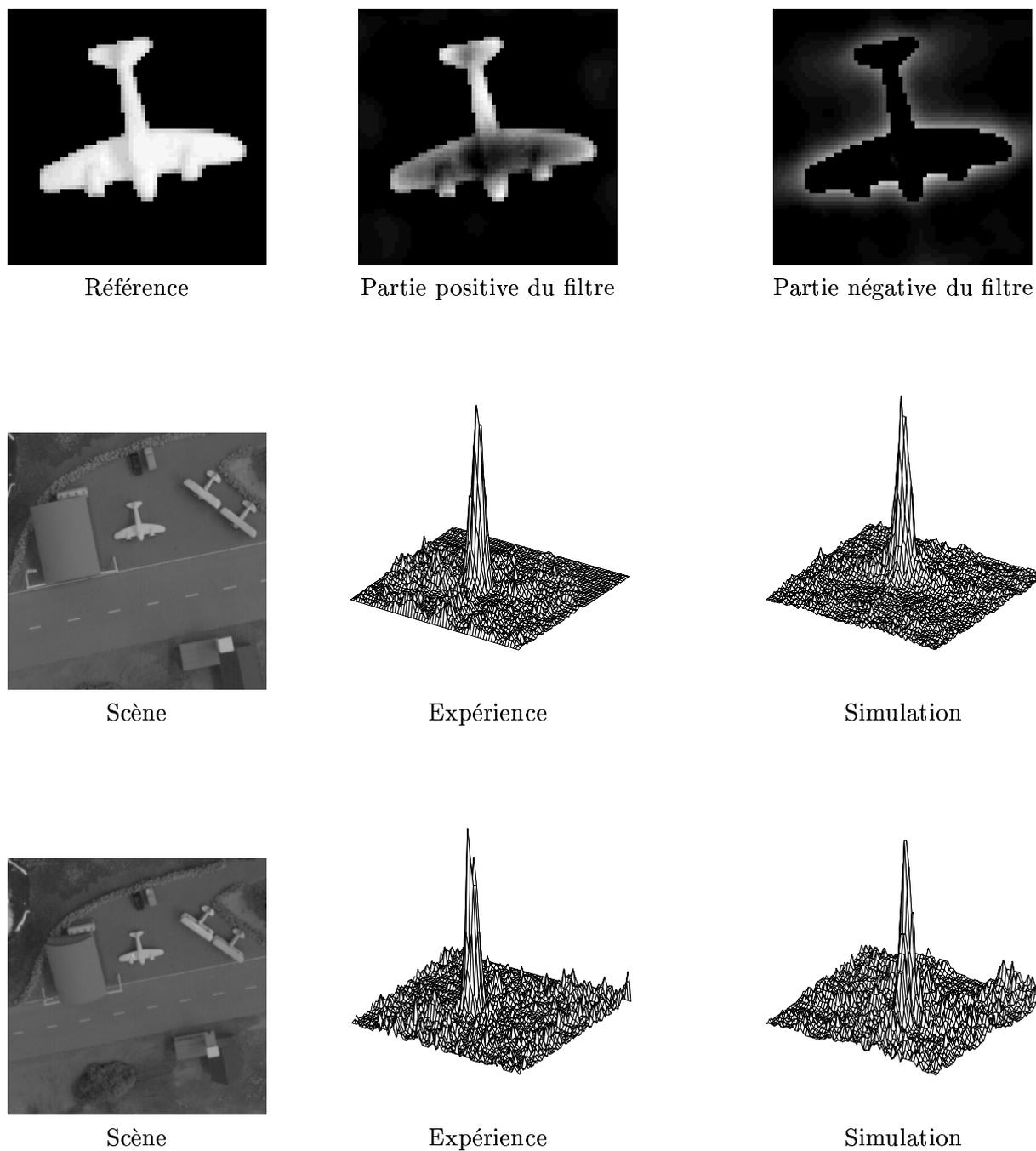


Figure 14.4 : Exemple de filtrage bipolaire pour des images scène présentant un fond structuré. Le filtre bipolaire à compromis optimal est calculé pour le paramètre de compromis $\alpha = \cos \theta$, avec $\theta = 5^\circ$.

La figure 14.4 illustre les performances de cette méthode. Les deux images scène sont à niveaux de gris et présentent un fond très structuré et de valeur moyenne élevée. Pour ces deux exemples, la corrélation avec le filtre adapté échoue et ne permet pas la localisation de l'avion de référence. L'emploi d'un filtre à compromis optimal permet d'améliorer fortement la discrimination de l'opération de filtrage. Par ailleurs, l'avion de référence à partir duquel est calculé le filtre a été extrait de la première image scène. Sur la seconde image scène, l'avion apparaît plus petit et vu sous un angle légèrement différent. Pourtant, la corrélation de cette image scène avec le filtre bipolaire calculé pour la première image permet toujours la localisation sans ambiguïté de l'avion. Le filtrage à compromis optimal permet donc de conserver en bonne partie les qualités de robustesse du filtre adapté, tout en améliorant nettement la discrimination. Ici, la notion de robustesse doit être comprise comme la résistance à un défaut de modélisation de l'image de référence.

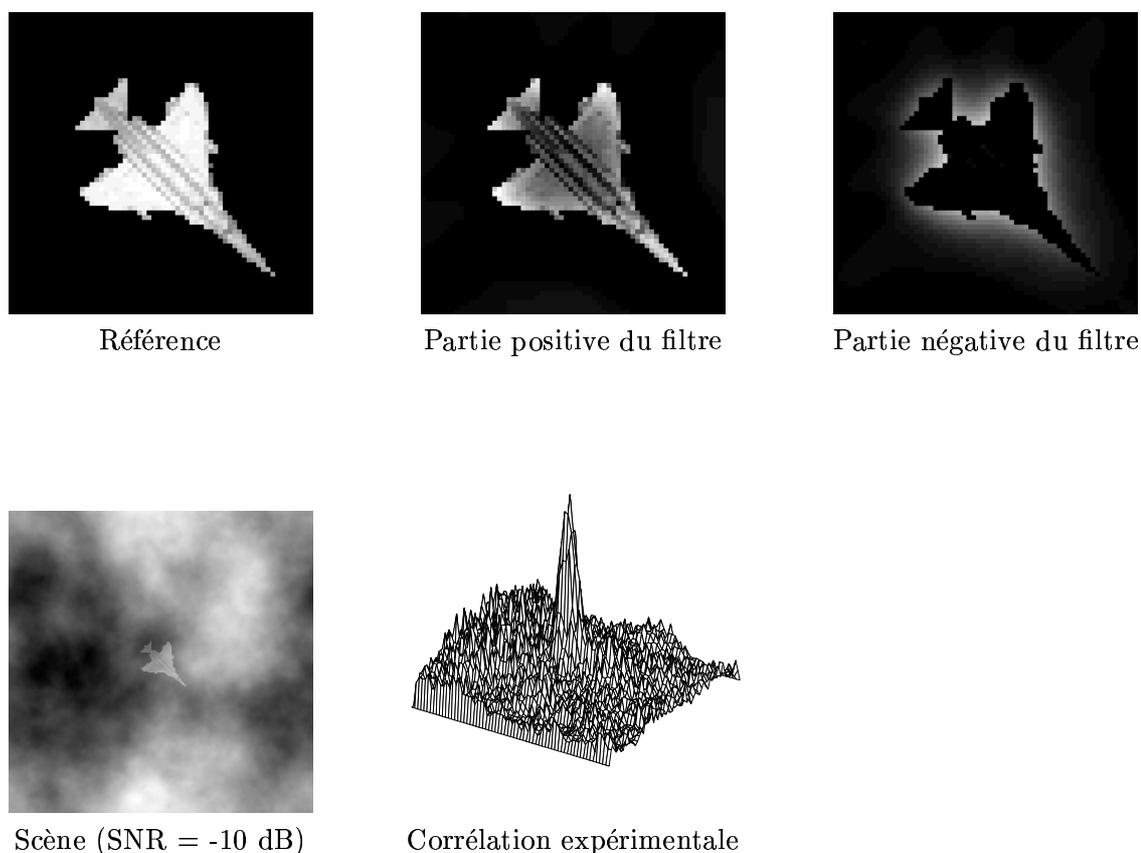


Figure 14.5 : Exemple de filtrage bipolaire pour des images scène présentant un fond nuageux peu structuré. Le filtre bipolaire à compromis optimal est calculé pour le paramètre de compromis $\alpha = \cos \theta$, avec $\theta = 5^\circ$.

La figure 14.5 présente un autre exemple de l'application du filtrage bipolaire. L'image scène représente toujours un avion, mais vu sur un fond nuageux, donc peu structuré. La localisation de l'avion dans une telle image est relativement difficile car celui-ci apparaît petit et peu contrasté dans un nuage épais. Encore une fois, le filtre est optimisé pour un modèle de bruit blanc très différent de la densité spectrale effective du fond nuageux.

Nous venons de démontrer la résistance de l'opération de filtrage bipolaire à compromis optimal à des défauts de modélisation du fond, à travers sa densité spectrale, et de la référence, à travers une déformation géométrique de la cible. Nous pouvons prendre pour autre exemple la tolérance à la rotation de la cible dans l'image scène par rapport à la référence. La figure 14.6 illustre cette

caractéristique. Dans cette expérience, la référence est toujours l'avion de la figure 14.5, et le filtre bipolaire est identique, mais les images scènes présentées au corrélateur représentent l'avion tournant progressivement sur lui-même de 0 à 30°, et en l'absence de fond. La réponse du corrélateur est alors la valeur du maximum dans l'image de corrélation, et est mise à 0 quand la position de ce maximum sort du support de l'avion.

Les courbes réponse du filtre/angle de rotation de la figure 14.6 sont tracées pour trois valeurs du paramètre de compromis α entre les critères SNR et PCE ($\alpha = \cos \theta$, avec $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 20^\circ$). Il est apparent sur ces courbes que la prévision par simulation s'améliore quantitativement quand la discrimination augmente. La différence entre les courbes théoriques et expérimentales à $\theta = 0^\circ$, c'est à dire en filtrage adapté, peut être expliquée par un biais systématique dû à la caméra. En effet, cette différence disparaît avec l'usage d'un filtre bipolaire, car le biais est le même pour les deux acquisitions.

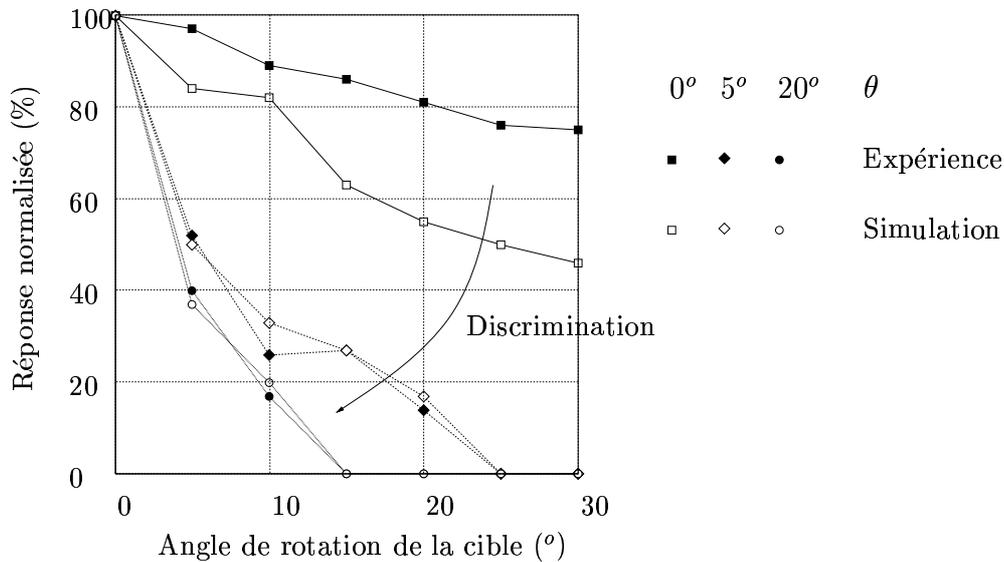


Figure 14.6 : Réponse du filtrage bipolaire en fonction de l'angle de rotation de la cible dans la scène par rapport à la référence. La référence est celle de la figure précédente (14.5). Le paramètre de compromis est $\alpha = \cos \theta$, avec $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 20^\circ$.

14.3.2 Filtres à compromis optimal avec apprentissage

La méthode de décomposition bipolaire que nous avons utilisée peut être appliquée pour représenter un filtre quelconque donné \mathbf{h} . En effet, il suffit de décomposer la réponse percussionnelle, ou de façon équivalente la représentation dans l'espace objet, de ce filtre en ses parties positive \mathbf{h}^+ et négative \mathbf{h}^- données par l'expression (8.7) pour le pixel m :

$$\begin{cases} h_m^+ = \max(0, h_m) \\ h_m^- = \max(0, -h_m) \end{cases}$$

Au prix de deux acquisitions, celles des corrélations positives et négatives, il est ainsi possible de réaliser un filtrage quelconque d'une image scène. Nous insistons sur le fait qu'à l'heure actuelle cela n'est pas possible avec les architectures de corrélations cohérentes reprogrammables que nous avons décrites au chapitre 4.

Nous allons illustrer cette propriété avec des filtres à apprentissage de type OT-SDF. Le rappel de la méthode d'obtention de ces filtres dépasse le cadre de notre étude, mais le lecteur pourra les

trouver dans les articles cités en référence [26, 11].

Les filtres de type SDF sont utilisés généralement pour des problèmes de classification. Le filtre est calculé à partir d'une base d'apprentissage, constituée d'un certain nombre d'images exemples du problème à résoudre. Le filtre SDF doit respecter des contraintes sur la base d'apprentissage, qui sont que le centre de la fonction de corrélation avec chacune des images exemples ait une valeur spécifiée. Ces contraintes sont en général en nombre trop peu important pour déterminer précisément le filtre SDF. En effet, si N désigne le nombre de pixels des images et p est le nombre de contraintes, le nombre de degrés de liberté pour le filtre SDF est de l'ordre de $N-p$. Ces degrés de liberté peuvent être mis à profit pour optimiser un critère (filtres de type MACE et MV-SDF), ou réaliser des compromis entre critères [26] (filtres de type OT-SDF) de la même façon que nous avons défini les filtres numériques optimaux au chapitre 2. Tous ces filtres de type SDF s'expriment comme une combinaison des filtres optimaux pour les mêmes critères correspondant aux images de la base d'apprentissage prises individuellement.

Considérons l'exemple de la figure 14.7. La base d'apprentissage est constituée de cinq images, obtenues à partir de l'image de référence par des rotations de -5° , 0° , 5° , 10° et 15° . Ces cinq images sont organisées en deux classes, en imposant que le centre de la fonction de corrélation avec les images correspondant aux angles de rotation (0° , 5° , 10°) atteigne la valeur 1, et qu'il atteigne 0 pour les images correspondant aux angles de rotation (-5° , 15°). Le filtre OT-SDF ainsi obtenu est représenté sur la figure 14.7, ainsi que ses parties positive et négative. Un tel filtre a été proposé par J. Figure [11] pour la réalisation d'un filtre de secteur chargé de détecter si l'avion est présent ou non dans le secteur $[0^\circ; 10^\circ]$.

Pour vérifier que ce comportement peut être obtenu par notre méthode de filtrage bipolaire, nous présentons sur le graphique de la figure 14.7 le résultat expérimental de la corrélation optique avec une image scène sans et avec fond quand la cible tourne de 0° à 28° . Les exemples d'images scène présentés correspondent à un angle de rotation de 28° . Le filtrage réalisé correspond bien à la fonction filtre de secteur désirée, même en présence d'un fond.

14.4 Conclusion

Nous réalisons un corrélateur incohérent fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie et intégrant notre technique de filtrage bipolaire. Ce corrélateur est d'un type complètement nouveau à notre connaissance. Nous voulons insister sur la grande simplicité et le faible coût de réalisation d'un tel système. Par ailleurs le fonctionnement en éclairage incohérent ainsi que le fait qu'aucune image n'est formée font que le montage optique est très peu sensible aux désalignements ou aux défauts des surfaces optiques. La seule difficulté technologique que nous ayons rencontrée concerne la grande taille nécessaire pour la caméra CCD. Il ne s'agit cependant en aucun cas d'une limitation de principe.

Nous avons présenté des résultats expérimentaux obtenus avec ce corrélateur. Les simulations numériques, fondées en particulier sur les études des effets de la diffraction, des non-uniformités photométriques et du codage réalisé par les modulateurs, s'avèrent très concordantes avec les mesures expérimentales. Cette simulation précise est rendue possible par la simplicité de principe du corrélateur, et permet de prévoir simplement l'effet de chacun des composants utilisés sur la mesure de la corrélation. Un autre intérêt de la concordance de la simulation numérique et de l'expérience est qu'elle autorise d'extrapoler le comportement d'un tel corrélateur pour des paramètres géométriques différents. Mais elle permet également de prévoir les performances d'un montage ombroscopique pour des applications autres que la corrélation, en particulier pour effectuer optiquement des opérations logiques [59], de morphologie mathématique [101], ou encore de substitution symbolique [58, 60].

Pour finir, l'avantage principal du corrélateur incohérent par ombroscopie tient à ce qu'il permet de réaliser un filtrage linéaire quelconque⁸ à travers la technique de représentation bipolaire du filtre

⁸Cette opération de filtrage doit cependant être linéaire avec l'image scène, c'est à dire que le filtre ne doit pas dépendre de l'image scène, au contraire des filtres non-linéaires que nous avons introduits au chapitre 2.

de corrélation. Nous avons démontré les performances de cette méthode dans le cas des filtres à compromis optimal (OT), et dans le cas des filtres à compromis optimal avec apprentissage (OT-SDF). Ces performances sont comparables à celles de leurs analogues numériques, au moins pour les cas que nous avons testés.

En comparaison aux architectures cohérentes de corrélation optique, notre corrélateur incohérent par ombroscopie présente des avantages très nets en ce qui concerne l'encombrement, le coût et la robustesse aux défauts éventuels des éléments optiques. Pour des applications où l'objet recherché est petit en comparaison à l'image scène, et où il est préférable d'insister sur les tolérances du filtrage plutôt que sur ses capacités de discrimination, la corrélation incohérente est un bon choix. S'il est nécessaire de traiter des images de grande résolution, où si des capacités de discrimination importantes sont essentielles, les architectures cohérentes présentent plus de potentialités. En ce sens, notre corrélateur incohérent est un processeur fruste.

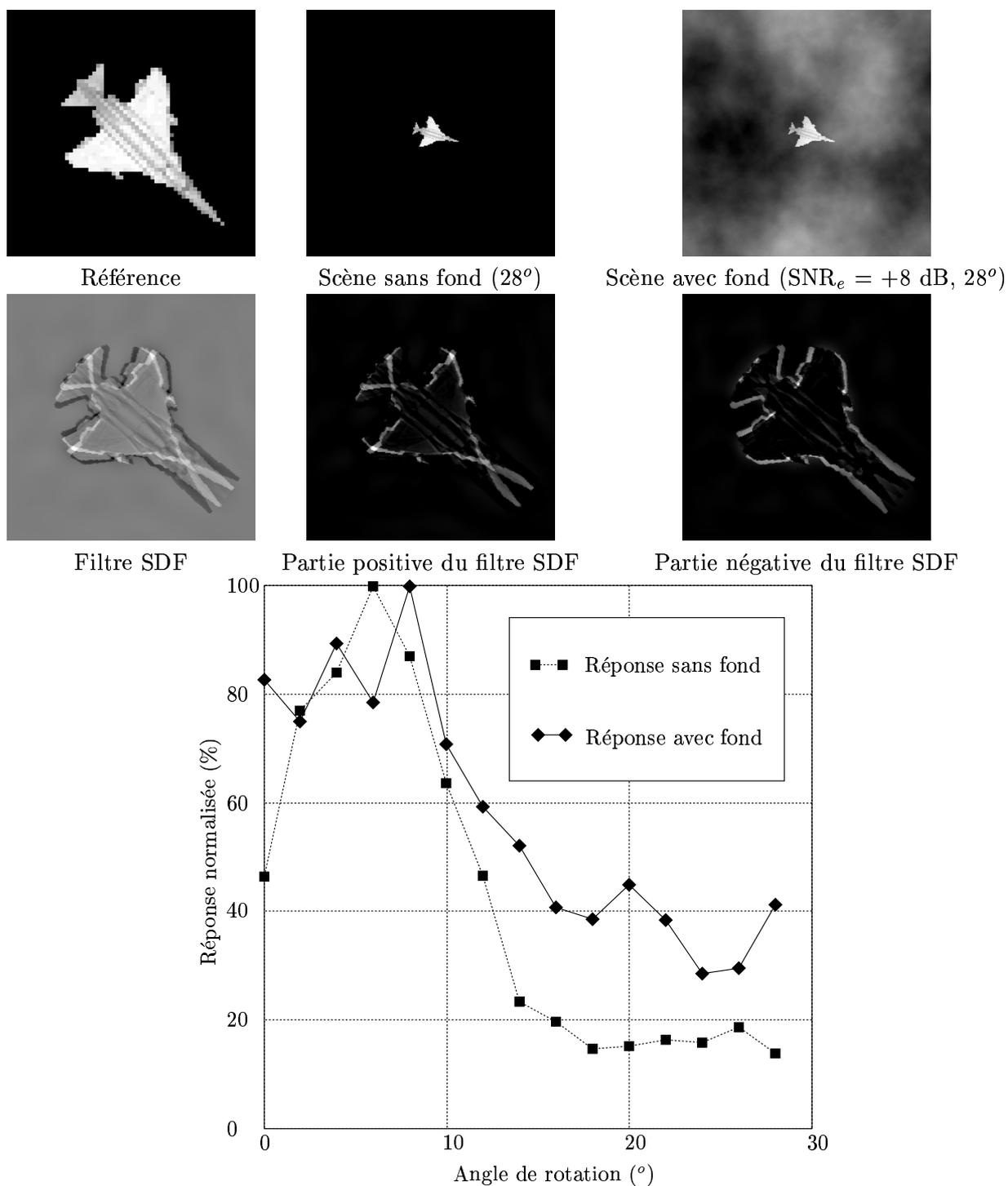


Figure 14.7 : Exemple de résultats expérimentaux de filtrage OT-SDF par la méthode de décomposition bipolaire (voir texte).

Conclusion

Avant de conclure, il nous faut revenir sur l'objectif initial que nous déclarions au début de ce mémoire, à savoir comment faire en sorte que la corrélation optique se rapproche le plus possible de son idéal numérique, et ce tant du point de vue de la précision du calcul effectué, c'est à dire de la fidélité de son implantation pratique, que des capacités de filtrage du système résultant au sens du traitement du signal.

Comme nous l'annoncions dans l'introduction, notre réponse à cette question n'a été que partielle, et a consisté principalement en deux apports au domaine de la corrélation optique :

- l'adaptation de la méthode d'**optimisation multi-critères à compromis optimal** et son application aux architectures de corrélation ;
- l'étude théorique et la démonstration expérimentale d'un **corrélateur incohérent fonctionnant suivant le principe de l'ombroscopie** appliquant la méthode précédente.

Nous allons maintenant développer successivement nos conclusions sur ces deux points.

Principaux résultats

Filtres de corrélation optique optimaux

Nous avons donné une justification au sens du principe du maximum *a posteriori* (MAP) de l'usage de la corrélation pour le problème de l'estimation de la position d'une référence dans une image scène. Quand à la fois l'incertitude de modélisation et la probabilité du fond sont représentées par des lois normales, la solution MAP s'identifie avec la corrélation de la scène avec un filtre de corrélation à compromis optimal entre robustesse au bruit et capacité de discrimination du fond. Ce résultat justifie l'approche heuristique de l'optimisation de critères pour la conception des filtres de corrélation, plus aisée mathématiquement que le formalisme bayésien des probabilités. Cette simplification se fait en pratique sans perte de rigueur, puisqu'il est toujours possible de donner après coup un sens probabiliste aux solutions obtenues par optimisation de critères, et permet d'obtenir plus simplement des solutions analytiques. Il faut souligner de plus que l'approche heuristique de l'optimisation de critères reste tout à fait valable en dehors de l'hypothèse gaussienne pour les lois de probabilité, même si elle ne s'identifie plus alors avec la solution MAP.

Nous avons montré que pour un corrélateur optique, le choix des modulateurs spatiaux de lumière (SLM) servant à afficher les images scène et filtre revêt un caractère primordial, car les domaines de codage de ces SLM déterminent au final les capacités de filtrage au sens du traitement du signal qu'il est possible d'atteindre. En particulier, le calcul de filtres adaptés à un corrélateur optique donné doit faire intervenir la contrainte du codage. Nous avons proposé une nouvelle approche du principe des filtres numériques à compromis optimal entre critères, et nous l'avons généralisé aux filtres contraints à un domaine de codage quelconque.

Nous avons appliqué cette méthode d'optimisation multi-critères sous contrainte d'implantation optique au corrélateur optique par synthèse de pupille cohérente. Pour les critères de résistance au

bruit, de discrimination du fond et d'efficacité optique, nous avons donné un algorithme rapide et simple permettant d'obtenir les filtres à compromis optimal pour un domaine de codage quelconque. Nous avons obtenu les surfaces caractéristiques optimales pour divers domaines de codage, et les avons utilisées pour comparer ces domaines du point de vue des performances qu'ils permettent d'obtenir.

Pour l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie, le codage du filtre est nécessairement en amplitude pure et positive dans le domaine image, et nous avons montré que les filtres à compromis optimal réalisables présentent des capacités de discrimination faible. Afin de pallier ce problème, nous avons proposé une méthode de filtrage bipolaire, qui demande de mesurer deux corrélations au lieu d'une, mais permet d'implanter optiquement un filtre numérique linéaire optimal quelconque, pourvu qu'il soit réel dans le domaine image.

Dans le cas des corrélateurs à transformation de Fourier conjointe, la recherche des filtres à compromis optimal quand le domaine de codage du filtre n'est pas convexe est un problème difficile. En pratique, nous ne savons les obtenir que lorsque le domaine de codage est en amplitude pure, et ils s'identifient alors aux filtres optimaux pour l'architecture de corrélation incohérente par ombroscopie, dont nous avons dit plus haut qu'ils présentent des capacités de discrimination faible. Cependant, des réalisations optiques particulières permettent d'effectuer des filtrages optimaux, sans qu'il soit nécessaire de calculer explicitement un filtre. En effet, c'est directement l'image de référence qui est présentée dans l'espace objet, ainsi que l'image scène, et une non-linéarité placée dans le plan de Fourier du corrélateur décide du filtrage effectivement réalisé. Le filtrage ainsi obtenu présente d'excellentes qualités d'adaptativité au fond présent dans l'image scène.

Nous avons illustré les performances en termes de capacité de filtrage des différentes architectures de corrélation optique pour une application de poursuite d'une cible. Les critères que nous avons utilisés pour cette illustration sont la robustesse à la rotation et à un défaut d'échelle de la cible, ainsi que la résistance au fond. Il ressort de cette étude partielle que pour les architectures réalisant un filtrage linéaire, corrélation par ombroscopie et par synthèse de pupille cohérente, il est nécessaire de bien connaître *a priori* les conditions opérationnelles pour le calcul du filtre, tandis que les qualités d'adaptativité des processeurs non-linéaires en dispensent dans une large mesure.

Corrélation incohérente par ombroscopie

Le principe de l'ombroscopie est historiquement le premier à avoir été employé pour mesurer le produit de corrélation de deux images. Les corrélateurs optiques fonctionnant suivant ce principe sont tombés en désuétude après 1960, au profit des corrélateurs cohérents. En effet, se basant sur une analyse de la perte de résolution causée par la diffraction, différents auteurs ont jugé les performances de cette architecture trop faibles en comparaison de celles des architectures cohérentes. Une grande part de notre travail a donc été consacrée à une "réhabilitation" de cette architecture à la lumière des nouveaux composants que sont les modulateurs spatiaux de lumière.

Plus précisément, nous avons montré que si les effets de la diffraction et les effets photométriques sont *a priori* antagonistes, il existe un domaine viable pour les dimensions géométriques du corrélateur qui permet de réaliser un compromis entre ces effets. De plus, nous avons démontré expérimentalement que la méthode de décomposition bipolaire des filtres de corrélation permet de pallier la faible capacité de discrimination qu'implique le codage du filtre en amplitude pure et positive dans le domaine image. Nous allons détailler ces apports.

Nous avons proposé une étude géométrique du principe de l'ombroscopie, dans le cas où les trois plans source, intermédiaire et de détection sont pixélisés, c'est à dire matérialisés par des SLM et une caméra de type CCD. Le principal résultat qui ressort de cette étude est que les mailles portant les pixels des trois plans doivent être homothétiques, c'est à dire identiques à un facteur d'échelle près.

Quand la diffraction est prise en compte dans l'approximation de Fresnel, nous avons montré que la relation entrée–sortie discrète prend la forme d'une transformation bilinéaire agissant sur l'image du plan source et l'*ombre* de l'image du plan intermédiaire. Cette ombre est la fonction de transfert *discrète* du système, c'est une image qui se déduit de l'image intermédiaire par l'action d'un tenseur d'ordre 4, dont les coefficients ne dépendent que de la géométrie du montage. Pratiquement, cette écriture permet de simuler très efficacement et précisément le système, quelles que soient les formes des pixels des modulateurs et de la caméra. Nous avons étudié plus particulièrement le cas fréquent en pratique où les pixels du second modulateur sont de forme rectangulaire. Nous avons pu alors mesurer l'importance de la perte de résolution à l'aide de paramètres réduits comparant les dimensions géométriques du montage à la longueur d'onde.

Nous avons montré que le corrélateur ombroscopique sans lentille, le plus simple, est probablement le plus intéressant. De par sa grande simplicité, il est d'un faible coût, d'un encombrement réduit et d'une grande robustesse. D'un point de vue pratique, ce sont là ses arguments principaux vis à vis des corrélateurs cohérents. Nous avons étudié les limitations liées aux imperfections des différents composants utilisés – source, modulateurs spatiaux de lumière et caméra – et montré qu'aucun des composants précités n'a besoin de tolérances étroites, puisque la source peut être blanche, le contraste des modulateurs ne doit simplement pas être trop faible, le couplage amplitude–phase du second modulateur peut être négligé, et la caméra peut être de qualité standard.

Nous avons présenté la réalisation d'un corrélateur incohérent intégrant notre technique de filtrage bipolaire. Ce corrélateur est d'un type complètement nouveau à notre connaissance. Nous voulons insister sur la grande simplicité et le faible coût de réalisation d'un tel système. Par ailleurs le fonctionnement en éclairage incohérent fait que le montage optique est très peu sensible aux désalignements ou aux défauts des surfaces optiques, qui ont en général pour conséquence de dégrader rapidement les performances d'un corrélateur optique cohérent. Nous avons présenté des résultats expérimentaux obtenus avec ce corrélateur. Les simulations numériques s'avèrent très concordantes avec les mesures expérimentales. Par ailleurs, l'emploi du filtrage bipolaire permet de relâcher la contrainte photométrique sur le diffuseur.

Pratiquement, et du fait de la taille des modulateurs que nous avons utilisés, nous n'avons pu trouver de caméra CCD de taille suffisante, et de coût raisonnable, pour couvrir l'ensemble du plan de corrélation. Il ne s'agit cependant pas d'un problème de principe mais d'une difficulté technologique.

L'avantage principal du corrélateur incohérent par ombroscopie tient à ce qu'il permet de réaliser un filtrage linéaire relativement quelconque – à réponse percussionnelle réelle – à travers la technique de représentation bipolaire du filtre de corrélation. Nous avons démontré expérimentalement les performances de cette méthode dans le cas des filtres à compromis optimal, et dans le cas des filtres à compromis optimal avec apprentissage. Ces performances sont comparables à celles de leurs homologues numériques.

Perspectives

Filtrage optique optimal

Des démonstrateurs de corrélation optique [49, 56] qui fonctionnent bien plus vite que la cadence vidéo voient le jour actuellement. Mais pour tenir cette cadence, ce sont des modulateurs binaires qui sont utilisés, ce qui conduit à des capacités de filtrage malheureusement relativement faibles. Les cadences élevées sont elles–mêmes imposées par la concurrence des solutions tout électronique. Car, parallèlement, les progrès constants de l'électronique numérique font qu'il est relativement aisé de concevoir un corrélateur numérique fonctionnant à la cadence vidéo avec des images de 128 par 128 pixels, et ce pour un volume équivalent à celui d'un corrélateur optique.

De nouveau, l'avenir de la corrélation optique dépend d'une avancée technologique qui mettrait à notre disposition des *modulateurs rapides en niveaux de gris*. Combinés avec des algorithmes de filtrage optimal adéquats, nous sommes convaincus qu'il serait alors possible de réaliser des corrélateurs optiques d'un produit rapidité – performances inégalé.

En ce qui concerne l'aspect théorique et algorithmique de l'optimisation des filtres de corrélation sous contrainte de faisabilité optique, de nombreuses études restent à entreprendre. En particulier, l'inclusion de méthodes d'apprentissage serait utile, par exemple pour obtenir des invariances. Nous n'avons abordé cet aspect que pour la corrélation incohérente par ombroscopie, dans le cas des fonctions synthétiques discriminantes, ou filtres SDF.

Corrélation incohérente par ombroscopie

Dans notre étude expérimentale de la corrélation incohérente par ombroscopie, nous n'avons pas cherché à contrôler l'uniformité photométrique de l'éclairage, puisque nous avons utilisé simplement un diffuseur dépoli éclairé par une source collimatée. Il serait intéressant de réaliser une source réellement lambertienne et uniforme dans le champ utile du corrélateur.

Par ailleurs, afin de ne plus perdre de temps à faire deux acquisitions séquentielles du plan de corrélation dans la méthode bipolaire, il serait utile de mesurer simultanément les corrélations avec les parties positive et négative du filtre en les multiplexant spatialement. De nombreux développements peuvent être envisagés autour de ce principe.

Choix entre les architectures de corrélation optique

Les trois grandes classes d'architectures de corrélation optique que nous avons étudiées, corrélation cohérente par synthèse de pupille (CPS), corrélation cohérente par transformation de Fourier conjointe (JTC) et corrélation incohérente par ombroscopie (SCC), ne sont bien-sûr pas équivalentes, et leurs domaines d'applications sont légèrement différents.

- La corrélation incohérente par ombroscopie réalise un filtrage *fruste*. Nous voulons dire par là que l'image filtre doit comporter moins de pixels que l'image scène, et que la méthode de décomposition bipolaire est mieux adaptée aux filtres qui ne sont pas trop discriminants, ce qui peut sinon poser des problèmes de dynamique d'affichage sur le modulateur. Cette architecture convient donc quand il est nécessaire d'avoir une bonne robustesse aux déformations de la référence.
- Au contraire, les corrélateurs cohérents sont bien adaptés à la réalisation d'un filtrage discriminant ou très discriminant, et pour eux il n'y a pas de limitation sur la taille du filtre ou de la référence. Ces architectures conviennent plutôt quand il est nécessaire d'avoir une grande résistance au fond.

Cette comparaison est bien sûr très grossière, et il serait intéressant de comparer précisément les qualités et défauts de ces architectures, tant du point de vue purement optique que du filtrage réalisé, et d'en déduire les domaines d'application pour lesquels elles sont plus ou moins bien adaptées.

Filtrage adaptatif

Les sujets d'étude théoriques les plus prometteurs de notre point de vue pour la corrélation concernent le développement d'*algorithmes de filtrage adaptatifs*. Pendant très longtemps les études algorithmiques de corrélation sont restées limitées au filtrage linéaire, c'est à dire indépendant de l'image scène analysée. Nous pensons l'avoir illustré au chapitre 9, les qualités d'adaptativité au fond présent dans l'image scène dont font preuve les solutions non-linéaires que nous avons étudiées leur permettent de fonctionner pour un plus grand nombre de situations différentes que les solutions linéaires les

meilleures, surtout en l'absence d'information *a priori* précise. Un important travail théorique reste à entreprendre pour obtenir les solutions de filtrage global non-linéaire les plus performantes pour diverses applications, mais également pour y inclure des techniques multi-référence, ou des techniques d'apprentissage, utiles pour obtenir des invariances.

Approximation récursive du filtrage optimal

La plupart des filtres que nous avons considéré dans ce mémoire s'expriment simplement dans le domaine de Fourier, dans le sens où la valeur du filtre pour une certaine fréquence spatiale ne dépend que des valeurs de la référence, de la scène analysée, etc..., pour la *même* fréquence spatiale. C'est dire que le filtre est défini *localement* dans le domaine de Fourier. En contrepartie, après une transformée de Fourier inverse pour revenir dans le domaine direct, l'information est répartie partout dans le plan de l'image. Cependant, lorsque l'on observe les réponses percussionnelles des filtres, on s'aperçoit qu'il s'agit grossièrement d'images de contours, et donc que le traitement ainsi réalisé est quand même localisé.

Par suite, il doit être possible d'éviter le calcul du filtre dans le domaine de Fourier, s'il est possible de trouver une bonne approximation de ce calcul dans le domaine direct, par exemple sous forme d'un algorithme récursif, qui soit implantable électroniquement. Un corrélateur optique servirait ensuite à mesurer le produit de corrélation de ce filtre approximé avec l'image scène.

Cette architecture hybride optique/électronique permettrait de séparer les opérations locales, effectuées électroniquement directement sur les signaux d'entrée, de l'opération globale qu'est la corrélation.

Références bibliographiques

- [1] M. M. Robertson, *Nature* **152**, 411 (1943).
- [2] A. Vander Lugt, "Signal detection by complex filtering," *IEEE Trans. Inform. Theory* **IT-10**, 139–145 (1964).
- [3] C. S. Weaver and J. W. Goodman, "Technique for optically convolving two functions," *Appl. Opt.* **5**, 1248–1249 (1966).
- [4] J. L. Horner, "Light utilization in optical correlators," *Appl. Opt.* **21**, 4511–4514 (1982).
- [5] H. J. Caulfield, "Role of the horner efficiency in the optimization of spatial filters for optical pattern recognition," *Applied Optics* **21**, 4391–4392 (1982).
- [6] J. L. Horner, "Clarification of Horner efficiency," *Appl. Opt.* **31**, 4629 (1992).
- [7] V. Laude and Ph. Réfrégier, "Multicriteria characterization of coding domains with optimal Fourier spatial light modulator filters," *Appl. Opt.* **33**, 4465–4471 (1994).
- [8] B. V. K. Vijaya Kumar and L. Hassebrook, "Performance measures for correlation filters," *Appl. Opt.* **29**, 2997–3006 (1990).
- [9] J. L. Horner, "Metrics for assessing pattern–recognition performance," *Appl. Opt.* **31**, 165–166 (1992).
- [10] L. P. Yaroslavsky, "Is the phase–only filter and its modifications optimal in terms of the discrimination capability in pattern recognition?," *Appl. Opt.* **31**, 1677–1679 (1992).
- [11] J. Figue, *Étude de méthodes de corrélation optimales avec apprentissage pour la reconnaissance des formes, et applications à la détermination d'attitude d'avions* (Thèse de doctorat en Informatique, Université de Paris VI, 1993).
- [12] Ph. Réfrégier, B. Javidi, and V. Laude, "Non linear joint fourier transform correlation: an optimal solution for adaptive image discrimination and input noise robustness," *Opt. Lett.* **19**, 405–407 (1994).
- [13] M. Fleisher, U. Mahalab, and J. Shamir, "Target location measurement by optical correlators: a performance criterion," *Appl. Opt.* **31**, 230–235 (1992).
- [14] B. V. K. Vijaya Kumar, F. M. Dickey, and J. M. Delaurentis, "Correlation filters minimizing peak location errors," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 678–682 (1992).
- [15] B. Javidi, Ph. Réfrégier, and P. Willet, "Optimum receiver design for pattern recognition with nonoverlapping target and scene noise," *Opt. Lett.* **18**, 1660–1662 (1993).
- [16] P. D. Gianino and J. L. Horner, "Additional properties of the phase–only correlation filtering," *Opt. Eng.* **23**, 695 (1984).

- [17] J. L. Horner and P. D. Gianino, "Phase-only matched filtering," *Appl. Opt.* **23**, 812–816 (1984).
- [18] J. L. Horner and P. D. Gianino, "Applying the phase-only filter concept to the synthetic discriminant function correlation filter," *Appl. Opt.* **24**, 851 (1985).
- [19] J. L. Horner and J. R. Leger, "Pattern recognition with binary phase-only filters," *Appl. Opt.* **24**, 609 (1985).
- [20] J. Rosen and J. Shamir, "Distortion invariant pattern recognition with phase filters," *Appl. Opt.* **26** (1987).
- [21] D. M. Cottrell, R. A. Lilly, J. A. Davis, and T. Day, "Optical correlator performance of binary phase-only filters using Fourier and Hartley transforms," *Appl. Opt.* **26**, 3755 (1987).
- [22] B. A. Kast, M. Giles, S. Lindell, and D. Flannery, "Implementation of ternary phase-amplitude filters for improved correlation discrimination," *Appl. Opt.* **28**, 1044–1046 (1989).
- [23] S. Mazé and Ph. Réfrégier, "Noise robustness of optical correlation for amplitude or phase modulation of the input image," *Opt. Lett.* **17**, 426–428 (1992).
- [24] Ph. Réfrégier, B. V. K. Vijaya Kumar, and C. Hendrix, "Multicriteria optimal binary amplitude phase-only filters," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 2118–2125 (1992).
- [25] A. K. Jain, *Fundamentals of digital image processing* (Prentice Hall information and system sciences serie, New Jersey, 1986).
- [26] Ph. Réfrégier, "Filter design for optical pattern recognition: Multi-criteria optimization approach," *Opt. Lett.* **15**, 854–856 (1990).
- [27] B. V. K. Vijaya Kumar, C. Hendrix, and D. W. Carlson, "Tradeoffs in the design of correlation filters," in *Optical Pattern Recognition*, J. L. Horner and B. Javidi, eds., SPIE Optical Engineering Press, 191–215 (1992).
- [28] J. Figue and Ph. Réfrégier, "Influence of the noise model on correlation filters: peak sharpness and noise robustness," *Opt. Lett.* **17**, 1476–1478 (1992).
- [29] J. Figue and Ph. Réfrégier, "On the optimality of trade-off filters," *Appl. Opt.* **32**, 1933–1935 (1993).
- [30] Ph. Réfrégier, *Théorie du signal, signal information fluctuations* (Masson, Paris, 1993).
- [31] Ch. Auyeng and R. M. Mersereau, "A Dual Approach to Signal Restoration," in *Digital Image Restoration*, A. K. Katsaggelos, ed., pages 21–56 (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [32] Ph. Réfrégier and V. Laude, "Critical analysis of filtering techniques for optical pattern recognition: Are the solutions of this inverse problem stable?," in *Workshop on optical pattern recognition*, Ph. Réfrégier and B. Javidi, eds., SPIE Optical Engineering Press, 58–84 (1994).
- [33] E. T. Jaynes, "Prior probabilities," *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* **4**, 227–241 (1968).
- [34] J. N. Kapur, *Maximum-Entropy Models in Science and Engineering* (John Wiley and Sons, New York, 1989).
- [35] L. Bragg, *Nature* **154**, 69 (1944).

- [36] E. Kaneko, *Liquid Crystal TV Displays: Principles and applications of Liquid Crystal Displays* (KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1987).
- [37] N. S. Takahashi, H. Asada, M. Miyahara, and S. Kurita, "High speed light valve using an amorphous silicon photosensor and ferroelectric liquid crystal gates," *Appl. Phys. Lett.* **51**, 1233–1235 (1988).
- [38] M. Killinger, J. L. de Bougrenet de la Tocnaye, and P. Cambon, "Controlling the grey level of a bistable FLC spatial light modulator," *Ferroelectrics* **122**, 89–99 (1992).
- [39] M. Killinger, J. L. de Bougrenet de la Tocnaye, P. Cambon, and R. C. Chittick, "Bistability and nonlinearity in optically addressed ferroelectric liquid-crystal spatial light modulators: applications to neurocomputing," *Appl. Opt.* **31**, 3930–3936 (1992).
- [40] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, New-York, 1980).
- [41] D. Casasent, "Coherent optical pattern recognition: a review," *Optical Engineering* **24** (1985).
- [42] H. J. Caulfield, J. L. Horner, W. E. Ross, and D. A. Gregory, "Optical correlators," *Photonics Spectra* (1987).
- [43] F. Wyrowski and S. Teiwes, "Use of diffractive optics in pattern recognition," in *Workshop on optical pattern recognition*, Ph. Réfrégier and B. Javidi, eds., SPIE Optical Engineering Press, 368–396 (1994).
- [44] P. Ambs, Y. Fainman, S. H. Lee, and J. Gresser, "Computerized design and generation of space-variant holographic filters. 1: system design considerations and applications of space-variant filters to image processing," *Appl. Opt.* **27**, 4753–4760 (1988).
- [45] P. Ambs, Y. Fainman, S. Esener, and S. H. Lee, "Computerized design and generation of space-variant holographic filters. 2: applications of space-variant filters to optical computing," *Appl. Opt.* **27**, 4761–4765 (1988).
- [46] P. Ambs and Y. Fainman, "Optical processor for space-variant transformations with a matrix of holograms," in *Workshop on optical pattern recognition*, Ph. Réfrégier and B. Javidi, eds., SPIE Optical Engineering Press, 239–266 (1994).
- [47] G. I. Vasilenko and L. M. Tsibul'kin, *Image Recognition by Holography* (Plenum Publishing Corporation, New York, 1989).
- [48] S. S. Cotariu, S. E. Monroe Jr., and J. Knopp, "A live input, live filter, liquid crystal correlator," in *Advances in Optical Information Processing V*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 248–256 (1992).
- [49] SEMETEX Corporation, "SMC-2000 optical correlator high speed vision system," publicité commerciale .
- [50] B. Javidi and J. L. Horner, "Single spatial light modulator joint transform correlator," *Appl. Opt.* **28**, 1027–1032 (1989).
- [51] B. Loiseaux, G. Illiaquer, and J.-P. Huignard, "Dynamic optical cross-correlator using a liquid crystal light valve and a B.S.O. crystal in the Fourier plane," *Optical Engineering* **24**, 144–149 (1985).
- [52] H. Rajbenbach, S. Bann, and J.-P. Huignard, "A compact photorefractive joint transform correlator for industrial recognition tasks," International Topical Meeting on Optical Computing 91, Salt Lake City, USA , 260–263 (1991).

- [53] H. Rajbenbach, S. Bann, Ph. Réfrégier, P. Joffre, J.-P. Huignard, H. St. Buchkremer, A. S. Jensen, E. Rasmussen, K. H. Brenner, and G. Lohman, "Compact photorefractive correlator for robotic applications," *Appl. Opt.* **31**, 5666–5674 (1992).
- [54] R. C. D. Young and C. R. Chatwin, "Design and simulation of a synthetic discriminant function filter for implementation in an up-dateable photorefractive correlator," in *Optical Pattern Recognition III*, D. P. Casasent and T.-H. Chao, eds., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 239–263 (1992).
- [55] T. D. Hudson and D. A. Gregory, "JTC using an optically addressed FLC SLM," *Appl. Opt.* **29**, 1064–1068 (1990).
- [56] Y. Petillot, G. Keryer, and J.-L. de Bougrenet de la Tocnaye, "Real-time distortion invariant JTC using FLC SLMs," in *Workshop on optical pattern recognition*, Ph. Réfrégier and B. Javidi, eds., SPIE Optical Engineering Press, 267–274 (1994).
- [57] G. L. Rogers, *Noncoherent optical processing* (Wiley, New York, 1977).
- [58] K. H. Brenner, "Programmable optical processor based on symbolic substitution," *Optical Engineering* **24** (1988).
- [59] Y. Ichioka and J. Tanida, "Optical parallel logic gates using a shadow-casting system for optical digital computing," *Proc. IEEE* **72**, 787–801 (1984).
- [60] A. Louri, "Efficient optical implementation method for symbolic substitution logic based on shadow casting," *Appl. Opt.* **14**, 3264–3267 (1989).
- [61] P. L. Jackson, "Correlation function spatial filtering with incoherent light," *Appl. Opt.* **6**, 1272–1273 (1967).
- [62] S. H. Lee, *Optical Information Processing* (Springer-Verlag, Berlin, 1981).
- [63] Israel Aircraft Industries Ltd., "Optical image correlator," publicité commerciale .
- [64] J. N. Mait, "Pupil-function design for bipolar incoherent spatial filtering," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1826–1832 (1986).
- [65] F. Christnacher, *Étude de l'adaptation d'un système optique de reconnaissance de formes à un environnement sévère* (Thèse de doctorat, Institut Franco-Allemand de recherches de Saint-Louis, Université de Haute Alsace, 1992).
- [66] D. A. Gregory, J. A. Kirsch, and E. C. Tam, "Full complex modulation using liquid-crystal televisions," *Appl. Opt.* **31**, 163–165 (1992).
- [67] J. L. Horner and R. A. Soref, "Phase-dominant spatial light modulators," *Elec. Lett.* **24**, 626–627 (1988).
- [68] K. Lu and B. E. A. Saleh, "Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator," *Opt. Eng.* **29**, 240–246 (1990).
- [69] J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, "Phase-only modulation of a twisted nematic liquid-crystal tv by use of the eigenpolarization states," *Opt. Lett.* **18**, 1567–1569 (1993).
- [70] J. C. Kirsch, D. A. Gregory, M. A. Thie, and B. K. Jones, "Modulation characteristics of the Epson liquid crystal television," *Opt. Eng.* **31**, 963–970 (1992).

- [71] T. Kurokawa and S. Fukushima, "Spatial light modulators using ferroelectric liquid crystal," *Optical and Quantum Electronics* **24**, 1151–1163 (1992).
- [72] N. F. Hartman and T. K. Gaylord, "Coherent optical characterization of magneto-optical spatial light modulators," *Appl. Opt.* **29**, 4372–4383 (1990).
- [73] S. Mazé, P. Joffre, and Ph. Réfrégier, "Influence of input information coding for correlation operations," in *Optics for Computers: Architecture and Technology*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 20–31 (1992).
- [74] V. Laude, S. Mazé, P. Chavel, and Ph. Réfrégier, "Amplitude and phase coding measurements of a liquid crystal television," *Opt. Commun.* **103**, 33–38 (1993).
- [75] C. Soutar, S. E. Monroe, and J. Knopp, "Complex characterization of the Epson liquid crystal television," in *Optical Pattern Recognition IV*, D. P. Casasent, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. **1959**, 269–277 (1993).
- [76] C. Soutar, "Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell," *Opt. Eng.* **33**, 2704–2712 (1994).
- [77] S. Mazé and Ph. Réfrégier, "Optical correlation: influence of the coding of the input image," *Appl. Opt.* (to be published) (1994).
- [78] S. Mazé, *Études pour la corrélation optique: Influence du codage de l'image et caractérisation d'un matériau photopolymérisable pour la réalisation des filtres* (Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-Sud, 1992).
- [79] A. Delachet, *La topologie* (Presses Universitaires de France, Paris, 1978).
- [80] Ph. Réfrégier, "Optimal trade-off filters for noise robustness, sharpness of the correlation peak and Horner efficiency," *Opt. Lett.* **16**, 829–831 (1991).
- [81] Ph. Réfrégier and J. Figue, "Optimal trade-off filters for pattern recognition and comparison with Wiener approach," *Optical Computing and Processing* **1**, 245–266 (1991).
- [82] R. D. Juday, "Correlation with a spatial light modulator having phase and amplitude cross coupling," *Appl. Opt.* **28**, 4865–4869 (1989).
- [83] R. D. Juday, "Optimal realizable filters and the minimum Euclidean distance principle," *Appl. Opt.* **32**, 5100–5111 (1993).
- [84] M. W. Farn and J. W. Goodman, "Optimal maximum correlation filter for arbitrarily constrained devices," *Appl. Opt.* **28**, 3362–3366 (1989).
- [85] D. L. Flannery, W. E. Phillips, and R. L. Reel, "A case study of the design trade-offs for ternary phase-amplitude filters," in *Optical Information Processing Systems and Architectures III*, B. Javidi, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 65–77 (1991).
- [86] C. Hendrix, B. V. K. Vijaya Kumar, K. T. Stalker, B. Kast, and R. Shori, "Design and testing of 3-level optimal correlation filters," in *Optical Information Processing Systems and Architectures III*, B. Javidi, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2–13 (1991).
- [87] R. D. Juday, B. V. K. Vijaya Kumar, and P. Karivaratha Rajan, "Optimal real correlation filters," *Appl. Opt.* **30**, 520–522 (1991).

- [88] B. V. K. Vijaya Kumar and D. W. Carlson, "Optimal correlation filters for implementation on deformable mirror devices," in *Optical Information Processing Systems and Architectures III*, B. Javidi, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 476–486 (1991).
- [89] R. D. Juday, J. L. Lacroix, and P. Karivaratha Rajan, "Selection of LCTV operating curves for input and filter," in *Optical Pattern Recognition III*, D. P. Casasent and T.-H. Chao, eds., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 78–82 (1992).
- [90] B. V. K. Vijaya Kumar, "Tutorial survey of composite filter designs for optical correlators," *Appl. Opt.* **31**, 4773–4801 (1992).
- [91] B. V. K. Vijaya Kumar, R. D. Juday, and P. Karivaratha Rajan, "Saturated filters," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 405–412 (1992).
- [92] J. N. Mait, J. van der Gracht, and S. D. Sarama, "Diffractive filter design for SLMs in pattern recognition systems," in *Optical Pattern Recognition IV*, D. P. Casasent, ed., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 250–257 (1993).
- [93] S. Weissbach, F. Wyrowski, and O. Bryngdahl, "Quantization noise in pulse density modulated holograms," *Opt. Commun.* **67**, 167–171 (1988).
- [94] Ph. Réfrégier, "Application of the stabilizing functional approach to pattern recognition filters," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 1243–1251 (1994).
- [95] A. W. Lohmann and W. T. Rhodes, "Two-pupil synthesis of Optical Transfer Functions," *Appl. Opt.* **17**, 1141–1151 (1977).
- [96] B. Javidi, "Nonlinear joint power spectrum based optical correlation," *Appl. Opt.* **28**, 2358–2367 (1989).
- [97] B. Javidi, "Nonlinear matched filter based optical correlation," *Appl. Opt.* **28**, 4518–4520 (1989).
- [98] B. Javidi, "Generalization of the linear matched filter concept to nonlinear matched filters," *App. Opt.* **29**, 1215–1224 (1990).
- [99] M. G. Nicholson, I. R. Cooper, I. McCall, and C. R. Petts, "Simple computational model of image correlation by four wave mixing in photorefractive media," *Appl. Opt.* **26**, 586–592 (1987).
- [100] D. C. Youla, "Mathematical Theory of Image Restoration by the Method of Convex Projections," in *Image Recovery: Theory and application*, H. Stark, ed., pages 157–193 (Academic Press, Inc., San Diego, 1987).
- [101] Y. Li, A. Kostrzewski, D. H. Kim, and G. Eichmann, "Compact parallel real-time programmable optical morphological image processor," *Opt. Lett.* **14**, 981–983 (1989).
- [102] D. Raj, D. W. Prather, R. A. Athale, and J. N. Mait, "Performance analysis of optical shadow-casting correlators," *Appl. Opt.* **32**, 3108–3112 (1993).
- [103] V. Laude, P. Chavel, and Ph. Réfrégier, "Analyse critique du montage de corrélation optique incohérente par projection d'ombre," in *Opto 93*, ESI publications, 189–196 (1993).
- [104] V. Laude, Ph. Réfrégier, J. P. Huignard, and D. Broussoux, "Corrélateur optique," brevet n° **93 04517** (1993).
- [105] M. A. Monahan, K. Bromley, and R. P. Bocker, "Incoherent optical correlators," *proc. of IEEE* **65**, 121–129 (1977).

-
- [106] E. L. Green, "Diffraction in lensless correlation," *Appl. Opt.* **7**, 1237–1239 (1968).
- [107] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, New-York, 1980).
- [108] M. Gedziorowski and T. Szoplik, "Resolution of a lensless shadow casting correlator with partially coherent illumination," *Opt. Commun.* **106**, 167–172 (1994).
- [109] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [110] R. Brauer, F. Wyrowski, and O. Bryngdahl, "Diffusers in digital holography," *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 572–578 (1991).

Annexe A

Modélisation des architectures de corrélation cohérentes

Dans cette annexe, nous précisons les contraintes qu'imposent les modulateurs spatiaux de lumière pour la corrélation optique cohérente. Les SLM servent à représenter à la fois les images à analyser ainsi que les images filtres. Les images représentées sont discrètes, par opposition à la continuité spatiale d'une photographie. La nature de l'information traitée dans le corrélateur optique est donc elle-même discrète. Cela se traduit optiquement dans la façon dont intervient la diffraction, et impose les dimensions géométriques du corrélateur qui assurent son bon fonctionnement, ainsi que des conditions d'échantillonnage pour les images.

A.1 Corrélation par synthèse de pupille cohérente

Nous présentons dans cette section une modélisation théorique de l'influence de l'emploi de SLM pixélisés pour un corrélateur de type CPS. Nous avons développé ce modèle car il n'existe pas dans la littérature, et qu'il est nécessaire pour évaluer les performances des corrélateurs CPS. Il s'agit principalement d'un calcul de diffraction rentrant dans le cadre classique de l'optique de Fourier.

A.1.1 Notations

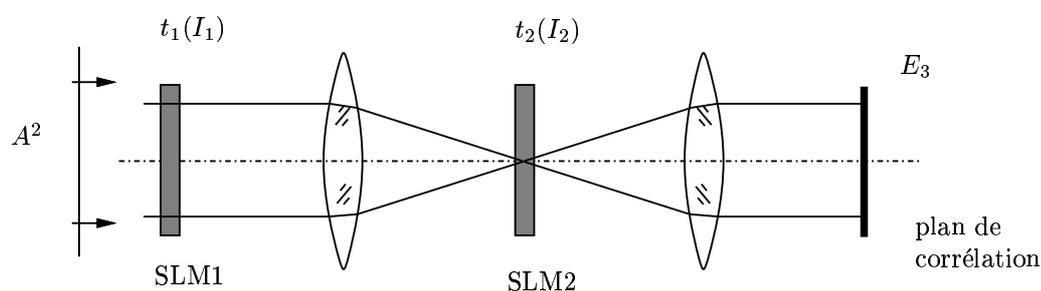


Figure A.1 : Principe du montage de corrélation cohérente de type CPS.

La figure A.1 représente le schéma de principe d'un corrélateur de type CPS. Appelons $u_1(\mathbf{r}_1)$, $u_2(\mathbf{r}_2)$ et $u_3(\mathbf{r}_3)$ les amplitudes complexes dans les plans des deux modulateurs et de la caméra. \mathbf{r}_1 est le vecteur transverse de coordonnées (x_1, y_1) dans le plan du premier modulateur.

Chacune des lentilles réalise une transformée de Fourier entre son plan focal objet et son plan focal

image, de sorte que l'on peut écrire symboliquement :

$$u_3 = \text{TF} [\text{TF}[u_1] u_2] = u_1 \otimes (\text{TF}[u_2])^* \quad (\text{A.1})$$

où TF représente la transformation de Fourier continue. Cette expression montre que l'opération réalisée par le corrélateur CPS est une corrélation de l'amplitude complexe u_1 avec le complexe conjugué de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe u_2 . Ce modèle simplifié est continu, et nous allons voir ce qu'il devient quand on prend en compte la structure pixélisée des SLM et de la caméra.

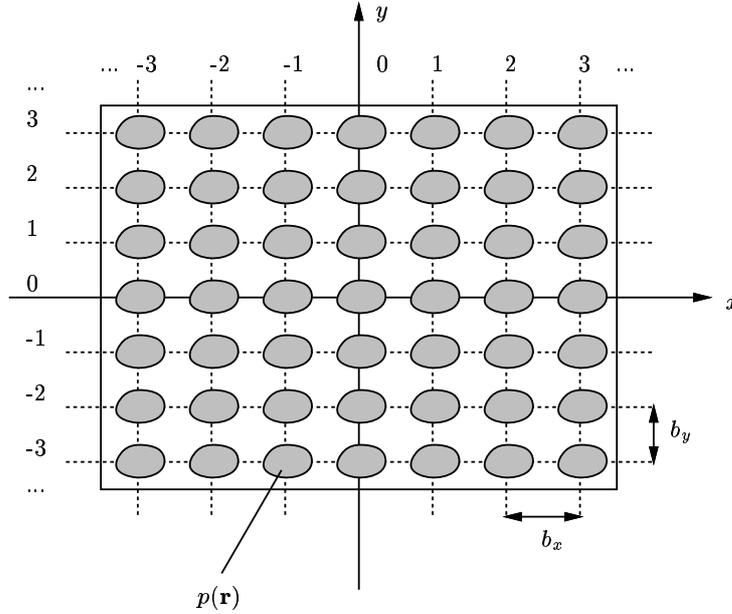


Figure A.2 : Structure de chacun des plans pixélisés. La fonction pixel élémentaire p est répétée périodiquement le long des axes x (période b_x) et y (période b_y) sur une maille rectangulaire. Les pixels sont numérotés à partir de l'axe optique.

Considérons maintenant comment l'image en entrée I_1 est utilisée dans le premier plan. Sur le SLM, une fonction pixel élémentaire p_1 est répétée périodiquement sur une maille rectangulaire de période b_1 , ainsi qu'il est représenté sur la figure A.2. La fonction pixel p_1 est binaire¹ et ne se recouvre pas avec ses voisins. Le pixel \mathbf{m} du modulateur reçoit l'élément d'image $I_1(\mathbf{m})$, et par suite la lumière émise par la source est modulée par une transmission $t_1(I_1(\mathbf{m}))$, et ce de façon uniforme à l'intérieur du pixel. La fonction de transmission en amplitude du premier modulateur peut être écrite :

$$m_1(\mathbf{R}_1) = \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) \quad (\text{A.2})$$

où l'image en entrée I_1 possède M_x par M_y pixels, et \mathbf{R}_1 est le vecteur de coordonnées réduites (X_1, Y_1) :

$$\begin{cases} X_1 &= x_1 / b_{1x} \\ Y_1 &= y_1 / b_{1y} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Le plan intermédiaire possède une structure semblable, et la fonction de transmission en amplitude du second modulateur est :

$$m_2(\mathbf{R}_2) = \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}) \quad (\text{A.4})$$

¹C'est à dire qu'elle peut prendre uniquement les valeurs 0 ou 1.

où l'image en entrée I_2 possède N_x par N_y pixels, et t_2 est la transmission du second modulateur. Le vecteur sans dimension \mathbf{R}_2 est défini par ses coordonnées $X_2 = x_2/b_{2x}$ et $Y_2 = y_2/b_{2y}$, où \mathbf{b}_2 est la période de la maille du plan \mathcal{P}_2 .

Dans le plan de détection, nous supposons que les pixels p_3 sont également répétés sur une maille rectangulaire de période \mathbf{b}_3 . L'image en sortie I_3 comporte K_x par K_y pixels et est donnée par :

$$I_3(\mathbf{k}) = S_3 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 E_3(\mathbf{R}_3) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) \quad (\text{A.5})$$

c'est à dire l'éclairement E_3 intégré sur la surface du k -ième pixel de détection. $S_3 = b_{3x}b_{3y}$ est la surface telle que $d\mathbf{r}_3 = S_3 d\mathbf{R}_3$. Par la suite, nous écrirons de façon similaire $S_1 = b_{1x}b_{1y}$ et $S_2 = b_{2x}b_{2y}$.

Par définition, nous avons :

$$u_1(\mathbf{R}_1) = A m_1(\mathbf{R}_1) , \quad (\text{A.6})$$

et

$$E_3(\mathbf{R}_3) = |u_3(\mathbf{R}_3)|^2 , \quad (\text{A.7})$$

où A^2 représente l'éclairement uniforme produit par le laser dans le plan du premier modulateur.

A.1.2 Conditions d'échantillonnage

Définissons $u'_1(\mathbf{R}_2)$ l'amplitude complexe de l'onde juste avant le plan \mathcal{P}_2 du second modulateur. L'amplitude en sortie du modulateur est le produit de l'amplitude en entrée par la fonction $m_2(\mathbf{R}_2)$:

$$u_2(\mathbf{R}_2) = u'_1(\mathbf{R}_2) m_2(\mathbf{R}_2) \quad (\text{A.8})$$

Par ailleurs, nous savons que $u'_1(\mathbf{R}_2)$ est proportionnelle à la transformée de Fourier de $u_1(\mathbf{R}_1)$:

$$u'_1(\mathbf{R}_2) = \tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) \frac{S_1 A}{\lambda f_1} \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{b_{1x}b_{2x}}{\lambda f_1} m_x X_2 + \frac{b_{1y}b_{2y}}{\lambda f_1} m_y Y_2\right)\right) \quad (\text{A.9})$$

avec $S_1 = b_{1x}b_{1y}$ et où $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)$ est la transformée de Fourier de la fonction pixel $p_1(\mathbf{R}_1)$:

$$\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 p_1(\mathbf{R}_1) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{b_{1x}b_{2x}}{\lambda f_1} X_1 X_2 + \frac{b_{1y}b_{2y}}{\lambda f_1} Y_1 Y_2\right)\right) \quad (\text{A.10})$$

Les expressions (A.9) et (A.10) appellent les remarques suivantes :

- L'amplitude complexe $u'_1(\mathbf{R}_2)$ dans le plan focal image de la lentille ressemble à une transformée de Fourier discrète de l'image I_1 codée par le modulateur, à ceci près que cette transformée est continue. Nous allons voir plus loin dans quelles conditions elle peut être identifiée avec une transformée de Fourier discrète.
- La fonction $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)$ qui module l'amplitude complexe $u'_1(\mathbf{R}_2)$ est très lentement variable si le pixel élémentaire $p_1(\mathbf{R}_1)$ du modulateur est petit. Cet effet de modulation ne disparaît que si le pixel p_1 est infiniment petit, ce qui bien sûr n'est pas le cas d'un modulateur réel.
- La transformée de Fourier pseudo-discrète de l'image I_1 codée par le modulateur est périodique, et modulée par la fonction $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)$. La période des ordres de diffraction est $\lambda f_1/b_{1x}$ suivant l'axe des abscisses, et $\lambda f_1/b_{1y}$ suivant l'axe des ordonnées.

Nous disposons maintenant de l'expression de la transformée de Fourier d'une image inscrite sur un modulateur pixélisé. Nous pouvons donc en déduire des conséquences sur l'architecture de corrélation par synthèse de pupille.

Pour pouvoir utiliser des filtres optimaux pour l'architecture de corrélation par synthèse de pupille, nous devons pouvoir utiliser la transformée de Fourier discrète, ce qui impose aux images filtre et scène d'être de mêmes dimensions :

$$\boxed{\begin{cases} M_x &= N_x \\ M_y &= N_y \end{cases}} \quad (\text{A.11})$$

À cette condition, il faut ajouter une condition d'échantillonnage liée à la structure pixélisée des modulateurs. En effet, il faut que la transformée de Fourier (continue) de l'image inscrite sur le premier modulateur (A.9) corresponde à sa transformée de Fourier discrète quand on l'évalue pour les pixels du second modulateur, c'est à dire qu'il faut imposer :

$$\boxed{\begin{cases} N_x &= \frac{\lambda f_1}{b_{1x} b_{2x}} \\ N_y &= \frac{\lambda f_1}{b_{1y} b_{2y}} \end{cases}} \quad (\text{A.12})$$

Ces relations fixent donc la géométrie du corrélateur en la reliant à la taille des images qu'il est possible de corrélérer. En fait, ces conditions impliquent que le second modulateur doit couvrir exactement l'ordre de diffraction central de premier modulateur, tout en imposant que les points d'échantillonnage soient placés pour respecter le théorème de Shannon.

Prenons l'exemple d'un corrélateur qui serait construit autour de deux écrans à cristal liquide Epson² identiques. Pour ces modulateurs, utilisés dans le même sens, nous avons $b_{1x} = b_{2x} = 80 \mu\text{m}$ et $b_{1y} = b_{2y} = 74 \mu\text{m}$. En supposant que la source soit un laser hélium-néon ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$), et que la lentille ait une longueur focale de 1 m, nous aurons alors $N_x = 99$ et $N_y = 115$. Nous voyons que le fait que les pixels ne soient pas espacés de la même quantité en x et en y entraîne que dans ce cas les images carrées ne sont pas utilisables. Pour pouvoir utiliser des images plus grandes, il faut une distance focale encore plus importante. Cependant, cela ne signifie pas nécessairement un encombrement très important pour le corrélateur, différentes solutions de repliement des faisceaux pouvant être envisagées [49].

Pour pouvoir utiliser des images carrées de 256 par 256 pixels, ce qui correspond à un standard de traitement d'image, nous pouvons tourner le second modulateur, de façon à avoir $b_{1x} = b_{2y} = 80 \mu\text{m}$ et $b_{1y} = b_{2x} = 74 \mu\text{m}$. Dans ce cas, il faudra une distance focale de 2,4 m. L'utilisation de modulateurs possédant des pixels moins espacés que ceux des écrans Epson conduirait à une distance focale plus courte.

A.1.3 Mesure de la corrélation

L'amplitude complexe à la sortie du second modulateur est donnée par le produit :

$$u_2(\mathbf{R}_2) = u_1'(\mathbf{R}_2) m_2(\mathbf{R}_2) \quad (\text{A.13})$$

et l'amplitude complexe dans le plan de la caméra au foyer image de la seconde lentille est une transformée de Fourier de cette expression. En fait, la condition d'échantillonnage que nous avons obtenue précédemment pour le transfert du premier au second modulateur doit se retrouver de façon similaire dans le transfert du second modulateur à la caméra, puisque dans les deux cas une lentille

²SLM du vidéo-projecteur Epson VP-2000.

de Fourier doit faire se correspondre deux plans pixélisés :

$$\boxed{\begin{cases} K_x = N_x = \frac{\lambda f_2}{b_{2x} b_{3x}} \\ K_y = N_y = \frac{\lambda f_2}{b_{2y} b_{3y}} \end{cases}} \quad (\text{A.14})$$

De nouveau, ces conditions ne sont pas anodines, puisqu'elles imposent le choix d'une caméra compatible en termes d'espacement des pixels avec les modulateurs spatiaux de lumière.

Comme il est montré dans l'annexe A.4.1, l'image en sortie de la caméra pour des pixels quelconques et en supposant les conditions d'échantillonnage réalisées est :

$$\boxed{\begin{aligned} I_3(\mathbf{k}) &= A^2 S_3 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1} \right)^2 \left(\frac{S_2}{\lambda f_2} \right)^2 \\ &\sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} t_1(I_1(\mathbf{m})) t_2(I_2(\mathbf{n})) \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{k}) \\ &\sum_{\mathbf{m}'} \sum_{\mathbf{n}'} t_1^*(I_1(\mathbf{m}')) t_2^*(I_2(\mathbf{n}')) \tilde{p}_1^*(\mathbf{n}') \tilde{p}_2^*(\mathbf{m}' + \mathbf{k}) \tilde{p}_3(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \\ &\exp \left(-2i\pi \left(\frac{n_x(m_x + k_x)}{N_x} + \frac{n_y(m_y + k_y)}{N_y} \right) \right) \\ &\exp \left(2i\pi \left(\frac{n'_x(m'_x + k_x)}{N_x} + \frac{n'_y(m'_y + k_y)}{N_y} \right) \right) \end{aligned}} \quad (\text{A.15})$$

où les fonctions \tilde{p}_2 et \tilde{p}_3 sont définies comme des transformées de Fourier des pixels p_2 et p_3 :

$$\tilde{p}_2(\mathbf{R}_3) = \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{X_2 X_3}{N_x} + \frac{Y_2 Y_3}{N_y} \right) \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{p}_3(\mathbf{U}) = \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_3(\mathbf{R}_3) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{X_3 U_x}{N_x} + \frac{Y_3 U_y}{N_y} \right) \right) \quad (\text{A.17})$$

Cette formule est valable pour des formes de pixels quelconques, elle contient également toute l'information photométrique³.

La forme de l'équation (A.15) ne peut pas se réduire en général au module carré de la corrélation discrète de l'image $t_1(I_1)$ et de la transformée de Fourier discrète de l'image $t_2(I_2)$ comme nous le voudrions idéalement. En fait, ce problème tient directement aux dimensions des pixels comparées aux espacements de ces pixels.

Limite des petits pixels

Les fonctions \tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 et \tilde{p}_3 étant définies comme les transformées de Fourier des pixels p_1 , p_2 et p_3 , si ceux-ci sont petits en comparaison à leur espacement, leurs transformées de Fourier deviennent pratiquement constantes.

³Aux absorptions des éléments optiques près.

Dans le cas limite où les pixels p_1 , p_2 et p_3 deviennent très petits, nous aurons en sortie de la caméra :

$$I_3(\mathbf{k}) = A^2 S_3 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1} \right)^2 \left(\frac{S_2}{\lambda f_2} \right)^2 (\tau_{1x} \tau_{1y})^2 (\tau_{2x} \tau_{2y})^2 (\tau_{3x} \tau_{3y}) \left| \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) \text{TFD}[t_2(I_2)](\mathbf{m} + \mathbf{k}) \right|^2 \quad (\text{A.18})$$

où TFD signifie transformée de Fourier discrète. C'est donc en principe la situation optimale, puisque dans ce cas nous obtenons une vraie corrélation. Cependant, les pertes par masquage, mesurées par les taux de remplissage des modulateurs et de la caméra, font que la quantité de lumière détectée sera d'autant plus faible que les pixels sont petits.

A.2 Corrélation par transformation de Fourier conjointe

A.2.1 Notations

La figure A.3 présente le schéma de principe d'un corrélateur JTC avec une non-linéarité dans le plan de Fourier.

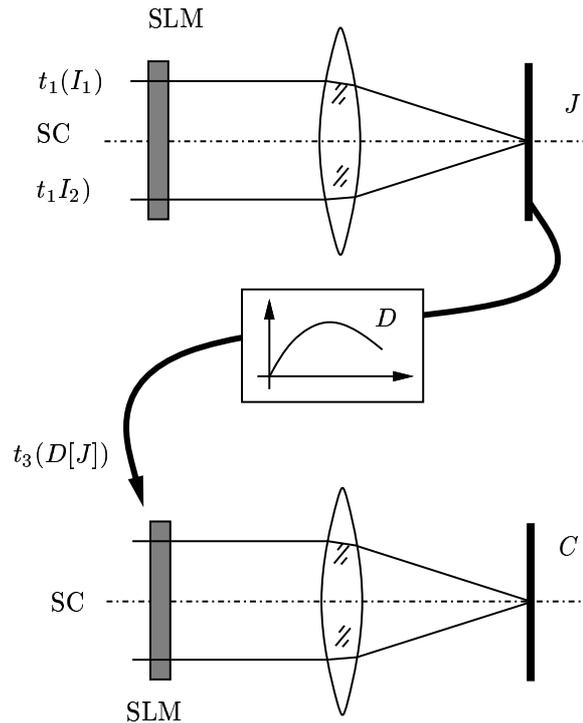


Figure A.3 : Principe du montage de corrélation par transformation de Fourier conjointe (JTC) avec une non-linéarité dans le plan de Fourier.

Étape d'écriture

Nous conservons les notations de la section précédente. Pour rappel, la fonction de transmission en amplitude du premier modulateur peut être écrite :

$$m_1(\mathbf{R}_1) = \sum_{\mathbf{m}} t_1(I(\mathbf{m})) p_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{m}) \quad (\text{A.19})$$

où I est l'image composée des images I_1 et I_2 décalées :

$$I(\mathbf{m}) = I_1(\mathbf{m} - \mathbf{d}_1) + I_2(\mathbf{m} - \mathbf{d}_2) \quad (\text{A.20})$$

L'amplitude complexe dans le plan du premier modulateur est l'amplitude constante A produite par le laser modulée par la fonction de transmission du modulateur :

$$u_1(\mathbf{R}_1) = A m_1(\mathbf{R}_1) \quad (\text{A.21})$$

Nous notons $u_2(\mathbf{R}_2)$ l'amplitude complexe dans le plan de la première caméra, et $E_2(\mathbf{R}_2) = |u_2(\mathbf{R}_2)|^2$ l'éclairement correspondant. L'image en sortie de la première caméra est notée $J(\mathbf{n})$, et en supposant que l'énergie détectée par la caméra est linéaire en éclairement, nous avons :

$$J(\mathbf{n}) = S_2 \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 E_2(\mathbf{R}_2) p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}) \quad (\text{A.22})$$

Étape de relecture

L'image acquise par la seconde caméra passe à travers un élément non-linéaire de caractéristique D , qui donne en sortie :

$$D[J](\mathbf{n}) \quad (\text{A.23})$$

Cette image est ensuite inscrite sur le second modulateur, de sorte que la fonction de transmission en amplitude de ce modulateur est :

$$m_3(\mathbf{R}_3) = \sum_{\mathbf{n}} t_3(D[J](\mathbf{n})) p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{n}) \quad (\text{A.24})$$

L'amplitude complexe dans le plan du second modulateur est l'amplitude constante B produite par le second laser modulée par la fonction de transmission du modulateur :

$$u_3(\mathbf{R}_3) = B m_3(\mathbf{R}_3) \quad (\text{A.25})$$

Nous notons $u_4(\mathbf{R}_4)$ l'amplitude complexe dans le plan de la seconde caméra, et $E_4(\mathbf{R}_4) = |u_4(\mathbf{R}_4)|^2$ l'éclairement correspondant. L'image en sortie de la seconde caméra est notée $C(\mathbf{k})$, et toujours en supposant que l'énergie détectée par la caméra est linéaire en éclairement, nous avons :

$$C(\mathbf{k}) = S_4 \int_{\mathcal{P}_4} d\mathbf{R}_4 E_4(\mathbf{R}_4) p_4(\mathbf{R}_4 - \mathbf{k}) \quad (\text{A.26})$$

A.2.2 Conditions d'échantillonnage

Comme nous l'avons vu précédemment (expressions (A.9) et (A.10)) l'amplitude dans le plan de la caméra est proportionnelle à la transformée de Fourier de l'amplitude dans le plan du modulateur, et ce pour les étapes d'écriture et de relecture.

Comme dans le cas de l'architecture CPS, la pixélisation des modulateurs et des caméras impose des conditions d'échantillonnage. Nous avons vu qu'il était nécessaire d'imposer que les différents éléments aient le même nombre de pixels. Dans le cas du corrélateur à transformée de Fourier conjointe, cette condition est la même :

$$\boxed{\begin{cases} M_x = N_x = K_x \\ M_y = N_y = K_y \end{cases}} \quad (\text{A.27})$$

En effet, l'étape d'écriture revient à obtenir la densité spectrale de l'image composée I . Si celle-ci est échantillonnée avec moins de pixels que l'image de départ, il y a perte d'information d'après le théorème de Shannon. Si elle est échantillonnée avec plus de pixels, l'étape de relecture ne permet pas de retrouver l'autocorrélation de l'image I .

À cette condition, il faut ajouter une condition d'échantillonnage liée à la structure pixélisée des modulateurs. En effet, il faut que la transformée de Fourier (continue) de l'image inscrite sur le premier modulateur corresponde à sa transformée de Fourier discrète quand on l'évalue pour les pixels du second modulateur :

$$\begin{cases} N_x = \frac{\lambda f_1}{b_{1x} b_{2x}} \\ N_y = \frac{\lambda f_1}{b_{1y} b_{2y}} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

De même nous obtiendrions :

$$\begin{cases} N_x = \frac{\lambda f_2}{b_{3x} b_{4x}} \\ N_y = \frac{\lambda f_2}{b_{3y} b_{4y}} \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Ces relations fixent donc la géométrie du corrélateur en la reliant à la taille des images qu'il est possible de corrélérer. En fait, ces conditions impliquent pour les deux étapes que la caméra doit couvrir exactement l'ordre de diffraction central du modulateur, tout en imposant que les points d'échantillonnage soient placés de façon à respecter le théorème de Shannon.

A.2.3 Mesure de la corrélation

Mesure du spectre conjoint

Comme il est montré dans l'annexe A.4.2, l'image en sortie de la première caméra est :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{n}) = & A^2 S_2 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1} \right)^2 |\tilde{p}_1(\mathbf{n})|^2 \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}'} t_1(I(\mathbf{m})) t_1^*(I(\mathbf{m}')) \tilde{p}_2(\mathbf{m} - \mathbf{m}') \\ & \exp \left(-2i\pi \left(\frac{(m_x - m'_x)n_x}{N_x} + \frac{(m_y - m'_y)n_y}{N_y} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Pour que cette image corresponde à la densité spectrale de l'image codée par le premier modulateur, il est possible pour simplifier cette expression de réaliser deux conditions supplémentaires :

- Le terme de modulation $|\tilde{p}_1(\mathbf{n})|^2$ peut être corrigé soit optiquement, en plaçant une densité variable devant la caméra, soit électroniquement, par un traitement postérieur de l'image acquise. Plus simplement, ce terme est quasiment constant si les pixels sont petits.
- Le terme de modulation $\tilde{p}_2(\mathbf{m} - \mathbf{m}')$ ne peut être corrigé directement, mais il est également suffisant de prendre des pixels petits.

Avec ces deux simplifications, l'expression (A.30) devient :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{n}) = & A^2 S_2 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1} \right)^2 \left| \sum_{\mathbf{m}} t_1(I(\mathbf{m})) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y} \right) \right) \right|^2 \\ & \propto \text{DSP}[t_1(I)](\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

ce qui assure un enregistrement correct de la densité spectrale de l'image codée par le premier modulateur.

Mesure de la corrélation

Comme il est montré dans l'annexe B, l'image en sortie de la seconde caméra est donnée par :

$$C(\mathbf{k}) = B^2 S_4 \left(\frac{S_3}{\lambda f_2} \right)^2 |\tilde{p}_3(\mathbf{k})|^2 \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{n}'} t_3(D[J](\mathbf{n})) t_3^*(D[J](\mathbf{n}')) \tilde{p}_4(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \exp \left(-2i\pi \left(\frac{(n_x - n'_x)k_x}{N_x} + \frac{(n_y - n'_y)k_y}{N_y} \right) \right) \quad (\text{A.32})$$

De nouveau, l'emploi de pixels de petite taille permet de simplifier cette expression :

$$C(\mathbf{k}) = B^2 S_4 \left(\frac{S_3}{\lambda f_2} \right)^2 \left| \sum_{\mathbf{n}} t_3(D[J](\mathbf{n})) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{n_x k_x}{N_x} + \frac{n_y k_y}{N_y} \right) \right) \right|^2 \propto \text{DSP}[D[J]](\mathbf{k}) \quad (\text{A.33})$$

Ainsi, le module carré de l'autocorrélation de l'image I sera bien obtenu.

A.3 Conclusion

Par principe, les corrélateurs CPS et JTC permettent de mesurer le produit de corrélation de deux images *continues*. L'emploi de modulateurs spatiaux de lumière pour représenter les images implique que l'information traitée est discrète. Nous avons montré que pour que la corrélation continue devienne une corrélation discrète, il faut respecter des conditions d'échantillonnage, et que de plus les pixels des modulateurs ainsi que ceux de la caméra doivent être petits. Le tableau A.1 résume ces conditions. Sous ces conditions, c'est au final le produit de corrélation des images *codées* qui est obtenu. Les seules différences de principe entre deux corrélateurs sont donc les domaines de codage des modulateurs utilisés, ainsi que la caractéristique non-linéaire utilisée dans le cas des corrélateurs JTC.

A.4 Annexe : influence de la pixélisation

A.4.1 Corrélation par synthèse de pupille

Les équations (A.9) et (A.10) donnant la transformée de Fourier de l'image inscrite sur le premier modulateur deviennent en tenant compte des conditions d'échantillonnage :

$$u'_1(\mathbf{R}_2) = \frac{S_1 A}{\lambda f_1} \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{m_x X_2}{N_x} + \frac{m_y Y_2}{N_y} \right) \right) \tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) \quad (\text{A.34})$$

et :

$$\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 p_1(\mathbf{R}_1) \exp \left(-2i\pi \left(\frac{X_1 X_2}{N_x} + \frac{Y_1 Y_2}{N_y} \right) \right) \quad (\text{A.35})$$

L'amplitude complexe à la sortie du second modulateur est donnée par le produit :

$$u_2(\mathbf{R}_2) = u'_1(\mathbf{R}_2) m_2(\mathbf{R}_2) \quad (\text{A.36})$$

	CPS	JTC
Conditions	même nombre de pixels sur les SLM et la caméra	
d'échantillonnage	$M_x = N_x = K_x = \frac{\lambda f_1}{b_{1x}b_{2x}} = \frac{\lambda f_2}{b_{2x}b_{3x}}$ $M_y = N_y = K_y = \frac{\lambda f_1}{b_{1y}b_{2y}} = \frac{\lambda f_2}{b_{2y}b_{3y}}$	$M_x = N_x = K_x = \frac{\lambda f_1}{b_{1x}b_{2x}} = \frac{\lambda f_2}{b_{3x}b_{4x}}$ $M_y = N_y = K_y = \frac{\lambda f_1}{b_{1y}b_{2y}} = \frac{\lambda f_2}{b_{3y}b_{4y}}$
Taille des pixels	petite devant leur espacement	

Tableau A.1 : Conditions géométriques de bon fonctionnement des architectures cohérentes de corrélation optique.

et l'amplitude complexe dans le plan de la caméra au foyer image de la seconde lentille est :

$$u_3(\mathbf{R}_3) = \frac{S_2}{\lambda f_2} \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 u_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{b_{2x}b_{3x}}{\lambda f_2}X_2X_3 + \frac{b_{2y}b_{3y}}{\lambda f_2}Y_2Y_3\right)\right) \quad (\text{A.37})$$

Avec les conditions d'échantillonnage, nous pouvons écrire en utilisant l'expression (A.4) de $m_2(\mathbf{R}_2)$:

$$u_3(\mathbf{R}_3) = \frac{S_2}{\lambda f_2} \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 u'_1(\mathbf{R}_2) p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{X_2X_3}{N_x} + \frac{Y_2Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.38})$$

ou encore en opérant un changement de variable dans l'intégrale :

$$u_3(\mathbf{R}_3) = \frac{S_2}{\lambda f_2} \sum_{\mathbf{n}} t_2(I_2(\mathbf{n})) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{n_x X_3}{N_x} + \frac{n_y Y_3}{N_y}\right)\right) \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 u'_1(\mathbf{R}_2 + \mathbf{n}) p_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{X_2X_3}{N_x} + \frac{Y_2Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.39})$$

À l'intérieur du pixel \mathbf{n} du second modulateur, $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2 + \mathbf{n}) \approx \tilde{p}_1(\mathbf{n})$, car cette fonction varie très lentement, donc :

$$u'_1(\mathbf{R}_2 + \mathbf{n}) \approx \frac{S_1 A}{\lambda f_1} \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{m_x X_2}{N_x} + \frac{n_x Y_2}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.40})$$

donc :

$$u_3(\mathbf{R}_3) = A \frac{S_1}{\lambda f_1} \frac{S_2}{\lambda f_2} \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} t_1(I_1(\mathbf{m})) t_2(I_2(\mathbf{n})) \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{n_x X_3}{N_x} + \frac{n_y Y_3}{N_y}\right)\right) \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{m_x X_2}{N_x} + \frac{m_y Y_2}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{X_2 X_3}{N_x} + \frac{Y_2 Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.41})$$

soit encore :

$$u_3(\mathbf{R}_3) = A \frac{S_1}{\lambda f_1} \frac{S_2}{\lambda f_2} \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} t_1(I_1(\mathbf{m})) t_2(I_2(\mathbf{n})) \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{R}_3) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{n_x X_3}{N_x} + \frac{n_y Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.42})$$

où la fonction $\tilde{p}_2(\mathbf{R}_3)$ est définie, de façon similaire à $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)$, comme une transformée de Fourier du pixel $p_2(\mathbf{R}_2)$:

$$\tilde{p}_2(\mathbf{R}_3) = \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{X_2 X_3}{N_x} + \frac{Y_2 Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.43})$$

De nouveau, cette fonction est très lentement variable dans le plan de la caméra.

Nous pouvons maintenant exprimer l'image en sortie de la caméra à l'aide de l'expression (A.5) :

$$I_3(\mathbf{k}) = A^2 S_3 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1}\right)^2 \left(\frac{S_2}{\lambda f_2}\right)^2 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{k}) \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} t_1(I_1(\mathbf{m})) t_2(I_2(\mathbf{n})) \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{R}_3) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y}\right)\right) \sum_{\mathbf{m}'} \sum_{\mathbf{n}'} t_1^*(I_1(\mathbf{m}')) t_2^*(I_2(\mathbf{n}')) \tilde{p}_1^*(\mathbf{n}') \tilde{p}_2^*(\mathbf{m}' + \mathbf{R}_3) \exp\left(2i\pi \left(\frac{m'_x n'_x}{N_x} + \frac{m'_y n'_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{n_x X_3}{N_x} + \frac{n_y Y_3}{N_y}\right)\right) \exp\left(2i\pi \left(\frac{n'_x X_3}{N_x} + \frac{n'_y Y_3}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.44})$$

Soit en changeant de variable dans l'intégrale :

$$I_3(\mathbf{k}) = A^2 S_3 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1}\right)^2 \left(\frac{S_2}{\lambda f_2}\right)^2 \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_3(\mathbf{R}_3) \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} t_1(I_1(\mathbf{m})) t_2(I_2(\mathbf{n})) \tilde{p}_1(\mathbf{n}) \tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{k} + \mathbf{R}_3) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{m_x n_x}{N_x} + \frac{m_y n_y}{N_y}\right)\right) \sum_{\mathbf{m}'} \sum_{\mathbf{n}'} t_1^*(I_1(\mathbf{m}')) t_2^*(I_2(\mathbf{n}')) \tilde{p}_1^*(\mathbf{n}') \tilde{p}_2^*(\mathbf{m}' + \mathbf{k} + \mathbf{R}_3) \exp\left(2i\pi \left(\frac{m'_x n'_x}{N_x} + \frac{m'_y n'_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{n_x X_3}{N_x} + \frac{n_y Y_3}{N_y}\right)\right) \exp\left(2i\pi \left(\frac{n'_x X_3}{N_x} + \frac{n'_y Y_3}{N_y}\right)\right) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{n_x k_x}{N_x} + \frac{n_y k_y}{N_y}\right)\right) \exp\left(2i\pi \left(\frac{n'_x k_x}{N_x} + \frac{n'_y k_y}{N_y}\right)\right) \quad (\text{A.45})$$

La fonction $\tilde{p}_2(\mathbf{R}_3)$ varie très lentement, de sorte que $\tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{k} + \mathbf{R}_3) \approx \tilde{p}_2(\mathbf{m} + \mathbf{k})$ à l'intérieur d'un pixel de la caméra. Nous obtenons donc l'image en sortie de la caméra pour des pixels quelconques de l'équation (A.15).

A.4.2 Corrélation par transformation de Fourier conjointe

Nous avons :

$$u_2(\mathbf{R}_2) = \frac{S_1 A}{\lambda f_1} \sum_{\mathbf{m}} t_1(I_1(\mathbf{m})) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{m_x X_2}{N_x} + \frac{m_y Y_2}{N_y}\right)\right) \tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) \tilde{p}_1(\mathbf{R}_2) = \int_{\mathcal{P}_1} d\mathbf{R}_1 p_1(\mathbf{R}_1) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{X_1 X_2}{N_x} + \frac{Y_1 Y_2}{N_y}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
u_4(\mathbf{R}_4) &= \frac{S_3 B}{\lambda f_2} \sum_{\mathbf{n}} t_2(J(\mathbf{n})) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{n_x X_4}{N_x} + \frac{n_y Y_4}{N_y}\right)\right) \tilde{p}_3(\mathbf{R}_4) \\
\tilde{p}_3(\mathbf{R}_4) &= \int_{\mathcal{P}_3} d\mathbf{R}_3 p_3(\mathbf{R}_3) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{X_3 X_4}{N_x} + \frac{Y_3 Y_4}{N_y}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.46}$$

L'image en sortie de la première caméra peut maintenant être obtenue à partir de l'expression (A.21) :

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{n}) &= A^2 S_2 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1}\right)^2 \int_{\mathcal{P}_2} d\mathbf{R}_2 p_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{n}) |\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)|^2 \\
&\quad \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}'} t_1(I(\mathbf{m})) t_1^*(I(\mathbf{m}')) \exp\left(-2i\pi\left(\frac{(m_x - m'_x)X_2}{N_x} + \frac{(m_y - m'_y)Y_2}{N_y}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Soit encore en utilisant le fait que $\tilde{p}_1(\mathbf{R}_2)$ est lentement variable :

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{n}) &= A^2 S_2 \left(\frac{S_1}{\lambda f_1}\right)^2 |\tilde{p}_1(\mathbf{n})|^2 \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{m}'} t_1(I(\mathbf{m})) t_1^*(I(\mathbf{m}')) \\
&\quad \tilde{p}_2(\mathbf{m} - \mathbf{m}') \exp\left(-2i\pi\left(\frac{(m_x - m'_x)n_x}{N_x} + \frac{(m_y - m'_y)n_y}{N_y}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Les étapes d'écriture et de relecture étant identiques, l'image en sortie de la seconde caméra est donnée par une expression similaire à (A.30) :

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{k}) &= B^2 S_4 \left(\frac{S_3}{\lambda f_2}\right)^2 |\tilde{p}_3(\mathbf{k})|^2 \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{n}'} t_3(D[J](\mathbf{n})) t_3^*(D[J](\mathbf{n}')) \tilde{p}_4(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \\
&\quad \exp\left(-2i\pi\left(\frac{(n_x - n'_x)k_x}{N_x} + \frac{(n_y - n'_y)k_y}{N_y}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Abréviations

BCPE	<i>Background Correlation Peak Energy</i>	Énergie de la corrélation avec le fond
CCD	<i>Coupled Charge Device</i>	Dispositif à transfert de charge
CPE	<i>Correlation Peak Energy</i>	Énergie de la corrélation avec la référence
CPS	<i>Coherent Pupil Synthetis</i>	Corrélation par synthèse de pupille cohérente
DC	<i>Discrimination Capabilities</i>	Capacité de discrimination
DSP		Densité Spectrale de Puissance
EA-SLM	<i>Electrically Addressed SLM</i>	SLM adressé électriquement
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>	Transformée de Fourier rapide
IPS	<i>Incoherent Pupil Synthetis</i>	Synthèse de pupille incohérente
JTC	<i>Joint Transform Correlation</i>	Transformation de Fourier conjointe
MAP		Maximum <i>a Posteriori</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>	Erreur quadratique moyenne
NL-JTC	<i>NonLinear JTC</i>	JTC non-linéaire
OA-SLM	<i>Optically Addressed SLM</i>	SLM adressé optiquement
OCC	<i>Optimal Characteristics Curve</i>	Courbe des caractéristiques optimales
OCS	<i>Optimal Characteristics Surface</i>	Surface des caractéristiques optimales
OT	<i>Optimal Trade-off</i>	Compromis optimal
OT-SDF	<i>Optimal Trade-off SDF</i>	SDF à compromis optimal
PBCE	<i>Peak to Background Correlation Energy</i>	Rapport du pic à l'énergie de la corrélation avec le fond
PCE	<i>Peak to Correlation Energy</i>	Rapport du pic à l'énergie de la corrélation avec la référence
POF	<i>Phase Only Filter</i>	Filtre de phase pure
PSCE	<i>Peak to Scene Correlation Energy</i>	Rapport du pic à l'énergie de la corrélation avec la scène
ROCPE	<i>Rejected Objects Correlation Peak Energy</i>	Énergie de la corrélation avec les objets à rejeter
SCC	<i>Shadow-Casting Correlation</i>	Corrélation par ombroscopie
SCPE	<i>Scene Correlation Peak Energy</i>	Énergie de la corrélation avec la scène
SDF	<i>Synthetic Discriminant Function</i>	Fonction synthétique discriminante
SLM	<i>Spatial Light Modulator</i>	Modulateur spatial de lumière
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>	Rapport signal à bruit
VDL		Corrélateur de Vander Lugt

Table des symboles

Notations générales

\mathbb{W}	l'ensemble des nombres réels	\mathbf{x}	un vecteur (une image)
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres complexes	x_m	élément courant du vecteur \mathbf{x}
\triangleq	égal par définition	\mathbf{x}^T	vecteur transposé du vecteur \mathbf{x}
\forall	<i>quel que soit...</i>	\mathbf{x}^\dagger	transposé conjugué du vecteur \mathbf{x}
\exists	<i>il existe...</i>	$\ \mathbf{x}\ $	norme euclidienne du vecteur \mathbf{x}
\in	<i>appartient à...</i>	$\hat{\mathbf{x}}$	transformée de Fourier du vecteur \mathbf{x}
x	un scalaire, élément de \mathbb{R}	\hat{x}_n	élément courant du vecteur $\hat{\mathbf{x}}$
x^*	complexe conjugué du scalaire x	$\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}$	corrélacion des vecteurs \mathbf{h} et \mathbf{x}
$ x $	module du scalaire x	$\text{Argmax}_x[f(x)]$	l'argument qui maximise la fonction f
$\text{Re}\{x\}$	partie réelle du scalaire x	$\text{Argmin}_x[f(x)]$	l'argument qui minimise la fonction f
$\text{Im}\{x\}$	partie imaginaire du scalaire x		

Notations pour le filtrage optimal

N	nombre de pixels des images	\mathcal{H}	ensemble de définition des filtres
\mathbf{c}	image corrélation	\mathcal{D}	domaine de codage d'un modulateur
\mathbf{h}	image filtre	\mathcal{C}	ensemble des valeurs des critères pour $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$
\mathbf{x}	image scène	\mathcal{S}_{OT}	ensemble des filtres OT
D_x	matrice de covariance de l'image scène	\mathbf{u}	vecteur unitaire normal à l'OCS
\hat{D}_x	DSP de l'image scène ($[\hat{D}_x]_n = \hat{x}_n ^2$)	$\mathcal{P}_{\mathcal{D}}[\cdot]$	projection sur le domaine de codage
\mathbf{r}	image référence	\mathbf{h}^+	partie positive du filtre bipolaire
D_r	matrice de covariance de l'image référence	\mathbf{h}^-	partie négative du filtre bipolaire
\hat{D}_r	DSP de l'image référence ($[\hat{D}_r]_n = \hat{r}_n ^2$)	\mathbf{c}^+	partie positive de la corrélation bipolaire
\mathbf{b}	image fond	\mathbf{c}^-	partie négative de la corrélation bipolaire
D_b	matrice de covariance de l'image fond	\mathbf{t}	image cible
\hat{D}_b	DSP de l'image fond ($[\hat{D}_b]_n = \hat{b}_n ^2$)	T_τ	translation de la quantité τ
\mathbf{n}	image de bruit	H_ρ	homothétie de facteur ρ
S	matrice de covariance du bruit	R_ω	rotation d'angle ω
K	matrice de covariance des objets à rejeter	SNR_e	rapport signal à bruit en entrée
$B_{\mathbf{u}}$	matrice de compromis	V	visibilité de la cible
$\eta(\mathbf{h})$	critère efficacité (optique)	χ	luminance relative du fond et de la cible
\mathbf{h}^{OT}	filtre à compromis optimal (OT)	$\Sigma_{\mathbf{t}}$	support de la cible
\mathbf{h}^{NL}	filtre optimal non-linéaire		

Notations pour la corrélation incohérente par ombroscopie

\mathcal{P}_1	plan du premier SLM	$\mathbf{a}_i, i = 1, 2, 3$	dimensions (a_{ix}, a_{iy}) des pixels
\mathcal{P}_2	plan du second SLM	$\mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3$	espacements (b_{ix}, b_{iy}) des pixels
\mathcal{P}_3	plan de détection	$\tau_i, i = 1, 2, 3$	taux de remplissage
d	distance séparant \mathcal{P}_1 de \mathcal{P}_2	$S_i, i = 1, 2, 3$	surface élémentaire de la maille
p	distance séparant \mathcal{P}_2 de \mathcal{P}_3	$Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$	flux lumineux entre les pixels \mathbf{m} et \mathbf{k}
d'	distance équivalente pour la diffraction	$\mathcal{G}[I_2](\mathbf{n})$	image de flou géométrique au pixel \mathbf{n}
G	facteur d'homothétie du filtre	$A(\mathbf{q})$	coefficients de flou géométrique
$M_1(\cdot)$	transmittance du premier SLM	$H_\lambda(\cdot, \cdot)$	fonction de transfert incohérente
$M_2(\cdot)$	transmittance du second SLM	$F_\lambda(\cdot)$	tache de diffraction d'un pixel
$T_1(\cdot)$	transmission en intensité du premier SLM	$B(\lambda)$	spectre de la source
$t_2(\cdot)$	transmission en amplitude du second SLM	$\mathcal{O}[I_2](\mathbf{n})$	ombre de l'image I_2 au pixel \mathbf{n}
$I_1(\mathbf{m})$	image inscrite au pixel \mathbf{m} du premier SLM	$V(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$	coefficients de diffraction
$I_2(\mathbf{n})$	image inscrite au pixel \mathbf{n} du second SLM	$\psi(\cdot)$	intégrale de Fresnel
$I_3(\mathbf{k})$	image au pixel \mathbf{k} en sortie de la caméra	α_x, α_y	coefficients de Fresnel
$p_1(\cdot)$	fonction pixel du premier SLM	θ_o	demi-largeur à $1/e$ de $Q(\mathbf{m}, \mathbf{k})$
$p_2(\cdot)$	fonction pixel du second SLM	$\gamma_i, i = 1, 2, 3$	fonction correctrice du plan \mathcal{P}_i
$p_3(\cdot)$	fonction pixel du plan de détection		